



**HAL**  
open science

# Réduction de modèles thermiques non-linéaires par méthode modale appliquée à la modélisation de composants électroniques complexes.

Fatme Mustapha

► **To cite this version:**

Fatme Mustapha. Réduction de modèles thermiques non-linéaires par méthode modale appliquée à la modélisation de composants électroniques complexes.. Physique mathématique [math-ph]. Université Paris-Saclay, 2024. Français. NNT : 2024UPAST095 . tel-04723372

**HAL Id: tel-04723372**

**<https://theses.hal.science/tel-04723372v1>**

Submitted on 7 Oct 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Réduction de modèles thermiques non-linéaires  
par méthode modale appliquée à la  
modélisation de composants électroniques  
complexes.

Reduction of nonlinear thermal models using the modal method applied to the  
modeling of complex electronic components.

**Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay**

École doctorale n°579 sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et  
géosciences (SMEMaG)

Spécialité de doctorat : Energétique

Graduate school : Sciences de l'ingénierie et des systèmes

Référent : Université d'Évry Val d'Essonne

Thèse préparée à l'unité de recherche LMEE (Université Paris-Saclay, Univ Evry), sous la  
direction de **Olivier QUEMENER**, Professeur, le co-encadrement de **Frédéric JOLY**,  
Maître de conférence.

**Thèse présentée et soutenue à Paris-Saclay, le 18 septembre 2024, par**

**Fatme MUSTAPHA**

**Composition du Jury**

Membres du jury avec voix délibérative

**Béregère PODVIN**

Directeur de recherche, Université Paris Saclay Présidente & Examinatrice

**Thomas PIERRE**

Professeur, Université Bretagne Sud Rapporteur & Examineur

**Benjamin REMY**

Professeur, Université de Lorraine Rapporteur & Examineur

**Nicolas KERUZORÉ**

Ingénieur de recherche, Thales Global Services Examineur



**Titre :** Réduction de modèles thermiques non-linéaires par méthode modale appliquée à la modélisation de composants électroniques complexes.

**Mots clés :** Non-linéarité, Réduction du modèle, Réduction modale, micro-puce

**Résumé :** La miniaturisation des composants électroniques s'accompagne d'une augmentation de la densité de puissance thermique dissipée : la thermique est devenue un critère limitant lors de la conception de carte électroniques. L'émergence de nouvelles technologies plus complexes nécessite de réévaluer les méthodes traditionnelles de modélisation thermique de l'électronique. A ce titre, le groupe Thales Group et l'équipe Thermique et Énergie du Laboratoire de Mécanique et d'Énergétique d'Evry collaborent afin d'évaluer une méthode de réduction modale. Les méthodes modales consistent à rechercher la solution sous la forme d'une somme pondérée de champs élémentaires, ces derniers étant appelés modes. Ces modes sont calculés en résolvant numériquement un problème aux valeurs propres. Lorsqu'un faible nombre de modes suffit à reconstruire correctement le champ de température, alors ces méthodes réduisent efficacement le problème posé et les temps calcul associés. Toutefois, la plupart des méthodes de réduction se concentrent sur les modèles linéaires, alors que la micropuce, qui constitue la partie active et essentielle du composant élec-

tronique, est composée de matériaux dont la conductivité diminue fortement avec la température, entraînant une hausse notable de la température maximale. L'intégration de cette non-linéarité nécessite de recalculer la matrice de température et de conductivité dans l'espace physique, puis d'évaluer son évolution dans l'espace modal à chaque itération. Ces opérations diminuent considérablement l'efficacité du modèle réduit en termes de temps de calcul. L'objectif de cette thèse est donc de proposer une solution permettant de traiter efficacement les problèmes non-linéaires avec des modèles réduits, tout en respectant la complexité géométrique et fonctionnelle. Cela permet de simuler différentes configurations de refroidissement pour un même composant, en tenant compte des multiples combinaisons d'activation nécessitant de nombreux calculs supplémentaires. Parallèlement à ces travaux théoriques, un travail d'ingénierie logicielle est mené afin d'assurer le transfert technologique du laboratoire vers l'industrie, en particulier la connexion entre la suite logicielle utilisée par Thales et le code de calcul de recherche développé par le LMEE.

**Title :** Reduction of non-linear thermal models by modal reduction method applied to the modeling of complex electronic components.

**Keywords :** Non-linearity, Reduced model, Modal reduction, Microchip

**Abstract :** The miniaturization of electronic components is accompanied by an augmentation in the density of dissipated thermal power : Thermal science has become a limiting criterion during the design of electronic boards. The emergence of new and more complex technologies requires a re-evaluation of traditional methods of electronics thermal modeling. As such, Thales group team and Thermal and Energy team of the Laboratory of Mechanics and Energetics of Évry have been collaborating in order to evaluate a modal reduction method. The modal methods consist of finding the solution in the form of a weighted sum of elementary fields called modes. These modes are calculated by numerically solving a problem with the eigenvalues. When a small number of modes is enough to reconstruct correctly the temperature field, then these methods reduce effectively the problem posed and the associated computation times. However, most reduction methods focus on linear models, whereas the microchip, which forms the active and essential part of the electronic component, is made of materials whose conductivity decreases significantly with temperature, leading to a notable increase in the maximum temperature. Incorporating this non-linearity requires recalculating the temperature and conductivity matrix in the physical space and then assessing its evolution in the modal space at each iteration. These operations significantly reduce the efficiency of the reduced model in terms of computational time. Therefore, the goal of this thesis is to propose a solution that efficiently addresses nonlinear problems using reduced models, while maintaining the geometric and functional complexity. This approach allows the simulation of different cooling configurations for the same component, considering multiple activation combinations that require numerous additional calculations. In parallel to this theoretical work, a software engineering work was carried out in order to ensure the technological transfer from the laboratory to the industry, in particular the connection between the software suite used by Thales and the research code developed by the LMEE.

# Table des matières

Introduction générale	1
<b>1 Importance et complexité des études thermiques pour les composants électroniques</b>	<b>3</b>
1.1 L'analyse thermique des composants électroniques : un enjeu crucial pour Thales	3
1.2 La révolution de la miniaturisation	4
1.3 Une complexité croissante des géométries	8
1.4 Une grande diversité de produits	10
1.4.1 Types de boîtiers miniaturisés en électronique	10
1.4.2 Les composants électroniques	13
1.5 Une multiplicité des scénarios de refroidissement	15
1.6 Dépendance des propriétés de certains matériaux avec la température	17
1.6.1 Analyse de la conductivité thermique $\kappa(T)$	17
1.6.2 Analyse de la capacité thermique volumique $c(T)$ .	20
1.6.3 Matériaux utilisés dans le domaine de l'électronique	22
1.7 Conclusion	26
<b>2 Les modèles thermiques pour l'électronique</b>	<b>27</b>
2.1 Position du problème	27
2.2 Les modèles numériques	28
2.3 Les modèles de résistances	29
2.3.1 Le modèle nodal	29
2.3.2 Modèles CTM et DCTM	32
2.4 Méthode des quadripôles	34
2.5 Méthode de réduction modale	35
2.5.1 Principe	35
2.5.2 Les différentes techniques pour obtenir les modes	37
2.5.3 Prise en compte de la variation de la conductivité avec la température	40

2.6	Conclusion . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Adaptation de la méthode AROMM à la résolution de problèmes non-linéaires</b>	<b>44</b>
3.1	Calcul d'une base modale réduite amalgamée . . . . .	44
3.1.1	Calcul d'une base complète dans l'espace de Hilbert $H^1$ . . . . .	44
3.2	Réduction de la base . . . . .	52
3.2.1	Troncature temporelle . . . . .	52
3.2.2	Amalgame . . . . .	53
3.3	Formulation du problème thermique sous forme modale réduite . . . . .	58
3.3.1	Formulation variationnelle . . . . .	58
3.3.2	Formulation matricielle discrétisée . . . . .	59
3.4	Adaptation de la méthode aux non-linéarités . . . . .	60
3.4.1	Formulation modale pour une loi quadratique . . . . .	60
3.4.2	Simplification du terme quadratique . . . . .	63
3.5	Conclusion . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Application numérique : Puce activée par quatre sources de chaleur</b>	<b>66</b>
4.1	Correspondance entre environnements logiciels distincts : ANSYS et SAMBA . . . . .	66
4.2	Présentation du modèle . . . . .	68
4.3	Évaluation des erreurs . . . . .	69
4.3.1	Influence de la non-linéarité . . . . .	70
4.4	Construction du modèle réduit modal . . . . .	74
4.4.1	Troncature temporelle . . . . .	74
4.4.2	Réduction par amalgame . . . . .	76
4.5	Résultats de la simulation modale réduite . . . . .	79
4.5.1	Modèle réduit . . . . .	79
4.5.2	Influence de la modélisation de la conductivité . . . . .	80
4.5.3	Influence de l'ordre du modèle réduit . . . . .	82
4.5.4	Scénarios JEDEC . . . . .	84
4.5.5	Évolution temporelle des sources . . . . .	88
4.6	Conclusion . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Intégration de la micro-puce dans un boîtier QFN16</b>	<b>91</b>
5.1	Présentation du problème . . . . .	91
5.2	Simulation éléments finis . . . . .	92
5.3	Construction du modèle réduit . . . . .	96

5.3.1	Troncature temporelle . . . . .	97
5.3.2	Amalgame . . . . .	106
5.4	Résultats de la simulation modale réduite . . . . .	107
5.5	Conclusion . . . . .	111
<b>6</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>112</b>
6.1	Conclusions . . . . .	112
6.2	Perspectives . . . . .	113



# Table des figures

1.1	Les tendances actuelles en matière d'électronique grand public . . . . .	5
1.2	La caméra OV6948 d'Omnivision, mesurant 0,575 mm x 0,575 mm x 0,232 mm, est conçue pour des applications médicales et offre une capture de 30 images couleur par seconde à 40 000 pixels de résolution, tout en supportant des températures de -20°C à 70°C . . . . .	5
1.3	Evolution des ordinateurs au fil du temps . . . . .	6
1.4	Rupture mécanique d'un connecteur dû à la fatigue thermique . . . . .	7
1.5	Rupture de contact causé par un stress thermo-mécanique . . . . .	8
1.6	Géométrie du BGA 208 (Ball Grid Array (matrice de billes)) (gauche) et section transversale partielle du BGA208 (droite) . . . . .	9
1.7	Vue éclatée des différentes couches du substrat du BGA208 . . . . .	9
1.8	Maillage de piste en cuivre d'un BGA208 (600k nœuds) . . . . .	10
1.9	Exemple d'une carte HDI (160 x 100 x 1.6 mm) possédant 1675 composants et 20000 points de connexion soit une densité supérieure à 5 composants/cm <sup>2</sup> et plus de 780 connections/cm <sup>3</sup> . . . . .	11
1.10	Modèle 3-D (de gauche à droite) du (Quad Flat no Leads) QFN16, QFN32, QFN48 et QFN64. . . . .	11
1.11	Vue détaillée 3-D (gauche) et topologie interne (droite) du MLP25 (Micro Lead-frame Package) . . . . .	12
1.12	Schéma d'une résistance . . . . .	14
1.13	Vue 3-D d'une inductance . . . . .	14
1.14	Spécifications thermiques des composants électroniques ISL8023 et ISL8024, indiquant la résistance thermique, les plages de température de fonctionnement et de stockage, et le profil de refusion sans plomb. . . . .	14
1.15	Exemple d'un même problème physique sous différentes conditions aux limites. . . . .	15
1.16	Variation de la conductivité thermique des matériaux solides avec la température. Échelle Log/Log. . . . .	18

1.17	Variation de la conductivité thermique des matériaux conducteurs aux températures courantes (entre 230 K et 580 K). . . . .	19
1.18	Conductivité thermique des matériaux utilisés dans le domaine de l'électronique. La température de référence est ici égale à 300 K. . . . .	21
1.19	Variation avec la température de la capacité thermique des matériaux à l'état solide. Échelle Log/Log. . . . .	23
1.20	Capacité thermique normalisée des matériaux utilisé dans le domaine de l'électronique. La température de référence est ici égale à 400K. . . . .	24
2.1	Exemple de domaine $\Omega$ pour l'équation de la chaleur . . . . .	28
2.2	Exemple de réseau nodal pour un composant dans un boîtier DFN8 . . . . .	30
2.3	Exemples de réseaux nodaux pour un même composant : (a) modèle stationnaire (sans inertie) issu d'une analyse physique par volumes finis; (b) modèle dynamique (l'inertie est représentée par une capacité sur le nœud interne $T_J$ ) issu d'une analyse physique par volumes finis; (c) modèle dynamique qui prend en compte la conduction entre les faces : la détermination des résistances thermique entre les faces est délicate car elle fait intervenir des phénomènes tridimensionnels; (d) modèle dynamique dont les résistances thermiques et les capacités doivent être identifiées (par exemple à l'aide d'un algorithme génétique) : on s'éloigne d'une interprétation physique directe des résistances et des capacités, en particulier la résistance qui relie les nœuds "top" ( $T_T$ ) et "bottom" ( $T_B$ ) directement sans passer par le nœud central ne respecte pas les lois du transfert de chaleur par conduction thermique (diffusion). De même une surface n'a théoriquement pas de capacité thermique. . . . .	31
2.4	Surfaces "inner" et "outer" des faces inférieure et supérieure . . . . .	34
2.5	Illustration de la méthode des quadripôles thermiques pour un élément de matériau cubique avec les grandeurs de température et de flux de chaleur à l'entrée ( $\theta_e, \Phi_e$ ) et à la sortie ( $\theta_s, \Phi_s$ ). La matrice de transmission thermique $[A \ B; C \ D]$ caractérise les relations thermiques à travers le matériau. . . . .	34
3.1	Comparaison des bases de branche et de Dirichlet-Steklov . . . . .	47
3.2	Evolution du coefficient de localisation $N_i$ des différents modes (triés par ordre décroissant des constantes de temps . . . . .	49
3.3	Géométrie quelconque bi-dimensionnelle discrétisée. Les nœuds de domaine sont en bleu et le nœuds de surface en rouge . . . . .	51
3.4	Représentation des matrices de couplage qui interviennent dans le terme quadratique . . . . .	63

4.1	Exemple de maillage mixte (à gauche) et les différents types d'éléments rencontrés en éléments finis (a) tétraèdre (b) pyramide, (c) prisme, (d) hexaèdre	67
4.2	Extrait d'un fichier de sortie généré par ANSYS. Le numéro de ligne est à gauche.	67
4.3	Représentation du modèle numérique . . . . .	68
4.4	Évolution de la conductivité thermique en fonction de la température . . . . .	71
4.5	Champ de température pour 4 sources de chaleur activées obtenu avec la méthode des éléments finis . . . . .	73
4.6	Champ de conductivité obtenu par la méthode des éléments finis . . . . .	73
4.7	Reconstruction d'un signal donné (noté Référence) par série de Fourier avec respectivement 2 modes et 4 modes . . . . .	76
4.8	Les deux premiers modes amalgamés de Dirichlet (vue de dessous). Les sources sont représentées en rouge . . . . .	78
4.9	Évolution temporelle de la température maximale pour le modèle de référence et deux modèles réduits (haut). Évolution temporelle de l'erreur sur la température maximale pour deux modèles réduits (bas). . . . .	83
4.10	Les différentes erreurs obtenues pour les 20 scénarios JEDEC pour les différentes activations de sources. . . . .	86
4.11	Comparaison de la variation de la température - différence entre le modèle réduit et le modèle éléments finis . . . . .	87
4.12	Comparaison de la variation de la conductivité - différence entre le modèle réduit et le modèle éléments finis . . . . .	87
4.13	Résultats obtenus lors d'une évolution temporelle des sources . . . . .	89
5.1	Représentation d'un boîtier QFN16 et de sa topologie interne . . . . .	91
5.2	Coupe schématique du QFN16 . . . . .	93
5.3	Représentation du modèle numérique du QFN16 de l'intérieur . . . . .	94
5.4	Représentation du modèle numérique du QFN16 de l'extérieur . . . . .	94
5.5	Champ de température pour quatre sources de chaleur activées obtenu avec la méthode des éléments finis, vue depuis le dessus du QFN16. Coupe partielle. . .	96
5.6	Champ de température sur les frontières pour 4 sources de chaleur activées obtenu avec la méthode des éléments finis, vue depuis le dessus du QFN16. . . .	96
5.7	Champ de température pour 4 sources de chaleur activées obtenu avec la méthode des éléments finis, vue depuis le dessous du QFN16. Coupe partielle. . . .	96
5.8	Champ de température sur les frontières pour 4 sources de chaleur activées obtenu avec la méthode des éléments finis, vue depuis le dessous du QFN16. . . .	96

5.9	Isovaleurs du mode de Dirichlet n°2 . . . . .	97
5.10	Isovaleurs du mode de Dirichlet n°3 . . . . .	97
5.11	Isovaleurs du mode de Steklov n°4 . . . . .	98
5.12	Isovaleurs du mode de Steklov n°40 . . . . .	98
5.13	Représentation des modes propres en fonction de leur constante de temps pour un matériau homogène . . . . .	100
5.14	Étude d'une configuration simplifiée proche d'un QFN16, constituée de deux matériaux . . . . .	101
5.15	Représentation des modes propres en fonction de leur constante de temps pour une géométrie à 2 matériaux de rapport de diffusivité $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1000$ . . . . .	102
5.16	Evolution des constantes de temps pour différents rapports de diffusivité $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ . . . . .	103
5.17	Représentation d'un mode hybride résultat d'un amalgame numérique entre deux modes caractérisés par une même constante de temps. Calcul obtenu pour un rapport de diffusivité $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 10$ . . . . .	104
5.18	Géométrie 3D simplifiée pour l'étude des modes de Steklov ( $\kappa_1 = 380 W.m^{-1}K^{-1}$ , et $\kappa_2 = 0,66 W.m^{-1}K^{-1}$ ). . . . .	105
5.19	Évolution des constantes de temps pour un problème 3D bi-matériaux . . . . .	106
5.20	Résultat du modèle réduit $\tilde{N} = 50$ à partir de la base complète pour différents scénarios de simulation JEDEC (tableau 4.9) . . . . .	110

# Liste des tableaux

1.1	Informations sur divers microprocesseurs Intel . . . . .	7
1.2	Présentation de quelques boîtiers utilisés couramment . . . . .	12
1.3	Exemples des composants électroniques . . . . .	13
1.4	Scénarios de l'ensemble des configurations selon la norme JEDEC . . . . .	16
1.5	Caractéristiques de différents matériaux utilisés dans le domaine de l'électronique : conductivité thermique $\kappa$ , masse volumique $\rho$ , et capacité thermique spécifique $C_p$ . . . . .	25
4.1	Impact de la non-linéarité sur la distribution de température . . . . .	72
4.2	Présentation des différentes bases tronquées testée, et temps de calcul associé . . . . .	74
4.3	Erreurs de projection des différentes bases tronquées . . . . .	75
4.4	Présentation des dix scénarios utilisés pour le processus de réduction par amalgame (à chaque fois la puissance volumique $\varpi$ alimente soit les sources 1 et 2, soit les sources 3 et 4) . . . . .	77
4.5	Erreurs de projections des différentes bases amalgamées à $\tilde{N} = 50$ modes . . . . .	79
4.6	Erreurs de projections des différentes bases amalgamées à $\tilde{N} = 200$ modes . . . . .	79
4.7	Performances du modèle réduit d'ordre 50 pour différentes modélisations de la conductivité . . . . .	80
4.8	Performances du modèle réduit pour différentes ordres . . . . .	82
4.9	Simulation de la puce : les vingt scénarios choisis parmi la norme JEDEC standard et les puissances thermiques volumiques utilisées . . . . .	84
5.1	Dimensions du QFN16 avec le matériau de chaque composant . . . . .	92
5.2	Propriétés des matériaux du QFN16 à 22°C . . . . .	93
5.3	Les différents éléments finis utilisés pour la discrétisation spatiale du QFN16 . . . . .	93
5.4	Etude du composant QFN16 : les vingt scénarios choisis parmi la norme JEDEC standard et les puissances thermiques volumiques utilisées.. . . . .	95
5.5	Temps de calcul pour différentes bases tronquées . . . . .	99

5.6	Erreurs de projection des différentes bases tronquées . . . . .	99
5.7	Erreurs de projection des différentes bases amalgamées à $\tilde{N} = 50$ modes . . . . .	107
5.8	Erreurs de projection des différentes bases amalgamées à $\tilde{N} = 200$ modes . . . . .	107
5.9	Temps de calcul de construction des différentes bases en minutes . . . . .	108
5.10	Performances du modèle réduit pour différents ordres obtenus à partir de la base initiale tronquée n°3 : 100% modes de Dirichlet et 10% modes de Steklov. . . . .	108
5.11	Performances du modèle réduit pour différents ordres obtenus à partir de la base initiale complète n°0 . . . . .	109



# Introduction générale

Les composants électroniques jouent un rôle central dans la révolution technologique que nous vivons actuellement. Ils sont les fondations de tous les dispositifs que nous utilisons au quotidien, des smartphones aux ordinateurs, en passant par les voitures, les appareils médicaux et les objets connectés. Sans ces composants, notre monde moderne ne pourrait pas fonctionner avec l'efficacité et la rapidité que nous attendons. Ils régulent les flux d'énergie, transmettent l'information et permettent la communication entre des dispositifs divers, rendant possible une interconnexion sans précédent. L'un des aspects les plus cruciaux de cette évolution est la miniaturisation des composants électroniques. Depuis l'invention du transistor en 1947, l'industrie électronique s'est lancée dans une course vers la réduction de la taille des composants tout en augmentant leur puissance et leur efficacité. Cette miniaturisation a été rendue possible grâce aux avancées dans la conception des circuits intégrés, permettant de placer des millions, voire des milliards de transistors sur une seule puce. Ainsi, des dispositifs autrefois imposants et énergivores, comme les premiers ordinateurs, sont devenus compacts et portables, sans compromis sur leurs performances. La miniaturisation ne concerne pas seulement la taille physique des composants, mais aussi leur efficacité énergétique. Les appareils électroniques modernes consomment beaucoup moins d'énergie tout en offrant des performances nettement supérieures à celles de leurs prédécesseurs. Cette optimisation énergétique est essentielle pour prolonger la durée de vie des batteries dans les dispositifs mobiles et pour répondre aux préoccupations environnementales croissantes. Mais cette miniaturisation s'est effectuée au prix de contraintes de plus en plus importantes, notamment sur le plan de la dissipation de chaleur, et a engendré la nécessité de prédire de façon de plus en plus précise le niveau de température atteint au sein des composants. Jusqu'à présent les outils utilisés pour ce type d'études thermiques étaient soit des modèles analytiques relativement simples (de type réseaux de résistances et de capacités thermiques), rapides à utiliser mais limités en termes de précision, soit des outils de simulations numériques complets, via des logiciels professionnels faisant appel à la technique de discrétisation spatiale et temporelle, très précis quant aux résultats obtenus, mais au prix d'un temps de calcul qui peut s'avérer rédhibitoire. Une des solutions industrielles actuelles est ainsi une combinaison de ces deux approches,



dans laquelle les paramètres du modèle analytique sont identifiés à partir de jeux de simulations effectués par les codes de simulation numérique. Jusqu'à présent ce type de démarche ne prend pas en compte la thermo-dépendance des paramètres thermiques pour les matériaux utilisés. Et pourtant la conductivité thermique des semi-conducteurs (arséniure de gallium, silicium, ...) est un paramètre particulièrement sensible puisqu'il peut varier du simple au double dans la gamme de température de fonctionnement des composants. Par ailleurs les spécialistes du domaine s'interrogent sur la pérennité de cette approche pour les composants du futur, appelés à être caractérisés par une complexité géométrique encore plus grande que les composants actuels. Dans cette optique, l'entreprise Thales a souhaité explorer d'autres voies que les outils de simulation traditionnelle, et s'est tournée vers l'équipe Thermique Energétique du Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry (LMEE), afin d'étudier dans quelle mesure l'utilisation de modèles réduits de type modaux peut être une solution à cette problématique industrielle. Ce travail de thèse s'est ainsi concentré sur le développement de modèles réduits adaptés à la thermo-dépendance de la conductivité. Ce mémoire se découpe en 6 chapitres : Le premier chapitre décrit la complexité des phénomènes thermiques pour les composants électroniques, d'un point de vue structurel et fonctionnel. Le second chapitre présente les différents types de modèles qui ont été développés pour la description de la diffusion de la chaleur dans le domaine des composants électroniques. Parmi ces différentes solutions, le chapitre 3 se concentre sur la méthode utilisée qui est la technique AROMM, méthode de réduction modale spécifique aux problèmes thermiques et développée au laboratoire LMEE. Ce chapitre intègre à la fois une présentation de la technique initiale, et le développement mathématique qui permet d'appliquer cette technique pour une non-linéarité de la conductivité thermique. Le chapitre 4 expose les résultats de la méthode développée dans le cas d'une première application simple : c'est le cas d'une puce en arséniure de gallium activée par quatre sources de chaleur. L'étude montre ainsi l'efficacité de la technique, puisque le modèle réduit est construit rapidement et est valable pour une très large gamme de sollicitations thermiques. Il permet un gain de temps important pour des erreurs de simulation tout à fait acceptables d'un point de vue industriel. Le chapitre 5 présente les résultats obtenus pour une configuration complète, dans laquelle cette puce est intégrée dans un boîtier électronique. L'étude montre alors que la construction du modèle réduit est plus délicate puisqu'elle nécessite un temps de calcul très important. Par contre une fois construit, le modèle réduit amène à des résultats similaires à ceux obtenus dans l'étude précédente en termes de gains en temps de calcul et en précision du modèle. Le chapitre 6 conclut cette étude et présente les perspectives, notamment afin d'améliorer le temps de construction du modèle pour des configuration complètes telles que celle présentée au chapitre précédent.

# Chapitre 1

## Importance et complexité des études thermiques pour les composants électroniques

### 1.1 L'analyse thermique des composants électroniques : un enjeu crucial pour Thales

Thales est une entreprise multinationale française spécialisée dans les domaines de la défense, de la sécurité, de l'aérospatiale et de la technologie de l'information. Opérant à l'échelle internationale, elle fournit toute une gamme de matériel électronique et joue un rôle clé dans des secteurs sensibles où la précision et la fiabilité sont incontournables. L'entreprise propose une gamme variée de produits. Étant donné les enjeux élevés et la complexité des projets, une défaillance d'un seul composant pourrait avoir des effets catastrophiques. L'étude thermique des composants électroniques revêt ainsi une importance primordiale pour diverses raisons :

- **Fiabilité et durabilité** : Les fluctuations de la température impactent significativement la fiabilité des composants. La chaleur qu'ils génèrent affecte leur durée de vie. Thales donc doit maîtriser les mécanismes de dissipation thermique de ces éléments. C'est vital pour garantir un fonctionnement fiable pendant toute leur période d'utilisation prévue.
- **Performance** : La performance des composants électroniques dépend souvent de la température à laquelle ils fonctionnent. Des variations importantes de la température peuvent entraîner des défaillances, ou des performances réduites.

- Dimensions et contraintes spatiales : Les composants électroniques miniaturisés sont souvent utilisés dans des systèmes compacts où l'espace et les surfaces d'échanges sont limités. Une régulation thermique adéquate est indispensable pour empêcher l'échauffement excessif. Cela permet une intégration dense des composants, sans sacrifier ni leur efficacité ni leur fiabilité.
- Sécurité : Dans le secteur de la défense et de la sécurité, la sûreté des composants électroniques est fondamentale. Ils doivent non seulement fonctionner en conditions hostiles, mais aussi garantir une sécurité optimale. Un dysfonctionnement, comme une surchauffe, peut non seulement affecter leur performance, mais représente également un risque significatif pour l'intégrité des systèmes.
- Économies d'énergie : La gestion thermique efficace des composants électroniques réduit la consommation d'énergie. Ceci est particulièrement important pour les applications mobiles ou spatiales. Les dispositifs alimentés par batterie en bénéficient, par exemple, les systèmes de navigation par satellite, ou encore les radars embarqués.

En résumé, la gestion thermique est un élément clé pour garantir la fiabilité, la sécurité et l'efficacité des produits de Thales.

## 1.2 La révolution de la miniaturisation

L'électronique omniprésente a connu une évolution fulgurante au cours des dernières décennies, transformant notre manière de vivre, de travailler et de communiquer. Alors qu'autrefois les dispositifs électroniques étaient encombrants, coûteux et limités en fonctionnalités, aujourd'hui, grâce à des avancées majeures en miniaturisation et en efficacité énergétique, ils sont presque invisibles et intégrés d'une manière essentielle à notre quotidien (voir Fig. 1.1). Des smartphones, qui sont de véritables ordinateurs de poche, aux objets connectés, comme les thermostats intelligents et les montres connectées, l'électronique est devenue une partie indissociable de nos vies.

Ce n'est pas seulement dans le domaine du grand public que l'on voit cette influence des composants électroniques ; ils sont également au cœur de divers domaines spécialisés. Ils sont présents dans les communications, l'information, les industries, la santé (voir Fig. 1.2), les moyens de transport et l'agriculture. Ils sont le moteur de dispositifs tels que les processeurs,



FIGURE 1.1 – Les tendances actuelles en matière d’électronique grand public



FIGURE 1.2 – La caméra OV6948 d’Omnivision, mesurant 0,575 mm x 0,575 mm x 0,232 mm, est conçue pour des applications médicales et offre une capture de 30 images couleur par seconde à 40 000 pixels de résolution, tout en supportant des températures de -20°C à 70°C

les modems, les antennes RF (Radio Fréquence), les mémoires RAM et ROM, et de nombreux autres circuits intégrés, les moteurs et les véhicules électriques, les systèmes d'irrigation intelligents. Ces composants jouent un rôle vital dans des secteurs tels que l'aérospatiale, la défense, et les systèmes de contrôle industriel. Ils sont essentiels pour le fonctionnement des satellites, des équipements militaires de communication et de navigation, et dans la gestion automatisée des processus industriels. Ces composants sont également impliqués dans des applications plus spécialisées comme les gyroscopes pour la navigation aérienne, les systèmes de communication sécurisée, les unités de contrôle industriel et les capteurs de haute précision pour la géolocalisation et la surveillance. Tant dans la vie quotidienne que dans des applications plus critiques et spécialisées, ces équipements simplifient des activités complexes et ouvrent la porte à des innovations qui améliorent notre bien-être. Sans ces composants, la plupart des avancées technologiques qui marquent notre époque seraient irréalisables.

Prenons l'exemple de l'évolution des ordinateurs et des microprocesseurs (voir Fig. 1.3) pour laquelle la miniaturisation des composants électroniques a été une clé. Cette réduction de taille a rendu possible la conception d'ordinateurs portables, de tablettes et de smartphones plus légers et plus compacts, sans sacrifier la puissance de traitement. Grâce à des techniques de fabrication toujours plus avancées, il est désormais possible d'intégrer des millions, voire des milliards de transistors sur une seule puce de silicium, permettant des calculs plus rapides et plus complexes comme le montre le tableau 1.1. On remarque une diminution remarquable de la finesse de gravure et une augmentation exponentielle du nombre de transistors.

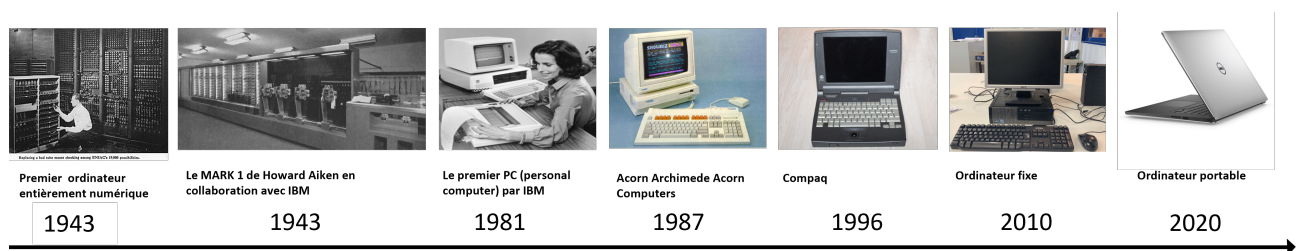


FIGURE 1.3 – Evolution des ordinateurs au fil du temps

Cependant, les dimensions réduites des composants entraînent des densités de puissance plus élevées et des surfaces d'échange réduites, ce qui complique le processus de dissipation thermique, comme dans le cas des semi-conducteurs de puissance. Ces derniers subissent de fréquents cycles d'activation et de désactivation, et sont très sensibles aux effets thermiques,

Microprocesseur	Date de sortie	Taille ( $mm^2$ )	Nombre de transistors	Finesse de gravure ( $nm$ )	Largeur des données ( $bits$ )	Puissance ( $W$ )
Intel 4004	1971	168	2 300	10 000	4	~0.74
Intel 8086	1978	33	29 000	3 000	16	1-2
Intel Pentium	1993	294	3,1 millions	800	32	13-16
Intel Core 2 Duo	2006	143	~291 millions	65	64	~65
Intel Core i7	2010	Varie	~1-2 milliards	32	64	35-130
Intel Core i3/i5/i7	2012	Varie	~1-2 milliards	22	64	35-95
Intel Core i3/i5/i7/i9	2018	Varie	~2-3 milliards	14	64	35-165
Intel Tiger Lake	2020	Varie	~4 milliards	10	64	12-28
Intel Rocket Lake	2021	Varie	~6 milliards	14	64	65-125
Alder Lake	2021	Varie	~20 milliards	10	64	35-241

TABLE 1.1 – Informations sur divers microprocesseurs Intel

qui peuvent avoir des impacts importants sur la durabilité et la fiabilité du système. Par exemple, les fortes densités de puissance thermique peuvent entraîner une détérioration des connexions de soudure entre la puce et les bornes de connexion à l'intérieur d'un composant (voir Figs. 1.4 et 1.5), ou entre les bornes de connexion des composants électroniques et les cartes de circuits imprimés que l'on nomme dans la suite de ce mémoire PCB (Printed Circuit Board). Prenons l'exemple du transistor MOSFET (Metal-Oxide-Semiconductor

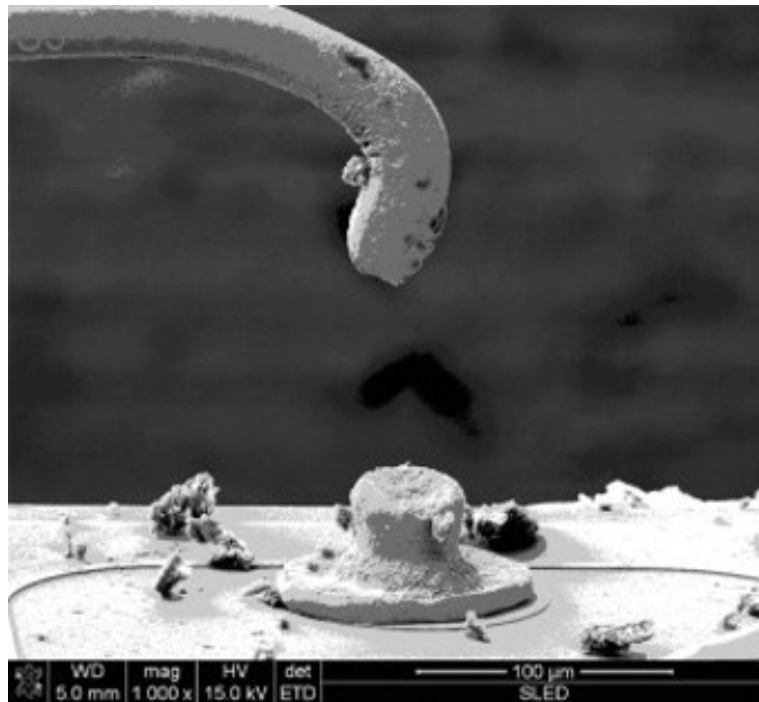


FIGURE 1.4 – Rupture mécanique d'un connecteur dû à la fatigue thermique

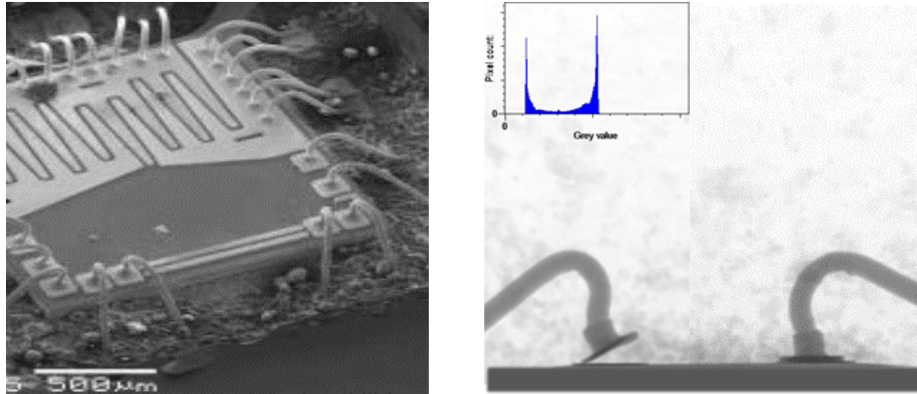


FIGURE 1.5 – Rupture de contact causé par un stress thermo-mécanique

Field-Effect Transistor) qui est un type de transistor utilisé pour amplifier ou commuter des signaux électroniques. Ce composant intègre une grille de commande isolante qui régule le flux de courant entre deux terminaux, nommés drain et source. La mauvaise dissipation thermique dans les transistors MOSFET peut entraîner des changements dans leur comportement électrique et, dans les cas extrêmes, causer une défaillance du composant due à un phénomène appelé “emballement thermique”. Ce phénomène peut être catastrophique, car dans un système d’alimentation électronique, si un MOSFET surchauffe sans régulation thermique adéquate, cela peut provoquer sa défaillance, endommager d’autres composants voisins, et dans les cas extrêmes, causer un incendie ou une explosion du matériel, compromettant ainsi la sécurité de l’ensemble du système ou de l’appareil.

En résumé, la miniaturisation des composants électroniques rend les dispositifs plus pratiques et portables, et transforme de nombreux aspects de notre vie quotidienne et professionnelle. Mais cela se fait au prix d’une contrainte technologique de plus en plus forte, qui est de pouvoir évacuer la chaleur dissipée dans ces éléments.

### 1.3 Une complexité croissante des géométries

En plus de la miniaturisation, les composants électroniques ont des géométries de plus en plus complexes. Examinons la structure géométrique d’un composant électronique actuel (voir Fig. 1.6). Il est tridimensionnel et constitué de nombreux éléments imbriqués, dont les propriétés physiques et géométriques sont réparties sur une vaste gamme. De plus, il existe

des couplages thermiques entre tous ces éléments, à travers des connexions géométriques complexes dues aux tracés des pistes en cuivre (voir Fig. 1.7).

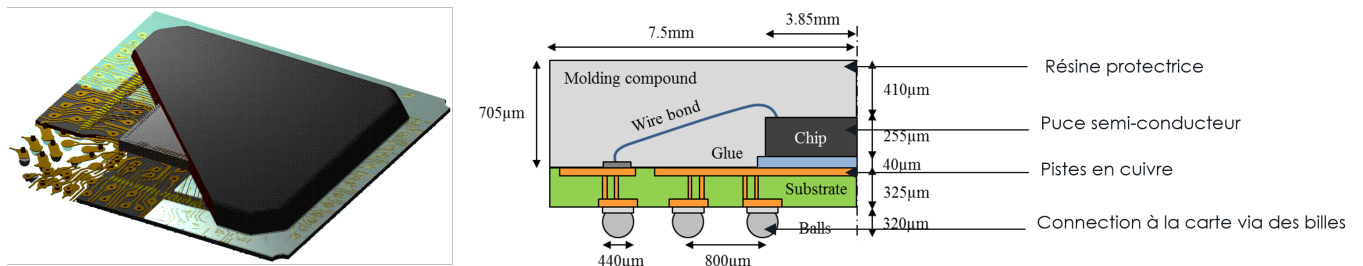


FIGURE 1.6 – Géométrie du BGA 208 (Ball Grid Array (matrice de billes)) (gauche) et section transversale partielle du BGA208 (droite)

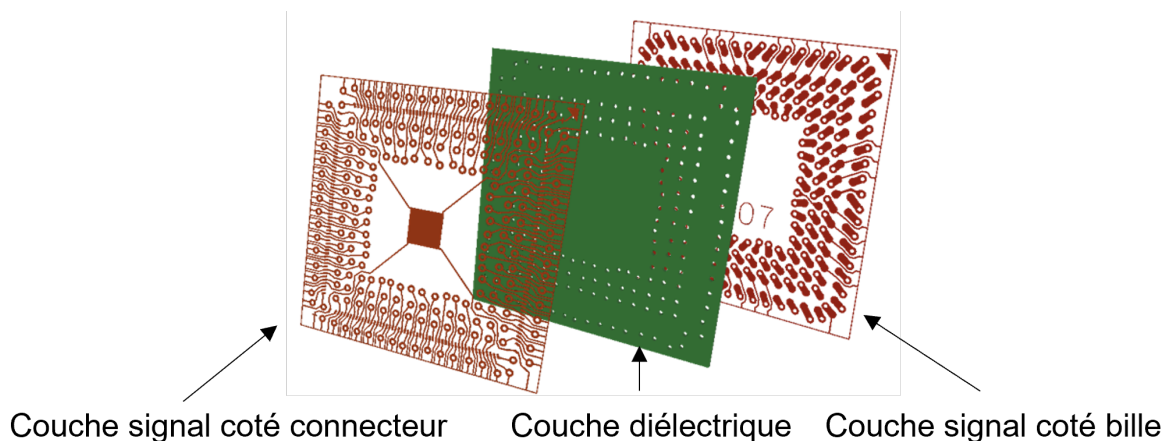


FIGURE 1.7 – Vue éclatée des différentes couches du substrat du BGA208

Cette géométrie complexe augmente la difficulté à déterminer précisément la dissipation thermique dans les composants. L'utilisation d'outils simples devient insuffisante, et il est nécessaire de faire appel à des outils de simulation numérique, avec une description précise de la géométrie. Prenons le cas du composant BGA208 (Fig. 1.7) utilisé à Thales dans une large variété d'applications, tels que des systèmes embarqués dans des équipements militaires, les systèmes de communication, ou les contrôleurs pour des systèmes de transport. La simulation des pistes en cuivre de ce composant (Fig. 1.7) nécessite environ 600 000 nœuds (Fig. 1.8). Lorsqu'on élargit le cadre pour inclure une carte électronique complète avec plusieurs puces et



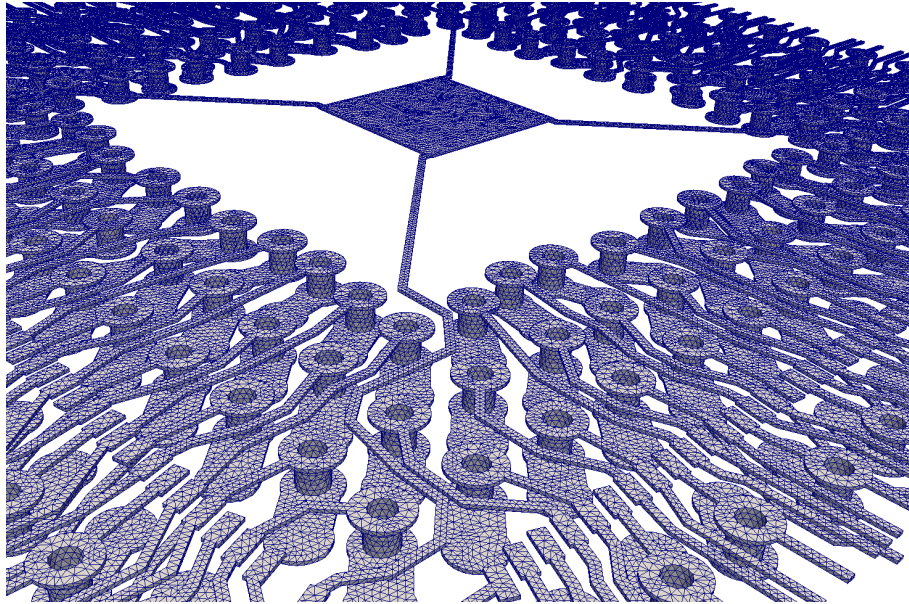


FIGURE 1.8 – Maillage de piste en cuivre d'un BGA208 (600k nœuds)

composants (Fig. 1.9), ce nombre grimpe à des dizaines de millions de nœuds, ce qui conduit Thales à utiliser des machines de grande capacité pour résoudre ce genre de problèmes.

