



**HAL**  
open science

# Approximation stochastique du dommage en fatigue pour le suivi en service de structure

Clément Freyssinet

► **To cite this version:**

Clément Freyssinet. Approximation stochastique du dommage en fatigue pour le suivi en service de structure. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. Nantes Université, 2023. Français. NNT : 2023NANU4073 . tel-04725494

**HAL Id: tel-04725494**

**<https://theses.hal.science/tel-04725494v1>**

Submitted on 8 Oct 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE DE DOCTORAT

NANTES UNIVERSITE

ECOLE DOCTORALE N° 602

*Sciences de l'Ingénierie et des Systèmes*

Spécialité : Mécanique des structures

Par

**Clément Freyssinet**

**Approximation stochastique du dommage en fatigue pour le suivi en service de structure**

Thèse présentée et soutenue à Nantes, le 19/12/2023

Unité de recherche : Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM), UMR CNRS 6183

## Rapporteurs avant soutenance :

Laurent Gallimard      Professeur, Université Paris Nanterre  
Claude Blanze          Professeur, CNAM

## Composition du Jury :

**Président** : Nicolas Gayton      Professeur, Clermont Auvergne INP

**Examineurs** : Nicolas Gayton      Professeur, Clermont Auvergne INP  
Laurent Gallimard      Professeur, Université Paris Nanterre  
Claude Blanze          Professeur, CNAM  
Nicolas Feld            Ingénieur de recherche, Safran Transmission Systems  
Tanguy Moro            Ingénieur de recherche, IRT Jules Verne

**Dir. de thèse** : Franck Schoefs      Professeur, Nantes Université

**Co-dir. de thèse** : Valentine Rey      Maître de conférences, Nantes Université

## Invité :

Martin Guiton                      Ingénieur de recherche, IFP Energies Nouvelles



---

À la mémoire de ma grand mère, Renée Freyssinet.

# Remerciements

Pour cette formidable aventure qu'est la thèse de doctorat, je tiens à remercier un ensemble d'acteurs et de personnes grâce à qui j'ai pu m'épanouir aussi bien sûr le plan professionnel que personnel.

Je souhaite tout d'abord remercier les structures qui ont permis de financer et d'encadrer ces travaux. Je remercie l'IRT Jules Verne pour sa confiance et cette incroyable opportunité. Je remercie notamment Tanguy Moro pour ses encouragements, ses conseils et sa bienveillance. Je remercie aussi le GeM de son accueil. Je remercie notamment Franck Schoefs pour sa vision d'ensemble et Valentine Rey pour sa pédagogie, sa rigueur et sa patience. Grâce à vous j'ai beaucoup appris et je profiterai de vos enseignements pour le restant de ma carrière. Pour leur temps et leur investissement, je remercie aussi les membres industriels qui ont suivi cette thèse ainsi que les membres du jury avec qui elle s'est terminée.

Il est difficile d'exprimer à quel point je suis reconnaissant de l'aide, du soutien et des encouragements que j'ai pu recevoir de la part de tous mes proches durant ces trois années. Sans vous ce travail et ces résultats n'auraient pas été possibles. Lucie Calmettes, Lilou Gautier, Paul Lacorre, Mathias Riou, Valentin Jeanneau et Wael Karal, je vous remercie pour tous ce que vous avez pu m'apprendre et pour tous les échanges scientifiques (ou non) réalisés. J'ai énormément apprécié travailler avec vous et j'espère pouvoir continuer de partager de bons moments avec vous à l'avenir. Justine Vighetti, Martin Guyot, Hugues Roissé et Marc Bourdon, je vous remercie pour votre amitié sans faille. Je vous remercie d'avoir été là dans les bons comme dans les mauvais moments. Je suis ravie d'avoir pu évoluer et grandir avec vous. Vous m'avez forgé et je vous dois beaucoup. Aux membres de ma famille qui sont toujours là et à ceux que j'ai perdu, vous m'avez éduqué de la plus belle des manières. Pour tout votre amour et votre gentillesse, je vous remercie. Dominique Barrault, tu es sans nul doute une mère fabuleuse. Louise Freyssinet, ma sœur jumelle, tu es ma moitié et je serais toujours là pour toi. Loïc Freyssinet, mon grand frère, tu es et restera pour moi un modèle. Mathilde Huby, ma copine, cette thèse marque aussi notre rencontre. Toi plus que quiconque a participé à la réussite de ce projet : mille mercis pour ta patience, ton écoute et ton soutien.

Avec la rédaction de ces remerciements, mes études se terminent. Je tiens à profiter de cette dernière occasion pour remercier quelques enseignants qui ont marqué mes études et mes choix d'orientation. Je remercie Jocelyne Edet, pour son goût des mathématiques qu'elle a su transmettre. Je remercie Yann Lecieux qui par nos discussions m'a donné le goût de la recherche. Je remercie encore une fois Valentine Rey qui sait à la fois conseiller dans la difficulté et féliciter dans la réussite.

# Table des matières

Liste des figures	8
Liste des tables	9
Liste des abréviations	10
Introduction générale	11
<b>1 Fiabilité dynamique en fatigue</b>	<b>14</b>
1.1 Analyse de fiabilité	15
1.1.1 Grandeurs considérées pour la fiabilité	15
1.1.2 Principes et méthodes pour la fiabilité statique (ou indépendante du temps)	16
1.1.3 Principes et méthodes pour la fiabilité dynamique	18
1.1.4 Confrontation des méthodes	22
1.2 Calcul du dommage en fatigue	23
1.2.1 Cumul linéaire du dommage	24
1.2.2 Formules de Palmgren et Miner	25
1.2.3 Cumul non linéaire du dommage	28
1.3 Fiabilité en fatigue	33
1.3.1 Identification des sources d'incertitudes propres à une étude du dommage en fatigue	33
1.3.2 Calibration des incertitudes	33
1.3.3 Définitions de la fonction de performance	37
1.4 Premiers choix réalisés pour l'analyse de fiabilité en fatigue	39
<b>2 Estimation des paramètres matériaux à partir de courbes SN probabilistes</b>	<b>40</b>
2.1 Reconstruction des courbes SN probabilistes	40
2.1.1 Courbes SN probabilistes	40
2.1.2 Application 1D du modèle 2SD	41
2.2 Identification et caractérisation des paramètres matériau incertains	43
2.2.1 Sélection des paramètres matériaux incertains	43
2.2.2 Stratégie de calibration des paramètres matériau	43
2.2.3 Formulation d'un critère conservatif	45
2.3 Mise en œuvre à partir de courbes SN DNV d'un joint tubulaire	48
2.3.1 Avec prise en compte de la limite de fatigue asymptotique	48
2.3.2 Sans prise en compte de la limite de fatigue asymptotique	48
2.4 Conclusion sur la méthode de calibration des paramètres matériau	53
<b>3 Confrontation des approches RSN et 2SD dans le cas d'un assemblage soudé sollicité en flexion</b>	<b>54</b>
3.1 Présentation du cas d'étude	55
3.1.1 Joint en T	55

3.1.2	Géométrie . . . . .	55
3.1.3	De la force imposée à la contrainte locale . . . . .	55
3.2	Confrontation avec trois chargements de complexité croissante . . . . .	57
3.2.1	Définitions de trois signaux de contraintes . . . . .	57
3.2.2	Propagation des incertitudes matériau . . . . .	58
3.2.3	Confrontation des probabilités de défaillance obtenues . . . . .	61
3.3	Confrontation avec deux chargements inversés . . . . .	64
3.3.1	Définitions de deux signaux de contraintes . . . . .	64
3.3.2	Propagation des incertitudes matériau . . . . .	64
3.3.3	Confrontation des probabilités de défaillance obtenues . . . . .	64
3.4	Conclusion sur l'influence de l'historique de chargement . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Propagation de l'aléa matériau à coût réduit pour l'analyse de fiabilité</b>	<b>66</b>
4.1	Méthodes d'approximation par krigeage . . . . .	67
4.1.1	Krigeage . . . . .	67
4.1.2	Krigeage à gradient . . . . .	71
4.1.3	Krigeage multifidélité . . . . .	73
4.1.4	Krigeage sous contraintes linéaires . . . . .	75
4.2	Méthodes d'approximation par krigeage adaptatif . . . . .	76
4.2.1	Fonction d'apprentissage . . . . .	76
4.2.2	Critère d'apprentissage . . . . .	76
4.2.3	Premier critère d'arrêt . . . . .	76
4.2.4	Second critère d'arrêt . . . . .	77
4.3	Approximation du modèle 2SD par krigeage adaptatif . . . . .	78
4.3.1	Réimplémentation du modèle 2SD pour le calcul des observations . . . . .	78
4.3.2	Approximation du dommage par krigeage . . . . .	80
4.3.3	Définition des populations observées et estimées . . . . .	80
4.3.4	Approximation du dommage par krigeage adaptatif . . . . .	80
4.4	Définition et mise en place de deux approches pour l'analyse de fiabilité . . . . .	84
4.4.1	Définition des approches globale et locale . . . . .	85
4.4.2	Choix des estimateurs et de la stratégie d'apprentissage . . . . .	88
4.4.3	Conclusion et mise en parallèle des deux approches . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Application au cas d'une station de mesures en mer</b>	<b>98</b>
5.1	Matériel et mesures . . . . .	98
5.1.1	Station de mesure BIOCOLMAR . . . . .	98
5.1.2	Modélisation mécanique du tube instrumenté . . . . .	99
5.1.3	Mesures de déformations au cours du temps . . . . .	99
5.1.4	Amplification et extrapolation des mesures de déformation . . . . .	102
5.2	Application des approches développées . . . . .	105
5.2.1	Application de l'approche globale . . . . .	105
5.2.2	Application de l'approche locale . . . . .	106
5.3	Prise en compte de l'aléa de chargement . . . . .	107
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>109</b>
	<b>Annexes</b>	<b>112</b>
	Annexe 1 : Application du modèle 2SD en 1D avec une amplitude de contraintes constante	112
	Annexe 2 : Relations entre les variables internes microscopiques du modèle 2SD . . . . .	114
	<b>Bibliographie</b>	<b>121</b>

# Liste des figures

1.1	Capacité résistante en fonction de l'effet de charge . . . . .	15
1.2	Capacité résistante et effet de charge en fonction du temps . . . . .	16
1.3	Monotonie de la fonction de performance . . . . .	16
1.4	Approche par franchissements, localisation des points de franchissements . . . . .	19
1.5	Diagramme de la méthode t-PCE . . . . .	21
1.6	Approche à valeur extrême, localisation de la valeur extrême . . . . .	21
1.7	Diagramme de la méthode AK-SYS-t . . . . .	23
1.8	Formes possibles du signal temporel des contraintes . . . . .	24
1.9	Courbe SN . . . . .	24
1.10	Diagramme de Haigh . . . . .	25
1.11	Comptage de cycles <i>Rainflow</i> . . . . .	27
1.12	Illustration des principes théoriques du modèle 2SD . . . . .	30
1.13	Sources d'incertitudes par le calcul du dommage en fatigue . . . . .	34
1.14	Représentation schématique de l'évolution des corrélations et du critère de <i>burn-in</i> . . . . .	37
2.1	Courbes SN pour différents quantiles et $V_{\log B} = 7.2^2$ . . . . .	41
2.2	Courbes SN pour différents quantiles et différentes variances $V_{\log B}$ . . . . .	42
2.3	Analyse de sensibilité élastique d'une courbe SN par rapport $\mathbf{Z}$ . . . . .	44
2.4	Analyse de sensibilité élastique d'une courbe SN par rapport $E$ . . . . .	46
2.5	Schématisme des courbes SN de référence et estimées pour le $l^{\text{ième}}$ échantillon des observations . . . . .	46
2.6	Courbes SN avec et sans critère conservatif pour $\Delta\sigma_i \in [93.4, 493.4]$ MPa . . . . .	48
2.7	Courbes SN ( $Q_{2.3}$ ) et distributions observées et estimées avec le jeu optimal conservatif pour $\Delta\sigma_i \in [93.4, 493.4]$ MPa . . . . .	49
2.8	Quantile $Q_{.23}$ des courbes SN observée et estimée avec le jeu optimal conservatif pour $\Delta\sigma_i \in [93.4, 493.4]$ MPa . . . . .	49
2.9	Distributions jointes et marginales de $\mathbf{Z}$ pour $\Delta\sigma_i \in [93.4, 493.4]$ MPa . . . . .	50
2.10	Courbes SN sans critère conservatif pour $\Delta\sigma_i \in [133.4, 493.4]$ MPa . . . . .	51
2.11	Courbes SN ( $Q_{2.3}$ ) et distributions observées et estimées avec le jeu optimal pour $\Delta\sigma_i \in [133.4, 493.4]$ MPa . . . . .	51
2.12	Quantile $Q_{.23}$ des courbes SN observée et estimée avec le jeu optimal pour $\Delta\sigma_i \in [133.4, 493.4]$ MPa . . . . .	52
3.1	Modélisation, conditions aux limites et maillage de $P_2$ . . . . .	55
3.2	Extrait des trois signaux de contraintes pour $t \in [4958.6; 4969.5] \subset [t_{init}; t_{fin}]$ . . . . .	58
3.3	Densités de probabilité de $D(t_{fin})$ calculées avec l'approche RSN . . . . .	59
3.4	Densités de probabilité de $D^\mu(t_{fin})$ (calculées avec le modèle 2SD) et $D_C$ . . . . .	59
3.5	Comparaison des densités de probabilité de $\mathbf{Z}$ et $\bar{\mathbf{Z}}$ . . . . .	60
3.6	Analyse de sensibilité de $D^\mu$ en fonction $\mathbf{Z} : \delta(D^\mu, \mathbf{Z})$ . . . . .	62
3.7	$Y^\mu(t)dp^\mu(t)$ au cours du temps en considérant $\sigma_1$ avec $C = 2.507 \cdot 10^6$ MPa, $p_D = 0.554$ , $S = 0.612$ MPa et $D_C = 0.303$ . . . . .	62



3.8	Probabilités de défaillance calculées avec l'approche RSN et le modèle 2SD . . . . .	63
3.9	Probabilités de défaillance calculées avec l'approche RSN et le modèle 2SD . . . . .	65
4.1	Structure algorithmique pour la propagation de l'aléa matériau avec le modèle 2SD	79
4.2	Structure algorithmique pour un apprentissage multiple uniforme . . . . .	82
4.3	Représentation de la population $\Omega^{(0)}$ . . . . .	83
4.4	Structure algorithmique pour un apprentissage multiple géométrique . . . . .	84
4.5	Structure algorithmique pour un apprentissage multiple aux minimums locaux . . . . .	84
4.6	Structure algorithmique de la méthode AK-MCS appliquée au modèle 2SD . . . . .	86
4.7	Représentation schématique de $P_f(t)$ et $\xi_{P_f}(t)$ et localisation des grandeurs $P_{fC}$ , $t_C$ , $t_C^{\min}$ et $t_C^{\max}$ . . . . .	87
4.8	Structure algorithmique pour l'estimation du temps critique $t_C$ . . . . .	89
4.9	Approche locale, illustration des quatre cas entrainant la modification ou non de l'intervalle de temps considéré . . . . .	90
4.10	Approche globale, évolution de $P_{U \geq 1}$ au cours des itérations . . . . .	93
4.11	Approche globale, localisation des points observés . . . . .	93
4.12	Approche globale, cartes du dommage estimé . . . . .	94
4.13	Approche globale, probabilité de défaillance estimée . . . . .	94
4.14	Approche locale, du ratio $R_t$ au cours des itérations . . . . .	95
4.15	Approche locale, localisation des points observés . . . . .	95
4.16	Approche locale, cartes du dommage estimé . . . . .	96
4.17	Approche locale, probabilité de défaillance estimée . . . . .	96
5.1	Station BIOCOLMAR . . . . .	99
5.2	Schématisation de la station BIOCOLMAR et de la modélisation du tube . . . . .	99
5.3	Déformations mesurées par la jauge 2 en fonction de la jauge 1 . . . . .	101
5.4	Extrait des signaux de déformation pour $t \in [0; 300]h \subset [t_{init}; t_{fin}]$ . . . . .	104
5.5	Approche globale appliquée à quatre signaux de déformation . . . . .	105
5.6	Approche locale appliquée à quatre signaux de déformation . . . . .	106
5.7	Distributions probabilistes de $t_C$ en fonction des signaux aléatoires appliqués . . . . .	108
5.8	Confrontation des distributions probabilistes de $t_C$ en fonction des signaux de déformation appliqués . . . . .	108
5.9	Diagramme des contraintes-déformations pour un cycle de chargement OABCD . . . . .	112

# Liste des tables

1.1	Méthodes pour la fiabilité statique par krigeage adaptatif . . . . .	18
1.2	Méthodes pour la fiabilité dynamique par krigeage . . . . .	22
1.3	Méthodes pour la fiabilité dynamique par PCE . . . . .	22
1.4	Méthodes pour réaliser l'analyse de fiabilité statique ou dynamique en fonction du degré polynomial de la fonction de performance . . . . .	23
2.1	Amplitudes de contraintes considérées . . . . .	45
2.2	Erreur relative (%) entre le nombre de cycles à rupture estimé et observé pour $Q_{2,3}$ et $\Delta\sigma_i \in [93.4, 493.4]$ MPa . . . . .	49
2.3	Moyennes et écart-types de $\mathbf{Z}$ pour $\Delta\sigma_i \in [93.4, 493.4]$ MPa . . . . .	50
2.4	Coefficients de corrélation de Bravais-Pearson de $\mathbf{Z}$ pour $\Delta\sigma_i \in [93.4, 493.4]$ MPa . . . . .	50
2.5	Nouvelles amplitudes de contraintes considérées . . . . .	51
3.1	Probabilité de défaillance $P_{f_q}(t_{fin})$ (%) . . . . .	63
4.1	Fonctions de corrélation unidimensionnelles . . . . .	70
4.2	Estimation des hyper-paramètres pour tout type de krigeage . . . . .	70
4.3	Comparaison des coûts de calculs (min) en fonction de l'implémentation du modèle d'endommagement . . . . .	80
4.4	Formalisation du krigeage, krigeage à gradient et krigeage multididélité pour un apprentissage adaptatif appliqué au modèle 2SD . . . . .	82
4.5	Comparaison des coûts et résultats obtenus en fonction des estimateur utilisés dans l'approche globale . . . . .	91
4.6	Comparaison des coûts et résultats obtenus pour chacune des stratégies d'apprentissage appliquées à un estimateur construit par krigeage . . . . .	91
4.7	Comparaison des coûts et résultats obtenus pour chacune des stratégies d'apprentissage appliquées à un estimateur construit par krigeage à gradient . . . . .	92
4.8	Comparaison des coûts et résultats obtenus pour différentes valeurs de $n_{APP}$ pour du krigeage . . . . .	92
4.9	Comparaison des coûts et résultats obtenus pour les stratégies de métamodélisation locales . . . . .	94
5.1	Déformations mesurées en fonction du temps . . . . .	100
5.2	Déformations recalibrées en fonction du temps . . . . .	101
5.3	Déformations supposées exactes et erreurs de mesures . . . . .	102
5.4	Erreur moyenne commise sur l'estimation de $P_f$ avec l'approche globale . . . . .	106
5.5	Erreur relative commise sur l'estimation de $t_C$ avec l'approche locale . . . . .	106
5.6	Espérance et variance de $t_C$ en fonction des types de signaux de déformations . . . . .	107

# Liste des abréviations

<b>1D</b>	Une dimension
<b>2D</b>	Deux dimensions
<b>2SD</b>	Two scale damage
<b>AERS</b>	Adaptative extreme response surface
<b>AK</b>	Adaptative kriging
<b>AK-SYS</b>	Adaptative kriging system
<b>ASVM</b>	Adaptative support vector machine
<b>CETIM</b>	Centre technique des industriels mécaniques
<b>CNRS</b>	Centre national de la recherche scientifique
<b>DNV</b>	Det norske veritas
<b>EGO</b>	Efficient global optimization
<b>FORM</b>	First order reliability method
<b>GeM</b>	Génie civil et mécanique
<b>IRT</b>	Institut de recherche technologique
<b>IS</b>	Importance sampling
<b>KG</b>	Krigeage à gradient
<b>KMF</b>	Krigeage multifidélité
<b>KS</b>	Krigeage simple
<b>KO</b>	Krigeage ordinaire
<b>KU</b>	Krigeage universel
<b>LHS</b>	Latin hypercube sampling
<b>LRA</b>	Low rank approximation
<b>LS</b>	Line sampling
<b>MCMC</b>	Monte Carlo Markov chain
<b>MCS</b>	Monte Carlo simulation
<b>MELANI</b>	Mesure, assimilation de données et incertitudes
<b>NERS</b>	Nested extreme response surface
<b>PCA</b>	Principal component analysis
<b>PCE</b>	Polynomial chaos expansion
<b>PERFORM</b>	Programme de recherche fondamentale et de ressourcement sur le manufacturing
<b>PG</b>	Processus gaussien
<b>PSD</b>	Power spectral density
<b>RSN</b>	Rainflow et courbes SN
<b>SILK</b>	Single loop kriging
<b>SIM</b>	Simulation
<b>SN</b>	Amplitude de contrainte en fonction du nombre de cycles à rupture
<b>SORM</b>	Second order reliability method
<b>SS</b>	Subset simulations
<b>SSI</b>	Subset simulations importance
<b>SVM</b>	Support vector machine
<b>UTR</b>	Unités thématiques de recherche

# Introduction générale

## Contexte de recherche

Les travaux de recherche présentés sont réalisés dans le cadre du programme PERFORM (Programme de Recherche Fondamentale et de Ressourcement sur le Manufacturing) de l'IRT (Institut de Recherche Technologique) Jules Verne en collaboration le GeM (Génie civil et Mécanique).

L'IRT Jules Verne est un centre de recherche créé en 2012. Son objectif est de participer à l'amélioration de filières industrielles françaises telles que l'aéronautique, l'automobile, l'énergie et le navale. Des projets scientifiques nouveaux sont alors mis en place, allant du développement à l'application industrielle. Afin de stimuler la recherche en France, l'IRT Jules Verne lance en 2017 le programme PERFORM. Ce programme propose un pont entre l'académie et l'industrie en finançant 6 thèses par an. Chaque thèse est encadrée par un laboratoire d'accueil et est suivie à la fois par un responsable IRT et un ensemble de partenaires industriels. Chacun de ces acteurs joue alors un rôle déterminant dans la création de la thèse : les partenaires industriels listent un ensemble de verrous, l'IRT Jules Verne les regroupe par thématiques et formule une problématique. Finalement, le laboratoire répond à cette dernière en formulant un sujet de thèse. Cette thèse s'inscrit dans la problématique PERFORM 2020 : «Exploiter le potentiel des technologies de surveillance et de contrôle dans les procédés et les structures». Elle est rattachée à l'équipe SIM (Simulations) qui est en charge de développer et déployer des technologies innovantes portant sur la mobilité dans l'espace industriel, la flexibilité de la production, l'assemblage, les procédés de préformage/formage et les procédés de fabrication additive.

Dans le cadre de ces travaux, l'IRT Jules Verne collabore avec le GeM. Ce dernier est une unité mixte de recherche composée de Centrale Nantes, Nantes Université et du CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique). Il a été fondé en 2004, à partir du regroupement de laboratoires préexistants. Son objectif était de réunir au sein d'un même laboratoire l'ensemble des compétences de la métropole Nantes Saint-Nazaire dans le domaine du génie civil, de la mécanique des matériaux et des procédés, de la modélisation et de la simulation en mécanique des structures. Le GeM est divisé en plusieurs Unités Thématiques de Recherche (UTR) dont l'UTR Mesure, Assimilation de données et Incertitudes (MELANI). Par l'optimisation des systèmes de mesures et le développement de méthodes numériques, cette dernière vise à estimer la durée de vie résiduelle et à aider la prise de décisions pour le maintien du fonctionnement et/ou l'intégrité du système étudié.

Dans le cadre de développement de procédés de fabrication innovants ou bien pour la surveillance des structures, la modélisation est une étape primordiale. De nos jours, de nombreuses données sont disponibles pour enrichir cette modélisation grâce à des capteurs externes ou internes, et ce tout au long de la vie de la structure : de sa fabrication à sa mise en service. Néanmoins, il convient de traiter efficacement ces données afin d'en extraire l'information pertinente et d'être capable d'en prédire sa qualité (précision ou durée de vie d'un capteur par exemple). Cette thèse s'inscrit dans la thématique de construction de modèles dédiés au contrôle de la qualité et à la fiabilité.

## Contexte scientifique

Sous l'effet des sollicitations, la majorité des structures se dégradent au cours du temps. Ce processus est appelé endommagement. À plus ou moins long terme, il peut mener jusqu'à la ruine. Pour prévenir ce risque, en fonction de la structure, de son utilisation et de son environnement, des scénarios de d'endommagement sont envisagés et étudiés. La structure est ainsi dimensionnée en conséquence. Une fois cette étape réalisée, la structure est déployée : elle est dite en service. Des inspections peuvent alors être réalisées tout au long de sa durée de vie. L'objectif est de détecter un dommage suffisamment tôt afin de planifier une opération de maintenance préventive et ainsi garantir l'intégrité de la structure sans perte d'exploitation.

La fatigue un phénomène d'endommagement provoqué par la répétition d'une sollicitation de faible amplitude. Elle joue notamment un rôle sur la performance d'un certain nombre de structures comme les avions, les navires ou les plateformes en mer. Compte tenu des aléas matériau, de fabrication et de chargement, il est cependant très difficile de déterminer avec précision ses effets et de caractériser l'évolution du dommage en fatigue au cours du temps. En conséquence, le dimensionnement et la planification des opérations de maintenance en fatigue sont complexes et sont la source de nombreux travaux de recherche. Une modélisation des incertitudes est donc nécessaire pour intégrer le contexte incertain au sein de ces problématiques. L'instrumentation pour la santé structurale (ou *structural health monitoring*) est un moyen d'obtenir une partie des données et donc de réduire les incertitudes. Il est alors nécessaire de développer des méthodes de calculs d'endommagements stochastiques pouvant intégrer ces informations.

Afin d'estimer le dommage au sein d'une structure sollicitée en fatigue, deux principales approches existent. Elles sont basées sur le principe de cumul du dommage mais s'opposent concernant le traitement de l'influence de l'historique de chargement. La plus répandue (notamment dans le milieu industriel) est basée sur un cumul linéaire du dommage. Elle présente l'avantage d'être peu coûteuse numériquement mais ne prend pas en compte l'historique de chargement. La seconde est basée sur un cumul non linéaire du dommage. Cette fois ci, par une approche incrémentale, l'influence de l'historique de chargement est prise en compte mais implique des coûts numériques plus élevés.

De plus, afin de caractériser l'influence de l'aléa dans le calcul du dommage, l'analyse de fiabilité est préconisée. Cette dernière consiste notamment à calculer la probabilité de défaillance de la structure. Ici aussi deux principales approches existent. La moins coûteuse numériquement est la fiabilité statique qui calcule la probabilité de défaillance en un instant donné. Cependant, du fait de la dépendance au temps, cette approche est souvent insuffisante. Pour cette raison, la fiabilité dynamique (dépendant du temps) est recommandée. Dans ce cas, la probabilité de défaillance est calculée sur un domaine temporel donné. Afin de formuler le moins d'hypothèses et de fournir les résultats les plus complets possibles, un calcul du dommage par cumul non linéaire associé à un traitement fiabiliste dynamique est recommandé. Cependant dans un contexte industriel, conserver des coûts numériques contrôlés est aussi un enjeu. Un compromis entre précision et temps de calculs doit alors être trouvé.

## Objectifs et annonce du plan

L'objectif de ce travail est de développer une méthode permettant d'estimer la probabilité de défaillance d'une structure acier sollicitée en fatigue polycyclique en respectant deux critères : prendre en compte l'influence de l'historique de chargement et conserver des coûts numériques contrôlés. Pour ce faire, les travaux sont réalisés en cinq parties. Le premier chapitre est un état de l'art des différents domaines de recherche qui composent cette thèse : l'analyse de fiabilité et le calcul du dommage en fatigue. Des premiers choix sont ainsi faits, notamment concernant le modèle mécanique utilisé. Le second chapitre présente une approche permettant d'identifier les paramètres matériaux aléatoires du modèle et d'estimer leur distribution à partir de courbes SN probabilistes. Dans le troisième chapitre, le modèle mécanique calibré est ensuite comparé à

l'une des approches les plus utilisées pour traiter de la fatigue au travers de trois cas d'applications portant sur un joint soudé. Dans le quatrième chapitre, plusieurs stratégies d'approximation du dommage sont développées et comparées afin d'estimer la probabilité de défaillance à moindre coût. On se placera dans deux cas : le dimensionnement en fatigue et la planification des opérations de maintenance. Enfin, dans le cinquième chapitre, des données issues d'une bouée instrumentée sont utilisées pour appliquer les méthodes présentées dans le chapitre quatre. Une estimation de l'instant optimal pour déclencher une opération de maintenance est réalisée en prenant en compte l'historique de chargement, l'aléa matériau et l'aléa de chargement.

# Chapitre 1

## Fiabilité dynamique en fatigue

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Analyse de fiabilité</b>	<b>15</b>
1.1.1	Grandeurs considérées pour la fiabilité	15
1.1.2	Principes et méthodes pour la fiabilité statique (ou indépendante du temps)	16
1.1.3	Principes et méthodes pour la fiabilité dynamique	18
1.1.4	Confrontation des méthodes	22
<b>1.2</b>	<b>Calcul du dommage en fatigue</b>	<b>23</b>
1.2.1	Cumul linéaire du dommage	24
1.2.2	Formules de Palmgren et Miner	25
1.2.3	Cumul non linéaire du dommage	28
<b>1.3</b>	<b>Fiabilité en fatigue</b>	<b>33</b>
1.3.1	Identification des sources d'incertitudes propres à une étude du dommage en fatigue	33
1.3.2	Calibration des incertitudes	33
1.3.3	Définitions de la fonction de performance	37
<b>1.4</b>	<b>Premiers choix réalisés pour l'analyse de fiabilité en fatigue</b>	<b>39</b>

---

L'objectif de ce chapitre est de présenter les deux thématiques de recherche abordées dans ces travaux : l'analyse de fiabilité et le dommage en fatigue. Pour ce faire, la première partie porte sur l'analyse de fiabilité statique et l'analyse de fiabilité dynamique. Différentes méthodes permettant de calculer la probabilité de défaillance sont présentées. La seconde partie porte sur le calcul du dommage en fatigue. Deux grandes familles sont présentées : l'une réalise un cumul linéaire du dommage tandis que l'autre réalise un cumul non linéaire du dommage. La troisième partie particularise l'analyse de fiabilité dans la cadre de la fatigue des structures en aciers. Différentes sources d'incertitudes sont présentées, plusieurs techniques de calibration sont abordées et quelques fonctions de performances sont listées. Finalement, dans la quatrième partie, les premiers choix propres aux objectifs de dimensionnement et de planification des opérations de maintenance sont énoncés et justifiés.

## 1.1 Analyse de fiabilité

### 1.1.1 Grandeurs considérées pour la fiabilité

Réaliser une analyse de la fiabilité, c'est s'intéresser à ce que le système mécanique considéré remplisse ou non la fonction pour laquelle il a été conçu et ce durant un intervalle de temps donné [1]. Pour ce faire, différentes sources d'incertitudes peuvent être considérées : les propriétés du matériau, la géométrie et le chargement. Cette analyse nécessite la formulation de fonctions décrivant chacune des performances du système. Elles sont appelées fonctions de performance et sont notées  $G$ . Le plus souvent, elles s'expriment sous la forme  $G = R - S$ , avec  $R$  la capacité résistante et  $S$  l'effet de charge. Comme représenté sur la Figure 1.1, en fonction de la valeur de  $G$  il est possible de définir différents états : le domaine sûreté  $D_s$  pour  $G > 0$ , le domaine défaillant  $D_f$  pour  $G \leq 0$  et la frontière état limite  $D_{f^*}$  pour  $G = 0$ .

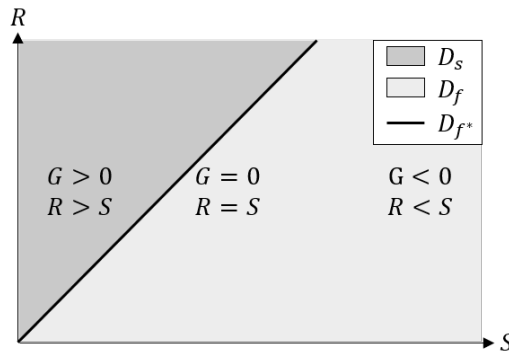


FIGURE 1.1 – Capacité résistante en fonction de l'effet de charge

Dans le cas de l'étude de structures en environnement incertain et se dégradant avec le temps, les quantités  $R$  et  $S$  peuvent être aléatoires et dépendantes du temps. La fonction de performance s'écrit alors  $G(\mathbf{Z}, t)$  avec  $\mathbf{Z}$  le vecteur des variables aléatoires et  $t$  la variable temporelle. La prise en compte du temps pouvant très fortement complexifier l'étude de fiabilité, son effet est souvent négligé et seul un problème statique (invariant en temps) est considéré. L'étude est alors moins coûteuse mais aussi moins représentative de la réalité. Cela consiste à évaluer une probabilité de défaillance instantanée  $P_{f,i}(t)$  définie comme étant la probabilité qu'à un instant  $t$  le système défaille.

$$P_{f,i}(t) = \text{Prob}(G(\mathbf{Z}, t) \leq 0) \quad (1.1)$$

De façon analogue, il est aussi possible de définir la probabilité de fiabilité (ou probabilité de survie)  $P_{r,i}(t)$ , telle que  $P_{r,i}(t) = 1 - P_{f,i}(t)$ . Pour certaines structures, il est toutefois crucial de considérer leur dépendance au temps. La probabilité de défaillance est alors dite cumulée  $P_{f,c}$ . Pour  $t \in [t_{init}, t_{fin}]$ , elle s'exprime :

$$P_{f,c}(t_{init}, t_{fin}) = \text{Prob}(\exists t \in [t_{init}, t_{fin}], G(\mathbf{Z}, t) \leq 0) \quad (1.2)$$

avec  $t_{init}$  et  $t_{fin}$  les bornes de l'intervalle de temps considéré. La Figure 1.2 représente le cas où  $G(\mathbf{Z}, t) = R(\mathbf{Z}) - S(\mathbf{Z}, t)$ . Le point où  $S(\mathbf{Z}, t) = R(\mathbf{Z})$  est appelé point de franchissement. Lorsque  $R(\mathbf{Z}) \leq S(\mathbf{Z}, t)$ , il y a défaillance. Comme illustré avec la Figure 1.3, dans le cas particulier où la fonction de performance est monotone (décroissante), les probabilités de défaillance instantanée et cumulée sont liées par la relation suivante.

$$\forall t \in [t_{init}, t_{fin}], P_{f,c}(t_{init}, t) = P_{f,i}(t) \quad (1.3)$$

Les méthodes propres à la fiabilité statique sont alors suffisantes pour calculer la probabilité de défaillance cumulée.



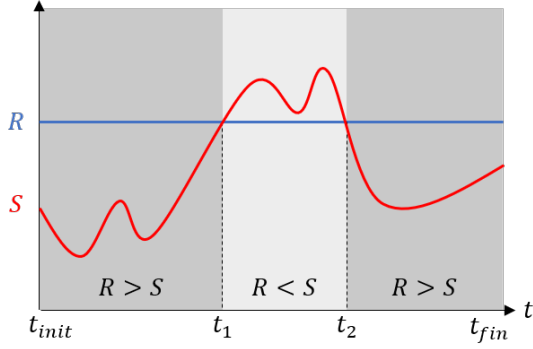


FIGURE 1.2 – Capacité résistante et effet de charge en fonction du temps

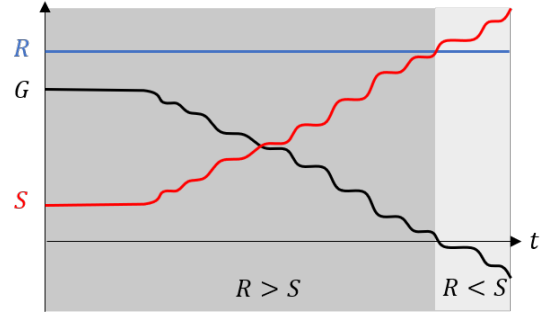


FIGURE 1.3 – Monotonie de la fonction de performance

Les deux prochaines sections présentent respectivement les principales méthodes utilisées pour calculer les probabilités de défaillance instantanée et cumulée.

### 1.1.2 Principes et méthodes pour la fiabilité statique (ou indépendante du temps)

Pour le calcul de la probabilité de défaillance instantanée, la méthode la plus évidente est la méthode de Monte Carlo [2]. Elle consiste à évaluer la fonction de performance  $G$  en  $n_{MCS}$  réalisations  $\mathbf{Z}_i$  de  $\mathbf{Z}$ . Cet ensemble de réalisations est appelé population de Monte Carlo. La probabilité de défaillance se calcule alors :

$$P_f = \frac{1}{n_{MCS}} \sum_{i=1}^{n_{MCS}} \text{Ind}(G(\mathbf{Z}_i)) \quad (1.4)$$

avec  $\text{Ind}$  la fonction indicatrice telle que :

$$\text{Ind}(G(\mathbf{Z}_i)) = \begin{cases} 0 & \text{si } G(\mathbf{Z}_i) > 0 \\ 1 & \text{si } G(\mathbf{Z}_i) \leq 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Un indicateur de l'erreur commise en fonction de la valeur de  $P_f$  et de la taille de la population Monte Carlo  $n_{MCS}$  est fourni par le coefficient de variation. Il se calcule :

$$\text{COV}(P_f) = \sqrt{\frac{1 - P_f}{n_{MCS} \times P_f}} \quad (1.6)$$

Cette méthode a l'avantage d'être simple, de disposer d'un indicateur d'erreur et de ne formuler aucune approximation sur la forme de  $G$ . Elle présente cependant un inconvénient majeur : sa vitesse de convergence est très lente. De nombreuses évaluations de  $G$  sont donc nécessaires. Plusieurs stratégies d'échantillonnage ont été développées afin de palier à ce problème. Parmi elles, il existe notamment le tirage d'importance ou *Importance Sampling* (IS) [3], les simulations de sous-ensembles ou *Subset Simulations* (SS) [4] et le tirage par hypercube latin ou *Latin Hypercube Sampling* (LHS) [5]. Malgré toutes ces stratégies, si l'évaluation de  $G$  est coûteuse, le nombre de points  $n_{MCS}$  nécessaire pour calculer  $P_f$  restera trop élevé. Deux principales alternatives sont donc identifiées. La première est basée sur une approximation de l'état limite tandis que la seconde est basée sur une approximation de la fonction de performance.

