



Hydraulique des liquides actifs : défauts, boucles et frustration

Camille Jorge

► To cite this version:

Camille Jorge. Hydraulique des liquides actifs : défauts, boucles et frustration. Matière Molle [cond-mat.soft]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2024. Français. NNT : 2024ENSL0027 . tel-04717322

HAL Id: tel-04717322

<https://theses.hal.science/tel-04717322v1>

Submitted on 1 Oct 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

en vue de l'obtention du grade de Docteur, délivré par

l'École Normale Supérieure de Lyon

Discipline : **Physique**

École Doctorale N°52
de Physique et d'Astrophysique de Lyon

Présentée et soutenue publiquement le 1er Juillet 2024
par **Camille Jorge**

Hydraulique des liquides actifs : défauts, boucles et frustration

Devant le jury composé de :

Pascal SILBERZAN
Pierre ILLIEN
Olivier DAUCHOT
Cécile COTTIN-BIZONNE
Salima RAFAÏ
Denis BARTOLO

Directeur de recherche
Chargé de recherche
Directeur de recherche
Directrice de recherche
Directrice de recherche
Professeur des universités

Institut Curie
Sorbonne Université
ESPCI Paris
Université Claude Bernard Lyon 1
Université Grenoble Alpes
ENS de Lyon

Rapporteur
Rapporteur
Examinateur
Examinatrice
Examinatrice
Directeur

Laboratoire de Physique (UMR 5672)
ENS de Lyon
46, allée d'Italie
F-69364 LYON CEDEX 07, FRANCE

École doctorale n°52 PHAST

Remerciements

Ces trois années de thèse m’ont été particulièrement enrichissantes et agréables, grâce de nombreuses personnes qui m’ont accompagné et à qui je souhaite rendre hommage ici.

Denis, je peux te l’avouer ici. Me destinant à l’enseignement, j’ai choisi de faire ma thèse avec toi un peu au hasard, certes impressionné par tes vidéos de rouleurs de Quinke. Heureux hasard, au moins pour moi. Je te remercie de m’avoir accepté dans ton équipe, de m’avoir formé, guidé, et laissé la liberté de creuser pendant des jours dans la littérature des modèles de boucles et autre modèles à 6-19-20 sommets. Je te remercie également pour cette conversation (rapide) qui m’a décidé à poursuivre dans la recherche, et pour cette année supplémentaire dans ton équipe.

Je tiens à remercier chaleureusement mon jury de thèse : les rapporteurs Pascal Silberzan et Pierre Illien, pour leur relecture très attentive de ce manuscrit, ainsi que Cécile Cottin-Bizonne, Salima Rafai et Olivier Dauchot. Merci d’avoir à vous tous d’avoir pris le temps d’évaluer mon travail.

Merci à tout le BartoloLab, honneur aux anciens membres : Amélie, Marcelo, Thibaut, Stéphane, Benjamin et Alexis. Merci Amélie, tu m’as transmis ton savoir expérimental et la rigueur qui le caractérise avec patience et gentillesse. Merci Thibaut pour avoir ent avec moi pendant 2 ans. Merci Stéphane pour les conseils sur Elden Ring et pour ces moments passés dans l’abîme hurlant : ils ne sont pas étrangers à ma sérénité lors de la rédaction de ce manuscrit. Merci Benjamin, pour tes réponses à mes nombreuses questions, merci pour les group lunch, j’espère faire aussi bien que toi maintenant que c’est à moi qu’incombe cette tâche. Merci Alexis pour ta collaboration sur notre papier. Son écriture n’a pas été de tout repos, mais tu as su gérer tant les aspects scientifiques que sociaux. Merci aux membres actuels de l’équipe, François et Romane. Merci François d’avoir gracieusement retiré ton casque à chaque fois que j’ai eu besoin d’un regard extérieur ou d’un *tips* en informatique, et pour ton soutien moral la veille de mon talk à Minneapolis. Merci Romane pour ta patience avec ma phobie administrative (et avec moi en général). Aux nouveaux membres : Guillaume, Rémi, et Matteo, j’aurai un an pour vous côtoyer, mais je vous souhaite bon courage pour vos trois années de thèse ! Et finalement, je tiens à remercier Timothée et Gaspar, membres temporaires de l’équipe, pour la bonne humeur qu’ils ont apportée.

Merci à tous les membres du laboratoire avec qui j’ai pu partager quelques moments : Lise, Justine, Cassandra avec un K, Ewen, François, vous avez égayé les mornes couloirs du laboratoire et les grises Vosges d’un hiver sans neige. Merci au service administratif du laboratoire, Nadine, Laurence, Fatiha, Nelly et Erika, pour nous tenir à l’écart des vicissitudes bureaucratiques avec tant de succès. Sans votre efficacité et votre bienveillance, mon expérience de thèse et celle de tous les doctorants du Laboratoire de Physique serait bien différente, infiniment plus pénible. Merci à toi Bastien pour ces $\sim 2 \times 250 \times 3 = 1500$ pauses café, soit ~ 375 heures payées non travaillées. Ces 30 minutes par jour ont souvent joué le rôle d’exutoire à mon exaspération (les

membres du BartoloLab t'en remercient également je pense). Merci à toi aussi Julie. Bien que tu ne fasses pas réellement partie du laboratoire, tu as souvent ~~perturbé~~ accompagné ces pauses café, sans jamais faire la tête plus de trois jours après avoir écouté la teneur de nos conversations avec Bastien.

Merci à toi Matthieu, pour cette colocation de quelques mois qui m'a évité de nombreux ennuis logistiques et qui m'a valu plusieurs avertissement. Je te souhaite un bon courage pour ta thèse, en espérant que tu ne démissionnes pas toutes les semaines.

Je tiens à remercier aussi ma famille, mes parents, ma soeur et mon frère. D'un point de vue très terre-à-terre, vous avez tous contribué de près ou de loin à l'obtention de mon doctorat : certaines ont activement participé à la correction des innombrables fautes d'orthographe et autres typos que contenait ce manuscrit, et tous ont organisé le pot qui a suivi ma soutenance. D'un point de vue plus romantique, vous avez participé à faire de moi ce que je suis maintenant, en me soutenant dans tous mes choix quels qu'ils soient (sauf celui d'entreprendre une carrière de judoka professionnel raté), me poussant, m'encourageant, ou en me traitant avec indulgence quand c'était nécessaire.

Et finalement, merci à toi Elisa. Merci d'avoir accepté de suivre un étudiant attardé pendant toutes ces années, et de t'appêter à le refaire. Tu m'apportes depuis toutes ces années cette stabilité certaine qui m'a permis, entre autre, de travailler sereinement sur cette thèse. Merci pour cette confiance que tu m'as accordé, et que tu nous as accordé. J'espère pouvoir te le rendre un jour.

Table des matières

1	Introduction à l'hydraulique et à la physique de la matière active	1
1.1	Hydraulique	1
1.2	Les liquides polaires actifs	1
1.2.1	Le modèle de Vicsek	2
1.2.2	La transition de flocking	4
1.2.3	La théorie hydrodynamique de Toner et Tu	5
1.3	Étudier la matière active en laboratoire	6
1.3.1	Écoulements spontanés de systèmes actifs modèles	6
1.3.2	Classification des systèmes actifs	13
1.4	État de l'art sur l'hydraulique de la matière active	15
1.4.1	La matière active confinée	15
1.4.2	La matière active confinée dans un environnement périodique	18
1.4.3	Un modèle pionnier d'hydraulique de la matière active	21
1.4.4	Les systèmes de glace de spins	22
1.5	Objectifs de la thèse et organisation du manuscrit	24
1.6	Annexe : Propriétés critiques du modèle à 6 sommets	27
2	Méthodes expérimentales et numériques. Design et implémentation.	33
2.1	Manipuler et observer un liquide rouleurs de Quincke	34
2.1.1	Motorisation des colloïdes	34
2.1.2	Les rouleurs de Quincke en interaction : un système modèle des liquides de Toner-Tu	36
2.1.3	Manipuler un liquide rouleurs de Quincke	38
2.1.4	Observer et analyser un liquide de rouleurs de Quincke	41
2.2	Analyser les motifs d'écoulement dans un réseau hydraulique frustré ☆	44
2.2.1	Construction des lignes de courant	44
2.2.2	Mesures sur les lignes de courant	46
2.2.3	Imbrication des boucles	48
2.3	Analyser les motifs d'écoulement dans des réseaux hydrauliques de valence paire ☆	49
2.3.1	Réseau carré	49
2.3.2	Réseau triangulaire	50
2.4	Simuler l'écoulement d'un liquide de Toner-Tu ☆	53
2.5	Manipuler et mesurer un cristal de rouleurs de Quincke ☆	55
2.5.1	Obtenir une phase dense de rouleurs colloïdaux	55
2.5.2	Caractérisation d'une phase colloïdale active dense	56
3	Construire les lois de l'hydraulique active	59
3.1	L'hydraulique des liquides actifs décrite par un modèle de glace de spins	60
3.1.1	Une expérience d'hydraulique active modèle	60
3.1.2	Le courant comme un spin 1 classique	60

3.1.3	Émergence de boucles de courant auto-évitanes	63
3.2	Les interactions entre boucles de courant à l'origine de leur polymorphisme . . .	64
3.2.1	Des interactions orientationnelles médiées par les écoulements tourbillonnaires	65
3.2.2	Robustesse et généralité de la transition d'un à deux vortex	66
3.3	Lois de l'hydraulique active et limites asymptotiques	67
3.3.1	Lois de l'hydraulique active	67
3.3.2	Limites asymptotiques de l'hydraulique active : correspondance avec des modèles de boucles	68
3.4	Conclusion et perspectives.	71
3.5	Article : Active hydraulics laws from frustration principles	72
3.6	Supplementary information	83
3.6.1	Experiments	83
3.6.2	Data analysis	85
3.6.3	Theory : Modeling the emergent flow patterns, loops on the honeycomb lattice	88
3.6.4	Numerical methods : Monte-Carlo worm algorithm	91
3.6.5	Comparison between simulations and experiments	95
3.6.6	Asymptotic limits of the spin model and streamline geometry	96
3.6.7	Parallel flow couplings : subextensive degeneracy and metastable states .	104
3.6.8	Finite element simulations	106
4	Généralisation des lois de l'hydraulique active	109
4.1	L'hydraulique active dans les réseaux carrés comme un modèle à six sommets . .	109
4.1.1	Une expérience modèle	110
4.1.2	Une transition structurale de la morphologie des lignes de courant	111
4.1.3	Influence de la jonction sur la topologie et la géométrie de l'écoulement .	113
4.2	Un écoulement analogue au modèle à 6 sommets	118
4.3	Propriétés géométriques des écoulements actifs	120
4.3.1	Mise en correspondance des écoulements avec des modèles de boucles . . .	120
4.3.2	Dimensions fractales et criticalité des écoulements actifs	121
4.4	Généralisation aux valences 5 et 6	126
4.4.1	Réseau hydraulique triangulaire	126
4.4.2	Pavage carré adouci	134
5	Conclusion et perspectives	139
5.1	Propriétés géométriques des écoulements actifs dans les réseaux hydrauliques . .	139
5.2	Perspectives	139
5.2.1	Propriétés de transport et de mélange	139
5.2.2	Perspectives à long terme	140
	Bibliographie	145

Introduction à l'hydraulique et à la physique de la matière active

1.1 Hydraulique

L'hydraulique est la science décrivant le transport de fluides dans les réseaux de tuyaux. D'un point de vue fondamental, l'hydraulique est basée sur deux lois. La première de ces lois, découverte par les civilisations égyptienne et mésopotamienne 6000 ans avant notre ère [1], est la conservation de la masse (voir Fig. 1.1a). Elle stipule qu'en régime permanent, la somme des courants à chaque nœud d'un réseau de canaux doit être nulle ($\sum_j \Phi_{ij} = 0$, où Φ_{ij} est le courant du nœud j vers le nœud i). La seconde loi de l'hydraulique a été découverte bien plus récemment, au XIX^e siècle par Hagen, Poiseuille et Darcy [2–4]. Cette loi porte désormais le nom de loi de Darcy. Elle relie le courant dans un tuyau à la différence de pression entre l'entrée et la sortie du tuyau, et prend la forme suivante, pour un fluide newtonien en écoulement laminaire et stationnaire : $\Phi_{ij} = -K_{ij}(P_i - P_j)$, où P_i est la pression du fluide au point i et K_{ij} la conductance hydraulique voir (Fig. 1.1b). Notons que cette loi dépend du fluide considéré et du milieu dans lequel il s'écoule, par l'intermédiaire du K_{ij} . L'hydraulique est donc, si l'on adopte le point de vue de la physique fondamentale et que l'on met de côté les difficultés techniques de l'ingénieur, un problème linéaire facile à résoudre étant donné un ensemble de conditions aux limites. Dans le langage de la physique moderne, ces deux lois sont nommées loi de Kirchhoff, et s'appliquent à tous les processus de transport linéaires, transports de charges ou de matière par exemple.

Cependant, au cours des 15 dernières années, une nouvelle classe de fluides a été développée : les fluides actifs. Ils ont pour propriété fondamentale d'être motorisés à l'échelle de leurs constituants élémentaires [5], et mettent en échec la loi de Darcy, ouvrant la voie à une science hydraulique nouvelle. Dans ce chapitre, nous abordons le sujet de la matière active par une approche historique. Nous expliquons d'abord les contributions théoriques fondamentales de Vicsek [6], et Toner et Tu [7]. Nous décrivons ensuite quelques-uns des principaux systèmes expérimentaux modèles développés depuis les années 2010, et nous résumons les différents travaux qui ont abouti à l'étude de l'hydraulique active décrite dans ce manuscrit.

1.2 Les liquides polaires actifs

L'étude de la matière active est née en 1995, par la volonté parallèle de Vicsek *et al.* d'une part, et Toner et Tu d'autre part, d'apporter une description phénoménologique aux mouvements collectifs des nuées d'oiseaux, voir Fig.1.2. Leurs deux approches, bien que décrivant un

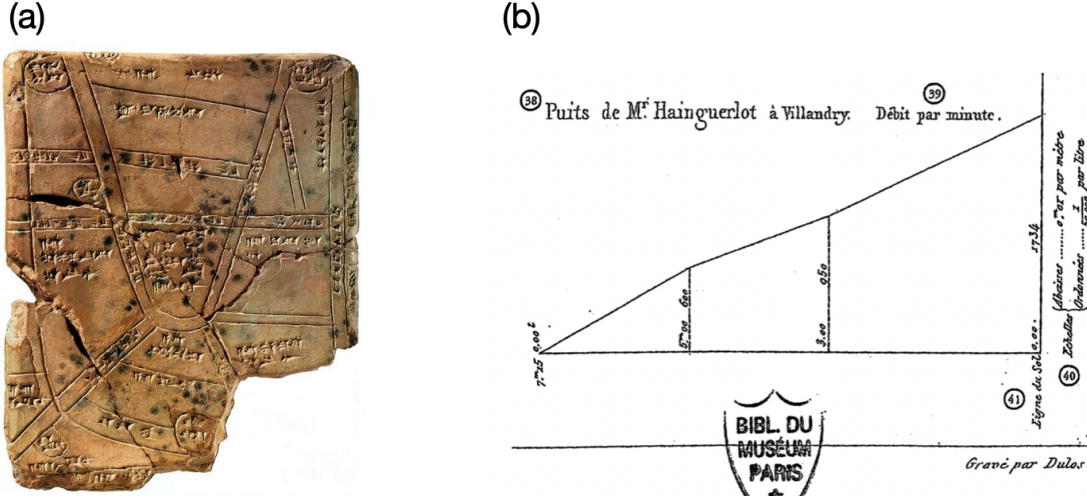


FIGURE 1.1 – (a) Tablette babylonienne représentant le réseau d’irrigation de la ville. Il s’agit de la plus ancienne carte connue. Elle est datée de 1500 ans avant notre ère. (b) Débits d’un puits artésien en fonction de la hauteur de l’orifice de sortie. Le débit est proportionnel à la différence de pression entre l’aquifère artésien et la sortie du tuyau. Figure empruntée à [4].

système similaire, sont diamétralement opposées. Tout d’abord, nous expliquons l’approche microscopique, initiée par Vicsek *et al.* [6], décrivant le mouvement et les interactions des éléments constitutifs des systèmes actifs. Dans un second temps, nous expliquons le modèle hydrodynamique des liquides polaires actifs de Toner et Tu [7].

1.2.1 Le modèle de Vicsek

En 1995, Vicsek *et al.* présentent un modèle physique très épuré visant à décrire le comportement collectif d’entités biologiques, notamment des colonies de bactéries, bancs de poissons ou troupeaux de mammifères [6]. Ce modèle traduit les mécanismes physico-chimiques ou sociaux de déplacement et d’interactions des animaux en des termes mathématiques très simples. Ces mécanismes sont très variés et fortement dépendants de l’échelle considérée. Par exemple, les *Bacillus Subtilis* n’interagissent pas de la même façon avec leurs congénères que les sardines ou les rennes. Cependant, ces trois exemples de systèmes biologiques ont un point commun : chacun des individus qui les composent tend à se déplacer dans le même sens que ses semblables. Les règles régissant le mouvement de chaque individu du système prennent la forme suivante :

- Chaque individu i est représenté par son vecteur vitesse $\mathbf{v}_i$, de norme constante v_0 . Les particules sont donc polaires.
- L’individu i interagit avec ses voisins les plus proches, à l’intérieur d’une sphère $\mathcal{S}_i$ de rayon R dont il est le centre. Il cherche à aligner son vecteur vitesse avec le vecteur vitesse moyen dans $\mathcal{S}_i$.
- Ce terme d’alignement entre en compétition avec un bruit orientationnel faisant varier aléatoirement le vecteur vitesse $\mathbf{v}_i$.

Mathématiquement, ces règles se traduisent comme une dynamique discrète pour la particule i :

$$\mathbf{r}_i(t + \Delta t) = \mathbf{r}_i(t) + \Delta t \mathbf{v}_i(t). \quad (1.1)$$

La position de la particule $\mathbf{r}_i$ au temps $t + \Delta t$ est égal à sa position à l’instant t auquel on ajoute un incrément proportionnel à la vitesse au temps t et au pas de temps Δt . La norme du



FIGURE 1.2 – Nuée d'étourneaux. Crédits : Daniel Biber.

vecteur vitesse est constante et égale à v_0 , $\mathbf{v}_i$ peut donc s'écrire comme $\mathbf{v}_i = v_0(\cos \theta_i, \sin \theta_i)$, où θ_i est l'angle entre $\mathbf{v}_i$ et l'horizontale. L'angle θ_i suit l'équation du mouvement suivante :

$$\theta_i(t + \Delta t) = \langle \theta_j(t) \rangle_{j \in \mathcal{S}_i} + \xi_i(t) \quad (1.2)$$

où $\langle \theta_j(t) \rangle_{j \in \mathcal{S}_i}$ est l'angle moyen des particules situées à l'intérieur de la sphère $\mathcal{S}_i$ de rayon R de centre $\mathbf{r}_i$. Ce terme force l'alignement de la particule i avec ses voisins. $\xi_i(t)$ est bruit blanc uniformément distribué dans l'intervalle $[-\eta/2, \eta/2]$. Sa fonction d'autocorrélation vaut $\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t')$. La dynamique de la particule i est schématisée sur la Fig. 1.3.

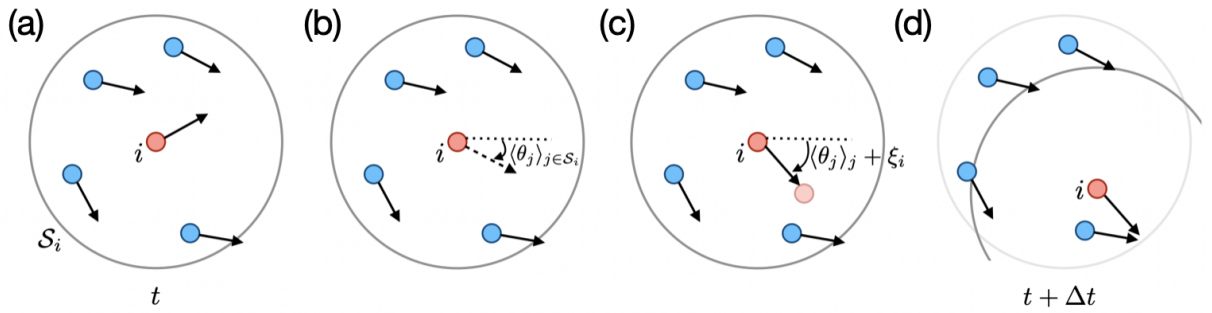


FIGURE 1.3 – Règles de déplacement du modèle de Vicsek. (a) La particule i en rouge se déplace dans une direction donnée à t . $\mathcal{S}_i$ est la sphère de centre $\mathbf{r}_i$ et de rayon R . (b) La particule i tend à aligner sa vitesse avec la vitesse moyenne dans $\mathcal{S}_i$ d'angle $\langle \theta_j(t) \rangle_{j \in \mathcal{S}_i}$. (c) Le bruit ξ_i modifie cet angle. (d) Au temps $t + \delta t$ la particule i s'est déplacée le long de sa nouvelle direction de mouvement. Seule la particule i a été schématisée comme mobile dans un souci de clarté.

Ce modèle, désormais appelé "modèle de Vicsek", s'inspire fortement de la physique du magnétisme. Les entités biologiques considérées sont analogues à des spins du modèle XY ferro-

magnétique : les $\mathbf{v}_i$ sont de normes constantes et tendent à s'aligner avec leurs voisins. Vicsek *et al.* ont ainsi pu utiliser les outils usuels de la physique statistique pour caractériser les différentes dynamiques observées. Cependant ces particules sont mobiles et autopropulsées, au lieu d'être fixées au noeud d'un réseau : le système est donc intrinsèquement hors équilibre.

Le modèle de Vicsek a été le premier modèle physique utilisé pour l'étude de la transition vers le mouvement collectif et de ses différentes phases. Cependant, il est amusant de mentionner qu'un modèle semblable avait déjà été proposé par Craig Reynolds 3 ans auparavant, en 1992. Ce dernier était un informaticien chargé des effets spéciaux du film *Batman returns*. Il a notamment modélisé les mouvements collectifs de chauve-souris, à l'aide d'un modèle très similaire à celui de [6], dont les règles sont décrites succinctement comme suit :

- L'évitement. Deux individus trop proches cherchent à s'éloigner.
- La cohésion. Un individu trop éloigné de ses voisins cherche à se rapprocher d'eux.
- La cohérence. Les individus cherchent à aligner leurs vitesses.

Muni de ces trois règles, Craig Reynolds a modélisé les mouvements collectifs de chauve-souris de façon très réaliste, et a ouvert la voie à une nouvelle génération d'effets spéciaux pour les foules et les dynamiques de groupe en général.

1.2.2 La transition de flocking

Depuis la publication de [6] en 1995, le modèle de Vicsek et la transition de flocking ont fait l'objet de nombreuses études numériques et analytiques [8–10]. Les méthodes utilisées pour caractériser la transition sont les méthodes usuelles de physique statistique. Le paramètre d'ordre considéré est :

$$\Pi_0 = \frac{1}{Nv_0} \left| \sum_i \mathbf{v}_i \right| \quad (1.3)$$

où N est le nombre de particules du système et v_0 la norme des $\mathbf{v}_i$. Π_0 vaut 1 si tous les $\mathbf{v}_i$ ont la même orientation - c'est-à-dire que toutes les particules se déplacent dans la même direction -, on parle alors de *phase polaire* et d'*ordre polaire*. Π_0 vaut 0 si les $\mathbf{v}_i$ ont une orientation désordonnée. La transition entre la phase désordonnée et la phase polaire est appelée *transition de flocking*. Les variations de Π_0 sont étudiées en fonction de la densité de particules $\rho = N/S$ (où S est le volume du système en dimension 2) ou de l'intensité du bruit η . Le système est athermal et hors d'équilibre, mais η joue ici un rôle analogue à celui de la température : plus le bruit est grand devant les interactions d'alignement, plus le système a tendance à être désordonné. La densité ρ joue le même rôle qu'à l'équilibre : une densité plus élevée a tendance à ordonner le système. Lors de la transition de flocking, le système passe par trois phases distinctes :

1. A basse densité et/ou bruit élevé, le système est dans une phase désordonnée, voir Fig. 1.4a. Le paramètre d'ordre Π_0 est nul. Il n'y a pas d'organisation spatiale entre les particules. On parle souvent de "gaz" actif.
2. A densité et/ou bruit intermédiaire, la symétrie de rotation est brisée. On observe une séparation de phase. Des "bandes polaires" denses se propagent dans le système à la manière d'ondes progressives, tandis que le reste du système forme un gaz actif isotrope, voir Fig. 1.4b. Un échange permanent de particules s'effectue entre les bandes et le gaz, mais celles-ci sont stables temporellement.
3. A haute densité ou bruit faible, le paramètre d'ordre Π_0 vaut 1. Toutes les particules se déplacent dans la même direction, voir Fig. 1.4c. Il n'y a pas d'ordre sur la position des particules. On parle de "liquide polaire actif" ou de *flock*.

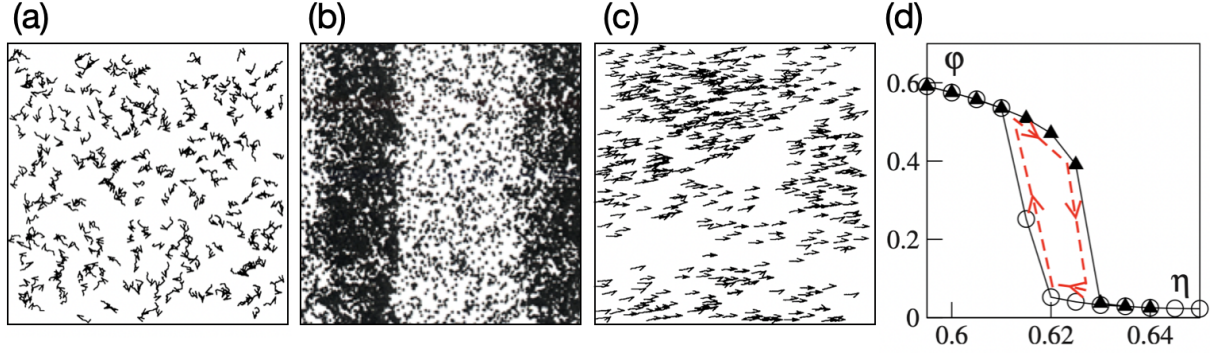


FIGURE 1.4 – **La transition de flocking.** (a) Phase gazeuse. (b) Bandes polaires. (c) Liquide polaire actif. (d) Cycle d'hystérésis caractérisant les variations de Π_0 en fonction d' η . Cette boucle d'hystérésis laisse à penser que la transition de flocking est similaire à une transition d'ordre 1. Figure adaptée de [6].

La nature de la transition vers le mouvement collectif a été étudiée numériquement dans de nombreuses études [8, 10]. Elles présentent des caractéristiques similaires à une transition d'ordre 1, en particulier la paramètre d'ordre Π_0 suit un cycle d'hystérésis lorsque le bruit η varie continûment (Fig. 1.4d). La phase des bandes polaires peut donc s'interpréter comme une coexistence liquide-gaz. Il est important de noter lors de cette transition, la symétrie de rotation, *continue*, est spontanément brisée. Ce résultat va à l'encontre du théorème de Mermin-Wagner pour les systèmes à l'équilibre [11]. Le modèle de Vicsek, pourtant élémentaire dans sa dynamique, a été extrêmement fécond pour la physique hors d'équilibre. Aujourd'hui encore, son paradigme particulière constitue l'une des deux approches privilégiées pour l'étude de la matière active.

1.2.3 La théorie hydrodynamique de Toner et Tu

Quelques mois après la publication de l'article fondateur de Vicsek *et al.*, John Toner et Yuhai Tu ont eux-aussi étudié les mouvements collectifs, par une approche non plus lagrangienne, mais eulérienne. Plutôt que de considérer la dynamique individuelle des particules, ils utilisent une description hydrodynamique du système. Les quantités d'intérêt $\{\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i\}$ sont "lissées" à une échelle mésoscopique, et ne sont plus considérés que les champs eulériens $\rho(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Les interactions entre les particules sont alors exprimées implicitement, sous la forme de plusieurs constantes hydrodynamiques.

Afin de décrire les liquides polaires actifs et la transition de flocking, Toner et Tu ont proposé dans [7] un système d'équations général décrivant la dynamique couplée d'un champ de densité $\rho(\mathbf{r}, t)$ conservé et d'un champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ non-conservé. La non-conservation de $\mathbf{v}$ décrit l'échange de quantité de mouvement entre les particules et le substrat sur lequel ils évoluent. Ces équations sont purement phénoménologiques. Elles sont basées uniquement sur des considérations de symétries et constituent un développement en gradients et puissances de $\mathbf{v}$ à l'ordre 3. Elles s'expriment sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \lambda_1 (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \lambda_2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + \lambda_3 \nabla (|\mathbf{v}|^2) &= (\alpha - \beta |\mathbf{v}|^2) \mathbf{v} + D_T \nabla^2 \mathbf{v} \\ -\nabla P + D_B \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + D_2 (\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

avec $P = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n (\rho - \rho_0)^n$ et ρ_0 la densité moyenne.

L'équation 1.4 est l'équation de conservation de la masse usuelle. L'équation 1.5 est l'équivalent de l'équation de Navier-Stokes pour la matière active polaire. Les dérivées spatiales à gauche correspondent aux termes convectifs autorisés par symétrie. Notons que l'invariance galiléenne imposerait $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (et également $\alpha = 0$ et $\beta = 0$). Les deux premiers termes de droite peuvent s'interpréter comme la dérivée fonctionnelle d'un hamiltonien de Ginzburg-Landau : $\mathcal{H} = \int d^2\mathbf{x} [-\alpha v^2/2 + \beta v^4/4 + D_T(\nabla v)^2]$. Ils sont à l'origine du mouvement collectif spontané :

- Pour $\alpha < 0$ le terme en $(\alpha - \beta|\mathbf{v}|^2)\mathbf{v}$ fait relaxer la vitesse vers 0. En revanche, quand $\alpha > 0$, ce terme fait tendre *spontanément* $\mathbf{v}$ vers $\sqrt{\alpha/\beta}$. Il rend compte de l'auto-propulsion des particules au niveau microscopique.
- Le terme en $\nabla^2\mathbf{v}$ est issu du terme en $(\nabla\mathbf{v})^2$ de $\mathcal{H}$ qui pénalise les gradients de vitesse. Il tend ainsi à aligner les vecteurs vitesse entre eux (nous pourrions dire "à lisser le le champ de vitesse"), d'où la notion de mouvement *collectif*. Il rend compte de l'alignement des particules au niveau microscopique.

Le terme en $-\nabla P$ est un terme de pression classique que tend à homogénéiser la densité de l'écoulement. $\mathbf{f}$ est une force aléatoire rendant compte de fluctuations dans l'écoulement. Les deux derniers termes en D_B et D_2 sont des termes de diffusion autorisés par symétrie.

En renormalisant leur théorie hydrodynamique, Toner et Tu ont démontré l'existence d'une brisure de symétrie continue et d'un ordre à longue portée y compris en dimension 2. Ce résultat qui, encore une fois, contredit le scénario à l'équilibre du modèle XY [12,13] et plus généralement le théorème de Mermin-Wagner [11], est rendu possible par la nature intrinsèquement hors équilibre du système considéré. Cette théorie hydrodynamique, pourtant phénoménologique, est désormais un outil essentiel dans la compréhension de la matière active. En particulier, nous montrons au chapitre 2 qu'une version simplifiée de 1.5 décrit les écoulements de liquides colloïdaux que j'ai utilisés pour réaliser mes expériences.

1.3 Étudier la matière active en laboratoire

L'étude de la matière active expérimentale, initialement destinée à la compréhension des mouvements collectifs biologiques tels que les bancs de sardines, nuées d'oiseaux, ou encore foules humaines. Elle s'est heurtée à des difficultés techniques (comment analyser le mouvement de plusieurs milliers de sardines au large de l'Afrique de Sud?) et de reproductibilité, même si plusieurs travaux ont pu être menées sur les nués d'oiseaux [14], les essaims d'insectes [15], ou les foules de piétons [16]. La recherche en matière active a donc grandement bénéficié de la création de systèmes expérimentaux modèles, aux comportements reproductibles, et conditions aux limites ajustables.

Dans cette section, nous répertorions tout d'abord les principaux systèmes de matière active expérimentaux. Dans une seconde sous partie, nous montrons que ces systèmes se différencient par la nature des interactions entre leurs constituants élémentaires (*wet* ou *dry active matter*), et par la stabilité de leurs écoulements.

1.3.1 Écoulements spontanés de systèmes actifs modèles

Depuis une petite vingtaine d'années, de multiples systèmes actifs ont été créés, utilisant des phénomènes physiques très différents. Certains utilisent des entités biologiques complètes (cellules, bactéries) dans des conditions contrôlées, d'autres détournent et assemblent du matériel cellulaire, et certains systèmes sont complètement synthétiques. Cependant, tous ces systèmes

sont basés sur le même principe : leurs constituants élémentaires sont motorisés à l'échelle individuelle, et c'est leurs interactions qui engendrent les mouvements collectifs.

Nématiques actifs

Le groupe de Z. Dogic [17] a détourné des composants biologiques et les a assemblés en un système de nématiques actifs. Des microtubules sont placés à une interface eau-huile, et stabilisés chimiquement pour éviter leur polymérisation. La longueur moyenne des filaments est de $1.5 \mu\text{m}$. Un solvant polymérique est ajouté en petite quantité pour créer des interactions de déplétion attractives entre les filaments et assurer leur cohésion. Le système est forcé hors d'équilibre par la présence de moteurs moléculaires de kinésine. Ces derniers sont liés à deux microtubules, ils consomment de l'énergie chimique sous forme d'ATP pour créer un mouvement relatif entre deux microtubules, voir Fig. 1.5a.

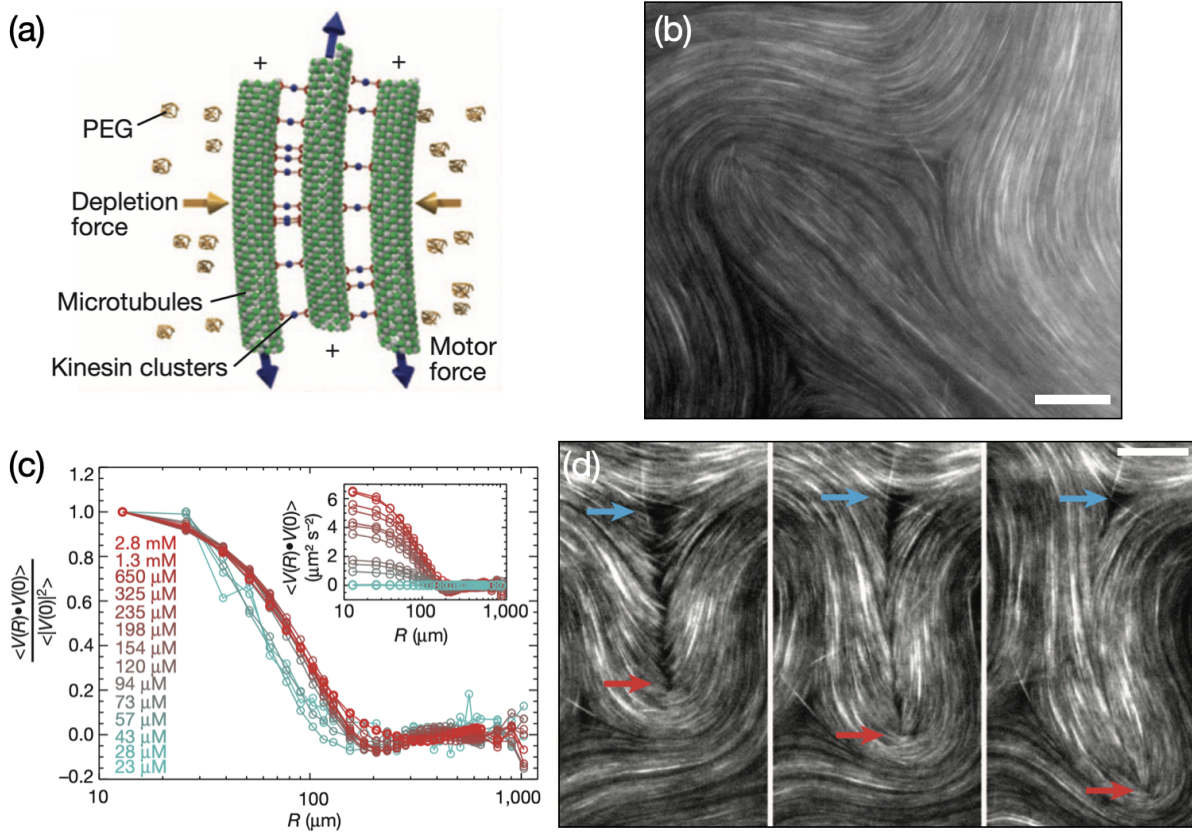


FIGURE 1.5 – (a) Schéma des interactions entre microtubules. (b) Image expérimentale en fluorescence. Barre d'échelle : $15 \mu\text{m}$. (c) Corrélation spatiale du champ de vitesse. Le champ de vitesse est corrélé à courte distance. (d) Dynamique des défauts topologiques. Une paire de défauts $\pm 1/2$ est créée. A cause de l'activité, le défaut $+1/2$ (repéré par la flèche rouge) est mobile et se détache du défaut $-1/2$ immobile (repérée par la flèche bleue). Barre d'échelle : $20 \mu\text{m}$. Figure adaptée de [17].

Le système exhibe un ordre nématique contenant de nombreux défauts topologiques, comme en témoigne l'image expérimentale de la Fig. 1.5b. La dynamique de ce système est très bien décrite par une théorie hydrodynamique couplant la densité, le champ de vitesse et le paramètre d'ordre nématique [5]. Contrairement au cas des nématiques à l'équilibre, l'énergie injectée à l'échelle des filaments rend l'écoulement instable devant une déformation de flexion et permet

la création d'une paire de défauts topologiques $\pm 1/2$. Au-dessus d'un certain seuil d'activité, les défaut $+1/2$ peuvent être mobiles et s'échapper plutôt que de s'annihiler avec le défaut $-1/2$ [18], voir Fig. 1.5c. Ces derniers sont immobiles par symétrie. L'écoulement est donc chaotique, et sa vitesse est corrélée sur une distance de l'ordre de la centaine de micromètres, voir Fig. 1.5d.

Colonies de bactéries

La modélisation phénoménologique de l'émergence de mouvement collectif dans les colonies de bactéries denses étaient l'une des motivations du papier fondateur de la matière active de Vicsek *et al.* [6] en 1995. En 2004, Kessler *et al.* [19] ont réalisé les premiers travaux expérimentaux d'un tel système. L'unité élémentaire de leur système est appelée *Bacillus subtilis*. C'est une bactérie de forme allongée de $4\text{ }\mu\text{m}$ munie d'une flagelle lui permettant de s'auto-propulser à une vitesse de quelques micromètres par seconde. Ces bactéries sont ensuite concentrées à une densité proche du *close-packing*, et une goutte de la suspension est déposée dans une boîte de Petri. Le système est imagé en champ sombre, voir Fig. 1.6a.

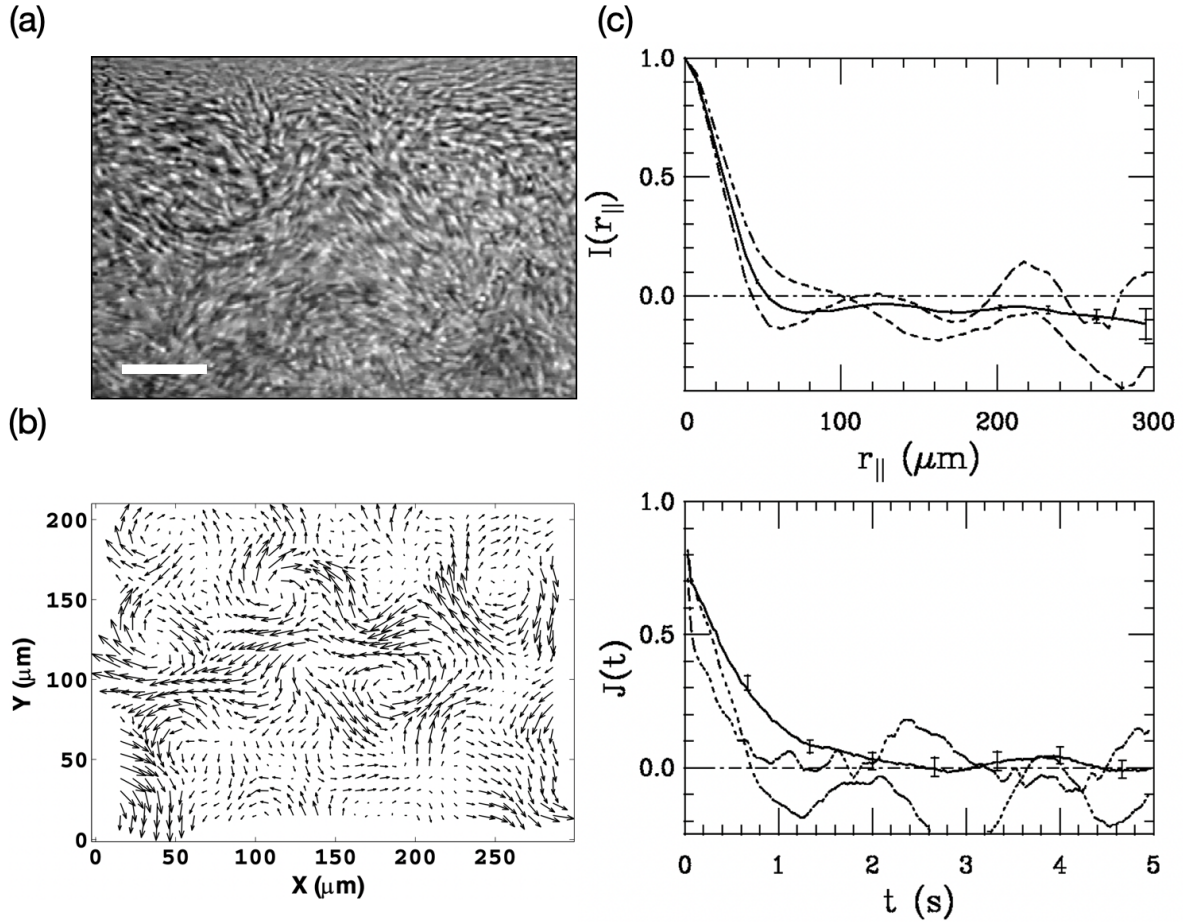


FIGURE 1.6 – **Mouvement collectif de *Bacillus subtilis*.** (a) Image expérimentale en champ sombre. Barre d'échelle : $35\text{ }\mu\text{m}$. (b) Champ de vitesse instantané. Celui-ci est désordonné et présente de nombreux vortex. (c) Corrélations spatiale (en haut) et temporelle (en bas) du champ de vitesse. La vitesse est corrélée à courte distance et à temps court.

La colonie de bactérie exhibe un mouvement collectif très rapide (le champ de vitesse mesuré par PIV peut atteindre $50\text{ }\mu\text{m.s}^{-1}$), et chaotique voir Fig. 1.6b. Le champ de vitesse présente

de nombreux tourbillons qui rappellent les motifs observés en turbulence. Ce phénomène a été nommé "turbulence active", pour sa ressemblance visuelle avec la turbulence classique, mais le nombre de Reynolds est de l'ordre de 10^{-3} et le système ne présente pas de transfert d'énergie entre les échelles spatiales. Au contraire, les écoulements sont corrélés sur une distance de l'ordre $50\ \mu\text{m}$ et sur un temps typique de quelques secondes, voir Fig. 1.6c.

Epitheliums

Les épithéliums sont des tissus biologiques constitués de cellules étroitement juxtaposées, sans interposition de fibres entre les cellules. Le groupe de P. Silberzan [20] a étudié le mécanisme de guérison d'un épithélium soumis à une plaie de forme contrôlée. Les cellules sont d'abord cultivées dans des chambres rectangulaires séparées les une des autres par quelques centaines de micromètres. Une fois que les épithéliums ont atteint leurs densités nominales, les canaux sont retirés, et les cellules sont libres de se déplacer, voir Fig. 1.7a. Après une durée d'environ 40 heures, les plaies sont soignées et les épithéliums ne forment plus qu'un seul tissu cellulaire.

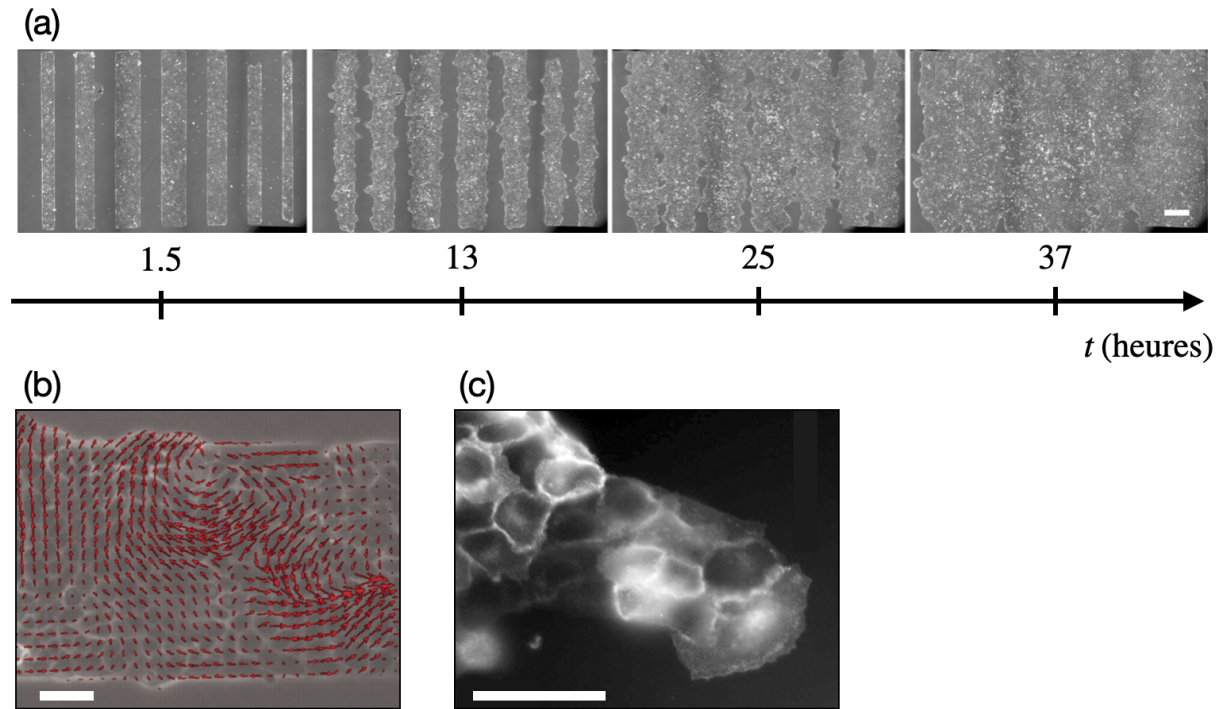


FIGURE 1.7 – **Mouvement collectif d'épithéliums** . (a) Images expérimentales en fluorescence. Au cours du temps, un écoulement actif d'épithélium soigne les plaies. Barre d'échelle : $400\ \mu\text{m}$. (b) Champ de vitesse instantané. Celui-ci est désordonné et présente plusieurs vortex. Barre d'échelle : $50\ \mu\text{m}$. (c) Instabilité de digitation au bord du système gouvernant le processus de guérison. Barre d'échelle : $50\ \mu\text{m}$. Figure adaptée de [20].

Le champ de vitesse est représenté en Fig. 1.7b. Il présente un aspect chaotique avec deux tourbillons. La division cellulaire a été étudiée, et il s'avère qu'elle n'est pas responsable de l'activité du système. Elle se produit majoritairement loin des bords, et contribue à maintenir une densité en cellules constante. L'activité du système est donc gouvernée par l'auto-propulsion des cellules, à une vitesse de l'ordre de la dizaine de micromètres par heure. De façon surprenante, la dynamique de guérison est gouvernée la présence de cellules *leaders*, qui se déplacent de façon unidirectionnelle depuis un bord de l'épithélium, et créent une instabilité de digitation, voir Fig.

1.7c.

Bio-polymères auto-propulsés

En 2010, le groupe d'A. Bausch [21] a élaboré un système actif en utilisant des matériaux cellulaires. Une lame de verre est tapissée de moteurs moléculaires. Des filaments d'actine sont ensuite déposés sur les moteurs moléculaires. Le système est rendu actif par les moteurs moléculaires qui consomment de l'ATP, restent accrochés à la lame de verre et mettent en mouvement les filaments. Le mouvement spontané est rendu visible par la présence de filaments d'actine fluorescents, voir Fig. 1.8a.

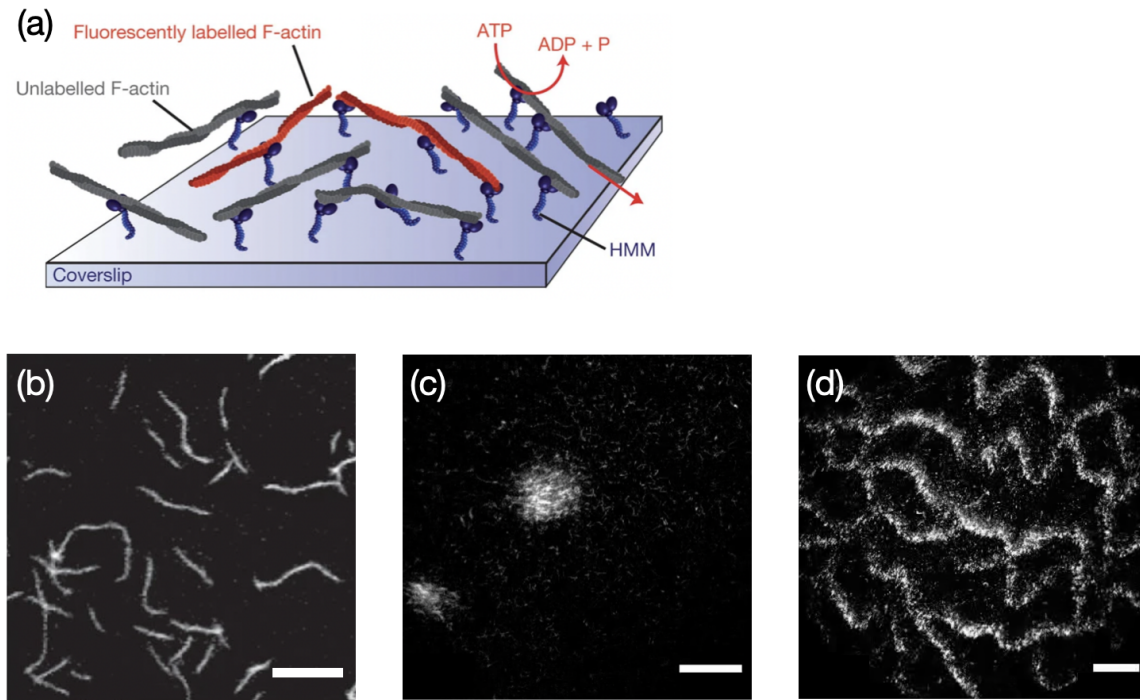


FIGURE 1.8 – **Écoulements spontanés de filaments d’actine autopropulsés.** (a) Représentation schématique de l’expérience. Les moteurs moléculaires sont solidaires de la lame de verre et mettent en mouvement les filaments d’actine en transformant de l’ATP en ADP. Certains filaments sont rendus fluorescents pour suivre la dynamique du système. (b) Phase désordonnée à basse densité. Barre d’échelle : $10\ \mu\text{m}$. (c) Apparition de clusters polaires à densité intermédiaire. Barre d’échelle : $50\ \mu\text{m}$. (d) A haute densité, des bandes polaires persistantes se forment. Barre d’échelle : $50\ \mu\text{m}$. Figure adaptée de [21].

La phénoménologie du système varie fortement avec la densité en filaments d’actine. Elle est résumée à la Fig. 1.8b. A faible densité, une phase désordonnée est observée. Dans un régime de densité intermédiaire, la phase désordonnée est instable et de petits amas polaires de filaments se déplaçant de manière cohérente commencent à se former. Au-delà d’une seconde densité seuil, des fluctuations de densité persistantes conduisent à la formation de structures ondulatoires polaires, et une persistance directionnelle accrue du champ de vitesse est observée.

Rouleurs de Quincke

Ce système a été élaboré par D. Bartolo *et al.* en 2013 [22] et est celui que j’ai utilisé tout au long de ma thèse. Sans entrer dans les détails, puisque son principe sera expliqué au

chapitre suivant, ce système est basé sur la motorisation de colloïdes de polystyrène par le principe de l'électro-rotation de Quincke [23]. Les colloïdes (isolants) sont plongés dans un solvant conducteurs et soumis à un champ électrique. Ils acquièrent un dipôle électrique opposé au champ électrique, et donc instable. Au-delà d'un certain seuil, le dipôle est déstabilisé et forme un angle fini avec le champ électrique, créant un couple électrostatique appliqué au colloïde, qui le fait rouler sur son substrat.

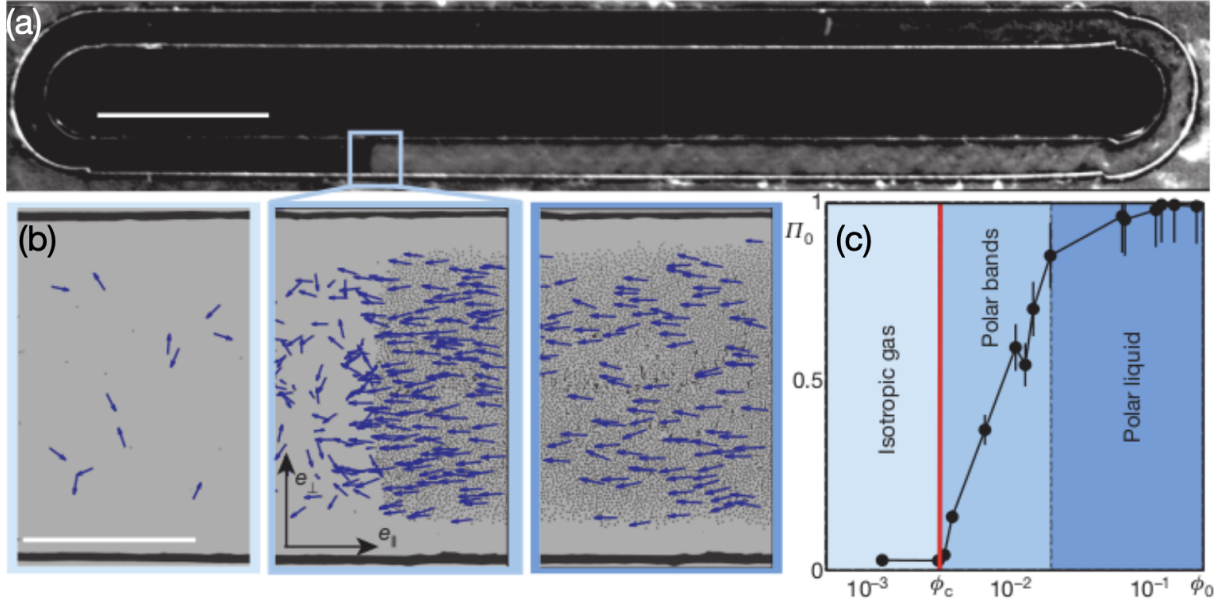


FIGURE 1.9 – **Emergence de mouvement spontané dans une assemblée de rouleurs de Quincke.** (a) Dispositif expérimental en forme de piste de course. Barre d'échelle : 5 mm. (b) Gauche : Phase gazeuse désordonnée. Milieu : Bandes propagatives. Droite : Phase polaire homogène. Barre d'échelle : $500\ \mu\text{m}$. (c) Diagramme de phase dans le plan (fraction surfacique, polarisation). Figure adaptée de [22].

Le diagramme de phases de ce système est récapitulé dans la Fig. 1.9. A basse densité, le système se comporte comme un gaz de particules actives, où les directions des particules sont aléatoires. A densité intermédiaire, des bandes présentant un fort ordre polaire émergent et coexistent avec des zones de gaz à faible densité. A haute densité, le système s'organise comme un liquide avec un ordre polaire très fort.

Particules de Janus

Une deuxième méthode de motorisation des colloïdes consiste en une différence de composition entre les deux hémisphères. Cette différence de composition engendre l'apparition de gradients (de température, de potentiel chimique,...) qui mettent en mouvement le fluide autour de la particule et la propulsent [24, 25]. Un exemple courant de particule de Janus est composé de titane d'un côté et silice de l'autre. Il existe de multiples sortes de particules de Janus, et tout autant de mécanismes de motorisation. En 2016, Granick *et al.* [26] ont conçu un système actif bi-dimensionnel à partir de particules de Janus activées électriquement, voir Fig. 1.10a.

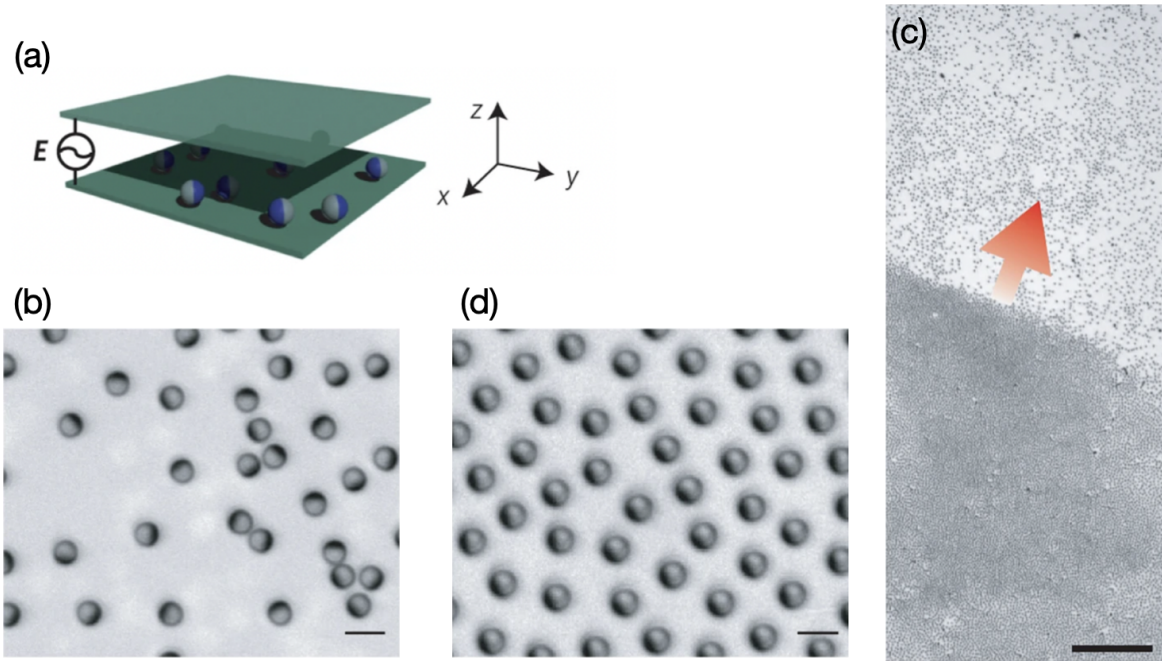


FIGURE 1.10 – **Émergence de mouvement spontané dans une assemblée particules de Janus.** (a) Dispositif expérimental. (b) Phase gazeuse désordonnée. Barre d'échelle : $5\ \mu\text{m}$. (c) Bandes propagatives. Barre d'échelle : $200\ \mu\text{m}$. (d) Phase polaire homogène. Barre d'échelle : $5\ \mu\text{m}$. Figure adaptée de [26].

Ce système présente une grande diversité de phases représentées à la Fig. 1.10b-d, avec notamment une phase désordonnée et des chaînes. En particulier, une phase avec un ordre polaire très fort est obtenue pour un ratio entre moments dipolaires des deux hémisphères intermédiaires.

Grains vibrés

Dauchot *et al.* [27] ont conçu un système actif à l'aide de grains placés sur un plateau vibrant. Les grains consistent en des disques de 4 mm de diamètre pesant 3 g supportés par deux "pattes" de tailles différentes, voir Fig. 1.11a. Ces grains sont placés sur une plaque vibrée, et adoptent un comportement de marcheur aléatoire lorsqu'ils évoluent loin de d'autre grains. Leur vitesse est de l'ordre du centimètre par seconde et leur temps typique de réorientation est de l'ordre de la seconde. Cependant, lorsque deux particules entrent en collision, elles ont tendance à aligner leurs champs de vitesse, voir Fig. 1.11b. Ainsi, la géométrie des particules est isotrope, mais leurs interactions sont polaires.

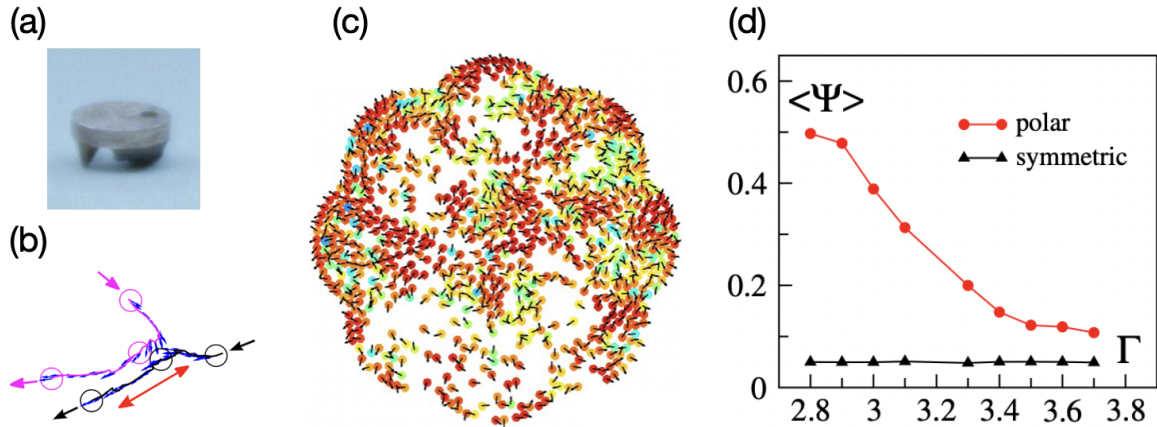


FIGURE 1.11 – **Mouvement collectif de grains vibrés.** (a) Photographie des grains vibrés. (b) Trajectoire typique de deux particules entrant en collision. Après la collision, les deux particules ont aligné leurs vitesses. (c) Mouvement collectif émergent dans le système de grains vibrés. Les particules sont orientées dans la direction azimutale, témoignant d'un ordre polaire. Diamètre maximal du dispositif expérimental : 16 cm. (d) Évolution du paramètre d'ordre polaire $\langle \Psi \rangle$ en fonction de l'accélération du plateau Γ . Insert : Evolution du coefficient de diffusion D en fonction de Γ . Augmenter l'accélération du plateau rend les particules plus diffuses et brise l'ordre polaire. Figure adaptée de [27].

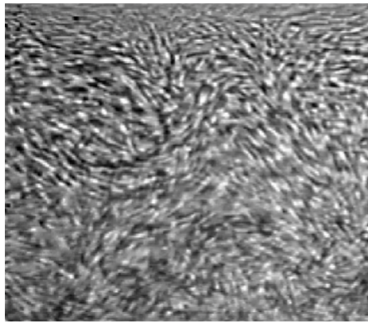
Ainsi, à basse densité, le système se comporte comme un gaz de particules actives. A plus haute densité, un mouvement collectif où toutes les particules sont alignées émerge, voir Fig. 1.11c. L'accélération Γ du plateau est un deuxième paramètre de contrôle en plus de la densité de grains. Nous montrons en Fig. 1.11d que le paramètre d'ordre polaire $\langle \Psi \rangle$ quantifiant l'alignement entre les particules est une fonction décroissante de Γ . Cela s'explique par le graphe en insert de la Fig. 1.11d : le coefficient de diffusion orientationnel augmente avec Γ , empêchant l'émergence d'un ordre polaire.

Ce système est différent de tous les systèmes modèles présentés dans cette section en ceci qu'il n'y a aucune interaction hydrodynamique entre les particules. Seules les interactions de contact de type coeur dur engendrent l'émergence d'un ordre polaire.

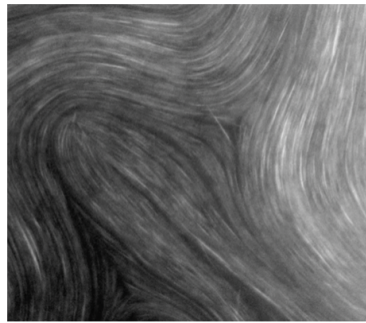
1.3.2 Classification des systèmes actifs

Tous les systèmes actifs précédemment décrits ont la propriété commune de s'écouler spontanément quand la densité dépasse un seuil critique. Cependant, nous avons vu que ces écoulements sont de natures très différentes. Certains présentent un ordre polaire à longue distance et stable dans le temps, ils s'écoulent de façon unidirectionnelle. D'autres présentent un écoulement que nous avons qualifié de chaotique. Dans cette sous-partie, nous proposons une classification des systèmes de matière actifs décrits précédemment, basée sur la stabilité de leurs écoulement, que nous récapitulons dans la Fig. 1.12.

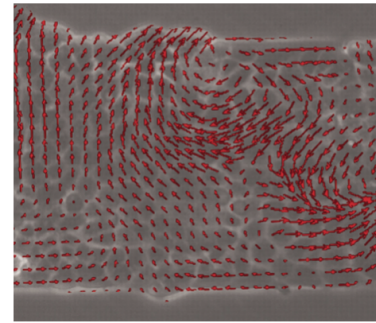
Écoulements chaotiques



Suspension de bactéries

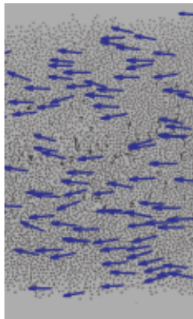


Nématiques actifs



Epithelium

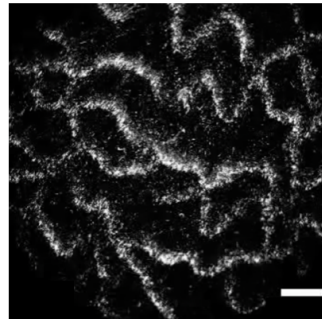
Écoulements stables



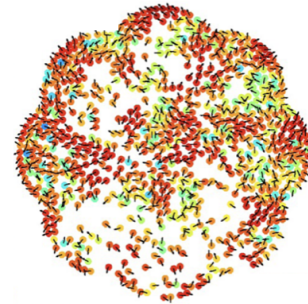
Rouleurs de Quincke



Particules de Janus



Filaments d'actine autopropulsés



Grains vibrés

FIGURE 1.12 – **Classification des systèmes actifs selon la stabilité de leurs écoulements.** Haut : écoulements chaotiques de matière active *wet*. Bas : écoulements stables de matière active *dry*.

Écoulements spontanés instables

Les écoulements spontanés de nématiques actifs, de colonies de bactéries et d'épithélium sont instables, voir Fig. 1.12a. Ils sont corrélés à distance finie et ne présentent pas d'ordre global moyen. Le mécanisme à l'origine du désordre réside dans l'instabilité des écoulements face à certains types de déformations. La matière extensible est instable face à une déformation de flexion, la matière active contractile est instable face à l'évasement. Les suspensions de bactéries [19], les nématiques actifs [17], et les épithéliums constituent des exemples de matière active instable. Ils font partie de la classe de la matière active *wet*, pour laquelle la quantité de mouvement est conservée.

Écoulements spontanés stables

Nous avons vu qu'à l'inverse, certains écoulements actifs, passé une certaine densité, sont stables et présentent à un ordre à longue portée. On les appelle liquides polaires actifs. Les filaments d'actine propulsés par moteurs moléculaires [21], les rouleurs de Quincke [22], les grains vibrés [27] ou les assemblés de particules de Janus [26] constituent ainsi des liquides polaires actifs. Ils font partie de la classe de matière active *dry*, pour laquelle la quantité de mouvement n'est pas conservée, et est échangée avec le substrat.

1.4 État de l'art sur l'hydraulique de la matière active

Dans les deux parties précédentes, nous avons passé en revue quelques-uns des systèmes actifs modèles élaborés au cours des 20 dernières années. Nous avons montré qu'il existe deux classes de d'écoulements actifs : les écoulements de matière active *dry*, formant des liquides polaires actifs ordonnés à longue distance, et les écoulements de matière active *wet*, intrinsèquement instables et chaotiques. Puis nous avons montré comment expliquer la stabilité des liquides polaires actifs. Cependant, nous avons jusqu'ici considéré uniquement les propriétés des systèmes actifs loin des bords. Dans cette partie, nous montrons que le confinement des écoulements actifs a pour effet, si le celui-ci est assez resserré, de stabiliser les écoulements. En particulier, nous montrons plusieurs exemples d'écoulements actifs bistables dans des canaux. Nous passons ensuite brièvement en revue plusieurs exemples d'écoulements actifs confinés dans des structures périodiques. Finalement, nous expliquons en détails la première théorie d'hydraulique active de Dünkel *et al.* [28], qui modélise le courant les écoulements actifs par une de glace de spins, puis nous expliquons les propriétés générales des glaces de spins.

1.4.1 La matière active confinée

Confinement de la matière active instable

Nous avons vu que les écoulements de matière active *wet* étaient instables par nature. La matière active *extensile* est instable par flexion et la matière active *contractile* est instable par évasement. Ces instabilités génèrent la nucléation de défauts topologiques qui s'annihilent et se recréent en permanence, aboutissant à un motif d'écoulement chaotique. Cependant, nous montrons dans cette sous-partie que le confinement a pour effet de stabiliser temporellement et spatialement les écoulements actifs.

En 2005, avant l'apparition des premiers systèmes modèles de matière active, Voituriez, Joanny et Prost [29] réalisent une étude théorique de l'écoulement d'un gel actif bidimensionnel soumis à un confinement unidimensionnel. Ils modélisent l'écoulement par les équations hydrodynamiques linéarisées usuelles des gels actifs [30]. Ils prédisent une transition de type Frederiks vers un écoulement spontané. Au-delà d'une épaisseur et d'une activité critique, une brisure de symétrie de la polarisation apparaît et le système s'écoule. La transition dépend certes de la nature des conditions aux limites imposées par le confinement, mais toutes les conditions aux bords (du moment qu'elles soient symétriques) autorisent un écoulement spontané. Depuis cette étude théorique, de nombreux systèmes expérimentaux ont confirmé ces résultats, dans des géométries diverses.

Confinement circulaire

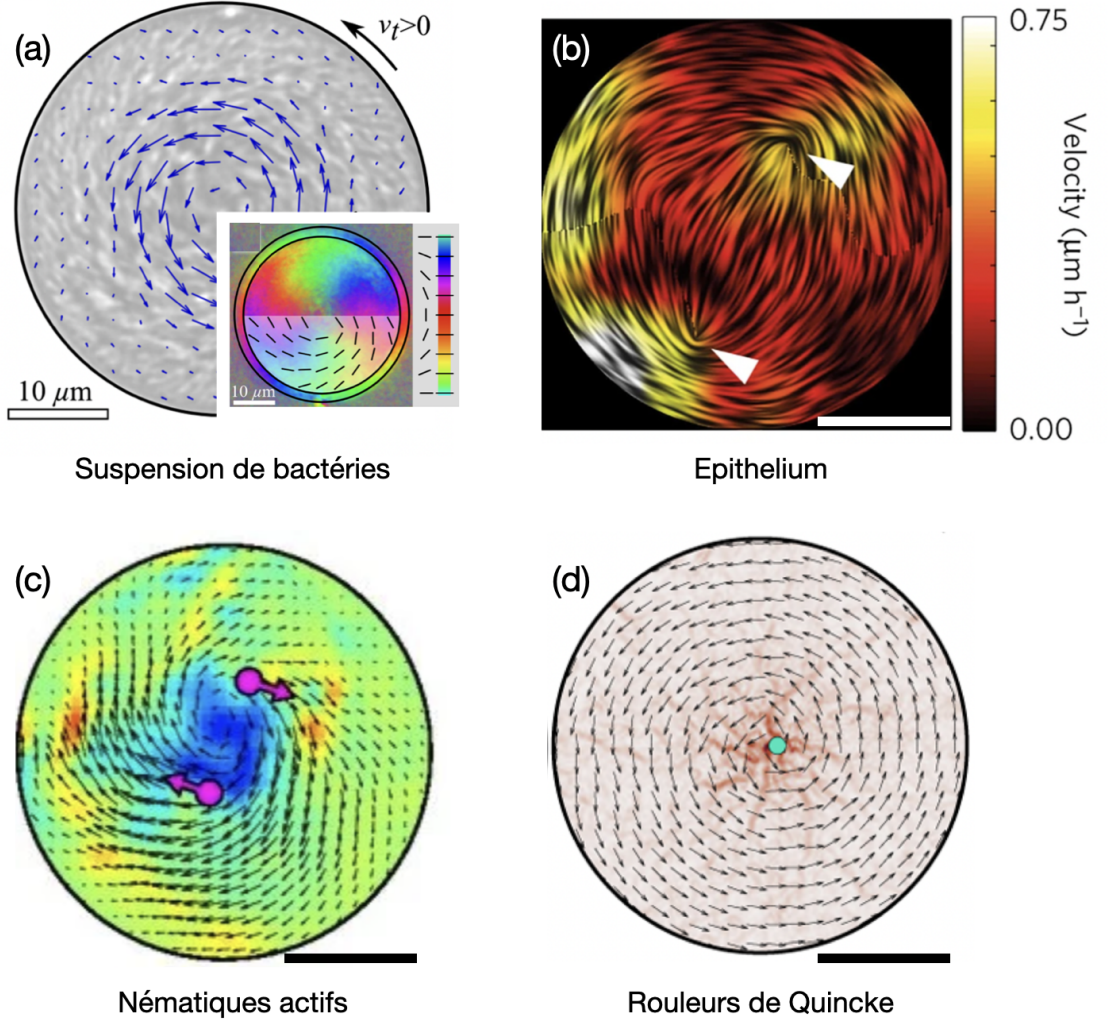


FIGURE 1.13 – **Écoulements spontanés de systèmes actifs dans des géométries circulaires.** (a) Suspension de bactéries. Le champ de vitesse est tourbillonnaire. Insert : champ d'orientation. Celui-ci présente un défaut topologique $+1$ au centre du disque. Barre d'échelle : $10 \mu\text{m}$. (b) Épithélium. Le champ d'orientation présente deux défauts topologiques $+1/2$. Barre d'échelle : $200 \mu\text{m}$. (c) Nématique actif. Le champ de vitesse est tourbillonnaire. Le champ d'orientation présente deux défauts topologiques $+1/2$. Barre d'échelle : $50 \mu\text{m}$. (d) Rouleurs de Quincke. Le champ de vitesse est tourbillonnaire. Barre d'échelle : 3 mm .