## 1.4 Une grande diversité de produits

### 1.4.1 Types de boîtiers miniaturisés en électronique

Le phénomène de miniaturisation a conduit au développement de divers types de boîtiers électroniques miniaturisés, conçus pour protéger les composants tout en optimisant l'espace, la performance et la fiabilité (voir Fig 1.10 et Fig.1.11). Les différentes contraintes de ces boîtiers sont la dissipation thermique, la résistance aux conditions environnementales extrêmes, et la réduction du poids et du volume. La table 1.2 présente une liste non exhaustive des types de boîtiers miniaturisés les plus couramment utilisés dans des entreprises d'électronique comme Thales.

t

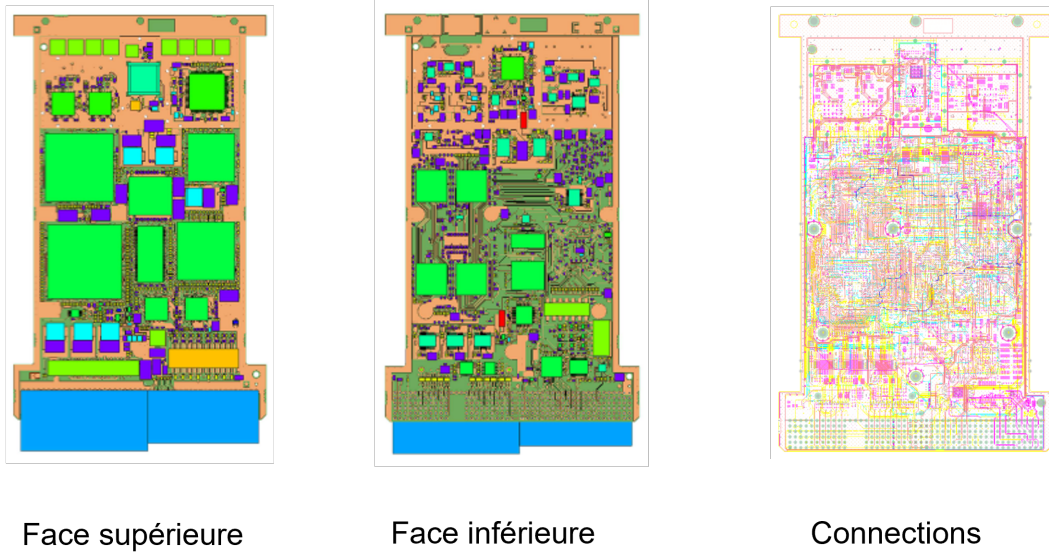


FIGURE 1.9 – Exemple d’une carte HDI (160 x 100 x 1.6 mm) possédant 1675 composants et 20000 points de connexion soit une densité supérieure à 5 composants/cm<sup>2</sup> et plus de 780 connexions/cm<sup>3</sup>

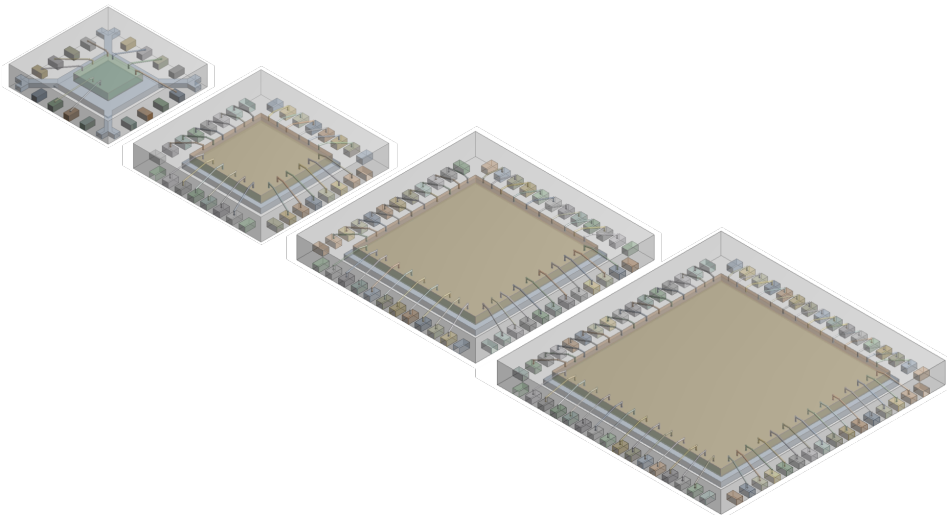


FIGURE 1.10 – Modèle 3-D (de gauche à droite) du (Quad Flat no Leads) QFN16, QFN32, QFN48 et QFN64

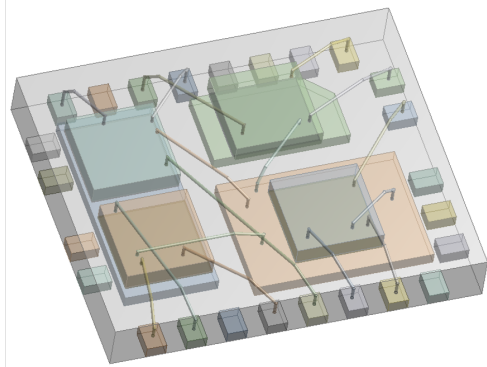
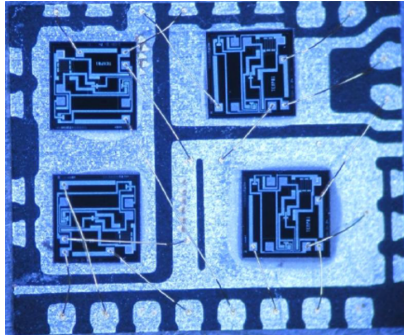


FIGURE 1.11 – Vue détaillée 3-D (gauche) et topologie interne (droite) du MLP25 (Micro Leadframe Package)

	Caractéristiques	Avantages	Utilisations	Matériaux	Puissance
Chip On Board (COB)	Puce montée et soudée directement sur le circuit imprimé	Gain d'espace, réduction du nombre de connexions externes	Systèmes de capteurs, dispositifs médicaux, équipement militaire	Résine époxy, silicone, céramique	Faible (<1W)
Wafer Level Package (WLP)	Encapsulation et assemblage directement sur la tranche du semi-conducteur	Réduction de taille et de poids	Microcontrôleurs, MEMS, dispositifs IoT	Silicone, polymères photosensibles	Faible (<1W)
Ball Grid Array (BGA)	Grille de sphères de soudure pour la connexion	Haute densité de broches, excellente dissipation thermique	Processeurs, contrôleurs de mémoire, Field-Programmable Gate Arrays	Céramique, Flame Retardant 4	Moyenne à haute (1 à 5W)
Quad Flat No-lead (QFN)	Contacts électriques situés sur le dessus du boîtier	Réduction de l'encombrement, amélioration de la dissipation thermique	Amplificateurs de puissance, convertisseurs A/D et D/A	Résine époxy, plastique thermique	Moyenne (1 à 3W)
Micro Leadframe Package (MLP)	Variante plus petite des boîtiers Leadframe	Petit, économique, efficace pour des composants à faible nombre de broches	Régulateurs de tension, contrôleurs de charge	Plastique thermodurcissable	Faible à moyenne (1 à 2W)
Chip Scale Package (CSP)	Taille de boîtier quasi similaire à celle de la puce	Extrême réduction de taille et de poids	Télécommunication, dispositifs médicaux	Résine epoxy, silicone	Faible (<1W)
Fine-pitch Land Grid Array (FLGA)	BGA avec des broches plus rapprochées	Meilleure densité de broche sur un espace réduit	Applications nécessitant une grande puissance sur un espace réduit	Céramique, Flame Retardant 4	Moyenne à haute (1 à 5W)
Chip Scale Package (CSP)	Taille de boîtier quasi similaire à celle de la puce	Extrême réduction de taille et de poids	Télécommunication, dispositifs médicaux	Résine époxy, silicone	Faible (<1W)
High Density Interconnect(HDI)	Utilise plusieurs couches de substrats pour augmenter la densité des broches	Réduction de la taille et amélioration des performances électriques	Équipement de radar, systèmes de communication complexe	Polymères, céramique	Haute (jusqu'à 10W)

TABLE 1.2 – Présentation de quelques boîtiers utilisés couramment

## 1.4.2 Les composants électroniques

Dans ces boîtiers miniaturisés, plusieurs types de composants électroniques peuvent être utilisés, qui dépendent de l'application spécifique. Le tableau 1.3 présente quelques exemples.

	Fonction	Matériaux utilisés	Dissipation thermique
Microcontrôleurs et microprocesseurs	Gèrent les opérations de calcul et de contrôle dans un circuit	Silicium dopé	Les microcontrôleurs haute performance peuvent nécessiter des solutions de refroidissement actif
Mémoire (RAM, ROM, Flash)	Stockent les données et les codes de programme	Silicium, matériaux ferro-électriques	Faible, sauf pour des mémoires de grande capacité ou de haute vitesse
Transistors	Servent comme commutateurs ou amplificateurs dans le circuit	Silicium, germanium, composés III-V (nitrure de gallium)	Peut être élevée pour les applications de puissance, nécessitant alors un dissipateur thermique ou un refroidissement actif
Diodes	Contrôlent le sens du courant électrique	Silicium, germanium, composés à base de semi-conducteurs	Faible, mais peut nécessiter un dissipateur dans des applications de puissance
Condensateurs	Stockent et libèrent de l'énergie électrique	Céramiques, oxydes métalliques, films de plastiques	Faible, mais peut augmenter avec la fréquence de fonctionnement
Résistances	Limitent le courant et divisent la tension	Composites de carbone, oxydes métalliques	Faible à moyenne, les résistances de puissance nécessitent des dissipateurs thermiques
Inducteurs	Stockent l'énergie sous forme de champ magnétique	Fils de cuivre, noyaux de ferrite	Peut augmenter avec la fréquence et la puissance
Oscillateurs à quartz	Fournissent un signal de fréquence stable	Cristaux de quartz, électrodes métalliques	Très faible
Circuits intégrés d'alimentation	Régulent la tension et la puissance aux composants	Circuits intégrés en silicium, inducteurs en ferrite	Peut être élevée, nécessitant des solutions de refroidissement
Interfaces et modules de communication	Facilitent la communication des données entre composants ou systèmes	Circuits intégrés, antennes en métal ou matériaux diélectriques	Variables, généralement faible à moyenne

TABLE 1.3 – Exemples des composants électroniques

On note ainsi une très grande diversité de produits, chacun caractérisé par une géométrie propre (voir Fig. 1.12 et 1.13).

A chacun d'entre eux, est associé une fiche technique qui fournit des informations détaillées sur les propriétés thermiques essentielles comme la résistance thermique et les plages de température de fonctionnement et de stockage (Fig. 1.14). La résistance thermique, in-

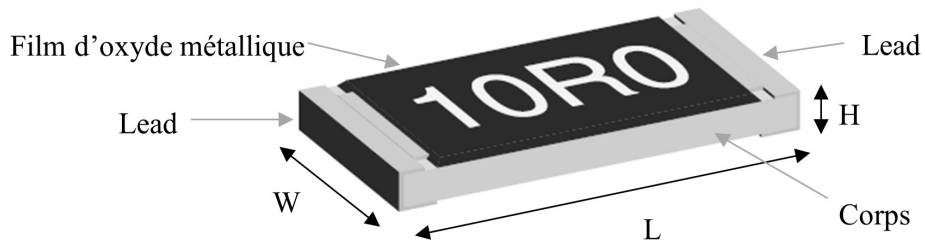


FIGURE 1.12 – Schéma d'une résistance

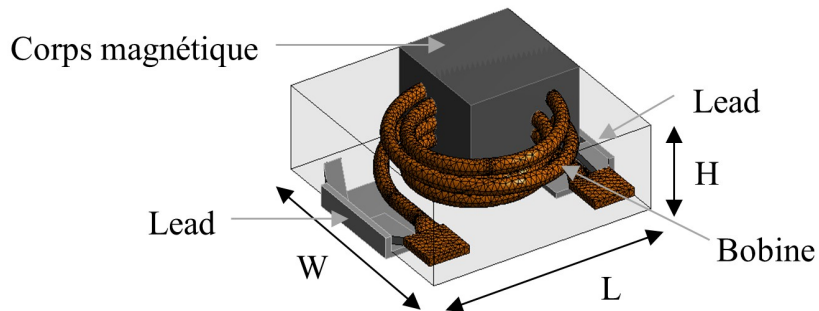


FIGURE 1.13 – Vue 3-D d'une inductance

## Thermal Information

Thermal Resistance	$\theta_{JA}$ ( $^{\circ}\text{C}/\text{W}$ )	$\theta_{JC}$ ( $^{\circ}\text{C}/\text{W}$ )
16 LD TQFN Package (Notes 4, 5) . . . . .	45	6.5
Junction Temperature Range . . . . .	-55 $^{\circ}\text{C}$ to +125 $^{\circ}\text{C}$	
Storage Temperature Range . . . . .	-65 $^{\circ}\text{C}$ to +150 $^{\circ}\text{C}$	
Pb-Free Reflow Profile . . . . .	see link below	
	<a href="http://www.intersil.com/pbfree/Pb-FreeReflow.asp">http://www.intersil.com/pbfree/Pb-FreeReflow.asp</a>	

FIGURE 1.14 – Spécifications thermiques des composants électroniques ISL8023 et ISL8024, indiquant la résistance thermique, les plages de température de fonctionnement et de stockage, et le profil de refusion sans plomb.

diquée en  $^{\circ}\text{C}/\text{W}$  pour les transferts jonction-ambiante ( $\theta_{\text{JA}}$ ) et jonction-boîtier ( $\theta_{\text{JC}}$ ), reflète l'efficacité avec laquelle un composant dissipe la chaleur. Ces valeurs informent sur la capacité de refroidissement nécessaire pour prévenir la dégradation des matériaux et la défaillance des composants. La plage de température de fonctionnement spécifiée garantit la performance optimale du composant sans risque de dommage ou d'altération de ses propriétés électriques.

## 1.5 Une multiplicité des scénarios de refroidissement

La gestion thermique des composants électroniques est complexe ; les défis rencontrés sont divers, notamment la nécessité d'analyser de nombreuses configurations et sollicitations différentes. Par exemple, dans l'industrie aéronautique civile, où la fiabilité et la sécurité des équipements électroniques sont primordiales, les systèmes électroniques embarqués dans les avions civils sont souvent refroidis par convection forcée via un système de ventilation mécanique. Les ingénieurs de Thales ont pour responsabilité de garantir le bon fonctionnement continu des composants : en cas de panne du système de circulation d'air, ils doivent veiller à la fiabilité des composants pendant une période critique de 30 minutes, considérée comme le temps nécessaire pour un atterrissage d'urgence. Pendant cette période, le refroidissement dépend entièrement de la convection naturelle. Les ingénieurs doivent donc effectuer des simulations thermiques pour ces deux scénarios distincts de convection : la convection forcée et la convection naturelle (voir Fig. 1.15). Le but de ces simulations est de garantir que les composants électroniques restent dans des limites de température sûres dans les deux situations. De façon plus générale, un organisme de normalisation des semi-conducteurs, le JEDEC (Joint

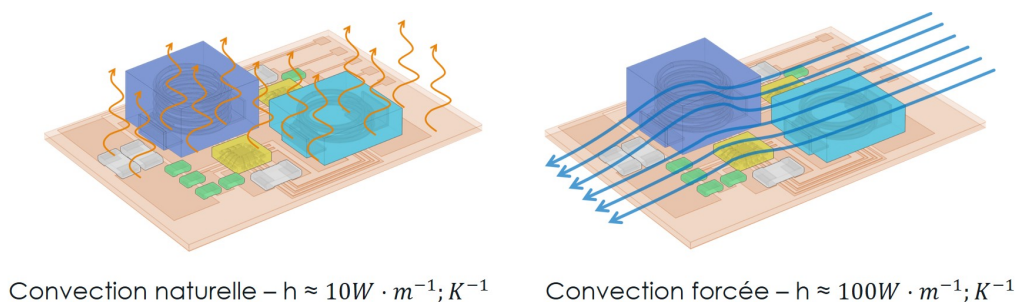


FIGURE 1.15 – Exemple d'un même problème physique sous différentes conditions aux limites

Electron Device Engineering Council), créé dès 1960 et regroupant près de 300 compagnies, fabricants et utilisateurs de semi-conducteurs, propose un ensemble de normes concernant les divers environnements thermiques auxquels peuvent être confrontés les semi-conducteurs. Le

tableau 1.4 présente ainsi la diversité des configurations utilisées pour un même composant [1]. C'est à partir de ces configurations normalisées, que s'effectueront les simulations numériques présentées par la suite.

Cas	Coefficient de transfert thermique par face ( $W.m^{-2}K^{-1}$ )			
	haut	bas	côtés	pattes
1	10	10	10	1000
2	100	1	100	1000
3	1	1	1	1000
4	200	200	200	1000
5	50	50	50	1000
6	200	200	200	10000
7	100	100	100	10000
8	50	50	10	1000
9	100	100	10	10000
10	1000	10	10	1000
11	10	10	10	10
12	50	50	50	50
13	10	10	10	100
14	50	100	50	100
15	10	10	10	1000
16	10	10	10	10
17	50	50	50	100
18	10	10	10	100
19	10	10	10	1000
20	30	30	30	30
21	50	50	50	100
22	1000	1000	1000	10000
23	10	10	10	10
24	1	10	10000	1000
25	500	10	10	10
26	500	10	10	100
27	10	10	10	1000
28	10	10	10	10
29	10000	10	10	10
30	10	10	10000	1000
31	10	1000	10	10
32	1000	10	10	1000
33	1	1	1	1
34	10000	1	1	1
35	$10^9$	$10^9$	$10^9$	$10^9$
36	10000	10000	10000	10000
37	1000	1000	1000	1000
38	500	500	500	500

TABLE 1.4 – Scénarios de l'ensemble des configurations selon la norme JEDEC

## 1.6 Dépendance des propriétés de certains matériaux avec la température

Le processus de transfert de chaleur par conduction s'appuie sur un milieu matériel sans mouvement de matière et est dû à des phénomènes physiques microscopiques (agitation des atomes ou des molécules, flux d'électrons libres...). Il fait intervenir deux phénomènes :

- le transfert d'énergie des particules les plus énergétiques (les particules chaudes qui ont une énergie de vibration élevée) vers les particules les moins énergétiques (les particules froides d'énergie de vibration moins élevée), dû aux collisions entre particules. La dépendance de ce phénomène à la nature du matériau est caractérisé par la conductivité thermique  $\kappa [W.m^{-1}.K^{-1}]$ .
- le stockage ou dé-stockage dans le matériau de l'énergie thermique qui transite par conduction. Ce phénomène, régi par le premier principe de la thermodynamique, dépend bien évidemment de la nature du matériaux considéré et est caractérisé par la capacité de thermique  $Cp [J.kg^{-1}.K^{-1}]$ . Puisque le bilan d'énergie que constitue l'équation de la chaleur se fait par unité de volume, la masse volumique du matériau considéré  $\rho [kg.m^{-3}]$  intervient dans cette équation. On utilisera en général par la suite la capacité volumique  $c$  :

$$c = \rho Cp [J.m^{-3}.K^{-1}] \quad (1.1)$$

Enfin la prise en compte de ces deux phénomènes fait intervenir la diffusivité thermique :

$$a = \frac{\kappa}{\rho Cp} = \frac{\kappa}{c} [m^2.s^{-1}] \quad (1.2)$$

Ces phénomènes et donc les paramètres qui les caractérisent sont directement liés à leur agitation moléculaire ou atomique, donc leur température va donc conditionner la valeur de la conductivité et de la capacité thermique.

### 1.6.1 Analyse de la conductivité thermique $\kappa(T)$

Le graphique en Figure 1.16 illustre comment cette conductivité évolue sur un spectre de température allant de 1 K à 1000 K. Cet éventail couvre divers domaines d'applications, de la cryogénie aux traitements thermiques, en passant pas des domaines tels que le refroidissement industriel, la construction, l'électronique haute puissance, et bien d'autres. Ce graphique met en évidence une vaste gamme de matériaux solides, depuis les isolants jusqu'aux conducteurs thermiques. On peut clairement observer que la variation de la conductivité, tant en amplitude qu'en forme, peut varier considérablement selon le matériau. De manière schématique,



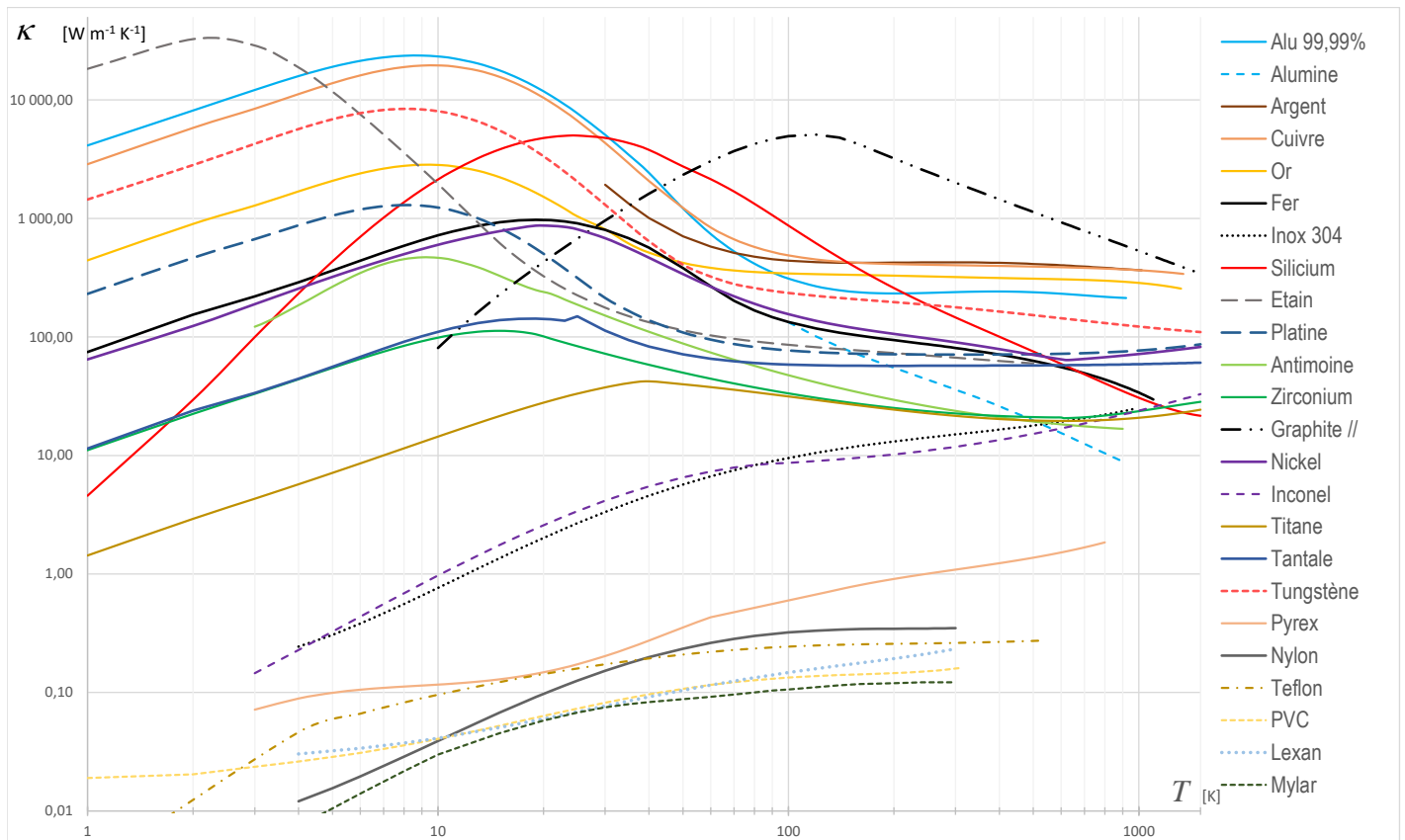


FIGURE 1.16 – Variation de la conductivité thermique des matériaux solides avec la température. Échelle Log/Log.

plusieurs tendances se dégagent en ce qui concerne la conductivité thermique des matériaux. Pour les matériaux purs, leur capacité à conduire la chaleur s'accroît nettement dès le zéro absolu, culminant entre 5K et 25K, avant de commencer une descente graduelle à mesure qu'ils approchent de leurs points de fusion.

En revanche, les alliages métalliques montrent une croissance constante de leur conductivité thermique en fonction de la température. Il est intéressant de noter que l'introduction d'impuretés dans ces alliages peut radicalement transformer leurs propriétés, les éloignant des comportements typiques des métaux purs. Lorsqu'on dépasse les températures cryogéniques, les semi-conducteurs voient leur conductivité thermique décroître avec l'augmentation de la température. Pour un bon nombre d'entre eux, des variations notables sont constatées (voir

Figure 1.17). Les polymères, quant à eux, sont reconnus comme des isolants thermiques. Leur conductivité augmente jusqu'à environ 100K, pour ensuite se stabiliser avec une croissance très limitée. Enfin, pour les verres, leur capacité à transmettre la chaleur augmente proportionnellement à la température.

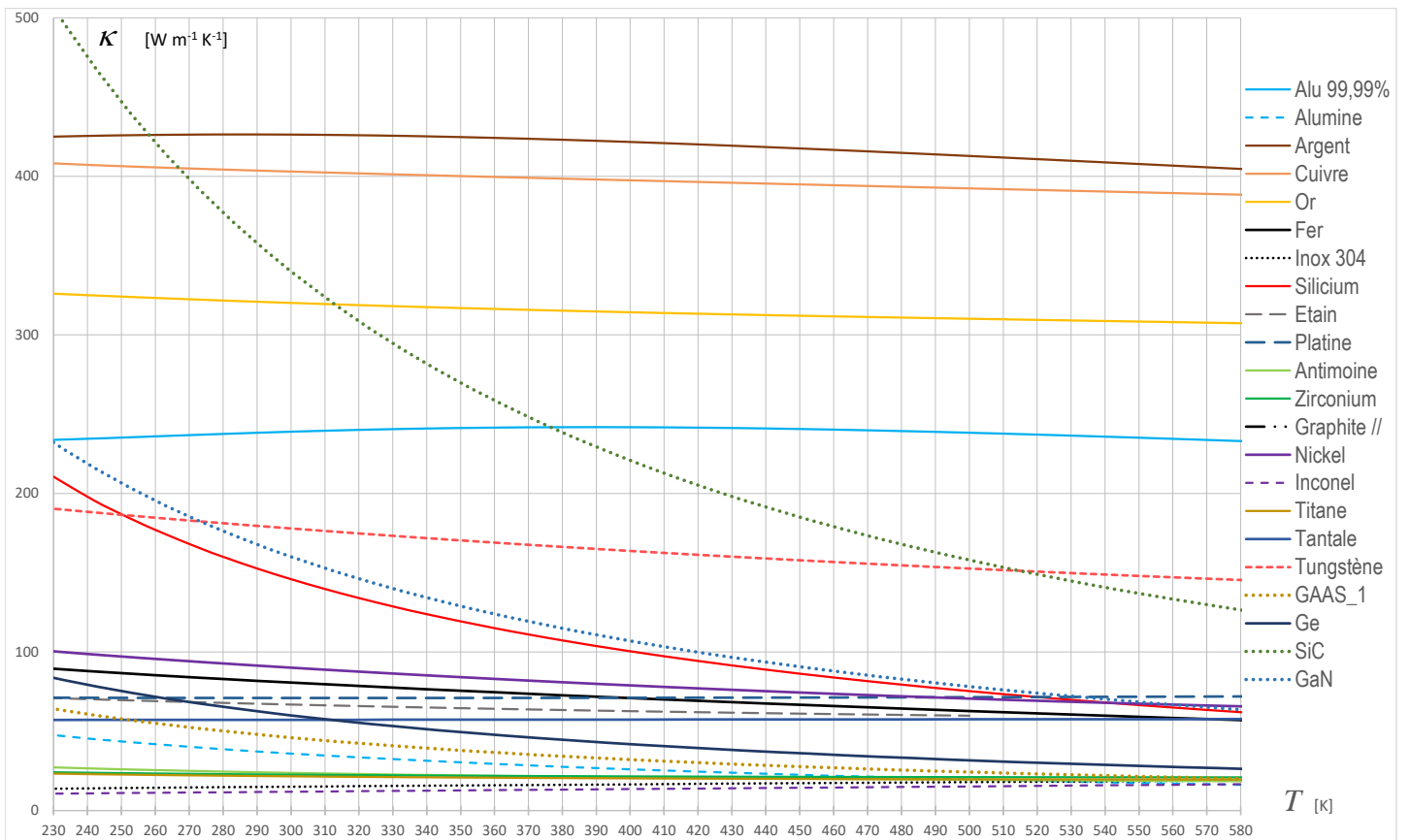


FIGURE 1.17 – Variation de la conductivité thermique des matériaux conducteurs aux températures courantes (entre 230 K et 580 K).

La forme la plus générale de la dépendance de la conductivité thermique avec la température est la suivante [2] :

$$\log(\kappa) = \sum_{q=0}^5 C_q (\log T)^q \quad , \quad (1.3)$$

Par ailleurs des approches électrocinétiques dans le cas des métaux purs permettent de relier la conductivité électrique à la conductivité thermique [3].

Cependant, les variations de température des modèles présentent très souvent des amplitudes beaucoup plus restreintes, en fonction du domaine de température considéré.

La plage utile d'utilisation des semi-conducteurs en électronique se situe entre  $-55^{\circ}C$  et  $150^{\circ}C$  pour les composants courants et s'étend jusqu'à  $300^{\circ}C$  pour les composants hyperfréquences. La figure 1.18 présente la variation de conductivité thermique relative par rapport à la référence de  $300\text{ K}$ , soit  $\frac{\kappa(T)}{\kappa(300)}$ , dans la gamme  $[220 - 570]K$ . Sur cette figure nous constatons que la conductivité thermique des semi-conducteurs varie dans des proportions importantes. On note ainsi que pour les matériaux utilisés en électronique (GaAs, SiC, ...) la conductivité thermique varie de façon importante et non-linéaire dans la gamme considérée. Thales utilise pour ces matériaux et dans cette gamme une loi de type :

$$\kappa = \kappa(T_{ref}) \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^{-\alpha} \quad (1.4)$$

### 1.6.2 Analyse de la capacité thermique volumique $c(T)$ .

Comme vu précédemment la capacité thermique massique  $C_p$  est toujours reliée à la masse volumique  $\rho$  du matériau (Eq. (1.1)). Bien que cette grandeur change avec la température en raison de la dilatation thermique, ces variations sont limitées pour la plupart des matériaux solides. Des tables présentant les variations de  $\rho$  existent, mais sont peu courantes. En l'absence de ces données, on traite généralement la densité comme une constante, en utilisant souvent la valeur à  $20^{\circ}C$ , et que l'on associe à la capacité massique  $C_p(T)$  à pression constante<sup>1</sup>.

La figure 1.19 illustre les variations de la capacité thermique volumique pour des substances pures, des semi-conducteurs et des polymères. Sur cet éventail étendu de températures, les fluctuations sont notables, et certaines présentent une forte non-linéarité. En résumé, on pourrait affirmer que

- Entre  $100K$  et  $800K$ , la capacité thermique tend à augmenter avec la température.
- À des températures avoisinant le zéro absolu, la capacité thermique de tous les matériaux est très faible.
- Pour de nombreux matériaux, la capacité thermique connaît une augmentation significative entre  $25K$  et  $250K$ .

---

1. Il est pertinent de mentionner que la plupart des processus s'effectuent à pression constante. Par ailleurs, la distinction entre les capacités thermiques massiques d'un solide à pression constante et à volume constant est très faible ( $C_p - C_v \approx 0$ ).

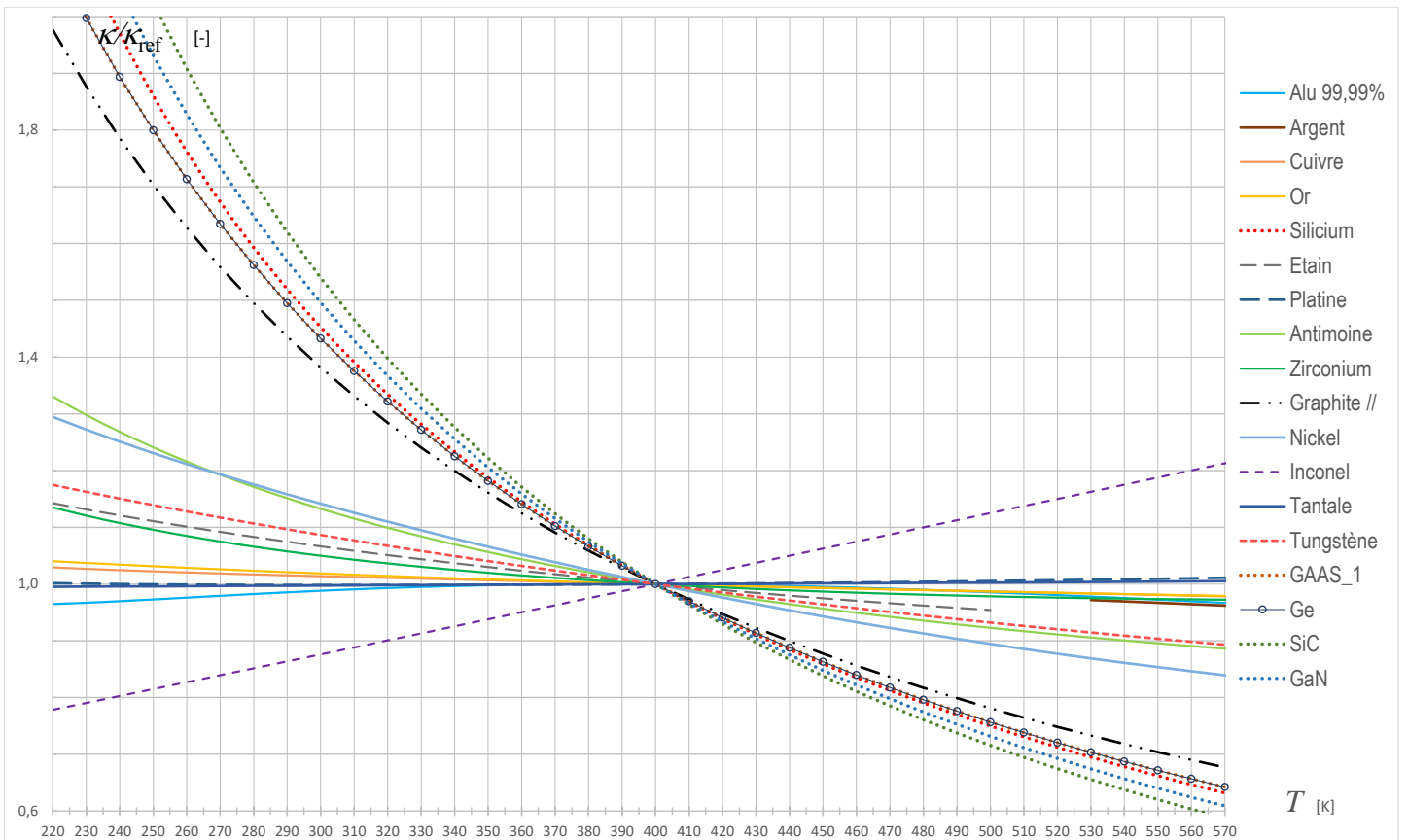


FIGURE 1.18 – Conductivité thermique des matériaux utilisés dans le domaine de l'électronique. La température de référence est ici égale à 300 K.

- Pour les corps purs, la capacité thermique suit la loi de Debye<sup>2</sup> dans l'intervalle  $25K$  à  $T_{Debye}$ . La valeur de la température de Debye<sup>4</sup> dépend du matériel (par exemple,  $T_{Ag} = 225K$ ,  $T_{Al} = 428K$ ,  $T_{Si} = 645K$ ,  $T_C = 2230K$ ).
- À des températures conventionnelles, la capacité thermique des corps purs est généralement en accord avec la théorie de Dulong et Petit ( $C_p = 3R$ ), à l'exception notable du carbone.
- Certains matériaux cristallins<sup>3</sup> ou semi-cristallins montrent de grandes fluctuations de capacité thermique à des « hautes températures » (généralement avant la fusion, mais avec des exceptions<sup>4</sup>). Pour les métaux, cela correspond à des transformations solide/solide<sup>5</sup>. Dans le cas des polymères, il s'agit d'une transformation vitreuse<sup>6</sup>.

Comme pour la conductivité thermique, nous traçons la variation de capacité volumique  $C/C_{ref}$  avec cette fois la température de référence choisie à  $400K$  (Fig. 1.20) toujours pour la gamme de températures  $[220 - 570]K$ . Dans cette gamme, la capacité thermique est souvent modélisée sous une forme polynomiale [4] :

$$C_p = a + bT + cT^2 + d/T^2 \quad (1.5)$$

Dans cette gamme, la capacité volumique des matériaux utilisés en électronique présente une variation bien moins importante que celle de la conductivité thermique.

### 1.6.3 Matériaux utilisés dans le domaine de l'électronique

Les différents matériaux utilisés dans le domaine de l'électronique ainsi que l'ordre de grandeur de leurs caractéristiques thermo-physiques sont présentés dans le tableau 1.5. Il montre qu'en ce qui concerne la conductivité thermique, la dépendance avec la température

---

2. La température de Debye, dénotée  $T_{Debye}$ , est celle où les vibrations atomiques du matériel (en relation avec la température) atteignent leur pleine amplitude.

3. Comme le Fer (Fe), le Titane (Ti), le Zirconium (Zr) et leurs alliages. À noter que l'alumine ne subit pas cette transformation.

4. Comme l'étain, qui subit une transformation de l'étain gris à l'étain blanc à  $13,2^\circ C$

5. Par exemple, la transformation magnétique du fer pur à  $1042^\circ C$ , puis du  $Fe_\alpha$  en  $Fe_\gamma$  à  $1184^\circ C$  et du  $Fe_\gamma$  en  $Fe_\delta$  à  $1665^\circ C$  avant la fusion. La première est continue, tandis que les deux autres sont discontinues, remettant en question le modèle de capacité en faveur d'un modèle enthalpique.

6. Cette transformation est plus marquée pour les polymères semi-cristallins comme le Nylon (PA66) que pour les polymères amorphes comme le PVC.

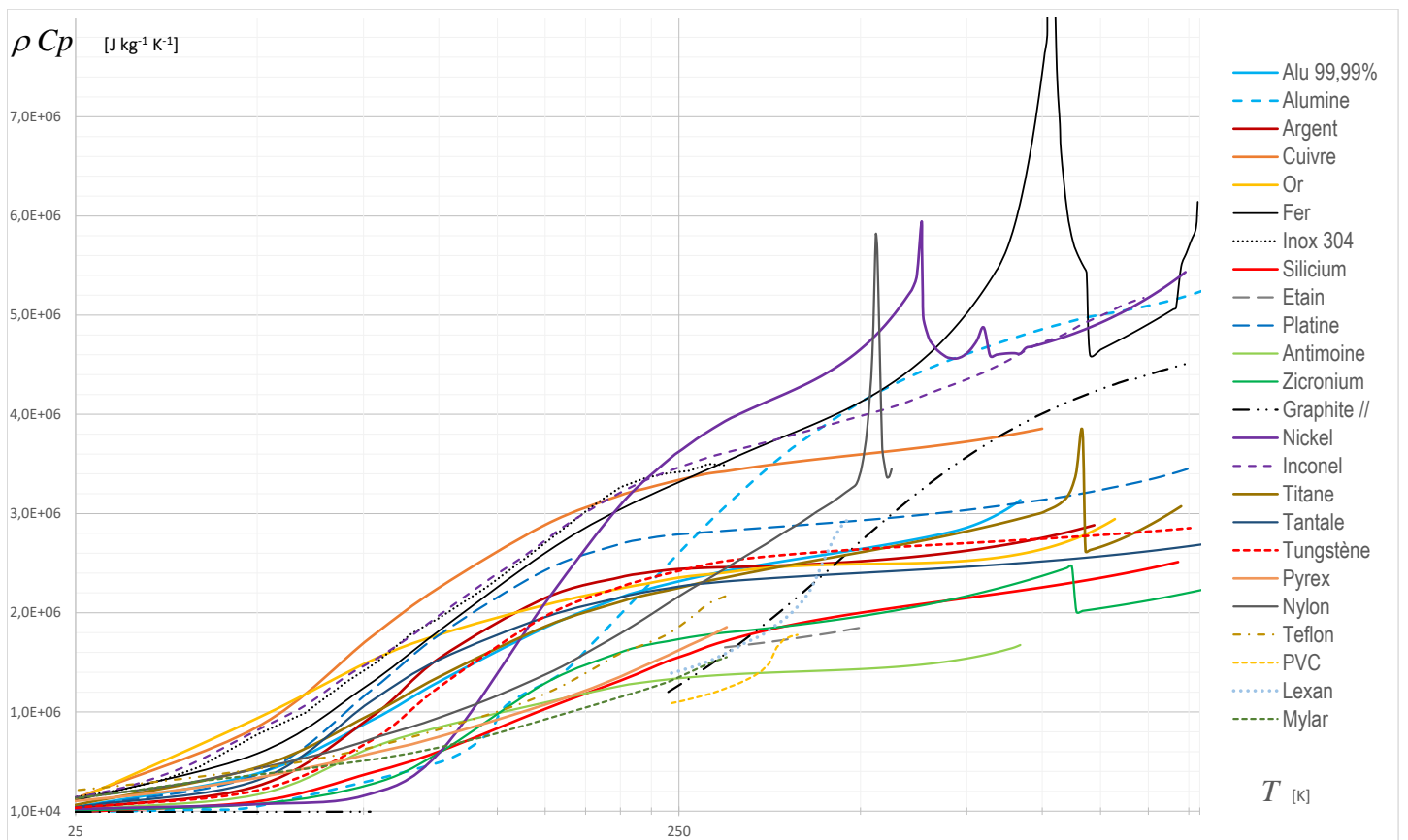


FIGURE 1.19 – Variation avec la température de la capacité thermique des matériaux à l'état solide. Échelle Log/Log.