#### 1.1.2.1 Méthodes d'approximation de l'état limite

##### 1.1.2.1.1 First order reliability method

La méthode *First Order Reliability Method* (FORM) [6] consiste à approximer linéairement la surface d'état limite dans l'espace normal centré réduit. La probabilité de défaillance instantanée

se calcule alors :

$$P_{f,i}(\mathbf{Z}, t) = \Phi(\overline{OM}) \quad (1.7)$$

avec  $\Phi$  la fonction de répartition normale et  $\overline{OM}$  la distance entre l'origine de l'espace et le point de défaillance le plus probable (point de l'état limite le plus proche de l'origine).

### 1.1.2.1.2 Second Order Reliability Method

La méthode *Second Order Reliability Method* (SORM) [7] est équivalente à la méthode FORM à la différence que l'état limite est approximé par une fonction quadratique. Les méthodes FORM et SORM ont pour principal avantage d'être extrêmement peu coûteuses. En revanche, avec ces méthodes, il est impossible de vérifier si l'approximation (linéaire ou quadratique) réalisée est adéquate.

### 1.1.2.1.3 Support Machine Vector

Les séparateurs *Support Machine Vector* (SVM) [8] permettent de calculer la probabilité de défaillance en séparant l'espace en deux sous-espaces : l'espace défaillant et l'espace de sûreté. Seul le signe de  $G(\mathbf{Z})$  est alors exploité. L'objectif consiste donc à rechercher la frontière séparant les valeurs positives et négatives de  $G(\mathbf{Z})$ . Différents types de séparateurs peuvent être définis : linéaire, non linéaire ou non linéaire à marge souple. De plus, à partir de ces outils, des méthodes adaptatives (ASVM) ont été développées telle que la méthode *Adaptive Support Machine Vector and Monte Carlo Simulation* (ASVM-MCS) [9]. Finalement les méthodes ASVM présentent deux principaux avantages :

- par leur aspect adaptatif, l'erreur d'approximation commise est contrôlée et
- par la seule prise en compte du signe de  $G(\mathbf{Z})$ , elles sont particulièrement robustes.

En revanche, puisque la tendance de  $G(\mathbf{Z})$  n'est pas exploitée, la convergence des méthodes ASVM reste relativement lente.

## 1.1.2.2 Méthodes d'approximation de la fonction de performance

### 1.1.2.2.1 Petites perturbations

La méthode des petites perturbations revient à considérer que l'aléa a une faible influence sur  $G(\mathbf{Z})$ . La fonction de performance s'écrit alors comme un développement limité de Taylor autour du point  $\mathbf{Z} - \mathbb{E}(\mathbf{Z})$  avec  $\mathbb{E}(\mathbf{Z})$  l'espérance de  $\mathbf{Z}$ . En fonction du degré du développement limité choisi, l'approximation sera linéaire, quadratique ou de degré supérieur. Cette méthode a l'avantage d'être peu coûteuse et de faciliter le calcul d'indices de sensibilité. Cependant, si la forme de  $G(\mathbf{Z})$  est complexe, l'augmentation du degré du développement limité complexifie l'étude et ne garantit pas systématiquement la convergence de la méthode [10].

### 1.1.2.2.2 Polynomial Chaos expansion

Sous sa forme non intrusive, la méthode *Polynomial Chaos expansion* (PCE) [11] permet de formuler une projection de  $G(\mathbf{Z})$  sur une base polynomiale orthogonale. Plusieurs choix de bases sont possibles tels que les polynômes de Legendre pour une distribution uniforme de  $\mathbf{Z}$  définie sur  $[-1, 1]$ , les polynômes d'Hermite pour une distribution gaussienne de  $\mathbf{Z}$ , etc [12]. Cette méthode présente l'avantage d'être adaptée pour des dimensions stochastiques élevées. Elle n'est cependant pas interpolante et ne fournit qu'une information globale sur l'erreur d'approximation commise.

### 1.1.2.2.3 Krigeage

Les méthodes basées sur le krigeage [13] supposent que  $G(\mathbf{Z})$  est la réalisation d'un processus gaussien stationnaire :

$$G(\mathbf{Z}) = \mu(\mathbf{Z}) + PG(\mathbf{Z}) \quad (1.8)$$

avec  $\mu(\mathbf{Z})$  la moyenne du processus et  $PG(\mathbf{Z})$  un processus gaussien d'espérance nulle. Le krigeage permet à la fois de fournir un métamodèle interpolant  $\hat{G}(\mathbf{Z})$  mais aussi une information locale sur l'erreur d'approximation commise grâce à la variance du processus. Un grand nombre de méthodes adaptatives (AK) ont été développées et le Tableau 1.1 liste les principales méthodes existantes en fonction de leurs caractéristiques.

	Etat limite complexe	Faible probabilité de défaillance	Plusieurs scénarios de défaillance	Grande dimension stochastique
AK-MCS [14]	×			
AK-IS [15]		×		
AK-SYS [16]			×	
AK-SSI [17]		×		
AK-LS [18]	×			
AK-SS [19]		×		
AK-MCSi [20]	×	×		
AK-PCA [21]				×

TABLE 1.1 – Méthodes pour la fiabilité statique par krigeage adaptatif

Dans le cas où différents niveaux de fidélité (différents maillages, différentes discrétisations temporelles ou différentes hypothèses) sont considérés, des méthodes de krigeage multifidélité existent. Pour deux niveaux de fidélité elle permettent d'estimer la tendance de  $G(\mathbf{Z})$  à l'aide d'un modèle basse fidélité  $G^B(\mathbf{Z})$  et d'obtenir plus de précision en certains points via un modèle haute fidélité  $G^H(\mathbf{Z})$ . En introduisant une fonction erreur entre les deux niveaux de fidélité  $G^\Delta$ , la fonction multifidélité s'écrit alors  $G^{MF}(G^H, G^B, G^\Delta)$ . Plusieurs approches existent :

- Le krigeage hiérarchique [22] est la méthode la plus simple pour prendre en compte deux niveaux de fidélité. Cependant, sa formulation ne permet pas de prendre en compte la corrélation entre les deux métamodèles.
- Le co-krigeage intercorrélé [23] est légèrement plus complexe que la méthode précédente. Il repose sur l'hypothèse que les deux niveaux de fidélité possèdent la même corrélation spatiale.
- Le co-krigeage auto-régressif [24] est la méthode la plus complexe mais aussi la plus générale. L'évofusion est un cas particulier de cette approche. Le rapport des variances des processus considérés permet de quantifier la capacité à apprendre du modèle basse fidélité pour construire le métamodèle haute fidélité.

## 1.1.3 Principes et méthodes pour la fiabilité dynamique

Pour traiter de la fiabilité dépendant du temps, deux principales approches se distinguent : l'approche par franchissements et l'approche à valeur extrême.

### 1.1.3.1 Approche par franchissements

Comme illustré avec la Figure 1.4, l'approche par franchissements s'intéresse au taux de passage de la fonction de performance du domaine de sûreté au domaine défaillant [25, 26]. Ainsi en posant  $t_f$  le premier temps où il y a défaillance (c'est-à-dire le temps où la fonction

de performance est nulle pour la première fois), la probabilité de défaillance cumulée s'exprime alors :

$$P_{f,c}(t_{init}, t_{fin}) = \text{Prob}(t_f < t_{fin}) \quad (1.9)$$

Dans ce contexte, il y a défaillance sur  $[t_{init}, t_{fin}]$  si  $G(\mathbf{Z}, t_{init}) \leq 0$  ou s'il se produit au moins un franchissement avant l'instant  $t_{fin}$ . La probabilité de défaillance cumulée se reformule alors :

$$P_{f,c}(t_{init}, t_{fin}) = \text{Prob}(\{G(\mathbf{Z}, t_{init}) \leq 0\} \cup \{N_t^+(t_{init}, t_{fin}) \geq 0\}) \quad (1.10)$$

avec  $N_t^+(t_{init}, t_{fin})$  la variable aléatoire donnant le nombre de franchissements de la surface d'état limite pour  $t \in [t_{init}, t_{fin}]$ . Cette expression peut de plus être majorée telle que :

$$P_{f,c}(t_{init}, t_{fin}) \leq P_f(t_{init}) + \mathbb{E}[N_t^+(t_{init}, t_{fin})] \quad (1.11)$$

avec  $\mathbb{E}[N_t^+(t_{init}, t_{fin})] = \int_{t_{init}}^{t_{end}} \nu^+(\tau) d\tau$  l'espérance du nombre de franchissements et  $\nu^+(t)$  le taux de franchissements. En considérant un intervalle de temps fin  $[t, t+h]$ ,  $\nu^+(t)$  se formule tel que :

$$\nu^+(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\text{Prob}(N_t^+(t, t+h) = 1)}{h} \quad (1.12)$$

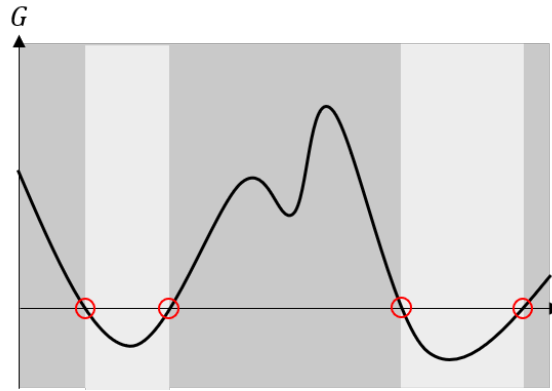


FIGURE 1.4 – Approche par franchissements, localisation des points de franchissements

Tout l'enjeu de cette approche est donc d'évaluer le taux de franchissements  $\nu^+(t)$  afin d'estimer la probabilité de défaillance cumulée, ou au moins de donner une borne supérieure à  $P_{f,c}(t_{init}, t_{fin})$ . Cependant, ce calcul peut être complexe. Les hypothèses simplificatrices de Rice [27] ont alors permis d'obtenir de nombreux résultats. Pour un taux de franchissements  $\nu^+(t)$  par le processus  $Y_t$  d'un seuil noté  $a(t)$ , la formule de Rice s'écrit :

$$\nu^+(t) = \int_{\dot{a}(t)}^{\infty} (\dot{y} - \dot{a}(t)) f_{Y\dot{Y}}(a(t), \dot{s}) d\dot{s} \quad (1.13)$$

avec  $Y$  un processus scalaire dérivable,  $\dot{Y}$  sa dérivée temporelle et  $f_{Y\dot{Y}}(y, \dot{y})$  leur densité de probabilité jointe. Dans le cas d'un processus stationnaire et d'un seuil fixe (par exemple  $a = 0$ ), la formule se simplifie :

$$\nu^+(t) = \int_0^{\infty} \dot{y} f_{Y\dot{Y}}(0, \dot{s}) d\dot{s} \quad (1.14)$$

Cette approche est notamment à l'origine des méthodes PHI2 [28], PHI2+ [29] et *Time dependent Polynomial Chaos Expansion* (t-PCE) [30].

### 1.1.3.1.1 PHI2

La méthode PHI2 [28] permet d'estimer une borne supérieure de la probabilité de défaillance cumulée. Pour ce faire, le taux de franchissements est approximé en faisant deux appels à la méthode FORM : le premier pour  $G(\mathbf{Z}, t) > 0$  et le second pour  $G(\mathbf{Z}, t + h) \leq 0$ . Le taux de franchissements se calcule alors :

$$\nu^+(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\text{Prob}((G(\mathbf{Z}, t) > 0) \cap (G(\mathbf{Z}, t + h) \leq 0))}{h} \quad (1.15)$$

### 1.1.3.1.2 PHI2+

La méthode PHI2+ [29] est une amélioration de PHI2. Elle a pour objectif de diminuer l'effet de la taille de l'incrément temporel  $h$ .

### 1.1.3.1.3 Time dependent Polynomial Chaos Expansion

La méthode t-PCE [30] construit une approximation polynomiale de  $G(\mathbf{Z}, t)$  afin d'en déduire le taux de franchissements  $\nu^+(t)$  et donc d'estimer la probabilité de défaillance cumulée. Pour ce faire, la fonction de performance est discrétisée en  $N_t$  temps. Elle est ensuite approximée en chaque temps. La longueur de corrélation des processus de chargement étant généralement très faible relativement à la taille du domaine temporel considéré, la valeur de  $N_t$  doit être très grande pour que la discrétisation reste représentative. Le couplage de la méthode statique PCE avec la méthode d'analyse en composantes principales (PCA) permet alors de compenser ce problème en réduisant le coût d'approximation de  $G(\mathbf{Z}, t)$ .

La structure algorithmique de la méthode t-PCE est détaillée ci-dessous et illustrée avec le diagramme Figure 1.5 :

1. Le nombre de valeurs propres considérées  $N_\lambda = 1$  et le nombre d'itérations réalisées  $k = 1$  sont initialisés.
2. Le temps est discrétisé en  $N_t$  points et  $N_S$  réalisations de  $\mathbf{Z}$  sont générées.
3. La fonction de performance est évaluée en chacun des points  $G_{ij}$  et sa matrice de covariance  $\tau_{kl}$  est calculée.
4. L'analyse en base principale (PCA) est réalisée afin de diagonaliser la matrice et son erreur induite  $\varepsilon^{PCA}$  est quantifiée. Si l'erreur est suffisamment faible, la méthode continue sinon  $N_\lambda$  prend la valeur  $N_\lambda + 1$ .
5. Si  $k > 1$  la méthode continue, sinon le le plan d'expérience est enrichi.
6. Le critère de convergence  $\varepsilon_m^\lambda$  est évalué. Si il est inférieur à une valeur seuil, la méthode continue sinon le plan d'expérience est enrichi.
7. La fonction de performance est approximée  $\hat{G}$  avec la méthode PCE et son erreur globale  $\varepsilon_j^{PCE}$  est quantifiée. Si l'erreur est suffisamment faible, l'analyse de faillibilité est réalisée avec  $\hat{G}$  sinon le plan d'expérience est enrichi.

### 1.1.3.2 Approches à valeur extrême

Comme illustré avec la Figure 1.6, l'approche à valeur extrême s'intéresse à la valeur extrême de la fonction de performance ou plus précisément à son minimum global. La probabilité de défaillance cumulée se note alors :

$$P_{f,c}(t_{init}, t_{fin}) = \text{Prob} \left( \min_{t \in [t_{init}, t_{fin}]} G(\mathbf{Z}, t) \leq 0 \right) \quad (1.16)$$

En pratique, la fonction de performance est souvent complexe à obtenir et nécessite des coûts de calculs élevés. C'est pour cela que cette approche n'est que rarement (ou dans des cas bien

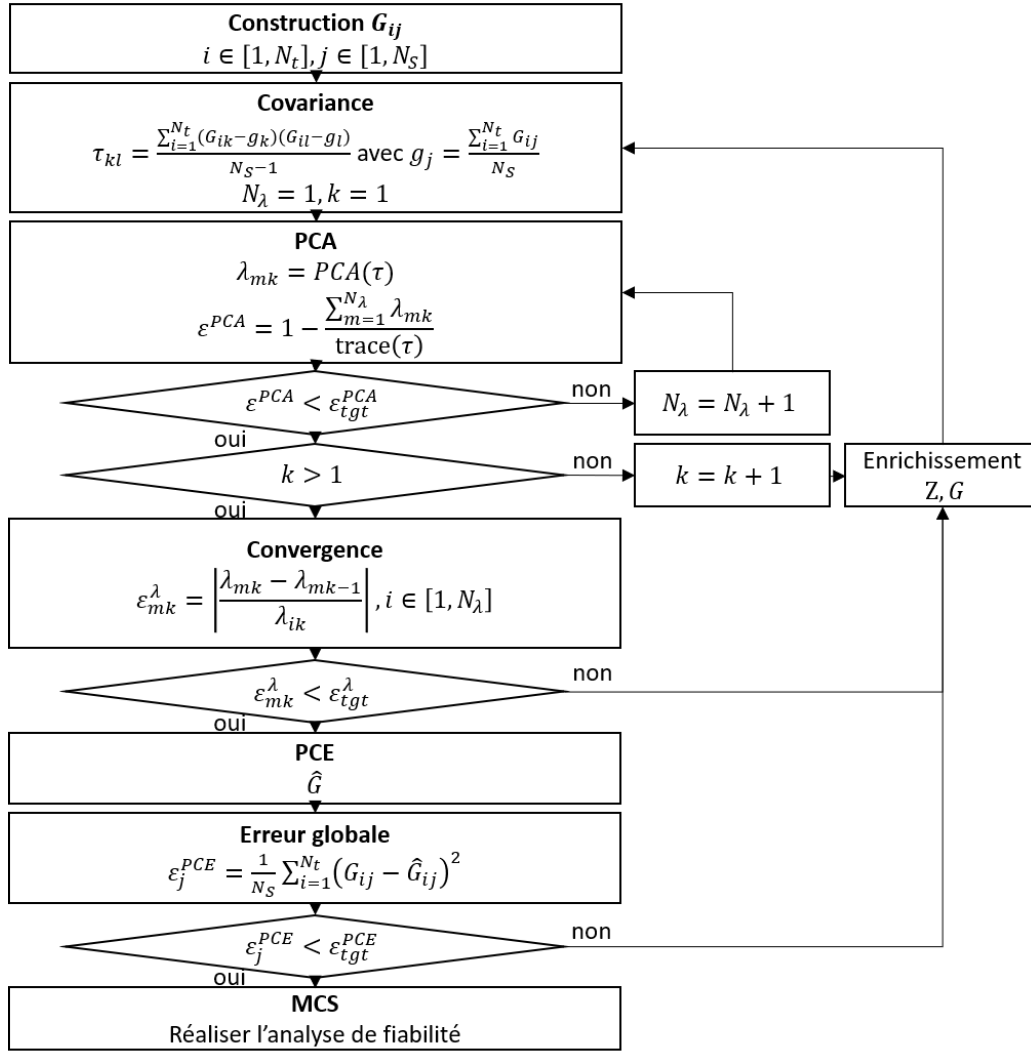


FIGURE 1.5 – Diagramme de la méthode t-PCE

spécifiques) directement appliquée au modèle. Le plus souvent, la fonction de performance est approximée par un métamodèle afin de réduire le coût des calculs. Dans le cadre d'un métamodèle construit par krigeage, il existe notamment les méthodes suivantes : NERS [31], Mixed EGO [32], SILK [33], AERS [34] et AK SYS-t [35], et dans le cadre d'un métamodèle construit par chaos polynomial, on peut citer : ePCE, eLRA et eLRA-Ad [36]. Les Tables 1.2 et 1.3 comparent les différentes méthodes évoquées.

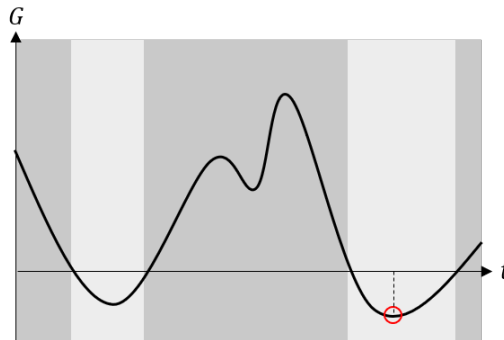


FIGURE 1.6 – Approche à valeur extrême, localisation de la valeur extrême

		Coûts numériques élevés	Coûts numériques moyens	Coûts numériques faibles	Fonction de performance non linéaire	Prise en compte de la corrélation des processus
NERS	[31]	×				
Mixed EGO	[32]	×			×	
SILK	[33]		×		×	
AERS	[34]		×		×	×
AK-SYS-t	[35]			×	×	×

TABLE 1.2 – Méthodes pour la fiabilité dynamique par krigeage

		Fonction de performance non linéaire	Prise en compte de la corrélation des processus	Grandes dimensions stochastique	Optimisation du choix du rang
ePCE	[36]	×	×		
eLRA	[36]	×	×	×	
eLRA-Ad	[36]	×	×	×	×

TABLE 1.3 – Méthodes pour la fiabilité dynamique par PCE

Puisqu'un diagramme basé sur la méthode PCE a déjà été présenté, l'une des méthodes basée sur le krigeage est plus précisément détaillée. D'après la Table 1.2, c'est la méthode *Active Kriging System Time dependent* (AK-SYS-t) qui dispose des meilleures propriétés. Le diagramme de cette dernière est donc reproduit sur la Figure 1.7 et détaillé ci-dessous.

1. Le temps est discrétisé en  $N_t$  points et  $N_S$  réalisations de  $\mathbf{Z}$  sont générées. La fonction de performance est évaluée en chacun des points  $G_{ij}$ .
2. Le temps est discrétisé en  $N_t^{MC}$  points et  $N_S^{MC}$  réalisations de  $\mathbf{Z}$  sont générées. La fonction de performance est approximée par krigeage et est évaluée en chacun des points  $\hat{G}_{kl}$ .
3. Le nouveau point d'apprentissage est sélectionné en minimisant  $\hat{G}_{kl}$  et la fonction d'apprentissage  $U_l$ . Si le critère d'apprentissage est supérieur à une valeur seuil, la méthode continue sinon un nouveau point est appris.
4. La probabilité de défaillance cumulée  $\hat{P}_{f,c}$  est estimée et sa covariance est calculée. Si la covariance est inférieure à une valeur seuil, la méthode se termine sinon la population Monte Carlo de taille est agrandie :  $N_S^{MC} = \frac{1 - \hat{P}_{f,c}}{0.1^2 \hat{P}_{f,c}}$

#### 1.1.4 Confrontation des méthodes

Pour la fiabilité dynamique, les approches par franchissements ont l'avantage d'être moins coûteuses que les approches à valeurs extrêmes. Elles sont cependant souvent basées sur des hypothèses fortes telles que l'indépendance des franchissements où le faible degré quadratique de la fonction de performance. Ainsi, si aucune hypothèse n'est formulée a priori sur la forme de  $G(\mathbf{Z}, t)$ , les approches à valeur extrême sont à favoriser. Dans le Tableau 1.4, l'ensemble des méthodes évoquées pour la fiabilité est classé en fonction de deux critères : le degré polynomial de  $G$  et sa dépendance au temps.

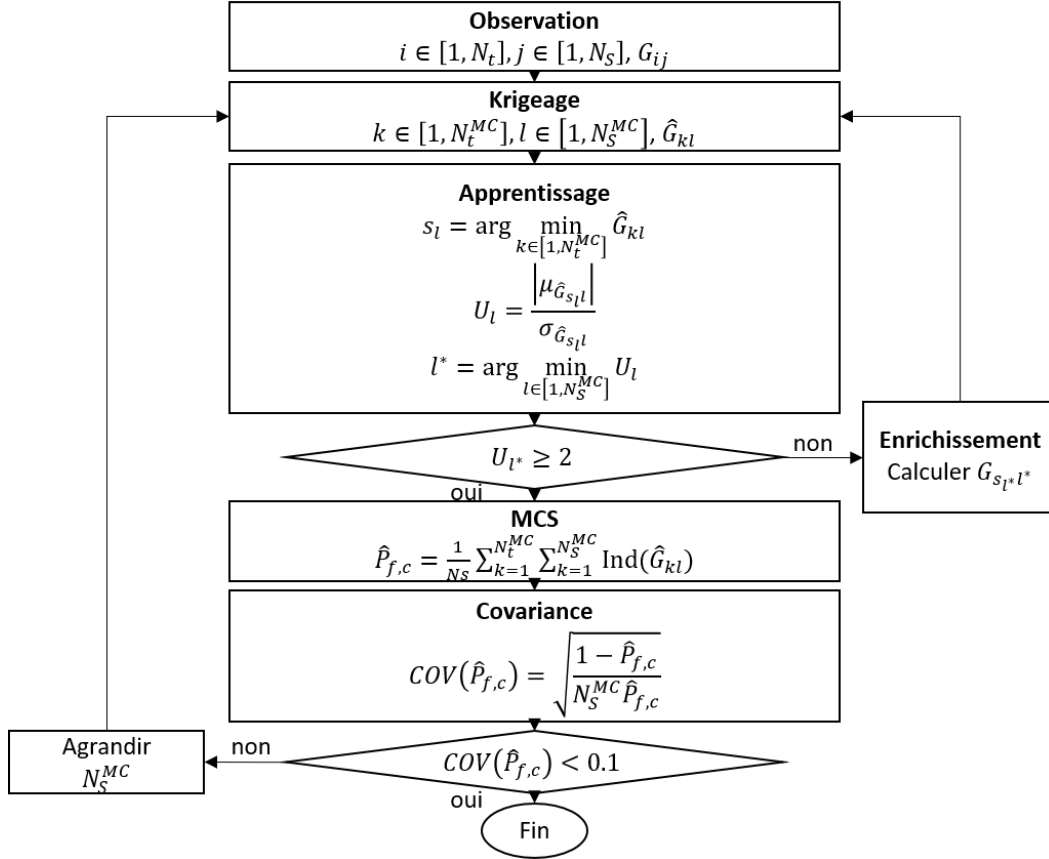


FIGURE 1.7 – Diagramme de la méthode AK-SYS-t

	$P_{f,i}$	$P_{f,c}$
$\deg(G) \leq 2$	FORM, SORM	PHI2, PHI2+, t-PCE
$\forall \deg(G)$	AK, PCE, SVM	AK-SYS-t, ePCE

TABLE 1.4 – Méthodes pour réaliser l’analyse de fiabilité statique ou dynamique en fonction du degré polynomial de la fonction de performance

## 1.2 Calcul du dommage en fatigue

De nombreuses structures sont soumises à des sollicitations variables, cycliques et de faibles amplitudes. Ces sollicitations peuvent être environnementales (c’est le cas du vent ou de la houle sur les éoliennes en mer) ou liées à l’utilisation de la structure (c’est le cas du contact répété des roues ferroviaires sur les rails). À plus ou moins long terme ces sollicitations peuvent avoir un impact sur la capacité résistante de la structure. Ce phénomène est appelé fatigue. Il se traduit par un processus d’endommagement complexe qui entraîne une altération des propriétés mécaniques pouvant aller jusqu’à la rupture du matériau. Pour les structures métalliques, le processus de ruine par fatigue se manifeste en trois étapes : amorçage de la fissure, propagation de la fissure puis rupture brutale. Dans le cadre de cette étude, seule la première phase est considérée : l’amorçage. Ainsi, le système est défaillant si le dommage  $D(\mathbf{Z}, t)$  (qui dépend notamment de l’état de contrainte  $\sigma(\mathbf{Z}, t)$  de la structure) dépasse un certain seuil d’endommagement appelé dommage critique et noté  $D_C$ . L’amplitude de la sollicitation  $\Delta\sigma$  a un impact direct sur la durée de vie de la structure considérée. Pour un signal centré en zéro, si l’amplitude de contrainte est supérieure ou égale au double de la limite élastique  $2\sigma_y \leq \Delta\sigma$  alors le nombre de cycles à rupture est de l’ordre  $N \in [0, 10^2]$  : on parle de fatigue oligocyclique. En revanche si elle est inférieure au double de la limite élastique mais supérieure ou égale au double de la limite de fatigue asymp-



totique  $2\sigma_y^\mu \leq \Delta\sigma < 2\sigma_y$  alors le nombre de cycles à rupture est de l'ordre  $N \in ]10^2, 10^7]$  : on parle de fatigue polycyclique. Finalement, si elle est inférieure au double de la limite de fatigue asymptotique  $\Delta\sigma < 2\sigma_y^\mu$  alors le nombre de cycles à rupture est de l'ordre  $N \in ]10^7, +\infty[$  : on parle de fatigue gigacyclique.

L'enjeu de cette section est de détailler les différentes formulations de  $D(\mathbf{Z}, t)$  proposées dans la littérature. Deux grandes familles se distinguent : la première fait l'hypothèse d'un cumul linéaire du dommage tandis que la seconde réalise un cumul non-linéaire du dommage.

### 1.2.1 Cumul linéaire du dommage

L'hypothèse d'un cumul linéaire du dommage permet de quantifier l'endommagement d'un système par un traitement du signal temporel des contraintes sans prendre en compte son histoire. Ce signal peut être de diverses formes [37, 38], comme représenté sur la Figure 1.8. Dans le cas le plus simple, il est d'amplitude et de période constantes ainsi que de moyenne nulle (Figure 1.8.a). C'est cependant rarement le cas. Le plus souvent, son amplitude et sa période restent variables au cours du temps (Figure 1.8.c).

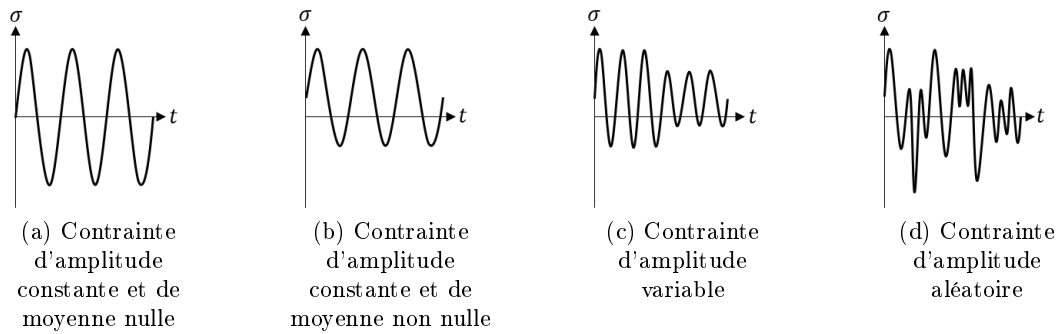


FIGURE 1.8 – Formes possibles du signal temporel des contraintes

#### 1.2.1.1 Courbes SN

Pour caractériser la résistance en fatigue d'un matériau (appelée endurance), l'essai le plus simple consiste à soumettre des éprouvettes de ce matériau à des cycles d'efforts périodiques et à reporter sur une courbe le nombre de cycles au bout duquel la rupture se produit en fonction de l'amplitude de contrainte appliquée. La Figure 1.9 représente une courbe SN idéalisée où les différents domaines d'étude de la fatigue sont distingués, avec  $\sigma_R$  la contrainte à rupture,  $\sigma_y$  la limite élastique,  $\sigma_y^\mu$  la limite de fatigue asymptotique (ou limite élastique microscopique) et  $N$  le nombre de cycles à rupture.

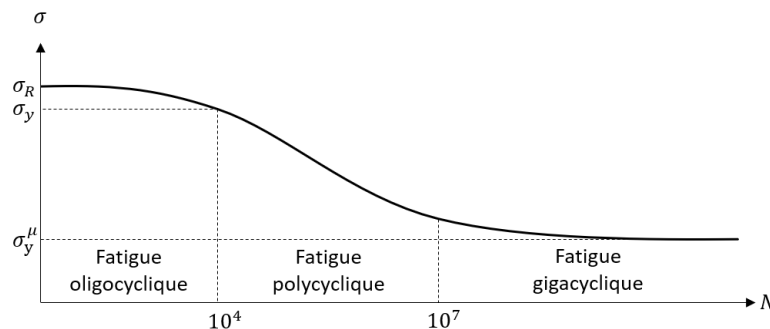


FIGURE 1.9 – Courbe SN

Les courbes SN permettent de caractériser la durée de vie des matériaux pour des sollicitations de moyennes nulles. Cependant, c'est rarement le cas des sollicitations rencontrées en service. Il est alors nécessaire de prendre en compte l'influence de la contrainte moyenne, comme expliqué dans la sous-section suivante.

### 1.2.1.2 Diagramme de Haigh

Si les moyennes des sollicitations ne sont pas nulles ou si le rapport de charge (rapport entre la contrainte minimale et la contrainte maximale) est différent de  $-1$  alors de nouveaux essais sont nécessaires. De ces essais, il est ensuite construit un diagramme de Haigh (cf. Figure 1.10) qui définit, pour une durée de vie fixée  $N$ , la contrainte alternée admissible  $\sigma$  en fonction de la contrainte moyenne  $\bar{\sigma}$ . C'est grâce à l'exploitation de ce dernier que l'influence de la contrainte moyenne est finalement obtenue. Cependant, les essais requis pour générer un diagramme de Haigh étant très coûteux, plusieurs relations empiriques ont été développées afin de relier l'amplitude de la contrainte alternée à la moyenne de la contrainte. Dans [37], les trois relations suivantes sont présentées :

- La droite de Goodman :  $\frac{\sigma}{\sigma_y^\mu} + \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_R} = 1$
- La parabole de Gerber :  $\frac{\sigma}{\sigma_y^\mu} + \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_R}\right)^2 = 1$
- Les deux droites du Centre Technique des Industriels Mécaniques (CETIM) :  $\sigma_y^\mu = \sigma_R + \frac{\sigma - \bar{\sigma}}{2} - \sqrt{R_m + \frac{(\sigma - \bar{\sigma})^2}{2} - 2\sigma\sigma_R}$

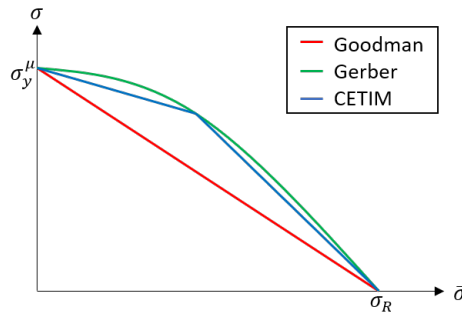


FIGURE 1.10 – Diagramme de Haigh

L'ensemble des corrections apportées aux données fournies par les courbes SN permet à présent, pour un cycle de contraintes d'amplitude et de moyenne données, de déterminer le nombre de répétitions de ce cycle au bout duquel la rupture se produit. Cependant pour des chargements composés de différents cycles, il devient nécessaire d'utiliser des lois de cumul de l'endommagement.

### 1.2.2 Formules de Palmgren et Miner

Chaque cycle de contrainte d'amplitude supérieure à la limite de fatigue asymptotique produit un endommagement irréversible de la structure. L'endommagement  $D_i$  produit par  $n(\Delta\sigma_i)$  cycles d'amplitude  $\Delta\sigma_i$  est relié à  $N_i$ , le nombre total de cycles entraînant la rupture par fatigue sous la contrainte d'amplitude constante  $\Delta\sigma_i$ . Dans le but d'estimer l'endommagement partiel  $D_i$ , Miner [39] propose la relation suivante :

$$D_i = \frac{n(\Delta\sigma_i)}{N_i} \quad (1.17)$$

Sous l'hypothèse forte que l'histoire (l'ordre d'apparition) des cycles n'a pas d'influence sur la durée de vie de la structure et dans le cas où  $I$  groupes de cycles d'amplitudes de contrainte

différentes sont étudiés, l'endommagement total  $D$  est estimé par la formule de Palmgren [40] :

$$D = \sum_{i=1}^I D_i \quad (1.18)$$

Ainsi le cumul linéaire du dommage de Palmgren et Miner s'écrit :

$$D = \sum_{i=1}^I \frac{n(\Delta\sigma_i)}{N_i} \quad (1.19)$$

Lorsque l'amplitude des contraintes devient aléatoire, il est nécessaire de disposer de méthodes capables d'extraire les cycles afin d'exploiter la loi de cumul linéaire du dommage. Ces méthodes se classent en deux grandes approches : les approches temporelles et les approches spectrales. Elles sont détaillées dans la sous-section suivante.

### 1.2.2.1 Fatigue aléatoire

L'approche traditionnellement développée est l'approche temporelle. Elle considère la contrainte en fonction du temps. L'une de ses méthodes les plus utilisées est le comptage *Rainflow* [41, 42]. Toutefois il est aussi possible d'opter pour une approche spectrale. Cette-fois-ci la contrainte est considérée dans le domaine fréquentiel. Il existe alors différentes méthodes pour calculer la durée de vie à partir de la densité spectrale de puissance ou *Power Spectral Density* (PSD).

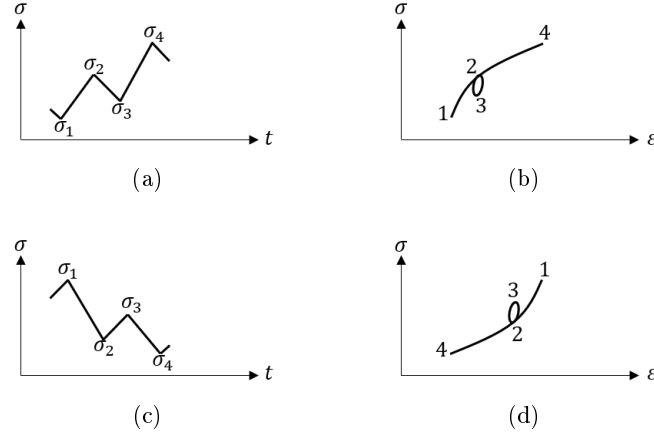
#### 1.2.2.1.1 Signal temporel

La méthodologie développée jusqu'ici permet de traiter les problèmes de fatigue par blocs, avec chaque bloc présentant une amplitude de contrainte constante et une contrainte moyenne nulle. En pratique, les chargements réels sont souvent plus complexes. Le comptage *Rainflow* permet alors d'identifier des cycles de chargement à partir d'un historique de contrainte. Différents algorithmes existent. À titre d'exemple, la méthode des quatre points [43] est présentée et illustrée Figure 1.11. Graphiquement, une boucle fermée dans le plan contraintes-déformations est décrite pour chaque cycle *Rainflow* extrait de l'historique de la contrainte. La décomposition du signal se déroule en cinq étapes :

- Le signal est réduit à une séquence de maxima et de minima locaux, appelée processus des extrema.
- Les quatre premiers points successifs  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\sigma_4$  sont examinés, ils forment trois étendues  $\sigma_{12} = |\sigma_2 - \sigma_1|$ ,  $\sigma_{23} = |\sigma_3 - \sigma_2|$  et  $\sigma_{34} = |\sigma_4 - \sigma_3|$ .
- Si  $\sigma_{12} \leq \sigma_{23}$  et  $\sigma_{23} \leq \sigma_{34}$ , le cycle *Rainflow* défini par son couple d'extrema  $(\sigma_1, \sigma_3)$  est extrait du signal. Respectivement, son amplitude et sa valeur moyenne valent  $\sigma_{23}$  et  $\bar{\sigma} = (\sigma_3 + \sigma_1)/2$ .
- Sinon, le rang des quatre points est incrémenté d'une unité et le test précédent est de nouveau appliqué.
- La procédure est répétée jusqu'au dernier point de la séquence des extrema.

Suite à ces différentes étapes, il peut arriver que certains points du signal ne soient pas extraits. Ils forment le résidu. Afin de ne pas le négliger, il est nécessaire de le décomposer lui aussi en cycle élémentaires. Pour cela, une nouvelle séquence de chargement est formée à partir du résidu, à la suite duquel il est une nouvelle fois ajouté. De nouveaux cycles peuvent alors être extraits en appliquant la procédure précédemment définie. L'ensemble de la décomposition est alors terminé.

Le calcul du dommage à partir du comptage *Rainflow* est ensuite aisément réalisable via les courbes SN, du diagramme de Haigh et de la loi de cumul de Palmgren et Miner. Cette approche est appelée approche RSN (*Rainflow* et courbes SN) dans la suite du manuscrit.