L'effet d'un confinement circulaire a été étudié pour de nombreux systèmes actifs, et peu importe qu'ils soient *wet* ou *dry*, tous exhibent un écoulement azimuthal bistable, voir Fig. 1.13. Les colonies de bactéries (voir Fig. 1.13a) organisent leur champ de vitesse et leur champ d'orientation sous la forme d'un tourbillon unique donc le centre est au centre du disque [31]. Les écoulements de nématiques actifs et d'épithéliums (voir Fig. 1.13b-c) présentent également un champ de vitesse tourbillonnaire dont la singularité est située au centre de disque de confinement. Leur paramètre nématique présente un état stationnaire différent de celui des écoulements de bactéries avec notamment la présence de deux défauts topologiques de charge $+1/2$ [32,33]. Pour les liquides polaires actifs (voir Fig. 1.13d), l'écoulement stationnaire est également azimuthal et stable. Il a d'ailleurs été montré que le champ d'orientation s'organisait selon la topologie de la surface sur laquelle il est confiné [34], d'où la présence d'une charge topologique $+1$ au centre du disque.

Confinement quasi-unidimensionnel

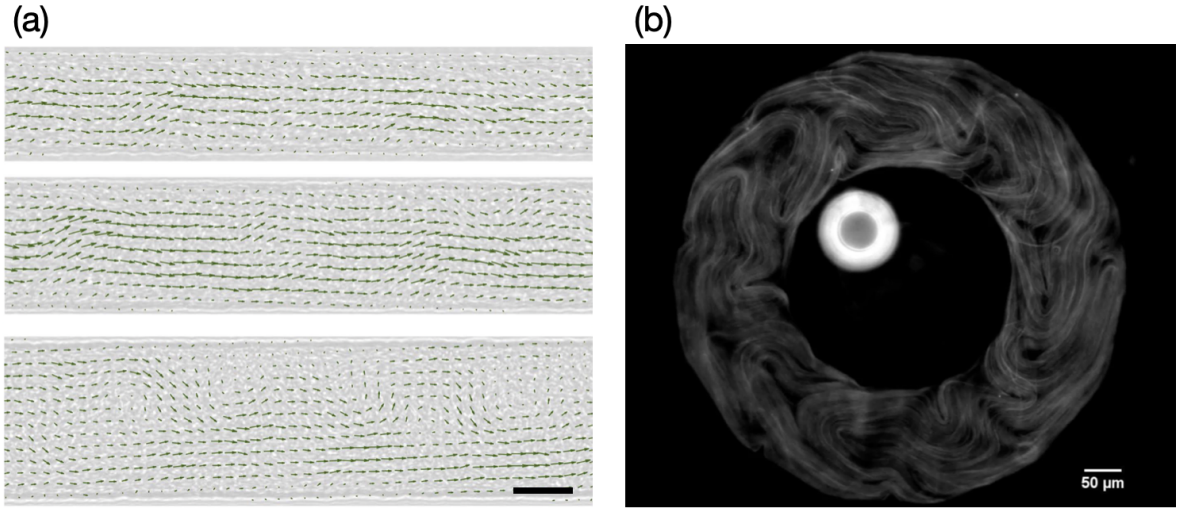


FIGURE 1.14 – **Écoulements spontanés de systèmes actifs dans des géométries quasi-unidimensionnelle** Les systèmes actifs sont : (a) une suspension de bactéries, (Barre d'échelle : $20\ \mu\text{m}$) (b) des nématiques actifs (Barre d'échelle : $50\ \mu\text{m}$).

L'effet du confinement sur des systèmes actifs instables a également été étudié expérimentalement, comme nous le montrons sur la Fig. 1.14. Pour les colonies de bactéries [35] (voir Fig. 1.14a) et les nématiques actifs [33] (voir Fig. 1.14b) l'effet du confinement quasi-unidimensionnel est le même : pour un confinement assez fort, l'écoulement présente, en moyenne dans le temps, un champ de vitesse orienté dans le sens du canal de confinement. Plus les parois du canal sont éloignées, plus l'écoulement tend à retrouver ses caractéristiques chaotiques.

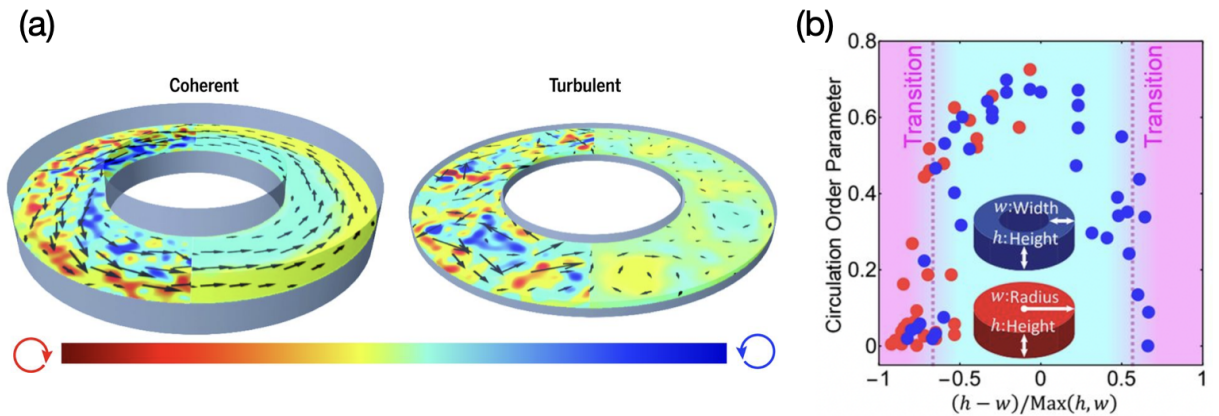


FIGURE 1.15 – **Écoulements spontanés de systèmes actifs dans un confinement tridimensionnel.** L'écoulement actif est stable dans le toroïde de hauteur 1.3 mm et instable dans le toroïde de hauteur 0.33 mm. Figure adaptée de [36].

Tous les résultats présentés dans cette sous-section nous montrent que la stabilité des écoulements de gels actifs est pilotée par une distance critique intrinsèque en-dessous de laquelle l'écoulement est stable. Cependant, Wu *et al.* [36] ont montré que pour les écoulements de nématiques actifs tridimensionnels, la stabilité de l'écoulement ne dépend pas d'une seule distance

caractéristique du rapport d'aspect du volume dans lequel le liquide est confiné. Ils ont en effet obtenu des écoulements stables dans un canal toroïdal de hauteur 1.3 mm et une transition vers un écoulement instable dans le même canal toroïdal de hauteur 0.33 mm.

Relation constitutive pour l'écoulement des liquides polaires actifs dans un canal simple

En 2018, Morin *et al.* [37] ont mesuré la relation constitutive entre la vitesse d'un écoulement actif dans un canal, et un champ coercitif analogue à un champ de pression appliqué à l'écoulement dans la direction du canal. Leur expérience consiste en un canal unidimensionnel en forme de piste de course, représenté à la Fig. 1.16a. Le champ coercitif est appliqué au liquide actif par l'intermédiaire d'un débit constant de solvant.

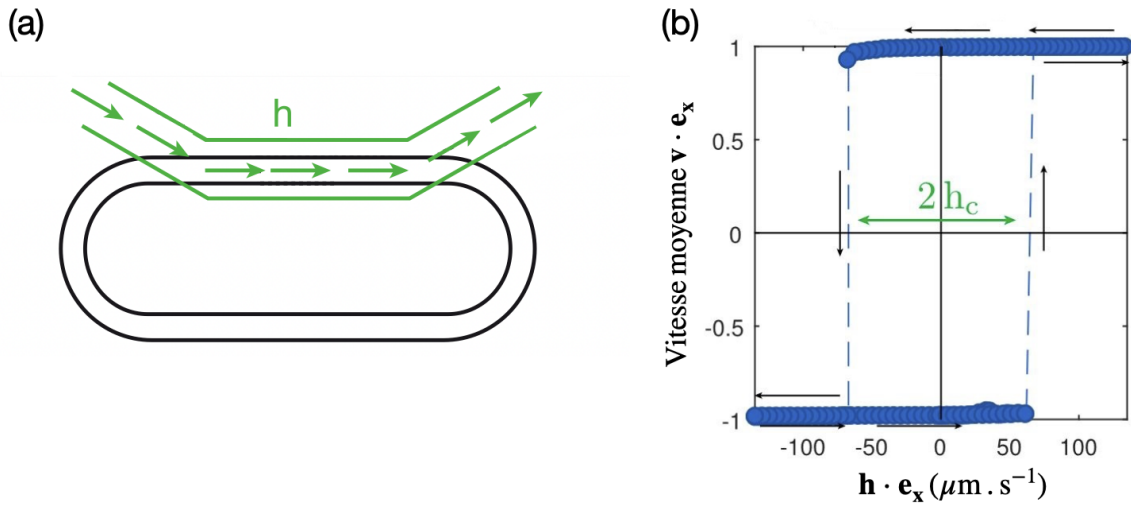


FIGURE 1.16 – (a) Dispositif expérimental. Le champ coercitif est créé par une injection continue de solvant dans la direction du canal. (b) Réponse hystérétique d'un liquide actif à un champ coercitif extérieur $\mathbf{h}$. $\mathbf{h}$ est analogue à un champ de pression. $\mathbf{e}_x$ est le vecteur tangent au canal. Figure empruntée à [37].

Nous représentons à la Fig. 1.16b la relation entre la projection de la vitesse dans la direction du canal $\mathcal{V} \cdot \hat{\mathbf{x}}$ de l'écoulement et le champ coercitif $\mathbf{h}$. De façon très surprenante, cette courbe a l'allure typique de la réponse hystérétique d'un matériau ferromagnétique face à un champ magnétique. En particulier, il s'avère que le liquide actif peut couler *contre* le champ coercitif $\mathbf{h}$: l'élasticité du liquide et son confinement protège sa direction d'écoulement. Sous l'effet de $\mathbf{h}$, l'écoulement fléchit (Fig. 1.16c), mais garde une vitesse moyenne constante. Au-delà d'un champ $\mathbf{h}$ seuil, le sens d'écoulement est inversé. Le courant $\mathcal{V} \cdot \hat{\mathbf{x}}$ est également non-nul pour un champ $\mathbf{h}$ nul. Il peut prendre les deux valeurs ± 1 , témoignant de la brisure spontanée de symétrie à l'origine de l'écoulement actif du liquide colloïdal. Ce résultat crucial pour le reste de ce manuscrit, permet d'envisager une dynamique non triviale d'écoulements dans un réseau hydraulique actif soumis à aucune source de pression.

1.4.2 La matière active confinée dans un environnement périodique

La capacité de la matière active à former des écoulements spontanés stables lorsqu'elle est confinée a inspiré de nombreux groupes à étudier son comportement face à un confinement

périodique. Toutes ces études ont le point commun de considérer la *circulation* de matière active dans des environnements périodiques. Les écoulements spontanés de colonies de bactéries denses [35, 38, 39] et de nématiques actifs [40–42] dans des environnements d'obstacles périodiques ont été étudiés en profondeur expérimentalement, numériquement et analytiquement. Dans cette section, nous nous proposons de rappeler les résultats principaux des travaux pionniers de Wioland *et al.* [35], qui ont ouvert la voie à l'étude de la matière active en milieu périodiques et élaboré des concepts qui ont été repris par la suite pour l'étude de l'hydraulique active.

Système expérimental

Wioland *et al.* [35] ont étudié l'écoulement spontané de *Bacillus subtilis* dans un réseau de bassins représenté en Fig. 1.17a. Ainsi, conformément à ce qui a été décrit précédemment pour la matière en confinement circulaire, l'écoulement actif de bactéries est stable et azimutal dans les bassins. Cependant, il apparaît qu'un ordre émerge spontanément entre les écoulements dans les différents bassins. Cet ordre dépend de la taille de la jonction entre les bassins (Fig. 1.17b). Pour une jonction de largeur inférieure à $8\ \mu\text{m}$, l'ordre émergent est antiferromagnétique, c'est-à-dire que l'angle azimutal de l'écoulement dans un bassin est opposé à celui de ses 4 bassins voisins, voir Fig. 1.17a. Lorsque la largeur de la jonction dépasse les $8\ \mu\text{m}$, l'ordre émergent entre les bassins est ferromagnétique.

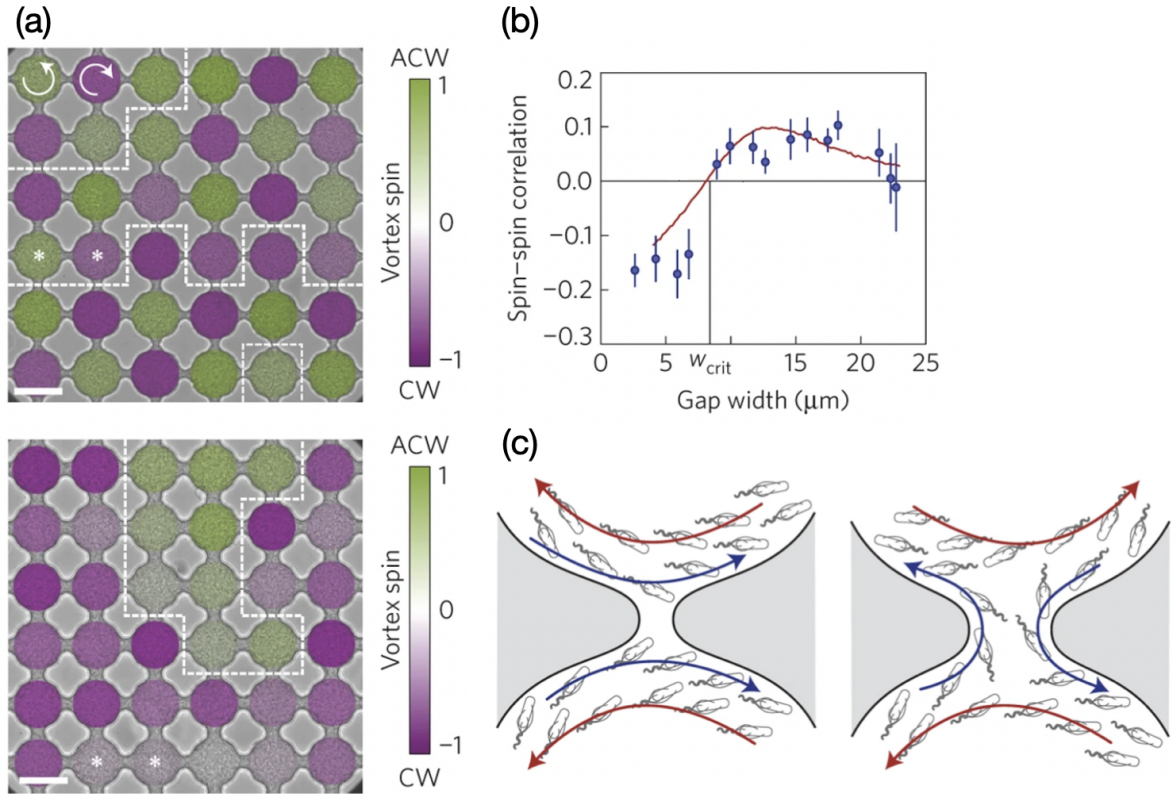


FIGURE 1.17 – (a) Réseau de bassins dans lesquelles coule le liquide actif. La couleur code pour le sens d'écoulement. Haut : Trois domaines antiferromagnétiques. Bas : deux domaines ferromagnétiques. (Barre d'échelle : $50\ \mu\text{m}$) (b) Corrélation spin-spin entre les bassins. Cette corrélation est négative pour les jonctions de largeur inférieure à $8\ \mu\text{m}$, et positive sinon. (c) Schéma de l'écoulement de bactéries au bord des canaux. Celui-ci est opposé à l'écoulement des bactéries dans le volume. Figure adaptée de [35].

Qualitativement, cet ordre émergent entre les bassins peut s'expliquer par un courant de bactéries en surface des bassins, voir Fig. 1.17c. Ce courant suit les bords du bassins, et est opposé au courant de volume des bassins, loin des bords. Pour les jonctions de petites largeurs, les bactéries en surface ne peuvent pas traverser la jonction, mais elles interagissent avec les bactéries en surface du bassin adjacent et s'alignent, d'où l'émergence de l'ordre antiferromagnétique. Pour les largeurs supérieures à la largeur critique, les bactéries en surface peuvent traverser les jonctions, et leur mouvement globale résulte en une circulation autour des piliers délimitant les bassins, d'où l'émergence d'un ordre ferromagnétique.

Modèle

Comme nous l'avons expliqué dans la sous-partie précédente, l'écoulement dans les bassins est bistable. Le courant peut uniquement circuler selon un angle azimutal ou l'autre. Ainsi, Wioland *et al.* proposent de le décrire à la façon d'un spin classique : la symétrie de rotation dans le bassin i est spontanément brisée, et la circulation V_i du courant peut prendre deux valeurs $V_i = \pm 1$. Afin de décrire l'émergence d'un ordre entre les circulation entre les piliers, Wioland *et al.* ont écrit un modèle de spins de deux genres, V_i d'une part, et l'un autre spin décrivant la circulation de bactéries autour des piliers. En faisant une approximation de champ moyen sur la circulation autour des piliers, ce modèle de spin se ramène à un second modèle effectif de la forme :

$$\mathcal{H}(\mathbf{V}) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} V_i V_j + \sum_i \left(\frac{1}{2} a V_i^2 + \frac{1}{4} b V_i^4 \right). \quad (1.6)$$

$\mathbf{V}$ est un vecteur contenant tous les V_i . Le terme $\frac{1}{2} a V_i^2 + \frac{1}{4} b V_i^4$ est un terme à la Landau habituel codant pour la brisure spontanée de symétrie de l'écoulement. J est la constante de couplage entre les circulations de deux bassins adjacents. La dynamique de ce système de spins suit l'équation stochastique suramortie :

$$d\mathbf{V} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{V}} dt + \sqrt{2\beta^{-1}} d\mathbf{W} \quad (1.7)$$

où β est une température effective inverse et $d\mathbf{W}$ un processus de Wiener. Cette équation stochastique a pour état stationnaire une distribution de Boltzmann de la forme $p(\mathbf{V}) \propto e^{-\beta \mathcal{H}}$. Ce modèle simple reproduit fidèlement la dynamique du système, voir Fig. 1.18.

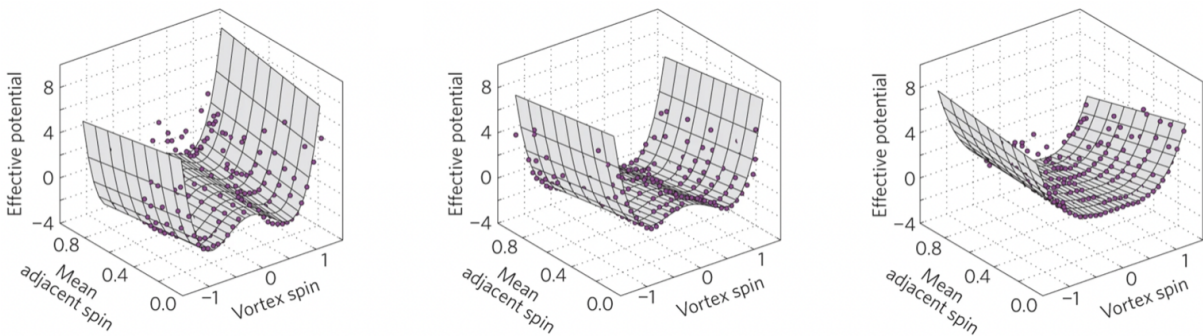


FIGURE 1.18 – Comparaison entre les spins mesurés (points violets) et le potentiel en V^4 inféré. Le potentiel théorique est en accord avec les mesures expérimentales.

L'approche décrite ici est novatrice sur deux aspects. Tout d'abord, toute la complexité décrivant la dynamique de l'écoulement actif dans les bassins est réduite à un seul degré de

liberté, un spin classique dont la valeur tend spontanément vers ± 1 . Ensuite, la dynamique du système, intrinsèquement hors d'équilibre, est réduite à une dynamique hamiltonienne classique à l'équilibre. Cette approche s'est avérée très féconde pour l'élaboration d'un premier modèle d'hydraulique active, décrit dans la sous-section suivante. Elle est également à la base du travail de recherche décrit dans ce manuscrit.

1.4.3 Un modèle pionnier d'hydraulique de la matière active

Modèle

Nous avons vu dans la sous-partie précédente que les écoulements actifs, lorsqu'ils sont confinés dans des tuyaux, présentent un écoulement bistable. Dünkel *et al.* [28] ont alors eu l'idée d'étudier théoriquement un système physique composé d'un grand nombre de canaux, en combinant des méthodes de théorie des graphes et de glaces de spins. Le point de départ de cette étude est de considérer un réseau hydraulique théorique, et de le modéliser par un graphe trivalent sans boucle (c'est-à-dire un graphe où chaque noeud est relié à trois autres noeuds et aucun noeud n'est relié à lui-même). Ce réseau est munie d'un ensemble d'arêtes $\mathcal{E}$. Sur chaque arête e du graphe, l'écoulement actif bistable est modélisé par un spin Φ_e appartenant à un ensemble de spins Φ , reliant deux noeuds, et vivant dans un potentiel de la forme :

$$V(\Phi_e) = -\frac{1}{4}\Phi_e^4 + \frac{1}{6}\Phi_e^6. \quad (1.8)$$

Ce potentiel est choisi en Φ^6 et non en Φ^4 comme une théorie de Landau habituelle pour assurer la bistabilité des écoulements : les minimums de potentiel dans la limite incompressible sont non-fractionnaires dans $\{-1, 0, 1\}$. L'écoulement à l'échelle du réseau complet (intrinsèquement hors d'équilibre) est ensuite décrit comme un système à l'équilibre, sous la forme d'un hamiltonien $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}(\Phi) = \lambda \sum_{e \in \mathcal{E}} V(\Phi_e) + \frac{1}{2}\mu |\mathbf{D}\Phi|^2. \quad (1.9)$$

$\mathbf{D}$ est l'opérateur divergence discret. L'incompressibilité stricte de l'écoulement prendrait la forme $\mathbf{D}\Phi = 0$. Ainsi, le terme $\frac{1}{2}\mu |\mathbf{D}\Phi|^2$ pénalise la compressibilité de l'écoulement, mais il autorise de petites fluctuations. λ et μ sont des constantes de couplages.

Dünkel *et al.* étudient ensuite la dynamique de l'écoulement dans le réseau. Ils font l'hypothèse que le système se comporte comme un système à l'équilibre, en se basant sur les résultats de travaux précédents [35]. Le vecteur des écoulements Φ suit une équation de Langevin suramortie de la forme :

$$d\Phi = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Phi} dt + \sqrt{2\beta^{-1}} d\mathbf{W} \quad (1.10)$$

où $d\mathbf{W}$ est un processus de Wiener et β la température effective inverse. La distribution de probabilité a pour état stationnaire une distribution de Boltzmann en $\propto e^{-\beta \mathcal{H}}$.

Résultats

Le résultat fondamental de cette étude est la formation de boucles de courant, voir Fig. 1.19a. La minimisation du hamiltonien $\mathcal{H}$ implique qu'un maximum de flux Φ_e sont égaux ± 1 , et ainsi qu'à chaque noeud trivalent soit atteint par un triplet de spins $\{-1, 0, +1\}$. Tout autre état correspond à un état excité du système, fortement défavorisé.

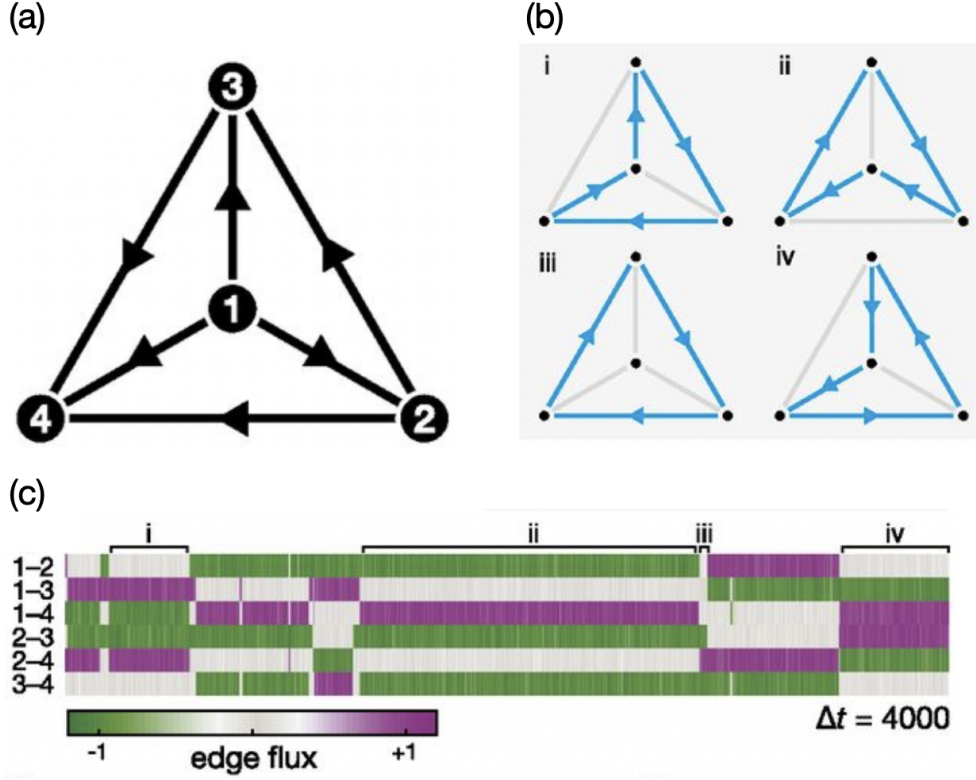


FIGURE 1.19 – **Sélection stochastique de cycles d'écoulement.** (a) Représentation schématique de deux réseaux hydrauliques de valence 3. Les canaux sont orientés arbitrairement pour définir le signe des Φ_e . (b) Cycles hydrauliques formés par l'écoulement actif. (c) États des Φ_e au cours du temps. Le système explore tous les cycles possibles de (b). Le plus souvent, les transitions sont initiées par l'un des Φ_e qui tombe à 0 et qui fait changer de signe les $\Phi_{e'}$ adjacents. Figure adaptée de [28].

La dynamique du système n'est cependant pas figée, à cause du bruit $d\mathbf{W}$. Le plus souvent, les transitions entre états se passe de la façon suivante, (voir Fig. 1.19b-c) : une fluctuation fait passer un Φ_e d'état ± 1 à 0, ce qui entraîne un changement de tous les $\Phi_{e'}$ reliés au même noeud que Φ_e .

Limite basse température

Dans la limite incompressible où $\mu \gg \lambda$, et basse température avec $\beta\lambda \gg +1$, le système est figé dans un état fondamental de $\mathcal{H}$ où chaque noeud du réseau trivalent est atteint strictement par un triplet de spins $\{-1, 0, +1\}$. Ce type de modèle consistant à placer des spins sur les arêtes d'un réseau est appelé modèle de glace de spins. Il en existe de nombreux sur des réseaux différents, voir [43]. Par exemple le réseau carré, chaque noeud doit être atteint par deux spins $+1$ et deux spins -1 . Ce modèle est appelé modèle à 6 sommets.

1.4.4 Les systèmes de glace de spins

Wioland *et al.* ont conjecturé que dans la limite d'écoulements incompressible et basse température, les écoulements actifs dans les réseaux hydrauliques pouvaient être décrits par des modèles de glace de spins. Il existe de nombreux modèles de glace de spins, sur différents réseaux, comme le réseau pyrochlore tridimensionnel [44], ou le réseau carré [43]. Tous ces modèles consistent en placer des spins sur les arêtes d'un réseau, avec pour règle que chaque noeud du

réseau doit être relié à autant de spins *in* que de spins *out*. L'idée de Wioland *et al.* est que les spins représentent les courants des écoulements actifs, et que la règle *n-in n-out* correspond à la conservation de la masse aux jonctions.

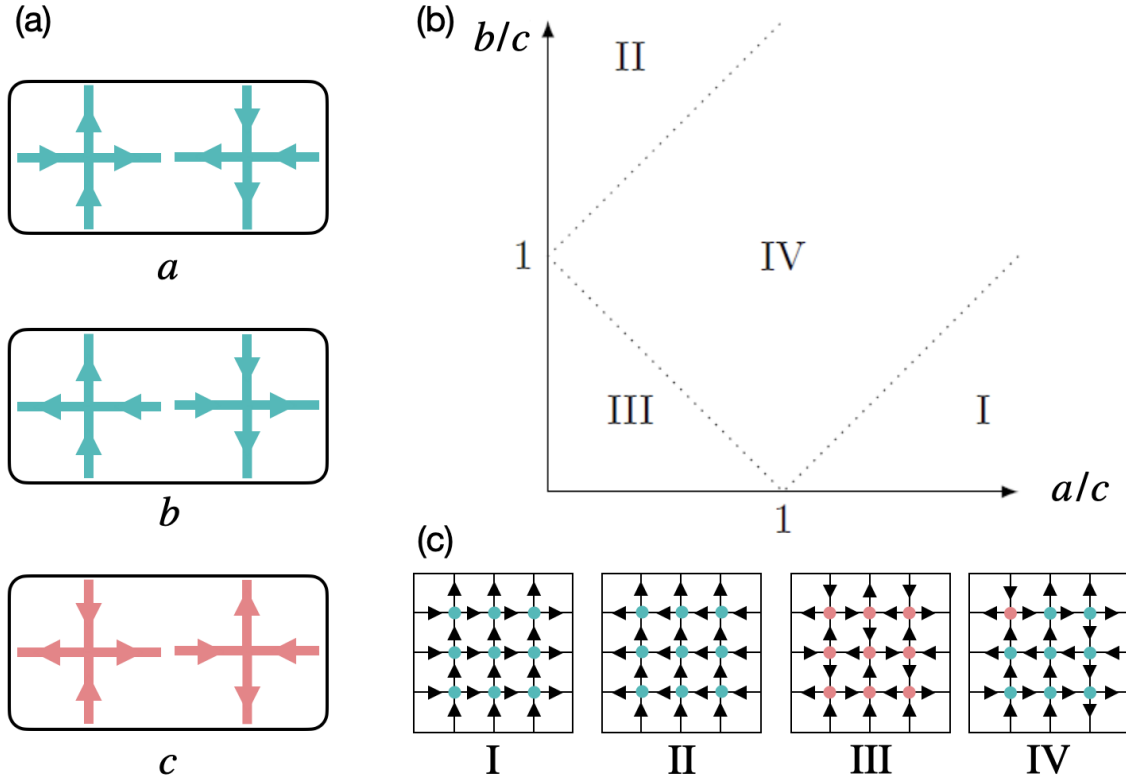


FIGURE 1.20 – Un modèle typique de glace de spin : le modèle à 6 sommets. (a) Les 6 configurations de spins du modèle à 6 sommets. (b) Diagramme de phase du modèle à 6 sommets. I et II : phases ferroélectriques. III : phase antiferroélectrique. IV : phase désordonnée. Cette dernière est une phase critique présentant des corrélations à longue portée pour tout choix de poids statistiques (a, b, c) . (c) Exemples de configurations des phases I à IV. Les sommets $a - b$ sont indiqués par des points verts, les sommets c sont indiqués par des points roses.

Le modèle de glace de spins le plus connu est celui sur réseau carré, appelé modèle à 6 sommets. Il tient son nom du fait qu'il existe 6 différentes façons de disposer 2 spins *in* et deux spins *out* aux arêtes d'un réseau carré, voir Fig. 1.20. Ce modèle de physique statistique a été initialement introduit, sous une forme simplifiée, par Pauling dans les années 1930 afin de décrire le comportement des dipôles électriques de la glace (la glace d' H_2O peut s'organiser sur un réseau pyrochlore, et la projection du réseau pyrochlore selon l'axe verticale correspond au réseau carré). Les dipôles électriques étant modélisés par les spins sur les arêtes du réseau. Il a ensuite été élargi par Slater dans les années 1940 pour l'étude des matériaux ferroélectriques. De façon surprenante, il a également été étudié en mathématiques, en permettant notamment une preuve très simple du dénombrement des matrices à signes alternants de taille n [45]. Ce dénombrement avait déjà été effectué auparavant par un tour de force mathématique de plusieurs dizaines de pages [46]. Plus récemment, on peut observer chez les mathématiciens un regain d'intérêt dans l'étude de ce modèle, pour ses propriétés combinatoires et son intérêt avec le pavage par dominos du diamant aztèque [47].

Le diagramme de phases du modèle à 6 sommets est connu et représenté en figure Fig. 1.20b. L'axe des abscisses est a/c , avec a le poids statistique des sommets 1 et 2 et c le poids statistique

des sommets 5 et 6. L'axe des ordonnées est b/c , avec b le poids statistique des sommets 4 et 3 et c . Notons que le poids statistique des sommets 1 (resp. 3 et 5) est pris égal à celui des sommets 2 (resp. 4 et 6) par symétrie de renversement de toutes les flèches. Ce diagramme de phase possède quatre phases :

- Une phases ferroélectrique pour $a > b + c$. Cette phase est notée I sur le diagramme de phase en Fig. 1.20b. Les sommets de types 1–2 sont favorisés, les flèches sont orientées soit vers le haut et la droite, soit vers les bas et la gauche. Le système présente une polarisation électrique macroscopique.
- Une phases ferroélectrique pour $b > a + c$. Cette phase est notée II sur le diagramme de phase en Fig. 1.20b. Les sommets de types 3–4 sont favorisés, les flèches sont orientées soit vers le haut et la gauche, soit vers les bas et la droite. Le système présente une polarisation électrique macroscopique.
- Une phase antiferroélectrique pour $c > a + b$. Cette phase est notée III sur le diagramme de phase en Fig. 1.20b. Les sommets de types 5–6 sont favorisés. Le long des lignes et des colonnes, les flèches alternent leurs sens de site. Le système ne présente de polarisation électrique macroscopique.
- Une phase désordonnée pour $a, b, c < (a + b + c)/2$, Cette phase est notée IV sur le diagramme de phase en Fig. 1.20b. Aucun sommet n'est favorisé. Le système ne présente pas de polarisation électrique macroscopique. Le système est critique (dans le sens où les fonctions de corrélation sont algébriques) pour tout choix de paramètres (a, b, c) .

Le modèle à 6 sommets a été résolu analytiquement par Baxter [43]. Il est cependant possible de calculer ses exposants en utilisant une analogie avec un système de particules chargées en interactions appelé gaz de Coulomb [48]. De cette correspondance avec le gaz de Coulomb découlent d'autres correspondances avec des modèles sur réseau, comme le modèle solide sur solide [49] ou le modèle de boucles $O(n)$ [50]. J'ai utilisé cette approche à plusieurs reprises au cours de ma thèse. Elle m'a permis d'identifier et caractériser la géométrie fractale de différents écoulements actifs (voir les chapitres 3 et 4).

1.5 Objectifs de la thèse et organisation du manuscrit

Dans ce chapitre, nous avons abordé la matière active de façon historique en décrivant les deux approches fondamentales -particulaire et hydrodynamique- à la base de l'étude des mouvements collectifs. Nous avons ensuite passé en revue de nombreux systèmes modèles de matière active, et montré qu'il en existait deux classes. D'une part, la matière active sèche, dont l'écoulement spontané est stable. Et d'autre part la matière active mouillée, dont l'écoulement spontané est chaotique à cause de la nucléation de paires de défauts topologiques. Cependant, nous avons montré que, peu importe la classe de système actif étudié, le confinement a pour effet de stabiliser leurs écoulements. Ils deviennent bistables : azimutaux dans un environnement circulaire et laminaires dans un canal droit. Nous avons ensuite montré que les écoulements spontanés de systèmes actifs ont été étudiés dans des milieux périodiques, et que seuls des travaux théoriques avaient été menés sur l'hydraulique de la matière active. Dans les prochains chapitres, je m'appuie sur la réalisation expérimentale d'un liquide polaire actifs composé de rouleurs de Quincke [22] afin d'étudier leur écoulement dans des réseaux hydrauliques. J'étudie expérimentalement l'effet de la géométrie du réseau (valence, géométrie des jonctions et des canaux) sur le motif d'écoulement. En particulier, je souhaite répondre aux questions suivantes :

Quelles sont les règles d'écoulements des liquides actifs dans les réseaux hydrauliques ? Quelle est la géométrie des écoulements actifs dans les réseaux hydrauliques ?

liques ?

La suite du manuscrit apporte des réponses à ces questions, selon l'organisation suivante :

Chapitre 2 : Méthodes expérimentales et numériques. Design et implémentation.

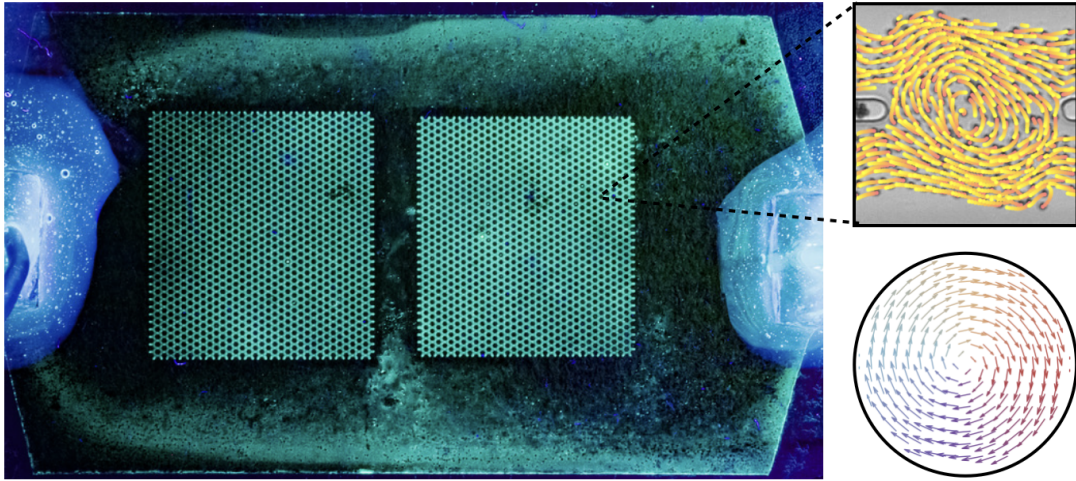


FIGURE 1.21 – Un système expérimental et numérique modèle pour l'étude des liquides polaires.

Dans le chapitre 2, nous décrivons en détail toutes les méthodes utilisées lors de ma thèse :

- Nous expliquons brièvement le mécanisme de motorisation des rouleurs de Quincke. Nous décrivons ensuite leur dynamique individuelle, et la description hydrodynamique du liquide actif qu'ils forment lorsque leur densité dépasse un seuil critique.
- Nous expliquons comment créer un tel liquide actif en laboratoire, et comment le manipuler expérimentalement et comment analyser les écoulements actifs.
- Nous montrons de quelle façon nous extrayons les lignes de courants des écoulements dans les réseaux hydrauliques, et comment nous en déduisons leurs propriétés géométriques.
- Nous développons notre méthode pour simuler numériquement les écoulements de liquides polaires actifs.

Chapitre 3 : Construire les lois de l'hydraulique active

Dans le chapitre 3, nous étudions l'écoulement spontané de liquide polaire actif dans un réseau trivalent.

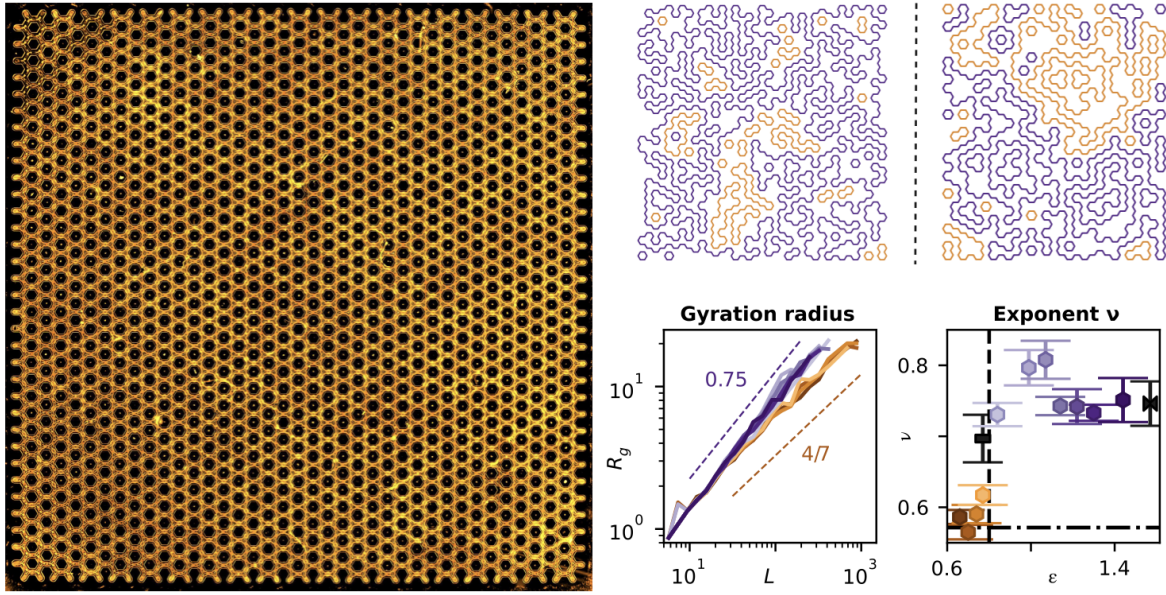


FIGURE 1.22 – Émergence de boucles auto-évitanes de courant. Mise en évidence de deux régimes d'écoulement aux géométries distinctes.

- Nous montrons que l'incompressibilité du liquide et son activité constante frustrant son écoulement dans un réseau trivalent. Nous modélisons l'écoulement comme une glace de spins 1 sur un réseau en nid d'abeille.
- Nous montrons qu'à cause de la frustration géométrique, les lignes de courant s'organisent en boucles auto-évitanes.
- Nous caractérisons la géométrie de ces boucles et montrons et identifions deux régimes d'écoulement distincts.
- Nous expliquons ces deux régimes par une interaction entre les boucles de courant causée par la topologie des écoulements dans les canaux supportant un courant nul. Nous en tirons des lois pour l'hydraulique active dans les réseaux hydrauliques trivalents.
- Nous étudions les limites asymptotiques de ces lois et établissons une correspondance avec les modèles de boucles $O(1)$ et $O(2)$.

Chapitre 4 : Généralisation des lois de l'hydraulique active

Dans le chapitre 4, nous généralisons les lois de l'hydraulique active pour les réseaux de valence 4, 5 et 6.

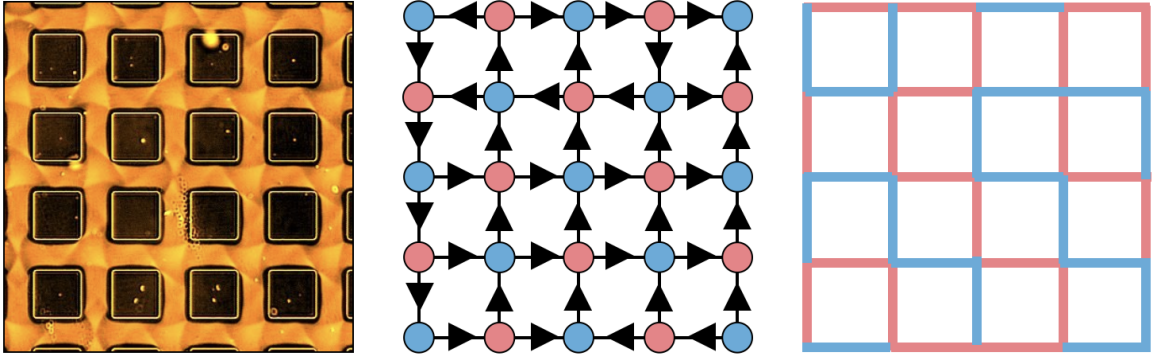


FIGURE 1.23 – Écoulement actif dans un réseau carré. Correspondance avec un modèle à 6 sommets et un modèle de boucles de deux couleurs.

- Nous étudions d’abord les écoulements actifs dans un réseau hydraulique carré. Nous montrons que la géométrie de la jonction joue un rôle crucial : elle modifie la topologie de l’écoulement et le plonge dans une phase ordonnée ou désordonnée.
- Nous montrons que l’écoulement dans un réseau carré est analogue à un modèle à 6 sommets. Fort de cette analogie, nous calculons les propriétés géométriques des écoulements ordonnés et désordonnés.
- Nous faisons également une analogie entre les écoulements actifs dans les réseaux de valence 5 et 6 et nous en déduisons leurs propriétés géométriques.

Chapitre 5 : Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous résumons les résultats principaux de l’étude de l’hydraulique active. Nous détaillons également des perspectives futures. En particulier, l’étude des propriétés de transport et de mélange dans les réseaux hydrauliques actifs nous semble être une suite cohérente aux travaux présentés dans ce manuscrit.

1.6 Annexe : Propriétés critiques du modèle à 6 sommets

Le gaz de Coulomb à deux dimensions a été introduit à l’origine par Hauge et Hemmer [51]. Il a ensuite été repris par Kosterlitz et Thouless pour décrire l’absence d’ordre à longue portée et les corrélations algébriques observées dans le modèle XY [12, 13]. A température non-nulle, les modes de Goldstone du modèle XY prennent la forme de défauts topologiques qui nucléent et s’annihilent en permanence, empêchant l’apparition d’un ordre à longue portée. Kosterlitz et Thouless ont montré [12] que ces défauts se comportent comme des particules chargées qui interagissent selon un potentiel coulombien.

Nienhuis [52] effectue le raisonnement inverse. Il établit des correspondances entre des modèles sur réseaux et le gaz de Coulomb bi-dimensionnel, et en déduit directement les exposants critiques. Dans cette section, nous allons tout d’abord expliquer comment interpréter le modèle à 6 sommets comme un modèle de solide sur solide. Nous décrivons ensuite brièvement le modèle du gaz de Coulomb bidimensionnel, puis nous montrons dans quelles limites le gaz de Coulomb décrit un modèle de solide sur solide. Finalement, nous en déduisons les propriétés critiques du modèle à 6 sommets. Cette approche est décrite dans [53]. Elle fonctionne pour de nombreux modèles sur réseaux, comme le clock modèle, le modèle d’Ashkin-Teller, ou le modèle de Potts.

Le modèle à 6 sommets comme un modèle de solide sur solide

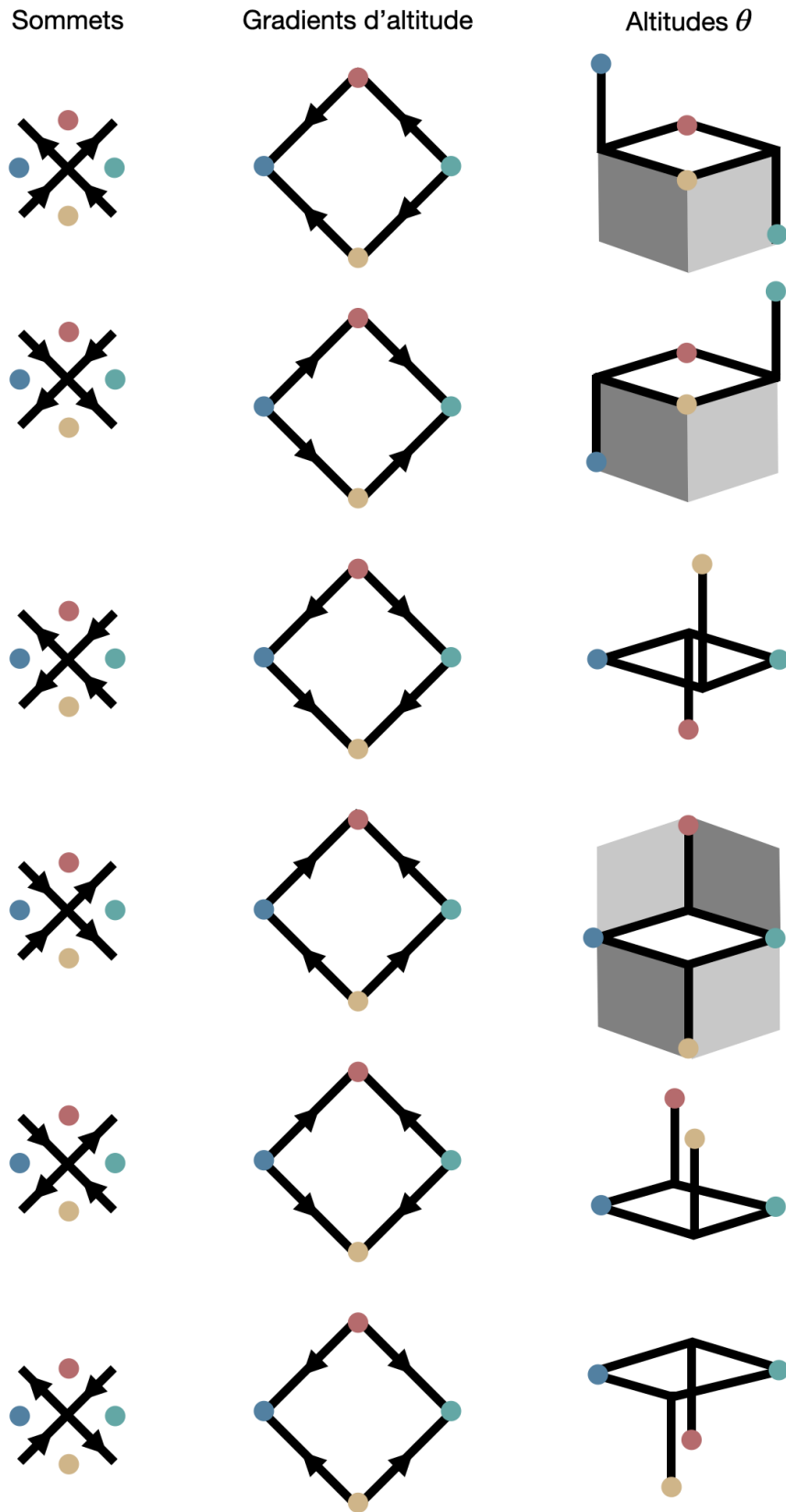


FIGURE 1.24 – **Transformation du modèle à 6 sommets en un modèle de solide sur solide.** Colonne de gauche : sommets du modèle à 6 sommets. Les noeuds du réseau dual sont indiqués par les points de couleurs. Colonne du milieu : gradients d'altitude θ correspondants aux sommets. Les gradients sont obtenus en tournant les flèches des sommets vers la gauche. Colonnes de droite : altitudes θ correspondantes.

Le modèle de solide sur solide est une classe de modèles sur réseau où chaque site i est situé à une hauteur h_i , et l'énergie du système est une fonction de la différence d'altitude entre deux sites voisins i et j , s'écrivant $\mathcal{H} = \sum_{\langle i,j \rangle} V(h_i - h_j)$. Dans cette première partie, nous montrons comment interpréter le modèle à 6 sommets comme un modèle de solide sur solide. Les noeuds du modèle à 6 sommets et leurs poids statistiques sont représentés à la Fig. 1.20a, et reproduits sur la Fig. 1.24 colonne de gauche. Plus particulièrement, nous allons étudier un cas spécifique du modèle à 6 sommets appelé modèle F, où les poids statistiques a et b sont égaux.

Le modèle à F peut s'interpréter comme un modèle de solide sur solide, en suivant la transformation en deux étapes schématisée en Fig. 1.24 et expliquée ici :

- Chacun des vecteurs du modèle à 6 sommets doit tourner d'un angle $\pi/2$ vers la gauche. La règle de la glace assure que le nouveau champ de vecteur soit de rotationnel nul. Il peut ainsi s'exprimer comme le gradient d'un champ scalaire θ , défini sur le réseau dual du réseau carré, que nous appellerons altitude. Ce gradient est représenté en Fig. 1.24 colonne du milieu.
- Le passage de la colonne du milieu à la colonne de droite s'effectue en attribuant une altitude θ à chacun des points du réseau dual (représentés en couleurs). Considérons la première ligne. Le point jaune est au premier plan. Depuis ce point, on rejoint le point bleu en suivant le gradient d'altitude. Le point bleu est donc plus haut que le point jaune. Les vecteurs de gradient d'altitude étant de norme constante, l'altitude θ ne peut varier que d'une valeur constante (en valeur absolue) entre deux sites du réseau dual. Nous fixons cette différence d'altitude à $\pi/2$. Ainsi, le point bleu est à une altitude plus élevée de $\pi/2$ que le point jaune, et le point bleu est à une altitude de plus basse de $\pi/2$ par rapport au point jaune. Nous pouvons ainsi définir le champ d'altitude θ pour tous les points du réseau dual, de proche en proche.

Le modèle à 6 sommets est donc équivalent à un modèle de solide sur solide. Nous représentons à la Fig. 1.25a une configuration de modèle à 6 sommets, et le champ d'altitude en perspective à la Fig. 1.25b.

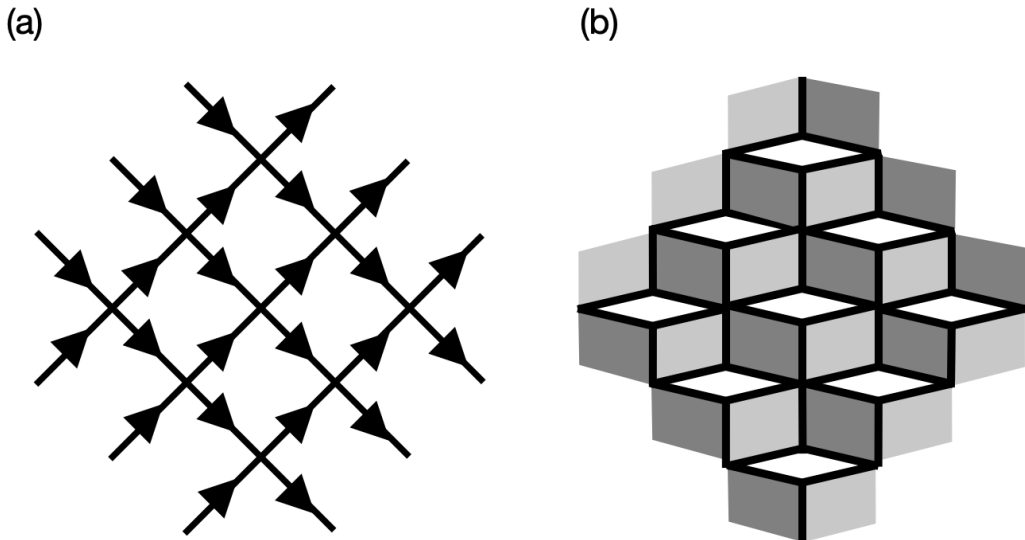


FIGURE 1.25 – Exemple de transformation du modèle à 6 sommets en un modèle de solide sur solide. (a) Configuration du modèle à 6 sommets. (b) Configuration correspondante de modèle de solide sur solide.

Du gaz de Coulomb bidimensionnel vers un modèle de solide sur solide

Dans cette partie, nous rappelons brièvement les principaux résultats du gaz de Coulomb en deux dimensions. Nous montrons ensuite comment un modèle de solide sur solide peut s'interpréter comme un gaz de Coulomb (en passant par un clock model).

Le gaz de Coulomb bidimensionnel

Le gaz de Coulomb est un modèle de physique statistique bidimensionnel. Il décrit un gaz composé de particules de charges électriques e et de charges magnétiques m en interactions les unes avec les autres. Son hamiltonien s'écrit :

$$-\beta\mathcal{H} = \sum_i \ln Y(e_j, m_j) + \sum_{j \neq k} \left(\frac{1}{2g} e_j e_k + \frac{g}{2} m_j m_k \right) G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) + \sum_{j \neq k} i e_j m_k \Phi(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k). \quad (1.11)$$

$Y(e, m)$ est la fugacité des particules. G est la fonction décrivant les interactions entre charges de même nature (électrique ou magnétique) et Φ est la fonction décrivant les interactions entre charges magnétiques et électriques. Les deux interactions sont à longue portée, on peut écrire un terme d'interaction général :

$$G(\mathbf{r}) + i\Phi(\mathbf{r}) = \ln \frac{x + iy}{a} \quad (1.12)$$

où $\mathbf{r} = (x, y)$ et a est la distance minimale entre deux particules (comme si les particules interagissent également *via* un coeur dur) ou l'espacement du réseau sous-jacent. Par souci de simplicité, nous introduisons la notation $\cdot$ qui remplace la somme sur les plus proches voisins. Ainsi, le hamiltonien de l'équation 1.11 se réécrit :

$$-\beta\mathcal{H} = \sum_i \ln Y(e_j, m_j) + \frac{1}{2g} e \cdot G \cdot e + \frac{g}{2} m \cdot G \cdot m + i e \cdot \Phi \cdot m. \quad (1.13)$$

Propriétés critiques du gaz de Coulomb

Kosterlitz [13] a calculé les propriétés critiques du gaz de Coulomb par une approche de renormalisation. Nous ne la détaillerons pas ici, mais son principe est très simple : elle consiste à fusionner ou annihiler les charges (selon qu'elles soient de même signe ou de signe différent) séparée d'une distance inférieure à $a + da$ et redimensionner le terme d'interaction coulombienne :

$$\ln \frac{x + iy}{a} \rightarrow \ln \frac{x + iy}{a + da}. \quad (1.14)$$

En particulier, l'exposant x_2 décrivant la décroissance de la fonction de corrélation entre 2 points X et Y (en $\sim r^{-2x_2}$) vaut :

$$x_2 = -\frac{e_X e_Y}{2g} - \frac{g m_X m_Y}{2}. \quad (1.15)$$

m_X (m_Y) et e_X (e_Y) sont les charges électrique et magnétique du point X (Y).

Le clock model

Le clock model est un modèle de spins sur réseau semblable au modèle XY, dont l'hamiltonien s'écrit :

$$-\beta\mathcal{H} = \sum_{\langle j,k \rangle} V(\theta_j - \theta_k) + \sum_j W(p\theta_j) \quad (1.16)$$

où V est une fonction 2π -périodique et monotone qui varie lentement entre un minimum pour $\theta = 0$ et son maximum pour $\theta = \pi$. W est une fonction 2π -périodique. Pour $p = 1$ elle joue le rôle d'un champ magnétique usuel. Pour $p > 1$, W a pour effet de biaiser l'orientation des spins selon une symétrie- p . Originellement, ce modèle a été introduit pour reproduire l'effet d'un cristal environnant, qui biaiserait la direction des spins. Un choix évident pour $V(\theta) = g \cos(\theta)$ et $W(\theta) = \cos(\theta)$. Cependant, la correspondance avec le gaz de Coulomb s'effectue en choisissant :

$$\exp V(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp -\frac{g}{4\pi}(\theta - 2\pi k)^2, \quad (1.17)$$

$$\exp W(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-in\theta + \zeta n^2). \quad (1.18)$$

La fonction de partition du clock modèle s'écrit alors :

$$Z = \sum_{\{k\}} \sum_{\{n\}} \int_{-\pi}^{\pi} d\{\theta\} \exp \left(-\frac{g}{4\pi} (\nabla\theta - 2\pi\mathbf{k}) \cdot (\nabla\theta - 2\pi\mathbf{k}) - ipn \cdot \theta - \zeta n \cdot n - \xi (\nabla \times \mathbf{k}) \cdot (\nabla \times \mathbf{k}) \right). \quad (1.19)$$

$\mathbf{k}$ est un vecteur de nombre entiers vivant sur les arêtes séparant deux site adjacents du réseau. Les accolades $\{\dots\}$ indiquent une somme ou intégrale sur un ensemble de variables. Le terme en $(\nabla\theta - 2\pi\mathbf{k}) \cdot (\nabla\theta - 2\pi\mathbf{k})$ est le terme habituel en gradient au carré du modèle XY dans la limite continue. Le terme en ξ est proportionnel au rotationnel de $\mathbf{k}$ au carré. Notons que le modèle est bidimensionnel et que $\nabla \times k$ est un scalaire. Ainsi, il contrôle la densité de vortex dans le système. Par exemple, la limite $\xi \rightarrow +\infty$ interdit la présence de vortex. La paramètre ζ est une mesure de la force du potentiel W . Pour $\zeta = 0$ le potentiel W est infiniment fort et le modèle se réduit à clock modèle à p états où les spins ne peuvent prendre que les orientations autorisées par W .

Le clock model comme un gaz de Coulomb

Ce modèle peut se transformer en un modèle de gaz de Coulomb en exploitant l'invariance de Z par la transformation :

$$\begin{aligned} \theta &\rightarrow \theta + 2\pi l, \\ \mathbf{k} &\rightarrow \mathbf{k} + \nabla l. \end{aligned}$$

avec l est un entier vivant sur chaque site du réseau. La fonction de partition s'exprime finalement :

$$Z \propto \sum_{\{m\}} \sum_{\{n\}} \exp \left(\frac{g}{2} m \cdot G \cdot m + \frac{p^2}{2g} n \cdot G \cdot n + ipm \cdot \Phi \cdot n - \zeta n \cdot n - \xi m \cdot m \right). \quad (1.20)$$

Z est la fonction de partition d'un gaz de Coulomb, et nous avons noté $m = \nabla \times \mathbf{k}$. Comme pour le modèle XY, les charges sont jouées par le rotationnel d'un champ de vecteur [12]. Les potentiels chimiques s'expriment comme $\mu_e = \zeta p^{-2}$ et $\mu_m = \xi$. Ainsi, une réécriture de la fonction de partition du clock model en un gaz de Coulomb permet d'obtenir ses propriétés critiques sans les calculer spécifiquement. Notons que cette correspondance résulte de certaines approximations mais qu'elle est exacte pour le modèle XY [54].

Le clock modèle comme un modèle de solide sur solide

Considérons la fonction de partition de l'équation 1.19, et le choix de paramètres suivant :

- $\xi \rightarrow +\infty$ interdit la présence de vortex dans le système. Cela fait tendre la charge magnétique à 0.
- $\zeta = 0$ rend le potentiel W infiniment fort et seules les p orientations sont autorisées pour les spins.

La somme sur les $\{n\}$ fait donc apparaître des deltas de Dirac de la forme $2\pi\delta(p\theta)$, et l'intégrale sur θ devient une somme d'entiers multipliés par $2\pi/p$. Ainsi, la fonction de partition de partition du clock model pour $p = 4$ est identique à celle d'un modèle de solide sur solide discret, et, *in fine*, à un gaz de Coulomb pour le choix de paramètres $\xi \rightarrow +\infty$ et $\zeta = 0$. Nous pouvons également identifier la charge électrique à $e = 1$.

Propriétés critiques du modèle à 6 sommets

Finalement, nous avons montré d'une part que le modèle F est équivalent un modèle de solide sur solide, et d'autre part que le modèle de solide sur solide est équivalent à un gaz de Coulomb pour un certains choix de paramètres (explicité plus haut). Il a été montré [55] que l'exposant x_2 du modèle F se calculait pour une paire de vortex et antivortex de charges $m_X = -m_Y = 1/2$ et $e_X = e_Y = -2 + g/2$, et une constante de couplage $g = 8/3$. Ainsi :

$$x_2 = \frac{1}{4}. \quad (1.21)$$

g dépend *a priori* des poids statistiques $a = b$ et c [43]. Cependant, il a été conjecturé par Kadanoff et Brown [56] et démontré par Knops [57] que la classe d'universalité du système restait la même le long de la ligne critique $a = b$.

Nous avons présenté ici un exemple usuel de correspondance entre un modèle sur réseau et le modèle du gaz de Coulomb en dimension 2. Nous employons aux chapitres 3 et 4 de nombreuses correspondances entre les écoulements actifs et des modèles sur réseaux. Nous établissons ensuite une correspondance entre ces modèles sur réseaux et des modèles de boucles [50]. Ceux-ci ont pour avantage par rapport aux modèles de solide sur solide d'exhiber des observables (et donc des exposants critiques) faciles à mesurer expérimentalement. Comme la correspondance présentée dans cette annexe, les modèles de boucles que nous utilisons présentent des propriétés critiques identifiables par l'approche du gaz de Coulomb.

Méthodes expérimentales et numériques. Design et implémentation.

L'étude de la matière active a été grandement facilitée par le développement d'expériences modèles, robustes et reproductibles. Dans ce chapitre, je décris tout d'abord le système expérimental modèle que j'ai utilisé tout au long de ma thèse, ainsi que les méthodes d'observation et d'analyse qui permettent de le caractériser. Ses constituants élémentaires sont appelés rouleurs colloïdaux. J'explique ensuite comment analyser les motifs d'écoulement du liquide colloïdal actif dans les réseaux hydrauliques frustrés, puis dans les réseaux hydrauliques de coordination paire. J'explicité également la méthode numérique que j'ai utilisée pour simuler l'écoulement d'un liquide polaire actif. Finalement, je montre comment j'ai obtenu une phase hexatique de rouleurs colloïdaux, ainsi que les méthodes de caractérisation de cette phase et de la transition liquide-hexatique.

Le système expérimental des rouleurs de Quincke a été initialement introduit dans [22], et progressivement améliorés par A. Bricard, N. Desreumaux, A. Morin, Delphine Geyer, et Amélie Chardac [58–62]. C'est la raison pour laquelle, **dans tout le chapitre, mes contributions personnelles sont indiquées par le symbole ☆.**

2.1 Manipuler et observer un liquide rouleurs de Quincke

Comme expliqué en introduction du chapitre, mes contributions sont minimales sur l'élaboration du protocole expérimental et la compréhension du liquide de rouleurs colloïdaux en lui-même. Cette section consistera donc en un bref résumé des techniques que j'ai utilisées pour créer, manipuler et observer des liquides de rouleurs de Quincke. Je détaille cependant le design des réseaux hydrauliques que j'ai conçus pour les études des chapitres 3 et 4.

2.1.1 Motorisation des colloïdes

Dans cette sous-section, nous expliquons succinctement le principe de motorisation des colloïdes. Nous décrivons ensuite un modèle minimal de la dynamique individuelle des rouleurs de Quincke. Une explication beaucoup plus détaillée est présente dans la thèse de Jean-Baptiste Caussin [63].

L'électrorotation de Quincke

Les colloïdes sont motorisés en tirant parti d'une instabilité découverte à la fin du XIXème siècle par Georg Quincke [23]. Ce principe de motorisation a été appliqué pour la première fois dans des expériences de matière molle par Lavrentovitch *et al.* en 2008 [64], et les premières expériences de rouleurs de Quincke comme système modèle de matière active ont été réalisées en 2013 par Bricard *et al.* [22].

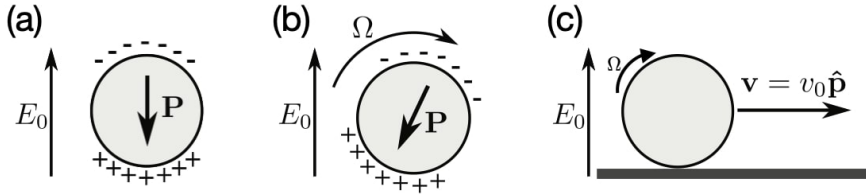


FIGURE 2.1 – **Principe de l'électrorotation de Quincke.** (a) Sous l'effet du champ $\mathbf{E}_0$, la particule acquiert une charge de surface et un moment dipolaire $\mathbf{P}$. (b) Au-delà du champ seuil E_Q , le moment dipolaire $\mathbf{P}$ atteint un état stationnaire où il forme un angle fini avec $\mathbf{E}_0$. La particule tourne à vitesse de rotation constante Ω . (c) En laissant sédimenter la particule sur un substrat, elle peut rouler sur le substrat et acquérir une vitesse de translation $\mathbf{v}$. Figure issue de [22].

Le principe de l'instabilité de Quincke est schématisée en Fig. 2.1. Les colloïdes sont modélisés par des sphères isolantes de rayon a , plongées dans un liquide conducteur. Lorsque nous appliquons un champ électrique continu $\mathbf{E}_0$ sur le système, la migration différentielle des ions de conduction charge la surface des colloïdes, et un moment dipolaire $\mathbf{P}$ apparaît (voir Fig. 2.1(a)). L'énergie d'interaction entre le dipôle et le champ électrique étant $\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0$, cette position est énergétiquement défavorisée. Le moment dipolaire $\mathbf{P}$ est soumis à des fluctuations d'orientation, et un couple électrostatique $\Gamma_e = \mathbf{P} \times \mathbf{E}_0$ s'applique sur le colloïde.

En-dessous d'un champ électrique seuil, noté E_Q , les fluctuations de $\mathbf{P}$ sont faibles devant l'apport continu de charges, le couple électrostatique Γ_e est nul, les colloïdes sont immobiles. Quand le champ électrique dépasse E_Q , les fluctuations de $\mathbf{P}$ deviennent grandes, le système subit une brisure spontanée de symétrie et atteint un autre état stationnaire. $\mathbf{P}$ forme un angle fini avec $\mathbf{E}_0$, le couple électrostatique Γ_e prend une valeur finie constante, qui en régime stationnaire se compense exactement avec le couple visqueux créé par le solvant $\Gamma_\eta \propto \eta a^3 \Omega$, et la vitesse de

rotation est donc constante (voir Fig. 2.1(b)). La vitesse de rotation est liée au champ électrique par la relation :

$$\Omega = \frac{1}{\tau} \sqrt{\left(\frac{E_0}{E_Q}\right)^2 - 1} \quad (2.1)$$

où τ est le temps de relaxation des charges de surface, appelé temps de Maxwell. On note que la stationnarité de $\mathbf{P}$ est assurée par la rotation de la particule qui entraîne ses charges de surface, et la migration différentielle des ions de conduction qui apporte continûment de nouvelles charges à sa surface.

Pour convertir la rotation des colloïdes en translation, il suffit de laisser les colloïdes sédimenter sur un substrat, Fig. 2.1(c). Ainsi, dans l'hypothèse où les colloïdes roulent sur le substrat, leur vitesse de translation s'exprime de la façon suivante :

$$v_0 = \frac{a}{\tau} \sqrt{\left(\frac{E_0}{E_Q}\right)^2 - 1}. \quad (2.2)$$

Les conditions expérimentales usuelles sont les suivantes : les colloïdes ont un rayon $a = 2.4 \mu\text{m}$ et sont dispersés dans une solution d'hexadecane dans laquelle nous avons dissous du sel de sodium de dioctyl sulfosuccinate (AOT) à une concentration de 0.15 mol.L^{-1} . Le temps de Maxwell, qui dépend de la conductivité du milieu est alors de l'ordre de $\tau \sim 1 \text{ ms}$, et $E_Q \sim 1 \text{ V} \cdot \mu\text{m}^{-1}$, $\Omega \sim 1 \text{ s}^{-1}$, $v_0 \sim 1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$.

Dynamique des rouleurs individuels

Une étude menée par Amélie Chardac sur la dynamique individuelle d'un millier de rouleurs [62] a permis de confirmer que le mécanisme de Quincke, décrit précédemment, explique correctement la dynamique des rouleurs.