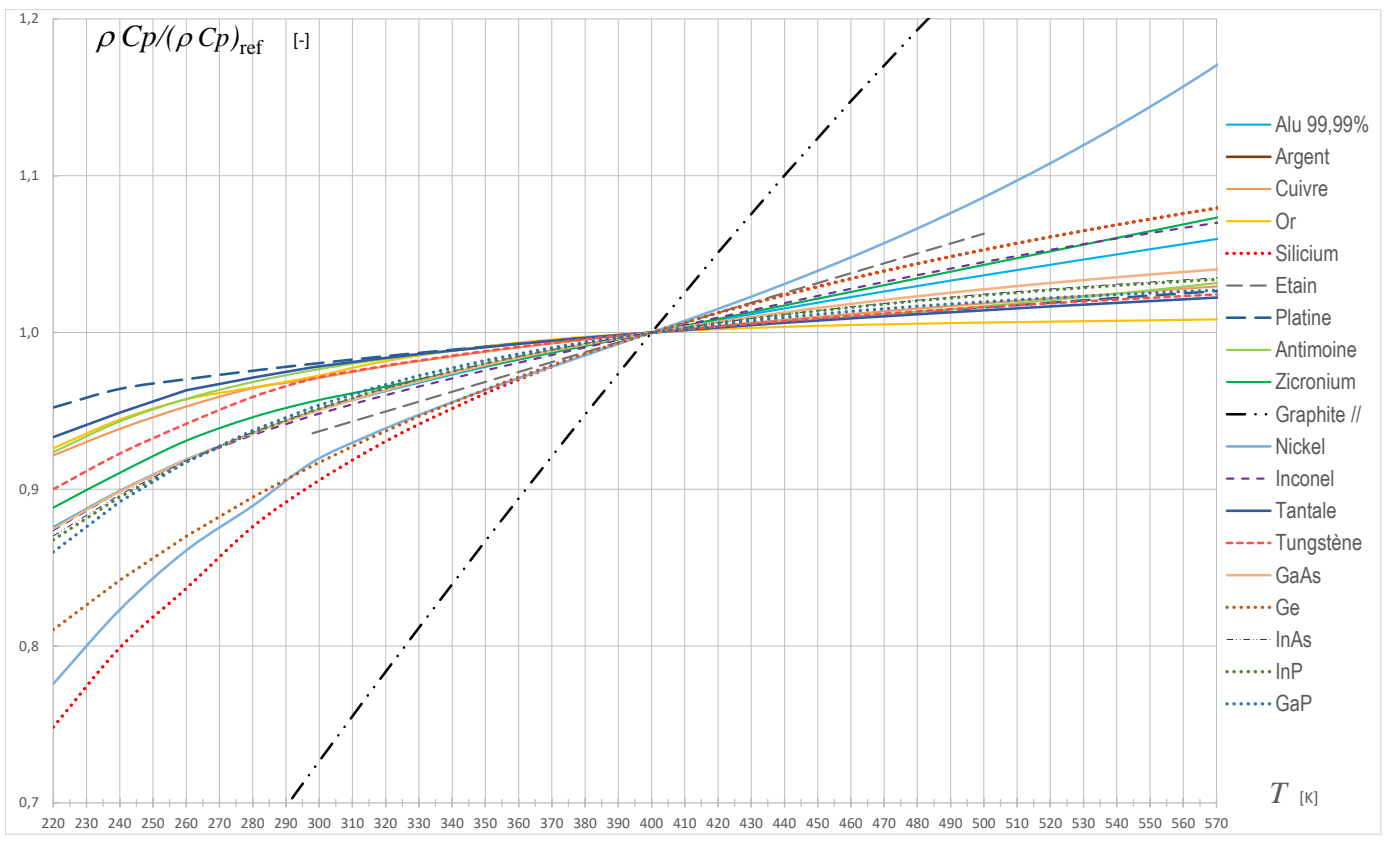


FIGURE 1.20 – Capacité thermique normalisée des matériaux utilisé dans le domaine de l'électronique. La température de référence est ici égale à 400K.

concerne essentiellement les semi-conducteurs, tels que le silicium, l'arséniure de gallium<sup>7</sup>, ou le nitrure de gallium<sup>8</sup>. La demande industrielle est actuellement de pouvoir prendre en compte ces variations de conductivité dans les calculs de dimensionnement de ces composants. Par contre la dépendance de la capacité thermique avec la température a moins d'impact et n'est pas une demande prioritaire

Matériaux	$\kappa$ ( $W.m^{-1}.K^{-1}$ )	$\rho$ ( $kg.m^{-3}$ )	$C_p$ ( $J.kg^{-1}.K^{-1}$ )
Silicium dopé	$\sim 150$ fonction de T	2330	700
Silicium	$\sim 148$ fonction de T	2330	700
Matériaux ferroélectriques	$< 10$	—	—
Germanium	60	5323	320
GaN (Nitrure de gallium)	$\sim 150$ fonction de T	6100	520
Composés à base de semi-conducteurs	variable	—	—
Céramiques	1 - 30	de 2300 à 2700	750-800
Oxydes métalliques	1 - 30	—	—
Films de plastique	0.2 - 0.5	900 - 1200	de 1000 à 2000
Composites de carbone	5 - 20	1800 - 2200	710
Noyaux de ferrite	1 - 5	5000	300
Fils de cuivre	398	8960	385
Cristaux de quartz	7 - 9	2648	745
Électrodes métalliques	fonction du métal	—	—
Circuits intégrés en silicium	$\sim 150$ fonction de T	2330	700
Antennes en métal	fonction du métal	—	—
Matériaux diélectriques	0.1 - 2	—	—
GaAs (Arséniure de gallium)	$\sim 55$ fonction de T	5317	340

TABLE 1.5 – Caractéristiques de différents matériaux utilisés dans le domaine de l'électronique : conductivité thermique  $\kappa$ , masse volumique  $\rho$ , et capacité thermique spécifique  $C_p$

7. Le GaAs est surtout utilisé dans les dispositifs à haute fréquence.

8. Le GaN est intéressant pour sa haute efficacité en termes de puissance.



## 1.7 Conclusion

Dans ce premier chapitre, la problématique industrielle a été présentée. Nous avons montré que l'analyse thermique est un enjeu important pour Thales, puisque le niveau de température, qui a tendance à augmenter avec la miniaturisation des composants, a un impact important sur leur efficacité et leur robustesse. L'estimation des niveaux de température s'effectue ainsi au moyen d'outils numériques qui permettent de prendre en compte une géométrie tridimensionnelle complexe pour de multiples scénarios d'utilisation. Pour chacune des nombreuses simulations effectuées jusqu'à présent, la thermo-dépendance des propriétés physiques des matériaux n'est pas systématiquement prise en compte, alors qu'un certain nombre de matériaux utilisés est sensible à ce paramètre. C'est actuellement un des objectifs de Thales qui souhaite dans ce travail se limiter à la non-linéarité liée à la conductivité thermique.

# Chapitre 2

## Les modèles thermiques pour l'électronique

### 2.1 Position du problème

On considère un composant électronique défini par le domaine  $\Omega$ , qui peut être constitué de plusieurs matériaux différents, comme illustré par la figure 2.1. Ce domaine est caractérisé par une masse volumique  $\rho(M)$  [ $kg \cdot m^{-3}$ ] pour  $M \in \Omega$ , une capacité thermique massique  $Cp(M)$  [ $J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}$ ] et une conductivité isotrope  $\kappa(M, T)$  [ $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ ] variant en fonction de la température. Dans  $\Omega$ , les phénomènes de conduction dans les solides et entre les solides sont prédominants. A sa frontière  $\partial\Omega$ , le système échange de la chaleur avec son environnement, qui peut être très hostile dans certains cas d'utilisation (fort ensoleillement, froid extrême, humidité). Ces échanges peuvent se manifester par des phénomènes de convection naturelle ou forcée avec l'air environnant à la température  $T_e$  via un coefficient d'échange global  $h$ , où via une densité de flux  $\varphi$ . Le domaine  $\Omega$  peut subir une dissipation de puissance volumique localisée  $\varpi(M, t)$ . Ces phénomènes de transferts peuvent être modélisés par les équations classiques de la conduction et de la convection :

$$\forall M \in \Omega, \quad \rho Cp \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa(T) \nabla T) + \varpi \quad (2.1)$$

$$\forall M \in \partial\Omega, \quad \kappa(T) \nabla T \cdot \underline{n} = h(T_e - T) + \varphi \quad (2.2)$$

L'objectif est ainsi d'obtenir la température en différents points du domaine étudié, telle que définie par ces équations. Différentes approches sont possibles.

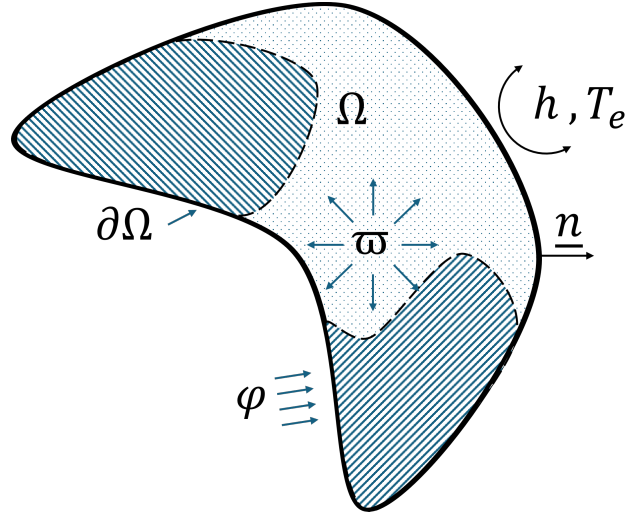


FIGURE 2.1 – Exemple de domaine  $\Omega$  pour l'équation de la chaleur

## 2.2 Les modèles numériques

Les modèles numériques sont des outils classiques en ingénierie, accessibles à tous via différents logiciels de simulation, qui offrent une grande facilité d'utilisation. Quelle que soit la méthode utilisée (volumes finis, différences finies, ou éléments finis), ces outils s'appuient sur la discrétisation spatiale du domaine étudié, c'est-à-dire sur un découpage en un grand nombre de petits domaines élémentaires, sur lesquels le problème thermique est approché. Prenons l'exemple d'une discrétisation par éléments finis. La formulation variationnelle faible<sup>1</sup> de ce problème en adoptant la notation générique  $f$  pour les fonctions d'essais s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall f \in H^1(\Omega), \quad & \int_{\Omega} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} f + \int_{\Omega} \kappa(T) \underline{\nabla} T \cdot \underline{\nabla} f + \int_{\partial\Omega} h T f \\ & = \int_{\Omega} \varpi f + \int_{\partial\Omega} (h T_e + \varphi) f \end{aligned} \quad (2.3)$$

Cette discrétisation permet d'exprimer l'équation (2.3) sous la forme d'un système matriciel :

$$\mathbf{C}\dot{T} + (\mathbf{K}(T) + \mathbf{H})T = \mathbf{U}_{\Pi}(t) + \mathbf{U}_{\Gamma}(t) \quad (2.4)$$

Ce problème matriciel est de dimension  $[N \times N]$ , où  $N$  est le nombre de degrés de liberté (DDL) du problème et qui dépend de la finesse du maillage spatial utilisé. Évidemment, plus

1. Cette formulation est qualifiée de faible car elle n'exige des fonctions de n'être qu'une fois dérivable, par opposition à la formulation forte qui impose des fonctions d'être deux fois dérivable (pour le Laplacien)

$N$  est grand, plus la solution se rapproche de la “réalité”, mais plus le temps de calcul est long.  $T$  est le vecteur des températures (l’inconnue). Les matrices  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{H}$  sont respectivement les matrices d’inertie et de convection. La matrice  $\mathbf{K}(T)$  est la matrice de diffusion de la chaleur, qui dépend de la température puisqu’elle intègre la conductivité thermique. Le vecteur de dissipation de puissance interne  $\mathbf{U}_\Pi$  et le vecteur des sollicitations aux frontières  $\mathbf{U}_\Gamma$  peuvent être constants ou varier dans le temps en fonction des conditions spécifiques.

Bien évidemment la résolution d’un tel problème nécessite une discrétisation temporelle qui selon le schéma utilisé (implicite, explicite, Euler d’ordre  $n$ , à pas de temps constant ou variable) entraîne un nombre de calculs plus ou moins important.

Pour peu que les discrétisations spatiale et temporelle soient suffisamment fines, ces outils amènent à des résultats très précis.

Un exemple de ce type d’utilisation est présenté dans les travaux de Baïri *et al.* [5]. L’étude se concentre sur un assemblage équipé d’un boîtier QFN64 soumis à de la convection naturelle, où la méthode des volumes finis est utilisée pour déterminer la distribution de température dans des conditions variées, incluant l’inclinaison du PCB et la puissance générée par le dispositif. Ces résultats sont fondamentaux pour garantir la fiabilité des assemblages électroniques, en veillant à ce que la température reste dans les limites acceptables pour éviter dysfonctionnements ou destructions. Mais dès lors que la géométrie est complexe, le nombre de DDL devient important (certains cas entraînent plusieurs centaines de milliers de DDL), et de telles résolutions nécessitent des moyens de calculs importants pour éviter des temps de calculs trop longs.

Dans l’étude présentée ici, ces modèles appelés “modèles complets” seront considérés comme des références.

## 2.3 Les modèles de résistances

À l’inverse des modèles numériques décrits précédemment, le milieu industriel cherche à utiliser des outils simples et rapides, même au prix d’une approximation des résultats. Ainsi, différents modèles simples fondés sur la description de résistances thermiques sont couramment utilisés dans le milieu de l’électronique.

### 2.3.1 Le modèle nodal

La technique de la réduction nodale est aussi connue sous le nom de réduction par réseaux RC. Prenons le cas d’un boîtier homogène pour lequel nous souhaitons déterminer la température interne  $T_J$ . Ce boîtier échange thermiquement avec son environnement extérieur,

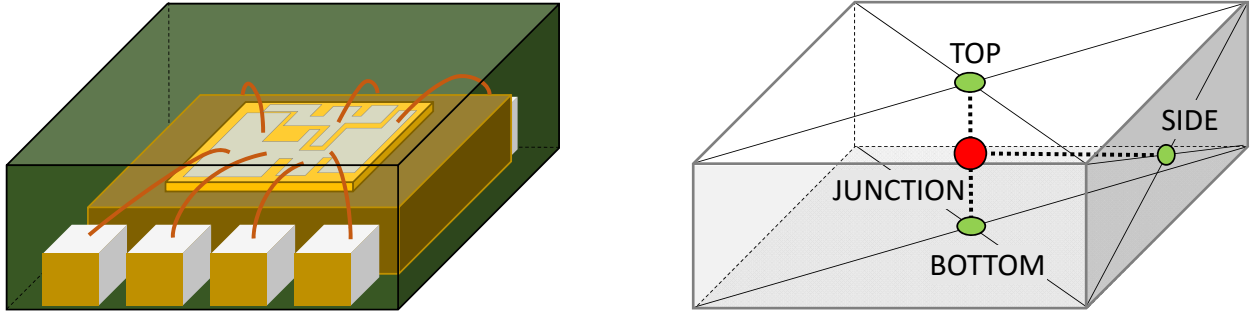


FIGURE 2.2 – Exemple de réseau nodal pour un composant dans un boîtier DFN8

maintenu à une température  $T_e$ , tandis qu'à l'intérieur, une source de chaleur  $\Phi$  est générée. Une approche simple est de diviser le boîtier en zones à température constante, représentées par des nœuds. Dans cette illustration, un nœud interne représente le volume du boîtier, tandis qu'un nœud est attribué à chaque face (pour simplifier, nous assumons une température uniforme sur toutes les faces latérales), comme le montre le schéma de droite de la figure 2.2 (figure issue de [6]).

Les réseaux nodaux s'appuient sur la comparaison entre les phénomènes thermiques et électriques. Le flux thermique  $\Phi$  entre deux nœuds aux températures  $T$  et  $T + \Delta T$  s'écrit  $\Phi = \frac{\Delta T}{R}$ , où  $R$  représente la résistance thermique associée. Les flux thermiques entre les différents nœuds peuvent être représentés par le schéma illustré sur la figure 2.3a. En établissant un bilan des flux thermiques, où la somme totale des flux reçus par chaque nœud s'équilibre à zéro, on peut déduire les températures via un système matriciel simple :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_{JT}} + \frac{1}{R_{JB}} + \frac{1}{R_{JS}} & -\frac{1}{R_{JT}} & -\frac{1}{R_{JB}} & -\frac{1}{R_{JS}} \\ -\frac{1}{R_{JT}} & \frac{1}{R_{JT}} + \frac{1}{R_{TE}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_{JB}} & 0 & \frac{1}{R_{JB}} + \frac{1}{R_{BE}} & 0 \\ -\frac{1}{R_{JS}} & 0 & 0 & \frac{1}{R_{JS}} + \frac{1}{R_{SE}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_J \\ T_T \\ T_B \\ T_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi \\ \frac{T_E}{R_{TE}} \\ \frac{T_E}{R_{BE}} \\ \frac{T_E}{R_{SE}} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

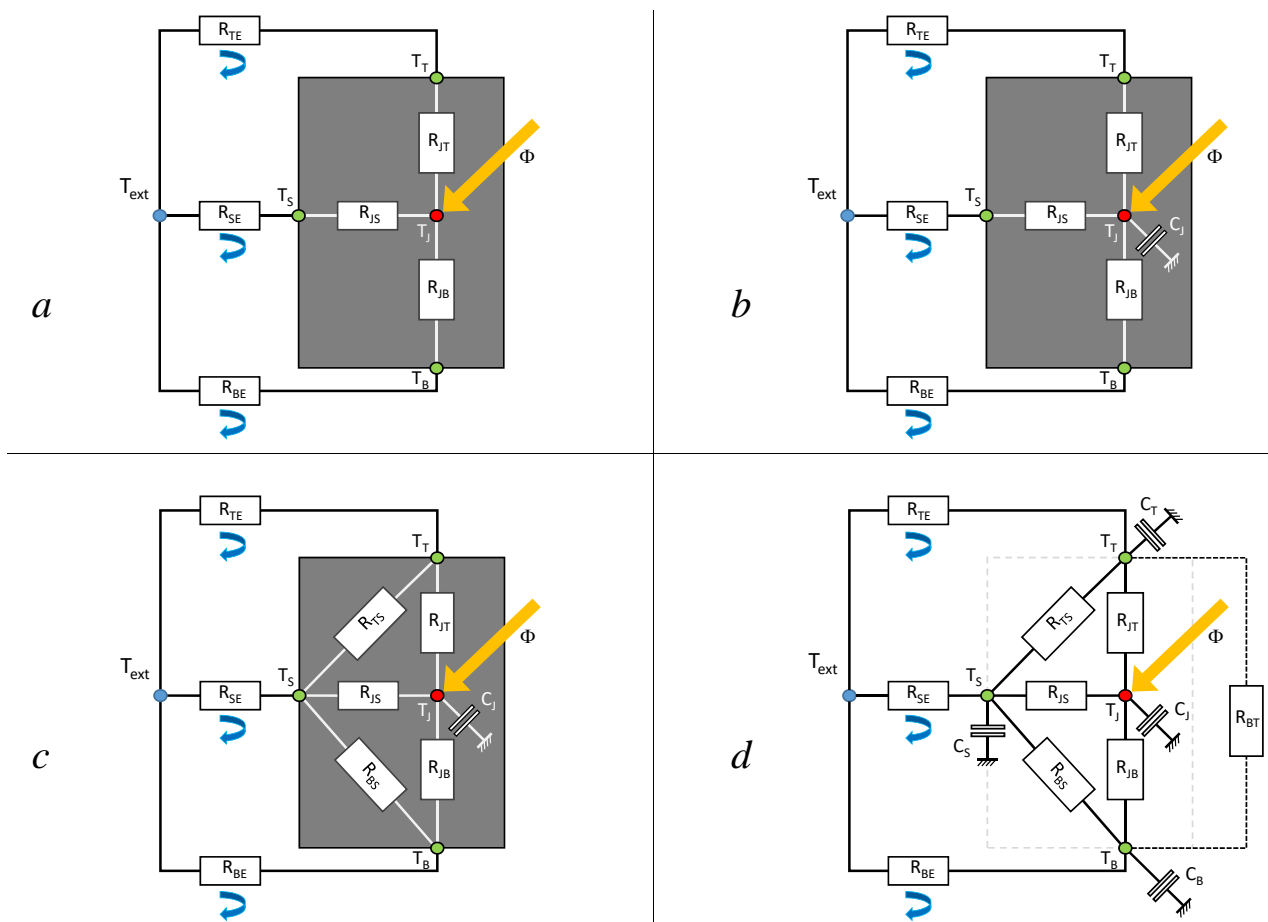


FIGURE 2.3 – Exemples de réseaux nodaux pour un même composant : (a) modèle stationnaire (sans inertie) issu d’une analyse physique par volumes finis ; (b) modèle dynamique (l’inertie est représentée par une capacité sur le nœud interne  $T_J$ ) issu d’une analyse physique par volumes finis ; (c) modèle dynamique qui prend en compte la conduction entre les faces : la détermination des résistances thermique entre les faces est délicate car elle fait intervenir des phénomènes tridimensionnels ; (d) modèle dynamique dont les résistances thermiques et les capacités doivent être identifiées (par exemple à l’aide d’un algorithme génétique) : on s’éloigne d’une interprétation physique directe des résistances et des capacités, en particulier la résistance qui relie les nœuds “top” ( $T_T$ ) et “bottom” ( $T_B$ ) directement sans passer par le nœud central ne respecte pas les lois du transfert de chaleur par conduction thermique (diffusion). De même une surface n’a théoriquement pas de capacité thermique.

Pour rendre ce réseau plus réaliste, on peut envisager une conduction entre les faces latérales et les extrémités supérieure et inférieure. On pourrait également concevoir une liaison directe entre les nœuds des deux extrémités via une résistance, bien que cette approche ne soit pas physiquement intuitive (comme le montre la figure 2.3c).

Lors de la modélisation de phénomènes en régime transitoire, on introduit une capacité, comme

illustré dans la figure 2.3b. La variation d'énergie du domaine, représentée par  $\rho C_p V \frac{\partial T_I}{\partial t}$ , correspond à la totalité des flux thermiques reçus. Cela amène à la formulation matricielle donnée par (2.6) :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_{JT}} + \frac{1}{R_{JB}} + \frac{1}{R_{JS}} & -\frac{1}{R_{JT}} & -\frac{1}{R_{JB}} & -\frac{1}{R_{JS}} \\ -\frac{1}{R_{JT}} & \frac{1}{R_{JT}} + \frac{1}{R_{TE}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_{JB}} & 0 & \frac{1}{R_{JB}} + \frac{1}{R_{BE}} & 0 \\ -\frac{1}{R_{JS}} & 0 & 0 & \frac{1}{R_{JS}} + \frac{1}{R_{SE}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_J \\ T_T \\ T_B \\ T_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi \\ \frac{T_E}{R_{TE}} \\ \frac{T_E}{R_{BE}} \\ \frac{T_E}{R_{SE}} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Ainsi, plus les réseaux nodaux se complexifient pour s'approcher de la réalité, plus l'évaluation des paramètres caractéristiques (les résistances thermiques) est difficile.

### 2.3.2 Modèles CTM et DCTM

Pour des structures simples, telles que des barres ou des murs, dont les caractéristiques physiques sont bien définies, les résistances peuvent être évaluées de manière analytique. Cependant, face à un domaine non-homogène ou à une structure de forme complexe, comme un composant électronique, l'approche analytique pour établir un réseau physique devient irréalisable. Dans ces cas, la conception du réseau ainsi que la détermination des résistances nécessitent des méthodes alternatives. Cette démarche peut être réalisée via des simulations numériques, ou grâce à des expérimentations, comme c'est le cas pour les réseaux suivant le modèle Cauer-Foster [7]. C'est le fondement de la stratégie DELPHI, une initiative européenne menée entre 1993 et 1996 par six entités collaboratrices. Leur objectif était de développer une procédure pour concevoir des modèles simplifiés, sous le vocable CTM (Compact Thermal Models), initialement pour la caractérisation du comportement stationnaire [8, 9, 10], puis étendue aux régimes instationnaires (Modèles DCTM : Dynamic Compact Thermal Model) [11, 12]. Ces modèles sont élaborés à partir de simulations utilisant les méthodes des différences finies, des éléments finis ou des volumes finis.

Cette approche a été adoptée en 2008 par le JEDEC, afin d'établir un guide pour la création de modèles compacts [1]. Ce manuel établit ainsi quatre exigences essentielles qu'un modèle compact doit satisfaire pour être considéré comme adéquat :

- La complexité doit être limitée : un réseau ne doit pas dépasser le nombre maximal de

10 nœuds ;

- Le modèle doit être indépendant des conditions aux limites assurant une estimation précise de la température de jonction<sup>2</sup> dans 38 scénarios prédéfinis ;
- Il devrait être possible de partager les modèles via un format de fichier universel ;
- Une documentation complète doit accompagner le modèle, et celui-ci doit être accessible au grand public.

Le choix du nombre de scénarios, destiné à couvrir toutes les conditions de troisième espèce que le composant pourrait rencontrer, varie selon les études. Par exemple, à l'issue du programme DELPHI, Thales a retenu 49 scénarios<sup>3</sup> pour élaborer ses modèles compacts.

Des simulations, qui reflètent ces scénarios, sont réalisées sur les composants électroniques à simplifier en utilisant des modèles détaillés. Les valeurs des résistances (et capacités) sont déterminées afin que le CTM (ou DCTM) imite fidèlement le comportement de ce composant lors de ces simulations. Cette détermination est effectuée en optimisant une fonction objectif spécifique.

Dans l'approche adoptée par Thales, la structure du réseau est simplifiée : tous les nœuds sont considérés comme inter-connectés. Pour déterminer les résistances du réseau, une méthode introduite par [13] (mais limitée aux composants mono-puce) et approfondie par Dia [14] emploie des algorithmes génétiques. Cette méthode offre l'avantage d'élaborer rapidement un réseau efficace. Dia a non seulement raffiné cette technique, qui est désormais intégrée dans les procédures industrielles de THALES pour la réduction des composants, mais il l'a aussi adaptée aux composants multicouches. De plus, il a introduit la capacité de segmenter les faces supérieure et inférieure du composant en deux zones distinctes : une zone interne ("inner") et une zone externe ("outer", comme illustré par la figure 2.4).

Les modèles CTM et DTCM élaborés par Dia affichent une divergence inférieure à 10% concernant les températures de jonction (température interne du composant) et les flux thermiques en comparaison avec les modèles détaillés. Cette performance est maintenue aussi bien en régime permanent qu'en régime transitoire, notamment lors des scénarios d'activation et désactivation des puces. De plus, cette approche offre un avantage significatif en termes de temps de calcul, étant donné que chaque composant est représenté par une dizaine de nœuds seulement.

---

2. La température de jonction correspond à la température relevée dans la région active du composant (le silicium).

3. Thomson-CSF, précurseur de Thales, était l'un des participants du programme DELPHI.



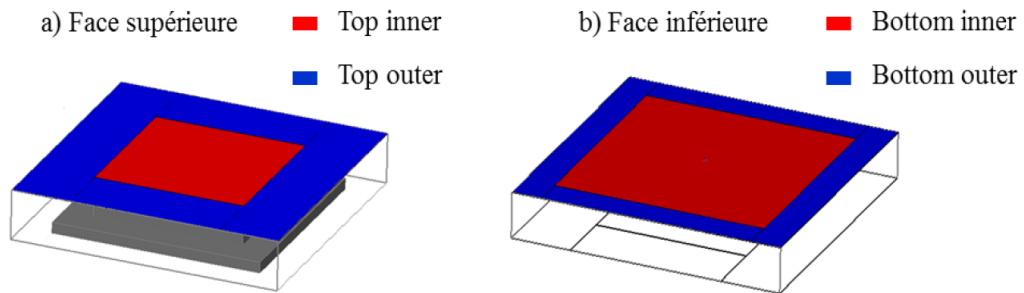


FIGURE 2.4 – Surfaces “inner” et “outer” des faces inférieure et supérieure

Cependant, cette méthode propose un nombre restreint d’observables. Pour l’ingénieur en charge de l’analyse thermique d’un équipement, ces températures ponctuelles peuvent être suffisantes. Néanmoins, dans certaines situations, il est essentiel d’avoir une vue complète du champ de température, par exemple pour évaluer les déformations dues à la chaleur ou pour identifier la température critique d’un composant dont l’emplacement n’est pas prédéterminé.

## 2.4 Méthode des quadripôles

La méthode des quadripôles est une méthode explicite qui se base sur les solutions analytiques des problèmes de diffusion de la chaleur pour des géométries simples, via des techniques de séparation des variables de transformées intégrales [15].

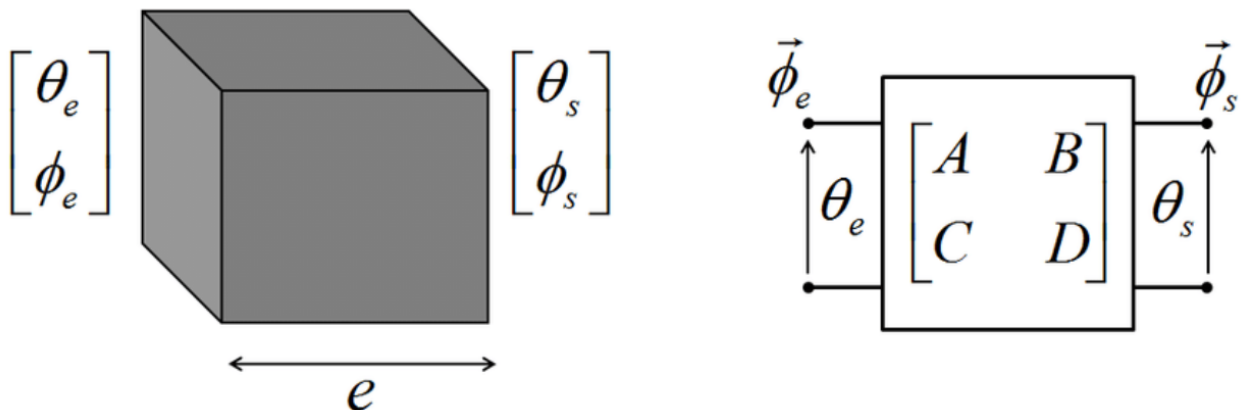


FIGURE 2.5 – Illustration de la méthode des quadripôles thermiques pour un élément de matériau cubique avec les grandeurs de température et de flux de chaleur à l’entrée  $(\theta_e, \Phi_e)$  et à la sortie  $(\theta_s, \Phi_s)$ . La matrice de transmission thermique  $[A \ B; C \ D]$  caractérise les relations thermiques à travers le matériau.

La figure 2.5 (issue de [16]) illustre l’application de la méthode des quadripôles thermiques

à un élément de matériau cubique, avec une épaisseur  $e$  représentant la distance de propagation de la chaleur. Les grandeurs  $\theta_e$  et  $\Phi_e$  désignent respectivement la température et le flux de chaleur à l'entrée du matériau, tandis que  $\theta_s$  et  $\Phi_s$  représentent ces mêmes grandeurs à la sortie. La matrice de transmission thermique  $[A \ B; C \ D]$  définit les relations entre les entrées et les sorties. Les coefficients  $A$  et  $D$  sont liés aux conditions de température aux limites, et  $B$  et  $C$  aux flux de chaleur. Cette matrice est essentielle pour modéliser la façon dont les températures et les flux de chaleur d'un côté du matériau affectent ceux de l'autre côté, permettant la prédiction précise du comportement thermique.

Elle est principalement adaptée pour modéliser et analyser le transfert de chaleur dans des structures simples ou des systèmes où les relations linéaires sont importantes, comme les milieux multicouches et les géométries symétriques [17, 18, 19]. Cette méthode est particulièrement appréciée pour sa capacité à décomposer un système complexe en segments plus simples [20], rendant l'analyse plus accessible et moins gourmande en ressources par rapport aux méthodes numériques.

Dans le domaine de l'électronique, elle a fait l'objet de différents développements pour des configurations sous forme d'empilement de couches pour des composants électroniques de puissance [21] et plus récemment pour la modélisation de champs de température dans les MOSFET [22].

## 2.5 Méthode de réduction modale

### 2.5.1 Principe

Dans son ouvrage de 1822, *Théorie analytique de la chaleur* [23], Joseph Fourier introduit une stratégie de résolution pour l'équation de la chaleur. Il utilise la méthode de séparation des variables de temps et d'espace, qui permet d'exprimer la température sous la forme  $T(M, t) = f(t) \cdot g(M)$ . En résolvant les équations associées à  $f$  et  $g$ , il aboutit à une représentation de  $T$  sous forme de série de Fourier.

La méthode modale est une extension de la méthode de séparation des variables. Dans cette perspective, l'objectif est d'identifier un ensemble de fonctions qui servira de base pour décomposer la température. Autrement dit, nous visons à exprimer  $T$  de la manière suivante :

$$T(M, t) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i(t) V_i(M). \quad (2.7)$$

Si l'ensemble  $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  est connu, les états d'excitation des modes  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  deviennent les inconnues.

L'objectif de la réduction modale est d'utiliser une base réduite, plutôt que la base complète. Cela implique que la température est approchée par :

$$\tilde{T}(M, t) = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_i(t) \tilde{V}_i(M), \quad (2.8)$$

où les états  $\tilde{x}_i$  sont les inconnues.

Sous forme discrète, en notant  $T$  le vecteur des températures aux nœuds du maillage, la forme matricielle est exprimée comme :

$$T = \tilde{\mathbf{V}} \tilde{X}. \quad (2.9)$$

avec  $\tilde{\mathbf{V}}$  la matrice des modes de la base réduite  $\{\tilde{V}_i\}_{1 \leq i \leq \tilde{N}}$ .

En substituant  $T$  dans (2.4) par cette expression, on obtient :

$$\mathbf{C} \tilde{\mathbf{V}} \dot{\tilde{X}} + (\mathbf{K}(T) + \mathbf{H}) \tilde{\mathbf{V}} \tilde{X} = U \quad \text{avec} \quad U = U_{\Pi} + U_{\Gamma} \quad (2.10)$$

Une projection de Galerkin (c'est-à-dire une multiplication par  $\tilde{\mathbf{V}}^T$ ), conduit à la forme réduite de l'Eq. (2.4) :

$$\tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{V}} \dot{\tilde{X}} + \tilde{\mathbf{V}}^T (\mathbf{K}(T) + \mathbf{H}) \tilde{\mathbf{V}} \tilde{X} = \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{U}. \quad (2.11)$$

En posant les matrices réduites  $\mathbf{C}_r = \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{V}}$ ,  $\mathbf{A}_r(T) = \tilde{\mathbf{V}}^T (\mathbf{K}(T) + \mathbf{H}) \tilde{\mathbf{V}}$  et  $\mathbf{U}_r = \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{U}$ , le système modal réduit est alors exprimé comme

$$\mathbf{C}_r \dot{\tilde{X}} + \mathbf{A}_r(T) \tilde{X} = \mathbf{U}_r \quad (2.12)$$

La dimension du problème est donc réduite de  $N$  à  $\tilde{N}$  inconnues ( $\dim(\mathbf{C}_r) = (\tilde{N} \times \tilde{N})$ ). Bien entendu, cette simplification induit une certaine perte de précision, qu'il faudra évaluer. Lorsque l'on ne s'intéresse pas à l'intégralité du champ spatio-temporel, mais à un nombre limité d'observables  $Y$  ceux-ci seront alors directement reliés aux états d'excitation :

$$\begin{cases} Y = \mathbf{G}T = \mathbf{G} \tilde{\mathbf{V}} \tilde{X} \\ Y = \mathbf{G}_r \tilde{X} \end{cases} \quad (2.13)$$

## 2.5.2 Les différentes techniques pour obtenir les modes

### 2.5.2.1 Proper Orthogonal Decomposition

La base modale réduite par POD est obtenue de façon à approcher au mieux en moyenne un ensemble de données  $T(M, t)$  du problème. On a ainsi à résoudre l'équation :

$$\langle (\mathbf{V}_i | \mathbf{T}) \mathbf{T} \rangle = \lambda_i \mathbf{V}_i,$$

où  $(\cdot | \cdot)$  est le produit scalaire de l'espace de travail (généralement le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$ ) et  $\langle \cdot \rangle$  est appelé l'opérateur moyenne qui dépend la méthode de POD utilisée.

Il existe deux approches majeures : l'approche "traditionnelle", proposée par Lumley [24], et l'approche "snapshot". Dans la première, l'opérateur moyenne est défini comme une moyenne temporelle :

$$\langle u \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau u dt. \quad (2.14)$$

La réalisation  $\mathbf{T}$  peut alors être décomposée sur ces modes :

$$\mathbf{T}(M, t) = \sum_{i \geq 0} x_i(t) V_i(M). \quad (2.15)$$

La méthode "snapshot", introduite par Sirovich [25], considère que seulement  $K$  réalisations (que l'on appelle "snapshots")  $\{\mathbf{T}(M, t_i)\}_{1 \leq i \leq K}$  suffisent pour décrire le système étudié.

Dans ce contexte, l'opérateur de moyenne est conçu comme une moyenne spatiale :

$$\langle u \rangle = \int_{\Omega} u d\Omega. \quad (2.16)$$

La méthode POD "snapshot" vise à déterminer les coefficients  $x(t_i)$ ,  $1 \leq i \leq K$  tels que

$$V(M) = \sum_{i=1}^K x(t_i) \mathbf{T}(M, t_i). \quad (2.17)$$

On est alors confronté à un autre problème de valeurs propres, de dimension  $K$ , qu'il faut résoudre :

$$\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathcal{C}_{ik} x_k = \lambda x_i \quad \forall 1 \leq i \leq K, \quad (2.18)$$

avec  $\mathcal{C}_{ik} = (\mathbf{T}(t_i) | \mathbf{T}(t_k))$ .

La POD est ainsi une méthode "a posteriori" puisqu'elle nécessite la connaissance de cer-

taines valeurs de température, qui sont récoltées soit par simulations préalables, soit par mesure. La POD est optimale au sens énergétique, c'est-à-dire que les modes caractérisés par les plus grandes valeurs propres sont ceux qui ont le plus de poids dans l'approximation modale. Cette méthode est ainsi peu intrusive en termes de programmation, puisque l'obtention de la base modale s'effectue simplement par calcul des premiers modes de l'équation (2.5.2.1), et que le modèle réduit est très facilement construit à partir de la relation matricielle du problème discret de l'équation de la chaleur (Eq. (2.9) à (2.12)).

Développée à l'origine pour des problèmes de mécanique des fluides [26], et de traitement d'images [27], cette méthode a montré son efficacité pour des problèmes thermiques [28],[29],[30].

Pour des composants électroniques, Venters *et al.* [31] montrent ainsi qu'il suffit de cinq modes pour simuler le comportement d'un semi conducteur en 2D. Dans l'étude de la simulation de la structure ailetée tridimensionnelle d'un transistor par Jia *et al.* [32], moins de dix modes permettent d'atteindre des résultats satisfaisants, alors que le nombre de degrés de liberté du modèle éléments finis atteint 2 millions de nœuds. Cheng *et al.* [33] mènent une étude du même type avec des résultats similaires.

### 2.5.2.2 Proper generalized decomposition

Cette méthode est une extension de la méthode LATIN (LArge Time INcrement method) introduite par Ladèveze dans [34]. Elle est basée sur une extension de la méthode de séparation des variables, qui s'écrit :

$$T(y_1, y_2, \dots, y_d) = \sum_{i=1}^n \prod_{j=i}^d f_i^j(y_j) \quad (2.19)$$

où  $y_j$  peut être une coordonnée spatiale, le temps, ou un paramètre non-linéaire du problème posé.

Cette méthode consiste en une technique itérative d'enrichissement de la base modale : en considérant le problème simple  $T(y, t)$ , son approximation supposée connue à l'itération  $n$  s'écrit :

$$T^n(y, t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) f_i(y) \quad (2.20)$$

L'expression de la température à l'itération suivante s'écrit :

$$T^{n+1}(y, t) = T^n(y, t) + x_{n+1}(t) f_{n+1}(y) \quad (2.21)$$

En implantant cette formulation dans l'équation physique du problème et par projection de l'expression obtenue sur chacune des inconnues recherchées, on obtient un ensemble d'équations non-linéaires à résoudre (par exemple par la méthode du point fixe).

Cette méthode est une méthode "a priori" car elle ne nécessite pas la connaissance préalable de la température. Sa formulation Eq. (2.19) la rend directement adaptée aux problèmes non-linéaires. Par contre son implantation est lourde et on la considère comme très intrusive. La PGD a récemment été appliquée pour des problèmes de thermo-mécaniques sur des composants électroniques [35].

### 2.5.2.3 La méthode AROMM

Contrairement aux méthodes précédentes, la méthode AROMM a été développée spécifiquement pour les problèmes thermiques. La méthode AROMM (Amalgamated Reduced Order Modal Model) propose un calcul d'un grand nombre de modes à partir de la résolution d'un problème aux valeurs propres directement associé au problème physique. Cette base dite complète est alors réduite par une technique d'amalgame des modes entre eux, en fonction de données issues d'une ou plusieurs simulations de référence. Elle a été appliquée à différents types de problèmes thermiques, [36] [37] [38], dont celui de l'électronique, où Grosjean *et al.* [39] ont développé une technique de décomposition de domaine qui permet de construire une bibliothèque de modèles réduits (un par composant plus un pour le circuit imprimé) qui permet la reconstruction du comportement thermique d'une carte électronique.

Cette technique est utilisée dans la suite de la thèse, les chapitres suivants préciseront le formalisme utilisé.

### 2.5.2.4 Méthode MIM

La MIM (Méthode d'Intégration Modale) a été spécifiquement conçue pour aborder les problèmes thermique. La MIM adopte une approche distincte des méthodes traditionnelles. Plutôt que de calculer les modes à partir d'un problème aux valeurs propres, elle identifie directement le modèle modal, c'est-à-dire les matrices  $\mathbf{A}_r$ ,  $\mathbf{B}_r$ ,  $\mathbf{C}_r$  et  $\mathbf{G}$  telles que définies par l'équation (2.12) [40, 41]. Cette identification repose sur des données, qu'elles soient expérimentales ou numériques. L'avantage principal de la MIM est son indépendance vis-à-vis d'un modèle préétabli, que ce soit en termes de conditions aux limites ou de propriétés physiques [42, 43, 44]. Cependant, elle a une limitation : si les conditions aux limites du système changent, le modèle identifié ne pourra pas s'adapter en conséquence.

Cette méthode est particulièrement adaptée aux techniques inverses pour l'identification de paramètres [45, 46]. Aucune étude ne porte sur des composants électroniques.

### 2.5.2.5 Méthode MPMM

Codecasa *et al.* [47, 48, 49, 50, 51] ont élaboré une approche nommée MPMM (Multi Points Moments Matching), spécifiquement conçue pour aborder l'analyse des composants électroniques. Cette technique repose sur l'utilisation de l'espace de Laplace, un outil mathématique puissant pour traiter les systèmes complexes, où les modes sont dérivés en reliant les paramètres de la série de Taylor de l'impédance électrique des composants avec ceux de l'impédance réduite. Cette approche permet une modélisation plus précise et une meilleure compréhension des interactions électriques au sein des composants. Par exemple, cette méthode peut être appliquée pour analyser la réponse d'un microprocesseur à différentes fréquences de fonctionnement, en tenant compte de la variation des impédances internes.

Lorsque les composants électroniques sont constitués de multiples sources, Codecasa et son équipe ont introduit une technique de décomposition de domaine sophistiquée [51]. Cette méthode divise le composant en plusieurs sous-domaines, chaque zone faisant l'objet d'une réduction spécifique selon le principe MPMM. Cette stratégie permet de gérer la complexité et d'améliorer la précision de l'analyse en simplifiant le problème global en parties plus petites et plus faciles à étudier. Cette technique est particulièrement utile pour des dispositifs tels que les circuits intégrés multi-couches, où différents niveaux d'interaction électrique peuvent être isolés et étudiés séparément.

Cette technique permet de prédire l'erreur induite par cette réduction, comme illustré dans leurs publications ultérieures [52]. Cette capacité d'estimation de l'erreur est fondamentale pour assurer l'exactitude et la fiabilité des modèles développés, fournissant ainsi un niveau de confiance important dans les résultats obtenus. Par exemple, en analysant un amplificateur opérationnel, cette méthode permettrait de prévoir avec précision comment les simplifications du modèle influencent la performance globale de l'amplificateur.

Enfin, la méthode MPMM est utilisée pour accélérer significativement la réalisation de nombreuses simulations, comme démontré par Rogie *et al.* [53]. Ces simulations vont alors servir à la création de modèles compacts de type RC, qui sont ensuite utilisés comme références dans la conception et l'optimisation des composants électroniques.

## 2.5.3 Prise en compte de la variation de la conductivité avec la température

Tous les travaux cités précédemment ont toujours considéré le problème thermique comme linéaire, ce qui n'est pas exact dans la réalité, compte tenu de forte variation de la conductivité thermique du silicium avec la température.