 FIGURE 1.11 – Comptage de cycles *Rainflow*

### 1.2.2.1.2 Signal spectral

Cette section s'appuie sur les travaux de synthèses réalisés dans [37] et se limite aux processus aléatoires gaussiens stationnaires et ergodiques. Pour rappel, un processus est dit stationnaire si sa distribution de probabilité ne dépend pas du temps (par conséquent les valeurs telles que la moyenne et la variance sont aussi indépendantes du temps). L'hypothèse d'ergodicité, quant à elle, permet de remplacer les moyennes d'ensembles par les moyennes temporelles estimées à partir de la réalisation unique du processus. Une PSD représente une densité normalisée en fonction de la fréquence  $\omega$ . Elle est définie comme étant la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du signal :

$$\Phi_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.20)$$

avec la fonction d'autocorrélation  $R(\tau) = \mathbb{E}[x(t)x(t+\tau)]$  et le nombre complexe  $j$  tel que  $j^2 = -1$ . L'analyse en fatigue d'un signal spectral nécessite la formulation de nouvelles grandeurs, voici une liste de celles qui seront utiles par la suite :

- Le  $i^{\text{ème}}$  moment spectral,  $m_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma^i| \Phi_{xx}(\gamma) d\gamma$
- Le nombre de passage par zéro avec une pente positive,  $\nu_0^+ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}$
- Le nombre moyen de maxima par unité de temps,  $\mathbb{E}[M_T] = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}$
- Le facteur d'irrégularité,  $\gamma = \frac{\nu_0^+}{\mathbb{E}[M_T]}$
- La densité de probabilité des maxima pour un processus gaussien,  $p_b(b) = (1 - \gamma^2)f_{\mathcal{N}} + \gamma f_{\mathcal{R}}$

Pour un processus gaussien de moyenne nulle, l'approche classique de traitement du signal spectral consiste à dire que chaque maximum d'amplitude  $b$  est considéré comme étant un cycle de contrainte d'amplitude  $b$  et de moyenne nulle. Ainsi d'après l'équation de Basquin, le dommage se formule  $d = C^{-1}b^\beta$  avec  $C$  et  $\beta$  des paramètres matériaux. Alors, la contribution au taux de dommages des maxima compris dans l'intervalle  $[b, b + db[$  s'écrit :

$$\Delta(b)db = C^{-1}b^\beta \mathbb{E}[M_T] p_b(b) db \quad (1.21)$$

avec  $p_b(b) = (1 - \gamma^2)f_{\mathcal{N}} + \gamma f_{\mathcal{R}}$  la densité de probabilité des maxima pour un processus gaussien,  $f_{\mathcal{N}}$  une distribution gaussienne et  $f_{\mathcal{R}}$  une distribution de Rayleigh. Il en est finalement déduit l'espérance du dommage par unité de temps :

$$\mathbb{E}[D] = \int_0^{+\infty} \Delta(b)db = C^{-1} \mathbb{E}[M_T] \int_0^{+\infty} b^\beta p_b(b) db \quad (1.22)$$

De cette dernière formulation, plusieurs méthodes ont été développées afin d'estimer l'espérance du dommage. Certaines d'entre elles sont évoquées dans [37]. La plus connue est l'approximation de Rayleigh (ou approximation à bande étroite) qui consiste à poser le facteur d'irrégularité  $\gamma = 1$ , impliquant  $p_b(b) = f_{\mathcal{R}}$  et permettant de formuler l'espérance du dommage par unité de temps comme suivant :

$$\mathbb{E}[D_{Ray}] = C^{-1} \frac{2^{\beta/2}}{2\pi} \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{2}\right) m_0^{(\beta-1)/2} m_2^{1/2} \quad (1.23)$$

avec  $\Gamma(x) = 2 \int_0^{+\infty} t^{2x-1} e^{-t^2} dt$ .

### 1.2.3 Cumul non linéaire du dommage

Par définition les approches spectrales ne peuvent prendre en compte l'historique de chargement. De plus, les approches temporelles basées sur un comptage de cycles négligent l'influence de l'historique de chargement. Des modèles temporels sans comptage de cycles ont donc été développés. Dans [44, 45, 46], les modèles sont basés sur des hypothèses fortes et ne peuvent pas être appliqués à des chargements multiaxiaux non proportionnels. En revanche dans [47], l'auteur s'appuie sur les principes de la thermodynamique des processus irréversibles. Le modèle est ainsi adapté pour tous types de chargements. Ce dernier modèle est donc considéré et présenté dans les sous-sections suivantes.

#### 1.2.3.1 Endommagement continu

L'endommagement continu est une notion initialement introduite par Kachnov. Dans [48], il propose une définition isotrope de l'endommagement. Le dommage est égal au rapport de l'aire des micros défauts  $\delta S_D$  sur l'aire totale  $\delta S$  :

$$D = \frac{\delta S_D}{\delta S} \quad (1.24)$$

Dans le cas d'un chargement uniaxial et d'un endommagement isotrope symétrique, le contrainte effective s'exprime :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (1.25)$$

En plasticité, il est fait l'hypothèse que la relation de comportement reste toujours vérifiée pour la contrainte effective. Il est alors possible d'écrire :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} = E \varepsilon^e \quad (1.26)$$

avec  $E$  le module d'Young et  $\varepsilon^e$  la déformation élastique. En posant  $\tilde{E} = E(1 - D)$ , la contrainte s'écrit :

$$\sigma = \tilde{E} \varepsilon^e \quad (1.27)$$

Le module d'Young est donc directement impacté par l'endommagement. En d'autres termes, l'endommagement a pour conséquence de diminuer la valeur de la limite d'élasticité.

#### 1.2.3.2 Modèle d'endommagement à deux échelles

Dans [49], Lemaitre et Doghri observent que pour des structures en acier sollicitées en fatigue polycyclique ( $N \geq 10^4$ ), l'endommagement se manifeste par l'apparition de micro fissures au sein du matériau [50]. Un modèle d'endommagement à deux échelles (2SD) est alors développé. Comme son nom l'indique, deux échelles sont définies : une échelle macroscopique non

endommageable conservant un comportement élastique et une échelle microscopique suivant un comportement élastoplastique endommageable avec écrouissage cinématique linéaire. Pour lier ces deux échelles, plusieurs relations de localisations existent. Ici, la relation de Lin-Taylor est considérée :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^\mu \quad (1.28)$$

avec  $\boldsymbol{\varepsilon}$  la déformation et  $\square^\mu$  la notation indiquant une grandeur à l'échelle microscopique. Concernant l'amorçage du dommage, le modèle prévoit un seuil de plasticité  $p_D$ . Ce n'est qu'une fois cette valeur atteinte par le cumul plastique  $p^\mu$  que le dommage microscopique est initié. Ce dernier peut alors ensuite croître jusqu'à atteindre une valeur critique  $D_C$ . Les équations du modèle sont les suivantes :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\mu = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p} \quad (1.29)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\mu = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\mu (1 - D^\mu) \quad (1.30)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\mu = \left( \frac{E}{1 - 2\nu} \mathbb{P}^H + \frac{E}{1 + \nu} \mathbb{P}^D \right) : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e} \quad (1.31)$$

$$f = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu D} - \mathbf{X}^\mu\| - \sigma_y^\mu \quad (1.32)$$

$$\mathbf{N} = \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu D} - \mathbf{X}^\mu}{\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mu D} - \mathbf{X}^\mu\|} \quad (1.33)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p} = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{N} dp^\mu \quad (1.34)$$

$$d\mathbf{X}^\mu = \sqrt{\frac{2}{3}} C (1 - D^\mu) \mathbf{N} dp^\mu \quad (1.35)$$

$$dD^\mu = \left( \frac{Y^\mu}{S} \right)^s dp^\mu \quad (1.36)$$

$$Y^\mu = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\mu : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e} \quad (1.37)$$

avec  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\mu$  la contrainte effective microscopique,  $\mathbb{P}^H$  le projecteur hydrostatique,  $\mathbb{P}^D$  le projecteur déviatorique,  $f$  la surface de charge,  $\sigma_y^\mu$  la limite d'élasticité microscopique,  $\mathbf{N}$  la direction de plasticité,  $\mathbf{X}^\mu$  l'écrouissage microscopique,  $C$  le module d'écrouissage,  $S$  et  $s$  les paramètres d'endommagement et  $\|\square\|$  la norme  $L_2$ .

La Figure 1.12 est issue de [51] et sert d'aide à la compréhension des principes théoriques du modèle 2SD dans le cas d'un écrouissage cinématique linéaire. Sur la Figure 1.12.a une inclusion (en noir) au sein d'un volume élémentaire (en rouge) est représentée. Cela permet de distinguer les deux échelles. La Figure 1.12.b représente l'évolution des contraintes macroscopiques (en rouge) et microscopiques (en noir) durant un cycle de chargement OABCD.

### 1.2.3.3 Implémentation du modèle 2SD

A l'échelle microscopique, le calcul de la réponse elasto-plastique est réalisé par retour radial [52]. Cette approche est incrémentale et nécessite donc une discrétisation temporelle telle que

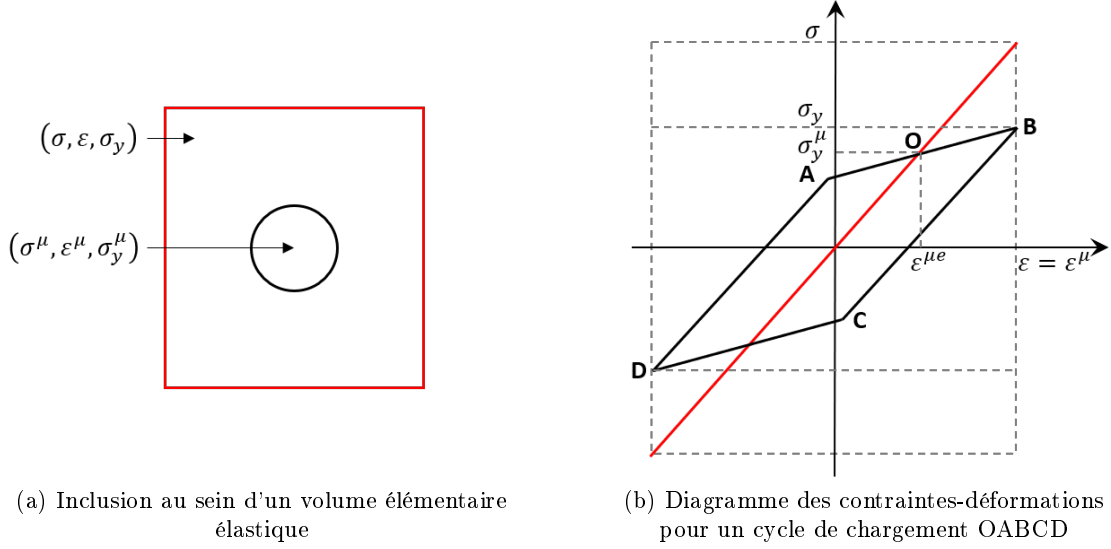


FIGURE 1.12 – Illustration des principes théoriques du modèle 2SD

$t_{n+1} = \Delta t + t_n$ . Les équations discrétisées du modèle sont de la forme suivante :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^\mu \quad (1.38)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^\mu = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mu e} + \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mu p} \quad (1.39)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\mu = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^\mu (1 - D_{n+1}^\mu) \quad (1.40)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^\mu = \left( \frac{E}{1 - 2\nu} \mathbb{P}^H + \frac{E}{1 + \nu} \mathbb{P}^D \right) : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mu e} \quad (1.41)$$

$$f = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\mu D} - \mathbf{X}_{n+1}^\mu \right\| - \sigma_y^\mu \quad (1.42)$$

$$\mathbf{N} = \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\mu D} - \mathbf{X}_{n+1}^\mu}{\left\| \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\mu D} - \mathbf{X}_{n+1}^\mu \right\|} \quad (1.43)$$

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{\mu p} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta p^\mu \mathbf{N} \quad (1.44)$$

$$\Delta \mathbf{X}^\mu = \sqrt{\frac{2}{3}} C (1 - D_{n+1}^\mu) \Delta p^\mu \mathbf{N} \quad (1.45)$$

$$\Delta D^\mu = \left( \frac{Y_{n+1}^\mu}{S} \right)^s \Delta p^\mu \quad (1.46)$$

$$Y_{n+1}^\mu = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^\mu : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mu e} \quad (1.47)$$

À l'instant  $t_{n+1}$ , le retour radial [52] appliqué au modèle 2SD se construit en trois étapes : l'hypothèse élastique, la transformation élastique et la transformation plastique. Ces étapes sont détaillées dans les paragraphes suivants.

### 1.2.3.3.1 Hypothèse élastique

Dans un premier temps, la transformation est supposée élastique. Tous les incréments sont donc supposés nuls. La déformation microscopique élastique, le déviateur de la contrainte

effective et la surface de charge s'écrivent :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mu e} = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e - \boldsymbol{\epsilon}_n^{\mu p} \quad (1.48)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\mu e D} = \frac{E}{1+\nu} \mathbb{P}^D : (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e - \boldsymbol{\epsilon}_n^{\mu p}) \quad (1.49)$$

$$f = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\mu e D} - \mathbf{X}_n^\mu\| - \sigma_y^\mu \quad (1.50)$$

### 1.2.3.3.2 Transformation élastique

Avec (1.50), si  $f \leq 0$  alors la transformation est élastique. L'hypothèse élastique est vraie et les variables internes à l'instant  $t_{n+1}$  se calculent :

$$\begin{cases} p_{n+1}^\mu &= p_n^\mu \\ \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mu p} &= \boldsymbol{\epsilon}_n^{\mu p} \\ D_{n+1}^\mu &= D_n^\mu \\ \mathbf{X}_{n+1}^\mu &= \mathbf{X}_n^\mu \end{cases} \quad (1.51)$$

### 1.2.3.3.3 Transformation plastique

Avec (1.50), si  $f > 0$  alors la transformation est plastique. L'hypothèse élastique est fautive. À partir de l'équation (1.41), toutes les variables inconnues du problème sont exprimées en fonction des variables connues et de  $\Delta p^\mu$ . Par mesure de clarté, le calcul est détaillé en posant  $s = 1$ .

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^\mu = \left( \frac{E}{1-2\nu} \mathbb{P}^H + \frac{E}{1+\nu} \mathbb{P}^D \right) : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mu e} \quad (1.52)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\mu D} = \frac{E}{1+\nu} \mathbb{P}^D : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mu e} \quad (1.53)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\mu D} = \frac{E}{1+\nu} \mathbb{P}^D : (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e - \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mu p}) \quad (1.54)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\mu D} = \frac{E}{1+\nu} \mathbb{P}^D : (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e - \boldsymbol{\epsilon}_n^{\mu p} - \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{\mu p}) \quad (1.55)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\mu D} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\mu e D} - \frac{E}{1+\nu} \mathbb{P}^D : \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{\mu p} \quad (1.56)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\mu D} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\mu e D} - \frac{E}{1+\nu} \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{\mu p} \quad (1.57)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\mu D} - \mathbf{X}_{n+1}^\mu = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\mu e D} - \mathbf{X}_n^\mu - \frac{E}{1+\nu} \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{\mu p} - \Delta \mathbf{X}^\mu \quad (1.58)$$

$$\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\mu D} - \mathbf{X}_{n+1}^\mu\|_N = \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\mu e D} - \mathbf{X}_n^\mu\|_N - \frac{E}{1+\nu} \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{\mu p} - \Delta \mathbf{X}^\mu \quad (1.59)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y^\mu \mathbf{N} = \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\mu e D} - \mathbf{X}_n^\mu\|_N - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{E}{1+\nu} \Delta p^\mu \mathbf{N} - \sqrt{\frac{2}{3}} C(1 - D_{n+1}^\mu) \Delta p^\mu \mathbf{N} \quad (1.60)$$

$$\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\mu e D} - \mathbf{X}_n^\mu\|_N = \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{E}{1+\nu} \Delta p^\mu + \sqrt{\frac{2}{3}} C(1 - D_{n+1}^\mu) \Delta p^\mu + \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y^\mu \right) \mathbf{N} \quad (1.61)$$

$$0 = \frac{3}{2} \frac{E}{1+\nu} \Delta p^\mu + C(1 - D_{n+1}^\mu) \Delta p^\mu - f \quad (1.62)$$

$$0 = \frac{3}{2} \frac{E}{1+\nu} \Delta p^\mu + C(1 - D_n^\mu - \frac{Y_{n+1}^\mu}{S} \Delta p^\mu) \Delta p^\mu - f \quad (1.63)$$

$$0 = A_1 Y_{n+1}^\mu + A_2 \Delta p^\mu + A_3 \quad (1.64)$$

$$0 = A_1 a_1 \Delta p^{\mu 4} + A_1 a_2 \Delta p^{\mu 3} + A_1 a_3 \Delta p^{\mu 2} + A_2 \Delta p^\mu + A_3 \quad (1.65)$$



avec  $A_1 = -CS^{-1}$ ,  $A_2 = \frac{3}{2} \frac{E}{1+\nu} + C(1 - D_n^\mu)$ ,  $A_3 = -f$ ,  $a_1 = \frac{3}{4} \frac{E}{1+\nu}$ ,  $a_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{E}{1+\nu} (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e - \boldsymbol{\epsilon}_n^{\mu p})$  :  $\mathbf{N}$  et  $a_3 = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e - \boldsymbol{\epsilon}_n^{\mu p}) : (\frac{E}{1-2\nu} \mathbb{P}^H + \frac{E}{1+\nu} \mathbb{P}^D) : (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e - \boldsymbol{\epsilon}_n^{\mu p})$ .

Si  $p_n^\mu > p_D$  alors la transformation est plastique avec dommage et l'incrément de plasticité se calcule en résolvant (1.65). Sinon, la transformation est plastique sans dommage et l'incrément de plasticité s'écrit :

$$\Delta p^\mu = \frac{f}{\frac{3}{2} \frac{E}{1+\nu} + C} \quad (1.66)$$

Finalement, les variables internes à l'instant  $t_{n+1}$  se calculent :

$$\begin{cases} p_{n+1}^\mu &= p_n^\mu + \Delta p^\mu \\ \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mu p} &= \boldsymbol{\epsilon}_n^{\mu p} + \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta p^\mu \mathbf{N} \\ D_{n+1}^\mu &= D_n^\mu + \frac{a_1 \Delta p^{\mu^2} + a_2 \Delta p^\mu + a_3}{S} \Delta p^\mu \\ \mathbf{X}_{n+1}^\mu &= \mathbf{X}_n^\mu + \sqrt{\frac{2}{3}} C (1 - D_{n+1}^\mu) \Delta p^\mu \mathbf{N} \end{cases} \quad (1.67)$$

## 1.3 Fiabilité en fatigue

### 1.3.1 Identification des sources d'incertitudes propres à une étude du dommage en fatigue

L'incertitude, en son sens large, est la zone au sein de laquelle se trouve probablement la valeur vraie d'une quantité étudiée. Cette zone est définie par une dispersion et dans le cadre de la théorie des probabilités, se quantifie par ses moments probabilistes (espérance, variance, skewness, kurtosis, etc.). Il existe plusieurs façons de classer les différentes sources d'incertitudes présentes dans un problème [53, 54]. L'une d'entre elles formule deux familles : les incertitudes épistémiques et les incertitudes aléatoires. Les incertitudes épistémiques peuvent être de nature géométrique, matérielle (à l'échelle macroscopique), expérimentales, etc. Elles sont causées par un manque de connaissances. Elles peuvent donc être réduites en faisant davantage d'efforts, notamment sur la qualité de fabrication (pour réduire la variabilité géométrique), les techniques de mesures, le nombre d'essais, etc. Concernant les incertitudes aléatoires, elles sont intrinsèques aux phénomènes considérés et ne peuvent donc pas être réduites. Elles peuvent, par exemple, être causées par la variation des conditions environnementales tels que le climat, le vent ou la houle. Cependant, en fonction des moyens et du problème considéré, le suivi en continu ou le contrôle ponctuels des paramètres incertains permet une meilleure prise en compte de leur variabilité.

Au cours de ce travail différents outils mécaniques et statistiques sont utilisés dans l'objectif d'étudier et de prédire les phénomènes propres à la fatigue. Comme mentionné précédemment, il est important d'étudier en amont les différentes sources d'incertitudes présentes au sein de ces outils afin de mettre en relief les résultats qu'ils permettent d'obtenir. La Figure 1.13 liste les différentes étapes nécessaires à l'obtention de la valeur du dommage tout en illustrant la propagation des incertitudes. Trois sources d'incertitudes interviennent dans notre problème : le chargement, la géométrie et le matériau. Quelque soit le cas d'étude, à l'échelle locale, ces sources sont classées selon deux familles : celles qui sont internes à la structure et celles qui ont une influence sur la méthode de calcul du dommage en fatigue. La contrainte locale se calcule à partir de la contrainte nominale et du coefficient de concentration des contraintes. La contrainte nominale dépend du chargement et le coefficient de concentration dépend de la géométrie. Les incertitudes de chargement et de géométrie sont donc classées comme interne à la structure. Les incertitudes dues au matériau sont classées comme influentes sur la méthode de calcul du dommage. Avec ce formalisme et à partir de l'étude bibliographique réalisée sur les méthodes de calcul du dommage, trois cadres d'étude sont définis :

- La première est basée sur un cumul linéaire du dommage. Le dommage est calculé avec (1.19).  $n(\Delta\sigma_i)$  porte les incertitudes liées à la structure étudiée (en vert).  $N_i$  porte les incertitudes internes aux éprouvettes sur lesquels les essais de fatigue ont été réalisés (en bleu) et au matériau (en rouge).
- La seconde est basée sur un cumul non linéaire du dommage. Le dommage porte alors les incertitudes liées à la structure étudiée (en vert) et au matériau (en rouge).
- La troisième est basée sur un cumul non linéaire du dommage où le modèle est calibré à partir de courbes SN. Comme pour la seconde étude, le dommage porte alors les incertitudes liées à la structure étudiée (en vert) et au matériau (en rouge). À celles là sont ajoutés les incertitudes internes aux éprouvettes (en bleu).

### 1.3.2 Calibration des incertitudes

La sortie d'un modèle est couverte d'incertitudes. Pour les réduire, il est possible de calibrer les incertitudes en entrée à partir de mesures en sorties. Dans les sections suivantes, la calibration bayésienne et quelques méthodes numériques sont présentées.

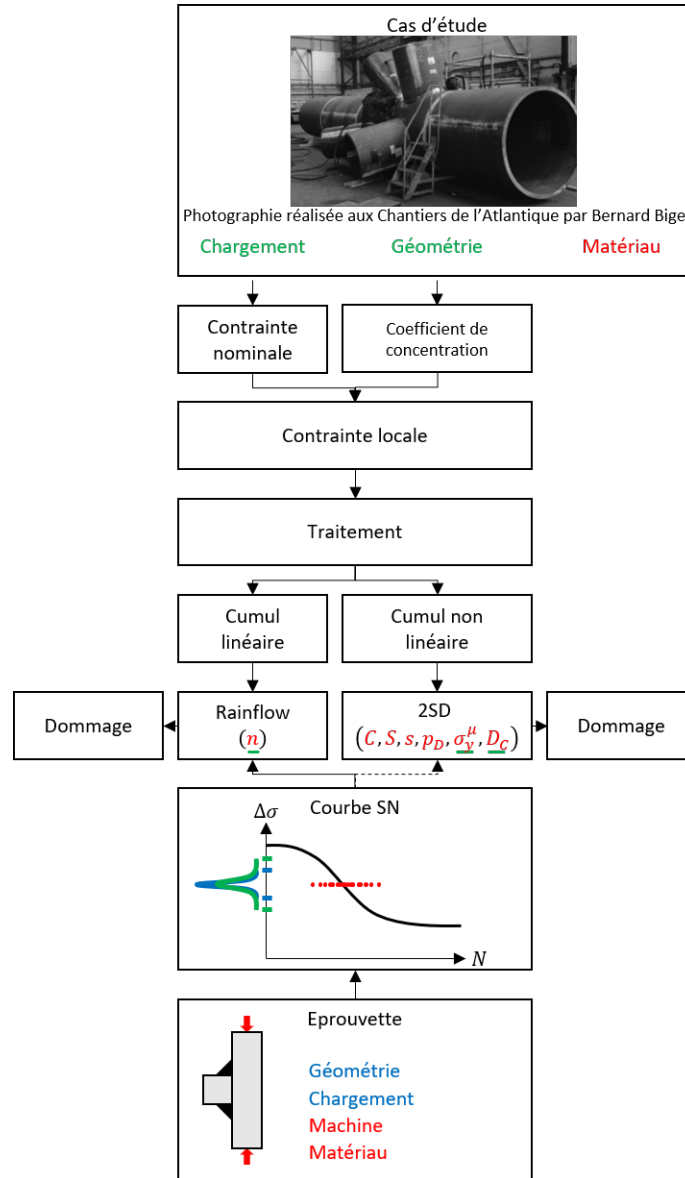


FIGURE 1.13 – Sources d’incertitudes par le calcul du dommage en fatigue

### 1.3.2.1 Calibration bayésienne

#### 1.3.2.1.1 Principe de la calibration bayésienne

Comme défini dans [55, 56, 57], la calibration bayésienne est une approche permettant d’identifier la distribution d’une ou plusieurs variables aléatoires à partir d’un ensemble de mesures observées. Pour détailler son principe, considérons un modèle de calcul  $M$  défini tel que :

$$Y = M(\mathbf{Z}) \quad (1.68)$$

avec  $\mathbf{Z}$  le vecteur des variables aléatoires en entrée et  $Y$  la grandeur en sortie. En disposant d’un ensemble de mesures indépendantes de  $Y$  dit ensemble des observations  $\mathbf{Y}^{obs}$ , l’équation précédente se réécrit en introduisant un terme d’erreur  $\xi$ .

$$\mathbf{Y}^{obs} = M(\mathbf{Z}) + \xi \quad (1.69)$$

avec l’hypothèse  $\xi \sim N(0, \Sigma_\xi)$  et  $\Sigma_\xi$  la matrice de covariance. le théorème de Bayes permet de calculer la densité de probabilité a posteriori  $f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$  à partir des densités de probabilité a priori

$p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$  et d'une fonction de vraisemblance des observations  $\mathcal{L}(\mathbf{z}, \mathbf{Y}^{obs})$  :

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \frac{1}{c} p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) \mathcal{L}(\mathbf{z}, \mathbf{Y}^{obs}) \quad (1.70)$$

avec  $c$  le paramètre de normalisation.

### 1.3.2.1.2 Application de la calibration bayésienne

En pratique, la matrice de covariance  $\Sigma_{\xi}$  n'est que rarement connue. Par simplicité,  $\Sigma_{\xi}$  est souvent considérée comme une matrice diagonale telle que :

$$\Sigma_{\xi} = \sigma_{\xi}^2 \mathbf{I} \quad (1.71)$$

Puisque  $\sigma_{\xi}^2$  n'est pas non plus connu, il est ajouté à l'ensemble des variables aléatoires à identifier. En supposant a priori que l'incertitude due au modèle et l'erreur  $\xi$  sont indépendantes, (1.70) se réécrit :

$$f_{\mathbf{Z}, \sigma_{\xi}^2}(\mathbf{z}, \sigma_{\xi}^2) = \frac{1}{c} p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) p_{\sigma_{\xi}^2}(\sigma_{\xi}^2) \mathcal{L}(\mathbf{z}, \mathbf{Y}^{obs}) \quad (1.72)$$

En raison de la dimension stochastique du problème, le calcul de  $c$  peut s'avérer coûteux. Cependant, puisque qu'il s'agit d'un facteur de normalisation, sa valeur peut dans un premier temps être négligée. Puis, dans un second temps, elle est calculée pour un coût réduit en normalisant les densités de probabilité a posteriori obtenues. C'est le principe d'un certain nombre de méthodes telles que celles introduites dans le paragraphe suivant.

### 1.3.2.1.3 Méthodes pour la calibration bayésienne

De nombreuses méthodes numériques permettant de réaliser une calibration bayésienne existent. À titre d'exemple, l'inférence bayésienne variationnelle (*variational bayesian inference*) [58] est très utilisée. La distribution a posteriori est calculée en minimisant l'écart entre la distribution a priori et une distribution recherchée parmi un ensemble de candidats de distributions paramétriques. D'autres approches plus récentes existent, telles que :

- *Transport maps* est introduit par [59]. Cette approche est basée sur la théorie des transports optimaux [60].
- Vraisemblance spectrale introduite dans [61]. Cette approche propose d'approximer la fonction de vraisemblance avec un chaos polynomial. Dans ce contexte, les moments statistiques a posteriori sont calculés analytiquement à partir des coefficients du chaos polynomial. Les fonctions de vraisemblance étant souvent complexes, il n'est pas simple de les approximer. Une solution à ce problème est proposée dans [62]. L'approximation est cette fois-ci réalisée avec un chaos polynomial par morceaux.
- Mise à jour bayésienne à partir de méthodes de fiabilité structurelle est proposé dans [63].

Le problème bayésien est reformulé en un problème de fiabilité structurelle.

Cependant la méthode la plus populaire pour ce type d'application reste la méthode de Monte Carlo Markov Chain (MCMC) [64].

### 1.3.2.2 Méthode MCMC

Une chaîne de Markov  $(\mathbf{Z}_n)_n$  est une suite de variables aléatoires  $\mathbf{Z}_n$  définies telles que :

$$\mathbf{Z}_{n+1} = \mathbf{Z}_n P^{Ker} \quad (1.73)$$

avec  $P^{Ker}$  le noyau de transition. Ainsi, la méthode MCMC consiste à définir une chaîne de Markov telle que la loi de  $\mathbf{Z}_n$  converge vers une loi stationnaire. Pour ce faire, de nombreuses approches existent. La plus utilisée est l'algorithme de Metropolis Hastings [65].

### 1.3.2.2.1 Algorithme de Metropolis Hastings

À l'itération  $n$ , un candidat  $\mathbf{z}'_n$  est généré aléatoirement à partir de sa distribution a priori  $p_{\mathbf{Z}}$ . Sa probabilité d'acceptation  $\alpha$  est calculée selon la formule ci-dessous.

$$\alpha = \min \left\{ 1, \frac{\mathcal{L}(\mathbf{z}'_n, \mathbf{Y}^{obs})p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}_n|\mathbf{z}'_n)}{\mathcal{L}(\mathbf{z}_n, \mathbf{Y}^{obs})p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}'_n|\mathbf{z}_n)} \right\} \quad (1.74)$$

avec  $\mathbf{z}_n$  le dernier candidat accepté. Une réalisation  $u$  suivant la loi  $U(0, 1)$  est générée. Si  $u \leq \alpha$  alors le candidat est accepté : il est utilisé pour alimenter l'ensemble des réalisations a posteriori  $\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{z}'_n$ . Si  $u > \alpha$  alors le candidat est refusé. La méthode est répétée jusqu'à ce le nombre de candidats acceptés atteigne un seuil défini par l'utilisateur.

L'approche initiale est basée sur un choix de distribution a priori symétrique tel que  $p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}_n|\mathbf{z}'_n) = p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}'_n|\mathbf{z}_n)$ . Sous cette condition, (1.74) se réécrit :

$$\alpha = \min \left\{ 1, \frac{\mathcal{L}(\mathbf{z}'_n, \mathbf{Y}^{obs})}{\mathcal{L}(\mathbf{z}_n, \mathbf{Y}^{obs})} \right\} \quad (1.75)$$

L'algorithme est dit «à marche aléatoire» puisque la progression dépend de la réalisation d'une distribution uniforme. Le principal inconvénient de l'algorithme de Metropolis Hastings est causé par le besoin de définir une distribution a priori. Idéalement cette dernière doit être le plus proche possible de la distribution a posteriori (qui est inconnue). Avec l'algorithme adaptatif de Metropolis Hastings [66], la distribution a priori est modifiée au cours du processus à partir des points générés acceptés. La marche aléatoire peut nécessiter un grand nombre d'itérations avant que la distribution a posteriori converge. Au lieu de s'appuyer uniquement sur une marche aléatoire pour échantillonner la distribution a posteriori, les algorithmes de Monte Carlo Hamiltonien [67] exploitent le gradient de la distribution a posteriori pour construire une chaîne de Markov à l'aide de la dynamique Hamiltonienne. La plupart des algorithmes MCMC sont peu performants lorsque la distribution cible présente une forte corrélation entre les paramètres. L'algorithme d'ensemble affine invariant [68] atténue ce problème. Il a la propriété d'être invariant aux transformations affines de la distribution cible. Cela signifie que s'il existe une transformation affine de la distribution cible difficile à échantillonner en une distribution cible plus facile à échantillonner, l'algorithme d'ensemble affine invariant échantillonne les deux distributions avec la même facilité sans exiger explicitement cette transformation affine.

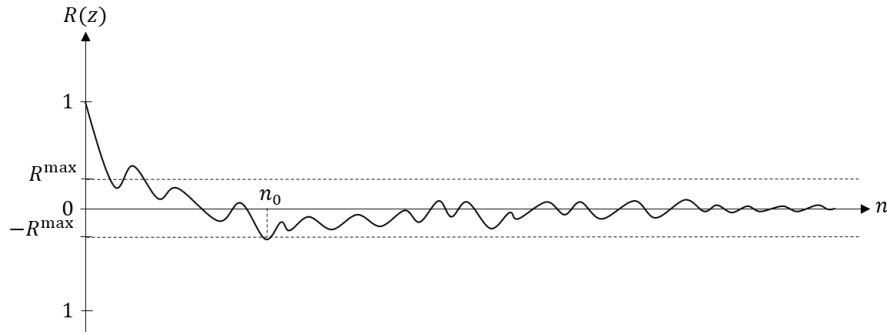
### 1.3.2.2.2 Convergence de la méthode MCMC

Un inconvénient majeur de la méthode MCMC est le nombre élevé d'itérations nécessaire avant que la méthode ne converge. Ainsi, tant que la méthode n'a pas convergé, tous les candidats acceptés sont à extraire de l'ensemble des réalisations a posteriori. Cette phase s'appelle le *burn-in*. En post-traitement, un critère seuil de corrélation  $R^{\max}$  est défini. Le dernier instant  $n_0$  où la valeur absolue de la corrélation  $R(\mathbf{z}_n)$  est supérieure au seuil est calculé tel que :

$$\exists! n_0 \mid \forall n > n_0, |R(\mathbf{z}_n)| < R^{\max} \quad (1.76)$$

Ainsi, seuls les candidats acceptés après l'instant  $n_0$  sont conservés. Cette approche est illustrée avec la Figure 1.14.

La convergence de la méthode MCMC dépend de plusieurs facteurs : le coût du modèle, la largeur et la forme des distributions a priori, la corrélation entre les variables et le nombre de variables aléatoires. Si le coût du modèle est élevé, il est possible de mettre en place un métamodèle moins coûteux. Si le nombre de variables aléatoires est élevé, il peut être réduit en ne considérant que celles qui ont une influence significative sur la grandeur d'intérêt (cette influence peut être quantifiée au préalable avec une analyse de sensibilité). En revanche, les


 FIGURE 1.14 – Représentation schématique de l'évolution des corrélations et du critère de *burn-in*

distributions a priori doivent être choisies les plus proches possibles des distributions a posteriori. Sans information, ce choix est complexe. Les distributions a priori sont alors souvent choisies uniformes (ce qui est la distribution la moins informative) et les variables aléatoires sont supposées indépendantes. Ce manque de connaissances peut avoir un impact significatif sur la convergence de la méthode MCMC aussi bien en temps qu'en précision.

### 1.3.3 Définitions de la fonction de performance

Un fois les incertitudes considérées définies (cf. 1.3.1) et calibrées (cf. 1.3.2), le modèle d'endommagement sélectionné (cf. 1.2), il ne reste plus qu'à définir la fonction de performance avant de réaliser l'analyse de fiabilité. Comme vu précédemment, les quantités  $R$  et  $S$  suffisent à définir la fonction de performance. Cependant, en fonction du problème considéré et du choix de la quantité d'intérêt, leur formulation peut varier.

#### 1.3.3.1 Expression en fonction du nombre de cycles

Dans le cadre d'une étude du nombre de cycles à rupture,  $R$  et  $S$  se formulent comme suivant :  $R = N(\mathbf{Z})$  et  $S = n(\mathbf{Z}, t)$ . La fonction de performance s'écrit alors :

$$G(\mathbf{Z}, t) = N(\mathbf{Z}) - n(\mathbf{Z}, t) \quad (1.77)$$

Cette formulation nécessite la modélisation stochastique des densités de probabilité des incertitudes inhérentes au problème. L'une concerne la résistance en fatigue et est notée  $N$ . Tandis que l'autre concerne les sollicitations de la structure et est notée  $n$ . La modélisation stochastique de  $N$  est le plus souvent réalisée à partir d'essais expérimentaux [69, 70].  $N$  dépend principalement de la géométrie et du matériau. La modélisation stochastique de  $n$  est le plus souvent réalisée à partir de mesures en service [71].  $n$  dépend principalement du chargement et donc du temps.

#### 1.3.3.2 Expression en fonction du dommage

Dans le cadre d'un étude du dommage,  $R$  et  $S$  se formulent :  $R = D_C$  et  $S = D(\mathbf{Z}, t)$ . La fonction de performance s'écrit alors :

$$G(\mathbf{Z}, t) = D_C - D(\mathbf{Z}, t) \quad (1.78)$$

avec respectivement  $D_C$  et  $D$  les dommages critique et structurel. Le plus souvent  $D$  est une variable aléatoire tandis que  $D_C$  est une variable déterministe [72]. Mais il arrive que l'incertitude due au calcul de  $D$  soit prise en compte dans  $D_C$ , rendant aussi cette variable aléatoire. Les formulations de ces deux quantités sont nombreuses et dépendent du choix du modèle d'endommagement. Dans un cadre fiabiliste, la méthode la plus souvent sélectionnée est le cumul linéaire de Palmgren et Miner.

