



HAL
open science

Instabilités de surface et écoulement de grains sous contrainte

Antoine Dop

► **To cite this version:**

Antoine Dop. Instabilités de surface et écoulement de grains sous contrainte. Matière Condensée [cond-mat]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2024. Français. NNT : 2024ENSL0026 . tel-04717298

HAL Id: tel-04717298

<https://theses.hal.science/tel-04717298v1>

Submitted on 1 Oct 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THESE

en vue de l'obtention du grade de Docteur, délivré par
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Ecole Doctorale N° 52
Physique et Astrophysique de Lyon (PHAST)

Discipline : Physique

Soutenue publiquement le 03/07/2024 par :

Antoine DOP

Instabilités de surface et écoulement de grains sous contrainte

Devant le jury composé de :

AMON, Axelle	MCF	IPR, Rennes	Rapportrice
PHILIPPE, Pierre	DR INRAE	UMR Recover, Le Tholonet	Rapporteur
RICHARD, Patrick	DR, CNRS	Univ. Gustave Eiffel, Nantes	Examinateur
VANEL, Loïc	Prof.	Univ. Claude Bernard Lyon 1	Examinateur
TABERLET, Nicolas	MCF	Univ. Claude Bernard Lyon 1	Directeur de thèse
VIDAL, Valérie	DR CNRS	LPENS, ENS de Lyon	co-Directrice de thèse

Table des matières

1	Introduction	7
I	Milieu granulaire : généralités	8
I.1	Exemples	8
I.2	Définition	10
I.3	Propriétés	11
I.4	Formation de motifs	12
II	Milieu granulaire sous cisaillement	14
II.1	Frottement solide et frottement granulaire	14
II.2	Écoulement sur plan incliné	16
II.3	Ségrégation par taille	18
III	Instabilité de tôle ondulée	19
2	Méthodes	23
I	Méthodes numériques	24
I.1	Simuler des milieux granulaires	25
I.2	Méthode des éléments discrets	26
I.3	Grains éveillés et grains dormants	32
I.4	Conditions aux limites	34
I.5	Implémentation du patin	34
I.6	Initialisation	35
I.7	Grandeurs calculées	36
I.8	Choix des paramètres	37
II	Méthodes expérimentales	41
II.1	Avant-propos	41
II.2	Lits statiques	41
II.3	Lit en mouvement	47
II.4	Design du patin	50
II.5	Configurations alternatives	51
II.6	Embarquement de cartes Arduino	52
II.7	Caractérisation des grains	52
3	Traction d'un patin sur un lit granulaire	55
I	Observations et cadre de l'étude	56
I.1	Observations préliminaires	56
I.2	Validité du régime quasistatique	62
II	Résultats principaux	66
II.1	Rôle du point de contact	66

II.2	Effet de la pression de confinement	69
II.3	Effet de la géométrie	72
II.4	Effet du frottement intergrain	75
III	Compléments	75
III.1	Rôle du frottement au point de contact	76
III.2	Étude du centre instantané de rotation	77
III.3	Comportement du patin tracté par l'intermédiaire d'une ficelle	81
III.4	Exploration des liens entre les variables du problème	81
III.5	Profil de forces le long du patin et champ de pression granulaire	87
III.6	Forme du talus	89
III.7	Configurations simplifiées	90
4	Ségrégation d'agrégats magnétiques en écoulement sur un plan incliné	97
I	Généralités sans grains magnétiques	99
I.1	Régimes observés	99
I.2	Écoulement de Bagnold	101
II	Ajout de grains magnétiques	101
II.1	Effet sur les régimes d'écoulement	103
II.2	Morphologie des arrangements magnétiques	103
II.3	Cadre de l'étude	103
II.4	Portée magnétique	106
III	Formation d'agrégats	106
III.1	Évolution de la distribution des tailles	107
III.2	Rôle de la concentration sur la dynamique temporelle	108
III.3	Rôle de la magnétisation sur la taille des agrégats	109
IV	Ségrégation des agrégats	109
IV.1	Effet de la magnétisation et de la concentration	110
IV.2	Ségrégation d'agrégats solides	111
IV.3	Ségrégation normale dans l'écoulement	113
	Conclusion et perspectives	115
	Annexes	117
A	Moment d'inertie du patin	119
I	Calcul du moment d'inertie d'une barre	119
II	Calcul du moment d'inertie d'un ensemble de grains répartis le long d'une ligne	119
	Bibliographie	121

Remerciements

Ce manuscrit de thèse n'a qu'un unique auteur, cependant il n'aurait pas existé sans une multitude de personnes, que je me dois de remercier.

Je remercie tout d'abord les membres du jury qui ont évalué mon travail, qui ont assisté à ma soutenance, et avec qui j'ai eu des discussions très enrichissantes à l'issue de celle-ci. Je remercie particulièrement Axelle Amon et Pierre Philippe qui ont accepté de relire ce manuscrit et m'ont permis de l'améliorer en confiant leurs remarques détaillées sur mon travail.

Ensuite, la thèse étant un travail d'équipe, je remercie tout particulièrement mes coéquipiers principaux, Nicolas Taberlet et Valérie Vidal. Pour leur encadrement exemplaire, leur investissement et leur disponibilité, leurs conseils scientifiques et pratiques tout d'abord, mais aussi pour leur sympathie et leur entente qui a permis à notre trinôme de fonctionner à merveille. Si la thèse s'est aussi bien déroulée, c'est avant tout grâce à eux, et je souhaite à tout·e doctorant·e de connaître une pareille relation avec leurs encadrant·es.

C'est aussi grâce à eux et grâce au laboratoire que j'ai eu la chance de faire un séjour de deux mois au Brésil. J'ai une pensée toute particulière pour Yuri Dumaresq Sobral, pour son accueil exceptionnel, sa sympathie et son hospitalité. En plus d'apprendre beaucoup et de travailler sur un sujet passionnant, j'ai découvert une partie d'un pays grâce à lui, une passion pour la photographie animalière (après qu'il m'ait prêté son appareil photo), et j'ai passé des moments inoubliables.

De manière très pragmatique, cette thèse n'aurait pas pu avoir lieu sans l'ENS qui m'a d'abord accueilli pour mes études puis qui a financé mon doctorat, et bien sûr sans le laboratoire de physique qui l'a accueilli. Je mesure ma chance d'avoir connu un tel environnement de travail. Je remercie l'ensemble du personnel du laboratoire, et en particulier les gestionnaires pour leur aide précieuse pour le franchissement des nombreux obstacles administratifs, pour lesquels Nicolas et Valérie ont été également très présent·es. Je remercie aussi toutes les personnes qui s'impliquent et font vivre le laboratoire, et lui permettent de fonctionner au quotidien.

Dans le cadre de mon service d'enseignement, j'ai pu côtoyer des étudiant·es de l'ENS dont certain·es m'ont marqué par leur curiosité et leur implication, sont venu·es visiter le laboratoire et m'ont assisté lors de la fête de la science, et je les remercie pour ces moments et pour leur sympathie. Je souhaite remercier toutes les personnes qui sont venues voir la manip, étudiant·es, stagiaires, chercheurs et chercheuses, et autres, tous et toutes ont eu des remarques et des questions qui, mises bout à bout, m'ont amené à des réflexions

que je n'aurais pas pu avoir sans ces points de vue extérieurs. Je remercie également Alexandre Carrara pour son implication et son investissement lors de son stage avec moi au laboratoire. Je remercie aussi les agrégatif-ves, surtout Jason et Hector qui resteront de très bons amis même si j'attends toujours leur copie de DM...

Je remercie aussi toutes les personnes qui ont contribué à la bonne ambiance du laboratoire. Cela inclut les collègues, mes cobureaux Victor et François, les nombreux-ses membres du foot avec qui j'ai partagé des parties dans la bonne ambiance pendant trois ans les mercredis et vendredis, les membres de la réunion hebdomadaire baptisée TOPIC-BG, celles et ceux avec qui on a partagé des repas, qu'on croise au café, etc. Je suis certain de conserver des amitiés longtemps après ces trois années, notamment avec ceux avec qui j'ai partagé des années de master à la rédaction de thèse, Francis et Gauthier, et le quatrième mousquetaire Élian. En voilà trois qui vont beaucoup me manquer en Norvège...

Je voudrais en profiter pour remercier toutes les personnes qui ont assisté à ma soutenance en visioconférence ou qui ont fait le déplacement, que ce soit depuis le laboratoire ou depuis plus loin (le record est pour Anne-Marie).

Et puis durant cette période de trois ans comme tout au long de ma vie, mes proches ont évidemment beaucoup compté et je suis très reconnaissant envers ma famille et mes amis, pour leur présence et leur participation à mon équilibre personnel. Et particulièrement Marine bien sûr, qui m'a soutenu comme nous l'avons toujours fait.

Si je me retourne pour regarder mon parcours, il est évident qu'une rencontre l'a influencé bien plus que toutes les autres. Mon professeur de physique-chimie au lycée Pablo Neruda, Hervé Lauret, a réalisé l'exploit de trouver les mots qui m'ont convaincu d'aller en prépa. Si je l'ai écouté c'est aussi parce que c'est surtout lui, en étant mon professeur en seconde, première et terminale (avec de nombreuses heures supplémentaires lors de la préparation au concours général), qui a révélé mon goût pour la physique, et qui m'a fait réaliser la beauté de cette discipline qui comble ma curiosité.

Avant-propos

Dans ce manuscrit, je présente les travaux que j'ai réalisés sur une instabilité de surface sur un lit granulaire et sur l'écoulement de grains magnétiques sur plan incliné. Au cours de ma thèse, j'ai combiné approches expérimentales et simulations numériques. J'ai effectué l'essentiel de mon travail au laboratoire de physique à l'ENS de Lyon mais j'ai également effectué un séjour de recherche de deux mois à l'université de Brasília.

Cette thèse se situe à l'interface entre les études du frottement granulaire et de l'instabilité de tôle ondulée. D'une part, le frottement granulaire a fait l'objet de nombreuses études qui ont montré, en particulier, l'existence de trois régimes de force [Nasuno *et al.* \[1997, 1998\]](#) rappelant le frottement solide dont les premières études remontent à plusieurs siècles [[Hutchings, 2016](#); [Desplanques, 2014](#)] et se poursuivent jusqu'à notre siècle [[Bowden et Tabor, 2001](#); [Baumberger et Caroli, 2006](#)]. Parmi les applications de ces travaux portant sur le comportement d'un milieu granulaire cisailé, on peut citer l'étude des séismes [[Melosh, 1996](#); [Johnson et Jia, 2005](#); [Lherminier *et al.*, 2019](#)]. Ces études se concentrent pour la plupart sur la dynamique de traction d'un objet, sur une course de quelques millimètres - distance largement suffisante pour quantifier le frottement. D'autre part, à plus grande échelle, on trouve des travaux sur la formation de motifs dans les milieux granulaires. Citons les ouvrages de [Aranson et Tsimring \[2006\]](#) et [Ristow \[2000\]](#) qui proposent un aperçu assez complet de ces phénomènes. On les observe bien souvent à l'état naturel sous forme de dunes et rides [[Bagnold, 1941](#); [Charru *et al.*, 2013](#)], et notamment sur certaines routes granulaires (sable, gravier) par un phénomène appelé instabilité de tôle ondulée. Cette dernière a d'abord été décrite par [Mather \[1963\]](#), puis son travail a été complété par de nombreuses autres études [[Riley et Furry, 1973](#); [Mays et Faybishenko, 2000](#); [Both *et al.*, 2001](#); [Hata *et al.*, 2022](#)]. Il a également été démontré que ce phénomène n'est pas unique aux milieux granulaires [[Hewitt *et al.*, 2012](#); [Hewitt et Balmforth, 2012](#)], ce qui étend les applications possibles au-delà des routes non goudronnées.

Le projet de thèse est né dans l'idée de tenter de combler l'écart qui sépare ces deux approches, en étudiant un passage unique d'un patin à deux degrés de liberté similaire aux études du frottement granulaire, mais en s'intéressant à la topographie dessinée sur des courses longues comme c'est le cas concernant l'instabilité de tôle ondulée. Au laboratoire de physique à l'ENS de Lyon, où a été développé ce projet, Nicolas Taberlet avait réalisé de nombreux travaux sur l'instabilité de tôle ondulée [[Taberlet *et al.*, 2007a](#); [Bitbol *et al.*, 2009](#); [Percier, 2013](#); [Lecomte, 2018](#)], avec passages répétés d'un objet tracté sur un lit de sable. Cet objet solide avait dans ces études un unique degré de liberté (sa translation verticale, permise par un pivot). Valérie Vidal avait, quant à elle, réalisé des études sur le

frottement granulaire, en particulier en présence de vibrations mécaniques [Lastakowski *et al.*, 2015; Vidal *et al.*, 2019]. Ces travaux concernent également un objet solide, appelé patin, tracté sur un lit granulaire, mais l'expérience est cette fois-ci réalisée avec deux degrés de liberté (la rotation du patin selon son axe de tangage est également permise). Cependant, un passage unique est réalisé et la topographie imprimée par le patin dans le lit granulaire ne fait pas partie des grandeurs mesurées, la course étant bien plus courte que dans les études de l'instabilité tôle ondulée.

La première expérience utilisée dans les études de Lastakowski *et al.* [2015] a alors été intégralement remontée afin de reproduire ces résultats lors du stage de master précédant la thèse. La nécessité de construire une seconde puis une troisième version de cette expérience est rapidement apparue afin d'accomplir le but initialement fixé, ce qui a été réalisé au cours de la thèse. En parallèle de ce travail expérimental, des simulations numériques ont été menées sur la base d'un code existant mais largement développé au cours de la thèse. L'apparition d'une instabilité de surface a été observée dans ces simulations avant de découvrir les conditions expérimentales qui reproduisent le phénomène, puis ces approches ont été combinées au cours de la thèse. Cette nouvelle étude propose donc un point de vue intermédiaire entre les échelles précédemment étudiées, et s'inscrit dans leur continuité tout en conduisant à la découverte d'une instabilité voisine de l'instabilité de tôle ondulée mais distincte par sa phénoménologie.

Ayant acquis une expertise numérique sur un code comportant un moteur granulaire réaliste, une seconde étude uniquement numérique a permis de mettre à profit cette compétence. Motivée par les nombreuses études d'écoulement granulaire sur plan incliné [Ertas *et al.*, 2001; Silbert *et al.*, 2001; Li *et al.*, 2016] ainsi que par les travaux sur les suspensions attractives [Vessaire, 2019], les interactions magnétiques et les ferrofluides [Cunha et Sobral, 2004], cette seconde étude combine écoulement sur plan incliné et interactions magnétiques en mettant en évidence des comportements émergents tels que la ségrégation par taille consécutive à la formation d'agrégats magnétiques. Ce comportement avait déjà été observé lors d'un travail mené précédemment à l'université de Brasília mais dans des simulations ne reproduisant pas les résultats attendus par ailleurs. L'utilisation de notre moteur granulaire conçu à Lyon sur ce phénomène découvert à Brasília a conduit à une collaboration avec Yuri Dumaresq Sobral dans le cadre de laquelle j'ai fait un séjour de deux mois au Brésil. Notre travail se poursuit au-delà de la thèse et a un lien direct avec la ségrégation par taille [Rosato *et al.*, 1987], en particulier observée dans un écoulement sur plan incliné par Staron et Phillips [2014]. Le comportement résultant du couplage entre interactions magnétiques et ségrégation par taille conduit à une phénoménologie riche pouvant apporter des éléments nouveaux dans chacun de ces domaines, parmi lesquels la compréhension de la forme des agrégats en fonction de l'écoulement et des interactions, et la dynamique de ségrégation en fonction de l'écoulement, de la distribution spatiale, des formes et de la rigidité de ces agrégats.

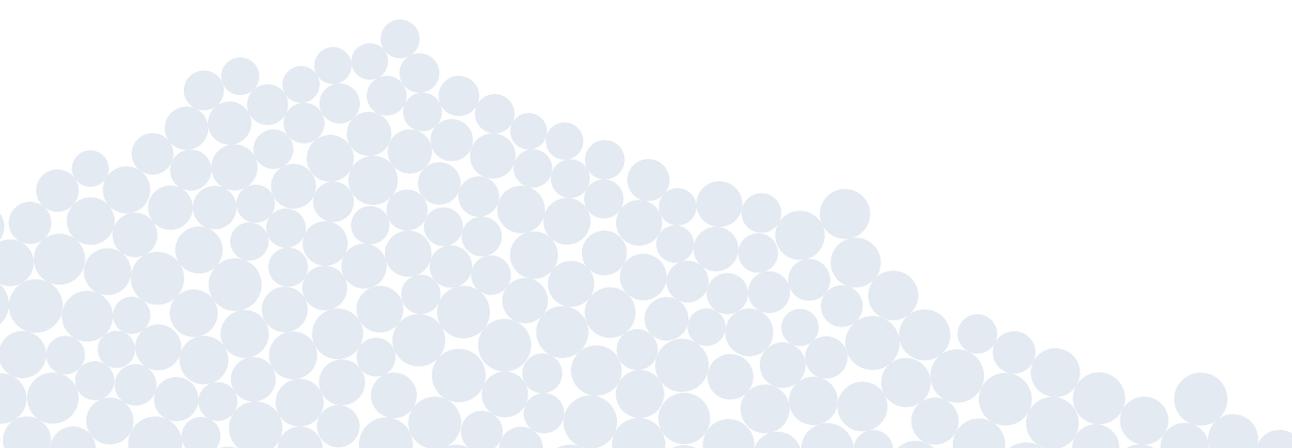
Ce manuscrit se divise en quatre chapitres organisés de la manière suivante. Le premier chapitre comporte une introduction générale au sujet des milieux granulaires, et un descriptif de certaines de leur propriétés ainsi que quelques cas de formation spontanée de motifs. Dans le but de mettre en contexte le travail présenté dans les chapitres suivants, les notions de frottement solide, d'écoulement sur plan incliné, de ségrégation par taille et l'instabilité de tôle ondulée sont décrits avec davantage de détails. Le second chapitre présente les méthodes utilisées, tout d'abord les simulations numériques par la méthode

des éléments discrets qui serviront aux deux chapitres suivants, et ensuite les méthodes expérimentales qui concernent uniquement le chapitre 3. Ce troisième chapitre est consacré aux résultats de la première étude portant sur le comportement d'un patin tracté à la surface d'un lit granulaire, s'inscrivant dans la continuité de travaux précédents mentionnés ci-dessus. Par des simulations numériques et des expériences, nous avons pu mettre en évidence un comportement instable dans certaines conditions, conduisant à la formation d'un motif régulier dans le sillage du patin. Le motif est similaire à ceux observés pour l'instabilité de tôle ondulée, cependant nous détaillons les différences fondamentales entre les deux qui en font des phénomènes distincts. Après les résultats principaux de cette étude, une série de résultats complémentaires est également présentée. Enfin, dans le chapitre 4, nous abordons la seconde étude cette fois numérique uniquement, portant sur un écoulement de grains sur un plan incliné, et dont une partie sont des aimants permanents. Ces aimants s'agglomèrent entre eux et forment des agrégats qui remontent à la surface de l'écoulement après un temps long. Nous présentons une étude de la combinaison de ces deux phénomènes en fonction de la concentration de grains magnétiques et de leur magnétisation.

Chapitre 1

Introduction

I	Milieu granulaire : généralités	8
I.1	Exemples	8
I.2	Définition	10
I.3	Propriétés	11
I.4	Formation de motifs	12
II	Milieu granulaire sous cisaillement	14
II.1	Frottement solide et frottement granulaire	14
II.2	Écoulement sur plan incliné	16
II.3	Ségrégation par taille	18
III	Instabilité de tôle ondulée	19



La matière en grains est omniprésente dans la nature ainsi que dans les activités humaines. Nous commencerons par voir des exemples de tels systèmes, donnerons leur définition et parlerons brièvement de leurs propriétés. Ensuite, nous décrirons des exemples de formation spontanée de motifs de taille bien supérieure aux grains et qui peuvent se produire dans des conditions variées. À partir de la seconde section, nous restreindrons notre propos aux milieux granulaires secs. Nous discuterons du frottement solide, de son lien avec la physique des milieux granulaires, en particulier en cisaillement simple ou en écoulement sur plan incliné, en introduisant également le phénomène de ségrégation par taille. La dernière section de ce chapitre introductif est consacrée à l'instabilité de tôle ondulée, un des exemples de formation de motifs qui est particulièrement proche de l'instabilité qui fait l'objet du [chapitre 3](#), avec toutefois des différences majeures que nous développerons.

I Milieu granulaire : généralités

Une excellente introduction aux milieux granulaires et à leurs propriétés est donnée dans le livre de Bruno Andreotti, Yoël Forterre et Olivier Pouliquen [[Andreotti *et al.*, 2011](#)]. Une partie de leur travail a servi à l'écriture de ce chapitre, ainsi que d'autres ouvrages [[Mehta, 1994](#); [Duran, 2000](#); [Guyon et Troadec, 1994](#)].

I.1 Exemples

Les matériaux granulaires sont omniprésents sur notre planète. Des cacahuètes dans un bol aux astéroïdes, en passant par le sable sur une plage ou un pierrier en montagne, on les rencontre dans notre vie quotidienne aussi bien sous forme naturelle que transformée par les activités humaines. C'est un système très général décrivant les milieux divisés, avec pour seule condition la taille minimale des grains mentionnée ci-dessous, mais sans critère de forme. Cette omniprésence explique l'intérêt d'en comprendre le comportement, à la fois pour des raisons purement scientifiques mais aussi très pratiques étant donné le très large domaine d'applications.

Tout d'abord, les milieux granulaires sont naturellement présents en abondance sur Terre. Nous en avons présenté une collection d'exemples sur la [Figure 1.1](#), parmi lesquels des produits alimentaires (malt d'orge, grains de raisin, riz, maïs, poivre, cacao), des pierres d'échelle variable, du terreau, etc. Le sol est souvent bien décrit par un milieu granulaire, que ce soit une plage de sable fin ou de galets, un pierrier, des graviers, sédiments, et même selon la définition retenue la neige, l'humus, une couche de feuilles mortes en forêt, l'argile (bien qu'il s'agisse en général de particules colloïdales), etc. Le sol est l'habitat de 50% de la biodiversité spécifique sur Terre [[Girard *et al.*, 2011](#)] et sa compréhension est un élément crucial pour les biologistes et les géologues, mais aussi pour l'agriculture et le génie civil. Comment devient-il plus mou ou plus compact, comment interagit-il avec l'eau (porosité, stockage, érosion, stabilité, compaction/décompactation), quel rôle jouent sa composition ou les systèmes racinaires dans sa stabilité et ses autres propriétés, comment

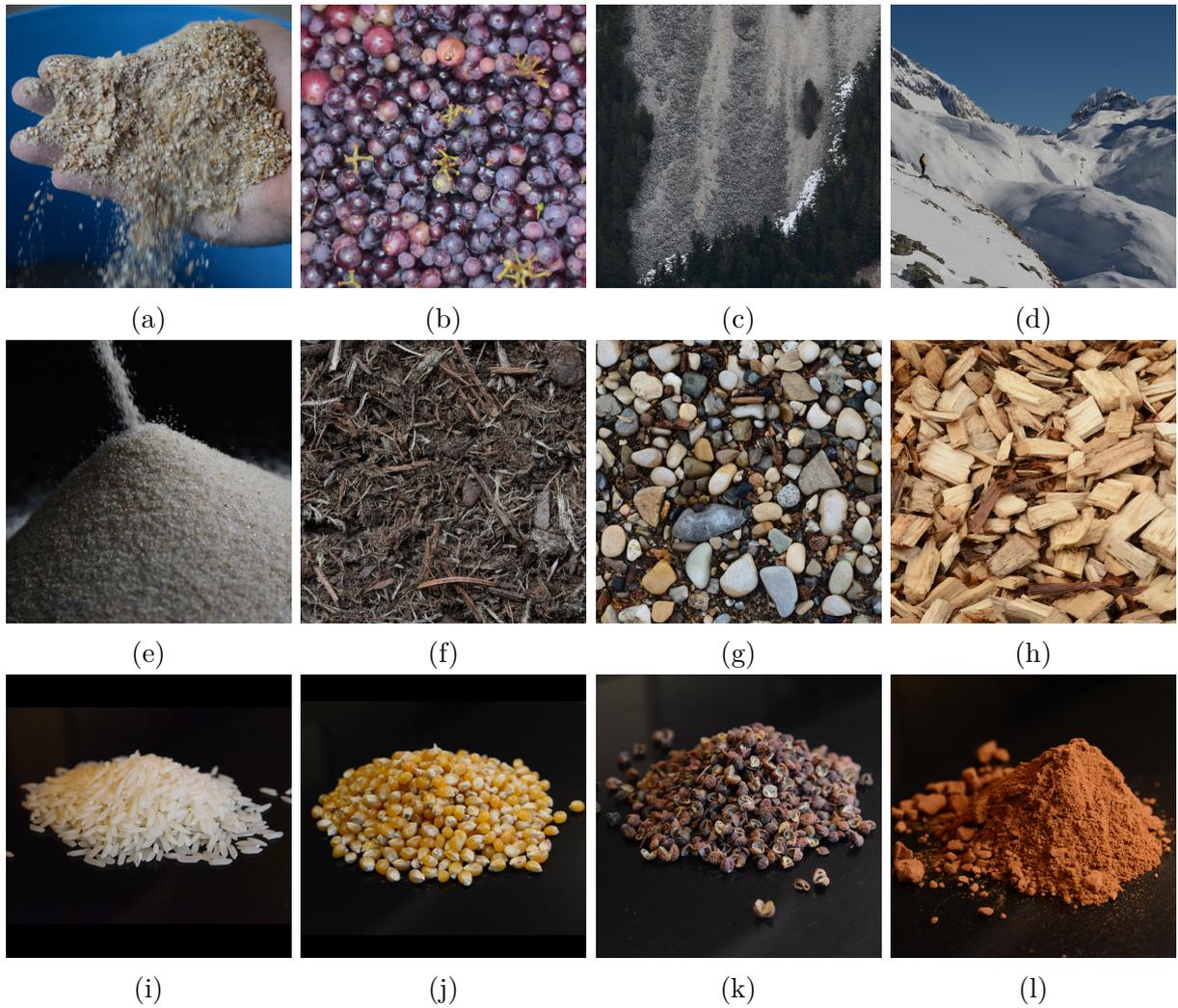


FIGURE 1.1 – Quelques exemples de milieux granulaires. (a) Malt d’orge moulu. (b) Grains de raisin. (c) Éboulis en montagne. (d) Neige. (e) Sable. (f) Terreau. (g) Gravier. (h) Broyat. (i) Grains de riz. (j) Grains de maïs. (k) Grains de poivre. (l) Poudre de cacao. Crédit photos : A. DOP.

évolue-t-il dans le temps, comment respire-t-il (rôle de puits de carbone [Bond-Lamberty et Thomson, 2010]) font partie des questions qui animent les pédologues et autres scientifiques, et qui peuvent être abordées du point de vue du physicien des milieux granulaires. Ajoutons à cela les glissements de terrain, événements parfois extrêmes qui peuvent représenter un risque pour la population et que les ingénieurs cherchent donc à prévoir, détecter et mitiger. Les géologues et les physiciens ont un rôle à jouer dans leur explication et leur prédiction, et ce champ de recherche a encore des questions ouvertes à élucider. On peine par exemple à expliquer la longue course des glissements de terrain qui se déplacent en général d’une distance bien supérieure à celle prédite par les modèles. Un phénomène proche est celui des avalanches de neige, qui constituent également un risque et dont la prédiction n’est pas triviale. C’est aussi une forme de glissement de terrain, et la neige peut être décrite comme un milieu granulaire cohésif, le rôle de l’air ne pouvant pas toujours être négligé. D’autre part, les séismes sont intimement liés à la physique des grains, puisque leur apparition suit une distribution identique à celle des événements observés dans un milieu granulaire cisailé [Lherminier *et al.*, 2019]. On peut en fait modéliser un plan de faille sismique comme un milieu granulaire confiné entre deux solides lui appliquant une contrainte de cisaillement. Nous pourrions certainement continuer cette liste pendant de nombreuses pages tant la compréhension des propriétés des milieux granulaires en général peut éclairer les systèmes naturels qui jalonnent notre planète. Ces derniers sont toutefois habituellement bien plus complexes que les milieux granulaires modèles qui sont pourtant déjà une énigme pour le physicien.

Au-delà des systèmes naturels, nous rencontrons des milieux granulaires dans notre vie de tous les jours. Ils sont partout dans notre cuisine (sucre, café, riz, farine, lentilles, épices, herbes, noix, etc) et omniprésents en agriculture (voir certains exemples sur la [Figure 1.1](#)). Les problèmes liés à leur transport, à leur stockage et à leur tri sont donc connus de l’homme depuis une dizaine de milliers d’années. Les industries de l’agroalimentaire et de la pharmaceutique sont également concernées par ces problématiques, ainsi que la construction, l’urbanisme et le génie civil. Le béton est un mélange de grains solides (sable et gravier) et d’un liant (ciment) sur lequel repose en grande partie notre société. C’est donc une suspension, un système encore plus complexe mais que la compréhension des milieux granulaires «simples» définis ci-dessous peut éclairer. La fabrication de céramiques ou de matériaux frittés et les processus de broyage sont également concernés. Résumons cette omniprésence en donnant des estimations faites par Jacques Duran il y a une vingtaine d’années [Duran, 2000] : la gestion des matériaux granulaires consomme environ 10% de l’énergie produite sur la planète, et constitue la classe de matériaux la plus importante pour les activités humaines après l’eau.

I.2 Définition

Définition - milieu granulaire

Dans la suite, on appelle milieu granulaire un ensemble de particules solides, de taille typique supérieure à 100 μm .

Notons que l'on peut classifier une très grande variété de systèmes et de matériaux divisés sous cette définition, et que les matériaux granulaires sont omniprésents sur Terre, comme le montrent les nombreux exemples présentés ci-dessus.

Dans cette définition, on introduit une taille minimale de la particule solide appelée grain, autour de $100\ \mu\text{m}$. Cette taille correspond à des grains qui interagissent uniquement via leurs contacts, caractérisés par une répulsion et un frottement solide. En dessous de cette taille, on entre dans le domaine des poudres, pour lesquelles les effets d'adhésion dus aux forces de van der Waals ou de l'humidité présente dans l'air ne sont plus négligeables. Pour des tailles inférieure au micromètre, c'est l'agitation thermique qui n'est plus négligeable [Mewis *et al.*, 1989] et on parle alors de colloïdes. Les milieux granulaires que nous considérons ici sont donc constitués de grains suffisamment grands pour être considérés comme athermaux et dont les interactions par forces de van der Waals sont négligeables. On ignorera dans le cadre de cette thèse les effets du fluide environnant pour discuter des grains secs uniquement, c'est-à-dire des grains situés dans un fluide (généralement l'air) dont on peut négliger les effets, par opposition aux grains mouillés ou immergés, voire aux suspensions. Ces systèmes sont plus complexes et on en mentionnera quelques exemples dans la suite de ce chapitre, mais ils ne seront pas considérés dans nos travaux présentés dans les chapitres ultérieurs.

I.3 Propriétés

Les milieux granulaires ont des propriétés communes aux autres milieux denses désorganisés. Ainsi, il est naturel de les relier avec les domaines de la matière molle, qui étudie notamment les émulsions, suspensions, mousses, gels, etc. De plus, on peut faire des liens avec la physique des colloïdes et des verres [Sellerio *et al.*, 2011], tant la transition vitreuse (d'origine thermodynamique) et la transition de *jamming* (d'origine géométrique) sont similaires [Ikeda *et al.*, 2013].

Si l'on se restreint aux milieux granulaires secs, modèles (grains sphériques, distribution de tailles contrôlée), les propriétés d'écoulement sont déjà très riches. Il existe l'analogie des états de la matière classique pour les grains ; on peut les trouver à l'état solide (par exemple un tas de pierres), liquide (par exemple le sable en écoulement dans un sablier) ou gazeux (par exemple les poussières et morceaux de glace dans les anneaux de saturne). Les vibrations ajoutées au milieu peuvent jouer un rôle analogue à la température de la matière classique en introduisant de l'agitation et des réarrangements (le mouvement Brownien des particules granulaires dû à l'agitation thermique étant pour rappel négligeable). On s'intéresse dans le cadre de cette thèse uniquement à des cas denses et où le matériau granulaire subit une contrainte assimilable à du cisaillement. De nombreuses configurations ont été utilisées pour étudier ces propriétés d'écoulement [Abroshan *et al.*, 2020]pGdr2004, et l'introduction d'un nombre adimensionné dit nombre inertiel permet de décrire des régimes d'écoulement distincts dans ces différentes géométries sous un formalisme unifié [Forterre et Pouliquen, 2008] (voir aussi [chapitre 3, section I.2.A](#)).

De manière générale, les milieux granulaires ont constitué un champ de recherche actif ces dernières décennies. De nombreux phénomènes contre-intuitifs sont observés et leur comportement reste en partie mal compris. Une bonne partie d'entre eux réside dans leur propension à s'arranger en motifs de taille caractéristique bien supérieure à la taille du

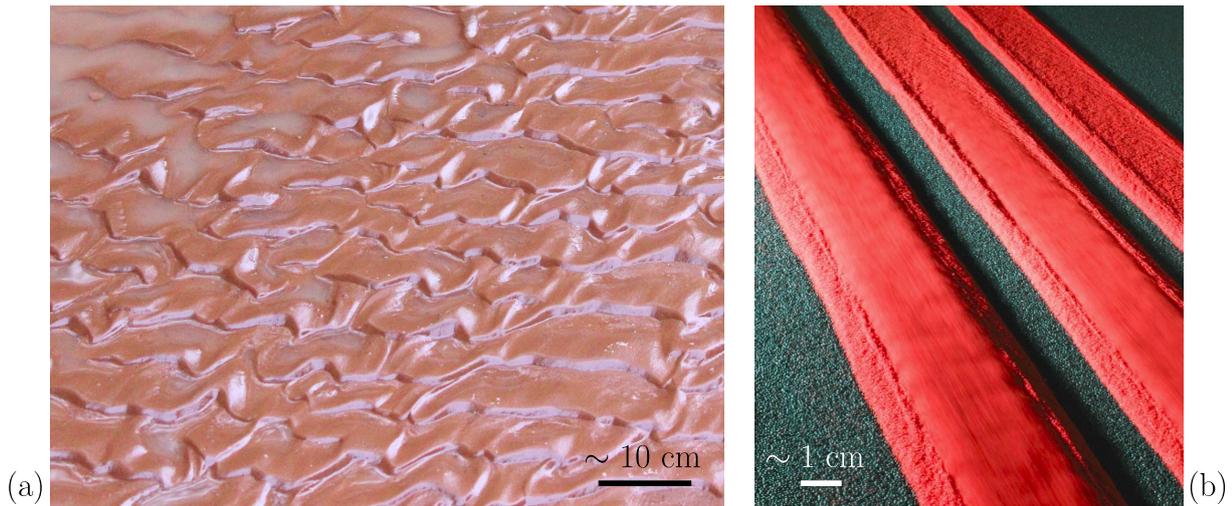


FIGURE 1.2 – (a) Chemin sableux après une pluie importante. Le passage de l'eau a dessiné des motifs complexes sur la topographie. C'est un des nombreux exemples de formation de motifs par interaction entre un fluide (ici l'eau) et un milieu granulaire, parmi lesquels on retrouve aussi les dunes dans le désert ou les rides sur la plage. Crédit photo : A. DOP. (b) Auto-chenalisation d'un écoulement de grains monodisperses sur un plan incliné rugueux, image tirée de Rocha *et al.* [2019].

grain.

I.4 Formation de motifs

Les milieux granulaires ont tendance à s'auto-organiser en grandes structures [Aranson et Tsimring, 2006; Ristow, 2000], comme le font de nombreux autres systèmes naturels, y compris le vivant [Thompson, 1992; Cross et Hohenberg, 1993]. Ils se comportent ainsi sous des excitations diverses allant du simple écoulement, à l'entraînement par un fluide ou à des vibrations externes. Les excitations en question n'imposent nullement la longueur d'onde du motif résultant. Nous proposons ici un catalogue non exhaustif de quelques-uns de ces processus, sans se restreindre aux milieux granulaires secs.

L'exemple typique que nous rencontrons fréquemment est celui des dunes et rides formés par le passage d'un fluide (gaz ou liquide) sur un lit érodable comme illustré sur la Figure 1.2 (a). Ces processus existent dans des configurations variées et conduisent à des motifs de taille variée (on parle de dunes pour des motifs de plusieurs dizaines de mètres et de rides pour des motifs de quelques centimètres) et de géométrie très variable (par exemple pour les dunes éoliennes on distingue les barkhanes, les dunes paraboliques, longitudinales et les dunes étoiles [Langlois, 2005]). Un travail important a été réalisé par Bagnold [1941] et une revue récente de la littérature est faite par Charru *et al.* [2013]. On en retrouve de nombreux exemples naturels [Ewing et Kocurek, 2010; Sharp, 1963], des expériences de laboratoire [Andreotti *et al.*, 2006; Groh *et al.*, 2010; Harms, 1969] et des simulations numériques [Werner, 1995]. Citons également la forme des rivières alluviales et de leurs méandres [Jaggar, 1908; Métivier *et al.*, 2017; Meunier *et al.*, 2006].

Une autre configuration propice à la formation de motifs est la cellule de Hele-Shaw.

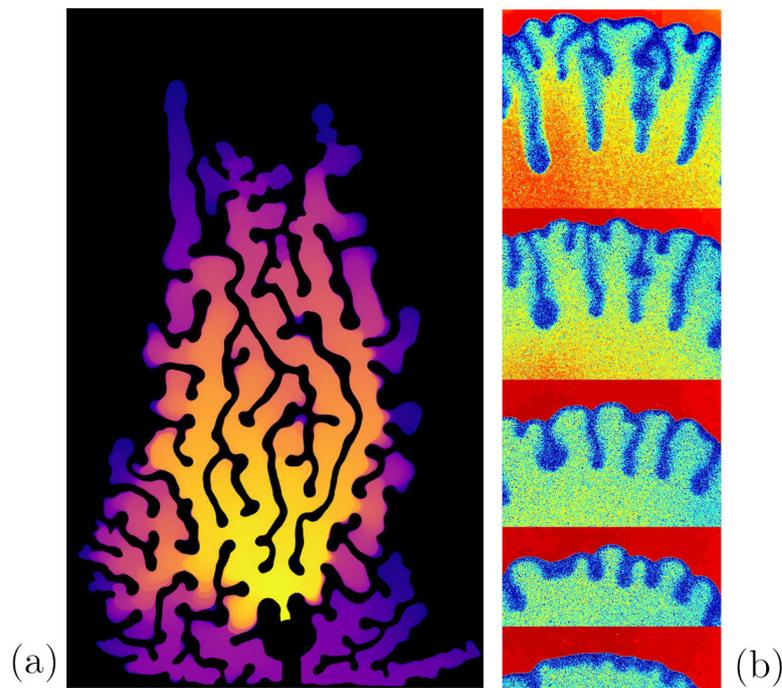


FIGURE 1.3 – Digitation en cellule de Hele-Shaw dans deux cas différents. (a) Injection lente d'air dans un mélange liquide-grains (eau et glycérol - billes de verre) donnant un motif de labyrinthe par digitation frictionnelle. La couleur représente l'évolution temporelle du motif (du jaune au violet). L'injection est réalisée en bas au centre de l'image. (b) Injection rapide de ce même mélange dans l'air dessinant un autre motif, cette fois d'origine visqueuse. Le fluide se déplace vers le haut. Crédit photos : A. DOP.

Nommée d'après son inventeur [Hele-Shaw, 1898], ce nom désigne un montage expérimental constitué de deux plaques transparentes parallèles séparées d'un écartement faible devant leurs dimensions longitudinales. L'espace entre les deux plaques définit une tranche fine de l'espace très pratique pour étudier l'écoulement d'un fluide dans une configuration quasi 2D et très visuelle. Cette configuration a également été très utilisée avec des grains, conduisant là encore à de nombreux processus de formation de motifs. En injectant de l'air dans des grains secs [Cheng *et al.*, 2008; Vinningland *et al.*, 2007], ou dans un mélange liquide-grains [Johnsen *et al.*, 2006, 2008; Sandnes *et al.*, 2007; Knudsen *et al.*, 2008; Sandnes *et al.*, 2011], en injectant des grains dans un fluide visqueux [Huang *et al.*, 2012], ou des grains dans des grains [Pinto *et al.*, 2007], par séchage [Yamazaki et Mizuguchi, 2000], etc. Deux exemples de tels motifs obtenus soit par injection d'air dans un mélange liquide-grains soit par injection de ce même mélange dans l'air sont présentés sur la Figure 1.3.

Les grains vibrés forment également des motifs. En effet, la vibration d'une monocouche vibrée verticalement produit une organisation spontanée des grains [Olafsen et Urbach, 1998], de même qu'un lit épais soumis au même type de vibrations [Douady *et al.*, 1989; Melo *et al.*, 1994; Bizon *et al.*, 1998] dans lequel peut exister une perturbation localisée appelée oscillon [Umbanhowar *et al.*, 1996] ou encore un analogue à l'instabilité de

Rayleigh-Bénard [Eshuis *et al.*, 2007]. Des vibrations horizontales produisent également des motifs en particulier par ségrégation avec un mélange binaire [Reis et Mullin, 2002; Reis *et al.*, 2006] où on retrouve cette fois un analogue de l’instabilité de Kelvin-Helmholtz [Ciamarra *et al.*, 2005; Goldfarb *et al.*, 2002].

Le cas plus simple d’un écoulement sur plan incliné conduit à la formation de doigts par ségrégation [Pouliquen *et al.*, 1997] ou forme des ondes de surface [Forterre et Pouliquen, 2003]. Pour un écoulement ponctuel, on observe aussi la formation de canaux spontanés et de levées latérales (Rocha *et al.* [2019], Figure 1.2 (b)). La configuration en tambour tournant par avalanches successives [Gray et Hutter, 1997] conduit à des motifs de pétales [Seiden et Thomas, 2011; Zuriguel *et al.*, 2006].

Ces différents processus sont impliqués dans des phénomènes naturels complexes. La démarche du physicien consiste à simplifier ces systèmes et les conditions de travail pour démêler les multiples processus en jeu. Une simplification possible pour l’étude des milieux granulaires consiste à les mettre en cisaillement, soit en imposant un écoulement de Couette plan, soit par gravité avec un écoulement sur plan incliné. On peut ensuite approcher le système du point de vue du frottement solide et essayer d’en faire une description effective macroscopique. Comme annoncé en début de chapitre, nous ne considérons dorénavant que les milieux granulaires secs.

II Milieu granulaire sous cisaillement

Commençons par la situation canonique du cisaillement simple d’un milieu modèle constitué de particules sphériques de distribution bien contrôlée. Ce simple système a fait l’objet d’un grand nombre d’études, nous allons en donner quelques grandes étapes dans cette partie, en adoptant une approche allant de la description du contact microscopique à la description macroscopique du milieu.

II.1 Frottement solide et frottement granulaire

Au niveau microscopique, les contacts entre grains constituent des interfaces solide/solide qui suivent les lois du frottement solide.

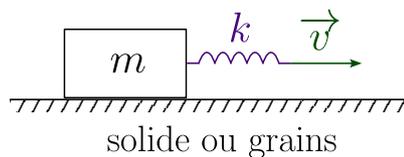


FIGURE 1.4 – Système masse-ressort largement utilisé dans les études du frottement solide, y compris les études avec des milieux granulaires. Une extrémité du ressort de raideur k est tractée à vitesse constante \vec{v} , l’autre extrémité est fixée au bloc de masse m .

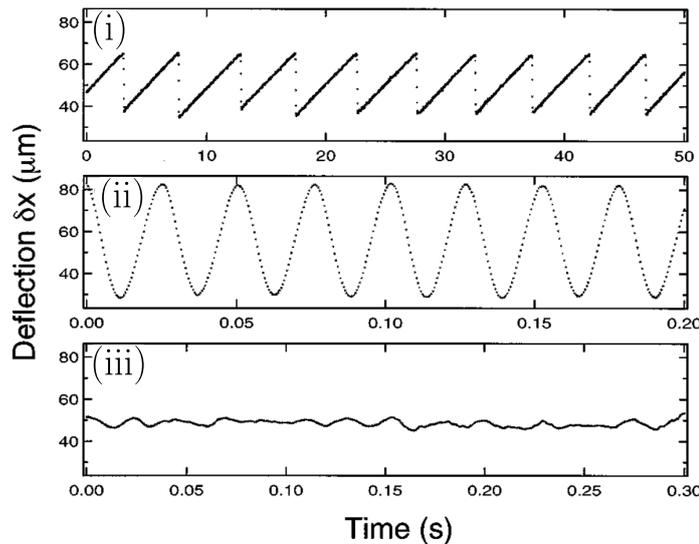


FIGURE 1.5 – Figure tirée de [Nasuno *et al.* \[1998\]](#) illustrant les trois régimes de force observés lors de la traction d’un patin sur un lit granulaire via une lame flexible jouant le rôle du ressort. La déflexion de la lame, proportionnelle à la force appliquée, est représentée en fonction du temps dans trois cas correspondant aux trois régimes : (i) Régime de stick-slip. (ii) Régime inertiel. (iii) Régime de glissement continu.

A Frottement entre deux solides

La toute première trace d’une observation sur le frottement solide date du philosophe Thémistios (317-388 ap. J.-C.) qui notait «Il est généralement plus facile d’accentuer le mouvement d’un corps que de mettre en mouvement un corps au repos.» [[Sambursky, 2016](#)]. Léonard de Vinci fut un pionnier de la tribologie entre 1490 et 1500 [[Hutchings, 2016](#)], mais les lois du frottement seront redécouvertes et établies sous la forme que nous connaissons aujourd’hui quelques siècles plus tard par [Amontons \[1699\]](#) puis [Coulomb \[1785\]](#) dont les travaux ont été décrits par [Desplanques \[2014\]](#). Un coefficient de frottement, rapport entre la force normale à la surface et la force tangentielle de traction, a été introduit. Ce dernier dépend des matériaux utilisés, de la lubrification des surfaces, etc, et peut être mesuré avec un dispositif comme le système masse-ressort représenté sur la [Figure 1.4](#). La notion d’angle de frottement a ensuite été introduite par [Euler \[1750\]](#). L’existence d’une différence entre coefficient statique et dynamique (effet décrit par Thémistios) implique l’existence d’un régime de collé-glissé (*stick-slip* en anglais) que l’on peut aussi étudier avec le système masse-ressort. Il s’agit d’un modèle basique, et la réalité est bien plus complexe avec une dépendance en vitesse, l’existence du fluage, etc. Le frottement solide est encore à ce jour un sujet de recherche et des modèles plus raffinés ont été mis au point depuis [[Baumberger *et al.*, 1994](#); [Marone, 1998](#); [Bowden et Tabor, 2001](#); [Baumberger et Caroli, 2006](#)].

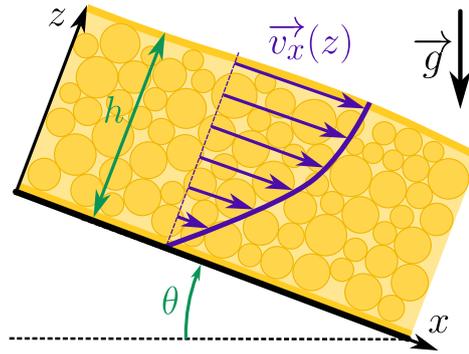


FIGURE 1.6 – Schéma d'un écoulement sur plan incliné. L'inclinaison par rapport à l'horizontale est notée θ , la direction de l'écoulement x et la direction perpendiculaire z . Les grains ont une vitesse $\vec{v}_x(z)$ et la couche a une épaisseur h .

B Frottement granulaire

Le problème du frottement granulaire est encore plus complexe, car il existe des contacts très nombreux simultanés. Même si les lois d'Amontons-Coulomb sont valides à chaque contact, la géométrie et la mobilité des grains entre eux rend le problème impossible à résoudre analytiquement. On peut toutefois être tenté de décrire un lit granulaire comme une surface avec un coefficient de frottement effectif, bien que cette approche soit simpliste en raison d'une dépendance à la vitesse, à la fraction volumique, etc. En tractant sur un lit de grains un bloc de masse m , via un ressort de raideur k , à une vitesse v (Figure 1.4) on observe trois régimes de force différents en fonction de la valeur de m , k et v (Figure 1.5) : un régime de stick-slip, un régime inertiel et un régime de glissement continu [Nasuno *et al.*, 1997, 1998].

C Influence de vibrations

En écoulement «réel», différent de ces conditions très contrôlées de cisaillement simple (par exemple en écoulement sur un plan incliné comme détaillé ci-dessous), il peut exister de l'agitation interne provenant des collisions ou des perturbations mécaniques externes pouvant modifier significativement l'écoulement. Ces vibrations peuvent être classées en deux natures distinctes, acoustique et mécanique [DeGiuli et Wyart, 2017].

Pour les vibrations acoustiques, le mécanisme des vibrations dites endogènes a été mis en évidence par Melosh [1979, 1996]. On trouve une étude expérimentale avec application aux séismes des vibrations exogènes dans Johnson et Jia [2005].

En ce qui concerne les vibrations mécaniques externes, elle peuvent également réduire ou supprimer le frottement [Capozza *et al.*, 2009; Melhus et Aranson, 2012; Dijksman *et al.*, 2011; Pons *et al.*, 2015; Lastakowski *et al.*, 2015; Vidal *et al.*, 2019]. Dans les travaux présentés dans cette thèse, l'effet des vibrations ne sera pas étudié.

II.2 Écoulement sur plan incliné

Jusqu'ici, nous avons discuté du comportement de grains confinés entre deux éléments solides. Abordons maintenant le cas d'un écoulement avec surface libre, sur un plan incliné,

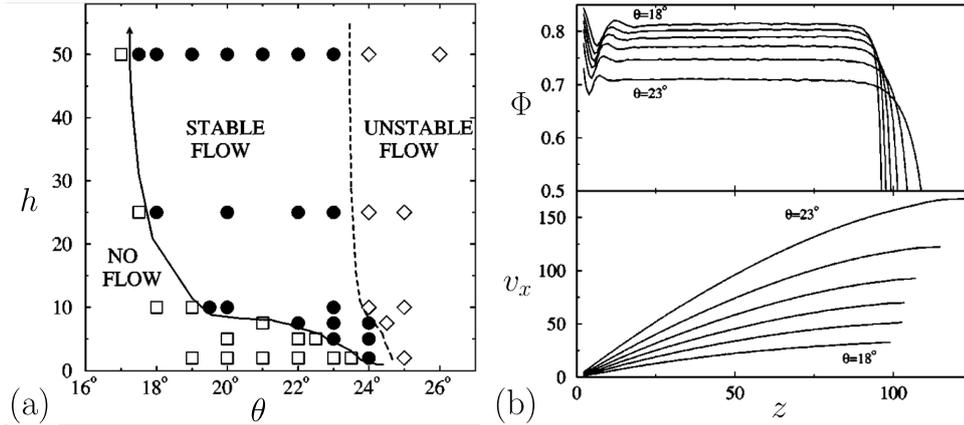


FIGURE 1.7 – Figure d’après Silbert *et al.* [2001] (a) Diagramme de phase des régimes d’écoulement en fonction de l’épaisseur h et de l’angle θ . (b) Profil de fraction volumique Φ et de vitesse horizontale v_x pour différentes valeurs de θ . L’augmentation de l’inclinaison conduit à une augmentation de la vitesse de l’écoulement et à la décompaction du milieu.

comme représenté sur la Figure 1.6.

De nombreuses études numériques de ce système existent [Walton, 1993; Ertaş *et al.*, 2001; Silbert *et al.*, 2001, 2003; Brewster *et al.*, 2005; Li *et al.*, 2016]. Il peut exister trois régimes principaux différents en fonction de l’épaisseur h de la couche de grains et l’angle θ du plan incliné, qui ont été étudiés notamment par Silbert *et al.* [2001]. Notons que le régime observé dépend de l’histoire de l’écoulement, il peut y avoir une hystérésis en θ par exemple [GDR MiDi, 2004]. Dans notre étude du chapitre 4 nous ignorons ces problématiques en injectant une quantité significative d’énergie sous la forme d’une vitesse initiale, puis nous laissons évoluer le système qui peut avoir trois destins différents correspondant aux trois régimes observés :

- **Régime statique** : il n’y a pas d’écoulement. L’énergie cinétique est nulle (au bruit près).
- **Régime d’écoulement stable**¹ : un profil de vitesse donné s’établit et correspond à un état stationnaire stable où l’énergie injectée par gravité est dissipée par les contacts. L’énergie cinétique converge alors vers une valeur d’équilibre finie.
- **Régime d’écoulement instable** : l’énergie dissipée par les contacts est inférieure à celle injectée par gravité, les grains accélèrent alors indéfiniment². L’énergie cinétique ne cesse de croître vers l’infini.

