



**HAL**  
open science

# Calibration géométrique et physique d'un système de radiographie industrielle en ligne

Sasha Gasquet

► **To cite this version:**

Sasha Gasquet. Calibration géométrique et physique d'un système de radiographie industrielle en ligne. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2024. Français. NNT : 2024GRALM010 . tel-04724416

**HAL Id: tel-04724416**

**<https://theses.hal.science/tel-04724416v1>**

Submitted on 7 Oct 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES**

École doctorale : MSTII - Mathématiques, Sciences et technologies de l'information, Informatique

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Unité de recherche : Translational Innovation in Medicine and Complexity

**Calibration géométrique et physique d'un système de radiographie industrielle en ligne**

**Geometric and physical calibration of an in-line industrial radiography system**

Présentée par :

**Sasha GASQUET**

Direction de thèse :

**Laurent DESBAT**

PROFESSEUR DES UNIVERSITES, Université Grenoble Alpes

Directeur de thèse

**Pierre-Yves SOLANE**

INGENIEUR DOCTEUR, SOCIETE TIAMA

Co-encadrant de thèse

Rapporteurs :

**CHARLES SOUSSEN**

PROFESSEUR, ECOLE CENTRALESUPELEC

**VOICHITA MAXIM**

PROFESSEURE DES UNIVERSITES, INSA LYON

Thèse soutenue publiquement le **25 mars 2024**, devant le jury composé de :

**VALERIE PERRIER,**

PROFESSEURE DES UNIVERSITES, GRENOBLE INP

Présidente

**CHARLES SOUSSEN,**

PROFESSEUR, ECOLE CENTRALESUPELEC

Rapporteur

**VOICHITA MAXIM,**

PROFESSEURE DES UNIVERSITES, INSA LYON

Rapporteuse

**SIMON RIT,**

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS DELEGATION RHONE AUVERGNE

Examineur

Invités :

**LAURENT DESBAT**

PROFESSEUR DES UNIVERSITES, UNIVERSITE GRENOBLE ALPES

**PIERRE-YVES SOLANE**

INGENIEUR DOCTEUR, SOCIETE TIAMA





# Calibration géométrique et physique d'un système de radiographie industrielle en ligne

Sasha Gasquet

Laboratoire TIMC  
Université Grenoble Alpes  
Mars 2024



---

# REMERCIEMENTS

Ce travail a été supporté par l'Association Nationale de la Recherche et de la Technologie (ANRT) dans le cadre d'une convention CIFRE établie entre le laboratoire TIMC et l'entreprise Tiama.

Je tiens à remercier mes deux encadrants, Laurent Desbat et Pierre-Yves Solane, pour m'avoir beaucoup appris durant ces 3 années de thèse. La diversité des problématiques abordées a été un réel défi. Leur complémentarité est très certainement l'une des clés du succès de cette thèse.

Merci à Laurent, mon directeur de thèse, pour ses conseils avisés, sa patience et pour m'avoir poussé à une rigueur permettant d'obtenir une recherche de qualité.

Merci à Pierre-Yves, mon encadrant du côté entreprise, pour avoir pris part à cette thèse. Ses conseils ont été très précieux pour moi dans la compréhension des phénomènes physiques liés aux rayons X ainsi que la mise en place et la réalisation des expériences qui ont permis de valider les résultats de la thèse.

Je souhaite remercier Valérie Perrier, présidente du jury, Charles Soussen et Voichita Maxim, rapporteurs, ainsi que Simon Rit, examinateur, pour avoir accepté de faire parti du jury de ma thèse. Leurs commentaires et remarques ont nettement contribué à l'amélioration de ce manuscrit.

Je remercie les doctorants du groupe de tomographie, Mathurin, Anastasia, Matthieu, Nicolas, pour leur camaraderie. Je remercie aussi mes collègues de Tiama : Raphaël, Romain, Lubin, Godefroy, David.

Je remercie mes amis du Grenoble Alp'38 pour m'avoir permis de renouer avec la natation après plusieurs années d'arrêt. Tous les moments passés ensemble à l'entraînement, en compétition ou à faire d'autres activités ont très certainement rendu mon quotidien de doctorant plus facile. Un grand merci en particulier à Yann, Lisa et Karim pour leur bonne humeur et leur soutien durant ces années de thèse. Je souhaite aussi remercier mes amis de Villeurbanne Natation pour m'avoir accueilli pendant la période de ma thèse que j'ai passé à Lyon. Merci en particulier à Victor et Maël.

Je remercie ma famille pour m'avoir soutenu et encouragé durant ces 8 années d'étude, ainsi que pour leur patience. Merci en particulier à mon père, ma mère, ma belle-mère, ma soeur et mes frères.



---

# RÉSUMÉ

Dans cette thèse, nous nous intéressons à des méthodes de calibration pour des systèmes de radiographie. Elles permettent de mesurer des paramètres géométriques ou physiques liés aux systèmes d'acquisition. Les méthodes développées ont pour objectif d'améliorer les reconstructions de bouteilles en verre effectuées à partir de données acquises sur des lignes de production. Ces reconstructions permettent d'effectuer des mesures dimensionnelles sur les maillages tridimensionnels obtenus.

La géométrie d'acquisition est composée d'une ou plusieurs sources positionnées d'un côté du convoyeur sur lequel les bouteilles sont en translation et de détecteurs linéaires de l'autre côté. Elle s'apparente à une géométrie de tomosynthèse (tomographie à angles de vue limités). L'algorithme de reconstruction repose sur des a priori très forts sur les bouteilles. Certains paramètres géométriques et physiques doivent être spécifiés à l'algorithme pour obtenir des reconstructions de qualité.

Nous proposons plusieurs méthodes de calibration géométrique et objets de calibration pour une géométrie d'acquisition à une source à rayons X et plusieurs détecteurs linéaires. Ces méthodes utilisent la redondance des données générée par l'utilisation d'une unique source. Nous proposons de modéliser l'absorption des rayons X à partir de lois considérant les aspects mono-matériau du verre et poly-chromatique des rayons X émis par la source. Les paramètres de ces modélisations sont estimés pour plusieurs types de verre à partir de données expérimentales. Nous proposons une méthode d'auto-calibration géométrique basée sur des conditions de cohérence des données. Elle permet d'estimer les variations de vitesse d'un objet en translation rectiligne dans une géométrie où le détecteur est une droite infinie et la source se déplace sur une droite parallèle au détecteur. La translation de l'objet est aussi supposée parallèle au détecteur. Nous montrons qu'il n'est pas possible d'estimer la vitesse moyenne de l'objet à partir des conditions de cohérence des données dans cette géométrie sans a priori.

Finalement, nous concluons sur les résultats de nos méthodes. Nous proposons quelques pistes d'amélioration pour chacune de nos méthodes à la fin de chaque chapitre.



---

# ABSTRACT

The thesis focus on calibration methods for X-ray systems. They are used to estimate geometric or physical parameters related to the radiography systems. The methods purpose is to improve glass bottle in-line reconstructions. The reconstruction algorithm produces three-dimensional meshes from which dimensional measurements can be taken.

The system geometry consists of one or more sources positioned on one side of the conveyor belt on which the bottles are in translation, and linear detectors on the other side. This is a tomosynthesis geometry (tomography with limited viewing angles) as a large angular range of data is not available. The reconstruction algorithm is built using strong assumptions on the bottles geometry and composition. Geometric and physical parameters must be specified to the algorithm in order to obtain good reconstructions.

We propose multiple off-line geometric calibration methods and phantoms for a system composed of a single X-ray source and several linear detectors. These methods rely on the data redundancy generated by the use of a single source. We propose to model X-ray absorption taking into account the mono-material aspect of the glass and the poly-chromatic aspect of the X-rays emitted by the source. The parameters of these models are estimated for different types of glass using experimental data. We propose a geometric self-calibration method based on data consistency conditions. The method estimates speed variations parameters of a translating object in a linogram geometry (the detector is considered as an infinite line and the source moves on a line parallel to the detector). The translation of the object is assumed to be parallel to the detector. We show that it is not possible to estimate the average object velocity in this geometry from the data consistency conditions without a priori information.

Finally, we conclude about the results of our methods. At the end of each chapter, we suggest ways of improving our methods and results.



---

# PUBLICATIONS

## Articles de conférence

[1] S. Gasquet, L. Desbat, P.-Y. Solane. Multiple Linear Detector Off-Line Calibration. In *7th International Conference on Image Formation in X-ray Computed Tomography*, pages 390-393, 2022.

[2] S. Gasquet, L. Desbat, P.-Y. Solane. Motion Estimation in Parallel-Beam Linogram Geometry Using Data Consistency Conditions. In *17th International Meeting on Fully 3D Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, pages 115-118, 2023.



---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Résumé</b>	<b>5</b>
<b>Abstract</b>	<b>7</b>
<b>Publications</b>	<b>9</b>
<b>Table des matières</b>	<b>13</b>
<b>Table des figures</b>	<b>17</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>19</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>21</b>
1.1 Problème industriel . . . . .	21
1.1.1 Mesure dimensionnelle . . . . .	21
1.1.2 Reconstruction 3D de bouteilles . . . . .	23
1.1.3 Calibration . . . . .	29
1.2 Banc expérimental . . . . .	30
1.2.1 Géométrie d’acquisition et contraintes . . . . .	30
1.2.2 Réalisation . . . . .	31
1.3 Modélisations et résultats théoriques . . . . .	36
1.3.1 Modèle de caméra sténopé . . . . .	37
1.3.2 Matrices de rotation et groupe $\mathcal{SO}(3)$ . . . . .	40
1.3.3 Conditions de cohérence d’Helgason-Ludwig . . . . .	41
1.3.4 Résultats géométriques sur les moments des projections . . . . .	45
1.4 Organisation du manuscrit . . . . .	46
<b>2 Calibration géométrique “off-line”</b>	<b>47</b>
2.1 Introduction . . . . .	47
2.2 Modélisation . . . . .	49
2.2.1 Notations . . . . .	49
2.2.2 Modèle de caméra pinhole linéaire . . . . .	49
2.3 Méthode de Horaud <i>et al.</i> . . . . .	50
2.3.1 Modèle de caméra pinhole linéaire dans un plan de vue . . . . .	51

2.3.2	Objet géométrique de calibration . . . . .	51
2.3.3	Estimation des paramètres . . . . .	52
2.4	Méthodes d'optimisation pour un système multi-détecteur . . . . .	55
2.4.1	Notations . . . . .	55
2.4.2	Méthodes proposées . . . . .	56
2.5	Estimation des paramètres géométriques . . . . .	57
2.6	Adaptation et optimisation du calibre pour un système multi-détecteur . . . . .	60
2.6.1	Géométrie du système idéal . . . . .	60
2.6.2	Généralisation du calibre de Horaud <i>et al.</i> . . . . .	60
2.6.3	Calibre minimal . . . . .	61
2.6.4	Amélioration du calibre minimal . . . . .	64
2.6.5	Calibre adapté . . . . .	69
2.7	Simulations numériques . . . . .	71
2.7.1	Calibre du banc expérimental . . . . .	71
2.7.2	Calibration mono-détecteur . . . . .	72
2.7.3	Calibration multi-détecteur . . . . .	74
2.8	Expériences . . . . .	77
2.8.1	Traitement des données . . . . .	78
2.8.2	Calibration du banc expérimental . . . . .	80
2.8.3	Analyse . . . . .	81
2.9	Conclusion . . . . .	82
<b>3</b>	<b>Calibration physique</b> . . . . .	<b>85</b>
3.1	Introduction . . . . .	85
3.2	Phénomènes physiques et modélisation de l'atténuation des rayons X . . . . .	86
3.2.1	Génération des rayons X . . . . .	86
3.2.2	Interaction rayons X - atomes . . . . .	86
3.2.3	Atténuation des rayons X . . . . .	88
3.3	Expériences . . . . .	89
3.3.1	Montage expérimental . . . . .	89
3.3.2	Mesure d'épaisseur . . . . .	90
3.3.3	Lien épaisseur - intensité des rayons X . . . . .	92
3.4	Conclusion . . . . .	97
<b>4</b>	<b>Auto-calibration géométrique "on-line"</b> . . . . .	<b>99</b>
4.1	Introduction . . . . .	99
4.2	Modélisation . . . . .	101
4.2.1	Modèle d'intégrale de droites . . . . .	101
4.2.2	Linogramme parallèle 2D . . . . .	102
4.2.3	Linogramme pondéré . . . . .	103
4.3	Conditions de cohérence des données . . . . .	104
4.4	Application des conditions de cohérence des données . . . . .	105
4.4.1	Mouvement rectiligne uniforme . . . . .	105
4.4.2	Estimation de la vitesse moyenne . . . . .	108
4.4.3	Mouvement rectiligne non uniforme . . . . .	110
4.5	Modélisation et estimation des variations de vitesse . . . . .	111
4.5.1	Modélisation polynomiale . . . . .	111
4.5.2	Modélisation périodique . . . . .	114
4.6	Simulations . . . . .	120
4.6.1	Approximation des données . . . . .	120

---

4.6.2	Estimation des variations . . . . .	121
4.7	Expériences . . . . .	123
4.7.1	Protocole . . . . .	123
4.7.2	Calcul du moment d'ordre 0 . . . . .	125
4.8	Conclusion . . . . .	126
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>129</b>
	<b>Annexes</b>	<b>131</b>
<b>A</b>	<b>Données de la calibration géométrique</b>	<b>131</b>
A.1	Calibration physique . . . . .	131
A.2	Auto-calibration géométrique on-line . . . . .	132
<b>B</b>	<b>Synthèse des calibres proposés</b>	<b>135</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>137</b>



---

# TABLE DES FIGURES

1	Définition des éléments constituant une bouteille . . . . .	22
2	Géométrie du système de radiographie considéré pour la reconstruction de bouteilles en 3D sur des lignes de production . . . . .	23
3	Construction du détecteur virtuel 2D dans la géométrie du système de radiographie équivalent . . . . .	26
4	Intersection d'une bouteille et d'un plan incliné . . . . .	27
5	Paramétrisation des rayons X dans la géométrie à faisceau parallèle 2D . . . . .	27
6	Approximation des parois d'une bouteille dans un plan 2D par des polygones . . . . .	28
7	Illustration d'une itération de la position des nœuds des polygones en fonction des mesures d'épaisseur . . . . .	29
8	Illustration du banc expérimental issue de la conception assistée par ordinateur . . . . .	30
9	Géométrie théorique du banc expérimental . . . . .	31
10	Châssis du banc expérimental . . . . .	32
11	Détecteur linéaire du banc expérimental . . . . .	32
12	Tube à rayons X du banc expérimental . . . . .	33
13	Orientation du tube à rayons X en fonction de l'angle de vue . . . . .	33
14	Axe de translation du banc expérimental . . . . .	34
15	Calibre du banc expérimental . . . . .	34
16	Bouteilles collées sur le chariot du banc expérimental . . . . .	35
17	Prismes du banc expérimental . . . . .	35
18	Tomographe <i>Tiama XLab</i> . . . . .	36
19	Représentation d'un système de radiographie composé d'une source et d'un détecteur plan . . . . .	37
20	Construction du modèle de caméra pinhole : théorème de Thalès . . . . .	37
21	Angles de rotation du détecteur . . . . .	40
22	Paramétrisation des rayons X dans la géométrie linogramme parallèle 2D . . . . .	43
23	Représentation d'un système de radiographie composé d'une source et d'un détecteur linéaire . . . . .	49
24	Interprétation du calibre proposé par Horaud <i>et al.</i> . . . . .	52
25	Illustration de points dans la géométrie projective dont les cross-ratios sont égaux . . . . .	54
26	Illustration d'un système à une source et deux détecteurs linéaires . . . . .	55
27	Géométrie idéale du système de radiographie utilisé dans les simulations numériques pour la conception d'un calibre adapté . . . . .	60
28	Généralisation du calibre de Horaud <i>et al.</i> pour un système à plusieurs détecteurs . . . . .	61
29	Illustration du calibre minimal . . . . .	62

30	Comparaison des calibres à 2 plans parallèles et minimal (2 plans orthogonaux) en utilisant les méthodes de calibration multi-détecteur . . . . .	64
31	Calibre minimal avec une inclinaison plus forte des droites obliques . . . . .	65
32	Comparaison des résultats du calibre minimal avec différentes inclinaisons des droites obliques . . . . .	67
33	Simulations avec l'ajout de droites parallèles au calibre minimal . . . . .	68
34	Optimisation des paramètres d'espacement des droites parallèles . . . . .	69
35	Illustration du calibre adapté . . . . .	70
36	Illustration du calibre utilisé dans les expériences . . . . .	72
37	Estimation du point source avec la méthode de Horaud <i>et al.</i> et le calibre adapté en simulation . . . . .	73
38	Influence des droites du calibre sur l'estimation des paramètres de la position du point source . . . . .	73
39	Simulations en retirant partiellement les données d'une droite parallèle du calibre adapté avec la méthode de Horaud <i>et al.</i> . . . . .	74
40	Simulations en retirant partiellement les données d'une droite parallèle du calibre adapté avec la méthode $M_4$ . . . . .	75
41	Comparaison des méthodes de calibration proposées avec le calibre adapté . . . . .	76
42	Précision de l'estimation des paramètres de calibration en fonction de l'angle de vue . . . . .	77
43	Projection du calibre adapté obtenue avec le banc expérimental . . . . .	78
44	Débruitage d'une radiographie du calibre adapté . . . . .	78
45	Segmentation d'une radiographie du calibre adapté . . . . .	79
46	Méthode utilisée pour le réglage de la hauteur de la source sur le banc expérimental . . . . .	81
47	Mesure de précision relative sur la position de la source . . . . .	82
48	Fonctionnement et rayonnement d'un tube à rayons X . . . . .	86
49	Contribution des différents interactions photons-atomes à l'atténuation des rayons X dans le verre sodocalcique . . . . .	87
50	Atténuation des rayons X dans les verres borosilicate <i>Pyrex</i> et sodocalcique . . . . .	89
51	Exemple de radiographies obtenues avec le banc de test . . . . .	90
52	Épaisseurs de verre traversées par les rayons X dans les prismes . . . . .	91
53	Épaisseur de verre traversée sur l'ensemble des bouteilles à un angle de vue de $-5^\circ$ . . . . .	91
54	Lien épaisseur traversée - intensité des rayons X mesurée pour les prismes . . . . .	92
55	Exemple de courbe épaisseur-intensité en fonction du seuil de filtrage . . . . .	93
56	Exemple de filtrage d'une radiographie en fonction du seuil . . . . .	94
57	Lien épaisseur traversée - intensité des rayons X mesurée pour les bouteilles . . . . .	95
58	Comparaison entre les résultats obtenus avec les prismes et les bouteilles . . . . .	96
59	Épaisseur maximale de verre traversée par les rayons X pour chaque prisme en fonction de l'angle de vue . . . . .	97
60	Représentation de plans 2D illustrant la subdivision du problème d'auto-calibration 3D en plusieurs problèmes 2D . . . . .	100
61	Représentation d'un système de radiographie dans un plan 2D . . . . .	102
62	Représentation du système de radiographie équivalent . . . . .	102
63	Représentation du linogramme parallèle 2D . . . . .	103
64	Calcul des moments d'ordre 0, 1, 2, 3 d'un objet en translation . . . . .	107
65	Lien géométrique entre le centre de masse de l'objet et la position de la source . . . . .	109
66	Variations de vitesse d'un convoyeur . . . . .	110

---

67	Estimation des variations de vitesse d'un objet en translation avec un modèle polynomiale et différence avec la théorie . . . . .	113
68	Influence de $v_0$ sur l'estimation des variations de vitesse avec un polynôme . . . . .	114
69	Comparaison de l'estimation de la position de la source en fonction de la valeur de $v_0$ . . . . .	115
70	Approximation des données de vitesse du convoyeur avec une fonction cosinus . . . . .	121
71	Estimation des variations de vitesse des données issues du convoyeur avec des projections simulées sans ajout de bruit . . . . .	122
72	Vitesse du chariot en fonction de sa position pour différentes consignes . . . . .	124
73	Reproduction de la séquence de variation de vitesse pour l'acquisition de radiographie sur plusieurs angles de vue . . . . .	124
74	Calcul des moments d'ordre 0 avec des données expérimentales pour plusieurs consignes de vitesse . . . . .	126



---

# LISTE DES TABLEAUX

1	Comparaison du calibre adapté avec les calibres minimal et à 2 plans parallèles	70
2	Centres de masse des projections des barres du calibre de la Fig. 43 et reprojection du calibre après calibration	79
3	Estimations des paramètres de calibration obtenues à partir des données de la table 2	80
4	Exemple de composition des verres sodocalcique et borosilicate <i>Pyrex</i>	88
5	Coefficients des lois Beer-Lambert, 2 et 3 bins pour les données de la Fig. 54a.	93
6	Coefficients des lois Beer-Lambert et 2 bins pour les données de la Fig. 57.	95
7	Définition de l'objet en translation pour les simulations	107
8	Estimation de la vitesse moyenne de translation en fonction d'une coordonnée du centre de masse de l'objet	110
9	Estimation des variations de vitesse d'un objet en translation avec un modèle polynomiale	113
10	Estimation des paramètres d'une fonction périodique à partir du moment d'ordre 0	118
11	Estimation des paramètres d'une fonction périodique avec des moments d'ordre $n \geq 0$	118
12	Estimation des paramètres d'une fonction périodique à partir de la combinaison de plusieurs moments.	119
13	Valeurs estimées des paramètres de la fonction approximant les données issues du convoyeur	120
14	Estimation des variations de vitesse des données issues du convoyeur avec le modèle sinusoïdale et des projections simulées	122
15	Fréquence d'acquisition exprimée en Hz en fonction de l'angle de vue et de la vitesse de translation du chariot	123
16	Valeurs des paramètres géométriques utilisées pour la calibration physique	132
17	Valeurs des paramètres géométriques utilisées pour l'auto-calibration géométrique on-line	133
18	Synthèse des calibres proposés dans la section 2.6	135



---

---

# CHAPITRE 1

---

## INTRODUCTION

### 1.1 Problème industriel

Dans ce manuscrit, nous nous intéressons à l'étalonnage (ou la calibration) géométrique et physique d'un système de radiographie industrielle. Nous commençons par introduire le contexte des travaux effectués. Dans la section 1.1.1, nous définissons des termes et concepts liés à l'industrie verrière ainsi qu'au contrôle non-destructif. Dans la section 1.1.2, nous introduisons l'algorithme utilisé pour faire des reconstructions 3D de bouteilles en verre. Dans la section 1.1.3, nous présentons l'intérêt d'étalonner le système d'acquisition.

#### 1.1.1 Mesure dimensionnelle

Les mesures dimensionnelles de bouteilles constituent une information utile pour les verriers afin de contrôler leur production. Elles consistent en la mesure de l'épaisseur des parois, de la hauteur, du diamètre et de l'inclinaison des bouteilles. Ces mesures sont réalisées sur les chaînes de production où les bouteilles peuvent se déplacer à près de 1m/s (contrôle de 600 bouteilles par minute). Certaines de ces mesures sont déjà réalisées à partir de systèmes optiques en faisant tourner les bouteilles sur elle-mêmes. Cependant, la mise en rotation des bouteilles ne permet pas de tenir des cadences de 600 bouteilles par minute. Le système de radiographie étudié dans cette thèse a pour objectif de réaliser toutes les mesures dimensionnelles à des fréquences élevées et sans mettre en rotation les bouteilles.

##### 1.1.1.1 Bouteilles en verre

Nous nous intéressons uniquement aux bouteilles en verre. Les informations présentées dans ce paragraphe sont issues du livre de J. E. Shelby [3].

Lors de la fabrication de bouteilles, la formation du verre repose sur le refroidissement d'un liquide en fusion majoritairement composé de silicium. En pratique, le refroidissement se passe en plusieurs étapes. Une goutte de verre en fusion sort du four et est dirigée vers des moules. La goutte est alors soufflée en une ou plusieurs étapes dans des moules pour lui donner la forme d'une bouteille. Elle passe ensuite par une arche de recuisson où la température augmente et diminue successivement jusqu'à obtenir la stabilité du verre. Le liquide refroidit dès sa sortie du four.

La forme de la bouteille dépend du moule. Elle peut contenir des motifs et inscriptions. Sa masse dépend de la masse de la goutte de verre. D'autres aspects comme la transparence et la couleur de la bouteille peuvent être modifiés en ajoutant des composants mineurs au

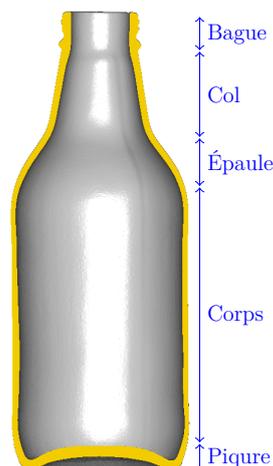


FIGURE 1 – Intérieur d'une bouteille de *Kronenbourg* reconstruite avec le tomographe *Tiama XLab*. La bouteille est constituée d'une bague, d'un col, d'une épaule, d'un corps et d'une pique sous la forme d'un seul bloc homogène.

liquide en fusion. Par exemple, l'ajout d'atomes de carbone permet d'obtenir des bouteilles de couleur marron (ou ambre). Ces éléments affectent la transparence de la bouteille, et donc ses propriétés optiques. Les bouteilles ont généralement des constructions similaires. Nous donnons l'exemple d'une bouteille de marque *Kronenbourg* dans la Fig. 1. De haut en bas, on observe la bague, le col, l'épaule, le corps et la pique.

### 1.1.1.2 Contrôle non-destructif

La mesure dimensionnelle de bouteilles sur des lignes de production peut être effectuée à partir de méthodes de contrôle non-destructif. Elles permettent de réaliser des mesures qualitatives ou quantitatives sans altérer l'objet étudié. Différentes méthodes de contrôle non-destructif existent [4] : inspection visuelle, microscopie, radiographie, ultrasons, magnétoscopie, émission acoustique, etc. Ces méthodes sont souvent adaptées à des contrôles spécifiques à certains objets/matériaux, mais aussi à différents contrôles pour un même objet. Par exemple, l'inspection visuelle permet de contrôler des surfaces. La radiographie permet de contrôler l'intérieur d'un objet. Parmi celles-ci, les méthodes de vision par ordinateur (inspection visuelle) et de tomographie à rayons X (radiographie) peuvent être utilisées pour effectuer des reconstructions 3D de bouteilles en verre [5] ou plus généralement pour des mesures dimensionnelles en métrologie [6]. D'autres méthodes existent comme la mesure capacitive ou par ultrason. Cependant, ces méthodes nécessitent un contact avec l'objet mesuré. Des méthodes optiques comme la mesure confocale chromatique ou la triangulation laser peuvent être aussi utilisées pour réaliser des mesures locales d'épaisseur [7].

**Vision par ordinateur** Les méthodes de vision par ordinateur permettent uniquement de reconstruire les surfaces externes de scènes ou objets en 3-dimensions [8][9]. Par ailleurs, elles ne sont pas applicables pour la reconstruction d'objet spéculaire (réfléchissant la lumière) [5]. C'est l'une des caractéristiques des bouteilles en verre transparent. Il existe des méthodes de mesure locale d'épaisseur pour des bouteilles en verre transparent utilisant la polarisation de la lumière [7]. Pour des verres opaques, les méthodes de vision par ordinateur classiques peuvent éventuellement être utilisées pour reconstruire la paroi externe des bouteilles. Ces reconstructions sont néanmoins insuffisantes pour les mesures de l'épaisseur des parois d'une bouteille. En effet, il est nécessaire de reconstruire la paroi interne et externe de la bouteille pour faire ces mesures.

**Tomographie à rayons X** La tomographie à rayons X permet d'effectuer des reconstructions d'objets en 3-dimensions à partir de radiographies. Les mesures dimensionnelles sont alors effectuées sur l'objet reconstruit. C'est la seule méthode de contrôle non-destructif permettant de faire l'ensemble de ces mesures. Villarraga-Gomez *et al.* [6] décrivent les divers aspects de la mesure dimensionnelle en métrologie à partir de méthodes de tomographie à rayons X. Elles sont utilisées dans diverses industries telles que l'automobile, l'aéronautique, le médical. Ils discutent de divers problèmes intrinsèques à la tomographie à rayons X en la comparant à des méthodes mécaniques basées sur l'utilisation de machine de mesure tridimensionnelle (ou "coordinate measuring machine" (CMM)). Les méthodes de tomographie à rayons X peuvent obtenir des résultats comparables aux CMM dans des conditions idéales de mesure (5 à  $20\mu\text{m}$ ). Les mesures obtenues avec des CMM sont généralement utilisées comme référence pour évaluer les reconstructions obtenues par les méthodes de tomographie. De nombreux phénomènes expliquent les moins bons résultats obtenus avec des méthodes de tomographie à rayons X :

- **source à rayons X** : durcissement de faisceau dû à un spectre d'émission polychromatique, diffusion de rayons X, source non-ponctuelle, etc.
- **détecteur** : bruit, rémanence, aliasing, etc.
- **système de radiographie** : stabilité mécanique, position de la source, du détecteur et/ou de l'objet.

Ce sont des phénomènes bien connus qui peuvent être atténués ou corrigés par la calibration géométrique, la prise en compte des phénomènes physiques dans les modélisations, des réglages adaptés du système d'acquisition relatifs à l'objet à reconstruire, etc.

### 1.1.2 Reconstruction 3D de bouteilles

Nous considérons que les bouteilles défilent sur un convoyeur de manière rectiligne. L'algorithme utilisé pour les reconstructions est basé sur une géométrie où une ou plusieurs sources à rayons X sont placées d'un côté du convoyeur et plusieurs détecteurs linéiques sont

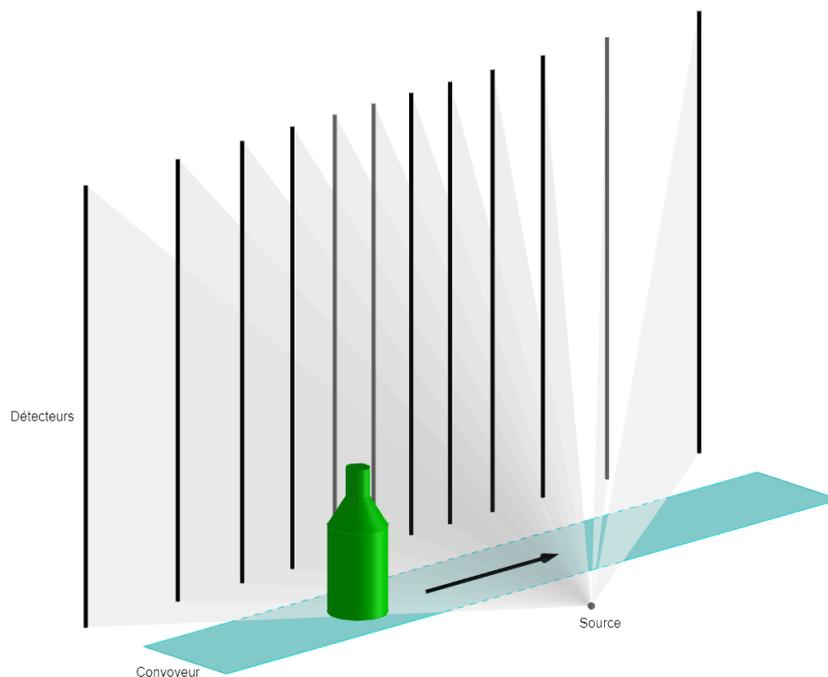


FIGURE 2 – Géométrie du système de radiographie considéré pour la reconstruction de bouteilles en 3D sur des lignes de production.

placés de l'autre côté. Tous ces éléments sont statiques. Dans le cas d'un système à plusieurs sources, celles-ci doivent être alignées sur une droite parallèle à la translation des bouteilles. Un exemple de système d'acquisition à 1 source et 12 détecteurs est illustré dans la Fig. 2. Cette géométrie limite le nombre d'angles de vue et de radiographies des bouteilles en translation. Dans cette section, nous commençons par introduire quelques notions relatives aux géométries de tomosynthèse (angles de vue limités) et aux algorithmes de reconstruction liés à ces géométries avant d'introduire l'algorithme utilisé pour la reconstruction de bouteilles en verre.

### 1.1.2.1 Tomosynthèse

La tomosynthèse est un domaine de la tomographie qui s'intéresse à la reconstruction d'objets à partir de systèmes de radiographie dans lesquelles la source à rayons X se déplace suivant une droite, ou dans des systèmes plus récents, suivant un arc de cercle. Les acquisitions sont donc à angles de vue limités : les projections de l'objet (ici la bouteille) suivant un relativement large débattement angulaire ne sont pas mesurées. Elle se classe dans la catégorie des problèmes inverses. Une revue de littérature des méthodes de reconstruction en tomosynthèse et des problèmes intrinsèques à ces géométries est proposée dans la thèse de Y. Levakhina [10]. Dans ce paragraphe, nous synthétisons les éléments de cette revue permettant d'introduire l'algorithme utilisé pour la reconstruction de bouteilles en verre.

**Problème** Le problème de tomosynthèse est identique au problème de tomographie. Seule la quantité de données disponibles est différente. Les données sont modélisées par la loi de Beer-Lambert [11]. La fonction de densité de l'objet mesuré est définie par  $\mu$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  ( $n = 2$  lorsque le problème de reconstruction est en 2-dimensions (2D) ou  $n = 3$  en 3-dimensions (3D)). Soient  $I_0$  l'intensité initiale des rayons X,  $I$  l'intensité des rayons X mesurée sur le détecteur,  $\mathcal{D}$  la droite parcourue par un rayon X. La loi s'écrit :

$$I = I_0 \exp\left(-\int_{\mathcal{D}} \mu(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}\right) \quad (1.1)$$

Par une transformée logarithmique, elle se réécrit sous la forme d'intégrale de droites par :

$$\int_{\mathcal{D}} \mu(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = -\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad (1.2)$$

C'est la forme usuellement utilisée en tomographie pour modéliser les données. En effet, le problème s'écrit en utilisant la transformée de Radon notée  $\mathcal{R}$ . Soient  $\boldsymbol{\theta} \in S^{n-1}$  un vecteur directeur, où  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$  est la sphère de dimension  $n - 1$ , et  $s \in \mathbb{R}$ . La transformée en rayons X de dimension  $n$  est définie par :

$$\mathcal{R}\mu(\boldsymbol{\theta}, s) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\boldsymbol{\theta}^\perp} \mu(\mathbf{x} + s\boldsymbol{\theta}) \, d\mathbf{x} \quad (1.3)$$

Pour  $n = 2$ , l'ensemble  $\mathbf{x} + s\boldsymbol{\theta}$ , avec  $\mathbf{x} \in \boldsymbol{\theta}^\perp$ , est une droite (comme dans l'équation (1.1)). Le problème de reconstruction se résout en déterminant  $\mu$  dans son support compact  $\Omega$  (ou un sous-ensemble du support si on considère uniquement une zone d'intérêt dans l'objet) à partir des mesures  $\mathcal{R}\mu$  sur un ensemble de directions  $\boldsymbol{\theta} \in S^1$  et l'ensemble des  $s \in \mathbb{R}$ .

**Limitations** La géométrie de tomosynthèse ne permet pas de mesurer  $\mathcal{R}\mu$  pour toutes les droites du plan (l'ensemble des droites  $\mathcal{D}$  possibles pour une trajectoire de source finie, pour un détecteur de taille finie, est limité). En particulier, des angles de projection sont manquants sur des secteurs angulaires. Le problème de tomographie à angles de vue limités

possède une solution mais elle est instable. De plus, la géométrie de tomosynthèse ne respecte pas les conditions de Tuy-Smith [12][13]. C'est une condition suffisante assurant la possibilité d'obtenir une reconstruction exacte et stable. Lorsque cette condition n'est pas respectée, il est possible de mesurer l'incomplétude des données [14][15]. Cette incomplétude se traduit par l'apparition d'artefacts lors de la reconstruction. Par exemple, il n'est pas possible de reconstruire les bords d'un objet s'il n'y a pas de rayons X tangents à ceux-ci. C'est le cas dans la géométrie de tomosynthèse où des erreurs fortes de reconstruction peuvent être observées sur les bords de l'objet se trouvant proches de l'axe de translation.

### 1.1.2.2 Algorithme de reconstruction

Plusieurs algorithmes permettent de faire des reconstructions avec une géométrie de tomosynthèse. Dans la littérature, les algorithmes de rétro-projection filtrée et itératifs (algébrique ou statistique) sont mentionnés [10]. Dans le cas de la reconstruction d'objets mono-matériaux (comme le verre), nous pouvons introduire cette information a priori très forte dans la modélisation du problème. Cela permet de transformer le problème (1.2) en un problème géométrique (et non plus analytique). En effet, la fonction  $\mu$  est constante sur son support  $\Omega = \text{supp}(\mu)$  :

$$\mu(\mathbf{x}) = \mu_0 \delta_\Omega(\mathbf{x}) \quad (1.4)$$

où  $\mu_0 > 0$  est une constante positive et  $\delta_\Omega(\cdot)$  est la fonction indicatrice définie par :

$$\delta_\Omega(\mathbf{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.5)$$

L'équation (1.2) devient alors :

$$\mu_0 \int_{\mathcal{D}} \delta_\Omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad (1.6)$$

Supposons que  $\mu_0$  est connu. La reconstruction s'effectue en déterminant le support de  $\mu$  à partir de l'équation précédente. Un algorithme itératif a été spécifiquement développé pour la reconstruction de bouteilles en verre [16]. Nous proposons d'expliquer son fonctionnement en nous basant sur des notes de N. Szafran [17].

**Détecteur virtuel** Nous commençons par présenter les méthodes d'acquisition et d'utilisation des radiographies linéaires. Ces méthodes sont nécessaires pour l'utilisation de l'algorithme implémenté par B. Cance (non publique). Cet algorithme de reconstruction est construit à partir d'un système équivalent à celui de la Fig. 2. De plus, l'implémentation de l'algorithme utilise des radiographies 2D issues d'un détecteur virtuel se trouvant sur l'axe de translation de l'objet. Elles sont construites à partir des radiographies 1D acquises par les détecteurs linéaires. Les radiographies 2D présentées dans cette thèse sont toutes générées de cette manière.

Le système de radiographie est composé d'une ou plusieurs sources à rayons X et de plusieurs détecteurs linéaires. Ces éléments sont statiques. Un objet est en translation entre les sources et les détecteurs. De manière équivalente, si les sources sont sur une droite parallèle à celle des détecteurs, ce système peut être représenté par une géométrie où l'objet est statique et une source ainsi que les détecteurs sont en translation. La translation de la source et des détecteurs dans le système équivalent est identique à celle de l'objet mais elle se fait dans la direction opposée.

Pour une translation parfaite, les données de plusieurs radiographies linéaires acquises à partir d'un détecteur en translation peuvent être représentées par un détecteur virtuel 2D. Il

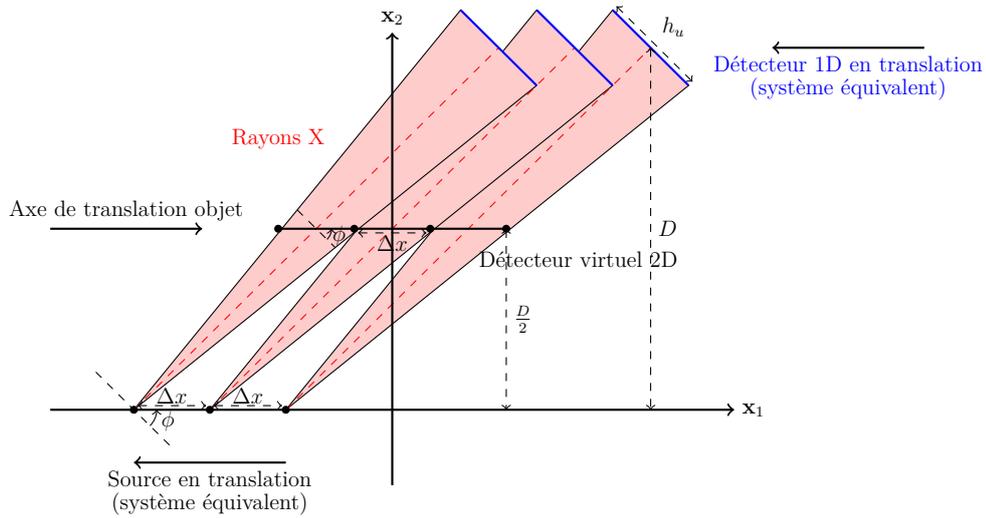


FIGURE 3 – Construction du détecteur virtuel 2D dans la géométrie du système de radiographie équivalent. Une seule ligne du détecteur virtuel est représentée dans un plan 2D passant par la droite de translation de la source et un même pixel du détecteur en translation. Le détecteur virtuel se trouve sur l’axe de translation de l’objet que nous supposons à mi-distance de la source et des détecteurs.

est situé sur l’axe de translation de l’objet que nous supposons à mi-distance entre la source et les détecteurs. La construction du détecteur virtuel est illustrée dans la Fig. 3 pour un plan 2D passant par la droite de translation de la source et une ligne du détecteur virtuel (ou d’un même pixel du détecteur à plusieurs positions). Pour un pixel de largeur  $h_u$ , la source et le détecteur doivent se déplacer d’une distance  $\Delta_x$  pour assurer que l’information mesurée par le détecteur ne se superpose pas (représentée par les zones rouges) et qu’il n’y a pas de perte d’information. La distance de déplacement se calcule pour un angle de projection  $\phi$  (voir Fig. 5) et un détecteur virtuel positionné à mi-distance entre la source et les détecteurs avec la formule suivante pour  $\phi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  :

$$\Delta_x \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{h_u}{2 \cos \phi} \quad (1.7)$$

Ainsi, la largeur des pixels du détecteur virtuel est différente de celle des détecteurs linéaires. De même, la hauteur des pixels du détecteur virtuel dépend de la hauteur des pixels  $h_v$  des détecteurs linéaires ainsi que des distances source-objet et objet-détecteur (ou du grandissement). En pratique, la distance source-détecteur est suffisamment élevée par rapport à la taille des pixels pour considérer que la trajectoire des rayons X est une droite. Ainsi, tous les rayons sont parallèles dans le plan 2D considéré pour un angle  $\phi$  fixé (traits rouges en pointillés dans la Fig. 3). Dans la géométrie de la Fig. 2, seul l’objet est en translation. La fréquence d’acquisition des détecteurs doit être ajustée pour réaliser une acquisition dès lors que l’objet a parcouru une distance  $\Delta_x$ . Cette fréquence dépend de la vitesse de translation de l’objet, de l’angle de vue du détecteur et de la position de l’axe de translation de l’objet par rapport à la source et au détecteur.

**Formulation du problème** Le problème de reconstruction 3D est résolu sous la forme d’une série de problèmes 2D. La reconstruction est alors effectuée indépendamment dans plusieurs plans 2D. Ces plans contiennent l’axe de translation de la source et une ligne de pixels du détecteur virtuel. Plusieurs hypothèses peuvent être effectuées sur les bouteilles en verre pour simplifier le problème de reconstruction :

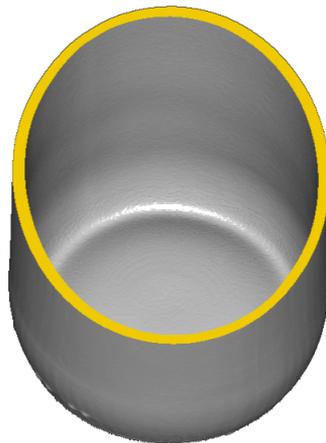


FIGURE 4 – Intersection d'une bouteille *Kronenbourg* et d'un plan incliné. La forme des parois extérieures et intérieures s'apparente à des ellipses.

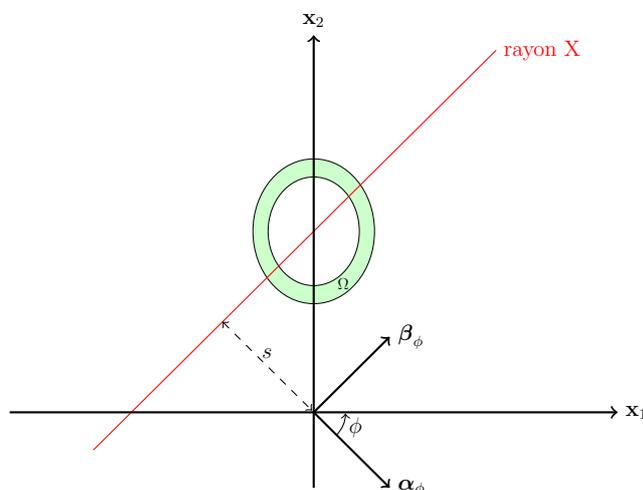


FIGURE 5 – Paramétrisation des rayons X dans la géométrie à faisceau parallèle 2D.

- La composition du verre est homogène dans toute la bouteille. C'est-à-dire que le coefficient d'absorption des rayons X est constant pour un faisceau d'énergie donnée.
- L'intersection de la bouteille et d'un plan 2D correspond à une surface dont les parois internes et externes s'apparentent à des cercles ou des ellipses concentriques (hors cas particuliers : piqures, bagues, épaulés trop prononcés, etc). Un exemple est donné dans la Fig. 4.

L'intersection d'un plan 2D horizontal et du corps d'une bouteille est représentée dans la Fig. 5 pour le cas d'une bouteille dont le corps est un cylindre creux "parfait". On note  $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sa fonction de densité à support compact (noté  $\Omega$ ). L'absorption des rayons X dans  $\mu$  est modélisée par la loi de Beer-Lambert adaptée à la géométrie à faisceau parallèle 2D. On définit les vecteurs  $\alpha_\phi = [\cos \phi, \sin \phi]^T$  et  $\beta_\phi = [-\sin \phi, \cos \phi]^T$  tels que la projection  $p(\phi, s)$  (écrite sous la forme de l'équation (1.2)) soit définie, pour  $s \in \mathbb{R}$  et  $\phi \in [0, 2\pi[$ , par :

$$p(\phi, s) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mu(s\alpha_\phi + l\beta_\phi) dl = -\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad (1.8)$$

En pratique, le nombre d'acquisitions est limité (le paramètre  $s$  évolue par pas). Les angles de vue sont aussi restreints :  $\phi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . On note  $n_d$  le nombre d'angles de vue tel que  $\phi = \{\phi_1, \dots, \phi_{n_d}\}$ .

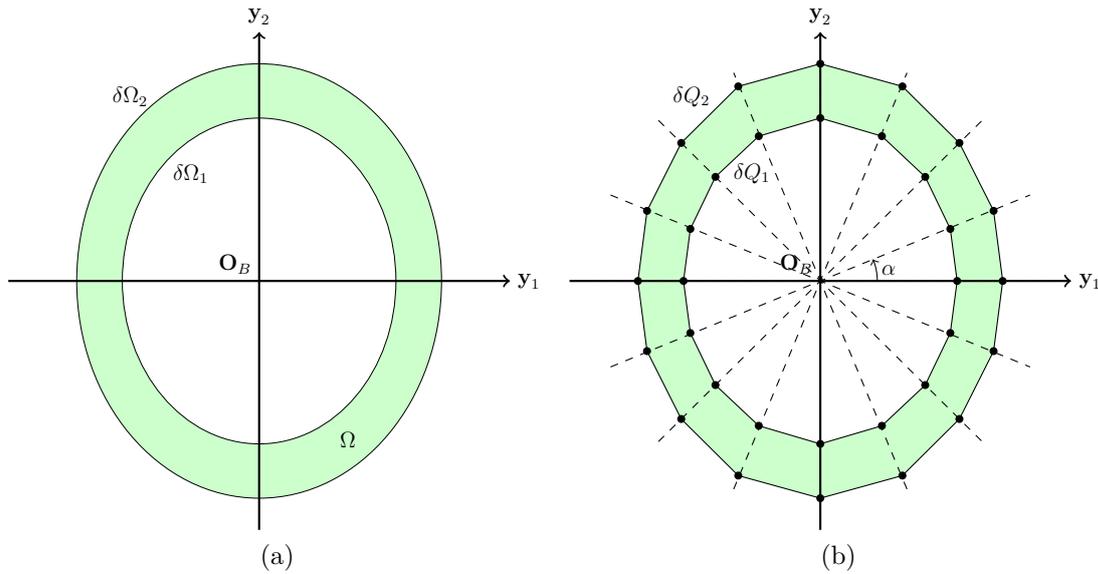


FIGURE 6 – Reconstruction d’une bouteille dans un plan 2D (cas général). (a) Parois interne  $\delta\Omega_1$  et externe  $\delta\Omega_2$  de l’objet à reconstruire. (b) Approximation des parois par les polygones  $\delta Q_1$  et  $\delta Q_2$ .

L’approche utilisée par l’algorithme de reconstruction consiste à faire converger deux polygones  $\delta Q_1$  et  $\delta Q_2$  vers les parois interne  $\delta\Omega_1$  et externe  $\delta\Omega_2$  de la bouteille à partir des données mesurées par les détecteurs. Ces éléments sont représentés dans la Fig. 6. Les nœuds des polygones sont définis relativement à l’origine  $\mathbf{O}_B$  du repère de la bouteille  $(\mathbf{O}_B, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$  dans le plan 2D à partir de coordonnées polaires  $(\alpha, r_i(\alpha))$  avec  $\alpha \in [0, 2\pi[$  et  $r_i(\alpha) \in \mathbb{R}_+$  pour  $i = 1, 2$ . Ainsi, pour un nombre  $N_S$  de nœuds d’un polygone, les polygones sont définis dans le repère de la bouteille pour  $j = 1, \dots, N_S$  par :

$$\delta Q_i \stackrel{\text{déf}}{=} \left[ \begin{array}{c} r_i(\alpha_j) \cos \alpha_j \\ r_i(\alpha_j) \sin \alpha_j \end{array} \right]_j \quad (1.9)$$

L’algorithme ajuste la position des nœuds en faisant varier les valeurs des coordonnées radiales  $r_i(\alpha_j)$ . La position de l’origine  $\mathbf{O}_B$  et les valeurs des angles  $\alpha_j$  sont fixées a priori pour  $j = 1, \dots, N_S$ . Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de dimension  $2N_S$  de l’ensemble  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$  (l’ensemble de tous les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^2$ ). Le problème de reconstruction dans un plan 2D s’écrit :

$$\min_{Q \in E} J(Q) \quad (1.10)$$

Le critère à minimiser dépend des projections  $p_\Omega(\phi_k, s)$  mesurées par les détecteurs de l’objet  $\mu$  (dont le support est  $\Omega$ ) et des projections  $p_Q(\phi_k, s)$  relatives à l’approximation  $Q$  du support de l’objet  $\Omega$  décrite par les polygones  $\delta Q_1$  et  $\delta Q_2$ ,  $k = 1, \dots, n_d$ . Il est régularisé par un terme  $R_\alpha(\phi)$  pondéré par le coefficient  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Il s’écrit :

$$J(Q) = \sum_{k=1}^{n_d} \int_{\mathbb{R}} (p_Q(\phi_k, s) - p_\Omega(\phi_k, s))^2 ds + \lambda R_\alpha(\phi) \quad (1.11)$$

**Résolution** En pratique, nous ne connaissons pas les projections  $p_Q(\phi, s)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . L’algorithme utilise les épaisseurs de verre traversées par les rayons X à la place des projections. L’épaisseur de verre traversée correspond à la somme des épaisseurs des parois traversées par un rayon X. Ainsi, on définit les fonctions d’épaisseur  $e_Q(\phi, s)$  et  $e_\Omega(\phi, s)$ . Pour

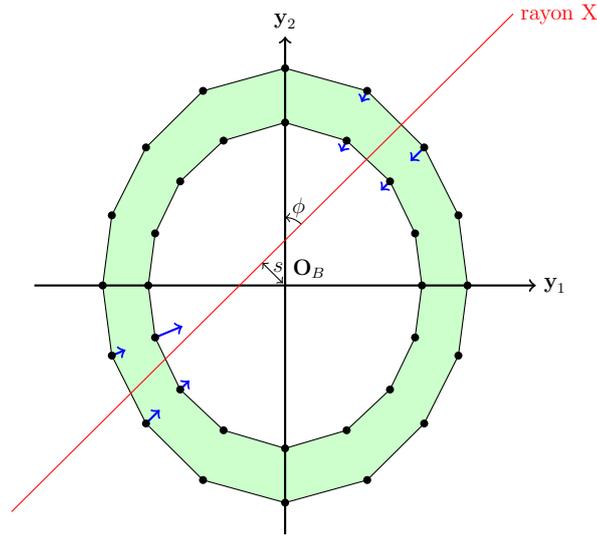


FIGURE 7 – Illustration d’une itération de la position des nœuds des polygones en fonction des mesures d’épaisseur. L’épaisseur  $e_{\Omega}(\phi, s)$  est déterminée à partir des projections. L’épaisseur  $e_Q(\phi, s)$  est calculée à chaque itération en fonction de la position des sommets des polygones.

un faisceau d’énergie constante  $E$ , l’épaisseur  $e_{\Omega}(\phi, s)$  est obtenue à partir des données en utilisant la loi de Beer-Lambert avec un coefficient d’absorption constant  $\mu_E$  (à déterminer) :

$$p_{\Omega}(\phi, s) = \mu_E e_{\Omega}(\phi, s) \quad (1.12)$$

L’épaisseur  $e_Q(\phi, s)$  se calcule directement sur le maillage 2D formé par les polygones  $\delta Q_1$  et  $\delta Q_2$ . Ainsi, le critère à minimiser s’écrit :

$$J(Q) = \sum_{k=1}^{n_d} \int_{\mathbb{R}} \mu_E^2 (e_Q(\phi_k, s) - e_{\Omega}(\phi_k, s))^2 ds + \lambda R_{\alpha}(\phi) \quad (1.13)$$

Le problème (1.10) se résout en utilisant l’algorithme du gradient conjugué [18]. Il est initialisé à partir d’un maillage de référence. Lors d’une itération, les nœuds des polygones sont ajustés pour s’adapter aux données. Les épaisseurs  $e_Q(\phi, s)$  sont calculées à chaque itération à partir du maillage déterminé à l’itération précédente. Un exemple d’itération est illustré dans la Fig. 7 pour une seule projection.

### 1.1.3 Calibration

Dans la section précédente, la géométrie d’acquisition et la translation de l’objet sont supposées idéales et parfaites. De même, le faisceau de rayons X émis par la source est supposé mono-chromatique. C’est difficilement réalisable en pratique. Nous avons cité plusieurs de ces phénomènes comme étant des sources d’erreurs dans la section 1.1.1. Par conséquent, dans cette thèse, nous proposons plusieurs méthodes de calibration permettant de modéliser, d’estimer, de corriger certains phénomènes physiques et paramètres géométriques pouvant générer des artefacts dans les reconstructions si ils ne sont pas spécifiés ou pris en compte.

Dans la suite du chapitre 1, la section 1.2 est dédiée à la présentation du banc expérimental utilisé dans les chapitres 2, 3, 4. La section 1.3 est dédiée à l’introduction de résultats théoriques utilisés dans les chapitres 2 et 4. La section 1.4 présente l’organisation du manuscrit.

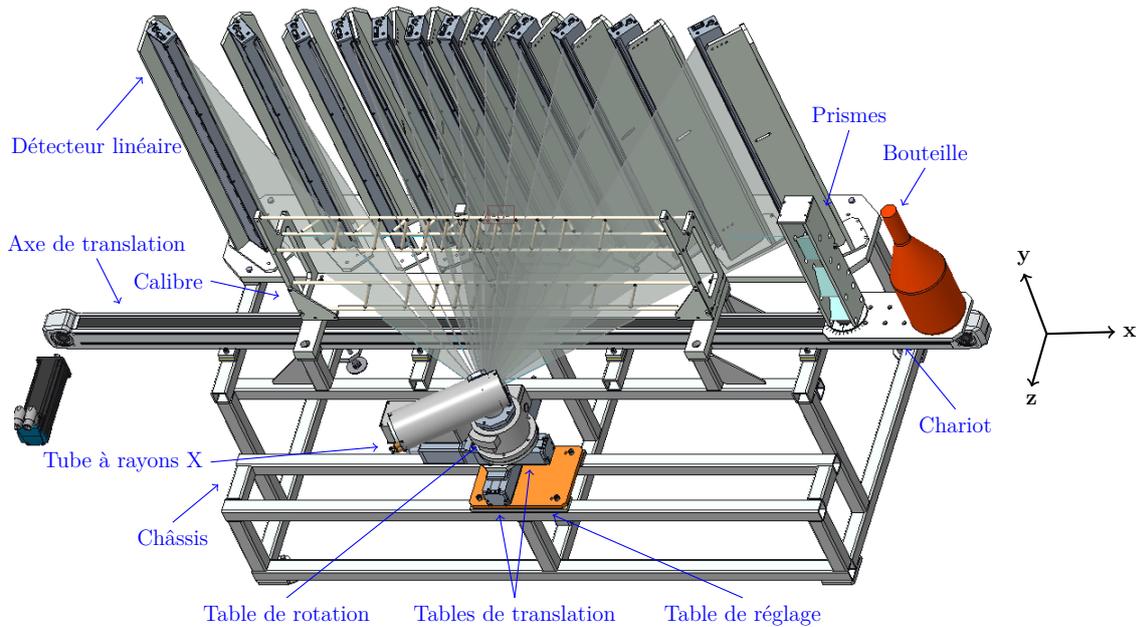


FIGURE 8 – Illustration du banc expérimental issue de la conception assistée par ordinateur. Le banc est composé d'un châssis, d'un axe de translation, d'une table de rotation, d'une table de réglage, d'un chariot portant des prismes et bouteilles, d'un détecteur linéaire (12 sur l'illustration), d'un objet géométrique de calibration, de deux tables de translation et d'un tube à rayons X.