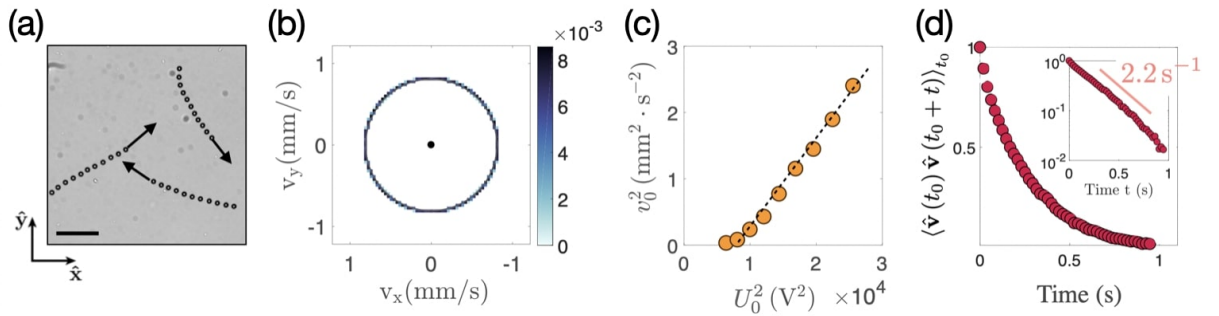


FIGURE 2.2 – **Dynamique individuelle des rouleurs.** (a) Superposition de 11 images de rouleurs de Quincke. On observe que les rouleurs se déplacent à vitesse constante dans des directions différentes. Les trajectoires ne sont pas rectilignes. (b) La distribution angulaire des vitesses est uniforme, et la distribution de la norme de la vitesse est piquée autour de $0.8 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$. Le champ électrique est $E_0 = 120 \text{ V}$. (c) Variations de la norme de la vitesse de propulsion au carré (moyennée sur tous les colloïdes) en fonction de E_0^2 . v_0^2 est une fonction affine de E_0^2 , conformément au mécanisme de Quincke. (d) Fonction d'autocorrélation de la vitesse des particules. Elle décroît exponentiellement selon un coefficient de diffusivité orientationnelle $D_r = 2.2 \text{ s}^{-1}$. Figure empruntée à [62]

La norme de la vitesse des rouleurs colloïdaux évolue en moyenne selon $((E_0/E_Q)^2 - 1)^{1/2}$, voir Fig. 2.2c. La distribution de l'orientation des vitesses est uniforme, ce qui est cohérent avec le phénomène de brisure spontanée de symétrie décrit précédemment, voir Fig. 2.2b.

Cependant, nous constatons visuellement en Fig. 2.2a que, contrairement à ce que prédit l'électrotation de Quincke, les colloïdes ne se déplacent pas en ligne droite, mais leur orientation change au cours du temps. Ces changements d'orientation sont causés par la rugosité des colloïdes et de la surface de l'électrode. La fonction d'autocorrélation des vitesses des particules en Fig. 2.2d décroît exponentiellement selon $\langle \mathbf{v}_i(t_0 + t) \cdot \mathbf{v}_i(t_0) \rangle \sim \exp(-D_r/t)$, où le coefficient de diffusion rotationnel D_r est de l'ordre de 2.2 s^{-1} pour un champ électrique de 120 V. La vitesse des colloïdes étant de l'ordre de $v_0 \sim 1 \text{ mm.s}^{-1}$, nous pouvons estimer la longueur de persistance de leur trajectoire à $l_p \sim 450 \text{ mm}$, soit environ 100 fois leur diamètre.

Ainsi, nous pouvons modéliser la dynamique individuelle des rouleurs de Quincke comme celles de particules browniennes actives (ABP), donc les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = v_0 \hat{\mathbf{v}}_i, \\ \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \sqrt{2D_r} \xi_i(t), \end{cases} \quad (2.3)$$

avec $\mathbf{r}_i$ la position de la particule i , $\hat{\mathbf{v}}_i = (\cos(\theta_i), \sin(\theta_i))$ l'orientation de son vecteur vitesse, et $\xi_i(t)$ un bruit blanc gaussien.

2.1.2 Les rouleurs de Quincke en interaction : un système modèle des liquides de Toner-Tu

Nous avons montré que les rouleurs de Quincke, lorsqu'ils sont éloignés les uns des autres, ont une dynamique de particules browniennes actives. Cependant, quand leur densité augmente, ils interagissent entre eux. Ces interactions sont de natures différentes : électrostatiques, *via* leurs charges de surface et leur dipôle, et hydrodynamiques, à cause du fluide conducteur dans lequel ils roulent. En particulier, une interaction d'alignement, qui entre en compétition avec la diffusion rotationnelle des particules, est à l'origine d'un mouvement collectif spectaculaire : *le flocking* [22]. Dans cette sous-partie, nous décrivons brièvement la transition vers le flocking. Nous donnons ensuite la description hydrodynamique du liquide actif formé par les rouleurs de Quincke.

La transition de flocking

La transition de flocking pour les rouleurs de Quincke a été étudiée par Bricard *et al.* dans [22], nous résumons ici ses principales caractéristiques. Les colloïdes ont été confinés dans un canal de 10 cm de long pour 1 mm de large, voir Fig. 2.3. Nous pouvons distinguer trois phases (Fig. 2.3b) :

- **Gaz.** Dans cette phase à faible fraction surfacique ($\rho < \rho_c \sim 3.10^{-3}$), la dynamique des colloïdes est identique à celle de particules isolées : un comportement de particules browniennes actives. Ainsi, la distribution des vitesses est isotrope, il n'est pas de mouvement collectif.
- **Bande polaire.** Pour une fraction surfacique supérieure à ρ_c , les colloïdes s'auto-assemblent et se déplacent en moyenne dans une même direction. Le système est hétérogène : les rouleurs forment un troupeau dont le front est très marqué et la queue est imprécise. Il y a séparation de phase.

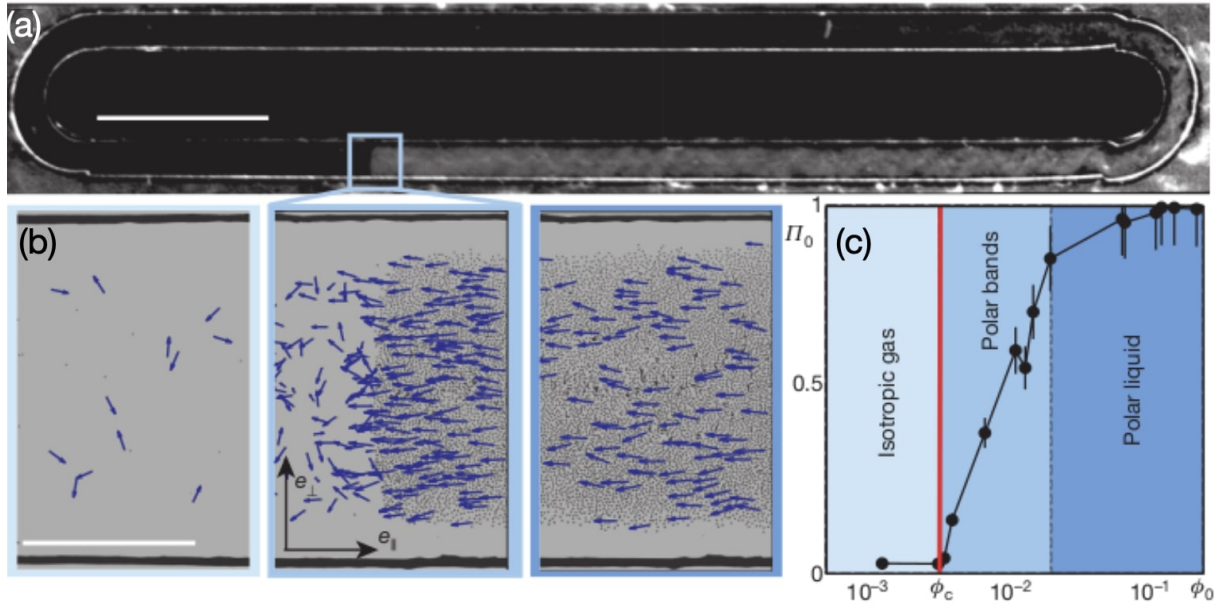


FIGURE 2.3 – **Diagramme de phase des rouleurs de Quincke : du gaz au flock.** (a) Image expérimentale des rouleurs de Quincke en écoulement actif dans un canal en forme de piste d'athlétisme. Echelle : 1.5 cm. (b) Zoom sur les différentes phases. De gauche à droite : gaz, bande, liquide polaire actif ou flock. (c) Module de polarisation moyenne Π en fonction de la fraction surfacique. Au-delà d'une fraction surface critique, les colloïdes s'auto-assemblent et forment une phase ordonnée. Figure empruntée à [22].

- **Liquide polaire actif.** Pour une fraction surface encore plus élevée, à partir de $\rho \sim 3.10^{-2}$ le système est homogène, la vitesse de toutes les particules est orientée en moyenne dans la même direction. La phase est ordonnée.

La transition de flocking pour les rouleurs de Quincke est donc une transition du 1^{er} ordre : nous observons une séparation de phase. Au cours de ma thèse, j'ai principalement utilisé les rouleurs de Quincke dans la phase liquide polaire actif, comme détaillé dans les chapitres 3 et 4.

Description hydrodynamique

L'équation de Toner-Tu [7, 65] ci-dessous offre une description minimale de l'hydrodynamique des liquides polaires actifs :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.4)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = (\alpha - \beta v^2) \mathbf{v} + D \nabla^2 \mathbf{v} - \sigma \nabla \rho. \quad (2.5)$$

La première équation correspond à la conservation de la masse. La seconde équation peut s'interpréter de deux façons. Elle peut être considérée comme l'équation du mouvement d'un fluide newtonien de viscosité cinématique D , qu'une force active $(\alpha - \beta v^2) \mathbf{v}$, forcerait à s'écouler à la vitesse $v_0 = \sqrt{\alpha/\beta}$. Nous pouvons aussi la voir comme une théorie de Ginzburg-Landau en dimension 2, à laquelle nous ajouterions un terme d'advection $\lambda \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ et un terme de pression $\sigma \nabla \rho$.

Crucialement, les termes α et β sont choisis dépendants de la fraction surfacique : $\alpha = \alpha_0(\rho - \rho_c)$ et $\beta = \beta_0 \rho$. Cela permet une transition vers le mouvement collectif pour $\rho > \rho_c$ et une

saturation de la vitesse à $v_0 = \sqrt{\alpha/\beta}$ quand la fraction surfacique ρ devient grande devant ρ_c . La valeur des paramètres hydrodynamiques est récapitulée au paragraphe 2.4. Ils ont été estimés par des travaux précédents [34, 66, 67].

2.1.3 Manipuler un liquide rouleurs de Quincke

Dans cette sous-partie, nous expliquons comment en pratique, nous préparons les colloïdes, puis comment nous fabriquons les dispositifs microfluidiques dans lesquels nous les manipulons. J'apporte un soin particulier à la description des réseaux hydrauliques fabriqués par lithographie UV, qui m'ont servi pour les chapitres 3 et 4.

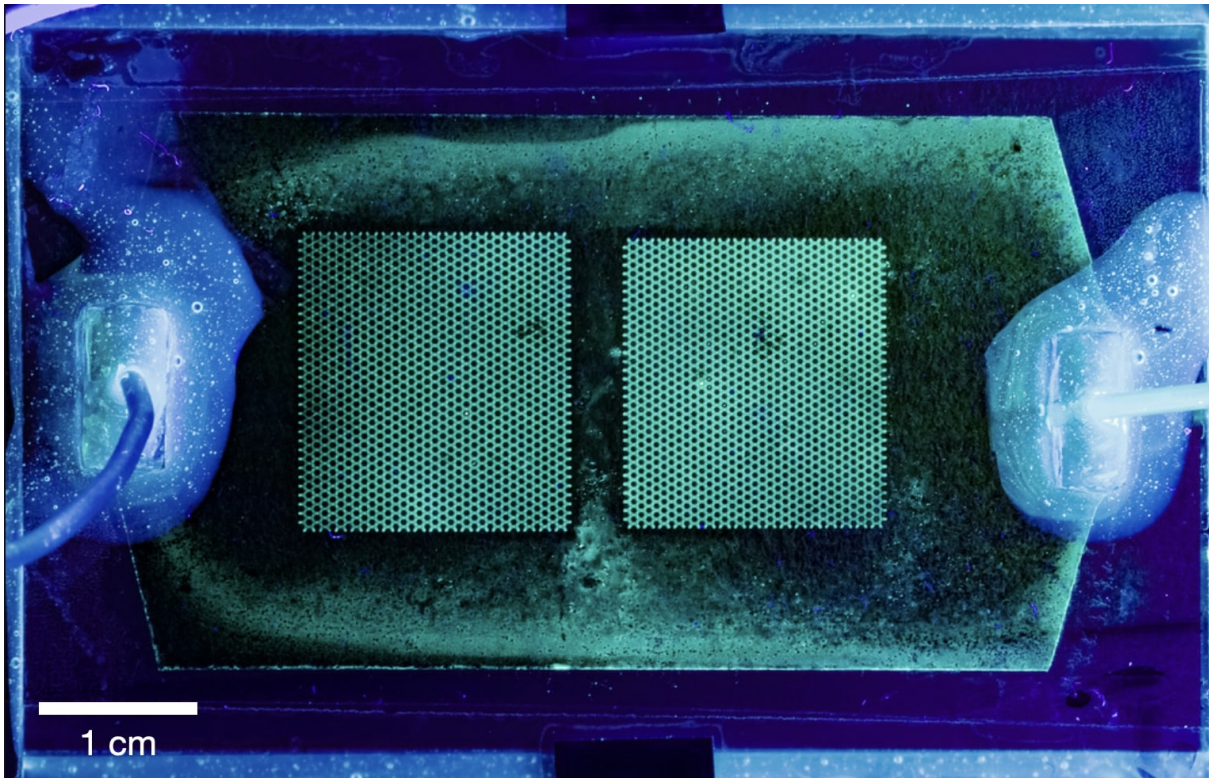


FIGURE 2.4 – Photographie d'un dispositif microfluidique.

Préparation des colloïdes

Les colloïdes utilisés dans toutes les expériences décrites dans ce manuscrit sont des colloïdes fluorescents de polystyrène (Thermo Scientific G0500) de rayon $a = 4.8 \mu\text{m}$. Initialement dispersés dans l'eau, il est nécessaire de les transférer dans un liquide conducteur qui ne soit pas électrochimiquement actif. Nous utilisons pour cela un solvant constitué de sel de sodium de dioctyl sulfosuccinate (AOT) à une concentration de 0.15 mol.L^{-1} dissous dans de l'hexadecane. Le transfert de l'eau vers l'hexadecane + AOT se fait en une dizaine de lavages. Plus récemment, en adaptant le protocole décrit dans [68], nous avons pu réduire le nombre de lavages en transférant d'abord les colloïdes de l'eau vers l'isopropanol, puis de l'isopropanol vers le mélange hexadecane + AOT.

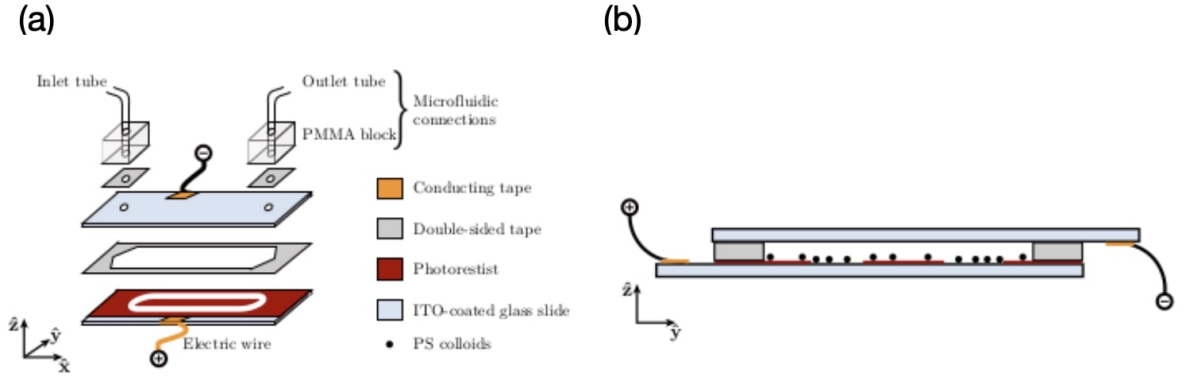


FIGURE 2.5 – **Schéma d'un dispositif microfluidique.** (a) Vue éclatée du dispositif. (1) Lames de verre recouvertes d'une couche d'ITO. Elles servent également d'électrodes. (2) Canal d'injection. Il est réalisé en scotch double-face de $25\ \mu\text{m}$ d'épaisseur. Il fixe la distance entre les deux électrodes et la zone d'injection du solvant et des colloïdes. (3) Résine isolante photosensible. Par lithographie UV on peut creuser les réseaux hydrauliques dans lesquels le liquide actif va s'écouler. (4) Fils électriques. Ils permettent d'imposer un potentiel à la surface des électrodes. (b) Vue latérale du dispositif. Les colloïdes en contact avec l'électrode sont motiles. Les colloïdes sur la résine sont immobiles.

Dispositif microfluidique

Le dispositif microfluidique est schématisé en Fig. 2.5. Il est constitué de deux lames de verre recouvertes d'une couche de 30 nm d'oxyde d'indium-étain (ITO), un alliage conducteur. Les deux faces internes des lames de verre constituent donc les électrodes qui servent à créer le champ électrique de Quincke. Les lames de verres sont maintenues espacées de $25\ \mu\text{m}$ par une couche de scotch double-face. Il sert également de canal d'injection. Deux fils électriques sont connectés aux surfaces conductrices des lames de verre afin de créer le champ électrique E_0 dans la chambre. Le potentiel est imposé entre les deux électrodes par un ensemble générateur basse fréquence + amplificateur.

Le choix d'un scotch espaceur de $25\ \mu\text{m}$ permet d'atteindre le seuil de Quincke, qui est de l'ordre de plusieurs Volts par micromètre, en imposant des tensions entre les électrodes de quelques dizaines (voir quelques centaines) de Volts, facilement atteignables avec un équipement léger de laboratoire.

Il est possible de contrôler la zone dans laquelle les colloïdes sont motiles en utilisant une technique standard de lithographie UV. Nous recouvrons la lame du bas de résine photosensible (en rouge sur la Fig. 2.5), puis nous en exposons certaines parties à la lumière UV. La résine insolée va alors être retirée et laisser l'électrode à nu. Nous pouvons ainsi créer les réseaux hydrauliques de la Fig. 2.6. La résine étant isolante, le champ électrique est toujours nul au-dessus de la résine, et il est non-nul uniquement lorsque l'électrode du bas n'est pas recouverte par la résine. Ainsi, les colloïdes sont immobiles au-dessus de la résine, et peuvent être motorisés quand ils sont au-dessus de l'électrode.

Design de réseaux hydrauliques trivalents ☆ L'étude détaillée au chapitre 3 sur la frustration des écoulements actifs a nécessité le design de plusieurs réseaux trivalents. Les réseaux sont carrés et mesurent approximativement 4 cm^2 . Le paramètre de contrôle principal est le rapport d'aspect $\epsilon = \ell/w$, avec ℓ la longueur d'un canal et w sa largeur (Fig. 2.7a-b). On a réalisé 11 réseaux, pour ϵ allant de 0.6 à 1.1, en gardant la largeur des canaux constante

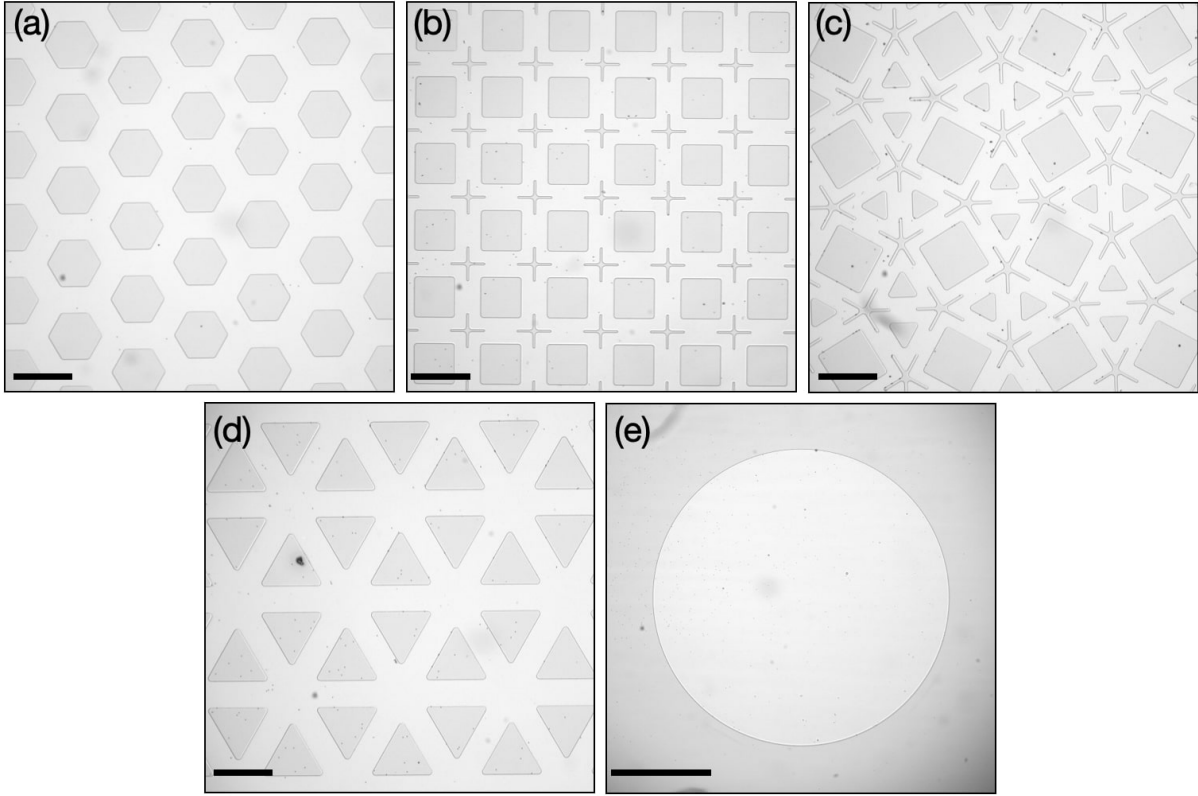


FIGURE 2.6 – **Quelques exemples des motifs réalisés par lithographie UV.** (a) Réseau hexagonal. (b) Réseau carré. (c) Réseau pentavalent. (d) Réseau triangulaire. (e) Piscine circulaire. Barres d'échelle : a-d 0.5 mm, e 1 mm.

$w = 200 \mu\text{m}$. Il a été montré dans [35] que la géométrie microscopique des jonctions pouvait jouer un rôle déterminant sur les motifs d'écoulements actifs, j'ai donc conçu deux types de jonctions : une jonction trivalente simple (Fig. 2.7a), et une jonction trivalente munie d'un "séparateur" (Fig. 2.7b). J'ai également porté une attention particulière aux bords du réseau. Je leur ai donné cette forme de "hérissin" en Fig. 2.7c dans le but de forcer l'apparition de vortex dans les canaux du bord ; le courant qu'ils supportent doit être nul puisque ces canaux sont bouchés à leur extrémité, et que le liquide ne peut pas s'échapper du réseau. Afin de tester la robustesse de notre modèle d'écoulement, j'ai aussi conçu deux autres types de réseaux trivalents. Un réseau brique où les faces sont des rectangles, et un réseau où les faces sont en forme de noeuds papillons, voir Fig. 2.6c-d.

Design des réseaux hydraulique carré et triangulaire ☆ Dans le cadre de l'étude des réseaux carré et triangulaire présentée au chapitre 4, j'ai étudié en détail l'effet de la jonction sur les motifs d'écoulement du fluide. Les réseaux sont de forme carrée et mesurent approximativement 4 cm^2 . La largeur des canaux est $w = 200 \mu\text{m}$ et leur longueur est $\ell = 300 \mu\text{m}$. J'ai fait varier la taille et la symétrie du séparateur pour le réseau carré, voir Fig. 2.8a-d. Pour le réseau triangulaire, nous avons étudié uniquement les deux cas extrêmes d'une jonction simple et d'une jonction avec un séparateur très anisotrope. Dans les deux cas, les bords sont conçus de la même façon : le canal de largeur ℓ se sépare en deux demi-canaux de largeur $\ell/2$ (Fig. 2.8e). La laminarité de l'écoulement est facilitée par un séparateur.

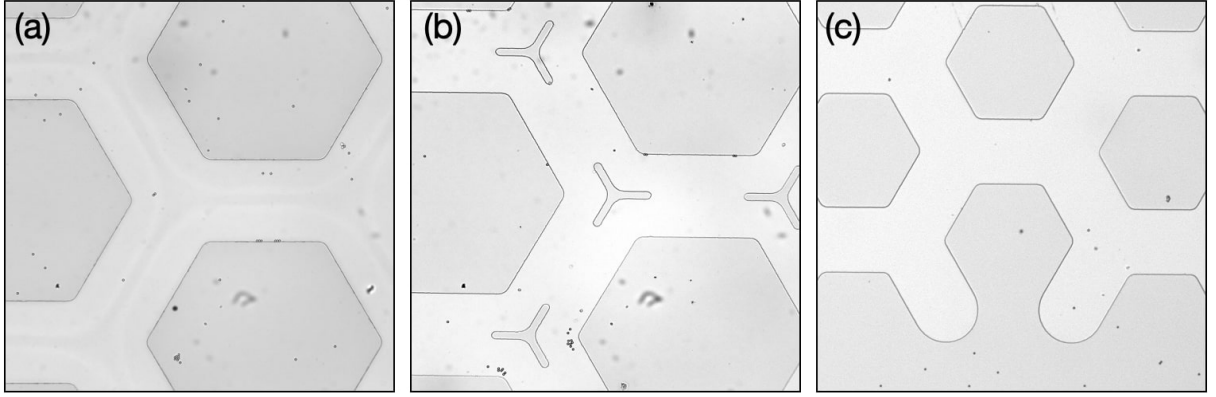


FIGURE 2.7 – **Géométrie des jonctions et des bords du réseau hexagonal.** (a) Jonction trivalente simple. (b) Jonction trivalente avec séparateur. (c) Bord du réseau. Le canal étant bouché, le courant qu'il supporte est obligatoirement nul. Les canaux des trois images ont une largeur de $200\ \mu\text{m}$.

2.1.4 Observer et analyser un liquide de rouleurs de Quincke

Dans cette sous-partie, nous détaillons les techniques d'observation et d'analyse mises en oeuvre pour accéder à la position (quand il est possible de les distinguer), la densité et la vitesse des rouleurs de Quincke. Ces trois grandeurs sont à la base de toutes les mesures réalisées dans les chapitres suivants.

Observation du système

Nous imageons le système avec un microscope Nikon AZ100 et un grossissement allant de 0.6 à 3 suivant la taille du motif à filmer, la résolution souhaitée, ou que nous souhaitons mesurer des grandeurs lagrangiennes ou eulériennes. Les acquisitions sont réalisées avec une caméra rapide Ximea Luxima LUX160 à des fréquences de 200 à 500 fps, selon la vitesse des colloïdes. La caméra a une résolution maximale de 16 Mpx, et des pixels de $3.9\ \mu\text{m}$ de côté. Les phénomènes auxquels je me suis intéressé pendant ma thèse sont stationnaires, et des acquisitions de quelques secondes sont suffisantes pour mener des analyses quantitatives poussées. Ces acquisitions génèrent un débit de données de l'ordre du Go.s^{-1} , que l'on enregistre sur 4 disques durs montés en RAID0 pour une capacité totale de 5To.

Grandeurs lagrangiennes

Lorsque le système à observer est assez petit, de l'ordre de quelques mm^2 , il est possible de zoomer suffisamment sur le système et d'obtenir la dynamique individuelle des rouleurs. Il faut détecter les particules sur chaque image, et reconstruire les trajectoires de toutes les particules.

Détection. Les particules sont détectées en utilisant un algorithme écrit en C++, développé dans le groupe et inspiré de celui de Lu *et al.* [69]. Il soustrait d'abord le fond de l'image, et détecte les particules avec une précision sub-pixel en ajustant les maxima d'intensité avec une gaussienne. Il permet de détecter plus de 32000 particules à une fraction surfacique de l'ordre de 0.78 (Fig. 2.9a-b). Une fois la détection réalisée, le champ de densité peut être reconstruit en comptant le nombre de particules dans des boîtes de taille de l'ordre de quelques diamètres de particules (voir Fig. 2.10a).

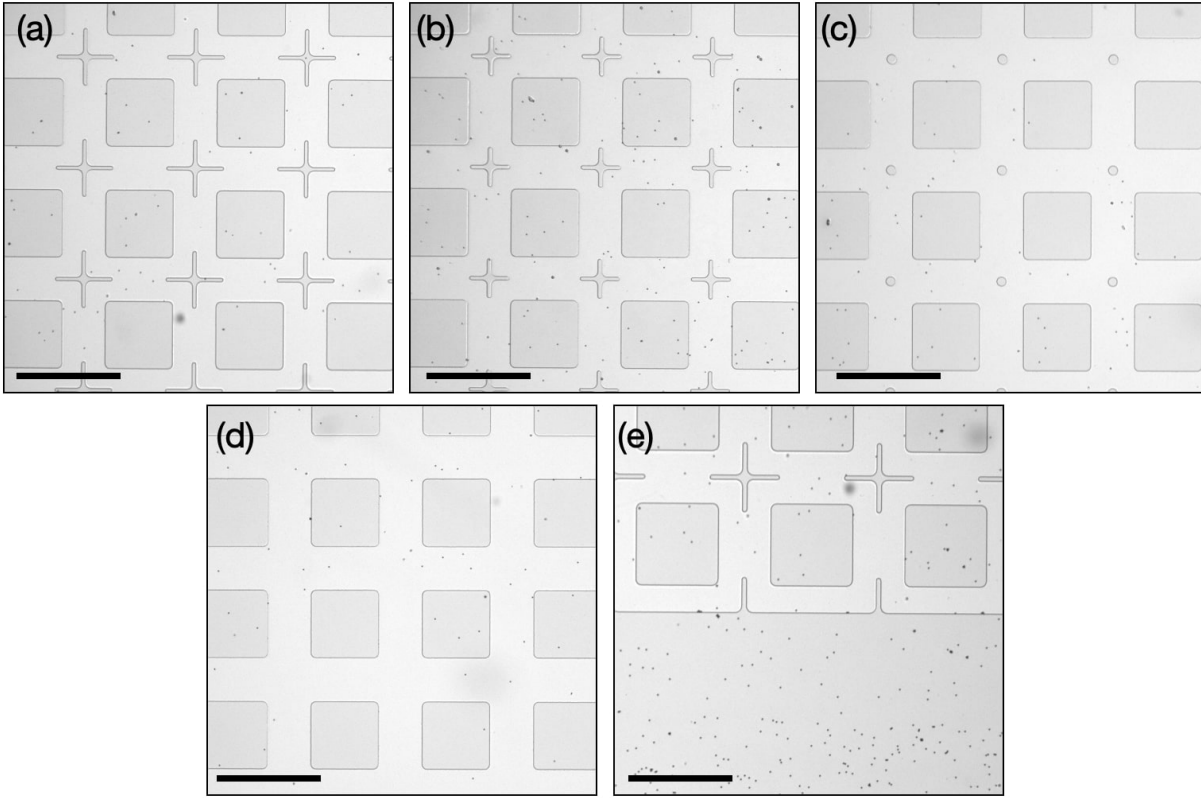


FIGURE 2.8 – **Géométrie des jonctions et des bords du réseau carré** (a) - (d) Géométrie des jonctions du réseau carré. La taille et l'anisotropie des séparateurs varient jusqu'à l'absence totale des séparateurs. Barres d'échelle : 0.5 mm. (e) Géométrie du bord du réseau. Le canal de largeur connecté au bord se sépare en deux demi-canaux deux fois moins larges. L'écoulement du liquide est facilité par la présence d'un séparateur. Barre d'échelle : 0.4 mm.

Reconstruction des trajectoires. Une fois les particules détectées sur chaque image du film, nous reconstruisons les trajectoires de chacune des particules en utilisant le code Matlab développé par D. Blair et E. Dufresne [70] d'après l'algorithme de Crocker et Grier [71]. En pratique, ce code nécessite que le déplacement des particules entre chaque frame soit inférieur ou de l'ordre de leur rayon. La fréquence d'acquisition des films doit donc être choisie en conséquence. L'algorithme est remarquablement rapide et ne prend que quelques minutes pour traiter un millier d'images contenant chacune environ 30000 particules.

Mesure des vitesses. Nous calculons la vitesse d'une particule i à l'instant t à partir de son déplacement entre n images (voir Fig. 2.10b), selon la formule suivante :

$$\mathbf{v}_i(t) = \frac{\mathbf{r}_i(t + n \times \delta t) - \mathbf{r}_i(t)}{n \times \delta t} \quad (2.6)$$

où $\mathbf{r}_i(t)$ et $\mathbf{v}_i(t)$ sont la position et la vitesse de la particule i à l'instant t , et δt est l'intervalle de temps séparant deux images. n est un entier qu'on choisit de façon à ce que la mesure de $\mathbf{v}_i$ soit pertinente. En effet, il est possible que la fréquence d'acquisition soit trop élevée par rapport à la vitesse des particules, et la vitesse calculée avec un n trop petit correspondrait au bruit de mesure.

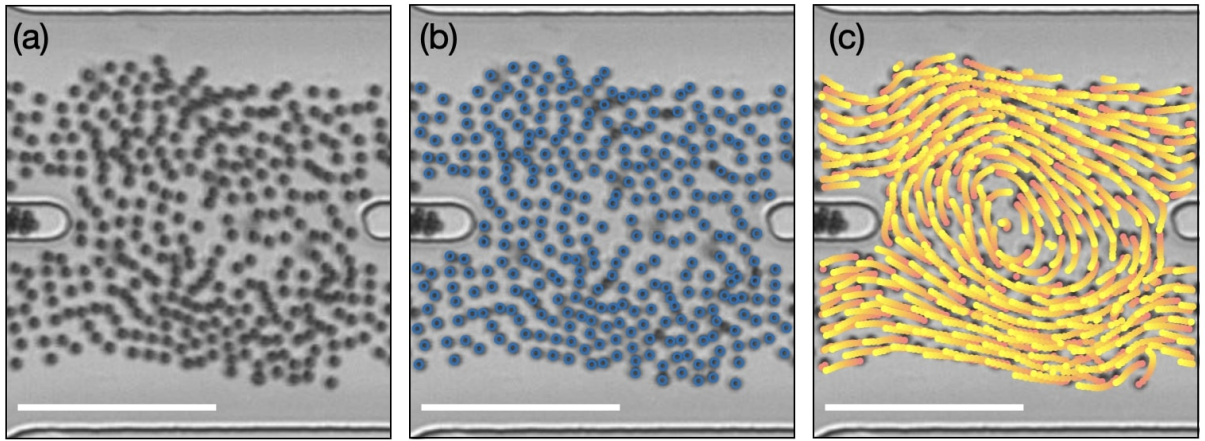


FIGURE 2.9 – **Reconstruction des trajectoires individuelles des particules** (a) Image expérimentale brute. Chaque point blanc correspond au centre d'un colloïde. Le côté de l'image mesure environ $800\ \mu\text{m}$. (b) Même image que (a), les cercles bleus symbolisent les colloïdes détectés. (c) Même image que (a). Les trajectoires des particules sont représentées par les cercles dont la couleur varie en fonction du temps, du plus foncé au plus clair. Barres d'échelle : $100\ \mu\text{m}$.

Grandeurs eulériennes

Il est évidemment possible de reconstruire des grandeurs eulériennes à partir de mesures lagrangiennes. La mesure de la densité locale en Fig. 2.10a en est un exemple, et on peut suivre le même processus pour obtenir le champ de vitesse. Cependant, lorsque la région d'intérêt est grande, ce qui est le cas des réseaux hydrauliques qui mesurent plusieurs centimètres carré, il est impossible de détecter les colloïdes, et il devient nécessaire de mesurer les champs de densité et de vitesse par d'autres méthodes.

Champ de densité ☆ Nous mesurons le champ de densité en exploitant le phénomène d'épifluorescence des colloïdes. L'intensité émise par la fluorescence est proportionnelle à la fraction surfacique des colloïdes, voir Fig. 2.11a. Nous avons obtenu cette courbe d'étalonnage à partir d'images statiques, en mesurant d'abord l'intensité émise par fluorescence, puis, avec un grossissement supérieur, en utilisant un algorithme conventionnel de détection des particules (ImageJ). Les colloïdes sont éclairés à une longueur d'onde de $468\ \text{nm}$. L'intensité émise par fluorescence étant très faible, nous filmons l'expérience avec une caméra qCMOS Hamamatsu ORCA-Quest montée sur un microscope Nikon AZ100 avec un objectif 2X sur une profondeur de 8 bits. Comme il n'est pas possible d'obtenir une image de l'ensemble du réseau en une seule acquisition avec cette caméra à cause du débit de données, nous effectuons des acquisitions multiples puis nous assemblons les images, ce qui est réalisable car l'écoulement est stationnaire. En moyennant temporellement les images, nous obtenons une carte de l'intensité lumineuse, qui peut être directement convertie en carte de densité ou de fraction surfacique, voir Fig. 2.11b.

Champ de vitesse Le champ de vitesse est mesuré par vélocimétrie par image de particules (PIV). Dans le cas des réseaux hexagonaux, de taille caractéristique $2\ \text{cm}$, la taille typique des boîtes de PIV est de $24 \times 24\ \mu\text{m}^2$, avec un recouvrement d'une demi-boîte. Dans le cas des réseaux hexagonaux, les canaux mesurent typiquement $200 \times 100\ \mu\text{m}^2$. Nous obtenons donc une centaine de vecteurs vitesse par canal, ce qui est suffisant pour déterminer précisément la vitesse moyenne dans le canal.

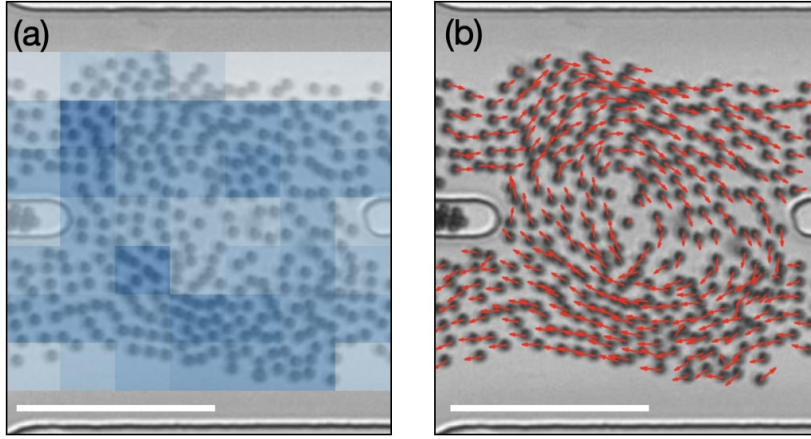


FIGURE 2.10 – Mesure de la densité locale de particules et de leur vitesse individuelle (a) Image expérimentale à laquelle est superposé le champ de densité locale. (b) Image expérimentale à laquelle est superposée la vitesse individuelle des colloïdes. Barres d'échelle : 100 μm

2.2 Analyser les motifs d'écoulement dans un réseau hydraulique frustré ☆

Dans un réseau hydraulique hexagonal, les lignes de courant, moyennées à l'échelle des canaux, forment un gaz de boucles auto-évitantes. Dans cette section, je décris les algorithmes et méthodes utilisés pour extraire ces boucles auto-évitantes des films expérimentaux. Je décris ensuite les principales observables qui caractérisent leur géométrie, et seront discutées au chapitre 3.

2.2.1 Construction des lignes de courant

Moyenne du courant sur les canaux

Le champ de vitesse eulérien est mesuré pour le réseau complet par la méthode de PIV décrite dans la section précédente. La taille d'une boîte est de 48 μm , et les boîtes sont espacées de 24 μm . L'écoulement étant stationnaire sur une durée supérieure à celle de l'acquisition, nous moyennons le champ de vitesse sur toute la durée de l'acquisition, sans perdre d'information. La densité est constante sur tout l'écoulement, nous pouvons donc assimiler le champ de courant $\rho(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r})$ au champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r})$.

Une fois le champ de vitesse (ou de courant) moyenné sur le temps mesuré, nous obtenons les lignes de champ d'après la démarche suivante :

- Nous moyennons spatialement le champ de vitesse sur la surface de chaque canal. La zone effective de moyennage est représentée par un rectangle rouge en Fig. 2.12(a). Nous obtenons un unique vecteur vitesse $\bar{\mathbf{v}}$ par canal, schématisé en Fig. 2.12(b).
- Pour chaque canal, nous définissons un vecteur unitaire $\hat{\mathbf{t}}$ dans la direction du canal, et dont le sens est toujours des sites 'a' vers les sites 'b' (voir Fig. 2.12(c)). Nous attribuons à chaque canal la quantité scalaire $\bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{t}}$.
- Finalement, nous allouons à chaque canal e un courant Φ_e à valeurs dans $\{-1, 0, +1\}$ en seuillant la valeur de $\bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{t}}$:

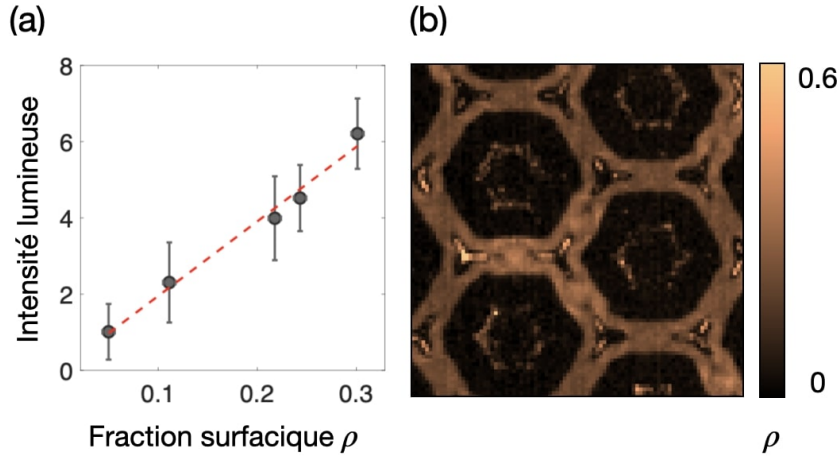


FIGURE 2.11 – **Mesure de la fraction surfacique locale de particules par fluorescence.** (a) Intensité lumineuse en fonction de la fraction surfacique de particules. Les deux quantités sont proportionnelles. (b) Carte de fraction surfacique obtenue par fluorescence.

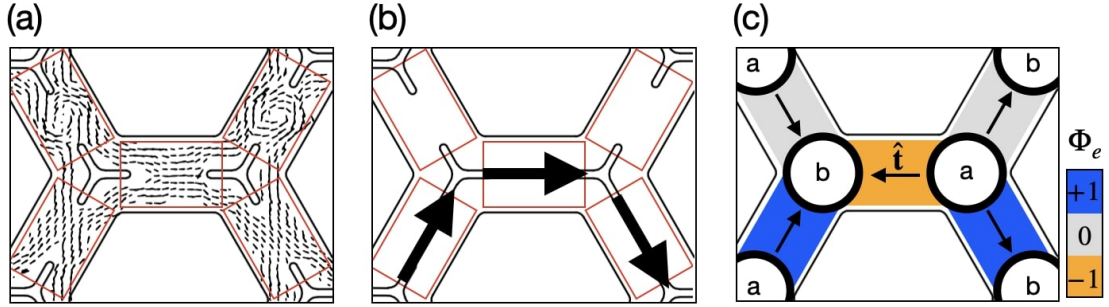


FIGURE 2.12 – **Principe de construction des streamlines.** (a) Champ de vitesse obtenu par PIV. Les zones de moyennage sont symbolisées par un rectangle rouge. (b) Vitesse moyennée par canal. (c) Valeur de Φ_e pour les 5 canaux visibles. Le vecteur tangent unitaire $\hat{t}$ est orienté des sites 'a' vers les sites 'b'.

$$\Phi_e = \begin{cases} +1 & \text{si } \bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{t}} > 0.5 \\ -1 & \text{si } \bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{t}} < 0.5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.7)$$

Le courant Φ_e dans un canal e est ainsi assimilé à un spin 1 classique.

Algorithme de parcours en profondeur

L'opération de moyenne décrite précédemment permet de différencier les canaux supportant un courant non-nul des canaux supportant un courant nul. Les canaux supportant un courant non-nul forment des boucles auto-évitant, que nous détectons en utilisant un algorithme de parcours de graphe en profondeur. L'implémentation de cet algorithme, assez longue en pratique, peut être résumée succinctement comme suit :

- Parcourir les canaux réseau de gauche à droite et de bas en haut jusqu'à identifier un canal e_1 possédant un courant Φ_{e_1} non-nul et n'appartenant à aucune boucle déjà détectée. Enregistrer e_1 et Φ_{e_1} .

- Parcourir des canaux e_i de la boucle de courant contenant e_1 jusqu'à atteindre à nouveau le canal $e - 1$. Enregistrer tous les e_i et Φ_{e_i} .
- Recommencer le parcours des canaux réseau de gauche à droite et de bas en haut.

2.2.2 Mesures sur les lignes de courant

En utilisant l'algorithme de parcours en profondeur, on obtient les positions $\{\mathbf{r}_i\}$ et les courants $\{\Phi_{e,i}\}$ pour toutes les boucles de courant. Nous pouvons alors calculer plusieurs grandeurs afin de caractériser leur géométrie et leur dégénérescence.

Rayon de giration et exposant ν

Le rayon de giration est une grandeur géométrique issue de la physique des polymères caractérisant la distance moyenne des monomères au centre de masse du polymère. Nous calculons cette quantité pour une boucle auto-évitante de longueur L de la façon suivante :

$$R_g^2 = \frac{1}{L} \sum_i \left(\mathbf{r}_i - \frac{1}{L} \sum_i \mathbf{r}_i \right)^2. \quad (2.8)$$

En particulier, il existe une loi d'échelle entre le rayon de giration et la longueur de la boucle $R_g \sim N^\nu$ qui contient des informations sur la criticalité et la classe d'universalité du système. L'exposant ν est effectivement lié à la dimension fractale D_f par la relation suivante : $\nu = 1/D_f$. On rappelle par exemple que $\nu = 1/2$ pour le mouvement brownien, $\nu = 4/7$ [72, 73] pour les murs de domaine d'un système d'Ising antiferromagnétique sur réseau triangulaire, $\nu = 0.75$ pour une marche aléatoire auto-évitante, $\nu = 1$ pour un cercle où un ligne droite.

En pratique, nous mesurons cet exposant ν en calculant R_g pour chacune des boucles de plusieurs répliques d'une même expérience. Nous moyennons ensuite le nuage de points dans des boîtes de largeur $\delta\ell$ (Fig. 2.13a). La taille des boîtes $\delta\ell$ est constante en échelle logarithmique. Nous ajustons finalement la courbe moyenne avec un loi de puissance, voir (Fig. 2.13b).

Fonction de corrélation de paire

Une observable typique qui distingue les modèles à boucles est la probabilité $C(r)$ que deux arêtes séparées par une distance r appartiennent à la même boucle [50, 74, 75]. $C(r)$ décroît comme une loi de puissance dans les phases critiques des modèles de boucles. Par exemple, $C(r) \sim r^{-1/2}$ pour le modèle de boucles $O(1)$, et $C(r) \sim r^{-1}$ pour le modèle de boucles $O(2)$. Dans les phases non-critiques, $C(r)$ décroît exponentiellement. Ces comportements sont attendus pour un système dans la limite thermodynamique. Dans le cas de réseaux de taille finie, nous nous attendons à ce qu'à une distance de l'ordre de la taille des réseaux, les lois de puissance soient écrantées exponentiellement, y compris pour une phase critique.

Overlap

Nous quantifions la différence entre les motifs d'écoulement de deux répliques α et β de la même expérience avec la fonction d'overlap $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$:

$$\mathcal{O}_{\alpha\beta} = \langle 1 - |\Phi_{e,\alpha} - \Phi_{e,\beta}| \rangle_e \quad (2.9)$$

où $\Phi_{e,\beta}$ est le courant supporté par un canal e pendant la réplique α et $\langle \dots \rangle_e$ désigne une moyenne sur tous les canaux e . Nous pouvons expliciter trois valeurs limites à $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$. Si les deux répliques α et β sont identiques, $|\Phi_{e,\alpha} - \Phi_{e,\beta}| = 0$ pour tous les canaux e et $\mathcal{O}_{\alpha\beta} = 1$. A l'inverse, si tous les courants sont opposés, $|\Phi_{e,\alpha} - \Phi_{e,\beta}| = 2$ pour tous les canaux e , et donc $\mathcal{O}_{\alpha\beta} = -1$. Dans le cas

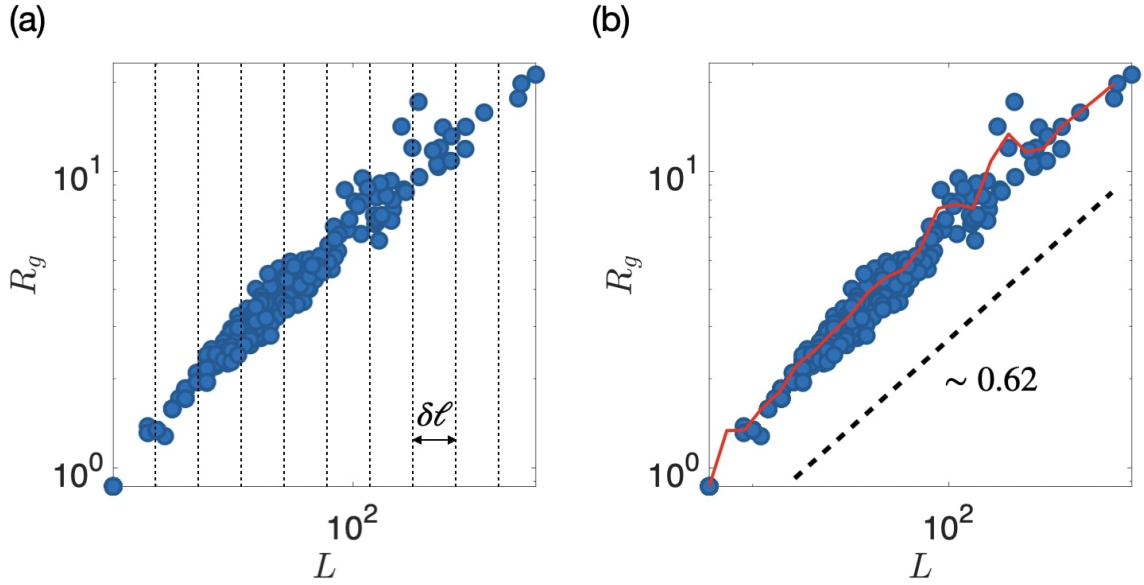


FIGURE 2.13 – Mesure de l'exposant ν à partir du rayon de giration des boucles pour $\epsilon = 0.74$. (a) Rayon de giration des boucles de courant R_g en fonction de leur longueur L . Chaque point correspond à une boucle. Les données de 10 répliques de la même expérience sont reportées dans ce graphique. Les points sont moyennés dans des boîtes de largeur $\delta \ell$. Les boîtes sont espacées logarithmiquement. Elles sont schématisées par les droites verticales en pointillés. (b) La courbe moyenne de R_g en fonction de L est tracée en rouge. Elle est ajustée selon une loi de puissance pour mesurer ν . Nous mesurons un exposant de $\nu \sim 0.62$.

où les $\Phi_{e,\beta}$ sont complètement décorrélés, on peut calculer l'overlap moyen $\langle \mathcal{O}_e^{\alpha\beta} \rangle = 1 - 4p(1-p)$, avec p la probabilité qu'un canal supporte un courant nul.

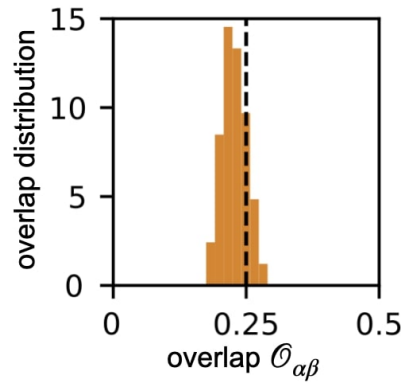


FIGURE 2.14 – Distribution de la fonction d'overlap $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$ pour un rapport d'aspect $\epsilon = 0.7$. La valeur attendue pour des répliques complètement décorrélées est symbolisée par la ligne en pointillés verticale. La distribution d'overlap est piquée autour d'une valeur proche.

La fraction p de canaux supportant un courant nul est une grandeur facilement mesurable expérimentalement. Nous calculons donc la fonction d'overlap $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$ pour toutes les répliques d'une expérience, et nous comparons sa distribution avec la valeur $1 - 4p(1-p)$ attendue dans le cas d'une configuration $\{\Phi_e\}$ complètement décorrélée, voir Fig. 2.14. Nous constatons que la distribution des $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$ est piquée autour d'une valeur proche de $1 - 4p(1-p)$, ce qui indique que

les écoulements sont décorrélés d'une expérience à l'autre, et donc que le système est hautement dégénéré (et qu'il est pertinent de mener une étude statistique sur plusieurs réalisations de la même expérience).

2.2.3 Imbrication des boucles

Nous pouvons également mesurer le degré d'imbrication des boucles les unes dans les autres. Cette observable n'est pas directement mesurable à partir des positions et courants des boucles, il faut d'abord établir une correspondance bijective entre les motifs d'écoulement (c'est-à-dire l'ensemble des $\{\Phi_e\}$) et un champ de hauteur h .

Construire une carte topographique à partir d'un gaz de boucles orientées

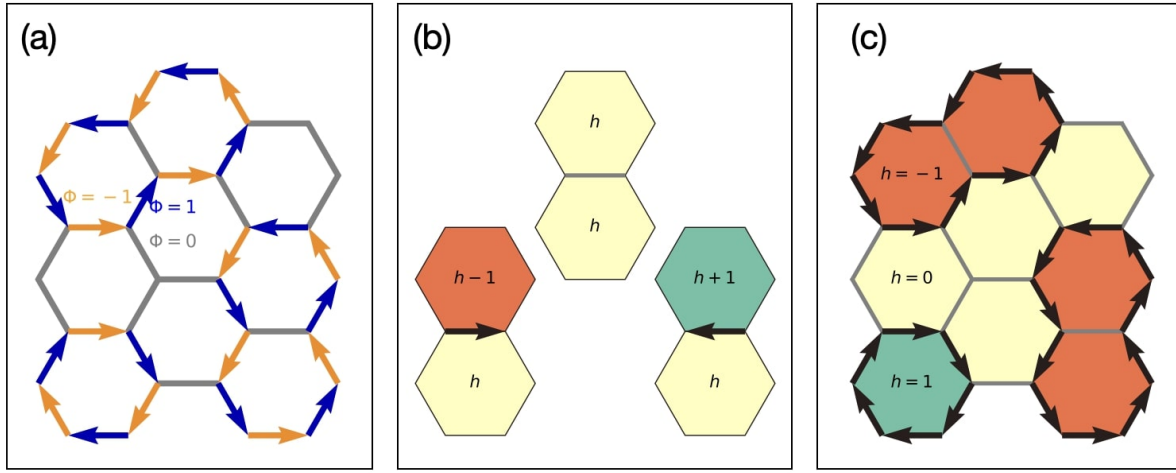


FIGURE 2.15 – (a) Exemple de configuration de $\{\Phi_e\}$. (b) Règles de correspondance avec la carte topographique. S'il n'y a pas de flèche, les deux faces ont la même hauteur. S'il y a une flèche pointant vers la droite (resp. gauche), la hauteur augmente de 1 (resp. diminue de 1). (c) Carte topographique correspondant à (a).

Les boucles étant orientées, nous pouvons définir le *winding numbers* de chaque boucle autour d'une face donnée f . Il est égal à ± 1 lorsque la face est lassoisée par la boucle, et 0 sinon. Le champ de hauteur de la carte topographique est alors défini sur chaque face du réseau comme la somme des *winding numbers* de toutes les boucles s'enroulant autour de ce point. La hauteur est prise nulle par convention à l'extérieur du réseau. Cette définition, bien que compacte et intuitive, est assez difficile à mettre en oeuvre pour mesurer le champ de hauteur h . En pratique, l'algorithme de mesure du champ de hauteur fonctionne comme suit.

A partir d'une face f associée à une hauteur h , nous nous déplaçons vers la face voisine f' en traversant une arête e . Si e possède un spin pointant vers la droite (resp. la gauche), nous lui attribuons la valeur $h' = h - 1$ (resp. $h' = h + 1$), voir Fig. 2.15b. Les directions droite et gauche sont définies par rapport au vecteur reliant les centres de f et f' . Lorsque l'arête supporte un courant nul ($\Phi_e = 0$), alors $h' = h$. Le champ de hauteur résultant ne dépend pas de la manière dont le réseau est exploré. Cette procédure est très similaire à la mise en correspondance standard des modèles de boucle $O(n)$ avec les modèles solide sur solide, discutée par exemple dans [52].

Degré d'imbrication des boucles

Le degré d'imbrication des boucles est alors défini comme la différence de hauteur maximale sur le réseau $\Delta h = h_{max} - h_{min}$. Nous mesurons Δh et nous le moyennons pour toutes les répliques d'une même expérience.

2.3 Analyser les motifs d'écoulement dans des réseaux hydrauliques de valence paire ☆

Lorsque la valence des réseaux hydrauliques est paire, l'analyse des lignes de courant est différente de celle présentée dans la section précédente. En effet, la parité de la valence ne frustre pas la laminarité des écoulements. Pour un réseau hydraulique de valence $2n$, nous observons expérimentalement une majorité de jonctions avec n canaux *in* et n canaux *out*. Il en résulte que les lignes de courant ne forment pas de boucles auto-évitantées comme dans les réseaux de valence 3. Cependant, nous pouvons les interpréter comme des systèmes de spins sur réseau, et calculer leurs propriétés géométriques. Le moyen le plus efficace d'obtenir ces propriétés géométriques (en particulier de mesurer les exposants critiques) est d'extraire artificiellement un système de boucles de ces systèmes de spins. Nous pouvons ensuite mesurer les mêmes observables que précédemment de ces boucles.

2.3.1 Réseau carré

Comme pour l'écoulement dans les réseaux en nid d'abeille, la norme du courant ne peut prendre que 2 valeurs : +1 ou 0. Nous pouvons ainsi attribuer à chaque canal un spin orienté dans le sens du courant si la norme de celui-ci vaut 1, ou une absence de spin pour un courant nul. La conservation de la masse impose qu'à chaque jonction un nombre égal de canaux supportent un courant *in* et un courant *out*. La parité de la valence ne frustre pas l'écoulement, et ainsi la majorité des jonctions comporte 2 canaux *in* et 2 canaux *out*. Cela permet d'interpréter l'écoulement actif comme un système de glace de spin sur réseau carré, la conservation de la masse jouant de rôle de règle de la glace. La glace de spin correspondante est appelée modèle à 6 sommets décrite en annexe de l'introduction [43].

Du modèle à 6 sommets vers un modèle de boucles à 2 couleurs

Comme nous l'avons expliqué en détail en annexe introduction, il est possible de faire correspondre le modèle à 6 sommets avec un modèle de boucles, en passant d'abord par un modèle de solide sur solide [53]. En pratique, nous n'utilisons pas cette correspondance, puisqu'elle n'est pas bijective. Nous utilisons une correspondance directe entre le modèle à 6 sommets et un modèle de boucles à 2 couleurs. Nous résumons cette correspondance à la Fig 2.16. Tout d'abord, notons que le réseau carré est bipartite : chacun des sites bleus de la Fig. 2.16a n'est en contact qu'avec des sites roses, et inversement. Nous définissons le signe du courant comme positif lorsqu'il est dirigé d'un site bleu vers un rose, et négatif sinon. La correspondance s'effectue ensuite de la façon suivante (Fig. 2.16b) :

- une portion de boucle bleue est placée partout où une flèche part d'un site bleu pour relier un site rose
- une portion de boucle rose est placée partout où une flèche part d'un site rose pour relier un site bleu

Notons qu'il est toujours possible de définir un champ de hauteur et donc un modèle de solide sur solide à partir d'un modèle de boucles [74]. Mais dans le cas d'un modèle de boucles de deux couleurs, celui-ci est difficile à visualiser, et sans intérêt pratique.

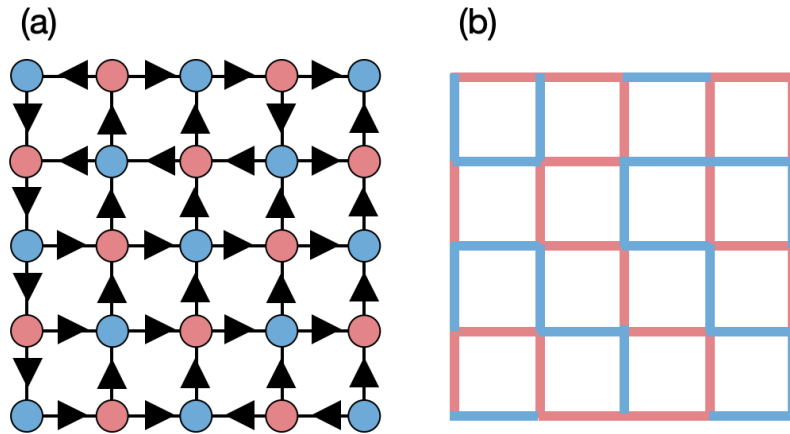


FIGURE 2.16 – **Correspondance entre le modèle à 6 sommets et un modèle de boucles de 2 couleurs.** (a) Configuration de modèle à 6 sommets. Le réseau carré est bipartite. Les sites bleus ne sont adjacents qu'à des sites roses, et inversement. (b) Configuration de boucles de deux couleurs correspondants. Les boucles bleues sont formées par les flèches pointant d'un site bleu vers un site rose. Les boucles roses sont formées par les flèches pointant d'un site rose vers un site bleu.

2.3.2 Réseau triangulaire

La correspondance entre un écoulement dans un réseau hydraulique triangulaire (de valence 6) s'effectue en plusieurs étapes, que nous détaillons ci-dessous.

L'écoulement actif comme un modèle à 20 sommets

Tout d'abord, comme pour l'écoulement dans les réseaux en nid d'abeille et carré, la norme du courant ne peut prendre que 2 valeurs : +1 ou 0. Nous pouvons ainsi attribuer à chaque canal un spin orienté dans le sens du courant si la norme de celui-ci vaut 1, ou une absence de spin pour un courant nul. La conservation de la masse impose qu'à chaque jonction un nombre égal de canaux supportent *in* qu'un courant *out*. La parité de la valence ne frustre pas l'écoulement, et ainsi la majorité des jonctions comporte 3 canaux *in* et 3 canaux *out*. Cela permet d'interpréter l'écoulement actif comme un système de glace de spin sur réseau triangulaire, la conservation de la masse jouant de rôle de règle de la glace. La glace de spin correspondante à l'écoulement est appelée modèle à 20 sommets [43, 76]. Il s'agit d'un modèle sur réseau introduit par Kelland en 1974 dont les spins sont placés sur les arêtes du réseau triangulaire. Il tient son nom des 20 configurations de spins possibles satisfaisant la règle de la glace de spin. Ces configurations sont reproduites à la Fig. 2.17. Ce modèle fait aujourd'hui l'objet d'un regain d'intérêt dans la communauté mathématique, et notamment en combinatoire pour ses liens avec le pavage par dominos du triangle aztèque [77].

Du modèle à 20 sommets vers un modèle à 6 sommets sur réseau de Kagomé

A la différence du modèle à 6 sommets sur réseau carré de la section précédente, il n'est pas possible d'établir de bijection entre un sommet et une portion de boucle. Il est d'abord nécessaire de faire correspondre la configuration de modèle à 20 sommets avec un modèle à 6 sommets, cette fois-ci sur réseau de Kagomé. La correspondance est issue de [78]. Elle s'effectue en deux étapes, schématisées à la Fig. 2.18.

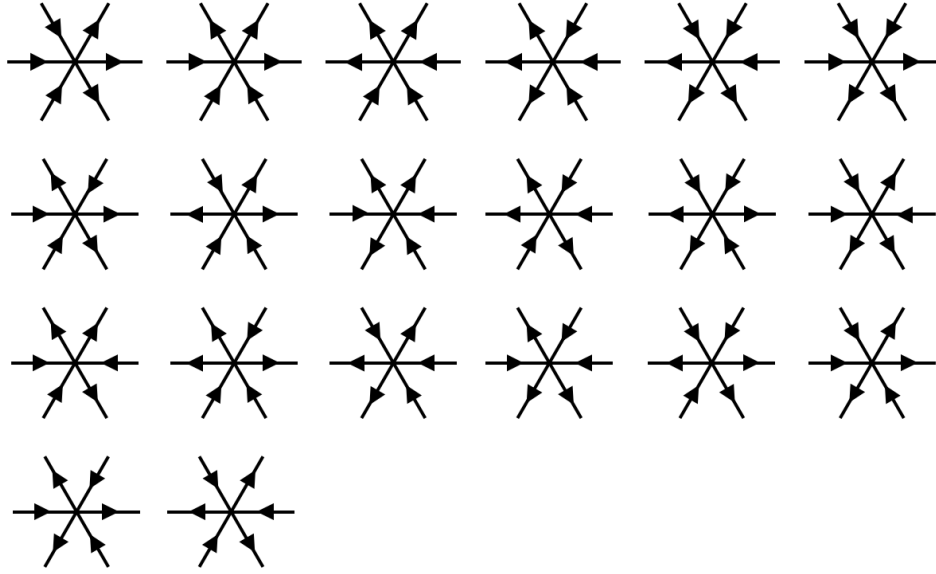


FIGURE 2.17 – Les 20 configurations du modèle à 20 sommets.

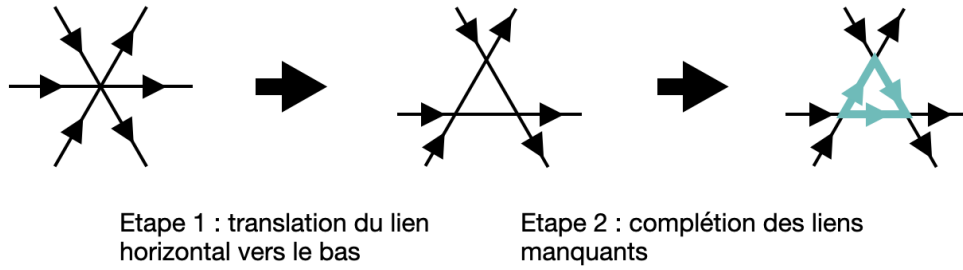


FIGURE 2.18 – Correspondance entre le modèle à 20 sommets et un modèle à 6 sommets sur réseau de Kagomé. (a) Étape 1 : le lien horizontal est décalé vers le bas. Cela transforme le réseau de Kagomé en réseau triangulaire, et crée 3 nouvelles arêtes. (b) Étape 2 : complétion des liens créés.

- L'étape 1 consiste en décaler le lien horizontal vers le bas. Cela crée 3 nouvelles arêtes par sommet, et le réseau triangulaire est transformé en réseau de Kagomé.
- L'étape 2 consiste en l'ajout de spins sur les arêtes créées.

Notons que cette correspondance n'est pas univoque. Les deux derniers sommets représentés sur la Fig.2.17 peuvent être complétés de 2 façons différentes, voir Fig.2.19. En pratique, il est nécessaire de choisir une convention. Nous verrons dans la suite que cette convention est sans importance pour la correspondance avec un modèle de boucles.

Du modèle à 6 sommets sur réseau de Kagomé vers un modèle de solide sur solide

La troisième étape de cette correspondance consiste en l'interprétation du modèle à 6 sommets sur réseau de Kagomé en un modèle de solide sur solide [52]. A chaque face du réseau est attribuée une altitude h , avec la règle simple :

- h augmente de $1/2$ lorsque l'on passe d'une face à l'autre du réseau en traversant une flèche orientée vers la droite.

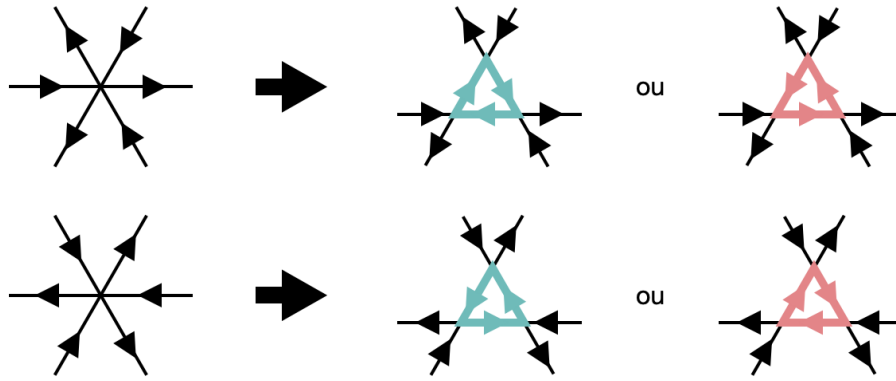


FIGURE 2.19 – Équivoque de la correspondance entre le modèle à 20 sommets et le modèle à 6 sommets sur réseau Kagomé. Les arêtes créées peuvent être complétées de deux manières différentes.

- h diminue de $1/2$ lorsque l'on passe d'une face à l'autre du réseau en traversant une flèche orientée vers la gauche.
- L'altitude à l'extérieur du réseau est nulle par convention.

Ainsi, les faces hexagonales possèdent une altitude h entière, et les faces triangulaires possèdent une altitude h demi-entière. Les configurations du champ h autour de chaque sommet sont récapitulées à la Fig. 2.20

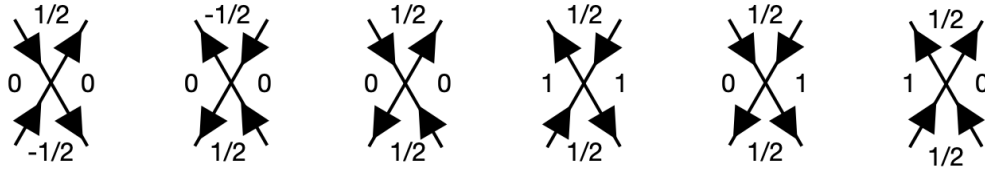


FIGURE 2.20 – Configurations possibles de l'altitude h à chaque sommet. Les faces hexagonales ont une altitude h entière, et les faces triangulaires une altitude demi-entière. Les h montrés ici sont un exemple, les altitudes au niveau d'un sommet peuvent être augmentées ou diminuées d'un entier.

Du modèle de solide sur solide vers un modèle de boucles

La correspondance entre le modèle de solide sur solide et un modèle de boucles s'effectue simplement en reliant d'une portion de boucle les faces triangulaires séparant deux faces hexagonales dont la différence d'altitude est égale à 1, voir Fig. 2.21. En d'autres termes, les boucles sont les lignes de niveau de l'altitude h .

Notons que les configurations non univoques dans le passage du modèle à 20 sommets au modèle à 6 sommets n'engendrent pas de portion de boucle, puisque l'altitude h est constante entre les faces hexagonales. La convention choisie n'introduit donc aucun biais dans la configuration de boucles obtenues. Le modèle de boucles obtenu n'est pas sur le réseau de Kagomé mais sur le réseau en nid d'abeilles.

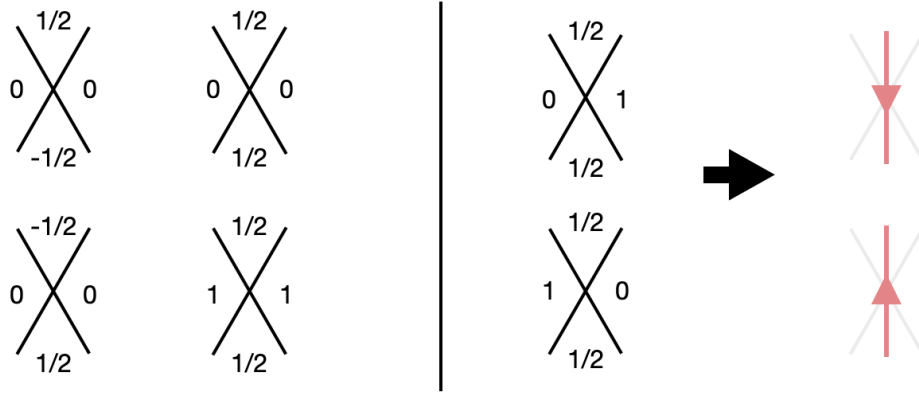


FIGURE 2.21 – Du modèle de solide sur solide sur réseau de Kagomé vers un modèle de boucles. Seuls 2 des 6 sommets engendrent une portion de boucle. Ainsi, la non-bijektivité entre le modèle à 20 sommets et le modèle à 6 sommets ne pose pas de problème puisqu'elle est sans équivoque pour le passage au modèle de boucles.

2.4 Simuler l'écoulement d'un liquide de Toner-Tu ☆

Comme expliqué au chapitre 3, j'ai eu recours à des méthodes numériques afin de généraliser le comportement observé expérimentalement avec les rouleurs de Quincke à tous les liquides polaires actifs. Le code a été en grande partie écrit par Yoann Poupart mais j'ai dû l'adapter au problème de fractionnalisation des défauts topologiques, et le paralléliser. J'ai résolu numériquement les équations hydrodynamiques de Toner-Tu dans leur forme la plus simple, comme explicité en section 2.1 [34] :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.10)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = (\alpha - \beta v^2) \mathbf{v} + D \nabla^2 \mathbf{v} - \sigma \nabla \rho, \quad (2.11)$$

où $\rho(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sont les champs locaux de densité et de vitesse du liquide actif polaire. Nous avons choisi la valeur des constantes hydrodynamiques en accord avec celles estimées dans des travaux précédents [34, 66, 67] : $\lambda = 0.7$, $\sigma = 5 \text{ mm}^2 \text{s}^{-2}$, $D \approx 10^{-3} \text{ mm}^2 \text{s}^{-1}$, $\alpha_0 = 10^2 \text{ s}^{-1}$, $\rho_c = 3 \times 10^{-3}$, $\beta = 10 \text{ mm}^{-2} \text{s}$.

En pratique, nous résolvons ce système d'équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis en utilisant le package open source FENICS [79].