Bien que les modèles modaux ne soient pas incompatibles avec cette contrainte, cette dépendance de la conductivité avec la température nécessite un aller-retour systématique entre l'espace modal où est résolu le problème matriciel et l'espace physique des températures dans lequel s'effectue l'estimation régulière des propriétés thermiques. Ceci nécessite de recalculer à chaque instant les matrices thermo-dépendantes du problème réduit. Un certain nombre d'études ont ainsi permis de montrer la perte du gain en temps calcul engendrée par cette contrainte lorsque l'on utilise directement les techniques précédentes : Fic *et al.* [54] utilisent la technique de la POD pour une configuration 2D dans le cas d'une dépendance linéaire de la conductivité thermique, et montrent que l'obtention d'une bonne précision nécessite un plus grand nombre de modes que pour un problème linéaire, et un gain en temps de calcul limité (de l'ordre de 4). Quéméner *et al.* [55] proposent l'utilisation de la technique AROMM dans le cas d'un processus de refroidissement d'une pièce moulée, problème dans lequel existe une dépendance avec la température fortement non linéaire pour la capacité thermique, la conductivité thermique et le coefficient d'échange extérieur. Les résultats montrent la bonne adéquation de la base de type AROMM pour ce problème, mais là encore une diminution du gain en temps de calcul est observée (gain inférieur à 10 pour une précision satisfaisante). En ce qui concerne la PGD, les observations sont les mêmes : dans son étude qui concerne un problème thermique non linéaire sur une simple géométrie de type coque, Chinesta *et al.* [56] n'obtiennent pas de gain en temps de calcul. Pour une application plus complexe sur un procédé de fabrication additive faisant intervenir une forte non linéarité sur la conductivité et la capacité calorifique, Favoreto *et al.* [57] présentent un gain de 50 à 10 selon la précision attendue (respectivement de 8% et 1%).

Différentes études ont alors été effectuées pour améliorer ces temps de calculs. Une première solution consiste à intégrer la formulation modale dans la loi de thermo-dépendance de la conductivité lorsque celle-ci est linéaire. C'est le cas de Girault *et al.* [58], qui proposent un modèle réduit de type MIM pour une configuration 3D, dans laquelle ils cherchent à obtenir la température pour 3 points du domaine (dans un but de problématique inverse pour identifier un flux de chaleur). Cette configuration est reprise par Balima *et al.* [59] qui comparent à précision équivalente les résultats de la MIM (gain en temps de calcul de 50 à 100) avec ceux de la POD (gain de 10 à 15).

Récemment cette idée a été étendue et généralisée sous le nom de Lifting Transformation [60], de manière à exprimer les différentes non-linéarités d'un problème sous forme polynomiale. L'exploitation de cette formulation permet d'obtenir un modèle plus structuré via l'introduction de variables auxiliaires. Une décomposition orthogonale de type POD est ap-



pliquée aux modèles, produisant un modèle d'ordre réduit pour lequel tous les opérateurs d'ordre réduit peuvent être pré-calculés. L'application proposée concerne la résolution d'un problème de FitzHugh–Nagumo utilisé pour décrire la dynamique du neurone.

D'autres approches sont développées dans le cas de la POD. D'une part une technique dite d'hyper réduction est basée sur l'hypothèse qu'il est possible d'estimer les non-linéarités sur des sous-espaces de dimensions bien plus petites que l'espace initial. Cette technique rajoute ainsi une estimation supplémentaire mais maintient la généralité de la non-linéarité. Plusieurs modèles ont ainsi vu le jour tels que les méthodes d'interpolation empirique (EIM ou DEIM). Chaturantabut *et al.* [61] reprennent le problème de FitzHugh–Nagumo et affichent un gain en temps de calcul supérieur à 1000. Farhat *et al.* [62] traitent diverses applications mécaniques pour lequel ils affichent des gains en temps de calcul supérieurs à 100. Plus récemment, Grimberg *et al.* [63] et Tezaur *et al.* [64] présentent des problèmes d'écoulement de fluides avec cette fois des gain en temps de calcul supérieurs à 1000. Dans le domaine de la thermique, Ryckelynck [65] propose un modèle APHR (A Priori Hyper Reduction), qui permet de réduire le nombre de degrés de liberté d'un facteur 1000 dans le cas d'une géométrie 3D caractérisée par une conductivité thermique et une capacité volumique linéaires par morceaux.

Enfin, dans le cadre de la réduction de modèles spécifiques aux composants électroniques, Codecasa *et al.* ont étendu leur technique de MPMM : À partir de la loi spécifique de la dépendance thermique de la conductivité pour les semi-conducteurs, un changement de paramètre permet une double formulation modale et est associée à l'utilisation des séries de Volterra (généralisation des séries de Taylor). Différentes études utilisent cette technique pour plusieurs types de composants : un module UTCS (Ultra-Thin Chip Stacking) à deux puces empilées [66], un MOSFET de puissance en carbure de silicium relié à son boîtier en cuivre [67] et un module UTCS (Ultra-Thin Chip Stacking) à trois puces empilées muni de son réseau vertical de "vias" en cuivre [68]. Pour toutes ces études, la construction du modèle compact dynamique nécessite un temps CPU environ inférieur d'un ordre de grandeur au temps nécessaire à une unique simulation transitoire d'un problème non linéaire par la méthode des éléments finis 3D. Par la suite le calcul est quasi immédiat. Cette même technique est également utilisée pour simuler le comportement d'un système à induction [69] pour lequel la non-linéarité tient au couplage entre les phénomènes thermique et électromagnétique. Dans ce cas, la température mais également le champ magnétique et le courant induit s'expriment sous forme d'une représentation modale.

## 2.6 Conclusion

Les modèles numériques traditionnels de type éléments finis permettent de déterminer précisément les champs de température pour n'importe quelle géométrie, sollicitation thermique, avec prise en compte des non-linéarités (et donc bien évidemment de la dépendance de la conductivité avec la température). Par contre ils peuvent nécessiter des moyens et des temps de calculs importants, incompatibles avec des objectifs industriels.

Les modèles analytiques sont au contraire parfaitement adaptés à ces objectifs, mais étant limités à des géométries simples et des paramètres fixes, leur utilisation engendre un degré d'imprécision important.

Les techniques de réduction modale sont un entre-deux ; elles permettent de respecter la géométrie avec des temps de calcul peu importants.

La prise en compte de la non-linéarité liée à la conductivité ainsi que les variations importantes de scénario pour un même modèle réduit restent des difficultés plus ou moins simples à lever selon la technique considérée.

Dans la suite, on choisit d'utiliser la méthode de réduction de type AROMM (Amalgam Reduced Order Modal Model) pour l'appliquer à la problématique.

# Chapitre 3

## Adaptation de la méthode AROMM à la résolution de problèmes non-linéaires

Le chapitre précédent a présenté les différentes techniques utilisées pour l'estimation des niveaux de température dans les composants électroniques. Nous avons ainsi montré que les modèles réduits modaux constituent une solution performante afin d'allier calculs rapides et connaissance complète du champ de température sur une géométrie réelle. Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur la technique AROMM et son adaptation à la problématique de la dépendance des propriétés des matériaux à la température.

### 3.1 Calcul d'une base modale réduite amalgamée

Comme déjà dit auparavant, cette méthode s'appuie sur la projection du champ de température recherché sur une base modale de taille réduite  $\tilde{\mathbf{V}}$  connue (Eq. (2.8)). Cette base réduite s'obtient en deux étapes qui sont détaillées dans les prochains paragraphes.

#### 3.1.1 Calcul d'une base complète dans l'espace de Hilbert $H^1$

L'objectif est ici de définir un problème aux valeurs propres associé au problème de transferts thermiques. Les vecteurs propres solutions de ce problème doivent garantir un strict respect de la relation suivante :

$$T(M, t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) V_i(M). \quad (3.1)$$

et ceci quelle que soit la nature des sollicitations subies par le domaine considéré (conditions aux limites et dissipation de puissance interne), et quelles que soient les propriétés thermiques de ce domaine (qui peuvent varier en fonction de la température).

### 3.1.1.1 Les modes de branche

Les premiers travaux de réduction modale [70, 71, 72, 73] considéraient un problème aux valeurs propres, appelé le problème de Fourier, qui reprenait l'intégralité des spécificités du problème thermique.

Ainsi pour un problème physique défini par :

$$\begin{cases} \Omega & \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \underline{\nabla} \cdot (\kappa \underline{\nabla} T) + \varpi \\ \partial\Omega & \kappa \underline{\nabla} T \cdot \underline{n} = -h T \end{cases} \quad (3.2)$$

il était associé le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} \Omega & -\underline{\nabla} \cdot (\kappa_o \underline{\nabla} V_i^N) = \lambda_i^N \rho C_p V_i^N, \\ \partial\Omega & \kappa_o \underline{\nabla} V_i^N \cdot \underline{n} = -h V_i^N \end{cases} \quad (3.3)$$

où chaque mode propre est défini par le vecteur propre  $V_i^N(\Omega)$  et la valeur propre associée  $\lambda_i^N \in \mathbb{R}$ . La limitation bien connue de cette approche est qu'elle n'est valable que pour une valeur fixe de la conductivité thermique  $\kappa = \kappa_o$  et du coefficient d'échange  $h$ . Le problème ne vient pas d'une mauvaise reconstruction du champ dans le domaine, mais aux frontières, puisque le problème (3.3) fixe le ratio gradient/valeur des modes (et donc de la température reconstruite) à  $-h/\kappa_o$  sur  $\partial\Omega$ . De plus, les conditions aux limites ne sont pas homogènes, une solution dite glissante doit être calculée et ajoutée à la solution modale.

Pour dépasser cette limitation, une solution consiste à intégrer la valeur propre  $\lambda_i$  dans la condition limite, donnant ainsi le problème aux valeurs propres de branche défini par :

$$\begin{cases} \Omega & -\underline{\nabla} \cdot (\kappa_o \underline{\nabla} \hat{V}_i^B) = \lambda_i^B \rho C_p \hat{V}_i^B, \\ \partial\Omega & \kappa_o \underline{\nabla} \hat{V}_i^B \cdot \underline{n} = -\lambda_i^B \zeta \hat{V}_i^B \end{cases} \quad (3.4)$$

avec  $\zeta [J.K^{-1}.m^{-2}]$  appelé le nombre de Steklov. Il assure l'homogénéité dimensionnelle de la condition aux limites.

Il a été démontré [74] que l'ensemble des vecteurs propres défini par le système (3.4) forme une base de l'espace de Hilbert  $H^1(\Omega)$ . Les modes de branche permettent donc de reconstituer tout

type de champ de température défini par un problème thermique dans lequel les conditions aux limites varient, et où la conductivité peut varier avec la température, même si une valeur de conductivité  $\kappa_o$  a été utilisée pour le calcul des modes.

La formulation variationnelle faible du problème aux valeurs propres (3.4) s'écrit :

$$\int_{\Omega} \underline{\nabla} \hat{V}_i^B \cdot \kappa_o \cdot \underline{\nabla} u = \lambda_i^B \left( \int_{\Omega} \rho C_p \hat{V}_i^B \cdot u + \zeta \int_{\partial\Omega} \hat{V}_i^B \cdot u \right) \quad (3.5)$$

Au problème (3.5) est associé le produit scalaire suivant :

$$\langle u|v \rangle_B = \int_{\Omega} \rho C_p u v + \zeta \int_{\partial\Omega} u v \quad (3.6)$$

Ce produit scalaire permet ainsi la normalisation des vecteurs propres :

$$V_i^B = \frac{\hat{V}_i^B}{\sqrt{\langle \hat{V}_i^B | \hat{V}_i^B \rangle_B}} \quad (3.7)$$

où  $\hat{V}_i^B$  correspond au vecteur propre directement obtenu par la résolution de l'équation (3.5). On obtient alors la propriété d'orthogonalité (3.8) qui joue un rôle essentiel dans la méthode AROMM :

$$\langle V_i^B | V_j^B \rangle_B = \delta_{ij} \quad (3.8)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.

Le choix de la valeur du nombre de Steklov  $\zeta$  est fixé à partir du produit scalaire (3.6). Pour équilibrer l'importance des deux intégrales, on impose une stricte égalité entre ces termes pour des fonctions uniformes en tout point du domaine et de la frontière, c'est-à-dire :

$$\zeta = \frac{\int_{\Omega} \rho C_p}{\int_{\partial\Omega}} \quad (3.9)$$

La résolution du problème (3.4) pour une simple géométrie bidimensionnelle rectangulaire conduit à un ensemble de modes  $V_i^B$  (voir figure 3.1.a, d'après les lectures de l'école METTI 2009 [75]) qui se compose de deux familles :

- Des modes dont les oscillations spatiales prédominent au centre du domaine et dont la valeur aux frontières est faible : les modes de domaine.
- Des modes dont les oscillations spatiales sont limitées dans la zone proche des frontières : les modes de frontière. Ce sont ces derniers qui permettent de reconstituer les variations de température le long de la frontière.

## Modes de Branches

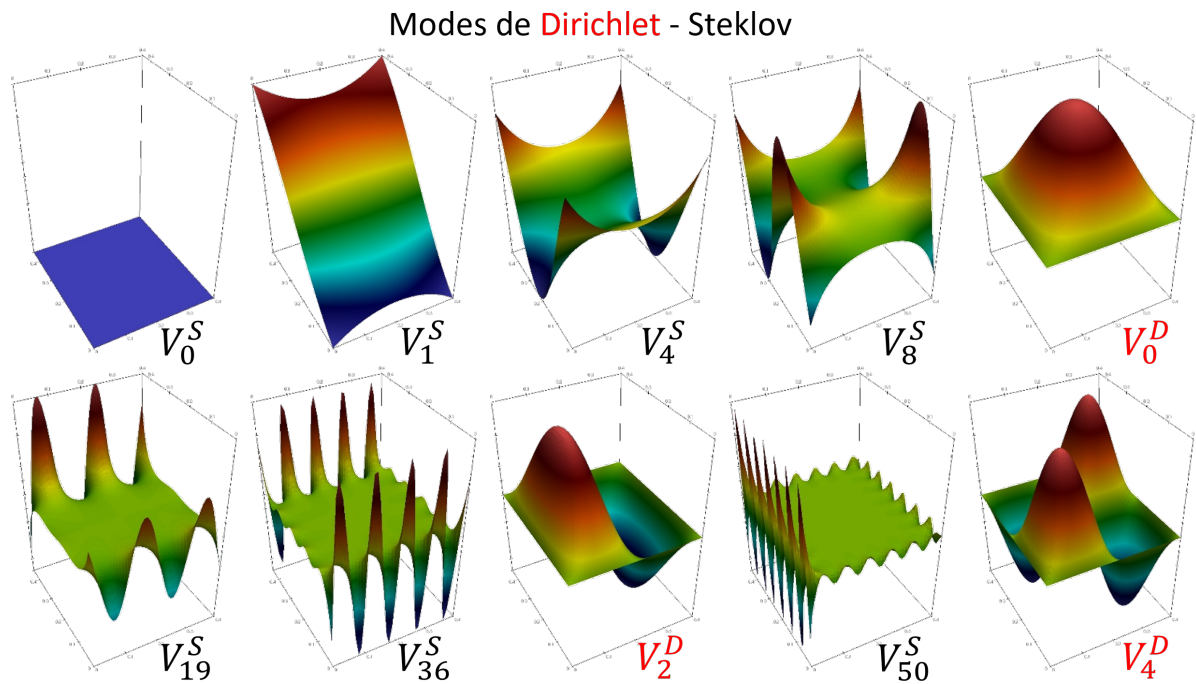
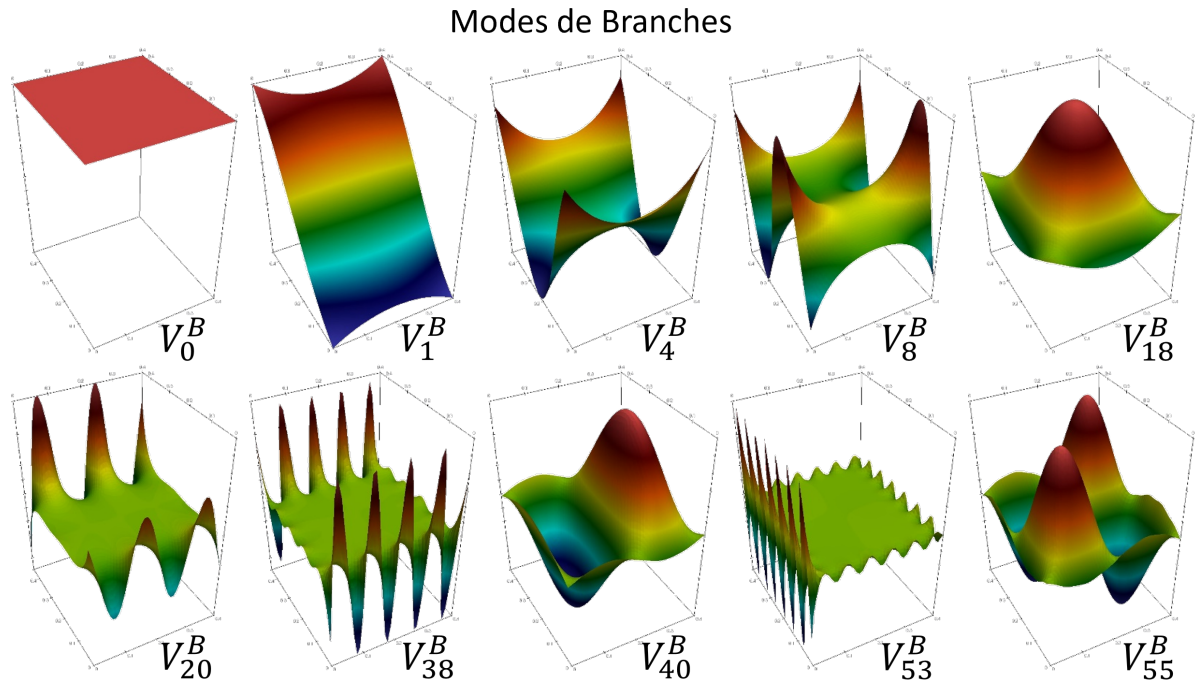


FIGURE 3.1 – Comparaison des bases de branche et de Dirichlet-Steklov

D'un point de vue pratique, la résolution analytique de (3.4) n'est réalisable que pour des géométries simples. Dans un cas réel, l'utilisation des techniques numériques qui s'appuient sur une discrétisation spatiale de la géométrie est nécessaire : la formulation variationnelle (3.5) est alors remplacée par une expression matricielle :

$$\mathbf{K}_o V_i^B = \lambda_i^B [\mathbf{C} + \mathbf{H}_\zeta] V_i^B \quad (3.10)$$

où l'on reprend les notations utilisées dans (2.4), et où  $V_i^B [N \times 1]$  correspond à la discrétisation spatiale du vecteur propre  $V_i^B(\Omega)$  sur le maillage utilisé. Ce système discret limite le nombre de vecteurs propres de la base, puisque la température n'est déterminée qu'aux nœuds du maillage :

$$T(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t) V_i^B \quad (3.11)$$

( $T$  et  $V_i^B$  sont des vecteurs  $[N \times 1]$ ). La résolution de l'équation (3.11) s'effectue par une méthode de type Lanczos [76] qui permet de calculer les vecteurs propres dans l'ordre des plus fortes valeurs (avec  $\lambda_i^B < 0$ ), soit encore dans l'ordre décroissante des valeurs des constantes de temps  $\tau_i^B$  avec :

$$\tau_i^B = -\frac{1}{\lambda_i^B} [s] \quad (3.12)$$

Puisque les modes sont normés, on peut écrire que

$$\langle V_i^B | V_j^B \rangle_B = \int_{\Omega} \rho C_p V_i^B V_j^B + \int_{\partial\Omega} \zeta V_i^B V_j^B = 1, \quad (3.13)$$

la valeur du terme

$$\eta_i = \int_{\partial\Omega} \zeta V_i^B V_i^B \quad (3.14)$$

suffit alors à caractériser chaque mode : lorsque  $\eta_i$  est proche de 1, il correspond à un mode de frontière et si  $\eta_i$  est proche de 0, le mode est un mode de domaine. On appelle  $\eta_i$  le coefficient de localisation du mode  $V_i^B$ .

L'application de cette relation dans une géométrie rectangulaire est illustrée sur la figure 3.2, (lectures de l'école METTI 2009 [75]). On observe que la base calculée est constituée de deux familles qui s'entremêlent, mais que la densité des modes de frontière est bien plus élevée que celle des modes de volume. Pour des applications caractérisées par un grand nombre de degrés de liberté, on verra par la suite qu'il est possible de ne calculer qu'une partie de la base. Si on utilise des modes de branche, une difficulté d'ordre numérique se présente : pour calculer quelques modes de domaine, un grand nombre de modes de frontière doit alors être calculé.

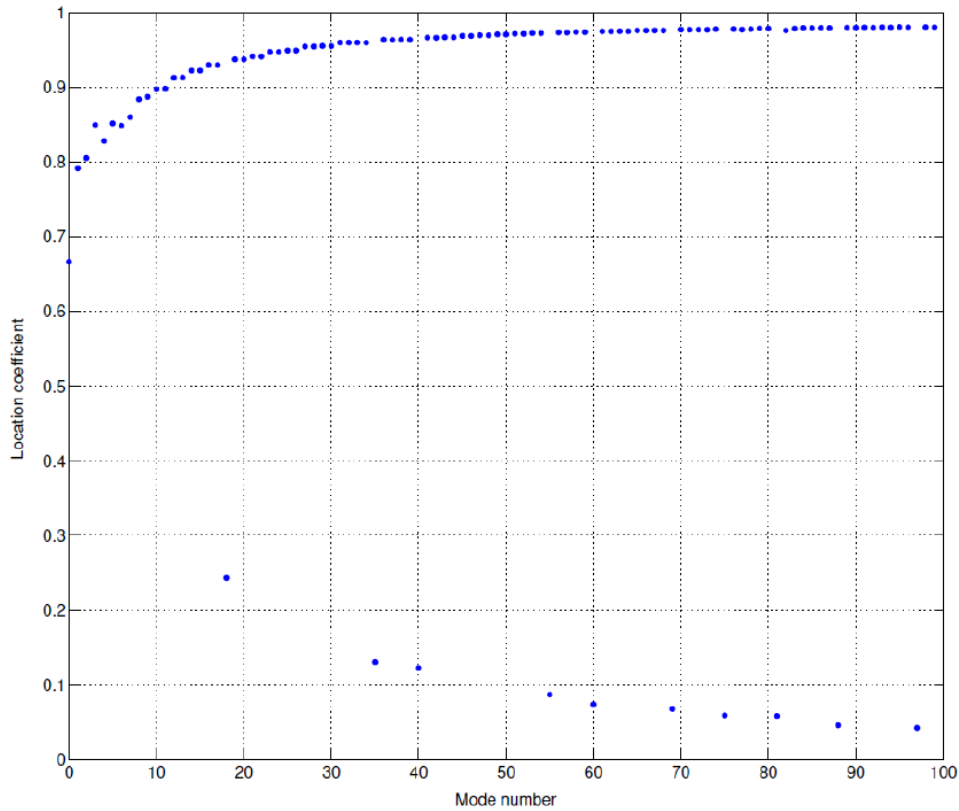


FIGURE 3.2 – Evolution du coefficient de localisation  $N_i$  des différents modes (triés par ordre décroissant des constantes de temps)

### 3.1.1.2 Modes de Dirichlet-Steklov

Pour pouvoir maîtriser la répartition des modes appelés “de domaine” et ceux appelés “de frontière”, l’idée est de chercher à calculer une base spécifique à chacune des deux familles. Pour cela, on définit deux problèmes aux valeurs propres distincts, dans lesquels les valeurs propres interviennent respectivement soit dans le domaine, soit aux frontières. On définit ainsi :

- Le problème aux valeurs propres de Dirichlet

$$\begin{cases} \Omega & -\nabla \cdot \kappa_o \cdot \nabla \hat{V}_i^D = \lambda_i^D \rho C_p \hat{V}_i^D, \\ \partial\Omega & \hat{V}_i^D = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

dont la résolution amène des modes  $(\lambda_i^D, \hat{V}_i^D)$  qui forment une base dans  $H_1^0$ , espace des fonctions qui s’annulent sur la frontière.



- Le problème aux valeurs propres de Steklov

$$\begin{cases} \Omega & -\underline{\nabla} \cdot \kappa_o \cdot \underline{\nabla} \hat{V}_i^S = 0, \\ \partial\Omega & \kappa_o \underline{\nabla} \hat{V}_i^S \cdot \underline{n} = \lambda_i^S \zeta S_i, \quad \hat{V}_i^S|_{\partial\Omega} = S_i. \end{cases} \quad (3.16)$$

Les vecteurs  $\hat{V}_i^S$  correspondent aux relèvements harmoniques des vecteurs propres  $S_i$  définis sur la frontière. On retrouve le coefficient de Steklov  $\zeta$  défini précédemment.

La résolution de ce problème amène des modes  $(\lambda_i^S, S_i)$  qui forment une base de  $H^{1/2}(\Omega)$ , l'espace des fonctions définies sur la frontière. Par extension, on appelle "modes de Steklov" les couples  $(\lambda_i^S, V_i^S)$ . Ils forment une base dans  $E(\Omega)$  espace des relèvements harmoniques dans  $\Omega$  des fonctions définies sur la frontière. Dans les travaux de Grosjean [6], on montre que la réunion des modes de Dirichlet et de Steklov forment une base dans l'espace de Hilbert  $H^1 = H_0^1(\Omega) \times E(\Omega)$ . On l'appelle la base de Dirichlet-Steklov.

Afin de bénéficier des propriétés d'orthogonalité, le produit scalaire associé à la base de Dirichlet-Steklov est défini par la relation :

$$\langle u|v \rangle_{DS} = \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \kappa_o \cdot \underline{\nabla} v + \lambda_0 \int_{\partial\Omega} \zeta u v \quad (3.17)$$

où  $\lambda_0$  [ $s^{-1}$ ] est un facteur de pondération qui permet le respect des dimensions des différents termes<sup>1</sup>.

La normalisation des vecteurs propres de la base s'écrit alors :

$$i \in \mathbb{N}, \chi \in \{D, S\}, \quad V_i^\chi = \frac{\hat{V}_i^\chi}{\sqrt{\langle \hat{V}_i^\chi | \hat{V}_i^\chi \rangle_{DS}}} \quad (3.18)$$

où  $\hat{V}_i^\chi$  correspond aux vecteurs propres directement obtenues par les équations (3.15) et (3.16).

La normalisation permet de vérifier la relation d'orthogonalité qui sera utilisée par la suite :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \forall \chi \in \{D, S\}, \langle V_i^\chi | V_j^\chi \rangle_{DS} = \delta_{ij} \quad (3.19)$$

D'un point de vue numérique, la résolution de ces deux problèmes aux valeurs propres s'effectue comme pour le problème de branche avec cette fois les équations matricielles sui-

---

1. On note que le produit  $\lambda_0 \cdot \zeta$  correspond d'un point de vue dimensionnel à un coefficient d'échange  $h$  [ $W \cdot m^{-2} K^{-1}$ ].

vantes :

- Problème de Dirichlet :

$$\mathbf{K}_o V_i^D = \lambda_i^D \mathbf{C} V_i^D \quad (3.20)$$

- Problème de Steklov :

$$\mathbf{K}_o V_i^S = \lambda_i^S \mathbf{H}_\zeta V_i^S \quad (3.21)$$

Ces calculs font apparaître un nombre différent de modes de Dirichlet et de Steklov, puisque :

- Le problème aux valeurs propres de Dirichlet qui impose pour chaque mode d’avoir une valeur nulle à la frontière, est caractérisé par un nombre de degrés de liberté  $N^D$  lié uniquement aux nœuds intérieurs au domaine (voir Fig. 3.3).
- Le problème aux valeurs propres de Steklov est lié aux fonctions  $S$  définies sur la frontière. Il est donc caractérisé par un nombre de degrés de liberté  $N^S$  qui dépend des nœuds à la frontière.

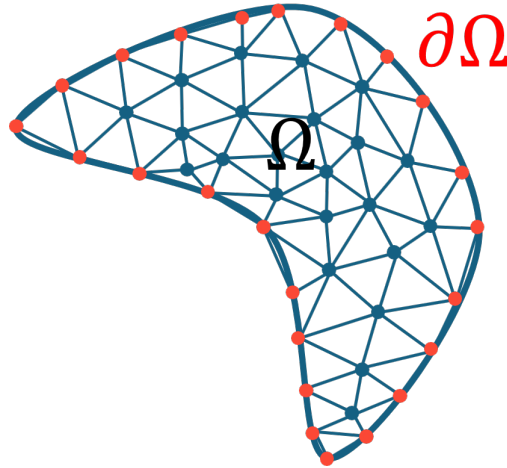


FIGURE 3.3 – Géométrie quelconque bi-dimensionnelle discrétisée. Les nœuds de domaine sont en bleu et le nœuds de surface en rouge

On note que la réunion de ces deux familles de modes permet de retrouver le même nombre total de modes que celui obtenu pour la base de branche

$$N = N^D + N^S \quad (3.22)$$

L’application à une géométrie rectangulaire est présentée sur la figure (3.1.b) dans laquelle les modes de Dirichlet et les modes de Steklov sont enchevêtrés et ordonnés d’une façon à les comparer avec les modes de branche. On note ainsi que pour les deux bases, il apparaît un mode qui est spatialement uniforme. C’est le mode “plat”, qui correspond à une valeur

propre nulle, soit une constante de temps infinie. Ce mode joue un rôle fondamental dans la formulation modale et il sera par la suite différencié des autres modes. Par ailleurs, on retrouve une forte similitude entre ces deux bases (branche et Dirichlet-Steklov) qui permettent toutes les deux la formulation modale dans  $H^1(\Omega)$ , c'est-à-dire pour tout type de problème de conduction thermique non linéaire, et à paramètres variables dans le temps.

La seconde étape consiste alors à réduire la base calculée afin de construire le modèle réduit modal.

## 3.2 Réduction de la base

### 3.2.1 Troncature temporelle

Puisque chaque mode est caractérisé d'un point de vue temporel, il est légitime de considérer que les modes qui possèdent les constantes de temps les plus importantes vont jouer un rôle prédominant.

Ainsi, à partir de la base complète caractérisée par  $N$  modes  $(\lambda_i, V_i)$  où  $N$  correspond au nombre de degrés de liberté du domaine discrétisé, on sélectionne  $n$  modes  $(\lambda_i, \tilde{V}_i)$  pour lesquels :

$$\frac{1}{-\lambda_i} > \mathcal{T}_{lim} \quad (3.23)$$

où  $\mathcal{T}_{lim}$  est le seuil en deçà duquel on peut négliger l'influence des modes. On procède ainsi à la troncature temporelle dite de Marshall [77], qui est immédiate puisque la technique de calcul des modes par la méthode de Lanczos permet de ne calculer que le sous-ensemble  $n$  de la base complète, classé par ordre décroissant des constantes de temps. Par cette technique on évite ainsi un temps de calcul et des besoins de stockage trop importants.

On a vu que l'application de cette technique pour des modes de branche ne permet pas de maîtriser le nombre de modes de chacune des deux familles qui constituent la base (modes de domaine ou modes de frontière), compte tenu de leur entrecroisement lorsqu'ils sont classés par constante de temps décroissante (Fig.(3.2)). Aussi est-il nécessaire de calculer un grand nombre de modes afin d'obtenir suffisamment de modes de domaine<sup>2</sup>.

Au contraire, le choix d'utiliser une base de Dirichlet-Steklov évite cette difficulté puisque l'on peut définir précisément le nombre de modes de Dirichlet, puis de Steklov, que l'on calcule.

---

2. Par contre ce calcul pourrait être automatisé à partir des coefficients de localisation  $\eta_i$  (Eq. (3.14)), qui peuvent permettre de déterminer le nombre de modes de domaine au fur et à mesure de la procédure numérique.

Dans l'application traitée par la suite nous verrons quelle est l'influence de cette troncature sur la précision des résultats.

## 3.2.2 Amalgame

### 3.2.2.1 Principe de la méthode

La méthode la plus aboutie consiste à construire une base réduite en tenant compte de l'intégralité des modes de la base complète, selon une technique qui amalgame les modes entre eux. Cette technique d'amalgame a été développée à l'origine pour les bases de Fourier [78], puis adaptée aux bases de branche [79, 80] et aux bases de Dirichlet-Steklov [6]. Cette procédure s'appuie sur une première partition de l'espace des modes propres de dimension  $N$ , en définissant deux sous-espaces :

- L'espace des modes majeurs, dont la dimension va définir l'ordre  $\tilde{N}$  du modèle réduit. Ils sont notés  $V_{i,1}$ , avec  $i \in [1, \tilde{N}]$ ;
- L'espace des modes mineurs qui correspondent aux modes restants de la base complète, soit de dimension  $N - \tilde{N}$ .

Dans la procédure d'amalgame, chaque mode mineur  $V_{i,p}$  est associé à un des modes majeurs par combinaison linéaire. On obtient  $\tilde{N}$  sous-espaces d'amalgame :

$$\forall i \in [1, \tilde{N}], \quad \tilde{V}_i = V_{i,1} + \sum_{p=2}^{\tilde{N}_i} \alpha_{i,p} \cdot V_{i,p} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \tilde{N}_i = N - \tilde{N}, \quad (3.24)$$

Les coefficients de pondération  $\alpha_{i,p}$  sont appelés les coefficients d'amalgame. Cette procédure nécessite trois étapes :

1. Le choix des modes majeurs  $V_{i,1}$ ;
2. La répartition des modes mineurs dans les sous-espaces d'amalgame  $V_{i,p}$ ;
3. Le calcul des coefficients  $\alpha_{i,p}$ .

L'ensemble de cette procédure s'appuie sur un ou plusieurs cas de référence pour le(s)quel(s) on connaît les états d'excitations des modes utilisés, tels que

$$\forall M \in \Omega, \quad 0 < t < t_{fin}, \quad T_{REF}(M, t) = \sum_{i=1}^N x_i(t) V_i(M) \quad (3.25)$$

Ces états peuvent être obtenus par projection du champ de température sur la base, qui compte tenu des propriétés d'orthogonalité (3.19) ou (3.8) s'écrit :

$$\forall j \in [1, N], \quad \langle T_{REF} | V_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N x_i V_i | V_j \right\rangle = \sum_{i=1}^N x_i \langle V_i | V_j \rangle = \sum_{i=1}^N x_i \delta_{ij} = x_j \quad (3.26)$$

Les états de références sont utilisés pour le calcul de deux critères, le coefficient de dominance modale et le coefficient d'écart de dominance modale.

### 3.2.2.2 Coefficients de dominance modale

On définit un critère énergétique global qui utilise le produit scalaire associé à la base utilisée :

$$D = \int_0^{t_{fin}} \langle T | T \rangle \quad (3.27)$$

où  $t_{fin}$  correspond à la durée d'étude du problème de référence.

Bien évidemment ce critère n'est pas de la même nature selon que l'on choisisse une base de branche ou de Dirichlet-Steklov, puisque le produit scalaire n'est pas le même pour les deux bases (voir Eqs. (3.6) et (3.17)). Grâce à ces propriétés d'orthogonalité, on montre que :

$$\begin{aligned} D &= \int_0^{t_{fin}} \langle T | T \rangle \\ &= \int_0^{t_{fin}} \left\langle \sum_{i=1}^N x_i V_i | \sum_{j=1}^N x_j V_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \int_0^{t_{fin}} x_i^2 \langle V_i | V_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \int_0^{t_{fin}} x_i^2 \delta_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^N \int_0^{t_{fin}} x_i^2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

soit

$$D = \sum_{i=1}^{N_b} D_i \quad \text{avec} \quad D_i = \int_0^{t_{fin}} x_i^2 \quad (3.29)$$

On voit ici l'importance des propriétés d'orthogonalité qui permettent de découpler le critère global et de l'exprimer selon la contribution de chaque mode. Ce coefficient  $D_i$  est appelé coefficient de dominance modale, il correspond à la contribution de chaque mode au critère énergétique global  $D$ . On verra par la suite que ce coefficient de dominance modale est utilisé

pour initier le processus de construction de la base réduite amalgamée.

### 3.2.2.3 Coefficient d'écart de dominance modale

Mis à part l'initialisation de la base, l'ensemble du processus (c'est-à-dire le choix des modes majeurs et mineurs et le calcul des coefficients d'amalgame  $\alpha_{i,p}$ ) est basé sur un critère d'écart entre le modèle complet et le modèle réduit amalgamé.

Là encore pour bénéficier des propriétés d'orthogonalité, le critère est basé sur le produit scalaire associé à la base considérée :

$$\Delta D = \int_0^{t_{fin}} \langle T - \tilde{T} | T - \tilde{T} \rangle \quad (3.30)$$

D'une manière analogue à ce qui est écrit pour le critère énergétique (Eq. (3.28)), on a :

$$\begin{aligned} \Delta D &= \int_0^{t_{fin}} \left\langle \sum_{i=1}^N x_i V_i - \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_i \tilde{V}_i \middle| \sum_{i=1}^N x_i V_i - \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_i \tilde{V}_i \right\rangle \\ &= \int_0^{t_{fin}} \left\langle \sum_{i=1}^N x_i V_i - \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_i \sum_{p=1}^{\tilde{N}_i} \alpha_{i,p} V_{i,p} \middle| \sum_{i=1}^N x_i V_i - \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_i \sum_{p=1}^{\tilde{N}_i} \alpha_{i,p} V_{i,p} \right\rangle \end{aligned} \quad (3.31)$$

avec  $\alpha_{i,1} = 1$ . Puisque chaque mode de la base est utilisé une unique fois, on a donc

$$\sum_{i=1}^N x_i V_i = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \sum_{p=1}^{\tilde{N}_i} x_{i,p} V_{i,p} \quad (3.32)$$

soit

$$\Delta D = \int_0^{t_{fin}} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \sum_{p=1}^{\tilde{N}_i} \langle (x_{i,p} V_{i,p} - \tilde{x}_i \alpha_{i,p} V_{i,p}) | (x_{i,p} V_{i,p} - \tilde{x}_i \alpha_{i,p} V_{i,p}) \rangle \quad (3.33)$$

Les propriétés d'orthogonalité permettent alors la simplification de ce critère d'erreur :

$$\begin{aligned} \Delta D &= \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \sum_{p=1}^{\tilde{N}_i} \int_0^{t_{fin}} \langle (x_{i,p} - \tilde{x}_i \alpha_{i,p}) V_{i,p} | (x_{i,p} - \tilde{x}_i \alpha_{i,p}) V_{i,p} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \sum_{p=1}^{\tilde{N}_i} \int_0^{t_{fin}} (x_{i,p} - \tilde{x}_i \alpha_{i,p})^2 \langle V_{i,p} | V_{i,p} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \sum_{p=1}^{\tilde{N}_i} \int_0^{t_{fin}} (x_{i,p} - \tilde{x}_i \alpha_{i,p})^2 = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \sum_{p=1}^{\tilde{N}_i} \int_0^{t_{fin}} \Delta D_{i,p} \end{aligned} \quad (3.34)$$

où

$$\Delta D_{i,p} = \int_0^{t_{fin}} (x_{i,p} - \tilde{x}_i \alpha_{i,p})^2 \quad (3.35)$$

Ce terme correspond à la contribution de chaque mode au critère d'erreur utilisé. On l'appelle la dominance modale de l'écart. Pour l'estimer, compte tenu au fait que l'état d'excitation du mode réduit amalgamé  $\tilde{x}_i$  n'est pas connue lors de la procédure de construction de la base réduite, on approche la valeur par l'état d'excitation du mode maître soit :

$$\tilde{x}_i \approx x_{i,1} \quad (3.36)$$

d'où finalement

$$\Delta D_{i,p} = \int_0^{t_{fin}} (x_{i,p} - x_{i,1} \alpha_{i,p})^2 \quad (3.37)$$

Pour une partition fixée des modes de la base dans les sous-espaces, la valeur de chaque coefficient d'amalgame est choisie de façon à minimiser la dominance modale de l'écart soit :

$$\frac{\partial \Delta D_{i,p}}{\partial \alpha_{i,p}} = 0 \quad (3.38)$$

on obtient alors le facteur d'amalgame optimal :

$$\alpha_{i,p} = \frac{\int_0^{t_{fin}} x_{i,p} x_{i,1}}{\int_0^{t_{fin}} x_{i,1}^2} \quad (3.39)$$

On montre alors que l'introduction du facteur d'amalgame optimal (Eq. (3.39)) dans l'expression de la dominance de l'écart (Eq. (3.37)), amène à la formulation finale de la dominance modale de l'écart optimal :

$$\Delta D_{i,p} = \int_0^{t_{fin}} x_{i,p}^2 - \int_0^{t_{fin}} \alpha_{i,p}^2 x_{i,1}^2 \quad (3.40)$$

soit

$$\Delta D_{i,p} = D_{i,p} - \alpha_{i,p}^2 D_{i,1}^2 \quad (3.41)$$

### 3.2.2.4 Procédure de construction de la base réduite modale

- **Initialisation** : Elle contient deux étapes :
  - Le mode plat qui apparaît quelle que soit la base utilisée (branche ou Dirichlet-Steklov) est retenu comme un mode majeur qui ne sera associé à aucun mode mineur.

- Le calcul de la dominance modale  $D_i$  défini par l'Eq. (3.29) pour chaque mode (hors mode plat déjà retenu) va permettre de faire apparaître le mode qui possède la plus forte contribution au critère d'énergie global  $D$  (Eq. (3.27)).

Dans le cas de la base de Dirichlet-Steklov, on sélectionnera un mode majeur de Dirichlet et un mode majeur de Steklov, puisque les deux familles apparaissent explicitement. À ce stade, il y a donc deux (respectivement trois) modes majeurs pour une base de branche (respectivement de Dirichlet-Steklov). Tous les autres modes sont considérés comme des modes mineurs. Dans le cas de la base de Dirichlet-Steklov, on imposera de les affecter au mode majeur qui est de la même famille (Dirichlet ou Steklov).

- **Processus d'ajout d'un mode majeur**

On se considère à une étape telle que le nombre  $n$  de modes majeurs sélectionnés est tel que  $n < \tilde{N}$  où  $\tilde{N}$  est l'ordre du modèle réduit recherché. Dans le cas de la base de Dirichlet-Steklov,  $n = n^D + n^S$  où  $n^D$  est le nombre de modes majeur de Dirichlet et  $n^S$  le nombre de mode majeur de Steklov sélectionnés.

Pour chaque mode mineur restant, on calcule quelle serait sa contribution à l'erreur globale en cas d'amalgame avec un des modes majeurs, en calculant les différents coefficients de domaine modale d'écart  $\Delta D_{i,p}$  (Eq. (3.40)).

Dans cette liste, on sélectionne le mode caractérisé par la contribution  $\Delta D_{i,p}$  maximale : c'est le prochain mode majeur retenu.

Ce processus itératif est répété jusqu'à l'obtention de l'ordre du modèle réduit recherché  $\tilde{N}$ .

- **Construction finale des modes réduits**

La connaissance de la répartition des  $N$  modes de la base complète et des facteurs d'amalgame associées  $\alpha_{i,p}$  (Eq. (3.39)) permet la construction des modes amalgamés selon l'équation (3.24). Ces modes amalgamés doivent alors être renormés de façon à retrouver les relations d'orthogonalité (3.8) ou (3.19).

### 3.2.2.5 Utilisation conjointe des deux techniques de réduction

Les deux techniques de réduction vues dans les paragraphes précédents ont des avantages et inconvénients complémentaires :

La technique de troncature temporelle de Marschal est immédiate puisqu'elle revient à ne calculer que les premiers modes propres, caractérisés par les constantes de temps les plus importantes. Par contre, son efficacité en terme de réduction est limitée.



La technique d'amalgame est particulièrement performante, mais impose des calculs (notamment des calculs d'états de référence) pour chaque mode de la base complète, qu'il faut alors calculer et stocker. Ceci peut alors poser des problèmes de temps de calcul et de stockage des données. Par ailleurs, le calcul de la base complète peut s'avérer rédhibitoire pour une géométrie complexe.

L'idée est alors d'utiliser les deux techniques à la fois :

- Une première réduction selon la technique de troncature temporelle permet de ne calculer qu'un sous-espace de dimension  $N_i$  de la base complète (de dimension  $N > N_i$ ). On évite ainsi un stockage trop important, mais l'ordre de réduction doit être élevé pour obtenir une précision satisfaisante.
- À partir de ce sous-espace, on peut alors procéder à l'amalgame qui va alors optimiser la réduction. Puisque la base de départ de dimension  $N_i$  n'est pas trop grande, les calculs vont être suffisamment rapides.