La Figure 1.7 présente une partie des résultats de Silbert *et al.* [2001] qui ont simulé un écoulement 2D sur plan incliné (ils ont également étudié le cas 3D dans le même article mais nous ne l’avons pas présenté ici). On peut voir sur la Figure 1.7 (a) le diagramme de

1. On peut en fait distinguer plusieurs sous-régimes, l’écoulement de Bagnold pour un angle élevé, un profil de vitesse plutôt linéaire pour un angle plus faible, et pour un angle proche de la transition vers l’écoulement statique, un écoulement fait d’avalanches intermittentes. Ces trois régimes sont décrits dans Silbert *et al.* [2003].

2. Ce régime instable s’accompagne en général de la perte de la condition de non glissement, d’une décompaction de l’empilement vers un état granulaire gazeux ou bien avec une couche gazeuse par dessus laquelle s’écoule une partie plus compacte, ces régimes sont décrits par Taberlet *et al.* [2007b].

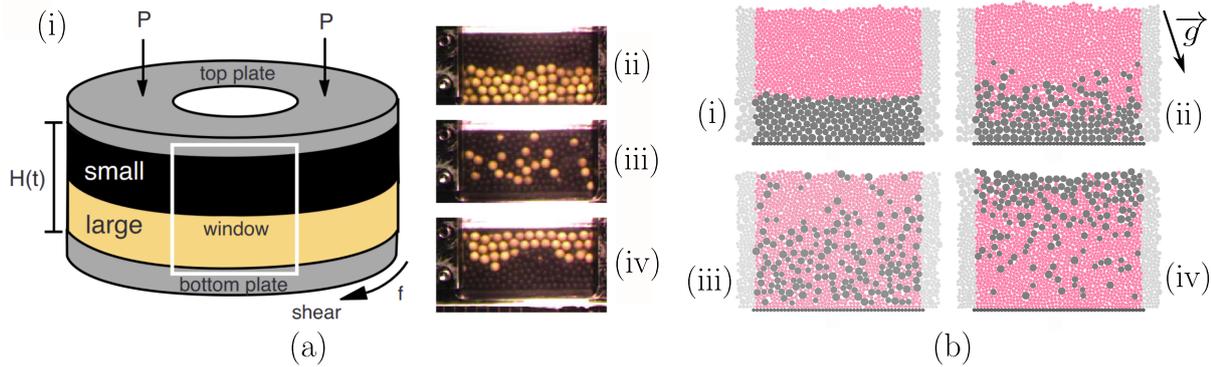


FIGURE 1.8 – (a) Ségrégation en cisaillement simple (cellule de Couette) [Golick et Daniels, 2009]. (i) Schéma du montage expérimental dans la configuration initiale. (ii-iv) Photos des états successifs, de l'état initial avec les gros grains en blanc placés en dessous à l'état final presque totalement ségrégré dont les gros grains occupent la moitié haute de l'espace. (b) Ségrégation sur plan incliné ($\theta = 18^\circ$, l'orientation de la gravité est représentée en haut à droite) [Staron et Phillips, 2014]. Le temps s'écoule de l'image (i) à (iv). Les gros grains, en gris, sont initialement placés au fond de la couche en écoulement et remontent progressivement à la surface dans un processus très proche de nos observations au chapitre 4.

phases des trois régimes détaillés précédemment (voir chapitre 4, section I.1 et la Figure 4.3 pour notre travail à ce sujet). La Figure 1.7 (b) montre quant à elle les profils de vitesse et de faction volumique pour différents angles θ , en restant dans le régime d'écoulement stable avec un profil de Bagnold. Une augmentation de la pente se traduit par une vitesse plus élevée et une décompaction de l'écoulement.

Notons que du point de vue expérimental également ce système a été largement étudié [Bagnold, 1954; Savage, 1979; Campbell *et al.*, 1985], la transition entre les deux premiers régimes a également été caractérisée en fonction de h et θ [Pouliquen, 1999]. Une autre étude détaille le comportement pour des angles très élevés avec d'autres régimes [Holyoake et McElwaine, 2012].

L'introduction du nombre inertiel I (voir chapitre 3, section I.2.A) [Forterre et Pouliquen, 2008; GDR MiDi, 2004] permet de décrire cette situation avec le même formalisme que d'autres configurations comme le cisaillement simple, le tambour tournant, etc. Leur travail propose également une loi $\mu(I)$ qui généralise les propriétés des grains dans différentes configurations.

II.3 Ségrégation par taille

Nous avons considéré jusqu'ici majoritairement des cas monodisperses ou bien faiblement polydisperses. Dans le cas d'un mélange de grains de tailles très différentes, la ségrégation par taille entre en jeu, un phénomène par lequel les grains se trient spontanément par taille. Ce phénomène est à l'origine de la formation de nombreux motifs, notamment quelques-uns de ceux que nous avons mentionnés à la section I.4. On appelle aussi ce phénomène effet noix du Brésil, en raison de la remontée à la surface de ces grosses noix après vibration d'un mélange de noix et de fruits secs de taille variable lors de leur

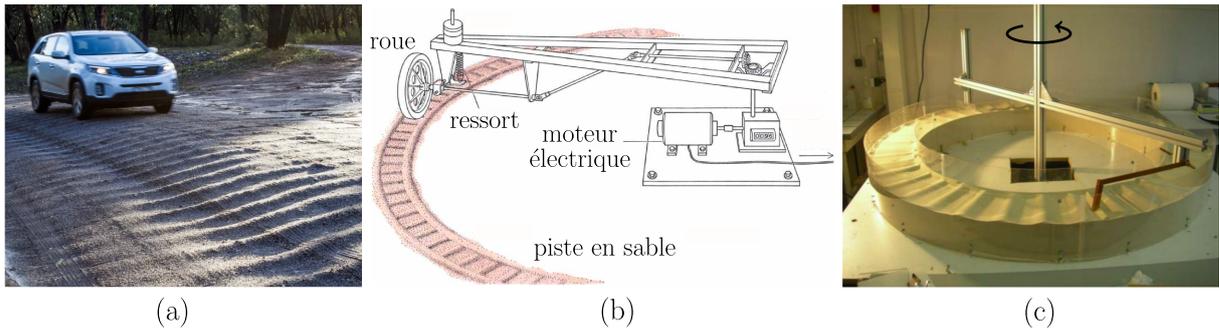


FIGURE 1.9 – (a) Photo d'une route ondulée suite aux passages répétés des véhicules (source : practicalmotoring.com). (b) Expérience historique d'après Mather [1963], une roue étant tractée sur une piste cylindrique en sable par un moteur électrique. (c) Expérience de Percier *et al.* [2013] et Lecomte [2018] sur le même principe. Ici le ressort a été supprimé et la roue remplacée par une plaque inclinée pouvant pivoter autour d'un axe situé en amont de celle-ci.

transport [Rosato *et al.*, 1987]. Il se produit donc sous vibrations mais également sous cisaillement simple [Golick et Daniels, 2009] (Figure 1.8 (a)), dans un tambour tournant (ségrégation radiale [Abroshan *et al.*, 2020; Cantelaube et Bideau, 1995], orthoradiale [Zuriguél *et al.*, 2006], et axiale [Aranson et Tsimring, 2006; Taberlet *et al.*, 2006]) et dans un écoulement 2D sur plan incliné [Staron et Phillips, 2014] (Figure 1.8 (b)), cas en lien direct avec le chapitre 4. Pour un écoulement 3D sur plan incliné, il existe une ségrégation dans différentes directions [Goujon, 2004], ce phénomène est également observé dans la nature notamment dans des coulées pyroclastiques, les plus grosses pierres se retrouvant à l'avant et sur les côtés de la coulée [Félix et Thomas, 2004]. Notons que plusieurs approches théoriques de ce problème ont été développées mais nous ne les détaillerons pas ici [Trehwela *et al.*, 2021a,b; Barker *et al.*, 2021].

III Instabilité de tôle ondulée

Nous avons cité plus haut de nombreux processus de formation de motifs, en omettant volontairement ceux qui peuvent être formés par passage d'un solide sur un lit granulaire. Par exemple, le passage répété des voitures sur une route de sable ou de gravier conduit à l'apparition de rides de longueur d'onde régulière perpendiculaires à la piste, un phénomène qui porte le nom d'instabilité de tôle ondulée (*washboard road* ou *washboarding* en anglais) et que nous allons détailler ici. Une photo illustrant le phénomène est affichée sur la Figure 1.9 (a). C'est aussi un phénomène particulièrement important en pratique car il concerne plus de quinze millions de kilomètres³ de route sur le globe, qu'il pose des problèmes de sécurité routière [Cap et Wambold, 1984], de coût d'entretien et constitue un désastre environnemental. En effet, pour lutter contre son apparition, on peut passer des engins qui vont racler la route régulièrement et/ou répandre du chlorure de calcium ou encore des hydrocarbures pour augmenter sa cohésion [Tockol, 1993]. D'autres phéno-

3. D'après une estimation obtenue en sommant les chiffres provenant de multiples sources, voir https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_road_network_size

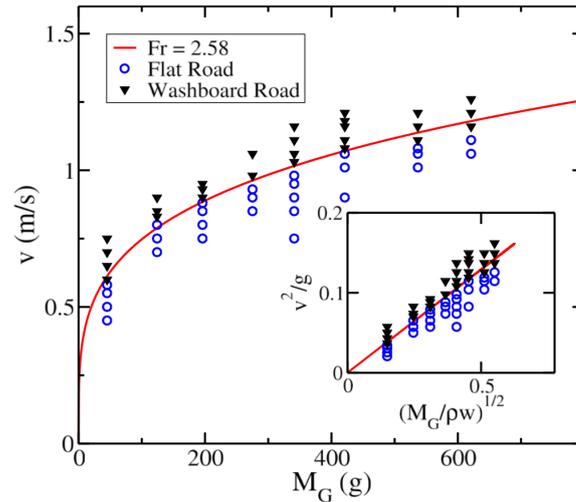


FIGURE 1.10 – La transition de tôle ondulée se produit à nombre de Froude constant (figure tirée de Bitbol *et al.* [2009]). Les points bleus représentent des cas stables et les triangles noirs des cas instables, la ligne rouge indique une valeur constante du nombre de Froude (ici 2.58) et sépare bien les deux domaines.

mènes similaires peuvent être rencontrés [Percier, 2013] et posent également parfois un problème industriel, comme l’usure ondulatoire des rails de train, le broutement des outils de coupe en usinage, etc.

Le phénomène a donc été largement observé. La première étude de l’instabilité de tôle ondulée ne date pourtant que de 1963 et est due à Mather [1963] (son montage expérimental est représenté sur la Figure 1.9 (b)). Ce dernier a mis en évidence une vitesse seuil pour l’apparition du phénomène en dessous de laquelle la surface de la piste revient à un état plat même si on la perturbe. Au-dessus de ce seuil les irrégularités croissent jusqu’à former des rides qui se déplacent dans le même sens que la roue. Il a mis en évidence la robustesse du phénomène, le rôle de la vitesse, de la masse, de la raideur de la suspension, etc. Ce travail a été poursuivi et étendu par Riley et Furry [1973], puis diverses modélisations ont été proposées [Mays et Faybishenko, 2000; Both *et al.*, 2001; Percier *et al.*, 2013; Hata *et al.*, 2022].

Sans être exhaustifs, parmi les progrès réalisés sur la compréhension de ce phénomène, citons sa simplification : par des expériences de laboratoire et des simulations, Taberlet *et al.* [2007a] ont montré que l’instabilité existe dans un modèle simplifié par rapport à la voiture en retirant les suspensions et le couple moteur, et en remplaçant la roue pneumatique par une roue rigide. Les simulations 2D révèlent que la compaction ou la ségrégation ne sont pas nécessaires au phénomène. Citons également l’identification du nombre de Froude sans dimension comme pilotant la transition par Bitbol *et al.* [2009] comme illustré sur la Figure 1.10 et leur remplacement de la géométrie de la roue par une simple plaque inclinée.

Cette géométrie de plaque inclinée a été utilisée par Percier *et al.* [2011] et Percier [2013] avec des capteurs de force, pour en déduire des lois sur la portance (Figure 1.11 (a)). Ces travaux expérimentaux et numériques ont permis de développer un modèle d’instabilité linéaire prédisant l’existence d’une vitesse critique (contrairement au cas développé

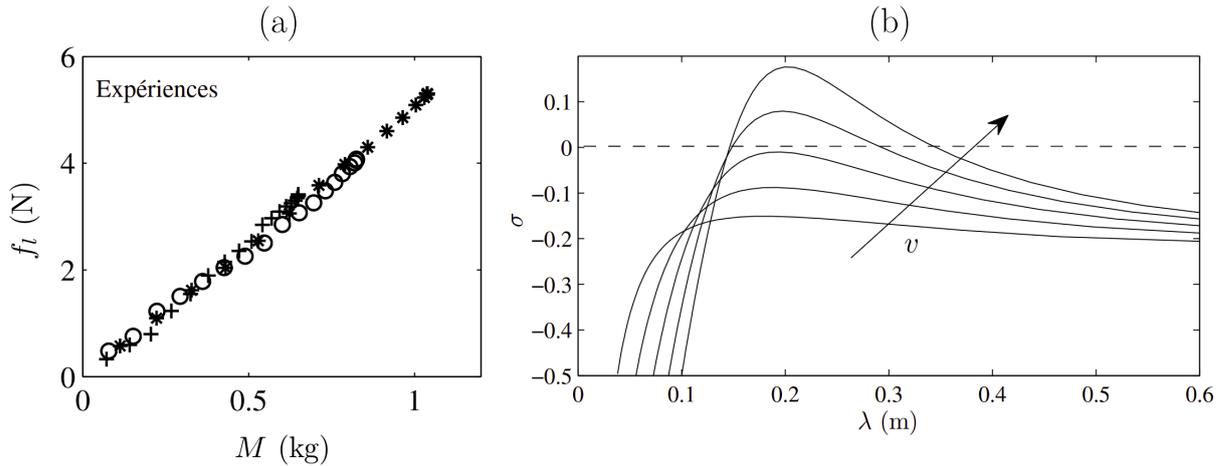


FIGURE 1.11 – Résultats issus de [Percier, 2013]. (a) Mesure de la force de portance sur la plaque en fonction de la masse du talus, une relation de proportionnalité indépendante de la vitesse est obtenue. Ici la plaque est inclinée à 45° et les différents symboles représentent des vitesses de $0.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ à $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. (b) Analyse de stabilité linéaire prédisant l’instabilité (σ représente le taux de croissance) et la longueur d’onde (en abscisse) du mode le plus instable. Une augmentation de la vitesse fait passer d’un cas stable (σ toujours négatif) à un cas instable ($\sigma > 0$ pour certaines valeurs de λ) et la longueur d’onde la plus instable augmente avec v .

dans cette thèse) et il prédit la longueur d’onde du mode le plus instable (Figure 1.11 (b)). Dans les travaux de mesure de force d’une plaque inclinée tractée dans les grains, il faut mentionner la contribution importante de Guo *et al.* [2020] qui ont proposé un modèle de force plus complet en considérant une plaque partiellement immergée dans les grains par des simulations numériques 2D.

Enfin, citons les travaux de Charles-Edouard Lecomte [Lecomte, 2018] qui a étudié l’influence de la cohésion sur la longueur d’onde et sur le temps de croissance en ajoutant de l’huile silicone aux grains (Figure 1.12). La cohésion abaisse le seuil d’instabilité mais les ondulations croissent moins vite. On comprend alors pourquoi répandre du chlorure de calcium ou des hydrocarbures sur les routes est efficace. C.-E. Lecomte a également entrepris des travaux sur les fluides à seuil que l’on peut rapprocher des études faites par Hewitt *et al.* [2012] et Hewitt et Balmforth [2012] qui généralisent l’instabilité de tôle ondulée au-delà des milieux granulaires.

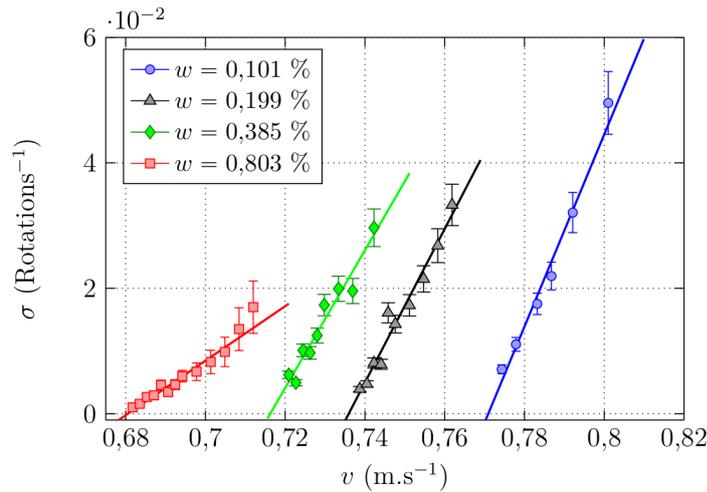


FIGURE 1.12 – Rôle de la cohésion due à l’humidité [Lecomte, 2018]. Cette dernière diminue le seuil d’instabilité mais également le taux de croissance des ondulations. Le taux de croissance du mode le plus instable, noté σ , est représenté en fonction de la vitesse v pour différentes valeurs de w , la concentration massique en huile silicone dans le milieu. Plus w est élevé, plus le milieu est cohésif.

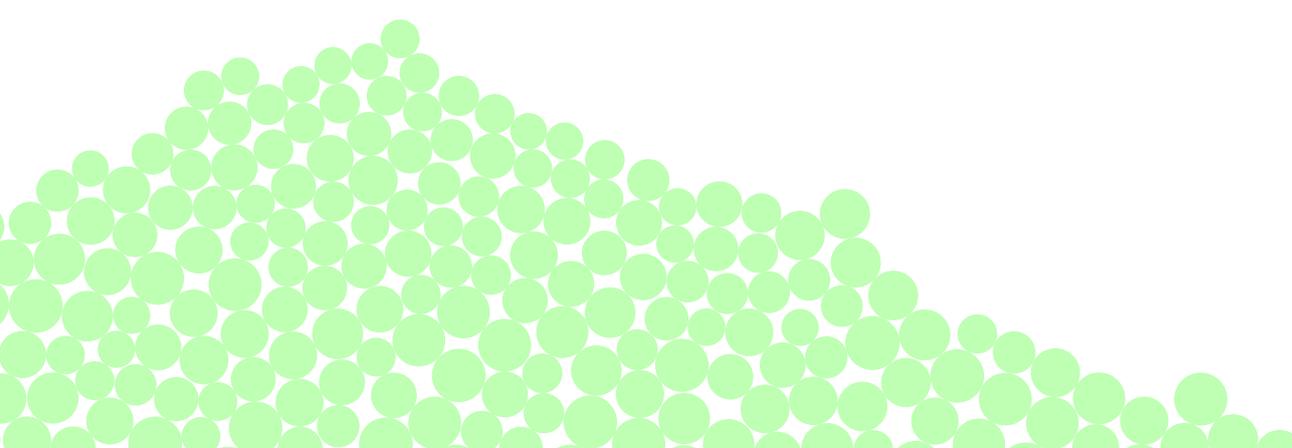
Le travail présenté dans cette thèse s’inscrit dans la continuité des travaux présentés dans ce chapitre avec les objectifs suivants :

- Étudier numériquement et expérimentalement le mouvement du patin utilisé dans les études de frottement sur une course plus longue, typiquement de l’ordre du mètre alors que les études de frottement s’arrêtent la plupart du temps à des petites courses de quelques tailles de grain.
- Étudier numériquement un écoulement sur plan incliné à fond rugueux d’un mélange de grains ordinaires et de grains aimantés. Décrire la formation d’agrégats magnétiques et leur ségrégation en fonction de paramètres du problème.

Chapitre 2

Méthodes

I	Méthodes numériques	24
I.1	Simuler des milieux granulaires	25
I.2	Méthode des éléments discrets	26
I.3	Grains éveillés et grains dormants	32
I.4	Conditions aux limites	34
I.5	Implémentation du patin	34
I.6	Initialisation	35
I.7	Grandeurs calculées	36
I.8	Choix des paramètres	37
II	Méthodes expérimentales	41
II.1	Avant-propos	41
II.2	Lits statiques	41
II.3	Lit en mouvement	47
II.4	Design du patin	50
II.5	Configurations alternatives	51
II.6	Embarquement de cartes Arduino	52
II.7	Caractérisation des grains	52



Les principaux résultats présentés concernant le mouvement d'un patin sur un lit granulaire sont le fruit de la combinaison de méthodes expérimentales et numériques. On verra que malgré leur nature très différente, leurs résultats sont complémentaires et en assez bon accord, avec cependant des différences majeures qu'il conviendra de développer. La combinaison de ces deux approches s'avère particulièrement fructueuse comme on le verra dans le [chapitre 3](#). On présentera également dans le [chapitre 4](#) les résultats d'une étude de l'écoulement d'un mélange de grains magnétiques et non magnétiques sur un plan incliné, cette fois-ci en utilisant uniquement la simulation numérique.

Dans ce chapitre, nous allons d'abord détailler comment les simulations numériques sont réalisées, du choix du modèle et de ses paramètres à son implémentation pratique. Ensuite, nous présenterons les différents montages expérimentaux successivement utilisés, le troisième et dernier étant le plus abouti et largement utilisé dans le [chapitre 3](#).

I Méthodes numériques

Les simulations numériques constituent un bon complément des expériences de laboratoire. En effet, il est facile d'imposer des conditions particulières au système numérique et on contrôle précisément chaque paramètre que l'on peut faire varier à souhait. On peut ainsi mener une étude statistique du comportement du système en explorant plusieurs ordres de grandeurs des paramètres pertinents. On s'affranchit de certaines limites expérimentales (contrôle de la préparation de l'état initial, difficulté d'appliquer une force de traction purement horizontale, etc.) et on accède à une connaissance accrue du système : on peut connaître l'ensemble des contacts, forces, positions et vitesses de tous les grains, et on connaît également complètement l'état du patin (position, orientation, forces, etc.). Sous réserve d'une bonne optimisation du code et de dimensionner raisonnablement la simulation, on peut aussi mener une étude statistique conséquente rapidement et balayer un grand nombre de paramètres en parallèle.

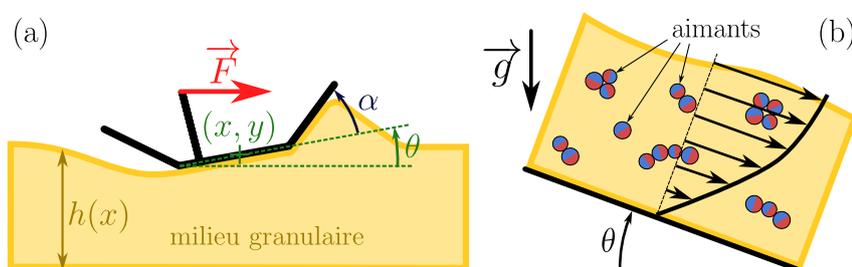


FIGURE 2.1 – Schéma des deux configurations étudiées. (a) Patin tracté sur un lit granulaire ([chapitre 3](#)). (b) Écoulement de grains dont certains sont aimantés sur un plan incliné ([chapitre 4](#)).

Les simulations sont donc un outil puissant pour mettre en évidence la formation d'une topographie et la relation dynamique entre le patin et l'empilement granulaire en complément des expériences, mais présentent aussi des limites qui sont mentionnées au [chapitre 3](#).

I.1 Simuler des milieux granulaires

A Plusieurs méthodes existantes

On trouve une description de différentes méthodes utilisées pour de telles simulations dans les références [Duran, 2000; Mehta, 2007] et dans la thèse de Stefan Luding [Luding, 1994]. Il existe des approches qui traitent le matériau granulaire comme un milieu continu, et d'autres qui simulent les grains individuels. On parlera uniquement de ces dernières dans cette section introductive.

Sphères dures ou molles ? On peut être tenté de modéliser les grains par des sphères dures, qui ne se déforment pas au moment du contact considéré comme infiniment bref. On peut tout de même modéliser la perte de la quantité de mouvement du système lors d'une collision en introduisant un coefficient de restitution élastique inférieur à 1. Cette approximation est à la base des modèles dits *event-driven* (ED), et de plusieurs méthodes utilisées notamment pour calculer des configurations statiques (dynamique des contacts, Monte Carlo, *steepest descent*).

À l'inverse, la modélisation par des sphères molles permet l'interpénétration des sphères, et leur interaction est définie en fonction de cette interpénétration. C'est l'approche choisie pour les modèles dits de simulation moléculaire de sphères molles, ou *soft spheres discrete elements method* (SSDEM), que nous allons utiliser.

B Difficultés

Décrire le comportement d'un milieu granulaire discret est un problème à N corps, avec N très grand. Plus N est grand plus il y a d'interactions entre grains à calculer. On verra comment on peut implémenter une stratégie numérique atteignant une complexité en $\mathcal{O}(N)$, bien meilleure que la solution naïve en $\mathcal{O}(N^2)$. Étant données les ressources en calcul disponibles de nos jours, ce n'est plus un problème insurmontable. Il reste cependant essentiel de mettre en œuvre toutes les stratégies d'optimisation décrites dans les sections [I.2.G](#) (cellules liées) et [I.8.A](#) (faible raideur des grains) pour rendre les simulations moins coûteuses en temps et en énergie. Ce coût dépend bien entendu de l'ambition de la simulation, en nombre de grains et en durée simulée. Malgré ces optimisations, le nombre d'opérations requises pour simuler par exemple typiquement 10^4 grains pendant une centaine de secondes peut demander plusieurs semaines de calcul sur un processeur moderne. Notre simulation est codée en C, langage sans doute le plus efficace disponible [Pereira *et al.*, 2021]. Notons qu'il s'agit d'un code maison (dont la première version a été réalisée par N. Taberlet et que j'ai modifié pour les simulations étudiées dans cette thèse) et non d'une solution commerciale ou open source, et que l'ensemble des simulations a été réalisé sur deux ordinateurs du laboratoire dédiés au calcul.

L'autre difficulté est de produire une simulation réaliste ; il s'agit de bien modéliser les actions de contact entre grains avec des hypothèses microscopiques ad-hoc bien

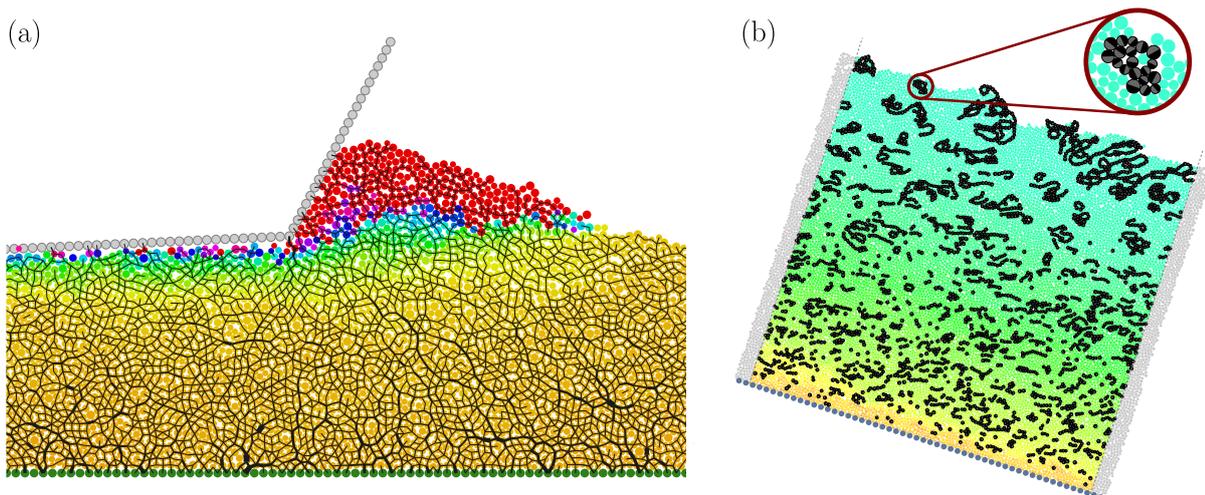


FIGURE 2.2 – Illustration des simulations numériques mises en œuvre, dans les deux configurations étudiées. (a) Zoom sur la partie avant du patin tracté sur un lit granulaire, grains colorés selon leur déplacement horizontal depuis le début de la simulation (du jaune au rouge). Les forces de contact sont représentées par des segments sombres dont l'épaisseur est une fonction croissante de l'intensité¹. (b) Grains en écoulement sur un plan incliné de 18° par rapport à l'horizontale, les grains sont colorés du jaune au bleu selon leur vitesse projetée dans la direction parallèle au plan incliné, et les grains sombres bicolores sont des aimants permanents (leur orientation est donnée par leur coloration, la partie sombre étant le pôle nord des aimants).

choisies (interaction viscoélastique, interaction non linéaire, hystérétique, frottement dynamique/statique, géométries non sphériques, vieillissement, etc.). Il y a de nombreuses décisions à prendre concernant le modèle choisi, principalement concernant la durée typique des collisions, le pas de temps, et les nombreux paramètres décrits ci-dessous (section I.8). Enfin, il faut avoir un regard critique sur les résultats. Les simulations ne se comportent jamais exactement comme la réalité physique, et leur confrontation avec des résultats expérimentaux permet de prendre du recul sur leur fidélité.

I.2 Méthode des éléments discrets

La méthode employée pour simuler la physique de l'empilement granulaire est la méthode dite des éléments discrets (SSDEM, *Soft Sphere Discrete Elements Method*).

Pour modéliser l'ensemble des actions mécaniques entre grains, on introduit une force de répulsion élastique, une force de dissipation viscoélastique et une force tangentielle de contact qui modélise le frottement solide entre les surfaces des grains et qui dépend de l'histoire du contact. Ci-dessous, nous expliquons la méthode, ainsi que ces différentes forces mises en jeu. Davantage de détails et des calculs plus complets ont été faits notamment par Schäfer *et al.* [1996].

1. En dessous d'un certain seuil, les forces ne sont pas représentées.

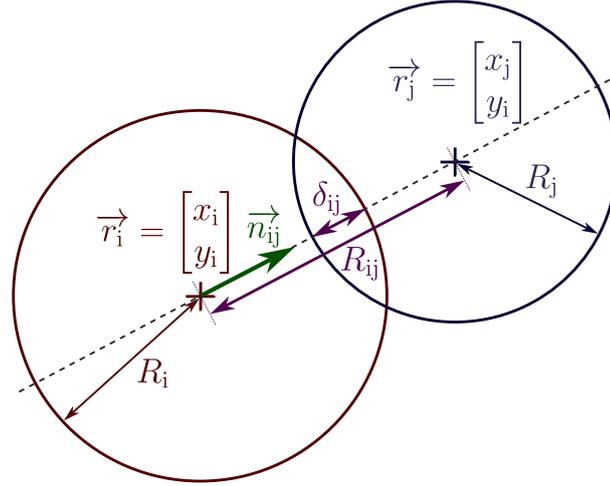


FIGURE 2.3 – Schéma d'un contact entre deux grains et définition des notations utilisées.

A Stratégie générale

Nous allons discrétiser le temps, et calculer à chaque pas de temps toutes les forces subies par chaque grain. On intégrera ensuite les équations du mouvement de chaque grain pour obtenir le nouvel état du système. C'est donc une approche très physique, qui nous donnera un contrôle très précis de la façon dont nous souhaitons modéliser les forces de contact. Il faut donc choisir et paramétrer cette modélisation judicieusement. La méthode et la modélisation des actions mécaniques sont similaires à celles détaillées dans la thèse de Jérémy Sautel parue en 2021 [Sautel, 2021]. Le système numérique étudié est un système 2D (il est également possible de travailler en 3D, cependant nous avons restreint notre étude au cas 2D), une illustration des simulations numériques réalisées au cours de cette thèse est présentée sur la Figure 2.2, et les notations sont introduites sur la représentation schématique d'un contact sur la Figure 2.3.

On considère une situation simplifiée où deux grains, indicés i et j , sont en contact. Ils sont respectivement placés en $\vec{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$ et $\vec{r}_j = \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix}$, et leur rayon respectif est R_i et R_j .

On définit la longueur entre les deux centres $R_{ij} = \|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|$, le vecteur unitaire orienté de i vers j $\vec{n}_{ij} = (\vec{r}_j - \vec{r}_i)/R_{ij}$, l'écrasement $\delta_{ij} = R_i + R_j - R_{ij}$, et enfin le rayon réduit $R_{\text{eff}} = R_i R_j / (R_i + R_j)$, et le rayon moyen de l'ensemble des grains R . Remarquons que, vu nos notations, on a $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ et $R_{ij} = R_{ji}$ mais $\vec{n}_{ij} = -\vec{n}_{ji}$.

La physique du contact entre les grains peut maintenant être construite étape par étape.

B Répulsion et dissipation

Il semble naturel d'implémenter en premier un principe d'exclusion géométrique qui pénalise δ_{ij} . Une façon simple de réaliser cela est de calculer une force normale au contact (pour le grain j , dans la direction de \vec{n}_{ij} , et son opposé pour le grain i) proportionnelle à δ_{ij} (c'est donc un terme élastique) avec un coefficient k_N . Dans ce qui suit, on exprime la force exercée par le grain j sur le grain i .

Force de répulsion élastique

$$\overrightarrow{F}_{\text{élast},i} = -k_N \delta_{ij} \overrightarrow{n}_{ij} \quad (2.1)$$

Deux grains dont les trajectoires vont se croiser vont bien rebondir l'un contre l'autre avec cette force, mais aucune énergie ne sera perdue dans le processus. Il faut implémenter une dissipation, que l'on peut prendre par exemple visqueuse, c'est-à-dire une force proportionnelle à la dérivée temporelle de l'écrasement $\dot{\delta}_{ij}$, de coefficient γ et opposée au mouvement relatif des grains. On l'exprimera ainsi :

Force de frottement fluide

$$\overrightarrow{F}_{\text{visc},i} = -\gamma \frac{2R_{\text{eff}}}{R} \dot{\delta}_{ij} \overrightarrow{n}_{ij} \quad (2.2)$$

On a maintenant un modèle viscoélastique satisfaisant pour modéliser la partie normale du contact entre deux grains. Le choix de la valeur de k_N et γ est discuté plus bas (section I.8.A). Cependant, nous n'avons pour l'instant pas considéré la rotation des grains. Pour cela il nous manque la partie tangentielle, c'est-à-dire le frottement solide entre les deux surfaces.

C Modéliser le frottement solide

Le modèle historique d'Amontons et Coulomb [Amontons, 1699; Coulomb, 1785] décrit une phénoménologie simplifiée du frottement solide. Considérons la situation d'un bloc tracté sur une surface plane, on note T la force de traction, N la force normale qui est ici une constante égale au poids du bloc, et v la vitesse de glissement (situation représentée sur la Figure 2.4 (a)). Dans le modèle de Coulomb simple, soit il n'y a pas glissement ($v = 0$), et alors $|T| < \mu N$, soit il y a glissement ($v \neq 0$), alors $T = -\mu N \text{sign}(v)$. Cela est représenté sur la Figure 2.4 (b). On peut raffiner ce modèle en ajoutant la différence entre frottement statique et dynamique, mais il subsiste un problème pour exprimer la force numériquement dans le cas de non-glissement ; celle-ci est indéterminée puisque le modèle donne seulement une inégalité. On peut régulariser ce modèle (Figure 2.4 (c)) en remplaçant la discontinuité en $v = 0$ par une portion affine idéalement de pente élevée. Ce modèle peut fonctionner pour un contact bref mais des rotations résiduelles persisteront dans un empilement statique simulé de cette manière. Le modèle de Cundall [Cundall et Strack, 1979] rend également compte des lois de frottement d'Amontons-Coulomb tout en levant l'indétermination sur la force en cas de non-glissement en introduisant une portion affine en déplacement relatif des deux surfaces, noté ξ , plutôt qu'en leur vitesse. Ainsi on s'affranchit des rotations résiduelles et on modélise les contacts prolongés de manière plus réaliste, dépendante de leur histoire. Ce modèle est représenté sur la Figure 2.4 (d). On détaille ci-dessous comment l'exprimer pour nos grains.

Cette méthode repose sur le calcul du déplacement tangentiel total depuis le début du

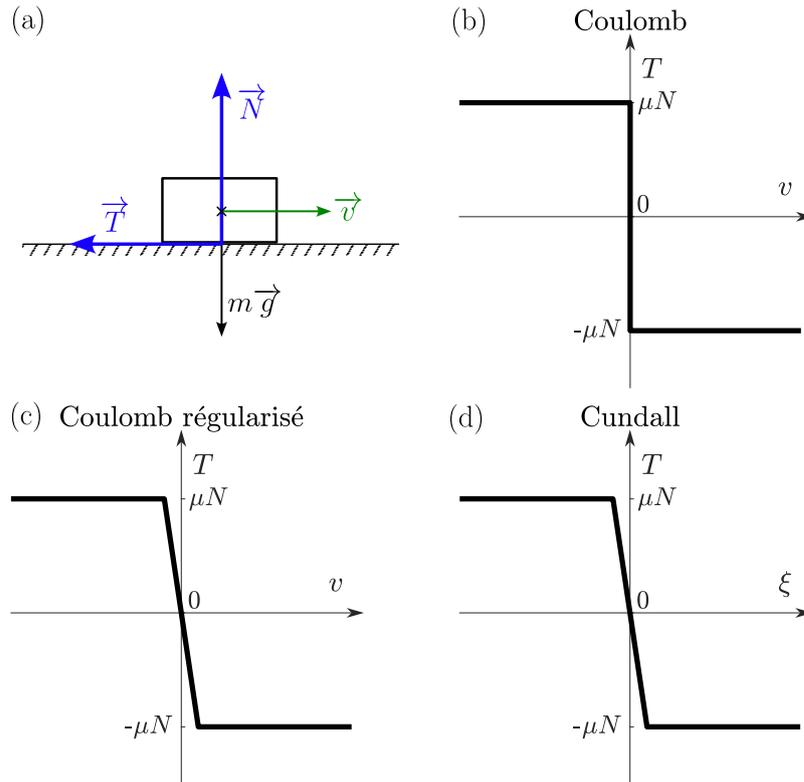


FIGURE 2.4 – (a) Schéma d'un bloc de masse m tracté à la vitesse \vec{v} sur une surface solide. Le poids $m\vec{g}$ est représenté, ainsi que les deux composantes de la réaction du support ; la composante normale \vec{N} et tangentielle \vec{T} ². (b) Modèle de Coulomb, $T = \vec{T} \cdot \vec{e}_x$ en fonction de v , indétermination en $v = 0$. (c) Modèle de Coulomb régularisé. (d) Modèle de Cundall, T en fonction du déplacement $\xi = \int_0^t v(u)du$ avec $v(u)$ la vitesse à l'instant u , et $t = 0$ au début du contact.

contact, défini par $\xi(t) = \int_0^t \|\overrightarrow{v_{t,i/j}}(u)\| du$ où t est la durée totale du contact et $\overrightarrow{v_{t,i/j}}$ est la vitesse relative tangentielle au point de contact obtenue par application de la formule de Varignon et donnée par

Vitesse relative tangentielle

$$\overrightarrow{v_{t,i/j}} = \vec{v}_i - \vec{v}_j - \delta_{ij} \vec{n}_{ij} + (R_i \vec{\Omega}_i + R_j \vec{\Omega}_j) \wedge \vec{n}_{ij}$$

avec \vec{v}_i et \vec{v}_j les vitesses des centres des grains i et j et $\vec{\Omega}_i$ et $\vec{\Omega}_j$ leur vecteur rotation. La force de contact subie par le grain i est alors définie par

2. On a représenté la situation où la réaction du support s'applique au centre de la surface de contact, ce qui n'est pas forcément le cas en pratique. Par ailleurs, la force de traction n'est pas représentée sur ce schéma.

Force tangentielle (modèle de Cundall [Cundall et Strack, 1979])

$$\overrightarrow{F}_{\text{tang},i}(t) = -\min\left(k_T \xi(t), \mu \|\overrightarrow{F}_{\text{norm},i}(t)\|\right) \frac{\overrightarrow{v}_{t,i/j}}{\|\overrightarrow{v}_{t,i/j}\|} \quad (2.3)$$

où $\overrightarrow{F}_{\text{norm},i} = \overrightarrow{F}_{\text{élast},i} + \overrightarrow{F}_{\text{visc},i}$ est la force normale de contact totale subie par le grain i , k_T la raideur tangentielle et μ le coefficient de frottement (on ne distingue pas le coefficient de frottement statique et dynamique). La valeur de ces deux paramètres est donnée plus bas. Ainsi définie, cette force conduit à un simple rappel élastique (de raideur k_T) jusqu'au seuil $\mu \|\overrightarrow{F}_{\text{norm},i}(t)\|$ au-delà duquel on rentre en régime de glissement donné par les lois de Coulomb.

D Force magnétique

Dans le chapitre 4, on étudie un empilement constitué de grains ordinaires et de grains aimantés. Notons μ_0 la perméabilité magnétique du vide. Pour deux grains i et j tous deux aimantés, dont le moment magnétique vaut respectivement \overrightarrow{m}_i et \overrightarrow{m}_j , le grain i exerce sur le grain j une force [Yung *et al.*, 1998] donnée par

Force magnétique [Yung *et al.*, 1998]

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F}_{ij} = & \frac{3\mu_0}{4\pi R_{ij}^4} ((\overrightarrow{n}_{ij} \wedge \overrightarrow{m}_i) \wedge \overrightarrow{m}_j + (\overrightarrow{n}_{ij} \wedge \overrightarrow{m}_j) \wedge \overrightarrow{m}_i \\ & - 2\overrightarrow{n}_{ij} (\overrightarrow{m}_i \cdot \overrightarrow{m}_j) + 5\overrightarrow{n}_{ij} ((\overrightarrow{n}_{ij} \wedge \overrightarrow{m}_i) \cdot (\overrightarrow{n}_{ij} \wedge \overrightarrow{m}_j))) \end{aligned} \quad (2.4)$$

et un moment [Landecker *et al.*, 1999] donné par

Moment magnétique [Landecker *et al.*, 1999]

$$\overrightarrow{M}_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi R_{ij}^3} (3\overrightarrow{m}_j \wedge (\overrightarrow{m}_i \cdot \overrightarrow{n}_{ij}) \overrightarrow{R}_{ij} - (\overrightarrow{m}_j \wedge \overrightarrow{m}_i)) \quad (2.5)$$

E Protocole numérique

On décrit ici le protocole général d'implémentation du «moteur granulaire», c'est-à-dire le cœur du code qui gère les collisions. Le contexte dans lequel ce moteur est utilisé dépend du problème étudié, et sera décrit dans la suite.

Boucle temporelle : À chaque pas de temps, les opérations suivantes sont exécutées dans l'ordre.

- On recherche les contacts entre grains avec la méthode des cellules liées. On assigne alors une subdivision de l'espace à chaque grain afin d'optimiser la recherche de contacts en les cherchant uniquement parmi les cellules voisines (voir [Figure 2.5](#)).
- On calcule ensuite les forces et moments avec les équations (2.1), (2.2), (2.3), éventuellement (2.4) et (2.5), sans oublier le poids.
- [Pour les simulations du patin uniquement] On intègre ensuite (par la méthode de Verlet explicitée ci-dessous) les équations du mouvement pour le patin : connaissant la somme des forces subies par l'ensemble des grains constituant le patin, on applique le principe fondamental de la dynamique (PFD) et le théorème du moment cinétique (TMC) pour calculer la nouvelle position du patin repérée par les trois variables (x, y, θ) (position selon l'axe x , position selon l'axe y , orientation sur l'axe de tangage θ). En plus des forces subies par l'ensemble des grains formant le patin, une force supplémentaire selon x modélise l'action du chariot se déplaçant à vitesse constante et entraînant le patin par l'intermédiaire d'un ressort (voir ci-dessous).
- On intègre ensuite les équations du mouvement pour l'ensemble des grains en utilisant l'algorithme de Verlet [[Verlet, 1967](#)].
- On sauvegarde ensuite éventuellement toutes les données utiles à l'analyse : positions des grains, vitesses, forces exercées, nombre de contacts, énergie cinétique totale, etc. On génère également régulièrement des images de l'état du système.

F Intégration de Verlet

On emploie le schéma d'intégration de Verlet qui donne un ordre 2 en dt . Il est construit en sommant le développement de Taylor de la position à $t + dt$ et $t - dt$, et ainsi les termes d'ordre impair se simplifient pour donner

$$\vec{x}(t + dt) = 2\vec{x}(t) - \vec{x}(t - dt) + \vec{a}(t)dt^2 + \mathcal{O}(dt^4) \quad (2.6)$$

G Cellules liées

Une portion significative du temps utilisé par le CPU est dédiée à déterminer si deux grains sont en contact. L'approche naïve consiste à calculer, pour un grain donné, la distance entre tous les autres grains de l'empilement, ce qui donne une complexité en $\mathcal{O}(N^2)$ (on a précisément $N(N - 1)/2$ comparaisons à faire si on compte chaque paire une seule fois). En 1967, Verlet a proposé une méthode [[Verlet, 1967](#)] consistant à stocker une liste mise à jour régulièrement des voisins de chaque grain (c'est-à-dire une liste des grains situés dans un rayon donné, choisi un peu plus grand que la portée maximale de l'interaction). Nous adoptons une autre méthode de recherche de contacts optimisée, appelée méthode des cellules liées [[Hockney et Eastwood, 1981](#)], reprenant la même idée que Verlet.

Cette méthode consiste à découper l'espace en subdivisions appelées cellules, puis à associer à chaque particule la cellule à laquelle son centre appartient (cette opération est peu coûteuse en calculs). Typiquement pour une simulation granulaire 2D, on divise l'espace en carrés dont le côté est égal (ou éventuellement supérieur) au diamètre du plus grand grain. Ainsi, on s'assure que même dans le pire scénario (grain de grand diamètre localisé pile à la limite d'une cellule), toutes les interactions de contact possibles sont

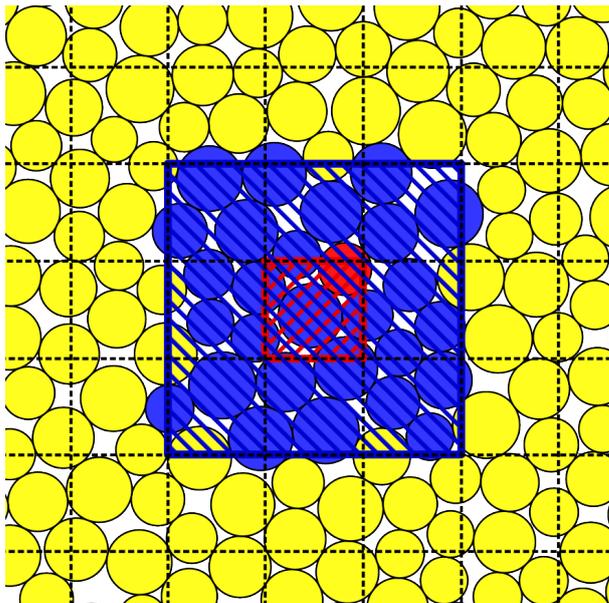


FIGURE 2.5 – Illustration de la méthode des cellules liées. Le découpage en cellules est représenté en traits pointillés noirs. Lorsqu'on calcule les contacts du grain en rouge, il suffit de considérer les grains de la cellule qui contient son centre (hachurée en rouge) ainsi que les huit cellules voisines, soit la zone hachurée en bleu et les grains bleus dont le centre est dans cette zone. Tous les autres grains, en jaune, sont ignorés pour le calcul.

uniquement avec les grains de la cellule dans laquelle est situé le grain en question, et avec les grains localisés dans les 8 autres cellules voisines (4 côtés et 4 diagonales, on en aurait 26 en 3D).

Il se trouve que cette méthode s'avère aussi utile pour le calcul des forces magnétiques. Bien que non nulles à grande distance, la force entre deux dipôles magnétiques distants de d décroît comme $1/d^4$ tandis que le moment décroît comme $1/d^3$ (équations (2.4) et (2.5)). Pour gagner beaucoup de temps de calcul, il est intéressant d'introduire une portée finie pour ces forces aussi, pour cela il est très simple de réutiliser le découpage en cellules défini pour les forces de contact. On peut ensuite considérer pour le calcul des forces magnétiques non seulement les cellules voisines mais aussi celles qui sont plus distantes. On montrera qu'il est inutile de chercher au-delà de 2-3 cellules adjacentes dans toutes les directions, soit 25 (5^2) ou 49 (7^2) cellules au total.

I.3 Grains éveillés et grains dormants

Une optimisation supplémentaire que l'on peut implémenter dans le cas du patin consiste à simuler seulement une partie des grains, dans la zone active c'est-à-dire le voisinage du patin lui-même. En effet, il est inutile de calculer les forces des grains qui ne vont certainement pas bouger, à savoir ceux qui n'ont pas encore été affectés par le passage du patin, et ceux qui l'ont déjà été. Le passage de la zone active sur l'empilement existant peut provoquer des explosions si l'on ne fait pas attention (on peut imaginer qu'un grain actif pénètre un grain inactif puisque celui-ci n'existe pas du point de vue de la simulation, et dès que ce dernier est activé la simulation explose localement). Pour cela

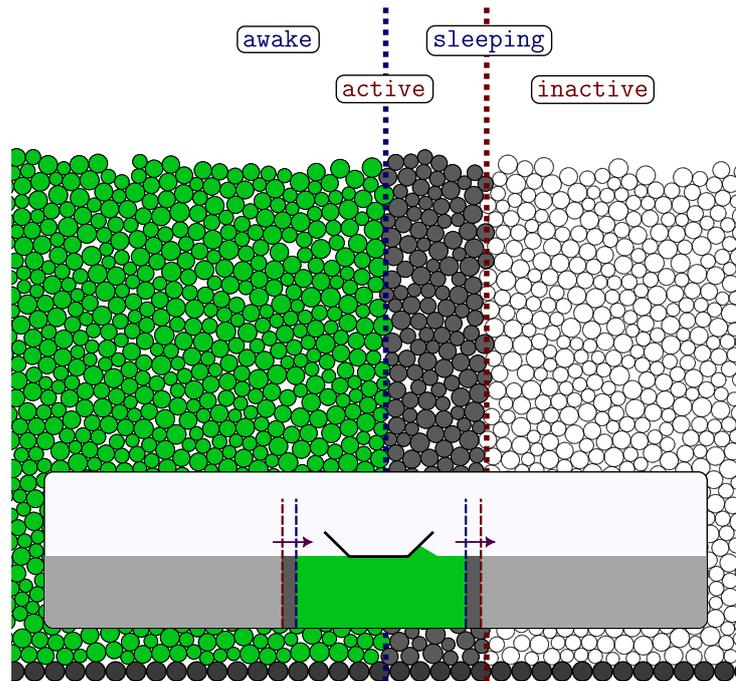


FIGURE 2.6 – Représentation de la frontière entre la zone simulée (en vert, à gauche) et non simulée (en blanc, à droite), avec la zone de grains figés en gris permettant la transition. Un insert dans la figure représente la zone active autour du patin, celle-ci le suit dans son mouvement.

nous avons créé deux propriétés booléennes à nos grains : `active` et `sleeping`. Un grain hors de la zone (inexistant), lorsqu'il arrive dans celle-ci, est d'abord activé puis réveillé. Il faut donc distinguer les grains :

- **Actifs et éveillés** : ils sont donc simulés normalement.
- **Actifs et dormants** : ils sont pris en compte dans le calcul des forces (ils sont donc vus comme solides par les grains éveillés) mais leur position n'est jamais mise à jour ; ils sont figés dans l'espace.
- **Inactifs et dormants** : ils ne sont pas pris en compte dans le calcul des forces.

Les grains figés (actifs mais dormants) doivent former un «mur» d'au moins 1 grain de large pour éviter le problème mentionné juste ci-dessus. La situation est représentée sur la [Figure 2.6](#). Le calcul de la zone active est actualisé à chaque fois que le patin a parcouru une distance d'une fraction de grain.

L'écriture d'un fichier image dans cette zone active, suivant le patin au cours de son mouvement, permet une bonne visualisation du phénomène, analogue aux images obtenues expérimentalement. Par ailleurs, pour certains calculs (champ de vitesse ou tenseur des contraintes par exemple), il est utile d'écrire uniquement les données des grains éveillés pour réduire l'utilisation de la mémoire tout en conservant les données intéressantes.

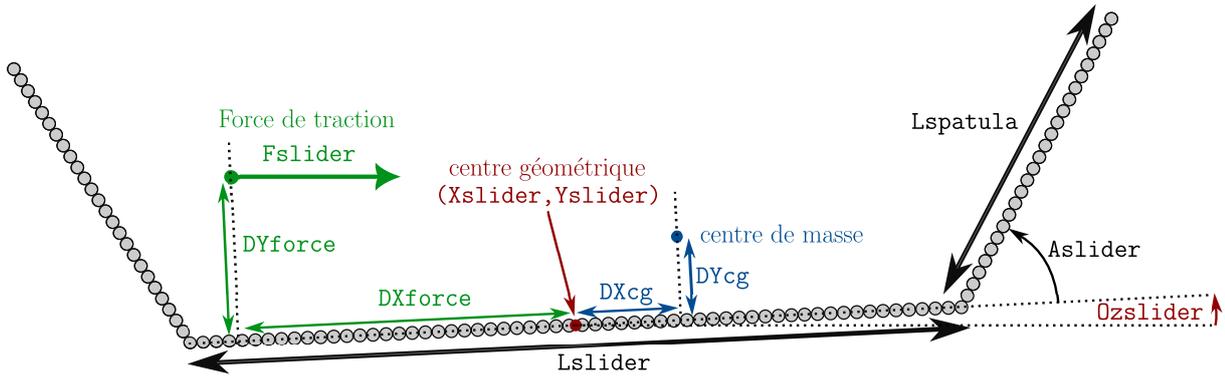


FIGURE 2.7 – Définition des grandeurs utiles à l’implémentation du patin.