## 1.2 Banc expérimental

Dans cette section, nous présentons le banc expérimental que nous avons utilisé pour réaliser nos expériences et mesures dans les chapitres 2, 3 et 4. La géométrie d'acquisition et les contraintes de réalisation sont présentées dans la section 1.2.1. Les différentes composantes du banc expérimental sont présentées dans la section 1.2.2. Dans la suite, les images présentées sont des photographies du banc expérimental ou sont issues de la conception assistée par ordinateur (CAO).

### 1.2.1 Géométrie d'acquisition et contraintes

Nous considérons un système d'acquisition composé d'une source à rayons X et de 12 détecteurs linéaires. Ce système est illustré dans la Fig. 8. Il est composé d'un détecteur linéaire, un chariot portant des prismes et une bouteille, un calibre, un axe de translation, un tube à rayons X, un châssis, une table de rotation, deux tables de translation, une table de réglage.

**Géométrie** Nous notons respectivement  $S$  et  $D_l$  les positions de la source et des détecteurs dans le repère  $(\mathbf{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ ,  $l = 1, \dots, n_d$ . La distance selon l'axe  $\mathbf{z}$  entre la source et les détecteurs est idéalement de 480mm. L'angle de vue des détecteurs est défini par  $\theta_y$ . Les détecteurs sont répartis sur  $110^\circ$  à un angle constant de  $10^\circ$ . Ces éléments sont représentés dans la Fig. 9. Les distances sont toutes données en millimètre. De manière idéale, la source est située à la position  $S = [0, 0, 240]^T$ .

**Contraintes** Contrairement à l'illustration de la Fig. 8, le banc expérimental n'utilise qu'un seul détecteur linéaire. En effet, nous avons utilisé un tube à rayons X permettant

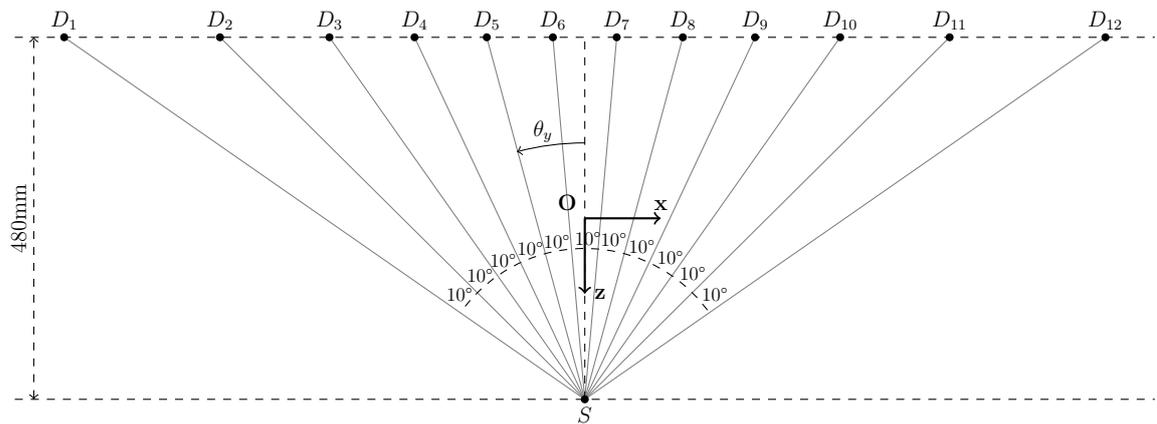


FIGURE 9 – Géométrie théorique du banc expérimental. Ses composantes sont représentées dans le plan  $Y = 0$  du repère orthonormé directe  $(\mathbf{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ . La position de la source est notée  $S$ . La position des détecteurs est notée  $D_l$ ,  $l = 1, \dots, n_d$ . L'angle de vue des détecteurs est défini par  $\theta_y$ .

de générer un faisceau en éventail (ou "fan-beam") *vertical*. Par contre, l'angle d'ouverture *horizontal* est très faible et ne permet pas de couvrir plusieurs détecteurs à la fois. Il n'était alors pas utile d'avoir 12 détecteurs. Lors des acquisitions, le tube a été orienté par une table de rotation pour faire des acquisitions sur les 12 angles de vue. Le détecteur a été déplacé aux différentes positions décrites dans la Fig. 9.

## 1.2.2 Réalisation

Nous présentons en détails les éléments composants le banc expérimental dans cette section. Nous présentons aussi le tomographe *Tiama XLab* utilisé pour générer des reconstructions de référence.

### 1.2.2.1 Châssis

Le châssis a été conçu pour supporter l'ensemble des pièces du banc expérimental. Il est illustré dans la Fig. 10. Les pièces jaunes de la figure ont été usinées pour que les surfaces en contact avec les supports du tube à rayons X, de l'axe linéaire et du détecteur soient parallèles. Les pions de centrage visibles sur la figure permettent de positionner précisément et de façon répétable le calibre. Nous discutons de la répétabilité de son positionnement dans le chapitre 2.

### 1.2.2.2 Détecteur

Le détecteur linéaire *Hamamatsu C14300-804 CXP* utilisé pour les expériences est présenté dans la Fig. 11. Il est composé de 1920 pixels de largeur 0.6mm et de hauteur 0.4mm. Il peut acquérir jusqu'à 12 500 radiographies linéaires par seconde. Le détecteur est supporté par une équerre se positionnant à plusieurs emplacements sur une table de fixation (voir Fig. 8). Cette table est posée sur les surfaces jaunes de la Fig. 10 (les 4 plus longues).

### 1.2.2.3 Tube à rayons X

Le tube à rayons X *Comet MXR-160-HP-11-FB* utilisé lors des expériences est présenté dans la Fig. 12. Il est placé sur une table permettant le réglage de sa hauteur, deux tables de translation *IAI RCP6-SA6C*, une table de rotation *Newport RV120HALT*. Nous appelons

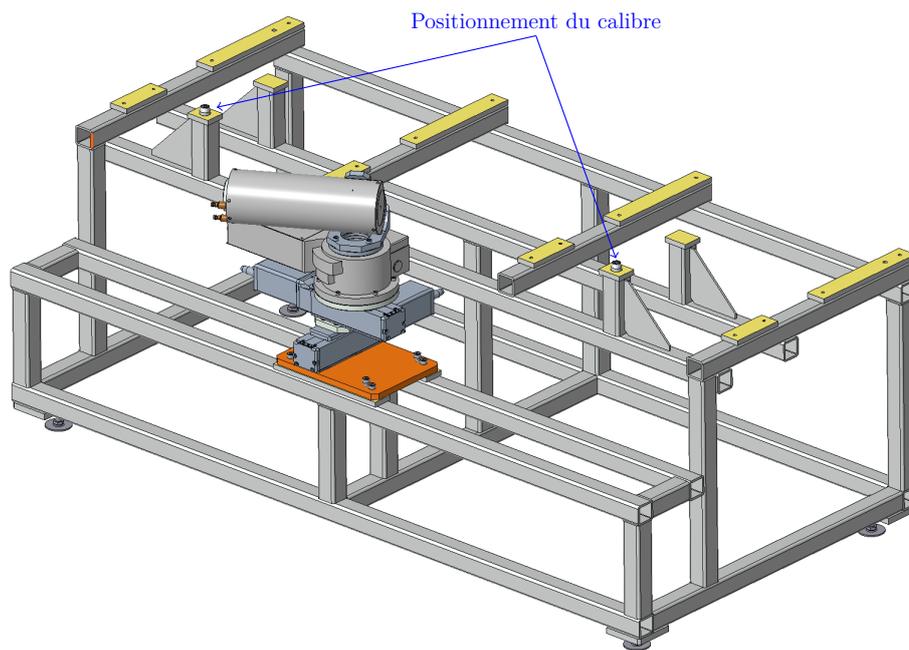


FIGURE 10 – Châssis du banc expérimental. Les surfaces colorées en jaune ont été usinées pour être parallèles (y compris sous la plaque orange).

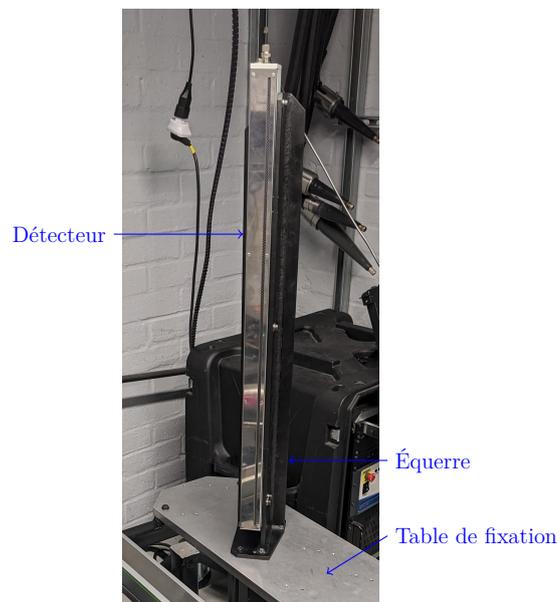


FIGURE 11 – Détecteur linéaire 1D du banc expérimental. Il est composé de 1920 pixels de taille  $0.6 \times 0.4\text{mm}$ . Il est supporté par une équerre. Celle-ci peut être positionnée à plusieurs emplacements sur la table de fixation.

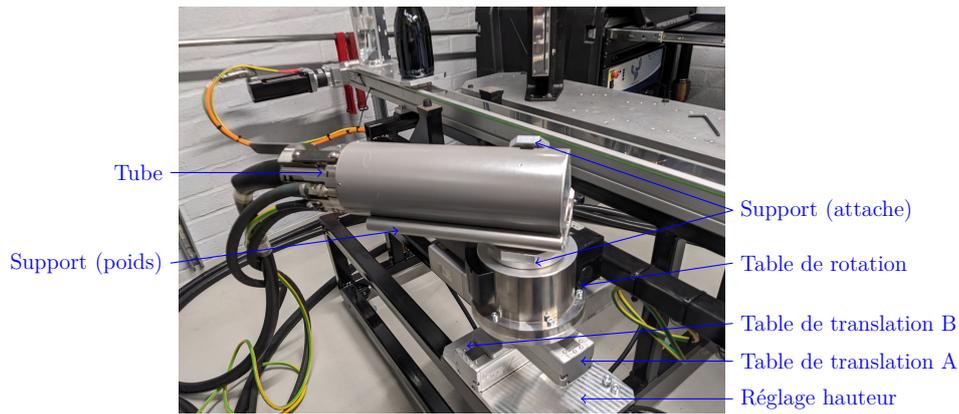


FIGURE 12 – Tube à rayons X du banc expérimental. Il est positionné et orienté par des tables de translation et de rotation. Deux supports sont utilisés pour attacher le tube à la table de rotation et soutenir son poids.

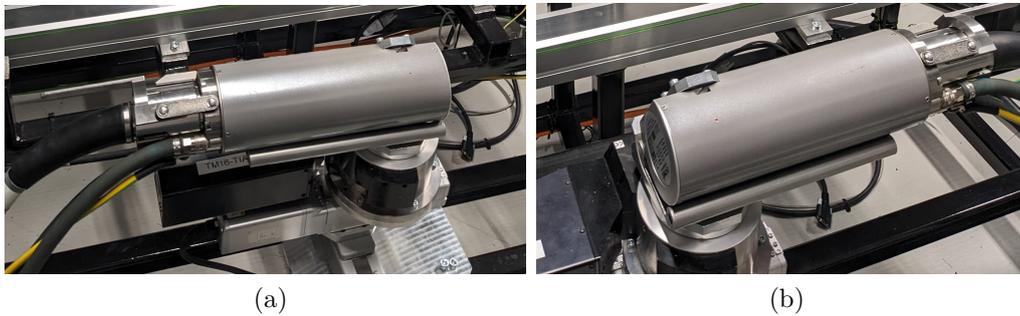


FIGURE 13 – Orientation du tube à rayons X en fonction de l’angle de vue du détecteur : (a) positif ( $D_1$  à  $D_6$ ) (b) négatif ( $D_7$  à  $D_{12}$ ).

table A et B respectivement les tables responsables des translations sur les axes  $x$  et  $z$ . Deux supports sont utilisés pour fixer le tube aux tables de positionnement et supporter son poids. Nous expliquons en détails le fonctionnement d’un tube à rayons X dans le chapitre 3. Ce tube est composé de deux filaments en tungstène permettant d’obtenir des points sources de tailles différentes : carré de côté 0.4mm ou 1mm. Nous utilisons le filament permettant de générer un point source de 1mm dans nos expériences. Pour toutes les expériences réalisées, les paramètres du tube ont été fixés aux valeurs de 160 kV pour la tension du champ électrique entre l’anode et la cathode, et de 3.09 mA pour l’intensité du courant dans le filament.

Les câbles d’alimentation et de refroidissement visibles sur la Fig. 12 sont trop encombrants. Pour certaines orientations, ils bloquent le chariot se déplaçant sur l’axe de translation. Par conséquent, le tube a été retourné pour réaliser les mesures. Deux orientations du tube ont été utilisées pour faire les acquisitions des angles de vue positifs (détecteurs  $D_1$  à  $D_6$ ) puis négatifs (détecteurs  $D_7$  à  $D_{12}$ ). Des images des deux orientations du tube sont présentées dans la Fig. 13. Ce retournement implique un changement de la position du point source. Il est alors nécessaire de la réajuster.

#### 1.2.2.4 Axe de translation

L’axe de translation *HiWin HM60B* utilisé pour mettre en mouvement le chariot est présenté dans la Fig. 14. Il est équipé d’un servo-moteur *Schneider Lexium BSH*. Il possède une course de 2000mm avec une vitesse maximum de 5m/s, une accélération maximum 30m/s<sup>2</sup>. La répétabilité de son positionnement est de  $\pm 50\mu\text{m}$ . Les vitesses utilisées lors de nos expériences

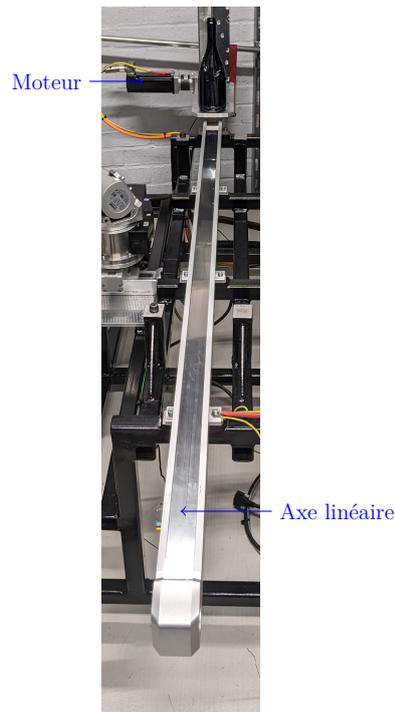


FIGURE 14 – Axe de translation du banc expérimental. Il est équipé d'un servo-moteur.

varient entre 0.1m/s et 1.2m/s.

#### 1.2.2.5 Calibre

Le calibre utilisé pour la calibration géométrique du banc expérimental a été conçu spécifiquement pour la géométrie présentée dans la Fig. 8. Il est illustré dans la Fig. 15. Les détails de sa conception sont donnés dans le chapitre 2. Toutes les barres métalliques ont un diamètre de 8mm. Les longues barres parallèles entre elles sont soutenues par des supports situés aux extrémités et au centre du calibre. Les petites barres obliques sont attachées aux barres parallèles. Deux trous ont été faits dans le support du calibre pour accueillir les pions de centrage présentés dans la Fig. 10.

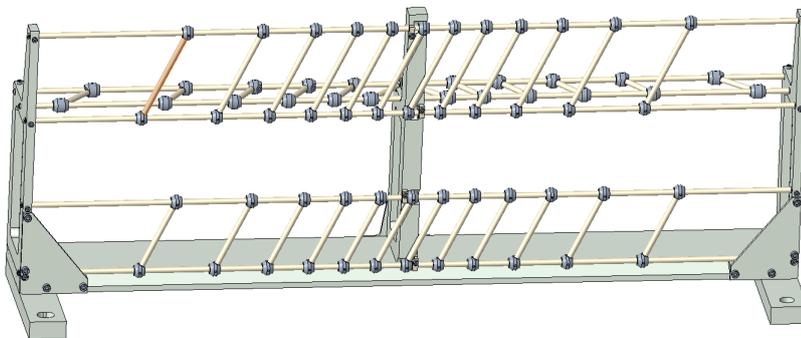


FIGURE 15 – Calibre du banc expérimental. Il est utilisé pour réaliser la calibration géométrique. Les détails de sa conception sont donnés dans le chapitre 2.

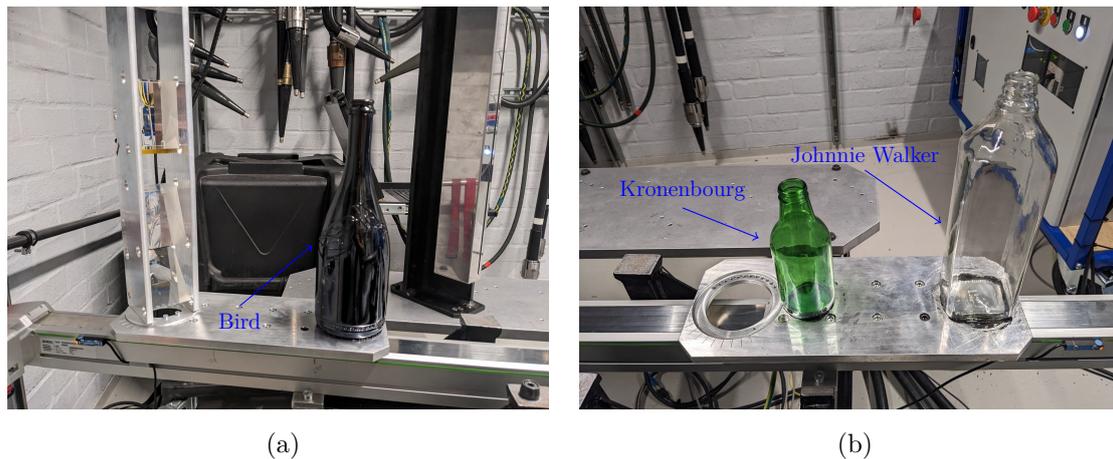


FIGURE 16 – Bouteilles utilisées lors des acquisitions avec le banc expérimental : (a) Bird, (b) *Kronenbourg*, *Johnnie Walker*.

### 1.2.2.6 Bouteilles

Nous avons sélectionné plusieurs bouteilles de différentes tailles, formes, épaisseurs de parois, compositions. Les bouteilles Bird, *Kronenbourg* et *Johnnie Walker* sont présentées dans la Fig. 16. Elles ont été collées successivement au centre du chariot telles que le centre des bouteilles soit à mi-distance entre la source et les détecteurs. Les bouteilles Bird et *Johnnie Walker* ont des gravures permettant de connaître approximativement leur orientation sur le chariot et de les mettre en correspondance avec des modèles reconstruits. La précision du positionnement des bouteilles est estimée à  $\pm 1\text{mm}$  sur l'axe  $z$ .

### 1.2.2.7 Prismes

Les 3 prismes optiques *Thorlabs PS913* sont présentés dans la Fig. 17a. Ce sont des prismes triangulaires à angle droit avec une base carrée de 60mm de côté. Ils sont composés

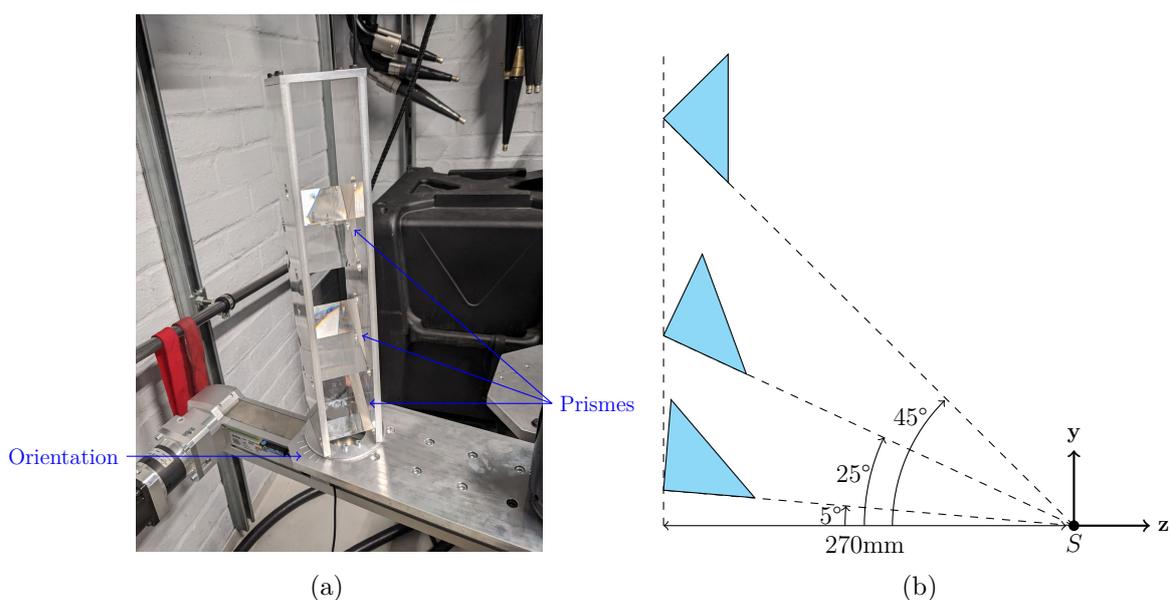


FIGURE 17 – Prismes du banc expérimental. (a) Support des prismes s'orientant manuellement, (b) positions des prismes dans une géométrie idéale pour un angle de vue de  $0^\circ$ .

de verre borosilicate N-BK7. Leur positionnement est illustré dans la Fig. 17b pour un angle de vue de  $0^\circ$  dans une géométrie idéale. L'arrête arrière de la base du prisme se situe théoriquement à 270mm de la position idéale de la source sur l'axe  $\mathbf{z}$ . De plus, la base des prismes est tangente aux rayons pour des angles de  $5^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $45^\circ$  par rapport à l'axe  $\mathbf{z}$ . En pratique, ils sont positionnés dans des encoches d'une tour métallique. Elle s'oriente manuellement avec un pas de  $10^\circ$  pour s'adapter aux positions du détecteur. Les rayons ne sont plus tangents à la base des prismes lorsque  $\theta_y \neq 0$ .

En plus des prismes, la tour contient un "duplex penetrameter" (ISO 19232) permettant de juger de la résolution spatiale des radiographies. Il est visible sur la Fig. 16a sous le prisme le plus haut. Le penetrameter est composé de plusieurs groupes de deux fils parallèles dont les distances les séparant sont de plus en plus faibles. Un indice de flou est obtenu visuellement en déterminant le groupe avec la plus petite distance séparant les fils dont les projections sont distinctes sur les radiographies. Nous ne discutons pas des résultats obtenus avec le penetrameter dans ce manuscrit.

### 1.2.2.8 Tomographe

Le tomographe *Tiama XLab* est présenté dans la Fig. 18. Il permet de faire des reconstructions 3D avec une précision de  $\pm 50\mu\text{m}$  sur toutes les mesures dimensionnelles. Il utilise une géométrie cone-beam avec une rotation complète de l'objet sur lui même (équivalent à une trajectoire circulaire de la source). Nous l'utilisons pour générer des reconstructions de référence dans le chapitre 3. Ces reconstructions sont aussi utilisées pour initialiser l'algorithme de reconstruction (voir 1.1.2).



FIGURE 18 – Tomographe *Tiama XLab* (image fournie par *Tiama*)

## 1.3 Modélisations et résultats théoriques

Dans cette section, nous introduisons des modèles et résultats théoriques que nous réutilisons dans ce manuscrit. Dans la section 1.3.1, nous présentons le modèle de caméra sténopé décrivant la relation entre un point de l'espace et sa projection sur le détecteur du système de radiographie. Dans la section 1.3.2, nous définissons les angles de rotation du détecteur ainsi que la matrice de rotation considérée dans la suite du manuscrit. De plus, nous faisons quelques remarques plus générales sur les matrices de rotation. Dans la section 1.3.3,

nous présentons les conditions de cohérence des données d'Helgason-Ludwig liant les moments d'ordre  $n$  des projections à un polynôme homogène d'ordre  $n$  en  $\cos \phi$  et  $\sin \phi$ . Nous présentons aussi la version adaptée à la géométrie linogramme des conditions de cohérence d'Helgason-Ludwig. Dans la section 1.3.4, nous présentons des résultats géométriques liés à ces conditions.

### 1.3.1 Modèle de caméra sténopé

Le modèle de caméra sténopé (ou "pinhole") est utilisé pour définir l'opération de projection géométrique d'un point 3D sur un détecteur plan [19][8]. Ce point doit être dans le champ de vue du détecteur. Il est construit à partir des paramètres extrinsèques et intrinsèques du système de radiographie (ou de la caméra en vision par ordinateur). On peut utiliser ce modèle de géométrie projective pour décrire un système de radiographie composé d'une source et d'un détecteur plan. Notons  $D$  le détecteur et  $S$  la source à rayons X. Nous définissons les repères  $(\mathbf{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  et  $(\mathbf{O}_D, \mathbf{x}_D, \mathbf{y}_D, \mathbf{z}_D)$  représentant respectivement les systèmes de coordonnées monde et source-détecteur. Les axes  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  représentent le plan image dont l'origine est notée  $\mathbf{O}_I$ . Ce système est représenté dans la Fig. 19. Dans la suite, nous présentons étape par étape la construction du modèle.

Notons  $[X^c, Y^c, Z^c]^T$  un point défini dans le repère associé à la caméra en vision par ordinateur ou le repère  $(S, \mathbf{x}_D, \mathbf{y}_D, \mathbf{z}_D)$  en imagerie conique. Notons  $(x_D, y_D)$  la projection du point

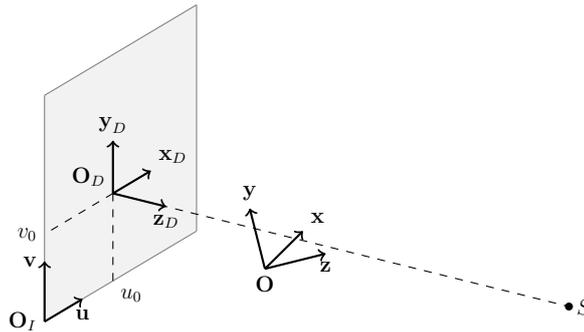


FIGURE 19 – Représentation d'un système composé d'une source et d'un détecteur plan. Les repères  $(\mathbf{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  et  $(\mathbf{O}_D, \mathbf{x}_D, \mathbf{y}_D, \mathbf{z}_D)$  représentent les systèmes de coordonnées monde et source-détecteur. Les axes  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  représentent le plan image dont l'origine est  $\mathbf{O}_I$ .

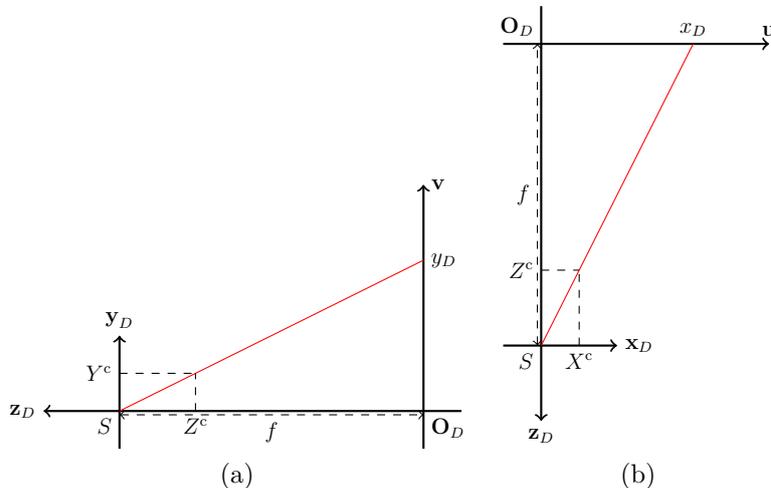


FIGURE 20 – Construction du modèle de caméra pinhole. Plan (a)  $X^c = 0$ , (b)  $Y^c = 0$ .

$[X^c, Y^c, Z^c]^T$  sur le plan image. Nous supposons que le point  $\mathbf{O}_D$  correspond à la projection orthogonale de la source  $S$  sur le détecteur. Nous notons  $f$  la distance source-détecteur séparant la source  $S$  de l'origine du détecteur  $\mathbf{O}_D$ . La projection du point  $[X^c, Y^c, Z^c]^T$  sur le plan image est représentée dans la Fig. 20. En utilisant le théorème de Thalès, on obtient les équations suivantes :

$$x_D = -f \frac{X^c}{Z^c} \quad (1.14)$$

$$y_D = -f \frac{Y^c}{Z^c} \quad (1.15)$$

Ces deux équations sont exprimées sous forme matricielle en coordonnées homogènes dans l'équation (1.16). Le symbole  $\sim$  signifie que l'équation est définie à un coefficient multiplicatif près.

$$\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^c \\ Y^c \\ Z^c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

La projection  $(x_D, y_D)$  est alors exprimée dans le plan du détecteur  $(\mathbf{O}_D, \mathbf{x}_D, \mathbf{y}_D)$ . Il est nécessaire d'effectuer un changement d'unité et de repère pour exprimer  $(x_D, y_D)$  en pixel dans le plan image  $(\mathbf{O}_I, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ . La projection  $(x_D, y_D)$  dans le plan image est exprimée en pixel par  $(u, v)$ . De plus, nous notons  $(x_0, y_0)$  les coordonnées du point  $\mathbf{O}_D$  dans le plan image. Notons  $h_u$  et  $h_v$  respectivement la dimension des pixels sur les axes  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ . Le changement d'unité s'effectue en considérant les densités de pixels suivantes :

$$k_u \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{h_u} \quad (1.17)$$

$$k_v \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{h_v} \quad (1.18)$$

Ainsi, les opérations de changement d'unité et de repère sont exprimées en coordonnées homogènes dans l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_u & 0 & 0 \\ 0 & k_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

En combinant les équations (1.16) et (1.19), on obtient l'équation :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -k_u f & 0 & k_u x_0 & 0 \\ 0 & -k_v f & k_v y_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^c \\ Y^c \\ Z^c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Les paramètres  $f, x_0, y_0, k_u, k_v$  sont les paramètres intrinsèques du système de radiographie. Pour simplifier les notations de l'équation (1.20), nous définissons les paramètres suivants :

$$\alpha_u \stackrel{\text{déf}}{=} -k_u f \quad (1.21)$$

$$\alpha_v \stackrel{\text{déf}}{=} -k_v f \quad (1.22)$$

$$u_0 \stackrel{\text{déf}}{=} k_u x_0 \quad (1.23)$$

$$v_0 \stackrel{\text{déf}}{=} k_v y_0 \quad (1.24)$$

La matrice obtenue dans l'équation (1.20) est notée  $\mathbf{K}_{2D} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ . Elle est définie par :

$$\mathbf{K}_{2D} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} \alpha_u & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & \alpha_v & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Nous incluons désormais le positionnement et l'orientation du repère  $(S, \mathbf{x}_D, \mathbf{y}_D, \mathbf{z}_D)$  par rapport au repère monde dans le modèle sous la forme d'une transformation rigide. La position de la source dans le repère monde est notée  $S = [X_S, Y_S, Z_S]^T$ . La transformation rigide est définie dans l'équation (1.27) à partir de la matrice de rotation  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  et du vecteur de translation  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ . Elle établit la relation entre l'expression d'un point  $[X^m, Y^m, Z^m]^T$  dans le repère monde et de son expression  $[X^c, Y^c, Z^c]^T$  dans le repère source-détecteur.

$$\begin{bmatrix} X^c \\ Y^c \\ Z^c \end{bmatrix} = \mathbf{R} \left( \begin{bmatrix} X^m \\ Y^m \\ Z^m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} \right) \quad (1.26)$$

$$= \mathbf{R} \begin{bmatrix} X^m \\ Y^m \\ Z^m \end{bmatrix} + \mathbf{t} \quad (1.27)$$

On remarque que le vecteur  $\mathbf{t}$  est construit à partir de la position de la source et de la matrice de rotation  $\mathbf{R}$ . Cette relation est exprimée dans l'équation suivante :

$$\mathbf{t} \stackrel{\text{déf}}{=} -\mathbf{R} \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

La matrice  $\mathbf{R}$  et le vecteur  $\mathbf{t}$  sont les paramètres extrinsèques du système. En écrivant la transformation affine sous la forme d'une matrice, on obtient la relation de l'équation (1.29) entre un point 3D du repère monde et sa projection sur le plan image. Ainsi, le modèle de caméra pinhole est défini en coordonnées homogènes par la relation :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \sim \mathbf{K}_{2D} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^m \\ Y^m \\ Z^m \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

L'opération de projection décrite par le modèle de caméra pinhole peut être réduite à la matrice de projection  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$  telle que définie dans l'équation :

$$\mathbf{M} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{K}_{2D} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

L'équation (1.29) est définie à un coefficient multiplicatif près. Nous notons  $s \in \mathbb{R}$  un facteur d'échelle. Ainsi, l'équation est réécrite sous forme d'égalité dans l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} su \\ sv \\ s \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} X^m \\ Y^m \\ Z^m \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Pour la suite du manuscrit, nous notons  $m_{i,j}$  les éléments de la matrice  $\mathbf{M}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,  $1 \leq j \leq 4$ .

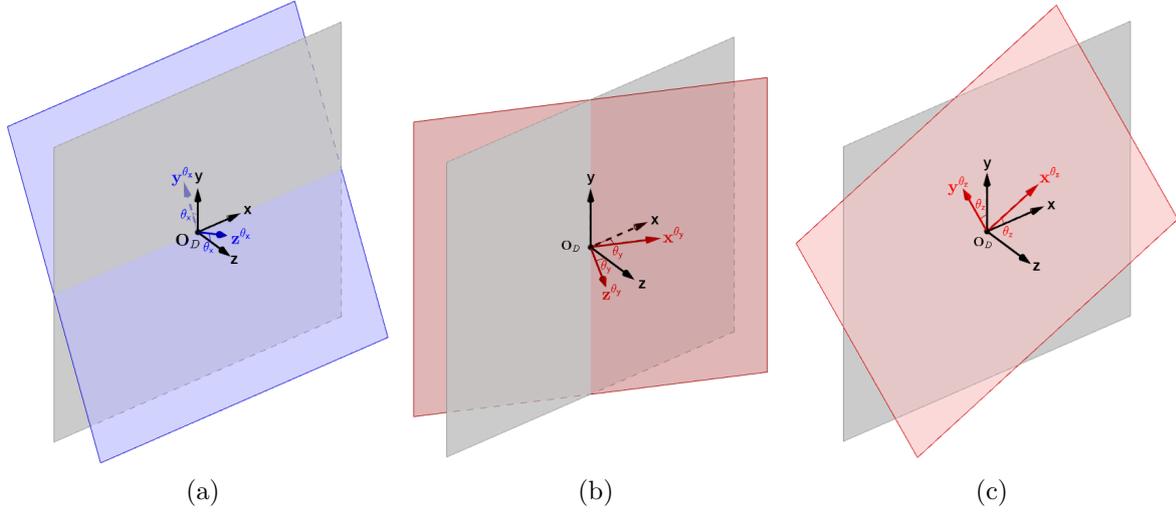


FIGURE 21 – Angles de rotation du détecteur. (a) Angle  $\theta_x$  associé à la rotation autour de l'axe  $\mathbf{x}$ . (b) Angle  $\theta_y$  associé à la rotation autour de l'axe  $\mathbf{y}$ . (c) Angle  $\theta_z$  associé à la rotation autour de l'axe  $\mathbf{z}$ .

### 1.3.2 Matrices de rotation et groupe $\mathcal{SO}(3)$

Dans cette section, nous proposons de modéliser les rotations du détecteur introduit dans la section 1.3.1. La matrice de rotation  $\mathbf{R}$  peut se décomposer en 3 rotations autour des axes du repère monde [19]. Ces trois angles de rotation sont illustrés dans la Fig. 21. Nous notons respectivement  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  les angles de rotation autour des axes  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$ . Par convention, les matrices de rotation associées à ces angles sont définies par :

$$\mathbf{R}_x \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

$$\mathbf{R}_y \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

$$\mathbf{R}_z \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

Dans la suite, nous définissons la matrice de rotation  $\mathbf{R}$  à partir de ces matrices après avoir effectué quelques remarques sur le groupe  $\mathcal{SO}(3)$ .

**Propriétés** Soient  $\mathbf{R}$  une matrice de rotation,  $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$  le groupe des matrices carrées à coefficients réels de dimension 3,  $I$  la matrice identité et  $\det(\cdot)$  le déterminant d'une matrice. Le groupe des matrices de rotation ou groupe spécial orthogonal  $\mathcal{SO}(3)$  est défini par :

$$\mathcal{SO}(3) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \mathbf{R} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \text{ tel que } \mathbf{R}\mathbf{R}^T = I \text{ et } \det(\mathbf{R}) = 1 \right\} \quad (1.35)$$

Le groupe  $\mathcal{SO}(3)$  est non abélien [20]. Ses éléments ne commutent pas. C'est une information importante à prendre en compte dans la définition de la matrice de rotation  $\mathbf{R}$ .

**Modélisation** Lors des simulations réalisées dans ce manuscrit, nous supposons que  $\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_z = I$ . Dans ce cas, nous avons  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_y$ . Par construction du banc expérimental, les

angles  $\theta_x$  et  $\theta_z$  sont proches de  $0^\circ$ . Toutefois, ils ne sont pas nécessairement nuls. Le choix de l'ordre des rotations dans la définition de  $\mathbf{R}$  peut alors être important dans le cadre du calcul d'incertitude de mesure. Par exemple, l'équerre supportant le détecteur du banc expérimental permet de l'incliner de  $\theta_x = 1^\circ$  lorsque  $\theta_y = \theta_z = 0^\circ$ . Dans une géométrie idéale, pour retrouver cette inclinaison, il est nécessaire de considérer  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y$  puisque le détecteur est orienté par rapport à la position de la source (rotation autour de l'axe  $\mathbf{y}$ ) puis incliné vers l'arrière (rotation autour de l'axe  $\mathbf{x}^{\theta_y}$  défini dans la Fig. 21). Nous n'obtiendrons pas la bonne inclinaison si nous considérons  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_y \mathbf{R}_x$  puisque  $\mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \neq \mathbf{R}_y \mathbf{R}_x$ . De plus, la multiplication s'effectue par la gauche dans l'équation (1.27). Il faut donc placer la matrice de rotation  $\mathbf{R}_y$  à droite dans la définition de la matrice  $\mathbf{R}$ . Toutefois, l'angle  $\theta_z$  est supposé proche de  $0^\circ$  dans nos simulations et expériences. Ainsi, nous définissons la matrice de rotation par :

$$\mathbf{R} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_z \quad (1.36)$$

**Estimation des angles** La matrice de rotation peut être aussi définie à partir de coefficients par :

$$\mathbf{R} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

Dans le cas de l'équation (1.36), en utilisant les définitions des équations (1.32), (1.33), (1.34), l'estimation des angles s'effectue à partir des formules suivantes :

$$\theta_y = \arcsin(-r_{13}) \quad (1.38)$$

$$\theta_x = \arctan\left(-\frac{r_{23}}{r_{33}}\right) \quad (1.39)$$

$$\theta_z = \arctan\left(-\frac{r_{12}}{r_{11}}\right) \quad (1.40)$$

En effet, la matrice  $\mathbf{R}$  s'écrit :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z & -\cos \theta_y \sin \theta_z & -\sin \theta_y \\ -\sin \theta_x \sin \theta_y \cos \theta_z + \cos \theta_x \sin \theta_z & \sin \theta_x \sin \theta_y \sin \theta_z + \cos \theta_x \cos \theta_z & -\sin \theta_x \cos \theta_y \\ \cos \theta_x \sin \theta_y \cos \theta_z + \sin \theta_x \sin \theta_z & -\cos \theta_x \sin \theta_y \sin \theta_z + \sin \theta_x \cos \theta_z & \cos \theta_x \cos \theta_y \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

### 1.3.3 Conditions de cohérence d'Helgason-Ludwig

Dans cette section, nous présentons les conditions de cohérence d'Helgason-Ludwig [11][21][22] ainsi que leur adaptation à la géométrie linogramme [23][24].

#### 1.3.3.1 Géométrie parallèle 2D

Les notations utilisées sont définies dans la section 1.1.2 (voir Fig. 5). Nous définissons le moment d'ordre  $n \in \mathbb{N}$  des projections par :

$$M_n(\phi) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}} p(\phi, s) s^n ds \quad (1.42)$$

Les conditions de cohérence d'Helgason-Ludwig sont exprimées dans le théorème 1. La preuve<sup>1</sup> du théorème est un résultat classique [11].

1. Cette preuve montre que ces conditions sont nécessaires. Avec des hypothèses supplémentaires, on peut montrer qu'elles sont aussi suffisantes.

**Théorème 1** *S'il existe une fonction  $\mu$  à support compact tel que  $p = \mathcal{R}\mu$ , alors le moment  $M_n$  peut s'écrire sous la forme d'un polynôme homogène en  $\cos \phi$  et  $\sin \phi$  de degré  $n$ . C'est-à-dire,  $M_n$  peut s'écrire sous la forme*

$$M_n(\phi) = \sum_{k=0}^n c_{n,k} \cos^{n-k} \phi \sin^k \phi \quad (1.43)$$

*Preuve.* Supposons qu'il existe un objet dont la fonction d'atténuation  $\mu$  est bornée et à support compact. Les projections parallèles de l'objet sont définies par l'équation (1.8). Ainsi, le moment des projections  $M_n(\phi)$  s'écrit :

$$M_n(\phi) = \int_{\mathbb{R}} p(\phi, s) s^n ds \quad (1.44)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \mu(s\alpha_\phi + l\beta_\phi) dl \right) s^n ds \quad (1.45)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(s\alpha_\phi + l\beta_\phi) s^n ds dl \quad (1.46)$$

On effectue le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x_1 = s \cos \phi - l \sin \phi \\ x_2 = s \sin \phi + l \cos \phi \end{cases} \quad (1.47)$$

et

$$dx_1 dx_2 = |\det(\mathcal{J})| ds dl \quad (1.48)$$

où  $\mathcal{J}$  est la matrice jacobienne définie par :

$$\mathcal{J} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_1}{\partial l} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

Cette matrice décrit une rotation. Ainsi, on a  $\det(\mathcal{J}) = 1$  (voir section 1.3.2). En appliquant le changement de variable puis en utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$M_n(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(s\alpha_\phi + l\beta_\phi) s^n ds dl \quad (1.50)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) (x_1 \cos \phi + x_2 \sin \phi)^n dx_1 dx_2 \quad (1.51)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_1^{n-k} \cos^{n-k} \phi x_2^k \sin^k \phi \right) dx_1 dx_2 \quad (1.52)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k} \phi \sin^k \phi \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) x_1^{n-k} x_2^k dx_1 dx_2 \quad (1.53)$$

$$= \sum_{k=0}^n c_{n,k} \cos^{n-k} \phi \sin^k \phi \quad (1.54)$$

avec

$$c_{n,k} = \binom{n}{k} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) x_1^{n-k} x_2^k dx_1 dx_2 \quad (1.55)$$

Dans cette preuve, toutes les interversions de sommes et d'intégrales sont possibles puisque la fonction  $\mu$  est bornée et à support compact.  $\square$

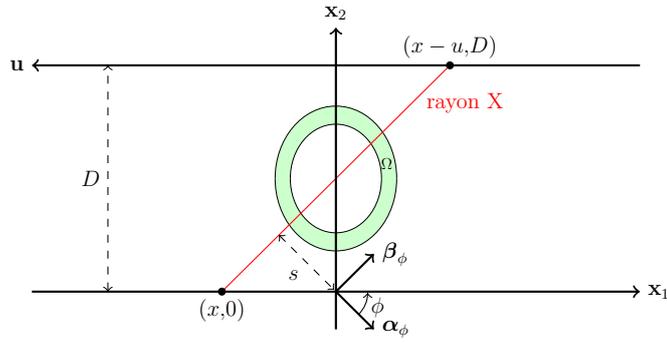


FIGURE 22 – Paramétrisation des rayons X dans la géométrie linogramme parallèle 2D.

### 1.3.3.2 Linogramme parallèle 2D

Le linogramme parallèle 2D décrit un système d'acquisition où le détecteur est une droite infinie et la source se déplace sur une droite parallèle au détecteur. L'objet mesuré est supposé statique. Cette géométrie est illustrée dans la Fig. 22. Le paramètre  $u = D \tan \phi$  correspond à la distance entre la source et le détecteur sur l'axe  $u$ . Le paramètre  $D \in \mathbb{R}_+$  correspond à la distance entre les axes  $x_1$  et  $u$ . La source et le détecteur se situent respectivement à la position  $(x, 0)$  et  $(x - u, D)$ . Ainsi, le linogramme  $l$  est défini par :

$$l(u, x) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mu((x, 0) + r(-u, D)) dr \quad (1.56)$$

Nous définissons l'opérateur linogramme parallèle  $\mathcal{L}$  tel que :

$$\mathcal{L}\mu(u, x) \stackrel{\text{déf}}{=} l(u, x) \quad (1.57)$$

Le moment d'ordre  $n \in \mathbb{N}$  des projections du linogramme parallèle est défini par :

$$J_n(u) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}} l(u, x) x^n dx \quad (1.58)$$

On a l'égalité suivante :

$$\frac{D}{\cos \phi} l\left(D \tan \phi, \frac{s}{\cos \phi}\right) = p(\phi, s) \quad (1.59)$$

En effet, en utilisant que  $u = D \tan \phi$ , on a :

$$l(D \tan \phi, x) = \int_{\mathbb{R}} \mu((x, 0) + rD(-\tan \phi, 1)) dr \quad (1.60)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mu\left((x, 0) + r \frac{D}{\cos \phi}(-\sin \phi, \cos \phi)\right) dr \quad (1.61)$$

On effectue le changement de variable :

$$l = r \frac{D}{\cos \phi} \quad (1.62)$$

On obtient l'équation suivante en effectuant le changement de variable et en utilisant la relation  $dl = dr \frac{D}{\cos \phi}$  :

$$l(D \tan \phi, x) = \frac{\cos \phi}{D} \int_{\mathbb{R}} \mu((x, 0) + l(-\sin \phi, \cos \phi)) dl \quad (1.63)$$

On effectue désormais le changement de variable :

$$l' = l - s \tan \phi \quad (1.64)$$

On obtient alors l'équation (1.59) en faisant le changement de variable et en utilisant les relations  $dl' = dl$  et  $s = x \cos \phi$  :

$$l\left(D \tan \phi, \frac{s}{\cos \phi}\right) = \frac{\cos \phi}{D} \int_{\mathbb{R}} \mu \left( \left( \frac{s}{\cos \phi}, 0 \right) + (l' + s \tan \phi)(-\sin \phi, \cos \phi) \right) dl' \quad (1.65)$$

$$= \frac{\cos \phi}{D} \int_{\mathbb{R}} \mu (s (\cos \phi, \sin \phi) + l'(-\sin \phi, \cos \phi)) dl' \quad (1.66)$$

$$= \frac{\cos \phi}{D} p(\phi, s) \quad (1.67)$$

Alors, le théorème 1 se réécrit pour le linogramme parallèle en utilisant les relations  $u = D \tan \phi$ ,  $s = x \cos \phi$  et l'équation (1.59).

**Théorème 2** (voir [23]) *Il existe une fonction  $\mu$  à support compact telle que les données  $l$  sont cohérentes, i.e.  $l = \mathcal{L}\mu$ , si et seulement si*

$$J_n(u) = \sum_{k=0}^n c'_{n,k} u^k \quad (1.68)$$

*Preuve.* La preuve est issue de l'article [24]. Nous montrons uniquement que la condition est nécessaire ici. On effectue les mêmes hypothèses que pour le théorème 1. Celui-ci nous permet d'écrire que si et seulement si les données sont cohérentes, i.e.  $p = \mathcal{R}\mu$ , alors on a :

$$\sum_{k=0}^n c_{n,k} \cos^{n-k} \phi \sin^k \phi = \int_{\mathbb{R}} p(\phi, s) s^n ds \quad (1.69)$$

$$= \frac{D}{\cos \phi} \int_{\mathbb{R}} l \left( D \tan \phi, \frac{s}{\cos \phi} \right) s^n ds \quad (1.70)$$

L'équation (1.70) est obtenue en utilisant l'équation (1.59). On effectue alors le changement de variable suivant :

$$x = \frac{s}{\cos \phi} \quad (1.71)$$

Ainsi, en utilisant la relation  $\cos \phi dx = ds$ , on obtient :

$$D \int_{\mathbb{R}} l(D \tan \phi, x) x^n \cos^n \phi dx = \sum_{k=0}^n c_{n,k} \cos^{n-k} \phi \sin^k \phi \quad (1.72)$$

On divise l'équation précédente par  $\cos^n \phi$  :

$$D \int_{\mathbb{R}} l(D \tan \phi, x) x^n dx = \sum_{k=0}^n c_{n,k} \tan^k \phi \quad (1.73)$$

Ainsi, en utilisant la relation  $u = D \tan \phi$ , on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} l(u, x) x^n dx = \sum_{k=0}^n c_{n,k} \frac{u^k}{D^{k+1}} \quad (1.74)$$

$$\iff \int_{\mathbb{R}} l(u, x) x^n dx = \sum_{k=0}^n c'_{n,k} u^k \quad (1.75)$$

avec

$$c'_{n,k} = \frac{1}{D^{k+1}} \binom{n}{k} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) x_1^{n-k} x_2^k dx_1 dx_2 \quad (1.76)$$

Dans cette preuve, toutes les interversions des sommes et intégrales sont possibles pour les mêmes raisons que dans le théorème 1.  $\square$

### 1.3.4 Résultats géométriques sur les moments des projections

Dans cette section, nous présentons des résultats sur la masse et le centre de masse de l'objet défini par la fonction de densité  $\mu$ . Ces résultats sont basés sur les moments des projections d'ordre 0 et 1 dans la géométrie parallèle 2D.

#### 1.3.4.1 Masse de l'objet

Le moment d'ordre 0 des projections dans la géométrie parallèle 2D correspond à la masse de l'objet. En effet, Pour  $n = 0$ , l'équation (1.51) s'écrit :

$$M_0(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (1.77)$$

Desbat et Clackdoyle [25] ont montré que le résultat suivant est toujours valable pour le linogramme parallèle 2D :

$$J_0(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (1.78)$$

C'est un résultat que nous exploitons dans le chapitre 4.

#### 1.3.4.2 Centre de masse de l'objet

Un autre résultat lié aux moments des projections dans la géométrie parallèle 2D est énoncé dans l'article [25]. Le centre de masse des projections est la projection du centre de masse. En effet, le centre de masse des projections se calcule en utilisant les moments d'ordre 0 et 1 comme suit :

$$c(\phi) = \frac{M_1(\phi)}{M_0(\phi)} \quad (1.79)$$

$$= \frac{\int_{\mathbb{R}} p(\phi, s) s ds}{\int_{\mathbb{R}} p(\phi, s) ds} \quad (1.80)$$

En utilisant l'équation (1.51), on a :

$$c(\phi) = \frac{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) (x_1 \cos \phi + x_2 \sin \phi) dx_1 dx_2}{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) dx_1 dx_2} \quad (1.81)$$

$$= c_1 \cos \phi + c_2 \sin \phi \quad (1.82)$$

$$= \mathbf{c}^T \boldsymbol{\alpha}_\phi \quad (1.83)$$

où la position du centre de masse  $\mathbf{c}$  est définie par :

$$\mathbf{c} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (1.84)$$

avec

$$c_1 = \frac{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) x_1 dx_1 dx_2}{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) dx_1 dx_2} \quad (1.85)$$

$$c_2 = \frac{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) x_2 dx_1 dx_2}{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) dx_1 dx_2} \quad (1.86)$$

L'équation (1.83) correspond à la projection du centre de masse sur l'axe  $\alpha_\phi$ . Cette propriété permet de recalibrer les radiographies entre elles. Nous n'utilisons pas directement ce résultat dans le chapitre 4. Néanmoins, nous présentons un résultat différent sur le centre de masse dans la géométrie du linogramme parallèle en utilisant les mêmes étapes de calcul que dans cette section.

## 1.4 Organisation du manuscrit

Nous avons introduit dans ce chapitre les motivations de la thèse, le banc utilisé pour nos expériences ainsi que quelques modèles et résultats théoriques que nous utilisons par la suite. Dans le chapitre 2, nous présentons des méthodes et outils de calibration permettant l'estimation de paramètres géométriques pour un système d'acquisition à une source et plusieurs détecteurs linéaires. Dans le chapitre 3, nous estimons les paramètres de modèles d'absorption des rayons X dans le verre à partir de données expérimentales issues de différentes bouteilles et de prismes. Dans le chapitre 4, nous utilisons des conditions de cohérence des données pour estimer les paramètres de mouvement d'objets en translation. Finalement, dans le chapitre 5, nous proposons une conclusion sur l'ensemble des chapitres de la thèse et quelques pistes d'amélioration de nos résultats.

---

---

# CHAPITRE 2

---

## CALIBRATION GÉOMÉTRIQUE “OFF-LINE”

### 2.1 Introduction

La spécification des paramètres géométriques du système de radiographie est nécessaire pour obtenir des reconstructions de bonne qualité. Ces paramètres sont estimés à partir d'une méthode de calibration géométrique avant l'utilisation du système. Un objet de géométrie connue (calibre) est placé dans le champ de vue. Ses projections sont utilisées pour effectuer la calibration.

En tomographie à faisceau conique (ou "cone-beam"), les objets de calibration sont généralement composés de plusieurs billes. Elles sont placées judicieusement dans l'espace pour assurer la calibration de géométries spécifiques. Des acquisitions à un ou plusieurs angles de vue permettent de réaliser la calibration. Noo *et al.* proposent une méthode analytique permettant de déterminer 6 paramètres géométriques [26]. La méthode utilise les ellipses formées par les projections de deux billes obtenues à différentes positions de la source sur une *trajectoire circulaire*. Le détecteur est supposé parallèle à l'axe de rotation. Cho *et al.* proposent un calibre composé de 24 billes réparties sur deux cercles dans deux plans parallèles [27][28]. La méthode de calibration est aussi basée sur les ellipses formées par la projection des billes. Une seule radiographie du calibre est nécessaire pour déterminer 9 paramètres géométriques. Des hypothèses sont effectuées sur certains paramètres angulaires. Les autres sont identifiés avec des algorithmes d'optimisation. Von Smekal *et al.* proposent une méthode où la position des billes n'est pas connue [29]. Cette méthode repose sur l'analyse de Fourier des projections des billes sur un ensemble de radiographies acquises avec une trajectoire circulaire de la source. Elle permet de déterminer analytiquement 6 paramètres géométriques. Mennessier *et al.* proposent une méthode permettant la calibration de système cone-beam sans trajectoire particulière de la source [30]. La méthode permet de déterminer 9 paramètres géométriques pour chaque radiographie à partir d'un calibre à 14 billes réparties sur 3 droites orthogonales ou à 6 billes avec des contraintes sur la trajectoire de la source. Une extension de ces travaux est proposée par Hemsley *et al.* dans le cas où les radiographies du calibre sont tronquées [31].

Les méthodes de calibration de systèmes de radiographie sont souvent inspirées des méthodes de vision par ordinateur [32][33]. En effet, les méthodes de vision par ordinateur sont généralement basées sur le modèle de caméra sténopé (ou "pinhole"). Celui-ci peut être utilisé en tomographie puisqu'il décrit aussi une géométrie projective. Les méthodes de vi-

sion par ordinateur utilisent des calibres composés d’un ou plusieurs plans. Les informations exploitables sont uniquement contenues à la surface. C’est un avantage qui doit être traité en tomographie pour pallier à diverses approximations potentiellement effectuées dans le calcul du centroïde des projections [34]. Par exemple, la grille de Tsai permet d’effectuer des calibrations de caméra 2D [35][8]. Cette grille consiste en des carrés noirs sur un fond blanc. Les coins des carrés sont exploités pour réaliser la calibration. Une étude comparative a été réalisée par Salvi *et al.* sur quelques méthodes de calibration de caméra 2D [36].