### 3.3 Formulation du problème thermique sous forme modale réduite

#### 3.3.1 Formulation variationnelle

A partir d'un ensemble des modes propres qui forme une base dans  $H^1$ , on cherche à obtenir l'écriture du problème thermique sous forme modale. La formulation variationnelle faible du problème thermique est rappelé ici :

$$\begin{aligned} \forall f \in H^1(\Omega) \quad & \int_{\Omega} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} f + \int_{\Omega} \kappa(T) \underline{\nabla} T \cdot \underline{\nabla} f + \int_{\partial\Omega} h T f \\ & = \int_{\Omega} \varpi f + \int_{\partial\Omega} (h T_f + \varphi) f \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ici, aucune hypothèse n'est faite sur la valeur des différents paramètres qui peuvent dépendre de la température ou du temps. L'équation d'état issue de la formulation modale s'obtient à partir de l'équation (3.42) dans laquelle :

1. le champ de température  $T$  est remplacé par son expression en fonction des modes de la base (Eq. (3.1)),
2. on substitue à toutes les fonctions d'essais  $f$  la base des vecteurs propres  $V_i$ . En effet, à condition de partager le même espace fonctionnel, toute fonction  $f$  est décomposable

sur la base de vecteurs propres  $V_i$ .

Puisque les modes  $V_i$  forment une base dans  $H^1$  et si les éventuelles variations des paramètres sont prises en compte, cette formulation ne fait l'objet d'aucune approximation. On obtient alors :

$$\forall j \in \{1, \dots, \infty\}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left( \int_{\Omega} \rho C_p V_i V_j \right) \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{\infty} \left( \int_{\Omega} \kappa(T) \underline{\nabla} V_i \cdot \underline{\nabla} V_j + \int_{\partial\Omega} h V_i V_j \right) x_i = \int_{\Omega} \varpi V_j + \int_{\partial\Omega} (h T_e + \varphi) V_j \quad (3.43)$$

Le champ de température reconstruit à partir de la connaissance des états d'excitations  $x_i$  obtenu par la résolution de cette équation sera donc exact. On passe ainsi d'une expression continue (Eq. (3.42)) à un problème d'états discret (Eq. (3.43)) dans lequel les inconnues sont les états d'excitation  $x_i(t)$  des modes de la base. Évidemment, en pratique la somme ne va pas jusqu'à l'infini, mais jusqu'à un nombre réduit de modes  $\tilde{N}$  de la base utilisée :

$$T(M, t) \approx \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_j(t) \tilde{V}_j(M) \quad (3.44)$$

L'équation (3.43) peut alors s'écrire sous forme matricielle

$$\mathbf{C}_r \dot{X} + (\mathbf{K}_r(T) + \mathbf{H}_r) X = \mathbf{U}_r \quad (3.45)$$

où par exemple  $\mathbf{C}_r(i, j) = \int_{\Omega} \rho C_p V_i V_j$  est la matrice réduite de capacité de dimension  $[\tilde{N} \times \tilde{N}]$ .

### 3.3.2 Formulation matricielle discrétisée

Les équations (3.43) et (3.45) ont été établies en dehors de toute considération de discrétisation spatiale. Pour des géométries simples, il existe des solutions analytiques aux Eqs. (3.15) et (3.16), et l'équation (3.45) peut être construite de manière analytique. Dès lors que des géométries plus complexes, ou composées de plusieurs matériaux, sont utilisées, la discrétisation spatiale devient obligatoire. Les modes définis par les Eqs. (3.20) et (3.21) sont calculés grâce à la bibliothèque ARPACK, puis réduits grâce à la procédure d'amalgame. Les modes réduits sont stockés dans une matrice  $\tilde{\mathbf{V}}$  de dimension  $[N \times \tilde{N}]$ , où  $N$  est le nombre de DDL du maillage. L'obtention du système matriciel (3.45) pour déterminer les états des

modes se fait par un changement de base :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_r &= \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{V}} & \mathbf{K}_r(T) &= \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{K}(T) \tilde{\mathbf{V}} \\ \mathbf{H}_r &= \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{H} \tilde{\mathbf{V}} & U_r &= \tilde{\mathbf{V}}^T U \end{aligned} \quad (3.46)$$

où  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}(T)$ , etc. sont les matrices du modèle éléments finis définies par l'équation (2.4). On a à ce niveau une approximation liée à la réduction de la base utilisée, avec toujours une prise en compte des paramètres qui peuvent dépendre du temps ou de la température.

### 3.4 Adaptation de la méthode aux non-linéarités

D'un point de vue mathématique, les équations précédentes peuvent être utilisées pour tout problème thermique, même si celui-ci est caractérisé par des non-linéarités. Cependant d'un point de vue pratique, elles ne sont pas adaptées à de tels problèmes si on les utilise directement sous la forme (3.46). En effet, si la conductivité varie fortement avec la température, la matrice  $\mathbf{K}(T)$  doit donc être recalculée régulièrement au cours de la simulation. Cela entraîne mécaniquement le calcul de la matrice  $\mathbf{K}_r(T) = \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{K}(T) \tilde{\mathbf{V}}$ . Si cela ne pose pas de problème théorique, d'un point de vue technique, la réduction perd tout son intérêt pour plusieurs raisons. Tout d'abord, afin de pouvoir recalculer cette matrice, il faut garder en mémoire la matrice  $\tilde{\mathbf{V}}$ , et donc le gain en place mémoire dû aux méthodes modales est complètement perdu. Deuxièmement, le calcul en lui-même de la matrice modale annihile le gain en temps de calcul, puisque cela entraîne :

- la reconstruction de la matrice éléments finis de conductivité  $\mathbf{K}(T)$  ;
- la double multiplication matricielle pour construire la matrice modale  $\tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{K}(T) \tilde{\mathbf{V}}$ .

#### 3.4.1 Formulation modale pour une loi quadratique

On a vu que la reconstruction de la matrice éléments finis de conductivité  $\mathbf{K}(T)$  et la double multiplication matricielle pour construire la matrice modale  $\tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{K}(T) \tilde{\mathbf{V}}$  annihilent le gain apporté par les modèles réduits. Il se trouve que ces deux calculs peuvent être évités (ou tout du moins mis en amont) si la loi de non-linéarité peut être approchée par une loi quadratique en température

$$\kappa(T) = \kappa_0 + \kappa_1 T + \kappa_2 T^2 \quad (3.47)$$

En écrivant la formulation variationnelle de  $\mathbf{K}_r(T)$  :

$$\mathbf{K}_r(T)(i, j) = \int_{\Omega} \kappa(T) \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j \quad (3.48)$$

et en remplaçant dans cette équation la forme quadratique de  $\kappa(T)$ , on obtient :

$$\mathbf{K}_r(T)(i, j) = \int_{\Omega} \kappa_0 \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j + \int_{\Omega} \kappa_1 T \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j + \int_{\Omega} \kappa_2 T^2 \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j \quad (3.49)$$

Le premier terme de l'Eq. (3.49) est classique, et nous le notons :

$$\mathbf{K}_r^0(i, j) = \int_{\Omega} \kappa_0 \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j \quad (3.50)$$

L'idée est alors de remplacer la température  $T$  par sa décomposition modale directement dans la formulation variationnelle. Le deuxième terme devient :

$$\int_{\Omega} \kappa_1 T \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j = \int_{\Omega} \left[ \kappa_1 \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_k(t) \tilde{V}_k(M) \right] \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j \quad (3.51)$$

$$= \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_k(t) \int_{\Omega} \kappa_1 \tilde{V}_k(M) \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j \quad (3.52)$$

Les matrices  $\mathbf{K}_r^k$  de dimension  $[\tilde{N} \times \tilde{N}]$  sont alors définies selon :

$$\mathbf{K}_r^k(i, j) = \int_{\Omega} \kappa_1 \tilde{V}_k \underline{\nabla} \tilde{V}_j \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_i \quad \forall i, j \in [1 : \tilde{N}] \quad (3.53)$$

La contribution linéaire se réduit alors à :

$$\int_{\Omega} \kappa_1 T \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j = \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_k(t) \mathbf{K}_r^k(i, j) \quad (3.54)$$

De la même manière, la formulation modale de  $T$  est insérée dans le terme quadratique, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \kappa_2 T^2 \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j &= \int_{\Omega} \left[ \kappa_2 \left( \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_k V_k \right)^2 \right] \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j \\ &= \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \sum_{p=1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_k \tilde{x}_p \int_{\Omega} \tilde{V}_k \tilde{V}_p \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j \end{aligned} \quad (3.55)$$

Compte tenu de la symétrie qui apparaît entre les termes qui interviennent dans cette

double somme, cette dernière s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \kappa_2 T^2 \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j &= \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_k(t)^2 \int_{\Omega} \kappa_2 \tilde{V}_k^2 \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \sum_{p=k+1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_k(t) \tilde{x}_p(t) \int_{\Omega} \kappa_2 \tilde{V}_k \tilde{V}_p \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j \end{aligned} \quad (3.56)$$

Les matrices résultantes, de dimension  $[\tilde{N} \times \tilde{N}]$ , sont définie selon :

$$\mathbf{K}_r^{k,p}(i, j) = \int_{\Omega} \kappa_2 \tilde{V}_k \tilde{V}_p \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j \quad \forall i, j \in [1 : \tilde{N}] \quad (3.57)$$

Nous obtenons alors :

$$\int_{\Omega} \kappa_2 T^2 \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j = \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_k(t)^2 \mathbf{K}_r^{k,k}(i, j) + 2 \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \sum_{p=k+1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_k(t) \tilde{x}_p(t) \mathbf{K}_r^{k,p}(i, j) \quad (3.58)$$

En résumé, après simplification du terme quadratique, la matrice de conduction dans le cas d'une loi quadratique s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \kappa(T) \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j &= \mathbf{K}_r^0(i, j) \\ &+ \sum_{k=1}^{\tilde{N}} x_k(t) \mathbf{K}_r^k(i, j) \\ &+ \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_k(t)^2 \mathbf{K}_r^{k,k}(i, j) \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \sum_{p=k+1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_k(t) \tilde{x}_p(t) \mathbf{K}_r^{k,p}(i, j) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Si la loi de conductivité peut être approchée par une fonction affine (ce qui est souvent le cas dans une plage de température donnée), alors il suffit de pré-calculer et de stocker  $\tilde{N}$  matrices de dimension  $[\tilde{N} \times \tilde{N}]$  pour modéliser précisément cette non-linéarité "linéaire". Par contre si l'approximation linéaire n'est pas assez précise, il faut tenir compte du terme quadratique, qui engendre le stockage de  $\frac{\tilde{N}(\tilde{N}+1)}{2}$  matrices supplémentaires de dimension  $[\tilde{N} \times \tilde{N}]$ . Pour des géométries complexes qui entraînent des maillages caractérisés par plusieurs centaines

de milliers d'éléments, il est souvent nécessaire d'avoir des modèles réduits de l'ordre de la centaine de modes. On voit donc que la prise en compte de toutes ces matrices de couplage  $\mathbf{K}_r^{k,p}$  n'est pas raisonnable.

### 3.4.2 Simplification du terme quadratique

L'objectif est de diminuer le nombre des matrices de couplage  $\mathbf{K}_r^{k,p}$  qui interviennent dans le terme quadratique de la matrice de conductivité  $\mathbf{K}_r(T)$ . Deux types de matrices sont gardés, comme représenté sur la figure 3.4.

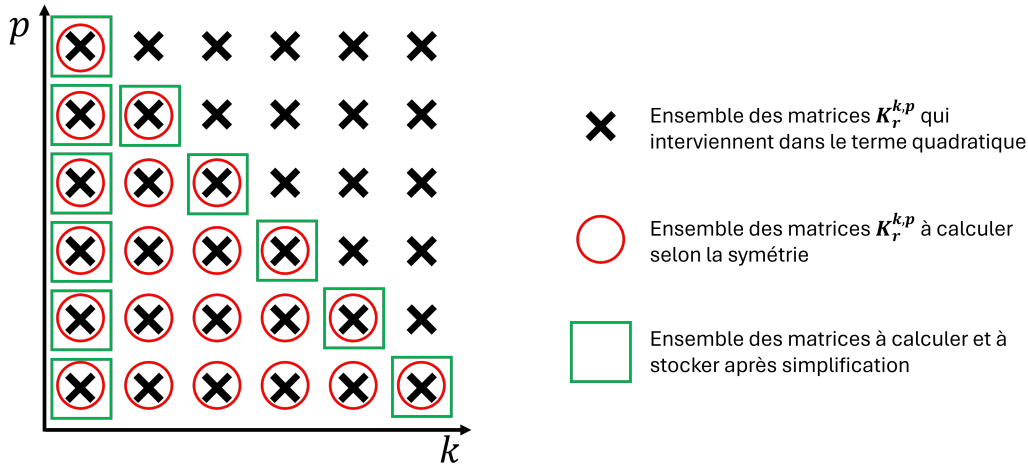


FIGURE 3.4 – Représentation des matrices de couplage qui interviennent dans le terme quadratique

- tous les termes diagonaux sont conservés  $\mathbf{K}_r^{p,p}$ , avec  $p \in [1, \tilde{N}]$ ;
- seul le couplage des  $\tilde{N}$  modes  $V_i$  avec le premier mode  $V_1$  est maintenu.

En effet, on a vu que les deux bases définies dans  $H^1(\Omega)$  et présentées précédemment (base de branche et base de Dirichlet-Steklov) sont caractérisées par l'existence d'un mode plat associé à une constante de temps infinie, qui lors de la phase de réduction est maintenu seul sans ajout de modes mineurs. Ce mode permet de retrouver la valeur moyenne de la température dans le domaine étudié et joue donc un rôle primordial.

Le nombre de matrices de couplage  $\mathbf{K}_r^{k,p}$  calculées passe donc de  $\tilde{N}(\tilde{N} + 1)/2$  à  $2\tilde{N} - 1$ , soit en considérant le terme linéaire, un nombre total de matrice égal à  $3\tilde{N} - 1$ . Le calcul devient donc possible.

La matrice de conductivité s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \kappa(T) \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j \, d\Omega &\approx \mathbf{K}_r^0(i, j) + \sum_{k=1}^{\tilde{N}} x_k \mathbf{K}_r^k(i, j) \\
&+ \sum_{k=1}^{\tilde{N}} x_k^2 \mathbf{K}_r^{k,k}(i, j) + 2 \sum_{k=2}^{\tilde{N}} x_k x_1 \mathbf{K}_r^{k,1}(i, j)
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Par ailleurs dans le cas d'un domaine homogène, les paramètres  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  qui interviennent dans la définition de la loi quadratique de la conductivité peuvent être extraits des intégrales sur le domaine. Comme de plus le mode  $\tilde{V}_1$  a une valeur constante  $\|\tilde{V}_1\|$  sur le domaine, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_r^1(i, j) &= \int_{\Omega} \kappa_1 \tilde{V}_1 \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j \\
&= \frac{\kappa_1}{\kappa_0} \|\tilde{V}_1\| \int_{\Omega} \kappa_0 \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j \\
&= \frac{\kappa_1}{\kappa_0} \|\tilde{V}_1\| \mathbf{K}_r^0(i, j)
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
\text{pour } 2 \leq k \leq \tilde{N}, \quad \mathbf{K}_r^{1,k}(i, j) &= \int_{\Omega} \kappa_2 \tilde{V}_1 \tilde{V}_k \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j \\
&= \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \|\tilde{V}_1\| \mathbf{K}_r^k(i, j)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_r^{1,1}(i, j) &= \int_{\Omega} \kappa_2 \tilde{V}_1 \tilde{V}_1 \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j \\
&= \frac{\kappa_2}{\kappa_0} \|\tilde{V}_1\|^2 \mathbf{K}_r^0(i, j)
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Les matrices  $\mathbf{K}_r^{1,k}$  sont ainsi directement reliées aux matrices  $\mathbf{K}_r^k$  et n'ont pas à être calculées. Le nombre total de matrices à stocker diminue et est alors égal à  $2\tilde{N} - 1$  (au lieu de  $3\tilde{N} - 1$ ). La matrice de conductivité réduite s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \kappa(T) \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j &\approx \mathbf{K}_r^0(i, j) \left( 1 + \frac{\kappa_1}{\kappa_0} \|\tilde{V}_1\| \tilde{x}_1(t) + \frac{\kappa_2}{\kappa_0} \|\tilde{V}_1\|^2 \tilde{x}_1(t)^2 \right) \\
&+ \sum_{k=2}^{\tilde{N}} \left[ \tilde{x}_k(t) \left( 1 + 2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \|\tilde{V}_1\| \tilde{x}_1(t) \right) \mathbf{K}_r^k(i, j) + \tilde{x}_k(t)^2 \mathbf{K}_r^{k,k}(i, j) \right]
\end{aligned} \tag{3.64}$$

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode AROMM, qui permet une formulation modale pour des modèles thermiques où tout type de non-linéarités et d'instationnarités peut se présenter.

Les deux bases qui permettent cette formulation sont la base de branche et la base de Dirichlet-Steklov. Cette dernière permet de maîtriser parfaitement le nombre de modes que l'on veut calculer pour chacune des deux familles (modes de Dirichlet intervenant dans le domaine, et modes de Steklov liés à la frontière).

L'utilisation conjointe de la troncature de Marschall et de l'amalgame permet une réduction efficace en termes de temps de construction de la base réduite et d'ordre de réduction.

Dans le cas où l'on cherche à traiter un problème où la conductivité thermique dépend de la température, cette méthode modale, bien qu'adaptée à prendre en compte cette variation, s'avère peu intéressante, compte tenu de la nécessité de reconstruire régulièrement la matrice réduite de conductivité.

Cette difficulté est levée en approchant la loi de variation de la conductivité par une fonction quadratique. En exprimant cette fonction quadratique dans l'espace modal, il est alors possible d'éviter le recalcul systématique de la matrice réduite de conductivité. Ceci se fait au prix d'un calcul préalable d'un nombre important de matrices réduites. Une approximation numérique permet alors de limiter le nombre de ces matrices.

Le modèle réduit est ainsi caractérisé par trois approximations :

- La réduction modale qui ne considère qu'un nombre limité de modes ;
- L'utilisation d'une loi quadratique pour représenter l'évolution de la conductivité avec la température ;
- Une simplification de la formulation modale réduite du terme quadratique de la matrice de conductivité, dans laquelle on ne prend en compte qu'un nombre limité de matrices réduites de couplage ;

La mise en œuvre de cette technique sur une application doit permettre de vérifier l'efficacité du procédé.



# Chapitre 4

## Application numérique : Puce activée par quatre sources de chaleur

### 4.1 Correspondance entre environnements logiciels distincts : ANSYS et SAMBA

Les méthodes décrites dans les chapitres précédents seraient inutiles sans une implémentation informatique efficace. Depuis plusieurs années le LMEE capitalise les avancées théoriques dans un environnement logiciel appelé SAMBA (Simulation et Analyse Modale de Bases Amalgamées).

A partir d'un maillage provenant d'une source extérieure (Gmesh, Comsol, ANSYS..), cet environnement permet de

- Réaliser des simulations éléments finis en régime permanent ou transitoire ;
- Calculer des bases (de branche, de Dirichlet-Steklov ou de Fourier) ;
- De réaliser l'amalgame modal ;
- De réaliser des simulations réduites ;
- D'effectuer l'analyse de ces simulations.

Ce code de calcul est un code de laboratoire et sert avant tout de preuve de concept et n'est pas adapté à une implémentation industrielle, notamment en ce qui concerne la maintenabilité. Par ailleurs, comme dit au-dessus, SAMBA ne possède ni modeleur ni mailleur et doit être compatible avec le logiciel utilisé pour ces étapes.

Thales utilise la suite logicielle ANSYS. Par défaut, ce logiciel maille en utilisant tout type d'éléments (voire Fig. 4.1). Un travail d'ingénierie logicielle a été nécessaire pour rajouter les hexaèdres, les prismes et les pyramides aux éléments traités par SAMBA.

De plus, il a fallu établir une correspondance entre les formats de données de sortie d'ANSYS, représentant la géométrie des composants, mais aussi leurs caractéristiques thermophysiques (voir Fig. 4.2), et les entrées requises par le code du laboratoire

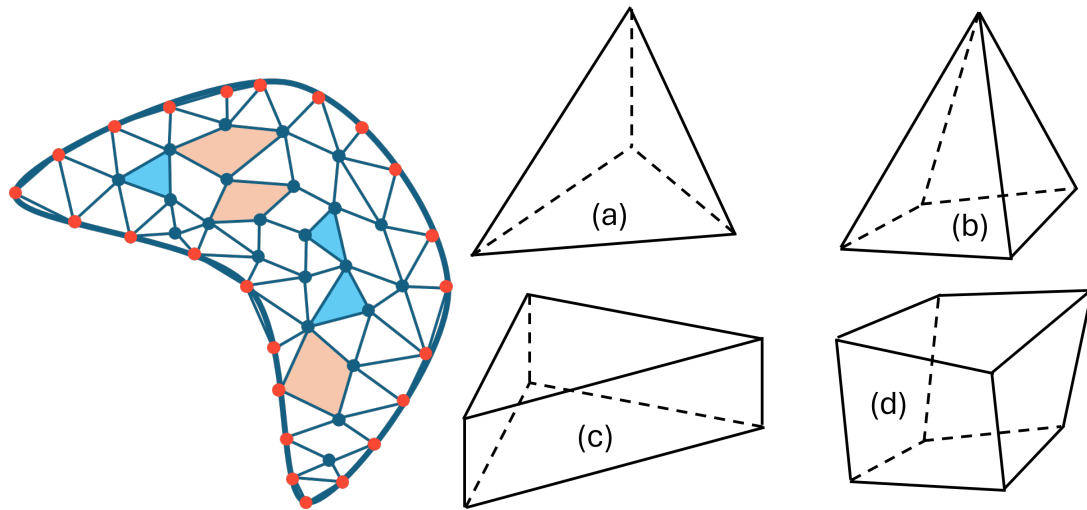


FIGURE 4.1 – Exemple de maillage mixte (à gauche) et les différents types d'éléments rencontrés en éléments finis (a) tétraèdre (b) pyramide, (c) prisme, (d) hexaèdre

```

560809      211309      252428      261179      270938      275271
560810  emod,_cm_1015_,mat,149
560811  MP, KXX, 150, 3.850000e+02
560812  MP, C, 150, 3.850000e+02
560813  MP, DENS, 150, 8.930000e+03
560814  CMBLOCK,_CM_1015_,ELEM,          3
560815  (8i10)
560816      220661      239495      298206
560817  emod,_cm_1015_,mat,150
560818  MP,DENS,151,8930,      ! kg m^-3
560819  MP,C,151,385,      ! J kg^-1 C^-1
560820  MP,KXX,151,385,      ! W m^-1 C^-1
560821  MP,UVID,151,c8e0ffe5-ee2d-4471-9c9a-42aad2c2548a
560822
560823  CMBLOCK,_CM_1015_,ELEM,          36403
560824  (8i10)
560825      194686      194696      194701      194708      194713      194718      194720      194729
560826      194732      194738      194747      194753      194755      194757      194760      194764
560827      194774      194775      194778      194779      194780      194783      194790      194794
560828      194797      194800      194801      194802      194804      194814      194821      194822
560829      194824      194826      194827      194830      194834      194840      194842      194845
560830      194847      194848      194851      194854      194855      194858      194862      194865
560831      194873      194877      194878      194881      194883      194884      194885      194886

```

FIGURE 4.2 – Extrait d'un fichier de sortie généré par ANSYS. Le numéro de ligne est à gauche.

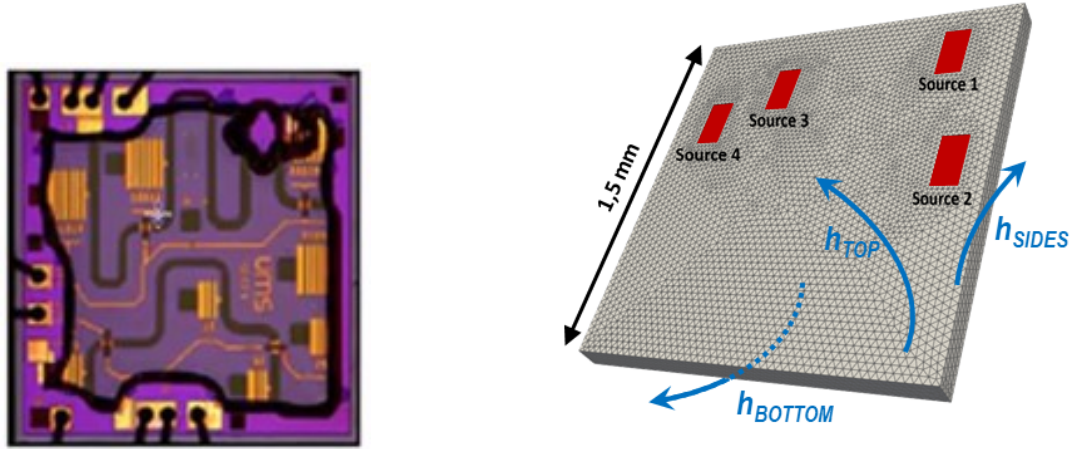


FIGURE 4.3 – Représentation du modèle numérique

## 4.2 Présentation du modèle

La première application présentée concerne une puce micro-électronique industrielle en arséniure de gallium (GaAs), de dimensions  $(1,5 \times 1,5 \times 0,1) \text{ mm}$ .

Cette puce contient quatre sources de chaleur, chacune de dimensions  $(0,2 \times 0,2 \times 0,02) \text{ mm}$  (voir Fig. 4.3). Les sources de chaleur présentent une dépendance partielle : les sources 1 et 2 sont toujours activées ensemble, tout comme les sources 3 et 4. Évidemment, toutes les sources peuvent être activées simultanément. Le terme de puissance interne qui apparaît dans la formulation variationnelle faible de l'équation de la chaleur (Eq. (3.42)) s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} \varpi f = \varpi_A \beta_A(t) \int_{S1 \cup S2} f + \varpi_B \beta_B(t) \int_{S3 \cup S4} f \quad (4.1)$$

avec  $\varpi_A$  et  $\varpi_B$  les amplitudes maximales respectives de chaque paire de sources et  $\beta_A(t)$  et  $\beta_B(t)$  leurs dépendances temporelles (comprises entre 0 et 1).

Les échanges avec le milieu extérieur sont représentés par des coefficients qui varient selon la face considérée :

- sur la face supérieure :  $h_{TOP}$
- sur la face inférieure :  $h_{BOTTOM}$
- sur les quatre faces latérales :  $h_{SIDES}$

Enfin, la conductivité thermique du GaAs dépend de la température, selon la relation

suivante :

$$\kappa(T) = 46 \times \left( \frac{T + 273,15}{300} \right)^{-1,25} [W.m^{-1}.K^{-1}] \quad (4.2)$$

où T est exprimée en degrés Celsius.

Afin d'obtenir des résultats numériques précis pour les températures internes et les flux de chaleur de surface, un modèle éléments finis tridimensionnel détaillé (qui permet l'écriture et la résolution de l'Eq. (2.4)) est nécessaire, comprenant 26 733 degrés de liberté. Ce maillage étendu est nécessaire pour capturer l'important gradient de température, qui atteint des amplitudes de l'ordre de  $10^5 K/m$ . La conductivité thermique est évaluée en utilisant la loi réelle (Eq. (4.2)). Ce modèle éléments finis constitue la référence pour la comparaison. On note pour la suite  $T_{REF}$  les champs de températures obtenus par ce modèle.

### 4.3 Évaluation des erreurs

Plusieurs indicateurs sont définis pour évaluer les performances du modèle réduit. Puisque d'un point de vue industriel la température maximale  $T_{max}$  est la grandeur principale utilisée pour prévenir les défaillances et évaluer la fiabilité du système, un premier type d'erreur se fonde sur cette température. On définit ainsi :

- l'erreur sur la température maximale en régime permanent ( $\varepsilon_{steady}$ ) :

$$\varepsilon_{steady} = |T_{max,REF}(t = \infty) - T_{max}(t = \infty)| \quad (4.3)$$

- l'erreur sur la température maximale moyennée pendant la phase transitoire :

$$\varepsilon_{trans} = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} |T_{max,REF}(t) - T_{max}(t)| \quad (4.4)$$

avec  $\tau$  la constante de temps du domaine considéré tel que :

$$\tau = \frac{\rho C_p V}{\sum_{i=1}^3 h_i S_i} \quad (4.5)$$

Dans cette équation,  $S_i$  correspond aux trois surfaces des frontières (supérieure, inférieure et latérale) et  $h_i$  est le coefficient d'échange correspondant. Le terme  $V$  est le volume du domaine  $\Omega$ .

Les erreurs mentionnées précédemment sont des erreurs ponctuelles qui fournissent des

informations utiles aux ingénieurs. Cependant, elles ne permettent pas toujours une représentation complète des performances du modèle. Pour répondre à ce problème, nous introduisons deux indicateurs supplémentaires qui capturent l'erreur moyenne sur tout le domaine étudié, avec d'une part :

- l'erreur en régime permanent :

$$\langle \varepsilon \rangle_{steady} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} |T_{REF}(t = \infty) - T(t = \infty)| \quad (4.6)$$

- l'erreur pendant la phase transitoire :

$$\langle \varepsilon \rangle_{trans} = \frac{1}{V} \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} \int_{\tau} |T_{REF}(t) - T(t)| \quad (4.7)$$

### 4.3.1 Influence de la non-linéarité

Nous présentons dans la figure 4.4 l'évolution de la conductivité thermique en fonction de la température (Eq. (4.2)), ses approximations affine et quadratique ainsi que les différences entre ces approximations et la loi réelle.

Dans cette plage de température, la conductivité diminue d'un facteur 2. Si nous prenons une valeur fixe de la conductivité (par exemple à une température de 20°C comme le font les ingénieurs), nous sur-estimons la conductivité et sous-estimons donc la température maximale.

En ce qui concerne l'approximation affine, elle s'écarte nécessairement de la réalité sur une plage de température aussi large, en particulier pour les températures élevées, et cette loi affine entraîne une différence maximale de l'ordre de 12% par rapport à la conductivité réelle. L'approximation quadratique est, quant à elle, très satisfaisante, avec un écart inférieur à 2%.

L'impact du modèle de non-linéarité sur le champ de température de la puce est étudié par simulation complète éléments finis. Quatre calculs sont ainsi effectués :

- Une simulation avec la véritable loi de conductivité (Eq. (4.2)). Cette simulation sert de référence.
- Une simulation avec une conductivité constante égale à  $46 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  (qui correspond à la conductivité de l'arséniure de gallium à 27°C).
- Une simulation avec une loi affine construite sur la plage de température allant 0°C à 250°C :

$$\kappa(T) = 47,671 - 0,1097T \quad (4.8)$$

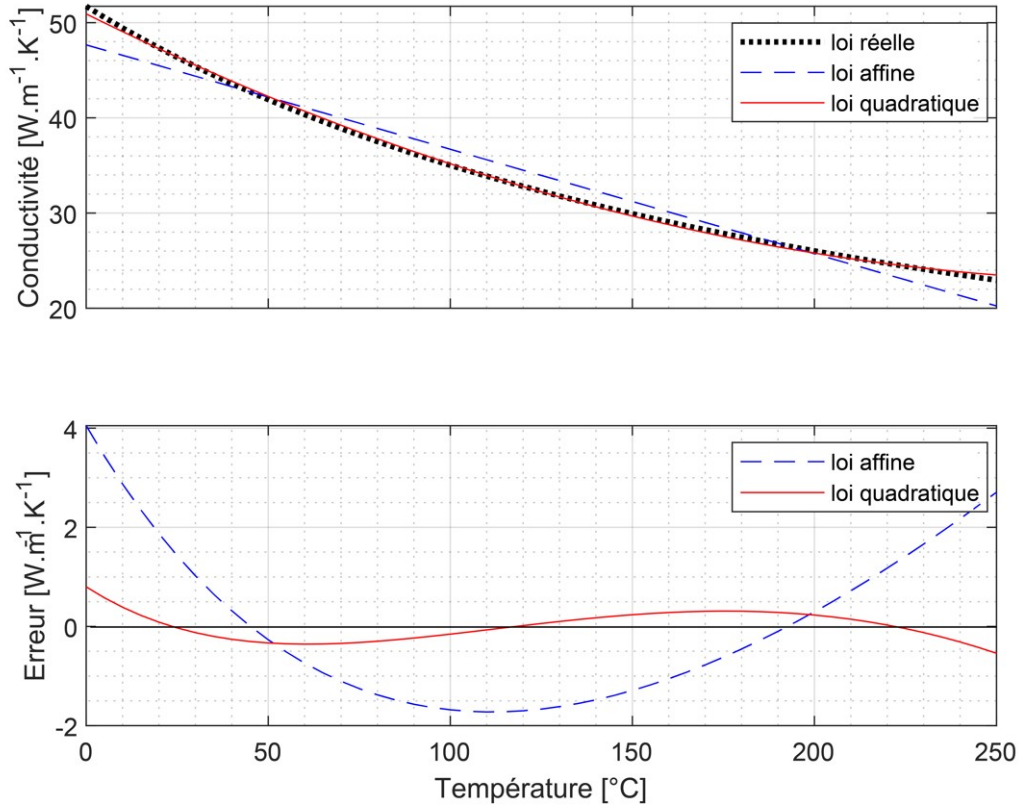


FIGURE 4.4 – Évolution de la conductivité thermique en fonction de la température

- Une simulation effectuée avec une loi quadratique mise en place pour minimiser la différence avec l'évolution réelle de conductivité sur la même plage de température ( $0^{\circ}C - 250^{\circ}C$ ) :

$$\kappa(T) = 50,92 - 0,11893T + 3,184 \cdot 10^{-4}T^2 \quad (4.9)$$

Le scénario choisi pour ces simulations est un des cas proposés par le JEDEC (tableau 1.4, cas n°29). Il correspond à une puce soudée par la face supérieure sur une plaque froide et refroidie sur les autres faces par convection naturelle :  $h_{BOTTOM} = h_{SIDE} = 10 W.m^{-2}.K^{-1}$  et  $h_{TOP} = 10^4 W.m^{-2}.K^{-1}$ . La condition initiale consiste en une température homogène de  $22^{\circ}C$ , et une même dissipation de puissance volumique est imposée sur les quatre sources. En reprenant l'expression de l'équation (4.1), on a alors :

$$\varpi_A = \varpi_B = 1,25 \cdot 10^{12} W.m^{-3} \quad \text{et} \quad \beta_A(t) = \beta_B(t) = 1$$

Les résultats sont présentés dans le tableau 4.1 et son analyse est la suivante :

- La simulation utilisant une conductivité constante sous-estime la température maximale de plus de  $27^{\circ}\text{C}$ .
- Une simple approximation affine améliore les résultats, avec une température maximale à la phase permanent qui est de  $2^{\circ}\text{C}$  en dessous de la référence, et l'erreur moyenne de température sur la puce à la phase permanent est de l'ordre de  $1^{\circ}\text{C}$ .
- L'erreur liée au choix du modèle de loi de conductivité s'améliore considérablement lorsque nous utilisons une approximation quadratique, puisque dans ce cas les erreurs moyennes permanente  $\langle \varepsilon \rangle_{steady}$  et transitoire  $\langle \varepsilon \rangle_{trans}$  sont inférieures à  $0,1^{\circ}\text{C}$  (pour une température maximale de plus de  $200^{\circ}\text{C}$ ).

	$\kappa_0$	$\kappa_0 + k_1 T$	$\kappa_0 + \kappa_1 T + \kappa_2 T^2$
$\varepsilon_{steady}$	27,29	2,28	0,55
$\varepsilon_{trans}$	14,62	2,14	0,19
$\langle \varepsilon \rangle_{steady}$	5,85	0,89	0,08
$\langle \varepsilon \rangle_{trans}$	2,41	0,40	0,08
$T_{max}$	176,10	201,11	203,93

TABLE 4.1 – Impact de la non-linéarité sur la distribution de température

La répartition de la température à l'état permanent est représentée sur la figure 4.5. La température varie de  $66^{\circ}\text{C}$  à  $203,4^{\circ}\text{C}$ , générant ainsi un gradient de température significatif d'environ  $1,6 \times 10^5 (\text{K}/\text{m})$ . Ces gradients de température extrêmes expliquent la difficulté à calculer précisément les champs de température. De plus, cette large plage de température entraîne une variation spatiale importante de la conductivité thermique, allant de 25 à  $40 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  (voir Fig. 4.6). Dans de tels cas, il devient impératif de prendre en compte la non-linéarité du problème.

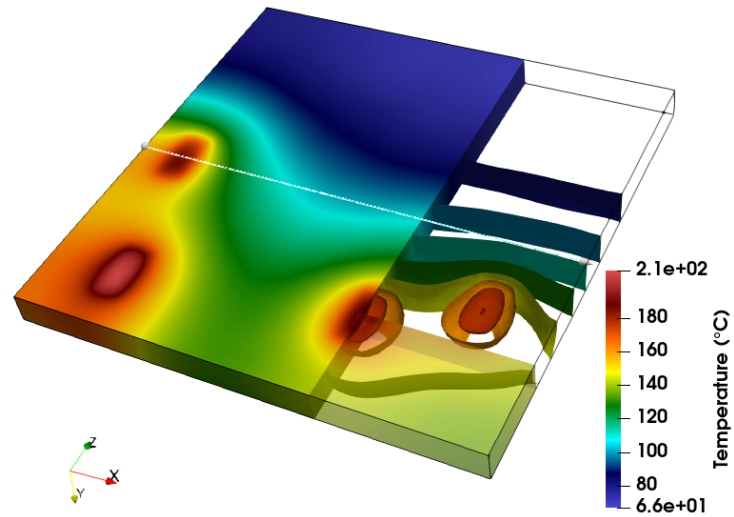


FIGURE 4.5 – Champ de température pour 4 sources de chaleur activées obtenu avec la méthode des éléments finis

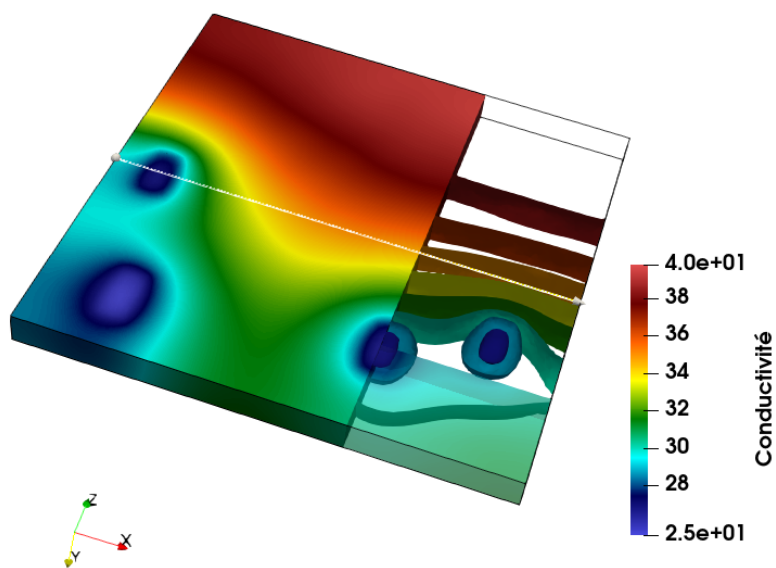


FIGURE 4.6 – Champ de conductivité obtenu par la méthode des éléments finis



## 4.4 Construction du modèle réduit modal

Pour cette application, nous choisissons d'utiliser une base de Dirichlet-Steklov, compte tenu de sa capacité à séparer directement lors de son calcul les modes qui interviennent sur le domaine (les modes de Dirichlet) de ceux qui agissent sur la frontière (les modes de Steklov). Cette propriété va s'avérer particulièrement intéressante lors de la première phase de réduction, c'est-à-dire la troncature temporelle.

### 4.4.1 Troncature temporelle

Dans l'application considérée, le maillage est constitué de  $N^D = 19\,065$  noeuds sur le domaine intérieure et  $N^S = 7\,668$  noeuds sur la frontière de ce domaine. Le calcul complet des modes implique donc  $N^D$  modes de Dirichlet et  $N^S$  modes de Steklov. La première réduction consiste à ne calculer qu'un pourcentage de chacune de ces deux bases constituées par les modes caractérisés par les plus grandes constantes de temps  $\tau_i$  (pour rappel, définies par l'Eq. (3.12)). Le tableau 4.2 représente différentes bases tronquées ainsi que les temps de calcul  $t_{CPU}$  associés.

n° de base	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
% Dirichlet	100	100	100	100	50	20	10	10	1	5	10	5	1
% Steklov	100	50	20	10	100	100	100	10	1	5	5	10	10
Nombre Dirichlet	19065	19065	19065	19065	9533	5813	1907	1907	191	954	1907	954	191
Nombre Steklov	7668	3834	1534	767	7668	7668	7668	767	77	384	384	767	767
$t_{CPU}$ (s)	1965	1710	1380	1360	1355	985	905	201	22	98	162	144	88

TABLE 4.2 – Présentation des différentes bases tronquées testée, et temps de calcul associé

Ce tableau montre tout d'abord que de manière évidente, moins on calcule de modes plus la base est obtenue rapidement, avec une dépendance linéaire entre le nombre de modes et le temps de calcul.

Pour analyser la précision de ces différentes troncatures, les erreurs dites de projection sont calculées de la manière suivante :

- A partir de champs de températures connus  $T_{REF}$  issus de la simulation complète par éléments finis, il est possible de calculer les états  $x_i^{REF}$  à partir du produit scalaire  $\langle T_{REF} | V_i \rangle$  comme présentés dans l'équation (3.26). Ici les champs de température sont ceux obtenus par la modélisation éléments finis qui tient compte des véritables évolutions de la conductivité avec la température.
- L'erreur de projection correspond alors à la différence entre la température de référence

et celle obtenue par reconstruction modale :

$$\varepsilon = T_{REF} - \sum_{i=1}^{\tilde{N}} x_i^{REF} \cdot V_i$$

Cette définition permet ainsi d'obtenir les différentes erreurs de projection telles que définies par les équations (4.3) à (4.7). L'erreur de projection permet ainsi de quantifier la capacité d'une base réduite à reproduire divers champs de température. Les résultats sont affichés dans le tableau 4.3.

n° de base	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varepsilon_{steady}$	0,00	0,48	0,29	0,44	0,00	0,00	0,00	0,44	23,92	5,34	5,34	0,44	0,44
$\varepsilon_{trans}$	0,00	0,40	0,21	0,43	0,00	0,00	0,00	0,43	20,35	4,38	4,38	0,43	0,43
$\langle \varepsilon \rangle_{steady}$	0,00	0,01	0,03	0,12	0,02	0,03	0,06	0,16	1,55	0,40	0,39	0,17	0,21
$\langle \varepsilon \rangle_{trans}$	0,00	0,01	0,03	0,10	0,01	0,03	0,05	0,13	1,29	0,33	0,33	0,14	0,18
$T_{max}$ (°C)	203,97	202,91	203,68	203,83	203,39	203,39	203,39	203,83	179,17	197,76	197,76	203,54	203,54

TABLE 4.3 – Erreurs de projection des différentes bases tronquées

On constate que le calcul de la base complète (base n°0) n'engendre aucune erreur : il s'agit uniquement d'un changement de base, il n'y a pas de réduction.

Lorsque l'on examine l'évolution des grandeurs moyennées sur l'espace, on constate que plus la base est tronquée, et plus les erreurs augmentent. Notons aussi que même une base fortement tronquée donne des résultats très précis, avec des écarts moyens de l'ordre de 0,15 °C pour une température maximale de 204°C. Toutefois, lorsque l'on dépasse un certain seuil de troncature c'est à dire lorsque seul 1% de la base totale est calculée, il n'y a pas suffisamment de modes pour reconstruire un champ de température complexe.