I.4 Conditions aux limites

Dans le cadre de l’étude du patin, les conditions aux limites à droite et à gauche de la boîte de la simulation sont un mur lisse exerçant une simple répulsion élastique, ces régions ne sont de toute façon jamais approchées par le patin et sont de peu d’intérêt. Pour les grains magnétiques, les conditions aux limites sont périodiques selon x , ce qui signifie qu’un grain sortant à droite de la boîte se téléporte à gauche et implique que les fonctions de calcul de distance et des cellules liées ont été adaptées en conséquence. Pour la visualisation, on représente souvent des clones des grains proches de la frontière placés de l’autre côté pour signifier les conditions aux limites périodiques.

La condition aux limites inférieure est une rangée de gros grains fixes servant de sol à la simulation pour favoriser le non-glissement des grains sur cette surface. Pour le cas du patin où le sol est horizontal, on dispose simplement des grains de rayon $1.2R$ côte à côte. En revanche, pour l’écoulement sur plan incliné le problème est résolu par [Jing *et al.* \[2016\]](#) et nous fixons les grains à partir de leurs calculs. Nous avons choisi des grains de rayon $2R$ et espacés de $5R$, ce qui dessine une rugosité conduisant à une condition de non glissement pour les conditions étudiées.

I.5 Implémentation du patin

Pour l’étude du patin tracté sur un lit granulaire, on choisit d’implémenter le patin comme un ensemble de grains mécaniquement liés. On pourrait ajouter une force de liaison entre les grains du patin, les forçant à conserver un arrangement spatial donné, mais cette approche présente plusieurs inconvénients. Cela introduirait un paramètre supplémentaire (lié à la rigidité du patin), dont le rôle serait à clarifier dans le phénomène. Pour rendre le patin très rigide, il faudrait des forces de cohésion très importantes, donc des grains très rigides pour éviter de grandes interpénétrations, ce qui limiterait notre incrément temporel (voir [section I.8.A](#)). Cette procédure se rapproche du travail fait lors de l’étude d’un agrégat magnétique unique dans la [section IV.2](#).

Par simplicité, nous avons choisi d’implémenter un patin infiniment rigide. On l’obtient en définissant la position des grains le constituant à partir de leur indice et de la position du patin lui-même, totalement définie par les trois nombres flottants X_{slider} , Y_{slider} , O_{slider} qui sont respectivement la position horizontale et verticale de son

centre géométrique, et l'angle formé par le patin avec l'horizontale. Ces grandeurs sont représentées en rouge sur la [Figure 2.7](#). Le centre géométrique est placé au milieu de la surface inférieure du patin, et le centre de masse du patin n'est pas forcément confondu avec son centre géométrique³, on définit donc les variables DX_{cg} et DY_{cg} qui repèrent sa position relative au centre, et on discute leur effet dans la [section II.2.B](#). Dans sa version la plus simple, le patin est simplement constitué de trois segments rectilignes (base, spatule avant, spatule arrière). Les paramètres géométriques de cette forme sont la longueur des segments exprimées en nombre de grains : L_{slider} pour la base et $L_{spatula}$ pour les spatules (symétriques), faisant un angle A_{slider} avec la base (grandeurs en noir sur la [Figure 2.7](#)). Le patin a d'autres paramètres importants pour la simulation : sa masse M_{slider} et son moment d'inertie I_{slider} .

Pour implémenter la force de traction, on définit un «chariot numérique» se déplaçant à vitesse constante V_{slider} , c'est-à-dire un flottant noté $X_{trolley}$ augmentant à taux constant représentant sa position. Ce chariot est relié à un point du patin par l'intermédiaire d'un ressort (analogue au cas expérimental du premier montage), autrement dit la force de traction F_{slider} est proportionnelle à la différence $X_{slider} - X_{trolley}$. On verra que la constante de proportionnalité, notée K_{slider} , joue un rôle non négligeable dans la physique du problème ([chapitre 3, section I.2.D](#)).

I.6 Initialisation

A Étude du patin

La génération de l'état initial est une procédure à part qui n'est réalisée qu'une fois et dont le résultat est ensuite utilisé pour de nombreuses simulations. Les grains sont initialement disposés sur les nœuds d'un quadrillage peu dense et on leur donne une faible vitesse aléatoire afin d'obtenir ensuite un empilement bien mélangé, les rayons sont uniformément distribués entre -20% et $+20\%$ de la valeur moyenne R , afin d'éviter leur cristallisation. Le patin, représenté par un ensemble de grains mécaniquement liés, n'est pas introduit dans cette partie. On attend ensuite que l'empilement soit totalement sédimenté (on peut le vérifier en suivant l'évolution de l'énergie cinétique totale) puis on écrit toutes les positions et les rayons des grains dans un fichier. On peut ainsi générer plusieurs états initiaux différents en tirant d'autres nombres aléatoires lors de la détermination des vitesses initiales et des rayons. La génération numérique d'un nombre pseudoaléatoire prend en entrée un entier appelé la graine, deux états générés avec des graines différentes seront donc microscopiquement différents mais auront les mêmes propriétés macroscopiques. L'utilisation de ce principe s'avère très utile pour extraire le comportement statistique lorsque le système est sensible aux conditions initiales, on peut répéter les simulations en changeant la graine et obtenir le comportement moyen ainsi que l'écart-type. La simulation du patin commence par charger un état pré-généré, puis ajoute le patin à la surface. La simulation est arrêtée lorsque le patin a parcouru la quasi totalité de la piste.

3. Dans la grande majorité des simulations (sauf dans la [section II.2.B](#)), le centre de masse sera bien confondu avec le centre géométrique. On considérera dans la suite que c'est le cas lorsque ce n'est pas précisé.

B Grains magnétiques

Dans le contexte de l'étude des grains magnétiques, le processus d'initialisation est sensiblement différent. Il n'y a pas de préchargement d'états sédimentés, cette fois l'initialisation et l'écoulement se font au sein du même programme. Comme ci-dessus, on place d'abord les grains sur une grille avec un rayon tiré aléatoirement dans la gamme $R \pm 20\%$, une vitesse aléatoire à laquelle on ajoute une vitesse horizontale positive. Cette vitesse sert à démarrer l'écoulement, et à réduire le temps de transition vers le régime stationnaire. On attend ensuite (typiquement 15 s) que cet état stationnaire soit atteint, puis on active progressivement⁴ la magnétisation des aimants. On laisse ensuite le système évoluer plusieurs centaines de secondes.

I.7 Grandeurs calculées

Certaines grandeurs peuvent être obtenues directement à partir des données de simulation. D'autres nécessitent un minimum de calculs et parfois une moyenne spatiale et/ou temporelle suffisante (par exemple la fraction volumique, le profil de vitesse, le champ de pression). Nous détaillons ici la procédure retenue pour le calcul de topographie dans les simulations du patin, et pour le calcul des agrégats magnétiques, car ces deux grandeurs sont particulièrement importantes dans nos deux études.

A Calcul de topographie

La topographie d'un lit granulaire peut être obtenue de manière «naïve» par comptage de grains dans des tranches verticales, ce qui conduit à une mauvaise résolution spatiale ou bien à un bruit très élevé si les tranches sont trop fines. La méthode que nous avons utilisé repose sur ce découpage en tranches verticales, mais nous calculons ensuite le recouvrement réel entre chaque grain et la tranche considérée par un calcul de surface. Ainsi, on assigne à chaque tranche un nombre correspondant à la somme de toutes les surfaces des intersections entre chaque grain et cette tranche, ce qui réalise un comptage de la quantité de matière présente dans cette tranche. Pour une compacité homogène (ce qui est globalement le cas dans nos simulations), on a donc bien un calcul de topographie satisfaisant et ce même pour des tranches relativement fines. En pratique, on a majoritairement découpé l'espace en 5000 tranches verticales.

B Calcul des agrégats magnétiques

L'étude des agrégats magnétiques demande une étape de calcul préalable qui regroupe tous les grains en contact entre eux. La méthode que nous avons utilisé consiste à considérer un premier grain magnétique, et à chercher tous les grains qui sont en contact avec ce dernier. On attribue à tous ces grains une étiquette d'agrégat, par exemple ici le numéro 1. Ensuite, on procède de manière récursive en cherchant tous les grains magnétiques en contact avec chacun des grains magnétiques étiquetés «1». On va retrouver des grains déjà comptés, que l'on ignore, et potentiellement des nouveaux grains qui sont connectés au premier au second degré, c'est-à-dire qu'ils sont connectés à un grain qui est connecté

4. Mais rapidement devant la vitesse d'établissement du régime stationnaire, typiquement on augmente la magnétisation linéairement pendant 0.3 s jusqu'à sa valeur finale.

à ce dernier. On procède ainsi jusqu'à ce que, d'une itération à une autre, le nombre total de grains dans l'agrégat 1 n'ait pas changé. On a alors terminé de compter cet agrégat. On passe ensuite au grain magnétique suivant, et s'il fait déjà partie d'un agrégat on l'ignore, sinon on procède de même en notant l'agrégat «2», et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les grains magnétiques aient été étiquetés.

I.8 Choix des paramètres

De très nombreux paramètres régissent le comportement de la simulation. Il convient de suivre certaines règles en choisissant ces paramètres [Pöschel *et al.*, 2001]. En particulier, un mauvais choix des paramètres de simulation peut conduire à un comportement non physique. Il faut aussi prendre le soin de fixer les paramètres convenablement pour donner un sens aux unités de mesure. Ces grandeurs s'exprimant en unités physiques⁵, on cherche au maximum à se rapprocher des conditions expérimentales pour faciliter la comparaison des résultats.

A Des grains

Rayon et masse : Afin de se rapprocher des conditions expérimentales, on calcule la masse d'un grain à partir d'une masse volumique réaliste comme celle du verre par exemple⁶. On considère pour cela que notre simulation 2D est équivalente à une simulation 3D de cylindres de longueur $2R$. La masse d'un grain de rayon R est donc fixée à $m_g = 2\pi\rho R^3$ et on prend $\rho = 2.5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. On prend ensuite un rayon adapté, typiquement le rayon équivalent moyen des grains de sable est $R = 420 \mu\text{m}$ (voir section II.7).

Calcul du temps de contact : Dans notre modèle, le temps typique d'un contact peut être exprimé à partir des expressions de la force normale, somme des équations (2.1) et (2.2), en ignorant la gravité. On trouve qu'il est indépendant de la vitesse des grains et vaut $\delta t = 2\pi\sqrt{\frac{m_g}{k_N}}$.

Adaptation du pas de temps : L'idée est de découper un contact en plusieurs dizaines d'incrément temporels. Si $\delta t \sim dt$, la force de répulsion élastique peut devenir absurdement grande et conduire à des explosions. On choisit alors le pas de temps pour avoir environ $\delta t = [20 - 100] \times dt$. Il faut prendre en compte le critère plus restrictif lorsqu'on a aussi un objet solide d'extension spatiale grande (le patin, voir ci-dessous).

Choix de la raideur : La raideur tangentielle est choisie par la relation $k_T = \frac{2}{7}k_n$ ce qui permet des simulations réalistes [Cundall et Strack, 1979]. Cependant, le choix de la raideur normale k_N n'est pas trivial. Lors d'un contact entre deux grains réels, par exemple en verre, une collision brève s'accompagne d'une déformation temporaire du solide. En considérant que le grain est fait d'un matériau élastique, cette déformation stocke de l'énergie sous forme élastique avant de la restituer dans la collision. Le module d'élasticité, ou module de Young, noté E et exprimé en Pa, relie la contrainte à la déformation

5. On donne des unités physiques aux grandeurs numériques afin de leur donner du sens, bien qu'elles soient arbitraires et n'aient pas de sens *intrinsèque*.

6. On utilisera dans les expériences des billes de verre ou du sable naturel.

du matériau. L'interpénétration de nos disques numériques modélise ce comportement élastique, et on peut relier E à k_N . Cependant, l'utilisation d'une valeur réaliste de k_N pour un matériau dur conduit à la nécessité de discrétiser le temps en intervalles très petits, comme on vient de le voir. Il faudrait donc énormément de calculs pour simuler le matériau pendant une courte durée. Les simulations ont été réalisées avec une raideur normale largement inférieure à la valeur réelle pour du verre, mais permettant des calculs plus rapides. Cette valeur est suffisante pour garantir une profondeur de pénétration δ_{ij} largement inférieure à la taille d'un grain. Ce choix d'une faible raideur pour réduire le temps de calcul est largement utilisé dans ce type de simulations et bien qu'il s'agisse d'un paramètre important [Lommen *et al.*, 2014], une étude par Malone et Xu [2008] conclut que sa réduction n'affecte pas les résultats.

Choix de la restitution : On introduit une faible dissipation γ . Le coefficient de restitution en vitesse, noté e , s'écrit

$$e = \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{2k_N m_g}{\gamma^2} - 1\right)}}\right) \quad (2.7)$$

Pour nos simulations, nous avons fixé e à 0.88.

B Du patin

Adaptation du pas de temps : Le pas de temps est contraint par la réflexion menée plus haut. Cependant, notre simulation comporte un patin qui se comporte comme un objet solide de taille bien supérieure à un unique grain (de l'ordre de cent fois plus grand). Le mouvement des grains constituant le patin étant conditionné par la somme des forces subies par ce dernier, il se peut que le déplacement d'un grain de l'ensemble conduise à un grand recouvrement avec un des grains libres de l'empilement. En pratique, ce qui a souvent été observé est l'enfoncement de la partie arrière du patin dans les grains de surface de l'empilement. Ce dernier peut conduire à un recouvrement très grand, la force de répulsion localement créée n'étant pas immédiatement suffisante pour compenser l'inertie du mouvement du patin. Ce problème se trouve amplifié si le mouvement du patin est brutal et que celui-ci est massif et possède un grand moment d'inertie. On peut alors obtenir une situation où l'un des grains du patin s'enfonce de 10% ou plus dans un grain de l'empilement, et alors la force de répulsion devient énorme (on considère qu'un enfoncement de l'ordre de 1% est acceptable). Le patin est alors envoyé brutalement vers le haut, et la divergence locale des forces peut se propager de proche en proche dans l'empilement, causant une explosion des grains⁷. Un tel événement est représenté sur les trois images successives de simulation sur la [Figure 2.8](#). Les vecteurs vitesse des grains sont également représentés, leur longueur étant proportionnelle à la norme de la vitesse, et leur couleur codant leur direction. La couleur des grains représente quant à elle leur déplacement horizontal total.

7. Malgré le caractère indésirable car non physique de ces explosions, les images produites ont un certain caractère esthétique que l'on peut apprécier sur la [Figure 2.8](#) et qui leur a notamment valu de servir de couverture aux Highlights 2022 du laboratoire.

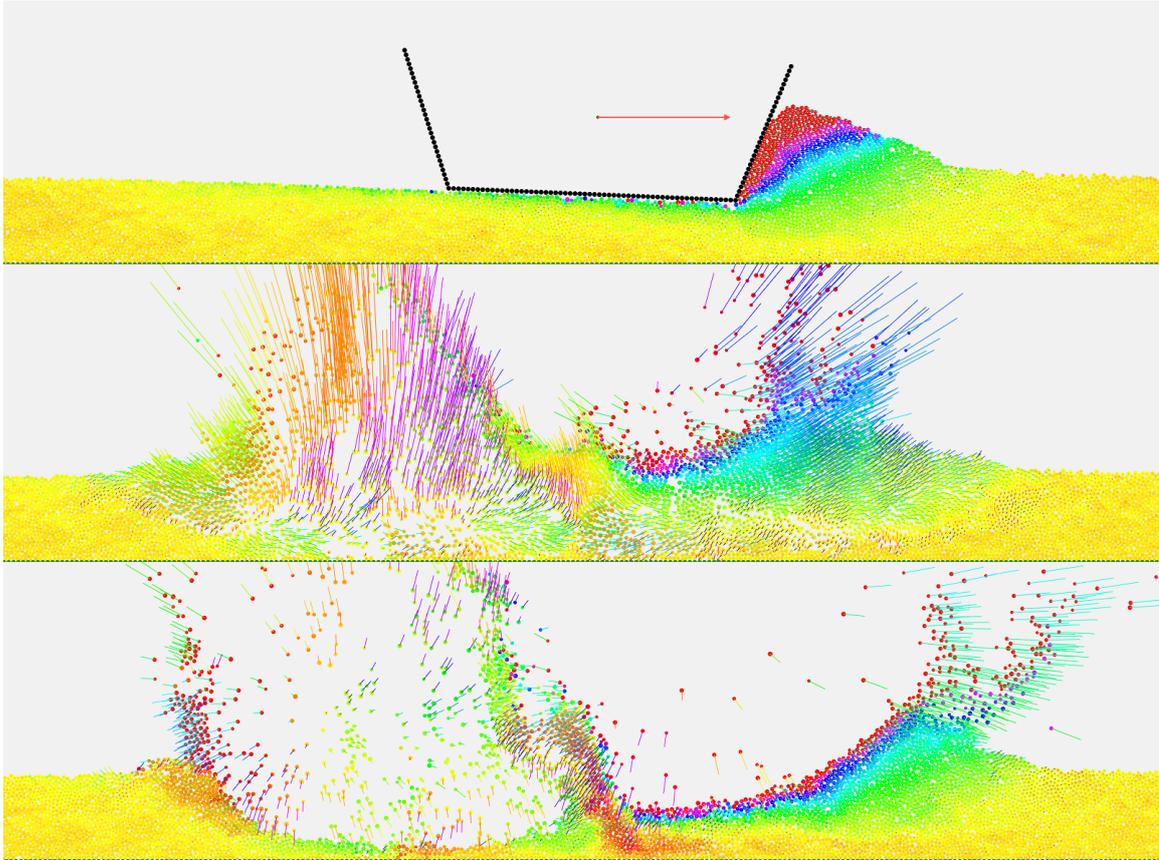


FIGURE 2.8 – Explosion numérique conséquence d’un mauvais choix de paramètres. On devine (et on peut le vérifier en analysant les données de la simulation) que l’explosion a démarré au niveau de l’arrière du patin puis s’est propagée par l’intermédiaire de ce dernier. La couleur des grains illustre leur déplacement horizontal total depuis le début de la simulation, et leur vecteur vitesse instantané est également représenté d’une ligne colorée en fonction de son orientation.

Moment d’inertie du patin : Le moment d’inertie du patin I peut être défini par celui d’une distribution de masses ponctuelles à la place de chaque grain le constituant. La masse totale M est alors uniformément répartie entre les grains du patin et I s’écrit

$$I = \sum_{i=1}^{N_s} m_i d_i^2 = M \sum_{i=1}^{N_s} d_i^2 \quad (2.8)$$

avec $N_s = L_{\text{slider}} + 2 \times L_{\text{spatula}}$, $m_i = M/N_s$ la masse du grain i , et d_i sa distance au centre géométrique du patin, pour un calcul du moment d’inertie autour d’un axe perpendiculaire au plan de la simulation et passant par ce point. La simulation permet d’étudier des cas moins physiques afin de tester des hypothèses. Ainsi, il peut aussi être fixé à une constante, c’est ce qui a été fait en pratique après avoir constaté qu’il n’avait aucune influence sur son mouvement tant qu’il restait inférieur à une valeur seuil. Étant donné qu’on travaille exclusivement dans le régime quasistatique, il est attendu que I n’ait pas d’influence. On discute davantage de l’effet de I sur le mouvement du patin dans la [section I.2.C](#), et dans l’[annexe A](#).

C Récapitulatif

Pour finir cette discussion sur les paramètres numériques, on donne la gamme des valeurs typiquement explorée dans les différentes simulations, d'abord pour le patin (chapitre 3) dans la Table 2.1, puis pour les grains magnétiques (chapitre 4) dans la Table 2.2.

TABLE 2.1 – Paramètres utilisés pour la simulation du patin tracté sur un lit granulaire.

Paramètre	Description	Valeur numérique
N	Nombre de grains	10^5
R	Rayon d'un grain	$250 \pm 50 \mu\text{m}$
m_p	Masse d'un grain de rayon R	$1.25 \times 10^{-7} \text{ kg}$
k_N	Raideur normale	$1 \times 10^3 \text{ N/m}$
dt	Pas de temps	$5 \times 10^{-6} \text{ s}$
γ	Dissipation visqueuse	$0.01 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$
h_0	Hauteur du lit granulaire	8.4 mm
v	Vitesse de traction ⁸	$[1 - 1000] \text{ mm/s}$
m	Masse du patin	$[1.25 - 25] \times 10^{-2} \text{ g}$
l	Longueur du patin	$[12 - 180] \text{ mm}$
α	Angle de la spatule	$[5 - 120]^\circ$
δ_x	Horizontal force position	$[-50 - +50] \text{ mm}$
δ_y	Vertical force position	$[-20 - +20] \text{ mm}$

TABLE 2.2 – Paramètres utilisés pour la simulation des grains aimantés sur un plan incliné.

Paramètre	Description	Valeur numérique
N	Nombre de grains	15×10^3
R	Rayon d'un grain	$500 \pm 100 \mu\text{m}$
m_p	Masse d'un grain de rayon R	$1.3 \times 10^{-6} \text{ kg}$
k_N	Raideur normale	$4 \times 10^3 \text{ N/m}$
dt	Pas de temps	$1.5 \times 10^{-6} \text{ s}$
γ	Dissipation visqueuse	$5.85 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$
h	Hauteur du lit granulaire	120 mm
μ	Magnétisation	$[5 \times 10^{-6} - 10^{-4}] \text{ A/m}^2$
Φ	Concentration	$[1 - 15] \%$

8. Dans la plupart des simulations, on fixe $v = 40 \text{ mm/s}$.

II Méthodes expérimentales

II.1 Avant-propos

Toutes les expériences réalisées concernent uniquement la première configuration, celle du patin tracté sur un lit de grains (Figure 2.1 (a)). Trois versions successives du dispositif expérimental ont été étudiées, avec des caractéristiques différentes et des améliorations successives. La seule configuration finalement utile pour l'étude du phénomène présenté dans le chapitre 3 est la dernière. Cependant, on présente ici les trois dans un but pédagogique et car l'élaboration de la dernière version découle naturellement des deux autres. En effet, le premier montage a motivé l'utilisation d'une piste plus grande pour étudier le mouvement au-delà de la course permise, le second montage est un test rapide du comportement sur une course plus longue confirmant l'intérêt de cette étude, et le dernier montage est une version instrumentée et mieux pensée de ce test qui permet des courses arbitrairement longues. Certaines caractéristiques pertinentes de ces trois montages sont résumées dans la Table 2.3.

TABLE 2.3 – Caractéristiques principales des trois versions successives du montage expérimental

	Version 1	Version 2	Version 3
Lit granulaire	Statique	Statique	En mouvement
Longueur de la course	40 cm	180 cm	∞ ⁹
Images	Webcam	Smartphone	Caméra Basler
Mesure de force	Horizontale ¹⁰	non	Horizontale & Verticale ¹¹
Mesure de topographie	Télémètre	non	Télémètre
Interface	LabView	non	Matlab

II.2 Lits statiques

Cette première approche présente les montage expérimentaux où le patin est déplacé sur un lit granulaire fixe dans le référentiel du laboratoire.

A Première version

La première version du montage expérimental est détaillée sur la Figure 2.9. On étudie une situation proche du système classique « masse-ressort » tracté à vitesse constante, largement utilisé pour l'étude du frottement solide. Des billes de verre sont placées dans une cuve en plexiglas. On dispose un patin à leur surface, que l'on tracte par l'intermédiaire d'une lame métallique fixée à un chariot entraîné à vitesse constante par un moteur à courant continu et un réducteur. Trois ensembles motoréducteurs différents ont été utilisés, permettant d'explorer différentes vitesses de traction allant de $\sim 10 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ à $\sim 6 \text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$.

9. La longueur de la course n'est pas limitée par le montage et on peut continuer l'expérience tant qu'on remplit le réservoir de grains au fur et à mesure.

10. Par un capteur inductif.

11. Par deux jauges de contrainte.

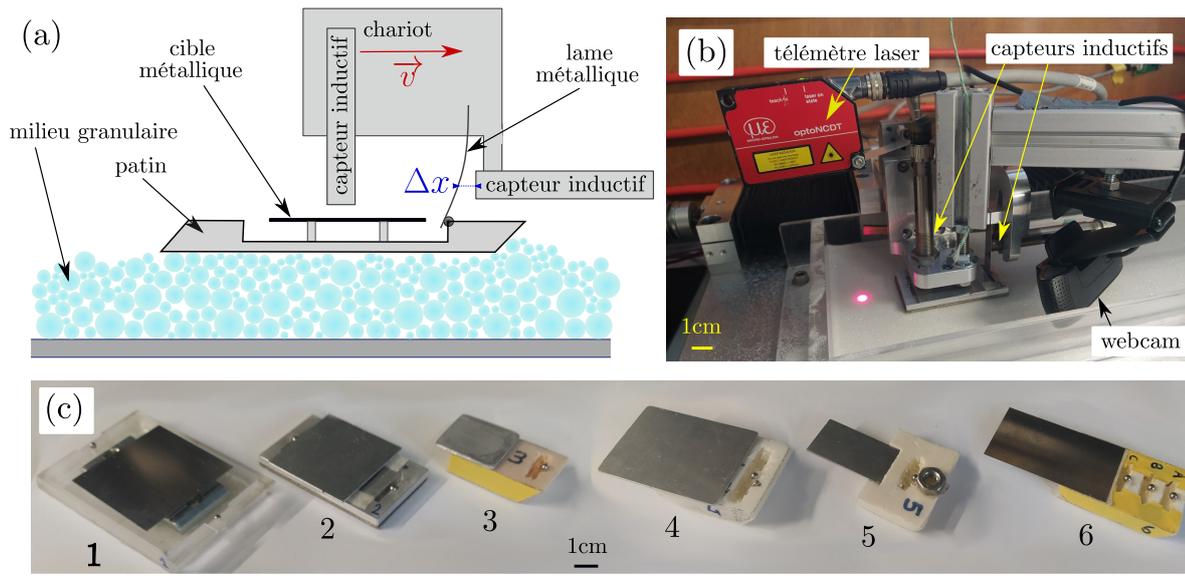


FIGURE 2.9 – (a) Schéma du premier dispositif expérimental. Un patin est tracté à la surface d'un milieu granulaire via une lame métallique dont on mesure la déflexion Δx à l'aide d'un capteur inductif (la taille des grains est exagérée). Un deuxième capteur inductif permet de mesurer l'altitude de la cible métallique placée à la surface du patin. La lame est fixée à un chariot entraîné à vitesse constante v . (b) Photo du dispositif. Un télémètre laser et une webcam sont également présents sur le chariot afin de mesurer la topographie des grains dans le sillage du patin et prendre des photos du patin au cours de son mouvement. (c) Différents patins utilisés, numérotés de 1 à 6 (détaillés dans la Table 2.4).

Différents patins ont été utilisés (Figure 2.9 (c), Table 2.4), et numérotés de 1 à 6. On peut ainsi faire varier leur taille, leur masse (et sa distribution), leur forme (en particulier le profil de leur face avant), et la position du point d'application de la force de traction. Une monocouche de grains (les mêmes grains que ceux qui composent le lit) a été collée sur la face inférieure de chacun de ces patins afin d'imposer un contact grain/grain et de s'affranchir d'une éventuelle dépendance aux propriétés frictionnelles du matériau utilisé pour la fabrication du corps du patin. Une cible métallique est fixée au-dessus des patins afin de permettre la mesure de leur altitude par un capteur inductif. Leurs caractéristiques sont résumées dans la table 2.4.

La force est transmise au patin via un contact ponctuel entre la lame et une bille métallique fixée au patin. Notons que la force est essentiellement horizontale mais, même en ignorant le frottement au niveau de la lame, il peut exister une composante verticale vers le bas non négligeable pour les faibles raideurs permettant de grandes déflexions. Il peut aussi exister une composante verticale en raison du frottement solide entre les deux surfaces en contact.

La cuve et la platine de translation (Schnaefler Technologies Sechnr, course maximale 40 cm) sont fixées sur une plaque d'acier épaisse disposant de 4 pieds réglables reposant sur des blocs de mousse (leur rôle est de réduire les vibrations, voir section II.2.C). L'ensemble des éléments constituant le montage expérimental est placé dans une boîte dans laquelle

TABLE 2.4 – Caractéristiques des six patins utilisés lors des différentes expériences. Le patin 1 a été utilisé avec et sans lest (conduisant respectivement aux masses m et m'). On rappelle que α est l'angle de la spatule avant du patin.

Patin	Matériau	Taille ($L \times W$)	Masse	α
1	PMMA	$9.1 \times 6.0 \text{ cm}^2$	$m = 34.1 \text{ g}, m' = 63.4 \text{ g}$	$\pm 45^\circ$
2	aluminium	$7.1 \times 4.0 \text{ cm}^2$	$m = 41.2 \text{ g}$	90°
3	mousse	$3.9 \times 2.65 \text{ cm}^2$	$m = 5.85 \text{ g}$	45°
4	polystyrène	$3.5 \times 3.1 \text{ cm}^2$	$m = 16.93 \text{ g}$	45°
5	polystyrène	$2.3 \times 3.6 \text{ cm}^2$	$m = 4.94 \text{ g}$	45°
6	polystyrène	$3.8 \times 3.0 \text{ cm}^2$	$m = 8.42 \text{ g}$	45°

l'humidité et la température de l'air sont contrôlés.

B Grandeurs mesurées

Mesure de force : Un capteur inductif (Baumer, IPRM 12I9505/S14) est placé en regard de la lame métallique (Figure 2.9 (a)) et mesure sa déflexion notée Δx avec une précision micrométrique. Sa raideur en flexion est notée k , de sorte qu'on puisse exprimer la force appliquée au patin comme $F \simeq k\Delta x$ au premier ordre (on calibre la relation réelle ce qui permet de travailler au-delà du régime linéaire). La raideur k peut être déterminée à partir d'une mesure directe de la force exercée grâce à un capteur de force (Honeywell, FSS005WNGT). On obtient par exemple une raideur $k = 570 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ pour une lame d'épaisseur $e = 0.3 \text{ mm}$. La raideur peut être variée en modifiant l'épaisseur e de la lame utilisée, avec $k \propto e^3$ (module de flexion d'une poutre), on accède à des valeurs comprises entre 20 et $20 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ pour e compris entre 0.1 et 1 mm. On obtient une meilleure résolution du niveau de force appliquée au patin pour des faibles valeurs de k , mais on atteint alors de plus grandes déflexions conduisant à une force non horizontale. Il faut donc choisir une lame suffisamment rigide pour ne pas faire plonger le patin dans l'empilement granulaire. Dans la suite, on utilise la force adimensionnée définie par

$$F^* = \frac{F}{mg} \quad (2.9)$$

où m est la masse du patin utilisé et g l'accélération de la pesanteur terrestre.

Visualisation : Une webcam (Logitech, C920 HD PRO) est également fixée à un support solidaire du chariot afin de prendre régulièrement des photos du patin au cours de son mouvement à une résolution de 1920×1080 . Elle permet de visualiser l'angle du patin et son évolution sur l'ensemble de sa course, et de voir le talus de grains charrié par le patin à l'avant. Le programme LabView prend en charge la communication avec la webcam via le package NI-IMAQdx et permet notamment de visualiser les images capturées, régler la mise au point, modifier l'intervalle entre les captures et enregistrer les images sur le disque. Un programme Python permet ensuite de générer des films des expériences qui montrent de manière synchronisée les signaux mesurés et les images de la webcam.

Mesure d'altitude : Un second capteur inductif (Baumer, IPRM 12I9505/S14) est placé directement au-dessus de la cible métallique fixée sur le patin, permettant une mesure de son altitude. Dans le cas du patin 1, cette mesure est réalisée approximativement au centre de masse du patin. Pour les autres patins dont les dimensions sont différentes, cette mesure est déportée à un point situé derrière le centre de masse, ce qu'il faut prendre en compte lorsque l'on interprète les signaux d'altitude (en effet le signal mesuré peut alors varier si l'inclinaison du patin varie alors que l'altitude du centre de masse reste constante). C'est donc une mesure partielle mais instructive en complément de la mesure de topographie et des images capturées par la webcam.

Mesure de topographie : Un télémètre laser (Micro-epsilon, ILD1302-20) est également fixé au chariot et mesure la distance qui le sépare de la surface des grains, en un point situé dans le sillage du patin (quelques centimètres derrière l'arrière du patin). Il fournit donc une mesure de la topographie engendrée par son passage. Pour obtenir une précision satisfaisante, on réduit la gamme du capteur à son minimum, passant de 20 cm à 2 cm (la gamme de ce capteur est rendue réglable par le constructeur). Le capteur fournit alors une mesure suffisamment précise pour résoudre la taille des grains.

Électronique et interface : L'ensemble du matériel listé ci-dessus est relié à un ordinateur via une carte d'acquisition (National Instruments, NI 6035E). Un programme LabView développé durant le stage de Master pilote le moteur à courant continu qui entraîne la platine ainsi que la webcam, affiche et enregistre les données des différents capteurs à une fréquence d'échantillonnage de 1 kHz et permet à l'expérimentateur d'interagir avec le matériel via une interface graphique.

Contrôle du moteur et capteurs de fin de course : Le moteur à courant continu¹² (Crouzet) est alimenté par une alimentation double (TENMA, 72-10495). Deux relais (PhotoMos, AQZ260) permettent d'inverser le sens du courant afin de permettre le retour du chariot à sa position initiale après une expérience. Les deux sorties analogiques de la carte d'acquisition alimentent chacune un des deux relais, et le programme LabView coordonne leurs commutations (en laissant un délai d'une seconde entre l'ouverture du premier relais et la fermeture du second pour éviter tout risque de court-circuit). Par ailleurs, une sécurité permet d'éviter de continuer d'alimenter le moteur alors que le chariot est en fin de course. Des capteurs inductifs (Thomson, EN2-S) placés de part et d'autre de la platine de translation indiquent que le chariot arrive en fin de course. Une première sécurité est implémentée dans le programme LabView qui détecte ce changement d'état et coupe l'alimentation du moteur en ouvrant le relais correspondant. Cependant, cette sécurité n'est pas infaillible car il peut arriver que le programme se mette en pause et arrête de lire l'état des différents capteurs suite à une erreur d'écriture par exemple. Pour cette raison, une seconde sécurité physique a été implémentée, la sortie du capteur de fin de course étant directement utilisée pour piloter un relais supplémentaire monté en série du moteur. Ainsi, le moteur ne peut pas être alimenté si le capteur de fin de course est actif, à moins de maintenir un bouton poussoir validant la volonté d'outrepasser cette sécurité.

12. Trois ensembles de moteur et réducteur ont été utilisés, permettant des vitesses allant de $10 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ à $6 \text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$.

C'est donc une double sécurité, implémentée pour s'assurer d'éviter d'endommager la platine coûteuse.

C Sensibilité aux conditions externes

Le système étudié présente une forte sensibilité aux conditions externes.

Vibrations mécaniques : D'une part, les vibrations mécaniques même à un faible niveau peuvent déclencher des évènements de glissement [Lastowski *et al.*, 2015; Vidal *et al.*, 2019]. Afin de rendre l'expérience indépendante des vibrations externes, provoquées par exemple par le déplacement des expérimentateurs dans la salle, le montage expérimental est placé sur une épaisse plaque d'acier reposant sur de la mousse. Malgré cette isolation mécanique, un très léger coup à l'autre bout de la table est suffisant pour provoquer un glissement, témoignant de la forte sensibilité de l'expérience aux vibrations mécaniques (un exemple, provoqué par une commutation de l'électrovanne utilisée pour réguler l'humidité, est représenté sur la [Figure 2.10](#)). C'est pour cette raison qu'un moteur à courant continu est utilisé pour piloter la platine car un moteur pas à pas utilisé dans une ancienne version de l'expérience transmettait des vibrations forçant l'apparition d'un régime de glissement continu. Pour minimiser cette source de vibrations, l'axe du moteur à courant continu et l'axe de la platine sont couplés mécaniquement par un coupleur à soufflet (Huco Flex-B 536.34.2828) qui en absorbe une partie.

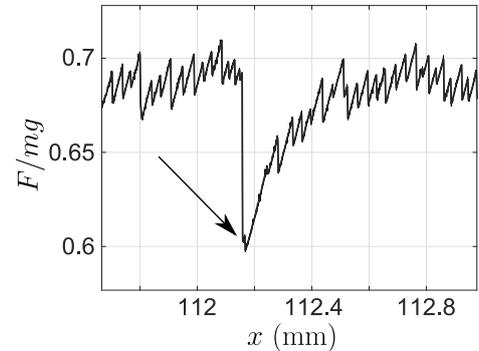


FIGURE 2.10 – Évènement de glissement anormalement important causé par des vibrations externes. Une commutation de l'électrovanne utilisée pour réguler l'humidité peut provoquer ce type d'évènements.

Température et humidité : D'autre part, le système est potentiellement sensible aux conditions de température et d'humidité ; les variations de température provoquant de la dilatation thermique et l'humidité provoquant de la cohésion via la formation de ponts capillaires entre les grains. Les différentes expériences sont réalisées à la même température et au même taux d'humidité relative afin de s'affranchir d'une dépendance des résultats à la météo du jour. Pour cela, la boîte qui contient le montage expérimental est équipée d'un contrôleur de température et d'humidité (Conrad, FOX-301A). Un ruban chauffant (RS-Pro, 379-750) est placée dans la boîte et alimenté par la sortie correspondante du contrôleur, tandis qu'un ventilateur brasse l'air afin d'uniformiser sa température. Ne disposant pas de système pour refroidir l'air à l'intérieur de la boîte, la température de consigne est fixée à 35 °C afin d'être toujours supérieure à la température ambiante. Le contrôleur pilote un relais qui alimente la résistance (240 Ω), produisant une puissance de chauffage de 150 W de manière logique : $P = 150 \text{ W}$ si $T < T_{\text{consigne}}$, $P = 0$ si $T > T_{\text{consigne}}$. Comme il existe un retard (inertie thermique) entre la production de chaleur et sa répercussion dans la mesure par la sonde, ce type de contrôle conduit à des oscillations importantes de température d'amplitude 3 °C et de période 15 min provoquant des cycles de dilatation thermique dont la signature est clairement mesurable dans les signaux

des capteurs inductifs. En installant un variateur en série du ruban chauffant, on réduit la puissance de chauffage à 60 W, et en déplaçant la sonde pour placer le thermocouple au plus proche de l'élément chauffant, on réduit largement le retard. Ainsi, la température de l'élément chauffant varie de $\pm 0.2^\circ\text{C}$ autour de 35°C avec une période de 2 min, conduisant à une température de l'air constante de 30°C (mesurée au niveau du chariot). Concernant l'humidité, une autre sortie du contrôleur pilote une électrovanne reliée au réseau d'air comprimé du laboratoire qui est à 5 % d'humidité relative. Cela permet un asservissement du taux d'humidité en ouvrant l'électrovanne lorsque l'humidité mesurée par la sonde dépasse la consigne afin de provoquer une fuite d'air sec dans la boîte. Cependant les commutations de l'électrovanne provoquent des vibrations mécaniques suffisamment importantes pour déclencher des événements perturbant l'allure du signal de force (Figure 2.10). Pour s'affranchir de ce problème l'électrovanne a été désactivée au profit d'une fuite continue d'air sec permettant une humidité de 5 % à l'intérieur de la boîte si celle-ci n'est pas ouverte pendant plusieurs heures¹³. Des sachets de dessicant (gel de silice) ont été également ajoutés dans la boîte pour contribuer à maintenir l'air bien sec. Un capteur d'humidité et de température (Measurement Specialties, HTM2500LF) est placé sous la surface des grains. Il permet de vérifier que l'humidité relative et la température au sein de l'empilement sont conformes aux valeurs attendues.

D Protocole expérimental

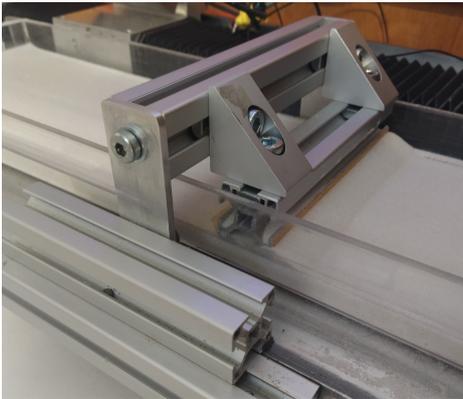


FIGURE 2.11 – Pièce coulissante utilisée pour racler la surface des grains avant de réaliser une expérience.

Cette première version du dispositif a été utilisée lors du stage de Master 2 et au début de la thèse. Les données recueillies ont été utiles pour étudier l'allure du signal de force à petite échelle et distinguer les différents régimes de force. On a même pu observer l'enfoncement du patin dans le lit granulaire, cependant la course réduite (~ 40 cm) n'a pas permis de mettre en évidence le régime stationnaire. En particulier, le comportement observé sur cette course réduite suggérait qu'un régime stationnaire stable n'existait peut-

13. La pression n'augmente pas significativement dans la boîte car celle-ci est loin d'être étanche, son couvercle est simplement posé, et des fuites sont permises par les interstices de la face avant coulissante ou par un trou permettant de faire passer les divers câbles vers l'ordinateur et le secteur.

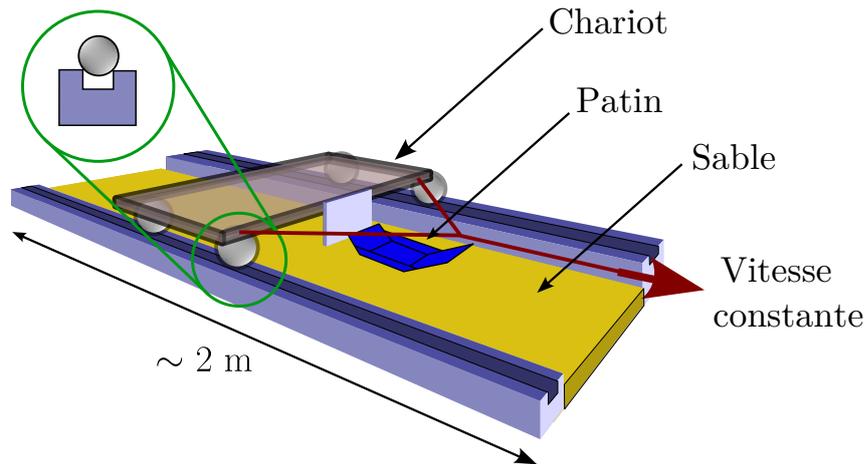


FIGURE 2.12 – Schéma de la seconde version, une longue piste de sable (~ 2 m) sur laquelle on pousse le patin par l'intermédiaire d'un chariot tracté par une ficelle (en rouge). Sur le chariot, on a installé des LED permettant d'illuminer le patin et un smartphone pour filmer l'expérience (non représentés sur le schéma). Le chariot est monté sur des billes métalliques calées dans un rail de part et d'autre de la piste granulaire pour assurer sa translation régulière.

être pas toujours ; en effet on observait un enfoncement puis le début d'une remontée du patin mais il était impossible de déterminer si des oscillations pouvaient exister et perdurer sur des courses plus longues. Nous avons donc conçu une seconde version du dispositif, cette fois permettant des courses d'environ 2 m.

E Seconde version

La seconde version de l'expérience est représentée sur la [Figure 2.12](#). À la place de la platine de translation bien contrôlée, un chariot est tracté par une ficelle s'enroulant autour d'une bobine entraînée par un moteur à courant continu. Le chariot est guidé par deux rails (le contact entre quatre billes métalliques et deux rails assure son guidage et sa translation régulière), il embarque une lame métallique pour faire le contact avec le patin, un smartphone pour filmer l'expérience, et des LED alimentées par des piles permettant d'illuminer le patin. Ce montage rapide ayant donné de bons résultats (observation de quatre à cinq oscillations), nous l'avons rapidement remplacé par le suivant, bien mieux instrumenté et permettant des courses très longues.

II.3 Lit en mouvement

Le montage utilisé dans un troisième temps permet de faire parcourir au patin des dizaines de mètres sur le sable tout en étant compact (l'encombrement total du dispositif est d'environ $1.5 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$). Il repose sur l'utilisation d'un tapis roulant qui déplace le sable sous le patin ([Figure 2.13](#)). Ce tapis roulant est constitué d'une bande abrasive de 15 cm de largeur tendue entre deux cylindres dont l'un est entraîné par un moteur, et reposant sur une plaque de plexiglas rigide assurant une surface plane. Cette configuration comporte de nombreux avantages, y compris la possibilité de mesurer la position du

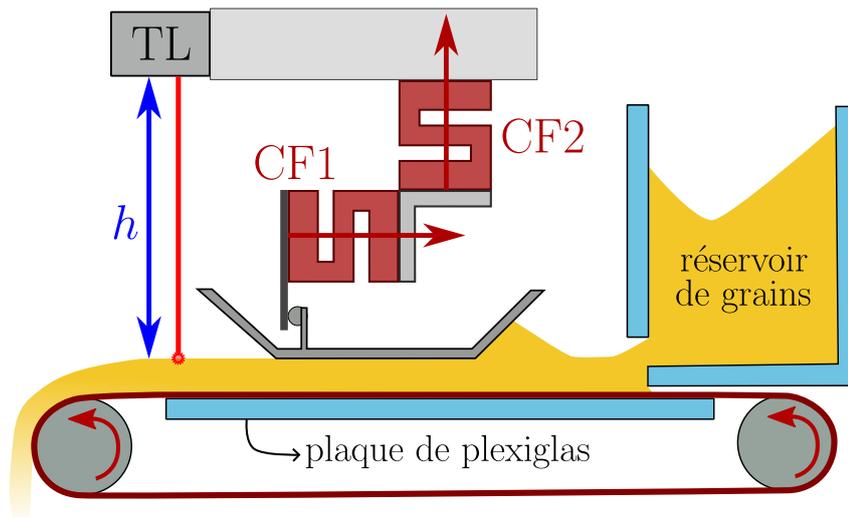


FIGURE 2.13 – Schéma de la configuration en tapis roulant. Un télémètre laser (TL) mesure la hauteur h , qui donne la topographie créée dans le sillage du patin. Deux capteurs de force CF1 & CF2 mesurent respectivement la composante horizontale et verticale de la force appliquée par la lame métallique sur le patin.

patin, la force appliquée et la topographie générée avec des appareils (caméra, capteurs de force et télémètre) solidaires d'un bâti fixe, ainsi on s'affranchit des vibrations mécaniques inévitables dans le système précédent et on simplifie grandement les problèmes d'alimentation électrique et de dialogue avec l'ordinateur. De plus, la longueur de course réalisable est aussi grande qu'on le souhaite, à condition de remplir le réservoir de grains au fur et à mesure.

Le matériau granulaire est placé dans une cuve en amont du patin, et une ouverture horizontale permet un dépôt contrôlé de grains, avec une hauteur de couche réglable, sur le tapis roulant lorsqu'il est en mouvement. On arrive ainsi à générer un état suffisamment plat tant que le tapis se déplace à vitesse constante. En revanche, lorsque celui-ci est à l'arrêt les vibrations mécaniques environnantes peuvent provoquer une lente accumulation de grains au voisinage de l'ouverture, ce qui conduit à la formation d'une petite bosse qui peut perturber l'expérience. On fait donc systématiquement défiler du sable avant de placer le patin pour éviter cet effet.

Les différents capteurs sont connectés à une carte d'acquisition (National Instruments, NI 6035E), laquelle est pilotée par un programme Matlab¹⁴ qui a été entièrement réalisé dans le cadre de la thèse. Ce dernier pilote également la caméra, et produit une interface graphique complète donnant l'état de tous les capteurs et permettant de modifier de nombreux paramètres, lancer une acquisition, et écrire les données d'une expérience. Une capture d'écran de l'interface est incluse sur la Figure 2.14. Typiquement, les acquisitions sont réalisées à 1 ou 2.5 kHz.

14. On a décidé de passer de LabView à Matlab pour l'interface en raison d'une erreur récurrente et non maîtrisée avec le programme LabView, liée à la gestion de la webcam et dont la seule solution trouvée est un redémarrage du programme. Cette erreur combinée à une préférence personnelle pour Matlab ont motivé ce choix.

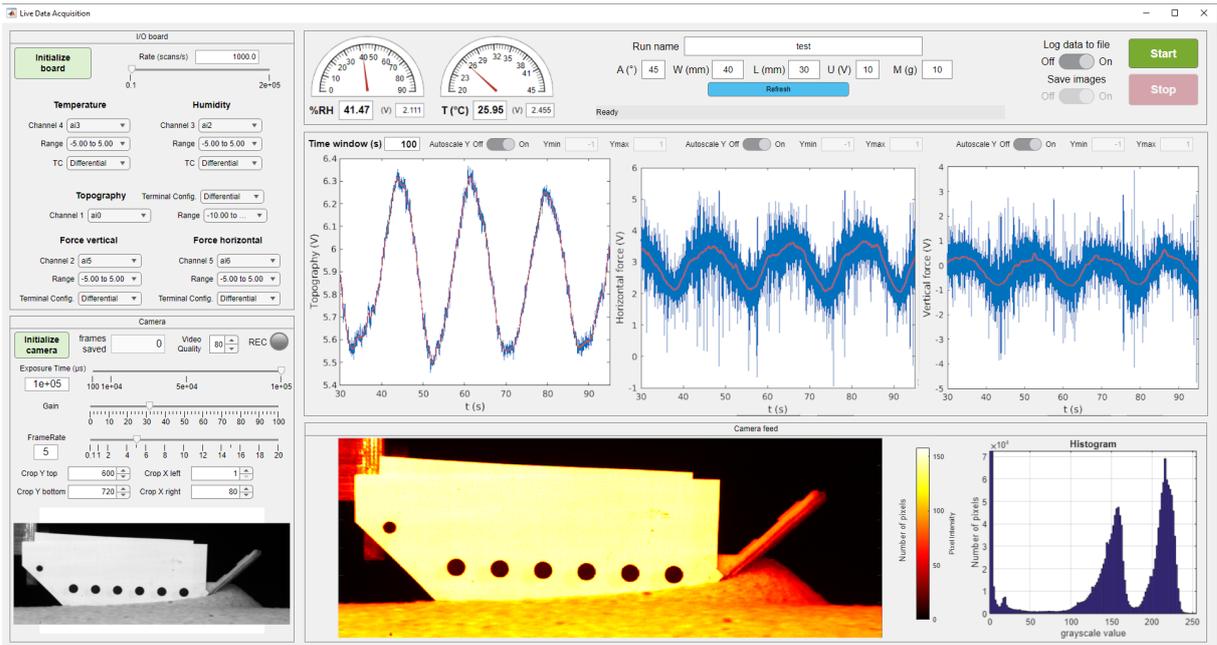


FIGURE 2.14 – Interface Matlab pilotant l'expérience. À l'aide de ce programme, les acquisitions peuvent être paramétrées et commandées. Les valeurs des capteurs sont tracées en temps réel.

Température et humidité : Nous avons laissé de côté le contrôle de l'humidité et de la température pour ce nouveau montage. En revanche, le même capteur (Measurement Specialties, HTM2500LF) est placé dans la cuve de grains, permettant d'avoir au moins une mesure de ces paramètres environnementaux. Nous avons pu observer que les résultats étaient reproductibles d'une semaine à l'autre indépendamment de la météo du jour suggérant que ces paramètres n'ont pas d'influence sur le phénomène étudié.

Mesure de topographie : Le même télémètre laser (Micro-epsilon, ILD1302-20, noté (TL) sur la Figure 2.13) que dans la première version est fixé au-dessus du sable, dans le sillage du patin.

Mesures de force : Deux capteurs de force (PM instrumentation, KD34s, ± 1 N) notés CF1 et CF2 sur la Figure 2.13 mesurent respectivement la composante horizontale et verticale de la force transmise au patin. Chaque capteur est relié à un conditionneur (GSV-1A 0.10/2k5/2/M12) réalisant une amplification et un filtrage passe-bas.