Notre système de radiographie est composé de détecteurs linéaires. La calibration de ces systèmes est peu couverte en tomographie. Néanmoins, quelques méthodes existent en vision par ordinateur. Horaud *et al.* ont initialement introduit une méthode utilisant un calibre composé de 4 droites coplanaires dont 3 sont parallèles entre elles et une est oblique [37]. Le calibre doit être déplacé à plusieurs reprises pour effectuer la calibration (ou plusieurs copies du calibre peuvent être utilisées). La méthode repose sur un invariant de la géométrie projective : le cross-ratio. Elle permet d’estimer 8 paramètres géométriques. Luna *et al.* utilisent la même méthode de calibration et introduisent un calibre composé de 2 plans parallèles [38]. Il n’est pas nécessaire de déplacer ce calibre. De même, plusieurs méthodes utilisent un calibre composé de 2 plans orthogonaux [39][40][41][42]. Niu *et al.* appliquent la méthode de Horaud *et al.* en utilisant un calibre dont le motif est 2 cercles concentriques de rayons différents [43]. Le cross-ratio est toujours exploitable avec ce motif. Des segments sont ajoutés à côté de la partie supérieure ou inférieure des cercles pour obtenir une unique solution au problème de calibration. Song *et al.* utilisent aussi un motif circulaire sur leur calibre [44]. Les cercles sont construits afin de générer un code permettant d’augmenter les informations recueillies sur les images du calibre. Une comparaison de certaines méthodes décrites ci-dessus est proposée dans cet article. La plupart de ces méthodes utilisent des méthodes d’optimisation non-linéaire pour améliorer les estimations des paramètres géométriques après une première estimation. Elles sont basées sur la reprojection du calibre. Elles sont initialisées avec les résultats obtenus initialement. D’autres méthodes de calibration de détecteur linéaire existent mais elles reposent sur une translation linéaire de la caméra ou du calibre. Ces méthodes permettent de déterminer des paramètres liés au mouvement de la caméra ou du calibre, et à la distorsion des images. Leurs calibres sont similaires à ceux des méthodes de calibration de caméra 2D. En effet, Draréni *et al.* [45] utilisent une grille planaire. Hui *et al.* [46] utilisent un damier réparti sur 3 plans. Zhang *et al.* [47] utilisent un damier planaire.

Le problème de calibration d’un système de tomosynthèse composé de plusieurs détecteurs linéaires ne peut pas être résolu directement avec les méthodes précédentes. Néanmoins, nous proposons d’utiliser la méthode de Horaud *et al.* pour résoudre le problème de calibration de plusieurs détecteurs linéaires. Ainsi, dans la section 2.2, nous commençons par introduire le modèle de caméra sténopé linéaire. Ensuite, dans la section 2.3, nous présentons la méthode de Horaud *et al.*. Cette méthode est généralisée à notre géométrie en utilisant la redondance des informations du système de radiographie. Ainsi, dans la section 2.4, nous proposons plusieurs méthodes permettant d’améliorer les résultats de la calibration. Les paramètres géométriques ne sont pas explicitement déterminés avec la méthode de Horaud *et al.*. Dans la section 2.5, nous donnons des formules analytiques permettant de déterminer ces paramètres. Dans la section 2.6, nous proposons un calibre adapté à notre géométrie permettant de réaliser une calibration simultanée de tous les détecteurs. Finalement, nous réalisons des expériences sur un banc expérimental. Des problèmes ont été découverts lors de l’utilisation de la méthode de Horaud *et al.* et du calibre adapté sur le banc expérimental. Dans la section 2.7, des simulations sont réalisées pour présenter ces problèmes. Dans la section 2.8, les résultats des expériences sont présentés. Finalement, dans la section 2.9, nous proposons une conclusion sur l’ensemble des résultats obtenus avec les méthodes et calibres proposés.

## 2.2 Modélisation

Dans cette section, nous présentons le modèle de caméra sténopé adapté à un détecteur linéaire. La méthode de calibration d'Horaud *et al.* [37] repose sur ce modèle. La géométrie et les notations relatives au système sont introduites dans la section 2.2.1. Le système de radiographie est modélisé dans la section 2.2.2 en utilisant le modèle de caméra sténopé (ou "pinhole") adapté à un détecteur linéaire.

### 2.2.1 Notations

Le système de radiographie est composé d'une source  $S$  supposée ponctuelle et d'un détecteur linéaire  $D$ . Ce système est représenté dans la Fig. 23. Nous définissons une base orthonormée directe de référence : le repère monde  $(\mathbf{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  centré au point  $\mathbf{O}$ . Le système de radiographie est défini dans ce repère. Le détecteur et la source possèdent leur propre système de coordonnées  $(\mathbf{O}_D, \mathbf{x}_D, \mathbf{y}_D, \mathbf{z}_D)$ , où

- $\mathbf{O}_D$  est le point principal du détecteur. Il correspond à la projection orthogonale de la source sur l'axe image  $\mathbf{v}$  du détecteur,
- $\mathbf{y}_D$  est identique à l'axe  $\mathbf{v}$  du détecteur linéaire,
- $\mathbf{z}_D$  est l'axe orthogonal à  $\mathbf{y}_D$  correspondant à l'axe de projection orthogonale de la source sur le détecteur,
- $\mathbf{x}_D = \mathbf{y}_D \times \mathbf{z}_D$ , où  $\times$  représente le produit vectoriel.

Le point  $\mathbf{O}_D$  peut être exprimé en pixel sur l'axe  $\mathbf{v}$  par  $v_0$ . Nous supposons que cet axe a pour origine le point  $\mathbf{O}_I$ , le pixel 0 du détecteur. Le plan  $\Pi$  passant par la source  $S$  et tous les points du détecteur  $D$  est le plan de vue du système.

### 2.2.2 Modèle de caméra pinhole linéaire

La modélisation géométrique du système de radiographie est basée sur le modèle de caméra pinhole 2D introduit dans la section 1.3.1. Dans cette section, nous présentons l'adaptation du modèle de caméra pinhole 2D à un système de radiographie composé d'un détecteur 1D.

Le modèle de caméra pinhole permet d'établir une relation entre un point  $[X, Y, Z]^T$  défini dans le repère monde et sa projection  $(u, v)$  sur le plan image. Ce modèle peut être adapté

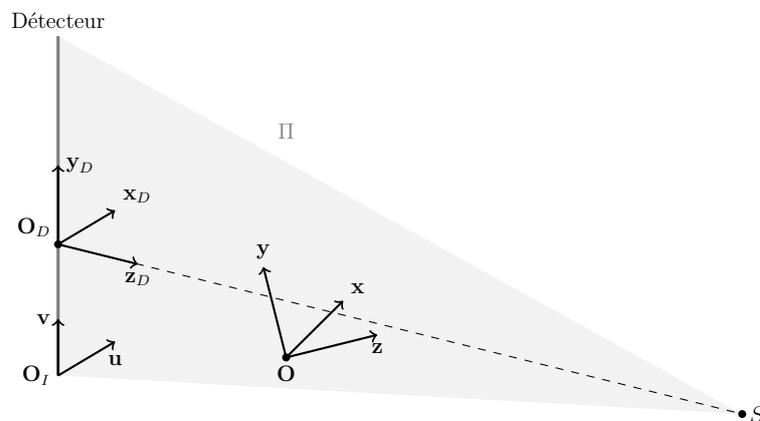


FIGURE 23 – Représentation d'un système composé d'une source  $S$  et d'un détecteur linéaire  $D$ . Les repères  $(\mathbf{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  et  $(\mathbf{O}_D, \mathbf{x}_D, \mathbf{y}_D, \mathbf{z}_D)$  représentent respectivement les systèmes de coordonnées du monde, et du détecteur et de la source. L'axe image  $\mathbf{v}$  a pour origine le point  $\mathbf{O}_I$ . Le plan  $\Pi$  représente le plan de vue du système.

à la caméra linéaire en vision par ordinateur et à un système de radiographie composé d'un détecteur linéaire. Ainsi, on considère que le plan image  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  est réduit à l'axe image  $\mathbf{v}$  conformément à la Fig. 23. Les paramètres intrinsèques du système sont réduits aux paramètres  $f, v_0, k_v$ . Les paramètres intrinsèques  $u_0$  et  $k_u$  relatifs à l'axe  $\mathbf{u}$  ont disparu dans le modèle linéaire. Par conséquent, la matrice de calibration  $\mathbf{K}_{2D}$ , contenant les paramètres intrinsèques, définie dans la section 1.3.1, est réduite à la matrice  $\mathbf{K}_{1D} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$  définie dans l'équation (2.1). Nous rappelons que  $v_0$  est la coordonnée sur l'axe  $\mathbf{v}$  du point principal exprimée en pixel et  $\alpha_v = -fk_v$ , où  $f$  est la distance source-détecteur et  $k_v$  est la densité de pixel sur l'axe  $\mathbf{v}$ .

$$\mathbf{K}_{1D} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} 0 & \alpha_v & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Les paramètres extrinsèques  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  et  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ , définissant respectivement l'orientation et la position de la source relativement au repère monde, restent identiques. Ainsi, la matrice de projection  $\mathbf{M}$  est adaptée dans l'équation (2.2) au système à un détecteur linéaire. Elle est exprimée en coordonnées homogènes.

$$\mathbf{M} = \mathbf{K}_{1D} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \alpha_v & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$= \begin{bmatrix} m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

avec

$$\mathbf{R} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{t} \stackrel{\text{déf}}{=} [t_1, t_2, t_3]^T \quad (2.6)$$

Le modèle de caméra pinhole linéaire est défini par l'équation suivante pour  $s \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{bmatrix} sv \\ s \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Résoudre le problème de calibration revient à estimer les éléments de la matrice de projection  $\mathbf{M}$ .

## 2.3 Méthode de Horaud *et al.*

La calibration géométrique du système de radiographie à un détecteur linéaire correspond à estimer 8 paramètres réels. Horaud *et al.* proposent une méthode permettant d'estimer ces paramètres en deux étapes indépendantes à partir des projections d'un objet géométrique connu. Dans la section 2.3.1, nous commençons par introduire le modèle de caméra linéaire dans un plan de vue. Puis, dans la section 2.3.2, nous introduisons l'objet de calibration. Enfin, dans la section 2.3.3, nous présentons les deux étapes de la méthode de calibration.

### 2.3.1 Modèle de caméra pinhole linéaire dans un plan de vue

La méthode de calibration proposée par Horaud *et al.* consiste à estimer 8 paramètres réels construits à partir de la matrice  $\mathbf{M}$  et des paramètres réels  $p, q, r$  de l'équation (2.8) du plan de vue  $\Pi$  contenant la droite du détecteur linéaire et la source à rayons X.

$$X = pY + qZ + r \quad (2.8)$$

Dans le plan de vue, l'équation (2.7) peut être réécrite à partir de 5 paramètres réels. En effet, en réinjectant l'équation du plan (2.8) dans le modèle de caméra pinhole linéaire (2.7), on obtient l'équation :

$$v = \frac{(m_{21}p + m_{22})Y + (m_{21}q + m_{23})Z + (m_{21}r + m_{24})}{(m_{31}p + m_{32})Y + (m_{31}q + m_{33})Z + (m_{31}r + m_{34})} \quad (2.9)$$

$$= \frac{m_1Y + m_2Z + m_3}{m_4Y + m_5Z + m_6} \quad (2.10)$$

Pour  $m_6 \neq 0$ , le nombre de paramètres est réduit à 5 en divisant le numérateur et le dénominateur par  $m_6$ . Ainsi, l'équation (2.7) peut s'écrire de la manière suivante :

$$v = \frac{n_1Y + n_2Z + n_3}{n_4Y + n_5Z + 1} \quad (2.11)$$

Pour la suite, on réécrit l'équation de projection (2.11) sous la forme d'une équation linéaire en les paramètres  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$ .

$$(n_1 - n_4v)Y + (n_2 - n_5v)Z + n_3 - v = 0 \quad (2.12)$$

Ainsi, le problème de calibration se résout en estimant les 8 paramètres réels  $p, q, r, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$  à partir des équations linéaires (2.8) et (2.12). En effet, l'utilisation de triplets de données de la forme  $\{Y, Z, v\}$  permet de résoudre un système d'équations basé sur l'équation (2.12), et donc de déterminer les paramètres  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$ . De même, les paramètres  $p, q, r$  sont déterminés en résolvant un système d'équations basé sur l'équation (2.8). Des triplets de données de la forme  $\{X, Y, Z\}$  sont utilisés pour résoudre le système d'équations. Ces triplets sont déterminés en utilisant un invariant de la géométrie projective : le cross-ratio. L'information contenue dans ces 8 paramètres permet d'estimer analytiquement les paramètres intrinsèques et extrinsèques du système. Dans la section suivante, nous présentons un calibre permettant de générer les triplets de données nécessaires à l'estimation des 8 paramètres réels.

### 2.3.2 Objet géométrique de calibration

L'objet de calibration (ou le calibre) est un objet dont on considère que l'on connaît parfaitement la géométrie. Horaud *et al.* proposent un calibre constitué de 4 droites coplanaires dont 3 sont parallèles entre elles et une est oblique. Par exemple, si on considère le calibre représenté dans la Fig. 24, les droites sont définies dans le plan  $Z = 0$  par les équations suivantes, où les paramètres  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma$  et  $\delta$  sont fixés.

$$(L_1) Y = 0 \quad (2.13)$$

$$(L_2) Y = \varepsilon_1 \quad (2.14)$$

$$(L_3) Y = \varepsilon_2 \quad (2.15)$$

$$(L_4) Y = \gamma X + \delta \quad (2.16)$$

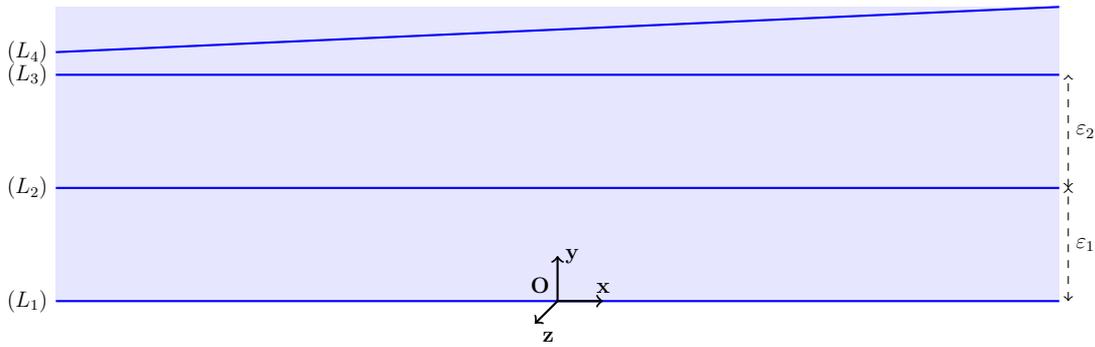


FIGURE 24 – Interprétation du calibre proposé par Horaud *et al.* [37]. Le repère monde  $(\mathbf{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  est défini relativement aux droites. Les paramètres  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont fixés.

Les coordonnées des intersections des droites et du plan de vue  $\Pi$  ainsi que les projections des droites permettent de résoudre le problème de calibration. Les droites parallèles  $(L_1)$ ,  $(L_2)$ ,  $(L_3)$  sont utilisées pour générer des triplets de la forme  $\{Y^P, Z^P, v^P\}$  vérifiant l'équation (2.12), où  $Y^P$  et  $Z^P$  sont les coordonnées de l'intersection des droites parallèles et du plan  $\Pi$ , et  $v^P$  est la projection de la droite sur l'axe image  $\mathbf{v}$ . La droite  $(L_4)$  est utilisée pour générer un triplet de la forme  $\{X^O, Y^O, Z^O\}$  vérifiant l'équation (2.8). Ce triplet correspond à l'intersection de la droite oblique et du plan  $\Pi$ . Toutefois, contrairement aux droites parallèles, seule la coordonnée  $Z^O$  de ce triplet est connue. Les coordonnées  $X^O$  et  $Y^O$  des intersections sont obtenues à partir de la projection de cette intersection et des données des droites parallèles en utilisant un invariant de la géométrie projective : le cross-ratio [8].

Le calibre permet aussi de définir le repère monde  $(\mathbf{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ . En effet, dans le cas du calibre de la Fig. 24, les vecteurs sont définis relativement aux droites du calibre :

- $\mathbf{O}$  est un point de la droite  $(L_1)$ ,
- $\mathbf{x}$  est parallèle à  $(L_1)$ ,
- $\mathbf{y}$  est orthogonal à l'axe  $\mathbf{x}$  dans le plan des droites,
- $\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ .

### 2.3.3 Estimation des paramètres

#### 2.3.3.1 Estimation de $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$

L'estimation des 8 paramètres de calibration se fait en deux étapes indépendantes. La première étape consiste à estimer les paramètres  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$  en utilisant les données issues des droites parallèles du calibre. Ces données sont sous la forme de triplets  $\{Y^P, Z^P, v^P\}$  vérifiant l'équation (2.12). Pour un nombre de droites parallèles  $n_P \geq 5$ , les paramètres  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$  peuvent être estimés si au moins 5 équations basées sur l'équation (2.12) sont indépendantes. Dans ce cas, le calibre n'est pas dégénéré. Toutefois, le calibre de la section 2.3.2 ne possède pas suffisamment de droites parallèles pour acquérir les données nécessaires à la calibration. Horaud *et al.* suggèrent de déplacer le calibre à plusieurs reprises sur les axes  $\mathbf{y}$  et/ou  $\mathbf{z}$  pour générer suffisamment de données. Les translations du calibre dans le repère monde doivent être parfaitement connues. Les droites du calibre sont exprimées dans le repère monde relativement aux translations effectuées depuis la position initiale du calibre. Ainsi, les données sont complétées avec de nouveaux triplets en réalisant des translations du calibre. Pour  $n_P \geq 5$ , on considère les triplets  $\{Y_i^P, Z_i^P, v_i^P\}$  où  $i = 1, \dots, n_P$ . Il suffit de

résoudre le système d'équations (2.17) pour obtenir les estimations de  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$ .

$$\begin{bmatrix} Y_1^P & Z_1^P & 1 & -v_1^P Y_1^P & -v_1^P Z_1^P \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{n_P}^P & Z_{n_P}^P & 1 & -v_{n_P}^P Y_{n_P}^P & -v_{n_P}^P Z_{n_P}^P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^P \\ \vdots \\ v_{n_P}^P \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

On observe que le rang de la matrice du système (2.17) est inférieur à 5 si  $Y_1^P = \dots = Y_{n_P}^P$  ou  $Z_1^P = \dots = Z_{n_P}^P$ . Dans ce cas, le système a une infinité de solutions. Ce cas correspond à un calibre dont les droites parallèles sont toutes coplanaires. Ainsi, il est nécessaire de déplacer le calibre au moins une fois sur l'axe orthogonal au plan contenant les droites (pour la Fig. 24, sur l'axe  $\mathbf{z}$ ). Le système d'équations (2.17) peut être résolu avec la méthode des moindres carrés. Elle est usuellement utilisée lorsque les données sont bruitées (bruit sur les projections  $v_i^P$ , imprécisions sur les coordonnées  $Y_i^P$  et  $Z_i^P$ ,  $i = 1, \dots, n_P$ ). En effet, le système (2.17) peut ne pas avoir de solution lorsque les données sont bruitées. Les moindres carrés permettent d'estimer une solution dans ce cas là.

### 2.3.3.2 Estimation de $p, q, r$

La deuxième étape consiste à estimer les paramètres  $p, q, r$  à partir des données issues des droites obliques du calibre. Ces données sont sous la forme de triplets  $\{X^O, Y^O, Z^O\}$  vérifiant l'équation (2.8). L'équation de la droite oblique ( $L_4$ ) ne permet pas à elle seule de déterminer ces triplets. Seules la coordonnée  $Z^O$  et l'équation de la droite ( $L_4$ ) sont connues. Horaud *et al.* proposent d'utiliser le cross-ratio, un invariant de la géométrie projective, pour déterminer les coordonnées  $X^O$  et  $Y^O$ . Le cross-ratio se calcule à partir des triplets  $\{Y^P, Z^P, v^P\}$  issus de l'ensemble des quatre droites.

Notons  $A_1, A_2, A_3, A_4$  respectivement les intersections des droites ( $L_1$ ), ( $L_2$ ), ( $L_3$ ), ( $L_4$ ) avec le plan  $\Pi$ . Notons  $p_1, p_2, p_3, p_4$  respectivement les projections sur l'axe image  $\mathbf{y}_D$  des intersections  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Ces points sont représentés dans la Fig. 25. Nous notons  $\overline{AB}$  la distance euclidienne entre les points  $A$  et  $B$ . Le cross-ratio  $\kappa$  est défini par l'équation :

$$\kappa(A_1, A_2, A_3, A_4) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\overline{A_1 A_3} \overline{A_2 A_4}}{\overline{A_2 A_3} \overline{A_1 A_4}} \quad (2.18)$$

Le cross-ratio est préservé par projection. Cela se traduit par l'égalité suivante :

$$\kappa(A_1, A_2, A_3, A_4) = \kappa(p_1, p_2, p_3, p_4) \quad (2.19)$$

De plus, le cross-ratio est invariant par projection parallèle. On peut donc projeter les points  $A_1, A_2, A_3, A_4$  sur l'axe  $\mathbf{y}$ . Nous notons ces points respectivement  $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4$ . Leurs coordonnées en  $Y$  sont identiques à celles des points  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , respectivement. Ainsi, on a :

$$\kappa(A_1, A_2, A_3, A_4) = \kappa(A'_1, A'_2, A'_3, A'_4) \quad (2.20)$$

Il n'est donc pas nécessaire de déterminer la coordonnée  $X$  des intersections du plan  $\Pi$  et des droites pour calculer le cross-ratio. En effet, les droites sont définies dans un même plan où  $Z$  est constant. Le cross-ratio peut alors être calculé uniquement à partir de la coordonnée  $Y$  des intersections ou des projections sur l'axe image de ces intersections. Par définition, les projections des intersections sont contenues sur l'axe  $\mathbf{v}$ . Ainsi, on exprime le cross-ratio  $\kappa(A_1, A_2, A_3, A_4)$  dans les équations (2.21) et (2.22) en fonction de la coordonnée  $Y$  des

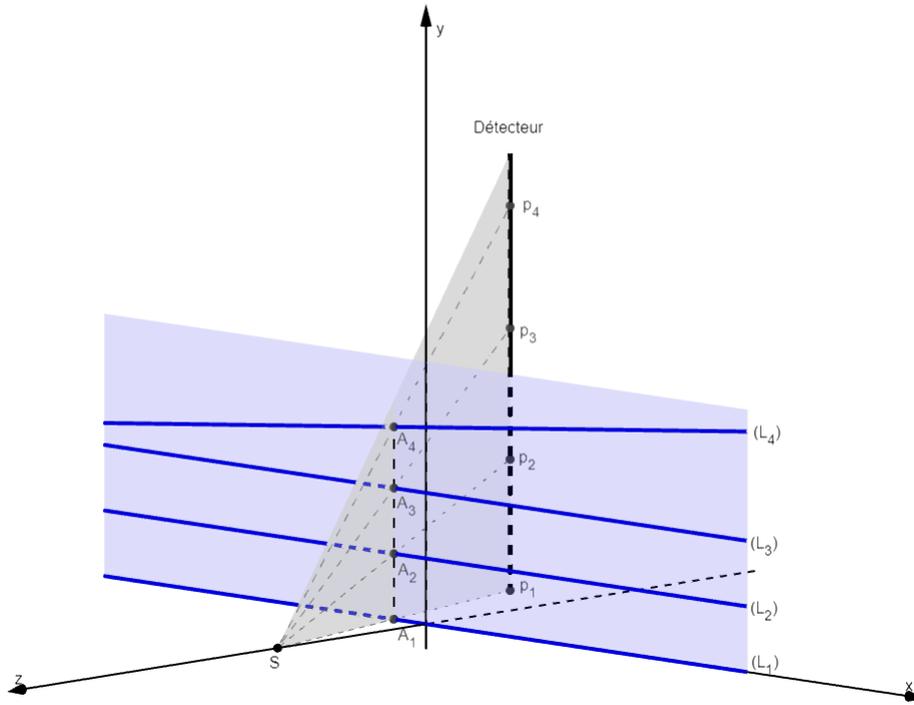


FIGURE 25 – Illustration de la projection du calibre sur le détecteur. Le cross-ratio des intersections des droites du calibre, notées  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , et des projections de ces points sur le détecteur, notées respectivement  $p_1, p_2, p_3, p_4$ , sont égaux.

intersections  $A_1, A_2, A_3, A_4$  et de leurs projections respectives  $v_1^P, v_2^P, v_3^P, v_4^O$  correspondant aux points du détecteur  $p_1, p_2, p_3, p_4$  exprimés en pixels sur l'axe image  $\mathbf{v}$ .

$$\kappa(A_1, A_2, A_3, A_4) = \left( \frac{Y_{A_3}^P - Y_{A_1}^P}{Y_{A_3}^P - Y_{A_2}^P} \right) \left( \frac{Y_{A_4}^O - Y_{A_2}^P}{Y_{A_4}^O - Y_{A_1}^P} \right) \quad (2.21)$$

$$= \left( \frac{v_3^P - v_1^P}{v_3^P - v_2^P} \right) \left( \frac{v_4^O - v_2^P}{v_4^O - v_1^P} \right) \quad (2.22)$$

$$= \kappa(p_1, p_2, p_3, p_4) \quad (2.23)$$

En réarrangeant les termes des équations (2.21) et (2.22), on exprime analytiquement la coordonnée  $Y_{A_4}^O$  :

$$Y_{A_4}^O = \frac{Y_{A_2}^P - \kappa(p_1, p_2, p_3, p_4) Y_{A_1}^P \left( \frac{Y_{A_3}^P - Y_{A_2}^P}{Y_{A_3}^P - Y_{A_1}^P} \right)}{1 - \kappa(p_1, p_2, p_3, p_4) \left( \frac{Y_{A_3}^P - Y_{A_2}^P}{Y_{A_3}^P - Y_{A_1}^P} \right)} \quad (2.24)$$

En réinjectant l'expression de  $Y_{A_4}^O$  dans l'équation (2.16), on exprime analytiquement la coordonnée  $X_{A_4}^O$  :

$$X_{A_4}^O = \frac{Y_{A_4}^O - \delta}{\gamma} \quad (2.25)$$

On vient de montrer qu'il est possible de déterminer la position de l'intersection de la droite oblique ( $L_4$ ) et du plan  $\Pi$  à partir des données des droites du calibre. Pour un nombre de droites obliques  $n_O \geq 3$ , les triplets  $\{X^O, Y^O, Z^O\}$  de données nécessaires à l'estimation des paramètres  $p, q, r$  peuvent être calculés. Néanmoins, le calibre de la Fig. 24 ne permet pas de générer les données nécessaires à l'estimation des paramètres. De manière similaire à l'estimation des paramètres  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$ , il faut déplacer le calibre à au moins 3 reprises sur les axes  $\mathbf{y}$  et/ou  $\mathbf{z}$  pour déterminer les paramètres du plan. Pour  $n_O \geq 3$ , on considère

les triplets  $\{X_i^O, Y_i^O, Z_i^O\}$  où  $i = 1, \dots, n_O$ . Il suffit de résoudre le système d'équations (2.26) pour estimer les paramètres  $p, q, r$ .

$$\begin{bmatrix} Y_1^O & Z_1^O & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{n_O}^O & Z_{n_O}^O & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^O \\ \vdots \\ X_{n_O}^O \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Le système d'équations (2.26) peut être résolu avec la méthode des moindres carrés. Les remarques effectuées pour la résolution du système d'équations (2.17) restent valables pour le système (2.26).

## 2.4 Méthodes d'optimisation pour un système multi-détecteur

Nous généralisons la méthode de Horaud *et al.* à un système composé de plusieurs détecteurs linéaires et d'une unique source. Les méthodes proposées exploitent la redondance de données induite par l'utilisation d'une seule source. En effet, si on suppose que la source est ponctuelle, tous les plans de vue s'intersectent en ce point. Dans la section 2.4.1, nous commençons par introduire les notations utilisées pour la généralisation de la méthode à plusieurs détecteurs. Puis, dans la section 2.4.2, nous présentons quatre méthodes de calibration.

### 2.4.1 Notations

Nous considérons un système à  $n_d$  détecteurs linéaires notés  $D_l$ ,  $l = 1, \dots, n_d$ , et une source  $S$ . Un système composé de deux détecteurs linéaires est illustré dans la Fig. 26. Nous conservons les mêmes notations que précédemment pour le repère monde  $(\mathbf{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ . Toutefois, il est nécessaire de considérer un repère image et source-détecteur pour chaque détecteur. Nous les notons respectivement  $(\mathbf{O}_{I_l}, \mathbf{u}_l, \mathbf{v}_l)$  et  $(\mathbf{O}_{D_l}, \mathbf{x}_{D_l}, \mathbf{y}_{D_l}, \mathbf{z}_{D_l})$  pour  $l = 1, \dots, n_d$ . Les plans de vue sont notés  $\Pi_l$ ,  $l = 1, \dots, n_d$ . Pour un point  $[X, Y, Z]^T$  dans le plan  $\Pi_l$ , l'équation

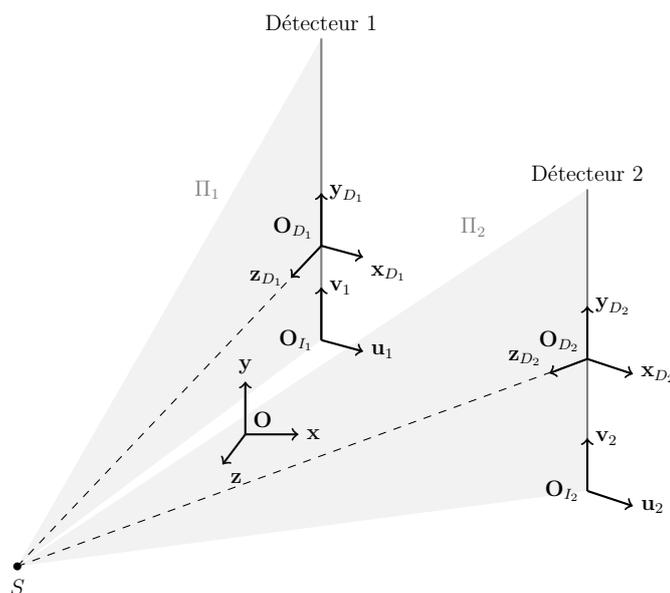


FIGURE 26 – Représentation d'un système composé d'une source  $S$  et de deux détecteurs linéaires.

du plan s’écrit (voir Eq. (2.8)) :

$$X = p_l Y + q_l Z + r_l \quad (2.27)$$

La projection  $v$  du point  $[X, Y, Z]^T$  sur l’axe image  $\mathbf{v}_l$  s’écrit :

$$v = \frac{n_{1,l}Y + n_{2,l}Z + n_{3,l}}{n_{4,l}Y + n_{5,l}Z + 1} \quad (2.28)$$

Nous indexons les paramètres intrinsèques et extrinsèques des détecteurs de la manière suivante :  $\mathbf{R}_l$ ,  $\mathbf{t}_l$ ,  $v_{0,l}$  et  $\alpha_{v,l} = -k_{v,l}f_l$  pour  $l = 1, \dots, n_d$ . Finalement, nous généralisons les notations pour les données issues du calibre et de ses projections. Considérons un calibre composé de  $n_P$  droites parallèles entre elles et de  $n_O$  droites obliques pour chaque détecteur ( $n_O n_d$  droites obliques au total). Nous notons  $\{Y_{l,i}^P, Z_{l,i}^P, v_{l,i}^P\}$  les données issues des droites parallèles,  $i = 1, \dots, n_P$ , et  $\{X_{l,j}^O, Y_{l,j}^O, Z_{l,j}^O\}$  les intersections des droites obliques et des plans de vue  $\Pi_l$ ,  $j = 1, \dots, n_O$ , pour  $l = 1, \dots, n_d$ .

## 2.4.2 Méthodes proposées

Nous proposons quatre méthodes pour résoudre le problème de calibration dans le cas d’un système à plusieurs détecteurs linéaires. Les méthodes utilisent la redondance de données générée par l’utilisation d’une seule source pour plusieurs détecteurs dans le système de radiographie. Toutes les méthodes proposées nécessitent d’appliquer dans un premier temps la méthode de Horaud *et al.* indépendamment à chaque sous-système composé d’un détecteur et de la source afin de déterminer les paramètres  $p_l$ ,  $q_l$ ,  $r_l$ ,  $n_{1,l}$ ,  $n_{2,l}$ ,  $n_{3,l}$ ,  $n_{4,l}$ ,  $n_{5,l}$ ,  $l = 1, \dots, n_d$ . Dans un deuxième temps, les méthodes permettent d’estimer directement la position de la source  $S$  et, pour la plupart, d’améliorer les estimations des paramètres de calibration obtenues avec la méthode de Horaud *et al.* à travers la redondance des données (caractérisée par l’existence d’une source commune à tous les détecteurs). Trois méthodes utilisent l’algorithme d’optimisation de Gauss-Newton [18].

**Méthode  $M_1$**  Pour cette méthode, nous proposons uniquement de résoudre le système d’équations linéaires (2.29) permettant de déterminer la position de la source  $S = [X_S, Y_S, Z_S]^T$ . En effet, la source se trouve à l’intersection de tous les plans de vue et dans tous les plans de projection. Elle vérifie donc les équations (2.27) et (2.28) pour tous les détecteurs. Nous proposons donc de former un système d’équations à partir de ces équations. Nous notons  $v_{l,*}$  et  $v_{l,\diamond}$  deux pixels distincts de chaque détecteur,  $l = 1, \dots, n_d$ . Le système d’équations s’écrit alors :

$$\begin{cases} (n_{1,l} - n_{4,l}v_{l,*})Y_S + (n_{2,l} - n_{5,l}v_{l,*})Z_S + n_{3,l} - v_{l,*} = 0 \\ (n_{1,l} - n_{4,l}v_{l,\diamond})Y_S + (n_{2,l} - n_{5,l}v_{l,\diamond})Z_S + n_{3,l} - v_{l,\diamond} = 0 \\ -X_S + p_l Y_S + q_l Z_S + r_l = 0 \end{cases}, l = 1, \dots, n_d \quad (2.29)$$

Ce système d’équations linéaires à  $3n_d$  équations peut être résolu en utilisant la méthode des moindres carrés.

**Méthode  $M_2$**  Nous cherchons à utiliser la redondance des données pour améliorer les estimations des paramètres des plans de vue et de la position de la source. Nous construisons un système d’équations non-linéaires en  $p_l$ ,  $q_l$ ,  $r_l$ ,  $X_S$ ,  $Y_S$ ,  $Z_S$ ,  $l = 1, \dots, n_d$ . Il reprend le système d’équations de la méthode  $M_1$  et inclut l’équation (2.27) vérifiée par les intersections

des droites obliques et des plans de vue. Il s'écrit :

$$\begin{cases} (n_{1,l} - n_{4,l}v_{l,*})Y_S + (n_{2,l} - n_{5,l}v_{l,*})Z_S = v_{l,*} - n_{3,l} \\ (n_{1,l} - n_{4,l}v_{l,\diamond})Y_S + (n_{2,l} - n_{5,l}v_{l,\diamond})Z_S = v_{l,\diamond} - n_{3,l} \\ -X_S + p_l Y_S + q_l Z_S + r_l = 0 \\ p_l Y_{l,j}^O + q_l Z_{l,j}^O + r_l = X_{l,j}^O, \quad j = 1, \dots, n_O \end{cases}, \quad l = 1, \dots, n_d \quad (2.30)$$

Ce système d'équations non-linéaires à  $(n_O + 3)n_d$  équations et  $3 + 3n_d$  paramètres peut être résolu avec l'algorithme de Gauss-Newton. Les valeurs initiales des paramètres sont déterminées en appliquant la méthode  $M_1$ .

**Méthode  $M_3$**  Nous proposons un deuxième système d'équations non-linéaires en  $n_{1,l}$ ,  $n_{2,l}$ ,  $n_{3,l}$ ,  $n_{4,l}$ ,  $n_{5,l}$ ,  $X_S$ ,  $Y_S$ ,  $Z_S$ ,  $l = 1, \dots, n_d$ . Il est composé des équations de la méthode  $M_1$  et de l'équation (2.28) vérifiée par les intersections des droites parallèles et des plans de vue. L'objectif est d'améliorer les estimations des paramètres de projection dans les plans de vue et de déterminer la position de la source. Le système s'écrit :

$$\begin{cases} (n_{1,l} - n_{4,l}v_{l,*})Y_S + (n_{2,l} - n_{5,l}v_{l,*})Z_S + n_{3,l} = v_{l,*} \\ (n_{1,l} - n_{4,l}v_{l,\diamond})Y_S + (n_{2,l} - n_{5,l}v_{l,\diamond})Z_S + n_{3,l} = v_{l,\diamond} \\ -X_S + p_l Y_S + q_l Z_S = -r_l \\ (n_{1,l} - n_{4,l}v_{l,i}^P)Y_{l,i}^P + (n_{2,l} - n_{5,l}v_{l,i}^P)Z_{l,i}^P + n_{3,l} = v_{l,i}^P, \quad i = 1, \dots, n_P \end{cases}, \quad l = 1, \dots, n_d \quad (2.31)$$

Ce système d'équations à  $(n_P + 3)n_d$  équations et  $3 + 5n_d$  paramètres se résout avec l'algorithme de Gauss-Newton. Comme pour la méthode  $M_2$ , il peut être initialisé en utilisant les valeurs obtenues avec la méthode  $M_1$ .

**Méthode  $M_4$**  Nous proposons un troisième système d'équations non-linéaires en  $p_l$ ,  $q_l$ ,  $r_l$ ,  $n_{1,l}$ ,  $n_{2,l}$ ,  $n_{3,l}$ ,  $n_{4,l}$ ,  $n_{5,l}$ ,  $X_S$ ,  $Y_S$  et  $Z_S$ ,  $l = 1, \dots, n_d$ . Il inclut tous les paramètres de calibration et la position de la source  $S$ . Il reprend l'ensemble des équations des méthodes  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ . L'objectif est d'améliorer les 8 paramètres de calibration pour chaque détecteur et de déterminer la position de la source. Pour deux pixels distincts  $v_{l,*}$  et  $v_{l,\diamond}$  de chaque détecteur, il s'écrit :

$$\begin{cases} (n_{1,l} - n_{4,l}v_{l,*})Y_S + (n_{2,l} - n_{5,l}v_{l,*})Z_S + n_{3,l} = v_{l,*} \\ (n_{1,l} - n_{4,l}v_{l,\diamond})Y_S + (n_{2,l} - n_{5,l}v_{l,\diamond})Z_S + n_{3,l} = v_{l,\diamond} \\ -X_S + p_l Y_S + q_l Z_S + r_l = 0 \\ (n_{1,l} - n_{4,l}v_{l,i}^P)Y_{l,i}^P + (n_{2,l} - n_{5,l}v_{l,i}^P)Z_{l,i}^P + n_{3,l} = v_{l,i}^P, \quad i = 1, \dots, n_P \\ p_l Y_{l,j}^O + q_l Z_{l,j}^O + r_l = X_{l,j}^O, \quad j = 1, \dots, n_O \end{cases}, \quad l = 1, \dots, n_d \quad (2.32)$$

Ce système d'équations à  $(n_P + n_O + 3)n_d$  équations et  $3 + 8n_d$  paramètres peut être résolu avec l'algorithme de Gauss-Newton. Comme pour  $M_2$  et  $M_3$ , l'algorithme est initialisé à partir des estimations des paramètres obtenues avec la méthode  $M_1$ .

## 2.5 Estimation des paramètres géométriques

L'estimation des paramètres se fait de manière indépendante pour chaque détecteur à l'exception de la position de la source  $S$ . Néanmoins, nous proposons une méthode analytique pour déterminer la position de la source dans le cas d'un système à un détecteur. Dans cette section, nous utilisons les notations sans indexation relative aux détecteurs. Ainsi, après avoir déterminé les paramètres  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ ,  $n_4$ ,  $n_5$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , nous cherchons à calculer la valeur des paramètres extrinsèques  $\mathbf{R}$ ,  $X_S$ ,  $Y_S$ ,  $Z_S$  et intrinsèques  $v_0$ ,  $\alpha_v = -k_v f$  du système de radiographie. Les méthodes d'estimation des paramètres extrinsèques  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{t}$  et  $S$  sont adaptées à notre géométrie de l'article de Horaud *et al.* [37]. Nous complétons ces résultats en proposant des méthodes d'estimation des paramètres intrinsèques.

**Position de la source  $S$**  Le plan de projection  $\Pi$  défini par l'équation (2.8), et toutes les droites de projection définies par l'équation (2.12) dans le plan  $\Pi$  s'intersectent à la source  $S$ . Ainsi, le système d'équations (2.33) est vérifié par  $S = [X_S, Y_S, Z_S]^T$ , où  $v^*$  et  $v^\diamond$  sont deux pixels distincts du détecteur. On remarque que le système d'équation (2.33) est linéaire en  $X_S, Y_S, Z_S$ .

$$\begin{cases} (n_1 - n_4 v^*)Y_S + (n_2 - n_5 v^*)Z_S + n_3 - v^* = 0 & (*) \\ (n_1 - n_4 v^\diamond)Y_S + (n_2 - n_5 v^\diamond)Z_S + n_3 - v^\diamond = 0 & (**) \\ -X_S + pY_S + qZ_S + r = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

La position de la source peut être déterminée analytiquement. En effet, en notant (\*) la première ligne du système d'équation (2.33) et (\*\*) la deuxième ligne, nous exprimons analytiquement  $Y_S$  dans l'équation (2.34), pour  $n_1 n_5 - n_2 n_4 \neq 0$ , en effectuant la combinaison linéaire  $(*)(n_2 - n_5 v^\diamond) - (**)(n_2 - n_5 v^*)$ .

$$Y_S = \frac{n_2 - n_3 n_5}{n_1 n_5 - n_2 n_4} \quad (2.34)$$

De même, nous exprimons analytiquement  $Z_S$  dans l'équation (2.35), pour  $n_2 n_4 - n_1 n_5 \neq 0$ , en effectuant la combinaison linéaire  $(*)(n_1 - n_4 v^\diamond) - (**)(n_1 - n_4 v^*)$ .

$$Z_S = \frac{n_1 - n_3 n_4}{n_2 n_4 - n_1 n_5} \quad (2.35)$$

Enfin, en réinjectant les équations (2.34) et (2.35) dans l'équation du plan de vue (2.8), nous obtenons l'expression analytique de  $X_S$ .

**Pixel de référence  $v_0$**  Le pixel de référence  $v_0$  correspond au point principal du détecteur sur l'axe  $\mathbf{v}$ . Il est défini comme étant la projection orthogonale de la source sur le détecteur. Soient  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  deux vecteurs définis par :

$$\mathbf{a}_1 \stackrel{\text{déf}}{=} [0, n_1 - n_4 v_0, n_2 - n_5 v_0]^T \quad (2.36)$$

$$\mathbf{a}_2 \stackrel{\text{déf}}{=} [-1, p, q]^T \quad (2.37)$$

Ces vecteurs correspondent respectivement à la normale au plan de vue ainsi qu'à la droite de projection passant par le point principal du détecteur et la source. La projection de la source est orthogonale au détecteur uniquement lorsque les vecteurs  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  sont orthogonaux. Cette condition se caractérise par l'équation suivante :

$$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle = 0 \quad (2.38)$$

Ainsi, pour  $n_4 p + n_5 q \neq 0$ , le point principal  $v_0$  se calcule analytiquement avec la formule suivante :

$$v_0 = \frac{n_1 p + n_2 q}{n_4 p + n_5 q} \quad (2.39)$$

**Matrice de rotation  $\mathbf{R}$**  Nous adaptons la méthode d'estimation de la matrice de rotation  $\mathbf{R}$  proposée par Horaud *et al.* à notre système. Nous fixons alors  $v = v_0$ . En effet, la rotation est définie par rapport au point principal du détecteur. Nous utilisons les vecteurs  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  pour déterminer l'orientation du détecteur relativement au repère monde  $(\mathbf{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ . En notant  $\times$  le produit vectoriel, nous exprimons les vecteurs unitaires  $\mathbf{x}_D, \mathbf{y}_D$  et  $\mathbf{z}_D$  en fonction de  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  dans les équations suivantes :

$$\mathbf{x}_D = -\frac{\mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_2\|} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{z}_D = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{y}_D = \mathbf{z}_D \times \mathbf{x}_D \quad (2.42)$$

La matrice  $\mathbf{R}$  est obtenue à partir des vecteurs  $\mathbf{x}_D, \mathbf{y}_D, \mathbf{z}_D$  :

$$\mathbf{R} = [\mathbf{x}_D, \mathbf{y}_D, \mathbf{z}_D] \quad (2.43)$$

**Vecteur de translation  $\mathbf{t}$**  Par définition, le vecteur de translation  $\mathbf{t}$  s'exprime en fonction de la matrice de rotation  $\mathbf{R}$  et de la position de la source  $S$ . En effet, il est défini par  $\mathbf{t} = -\mathbf{R}[X_S, Y_S, Z_S]^T$ . Nous estimons donc le vecteur  $\mathbf{t}$  à partir des valeurs de  $\mathbf{R}$  et  $S$ .

**Densité de pixel  $k_v$**  Notons  $h_v > 0$  la hauteur des pixels du détecteur dans la direction  $\mathbf{v}$ . Nous définissons la densité de pixel dans la direction  $\mathbf{v}$  par :

$$k_v \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{h_v} \quad (2.44)$$

Nous supposons que  $h_v$  est connu. Il n'est donc pas nécessaire d'estimer ce paramètre.

**Distance source-détecteur  $f$**  La distance source-détecteur  $f$  est incluse dans le paramètre  $\alpha_v = -k_v f$ . Or, la valeur de  $k_v$  est fixée. Nous pouvons donc estimer  $f$  à partir de  $\alpha_v$ . L'expression de  $\alpha_v$  s'obtient en développant l'équation (2.3). En effet, on a :

$$\begin{bmatrix} m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_v r_{21} + v_0 r_{31} & \alpha_v r_{22} + v_0 r_{32} & \alpha_v r_{23} + v_0 r_{33} & \alpha_v t_2 + v_0 t_3 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Le coefficient  $m_6$  est défini par (voir équation (2.9)) :

$$m_6 = m_{31}r + m_{34} \quad (2.46)$$

$$= r_{31}r + t_3 \quad (2.47)$$

Il se calcule à partir de deux coefficients de  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{t}$  dont nous estimons les valeurs avec les formules proposées ci-dessus. Ainsi, nous pouvons calculer les coefficients  $m_i = n_i m_6$  à partir de  $m_6$  et des  $n_i$ , pour  $i = 1, \dots, 5$ . Les coefficients  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , sont définis par (voir équations (2.9) et (2.45)) :

$$\begin{cases} m_1 = (\alpha_v r_{21} + v_0 r_{31})p + (\alpha_v r_{22} + v_0 r_{32}) \\ m_2 = (\alpha_v r_{21} + v_0 r_{31})q + (\alpha_v r_{23} + v_0 r_{33}) \\ m_3 = (\alpha_v r_{21} + v_0 r_{31})r + (\alpha_v t_2 + v_0 t_3) \\ m_4 = r_{31}p + r_{32} \\ m_5 = r_{31}q + r_{33} \end{cases} \quad (2.48)$$

On remarque que les coefficients  $m_1, m_2, m_3$  dépendent de  $\alpha_v$ . Nous choisissons d'exprimer  $\alpha_v$  en fonction de  $m_1$ . Néanmoins, il est aussi possible d'utiliser les coefficients  $m_2$  et  $m_3$  ou une combinaison linéaire des coefficients  $m_1, m_2$  et  $m_3$  pour calculer  $\alpha_v$ . En considérant que  $r_{21}p + r_{22} \neq 0$ , nous obtenons l'équation suivante :

$$\alpha_v = \frac{m_1 - v_0(r_{31}p + r_{32})}{r_{21}p + r_{22}} \quad (2.49)$$

Finalement, nous obtenons l'expression analytique de  $f$  :

$$f = -\frac{1}{k_v} \frac{m_1 - v_0(r_{31}p + r_{32})}{r_{21}p + r_{22}} \quad (2.50)$$

Ce paramètre se calcule seulement après avoir déterminé les valeurs de  $v_0, \mathbf{t}$  et  $\mathbf{R}$ .

## 2.6 Adaptation et optimisation du calibre pour un système multi-détecteur

Le calibre proposé par Horaud *et al.* n’est pas adapté à un système à une source et plusieurs détecteurs. De plus, les translations du calibre nécessaires à l’acquisition des données peuvent être source d’erreurs si elles ne sont pas assez précises. Dans cette partie, nous présentons les étapes de construction d’un calibre adapté à notre géométrie. Ces étapes reposent uniquement sur des simulations numériques. Ainsi, dans la section 2.6.1, nous commençons par introduire la géométrie du système utilisée pour les simulations. Dans la section 2.6.2, nous présentons une version du calibre de Horaud *et al.* ne nécessitant pas de translation. Dans la section 2.6.3, nous introduisons un calibre composé d’un nombre minimal de droites. Puis, dans la section 2.6.4, nous proposons des améliorations au calibre minimal. Enfin, dans la section 2.6.5, nous présentons une version du calibre adaptée à notre géométrie. Un tableau de synthèse sur l’ensemble des calibres proposés dans cette partie se trouve dans l’annexe B.

### 2.6.1 Géométrie du système idéal

Nous considérons un système de radiographie à 12 détecteurs linéaires et une source dans nos simulations numériques. Néanmoins, dans la suite, les améliorations proposées sont présentées de manière générale afin de pouvoir être adaptées à d’autres géométries. La géométrie de notre système idéal est illustrée dans la Fig. 27. Nous notons  $D_l$  les détecteurs et  $\Pi_l$  les plans de projection associés à ces détecteurs,  $l = 1, \dots, n_d$ . Les détecteurs sont idéalement situés sur une droite à une distance de 480mm de la source  $S$ . Ils sont considérés parfaitement verticaux ( $\theta_x = 0^\circ$ ,  $\theta_z = 0^\circ$ ) dans les simulations. Les détecteurs sont répartis de manière régulière sur un angle d’ouverture de  $110^\circ$ . La taille des pixels des détecteurs est de  $h_v = 0.4\text{mm}$  sur l’axe verticale.

### 2.6.2 Généralisation du calibre de Horaud *et al.*

Nous proposons d’améliorer le calibre présenté dans la section 2.3.2. Ce calibre est composé de 4 droites coplanaires dont 3 sont parallèles entre elles et 1 est oblique. Il est nécessaire de faire au moins 3 translations du calibre sur les axes  $\mathbf{y}$  et/ou  $\mathbf{z}$  pour chaque détecteur afin

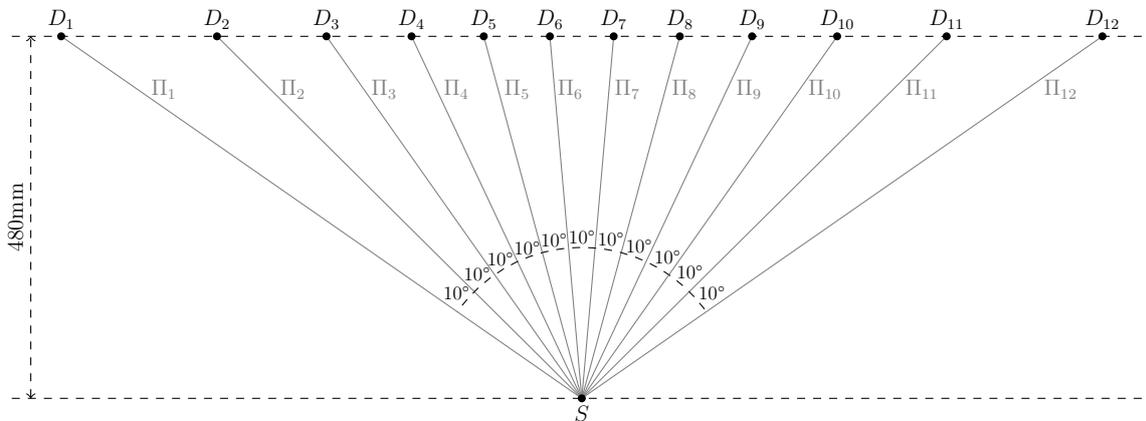


FIGURE 27 – Géométrie *idéale* du système de radiographie utilisé dans les simulations numériques pour la conception d’un calibre adapté. Le schéma représente le plan 2D contenant le point source  $S$  et les pixels 0 des détecteurs  $D_l$ ,  $l = 1, \dots, n_d$ . Les détecteurs sont placés verticalement sur une droite à une distance de 480mm de la source. Ils sont répartis à un angle constant sur  $110^\circ$ .

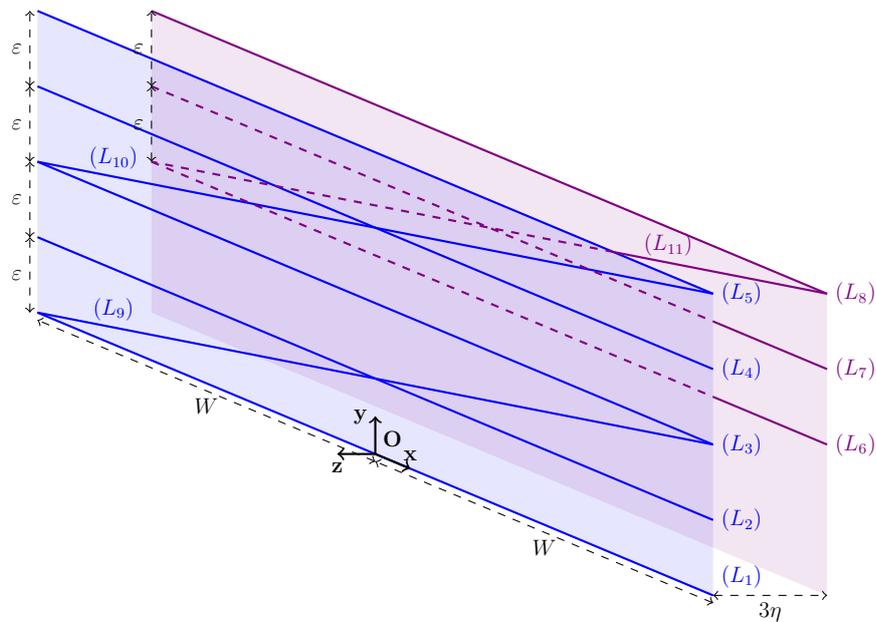


FIGURE 28 – Généralisation du calibre de Horaud *et al.* pour un système à plusieurs détecteurs. Le calibre correspond à l'agrégation du calibre de la Fig. 24 positionné à trois positions différentes. Il est construit suffisamment large pour que toutes les droites soient projetées sur l'ensemble des détecteurs.

d'acquérir suffisamment de données pour résoudre le problème de calibration. En effet, pour estimer les paramètres des plans de vue, il est nécessaire d'avoir un calibre contenant au moins 3 droites obliques dont les intersections avec les plans de vue ne sont pas colinéaires. Chaque droite oblique doit être associée à 3 droites parallèles entre elles dans un même plan. Ces 4 droites coplanaires permettent de déterminer les coordonnées des intersections de la droite oblique et des plans de vue à partir du cross-ratio.

Nous proposons une version adaptée à plusieurs détecteurs qui n'a pas besoin d'être déplacée lors de l'acquisition des données. Ce calibre est représenté dans la Fig. 28. Il correspond à l'agrégation du calibre de la Fig. 24 à trois positions différentes. L'espacement entre les droites parallèles est défini par le paramètre  $\varepsilon$ . Ainsi, les translations effectuées sont de  $2\varepsilon$  sur l'axe  $y$  puis  $-3\eta$  sur l'axe  $z$ . Ce calibre est composé de 11 droites dont 8 parallèles entre elles et 3 obliques. La droite  $(L_3)$  est partagée par les deux groupes de droites du plan  $Z = 0$ . Le calibre mesure  $2W$  de large. La valeur du paramètre  $W$  est choisie suffisamment grande pour que le calibre soit assez large pour projeter l'ensemble des droites sur tous les détecteurs. Dans la suite, nous faisons référence à ce calibre en tant que calibre à 2 plans parallèles.