Les résultats sur les valeurs maximales ( $\varepsilon_{steady}$  et  $\varepsilon_{trans}$ ) peuvent paraître plus surprenants, puisque la base n°2, bien que plus petite que la base n°1, donne de meilleurs résultats sur ces indicateurs. Cela est dû au fait que ces indicateurs sont ponctuels, et que les méthodes modales sont des méthodes globales et non locales. Pour illustrer ce propos, on présente sur la figure 4.7 une reconstruction d'un signal par série de Fourier avec respectivement 2 modes et 4 modes. On observe bien qu'en moyenne, le signal reconstruit avec quatre modes est plus proche de la référence que le modèle à deux modes. Cependant, en certains points (vers  $x=0,05$  par exemple) le modèle à deux modes donne de meilleurs résultats.

Par ailleurs, les dernières colonnes de ce tableau permettent d'étudier plus en détail l'influence relative des modes de Dirichlet et Steklov. On remarque tout de suite que si on ne calcule que 5 % de la base de Steklov (bases n°9 et n°10), les résultats se dégradent. Par contre si on garde 10 % de la base de Steklov, on peut diminuer le nombre de modes de Dirichlet jusqu'à 1 % de la base initiale sans dégrader les résultats (base n°12).

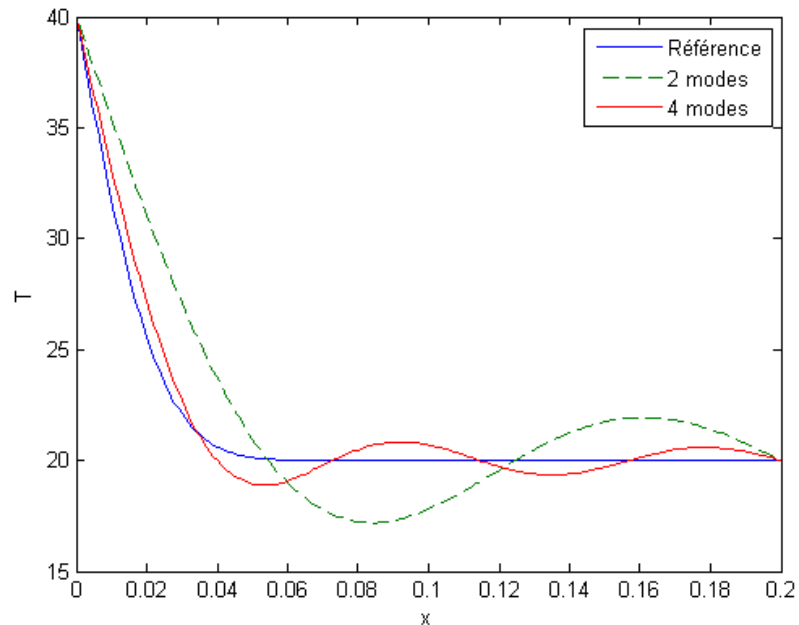


FIGURE 4.7 – Reconstruction d’un signal donné (noté Référence) par série de Fourier avec respectivement 2 modes et 4 modes

## 4.4.2 Réduction par amalgame

### 4.4.2.1 Choix des scénarios de référence

Une fois que la base est calculée, elle doit être réduite à  $\tilde{N}$  modes à partir des modes initiaux. Cela est réalisé grâce à la procédure d’amalgame, qui nécessite une ou plusieurs simulations de référence.

En tant qu’application industrielle, il est important d’avoir des simulations de référence qui puissent être obtenues rapidement pour la procédure d’amalgame. Dans cette analyse, dix scénarios de conditions aux limites, comme indiqué dans le Tableau 4.4, sont utilisés, et chaque paire de sources de chaleur est activée successivement. On obtient donc vingt cas qui vont servir de référence pour la procédure d’amalgame. Ces simulations de référence sont résolues selon le schéma de discrétisation temporelle d’Euler du premier ordre à pas de temps constants et une conductivité thermique constante. Ces simulations ne sont pas conçues pour donner des résultats précis<sup>1</sup>, mais seulement pour solliciter les modes les plus pertinents.

---

1. Le seul fait d’utiliser une conductivité thermique constante engendre des erreurs importantes comme l’a montré le tableau 4.1

	$h_{TOP}$	$h_{BOTTOM}$	$h_{SIDES}$	$\varpi$
1	15	100	50	$2,91.10^{10}$
2	50	250	15	$7,6.10^{10}$
3	800	20	5	$2,05.10^{11}$
4	0,1	10000	0,1	$2,53.10^{12}$
5	400	1000	15	$2,6.10^{11}$
6	0,1	100	50	$2,84.10^{10}$
7	1000	40	100	$2,67.10^{11}$
8	10	1000	10	$2,53.10^{11}$
9	15	200	200	$6,71.10^{10}$
10	30	10000	50	$2,51.10^{12}$

TABLE 4.4 – Présentation des dix scénarios utilisés pour le processus de réduction par amalgame (à chaque fois la puissance volumique  $\varpi$  alimente soit les sources 1 et 2, soit les sources 3 et 4)

#### 4.4.2.2 Influence du choix de la base tronquée sur la précision de la base amalgamée

Le paragraphe 4.4.1 a permis de quantifier le degré de troncature acceptable pour obtenir une erreur de projection suffisamment faible. Il faut maintenant analyser l'impact de cette troncature initiale sur la base réduite finale.

On utilise ainsi les différentes bases tronquées présentées dans le tableau 4.2, pour calculer des bases réduites par amalgame. Pour chacune de ces bases tronquées, on calcule deux bases réduites amalgamées avec respectivement 50 et 200 modes.

La figure 4.8 présente les deux premiers modes amalgamés de Dirichlet pour la base à 50 modes : les modes sont localisés sur les sources. Ainsi, à partir de fonctions sinusoïdales (qui correspondent aux modes de Dirichlet dans un pavé droit homogène), la procédure d'amalgame spécialise les modes pour s'adapter au problème posé. Cette figure appelle deux remarques. En premier lieu, il est nécessaire d'avoir suffisamment de modes de Dirichlet pour pouvoir avoir ce niveau de détail. Ensuite, si le problème change (par exemple seule une source sur les quatre fonctionne), les modes amalgamés ne pourront pas nécessairement reproduire les phénomènes physiques.

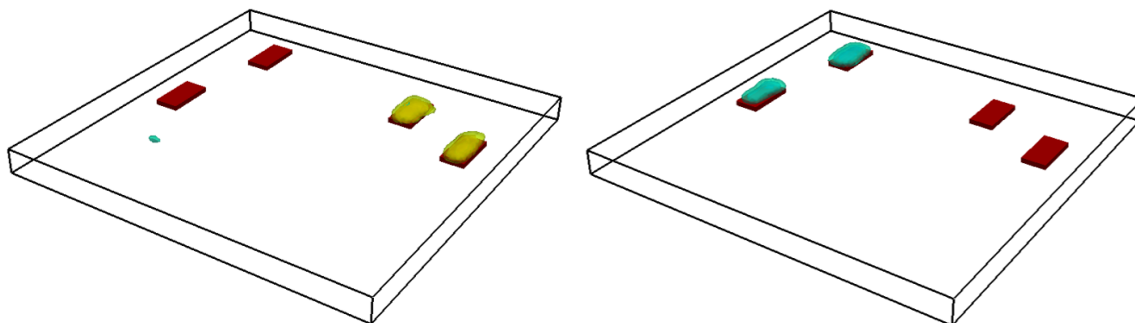


FIGURE 4.8 – Les deux premiers modes amalgamés de Dirichlet (vue de dessous). Les sources sont représentées en rouge

Les tableaux 4.5 et 4.6 présentent les différentes erreurs de projection de ces différentes bases pour le même scénario que celui présenté précédemment (cas JEDEC n°29 du tableau 1.4), que l'on peut donc comparer avec celles obtenues avec les bases initiales tronquées (tableau 4.3) :

- Cette réduction finale par amalgame engendre une erreur, puisque si l'on regarde la base initiale complète n°0, on remarque que les erreurs de projection moyennes en régime permanent  $\langle \varepsilon \rangle_{\text{steady}}$  et en régime transitoire  $\langle \varepsilon \rangle_{\text{trans}}$  initialement nulles, sont maintenant de l'ordre de  $0,2^\circ\text{C}$  pour  $\tilde{N} = 200$  modes et augmentent jusqu'à  $0,3^\circ\text{C}$  pour  $\tilde{N} = 50$  modes.
- On retrouve cette augmentation des erreurs de projection entre les bases initiales et bases amalgamées pour l'ensemble des bases testées. Ceci étant, cette augmentation de l'erreur reste tout à fait acceptable. Si l'on regarde la base n°7 qui est constituée de 10% de chacune des deux bases (Dirichlet et Steklov), l'erreur  $\langle \varepsilon \rangle_{\text{steady}}$  augmente respectivement de  $0,16^\circ\text{C}$  (base tronqué) jusqu'à  $0,24^\circ\text{C}$  (base amalgamée pour  $\tilde{N} = 200$  modes) ou  $0,38^\circ\text{C}$  ( $\tilde{N} = 50$  modes).
- Lorsque l'on utilise des bases initiales encore plus réduites en terme de nombre de modes de Dirichlet (bases n°11 et n°12), les résultats restent encore très acceptables. Par ailleurs, le temps de calcul préalable de construction de la base tronquée initiale (c'est-à-dire le prix à payer pour pouvoir utiliser le modèle modal) n'est plus du tout le même : on passe de 1965 s (une demi-heure) pour la base complète n°0, à 144 ou 88 secondes, soit moins de 3 minutes pour ces bases tronquées n°11 et 12. Le faible nombre de Dirichlet nécessaire s'explique par la simplicité du modèle puisqu'il n'est composé que d'un seul matériau. Ceci est répercuté sur le nombre de mode amalgamés de type Dirichlet : que ce soit pour une réduction à 50 ou à 200 modes, et quelle que soit la base initiale considérée, seuls sept modes de Dirichlet majeurs sont sélectionnés

par la procédure d'amalgame. Ces résultats devront être confirmés lorsque l'on utilise la base réduite pour la résolution du problème (et non pas pour une simple projection de quelques champs de température sur la base réduite étudiée).

n° de base	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varepsilon_{\text{steady}}$	3,48	3,89	3,10	2,94	3,48	3,48	3,48	2,94	24,64	7,95	7,95	2,94	2,94
$\varepsilon_{\text{trans}}$	2,67	3,01	2,37	2,15	2,67	2,67	2,67	2,15	20,86	6,31	6,31	2,09	2,09
$\langle \varepsilon \rangle_{\text{steady}}$	0,32	0,32	0,33	0,35	0,32	0,33	0,35	0,38	1,57	0,54	0,53	0,38	0,42
$\langle \varepsilon \rangle_{\text{trans}}$	0,27	0,27	0,27	0,29	0,27	0,28	0,30	0,32	1,30	0,45	0,45	0,32	0,35
$T_{\text{max}} (^{\circ}\text{C})$	199,91	199,50	200,29	200,45	199,91	199,91	199,91	200,45	178,46	195,15	195,15	200,16	200,16

TABLE 4.5 – Erreurs de projections des différentes bases amalgamées à  $\tilde{N} = 50$  modes

n° de base	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varepsilon_{\text{steady}}$	1,93	2,35	1,50	0,87	1,93	1,93	1,93	0,87	23,93	6,06	6,06	0,87	0,87
$\varepsilon_{\text{trans}}$	1,44	1,80	1,13	0,56	1,44	1,44	1,44	0,56	20,35	4,88	4,88	0,53	0,53
$\langle \varepsilon \rangle_{\text{steady}}$	0,20	0,20	0,21	0,21	0,21	0,21	0,24	0,24	1,55	0,44	0,44	0,25	0,28
$\langle \varepsilon \rangle_{\text{trans}}$	0,16	0,16	0,17	0,17	0,17	0,17	0,19	0,19	1,29	0,36	0,36	0,20	0,23
$T_{\text{max}} (^{\circ}\text{C})$	201,46	201,04	201,89	202,52	201,46	201,46	201,46	202,52	179,16	197,04	197,04	202,23	202,23

TABLE 4.6 – Erreurs de projections des différentes bases amalgamées à  $\tilde{N} = 200$  modes

## 4.5 Résultats de la simulation modale réduite

### 4.5.1 Modèle réduit

Nous allons maintenant utiliser le modèle réduit pour effectuer réellement la simulation d'un problème thermique. On rappelle ici les différentes étapes de la construction du modèle réduit :

- Calcul de la base tronquée. Pour la suite de cette étude, c'est la base n°7 qui est choisie, constituée de 10% de chaque base complète, soit 1907 modes de Dirichlet et 765 modes de Steklov. Le temps calcul nécessaire à l'obtention de cette base tronquée est de 3 minutes et 21 secondes.
- Construction de la base amalgamée, à partir de champs de températures initiaux choisis de manière à balayer les différentes configurations possibles (Tableau 4.4).
- Assemblage des  $2\tilde{N} - 1$  matrices réduites données par les équations (3.50), (3.53), (3.57) impliquées dans l'équation (3.59), définissant la non-linéarité dans le modèle réduit. Le temps de calcul est directement lié à l'ordre du modèle : environ 1 minute pour  $\tilde{N} = 50$  et plus de 5 minutes pour  $\tilde{N} = 200$ .

L'ensemble du processus pour obtenir le modèle d'ordre réduit, y compris le calcul de la base, les simulations de référence et la procédure d'amalgame, est réalisé en 8 minutes pour  $\tilde{N} = 50$  et plus de 12 minutes pour  $\tilde{N} = 200$ .

Ces différentes matrices sont alors utilisées pour construire le modèle réduit modal tel que présenté par l'équation (3.45), dont la résolution permet de calculer rapidement les différents états d'excitations  $x_i(t)$ . Ces états donnent ainsi accès au champ de température  $\tilde{T} = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_i \tilde{V}_i$  qui est alors comparé au champ de référence obtenu par résolution classique éléments finis.

### 4.5.2 Influence de la modélisation de la conductivité

L'influence du modèle de non-linéarité sur le modèle réduit est étudiée. Trois modèles existent pour calculer la matrice réduite de conductivité  $\mathbf{K}_r(T)$  qui apparaît dans le modèle réduit discret (Eq. (3.45)) :

- Modèle (a) : la matrice  $\mathbf{K}(T)$  est calculée avec la loi réelle (Eq. (4.2)) dans l'espace des température, et la matrice réduite  $\mathbf{K}_r(T)$  est alors recalculée à chaque pas de temps afin de repasser dans l'espace modal selon la relation  $\mathbf{K}_r(T) = \mathbf{V}^t \mathbf{K}(T) \mathbf{V}$  comme présenté dans l'Eq. (3.46) .
- Modèle (b) : la conductivité est approchée par la loi quadratique (Eq. (4.9)) et la matrice  $\mathbf{K}_r(T)$  est calculée avec l'ensemble des  $\tilde{N}(\tilde{N} + 3)/2 + 1$  matrices suivant l'équation (3.59)
- Modèle (c) : la conductivité est approchée par une loi quadratique et la matrice  $\mathbf{K}_r(T)$  est calculée uniquement avec les  $2\tilde{N} - 1$  matrices de l'équation (3.64)

	(a)	(b)	(c)
$\varepsilon_{steady}$	2,33	1,92	1,11
$\varepsilon_{trans}$	1,51	1,63	1,22
$\langle \varepsilon \rangle_{steady}$	0,45	0,46	0,49
$\langle \varepsilon \rangle_{trans}$	0,38	0,37	0,39
$T_{max}$	201,1	201,5	202,3
$t_{CPU}$ (s)	96	1	0,3

TABLE 4.7 – Performances du modèle réduit d'ordre 50 pour différentes modélisations de la conductivité

Le tableau 4.7 présente les erreurs engendrées par les différents modèles réduits (avec toujours le même ordre de réduction  $\tilde{N} = 50$ ), ainsi que les temps de calcul nécessaires pour

réaliser une simulation. L'analyse de ce tableau amène aux remarques suivantes :

- Lorsque l'on compare les résultats obtenus par le modèle réduit utilisant la loi de conductivité exacte (modèle (a)) avec ceux obtenus par le modèle complet utilisant une modélisation quadratique (tableau 4.1), on note que la réduction à elle seule produit une erreur plus grande que l'erreur générée par l'approximation de la conductivité. Par contre l'utilisation de la loi exacte de conductivité dans la formulation modale réduite entraîne un temps de calcul important (du même ordre que le modèle complet de type éléments finis)<sup>2</sup>
- Si l'on compare les trois modèles réduits (a), (b) et (c), on note que les erreurs moyennes dans l'espace ( $\langle \varepsilon \rangle_{steady}$  et  $\langle \varepsilon \rangle_{trans}$ ) n'augmentent que très faiblement lorsqu'une approximation quadratique complète est utilisée (modèle (b)). Ainsi l'erreur due à la réduction l'emporte largement sur l'erreur engendrée par le modèle de conductivité. De la même manière, l'approximation numérique (modèle (c)) a un impact marginal sur ces deux indicateurs.
- Lorsque l'on examine les erreurs localisées au point de température maximum  $\varepsilon_{steady}$  et  $\varepsilon_{trans}$ , on note des résultats qui pourraient paraître de prime abord surprenants, puisque les résultats les plus précis correspondent au modèle (c), qui constitue l'approximation la plus importante. Deux éléments permettent d'expliquer ce phénomène :
  - Cette erreur est ponctuelle, or comme déjà montré précédemment (Fig. 4.7), le principe d'un modèle réduit modal est de minimiser une erreur globale, et il est impossible de prédire une erreur sur un point précis.
  - La seconde explication concerne la référence : on compare un modèle réduit avec une conductivité approchée, à un modèle complet de type éléments finis utilisant la loi exacte de la conductivité. Il y a donc deux sources d'erreur : la réduction et le modèle physique, qui se combinent.
- Enfin, le temps de calcul fourni par le modèle avec l'approximation quadratique (modèle (b)) diminue d'un facteur presque 100. L'approximation numérique (modèle (c)) multiplie ce gain par trois, sans générer d'erreur notable supplémentaire. Le gain en temps de calcul apporté par le modèle (c) augmente avec l'ordre du modèle : de 3 à 50 modes, il passe à un facteur 10 pour un modèle réduit à 100 modes (14 secondes pour le modèle (b)) et 17 pour celui à 200 modes (176 secondes pour le modèle (b)).

Cette étude permet ainsi de valider la simplification effectuée lors de la construction de la matrice réduite de conduction. Ainsi la suite de cette étude sera donc réalisée avec le modèle (c).

---

2. c'est d'ailleurs la motivation de ce travail de thèse



### 4.5.3 Influence de l'ordre du modèle réduit

L'ordre du modèle est le résultat d'un compromis entre la précision souhaitée et le temps de calcul. Le tableau 4.8 présente les différents indicateurs pour différents ordres du modèle réduit, ainsi que le temps de simulation associé.

Ordre du modèle	5	10	20	50	100	200
$\varepsilon_{steady}$	7,43	7,07	4,30	1,11	0,09	0,75
$\varepsilon_{trans}$	5,96	5,93	3,66	1,2	0,6	0,17
$\langle \varepsilon \rangle_{steady}$	5,72	2,73	1,20	0,49	0,39	0,27
$\langle \varepsilon \rangle_{trans}$	5,22	2,51	1,08	0,38	0,29	0,20
$T_{max}$	195,7	196,0	198,8	202,0	203,0	203,9
$t_{CPU}$ (s)	0,11	0,11	0,13	0,30	1,40	10,36

TABLE 4.8 – Performances du modèle réduit pour différentes ordres

On note que même pour un modèle extrêmement réduit (5 modes, soit 5 degrés de liberté), les résultats sont satisfaisants, avec un écart de la température maximale durant la phase permanent de seulement 7,4 °C, c'est-à-dire moins que la simulation éléments finis avec une conductivité constante, qui présente une erreur de 27 °C.

Comme prévu, les erreurs diminuent lorsque l'ordre du modèle augmente, et les performances se rapprochent de celles des éléments finis. Bien évidemment le temps de calcul augmente également à mesure que l'ordre du modèle augmente, passant de 0,11 seconde pour un modèle réduit de 5 modes à plus de 10 secondes pour un modèle réduit de 200 modes. Ces résultats sont à comparer avec les 95 secondes nécessaires pour la simulation éléments finis.

On remarque qu'entre les deux modèles réduits  $\tilde{N} = 100$  et  $\tilde{N} = 200$ , il apparaît que l'erreur au point de température maximum en régime permanent  $\varepsilon_{steady}$  augmente lorsque l'ordre du modèle augmente. On retrouve ici le même phénomène que celui expliqué dans le paragraphe précédent.

Par ailleurs, on constate que pour les modèles  $\tilde{N} = 100$  et  $\tilde{N} = 200$ , l'erreur  $\varepsilon_{steady}$  est du même ordre de grandeur que l'erreur que l'on fait avec le modèle complet lorsque l'on remplace la loi réelle de la conductivité par son approximation quadratique comme indiqué dans le tableau 4.1. L'erreur obtenue avec ces ordres de modèles réduits n'est donc plus due à la réduction du modèle, mais plutôt au modèle de non-linéarité spécifique considéré. Il est donc illusoire de chercher à améliorer la précision au-delà de cet ordre pour ce modèle particulier.

La figure 4.9 représente l'évolution de la température maximale en fonction du temps pour le modèle de référence et deux modèles réduits, l'un d'ordre  $\tilde{N} = 5$  et l'autre d'ordre

$\tilde{N} = 50$ , ainsi que les écarts par rapport à la référence. Pour le modèle réduit d'ordre 5, nous remarquons que la différence est significative aux tous premiers instants (de l'ordre de  $18^\circ\text{C}$ ). En effet, réduire la base revient à supprimer les modes avec de petites constantes de

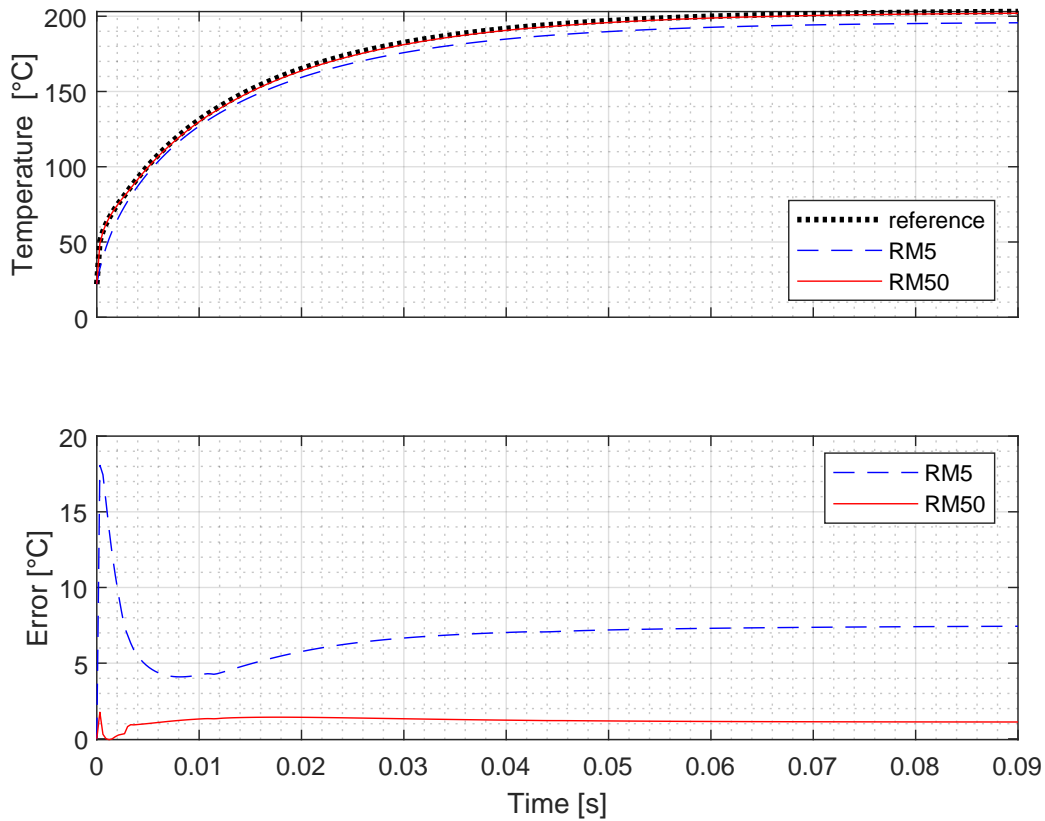


FIGURE 4.9 – Évolution temporelle de la température maximale pour le modèle de référence et deux modèles réduits (haut). Évolution temporelle de l'erreur sur la température maximale pour deux modèles réduits (bas)

temps. En cas de variation brusque telle qu'un échelon, un modèle réduit d'ordre faible a donc du mal à reproduire une dynamique très rapide. Cela est particulièrement visible pour le modèle à 5 modes, où l'erreur atteint  $18^\circ\text{C}$  dès les premiers instants de la simulation avant de diminuer et de se stabiliser à  $7,5^\circ\text{C}$ . Dès que l'ordre du modèle est augmenté, la dynamique rapide est mieux respectée, comme le montre l'exemple à 50 modes, où les courbes d'évolution temporelle de la température maximale sont presque indifférenciables.

Ainsi, le modèle réduit à 50 modes semble être un bon compromis car il est très rapide (moins de 0,3 seconde) et présente une précision de moins de 1 % quelle que soit l'erreur considérée. Par conséquent, le nombre de degrés de liberté a été réduit d'un facteur 534, et le temps de calcul réduit d'un facteur 300. Ce modèle sera gardé pour la suite de l'étude.

#### 4.5.4 Scénarios JEDEC

Nous cherchons ici à caractériser la capacité du modèle réduit choisi ( $\tilde{N} = 50$ ) à résoudre des problèmes thermiques pour tout type de conditions limites. Pour cela vingt scénarios de conditions aux limites sont choisis parmi ceux de la norme JEDEC (Cf tableau 1.4). Ces scénarios sont répertoriés dans le tableau 4.9. On retrouve ici le cas utilisé jusqu'à présent pour l'étude du modèle réduit, initialement repéré cas n°29 dans la table complète du tableau 1.4, et qui est ici le cas n°14.

case	$h_{TOP}$ ( $W.m^{-2}.K^{-1}$ )	$h_{BOTTOM}$ ( $W.m^{-2}.K^{-1}$ )	$h_{SIDES}$ ( $W.m^{-2}.K^{-1}$ )	$\varpi_1$ ( $W.m^{-3}$ )	$\varpi_2$ ( $W.m^{-3}$ )
1	100	100	100	$1,07 \cdot 10^{11}$	$5,55 \cdot 10^{10}$
2	100	1	100	$6,20 \cdot 10^{10}$	$3,17 \cdot 10^{10}$
3	1	100	100	$6,19 \cdot 10^{10}$	$3,16 \cdot 10^{10}$
4	200	200	200	$2,01 \cdot 10^{11}$	$1,08 \cdot 10^{11}$
5	50	50	50	$5,52 \cdot 10^{10}$	$2,81 \cdot 10^{10}$
6	10	100	10	$5,49 \cdot 10^{10}$	$2,80 \cdot 10^{10}$
7	100	10	10	$5,49 \cdot 10^{10}$	$2,80 \cdot 10^{10}$
8	10	10	10	$1,13 \cdot 10^{10}$	$5,70 \cdot 10^{09}$
9	30	30	30	$3,36 \cdot 10^{10}$	$1,70 \cdot 10^{10}$
10	500	10	10	$2,23 \cdot 10^{11}$	$1,21 \cdot 10^{11}$
11	1000	10	10	$3,85 \cdot 10^{11}$	$2,26 \cdot 10^{11}$
12	10	500	10	$2,23 \cdot 10^{11}$	$1,21 \cdot 10^{11}$
13	10	1000	10	$3,85 \cdot 10^{11}$	$2,25 \cdot 10^{11}$
14	10000	10	10	$1,48 \cdot 10^{12}$	$1,25 \cdot 10^{12}$
15	10	10000	10	$1,40 \cdot 10^{12}$	$1,20 \cdot 10^{12}$
16	1	10000	1	$1,42 \cdot 10^{12}$	$1,20 \cdot 10^{12}$
17	10000	1	1	$1,47 \cdot 10^{12}$	$1,24 \cdot 10^{12}$
18	10000	10000	10000	$2,23 \cdot 10^{12}$	$2,14 \cdot 10^{12}$
19	1000	1000	1000	$6,54 \cdot 10^{11}$	$4,39 \cdot 10^{11}$
20	500	500	500	$4,14 \cdot 10^{11}$	$2,47 \cdot 10^{11}$

TABLE 4.9 – Simulation de la puce : les vingt scénarios choisis parmi la norme JEDEC standard et les puissances thermiques volumiques utilisées

En outre diverses puissances volumiques (dont la valeur est également précisée dans le tableau 4.9) sont activées pour chacun de ces vingt scénarios, de manière à ce que la température maximale reste aux alentours de 200°C en régime permanent, quelles que soient les conditions aux limites. En reprenant l'expression du terme de puissance interne de l'équation (4.1), on impose ainsi :

- Seules les sources 1 et 2 sont activées :  $\varpi_A = \varpi_1$  et  $\varpi_B = 0$
- Seules les sources 3 et 4 sont activées :  $\varpi_A = 0$  et  $\varpi_B = \varpi_1$
- Toutes les sources sont activées :  $\varpi_A = \varpi_B = \varpi_2$

Pour chaque cas, la charge dissipée est constante, soit  $\beta_A = \beta_B = 1$ . Par ailleurs les simulations sont réalisées avec une température ambiante de  $22^\circ\text{C}$ . On obtient ainsi 60 configurations différentes qui sont résolues par le modèle réduit.

La figure 4.10 présente les différentes erreurs obtenues (équations (4.3)-(4.7)) pour les soixante cas. On peut observer que les erreurs globales  $\langle \varepsilon \rangle_{steady}$  et  $\langle \varepsilon \rangle_{trans}$  restent en dessous de  $1^\circ\text{C}$ , quelles que soient les conditions aux limites et l'activation des sources de chaleur, à l'exception du cas 18. De plus, l'erreur pendant la phase transitoire est comparable en amplitude à l'erreur en régime permanent.

Les erreurs associées à la température maximale atteinte par la puce en régime permanent  $\varepsilon_{steady}$  et en phase transitoire  $\varepsilon_{trans}$  sont également présentées sur la figure 4.10. Ces erreurs sont inférieures à  $2^\circ\text{C}$  à la fois en phase transitoire et en régime permanent, à l'exception du cas 18. Cette erreur relativement élevée doit être évaluée dans le contexte de la température maximale, qui est d'environ  $200^\circ\text{C}$ , correspondant à moins de 1% d'erreur, ce qui respecte les spécifications industrielles.

Quel que soit le type d'erreur considéré, deux types distincts de conditions aux limites peuvent être identifiés. Lorsque des conditions aux limites convectives avec  $h$  inférieur à  $10^3 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$  sont appliquées, les résultats sont excellents, avec des erreurs inférieures à  $0.1^\circ\text{C}$  pour tous les indicateurs. Cependant, ces excellents résultats doivent être considérés dans le contexte de profils de température relativement simples, comme dans le cas 4, où la température en régime permanent varie de  $181^\circ\text{C}$  à  $202^\circ\text{C}$ .

Les cas 14 à 18 présentent des scénarios plus intéressants car ils représentent des cas extrêmes. Ces scénarios impliquent de braser une face de la puce sur une plaque froide tandis que les autres faces sont soumises à de la convection naturelle. De telles conditions aux limites entraînent des gradients de température (et de conductivité) extrêmes : la plage de température en régime permanent est de l'ordre de  $150^\circ\text{C}$  (sur une puce de  $1,5\text{mm}$ ), ce qui entraîne des variations de conductivité de 25 à  $40 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  (voir figures 4.5 et 4.6). Le cas 18 est le plus difficile (et le moins physique), car la puce est brasée sur une plaque froide sur ses six faces, ce qui entraîne un gradient de température encore plus important ( $175^\circ\text{C}$ ).

Pour illustrer la difficulté du problème, une comparaison entre le modèle réduit avec une non-linéarité quadratique et le modèle d'éléments finis complet avec la loi de conductivité "réelle" est présentée dans la figure 4.11 pour le cas 14. Elle représente le profil de température

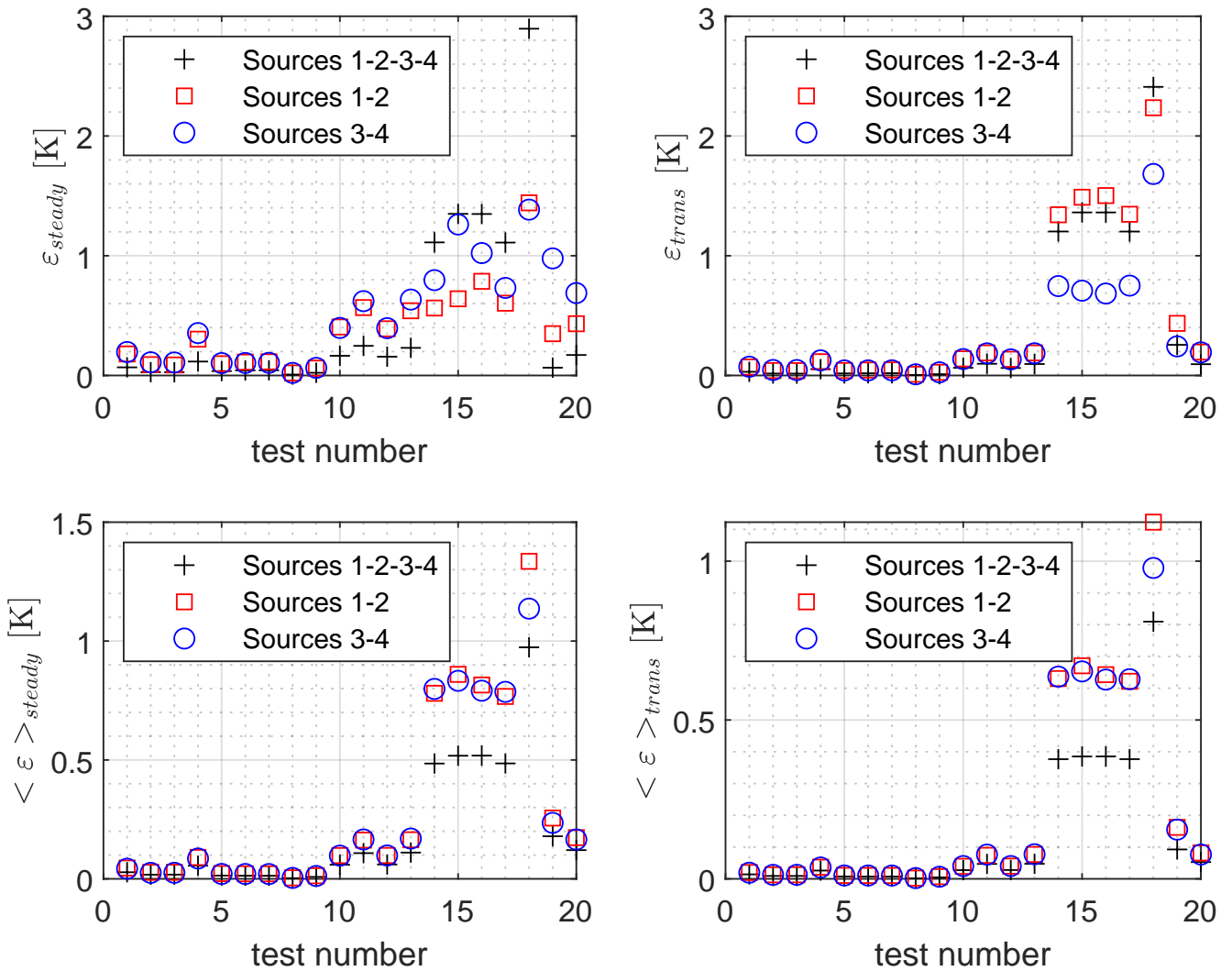


FIGURE 4.10 – Les différentes erreurs obtenues pour les 20 scénarios JEDEC pour les différentes activations de sources

le long de la ligne indiquée sur la figure 4.6. Le champ de température est reconstruit avec précision, malgré une variation non monotone.

La Figure 4.12 compare la variation des conductivités obtenue par le modèle de référence et le modèle réduit le long de la même ligne. Une fois de plus, le modèle réduit reproduit correctement le champ de conductivité, avec des erreurs inférieures à  $0,3 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . Le léger écart observé provient de l'erreur sur la température commise par le modèle réduit, et de la différence de modélisation de la conductivité entre le modèle de référence où la loi "réelle" a été considérée et le modèle réduit où une approximation quadratique a été utilisée.

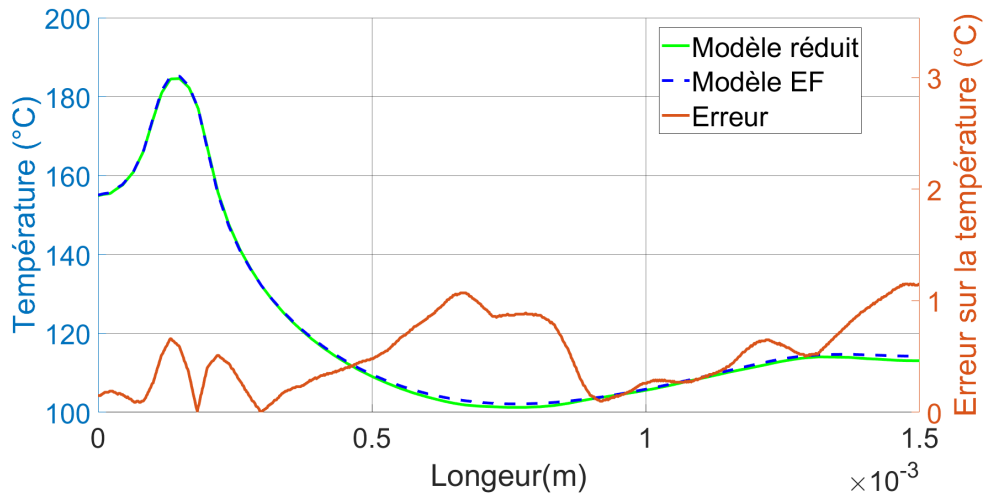


FIGURE 4.11 – Comparaison de la variation de la température - différence entre le modèle réduit et le modèle éléments finis

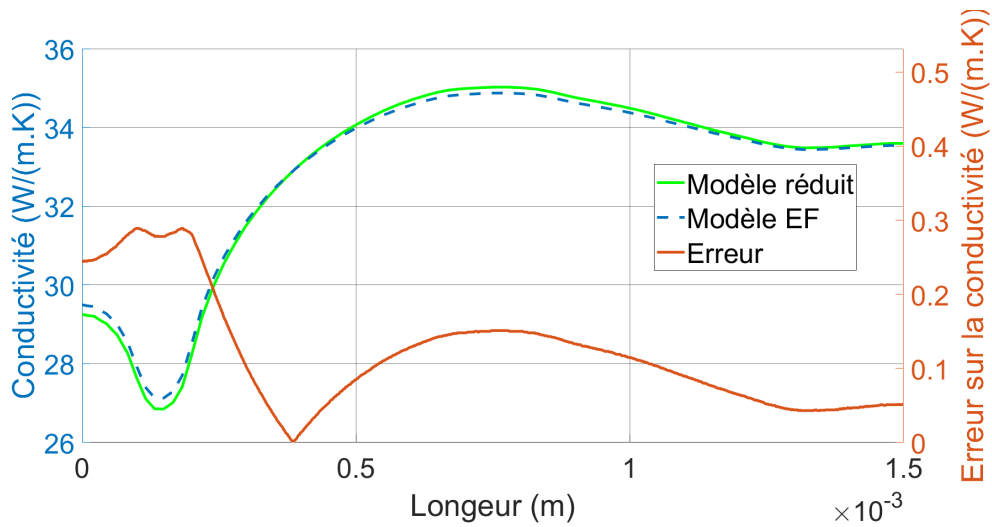


FIGURE 4.12 – Comparaison de la variation de la conductivité - différence entre le modèle réduit et le modèle éléments finis

En conclusion, le temps de calcul du modèle réduit obtenu est inférieur à 0,25 seconde, tandis que la simulation par éléments finis prend 95 secondes. En mettant en œuvre cette technique, les simulations numériques chronophages peuvent être réduites d'un facteur de 380, tout en maintenant un haut niveau de précision.

### 4.5.5 Évolution temporelle des sources

Afin de démontrer la polyvalence du modèle réduit, une simulation est effectuée lors de laquelle la puissance affectée à chaque paire de sources évolue dans le temps, et de manière indépendante. Le graphe situé en partie supérieure de la figure 4.13 représente les variations temporelles relatives de la puissance  $\varpi(t)/\varpi_{max}$  produite par chaque paire de sources. Ainsi :

- La puissance dissipée par les sources 1 et 2 augmente linéairement jusqu'à son maximum pendant 0,1 s, évolue ensuite de manière sinusoïdale entre 0,1 et 0,3 s, puis diminue linéairement jusqu'à zéro.
- Pendant ce temps, la puissance des sources 3 et 4 reste constante à la moitié de la charge maximale pendant 0,05 s, subit ensuite un palier jusqu'à son maximum pendant 0,1 s, diminue linéairement jusqu'à un quart de sa charge maximale, puis évolue finalement de manière linéaire jusqu'au maximum.

Ce scénario ne reproduit pas un cas réel, mais il englobe différents types de charges (rampe, sinus, créneau). Les conditions aux limites sont celles du cas 14 présenté dans le tableau 4.9, et la charge thermique maximale est  $\varpi_{max} = 1,25 \cdot 10^{12} \text{ W.m}^{-3}$  pour chaque source.

Le graphe situé en milieu de figure 4.13 montre l'évolution temporelle de la température maximale atteinte par chaque source durant cette simulation (axe de gauche), et précise également laquelle des 4 sources est la plus chaude (axe de droite), puisque selon l'évolution temporelle des puissances dissipées, la position de la température maximale évolue. La source 4, étant la plus proche de la frontière de la puce, est davantage refroidie et sa température est toujours inférieure à celle des autres sources. Les températures des sources 1 et 2 sont très proches tout au long du processus, et l'emplacement de la température maximale entre ces deux sources dépend des autres charges thermiques.

Enfin, le graphe représenté sur le bas de la figure 4.13 correspond à l'erreur de la température maximale de la puce  $|T_{max,FE} - T_{max,ROM}|$ , pour un modèle réduit d'ordre 50. Sur ce graphe apparaissent également les moments où apparaît une erreur d'emplacement de la température maximale : un cercle rouge signifie qu'au temps correspondant il y a une divergence entre le modèle éléments finis et le modèle réduit sur le numéro de la source qui est la plus chaude. Ces instants sont assez peu nombreux, et de façon générale, l'accord entre les modèles est très bon, puisque l'on note que l'erreur ne dépasse jamais  $3^\circ\text{C}$ , tandis que sa moyenne dans le temps est de  $0,26^\circ\text{C}$ . L'erreur maximale correspond à une montée brutale de la puissance des sources 3 et 4 à son maximum, et donc à une évolution très rapide de la température maximale. Pour ce type d'évolution, l'effet de la réduction est net : un faible nombre de modes (chacun caractérisé par une constante de temps qui lui est propre) ne permet pas la reconstitution d'une dynamique rapide aussi précisément que ne le permet le modèle complet.

En termes de temps de calcul, le modèle réduit a nécessité 0,65 s pour effectuer cette simulation, à comparer avec le temps de calcul obtenu par le modèle éléments finis qui est de 223 s, soit donc un gain de 340, comparables aux études précédentes.