Pour étudier l'effet de l'anisotropie des canaux sur la structure des écoulements tourbillonnaires, nous résolvons les équations dans des maillages de ~ 2000 cellules triangulaires, en forme de cigare. Leur forme consiste en un corps rectangulaire avec deux segments semi-circulaires attachés aux côtés opposés, représenté pour deux rapports d'aspect en Fig. 2.22a-b. Le corps rectangulaire a une largeur de W et une longueur de L . Les deux demi-cercles ont un diamètre égal à W . Nous utilisons la méthode de pénalisation de Babuska (voir [80]), pour fixer des conditions limites tangentes pour le champ de vitesse : $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \approx 0$ à chaque frontière, où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal à la frontière du maillage. Il n'y a aucune condition aux limites sur la densité ρ , mais nous vérifions *a posteriori* que la masse est globalement conservée.

La densité est initialisée avec une valeur constante $\rho_0 = 0,3$. Les vecteurs de vitesse sont initialisés avec une orientation aléatoire et une norme proche de $\sqrt{\alpha/\beta}$, pour reproduire au plus près les conditions expérimentales. Le pas de temps entre deux incréments de temps δt doit être choisi petit par rapport à l'échelle de temps de relaxation typique du mode de vitesse rapide $\tau = \alpha(\rho_0) \approx 10^{-1} \text{ s}$. En pratique, nous prenons $\delta t \approx 10^{-3} \text{ s}$. Dans nos simulations, L varie de 0

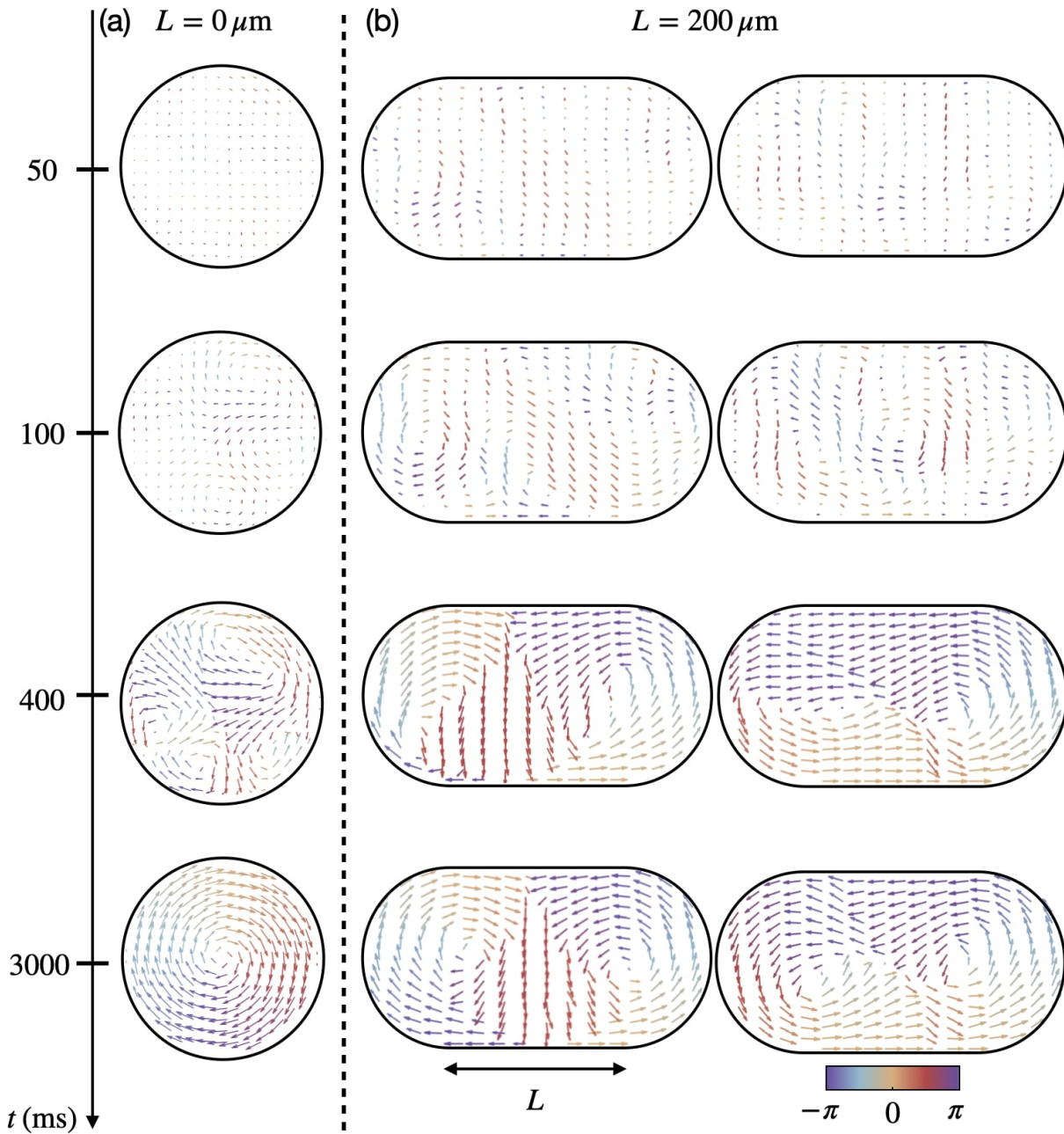


FIGURE 2.22 – **Résolution numérique des équation de Toner-Tu par la méthode des éléments finis.** (a) Coarsening pour $L = 0 \mu\text{m}$. (b) Coarsening pour $L = 200 \mu\text{m}$. Deux conditions initiales aléatoires différentes aboutissent à un état stationnaire différent. La couleur des vecteurs code pour leur orientation.

à $200 \mu\text{m}$ tandis que W est maintenu constant et égal à $200 \mu\text{m}$. Nous interpolons les champs de densité et de vitesse à l'aide de polynômes du second ordre sur des cellules de Lagrange à éléments finis (voir [79]). Pour chaque valeur de L , nous résolvons les équations de Toner-Tu 100 fois avec des conditions initiales différentes.

2.5 Manipuler et mesurer un cristal de rouleurs de Quincke ☆

L'étude de la transition liquide-hexatique et la caractérisation de la phase hexatique de rouleurs de Quincke nécessitent des densités supérieures à celles qui ont été obtenues précédemment dans le groupe. Les fractions surfaciques nécessaires sont de l'ordre de $0.7 - 0.8$. Dans cette partie, je décris le protocole que j'ai développé pour obtenir les densités nécessaires pour observer une phase hexatique et les outils d'analyses mis en oeuvre pour décrire cette transition et la phase hexatique. Nous avons également résolu les équations de Toner et Tu dans un réseau carré, voir le chapitre 4.

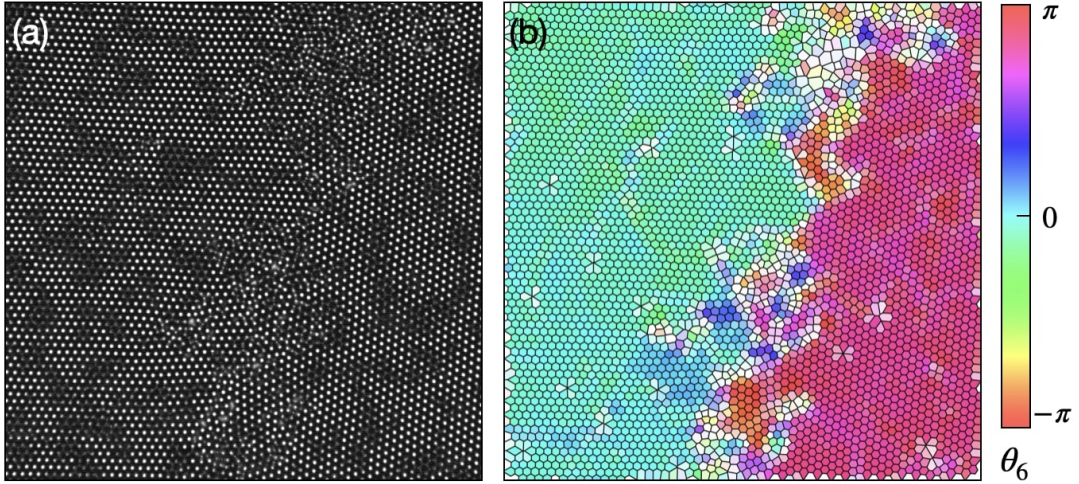


FIGURE 2.23 – **Phase hexatique de rouleurs de Quincke** (a) Image expérimentale d'une phase hexatique active de rouleurs de Quincke. Chaque point blanc correspond au centre d'un colloïde. Les "ombres" noires sont des colloïdes situés par-dessus la couche de colloïdes sédimentés. La fraction surfacique est de ~ 0.78 . (b) Carte de $\theta_6 = \arg(\psi_6)$ réalisée à partir de (a). La couleur code pour θ_6 , la transparence pour $|\psi_6|^2$.

2.5.1 Obtenir une phase dense de rouleurs colloïdaux

Les dispositifs microfluidiques utilisés et les colloïdes sont identiques à ceux décrits en 2.1. En particulier, l'écart entre les deux électrodes est de $25 \mu\text{m}$. La phase dense est obtenue dans une piscine microfluidique circulaire de 3 mm de diamètre, semblable à celle en Fig. 2.6e. Le protocole peut-être résumé par les trois étapes suivantes :

- Nous allumons un champ électrique très fort devant le champ de Quincke, de l'ordre de 350 V . Soumis à un tel champ, les colloïdes ne sont plus motiles, mais entrent dans un régime où ils se déplacent de façon erratique autour d'une position fixe. Nous pouvons donc injecter un grand nombre de colloïdes et densifier fortement le canal circulaire.
- Nous éteignons ensuite le champ électrique et on laisse sédimenter les colloïdes pendant 5 minutes.
- Une fois les colloïdes sédimentés, nous rallumons un champ électrique fort de l'ordre de 200 V , et nous le réduisons en quelques secondes à une valeur où les colloïdes sont motorisés par le processus de Quincke, aux alentours de 120 V .

J'ai développé ce protocole de façon complètement empirique, mais l'expérience a pu être reproduite plusieurs fois à plusieurs mois d'intervalle avec des colloïdes différents.

2.5.2 Caractérisation d'une phase colloïdale active dense

La caractérisation de la transition liquide-hexatique-cristal d'un système colloïde se base sur les nombreux outils développés pour la physique des liquides [81]. Cependant, le système est hors d'équilibre, la distribution des vitesses n'est donc pas gaussienne, et l'étude du champ de vitesse et de ses corrélations est nécessaire.

Les positions et vitesses des particules individuelles sont mesurées suivant le protocole décrit en 2.1. La taille typique d'observation est de l'ordre de 1 mm^2 , la durée d'acquisition est de l'ordre de 2 s, la fréquence d'acquisition est de 500 fps, le nombre de particules observées dans la région d'intérêt est d'environ 30000, voir Fig. 2.23a.

Ordre translationnel

La fonction de distribution radiale $g(r)$ est une grandeur statistique décrivant la variation de densité d'un système particulaire à partir d'une particule de référence. En pratique, nous avons utilisé le code développé par Eric Weeks en IDL et adapté par Rui Zhang en MATLAB. En particulier, les variations de la fonction $|1 - g(r)|$ nous renseignent sur la taille caractéristique des domaines cristallins. Dans nos expériences, cette fonction suit une décroissance de la forme $|1 - g(r)| \sim \exp(-r/l_g)$, où l_g est la longueur caractéristique sur laquelle l'ordre translationnel est préservé. Nous pouvons donc mesurer l_g par un ajustement exponentiel, voir Fig. 2.24a.

Ordre orientationnel

La fonction de ψ_6 caractérise l'ordre orientationnel d'un système particulaire. Elle est définie, pour une particule i située en $\mathbf{r}_i$, par :

$$\psi_6(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} e^{i6\theta_{ij}} \quad (2.12)$$

avec N_i le nombre de plus proches voisins, et θ_{ij} l'angle formé par le vecteur $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ avec l'horizontale. Le module du ψ_6 moyenné sur toutes les particules $|\langle \psi_6 \rangle_i|$ permet de situer le système dans l'une des phases liquide-hexatique-cristal. Une carte de $\theta_6 = \arg(\psi_6)$ est montrée en Fig. 2.23b. En particulier, nous avons cherché la taille caractéristique des domaines présentant un ordre orientationnel. Pour cela, nous avons calculé la fonction de corrélation de l'ordre orientationnel $g_6(\mathbf{r})$, définie comme suit :

$$g_6(\mathbf{r}) = \frac{\langle \psi_6(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) \psi_6(\mathbf{r}_0) \rangle}{\langle \psi_6^2 \rangle} \quad (2.13)$$

En pratique, nous ne calculons pas cette corrélation dans l'espace direct : chaque expérience contient en effet environ 30000 particules, et il y a 500 images à analyser par expérience, le temps de calcul serait trop important. Nous calculons plutôt cette quantité en passant dans l'espace de Fourier. Nous définissons d'abord un champ eulérien $\tilde{\psi}_6(\mathbf{r})$, en moyennant les ψ_6 dans des boîtes de la taille de quelques rayons de particules. Nous calculons $\tilde{\psi}_6(\mathbf{q})$ par FFT. La fonction $g_6(\mathbf{r})$ est calculée en prenant la FFT inverse de $\langle \tilde{\psi}_6(\mathbf{q}) \tilde{\psi}_6^*(\mathbf{q}) \rangle$, où $\tilde{\psi}_6^*(\mathbf{q})$ est le complexe conjugué de $\tilde{\psi}_6(\mathbf{q})$. Expérimentalement, nous observons que $g_6(\mathbf{r})$ décroît selon $g_6(\mathbf{r}) \sim \exp(-r/l_6)$, où l_6 est la longueur caractéristique sur laquelle l'ordre orientationnel est préservé. Nous pouvons donc mesurer l_6 par un ajustement exponentiel, voir Fig. 2.24b.

Corrélation des vitesses

De la même manière que pour l'ordre translationnel et orientationnel, nous pouvons chercher la taille caractéristique sur laquelle les vitesses des particules sont corrélées. Nous calculons donc la fonction de corrélation des vitesses, définie comme suit :

$$C_{\mathbf{v}\mathbf{v}}(\mathbf{r}) = \frac{\langle \mathbf{v}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \rangle}{\langle \mathbf{v}^2 \rangle}. \quad (2.14)$$

Encore une fois, nous observons expérimentalement que $C_{\mathbf{v}\mathbf{v}}(\mathbf{r}) \sim \exp(-r/l_v)$ et un ajustement exponentiel nous permet de mesurer l_v , voir Fig. 2.24c.

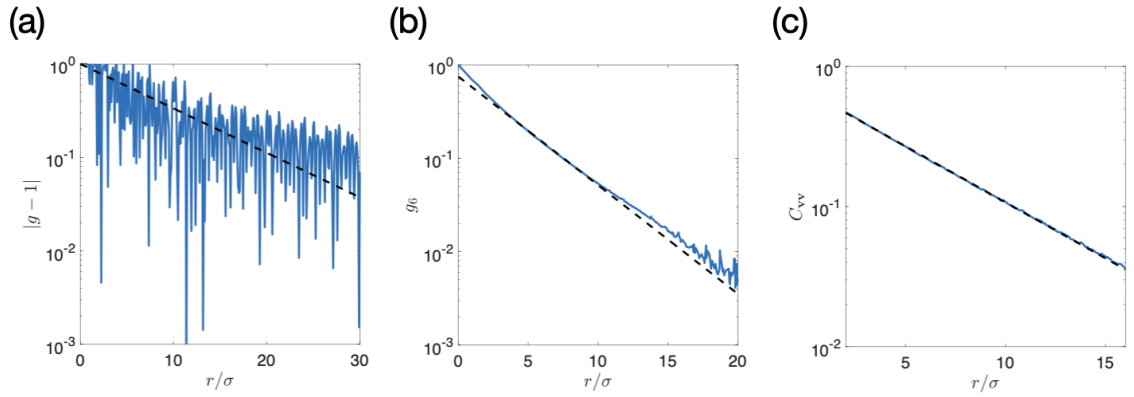


FIGURE 2.24 – (a) Variations de $|g-1|$ en fonction de r/σ . L'ajustement exponentiel en pointillés noirs donne $l_g = 9.1$. (b) Variations de g_6 en fonction de r/σ . L'ajustement exponentiel en pointillés noirs donne $l_6 = 3.7$. (c) Variations de $C_{\mathbf{v}\mathbf{v}}$ en fonction de r/σ . L'ajustement exponentiel en pointillés noirs donne $l_v = 5.4$.

Construire les lois de l'hydraulique active

Les fluides actifs ont pour propriété fondamentale d'être motorisés à l'échelle de leurs constituants élémentaires [5], et mettent en échec la loi de Darcy, qui prédit une relation linéaire entre le débit et la différence de pression, Fig. 3.1a. Lorsqu'ils sont confinés, ils subissent un écoulement laminaire spontané qui n'est induit par aucun champ extérieur ni par aucun mouvement des bords du système [37]. Nous pouvons citer par exemple les gels actifs, les essaims de bactéries, ou les nématiques actifs [33, 35, 36, 82]. En particulier, Alexandre Morin, un ancien étudiant du groupe, a mesuré la relation entre le courant dans un canal et un champ extérieur coercitif $\mathbf{h}$, représentée en Fig. 3.1b. $\mathbf{h}$ correspond en pratique à la vitesse imposée au solvant, et possède un rôle analogue à un champ de pression. Cette courbe représente en abscisse le champ extérieur appliqué au liquide (assimilable à une pression) et en ordonnée la vitesse du liquide actif normalisée. Elle a l'allure typique de la réponse hystérétique d'un matériau ferromagnétique à un champ magnétique. Crucialement, nous remarquons que pour une différence de pression nulle, la vitesse du liquide actif est non -nulle, positive ou négative. L'écoulement d'un liquide actif confiné dans un tuyau est donc bistable, et le problème de l'hydraulique active est intrinsèquement non-linéaire. Cependant, cette description bistable de l'écoulement d'un liquide actif dans un canal peut paraître simpliste, et il a été conjecturé par Woodhouse *et al.* que le liquide pouvait perdre en activité dans certains canaux d'un réseau hydraulique [28]. Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur les réseaux trivalents, dont le niveau de complexité est tout juste supérieur à celui d'un canal simple. Nous montrons à l'aide d'expériences modèles que la conjecture de Woodhouse *et al.* est juste, mais que les motifs d'écoulement sont bien plus subtils que prévu. Notamment, une transition structurale de leur géométrie a lieu lorsque la longueur des canaux varie.

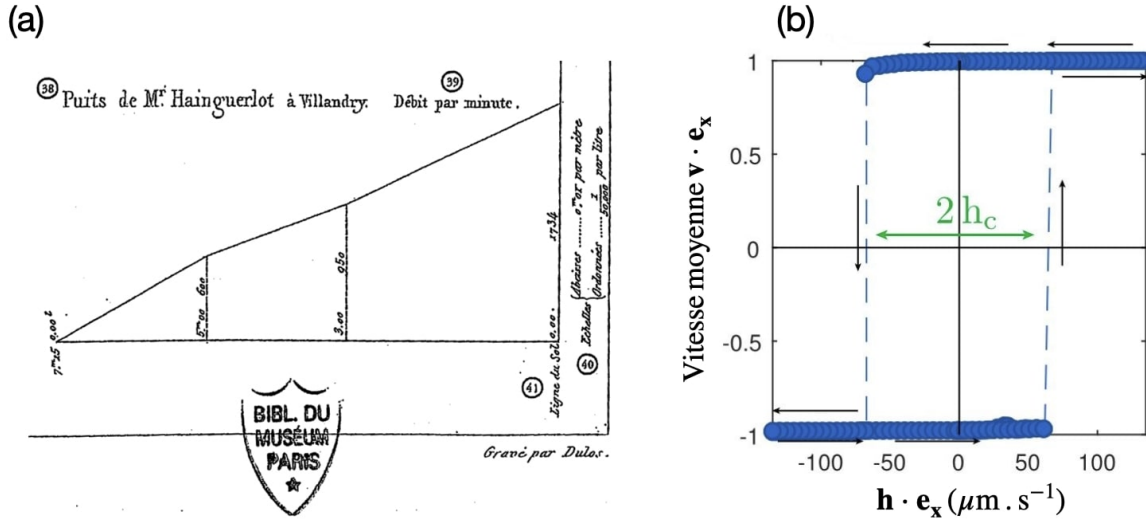


FIGURE 3.1 – (a) Débits d'un puits artésien en fonction de la hauteur de l'orifice de sortie. Le débit est proportionnel à la différence de pression entre l'aquifère artésien et la sortie du tuyau. Figure empruntée à [4]. (b) Réponse hystérétique d'un liquide actif à un champ coercitif extérieur h . h est analogue à un champ de pression. e_x est le vecteur tangent au canal. Figure empruntée à [37].

3.1 L'hydraulique des liquides actifs décrite par un modèle de glace de spins

Dans cette partie, nous expliquons comment nous avons étudié l'écoulement d'un liquide actif dans un réseau hydraulique trivalent à l'aide d'une expérience modèle. Nous montrons ensuite comme cet écoulement se comporte de façon analogue à un système de glace de spins. Nous mettons finalement en évidence que nous pouvons extraire de cette glace de spins un gaz de boucles auto-évitant, dont nous caractérisons la géométrie.

3.1.1 Une expérience d'hydraulique active modèle

Pour établir les lois de l'hydraulique active, j'ai conçu plusieurs types de réseaux trivalents comptant jusqu'à 3200 noeuds. Wioland *et al.* ont montré dans [83] que la géométrie des jonctions dans les réseaux hydrauliques peut fortement modifier l'écoulement des liquides actifs. J'ai donc considéré deux géométries de noeuds différentes où les jonctions trivalentes comprennent ou non un séparateur en forme d'étoile, voir le chapitre 2 pour plus de détails. Le seul paramètre de contrôle géométrique des réseaux est leur rapport d'aspect $\epsilon = \ell/w$ où ℓ est la longueur des canaux et w leur largeur (voir Fig. 3.3d). J'ai fait varier ϵ en gardant w constant égal à $200 \mu m$ pour tous les réseaux. ℓ varie de $120 \mu m$ à $220 \mu m$.

3.1.2 Le courant comme un spin 1 classique

Après avoir introduit les colloïdes dans le réseau et démarré l'activité, l'écoulement passe par un état transitoire qui présente de fortes hétérogénéités de vitesse et densité. Après une durée typique de quelques minutes, qui varie selon la taille du réseau, le système atteint un état stationnaire, dans lequel la densité est très homogène. La fraction surfacique est de l'ordre de 0.3, ce qui correspond à environ 500 colloïdes par canal voir Fig. 3.3. La distribution des courants

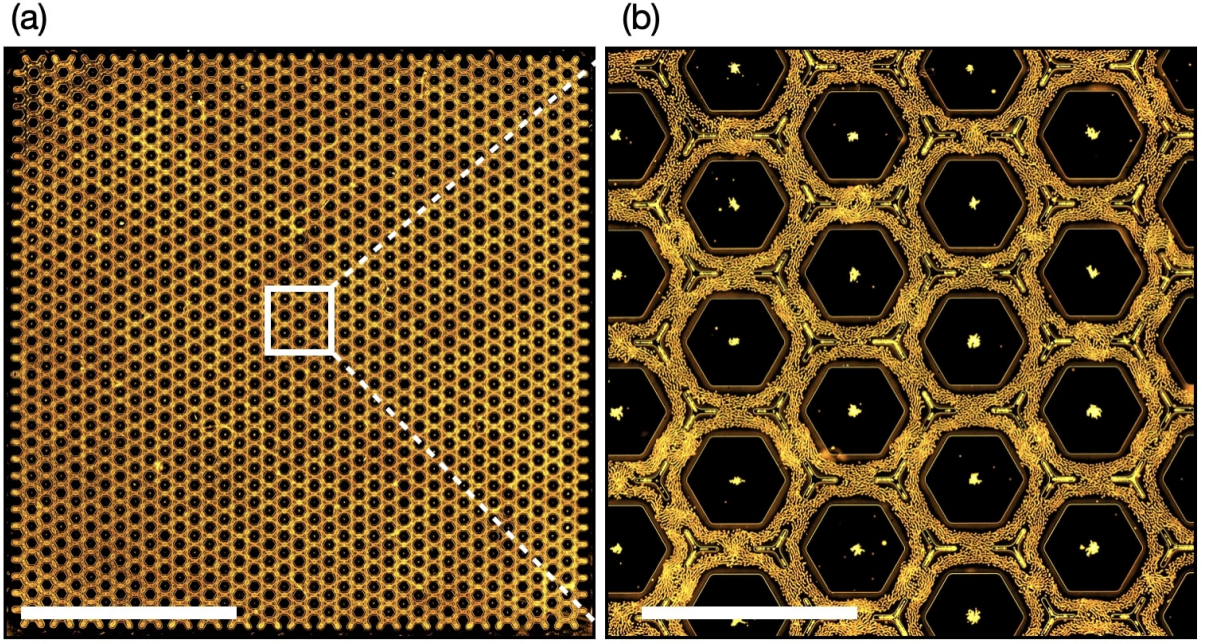


FIGURE 3.2 – **Écoulement actif dans un réseau hydraulique.** (a) Vue macroscopique du réseau hydraulique. Il est rempli du liquide de rouleurs. Barre d'échelle : 0.5 cm. (b) Zoom sur quelques noeuds du réseau. Barre d'échelle : 0.5 cm.

est quant à elle hétérogène : elle est trimodale, avec deux pics symétriques pour des valeurs de courant non-nulles et un pic centré sur 0, voir Fig. 3.3c et f. Ces résultats sont qualitativement identiques pour les deux types de jonctions, mais les distributions de densité et de courant sont plus larges pour les jonctions simples. Dans la suite du chapitre, nous considérerons donc uniquement le cas des jonctions possédant un séparateur.

Ainsi, à la différence des écoulements actifs dans les canaux simples, l'écoulement dans un réseau de canaux trivalents n'est pas toujours laminaire : environ 40% des canaux supportent un écoulement tourbillonnaire et un courant moyen nul (voir Fig. 3.3c et f). L'émergence de ces canaux à courant nul est causée par la frustration géométrique dans des réseaux trivalents [84,85], et peut être expliquée comme suit :

- La vitesse du liquide de rouleurs est constante, en raison de son principe de motorisation (voir chapitre 2). Comme expliqué précédemment, sa densité est également constante. Ainsi, la valeur typique du courant $|\Phi_e|$ mesuré sur les arêtes (e) du réseau est une constante qu'on note Φ_0 . Le signe de Φ_e est une convention définie au chapitre 2. Dans nos expériences, $\Phi_0 \sim 400 \text{ s}^{-1}$.
- Une jonction possédant un nombre impair de canaux frustre alors l'écoulement, à cause de la conservation de la masse ($\sum_j \Phi_{ij} = 0$) : il est impossible d'obtenir 0 en sommant $\pm\Phi_0$ un nombre impair de fois.
- Un nombre impair de canaux doit donc supporter un courant nul $\Phi_e = 0$, d'où l'émergence d'écoulements tourbillonnaires dans ces canaux.

Dans le cas des réseaux trivalents, deux configurations respectant la conservation de la masse sont possibles : un canal parmi les trois supporte un courant nul, ou les trois canaux supportent un courant nul. En pratique, le liquide forme des écoulements tourbillonnaires dans les canaux supportant un courant nul, voir figures 3.3a et d. Ainsi, le courant dans un canal e se comporte comme un spin 1 classique, il peut prendre les valeurs $\phi_e = +1, -1, 0$, et à chaque noeud i , la

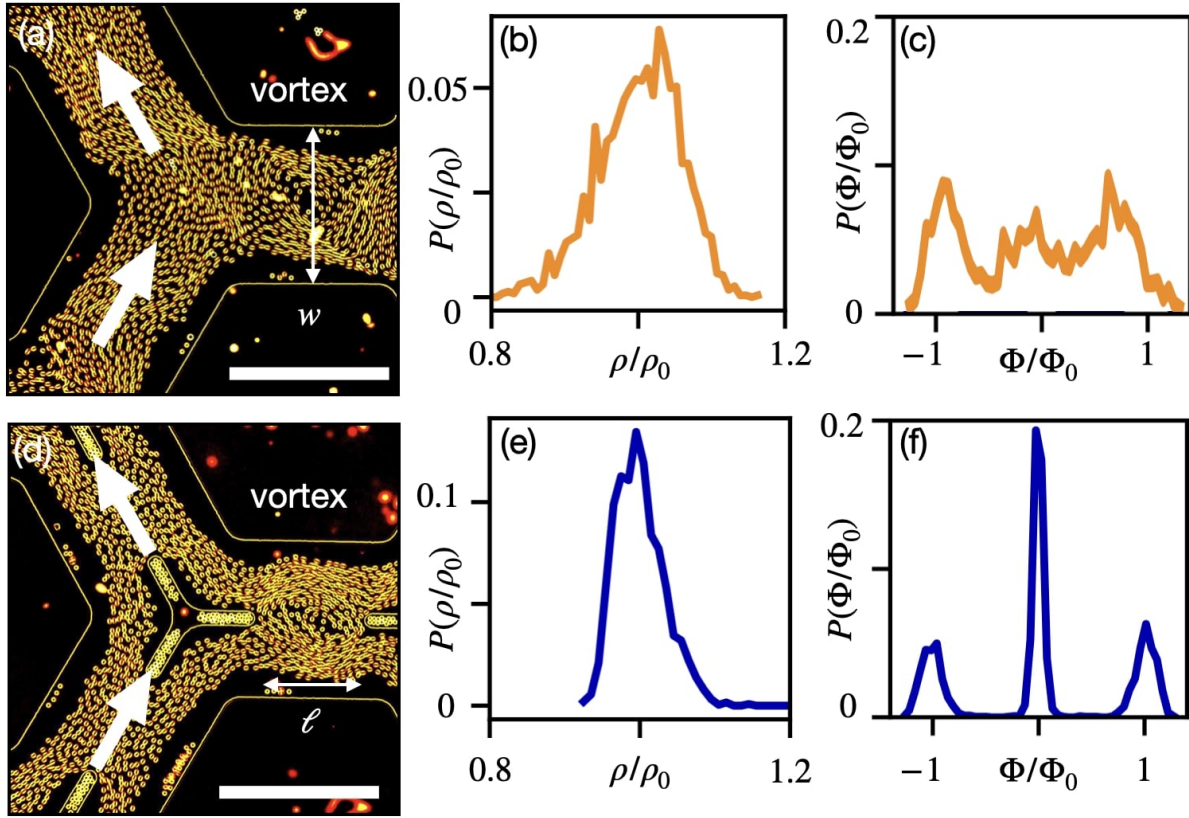


FIGURE 3.3 – (a) Jonction trivalente simple. (b) Distribution de densité dans un réseau aux jonctions simples. (c) Distribution de courant dans un réseau aux jonctions simple. (d) Jonction trivalente équipée de séparateur. (e) Distribution de densité dans un réseau aux jonctions équipées de séparateurs. (f) Distribution de courant dans un réseau aux jonctions équipées de séparateurs. Les distributions sont qualitativement les mêmes, mais nous remarquons que les pics sont plus marqués pour la densité et le courant dans le cas des jonctions avec séparateur. Barres d'échelle : $400 \mu\text{m}$

conservation de la masse $\sum_j \Phi_{ij} = 0$ agit comme une règle de glace de spins. Un écoulement actif dans un réseau hydraulique trivalent se comporte donc de manière analogue à l'état fondamental d'un système magnétique frustré [86–89]. Ce résultat expérimental confirme la conjecture émise par Woodhouse *et al.* dans [28].

Cette analogie avec un système de glace de spins se confirme lorsqu'on s'intéresse à la dégénérescence des écoulements. La fonction d'overlap $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$ (voir le chapitre 2 pour une explication détaillée) quantifie la différence entre deux réalisations α et β d'une même expérience. Nous remarquons en Fig. 3.4 que la distribution de la fonction d'overlap est très piquée autour d'une valeur proche de 0.25, qui est la valeur attendue pour un système où les Φ_e seraient totalement décorrélés.

A l'échelle du réseau, les lignes de courant s'auto-organisent en un gaz boucles auto-évitant, voir Fig. 3.4. Du point de vue des spins Φ_e , ces boucles sont formées d'une succession de $\Phi_e = +1$ et $\Phi_e = -1$. Notons que ces 6 gaz de boucles correspondent à 6 répliques de la même expérience, menée dans le même réseau avec les mêmes colloïdes, ce qui témoigne encore une fois de la dégénérescence du système, prédite par l'analogie avec les glaces de spins. Cependant, nous constatons que la morphologie des boucles de courant est fortement dépendante du rapport d'aspect ϵ , Fig. 3.5a, ce qui n'est pas prévu par l'analogie avec une glace de spins.

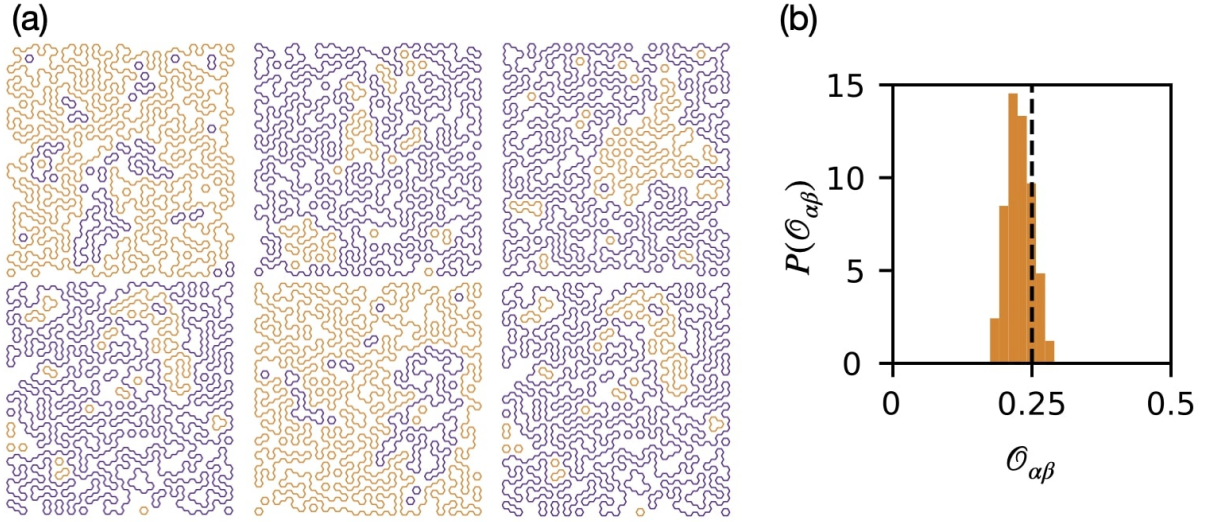


FIGURE 3.4 – **Dégénérescence du motif d'écoulement.** (a) Lignes de courant pour six réalisations de la même expérience à $\epsilon = 0.7$. La couleur code pour l'orientation du courant le long des boucles. (b) Distribution de la fonction d'overlap $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$ calculée sur dix répliques indépendantes de la même expérience à $\epsilon = 0.7$. La distribution est piquée à une valeur proche de 0.25 (ligne en pointillés verticale) attendue pour des Φ_e complètement décorrélés.

3.1.3 Émergence de boucles de courant auto-évitantes

Pour comprendre ce changement structural, nous commençons par caractériser quantitativement la géométrie des boucles. Nous constatons que, pour tous les rapports d'aspect des canaux, les boucles sont auto-similaires : leur rayon de giration R_g croît algébriquement avec leur longueur L selon la loi d'échelle $R_g \sim L^\nu$, voir Fig. 3.5c. Toutefois, pour de petites valeurs de ϵ , les boucles sont très sinueuses et ségrégées, et, lorsque ϵ est élevé, les lignes de courant sont plus persistantes et forment des structures imbriquées. Nous quantifions ces observations en traçant l'exposant du rayon de giration ν en fonction de ϵ . Nous constatons qu'il subit une brusque augmentation lorsque ϵ dépasse une valeur critique $\epsilon^* \approx 0.8$ dans la figure Fig. 3.5d.

La transition d'un gaz de boucles ségrégées vers des boucles imbriquées se produit à la même valeur ϵ^* . Pour s'en rendre compte, on identifie les lignes de courant orientées avec les lignes de contour d'une carte topographique [52]. Nous montrons en Fig. 3.5b la carte topographique correspondant aux boucles auto-évitantes de la Fig. 3.5a (voir aussi chapitre 2). Nous quantifions finalement le niveau d'imbrication par la différence de hauteur maximale Δh qui augmente fortement à partir de ϵ^* , voir Fig. 3.5e.

Nous pouvons caractériser la différence entre les deux morphologies de boucles en calculant une dernière observable : la probabilité $C(r)$ que deux arêtes séparées par une distance r appartiennent à la même boucle [50, 74, 75]. Nous avons tracé cette probabilité C en fonction de la distance entre arêtes r en Fig. 3.5f. Nous constatons que pour $\epsilon < \epsilon^*$ la décroissance de $C(r)$ semble proche d'une loi de puissance d'exposant $-1/2$, alors que pour $\epsilon > \epsilon^*$ la décroissance semble cohérente avec une loi de puissance d'exposant -1 .

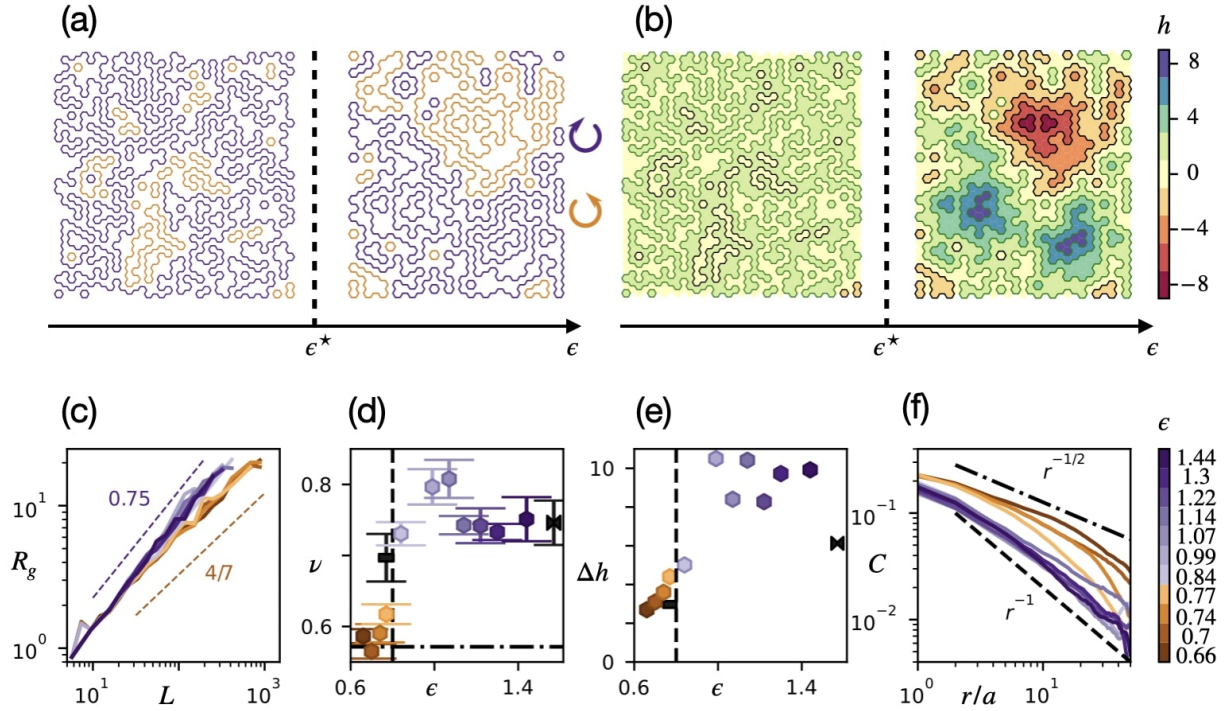


FIGURE 3.5 – Évolution structurale des boucles de courant. (a) Les deux ensembles de boucles de lignes de courant correspondent respectivement à $\epsilon = 0,7$ et $\epsilon = 1,1$. En dessous de $\epsilon^* = 0,8$, les lignes de courant sont sinueuses et ségrégées. En revanche, au-dessus de ϵ^* , elles forment des boucles imbriquées et plus persistantes. La couleur code pour l'orientation du courant le long de la boucle. (b) Carte topographique des mêmes expériences qu'en (a). Le champ local de hauteur est défini comme la somme des *winding numbers* associés à toutes les boucles s'enroulant autour d'un point donné dans l'espace, voir chapitre 1. En-dessous de ϵ^* , la ségrégation des lignes de courant se traduit par une topographie à deux niveaux. Inversement, au-dessus de ϵ^* , la carte présente des collines élevées et des vallées profondes. (c) Rayon de giration des boucles R_g en fonction de leur longueur L . Pour tous les rapports d'aspect le rayon de giration suit la loi d'échelle $R_g \sim L^\nu$. La ligne en pointillés orange correspond à une prédiction théorique détaillée en conclusion du chapitre. (d) Variations de l'exposant du rayon de giration ν avec le rapport d'aspect ϵ . L'exposant saute à $\epsilon = \epsilon^*$. (e) Niveau d'imbrication quantifié par la différence de hauteur maximale Δh sur les cartes topographiques (moyenné sur dix réalisations). Le niveau d'imbrication saute à $\epsilon = \epsilon^*$. (f) Corrélation de paires $C(r)$. $C(r)$ est la probabilité de trouver deux noeuds à une distance r dans la même boucle. Lorsque $\epsilon > \epsilon^*$ la corrélation de paires décroît beaucoup plus rapidement que lorsque $\epsilon < \epsilon^*$.

3.2 Les interactions entre boucles de courant à l'origine de leur polymorphisme

Dans cette section, nous expliquons la transition structurale des boucles de courant par une interaction entre ces boucles. Cette interaction est médiée par les canaux supportant un courant nul, et causée par la fractionnalisation des défauts topologiques lorsque le rapport d'aspect des canaux devient grand. Nous montrons ensuite par des méthodes numériques que ces interactions entre lignes de courant ne sont pas spécifiques aux rouleaux de Quincke, mais généralisables à tous les liquides de Toner-Tu.

3.2.1 Des interactions orientationnelles médiées par les écoulements tourbillonnaires

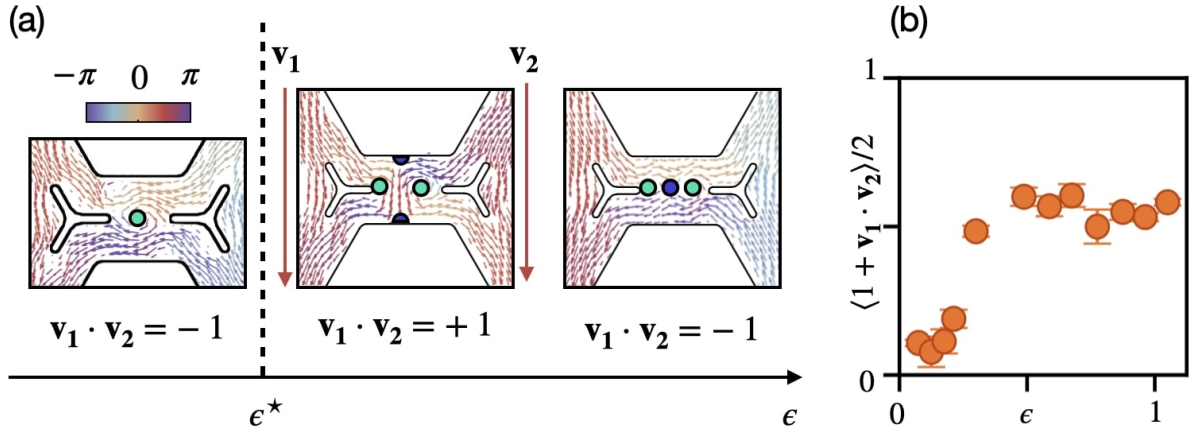


FIGURE 3.6 – **Interactions orientales entre des lignes de courant adjacentes et fractionnement topologique des défauts.** (a) Gros plan sur le champ d'écoulement dans deux lignes de courant adjacentes séparées par un canal qui ne supporte aucun flux net. En dessous de ϵ^* , le canal central héberge un seul vortex. Au-dessus de ϵ^* , le canal central héberge deux vortex. Ils peuvent tourner dans la même direction ou dans des directions opposées. Lorsqu'ils tournent dans le même sens, le champ de courant comprend une charge topologique de -1 entre les deux charges de $+1$. Inversement, lorsque les deux vortex tournent dans des directions opposées, la charge -1 est fractionnée en deux défauts $-1/2$ liés aux parois du canal. Les charges topologiques $+1$ sont indiquées par un disque vert, les charges -1 par un disque bleu. (b) Fraction des contacts parallèles à travers chaque canal supportant un courant nul, tracée en fonction du rapport d'aspect du canal ϵ . Cette fraction s'exprime comme $\langle 1 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \rangle / 2$.

Afin de caractériser l'interaction entre les boucles de courant, nous mesurons la fraction de configurations parallèles, c'est-à-dire lorsque le courant entre deux boucles adjacentes (séparées par un canal supportant un courant nul) est colinéaire, voir Fig. 3.6b. Notons que cette quantité est donnée par $\langle 1 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \rangle / 2$, où $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont les vitesses locales du liquide dans les deux lignes de courant adjacentes, voir Fig. 3.6a. La Fig. 3.6b montre que les contacts antiparallèles ($\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = -1$) prévalent lorsque $\epsilon < \epsilon^*$, alors que la plupart des contacts sont parallèles ($\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = +1$) lorsque $\epsilon > \epsilon^*$. Ce résultat indique qu'un écoulement actif dans un réseau hydraulique n'est pas seulement façonné par les règles de glace de spins, mais aussi par des interactions orientationnelles à courte portée entre les lignes de courant adjacentes.

Pour comprendre la nature de ces interactions, nous étudions la morphologie des écoulements tourbillonnaires à l'échelle du sous-canal. Nous constatons un changement structurel clair à ϵ^* . En-dessous de ϵ^* , les canaux sans flux net ($\Phi_e = 0$) abritent un seul tourbillon. La continuité du champ de courant favorise alors les couplages antiparallèles entre les lignes de courant voisines. Ce couplage à courte distance est cohérent avec les boucles de lignes de courant sinueuses et ségrégées, voir la Fig. 3.7a. La situation où $\epsilon > \epsilon^*$ est plus subtile. Nous constatons que les canaux à flux nul contiennent deux vortex, Fig. 3.6a. Dans la plupart des canaux, ils tournent dans des directions opposées, Fig. 3.6b. La continuité du champ d'écoulement favorise donc les couplages parallèles, ce qui explique l'émergence d'une structure imbriquée des lignes de courant, comme le montre clairement la Fig. 3.7f. Cependant, sur la Fig. 3.6a, nous pouvons également voir des configurations avec deux tourbillons co-rotatifs qui favorisent les couplages antiparallèles.

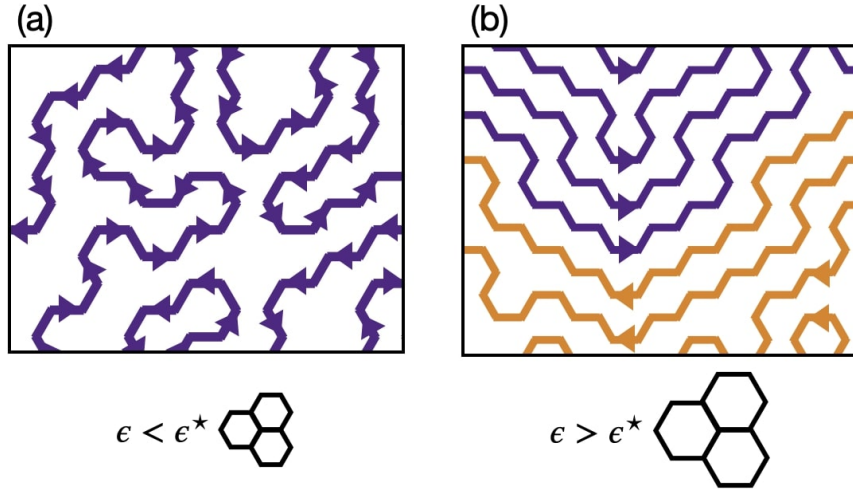


FIGURE 3.7 – (a) Gros plan sur les lignes de courant expérimentales mesurées dans un canal où $\epsilon < \epsilon^*$. La flèche verte indique l'orientation locale des flux. Les lignes de courant sont sinueuses et ségréguées. Les couplages antiferromagnétiques entre les lignes de courant adjacentes favorisent cette géométrie. (b) Identique à (a) pour $\epsilon > \epsilon^*$. Les lignes de courant sont persistantes et imbriquées. Les couplages ferromagnétiques entre les lignes de courant adjacentes favorisent cette géométrie.

3.2.2 Robustesse et généralité de la transition d'un à deux vortex

Nous souhaitons finalement comprendre si cette prévalence des interactions parallèles est spécifique aux rouleurs de Quincke ou généralisable aux liquides polaires actifs. Nous répondons à cette question par des méthodes numériques. Nous modélisons les écoulements actifs à l'aide des équations hydrodynamiques de Toner-Tu pour la matière active polaire [7, 65], que nous résolvons à l'aide d'un solveur d'éléments finis, voir chapitre 2. Nous considérons une géométrie anisotrope simple en forme de cigare avec des conditions aux limites tangentes, voir Figs. 3.8a. Nous utilisons un ensemble unique de paramètres matériels cohérents avec les mesures antérieures dans les fluides de rouleurs de Quincke [34, 67, 90].

Lorsque le rapport d'aspect augmente, nous observons une nette transition entre la configuration à un vortex et celle à deux vortex. Le champ de vitesse autour d'un vortex héberge une charge topologique de $+1$ (disques verts sur la Fig. 3.8). Par conséquent, lorsque deux vortex coexistent, un point de stagnation supplémentaire de charge -1 doit émerger pour conserver la charge topologique globale de $+1$ [34].

Étonnamment, nous constatons que la configuration la plus probable ne correspond pas à la coexistence de deux charges $+1$ et d'une charge -1 (disques bleus sur la Fig. 3.8). En revanche, nous observons la fractionnalisation du défaut topologique -1 en deux singularités $-1/2$ (demi-disques bleus sur la Fig. 3.8). Les charges fractionnaires correspondant aux points de stagnation sont liées aux parois du canal et stabilisent la contre-rotation des deux tourbillons $+1$. Les charges fractionnaires $-1/2$ sont liées aux parois du canal et stabilisent la contre-rotation des deux tourbillons $+1$. Ce résultat numérique est en excellent accord avec nos résultats expérimentaux Fig. 3.6a. Nous concluons donc que la prévalence des couplages ferromagnétiques entre les lignes de courant macroscopiques (Fig. 3.6b) provient de la fractionnalisation des défauts topologiques dans les canaux supportant un courant nul. Cette observation n'est donc pas spécifique aux expériences de rouleurs de Quincke, mais est généralisable à tous les liquides polaires actifs.

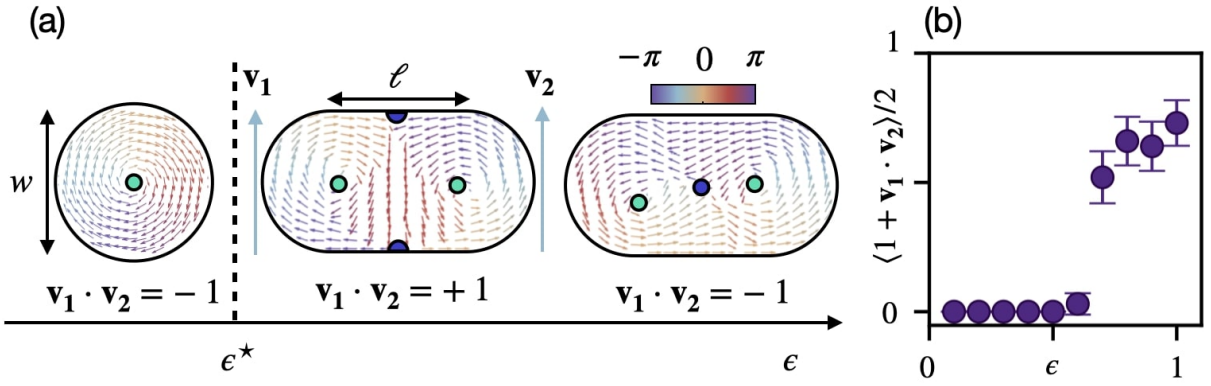


FIGURE 3.8 – (a) Résolution numérique des équations de Toner-Tu dans des boîtes en forme de cigare. Voir le chapitre 2 pour les détails sur la méthode numérique et les paramètres hydrodynamiques. Nous notons w la largeur de la boîte de simulation, ℓ la longueur de la ligne droite joignant les demi-cercles, le rapport d'aspect des boîtes est défini par $\epsilon = \ell/w$. En accord avec ce que nous observons dans la figure 3.6a, l'augmentation du rapport d'aspect entraîne une transition d'un écoulement avec une seule charge topologique $+1$ à écoulement comprenant deux vortex, qui peuvent être séparés par un seul défaut $+1$ ou deux défauts fractionnés $-1/2$. Les charges topologiques $+1$ sont indiquées par un disque vert, les charges -1 par un disque bleu. (b) En répétant la même simulation avec des conditions initiales aléatoires, nous constatons que les états stables où les flux les plus à droite ($\mathbf{v}_2$) et les plus à gauche ($\mathbf{v}_1$) sont parallèles prévalent dans les boîtes avec de grands rapports d'aspect.

3.3 Lois de l'hydraulique active et limites asymptotiques

3.3.1 Lois de l'hydraulique active

En conclusion, nous énonçons les lois de l'hydraulique active. Elles sont au nombre de 4, et s'écrivent de la façon suivante :

(i) L'activité du fluide contraint le courant Φ_{ij} sur le bord $e = (i, j)$ à ne prendre que trois valeurs différentes $\Phi_{ij}/\Phi_0 \in \{-1, 0, +1\}$.

(ii) Dans les canaux rectilignes, la stabilité des écoulements actifs laminaires pénalise l'état où $\Phi_{ij} = 0$. Cette règle empêche le liquide de former des vortex dans tous les canaux.

(iii) À chaque nœud i , la conservation de la masse impose la contrainte spin-glace : $\sum_j \Phi_{ij} = 0$. Cette contrainte frustre (ii).

(iv) Les défauts topologiques du champ de courant dans les canaux supportant un courant nul imposent des interactions ferromagnétiques ou antiferromagnétiques effectives entre les lignes de courant adjacentes. Le signe des interactions est déterminé par le rapport d'aspect des canaux.

La loi (i) fait correspondre le courant à un spin 1 classique. Les lois (ii) et (iii) définissent la règle de glace de spins. La loi (iv) prédit le changement structural observé lorsque le rapport d'aspect des canaux varie. Ces lois peuvent s'écrire sous une forme hamiltonienne compacte suivante, établie par Alexis Poncet. Cette forme hamiltonienne fait une analogie entre les motifs

d'écoulement et un système à l'équilibre de spins en interaction :

$$\mathcal{H} = -J_A \sum_{(i,j)} \Phi_{ij}^2 - J_C \sum_{(i,j)} \delta \Phi_{ij,0} \sigma_i \sigma_j, \quad (3.1)$$

$$\sum_j \Phi_{ij} = 0. \quad (3.2)$$

Le premier terme reflète l'activité du fluide. J_A est une constante positive qui pénalise les états où les flux s'évanouissent (loi (ii)). Le second terme reflète les interactions entre les lignes de courant adjacentes (loi (iv)). Le produit $\sigma_i \sigma_j$ correspond au produit scalaire des courants adjacents $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ (voir Fig. 3.6). J_C est un proxy du rapport d'aspect du canal. $J_C < 0$ correspond à des couplages antiferromagnétiques, *i.e.* aux canaux où $\epsilon < \epsilon^*$. $J_C > 0$ correspond aux couplages ferromagnétiques, *i.e.* aux canaux où $\epsilon > \epsilon^*$, voir les figures 3.6a. Nous soulignons que J_C ne couple que les noeuds connectés par des canaux où le flux disparaît. Cette propriété est prise en compte par le terme $\delta \Phi_{ij,0}$. Cet hamiltonien effectif a permis à Alexis Poncet de simuler les écoulements dans les réseaux trivalents et sont en excellent accord avec les mesures expérimentales. Notamment, l'auto-similarité des boucles, leur rayon de giration, leur degré d'imbrication et la corrélation $C(r)$, en-dessous et au-dessus de ϵ^* sont en accord quantitatif avec les expériences.

3.3.2 Limites asymptotiques de l'hydraulique active : correspondance avec des modèles de boucles

Il est possible d'établir une correspondance entre certaines limites asymptotiques de l'hydraulique active avec des modèles de théorie des champs en deux dimensions appelés modèles de boucles $O(n)$. Ces modèles décrivent la statistique de polygones dont les côtés sont les arêtes d'un réseau hexagonal. Leur fonction de partition s'écrit :

$$Z_{\text{boucle}}(x, n) = \sum_{\omega} x^{o(\omega)} n^{N(\omega)}. \quad (3.3)$$

Pour la configuration ω , $o(\omega)$ est le nombre d'arêtes occupées $N(\omega)$ est le nombre de boucles. x correspond alors à la fugacité des arêtes, et n à la fugacité des boucles. Ainsi, la limite $x \rightarrow +\infty$ décrit une configuration où le nombre d'arêtes occupées est maximal. Notons que cette fonction de partition peut être vue comme une approximation à haute température d'un modèle de spins $O(n)$ [50, 52]. Il a été montré par Nienhuis [52] que pour $0 \leq n \leq 2$, le système subit une transition de phase pour $x_c = (2 + (2 - n)^{1/2})^{-1/2}$. Pour $x < x_c$, la distribution de longueur des boucles $P(L)$ est exponentiellement décroissante (phase non-critique), pour $x > x_c$, $P(L)$ décroît algébriquement (phase critique). La question de la criticalité du modèle de boucles $O(n)$ pour différentes valeurs de (x, n) est une question toujours ouverte en mathématiques, voir [91, 92] par exemple. Notons qu'il a été conjecturé que la statistique des boucles est décrite par un processus de Schramm-Loewner de paramètre κ pour $n = 2 \cos(4\pi/\kappa)$ [93, 94].

Des correspondances peuvent être établies entre les modèles de boucles et de nombreux modèles de physique sur réseau [52, 73, 86]. Nous rappelons également que la limite $n \rightarrow 0$ décrit la statistique de marches aléatoires auto-évitantes.

Interactions antiferromagnétiques fortes

Le cas des petits rapports d'aspects, $\epsilon \ll \epsilon^*$ est modélisé par des interactions antiferromagnétiques fortes $J_C \ll 1$. Nous montrons tout d'abord à l'aide de la figure 3.9a que l'écoulement actif dans la limite des interactions antiferromagnétiques fortes est analogue à un système de

spins antiferromagnétique sur réseau triangulaire. Nous montrons ensuite comment faire correspondre ce système de spins à un modèle de boucles.

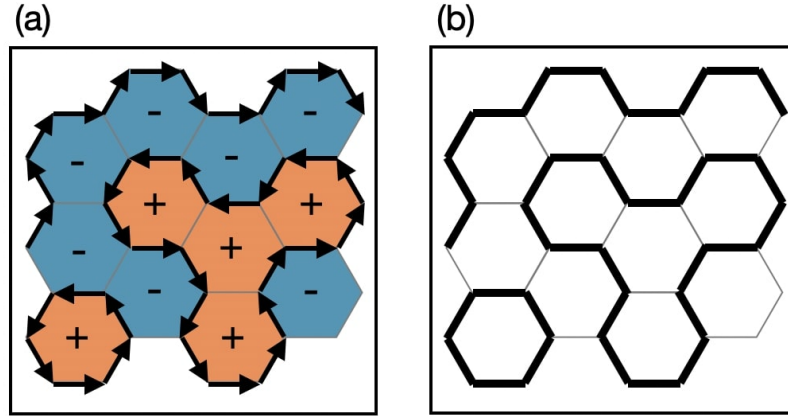


FIGURE 3.9 – Correspondance entre les lignes de courant pour $\epsilon \ll \epsilon^*$, le modèle d'Ising antiferromagnétique frustré, et un modèle de boucles. (a) Exemple de lignes de courant dans la limite $\epsilon \ll \epsilon^*$ et la configuration de spins correspondante. (b) Configuration de boucles correspondante.

Autour de chaque face hexagonale, toutes les lignes de courant sont orientées dans le même sens, horaire ou anti-horaire, voir Fig. 3.9a. Nous pouvons calculer la circulation $\mathcal{C}_f$ du courant autour de chaque face f du réseau :

$$\mathcal{C}_f = \sum_{e \in f} \Phi'_e \quad (3.4)$$

où Φ'_e est le courant de l'arête e , par convention, on prend $\Phi'_e = +1$ quand il est orienté dans le sens trigonométrique, $\Phi'_e = -1$ quand il est orienté dans le sens horaire. On définit alors le spin $\mathcal{S}_f$ de la face f comme :

$$\mathcal{S}_f = \text{signe}(\mathcal{C}_f). \quad (3.5)$$

Nous montrons en figure 3.9b la configuration de spins correspondante et la configuration d'écoulement. Les centres des faces f du réseau hexagonal étant placées sur un réseau triangulaire (dual du réseau hexagonal), le système correspond à un modèle d'Ising antiferromagnétique sur réseau triangulaire. Cette correspondance offre une interprétation très simple des écoulements : les lignes de courant sont les murs de domaines entre domaines de même magnétisation, et les canaux supportant un écoulement tourbillonnaire (et un courant nul) correspondent au surplus d'énergie créé par deux spins adjacents de même signe. Considérons le modèle d'Ising antiferromagnétique sur réseau triangulaire. Son hamiltonien s'écrit $\mathcal{H} = J \sum_{\langle ij \rangle} s_i \cdot s_j$. Le poids

de Boltzmann associé à une portion de mur de domaine entre deux spins de signe opposé est $\exp(-2\beta J)$, avec $\beta = (k_B T)^{-1}$. Ainsi, la fonction de partition de ce système peut s'écrire comme une somme sur l'ensemble $\mathcal{L}$ des boucles formées par les murs de domaine :

$$Z_{AF} = \sum_{\mathcal{L}} \exp(-2\beta J \times L) \quad (3.6)$$

où $-2\beta J \times L$ est l'énergie créée par L portions de murs de domaine. Nous pouvons directement en déduire que $Z_{AF} \propto Z_{\text{boucle}}(+\infty, 1)$. La limite $x \rightarrow +\infty$, correspond à une température nulle pour le modèle d'Ising.

Le modèle de boucle $O(1)$ avec $x \rightarrow +\infty$ est soluble analytiquement. Il est caractérisé par un exposant $\nu = 4/7$ et une fonction de corrélation $C(r) \sim r^{-1/2}$ [72, 73]. Ces résultats sont en très bon accord avec les mesures reportées en Fig. 3.5 d et f pour les réseaux de rapports d'aspect $\epsilon < \epsilon^*$. Notons toutefois que ces expériences ne sont pas exactement correspondantes au modèle d'Ising antiferromagnétique frustré à température nulle (ou de façon équivalente à un modèle de boucles $O(1)$ à fugacité $x = +\infty$). Les noeuds possédant trois canaux portant un courant nul correspondent en effet à une excitation du système : les trois hexagones adjacents possèdent un spin de même signe.

Interactions ferromagnétiques fortes

Le cas des grands rapports d'aspect, $\epsilon \gg \epsilon^*$, modélisé par des interactions ferromagnétiques fortes $J_C \gg 1$, est le cas le plus compliqué à analyser. Il a été étudié par Verpoort *et al.* [95], et la criticalité du modèle n'est pas établie. En particulier, il semblerait que l'état fondamental du système soit sous-extensif.

Interactions nulles

Le cas des rapports d'aspects intermédiaires $\epsilon = \epsilon^*$ est modélisé par des interactions nulles $J_C = 0$. Nous montrons tout d'abord à l'aide la figure 3.10 que l'écoulement actif dans la limite des interactions nulles est équivalent à un 3-coloriage sur réseau hexagonal.

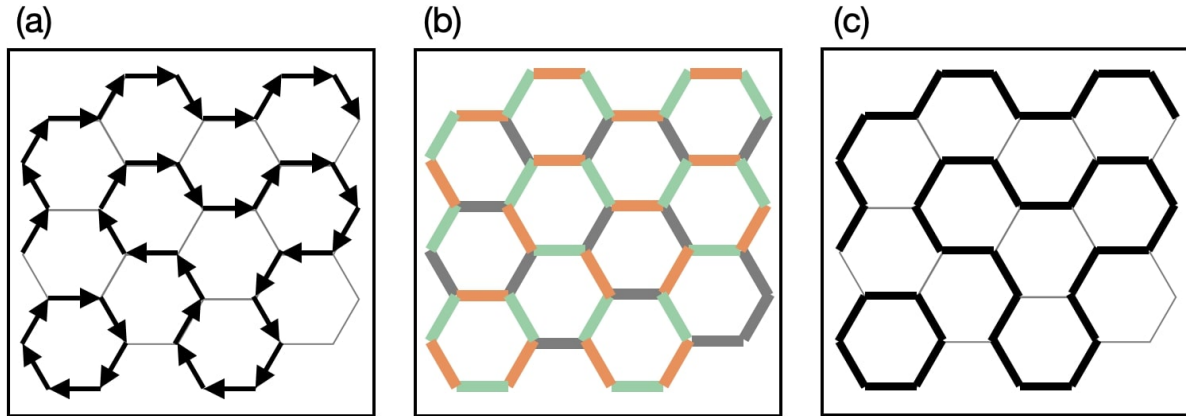


FIGURE 3.10 – Correspondance entre les lignes de courant pour $\epsilon \sim \epsilon^*$, le 3-coloriage sur réseau hexagonal, et le modèle de boucles. (a) Exemple de configuration pour $\epsilon \sim \epsilon^*$. (b) Configuration du 3-coloriage correspondante. Le vert correspond à $\Phi_{ij} = +1$, le orange à $\Phi_{ij} = -1$, le gris à $\Phi_{ij} = 0$. (c) Configuration de boucle correspondante.

Ce modèle est introduit et résolu analytiquement par Baxter dans [96]. Il consiste en un coloriage des arêtes du réseau hexagonal par trois couleurs différentes, les trois couleurs devant être présentes à chaque sommet. Dans la limite d'écoulement maximal (*i.e* quand aucun noeud ne présente trois canaux possédant un courant nul), la correspondance est directe : les trois couleurs sont données par les trois valeurs prises par le courant $\Phi_e = +1, -1, 0$, voir Fig. 3.10a.

Nous montrons en Fig. 3.10b la configuration de trois-coloriage correspondante à l'écoulement en Fig. 3.10a. La correspondance avec un modèle de boucles est également immédiate : les boucles sont les polygones formés par une alternance de deux couleurs différentes [97], voir Fig. 3.10c. Dans le cas des écoulements actifs, nous avons intuitivement choisi les boucles $(+1, -1, +1, -1, \dots)$ (vert-orange-vert-orange... en Fig. 3.10b) qui correspondent aux lignes de courant physique, mais les boucles $(+1, 0, +1, \dots)$ ou $(-1, 0, -1, \dots)$ sont statistiquement identiques. Comme expliqué

précédemment, la limite d'écoulement maximal se traduit par une fugacité des arêtes $x \rightarrow +\infty$. La configuration de boucle est identique par changement de signe : les boucles pouvant être $(+1, -1, +1\dots)$ ou $(-1, +1, -1\dots)$ de façon indistincte. Ainsi, leur fugacité est $n = 2$. Du point de vue de l'écoulement, cela signifie que les lignes de courant sont aveugles à l'orientation des autres lignes de courant, car la constante de couplage $J_C = 0$.

Le modèle de boucles $O(2)$ avec $x = +\infty$ est caractérisé par exposant $\nu = 2/3$ et une fonction de corrélation $C(r) \sim r^{-1}$ [72, 73]. Ces résultats sont en accord avec les mesures montrées en Fig. 3.5d et f. Un exposant $\nu = 2/3$ correspond en effet à l'exposant mesuré pour $\epsilon \approx \epsilon^* \approx 0.8$, et la décroissance de la fonction de corrélation $C(r) \sim r^{-1}$ est cohérente avec les décroissances mesurées pour $\epsilon \approx \epsilon^*$ et $\epsilon > \epsilon^*$. Notons qu'encore une fois, les écoulements réellement observés ne sont pas à fugacité x infinie : les noeuds portant trois canaux de courant nul correspondent à des excitations du 3 coloriages où 3 arêtes adjacentes sont de même couleur.

3.4 Conclusion et perspectives.

En conclusion, nous avons établi un ensemble de règles décrivant le comportement d'un liquide actif dans un réseau hydraulique. Ces règles sont cohérentes avec la conjecture de [28], mais permettent de prédire la transition structurale subie par les boucles de courant lorsque le rapport d'aspect des canaux augmente. Nous avons également exploré plusieurs régimes asymptotiques et établi des correspondances avec des modèles de boucles. Nous pouvons énumérer plusieurs perspectives à cette étude. La première serait de vérifier la robustesse des lois de l'hydraulique active énoncée plus haut pour des réseaux hydrauliques de coordination différente. Les réseaux de coordination 4 – 6 sont l'objet du chapitre suivant. Une question théorique reste ouverte : est-il possible de caractériser théoriquement la fractionnalisation des défauts topologiques d'un écoulement actif en fonction de l'anisotropie du domaine ?

3.5 Article : Active hydraulics laws from frustration principles

When they invented irrigation, the ancient civilizations of Egypt and Mesopotamia relied on the first fundamental rule of hydraulics : mass conservation [98]. In our modern language we formulate it as the first Kirchhoff's law. In steady state, the sum of the fluxes must vanish at each node of a channel network ($\sum_j \Phi_{ij} = 0$, where Φ_{ij} is the flux from node j to node i). Eight millennia later, Hagen, Poiseuille and Darcy discovered the second law of hydraulics [2–4]. Darcy's law relates the mass fluxes to pressure gradients : $\Phi_{ij} = -K_{ij}(P_i - P_j)$, where P_i is the fluid pressure and K_{ij} the hydraulic conductance. Given these two linear relations, and a set of boundary conditions, we can predict the viscous flows in any hydraulic network, regardless of their geometrical complexity. Although it can be computationally hard to solve and optimize, viscous hydraulics is deterministic and fully predictable.

However, over the past decade physicists, chemists and material scientists have complexified this neat picture. They have engineered active fluids that escape the fundamental laws of hydraulics [5]. Either by hacking biological engines, such as molecular motors and bacteria, or by motorizing synthetic soft materials, we have learned how to power fluids at the scale of their elementary building blocks. When confined, the resulting active materials enjoy spontaneous laminar flows even in the absence of any external drive or boundary motion [22,33,35,36,82,99,100]. In channels and pipes, active fluids flow in one direction or the other with the same probability, and can even resist opposing pressure gradients [37]. In other words, they are intrinsically bistable [36,37,84]. This fundamental deviation from Darcy's law makes active hydraulics a challenging problem. From a theoretical perspective, Dunkel, Woodhouse and coworkers realized the fundamental multistability of active hydraulic flows, and investigated the computational power of Active Fluidic Networks based on minimal models [28,84,85,101]. From an experimental perspective, the investigation of active hydraulics has been mostly limited to straight channel geometries, closed loops and one-node networks [35,36,40]. Today, the basic laws of active hydraulics remain to be experimentally tested, confirmed or established, in large-scale networks.

In this article, we perform large-scale active hydraulics experiments. We show that spontaneous laminar flows are frustrated in networks including nodes with an odd coordination number. Focusing on fully frustrated trivalent networks, we show that the resulting active flows realize dynamical spin ices signaled by extensively degenerate random flow patterns even when the channels are spatially ordered. Unlike passive fluids, and at odds with the current Active Fluidic Network (AFN) theory, we find that the random geometry of the streamlines depends on the aspect ratio of the elementary channels. We explain this polymorphism by combining experiments and numerical simulations, and show that it originates from topological-defect fractionalization at the subchannel level. We then elucidate the self-similar geometry of the flow patterns by mapping them on the frustrated structures of magnetic spin ices, and on so-called loop $O(n)$ models [86–89]. Altogether our findings allow us to identify the full set of laws ruling the steady flows of active matter circulating through interconnected channels forming trivalent networks.