Nous remarquons que ce calibre est composé de beaucoup plus de droites parallèles que nécessaire pour résoudre le problème de calibration. De plus, il n'y a pas de garantie que les projections soient distinctes selon la position des détecteurs et du calibre. Nous proposons de prendre en compte ces remarques dans la section suivante.

### 2.6.3 Calibre minimal

Nous cherchons à construire un calibre optimisé pour notre géométrie. Le calibre doit être utilisable en pratique pour calibrer plusieurs détecteurs linéaires simultanément. Ainsi, nous proposons un calibre composé d'un nombre minimal de droites. L'idée est de positionner les droites et de limiter leur nombre afin de s'assurer que leurs projections ne se superposent pas.

### 2.6.3.1 Principe

Le nombre de droites parallèles et obliques doit être respectivement de  $n_p \geq 5$  et  $n_o \geq 3$  pour que les projections du calibre permettent de résoudre le problème de calibration. Il y a 8 paramètres géométriques à estimer pour chaque détecteur. Le nombre minimal de droites obliques par détecteur est de  $n_o = 3$  pour pouvoir déterminer les 3 paramètres des plans de vue. Ainsi, le nombre minimal de droites parallèles entre elles est de  $n_p = 5$  pour pouvoir déterminer les paramètres  $n_{1,l}, n_{2,l}, n_{3,l}, n_{4,l}, n_{5,l}, l = 1, \dots, n_d$ . Nous considérons deux plans orthogonaux  $Z = 0$  et  $Y = 2\varepsilon$  dans lesquels les droites sont disposées. Ce calibre est illustré dans la Fig. 29. Les cross-ratios peuvent être calculés dans le plan  $Z = 0$  en utilisant à plusieurs reprises les droites parallèles  $(L_1), (L_2), (L_3)$  avec les droites obliques  $(L_6)$  et  $(L_7)$ . Les droites parallèles sont séparées d’une distance  $\eta$  dans le plan  $Y = 2\varepsilon$  et d’une distance  $\varepsilon$  dans le plan  $Z = 0$ . La droite  $(L_3)$  est commune aux deux plans. Les droites obliques sont positionnées pour ne pas intersecter de droites parallèles lorsque  $X \in ]-W, W[$ . Elles sont définies par les équations suivantes :

$$(L_6) \quad Z = 0, \quad Y = \frac{\varepsilon}{2W}X + \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.51)$$

$$(L_7) \quad Z = 0, \quad Y = \frac{\varepsilon}{2W}X + \frac{5\varepsilon}{2} \quad (2.52)$$

$$(L_8) \quad Y = 2\varepsilon, \quad Z = -\frac{\eta}{2W}X - \frac{\eta}{2} \quad (2.53)$$

Ces équations sont de la forme  $Y = \gamma X + \delta$  dans le plan  $Z = 0$  et  $Z = \gamma X + \delta$  dans le plan  $Y = 2\varepsilon$ . Pour éviter les superpositions des projections, la valeur de  $\eta$  doit être choisie telle que les projections de  $(L_4), (L_5)$  et  $(L_8)$  soient comprises entre celles de  $(L_2)$  et  $(L_3)$ . Cette contrainte est nécessaire pour faciliter l’identification des projections des droites sur les détecteurs. Ce calibre est bien minimal puisqu’il est composé de cinq droites parallèles entre elles et de trois droites obliques.

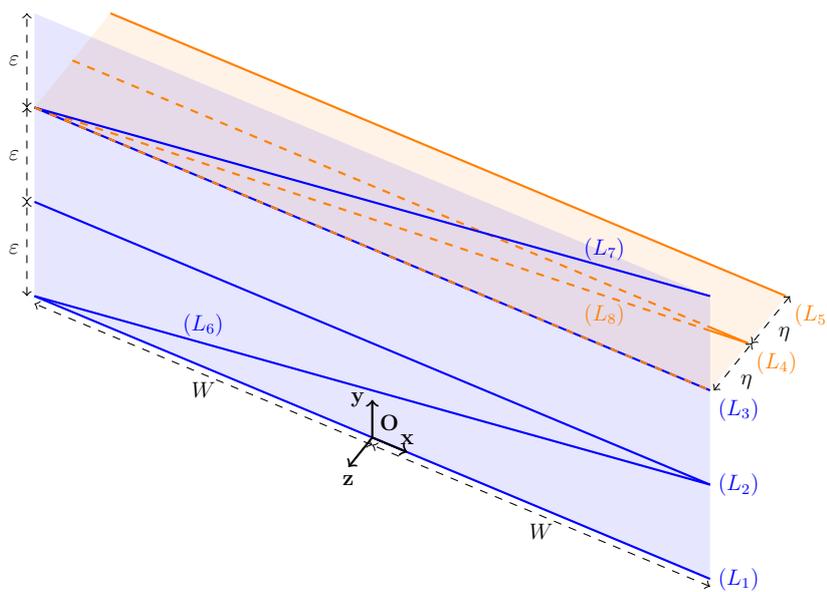


FIGURE 29 – Illustration du calibre minimal. Les droites sont contenues dans deux plans  $Z = 0$  (bleu) et  $Y = 2\varepsilon$  (orange). Les droites obliques sont comprises entre deux droites parallèles. L’image est reprise de [1].

### 2.6.3.2 Faisabilité

La formulation du cross-ratio dans le plan  $Z = 0$  n'est pas adaptée pour déterminer l'intersection des plans de vue avec la droite  $(L_8)$ . En effet, les droites  $(L_3)$ ,  $(L_4)$ ,  $(L_5)$  et  $(L_8)$  sont contenues dans le plan horizontal  $Y = 2\varepsilon$ . Ainsi, les intersections ne sont plus caractérisées par la coordonnée  $Y$  de l'intersection dans la formule du cross-ratio. En utilisant les propriétés du cross-ratio, les résultats peuvent être étendus dans le plan  $Y = 2\varepsilon$  en projetant les intersections sur l'axe  $Z = 0$  dans le plan  $Y = 2\varepsilon$ . Notons  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ , respectivement les intersections entre les droites  $(L_3)$ ,  $(L_4)$ ,  $(L_5)$ ,  $(L_8)$  et le plan de projection  $\Pi$ . En conservant les notations de la section 2.3.3, le cross-ratio s'écrit :

$$\kappa(A_1, A_2, A_3, A_4) = \frac{Z_{A_3} - Z_{A_1}}{Z_{A_4} - Z_{A_1}} \frac{Z_{A_4} - Z_{A_2}}{Z_{A_3} - Z_{A_2}} \quad (2.54)$$

$$= \frac{v_3 - v_1}{v_4 - v_1} \frac{v_4 - v_2}{v_3 - v_2} \quad (2.55)$$

$$= \kappa(p_1, p_2, p_3, p_4) \quad (2.56)$$

Ainsi, on a :

$$Z_{A_4} = \frac{Z_{A_2} - \kappa(p_1, p_2, p_3, p_4) Z_{A_1} \left( \frac{Z_{A_3} - Z_{A_2}}{Z_{A_3} - Z_{A_1}} \right)}{1 - \kappa(p_1, p_2, p_3, p_4) \left( \frac{Z_{A_3} - Z_{A_2}}{Z_{A_3} - Z_{A_1}} \right)} \quad (2.57)$$

En considérant que la droite oblique est définie par l'équation  $Z = \gamma X + \delta$  dans le plan  $Y = 2\varepsilon$ , on a :

$$X_{A_4} = \frac{Z_{A_4} - \delta}{\gamma} \quad (2.58)$$

### 2.6.3.3 Comparaison des calibres

Nous comparons les performances du calibre à 2 plans parallèles (Fig. 28) et du calibre minimal (Fig. 29) en utilisant les algorithmes de la section 2.4.2 dans des simulations numériques. Les calibres sont idéalement placés tels que le plan  $Z = 0$  se situe à mi-chemin entre la source et le détecteur, et soit parallèle à l'axe vertical des détecteurs. Les valeurs des paramètres sont fixées à  $\eta = 50\text{mm}$ ,  $\varepsilon = 75\text{mm}$ ,  $W = 600\text{mm}$  pour le calibre à 2 plans parallèles et  $\eta = 50\text{mm}$ ,  $\varepsilon = 125\text{mm}$ ,  $W = 600\text{mm}$  pour le calibre minimal. L'inclinaison des droites obliques du calibre à 2 plans parallèles est fixée à  $\gamma = 0.2$ . Un bruit gaussien  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  est ajouté aux projections, où  $\sigma$  est une fraction de la taille des pixels. Nous fixons  $\sigma = 0.2$  pixel. Nous calculons la moyenne des erreurs de reprojection du calibre en valeur absolue pour chaque détecteur en utilisant les différentes méthodes proposées sur 1000 simulations. Les résultats sont présentés dans la Fig. 30. Le calibre à 2 plans parallèles donne de meilleurs résultats que le calibre minimal. C'est un résultat cohérent puisque le calibre à 2 plans parallèles a plus de droites (11 contre 8 pour le calibre minimal). Néanmoins, il n'est pas garanti que le calibre à 2 plans parallèles soit utilisable en pratique. Les projections du calibre peuvent se superposer si le diamètre des droites est important ou si le grandissement est élevé. Ce n'est pas le cas dans nos simulations car nous considérons que les intersections et projections sont ponctuelles. De plus, nous observons que la méthode  $M_4$  est la meilleure dans le cas du calibre à 2 plans parallèles. Ce n'est pas le cas pour le calibre minimal où la méthode  $M_1$  est la meilleure. Les résultats ne permettent pas de conclure à propos des performances des méthodes proposées. Les méthodes  $M_2$ ,  $M_3$  et  $M_4$  dégradent les estimations pour le calibre minimal et les améliorent pour le calibre à 2 plans parallèles.

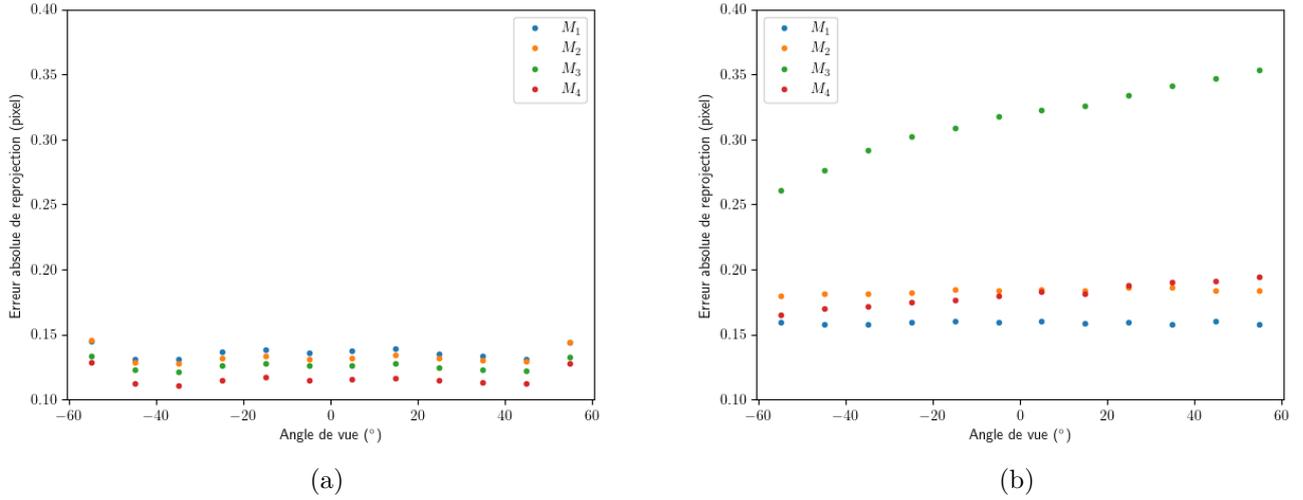


FIGURE 30 – Moyennes des erreurs absolues de reprojection des calibres pour les 12 angles de vue (1000 simulations) avec (a) le calibre à 2 plans parallèles (Fig. 28), (b) le calibre minimal (Fig. 29).

## 2.6.4 Amélioration du calibre minimal

Le calibre minimal proposé dans la partie précédente n’est pas plus performant que le calibre à 2 plans parallèles. Néanmoins, il est construit tel que les projections des droites ne se superposent pas en pratique lorsque le diamètre des droites et le grandissement sont relativement importants. Ce qui n’est pas le cas pour le calibre à 2 plans parallèles. À l’exception de la position des droites parallèles, ces calibres ont deux différences notables : le nombre de droites parallèles, l’inclinaison des droites obliques. Dans cette partie, nous cherchons à optimiser le nombre, la position et l’inclinaison des droites du calibre minimal. Nous proposons plusieurs études permettant d’améliorer ce calibre.

### 2.6.4.1 Inclinaison des droites obliques

Dans les simulations numériques de la section précédente, l’inclinaison des droites obliques du calibre à 2 plans parallèles est respectivement environ 2 et 5 fois plus grande dans les plans  $Z = 0$  et  $Y = 2\varepsilon$  que l’inclinaison des droites du calibre minimal. Dans cette section, nous cherchons à optimiser l’inclinaison des droites obliques du calibre minimal.

**Approche** Il est nécessaire de placer trois droites obliques indépendantes par détecteur pour augmenter leurs inclinaisons. En effet, les droites obliques ne sont pas visibles par tous les détecteurs si leurs inclinaisons sont trop fortes. Nous définissons alors les droites obliques  $(L_{6,l})$ ,  $(L_{7,l})$ ,  $(L_{8,l})$  relatives à chaque détecteur,  $l = 1, \dots, n_d$ . Nous choisissons de placer les droites telles que leurs intersections avec les plans de vue soient à mi-distance entre les deux droites parallèles les plus proches dans le plan de la droite oblique. Dans le cas des droites  $(L_{7,l})$ , nous imposons que les droites ne dépassent pas  $Y = 3\varepsilon$  dans le plan  $Z = 0$ . Cette contrainte permet de conserver une marge d’erreur suffisante sur la position du calibre et des éléments du système telle que la calibration du système soit possible. Nous notons  $\lambda_Z$  l’inclinaison des droites  $(L_{6,l})$  et  $(L_{7,l})$ . L’inclinaison doit être assez grande pour que les droites ne s’intersectent pas. Nous notons  $\alpha_Z = \tan(\lambda_Z)$ . Nous définissons  $X_{6,l}$  et  $X_{7,l}$  les positions théoriques sur l’axe  $\mathbf{x}$  des intersections entre les droites obliques  $(L_{6,l})$ ,  $(L_{7,l})$  et les plans de vue,  $l = 1, \dots, n_d$ . En théorie, on a  $X_{1,l} = X_{2,l} = X_{3,l} = X_{6,l} = X_{7,l}$ ,  $l = 1, \dots, n_d$ .

Nous notons alors  $X_l = X_{6,l} = X_{7,l}$ . Ainsi, nous définissons les droites obliques dans le plan  $Z = 0$  par :

$$(L_{6,l}) \quad Y = \alpha_Z X + \frac{\varepsilon - 2\alpha_Z X_l}{2} \quad (2.59)$$

$$(L_{7,l}) \quad Y = \alpha_Z X + \frac{5\varepsilon - 2\alpha_Z X_l}{2} \quad (2.60)$$

Le choix d'inclinaison est plus délicat pour les droites  $(L_{8,l})$ ,  $l = 1, \dots, n_d$ . En effet, les plans de vues peuvent être tangents aux droites obliques dans le plan  $Y = 2\varepsilon$ . Ainsi, nous proposons de placer ces droites en fonction de l'orientation des plans de vue. Nous imposons des conditions sur l'inclinaison des droites afin qu'elles ne s'intersectent pas. Nous notons  $X_{3,l}$  et  $X_{4,l}$  les intersections respectives des droites  $(L_3)$  et  $(L_4)$  avec le plan  $\Pi_l$ ,  $l = 1, \dots, n_d$ . Ainsi, nous définissons le paramètre  $\xi_l$ ,  $l = 2, \dots, n_d - 1$ , permettant d'éviter l'intersection des droites obliques :

$$\xi_l \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \min (\|X_{3,l-1} - X_{3,l}\|, \|X_{3,l} - X_{3,l+1}\|) \quad (2.61)$$

La condition utilise uniquement les intersections des plans de vue avec  $(L_3)$  car la position de ces intersections sur l'axe  $\mathbf{x}$  est toujours inférieure à celle de  $(L_4)$  en valeur absolue. La condition est donc plus restrictive. Sur les bords, l'inclinaison des droites est limitée par la

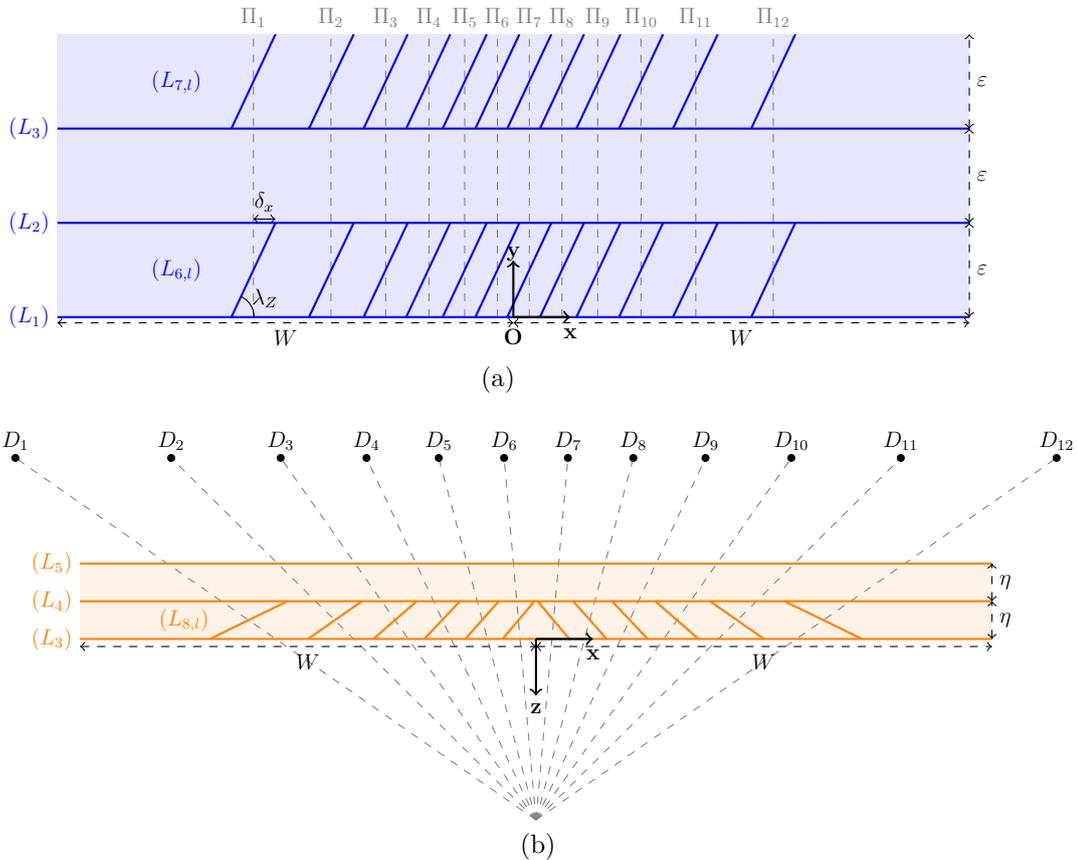


FIGURE 31 – Calibre minimal avec une inclinaison plus forte des droites obliques. Trois droites obliques sont associées à chaque détecteur. Elles sont positionnées telles que leurs intersections avec les plans de vue soit à mi-distance des droites parallèles les plus proches. Les illustrations représentent les plans : (a)  $Z = 0$ , (b)  $Y = 2\varepsilon$ .

largeur du calibre  $W$  :

$$\begin{cases} \xi_1 = \min \left( \|-W - X_{3,1}\|, \left\| \frac{X_{3,1} - X_{3,2}}{2} \right\| \right) \\ \xi_{n_d} = \min \left( \left\| \frac{X_{3,n_d-1} - X_{3,n_d}}{2} \right\|, \|X_{3,n_d} - W\| \right) \end{cases} \quad (2.62)$$

En théorie, nous supposons que l’angle de vue dépend uniquement de l’angle  $\theta_y$  défini dans la section 1.3.2. Les détecteurs sont supposés parallèles à l’axe  $\mathbf{y}$ . Ainsi, nous définissons les droites  $(L_{8,l})$  pour tous les détecteurs par :

$$(L_{8,l}) = \begin{cases} Z = \frac{\eta}{X_{3,l} - X_{4,l} - 2\xi_l} X - \left( \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{X_{3,l} - X_{4,l} - 2\xi_l} \frac{X_{3,l} + X_{4,l}}{2} \right) & \text{si } \theta_y \leq 0, \\ Z = \frac{\eta}{X_{3,l} - X_{4,l} + 2\xi_l} X - \left( \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{X_{3,l} - X_{4,l} + 2\xi_l} \frac{X_{3,l} + X_{4,l}}{2} \right) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.63)$$

Nous limitons la longueur des droites pour qu’elles soient comprises entre deux droites parallèles. Le positionnement des droites obliques est illustré dans la Fig. 31.

**Limitations** Cette étude possède des limites. Les droites obliques ne doivent pas intersecter plus d’un plan de projection et ne doivent pas s’intersecter entre elles. Cela peut être le cas pour les droites obliques du plan  $Z = 0$  si l’angle d’inclinaison  $\lambda_Z$  est trop faible. Une contrainte a déjà été établie pour les droites du plan  $Y = 2\varepsilon$ . Nous définissons  $\delta_x$  la translation maximale du calibre sur l’axe  $\mathbf{x}$  dans le plan  $Z = 0$  par rapport à sa position idéale. Ce paramètre est représenté sur la Fig. 31. Il se calcule avec la formule suivante :

$$\delta_x = \left| \frac{\varepsilon}{2\alpha_Z} \right| \quad (2.64)$$

Par définition, le paramètre  $\xi_l$  correspond à cette même contrainte dans le plan  $Y = 2\varepsilon$ . Sa définition peut être étendue au plan  $Z = 0$ . Ainsi, il est nécessaire d’avoir  $\delta_x \leq \xi_l$ ,  $l = 1, \dots, n_d$ . En pratique, la source et les détecteurs ne se trouvent pas nécessairement à la position théorique. Nous supposons que le calibre est relativement bien positionné. Au vu des distances source-détecteur de notre système, quelques centimètres de marge d’erreur sont suffisants pour permettre de calibrer le système dans la plupart des cas.

**Résultats** Nous effectuons des simulations en utilisant le calibre de la Fig. 31 avec différentes valeurs de  $\lambda_Z$ . Les moyennes des erreurs de reprojection du calibre après calibration pour 12 angles de vue sur 1000 simulations sont présentées dans la Fig. 32. Les simulations ont été réalisées en ajoutant un bruit gaussien d’écart type  $\sigma = 0.2$  pixel aux projections du calibre. Les meilleurs résultats obtenus avec les calibres minimal et à 2 plans parallèles sont représentés respectivement par les droites violettes et marrons (détails dans la Fig. 30). Les méthodes  $M_3$  et  $M_4$  réussissent à être meilleures que les résultats du calibre minimal (Fig. 29) avec la méthode  $M_1$  (représentés par la droite violette) pour  $\lambda_Z \geq 10^\circ$  et  $\lambda_Z \in [20^\circ, 50^\circ]$ , respectivement. La méthode  $M_2$  reste la moins bonne méthode, bien qu’elle soit proche des meilleurs résultats obtenus avec le calibre minimal pour  $\lambda_Z \in [10^\circ, 55^\circ]$ . Aucune méthode n’obtient de meilleurs résultats que le calibre à 2 plans parallèles avec la méthode  $M_4$ . Si nous voulons respecter le critère (2.64), il faut choisir  $\lambda_Z \geq 71.5^\circ$  pour notre géométrie. Les méthodes  $M_1$  et  $M_3$  semblent être les meilleurs avec de telles inclinaisons. Néanmoins, nous pouvons aussi envisager de choisir des inclinaisons des droites obliques plus faibles et utiliser la méthode  $M_4$ .

#### 2.6.4.2 Droites parallèles

Les résultats précédents montrent que le calibre minimal peut gagner en performance si nous lui ajoutons des droites parallèles. Dans cette partie, nous proposons d’étudier le nombre et la position des droites à ajouter au calibre minimal pour améliorer les résultats de calibration.

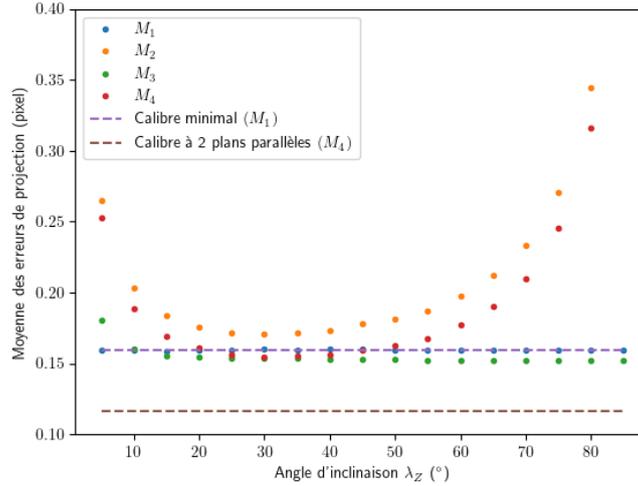


FIGURE 32 – Moyenne des erreurs absolues de reprojection du calibre après calibration en fonction de l’inclinaison  $\lambda_Z$  sur les 12 angles de vues (1000 simulations). Les meilleurs résultats obtenus avec les calibres minimal et à 2 plans parallèles sont donnés à titre de comparaison (détails dans la Fig. 30).

**Étude** Le calibre minimal possède cinq droites parallèles contre huit pour le calibre à 2 plans parallèles. Nous observons dans les Figs. 30 et 32 que les résultats sont nettement meilleurs avec le calibre à 2 plans parallèles. Ainsi, nous proposons d’ajouter des droites parallèles au calibre minimal. Les projections ne doivent pas se superposer. Seuls les espaces en dessus des droites ( $L_{7,l}$ ) et entre les droites ( $L_4$ ) et ( $L_5$ ) sont disponibles. Il est aussi possible de réduire la taille des droites obliques pour ajouter des droites parallèles. Néanmoins, cela réduit la marge d’erreur sur la position de la source et des détecteurs. Nous proposons alors d’ajouter deux nouvelles droites parallèles :

$$(L_9^1) \quad Z = 0, \quad Y = 3\varepsilon \quad (2.65)$$

$$(L_9^2) \quad Y = 2\varepsilon, \quad Z = -\frac{3\eta}{2} \quad (2.66)$$

La droite ( $L_9^1$ ) se trouve en haut du plan  $Z = 0$ . En plus d’être à une extrémité du calibre, elle peut servir d’attache pour les droites ( $L_{7,l}$ ) en pratique,  $l = 1, \dots, n_d$ . La droite ( $L_9^2$ ) se trouve entre les droites ( $L_4$ ) et ( $L_5$ ) dans le plan  $Y = 2\varepsilon$ . Selon les valeurs de  $\eta$  et  $\varepsilon$ , ses projections peuvent se superposer avec celles des droites ( $L_4$ ) et ( $L_5$ ) selon la façon dont les droites sont matérialisées en pratique. Pour placer cette droite, il faut s’assurer que les paramètres  $\eta$  et  $\varepsilon$  soient suffisamment larges tels que les projections des droites ( $L_4$ ), ( $L_5$ ), ( $L_{8,l}$ ) et ( $L_9^2$ ) soient contenues entre les projections des droites ( $L_2$ ) et ( $L_3$ ).

**Résultats** Nous proposons de faire des simulations en utilisant le calibre minimal avec une inclinaison des droites obliques à  $\lambda_Z = 65^\circ$  (voir Fig. 31). Cette inclinaison des droites permet d’obtenir des résultats convenables avec les méthodes  $M_1$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  (voir Fig. 32). De plus, elle est suffisamment proche du seuil de  $71.5^\circ$  pour limiter les possibilités d’intersection entre les plans de vue et plusieurs droites obliques. Nous y ajoutons la droite ( $L_9^1$ ), puis la droite ( $L_9^2$ ) et enfin les deux droites. Les résultats obtenus avec les méthodes  $M_1$  et  $M_3$  ne présentent pas d’améliorations significatives. Les résultats de la méthode  $M_2$  sont nettement moins bons que ceux des autres méthodes. Nous ne présentons pas les résultats obtenus avec ces méthodes dans ce paragraphe. Ainsi, nous présentons uniquement les résultats obtenus

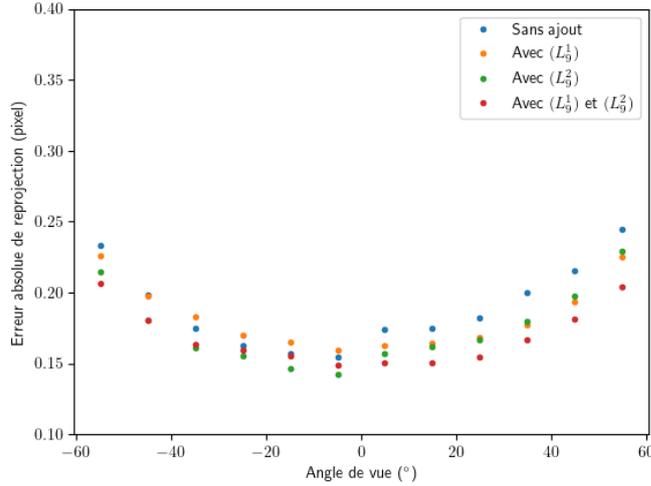


FIGURE 33 – Moyennes des erreurs de reprojection du calibre après calibration avec l’ajout de droites parallèles au calibre minimal. Les résultats sont obtenus avec la méthode  $M_4$  en effectuant une moyenne sur 1000 simulations. La moyenne des valeurs de re-projection du calibre sans ajout de droites correspond à la valeur de la Fig. 32 obtenue avec  $M_4$  pour  $\lambda_Z = 65^\circ$ .

avec la méthode  $M_4$  dans la Fig. 33. Un bruit gaussien d’écart type  $\sigma = 0.2$  pixel est ajouté aux projections du calibre. Nous calculons la moyenne des erreurs de reprojection du calibre sur les 12 angles de vue pour 1000 simulations. Nous observons des améliorations avec les deux droites parallèles supplémentaires. Les résultats sont aussi légèrement meilleurs lorsque nous ajoutons une seule droite. Ces résultats restent néanmoins moins bons que les résultats obtenus sans droites parallèles supplémentaires avec les méthodes  $M_1$  et  $M_3$  (voir Fig. 32). En pratique, la droite  $(L_9^1)$  peut servir de support pour les droites obliques  $(L_{7,l})$ ,  $l = 1, \dots, n_d$ . Ainsi, pour des raisons structurelles, nous suggérons de conserver la droite  $(L_9^1)$ . Pour simplifier les notations, nous faisons référence à cette droite par la notation  $(L_9)$  dans la suite.

### 2.6.4.3 Espacement des droites parallèles

Les paramètres  $\varepsilon$  et  $\eta$  représentent respectivement l’espacement entre les droites parallèles dans les plans  $Z = 0$  et  $Y = 2\varepsilon$ . Nous proposons de déterminer la valeur optimale de ces paramètres.

Nous effectuons des simulations en faisant varier les valeurs des paramètres  $\varepsilon$  et  $\eta$ . Elles sont réalisées en ajoutant un bruit gaussien d’écart type  $\sigma = 0.2$  pixel aux projections du calibre. Nous calculons l’erreur moyenne de reprojection du calibre après calibration. Les méthodes  $M_1$  et  $M_3$  ne montrent pas d’améliorations significatives des résultats. Les résultats de la méthode  $M_2$  sont toujours nettement moins bons que ceux des autres méthodes. Ainsi, nous présentons uniquement les résultats obtenus avec la méthode  $M_4$  dans la Fig. 34. Nous observons que les résultats sont légèrement meilleurs lorsqu’on choisit des valeurs élevées de  $\eta$  et  $\varepsilon$ . Néanmoins, nous suggérons de conserver les valeurs utilisées auparavant :  $\varepsilon = 125\text{mm}$  et  $\eta = 50\text{mm}$ . En effet, la droite  $(L_9)$  n’est plus visible par le détecteur pour un système de radiographie idéal (voir Fig 27) si la valeur de  $\varepsilon$  est supérieure à 125mm. De plus, l’amélioration des résultats est moins importante lorsque  $\eta \geq 50\text{mm}$ . Il est aussi possible que les projections des droites  $(L_4)$ ,  $(L_5)$  et  $(L_{8,l})$  ne soient plus contenues entre les projections des droites  $(L_2)$  et  $(L_3)$  si la valeur de  $\eta$  est trop élevée.

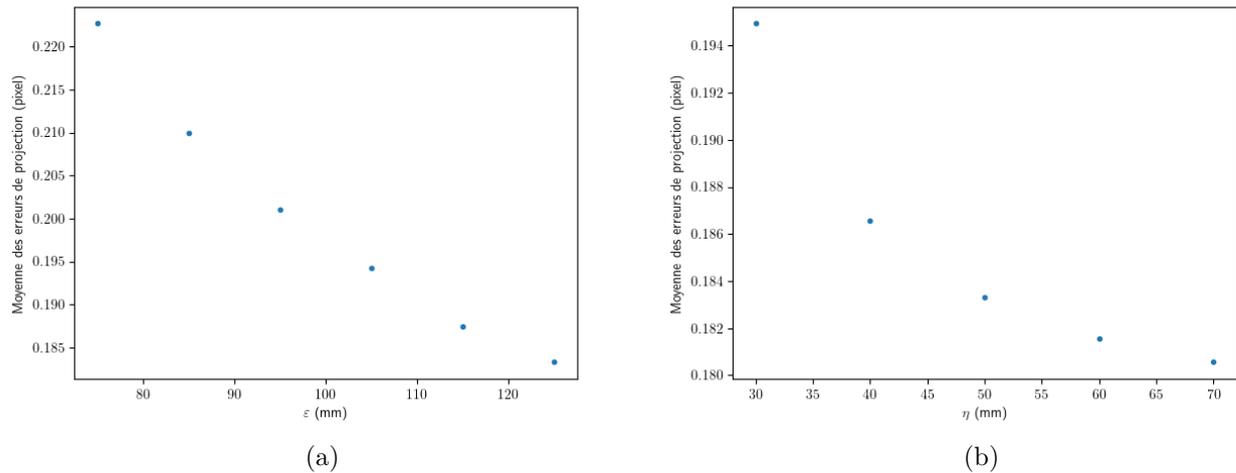


FIGURE 34 – Moyennes des erreurs de reprojection du calibre après calibration en fonction des valeurs du paramètre (a)  $\varepsilon$ , (b)  $\eta$ . Les résultats sont obtenus avec la méthode  $M_4$  en effectuant une moyenne sur les 12 angles de vues et 1000 simulations.

#### 2.6.4.4 Autres idées

D'autres points ont été pris en compte ou ont été envisagés dans la conception du calibre adapté à notre géométrie. Nous proposons une liste regroupant ces idées :

- **Espacement des droites obliques** : L'estimation des paramètres des plans de vue est a priori plus stable lorsque les 3 points utilisés sont éloignés. Ces points sont déterminés à partir des intersections des droites obliques avec les plans de vue. Ainsi, nous positionnons les droites obliques le plus loin possible les unes des autres. Par rapport au calibre minimal de la Fig. 31, nous pouvons éventuellement positionner les droites ( $L_{8,l}$ ) entre ( $L_4$ ) et ( $L_5$ ) pour maximiser la distance entre les droites obliques,  $l = 1, \dots, n_d$ .
- **Répartition des droites parallèles** : Il n'y a pas de contraintes sur la position des droites parallèles autres que leur parallélisme et le chevauchement de leurs projections. Nous pouvons éventuellement placer des droites hors des deux plans considérés pour le calibre minimal. De la même manière que pour le point précédent, nous avons fait le choix d'un espacement maximal des droites parallèles dans les plans pour éparpiller le plus les projections des droites. L'objectif est d'obtenir plus de précision dans les estimations.
- **Diminution de la taille du calibre** : Il est possible d'approcher le calibre de la source pour permettre de réduire sa taille. Ce point est envisageable mais n'a pas été étudié.

#### 2.6.5 Calibre adapté

À partir des études précédentes, nous proposons un calibre adapté à la géométrie présentée dans la Fig. 27. Le calibre est conçu pour être positionné à mi-distance entre la source et les détecteurs. Il est basé sur l'idée d'un calibre composé d'un nombre minimal de droites par détecteur : 5 droites parallèles entre elles et 3 obliques. Ces droites sont positionnées telles que leurs projections ne se superposent pas. Nous proposons d'ajouter la droite ( $L_9$ ) définie dans l'équation (2.65) au calibre pour soutenir les droites obliques ( $L_{7,l}$ ) en pratique,  $l = 1, \dots, n_d$ . De plus, nous proposons d'augmenter l'inclinaison des droites obliques. Nous

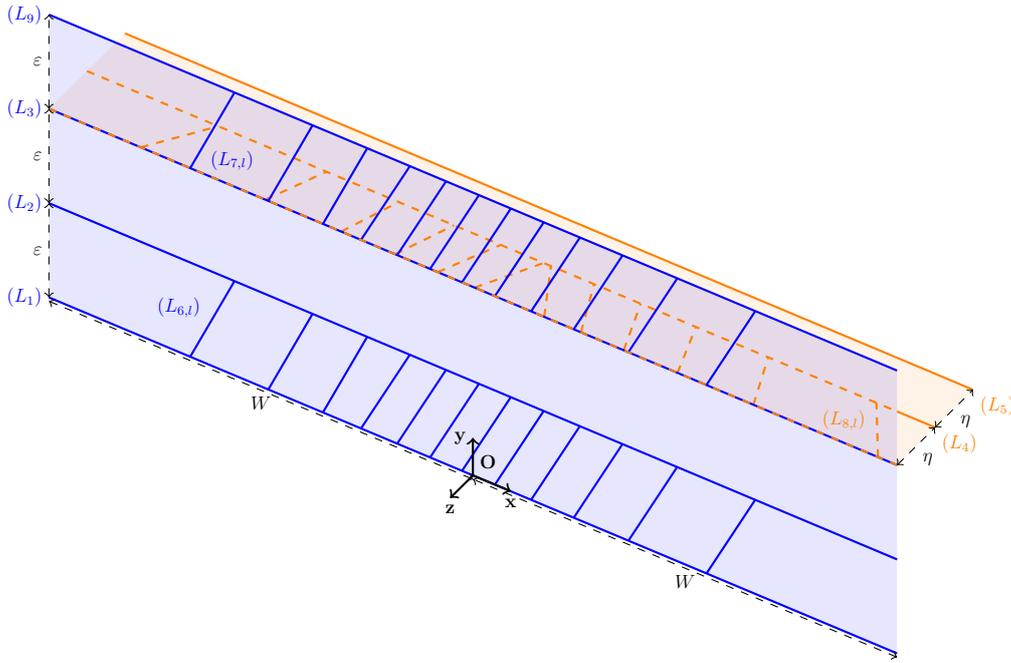


FIGURE 35 – Illustration du calibre adapté. Les plans de vue de chaque détecteur intersectent 9 droites contenues dans 2 plans orthogonaux : 6 sont parallèles entre elles et 3 sont obliques.

fixons l’inclinaison des droites à  $\lambda_Z = 65^\circ$  dans le plan  $Z = 0$ . C’est une valeur où les résultats obtenus avec les méthodes  $M_1$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  sont convenables. De plus, cette valeur permet de garder une marge d’erreur suffisante sur la position des détecteurs et de la source relativement au calibre pour pouvoir réaliser la calibration géométrique. Les droites obliques du plan  $Y = 2\varepsilon$  sont orientées en fonction de l’angle d’incidence des rayons X. Nous fixons les valeurs des paramètres  $\varepsilon = 125\text{mm}$ ,  $\eta = 50\text{mm}$ ,  $W = 600\text{mm}$ . Ce calibre est illustré dans la Fig. 35.

Nous proposons une comparaison des différents calibres décrits dans la section précédente avec le calibre adapté. Un bruit gaussien  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  est ajouté aux projections des droites. Nous fixons  $\sigma = 0.2$  pixel. Nous calculons la moyenne des erreurs absolues des estimations de chaque paramètre géométrique avec la méthode  $M_4$  sur les 12 angles de vues et sur 1000 simulations. Les résultats sont données dans la table 1. Nous observons que l’augmentation de l’inclinaison des droites obliques permet d’améliorer significativement les écarts-types des

Calibre	$X_S$ (mm)	$Y_S$ (mm)	$Z_S$ (mm)	$v_0$ (pixel)
Deux plans parallèles (Fig. 28)	$0.01 \pm 0.28$	$0.00 \pm 0.08$	$0.01 \pm 0.13$	$0.23 \pm 10.84$
Minimal (Fig. 29)	$0.16 \pm 4.89$	$0.03 \pm 1.24$	$0.03 \pm 1.66$	$1.20 \pm 22.41$
Minimal (Fig. 31)	$0.00 \pm 0.38$	$0.02 \pm 0.43$	$0.03 \pm 0.57$	$0.12 \pm 2.49$
Adapté (Fig. 35)	$0.01 \pm 0.38$	$0.00 \pm 0.42$	$0.01 \pm 0.55$	$0.00 \pm 2.44$
Calibre	$\theta_x$ ( $^\circ$ )	$\theta_y$ ( $^\circ$ )	$\theta_z$ ( $^\circ$ )	$f$ (mm)
Deux plans parallèles (Fig. 28)	$0.01 \pm 0.56$	$0.00 \pm 0.09$	$0.00 \pm 0.15$	$0.08 \pm 0.64$
Minimal (Fig. 29)	$0.06 \pm 1.04$	$0.03 \pm 0.87$	$0.00 \pm 0.27$	$0.23 \pm 6.93$
Minimal (Fig. 31)	$0.00 \pm 0.05$	$0.00 \pm 0.08$	$0.00 \pm 0.01$	$0.04 \pm 1.14$
Adapté (Fig. 35)	$0.00 \pm 0.05$	$0.00 \pm 0.09$	$0.00 \pm 0.01$	$0.01 \pm 1.04$

TABLE 1 – Moyennes des erreurs absolues et des écarts types de l’estimation des paramètres de calibration obtenus avec les calibres proposés dans cette section et la méthode  $M_4$ . Les moyennes sont calculées sur les 12 détecteurs et sur 1000 simulations.

estimations de l'ensemble des paramètres. L'ajout de la droite ( $L_9$ ) permet aussi d'améliorer légèrement la précision des résultats. Ainsi, le calibre adapté est nettement meilleur que le calibre minimal de la Fig. 29 et légèrement meilleur que le calibre minimal de la Fig. 31. De plus, il semble légèrement plus performant que le calibre à 2 plans parallèles.

## 2.7 Simulations numériques

Des problèmes ont été détectés dans les résultats des expériences. Avant de présenter ces résultats, nous réalisons des simulations numériques permettant de mettre en évidence ces problèmes et de proposer des pistes d'amélioration. Le calibre utilisé pour les expériences n'est pas exactement celui présenté dans la section précédente. Dans la section 2.7.1, nous introduisons le calibre adapté utilisé lors des expériences. Les méthodes de calibration proposées dans ce chapitre ne sont pas utilisables dans le cas de nos expériences. En effet, le faisceau de rayons X issu de la source n'est pas assez large pour couvrir l'ensemble des détecteurs. Ainsi, la source a été déplacée entre chaque acquisition pour s'ajuster aux différentes positions des détecteurs. Dans la section 2.7.2, nous étudions les résultats obtenus avec la méthode de Horaud *et al.* et le calibre adapté. En complément, dans la section 2.7.3, nous comparons les résultats des différentes méthodes proposées avec le calibre minimal adapté.

### 2.7.1 Calibre du banc expérimental

Le calibre présenté dans la section 2.6.5 a été légèrement modifié pour les expériences. Des contraintes de réalisation n'avaient pas été anticipées ou prises en compte dans la théorie. Nous définissons les paramètres  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  tels que  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ . La droite ( $L_1$ ) a été élevée de  $\varepsilon_1 = 25\text{mm}$  pour inclure un socle. Ainsi, nous définissons ( $L_1$ ) dans le plan  $Z = 0$  par :

$$(L_1) \quad Y = \varepsilon_1 \quad (2.67)$$

Les droites obliques ( $L_{6,l}$ ) sont adaptées pour être placées entre les droites ( $L_1$ ) et ( $L_2$ ),  $l = 1, \dots, n_d$ . Ainsi, l'équation des droites ( $L_{6,l}$ ) s'écrit :

$$(L_{6,l}) \quad Y = \alpha_Z X + \frac{\varepsilon + \varepsilon_1 - 2\alpha_Z X_l}{2} \quad (2.68)$$

Les droites ( $L_{8,l}$ ) ont aussi été déplacées,  $l = 1, \dots, n_d$ . En effet, les droites du calibre sont matérialisées par des barres en métal de 8mm de diamètre. Certaines droites ( $L_{8,l}$ ) du calibre adapté ont un point d'attache très proche de ceux des barres ( $L_{7,l}$ ). Pour faciliter la conception du calibre, ces barres ont été positionnées entre les droites ( $L_4$ ) et ( $L_5$ ). Les équations de la section 2.6.4 ont été modifiées en conséquence. Néanmoins, pour des raisons pratiques, l'angle d'inclinaison des droites ( $L_{8,l}$ ), noté  $\lambda_Y$ , est fixé à une valeur de  $\pm 45^\circ$  ou  $\pm 55^\circ$ . Cette valeur est choisie pour chaque droite en utilisant la valeur la plus proche obtenue avec les équations modifiées des droites ( $L_{8,l}$ ) du calibre adapté. Nous notons alors  $\alpha_{Y,l}$  l'inclinaison des droites ( $L_{8,l}$ ),  $l = 1, \dots, n_d$ . Nous notons  $X_{4,l}$  et  $X_{5,l}$  respectivement les coordonnées des intersections des plans  $\Pi_l$  et des droites ( $L_4$ ) et ( $L_5$ ) sur l'axe  $\mathbf{x}$ ,  $l = 1, \dots, n_d$ . Ainsi, les équations des droites sont définies dans le plan  $Y = 2\varepsilon$  pour  $l = 1, \dots, n_d$  par :

$$(L_{8,l}) \quad Z = \alpha_{Y,l} X - \left( \frac{3\eta}{2} + \alpha_{Y,l} \frac{X_{4,l} + X_{5,l}}{2} \right) \quad (2.69)$$

Ce calibre est illustré dans la Fig. 36. Des éléments ont été ajoutés à la structure pour supporter les barres dans la version finale. Ils ne sont pas inclus dans cette figure.

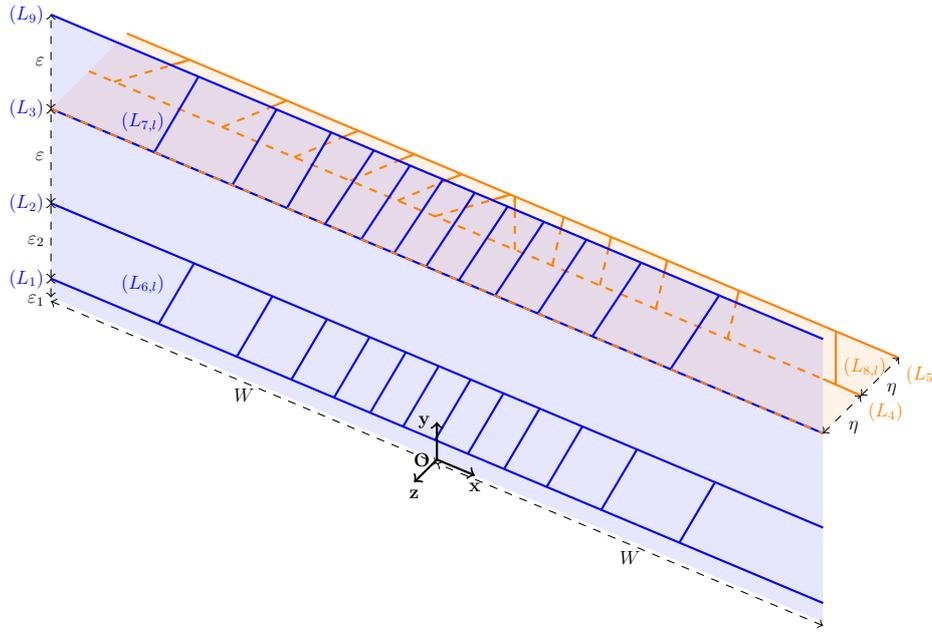


FIGURE 36 – Illustration du calibre utilisé dans les expériences. C’est une version légèrement modifiée du calibre adapté de la Fig. 35 où la position des droites  $(L_1)$ ,  $(L_{6,l})$  et  $(L_{8,l})$  ont été ajustées pour prendre en compte des contraintes de réalisation.

## 2.7.2 Calibration mono-détecteur

### 2.7.2.1 Observations

Nous nous intéressons principalement à l’estimation de la position du point source avec la méthode de Horaud *et al.* (voir section 2.3). Lors des expériences, la source a été orientée entre chaque acquisition pour s’adapter aux positions du détecteur. De plus, elle a été retournée entre les acquisitions des détecteurs  $D_1$  à  $D_6$  (angles de vue positifs) et  $D_7$  à  $D_{12}$  (angles de vue négatifs). Nous ne connaissons pas précisément sa position. Néanmoins, plusieurs scénarios sur les positions relatives du point source entre chaque acquisition sont envisageables :

- Le point source est sur l’axe de rotation. Il est unique pour l’ensemble des détecteurs.
- Le point source n’est pas sur l’axe de rotation. Il se déplace sur un cercle.
- Le retournement du tube déplace la position du point source pour un même angle de vue. Les détecteurs positionnés aux angles négatifs et positifs suivent indépendamment un des deux scénarios précédents.

Les résultats des expériences montrent que les positions du point source ne sont pas sur des cercles et/ou à une même position. Ces résultats ne sont pas cohérents avec les scénarios envisagés précédemment. De plus, nous avons remarqué que les positions du point source sont contenues dans un plan non constant par rapport à l’axe  $\mathbf{y}$ . Ce phénomène a été reproduit en simulation à un même ordre de grandeur en ajoutant un bruit gaussien  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  aux projections du calibre, avec  $\sigma = 0.5$  pixel. Les résultats obtenus pour les 12 angles de vue sont présentés dans la Fig. 37. Seulement 50 simulations sont représentées dans le graphique 37b contre 1000 simulations pour le graphique 37a. Les écarts types des estimations de  $X_S$ ,  $Y_S$ ,  $Z_S$  sur 1000 simulations sont respectivement de 4.32mm, 4.24mm, 5.61mm.

### 2.7.2.2 Analyse

Nous cherchons désormais à comprendre le phénomène décrit précédemment et à améliorer les résultats sans modifier le calibre. Nous proposons de regarder l’influence de chaque

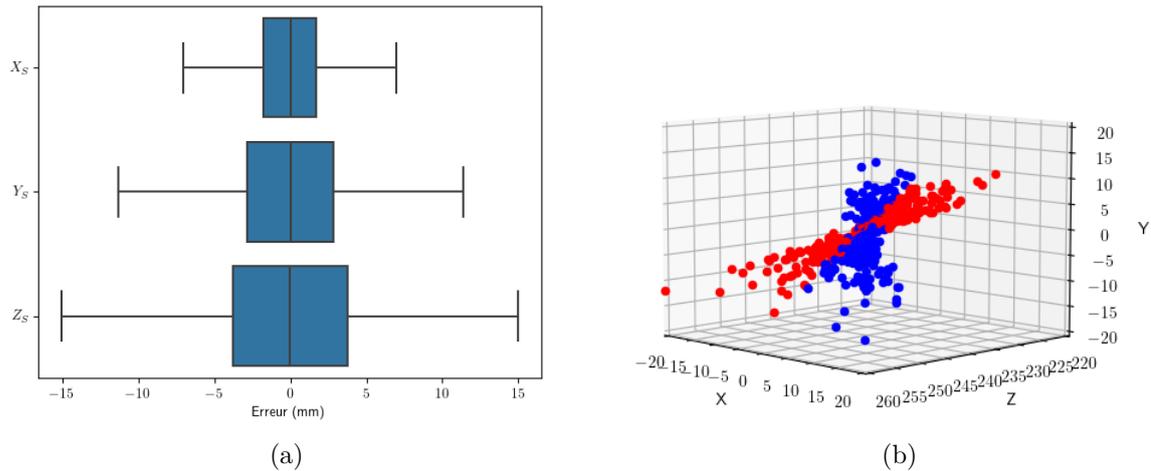


FIGURE 37 – Estimation du point source avec la méthode de Horaud *et al.* et le calibre adapté sur les 12 angles de vue. (a) Erreurs d'estimation sur 1000 simulations, (b) Position des estimations sur 50 simulations. Les points bleus et rouges représentent respectivement les estimations pour les angles de vue positifs et négatifs.

droite sur l'estimation des paramètres. Nous réalisons des simulations en ajoutant un bruit gaussien  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  uniquement sur la projection d'une droite avant la calibration. Nous fixons  $\sigma = 0.5$  pixel. Les résultats sont donnés dans la Fig. 38 pour 1000 simulations. On observe que les droites parallèles ( $L_4$ ) et ( $L_5$ ) engendrent des erreurs importantes dans les estimations des paramètres  $X_S$ ,  $Y_S$ ,  $Z_S$ . Ces deux droites se trouvent dans le plan  $Y = 2\varepsilon$ . Les autres droites parallèles engendrent aussi des erreurs mais moins importantes. Cette dynamique est aussi observable pour les paramètres  $f$  et  $v_0$ . Elle est différente pour les paramètres  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ . Plusieurs explications sont possibles. Les estimations peuvent être plus sensibles au bruit des projections de ( $L_4$ ) et ( $L_5$ ) puisque ces droites sont plus proches du détecteur (projection plus petite). Une autre explication peut être que les estimations sont sensibles à la proximité

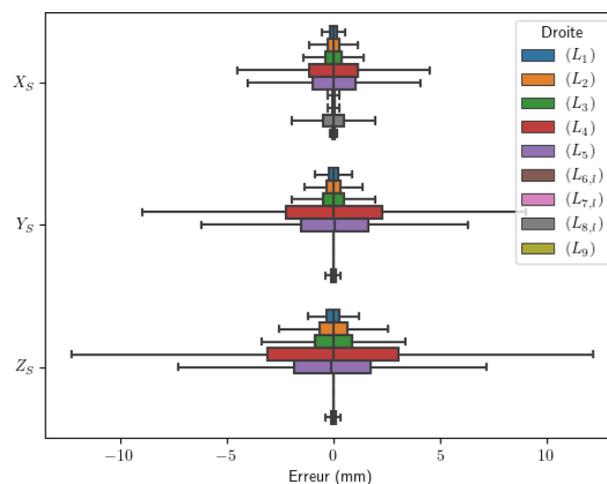


FIGURE 38 – Influence des droites du calibre sur l'estimation des paramètres de la position du point source. Pour chaque droite du calibre, un bruit gaussien est ajouté à une seule projection des droites. Les données représentent les estimations obtenues pour 1000 simulations par droite.

des droites dans le plan  $Y = 2\varepsilon$  et de leurs projections (la valeur de  $\eta$  est trop faible). En effet, les droites du plan  $Y = 2\varepsilon$  permettent de retirer la dégénérescence liée au plan  $Z = 0$  du calibre (voir section 2.3.3). Si la valeur de  $\eta$  est trop faible par rapport à  $\varepsilon$ , les droites du plan  $2\varepsilon$  peuvent introduire un biais dans nos résultats.

### 2.7.2.3 Résultats

Le calibre est composé de 9 droites. Seulement 8 sont nécessaires à la résolution du problème de calibration ( $n_O = 3$  obliques,  $n_P = 5$  parallèles). Ainsi, nous proposons de ne pas prendre en compte la droite ( $L_4$ ) ou ( $L_5$ ) dans l’estimation des paramètres  $n_{1,l}$ ,  $n_{2,l}$ ,  $n_{3,l}$ ,  $n_{4,l}$ ,  $n_{5,l}$ ,  $l = 1, \dots, n_d$ . Néanmoins, ces deux droites sont essentielles pour l’estimation des paramètres des plans de vue  $p_l$ ,  $q_l$ ,  $r_l$ . Nous rappelons que ces deux étapes d’estimation sont indépendantes dans la méthode de Horaud *et al.*. Nous conservons donc partiellement les données des droites parallèles du plan horizontal. Il n’est pas possible d’en retirer une du calibre adapté. Les estimations des paramètres de calibration sont données sans l’utilisation des droites ( $L_4$ ) et ( $L_5$ ) sur 1000 simulations dans la Fig. 39. Les simulations sont réalisées en ajoutant un bruit gaussien  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  aux projections du calibre, où  $\sigma = 0.5$  pixel. La dispersion des points est nettement plus faible sans l’utilisation des droites ( $L_4$ ) ou ( $L_5$ ) pour les paramètres  $v_0$ ,  $f$ ,  $X_S$ ,  $Y_S$ ,  $Z_S$ . Les paramètres  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  ne sont pas sensibles à ces changements. L’écart-type des paramètres  $X_S$ ,  $Y_S$ ,  $Z_S$  est désormais respectivement de 1.07mm, 0.12mm, 0.64mm en moyenne sur les 12 angles de vue lorsque nous retirons la droite ( $L_4$ ).