Mesure de la position du patin et de la taille du talus Une caméra (Basler acA2040-90um filmant à une résolution de 2048×2048 , avec un objectif 18-108/2.5) enregistre l'expérience en niveaux de gris, à une fréquence de 5 images par seconde pour la plupart des expériences¹⁵. On place un drap noir derrière le patin pour avoir un bon contraste entre celui-ci et son arrière-plan, un exemple d'image est visible sur la Figure 2.15 (a) (on y voit également les points noirs imprimés sur un papier blanc collé

15. Cette fréquence est réglable dans l'interface en cas de besoin.

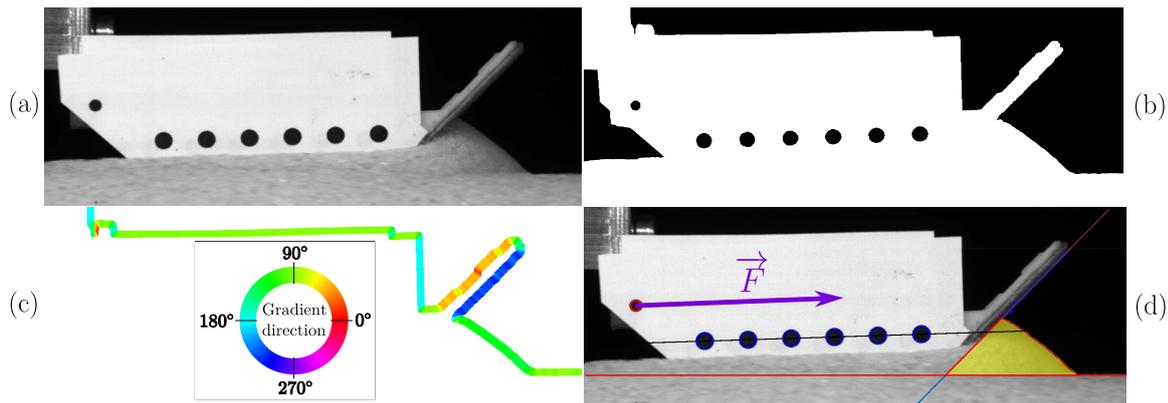


FIGURE 2.15 – Illustration de la procédure de traitement d’images. (a) Image en niveaux de gris capturée par la caméra. (b) Image en noir et blanc après seuillage. (c) Direction du gradient de l’image après remplissage des trous. (d) Image traitée permettant de quantifier le talus en amont (en jaune) et l’angle de tangage (ligne noire)

au patin utilisés pour le repérer automatiquement dans l’espace, et un autre plus petit point dessiné en haut à droite de papier derrière lequel se situe le point de contact entre le cylindre et la lame métallique). Un programme Matlab d’analyse d’images réalisé durant la thèse permet ensuite d’extraire la position du patin au cours du temps, ainsi que la quantité de sable dans le talus formé devant le patin. L’arrière-plan sombre permet d’isoler le patin en appliquant un seuil (Figure 2.15 (b)), on conserve ainsi également les disques noirs. Le calcul du gradient de cette image seuillée permet ensuite de déterminer la position de la spatule avant et de la surface du sable. Pour cela, on ne conserve que le plus grand contour (il suffit de remplir les trous de l’image seuillée par une opération morphologique, par exemple avec `imfill` dans Matlab) le long duquel la valeur de la direction du gradient varie (Figure 2.15 (c), sur cette image la largeur du contour a été exagérée pour plus de lisibilité). On peut discriminer les différentes parties du contour à partir de cette valeur : la surface du sable (partie horizontale et surface du talus) et la spatule du patin. Il suffit alors de prolonger la spatule et la surface horizontale du sable pour trouver le point d’intersection qui permet de construire la surface totale du talus (en jaune sur la Figure 2.15 (d)). La détection des disques noirs (par la fonction `imfindcircles` de Matlab) collés au patin permet de connaître leur position, l’angle du patin est obtenu par régression linéaire de la position de leur centre, et son altitude par la moyenne des altitudes de ces derniers. On a également représenté sur la Figure 2.15 (d) le point de contact entre le cylindre et la lame métallique, et la force de traction obtenue par les deux capteurs de force CF1 et CF2 représentée par une flèche rouge.

II.4 Design du patin

De nombreux patins différents ont été testés afin d’explorer des géométries et des masses ou distributions de masse différentes, et d’autres façons d’exercer la force de traction. Le design retenu pour la plupart des expériences est la géométrie à trois plans, version 3D de la forme introduite dans la section I.5 et représentée sur la Figure 2.7. À

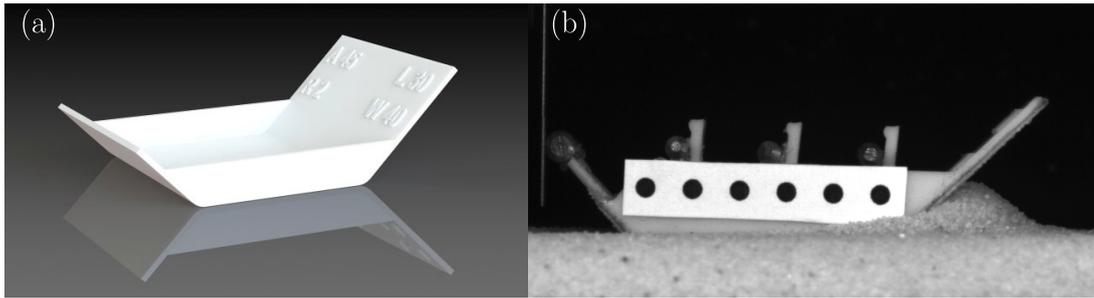


FIGURE 2.16 – (a) Rendu SolidWorks d'un modèle 3D de patin. Après impression, on ajoute un cylindre métallique pour l'application de la force, on colle une cible pour le traitement d'images, et on colle une monocouche de grains sous la surface inférieure. (b) Image d'expérience utilisant une autre version du modèle, rendant possible l'application de la force à des positions différentes en intégrant plusieurs cylindres.

l'exception des patins très légers, fabriqués en papier bristol, ils ont été réalisés en PLA¹⁶ à l'aide d'une imprimante 3D (Crealty ender 3). Un des modèles 3D utilisés est représenté sur la Figure 2.16 (a), et une autre version imprimée sur la Figure 2.16 (b). La géométrie est ainsi contrôlée à 0.1 mm près¹⁷ et permet une grande liberté de design, une rigidité suffisante et un poids réduit. Le logiciel SolidWorks a été utilisé pour dessiner les modèles 3D en prenant en compte les contraintes pertinentes : faire une coque peu épaisse, suffisamment profonde pour éviter que du sable ne remplisse le patin au cours de son mouvement, prévoir un ou des piliers sur lesquels on va pouvoir ensuite fixer un cylindre ou des billes métalliques pour faire contact avec la lame, laisser de l'espace pour placer du lest et pour coller le papier sur lequel les disques noirs sont imprimés.

Comme précédemment, une monocouche de grains est ensuite apposée sur la surface inférieure du patin avec du scotch double face. Les surfaces de contact métalliques qui sont ensuite collées sur le patin (bille ou cylindre pour le contact avec la lame et lame elle-même), dont le frottement s'est révélé crucial (chapitre 3, section III.1), sont polies une fois puis nettoyées à l'alcool avant chaque utilisation.

II.5 Configurations alternatives

Outre l'étude du comportement du patin dans cette configuration à deux degrés de liberté, nous avons travaillé avec des degrés de liberté réduits dans le but de simplifier le problème et de comprendre l'origine de l'apparition des instabilités décrites au chapitre 3. Cela peut aussi facilement être fait dans les simulations numériques. Voici une liste non exhaustive des configurations testées, dont certaines seront développées dans la section III.7.

À deux degrés de liberté :

16. Acide polylactique, l'acronyme PLA vient de l'anglais *polylactic acid*.

17. C'est un ordre de grandeur de l'incertitude géométrique due au positionnement de la buse d'impression, par exemple un cube de calibration de côté 20 mm est précis à 0.1 mm près dans les trois directions. Cette méthode de fabrication présente des inconvénients comme un rayon minimal borné par le diamètre de la buse utilisée, ici 0.4 mm, et la précision peut être moins bonne selon la géométrie, en particulier au niveau des dévers importants.

- Utilisation de ficelles pour l’entraînement du patin, en remplacement de la lame.
- Utilisation de roulements à bille pour imposer une liaison pivot entre le patin et une tige, elle-même en liaison pivot avec la lame.
 - À un degré de liberté :
 - Utilisation d’un roulement à bille pour imposer une liaison pivot entre la lame et le patin.
- Aucun degré de liberté :
- Patin fixé totalement au bâti.
- Frottement solide simple (pas de grains).

II.6 Embarquement de cartes Arduino

Une méthode pour acquérir les données d’un gyroscope six axes et accéléromètre embarqués sur le patin a été mise au point. Avec l’utilisation d’une carte Arduino nano connect RP2040 munie d’un IMU (*Inertial Measurement Unit*, appelée centrale à inertie en français) et d’un module Wi-Fi, alimentée par une batterie le tout embarqué sur le patin dialoguant avec une seconde carte Arduino munie d’un module Wi-Fi et reliée par USB à l’ordinateur. La méthode a fonctionné en faisant tourner deux programmes écrits en Python (un sur chaque carte), l’un sur la carte embarquée récupérant les données de l’IMU et les envoyant par paquets UDP sous forme de longues chaînes de caractère à l’autre carte, se chargeant de lire les paquets et les envoyer par USB à l’ordinateur. Nous n’avons pas poursuivi le développement de cette idée et son intégration dans le programme Matlab d’acquisition car la batterie et la carte embarquée, bien que miniatures, constituaient un poids supplémentaire conséquent et ne permettaient pas d’atteindre les gammes de valeur souhaitées. Seules les données extraites par analyse d’images seront utilisées pour décrire le mouvement du patin.

II.7 Caractérisation des grains

Dans la première expérience, les grains utilisés sont des billes de verre Wheelabrator 180 – 300 μm . Ils sont ensuite photographiés au microscope (Heerburg, Wild Makroskop M420 avec objectif Leica Makro-zoom 1-5) puis les images sont analysées par un programme Matlab qui détecte les particules (en utilisant la fonction `imfindcircles`, [Figure 2.17 \(a\)](#)). Sur 25 images, on détecte un total de 6468 billes de verre ce qui permet de calculer la distribution statistique de leur taille. On constate que l’échantillon est majoritairement composé de particules sphériques et de certains résidus non sphériques. La détection (et donc la distribution statistique calculée et représentée sur la [Figure 2.17 \(b\)](#)) ne porte que sur les particules sphériques. Leur diamètre d_p est compris entre 100 μm et 300 μm . Un simple tamisage entre deux tamis de respectivement 200 μm et 250 μm permet de retirer les plus grandes particules mais un très grand nombre de résidus ($d_p < 200 \mu\text{m}$) subsiste dans l’échantillon tamisé.

Dans les deux configurations suivantes, nous avons utilisé du sable naturel de sablage, lavé pour être débarrassé de toute poussière résiduelle. Les particules étant non-sphériques, le programme de détection utilise cette fois `regionprops` pour analyser les images ([Figure 2.18 \(a\)](#)). Les particules ne devant pas être en contact pour pouvoir être détectées

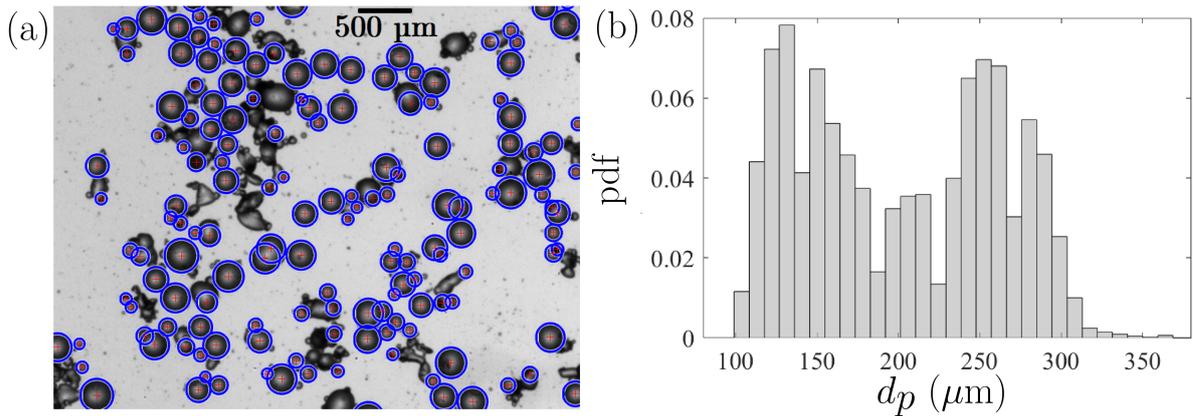


FIGURE 2.17 – Billes de verre : (a) Exemple de détection de particules (cercles bleus) par un programme Matlab. (b) Distribution des diamètres des particules d_p calculée sur 6468 grains détectés. Cet échantillon présente une polydispersité importante.

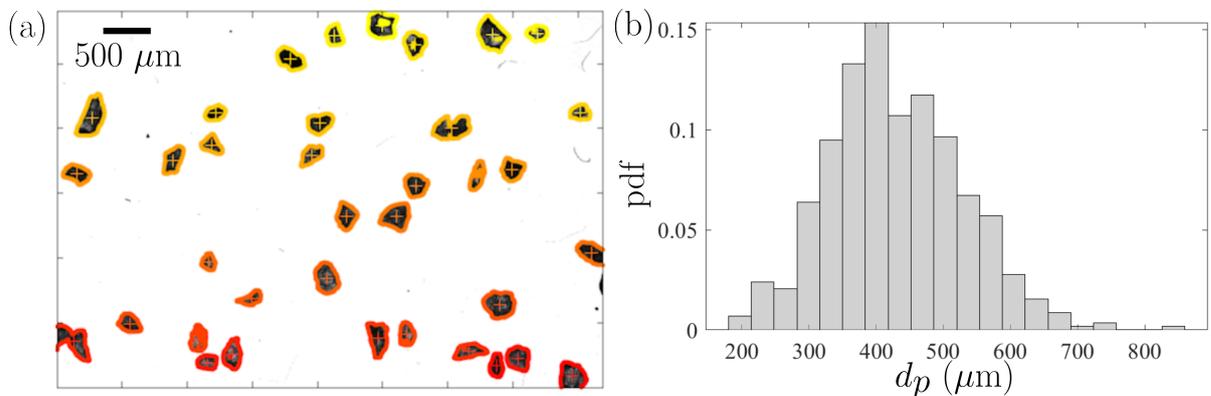


FIGURE 2.18 – Sable naturel : (a) Exemple de détection de particules par un programme Matlab, contours colorés selon leur coordonnée verticale. (b) Distribution des diamètres des particules d_p calculée sur 580 grains détectés.

correctement par ce programme, on ne fait la statistique cette fois que sur 580 grains détectés (Figure 2.18) pour quantifier la distribution des tailles (Figure 2.18 (b)). Cette fois-ci, d_p est un diamètre équivalent déterminé par le diamètre d'un disque qui aurait la même surface que le grain (donné par $\sqrt{4A/\pi}$ où A est l'aire de la région considérée, le calcul est fait par la fonction `regionprops`). La distribution est plus proche d'une gaussienne, et la polydispersité semble tout aussi élevée qu'avec les billes de verre, avec des diamètres environ deux fois plus grands. Les grains de sable sont en revanche fortement non sphériques en comparaison.

Traction d'un patin sur un lit granulaire

I	Observations et cadre de l'étude	56
I.1	Observations préliminaires	56
I.2	Validité du régime quasistatique	62
II	Résultats principaux	66
II.1	Rôle du point de contact	66
II.2	Effet de la pression de confinement	69
II.3	Effet de la géométrie	72
II.4	Effet du frottement intergrain	75
III	Compléments	75
III.1	Rôle du frottement au point de contact	76
III.2	Étude du centre instantané de rotation	77
III.3	Comportement du patin tracté par l'intermédiaire d'une ficelle	81
III.4	Exploration des liens entre les variables du problème	81
III.5	Profil de forces le long du patin et champ de pression granulaire	87
III.6	Forme du talus	89
III.7	Configurations simplifiées	90

Dans ce chapitre,

- On présente à la fois des résultats expérimentaux et numériques portant sur le mouvement d'un patin solide tracté à la surface d'un milieu granulaire.
- Il sera précisé sur les figures si les données proviennent d'expériences ou de simulations par des encadrés **sim** et **exp**.
- On définit le régime quasistatique, puis on explore quelques unes de ses limites. Ensuite on se place uniquement dans ce régime.
- L'effet de différents paramètres sur l'instabilité du patin est étudié. La pression exercée sur les grains et la géométrie du patin sont particulièrement importants.
- On explore ensuite d'autres configurations de travail ainsi que les liens qui existent entre différentes grandeurs.
- Une partie des résultats présentés dans ce chapitre (principalement ceux de la partie II) ont fait l'objet d'un article publié dans Physical Review E. intitulé «Surface instabilities generated by a slider pulled across a granular bed» [Dop *et al.*, 2023].

I Observations et cadre de l'étude

I.1 Observations préliminaires

On tracte un patin à vitesse constante sur un lit granulaire, à l'aide du dispositif expérimental et dans des simulations numériques présentées dans le chapitre 2. On observe la formation d'un tas de grains accumulé devant le patin appelé talus, ainsi que, dans une certaine gamme de paramètres, des oscillations du patin conduisant à des ondulations de topographie dans son sillage comme représenté sur les Figures 3.1 et 3.2. Dans d'autres cas cependant, il n'y a pas d'oscillations et le patin atteint un état stationnaire stable.

Notations : Une bonne partie des notations utilisées est introduite sur la Figure 3.2 : les coordonnées x et y , l'orientation θ , la force \vec{F} , la longueur l , l'angle α , la longueur d'onde

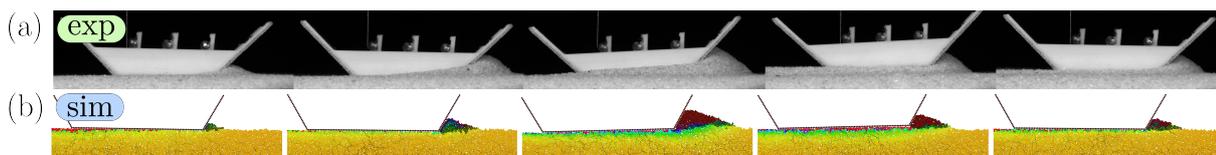


FIGURE 3.1 – (a) Chronophotographie d'un cycle expérimental [$l = 40$ mm, $m = 11$ g, $\alpha = 45^\circ$]. (b) Série d'images de simulations [$l = 36$ mm, $m = 0.12$ g, $P = 65$ Pa, $\alpha = 60^\circ$].

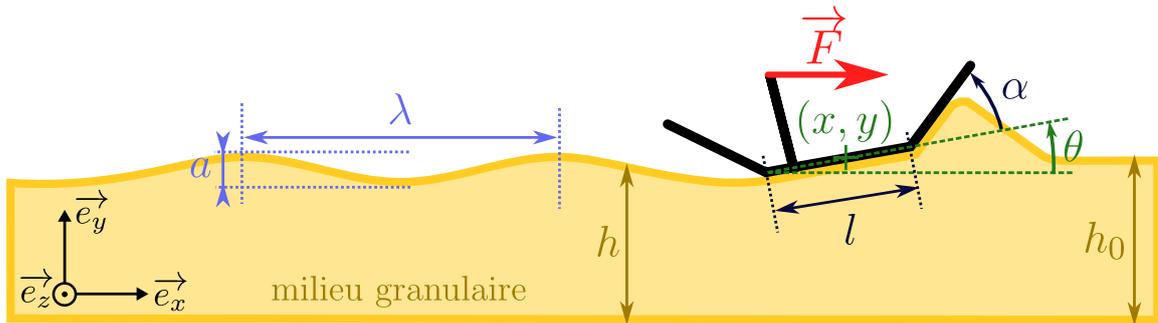


FIGURE 3.2 – Schéma du mouvement du patin sur le lit granulaire introduisant les notations pertinentes. Le patin, caractérisé par ses paramètres géométriques (l, α) et sa position (x, y, θ) , est tracté à vitesse constante par l'intermédiaire d'une force \vec{F} . Le lit granulaire initialement plat à la hauteur h_0 est perturbé par le passage du patin et génère dans certaines conditions des oscillations de topographie caractérisées par leur longueur d'onde λ et leur amplitude notée a .

λ , l'amplitude a , la topographie $h(x)$ et l'épaisseur h_0 . Ajoutons les notations suivantes :

- w : la largeur du patin (sa dimension dans la direction de \vec{e}_z)
- P : la pression de confinement exercée par le patin sur les grains sous son propre poids (expérimentalement, $P = mg/lw$, numériquement on définit son équivalent¹ $P = mg/l d_p$, avec g l'accélération de la pesanteur et d_p le diamètre moyen des grains)
- \vec{v} : la vitesse de traction
- k : la raideur de traction
- S_h : la surface du talus (projetée dans la direction de la caméra)

Les oscillations parfois observées consistent en une combinaison de mouvement de tangage (variation de θ) et de translation verticale. Ce mouvement s'amorce par un enfoncement du patin dans les grains, lors duquel ce dernier pique vers le bas ($\theta < 0$), accompagné de l'accumulation d'un talus. C'est l'interaction entre le patin et ce talus qui peut, selon les conditions, l'amener à s'incliner vers le haut ($\theta > 0$) et à monter par-dessus le talus, ou au moins à réduire sa taille. On peut alors observer un comportement cyclique. Sous certaines conditions, la taille du talus oscille entre deux valeurs positives, alors que le talus disparaît parfois au cours du cycle. L'altitude du patin ainsi que son angle de tangage oscillent, de même que l'épaisseur du lit dans son sillage (topographie).

A Visualisation

La série de photographies et d'images de simulations sur la Figure 3.1 permet de visualiser le mouvement en question, qui est encore plus visible sur la vidéo que nous avons mise en ligne à l'adresse suivante :

1. Les simulations étant 2D, la définition d'une pression passe par l'introduction d'une « épaisseur » fictive de la simulation. On fait le choix ici de considérer les grains qui sont des disques 2D comme des cylindres de longueur d_p . Ainsi, la définition de leur masse et d'une pression est plus physique et permet la comparaison avec les expériences.

<https://www.youtube.com/watch?v=K1WzDA0AafQ>

On peut aussi représenter une image comprimée horizontalement de l'état final comme sur la **Figure 3.3** pour visualiser le résultat d'une simulation. Le rapport d'aspect typique du motif étant compris entre vingt et cinquante, on comprime l'image horizontalement d'un facteur vingt ou plus pour permettre de mieux apprécier les fluctuations de topographie.

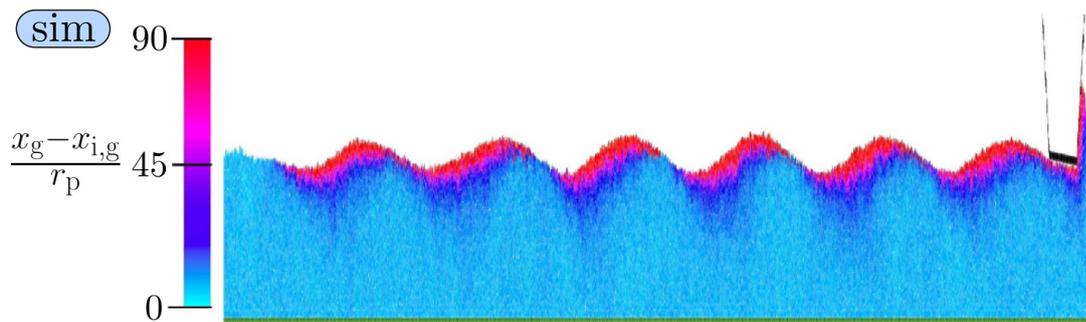


FIGURE 3.3 – État final d'une simulation, comprimée vingt fois horizontalement. Les grains sont colorés en fonction de leur déplacement horizontal total depuis le début de la simulation, comme indiqué sur l'échelle à gauche. La position horizontale d'un grain étant notée x_g , sa valeur initiale $x_{i,g}$ et le rayon moyen des grains r_p .

B Caractérisation quantitative

Les signaux acquis présentent soit un régime transitoire suivi d'une valeur constante (à des fluctuations aléatoires près) dans le cas stable, soit ils présentent des oscillations à une période donnée comme sur la **Figure 3.4**. On constate un très bon accord dans les valeurs des longueurs d'onde dans les signaux numériques et expérimentaux.

On cherche à déterminer la période de ces oscillations avec une méthode robuste, et à extraire le degré de périodicité du signal. Pour cela, nous allons calculer leur autocorrélation. Commençons par introduire cet outil mathématique.

L'autocorrélation d'un signal $s(t)$ est la corrélation croisée de ce signal avec lui-même, définie comme :

Autocorrélation continue

Soit $s(t)$ un signal temporel réel. L'autocorrélation de s est définie comme

$$C_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t - \tau)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t - \tau)dt \quad (3.1)$$

Pour un signal physique borné dans le temps on calculera C pour une valeur finie de T la plus grande possible.

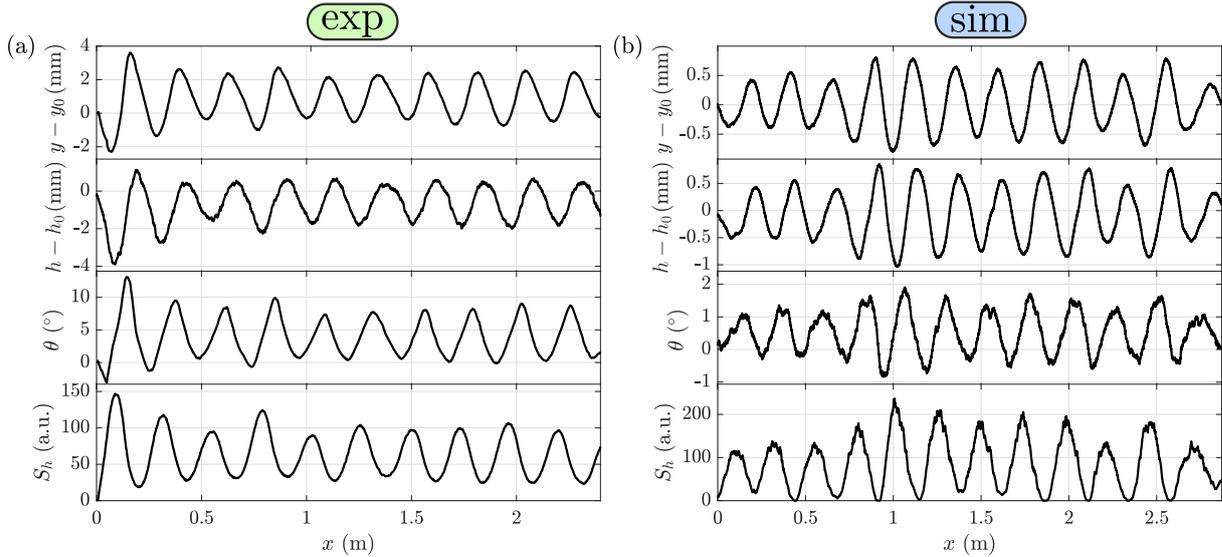


FIGURE 3.4 – Exemples de signaux oscillants, (a) expérience [$m = 27$ g, $l = 30$ mm, $w = 40$ mm, $P = 220$ Pa, $\alpha = 45^\circ$] et (b) simulation [$m = 0.15$ g, $l = 48$ mm, $P = 61$ Pa, $\alpha = 45^\circ$]. De haut en bas : altitude ($y - y_0$), topographie dans son sillage ($h - h_0$), inclinaison θ et taille du talus S_h . Le signal de topographie mesuré a été décalé pour correspondre à l'arrière du patin².

Autrement dit, c'est la moyenne temporelle du produit du signal par lui-même décalé d'un temps τ . Pour un signal discret en pratique on utilise plutôt :

Autocorrélation discrète finie

Soit $s_k, k \in \llbracket 1, M \rrbracket$ un signal échantillonné sur M points. L'autocorrélation discrète de s_k est définie par

$$C_s(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M s_k s_{k-n} \quad (3.2)$$

La fonction d'autocorrélation comporte N points, n variant de 0 à $N - 1$.

En pratique, nous travaillons sur des signaux dont on a soustrait la moyenne et normalisés par leur écart-type.

2. Expérimentalement, le signal de topographie mesuré correspond à un état du patin décalé dans le temps puisque la mesure se situe quelques centimètres derrière ce dernier. Numériquement, on mesure une fois la topographie à la fin de la simulation. Pour la représentation de ce signal en fonction de x , on a donc choisi l'origine de façon à faire correspondre la topographie à une abscisse donnée à la position du point arrière du patin à cette abscisse. Ainsi, la topographie à $x = 0$ est nulle comme les autres signaux, ce qui semble plus judicieux que de la faire correspondre au centre du patin où elle serait alors déjà négative alors que le mouvement n'a pas débuté. De plus, la trajectoire du point arrière correspond exactement à la topographie en général (section III.4.B).

Interprétation : La fonction d'autocorrélation d'un signal est toujours maximale en zéro (le signal est identique à lui-même non décalé), et paire (on considère donc uniquement $\tau > 0$). La fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc décroît rapidement à zéro, car ce signal n'est pas corrélé à lui-même à un autre moment. La fonction d'autocorrélation d'un signal périodique est également périodique (avec la même période). Nous pouvons donc discriminer un signal périodique d'un signal aléatoire à partir de la forme de la fonction d'autocorrélation, et même quantifier continûment si un signal donné est entre l'un et l'autre de ces cas limites. Typiquement, un signal présentant une périodicité avec des fluctuations aléatoires est corrélé à lui-même décalé d'un nombre entier de périodes $n\lambda$ (et anticorrélé à lui-même décalé de $(n + 1)\lambda$) tant que n reste petit mais si il devient trop grand le signal perd son autosimilarité³.

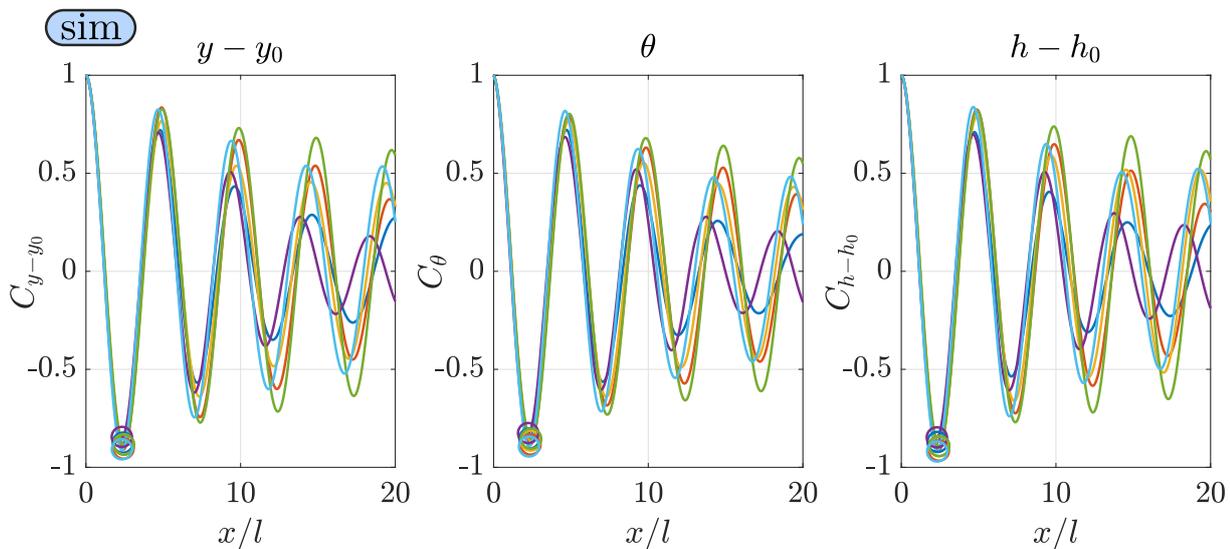


FIGURE 3.5 – Exemples de fonctions d'autocorrélation de différents signaux oscillants (de gauche à droite : altitude du patin $y - y_0$, inclinaison θ et topographie $h - h_0$). Dans chaque cas, six graines⁴ différentes sont représentées par des couleurs différentes, et le premier minimum d'ordonnée $-C_1$ est repéré par un cercle de la même couleur. [$l = 36$ mm, $m = 0.067$ g, $P = 36$ Pa]

On a représenté sur la Figure 3.5 les fonctions d'autocorrélation de trois signaux différents, pour six graines différentes. On a représenté ces fonctions d'autocorrélation en fonction de la distance adimensionnée par la taille du patin, et l'on voit bien que chaque signal donne un même premier minimum à environ $x = 2.5l$, soit une longueur d'onde égale au double (soit $\lambda = 5l$). On peut remarquer ici qu'à travers les différentes graines, on a accès à une première information statistique sur la distribution des longueurs d'onde, mais également de la profondeur des minima qui nous renseigne sur le degré de périodicité du signal⁵ (l'observation des signaux pour de grands x/l montre que certaines graines perdent plus rapidement leur autosimilarité, comme expliqué plus haut). On note

3. C'est le concept de cohérence, utilisé notamment en optique.

4. Voir la section I.6.A.

5. La valeur du minimum va donc de -1 pour un signal exactement périodique à 0 pour un signal non corrélé.

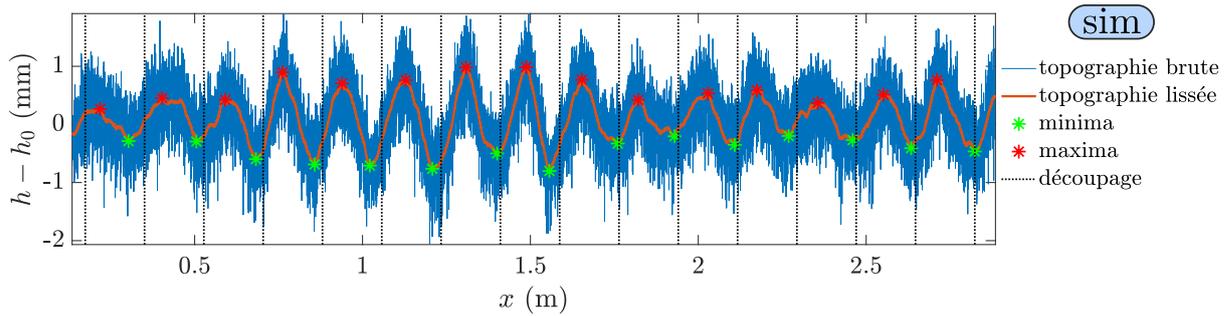


FIGURE 3.6 – Exemple de découpage du signal de topographie numérique en fenêtres contenant chacune un motif périodique (découpage représenté en traits pointillés noirs). Les minima et maxima sont représentés par des symboles * de couleur respectivement verte et rouge sur le signal de topographie lissée par moyenne glissante. [$l = 36$ mm, $m = 0.067$ g, $P = 36$ Pa].

C_1 la profondeur de ce premier minimum, dont l'ordonnée est donc $-C_1$. De manière générale, dans la plupart des cas les trois signaux testés donnent la même⁶ valeur de λ .

Il nous faut en choisir un des trois pour la caractérisation de l'instabilité. L'idée étant de caractériser la formation de motif, nous avons par la suite principalement utilisé le signal de topographie pour définir la longueur d'onde de l'instabilité comme définie sur la Figure 3.2. Notons qu'on applique un lissage par moyenne glissante sur les signaux mesurés afin de s'affranchir du bruit assez important dû aux rugosités de la surface granulaire (voir Figure 3.6).

Une fois la longueur d'onde déterminée par cette méthode, on peut l'utiliser pour déterminer l'amplitude a de manière satisfaisante. On va alors découper le signal en fenêtres de largeur λ , en démarrant la première fenêtre $\lambda/4$ après un minimum du signal. Si le signal est suffisamment périodique, cette procédure va découper le signal en portions contenant chacune une bosse puis un creux consécutifs, il suffit alors de prendre le maximum et le minimum de chaque portion pour trouver la position de ces extrema. On a alors accès à la distribution de λ et a et on pourra ainsi tracer leur valeur moyenne et écart type, ce qui nous donne davantage d'informations sur cette distribution en considérant chaque oscillation du signal individuellement. La Figure 3.6 représente la topographie brute en bleu et le signal lissé par moyenne glissante en rouge. On a également représenté le découpage que l'on vient de décrire par des traits verticaux noirs en pointillés, et la détection satisfaisante des bosses et des creux de topographie par des symboles * respectivement rouges et verts.

Méthode plus générale Cette méthode a cependant une limite majeure concernant les signaux très peu périodiques ou présentant de l'intermittence. En effet, le découpage initialement bien aligné sur la première bosse peut ensuite se décaler avec le temps, et donner des résultats complètement erronés. Un contrôle visuel est nécessaire avant de valider les valeurs déterminées algorithmiquement. En cas d'échec de cette méthode, une

6. Sauf dans de très rares cas, par exemple quand le moment d'inertie I (section I.8.B) a été fixé à une valeur trop grande et que les variations de θ sont deux fois plus lentes que les variations de y .

autre façon de pointer les positions des creux et des bosses est possible mais un peu moins satisfaisante car moins systématique. Il faut tout d'abord lisser le signal par une moyenne glissante bien choisie, puis repérer les points où le signal croise sa moyenne. Les portions entre deux croisements consécutifs sont donc les creux ou bosses du motif, et on peut procéder comme ci-dessus pour extraire les distributions des longueurs d'onde et des amplitudes. On a alors une sensibilité aux fluctuations proches de zéro et une dépendance à la fenêtre utilisée pour la moyenne glissante, qui peut modifier le nombre de bosses/creux détectés. Nous avons toutefois parfois été contraints d'utiliser cette méthode.

I.2 Validité du régime quasistatique

A Définition

On a mentionné que l'instabilité étudiée est indépendante de la vitesse de traction. Plus spécifiquement, c'est un effet qui se produit dans le régime quasistatique, que l'on peut définir à partir du nombre inertiel [GDR MiDi, 2004] défini par :

Nombre inertiel

$$I_N = \frac{\dot{\gamma} d_p}{\sqrt{P/\rho}} \quad (3.3)$$

où $\dot{\gamma}$ est le taux de cisaillement, d_p le diamètre moyen des grains, P la pression et ρ la masse volumique.

Ce nombre adimensionné décrit l'importance relative de l'inertie et des contraintes de confinement. On peut l'interpréter comme le rapport d'une échelle de temps de confinement $d_p/\sqrt{\rho/P}$ (le temps nécessaire pour un grain de parcourir une distance d_p sous l'effet de la pression P) et d'un temps typique de déformation $1/\dot{\gamma}$. Notre configuration, typiquement $\dot{\gamma} = v/h_0$ et $P = mg/lw$, soit pour un patin typique ($l = 30$ mm, $w = 40$ mm, $m = 20$ g) avec un lit granulaire typique ($h = 2$ cm, $d_p = 400$ μm , $\rho = 1.5 \times 10^3$ kg \cdot m $^{-3}$ ⁷), on est dans un régime quasistatique ($I_N < 10^{-3}$) pour $v \lesssim 1.5$ cm \cdot s $^{-1}$.

Une autre approche consiste à comparer plus simplement le temps de chute d'un grain de son propre rayon sous son propre poids $t_g = \sqrt{d_p/g}$ par rapport au temps que le patin met à avancer d'un rayon $t_p = d_p/2v$. On considère qu'on est dans le régime quasistatique si les grains peuvent se réarranger sous gravité sur un temps caractéristique plus rapide que l'avancement du patin, soit $t_g < t_p$, ou encore $v < \sqrt{d_p g}/2 = 3$ cm \cdot s $^{-1}$.

Ces deux approches conduisent au même ordre de grandeur de 1 cm \cdot s $^{-1}$. On s'attend donc à une indépendance des résultats à la vitesse de traction tant que le nombre inertiel reste petit.

B Rôle de la vitesse de traction

Expérimentalement, le premier montage permettant d'observer les instabilités a été utilisé pour réaliser 5 expériences à vitesse variable allant de 3 mm \cdot s $^{-1}$ à 3 cm \cdot s $^{-1}$, sans

7. Il s'agit ici de la masse volumique de l'empilement, avec une fraction volumique typique de 60%.

variation significative de la longueur d'onde sur cette gamme.

Numériquement, on peut comparer les motifs résultants de simulations réalisées à des vitesses de traction comprises entre $2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ et $20 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ sur la [Figure 3.7](#). On peut constater qualitativement que la longueur d'onde ne varie pas entre les différentes valeurs de v , et que la périodicité diminue progressivement. La [Figure 3.8](#) représente la longueur d'onde extraite de l'autocorrélation du signal de topographie ainsi que la profondeur du minimum C_1 (degré de périodicité), confirmant quantitativement ces observations. La périodicité diminue à partir de $10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ où l'on sort alors progressivement du régime quasistatique.

C Rôle du moment d'inertie du patin

Le calcul complet du moment d'inertie du patin ainsi que la comparaison avec une barre solide et le rôle des spatules sont faits dans l'[annexe A](#).

Grâce à l'outil numérique, on peut librement choisir d'imposer une valeur artificielle de I , ce qui nous permet ainsi de tester les limites du régime quasistatique. Considérons un patin qui pivoterait sous l'effet de son poids autour d'un point situé à la base de la spatule avant. On peut déterminer la valeur d'un temps de rotation inertielle en considérant le cas simple d'un pendule pesant de masse m et de longueur l faisant un angle θ avec l'horizontale. On lâche cette tige sans vitesse initiale à $\theta = \theta_0$ à $t = 0$. L'évolution de $\theta(t)$ est donnée par le théorème du moment cinétique :

$$I_e \frac{d^2\theta}{dt^2} = mgl \cos(\theta) \quad (3.4)$$

où g est l'accélération de la pesanteur terrestre. La résolution numérique de cette équation permet de déterminer la valeur t_I telle que $\theta(t_I) = 0$ ([Figure 3.9](#)). On constate que $t_I \propto \sqrt{\frac{mgl}{I_e}}$.

En notant t_T le temps typique d'évolution de l'angle lors de la traction du patin (fortement dépendant de la vitesse), la condition pour être dans le régime quasi-statique s'exprime donc $t_I \geq t_T$. En effet, si le patin met plus de temps à s'incliner en chute libre que sous l'effet des grains, on a alors un problème de moment d'inertie trop élevé. Pour des paramètres typiques de simulation, le patin met environ $t_T = 1 \text{ s}$ à voir θ diminué de 3° . Il faudrait donc $I \leq 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$ pour correctement modéliser des patins jusqu'à 36 mm . L'examen de simulations à $l = 60 \text{ mm}$ montre que les résultats deviennent aberrants pour $I \geq 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$, ce qui valide notre estimation en ordre de grandeur puisque le temps de chute inertielle est de l'ordre de la seconde pour ces valeurs.

D Rôle de la raideur de traction

Dans nos simulations, la raideur du ressort de traction (notée `Kslider`) peut être rapprochée au caractère quasistatique de l'écoulement granulaire. Numériquement, une raideur trop élevée peut conduire à une force de traction très fluctuante et pouvant atteindre une valeur très élevée dès le premier pas de temps où `Xslider - Xtrolley` > 0 , il faut donc l'adapter de la même manière que la raideur des grains doit être adaptée au pas de temps choisi. À l'inverse, une raideur trop faible peut conduire à une distance `Xslider - Xtrolley` au seuil de déplacement (c'est-à-dire lorsque la force de traction met le patin en mouvement) non négligeable devant la longueur d'onde du motif, conduisant à

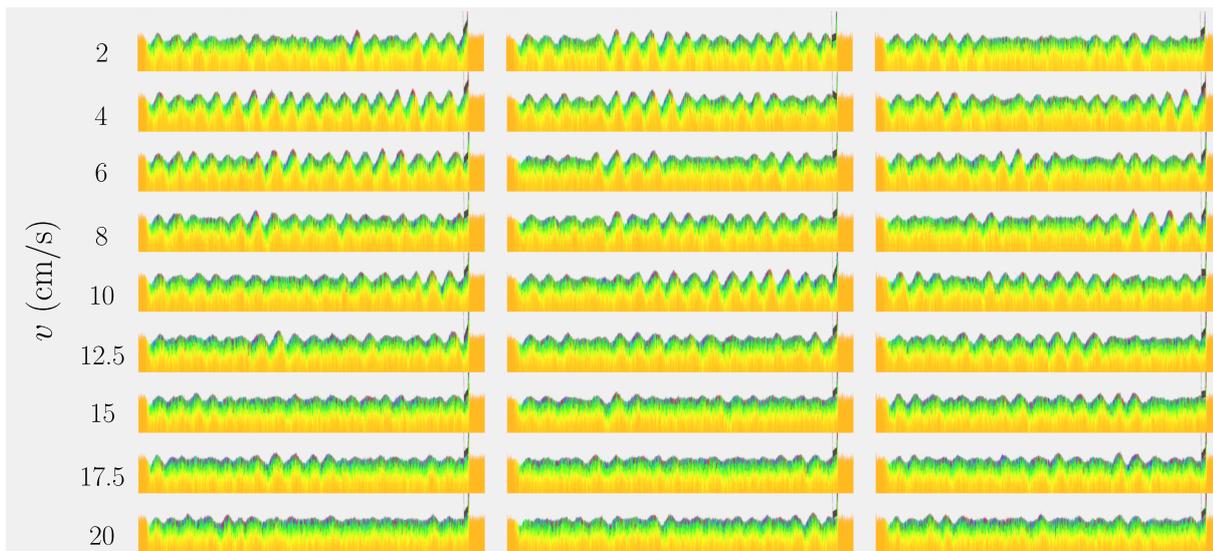


FIGURE 3.7 – Effet de la vitesse de traction dans les simulations numériques, illustré par les images des états finaux comprimés cent fois horizontalement. De gauche à droite, six grains différentes sont représentées. De haut en bas, la vitesse de traction augmente de $1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ et $20 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ (les valeurs exactes pour chaque ligne sont indiquées à gauche). On constate visuellement que la longueur d'onde n'est pas affectée par la variation de v dans cette gamme.

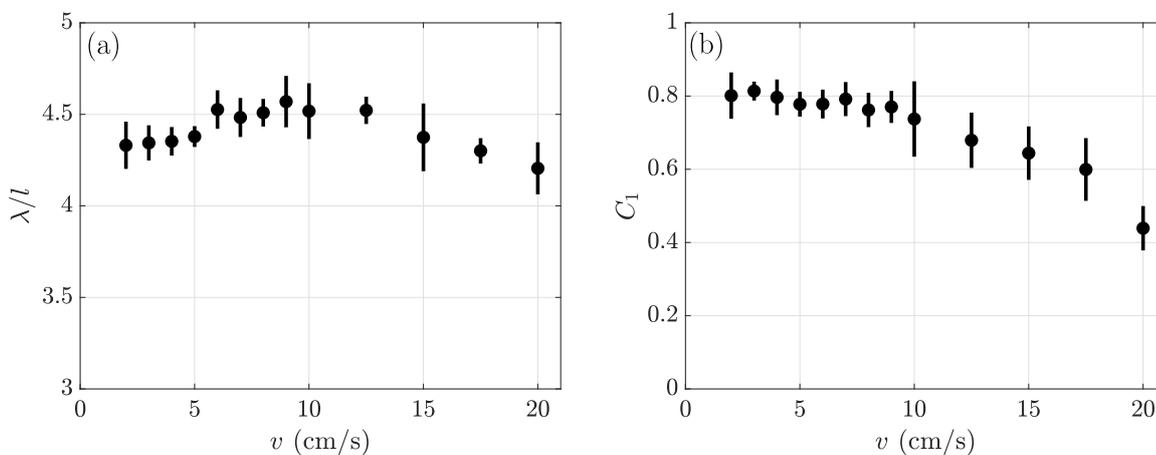


FIGURE 3.8 – Effet de la vitesse de traction sur la topographie dans les simulations numériques. (a) Longueur d'onde exprimée en tailles de patin λ/l en fonction de v . Comme on peut le voir sur la [Figure 3.7](#), λ varie assez peu, entre $4.2l$ et $4.6l$, les barres d'erreur représentent l'écart-type sur les six grains. (b) Degré de périodicité de la topographie, mesuré par la profondeur du premier minimum de sa fonction d'autocorrélation noté C_1 , et dont on a tracé la moyenne sur les six grains en fonction de v , l'écart-type étant représenté par les barres d'erreur. La périodicité est d'abord peu affectée par l'augmentation de v , puis elle commence à décroître significativement au-delà de $10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ alors qu'on sort progressivement du régime quasistatique.

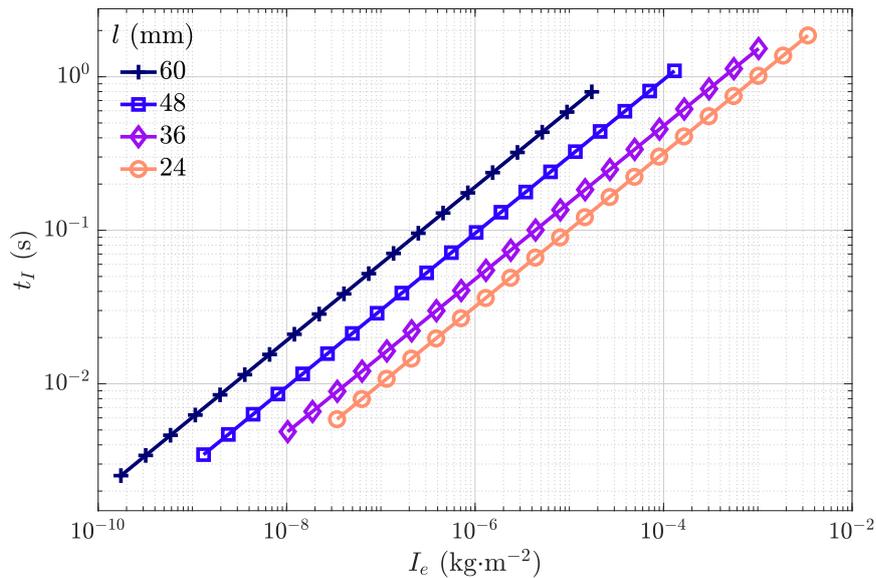


FIGURE 3.9 – Temps de chute inertiel t_I d'une barre de longueur l , obtenu par résolution numérique de l'équation (3.4) avec $\theta_0 = 3^\circ$ et $\theta(t_I) = 0$. t_I est représenté en fonction du moment d'inertie I_e calculé à l'extrémité de la barre, pour différentes valeurs de l correspondant à des longueurs de patin typiquement utilisées dans nos simulations.

l'apparition d'un stick-slip de grande échelle indésirable. C'est ce qu'on peut observer sur la Figure 3.10, où la valeur trop faible de 0.001 N/m conduit à des phases de glissement supérieures au motif, tandis que la valeur 0.005 N/m est suffisamment élevée pour observer le comportement attendu. L'augmentation de cette valeur ne modifie pas le résultat sauf à partir de quelques centaines de N/m. La valeur de la raideur est donc fixée afin d'éviter ces deux problèmes, en général autour de 1 N/m.

Expérimentalement cependant, il n'y a pour ainsi dire pas de limite haute à cette raideur et on finit par utiliser une plaque d'acier épaisse très raide pour appliquer la force. Si on explorait des raideurs aussi faibles que celle dont on vient de discuter numériquement (il faudrait utiliser un ressort assez souple par exemple), on serait certainement confrontés à un problème similaire.

On a donc bien une indépendance de nos résultats avec le moment d'inertie du patin, avec la raideur de traction, et avec la vitesse de traction, tant qu'on reste dans une gamme dont on vient de voir les limites et qui correspond au régime quasistatique. Dans la suite, on fixe donc ces trois paramètres. Sauf mention contraire, on prend $v = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ et une raideur très grande (non mesurée, on a utilisé une plaque en acier d'environ 4 mm d'épaisseur) dans les expériences. Pour les simulations on fixe $v = 4 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, $k = 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $I = 1 \times 10^{-9} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$.

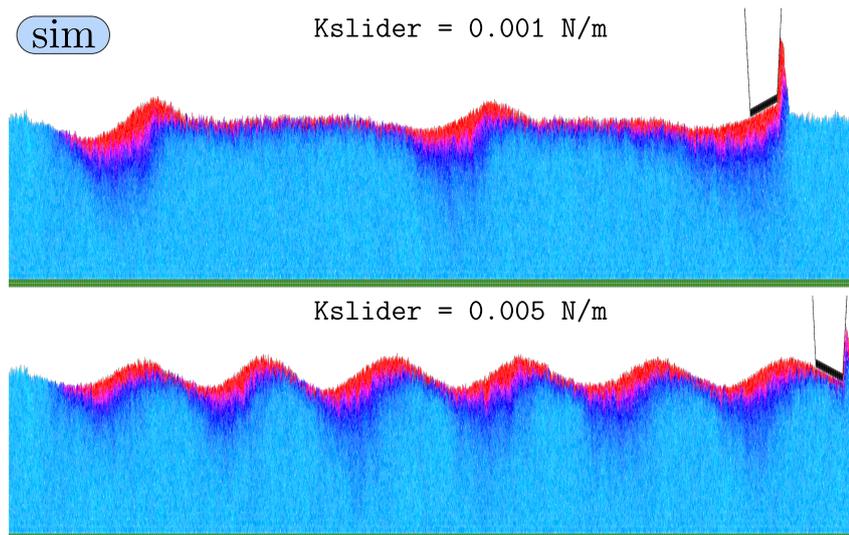


FIGURE 3.10 – Illustration du comportement observé pour un choix de K_{slider} trop faible (image supérieure) où on a introduit du stick-slip sur une échelle supérieure au motif. La valeur choisie sur l'image inférieure, cinq fois plus élevée, est tout juste suffisante pour éviter ce problème et produit les oscillations de topographie attendues et obtenues pour des raideurs plus élevées. Images comprimées horizontalement d'un facteur vingt.