### 1.3.3.2.1 Palmgren et Miner dans un carte fiabiliste

Usuellement, une courbe SN est représentée soit par une approximation bilinéaire soit par une approximation trilineaire. Dans le cas de l'approximation bilinéaire, le nombre de cycles à rupture s'écrit :

$$\log_{10}(N) = \begin{cases} a \log_{10}(\Delta\sigma) + \log_{10}(b) & \text{si } 2\sigma_y^\mu \leq \Delta\sigma \\ +\infty & \text{si } \Delta\sigma < 2\sigma_y^\mu \end{cases} \quad (1.79)$$

Dans le cas l'approximation trilineaire, le nombre de cycles à rupture se réécrit :

$$\log_{10}(N) = \begin{cases} a_1 \log_{10}(\Delta\sigma) + \log_{10}(b_1) & \text{si } \Delta\sigma^* \leq \Delta\sigma \\ a_2 \log_{10}(\Delta\sigma) + \log_{10}(b_2) & \text{si } 2\sigma_y^\mu \leq \Delta\sigma < \Delta\sigma^* \\ +\infty & \text{si } \Delta\sigma < 2\sigma_y^\mu \end{cases} \quad (1.80)$$

Avec  $(a, b)$  les paramètres SN de l'approximation bilinéaire,  $(a_1, a_2, b_1, b_2, \Delta\sigma^*)$  les paramètres SN de l'approximation trilineaire et  $\sigma_y^\mu$  la limite de fatigue asymptotique. Dans [73], deux variables aléatoires sont introduites. La première,  $\xi_{\Delta\sigma}$  modélise le facteur d'erreur sur  $\Delta\sigma$ . La seconde,  $D_C$  modélise l'incertitude sur la règle de Palmgren et Miner. Dans le cas d'une approximation bilinéaire, la fonction de performance s'écrit :

$$G = D_C - b \xi_{\Delta\sigma}^a \sum_{i=1}^I \Delta\sigma_i^a \quad (1.81)$$

Dans le cas d'une approximation trilineaire, la fonction de performance s'écrit :

$$G = D_C - \left( b_1 \xi_{\Delta\sigma}^{a_1} \sum_{i=1, \Delta\sigma^* \leq \Delta\sigma_i}^I \Delta\sigma_i^{a_1} + b_2 \xi_{\Delta\sigma}^{a_2} \sum_{i=1, \Delta\sigma_i < \Delta\sigma^*}^I \Delta\sigma_i^{a_2} \right) \quad (1.82)$$

Il existe alors deux méthodes pour simplifier ces fonctions de performance. La première suit les instruction de Madsen [74] et la seconde permet de simplifier l'expression du dommage attendu  $D$ .

- Avec la méthode de Madsen, pour calculer la fonction de performance il est nécessaire de calculer  $\sum \Delta\sigma_i^a$ . Cependant, la distribution de cette variable aléatoire est souvent difficile à obtenir. Si le nombre de cycles est grand et la variation des contraintes est suffisamment faible, alors la distribution peut être approximée par une loi normale.
- Avec une approximation du dommage attendu, Straub [75] propose de remplacer la somme des variables aléatoires par son espérance.

$$D = \sum_{i=1}^I D_i \approx \mathbb{E}[D_i] \quad (1.83)$$

## 1.4 Premiers choix réalisés pour l'analyse de fiabilité en fatigue

Durant ce travail bibliographique, trois grands thèmes ont été abordés : la fiabilité, la fatigue et le couplage fiabilité-fatigue.

Dans la première section, il a été introduit le concept de fiabilité dépendant du temps ainsi que quelques méthodes permettant de calculer les probabilités de défaillance instantanée et cumulée. Il a alors été souligné que l'un des enjeux premiers de ces méthodes était la gestion d'un bon compromis entre précision et temps de calculs. En effet, dans le cas de la fiabilité dynamique, augmenter la dimension temporelle permet de ne rater aucun point de défaillance mais revient aussi à augmenter la dimension stochastique du problème et donc le coût de calcul. Dans la seconde section, différentes méthodes de calcul du dommage ont été présentées. La première fait l'hypothèse d'un cumul linéaire du dommage, tandis que la seconde ne formule pas cette hypothèse mais implique des coûts de calculs plus élevés. Dans la troisième section, les notions de fiabilité et de fatigue ont été croisées. Cela a notamment permis d'étudier les différentes sources d'incertitudes propres aux études en fatigue ainsi que la formulation de fonctions de performance dépendant du dommage.

Pour la suite, deux critères sont formulés afin d'assurer un certain niveau de précision durant l'estimation de la probabilité de défaillance d'une structure sollicitée en fatigue : prendre en compte l'historique de chargement et ne formuler aucune hypothèse a priori sur la forme de la fonction de performance. Respecter le premier critère implique de réaliser un cumul non linéaire du dommage. D'après l'étude bibliographique réalisée, le modèle 2SD est préconisé. Puisqu'il s'agit d'un modèle d'endommagement continu, la fonction de performance la plus adaptée correspond à la formulation (1.78). Le dommage étant croissant au cours du temps et  $D_C$  ne dépendant pas du temps,  $G(\mathbf{Z}, t)$  est alors décroissante. Toutes les méthodes évoquées pour la fiabilité peuvent donc être utilisées (qu'elles soient statiques ou dynamiques). Pour cette raison, la probabilité de défaillance instantanée n'est par la suite plus distinguée de la probabilité de défaillance cumulée et se note  $P_f(t)$ . Respecter le second critère implique d'écarter les méthodes SORM, FORM, PHI2 et PHI2+ puisqu'elles supposent que la fonction de performance est linéaire ou quadratique. De ces deux critères, un nouvel enjeu se formule alors. Le modèle mécanique préconisé est un modèle incrémental et du fait des temps longs considérés son coût numérique est extrêmement élevé. Dans le cadre d'une analyse de fiabilité, il est donc nécessaire de définir judicieusement une stratégie permettant de conserver les coûts numériques contrôlés.

Dans le chapitre suivant les paramètres matériau du modèle d'endommagement sont calibrés à partir de courbes SN.



## Chapitre 2

# Estimation des paramètres matériaux à partir de courbes SN probabilistes

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Reconstruction des courbes SN probabilistes . . . . .</b>	<b>40</b>
2.1.1	Courbes SN probabilistes . . . . .	40
2.1.2	Application 1D du modèle 2SD . . . . .	41
<b>2.2</b>	<b>Identification et caractérisation des paramètres matériau incertains</b>	<b>43</b>
2.2.1	Sélection des paramètres matériaux incertains . . . . .	43
2.2.2	Stratégie de calibration des paramètres matériau . . . . .	43
2.2.3	Formulation d'un critère conservatif . . . . .	45
<b>2.3</b>	<b>Mise en œuvre à partir de courbes SN DNV d'un joint tubulaire .</b>	<b>48</b>
2.3.1	Avec prise en compte de la limite de fatigue asymptotique . . . . .	48
2.3.2	Sans prise en compte de la limite de fatigue asymptotique . . . . .	48
<b>2.4</b>	<b>Conclusion sur la méthode de calibration des paramètres matériau</b>	<b>53</b>

---

L'objectif de ce chapitre est de calibrer les paramètres matériau du modèle 2SD, présentés en section 1.2.3.2, à partir de courbes SN probabilistes. Il s'agit de diverses améliorations apportées aux travaux réalisées dans [76, 51]. En d'autres termes, l'objectif est de résoudre un problème inverse de façon à ce que le modèle 2SD permette de reconstruire des courbes SN issues d'essais de fatigue. Pour ce faire, une stratégie en trois temps est développée. Pour réaliser la calibration, de nombreux appels au modèle sont réalisés. Dans un premier temps, une formulation peut coûteuse permettant de construire des courbes SN avec le modèle 2SD est définie. Dans un second temps, la méthode utilisée pour calibrer les paramètres est présentée en cinq parties : sélection des paramètres incertains, sélection de la méthode de calibration, sélection des distributions probabilistes a priori, sélection de la fonctionnelle à minimiser et ajout d'un critère assurant des résultats conservatifs. Dans un dernier temps, la stratégie est appliquée à partir de courbes SN issues d'un joint tubulaire.

La stratégie proposée est valorisée dans [77].

## 2.1 Reconstruction des courbes SN probabilistes

### 2.1.1 Courbes SN probabilistes

Det Norske Veritas (DNV) [69] fournit un jeu de coefficients pour modéliser des courbes SN probabilistes avec une approximation bilinéaire en coordonnées log-log. Ces coefficients pro-

viennent d'essais de fatigue expérimentaux. Ils dépendent de la géométrie de la structure considérée ainsi que de ses propriétés matériau. La distribution du nombre de cycles à rupture  $N$  pour une amplitude de contrainte  $\Delta\sigma_i$  se calcule avec l'équation (1.79) rappelée ci-dessous.

$$\log_{10}(N) = \begin{cases} a \log_{10}(\Delta\sigma) + \log_{10}(b) & \text{si } 2\sigma_y^\mu \leq \Delta\sigma \\ +\infty & \text{si } \Delta\sigma < 2\sigma_y^\mu \end{cases} \quad (2.1)$$

Avec  $a$  une grandeur déterministe et  $\log_{10}(b)$  une réalisation de  $\log_{10}(B) \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}_{\log B}, \mathbb{V}_{\log B})$  (une distribution normale d'espérance  $\mathbb{E}_{\log B}$  et de variance  $\mathbb{V}_{\log B}$ ). Chaque courbe SN  $N(\Delta\sigma_i)$  est obtenue pour une réalisation de  $B$ . Selon ce modèle,  $N(\Delta\sigma_i)$  suit donc une loi log-normale. Dans ce format probabiliste, une courbe SN relie les points d'un quantile de la distribution de  $N$  pour chaque  $\Delta\sigma_i$ .

Dans le DNV [69], plusieurs classes sont définies pour caractériser la variété des joints soudés et leurs conditions d'exploitation (avec ou sans protection cathodique, avec ou sans exposition à l'eau de mer, etc.). Par exemple, en considérant que la limite de fatigue asymptotique est atteinte après  $10^6$  cycles, la classe T correspond à un joint tubulaire et la classe D est utilisée pour le calcul au point chaud (*hot spot*) [78]. La valeur de  $a$  et la distribution de  $\log_{10}(B)$  sont identiques pour ces deux classes dans le cas d'une exposition à l'eau de mer avec protection cathodique. La valeur déterministe de la pente est  $a = -3$ . La valeur recommandée de la variance est  $\mathbb{V}_{\log B} = 0.2^2$  dans DNV [69] et  $\mathbb{V}_{\log B} = 0.275^2$  dans ARSEM [70]. Ici,  $\mathbb{V}_{\log B} = 0.27^2$  est choisie afin de représenter la variabilité du matériau. Finalement, la valeur de  $\log_{10}(b)$  pour un quantile 2.3% ( $Q_{2.3}$ ) est  $\log_{10}(b) = 11.764$ . Sachant que  $\log_{10}(B)$  suit distribution normale  $\mathcal{N}(\mathbb{E}_{\log B}, \mathbb{V}_{\log B} = 2.7^2)$ , il est possible d'en déduire des courbes SN correspondantes à d'autres quantiles comme illustré avec la Figure 2.1 pour 5% ( $Q_5$ ) et 25% ( $Q_{25}$ ). Dans cette Figure, la distribution de  $N(\Delta\sigma_i)$  est tracée pour 10 amplitudes de contraintes  $\Delta\sigma_i$  à partir de (2.1). De plus, la Figure 2.2 représente les quantiles obtenus pour différentes valeurs de la variance  $\mathbb{V}_{\log B}$ .

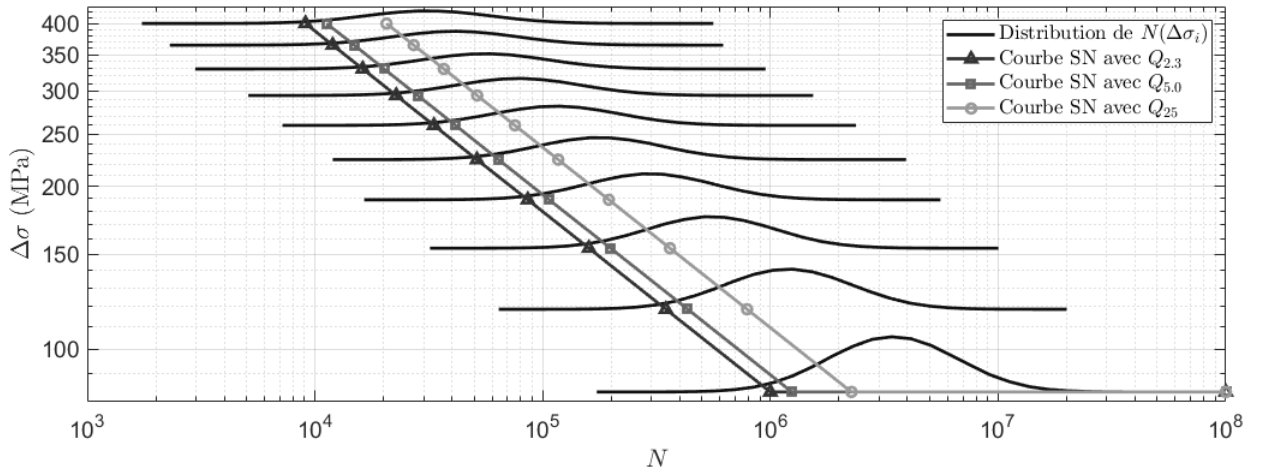
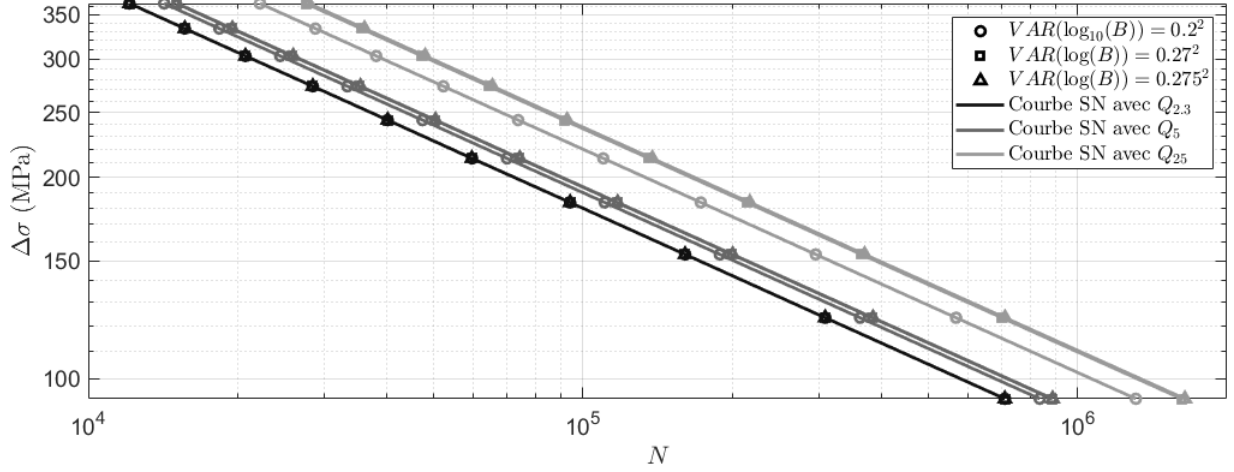


FIGURE 2.1 – Courbes SN pour différents quantiles et  $\mathbb{V}_{\log B} = 7.2^2$

Par la suite, le quantile utilisé pour définir l'objectif de calibration est  $Q_{2.3}$ . C'est le quantile utilisé dans les vérifications réglementaires semi-probabilistes. De plus, les courbes SN construites avec (2.1) sont appelées courbes observées (ou courbes de référence).

### 2.1.2 Application 1D du modèle 2SD

Sachant que la plus part des courbes SN sont issues d'essais de traction-compression avec une amplitude de contrainte constante et centrée en zéro, le modèle 2SD est appliqué dans ce cadre d'étude. D'après les équations du modèle 2SD et dans le cas d'un problème 1D (une dimension), une relation analytique entre le nombre de cycles à rupture estimé  $\hat{N}$  et les paramètres matériau


 FIGURE 2.2 – Courbes SN pour différents quantiles et différentes variances  $\mathbb{V}_{\log B}$ 

du modèle 2SD est trouvée :

$$\hat{N}(\Delta\sigma_i) = \frac{2C + 3E}{6(\Delta\sigma_i - 2\sigma_y^\mu)} p_D + \frac{C(2ES)^s(2s + 1)}{3(\tilde{\sigma}_i^{\mu^{2s+1}} - (2\sigma_y^\mu - \tilde{\sigma}_i^\mu)^{2s+1})} D_C \quad (2.2)$$

Avec  $\Delta\sigma_i$  l'amplitude de contrainte à l'échelle macroscopique et  $\tilde{\sigma}_i^\mu = \frac{C\Delta\sigma_i + 3E\sigma_y^\mu}{2C + 3E}$  la contrainte effective à l'échelle microscopique. Cette formule est une correction de celle proposée dans [51] et est démontrée en Annexe 1. À noter que les courbes SN indiquent le nombre de cycles à rupture  $N(\Delta\sigma_i)$  tandis que (2.2) indique le nombre de cycles entraînant la formation d'une fissure à l'échelle microscopique  $D^\mu = D_C$ . Par conséquent, identifier les distributions des paramètres matériau du modèle 2SD en utilisant les courbes SN suppose que lorsque le dommage en fatigue atteint  $D_C$ , il y a rupture après seulement quelques cycles supplémentaires.

## 2.2 Identification et caractérisation des paramètres matériau incertains

### 2.2.1 Sélection des paramètres matériaux incertains

Le modèle 2SD fait intervenir 8 paramètres matériau :  $E$ ,  $\nu$ ,  $s$ ,  $\sigma_y^\mu$ ,  $C$ ,  $p_D$ ,  $S$ ,  $D_C$ . Une étude bibliographique est réalisée afin de distinguer les paramètres à considérer comme déterministes de ceux à considérer comme incertains :

- D'après [79], dans le cas des aciers, les coefficients de variation de  $E$  et  $\nu$  sont inférieurs à 5%. Par conséquent, au vu des autres variabilités,  $E$  et  $\nu$  sont considérés déterministes où  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Pa et  $\nu = 0.30$ .
- D'après Lemaitre [80, 51], la valeur la plus appropriée de  $s$  est 1 .
- La limite élastique microscopique  $\sigma_y^\mu$  est facilement identifiable via les courbes SN puisqu'elle correspond à la limite de fatigue asymptotique. Dans le cas du joint tubulaire, elle vaut  $\sigma_y^\mu = 41.703$  MPa.

Les paramètres  $(E, \nu, s, \sigma_y^\mu)$  sont donc considérés déterministes et  $\mathbf{Z} = (C, p_D, S, D_C)$  aléatoires.

### 2.2.2 Stratégie de calibration des paramètres matériau

Comme défini en section 1.3.2.1, plusieurs méthodes de calibration existent : *Bayesian Inference*, *Transport Maps* ou MCMC. Dans [51], les auteurs utilisent cette dernière méthode avec l'algorithme de Metropolis Hastings. Ne connaissant pas la forme des distributions a posteriori, les distributions a priori sont par défaut considérées uniformes et la fonction de vraisemblance est définie comme suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\mathbf{z}, N(\Delta\sigma_i)) = \prod_{i=1}^I \varphi_\xi(\xi_i) \\ \xi_i = \min_{k \in \llbracket 1; K \rrbracket} |\log_{10}(N_k(\Delta\sigma_i)) - \log_{10}(\hat{N}(\Delta\sigma_i, \mathbf{z}))| \end{cases} \quad (2.3)$$

Avec  $I$  le nombre d'amplitudes observées,  $K$  le nombre de réalisations associées à chaque amplitude et  $\varphi_\xi$  la fonction densité de probabilité du terme d'erreur  $\xi$ . La méthode de calibration MCMC repose sur un principe clef : le support des distributions doit être suffisamment large pour contenir l'ensemble des potentielles réalisations observées de chaque variable aléatoire et suffisamment fin pour éviter des coûts numériques élevés dus à la prise en compte de réalisations irréalistes. Ceci est un challenge pour les sorties avec une grande variabilité. Pour cette raison, d'après un jugement d'expert, les auteurs de [51] ont réduit manuellement la taille des supports avant de réaliser la calibration. Dans les prochaines sections, cette méthode est améliorée selon deux axes : en proposant une stratégie permettant de justifier le choix des supports et en ajoutant un critère conservatif durant l'identification des distributions probabilistes.

#### 2.2.2.1 Stratégie pour déduire des supports améliorés à partir de supports larges

La méthode MCMC avec l'algorithme de Métropolis Hastings est connue pour être à convergence lente [81] et nécessite de nombreux appels au modèle. L'objectif de cette section est de définir des supports fins aux distributions a priori de façon à éviter des coûts de calculs trop élevés durant l'identification des distributions. Dans [47, 82, 79], plusieurs jeux de paramètres pour les aciers sont proposés. En considérant la valeur la plus faible et la plus élevée pour chaque paramètre, avec  $Z_j \in [Z_j^{L^{\min}}, Z_j^{L^{\max}}]$  pour  $j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ , un premier support est défini tel que :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} C \\ p_D \\ S \\ D_C \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z}^{L^{\min}} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^3 \\ 0 \\ 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{(MPa)} \\ \text{(MPa)} \end{matrix} \quad \mathbf{Z}^{L^{\max}} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 10^6 \\ 10 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{(MPa)} \\ \text{(MPa)} \end{matrix}$$

Cependant, ces supports ne correspondent pas à un matériau donné puisqu'ils se composent de valeurs issues de différentes sources bibliographiques travaillant sur différents types d'aciers. En conséquence, l'objectif est de fournir des supports améliorés  $[Z_j^{*\min}, Z_j^{*\max}]$  inclus dans les supports larges  $[Z_j^{L\min}, Z_j^{L\max}]$  (où  $L$  signifie large). Leurs bornes sont déterminées de façon à ce que la différence entre les courbes SN observée et estimée pour  $Q_{2.3}$  soit minimale. Cela revient à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} (\mathbf{Z}^{*\min}, \mathbf{Z}^{*\max}) = \underset{(Z_j^{\min}, Z_j^{\max}) \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left( \left| \frac{a - \hat{a}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^{\min}, \mathbf{Z}^{\max})}{a} \right| + \left| \frac{b - \hat{b}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^{\min}, \mathbf{Z}^{\max})}{b} \right| \right) \\ \Omega = \{(Z_j^{\min}, Z_j^{\max}) \in [Z_j^{L\min}, Z_j^{L\max}] \times [Z_j^{L\min}, Z_j^{L\max}] \mid \forall j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, Z_j^{\min} < Z_j^{\max}\} \end{cases} \quad (2.4)$$

Avec  $(a; \log_{10} b) = (-3; 11.764)$  comme indiqué en section 2.1.1 et  $(\hat{a}, \hat{b})$  obtenus par régression linéaire de  $N(\Delta\sigma_i, \mathbf{Z})$  pour  $Q_{2.3}$ . Sachant que  $a$  et  $\log_{10}(b)$  correspondent respectivement à la pente et à l'ordonnée à l'origine de la courbe SN, une analyse de sensibilité élastique One-At-a-Time [83] est réalisée pour étudier l'influence de chacun des paramètres incertains sur  $(\hat{a}, \hat{b})$ . La Figure 2.3 montre le nombre de cycles à rupture obtenu avec (2.2) pour  $I = 10$  et pour trois valeurs de  $Z_j$  :  $Z_j^{L\min}$ ,  $Z_j^{L\max}$  et  $Z_j^{L\text{moy}} = \frac{1}{2}(Z_j^{L\min} + Z_j^{L\max})$ . Pour chaque sous Figure, les courbes SN avec les mêmes marqueurs sont obtenues en faisant varier le même paramètre et en fixant les autres. Dans Figure 2.3.a, lorsque  $C$  est faible il influe principalement sur la pente de la courbe SN tandis que lorsqu'il est élevé il influe sur l'ordonnée à l'origine. Dans Figure 2.3.c, pour des valeurs élevées de  $(C, S, D_C)$ ,  $p_D$  influe uniquement sur la pente tandis que que pour des valeurs faibles, il influe principalement sur l'ordonnée à l'origine. Dans les Figures 2.3.b et 2.3.d, quels que soient les valeurs de  $(C, p_D)$ ,  $S$  et  $D_C$  influent uniquement sur l'ordonnée à l'origine.

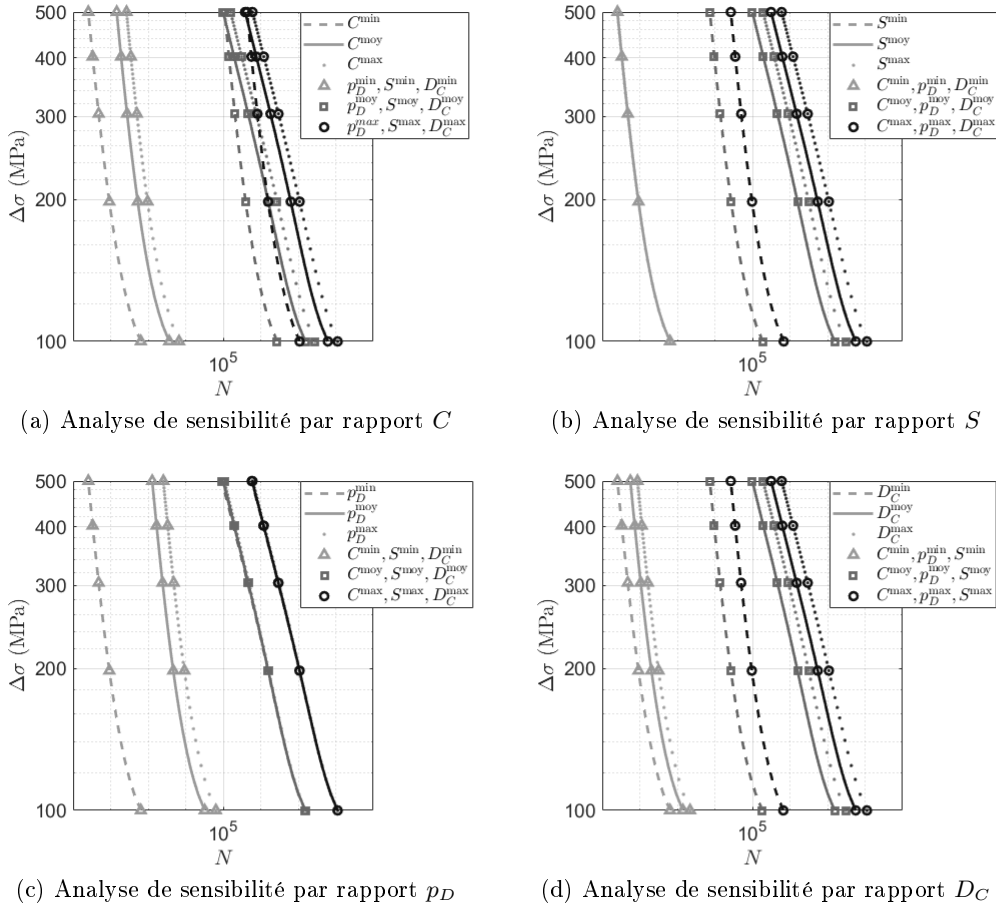


FIGURE 2.3 – Analyse de sensibilité élastique d'une courbe SN par rapport  $\mathbf{Z}$

De l'étude de sensibilité précédente, deux types de variables aléatoires sont distinguées : celles qui influent sur l'ordonnée à l'origine  $(C, D_C, S)$  et celles qui influent sur la pente  $(C, p_D)$ . À partir de ces observations, l'optimisation consiste à tronquer les distributions de  $\mathbf{Z}$  en diminuant la taille de ses supports. Puisque la troncature des supports de  $(C, p_D)$  affecte  $\hat{a}$  et celle de  $(C, D_C, S)$  affecte  $\hat{b}$ , (2.4) se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{Z}_{\min}^*, \mathbf{Z}_{\max}^*) = \underset{(Z_{\min_j}, Z_{\max_j}) \in \Omega}{\operatorname{argmin}} (\theta + \gamma) \\ \theta = \left| \frac{a - \hat{a}(\mathbf{Z}, Z_1^{\min}, Z_1^{\max}, Z_4^{\min}, Z_4^{\max})}{a} \right| \\ \gamma = \left| \frac{b - \hat{b}(\mathbf{Z}, Z_1^{\min}, Z_1^{\max}, Z_2^{\min}, Z_2^{\max}, Z_3^{\min}, Z_3^{\max})}{b} \right| \\ \Omega = \{(Z_j^{\min}, Z_j^{\max}) \in [Z_j^{L\min}, Z_j^{L\max}] \times [Z_j^{L\min}, Z_j^{L\max}] \mid \forall j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, Z_j^{\min} < Z_j^{\max}\} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

### 2.2.2.2 Choix des paramètres $I$ et $K$

Pour terminer, les valeurs  $(I, K)$  doivent être choisies. Pour atteindre un niveau de confiance de 99% dans la description de  $N(\Delta\sigma_i)$ ,  $K$  est fixé à  $2 \cdot 10^4$ . Concernant  $I$ , plus il est élevé mieux les contraintes sont discrétisées mais plus le coût numérique est élevé. Un compromis est trouvé pour  $I = 10$  avec  $\Delta\sigma_i \in [93.4, 493.4]$  MPa. L'ensemble des valeurs  $\Delta\sigma_i$  considérées est indiqué dans le Tableau ci-dessous.

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Delta\sigma_i$ (MPa)	93.4	137.8	182.3	226.7	271.2	315.6	360.1	404.5	449.0	493.4

TABLE 2.1 – Amplitudes de contraintes considérées

### 2.2.2.3 Supports améliorés obtenus

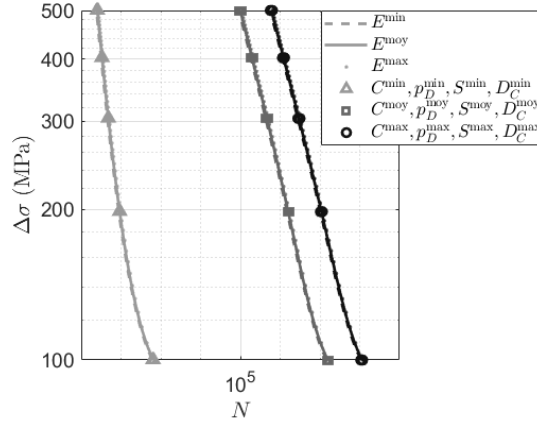
Pour  $(I, K) = (10, 2 \cdot 10^4)$ , l'optimisation est réalisée en résolvant (2.5). Les résultats suivants sont obtenus.

$$\left\{ \begin{array}{l} C \in [2 \cdot 10^6; 3 \cdot 10^6] \text{ (MPa)} \\ p_D \in [0; 1] \\ S \in [10^{-3}; 1] \text{ (MPa)} \\ D_C \in [0; 0.5] \end{array} \right. \quad (2.6)$$

La définition des supports terminée, le choix de fixer  $(E, s, \sigma_y^\mu)$  comme déterministes peut à présent être discuté.  $\sigma_y^\mu$  est imposé lors de la construction des courbes SN de référence, il est donc cohérent de le considérer déterministe.  $s$  doit être posé comme égale à 1 d'après l'auteur du modèle 2SD, ce choix n'est pas remis en question. Pour  $E$ , il est indiqué que son coefficient de variation est inférieur à 5%. Même si son support est de petite taille, il est possible que la variabilité de  $E$  est une influence sur la construction d'une courbe SN. Pour cette raison une analyse de sensibilité est réalisée en considérant trois valeurs :  $E^{\min} = E(1 - 0.05)$ ,  $E^{\text{moy}} = E$  et  $E^{\max} = E(1 + 0.05)$ . Les résultats sont présentés Figure 2.4. Les courbes de la même couleur sont toutes superposées. Cela signifie que quelle que soit la valeur de  $E$  considérée, cette dernière n'a pas d'influence sur la courbe SN tracée. Il est donc cohérent de considérer  $E$  comme déterministe.

### 2.2.3 Formulation d'un critère conservatif

Le but de cette sous-section est d'améliorer la méthode d'identification proposée dans [51] pour obtenir un meilleur ajustement tout en garantissant des courbes SN conservatives : le quantile des courbes SN construites avec le modèle 2SD doit être inférieur au quantile  $Q_{2.3}$  de référence et cela quelle que soit la contrainte.

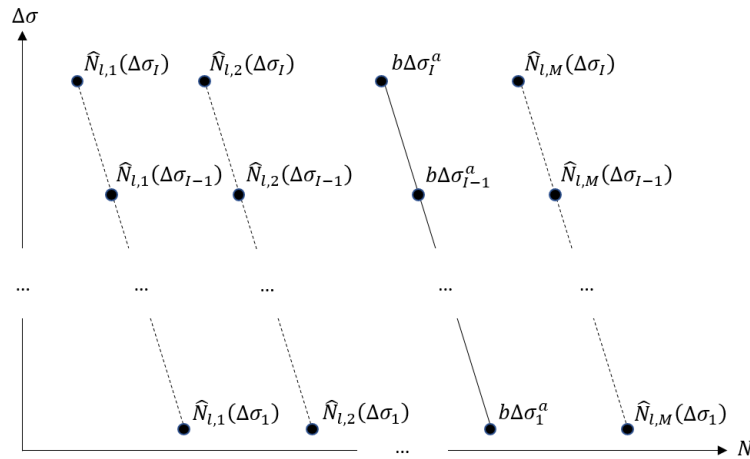

 FIGURE 2.4 – Analyse de sensibilité élastique d'une courbe SN par rapport  $E$ 

### 2.2.3.1 Recherche aléatoire

Comme la méthode MCMC n'est pas une méthode déterministe, il est possible d'exploiter sa variabilité de sortie.  $L \times M$  identifications de  $\mathbf{Z}$  sont effectuées, où  $L$  est le nombre de rééchantillonnage de  $N_k(\Delta\sigma_i)$  et  $M$  est le nombre d'identifications réalisées pour chaque échantillon  $N_k(\Delta\sigma_i)$ . Pour  $l \in \llbracket 1; L \rrbracket$  et  $m \in \llbracket 1; M \rrbracket$ , le nombre de cycles à rupture estimé se note  $\hat{N}_{l,m}$ . En conséquence,  $L \times M$  courbes SN estimées sont construites pour  $Q_{2.3}$ . Enfin, l'identification la plus précise de  $\mathbf{Z}$  est celle qui minimise l'erreur entre les courbes SN observée et estimées. L'erreur  $\beta_{l,m}$  est la somme des erreurs relatives entre  $N$  (2.1) et  $\hat{N}$  (2.2) pour chaque amplitude. Elle s'écrit :

$$\beta_{l,m} = \sum_{i=1}^I \frac{|b\Delta\sigma_i^a - \hat{N}_{l,m}(\Delta\sigma_i, \mathbf{Z})|}{b\Delta\sigma_i^a} \quad (2.7)$$

La Figure 2.5 schématise l'ensemble des courbes générées en reprenant les notations définies.


 FIGURE 2.5 – Schématisation des courbes SN de référence et estimées pour le  $l^{\text{ième}}$  échantillon des observations

### 2.2.3.2 Définition du critère conservatif

Il est également souhaitable d'obtenir un résultat optimal conservatif  $(l^*, m^*)$  qui sous-estime le nombre de cycles à rupture. Le problème s'écrit :

$$\begin{cases} (l^*, m^*) &= \arg \min_{(l,m) \in U} \beta_{l,m} \\ U &= \{(l, m) \in \llbracket 1; L \rrbracket \times \llbracket 1; M \rrbracket\} \cap \{(l, m) \in \mathbb{N}^{*2} \mid \forall i \in \llbracket 1; I \rrbracket, b\Delta\sigma_i^a - \hat{N}_{l,m}(\Delta\sigma_i, \mathbf{Z}) \geq 0\} \end{cases} \quad (2.8)$$

### 2.2.3.3 Choix des paramètres $L$ et $M$

Les valeurs de  $(L, M)$  doivent être déterminées. En utilisant l'algorithme MCMC, deux études de convergence indépendantes sont réalisées. Dans la première,  $M = 1$  est fixé et  $L$  varie sur l'intervalle  $\llbracket 1; 20 \rrbracket$ . Dans la seconde,  $L = 1$  est fixé et  $M$  varie sur l'intervalle  $\llbracket 1; 20 \rrbracket$ . Sachant que pour  $(L, M) = (1, 1)$  le temps moyen d'une identification est d'environ 45 minutes (avec environ  $2.5 \cdot 10^5$  appels au modèle) et que le temps de calcul maximum accepté est fixé à 3.5 jours (soit 5040 minutes), alors  $L \times M$  doit être inférieur ou égal à 112. Le problème s'écrit :

$$\begin{cases} (L^*, M^*) &= \arg \min_{(L,M) \in V} \left( \sum_{m=1}^M \beta_{1,m} + \sum_{l=1}^L \beta_{l,1} \right) \\ V &= \{(L, M) \in \llbracket 1; 20 \rrbracket \times \llbracket 1; 20 \rrbracket\} \cap \{(L, M) \in \mathbb{N}^{*2} \mid L \times M \leq 112\} \end{cases} \quad (2.9)$$

Après le calcul de la quantité  $\left( \sum_{m=1}^M \beta_{1,m} + \sum_{l=1}^L \beta_{l,1} \right)$  pour tous les couples  $(L, M) \in V$ , le couple optimal obtenu est  $(L^*, M^*) = (10, 10)$ . Cette optimisation est effectuée sur un maillage pour éviter tous potentiels minimums locaux.



## 2.3 Mise en œuvre à partir de courbes SN DNV d'un joint tubulaire

### 2.3.1 Avec prise en compte de la limite de fatigue asymptotique

Pour  $(I, K) = (10, 2 \cdot 10^4)$ ,  $(L, M) = (10, 10)$ , les amplitudes de contraintes de la Table 2.1 et les supports obtenus en (2.6), la stratégie précédemment définie est appliquée. Le domaine de variabilité en sortie de la méthode MCMC et les courbes SN optimales avec et sans critère conservatif sont représentés sur la Figure 2.6. Chaque point représente le nombre de cycles à rupture estimé pour une amplitude de contrainte donnée. Pour chaque courbe, les points estimés sont alignés. Cette propriété n'est pas imposée lors du MCMC et confirme l'idée que la taille des populations générées par MCMC est suffisamment grande (pour évaluer le quantile à 2.3%) et que le modèle 2SD respecte les propriétés d'une courbe SN. La Figure 2.6 montre également qu'avec le jeu optimal non conservatif le nombre de cycles à rupture est surestimé pour tout  $\Delta\sigma_i \geq 257,6$  MPa. Pour illustrer l'identification, dans la Figure 2.7, le quantile  $Q_{2.3}$  et les distributions du nombre de cycles à ruptures observés et estimés sont tracés. Les erreurs relatives du nombre de cycles à rupture sont indiquées dans la Table 2.2. Les signes confirment la remarque précédente. Il est à noter que les erreurs sont très élevées pour  $\Delta\sigma_1 = 93.40$  MPa. Ceci est justifié par la forme des courbes SN obtenues avec le modèle 2SD. En effet, ces courbes sont de classe  $C^1$  contrairement aux courbes SN observées qui sont bilinéaires, comme illustré sur la Figure 2.8. Ainsi, pour des chargements dont l'amplitude de contrainte est proche de la limite de fatigue asymptotique, les deux approches ne sont plus comparables. Ce n'est cependant pas un problème puisque le modèle 2SD n'est pas dédié à la fatigue gigacyclique, mais uniquement à la fatigue polycyclique.