### 2.7.3 Calibration multi-détecteur

L’objectif de cette section est de compléter les études précédentes en regardant l’impact des modifications apportées au calibre dans la section précédente pour la méthode de Horaud *et al.* sur nos méthodes. De plus, nous proposons une comparaison des différentes méthodes proposées. Nous discutons aussi de la qualité des estimations en fonction de l’angle de vue.

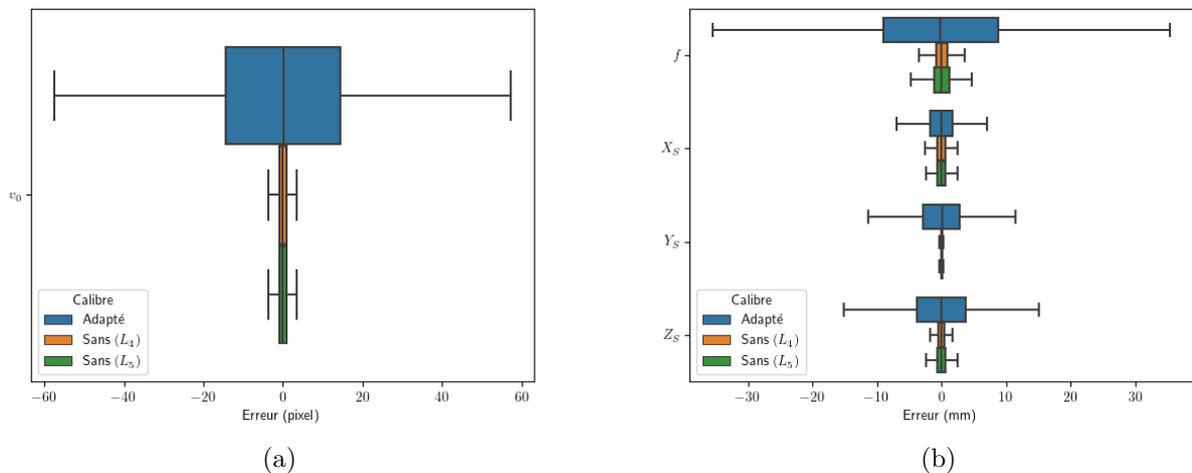


FIGURE 39 – Erreurs d’estimation des paramètres de calibration avec le calibre adapté sans la droite ( $L_4$ ) ou ( $L_5$ ) sur 1000 simulations. (a) Erreurs d’estimation de  $v_0$ , (b) Erreurs d’estimation de  $f$ ,  $X_S$ ,  $Y_S$ ,  $Z_S$ .

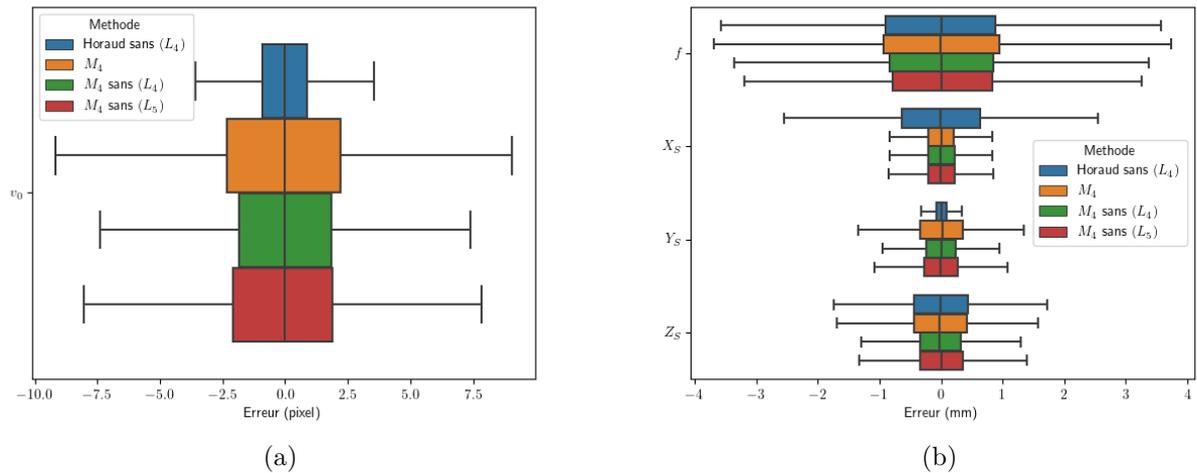


FIGURE 40 – Distribution des erreurs d’estimation des paramètres (a)  $v_0$ , (b)  $f$ ,  $X_S$ ,  $Y_S$ ,  $Z_S$  sur 1000 simulations. Les estimations sont obtenues avec les méthodes  $M_4$  et de Horaud *et al.* en utilisant le calibre adapté sans les droites ( $L_4$ ) ou ( $L_5$ ).

### 2.7.3.1 Calibration sans la droite ( $L_4$ )

Les résultats obtenus avec la méthode de Horaud *et al.* montrent une amélioration significative lorsque nous retirons les données de la droite ( $L_4$ ) ou ( $L_5$ ) lors de l’estimation des paramètres  $n_{1,l}$ ,  $n_{2,l}$ ,  $n_{3,l}$ ,  $n_{4,l}$ ,  $n_{5,l}$ ,  $n = 1, \dots, n_d$ . Nous proposons d’effectuer la même étude en utilisant les méthodes proposées dans ce chapitre. Nous utilisons le calibre adapté (Fig. 36) et la méthode  $M_4$ . Nous réalisons 1000 simulations en ajoutant un bruit gaussien  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  aux projections du calibre, où  $\sigma = 0.2$  pixel. Les résultats sont comparés à ceux obtenus avec la méthode de Horaud *et al.* dans la Fig. 40. On observe que la dispersion est du même ordre de grandeur pour les paramètres  $v_0$ ,  $f$ ,  $X_S$ ,  $Y_S$ ,  $Z_S$  avec l’ensemble des méthodes. Il n’y a pas d’écart aussi important que ceux observés avec la méthode de Horaud *et al.* et le calibre adapté (Fig. 36). Les paramètres  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  ne sont pas sensibles à ces changements. Il est donc possible de conserver les données des droites ( $L_4$ ) et ( $L_5$ ) lors de la calibration d’un système avec les méthodes proposées.

### 2.7.3.2 Comparaison des méthodes

Nous proposons désormais de comparer les méthodes proposées en utilisant le calibre adapté (Fig. 36). La comparaison se base sur deux indicateurs : les erreurs de reprojexion du calibre en fonction de l’angle de vue et la distribution des erreurs d’estimation de l’ensemble des paramètres. Nous réalisons 1000 simulations en ajoutant un bruit gaussien  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  aux projections du calibre, où  $\sigma = 0.2$  pixel. Les résultats sont présentés dans la Fig. 41. On observe dans la Fig. 41d que la méthode  $M_3$  est légèrement meilleure que les autres. Sur certains angles de vue, la méthode  $M_4$  atteint des résultats similaires à  $M_3$ . Néanmoins, ces observations sont difficiles à confirmer lorsqu’on regarde les erreurs d’estimation des paramètres de calibration. Chaque méthode semble avoir ses avantages. En effet, la méthode  $M_1$  permet une meilleure précision d’estimation sur les paramètres  $X_S$ ,  $Y_S$ ,  $Z_S$ ,  $v_0$ . Au contraire, la méthode  $M_4$  est meilleure pour estimer les paramètres  $\theta_y$ ,  $f$ . La méthode  $M_3$  semble n’améliorer que le paramètre  $f$ . Les résultats sont difficiles à interpréter avec ces graphiques. Certains paramètres peuvent se compenser entre eux [48]. De plus, les erreurs sont données sur les 12 angles de vue. Nous ne connaissons pas le détail pour chaque angle. Nous commentons à ce sujet dans le paragraphe suivant.

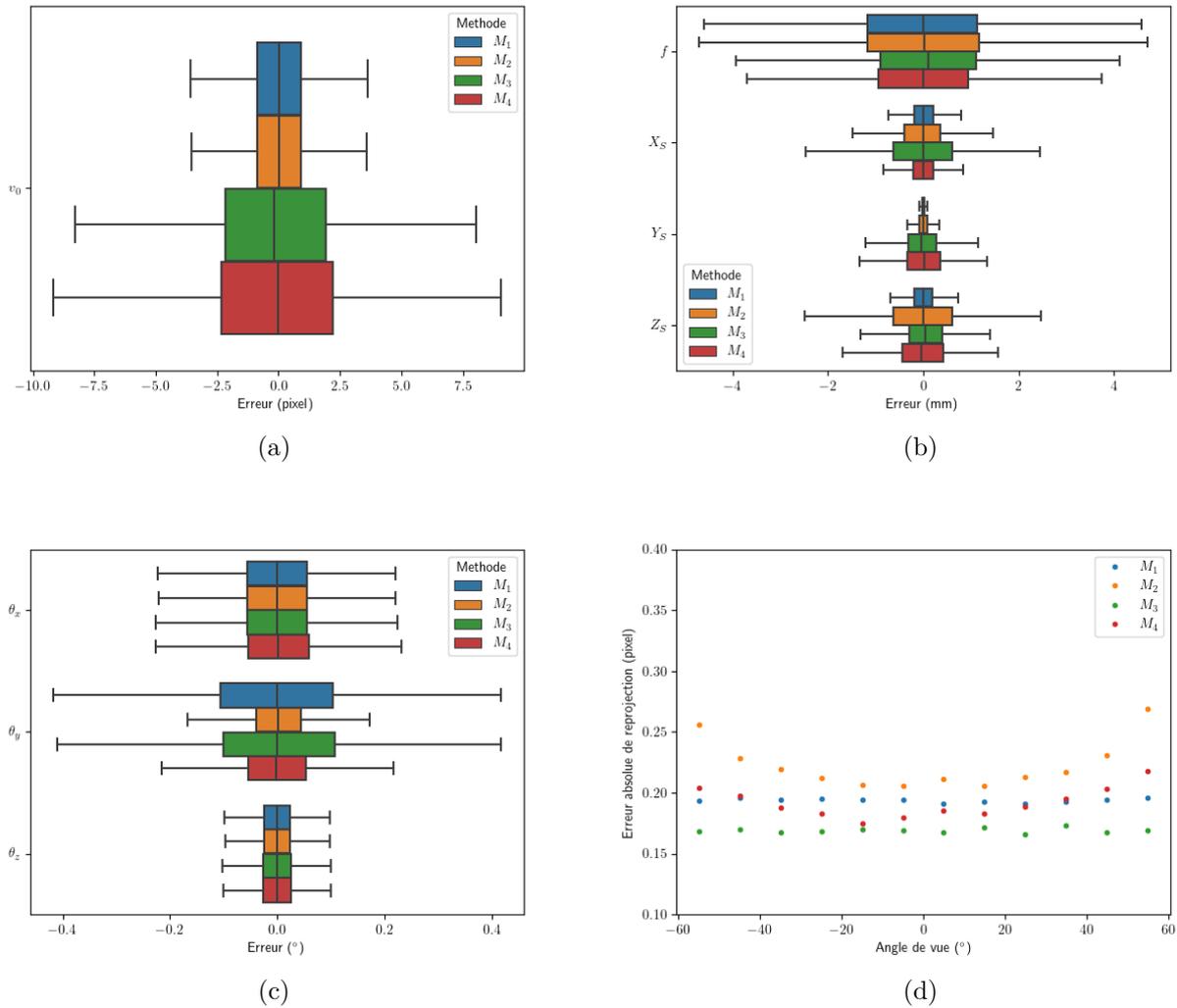


FIGURE 41 – Distribution des erreurs d’estimation des paramètres (a)  $v_0$ , (b)  $f$ ,  $X_S$ ,  $Y_S$ ,  $Z_S$ , (c)  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ . (d) Moyenne des erreurs de reprojection du calibre avec les méthodes  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  en fonction de l’angle de vue. Les estimations et les erreurs de reprojection sont calculées avec les méthodes proposées et le calibre adapté sur 1000 simulations.

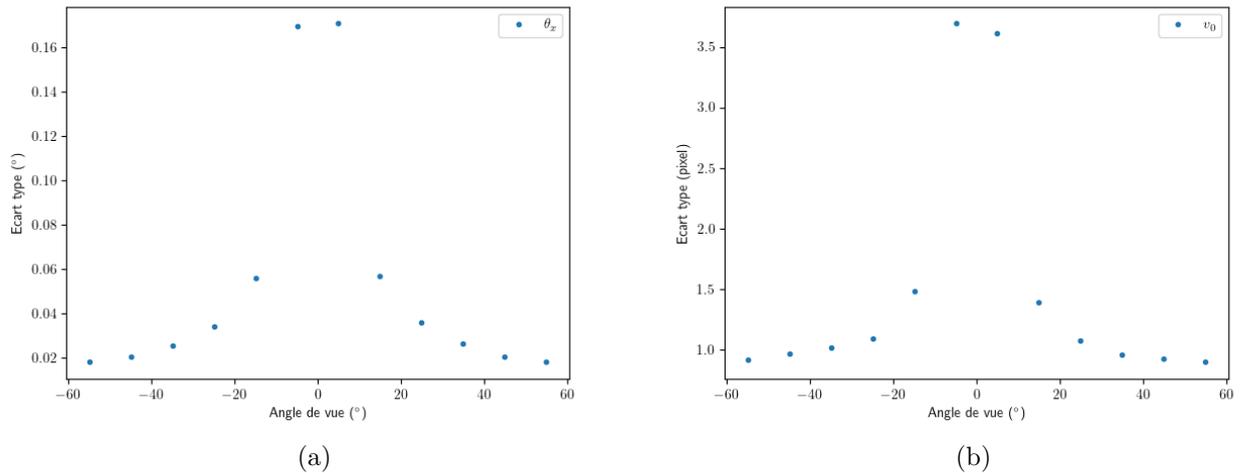


FIGURE 42 – Écart type des paramètres (a)  $\theta_x$ , (b)  $v_0$  en fonction de l'angle de vue avec la méthode  $M_3$  sur 1000 simulations.

### 2.7.3.3 Remarques

Les boîtes à moustaches présentées dans les graphiques précédents sont calculées en utilisant les résultats des 12 angles de vue. Nous ne connaissons donc pas le détail pour chaque angle. On observe une dépendance angulaire des estimations dans les résultats. À titre d'exemple, les écarts types des paramètres  $\theta_x$  et  $v_0$  sont données dans la Fig. 42. Ces résultats sont obtenus en utilisant la méthode  $M_3$  et le calibre adapté. De plus, nous ajoutons un bruit gaussien d'écart type  $\sigma = 0.2$  pixel aux projections du calibre. On observe un écart important entre les résultats des angles proches de  $0^\circ$  et les autres pour ces deux paramètres. Ce sont des cas particuliers. Pour le paramètre  $f$ , l'écart type est plus fort pour les grands angles. C'est un résultat logique puisque la distance source-détecteur augmente aussi. Néanmoins, l'écart type relatif est d'environ 0.1% pour tous les angles.

## 2.8 Expériences

Les expériences ont été réalisées sur le banc expérimental présenté dans la section 1.2. La géométrie est légèrement différente de celle étudiée dans ce chapitre. En effet, la source à rayons X a un angle d'ouverture de  $15^\circ \times 90^\circ$  ne permettant pas de couvrir l'ensemble des détecteurs. Un seul détecteur a été utilisé pour les acquisitions. La source et le détecteur ont donc été déplacés pour s'adapter à chaque angle de vue. Les méthodes proposées dans ce chapitre ne sont donc pas utilisables. Le calibre adapté (voir Fig. 36) a été positionné sur le banc expérimental à plusieurs reprises pour réaliser les calibrations. Les données ont été acquises après calibration du détecteur. Dans la section 2.8.1, nous présentons la méthode utilisée pour traiter les données. Dans la section 2.8.2, nous discutons de la procédure de calibration et des résultats obtenus lors de la calibration du banc expérimental. La plupart des références mécaniques n'étant pas connu, il est impossible de donner la précision de nos mesures. Dans la section 2.8.3, nous proposons une analyse comparative des résultats de plusieurs calibrations.

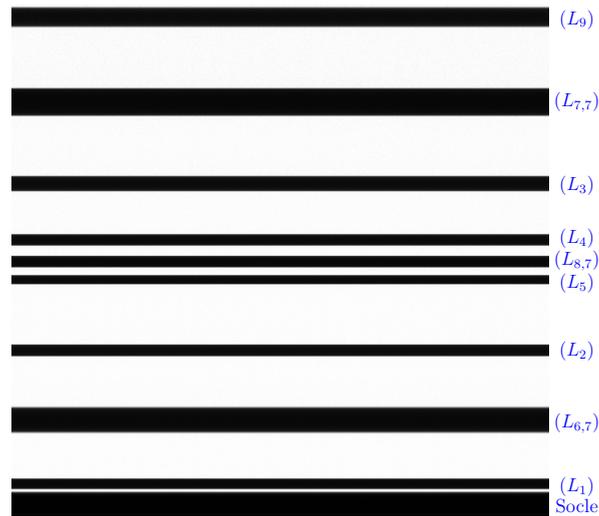


FIGURE 43 – Projection du calibre adapté pour un angle de vue de  $-5^\circ$ . Cette image est composée de 1000 radiographies linéaires (verticales).

### 2.8.1 Traitement des données

L’algorithme de calibration nécessite de connaître partiellement les coordonnées des intersections des droites et des plans de vues, et leurs projections. Les intersections sont déterminées à partir de la méthode décrite dans la section 2.3.3. Les projections sont calculées à partir des radiographies acquises avec le banc expérimental. Nous expliquons la méthode utilisée pour traiter les données à partir de la projection donnée dans la Fig. 43. La radiographie correspond à un angle de vue de  $-5^\circ$  avec une position respective des tables de translation A et B de la source à  $X_A = 20\text{mm}$ ,  $Z_B = 25\text{mm}$  (voir section 1.2). Le traitement des données s’effectue en 3 étapes : le débruitage, la segmentation et le calcul des centres de masse.

**Débruitage** La calibration est effectuée "off-line". Le calibre et les composants du banc expérimental sont tous statiques. Il est alors facile d’obtenir un grand nombre de radiographie

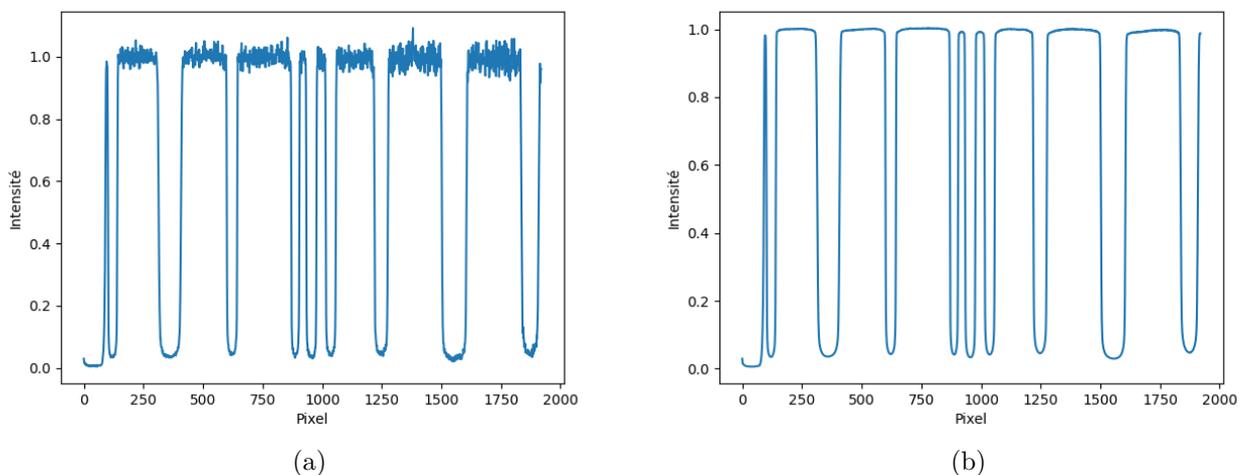


FIGURE 44 – Radiographie linéaire du calibre adapté (a) bruitée (correspondant à la première colonne de la Fig. 43), (b) débruitée.

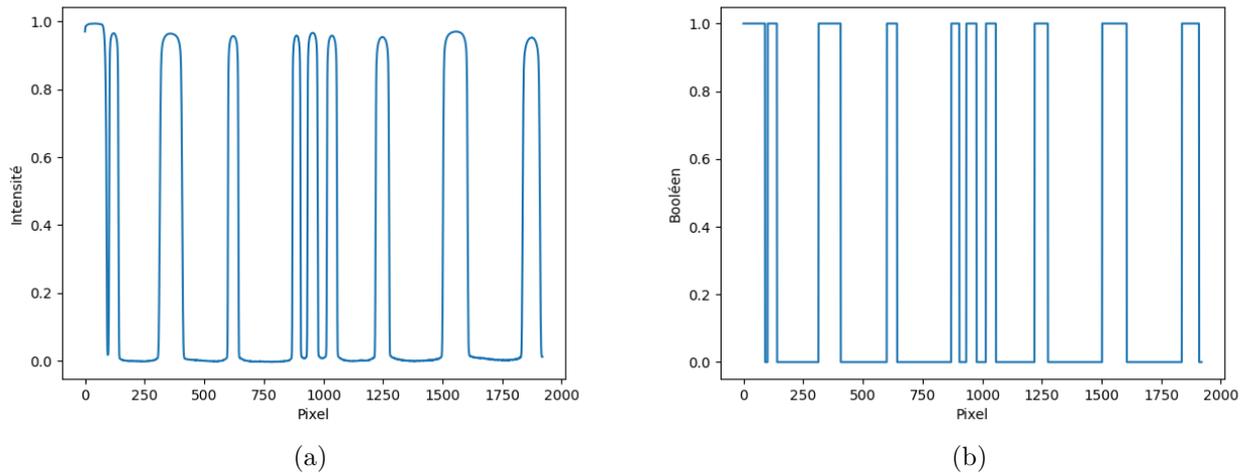


FIGURE 45 – (a) Inversion des pics de la Fig. 44b, (b) Segmentation de la radiographie débruitée avec l'algorithme de Chan-Vese.

linéaire du calibre. L'étape de débruitage consiste à calculer la moyenne en fonction de  $v$  des radiographies. Un exemple de débruitage sur 1000 radiographies est donné dans la Fig. 44. Les valeurs affichées dans la Fig. 44a correspondent à la première colonne de la Fig. 43. On observe une forte diminution du bruit dans les données.

**Segmentation** Les données mesurées par le détecteur sont normalisées à 1 (division par une radiographie sans objet dans le plan de vue). Afin d'inverser les pics d'absorption, les données ont été modifiées en remplaçant chaque valeur de pixel par :  $1 - \text{valeur}$ . Cette étape n'est pas forcément nécessaire mais elle facilite le tri des données après la segmentation. Le vecteur débruité est dupliqué pour former une image 2D. Nous utilisons alors l'algorithme de Chan-Vese [49] pour effectuer la segmentation. Un exemple est donné dans la Fig. 45 où le vecteur débruité a été dupliqué 500 fois.

**Calcul des centres de masse** Les centres de masse des projections du calibre sont calculés à partir des données de la Fig. 45. Nous donnons les valeurs des centres de masse de l'exemple de la Fig. 43 dans la table 2. Les estimations des paramètres de calibration obtenues avec

Droite	Projection (pix)	Reprojection après calibration	
		Avec ( $L_4$ )	Sans ( $L_4$ )
$(L_1)$	121.08	121.08	121.08
$(L_{6,7})$	360.97	360.97	360.97
$(L_2)$	621.97	621.97	621.97
$(L_5)$	887.32	887.32	887.32
$(L_{8,7})$	954.97	954.97	955.34
$(L_4)$	1036.45	1036.45	1037.04
$(L_3)$	1247.53	1247.53	1247.53
$(L_{7,7})$	1553.99	1553.99	1553.99
$(L_9)$	1872.50	1872.50	1872.50

TABLE 2 – Centres de masse des projections des barres du calibre de la Fig. 43 et reprojection du calibre après calibration (avec et sans la droite ( $L_4$ )).

Paramètre	$X_S$ (mm)	$Y_S$ (mm)	$Z_S$ (mm)	$\theta_x$ (°)	$\theta_y$ (°)	$\theta_z$ (°)	$v_0$ (pix)	$f$ (mm)
Estimation	-2.65	0.84	246.10	-1.10	5.23	0.10	23.65	495.20

TABLE 3 – Estimations des paramètres de calibration obtenues à partir des données de la table 2.

ces centres de masse sont données dans la table 3. Il n’est pas possible de donner la précision de ces estimations. Néanmoins, comme observé en simulation pour les angles de vue de  $\pm 5^\circ$ , les estimations des paramètres  $\theta_x$  et  $v_0$  semblent être mauvaises. Le banc a été construit pour avoir  $\theta_x = 0^\circ$ . La valeur de  $v_0$  dépend fortement du réglage en hauteur de la source. Néanmoins, elle a été ajustée pour être proche de  $v_0 = 8.5$  pixels.

Nous donnons aussi dans la table 2 les reprojections des droites du calibre après calibration. Les calibrations ont été effectuées avec et sans la droite ( $L_4$ ). On observe que les erreurs de reprojection sont très faibles à l’exception de celles des droites ( $L_4$ ) et ( $L_{8,7}$ ) lorsqu’on effectue une calibration sans ( $L_4$ ). Ce résultat peut s’expliquer par le fait qu’on ne prend pas en compte la droite ( $L_4$ ) dans l’estimation des paramètres  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$ . Cependant, elle est prise en compte dans l’estimation de l’intersection de la droite ( $L_8$ ) et du plan de vue. Son influence sur le calcul des paramètres du plan de vue peut expliquer l’écart observé sur la reprojection de ( $L_8$ ). Ainsi, ces résultats montrent la robustesse des estimations.

Nous discutons plus en détails de la précision de positionnement et d’orientation des différents composants du banc dans la suite du chapitre. Nous expliquons aussi la méthode utilisée pour régler la hauteur de la source.

## 2.8.2 Calibration du banc expérimental

### 2.8.2.1 Procédure

Les observations de la section 2.7.2 ont été faites après l’acquisition des données. Les résultats des calibrations ne semblaient pas très fiables lors des expérimentations. Nous avons choisi d’effectuer la calibration à partir de plusieurs positions des tables A et B pour rendre plus robustes nos estimations. Ainsi, nous déterminons les paramètres de calibration du système à une position des tables A et B en extrapolant les résultats obtenus avec plusieurs calibration réalisées à différentes positions de la source. Il est important de ne pas déplacer le calibre entre les translations. Le positionnement du calibre n’est pas parfaitement répétable. En effet, nous avons observé de légères différences entre plusieurs calibrations dans la même configuration après des déplacements du calibre. Nous expliquons dans l’annexe A les calculs effectués pour obtenir les paramètres de calibration utilisées dans les chapitres de calibration physique et géométrique "on-line".

### 2.8.2.2 Réglage de la hauteur de la source

La source est positionnée sur une table de rotation et deux tables de translation. En dessous de ces tables se trouve une plaque ajustable en hauteur par des vis de positionnement (voir section 1.2). Nous avons considéré que la calibration n’était pas assez précise lors de l’acquisition des données. Ainsi, une méthode alternative a été utilisée pour ajuster la hauteur de la source. En effet, la surface supérieure du chariot portant les prismes et la bouteille doit être tangente à certains rayons lorsque la source est parfaitement positionnée. Si les rayons sont tangents, alors les projections d’un même objet de petite taille positionné à différents endroits sur le chariot doivent être de taille identique. Nous avons utilisé deux vis identiques que nous avons positionné à l’avant et à l’arrière du chariot. Pour éviter d’avoir une influence trop forte du grandissement, nous avons choisi des vis dont la tête mesure 3mm de hauteur.

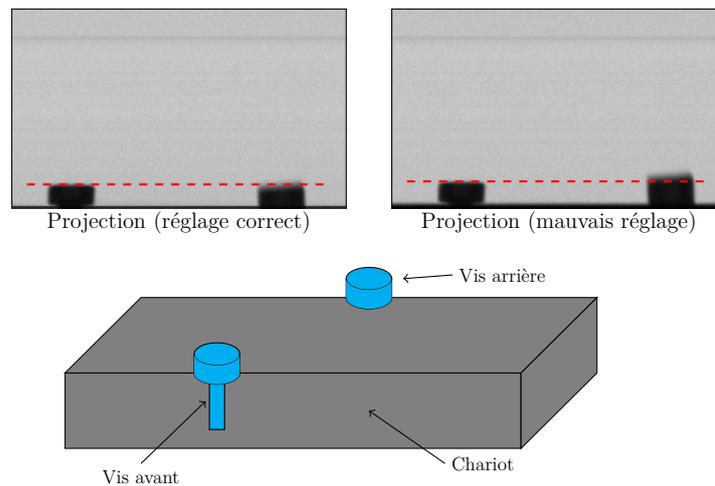


FIGURE 46 – Réglage de la hauteur de la source. Deux vis sont placés à l’avant et à l’arrière du chariot. La hauteur est ajustée telle que les projections des deux vis soient de taille identique.

La hauteur de la source a donc été réglée en ajustant les vis de positionnement jusqu’à obtenir des projections similaires. Cette méthode est illustrée dans la Fig. 46. On observe qu’il est compliqué d’obtenir des projections de taille similaire. En pratique, la source n’est pas un point mais un carré de 1mm de côté (données du fabricant). Ceci peut expliquer le flou observé sur la projection de la vis avant. Nous estimons que la précision du positionnement de la source sur l’axe  $y$  est de quelques pixels (inférieure à 1mm).

### 2.8.2.3 Références mécaniques

Le banc expérimental a été conçu pour avoir 4 degrés de liberté sur le placement du tube à rayons X. En effet, la position de la source peut être ajustée par de nombreuses tables de positionnement et de rotation. Des supports ont été ajoutés à cet empilement pour maintenir le tube à rayons X. Chaque table ajoute de l’incertitude sur la position du point source. Nous possédons les données du fabricant indiquant la position de la source (carré de 1mm de côté) sur la cible du tube à rayons X. Cependant, les incertitudes cumulées par la superposition des tables et supports sur la position du point source ne permet pas de connaître la position exacte de la source dans le repère monde (lié au calibre). Nous ne pouvons donc pas mesurer l’incertitude sur les estimations des paramètres  $X_S$ ,  $Y_S$ ,  $Z_S$ . De plus, les paramètres  $f$ ,  $v_0$ ,  $\theta_y$  dépendent de la position de la source. Nous ne pouvons donc pas donner d’incertitude sur ces paramètres. Nous pouvons éventuellement calculer les incertitudes sur les paramètres  $\theta_x$ ,  $\theta_z$ . Ces paramètres dépendent de la verticalité du détecteur par rapport au calibre. Les simulations de la section 2.7.2 permettent d’obtenir des ordres de grandeur sur la précision de nos mesures. Néanmoins, ce ne sont pas des incertitudes de mesures réelles. L’intérêt de ces valeurs est très limité.

### 2.8.3 Analyse

Malgré l’impossibilité de calculer les incertitudes sur nos mesures, la méthode utilisée pour la calibration permet de donner une mesure relative de précision sur la position de la source. En effet, les translations des tables A et B ont une précision de  $\pm 10\mu\text{m}$ . Ces tables ont été placées pour correspondre à des translations sur les axes  $x$  et  $z$ . Nous ne connaissons pas exactement la précision de leur positionnement par rapport à ces axes.

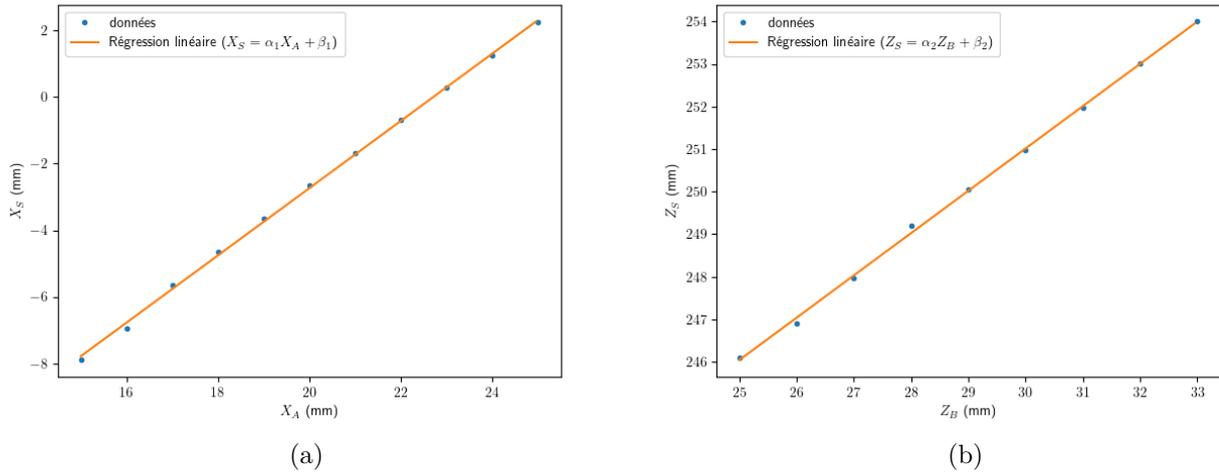


FIGURE 47 – Régression linéaire des résultats de plusieurs calibrations : (a)  $X_S$  en fonction de la position  $X_A$  de la table A ( $X_S = \alpha_1 X_A + \beta_1$ ), (b)  $Z_S$  en fonction de la position  $Z_B$  de la table B ( $Z_S = \alpha_2 Z_B + \beta_2$ ). Les calibrations sont réalisées pour un angle de vue de  $-5^\circ$ .

**Translation table A** Nous déplaçons la table A d’un millimètre à plusieurs reprises sans déplacer le calibre. Cette table permet d’effectuer des translations du tube à rayons X. Les estimations du paramètre  $X_S$  sont données en fonction de la position  $X_A$  de la table A pour un angle de vue de  $-5^\circ$  dans la Fig. 47a. La relation entre ces données est modélisée par une droite affine de la forme  $X_S = \alpha_1 X_A + \beta_1$ . Ses coefficients ont pour valeur  $\alpha_1 = 1.01$  et  $\beta_1 = -22.93\text{mm}$ . Les mesures sont donc cohérentes entre elles puisque le coefficient  $\alpha_1$  est très proche de 1. On en déduit que la table A est relativement bien positionnée par rapport à l’axe  $\mathbf{x}$  (défini par le calibre) et que nos mesures sont cohérentes entre elles. De plus, les estimations des paramètres  $Y_S$  et  $Z_S$  varient très peu lorsque nous déplaçons le tube à rayons X sur l’axe  $\mathbf{x}$ .

**Translation table B** Nous effectuons la même manipulation avec la table B. Les estimations du paramètre  $Z_S$  sont données en fonction de la position  $Z_B$  de la table B pour un angle de  $-5^\circ$  dans la Fig. 47b. Comme pour la table A, les données sont modélisées avec une droite affine de la forme  $Z_S = \alpha_2 Z_B + \beta_2$ . Ses coefficients ont pour valeur  $\alpha_2 = 0.99$  et  $\beta_2 = 221.18\text{mm}$ . Ainsi, les mesures sont aussi cohérentes avec la translation effectuée.

## 2.9 Conclusion

Nous avons proposé 4 méthodes différentes pour calibrer un système à une source et plusieurs détecteurs linéaires. Nous avons aussi proposé plusieurs objets géométriques de calibration : le calibre à 2 plans parallèles, le calibre minimal et le calibre adapté. Les résultats obtenus en simulation montrent des performances convenables de nos méthodes et de la méthode de Horaud *et al.* avec le calibre adapté. Les expériences montrent que nos estimations sont cohérentes avec les translations de la source. Néanmoins, nous n’avons pas d’incertitude de mesure sur les estimations des paramètres de calibration. Une partie de ces résultats a été présentée au CT Meeting 2022 [1].

Les simulations et expériences ont mis en avant des légers problèmes dans les méthodes utilisées. De plus, certaines mesures n’ont pas pu être effectuées. Ainsi, quelques points restent à traiter ou améliorer :

- Estimation des paramètres  $\theta_x$  et  $v_0$  sur des petits angles
  - Les simulations donnent des écarts types importants sur l'estimation de ces paramètres pour les angles de vue proches de  $0^\circ$ . Les résultats des expériences montrent un comportement similaire. Des simulations montrent l'influence des droites ( $L_2$ ) et ( $L_3$ ) sur les estimations des paramètres  $\theta_x$  et  $v_0$ . Aucune étude plus approfondie n'a été effectuée. Nous ne proposons pas de modifications à apporter au calibre dans ce chapitre.
- Incertitude des mesures des paramètres géométriques du banc expérimental
  - Nous avons fait le choix d'avoir 4 degrés de liberté sur la position de la source. L'objectif était de permettre un réglage de la position du tube tel que certains rayons X soient tangents à la surface du chariot en translation. Le montage implique des incertitudes potentiellement importantes et difficilement quantifiables. Il peut être envisagé de réduire le nombre de degré de liberté. Par exemple, la rotation de la source n'est pas nécessaire si le cône d'émission du tube est suffisamment large. Dans ce cas, nous pouvons envisager de retirer la table de rotation.
  - La référence du point source utilisée lors de la conception n'était pas correcte. Nous considérons que ce point est centré sur la cible (interface recevant un flux d'électrons et générant des rayons X). Des données du fabricant montrent que le point source n'est pas centré. De plus, le point source est en réalité un carré de 1mm de côté sur une cible inclinée. Le banc expérimental doit être conçu en conséquence.
  - Il peut être possible de mesurer la précision d'estimation des angles  $\theta_x$  et  $\theta_z$  d'orientation du détecteur par rapport au calibre. La position du détecteur dépend de la précision de positionnement de l'équerre la supportant. Le calibre et l'équerre sont positionnées sur des pièces usinées telles que les surfaces de contact soient parallèles. La mesure revient donc à déterminer l'écart entre la précision de réalisation de l'équerre et du calibre. Ces mesures n'ont pas été réalisées.



---

---

# CHAPITRE 3

---

## CALIBRATION PHYSIQUE

### 3.1 Introduction

En tomographie, les données sont généralement représentées en utilisant le modèle d'intégrale de droites basé sur la loi de Beer-Lambert [50]. Les algorithmes de reconstruction sont construits autour de ce modèle en fonction de la géométrie d'acquisition. On distingue deux types d'algorithmes : les algorithmes analytiques et les itératifs.

Les algorithmes analytiques sont plus adaptés pour des grands volumes de données. Au contraire, les algorithmes itératifs sont généralement assez lents. Ils reposent sur des méthodes d'optimisation ou des approches statistiques. Ils peuvent utiliser directement les données brutes, le sinogramme ou linogramme, les données dans le domaine de l'image, sans utiliser de loi physique spécifique [51][52][53]. En effet, ces algorithmes permettent de prendre en compte davantage de phénomènes physiques contrairement à seulement l'absorption photo-électrique pour la loi de Beer-Lambert.

L'algorithme de reconstruction utilisé par *Tiama* est itératif. Il est basé sur la loi de Beer-Lambert dans laquelle les bouteilles en verre à reconstruire sont considérées comme étant mono-matériau. Cela permet d'utiliser directement l'épaisseur de verre traversée par les rayons X. En pratique, l'algorithme est initialisé à partir des épaisseurs calculées sur un maillage 3D de référence de la bouteille à reconstruire. Ensuite, l'algorithme ajuste les épaisseurs en fonction des radiographies de la bouteille. Cette dernière étape nécessite d'établir le lien entre les radiographies acquises par les détecteurs et les épaisseurs de verre traversées. En considérant que les bouteilles sont mono-matériau, il est possible d'utiliser la loi de Beer-Lambert avec un coefficient d'absorption constant. Néanmoins, nous proposons dans ce chapitre de déterminer empiriquement la loi modélisant le lien entre l'intensité des rayons X mesurée et l'épaisseur de verre traversée. La composition chimique des bouteilles peut varier légèrement de l'une à l'autre. Ainsi, nous nous proposons de déterminer cette loi à partir de plusieurs bouteilles et prismes en verre de compositions différentes. L'objectif est d'améliorer la reconstruction en utilisant une modélisation plus adaptée et plus fine que la loi de Beer-Lambert.

Dans la section 3.2, nous décrivons les phénomènes physiques liés à la génération et à l'atténuation des rayons X. Dans la section 3.3, nous présentons les résultats obtenus avec notre banc expérimental. Finalement, dans la section 3.4, nous proposons un résumé des résultats ainsi que quelques propositions d'amélioration et d'études à réaliser.

## 3.2 Phénomènes physiques et modélisation de l'atténuation des rayons X

### 3.2.1 Génération des rayons X

Le rayonnement est généré par un tube à rayons X [54]. Un filament, la cathode, est chauffé afin de produire des électrons. Ceux-ci sont accélérés par un champ électrique vers une cible inclinée, l'anode. Les électrons interagissent avec la cible [55]. Deux interactions sont possibles :

- Bremsstrahlung ou rayonnement continu de freinage : un photon d'énergie égale à la décélération est émis à chaque perte de vitesse de l'électron jusqu'à son arrêt. Ce rayonnement est un continuum dont l'énergie maximale est égale à l'énergie cinétique de l'électron.
- Fluorescence : l'électron peut entrer en collision avec un électron de cœur de l'atome. Celui-ci est éjecté de sa couche électronique. Un électron de l'atome va prendre sa place. Un photon peut alors être émis par fluorescence. L'énergie du photon est égale à la différence d'énergie entre la couche de départ et d'arrivée de l'électron. Ce phénomène est lié aux propriétés électroniques des atomes de la cible. Des pics caractéristiques sont observables sur le spectre d'émission du tube.

Le fonctionnement du tube à rayons X est illustré dans la Fig. 48a. La quantité de rayons X et leur énergie sont respectivement proportionnelles à l'intensité du courant dans le filament et à la tension entre l'anode et la cathode. En effet, l'intensité du courant dans le filament permet de contrôler le nombre d'électrons émis puis accélérés vers la cathode. La tension entre l'anode et la cathode permet de contrôler l'énergie cinétique des électrons. Une illustration du rayonnement d'un tube à rayons X est donnée dans la Fig. 48b.

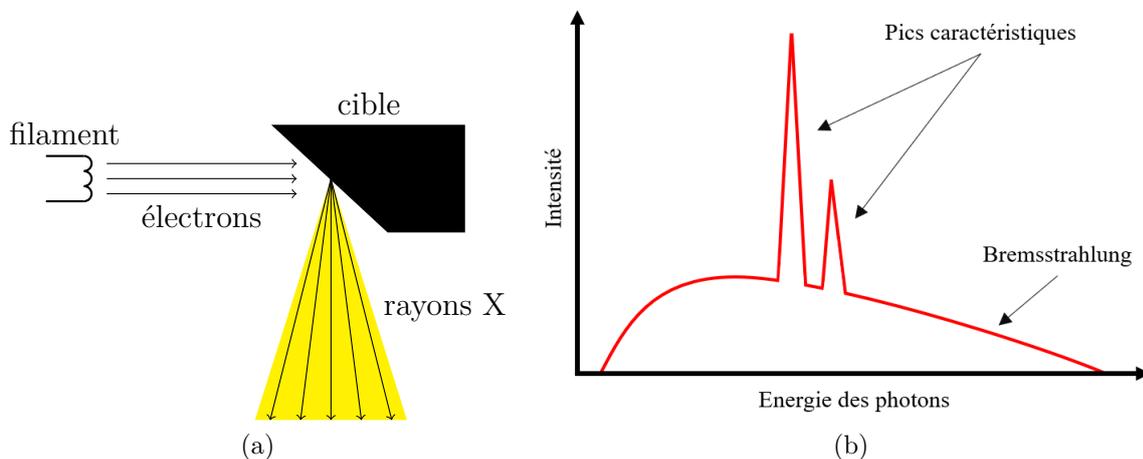


FIGURE 48 – (a) Fonctionnement d'un tube à rayons X. Des électrons sont accélérés vers une cible, produisant un rayonnement de freinage (bremsstrahlung) et de fluorescence. (b) Illustration du rayonnement d'un tube à rayons X. Le rayonnement est composé d'un continuum et de pics caractéristiques de la cible.

### 3.2.2 Interaction rayons X - atomes

Cette section a entièrement été rédigée à partir du livre "An Introduction to the Passage of Energetic Particles through Matter" de N. J. Carron [55].

### Photons de faible énergie

Les photons d'énergie inférieure à quelques keV se comportent comme une onde et interagissent directement avec les molécules. Leur longueur d'onde est supérieure à la distance inter-atomique du solide. Ainsi, les interactions des photons vont dépendre de la structure et de l'état du solide traversé.

### Photons d'énergie plus élevée

Les photons de longueur d'onde plus faible se comportent comme des particules et interagissent directement avec les atomes (électrons de cœur et noyau). Ces photons ont des énergies supérieures à quelques keV jusqu'à plusieurs MeV. Dans cette gamme d'énergie, la structure du solide ne compte pas. Seule la composition, le nombre, et le type d'atomes par unité de volume comptent (masse volumique). De multiples interactions entre les photons et les atomes existent. Les 4 interactions principales sont :

- **Absorption photo-électrique** : le photon incident est intégralement absorbé par un électron qui est alors éjecté de l'atome (ionisation).
- **Diffusion Rayleigh** : le photon incident est dévié sans perdre d'énergie.
- **Diffusion Compton** : une partie de l'énergie du photon incident est transférée à un électron qui est alors éjecté de l'atome (ionisation). Le photon est dévié de sa trajectoire avec une énergie réduite.
- **Création de paires** : le photon incident est détruit. Une paire électron-positron est créée. L'énergie minimale du photon doit être égale ou supérieure à l'énergie nécessaire à la création de la paire électron-positron (environ 1022 keV).

Les interactions varient selon le numéro atomique  $Z$  des atomes. Par exemple, dans la Fig. 49, nous donnons le coefficient d'atténuation massique ( $\mu/\rho$ ), exprimé en  $\text{cm}^2/\text{g}$ , des rayons X dans le verre sodocalcique par rapport à chaque interaction en fonction du niveau d'énergie des photons. De quelques keV à environ 50keV, l'absorption photo-électrique est prépondérante. Il n'y a pas de création de paires à ces niveaux d'énergies. La diffusion Rayleigh représente moins de 10% des interactions totales. La diffusion Compton est prépondérante de quelques dizaines de keV jusqu'à 10 MeV. Au delà, la création de paires est majoritaire.

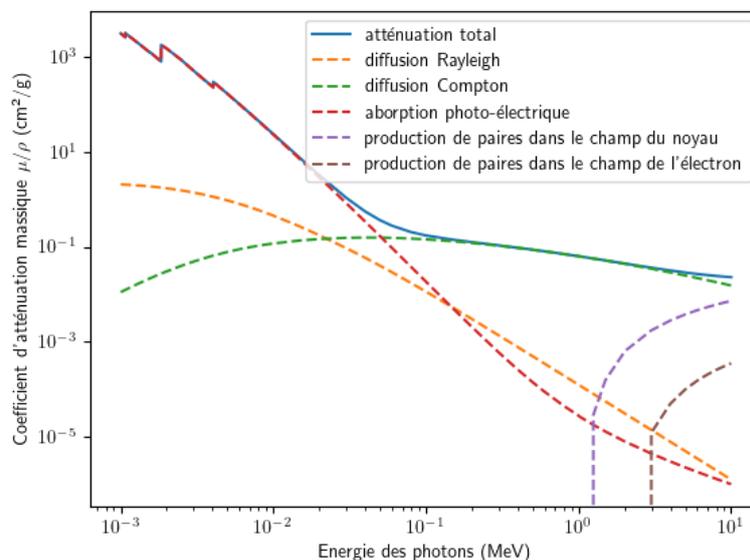


FIGURE 49 – Atténuation des rayons X dans le verre sodocalcique (données du NIST [56]).

Les données de la Fig. 49 ont été calculées avec l’outil XCOM du National Institute of Standards and Technology (NIST) [56]. Le calcul est effectué à partir de la composition chimique d’un composé et du spectre d’énergie des photons. Pour retrouver le coefficient d’atténuation linéaire  $\mu$ , il suffit de multiplier par la masse volumique du composé. Nous concluons que le coefficient d’atténuation  $\mu$  est une fonction de l’énergie avec des différences de plusieurs ordres de grandeur entre certains niveaux d’énergie (l’échelle de la Fig. 49 est logarithmique). C’est une information à prendre en compte dans la modélisation de l’absorption.

### 3.2.3 Atténuation des rayons X

En tomographie, l’énergie des photons est généralement comprise entre quelques dizaines de keV et plusieurs centaines de keV. Le choix de l’énergie dépend de la densité et de l’absorption des objets mesurés. Les interactions principales sont alors l’absorption photo-électrique, les diffusions de Compton et Rayleigh.

L’objet mesuré est défini par la fonction d’atténuation linéaire  $\mu$  dépendant de la position  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  et de l’énergie du faisceau  $E$  [11]. Le rayon se propage le long de la droite  $\mathcal{D}$  entre la source et le détecteur. Nous définissons respectivement  $I_0$  et  $I$  l’intensité initiale et mesurée des rayons X. Ainsi, la loi d’absorption de Beer-Lambert s’écrit :

$$I = I_0 \exp\left(-\int_{\mathcal{D}} \mu(\mathbf{x}, E) dl\right) \quad (3.1)$$

Dans le cas des bouteilles en verre, nous supposons que la fonction d’atténuation est constante dans l’objet pour un niveau d’énergie donné. En effet, l’intégralité de la bouteille provient d’une seule goutte de verre. Leur composition est supposée homogène. Le coefficient d’atténuation  $\mu$  ne dépend donc pas de la position  $\mathbf{x}$  si on néglige l’atténuation de l’air. Néanmoins, la composition des bouteilles peut changer d’une bouteille à l’autre. Deux types de verre sont généralement utilisés par les verriers : le verre sodocalcique et borosilicate [3]. Leur composition est détaillée dans la table 4. Pour une épaisseur traversée  $L$ , la loi de Beer-Lambert spectrale s’écrit :

$$I(L) = \int_{\mathbb{R}_+} I_0(E) \exp(-\mu(E)L) dE \quad (3.2)$$

Dans la suite, nous utilisons un modèle à  $N_e$  bandes d’énergie (ou loi à  $N_e$  bins) :

$$I(L) = \sum_{k=1}^{N_e} I_k \exp(-\mu_k L) \quad (3.3)$$

Composant	Sodocalcique (%)	Borosilicate (%)
SiO <sub>2</sub>	74	81
Na <sub>2</sub> O	13	4
K <sub>2</sub> O	0.3	-
MgO	0.2	-
CaO	11	-
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	1.5	2
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.04	-
SO <sub>2</sub>	0.2	-
B <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	-	13

TABLE 4 – Exemple de composition des verres sodocalcique et borosilicate *Pyrex* (données issues de [3]).

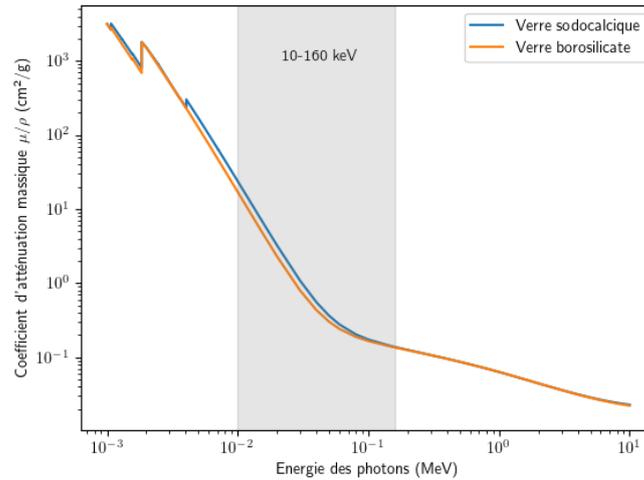


FIGURE 50 – Atténuation des rayons X dans les verres borosilicate *Pyrex* et sodocalcique (données du NIST [56][57]).

L'atténuation théorique du verre borosilicate *Pyrex* et sodocalcique est donnée par le NIST [56][57]. Les valeurs sont représentées dans la Fig. 50. On remarque une légère différence entre les deux courbes d'absorption pour des énergies comprises entre 10 à 160keV.

## 3.3 Expériences

### 3.3.1 Montage expérimental

L'objectif des expériences est d'établir un lien entre l'intensité mesurée et l'épaisseur de verre traversée par les rayons X. Pour cela, nous utilisons un prisme droit à base carrée conçu pour des applications optiques. La géométrie du prisme est a priori un bon choix pour étalonner les épaisseurs. Trois prismes sont placés à différentes positions dans une tour en métal (voir 1.2.2). La différence de position permet de mesurer la loi d'absorption en fonction de la hauteur des prismes. Cela nous permet de faire varier plusieurs paramètres dont la résolution des projections (liée au grandissement) et l'angle d'incidence des rayons sur le détecteur. On observe que les données sont moins bruitées lorsque la distance source-prisme est plus faible. Au contraire, lorsque cette distance est plus élevée, le bruit est élevé mais la projection du prisme est beaucoup plus large. Cela permet d'avoir une meilleure résolution sur les radiographies, et donc un pas d'échantillonnage plus fin sur les épaisseurs de verre traversées. Un exemple de projection des prismes est donné dans la Fig. 51a.

Les prismes optiques sont conçus en verre borosilicate N-BK7 alors que les bouteilles sont en verre sodocalcique. Ainsi, en complément des prismes, nous utilisons les données des bouteilles pour établir le lien entre l'intensité des rayons et l'épaisseur de verre traversée. Ces données permettent de vérifier s'il y a des différences notables entre l'absorption des verres sodocalcique et borosilicate. Nous choisissons 3 bouteilles dont les épaisseurs de verre et la répartition de la masse sont différentes. Leur composition chimique n'est pas exactement connue. Nous supposons qu'elle est légèrement différente d'une bouteille à l'autre. Les bouteilles sont collées sur le chariot de translation. Par manque de place sur le chariot, les expériences sont réalisées en deux temps :

- Montage 1 : les 3 prismes et la bouteille Bird sont installés sur le chariot (voir projection de la Fig. 51a). Un "penetrameter" est ajouté au montage afin de caractériser

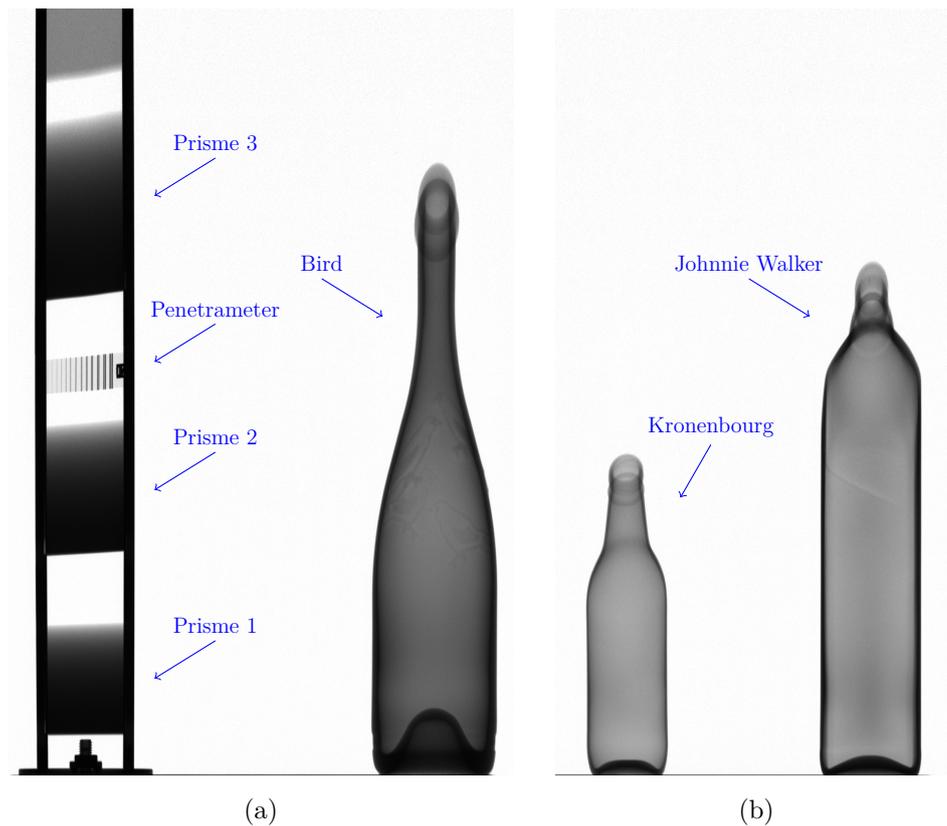


FIGURE 51 – Projections obtenues pour un angle de vue de  $-5^\circ$  avec le (a) montage 1 (prismes et bouteille Bird), (b) montage 2 (bouteilles *Kronenbourg* et *Johnnie Walker*).

la qualité des radiographies (voir la section 1.2 pour plus d’information).