II Résultats principaux

On présente dans cette section les résultats publiés dans Phys. Rev. E [Dop *et al.*, 2023], sauf mention contraire pour certains résultats complémentaires à l'article (sections II.1.B, II.2.B, II.3.B et II.4).

II.1 Rôle du point de contact

On présente ici l'effet important de la position du point de contact sur la stabilité du mouvement dans le cas expérimental tandis que le système numérique y est moins sensible. L'interprétation de ces résultats est discutée dans la [section III.1](#).

A Effet sur l'amplitude

Comme expliqué au [chapitre 2](#), la force de traction est transmise au patin par un contact plan/cylindre dont la position peut être variée. La position de ce point d'application de la force est critique dans les expériences. En effet, nous avons longtemps appliqué la force à l'avant du patin sans jamais observer d'instabilité. Les premiers essais avec une force appliquée à l'arrière ont immédiatement révélé ce comportement périodique. L'utilisation d'un patin avec plusieurs piliers (montré sur la [Figure 2.16 \(b\)](#), [section II.4](#)) permettant d'appliquer la force à différentes coordonnées (notées δ_x et δ_y) a permis de montrer que, en fixant tous les autres paramètres du problème, l'instabilité n'existe que pour une position arrière dans la configuration étudiée ([Figure 3.11 \(a\)](#)). En effet, on observe bien des oscillations entretenues pour $\delta_x = -20$ mm, alors que pour toutes les valeurs supérieures il existe un premier creux suivi d'une première bosse mais ces oscillations sont

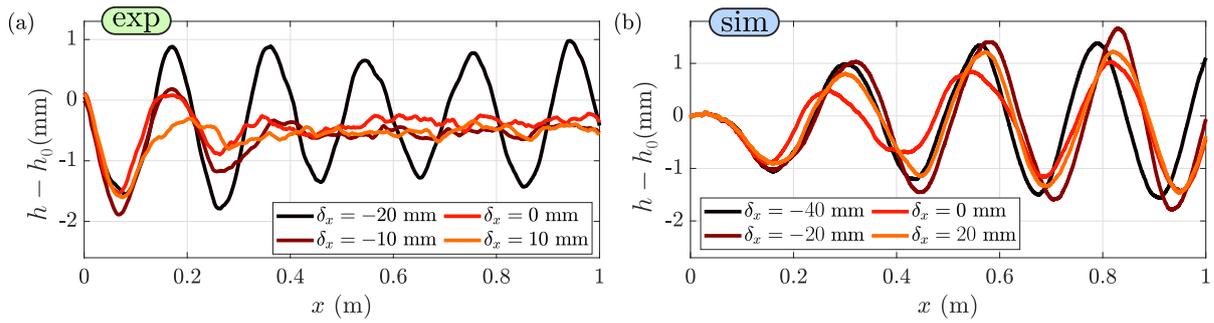


FIGURE 3.11 – Superposition de signaux de topographie pour différentes valeurs de δ_x , dans le cas (a) expérimental [$m = 18.3$ g, $l = 30$ mm, $w = 40$ mm, $P = 150$ Pa, $\alpha = 45^\circ$, $\delta_y = 10$ mm] et (b) numérique [$m = 0.08$ g, $l = 48$ mm, $P = 33$ Pa, $\alpha = 45^\circ$, $\delta_y = 10$ mm]. L'effet est complètement différent, l'augmentation de δ_x conduisant à la disparition des oscillations expérimentalement alors que celles-ci sont peu affectées dans les simulations.

rapidement amorties. La même étude numérique (Figure 3.11 (b)) conduit à des résultats différents ; on y observe des oscillations entretenues pour toutes les valeurs de δ_x (voir Figure 3.11). Cette différence majeure constitue le point de désaccord principal entre les simulations et les expériences. Ces différences s'expliquent peut-être par le frottement entre les surfaces métalliques où la force s'exerce, inexistant dans les simulations, comme discuté dans la section III.1.

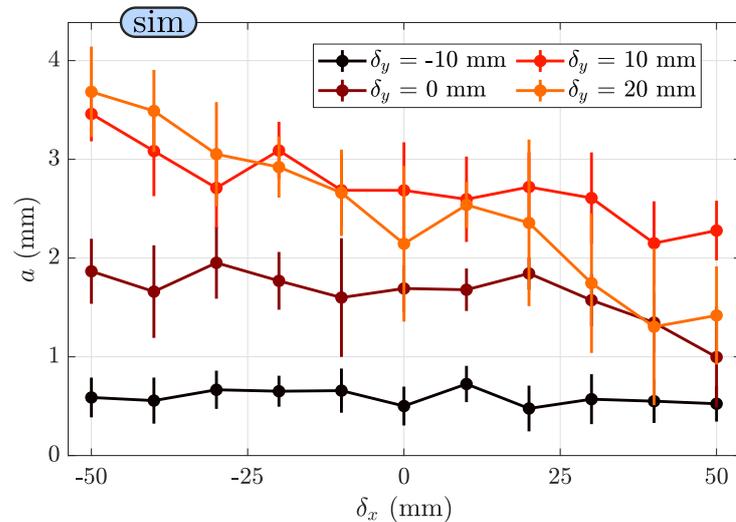


FIGURE 3.12 – Amplitude a du motif formé en fonction de la coordonnée horizontale du point de contact δ_x , pour différentes coordonnées verticales δ_y [$m = 0.08$ g, $l = 48$ mm, $P = 33$ Pa, $\alpha = 45^\circ$]

Le point de contact peut aussi être déplacé selon la verticale. Une coordonnée δ_y proche de zéro ou négative n'est pas réalisable dans notre montage expérimental sans perturber les grains, donc nous l'avons fixée à $\delta_y = 10$ mm. Par contre, nous sommes libres de la fixer numériquement à la valeur souhaitée. La Figure 3.12 montre comment l'amplitude du motif varie avec δ_x pour différentes valeurs de δ_y . La valeur $\delta_y < 0$ conduit

à des oscillations d'amplitude négligeable (comparable à la taille d'un grain), et le patin est légèrement cabré ($\theta > 0$) au cours de son mouvement. Le couple exercé par la force de traction favorise cette position légèrement cabrée et empêche la formation d'un talus significatif⁸, de la même manière qu'une masse répartie sur l'arrière du patin conduit au même résultat (section II.2.B). Les plus grandes valeurs de δ_y favorisent davantage le plongeon du patin dans les grains ($\theta < 0$) et la formation du talus, donnant finalement lieu à une topographie davantage creusée et favorisant ici une plus grande amplitude des oscillations. Pour toutes ces valeurs significatives, on observe une nette décroissance de l'amplitude lorsqu'on augmente δ_x .

On peut interpréter cette différence d'amplitude avec δ_x en considérant le couple exercé par la force de traction. Pour simplifier, considérons le cas $\delta_y = 0$. Le moment exercé par la force de traction est nul lorsque $\theta = 0$. Pour $\delta_x < 0$, lorsque $\theta > 0$ le moment est *cabreur*, c'est-à-dire qu'il favorise un angle θ croissant, et pour $\theta < 0$ le moment est *pikeur* (favorise θ décroissant); autrement dit l'équilibre $\theta = 0$ est instable⁹. Respectivement, pour $\delta_x > 0$, le moment est stabilisateur. C'est la même situation lorsqu'on applique une force à une tige glissant sur une table par exemple (pousser par exemple une tige horizontale vers la droite à son extrémité gauche est instable et conduit à son basculement, la tirer par son extrémité droite est stable et permet son mouvement parallèle à sa direction). Cette réflexion rappelle également le mouvement d'une remorque tractée par un véhicule. En marche avant, la remorque revient naturellement dans le sillage du véhicule après avoir été perturbée. En marche arrière, il faut une correction active de la part du pilote pour contrôler sa trajectoire, sans quoi le pivot cherche à se plier totalement.

B Effet sur la longueur d'onde

Nous avons donc constaté un effet de la position du point de contact sur l'amplitude du motif, mais on peut aussi s'intéresser à la longueur d'onde de ce dernier. Cette dépendance n'a pas été présentée dans l'article publié.

Dans la gamme des paramètres expérimentaux explorés, on ne dispose pas d'une assez grande gamme de positions conduisant à des oscillations pour pouvoir étudier le lien entre δ_x et λ . Dans les simulations cependant, il est possible de le faire. Lorsqu'on représente la longueur d'onde du motif pour différentes valeurs de δ_x et δ_y (Figure 3.13), on s'aperçoit que seul le dernier a un effet significatif sur celle-ci. Une position plus élevée conduit à une longueur d'onde plus grande, avec pour limite basse le cabrage du patin mentionné ci-dessus, et pour limite haute sa bascule sur la spatule avant (uniquement cette dernière fait contact avec le lit granulaire et on bascule dans un régime totalement différent avec très peu d'oscillations). La Figure 3.13 représente la variation de la longueur d'onde en fonction de δ_y pour une gamme comprise entre ces deux régimes limites. On constate une variation très importante de λ/l , de 5 à 12, pour δ_y de -20 à 20 mm. La variation de δ_x , même sur une plus grande gamme (de -50 à 50 mm), n'a en revanche presque aucun effet sur λ .

8. Cette même simulation pour une pression plus importante ou pour une géométrie différente pourrait cependant conduire à des oscillations.

9. Bien entendu, la situation réelle n'est pas si simple puisqu'on a ici complètement ignoré le rôle des grains et seulement considéré la force de traction.

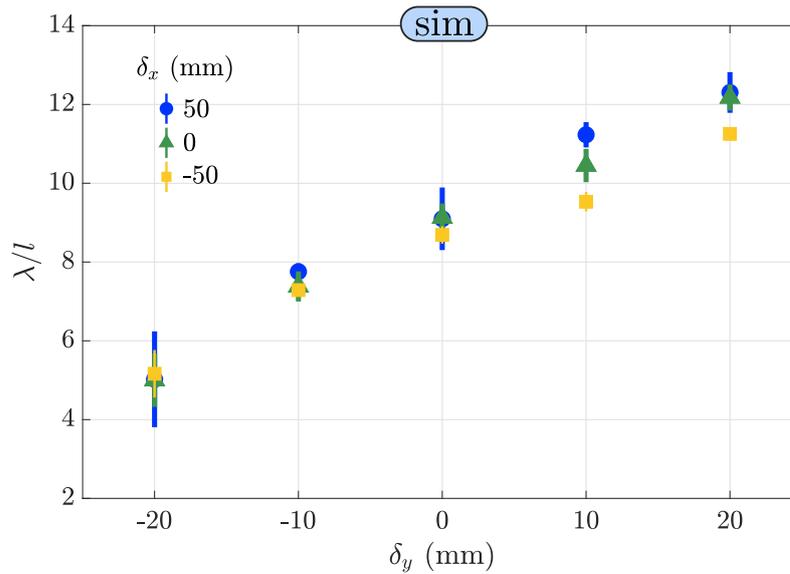


FIGURE 3.13 – Longueur d’onde adimensionnée λ/l en fonction de la coordonnée verticale du point de contact δ_y , pour différentes coordonnées horizontales δ_x . La longueur d’onde dépend fortement de δ_y , et très peu de δ_x [$m = 0.08$ g, $l = 48$ mm, $P = 33$ Pa, $\alpha = 45^\circ$].

II.2 Effet de la pression de confinement

A Masse distribuée symétriquement autour du centre géométrique

La Figure 3.14 montre l’évolution de la longueur d’onde et de l’amplitude adimensionnées par la longueur du patin, λ/l (en haut) et a/l (en bas), en fonction de la pression de confinement $P = mg/lw$, pour les expériences (Figure 3.14 (a)) et les simulations numériques (Figure 3.14 (b)). Expérimentalement, on a utilisé deux patins différents. Les points noirs, gris et rouges correspondent à un patin imprimé en PLA dont la masse peut être variée avec du lest mais pas en deçà de sa valeur à vide $m = 11.9$ g. Les points verts correspondent à un patin fabriqué en papier bristol rigide, permettant d’explorer la gamme $m = 1.9$ à 14 g. On voit que les deux jeux de données sont en accord, à une différence près imputable à la géométrie légèrement différente dans les deux cas, le patin en bristol étant fabriqué à la main et moins bien contrôlé que la version plastique imprimée en 3D. Dans chacun des cas, augmenter la pression de confinement P entraîne une augmentation de la longueur d’onde. Le patin léger permet d’observer l’augmentation de l’amplitude pour les faibles pressions, tandis que le patin lourd montre une diminution dans les pressions élevées. Lorsque la pression de confinement P est suffisamment élevée, l’instabilité périodique disparaît et le mouvement du patin devient stable (Figure 3.14 (a), région grise). Dans ce cas, l’amplitude tombe à zéro, et les longueurs d’onde mesurées (en gris) n’ont que peu de sens. Même dans ce régime stable, on peut extraire une longueur d’onde caractéristique du système en forçant le patin hors de l’équilibre en appliquant brièvement une force verticale vers le bas sur sa spatule avant. On peut alors observer quelques oscillations amorties avant que le patin ne revienne à l’équilibre. Les longueurs d’onde mesurées dans ce régime amorti sont indiquées par des points rouges dans les régions stables (Figure 3.14 (a)). Elles suivent bien la tendance trouvée dans la zone in-

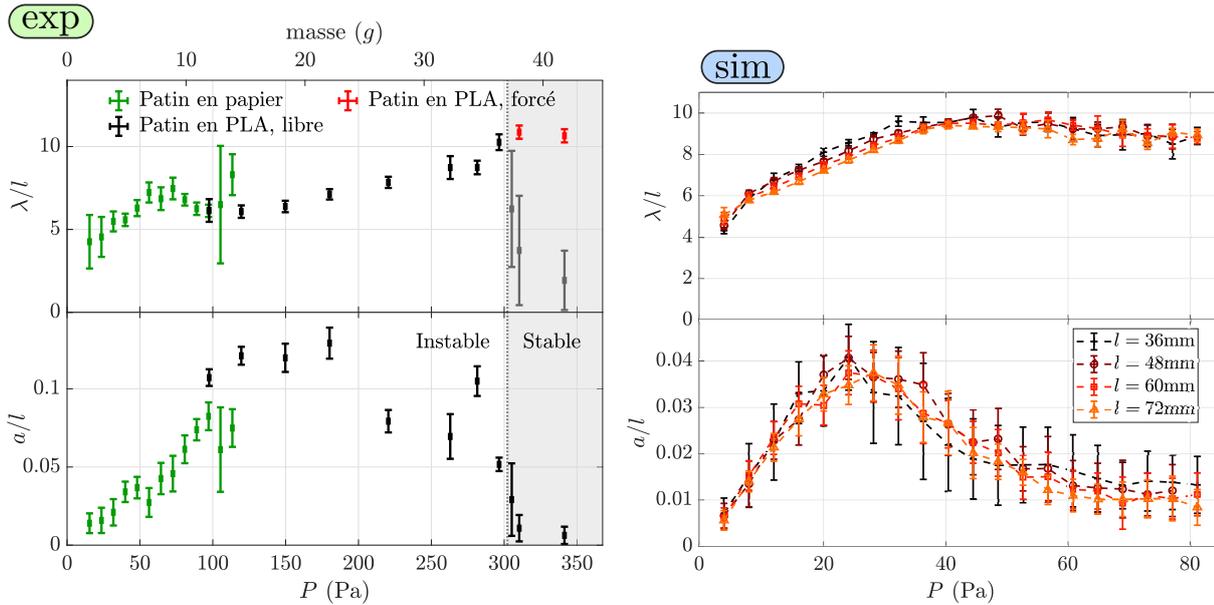


FIGURE 3.14 – Longueur d’onde normalisée λ/l (panneaux supérieurs) et amplitude normalisée a/l (panneaux inférieurs) de l’instabilité en fonction de la pression de confinement. (a) Expériences. L’axe horizontal supérieur représente la masse du patin m . Les points rouges pour la longueur d’onde dans le régime stable (zone grisée) sont obtenus à partir d’oscillations forcées amorties. Les points verts correspondent à un autre patin, fabriqué en papier bristol. Dans les deux cas, les paramètres du patin sont les suivants : $l = 30$ mm $w = 40$ mm, $\alpha = 45^\circ$, $\delta_x = -20$ mm, $\delta_y = 10$ mm]. (b) Simulations, pour différentes valeurs de l [$\alpha = 45^\circ$, $\delta_x = 0$ mm, $\delta_y = 0$ mm].

stable, et semblent atteindre un plateau, bien que plus de données soient nécessaires pour conclure sur ce point.

Côté simulations numériques, on est davantage libre de balayer les paramètres sans limite haute ou basse de masse. La Figure 3.14 (b) montre la longueur d’onde λ/l et l’amplitude a/l adimensionnées de l’instabilité en fonction de la pression de confinement P , pour différentes longueurs l de patin (on a donc représenté m/l en abscisse, avec un facteur $1/d_p$ pour rendre les unités cohérentes et défini une pression en Pa dans les simulations 2D). Les valeurs correspondant aux différentes longueurs se superposent sur une même courbe maîtresse, indiquant que l’adimensionnement des différentes grandeurs par l est pertinent pour décrire le problème. Les plus petites valeurs de la pression de confinement entraînent des oscillations avec $\lambda \simeq 5l$ et une amplitude très faible (environ 1% de l). La longueur d’onde augmente avec la pression croissante et atteint cette fois nettement un plateau vers $\lambda \simeq 9l$. L’amplitude atteint un maximum (autour de $P = 25$ Pa) avant de diminuer vers zéro à pression plus élevée. Les expériences et les simulations sont donc en bon accord qualitatif, affichant toutes deux d’une part l’augmentation puis la diminution de l’amplitude de l’instabilité pour une augmentation de la pression de confinement (patin plus lourd ou plus court), et d’autre part une augmentation de la longueur d’onde d’environ $5l$ à $10l$. En revanche, il y a des différences quantitatives substantielles entre les deux ; tout d’abord il existe un facteur 3 dans l’amplitude mesurée, les simulations conduisant à un motif largement moins marqué ; ensuite les pressions de confinement diffèrent d’un facteur environ 5 révélant les limites de notre correspondance entre les cas 2D et 3D.

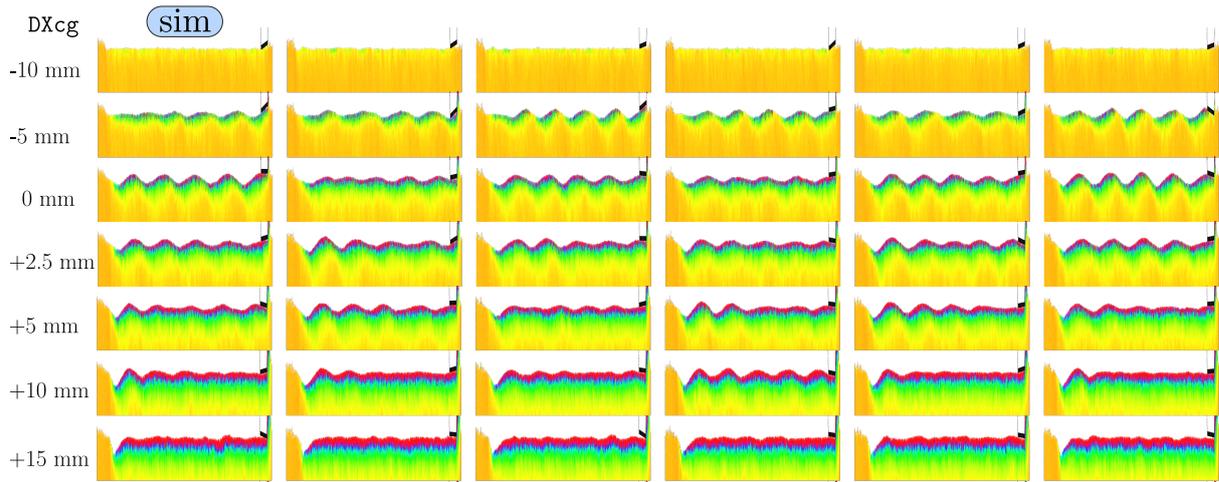


FIGURE 3.15 – Illustration de l’effet de DX_{cg} à $DY_{cg} = 0$. Des états finaux de simulation sont représentés comprimés cinquante fois horizontalement (de haut en bas, DX_{cg} croissant, c’est-à-dire que la masse est déplacée de l’arrière à l’avant du patin, de gauche à droite six grains différentes sont représentées). Les grains sont colorés en fonction de leur déplacement horizontal total.

Dans les deux cas, il semble y avoir une valeur optimale de la pression de confinement pour l’instabilité. Nous pouvons proposer l’interprétation suivante. D’une part, lorsque la pression de confinement est trop faible, le patin est trop léger pour racler les grains et glisse sur la surface sans former de talus. D’autre part, pour une pression élevée, le patin forme un grand talus mais semble trop lourd pour s’élever au-dessus et reste dans un état enfoncé. Dans les deux cas, l’amplitude normalisée diminue. L’existence d’une valeur optimale pour la pression de confinement rappelle les pièges à fourmis qui présentent un optimum de la probabilité de capture d’une fourmi en fonction de sa masse [Humeau *et al.*, 2015], interprété comme l’existence d’un minimum du coefficient de frottement en fonction de la pression appliquée [Crassous *et al.*, 2017].

B Effet d’une distribution en masse non homogène

L’effet de la distribution de la masse est important mais nous ne l’avons que rapidement mentionné dans l’article. Nous pouvons ici développer nos observations.

Expérimentalement, on a pu observer une très grande influence de la position de la masse sur le patin. Qualitativement, une masse plutôt placée à l’arrière favorise un patin légèrement cabré qui ne peut parfois pas accumuler de grains devant lui car le coin avant ne touche pas la surface. À l’inverse, une masse placée plutôt sur l’avant favorise l’enfoncement de ce coin et forme un talus bien plus grand. Ajouté à cela, il y a une dépendance à la position verticale de la distribution de masse. Cette double dépendance est bien plus facile à explorer numériquement (difficulté expérimentale de fixer le lest et de mesurer avec précision la position du centre de gravité) c’est pourquoi nous avons choisi de présenter uniquement des résultats de simulation dans cette partie. Concernant la partie expérimentale, le centre de gravité a toujours été placé au centre du patin, ce qu’on a vérifié en faisant tenir le patin en équilibre sur une tige cylindrique.

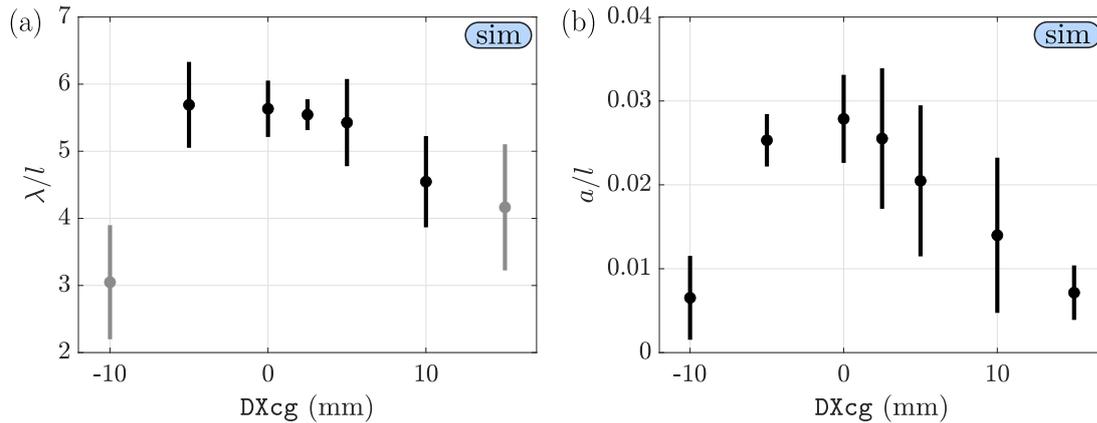


FIGURE 3.16 – (a) Longueur d’onde adimensionnée λ/l en fonction de la position horizontale du centre de gravité DX_{cg} pour $DY_{cg} = 0$. (b) Amplitude adimensionnée a/l des oscillations en fonction de DX_{cg} . Les simulations utilisées sont celles visibles sur la Figure 3.15. On constate l’augmentation puis la diminution de l’amplitude, tandis que la longueur d’onde est relativement peu affectée par la position du centre de masse dans la zone instable.

Sur la Figure 3.15, on peut observer qualitativement le comportement expliqué ci-dessus. En effet, une masse répartie trop sur l’arrière du patin conduit à une diminution puis une disparition complète du motif. En revanche, le déplacement de la masse vers l’avant conduit à un déplacement de davantage de grains (visible à travers leur couleur, les grains passant du jaune au rouge lorsqu’ils sont déplacés par la droite), jusqu’à la disparition de l’instabilité lorsque le patin est situé trop sur l’avant (on voit que le creux initial est très important pour ces simulations, puis un équilibre stable est immédiatement trouvé, à des fluctuations près).

Quantitativement, l’extraction de la longueur d’onde et de l’amplitude des oscillations confirme cette observation car l’amplitude présente un maximum en DX_{cg} autour de zéro (Figure 3.16 (b)). La longueur d’onde quant à elle reste comprise entre $5l$ et $6l$ dans les cas oscillants (pour DX_{cg} entre -5 et 5 mm, Figure 3.16 (a)). On a aussi représenté la longueur d’onde pour les cas non oscillants même si celle-ci a moins de sens, d’où sa représentation en couleur grise.

Enfin, une observation intéressante sur ces simulations est le comportement de la moyenne temporelle de θ , notée $\langle \theta \rangle$. En effet, comme le montre la Figure 3.17, l’augmentation de DX_{cg} est associée à la diminution de $\langle \theta \rangle$. C’est évidemment attendu mais l’amplitude de cette variation peut surprendre, moins de 1° de différence entre la masse placée totalement à l’avant et totalement à l’arrière.

II.3 Effet de la géométrie

A Effet de l’angle de la spatule avant

Dans ce paragraphe, nous étudions l’influence de l’angle de la spatule noté α . Nous avons expliqué que l’instabilité commence par le raclage du lit granulaire, qui se fait par l’intermédiaire de cette spatule. Sa géométrie est donc naturellement importante, en

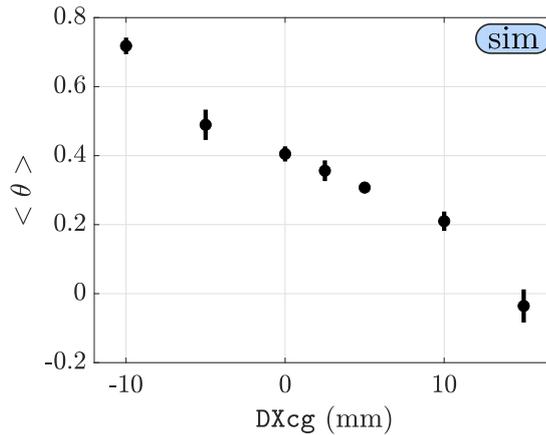


FIGURE 3.17 – Moyenne temporelle de l’inclinaison $\theta(t)$, notée $\langle \theta \rangle$. L’écart-type entre les six différentes graines est représenté par les barres d’erreur. On constate que les variations statistiques de cette valeur sont faibles. La tendance décroissante de $\langle \theta \rangle$ est très nette et marque le comportement décrit (patin légèrement cabré/piqué) mais l’inclinaison moyenne reste proche de zéro dont elle dévie de moins d’un degré.

particulier à travers cet angle qui est à relier directement à l’efficacité du raclage ; un angle très obtus étant peu prompt à s’enfoncer dans le milieu granulaire à l’inverse d’un angle plus marqué. Augmenter l’angle de la spatule avant entraîne donc la formation d’un tas plus grand, et la longueur d’onde et l’amplitude du motif augmentent toutes deux en conséquence (Figure 3.18). Cela reste vrai pour une large gamme de pressions de confinement : trois valeurs correspondant approximativement à la croissance, au pic et à la diminution de l’amplitude pour $\alpha = 45^\circ$ sur la Figure 3.14 (b) sont montrées.

Il est intéressant de noter qu’à la fois l’amplitude et la longueur d’onde continuent d’augmenter lorsque α est augmenté pour $\alpha > 60^\circ$. Cependant, lors de tests de raclage numériques à $\theta = 0^\circ$ et $y = y_0$ fixé légèrement plus bas que le niveau de surface du lit granulaire, nous avons remarqué que le taux de collecte des grains dans le tas augmente de $\alpha = 10^\circ$ à $\alpha = 60^\circ$ puis sature entre 60° et 90° (voir section III.7.B). Dans la simulation libre, le raclage est affecté non seulement par la profondeur du patin et α mais aussi par sa vitesse verticale, son tangage et sa vitesse de rotation. Comprendre le raclage dynamique nécessite davantage de travail et pourrait expliquer pourquoi l’amplitude et la longueur d’onde continuent d’augmenter pour $\alpha \geq 60^\circ$.

Pour des valeurs élevées de l’amplitude, l’effet de l’épaisseur finie du lit granulaire ne peut être négligé. En effet, l’épaisseur du lit granulaire est de 8.4 mm et l’amplitude du motif atteint la moitié de cette valeur lorsque $a/l = 0.087$, ce qui indique que les points de données pour $\alpha \geq 60^\circ$ pour $P \geq 30$ Pa sur la Figure 3.18 peuvent être affectés par la présence du fond de la simulation, ce qui pourrait potentiellement par exemple limiter l’amplitude ou la longueur d’onde mesurées pour ces simulations.

B Longueur du patin

Cette section n’a pas été développée dans notre article. Comme nous l’avons montré, la longueur du patin est sans influence sur la longueur d’onde et l’amplitude dans les simu-

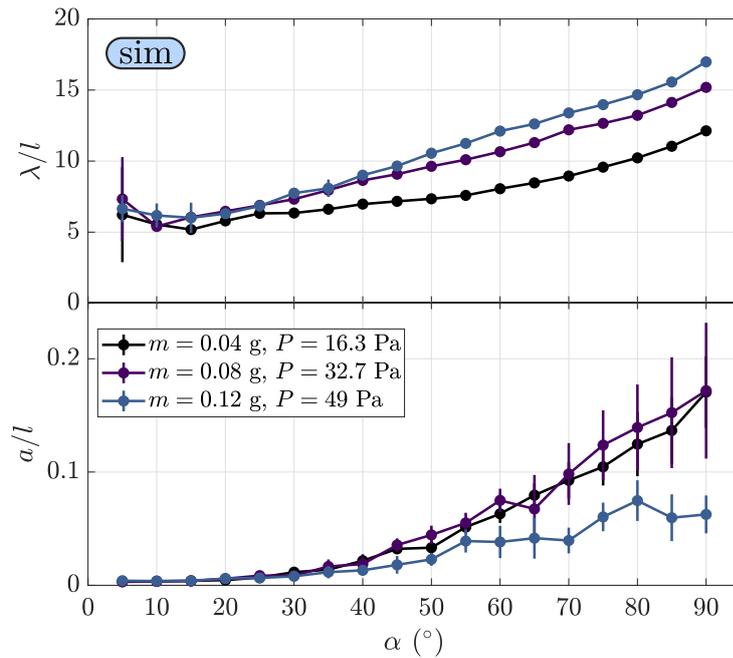


FIGURE 3.18 – Rôle de l’angle α dans les simulations numériques. Le panneau supérieur représente l’évolution de la longueur d’onde adimensionnée par la longueur du patin λ/l en fonction de α . Le panneau inférieur montre l’évolution de l’amplitude normalisée a/l . On a superposé les résultats issus de trois simulations à des masses de patin différentes en gradient de couleurs.

lations, à condition de tout adimensionner par l (tracer a/l , λ/l en fonction de m/l). Dans la limite des petits l , il peut cependant y avoir plusieurs problèmes, tout d’abord lorsque la taille du patin est seulement de quelques grains la nature discrète du milieu provoque des mouvements erratiques et le problème change. Ensuite, nous avons réalisé qu’il était important d’adapter le moment d’inertie du patin à des petites longueurs sous peine de voir un comportement incohérent ou de sortir du régime quasistatique (voir [section I.2.C](#)). À l’autre extrême, dans la limite des grands l on observe parfois un comportement différent. La disparition du talus ne conduit pas directement au plongeon du patin puisqu’une grande partie de celui-ci repose encore sur la partie montante de la topographie. Il existe alors un «retard» au basculement, et on doit attendre que le sommet de la bosse atteigne la moitié du patin pour que celui bascule brutalement. La conséquence est une topographie triangulaire au sommet ([Figure 3.19](#)) et un signal $\theta(x)$ très asymétrique, croissant lentement, décroissant très brutalement, et stagnant aux valeurs extrêmes ([Figure 3.20](#)). En plus de cela, le dimensionnement du motif avec l est limité par la profondeur et on peut alors sentir l’influence du fond de la cuve.

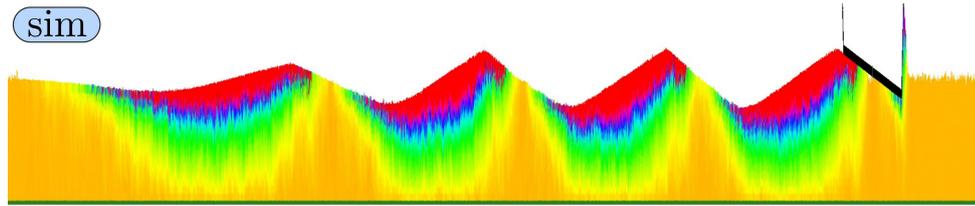


FIGURE 3.19 – Topographie triangulaire au sommet des bosses, provoquée par un patin très grand (ici 180 mm) basculant au sommet de chacune d'entre elles. Les creux sont davantage arrondis car l'augmentation de l'angle du patin se fait de manière plus progressive (on peut relier ce résultat à la Figure 3.20 sur laquelle on a représenté l'évolution de θ). [$m = 0.187$ g, $l = 180$ mm, $P = 21$ Pa, $\alpha = 45^\circ$]

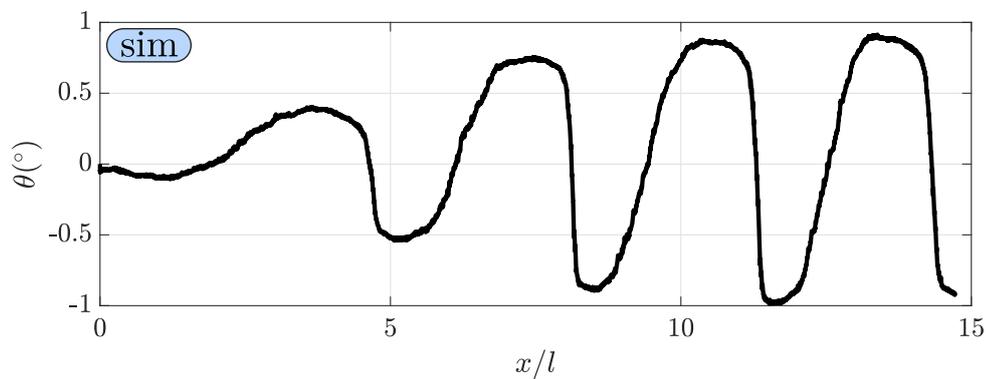


FIGURE 3.20 – Inclinaison θ en fonction de la distance parcourue adimensionnée x/l pour la simulation représentée sur la Figure 3.19. Pour des patins aussi longs, la croissance de θ est bien plus lente que sa décroissance brutale, comportement associé aux creux arrondis et aux sommets triangulaires.

II.4 Effet du frottement intergrain

Numériquement, il est possible de modifier le coefficient de frottement entre les grains, noté μ . On constate qu'une valeur de μ trop basse¹⁰ fait complètement disparaître l'instabilité et le motif (Figure 3.21). Pour $\mu \geq 0.2$, le motif n'est pas affecté par la modification de ce paramètre. L'autocorrélation des signaux confirme ce qu'un simple comptage sur la Figure 3.21 permet de conclure, à savoir que la longueur d'onde ne change pas pour μ compris entre 0.2 et 1.2, et que le degré de périodicité est également constant dans cette gamme.

III Compléments

Nous avons vu le rôle de plusieurs paramètres sur l'instabilité. On propose ici un catalogue de mesures et expériences complémentaires explorant d'autres diagnostics et

10. Notons cependant que la limite $\mu = 0$ n'est pas physique et correspondrait plutôt à un fluide sans viscosité.

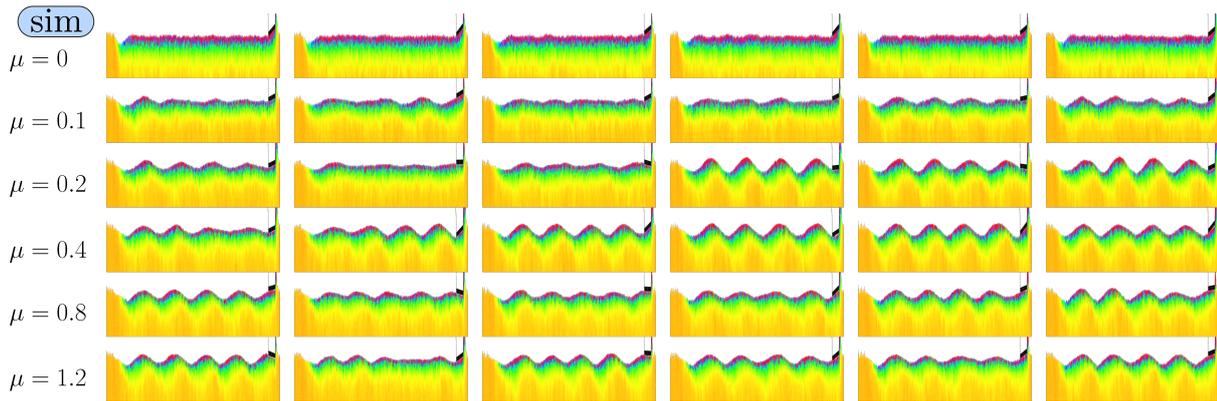


FIGURE 3.21 – Effet du frottement entre grains μ sur le motif formé. De haut en bas, μ prend des valeurs croissantes de zéro à 1.2. De gauche à droite, six différentes graines sont représentées. On peut remarquer qu'un frottement intergrain minimal est requis pour observer des oscillations.

des phénomènes annexes liés à l'instabilité principale. Ces tentatives, plus ou moins fructueuses, ont été réalisées dans le but de comprendre davantage le phénomène. Nous espérons qu'une partie de ces résultats puisse à l'avenir contribuer à mener une réflexion, voire à élaborer une modélisation de l'instabilité.

III.1 Rôle du frottement au point de contact

Comme nous l'avons noté, la disparition de l'instabilité lorsqu'on déplace le point de traction vers l'avant dans les expériences, et l'absence de ce résultat dans les simulations, suggère que le frottement au point de contact joue un rôle important. Il ne semble cependant pas être un ingrédient nécessaire à l'instabilité dans l'absolu puisqu'il est inexistant dans les simulations. On a observé qualitativement qu'un trop grand frottement peut dans certains cas suffire à empêcher les oscillations en piégeant le mouvement du patin. D'autres expériences avec une goutte de liquide (eau ou lubrifiant) placée au contact ont parfois également montré ce comportement, que l'on peut interpréter cette fois par la tension de surface et l'existence d'une ligne de contact métal/liquide dont le déplacement requiert une force verticale seuil à dépasser, de même manière qu'un frottement solide.

Commençons par noter que cette observation indique que les surfaces en contact doivent être bien contrôlées. Pour cela, on les a polies et on les nettoie à l'alcool avant chaque expérience, un grain de sable, un peu de saleté ou un peu de graisse provenant des doigts pouvant modifier le coefficient de frottement du contact et ainsi avoir des conséquences considérables sur le résultat de l'expérience.

Le contact le plus frottant conduit à une topographie plate. Le contact le moins frottant donne des signaux relativement sinusoïdaux. Le contact intermédiaire donne une autre longueur d'onde et une forme moins sinusoïdale. En particulier, on peut s'intéresser au mouvement d'un point repéré par le programme d'analyse d'images, celui qui est placé le plus loin de la force. Sa trajectoire est représentée sur la Figure 3.22 pour ce cas intermédiaire.

Cette forme particulière suggère que le mouvement se fait d'une manière bien précise ;

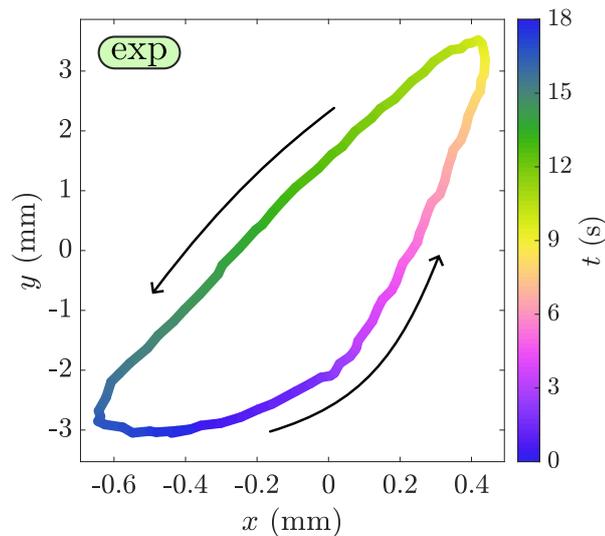


FIGURE 3.22 – Trajectoire d’un point situé à l’avant du patin dans une expérience typique. On constate qu’il ne suit pas la même trajectoire lorsqu’il monte et lorsqu’il descend. On a coupé le signal pour représenter une unique oscillation, les autres se comportant de manière très similaire. Il est important de remarquer que les axes ne partagent pas une échelle commune, et leur zéro est fixé arbitrairement). [$l = 30$ mm, $w = 40$ mm, $m = 11.56$ g, $P = 94$ Pa, $\alpha = 45^\circ$, $v = 1$ cm \cdot s $^{-1}$].

on dirait la combinaison de deux arcs de cercle. On peut penser que le patin pivote autour de son point de contact avant que celui-ci ne se déplace. C’est une hypothèse qu’on peut tester en introduisant et en calculant le centre instantané de rotation du patin.

III.2 Étude du centre instantané de rotation

Commençons par définir le centre instantané de rotation (CIR), nous verrons ensuite comment le calculer dans différents cas.

A Préambule mathématique

En cinématique du solide, on parle de centre instantané de rotation (CIR) pour désigner le point de vitesse nulle pour un mouvement plan (on parle d’axe instantané de rotation en 3D), autrement dit le point autour duquel le solide est en rotation pure sans translation. Commençons par introduire quelques notions de cinématique du solide. Bien qu’une grande partie des résultats présentés soit généralisable au cas tridimensionnel, nous considérerons un mouvement plan car c’est le cas du patin, que ce soit numériquement ou expérimentalement (le patin ne se déplace pas selon \vec{e}_z , Figure 3.2).

Considérons un solide indéformable \mathcal{S} en mouvement quelconque par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{R} . Ce mouvement est associé à un champ de vitesse qu’on peut étendre à tout point M de l’espace, la vitesse en M s’écrivant $\overrightarrow{v_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}(M)$ ou plus simplement $\vec{v}(M)$. Ce champ a la propriété d’être équijectif :

Définition - champ équiprojectif

Un champ vectoriel \vec{v} est dit équiprojectif si, étant donnés deux points A et B ,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}(A) = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}(B) \quad (3.5)$$

Géométriquement, cela traduit l'égalité en valeur algébrique des projections de deux vecteurs vitesse en deux points A et B sur la droite (AB) . Cette propriété, dérivée de l'indéformabilité du solide [Khène, 2016], permet de représenter ce champ par un torseur, appelé torseur cinématique. Sa résultante est le pseudovecteur $\vec{\omega}$, appelé vecteur rotation, et son moment en un point A est $\vec{v}(A)$, le vecteur vitesse linéaire du point A . La vitesse entre deux points quelconques du solide A et B est liée par la relation (3.6).

Relation de transfert du torseur cinématique entre A et B

$$\vec{v}(A) = \vec{v}(B) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} \quad (3.6)$$

On peut alors distinguer le cas $\vec{\omega} = \vec{0}$ pour lequel le solide est en translation pure du cas général $\vec{\omega} \neq \vec{0}$. On voit alors à travers la relation (3.6) que la vitesse dépend du point considéré (un choix souvent fait est de définir la vitesse de translation du solide comme la vitesse de son centre d'inertie [Landau et Lifschitz, 1982]), alors que la vitesse de rotation est absolue (indépendante du point considéré). On peut donc toujours choisir un point C tel que sa vitesse $\vec{v}(C)$ soit nulle, de telle sorte que le mouvement de \mathcal{S} à un instant donné se réduise à un mouvement de rotation pure autour de C . C'est le centre instantané de rotation de \mathcal{S} .

B Calcul théorique pour une trajectoire sinusoïdale

Afin de donner du sens à ce centre instantané de rotation, commençons par regarder son comportement dans un cas canonique : une trajectoire parfaitement sinusoïdale et un patin en tout point tangent à cette trajectoire (Figure 3.23). Dans cette situation simplifiée, le CIR est situé sous le patin au niveau des bosses, et au-dessus de celui-ci au niveau des creux. Lorsque le patin avance vers la droite, par exemple juste avant une bosse comme représenté sur la Figure 3.23, le CIR approche depuis la droite sur sa branche correspondante, passe exactement sous le patin à la verticale de ce dernier au sommet de la bosse, puis repart derrière vers l'infini. Il approchera ensuite à nouveau depuis l'avant sur la branche supérieure à l'approche du creux suivant. Entre ces deux instants il existe une position où le CIR n'est pas défini puisque la rotation du patin change de signe.

Retenons que dans cette situation simplifiée, le CIR décrit des branches se déplaçant toujours vers la gauche, et que ce dernier se situe respectivement sous le patin au niveau des bosses, et au-dessus de ce dernier au niveau des creux. Voyons maintenant comment il se comporte en pratique, dans un cas où la trajectoire n'est pas sinusoïdale et où le patin n'est pas en tout point tangent à la trajectoire de son centre (comme on le verra à la section III.4.D).

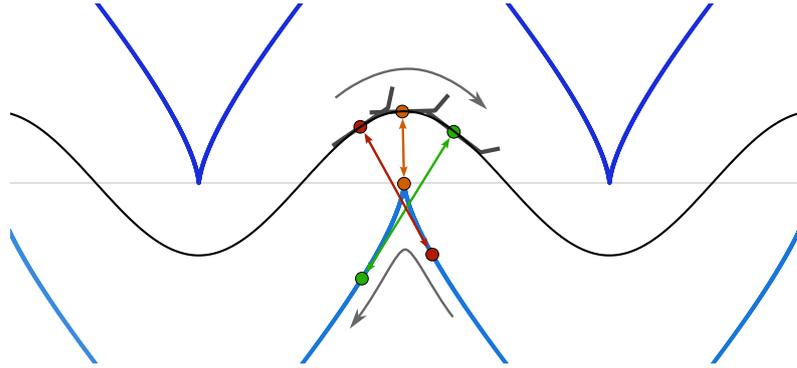


FIGURE 3.23 – Représentation d’une situation théorique où le patin suivrait une trajectoire sinusoïdale (trait noir) en étant en tout point tangent à cette trajectoire. Le centre instantané de rotation peut alors être calculé pour chaque position et est représenté en trait bleu. Les portions en bleu clair, sous la trajectoire, correspondent à une altitude positive (bosses) tandis que les portions en bleu foncé correspondent aux creux. Trois positions du patin sont représentées au voisinage d’une bosse, et repérées par des points colorés dont on a repéré le centre instantané de rotation en utilisant la même couleur, des doubles flèches relient également ces points. Enfin, des flèches grises indiquent le sens de déplacement du patin (vers la droite) et le sens de déplacement de CIR (vers la gauche).

C Calcul pratique à partir de données expérimentales

Dans le cas des données expérimentales, on dispose des coordonnées de certains points appartenant au solide au cours du temps. On peut montrer que pour un couple de points aux instants t_1 et t_2 qu’on notera A_i et B_i ($i = 1$ ou 2 selon l’instant considéré), le centre instantané de rotation peut être trouvé en traçant les médiatrices des segments A_2A_1 et B_2B_1 ; il se trouve à l’intersection de ces dernières et on peut la trouver par le calcul [Panjabi, 1979]. Cependant, nous disposons en fait d’un ensemble de plus de deux points, et nous aimerions idéalement trouver le centre instantané de rotation minimisant l’erreur, au sens des moindres carrés par exemple. Un travail de bibliographie a révélé que ce même problème est rencontré dans un contexte médical pour l’étude des articulations [Challis, 2001; Crisco *et al.*, 1994]. On utilisera la méthode proposée par McCane *et al.* [2005]. L’idée générale est de soustraire à chaque jeu de points leur barycentre, définissant ainsi deux matrices notées F et E , pour ensuite trouver la valeur de Θ qui satisfasse $F = R(\Theta)E$. On a alors la rotation d’une part, puis d’autre part la translation \vec{v} peut être retrouvée avec $p_i(t_2) = R(\Theta)p_i(t_1) + \vec{v}$ où $\vec{p}_i(t_j)$ sont les coordonnées du point i au temps t_j . En notant ensuite que le point \vec{c} recherché est le seul inchangé par cette transformation, autrement dit il satisfait $\vec{c} = R\vec{c} + \vec{v}$ d’où $\vec{c} = (I - R)^{-1}\vec{v}$ et d’après Crisco *et al.* [1994] on obtient finalement

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{2} \left(x_v - \frac{y_v}{\tan(\Theta/2)} \right) \\ x_c &= \frac{1}{2} \left(y_v + \frac{x_v}{\tan(\Theta/2)} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

McCane *et al.* [2005] fournissent une fonction Matlab en annexe de leur article, que nous avons utilisée pour déterminer le centre instantané de rotation dans le cas de notre patin. Les visualisations les plus convaincantes sont des films de l'expérience auxquels on superpose le centre instantané de rotation calculé, ici on se contentera d'une image moyenne du film sur laquelle on superpose tous les centres calculés (Figure 3.24). La méthode donnée par McCane *et al.* [2005] fournit l'échelle de la transformation (qui doit être 1 dans un cas parfait, c'est-à-dire pour un solide mathématique dont la distance entre deux points ne varie pas), dans notre cas on n'enregistre pas de déviations supérieures à 10^{-4} .

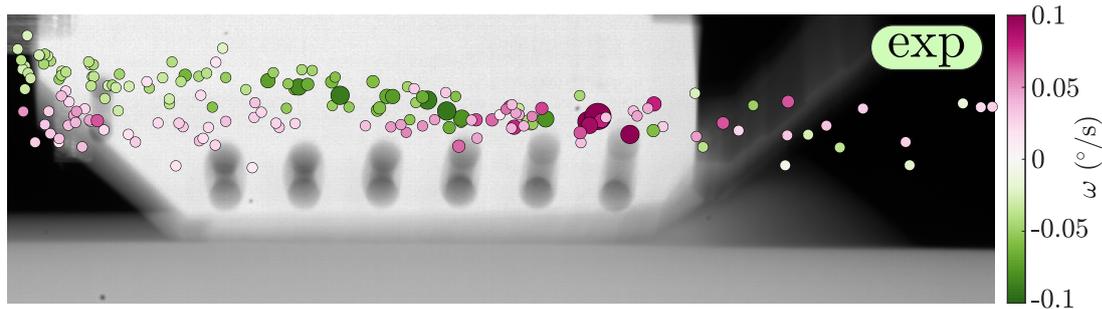


FIGURE 3.24 – Centres instantanés de rotation pour une expérience typique. Tous les CIR calculés sont superposés sur la même image, leur taille et couleur représentent la vitesse de rotation (échelle à droite) [$l = 30$ mm, $w = 40$ mm, $m = 11.5$ g, $P = 95$ Pa, $\alpha = 45^\circ$].

D Lien avec le frottement

Le frottement solide au point de contact implique l'existence d'un seuil du rapport des composantes normale et tangentielle de la force à dépasser pour sa mise en mouvement (c'est le cône de frottement). On peut raisonnablement imaginer que tant que ce seuil n'est pas atteint, le CIR est bloqué au point de contact et ne peut pas se situer ailleurs. La rotation n'est alors possible qu'autour du point de contact, on peut alors aisément comprendre qu'une rotation autour d'un point situé à l'arrière du patin est permise pour donner $\theta > 0$, tandis qu'autour d'un point à l'avant une même rotation est interdite par les grains car il faudrait que toute la partie arrière du patin s'enfonce dans le lit granulaire, ce qui demanderait une force bien plus grande. Ce raisonnement est pourtant loin d'être satisfaisant. D'une part, le calcul pratique du CIR nous montre qu'il n'est à aucun moment contraint à se placer sur le point de contact (par exemple sur la Figure 3.24), sauf dans le cas pathologique d'un contact rendu volontairement très frottant avec du papier de verre. Cela signifie que l'explication du cône de frottement est invalide. Peut-être faut-il considérer que la nature du milieu granulaire qui provoque des réarrangements réguliers sous forme de collisions transmises mécaniquement au patin et jusqu'au contact joue le rôle de vibreur pour cette interface. On aurait alors une situation où les vibrations du contact permettent son mouvement par à-coups, et ainsi font disparaître le comportement frottant, rappelant l'étude de Lastakowski *et al.* [2015]. Pourtant, dans les conditions de la Figure 3.24, on a bien disparition des oscillations avec δ_x positif. D'autre part, ce raisonnement entre en contradiction avec l'observation d'un patin tracté par une ficelle détaillé dans la section suivante.