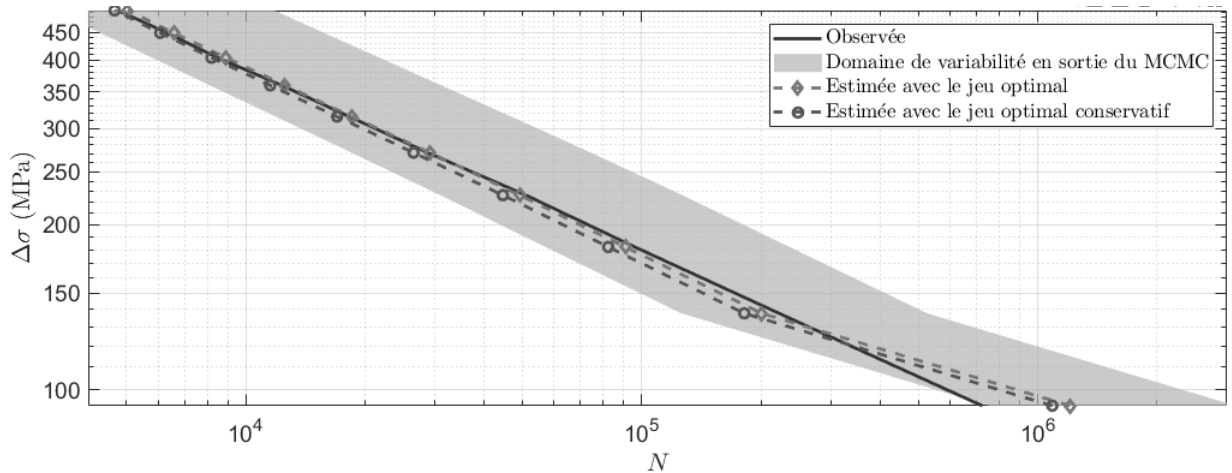


FIGURE 2.6 – Courbes SN avec et sans critère conservatif pour  $\Delta\sigma_i \in [93.4, 493.4]$  MPa

Les moments statistiques de  $\mathbf{Z}$  et ses coefficients de variation sont donnés dans les Tables 2.3 et 2.4 pour le jeu  $(l^*, m^*)$ . Le seul coefficient de corrélation non négligeable est  $R(S, D_C) = -0,260$  ce qui signifie que  $(S, D_C)$  sont corrélés linéairement. Ces coefficients fournissant une information limitée, ils sont complétés par l'étude des distributions jointes tracées sur la Figure 2.9. Aucune corrélation non linéaire significative n'est observée. Les variables aléatoires  $C$  et  $p_D$  sont donc considérées comme indépendantes et  $S$  et  $D_C$  corrélées. De plus, les distributions de  $C$  et  $p_D$  sont équivalentes à des distributions uniformes.

### 2.3.2 Sans prise en compte de la limite de fatigue asymptotique

Comme remarqué précédemment, une courbe SN obtenue avec le modèle 2SD est de classe  $C^1$  contrairement à l'approximation bilinéaire (2.1) fournie par le DNV. Ainsi, pour des chargements

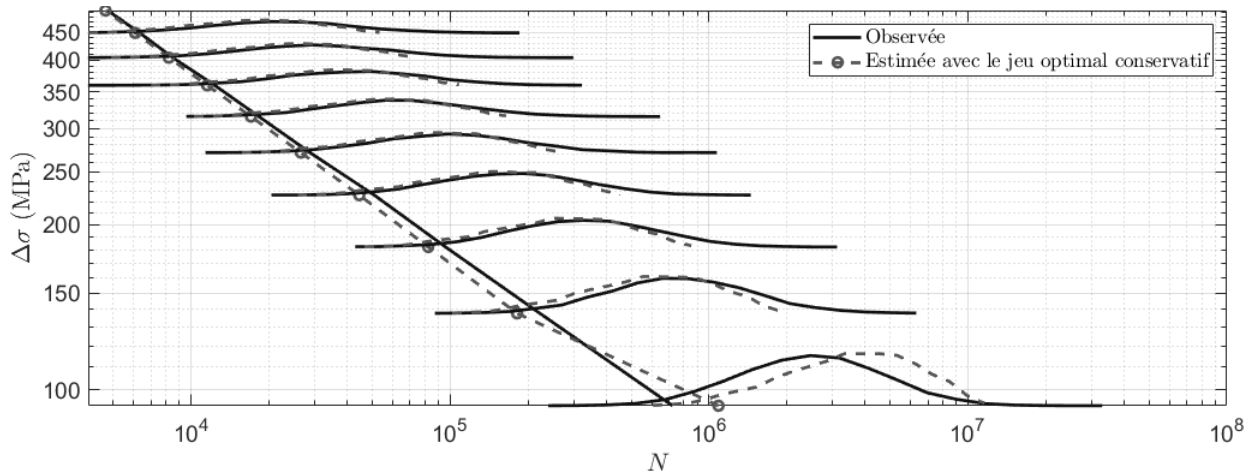


FIGURE 2.7 – Courbes SN ( $Q_{2.3}$ ) et distributions observées et estimées avec le jeu optimal conservatif pour  $\Delta\sigma_i \in [93.4, 493.4]$  MPa

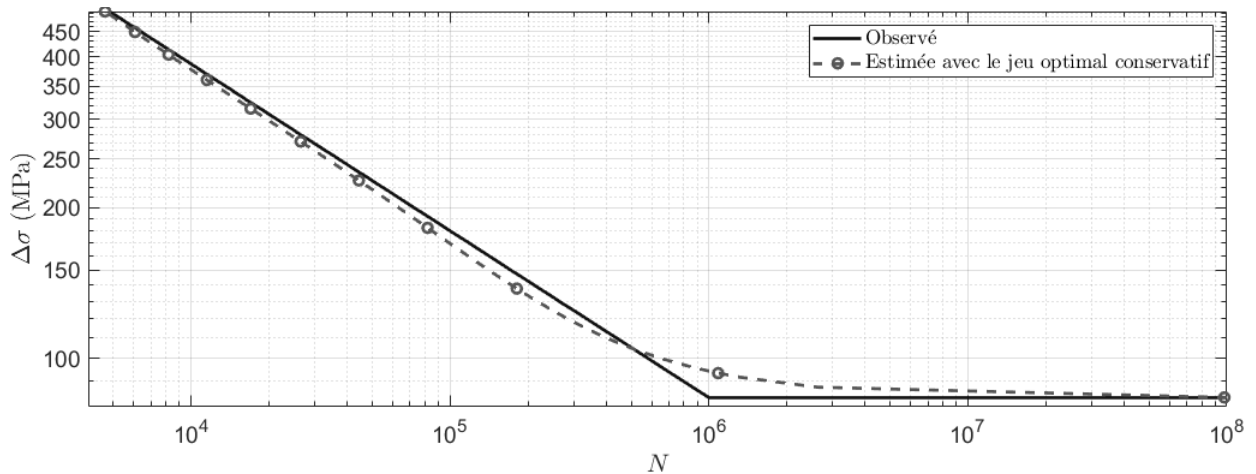


FIGURE 2.8 – Quantile  $Q.23$  des courbes SN observée et estimée avec le jeu optimal conservatif pour  $\Delta\sigma_i \in [93.4, 493.4]$  MPa

$\Delta\sigma_i$ (MPa)	Erreur relative associée au jeu optimal	Erreur relative associée au jeu optimal et conservatif
93.40	-66.77	-50.34
137.8	9.62	18.33
182.3	5.42	14.29
226.7	3.55	12.50
271.2	-1.46	7.81
315.6	-1.36	6.91
360.1	-2.02	6.46
404.5	-5.09	3.43
449.0	-4.14	3.85
493.4	-5.88	1.86

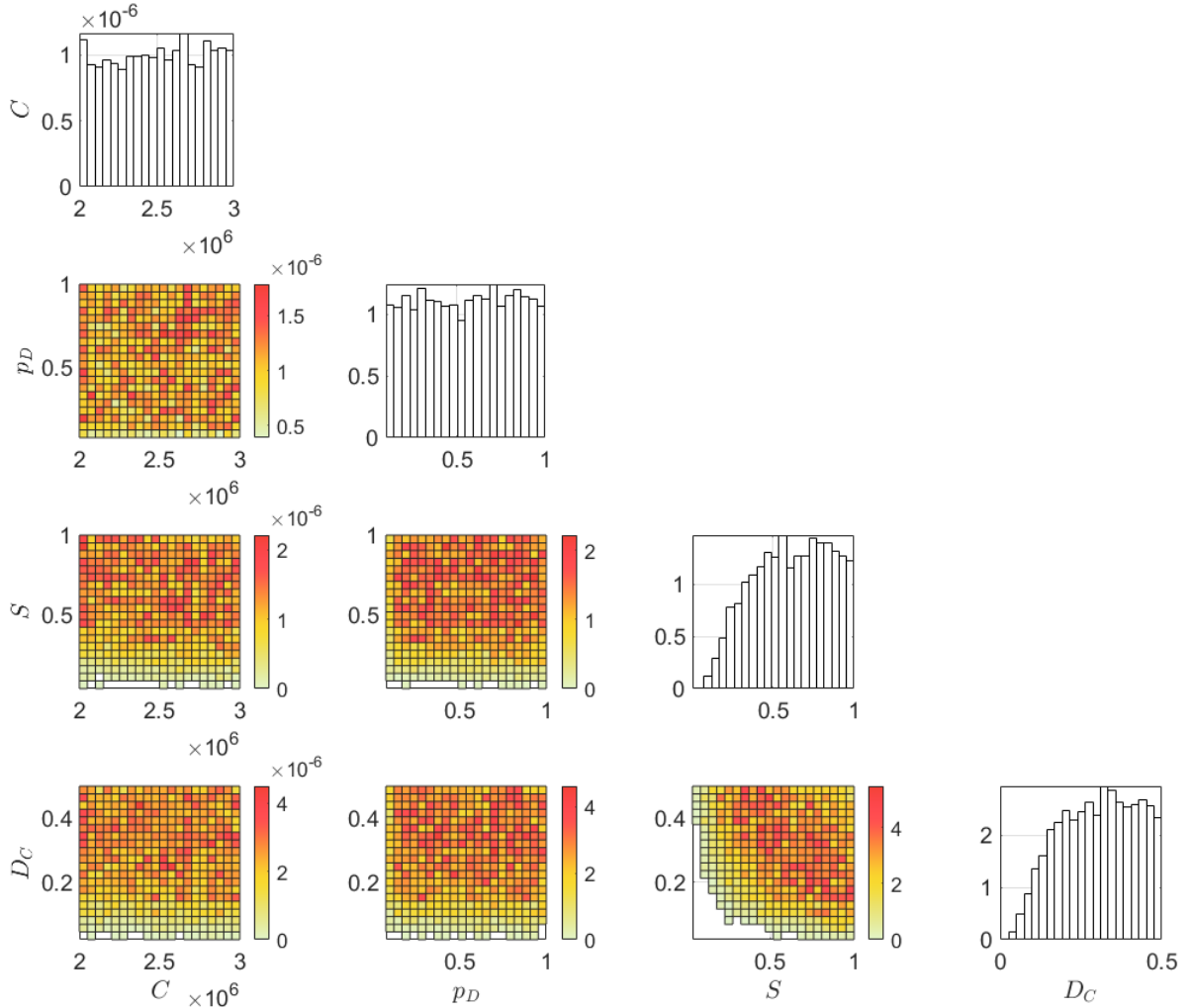
TABLE 2.2 – Erreur relative (%) entre le nombre de cycles à rupture estimé et observé pour  $Q_{2.3}$  et  $\Delta\sigma_i \in [93.4, 493.4]$  MPa

dont l'amplitude de contrainte est proche de la limite de fatigue asymptotique, les deux approches ne sont plus comparables. Il est alors légitime de se demander si l'identification de  $Z$  n'aurait pas

	$C$ (MPa)	$p_D$	$S$ (MPa)	$D_C$
Moyenne	$2.507 \cdot 10^6$	0.554	0.612	0.303
Écart-type	$2.900 \cdot 10^5$	0.260	0.2313	0.116

 TABLE 2.3 – Moyennes et écart-types de  $\mathbf{Z}$  pour  $\Delta\sigma_i \in [93.4, 493.4]$  MPa

$R$	$C$ (MPa)	$p_D$	$S$ (MPa)	$D_C$
$C$ (MPa)	1	0.003	-0.058	-0.039
$p_D$	0.003	1	-0.022	-0.019
$S$ (MPa)	-0.058	-0.022	1	-0.260
$D_C$	-0.039	-0.019	-0.260	1

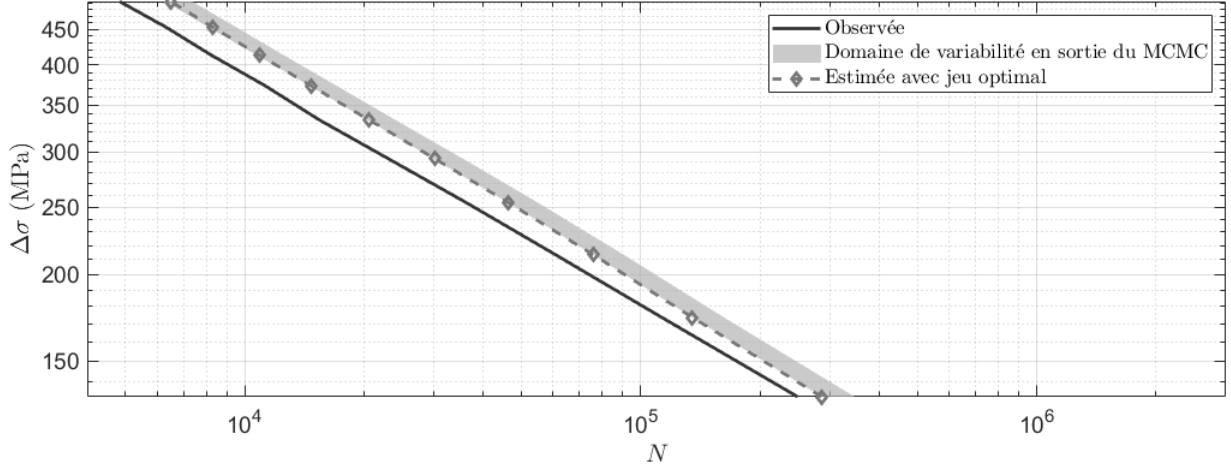
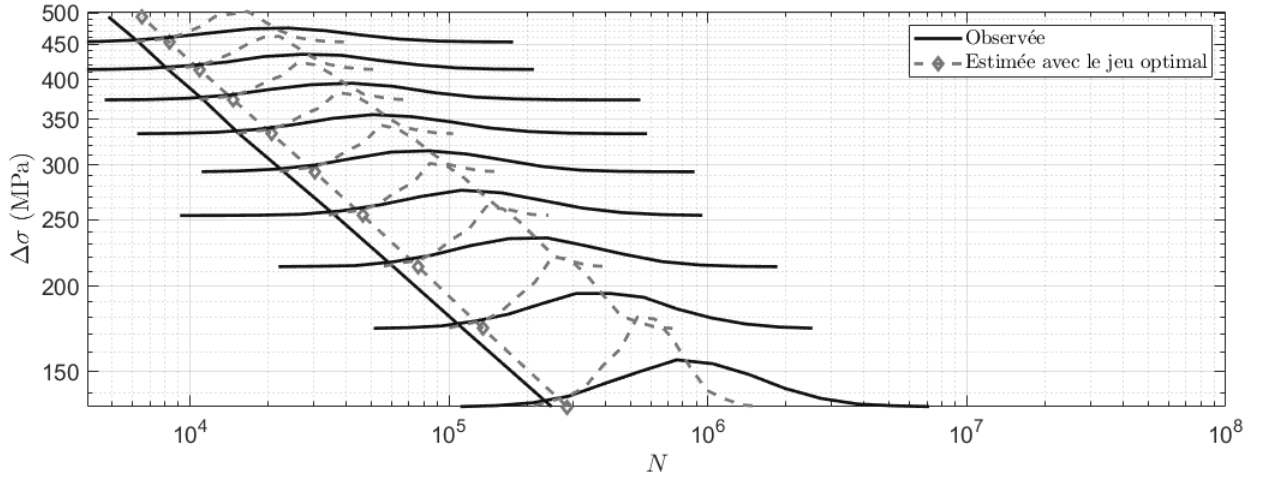
 TABLE 2.4 – Coefficients de corrélation de Bravais-Pearson de  $\mathbf{Z}$  pour  $\Delta\sigma_i \in [93.4, 493.4]$  MPa

 FIGURE 2.9 – Distributions jointes et marginales de  $\mathbf{Z}$  pour  $\Delta\sigma_i \in [93.4, 493.4]$  MPa

été de meilleurs qualité si la plage des contraintes étudiée n'était pas plus éloignée de la limite de fatigue asymptotique. Pour cette raison, une nouvelle étude est réalisée en considérant cette fois-ci l'ensemble des contraintes listées dans la Table 2.5. À l'image de l'étude précédente, les résultats obtenus sont tracés sur les Figures 2.10, 2.11 et 2.12.

Une très nette différence de concentration des courbes SN est observée entre la Figure 2.10 et 2.6. Avec  $\Delta\sigma_i \in [93.4, 493.4]$  MPa une très forte variabilité en sortie est observée contrairement

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Delta\sigma_i$ (MPa)	133.4	173.4	213.4	253.4	293.4	333.4	373.4	413.4	453.4	493.4

TABLE 2.5 – Nouvelles amplitudes de contraintes considérées


 FIGURE 2.10 – Courbes SN sans critère conservatif pour  $\Delta\sigma_i \in [133.4, 493.4]$  MPa

 FIGURE 2.11 – Courbes SN ( $Q_{2,3}$ ) et distributions observées et estimées avec le jeu optimal pour  $\Delta\sigma_i \in [133.4, 493.4]$  MPa

aux résultats obtenus avec  $\Delta\sigma_i \in [133.4, 493.4]$  MPa. Puisque la principale différence entre ces deux études est la valeur de l'amplitude de contrainte minimale observée. Nous pouvons donc supposer que la forte variabilité en sortie est causée par l'amplitude  $\Delta\sigma_1 = 93.40$  MPa. Pour conforter cette hypothèse, le système (2.3) est considéré. Il indique que la fonction de vraisemblance est le produit des densités de probabilité de l'écart minimal du nombre de cycles à rupture pour chacune des amplitudes de contrainte. Or, dans le cas de l'amplitude  $\Delta\sigma_1 = 93.40$  MPa, à cause du lissage provoqué par le modèle 2SD, le nombre de cycles à rupture estimé est très différent des résultats DNV. Ainsi, l'écart minimal du nombre de cycles à rupture pour cette amplitude est forcément calculé avec la réalisation DNV la plus élevée, c'est à dire pour une réalisation de très faible densité de probabilité. Même si une population de  $10^4$  réalisations permet de bien décrire le comportement d'une loi log-normale, c'est loin d'être suffisant pour d'écrire correctement l'extrémité de la distribution. La forte variabilité est donc causée par la trop faible taille de la population décrivant la distribution du nombre de cycles à rupture pour l'amplitude  $\Delta\sigma_1 = 93.40$  MPa.

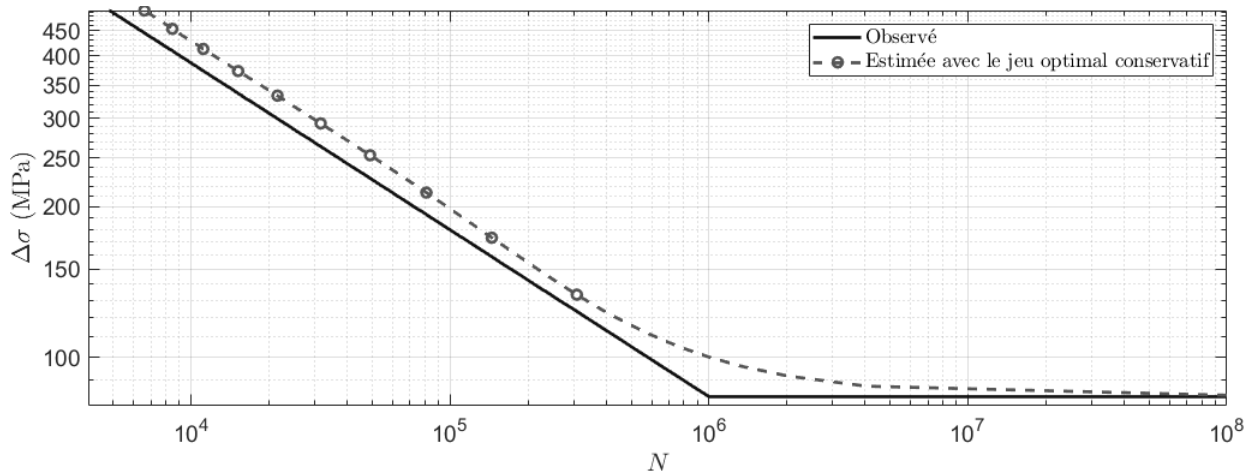


FIGURE 2.12 – Quantile  $Q.23$  des courbes SN observée et estimée avec le jeu optimal pour  $\Delta\sigma_i \in [133.4, 493.4]$  MPa

D'après Figure 2.10, puisque qu'aucune courbe SN estimée n'a une ordonnée à l'origine inférieure à celle de la courbe SN de référence, il est impossible d'identifier un résultat conservatif. Pour cette raison, seule la fonction (2.7) est minimisée. Comme le montre la Figure 2.11, malgré l'exploitation de la variabilité en sortie de MCMC, l'écart entre les courbes SN observée et estimée est encore élevé. Les distributions estimées du nombre de cycles à rupture n'ont ni une moyenne, ni une variance similaire aux distributions de références. Les résultats ainsi obtenus ne sont donc pas exploitables.

## 2.4 Conclusion sur la méthode de calibration des paramètres matériau

Dans ce chapitre une stratégie permettant de calibrer les paramètres incertains du modèle 2SD a été développée et appliquée au cas d'un joint tubulaire. La stratégie est en trois étapes : identification des paramètres incertains, choix des distributions a priori et calibration bayésienne. Les principaux apports par rapport aux travaux réalisés dans [51] sont la mise en place d'une stratégie permettant de sélectionner des supports a priori, l'exploitation de la variabilité en sortie de MCMC et l'obtention de résultats conservatifs. La stratégie développée est appliquée en considérant deux jeux de contraintes différents : l'un prend en compte la limite de fatigue asymptotique, l'autre pas. Il a été observé et justifié que si  $\min_i(\Delta\sigma_i) \gg 2\sigma_y^\mu$  la variabilité en sortie de MCMC est plus faible que si  $\min_i(\Delta\sigma_i) \simeq 2\sigma_y^\mu$ . Puisque la stratégie développée tire son intérêt de la variabilité en sortie de MCMC, ce sont les résultats obtenus avec le jeu où  $\min_i(\Delta\sigma_i) \simeq 2\sigma_y^\mu$  qui sont conservés pour la suite des travaux. Les distributions de  $\mathbf{Z} = (C, p_D, S, D_C)$  ont été estimées avec une erreur relative moyenne sur le nombre de cycles à rupture d'environ 10%.  $C$  et  $p_D$  sont indépendants et suivent une distribution pouvant être approximée par une loi uniforme tandis que  $S$  et  $D_C$  sont corrélés et suivent une distribution pouvant être approximée par une loi log-normale.

La calibration des paramètres du modèle 2SD réalisée, le modèle peut à présent être comparé avec une approche populaire telle que l'approche RSN.

## Chapitre 3

# Confrontation des approches RSN et 2SD dans le cas d'un assemblage soudé sollicité en flexion

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Présentation du cas d'étude</b>	<b>55</b>
3.1.1	Joint en T	55
3.1.2	Géométrie	55
3.1.3	De la force imposée à la contrainte locale	55
<b>3.2</b>	<b>Confrontation avec trois chargements de complexité croissante</b>	<b>57</b>
3.2.1	Définitions de trois signaux de contraintes	57
3.2.2	Propagation des incertitudes matériau	58
3.2.3	Confrontation des probabilités de défaillance obtenues	61
<b>3.3</b>	<b>Confrontation avec deux chargements inversés</b>	<b>64</b>
3.3.1	Définitions de deux signaux de contraintes	64
3.3.2	Propagation des incertitudes matériau	64
3.3.3	Confrontation des probabilités de défaillance obtenues	64
<b>3.4</b>	<b>Conclusion sur l'influence de l'historique de chargement</b>	<b>65</b>

---

Durant ces travaux de thèse, nous avons fait le choix de considérer un modèle d'endommagement en fatigue prenant en compte l'historique de chargement : le modèle 2SD. Durant ce chapitre, il est comparé à l'une des approches les plus populaires lorsqu'il s'agit de quantifier le dommage en fatigue : l'approche RSN. Cette dernière néglige l'influence de l'historique de chargement. Pour comparer ces deux méthodes de calculs, le cas d'une plaque cantilever soudée à une plaque infiniment rigide et chargée en flexion est considéré. Deux études sont réalisées. La première a pour objectif de comparer quantitativement les deux méthodes. Pour cela, trois chargements de complexité croissante et occasionnant le même dommage au sens de l'approche RSN sont considérés. La seconde a pour objectif d'illustrer l'influence de l'historique de chargement. Pour cela, deux chargements de mêmes amplitudes mais dans un ordre différent sont considérés.

Après la propagation des incertitudes matériau, la distribution finale du dommage est étudiée pour chaque chargement et une analyse de sensibilité du dommage par rapport à  $\mathbf{Z}$  est réalisée. Finalement les probabilités de défaillance sont estimées et comparées en fonction des chargements et des méthodes de calcul du dommage.

La résultat obtenus sont valorisés dans [77].

### 3.1 Présentation du cas d'étude

#### 3.1.1 Joint en T

Comme illustré sur la Figure 3.1, deux plaques rectangulaires  $P_1$  et  $P_2$  soudées pour former un joint en T dans le plan  $Oxy$  sont considérées. Puisque ce type de structure est plus sensible en flexion, un chargement réparti suivant  $y$  est appliqué à  $P_2$  sur le bord opposé au joint soudé.

#### 3.1.2 Géométrie

Pour simplifier l'étude,  $P_1$  est considéré infiniment rigide et la concentration des contraintes causée par le joint n'est pas prise en compte. Finalement  $P_2$  est isolée et modélisée par une structure rectangulaire 2D (deux dimensions) encastree en  $x = 0$  et chargée sur le bord opposé. Avec le modèle 2SD, à l'échelle macroscopique, le comportement est supposé élastique linéaire isotrope avec  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Pa et  $\nu = 0.30$ . À l'échelle microscopique, le comportement est supposé élastoplastique endommageable isotrope avec  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Pa,  $\nu = 0.30$ ,  $s = 1$  et  $\sigma_y^\mu = 41.703$  MPa les paramètres microscopiques déterministes et  $\mathbf{Z} = (C, p_D, S, D_C)$  les paramètres microscopiques stochastiques. Les distributions considérées de  $\mathbf{Z}$  sont celles identifiées dans le chapitre précédent. La structure est maillée en éléments finis rectangulaires et seul un élément est considéré endommageable. Puisque que les fissures s'amorcent le plus souvent au voisinage de la soudure, le point chaud est localisé proche de l'encastrement. L'élément endommageable est donc positionné dans cette zone (c'est l'élément en noir sur la Figure 3.1).

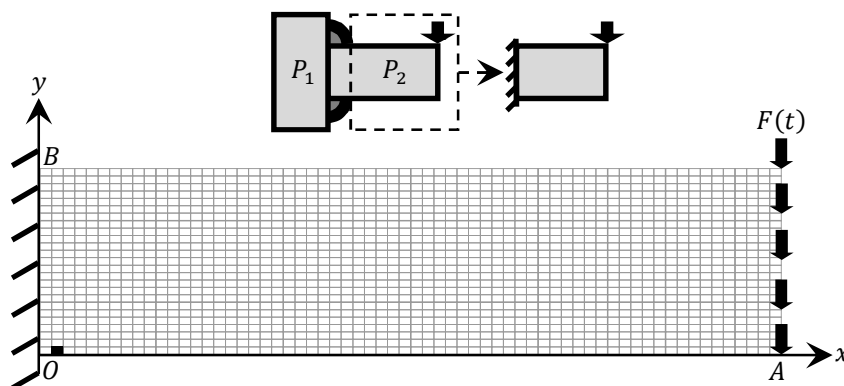


FIGURE 3.1 – Modélisation, conditions aux limites et maillage de  $P_2$

#### 3.1.3 De la force imposée à la contrainte locale

Puisque le problème est piloté par une force imposée  $F(t)$  et que le calcul du dommage est piloté par une contrainte locale  $\sigma(x_0, y_0, t)$  au sein de l'élément endommageable centré en  $(x_0, y_0)$ , une relation doit être définie entre  $F(t)$  et  $\sigma(x_0, y_0, t)$ . Lorsque le modèle 2SD est appliqué en 2D, la contrainte locale s'écrit :

$$\sigma(x_0, y_0, t) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x_0, y_0, t) & \sigma_{xy}(x_0, y_0, t) \\ \sigma_{xy}(x_0, y_0, t) & \sigma_{yy}(x_0, y_0, t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Les distributions des paramètres incertains du modèle 2SD sont identifiées à partir d'essais unidirectionnels. Il est alors nécessaire de s'assurer que le cas d'application soit dans une configuration similaire. D'après les conditions aux limites et la localisation de l'élément endommageable, ce dernier est principalement sollicité en traction compression. L'influence de  $\sigma_{yy}(x_0, y_0, t)$  et



$\sigma_{xy}(x_0, y_0, t)$  étant faible, la contrainte de von Mises (3.2) est utilisée à la fois pour l'approche RSN et le modèle 2SD qui est isotrope.

$$\sigma(x_0, y_0, t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{P}^D : \boldsymbol{\sigma}(x_0, y_0, t)\| \quad (3.2)$$

Puisqu'à l'échelle macroscopique le comportement est élastique linéaire,  $\boldsymbol{\sigma}(x_0, y_0, t)$  est écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}(x_0, y_0, t) = \alpha(x_0, y_0)F(t) \quad (3.3)$$

Avec  $\alpha(x_0, y_0)$  qui dépend uniquement de la géométrie et des paramètres matériau macroscopiques.

## 3.2 Confrontation avec trois chargements de complexité croissante

### 3.2.1 Définitions de trois signaux de contraintes

L'objectif de cette section est de quantifier l'influence de l'historique de chargement en comparant le modèle 2SD à l'approche RSN. Trois chargements  $F_q(t)$  pour  $q \in \{1, 2, 3\}$  avec un niveau de complexité croissant sont définis selon deux critères :

- Un nombre de cycles  $n^*$  équivalent pour tous les chargements
- Un dommage final  $D^*$  équivalent lorsqu'il est calculé via l'approche RSN

Il ne reste à définir  $\sigma_q(x_0, y_0, t)$  pour  $q \in \{1, 2, 3\}$  en fonction de  $D^*$  et  $n^*$ . Le signal de contraintes le plus simple  $\sigma_1(x_0, y_0, t) = \alpha(x_0, y_0)F_1(t)$  est un signal sinusoïdal d'amplitude  $\Delta\sigma_{1,1}$  constante et composé de  $n(\Delta\sigma_{1,1})$  cycles. Pour éviter l'effet de la contrainte moyenne,  $\sigma_1(x_0, y_0, t)$  est centré en 0. Le dommage final associé s'écrit alors  $D_1 = \frac{n(\Delta\sigma_{1,1})}{N(\Delta\sigma_{1,1})}$ . La période  $T_1$  et l'amplitude de contrainte  $\Delta\sigma_{1,1}$  sont choisies telles que

$$\begin{cases} \frac{n(\Delta\sigma_{1,1})}{N(\Delta\sigma_{1,1})} & = D^* \\ n(\Delta\sigma_{1,1}) & = n^* \end{cases} \quad (3.4)$$

D'après (2.1) et sachant que le domaine temporel considéré est  $t \in [t_{init}; t_{fin}] = [0; 1.06 \cdot 10^4]$ , le système devient :

$$\begin{cases} \Delta\sigma_{1,1} & = \left(\frac{n^*}{bD^*}\right)^{\frac{1}{a}} \\ T_1 & = \frac{t_{fin}}{n^*} \end{cases} \quad (3.5)$$

Le second signal  $\sigma_2(x_0, y_0, t) = \alpha(x_0, y_0)F_2(t)$  est une réalisation d'un processus gaussien avec une corrélation gaussienne. Ses paramètres sont la variance  $\mathbb{V}_2$ , l'espérance  $\mathbb{E}_2$  et la longueur de corrélation  $\mathbb{L}_2$ . Comme pour  $\sigma_1(t)$ ,  $\mathbb{E}_2$  est posé égale à 0. Sachant que  $\mathbb{V}_2$  influe sur  $\Delta\sigma_{i,2}$  tandis que  $\mathbb{L}_2$  influe sur  $n(\Delta\sigma_{i,2})$ ,  $\mathbb{L}_2$  est d'abord calculé avec (3.6) en posant arbitrairement la variance  $\mathbb{V} = 1$  puis  $\mathbb{V}_2$  est calculé avec (3.7).

$$\mathbb{L}_2 = \operatorname{argmin}_{\mathbb{L} \in \mathbb{R}^+} \left| n^* - \sum_{i=1}^I n(\Delta\sigma_{i,2}(\mathbb{V}), \mathbb{L}) \right| \quad (3.6)$$

$$\mathbb{V}_2 = \operatorname{argmin}_{\mathbb{V} \in \mathbb{R}^+} \left| D^* - \sum_{i=1}^I \frac{n(\Delta\sigma_{i,2}(\mathbb{V}), \mathbb{L}_2)}{N(\Delta\sigma_{i,2}(\mathbb{V}))} \right| \quad (3.7)$$

Le dernier signal  $\sigma_3(x_0, y_0, t) = \alpha_{xx}(x_0, y_0)F_3(t)$  est une réalisation d'un processus gaussien avec une corrélation de Matérn. Il permet d'introduire de petites irrégularités par rapport à  $\sigma_2(x_0, y_0, t)$ . Ces irrégularités peuvent être vues comme la conséquence d'éventuelles incertitudes de mesures. Les paramètres de  $\sigma_3(x_0, y_0, t)$  sont posés identiques à ceux utilisés pour définir  $\sigma_2(x_0, y_0, t)$ . Les réalisations  $\sigma_2(x_0, y_0, t)$  et  $\sigma_3(x_0, y_0, t)$  ont été générées par expansion de Karhunen Loève [84] avec la librairie Uqlab [85]. Avec  $(n^*, D^*) = (10^4, 1)$  et  $(t_{init}, t_{fin}) = (0; 1.06 \cdot 10^4)$ , les paramètres obtenus pour chacun des signaux sont les suivants :

- Pour  $\sigma_1(t)$ ,  $\Delta\sigma_{1,1} = 385$  MPa et  $T_1 = 1.04$
- Pour  $\sigma_2(t)$ ,  $\mathbb{E}_2 = 0$  MPa,  $\mathbb{V}_2 = 2.59 \cdot 10^4$  MPa<sup>2</sup> et  $\mathbb{L}_2 = 0.30$
- Pour  $\sigma_3(t)$ ,  $\mathbb{E}_3 = 0$  MPa,  $\mathbb{V}_3 = 2.59 \cdot 10^4$  MPa<sup>2</sup> et  $\mathbb{L}_3 = 0.30$

Finalement un extrait des signaux de contraintes locales est représenté en Figure 3.2 pour  $t \in [4958.6; 4969.5]$ .

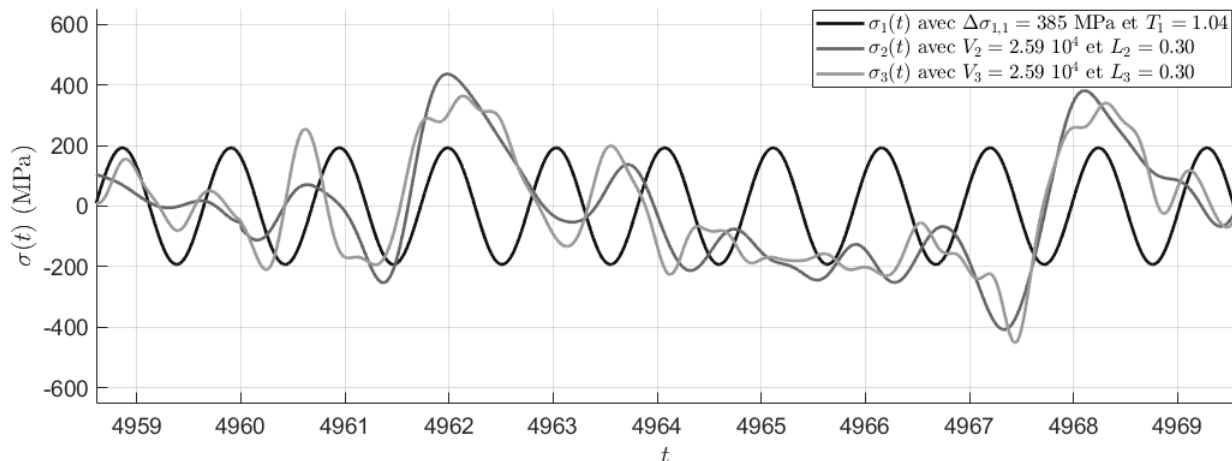


FIGURE 3.2 – Extrait des trois signaux de contraintes pour  $t \in [4958.6; 4969.5] \subset [t_{init}; t_{fin}]$

### 3.2.2 Propagation des incertitudes matériau

Deux stratégies pour calculer le dommage en fatigue sont confrontées : l'approche RSN et le modèle 2SD. Pour propager l'aléa matériau, un échantillon  $P$  de 5000 réalisations est considéré. C'est suffisant pour évaluer le quantile à 2.3%.

#### 3.2.2.1 Approche RSN

##### 3.2.2.1.1 Propagation de l'aléa matériau

Dans le cas de l'approche RSN, l'aléa du matériau est modélisé par la variable aléatoire  $B$  dans (2.1). Une population de  $P$  réalisations de  $B$  est générée aléatoirement avec la méthode LHS [5]. Pour chacune des réalisations  $b$  de  $B$ , le dommage final se calcule ainsi :

$$D(t_{fin}) = \sum_{i=1}^I \frac{n(\Delta\sigma_i)}{b\Delta\sigma_i^a} \quad (3.8)$$

##### 3.2.2.1.2 Distribution du dommage final et de la probabilité de défaillance

La Figure 3.3 indique les distributions du dommage final  $D(t_{fin})$  pour les trois chargements. Quel que soit le chargement appliqué, la distribution du dommage est équivalente à une distribution lognormale. De plus, les distributions n'ont pas de borne supérieure finie. En effet, un dommage supérieur à 1 est parfois observé. Cela signifie qu'il y a rupture par fatigue avant  $t_{fin}$ . C'est une conséquence de la formulation du dommage qui ne prend pas en compte le dommage critique. Finalement et comme attendu, les distributions du dommage final sont équivalentes pour les deux premier chargements.