- Montage 2 : les bouteilles *Kronenbourg* et *Johnnie Walker* sont installées sur le chariot (voir projection de la Fig. 51b).

### 3.3.2 Mesure d’épaisseur

Pour établir le lien entre l’intensité mesurée et l’épaisseur traversée, il est nécessaire de déterminer l’épaisseur de verre traversée pour chaque rayon mesuré. Nous utilisons une méthode géométrique pour les prismes et une mesure de référence pour les bouteilles. Les valeurs des paramètres géométriques utilisées dans cette section sont données dans la table 16 de l’annexe A. Les calculs effectués pour obtenir ces résultats sont explicités dans le chapitre 2 sur la calibration géométrique.

#### 3.3.2.1 Prismes

Les épaisseurs théoriques de verre traversées par les rayons X sont calculées avec *Geogebra*. Le calcul prend en compte la calibration géométrique, la position et l’orientation des prismes. Les épaisseurs pour un angle de vue de  $-5^\circ$  sont données dans la Fig. 52. Les données ont été ajustées par la suite pour compenser les erreurs liées à la calibration géométrique. En effet, on observe des écarts entre les données réelles et théoriques. Ces écarts sont causés par un grandissement légèrement différent des projections réelles par rapport à la théorie. Plusieurs erreurs peuvent être à la source de ce problème : approximations effectuées lors de l’utilisation des paramètres géométriques (voir l’annexe A), déplacement des prismes dans les encoches de positionnement (inférieur à un millimètre), mauvaise estimation des paramètres

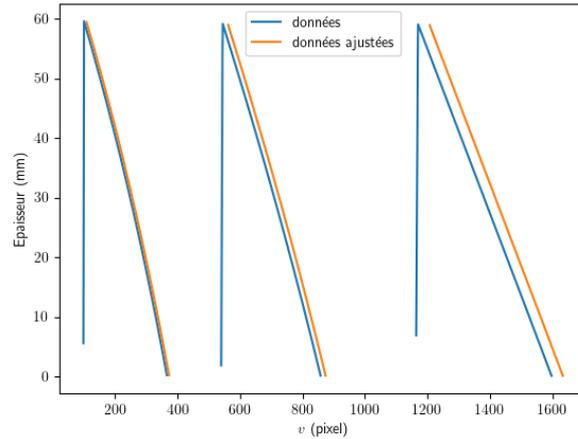


FIGURE 52 – Épaisseurs des prismes en fonction des pixels du détecteur pour un angle de vue de  $-5^\circ$ .

géométriques (approximativement de l'ordre du millimètre sur les distances). L'ajustement des données consiste en une translation de quelques pixels des données de chaque prisme pour s'ajuster au mieux avec les projections. Les données aberrantes liées à des zones de fortes variations d'épaisseurs ont aussi été supprimées. Elles correspondent à une faible quantité de points. Ces ajustements sont nécessaires. Les estimations des paramètres réalisées par la suite sont sensibles aux données aberrantes (le nombre de mesures est limité).

### 3.3.2.2 Bouteilles

Les épaisseurs de verre traversées par les rayons dans les bouteilles sont calculées à partir de maillages 3D de référence. Ils sont obtenus en reconstruisant les bouteilles avec le tomographe *Tiama XLab*. À partir de la calibration géométrique et des maillages, le simulateur de *Tiama* permet de calculer les épaisseurs de verres traversées par chaque rayon. Les épaisseurs de chaque bouteille sont données dans la Fig. 53.

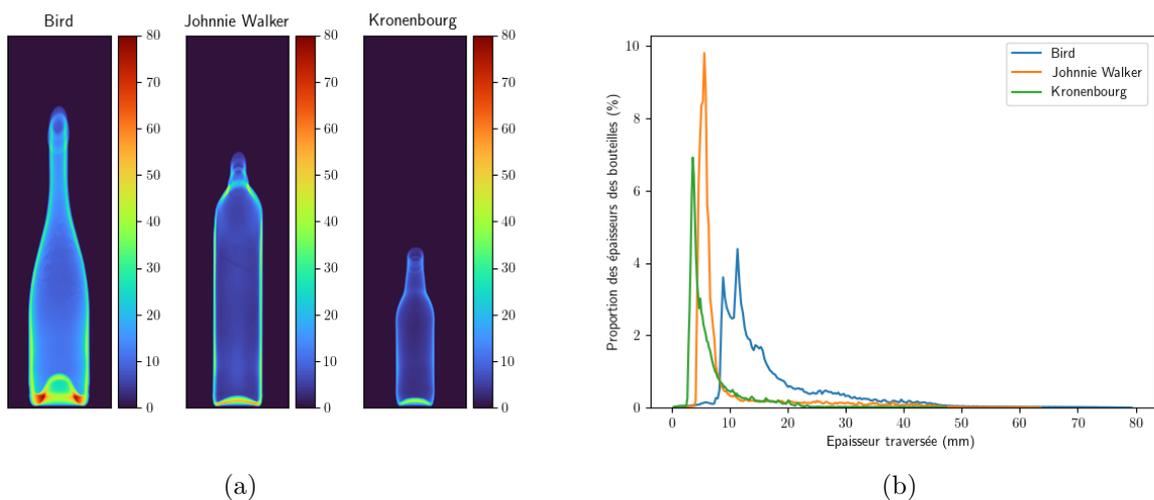


FIGURE 53 – Pour un angle de vue de  $-5^\circ$  : (a) Épaisseurs de verre traversées des bouteilles Bird, *Johnnie Walker* et *Kronenbourg* en millimètres (b) Proportion des épaisseurs traversées pour chaque bouteille des images de la Fig. 53a.

### 3.3.3 Lien épaisseur - intensité des rayons X

#### 3.3.3.1 Prismes

Le lien entre l'épaisseur de verre traversée par les rayons X et l'intensité mesurée sur le détecteur est effectué en mettant en correspondance les données radiographiques des prismes et les épaisseurs théoriques obtenues avec *Geogebra*. Pour toutes les radiographies, les données sont normalisées. La valeur maximale est fixée à 15000. Les épaisseurs théoriques ont été décalées de quelques pixels pour chaque prisme pour compenser les erreurs liées à la calibration géométrique. De plus, nous filtrons les épaisseurs inférieures à 1mm et supérieures à 59mm. Ces valeurs correspondent aux extrémités des projections des prismes où les écarts peuvent être importants.

**Résultats** Les données ont été modélisées avec les lois de Beer-Lambert et le modèle à  $N_e$  bins d'énergie pour  $N_e = 2$  ou  $N_e = 3$ . Nous imposons la condition suivante sur les coefficients :  $\sum_{k=1}^{N_e} I_k = 15000$ . Les données des 3 prismes obtenues pour chaque pixel du détecteur et épaisseurs associées sur les 12 angles de vue sont présentées dans la Fig. 54a.

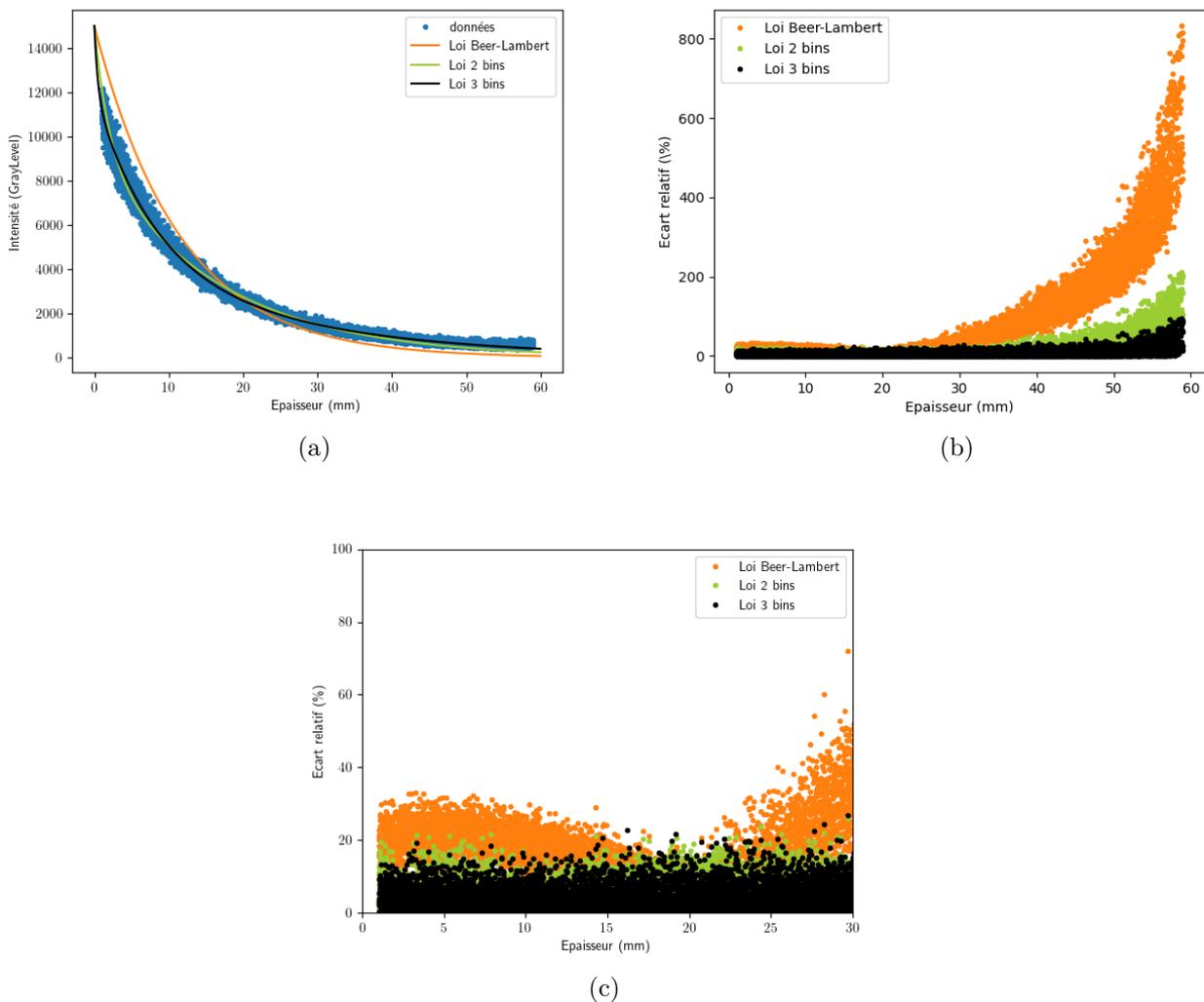


FIGURE 54 – Données des 3 prismes sur 12 angles de vue. (a) Modélisation des données avec les lois de Beer-Lambert, 2 et 3 bins. (b) Écart relatif des données aux lois de Beer-Lambert, 2 et 3 bins. (c) Zoom sur la Fig. 54b (épaisseurs inférieures à 30mm).

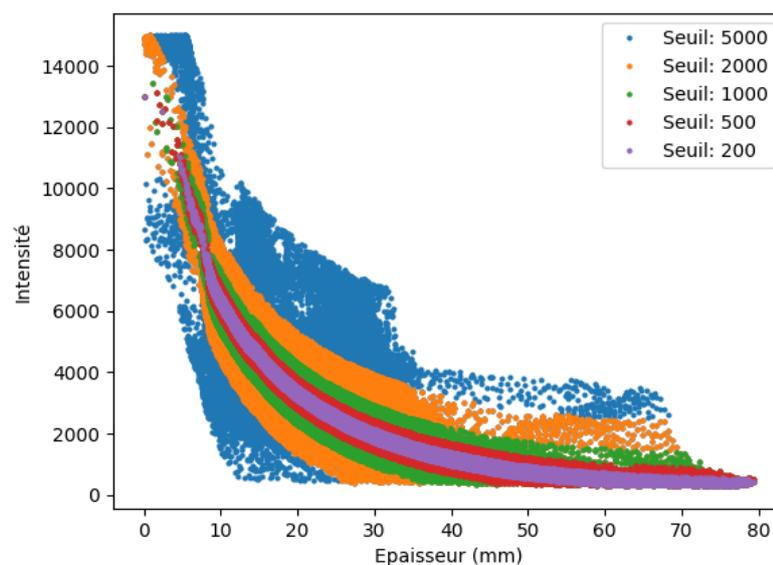
Loi	Beer-Lambert	2 bins	3 bins
$I_1$	15000	9187	4486
$\mu_1$	0.087	0.060	0.040
$I_2$		5813	7472
$\mu_2$		0.50	0.13
$I_3$			3042
$\mu_3$			2.097

TABLE 5 – Coefficients des lois Beer-Lambert, 2 et 3 bins pour les données de la Fig. 54a.

Les valeurs des coefficients obtenues sont données dans la table 5. On observe une grande variabilité dans les données. Elle peut être expliquée par la haute sensibilité du détecteur, mais aussi par des erreurs liées à la calibration géométrique et à la mise en correspondance des données. Les courbes des lois 2 et 3 bins sont plus fidèles aux données que la courbe de la loi de Beer-Lambert. L'écart relatif absolu des points aux courbes est donné dans la Fig. 54b. Ces données confirment nos observations. En dessous de 30mm d'épaisseur, l'écart maximal est d'environ 15 à 20% pour les lois 2 et 3 bins, et entre 15 et 60% pour la loi de Beer-Lambert. Cependant, il atteint près de 800% pour la loi de Beer-Lambert pour 59mm d'épaisseur contre respectivement 200% et 95% pour les lois 2 et 3 bins. Ainsi, les lois 2 et 3 bins permettent de mieux modéliser les données. Ce résultat est cohérent avec les phénomènes physiques décrits dans la section précédente. Il correspond à un durcissement du faisceau. Les photons interagissent différemment avec les prismes selon leur niveau d'énergie.

### 3.3.3.2 Bouteilles

Les radiographies réelles sont superposées avec les épaisseurs calculées par le simulateur pour établir le lien entre l'épaisseur de verre traversée et l'intensité mesurée des rayons X. Les données sont filtrées pour retirer les données aberrantes. L'objectif est de diminuer les erreurs

FIGURE 55 – Filtrage des données de la bouteille Bird avec un angle de vue de  $-5^\circ$ . Le seuil correspond à la différence maximum en valeur absolue entre les radiographies réelles et simulées avec ajustement d'histogramme.

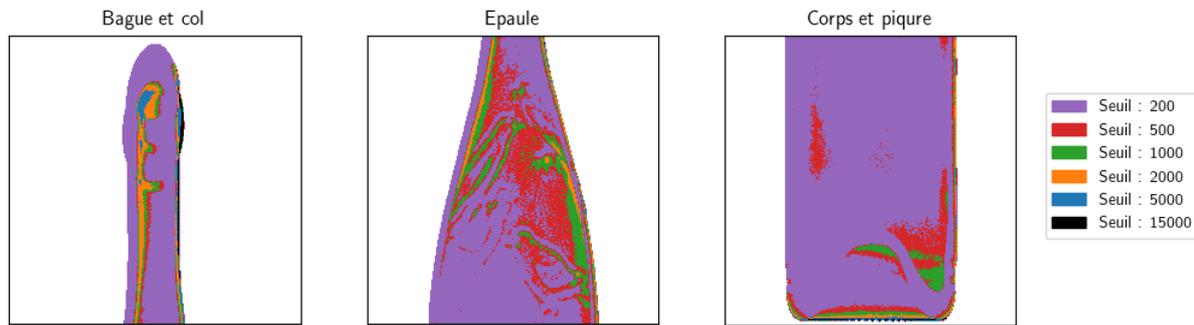


FIGURE 56 – Sélection des pixels en fonction du seuil de filtrage pour la bouteille Bird à un angle de vue de  $-5^\circ$ .

liées à la calibration géométrique. En effet, des écarts importants entre les données réelles et théoriques sont détectés dans les zones avec des fortes variations d'épaisseurs. Ils peuvent être dus à une mauvaise référence sur la position de la bouteille ou à des approximations sur les estimations des paramètres géométriques utilisées par le simulateur.

L'objectif du filtrage est de sélectionner les pixels de la radiographie réelle dont les valeurs ne semblent pas aberrantes par rapport aux épaisseurs calculés par le simulateur. La comparaison entre les intensités mesurées et les épaisseurs théoriques est effectuée en simulant des radiographies s'approchant au mieux des radiographies réelles. La simulation des radiographies est effectuée en appliquant la loi de Beer-Lambert aux épaisseurs théoriques de verre traversées. Puis, elles sont améliorées en utilisant une méthode d'ajustement d'histogramme dont la référence est la radiographie réelle. L'ajustement d'histogramme permet de générer des radiographies proches de la réalité. Un seuil est appliqué sur la différence en valeur absolue des radiographies réelles et simulées. Un exemple de filtrage des données est présenté dans la Fig. 55. On observe que la courbe conserve sa dynamique lorsque le seuil diminue. De plus, nous donnons la répartition spatiale des pixels de la bouteille sélectionnés en fonction du seuil dans la Fig. 56. On voit que le seuil à 200 permet de sélectionner une grande partie des pixels de la bouteille (environ 41%). Ceux-ci se situent principalement dans les zones homogènes de la radiographie. Les points présentant des différences significatives se trouvent dans les zones avec de forte variations d'épaisseur : parois, pique, bague. Ceci s'explique par une grande sensibilité de ces zones à des erreurs de calibration géométrique. Ainsi, dans la suite, nous fixons le seuil à 200 pour le filtrage.

**Résultats** Les données ont été modélisées avec les lois de Beer-Lambert d'une part et 2 bins d'autre part pour les 3 bouteilles. Les résultats des 3 bouteilles sur 12 angles de vue sont présentés dans la Fig. 57. Les valeurs associées à ces résultats sont données dans la table 6. On observe que la loi 2 bins est plus proche des données que la loi de Beer-Lambert pour les 3 bouteilles. La loi de Beer-Lambert ne semble pas adaptée pour la modélisation dans le cas des bouteilles *Johnnie Walker* et *Kronenbourg*. Les épaisseurs sont principalement comprises entre 0 et 10mm pour ces bouteilles (voir Fig. 53b). Cela correspond aux valeurs où la courbe de la loi de Beer-Lambert et les données se superposent. En dehors de cet intervalle, la loi de Beer-Lambert est très éloignée des données. De plus, nous remarquons dans la table 6 que les valeurs des coefficients de la loi 2 bins sont similaires pour les bouteilles Bird et *Johnnie Walker*. Ce résultat se confirme lorsque nous superposons les données des 3 bouteilles. Le graphique est donné dans la Fig. 57d. Toutes les données des bouteilles se superposent. Nous ne connaissons pas la composition exacte du verre de chaque bouteille. Nous pouvons faire l'hypothèse que la composition du verre est légèrement différente entre chaque bouteille. Ainsi, nous remarquons que ces différences ont un impact négligeable sur l'atténuation.

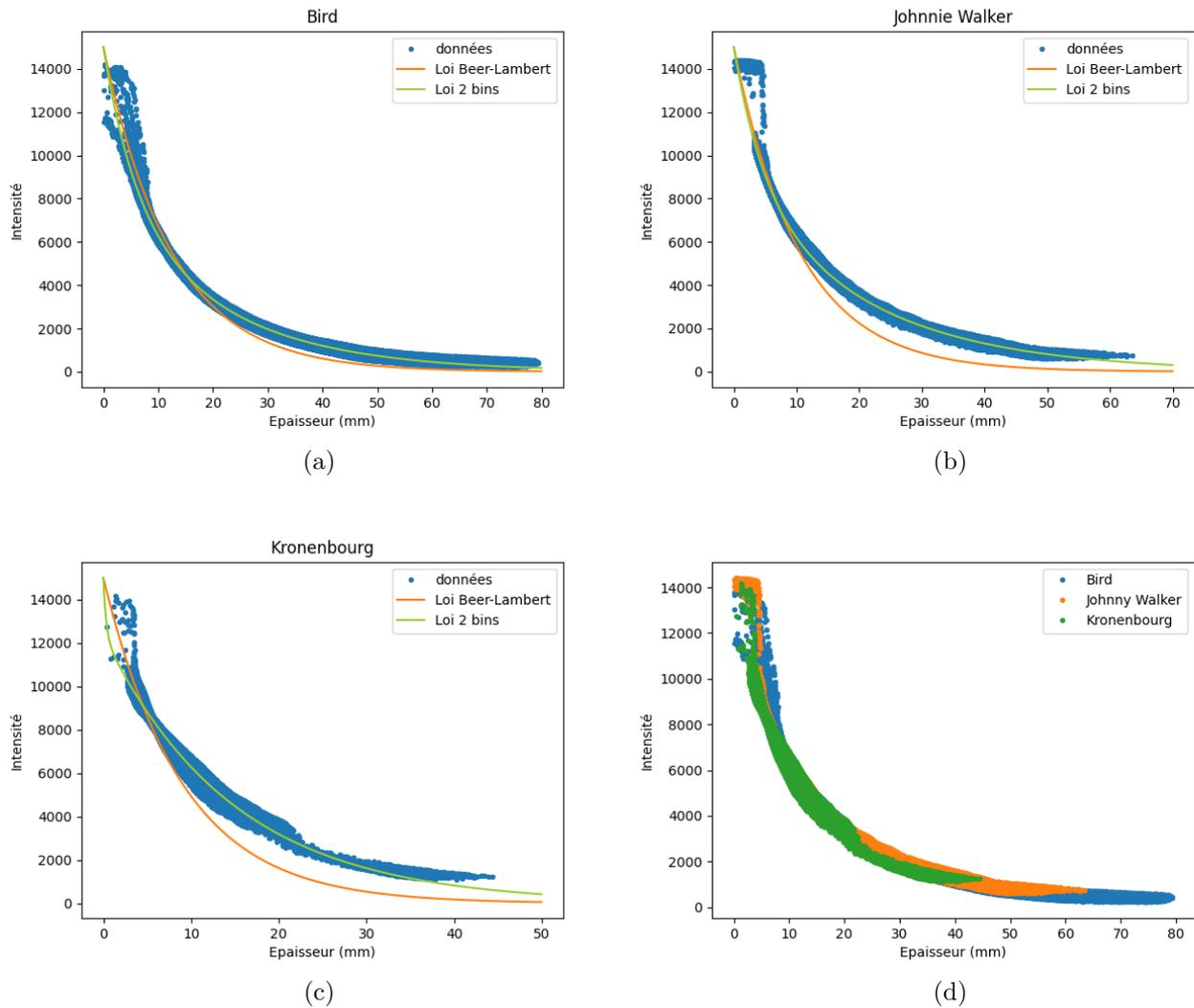


FIGURE 57 – Modélisation des données avec les lois de Beer-Lambert et 2 bins pour les bouteilles (a) Bird, (b) *Johnnie Walker*, (c) *Kronenbourg*. (d) Comparaison des données pour les 3 bouteilles.

Loi Beer-Lambert	Bird	Johnnie Walker	Kronenbourg
$\mu$	0.080	0.095	0.111
Loi 2 bins	Bird	Johnnie Walker	Kronenbourg
$I_1$	8175	8821	12373
$\mu_1$	0.048	0.048	0.068
$I_2$	6825	6179	2627
$\mu_2$	0.171	0.215	3.173

TABLE 6 – Coefficients des lois Beer-Lambert et 2 bins pour les données de la Fig. 57.

### 3.3.3.3 Comparaison des prismes et bouteilles

Nous comparons les courbes des lois 2 bins obtenues avec les prismes et les 3 bouteilles. Le graphique est donné dans la Fig. 58a. On observe que la loi des prismes est très différente de celles des bouteilles. Ainsi, nous en déduisons que les prismes utilisés ne semblent pas être convenables pour modéliser la loi des bouteilles. Nous rappelons que les prismes sont composés de verre N-BK7, un verre borosilicate, et les bouteilles sont en verre sodocalcique. Les lois des bouteilles Bird et *Johnnie Walker* sont quasi-identiques. La loi de la bouteille *Kronenbourg* est très proche de celles des autres bouteilles autour des 10mm d'épaisseur. Par conséquent, par la similarité des résultats obtenus avec les différentes bouteilles, nous pouvons envisager avoir recours à une unique loi pour modéliser l'absorption des rayons X par des bouteilles en verre. Cette hypothèse reste à valider car la répartition des épaisseurs n'est pas forcément suffisante pour déterminer précisément les coefficients des lois d'absorption. C'est notamment ce que nous observons pour la bouteille *Kronenbourg*.

En complément, nous comparons les données obtenues avec chacun des prismes pour un angle de  $55^\circ$  dans la Fig. 58b. Le prisme 1 correspond à celui situé le plus bas dans la tour et le prisme 3 correspond à celui situé le plus haut. Il ne semble pas y avoir de différences notables entre les données des 3 prismes. Néanmoins, les données du prisme 1 paraissent légèrement moins bruitées. Le prisme 1 est aussi le seul permettant d'obtenir des données pour les fortes épaisseurs. Ce sont deux résultats attendus. En effet, le gain des pixels est plus faible sur le bas du détecteur. Le signal est plus fort lorsque la source est plus proche du détecteur. Le rapport signal sur bruit est donc meilleur sur ces pixels. Les fortes épaisseurs sont obtenues lorsque les rayons sont tangents à une face du prisme. Ce n'est jamais le cas pour les prismes 2 et 3 lorsque l'angle de vue est différent de  $0^\circ$ . Nous rappelons que les prismes ont été positionnés pour que leur base soit tangente aux rayons pour un angle de  $0^\circ$ . Pour des angles de vue plus élevés, la distance source-détecteur est plus élevée. Les rayons ne sont alors plus tangents à la base des prismes comme à  $0^\circ$ . Dans ce cas, nous ne sommes plus en mesure d'obtenir des mesures sur les épaisseurs proches de 60mm. Ce phénomène est illustré dans la Fig. 59.

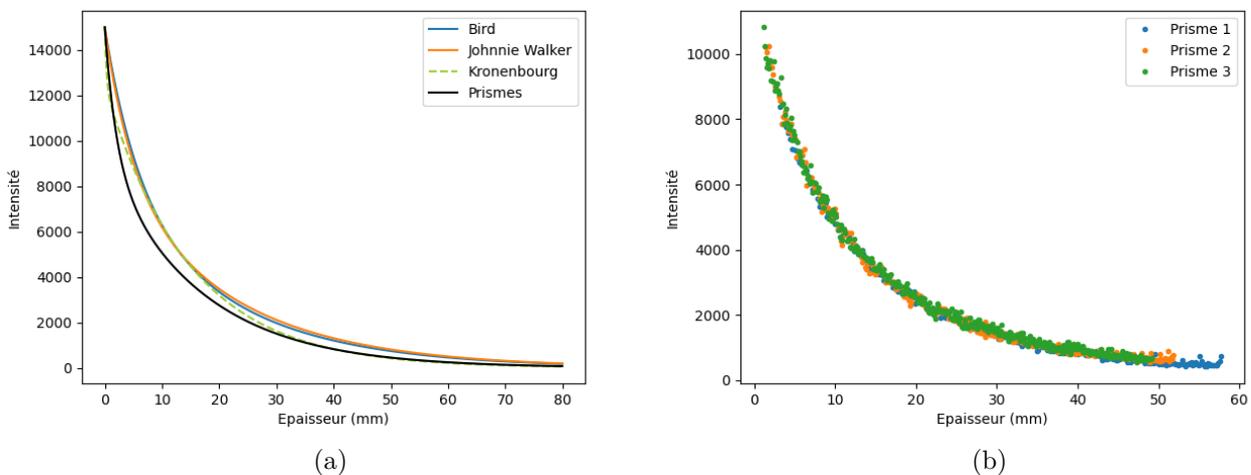


FIGURE 58 – (a) Comparaison des lois 2 bins obtenues avec les prismes et les 3 bouteilles. (b) Comparaison des données obtenues avec chacun des prismes pour un angle de vue de  $55^\circ$ .

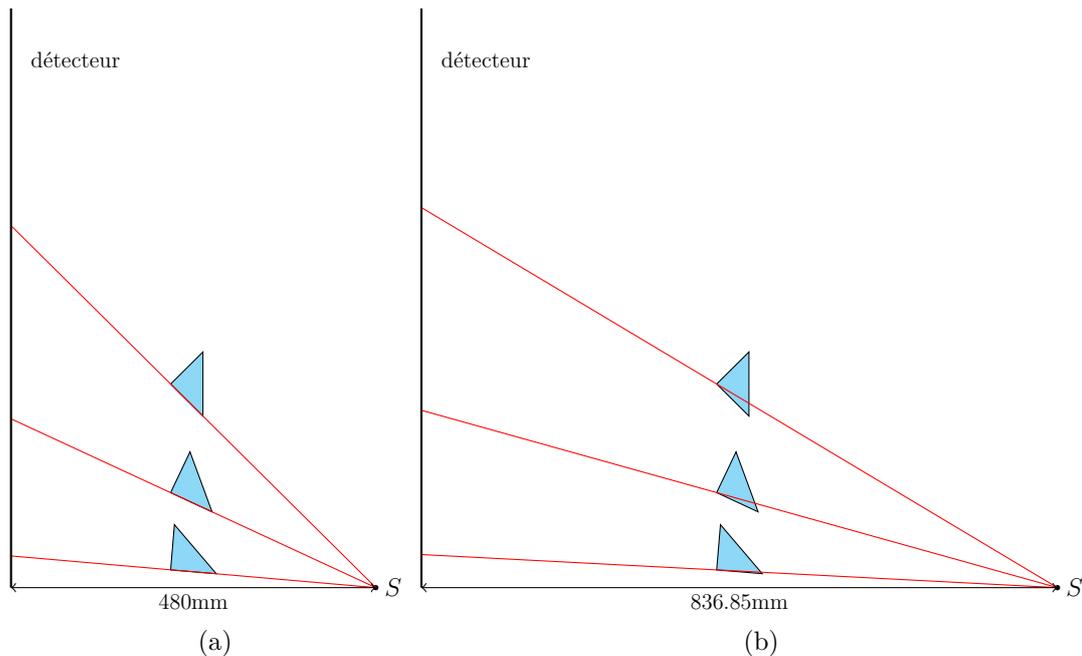


FIGURE 59 – Épaisseur maximale de verre traversée par les rayons X pour chaque prisme en fonction de l'angle de vue : (a)  $0^\circ$ , (b)  $\pm 55^\circ$ .

### 3.4 Conclusion

Les résultats montrent que la loi 2 bins est plus adaptée que la loi de Beer-Lambert mono-énergétique pour modéliser les données. En effet, le spectre d'émission des rayons X implique un durcissement du faisceau traversant les bouteilles en accord avec les différents phénomènes physiques décrits dans ce chapitre (coefficient d'atténuation linéaire dépendant de l'énergie  $E$  et spectre multi-énergétique du tube). De plus, les résultats montrent qu'il n'y a pas de différence notable de l'absorption des rayons X, pour une épaisseur donnée, par les différents verres étudiés. Nous pouvons supposer qu'une loi unique d'absorption peut être utilisée pour toutes les bouteilles. Ce résultat reste à confirmer avec des données moins bruitées.

Les études réalisées ont mis en évidence plusieurs améliorations possibles. Des hypothèses ont été émises. Certaines sont encore à valider en effectuant d'autres expériences. Nous proposons des idées sous la forme d'une liste permettant d'améliorer et de vérifier nos résultats :

- Réduction de la dispersion des points :
  - La mise en correspondance entre les données réelles et simulées est un point critique de la calibration physique. Certains points aberrants ont été filtrés. Néanmoins, l'ensemble des données sélectionnées ne coïncide pas nécessairement avec la réalité. Ainsi, il est important d'améliorer la calibration géométrique pour réduire les erreurs de mise en correspondance.
  - Les radiographies sont de meilleure qualité lorsque la vitesse de déplacement des bouteilles est plus faible. En effet, la réduction de la vitesse implique une diminution de la fréquence d'acquisition et une augmentation du temps d'intégration du détecteur. Ainsi, nous utilisons un gain d'acquisition faible. Les radiographies sont alors moins bruitées. Nous observons aussi que le flou de mouvement est réduit. Dans ce chapitre, les données ont toutes été acquises à une vitesse de déplacement de 1m/s. Nous suggérons d'utiliser des données dont la vitesse de déplacement des bouteilles est plus faible ou même quasi-statique pour déterminer la loi d'absorp-

tion.

- La sensibilité du détecteur est très élevée. Il est conçu pour être utilisé à des fréquences d'acquisition élevées. Il peut être envisagé d'utiliser un détecteur moins sensible pour réduire le bruit dans les données.
- Homogénéisation de la répartition des épaisseurs dans les données :
  - Les résultats montrent que la sur-représentation de certaines épaisseurs influe grandement sur l'estimation des coefficients des lois. C'est notamment le cas dans les résultats liés aux bouteilles *Johnnie Walker* et *Kronenbourg*. Nous suggérons d'utiliser des objets de calibration dont la répartition des épaisseurs est plus homogène. C'est le cas des prismes. Cependant, les prismes doivent être conçus à partir du même verre que les bouteilles. Une autre option est l'utilisation de plusieurs lames en verre d'épaisseurs différentes.
- Sélection d'une variété de verre plus grande :
  - Une étude plus complète sur l'absorption des rayons X dans différents types de verre est nécessaire. La modélisation de l'absorption par une unique loi faciliterait l'exploitation des algorithmes pour différents types de bouteille. Ce résultat reste à confirmer. Dans le cas où la loi n'est pas unique, il peut être envisageable d'établir une loi d'absorption pour chaque bouteille.

---

---

# CHAPITRE 4

---

## AUTO-CALIBRATION GÉOMÉTRIQUE “ON-LINE”

### 4.1 Introduction

Dans la géométrie étudiée, l'objet à reconstruire est supposé en translation rectiligne uniforme par l'algorithme de reconstruction. En pratique, son déplacement n'est pas nécessairement parfait. Des variations de vitesse du convoyeur peuvent apparaître à cause de défauts mécaniques. Ainsi, dans ce chapitre, nous proposons de mesurer le déplacement de l'objet en translation à partir d'une méthode d'auto-calibration. En tomographie à rayons X, certaines méthodes d'auto-calibration sont basées sur des conditions de cohérence des données (ou "data consistency conditions" (DCCs)). Les conditions de cohérences d'Helgason-Ludwig sont les plus classiques en géométrie parallèle. Dans le prochain paragraphe, nous commençons par introduire des conditions sur des paires de projection.

Les conditions sur des paires de projection sont exprimées sous la forme d'égalité entre les données acquises à deux positions différentes de la source. Par exemple, en utilisant les notations de la section 1.1.2, une condition sur une paire de projections en géométrie parallèle est :

$$\mathcal{R}\mu(\boldsymbol{\theta}, s) = \mathcal{R}\mu(-\boldsymbol{\theta}, -s) \quad (4.1)$$

où  $\mathcal{R}$  est la transformée de Radon de dimension  $n$ ,  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{S}^{n-1}$  est une direction et  $s \in \mathbb{R}$ . Elle correspond à une égalité entre deux projections dont les rayons sont opposés. Finch et Solmon proposent une formule dont les intégrales sur les projections sont calculées en fonction de l'angle de vue dans la géométrie à faisceau divergent [58]. De manière similaire, des conditions basées sur la formule de Grangeat utilisent les données d'une ligne de pixels d'un détecteur pour deux projections distinctes [59][60][61]. Des conditions sont exprimées dans la géométrie à faisceau conique (ou "cone-beam") avec une trajectoire circulaire de la source sur les lignes d'un détecteur virtuel dont les projections sont calculées par rétro-projection [48]. Ce résultat a récemment été étendu pour une trajectoire hélicoïdale de la source [62]. Les conditions peuvent être aussi formulées sous la forme d'invariance d'intégrale de droites en géométrie à faisceau en éventail (ou "fan-beam") et cone-beam [63][64][65][66][67]. Tang *et al.* ont montré que ces formules sont équivalentes [68]. Des conditions sont données dans la géométrie 3D à faisceau parallèle (ou "parallel-beam") sur l'invariance d'intégrales calculées à deux angles de vue différents [69].

Les conditions d'Helgason-Ludwig expriment l'égalité entre les moments des projections d'ordre  $n$  et un polynôme d'ordre au plus  $n$  si et seulement si les données sont cohérentes

[21][22]. Ces résultats ont été étendus à diverses géométries [70][71]. Dans l'article [71], Clackdoyle fait la remarque que les conditions d'invariance d'intégrales citées précédemment correspondent aux conditions d'Helgason-Ludwig d'ordre 0. Des conditions similaires ont aussi été exprimées dans les géométries linogrammes (parallel-beam, fan-beam) et planogrammes (parallel-beam, cone-beam) [24].

Certains paramètres géométriques peuvent être estimés à partir des conditions de cohérence des données. Basu et Bresler montrent qu'il est possible de déterminer les angles de vue et le shift des projections en géométrie parallel-beam [72][73]. Yu *et al.* proposent une méthode pour déterminer le déplacement d'un objet au cours du temps dans un plan [74][75]. Clackdoyle *et al.* utilisent des méthodes d'optimisation pour déterminer le mouvement d'un objet rigide avec un fond statique sur les radiographies [76][77]. Nguyen *et al.* calculent la position de la source pour chaque projection à partir de trois positions déjà connues en géométrie linogramme avec des rayons divergents [78]. Boulier *et al.* estiment la vitesse de déplacement d'un objet en géométrie fan-beam avec une trajectoire de la source sur un arc de cercle [79]. Plusieurs méthodes permettent de déterminer des paramètres géométriques du système d'acquisition [80][81][82][83][84][48][85] ou de corriger ces paramètres [86][87][88]. Tang *et al.* proposent une méthode pour corriger le durcissement de faisceau (ou "beam-hardening") [89]. Au-delà de l'estimation de paramètres, il est plus simplement possible de détecter des dérives dans la géométrie d'acquisition à partir des conditions de cohérence de données. Par exemple, Mouchet *et al.* proposent une méthode pour détecter des mouvements dans la géométrie hélicoïdale [90][91].

La résolution du problème d'auto-calibration à partir des conditions de cohérence de données peut se faire en considérant une série de problèmes 2D. Aichert *et al.* utilisent la géométrie épipolaire pour décomposer le problème [60]. Nguyen *et al.* forment simplement les plans 2D à partir des lignes de pixels du détecteur 2D et de la droite parallèle au détecteur sur laquelle se déplace la source [92]. Dans notre géométrie, nous pouvons appliquer la même

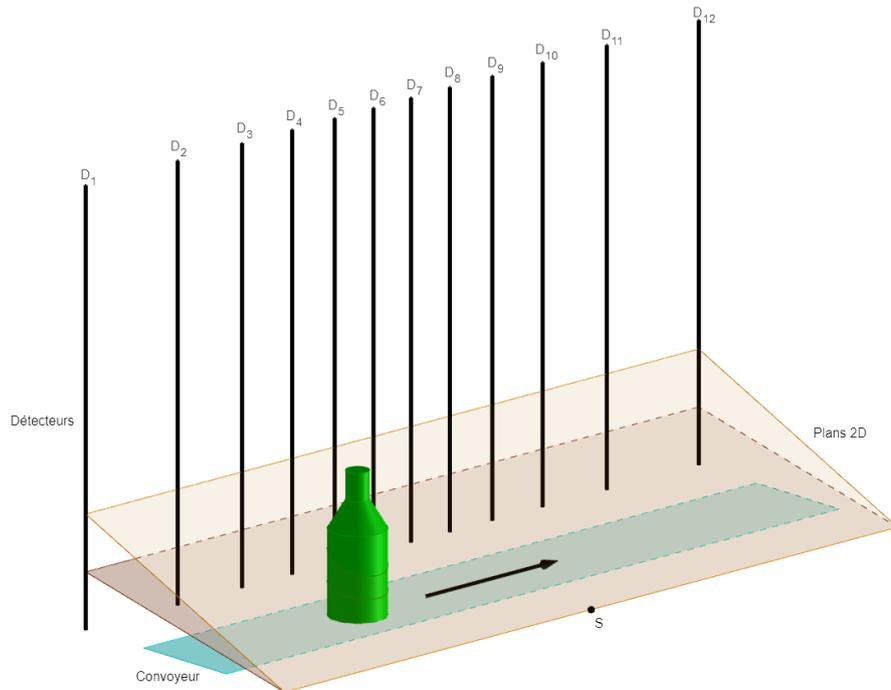


FIGURE 60 – Représentation de plans 2D illustrant la subdivision du problème d'auto-calibration 3D en plusieurs problèmes 2D pour un système de radiographie composé d'une source fixe et de 12 détecteurs linéaires. L'objet mesuré est en translation sur le convoyeur.

méthode que Nguyen *et al.* en supposant qu'on peut former une droite parallèle à l'axe de déplacement de l'objet passant par un pixel de chaque détecteur. Nous illustrons des plans 2D pour une géométrie à 12 détecteurs dans la Fig. 60. De plus, nous pouvons représenter les données en 2D à partir du format linogramme. En effet, en tomographie avec une trajectoire circulaire de la source, les données sont représentées sous forme de sinogramme. Cette représentation n'est pas adaptée à nos données. La représentation linogramme des données en 2D est utilisée lorsque la source ou, de manière équivalente, l'objet se déplace sur une droite [93]. Elle permet de définir la géométrie en utilisant des coordonnées cartésiennes. Plusieurs conditions de cohérence des données ont été établies en utilisant la représentation des données sous forme de linogramme [71][24].

Dans la section 4.2, nous présentons la géométrie linogramme parallèle 2D utilisée pour modéliser les projections. Les données sont représentées dans un système de radiographie équivalent où l'objet est statique et la source se déplace en fonction du temps. Dans la section 4.3, nous adaptons les conditions de cohérence des données dans la géométrie linogramme parallèle 2D à notre problème dépendant du temps. Dans la section 4.4, nous montrons qu'il n'est pas possible d'estimer la vitesse moyenne de déplacement d'un objet seulement à partir des conditions de cohérences de données. Néanmoins, nous montrons qu'il est possible d'estimer les variations de vitesse de l'objet. Dans la section 4.5, plusieurs modèles de vitesse et méthodes de résolution du problème d'auto-calibration sont proposés. Dans la section 4.6, des simulations sont réalisées à partir de données réelles de vitesse issues d'un convoyeur. Dans la section 4.7, nous utilisons les conditions de cohérence d'Helgason-Ludwig d'ordre 0 pour montrer les possibilités de détection d'incohérence sur des données expérimentales. Finalement, dans la section 4.8, nous proposons quelques pistes d'améliorations et d'extensions de nos résultats.

## 4.2 Modélisation

Les projections obtenues sur les détecteurs sont liées à l'absorption des rayons X par les objets se trouvant dans leurs champs de vue. Dans la section 4.2.1, nous utilisons des intégrales de droites liées à la loi d'absorption de Beer-Lambert pour décrire ces projections. La représentation au format linogramme des données est adaptée à notre géométrie. Ainsi, dans la section 4.2.2, nous définissons le linogramme parallèle 2D en fonction du temps. Ce linogramme ne correspond pas exactement à la définition des projections de l'introduction. Dans la section 4.2.3, nous montrons que ce linogramme est pondéré.

### 4.2.1 Modèle d'intégrale de droites

Nous considérons un système de radiographie composé d'une source à rayons X et de plusieurs détecteurs linéaires. Ces éléments sont supposés statiques. Un objet se déplace sur un convoyeur positionné entre la source et les détecteurs. Nous supposons que son mouvement est une translation rectiligne. Nous définissons la position de l'objet par son centre de masse  $c(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Nous supposons que la source  $S$  est ponctuelle. De manière équivalente, le système de radiographie statique, que nous illustrons dans la Fig. 61, peut être représenté comme un système où la source et les détecteurs se déplacent à la même vitesse que l'objet dans le modèle initial mais dans la direction opposée. Dans ce système, l'objet est considéré statique. Ce système équivalent est représenté dans la Fig. 62. La position de la source est alors une fonction du temps notée  $S(t)$ . Nous notons  $c = (c_1, c_2)$  la position du centre de masse de l'objet. Pour un angle d'observation  $\phi \in \mathbb{R}$ , tous les rayons sont parallèles. Ils sont définis dans le repère  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  par la position de la source  $S(t) = (x(t), 0) \in \mathbb{R}^2$  et le vecteur unitaire  $\gamma_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi) \in S^1$ , où  $S^1$  est la sphère unité définie par  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$

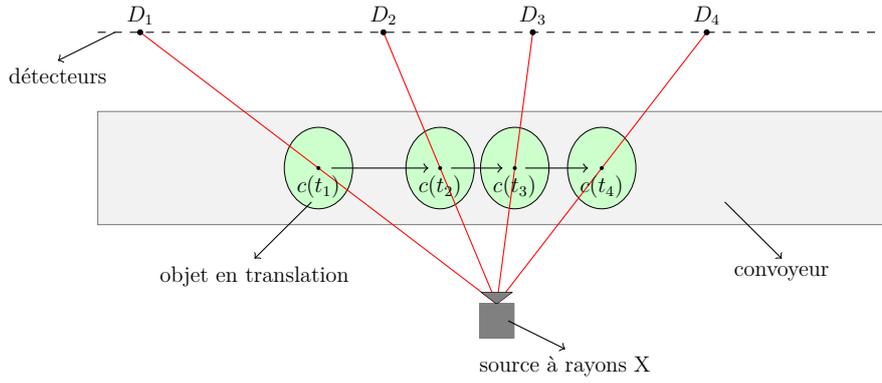


FIGURE 61 – Représentation d’un système de radiographie. Il est composé d’une source et de 4 détecteurs statiques. Un objet est transporté par un convoyeur. Dans le plan 2D, sa position est définie par son centre de masse  $c(t)$  au cours du temps.

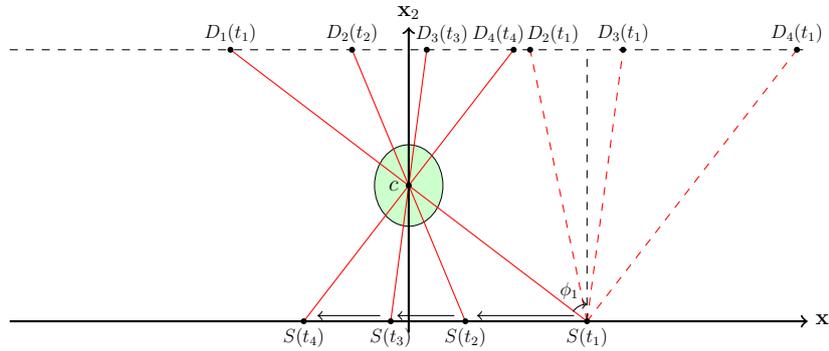


FIGURE 62 – Représentation du système de radiographie équivalent. La source et les détecteurs se déplacent à la même vitesse que l’objet dans la Fig. 61 mais dans la direction opposée. L’objet est fixe.

en notant  $\|\cdot\|_2$  la norme Euclidienne. Les données sont représentées par la loi d’absorption de Beer-Lambert adaptée à la géométrie parallèle 2D. La loi fait le lien entre l’intensité  $I$  des rayons X acquise par un détecteur, l’intensité initiale  $I_0$  des rayons et la fonction d’atténuation linéique  $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de l’objet (en général exprimée en  $\text{cm}^{-1}$ ). Nous supposons que la fonction d’atténuation  $\mu$  est bornée et à support compact. Nous supposons aussi que l’objet n’intersecte pas la trajectoire de la source et des détecteurs. Ainsi, la loi s’écrit :

$$I = I_0 \exp \left( - \int_{\mathbb{R}} \mu \left( S(t) + r\gamma_\phi \right) dr \right) \quad (4.2)$$

Elle peut être réécrite sous la forme projective à partir d’une transformation logarithmique [11]. Plus précisément, la projection  $p$  s’exprime de la manière suivante :

$$p(\phi, x(t)) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mu \left( S(t) + r\gamma_\phi \right) dr \quad (4.3)$$

$$= - \ln \left( \frac{I}{I_0} \right) \quad (4.4)$$

### 4.2.2 Linogramme parallèle 2D

Dans le système de radiographie équivalent, nous considérons que la source se déplace de manière rectiligne sur l’axe  $\mathbf{x}_1$ . Sa position est définie en fonction du temps par  $S(t) = (x(t), 0)$

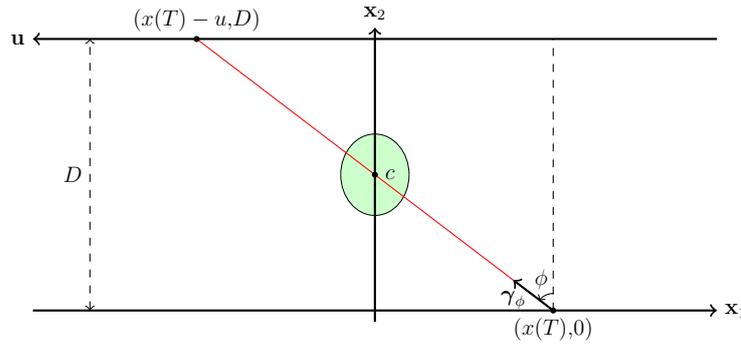


FIGURE 63 – Linogramme parallèle 2D. La source  $S(t) = (x(t), 0)$  se déplace de manière rectiligne sur l'axe  $\mathbf{x}_1$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Les détecteurs se trouvent sur l'axe  $\mathbf{u}$  et se déplacent à la même vitesse que la source. Au temps  $t = T$ , la position du détecteur est  $(x(T) - u, D)$  avec  $u = D \tan \phi$ .

dans le repère cartésien  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . Nous faisons l'hypothèse que la vitesse  $x'(t)$  est strictement négative pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Nous considérons que les détecteurs se déplacent à la même vitesse et dans la même direction que la source sur un axe  $\mathbf{u}$  parallèle à l'axe  $\mathbf{x}_1$ . La droite des détecteurs est à une distance  $D$  de l'axe  $\mathbf{x}_1$ . La source et les détecteurs sont séparés d'une distance  $u = D \tan \phi_u$  sur l'axe  $\mathbf{x}_1$  pour  $\phi_u \in ]-\pi/2, \pi/2[$ . Chaque détecteur est identifié par un angle d'observation  $\phi_u = \arctan(u/D)$ . Ainsi, la position des détecteurs est  $(x(t) - u, D)$ . Le linogramme parallèle 2D est illustré dans la Fig. 63.

Dans la géométrie parallèle, le linogramme  $l$  est défini indépendamment du temps par :

$$l(u, x) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mu((x, 0) + r((x - u, D) - (x, 0))) dr \quad (4.5)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mu((x, 0) + r(-u, D)) dr \quad (4.6)$$

Dans notre géométrie, les données dépendent du temps  $t$ . Ainsi, nous définissons le linogramme  $\bar{l}$  tel que  $\bar{l}(u, t) = l(u, x(t))$ . En effet, en pratique, nos mesures sont exprimées en fonction des variables  $u$  et  $t$ . Ainsi, nous définissons l'opérateur linogramme parallèle  $\bar{\mathcal{L}}$  par :

$$\bar{\mathcal{L}} \mu(u, t) \stackrel{\text{déf}}{=} \bar{l}(u, t) \quad (4.7)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mu((x(t), 0) + r(-u, D)) dr \quad (4.8)$$

En pratique, les mesures correspondent au linogramme  $\bar{l}(u, t)$ .

### 4.2.3 Linogramme pondéré

Le linogramme  $\bar{l}$  peut être écrit sous la forme d'un linogramme pondéré. C'est une observation récurrente lorsque l'on définit les projections au format linogramme [25][92]. On remarque que  $\|(-u, D)\|_2 = \sqrt{u^2 + D^2}$  n'est pas nécessairement égale à 1, c'est-à-dire que  $(-u, D) \notin S^1$ . Ainsi, on normalise le vecteur  $(-u, D)$  par le coefficient  $1/\sqrt{u^2 + D^2}$ . On effectue alors le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} r' = r\sqrt{u^2 + D^2} \\ dr' = dr\sqrt{u^2 + D^2} \end{cases} \quad (4.9)$$

Le linogramme s’écrit alors :

$$\bar{l}(u,t) = \int_{\mathbb{R}} \mu \left( (x(t),0) + r\sqrt{u^2 + D^2} \frac{1}{\sqrt{u^2 + D^2}}(-u,D) \right) dr \quad (4.10)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{u^2 + D^2}} \int_{\mathbb{R}} \mu \left( (x(t),0) + r'\gamma_{\phi_u} \right) dr' \quad (4.11)$$

De plus, en remarquant que  $\cos \phi_u = \frac{D}{\sqrt{u^2 + D^2}}$  et  $\sin \phi_u = \frac{u}{\sqrt{u^2 + D^2}}$ , on obtient :

$$\gamma_{\phi_u} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + D^2}}(-u,D) = (-\sin \phi_u, \cos \phi_u) \quad (4.12)$$

Le vecteur  $\gamma_{\phi_u}$  vérifie alors  $\|\gamma_{\phi_u}\|_2 = \sqrt{\cos^2 \phi_u + \sin^2 \phi_u} = 1$ . On a donc bien  $\gamma_{\phi_u} \in S^1$ .

### 4.3 Conditions de cohérence des données

Les conditions de cohérence d’Helgason-Ludwig ont été adaptées au linogramme par Clackdoyle [71][24]. Le théorème énonce que le moment d’ordre  $n$  des projections est égal à un polynôme d’ordre au plus  $n$  en la variable  $u$  si et seulement si les données sont cohérentes (voir la section 1.3.3, théorème 2). Ces moments  $J_n(u)$  sont définis pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$J_n(u) = \int_{\mathbb{R}} l(u,x) x^n dx \quad (4.13)$$

Nous adaptons ce théorème à notre géométrie dans cette section. Nous notons  $\bar{J}_n$  le moment d’ordre  $n$  pour la géométrie parallèle 2D. Les moments  $\bar{J}_n$  sont définis pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$\bar{J}_n(u) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u,t) x^n(t) |x'(t)| dt \quad (4.14)$$

Dans le théorème 3, nous exprimons les conditions de cohérence d’Helgason-Ludwig adaptées au linogramme dans la géométrie parallèle 2D. La position de la source est définie en fonction du temps.

**Théorème 3** *Soit  $\mu$  une fonction bornée à support compact. Les données  $\bar{l}$  sont cohérentes, i.e.  $\bar{l} = \bar{\mathcal{L}} \mu$ , si et seulement si*

$$\bar{J}_n(u) = \sum_{k=0}^n c_{n,k} u^k \quad (4.15)$$

*Preuve.* Nous montrons uniquement que ces conditions sont nécessaires dans cette preuve. Nous commençons par exprimer le moment  $\bar{J}_n$  à partir de  $\mu$  en utilisant l’équation (4.8).

$$\bar{J}_n(u) = \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u,t) x^n(t) |x'(t)| dt \quad (4.16)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \mu(x(t) - ru, rD) dr \right) x^n(t) |x'(t)| dt \quad (4.17)$$

En considérant que  $x(t)$  est dérivable (mouvement sans à-coups), nous effectuons le changement de variable  $z = x(t)$  avec  $dz = |x'(t)| dt$ . Le moment  $\bar{J}_n$  s’écrit alors :

$$\bar{J}_n(u) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(z - ru, rD) z^n dr dz \quad (4.18)$$

Comme dans [24], nous effectuons le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} r = \frac{x_2}{D} \\ z = x_1 + \frac{x_2}{D}u \end{cases} \quad (4.19)$$

La preuve du théorème est obtenue en effectuant le changement de variable et en utilisant la formule du binôme de Newton.

$$\bar{J}_n(u) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) \left(x_1 + \frac{x_2}{D}u\right)^n \frac{1}{D} dx_1 dx_2 \quad (4.20)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{D^{k+1}} x_2^k u^k x_1^{n-k} \right) dx_1 dx_2 \quad (4.21)$$

$$= \sum_{k=0}^n \left( \binom{n}{k} \frac{1}{D^{k+1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) x_1^{n-k} x_2^k dx_1 dx_2 \right) u^k \quad (4.22)$$

$$= \sum_{k=0}^n c_{n,k} u^k \quad (4.23)$$

avec

$$c_{n,k} = \binom{n}{k} \frac{1}{D^{k+1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) x_1^{n-k} x_2^k dx_1 dx_2 \quad (4.24)$$

L'interversion de la somme et des intégrales dans l'équation (4.21) est possible puisque la somme est finie.  $\square$

## 4.4 Application des conditions de cohérence des données

Nous cherchons à utiliser le théorème 3 pour estimer  $x(t)$ . Nous proposons d'approximer la fonction  $x(t)$  dans un espace de dimension finie. En effet, nous ne pouvons calculer qu'un nombre fini de moments qui ne nous permettront d'identifier qu'un nombre fini de paramètres décrivant  $x(t)$ . Dans la section 4.4.1, nous commençons par utiliser un modèle de mouvement uniforme. Dans la section 4.4.2, nous proposons une méthode pour estimer la vitesse moyenne de l'objet à partir des propriétés du centre de masse de l'objet. Finalement, dans la section 4.4.3, nous modélisons le déplacement d'un objet à une vitesse non uniforme.