III.3 Comportement du patin tracté par l'intermédiaire d'une ficelle

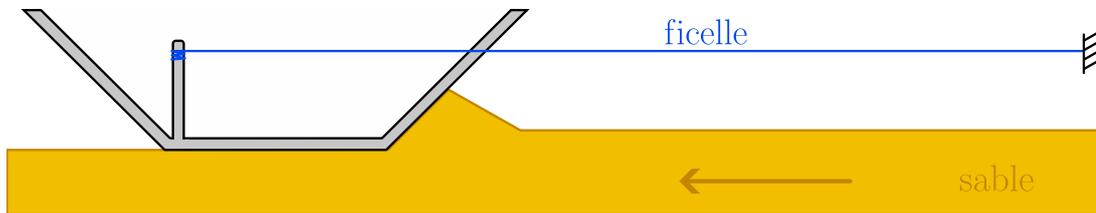


FIGURE 3.25 – Configuration alternative où le patin est tracté par l'intermédiaire d'une ficelle. Une des extrémités de la ficelle est attachée au point où la force était appliquée au patin dans un cas instable. L'autre extrémité est attachée à un point fixe situé loin devant le patin et à l'horizontale du premier. Ainsi, les deux degrés de liberté sont permis et on s'affranchit du frottement décrit ci-dessus. Cependant, nous n'avons jamais observé d'oscillations dans cette configuration.

Nous avons essayé à plusieurs reprises d'exercer la force par l'intermédiaire d'une ficelle tendue entre le patin et un point fixe (Figure 3.25). L'orientation horizontale de cette ficelle et le placement du point fixe loin du patin assure une force toujours horizontale et les deux degrés de liberté du patin sont parfaitement permis. C'est une situation qui semble se rapprocher au maximum des conditions numériques, sans frottement au point de contact. Pourtant, toutes nos tentatives, avec des ficelles différentes, en déplaçant le point d'attache, n'ont jamais conduit à des oscillations entretenues du patin. Nous n'avons à ce jour pas pu comprendre ce comportement et il reste un point de questionnement important sur une partie de nos résultats et la compréhension générale du phénomène.

III.4 Exploration des liens entre les variables du problème

Nous n'avons pas réussi à proposer un modèle théorique pour le phénomène étudié. Cependant, nous avons fait de nombreux efforts en ce sens et il en découle un certain nombre de résultats intéressants que nous allons présenter ici. Certains concernent le lien entre les différentes grandeurs du problème, d'autres montrent certains aspects détaillés du comportement des grains.

Une des difficultés principale rencontrée réside dans l'indépendance à la vitesse et le régime quasistatique. Cela implique que l'équilibre des forces est potentiellement presque toujours respecté ; il est donc difficile de passer d'un raisonnement sur les forces mesurées à une conséquence sur la trajectoire du patin. Pour les phénomènes analogues introduits comme la tôle ondulée (voir section III), il s'agit systématiquement de partir du principe fondamental de la dynamique pour déduire d'un modèle de forces une conséquence sur la dérivée temporelle d'une vitesse. Dans notre cas, c'est la position qui joue le rôle du temps et la connaissance partielle ou complète des forces dans le système ne présage en rien des dérivées spatiales de la position. Il n'est toutefois pas inintéressant de comprendre ces forces, même si cela ne mène pas *in fine* à un modèle simplifié du phénomène.

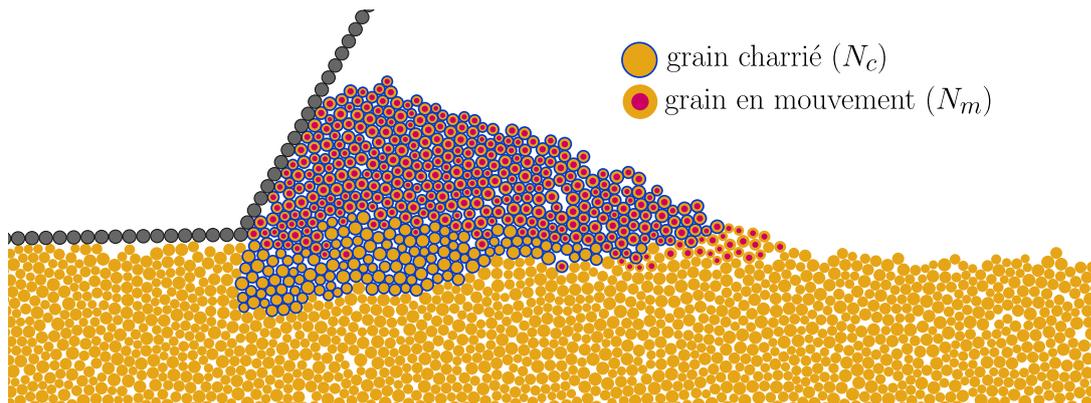


FIGURE 3.26 – Exemple des différences de comptage entre les deux méthodes. Les grains dits charriés caractérisés par leur déplacement horizontal total sont cerclés de bleu tandis que les grains en mouvement repérés par leur vitesse horizontale moyenne sont notés d'un point rouge. Il existe une nette différence entre les deux méthodes.

A Choix de la méthode de comptage des grains

Le comptage numérique des grains du talus pose la question de leur définition. Deux choix principaux ont été faits :

- Grains charriés : on considère uniquement les grains qui ont été déplacés vers la droite d'une distance seuil significative par le patin. En plus de cela, on introduit un critère géométrique pour compter uniquement les grains qui sont devant le coin avant du patin. On note N_c les grains comptés de cette manière.
- Grains en mouvement : on applique un seuil en vitesse horizontale moyennée sur un temps long. On compte les grains en mouvement à partir de 50 à 75% de la vitesse de traction. Si ce seuil est ainsi fixé et que la moyenne est réalisée sur un temps approprié, on va ainsi compter uniquement les grains qui sont en train d'être emmenés par le mouvement du patin, et on les note N_m .

Le résultat des deux méthodes de comptage est représenté sur la Figure 3.26. On constate que certains grains sont comptés dans N_c et non dans N_m et vice-versa. La valeur de la quantité de grains peut être sensible aux seuils choisis, cependant la variation de cette quantité dans le temps et la forme générale du talus ne se comportent pas identiquement dans les deux cas. En particulier, on peut constater que des grains situés sous l'altitude du patin sont comptés dans N_c . En effet, le cisaillement du lit granulaire n'est pas localisé qu'en surface et des grains en profondeur sont également déplacés par son passage (ceux-ci sont mis en mouvement à une vitesse bien inférieure et ne sont donc pas comptés dans N_m). On peut défendre l'idée que le comptage en vitesse est meilleur si on souhaite se rapprocher de la définition expérimentale (géométrique) du talus, mais c'est surtout le lien avec la force qui peut nous faire basculer vers ce choix.

En effet, on a représenté la composante horizontale de la force exercée sur la spatule, notée F_t , ainsi que les quantités N_m et N_c sur la Figure 3.27. Ce graphe montre que si les variations à grande échelle de ces trois grandeurs sont similaires, le signal N_m est bien plus corrélé à la force et même de plus petites variations se retrouvent entre ces deux signaux. Surtout, N_m varie presque en phase avec F_t tandis qu'un déphasage existe

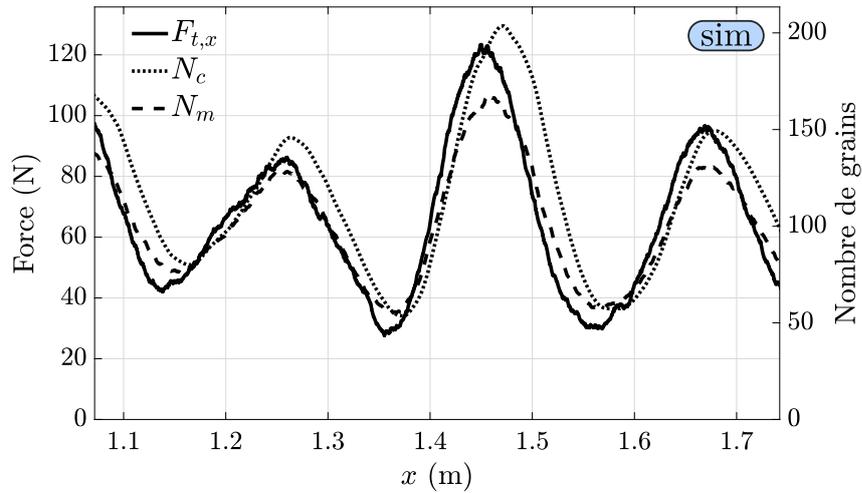


FIGURE 3.27 – Signaux de force de traînée sur la spatule F_t , grains charriés N_c et grains en mouvement N_m après moyenne glissante. Les signaux sont fortement corrélés mais la corrélation est meilleure avec N_m . Les mêmes signaux sont représentés sur la Figure 3.28 [$m = 0.12$ g, $l = 48$ mm, $P = 50$ Pa, $\alpha = 45^\circ$].

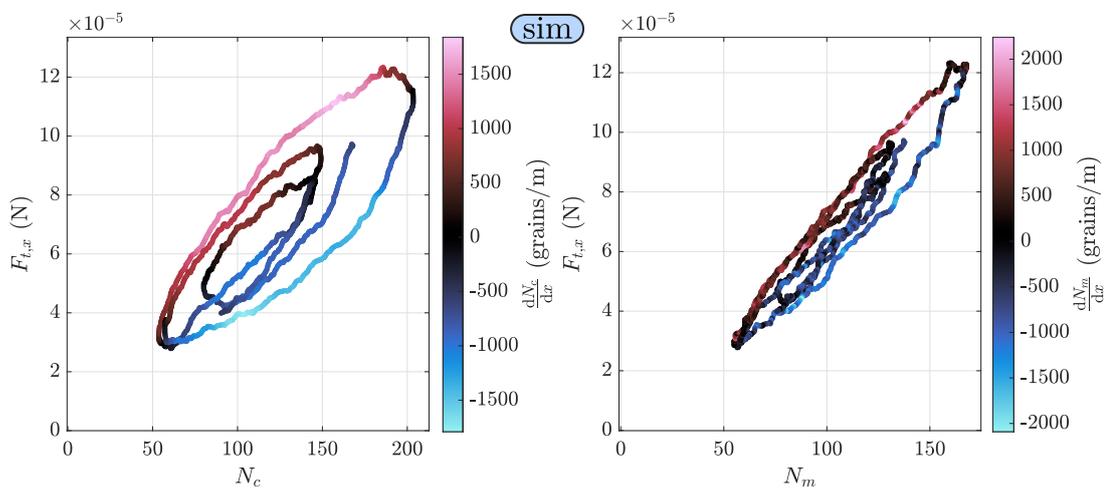


FIGURE 3.28 – Force de traînée F_t sur la spatule en fonction de la quantité de grains dans le talus pour les deux méthodes de comptage présentées. On constate qu'il existe une différence selon qu'on est en train d'accumuler ou de vider le talus, représenté en couleur à travers le taux de variation de la quantité. Cette différence est largement réduite avec N_m mais persiste [$m = 0.12$ g, $l = 48$ mm, $P = 50$ Pa, $\alpha = 45^\circ$].

avec N_c . Ce déphasage est probablement dû à la différence lors de l'accumulation de grains dans le talus, où les grains doivent parcourir une certaine distance horizontale avant d'être comptés, et la vidange du talus où certains grains sont encore comptés car ils avaient été déplacés auparavant mais ne le sont plus. La vitesse instantanée des grains n'est pas sujette à ce genre d'hystérésis. Cela constitue un argument en faveur de l'utilisation de N_m , en particulier dans la perspective de faire des liens avec les forces du système. La figure 3.28 montre comment F_t évolue avec N_c et N_m et révèle que si l'hystérésis est plus importante avec N_c , celle-ci existe toujours avec N_m ; autrement dit la traînée est plus importante sur une plaque inclinée en train d'accumuler un talus qu'en train de le vider, à taille de talus égale. Ce résultat est à relier à celui de Percier *et al.* [2011] et à la section III.7.A ci-dessous où nous étudions le cas d'un talus stationnaire. La meilleure corrélation entre signal de force et N_m semble indiquer que cette dernière est une mesure plus pertinente.

B Trajectoire du point arrière et topographie

Il est possible de relier la trajectoire du point arrière du patin (à la base de la spatule arrière) à la topographie générée; tant que ce point reste en contact avec le lit granulaire¹¹ les deux doivent coïncider exactement. La superposition de ces deux grandeurs sur la Figure 3.29 confirme que c'est bien le cas. On peut donc écrire

La topographie correspond à la trajectoire de l'arrière du patin

$$h(x) = y(x) - \frac{l}{2} \sin(\theta(x)) \quad (3.8)$$

C Trajectoire du point avant et taille du talus

Symétriquement, on peut supposer un lien entre la trajectoire du point avant du patin et la quantité de grains dans le talus. Plus précisément, c'est la surface algébrique balayée par ce point sous la surface libre des grains qui correspond à la surface de grains accumulée, sous les hypothèses suivantes :

1. La compacité des grains est constante et homogène
2. La totalité des grains raclés se retrouve dans le talus
3. La surface non perturbée est parfaitement plate à l'altitude y_0 .

Si l'hypothèse 1. est assez bien vérifiée, ce n'est pas le cas des deux autres qui sont des approximations. La relation que nous allons dériver permet donc d'approcher S_h à partir de la trajectoire du patin et de y_0 , avec des déviations significatives.

La surface recherchée, représentée sur la Figure 3.30, s'écrit en calculant l'intégrale de la différence d'altitude entre le point avant et y_0 , soit

$$S(x) = \int_0^x y_0 - (y(u) + \frac{l}{2} \sin(\theta(u))) du$$

11. Ce qui est le cas généralement, sauf dans des cas particuliers par exemple les patins très grands décrits dans la section II.3.B.

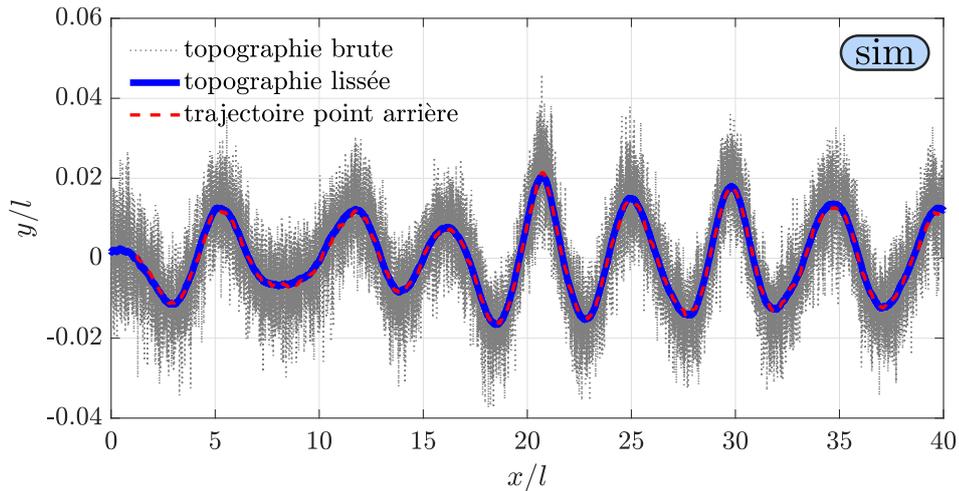


FIGURE 3.29 – Superposition de la topographie $h(x)$ (données brutes en gris pointillé, moyenne glissante en trait plein bleu) et de la trajectoire du coin arrière du patin $y(x) - \frac{l}{2} \sin(\theta(x))$ en trait rouge pointillé, représentés en fonction de la distance parcourue adimensionnée x/l . On constate un excellent accord entre ces deux signaux puisque dans cette simulation le point arrière est en permanence en contact avec les grains [$m = 0.1 \text{ g}$, $l = 48 \text{ mm}$, $P = 42 \text{ Pa}$, $\alpha = 45^\circ$].

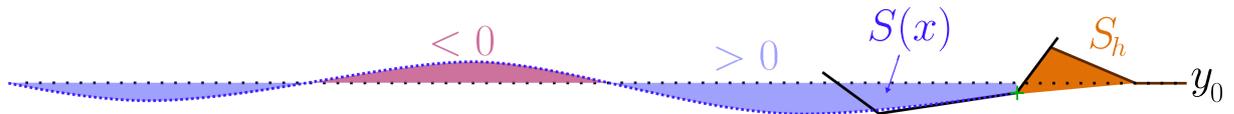


FIGURE 3.30 – Schéma du calcul de $S(x)$ la surface balayée par le point avant du patin. Ce point est noté d'une croix verte, et la surface considérée est représentée en bleu pour les parties comptées positivement, en rouge pour les parties négatives. La surface du talus S_h est approximée par $S(x)$ pour un bon choix de y_0 .

et pour un bon choix de y_0 on doit avoir $S(x) \simeq S_h(x)$ la surface du talus. Dans les expériences, on estime réellement la surface S_h à partir des images, mais dans la simulation on réalise un comptage des grains dans le talus qu'on note $N_c(x)$ (voir [section III.4.A](#)), on a alors $S(x) \simeq \frac{\pi \langle r_p^2 \rangle}{\Phi} N_c(x)$ ¹² avec Φ la fraction volumique et $N_c(x)$ le nombre de grains dans le talus. Résumons ce résultat :

Taille du talus en fonction de la trajectoire du patin

$$S_h(x) \simeq \frac{\pi \langle r_p^2 \rangle}{\Phi} N_c(x) \sim S(x) = y_0 x - \int_0^x (y(u) + \frac{l}{2} \sin(\theta(u))) du \quad (3.9)$$

On peut alors, sur une simulation, tracer $S(x)$ et $N(x)$ ([Figure 3.31](#)). La corrélation

12. Cette expression devient exacte dans la limite N_c très grand car outre les éventuelles erreurs au bord, la valeur moyenne de la surface d'un grain, $\pi \langle r_p^2 \rangle$, est prise pour le calcul de l'ensemble.

des deux signaux dépend fortement de la valeur de y_0 ¹³, c'est pourquoi nous l'utilisons comme paramètre de l'ajustement. Le programme Matlab mis au point pour l'occasion réalise la minimisation des résidus entre $S(x)$ et $N(x)$ normalisés, par dichotomie sur la valeur de y_0 . Le facteur multiplicatif finalement trouvé entre ces deux valeurs permet de déterminer $\Phi = 0.877$ (une valeur réaliste pour des grains polydisperse 2D) dans notre exemple. À noter qu'on suppose ici implicitement une efficacité parfaite du raclage, c'est-à-dire que la totalité de la surface balayée se retrouve accumulée devant le patin, alors qu'en réalité il peut exister de la compaction et une partie de la surface balayée peut passer sous le patin et ainsi être «perdue» (voir section III.7.B).

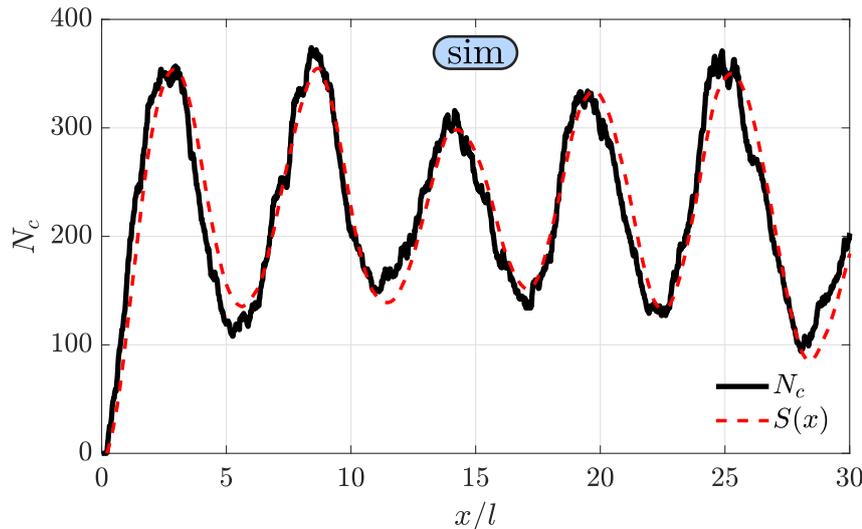


FIGURE 3.31 – Superposition de $S(x)$ et $N_c(x)$ après ajustement de y_0 . On constate que S évolue à peu près comme N_c , malgré des différences parfois importantes. Le cas représenté fonctionne particulièrement bien mais les écarts peuvent être parfois bien plus grands [$m = 0.062$ g, $l = 36$ mm, $P = 26$ Pa, $\alpha = 45^\circ$].

D Variation d'altitude et inclinaison

Nous avons établi que le trio (x, y, θ) permet de reconstruire la topographie et d'approcher la valeur de S_h , sans pour autant conduire à une modélisation théorique. Dans une approche naïve du phénomène, on peut être tenté d'écrire que le patin se déplace dans la direction fixée par θ , et que les variations de θ sont conditionnées par S_h . La première partie de cette simplification se traduit par $\frac{dy}{dx} = \sin(\theta) \sim \theta$ puisque θ est petit (quelques degrés). Cette égalité n'est évidemment pas respectée dans les cas stables, puisque nous avons vu par exemple sur la Figure 3.17 qu'on peut avoir $\frac{dy}{dx} = 0$ et $\theta > 0$. Dans un cas instable, nous avons représenté $\frac{dy}{dx}$ en fonction de θ sur la Figure 3.32. On constate que si la relation d'égalité entre ces deux grandeurs semble assez bien approcher leur comportement dans les creux, elle en dévie significativement au niveau des bosses où $\frac{dy}{dx} < \theta$.

13. Comme le montre l'équation (3.9), une erreur δy_0 conduit à une erreur proportionnelle à $\delta y_0 x$.

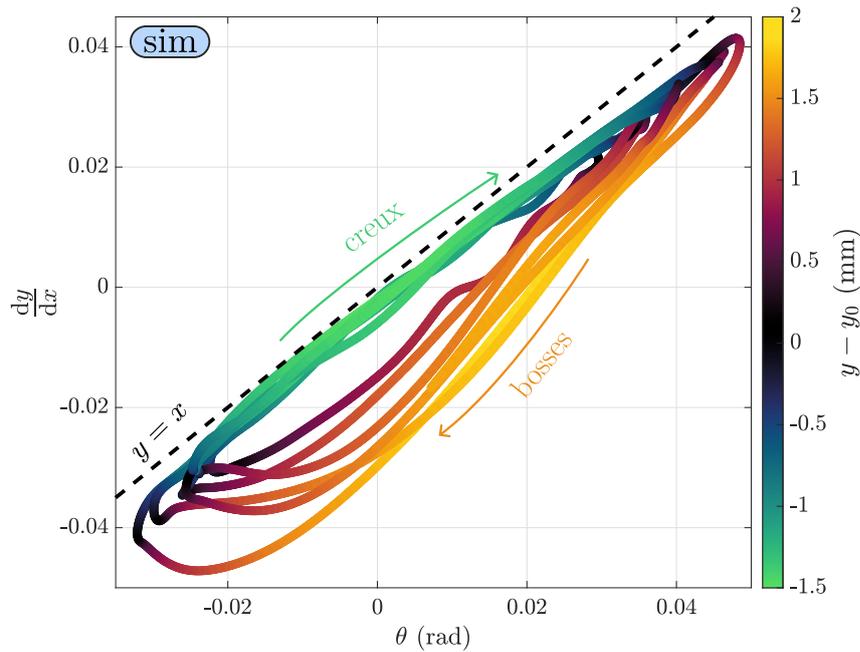


FIGURE 3.32 – Pente de la trajectoire du centre de gravité $\frac{dy}{dx}$ en fonction de l’inclinaison θ en radians. Le cas $\frac{dy}{dx} = \theta$ correspondant à un patin se déplaçant dans la direction de sa base est représenté par la ligne pointillée. La trajectoire du système est représentée d’un trait dont la couleur indique l’altitude du patin $y - y_0$ à chaque instant. On constate que l’approximation $\frac{dy}{dx} \simeq \theta$ est presque valide au voisinage des creux, alors que ce taux de variation est nettement inférieur à θ au voisinage des bosses. [$m = 0.08 \text{ g}$, $l = 48 \text{ mm}$, $P = 33 \text{ Pa}$, $\alpha = 60^\circ$]

III.5 Profil de forces le long du patin et champ de pression granulaire

Numériquement, le patin étant construit à partir de grains individuels, il est facile d’enregistrer la force sur chacun d’entre eux. Il est ensuite intéressant de regarder le comportement moyenné sur un temps long, ces forces étant très fluctuantes par la nature du milieu granulaire. Sur la [Figure 3.33](#), on a superposé les forces instantanées entre les grains à un moment donné, et le profil de forces moyenné sur un temps long sur chaque grain du patin. Les forces sur la spatule avant augmentent presque linéairement le long de cette dernière. Leur orientation dévie légèrement, de moins en moins verticale avec l’enfoncement. Le grain localisé au coin est singulièrement différent, ce qui est parfaitement logique en considérant la surface exposée de ce grain par rapport aux autres. La base du patin quant à elle présente un profil intéressant non trivial. En effet, si l’orientation des forces est la même le long de la base, l’intensité varie de manière à former un « ventre » plutôt vers l’arrière du patin. À l’inverse, il existe une zone de faibles forces juste derrière la spatule. Rappelons qu’en régime quasistatique, l’égalité des forces est presque toujours respectée et ce profil moyen le reflète : la somme des forces exercées par les grains sur le patin doit compenser la force de traction et le poids. Le moment positif généré par la présence du talus doit donc être compensé par ce profil particulier sur la base.

On peut ensuite calculer le tenseur des contraintes du milieu granulaire, pour cela on

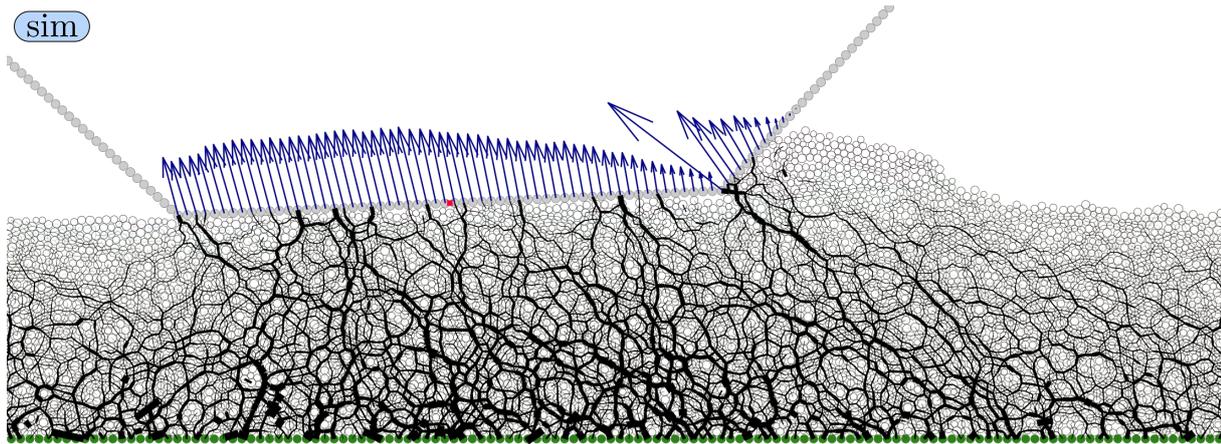


FIGURE 3.33 – Image instantanée des forces dans le milieu granulaire (traits noirs) à laquelle on a superposé le profil de forces le long du patin moyenné sur un temps long devant les fluctuations dues au milieu (flèches bleues). [$l = 36 \text{ mm}$, $m = 0.08 \text{ g}$, $P = 43 \text{ Pa}$, $\alpha = 45^\circ$]

applique la formule de Love-Weber [Love, 1987; Weber, 1966; Nicot *et al.*, 2007] qui donne les composantes du tenseur des contraintes à partir des forces de contact :

Formule de Love-Weber

Considérons un volume V dans lequel on a N_c contacts notés c . Le tenseur de contraintes s'écrit

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^{N_c} f_i^c l_j^c \quad (3.10)$$

avec \vec{l}^c est le vecteur entre les centres des deux grains en contact et \vec{f}^c est la force de contact.

Ainsi, après avoir découpé l'espace en cases, on peut tracer les différentes composantes du tenseur des contraintes, et en particulier le champ de pression qui s'identifie à la trace $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$. Le résultat est donné sur la Figure 3.34 où on a également représenté le patin et le profil de forces sur ce dernier.

Loin devant le patin, on observe un champ de pression hydrostatique, croissant linéairement avec la profondeur. Sous le patin il existe une légère surpression due à la pression de confinement imposée par le poids de ce dernier. En particulier au niveau de la spatule avant, on constate une surpression importante à proximité du coin avant où les forces nécessaires à pousser le talus sont concentrées. Immédiatement derrière ce coin, on peut à nouveau constater une dépression localisée derrière le patin, qui correspond aux plus faibles forces sur le profil de la Figure 3.33 puisque les informations données par le profil de forces et par le champ de pression sont en partie redondantes¹⁴.

14. Bien qu'il ne s'agisse pas de la même simulation dans les deux cas.

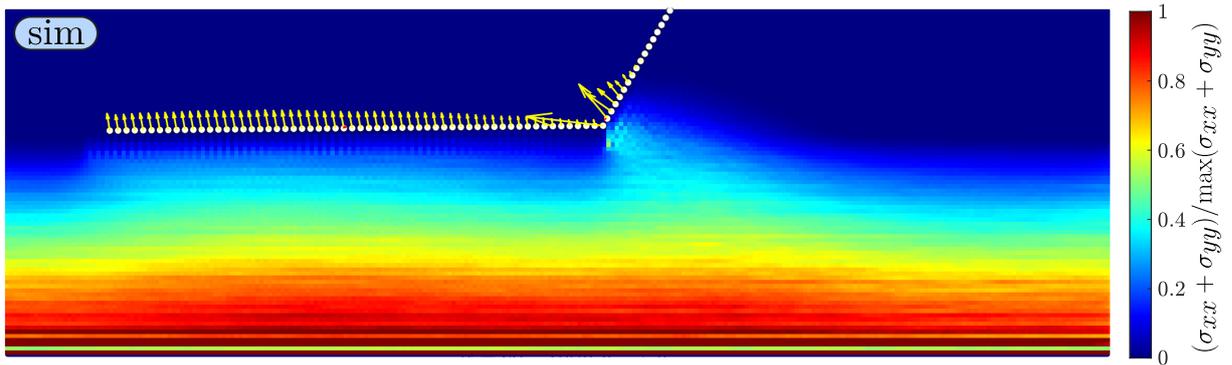


FIGURE 3.34 – Champ de pression dans les grains, obtenu à partir du tenseur des contraintes. On a représenté cette pression divisée par son maximum en gradient de couleurs dont l'échelle est donnée à droite. Le patin est représenté en grains blancs à un instant arbitraire dans la fenêtre considérée (car le patin se déplace au cours de la fenêtre de temps utilisée pour moyenniser suffisamment le tenseur des contraintes), avec le profil de forces en jaune.

III.6 Forme du talus

Si on suppose une forme invariante dans le temps, la surface du talus triangulaire s'exprime comme la moitié du produit de sa base par sa hauteur. Par trigonométrie, sa base est elle-même proportionnelle à sa hauteur qui est l'altitude du plus haut grain du talus. Le carré de l'altitude de ce grain doit être proportionnel au nombre de grains dans le talus, ce qu'on peut vérifier sur la [Figure 3.35](#). Il est intéressant de noter que cette fois-ci l'hystérésis observée suggère d'utiliser N_c plutôt que N_m , résultat inverse à celui observé pour la force de traînée ([Figure 3.27](#)).

On peut comparer la forme du bourrelet détecté par analyse d'images au cours du temps. Nous avons ainsi superposé ce contour au cours d'un cycle d'oscillations sur la [Figure 3.36](#). On voit que l'angle de la surface libre est plus important lors de l'accumulation des grains que lors de la vidange du talus. Peut-être peut-on faire un lien entre cette constatation et l'hystérésis de la force sur la spatule. Cependant, il est difficile de conclure car il s'agit de résultats expérimentaux d'une part et numériques d'autre part, et nous ne disposons pas d'une manière de calculer la force sur la spatule uniquement dans les expériences.

Outre cette simple constatation, les simulations numériques nous permettent de connaître le champ de vitesse à l'intérieur du talus. Cependant, les vitesses étant très fluctuantes dans le temps, il faudrait une moyenne temporelle sur un temps très long pour tracer ce champ de vitesse, l'échelle de temps requise est plus grande que la durée des oscillations. On pourrait être tenté de prendre une simulation d'un cas stable, mais il peut subsister des fluctuations parfois importantes dans ces cas. En revanche, le retrait d'un degré de liberté va nous permettre d'étudier un talus stationnaire sur un temps long ; nous détaillons ce travail dans la section suivante.

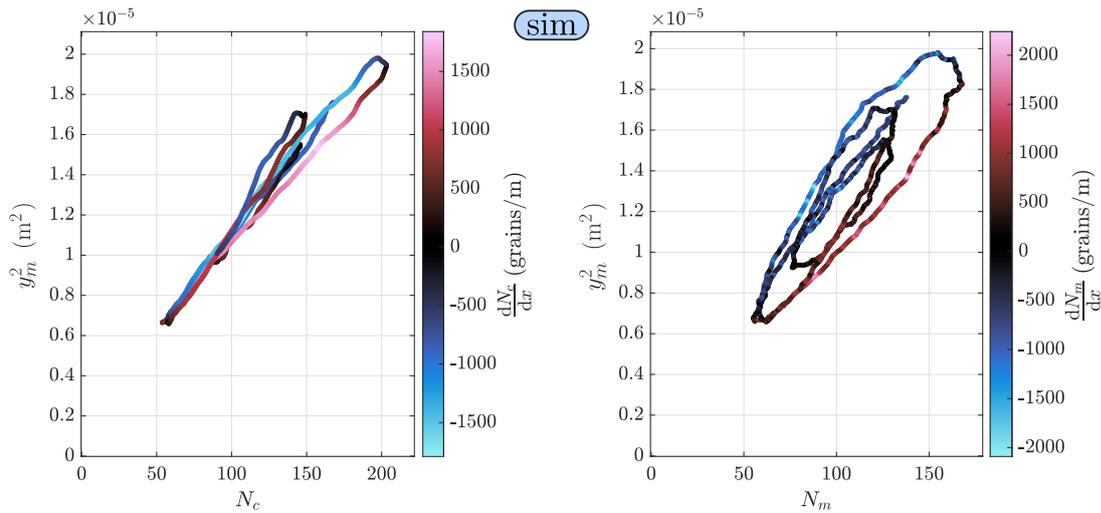


FIGURE 3.35 – Altitude du plus haut grain du talus y_m élevée au carré, tracée en fonction de la quantité de grains N_c (à gauche) et N_m (à droite). Comme précédemment, on a coloré la courbe en fonction de la valeur du taux de variation de cette quantité, ce qui montre le sens de l’hystérésis observée. Cette fois-ci, l’hystérésis est plus grande pour N_m . [$m = 0.12 \text{ g}$, $l = 48 \text{ mm}$, $P = 50 \text{ Pa}$, $\alpha = 45^\circ$]

III.7 Configurations simplifiées

Nous avons vu que l’établissement d’un modèle est rendu difficile par la dynamique croisée de nombreuses variables dans le problème. Par exemple, la relation entre la force sur la spatule et la quantité de grains présente une hystérésis (Figure 3.28) alors qu’elle doit être simplement proportionnelle dans un cas stationnaire [Percier *et al.*, 2011]. Nous avons donc essayé de retirer un, puis deux degrés de liberté au système dans le but de le simplifier. Ainsi, nous allons aussi pouvoir étudier le comportement d’un talus stationnaire, ce qui a quelques avantages comme la possibilité de moyennner sur un temps long comme expliqué ci-dessus.

Rappelons que l’instabilité de tôle ondulée est obtenue avec un seul degré de liberté (expérimentalement, un pivot situé loin de l’objet est souvent utilisé [Taberlet *et al.*, 2007a; Hewitt *et al.*, 2012]). Nous nous rapprochons donc de ce cas, cependant aux vitesses où nous travaillons cette instabilité ne se développera pas.

A Simulation à inclinaison fixée, altitude libre

Cette configuration est obtenue en fixant θ numériquement, pour cela il nous suffit de forcer sa valeur et de ne pas la mettre à jour avec le TMC comme nous le faisons précédemment. Il faut attendre d’atteindre un régime stationnaire. À partir de là, y va légèrement fluctuer autour de sa valeur d’équilibre jusqu’à l’arrêt de la simulation.

Champ de vitesse dans le talus charrié par le patin :

La vitesse des grains du talus pouvant être moyennée sur un temps long, on affiche sur la Figure 3.37 sa direction (on trace la vitesse dans le référentiel du patin). Ici, les cases utilisées pour le calcul sont bien inférieures à la taille d’un grains mais la moyenne temporelle sur un temps très long compense et donne tout de même une moyenne satis-

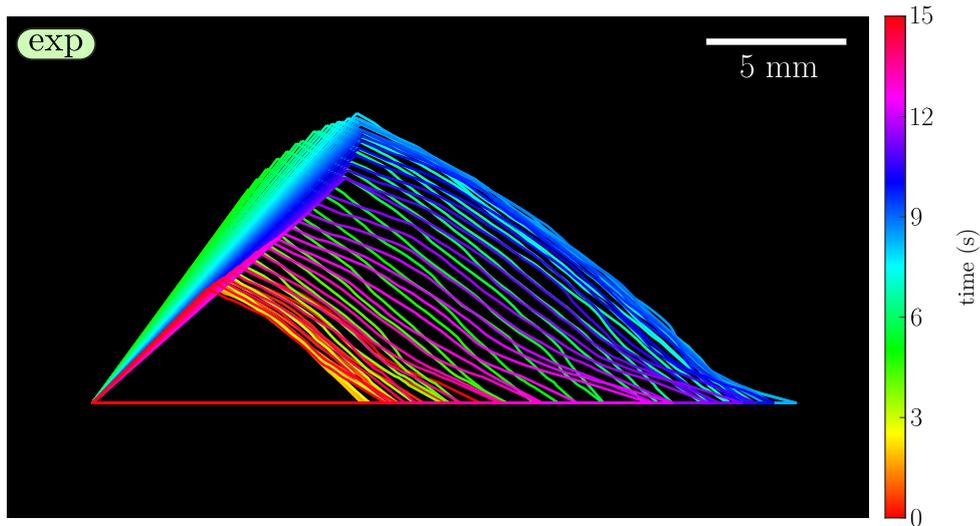


FIGURE 3.36 – Evolution temporelle du contour du talus expérimentalement. Le segment bien rectiligne à gauche correspond à la spatule. On constate que la surface libre semble changer légèrement d’angle entre l’accumulation du talus (couleur verte) et sa vidange (couleur violet/rose).

faisante. On peut voir sur cette figure qu’une épaisseur de grains en surface avalanche en moyenne vers l’avant par rapport au patin.

Formation du talus et forces sur la spatule :

Une fois le talus stationnaire obtenu, on peut s’intéresser à l’influence de θ . La force de traînée F_t et la force de portance F_p dépendent directement de la taille du talus (et sont nulles lorsque le talus est nul), et sont fortement influencées par θ . Les deux sont représentées sur la Figure 3.38 et on retrouve certaines idées développées plus tôt. Lorsque θ est positif, le talus disparaît car le patin tend à « surfer » sur sa surface inférieure et la spatule n’est jamais contact avec les grains. En revanche, un angle un peu négatif promeut l’enfoncement en rendant la surface inférieure de plus en plus caduque. On n’observe ainsi quasiment plus de variation au-delà de $\theta = -1^\circ$ car une fois que cette surface n’est plus en contact avec le lit de grains, la seule influence de θ étant due à l’angle effectif de la spatule, $\alpha + \theta$ (ici on a fixé $\alpha = 45^\circ$).

Notons que même à $\theta = 0$, l’importance relative de la surface inférieure a grandement diminué. En traçant le profil de forces comme nous l’avons fait en configuration libre (Figure 3.33), on constate que les forces sur la partie inférieure du patin sont très faibles Figure 3.39.

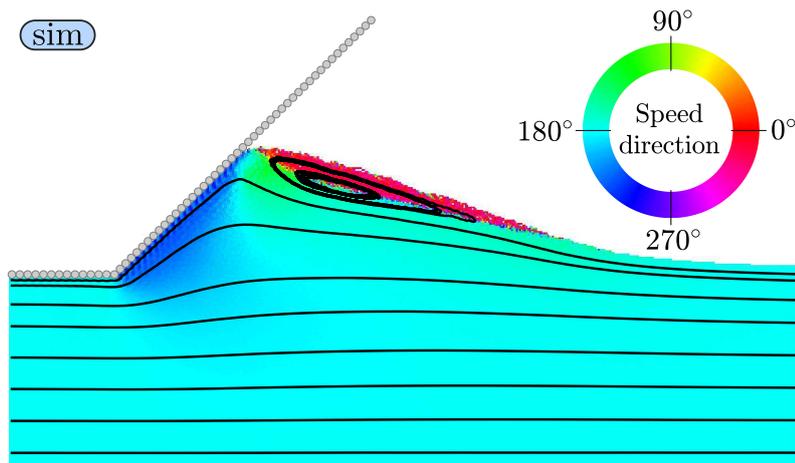


FIGURE 3.37 – Direction de la vitesse dans les grains du talus, et lignes de courant de ce champ (en noir). L'apparition d'une zone d'avalanches, qui avance en moyenne par rapport au patin, est clairement visible (en rouge), et associée à un vortex dans le champ de vitesse moyen.

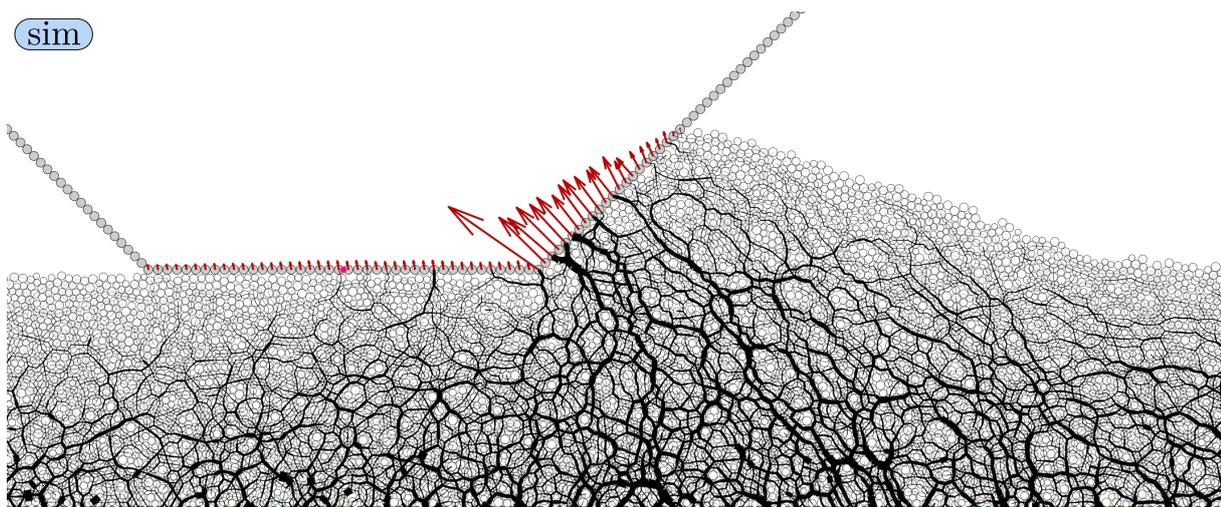


FIGURE 3.39 – Image instantanée des forces dans le milieu granulaire (traits noirs) à laquelle on a superposé le profil de forces le long du patin moyenné sur un temps long devant les fluctuations dues au milieu (flèches rouges). Figure à comparer avec la [Figure 3.33](#).

B Comportement en configuration totalement fixée

Retirons le dernier degré de liberté du système. Nous étudions maintenant le comportement d'un solide totalement rigide enfoncé dans un lit granulaire. Numériquement, il suffit de procéder comme θ avec y (en réalité, il reste le degré de liberté selon x , mais entre la force de traction et celle des grains, on impose en pratique $x = vt$). Expérimentalement, on a utilisé un patin muni d'une tige rigide permettant de le fixer au bâti.

Nous avons souhaité étudier le phénomène du raclage des grains. Le patin est alors légèrement enfoncé sous la surface des grains, et la quantité de grains accumulée N va

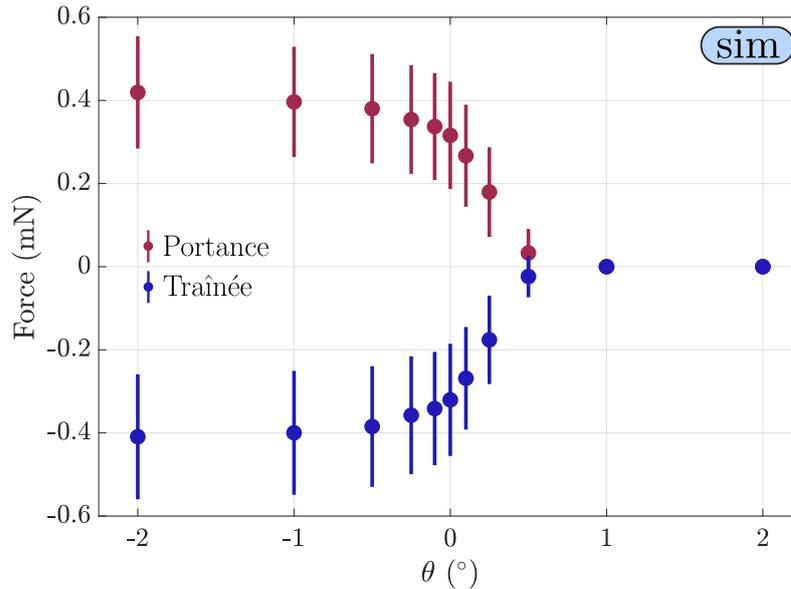


FIGURE 3.38 – Force moyenne exercée sur la spatule décomposée en deux composantes, représentées en fonction de l’angle θ auquel le patin est bloqué. La composante verticale (la portance) est représentée en rouge tandis que la composante horizontale (la traînée) est représentée en bleu. Les barres d’erreur correspondent à l’écart-type du signal qui fluctue sur la durée utilisée pour calculer la moyenne. Les forces sont rigoureusement nulles pour $\theta = 1^\circ$ et 2° car la spatule n’est alors pas en contact avec les grains. [$l = 36$ mm, $m = 0.05$ g, $P = 27$ Pa, $\alpha = 45^\circ$]

augmenter avec la distance parcourue.

Commençons par discuter de l’aspect numérique. Le signal $N_m(x)$ est représenté à gauche sur la Figure 3.40 (a). On peut alors étudier le taux d’accumulation de grains à l’équilibre, $\frac{dN_m}{dx}$ (Figure 3.40 (b)) en fonction de l’angle α . Comme attendu, ce taux augmente avec α pour $\alpha \leq 60^\circ$. Cependant, au-delà de cette valeur, le taux cesse quasiment d’augmenter, ce qui est assez étonnant.

L’interprétation de $\frac{dN}{dx}$ est le taux de grains qui passent de la surface balayée par le coin (comme dans la dérivation de la formule (3.9)) au talus. Pour un raclage «parfait», la totalité des grains balayés se retrouve dans le talus. À l’inverse, pour un petit angle α surtout, ces grains peuvent passer sous le patin et non dans le talus (cela signifie qu’il y a au moins un peu de compaction dans le système puisque l’altitude est fixée). L’efficacité du raclage augmente donc significativement de zéro à soixante degrés, puis on atteint un plateau.

Expérimentalement, nous n’avons pas observé le même effet, lors d’un travail expérimental réalisé avec Alexandre Carrara en stage de L3. En effet, la différence entre $\alpha = 30^\circ$ et $\alpha = 90^\circ$ est minimale. Nous avons superposé la valeur du taux $\frac{dS_h}{dx}$ ¹⁵ pour différents enfoncements et angles α , ainsi que le taux maximal attendu pour un raclage parfait (Figure 3.41). Les valeurs sont représentées un peu différemment du cas numérique car la répétition de quatre graines montre une bonne reproductibilité des résultats à enfoncement constant, et on dispose de nombreuses valeurs de α . Expérimentalement, moins de valeurs

15. S_h étant l’équivalent expérimental de N_m dans les simulations.

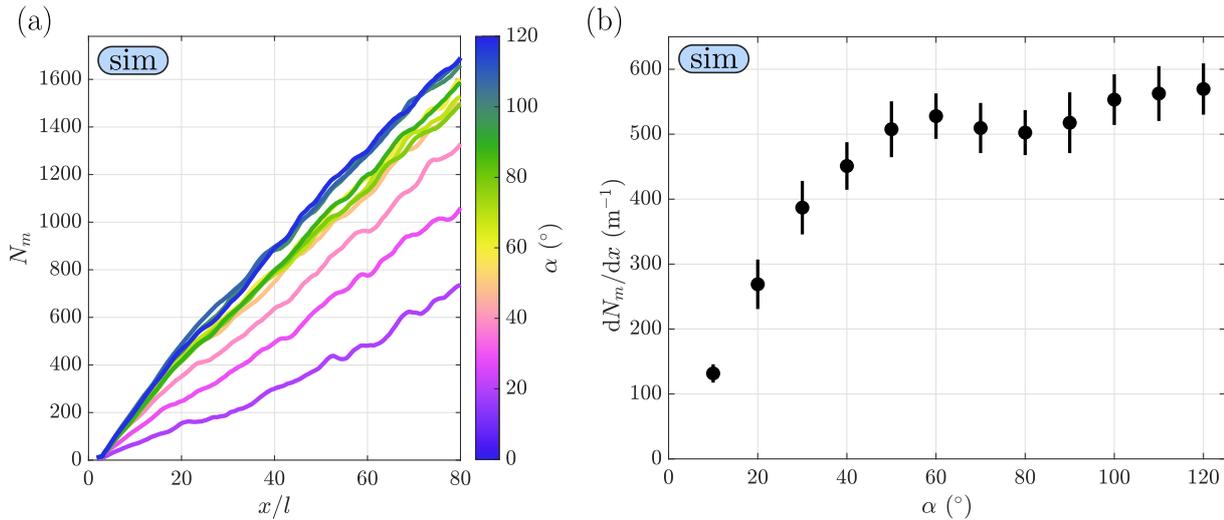


FIGURE 3.40 – (a) Nombre de grains en mouvement N_m en fonction de la distance parcourue adimensionnée par la longueur du patin x/l . Un unique signal (une graine) est représenté par valeur de α . On utilise ce signal pour déterminer la pente moyenne dN_m/dx pour quatre grains différentes. (b) dN_m/dx en fonction de α . Les barres d'erreur correspondent à l'écart-type sur quatre grains différentes. On constate que le raclage du lit granulaire est de plus en plus efficace en augmentant α de 0° à 60° puis on atteint un plateau.

de α ont été testées dans ce travail préliminaire et les résultats semblent moins reproductibles à observer les différentes valeurs d'enfoncement e (Figure 3.41). Les barres d'erreur représentent la valeur minimale entre l'écart-type du signal moyenné et une estimation de l'écart-type obtenu en répétant les expériences (seules quelques valeurs ont été répétées pour faire cette estimation). On note un raclage largement moins efficace, environ 50% du maximum théorique pour un raclage «parfait» ce qui peut être partiellement expliqué par un effet 3D de fuite des grains sur les côtés du patin car rien ne les retient et que des petites levées latérales sont formées. Ce travail reste toutefois préliminaire et il serait utile de le poursuivre de manière plus contrôlée, avec des mesures de force notamment.