#### 3.2.2.2 Modèle 2SD

##### 3.2.2.2.1 Propagation de l'aléa matériau

Avec les équations discrétisées (1.38) à (1.47), le retour radial [52] est appliqué en considérant un pas de temps  $\Delta t = 0.005$ . Un échantillon de  $P$  réalisations de  $\mathbf{Z}$  est aléatoirement généré par LHS [5] et *Rejection Sampling* [86] (pour préserver la corrélation entre les variables aléatoires) à partir des populations identifiées en section 2.3.1. Pour chaque réalisation, la trajectoire du dommage est calculée avec le modèle 2SD. Dans le cas particulier où le dommage atteint la réalisation du dommage critique avant  $t_{fin}$ , le dommage final est fixé comme égale au dommage

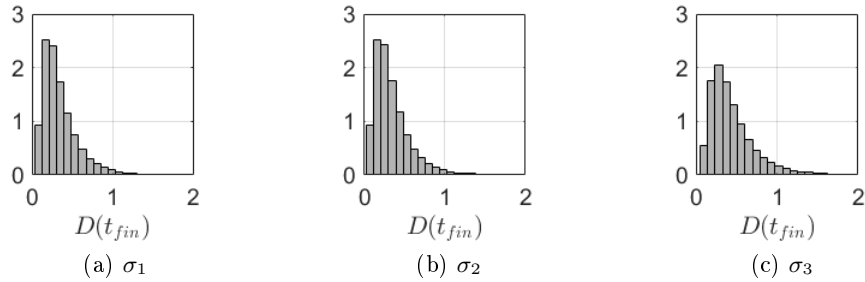


FIGURE 3.3 – Densités de probabilité de  $D(t_{fin})$  calculées avec l’approche RSN

critique et le calcul est arrêté. Cette méthode est appliquée à la structure en Figure 3.1 pour chacun des trois chargements.

### 3.2.2.2 Distribution du dommage final et de la probabilité de défaillance

Dans la Figure 3.4, quatre distributions sont tracées : les trois premières sont les distributions finales du dommage pour chacun des chargements et la quatrième est la distribution de  $D_C$ . Quel que soit le chargement, les distributions du dommage ont la même forme : asymétrique et définie sur le même support que  $D_C$ , c’est à dire  $[0; 0.5]$ . Aussi, l’espérance du dommage final est la même quel que soit le chargement :  $0.1123 \pm 0.025$ . Ainsi, les distributions se distinguent principalement par leur variance et leur queue de distribution à droite. Par exemple, le 8<sup>ème</sup> décile vaut 0.88 pour  $\sigma_1(x_0, y_0, t)$ , 0.87 pour  $\sigma_2(x_0, y_0, t)$  et 0.80 pour  $\sigma_3(x_0, y_0, t)$ . De plus, les distributions de  $D^\mu(t_{fin})$  et  $D_C$  sont très différentes. Cela signifie que  $D_C$  n’est pas la seule variable aléatoire influente sur  $D^\mu(t_{fin})$ . Pour cette raison, l’influence des autres variables aléatoires est investiguée en posant  $\bar{\mathbf{Z}}$  le vecteur des variables aléatoires qui causent un dommage final supérieur ou égale au dommage critique ; en d’autres termes le vecteur des variables aléatoires menant à la rupture. Dans la Figure 3.5, les distributions de  $\mathbf{Z}$  et  $\bar{\mathbf{Z}}$  sont tracées en fonction des chargements appliqués. Les distributions de  $\mathbf{Z}$  sont normalisées, tandis que les distributions de  $\bar{\mathbf{Z}}$  sont tracées de façon à ce que le rapport de proportionnalité entre le nombre de réalisations défaillantes obtenu et les  $P$  réalisations soit respecté. Quel que soit le chargement, les distributions de  $\bar{C}$  et  $C$  sont approximativement les mêmes. En revanche, les distributions de  $(\bar{p}_D, \bar{S}, \bar{D}_C)$  et  $(p_D, S, D_C)$  sont très différentes. Pour des faibles valeurs de  $S$  et  $D_C$  quasiment toutes les réalisations conduisent à la rupture. Cela ce justifie en reprenant les équations (1.29) à (1.37) du modèle 2SD :

- Plus  $S$  est petit, plus  $dD^\mu(t)$  est élevé.
- Plus  $D_C$  est petit, plus tôt il y a rupture.
- Plus  $p_D$  est petit, plus tôt le dommage est initié.

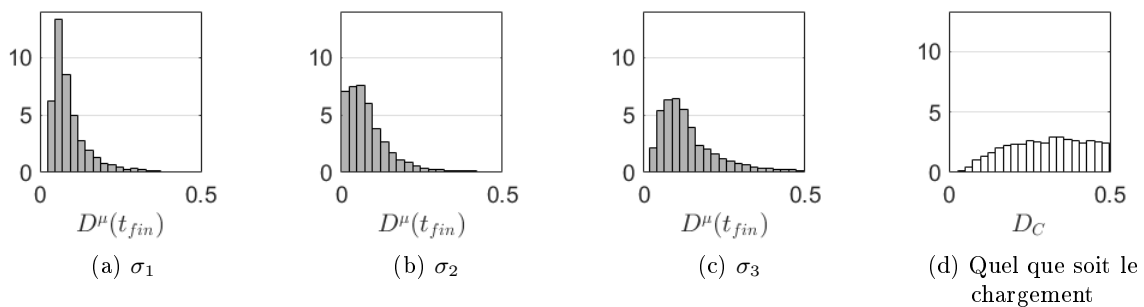
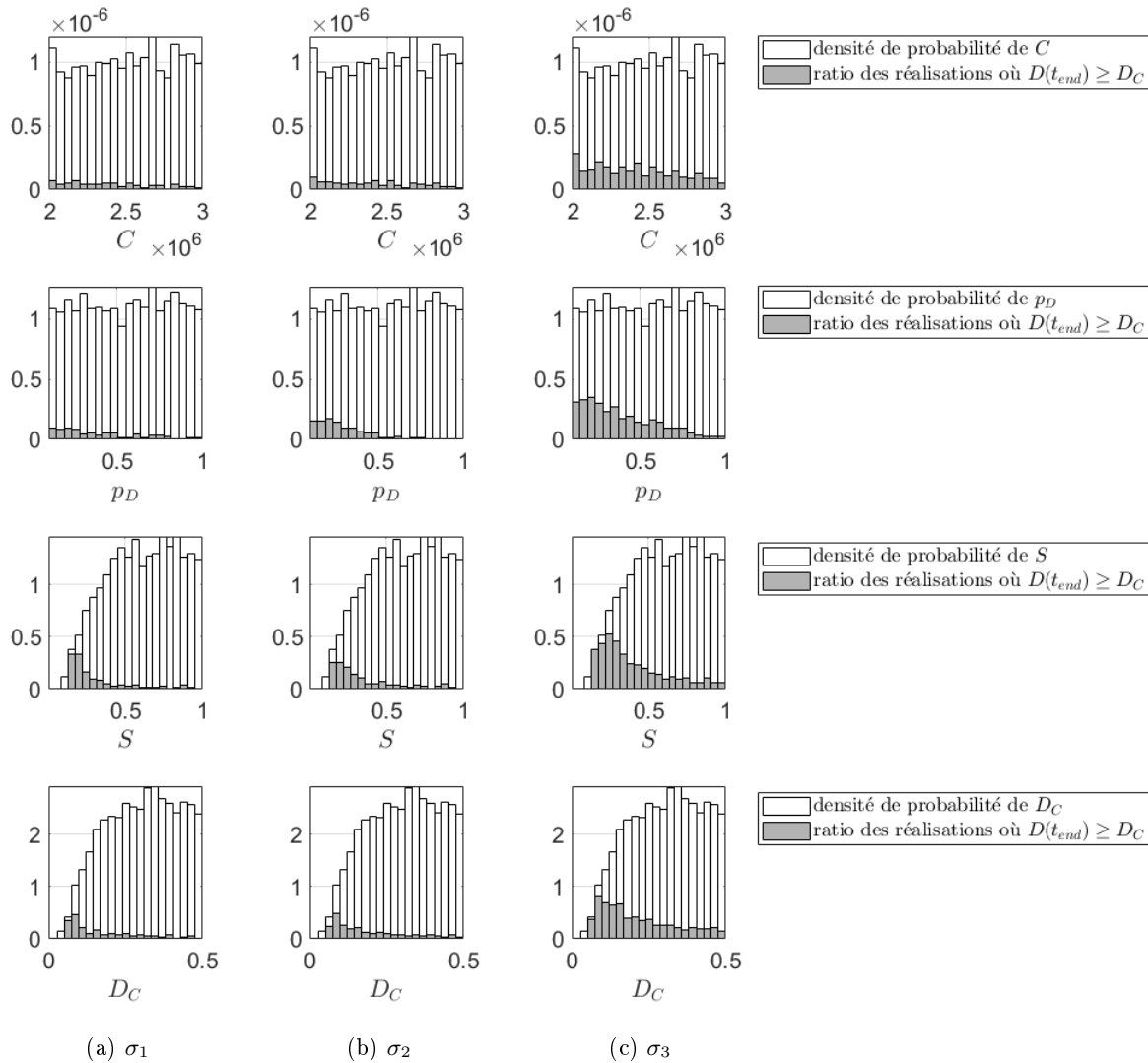


FIGURE 3.4 – Densités de probabilité de  $D^\mu(t_{fin})$  (calculées avec le modèle 2SD) et  $D_C$


 FIGURE 3.5 – Comparaison des densités de probabilité de  $\mathbf{Z}$  et  $\bar{\mathbf{Z}}$ 

### 3.2.2.2.3 Analyse de sensibilité du dommage calculé avec le modèle 2SD

Pour mieux comprendre comment le modèle 2SD se comporte par rapport aux variables aléatoire, une analyse de sensibilité du dommage est réalisée. De nombreuses approches existent [83]. Trois critères sont formulés pour sélectionner la méthode la plus appropriée : elle doit être globale (c'est à dire prendre en compte tout le domaine de définition des variables aléatoires), prendre en compte la corrélation entre les variables aléatoires et être robuste. Puisque la méthode de Borgonovo [87] répond à tous ces critères, elle est appliquée avec la librairie Uqlab [88]. L'indice de sensibilité dépendant du temps  $\delta(D^\mu(t), Z_j)$  de  $D^\mu(t)$  par rapport à  $Z_j$  est écrit :

$$\delta(D^\mu(t), Z_j) = \frac{1}{2} \int_{Z_j^{\min}}^{Z_j^{\max}} f_{Z_j}(z_j) \int_{D_C^{\min}}^{D_C^{\max}} \left| f_{D^\mu(t)}(D^\mu(t)) - f_{D^\mu(t)|Z_j}(D^\mu(t)|z_j) \right| dD^\mu(t) dz_j \quad (3.9)$$

avec  $f_{Z_j}$  et  $f_{D^\mu(t)}$  les fonctions densités de probabilités de  $Z_j$  et  $D^\mu(t)$ . La Figure 3.6 trace les sensibilités du dommage en fonction des variables aléatoires au cours du temps. La régularité des courbes au cours du temps suggère que le nombre de réalisations considéré et que la technique de calculs sont adaptés. Les résultats sont interprétés à partir des équations du modèle :

- $D_C$  intervient uniquement lorsque  $D^\mu(t) = D_C$ . Avec le temps, le nombre de trajectoires du dommage atteignant  $D_C$  augmente. Il est donc cohérent que  $\delta(D^\mu(t), D_C)$  commence à 0 puis croît avec le temps

- $p_D$  intervient uniquement lorsque le dommage est initié, c'est à dire lorsque  $p^\mu(t) = p_D$ . Dans un premier temps, comme le nombre de trajectoires atteignant  $p_D$ ,  $\delta(D^\mu(t), p_D)$  croît avec le temps. Dans un second temps, le nombre de trajectoires atteignant  $p_D$  n'est plus suffisamment élevé comparé au nombre de trajectoires qui l'ont déjà dépassé et par conséquent  $\delta(D^\mu(t), p_D)$  commence à décroître jusqu'à atteindre 0.
- $C$  est utilisé lors du calcul de l'érouissage :

$$D^\mu(t) = 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\|d\mathbf{X}^\mu(t)\|}{C dp^\mu(t)} \quad (3.10)$$

Par définition,  $D^\mu(t)$  croît avec le temps et donc le ratio  $\frac{\|d\mathbf{X}^\mu(t)\|}{dp^\mu(t)}$  décroît avec le temps. Ainsi,  $\delta(D^\mu(t), C)$  croît jusqu'à l'amorçage du dommage et une fois que la majorité des trajectoires ont atteint  $p_D$ , le ratio  $\frac{\|d\mathbf{X}^\mu(t)\|}{dp^\mu(t)}$  entraîne une diminution du poids de  $C$ , faisant décroître  $\delta(D^\mu(t), C)$ .

- $S$  est utilisé lors du calcul du dommage :

$$dD^\mu(t) = \frac{Y^\mu(t)}{S} dp^\mu(t). \quad (3.11)$$

Pour comprendre l'évolution de  $\delta(D^\mu(t), S)$ , il est nécessaire d'étudier le comportement de  $Y^\mu(t) dp^\mu(t)$  au cours du temps. Puisque (3.11) permet uniquement de conclure que ce terme est positif, une étude numérique est réalisée. Comme illustré sur la Figure 3.7, en considérant le premier chargement, le produit  $Y^\mu(t) dp^\mu(t)$  oscille au cours du temps et sa courbe enveloppe croît. Par conséquent,  $\delta(D^\mu(t), S)$  croît rapidement jusqu'à l'amorçage du dommage. Puis la pente de  $\delta(D^\mu(t), S)$  reste positive mais diminue du fait qu'elle ne soit plus due à l'amorçage du dommage mais au terme  $Y^\mu(t) dp^\mu(t)$ .

L'évolution des indices de sensibilité est similaire quel que soit le chargement. La principale différence est l'instant auquel l'intersection entre  $\delta(D^\mu, D_C)$  et  $\delta(D^\mu, p_D)$  se produit. Cette intersection a lieu lorsque le nombre de trajectoires où  $p^\mu \geq p_D$  est égale au nombre de trajectoires où  $D^\mu \geq D_C$ . Pour  $\sigma_1(x_0, y_0, t)$ , elle se produit à  $t_1 = 6\ 676$ , pour  $\sigma_3(x_0, y_0, t)$ , elle se produit à  $t_3 = 9\ 382$  et pour  $\sigma_2(x_0, y_0, t)$ , elle ne se produit pas sur l'intervalle de temps considéré. Il est ainsi observé :

$$t_1 \ll t_3 \quad (3.12)$$

Cette inégalité s'interprète en reprenant la définitions des trois signaux de contraintes.  $\sigma_1(x_0, y_0, t)$  et  $\sigma_2(x_0, y_0, t)$  sont définis pour causer un dommage final équivalent au sens de l'approche RSN et cela pour un même nombre de cycle.  $t_1 \ll t_2$  implique donc que le dommage est initié plus tard lorsque le chargement est d'amplitude variable (comparé à l'amplitude constante). Ensuite,  $\sigma_3(x_0, y_0, t)$  a été défini équivalent à  $\sigma_2(x_0, y_0, t)$  avec un bruit supplémentaire. Sur le même intervalle de temps,  $\sigma_3(x_0, y_0, t)$  est composé d'un plus grand nombre de cycles que  $\sigma_2(x_0, y_0, t)$ . Par conséquent, le dommage est amorcé plus tôt avec  $\sigma_3(x_0, y_0, t)$  qu'avec  $\sigma_2(x_0, y_0, t)$  d'où  $t_3 < t_2$ . Pour conclure, cette analyse de sensibilité montre que, quel que soit le chargement, le dommage est dans un premier temps majoritairement sensible à  $p_D$  puis dans un second temps à  $p_D$  et  $D_C$ .

### 3.2.3 Confrontation des probabilités de défaillance obtenues

D'après la définition du dommage les probabilités de défaillance n'ont pas la même formulation. Avec l'approche RSN, le dommage est calculé avec (3.8) et la probabilité de défaillance s'écrit :

$$P_{f_q}^{RSN}(t) = \text{Prob}(1 - D(t) \leq 0) \quad (3.13)$$

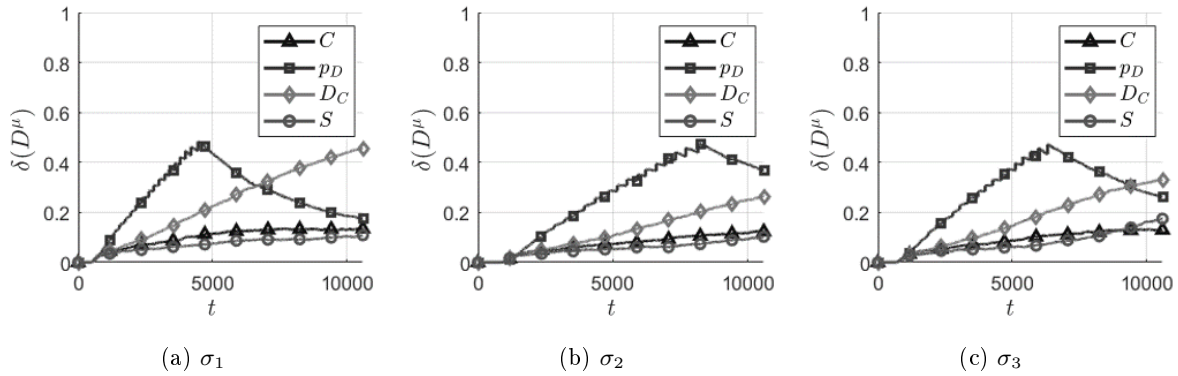


FIGURE 3.6 – Analyse de sensibilité de  $D^\mu$  en fonction  $Z$  :  $\delta(D^\mu, Z)$

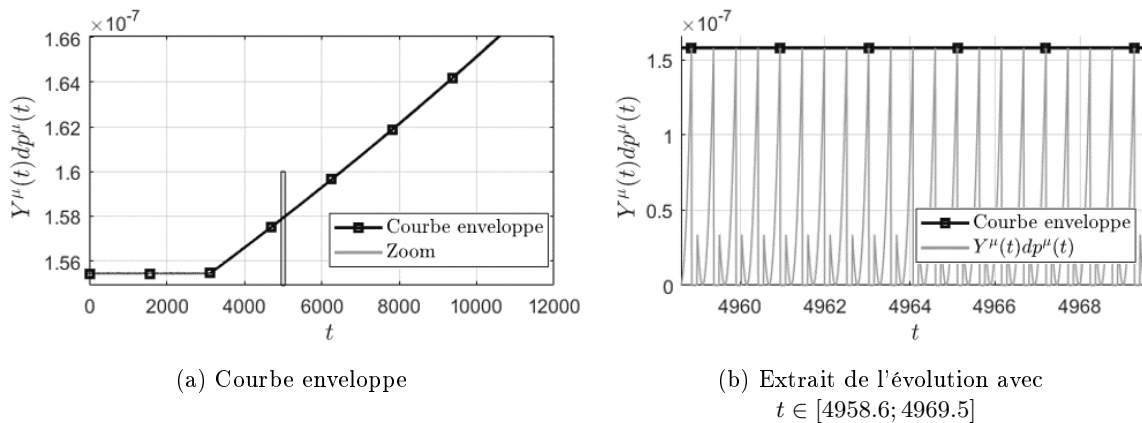


FIGURE 3.7 –  $Y^\mu(t)dp^\mu(t)$  au cours du temps en considérant  $\sigma_1$  avec  $C = 2.507 \cdot 10^6$  MPa,  $p_D = 0.554$ ,  $S = 0.612$  MPa et  $D_C = 0.303$

Avec le modèle 2SD, le dommage est calculé avec (1.38) à (1.47) et la probabilité de défaillance s'écrit :

$$P_{f_q}^{2SD}(t) = \text{Prob}(D_C - D^\mu(t) \leq 0) \quad (3.14)$$

Les probabilités de défaillance instantanées sont calculées pour chacun des trois chargements et sont tracées sur la Figure 3.8. Les valeurs obtenues à  $t_{fin}$  sont reportées dans la Table 3.1. Ces résultats permettent de valider le protocole numérique mis en place dont notamment la calibration de l'aléa matériau et la définition des deux premiers chargements. La calibration des paramètres matériau du modèle 2SD a été réalisée à partir de courbes SN. Le premier chargement est d'amplitude constante, l'historique de chargement n'a donc pas d'influence sur le dommage final. Ainsi quelle que soit la méthode de calcul du dommage, la probabilité de défaillance doit être la même. Un écart de 1.2 points est obtenu entre l'approche RSN et le modèle 2SD. Cet écart est dû au choix conservatif réalisé durant la calibration. Il est relativement faible et est considéré comme acceptable.

$$P_{f_1}^{RSN}(t_{fin}) \simeq P_{f_1}^{2SD}(t_{fin}) \simeq 2.3\% \quad (3.15)$$

Les deux premiers chargements ont été définis de façon à occasionner le même dommage final au sens de l'approche RSN. Un écart proche de 0 point est obtenu.

$$P_{f_1}^{RSN}(t_{fin}) \simeq P_{f_2}^{RSN}(t_{fin}) \simeq 2.3\% \quad (3.16)$$

Le protocole numérique à présent validé, l'influence de l'historique de chargement est étudiée. Puisque le deuxième et le troisième chargement ne sont pas d'amplitude constante, les écarts sur

les probabilités de défaillance entre l'approche RSN et le modèle sont dus aux effets de l'historique de chargement. Il est observé :

$$P_{f_2}^{2SD}(t_{fin}) \simeq 2P_{f_2}^{RSN}(t_{fin}) \quad (3.17)$$

$$P_{f_3}^{2SD}(t_{fin}) \simeq 3P_{f_3}^{RSN}(t_{fin}) \quad (3.18)$$

Pour mettre en relief ces résultats, la Figure 3.8 montre que  $P_{f_2}^{2SD}(t) = 2.3\%$  est atteinte 1.17 fois plus tôt que  $P_{f_2}^{RSN}(t) = 2.3\%$  et  $P_{f_3}^{2SD}(t) = 2.3\%$  est atteinte 1.21 fois plus tôt que  $P_{f_3}^{RSN}(t) = 2.3\%$ . Il est clair que ces différences sont significatives et mettent en avant la limite d'un cumul linéaire du dommage.

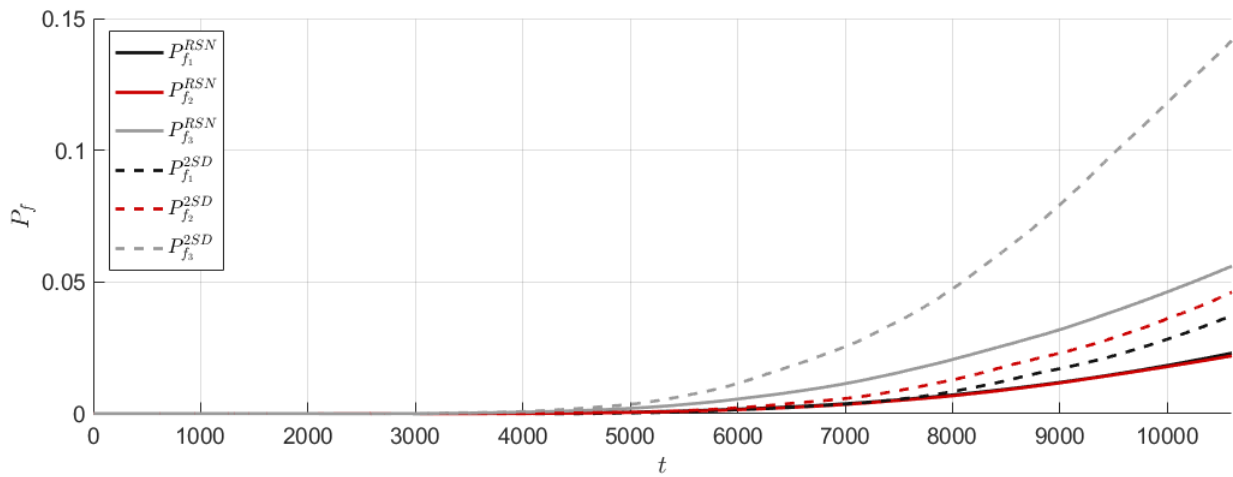


FIGURE 3.8 – Probabilités de défaillance calculées avec l'approche RSN et le modèle 2SD

	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
Approche RSN	2.3	2.3	5.5
Modèle 2SD	3.5	4.3	13.1

TABLE 3.1 – Probabilité de défaillance  $P_{f_q}(t_{fin})$  (%)



### 3.3 Confrontation avec deux chargements inversés

#### 3.3.1 Définitions de deux signaux de contraintes

L'objectif de cette section est d'illustrer l'influence de l'historique de chargement en comparant le modèle 2SD à l'approche RSN. Deux signaux de contraintes locales  $\sigma_{FG}(t)$  et  $\sigma_{GF}(t)$  sont définis à partir  $\sigma_1(t)$ . Il sont tous les deux composés de  $n^* = 10^4$  cycles. La seule caractéristique les distinguant est l'ordre d'apparition des cycles de chargement. Il sont définis tels que :

- $\sigma_{FG}(t)$  est un signal sinusoïdal d'amplitude  $\Delta\sigma_F = 0.5\Delta\sigma_{1,1} = 192.5$  MPa sur  $[t_{init}, \frac{2}{3}t_{fin}]$  et d'amplitude  $\Delta\sigma_G = 1.25\Delta\sigma_{1,1} = 481.25$  MPa sur  $[\frac{2}{3}t_{fin}, t_{fin}]$ .
- $\sigma_{GF}(t)$  est un signal sinusoïdal d'amplitude  $\Delta\sigma_G = 1.25\Delta\sigma_{1,1} = 481.25$  MPa sur  $[t_{init}, \frac{1}{3}t_{fin}]$  et d'amplitude  $\Delta\sigma_F = 0.5\Delta\sigma_{1,1} = 192.5$  MPa sur  $[\frac{1}{3}t_{fin}, t_{fin}]$ .

#### 3.3.2 Propagation des incertitudes matériau

Les mêmes réalisations qu'en section 3.2.2 de  $B$  pour l'approche RSN et de  $Z$  pour le modèle 2SD sont considérées.

#### 3.3.3 Confrontation des probabilités de défaillance obtenues

Quatre évolutions de probabilités de défaillance sont calculées et tracées sur la Figure 3.9 :

- $P_{f_{FG}}^{RSN}$  est calculée avec l'approche RSN en considérant le chargement  $\sigma_{FG}$
- $P_{f_{GF}}^{RSN}$  est calculée avec l'approche RSN en considérant le chargement  $\sigma_{GF}$
- $P_{f_{FG}}^{2SD}$  est calculée avec le modèle 2SD en considérant le chargement  $\sigma_{FG}$
- $P_{f_{GF}}^{2SD}$  est calculée avec le modèle 2SD en considérant le chargement  $\sigma_{GF}$

À  $t = t_{fin}$  avec l'approche RSN, les probabilités de défaillance sont égales :

$$P_{f_{FG}}^{RSN}(t_{fin}) = P_{f_{GF}}^{RSN}(t_{fin}) \quad (3.19)$$

Cela est du à la formule de Palmgreen et Miner (3.8) qui néglige l'influence de l'historique de chargement. En revanche, avec le modèle 2SD qui ne néglige pas l'influence de l'historique de chargement, les probabilités de défaillance sont bien distinctes :

$$P_{f_{FG}}^{2SD}(t_{fin}) \simeq 4P_{f_{GF}}^{2SD}(t_{fin}) \quad (3.20)$$

Par ailleurs ces résultats permettent de discuter de l'aspect conservatif ou non de l'approche RSN. D'après sa formulation, puisqu'elle ne prend pas en compte les cycles de faibles amplitudes (inférieures à la limite de fatigue asymptotique), il pourrait être conclu qu'elle sous-estime le dommage et donc la probabilité de défaillance. Cependant, malgré le fait que le modèle 2SD ait été calibré de façon à être conservatif, avec cette étude il est observé :

$$P_{f_{GF}}^{2SD}(t) < P_{f_{GF}}^{RSN}(t) \quad \forall t \in [t_{init}, t_{fin}] \quad (3.21)$$

Avec l'approche RSN, le dommage est initié dès le premier cycle tandis qu'avec l'approche 2SD, le dommage n'est initié que lorsque le cumul plastique atteint le seuil de plasticité. L'approche RSN ne sous-estime donc pas systématiquement le dommage.

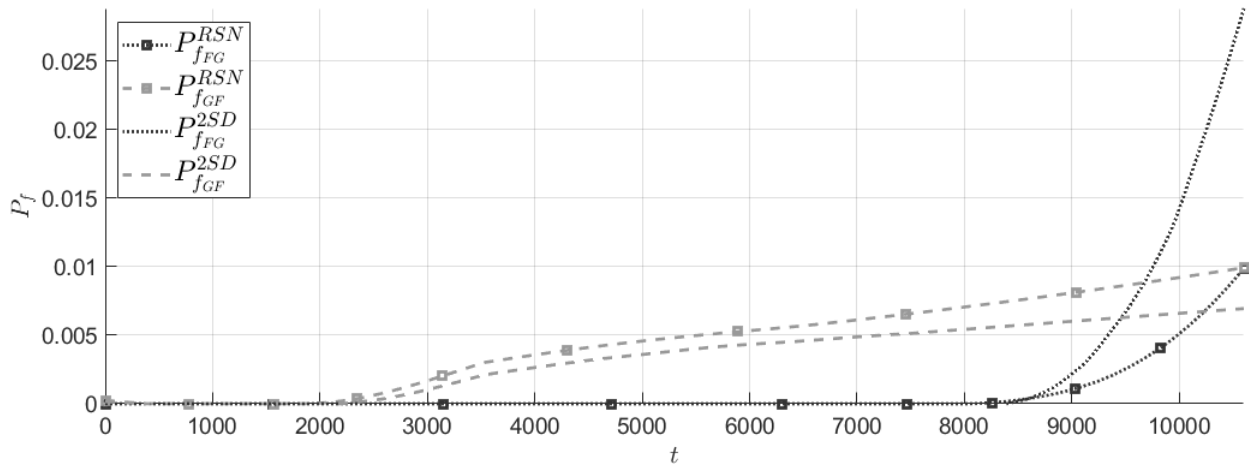


FIGURE 3.9 – Probabilités de défaillance calculées avec l'approche RSN et le modèle 2SD

### 3.4 Conclusion sur l'influence de l'historique de chargement

Le modèle 2SD est comparé à l'approche RSN en considérant un joint en T sollicité en flexion. Cinq chargements ont été testés. Après propagation de l'aléa matériau, ces chargements ont permis de formuler quatre observations. Premièrement, pour un signal avec une amplitude de contrainte constante, l'approche RSN et le modèle 2SD donnent une probabilité de défaillance équivalente. Deuxièmement, pour deux signaux composés des mêmes amplitudes de contraintes mais pas dans le même ordre, le modèle 2SD donne deux probabilités de défaillance bien distinctes (contrairement à l'approche RSN). Troisièmement, pour deux signaux complexes (avec des amplitudes de contraintes aléatoires), l'approche RSN conduit à une sous-estimation de la probabilité de défaillance d'un facteur 2 et 3. Quatrièmement, bien que le modèle 2SD ait été calibré de façon à être conservatif, lorsque la probabilité de défaillance est faible, il fournit une probabilité inférieure à celle calculée avec l'approche RSN.

L'influence de l'historique de chargement est donc non négligeable. Le modèle 2SD présente alors un véritable intérêt par rapport à l'approche RSN. Cependant, l'utilisation du modèle 2SD dans un contexte probabiliste présente un inconvénient majeur : son coût numérique extrêmement élevé. Le prochain chapitre porte donc sur le développement de stratégies permettant de maintenir son coût numérique le plus bas possible.

## Chapitre 4

# Propagation de l'aléa matériau à coût réduit pour l'analyse de fiabilité

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Méthodes d'approximation par krigeage . . . . .</b>	<b>67</b>
4.1.1	Krigeage . . . . .	67
4.1.2	Krigeage à gradient . . . . .	71
4.1.3	Krigeage multifidélité . . . . .	73
4.1.4	Krigeage sous contraintes linéaires . . . . .	75
<b>4.2</b>	<b>Méthodes d'approximation par krigeage adaptatif . . . . .</b>	<b>76</b>
4.2.1	Fonction d'apprentissage . . . . .	76
4.2.2	Critère d'apprentissage . . . . .	76
4.2.3	Premier critère d'arrêt . . . . .	76
4.2.4	Second critère d'arrêt . . . . .	77
<b>4.3</b>	<b>Approximation du modèle 2SD par krigeage adaptatif . . . . .</b>	<b>78</b>
4.3.1	Réimplémentation du modèle 2SD pour le calcul des observations . . . . .	78
4.3.2	Approximation du dommage par krigeage . . . . .	80
4.3.3	Définition des populations observées et estimées . . . . .	80
4.3.4	Approximation du dommage par krigeage adaptatif . . . . .	80
<b>4.4</b>	<b>Définition et mise en place de deux approches pour l'analyse de fiabilité . . . . .</b>	<b>84</b>
4.4.1	Définition des approches globale et locale . . . . .	85
4.4.2	Choix des estimateurs et de la stratégie d'apprentissage . . . . .	88
4.4.3	Conclusion et mise en parallèle des deux approches . . . . .	96

---

Pour le dimensionnement ou la planification des opérations de maintenance, la connaissance de la probabilité de défaillance instantanée  $P_f(t)$  est une source d'information majeure. Dans ce contexte, le calcul de  $P_f(t)$  doit répondre à deux objectifs. Il doit être à la fois précis (pour que l'opération n'ait lieu ni trop tôt, ni trop tard) et peu coûteux. Durant l'étude bibliographique, réalisée Chapitre 1, deux sous-objectifs ont été formulés afin d'assurer un certain niveau de précision : prendre en compte l'historique de chargement et ne formuler aucune hypothèse sur la forme de la fonction de performance. Le respect du premier sous-objectif est à présent assuré avec l'utilisation du modèle d'endommagement à deux échelles. Le second implique d'écarter un certain nombre d'approches telles que SORM, FORM, PHI2 et PHI2+. Il reste les séparateurs SVM et les familles d'estimateurs PCE et krigeage. Les séparateurs SVM ne fournissant de l'information que sur le signe de la grandeur d'intérêt, ils sont écartés. Contrairement aux méthodes PCE, le

krigeage a l'avantage de fournir une information locale sur l'erreur de métamodélisation. Dans une stratégie d'amélioration la qualité du métamodèle, le krigeage semble donc être un choix pertinent.

Dans ce chapitre deux approches sont proposées afin de répondre à deux enjeux différents. En amont du déploiement, la structure est dimensionnée de façon à respecter un certain nombre de critères. Le respect d'une durée de vie minimale en service en fait partie. Une première approche est alors développée afin d'estimer l'évolution de la probabilité de défaillance au cours du temps. Après déploiement, le déclenchement des inspections et des réparations est aussi un enjeu. Une seconde approche est alors développée afin d'estimer le temps pour lequel la probabilité de défaillance atteint une valeur critique. Ces deux approches sont introduites en quatre parties. La première présente différentes méthodes d'approximation basées sur le krigeage. La seconde introduit les différents éléments nécessaires à la mise en place d'un krigeage adaptatif. La troisième particularise les méthodes de krigeage adaptatif au cas du modèle 2SD. La quatrième présente, met en œuvre et analyse les approches globale et locales proposées.

## 4.1 Méthodes d'approximation par krigeage

### 4.1.1 Krigeage

Le krigeage a été développé et popularisé dans le cadre de travaux portant sur la géostatistique à partir des années 1950 [89, 90, 91]. Il est également connu sous le nom «d'interpolation par processus gaussien». Aujourd'hui, il est très utilisé pour sa robustesse, sa propriété d'interpolation et pour l'erreur locale d'approximation qu'il fournit. Dans les sous-sections suivantes, son développement et sa formulation sont détaillés en s'appuyant sur les travaux de synthèse réalisés dans [92].

#### 4.1.1.1 Principe du krigeage

L'objectif du krigeage est de construire une approximation d'une fonction déterministe  $y$  à partir de points échantillonnés  $\mathbf{x}$ . Cette approximation est réalisée sous l'hypothèse que  $y$  est une réalisation d'un processus gaussien stationnaire  $Y$  tel que :

$$Y(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) + PG(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

avec  $\mu(\mathbf{x})$  une quantité déterministe et  $PG(\mathbf{x})$  un processus gaussien de moyenne nulle. L'espérance et la variance de  $Y(\mathbf{x})$  s'écrivent :

$$\mathbb{E}(Y(\mathbf{x})) = \mathbb{E}(\mu(\mathbf{x}) + PG(\mathbf{x})) = \mu(\mathbf{x}) \quad (4.2)$$

$$\mathbb{V}(Y(\mathbf{x})) = \mathbb{V}(\mu(\mathbf{x}) + PG(\mathbf{x})) = \mathbb{V}(PG(\mathbf{x})) = \sigma^{PG^2} \quad (4.3)$$

La relation de covariance entre deux points  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}_j$  se note :

$$COV(Y(\mathbf{x}_i), Y(\mathbf{x}_j)) = COV(PG(\mathbf{x}_i), PG(\mathbf{x}_j)) \quad (4.4)$$

#### 4.1.1.2 Construction du krigeage

L'ensemble des observations est constitué de  $n_{OBS}$  observations de  $y_i$  calculées en  $\mathbf{x}_i$  pour  $i \in \llbracket 1; n_{OBS} \rrbracket$ . Cet ensemble constitue un échantillon. À partir de ce dernier, il est possible de déterminer un estimateur  $\hat{Y}$  de  $Y$  au point  $\mathbf{x}$  sous la forme :

$$\hat{Y}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{OBS}} \lambda_i Y(\mathbf{x}_i) \quad (4.5)$$

avec  $(\boldsymbol{\lambda})_i \in \mathbb{R}^{n_{OBS}}$  les inconnues du problème. Elles sont déterminées selon deux critères : l'estimateur doit être linéaire sans biais (4.6) et la variance (4.7) doit être minimale.

$$\mathbb{E}(Y(\mathbf{x}) - \hat{Y}(\mathbf{x})) = 0 \quad (4.6)$$

$$\mathbb{V}(Y(\mathbf{x}) - \hat{Y}(\mathbf{x})) = \mathbb{E}((Y(\mathbf{x}) - \hat{Y}(\mathbf{x}))^2) \quad (4.7)$$

Finalement, construire un modèle de krigeage revient à résoudre le problème de minimisation sous contrainte suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda} = \arg \min_{\boldsymbol{\lambda} \in U} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda} - 2\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}_0 + \sigma^{PG^2} \\ U = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{n_{OBS}} \mid \sum_{i=1}^{n_{OBS}} \lambda_i \mu(\mathbf{x}_i) - \mu(\mathbf{x}) = 0\} \end{cases} \quad (4.8)$$

où les notations suivantes sont utilisées :

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_{n_{OBS}}]^T \quad (4.9)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} COV(PG(\mathbf{x}_1), PG(\mathbf{x}_1)) & \dots & COV(PG(\mathbf{x}_1), PG(\mathbf{x}_{n_{OBS}})) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ COV(PG(\mathbf{x}_{n_{OBS}}), PG(\mathbf{x}_1)) & \dots & COV(PG(\mathbf{x}_{n_{OBS}}), PG(\mathbf{x}_{n_{OBS}})) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{c}_0 = [COV(PG(\mathbf{x}), PG(\mathbf{x}_1)) \quad \dots \quad COV(PG(\mathbf{x}), PG(\mathbf{x}_{n_{OBS}}))]^T \quad (4.11)$$

#### 4.1.1.3 Trois formulations du krigeage

Trois principaux types de krigeage existent : le krigeage simple (KS), le krigeage ordinaire (KO) et le krigeage universel (KU). Chacun d'entre eux est présenté dans les paragraphes suivants.