### 4.4.1 Mouvement rectiligne uniforme

Nous supposons que le mouvement de l'objet est rectiligne uniforme au cours du temps. Ainsi, nous définissons la position de la source par :

$$x(t) \stackrel{\text{déf}}{=} x_0 + v_0 t \quad (4.25)$$

où  $x_0$  et  $v_0$  sont deux paramètres réels. Nous ne pouvons pas calculer les moments  $\bar{J}_n$  car nous ne connaissons pas a priori  $x(t)$  (c'est ce que nous cherchons à estimer). Néanmoins, nous pouvons calculer les moments temporels  $\tilde{J}_n$  définis pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$\tilde{J}_n(u) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u, t) t^n dt \quad (4.26)$$

En injectant l'équation (4.25) dans l'équation (4.14), on obtient pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\bar{J}_n(u) = \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u,t) (x_0 + v_0 t)^n |v_0| dt \quad (4.27)$$

$$= \text{sgn}(v_0) \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u,t) \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} v_0^i t^i x_0^{n-i} \right) v_0 dt \quad (4.28)$$

$$= \text{sgn}(v_0) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} v_0^{i+1} x_0^{n-i} \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u,t) t^i dt \quad (4.29)$$

$$= \text{sgn}(v_0) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} v_0^{i+1} x_0^{n-i} \tilde{J}_i(u) \quad (4.30)$$

L'interversion de l'intégrale et de la somme dans l'équation (4.28) est possible puisque la somme est finie. Ainsi, les moments  $\bar{J}_n(u)$  peuvent être écrits comme des combinaisons linéaires des moments temporels  $\tilde{J}_i(u)$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Par le théorème 3, nous savons que  $\bar{J}_n(u)$  peut s'écrire sous la forme d'un polynôme en  $u$ . On remarque que les équations sont non-linéaires en  $x_0$  et  $v_0$ . Le problème est donc de résoudre un système d'équations non-linéaires en les paramètres  $x_0$ ,  $v_0$  et les coefficients  $c_{n,k}$  du polynôme en  $u$ ,  $k = 0, \dots, n$ , à partir des moments  $\tilde{J}_i(u)$  (que nous pouvons calculer à partir des données  $\bar{l}$ , voir l'équation (4.26)),  $i = 0, \dots, n$ , et des valeurs de  $u = D \tan \phi$ .

**Estimation** Il est impossible d'estimer  $x_0$  par conditions de cohérence de données [25]. Une même translation de toutes les données  $\bar{l}$  en temps (ou  $l$  en espace) les laisse globalement cohérentes. Nous fixons de manière arbitraire  $x_0 = 0$ . Ainsi, l'équation (4.30) se réécrit :

$$\bar{J}_n(u) = \text{sgn}(v_0) v_0^{n+1} \tilde{J}_n(u) \quad (4.31)$$

**Proposition 1** Dans la géométrie linogramme parallèle, il n'est pas possible d'estimer la vitesse moyenne de déplacement de la source à partir des conditions de cohérence des données.

*Preuve.* Nous supposons que la trajectoire de la source est décrite par l'équation (4.25). Nous fixons arbitrairement  $x_0 = 0$ . Soient  $u_1, \dots, u_{n_d}$  des projections distinctes, où  $n_d$  est le nombre d'angle de vue. Nous notons  $N_m$  l'ordre maximal des moments considérés. À partir de l'équation (4.31) définissant le moment d'ordre  $n$  dans la géométrie linogramme parallèle et du théorème 3, on obtient le système d'équations non-linéaires suivant :

$$\begin{cases} \text{sgn}(v_0) \sum_{k=0}^n c_{n,k} u_1^k - v_0^{n+1} \tilde{J}_n(u_1) = 0 \\ \vdots \\ \text{sgn}(v_0) \sum_{k=0}^n c_{n,k} u_{n_d}^k - v_0^{n+1} \tilde{J}_n(u_{n_d}) = 0 \end{cases} \quad n = 0, \dots, N_m \quad (4.32)$$

Le système d'équations (4.32) a une infinité de solutions : si  $\{(c_{n,k}, v_0), n = 0, \dots, N_m, k = 0, \dots, n\}$  est solution, alors  $\{(\lambda^{n+1} c_{n,k}, \lambda v_0), n = 0, \dots, N_m, k = 0, \dots, n\}$  est aussi solution pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ainsi, il n'est pas possible d'estimer  $v_0$  à partir des conditions de cohérence des données.  $\square$

**Simulations** Nous calculons les moments d'ordre 0, 1, 2, 3 pour un objet en translation que nous définissons dans la table 7. Nous utilisons la librairie python RTK [94] pour simuler les projections. Le système considéré est composé de 12 détecteurs linéaires positionnés sur un axe parallèle à l'axe de déplacement de la source. Ils sont répartis sur  $110^\circ$  avec un espacement angulaire constant de  $10^\circ$ . Pour simplifier, nous considérons un seul détecteur plan suffisamment large sur lequel nous sélectionnons 12 colonnes correspondant aux détecteurs linéaires. En pratique, les détecteurs sont orientés et ont des pixels d'une taille  $0.6mm \times 0.4mm$ . Néanmoins, les pixels sont représentés dans les simulations comme des points. Nous ne prenons pas en compte l'orientation des détecteurs. Ainsi, l'utilisation d'un détecteur plan permet d'obtenir des résultats pertinents pour le système étudié. La position de la source au cours du temps est défini par  $x(t) = -1000t$ , i.e.  $x_0 = 0mm$  et  $v_0 = -1000mm/s$ . La distance entre les axes de la source et des détecteurs est de  $D = 480mm$ . L'objet est placé à mi-distance entre ces axes. Les moments sont calculés dans le plan passant par la source et la ligne 0 du détecteur plan pour une fréquence d'acquisition de  $2000Hz$ . Nous réalisons des acquisitions pour  $t \in \mathcal{I} = [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  avec  $T = 1s$ . Les moments d'ordre  $n$  sont approximés

Objet	$R(mm)$	Densité
Cylindre	50	0.2
Cylindre	45	-0.2

TABLE 7 – Définition de l'objet en translation pour les simulations au format de la bibliothèque RTK [94].

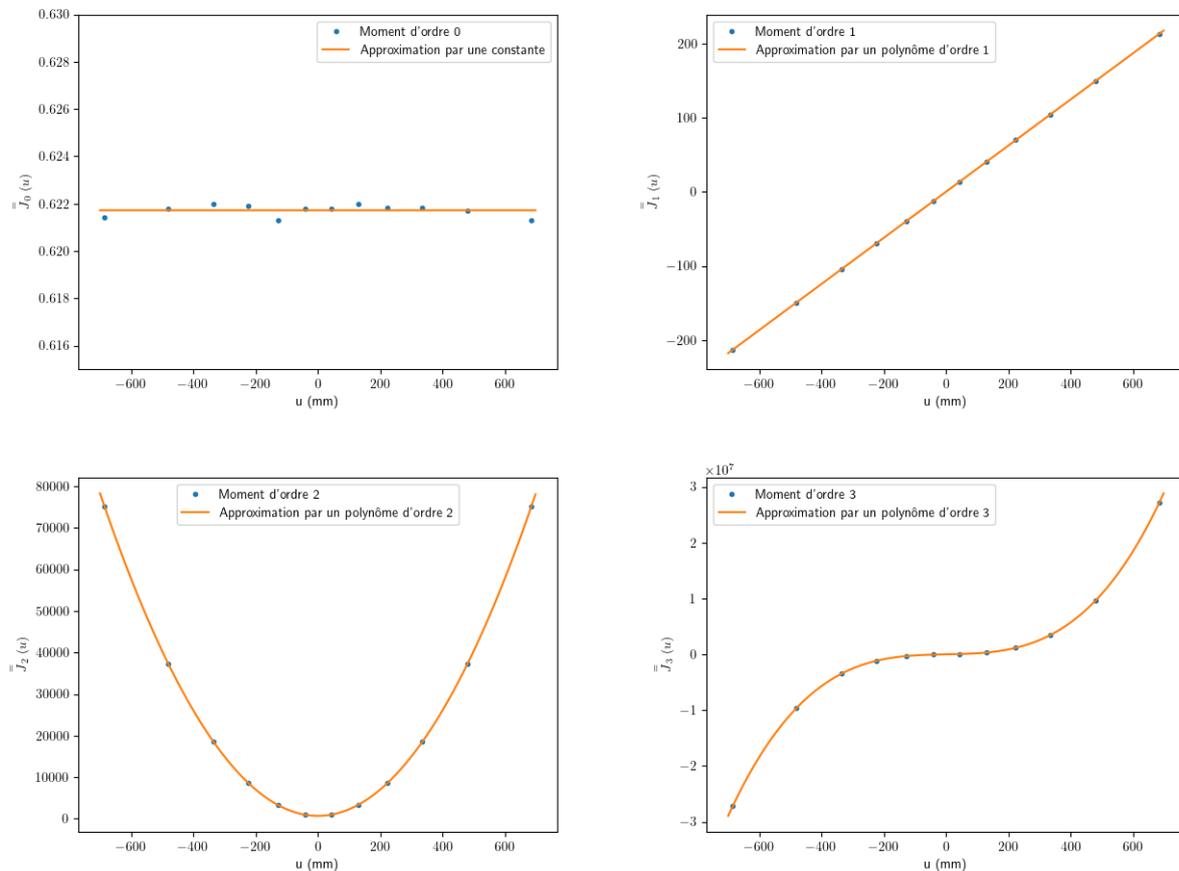


FIGURE 64 – Moments d'ordre 0, 1, 2, 3 pour un système composé de 12 détecteurs linéaires. La position de la source au cours du temps est  $x(t) = -1000t$ .

par des polynômes en  $u$  d'ordre  $n$ . Les résultats sont représentés dans les graphiques de la Fig. 64. Les simulations sont réalisées sans ajout de bruit. Les légers écarts observés sont dus aux approximations sur la position des détecteurs.

#### 4.4.2 Estimation de la vitesse moyenne

Il n'est pas possible d'estimer la vitesse moyenne  $v_0$  de déplacement de l'objet à partir des conditions de cohérence des données, voir proposition 1. Nous cherchons donc à exprimer  $v_0$  en fonction de paramètres dont on peut avoir une estimation a priori. Nous proposons d'adapter des résultats géométriques sur les moments à notre problème [25]. Nous montrons dans cette section qu'il est possible d'estimer  $v_0$  à partir des coordonnées du centre de masse  $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$  et des données de deux angles de vue distincts. Nous considérons que  $x'(t) < 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Dans [25], le résultat sur le centre de masse s'obtient en utilisant l'équation (4.20) :

$$\frac{\bar{J}_1(u)}{\bar{J}_0(u)} = \frac{\int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u, t) x(t) |x'(t)| dt}{\int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u, t) |x'(t)| dt} \quad (4.33)$$

$$= \frac{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x(t) - ru, rD) x(t) x'(t) dr dt}{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x(t) - ru, rD) x'(t) dr dt} \quad (4.34)$$

$$= \frac{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) \left(x_1 + \frac{x_2}{D} u\right) \frac{1}{D} dx_1 dx_2}{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) \frac{1}{D} dx_1 dx_2} \quad (4.35)$$

$$= c_1 + \frac{u}{D} c_2 \quad (4.36)$$

avec  $c_1$  et  $c_2$  les coordonnées du centre de masse définies par :

$$c_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) x_1 dx_1 dx_2}{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) dx_1 dx_2} \quad (4.37)$$

$$c_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) x_2 dx_1 dx_2}{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) dx_1 dx_2} \quad (4.38)$$

Nous injectons la modélisation  $x(t) = x_0 + v_0 t$  dans l'équation (4.33).

$$\frac{\bar{J}_1(u)}{\bar{J}_0(u)} = \frac{\text{sgn}(v_0) \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u, t) (x_0 + v_0 t) v_0 dt}{\text{sgn}(v_0) \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u, t) v_0 dt} \quad (4.39)$$

$$= x_0 + v_0 t_c(u) \quad (4.40)$$

Le paramètre  $t_c(u)$  est le temps auquel le centre de masse de l'objet est projeté sur le détecteur associé au paramètre  $u$ . Il se calcule explicitement à partir des données :

$$t_c(u) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\tilde{J}_1(u)}{\tilde{J}_0(u)} \quad (4.41)$$

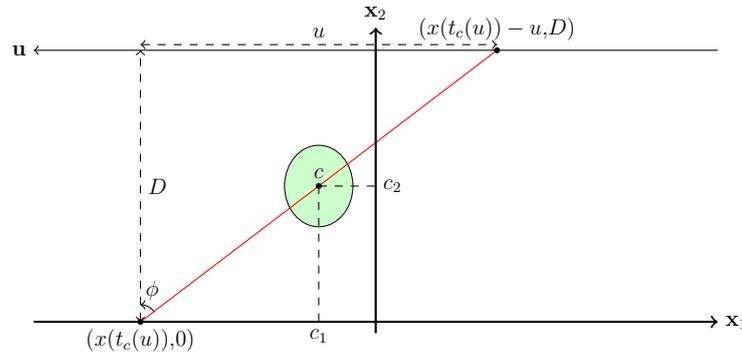


FIGURE 65 – Lien géométrique entre le centre de masse de l'objet et la position de la source. Le lien est établi à un temps  $t_c(u)$  connu correspondant à la projection du centre de masse de l'objet sur le détecteur.

Ainsi, à partir des équations (4.36) et (4.40), on obtient la relation suivante :

$$c_1 + \frac{u}{D}c_2 = x_0 + v_0 t_c(u) \quad (4.42)$$

Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux projections distinctes, on obtient la formule suivante à partir d'une combinaison linéaire de l'équation (4.42).

$$v_0 = \frac{u_1 - u_2}{D(t_c(u_1) - t_c(u_2))} c_2 \quad (4.43)$$

**Remarques** L'équation (4.42) se généralise facilement aux autres modèles de mouvement. En effet, en utilisant une approche géométrique, nous pouvons voir dans la Fig. 65 que l'on a :

$$\tan \phi = \frac{c_1 - x(t_c(u))}{c_2} = -\frac{u}{D} \quad (4.44)$$

On obtient alors la formule suivante :

$$c_1 + \frac{u}{D}c_2 = x(t_c(u)) \quad (4.45)$$

Il est difficile de connaître  $c_2$  avec précision en pratique. Il est possible de placer un marqueur dont le centre de masse est connu sur le convoyeur pour déterminer  $v_0$ . Néanmoins, il existe d'autres méthodes pour estimer  $v_0$ . Par exemple, il peut être envisageable d'utiliser un encodeur sur le convoyeur ou d'exploiter directement les données du codeur du système d'entraînement du convoyeur.

**Simulations** Nous effectuons des simulations pour observer la sensibilité de l'estimation de  $v_0$  par rapport à la valeur de  $c_2$ . Les données utilisées sont identiques à celles des simulations de la section 4.4.1. Nous choisissons  $u_1 = 223.83\text{mm}$  et  $u_2 = -223.83\text{mm}$ . Ces valeurs correspondent aux détecteurs situés à un angle de vue de  $\pm 25^\circ$ . Les résultats obtenus sont présentés dans la table 8. Les simulations ont été effectuées sans ajout de bruit. On observe qu'une variation de  $1\text{mm}$  sur la position du centre de masse implique une erreur sur l'estimation de  $v_0$  d'environ  $4\text{mm/s}$ . Il est difficile d'estimer la précision atteignable en pratique sur la mesure de  $c_2$ .

$c_2$ (mm)	$v_0$ (mm/s)
239	-995.86
240	-1000.03
241	-1004.19

TABLE 8 – Estimation de  $v_0$  en fonction de  $c_2$  sans ajout de bruit.

### 4.4.3 Mouvement rectiligne non uniforme

Nous observons des variations périodiques de vitesse sur les données d’un convoyeur. Les mesures de vitesse de ce convoyeur sont présentées dans la Fig. 66. La vitesse moyenne est de  $v_0 = 0.5m/s$ . Les variations sont au maximum d’environ  $\pm 6\%$  de la vitesse. Nous cherchons à estimer ces variations en utilisant les conditions de cohérence des données. Ainsi, nous modélisons les variations de la vitesse par une fonction  $\delta(t)$ . Nous supposons que  $\delta(t) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ , i.e. la fonction est continue et continûment dérivable par morceaux sur l’intervalle  $\mathcal{I} = \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  où  $T$  est le temps d’acquisition. Nous modélisons la position de la source au cours du temps comme suit :

$$x(t) \stackrel{\text{déf}}{=} x_0 + v_0 t + \delta(t) \quad (4.46)$$

Nous ne pouvons pas déterminer les paramètres  $x_0$  et  $v_0$  en utilisant les conditions de cohérence des données. Ainsi, nous fixons arbitrairement  $x_0 = 0mm$ . Nous supposons que la vitesse moyenne  $v_0$  est connue dans la suite. En utilisant le théorème 3 et la formule du binôme de Newton, le moment d’ordre  $n$  s’écrit alors :

$$\bar{J}_n(u) = \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u,t) x^n(t) |x'(t)| dt \quad (4.47)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u,t) (v_0 t + \delta(t))^n |v_0 + \delta'(t)| dt \quad (4.48)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u,t) \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} v_0^i t^i \delta^{n-i}(t) \right) |v_0 + \delta'(t)| dt \quad (4.49)$$

$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} v_0^i \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u,t) t^i \delta^{n-i}(t) |v_0 + \delta'(t)| dt \quad (4.50)$$

Nous proposons plusieurs modélisations des variations de la vitesse dans la section suivante.

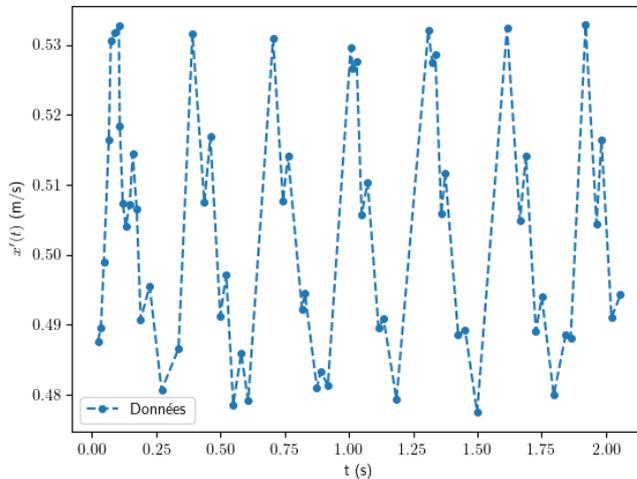


FIGURE 66 – Variations de vitesse au cours du temps d’un convoyeur. La consigne de vitesse du convoyeur est de  $v_0 = 0.5m/s$ .

## 4.5 Modélisation et estimation des variations de vitesse

Nous proposons de définir les variations de vitesse par la fonction temporelle  $\delta(t)$  à partir de paramètres réels. Nous cherchons à estimer ces paramètres en utilisant les conditions de cohérence des données. Nous modélisons les variations de vitesse par un polynôme dans la section 4.5.1. Puis, nous utilisons un modèle périodique dans la section 4.5.2.

### 4.5.1 Modélisation polynomiale

La modélisation polynomiale a été utilisée pour l'estimation du mouvement par cohérence de données dans une géométrie fanbeam avec une trajectoire circulaire de la source [74][75]. C'est la modélisation la plus simple. Elle permet de séparer les paramètres des intégrales. Ainsi, si les équations sont linéaires, il suffit de résoudre un système d'équations linéaires pour déterminer les paramètres. Nous cherchons à utiliser cette modélisation pour estimer la position de la source  $x(t)$ . Nous considérons une base de fonctions  $\mathcal{B} = \{\tau_0(t), \dots, \tau_M(t)\}$  telle que :

$$x(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{m=0}^M p_m \tau_m(t) \quad (4.51)$$

Nous choisissons de modéliser le mouvement de la source par des fonctions polynomiales  $\tau_m(t) = t^m$ . Ainsi,  $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \dots, t^M\}$  est la base canonique des polynômes d'ordre  $M$ . Nous fixons  $p_0 = x_0$  et  $p_1 = v_0$ . Ainsi, l'équation (4.51) se réécrit :

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \sum_{m=2}^M p_m t^m \quad (4.52)$$

$$= x_0 + v_0 t + \delta(t) \quad (4.53)$$

où

$$\delta(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{m=2}^M p_m t^m \quad (4.54)$$

Nous ne pouvons pas estimer les coefficients  $x_0$  et  $v_0$  en utilisant les conditions de cohérence des données. Par extension, nous ne pouvons pas estimer  $p_0$  et  $p_1$ . Ainsi, nous cherchons à déterminer les coefficients  $p_m$ ,  $m = 2, \dots, M$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on remarque que les moments  $\bar{\bar{J}}_n(u)$  sont des équations non-linéaires en les paramètres  $p_m$ . À l'ordre  $n = 0$ , les équations sont linéaires. Nous proposons donc de résoudre le problème en utilisant uniquement le moment d'ordre 0. Nous supposons que  $x'(t) = v_0 + \delta'(t) < 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . À partir des équations (4.50) et (4.52), le moment  $\bar{\bar{J}}_0(u)$  s'écrit :

$$\bar{\bar{J}}_0(u) = \int_{\mathbb{R}} \bar{\bar{l}}(u, t) |x'(t)| dt \quad (4.55)$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} \bar{\bar{l}}(u, t) (v_0 + \delta'(t)) dt \quad (4.56)$$

$$= -v_0 \int_{\mathbb{R}} \bar{\bar{l}}(u, t) dt - \int_{\mathbb{R}} \bar{\bar{l}}(u, t) \left( \sum_{m=2}^M m p_m t^{m-1} \right) dt \quad (4.57)$$

$$= -v_0 \int_{\mathbb{R}} \bar{\bar{l}}(u, t) dt - \sum_{m=2}^M m p_m \int_{\mathbb{R}} \bar{\bar{l}}(u, t) t^{m-1} dt \quad (4.58)$$

$$= C_0(u) - \sum_{m=2}^M p_m C_{1,m}(u) \quad (4.59)$$

$$= c_{0,0} \quad (4.60)$$

où, pour  $\tilde{J}_n(u) = \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u,t)t^n dt$ , nous définissons les coefficients  $C_0(u)$  et  $C_{1,m}(u)$  par :

$$C_0(u) \stackrel{\text{déf}}{=} -v_0 \tilde{J}_0(u) \quad (4.61)$$

$$C_{1,m}(u) \stackrel{\text{déf}}{=} m \tilde{J}_{m-1}(u) \quad (4.62)$$

Nous définissons le nombre d’angles de vue  $n_d$  tel que  $u = \{u_1, \dots, u_{n_d}\}$ . Ainsi, pour  $M \leq n_d$ , le système d’équations linéaires (4.63) se résout au sens des moindres carrés.

$$\begin{bmatrix} 1 & C_{1,2}(u_1) & \cdots & C_{1,M}(u_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & C_{1,2}(u_{n_d}) & \cdots & C_{1,M}(u_{n_d}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{0,0} \\ p_2 \\ \vdots \\ p_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0(u_1) \\ \vdots \\ C_0(u_{n_d}) \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

**Remarques** La stratégie utilisée est d’adapter l’équation (4.51) à notre modélisation pour utiliser les propriétés des bases. Elle est cohérente avec les résultats présentés dans la section 4.4.1. En effet, dans le cas de la base polynomiale canonique  $\mathcal{B}$ , on observe que  $p_0$  n’est pas identifiable en utilisant le moment d’ordre 0. En effet, la dérivée de  $x(t)$  s’écrit :

$$x'(t) = \sum_{m=1}^M m p_m t^{m-1} \quad (4.64)$$

Ainsi, dans l’équation (4.47), seuls les coefficients  $p_1, \dots, p_M$  apparaissent dans la formulation du moment d’ordre 0. La proposition 1 permet d’affirmer que le coefficient  $p_1$  n’est pas identifiable en utilisant le moment d’ordre 0. La preuve de la proposition 1 se réécrit facilement en remplaçant le modèle de vitesse de l’équation (4.25) par le modèle de l’équation (4.52). Ainsi, la séparation de  $x(t)$  en une partie affine  $x_0 + v_0 t$  dont les paramètres sont fixés et une fonction  $\delta(t)$  modélisant les variations est intéressante. Elle nous permet de choisir parmi plusieurs modélisations de variations de vitesse (ici des polynômes). Cependant, la fonction  $\delta(t)$  ne doit pas être liée (au sens des bases) aux polynômes temporelles d’ordre 0 et 1. Sous cette condition, la modélisation de l’équation (4.52) nous permet d’identifier plusieurs coefficients relatifs au mouvement de la source à condition d’avoir une estimation de la vitesse moyenne  $v_0$ .

L’estimation des variations de vitesse peut être effectuée à partir de moments d’ordre  $n > 0$ . Cependant, l’équation (4.47) est non-linéaire pour  $n \neq 0$ . Il faut alors utiliser des algorithmes d’optimisation. Ils sont généralement sensibles à l’initialisation des paramètres. En pratique, dans le cas où le mouvement est polynomial, il est aussi compliqué de connaître l’ordre du polynôme  $\delta(t)$  et un ordre de grandeur des valeurs de ses coefficients. Des simulations sont réalisées dans la suite pour mettre en évidence ces remarques.

Les variations de vitesse observées en pratique sont périodiques. La modélisation polynomiale n’est donc pas la plus adaptée. Cependant, elle permet d’affirmer que l’on peut identifier certains paramètres relatifs au mouvement.

**Calcul exact du coefficient  $c_{0,0}$**  Avant d’effectuer des simulations, nous proposons une formule analytique permettant de calculer la valeur de la constante  $c_{0,0}$  du moment  $\bar{J}_0(u)$  dans le plan passant par la ligne 0 du détecteur. L’intersection du plan et de l’objet décrit dans la table 7 correspond à un anneau. Nous calculons son aire à l’aide des deux cercles concentriques décrivant l’anneau. Notons  $r_1$  et  $r_2$  les rayons des deux cercles avec  $r_2 > r_1$ . Notons  $d$  la densité de l’objet. Ainsi, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = d\pi (r_2^2 - r_1^2) \quad (4.65)$$

À partir de l'équation (4.20), on trouve :

$$\bar{J}_0(u) = \frac{1}{D} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (4.66)$$

$$= \frac{1}{D} d\pi (r_2^2 - r_1^2) \quad (4.67)$$

$$= c_{0,0} \quad (4.68)$$

Nous utilisons les données de la table 7 et les valeurs de la section 4.4.1. C'est-à-dire  $r_2 = 50\text{mm}$ ,  $r_1 = 45\text{mm}$ ,  $d = 0.2$ ,  $D = 480\text{mm}$ . Ainsi, la valeur exacte est  $c_{0,0} = 0.622$  avec une précision de 3 chiffres. On remarque que la formule correspond à la masse divisée par la distance  $D$ . C'est presque le même résultat que pour la géométrie parallèle où le moment d'ordre 0 est égale à la masse [25].

**Simulations** Nous supposons que la position de la source s'écrit sous la forme d'un polynôme d'ordre 3 :  $x(t) = x_0 + v_0 t + p_2 t^2 + p_3 t^3$  avec  $x_0 = 0\text{mm}$ ,  $v_0 = -1000\text{mm/s}$ ,  $p_2 = -5\text{mm/s}^2$  et  $p_3 = 5\text{mm/s}^3$ . Les simulations sont réalisées de la même manière que dans la section 4.4.1. Les résultats obtenus pour l'estimation de  $x(t)$  avec une fonction  $\delta(t)$  d'ordre  $M = 2, \dots, 6$  sont présentés dans la table 9. Les estimations de la fonction  $\delta(t)$  ainsi que la différence entre la position  $x(t)$  théorique et estimée de la source sont présentées dans la Fig. 67 en fonction de l'ordre du polynôme. À l'exception du polynôme d'ordre  $M = 2$ ,

Estimation	$c_{0,0}$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$
Valeur	0.622	-5	5	0	0	0
$M = 2$	0.622	-5.299				
$M = 3$	0.622	-5.276	5.680			
$M = 4$	0.622	-5.351	5.682	0.411		
$M = 5$	0.622	-5.344	7.970	0.363	-10.123	
$M = 6$	0.622	-5.330	7.970	0.107	-10.118	0.969

TABLE 9 – Estimation de la fonction  $\delta(t) = -5t^2 + 5t^3$  et de la constante  $c_{0,0}$  avec des polynômes d'ordre  $M = 2, \dots, 6$ . Les simulations ont été réalisées sans ajout de bruit.

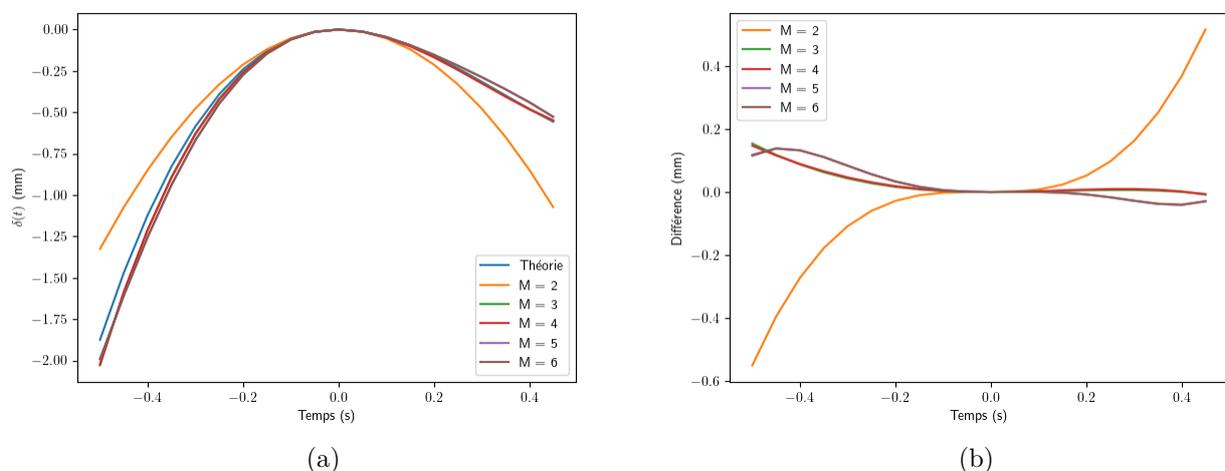


FIGURE 67 – (a) Estimation de la fonction  $\delta(t) = -1000t - 5t^2 + 5t^3$ , (b) différence avec la théorie pour des polynômes d'ordre  $M = 2, \dots, 6$ . Les valeurs utilisées sont données dans la table 9.

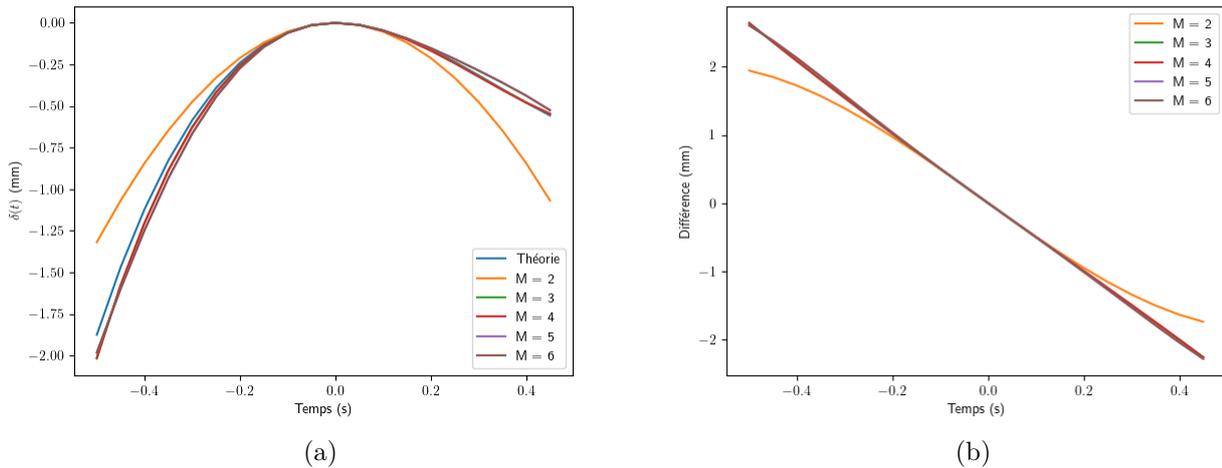


FIGURE 68 – Influence de  $v_0$  sur l’estimation de  $x(t)$ . (a) Estimation de la fonction  $\delta(t)$ , (b) Différence entre les estimations de  $x(t)$  et la théorie pour des polynômes d’ordre  $M = 2, \dots, 6$ . Les résultats sont obtenus pour  $v_0 = -995\text{mm/s}$ . La vitesse théorique est  $v_0 = -1000\text{mm/s}$ .

les résultats sont relativement précis. L’écart maximum sur la position est d’environ  $150\mu\text{m}$  pour  $M = 3, \dots, 6$ . Pour le cas  $M = 2$ , on observe que la sous-estimation du degré de la fonction  $\delta(t)$  peut entraîner d’énormes erreurs. Pour  $M = 5$  et  $M = 6$ , on observe que les courbes oscillent légèrement plus lorsqu’on s’éloigne de  $t = 0$ . Néanmoins, l’erreur sur la position reste inférieure à  $150\mu\text{m}$  pour  $M = 5$  et  $M = 6$ . Les simulations précédentes sont réalisées en supposant que nous connaissons la valeur de  $v_0$ . Cependant, nous ne pouvons pas estimer  $v_0$  par conditions de cohérence des données. Il est nécessaire de l’estimer d’une autre manière. Ainsi, nous proposons d’évaluer l’influence de l’estimation de  $v_0$  sur les résultats. La position de la source théorique est définie par  $x(t) = -1000t - 5t^2 + 5t^3$ . Nous résolvons l’équation (4.63) en choisissant  $v_0 = -995\text{mm/s}$ . L’estimation de la fonction de correction est  $\delta(t) = -5.250t^2 + 5.651t^3$  pour  $M = 3$ . Les résultats obtenus sont présentés dans la Fig. 68. On remarque que les estimations de la fonction de correction  $\delta(t)$  sont relativement précises pour les ordres  $M = 3, \dots, 6$ . Néanmoins, les erreurs sur la position atteignent un maximum à environ  $2.60\text{mm}$ , soit plus de 15 fois les erreurs obtenus avec  $v_0 = -1000\text{mm/s}$ .

Nous proposons de comparer les résultats obtenus avec deux valeurs différentes de  $v_0$ . Les résultats obtenus pour  $M = 3$  sont présentés dans la Fig. 69. On observe que l’estimation des coefficients de  $\delta(t)$  n’est pas influencée par la valeur de  $v_0$ . Cependant, une mauvaise estimation de  $v_0$  implique d’énormes erreurs sur l’estimation de la position de la source. Ainsi, il est nécessaire d’avoir une bonne estimation a priori de la vitesse moyenne  $v_0$ .

### 4.5.2 Modélisation périodique

Nous observons d’importantes variations périodiques de la vitesse sur certains convoyeurs. Cette vitesse est supposée être constante. En pratique, l’utilisation d’un encodeur permet de mesurer ces variations. Nous pouvons aussi directement récupérer les informations du codeur sur le moteur. Néanmoins, ces informations ne sont pas toujours utilisables ou très précises. Nous proposons d’estimer ces variations à partir des conditions de cohérence des données en utilisant une modélisation périodique de la fonction  $\delta(t)$ . Nous utilisons des fonctions dont nous pouvons identifier les paramètres. Nous proposons plusieurs méthodes selon l’ordre des moments.

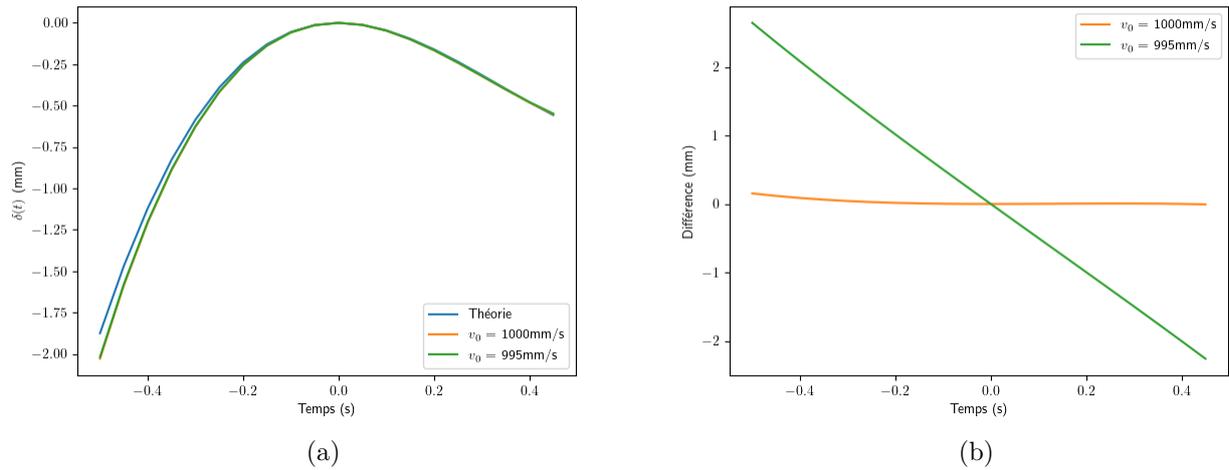


FIGURE 69 – Comparaison entre les résultats obtenus avec deux valeurs de  $v_0$ . (a) Estimation de la fonction  $\delta(t)$ , (b) Différence entre l'estimation de  $x(t)$  et sa valeur théorique. Les polynômes utilisés pour les estimations sont d'ordre 3.

#### 4.5.2.1 Formulation des moments

Nous conservons la modélisation de la position de la source sous la forme  $x(t) = x_0 + v_0 t + \delta(t)$ . Ainsi, nous proposons de définir  $\delta(t)$  comme une fonction sinusoïdale. La fonction est définie à partir de 3 paramètres : la pulsation  $\omega$  (en rad/s), le déphasage  $\psi$  (en rad) et l'amplitude  $A$  (en mm).

$$\delta(t) \stackrel{\text{déf}}{=} A \sin(\omega t + \psi) \quad (4.69)$$

Nous supposons que  $x'(t) < 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On obtient alors la formulation des moments suivante en réinjectant  $x(t)$  dans l'équation (4.50).

$$\bar{\bar{J}}_n(u) = - \int_{\mathbb{R}} \bar{\bar{l}}(u, t) (x_0 + v_0 t + A \sin(\omega t + \psi))^n (v_0 + A \omega \cos(\omega t + \psi)) dt \quad (4.70)$$

$$= \sum_{k=0}^n c_{n,k} u^k \quad (4.71)$$

Nous ne pouvons pas calculer  $\bar{\bar{J}}_n(u)$ . Nous devons donc déterminer les coefficients  $c_{n,k}$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Ainsi, nous avons  $n+4$  paramètres à estimer. L'équation (4.70) est non-linéaire en  $A$ ,  $\omega$  et  $\psi$ . Il est nécessaire d'utiliser des algorithmes d'optimisation pour résoudre ces équations.

#### 4.5.2.2 Moment d'ordre 0

La modélisation du mouvement par un sinus a été utilisée pour la géométrie fanbeam avec une trajectoire circulaire et linéaire de la source [76][77]. Clackdoyle *et al.* font la remarque qu'il n'est pas possible de décrire le mouvement de l'objet lorsque sa trajectoire est parallèle à celle de la source avec la géométrie fanbeam pour un moment d'ordre 0. Néanmoins, les paramètres sont estimables avec des moments d'ordre supérieur. Dans le cas étudié, l'approche est différente puisque nous ne savons pas calculer les moments. Nous proposons d'utiliser le moment d'ordre 0 pour estimer les coefficients  $A$ ,  $\omega$  et  $\psi$ . Nous considérons que

$x'(t) < 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Nous supposons que  $x_0 = 0$ mm. Ainsi, on a :

$$\bar{\bar{J}}_0(u) = - \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u,t) (v_0 + A\omega \cos(\omega t + \psi)) dt \quad (4.72)$$

$$= c_{0,0} \quad (4.73)$$

L'équation (4.72) est non-linéaire en  $A$ ,  $\omega$ ,  $\psi$ . Nous cherchons à estimer ces paramètres à partir de l'équation (4.72). Nous appliquons donc le théorème 3. Il est alors nécessaire d'estimer le coefficient  $c_{0,0}$ . Nous proposons d'utiliser l'algorithme de Gauss-Newton [18] pour estimer ces 4 paramètres.

L'équation (4.72) se réécrit sous la forme  $y_i = f(x_i, \rho)$  avec  $(x_i, y_i)$  un couple d'observation,  $i = 1, \dots, n_d$ , et  $\rho = [A, \omega, \psi, c_{0,0}]^T$ .

$$-v_0 \tilde{J}_0(u) = c_{0,0} + \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u,t) A\omega \cos(\omega t + \psi) dt \quad (4.74)$$

Nous rappelons que  $\tilde{J}_n(u) = \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u,t) t^n dt$ . L'itération de l'algorithme Gauss-Newton se calcule en utilisant la formule suivante :

$$\rho_{k+1} = \rho_k + \left( \mathcal{J}_1^T(\rho_k) \mathcal{J}_1(\rho_k) \right)^{-1} \mathcal{J}_1^T(\rho_k) r_i(\rho_k) \quad (4.75)$$

où  $r_i(\rho)$  est défini par

$$r_i(\rho) \stackrel{\text{déf}}{=} y_i - f(x_i, \rho) \quad (4.76)$$

$$= -v_0 \tilde{J}_0(u_i) - \left( c_{0,0} + \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u_i, t) A\omega \cos(\omega t + \psi) dt \right) \quad (4.77)$$

et, pour  $j = 1, \dots, 4$ ,  $\mathcal{J}_1(\rho)$  est la matrice jacobienne suivante :

$$\mathcal{J}_1(\rho) = - \left[ \frac{\partial}{\partial \rho_j} r_i(\rho_j) \right]_{i,j} \quad (4.78)$$

$$= - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial A} r_1(\rho) & \frac{\partial}{\partial \omega} r_1(\rho) & \frac{\partial}{\partial \psi} r_1(\rho) & \frac{\partial}{\partial c_{0,0}} r_1(\rho) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial A} r_{n_d}(\rho) & \frac{\partial}{\partial \omega} r_{n_d}(\rho) & \frac{\partial}{\partial \psi} r_{n_d}(\rho) & \frac{\partial}{\partial c_{0,0}} r_{n_d}(\rho) \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

Il est nécessaire de calculer les dérivées partielles de  $r_i(\rho)$  en fonction des 4 paramètres. Nous détaillons ces calculs dans la suite. Nous commençons par la dérivée en  $A$ .

$$\frac{\partial}{\partial A} r_i(\rho) = -\omega \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u_i, t) \cos(\omega t + \psi) dt \quad (4.80)$$

La dérivée en fonction de  $\omega$  est moins évidente à calculer. Il faut appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale.

$$\frac{\partial}{\partial \omega} r_i(\rho) = -A \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \omega \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u_i, t) \cos(\omega t + \psi) dt \right) \quad (4.81)$$

$$= -A \left( \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u_i, t) \cos(\omega t + \psi) dt + \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u_i, t) \cos(\omega t + \psi) dt \right) \right) \quad (4.82)$$

Le théorème s'applique sur la deuxième intégrale. En effet, la fonction sous l'intégrale est intégrable et dérivable. De plus, on a :

$$\left| \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \bar{l}(u_i, t) \cos(\omega t + \psi) \right) \right| = \left| -\bar{l}(u_i, t) t \sin(\omega t + \psi) \right| \quad (4.83)$$

$$\leq \left| \bar{l}(u_i, t) t \right| \quad (4.84)$$

$$< +\infty \quad (4.85)$$

La quantité  $\bar{l}(u_i, t)$  est finie pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Elle correspond à l'intégrale sur une droite d'une fonction  $\mu$  à support compact. Lorsque  $t \rightarrow \pm\infty$ , on se trouve en dehors du support de  $\mu$ . Dans ce cas, la quantité  $\bar{l}(u_i, t)$  est nulle. Ainsi, le produit du linogramme pondéré et de  $t$  est fini pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . D'où :

$$\frac{\partial}{\partial \omega} r_i(\rho) = -A \left[ \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u_i, t) \cos(\omega t + \psi) dt - \omega \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u_i, t) \sin(\omega t + \psi) t dt \right] \quad (4.86)$$

Nous utilisons le même raisonnement pour calculer la dérivée en  $\psi$ .

$$\frac{\partial}{\partial \psi} r_i(\rho) = -A \omega \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u_i, t) \cos(\omega t + \psi) dt \right) \quad (4.87)$$

Le théorème de dérivation sous l'intégrale s'applique à nouveau. En effet, la fonction sous l'intégrale est intégrable, dérivable et sa dérivée est dominée par une quantité finie :

$$\left| \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \bar{l}(u_i, t) \cos(\omega t + \psi) \right) \right| = \left| \bar{l}(u_i, t) \sin(\omega t + \psi) \right| \quad (4.88)$$

$$\leq \left| \bar{l}(u_i, t) \right| \quad (4.89)$$

$$< +\infty \quad (4.90)$$

L'argument est identique à celui utilisé pour la dérivée en  $\omega$ . Ainsi, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \psi} r_i(\rho) = A \omega \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(u_i, t) \sin(\omega t + \psi) dt \quad (4.91)$$

Finalement, la dérivée de  $r_i(\rho)$  par rapport à  $c_{0,0}$  est :

$$\frac{\partial}{\partial c_{0,0}} r_i(\rho) = -1 \quad (4.92)$$

**Remarques** L'algorithme de Gauss-Newton requiert des informations a priori pour être initialisé. Si les variations de vitesse de l'objet sont répétables, il peut être envisageable de les mesurer et ainsi d'avoir une première estimation des paramètres de la modélisation. Les mesures doivent être relativement précises pour que l'algorithme converge vers une solution.

Il n'y a pas unicité de la solution pour la modélisation  $\delta(t) = A \sin(\omega t + \psi)$ . Pour  $k \in \mathbb{Z}$ , il y a une solution par intervalle  $\psi \in [k\pi, (k+1)\pi[$ . En effet, on a :

$$A \sin(\omega t + \psi + k\pi) = (-1)^k A \sin(\omega t + \psi) \quad (4.93)$$

Elle devient unique si on restreint l'estimation du paramètre  $\psi$  sur un seul intervalle, par exemple  $\psi \in [0, \pi[$ .

Il est possible d'utiliser des moments d'ordre  $n > 0$ . Cependant, l'intérêt semble limité puisque nous sommes capable d'estimer tous les paramètres à l'ordre 0. De plus, le nombre de paramètres à estimer est dépendant de l'ordre des moments. Pour l'ordre  $n \in \mathbb{N}$ , il y a  $n + 4$  paramètres à initialiser et estimer.

**Simulations** Nous cherchons à estimer les paramètres de la fonction  $\delta(t) = A \sin(\omega t + \psi)$ . Les données sont générées de la même manière que dans la section 4.4.1. Nous fixons les paramètres de la modélisation à  $A = 2$ ,  $\omega = 40$ ,  $\psi = \pi/4 \approx 0.785$ . Un bruit additif gaussien est ajouté aux projections. Pour chaque pixel, il représente un pourcentage de sa valeur. Les paramètres sont initialisés à des valeurs proches de la solution. Les résultats obtenus en utilisant différents niveaux de bruit sont présentés dans la table 10. Les moyennes et écarts-types sont calculées sur 50 simulations. On remarque que les résultats sont assez bons. Seule la valeur moyenne du paramètre  $\psi$  est éloignée de la solution. Les écarts-types sont assez faibles. À l'exception du paramètre  $\omega$ , la convergence de l'algorithme n'est pas très impactée par le choix de la solution initiale.

Paramètre	Valeur	Init.	0% bruit	1% bruit	3% bruit
$A$	2	3	1.984	$1.983 \pm 0.033$	$1.987 \pm 0.108$
$\omega$	40	42	39.896	$39.899 \pm 0.056$	$39.884 \pm 0.230$
$\psi$	0.785	0.393	0.795	$0.795 \pm 0.020$	$0.800 \pm 0.065$
$c_{0,0}$	0.622	0	0.622	$0.622 \pm 0.000$	$0.622 \pm 0.000$

TABLE 10 – Estimation des paramètres de la fonction  $\delta(t) = A \sin(\omega t + \psi)$  en utilisant le moment d’ordre 0. Les moyennes et écarts-types sont calculés sur 50 simulations.

#### 4.5.2.3 Moment d’ordre $n$

Nous proposons d’étudier les moments d’ordre  $n$  sans estimer les constantes  $c_{n,k}$  des polynômes en  $u$  de l’équation (4.70),  $k = 0, \dots, n$ . Des fonctions d’optimisations ont été proposées pour estimer les paramètres du mouvement d’objets à partir de l’évaluation des moments d’ordre  $n$  dans une géométrie fan-beam [76][77][79]. Le problème peut être résolu avec des algorithmes d’optimisation comme l’algorithme du "downhill simplex" [95] ou la méthode des "directions conjuguées" de Powell [95][96]. Il n’est pas nécessaire de calculer de dérivées avec ces algorithmes. Soit  $q \in \mathcal{Q}_n$ , où  $\mathcal{Q}_n$  est l’ensemble des polynômes d’ordre  $n$ , nous construisons une fonction d’optimisation  $F_n(A, \omega, \psi)$  permettant d’estimer les paramètres  $A, \omega, \psi$  de la fonction  $\delta(t)$ .

$$F_n(A, \omega, \psi) \stackrel{\text{déf}}{=} \min_{q \in \mathcal{Q}_n} \sum_u \left\| q - \bar{J}_n(u, A, \omega, \psi) \right\|_2 \quad (4.94)$$

L’algorithme évalue à chaque itération le moment  $\bar{J}_n(u)$  en les valeurs  $A, \omega, \psi$ , puis approxime ces moments par un polynôme  $q$  d’ordre  $n$ .

**Remarques** L’intérêt de l’approximation est de limiter le nombre de paramètres à estimer par l’algorithme. En effet, nous ne considérons plus les coefficients  $c_{n,k}$  de l’équation (4.70) comme des paramètres,  $k = 0, \dots, n$ . Toutefois, il est possible de récupérer ces coefficients puisque nous les approximons lors de l’évaluation des moments.

L’algorithme du downhill simplex ne nécessite pas de calculer les dérivées de la fonction d’optimisation. Ainsi, nous l’utilisons pour déterminer les paramètres  $A, \omega, \psi$  avec des moments d’ordre  $n$  à la place de l’algorithme de Gauss-Newton.

**Simulations** Nous initialisons l’algorithme avec les valeurs :  $A = 3, \omega = 42, \psi = \pi/8 \approx 0.393$ . Les données sont générées de la même manière que dans la section 4.4.1. Nous réalisons des simulations avec des fonctions  $F_n(A, \omega, \psi)$  d’ordre  $n = 0, 1, 2$ . Les estimations obtenues sont disponibles dans la table 11. Les simulations sont réalisées en ajoutant à chaque pixel un bruit gaussien avec un écart-type de 3% de leur valeur. Les résultats sont convenables pour  $n = 0, 1, 2$ . On observe que les meilleures estimations sont obtenues pour  $n = 1$ . Les

Paramètre	Valeur	Init.	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$A$	2	3	$1.983 \pm 0.122$	$1.991 \pm 0.118$	$2.030 \pm 0.112$
$\omega$	40	42	$39.893 \pm 0.253$	$39.912 \pm 0.159$	$39.840 \pm 0.165$
$\psi$	0.785	0.393	$0.769 \pm 0.076$	$0.801 \pm 0.056$	$0.790 \pm 0.059$

TABLE 11 – Estimation des paramètres de la fonction  $\delta(t) = A \sin(\omega t + \psi)$  avec l’algorithme du downhill simplex en fonction de l’ordre  $n$  du moment de la fonction  $F_n(A, \omega, \psi)$  définie dans l’équation (4.94). Les moyennes et écarts-types sont calculés sur 50 simulations avec un bruit de 3%.

écarts-types sont plus faibles qu'à  $n = 0$  et les moyennes sont légèrement meilleures que pour  $n = 2$ .

Comme pour l'algorithme de Gauss-Newton, l'algorithme ne converge pas dans certains cas. Cela se produit uniquement lorsque les valeurs initiales des paramètres ne sont pas assez proches de la solution. Cependant, il est plus compliqué de dégager une dynamique globale de l'algorithme et de la fonction d'optimisation en fonction de l'initialisation. De plus, nous observons qu'il est nécessaire de réaliser plus d'itérations pour converger vers une solution lorsque l'ordre des moments est élevé. À l'ordre 0, l'algorithme de Gauss-Newton converge en quelques itérations pour une initialisation convenable. Au contraire, l'algorithme du downhill simplex converge en 59 itérations à l'ordre 0 avec 0% de bruit et pour une initialisation proche de la solution. Ce nombre augmente respectivement à 71 et 222 pour les ordres 1 et 2.

#### 4.5.2.4 Combinaison des moments d'ordre $n = 0, \dots, n_{max}$

De manière similaire à l'article de Clackdoyle et Desbat [77], nous proposons de résoudre le problème avec une fonction d'optimisation  $F(A, \omega, \psi)$  combinant les moments d'ordres  $n = 0, \dots, n_{max}$ . Ainsi, la fonction d'optimisation s'écrit :

$$F(A, \omega, \psi) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{n_{max}} F_n(A, \omega, \psi) w^n \quad (4.95)$$

Nous pondérons chaque fonction  $F_n(A, \omega, \psi)$  par un poids  $w \in \mathbb{R}$  à la puissance  $n$ . Le choix de la valeur du poids permet de favoriser les moments d'ordre élevé si  $w > 1$  ou faible si  $w < 1$ . La fonction  $F_n(A, \omega, \psi)$  est définie dans l'équation (4.94). Le problème d'optimisation peut être résolu en utilisant l'algorithme du downhill simplex.

**Simulations** Nous cherchons à voir si l'utilisation de plusieurs moments peut améliorer les estimations. Nous réalisons des simulations en générant des données de la même manière que dans la section 4.4.1. Un bruit gaussien est ajouté aux projections. Son écart-type correspond à 3% de la valeur de chaque pixel. Les résultats obtenus sont présentés dans la table 12 pour  $n_{max} = 1$  et  $n_{max} = 2$ . On observe que les estimations moyennes sont plutôt bonnes. Dans quelques cas, les écarts-types sont plus faibles que ceux obtenus avec un seul moment (voir table 11). Les meilleures estimations sont obtenues pour  $n_{max} = 1$  et  $w = 1$ . C'est-à-dire que la combinaison des moments d'ordre 0 et 1 permet d'améliorer légèrement les estimations lorsque la contribution des deux moments est identique (sans normalisation des moments). Au contraire lorsque  $w = 0.001$ , les estimations sont un peu moins bonnes. Cette méthode permet donc d'obtenir de meilleures estimations. Néanmoins, comme pour la section

$n_{max} = 1$	Valeur	Init.	$w = 0.001$	$w = 0.1$	$w = 1$
$A$	2	3	$1.991 \pm 0.123$	$2.021 \pm 0.116$	$2.021 \pm 0.100$
$\omega$	40	42	$40.009 \pm 0.226$	$39.930 \pm 0.171$	$39.862 \pm 0.132$
$\psi$	0.785	0.393	$0.747 \pm 0.097$	$0.782 \pm 0.047$	$0.786 \pm 0.037$
$n_{max} = 2$	Valeur	Init.	$w = 0.001$	$w = 0.1$	$w = 1$
$A$	2	3	$2.004 \pm 0.091$	$2.027 \pm 0.098$	$2.025 \pm 0.103$
$\omega$	40	42	$39.877 \pm 0.192$	$39.837 \pm 0.150$	$39.793 \pm 0.175$
$\psi$	0.785	0.393	$0.783 \pm 0.046$	$0.787 \pm 0.050$	$0.797 \pm 0.055$

TABLE 12 – Estimation des paramètres de la fonction  $\delta(t) = A \sin(\omega t + \psi)$  en fonction de l'ordre maximum  $n_{max}$  des fonctions  $F_n(A, \omega, \psi)$  et du poids  $w$ . Les moyennes et écarts-types sont calculés sur 50 simulations avec un bruit de 3%.

précédente, les temps de calcul sont assez longs. Pour un bruit à 0%, le downhill simplex réalise respectivement 70 et 111 itérations pour  $n_{max} = 1$  et  $n_{max} = 2$ .