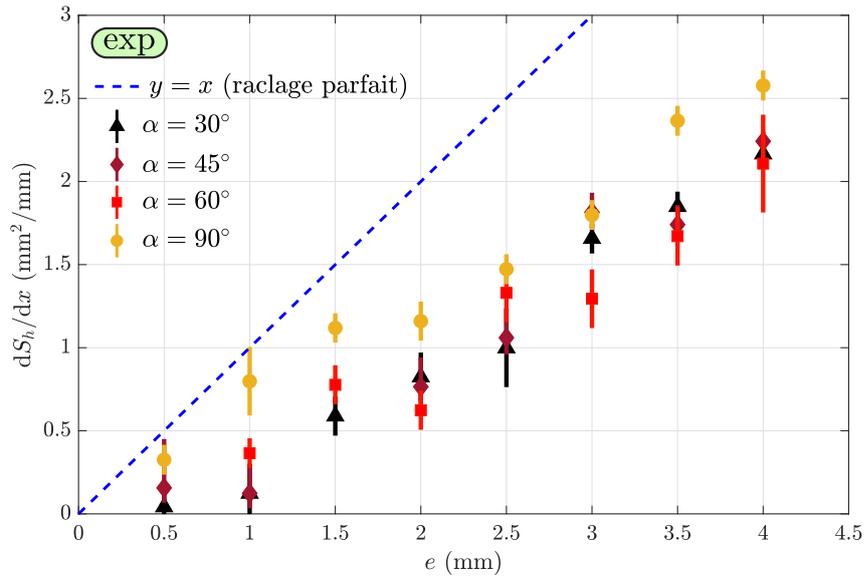


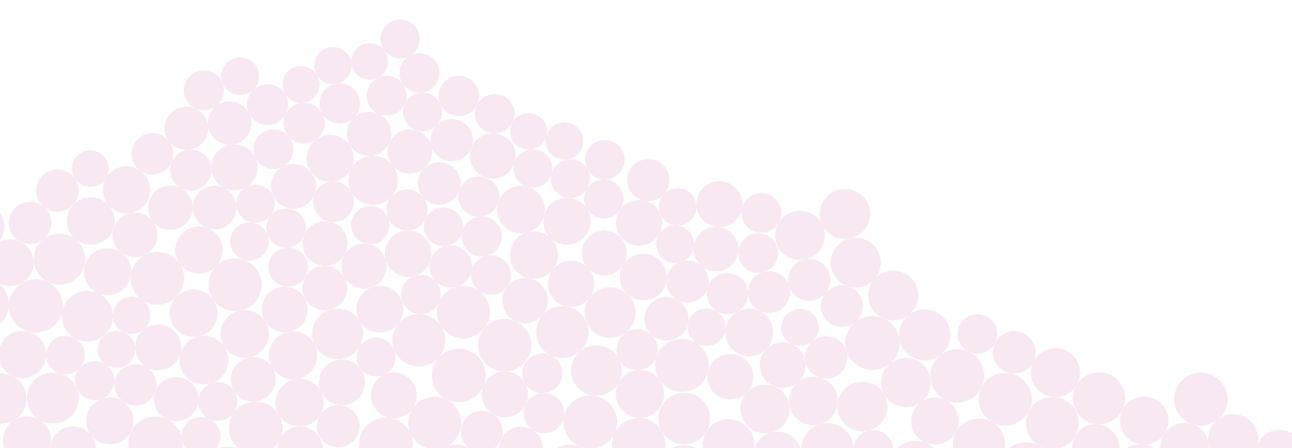
FIGURE 3.41 – Taux de raclage des grains dS_h/dx en fonction de l'enfoncement e (le patin est fixé à une altitude inférieure à la surface du lit granulaire, et sa profondeur est notée e) pour différentes valeurs de α . On remarque que les valeurs obtenues pour α compris entre 30° et 60° inclus sont confondues, et $\alpha = 90^\circ$ réalisé un raclage à peine plus efficace. L'ensemble des valeurs de α conduisent à un raclage peu efficace par rapport au maximum possible représenté par la ligne pointillée bleue. Les barres d'erreur correspondent à une valeur estimée de l'écart-type obtenu via la répétition des expériences, ou à l'écart-type du signal dS_h/dx sur la fenêtre considérée si ce dernier est plus important.

En résumé de ce chapitre,

- Nous avons observé un comportement oscillant du patin conduisant à une formation de motif avec une phénoménologie très proche dans les expériences et les simulations.
- Cette instabilité se produit dans le régime quasistatique, ce qui en fait un phénomène original différent de l'instabilité de tôle ondulée décrite dans la littérature.
- Nous avons montré l'effet important de la pression de confinement et de la géométrie du patin, ainsi que la position du point de contact qui joue un rôle très différent entre les simulations et les expériences
- Nous avons ensuite exploré des effets supplémentaires, des configurations différentes et quelques tentatives de construire des liens entre les grandeurs du problème dans le but de fournir une panoplie d'observations pour une modélisation future.

Ségrégation d'agrégats magnétiques en écoulement sur un plan incliné

I	Généralités sans grains magnétiques	99
I.1	Régimes observés	99
I.2	Écoulement de Bagnold	101
II	Ajout de grains magnétiques	101
II.1	Effet sur les régimes d'écoulement	103
II.2	Morphologie des arrangements magnétiques	103
II.3	Cadre de l'étude	103
II.4	Portée magnétique	106
III	Formation d'agrégats	106
III.1	Évolution de la distribution des tailles	107
III.2	Rôle de la concentration sur la dynamique temporelle	108
III.3	Rôle de la magnétisation sur la taille des agrégats	109
IV	Ségrégation des agrégats	109
IV.1	Effet de la magnétisation et de la concentration	110
IV.2	Ségrégation d'agrégats solides	111
IV.3	Ségrégation normale dans l'écoulement	113



Dans ce chapitre, nous allons détailler le comportement d'un écoulement de grains sur un plan incliné, constituée d'un mélange de grains aimantés et non aimantés. La méthode employée pour les simulations est détaillée dans le [chapitre 2](#).

Le comportement de ce système sans grains magnétiques a été décrit dans le [chapitre 1 \(section II.2\)](#). Nous vérifierons d'abord que les résultats de la littérature sont bien retrouvés dans notre système, avant d'ajouter les grains magnétiques. Nous verrons ensuite que l'ajout de grains magnétiques conduit à plusieurs états différents et modifie les régimes observés, le comportement des grains conduisant à des états différents en fonction de leur concentration et de leur aimantation. Enfin, en restreignant l'étude aux cas dilués, et en se plaçant dans le régime d'écoulement stable avec un profil de vitesse de Bagnold, nous étudierons à la fois l'agrégation des grains aimantés et la ségrégation des agrégats ainsi formés, et ce en fonction de deux paramètres, l'aimantation des aimants et leur concentration, en fixant les autres paramètres du problème.

L'étude présentée dans ce chapitre est le fruit d'une collaboration avec Yuri Dumasresq Sobral, professeur à l'université de Brasília où j'ai effectué un séjour de deux mois au cours de ma deuxième année de thèse. Le travail débuté au Brésil a ensuite été poursuivi en France, et les résultats principaux feront l'objet d'un article qui est actuellement en préparation.

Travail préliminaire

Commençons par mentionner qu'un travail préliminaire sur ce système a été mené par Caio da Costa de B. P. Luke lors d'un stage encadré par Yuri D. Sobral en 2018. Dans ce travail, quelques profils de vitesse ont été tracés en fonction de la magnétisation et de la concentration des aimants. Une observation qualitative a aussi été réalisée : les grains magnétiques tendent à ségréger c'est-à-dire qu'ils se concentrent au voisinage de la surface de l'écoulement. C'est notamment cette observation que nous allons préciser par notre étude.

La méthode des éléments discrets avait été utilisée dans ce travail, et c'est le modèle de Coulomb régularisé qui avait été implémenté pour modéliser le frottement solide (voir [Figure 2.4](#)). En conséquence, les transitions entre les différents régimes ne se produisaient pas aux valeurs établies par [Silbert *et al.* \[2001\]](#), ce qui a aussi motivé notre étude plus approfondie et avec un modèle plus réaliste. Notons que les simulations ont été initialement implémentées en Fortran, et que ce code a été repris au début du séjour¹. Il a ensuite été décidé d'écrire un nouveau code en C lors du séjour au Brésil, en réutilisant le moteur granulaire mis au point plus tôt lors de la thèse et utilisé au cours du [chapitre 3](#). Ainsi, notre implémentation du modèle de Cundall a pu être mise à profit dans l'étude d'un nouveau problème dont la simulation par la modèle de Coulomb régularisé n'était pas entièrement satisfaisante.

1. Un grand merci à Caio pour avoir assuré la passation d'un code de qualité.

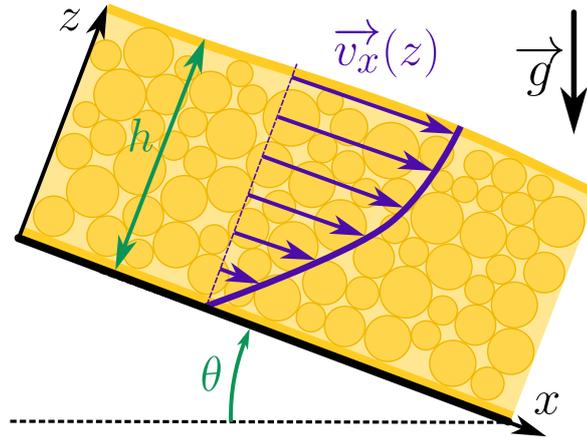


FIGURE 4.1 – Schéma de l'écoulement sur un plan incliné d'un angle θ , auquel on adjoint les axes x et z eux aussi inclinés (on parlera de verticale dans la direction de z et d'horizontale dans la direction de x). La couche de grains a une épaisseur h , et un profil de vitesse horizontale $\vec{v}_x(z)$. Les conditions aux limites sont périodiques à droite et à gauche.

I Généralités sans grains magnétiques

Le système a été simulé en deux dimensions par la méthode des éléments discrets, avec un fond rugueux et des conditions aux limites périodiques (chapitre 2, section I). Commençons par introduire quelques notations. La Figure 4.1 présente un écoulement sur plan incliné. x désigne la direction de l'écoulement et z la direction perpendiculaire, θ indique l'angle d'inclinaison, h est l'épaisseur du milieu et $\vec{v}_x(z)$ le profil de vitesse horizontale. Ajoutons les notations suivantes :

- Φ la fraction volumique des grains.
- E leur énergie cinétique totale, calculées en sommant l'énergie cinétique de chaque grain individuel.
- δ une longueur caractéristique parcourue par les grains, obtenue à partir de l'énergie cinétique totale².

I.1 Régimes observés

Commençons par valider nos simulations en comparant le comportement observé aux résultats classiques de la littérature, (voir chapitre 1, section II.2). Des études expérimentales et numériques de ce système existent, et nous comparerons essentiellement nos résultats à ceux de Silbert *et al.* [2001] qui ont mené des simulations similaires aux nôtres.

Nous avons vu que pour faire la distinction entre les trois différents régimes, la caractérisation par l'énergie cinétique semble particulièrement adaptée. Si sa valeur finale, notée $E_{c,f}$ est nulle (au bruit près), il n'y a pas d'écoulement, sinon on réalise un ajustement affine sur une fenêtre de temps donnée, assez grande et loin du début de la simulation.

2. On considère pour cela que la masse totale des grains m_{tot} avance à la vitesse moyenne $\dot{\delta}$ donné par $E(t) = \frac{1}{2} m_{\text{tot}} \dot{\delta}^2$, d'où $\delta(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{2E(t')}{m_{\text{tot}}}} dt'$

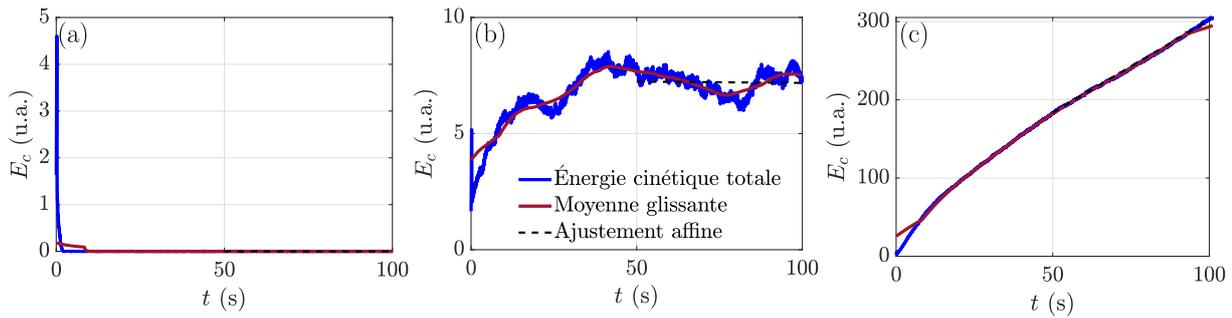


FIGURE 4.2 – Évolution de l'énergie cinétique (en unités arbitraires) en fonction du temps dans les trois régimes (a) pas d'écoulement (b) écoulement stable (c) écoulement instable. On a aussi représenté la moyenne glissante du signal en rouge ainsi que l'ajustement linéaire sur la deuxième moitié du signal en trait pointillé noir, dont les paramètres servent à déterminer si l'écoulement est stable ou non.

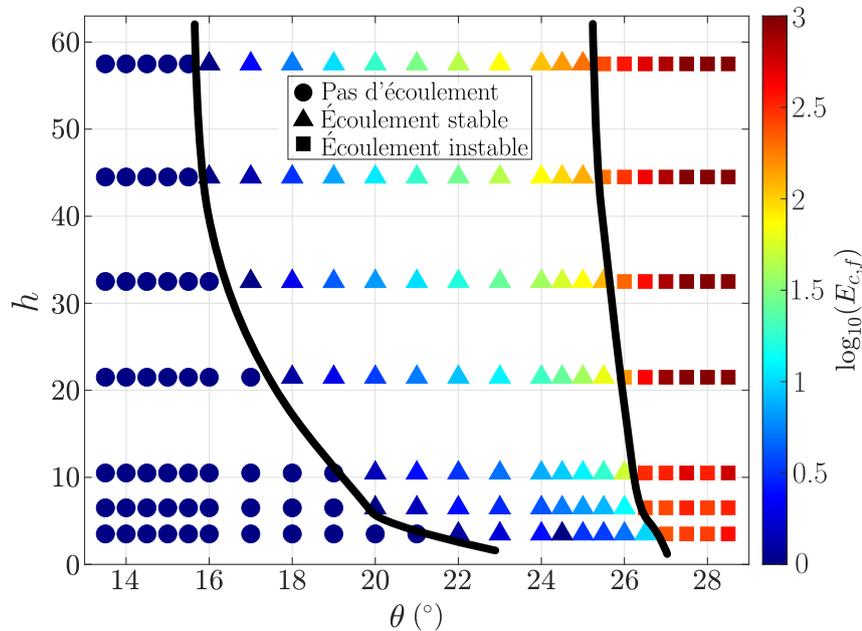


FIGURE 4.3 – Espace des phases montrant les trois régimes différents discriminés à partir de l'évolution de l'énergie cinétique totale, en fonction de h (en nombre de grains) et θ (en degrés). La couleur des points représente la valeur finale de l'énergie cinétique $E_{c,f}$ (échelle à droite, unité arbitraire). Les courbes noires superposées aux données sont des guides indiquant les transitions entre les différents régimes.

Si la pente est supérieure à un seuil, l'écoulement est jugé instable, sinon il est stable. Cette caractérisation est représentée sur la Figure 4.2.

L'espace des phases du système pour lequel on a distingué les trois régimes susmentionnés est représenté sur la Figure 4.3. On retrouve les transitions attendues, en accord avec Silbert *et al.* [2001], en particulier la transition entre les états sans écoulement et d'écoulement stable qui se produisaient pour des valeurs de θ bien trop faibles avec le

modèle de Coulomb régularisé. Maintenant qu'on a vérifié que les transitions du système se comportent de la manière attendue, nous allons fixer les paramètres dans le régime d'écoulement stable, et caractériser l'écoulement observé. Nous verrons ensuite l'effet de l'ajout des grains magnétiques.

I.2 Écoulement de Bagnold

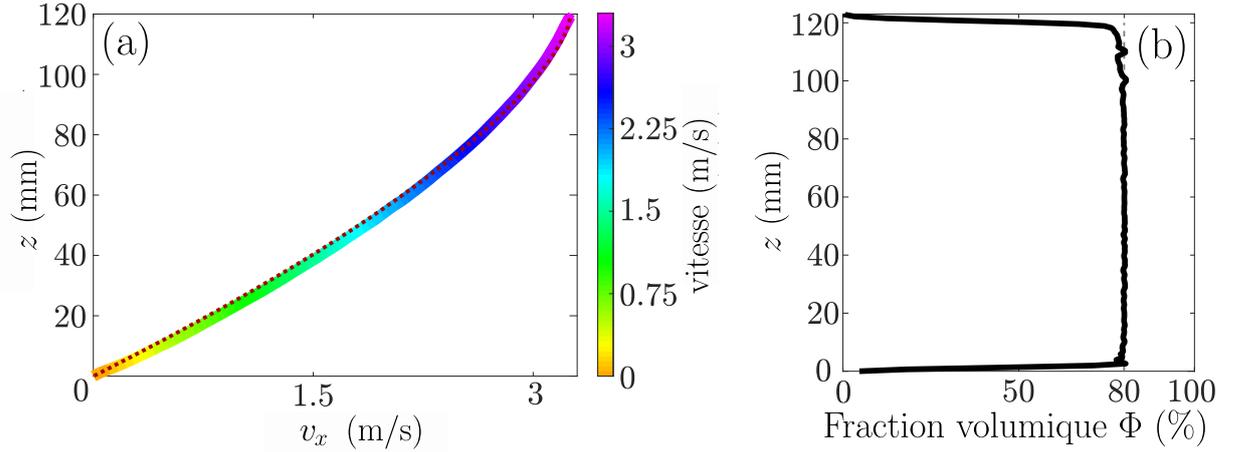


FIGURE 4.4 – Caractérisation de l'écoulement sans grains magnétiques. (a) Profil de vitesse horizontale. En trait pointillé rouge, le profil de Bagnold est représenté, d'équation $v_x(z) \propto 1 - (1 - z/h)^{3/2}$. (b) Profil de fraction volumique, dont la valeur est homogène autour de 80% [$h = 120$ mm, $\theta = 18^\circ$].

D'après Bagnold [1954], Silbert *et al.* [2001] et d'autres depuis, un modèle souvent utilisé pour décrire un écoulement stationnaire dense de grains sur un plan incliné, la rhéologie de l'écoulement s'écrit $\sigma \propto \dot{\gamma}^2$ (où σ est la contrainte et $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement) et conduit à un profil de vitesse en $v_x(z) \propto 1 - (1 - z/h)^{3/2}$. Dans le même temps, une fraction volumique homogène est attendue. Le calcul du profil de vitesse (Figure 4.4 (a)) ainsi que le profil de fraction volumique (Figure 4.4 (b)) révèlent que ce modèle est parfaitement adapté à la description de notre système dans les conditions de travail choisies. L'ajout de grains magnétiques va cependant modifier le comportement observé comme nous allons le détailler dans la partie suivante.

II Ajout de grains magnétiques

Parmi les N grains simulés, on considère un nombre de grains magnétiques N_{mag} qui représentent donc une fraction notée $C = N_{\text{mag}}/N$ du total. Il s'agit d'aimants permanents, leur moment est attaché à la particule et la rotation du grain s'identifie à la rotation de l'aimant. Leur moment magnétique vaut μ , mais il est fixé à zéro au début de la simulation et activé progressivement au bout d'un temps suffisant pour que le régime stationnaire d'écoulement stable soit établi. Le début de cette phase d'activation est pris comme origine de l'axe temporel.

Un exemple de tel système est représenté dans son état initial (au moment de l'activation) sur la **Figure 4.5 (a)**. Au bout d'un temps long (**Figure 4.5 (b)**), la première observation évidente concerne la distribution verticale des grains magnétiques qui sont alors remontés à la surface. Ce phénomène est à relier à la ségrégation par taille (**chapitre 1, section II.3**) étant donné que les agrégats magnétiques formés se comportent similairement à des gros grains, bien qu'en réalité ils ne soient ni solides ni sphériques comme on le voit notamment sur la **Figure 4.5 (b)** ou comme on le verra plus tard sur la **Figure 4.8**. C'est ce phénomène que nous allons tenter d'expliquer dans ce chapitre.

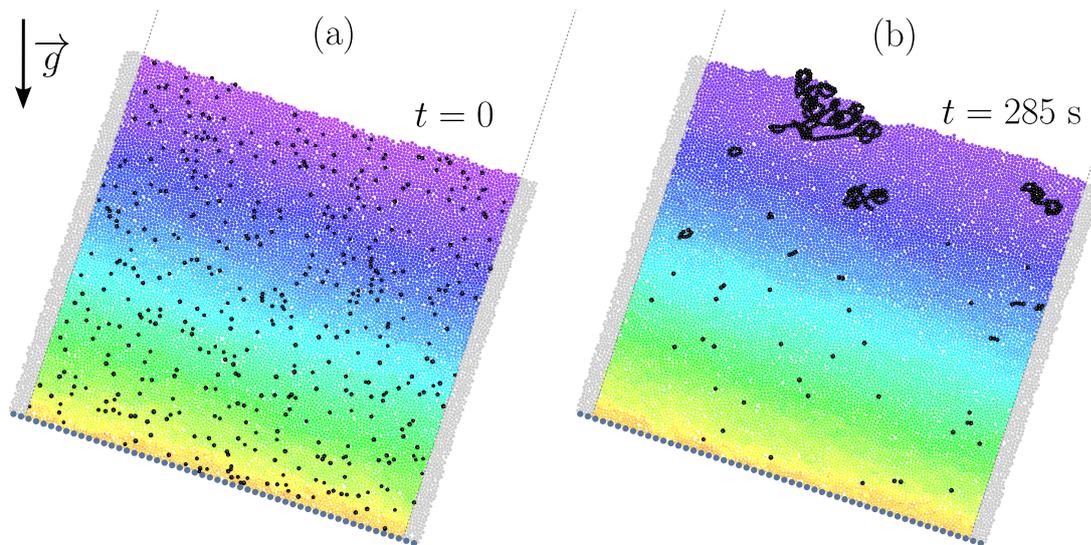


FIGURE 4.5 – Images d'une simulation typique ($C = 3\%$, $\mu = 6 \times 10^{-5} \text{ A/m}^2$, soit $\tilde{\mu} = 170$). Les grains s'écoulent sur un plan incliné de $\theta = 18^\circ$ et sont colorés en fonction de leur vitesse (échelle donnée sur la **Figure 4.4 (a)**). Les lignes pointillées verticales représentent les conditions aux limites périodiques, et les grains en gris sont des clones des grains colorés situés de l'autre côté de la simulation, pour signifier son caractère périodique. À l'instant $t = 0 \text{ s}$, les grains magnétiques sont distribués de manière homogène dans les grains en écoulement. Comme expliqué dans le texte, à cet instant, la magnétisation des grains va être activée et ses effets ne sont pas encore observés. (b) À l'instant $t = 285 \text{ s}$, les grains magnétiques ont formé des agrégats qui sont remontés à la surface libre de l'écoulement.

Nous allons étudier essentiellement le rôle de la proportion de grains magnétiques C et leur moment magnétique μ relié à la force magnétique exercée entre eux. Il est préférable d'introduire dès maintenant une autre grandeur qui permettra d'interpréter plus clairement μ à travers la force qui attire un aimant à un voisin, tous deux de taille moyenne par rapport à la distribution de tailles des grains, dans une situation modèle sans gravité et où seuls ces deux aimants sont simulés et orientés de manière à maximiser leur force d'attraction (le pôle sud de l'un faisant face au pôle nord de l'autre, représenté sur la **Figure 4.6**). Ainsi, $\tilde{\mu}$ désigne le rapport entre cette force normale d'attraction et le poids d'un grain, et les valeurs de μ et $\tilde{\mu}$ sont donnés dans la **Table 4.1**, pour les simulations présentées dans ce chapitre.

μ (A/m ²)	$\ \vec{F}_N\ $ (N)	$\tilde{\mu} = \ \vec{F}_N\ /mg$
5×10^{-6}	1.5×10^{-5}	1.2
1×10^{-5}	5.9×10^{-5}	4.6
2×10^{-5}	2.4×10^{-4}	19
4×10^{-5}	9.6×10^{-4}	75
6×10^{-5}	2.2×10^{-3}	170
8×10^{-5}	3.9×10^{-3}	302
1×10^{-4}	6×10^{-3}	473

TABLE 4.1 – Tableau comparatif de μ , de la force \vec{F}_N et du poids d'un grain. On définit ainsi $\tilde{\mu}$ comme le rapport de la norme de la force magnétique et du poids.

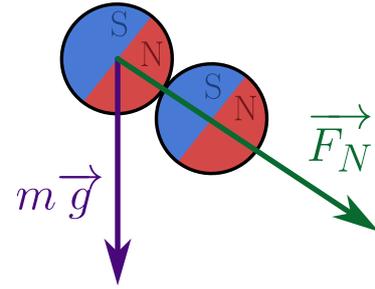


FIGURE 4.6 – Deux grains magnétiques de poids $m\vec{g}$ s'attirent mutuellement avec une force \vec{F}_N .

II.1 Effet sur les régimes d'écoulement

L'ajout de grains magnétiques et leurs interactions créent des obstacles à l'écoulement. Leur présence va donc freiner ce dernier, et ce davantage lorsqu'ils sont plus aimantés et plus concentrés. L'espace des phases décrit plus haut (Figure 4.3) va alors être modifié par leur présence. L'espace des phases obtenu en fixant $h = 50$ (en nombre de grains), et en faisant varier à la place la fraction de grains magnétiques C est montré sur la Figure 4.7. On pourrait refaire ce travail en faisant varier μ également, qui a un effet analogue : plus il est important plus il freine l'écoulement. Dans les deux cas, la limite $C = 0$ ou $\mu = 0$ correspond au cas sans grains aimantés décrit précédemment.

II.2 Morphologie des arrangements magnétiques

Si on s'intéresse en détail aux systèmes observés pour différentes valeurs de μ et C , on s'aperçoit qu'il émerge de nouveaux comportements. Les grains magnétiques s'agglomèrent différemment, formant parfois des boules, parfois des fils, des anneaux ou d'autres formes plus complexes (Figure 4.8 (a-d), et également Figure 4.5 (b)). Lorsqu'ils sont très concentrés et suffisamment aimantés, les filaments magnétiques peuvent former une structure qui percole à travers l'empilement, formant un système analogue à un gel (Figure 4.8 (e)). Il serait intéressant de tester cette analogie plus en détail, avec une approche rhéologique, mais cela dépasse le cadre de notre étude. Certains systèmes observés sont partiellement gélifiés, on obtient alors l'écoulement d'un système solide sur une couche de cisaillement important, analogue à une bande de cisaillement ou encore à un écoulement bouchon (*plug flow* en anglais). L'épaisseur de la couche cisailée par rapport à l'épaisseur de la partie gélifiée diminue lorsqu'on augmente μ ou C jusqu'à gélifier totalement le système. Ce comportement est très proche de la description d'un écoulement de grains cohésifs sur un plan incliné faite par Brewster *et al.* [2005] et Mandal *et al.* [2020].

II.3 Cadre de l'étude

Nous avons choisi de restreindre notre étude à des systèmes qu'on pourrait qualifier de dilués, c'est-à-dire dont les propriétés d'écoulement sont peu affectées par la présence des

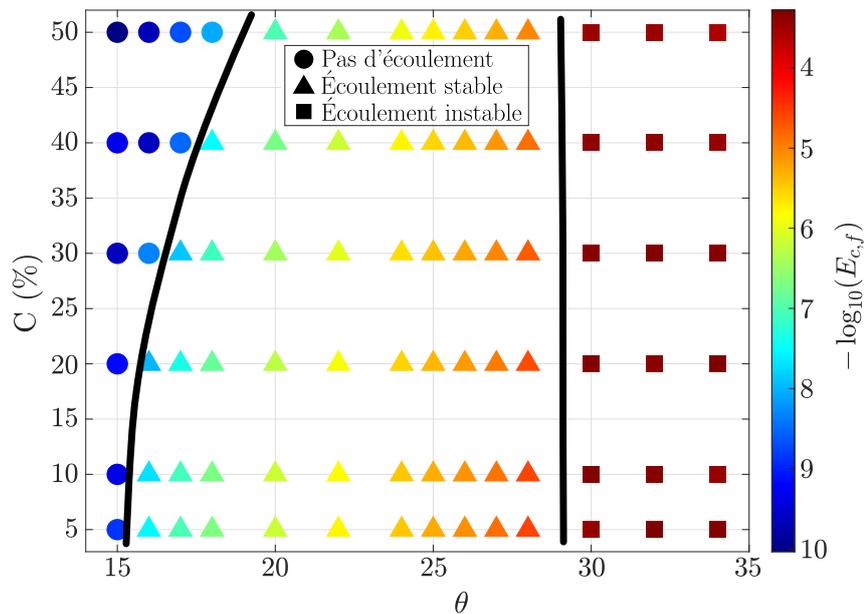


FIGURE 4.7 – Espace des phases montrant les trois régimes différents discriminés à partir de l'évolution de l'énergie cinétique totale, en fonction de C et θ , pour h fixé à 50. On voit que par rapport à la Figure 4.3, l'ajout de grains magnétiques réduit la quantité d'énergie cinétique dans l'état stationnaire. On a également ajouté des courbes noires comme guides indiquant les transitions entre les différents régimes.

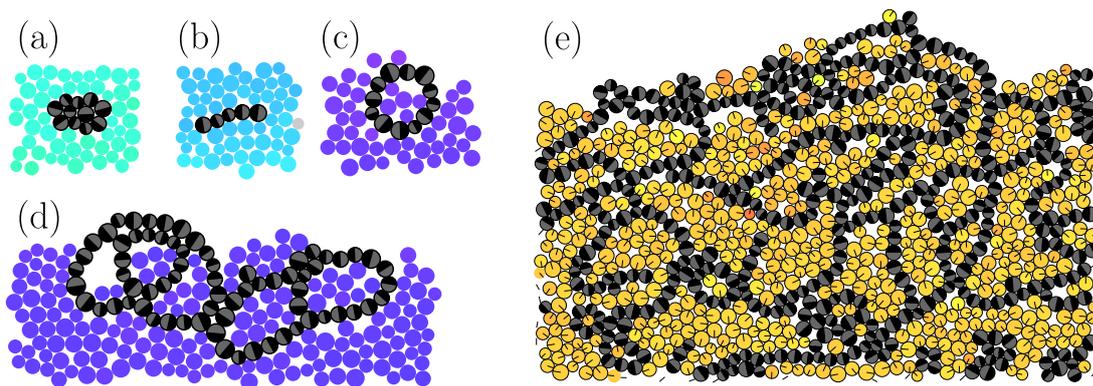


FIGURE 4.8 – Quelques exemples de formes : (a) agrégat en boule, (b) filament linéaire, (c) anneau, (d) forme plus générale, illustrant la difficulté de classer les agrégats en types différents (e) «gel granulaire» obtenu à haute concentration ($C = 45\%$).

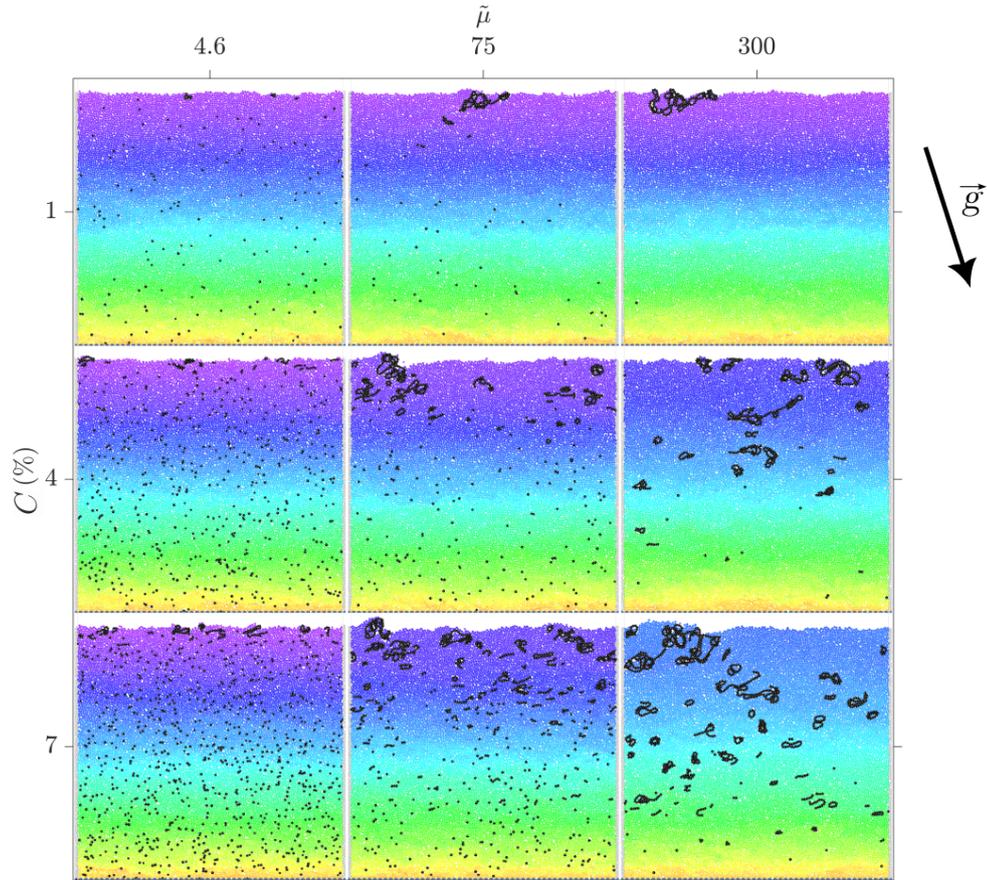


FIGURE 4.9 – États finaux de la simulation pour différentes valeurs de $\tilde{\mu}$ et C .

aimants. Notons que cette appellation de systèmes dilués suggère que seule la concentration contrôle le résultat alors que comme nous l'avons vu l'aimantation joue également un rôle important. Cependant, nous simplifierons en considérant qu'en dessous de $C = 15\%$ et pour les valeurs de μ étudiées, les déviations au profil de Bagnold sont suffisamment peu importantes. La différence d'énergie cinétique entre notre système le plus freiné présenté dans la suite ($C = 14\%$, $\tilde{\mu} = 473$) et le même système sans grains magnétiques est de 30%.

Ensuite, après avoir détaillé la dynamique de formation des agrégats, nous nous intéresserons au phénomène de ségrégation de ces derniers. Nous étudierons ce processus à travers le rôle des deux paramètres essentiels C et μ . La Figure 4.9 nous montre des états finaux de simulations pour quelques valeurs de ces deux paramètres, donnant une première idée de leurs effets respectifs. Sur la Figure 4.10, les processus de formation des agrégats et de ségrégation de ces derniers sont représentés pour les neuf cas de la Figure 4.9 à travers l'évolution de grandeurs permettant de les mesurer, respectivement la taille moyenne des agrégats et l'altitude moyenne des grains magnétiques. On peut déjà constater à ce stade que la formation des agrégats se produit rapidement devant leur ségrégation, et qu'elle est principalement contrôlée par μ alors que la ségrégation est plus lente et dépend des deux paramètres C et μ .

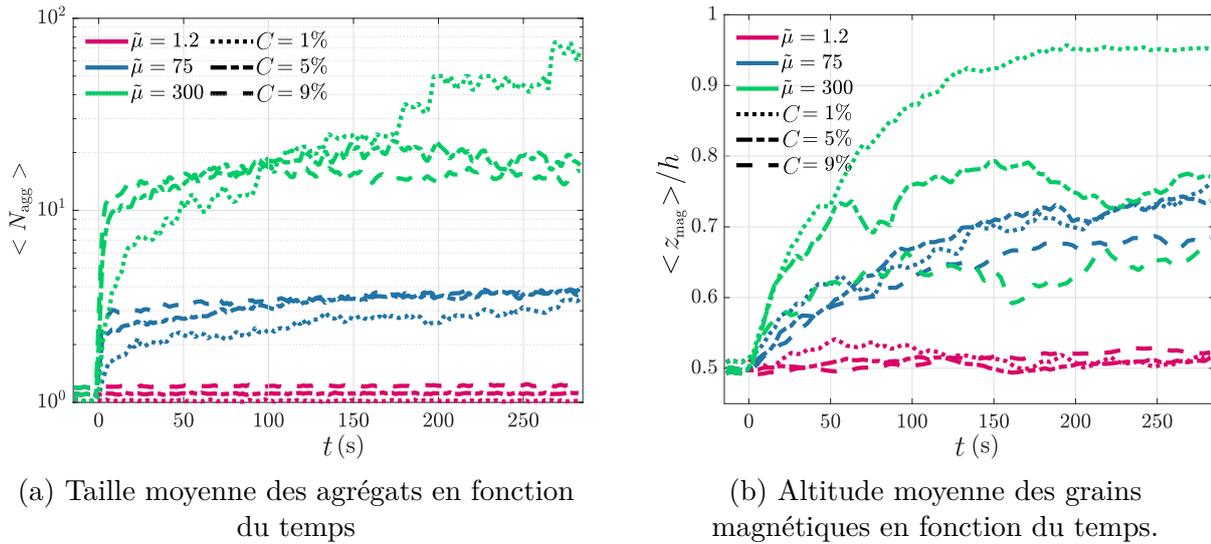


FIGURE 4.10 – Exemples choisis (correspondant aux cas représentés sur la Figure 4.9) de signaux temporels de taille $\langle N_{\text{agg}} \rangle$ et d'altitude $\langle z_{\text{mag}} \rangle$ des agrégats aimantés. La formation des agrégats est rapide devant leur ségrégation, et contrôlée principalement par $\tilde{\mu}$. La ségrégation est un processus plus lent et dépend des deux paramètres C et $\tilde{\mu}$.

II.4 Portée magnétique

Comme expliqué dans le chapitre 2 (section I.2.G), le découpage de l'espace en cellules réalisé pour le calcul des collisions peut aussi être utilisé pour donner une portée finie aux interactions magnétiques. De cette manière, on peut réduire considérablement le temps de calcul sans affecter le comportement du système tant que la portée est suffisante. En effet, les forces magnétiques décroissent proportionnellement à l'inverse de la puissance quatrième de la distance, et le couple décroît comme son cube (section I.2.D). Ainsi, on a vérifié qu'un calcul des forces magnétiques restreint aux cellules voisines et secondes voisines (soit un total de vingt cinq³ cellules) donne les mêmes résultats en terme d'énergie cinétique et de formation des agrégats qu'un calcul bien plus coûteux sur l'ensemble des grains de la simulation.

III Formation d'agrégats

Les fluctuations de vitesse dans ce système sans aimantation ont été étudiées du point de vue expérimental [Pouliquen, 2004], et aussi du point de vue numérique avec notamment l'étude de la compétition entre mélange et ségrégation par taille [Khakhar *et al.*, 1999]. Dans notre système, le mélange introduit par l'écoulement favorise statistiquement le rapprochement des aimants, d'autant plus que ces derniers s'attirent surtout à courte portée. Cela se traduit par l'augmentation de la taille moyenne d'un agrégat. Mais si les grains ne sont pas assez aimantés, le mélange peut aussi détruire les agrégats, un processus qui dépend fortement de leur dimension et de leur forme (un agrégat en boule

3. On compte la cellule centrale, les huit cellules voisines, et les voisines de ces dernières qui sont au nombre de 16. On couvre donc bien une zone de 5×5 , soit 25 cellules.

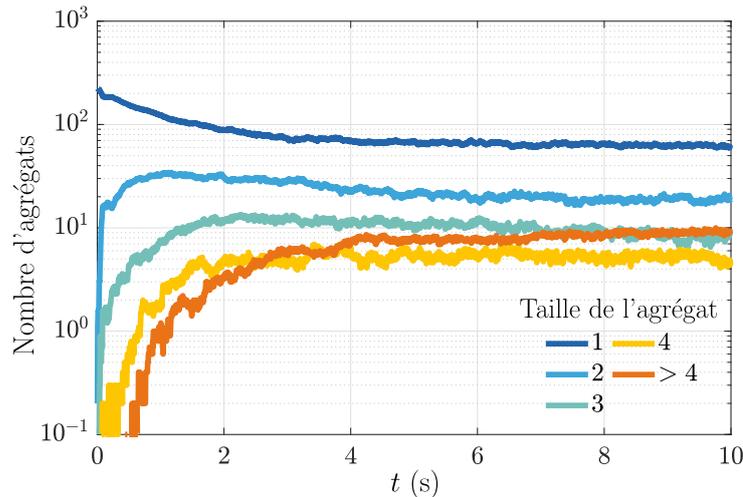


FIGURE 4.11 – Évolution temporelle de la taille des agrégats dans un exemple choisi. Dix grains différents ont été combinés ensemble pour obtenir des statistiques plus satisfaisantes. Avec le temps, la population de grains dans chacune des catégories de taille évolue vers les plus grandes tailles, ce qui montre comment les agrégats grandissent [$N = 4500$, $k_N = 400 \text{ N/m}$, $dt = 4 \times 10^{-6} \text{ s}$, $\gamma = 0.001855 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, $\theta = 17^\circ$, $\mu = 2.5 \times 10^{-5}$, $C = 5\%$]. Dans la suite, on utilisera surtout la taille moyenne des agrégats pour décrire ce processus.

compacte est plus cohésif et a moins de chances de se fragmenter qu'un long agrégat linéaire fortement cisailé par l'écoulement). Une taille d'équilibre peut alors être atteinte pour laquelle la création et destruction des agrégats se compensent. Cependant cette situation peut évoluer lentement avec la ségrégation de ces derniers puisqu'ils peuvent se retrouver à la surface libre de l'écoulement, où il y a également moins de contraintes en plus d'un volume accessible restreint. Enfin, il faut rappeler que notre écoulement n'a pas un taux de cisaillement homogène et qu'en conséquence le mélange n'est pas homogène non plus. Notons tout de même que la diffusion d'une bande horizontale de grains placée au milieu de la couche se fait de manière symétrique (section IV.3). Des tests d'une simulation en cisaillement simple (avec une plaque supérieure pesante tractée à vitesse constante) ont été réalisés, mais finalement écartés de l'étude car l'apparition de bandes de cisaillement rend l'étude numérique compliquée⁴.

III.1 Évolution de la distribution des tailles

Avant d'être rendus magnétiques, les futurs aimants sont aléatoirement distribués de manière homogène, ce qui signifie que des agrégats peuvent déjà être naturellement présents car rien ne les empêche d'être alors voisins. Ces agrégats initiaux sont plus fréquents pour des valeurs de C plus élevées. Rapidement après $t = 0$, les aimants désormais actifs se mettent en mouvement à travers l'empilement granulaire non magnétique jusqu'à trouver

4. Il existe des techniques [Jing *et al.*, 2016] pour s'affranchir de ces bandes de cisaillement et réaliser un cisaillement simple numérique homogène. c'est une piste que nous n'avons pas creusé pour nous concentrer sur le système en écoulement sur plan incliné qui nous a déjà semblé suffisamment riche.

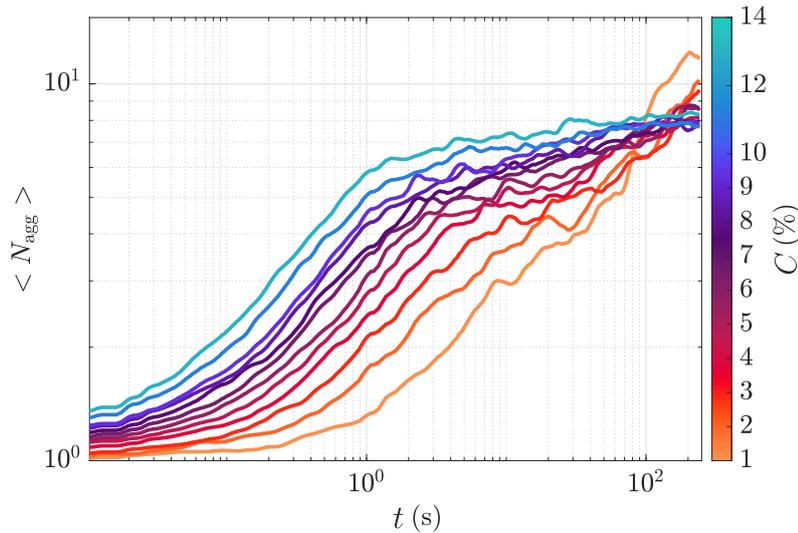


FIGURE 4.12 – Taille moyenne des agrégats au cours du temps pour différentes valeurs de C . Certains agrégats sont déjà naturellement présents dans l’empilement avant magnétisation. Des mélanges plus concentrés conduisent à une formation plus rapide des agrégats, tandis que pour les temps longs la valeur d’équilibre semble davantage contrôlée par μ que par C [$\mu = 6 \times 10^{-5}$ A/m², soit $\tilde{\mu} = 170$].

un autre aimant ou agrégat magnétique voisin. Avec le temps, la population d’aimants isolés va diminuer tandis que la population de paires augmente initialement. Après un certain temps, le nombre de paires va lui aussi diminuer au fur et à mesure que les grains s’agglomèrent et que la distribution évolue vers des agrégats de plus grande taille. Cette cascade des populations vers les grande tailles est visible sur la [Figure 4.11](#) et est accompagnée de l’augmentation de la taille moyenne donnée par $\langle N_{\text{agg}} \rangle = N_{\text{mag}}/N_{\text{aggs}}$ (où N_{aggs} est le nombre d’agrégats distincts). Pour obtenir ces données, dix simulations issues de dix graines différentes ont été cumulées et la moyenne des populations est représentée, c’est pourquoi nous pouvons avoir des populations fractionnaires, ici des multiples de 0.1.. Ainsi, le rapport signal sur bruit est bien plus favorable qu’avec une unique simulation et on obtient une idée assez précise de l’évolution de ces populations pour les petits agrégats au cours des dix secondes qui suivent l’activation de l’aimantation. Ce résultat ne doit cependant pas être comparé quantitativement aux autres simulations car les paramètres utilisés en diffèrent significativement.

III.2 Rôle de la concentration sur la dynamique temporelle

Le mélange permet le rapprochement des aimants puis leur agglomération, qui sera d’autant plus rapide qu’ils sont déjà proches les uns des autres. Une concentration élevée donne donc une agglomération rapide, on peut le vérifier sur la [Figure 4.12](#) où on a superposé les courbes de $\langle N_{\text{agg}} \rangle(t)$ en échelle log-log pour différentes valeurs de C à μ fixé à 6×10^{-5} A/m², soit $\tilde{\mu} = 170$. La variation de C contrôle le temps que met la taille moyenne finale à être atteinte, mais cette valeur finale semble être davantage fixée par μ et peu affectée par la concentration, comme le montre le paragraphe suivant.

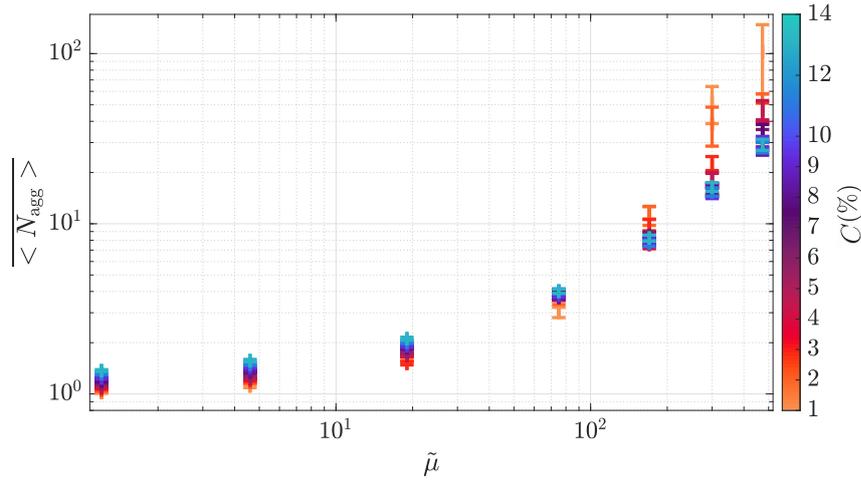


FIGURE 4.13 – Taille finale moyenne des agrégats en fonction de $\tilde{\mu}$ pour différentes valeurs de C . La moyenne d'ensemble sur N_{agg} , notée $\langle \cdot \rangle$ est ensuite moyennée temporellement sur les dernières 75 secondes du signal, ce que l'on note $\overline{\langle \cdot \rangle}$. Les barres d'erreur représentent alors l'écart-type de la distribution de $\langle N_{\text{agg}} \rangle$ au cours de cette fenêtre temporelle.

III.3 Rôle de la magnétisation sur la taille des agrégats

On définit la valeur finale (ou valeur d'équilibre) de la taille moyenne des agrégats en calculant la moyenne du signal sur les dernières 75s de la simulation. Cette valeur, notée $\overline{\langle N_{\text{agg}} \rangle}$, est représentée en fonction de $\tilde{\mu}$ pour toutes les valeurs de C testées (voir l'échelle à droite) sur la Figure 4.13. Ce graphe montre que la valeur finale est contrôlée presque uniquement par la magnétisation, et que la concentration joue un faible rôle. Pour des valeurs de $\tilde{\mu} < 10$, la force d'attraction entre deux aimants n'est pas suffisante devant les forces de contact pour former de grands agrégats persistants. Peu importe alors leur concentration, à l'exception de l'effet statistique sur l'existence spontanée de voisins magnétiques qui explique que les valeurs sont ordonnées selon C . Pour les plus grandes valeurs de $\tilde{\mu}$ cependant, on peut discriminer les différentes valeurs de C en remarquant que les cas dilués conduisent à de plus grands agrégats en moyenne. Notons que cet effet n'est pas totalement indissociable de la ségrégation observée dans la partie qui suit car si l'ensemble des grains magnétiques se retrouve à la surface, la formation d'un grand agrégat est plus probable qu'en l'absence de ségrégation.

IV Ségrégation des agrégats

Nous avons décrit l'agglomération de grains magnétiques isolés en structures plus grandes appelés agrégats. On observe que les agrégats se retrouvent souvent à la surface libre de l'écoulement après un temps long (Figures 4.5 et 4.9), processus similaire à la ségrégation par taille (décrite dans le chapitre 1, section II.3). Une bonne visualisation de ce phénomène est donnée par le graphe spatiotemporel de la distribution des grains magnétiques selon z (Figure 4.14). Cette figure est obtenue par comptage des grains dans des boîtes spatiotemporelles (l'espace étant découpé en tranches horizontales), et on

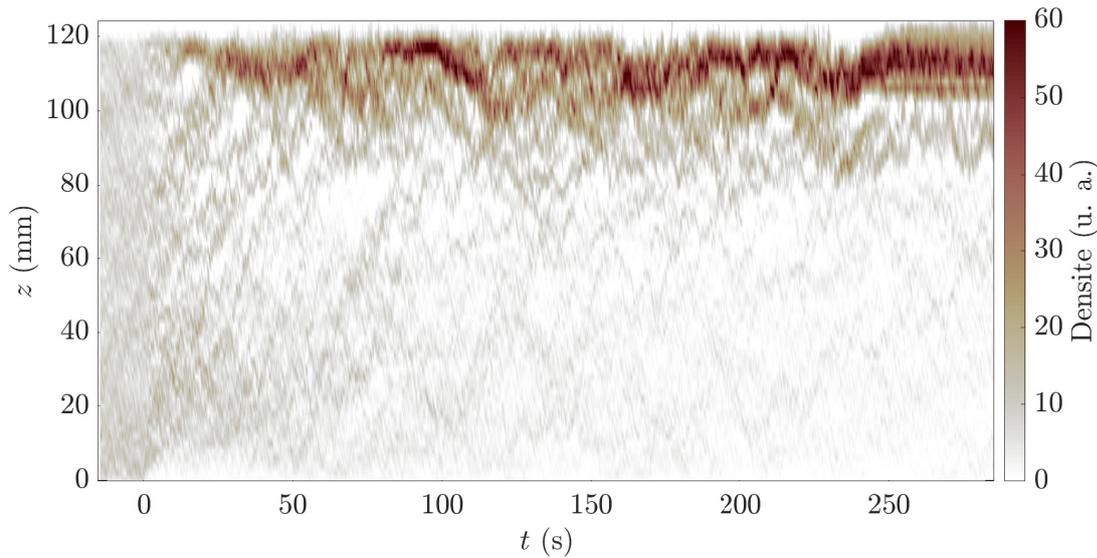


FIGURE 4.14 – Graphe spatiotemporel montrant l'évolution du profil de concentration des grains magnétiques. En partant d'une distribution homogène, ces grains remontent graduellement à la surface de l'écoulement.

représente par une échelle de couleurs (à droite) $\max(\text{count}, 60)$ (où `count` est la quantité de grains magnétiques dans la boîte considérée) afin d'améliorer le contraste dans les zones moins concentrées.