##### 4.1.1.3.1 Krigeage simple

Le krigeage simple considère que la moyenne  $\mu(\mathbf{x})$  est connue, constante et vaut  $\beta$ . Le plus souvent la moyenne  $\beta$  est choisie comme la moyenne empirique des observations  $\mathbf{Y} = [Y(\mathbf{x}_1) \quad \dots \quad Y(\mathbf{x}_{n_{OBS}})]^T$ . Le processus gaussien est alors de la forme :

$$Y(\mathbf{x}) = \beta + PG(\mathbf{x}) \quad (4.12)$$

Ainsi, l'estimateur  $\hat{Y}^{KS}(\mathbf{x})$  s'écrit :

$$\hat{Y}^{KS}(\mathbf{x}) = \beta + \mathbf{c}_0^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{Y} - \beta \mathbf{1}) \quad (4.13)$$

avec  $\mathbf{1}$  une matrice colonne de taille  $1 \times n_{OBS}$  dont toutes les composantes sont égales à 1. Par conséquent, la moyenne et la variance se formulent :

$$\hat{y}^{KS}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}(\hat{Y}^{KS}(\mathbf{x})) = \beta + \mathbf{c}_0^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{y} - \beta \mathbf{1}) \quad (4.14)$$

$$\hat{\sigma}^{KS^2}(\mathbf{x}) = \mathbb{V}(\hat{Y}^{KS}(\mathbf{x})) = \sigma^{PG^2} - \mathbf{c}_0^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{c}_0 \quad (4.15)$$

avec  $\mathbf{y} = [y_1 \quad \dots \quad y_{n_{OBS}}]^T$  le vecteur des observations.

##### 4.1.1.3.2 Krigeage ordinaire

Le krigeage ordinaire considère que la moyenne  $\mu(\mathbf{x})$  est inconnue, constante et vaut  $\beta$ . Le processus gaussien est alors de la forme :

$$Y(\mathbf{x}) = \beta + PG(\mathbf{x}) \quad (4.16)$$

Ainsi, l'estimateur  $\hat{Y}^{KO}(\mathbf{x})$  s'écrit :

$$\hat{Y}^{KO}(\mathbf{x}) = \left( \mathbf{c}_0 + \frac{1 - \mathbf{1}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{c}_0}{\mathbf{1}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{1}} \mathbf{1} \right)^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Y} \quad (4.17)$$

Par conséquent, la moyenne et la variance se formulent :

$$\hat{y}^{KO}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}(\hat{Y}^{KO}(\mathbf{x})) = \left( \mathbf{c}_0 + \frac{1 - \mathbf{1}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{c}_0}{\mathbf{1}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{1}} \mathbf{1} \right)^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y} \quad (4.18)$$

$$\hat{\sigma}^{KO^2}(\mathbf{x}) = \mathbb{V}(\hat{Y}^{KO}(\mathbf{x})) = \sigma^{PG^2} - \mathbf{c}_0^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{c}_0 + \mathbf{u}_0^T (\mathbf{1}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{1})^{-1} \mathbf{u}_0 \quad (4.19)$$

avec  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{1}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{c}_0 - \mathbf{1}$

#### 4.1.1.3.3 Krigeage universel

Le krigeage universel considère que la moyenne  $\mu(\mathbf{x})$  est une combinaison linéaire de coefficients de régression  $\{\beta_1, \dots, \beta_{n_{DEG}}\}$  et de fonctions de bases  $\{f_1, \dots, f_{n_{DEG}}\}$ . Le processus gaussien est alors de la forme :

$$Y(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{DEG}} \beta_i f_i(\mathbf{x}) + PG(\mathbf{x}) \quad (4.20)$$

avec  $n_{DEG}$  le degré polynomial. Ainsi, l'estimateur  $\hat{Y}^{KU}(\mathbf{x})$  s'écrit :

$$\hat{Y}^{KU}(\mathbf{x}) = \left( \mathbf{c}_0 + \mathbf{F}(\mathbf{F}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F})^{-1} (\mathbf{f}_0 - \mathbf{F}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{c}_0) \right)^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Y} \quad (4.21)$$

Par conséquent, la moyenne et la variance se formulent :

$$\hat{y}^{KU}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}(\hat{Y}^{KU}(\mathbf{x})) = \left( \mathbf{c}_0 + \mathbf{F}(\mathbf{F}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F})^{-1} (\mathbf{f}_0 - \mathbf{F}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{c}_0) \right)^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y} \quad (4.22)$$

$$\hat{\sigma}^{KU^2}(\mathbf{x}) = \mathbb{V}(\hat{Y}^{KU}(\mathbf{x})) = \sigma^{PG^2} - \mathbf{c}_0^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{c}_0 + \mathbf{u}_0^T (\mathbf{F}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{u}_0 \quad (4.23)$$

avec  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{F}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{c}_0 - \mathbf{f}_0$  et où les notations suivantes ont été utilisées :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}_1) & \cdots & f_{n_{DEG}}(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(\mathbf{x}_{n_{OBS}}) & \cdots & f_{n_{DEG}}(\mathbf{x}_{n_{OBS}}) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{f}_0 = [f_1(\mathbf{x}_0) \quad \cdots \quad f_{n_{DEG}}(\mathbf{x}_0)]^T \quad (4.25)$$

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n_{DEG}}]^T \quad (4.26)$$

#### 4.1.1.4 Covariance du krigeage

La forme de la structure de covariance de  $Y$  étant (le plus souvent) inconnue, une fonction de covariance doit être choisie afin de calculer  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{c}_0$ . Pour  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_{DIM}}$ , elle est de la forme :

$$COV(Y(\mathbf{x}_i), Y(\mathbf{x}_j)) = \sigma^{PG^2} \prod_{k=1}^{n_{DIM}} h(x_{i,k}, x_{j,k}, l_k) \quad (4.27)$$

avec  $x_{i,k}$  la  $k^{\text{ème}}$  composante de  $\mathbf{x}_i$ ,  $l_k$  la longueur de corrélation associée à la direction  $k$  et  $h$  la fonction de corrélation unidimensionnelle. Une liste non-exhaustive de fonctions  $h$  est présentée dans TABLE 4.1.

Nom	$h(x_{i,k}, x_{j,k}, l_k)$
Linéaire	$\max\left(0, 1 - \frac{ x_{j,k} - x_{i,k} }{l_k}\right)$
Gaussienne	$\exp\left(-\frac{(x_{j,k} - x_{i,k})^2}{2l_k^2}\right)$
Matérn 3/2	$\left(1 + \frac{\sqrt{3} x_{j,k} - x_{i,k} }{l_k}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{3} x_{j,k} - x_{i,k} }{l_k}\right)$
Matérn 5/2	$\left(1 + \frac{\sqrt{5} x_{j,k} - x_{i,k} }{l_k} + \frac{\sqrt{5}(x_{j,k} - x_{i,k})^2}{3l_k^2}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{5} x_{j,k} - x_{i,k} }{l_k}\right)$

TABLE 4.1 – Fonctions de corrélation unidimensionnelles

#### 4.1.1.5 Estimation des hyper-paramètres

La formulation du krigeage fait apparaître un certain nombre de paramètres tels que  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\sigma^{PG^2}$  et  $\mathbf{l} = [l_1 \ \dots \ l_{n_{DIM}}]$ . Afin d'estimer leur valeur, différentes méthodes existent dont, notamment, la validation croisée [93], le semi-variogramme [94] et le maximum de vraisemblance [95]. Dans [92], l'auteur compare la qualité des estimations en fonction de ces méthodes. Pour les cas numériques étudiés, l'auteur montre que le maximum de vraisemblance est la méthode la plus robuste et ce quelle que soit la fonction de corrélation choisie. Cette dernière est donc utilisée.

Dans le cadre d'un krigeage universel, la vraisemblance s'exprime :

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^{PG^2}, \mathbf{l}) = (2\pi\sigma^{PG^2})^{\frac{n_{OBS}}{2}} |\mathbf{K}(\mathbf{l})|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^{PG^2}} (\mathbf{Y} - \mathbf{F}\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{K}(\mathbf{l})^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{F}\boldsymbol{\beta})\right) \quad (4.28)$$

avec  $\mathbf{K}(\mathbf{l})$  la matrice de corrélation telle que  $\sigma^{PG^2} \mathbf{K}(\mathbf{l}) = \mathbf{C}$ . Puisqu'étudier le maximum de vraisemblance revient aussi à étudier le minimum de l'opposée du logarithme de la fonction de vraisemblance, le problème se formule :

$$(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\sigma}^{PG^2}, \hat{\mathbf{l}}) = \underset{(\boldsymbol{\beta}, \sigma^{PG^2}, \mathbf{l}) \in \mathbb{R}^{n_{DIM}} \times \mathbb{R}^{++} \times (\mathbb{R}^{++})^{n_{DIM}}}{\arg \min} -\log L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^{PG^2}, \mathbf{l}) \quad (4.29)$$

$\boldsymbol{\beta}$  et  $\sigma^{PG^2}$  étant explicitement définis au sein de la fonction de vraisemblance, il est possible d'en déduire les valeurs  $\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{l})$  et  $\hat{\sigma}^{PG^2}(\mathbf{l})$  qui maximisent la vraisemblance.

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{l}) = (\mathbf{F}^T \mathbf{K}(\mathbf{l})^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{K}(\mathbf{l})^{-1} \mathbf{Y} \quad (4.30)$$

$$\hat{\sigma}^{PG^2}(\mathbf{l}) = \frac{1}{n_{OBS}} (\mathbf{Y} - \mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{l}))^T \mathbf{K}(\mathbf{l})^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{l})) \quad (4.31)$$

Ainsi, (4.29) se réécrit :

$$\hat{\mathbf{l}} = \underset{\mathbf{l} \in (\mathbb{R}^{++})^{n_{DIM}}}{\arg \min} \hat{\sigma}^{PG^2}(\mathbf{l}) |\mathbf{K}(\mathbf{l})|^{1/n_{OBS}} \quad (4.32)$$

avec  $|\mathbf{K}|$  le déterminant de la matrice  $\mathbf{K}$ . Finalement,  $\hat{\mathbf{l}}$  est obtenu avec (4.32) puis  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  et  $\hat{\sigma}^{PG^2}$  sont déduits avec (4.30) et (4.31). Cette méthode est transposable aux krigeages simple et ordinaire comme le montre la TABLE 4.2.

	$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{l})$	$\hat{\sigma}^{PG^2}(\mathbf{l})$
Krigeage simple	$\boldsymbol{\beta}$	$\frac{1}{n_{OBS}} (\mathbf{Y} - \mathbf{1}_{n_{OBS}} \boldsymbol{\beta})^T \mathbf{K}(\mathbf{l})^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{1}_{n_{OBS}} \boldsymbol{\beta})$
Krigeage ordinaire	$(\mathbf{1}^T \mathbf{K}(\mathbf{l})^{-1} \mathbf{1})^{-1} \mathbf{1}^T \mathbf{K}(\mathbf{l})^{-1} \mathbf{Y}$	$\frac{1}{n_{OBS}} (\mathbf{Y} - \mathbf{1}\boldsymbol{\beta}(\mathbf{l}))^T \mathbf{K}(\mathbf{l})^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{1}\boldsymbol{\beta}(\mathbf{l}))$
Krigeage universel	$(\mathbf{F}^T \mathbf{K}(\mathbf{l})^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{K}(\mathbf{l})^{-1} \mathbf{Y}$	$\frac{1}{n_{OBS}} (\mathbf{Y} - \mathbf{F}\boldsymbol{\beta}(\mathbf{l}))^T \mathbf{K}(\mathbf{l})^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{F}\boldsymbol{\beta}(\mathbf{l}))$

TABLE 4.2 – Estimation des hyper-paramètres pour tout type de krigeage

### 4.1.2 Krigeage à gradient

Le krigeage à gradient est introduit pour la première fois dans [96]. Il est présenté dans ce manuscrit en s'appuyant sur les travaux de synthèse réalisés dans [92].

#### 4.1.2.1 Principe et intérêts

Dans certains cas, en plus de la valeur des points d'observation, disposer de leur gradient permet de nettement améliorer la qualité de l'estimateur. C'est le principe du krigeage à gradient. Considérons les processus gaussiens suivants :

$$Y(\mathbf{x}) = \mu_0(\mathbf{x}) + PG_0(\mathbf{x}) \quad (4.33)$$

$$W_k(\mathbf{x}) = \mu_k(\mathbf{x}) + PG_k(\mathbf{x}) \quad \forall k \in \llbracket 1; n_{DIM} \rrbracket \quad (4.34)$$

avec  $W_k(\mathbf{x}) = \frac{\partial Y}{\partial x_k}$ ,  $(\mu_0(\mathbf{x}), \mu_k(\mathbf{x}))$  des quantités déterministes et  $(PG_0(\mathbf{x}), PG_k(\mathbf{x}))$  des processus gaussiens de moyennes nulles. L'espérance et la variance de  $Y(\mathbf{x})$  et  $W_k(\mathbf{x})$  s'écrivent :

$$\mathbb{E}(Y(\mathbf{x})) = \mu_0(\mathbf{x}) \quad (4.35)$$

$$\mathbb{V}(Y(\mathbf{x})) = \sigma_0^{PG^2} \quad (4.36)$$

$$\mathbb{E}(W_k(\mathbf{x})) = \mu_k(\mathbf{x}) \quad \forall k \in \llbracket 1; n_{DIM} \rrbracket \quad (4.37)$$

$$\mathbb{V}(W_k(\mathbf{x})) = \sigma_k^{PG^2} \quad \forall k \in \llbracket 1; n_{DIM} \rrbracket \quad (4.38)$$

$$(4.39)$$

#### 4.1.2.2 Formulation

$Y$  et  $W_k$  sont évalués en  $n_{OBS}$  points. L'ensemble des observations  $y(\mathbf{x}_i)$  et  $w_k(\mathbf{x}_i)$  pour  $i \in \llbracket 1; n_{OBS} \rrbracket$  et  $k \in \llbracket 1; n_{DIM} \rrbracket$  constitue un échantillon. À partir de ce dernier, il est possible de déterminer un estimateur  $\hat{Y}^G(\mathbf{x})$  de  $Y(\mathbf{x})$  et  $W_k(\mathbf{x})$  sous la forme :

$$\hat{Y}^G(\mathbf{x}) = \mu^G(\mathbf{x}) + PG^G(\mathbf{x}) \quad (4.40)$$

Au point  $\mathbf{x}$ , ce dernier s'écrit :

$$\hat{Y}^G(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{OBS}} \lambda_i^0 Y(\mathbf{x}_i) + \sum_{i=1}^{n_{OBS}} \sum_{k=1}^{n_{DIM}} \lambda_i^k W_k(\mathbf{x}_i) \quad (4.41)$$

avec  $(\lambda^0, \lambda^k)_i \in \mathbb{R}^{n_{OBS} \times (1+n_{DIM})}$  les inconnues du problème. Ces inconnues sont déterminées selon les deux mêmes critères que pour le krigeage : l'estimateur doit être linéaire sans biais (4.6) et à variance minimale (4.7). Les observations se notent :

$$\mathbf{y}^W = \left[ \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_{n_{DIM}}} \quad \dots \quad \frac{\partial y_{n_{OBS}}}{\partial x_{n_{DIM}}} \right]^T \quad (4.42)$$

$$\mathbf{y}^G = \left[ \mathbf{y}^T \quad \mathbf{y}^{WT} \right]^T \quad (4.43)$$



Les matrices des fonctions de base s'écrivent :

$$\mathbf{F}^W = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_1) & \cdots & \frac{\partial f_{n_{DIM}}}{\partial x_1}(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_{n_{DIM}}}(\mathbf{x}_1) & \cdots & \frac{\partial f_{n_{DIM}}}{\partial x_{n_{DIM}}}(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_{n_{DIM}}}(\mathbf{x}_{n_{OBS}}) & \cdots & \frac{\partial f_{n_{DIM}}}{\partial x_{n_{DIM}}}(\mathbf{x}_{n_{OBS}}) \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{F}^G = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T & \mathbf{F}^{WT} \end{bmatrix}^T \quad (4.45)$$

$$\mathbf{f}_0^W = \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \frac{\partial f_{n_{DIM}}}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \frac{\partial f_{n_{DIM}}}{\partial x_{n_{DIM}}}(\mathbf{x}) \right]^T \quad (4.46)$$

$$\mathbf{f}_0^G = \left[ \mathbf{f}_0^T \quad \mathbf{f}_0^{WT} \right]^T \quad (4.47)$$

Les matrices de covariance sont de la forme :

$$\mathbf{C}^{WY} = \begin{bmatrix} c_{11,1} & \cdots & c_{11,n_{DIM}} & \cdots & c_{1n_{OBS},n_{DIM}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ c_{n_{OBS}1,1} & \cdots & c_{n_{OBS}1,n_{DIM}} & \cdots & c_{n_{OBS}n_{OBS},n_{DIM}} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$\mathbf{C}_{kl}^{WY} = \begin{bmatrix} c_{kl,11} & \cdots & c_{kl,1n_{DIM}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{kl,n_{DIM}1} & \cdots & c_{kl,n_{DIM}n_{DIM}} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$\mathbf{C}^{WW} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11}^{WW} & \cdots & \mathbf{C}_{1n_{OBS}}^{WW} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{n_{OBS},1}^{WW} & \cdots & \mathbf{C}_{n_{OBS},n_{OBS}}^{WW} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$\mathbf{C}^G = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C}^{WY} \\ \mathbf{C}^{WY^T} & \mathbf{C}^{WW} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$\mathbf{c}_0^W = [c_{10,1} \quad \cdots \quad c_{10,n_{DIM}} \quad \cdots \quad c_{n_{OBS}0,n_{DIM}}]^T \quad (4.52)$$

$$\mathbf{c}_0^G = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0^T & \mathbf{c}_0^{WT} \end{bmatrix}^T \quad (4.53)$$

$$c_{ij} = COV(PG^G(\mathbf{x}_i), PG^G(\mathbf{x}_j)) \quad (4.54)$$

$$c_{ij,k} = \frac{\partial COV}{\partial x_k}(PG^G(\mathbf{x}_i), PG^G(\mathbf{x}_j)) \quad (4.55)$$

$$c_{ij,kl} = \frac{\partial^2 COV}{\partial x_k \partial x_l}(PG^G(\mathbf{x}_i), PG^G(\mathbf{x}_j)) \quad (4.56)$$

Finalement, la moyenne et la variance de l'estimateur  $\hat{Y}^G$  construit par krigeage à gradient de type universel se formulent ainsi :

$$\hat{y}^{KUG} = \left( \mathbf{c}_0^G + \mathbf{F}^G (\mathbf{F}^{GT} \mathbf{C}^{G^{-1}} \mathbf{F}^G)^{-1} (\mathbf{f}_0^G - \mathbf{F}^{GT} \mathbf{C}^{G^{-1}} \mathbf{c}_0^G) \right)^T \mathbf{C}^{G^{-1}} \mathbf{y}^G \quad (4.57)$$

$$\hat{\sigma}^{KUG^2} = \sigma^{G^2} - \mathbf{c}_0^{GT} \mathbf{C}^{G^{-1}} \mathbf{c}_0^G + \mathbf{u}_0^{GT} (\mathbf{F}^{GT} \mathbf{C}^{G^{-1}} \mathbf{F}^G)^{-1} \mathbf{u}_0^G \quad (4.58)$$

avec  $\mathbf{u}_0^G = \mathbf{F}^{GT} \mathbf{C}^{G^{-1}} \mathbf{c}_0^G - \mathbf{f}_0^G$ . Avec 4.51, il est important de remarquer que la structure de la matrice de corrélation  $\mathbf{C}^G$  est plus complexe que celle utilisée pour un krigeage sans gradient.

#### 4.1.2.3 Estimation des hyperparamètres

Le krigeage à gradient fait donc apparaître les hyperparamètres  $(\beta^G, \sigma^{G^2}, \mathbf{l}^G)$  lors de la formulation de  $\hat{Y}^G$ . Leur estimation peut être réalisée en reprenant la méthode définie dans la

sous-section 4.1.1.5. Les estimations  $(\hat{\boldsymbol{\beta}}^G, \hat{\sigma}^{G^2}, \hat{\mathbf{l}}^G)$  se calculent alors comme suivant :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^G(\mathbf{l}^G) = (\mathbf{F}^{G^T} \mathbf{K}^G(\mathbf{l}^G)^{-1} \mathbf{F}^G)^{-1} \mathbf{F}^{G^T} \mathbf{K}^G(\mathbf{l}^G)^{-1} \mathbf{Y}^G \quad (4.59)$$

$$\hat{\sigma}^{G^2} = \frac{1}{n_{OBS}} (\mathbf{Y}^G - \mathbf{F}^G \hat{\boldsymbol{\beta}}^G(\mathbf{l}^G))^T \mathbf{K}^G(\mathbf{l}^G)^{-1} (\mathbf{Y}^G - \mathbf{F}^G \hat{\boldsymbol{\beta}}^G(\mathbf{l}^G)) \quad (4.60)$$

$$\hat{\mathbf{l}}^G = \arg \min_{\mathbf{l} \in (\mathbb{R}^{*+})^{n_{DIM}}} \hat{\sigma}^{G^2}(\mathbf{l}) |\mathbf{K}^G(\mathbf{l})|^{1/n_{OBS}} \quad (4.61)$$

### 4.1.3 Krigeage multifidélité

Le cokrigeage est introduit par [91] afin de prendre en compte plusieurs niveaux d'informations. Plusieurs déclinaisons existent. Dans cette section, le krigeage multifidélité auto-régressif [24] est présenté en s'appuyant notamment sur les travaux de synthèse réalisés dans [97].

#### 4.1.3.1 Principe et intérêts

Le calcul des points d'observation est la partie la plus coûteuse dans la mise en place d'un estimateur. Le krigeage multifidélité permet de diminuer ce coût en considérant des points issus de différents niveaux de fidélité. La notion de fidélité désigne ici la précision ou la fiabilité d'un résultat ou d'un modèle. Un point haute fidélité est très précis mais souvent coûteux tandis qu'un point basse fidélité est peu précis mais moins coûteux. Pour simplifier, seuls deux niveaux de fidélités sont considérés et définis par les processus gaussiens suivants :

$$Y^H(\mathbf{x}) = \mu^H(\mathbf{x}) + PG^H(\mathbf{x}) \quad (4.62)$$

$$Y^B(\mathbf{x}) = \mu^B(\mathbf{x}) + PG^B(\mathbf{x}) \quad (4.63)$$

avec  $Y^H(\mathbf{x})$  le processus haute fidélité,  $Y^B(\mathbf{x})$  le processus basse fidélité,  $(\mu^H(\mathbf{x}), \mu^B(\mathbf{x}))$  des quantités déterministes et  $(PG^H(\mathbf{x}), PG^B(\mathbf{x}))$  des processus gaussiens de moyennes nulles. Les espérances et variances s'écrivent :

$$\mathbb{E}(Y^H(\mathbf{x})) = \mu^H(\mathbf{x}) \quad (4.64)$$

$$\mathbb{V}(Y^H(\mathbf{x})) = \sigma^{PG^H^2} \quad (4.65)$$

$$\mathbb{E}(Y^B(\mathbf{x})) = \mu^B(\mathbf{x}) \quad (4.66)$$

$$\mathbb{V}(Y^B(\mathbf{x})) = \sigma^{PG^B^2} \quad (4.67)$$

$$(4.68)$$

La relation entre les deux niveaux de fidélité s'écrit :

$$Y^H(\mathbf{x}) = \rho Y^B(\mathbf{x}) + Y^\Delta(\mathbf{x}) \quad (4.69)$$

avec  $\rho$  un facteur d'échelle et  $Y^\Delta(\mathbf{x})$  un processus gaussien défini comme l'écart entre les deux niveaux de fidélité.

#### 4.1.3.2 Formulation

$Y^H$  et  $Y^B$  sont respectivement évalués en  $n_{OBS_H}$  et  $n_{OBS_H} + n_{OBS_B}$  points. L'ensemble des observation  $y^H(\mathbf{x}_i^H)$ ,  $y^B(\mathbf{x}_j^B)$  et  $y^B(\mathbf{x}_i^H)$  pour  $i \in \llbracket 1; n_{OBS_H} \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1; n_{OBS_B} \rrbracket$  constitue un échantillon. À partir de ce dernier, il est possible de déterminer l'estimateur  $\hat{Y}^{MF}(\mathbf{x})$  de  $Y^H(\mathbf{x})$  au point  $\mathbf{x}$  sous la forme :

$$\hat{Y}^{MF}(\mathbf{x}) = \mu^{MF}(\mathbf{x}) + PG^{MF}(\mathbf{x}) \quad (4.70)$$

$$(4.71)$$

Au point  $\mathbf{x}$  ce dernier s'écrit :

$$\hat{Y}^{MF}(\mathbf{x}) = \rho \sum_{i=1}^{n_{OBS_B}} \lambda_i^B Y^B(\mathbf{x}_i^B) + \sum_{i=1}^{n_{OBS_H}} \lambda_i^H (Y^H(\mathbf{x}_i^H) - \rho Y^B(\mathbf{x}_i^H)) \quad (4.72)$$

avec  $(\lambda^B, \lambda^H)_i \in \mathbb{R}^{n_{OBS_B} + n_{OBS_H}}$  les inconnues du problème. Ces inconnues sont déterminées selon les deux mêmes critères que pour le krigeage : l'estimateur doit être linéaire sans biais (4.6) et à variance minimale (4.7). D'après la sous-section 4.1.1.3 et en considérant un krigeage de type universel, trois estimateurs sont définis en fonction de trois échantillons d'observations.

- En considérant les observations  $y^B(\mathbf{x}_i^B)$  pour  $i \in \llbracket 1; n_{OBS_B} \rrbracket$ , la moyenne et la variance de l'estimateur  $\hat{Y}^{KU_B}$  de  $Y^B$  s'expriment :

$$\hat{y}^{KU_B}(\mathbf{x}) = \left( \mathbf{c}^B + \mathbf{F}^B (\mathbf{F}^{B^T} \mathbf{C}^{B^{-1}} \mathbf{F}^B)^{-1} (\mathbf{f}_0^B - \mathbf{F}^{B^T} \mathbf{C}^{B^{-1}} \mathbf{c}_0^B) \right)^T \mathbf{C}^{B^{-1}} \mathbf{y}^B \quad (4.73)$$

$$\hat{\sigma}^{KU_B^2}(\mathbf{x}) = \sigma^{B^2} - \mathbf{c}_0^{B^T} \mathbf{C}^{B^{-1}} \mathbf{c}_0^B + \mathbf{u}_0^{B^T} (\mathbf{F}^{B^T} \mathbf{C}^{B^{-1}} \mathbf{F}^B)^{-1} \mathbf{u}_0^B \quad (4.74)$$

avec  $\mathbf{u}_0^B = \mathbf{F}^{B^T} \mathbf{C}^{B^{-1}} \mathbf{c}_0^B - \mathbf{f}_0^B$

- En considérant les prédictions  $\hat{\mu}^{KU_B}(\mathbf{x}_i^H)$  pour  $i \in \llbracket 1; n_{OBS_H} \rrbracket$ , la moyenne et la variance de l'estimateur  $\hat{Y}^{KU_{\hat{B}}}$  de  $Y^B$  s'expriment :

$$\hat{y}^{KU_{\hat{B}}}(\mathbf{x}) = \left( \mathbf{c}_0^{\hat{B}} + \mathbf{F}^{\hat{B}} (\mathbf{F}^{\hat{B}^T} \mathbf{C}^{\hat{B}^{-1}} \mathbf{F}^{\hat{B}})^{-1} (\mathbf{f}_0^{\hat{B}} - \mathbf{F}^{\hat{B}^T} \mathbf{C}^{\hat{B}^{-1}} \mathbf{c}_0^{\hat{B}}) \right)^T \mathbf{C}^{\hat{B}^{-1}} \mathbf{y}^{\hat{B}} \quad (4.75)$$

$$\hat{\sigma}^{KU_{\hat{B}}^2}(\mathbf{x}) = \sigma^{\hat{B}^2} - \mathbf{c}_0^{\hat{B}^T} \mathbf{C}^{\hat{B}^{-1}} \mathbf{c}_0^{\hat{B}} + \mathbf{u}_0^{\hat{B}^T} (\mathbf{F}^{\hat{B}^T} \mathbf{C}^{\hat{B}^{-1}} \mathbf{F}^{\hat{B}})^{-1} \mathbf{u}_0^{\hat{B}} \quad (4.76)$$

avec  $\mathbf{u}_0^{\hat{B}} = \mathbf{F}^{\hat{B}^T} \mathbf{C}^{\hat{B}^{-1}} \mathbf{c}_0^{\hat{B}} - \mathbf{f}_0^{\hat{B}}$

- En considérant les observations  $y^\Delta(\mathbf{x}_i^H) = y^H(\mathbf{x}_i^H) - \rho \hat{\mu}^{KU_B}(\mathbf{x}_i^H)$  pour  $i \in \llbracket 1; n_{OBS_H} \rrbracket$ , la moyenne et la variance de l'estimateur  $\hat{Y}^{KU_\Delta}$  de  $Y^\Delta$  s'expriment :

$$\hat{y}^{KU_\Delta}(\mathbf{x}) = \left( \mathbf{c}_0^\Delta + \mathbf{F}^\Delta (\mathbf{F}^{\Delta^T} \mathbf{C}^{\Delta^{-1}} \mathbf{F}^\Delta)^{-1} (\mathbf{f}_0^\Delta - \mathbf{F}^{\Delta^T} \mathbf{C}^{\Delta^{-1}} \mathbf{c}_0^\Delta) \right)^T \mathbf{C}^{\Delta^{-1}} \mathbf{y}^\Delta \quad (4.77)$$

$$\hat{\sigma}^{KU_\Delta^2}(\mathbf{x}) = \sigma^{\Delta^2} - \mathbf{c}_0^{\Delta^T} \mathbf{C}^{\Delta^{-1}} \mathbf{c}_0^\Delta + \mathbf{u}_0^{\Delta^T} (\mathbf{F}^{\Delta^T} \mathbf{C}^{\Delta^{-1}} \mathbf{F}^\Delta)^{-1} \mathbf{u}_0^\Delta \quad (4.78)$$

avec  $\mathbf{u}_0^\Delta = \mathbf{F}^{\Delta^T} \mathbf{C}^{\Delta^{-1}} \mathbf{c}_0^\Delta - \mathbf{f}_0^\Delta$

À partir de ces notations, un nouvel estimateur  $\hat{Y}^{MF}$  de  $Y_H$  est alors défini. C'est l'estimateur multifidélité de type universel dont la moyenne et la variance s'écrivent :

$$\hat{y}^{KUMF}(\mathbf{x}) = \left( \mathbf{c}_0^{MF} + \mathbf{F}^{MF} (\mathbf{F}^{MF^T} \mathbf{C}^{MF^{-1}} \mathbf{F}^{MF})^{-1} (\mathbf{f}_0^{MF} - \mathbf{F}^{MF^T} \mathbf{C}^{MF^{-1}} \mathbf{c}_0^{MF}) \right)^T \mathbf{C}^{MF^{-1}} \mathbf{y}^{MF} \quad (4.79)$$

$$\hat{\sigma}^{KU_{MF}^2}(\mathbf{x}) = \rho^2 \sigma^{B^2} + \sigma^{\Delta^2} - \mathbf{c}_0^{MF^T} \mathbf{C}^{MF^{-1}} \mathbf{c}_0^{MF} + \mathbf{u}_0^{MF^T} (\mathbf{F}^{MF^T} \mathbf{C}^{MF^{-1}} \mathbf{F}^{MF})^{-1} \mathbf{u}_0^{MF} \quad (4.80)$$

avec  $\mathbf{u}_0^{MF} = \mathbf{F}^{MF^T} \mathbf{C}^{MF^{-1}} \mathbf{c}_0^{MF} - \mathbf{f}_0^{MF}$  et où les notations suivantes ont été utilisées :

$$\mathbf{F}^{MF} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{B^T} & \mathbf{0} \\ \rho \mathbf{F}^{\hat{B}^T} & \mathbf{F}^{\Delta^T} \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

$$\mathbf{f}_0^{MF} = \begin{bmatrix} \rho \mathbf{f}_0^{\hat{B}^T} & \mathbf{f}_0^{\Delta^T} \end{bmatrix}^T \quad (4.82)$$

$$\mathbf{C}^{MF} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^B & \rho \mathbf{C}^{\hat{B}} \\ \rho \mathbf{C}^{\hat{B}^T} & \rho \mathbf{C}^B + \mathbf{C}^\Delta \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

$$\mathbf{c}_0^{MF} = \begin{bmatrix} \rho \mathbf{c}_0^{B^T} & \rho \mathbf{c}_0^{\hat{B}^T} + \mathbf{c}_0^{\Delta^T} \end{bmatrix}^T \quad (4.84)$$

### 4.1.3.3 Estimation des hyperparamètres

Le cokrigeage à deux niveaux de fidélité fait donc apparaître les hyperparamètres  $(\boldsymbol{\beta}^B, \sigma^{B^2}, \mathbf{l}^B)$  lors de la formulation de  $\hat{Y}^B$  et  $(\boldsymbol{\beta}^\Delta, \sigma^{\Delta^2}, \mathbf{l}^\Delta, \rho)$  lors de la formulation de  $\hat{Y}^\Delta$ . D'après la condition d'indépendance entre  $Y^B$  et  $Y^\Delta$ , les hyperparamètres sont estimés séparément. Cette estimation peut alors être réalisée en reprenant la méthode définie dans la sous-section 4.1.1.5. Les estimations  $(\hat{\boldsymbol{\beta}}^B, \hat{\sigma}^{B^2}, \hat{\mathbf{l}}^B)$  se calculent alors :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^B(\mathbf{l}^B) = (\mathbf{F}^{B^T} \mathbf{K}^B(\mathbf{l}^B)^{-1} \mathbf{F}^B)^{-1} \mathbf{F}^{B^T} \mathbf{K}^B(\mathbf{l}^B)^{-1} \mathbf{Y}^B \quad (4.85)$$

$$\hat{\sigma}^{B^2} = \frac{1}{n_{OBS_B}} (\mathbf{Y}^B - \mathbf{F}^B \hat{\boldsymbol{\beta}}^B(\mathbf{l}^B))^T \mathbf{K}^B(\mathbf{l}^B)^{-1} (\mathbf{Y}^B - \mathbf{F}^B \hat{\boldsymbol{\beta}}^B(\mathbf{l}^B)) \quad (4.86)$$

$$\hat{\mathbf{l}}^B = \arg \min_{\mathbf{l} \in (\mathbb{R}^{*+})^{n_{DIM}}} \hat{\sigma}^{B^2}(\mathbf{l}) |\mathbf{K}^B(\mathbf{l})|^{1/n_{OBS_B}} \quad (4.87)$$

Tandis que les estimations  $(\hat{\boldsymbol{\beta}}^\Delta, \hat{\sigma}^{\Delta^2}, \hat{\mathbf{l}}^\Delta, \hat{\rho})$  sont obtenues telles que :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^\Delta(\mathbf{l}^\Delta) = (\mathbf{F}^{\Delta^T} \mathbf{K}^\Delta(\mathbf{l}^\Delta)^{-1} \mathbf{F}^\Delta)^{-1} \mathbf{F}^{\Delta^T} \mathbf{K}^\Delta(\mathbf{l}^\Delta)^{-1} \mathbf{Y}^\Delta \quad (4.88)$$

$$\hat{\sigma}^{\Delta^2} = \frac{1}{n_{OBS_H}} (\mathbf{Y}^\Delta - \mathbf{F}^\Delta \hat{\boldsymbol{\beta}}^\Delta(\mathbf{l}^\Delta))^T \mathbf{K}^\Delta(\mathbf{l}^\Delta)^{-1} (\mathbf{Y}^\Delta - \mathbf{F}^\Delta \hat{\boldsymbol{\beta}}^\Delta(\mathbf{l}^\Delta)) \quad (4.89)$$

$$\hat{\mathbf{l}}^\Delta = \arg \min_{\mathbf{l} \in (\mathbb{R}^{*+})^{n_{DIM}}} \hat{\sigma}^{\Delta^2}(\mathbf{l}) |\mathbf{K}^\Delta(\mathbf{l})|^{1/n_{OBS_H}} \quad (4.90)$$

$$\hat{\rho} = \arg \min_{\rho \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n_{OBS_H}} |y_i^H - \rho \hat{y}^B(\mathbf{x}_i^H)| \quad (4.91)$$

### 4.1.4 Krigeage sous contraintes linéaires

Dans le cas où la grandeur à estimer est monotone et/ou bornée, le cokrigeage à contraintes linéaires [98] permet de formuler un estimateur respectant ces propriétés. Le dommage calculé avec le modèle 2SD étant monotone au cours du temps et étant défini sur le même domaine de définition que  $D_C$  soit  $[0, 0.5]$ , cette approche prend tout son sens. Cependant, le krigeage sous contrainte linéaire est récent et présente trois principales limites encore non résolues. La première est que sa formulation peut entraîner un mauvais conditionnement du système à résoudre (lors de la minimisation sans biais). Le conditionnement est d'autant plus mauvais que le nombre de points estimés sous contraintes est élevé. La seconde est que pour générer des estimations en accord avec les valeurs calculées au sein de la matrice de covariance, la méthode *Rejection Sampling* [86] est utilisée. Ainsi, plus le nombre de points estimés sous contraintes est élevé plus les coûts numériques augmentent rapidement. La troisième est que la méthode ne permet pas de calculer directement la variance du processus estimé et ne fournit donc pas d'information locale sur l'erreur d'approximation. Pour ces raisons, le cokrigeage à contraintes linéaires n'est pas plus détaillé et n'est pas considéré par la suite.

## 4.2 Méthodes d'approximation par krigeage adaptatif

Il est possible d'améliorer la qualité d'un estimateur en ajoutant des points observés. Cette phase s'appelle l'apprentissage. Elle peut être passive ou adaptative. L'apprentissage passif consiste à ajouter des observations choisies au hasard. L'apprentissage adaptatif utilise une fonction d'apprentissage pour sélectionner les observations. Lorsqu'il s'agit d'estimer une probabilité de défaillance, le krigeage adaptatif est le plus souvent construit selon quatre principaux axes : la fonction d'apprentissage, le critère d'apprentissage et deux critères d'arrêt. Finalement, la probabilité de défaillance est calculée à partir de  $n_{MCS}$  points estimés en utilisant la méthode de Monte Carlo (cf. section 1.1.2).