To investigate active hydraulics experimentally, we need a model active fluid and model hydraulic networks, see Fig. 3.11. We provide all the technical details in the Method section. In short, our active fluid is a flocking liquid assembled from Quincke rollers [22], which features bistable laminar flows in straight channels [37]. We first confine our active fluid in networks of channels that form a honeycomb structures including up to 3,200 trivalent nodes as illustrated in Figs. 3.11a and 3.11b . In their early experiments, Wioland *et al.* showed that active flows can strongly depend on the specific geometry of their boundaries [83]. We therefore consider two different node geometries where the trivalent junctions either include a star-shape splitter

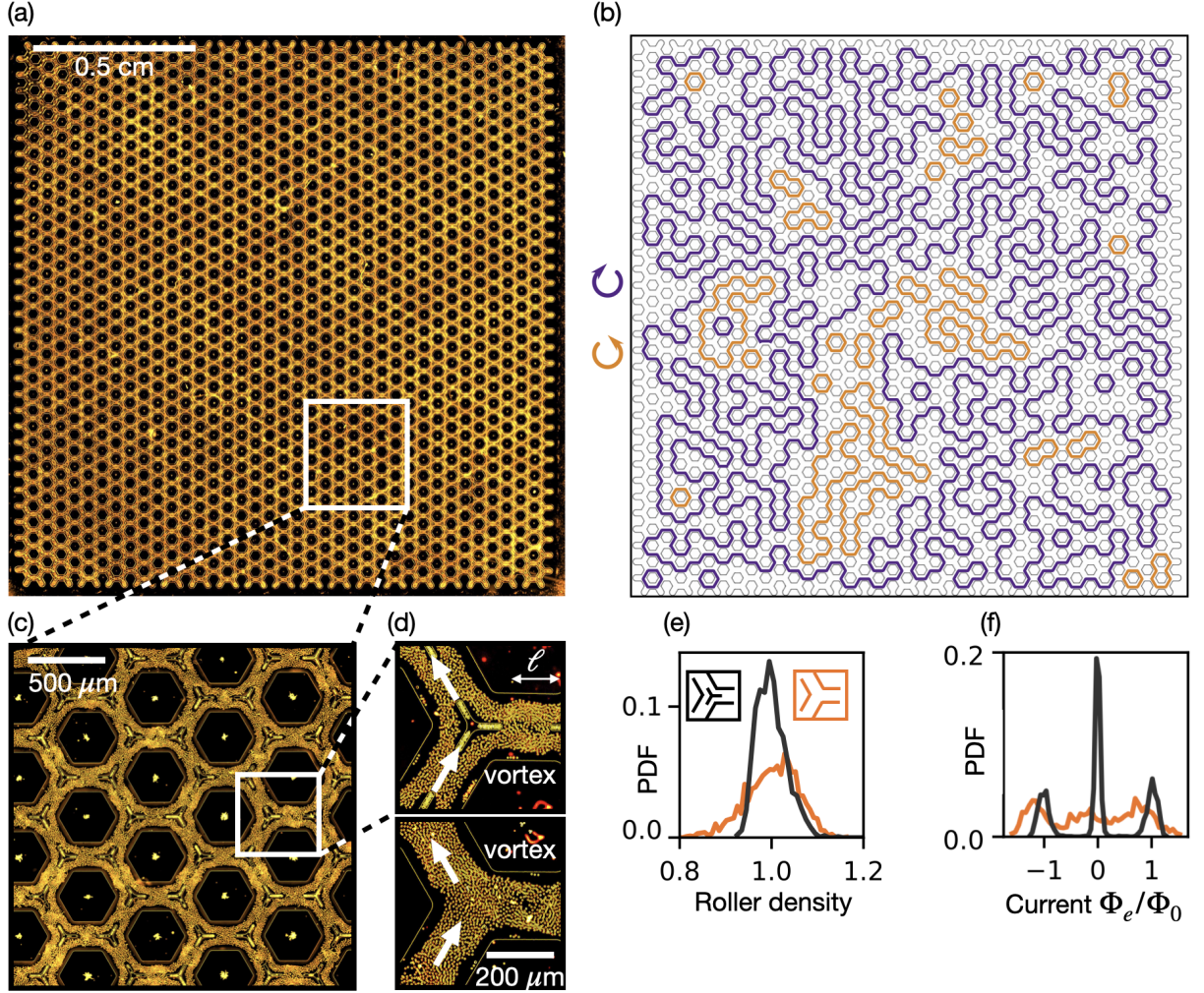


FIGURE 3.11 – **Active hydraulics in trivalent networks** (a) Macroscopic picture of a trivalent microfluidic network. It encloses a two-dimensional active fluid made of flocking Quincke rollers. (b) Experimental streamlines measured in the active hydraulic network shown in panel (a). The streamlines form self-avoiding loops colored by their handedness. (c) Close-up view on the experimental device. We can distinguish steady vortices in a finite fraction of the channels. (d) The results reported in this article do not depend on the specific geometry of the nodes that connect the microfluidic channels. Top : node including a star-shape flow splitter. Bottom : Node with no splitter. In steady state only two of the three channels support laminar flows. The third (horizontal) channel hosts a steady vortex. (e) Distribution of the roller density normalized by the average density in the channels. The density is homogeneous whatever the node geometry but features less fluctuations when including a star-shape splitter. (f) Distribution of the local edge current Φ_e normalized by $\Phi_0 = 400 \text{ s}^{-1}$. We find a trimodal distribution for both node geometries (the sign convention used to define Φ_e is sketched and explained in Fig. 3.12a).

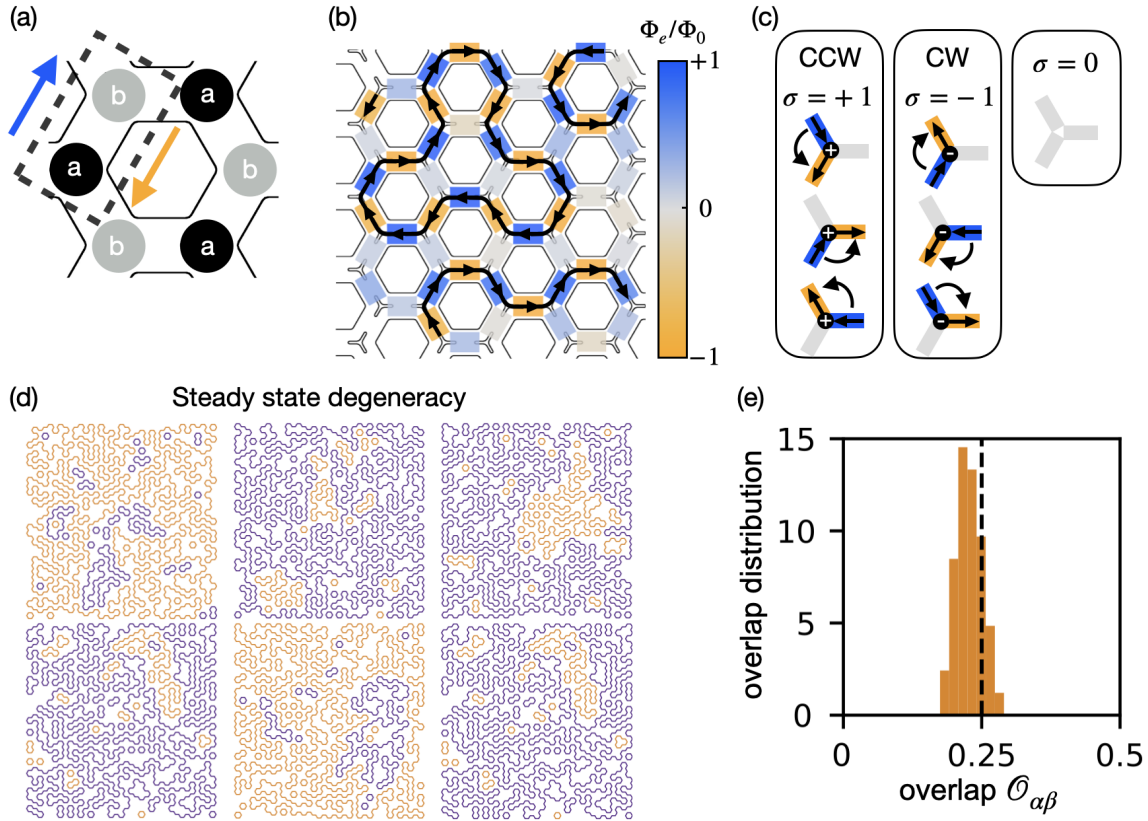


FIGURE 3.12 – Degeneracy of the streamline patterns. (a) Sign convention of the edge current Φ_e . The honeycomb lattice is bipartite. Its unit cell includes two sites, say a and b . Φ_e is defined to be positive (blue arrow) when the active fluid flows from a a site to a b site and negative otherwise (orange arrow) (b) The heatmap shows the local value of the current Φ_e supported by each edge of the channel network. Same sign convention as in (a). The solid lines indicate the shape of the corresponding streamlines. The data correspond to the same region of space shown in Fig. 3.11c. (c) Classification of the seven possible vertices at each node. The color of the edges indicate the sign of the current. Φ_e is associated to a classical spin-1 variable $\Phi_e \in \{-1, +1, 0\}$ (negative, positive and vanishing net current). We distinguish three different classes of vertices indexed by another spin variable $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$ defined at the nodes of the network. σ defines the handedness of the three-color patterns. $\sigma_i = +1$ (resp. -1) when the set of colors at the node i is a positive (resp. negative) permutation of $\{\text{blue, orange, gray}\}$ indexed in the counterclockwise direction. $\sigma_i = 0$ when all three fluxes vanish, see also Methods. (d) Six realizations of the same experiment ($\epsilon = 0.7$) lead to six different streamline patterns with markedly different geometries. As in Fig. 3.11 the color indicates the handedness of the oriented loops. (e) The overlap distribution computed over ten independent replica of the same experiment indicates very little correlations from one replica to another. The overlap function $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$ quantifies the difference between the flow patterns in the two replicas α and β : $\mathcal{O}_{\alpha\beta} = \langle 1 - |\Phi_\alpha(e) - \Phi_\beta(e)| \rangle_e$, where $\Phi(e) = \pm 1, 0$ is the sign of the flux in the edge e of the honeycomb graph, see Methods. The typical value of the overlap is 0.2, which is consistent with the value expected for uncorrelated random current fields ($\langle \mathcal{O}_e^{\alpha\beta} \rangle \in [0.16 - 0.25]$). In the limit case where the $\Phi_\alpha(e)$ are uncorrelated, we can perform a crude approximation. Ignoring spatial correlations, we define the probability $1 - 2p$ that $\Phi(e) = 0$ and assume that $\Phi(e) = \pm 1$ have the same probability p . The average overlap between two random configurations would then be $\langle \mathcal{O}_e^{\alpha\beta} \rangle = 1 - 4p(1 - p)$. Estimating p from the fraction of edges supporting no net current, we find $p \in [0.25 - 0.3]$, which yields $\langle \mathcal{O}_e^{\alpha\beta} \rangle \in [0.25 - 0.16]$.

or not, see Fig. 3.11d. We also systematically vary the aspect ratio $\epsilon = w/\ell$ of the roller streams in the channels, by varying their length ℓ from 120 μm to 220 μm , see Fig 3.11d. The channel width w is kept constant and equal to 200 μm , about a hundred times larger than the colloids' radius (2.4 μm).

We first observe a transient dynamics where the active fluid undergoes strong density and velocity fluctuations over system spanning scales, see Supplementary Video 1. The convergence towards a stable steady state depends on the initial fluctuations in the colloid density and on the system size. But in typically less than a couple of minutes, we found that the active flows converge towards a quiet steady state where the streamlines form a soup of self-avoiding loops as illustrated in Fig. 3.11b. The quantitative characterization and prediction of these random streamline patterns from basic laws is our essential result. We also note that, the density of the active fluid is homogeneous across the whole device, see Fig. 3.11e, and Supplementary Videos 2 and 3. By contrast, the mass-current distribution in the channels is heterogeneous, Fig. 3.11f. It is trimodal with two symmetric peaks associated with spontaneous flows at constant speed, and one higher peak that reveals channels with no net current. Although the statistics of the flow pattern remains qualitatively unchanged, we find that the peaks of the density and current distributions are narrower when using the splitter geometry shown in Fig. 3.11d. All the results reported below therefore correspond to this node geometry. Performing a series of experiments in the deformed lattice geometries shown in Supplementary Data Figure 3.1, we also checked that our results are solely determined by valence of the nodes and not by the C_3 symmetry typical of the honeycomb structure showed in Fig. 3.11.

Unlike in disconnected straight channels, the active flows are never laminar throughout the whole sample : at least 40% of the channels host steady vortices and therefore support no net mass flux, see Figs. 3.11d and 3.11f. This series of observations stems from the geometrical frustration of active laminar flows in trivalent networks [84,85]. It can be understood as follows. As in most active fluids, the spontaneous flows of the Quincke rollers operate at constant speed. When the fluid density is homogeneous, the magnitude of the net fluxes $|\Phi_e|$ measured along all the network edges (e) is peaked on a constant value Φ_0 . The sign of Φ_e is defined in Fig.3.12a. In our experiments $\Phi_0 = 400 \text{ s}^{-1}$, Fig. 3.11e. The active flows are therefore frustrated at any node with an odd coordination number. Flowing at constant speed and conserving mass are two incompatible constraints that cannot be simultaneously met in steady state. Each node accommodates frustration thanks to the emergence of vortices in one edge where the flux vanishes ($\Phi_e = 0$), see Fig. 3.12b and Supplementary videos 4, 5. Irrespective of the channel aspect ratio, the situation where all three fluxes vanish is also possible, yet less likely to happen as seen in Extended Data Figure 3.2 and Supplementary video 6.

The geometry of the streamlines must therefore accommodate the conflicting imperatives set by activity and mass conservation. The resulting local frustration defines a set of seven possible flow rules at the vertices which we classify in Fig. 3.12c. From a condensed matter perspective, they are akin to the spin-ice rules responsible for the ground state degeneracy of magnetic textures in frustrated magnets [86–89]. More specifically, the six most probable vertices of Fig. 3.12c define a three-coloring model on the honeycomb lattice [43,96], as clearly seen in Fig. 3.12b. This first analogy with spin-ice physics explains the vast degeneracy of the flow patterns found in our experiments. Active hydraulic flows are not deterministic. Repeating the same experiment in the same periodic geometry, we observe a plethora of disordered flow patterns. We illustrate them in Fig. 3.12d and their overlap distribution shows that they hardly feature any correlation, Fig. 3.12e.

The streamlines form nearly close-packed ensembles of self-avoiding loops. This geometry is a direct consequence of the spin-ice rules sketched in Fig. 3.12c, where the seven vertices are the generators of the self-avoiding random loops on the honeycomb lattice. Consistently, self-avoiding

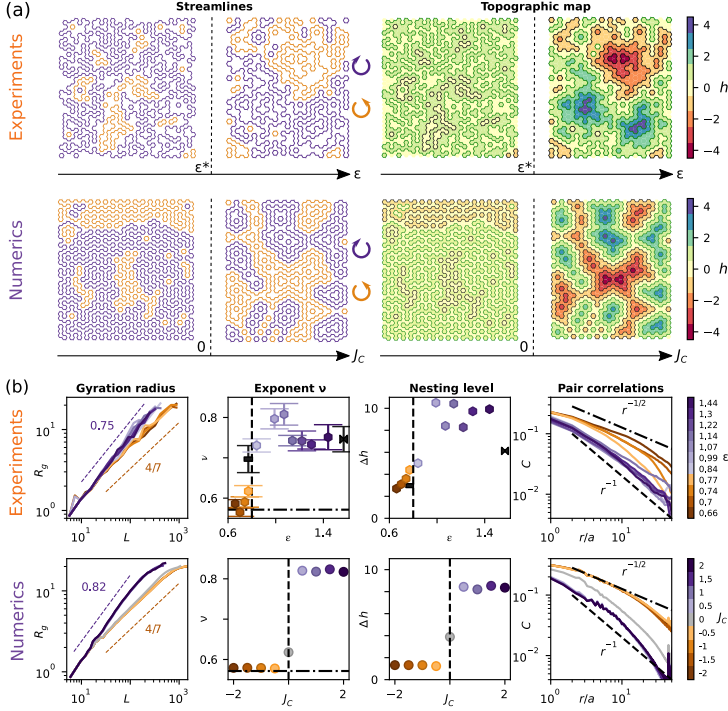


FIGURE 3.13 – Polymorphism of the streamlines. (a) Evolution of the streamline morphology with the channel aspect ratio. The color indicates the flow direction along the loops (orange : counterclockwise, blue : clockwise). Top row : Experiments. (Left) The two set of streamline loops correspond to $\epsilon = 0.7$ and $\epsilon = 1.1$ respectively. Below $\epsilon^* = 0.8$, the streamlines are crumpled and segregated. By contrast, above ϵ^* , they form nested and persistent loop patterns. (Right) Topographic map of the same experiments. The local height field is defined as the sum of the winding numbers associated to all loops winding around a given point in space, see Methods. Below ϵ^* the segregation of the streamlines translate in a two-level topography. Conversely, above ϵ^* the map features high hills and deep valleys. Bottom row : Numerical simulations. Streamlines and topographic maps predicted by the equilibrium configurations of the Hamiltonian defined by Eq. (3.7) for $J_C = -2$ and $J_C = 2$. The qualitative agreement between the simulations and experiments confirms the relevance of our active-hydraulics laws. It also shows that J_C is a good proxy for the channel aspect ratio. **(b)** Characterization of the streamline geometries : experiments, simulations and theory. All simulations are performed on a honeycomb graph having the same size and boundary conditions as in the experiments. First column : For all values of ϵ (experiments), and J_C (simulations), the gyration radius R_g grows algebraically with the length of the streamline loops N : $R_g \sim N^\nu$. The orange dashed lines is the theoretical predictions detailed in SI based on the loop O(1). Second column : Variations of the gyration radius exponent ν with the aspect ratio ϵ (experiments) and J_C (simulations). Orange hexagons : honeycomb lattices. Dark rectangle and bow-tie symbol : experiments performed in the brick and deformed honeycomb lattices showed Supplementary Data Figure 1. Dashed-dotted line : exact prediction in the small J_C and large J_A limit (closely packed O(1) loop model). Dashed line : when $J_C = 0$ and $J_A \gg 1$ limit (closely packed O(2) loop model) our experiments and numerical data are consistent with the theoretical prediction $\nu = 2/3$. Third column : Nesting level quantified by the maximal height difference on the topographic maps (average over ten realizations). The nesting level jumps at $\epsilon = \epsilon^*$ (experiments), and $J_C = 0$ (simulations). Fourth column : Pair correlation $C(r)$. $C(r)$ is the probability to find two nodes at a distance r within the same loop. When $\epsilon > \epsilon^*$ the pair correlation decays much faster than when $\epsilon < \epsilon^*$. The trend is even clearer in the simulations. where the curves collapse on two distinct mastercurves when $J_C \neq 0$. Dash-dotted line : Exact prediction in the limit $J_C \ll 0$, dashed line : exact prediction for $J_C = 0$.

patterns were already numerically observed in AFN models [28] for degree-3-vertex graphs where the flow rules essentially reduce to that of Fig. 3.12c. However the loops' morphology strongly depends on the aspect ratio of the channels ϵ , Figs. 3.13a. Obviously, this polymorphism cannot be explained by the sole spin-ice rule of Fig. 3.12c as it is agnostic to the channel lengths. To explain it, we first quantitatively characterize the loops' geometry. We find that, for all channel aspect ratios, the loops are self-similar : their gyration radius R_g grows algebraically with their length L as $R_g \propto L^\nu$, Fig. 3.13b. Moreover, for small ϵ values, the loops are collapsed and segregated, by contrast, when ϵ is large, the streamlines are more persistent and form nested structures. We quantify these observations by plotting the exponent of the gyration radius ν . We find that it undergoes a sharp increase when ϵ exceeds $\epsilon^\star = 0.8$ in Fig. 3.13c.

The transition from segregated to nested loops occurs at the same value $\epsilon^\star$. To see this, we classically identify the orientated streamlines with the contour lines of the height fields h of rough landscapes [52]. We show in Fig. 3.13a the topographic maps h corresponding to two streamline patterns, see also Methods. We then quantify the level of nesting by the maximal height difference Δh which increases sharply at $\epsilon^\star$, Fig. 3.13b.

These observations prompt us to investigate deeper the orientational interactions between the streamlines. To do so, we measure the fraction of parallel configurations when two adjacent streamlines are separated by a channel supporting no net flux, Fig. 3.14b. To measure this quantity we note that it is given by $\langle 1 + \sigma_1 \sigma_2 \rangle / 2$ where the spin variables σ_i measure the handedness of the vertices see Fig. 3.12c and Fig. 3.14a.

Fig. 3.14b shows that antiparallel contacts ($\sigma_1 \sigma_2 = -1$) prevail when $\epsilon < \epsilon^\star$, whereas most of the contacts are parallel ($\sigma_1 \sigma_2 = +1$) when $\epsilon > \epsilon^\star$. This central result indicates that active hydraulic flows are not only shaped by the spin-ice rules but also by short-range orientational interactions between adjacent streamlines. To elucidate their nature, we investigate the morphology of the vortical flows at the subchannel scale, Fig. 3.14a. We find a clear structural change at $\epsilon^\star$. Below $\epsilon^\star$, the channels with no net flux ($\Phi_e = 0$) host a single vortex. This vortex couples the adjacent channels as a gear would couple two circulators. The continuity of the flow field then favors antiparallel couplings between neighboring streamlines. This short range coupling is consistent with collapsed streamline loops including a number of hairpins, see Fig. 3.14e.

The situation where $\epsilon > \epsilon^\star$ is more subtle. We find that the zero-flux channels host two vortices, Fig. 3.14a. In most channels, they rotate in opposite directions, Fig. 3.14b. The continuity of the flow field therefore promotes parallel couplings, which explains the emergence of nested structure of the streamlines as clearly seen in Fig 3.14f. However in Fig. 3.14a we can also see configurations with two co-rotating vortices which promote antiparallel couplings. We now need to understand whether the dominance of counter-rotating vortices is specific to our experiments, or generic to polar active fluids. We address this question numerically. We model the active flows using Toner-Tu hydrodynamics of polar active matter [7, 65], and solve these generic equations using a finite element solver, see Methods. We consider the simple geometry of an anisotropic cigar-shaped chamber with tangent boundary conditions, see Figs. 3.14c. A systematic investigation would go beyond the scope of this article, we therefore focus on a single set of material parameters consistent with earlier measurements in Quincke-roller fluids [34, 90]. As the channel aspect ratio increases, we observe a clear transition between one-vortex and two-vortex configurations. The velocity field around a point vortex hosts a $+1$ topological charge. Therefore when two point vortices coexist, an additional stagnation point of charge -1 must emerge to conserve the overall $+1$ topological charge [34]. Remarkably, we find that the most likely configuration does not correspond to the coexistence of $+1$ and -1 charges, Fig 3.14d. By contrast, we observe a fractionalization of the -1 charge into two $-1/2$ singularities, Fig 3.14c. The fractional charges corresponding to stagnation points are bound to the channel walls and stabilize the counter-rotation of the two $+1$ vortices. This numerical result is in excellent agree-

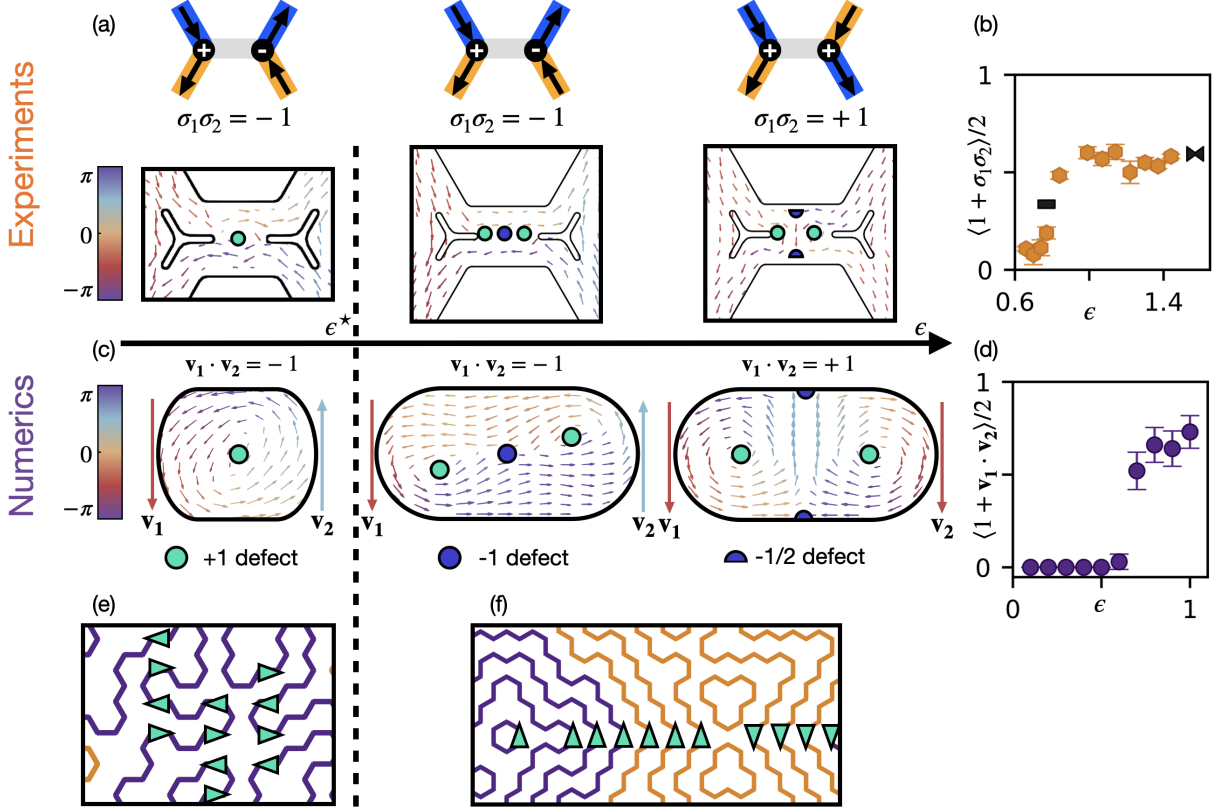


FIGURE 3.14 – **Orientational interactions between adjacent streamlines and topological defect fractionalization.** (a) Closeup on the flow field in two adjacent streamlines separated by a channel that supports no net flux. Below ϵ^* the central channel hosts a single vortex. Above ϵ^* the central channel hosts two vortices. They can either rotate in the same or opposite directions. When they rotate in the same direction, the flow field includes a -1 topological charge between the two $+1$ charges. Conversely, when the two vortices rotate in opposite directions the -1 charge is fractionalized into two $-1/2$ defects bound to the channel walls. (b) Fraction of parallel contacts across each channel supporting no net flow plotted against the channel aspect ratio ϵ . The fraction of parallel contacts is equal to $\frac{1}{2}(1 + \sigma_1\sigma_2)$, where $\sigma_1\sigma_2 = 1$ when the two vertical flows are along the same direction and -1 otherwise. Orange hexagons : honeycomb lattices. Dark rectangles and bow-tie symbols : experiments performed in the brick and deformed honeycomb lattices (respectively), showed Supplementary Data Figure 1. The flow couplings are mostly antiparallel below ϵ^* and mostly parallel above ϵ^* . (c) Numerical resolution of the Toner-Tu equations in cigar-shaped boxes, see SI for details about the numerical method and material parameters. We note w the width of the simulation box, ℓ the length of the straight line joining the half-circles, the aspect ratio of the boxes is defined by $\epsilon = \ell/w$. In agreement with what we observe in b, increasing the aspect ratio results in a transition from a flow field with a single $+1$ topological charge to flow fields including two vortices, which can be either separated by a single $+1$ defect or two fractionalized $-1/2$ defects. (d) Repeating the same simulation with random initial conditions we find that the steady states where the rightmost (v_2) and leftmost (v_1) flows are parallel prevail in boxes with large aspect ratios. In other words the transition from antiferromagnetic to ferromagnetic contacts in our experiments are not specific to colloidal rollers but generic to flocking matter (Toner-Tu fluids). (e) Close-up on the experimental streamlines measured in a channel where $\epsilon < \epsilon^*$. The green arrow indicates the local orientation of the flows. The streamlines are crumpled and segregated. The antiferromagnetic couplings between adjacent streamlines promote this geometry. (f) Same as in (e) for $\epsilon > \epsilon^*$. The streamlines are persistent and nested. The ferromagnetic couplings between adjacent streamlines promote this geometry.

ment with our experimental findings Fig 3.14a. We therefore conclude that the prevalence of ferromagnetic couplings between the macroscopic streamlines (Fig. 3.14b) originates from defect fractionalization in the flow field at the subchannel scale. This consistent observation does not rely on the specifics of Quincke roller experiments.

We are now equipped to state the laws of active hydraulics in trivalent networks and map them on a double spin model. This mapping will allow us to predict the self-similar geometry of the streamlines, their gyration radius, degree of nesting, and pair correlation. The four laws are :

- (i) The fluid activity constraints the current Φ_{ij} on the edge $e = (i, j)$ to take only three different values $\Phi_{ij}/\Phi_0 \in \{-1, 0, +1\}$.
- (ii) In straight channels, the stability of laminar active flows penalizes the state where $\Phi_{ij} = 0$.
- (iii) At every node i , mass conservation imposes the spin-ice constraint : $\sum_j \Phi_{ij} = 0$. This constraint frustrates (ii).
- (iv) The topological defects of the flow field in channels hosting no net current impose effective ferromagnetic, or antiferromagnetic, interactions between adjacent streamlines. The sign of the interactions is set by the channels' aspect ratio.

The first three laws define the spin-ice rules of Fig. 3.12c and are akin to the AFN model of Woodhouse and Dunkel [28, 84, 85]. They must be complemented by the fourth law to explain the polymorphism of the streamlines observed in all our experiments and quantified in Fig. 3.13.

We now build a model to quantitatively account for these four elementary laws. To do so, we introduce an effective Hamiltonian $\mathcal{H}$ that couples two classical spin-1 variables. The edge spins $\Phi_{ij} = \pm 1, 0$ which model the local fluxes, and the node spins $\sigma_i = \pm 1, 0$ which encode the handedness of the i^{th} node as shown in Fig. 3.12c. This Hamiltonian takes the compact form :

$$\mathcal{H} = -J_A \sum_{(i,j)} \Phi_{ij}^2 - J_C \sum_{(i,j)} \delta_{\Phi_{ij},0} \sigma_i \sigma_j, \quad (3.7)$$

where both sums are taken over the edges of the network. The first term reflects the activity of the fluid. J_A is a positive constant which penalizes the states of vanishing flows (Law ii). The second term reflects the interactions between adjacent streamlines (Law iv), and J_C is a proxy for the channel aspect ratio. $J_C < 0$ corresponds to antiferromagnetic couplings, *i.e.* to channels where $\epsilon < \epsilon^*$. $J_C > 0$ corresponds to ferromagnetic couplings, *i.e.* to channels where $\epsilon > \epsilon^*$, see Figs. 3.14a, 3.14e and 3.14f. We stress that J_C only couples nodes connected by channels where the flux vanishes. This property is accounted for by the $\delta_{\Phi_{ij},0}$ term. The geometry and handedness of the streamline loops map on the ensembles of connected edge spins in the states that minimize $\mathcal{H}$. To find these states, we note that the Φ_{ij} and σ_i variables are not independent and use a Monte Carlo worm algorithm [102] which samples only the Φ_{ij} configurations compatible with the mass-conservation constraint expressed by (Law iii).

We compare our numerical and experimental findings in Fig. 3.13b. The excellent agreement between the computed and measured structural properties confirms the predictive power of our active hydraulic laws.

We can now gain a deeper insight by investigating three asymptotic limits : $J_C \gg 0$ (strong ferromagnetic interactions), $J_C \ll 0$ (strong antiferromagnetic interactions) and $J_C = 0$ (uncoupled streamlines). Remarkably, in the antiferromagnetic and non-interacting limits quantitative analogies with a series of statistical field theories allow us to predict exact scaling laws for the gyration radius and pair correlation functions of the streamline patterns.

— *Strong Ferromagnetic interactions, viz. trivalent networks of long channels* ($\epsilon \gg \epsilon^*$). This geometry is modelled by Hamiltonians where $J_C \gg 0$. They are the most difficult to analyze. This difficulty stems from the subextensive degeneracy of the ground states. This observation was first made on the three coloring model introduced in Ref. [95] which maps on Eq. (3.7), see SI

and Fig. 3.12b for details. The ground state configurations of $\mathcal{H}$ indeed correspond to patterns of edge spins which uniformly minimize the ferromagnetic interactions. Back to the active hydraulic problem, we expect the ferromagnetic interaction to be minimized by fully nested streamlines. We never observe such configurations, neither in our experiments nor in our simulations. The reason is that we only probe metastable states of nested clusters, Fig. 3.13a, for which no exact prediction is currently available. We however fully characterize the geometry of the metastable states in finite-size systems, see SI. Despite their non-universal nature, Fig. 3.13b shows that our model correctly accounts for the measured gyration radius and pair correlations.

— *Strong antiferromagnetic interactions, viz. trivalent networks of short channels* ($\epsilon \ll \epsilon^*$). In this limit, we can unambiguously define a net circulation around each face of the honeycomb lattice, see SI Fig. S9b. The handedness of the circulation around each face defines yet another classical spin variable $\Omega = \pm 1$, which measures the local height h of the topographic map of Figs. 3.13a and 3.13b $\Omega = 2|h| - 1$. Altogether, the constraints imposed by the strong activity ($J_A \gg 0$) and strong antiferromagnetic interactions ($J_C \ll 0$) translate into antiferromagnetic couplings between the adjacent Ω spins. As a result, in this regime, the streamlines are nothing else but the domain walls between regions of opposite magnetization in the ground states of a frustrated Ising antiferromagnet, see SI Fig. S9b. We use this equivalence to compute exactly the nesting level Δh , the gyration radius exponent ν , and the pair correlation function $C(r)$, *i.e.* the probability to find two edges at a distance r in the same loop, Fig. 3.13b. The domain walls of the Ising antiferromagnet (AF) are obviously segregated and the nesting level is given by $\Delta h = 1$ [95]. The exact predictions of the gyration radius exponent and of the decay of $C(r)$ are more complex to compute. They rely on the mapping of Anti-Ferromagnetic (AF) Ising models on the loop $O(1)$ theory [103], which we recall in SI. Using this mapping, we find $\nu = 4/7$ [72, 73] and $C(r) \sim r^{-1/2}$. These three exact predictions agree with our experimental findings, and numerical simulations, in the limit $\epsilon < \epsilon^*$ ($J_C \ll 0$), see Fig. 3.13b and SI.

— *Vanishing edge-spin interactions, viz. uncoupled streamlines.* Finally, when the coupling between adjacent edge spins vanishes ($J_C = 0$), our model reduces to Baxter's three coloring model [96]. It consists in coloring the edges of a honeycomb lattice as sketched in Fig. 3.12c. Baxter's model map on an exactly solvable statistical model of interacting loops known as the loop $O(2)$ model, which we recall in SI as well. The loops of this model identify to the streamlines of the active fluid. Using this second powerful analogy we find that the gyration radius exponent should be $\nu_0 = 2/3$ [73], and that $C(r) \sim r^{-1}$. Remarkably these two exact predictions agree with the values measured in our experiments and simulations at the crossover between the ferromagnetic and antiferromagnetic regimes Fig. 3.13c.

Altogether the agreement between our experiments and theories establish the predictive power of our spin model which accurately describes the random geometry of frustrated active-hydraulic flows.

As a final remark, we stress that the four local laws of active hydraulics apply broadly, beyond the specifics of periodic lattices and polar active matter. They should describe the flows of any form of active fluid animated by spontaneous laminar flows in complex trivalent networks, from cell tissues, to bacteria suspensions, to active gels and liquid crystals. We therefore expect our findings to provide a robust set of design rules for active microfluidic devices and offer new insights on the dynamics of groups of living cells and animals in heterogeneous environments and complex habitat [104–106].

Methods

Quincke-roller fluids

The experimental setup was described in [66, 107]. In short, we use polystyrene colloids of radius $2.4 \mu\text{m}$ (Thermo Scientific G0500) dispersed in a solution of hexadecane including 5.5×10^{-2} wt % of AOT salt (Dioctyl sulfosuccinate sodium salt). The microfluidic devices are made of two electrodes spaced by a $25\text{-}\mu\text{m}$ -thick double-sided tape. We pattern the bottom surface of the device with channel networks. They are made of a $2\text{-}\mu\text{m}$ -thick layer of insulating photoresist resin (Microposit S1818) patterned by means of standard UV lithography as explained in [107]. In all our experiments the networks have the shape of a honeycomb structure. The width of the channels is $200 \mu\text{m}$ and we vary their lengths from $120 \mu\text{m}$ to $220 \mu\text{m}$. The overall size of the channel network is in the order of $1.5 \times 1.5 \text{ cm}^2$.

The electrodes are glass slides coated with ITO (indium tin oxide, Solems, ITOSOL30, thickness 80 nm). We start the experiments by filling the microfluidic chambers homogeneously with the colloidal solution, we then let the colloids sediment on the bottom electrode. The average packing fraction of the colloidal monolayer is approximately equal to 30% in all our experiments. We operate at this packing fraction to make sure that our active fluid remains in the polar-liquid state, far from the flocking-transition threshold. Within our experimental conditions homogeneous polar fluids form when the packing fraction exceed $\simeq 10\%$. [22]. We then apply a DC voltage of 110 V to trigger the Quincke instability and cause the colloids to roll at a constant speed $v_0 \approx 0.8 \text{ mm.s}^{-1}$ on the bottom electrode. Each experiment is repeated from six to ten times.

Measurement of the velocity fields

Once the active flow reaches a steady state, we image the whole network for 5 s with a Nikon AZ100 microscope. We record the videos with a Luxima LUX160 camera (Ximea) at a frame rate of 200 fps . To measure the velocity field $\mathbf{v}$ we use a conventional particle-imaging velocimetry (PIV). In practice, we use the PIVLAB MATLAB package [108]. The PIV box size is $48 \times 48 \mu\text{m}^2$, the PIV boxes overlap over a half of their size, Extended Data Fig. S7a and S7b. In all our measurement, we find that the boundary condition of the velocity field close to the confining wall of the channels is a full slip condition in agreement with all previous experiments on colloidal-roller fluids.

Before constructing the streamlines, we average the velocity field over the width of each channel as shown in Extended Data Fig. S7. We define the average velocity in each channel as a scalar quantity. We use the bipartite geometry of the honeycomb lattice to define its sign. Our sign convention is more easily explained using the sketch of Extended Data Fig. S7c. Denoting by ‘a’ and ‘b’ the two sublattices, we choose to assign a $+$ sign (blue color) to the velocity when the fluid flows from a ‘a’-node to a ‘b’-node and a $-$ sign (orange color) when the fluid flows from a ‘b’-node to a ‘a’-node.

Density and current fields.

To measure the local current fields $\mathbf{j}(\mathbf{r}) \equiv \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r})$, we measure the density and the velocity field in two different movies of the same experiment. For both measurements, we use a Hamamatsu ORCA-Quest qCMOS camera mounted on a Nikon AZ100 microscope with a $2\times$ objective. As we cannot image the whole network at once, we perform multiple acquisitions and stitch our images, which is always possible in the steady state. To measure the density field, we perform epifluorescence imaging at 10 fps , and use the local fluorescence intensity as a proxy for the colloid density. Extended Data Fig. S8a shows that, as expected, both quantities are

proportional to one another. The calibration was performed on static images using a higher magnification and using a conventional particle detection algorithm (ImageJ).

We then use bright field imaging and record at a higher frame rate (200 fps) to perform our PIV analysis. The PIV box size is $24 \times 24 \mu\text{m}^2$. We then average both density, ρ , and velocity fields $\mathbf{v}$ over time and we multiply them to reconstruct the local current field $\mathbf{j}$ see Extended Data Figs S8b, S8c and S8d. Finally we measure the average current Φ_{ij} along the edges of the network by averaging $\mathbf{j}$ over the channel joining the nodes i and j .

Construction of the streamlines

In this section we detail how we analyse our data. We use the same methods and algorithms for our experimental and numerical data.

To construct the streamlines we first define a discrete current field Φ_e on the edge e connecting the nodes i and j . Φ_e can take three different values : ± 1 in channels that support a net current and 0 in channel hosting vortices. In practice we construct the Φ_e field as follows. We measure the average scalar product between the local velocity and the unit vector pointing in the direction of a channel. The average is performed over the channel area. When this quantity is larger than 0.5 we set $\Phi_e = +1$, when it is smaller than -0.5 , we set $\Phi_e = -1$, and $\Phi_e = 0$ otherwise. In our simulations $\Phi = \pm 1, 0$ by definition.

Once the Φ_e are defined we can unambiguously construct the oriented streamlines along the principal axis of the honeycomb lattice. We then use a depth-first search algorithm to detect and label each individual loop in the streamlines soup [109].

Once the individual loops are identified, we can readily measure their gyration radius and the probability $C(r)$ that two edges of the lattice separated by a distance r belong to the same loop (see also SI section IV.B).

Constructing a topographic map from an ensemble of oriented streamlines

We now explain how to quantify the nesting of the streamlines. To do so, we first convert the ensemble of oriented loops into a topographic map. We denote $\mathcal{F}$ the ensemble of the hexagonal faces of the honeycomb network. Considering a configuration $\{\Phi_e\}$ of the current field on the edges, we define a height field h_f on the faces.

The loops are oriented, we can then define the winding number of each loop around a given face f , it is equal to ± 1 when the face is lassoed by the loop and 0 otherwise. The height field of the topographic map is then defined at a face of the network as the sum of the winding numbers of all loops winding around this point. As a reference, the height is taken to be zero outside the network.

In practice we measure the height field h_f recursively. The procedure is easily understood from the sketch of the algorithm shown in Extended Data Fig. S9a. In short, starting from a face f associated with a height h we move to the neighbouring face f' by crossing an edge e . If e hosts a spin pointing towards the right (resp. left) hand side, we assign the value $h' = h - 1$ (resp. $h' = h + 1$). The right and left directions are defined with respect to the vector connecting the centers of f and f' . When the edge hosts no current ($\Phi_e = 0$), then $h' = h$. The resulting height field does not depend on the way the network is explored. This procedure is very similar to the standard mapping of loop $O(n)$ models to solid-on-solid models discussed e.g. in Ref. [52].

The reason why we introduce this mapping is twofold. Firstly, the height amplitude $\Delta h = \max_{\mathcal{F}} h_f - \min_{\mathcal{F}} h_f$ is one of our key observables. It quantifies the nesting of the streamlines and distinguish between the two phases observed both in the experiments and in the simulations (Fig. 3.13 and SI section IV.B). Secondly, this mapping allows us to map the streamlines of

the crumpled phase to the domain walls of the antiferromagnetic Ising model on the triangular lattice of faces $\mathcal{F}$ (SI section V.B).

3.6 Supplementary information

3.6.1 Experiments

Impact of the node geometry on the emergent flow patterns

We use two different designs for the nodes of the network. The first design is a simple junction between three straight channels, whereas the second design includes a flow splitter at each node, Fig. S6a. Our results do not qualitatively depend on the specific geometry of the nodes : the streamlines form self-avoiding loops, Fig. S6b, and the fraction of ferromagnetic couplings increases with the aspect ratio of the channels, Fig. S6c. However, including flow-splitters results in more homogenous fluid flows, Fig. S6d, and reduce the crossings between the streamlines, see Figs. S6b. In the main text, all the results correspond to the splitter geometry.

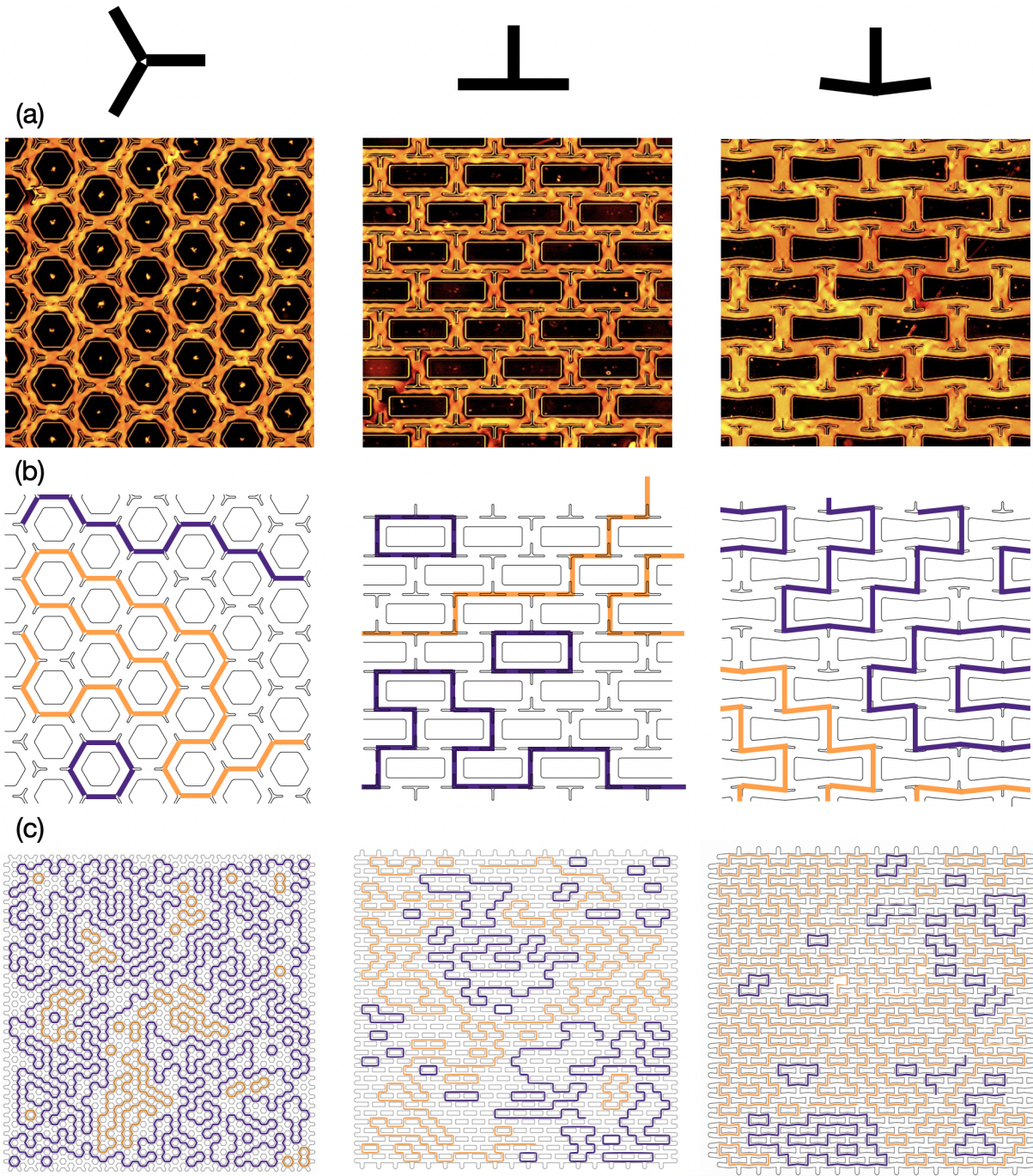
Measurement of the velocity fields

Once the active flow reaches a steady state, we image the whole network for 5 s with a Nikon AZ100 microscope. We record the videos with a Luxima LUX160 camera (Ximea) at a frame rate of 200 fps. To measure the velocity field $\mathbf{v}$ we use a conventional particle-imaging velocimetry (PIV). In practice, we use the PIVLAB MATLAB package [108]. The PIV box size is $48 \times 48 \mu\text{m}^2$, the PIV boxes overlap over a half of their size, Fig. S7a and S7b. Before constructing the streamlines, we average the velocity field over the width of each channel as shown in Fig. S7. We define the average velocity in each channel as a scalar quantity. We use the bipartite geometry of the honeycomb lattice to define its sign. Our sign convention is more easily explained using the sketch of Fig. S7c. Denoting by ‘a’ and ‘b’ the two sublattices, we choose to assign a + sign (blue color) to the velocity when the fluid flows from a ‘a’-node to a ‘b’-node and a – sign (orange color) when the fluid flows from a ‘b’-node to a ‘a’-node.

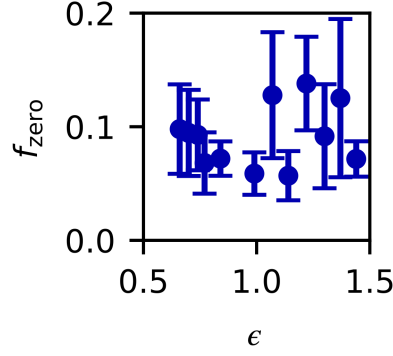
Density and current fields.

To measure the local current fields $\mathbf{j}(\mathbf{r}) \equiv \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r})$, we measure the density and the velocity field in two different movies of the same experiment. For both measurements, we use a Hamamatsu ORCA-Quest qCMOS camera mounted on a Nikon AZ100 microscope with a $2\times$ objective. As we cannot image the whole network at once, we perform multiple acquisitions and stitch our images, which is always possible in the steady state. To measure the density field, we perform epifluorescence imaging at 10 fps, and use the local fluorescence intensity as a proxy for the colloid density. Fig. S8a shows that, as expected, both quantities are proportional to one another. The calibration was performed on static images using a higher magnification and using a conventional particle detection algorithm (ImageJ).

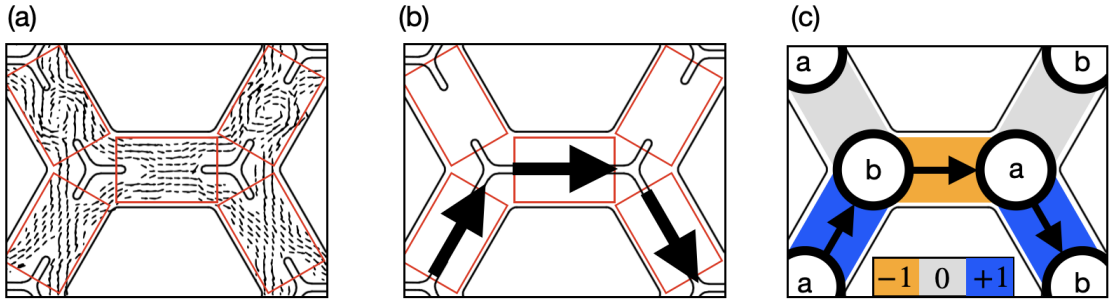
We then use bright field imaging and record at a higher frame rate (200 fps) to perform our PIV analysis. The PIV box size is $24 \times 24 \mu\text{m}^2$. We then average both density, ρ , and velocity fields $\mathbf{v}$ over time and we multiply them to reconstruct the local current field $\mathbf{j}$ see Figs S8b, S8c and S8d. Finally we measure the average current Φ_{ij} along the edges of the network by averaging $\mathbf{j}$ over the channel joining the nodes i and j .



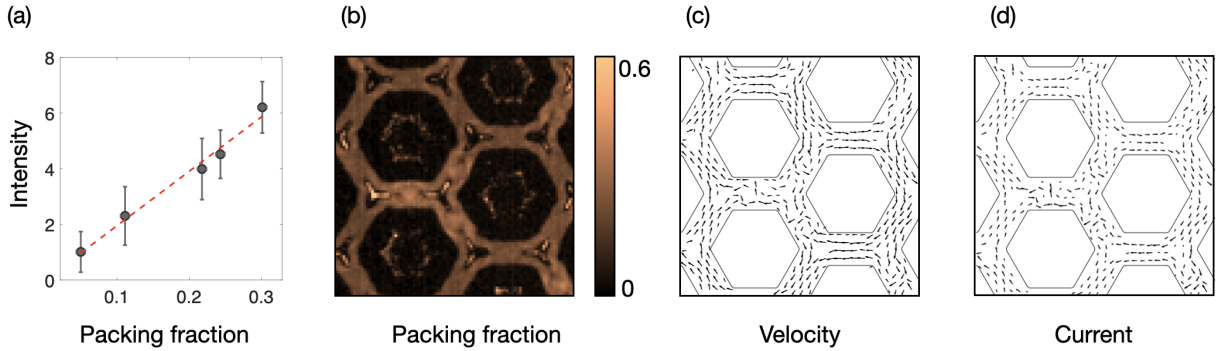
Extended Data Figure 3.1 – Streamline geometries in three trivalent network geometries To better establish the robustness of our findings we have conducted experiments in three types of periodic trivalent networks. They all correspond to continuous deformations of the honeycomb geometry. **(a)** Pictures of the three experiments conducted in three different networks. The channel width is the same in the three experiments ($200\ \mu\text{m}$). **(b)** Close-up on the streamlines corresponding to the region of the network shown in (a). **(c)** Full geometry of the streamlines. In all three cases they form self-avoiding loops, and the fraction of nodes where the three currents vanish is subdominant but depend on the specific geometry of the nodes. We note that in the brick wall geometry we find some interrupted streamlines due to defects in the design that cause local density fluctuations.



Extended Data Figure 3.2 – Fraction of nodes with three vanishing fluxes. The fraction f_{zero} does not change significantly with ϵ and remains around 0.1. The error bars correspond to the 95% confidence interval.



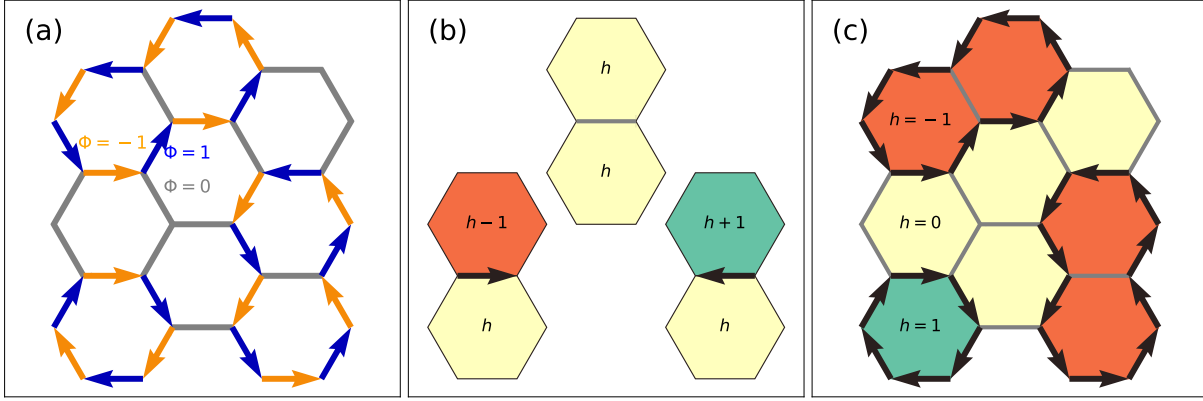
Extended Data Figure 3.3 – From local velocity fields to streamlines and three-coloring models. (a) Velocity field. The averaging windows are sketched in red. (b) Sketch of the averaged velocity in each averaging window. (c) Scalar value of the velocity. It is +1 (resp. -1) when the fluid flows on average from a ‘a’-node to a ‘b’-node (resp. from a ‘b’-node node to a ‘a’-node).



Extended Data Figure 3.4 – Measuring the local density and current fields at the subchannel scale. (a) Fluorescence intensity plotted against to the packing fraction ρ . (b) Colormap of the packing fraction field. (c) Velocity field. (d) Current field computed from (b) and (c).

3.6.2 Data analysis

In this section we detail how we analyse our data. We use the same methods and algorithms for our experimental and numerical data.



Extended Data Figure 3.5 – Mapping of the streamlines on a topographic map. (a) Configuration of our model (see Fig. 3.12b). (b) Rules for the topographic map. If there is no arrow, the two faces have the same height. If there is an arrow pointing to the right, when moving from f to f' , then $h_{f'} = h_f - 1$. If there is an arrow to the left, then $h_{f'} = h_f + 1$. (c) Topographic map corresponding to (a). In this configuration, $\Delta h = \max h - \min h = 2$.

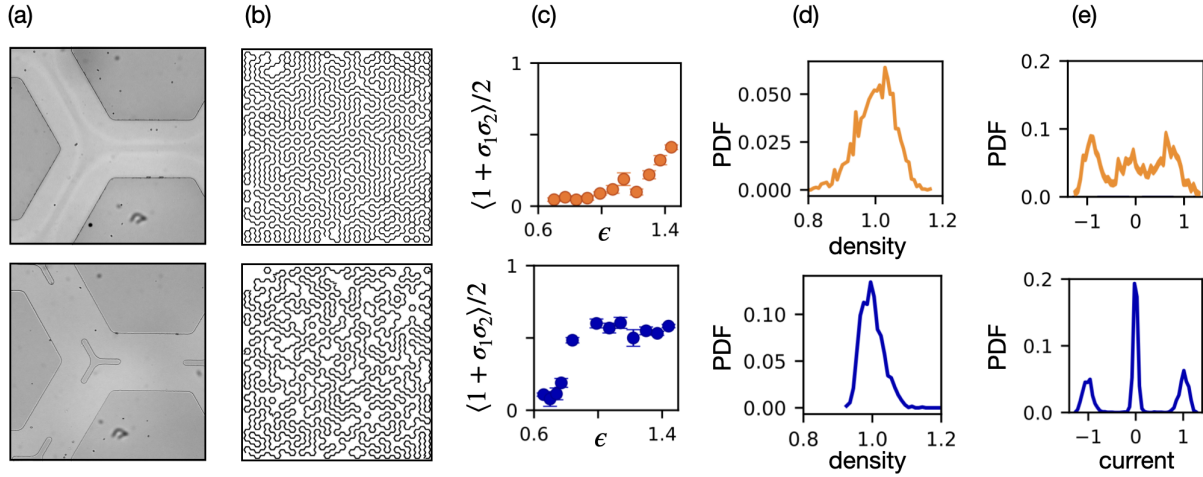


FIGURE S6 – (a) Zoom on the two junctions geometries. Top : simple trivalent junction. Bottom : trivalent junction with a splitter. (b) Top : streamlines in a networks with simple trivalent nodes. $\epsilon = 0.7$. Bottom : streamlines in a networks with splitters. $\epsilon = 0.7$. Streamlines form self avoiding loops, but splitters forbid crossings between streamlines. (c) Fraction of parallel couplings for simple nodes (top) and for nodes with splitters (bottom). Each experiment has been repeated 10 times. Data are presented as mean values and error bars are 95% confidence intervals. (d) Distribution of the average density in channels. Top : simple nodes, $\epsilon = 0.84$. Bottom : nodes with splitters, $\epsilon = 0.84$. (e) Distribution of the average current in channels. Top : simple nodes, $\epsilon = 0.84$. Bottom : nodes with splitters, $\epsilon = 0.84$.

Construction of the streamlines

To construct the streamlines we first define a discrete current field Φ_e on the edge e connecting the nodes i and j . Φ_e can take three different values : ± 1 in channels that support a net current and 0 in channel hosting vortices. In practice we construct the Φ_e field as follows. We measure the average scalar product between the local velocity and the unit vector pointing in the direction of a channel. The average is performed over the channel area. When this quantity is larger than 0.5 we set $\Phi_e = +1$, when it is smaller than -0.5 , we set $\Phi_e = -1$, and $\Phi_e = 0$ otherwise. In our

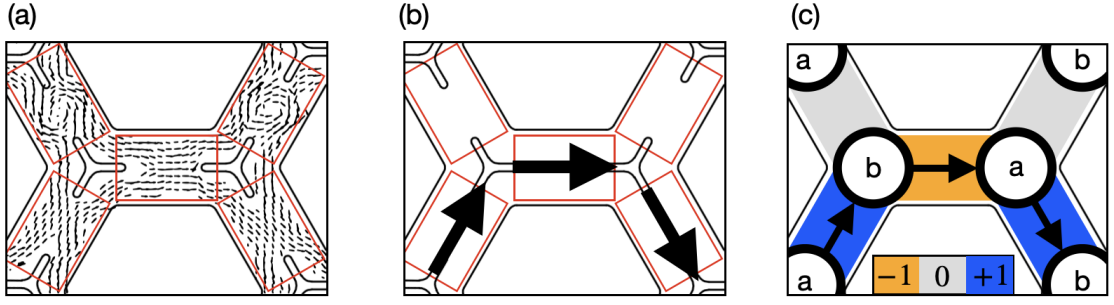


FIGURE S7 – (a) Velocity field. The averaging windows are sketched in red. (b) Sketch of the averaged velocity in each averaging window. (c) Scalar value of the velocity. It is +1 (resp. -1) when the fluid flows on average from a ‘a’-node to a ‘b’-node (resp. from a ‘b’-node node to a ‘a’-node).

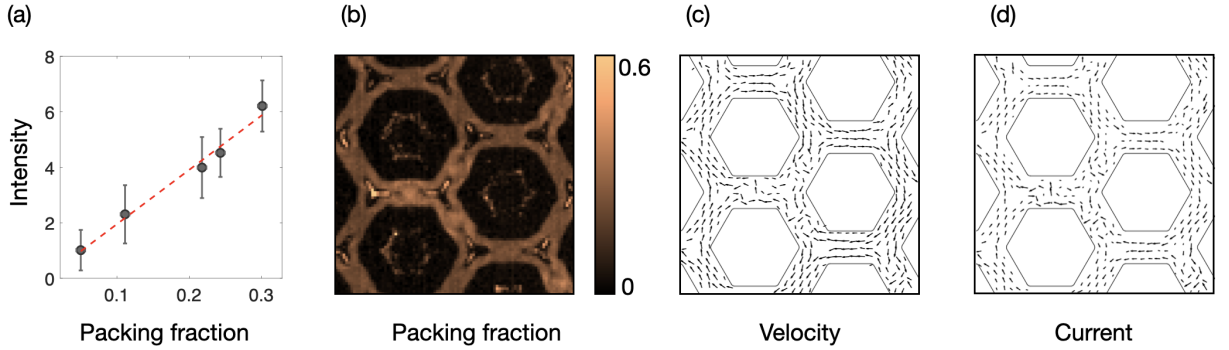


FIGURE S8 – (a) Fluorescence intensity with respect to the packing fraction ρ . Each measurement has been repeated 10 times. Data are presented as mean values and error bars are 95% confidence intervals. (b) Colormap of the packing fraction field. (c) Velocity field. (d) Current field.

simulations $\Phi = \pm 1, 0$ by definition (see section 3.6.3).

Once the Φ_e are defined we can unambiguously construct the oriented streamlines along the principal axis of the honeycomb lattice. We then use a depth-first search algorithm to detect and label each individual loop in the streamlines soup [109]. Once the individual loops are identified, we can readily measure their gyration radius and the probability $C(r)$ that two edges of the lattice separated by a distance r belong to the same loop (see section 3.6.5).

Constructing a topographic map from oriented streamlines

We now explain how to quantify the nesting of the streamlines. To do so, we first convert the ensemble of oriented loops into a topographic map. We note $\mathcal{F}$ the ensemble of the hexagonal faces of the honeycomb network. Considering a configuration $\{\Phi_e\}$ of the current field on the edges, we define a height field h_f on the faces.

The loops are oriented, we can then define the winding number of each loop around a given face f , it is equal to ± 1 when the face is lassoed by the loop and 0 otherwise. The height field of the topographic map is then defined at a face of the network as the sum of the winding numbers of all loops winding around this point. As a reference, the height is taken to be zero outside the network.

In practice we measure the height field h_f recursively. The procedure is easily understood

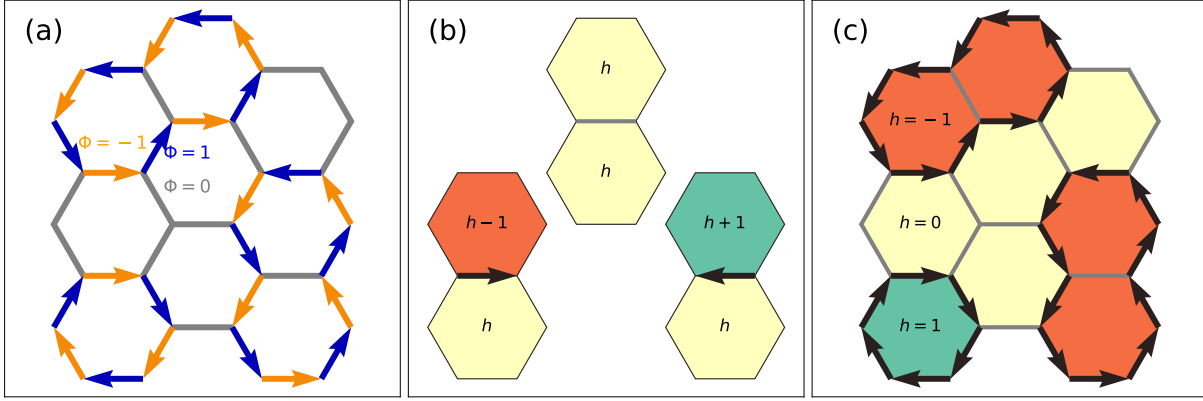


FIGURE S9 – **Mapping on a topographic map.** (a) Configuration of our model (see Fig. S10). (b) Rules for the topographic map. If there is no arrow, the two faces have the same height. If there is an arrow pointing to the right, when moving from f to f' , then $h_{f'} = h_f - 1$. If there is an arrow to the left, then $h_{f'} = h_f + 1$. (c) Topographic map corresponding to (a). In this configuration, $\Delta h = \max h - \min h = 2$.

from the sketch of the algorithm shown in Fig. S9b. In short, starting from a face f associated with a height h we move to the neighbouring face f' by crossing an edge e . If e hosts a spin pointing towards the right (resp. left) hand side, we assign the value $h' = h - 1$ (resp. $h' = h + 1$). The right and left directions are defined with respect to the vector connecting the centers of f and f' . When the edge hosts no current ($\Phi_e = 0$), then $h' = h$. The resulting height field does not depend on the way the network is explored. This procedure is very similar to the standard mapping of loop $O(n)$ models to solid-on-solid models discussed e.g. in Ref. [52].

The reason why we introduce this mapping is twofold. Firstly, the height amplitude $\Delta h = \max_{\mathcal{F}} h_f - \min_{\mathcal{F}} h_f$ is one of our key observables. It quantifies the nesting of the streamlines and distinguish between the two phases observed both in the experiments and in the simulations, see section 3.6.5. Secondly, this mapping will also allow us to map the streamlines of the crumpled phase to the domain walls of the antiferromagnetic Ising model on the triangular lattice of faces $\mathcal{F}$, see section 3.6.6.

3.6.3 Theory : Modeling the emergent flow patterns, loops on the honeycomb lattice

Mapping active flows on a spin model

In this section, we introduce a spin model that effectively accounts for the geometry of the streamlines observed in our active hydraulic experiments. Constructing a predictive model from first principle interactions between the active colloids, or even from the Toner-Tu hydrodynamic theory would be a formidable challenge. Here, we instead build a phenomenological description from conservation laws and our robust experimental observations.

Honeycomb lattice geometry

In all that follows, we note $\mathcal{E}$ the set of edges of the honeycomb network, the channels, and $\mathcal{V}$ the set of vertices, see Fig. S10a. Each edge links two vertices, and each vertex in the bulk connects to three edges. In our numerical simulations, the networks are either be bounded, to make quantitative comparisons with our experiments (section 3.6.5), or periodic to investigate the asymptotic scalings of the streamline geometry (section 3.6.6). It might be worth noting

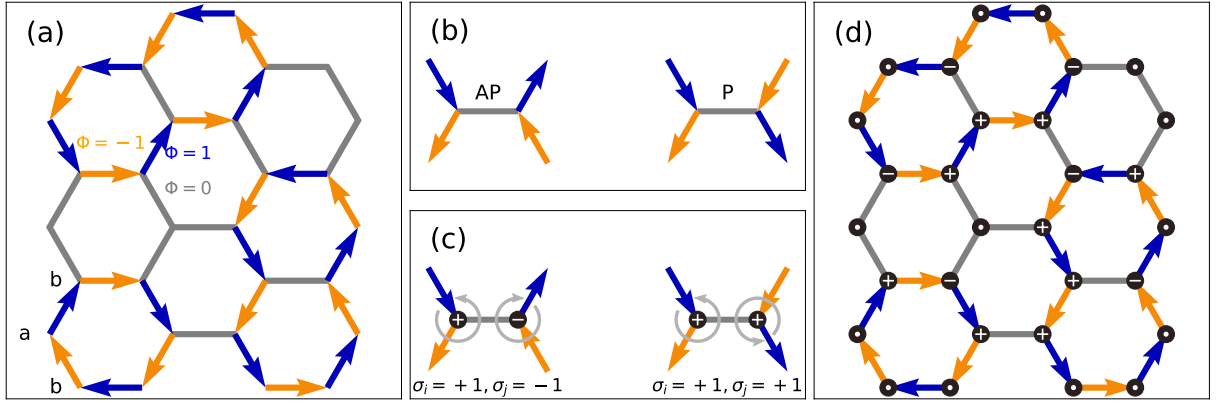


FIGURE S10 – **Spin model.** (a) We consider a honeycomb network and recall that it is bipartite : ‘a’-vertices are adjacent to ‘b’-vertices only (see bottom left). We place spins $\Phi_e \in \{-1, 0, +1\}$ on the edges of the network with the local constraint $\sum \Phi_e = 0$ at each node (Eq. (S8)). $\Phi_e = +1$ corresponds to a flow from a ‘a’-vertex to a ‘b’-vertex and is depicted as a blue edge while $\Phi_e = -1$ corresponds to the flow from a ‘b’-vertex to a ‘a’-vertex and is depicted as an orange edge. Finally, $\Phi_e = 0$ corresponds to the absence of net flow and is shown in gray. (b) To account for the experimental flow patterns, we need to distinguish between antiparallel (AP) flows and parallel (P) flows across gray edges. (c) This is done by associating a spin $\sigma_i = +1$ to a vertex with (blue, orange, gray) edges in the counter-clockwise direction, and $\sigma_i = -1$ to a vertex with the same colors in the clockwise direction. An antiparallel coupling then corresponds to $\sigma_i \sigma_j = -1$, and a parallel coupling to $\sigma_i \sigma_j = 1$. (d) Same configuration as (a) with the vertex spins $+1$, -1 and 0 shown as $+$, $-$ and $\bullet$.

that the edges of the honeycomb lattice form a Kagome lattice. We call N the linear number of hexagonal faces ($N = 3$ in Fig. S10a), so that in a periodic system there are N^2 faces, $3N^2$ edges and $2N^2$ vertices.

Our model accounts for two constraints : (i) the active fluid current Φ_e flowing along the edge $e \in \mathcal{E}$ can only take three values in each channel ; and (ii) the mass is conserved at every vertex.

Active flows and Blume Capel spins

To model condition (i), we consider Blume-Capel spins $\Phi_e \in \{-1, 0, 1\}$ [110] on the edges $e = (i, j) \in \mathcal{E}$ of the honeycomb lattice (which are the vertices of the dual Kagome structure). $\Phi_e = 0$ corresponds to the absence of net flows along the edge e : the channel hosts vortices. $\Phi_e = \pm 1$ corresponds to a finite current along e . The sign of Φ_e indicates the direction of the flow as follows. The honeycomb lattice is bipartite : the vertices in $\mathcal{V}$ can be decomposed into two sublattices : ‘ $\mathcal{V}_a$ ’ and ‘ $\mathcal{V}_b$ ’, see Fig. S10a. The edges only link ‘a’-vertices to ‘b’-vertices. Given this observation, we assign $\Phi_e = +1$ to flows from an ‘a’-vertex to a ‘b’-vertex, and $\Phi_e = -1$ to flows from a ‘b’-vertex to an ‘a’-vertex. To distinguish between the three possible flow configurations, we associate a different color to each value of Φ_e as illustrated in Fig. S10a : blue for $\Phi_e = +1$, orange for $\Phi_e = -1$, and gray $\Phi_e = 0$.

Mass conservation and spin-ice rule

In steady state, mass conservation imposes a hard constraint on the Blume-Capel spin configurations. The sum of the flows vanishes at each vertex, which translates into

$$\sum_{e \in \partial i} \Phi_e = 0 \quad (\text{S8})$$

where ∂i is the subset of edges connected to the vertex i . In the bulk ∂i includes three spins, associated with seven configurations : $\{+1, -1, 0\} = \{\text{blue, orange, gray}\}$ (and all possible permutations), or $\{0, 0, 0\} = \{\text{gray, gray, gray}\}$ as illustrated in Fig. S10a. On the boundary of finite networks, there are two spins in ∂i , and they can only take the values $\{+1, -1\}$, $\{-1, +1\}$ or $\{0, 0\}$.

We stress that the mass-conservation constraint of (S8) here corresponds to a spin-ice rule. As a matter of facts, in spin-ice models frustration arises from a similar constraint : the sum of the magnetic moments at each site of a crystalline spin lattice must vanish [86, 89]. We will show that the ice rule induces a strong degeneracy of the possible spin configurations in steady state.

Self-avoiding loops

As discussed in the main text, the spin-ice rule constrains the spin configurations, i.e. the streamlines of the active flow, to form oriented self-avoiding loops on $\mathcal{E}$, Fig. S10a. This emergent geometry can be understood as follows. We start from an edge hosting a $+1$ spin (blue edge) pointing in the direction of the vertex i . The spin-ice rule imposes that this vertex is also connected to a single -1 spin (orange edge) pointing in the direction of a neighboring vertex. We can then iterate this reasoning to construct a walk on the honeycomb lattice. As each vertex can only connect to a $+1$ and a -1 edge the walks cannot intersect or cross themselves as these crossings would require vertices connected to three non-zero spins. Finally, the resulting walks necessarily form closed loops in virtue of mass conservation.

We note that any ensemble of oriented self-avoiding loop on the honeycomb lattice can be thought as an ensemble of Blume-Capel spins on a Kagome lattice obeying the spin ice rule.

Interactions between the loops

As discussed in the main text, the spin-ice rule is not sufficient to explain the the geometry of the active hydraulic flows observed in our experiments. To make progress, we need to account for the “parallel” and “antiparallel” flow couplings across non-flowing edges, Fig. S10b. We therefore add a minimal ingredient to our spin model. Fig. S10b would naturally suggest to include four-spin (anti)ferromagnetic interactions. Although possible this approach would lead to rather complex couplings. In order to simplify our model, we instead assign an additional spin variable $\sigma_i \in \{+1, -1, 0\}$ to each vertex $i \in \mathcal{V}$ visually defined in Fig. S10c. This spin variable describes the handedness of the Φ_e spin configurations around a vertex. In short, we measure the values of the Φ_e around the vertex i in the counter-clockwise direction. $\sigma_i = 1$ when the edge spins take the values $(+1, -1, 0)$ (ie. blue, orange, gray) up to a circular permutation. $\sigma_i = -1$ when the edge spins take the value $(-1, +1, 0)$ (ie. orange, blue, gray). Finally $\sigma_i = 0$ at vertices where the three edge spins are $(0, 0, 0)$ or at the boundary of finite systems. Fig. S10c then readily tells us that (anti)parallel couplings between the streamlines translate into (anti)ferromagnetic interactions between the σ spins. We note that this construction is closely related to the color-dependent interactions of the 3-coloring model defined in Ref. [95].