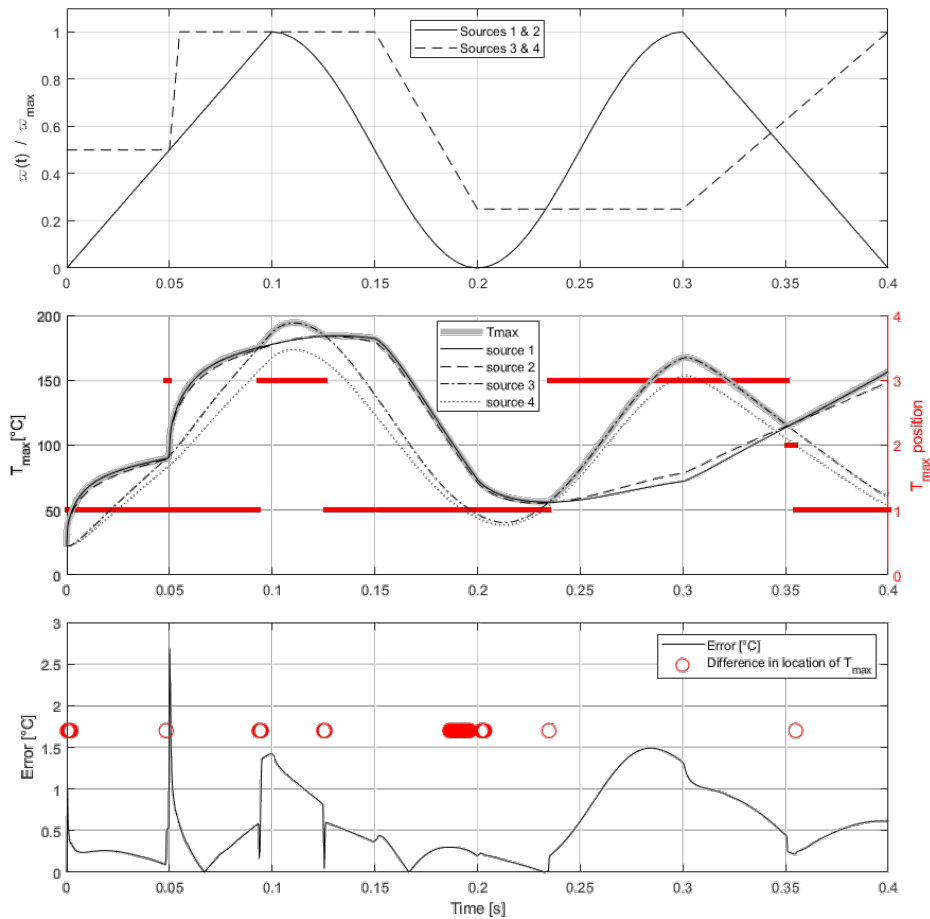


FIGURE 4.13 – Résultats obtenus lors d’une évolution temporelle des sources

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre qui traite d’une simple puce en arséniure de gallium, nous avons montré la nécessité de prendre en compte la thermo-dépendance de la conductivité, puisque l’omission de la non-linéarité de cette dernière entraîne une sous-estimation de la température maximale de 27°C, ce qui dépasse largement les spécifications industrielles. Le modèle d’ordre réduit de type AROMM a été appliqué en utilisant une approximation quadratique de la conductivité, qui s’écarte de moins de 2 % de la loi réelle, et qui suffit à amener à des résultats précis



sur les champs de température. Nous avons montré que la construction de ce modèle réduit pouvait être rapide en effectuant une troncature préalable, qui permet de ne garder que 10 % des modes de Dirichlet et de Steklov. La réduction par amalgame qui est effectuée par la suite s'appuie sur des champs de température de référence, qui ont été choisis de façon à balayer l'ensemble des différents scénarios possibles imposés par l'organisation JEDEC. Ce modèle réduit a ainsi été testé pour l'ensemble des configurations JEDEC, et également dans le cas où les sources d'activation varient en fonction du temps. Les résultats obtenus sont très satisfaisants, que ce soit en régime transitoire ou en régime permanent. Les erreurs maximales dans des cas réalistes restent de l'ordre du pourcent, c'est-à-dire dans les limites des spécifications industrielles. On note que les erreurs les plus importantes correspondent à des coefficients de convection extrêmement importants, qui simulent le cas où l'une d'une face est brasée sur un élément extérieur. Dans tous les cas, le gain en temps de calcul est remarquable (0,3 s contre 95 s, soit un ratio d'environ 300).

# Chapitre 5

## Intégration de la micro-puce dans un boîtier QFN16

### 5.1 Présentation du problème

Après avoir démontré l'efficacité de la technique mise en œuvre dans le cas de la micro-puce seule, c'est-à-dire pour un problème caractérisé par un unique matériau, nous allons chercher à généraliser l'étude à une géométrie plus complexe qui utilise plusieurs matériaux avec des propriétés thermo-physiques très différentes.

Nous considérons ici la même puce que celle étudiée jusqu'à présent, mais encapsulée dans un boîtier électronique, le QFN16 (Quad Flat No-leads) conçu pour assurer la liaison entre une puce électronique et un circuit imprimé. Sa structure est présentée sur la figure 5.1 et détaillée dans le tableau 5.1.

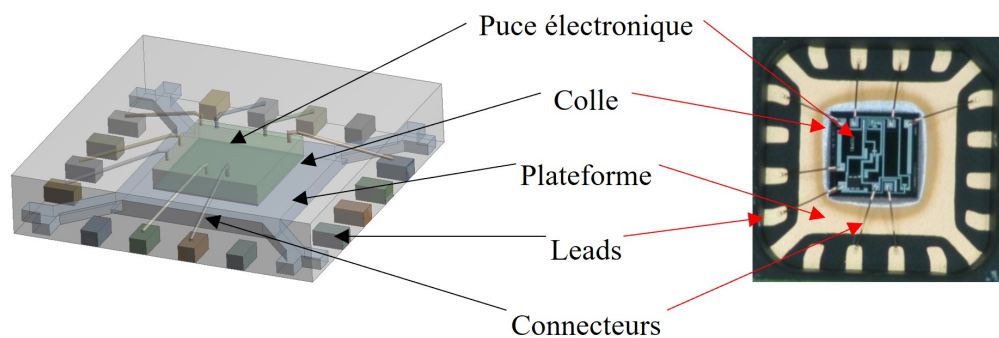


FIGURE 5.1 – Représentation d'un boîtier QFN16 et de sa topologie interne

Composant	Longueur (mm)	Largeur (mm)	Hauteur (mm)	Matériau
Puce	1,5	1,5	0,1	GaAs
Sources	0,2	0,2	0,02	GaAs
Colle	1,5	1,5	0,25	SnAgCu
Plateforme	2,2	2,2	0,20	Cuivre
Leads	0,4	0,23	0,20	Cuivre
Connecteur	-	-	-	Or
Corps	4,0	4,0	0,80	Résine

TABLE 5.1 – Dimensions du QFN16 avec le matériau de chaque composant

À l'intérieur du boîtier QFN16, la puce électronique en arséniure de gallium (GaAs) est placée sur une plateforme en cuivre. Pour garantir une fixation sécurisée, cette puce est maintenue en place par un joint de colle spécial, composé d'un mélange de résine et d'argent (SnAgCu). Les connexions électriques entre la puce et le boîtier sont établies par des fils conducteurs, typiquement en or, pour assurer une conductivité électrique optimale. Ces connexions filaires ont un diamètre standard de 25  $\mu\text{m}$  et une longueur variable selon leur emplacement sur la périphérie de la puce et de la broche à relier. En outre, les connexions entre le boîtier et la carte électronique sont assurées par des broches ou "leads". Les surfaces inférieures des leads et de la plateforme du boîtier sont reliées à la carte électronique par un joint brasé constitué d'un mélange d'étain, d'argent et de cuivre.

Afin de protéger la puce contre les influences environnementales telles que l'humidité et la poussière, tous les composants du boîtier sont enveloppés d'une résine isolante. Cette résine assure également la préservation de la sérigraphie très sensible de la puce, garantissant ainsi son bon fonctionnement dans des conditions variées. La figure 5.2 illustre une vue en coupe schématique du QFN16.

Le détail des propriétés des matériaux des constituants du boîtier QFN16 sont répertoriées dans le tableau 5.2. Comme mentionné dans la section 4.2 la conductivité thermique du GaAs dépend de la température selon l'équation (4.2).

## 5.2 Simulation éléments finis

La discrétisation spatiale éléments finis de la géométrie étudiée est présentée sur les figures 5.3 et 5.4. Cette fois l'utilisation d'ANSYS pour la phase de maillage fait apparaître différents types d'éléments tridimensionnels, pour lesquels un travail d'ingénierie logicielle a été mis en œuvre afin d'assurer la compatibilité entre le logiciel ANSYS et le logiciel SAMBA du

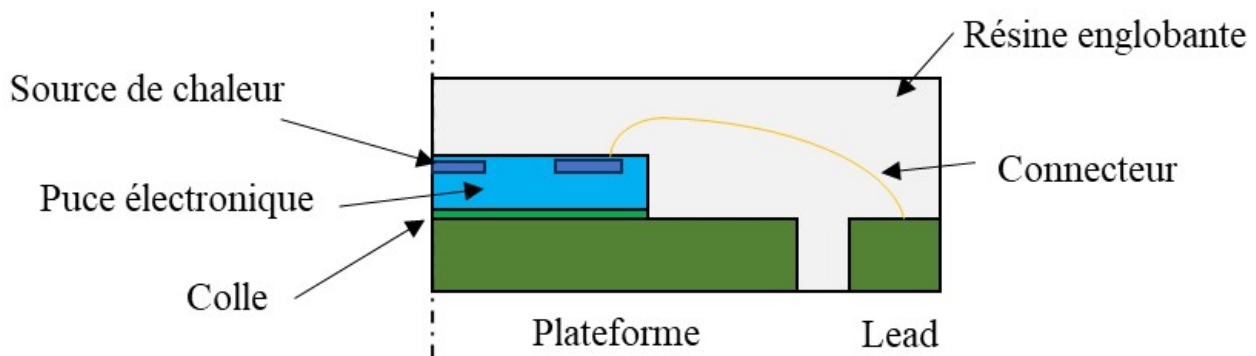


FIGURE 5.2 – Coupe schématique du QFN16

Matériau	Conductivité $\kappa$ (W/m.K)	Densité $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Capacité thermique $C_p$ (J/kg.K)
SnAgCu	58	7370	232
Résine	0,67	1900	920
Cuivre	400	8960	8930
Or	317	19300	128
GaAs	variable	5316	322

TABLE 5.2 – Propriétés des matériaux du QFN16 à 22°C

laboratoire. On obtient ainsi un modèle caractérisé par 118 790 degrés de libertés.

Type d'élément	Nombre d'éléments
Tetraédre	646937
Hexaédre	4422
Prisme	108
Pyramide	3878

TABLE 5.3 – Les différents éléments finis utilisés pour la discrétisation spatiale du QFN16

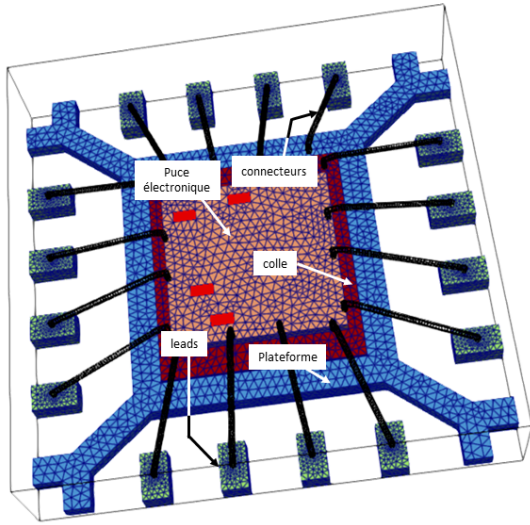


FIGURE 5.3 – Représentation du modèle numérique du QFN16 de l'intérieur

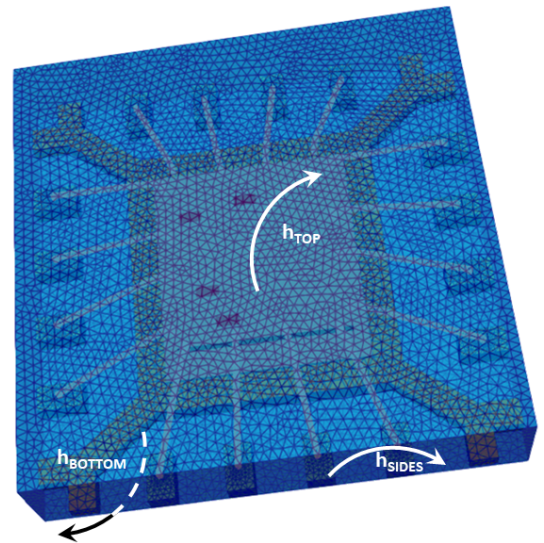


FIGURE 5.4 – Représentation du modèle numérique du QFN16 de l'extérieur

Les différents scénarios testés sont très similaires à ceux imposés lors de l'étude de la puce seule :

- les mêmes valeurs de coefficients d'échanges thermiques que précédemment sont appliquées au niveau des surfaces du boîtier, soit :
  - sur la face supérieure :  $h_{TOP}$
  - sur la face inférieure :  $h_{BOTTOM}$
  - sur les quatre faces latérales :  $h_{SIDES}$
- Le choix des scénarios de dissipation de puissance volumique est semblable au cas de la puce seule : les sources 1 et 2 sont toujours activées ensemble, tout comme les sources 3 et 4, selon une valeur de puissance volumique  $\varpi_1$ , puis toutes les sources peuvent être également activées simultanément (puissance volumique  $\varpi_2$ ). Par contre ces valeurs  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$  sont modifiées par rapport au cas précédent, toujours dans l'objectif d'obtenir des températures maximales proches de 200°C.
- La condition initiale consiste en une température homogène de 22°C.

Le tableau 5.4 reprend ainsi les différents scénarios, avec les nouvelles valeurs de puissance volumiques.

De même, nous caractérisons comme dans l'étude précédente la précision des modèles réduits par les erreurs moyennes et localisées au point de température maximum, en régimes

case	$h_{TOP}$ ( $W.m^{-2}.K^{-1}$ )	$h_{BOTTOM}$ ( $W.m^{-2}.K^{-1}$ )	$h_{SIDES}$ ( $W.m^{-2}.K^{-1}$ )	$\varpi_1$ ( $W.m^{-3}$ )	$\varpi_2$ ( $W.m^{-3}$ )
1	100	100	100	$2,85 \cdot 10^{11}$	$1,42 \cdot 10^{11}$
2	100	1	100	$1,86 \cdot 10^{11}$	$9,30 \cdot 10^{10}$
3	1	100	100	$1,86 \cdot 10^{11}$	$9,30 \cdot 10^{10}$
4	200	200	200	$5,70 \cdot 10^{11}$	$2,85 \cdot 10^{11}$
5	50	50	50	$1,42 \cdot 10^{11}$	$7,12 \cdot 10^{10}$
6	10	100	10	$1,18 \cdot 10^{11}$	$5,92 \cdot 10^{10}$
7	100	10	10	$1,18 \cdot 10^{11}$	$5,92 \cdot 10^{10}$
8	10	10	10	$2,85 \cdot 10^{10}$	$1,42 \cdot 10^{10}$
9	30	30	30	$8,55 \cdot 10^{10}$	$4,27 \cdot 10^{10}$
10	500	10	10	$5,18 \cdot 10^{11}$	$2,59 \cdot 10^{11}$
11	1000	10	10	$1,02 \cdot 10^{12}$	$5,09 \cdot 10^{11}$
12	10	500	10	$5,18 \cdot 10^{11}$	$2,59 \cdot 10^{11}$
13	10	1000	10	$1,02 \cdot 10^{12}$	$5,09 \cdot 10^{11}$
14	10000	10	10	$1,35 \cdot 10^{12}$	$1,06 \cdot 10^{12}$
15	10	10000	10	$2,20 \cdot 10^{12}$	$2,00 \cdot 10^{12}$
16	1	10000	1	$2,50 \cdot 10^{12}$	$2,00 \cdot 10^{12}$
17	10000	1	1	$1,20 \cdot 10^{12}$	$0,80 \cdot 10^{12}$
18	10000	10000	10000	$2,80 \cdot 10^{12}$	$2,25 \cdot 10^{12}$
19	1000	1000	1000	$2,00 \cdot 10^{12}$	$1,00 \cdot 10^{12}$
20	500	500	500	$1,42 \cdot 10^{12}$	$7,12 \cdot 10^{11}$

TABLE 5.4 – Etude du composant QFN16 : les vingt scénarios choisis parmi la norme JEDEC standard et les puissances thermiques volumiques utilisées.

transitoire et établis, telles que définies par les équations (4.3) à (4.7).

Nous présentons dans les figures de 5.5 à 5.8 la répartition de la température à l'état permanent pour la configuration n°14 du tableau 5.4, lorsque l'on impose une même puissance  $\varpi_2$  pour les quatre sources. Cette configuration correspond au cas où le composant QFN16 est installé et soudé sur une carte de circuit imprimé, avec une plaque froide (ou dissipateur thermique) fixée à la carte de circuit imprimé pour aider à dissiper la chaleur générée par le composant. Cette configuration est couramment utilisée pour améliorer la gestion thermique des composants électroniques, en particulier lorsque des performances thermiques optimales sont nécessaires pour assurer le bon fonctionnement et la durabilité du système.

Bien évidemment, l'application de ces sollicitations aux frontières du QFN16 et non plus à celles de la puce seule engendre des gradients de températures différents de l'étude précédente. Néanmoins là encore, on note pour la puce des variations importantes de la conductivité thermique, puisque l'on observe à ce niveau des variations de température de 100 à 200°C en

régime établi.

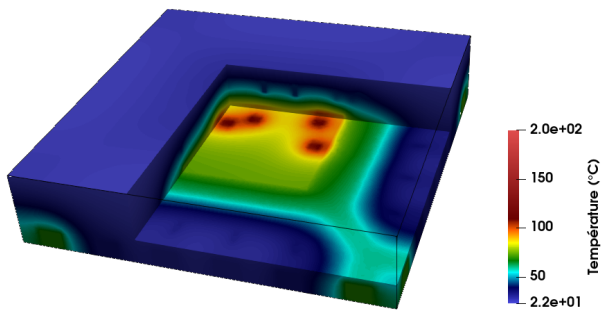


FIGURE 5.5 – Champ de température pour quatre sources de chaleur activées obtenu avec la méthode des éléments finis, vue depuis le dessus du QFN16. Coupe partielle.

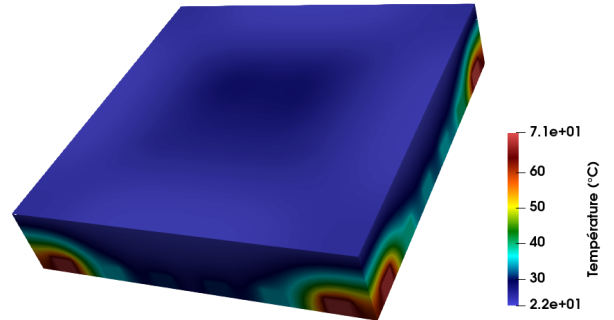


FIGURE 5.6 – Champ de température sur les frontières pour 4 sources de chaleur activées obtenu avec la méthode des éléments finis, vue depuis le dessus du QFN16.

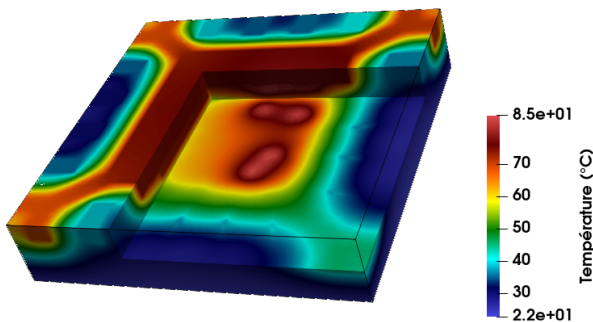


FIGURE 5.7 – Champ de température pour 4 sources de chaleur activées obtenu avec la méthode des éléments finis, vue depuis le dessous du QFN16. Coupe partielle.

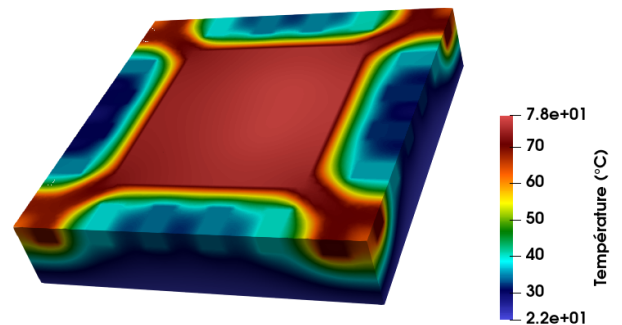


FIGURE 5.8 – Champ de température sur les frontières pour 4 sources de chaleur activées obtenu avec la méthode des éléments finis, vue depuis le dessous du QFN16.

### 5.3 Construction du modèle réduit

Comme précédemment, le modèle réduit est construit en deux temps : (i) le calcul d'une base tronquée caractérisée par les constantes de temps les plus importantes, (ii) une seconde réduction par amalgame des modes tronqués entre eux.

### 5.3.1 Troncature temporelle

Nous choisissons, comme pour l'étude de la puce seule, de calculer une base de Dirichlet-Steklov. Les figures 5.9 à 5.12 fournissent une représentation visuelle de ces modes. L'influence de la géométrie complexe et multi-matériaux apparaît clairement sur ces figures : en effet, on remarque, autant pour les modes de Dirichlet que pour les modes de Steklov, que les isovaleurs présentées sur ces graphes s'adaptent aux frontières entre les différents matériaux du composant.

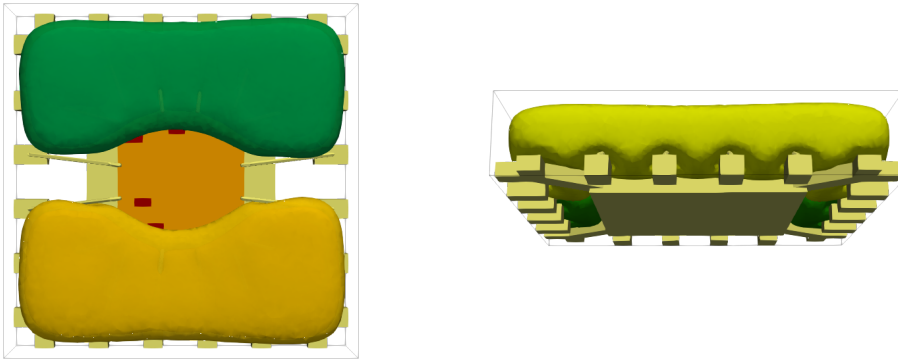


FIGURE 5.9 – Isovaleurs du mode de Dirichlet n°2

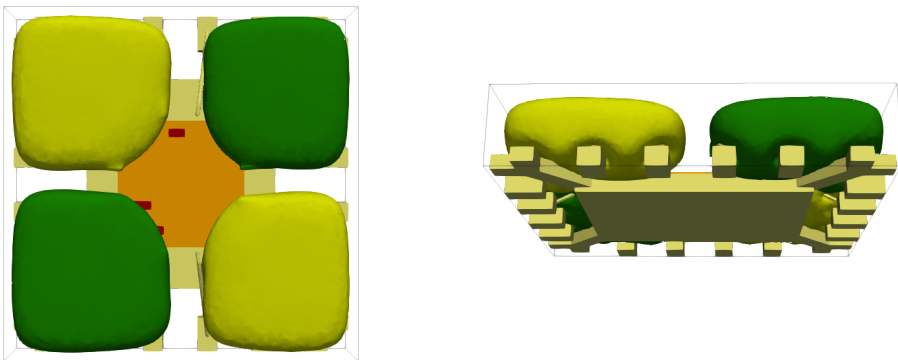


FIGURE 5.10 – Isovaleurs du mode de Dirichlet n°3



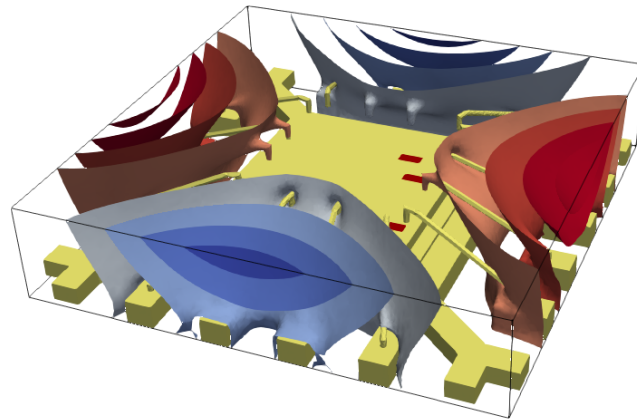


FIGURE 5.11 – Isovaleurs du mode de Steklov n°4

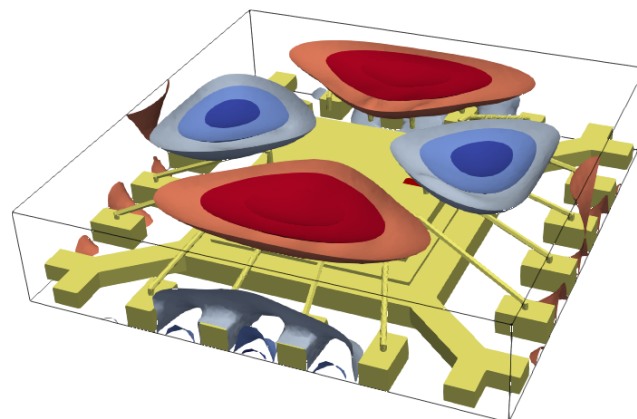


FIGURE 5.12 – Isovaleurs du mode de Steklov n°40

Le maillage du QFN16 se compose de  $N^D = 109\,909$  nœuds couvrant le domaine intérieur et de  $N^S = 8\,881$  nœuds sur les frontières, soit donc un nombre total possible de  $N^D$  modes de Dirichlet et  $N^S$  modes de Steklov. L'analyse de l'influence des différentes troncatures testées (tableau 5.5) s'effectue au moyen des calculs d'erreurs de projection ((4.3) à (4.7)). Les résultats sont présentés dans le tableau 5.6.

n° de base	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
% Dirichlet	100	100	100	100	50	20	10	10	1	5	10	5	1	50
% Steklov	100	50	20	10	100	100	100	100	1	5	5	10	10	50
Nombre Dirichlet	109909	109909	109909	109909	54954	21981	10989	10989	2196	5491	10989	5491	1098	54954
Nombre Steklov	8881	4440	1776	767	8881	8881	8881	888	176	442	442	442	888	4440
$t_{CPU}$ (s)	47078	44754	43392	42724	25194	12683	7950	4163	879	2279	4104	2470	763	21798

TABLE 5.5 – Temps de calcul pour différentes bases tronquées

n° de base	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\varepsilon_{\text{steady}}$	0	0,872	1,10	3,85	12,74	12,25	20,45	24,10	34,60	29,6	27,64	26,86	32,14	13,50
$\varepsilon_{\text{trans}}$	0	0,878	1,08	3,41	11,33	10,47	17,76	21,00	32,46	26,9	23,98	23,33	31,19	12,08
$\langle \varepsilon \rangle_{\text{steady}}$	0	0,218	0,275	0,759	0,00428	0,171	0,249	0,802	2,95	1,8	1,72	0,849	0,964	0,232
$\langle \varepsilon \rangle_{\text{trans}}$	0	0,216	0,698	0,698	0,0387	0,157	2,33	0,749	2,40	1,42	1,43	0,805	0,907	0,228
$T_{\text{max}}$ (°C)	199,78	198,90	198,68	195,93	187,03	187,53	179,32	175,67	165,18	169,3	172,14	172,91	167,64	186,28

TABLE 5.6 – Erreurs de projection des différentes bases tronquées

Dès que l'on commence à réduire le nombre de modes de Dirichlet pour la base tronquée, les erreurs augmentent de manière significative. En effet, lorsque seulement 50% des ces modes sont pris en compte (base 4), cela commence à engendrer des erreurs élevées, soulignant ainsi l'importance critique de ces modes pour la précision des résultats. Ces observations sont très différentes de celles obtenues dans le cas de la puce isolée, où l'on a vu que même une base fortement tronquée ne compromet pas significativement la précision des calculs.

### 5.3.1.1 Analyse des modes de Dirichlet sur un cas simple

Pour comprendre les raisons de ces résultats, il faut reprendre le problème de Dirichlet 1D correspondant au problème physique d'une paroi homogène caractérisée par une épaisseur  $L$ , une conductivité  $\kappa$  et une capacité volumique  $c$ . Ce problème s'écrit :

$$\begin{cases} 0 < x < L & \kappa \frac{\partial^2 V_j^B}{\partial x^2} = \lambda_j^B c V_j^B \\ x = 0 & V_j^B = 0 \\ x = L & V_j^B = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Il a pour solution :

$$\begin{cases} V_j = A \sin\left(j \frac{\pi x}{2L}\right) \\ \lambda_j = -\frac{\kappa}{c} \left(j \frac{\pi}{2}\right)^2 \end{cases} \quad (5.2)$$

où  $A$  est une constante et  $j \in \mathbb{N}$

La valeur propre  $\lambda_j$  est ainsi proportionnelle à la diffusivité thermique  $a = \kappa/c$  ( $m^2.s^{-1}$ ). Pour un problème homogène, puisqu'il n'y a pas de variation de diffusivité thermique, ce paramètre thermophysique n'intervient pas sur l'ordonnancement des modes de Dirichlet. Ces derniers sont ainsi calculés dans l'ordre des constantes de temps décroissantes et sont caractérisés par des périodes spatiales de plus en plus courtes. La figure 5.13, qui présente pour un domaine 3D homogène le lien entre constantes de temps et vecteurs propres, illustre bien ce phénomène. On comprend ainsi pourquoi pour des géométrie mono-matériaux la troncature temporelle est efficace.

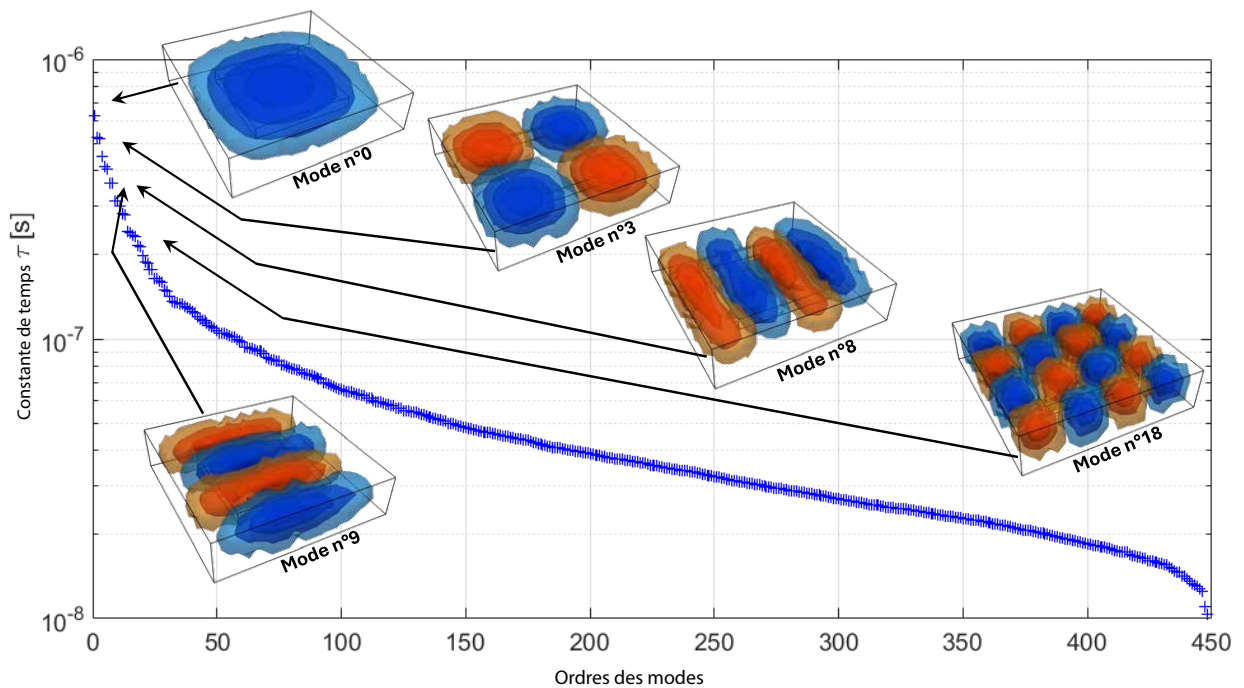


FIGURE 5.13 – Représentation des modes propres en fonction de leur constante de temps pour un matériau homogène

Dans le cas où la géométrie est caractérisée par des matériaux de propriétés thermiques différentes, le problème est plus compliqué, car la valeur des différentes diffusivités thermiques

des matériaux intervient dans le calcul des constantes de temps. On comprend intuitivement que les modes qui interviennent dans les zones à forte diffusivité vont être caractérisés par une dynamique plus rapide que les modes qui sont localisés sur les zones à faible diffusivité thermique.

Pour illustrer ce principe, on considère une géométrie qui se rapproche de celle étudiée, mais composée de deux matériaux, où le premier est encapsulé dans le second, avec des propriétés thermiques très différentes (voir figure 5.14), le matériau encapsulé (1) ayant une diffusivité plus forte que le matériau 2. On choisit volontairement un maillage très relâché, afin de limiter le nombre de modes (ici  $N^D = 448$ ).

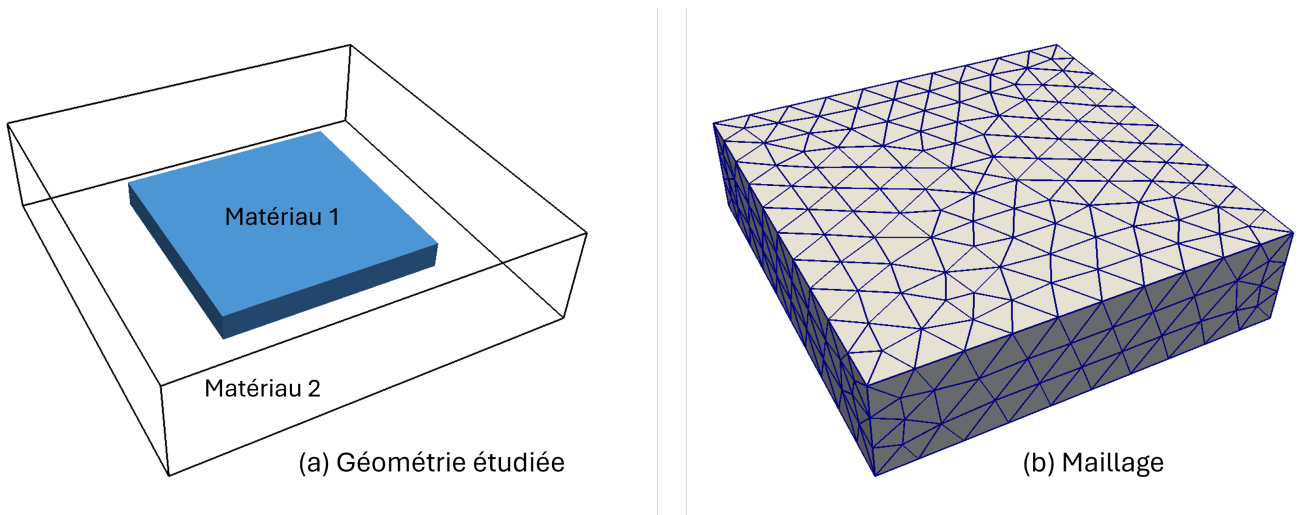


FIGURE 5.14 – Étude d'une configuration simplifiée proche d'un QFN16, constituée de deux matériaux

Les constantes de temps des modes de Dirichlet de ce problème et les vecteurs propres associés sont représentés sur la figure 5.15. On voit clairement que compte tenu de la très importante différence de diffusivité thermique des matériaux (rapport  $\alpha = \frac{a_1}{a_2} = 1000$ ), il existe un découplage entre les modes localisés dans le matériau 1 et ceux liés au matériau 2. Ainsi, pour sélectionner un petit nombre de modes permettant une reconstruction acceptable de température dans le matériau 1, il est nécessaire de calculer l'intégralité des modes qui sollicitent le matériau 2, puisque les modes sont calculés dans l'ordre des constantes de temps décroissantes.

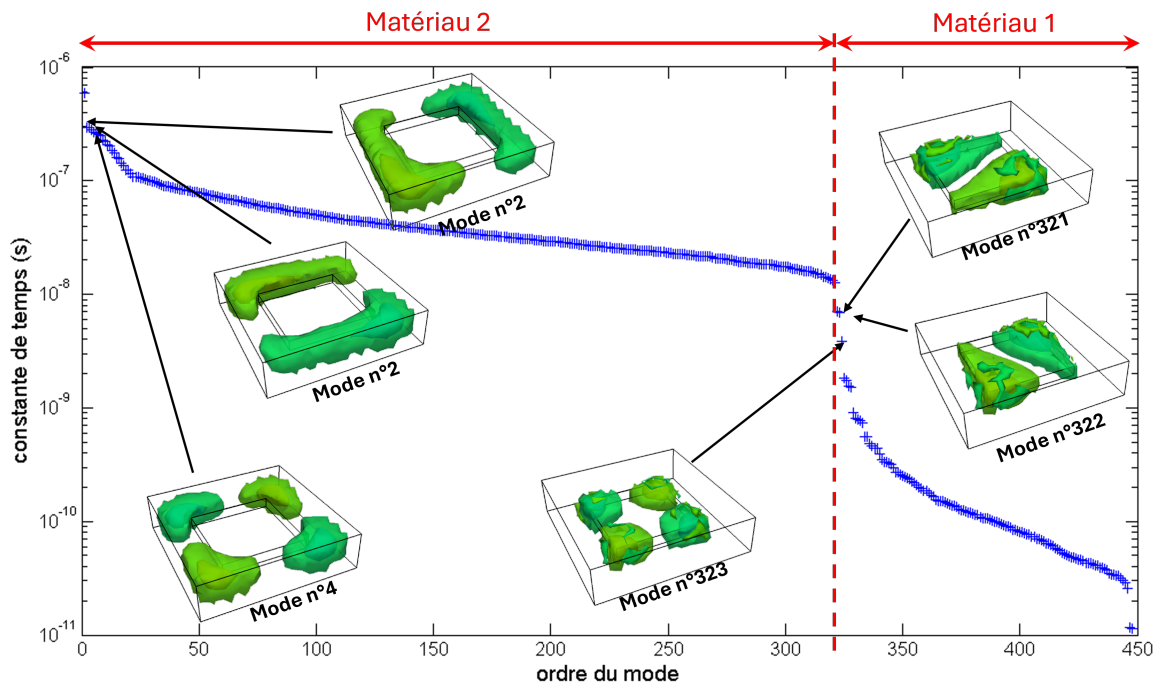


FIGURE 5.15 – Représentation des modes propres en fonction de leur constante de temps pour une géométrie à 2 matériaux de rapport de diffusivité  $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1000$

On cherche maintenant à analyser le comportement de la répartition des modes lorsque ce rapport de diffusivité  $\alpha$  varie. La figure 5.16 représente ainsi les différentes évolutions des valeurs propres lorsque l'on diminue la diffusivité  $a_1$  du matériau 1 (en maintenant la valeur de la diffusivité  $a_2$  à sa valeur initiale). Pour  $\alpha = 100$ , les valeurs de constante de temps pour le matériau 1 sont diminuées par rapport au cas où  $\alpha = 1000$  d'un facteur 10. Ainsi les constantes de temps des deux familles de modes se rapprochent les unes des autres. Pour  $\alpha = 10$ , les constantes de temps des deux familles vont finir par s'entremêler.

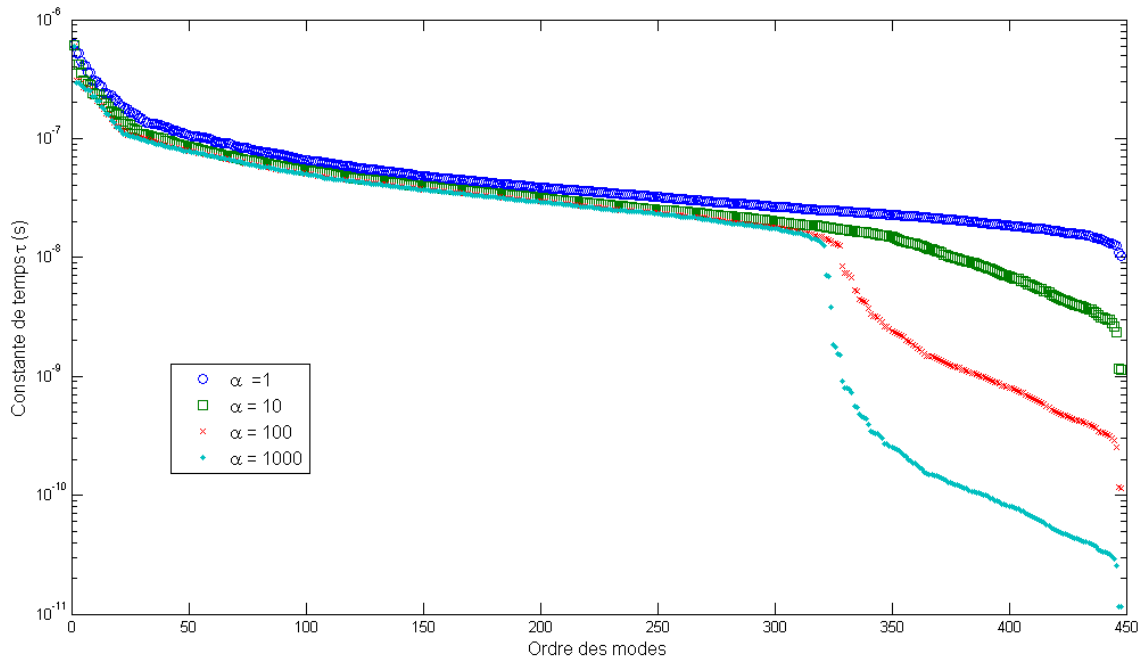


FIGURE 5.16 – Evolution des constantes de temps pour différents rapports de diffusivité  $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$

Il arrive que deux modes qui sont localisés sur deux matériaux différents soient caractérisés par une constante de temps très proche. D'un point de vue numérique, compte tenu des limitations de définition spatiale liée au maillage, on obtient alors un unique mode qui intervient dans les deux domaines à la fois, mais avec des périodes spatiales différentes selon le domaine considéré. La figure 5.17 représente ainsi un tel mode obtenu pour un rapport des deux diffusivités  $\alpha = 10$ . Ce que l'on peut observer sur cette configuration académique est plus difficile à voir dans le cas du problème réel du QFN16, compte tenu du nombre de matériaux considérés (cinq dans notre cas) et des différences de rapports de diffusivité thermique entre ces matériaux. On retient néanmoins que pour garder les modes importants pour les matériaux caractérisés par la plus grande diffusivité thermique, il est nécessaire de calculer un grand nombre de modes.

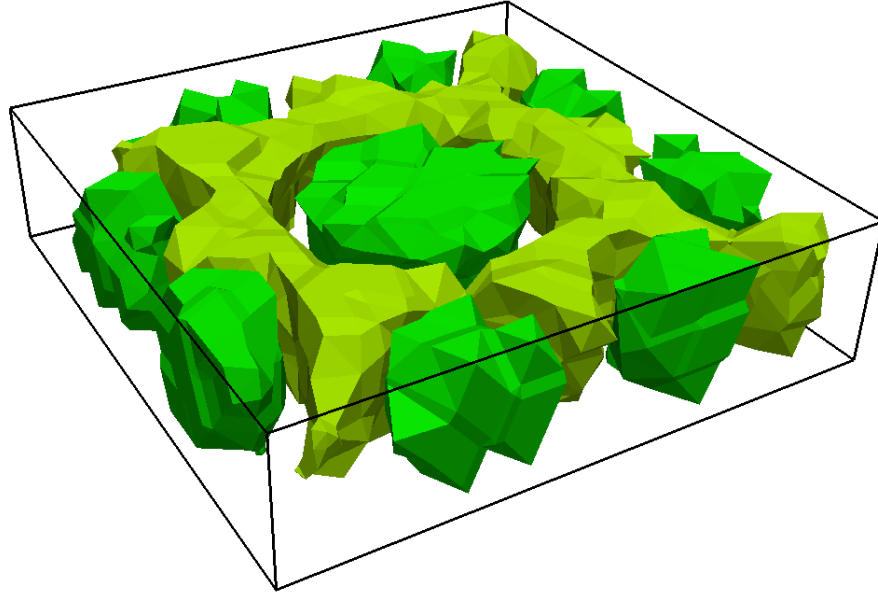


FIGURE 5.17 – Représentation d’un mode hybride résultat d’un amalgame numérique entre deux modes caractérisés par une même constante de temps. Calcul obtenu pour un rapport de diffusivité  $\alpha = \frac{a_1}{a_2} = 10$

### 5.3.1.2 Analyse des modes de Steklov sur un cas simple

En ce qui concerne les modes de Steklov, les contraintes sur le nombre de modes à garder lors de la troncature ne sont pas aussi importantes, puisque le tableau 5.6 montre qu’utiliser 20% de la base de Steklov (cas n°2) entraîne des erreurs moyennes  $\langle \varepsilon \rangle_{trans}$  et  $\langle \varepsilon \rangle_{steady}$  respectivement inférieures à 0,3 et 0,7°C, et des erreurs localisées à la température maximum  $\varepsilon_{steady}$  et  $\varepsilon_{trans}$  de l’ordre de 1,1°C, ce qui est acceptable. Néanmoins, ces résultats sont bien moins précis que dans le cas de la puce seule (cas n°2 du tableau 4.3).