IV.1 Effet de la magnétisation et de la concentration

Le mécanisme sous-jacent est la ségrégation par taille ou effet noix du Brésil (voir chapitre 1, section II.3). Notre cas est cependant différent du cas canonique où les gros grains sont rigides (nous verrons ce cas d'un agrégat très rigide dans la section suivante IV.2). En effet, comme nous l'avons vu ils peuvent croître, se déformer voire se rompre au cours du temps. On s'attend tout de même à trouver un lien entre le taille moyenne des agrégats et la ségrégation de ces derniers. Pour cela, on trace la valeur finale de ces deux quantités ($\langle z \rangle$ en fonction de $\langle N_{\text{agg}} \rangle$) sur la Figure 4.15. On voit tout d'abord que la ségrégation est inexistante pour les faibles valeurs de $\tilde{\mu}$, puisque ces valeurs correspondent à des systèmes très faiblement agrégés (Figure 4.13). Ensuite, les concentrations plus élevées représentées par des points plus foncés ont un effet inhibiteur de la ségrégation sans pour autant la faire disparaître totalement, ces valeurs conduisant systématiquement à des altitudes moyennes plus faibles mais supérieures à la moitié de l'épaisseur de la couche. Cet effet est plus visible sur la Figure 4.16 où on a représenté $\langle z \rangle$ en fonction de C pour chaque valeur de $\tilde{\mu}$. Pour les systèmes ségrégés ($\tilde{\mu} \gtrsim 50$), l'augmentation de C réduit significativement la valeur finale de $\langle z \rangle$. On note également que cette dernière n'augmente pas lorsque $\tilde{\mu}$ est augmenté, ni pour les faibles concentrations où le système est de toute façon totalement ségrégé ($\langle z \rangle \simeq 1$), ni pour les hautes concentrations où on aurait pourtant pu attendre un tel effet. Les barres d'erreur correspondent à l'écart-type du signal de chaque simulation, ce qui n'est pas idéal pour représenter les variations

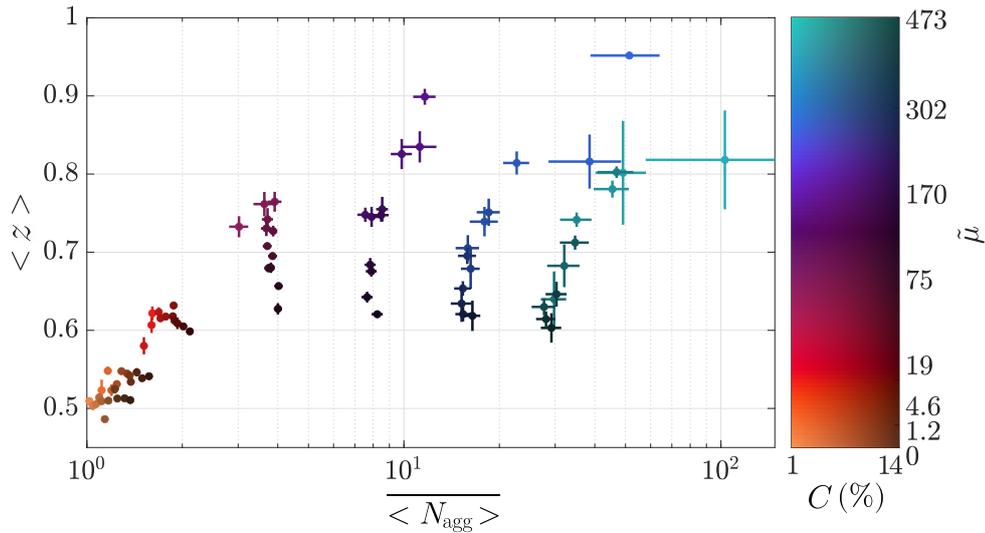


FIGURE 4.15 – Ségrégation (altitude moyenne des grains magnétiques $\langle z \rangle$) en fonction de l’agglomération (taille moyenne des agrégats $\langle N_{\text{agg}} \rangle$). La couleur des points représente la valeur de $\tilde{\mu}$, tandis que leur obscurité représente la concentration C (échelle 2D à droite). Les cas les plus magnétiques et les moins concentrés sont ceux qui ségrègent le plus efficacement.

statistiques du phénomène. Une meilleure solution serait de multiplier les simulations avec des graines différentes mais cela demanderait beaucoup plus de puissance de calcul alors que celle-ci est déjà élevée pour produire ces données.

IV.2 Ségrégation d’agrégats solides

Pour se rapprocher du cas plus classique de la ségrégation d’une ou plusieurs grosses particules solides, nous pré-formons un agrégat dans l’empilement (Figure 4.17 (a)). Cela est réalisé en définissant un cercle au milieu de la couche de grains, et en magnétisant tous les grains qui se situent à l’intérieur de ce cercle (nous faisons cela après que le régime stationnaire d’écoulement ait été atteint). Nous choisissons un paramètre de magnétisation très important ($2.5 \times 10^{-4} \text{ A/m}^2$) pour que cet agrégat artificiel conserve sa configuration au cours du temps, cela requiert d’adapter la raideur des grains et le pas de temps de la simulation.

On enregistre ensuite l’altitude de cet agrégat au cours du temps pour dix simulations avec des graines différentes (Figure 4.17 (b)). En définissant un seuil arbitraire, on peut ensuite étudier le temps de montée, c’est-à-dire le temps nécessaire pour que l’agrégat ait atteint notre seuil.

Sur la Figure 4.17 (c), le temps de remontée jusqu’au seuil arbitraire fixé est représenté en fonction de la taille des agrégats. Comme attendu, les plus grands agrégats ségrègent plus rapidement. Pour les plus petits agrégats, leur marche aléatoire rend le résultat plus variable et produit de grandes barres d’erreur. Concernant nos agrégats magnétiques déformables, il n’est pas possible de conclure d’un lien direct entre la taille des agrégats et leur ségrégation (Figure 4.15). La nature déformable des agrégats et leur déviation importante de la forme de boule étudiée (Figure 4.8) semble donc jouer un rôle important

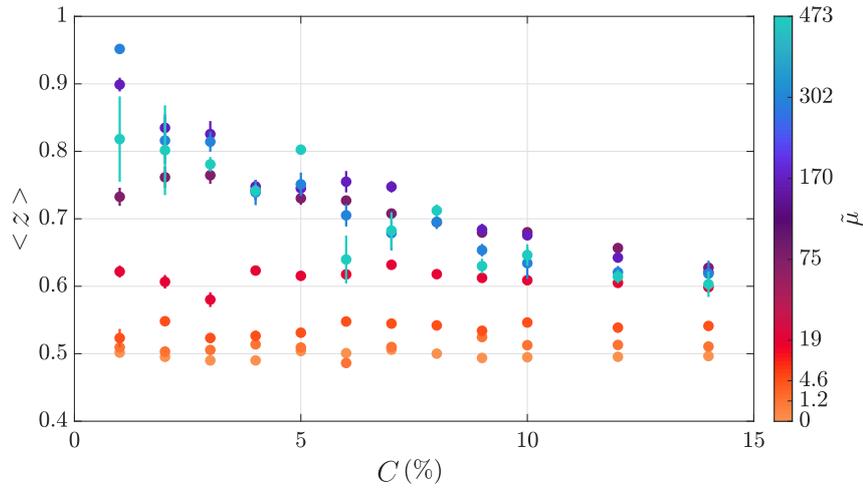


FIGURE 4.16 – Ségrégation (altitude moyenne des grains magnétiques $\langle z \rangle$) en fonction de la concentration en grains magnétiques C . Cette représentation ne tient pas compte de la taille des agrégats mais illustre bien l'effet inhibiteur de la concentration sur la ségrégation, tout en montrant le rôle important de $\tilde{\mu}$.

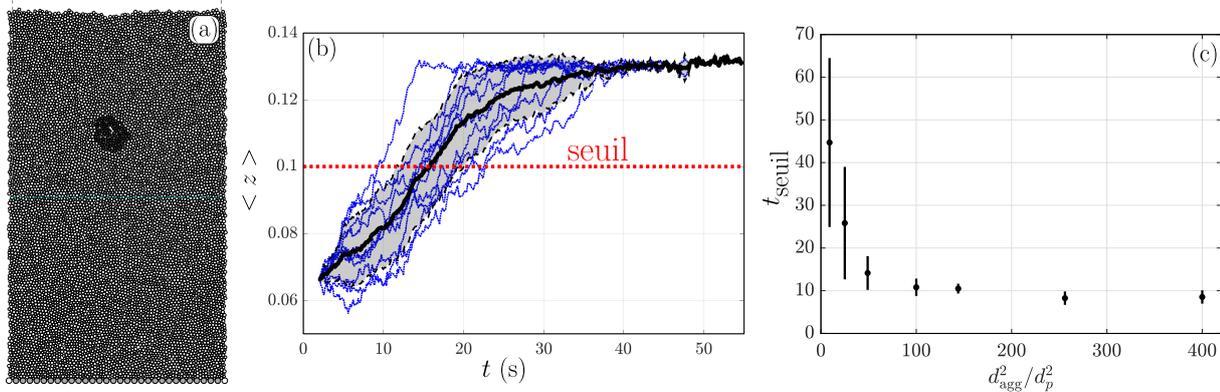


FIGURE 4.17 – (a) Image d'une simulation montrant un agrégat artificiel, placé initialement au milieu de la couche de grains en écoulement stationnaire. (b) Superposition, pour une taille d'agrégat donné, des dix signaux d'altitude au cours du temps pour dix simulations avec des grains différentes (lignes bleues). La moyenne de ces dix signaux est représentée en trait plein noir, ainsi que l'écart-type à travers la zone en transparence entre deux traits pointillés noirs. Le seuil arbitrairement choisi est représenté en pointillés rouges. (c) Distribution (moyenne et écart-type) des temps de montée t_{seuil} requis pour atteindre le seuil arbitraire en fonction de la surface de l'agrégat adimensionnée par la surface d'un grain d_{agg}^2/d_p^2 .

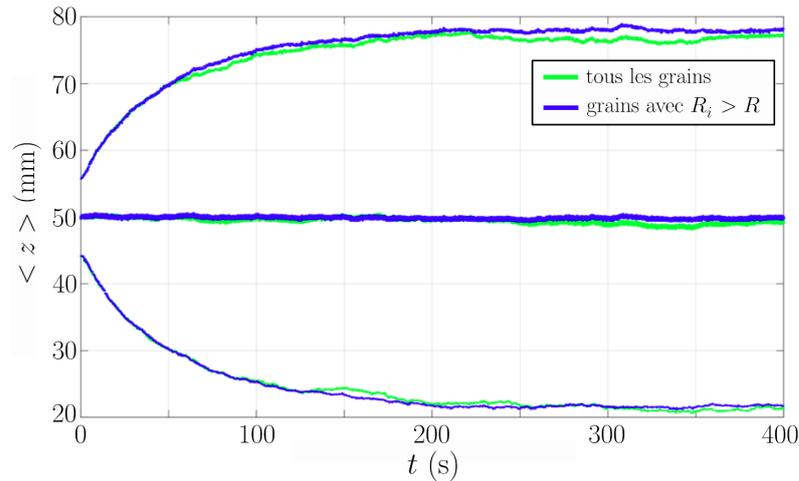


FIGURE 4.18 – Evolution de la moyenne et de l'écart-type des distributions d'altitude d'une population de grains (en vert) et d'une sous-population de gros grains (en bleu). À l'instant $t = 0$, les grains considérés pour le calcul sont situés dans une tranche horizontale de l'espace, entre deux altitudes fixées. Au cours du temps, ils se dispersent de manière symétrique, et leur moyenne (traits gras au centre) reste au même niveau qu'ils soient gros ou non. On conclut qu'il n'y a pas de ségrégation due à la polydispersité dans les conditions étudiées.

dans leur ségrégation. Il serait intéressant de compléter cette étude en étudiant le rôle de la forme des agrégats dans leur ségrégation dans cette configuration simplifiée, en fabriquant des agrégats linéaires par exemple.

IV.3 Ségrégation normale dans l'écoulement

En complément, on peut s'interroger sur l'éventuelle ségrégation par taille «normale» dans notre écoulement, puisque notre milieu est polydisperse. Il s'agit d'une distribution uniforme à $\pm 20\%$ du rayon moyen, les variations de taille reste donc peu importantes.

Por cela, nous nous sommes intéressés à l'évolution d'une bande de grains située au milieu de la couche en écoulement. On a ensuite tracé sur la [Figure 4.18](#) la valeur moyenne (trait épais) et l'écart-type (trait fin) de leur altitude au cours du temps, en distinguant les grains de rayon supérieur au rayon moyen («gros grains», en bleu) des autres (en vert). On s'aperçoit qu'il existe une diffusion importante de cette population dans la couche de grains, mais celle-ci est symétrique⁵ et sans modification significative de l'altitude moyenne, et ce pour les deux populations de grains considérées. On peut donc éliminer la présence de ce type de ségrégation dans notre système. Si on place des grains magnétiques dans cette même bande centrale, on constate bien que ceux-ci remontent significativement, il y a donc bien une ségrégation des agrégats magnétiques dans ces conditions.

5. Alors que le profil de vitesse ne l'est pas.

En résumé de ce chapitre,

- La présence d'aimants dans un écoulement sur plan incliné modifie les transitions entre les régimes connus et fait émerger de nouveaux régimes.
- Selon leur aimantation, les aimants s'arrangent en agrégats de forme variable. La vitesse de leur formation est principalement contrôlée par leur concentration.
- Sur une échelle de temps plus longue, les agrégats remontent à la surface de l'écoulement, à condition que leur magnétisation soit suffisante. Une faible concentration favorise ce phénomène.

Conclusion et perspectives

Pour conclure ce manuscrit, nous rappelons les résultats principaux obtenus sur chacun des deux problèmes étudiés, en détaillant un certain nombre de perspectives de poursuite de ce travail.

Instabilité d'un patin tracté sur un lit granulaire

Nous avons observé et décrit un phénomène nouveau de formation de motif en tractant un solide ayant deux degrés de liberté à la surface d'un milieu granulaire, à la fois par des expériences de laboratoire et des simulations numériques. Ce phénomène rappelle l'instabilité de tôle ondulée mais il en est bien distinct car ce n'est pas un phénomène inertiel et nous l'avons étudié à faible vitesse, dans le régime quasistatique. Nous permettons un degré de liberté de rotation supplémentaire au solide par rapport aux études de l'instabilité de tôle ondulée, et nous étudions l'effet d'un passage unique et non l'effet cumulatif de nombreux passages. Notre montage expérimental peut également rappeler les études de frottement solide consistant à tracter un système masse-ressort, et notre travail a débuté par cette approche en mettant en évidence les différents régimes de force. Nous n'avons finalement pas trouvé de lien direct entre ces régimes de force et la formation du motif, cette dernière étant indépendante de la vitesse de traction et de la raideur du ressort utilisé, alors que la masse, en fixant la pression de confinement, conditionne la formation du motif. Nous avons montré l'effet important de la géométrie du patin, ainsi que la position du point de contact qui joue un rôle très différent entre les simulations et les expériences. Nous avons également exploré de nombreux diagnostics (centre instantané de rotation, mesures de force, champ de vitesse et champ de pression, etc) et des configurations alternatives avec moins de degré de liberté, et nous avons mis en évidence des liens entre certaines grandeurs du problème.

Une piste de poursuite de ce travail est l'ajout de vibrations mécaniques dans le milieu, qui ont un rôle important dans les études de frottement solide (et dans la physique des milieux granulaires en général). Comment l'instabilité est-elle affectée par l'ajout de vibrations mécaniques? Disparaît-elle au dessus d'un seuil? Si oui, de quoi dépend-il? Quid des simulations numériques?

De la même manière, on peut s'intéresser à l'effet de la cohésion dans le milieu, qu'on pourrait augmenter en introduisant un liquide comme cela a été fait dans l'étude de l'instabilité de tôle ondulée faite par Charles-Édouard Lecomte [Lecomte, 2018]. Cela peut en revanche être fait assez facilement dans les simulations numériques en ajoutant une

force d'adhésion modélisant la cohésion. La nature des grains peut être changée également, leur forme, taille, matériau, avec un éventuel effet sur le motif formé. Si le frottement intergrain a été étudié numériquement, ce n'est pas le cas expérimentalement et peut-être existe-t-il un effet bien que les résultats numériques ne suggèrent pas d'effet majeur au-delà d'un frottement très faible pour lequel l'instabilité disparaît. On peut modifier le milieu jusqu'à le remplacer par un fluide à seuil par exemple (un fluide sans contrainte seuil ne formant pas de talus au repos, en régime quasistatique), pour lequel il existe peut-être un effet similaire. Le frottement entre le patin et les grains peut également être modifié. Dans nos simulations et dans nos expériences, la surface inférieure du patin est rugueuse et constituée des mêmes grains que le lit. Nous avons fait quelques expériences qualitatives avec des patins dont la surface inférieure était en plastique ou recouverte de papier, l'instabilité est toujours observée mais une différence quantitative dans son comportement existe peut-être. Numériquement on peut réduire le frottement des grains du patin uniquement, ce qui n'a pas été testé. Remplacer cette surface rugueuse par une surface lisse demande davantage de travail et de repenser la gestion numérique du patin, mais est tout à fait envisageable. Ce patin a une géométrie assez simple choisie pour limiter la quantité de paramètres et nous avons vu que l'angle α joue un rôle très important. On peut alors aussi tester des patins dont le coin avant est courbé plutôt que vif, le rayon de courbure étant potentiellement un paramètre très important étant donné qu'il est lié à l'efficacité du raclage du lit, un peu comme l'angle α . L'étude numérique de ce même effet peut être faite également en modifiant la position relative des grains du patin. Pour le cas expérimental 3D, on peut aussi envisager de profiler le patin différemment selon z la direction des bosses et des creux, en lui donnant une forme de bateau repoussant plus efficacement les grains sur les côtés ou inversement en les amenant vers le centre. Cela pourrait peut-être contribuer à éclaircir le rôle des levées latérales observées de part et d'autre du patin. On peut aussi envisager des simulations 3D.

Enfin, la mise au point d'un modèle rendant compte du comportement observé et permettant d'expliquer la formation du motif serait une poursuite idéale de notre travail. Nous avons essayé de nous en rapprocher en cherchant des liens entre les différentes grandeurs mesurées dont certains sont convaincants et pourraient être utilisés dans un modèle, mais nous manquons d'ingrédients pour le construire et en particulier la condition pour que le patin monte au-dessus du talus n'est pas claire. Nous avons donc observé numériquement les forces dans le milieu et leur profil le long du patin mais leur distribution sur la base de ce dernier en particulier n'est pas triviale et semble difficile à modéliser. L'étude de configurations simplifiées, en retirant des degrés de liberté au patin, fournit des informations supplémentaires notamment sur le processus de raclage et de formation du talus, ou encore le profil de vitesse dans ce dernier. Il serait intéressant de poursuivre ce travail dans le but de comprendre davantage la formation et le comportement du talus, modéliser les forces et l'équilibre trouvé par le patin et éventuellement mettre au point un modèle basé notamment sur des considérations géométriques qui pourrait expliquer le phénomène. Les descriptions continues du milieu granulaire, comme la rhéologie $\mu(I)$, constituent une autre piste pour approcher le problème.

Écoulement de grains magnétiques sur plan incliné

Concernant ce deuxième système, nous avons tout d'abord étudié le cas sans grains magnétiques, en reproduisant les résultats de la littérature [Silbert *et al.*, 2001]. Ensuite, en ajoutant des grains magnétiques, nous avons constaté la formation d'agrégats de taille et de forme diverses associés à un ralentissement de l'écoulement et une modification de son comportement que nous avons partiellement quantifiée. L'étude de la forme des agrégats pourrait constituer une étude à part entière intéressante, liée à la concentration des grains magnétiques et à la magnétisation des aimants. En particulier, pour des valeurs de ces deux paramètres suffisamment élevées, nous avons vu la formation d'un «gel granulaire», système contenant des longues chaînes de grains magnétiques lui conférant une solidité. Nous ne savons pas à quel point l'analogie entre ce système et un gel est valable, et son étude approfondie constitue une perspective intéressante à ce travail. Quelle est sa rhéologie ? Comment se forme-t-il ? Quel est le seuil de concentration et de magnétisation pour l'observer ? Comment interagit-il avec un champ magnétique externe ? Peut-on le reproduire expérimentalement ?

Nous avons choisi de restreindre notre étude aux cas dilués. Nous avons montré que la vitesse de formation des agrégats est principalement contrôlée par leur concentration, et que leur ségrégation était favorisée par une concentration peu élevée. Le lien avec la ségrégation par taille peut être quantifié davantage, en reliant la taille individuelle des agrégats à leur vitesse de remontée (nous n'avons travaillé qu'avec des grandeurs moyennées), et le rôle de leur déformabilité reste à clarifier. La forme des agrégats, très variable, a aussi une influence importante sur leur ségrégation. Nous avons réalisé quelques tests de sa caractérisation sans pousser jusqu'à une étude complète de ce qui la conditionne et de ses effets. Enfin, notre étude concerne le cas d'un écoulement sur plan incliné 2D, généralisable en 3D. On pourrait aussi étudier le cas d'un cisaillement simple ou de vibrations mécaniques, deux conditions qui conduisent également à de la ségrégation par taille dans un cas classique.

Moment d'inertie du patin

I Calcul du moment d'inertie d'une barre

Autour de son centre : Pour une barre de section négligeable, de longueur L et de masse M (donc de masse linéique M/L), son moment d'inertie autour d'un axe perpendiculaire à sa direction et passant par son centre est

$$I_c = \int_{-L/2}^{L/2} r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{ML^2}{12} \quad (\text{A.1})$$

Autour de son extrémité : Son moment d'inertie autour d'un axe perpendiculaire à sa direction et passant par son extrémité est

$$I_e = \int_0^L x^2 \rho dx = \frac{ML^2}{3} \quad (\text{A.2})$$

II Calcul du moment d'inertie d'un ensemble de grains répartis le long d'une ligne

Les grains sont considérés comme des points matériels placés le long d'une droite et espacés régulièrement. On examine d'abord le cas simple sans spatule d'un patin composé de N grains de masse m_g espacés chacun de $2r_g$ et de centre $x_0 = Nr_g$ autour duquel on calcule I_c :

$$I_c = \sum_{i=1}^N m_g r_i^2 = \sum_{i=1}^N m_g (2r_g i - x_0)^2 = \sum_{i=1}^N m_g (2r_g)^2 (i - N/2)^2$$

On change d'indice $k = i - N/2$

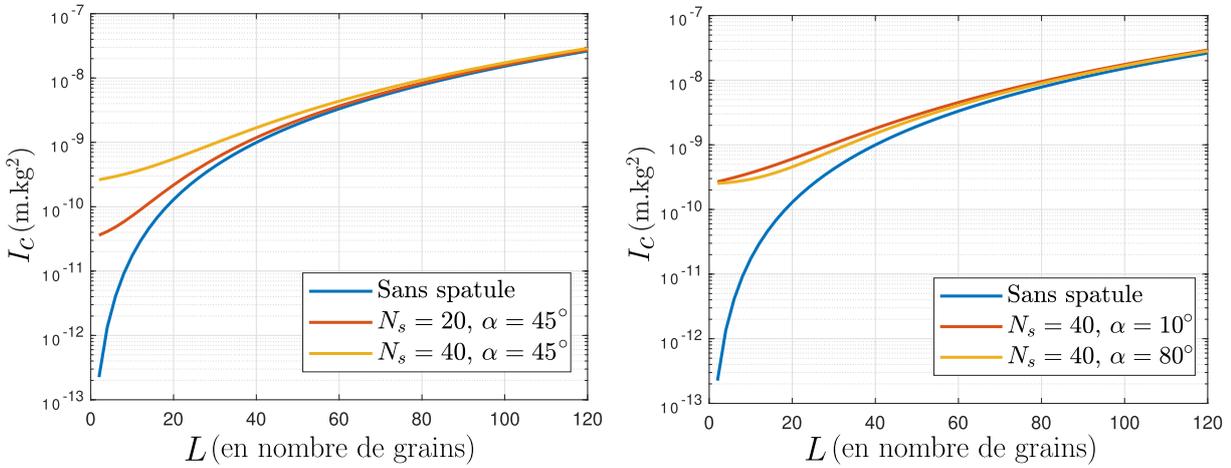
$$I_c = \sum_{k=1-N/2}^{N/2} m_g r_k^2 = 4m_g r_g^2 \sum_{k=1-N/2}^{N/2} k^2$$

Cette dernière somme peut se réduire en $\sum_{k=1-N/2}^{N/2} k^2 = 1/12N(N^2 + 2)$ et ainsi

$$I_c = \frac{1}{3}m_g r_g^2 N(N^2 + 2) \quad (\text{A.3})$$

On peut relier (A.3) et (A.1) en considérant que $L = 2Nr_g$ et $M = Nm_g$ ce qui transforme (A.1) en $I_c = \frac{m_g r_g^2 N^3}{3}$ qui s'identifie à (A.3) pour $N \gg 1$ (idem pour I_e à un facteur 4 près).

Comportement de I avec N : Pour $N \gg 1$, $I_c, I_e \propto N^3$. On peut examiner l'influence des spatules réparties de part et d'autre du patin, qui peuvent devenir importantes pour des valeurs de N faibles. On peut calculer explicitement I_c avec $I_c = \sum_{i=1}^N m_g r_i^2$ pour une répartition r_i arbitraire, ici la forme du patin est paramétrée par l'angle α des spatules et le nombre N_s de grains qui les composent (chacune). L'évolution de $I_c(N)$ peut être comparée pour différentes valeurs de α et N_s sur la Figure A.1.



(a) Moment d'inertie I_c en fonction de l pour différentes valeurs de N_s , avec $\alpha = 45^\circ$ (b) Moment d'inertie I_c en fonction de l pour différentes valeurs de α

FIGURE A.1 – (a) Effet de la longueur de la spatule sur le moment d'inertie. (b) Effet de l'angle de la spatule sur le moment d'inertie.

Bibliographie

- ABROSHAN, M., HAJILOO, R., HASHEMI, E. et KHAJEPOUR, A. (2020). Model predictive-based tractor-trailer stabilisation using differential braking with experimental verification. *Vehicle System Dynamics*, 59(8):1190–1213.
- AMONTONS, G. (1699). De la résistance causée dans les machines. *Mémoires de l'Académie Royale*, A:257–282.
- ANDREOTTI, B., CLAUDIN, P. et POULIQUEN, O. (2006). Aeolian sand ripples : Experimental study of fully developed states. *Physical Review Letters*, 96(2):028001.
- ANDREOTTI, B., POULIQUEN, O. et FORTERRE, Y. (2011). *Les milieux granulaires, entre fluide et solide*. EDP Sciences.
- ARANSON, I. S. et TSIMRING, L. S. (2006). Patterns and collective behavior in granular media : Theoretical concepts. *Reviews of Modern Physics*, 78(2):641–692.
- BAGNOLD, R. A. (1941). *The physics of blown sand and desert dunes*. London : Methuen and Co.
- BAGNOLD, R. A. (1954). Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a newtonian fluid under shear. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 225(1160):49–63.
- BARKER, T., RAUTER, M., MAGUIRE, E., JOHNSON, C. et GRAY, J. (2021). Coupling rheology and segregation in granular flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 909:A22.
- BAUMBERGER, T. et CAROLI, C. (2006). Solid friction from stick–slip down to pinning and aging. *Advances in Physics*, 55(3-4):279–348.
- BAUMBERGER, T., HESLOT, F. et PERRIN, B. (1994). Crossover from creep to inertial motion in friction dynamics. *Nature*, 367(6463):544–546.
- BITBOL, A.-F., TABERLET, N., MORRIS, S. W. et MCELWAINE, J. N. (2009). Scaling and dynamics of washboard roads. *Physical Review E*, 79(6):061308.
- BIZON, C., SHATTUCK, M. D., SWIFT, J. B., MCCORMICK, W. D. et SWINNEY, H. L. (1998). Patterns in 3D vertically oscillated granular layers : Simulation and experiment. *Physical Review Letters*, 80(1):57–60.

BIBLIOGRAPHIE

- BOND-LAMBERTY, B. et THOMSON, A. (2010). Temperature-associated increases in the global soil respiration record. *Nature*, 464(7288):579–582.
- BOTH, J. A., HONG, D. C. et KURTZE, D. A. (2001). Corrugation of roads. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 301(1-4):545–559.
- BOWDEN, F. P. et TABOR, D. (2001). *The friction and lubrication of solids*, volume 1. Oxford university press.
- BREWSTER, R., GREY, G. S., LANDRY, J. W. et LEVINE, A. J. (2005). Plug flow and the breakdown of Bagnold scaling in cohesive granular flows. *Physical Review E*, 72(6):061301.
- CAMPBELL, C., BRENNEN, C. et SABERSKY, R. (1985). Flow regimes in inclined open-channel flows of granular materials. *Powder Technology*, 41(1):77–82.
- CANTELAUBE, F. et BIDEAU, D. (1995). Radial segregation in a 2D drum : an experimental analysis. *Europhysics Letters*, 30(3):133.
- CAP, J. S. et WAMBOLD, J. C. (1984). Traction loss of a suspended tire on a sinusoidal road. *Surface Properties-Vehicle*, 1:38.
- CAPOZZA, R., VANOSI, A., VEZZANI, A. et ZAPPERI, S. (2009). Suppression of friction by mechanical vibrations. *Physical Review Letters*, 103(8):085502.
- CHALLIS, J. H. (2001). Estimation of the finite center of rotation in planar movements. *Medical Engineering & Physics*, 23(3):227–233.
- CHARRU, F., ANDREOTTI, B. et CLAUDIN, P. (2013). Sand ripples and dunes. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 45(1):469–493.
- CHENG, X., XU, L., PATTERSON, A., JAEGER, H. M. et NAGEL, S. R. (2008). Towards the zero-surface-tension limit in granular fingering instability. *Nature Physics*, 4(3):234–237.
- CIAMARRA, M. P., CONIGLIO, A. et NICODEMI, M. (2005). Shear instabilities in granular mixtures. *Physical Review Letters*, 94(18):188001.
- COULOMB, C. (1785). Théorie des machines simples, en ayant égard de leurs parties et de la roideur des cordages. *Mémoires de Mathématique et de Physique de l'Académie Royale des Sciences*.
- CRASSOUS, J., HUMEAU, A., BOURY, S. et CASAS, J. (2017). Pressure-dependent friction on granular slopes close to avalanche. *Physical Review Letters*, 119(5):058003.
- CRISCO, J. J., CHEN, X., PANJABI, M. M. et WOLFE, S. W. (1994). Optimal marker placement for calculating the instantaneous center of rotation. *Journal of Biomechanics*, 27(9):1183–1187.
- CROSS, M. C. et HOHENBERG, P. C. (1993). Pattern formation outside of equilibrium. *Reviews of Modern Physics*, 65(3):851–1112.

- CUNDALL, P. A. et STRACK, O. D. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *geotechnique*, 29(1):47–65.
- CUNHA, F. et SOBRAL, Y. (2004). Characterization of the physical parameters in a process of magnetic separation and pressure-driven flow of a magnetic fluid. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 343:36–64.
- DEGIULI, E. et WYART, M. (2017). Friction law and hysteresis in granular materials. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 114(35):9284–9289.
- DESPLANQUES, Y. (2014). Amontons-coulomb friction laws, a review of the original manuscript. *SAE International Journal of Materials and Manufacturing*, 8(1):98–103.
- DIJKSMAN, J., WORTEL, G. H., van DELLEN, L. T. H., DAUCHOT, O. et van HECKE, M. (2011). Jamming, yielding, and rheology of weakly vibrated granular media. *Physical Review Letters*, 107:108303.
- DOP, A., VIDAL, V. et TABERLET, N. (2023). Surface instabilities generated by a slider pulled across a granular bed. *Physical Review E*, 108(2).
- DOUADY, S., FAUVE, S. et LAROCHE, C. (1989). Subharmonic instabilities and defects in a granular layer under vertical vibrations. *Europhysics Letters (EPL)*, 8(7):621–627.
- DURAN, J. (2000). *Sands, Powders, and Grains*. Springer New York.
- ERTAŞ, D., GREY, G. S., HALSEY, T. C., LEVINE, D. et SILBERT, L. E. (2001). Gravity-driven dense granular flows. *Europhysics Letters*, 56(2):214.
- ESHUIS, P., van der WEELE, K., van der MEER, D., BOS, R. et LOHSE, D. (2007). Phase diagram of vertically shaken granular matter. *Physics of Fluids*, 19(12):123301.
- EULER, L. (1750). Sur le frottement des corps solides. *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, 4:122–132.
- EWING, R. C. et KOCUREK, G. A. (2010). Aeolian dune interactions and dune-field pattern formation : White sands dune field, New Mexico. *Sedimentology*, 57(5):1199–1219.
- FORTERRE, Y. et POULIQUEN, O. (2003). Long-surface-wave instability in dense granular flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 486:21–50.
- FORTERRE, Y. et POULIQUEN, O. (2008). Flows of dense granular media. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 40(1):1–24.
- FÉLIX, G. et THOMAS, N. (2004). Evidence of two effects in the size segregation process in dry granular media. *Physical Review E*, 70(5):051307.
- GDR MIDi (2004). On dense granular flows. *The European Physical Journal E*, 14(4):341–365.
- GIRARD, M., WALTER, C., RÉMY, J., BERTHELIN, J. et MOREL, J. (2011). *Sols et environnement - 2e édition*. Sciences de la Terre. Dunod.

BIBLIOGRAPHIE

- GOLDFARB, D. J., GLASSER, B. J. et SHINBROT, T. (2002). Shear instabilities in granular flows. *Nature*, 415(6869):302–305.
- GOLICK, L. A. et DANIELS, K. E. (2009). Mixing and segregation rates in sheared granular materials. *Physical Review E*, 80:042301.
- GOUJON, C. (2004). *Écoulements granulaires bidisperses sur plans inclinés rugueux*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille.
- GRAY, J. et HUTTER, K. (1997). Pattern formation in granular avalanches. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 9(6):341–345.
- GROH, C., REHBERG, I. et KRUELLE, C. A. (2010). Particle dynamics of a cartoon dune. *New Journal of Physics*, 12(6):063025.
- GUO, H., FU, J., GUO, R., XU, Q., JIANG, H. et CHEN, N. (2020). A continuum model of drag and lift forces for inclined planes dragged through granular beds. *Granular Matter*, 22(3).
- GUYON, E. et TROADEC, J.-P. (1994). *Du sac de billes au tas de sable*. Odile Jacob, Paris, France.
- HARMS, J. C. (1969). Hydraulic significance of some sand ripples. *Geological Society of America Bulletin*, 80(3):363.
- HATA, S., KATSURA, M. et KATSURAGI, H. (2022). History-dependent growth and reduction of the ripples formed on a swept granular track. *The European Physical Journal E*, 45(1):8.
- HELE-SHAW, H. S. (1898). The flow of water. *Nature*, 58(1489):34–36.
- HEWITT, I. et BALMFORTH, N. (2012). Viscoplastic lubrication theory with application to bearings and the washboard instability of a planing plate. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 169-170:74–90.
- HEWITT, I. J., BALMFORTH, N. J. et MCELWAINE, J. N. (2012). Granular and fluid washboards. *Journal of Fluid Mechanics*, 692:446–463.
- HOCKNEY, R. W. et EASTWOOD, J. W. (1981). *Computer simulation using particles*. McGraw-Hill, New York, NY.
- HOLYOAKE, A. J. et MCELWAINE, J. N. (2012). High-speed granular chute flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 710:35–71.
- HUANG, H., ZHANG, F., CALLAHAN, P. et AYOUB, J. (2012). Granular fingering in fluid injection into dense granular media in a Hele-Shaw cell. *Physical Review Letters*, 108(25).
- HUMEAU, A., ROUGÉ, J. et CASAS, J. (2015). Optimal range of prey size for antlions. *Ecological Entomology*, 40(6):776–781.
- HUTCHINGS, I. M. (2016). Leonardo da Vinci’s studies of friction. *Wear*, 360-361:51–66.

- IKEDA, A., BERTHIER, L. et SOLLICH, P. (2013). Disentangling glass and jamming physics in the rheology of soft materials. *Soft Matter*, 9(32):7669–7683.
- JAGGAR, T. (1908). *Experiments Illustrating Erosion and Sedimentation : With Six Plates*, volume 8 de *Bulletin of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College, Geological series*. Museum of Comparative Zoology.
- JING, L., KWOK, C. Y., LEUNG, Y. F. et SOBRAL, Y. D. (2016). Characterization of base roughness for granular chute flows. *Physical Review E*, 94(5):052901.
- JOHNSEN, Ø., TOUSSAINT, R., MÅLØY, K. J. et FLEKKØY, E. G. (2006). Pattern formation during air injection into granular materials confined in a circular Hele-Shaw cell. *Physical Review E*, 74(1):011301.
- JOHNSEN, Ø., TOUSSAINT, R., MÅLØY, K. J., FLEKKØY, E. G. et SCHMITTBUHL, J. (2008). Coupled air/granular flow in a linear Hele-Shaw cell. *Physical Review E*, 77(1):011301.
- JOHNSON, P. A. et JIA, X. (2005). Nonlinear dynamics, granular media and dynamic earthquake triggering. *Nature*, 437(7060):871–874.
- KHAKHAR, D. V., MCCARTHY, J. J. et OTTINO, J. M. (1999). Mixing and segregation of granular materials in chute flows. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 9(3):594–610.
- KHÈNE, S. (2016). *Mécanique du solide : Cours, exercices et problèmes corrigés*. Presses Polytechnique de Montréal.
- KNUDSEN, H. A., SANDNES, B., FLEKKØY, E. G. et MÅLØY, K. J. (2008). Granular labyrinth structures in confined geometries. *Physical Review E*, 77(2):021301.
- LANDAU, L. et LIFSCHITZ, E. (1982). *Physique théorique. Tome 1, Mécanique*. Mir.
- LANDECKER, P. B., VILLANI, D. D. et YUNG, K. W. (1999). An analytic solution for the torque between two magnetic dipoles. *Magnetic and Electrical Separation*, 10(1):29–33.
- LANGLOIS, V. (2005). *Instabilité d'un lit granulaire cisailé par un écoulement fluide*. Thèse de doctorat, Université de Rennes 1.
- LASTAKOWSKI, H., GÉMINARD, J.-C. et VIDAL, V. (2015). Granular friction : Triggering large events with small vibrations. *Scientific Reports*, 5(1):13455.
- LECOMTE, C.-E. (2018). *Instabilités dans un milieu granulaire : tôle ondulée sur un lit de sable, et ségrégation au sein des astéroïdes lâches*. Thèse de doctorat, ENS de Lyon.
- LHERMINIER, S., PLANET, R., VEHEL, V. L. d., SIMON, G., VANEL, L., MÅLØY, K. J. et RAMOS, O. (2019). Continuously sheared granular matter reproduces in detail seismicity laws. *Physical Review Letters*, 122:218501.
- LI, Y., GUI, N., YANG, X., TU, J. et JIANG, S. (2016). Numerical study of gravity-driven dense granular flows on flow behavior characterization. *Powder Technology*, 297:144–152.

BIBLIOGRAPHIE

- LOMMEN, S., SCHOTT, D. et LODEWIJKS, G. (2014). DEM speedup : Stiffness effects on behavior of bulk material. *Particuology*, 12:107–112.
- LOVE, A. E. H. (1987). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge University Press.
- LUDING, S. (1994). *Modelle und Simulationen granularer Materialien (Models and simulations of granular materials)*. Thèse de doctorat, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, Germany.
- MALONE, K. F. et XU, B. H. (2008). Determination of contact parameters for discrete element method simulations of granular systems. *Particuology*, 6(6):521–528.
- MANDAL, S., NICOLAS, M. et POULIQUEN, O. (2020). Insights into the rheology of cohesive granular media. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 117(15): 8366–8373.
- MARONE, C. (1998). Laboratory-derived friction laws and their application to seismic faulting. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 26(1):643–696.
- MATHER, K. B. (1963). Why do roads corrugate? *Scientific American*, 208(1):128–137.
- MAYS, D. C. et FAYBISHENKO, B. A. (2000). Washboards in unpaved highways as a complex dynamic system. *Complexity*, 5(6):51–60.
- MCCANE, B., ABBOTT, J. et KING, T. (2005). On calculating the finite centre of rotation for rigid planar motion. *Medical Engineering & Physics*, 27(1):75–79.
- MEHTA, A. (1994). *Granular Matter*. Springer New York.
- MEHTA, A. (2007). *Granular Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, England.
- MELHUS, M. F. et ARANSON, I. S. (2012). Effect of vibration on solid-to-liquid transition in small granular systems under shear. *Granular Matter*, 14(2):151–156.
- MELO, F., UMBANHOWAR, P. et SWINNEY, H. L. (1994). Transition to parametric wave patterns in a vertically oscillated granular layer. *Physical Review Letters*, 72(1):172.
- MELOSH, H. J. (1979). Acoustic fluidization : A new geologic process? *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 84(B13):7513–7520.
- MELOSH, H. J. (1996). Dynamical weakening of faults by acoustic fluidization. *Nature*, 379(6566):601–606.
- MEUNIER, P., MÉTIVIER, F., LAJEUNESSE, E., MÉRIAUX, A. et FAURE, J. (2006). Flow pattern and sediment transport in a braided river : The “torrent de St Pierre” (french Alps). *Journal of Hydrology*, 330(3–4):496–505.
- MEWIS, J., FRITH, W. J., STRIVENS, T. A. et RUSSEL, W. B. (1989). The rheology of suspensions containing polymerically stabilized particles. *AIChE Journal*, 35(3):415–422.

- MÉTIVIER, F., LAJEUNESSE, E. et DEVAUCHELLE, O. (2017). Laboratory rivers : Lacey’s law, threshold theory, and channel stability. *Earth Surface Dynamics*, 5(1):187–198.
- NASUNO, S., KUDROLLI, A., BAK, A. et GOLLUB, J. P. (1998). Time-resolved studies of stick-slip friction in sheared granular layers. *Physical Review E*, 58:2161–2171.
- NASUNO, S., KUDROLLI, A. et GOLLUB, J. P. (1997). Friction in granular layers : Hysteresis and precursors. *Physical Review Letters*, 79:949–952.
- NICOT, F., SIBILLE, L., DONZE, F. et DARVE, F. (2007). From microscopic to macroscopic second-order work in granular assemblies. *Mechanics of Materials*, 39(7):664–684.
- OLAFSEN, J. et URBACH, J. (1998). Clustering, order, and collapse in a driven granular monolayer. *Physical Review Letters*, 81(20):4369.
- PANJABI, M. M. (1979). Centers and angles of rotation of body joints : A study of errors and optimization. *Journal of Biomechanics*, 12(12):911–920.
- PERCIER, B. (2013). *Dynamique d’un empilement granulaire : instabilité de tôle ondulée et fluage d’une colonne de grains*. Thèse de doctorat, ENS de Lyon.
- PERCIER, B., MANNEVILLE, S., MCELWAIN, J. N., MORRIS, S. W. et TABERLET, N. (2011). Lift and drag forces on an inclined plow moving over a granular surface. *Physical Review E*, 84(5):051302.
- PERCIER, B., MANNEVILLE, S. et TABERLET, N. (2013). Modeling a washboard road : From experimental measurements to linear stability analysis. *Physical Review E*, 87(1):012203.
- PEREIRA, R., COUTO, M., RIBEIRO, F., RUA, R., CUNHA, J., FERNANDES, J. P. et SARAIVA, J. (2021). Ranking programming languages by energy efficiency. *Science of Computer Programming*, 205:102609.
- PINTO, S. F., COUTO, M. S., ATMAN, A. P. F., ALVES, S. G., BERNARDES, A. T., de RESENDE, H. F. V. et SOUZA, E. C. (2007). Granular fingers on jammed systems : New fluidlike patterns arising in grain-grain invasion experiments. *Physical Review Letters*, 99(6).
- PONS, A., AMON, A., DARNIGE, T., CRASSOUS, J. et CLÉMENT, E. (2015). Mechanical fluctuations suppress the threshold of soft-glassy solids : The secular drift scenario. *Physical Review E*, 92:020201.
- PÖSCHEL, T., SALUEÑA, C. et SCHWAGER, T. (2001). Scaling properties of granular materials. *Physical Review E*, 64(1):173–184.
- POULIQUEN, O. (1999). Scaling laws in granular flows down rough inclined planes. *Physics of Fluids*, 11(3):542–548.
- POULIQUEN, O. (2004). Velocity correlations in dense granular flows. *Physical Review Letters*, 93(24):248001.

BIBLIOGRAPHIE

- POULIQUEN, O., NICOLAS, M. et WEIDMAN, P. (1997). Crystallization of non-brownian spheres under horizontal shaking. *Physical Review Letters*, 79(19):3640.
- REIS, P. M. et MULLIN, T. (2002). Granular segregation as a critical phenomenon. *Physical Review Letters*, 89(24):244301.
- REIS, P. M., SYKES, T. et MULLIN, T. (2006). Phases of granular segregation in a binary mixture. *Physical Review E*, 74(5):051306.
- RILEY, J. et FURRY, R. (1973). Simulation of the road-corrugation phenomenon. *Highway Research Record*, 438:54.
- RISTOW, G. H. (2000). *Pattern formation in granular materials*. Springer Science & Business Media.
- ROCHA, F. M., JOHNSON, C. G. et GRAY, J. M. N. T. (2019). Self-channelisation and levee formation in monodisperse granular flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 876:591–641.
- ROSATO, A., STRANDBURG, K. J., PRINZ, F. et SWENDSEN, R. H. (1987). Why the brazil nuts are on top : Size segregation of particulate matter by shaking. *Physical review letters*, 58(10):1038.
- SAMBURSKY, S. (2016). *The physical world of late antiquity*. Princeton Legacy Library. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- SANDNES, B., FLEKKØY, E., KNUDSEN, H., MÅLØY, K. et SEE, H. (2011). Patterns and flow in frictional fluid dynamics. *Nature Communications*, 2(1):288.
- SANDNES, B., KNUDSEN, H. A., MÅLØY, K. J. et FLEKKØY, E. G. (2007). Labyrinth patterns in confined granular-fluid systems. *Physical Review Letters*, 99(3).
- SAUTEL, J. (2021). *Ségrégation granulaire dans les astéroïdes lâchement agglomérés*. Thèse de doctorat, ENS de Lyon.
- SAVAGE, S. B. (1979). Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 92(1):53–96.
- SEIDEN, G. et THOMAS, P. J. (2011). Complexity, segregation, and pattern formation in rotating-drum flows. *Reviews of Modern Physics*, 83(4):1323–1365.
- SELLERIO, A. L., MARI, D., GREMAUD, G. et D’ANNA, G. (2011). Glass transition associated with the jamming of vibrated granular matter. *Physical Review E*, 83:021301.
- SHÄFER, J., DIPPEL, S. et WOLF, D. E. (1996). Force schemes in simulations of granular materials. *Journal de Physique I*, 6(1):5–20.
- SHARP, R. P. (1963). Wind ripples. *The Journal of Geology*, 71(5):617–636.
- SILBERT, L. E., ERTAŞ, D., GREST, G. S., HALSEY, T. C., LEVINE, D. et PLIMPTON, S. J. (2001). Granular flow down an inclined plane : Bagnold scaling and rheology. *Physical Review E*, 64:051302.

- SILBERT, L. E., LANDRY, J. W. et GREY, G. S. (2003). Granular flow down a rough inclined plane : Transition between thin and thick piles. *Physics of Fluids*, 15(1):1–10.
- STARON, L. et PHILLIPS, J. C. (2014). Segregation time-scale in bi-disperse granular flows. *Physics of Fluids*, 26(3):033302.
- TABERLET, N., MORRIS, S. W. et MCELWAIN, J. N. (2007a). Washboard road : The dynamics of granular ripples formed by rolling wheels. *Physical Review Letters*, 99:068003.
- TABERLET, N., NEWEY, M., RICHARD, P. et LOSERT, W. (2006). On axial segregation in a tumbler : an experimental and numerical study. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2006(07):07013.
- TABERLET, N., RICHARD, P., JENKINS, J. T. et DELANNAY, R. (2007b). Density inversion in rapid granular flows : the supported regime. *The European Physical Journal E*, 22(1).
- THOMPSON, D. W. (1992). *On growth and form*. Dover Publications, Mineola, NY.
- TOCKOL, I. (1993). *Contribution à l'étude des graveleux latéritiques dans les pays du Sahel : cas des routes non revêtues*. Thèse de doctorat, Ecole de génie, Université de Moncton.
- TREWHELA, T., ANCEY, C. et GRAY, J. (2021a). An experimental scaling law for particle-size segregation in dense granular flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 916.
- TREWHELA, T., GRAY, J. et ANCEY, C. (2021b). Large particle segregation in two-dimensional sheared granular flows. *Physical Review Fluids*, 6(5):054302.
- UMBANHOWAR, P. B., MELO, F. et SWINNEY, H. L. (1996). Localized excitations in a vertically vibrated granular layer. *Nature*, 382(6594):793–796.
- VERLET, L. (1967). Computer “experiments” on classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules. *Physical Review*, 159(1):98–103.
- VESSAIRE, J. (2019). *Couplages particules/turbulence dans un écoulement tourbillonnaire et fortement ensemençé*. Theses, Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON.
- VIDAL, V., OLIVER, C., LASTAKOWSKI, H., VARAS, G. et GÉMINARD, J. C. (2019). Friction weakening by mechanical vibrations : A velocity-controlled process. *The European Physical Journal E*, 42(7):1–6.
- VINNINGLAND, J. L., JOHNSEN, Ø., FLEKKØY, E. G., TOUSSAINT, R. et MÅLØY, K. J. (2007). Granular Rayleigh-Taylor instability : Experiments and simulations. *Physical Review Letters*, 99(4):048001.
- WALTON, O. R. (1993). Numerical simulation of inclined chute flows of monodisperse, inelastic, frictional spheres. *Mechanics of Materials*, 16(1–2):239–247.
- WEBER, J. (1966). Recherches concernant les contraintes intergranulaires dans les milieux pulvérulents. *Bulletin de Liaison des Ponts-et-chaussées*, 20:1–20.

BIBLIOGRAPHIE

- WERNER, B. T. (1995). Eolian dunes : Computer simulations and attractor interpretation. *Geology*, 23(12):1107.
- YAMAZAKI, Y. et MIZUGUCHI, T. (2000). Front aggregation and labyrinthine pattern in the drying process of two-dimensional wet granular systems. *Journal of the Physical Society of Japan*, 69(8):2387–2390.
- YUNG, K. W., LANDECKER, P. B. et VILLANI, D. D. (1998). An analytic solution for the force between two magnetic dipoles. *Magnetic and Electrical Separation*, 9(1):39–52.
- ZURIGUEL, I., GRAY, J., PEIXINHO, J. et MULLIN, T. (2006). Pattern selection by a granular wave in a rotating drum. *Physical Review E*, 73(6):061302.

Résumé :

Il existe de nombreux processus de formation de motifs dans les milieux granulaires. Dans la première partie de cette thèse, nous avons étudié l'un d'eux en explorant le comportement d'un patin (en forme de bateau) tracté à la surface d'un lit granulaire, à la fois par des expériences de laboratoire et des simulations numériques 2D par la méthode des éléments discrets. Ce patin possède deux degrés de liberté et l'étude est restreinte au cas quasistatique. Selon sa masse et sa géométrie, son mouvement peut devenir instable, générant des oscillations de topographie dans son sillage. Ces oscillations ne présentent pas de vitesse seuil, contrairement au cas de l'instabilité de tôle ondulée. Nous les avons caractérisées en fonction des paramètres du problème. En particulier, nous avons montré que l'instabilité est plus prononcée lorsque l'angle situé à l'avant du patin est plus marqué, mais aussi que celle-ci disparaît lorsque le patin est trop lourd ou trop léger. Nous avons pointé la pression de confinement comme le paramètre pertinent pour décrire le problème. Dans une seconde partie, nous avons réalisé des simulations numériques d'écoulement d'un milieu granulaire sur un plan incliné, dont une partie des grains sont aimantés. L'écoulement qui s'établit est bien connu et correspond à un profil de Bagnold. Nous avons étudié la dynamique des particules aimantées qui forment des agrégats magnétiques, lesquels remontent à la surface libre de l'écoulement avec le temps. Ces deux processus d'agrégation et de ségrégation dépendent à la fois de la magnétisation des aimants mais aussi de leur concentration.

Abstract

There are many different pattern formation processes in granular materials. In the first part, we have studied the behaviour of a boat-shaped slider pulled across a granular bed, by means of laboratory experiments as well as 2D numerical simulations using the discrete elements method. This slider has two degrees of freedom and we restrict the study to the quasistatic regime. Depending on its mass and geometry, its motion is sometimes unstable leading to topography oscillations in its wake, which we have characterized depending on the parameters of the problem. Unlike the well-studied washboard road instability, no velocity threshold is observed. In particular, we have showed that this new instability gets larger as the front angle of the boat is increased, and also that it vanishes for very light and very heavy sliders. Moreover, we have seen that it was relevant to divide the wavelength, amplitude and the mass by the length of the boat, implying that the confining pressure is the relevant parameter to describe the problem. Several other configurations as well as various measurements have been investigated in attempt to model the phenomenon. In the second part, we have numerically investigated the flow of grains down an inclined plane, a fraction of which are permanent magnets. The resulting flow is well known and a Bagnold profile is observed. We have studied the dynamics of the magnets which form aggregates, which in turn rise to the free surface of the flow. These two processes (aggregation and segregation) depend both on the magnetization of the magnets as well as their concentration.