Hamiltonian description of the stream lines

We can now define a phenomenological Hamiltonian model to account for the experimental flow patterns. We introduce the energy $\mathcal{H}$ of a spin configuration $\{\Phi_e\}$:

$$\mathcal{H}(\{\Phi_e\}) = -J_A \sum_{e \in \mathcal{E}} \Phi_e^2 - J_C \sum_{e=(i,j) \in \mathcal{E}} \delta_{\Phi_e,0} \sigma_i \sigma_j, \quad (\text{S9})$$

where σ_i and σ_j are functions of $\{\Phi_e\}$ and $\delta_{\Phi_e,0} = 1$ if $\Phi_e = 0$ and 0 otherwise. The two coupling constants J_A and J_C have a clear physical meaning. $J_A > 0$ is a positive constant that promotes spontaneous flows, i.e that favors finite spin values $\Phi_e = \pm 1$. J_C can be either positive, or negative, to account for the parallel, or antiparallel, couplings between streamlines separated by channels hosting vortices.

3.6.4 Numerical methods : Monte-Carlo worm algorithm

Our idea consists in describing the streamlines of the active hydraulic flows as the low energy states of $\mathcal{H}$ satisfying the spin-ice constraint (S8). To find them, we use a Monte-Carlo algorithm. We therefore define a statistical mechanics model given by the following Boltzmann weights at inverse temperature β ,

$$P(\{\Phi_e\}) = \frac{e^{-\beta \mathcal{H}(\{\Phi_e\})}}{Z}, \quad (\text{S10})$$

with the partition function

$$Z = \sum_{\{\Phi_e\} \in \text{OL}(\mathcal{E})} e^{-\beta \mathcal{H}(\{\Phi_e\})}. \quad (\text{S11})$$

$\text{OL}(\mathcal{E})$ is the ensemble of oriented loops on the honeycomb lattice. Sampling the spin configurations on this ensemble guarantees that the spin-ice rule is satisfied. In our numerical simulations, we set $J_A = 1$ without loss of generality and focus on the low temperature limit $\beta \gg 1$. The main parameter of our model is then J_C that regulates the coupling of the flows at the two ends of a non-flowing channel. To satisfy the spin-ice rule, we use a standard tool for lattice loop models, namely a worm Monte Carlo algorithm [75, 102]. In brief, the algorithm consists first in generating a worm, that is to say a loop of edges that can be flipped without violating the ice rule. The Monte Carlo move then corresponds to flipping the edge spins from ± 1 to 0 or 0 to ± 1 along this worm. In details, we use an adaptation of the short loop algorithm developed in Ref. [102] for the three-color model. We initialize the simulation with all edge spins equal to zero ($\Phi_e = 0$). This configuration trivially satisfies the ice rule. We then generate a new allowed configuration by constructing a worm. We explain the procedure to generate it in general, and not only for the initial configuration. Starting from a given spin configuration $\{\Phi_e\}$ satisfying the ice rule, we choose an edge e at random, Fig. S11a. It is the first edge of the worm. If $\Phi_e = \pm 1$, we update it to $\Phi_e^{\text{new}} = 0$, and if $\Phi_e = 0$ we update it at random to $\Phi_e^{\text{new}} = \pm 1$, Fig. S11b. In both cases, this creates a pair of defects to the ice rule on the two ends of the edge $e = (i, j)$: these defects are referred to as charges in spin ice models : $Q_i = \sum_{e \in \partial i} \Phi_e \neq 0$. To construct the second edge of the worm, the idea is then to propagate the charges on the lattice until they annihilate. To do so, we consider the site i and try to recover $Q_i = 0$ by changing the spin of one of the two neighboring edges of i (different from e), Fig. S11c. When a single move is possible, we accept it and the second edge of the worm is defined. If there exists two possible moves, we choose one at random, which then defines the second edge of the worm. We iterate this procedure which results in the construction of a walk on the honeycomb lattice, Fig. S11d. When this walk visits a site k that has already been visited, we form a self-avoiding loop attached to a dangling end at k , Fig. S11e. We remove the dangling end by discarding all the spin flips used

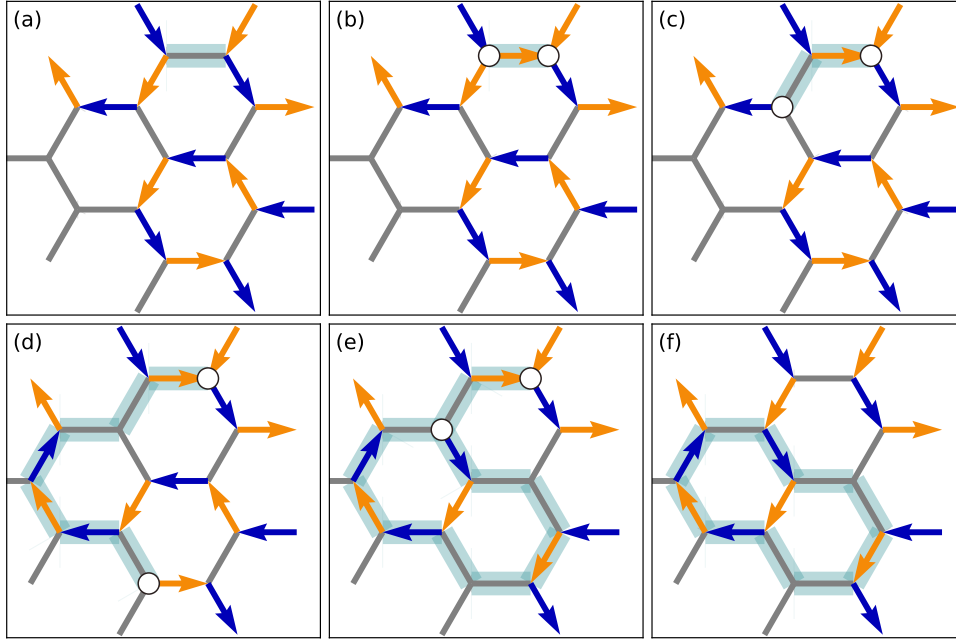
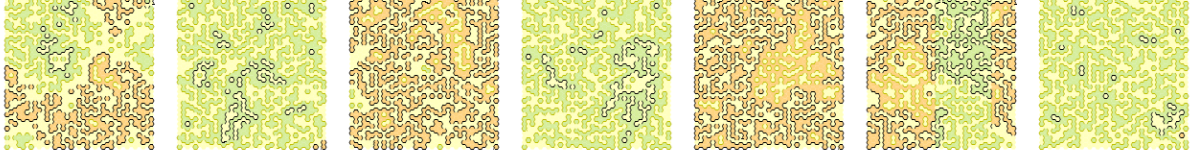
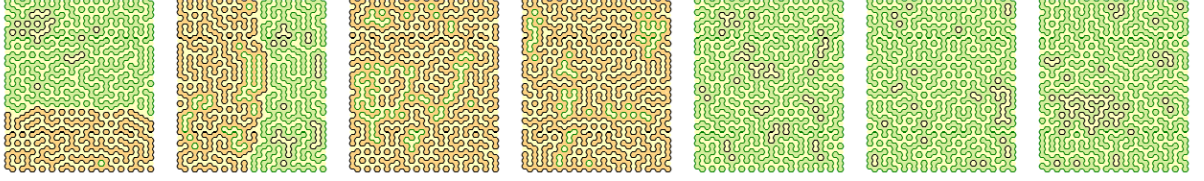
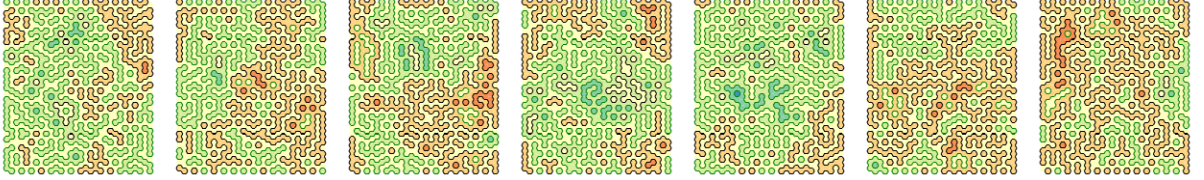
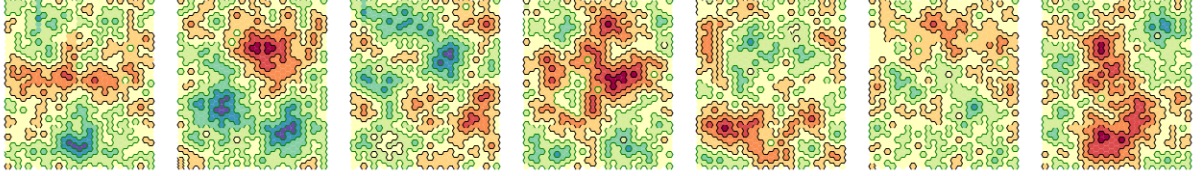
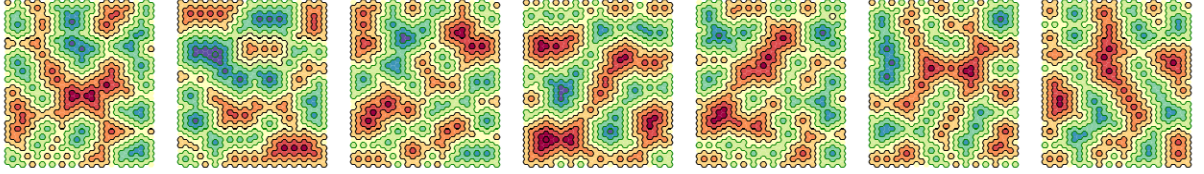


FIGURE S11 – **Worm algorithm.** (a) We select an edge in the initial configuration. (b) Flipping the spin (here $0 \mapsto -1$) leads to the creation of a pair of defects (white circles). (c) We move one of the defects by flipping another edge spin. (d-e) We iterate the procedure until we come back to a site we already visited. (f) The beginning of the path is discarded. We use the Metropolis rule on the move that goes from configuration (a) to configuration (e).

to construct the first steps of the random walk, Fig. S11e. This procedure is known as the short loop algorithm [102].

We can now evolve the Monte-Carlo dynamics by computing the energy from Eq. (S9). The spin-flips along the worm are then accepted according to the standard Metropolis rule [111] using the Boltzmann weight (S10) at inverse temperature β . This algorithm is ergodic (any configuration can be reached from the all-zero state and vice-versa) and satisfies detailed balance (Metropolis rule) : it thus samples the ensemble of configurations compatible with the ice rule according to the Boltzmann probability distribution (S10).

We performed two types of simulations. (1) Small systems without periodic boundary conditions to compare our numerical results to our measurements. (2) Large systems with periodic boundary conditions in order to compute accurate scaling exponents. Simulations (1) are performed at system size $N = 30$, inverse temperature $\beta = 2$, flow constant $J_A = 1$ and coupling constant $J_C = -2, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2$. For each set of parameters, we perform 50 independent simulations. We perform 10^6 worm iterations to thermalize the system, and then 10^6 additional iterations during which we compute the observables every 10^3 iterations. We compare our results with our experiments in Section 3.6.5. Simulations (2) are performed for system sizes ranging from $N = 20$ to $N = 500$, $\beta = 1$, $J_A = 1$ and $J_C = -1, 0, 1$. For each set of parameters, we perform 10 independent simulations, with $20000N^2$ thermalization iterations and $20000N^2$ more iterations during which the observables are computed every $200N^2$ iterations. We report our results in Section 3.6.6.

Experiments epsilon $\epsilon = 0.7$ Numerics $J_C = -2$ Numerics $J_C = 0$ Experiments epsilon $\epsilon = 1.3$ Numerics $J_C = 2$ 

-4 -2 0 2 4 h

FIGURE S12 – **Degeneracy of the flow patterns.** Counter-clockwise loops are shown in black, and clockwise loops in green. The colors of the faces correspond to their heights (see subsection 3.6.2 and Fig. S10c). Top : antiparallel regime with experimental configurations at $\epsilon = 0.7$ and numerical configurations at $J_C = -2$. Middle : numerical configurations with no flow coupling ($J_C = 0$). Bottom : parallel regime with experiments at $\epsilon = 1.3$ and numerics at $J_C = 2$.

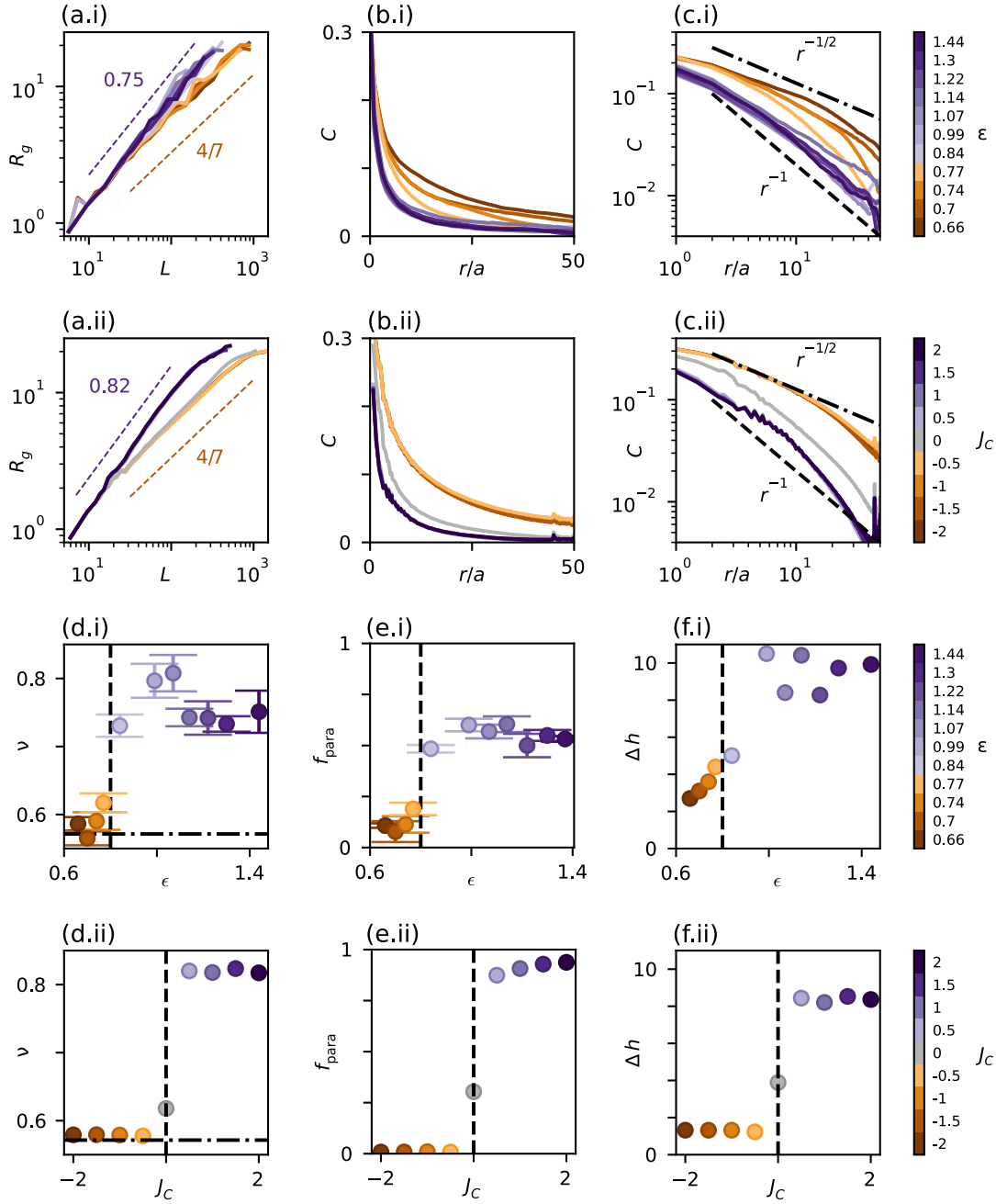


FIGURE S13 – Quantitative comparison between numerical and experimental results. (a.i) and (a.ii) Average gyration radius of a loop as a function of its length for experimental aspect ratio $\epsilon \in [0.55, 1.44]$ (in (a.i)) and numerical coupling constant $J_c \in [-2, 2]$ (in (a.ii)). (b.i) and (b.ii) Experimental and numerical probability $C(r)$ that two sites at a distance r belong to the same loop. (c.i) and (c.ii) Same curves in log-log scale. The dashed and dash-dotted lines respectively correspond to exponents -1 and $-1/2$. (d.i) and (d.ii) Exponent ν of the gyration radius, fitted from (a.i) and (a.ii). Each experiment has been repeated 10 times. Data are presented as mean values and error bars are 95% confidence intervals. The horizontal dash-dotted line corresponds to the prediction of the antiferromagnetic Ising model (4/7, see subsection 3.6.6). (e.i) and (e.ii) Fraction f_{para} or parallel streamlines across non-flowing edges. Each experiment has been repeated 10 times. Data are presented as mean values and error bars are 95% confidence intervals. (f.i) and (f.ii) Height amplitude Δh (see Fig. S10c).

3.6.5 Comparison between simulations and experiments

Qualitative features

We performed simulations of our spin model with 30×30 hexagons, which is close to the size of our microfluidic networks (see section 3.6.4). In the experiments, the control parameter is the aspect ratio ϵ of the channels. It controls the fraction of antiferromagnetic couplings. For $\epsilon < \epsilon^* = 0.8$, the flow couplings are mostly antiparallel while for $\epsilon > \epsilon^*$ they are mostly parallel. The analog in the simulations is the coupling constant J_C : $J_C < 0$ favors antiparallel couplings, whereas $J_C > 0$ promotes parallel couplings.

Fig. S12 confirms that the sign J_C is a very good proxy for the role of the channel aspect ratio of the streamline geometry. We indeed find that when $J_c < 0$ the spin loops are crumpled and collapsed, as the streamlines in the experiments where $\epsilon < \epsilon^*$. In addition, the equivalent topographic map typically includes only two to three values, again in excellent agreement with our experimental findings. In short channels, the streamline soup does not form a nested structure. When $J_c > 0$, we find that the spin loops are more persistent and form nested structures, the height functions takes a range of values spanning a typical interval $\Delta h \simeq 8$ for our system sizes. These geometrical feature again reproduce what we observe in our experiments where the streamlines are persistent and crumpled when $\epsilon > \epsilon^*$. In all cases our simulations also reflect the strong degeneration of the steady states observed in our active hydraulic networks.

This qualitative agreement begs us to quantitatively characterize the geometries of the two loops networks to validate the relevance of our analogy between frustrated Blume-Capel spins and active hydraulic flows

Quantitative comparison : geometry of the streamlines and spin loops

To be more quantitative we consider all the observables accessible to our experiments and proceed to a systematic comparison with our simulations, Fig. S13.

- **Fraction of parallel contacts.** An essential observable distinguishes the two active flow patterns : the fraction of parallel contacts across non-flowing edges $f_{\text{para}} = n_{\text{para}} / (n_{\text{para}} + n_{\text{anti-para}})$ where n_{para} is the number of edges hosting no net flow ($\Phi_e = 0$ in the simulations) and separating two streamlines flowing in the same direction ($\sigma_i \sigma_j > 0$ in the simulations), $n_{\text{anti-para}}$ counts the edges separating streamlines flowing in opposite directions. In the experiments, f_{para} varies from ~ 0.1 for $\epsilon < \epsilon^*$ to ~ 0.6 for $\epsilon > \epsilon^*$, see Fig. S13e.i. Anti-parallel contacts dominate in the phase where the loops are crumpled while they are subdominant in the phase where the loops are more persistent and nested. This distinction is even more marked in the simulations : f_{para} is very close to 0 for $J_c < 0$ while it reaches 0.9 when $J_c > 0$ (Fig. S13e.ii).
- **Gyration radius.** To distinguish between the crumpled loops of the first regime and the more swollen loops of the second regime, we compute the gyration radius R_g of each loop,

$$R_g^2 = \frac{1}{L} \sum_e \left(\mathbf{x}_e - \frac{1}{L} \sum_e \mathbf{x}_e \right)^2, \quad (\text{S12})$$

where the sum runs over the L edges e , at positions $\mathbf{x}_e$ that make the loop. This is a typical observable for polymers [112] or spin-ice models [75]. We consistently find that the loops have a self-similar geometry, the average gyration radius scales as a power-law of the loop size,

$$\langle R_g \rangle \sim L^\nu. \quad (\text{S13})$$

$\nu = 1/2$ corresponds to Brownian motion, $\nu = 1$ corresponds to straight lines or circles and $\nu = 3/4$ corresponds to self-avoiding walks in 2D. Note that $\nu = 1/d_f$ where d_f is the fractal dimension of the underlying model.

In Fig. S13a.i and a.ii, we plot the gyration radius of the loops. Our experiments and simulations are consistent. Loops in the parallel regime have a gyration radius that grows faster than those in the anti-parallel regime. The curves collapse on two master curves in the two distinct regimes. We plot the variations of the exponent ν in Figs. S13d.i and d.ii as a function of ϵ and J_C respectively. The transition is sharp both in the simulations and the experiments. The anti-parallel regime corresponds to an exponent ν that is consistent with $4/7 \simeq 0.571$. This exponent correspond to the gyration radius of the domain walls in the anti-ferromagnetic Ising model, see subsection 3.6.6. In the parallel regime we find a higher exponent, around $0.75 - 0.8$ in the experiments and 0.82 in the simulations. We will argue below that there exist no indication for universality in this regime.

- **Loop correlation.** A typical observable that distinguishes loop models [50, 75] is the probability $C(r)$ that two edges separated by a distance r belong to the same loop. $C(r)$ decays as a power-law in the critical phases of loop models. We plot this quantity in Fig. S13b.i and b.ii. We see that both in the experiments and the simulations, $C(r)$ decays faster in the anti-parallel phase than in the parallel phase. The system size does not allow us to conclude on a power-law decay and on its exponent. However, the data in the anti-parallel regime are consistent with $C(r) \sim r^{-1/2}$ predicted for the anti-ferromagnetic Ising model (see section 3.6.6). Moreover, the data in the parallel regime may be consistent with $C(r) \sim r^{-1}$ (see section 3.6.7).
- **Average height amplitude.** Finally, we quantify the nesting level of the loops and plot the height amplitude Δh of the patterns in Figs. S13f.i and f.ii. We see that Δh undergoes a sharp jump at the point where the fraction of parallel contact jumps. This observation holds both in our experiments and simulations, as anticipated from the patterns plotted in Fig. S12.

This ensemble of results confirm that our minimal spin model capture all the salient features of the active hydraulic flows measured in our experiments. The size currently accessible to our experiments does not allow to predict whether the transition between the crumpled and the nested streamline regimes is a genuine dynamical phase transition or a smooth crossover. Answering this question goes beyond the scope of this article. However, we can take advantage of our numerical simulations to predict the asymptotic scaling laws that characterize the self-similar shape of the interacting self-avoiding loops.

3.6.6 Asymptotic limits of the spin model and streamline geometry

In the previous section, we introduced an equilibrium spin model (Eqs. (S9)-(S11)) to account for the flow patterns observed in the experiments. We found a good agreement between experiments and simulations in both regimes of antiparallel and parallel flow couplings, which respectively correspond to small and large channel aspect ratio. To gain a more quantitative insight into the morphology of the streamlines, we investigate numerically the two asymptotic limits : $J_C \rightarrow -\infty$ and $J_C \rightarrow +\infty$ (in the so called fully-packed limit where $J_A \rightarrow \infty$). We use theoretical arguments and extensive numerical simulations to predict the scaling laws of the gyration radius ν and of the decay of the correlation $C(r)$. Throughout this section, all simulations are performed with periodic boundary conditions.

This technical section is organized as follows : Section 3.6.6 is a reminder of the loop $O(n)$ models and of their mapping on spin models. Section 3.6.6 focuses on the antiparallel regime

($J_C \rightarrow -\infty$). We show that this regime maps on the antiferromagnetic Ising model on a triangular lattice, or equivalently the loop $O(1)$ model. This mapping allows us to predict the gyration radius exponent ($\nu = 7/4$) and the algebraic decays $C(r) \sim r^{-1/2}$. In Section 3.6.6, we investigate the case where there is no orientational coupling between the streamlines ($J_C = 0$). While this situation cannot be realized in our experiments, it provides an insight into what happens in the crossover between the two asymptotic regimes ($J_C \ll 0$ and $J_C \gg 0$). When $J_C = 0$ our model maps on a three-color model, or equivalently to a loop $O(2)$ model. In this regime we predict a gyration radius exponent $\nu = 2/3$ and a correlation decaying as $C(r) \sim r^{-1}$ consistent with our experimental findings at intermediate aspect ratio. Finally, in Section 3.6.7, we discuss the parallel regime ($J_C \gg 0$). This regime is not as simple as the two others as the ground state of our model features a sub-extensive degeneracy. The simulations reach metastable states which we characterize numerically.

Mapping spin statistics on loop $O(n)$ models

The spin configurations constrained by the spin-ice rule correspond to oriented loops on the honeycomb lattice. Loop models have a long history in equilibrium statistical mechanics. A classic class of loop models is the loop $O(n)$ models [50, 113]. We briefly review some key results as this class of model offer powerful tools to explain the asymptotic limits of our spin model, and the corresponding active-flow geometry.

Definition of the loop $O(n)$ model. Let us consider the set of edges $\mathcal{E}$ of a finite lattice, in our case the honeycomb lattice. We define $L(\mathcal{E})$, the set of all loop configurations on $\mathcal{E}$. A loop configuration ω is a subset of $\mathcal{E}$ for which all the vertices of the underlying graph have an even connectivity : in our case each vertex is connected to either 0 or 2 edges. We denote $\#edges(\omega)$ the number of edges in a loop configuration ω , and $\#loops(\omega)$ the number of loops. By definition, the probability of ω in the loop $O(n)$ model is given by

$$P^{\text{loop}}(\omega) = \frac{x^{\#edges(\omega)} n^{\#loops(\omega)}}{Z^{\text{loop}}(x, n)} \quad (\text{S14})$$

with the partition function

$$Z^{\text{loop}}(x, n) = \sum_{\omega \in L(\mathcal{E})} x^{\#edges(\omega)} n^{\#loops(\omega)}. \quad (\text{S15})$$

where x is the fugacity of the number of edges and n is the fugacity of the number of loops. The limit $x \rightarrow \infty$ corresponds to the fully-packed regime : the number of edges in the loop configuration is maximized.

Three important cases : $n = 0$, $n = 1$ and $n = 2$. It is known that the loop $O(n)$ model [50] maps on canonical statistical mechanics models. The limit $n \rightarrow 0$ corresponds to the celebrated De Gennes mapping on the statistics of self-avoiding random walks. The case $n = 1$ maps on the Ising model on the triangular lattice of faces $\mathcal{F}$, with $x = e^{-2\beta}$ where β is the inverse temperature of the Ising model. We will detail further and use this equivalence in Section 3.6.6. Finally, $n = 2$ at $x = \infty$ is equivalent to a three-coloring model which we discuss in Section 3.6.6 to investigate the $J_C = 0$ phase.

Relation between spin and loop $O(n)$ models. We recall that for integer n the loop $O(n)$ model is closely related to the spin $O(n)$ model [50, 103]. Considering n -dimensional spins $\vec{s}_i = (s_i^1, \dots, s_i^n)$, with $\sum_k s_i^k = n$, on the vertices $i \in \mathcal{V}$ of the graph, the partition function of the spin $O(n)$ model reduces to

$$Z^{\text{spin}}(x, n) = \int d\vec{s}_1 \dots d\vec{s}_N \prod_{(i,j) \in \mathcal{E}} w(\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j). \quad (\text{S16})$$

Writing the weight function as $w(\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j) = 1 + x \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j$, one can show that $Z^{\text{spin}}(x, n) = Z^{\text{loop}}(x, n)$ [50, 103].

Criticality and Schramm-Loewner evolution. One important question for the loop $O(n)$ model, for a given loop fugacity x , is whether the loops have a characteristic size or not. In other words, does the probability of finding a loop of length L , $P_{\text{loop}}(L)$, decay exponentially or algebraically? This question was answered by Nienhuis in [52]. He showed that for $n \in [0, 2]$ there exists a critical point at $x_c(n) = \left[2 + (2 - n)^{1/2}\right]^{-1/2}$: when $x < x_c$ $P_{\text{loop}}(L)$ decays exponentially (sub-critical phase), whereas for $x > x_c$ and $x = x_c$ $P_{\text{loop}}(L)$ decays as a power-law (critical phase). When $x > x_c$, the loops are non only scale-invariant but conformally invariant. It was then conjectured in [93] than in this critical phase, the scaling of the loop size is given a Schramm-Loewner evolution $\text{SLE}(\kappa)$ [94] with parameter $\kappa \in [4, 8]$ given by

$$n = -2 \cos(4\pi/\kappa). \quad (\text{S17})$$

In other words $\kappa = 8$ for $n = 0$, $\kappa = 6$ for $n = 1$, and $\kappa = 4$ for $n = 2$. The technical aspects of these results go beyond the scope of our article. We simply recall that a Schramm-Loewner curve of parameter κ [94] corresponds to a stochastic evolution in the half-plane having a fractal dimension d_f and that features conformal invariance,

$$d_f = 1 + \frac{\kappa}{8}. \quad (\text{S18})$$

In particular $d_f = 7/4$ for $\kappa = 6$ ($n = 1$); $d_f = 3/2$ for $\kappa = 4$ ($n = 2$). The correspondence between loop $O(n)$ models and Schramm-Loewner evolutions (or more precisely conformal loop ensembles) is the topic of numerous works in the mathematical litterature but rigorous results remain scarce [50, 113].

In the following two sections, we show that the phases $J_C < 0$ and $J_C = 0$ of our model correspond to fully packed loop $O(1)$ and $O(2)$ models.

Antiparallel flow couplings : antiferromagnetic Ising model on the triangular lattice

In this subsection, we investigate our model (Eqs. (S9)-(S11)) in the limit $J_C \ll 0$, i.e in the limit where all adjacent streamlines flow along opposite directions. This limit is directly relevant for experiments where the channel aspect ratio is small.

Mapping of our model on the antiferromagnetic Ising model in the limit $J_C \rightarrow -\infty$

We focus on the ground states, $\beta \rightarrow +\infty$, of our spin model when $J_C < 0$, with $J_A = 1$. We show that they map on the ground states of the antiferromagnetic Ising model on the triangular lattice.

We first note that the constraint of maximal flow $\beta J_A \rightarrow \infty$ implies that all vertices have their three edges associated with spins $\{+1, -1, 0\}$, there are no $\{0, 0, 0\}$ vertices. This is readily seen by decomposing the sum $\sum_{e \in \mathcal{E}} \Phi_e^2 = \frac{1}{3} \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{e \in \partial i} \Phi_e^2$ where ∂i is the set of the three edges adjacent to i . This sum is maximized if all the internal sums are equal to 2, hence all vertices must have a $\{+1, -1, 0\}$ structure.

Second, the limit $\beta J_C \rightarrow -\infty$ implies $\sigma_i \sigma_j = -1$ whenever a non-flowing edge ($\Phi_e = 0$) connects the sites i and j . Adjacent stream lines flow in opposite directions. Constructing the topographic map of subsection 3.6.2, we then readily find that the height field can only take the values $h = 0$ and $h = +1$, or $h = 0$ and $h = -1$, see Fig. S14. We can make yet again another spin analogy. For each face $f \in \mathcal{F}$, we associate the two possible height values to Ising spins $S_f = +1$ when $h = 0$ and $S_f = -1$ when $h = +1$.

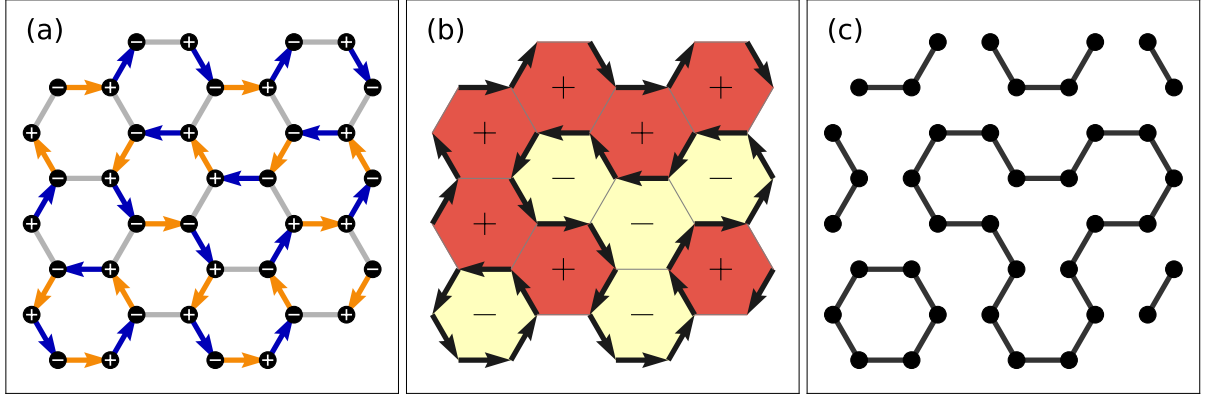


FIGURE S14 – **Antiparallel regime ($J_C < 0$) : Mapping our active flow model on the antiferromagnetic Ising model.** (a) Example of fully-packed configuration of our spin model (Eq. (S9)) with antiparallel couplings only ($\sigma_i \sigma_j = -1$ on all zero edges). The spin arrows reflect the local direction of the active flow in the fluidic network (b) Mapping of the spin configuration of (a) on a topographic map (see Section 3.6.2). We note that the height field can only take two different values, which we associate to two Ising spins $+$ and $-$ to them. In this limit, the streamlines of the active hydraulic flows map on the domain walls of an antiferromagnetic Ising model. (c) Another perspective on our statistical mechanics problem consists in looking at the shape of the closed streamlines irrespective of their orientation (dark lines). They define a realization of a loop $O(1)$ model.

Finally we can show that the limit $\beta J_C \rightarrow -\infty$ implies antiferromagnetic couplings between the S_f spins. This is done by noticing that if f and f' are the two faces in contact with an edge e , then we can relate the edge-spin value to the face-spin values as $\Phi_e^2 = (1 - S_f S_{f'})/2$. This equality follows from the rule at the origin of the construction of the topographic map. Using this simple relation we can recast the term that promote active flows on each edge as :

$$-J_A \sum_{e \in \mathcal{E}} \Phi_e^2 = \frac{J_A}{2} \sum_{f \sim f'} S_f S_{f'} - \frac{J_A N_{\text{edges}}}{2}, \quad (\text{S19})$$

which is nothing else but the energy of an antiferromagnetic Ising model

$$E_{\text{Ising}} = J_{\text{Ising}} \sum_{f \sim f'} S_f S_{f'} + \text{const.} \quad (\text{S20})$$

where $J_{\text{Ising}} = J_A/2 > 0$. In the limit $\beta J_A \rightarrow +\infty$ the geometry of the streamlines therefore correspond to geometry of the domain walls in the ground state of an antiferromagnetic Ising model on the triangular lattice. This mapping readily explains the extensive degeneracy of the ground states which is a well established result for antiferromagnets on the triangular lattice, see e.g. [114].

In the next section we take advantage on this last frustrated-magnetism analogy to make exact predictions about the streamline geometries of active flows in trivalent hydraulic networks.

Geometry of active-hydraulics streamlines with antiparallel couplings : Exact results

We have already shown that our experimental measurements are correctly accounted for by our active hydraulic model (Eq. (S9)) in finite-size systems.

We are now equipped to make exact predictions about the streamline geometry for asymptotically large system size, when anti-parallel couplings prevail. These exact predictions rely

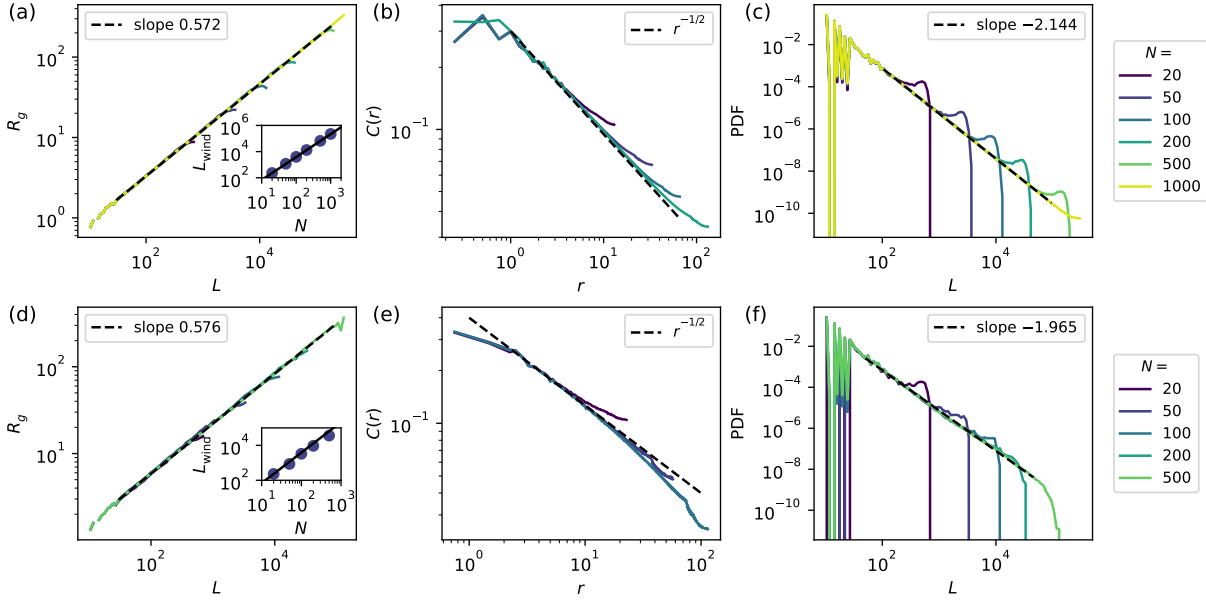


FIGURE S15 – **Antiparallel regime ($J_C < 0$) : numerical results.** (a-c) Monte-Carlo simulations of the Ising model. (d-f) Monte-Carlo simulations of our spin model with $J_C = -2$. (a) and (d) show the gyration radius R_g as a function of loop size L for system sizes $N = 20$ to 1000, excluding loops which wind around the periodic boundaries. The exponents of the power laws found in the two sets of simulations are respectively 0.572 and 0.576 in agreement with the exact prediction $\nu = 4/7 \approx 0.573$. In the inset, the average lengths of the loops that wind around the system is plotted as a function of the system size. The growth is in agreement with $N^{7/4}$ (black line) which is the fractal dimension $d_f = 1/\nu$. (b) and (e) show the decay of the probability $C(r)$ that two edges at a distance r belong to the same loop. The two sets of simulations are consistent with an algebraic decay as $r^{-1/2}$. (c) and (f) Distribution of loop sizes L (excluding winding loops) for the two types of simulations. The prediction for the exponent is $\tau = 2 + 1/7 \approx 2.143$. For all three observables, the agreement with theoretical predictions is more accurate for the Ising simulations. The statistics and the equilibration of the system are both better in this simulation set.

on the series of mappings discussed in the previous sections and on technical results from the mathematical physics literature, which we have connected to get at quantitative predictions : (i) Our active hydraulic model maps on the antiferromagnetic Ising model in the fully packed limit when $J_C \ll 0$. (ii) The ground state of the antiferromagnetic Ising model [114], is equivalently described by the ground state of the fully packed loop $O(1)$ model [73]. This model corresponds to a conformal field theory with central charge $c = 1$. (iii) The fully packed loop $O(1)$ is commonly believed to obey a $SLE(\kappa = 6)$ scaling [93] (see Section 3.6.6)¹. We refer the reader to the more recent Refs. [50, 75, 95, 116] for in-depth bibliography, and note that all our observations fall in the same universality class as the spin-ice loop model of Ref. [75].

In order to confirm that our reasoning is correct we confront all exact predictions with two sets of simulations results : the simulation of our active-hydraulics model and simulations of the low temperature phase of the antiferromagnetic model on the triangular model (we detail the simulation method in the next section). We find an excellent agreement between our exact predictions and our numerical results. They are consistent with all our experimental findings, thereby confirming our full understanding of active hydraulics in the anti-parallel regime.

- **Gyration radius.** The exponent ν of the gyration radius R_g is the inverse of the fractal dimension $d_f = 1/\nu$ of the Ising domain walls. The theoretical prediction for the ground state of the antiferromagnetic Ising model is $\nu = 4/7 \simeq 0.571$ ($d_f = 7/4$). This result is established both using the SLE equivalence, and the loop $O(1)$ equivalence [72, 73]. In our simulations of the Ising model and of our full spin model with $J_C < 0$, we find : $\nu = 0.572$ and $\nu = 0.577$, see Fig. S15a and c. This agreement confirms our analysis and the relevance of our exact prediction of the streamline geometry.
- **Loop correlation.** We also introduced the correlation $C(r)$, defined as the probability that two edges at a distance r belong to the same loop. This is a crucial observable in loop models [72]. For the $O(1)$ loop model, $C(r) \sim r^{-1/2}$ (the same scaling holds in Ref. [75]). Our two sets of simulations shown in Figs. S15b and d confirm that the exact prediction applies to our active hydraulic model.
- **Loop size distribution.** For critical models, the probability $P_{\text{loop}}(L)$ that a given loop has size L scales as $P_{\text{loop}}(L) \sim L^{-\tau}$ [72], with $\tau = 2 + 1/7 \simeq 2.12$ for loop $O(1)$ models. This exact result is again in good agreement with our two sets of numerical simulations (S15c and f).
- **Winding loops.** From a more formal perspective, our numerical simulations allow us to investigate the statistics of the loops winding around our periodic simulation box. We find the average number n_{wind} of winding loops is independent of the size of the system : $n_{\text{wind}} \simeq 0.8$ and that their average length L_{wind} scales as $N^{7/4}$ where N is the size of the system (insets of S15a and d). This result agrees with the observations of Ref. [75] and so does the value $d_f = 7/4$ of the fractal dimension.

This series of results unambiguously confirm that the geometry of the streamlines in honeycomb active hydraulic networks belongs to the same universality class as the domain walls of the antiferromagnetic Ising model on the triangular lattice, when deep in the ordered phase and when antiparallel couplings prevail.

Numerical methods : Monte-Carlo simulation of the AF Ising model.

This technical section describes the numerical method we use to sample the low energy states of the antiferromagnetic Ising model on the triangular lattice (Fig. S14). We use a standard

1. Note that the convergence to $SLE(\kappa = 6)$ has been proven rigorously for the critical percolation, which corresponds to the Ising model in the opposite limit of high temperature [115].

Metropolis Monte-Carlo algorithm [111]. Ising spins $S_f = \pm 1$ are placed on the N^2 sites of a periodic triangular lattice of linear size N ($N = 20$ to 1000). The coupling constant $K = \beta J_{\text{Ising}}$ of the model is set to a value corresponding to a low temperature : $K = 5$.

The initial configuration corresponds to random spins. At each step, a face f is chosen at random and we compute the energy corresponding to flipping its spin ($S_f \mapsto -S_f$) : $\Delta E = -2KS_f \sum_{f' \sim f} S_{f'}$ where the sum runs over the six neighbors of the spin. If $\Delta E < 0$, we change the sign of S_f . If $\Delta E \geq 0$, we change the sign of S_f only with probability $e^{-\Delta E}$. Starting from the initial random configuration, we run $1000N^2$ Monte Carlo steps to thermalize the system. We then run $1000N^2$ additional steps and record the quantities of interest every N^2 steps. The results are averaged over 10 independent simulations.

We identify the domain walls as the edges between two sites with opposite spins. The loops are found using a standard depth-first-search algorithm [109]. The statistics of the loop lengths and the correlations between edges in the same loop are easily obtained. The gyration radius of a loop in periodic space is computed as follow. We consider a loop of L edges centered at positions $(x_1, y_1), \dots, (x_L, y_L)$. We define $x'_1 = 0$ and $x'_i = x'_{i-1} + \text{per}(x_i - x_{i-1})$ for $i = 2, \dots, L$ where 'per' is the shortest distance in periodic space. In other words, we redefine the coordinates iteratively starting from the first site of the loop. We proceed similarly for the y coordinates. The gyration radius R_g of the loop is then defined as

$$R_g = \sqrt{\text{Var}(x'_i) + \text{Var}(y'_i)}, \quad \text{Var}(x'_i) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L x_i'^2 - \left(\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L x'_i \right)^2. \quad (\text{S21})$$

Geometry of streamlines with no orientational couplings : 3-coloring problem and fully-packed loop $O(2)$ model

We now turn to the limit $J_C = 0$ of our active-hydraulics model. When $J_C = 0$ the streamline loops are self-avoiding but their orientations are uncoupled. This situation is not directly observed in our experiments where the flow couplings are either parallel or antiparallel. However, our finite-size simulations indicate that in the crossover between the two regimes, when the fractions of parallel and antiparallel couplings are equal, our Φ_e spin correctly accounts for the streamline geometry when taking $J_C = 0$.

In order to gain a deeper insight into this limit, in the limit of asymptotically large system sizes, we proceed to another analogy with frustrated statistical mechanics. We map the statistical mechanics of our model defined by Eq. (S9) on the 3-coloring problem, and the fully-packed $O(2)$ model. We then take advantage of exact predictions from conformal field theory and compare them with our numerical simulations and experimental measurements.

Active hydraulics, 3-coloring model and loop $O(2)$ model : exact results

We proceed as in the previous section, we focus on the maximally flowing regime : $\beta J_A \rightarrow \infty$ in Eq. (S9). In this limit the vertices of our Φ_e -spin model are coupled to edges with spin configurations of the type $\{+1, -1, 0\} = \{\text{blue, orange, gray}\}$. Since there is no additional constraint ($J_C = 0$), our model then exactly corresponds to a 3-coloring model defined on the edges of the hexagonal lattice the edges, see Fig. S16a. This classical statistical mechanics model was first introduced by Baxter in Ref. [96]. It was later shown this 3-coloring model is equivalent to the fully packed loop $O(2)$ model [73]. We recall that n can be interpreted as the fugacity of the loops in a loop model. The value $n = 2$ can then be intuitively understood as there are two ways to orient each loop whose conformation are unaffected by their orientation when $J_C = 0$. This situation contrasts with the limit $J_C \ll 0$ where the orientation of a given loop fully determined the orientation of all the others, thereby leading to a fugacity $n = 1$.

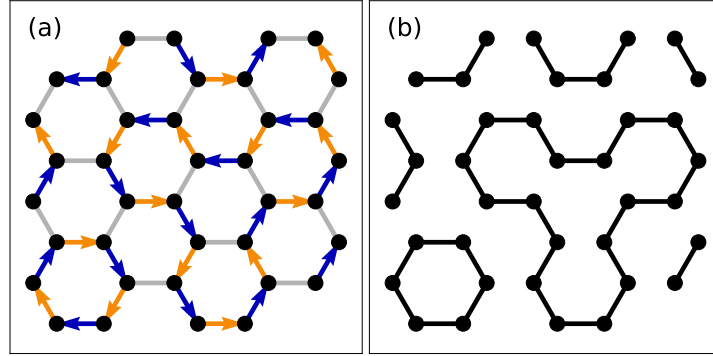


FIGURE S16 – **No flow coupling** ($J_C = 0$) : **Mapping on the 3-coloring problem.** Under the constraint of maximum flow ($J_A \rightarrow \infty$) and no flow coupling ($J_C = 0$), our full spin model (Eq. (S9)) reduces to the coloring of the edges of a honeycomb lattice with three colors : blue, red and gray, with the three edges linked to a different vertex having different colors. **(a)** Example of configuration for a periodic system, showing the 3-coloring of the edges. **(b)** This system is equivalent to a fully packed $O(2)$ loop model (shown for the blue-orange loops).

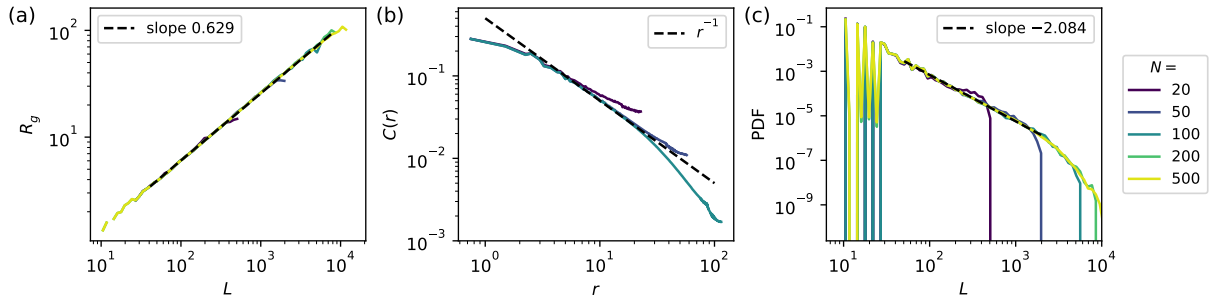


FIGURE S17 – **No flow coupling** ($J_C = 0$) : **numerical results.** **(a)** Gyration radius of the non-winding loops versus size. We find an exponent $\nu \simeq 0.634$ close to the theoretical value $\nu = 2/3$. **(b)** The decay of the correlation $C(r)$ is consistent with the r^{-1} decay predicted theoretically. **(c)** Probability distribution of the loop sizes. The decay exponent -2.08 should be compared with the theoretical prediction $-7/3 \approx -2.3$.

The 3-coloring on the honeycomb lattice, and the fully-packed loop $O(2)$ model have been extensively studied in the mathematical physics community, and a number of exact results are available. For instance, for the 3-coloring model, the degeneracy of the number of configurations Ω is known to scale extensively with the number N_v of vertices : $\ln \Omega = N_v \ln W$ with $W \approx 1.20872$ [96]. We also recall that the fully-packed loop $O(2)$ model is commonly believed to follow the same statistics as the $SLE(\kappa = 4)$ process [93]. We build on this knowledge to make quantitative predictions on the stream line geometry and test these exact predictions against numerical simulations of our Φ_e -spin model and experiments.

- **Gyration radius.** The fractal dimension of the loops in the fully-packed loop $O(2)$ model is $d_f = 3/2$ [73] : the gyration radius scales as $R_g \sim L^\nu$ with $\nu = 1/d_f = 2/3$. This prediction is in very good agreement with the numerical simulations of our spin model at $J_C = 0$, see Fig. S17a, and is consistent with the value of ν measured in the crossover regime in our experiments.
- **Loop correlation.** The fully packed loop $O(2)$ model, which has central charge $c = 2$ features algebraic correlations. The probability $C(r)$ that two edges at distance r from one another belong to the same loop scales as $C(r) \sim r^{-1}$ [72]. This result agrees with our numerical simulations, see Fig. S17b.
- **Distribution of loop sizes.** The probability $P_{\text{site}}(L)$ that the loop passing through a given vertex has size L scales as $P_{\text{site}}(L) \sim L^{-(\tau-1)}$ with $\tau = 7/3$ [72, 73]. The probability $P_{\text{loop}}(L)$ that a loop has size L scales as $P_{\text{loop}}(L) \sim L^{-\tau}$. These two predictions again agree with our numerical simulations as seen in Fig. S17c.

In conclusion, our active-hydraulics model belongs to the universality class of the fully-packed loop $O(2)$ model in the limit $J_C = 0$. In particular, the exact value of gyration radius exponent is $\nu = 2/3$, which lies in the crossover between the two regimes observed experimentally, Fig. S13d.i). This penultimate set of results further confirm the relevance of our Φ_e -spin model to account for active flows in trivalent networks.

3.6.7 Parallel flow couplings : subextensive degeneracy and metastable states

In this last subsection, we focus on the parallel regime. It corresponds to the largest aspect ratios in our experiments and to the limit $J_C \gg 0$ of our model. Unlike the other two cases studied in the above sections ($J_C \ll 0$ and $J_C = 0$), we show that the ground state of the model does not map on a critical loop model. The ground state configurations have a sub-extensive degeneracy and cannot be reached in neither the experiments nor Monte-Carlo simulations. The configurations that we observe correspond to local minima of $\mathcal{H}$, which we characterize numerically.

Color-dependent interactions and non-critical phase

When introducing a non-zero flow coupling $J_C \neq 0$ in Eq. (S9), in the fully packed limit $J_A \rightarrow \infty$, our model corresponds to the 3-coloring model with color-dependent interactions. This class of model was introduced in Ref. [95]. The authors argued that the phase $J_C \gg 0$ is “frustrated”, “non-critical” and “massive”. Instead of using this field theoretic terminology, we instead perform numerical simulations and address the similarities and differences with the other two phases ($J_C < 0$ and $J_C = 0$).

We investigate the fully-packed loop configurations (2/3 of the edges are flowing) in the limit $J_C \gg 0$ where all flow couplings are parallel ($\sigma_i \sigma_j = +1$ across edges hosting a zero spin Φ_e). The only solutions correspond to lines winding around the periodic box, and parallel to one another as illustrated in Fig. S18a. In a lattice of $N \times N$ hexagons, the number Ω of such

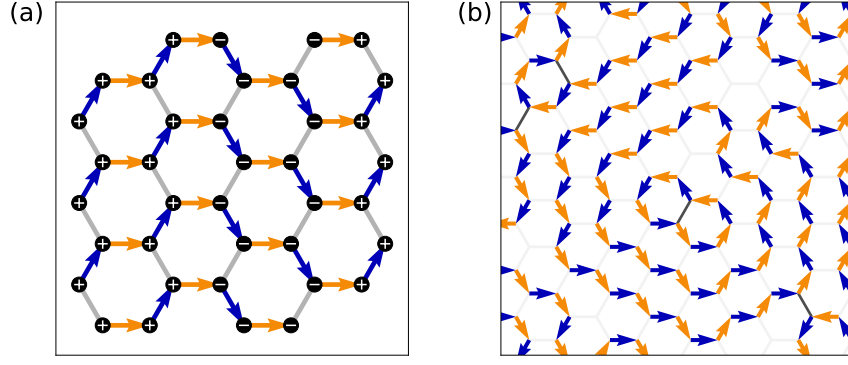


FIGURE S18 – **Parallel flow coupling ($J_C > 0$) : ground states and final configurations.**

(a) Example of a ground state configuration of our model when $J_C > 0$. The two constraints are (i) the loops are fully-packed (blue-red-gray at each vertex) and (ii) all couplings are parallel ($\sigma_i \sigma_j = +1$ for each gray edge). They imply that the lowest energy configurations correspond to parallel streamlines that wind around the simulation box. (b) A configuration reached by our numerical simulation. It is not a ground state configuration of $\mathcal{H}$. It however features a collection of nested loops.

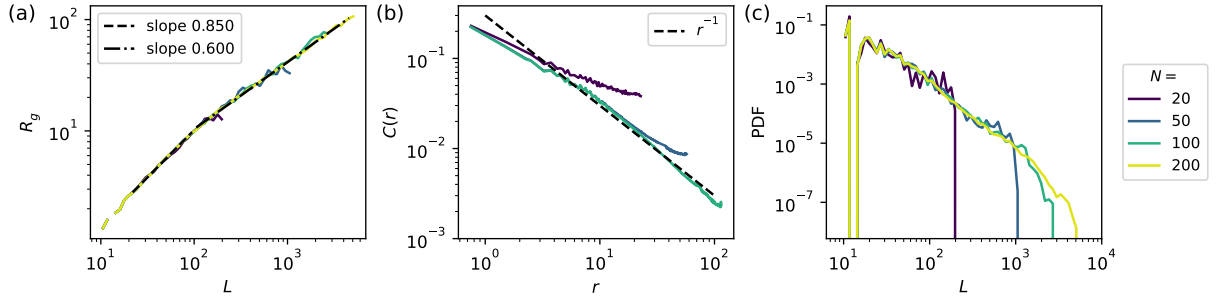


FIGURE S19 – **Parallel flow coupling ($J_C > 0$) : numerical results.** (a) Gyration radius versus loop size. We uncover two regimes : for short loops ($L < 100$) the exponent is $\nu_1 \approx 0.85$ while for large loops we find $\nu_2 \approx 0.60$. (b) The correlation $C(r)$ is consistent with a r^{-1} decay. (c) Distribution of loop sizes.

configurations is of the order of 2^N [95]. This can be seen by starting with a set of streamlines, or Φ_e spins pointing along the same direction, say from left to right. To deform the loops, we can start from the leftmost edge, see Fig. S18 and flip the direction of the streamline, the second edge must host a current flowing to the right hand side, the streamline can then bifurcate upwards or downwards and so forth until the streamline winds around the box. This procedure implies that the number of configurations scales as the number of directed random walks which yields a 2^N scaling. This reasoning shows that the ground state degeneracy (more accurately the ground state complexity) is sub-extensive in the number of vertices $N_v = 3N^2$ (or number of edges) since $\ln \Omega \sim \sqrt{N_v} \ln 2$. This behavior contrasts with the $\ln \Omega \sim N_v \ln W$ scaling found for the 3-coloring model when $J_C = 0$, and with the algebraic scaling of the frustrated antiferromagnetic Ising model.

We stress that in a non-periodic system, the lowest energy configurations correspond to fully nested loops, whose degeneracy is also sub-extensive, following the same reasoning. However, both in periodic and finite systems these configurations are very hard to reach starting from random initial conditions. At low temperature, the worm Monte Carlo algorithm reaches highly stable local energy minima, see Fig. S18b. The same phenomenon happens in the experiments

in which we never observed a set of perfectly nested streamlines configurations, see Fig. S13e.i where $f_{\text{para}} \approx 0.6$ is still much lower than 1. A full study of this potentially glassy phase is beyond the objectives of this article, but we provide numerical observations which shed some light on the geometry of the streamlines, i.e of the ground state of the Φ_e -spin model.

Streamline geometry and non-critical phase for parallel couplings

We investigate again the same geometrical quantities numerically.

- **Gyration radius.** If we were probing ground state configurations, the gyration radius exponent would be trivially given by : $\nu = 1$. In fact, the geometry which we observe is more complex. In the metastable states that we probe, Fig. S19a, we can distinguish two asymptotic behaviors : for short loops ($L < 100$), the exponent is $\nu_1 \simeq 0.85$ while for long loops ($L > 100$) the gyration radius has a scaling $\nu_2 \simeq 0.6$. The impossibility to describe the loops with a single exponent reflect that we are not dealing with a realization of a critical loop model. In the experiments, we probe loops up to size 300. This explains why we find an effective exponent $\nu_{\text{exp}} \simeq 0.75 - 0.8$, see Fig. S13d.i.
- **Loop correlation.** The probability $C(r)$ that two sites as a distance r belong to the same loop is consistent with a r^{-1} decay (Fig. S19b). This scaling is identical to the simulations where $J_C = 0$, see Section 3.6.6. But this scaling is a poor marker of different universality classes. The same scaling would indeed be observed in the ground state where all the streamlines would be parallel. Indeed, considering a given edge in a ground state configuration, Fig. S19a, there are 2 edges at a distance r that are in the same loop, out of a total number of edges that scales as r (perimeter of a circle of radius r scales). In the ground states we therefore also find $C(r) \sim r^{-1}$. Our numerical simulations tell us that the same scaling holds for the metastable states that we probe.

In conclusion, the metastable states of the parallel regime ($J_C > 0$) are characterized by a gyration radius exponent $\nu_1 \simeq 0.85$ for short loops and a loop correlation $C(r)$ that seems to decay as r^{-1} . Both observations are consistent with the experiments (Fig. S13 c.i and d.i).

3.6.8 Finite element simulations

Our goal is to determine whether the defect fractionalization seen in the flow field at the subchannel scale is specific to colloidal-roller fluids or generic to polar active matter. To answer this question we resort to numerical resolutions of Toner-Tu Hydrodynamics. Toner-Tu equations, Eqs. (S22) and (S23) are the equivalent of the Navier-Stokes for polar active fluids, flocks of self-propelled bodies [7, 65]. In their simplest form they reduce to [34] :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{S22})$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = (\alpha - \beta v^2) \mathbf{v} + D \nabla^2 \mathbf{v} - \sigma \nabla \rho, \quad (\text{S23})$$

where $\rho(\mathbf{r}, t)$ and $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ are the local density and velocity fields of the polar active liquid. We choose the hydrodynamic constants to match the experimental values estimated in Refs [34, 66, 67] : $\lambda = 0.7$, $\sigma = 5 \text{ mm}^2 \text{s}^{-2}$, $D \approx 10^{-3} \text{ mm}^2 \text{s}^{-1}$, $\alpha_0 = 10^2 \text{ s}^{-1}$, $\rho_c = 3 \times 10^{-3}$, $\beta = 10 \text{ mm}^{-2} \text{s}$ (we opt for a definition where ρ is nondimensional as in [34]). The physical meaning of each term has already been thoroughly discussed in the litterature, see e.g. [65]. To solve this set of partial differential equations, we use the Finite Element Method described in Ref. [34]. In practice, we use the open source software package FENICS [79].

To investigate the structure of the vortical flows in channels of different anisotropy, we solve the equations in cigar-shaped boxes. The shape consists of a rectangular body with two semicircular segments attached to opposite sides. The rectangular body has a width of W and

a length of L . The two semicircles have a diameter equal to W . We use the Babuska penalty method, (see [80]), to set tangent boundary conditions for the velocity field : $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \approx 0$ at each boundary, where $\mathbf{n}$ is the normal vector to the mesh boundary. There is no boundary condition for the density field ρ , but we checked that mass is globally conserved. In all simulations, the density is initialized as a constant $\rho_0 = 0.3$, and the velocity vectors are initialized with a random orientation and a norm close to $\sqrt{\alpha/\beta}$.

The time step between two time increments δt is chosen to be small compared to the typical relaxation timescale of the fast-speed mode $\tau = \alpha(\rho_0) \approx 10^{-1}$ s. In practice, we take $\delta t \approx 10^{-3}$ s. The computational mesh consists of ~ 2000 triangular cells. In our simulations L varies from 0 to 200 μm while W is kept constant and equal to 200 μm . We interpolate the density and velocity fields using second-order polynomials on Lagrange finite-element cells (see [79]).

Généralisation des lois de l'hydraulique active

Dans le chapitre 3, nous avons montré que le courant Φ_{ij} entre deux noeuds i et j d'un réseau hydraulique actif trivalent se comporte de façon analogue à un spin 1 classique : il peut prendre trois valeurs : $+1$, -1 , et 0 . L'activité et l'incompressibilité du fluide sont à l'origine des courants -1 et $+1$, et c'est la frustration géométrique imposée par la trivalence du réseau qui force l'apparition d'un courant nul, pour satisfaire la conservation de la masse à chaque noeud $\sum_i \Phi_{ij} = 0$.

Dans ce chapitre, nous montrons que pour une valence supérieure à 3, les règles de l'hydraulique active sont fortement dépendantes de la géométrie des jonctions. Nous étendons le modèle de l'hydraulique active au réseau carré (de coordination 4). En particulier, nous établissons une analogie entre l'écoulement et le modèle à six sommets introduit par Baxter [43]. Nous montrons qu'avec un design adéquat des jonctions du réseau, nous pouvons sélectionner le type de sommet majoritaire dans l'écoulement, et ainsi choisir entre deux situations extrêmes : un écoulement ordonné, et un écoulement désordonné. En particulier, ce choix a un impact très fort sur les propriétés de transports et de mélange dans le réseau. Dans la phase ordonnée, l'écoulement est corrélé sur une longueur caractéristique de l'ordre de quelques pas de réseau, d'où un transport de matière à courte distance. Dans la phase désordonnée, l'écoulement présente des corrélations algébriques, autorisant un transport de matière à l'échelle du réseau.

Finalement, nous généralisons les lois de l'hydraulique active aux réseaux de valences 5 et 6. Nous montrons que tous les écoulements actifs peuvent être mis en correspondance avec un modèle de glace de spin qui correspond lui-même à un modèle de boucles [50, 52]. Nous montrons finalement que les propriétés des écoulements peuvent être contrôlées grâce à la géométrie des jonctions. La présence de séparateurs au centre des jonctions plonge l'écoulement dans une phase ordonnée transportant la matière à courte portée. À l'inverse, des jonctions simples entraînent un écoulement désordonné et un transport de matière à longue portée.

4.1 L'hydraulique active dans les réseaux carrés comme un modèle à six sommets

Dans cette section, nous montrons que, pour un réseau carré de valence paire, il n'y a pas de frustration géométrique intrinsèque au réseau. L'écoulement est donc laminaire dans une grande majorité de canaux. Cependant, la géométrie de la jonction joue ici un rôle crucial. Lorsque nous plaçons des séparateurs au centre des jonctions (voir chapitre 3), l'écoulement est ordonné et correspond à un système d'Ising antiferromagnétique sur réseau carré, mais l'absence de séparateurs désordonne complètement l'écoulement. Nous montrons ensuite que ces écoulements

correspondent à des configurations du modèle à six sommets de Baxter (voir [43]). La géométrie de la jonction permet d'attribuer un poids différents aux sommets, en forçant l'apparition d'une charge topologique négative.

4.1.1 Une expérience modèle

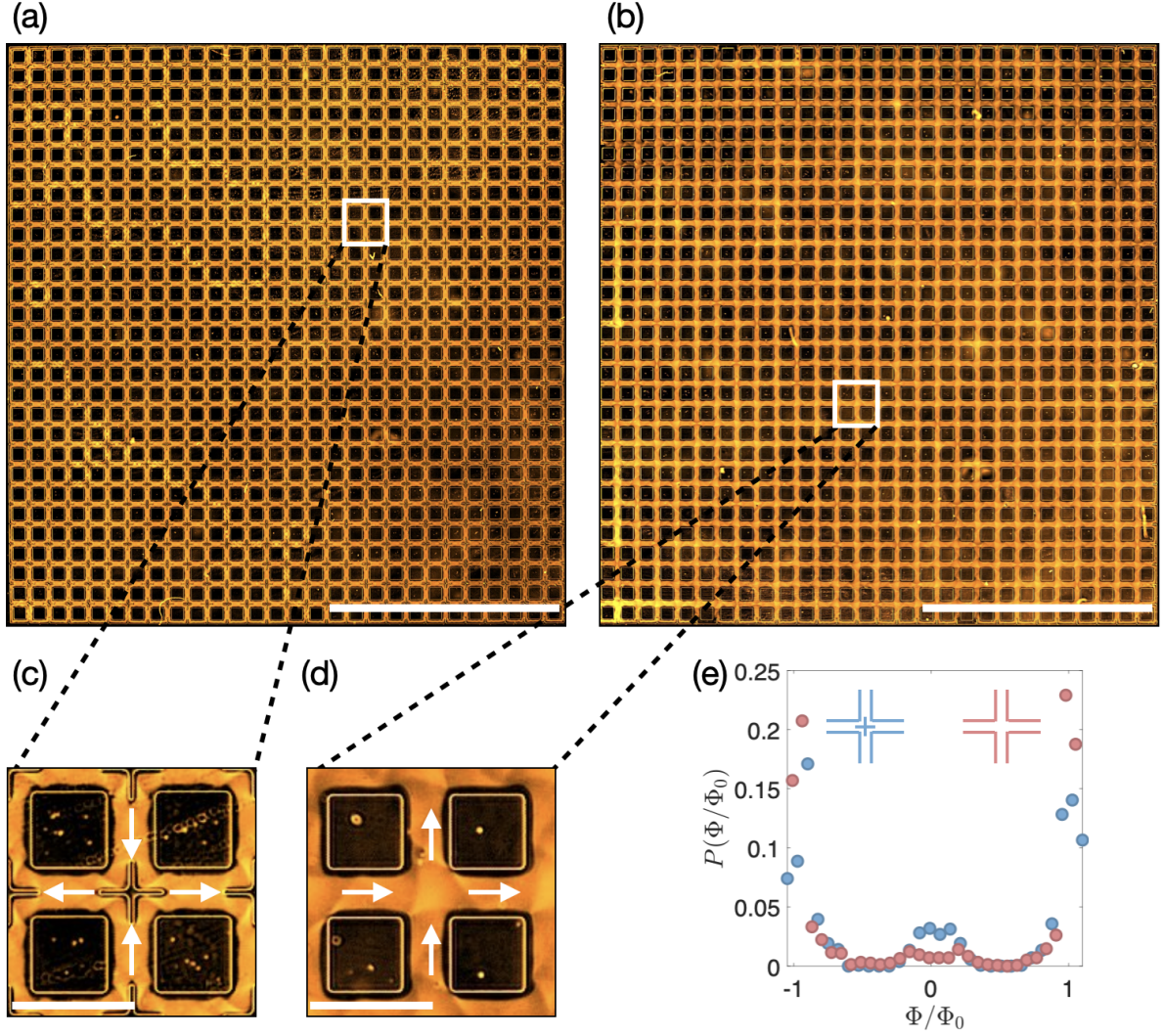


FIGURE 4.1 – (a) Image expérimentale de l'écoulement dans un réseau carré dont les jonctions sont équipées de séparateurs. (b) Image expérimentale de l'écoulement dans un réseau carré dont les jonctions sont simples. Les deux réseaux contiennent environ un millier de noeuds chacun. Barres d'échelle : 0.5 cm. (c) Zoom sur une jonction équipée d'un séparateur isotrope. (d) Zoom sur une jonction simple. 0.5 μm . (e) Distribution du courant dans les réseaux équipés de séparateurs (bleu) et dans les réseaux sans séparateurs (rose). Le courant est principalement piqué autour de ± 1 . On constate cependant une proportion non-négligeable de courants nuls pour les canaux équipés de séparateurs.

J'ai conçu plusieurs réseaux carrés, tous comptant environ 1000 noeuds, voir Fig. 4.1a-b. La longueur des canaux est fixée à $\ell = 250 \mu\text{m}$ et leur largeur à $w = 200 \mu\text{m}$, voir Fig. 4.1c-d. Afin d'étudier le rôle de la jonction dans la morphologie de l'écoulement, j'ai fait varier continûment la symétrie et la taille de la jonction, voir le chapitre 2 pour une explication détaillée. Une fois

les colloïdes injectés et l'activité démarrée, le système atteint, après un temps caractéristique de l'ordre de quelques minutes, un état stationnaire très stable. Conformément à ce qui était attendu, le réseau carré ne frustre pas la laminarité de l'écoulement. Nous voyons en Fig. 4.1e que la distribution du courant Φ_e sur l'arête e est largement piquée autour de deux valeurs typiques $\Phi_e = \pm 400 \text{ s}^{-1}$. Le signe de Φ_e est expliqué au chapitre 2. Dans la suite de ce chapitre, nous considérerons donc que le courant Φ_e peut prendre les valeurs ± 1 (et dans une minorité de cas la valeur 0, que nous décrivons dans la sous-section suivante), et nous le représenterons par une flèche pour $\Phi_e = \pm 1$ (et une absence de flèches pour $\Phi_e = 0$).

4.1.2 Une transition structurale de la morphologie des lignes de courant

Nous montrons en figure 4.2a-b l'exemple de deux écoulements, l'un avec des jonctions munies de séparateurs pour (a) et le second (b) avec des jonctions simples. Visuellement, la morphologie des deux écoulements semblent très différente : plutôt ordonnée pour (a) et désordonnée pour (b). Remarquons également qu'un nombre conséquent de canaux supporte un courant nul dans l'écoulement ordonné. Afin de quantifier cette différence de morphologie, nous définissons comme paramètre d'ordre $\langle |\mathcal{C}_f| \rangle$, la moyenne sur tout l'écoulement de la valeur absolue de la circulation $\mathcal{C}_f$ autour des faces f du réseau. Nous définissons $\mathcal{C}_f$ pour chaque face f du réseau de la façon suivante :

$$\mathcal{C}_f = \frac{1}{4} \sum_{e \in f} \Phi'_e. \quad (\text{S1})$$

Φ'_e est le courant de l'arête e . Par convention, on prend $\Phi'_e = +1$ quand il est orienté dans le sens trigonométrique, $\Phi'_e = -1$ quand il est orienté dans le sens horaire, voir Fig. 4.3a. Ainsi, si le liquide circule autour de chaque face, $\langle |\mathcal{C}_f| \rangle = 1$. Il prend une valeur entre 0 et 1 sinon.

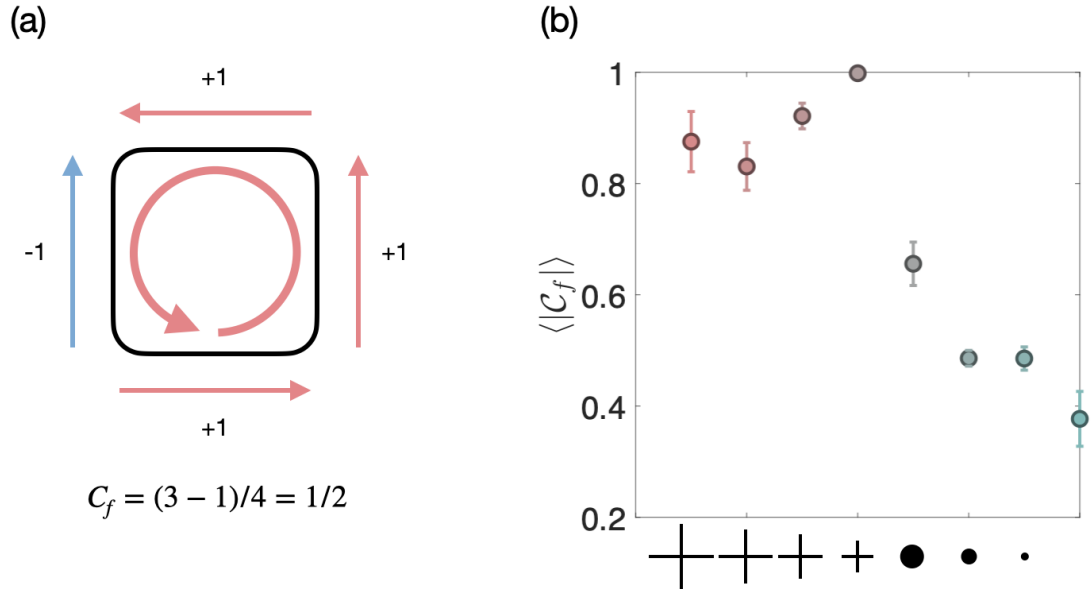


FIGURE 4.3 – (a) Exemple de calcul de la circulation $\mathcal{C}_f$ autour de la face f . (b) Évolution du paramètre d'ordre $\langle |\mathcal{C}_f| \rangle$ en fonction de la géométrie de la jonction. $\langle |\mathcal{C}_f| \rangle$ est proche de 1 pour les séparateurs anisotropes, et chute brusquement pour les séparateurs isotropes. Les séparateurs anisotropes ont une longueur (du centre de la jonction à leur extrémité) respective de 135, 94, 74 μm . Les séparateurs circulaires ont un rayon respectif de 25, 25, 8, 5 μm .