## 4.6 Simulations

Nous réalisons des simulations en utilisant les données du convoyeur de la Fig. 66. Ces données sont des mesures de vitesse avec un pas d’acquisition élevé. Elles ont été converties à notre système équivalent en changeant le signe et en convertissant la vitesse en mm/s. Dans la section 4.6.1, nous proposons d’approximer ces données pour avoir un modèle de vitesse plus précis, puis de déterminer une position relative à cette approximation. Dans la section 4.6.2, nous estimons les variations de vitesse avec notre méthode.

### 4.6.1 Approximation des données

#### 4.6.1.1 Vitesse

Les données de vitesse ont une faible fréquence d’acquisition. Pour 2 secondes d’acquisition, nous possédons 62 mesures de vitesse. C’est trop peu pour réaliser des simulations. Ces données sont notées  $v(t)$  pour  $t = \{t_0, \dots, t_{n_v}\}$ , où  $n_v + 1$  est le nombre de mesures. Le pas temporel d’acquisition de nos données n’est pas régulier. Nous proposons d’approximer les données avec une fonction de la forme :

$$x'(t) = v_0 + A\omega \cos(\omega t + \psi) \quad (4.96)$$

Elle correspond à la dérivée de l’équation (4.46) avec des variations modélisées par l’équation (4.69). La vitesse moyenne  $v_0$  est calculée pour un nombre de points  $n_v$  à partir des données avec la formule :

$$v_0 = \frac{1}{n_v} \sum_{j=0}^{n_v-1} \left( \frac{v(t_{j+1}) + v(t_j)}{2} \right) (t_{j+1} - t_j) \quad (4.97)$$

Elle est estimée à environ  $v_0 = -505.56\text{mm/s}$ . Pour simplifier l’estimation des paramètres du cosinus, nous avons soustrait la moyenne  $v_0$  aux données et à l’équation (4.96). Par définition, cela correspond à la dérivée de la fonction modélisant les variations. Ainsi, nous notons  $\delta'(t_j) = v(t_j) - v_0$  pour  $j = 0, \dots, n_v$ . Les paramètres du cosinus sont alors obtenus avec l’algorithme du downhill simplex en utilisant la fonction d’optimisation suivante :

$$F_v(A', \omega, \psi) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=0}^{n_v} \|\delta'(t_j) - A' \cos(\omega t_j + \psi)\|_2 \quad (4.98)$$

où  $A' = A\omega$ . Les valeurs d’initialisation de l’algorithme et les estimations des paramètres sont données dans la table 13. Nous avons choisi les valeurs initiales des paramètres de l’algorithme d’optimisation à partir de la Fig. 66. La pulsation  $\omega$  se calcule avec la formule :

$$\omega = 2\pi f_{osc} \quad (4.99)$$

Paramètre	Initialisation	Estimation
$A$	1.1	1.119
$\omega$	22	20.611
$\psi$	1.571	3.155

TABLE 13 – Valeurs initiales et estimées des paramètres de la fonction  $x'(t)$  définie dans l’équation (4.96) et approximant les données issues du convoyeur.

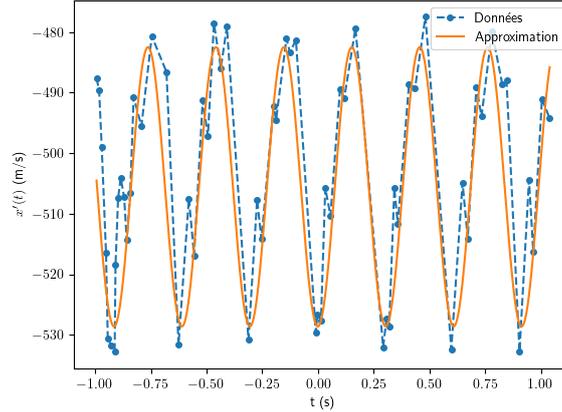


FIGURE 70 – Approximation des données de vitesse du convoyeur avec une fonction de la forme  $x'(t) = v_0 + A' \cos(\omega t + \psi)$ . Les valeurs des paramètres sont données pour  $A' = A\omega$  dans la table 13.

où le paramètre  $f_{osc}$  est la fréquence d'oscillation. Elle vaut approximativement  $f_{osc} \approx 3.5\text{Hz}$  (environ 7 périodes en 2s). Nous avons donc  $\omega \approx 22\text{rad/s}$ . L'amplitude des données de vitesse correspond au coefficient  $A' = A\omega$ . Nous estimons que  $A' \approx 25$ . Ainsi, nous obtenons  $A \approx 1.1\text{mm}$ . Il est difficile d'estimer la valeur de  $\psi$  à partir de la courbe. Nous avons choisi  $\psi = \pi/2$ . Les données et leur approximation sont représentées dans la Fig. 70. La fonction  $x'(t)$  définie dans l'équation (4.96) semble être une bonne approximation des données.

#### 4.6.1.2 Position

L'approximation des données de vitesse nous permet d'affiner le pas d'acquisition des radiographies. Nous passons de 62 points en environ 2s à une fréquence de 2000Hz dans nos simulations. Cependant, il est nécessaire de donner la position de la source et des détecteurs à notre algorithme pour simuler les projections (ou de manière équivalente, la position de l'objet). Nous déterminons la position de l'objet entre les temps  $t_0$  et  $t_1$  à partir de l'équation (4.96) par la formule :

$$x(t_1) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{t_0}^{t_1} x'(t) dt + x_{shift} \quad (4.100)$$

Le paramètre  $x_{shift}$  est utilisé pour fixer  $x(0) = x_0 = 0$ . Le temps d'acquisition des données a été ajusté au préalable pour être centré entre la première et la dernière mesure de la vitesse du convoyeur. Ainsi, nous générons la position d'un objet pour  $t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ . Nous obtenons  $x_{shift} = -503.66\text{mm}$  pour  $T = 1\text{s}$ .

### 4.6.2 Estimation des variations

Nous utilisons les conditions de cohérence de données pour estimer les variations de vitesse du convoyeur (voir section 4.5.2). La consigne de vitesse du convoyeur est de  $v_0 = -500\text{mm/s}$ . Les données ont été ajustées telles que  $x_0 = 0\text{mm}$ .

**Estimation** Nous effectuons des simulations sans ajouter de bruit aux projections. Elles sont réalisées avec la même géométrie et le même objet que dans la section 4.4.1. Nous utilisons le modèle sinusoïdal de l'équation (4.69) pour estimer les variations de vitesse. Les résultats obtenus avec les positions calculées dans la section 4.6.1 sont donnés dans la table 14 en utilisant  $v_0 = -505.56\text{mm/s}$ . Le paramètre  $\omega$  a été initialisé à  $\omega = 21$  car l'algorithme ne

Paramètre	Initialisation	Estimation	Valeur
$A$	1.1	1.136	1.119
$\omega$	21	20.629	20.629
$\psi$	3.142	3.166	3.155
$c_{0,0}$	0	0.622	0.622

TABLE 14 – Estimation des variations de vitesse des données issues du convoyeur en utilisant la méthode de la section 4.5.2.2. Les positions de la source utilisées dans les simulations sont issues des approximations des données avec le modèle de l'équation (4.96). Les simulations ont été réalisées sans ajout de bruit.

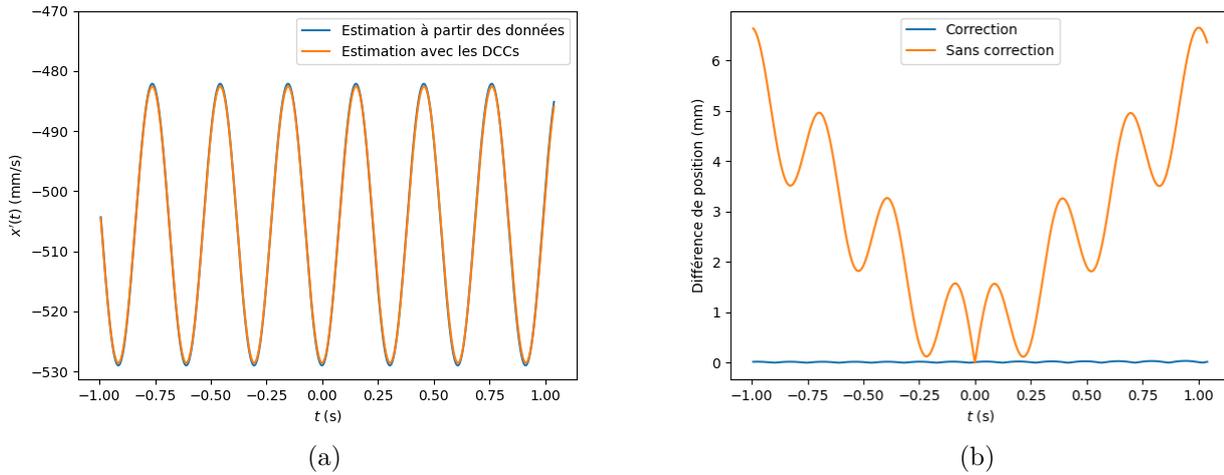


FIGURE 71 – Estimation des variations de vitesse en simulant le déplacement de la source à partir des estimations de la section 4.6.1.1. (a) Estimation de la vitesse avec les conditions de cohérence de données. (b) Différence entre les positions calculées dans la section 4.6.1.1 et les positions obtenues avec les estimations de la table 14 (correction) ainsi que les positions obtenues avec une vitesse constante  $x'(t) = -500\text{mm/s}$  (sans correction).

converge pas systématiquement lorsque nous utilisons  $\omega = 22$ . L'algorithme est extrêmement sensible à l'initialisation de  $\omega$ . De plus, nous avons choisi d'initialiser l'algorithme à  $\psi = \pi$  pour que les valeurs estimées des paramètres soient cohérentes avec celles de la table 13 (voir remarques de la section 4.5.2.2). Les estimations de la table 14 sont comparées aux données de la section 4.6.1 dans la Fig. 71. On observe dans la Fig. 71a que les estimations de la vitesse obtenues avec les conditions de cohérence de données (ou DCCs) sont très proches de celles approximées dans la section précédente. Nous observons le même résultat dans la Fig. 71b. En effet, nous calculons la différence en valeur absolue entre les positions calculées dans la section 4.6.1 et les positions obtenues avec les estimations de la table 14 (correction) ainsi que les positions obtenues avec la consigne de vitesse constante  $x'(t) = -500\text{mm/s}$  du convoyeur (sans correction). Avec correction, la différence maximale entre les positions est d'environ  $30\mu\text{m}$ . La référence et nos estimations utilisent une vitesse moyenne de  $v_0 = -505.56\text{mm/s}$ .

**Remarques** Le modèle sinusoïdal utilisé ne prend pas entièrement en compte la complexité des variations de vitesse du convoyeur. Un modèle plus adapté peut être décrit avec des séries de Fourier. Les variations sont alors définies par :

$$\delta(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{A_0}{2} + \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K (A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt)) \quad (4.101)$$

Nous pouvons nous limiter à un nombre  $K$  fini car il est peu probable que notre algorithme soit capable de calculer les coefficients correspondant à des hautes fréquences. Ce modèle a l'avantage d'être linéaire. La dérivée de la fonction  $\delta(t)$  est aussi linéaire. Il y a  $2K + 1$  coefficients à déterminer. Néanmoins, le paramètre  $A_0$  ne peut pas être estimé par notre méthode (voir la remarque de la section 4.5.1).

L'initialisation du paramètre  $\omega$  est un point critique pour la convergence de l'algorithme d'optimisation. Par exemple, l'algorithme ne converge pas pour une initialisation des paramètres aux valeurs :  $\omega = 22$ ,  $A = 1.1$ ,  $\psi = \pi$ ,  $c_{0,0} = 0$ . Cependant, il converge en utilisant  $\omega = 21$  et les mêmes valeurs pour les autres paramètres.

## 4.7 Expériences

Nous réalisons des expériences sur le banc présenté dans la section 1.2. Dans la section 4.7.1, nous définissons le protocole expérimental. Notre banc ne permet pas de synchroniser l'acquisition des radiographies et de la position du chariot. Ainsi, dans la section 4.7.2, nous nous limitons à calculer les moments d'ordre 0.

### 4.7.1 Protocole

**Radiographie** Nous utilisons les radiographies de la bouteille Bird. La fréquence d'acquisition des radiographies linéaires est définie en fonction de l'angle de vue, de la consigne de vitesse du chariot et de la position du détecteur virtuel (introduit dans la section 1.1.2). Le détecteur virtuel permet de travailler directement avec des radiographies 2D sans perte d'information (voir section 1.1.2). Idéalement, il se trouve à mi-distance entre la source et les détecteurs. La largeur des pixels est de 0.6mm. Nous donnons les valeurs de fréquence utilisées dans la table 15. On remarque que les acquisitions effectuées à 0.5m/s et 1.0m/s sont équivalentes. En effet, les fréquences d'acquisition à 1.0m/s correspondent au double de celles à 0.5m/s. Cependant, le chariot est deux fois plus rapide à 1.0m/s. Ainsi, nous obtenons les mêmes radiographies avec ces deux consignes de vitesse pour les fréquences d'acquisition de la table 15. Néanmoins, les gains du détecteur sont plus élevés à 1.0m/s. Il y a donc moins de bruit dans les radiographies acquises à 0.5m/s.

**Consigne de vitesse** Nous réalisons plusieurs acquisitions à différentes vitesses. Les consignes de vitesse sont de 0.5m/s, 1m/s et variable avec une alternance entre 0.4m/s et 0.6m/s toutes les 400ms telle que la vitesse moyenne soit de 0.5m/s. Les vitesses en fonction de la position du chariot sont données pour les 3 consignes dans la Fig. 72. On remarque qu'il y a une phase de transition entre chaque changement de vitesse pour la consigne de vitesse variable. De plus, on observe qu'il y a de légères oscillations pour les vitesses constantes.

Consigne	0.5m/s	1.0m/s
$\pm 55^\circ$	1660.3	3320.6
$\pm 45^\circ$	1609.9	3219.8
$\pm 35^\circ$	1510.5	3021.0
$\pm 25^\circ$	1365.3	2730.5
$\pm 15^\circ$	1178.5	2357.0
$\pm 5^\circ$	956.0	1911.9

TABLE 15 – Fréquence d'acquisition exprimée en Hz en fonction de l'angle de vue et de la vitesse de translation du chariot.



mations. Ainsi, dans la suite, nous nous concentrons sur le calcul des moments d'ordre 0 que nous pouvons calculer indépendamment du temps d'acquisition. Il est uniquement nécessaire de connaître le pas d'acquisition des radiographies.

### 4.7.2 Calcul du moment d'ordre 0

Nous calculons les moments d'ordre 0 dans plusieurs plans 2D que nous définissons à partir de la calibration géométrique. Nous utilisons les données de calibration de la table 17 se trouvant dans l'annexe A.2. Pour éviter toutes confusions, nous notons  $v_0^{\text{det}}$  le pixel de référence du détecteur et  $v_0$  la vitesse moyenne de déplacement de la source. Nous supposons que  $\theta_x = 0^\circ$ ,  $\theta_z = 0^\circ$  et  $v_0^{\text{det}} = 8$  pixels pour tous les détecteurs. La position de la source est supposée unique. Nous en déduisons les paramètres  $f$  et  $\theta_y$  à partir des résultats de plusieurs calibrations. Ces paramètres permettent de calculer la distance  $D$  dans le plan passant par le pixel  $v_0^{\text{det}}$  de tous les détecteurs. Ainsi, la distance entre la source et les détecteurs en fonction du pixel  $v$  se calcule avec la formule suivante :

$$D(v) \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{D^2(v_0^{\text{det}}) + (v - v_0^{\text{det}})^2} \quad (4.102)$$

Nous obtenons  $D(v_0^{\text{det}}) = 491.51\text{mm}$  en calculant la moyenne des distances source-détecteur sur l'ensemble des angles de vue.

Une transformée logarithmique est appliquée aux radiographies pour obtenir les projections. Le calcul des moments est relativement simple. Il suffit de connaître les valeurs des paramètres  $\theta_y$ ,  $D$ ,  $v_0^{\text{det}}$  et la fréquence d'acquisition. Nous calculons les moments pour les 12 angles de vue. Afin de comparer les résultats, nous calculons l'écart type relatif, noté ETR, des moments sur les 12 angles de vue en fonction du pixel  $v$  pour les différentes consignes de vitesse avec la formule suivante :

$$\text{ETR} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{m}} \quad (4.103)$$

où  $\bar{m}$  et  $\bar{\sigma}$  sont respectivement la moyenne et l'écart type des moments d'ordre 0 :

$$\bar{m} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{n_d} \sum_u \bar{J}_0(u) \quad (4.104)$$

$$\bar{\sigma} \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{\frac{1}{n_d} \sum_u \left( \bar{J}_0(u) - \bar{m} \right)^2} \quad (4.105)$$

Nous rappelons que les moments calculés pour  $v_0 = 0.5\text{m/s}$  et  $v_0 = 1.0\text{m/s}$  sont équivalents pour les fréquences d'acquisition utilisées. Nous présentons les résultats pour des consignes de  $v_0 = 1.0\text{m/s}$  et de vitesse variable dans la Fig. 74. Nous observons une grande différence entre les différents angles de vue pour la vitesse variable. Les moments sont à peu près constants pour le déplacement à  $1.0\text{m/s}$ . C'est un résultat cohérent. En effet, le moment d'ordre 0 des projections correspond à la masse de l'objet dans la géométrie parallèle. Dans l'équation (4.20), on s'aperçoit que le moment d'ordre 0 dans la géométrie linogramme correspond à la masse divisée par la distance  $D$ . Un changement de vitesse impacte le pas d'intégration spatial. Sans calibration de ce pas, la valeur du moment varie en fonction de la vitesse de translation de l'objet. Or, la masse de la bouteille en translation ne change pas. Nous utilisons cette incohérence pour estimer les variations de vitesse dans ce chapitre. Ici, nous pouvons utiliser ce résultat pour établir un seuil maximum entre les différents moments afin de détecter des variations de vitesse. Néanmoins, nous ne les calculons pas. Les écarts-types relatifs sont respectivement compris entre 0.5% et 4%, 17% et 21% pour la consigne de vitesse à  $1.0\text{m/s}$  et variable. Dans ce cas, nous pouvons par exemple fixer un seuil maximum à environ 5%. Au delà, nous pouvons considérer qu'il y a des variations de vitesse pouvant nécessiter d'être modélisés et estimés.

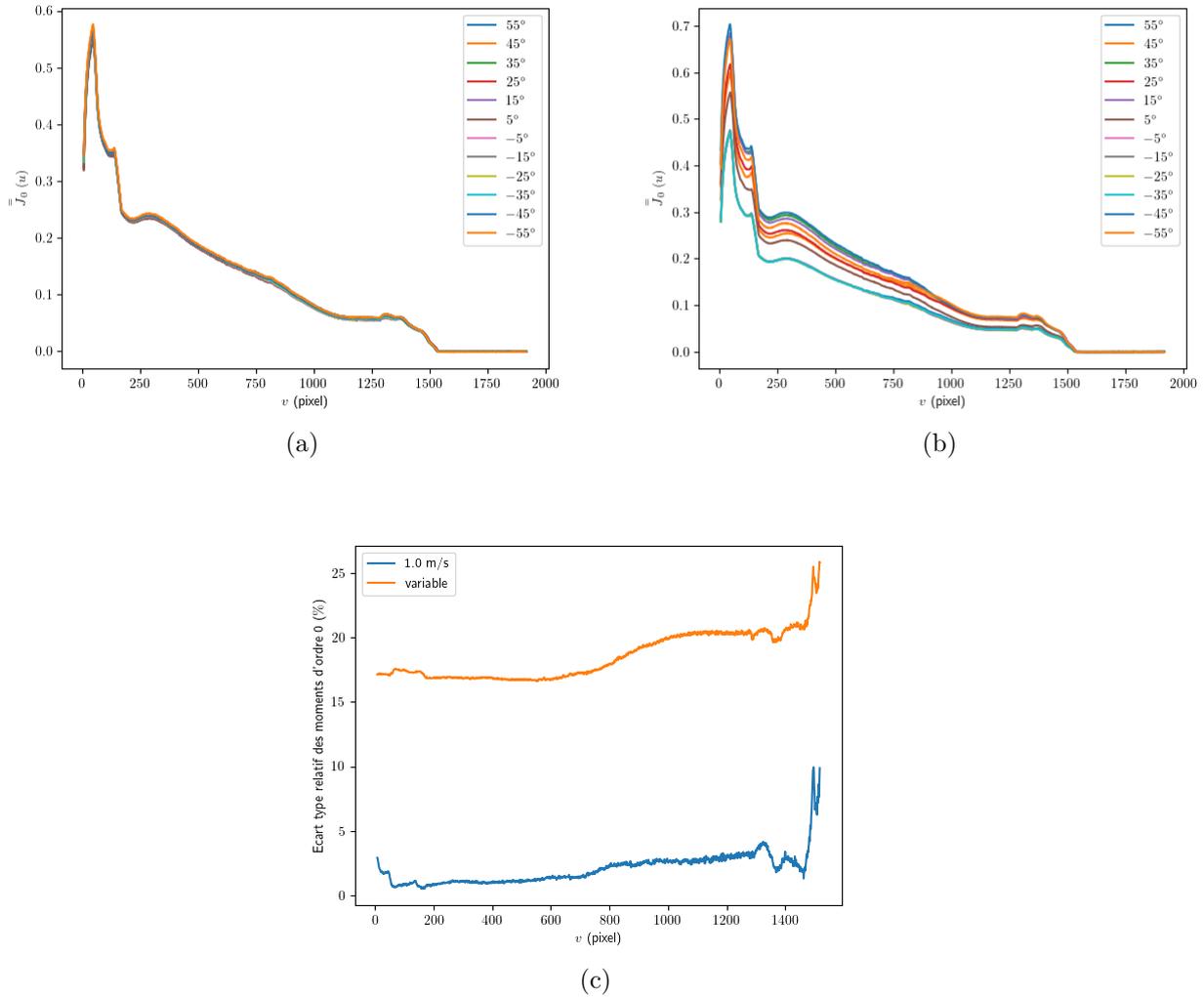


FIGURE 74 – Calcul des moments d’ordre 0 avec des données expérimentales pour les consignes de vitesse : (a) 1.0m/s, (b) variable. (c) Comparaison des écarts-types relatifs des moments d’ordre 0 calculés sur les 12 angles de vue pour les deux consignes de vitesse.

## 4.8 Conclusion

Nous avons adapté la version linogramme des conditions de cohérence d’Helgason-Ludwig à notre problème dépendant du temps. Nous avons montré qu’il n’est pas possible de déterminer la vitesse moyenne de translation d’un objet à partir des conditions de cohérence de données dans notre géométrie. Néanmoins, nous avons proposé une méthode basée sur les conditions de cohérence des données permettant d’estimer les variations de vitesse de l’objet en translation. Nous avons proposé plusieurs modèles de vitesse permettant d’estimer ces variations. Finalement, nous avons montré l’intérêt de l’utilisation des conditions de cohérence des données pour le calcul des variations de vitesse d’un objet en translation à partir de données simulées. Nous avons aussi montré qu’il est possible d’utiliser ces conditions pour détecter des variations de vitesse sur des données expérimentales. Une partie des résultats a été présentée au Fully 3D 2023 [2].

Des extensions ou améliorations de nos résultats sont possibles. Nous listons quelques points à explorer :

- Les modèles de vitesse utilisés dans ce chapitre sont assez simples. En fonction du profil de vitesse du convoyeur, il est possible de modéliser les variations de vitesse

avec d'autres modèles : séries de Fourier, splines, etc. Néanmoins, il sera toujours nécessaire de fournir a priori la vitesse moyenne du convoyeur pour déterminer la vitesse exacte de translation d'un objet. De même, la position exacte de l'objet peut être déterminée à condition de fournir a priori la vitesse moyenne et une position à un temps donné de l'objet. Sans ça, les résultats sont donnés à une translation près.

- À l'image de Nguyen *et al.* [92], la méthode peut être étendue à la 3D en utilisant la redondance d'information de différents plans 2D dans lesquels nous résolvons le problème d'auto-calibration. Dans le cas de Nguyen *et al.*, c'est une étape nécessaire pour déterminer une unique solution. Dans notre cas, la résolution du problème dans un plan 2D est suffisante. Néanmoins, une extension à la 3D peut permettre des estimations plus robustes des paramètres de la vitesse de translation d'un objet sur un convoyeur.
- Les résultats obtenus montrent le potentiel de notre méthode. Néanmoins, nous n'avons pas quantifié son apport sur l'estimation de la position de l'objet en fonction du temps lors de nos expériences. Pour cela, il est nécessaire de réaliser des expériences en synchronisant temporellement l'acquisition des radiographies et de mouvement de l'objet. Éventuellement, nous pouvons utiliser ces résultats pour montrer l'intérêt de la méthode sur des reconstructions.



---

---

# CHAPITRE 5

---

## CONCLUSION

Dans ce manuscrit, plusieurs méthodes de calibration ont été proposées dans le but d'améliorer les reconstructions de bouteilles en verre sur des lignes de production. Des simulations et expériences montrent les performances des méthodes proposées.

Nous avons proposé plusieurs méthodes et calibres pour la calibration géométrique off-line du système d'acquisition. Les méthodes s'appuient sur la redondance intrinsèque à notre géométrie d'acquisition. Les calibres ont été conçus pour s'adapter à différents systèmes d'acquisition et de permettre une calibration robuste pour tous ces systèmes. Nous avons effectué des expériences dont les résultats ont permis d'améliorer les méthodes d'exploitation des données pour l'estimation des paramètres géométriques. Ces expériences ont aussi permis d'effectuer un passage des résultats théoriques vers la pratique par la conception d'un banc expérimental, la réalisation d'un calibre et la mise en place d'outils d'analyse des données.

Nous avons déterminé empiriquement une loi d'absorption des rayons X dans le verre de plusieurs bouteilles pour la calibration physique du système d'acquisition. Elle correspond à loi de Beer-Lambert pour un spectre d'émission multi-énergétique du tube à rayons X traversant un objet mono-matériau. Nous avons observé des écarts importants entre cette loi et la loi de Beer-Lambert mono-énergétique usuellement utilisée en tomographie (hors tomographie spectrale).

Nous avons proposé plusieurs méthodes basées sur les conditions de cohérence des données pour l'auto-calibration du système de radiographie. Nous avons montré qu'il n'est pas possible de déterminer la vitesse moyenne de déplacement d'un objet à partir des conditions de cohérence des données. Cependant, nous avons proposé plusieurs modélisations pour estimer les variations de vitesse de l'objet en translation. Des résultats obtenus avec des données réelles montrent l'intérêt de nos méthodes. De plus, nous avons montré avec des données réelles qu'il est possible de détecter des dérives du système.

Nous avons proposé plusieurs pistes d'amélioration ou d'extension de nos résultats dans chaque chapitre. Elles reposent majoritairement sur la mise en place de tests expérimentaux complémentaires et l'observation de l'impact de nos résultats sur des reconstructions.



---

---

# ANNEXE A

---

## DONNÉES DE LA CALIBRATION GÉOMÉTRIQUE

### A.1 Calibration physique

Nous utilisons les données de la calibration géométrique pour réaliser des mesures théoriques des épaisseurs de verre traversées pour la calibration physique (voir chapitre 3). Ces opérations nécessitent de déterminer les positions de la source  $S$ , les matrices de rotation  $\mathbf{R}$  et les distances focales  $f$  pour chaque position de détecteur. Nous notons  $S_l$ ,  $f_l$ ,  $\theta_y^l$  respectivement la position de la source, la distance source-détecteur, la rotation autour de l'axe  $\mathbf{y}$  du détecteur  $D_l$  pour  $l = 1, \dots, n_d$ .

**Protocole de calibration** Les tables de translation A et B n'ont pas été déplacées lors des acquisitions des données de la calibration physique. Ces tables permettent de faire des translations sur les axes  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{z}$ . Nous notons  $X_A$  et  $Z_B$  respectivement les positions des tables A et B dans le repère  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  dont nous ne connaissons pas l'origine dans le repère monde. Nos acquisitions ont été réalisées à la position  $X_A = 22.20\text{mm}$  et  $Z_B = 25.38\text{mm}$ . Cependant, nous ne possédons pas les données de calibration à cette position. Plusieurs calibrations ont été effectuées à différentes positions des tables A et B. Nous déduisons les valeurs de  $D_l$ ,  $S_l$ ,  $f_l$ ,  $\theta_y^l$  à la position  $X_A = 22.20\text{mm}$  et  $Z_B = 25.38\text{mm}$  en fonction des résultats de l'ensemble des calibrations.

**Estimation des paramètres** Pour chaque calibration, la position des détecteurs est déterminée à partir des estimations des distances source-détecteur  $f_l$ , de la position de la source  $S_l$ , du vecteur  $\mathbf{z}_{D_l}$  à plusieurs positions des tables A et B par la formule :

$$D_l = -f_l \langle S_l, \mathbf{z}_{D_l} \rangle \quad (\text{A.1})$$

Nous déterminons la position de chaque détecteur en calculant la moyenne des estimations obtenues pour les différentes calibrations avec l'équation précédente. Les coordonnées  $X_{S_l}$  et  $Z_{S_l}$  de la source pour  $X_A = 22.20\text{mm}$  et  $Z_B = 25.38\text{mm}$  sont calculées en déterminant les paramètres de droites affines modélisant la relation entre les valeurs de  $X_{S_l}$  et  $Z_{S_l}$  en fonction de  $X_A$  et  $Z_B$  (comme dans la section 2.8.3), puis en évaluant ces droites aux valeurs  $X_A = 22.20\text{mm}$  et  $Z_B = 25.38\text{mm}$ . La valeur de la coordonnée  $Y_{S_l}$  est obtenue en calculant la moyenne des estimations de toutes les calibrations pour une position de détecteur. En effet, nous supposons que les translations de la source se font dans un plan  $Y = Y_{S_l}$ . Ces

calculs sont réalisés indépendamment pour chaque détecteur  $D_l$ ,  $l = 1, \dots, n_d$ . À partir des distances  $f_l$ , de la position des détecteurs et de la source, nous calculons la valeur de  $\theta_y^l$  en supposant que  $\theta_x^l = \theta_z^l = 0^\circ$  avec la formule :

$$\theta_y^l = \arcsin \left( \frac{X_{D_l} - X_{S_l}}{f_l} \right) \quad (\text{A.2})$$

Pour  $l = 1, \dots, n_d$ , nous fixons  $v_{0,l}^{\text{det}} = 8$  pixels. En effet, nos estimations ne sont pas très fiables lorsque l'angle  $\theta_y$  est petit (voir chapitre 2). Nous utilisons donc la valeur de la conception assistée par ordinateur (CAO). Ainsi, pour une hauteur de pixel de  $0.4\text{mm}$ , nous fixons aussi la valeur de  $Y_{D_l} = 3.4\text{mm}$  pour  $l = 1, \dots, n_d$ . Les estimations des paramètres sont données dans la table 16.

$\theta_y$ (deg)	$X_S$ (mm)	$Y_S$ (mm)	$Z_S$ (mm)	$X_D$ (mm)	$Z_D$ (mm)
54.7	5.1	0.7	245.6	-690.4	-247.5
44.6	1.5	0.7	244.3	-483.0	-247.2
34.7	0.9	0.6	243.7	-338.0	-246.0
24.7	0.9	0.5	243.8	-224.3	-245.1
14.8	-0.1	0.5	244.3	-129.0	-245.3
4.8	-0.6	0.5	245.1	-41.9	-243.8
-5.0	-0.5	0.8	246.4	42.6	-246.9
-14.9	-1.7	0.8	245.8	129.8	-247.7
-25.0	-2.9	0.6	244.7	226.4	-246.9
-34.9	-3.7	0.4	244.6	339.2	-246.3
-44.9	-5.4	0.3	245.4	484.4	-246.1
-54.7	-8.4	0.3	247.5	690.6	-247.0

TABLE 16 – Valeurs des paramètres géométriques utilisées dans le chapitre de calibration physique.

## A.2 Auto-calibration géométrique on-line

Il est nécessaire de spécifier certains paramètres géométriques du système d'acquisition pour estimer les valeurs des paramètres de  $x(t)$  à partir de l'équation (4.72). En effet, cette équation utilise les moments temporels des projections d'ordre 0 définis dans l'équation (4.26) en fonction du paramètre  $u = D \tan \phi$  (voir l'équation (4.11)). Nous devons donc déterminer les valeurs de  $\phi$  pour chaque détecteur et de  $D$ .

**Distance source-détecteurs** La distance  $D$  entre la source et les détecteurs dépend du plan dans lequel nous calculons les moments. Nous rappelons que les plans passent par la droite sur laquelle se déplace la source et par les lignes de pixels du détecteur virtuel (voir section 1.1.2). Ainsi, la distance  $D$  est dépendante de la valeur du pixel  $v$ . Pour  $\theta_x = \theta_z = 0^\circ$ , une formule de calcul est donnée dans l'équation (4.102) à partir des valeurs de  $v_0^{\text{det}}$  et  $D(v_0^{\text{det}})$ . Par conséquent, nous calculons uniquement les valeurs de  $D(v_0^{\text{det}})$  et de  $v_0^{\text{det}}$ .

**Orientation des rayons** Il est important de remarquer que  $u$  ne varie pas en fonction de  $v$  (voir [92]). Or, la valeur de  $u$  dépend de  $D(v)$  et de  $\phi$ . Nous remarquons ainsi que le paramètre  $\phi$  est une fonction de  $v$ . Par définition, nous avons  $\phi = \theta_y$  lorsque  $v = v_0^{\text{det}}$ . En utilisant l'invariance de  $u$  par rapport à  $v$ , nous obtenons la formule suivante :

$$\phi(v) = \arctan \left( \frac{D(v_0^{\text{det}})}{D(v)} \tan \theta_y \right) \quad (\text{A.3})$$

Il est alors uniquement nécessaire de déterminer la valeur de  $\theta_y$  pour déterminer les valeurs de  $\phi(v)$  (en supposant que nous connaissons les valeurs de  $D(v_0^{\text{det}})$  et de  $v_0^{\text{det}}$ ).

**Estimation des paramètres** La calibration géométrique nous permet uniquement de déterminer les paramètres  $S$ ,  $v_0^{\text{det}}$ ,  $\theta_y$  et  $f$ . Par définition, la distance source-détecteur s'écrit :

$$f = D(v_0^{\text{det}}) \cos \theta_y \quad (\text{A.4})$$

Nous pouvons donc déterminer  $D(v_0^{\text{det}})$  à partir des valeurs de  $f$  et  $\theta_y$ . Cependant, nous n'avons pas réalisé de calibration à la position exacte de la source (voir chapitre 2). Les acquisitions des données ont été réalisées à  $X_A = 22.20\text{mm}$  et  $Z_B = 25.38\text{mm}$  pour tous les détecteurs. Le protocole de calibration est identique à celui de la section A.1. En effet, plusieurs calibrations ont été réalisées à différentes positions des tables de translation A et B. Nous calculons la valeur des distances  $f_l$  pour cette position des tables à partir de l'estimation de la position des détecteurs  $D_l$  et de la source  $S$  pour plusieurs valeurs de  $X_A$  et  $Z_B$ ,  $l = 1, \dots, n_d$ . Nous déduisons ensuite les valeurs des angles à partir des positions de la source  $S$ , des détecteurs  $D_l$  et des distances  $f_l$ . Contrairement aux données de la calibration physique, nous supposons ici que la source est unique.

Nous déterminons la position de chaque détecteur en calculant la moyenne des estimations obtenues pour les différentes calibrations avec l'équation (A.1). Les positions des sources sont calculées de manière identique à la section A.1. Cependant, nous avons supposé que la position de la source est unique. Nous la déterminons en calculant la moyenne des positions obtenues pour chaque détecteur. Les valeurs estimées des coordonnées de la source sont :  $X_S = -1.31\text{mm}$ ,  $Y_S = 0.57\text{mm}$ ,  $Z_S = 245.11\text{mm}$ . Ainsi, en calculant la distance entre les valeurs estimées de la position de la source  $S$  et des détecteurs  $D_l$ , nous obtenons les valeurs de  $f_l$  correspondant à une position des tables  $X_A = 22.20\text{mm}$  et  $Z_B = 25.38\text{mm}$  pour chaque détecteur. Les estimations sont données dans la table 17. À partir des distances  $f_l$ , de la position des détecteurs et de la source, nous calculons la valeur de  $\theta_y^l$  en supposant que  $\theta_x^l = \theta_z^l = 0^\circ$  avec la formule de l'équation (A.2). Les valeurs estimées de  $\theta_y^l$  sont données dans la table 17. Pour  $l = 1, \dots, n_d$ , nous fixons  $v_{0,l}^{\text{det}} = 8$  pixels. Comme pour la section A.1, nous utilisons la valeur de la CAO. Finalement, la valeur de  $D(v_0^{\text{det}})$  est calculée en moyenne sur tous les détecteurs à partir des distances  $f_l$  ainsi que des positions des détecteurs et de la source. En effet, en considérant que  $\theta_x^l = \theta_z^l = 0^\circ$ , nous pouvons calculer  $D(v_0^{\text{det}})$  pour  $l = 1, \dots, n_d$  avec la formule :

$$D(v_0^{\text{det}}) = \sqrt{f_l^2 - (X_{D_l} - X_S)^2} \quad (\text{A.5})$$

Nous trouvons une moyenne de  $D(v_0^{\text{det}}) = 491.51\text{mm}$ .

$\theta_y$ (deg)	$f$ (mm)
54.44	847.08
44.37	688.73
34.44	595.47
24.46	538.58
14.59	506.80
4.74	491.30
-5.10	494.04
-14.90	509.97
-24.83	542.12
-34.72	597.89
-44.68	690.83
-54.58	849.03

TABLE 17 – Valeurs des paramètres géométriques utilisées dans le chapitre d'auto-calibration géométrique on-line.



# ANNEXE B

## SYNTHÈSE DES CALIBRES PROPOSÉS

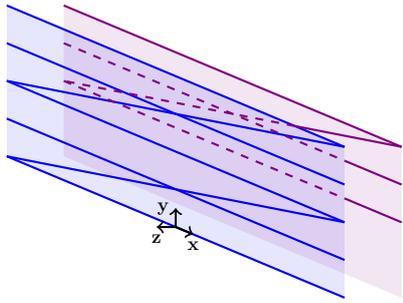
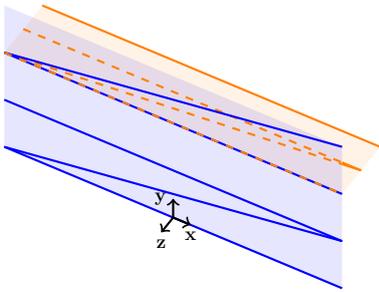
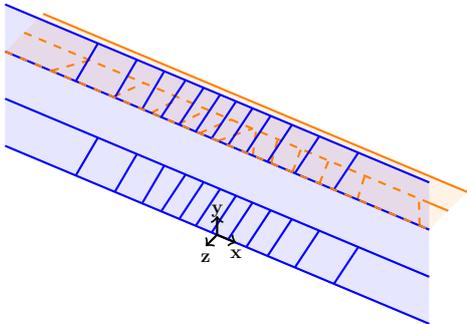
Calibre	Statique	Plans	$n_O$	$n_P$
<b>Calibre à 2 plans parallèles</b> 	Oui	Parallèles	3	8
<b>Calibre minimal</b> 	Oui	Orthogonaux	3	5
<b>Calibre adapté</b> 	Oui	Orthogonaux	$3n_d$	6

TABLE 18 – Synthèse des calibres proposés dans la section 2.6. Les paramètres  $n_d$ ,  $n_O$ ,  $n_P$  définissent respectivement les nombres de détecteurs, de droites obliques et parallèles des calibres.



---

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Gasquet, L. Desbat, and P. Y. Solane. Multiple linear detector off-line calibration. In *Seventh international conference on image formation in X-ray computed tomography*, pages 390–393, 2022.
- [2] S. Gasquet, L. Desbat, and P. Y. Solane. Motion estimation in parallel-beam linogram geometry using data consistency conditions. In *17th International Meeting on Fully 3D Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, pages 115–118, 2023.
- [3] J. E. Shelby. *Introduction to Glass Science and Technology*. The Royal Society of Chemistry, second edition, 2005.
- [4] B. Raj, T. Jayakumar, and M. Thavasimuthu. *Practical non-destructive testing*. Second edition, 2002.
- [5] I. Ihrke, K. N. Kutulakos, H. P. A. Lensch, M. Magnor, and W. Heidrich. Transparent and specular object reconstruction. *Computer Graphics Forum*, 29(8) :2400–2426, nov 2010.
- [6] H. Villarraga-Gómez, E. L. Herazo, and S. T. Smith. X-ray computed tomography : from medical imaging to dimensional metrology. *Precision Engineering*, 60 :544–569, nov 2019.
- [7] F. Drouet. *Mesures 3D et d'épaisseur par imagerie sur des objets en verre creux*. PhD thesis, Université de Bourgogne, 2015.
- [8] R. Hartley and A. Zisserman. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, second edition, 2004.
- [9] T. Yoshizawa, editor. *Handbook of Optical Metrology*. CRC Press, feb 2009.
- [10] Y. Levakhina. *Three-Dimensional Digital Tomosynthesis*. PhD thesis, University of Lübeck, 2013.
- [11] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Wiley, 1986.
- [12] H. K. Tuy. An inversion formula for cone-beam reconstruction. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 43(3) :546–552, June 1983.
- [13] B. D. Smith. Image reconstruction from cone-beam projections : Necessary and sufficient conditions and reconstruction methods. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 4(1) :14–25, March 1985.

- [14] R. Clackdoyle and F. Noo. Quantification of tomographic incompleteness in cone-beam reconstruction. *IEEE Transactions on Radiation and Plasma Medical Sciences*, 4(1) :63–80, January 2020.
- [15] M. Laurendeau, L. Desbat, G. Bernard, F. Jolivet, S. Gorges, F. Morin, and S. Rit. Three-dimensional maps of the tomographic incompleteness of cone-beam ct scanner geometries. In *17th International Meeting on Fully 3D Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, 2023.
- [16] O. Colle, B. Cance, L. Cosneau, L. Desbat, E. Maitre, and N. Szafran. Procédé et installation de contrôle dimensionnel en ligne d’objets manufacturés, 2019. Brevet FR3073043B1.
- [17] N. Szafran. Reconstruction 2d à partir d’une série de mesures 1d. 2017.
- [18] C. T. Kelley. *Iterative Methods for Optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
- [19] P. Sturm. Some lecture notes on geometric computer vision, 2012.
- [20] K. Kanatani. *Group-Theoretical Methods in Image Understanding*. Springer Berlin Heidelberg, 1990.
- [21] S. Helgason. *The Radon Transform*. Springer, Boston, MA, 1980.
- [22] D. Ludwig. The radon transform on euclidean space. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 19 :49–81, 1966.
- [23] R. Clackdoyle and L. Desbat. Full cone-beam consistency conditions for sources on a plane. In *12th International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, pages 253–256, 2013.
- [24] R. Clackdoyle. Data consistency for linograms and planograms. *IEEE Transactions on Radiation and Plasma Medical Sciences*, 2(4) :288–299, 2018.
- [25] L. Desbat and R. Clackdoyle. Calibration and data consistency in parallel and fan-beam linogram geometries. In *IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference (NSS/MIC)*, 2019.
- [26] F. Noo, R. Clackdoyle, C. Mennessier, T. White, and T. Roney. Analytic method based on identification of ellipse parameters for scanner calibration in cone-beam tomography. *Physics in Medicine and Biology*, 45(11) :3489–3508, 2000.
- [27] Y. Cho, D. Moseley, J. Siewerdsen, and D. Jaffray. Accurate technique for complete geometric calibration of cone-beam computed tomography systems. *Medical Physics*, 32(4) :968–983, 2005.
- [28] M. J. Daly, J. H. Siewerdsen, Y. B. Cho, D. A. Jaffray, and J. C. Irish. Geometric calibration of a mobile c-arm for intraoperative cone-beam ct. *Medical Physics*, 35(5) :2124–2136, 2008.
- [29] L. von Smekal, M. Kachelriß, E. Stepina, and W. Kalender. Geometric misalignment and calibration in cone-beam tomography. *Medical Physics*, 31(12) :3242–3266, 2004.
- [30] C. Mennessier, R. Clackdoyle, and F. Noo. Direct determination of geometric alignment parameters for cone-beam scanners. *Physics in Medicine and Biology*, 54(6) :1633, 2009.

- [31] M. Hemsley, R. Clackdoyle, E. Ali, and T. Xu. Geometric calibration and field reconstruction for offset-detector CBCT. In *2019 IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference (NSS/MIC)*. IEEE, oct 2019.
- [32] A. Konik, L. Desbat, and Y. Grondin. Non-uniqueness in c-arm calibration with bundle adjustment. In *16th International Meeting on Fully 3D Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, 2021.
- [33] A. Konik. *Hybrid geometric self-calibration of radiological systems*. PhD thesis, Université Grenoble Alpes, 2023.
- [34] L. Desbat, R. Clackdoyle, L. Grezes-Besset, C. Mennessier, and I. Bricault. Cone-beam imaging of delta functions. In *2006 IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*. IEEE, 2006.
- [35] R. Tsai. A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3d machine vision metrology off-the-shelf tv cameras and lenses. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, RA-3(4) :323–344, 1987.
- [36] J. Salvi, X. Armangué, and J. Batlle. A comparative review of camera calibrating methods with accuracy evaluation. *Pattern Recognition*, 35(7) :1617–1635, jul 2002.
- [37] R. Horaud, R. Mohr, and B. Lorecki. On single-scanline camera calibration. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1(9) :71–75, 1993.
- [38] C. A. Luna, M. Mazo, J. L. Lazaro, and J. F. Vazquez. Calibration of line-scan cameras. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 59(8) :2185–2190, aug 2010.
- [39] D. Li, G. Wen, B. W. Hui, S. Qiu, and W. Wang. Cross-ratio invariant based line scan camera geometric calibration with static linear data. *Optics and Lasers in Engineering*, 62 :119–125, nov 2014.
- [40] D. Li, G. Wen, and S. Qiu. Cross-ratio-based line scan camera calibration using a planar pattern. *Optical Engineering*, 55(1), jan 2016.
- [41] D. Su, A. Bender, and S. Sukkarieh. Improved cross-ratio invariant-based intrinsic calibration of a hyperspectral line-scan camera. *Sensors*, 18(6) :1885, jun 2018.
- [42] R. Usamentiaga, D. F. Garcia, and F. J. de la Calle. Line-scan camera calibration : a robust linear approach. *Applied Optics*, 59(30) :9443, oct 2020.
- [43] M. Niu, K. Song, X. Wen, D. Zhang, and Y. Yan. The line scan camera calibration based on space rings group. *IEEE Access*, 6 :23711–23721, 2018.
- [44] K. Song, B. Hou, M. Niu, X. Wen, and Y. Yan. Flexible line-scan camera calibration method using a coded eight trigrams pattern. *Optics and Lasers in Engineering*, 110 :296–307, nov 2018.
- [45] J. Draréni, S. Roy, and P. Sturm. Plane-based calibration for linear cameras. *International Journal of Computer Vision*, 91(2) :146–156, may 2010.
- [46] B. Hui, G. Wen, Z. Zhao, and D. Li. Line-scan camera calibration in close-range photogrammetry. *Optical Engineering*, 51(5), may 2012.

- [47] J. Zhang, Z. Zhang, F. Shen, F. Zhang, and H. Su. A new calibration method of line scan camera for high-precision two-dimensional measurement. In *2018 IEEE 14th International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*. IEEE, aug 2018.
- [48] J. Lesaint, S. Rit, R. Clackdoyle, and L. Desbat. Calibration for circular cone-beam CT based on consistency conditions. *IEEE Transactions on Radiation and Plasma Medical Sciences*, 1(6) :517–526, nov 2017.
- [49] T. F. Chan and L. A. Vese. Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(2) :266–277, Feb. 2001.
- [50] R. Clackdoyle and M. Defrise. Tomographic reconstruction in the 21st century. *IEEE Signal Processing Magazine*, 27(4) :60–80, 2010.
- [51] C.L. Byrne. *Applied Iterative Methods*. A K Peters/CRC Press, 2007.
- [52] J. Qi and R. M. Leahy. Iterative reconstruction techniques in emission computed tomography. *Physics in Medicine and Biology*, 51(15) :R541–R578, 2006.
- [53] J.A. Fessler. *Handbook of Medical Imaging, vol. 2, Medical Image Processing and Analysis*, chapter Statistical Image Reconstruction Methods for Transmission Tomography, pages 1–70. Bellingham : SPIE, 2000.
- [54] Als-Nielsen J. and D. McMorrow. *Elements of Modern X-ray Physics*. 2011.
- [55] N. Carron. *An Introduction to the Passage of Energetic Particles through Matter*. 2006.
- [56] M.J. Berger, J.H. Hubbell, S.M. Seltzer, J. Chang, J.S. Coursey, R. Sukumar, D.S. Zucker, and K. Olsen. Com : Photon cross section database (version 1.5). COM : Photon Cross Section Database (version 1.5), 2010.
- [57] J. Hubbell and S. Seltzer. Tables of x-ray mass attenuation coefficients and mass energy-absorption coefficients 1 keV to 20 MeV for elements  $Z = 1$  to 92 and 48 additional substances of dosimetric interest. <http://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoef/cover.html>, 1995.
- [58] D. Finch and D. Solmon. Sums of homogeneous functions and the range of the divergent beam x-ray transform. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 5(4) :363–419, jan 1983.
- [59] P. Grangeat. Mathematical framework of cone beam 3d reconstruction via the first derivative of the radon transform. In *Mathematical Methods in Tomography*, pages 66–97. Springer Berlin Heidelberg, 1991.
- [60] A. Aichert, M. Berger, J. Wang, N Maass, A. Doerfler, J. Hornegger, and A.K. Maier. Epipolar consistency in transmission imaging. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 34(11) :2205–2219, 2015.
- [61] J. Lesaint, S. Rit, R. Clackdoyle, and L. Desbat. Gcc and fbcc for linear tomosynthesis. In *5th International Conference on Image Formation in X-ray Computed Tomography*, 2018.
- [62] M. Mouchet, J. M. Létang, J. Lesaint, and S. Rit. Cone-beam pair-wise data consistency conditions in helical CT. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 42(10) :2853–2864, oct 2023.

- [63] C. Hamaker, K.T. Smith, D.C. Solomon, and S.L. Wagner. The divergent beam x-ray transform. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 10(1), mar 1980.
- [64] F. Noo, M. Defrise, R. Clackdoyle, and H. Kudo. Image reconstruction from fan-beam projections on less than a short scan. *Physics in Medicine and Biology*, 47(14) :2525–2546, jul 2002.
- [65] G.H. Chen and S. Leng. A new data consistency condition for fan-beam projection data. *Medical Physics*, 32(4) :961–967, mar 2005.
- [66] Y. Wei, H. Yu, and G. Wang. Integral invariants for computed tomography. *IEEE Signal Processing Letters*, 13(9) :549–552, sep 2006.
- [67] M. Levine, E. Sidky, and X. Pan. Consistency conditions for cone-beam ct data acquired with a straight-line source trajectory. *Tsinghua science and technology*, 15(1) :56–61, 2010.
- [68] S. Tang, Q. Xu, X. Mou, and X. Tang. The mathematical equivalence of consistency conditions in the divergent-beam computed tomography. *Journal of X-Ray Science and Technology*, 20(1) :45–68, 2012.
- [69] H. Nguyen, R. Clackdoyle, and L. Desbat. Automatic geometric calibration in 3d parallel geometry. In International Society for Optics and Photonics, editors, *SPIE Medical Imaging 2020 : Physics of Medical Imaging*, volume 11312, 2020.
- [70] R. Clackdoyle and L. Desbat. Full data consistency conditions for cone-beam projections with sources on a plane. *Physics in Medicine and Biology*, 58(23) :8437, 2013.
- [71] R. Clackdoyle. Necessary and sufficient consistency conditions for fanbeam projections along a line. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 60(3) :1560–1569, 2013.
- [72] S. Basu and Y. Bresler. Feasibility of tomography with unknown view angles. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(6) :1107–1122, 2000.
- [73] S. Basu and Y. Bresler. Uniqueness of tomography with unknown view angles. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(6) :1094–1106, 2000.
- [74] H. Yu, Y. Wei, J. Hsieh, and G. Wang. Data consistency based translational motion reduction in fan-beam ct. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 25(6) :792–803, 2006.
- [75] H. Yu and G. Wang. Data consistency based rigid motion artifact reduction in fan-beam ct. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 26(2) :249–260, 2007.
- [76] R. Clackdoyle, S. Rit, J. Hoscovec, and L. Desbat. Fanbeam data consistency conditions for applications to motion detection. In *Proceedings of the third international conference on image formation in x-ray computed tomography*, 2014.
- [77] R. Clackdoyle and L. Desbat. Data consistency conditions for truncated fanbeam and parallel projections. *Medical Physics*, 42(2) :831–845, 2015.
- [78] H. Nguyen. *Data Consistency Conditions in 3D Tomography and Scanner Calibration using Analytic Approaches*. PhD thesis, Université Grenoble Alpes, 2021.
- [79] T. Boulier, R. Clackdoyle, J. Lesaint, and L. Desbat. Consistency of fan-beam projections of a translating objet along an arc of a circle. In *Fifth international conference on image formation in X-ray computed tomography*, 2018.

- [80] D. Panetta, N. Belcari, A. Del Guerra, and S. Moehrs. An optimization-based method for geometrical calibration in cone-beam ct without dedicated phantoms. *Physics in Medicine and Biology*, 53(14) :3841–3861, 2008.
- [81] V. Patel, R. N. Chityala, K. R. Hoffmann, C. N. Ionita, D. R. Bednarek, and S. Rudin. Self-calibration of a cone-beam micro-ct system. *Medical Physics*, 36(1) :48–58, 2009.
- [82] Y. Meng, H. Gong, and X. Yang. Online geometric calibration of cone-beam computed tomography for arbitrary imaging objects. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 32(2) :278–288, 2013.
- [83] C. Debbeler, N. Maass, M. Elter, F. Dennerlein, and T. M. Buzug. A new ct rawdata redundancy measure applied to automated misalignment correction. In *The 12th International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, pages 264–267, 2013.
- [84] J. Muders and J. Hesser. Stable and robust geometric self-calibration for cone-beam ct using mutual information. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 61(1) :202–217, 2014.
- [85] J. Lesaint. *Conditions de rang en tomographie de rayons X et leur application au problème d’auto-étalonnage*. PhD thesis, Université Grenoble Alpes, 2018.
- [86] Y. Kyriakou, R. M. Lapp, L. Hillebrand, D. Ertel, and W. A. Kalender. Simultaneous misalignment correction for approximate circular cone-beam computed tomography. *Physics in Medicine and Biology*, 53(22) :6267–6289, 2008.
- [87] A. Kingston, A. Sakellariou, T. Varslot, G. Myers, and A. Sheppard. Reliable automatic alignment of tomographic projection data by passive auto-focus. *Medical Physics*, 38(9) :4934–4945, 2011.
- [88] N. Maass, F. Dennerlein, A. Aichert, and A. Maier. Geometrical jitter correction in computed tomography. In *Proceedings of the third international conference on image formation in x-ray computed tomography*, pages 338–342, 2014.
- [89] S. Tang, X. Mou, Q. Xu, Y. Zhang, J. Bennett, and H. Yu. Data consistency condition-based beam-hardening correction. *Optical Engineering*, 50(7) :076501, jul 2011.
- [90] M. Mouchet, S. Rit, and J.M. Letang. Motion detection in helical CT using data consistency conditions. In *2020 IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference (NSS/MIC)*. IEEE, oct 2020.
- [91] M. Mouchet. *Breathing motion detection in computed tomography using data consistency conditions*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2022.
- [92] H. Nguyen, L. Desbat, and R. Clackdoyle. Automatic geometric calibration in 3d cone-beam geometry with sources on a line. In *Sixth international conference on image formation in X-ray computed tomography*, pages 530–533, 2020.
- [93] P. Edholm and G. Herman. Linograms in image reconstruction from projections. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, MI-6(4) :301–307, 1987.
- [94] S. Rit, M. Vila Oliva, S. Brousmiche, R. Labarbe, D. Sarrut, and G. C Sharp. The reconstruction toolkit (rtk), an open-source cone-beam ct reconstruction toolkit based on the insight toolkit (itk). In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 489, 2014.

- 
- [95] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, second edition, 1992.
- [96] M. Powell. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. *The computer journal*, 7(2) :155–162, 1964.