Pour tenter d’analyser ces résultats, on résout le problème de Steklov 1D pour un matériau homogène. on obtient cette fois uniquement deux solutions :

- une solution triviale où la valeur propre  $\lambda_0 = 0$  (soit une constante de temps infinie), qui correspond à un mode plat ( $V_0(x) = \text{constante}$ ),
- une solution non triviale unique  $\lambda_1 = -\frac{2\kappa}{\zeta L}$ .

Cette valeur propre correspond au mode défini par :

$$V_i(x) = A \left( \frac{L - 2x}{L} \right) \quad (5.3)$$

où  $L$  est la dimension du problème et  $A$  une constante.

On voit que la valeur propre est proportionnelle à la conductivité thermique  $\kappa$ .

D'une manière analogue à ce qui a été effectué pour les modes de Dirichlet, on considère ici deux parallélépipèdes de conductivités très différentes, où cette fois chacun d'entre eux est tangent à une même frontière (voir Fig. 5.18). On choisit comme auparavant un maillage relâché afin de ne pas obtenir un nombre de modes calculés trop important.

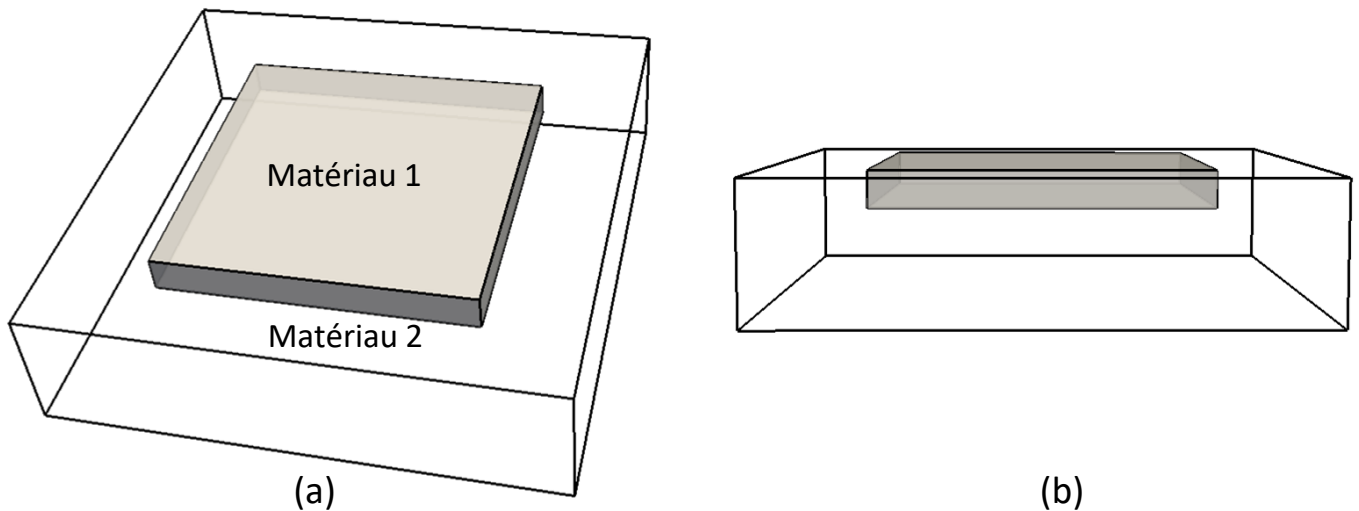


FIGURE 5.18 – Géométrie 3D simplifiée pour l'étude des modes de Steklov ( $\kappa_1 = 380 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$ , et  $\kappa_2 = 0,66 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$ )

La figure 5.19 représente les constantes de temps en fonction de l'ordre selon lequel elles sont calculées, ainsi que quelques vecteurs propres associés. Là encore, la forte différence de conductivité crée un découplage entre les différents modes de Steklov, dont le relèvement harmonique intervient soit pour le matériau n°1 soit pour le matériau n°2. Ainsi, les modes n°314, 315 et 316 sont susceptibles de jouer un rôle important dans la reconstruction du champ de température du matériau n°1, et pour les obtenir il faut calculer tous les modes précédents.

Pour la configuration du QFN16, même si l'effet est moins sensible que pour les modes



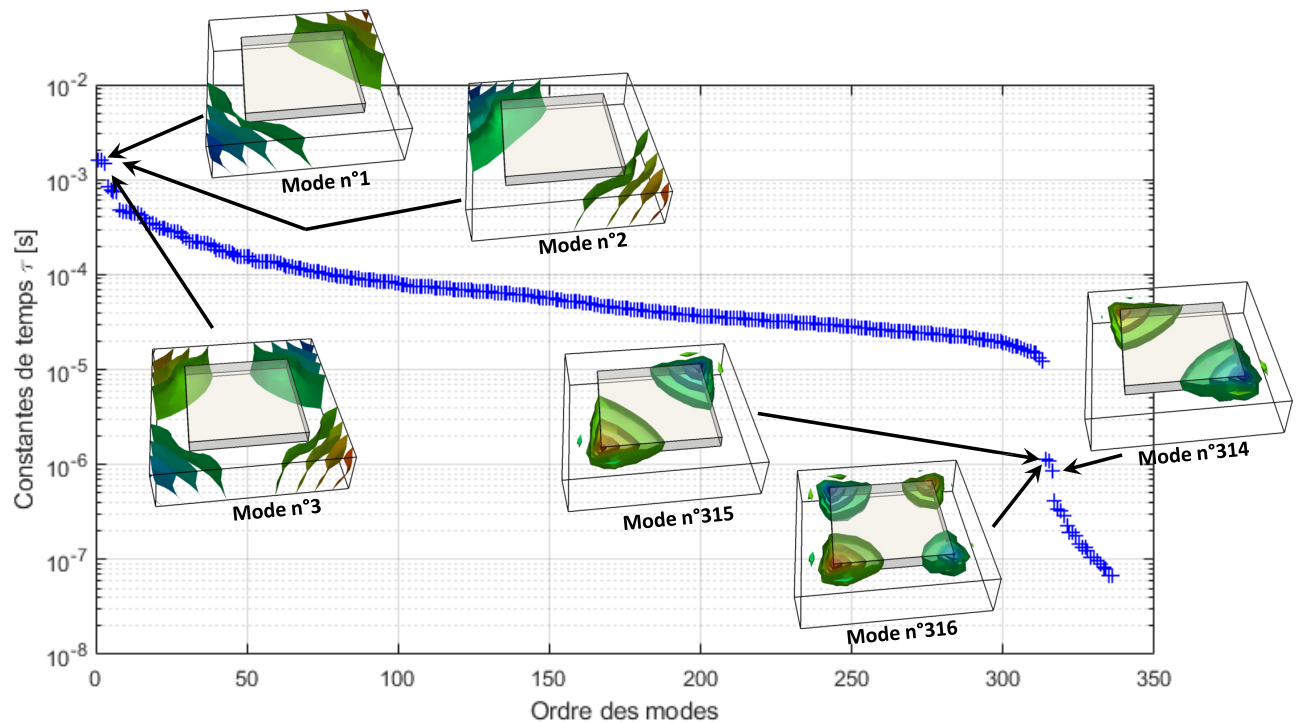


FIGURE 5.19 – Évolution des constantes de temps pour un problème 3D bi-matériaux

de Dirichlet, un problème multimatériaux limite la capacité d'effectuer une troncature des modes de Steklov.

### 5.3.2 Amalgame

On reprend la même procédure que celle présentée dans le cas de l'étude de la puce seule (paragraphe 4.4.2) : avec toujours les mêmes 20 simulations de référence (tableau 4.4), on construit deux bases amalgamées respectivement d'ordre  $\tilde{N} = 50$  et  $\tilde{N} = 200$ .

Puisqu'à chaque fois l'ordre de la base tronquée peut varier, les tableaux 5.7 et 5.8 présentent les résultats obtenus en fonction de la base tronquée utilisée, toujours pour le même scénario que celui utilisé pour l'ensemble de cette étude (cas n°14 du tableau 5.4).

Numéro de la base	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\varepsilon_{\text{steady}}$	1,59	2,17	2,37	5,07	14,14	20,66	24,77	28,26	34,54	30,53	30,53	31,93	31,87	14,85
$\varepsilon_{\text{trans}}$	1,18	1,89	2,09	4,39	12,42	16,91	21,16	24,28	32,89	28,49	27,19	27,32	31,22	13,14
$\langle \varepsilon \rangle_{\text{steady}}$	0,99	1,02	0,93	1,13	1,00	1,02	1,06	1,16	2,96	1,85	1,84	1,20	1,30	1,01
$\langle \varepsilon \rangle_{\text{trans}}$	0,65	0,7	0,66	0,89	0,65	0,68	0,72	0,92	2,42	1,52	1,50	0,97	1,05	0,69
$T_{\text{max}}$ (°C)	198,19	197,60	197,40	194,71	185,63	179,11	175,01	171,51	165,05	165,97	169,25	167,85	167,91	184,92

TABLE 5.7 – Erreurs de projection des différentes bases amalgamées à  $\tilde{N} = 50$  modes

Numéro de la base	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\varepsilon_{\text{steady}}$	1,02	1,87	2,09	4,81	13,80	20,32	24,04	27,60	34,71	30,40	30,30	31,50	32,00	14,53
$\varepsilon_{\text{trans}}$	0,80	1,67	1,87	4,18	12,15	16,69	20,58	23,74	32,87	28,1	26,77	26,93	31,21	12,89
$\langle \varepsilon \rangle_{\text{steady}}$	0,47	0,53	0,49	0,81	0,45	0,49	0,54	0,84	2,93	1,76	1,72	0,88	1,00	0,51
$\langle \varepsilon \rangle_{\text{trans}}$	0,31	0,4	0,42	0,73	0,30	0,34	0,39	0,77	2,39	1,46	1,43	0,82	0,93	0,39
$T_{\text{max}}$ (°C)	198,76	197,89	197,69	194,97	185,98	179,45	175,74	172,17	165,07	166,1	169,47	168,28	167,79	185,25

TABLE 5.8 – Erreurs de projection des différentes bases amalgamées à  $\tilde{N} = 200$  modes

Ces résultats appellent à deux commentaires :

- Bien évidemment lorsque la base tronquée initiale ne permet pas une reconstruction précise des champs de température, la base amalgamée ne peut pas donner de bons résultats, c'est le cas des essais n°5 et 13.
- Lorsque la base tronquée amène à des résultats satisfaisants (il faut 100% de la base de Dirichlet), les résultats deviennent acceptables, avec toujours une perte de précision (par rapport au modèle tronquée) liée à la réduction.

## 5.4 Résultats de la simulation modale réduite

Les différents modèles réduits testés pour la simulation modale sont obtenus à partir de 2 bases tronquées :

- la base n°0 : 100% des deux bases de Dirichlet et de Steklov
- la base n°3 : 100% de la base de Dirichlet et 10% de la base de Steklov

Le temps de calcul total de construction de la base amalgamée inclut le calcul de la base initiale (complète ou tronquée), la procédure d'amalgame et la construction des matrices qui permettent la prise en compte de la dépendance de la conductivité avec la température. Le tableau 5.9 présente les différents temps de calcul de construction des modèles réduits, en fonction de l'ordre de la base initiale et de l'ordre de la base réduite. On note que le temps de construction des bases est extrêmement important, compte tenu de la nécessité de calculer tous les modes de Dirichlet.

Bases tronquées		temps CPU total base amalgamée		
n° de la base	Temps CPU	$\tilde{N} = 50$	$\tilde{N} = 100$	$\tilde{N} = 200$
0	785	825	827	829
3	712	752	754	756

TABLE 5.9 – Temps de calcul de construction des différentes bases en minutes

Les résultats de la simulation en fonction de l'ordre du modèle sont présentés dans les tableaux 5.10 et 5.11. Ces différentes simulations nous permettent de confirmer les comportements déjà observés :

- On observe une décroissance régulière des erreurs moyennes  $\langle \varepsilon \rangle_{trans}$  et  $\langle \varepsilon \rangle_{steady}$  en fonction de l'ordre, associée à une décroissance irrégulière des erreurs ponctuelles  $\varepsilon_{trans}$  et  $\varepsilon_{steady}$ .
- Il faut un ordre réduit à minima  $\tilde{N} = 50$  pour obtenir des résultats acceptables. Le temps CPU, de l'ordre de 1,2 s est alors 300 fois plus rapide que le modèle complet ( $t_{CPU} = 337$  s).

	5	10	20	50	100	200	300	400
$\varepsilon_{steady}$	17,67	10,33	5,67	3,68	3,11	2,73	2,38	2,01
$\varepsilon_{trans}$	14,09	8,34	4,46	2,94	2,53	2,25	1,98	1,68
$\langle \varepsilon \rangle_{steady}$	7,47	3,86	2,63	1,64	1,34	1,15	1,12	1,11
$\langle \varepsilon \rangle_{trans}$	5,02	2,77	1,94	1,27	1,08	0,97	0,96	0,96
$T_{max}$	182,10	189,45	194,11	196,10	196,66	197,05	197,40	197,77
t cpu (s)	1,09	1,13	1,14	1,18	1,95	7,78	24,95	60,8

TABLE 5.10 – Performances du modèle réduit pour différents ordres obtenus à partir de la base initiale tronquée n°3 : 100% modes de Dirichlet et 10% modes de Steklov

	5	10	20	50	100	200	300	400
$\varepsilon_{steady}$	4,59	9,75	1,51	0,57	1,16	1,72	2,13	2,31
$\varepsilon_{trans}$	2,51	7,61	0,75	0,83	1,30	1,68	2,01	2,14
$\langle \varepsilon \rangle_{steady}$	7,87	4,45	2,39	1,14	0,80	0,55	0,47	0,43
$\langle \varepsilon \rangle_{trans}$	5,10	3,02	1,66	0,85	0,60	0,43	0,38	0,35
$T_{max}$	195,19	190,03	198,27	200,34	200,93	201,50	201,91	202,09
t cpu (s)	1,13	1,15	1,16	1,218	2,09	9,5	25,04	62,8

TABLE 5.11 – Performances du modèle réduit pour différents ordres obtenus à partir de la base initiale complète n°0

Le modèle réduit  $\tilde{N} = 50$  obtenu à partir de la base complète est utilisé pour l'ensemble des scénarios choisis parmi les cas JEDEC présentés dans le tableau 5.4.

Les résultats sont synthétisés sur la figure 5.20. On retrouve les mêmes conclusions quant aux différents types de conditions aux limites. Pour les conditions aux limites de type convection naturelle ou forcée, les résultats sont très satisfaisants, avec des écarts sur la température maximale largement inférieurs au degré. En ce qui concerne les conditions aux limites de type brasure, les résultats se dégradent, avec des écarts pouvant monter jusqu'à 5°C sur la température maximale en régime permanent. Ainsi, non seulement le calcul de la base initiale est beaucoup plus contraignant, puisque l'on a vu qu'il était nécessaire de prendre l'intégralité des modes de la base, mais en plus, même avec ces bases suffisamment riches, la procédure d'amalgame n'est pas aussi performante que pour le cas de la puce seule. De plus, comme indiqué dans le tableau 5.10, l'augmentation de l'ordre du modèle réduit n'améliore pas la précision sur la température maximale, même si en moyenne l'erreur décroît. On peut expliquer ces résultats par le problème thermique particulièrement ardu qui est posé : les zones de dissipation de chaleur sont extrêmement réduites (chaque source est un parallépipède de 0,2 mm de côté et 0,02 mm de haut) en regard des dimensions du composant dans lequel elles sont incorporées (4 mm de côté et 0,8 mm de haut, voir tableau 5.1). Lorsque l'on traitait le problème de la puce seule, même pour un ordre de réduction assez faible ( $\tilde{N} = 50$ ) par rapport au nombre de degrés de liberté du problème complet, la procédure d'amalgame était capable de reconstituer les modes adaptés à cette géométrie, comme l'a montré la reconstitution des 2 premiers modes amalgamés (figure 4.8). Ici, pour le composant complet, le problème devient plus contraignant, puisqu'il s'agit non seulement de tenir compte des sollicitations volumiques de ces sources, mais également du comportement thermique qui diffère selon les constituants du composant. Il n'est donc pas étonnant que pour un même ordre de réduction, le modèle réduit soit moins efficace que pour la puce seule.

En ce qui concerne le temps de calcul, la simulation est beaucoup plus rapide que le

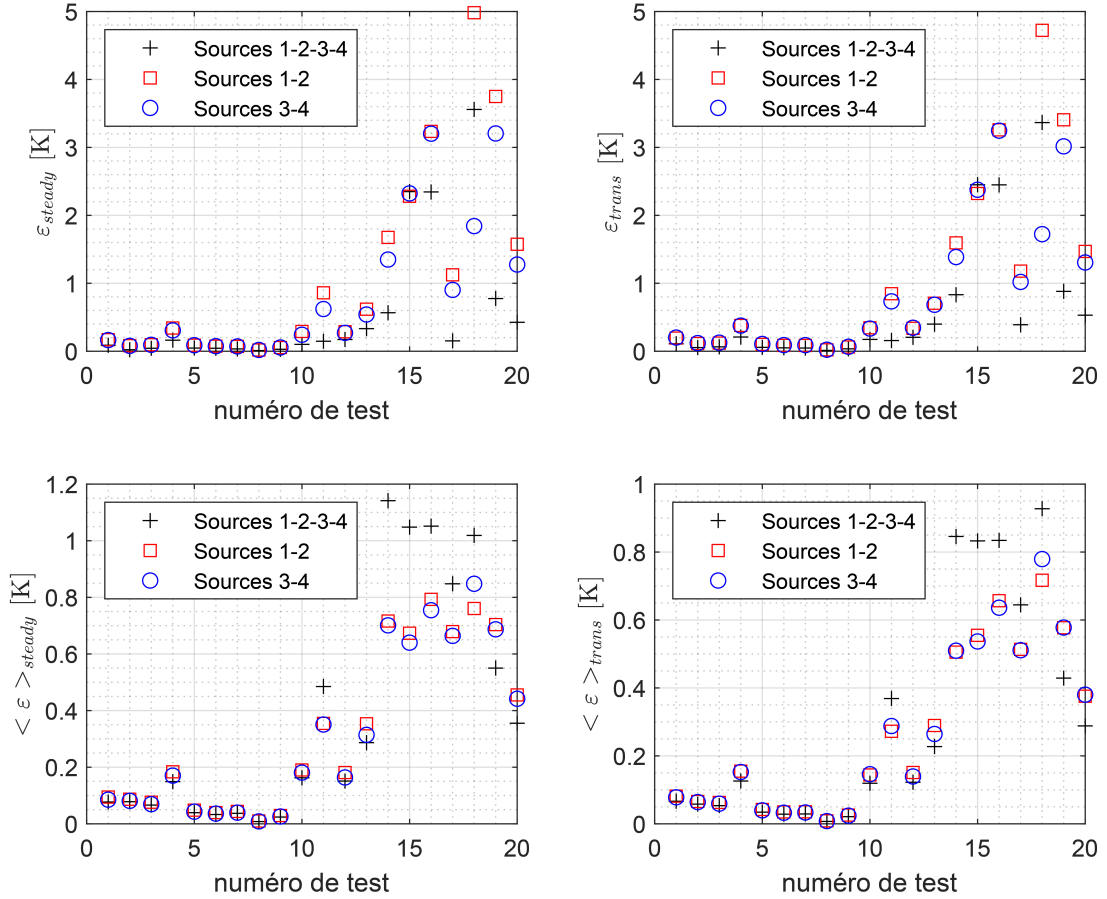


FIGURE 5.20 – Résultat du modèle réduit  $\tilde{N} = 50$  à partir de la base complète pour différents scénarios de simulation JEDEC (tableau 4.9)

modèle complet, malgré la nécessité de prendre en compte la dépendance de la conductivité thermique avec la température. Cependant le problème tient dans la nécessité de calculer un très grand nombre de modes de la base, ce qui engendre un temps de construction du modèle réduit extrêmement long. D'un point de vue industriel, ce temps est rédhibitoire en regard du temps nécessaire à la simulation éléments finis (337s). Ainsi dans le cas où l'on utilise le modèle réduit d'ordre  $\tilde{N} = 50$  à partir des deux base complètes de Dirichlet et de Steklov, il faudrait effectuer 280 simulations pour compenser le temps de construction du modèle réduit.

## 5.5 Conclusion

Nous avons ici étendu l'application de la méthode développée à une configuration complète, dans laquelle la puce étudiée dans le chapitre précédent est intégrée dans son boîtier, le QFN16. Cette fois, compte tenu de la complexité géométrique, toute la panoplie des éléments finis qui ont été ajoutés au logiciel Samba afin de permettre un couplage entre ce dernier et l'outil Ansys utilisé chez Thales (éléments finis de type hexaèdre, prisme et pyramide), a été employée. Cette application a fait apparaître une difficulté dans la construction du modèle réduit, puisque pour amener à des résultats précis, le modèle réduit par amalgame doit s'appuyer sur l'intégralité des bases de Dirichlet et de Steklov. Nous avons en effet montré que pour chacune des deux bases, l'utilisation de matériaux de diffusivités très différentes entraîne l'apparition de modes qui sont localisés dans chacun des différents matériaux, et qui sont de surcroît caractérisés par des constantes de temps très différentes. Puisque les différents modes sont calculés dans l'ordre des constantes de temps décroissantes, il faut donc calculer tous les modes intervenant dans le boîtier avant d'avoir accès aux modes spécifiques de la puce. Ainsi le temps de construction du modèle réduit devient très long et s'avère rédhibitoire pour une utilisation industrielle. Par contre une fois construit, le modèle réduit garde son efficacité : testé là encore pour l'intégralité des scénarios JEDEC (appliqués cette fois sur les frontières du boîtier), les erreurs obtenues sont tout à fait acceptables d'un point de vue industriel et le gain en temps de calcul est toujours aussi important.

# Chapitre 6

## Conclusions et perspectives

### 6.1 Conclusions

L'objectif de cette thèse CIFRE s'inscrivait dans la continuité des travaux entrepris depuis huit ans dans le cadre de la collaboration entre le laboratoire LMEE et la société Thales, qui porte sur le développement de méthodes de réduction modale pour des problèmes de simulation de composants et de cartes électroniques.

Plus précisément il s'agissait ici de voir s'il était possible d'intégrer aux outils existants la prise en compte des non-linéarités liées à la forte dépendance de la conductivité de certains matériaux avec la température.

A cet objectif s'ajoutait le cahier des charges initial qui est de pouvoir effectuer ce type de modélisation pour un grand nombre de conditions limites différentes, ainsi que pour une dissipation volumique de puissance variable dans le temps et dans l'espace.

Nous sommes donc partis des outils développés dans le laboratoire, à savoir l'utilisation de la méthode AROMM qui repose sur deux étapes. Tout d'abord, l'écriture de deux problèmes aux valeurs propres qui se complètent permet le calcul de deux familles de vecteurs propres dont la réunion forme une base dans l'espace de Hilbert. Ensuite une double technique de réduction modale est utilisée, dans laquelle une simple troncature temporelle permet de limiter les moyens de calculs nécessaires à l'obtention d'une base initiale, qui est elle-même par la suite optimisée par la technique d'amalgame.

Mais même si la méthode d'origine repose sur l'utilisation de bases adaptées à tout type de problèmes thermiques, les allers-retours systématiques entre l'espace des températures où est estimée la conductivité et l'espace modal où est résolu le problème thermique entraînent des temps de calculs rédhibitoires. L'idée initiale a donc été de chercher à implanter la formulation modale de la température directement dans la loi qui décrit la dépendance de la conductivité

avec la température. Nous avons montré que lorsque la conductivité dépend linéairement de la température, une formulation modale exacte peut être obtenue très facilement. Lorsque la conductivité répond à une loi quadratique, l'écriture modale entraîne le calcul d'un grand nombre de matrices, ce qui limite l'intérêt de la méthode. Compte tenu des propriétés de la base réduite utilisée (notamment l'existence d'un mode plat qui joue un rôle essentiel dans la reconstruction du champ de température), une approximation numérique a été proposée qui diminue fortement le nombre des matrices réduites permettant la description de la loi de conductivité en fonction de la température.

Ce développement a d'abord été testé sur la puce seule, puisque c'est elle qui est constitué d'un matériau dont la conductivité est non-linéaire. La loi de dépendance d'origine a été remplacée par une approximation quadratique. Les nombreux tests numériques effectués ont prouvé l'efficacité de la méthode développée dans ce travail. Nous avons ainsi montré qu'il est possible d'utiliser un seul modèle réduit pour ce type de problème et pour une très large gamme de paramètres qui définissent les conditions limites et la dissipation de puissance volumique interne. Les résultats sont à la fois rapides (gain de temps supérieur à 300 par rapport à une méthode traditionnelle) et précis (1% d'erreur dans les cas les plus difficiles). De surcroît, le coût initial des calculs est très raisonnable, puisque la construction de ce modèle réduit non linéaire est amorti à partir de trois simulations.

Dans une seconde étape, nous avons cherché à effectuer la simulation pour l'intégralité du composant, caractérisé par une géométrie complexe et défini par des matériaux aux propriétés thermiques très différents. Les résultats ont alors fait apparaître une difficulté, puisque même si la précision du modèle réduit utilisé et le gain en temps calcul sont satisfaisants, la construction de ce modèle réduit nécessite le calcul de pratiquement l'intégralité de la base. Le temps de calcul initial devient alors très important et limite l'intérêt de cette méthode d'un point de vue industriel (Pour un même ordre de réduction que celui utilisé pour l'étude de la puce seule, l'amortissement en temps calcul nécessite plus de 280 simulations). Une analyse a été effectuée, et nous avons ainsi montré que l'origine du problème est liée à la dépendance des valeurs propres des problèmes de Dirichlet et de Steklov aux propriétés thermo-physiques de la géométrie, ce qui entraîne un décalage de certains modes essentiels dans des domaines de constantes de temps faibles, et interdit alors une troncature temporelle efficace.

## 6.2 Perspectives

Un certain nombre de perspectives apparaissent clairement à la suite de ce travail de thèse.

Tout d'abord les résultats obtenus lors de la construction du modèle réduit du compo-



sant montrent qu'il est nécessaire de modifier la stratégie de réduction. La suite de ce travail consiste à utiliser une technique de sous-structuration (encore appelée décomposition de domaines). Dans le cadre de la méthode AROMM, cette technique a été initiée dans les travaux de thèse de Sébastien Grosjean [6] à l'échelle de la carte électronique, où chaque composant faisait l'objet d'une formulation modale propre, puis assemblé sur la carte. Ici, c'est le composant lui-même qui sera découpé en sous-structures, chacune caractérisée par des propriétés thermo-physiques identiques ou proches. Pour chaque sous-structure, un modèle réduit pourra alors être construit à partir d'une base initiale fortement tronquée.

Par ailleurs en ce qui concerne la technique de construction du modèle réduit non linéaire, elle reste pour l'instant limitée à une dépendance quadratique du paramètre fonction de la température. Même s'il est théoriquement possible d'étendre cette technique à un polynôme d'ordre plus élevé, le nombre de matrices décrivant cette dépendance dans l'espace modal deviendra encore plus important et il n'est pas certain de pouvoir diminuer ce nombre en effectuant une approximation qui s'appuie sur le mode plat, comme nous l'avons fait ici. En outre, lorsque ce type de lois n'est plus valable, il faudra trouver d'autres stratégies. On peut ainsi imaginer d'appliquer une formulation modale non plus pour la température qui intervient dans cette loi, mais directement pour le paramètre non linéaire, d'une manière similaire à ce qui est fait dans le cadre de la méthode PGD.

# Bibliographie

- [1] JEDEC Solid State Technology Association. Delphi compact thermal model guideline, 2008.
- [2] M. Laurent and P.L. Vuillermoz. Conductivité thermique des solides. Techniques de l'Ingénieur, 1993. K420 V2.
- [3] J.M. Ziman. Electrons and phonons. the theory of transport phenomena in solids. Oxford University Press, 1960. Science 133.3447 : 187-188, Review by A.H. Kahn.
- [4] R. Castanet. Enthalpie d'échauffement des solides. Techniques de l'Ingénieur, 1991. K430 V2.
- [5] A. Bairi, L. Roseiro, A. Martín-Garín, K. Adeyeye, and J. A. Millán-García. Thermal state of electronic assemblies applied to smart building equipped with qfn64 device subjected to natural convection. *Microelectronics Reliability*, 70 :79–83, 2017.
- [6] S. Grosjean. *Réduction d'un problème thermique par sous structuration modale. Application à la modélisation d'ensembles électroniques complexes*. Doctoral dissertation, Université Paris-Saclay (ComUE), 2018.
- [7] J. W. Sofia. Analysis of thermal transient data with synthesized dynamic models for semiconductor devices. *IEEE Transactions on Components, Packaging, and Manufacturing Technology : Part A*, 18(1) :39–47, Mar 1995.
- [8] C. Lasance. Ten years of boundary-condition-independent compact thermal modeling of electronic parts : A review. *Heat Transfer Engineering*, 29 :149–168, 2008.
- [9] E. Monier-Vinard, V. Bissuel, C. Dia, and O. Daniel. Delphi style compact modeling by means of genetic algorithms of system in package devices using composite sub-compact thermal models dedicated to model order reduction. In *13th InterSociety Conference on Thermal and Thermomechanical Phenomena in Electronic Systems*, pages 1170–1178. IEEE, 2012.
- [10] R. Borno. Extraction of boundary condition independent dynamic compact thermal models of leds—a delphi4led methodology. *Energies*, 12 :1628, 2019.

- [11] D. Coenen, H. Oprins, P. De Heyn, J. Van Campenhout, and I. De Wolf. Analysis of thermal crosstalk in photonic integrated circuit using dynamic compact models. *IEEE Transactions on Components, Packaging, and Manufacturing Technology*, 12(8) :1350–1357, 2022.
- [12] M. Janicki, T. Torzewicz, P. Ptak, T. Raszkowski, A. Samson, and K. Górecki. Parametric compact thermal models of power leds. *Energies*, 12(9), 2019.
- [13] P. Arunasalam, K. N. Seetharamu, and I. A. Azid. Determination of thermal compact model via evolutionary genetic optimization method. *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies*, 28(2) :345–352, Jun 2005.
- [14] C.T. Dia. *Génération de Modeles Compacts Thermiques Dynamiques de Composants Electroniques via Les Algorithmes Genetiques*. PhD thesis, Paris 10, Dec 2015.
- [15] D. Maillet, S. André, J. C. Batsale, A. Degiovanni, and C. Moyne. *Thermal quadrupoles : Solving the heat equation through integral transforms*. J. Wiley Editeur, Chichester, 2000.
- [16] Jalal El Yagoubi. *Effet de l'endommagement mécanique sur les propriétés thermiques de composites à matrice céramique : approche multiéchelle*. PhD thesis, 07 2011.
- [17] J. Pailhes et al. Thermal quadrupole method with internal heat sources. *International Journal of Thermal Sciences*, 53 :49–55, 2012.
- [18] J-C. Krapez and E. Dohou. Thermal quadrupole approaches applied to improve heat transfer computations in multilayered materials with internal heat sources. *International Journal of Thermal Sciences*, 81 :38–51, 2014.
- [19] D. Nesteruk et al. Simple and robust methodology of defect thermal characterization based on thermal quadrupoles and polynomial approximation. *NDT & E International*, 124 :102522, 2021.
- [20] A. W. Aregba, J. C. Batsale, C. Pradère, L. Benassis, and L. Pons. Quadripôles thermiques pour la modélisation du transfert diffusif dans une plaque délaminée. 2010.
- [21] G. Maranzana. *Modélisation thermique des composants électroniques de puissance par la méthode des quadripôles*. Phd diss., éditeur inconnu, 2003.
- [22] A. El Arabi et al. Modélisation semi-analytique et numérique de la conduction thermique au sein d'un transistor mosfet. *Entropie : thermodynamique-énergie-environnement-économie*, 2023.
- [23] J. Fourier. Théorie analytique de la chaleur, 1822. (Paris).
- [24] J.L. Lumley. *The Structure of Inhomogeneous Turbulent Flows*, pages 166–178. Nauka, 1967.

- [25] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures part i : Coherent structures. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45(3) :561–571, 1987.
- [26] C. Rowley, T. Colonius, and T. Murray. Model reduction for compressible flow using pod and galerkin projection. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 189(1-2) :115–129, 2003.
- [27] R. Everson and L. Sirovich. Karhunen–loève procedure for gappy data. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12(8) :1657–1664, 1995.
- [28] A. Fic, R. Bialecki, and A. J. Kassab. Solving transient nonlinear heat conduction problems by proper orthogonal decomposition and the finite element method. *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals*, 48(2) :103–124, Aug 2005.
- [29] H. M. Park and W. S. Jung. Recursive solution of an inverse heat transfer problem in rapid thermal processing systems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44(11) :2053–2065, 2001.
- [30] J. A. Atwell and B. King. Proper orthogonal decomposition for reduced basis feedback controllers for parabolic equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 33(1-3) :1–19, 2001.
- [31] R. Venters, B. T. Helenbrook, K. Zhang, and M.-C. Cheng. Proper-orthogonal-decomposition based thermal modeling of semiconductor structures. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 59(11) :2924–2931, 2012.
- [32] W. Jia, B. T. Helenbrook, and M.-C. Cheng. Thermal modeling of multi-fin field effect transistor structure using proper orthogonal decomposition. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 61(8) :2752–2759, 2014.
- [33] M.-C. Cheng, W. Jia, and B. Helenbrook. Thermal modeling for finfet nand gate circuits using a multi-block reduced-order model, 2015.
- [34] P. Ladevèze, J.-C. Passieux, and D. Néron. The latin multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21) :1287–1296, 2010.
- [35] L. Schuler, L. Chamoin, Z. Khatir, M. Berkani, M. Ouhab, and N. Degrenne. Iterative pgd model reduction for the strongly-coupled thermomechanical analysis of crack propagation in power electronic modules. *Computational Mechanics*, 70(2) :407–424, 2022.
- [36] S. Carmona, Y. Rouizi, O. Quéméner, F. Joly, and A. Neveu. Estimation of heat flux by using reduced model and the adjoint method. application to a brake disc rotating. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 128 :1048–1063, 2018.

- [37] S. Carmona, Y. Rouizi, and O. Quéméner. Spatio-temporal identification of heat flux density using reduced models. application to a brake pad. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 128 :1048–1063, 2019.
- [38] A. C. Castillo, B. Gaume, Y. Rouizi, O. Quéméner, and P. Glouannec. Identification of insulating materials thermal properties by inverse method using reduced order model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 166 :120683, 2021.
- [39] S. Grojean, B. Gaume, F. Joly, K. Vera, and A. Neveu. A modal substructuring method for non-conformal mesh. application to an electronic board. *International Journal of Thermal Sciences*, 152 :106298, 2020.
- [40] D. Petit and R. Pasquetti. Réduction de modèle par identification de modes dominants : Application à un modèle bidimensionnel de diffusion thermique. *Revue de Physique Appliquée*, 25(8) :831–842, 1990.
- [41] D. Petit and R. Hachette. Model reduction in linear heat conduction : Use of interface fluxes for the numerical coupling. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41(21) :3177–3189, 1998.
- [42] M. Girault, E. Videcoq, and D. Petit. Estimation of time-varying heat sources through inversion of a low order model built with the modal identification method from in-situ temperature measurements. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53(1-3) :206–219, Jan 2010.
- [43] Y. Rouizi, M. Girault, Y. Favennec, and D. Petit. Model reduction by the modal identification method in forced convection : Application to a heated flow over a backward-facing step. *International Journal of Thermal Sciences*, 49(8) :1354–1368, Aug 2010.
- [44] E. Videcoq, A. Neveu, O. Quemener, M. Girault, and D. Petit. Comparison of two nonlinear model reduction techniques : The modal identification method and the branch eigenmodes reduction method. *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals*, 49(6) :537–558, Dec 2006.
- [45] E. Videcoq and D. Petit. Model reduction for the resolution of multidimensional inverse heat conduction problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44(10) :1899–1911, 2001.
- [46] E. Videcoq, M. Girault, K. Bouderbala, H. Nouria, J. Salgado, and D. Petit. Parametric investigation of linear quadratic gaussian and model predictive control approaches for thermal regulation of a high precision geometric measurement machine. *Applied Thermal Engineering*, 78 :720–730, 2015.

- [47] L. Codecasa, D. D'Amore, and P. Maffezzoni. An arnoldi based thermal network reduction method for electro-thermal analysis. *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies*, 26(1) :186–192, 2003.
- [48] L. Codecasa, D. D'Amore, and P. Maffezzoni. Compact modeling of electrical devices for electrothermal analysis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 50(4) :465–476, 2003.
- [49] L. Codecasa, D. D'Amore, and P. Maffezzoni. Multivariate moment matching for generating boundary condition independent compact dynamic thermal networks of packages [bga example]. In *Semiconductor Thermal Measurement and Management IEEE Twenty First Annual IEEE Symposium, 2005.*, pages 175–181, 2005.
- [50] L. Codecasa, D. D'Amore, P. Maffezzoni, and N. Spennagallo. A novel approach for generating dynamic compact models of thermal networks having large numbers of power sources. *International Workshop on Thermal Investigation og ICs ans Systems, 27-30 Sep 2005, Belgirate Lake Maggiore, Italy, p25-31*, 09 2005.
- [51] L. Codecasa. Compact models of dynamic thermal networks with many heat sources. *Components and Packaging Technologies, IEEE Transactions on*, 30 :653 – 659, 01 2008.
- [52] L. Codecasa, A. P. Catalano, and V. d'Alessandro. A priori error bound for moment matching approximants of thermal models. *IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology*, 9(12) :2383–2392, 2019.
- [53] B. Rogié, L. Codecasa, E. Monier-Vinard, V. Bissuel, N. Laraqi, O. Daniel, D. D'Amore, A. Magnani, V. d'Alessandro, and N. Rinaldi. Multi-port dynamic compact thermal models of dual-chip package using model order reduction and metaheuristic optimization. 87 :222–231, 2018.
- [54] A. Fic, R. Bialecki, and A. Kassab. Solving transient nonlinear heat conduction problems by proper orthogonal decomposition and fem. page 16, 2004.
- [55] O. Quéméner, A. Neveu, and E. Videcoq. A specific reduction method for the branch modal formulation : Application to a highly non-linear configuration. *International Journal of Thermal Sciences*, 46(9) :890–907, Sep 2007.
- [56] F. Chinesta, A. Leygue, M. Bernighier, L. Nguyen, J.-C. Grandidier, B. Schrefler, and F. Pesavento. Towards a framework for non-linear thermal models in shell domains. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 23 :55–73, 2013.
- [57] B. Favoreto, C. de Hillerin, O. Bettinotti, V. Oancea, and A. Barbarulo. Reduced order modeling via pgd for highly transient thermal evolutions in additive manufacturing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 349 :405–430, 2019.

- [58] M. Girault and D. Petit. Identification methods in nonlinear heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 48(1) :105–118, 2005.
- [59] O. Balima, Y. Favennec, M. Girault, and D. Petit. Comparison between the modal identification method and the pod-galerkin method for model reduction in nonlinear diffusive systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67 :895–915, 2006.
- [60] B. Krämer and K. Willcox. Nonlinear model order reduction via lifting transformations and proper orthogonal decomposition. *AIAA Journal*, 57 :1–11, 2019.
- [61] S. Chaturantabut and D. Sorensen. Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation. *SIAM J. Scientific Computing*, 32 :2737–2764, 2010.
- [62] C. Farhat, P. Avery, T. Chapman, and J. Cortial. Dimensional reduction of nonlinear finite element dynamic models with finite rotations and energy-based mesh sampling and weighting for computational efficiency. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 98 :1–100, 2010.
- [63] S. Grimberg, C. Farhat, R. Tezaur, and C. Bou-Mosleh. Mesh sampling and weighting for the hyperreduction of nonlinear petrov-galerkin reduced-order models with local reduced-order bases. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 122 :1–6603, 2020.
- [64] R. Tezaur, F. As’ad, and C. Farhat. Robust and globally efficient reduction of parametric, highly nonlinear computational models and real time online performance. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 399 :115392, 2022.
- [65] D. Ryckelynck. A priori hyperreduction method : An adaptive approach. *Journal of Computational Physics*, 202 :346–366, 2005.
- [66] L. Codecasa, V. d’Alessandro, A. Magnani, and N. Rinaldi. Compact dynamic modeling for fast simulation of nonlinear heat conduction in multi-chip stacking technology. *IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology*, 4(11) :1785–1795, 2014.
- [67] Lorenzo Codecasa, Vincenzo D’Alessandro, Alessandro Magnani, and Andrea Irace. Circuit-based electrothermal simulation of power devices by an ultra fast nonlinear mor approach. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 31 :1–1, 08 2016.
- [68] L. Codecasa, V. D’Alessandro, A. Magnani, and N. Rinaldi. Fast nonlinear dynamic compact thermal modeling with multiple heat sources in ultra-thin chip stacking technology. *IEEE Transactions on Components, Packaging, and Manufacturing Technology*, PP :1–12, 2017.

- [69] L. Codecasa, P. Alotto, and F. Moro. Fast solution of induction heating problems by structure preserving nonlinear model order reduction. *IEEE Transactions on Magnetics*, 52 :1–1, 2015.
- [70] J. Sicard, P. Bacot, and A. Neveu. Analyse modale des échanges thermiques dans le bâtiment. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 28 :111–123, 1985.
- [71] P. Bacot, A. Neveu, and J. Sicard. Analyse modale des phénomènes thermiques en régime variable dans le bâtiment. *Rev. Gen. Therm.*, 267 :189–201, 1984.
- [72] G. Lefebvre, J. Brasier, and A. Neveu. Simulation du comportement thermique d’un local par des méthodes numériques d’ordre réduit. *Revue Générale de Thermique*, 302 :106–114, 1987.
- [73] J. Salgon and A. Neveu. Application of modal analysis to modelling of thermal bridge in building. *Energy and Buildings*, 10 :109–120, 1987.
- [74] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle*. 1991.
- [75] METTI Group. Eurotherm Advanced Spring School “Thermal Measurements and Inverse Techniques”, 2009.
- [76] C. Lanczos. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *J. Res. Natl. Bur. Stand*, 45 :225–280, 1950.
- [77] S. Marshall. An approximation method for reducing the order of linear system. *Control*, pages 642–653, 1966.
- [78] A. Oulefki. *Reduction de Modeles Thermiques Par Amalgame Modal*. Thesis, Marne-la-vallée, ENPC, January 1993.
- [79] O. Quéméner, A. Neveu, and E. Videcoq. A specific reduction method for branch modal formulation : Application to highly non linear configuration. *Int. J. Thermal Sci.*, 46 :890–907, 2006.
- [80] F. Joly, O. Quéméner, and A. Neveu. Modal reduction of an advection-diffusion model using a branch basis. *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals*, 53(5) :466–485, Mar 2008.