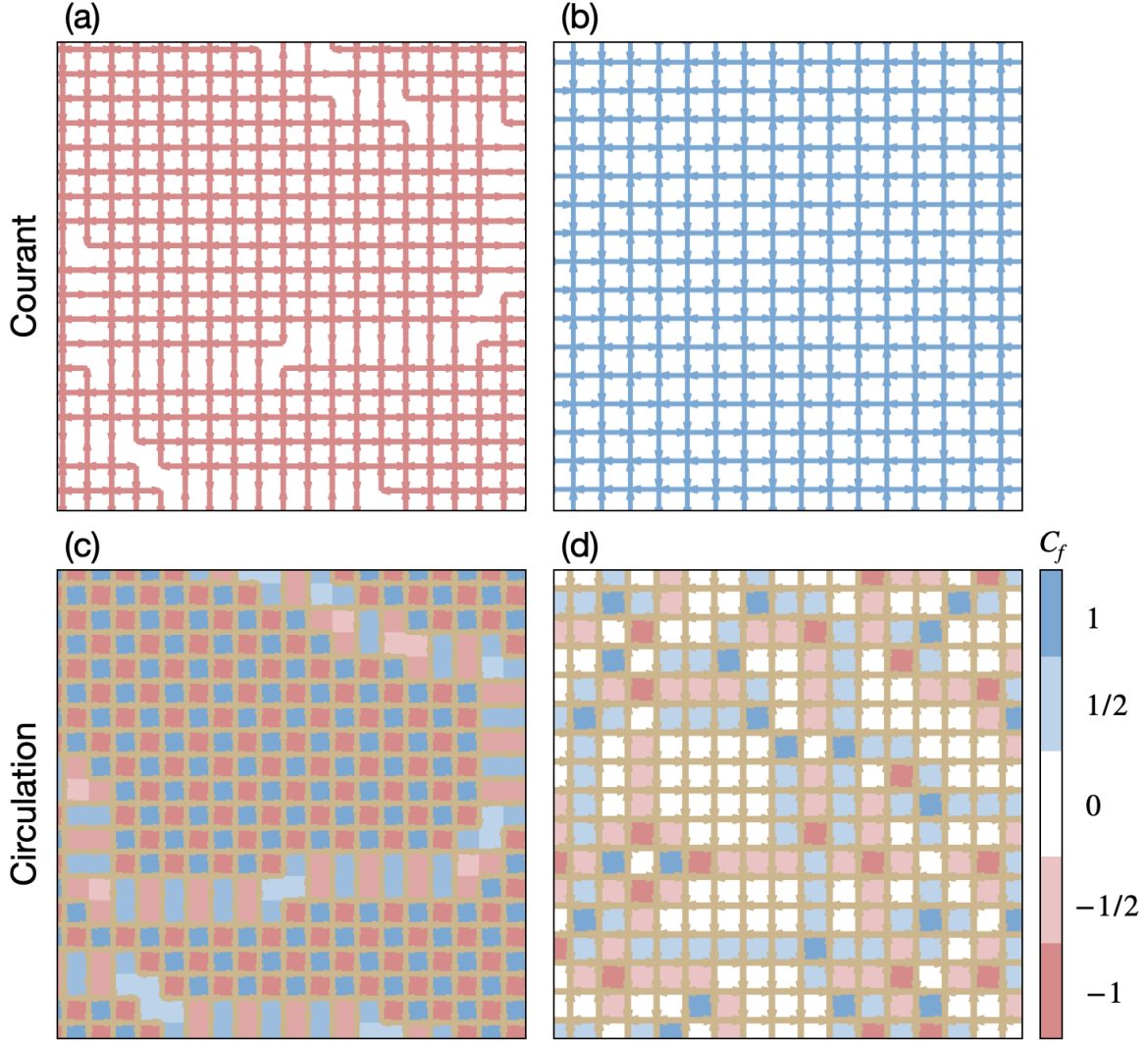


FIGURE 4.2 – **Cartes d'écoulements et de circulations pour les phases antiferromagnétique et désordonnée.** (a) Lignes d'écoulement pour un réseau possédant des jonctions munies de séparateurs. Les lignes de courant sont ordonnées. Les flèches tournent dans le même sens autour de chaque carré. Certaines lignes de courants sont absentes : l'écoulement est tourbillonnaire et le courant nul dans ces canaux. (b) Lignes d'écoulement pour un réseau possédant des jonctions munies de jonctions simples. Les lignes de courant sont désordonnées. (c) Phase antiferromagnétique. La circulation C_f est égale à ± 1 pour toutes les faces f exceptées celles adjacentes aux murs de domaine. (d) Phase désordonnée. La couleur rouge/bleu indique le signe $+/-$ de C_f , la transparence indique sa valeur absolue.

Nous remarquons en Fig. 4.3b que pour des jonctions contenant un séparateur anisotrope (possédant la même symétrie 4 que le réseau) $\langle |C_f| \rangle$ est proche de 1. Après une transition brutale, lorsque le séparateur devient isotrope, le paramètre d'ordre $\langle |C_f| \rangle$ tombe rapidement à une valeur inférieure à 0.4. La transition en elle-même est difficile à étudier, puisque nous n'avons aucun moyen en notre possession pour étudier continûment l'effet des séparateurs aux jonctions. Cependant, nous pouvons apporter une description quantitative du système profondément dans les deux phases.

La phase $\langle |C_f| \rangle \approx 1$ correspond à un système de spins d'Ising antiferromagnétique sur réseau carré. Le spin est défini sur chaque face f par le signe de la circulation $\text{signe}(C_f)$. Nous montrons

sur la figure 4.2c la carte des circulations correspondant à l'écoulement de la Fig. 4.2a. Le système n'est pas parfaitement antiferromagnétique, il présente des murs de domaine, repérables par les carrés transparents, de circulations ($\langle \mathcal{C}_f \rangle < 1$). Ces murs de domaine sont des canaux supportant un écoulement tourbillonnaire et un courant nul en moyenne. A cause de la conservation de la masse, il ne peut y avoir qu'un nombre pair de canaux supportant un courant nul à chaque noeud. Il en résulte que les murs de domaine peuvent soit percoler d'un bord à l'autre du réseau, soit former une boucle auto-évitante. Dans de plus rares cas, les murs de domaine peuvent brancher à un noeud possédant 4 canaux à courant nul. L'autre phase, que nous appelleront phase désordonnée (D), présente une circulation *a priori* aléatoire autour de chaque face du réseau, sans aucun ordre visible, voir Fig. 4.2d.

4.1.3 Influence de la jonction sur la topologie et la géométrie de l'écoulement

Résultats expérimentaux

Nous avons vu dans la sous-partie précédente que la géométrie de la jonction était déterminante pour la morphologie de l'écoulement. L'explication de cette sélection de sommets réside dans les détails microscopiques et la topologie des écoulements au niveau des jonctions. Nous montrons en Fig. 4.4 les deux configurations possibles d'un écoulement au niveau d'une jonction. En Fig. 4.4a les deux canaux *in* sont adjacents, en Fig. 4.4b les deux canaux *in* sont face-à-face. Un calcul élémentaire permet de montrer que les sommets de la Fig. 4.4a sont associés à une charge topologique nulle, alors que les sommets de la Fig. 4.4b sont associés à une charge topologique -1 . Il est important de noter que les symétries miroirs et de renversement du courant conservent la charge topologique. Cette charge topologique doit ainsi apparaître dans le champ de vitesse de l'écoulement, loin des bords. Nous remarquons effectivement en Fig. 4.4a que l'écoulement au centre de la jonction est laminaire, alors que l'écoulement au centre de la jonction présente une charge topologique -1 pour la configuration représentée à la Fig. 4.4b. La seule présence de cette charge topologique négative permet d'expliquer les phases ordonnées ($\langle |\mathcal{C}_f| \rangle \approx 1$) et désordonnées ($\langle |\mathcal{C}_f| \rangle \approx 0.4$). Placer une charge négative à chaque jonction assure une circulation $\mathcal{C}_f = 1$ autour de toutes les faces f .

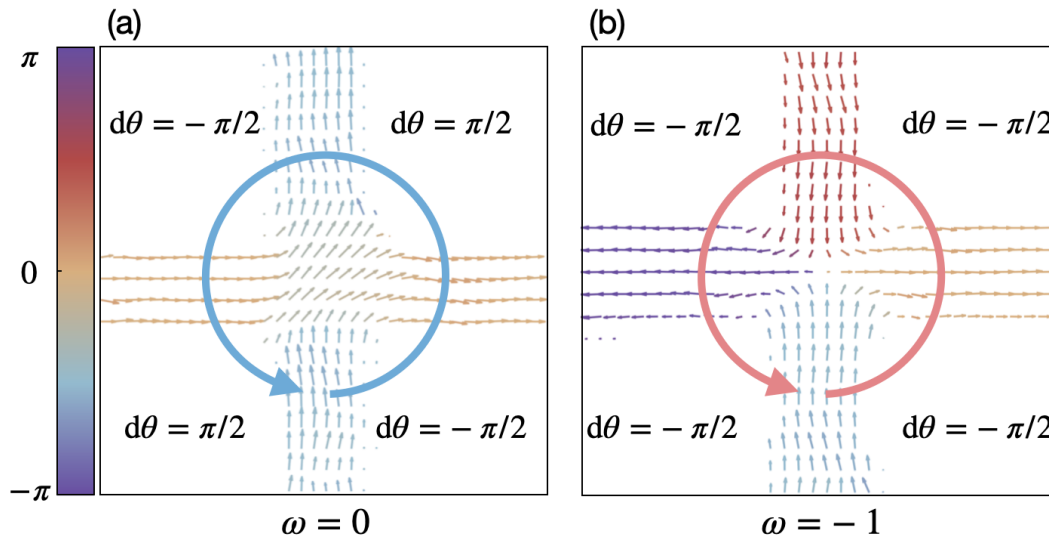


FIGURE 4.4 – **Topologie des sommets du modèle à 6 sommets.** (a) Les sommets de type 1 – 4 sont associés à une charge topologique nulle. (b) Les sommets de type 5 – 6 sont associés à une charge topologique -1 .

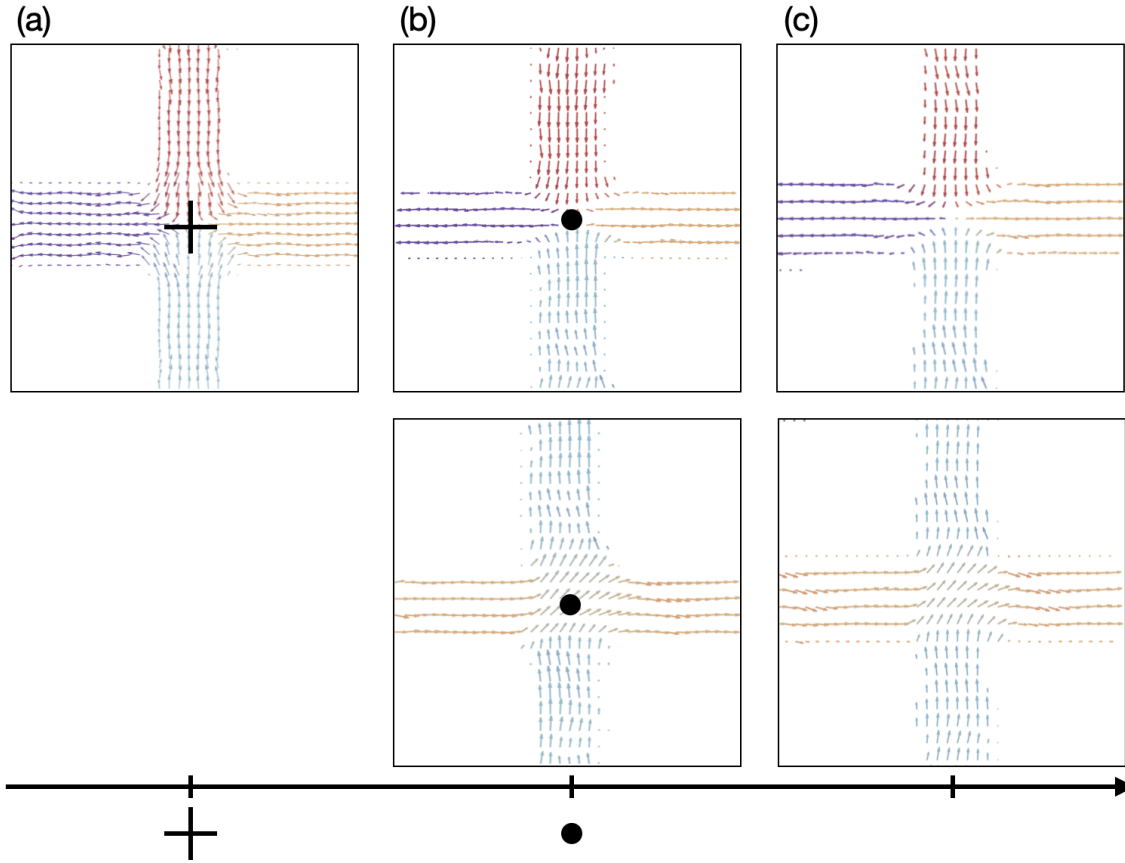


FIGURE 4.5 – **Champs de vitesses expérimentaux à proximité des séparateurs.** (a) Champ de vitesse proche d'un séparateur anisotrope. La présence du séparateur force l'apparition d'un défaut -1 au centre de la jonction. (b) Champ de vitesse proche d'un séparateur circulaire. Le séparateur autorise l'apparition d'une charge -1 au centre de la jonction mais également un écoulement laminaire. (c) Champ de vitesse dans une jonction simple. L'écoulement laminaire au centre de la jonction est favorisé. La présence d'un défaut -1 est toujours possible, mais semble assez instable. La couleur des vecteurs code pour leur orientation.

La présence d'une jonction de symétrie 4 permet de forcer l'apparition d'une charge -1 au centre de la jonction. En effet, les séparateurs sont faits (tout comme les canaux du réseau) de résine isolante. Ils interagissent répulsivement avec les colloïdes (voir [107] pour une explication détaillée). En conséquence, les colloïdes sont repoussés des séparateurs à une distance typique de quelques micromètres, et l'écoulement est tangent aux bords sur un maximum de longueur. Ainsi, l'écoulement qui maximise sa tangence au séparateur présente une charge -1 centrée sur le séparateur, voir Fig. 4.5a. Nous remarquons effectivement en Fig. 4.6 que lorsque la jonction est équipée d'un séparateur anisotrope, la fraction de défauts topologiques -1 au centre des jonctions est strictement égale 1.

Pour un séparateur circulaire de diamètre $50\ \mu\text{m}$, la fraction de charges -1 dans les jonctions est environ égale à celles des écoulements laminaires (voir Fig. 4.6). Ce séparateur ne favorise donc ni ne défavorise l'apparition d'une charge -1 au centre de l'écoulement. La présence du séparateur semble stabiliser le cœur du défaut au centre de la jonction, voir Fig. 4.5b, sans pour autant forcer l'apparition d'un point de stagnation pour le séparateur anisotrope.

Pour toutes les autres tailles de séparateurs circulaires, l'écoulement laminaire dans la jonction est favorisé et apparaît dans 80% des cas, voir Fig. 4.6. Les défauts -1 au centre de la jonction semblent instables, et la charge se fractionnalise et s'accroche aux angles de la jonction,

voir Fig. 4.5c. Les défaut -1 apparaissent cependant dans une fraction minime de jonctions, environ 20%.

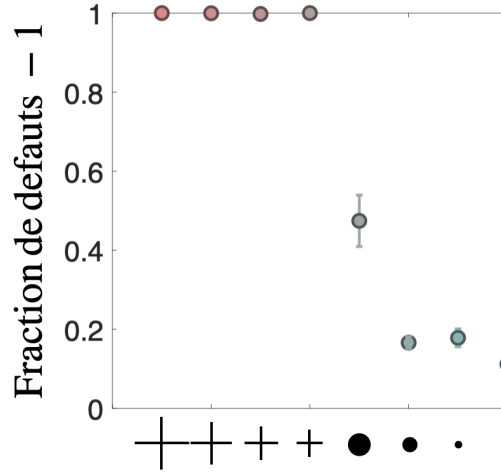


FIGURE 4.6 – **Fraction de jonctions possédant une charge topologique -1 .** La fraction de défauts -1 au centre des jonctions vaut 1 pour les jonctions équipées de séparateurs anisotropes, et chute brutalement à une valeur proche de 0 non-nulle pour les jonctions isotropes. Les séparateurs anisotropes ont une longueur (du centre de la jonction à leur extrémité) respective de 135, 94, 74, 25 μm . Les séparateurs circulaires ont un rayon respectif de 25, 8, 5 μm .

Généralisation aux liquides polaires actifs

Afin de vérifier si cette propriété est spécifique aux rouleurs de Quincke ou générale aux liquides polaires actifs, nous avons étudié numériquement l'écoulement d'un liquide polaire actif de Toner-Tu dans un réseau carré, voir Fig. 4.7. Nous avons conçu des maillages de la forme du plus petit réseau carré possible laissant à l'écoulement la possibilité de former un défaut -1 ou non au centre des jonctions. Ce réseau est de taille 3×3 . Avec des conditions aux bords tangentes, similaires à celles des expériences, un réseau de taille 2×2 aurait toujours forcé l'apparition d'un défaut -1 . Pour un réseau de taille 3×3 , deux configurations sont autorisées : soit le système possède 4 défauts -1 aux jonctions, soit l'écoulement est laminaire partout, voir Fig. 4.7. La géométrie du maillage s'approche au plus près de celle des réseaux hydrauliques utilisés dans les expériences. La largeur des canaux est de 200 μm (100 μm pour les canaux des bords), leur longueur est de 320 μm . Nous avons conçu différentes géométries de jonctions, reproduisant celles utilisées expérimentalement. Nous avons modélisé l'écoulement polaire actif par les équations de Toner-Tu, s'écrivant comme suit [7, 65] :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{S2})$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = (\alpha - \beta v^2) \mathbf{v} + D \nabla^2 \mathbf{v} - \sigma \nabla \rho. \quad (\text{S3})$$

Nous les résolvons à l'aide du solveur FENICS. Nous utilisons un ensemble unique de paramètres hydrodynamiques cohérents avec les mesures antérieures dans les fluides de rouleurs de Quincke [34, 67, 90] (voir chapitre 2 toutes les valeurs). Les conditions aux limites sont prises tangentes aux bord, et imposées par la méthode de pénalisation de Babuska [80]. Les conditions initiales sont pour chaque maille : une orientation aléatoire du vecteur vitesse, et une norme proche de $\sqrt{\alpha/\beta}$, pour reproduire le plus fidèlement possible le régime transitoire du liquide observé expérimentalement.

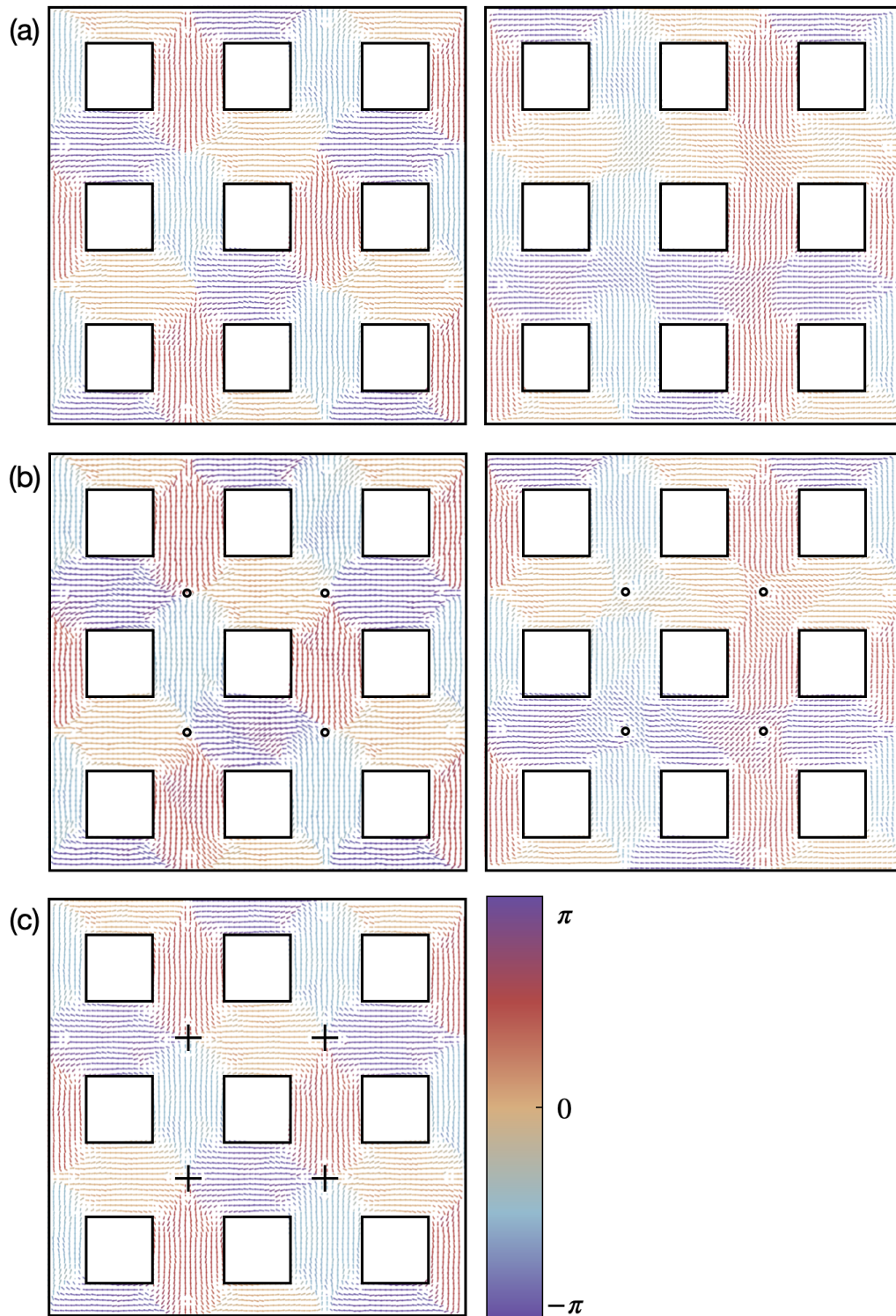


FIGURE 4.7 – Simulations par la méthode des éléments finis d'un écoulement de liquide de Toner-Tu dans une maille élémentaire du réseau carré. (a) Exemple de champ de vitesse stationnaire obtenu dans une maille élémentaire de réseau carré, possédant une jonction équipée d'un séparateur en forme d'étoile à 4 branches. (b) Exemple de champ de vitesse stationnaire obtenu dans une maille élémentaire de réseau carré, possédant une jonction équipée d'un séparateur de forme circulaire. (c) Exemple de champ de vitesse stationnaire obtenu dans une maille élémentaire de réseau carré, possédant une jonction simple. La couleur des vecteurs code pour leur orientation.

Pour chaque géométrie de jonction, nous avons simulé l'écoulement 100 fois avec des conditions initiales aléatoires différentes. Nous avons ensuite calculé la fraction de jonctions possédant un défaut topologique -1 . Nous traçons en figure 4.8 cette fraction en fonction de la géométrie de la jonction. Nous constatons, en accord avec les résultats expérimentaux, que les jonctions équipées d'un séparateur en forme d'étoile forcent l'apparition d'un défaut -1 dans 100% des cas. La fraction de défauts -1 chute ensuite abruptement pour atteindre une valeur proche de 0 mais non-nulle.

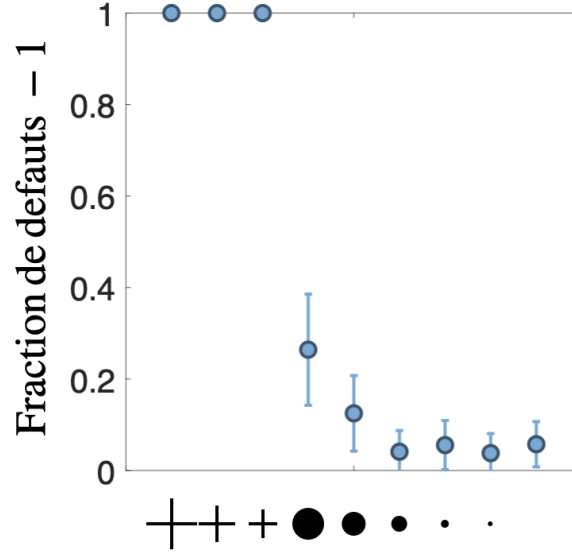


FIGURE 4.8 – **Fraction de défauts -1 au centre de la jonction en fonction de la géométrie du séparateur.** La fraction de défauts -1 au centre des jonctions vaut 1 pour les jonctions équipées de séparateurs anisotropes, et chute brutalement à une valeur proche de 0 non-nulle pour les jonctions isotropes. Les séparateurs anisotropes ont une longueur (du centre de la jonction à leur extrémité) respective de 70, 50, 30 μm . Les séparateurs circulaires ont un rayon respectif de 25, 20, 15, 10, 5 μm .

Ainsi, tous les liquides polaires actifs présentent la même phénoménologie : l'écoulement est laminaire dans les canaux, et la géométrie de la jonction permet de forcer l'apparition ou non d'un défaut topologique -1 . Nous montrons dans la suite de ce chapitre comment la présence de ce séparateur et l'apparition d'une charge topologique -1 influe grandement le motif d'écoulement à l'échelle du réseau.

4.2 Un écoulement analogue au modèle à 6 sommets

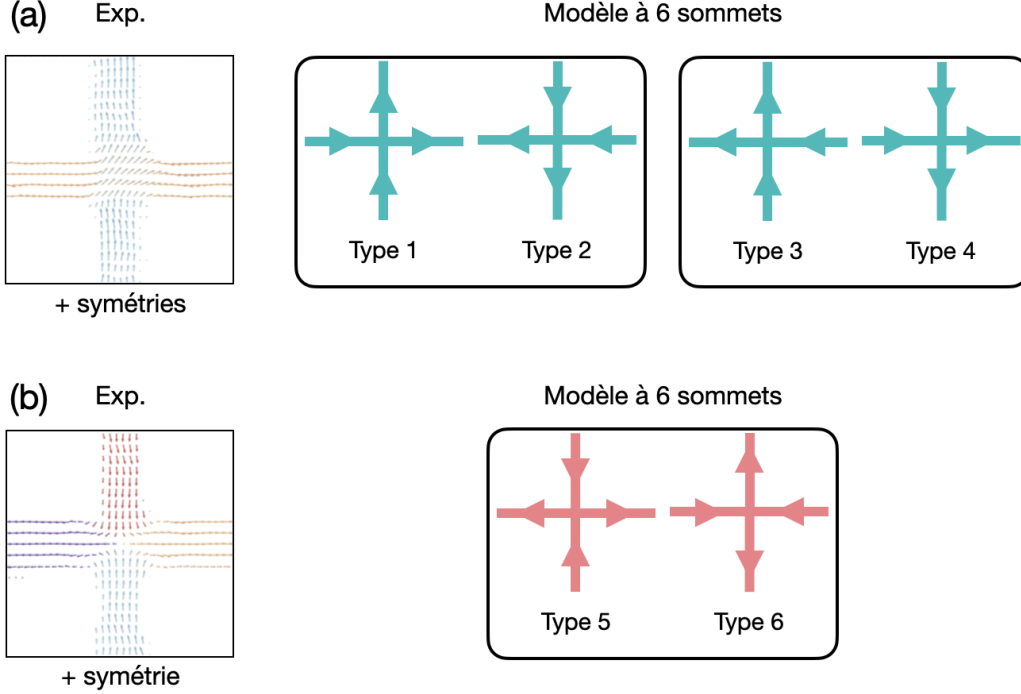


FIGURE 4.9 – (a) Droite : sommets de type 1 – 4 du modèle à 6 sommets. Gauche : écoulement correspondant. (b) Droite : sommets de type 5 – 6 du modèle à 6 sommets. Gauche : écoulement correspondant.

Nous avons vu dans la section précédente que nous pouvons caractériser les deux phases ordonnée et désordonnée de l'écoulement en utilisant la moyenne de la valeur absolue de la circulation $\langle |C_f| \rangle$ comme paramètre d'ordre. Dans cette section, nous allons montrer que nous pouvons caractériser ces deux phases d'une façon différente, en nous intéressant non plus aux circulations autour des faces du réseau, mais au motif d'écoulement à chaque jonction. Comme expliqué précédemment, sans prendre en compte les canaux supportant un courant nul, il y a six configurations d'écoulement possibles à chaque noeud, représentées en Fig. 4.9. Ces six configurations sont regroupées en deux catégories. Les configurations 1 – 4, pour lesquelles l'écoulement est laminaire au centre des jonctions (Fig. 4.9a). Les configurations 5 – 6, où l'écoulement fait apparaître une charge topologique -1 au centre de la jonction (Fig. 4.9b). La figure 4.10a montre la fraction de noeuds de type 5 – 6 en fonction de la géométrie du réseau (cette figure est identique à la Fig. 4.6, les quantités mesurées sont identiques). Elle décroît brutalement lorsque le séparateur devient isotrope et atteint une valeur non-nulle mais proche de zéro. Ces configurations à chaque sommet avec deux flèches entrantes et deux flèches sortantes correspondent aux configurations du modèle à 6 sommets [43] décrit en introduction. Le diagramme de phases du modèle à 6 sommets est connu est représenté en figure Fig. 4.10b. L'axe des abscisses est a/c , avec a le poids statistique des sommets 1 et 2 (voir Fig. 4.9) et c le poids statistique des sommets 5 et 6. L'axe des ordonnées est b/c , avec b le poids statistique des sommets 4 et 3 et c . Notons que le poids statistique des sommets 1 (resp. 3 et 5) est pris égal à celui des sommets 2 (resp. 4 et 6) par symétrie de renversement de toutes les flèches.

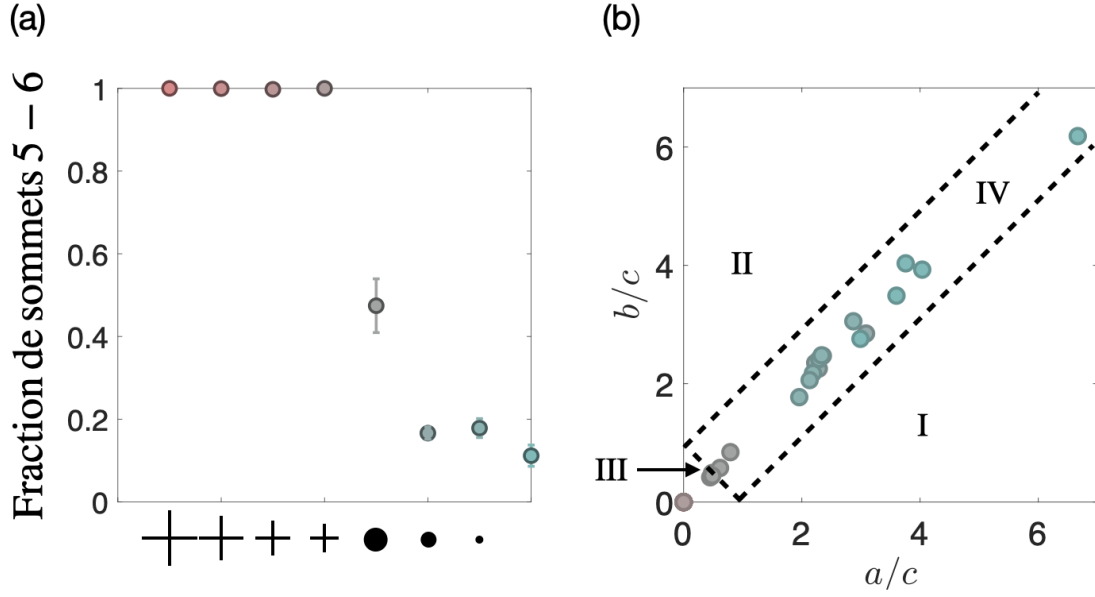


FIGURE 4.10 – **(a)** Fraction de sommets 5 – 6 en fonction de la géométrie du réseau. La fraction de sommets de type 5 – 6 vaut 1 pour les jonctions anisotropes, et chute brutalement à une valeur proche de 0 non-nulle pour les jonctions isotropes. Les séparateurs anisotropes ont une longueur (du centre de la jonction à leur extrémité) respective de 135, 94, 74, 25 μm . Les séparateurs circulaires ont un rayon respectif de 25, 8, 5 μm . **(b)** Diagramme de phases du modèle à 6 sommets sur lequel nous avons superposé les points correspondants aux configurations d'écoulement. Phases I et II : ferroélectriques. Phase III : antiferroélectrique. Phase IV : désordonnée. Tous les poids sont situés sur la droite $a/c = b/c$ à cause de la conservation de la masse à l'échelle du réseau entier.

Nous avons superposé à ce diagramme les points correspondant à nos expériences, en assimilant la fraction de sommets mesurée à leur poids statistique. Le système peut atteindre la phase antiferroélectrique en $a/c = b/c = 0$, quand les jonctions sont équipées de séparateurs anisotropes. Pour toutes les autres géométries de jonction, le système se trouve dans la phase désordonnée. Notons que les points sont tous très proches de la droite de pente 1, c'est-à-dire que $a = b$ pour toutes les expériences. Effectivement, la conservation de la masse à l'échelle du réseau impose qu'il y ait autant de flèche vers la gauche que vers la droite, et vers le haut que vers le bas. En d'autres termes, la polarisation électrique macroscopique des phases ferroélectriques correspond à un courant moyen non nul à l'échelle du réseau, ce qui est impossible puisque la masse est conservée dans le réseau. Les deux phases ferroélectriques sont donc inaccessibles avec nos conditions aux limites et sans forçage extérieur. Pour chacun des phases I-IV, nous avons schématisé une configuration du modèle à 6 sommets correspondant sur la Fig. 4.10b. La phase AF présente une alternance de noeuds de types 5 et 6, alors que la phase désordonnée présente une répartition aléatoire de noeuds ou les types 1 – 4 sont majoritaires.

4.3 Propriétés géométriques des écoulements actifs

Dans cette section, nous étudions les propriétés des écoulements dans les réseaux hydrauliques actifs. En particulier, nous montrons que les écoulements correspondant à la phase désordonnée du modèle à 6 sommets présentent des corrélations cachées à longue portée.

En pratique, nous mesurons ces corrélations de la façon suivante : nous établissons une correspondance entre les configurations du modèle à six sommets (équivalentes aux écoulements observés expérimentalement), et une configuration de gaz de boucles [75, 117, 118]. Cette correspondance nous permet de prédire la statistique des écoulements, d'en déduire leur criticalité, et les éventuels exposants critiques. Finalement, établir la criticalité du système nous informe sur les propriétés de transport dans le réseau. Le réseau ne possède effectivement que deux longueurs caractéristiques : la longueur du côté des plaquettes, dite "microscopique", et la longueur "macroscopique" du réseau entier. Ainsi, un système critique sera corrélé à l'échelle du réseau entier, et donc le transport de matière s'effectuera à grande distance. A l'inverse, un système non-critique possédera des corrélations à distance finie, la seule échelle qui leur sera accessible sera la longueur microscopique, et ainsi le transport de matière s'effectuera à courte distance.

Dans la première sous-section, nous montrons comment faire correspondre le modèle à 6 sommets avec une configuration de gaz de boucle. Dans un second temps, nous comparons les mesures expérimentales aux prédictions théoriques et numériques [74, 75], et en déduisons les propriétés de transport de matière dans les réseaux.

4.3.1 Mise en correspondance des écoulements avec des modèles de boucles

Nous avons montré dans la section précédente qu'un écoulement actif dans un réseau carré correspond à une configuration de modèle à six sommets, et que nous pouvons influencer le poids statistiques des sommets en modifiant la géométrie des jonctions. La phase désordonnée du modèle à 6 sommets contient des corrélations cachées, qu'il est très facile d'exhiber en utilisant la correspondance avec un gaz de boucles. Dans cette sous-partie, nous allons montrer comment faire correspondre les configurations du modèle à 6 sommets avec une configuration de modèle de boucles. Nous désignerons l'écoulement directement par son modèle à 6 sommets équivalent.

Il existe plusieurs correspondances entre un modèle à six sommets et un modèle de boucles auto-évitantes. Ces correspondances sont basées sur la bipartition du réseau carré : nous pouvons séparer le réseau carré en deux sous-réseaux bleu et rose, de telle sorte que sur le réseau carré initial, les noeuds du sous-réseau bleu ne sont en contact qu'avec les noeuds du sous-réseau rose, et vice-versa, voir chapitre 2 pour une explication détaillée.

- La correspondance que nous montrons en Fig. 4.11 permet d'obtenir un modèle de boucles auto-évitantes de deux couleurs occupant toutes les arêtes (FPL², FPL pour Fully Packed Loop) sur réseau carré, à partir d'une configuration de modèle à 6 sommets [75, 117, 118]. Nous rappelons que le réseau carré est bipartite : nous pouvons attribuer une couleur bleue ou rose à chacun des sites, de sorte qu'aucun site bleu ne soit en contact avec un autre site bleu, et inversement (voir Fig. 4.11). Les boucles de couleurs roses sont formées par l'ensemble des flèches pointant d'un site rose vers un site bleu, et les boucles de couleurs bleues par l'ensemble des flèches pointant d'un site bleu vers un site rose (voir Figs. 4.11b-c). Notons que contrairement au réseau en nid d'abeille, les boucles auto-évitante du FPL² ne correspondent pas réellement aux lignes de courant. Elle ne sont pas orientées, mais elles sont formées d'une succession de flèches qui pointent dans une direction opposée.
- Une seconde correspondance établie dans [119] permet d'obtenir un autre FPL sur réseau carré. Notons que le réseau carré sur lequel vivent les boucles est différent du réseau carré du modèle à 6 sommets : il s'agit du réseau dual.

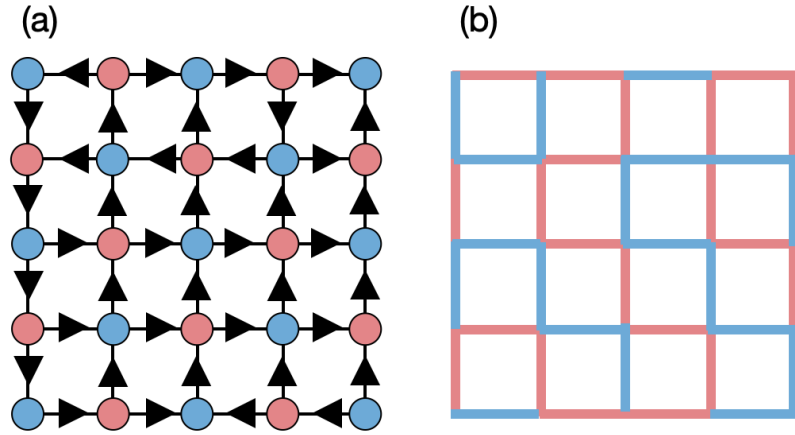


FIGURE 4.11 – Correspondance entre le modèle à 6 sommets et un modèle de boucles sur le même réseau carré. (a) Exemple d'une configuration de modèle à 6 sommets. Le réseau carré est bipartite : chacun des noeuds bleus n'est adjacent qu'à des noeuds roses, et inversement. (b) Boucles correspondantes à la configuration de modèle à 6 sommets de (a). Les flèches allant d'un site bleu vers un site rose deviennent des traits bleus. Les flèches allant d'un site rose vers un site bleu deviennent des traits roses.

Ces deux correspondances donnent les même exposants, nous pourrions donc étudier les géométries et corrélations de l'une ou l'autre de ces correspondances, et en déduire les propriétés géométriques des écoulements actifs dans les réseaux hydrauliques. Cependant, dans une volonté d'apporter le plus de compréhension physique à ce manuscrit, nous étudierons désormais en utilisant la première correspondance. Les boucles obtenues parcourent en effet le même réseau que le réseau hydraulique, ce qui facilite la compréhension visuelle du système.

Nous traçons sur la figure 4.12 4 configurations d'écoulement dans la phase ordonnée, et sur la figure 4.13 4 configurations d'écoulement dans la phase désordonnée. Visuellement, ces deux phases sont très différentes. La phase ordonnée ne contient que des lignes droites. Elles ne s'arrêtent qu'aux bords du réseau ou au niveau des murs de domaines antiferromagnétiques. A l'inverse, la phase désordonnée contient des boucles très sinueuses de longueurs très variables.

4.3.2 Dimensions fractales et criticalité des écoulements actifs

Plus quantitativement, nous pouvons caractériser les phases ordonnées et désordonnées des écoulement à l'aide d'observables typiques des modèles de boucles.

Rayon de giration

La première observable est le rayon de giration R_g , défini comme la distance moyenne entre un élément de la boucle et son centre de masse (voir le chapitre 2 pour une explication détaillée). Pour des boucles auto-similaires, le rayon de giration croît algébriquement avec la longueur L des boucles selon la relation algébrique $R_g \sim L^\nu$. L'exposant ν est relié à la dimension fractale D_f de l'écoulement par $\nu = 1/D_f$. Un exposant ν non-entier indique une phase critique de dimension fractale D_f non-entière.

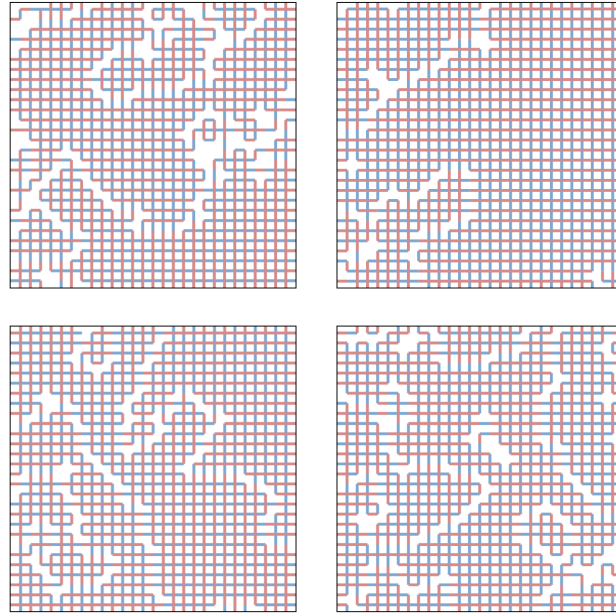


FIGURE 4.12 – **Correspondance entre modèle à 6 sommets et le FPL² Pour la phase ordonnée.** Les boucles dans la phase ordonnée sont des lignes droites. Les murs de domaines antiferromagnétiques sont repérables par l'absence de boucles.

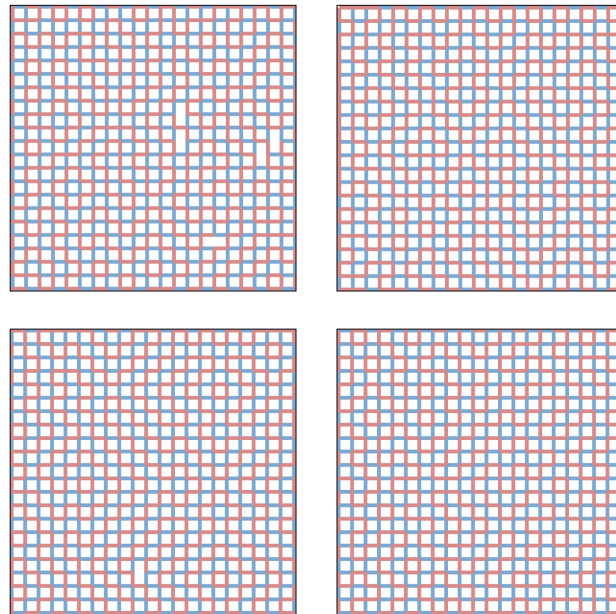


FIGURE 4.13 – **Correspondance entre modèle à 6 sommets et le FPL² Pour la phase désordonnée.** Les boucles dans la phase désordonnée sont sinueuses et sans forme reconnaissable.

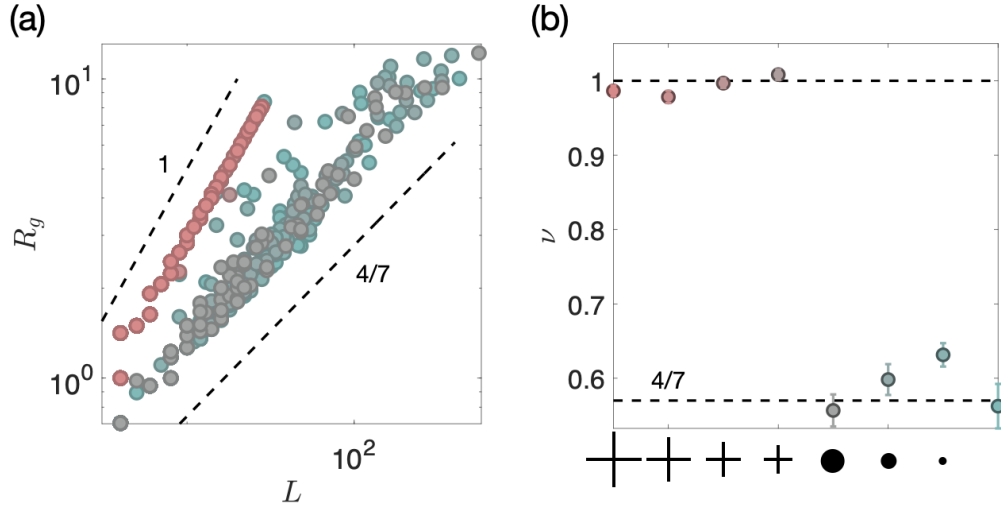


FIGURE 4.14 – (a) Évolution du rayon de giration R_g en fonction de la longueur des boucles L . R_g suit une loi de puissance de la forme $R_g \sim L^\nu$. La ligne du haut en pointillés indique une relation linéaire entre R_g et L . La ligne du bas en pointillés indique une relation de la forme $R_g \sim L^{4/7}$ prédite par le modèle de boucles $O(1)$. (b) Exposants du rayon de giration en fonction de la géométrie du séparateur. Seuls deux exposants sont mesurés : 1 pour les séparateurs de symétrie 4, et $4/7$ pour les séparateurs isotropes ou les jonctions simples. Les séparateurs anisotropes ont une longueur (du centre de la jonction à leur extrémité) respective de 135, 94, 74, 25 μm . Les séparateurs circulaires ont un rayon respectif de 25, 8, 5 μm .

Nous montrons en figure 4.14a l'évolution du rayon de giration R_g en fonction de la longueur L des boucles, pour les écoulements ordonnés et désordonnés. Dans les deux cas, R_g évolue algébriquement avec L . Nous montrons en figure 4.14b l'exposant ν mesuré en fonction de la géométrie du séparateur. Pour les séparateurs de symétrie 4, peu importe leur géométrie exacte, l'exposant mesuré est $\nu \approx 1$, témoignant d'une dimension fractale $D_f = 1$ entière et donc d'un écoulement non critique. Ce résultat était évident sans mesure puisque les boucles forment des lignes droites (voir Fig. 4.12). Pour tous les séparateurs circulaires ou la jonction sans séparateur, l'exposant mesuré est $\nu \approx 4/7 \approx 0.57$, prédit par le modèle de boucles $O(1)$ [55, 74, 75].

Fonction de corrélation de paire

La seconde observable permettant de caractériser ces deux phases est la fonction de corrélation de paire $C(r)$. $C(r)$ est la probabilité que deux arêtes à une distance r l'une de l'autre appartiennent à la même boucle. Pour un modèle de boucle critique, la fonction de corrélation de paire suit une relation algébrique de la forme $C(r) \sim r^{-2x_2}$. Les exposants x_2 et ν sont reliés par la relation [55] :

$$\frac{1}{\nu} = 2 - x_2. \quad (\text{S4})$$

Nous montrons en Fig 4.15a les variations de la fonction de corrélation de paire C en fonction de la distance r entre deux sites pour les écoulements ordonnés. La décroissance n'est pas algébrique, mais semble cohérente avec une exponentielle. Le *binning* des données est très large car pour une grand nombre de r , $C(r) = 0$ à cause de la forme linéique des boucles. Nous montrons en Fig 4.15b les variations de la fonction de corrélation de paire C en fonction de la distance r entre deux sites pour les écoulements désordonnés. La fonction de corrélation de paire semble suivre une relation algébrique de la forme $C(r) \sim r^{-1/2}$, prédite par le modèle de boucles

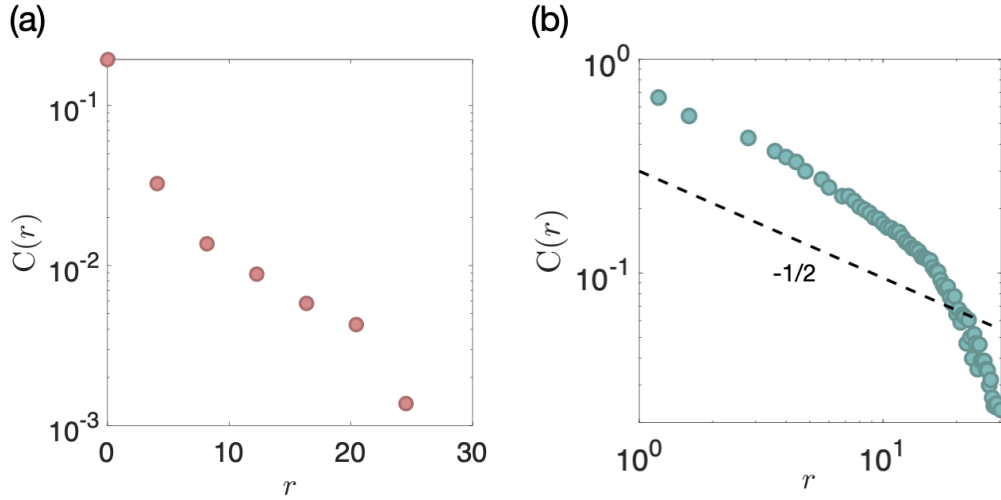


FIGURE 4.15 – (a) Évolution de la fonction de corrélation de paire $C(r)$ pour les écoulements ordonnés. La décroissance mesurée n'est pas une loi de puissance mais plutôt cohérente avec une exponentielle. (b) Évolution de la fonction de corrélation de paire $C(r)$ pour les écoulements désordonnés. La ligne en pointillés indique la décroissance algébrique d'exposant $-1/2$ prédite par le modèle de boucles $O(1)$. Les données des écoulements ordonnés (resp. désordonnés) ont été compilées pour améliorer la statistique.

$O(1)$ [74, 75]. Nous retrouvons ainsi $x_2 = 1/4$, en accord avec l'équation S4. Ces deux mesures sont en accord avec la criticalité de l'écoulement désordonné, et la non criticalité de l'écoulement ordonné. Il est cependant important de remarquer qu'à partir de $r \approx 20$, $C(r)$ est écrantée par la taille finie du réseau.

Distribution de longueur des boucles

La dernière observable accessible expérimentalement est la distribution de longueur de boucles $P(L)$, où L est la longueur des boucles. Pour un modèle de boucles critique, la distribution suit une loi de puissance de la forme $P(L) \sim L^{-\tau}$ [55, 72, 74, 75]. Les exposants ν et τ sont reliés par la relation suivante [73] :

$$\tau - 1 = \frac{2}{2 - x_2}. \quad (\text{S5})$$

Nous traçons sur la figure 4.16a la distribution de la longueur des boucles $P(L)$ pour les écoulements ordonnés. La distribution présente 2 pics autour de $L = 5$ et de $L = 29$. Ils correspondent respectivement à la taille typique des domaines antiferromagnétiques, et à la taille typique du système. Nous traçons sur la figure 4.16b la distribution de la longueur des boucles $P(L)$ pour les écoulements désordonnés. Nous constatons une décroissance algébrique de la forme $P(L) \sim L^{-\tau}$ cohérente avec l'exposant $\tau = 2 + 1/7$ prédit par le modèle de boucles $O(1)$ [75]. Notons tout-de-même, que même si la mesure est cohérente avec la prédiction théorique, la longueur des boucles mesurée n'excède pas quelques centaines de pas.

Ces trois observables sont géométriques. Elles ne décrivent pas explicitement les propriétés hydrodynamiques des écoulements. Néanmoins, elles permettent d'établir la criticalité ou non du modèle de boucles. Si le modèle de boucles obtenu est critique, nous pouvons en déduire que l'écoulement actif sous-jacent ne possède pas de longueur caractéristique, et donc qu'il présente des propriétés de transport à grande distance. À l'inverse, un modèle de boucles non critique présente une longueur de corrélation finie, qui doit se traduire dans l'écoulement par un transport

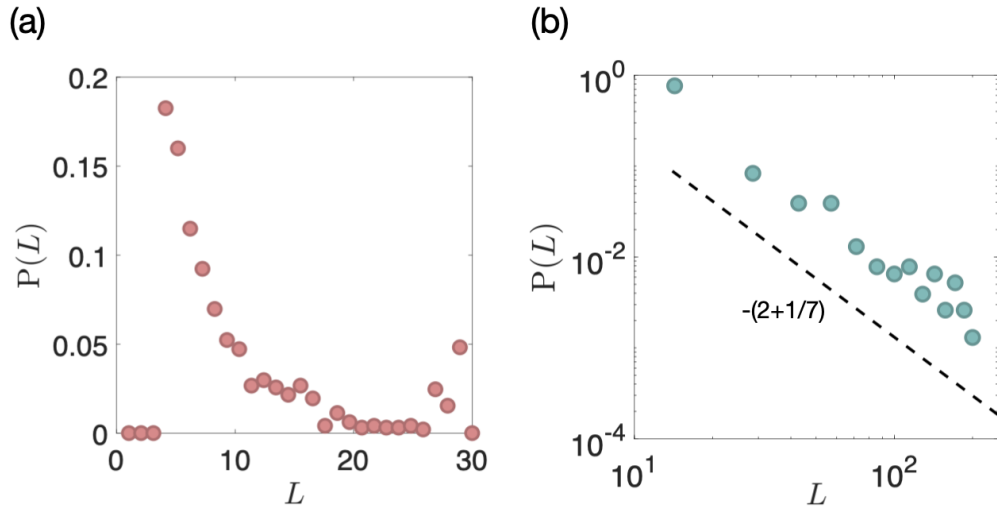


FIGURE 4.16 – **(a)** Évolution de la distribution de taille des boucles pour les écoulements ordonnés. La distribution est piquée autour de 5 et de 29, qui correspondent à la taille typique des domaines antiferromagnétiques et à la taille typique du système. **(b)** Évolution de la distribution de taille des boucles pour les écoulements ordonnés. La ligne en pointillés indique la décroissance algébrique d'exposant $-(2 + 1/7)$ prédite par le modèle de boucles $O(1)$. Les données des écoulements ordonnés (resp. désordonnés) ont été compilées pour améliorer la statistique.

à distance finie. Ainsi, les observations purement géométriques sur les lignes de courant sont un indicateur précieux des propriétés de transport de matière dans les réseaux.

4.4 Généralisation aux valences 5 et 6

Dans les deux sections précédentes, nous avons montré qu'un écoulement actif dans un réseau carré correspond à un modèle à six sommets. Nous avons vu que nous étions capables de concevoir des jonctions de géométrie de façon à perturber l'écoulement et favoriser un type de sommet par rapport à un autre. La modification de la jonction entraîne un changement structural du motif d'écoulement, avec d'une part un écoulement ordonné corrélé à courte portée, et d'autre part un écoulement désordonné corrélé à longue distance. Dans cette section, nous généralisons cette méthode aux réseaux triangulaires, de valence 6 (voir Fig. 4.17a). Nous montrons que, de la même façon que pour le réseau carré, nous pouvons concevoir une géométrie de jonction favorisant un écoulement ordonné à courte portée ou désordonné à longue portée. Nous caractérisons ensuite la dimension fractale de l'écoulement désordonné.

Nous étudions ensuite les motifs d'écoulements actifs dans un réseau hydraulique dont les canaux occupent les arêtes du pavage carré adouci. Ce réseau à une valence de 5. Nous l'avons conçu avec un seul type de jonction, possédant un séparateur en forme d'étoile à 5 branches (voir Fig. 4.17b). Nous montrons que l'écoulement est équivalent à un modèle à 6 sommets sur réseau aléatoire, profondément dans la phase antiferromagnétique, non-critique.

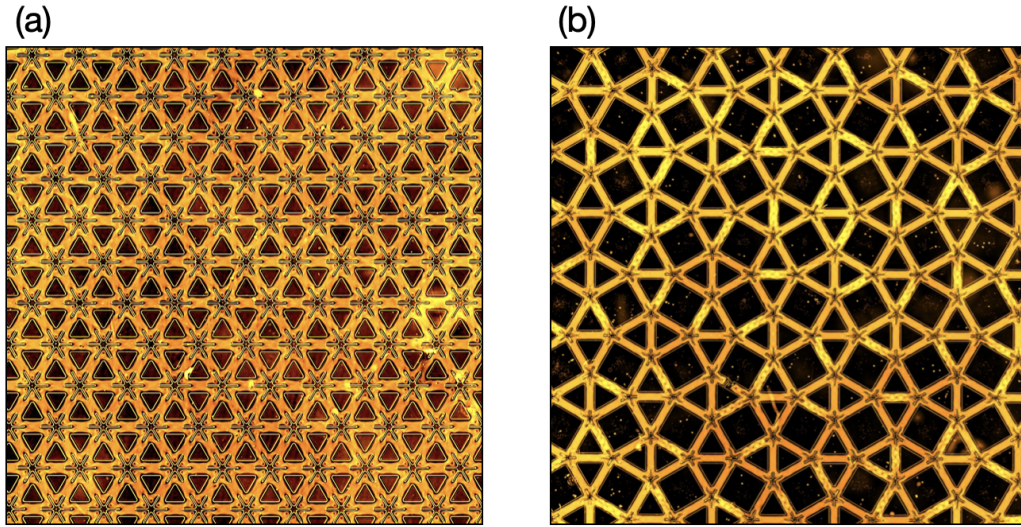


FIGURE 4.17 – (a) Écoulement actif dans un réseau hydraulique de valence 6. (b) Écoulement actif dans un réseau hydraulique de valence 5.

4.4.1 Réseau hydraulique triangulaire

Nous avons conçu un réseau hydraulique triangulaire d'environ 400 noeuds, voir Fig. 4.18a. Ce réseau à une valence de 6 : chaque jonction possède 6 canaux. Afin d'étudier l'écoulement profondément dans les phases ordonnée et désordonnée, nous avons conçu deux types de jonctions : l'une avec un séparateur en forme d'étoile à 6 branches, l'autre simple, voir Figs. 4.18b-c. Celui-ci est laminaire dans la plupart des canaux (voir Fig. 4.18d), et l'hydraulique des liquides actifs dans le réseau triangulaire se traduit encore une fois en un problème de glace de spins. A chaque noeud, il doit y avoir 3 flèches pointant en direction du noeud, et 3 flèches en direction d'un autre noeud. Ce modèle de spins sur réseau a été introduit en physique dans les années 60 – 70 sous le nom de modèle à 20 sommets [76, 120]. Il a récemment suscité un nouvel intérêt en mathématiques et notamment en combinatoire, voir par exemple [121]. Cependant, aucune solution analytique du modèle n'a été trouvée à notre connaissance.

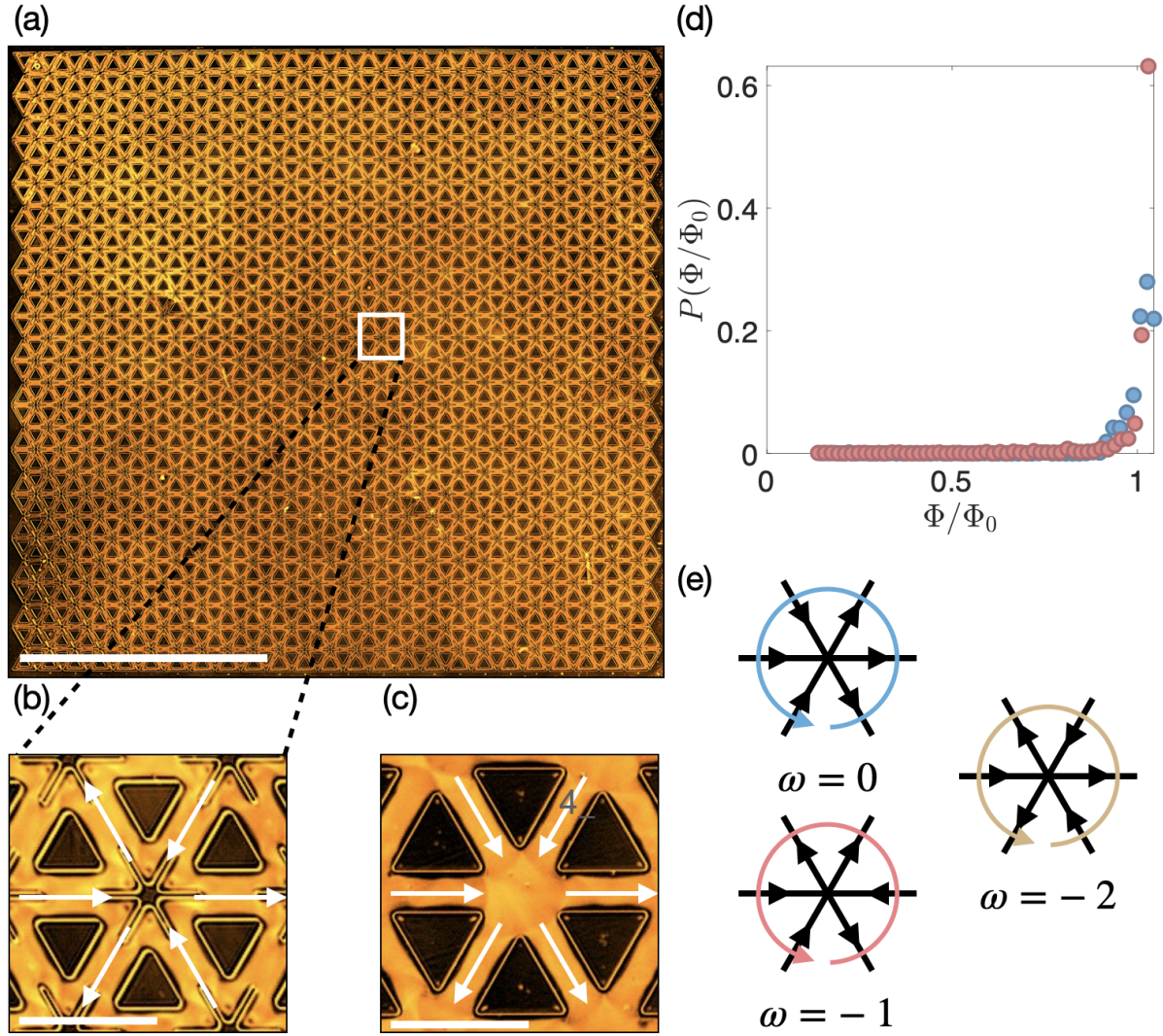


FIGURE 4.18 – (a) Image macroscopique d’un écoulement dans un réseau triangulaire. Barre d’échelle : 0.5 cm. (b) Jonction du réseau triangulaire équipée d’un séparateur en forme d’étoile à 6 branches. (c) Jonction simple du réseau triangulaire. Barres d’échelle : 200 μm . (d) Distribution du courant dans le réseau triangulaire. Le courant est majoritairement piqué autour de ± 1 , mais un léger pic centré sur 0 est également présent pour les écoulements dans les réseaux munis de jonctions en étoile. (e) Sommets du modèle à 20 sommets. Ils peuvent être classés en trois types suivant leur charge topologique (ou enroulement) ω . Le type 1 de charge $\omega = 0$. Le type 2 de charge $\omega = -1$. Le type 3 de charge $\omega = -2$.

Charge topologique et type de sommet

Les 20 sommets autorisés du modèle à 20 sommets se répartissent en trois types, représentés en Fig. 4.18e. Les sommets de type 1 possèdent une charge topologique nulle $\omega = 0$. Les sommets de type 2 possèdent une charge topologique $\omega = -1$. Les sommets de type 3 possèdent une charge topologique $\omega = -2$.

Ainsi, de la même façon que pour le réseau carré, l’ajout d’un séparateur au centre de la jonction permet de forcer l’apparition d’une charge topologique -2 au centre de la jonction, et donc de sélectionner le sommet de type 3 dans 100% des cas, voir Fig. 4.19a. Sans séparateur au centre de la jonction, les sommets de types 1, 2 et 3 sont tous autorisés, mais ils apparaissent

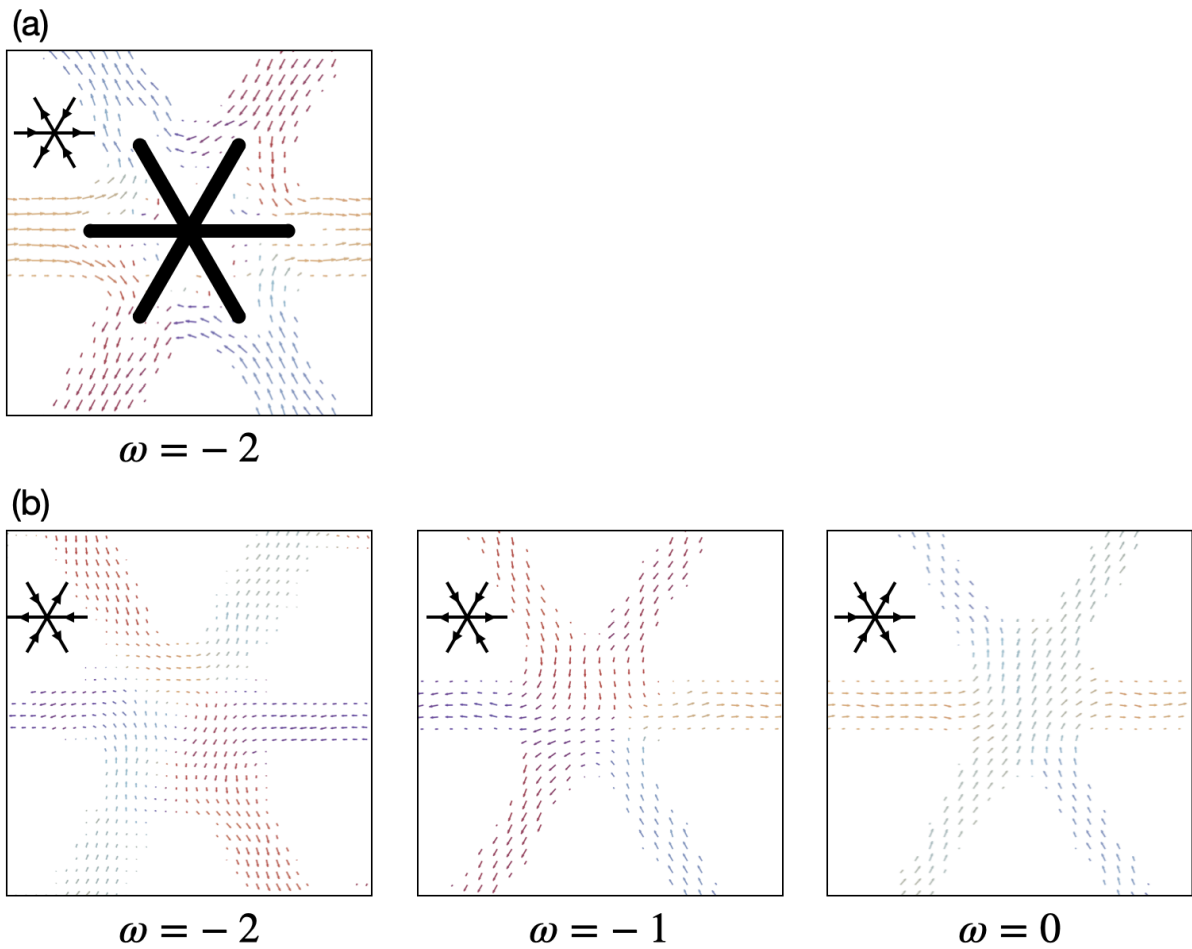


FIGURE 4.19 – (a) Champ de vitesse proche d'un séparateur anisotrope. La présence du séparateur force l'apparition d'une charge -2 au centre de la jonction. Aucun autre sommet n'est possible lorsque la jonction est équipée d'un séparateur anisotrope. (b) Champ de vitesse proche d'une jonction sans séparateur circulaire. L'apparition de charges -2 , -1 et 0 est possible, mais l'écoulement laminaire au niveau de la jonction (de charge nulle) est favorisé.

dans des proportions de 52, 33 et 13% respectivement. Notons que l'on observe bien la présence d'une charge topologique -1 dans le champ de vitesse loin des bords pour les sommets de type 2, voir Fig. 4.19b. Pour les sommets de type 3, le champ de vitesse au centre de la jonction est constitué de plusieurs vortex et plusieurs défauts -1 rendant la visualisation d'une charge -2 nette difficile.

Phase ordonnée

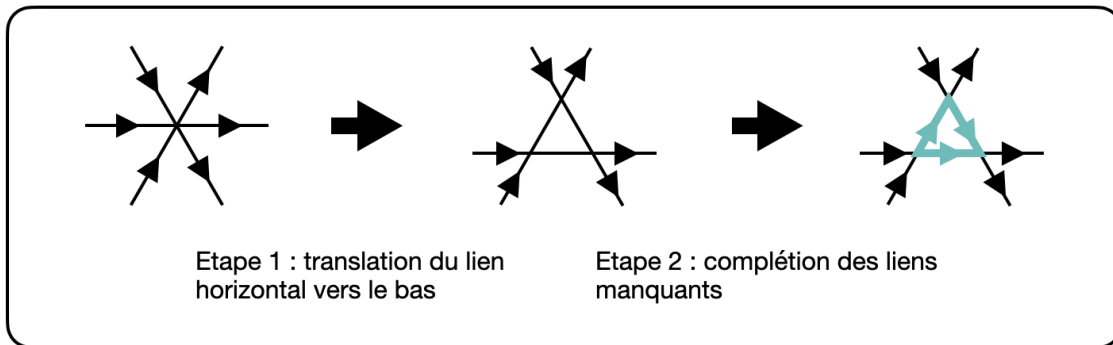
De la même façon que pour le réseau carré, nous obtenons un écoulement ordonné en plaçant un séparateur anisotrope au centre des jonctions, voir 4.21a. Seuls les sommets de type 3 porteurs d'une charge topologique -2 sont autorisés. La phase ordonnée du modèle à 20 sommets correspond à un modèle d'Ising antiferromagnétique, cette fois-ci sur réseau nid d'abeille. Le spin est encore une fois la circulation autour des plaquettes triangulaires, voir 4.21b. Nous observons également des murs de domaine entre différents domaines antiferromagnétiques. Ils sont formés par des canaux supportant un écoulement tourbillonnaire et un courant nul, et ne peuvent que percoler d'un bord à l'autre du réseau ou former des boucles. Ils peuvent a priori également former des branches, mais nous ne l'avons pas observé expérimentalement.

Correspondance avec un modèle de boucles

Comme pour le réseau carré, les lignes de courant s'intersectent. Il n'est donc pas possible (comme pour le modèle à 6 sommets) de mesurer directement les corrélations du modèle à 20 sommets correspondant à l'écoulement. Il est nécessaire d'effectuer une correspondance avec un modèle de boucles $O(n)$. Cette correspondance s'effectue en deux étapes (voir chapitre 2 pour une explication détaillée) :

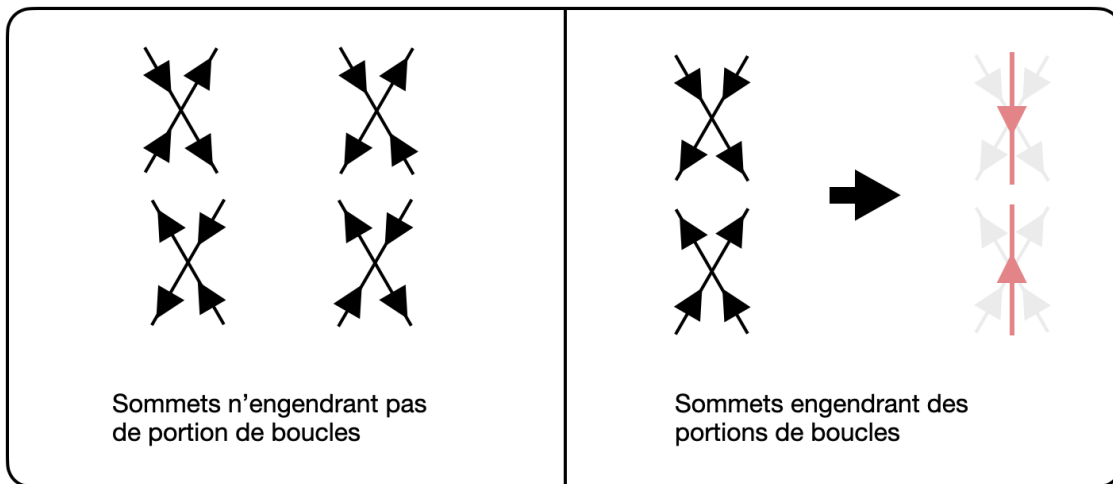
- La première étape consiste en une correspondance entre le modèle à 20 sommets sur réseau triangulaire et le modèle à 6 sommets sur réseau de Kagomé (voir [52] et chapitre 2). Cette correspondance est issue de [43] et décrite en détail dans [78] et le chapitre 2. Nous la schématisons sur la figure 4.20a. En faisant translater la ligne horizontale vers le bas, nous modifions le réseau triangulaire en un réseau de Kagomé, et nous transformons le réseau hexavalent en un réseau tétravalent. Nous pouvons ajouter des flèches sur les liens nouvellement créés d'une unique façon (excepté pour 2 noeuds, voir le chapitre 2).
- La seconde étape consiste à mettre en correspondance le modèle à 6 sommets sur réseau de Kagomé avec un FPL sur réseau hexagonal. Elle a été élaborée par Nienhuis dans [52]. Nous la schématisons sur la figure 4.20b. Pour faire simple, nous attribuons une portion de boucle à 2 sommets sur les 4 possibles. Fig. 4.20b. Notons que certains sommets du modèle à 6 sommets sur réseau de Kagomé n'engendrent pas de portion de boucle. La configuration de boucles obtenues n'est donc pas nécessairement *fully packed*.

(a)



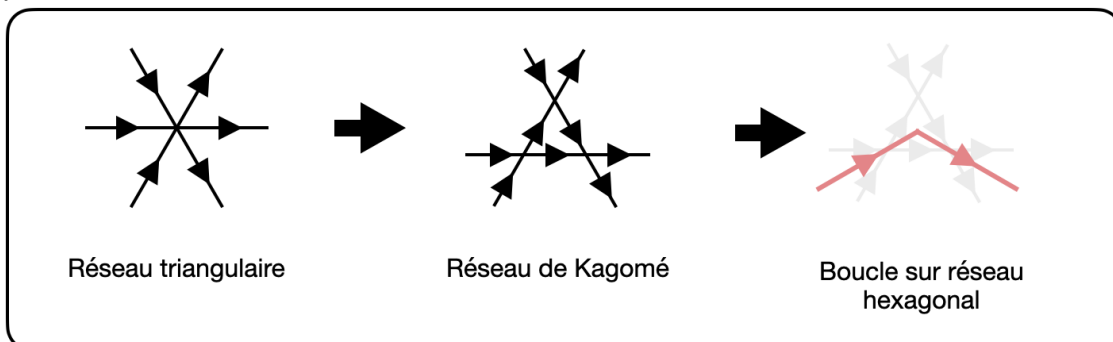
Du réseau triangulaire vers le réseau de Kagomé

(b)



Du modèle à 6 sommets sur réseau de Kagomé vers un modèle de boucles

(c)



Résumé

FIGURE 4.20 – (a) Correspondance entre le modèle à 20 sommets et le modèle à 6 sommets sur réseau de Kagomé. Elle consiste en une translation vers le bas des liens horizontaux, suivie d'une complétion des liens créés. La complétion est bijective pour tous les sommets, exceptés les sommets d'enroulement $\omega = -2$. (b) Correspondance entre le modèle à 6 sommets sur réseau de Kagomé et un modèle de boucles sur réseau hexagonal. Seuls 2 sommets sur les 6 engendrent une portion de boucle. La configuration de boucles n'est pas *fully packed*. (c) Résumé de la correspondance en prenant l'exemple d'un sommet d'enroulement $\omega = -2$.

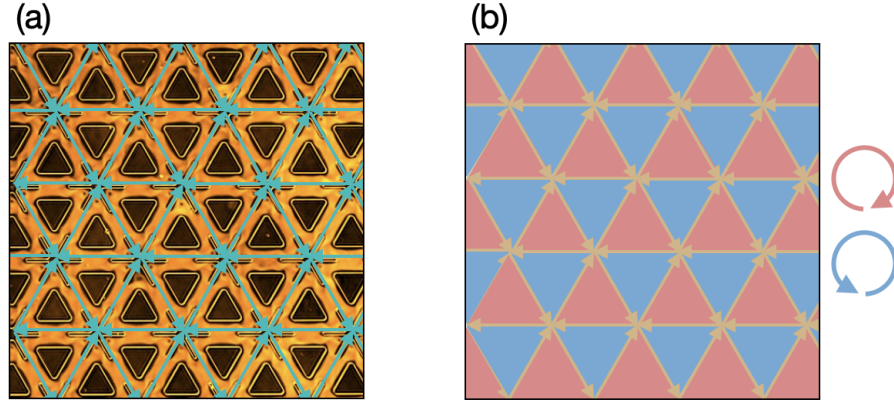


FIGURE 4.21 – **Phase ordonnée du modèle à 20 sommets.** (a) Zoom sur un écoulement dans un réseau triangulaire. Le courant est indiqué par les flèches vertes. (b) Circulation correspondante à l'écoulement de (a). La couleur rouge/bleu indique le signe de la circulation. L'écoulement est représenté par les flèches jaunes. La couleur code pour le signe de la circulation.

Notons que le modèle de boucle obtenus est sur le réseau nid d'abeille, et pas sur le réseau triangulaire initial. Nous nous attendons tout-de-même à ce que les observables mesurées sur le modèle de boucles correspondant soient représentatives des écoulements expérimentaux. En effet, la correspondance entre le modèle à 20 sommets sur réseau triangulaire et le modèle à 6 sommets sur réseau de Kagomé est bijective, et la correspondance entre le modèle à 6 sommets et le modèle de boucles est analytique. Ainsi la criticalité du modèle de boucles, et donc sa géométrie fractale sont des indicateurs de la criticalité du modèle à 20 sommets sous-jacent, et donc *in fine* des propriétés de transport de l'écoulement actif.

Géométrie fractale de la phase désordonnée

Nous montrons sur la Fig. 4.22a une configuration du modèle à 20 sommets correspondant à un écoulement désordonné. L'écoulement possède tous les types de sommets, avec une prépondérance de sommets de type 1, sans charge topologique au centre de la jonction. Nous n'avons pas représenté de configuration de boucles pour l'écoulement ordonné, car elle ne génère pas de boucle. Elle ne possède que des sommets de type 3, qui sont en correspondance avec trois arêtes vides du réseau en nid d'abeille (voir le chapitre 2 pour une explication détaillée).

Nous montrons sur la Fig. 4.22b la configuration du modèle à 6 sommets sur réseau de Kagomé correspondant à la configurations de la Fig. 4.22a. En Fig. 4.22c nous montrons la configuration de boucles correspondante à la Fig. 4.22b. La phase désordonnée génère des boucles, qui présentent un motif imbriqué, semblable à celui obtenu pour les écoulements dans le réseau nid d'abeille de grands rapports d'aspect (voir chapitre 3). Notons que beaucoup de boucles présentent des défauts : cela est dû à la difficulté expérimentale à obtenir un écoulement stationnaire dans un réseau triangulaire : la jonction est en effet très étendue comparé au réseaux trivalents et tétravalents.

Nous pouvons caractériser la géométrie des boucles de la même façon que dans la section précédente. Pour la phase désordonnée, le rayon de giration R_g des boucles évolue algébriquement avec leur longueur L : $R_g \sim L^\nu$, ce qui est synonyme de criticalité. Nous trouvons $\nu \approx 3/4$. La décroissance de la corrélation $C(r)$ est cohérente avec une loi de puissance de la forme $C(r) \sim r^{-2x_2}$ avec $x_2 \approx 4/3$. Nous mesurons également une distribution algébrique de la longueur de boucle de la forme $P(L) \sim L^{-\tau}$, avec $\tau \approx 5/2$. Cela indique, d'une part, la criticalité du modèle

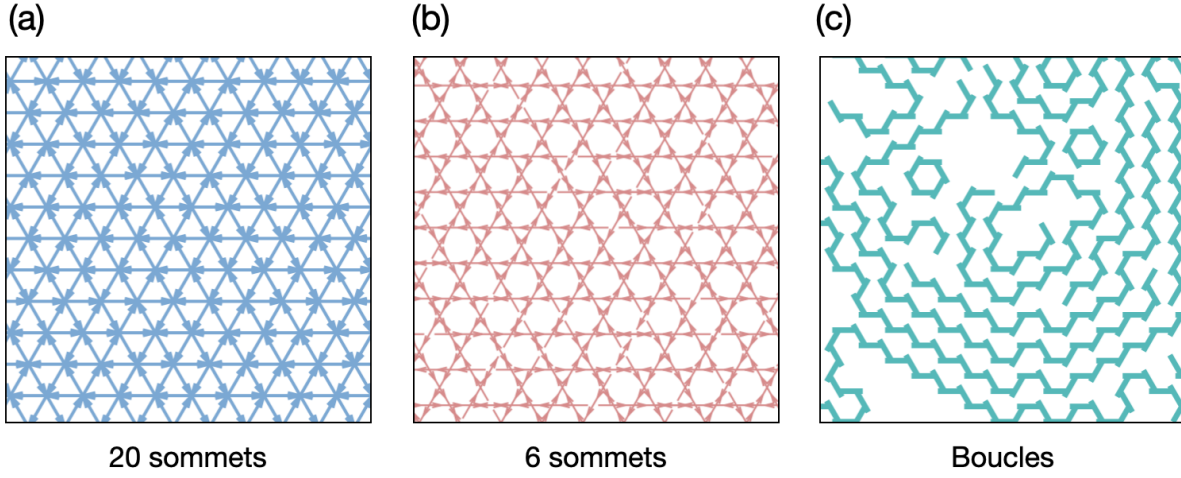


FIGURE 4.22 – (a) Configuration de modèle à 20 sommets correspondante à un écoulement actif. (b) Configuration de modèle à 6 sommets sur réseau de Kagomé correspondant à (a). (c) Configuration de boucles correspondante à (b).

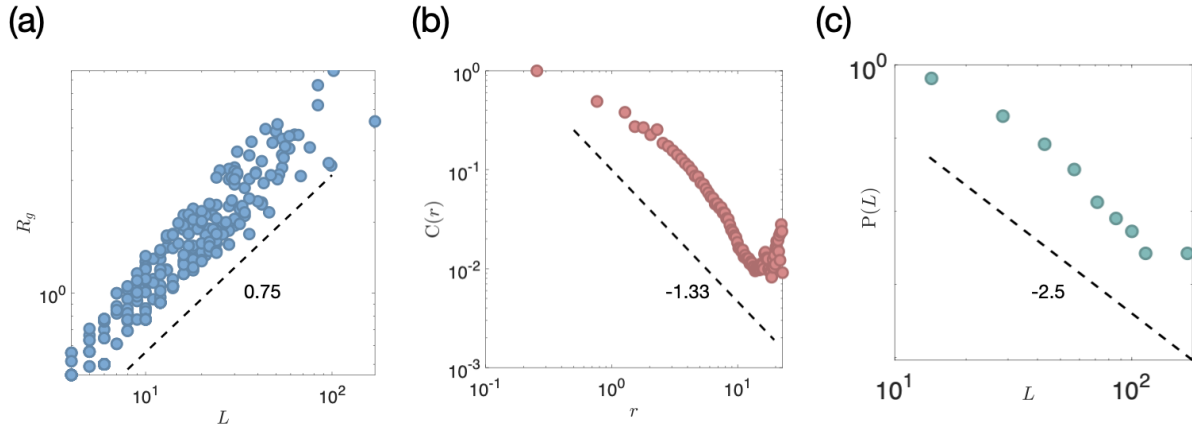


FIGURE 4.23 – (a) Évolution du rayon de giration R_g en fonction de la longueur des boucles L . Nous constatons une loi d'échelle de la forme $R_g \sim L^\nu$. (b) Évolution de la fonction de corrélation $C(r)$. Nous constatons une évolution cohérente avec une loi de puissance de la forme $C(r) \sim r^{-2x_2}$. La fonction présente un écrantage exponentiel causé par la taille finie du système et les défauts des boucles. (c) Distribution de longueur des boucles $P(L)$. La distribution mesurée est cohérente avec une décroissance algébrique d'exposant $\tau \approx 2$.

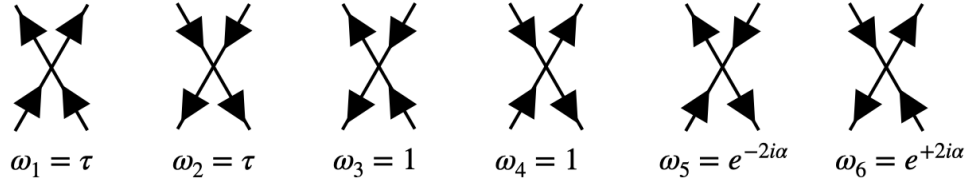


FIGURE 4.24 – Sommets du modèle à 6 sommets et poids statistiques correspondants. τ est un nombre réel. Figure adaptée de [52].

à 20 sommets sous-jacent, donc l'absence de longueur caractéristique intrinsèque à l'écoulement. D'autre part, ces exposants sont ceux d'une marche aléatoire auto-évitante, et correspondent aux prédictions théoriques de Nienhuis [52]. Il avait montré que le modèle à 6 sommets sur réseau de Kagomé dont les poids statistiques des noeuds sont $\omega_1 - \omega_6$ (voir Fig 4.24) est équivalent à un modèle de boucles $O(n)$ avec $n = 2 \cos(6\alpha)$. Dans le cas limite où les noeuds 5 – 6 sont absents, nous avons $\alpha = \pi/4$ et donc $n = 0$. Dans nos expériences, la proportion de sommets 5 – 6 n'est pas nulle mais égale à 0.13, ce qui nous laisse penser que la présence de ces sommets est trop faible pour modifier la classe d'universalité du système.

4.4.2 Pavage carré adouci

Les arêtes du pavage du plan "carré adouci" forment un réseau de valence 5. Le réseau hydraulique correspondant est donc pentavalent, il possède 5 canaux à chaque jonction. Nous avons conçu des réseaux pentavalents possédant une jonction munie d'un séparateur à 5 branches, voir Fig. 4.25a-b. Afin d'étudier l'apparition d'éventuels couplages entre lignes de courant, nous avons également fait varier le rapport d'aspect des réseaux $\epsilon = \ell/w$ (les notations sont identiques au chapitre 3) entre 0.6 et 2.5. A l'instar des réseaux hydrauliques nid d'abeille, trivalents, du chapitre 3, le nombre impair de canaux par jonction frustre géométriquement l'écoulement. Ainsi, nous observons un nombre non négligeable de canaux supportant un courant nul, voir Fig. 4.25d. En effet, la conservation de la masse à un noeud $\sum_i \Phi_{ij} = 0$ impose qu'un nombre impair de Φ_{ij} soient nuls.

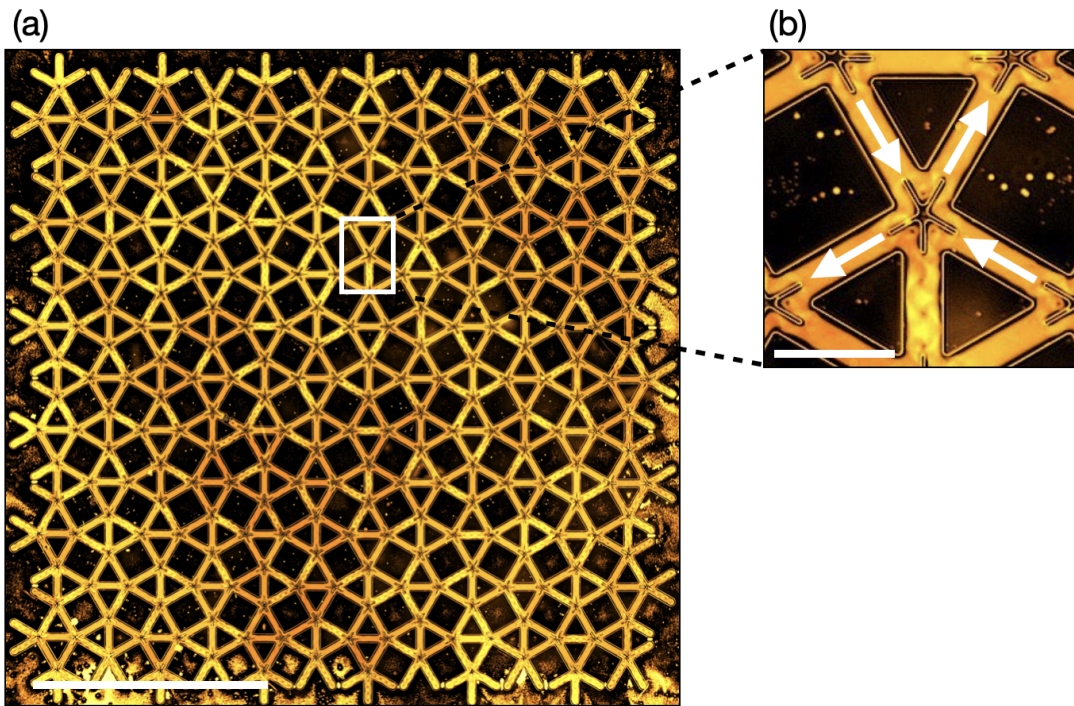


FIGURE 4.25 – (a) Image macroscopique d'un écoulement dans un réseau pentavalent. Le réseau est en forme de pavage "carré adouci". Barre d'échelle : 0.5 cm. (b) Jonction du réseau pentavalent équipée d'un séparateur en forme d'étoile à 5 branches. Barre d'échelle : 200 μm .

Correspondance avec un modèle à 6 sommets sur réseau aléatoire tétravalent

La frustration géométrique implique que l'écoulement peut être interprété encore une fois comme un modèle à six sommets. Cette fois-ci, le réseau sur lequel sont placées les flèches est aléatoire, mais toujours tétravalent. La correspondance est expliquée en Fig. 4.26a-c. Elle consiste à ne garder que les canaux supportant un courant non nul et à effacer les autres (Fig. 4.26b). La seconde étape est de fusionner les flèches entrante et sortante d'un noeud, quand celui-ci n'est relié qu'à deux flèches (Fig. 4.26c). La configuration obtenue est donc celle d'un modèle à 6 sommets, sur un réseau aléatoire. Notons que dans notre cas, chaque réplique d'un écoulement dans le même réseau, et avec les mêmes colloïdes, s'interprète comme un modèle à six sommets, *sur un réseau aléatoire différent*. Le caractère aléatoire du réseau est déterminé par l'apparition des canaux supportant un courant nul.

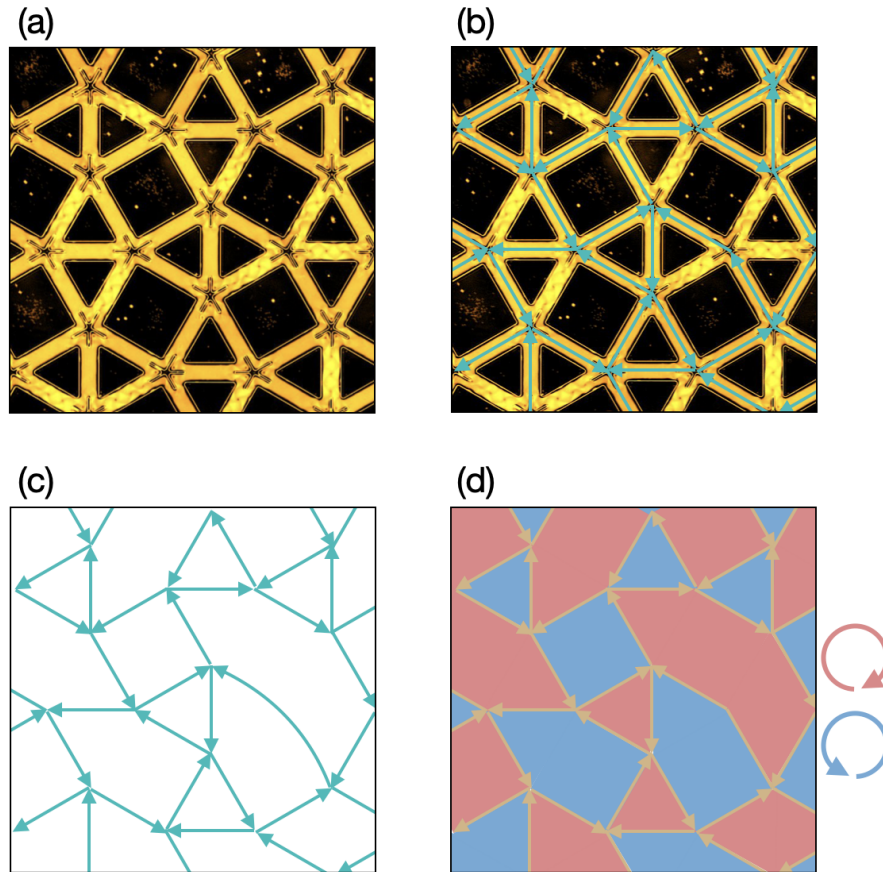


FIGURE 4.26 – (a) Zoom sur un écoulement dans un réseau pentavalent. Plusieurs canaux supportent un écoulement tourbillonnaire de courant nul. (b) Le courant est indiqué par les flèches vertes. Certains canaux supportent un courant nul. (c) L'écoulement est analogue à un modèle à 6 sommets sur un réseau aléatoire tétravalent. (d) Phase ordonnée du modèle à 6 sommets sur réseau aléatoire. L'écoulement est représenté par les flèches jaunes. La couleur rouge/bleu indique le signe de la circulation. Les plaquettes n'ont pas une forme géométrique fixée, mais ne sont en contact qu'avec des plaquettes d'une autre couleur.

Phase ordonnée

Les écoulements actifs émergeant dans le réseau pentavalent sont tous de même nature, peu importe le rapport d'aspect. Il s'agit de la phase antiferroélectrique du modèle à 6 sommets sur réseau aléatoire. Tous les sommets sont de types 5 – 6 (notons que le réseau n'étant plus bipartite, nous ne pouvons plus différencier les noeuds de type 5 des noeuds de type 6). De façon surprenante, la variation du rapport d'aspect des canaux n'induit aucun changement dans les interactions entre les lignes de champ, comme décrit dans le chapitre 3. En effet, la présence du séparateur au centre des noeuds interdit deux arêtes adjacentes de porter une flèche en direction du même sommet (ou au départ du même sommet). En d'autres termes, le séparateur à interdit deux lignes d'écoulement adjacentes de couler dans le même sens, et le rapport d'aspect des canaux n'a aucune incidence sur la morphologie des lignes de courant.

Nous pouvons, comme pour les réseaux carrés et triangulaires, interpréter l'écoulement comme un modèle d'Ising. Le spin est encore fois le signe de la circulation autour des plaquettes. Les plaquettes sont définies par l'ensemble des faces du pavage carré adouci séparées par un canal supportant un courant nul, voir Fig. 4.26d. D'un point de vue plus formel, les spins sont définis sur les noeuds du réseau dual au réseau aléatoire sur lequel vit le modèle à 6 sommets.

Perspectives : correspondance avec un modèle de boucles et écoulement désordonné

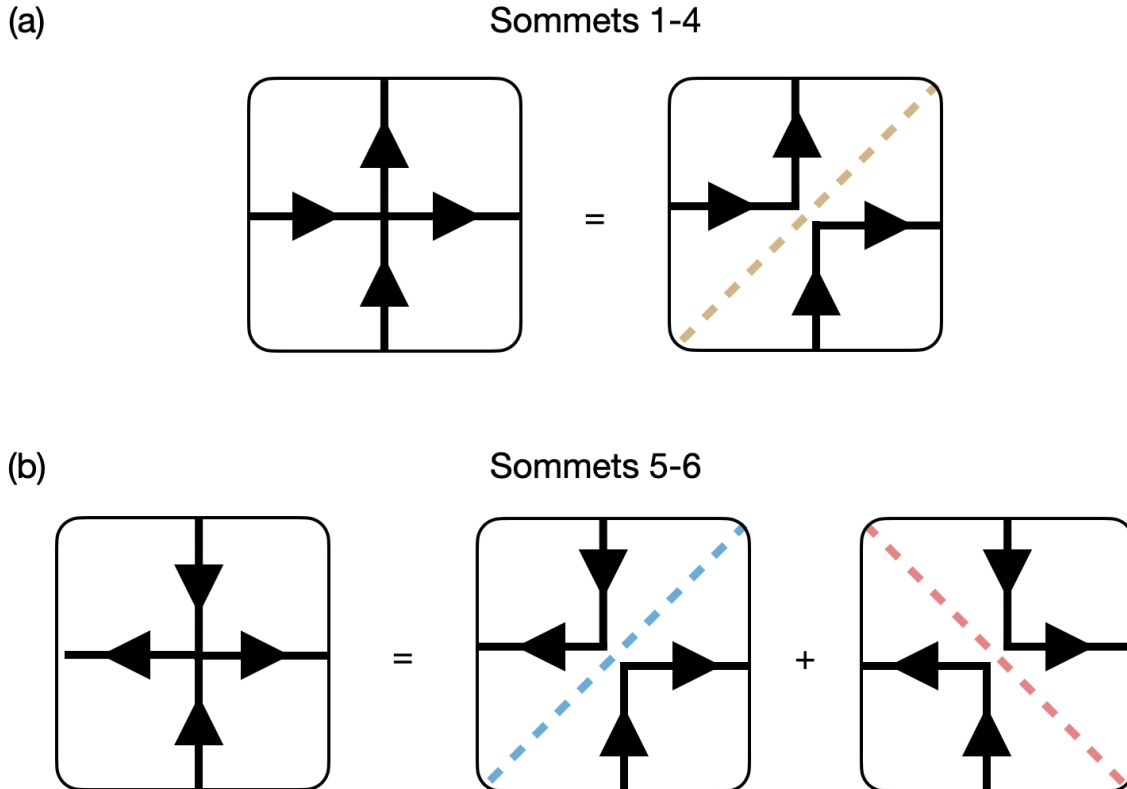


FIGURE 4.27 – Correspondance entre un modèle à 6 sommets sur réseau tétravalent aléatoire et un modèle de boucles. (a) Noeuds de type 1–4 coupés en 2 portions de boucles. La correspondance est unique. (b) Noeuds de type 5 – 6 coupés en 2 portions de boucles. La correspondance n'est pas unique.

Il est possible d'établir une correspondance entre un modèle à 6 sommets et un modèle de boucles. Cette correspondance a été établie indépendamment par Kostov et Zinn-Justin dans [122, 123] en 2000, et leur a permis de résoudre analytiquement le modèle à 6 sommets sur un réseau aléatoire. Elle est légèrement différente de la correspondance avec un FPL² proposée dans [74] et expliquée dans la section précédente. Les noeuds du modèle à 6 sommets sont "coupés en deux" dans une diagonale, de façon à faire émerger deux portions de boucles orientées, voir Fig. 4.27. Il est important de noter que la correspondance entre les configurations 1–4 du modèle à 6 sommets et le modèle de boucle est bijective : il existe une unique façon de couper un sommet en deux de façon à créer deux portions de boucles orientées (voir Fig. 4.27a). A l'inverse, pour les configurations 5–6, la correspondance, n'est pas bijective : il est possible de couper le noeud selon les deux diagonales et d'obtenir deux portions de boucles (voir Fig. 4.27b). Notons que les boucles correspondent ici aux boucles de courant réellement suivies par les colloïdes.

Afin de terminer l'étude de l'hydraulique active dans les réseaux de valence 5, nous pourrions concevoir des réseaux pentavalents munis de jonctions simples, sans séparateurs. Nous nous attendons à observer la même frustration géométrique de l'écoulement, avec l'apparition d'un nombre impair de canaux supportant un courant nul à chaque noeud. Cependant, l'absence de séparateur permettrait l'apparition de sommets de types 1–4, et le système pourrait se trouver dans une phase désordonnée. Il serait ainsi possible, en faisant correspondre l'écoulement mesuré avec un modèle de boucles, de mesurer l'exposant ν du rayon de giration, l'exposant x_2 de la fonction de corrélation de paire, et l'exposant τ de la distribution de longueur des boucles, et ainsi d'établir la criticalité ou non du système. Notons que la correspondance avec un modèle de boucles n'est pas aussi évidente à faire en pratique que pour les réseaux carrés ou triangulaires, à cause de la non-bijectivité de la correspondance induite par les sommets 5–6.

Une fois cette correspondance établie, nous pourrions comparer nos mesures aux prédictions de Kostov dans [122]. Il avait effectivement calculé, en prenant un poids statistique de 1 pour les sommets 1–4, et $\cos(\pi\lambda)$ pour les sommets 5–6 (λ compris entre 0 et 1), que l'exposant ν prend la valeur $\nu = (1 + \lambda)^{-1}$. Nous pouvons également en déduire des relations S4 et S5 $x_2 = 1 - \lambda$ et $\tau = 1 + 2/(1 - \lambda)$.

Conclusion

En conclusion, nous pouvons établir des lois génériques de l'hydraulique des liquides actifs incompressibles, et quantifier les propriétés de transport qui en découlent. Ces lois ne sont pas universelles, et dépendent fortement de la valence du réseau, ainsi que de la géométrie des jonctions. La loi fondamentale de l'hydraulique active est la conservation de la masse. Couplée à l'activité constante et l'incompressibilité du liquide, la conservation de la masse transforme le système en une glace de spins : à chaque jonction du réseau, il doit y avoir autant de canaux *in* que de canaux *out*. C'est ainsi que la valence du réseau rentre en jeu :

- Les réseaux de valence 4 admettent à chaque jonction 2 flèches *in* et 2 *out*. L'hydraulique active correspond à un modèle à 6 sommets.
- Les réseaux de valence 5 sont frustrés par le nombre impair de canaux. Un nombre impair de canaux doit ainsi porter un courant nul à chaque jonction, et les configurations autorisées sont 2 flèches *in* et 2 *out* et 1 courant nul, 1 flèche *in* et 1 *out* et 3 courants nuls, ou 5 courants nuls. L'hydraulique active correspond à un modèle à 6 sommets sur réseau aléatoire.
- Les réseaux de valence 6 admettent à chaque jonction 3 flèches *in* et 3 *out*. L'hydraulique active correspond à un modèle à 20 sommets.

En plus de la valence du réseau, la géométrie de la jonction joue un rôle déterminant dans

la morphologie des lignes de champ. Nous avons conçu un séparateur qui, placé au centre des jonctions, permet de forcer l'apparition d'une charge topologique négative dans l'écoulement, et ainsi de sélectionner uniquement les sommets 5 – 6 du modèles à 6 sommets et les sommets de type 3 du modèle à 20 sommets. Pour les valences 4, 5, 6, cette sélection des sommets plonge l'écoulement dans une phase ordonnée, correspondante à un modèle d'Ising antiferromagnétique. Le réseau sur lequel vit ce modèle d'Ising est le réseau dual au modèle de glace de spins modélisant l'écoulement (carré pour le réseau carré, nid d'abeille pour le réseau triangulaire, et aléatoire pour le réseau pentavalent). Le spin est défini par la circulation autour des plaquettes du réseau dual. Ce modèle d'Ising est non-critique, et ne peut présenter que des corrélations à distance finie. Nous en déduisons que les écoulements présentent des propriétés de transport à distance finie.

A l'inverse, lorsque les jonctions du réseau hydraulique ne sont pas équipées de séparateurs, tous les sommets des modèles de glace de spins sont autorisés, et le système entre dans une phase désordonnée. Nous avons montré que pour les valences 4 et 6 les écoulements possèdent des corrélations algébriques cachées. En particulier, l'écoulement désordonné dans le réseau carré présente les exposants $\nu = 4/7$, $x_2 = 1/4$ et $\tau = 2 + 1/7$ caractéristiques du modèle de boucles $O(1)$. L'écoulement désordonné dans le réseau triangulaire est caractérisé par des exposants $\nu = 3/4$, $x_2 = 2/3$ et $\tau = 2.5$ du modèle $O(n \rightarrow 0)$ (des polymères auto-évitants).

Conclusion et perspectives

5.1 Propriétés géométriques des écoulements actifs dans les réseaux hydrauliques

Les travaux détaillés dans ce manuscrit portent sur les écoulements de liquides actifs dans les réseaux hydrauliques réguliers de valences 3 à 6. Ces écoulements exhibent un état stationnaire où la densité de liquide est constante à l'échelle du réseau entier. Cette densité constante, combinée à l'activité du liquide, contraint fortement le courant dans les canaux. Celui-ci ne peut prendre que 3 valeurs : ± 1 préférentiellement, ou 0. Les courants nuls apparaissent majoritairement dans les réseaux de valences impaires. Ceux-ci frustreront géométriquement la laminarité des écoulements : la conservation de la masse impose la présence d'un nombre impair de courants nuls à chaque jonction du réseau. Sur la base de cette observation, nous avons décrit les écoulements actifs comme un système de spins sur réseau. Le courant est codé par le spin, et la conservation de la masse à chaque jonction par la règle de la glace [43].

Ainsi, pour chacune des valences, nous avons assimilé l'écoulement à un modèle spécifique de spin sur réseau. Nous avons montré que, pour les valences 4 – 6, la géométrie de la jonction joue un rôle crucial sur la géométrie des écoulements. En ajoutant un séparateur au centre des jonctions, nous pouvons forcer le liquide à couler de façon ordonnée, ce qui réduit la longueur de corrélation de l'écoulement et limite sa dégénérescence. À l'inverse, pour les réseaux de valence 3, et de valences 4 – 6 sans modifier la jonction, l'écoulement est désordonné. Il présente des corrélations à longue portée et une forte dégénérescence. Lorsque c'est possible, nous avons mesuré les exposants géométriques des écoulements en utilisant plusieurs correspondances avec des modèles de boucles [52]. Nous avons finalement identifié et expliqué leurs classes d'universalité. Nous résumons ces différents résultats dans les deux tableaux en fin de manuscrit. Le premier tableau est consacré aux écoulements dans les réseaux de valences paires, le second aux réseaux de valences impaires.

5.2 Perspectives

5.2.1 Propriétés de transport et de mélange

Une perspective à court terme serait d'étudier le transport lagrangien dans les réseaux. Expérimentalement, nous envisageons de mesurer la trajectoires de traceurs, par exemple des particules fluorescentes [124]. Les trajectoires individuelles des traceurs seraient ensuite à comparer avec les lignes de courant précédemment mesurées. Parmi les observables décrivant le

transport de matière, la mesure de l'exposant dynamique (ou exposant de croissance) α décrivant l'évolution temporelle du déplacement quadratique moyen $\Delta r^2 \sim t^\alpha$ [107] nous permettra de caractériser les différents régimes de transport dans les réseaux. Nous nous attendons à de fortes variations de α , par exemple entre l'écoulement ordonné dans les réseaux carrés et l'écoulement désordonné. Une autre observable serait le temps de retour d'une particule dans son canal d'origine. Cette statistique est triviale dans le cas des réseaux hexagonaux : puisque les canaux sont de longueur L et que le liquide coule à vitesse constante v_0 , le temps de retour pour une particule en écoulement dans une boucle de longueur N est NL/v_0 . L'étude reste à faire pour généraliser ce calcul à toutes les valences.

Dans un second temps, nous nous proposons de mesurer les propriétés de mélange des réseaux hydrauliques [125–127], pour ensuite les relier aux propriétés géométriques des écoulements discutées dans ce manuscrit. Cette dernière étude nous permettrait d'établir un lien entre, d'une part les propriétés hydrodynamiques des écoulements, et d'autre part leurs propriétés de mécanique statistique, qui, jusqu'ici, étaient deux problèmes distincts.

5.2.2 Perspectives à long terme

A plus long terme, de nombreuses perspectives sont envisageables dans l'étude de l'hydraulique active. Nous les résumons ici sous la forme d'une liste de questions.

Quelles sont les fluctuations de courant et densité autour des états stationnaires ?

Dans ce manuscrit, nous avons montré que, moyennée temporellement, la densité est homogène à l'échelle des réseaux. L'activité constante du liquide nous a permis de toujours assimiler le courant dans les canaux à un spin ne pouvant prendre que 3 valeurs : ± 1 et 0. Nous avons donc négligé toutes les fluctuations temporelles de l'écoulement. L'étude des fluctuations des courants autour de leurs valeurs moyennes est donc une suite directe dans l'étude de l'hydraulique active. Par exemple, il a été montré que les fluctuations dans les systèmes classiques de glaces de spins se comportent selon les lois de l'électromagnétisme en dimension 2 [86], voir Fig. 5.1a. Les spins y jouent le rôle des dipôles magnétiques de normes constantes. La règle de la glace correspond à l'équation de Maxwell-Gauss $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Les corrélations courant-courant (ou spin-spin) dans les écoulements hydrauliques actifs sont inconnues à ce jour. A la différence des glaces de spins, le courant varie en effet continûment autour de sa valeur moyenne.

Quel est l'impact sur les écoulements des conditions aux bords des réseaux ?

Aux chapitres 3 et 4, nous avons vu que les écoulements désordonnés sont corrélés à grande distance. En d'autres termes, une modification locale de l'écoulement se répercute à l'échelle du réseau entier. En particulier, les conditions aux limites ont, en principe, une influence cruciale sur les écoulements. Dans les travaux décrits dans ce manuscrit, nous nous sommes restreints à un ensemble de conditions aux bords très simples, contraignant le moins possible l'écoulement. L'étude systématique des conditions aux bords constitue donc une suite directe à ces travaux. De nombreux travaux sur les systèmes de glaces de spins nous apportent des résultats préliminaires l'effet des conditions aux limites en hydraulique active. Par exemple, la phase désordonnée du modèle à 6 sommets est extrêmement sensible aux conditions aux bords. Quand les conditions aux bords sont de type "murs de domaine" (tous les spins perpendiculaires à un bord ont la même direction), une partie du système est gelée et ne peut être que dans un seul état. La limite entre la partie gelée et le volume du système, où les spins peuvent fluctuer, est appelée *courbe arctique*, voir Fig. 5.1b. Nous nous attendons à un comportement similaire pour l'hydraulique active : ce genre de conditions nous permettrait notamment de contrôler la dégénérescence des

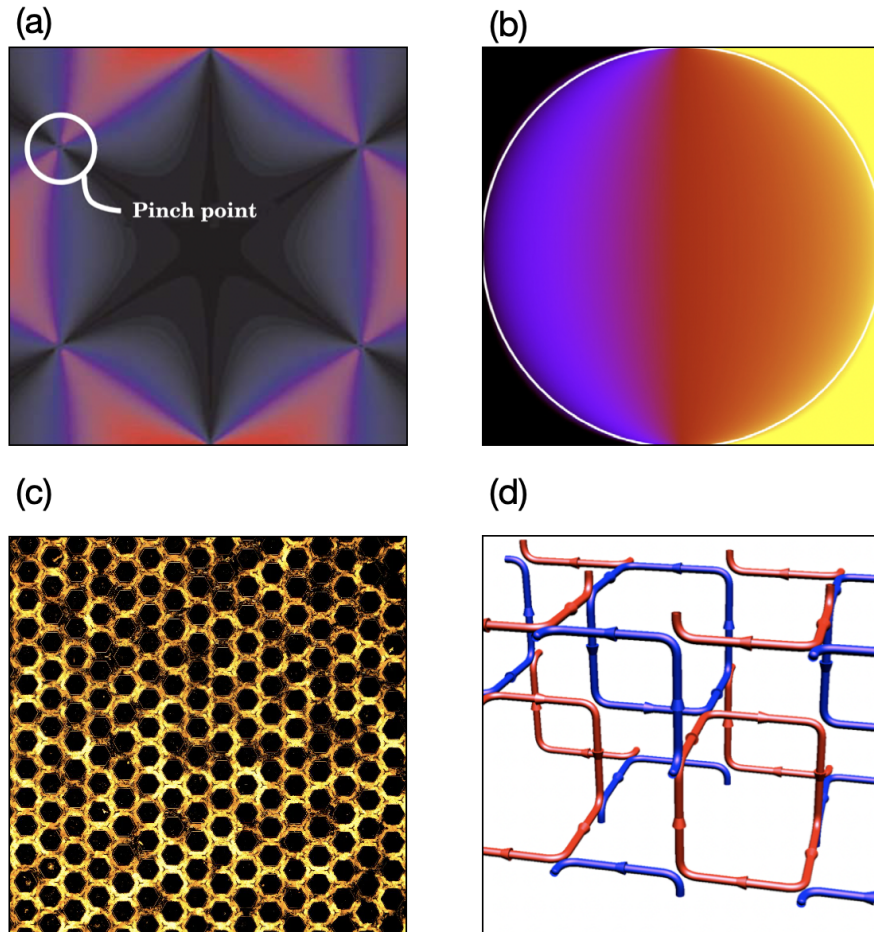


FIGURE 5.1 – **(a)** Pinch points d'une glace de spin du réseau pyrochlore. Dans l'espace de Fourier, ces corrélations prennent une forme caractéristique de noeud papillon appelée "pinch point". Figure issue de [86]. **(b)** Courbe arctique du modèle à 6 sommets avec conditions aux bords "murs de domaine". À l'extérieur de la courbe arctique symbolisée par le cercle blanc, le système est gelé et n'a accès qu'à un seul état. **(c)** Régime transitoire de l'écoulement du liquide colloïdal dans un réseau hexagonal. Il est caractérisé par de fortes fluctuations de densité et de courant. **(d)** Modèle de boucles en dimension 3.

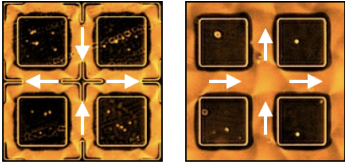
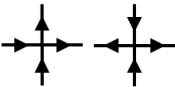
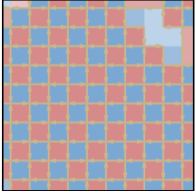
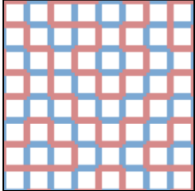
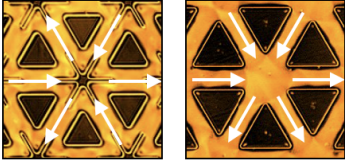
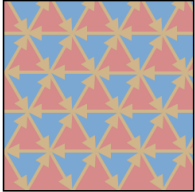
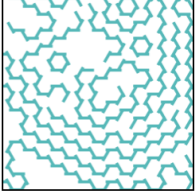
écoulements désordonnés, voire de l'annuler pour des réseaux suffisamment petits.

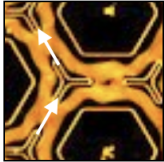
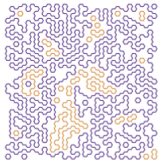
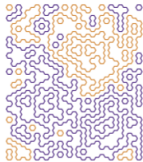
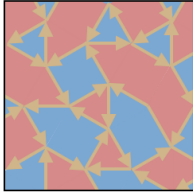
Comment le liquide s'auto-organise pendant son régime transitoire ?

Tous les travaux décrits dans ce manuscrit sont centrés sur l'état stationnaire de l'hydraulique active. Cependant, lors du régime transitoire, de très fortes fluctuations de densité et de courant sont observées, voir Fig. 5.1c. Elles mènent à l'état stationnaire de densité homogène décrit au chapitre 3, et restent incomprises à ce jour.

Le formalisme des modèles de spins et de boucles est-il robuste pour décrire l'hydraulique active en trois dimensions ?

L'extension de l'hydraulique active à la troisième dimension est la perspective majeure parmi celles présentées dans cette section, mais également la plus ambitieuses à réaliser. En effet, il n'existe à ce jour aucun système de matière active modèle tridimensionnel. De plus, la conception d'un réseau hydraulique tridimensionnel permettant de mesurer l'écoulement est également un challenge expérimental. Du point de vue théorique, la littérature des systèmes de spins et de boucles en dimension 3 est bien moins étendue qu'en dimension 2. Il existe cependant des travaux théoriques calculant certains exposants critiques de boucles tridimensionnelles [128], voir Fig. 5.1d.

Hydraulique dans les réseaux de valences paires			
Valence	Conservation de la masse	Phases de l'écoulement	
		Avec séparateurs	Sans séparateur
4	Valence paire : pas de frustration 2 canaux <i>in</i> - 2 canaux <i>out</i>  Modèle sous jacent : modèle à 6 sommets sur réseau carré 	Phase ordonnée non critique  Correspondance Ising antiferromagnétique sur réseau carré	Phase désordonnée critique  Correspondance modèle de boucles $O(1)$ $\nu = 4/7$ $x_2 = 1/4$ $\tau = 2 + 1/7$
6	Valence paire : pas de frustration 3 canaux <i>in</i> - 3 canaux <i>out</i>  Modèle sous jacent : modèle à 20 sommets 	Phase ordonnée non critique  Correspondance Ising antiferromagnétique sur réseau hexagonal	Phase désordonnée critique  Correspondance modèle de boucles $O(n \rightarrow 0)$ $\nu = 3/4$ $x_2 = 2/3$ $\tau = 5/2$

Hydraulique dans les réseaux de valences impaires		
Valence	Conservation de la masse	Phases de l'écoulement
3	Valence impaire : frustration géométrique 2 configurations autorisées : — 1 canal <i>in</i> - 1 canal <i>out</i> - 1 canal sans courant net — 3 canaux sans courant net  Modèle sous-jacent : 3-coloriage + interactions sur réseau hexagonal	$\epsilon < \epsilon^*$  Correspondance modèle de boucles $O(1)$ $\nu = 4/7$ $x_2 = 1/4$ $\tau = 2 + 1/7$
		$\epsilon > \epsilon^*$  <i>A priori</i> non-critique.
5	Valence impaire : frustration géométrique 3 configurations autorisées : — 2 canaux <i>in</i> - 2 canaux <i>out</i> - 1 canal sans courant net — 1 canal <i>in</i> - 1 canal <i>out</i> - 3 canaux sans courant net — 5 canaux sans courant net  Modèle sous-jacent : modèle à 6 sommets sur réseau aléatoire 	Avec séparateur
		Phase ordonnée non critique  Correspondance Ising antiferromagnétique sur réseau aléatoire

Bibliographie

- [1] S. Rost, “Irrigation in early states : New directions,” *Irrigation in Early States*, pp. 1–452, 2022.
- [2] G. Hagen, “Ueber die bewegung des wassers in engen cylindrischen röhren,” *Annalen der Physik*, vol. 122, no. 3, pp. 423–442, 1839.
- [3] J. L. Poiseuille, *Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres*. Imprimerie Royale, 1844.
- [4] H. Darcy, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon : exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d’eau*, vol. 1. Victor dalmont, 1856.
- [5] M. C. Marchetti, J.-F. Joanny, S. Ramaswamy, T. B. Liverpool, J. Prost, M. Rao, and R. A. Simha, “Hydrodynamics of soft active matter,” *Reviews of modern physics*, vol. 85, no. 3, p. 1143, 2013.
- [6] T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen, and O. Shochet, “Novel type of phase transition in a system of self-driven particles,” *Physical review letters*, vol. 75, no. 6, p. 1226, 1995.
- [7] J. Toner and Y. Tu, “Long-range order in a two-dimensional dynamical xy model : how birds fly together,” *Physical review letters*, vol. 75, no. 23, p. 4326, 1995.
- [8] H. Chaté, F. Ginelli, G. Grégoire, and F. Raynaud, “Collective motion of self-propelled particles interacting without cohesion,” *Physical Review E*, vol. 77, no. 4, p. 046113, 2008.
- [9] H. Chaté, F. Ginelli, G. Grégoire, F. Peruani, and F. Raynaud, “Modeling collective motion : variations on the vicsek model,” *The European Physical Journal B*, vol. 64, pp. 451–456, 2008.
- [10] A. P. Solon, H. Chaté, and J. Tailleur, “From phase to microphase separation in flocking models : The essential role of nonequilibrium fluctuations,” *Physical review letters*, vol. 114, no. 6, p. 068101, 2015.
- [11] N. D. Mermin and H. Wagner, “Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic heisenberg models,” *Physical Review Letters*, vol. 17, no. 22, p. 1133, 1966.
- [12] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, “Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems,” in *Basic Notions Of Condensed Matter Physics*, pp. 493–515, CRC Press, 2018.
- [13] J. M. Kosterlitz, “The critical properties of the two-dimensional xy model,” *Journal of Physics C : Solid State Physics*, vol. 7, no. 6, p. 1046, 1974.

- [14] M. Ballerini, N. Cabibbo, R. Candelier, A. Cavagna, E. Cisbani, I. Giardina, V. Lecomte, A. Orlandi, G. Parisi, A. Procaccini, *et al.*, “Interaction ruling animal collective behavior depends on topological rather than metric distance : Evidence from a field study,” *Proceedings of the national academy of sciences*, vol. 105, no. 4, pp. 1232–1237, 2008.
- [15] A. Attanasi, A. Cavagna, L. Del Castello, I. Giardina, S. Melillo, L. Parisi, O. Pohl, B. Rossaro, E. Shen, E. Silvestri, *et al.*, “Collective behaviour without collective order in wild swarms of midges,” *PLoS computational biology*, vol. 10, no. 7, p. e1003697, 2014.
- [16] N. Bain and D. Bartolo, “Dynamic response and hydrodynamics of polarized crowds,” *Science*, vol. 363, no. 6422, pp. 46–49, 2019.
- [17] T. Sanchez, D. T. Chen, S. J. DeCamp, M. Heymann, and Z. Dogic, “Spontaneous motion in hierarchically assembled active matter,” *Nature*, vol. 491, no. 7424, pp. 431–434, 2012.
- [18] L. Giomi, M. J. Bowick, X. Ma, and M. C. Marchetti, “Defect annihilation and proliferation in active nematics,” *Physical review letters*, vol. 110, no. 22, p. 228101, 2013.
- [19] C. Dombrowski, L. Cisneros, S. Chatkaew, R. E. Goldstein, and J. O. Kessler, “Self-concentration and large-scale coherence in bacterial dynamics,” *Physical review letters*, vol. 93, no. 9, p. 098103, 2004.
- [20] M. Poujade, E. Grasland-Mongrain, A. Hertzog, J. Jouanneau, P. Chavrier, B. Ladoux, A. Buguin, and P. Silberzan, “Collective migration of an epithelial monolayer in response to a model wound,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 104, no. 41, pp. 15988–15993, 2007.
- [21] V. Schaller, C. Weber, C. Semmrich, E. Frey, and A. R. Bausch, “Polar patterns of driven filaments,” *Nature*, vol. 467, no. 7311, pp. 73–77, 2010.
- [22] A. Bricard, J.-B. Caussin, N. Desreumaux, O. Dauchot, and D. Bartolo, “Emergence of macroscopic directed motion in populations of motile colloids,” *Nature*, vol. 503, no. 7474, pp. 95–98, 2013.
- [23] G. Quincke, “Ueber rotationen im constanten electrischen felde,” *Annalen der Physik*, vol. 295, no. 11, pp. 417–486, 1896.
- [24] P. Illien, R. Golestanian, and A. Sen, “‘fuelled’ motion : phoretic motility and collective behaviour of active colloids,” *Chemical Society Reviews*, vol. 46, no. 18, pp. 5508–5518, 2017.
- [25] A. I. Campbell, S. J. Ebbens, P. Illien, and R. Golestanian, “Experimental observation of flow fields around active janus spheres,” *Nature communications*, vol. 10, no. 1, p. 3952, 2019.
- [26] J. Yan, M. Han, J. Zhang, C. Xu, E. Luijten, and S. Granick, “Reconfiguring active particles by electrostatic imbalance,” *Nature materials*, vol. 15, no. 10, pp. 1095–1099, 2016.
- [27] J. Deseigne, O. Dauchot, and H. Chaté, “Collective motion of vibrated polar disks,” *Physical review letters*, vol. 105, no. 9, p. 098001, 2010.
- [28] F. G. Woodhouse, A. Forrow, J. B. Fawcett, and J. Dunkel, “Stochastic cycle selection in active flow networks,” *Proceedings of the national academy of sciences*, vol. 113, no. 29, pp. 8200–8205, 2016.
- [29] R. Voituriez, J.-F. Joanny, and J. Prost, “Spontaneous flow transition in active polar gels,” *Europhysics Letters*, vol. 70, no. 3, p. 404, 2005.
- [30] K. Kruse, J.-F. Joanny, F. Jülicher, J. Prost, and K. Sekimoto, “Asters, vortices, and rotating spirals in active gels of polar filaments,” *Physical review letters*, vol. 92, no. 7, p. 078101, 2004.

-
- [31] H. Wioland, F. G. Woodhouse, J. Dunkel, J. O. Kessler, and R. E. Goldstein, “Confinement stabilizes a bacterial suspension into a spiral vortex,” *Physical review letters*, vol. 110, no. 26, p. 268102, 2013.
 - [32] G. Duclos, C. Erlenkämper, J.-F. Joanny, and P. Silberzan, “Topological defects in confined populations of spindle-shaped cells,” *Nature Physics*, vol. 13, no. 1, pp. 58–62, 2017.
 - [33] A. Opathalage, M. M. Norton, M. P. Juniper, B. Langeslay, S. A. Aghvami, S. Fraden, and Z. Dogic, “Self-organized dynamics and the transition to turbulence of confined active nematics,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 116, no. 11, pp. 4788–4797, 2019.
 - [34] A. Chardac, L. A. Hoffmann, Y. Poupard, L. Giomi, and D. Bartolo, “Topology-driven ordering of flocking matter,” *Physical Review X*, vol. 11, no. 3, p. 031069, 2021.
 - [35] H. Wioland, F. G. Woodhouse, J. Dunkel, and R. E. Goldstein, “Ferromagnetic and anti-ferromagnetic order in bacterial vortex lattices,” *Nature physics*, vol. 12, no. 4, pp. 341–345, 2016.
 - [36] K.-T. Wu, J. B. Hishamunda, D. T. Chen, S. J. DeCamp, Y.-W. Chang, A. Fernández-Nieves, S. Fraden, and Z. Dogic, “Transition from turbulent to coherent flows in confined three-dimensional active fluids,” *Science*, vol. 355, no. 6331, p. eaal1979, 2017.
 - [37] A. Morin and D. Bartolo, “Flowing active liquids in a pipe : Hysteretic response of polar flocks to external fields,” *Physical Review X*, vol. 8, no. 2, p. 021037, 2018.
 - [38] D. Nishiguchi, I. S. Aranson, A. Snezhko, and A. Sokolov, “Engineering bacterial vortex lattice via direct laser lithography,” *Nature communications*, vol. 9, no. 1, p. 4486, 2018.
 - [39] H. Reinken, D. Nishiguchi, S. Heidenreich, A. Sokolov, M. Bär, S. H. Klapp, and I. S. Aranson, “Organizing bacterial vortex lattices by periodic obstacle arrays,” *Communications Physics*, vol. 3, no. 1, p. 76, 2020.
 - [40] J. Hardoüin, J. Laurent, T. Lopez-Leon, J. Ignés-Mullol, and F. Sagués, “Active microfluidic transport in two-dimensional handlebodies,” *Soft Matter*, vol. 16, no. 40, pp. 9230–9241, 2020.
 - [41] N. Figueroa-Morales, M. M. Genkin, A. Sokolov, and I. S. Aranson, “Non-symmetric pinning of topological defects in living liquid crystals,” *Communications Physics*, vol. 5, no. 1, p. 301, 2022.
 - [42] C. D. Schimming, C. Reichhardt, and C. Reichhardt, “Vortex lattices in active nematics with periodic obstacle arrays,” *Physical Review Letters*, vol. 132, no. 1, p. 018301, 2024.
 - [43] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*. Elsevier, 2016.
 - [44] S. T. Bramwell and M. J. Gingras, “Spin ice state in frustrated magnetic pyrochlore materials,” *Science*, vol. 294, no. 5546, pp. 1495–1501, 2001.
 - [45] G. Kuperberg, “Another proof of the alternative-sign matrix conjecture,” *International Mathematics Research Notices*, vol. 1996, no. 3, pp. 139–150, 1996.
 - [46] D. Zeilberger, “Proof of the alternating sign matrix conjecture,” *the electronic journal of combinatorics*, pp. R13–R13, 1996.
 - [47] P. L. Ferrari and H. Spohn, “Domino tilings and the six-vertex model at its free-fermion point,” *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 39, no. 33, p. 10297, 2006.
 - [48] P. Minnhagen, “The two-dimensional coulomb gas, vortex unbinding, and superfluid-superconducting films,” *Reviews of modern physics*, vol. 59, no. 4, p. 1001, 1987.
 - [49] J. M. Kim and J. Kosterlitz, “Growth in a restricted solid-on-solid model,” *Physical review letters*, vol. 62, no. 19, p. 2289, 1989.

- [50] R. Peled and Y. Spinka, “Lectures on the spin and loop $o(n)$ models,” in *Sojourns in Probability Theory and Statistical Physics-I : Spin Glasses and Statistical Mechanics, A Festschrift for Charles M. Newman*, pp. 246–320, Springer, 2019.
- [51] E. Hauge and P. Hemmer, “2-dimensional coulomb gas,” *Physica Norvegica*, vol. 5, no. 3-4, p. 209, 1971.
- [52] B. Nienhuis, “Exact critical point and critical exponents of $o(n)$ models in two dimensions,” *Physical Review Letters*, vol. 49, no. 15, p. 1062, 1982.
- [53] B. Nienhuis, “Two-dimensional critical phenomena and the coulomb gas, review in the series phase transitions and critical phenomena, eds. c. domb, m. green and jl lebowitz. vol. 11,” 1987.
- [54] H. Knops, “Exact relation between the solid-on-solid model and the xy model,” *Physical Review Letters*, vol. 39, no. 12, p. 766, 1977.
- [55] H. Saleur and B. Duplantier, “Exact determination of the percolation hull exponent in two dimensions,” *Physical review letters*, vol. 58, no. 22, p. 2325, 1987.
- [56] L. P. Kadanoff and A. C. Brown, “Correlation functions on the critical lines of the baxter and ashkin-teller models,” *Annals of Physics*, vol. 121, no. 1-2, pp. 318–342, 1979.
- [57] H. Knops, “Renormalization connection between the eight-vertex model and the gaussian model,” *Annals of Physics*, vol. 128, no. 2, pp. 448–462, 1980.
- [58] A. Bricard, *Dynamique collective de colloïdes auto-propulsés*. PhD thesis, Paris 7, 2014.
- [59] N. Desreumaux, *Emulsions microfluidiques et rouleurs colloïdaux : effets collectifs en matière molle forcée hors-équilibre*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2015.
- [60] A. Morin, *Colloidal flocks in challenging environments*. PhD thesis, Lyon, 2018.
- [61] D. Geyer, *Du mouvement au blocage collectif dans des assemblées de rouleurs colloïdaux : hydrodynamique et solidification des liquides polaires actifs*. PhD thesis, Université de Lyon, 2019.
- [62] A. Chardac, *Matière active polaire : ordre, désordre et défauts topologiques*. PhD thesis, Université de Lyon, 2021.
- [63] J.-B. Caussin, *Dynamique collective de particules auto-propulsées : ondes, vortex, essaim, tressage*. PhD thesis, Lyon, École normale supérieure, 2015.
- [64] A. Jákli, B. Senyuk, G. Liao, and O. D. Lavrentovich, “Colloidal micromotor in smectic a liquid crystal driven by dc electric field,” *Soft Matter*, vol. 4, no. 12, pp. 2471–2474, 2008.
- [65] J. Toner and Y. Tu, “Flocks, herds, and schools : A quantitative theory of flocking,” *Physical review E*, vol. 58, no. 4, p. 4828, 1998.
- [66] D. Geyer, A. Morin, and D. Bartolo, “Sounds and hydrodynamics of polar active fluids,” *Nature materials*, vol. 17, no. 9, pp. 789–793, 2018.
- [67] R. Supekar, B. Song, A. Hastewell, G. P. Choi, A. Mietke, and J. Dunkel, “Learning hydrodynamic equations for active matter from particle simulations and experiments,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 120, no. 7, p. e2206994120, 2023.
- [68] R. Reyes Garza, N. Kyriakopoulos, Z. M. Cenev, C. Rigoni, and J. V. Timonen, “Magnetic quincke rollers with tunable single-particle dynamics and collective states,” *Science Advances*, vol. 9, no. 26, p. eadh2522, 2023.
- [69] P. J. Lu, P. A. Sims, H. Oki, J. B. Macarthur, and D. A. Weitz, “Target-locking acquisition with real-time confocal (tarc) microscopy,” *Optics express*, vol. 15, no. 14, pp. 8702–8712, 2007.

-
- [70] D. Blair and E. Dufresne, “The matlab particle tracking code repository,” *Particle-tracking code available at <http://physics.georgetown.edu/matlab>*, 2008.
 - [71] J. C. Crocker and D. G. Grier, “Methods of digital video microscopy for colloidal studies,” *Journal of colloid and interface science*, vol. 179, no. 1, pp. 298–310, 1996.
 - [72] J. Kondev and C. L. Henley, “Geometrical exponents of contour loops on random gaussian surfaces,” *Physical Review Letters*, vol. 74, pp. 4580–4583, jun 1995.
 - [73] J. Kondev, J. de Gier, and B. Nienhuis, “Operator spectrum and exact exponents of the fully packed loop model,” *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 29, pp. 6489–6504, oct 1996.
 - [74] J. L. Jacobsen and J. Kondev, “Field theory of compact polymers on the square lattice,” *Nuclear Physics B*, vol. 532, no. 3, pp. 635–688, 1998.
 - [75] L. Jaubert, M. Haque, and R. Moessner, “Analysis of a fully packed loop model arising in a magnetic coulomb phase,” *Physical review letters*, vol. 107, no. 17, p. 177202, 2011.
 - [76] S. B. Kelland, “Twenty-vertex model on a triangular lattice,” *Australian Journal of Physics*, vol. 27, no. 6, pp. 813–830, 1974.
 - [77] P. Di Francesco, “Twenty vertex model and domino tilings of the aztec triangle,” *arXiv preprint arXiv :2102.02920*, 2021.
 - [78] B. Debin, P. Di Francesco, and E. Guitter, “Arctic curves of the twenty-vertex model with domain wall boundaries,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 179, pp. 33–89, 2020.
 - [79] A. Logg, K.-A. Mardal, and G. Wells, *Automated solution of differential equations by the finite element method : The FEniCS book*, vol. 84. Springer Science & Business Media, 2012.
 - [80] I. Babuška, “The finite element method with penalty,” *Mathematics of computation*, vol. 27, no. 122, pp. 221–228, 1973.
 - [81] J.-P. Hansen and I. R. McDonald, *Theory of simple liquids : with applications to soft matter*. Academic press, 2013.
 - [82] A. Doostmohammadi, J. Ignés-Mullol, J. M. Yeomans, and F. Sagués, “Active nematics,” *Nature communications*, vol. 9, no. 1, p. 3246, 2018.
 - [83] H. Wioland, F. G. Woodhouse, J. Dunkel, and R. E. Goldstein, “Ferromagnetic and anti-ferromagnetic order in bacterial vortex lattices,” *Nature physics*, vol. 12, no. 4, pp. 341–345, 2016.
 - [84] F. G. Woodhouse and J. Dunkel, “Active matter logic for autonomous microfluidics,” *Nature Communications*, vol. 8, p. 15169, apr 2017.
 - [85] F. G. Woodhouse, J. B. Fawcett, and J. Dunkel, “Information transmission and signal permutation in active flow networks,” *New Journal of Physics*, vol. 20, no. 3, p. 035003, 2018.
 - [86] R. Moessner and A. P. Ramirez, “Geometrical frustration,” *Physics Today*, vol. 59, no. 2, pp. 24–29, 2006.
 - [87] C. Nisoli, R. Moessner, and P. Schiffer, “Colloquium : Artificial spin ice : Designing and imaging magnetic frustration,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 85, no. 4, p. 1473, 2013.
 - [88] A. Ortiz-Ambriz, C. Nisoli, C. Reichhardt, C. J. Reichhardt, and P. Tierno, “Colloquium : Ice rule and emergent frustration in particle ice and beyond,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 91, no. 4, p. 041003, 2019.
 - [89] M. Udagawa and L. Jaubert, eds., *Spin Ice*. Springer International Publishing, 2021.

- [90] D. Geyer, D. Martin, J. Tailleur, and D. Bartolo, “Freezing a flock : Motility-induced phase separation in polar active liquids,” *Physical Review X*, vol. 9, no. 3, p. 031043, 2019.
- [91] H. Duminil-Copin, R. Peled, W. Samotij, and Y. Spinka, “Exponential decay of loop lengths in the loop o (n) model with large n,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 349, pp. 777–817, 2017.
- [92] H. Duminil-Copin, A. Glazman, R. Peled, and Y. Spinka, “Macroscopic loops in the loop o (n) model at nienhuis’ critical point.,” *Journal of the European Mathematical Society (EMS Publishing)*, vol. 23, no. 1, 2021.
- [93] W. Kager and B. Nienhuis, “A guide to stochastic löwner evolution and its applications,” *Journal of statistical physics*, vol. 115, pp. 1149–1229, 2004.
- [94] J. Cardy, “Sle for theoretical physicists,” *Annals of Physics*, vol. 318, no. 1, pp. 81–118, 2005.
- [95] P. C. Verpoort, J. Simmons, and C. Castelnovo, “Color-dependent interactions in the three coloring model,” *Physical Review B*, vol. 98, no. 2, p. 024403, 2018.
- [96] R. Baxter, “Colorings of a hexagonal lattice,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 11, no. 3, pp. 784–789, 1970.
- [97] J. Kondev and C. L. Henley, “Conformal charge and exact exponents in the $n=2$ fully packed loop model,” *Physical review letters*, vol. 73, no. 20, p. 2786, 1994.
- [98] S. Rost, *OIS 13. Irrigation in Early States : New Directions*. Chicago : The Oriental Institute, 2022.
- [99] J. Zhang, E. Luijten, B. A. Grzybowski, and S. Granick, “Active colloids with collective mobility status and research opportunities,” *Chemical Society Reviews*, vol. 46, no. 18, pp. 5551–5569, 2017.
- [100] D. Saintillan, “Rheology of active fluids,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 50, pp. 563–592, 2018.
- [101] A. Forrow, F. G. Woodhouse, and J. Dunkel, “Mode selection in compressible active flow networks,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 119, p. 028102, Jul 2017.
- [102] G. T. Barkema and M. E. J. Newman, “Monte carlo simulation of ice models,” *Physical Review E*, vol. 57, pp. 1155–1166, jan 1998.
- [103] H. W. J. Blöte and B. Nienhuis, “Fully packed loop model on the honeycomb lattice,” *Physical Review Letters*, vol. 72, pp. 1372–1375, feb 1994.
- [104] M. Hansell, *Animal architecture*. Oxford University Press, 2005.
- [105] A. Perna and G. Theraulaz, “When social behaviour is moulded in clay : on growth and form of social insect nests,” *Journal of Experimental Biology*, vol. 220, no. 1, pp. 83–91, 2017.
- [106] A. Martínez-Calvo, C. Trenado-Yuste, and S. S. Datta, “Active transport in complex environments,” in *Out-of-equilibrium Soft Matter : Active Fluids* (C. Kurzthaler, L. Gentile, and H. A. Stone, eds.), Royal Society of Chemistry, 2023. [arXiv:2108.07011](https://arxiv.org/abs/2108.07011).
- [107] A. Morin, D. L. Cardozo, V. Chikkadi, and D. Bartolo, “Diffusion, subdiffusion, and localization of active colloids in random post lattices,” *Physical Review E*, vol. 96, no. 4, p. 042611, 2017.
- [108] W. Thielicke and E. Stamhuis, “Pivlab—towards user-friendly, affordable and accurate digital particle image velocimetry in matlab,” *Journal of open research software*, vol. 2, no. 1, 2014.

-
- [109] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, *Introduction to algorithms*. MIT press, 2022.
 - [110] M. Blume, V. J. Emery, and R. B. Griffiths, “Ising model for the λ transition and phase separation in he^3 - he^4 mixtures,” *Physical Review A*, vol. 4, pp. 1071–1077, sep 1971.
 - [111] W. Krauth, *Statistical Mechanics*. Oxford University Press, USA, 2006.
 - [112] M. Doi and S. F. Edwards, *The theory of polymer dynamics*, vol. 73. Oxford University Press, 1988.
 - [113] H. Duminil-Copin, A. Glazman, R. Peled, and Y. Spinka, “Macroscopic loops in the loop $\text{o}(\text{n})$ model at nienhuis' critical point,” *Journal of the European Mathematical Society*, vol. 23, pp. 315–347, oct 2020.
 - [114] H. W. J. Blöte and M. P. Nightingale, “Antiferromagnetic triangular ising model : Critical behavior of the ground state,” *Physical Review B*, vol. 47, pp. 15046–15059, jun 1993.
 - [115] S. Smirnov, “Critical percolation in the plane : conformal invariance, cardy's formula, scaling limits,” *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, vol. 333, pp. 239–244, aug 2001.
 - [116] A. Kassel and D. B. Wilson, “Active spanning trees and schramm-loewner evolution,” *Physical Review E*, vol. 93, p. 062121, jun 2016.
 - [117] H. Blöte and B. Nienhuis, “Critical behaviour and conformal anomaly of the $\text{o}(\text{n})$ model on the square lattice,” *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 22, no. 9, p. 1415, 1989.
 - [118] M. Batchelor, H. Blöte, B. Nienhuis, and C. Yung, “Critical behaviour of the fully packed loop model on the square lattice,” *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 29, no. 16, p. L399, 1996.
 - [119] R. Kenyon, J. Miller, S. Sheffield, and D. B. Wilson, “Six-vertex model and schramm-loewner evolution,” *Physical Review E*, vol. 95, no. 5, p. 052146, 2017.
 - [120] R. Baxter, “F model on a triangular lattice,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 10, no. 7, pp. 1211–1216, 1969.
 - [121] P. Di Francesco and E. Guitter, “Twenty-vertex model with domain wall boundaries and domino tilings,” *arXiv preprint arXiv :1905.12387*, 2019.
 - [122] I. K. Kostov, “Exact solution of the six-vertex model on a random lattice,” *Nuclear Physics B*, vol. 575, no. 3, pp. 513–534, 2000.
 - [123] P. Zinn-Justin, “The six-vertex model on random lattices,” *Europhysics Letters*, vol. 50, no. 1, p. 15, 2000.
 - [124] S. Maity and A. Morin, “Spontaneous demixing of binary colloidal flocks,” *Physical Review Letters*, vol. 131, no. 17, p. 178304, 2023.
 - [125] J.-L. Thiffeault, “Using multiscale norms to quantify mixing and transport,” *Nonlinearity*, vol. 25, no. 2, p. R1, 2012.
 - [126] T. Le Borgne, M. Dentz, and E. Villermaux, “Stretching, coalescence, and mixing in porous media,” *Physical review letters*, vol. 110, no. 20, p. 204501, 2013.
 - [127] C. Mauger, R. Volk, N. Machicoane, M. Bourgoïn, C. Cottin-Bizonne, C. Ybert, and F. Raynal, “Diffusiophoresis at the macroscale,” *Physical Review Fluids*, vol. 1, no. 3, p. 034001, 2016.
 - [128] A. Nahum, J. Chalker, P. Serna, M. Ortuno, and A. Somoza, “3d loop models and the cp^{n-1} sigma model,” *Physical review letters*, vol. 107, no. 11, p. 110601, 2011.

Abstract : The aim of this thesis is to determine the fundamental laws that describe the flow of active fluids confined in hydraulic networks. In the first part, I detail the experimental methods and the model system I have established. Then, by focusing on regular hydraulic networks of odd valence, I establish a direct analogy between active hydraulics and frustrated magnetism. In particular, I demonstrate why the spontaneous flows of active liquids are generally degenerate, characterized by streamlines with self-similar geometries. Through a combination of experimental and numerical studies, I link the macroscopic random geometry of the flows to the microscopic shape of the channels constituting the hydraulic network, thus proposing a minimal theoretical framework to predict and explain the structural diversity of the flows. In the third part, I extend the laws of active hydraulics to a broader class of networks. I also demonstrate how flow patterns are related to spin ice configurations and, more generally, to vertex models. These quantitative correspondences allow for a robust prediction of the flow geometry, establishing links between previously distinct areas of physics. In conclusion, I summarize my results and propose a research program aimed at improving our understanding of the flow of active matter in hydraulic networks.

Résumé : L'objectif de ce travail de thèse est de déterminer les lois fondamentales qui décrivent les écoulements de fluides actifs confinés dans des réseaux hydrauliques. Dans la première partie, je détaille les méthodes expérimentales et le système modèle que j'ai instauré. Ensuite, en me focalisant sur les réseaux hydrauliques réguliers de valence impaire, j'établis une analogie directe entre l'hydraulique active et le magnétisme frustré. Je démontre notamment pourquoi les écoulements spontanés des liquides actifs sont généralement dégénérés, caractérisés par des lignes de courant aux géométries auto-similaires. Par une combinaison d'études expérimentales et numériques, je lie la géométrie aléatoire macroscopique des écoulements à la forme microscopique des canaux constituant le réseau hydraulique, proposant ainsi un cadre théorique minimal pour prédire et expliquer la diversité structurale des écoulements. Dans la troisième partie, j'étends les lois de l'hydraulique active à une classe de réseaux plus étendus. Je démontre également comment les motifs d'écoulement sont liés aux conformations de glaces de spins et, de manière plus générale, aux modèles de vertex. Ces correspondances quantitatives permettent une prédiction solide de la géométrie des écoulements, établissant des liens entre des domaines de la physique jusqu'alors distincts. En conclusion, je résume mes résultats et propose un programme de recherche visant à parfaire notre compréhension des écoulements de la matière active dans les réseaux hydrauliques.