### 4.2.1 Fonction d'apprentissage

Une fonction d'apprentissage vise à identifier le nouveau point d'apprentissage. Un très grand nombre de formulations existent telles que EFF [99], IMSE [100],  $U$  [14], SUR [101],  $H$  [18], OBJ [102] ou  $L$  [103]. Dans [21], ces dernières sont comparées et les fonctions  $H$ , EFF et  $U$  sont identifiées comme les plus efficaces. Dans ces travaux, c'est la fonction  $U$  qui est finalement considérée pour sa simplicité. Elle s'écrit :

$$U(\mathbf{x}_i) = \frac{|\hat{G}(\mathbf{x}_i)|}{\sqrt{\mathbb{V}(\hat{G}(\mathbf{x}_i))}} \quad \forall i \in \llbracket 1; n_{MCS} \rrbracket \quad (4.92)$$

avec  $n_{MCS}$  le nombre de points où l'espérance  $\hat{G}$  et la variance  $\mathbb{V}(\hat{G})$  de l'estimation de la fonction de performance  $G$  sont évaluées.

### 4.2.2 Critère d'apprentissage

D'après la définition de  $U$ , sa valeur est faible lorsque  $\hat{G}(\mathbf{x}_i)$  est proche de zéro ou lorsque  $\mathbb{V}(\hat{G}(\mathbf{x}_i))$  est élevé. En d'autres termes, chercher le minimum de cette fonction revient à sélectionner le point où le signe de  $\hat{G}(\mathbf{x}_i)$  est le plus incertain. Ce minimum est appelé point d'apprentissage :

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x}_i \in \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n_{MCS}}\}} U(\mathbf{x}_i) \quad (4.93)$$

Le critère d'apprentissage a pour but de stopper l'apprentissage lorsque la précision du métamodèle est suffisante.

### 4.2.3 Premier critère d'arrêt

D'après (4.92), dans [104] il est démontré que si  $U(\mathbf{x}^*) \geq U_C$  alors :

$$\begin{cases} \text{Prob}(G(\mathbf{x}_i) \leq 0) \leq \Phi(-U_C) \text{ si } \hat{G}(\mathbf{x}_i) > 0 \\ \text{Prob}(G(\mathbf{x}_i) > 0) \leq \Phi(-U_C) \text{ si } \hat{G}(\mathbf{x}_i) \leq 0 \end{cases} \quad (4.94)$$

Cela signifie que la probabilité de commettre une erreur sur le signe  $G$  en un point est inférieure à  $\Phi(-U_C)$ . Un premier critère d'arrêt se formule donc « Si  $U(\mathbf{x}^*) \geq U_C$  alors fin de l'apprentissage ». Usuellement  $U_C$  est posé comme égal à 2 avec  $\Phi(-2) = 0.023$  ou à 1 avec  $\Phi(-1) = 0.159$ . Comme indiqué dans [105], ce critère a cependant tendance à nécessiter l'ajout de nombreux points d'observation après convergence de la méthode. Deux principales solutions existent : la première relâche le critère tandis que la seconde propose un critère alternatif.

Le relâchement du critère est proposée dans [15] où le ratio  $P_{U \geq U_C}$  tel que :

$$P_{U \geq U_C} = \frac{n_{U \geq U_C}}{n_{MCS}} \quad (4.95)$$

avec  $n_{U \geq U_C}$  le nombre de points où  $U(\mathbf{x}) \geq U_C$ . Le critère d'arrêt se reformule alors « Si  $P_{U \geq U_C} \geq P_C$  alors l'apprentissage prend fin ». Usuellement,  $P_C$  est posé entre 0.9 et 0.999.

Le critère alternatif est proposé dans [105] où la stabilité de probabilité de défaillance estimée est définie telle que :

$$\frac{|P_f^{(i)} - P_f^{(1)}|}{P_f^{(1)}} \leq \gamma \quad \forall i \in \llbracket 2; n_\gamma \rrbracket \quad (4.96)$$

avec  $P_f^{(1)}$  la probabilité de défaillance estimée avant l'apprentissage,  $P_f^{(i)}$  la probabilité de défaillance estimée après  $i - 1$  phases d'apprentissage et  $n_\gamma$  le nombre de phases d'apprentissage nécessaires au respect du critère d'arrêt  $\gamma$ . Ce dernier est usuellement posé proche de 0.01.

#### 4.2.4 Second critère d'arrêt

Une fois le premier critère d'arrêt respecté, en fonction de la taille de la population  $n_{MCS}$ , le coefficient de variation de la probabilité de défaillance  $P_f$  est calculé :

$$\text{COV}(P_f) = \sqrt{\frac{1 - P_f}{n_{MCS} \times P_f}} \quad (4.97)$$

Si le coefficient est supérieur à un coefficient seuil  $\text{COV}_C$  alors l'échantillon des estimations est trop petit : un nouvel échantillon de plus grande taille est généré et la méthode reprend. Sinon, la méthode prend fin. Le second critère d'arrêt se formule donc « Si  $\text{COV}(P_f) \leq \text{COV}_C$  alors fin de l'apprentissage ». D'après la littérature [14, 16, 106],  $\text{COV}_C$  est posé entre  $10^{-3}$  et  $10^{-1}$ .

### 4.3 Approximation du modèle 2SD par krigeage adaptatif

Les méthodes de krigeage adaptatif permettent d'approximer une grandeur d'intérêt. Ces dernières sont particularisées au cas d'une analyse de fiabilité basée sur le modèle 2SD. Différents leviers permettant de réduire les coûts numériques sont alors investigués. Premièrement, l'estimateur est construit à partir d'observations issues du modèle. Une méthode est développée afin de diminuer le coût d'appel du modèle. Deuxièmement, le choix de la grandeur estimée a un impact non négligeable sur le coût de construction de l'estimateur. La sélection de la grandeur estimée la plus adaptée est donc discutée. Troisièmement, un apprentissage multiple plutôt qu'un apprentissage unique permet d'améliorer plus rapidement la qualité de l'estimateur mais augmente le nombre d'appels au modèle. La mise en place d'un apprentissage multiple à moindre coût est donc considérée.

#### 4.3.1 Réimplémentation du modèle 2SD pour le calcul des observations

Quelle que soit l'approche itérative, lorsque le coût numérique est un enjeu, il est primordial de s'assurer qu'aucun calcul n'est redondant. L'implémentation du modèle 2SD est donc reconsidérée.

##### 4.3.1.1 Factorisation des matrices de rigidité et de déformation

À l'échelle macroscopique, le comportement est élastique linéaire. La construction et la factorisation des matrices de rigidité et de déformation peuvent donc être réalisées une unique fois à la première itération et être réutilisées lors des itérations suivantes.

##### 4.3.1.2 Exploitation des relations entre les variables internes du modèle 2SD

À l'échelle microscopique, le modèle est incrémental. Le calcul des variables internes à l'instant  $t + \Delta t$  nécessite de connaître les valeurs de  $\boldsymbol{\epsilon}^{\mu p}$ ,  $p^\mu$  et  $\mathbf{X}^\mu$  à l'instant  $t$ . Dans l'Annexe 2, les trois relations suivantes sont démontrées :

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\mu p}(t, C_i) = \frac{2\mu + \frac{2}{3}C_j}{2\mu + \frac{2}{3}C_i} \boldsymbol{\epsilon}^{\mu p}(t, C_j) \quad \forall t \in [t_{init}, t_{D_i}] \cap [t_{init}, t_{D_j}] \quad (4.98)$$

$$p^\mu(t, C_i) = \frac{2\mu + \frac{2}{3}C_j}{2\mu + \frac{2}{3}C_i} p^\mu(t, C_j) \quad \forall t \in [t_{init}, t_{D_i}] \cap [t_{init}, t_{D_j}] \quad (4.99)$$

$$\mathbf{X}^\mu(t, C_i) = \frac{(2\mu + \frac{2}{3}C_i) C_i}{(2\mu + \frac{2}{3}C_j) C_j} \mathbf{X}^\mu(t, C_j) \quad \forall t \in [t_{init}, t_{D_i}] \cap [t_{init}, t_{D_j}] \quad (4.100)$$

avec les temps où le dommage s'amorce  $t_{D_i}$  et  $t_{D_j}$  associées aux réalisations  $(C_i, p_{D_i})$  et  $(C_j, p_{D_j})$  de  $(C, p_D)$ . D'après (4.99), le temps  $t_{D_i}$  se calcule :

$$t_{D_i} = \arg \min_{t \in [t_{init}, t_{D_j}]} \left| p_{D_i} - \frac{2\mu + \frac{2}{3}C_j}{2\mu + \frac{2}{3}C_i} p^\mu(t, C_j) \right| \quad (4.101)$$

Si  $\boldsymbol{\epsilon}^{\mu p}(t, C_j)$ ,  $p^\mu(t, C_j)$  et  $\mathbf{X}^\mu(t, C_j)$  sont connus quel que soit  $t \in [t_{init}, t_{D_j}]$  et si  $t < t_{D_i}$ , il est possible d'en déduire instantanément  $\boldsymbol{\epsilon}^{\mu p}(t, C_i)$ ,  $p^\mu(t, C_i)$  et  $\mathbf{X}^\mu(t, C_i)$ . En revanche, si  $t \geq t_{D_i}$ , il est possible de redémarrer le calcul incrémental dès l'instant  $t_{D_i}$ . Toutes les itérations où  $t < t_{D_i}$  sont ainsi évitées.

D'après les équations du modèle, plus les valeurs de  $C$  et  $p_D$  sont grandes, plus l'initialisation du dommage est tardive. Les réalisations correspondant au maximum de chacun des supports  $(C^{\max}, p_D^{\max})$  constituent donc le cas où l'initialisation du dommage est la plus tardive. Pour exploiter de façon optimale les équations (4.98), (4.99) et (4.100), il est donc conseillé de calculer

l'évolution des variables internes avec les réalisations  $(C^{\max}, p_D^{\max})$ . Finalement l'aléa matériau est propagé comme indiqué avec le diagramme Figure 4.1 où  $n_{MCS}$  trajectoires du dommage sont calculées.

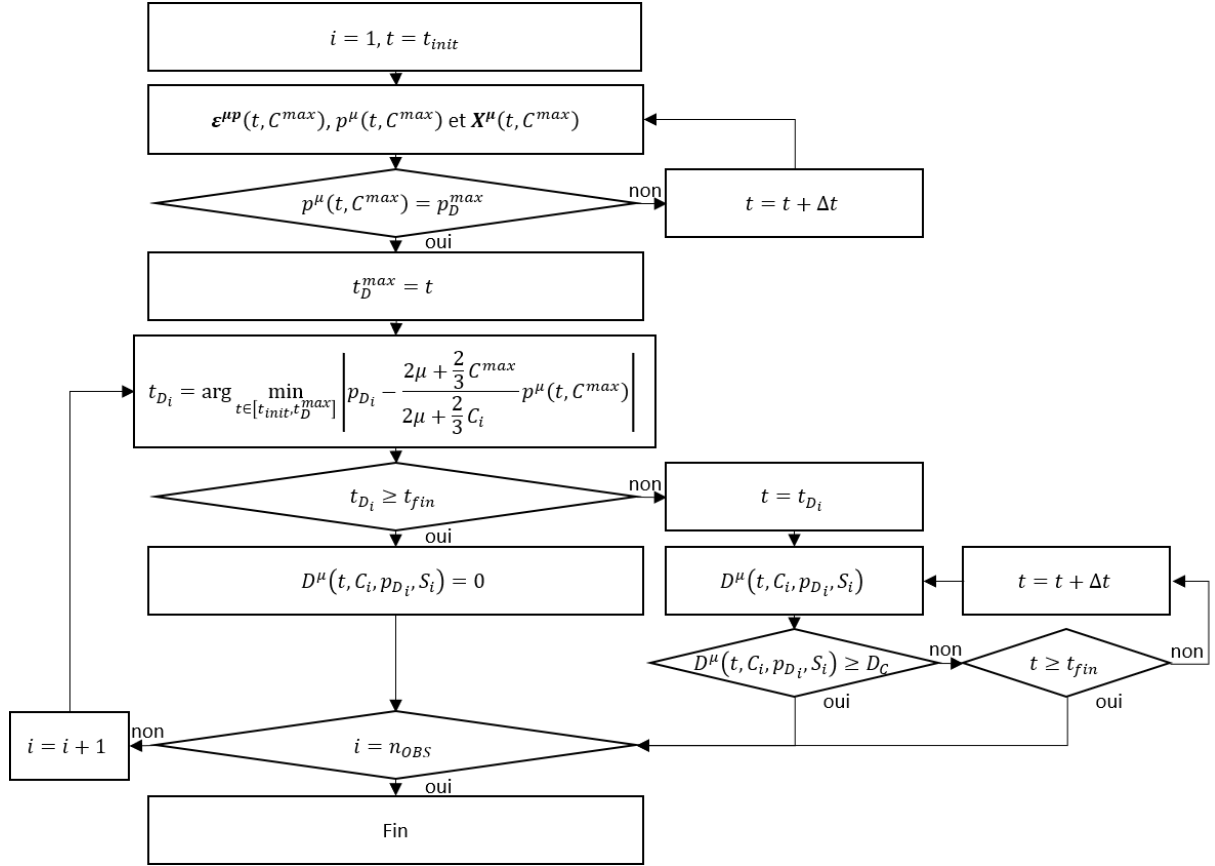


FIGURE 4.1 – Structure algorithmique pour la propagation de l'aléa matériau avec le modèle 2SD

#### 4.3.1.3 Mise en œuvre de la nouvelle structure algorithmique du modèle 2SD

L'intérêt de la factorisation des matrices macroscopiques et de la formulation en Annexe 2 est évalué. Pour cela, la probabilité de défaillance  $P_f(t_{fin})$  est calculée en considérant chacun des trois chargements définis en section 3.2.1. Le retour radial est appliqué en considérant un pas de temps  $\Delta t = 0.005$  et un échantillon de  $n_{MCS} = 5000$  réalisations de  $\mathbf{Z}$  est aléatoirement généré par LHS [5] et *Rejection Sampling* [86] à partir des populations identifiées en section 2.3.1. Puisque les modifications évoquées ne forment aucune approximation, les probabilités de défaillance obtenues sont rigoureusement identiques. Seuls les coûts numériques sont donc comparés. Les temps de calculs listés dans la Table 4.3 sont obtenus avec un processeur Intel Core i5-10400H, un CPU à 2.60 GHz et une RAM de 32 Go. La factorisation des matrices permet de réduire les temps de calculs d'un facteur 2. En ajoutant à cela la formulation en Annexe 2, les temps sont réduits d'un facteur 4. Finalement le calcul de 5000 trajectoires du dommage passe d'environ 6.5 jours à 1.2 jours. Il est à noter que la formulation en Annexe 2 diminue moins significativement les temps de calculs lorsque  $\sigma_1(t)$  est considéré. En effet, cette formulation n'est valable que lorsque le dommage est nul or d'après l'analyse de sensibilité réalisée en section 3.2.2.2.3, le dommage est en moyenne amorcé plus tôt avec  $\sigma_1(t)$  qu'avec  $\sigma_2(t)$  ou  $\sigma_3(t)$ .



	Implémentation classique	Factorisation des matrices	Factorisation des matrices et utilisation de la formulation en Annexe 2
$\sigma_1(t)$	$9.90 \cdot 10^3$	$5.36 \cdot 10^3$	$2.69 \cdot 10^3$
$\sigma_2(t)$	$8.41 \cdot 10^3$	$3.86 \cdot 10^3$	$1.21 \cdot 10^3$
$\sigma_3(t)$	$9.16 \cdot 10^3$	$4.64 \cdot 10^3$	$1.74 \cdot 10^3$

TABLE 4.3 – Comparaison des coûts de calculs (min) en fonction de l'implémentation du modèle d'endommagement

### 4.3.2 Approximation du dommage par krigeage

#### 4.3.3 Définition des populations observées et estimées

La mise en place d'un estimateur nécessite de définir deux populations :

- La population des observations est l'ensemble des points où la grandeur d'intérêt est observée (c'est à dire calculée en faisant appel au modèle 2SD).  $n_t \times n_{OBS}$  points sont considérés avec  $n_t$  temps  $t_i$  répartis sur  $[t_{init}, t_{fin}]$  et  $n_{OBS}$  réalisations  $\mathbf{Z}_j$  de  $\mathbf{Z}$ . Les coordonnées d'un point observé se notent :

$$(t_i, \mathbf{Z}_j) \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1; n_t \rrbracket \times \llbracket 1; n_{OBS} \rrbracket \quad (4.102)$$

avec  $\mathbf{Z}_j = (C_j, p_{D_j}, S_j, D_{C_j})$ .

- La population des estimations (ou population Monte Carlo) est l'ensemble des points où la grandeur d'intérêt est estimée.  $n_{t_{MCS}} \times n_{MCS}$  points sont considérés avec  $n_{t_{MCS}}$  temps  $t_k^{MCS}$  uniformément répartis sur  $[t_{init}, t_{fin}]$  et  $n_{MCS}$  réalisations  $\mathbf{Z}_l^{MCS}$  de  $\mathbf{Z}$ . Un point d'estimation se note :

$$(t_k^{MCS}, \mathbf{Z}_l^{MCS}) \quad \forall (k, l) \in \llbracket 1; n_{t_{MCS}} \rrbracket \times \llbracket 1; n_{MCS} \rrbracket$$

avec  $\mathbf{Z}_l^{MCS} = (C_l^{MCS}, p_{D_l}^{MCS}, S_l^{MCS}, D_{C_l}^{MCS})$ .

#### 4.3.3.1 Sélection de la grandeur approximée par krigeage

Lorsqu'un estimateur est utilisé pour l'analyse de fiabilité, c'est la fonction de performance  $G$  qui est la plus souvent approximée. Elle s'écrit :

$$G(t, \mathbf{Z}) = D_C - D^\mu(t, C, p_D, S) \quad (4.103)$$

avec  $\mathbf{Z} = (C, p_D, S, D_C)$ . Elle dépend de 5 variables : une variable temporelle et 4 variables matériau. Plus le nombre de variables en entrée est élevé, plus le coût de construction de l'estimateur est élevé. Il est donc proposé de réduire le nombre de variables en entrée en ne métamodélisant pas  $G$  mais  $D^\mu$ . L'espérance  $\hat{G}$  et la variance  $\mathbb{V}(\hat{G})$  de l'approximation de  $G$  s'écrivent :

$$\hat{G}(t_k^{MCS}, \mathbf{Z}_l^{MCS}) = D_{C_l}^{MCS} - \hat{D}^\mu(t_k^{MCS}, C_l^{MCS}, p_{D_l}^{MCS}, S_l^{MCS}) \quad (4.104)$$

$$\mathbb{V}(\hat{G}(t_k^{MCS}, \mathbf{Z}_l^{MCS})) = \mathbb{V}(\hat{D}^\mu(t_k^{MCS}, C_l^{MCS}, p_{D_l}^{MCS}, S_l^{MCS})) \quad (4.105)$$

avec  $\hat{D}$  et  $\mathbb{V}(\hat{D}^\mu)$  l'espérance et la variance du dommage estimées par krigeage. Le nombre de variables est donc réduit de 1. Attention, il est primordial de bien veiller à ce que la corrélation entre  $D_C$  et  $S$  reste tout de même respectée.

### 4.3.4 Approximation du dommage par krigeage adaptatif

#### 4.3.4.1 Formalisation des estimateurs

Différentes méthodes de krigeage ont été présentées : le krigeage, le krigeage à gradient et le krigeage multifidélité. Elles sont formalisées dans le cas d'une approximation du dommage  $D^\mu$ .

#### 4.3.4.1.1 Approximation du modèle 2SD par krigeage

Les observations du dommage nécessaires pour construire l'estimateur par krigeage sont calculées avec le modèle 2SD en utilisant la structure algorithmique présentée en Section 4.3.1. Initialement le dommage est observé en  $n_t$  temps et  $n_{OBS}$  réalisations de  $\mathbf{Z}$  :

$$D^\mu(t_i, C_j, p_{D_j}, S_j) \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1; n_t \rrbracket \times \llbracket 1; n_{OBS} \rrbracket \quad (4.106)$$

Après chaque phase d'apprentissage,  $n_{APP}$  observations sont ajoutées. Finalement, le dommage est estimé en  $n_{t_{MCS}}$  temps et  $n_{MCS}$  réalisations de  $\mathbf{Z}$  :

$$\hat{D}^\mu(t_k^{MCS}, C_l^{MCS}, p_{D_l}^{MCS}, S_l^{MCS}) \quad \forall (k, l) \in \llbracket 1; n_{t_{MCS}} \rrbracket \times \llbracket 1; n_{MCS} \rrbracket \quad (4.107)$$

#### 4.3.4.1.2 Approximation du modèle 2SD par krigeage à gradient

Le krigeage à gradient se construit à partir des observations du dommage et de son gradient. Ce dernier n'est pas aisément disponible. En revanche, la dérivée du dommage par rapport au temps l'est puisque pour calculer  $D^\mu$  il est nécessaire de calculer  $\Delta D^\mu$ . Les observations du dommage et de sa dérivée par rapport au temps sont calculées avec le modèle 2SD. Le dommage est calculé en utilisant la structure algorithmique présentée en Section 4.3.1 et sa dérivée en est déduite par différence finie :

$$\frac{dD^\mu}{dt}(t_i, C_j, p_{D_j}, S_j) = \frac{\Delta D^\mu(t_i, C_j, p_{D_j}, S_j)}{\Delta t} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1; n_t \rrbracket \times \llbracket 1; n_{OBS} \rrbracket \quad (4.108)$$

avec  $\Delta D^\mu$  l'incrément du dommage et  $\Delta t$  le pas de temps. Après chaque phase d'apprentissage,  $n_{APP}$  observations sont ajoutées. Finalement, le dommage est estimé en  $n_{t_{MCS}}$  temps et  $n_{MCS}$  réalisations de  $\mathbf{Z}$ .

#### 4.3.4.1.3 Approximation du modèle 2SD par krigeage multifidélité

L'estimateur par krigeage multifidélité est construit à partir de deux sources d'observations : les observations basse fidélité et haute fidélité. Le dommage haute fidélité est calculé en utilisant le modèle 2SD. Le dommage basse fidélité est calculé par comptage *Rainflow* et avec la formulation 1D du modèle 2SD. Avec (2.2), le dommage basse fidélité  $D_B^\mu$  se calcule :

$$D_B^\mu(t_u^B, \mathbf{Z}_v^B) = \sum_{w=1}^W \frac{n(\Delta\sigma_w, t_u^B)}{\hat{N}(\Delta\sigma_w, \mathbf{Z}_v^B)} \quad \forall (u, v) \in \llbracket 1; n_{t_B} \rrbracket \times \llbracket 1; n_{OBS_B} \rrbracket \quad (4.109)$$

avec  $n(\Delta\sigma_w, t_u^B)$  le nombre de cycles d'amplitude  $\Delta\sigma_w$  comptés sur l'intervalle de temps  $[t_{init}, t_u^B]$  et  $\hat{N}(\Delta\sigma_w, \mathbf{Z}_v^B)$  le nombre de cycles à rupture pour une amplitude  $\Delta\sigma_w$  et un matériau  $\mathbf{Z}_v^B$ . Initialement le dommage haute fidélité est observé en  $n_t$  temps et  $n_{OBS}$  réalisations de  $\mathbf{Z}$  tandis que le dommage basse fidélité est observé en  $n_{t_B}$  temps et  $n_{OBS_B}$  réalisations de  $\mathbf{Z}$ . Après chaque phase d'apprentissage,  $n_{APP}$  observations haute et basse fidélités sont ajoutées. Finalement, le dommage est estimé en  $n_{t_{MCS}}$  temps et  $n_{MCS}$  réalisations de  $\mathbf{Z}$ .

La Table 4.4 liste les différentes notations utilisées en fonctions des estimateurs.

#### 4.3.4.2 Apprentissage unique et multiple

L'apprentissage peut se réaliser de deux façons : il peut être unique ou multiple. Un apprentissage unique signifie que lors d'une phase d'apprentissage, seul un point ( $n_{APP} = 1$ ) est ajouté à l'ensemble des observations. En revanche, avec un apprentissage multiple, plusieurs points ( $n_{APP} > 1$ ) sont ajoutés simultanément à l'ensemble des observations. Cela a pour objectif faire

	Krigeage	Krigeage à gradient	Krigeage multifidélité
<b>Sections</b>	4.1.1	4.1.2	4.1.3
<b>Observations initiales</b>	$D^\mu$ en $n_t \times n_{OBS}$	$D^\mu$ en $n_t \times n_{OBS}$ $\frac{dD^\mu}{dt}$ en $n_t \times n_{OBS}$	$D^\mu$ en $n_t \times n_{OBS}$ $D_B^\mu$ en $n_{t_B} \times n_{OBS_B}$
<b>Observations enrichies</b>	$D^\mu$ en $n_{APP}$	$D^\mu$ en $n_{APP}$ $\frac{dD^\mu}{dt}$ en $n_{APP}$	$D^\mu$ en $n_{APP}$ $D_B^\mu$ en $n_{APP}$
<b>Estimations</b>	$\hat{D}^\mu$ en $n_{t_{MCS}} \times n_{MCS}$	$\hat{D}^\mu$ en $n_{t_{MCS}} \times n_{MCS}$	$\hat{D}^\mu$ en $n_{t_{MCS}} \times n_{MCS}$

TABLE 4.4 – Formalisation du krigeage, krigeage à gradient et krigeage multifidélité pour un apprentissage adaptatif appliqué au modèle 2SD

converger l'estimateur plus rapidement et donc de diminuer ses coûts de construction et de prédiction. Cependant, l'ajout de plusieurs points observés augmente aussi le coût des observations. Un compromis doit être trouvé. Pour ce faire, plusieurs stratégies d'apprentissage multiple sont investiguées sous la contrainte de ne pas augmenter le nombre d'appels au modèle par rapport à un apprentissage unique.

#### 4.3.4.2.1 Exploitation des valeurs où le dommage a été calculé

À partir de (4.92), la fonction d'apprentissage  $U$  s'écrit :

$$U(t_k^{MCS}, \mathbf{Z}_l^{MCS}) = \frac{|\hat{G}(t_k^{MCS}, \mathbf{Z}_l^{MCS})|}{\sqrt{\mathbb{V}(\hat{G}(t_k^{MCS}, \mathbf{Z}_l^{MCS}))}} \quad \forall (k, l) \in \llbracket 1; n_{t_{MCS}} \rrbracket \times \llbracket 1; n_{MCS} \rrbracket \quad (4.110)$$

Ainsi avec (4.93) et dans le cadre d'un apprentissage unique, le point appris est d'indices :

$$(k^*, l^*) = \arg \min_{(k, l) \in \llbracket 1; n_{t_{MCS}} \rrbracket \times \llbracket 1; n_{MCS} \rrbracket} U(t_k^{MCS}, \mathbf{Z}_l^{MCS}) \quad (4.111)$$

Puisque le modèle est incrémental, le calcul de  $D^\mu(t_{k^*}^{MCS}, C_{l^*}^{MCS}, p_{D_{l^*}}^{MCS}, S_{l^*}^{MCS})$  nécessite de calculer l'ensemble des valeurs du dommage aux points suivants :

$$\Omega^{(1)} = \{(t_k^{MCS}, C_{l^*}^{MCS}, p_{D_{l^*}}^{MCS}, S_{l^*}^{MCS}) \quad \forall k \in \llbracket 1; k^* \rrbracket\} \quad (4.112)$$

Une première stratégie d'apprentissage multiple est alors proposée : l'apprentissage uniforme. L'ensemble des  $n_{APP}$  points appris sont choisis pour une même réalisation matériau  $\mathbf{Z}_{l^*}$  et sont répartis uniformément sur le domaine temporel  $[t_{init}, t_{k^*}^{MCS}]$ . La Figure 4.2 présente la structure algorithmique cette stratégie.

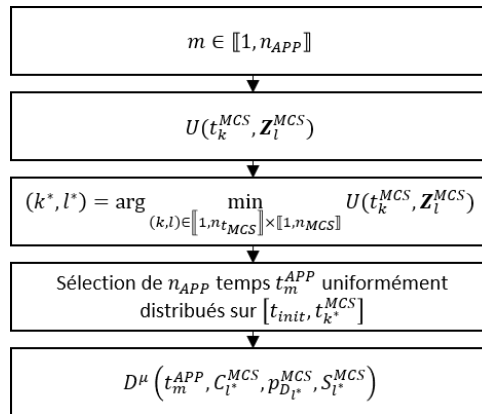


FIGURE 4.2 – Structure algorithmique pour un apprentissage multiple uniforme

#### 4.3.4.2 Exploitation des valeurs où le dommage est nul

Pour un chargement donné, l'instant où le dommage s'amorce  $t_D$  dépend du matériau et plus précisément des paramètres  $(C, p_D)$ . Cela revient à écrire :

$$D^\mu(t, C, p_D, S) = 0 \quad \forall t \leq t_D(C, p_D) \quad (4.113)$$

D'après l'Annexe 2, l'équation (4.101) et des réalisations  $(C_l, p_{D_l})$ , l'instant  $t_{D_l}$  se calcule pour un coût numérique proche de zéro. Il est donc possible de connaître tous les points où le dommage ne s'est pas amorcé c'est à dire tous les points où le dommage est nul. L'ensemble s'écrit :

$$\Omega^{(2)} = \{(t_k^{MCS}, C_l^{MCS}, p_{D_l}^{MCS}, S_l^{MCS}) \mid \forall (k, l) \in \llbracket 1; n_{t_{MCS}} \rrbracket \times \llbracket 1; n_{MCS} \rrbracket \mid t_k^{MCS} \leq t_{D_l}\} \quad (4.114)$$

Une nouvelle population est définie à partir de  $\Omega^{(1)}$  et  $\Omega^{(2)}$  telle que :

$$\Omega^{(0)} = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)} \quad (4.115)$$

La Figure 4.3 sert d'exemple et représente les populations  $\Omega^{(1)}$  et  $\Omega^{(2)}$  dans l'espace des variables aléatoires  $(p_D, C, S)$  à trois instants :  $t_{k^*}$ ,  $\frac{t_{k^*}}{2}$  et  $t_{init}$ . À l'instant  $t_{k^*}$ , le dommage est connu en un seul point de coordonnées  $(p_{D_l^*}, C_{l^*}, S_{l^*})$  et fait partie de la population  $\Omega^{(1)}$ . Pour tout instant inférieur à  $t_{k^*}$ , le dommage est aussi connu en ce point. Aux instants  $\frac{t_{k^*}}{2}$  et  $t_{init}$ , le dommage est connu en plusieurs autres points. Ce sont les points où le dommage est nul, ils appartiennent à la population  $\Omega^{(2)}$ .

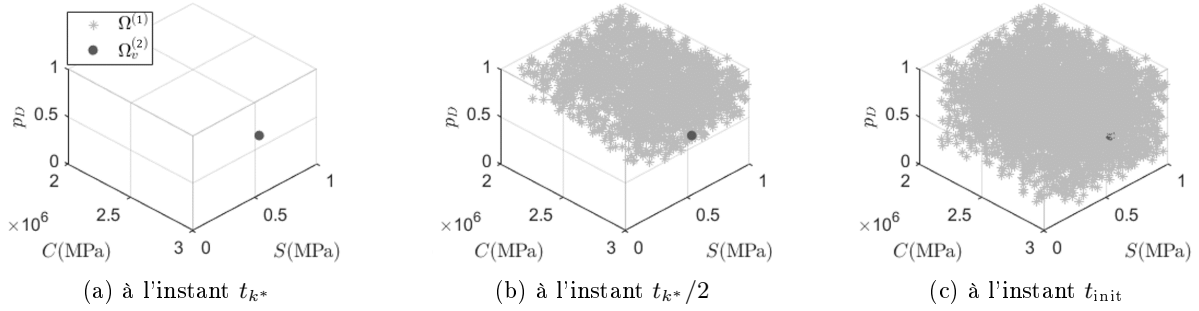


FIGURE 4.3 – Représentation de la population  $\Omega^{(0)}$

Deux nouvelles stratégies d'apprentissage multiple sont définies. La première est appelée apprentissage géométrique et est présentée en Figure 4.4. Elle permet de sélectionner les  $n_{APP}$  points appartenant à  $\Omega^{(0)}$  où la densité des observations est la plus faible. En d'autres termes, les points appris sont choisis de façon à maximiser leur distance avec les points déjà observés. L'objectif est d'éviter la concentration de ces derniers et donc de conserver un bon conditionnement numérique. La distance considérée est une distance euclidienne pondérée et se formule comme ci-dessous :

$$\text{dist}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_{DIM}} \left( \frac{x_i^{(1)} - x_i^{(2)}}{l_{x_i}} \right)^2} \quad (4.116)$$

avec  $\mathbf{x}^{(1)}$  et  $\mathbf{x}^{(2)}$  les coordonnées de deux points de dimension  $n_{DIM}$  et  $l_{x_i}$  la taille du domaine de définition de la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $\mathbf{x}$ . La seconde est appelée apprentissage aux minimums locaux de  $U$  et est présentée en Figure 4.5. Elle sélectionne les  $n_{APP}$  points appartenant à  $\Omega^{(0)}$  qui correspondent aux plus petits minimums locaux de  $U$ . L'objectif est d'enrichir l'estimateur dans les zones critiques où  $\hat{G}$  est proche de 0 et où  $\nabla(\hat{G})$  est élevé.

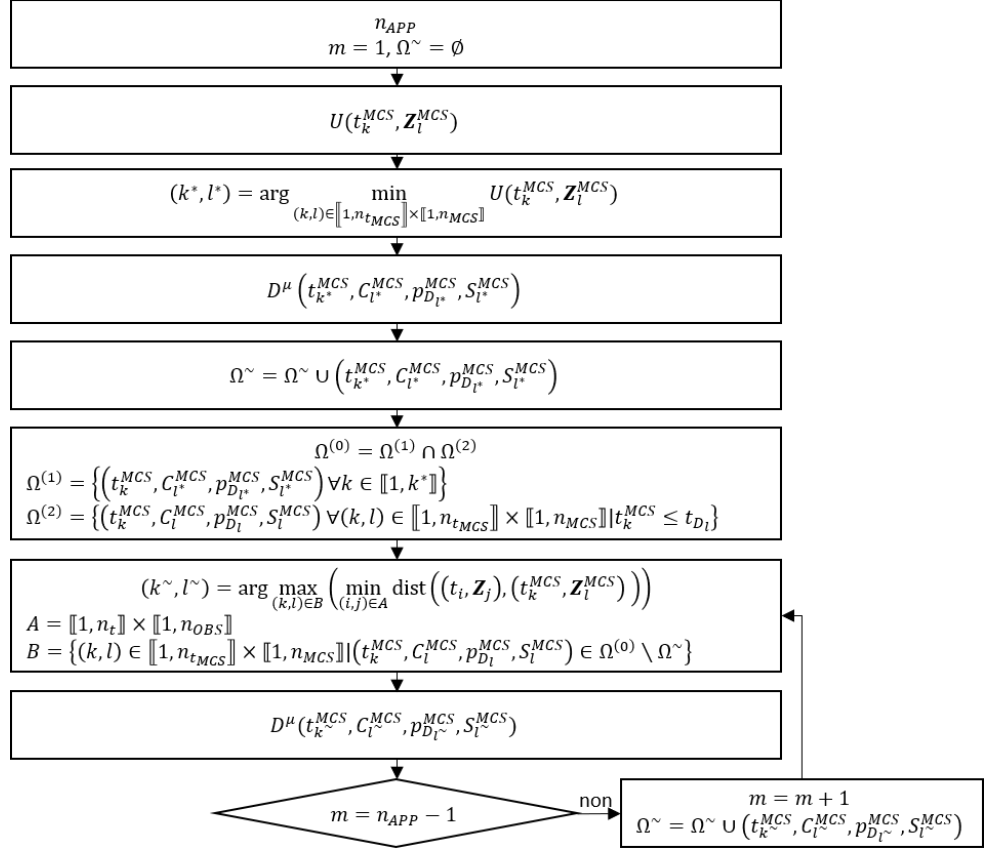


FIGURE 4.4 – Structure algorithmique pour un apprentissage multiple géométrique

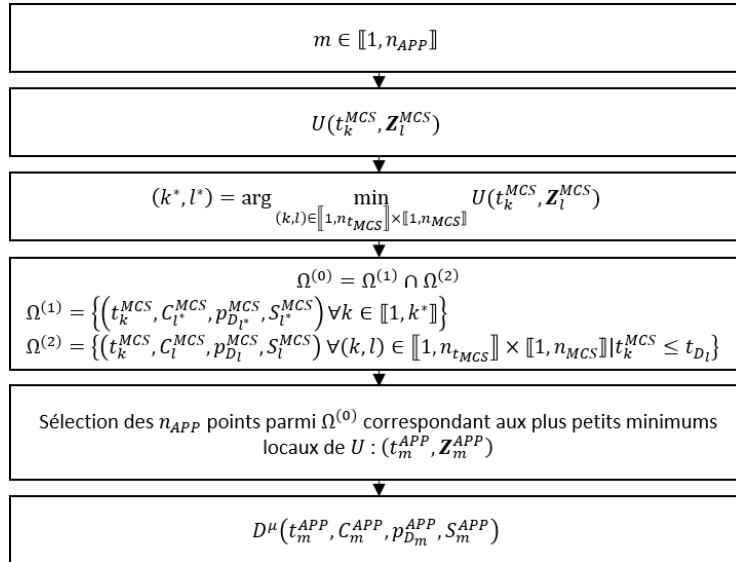


FIGURE 4.5 – Structure algorithmique pour un apprentissage multiple aux minimums locaux

## 4.4 Définition et mise en place de deux approches pour l'analyse de fiabilité

Pour le dimensionnement en fatigue et la planification des opérations de maintenance, deux approches fiabilistes sont proposées. La première permet d'estimer la probabilité de défaillance sur tout le domaine temporel tandis que la seconde permet d'estimer à quel instant la probabilité

de défaillance dépasse une valeur critique. Ces deux approches utilisent le modèle 2SD et une approximation par krigeage adaptatif.

#### 4.4.1 Définition des approches globale et locale

##### 4.4.1.1 Définition de l'approche globale

L'objectif de l'approche globale est de calculer l'évolution de la probabilité de défaillance sur l'entièreté du domaine temporel  $[t_{init}, t_{fin}]$  tout en minimisant les coûts numériques. Pour ce faire, l'approche exploite l'ensemble des éléments développés dans la section précédente. Sa structure algorithmique est équivalente à celle de la méthode AK-MCS présentée dans [14]. Dans le cas particulier d'un apprentissage unique, l'algorithme est détaillé ci-dessous et illustré Figure 4.6.

1. La population des observations est générée. Les  $n_t$  temps  $t_i$  sont uniformément répartis sur  $[t_{init}, t_{fin}]$  et les  $n_{OBS}$  réalisations  $\mathbf{Z}_j$  de  $\mathbf{Z}$  sont générées aléatoirement par LHS [5] et *Rejection Sampling* [86]. Un point d'observation se note :

$$(t_i, \mathbf{Z}_j) \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1; n_t \rrbracket \times \llbracket 1; n_{OBS} \rrbracket$$

avec  $\mathbf{Z}_j = (C_j, p_{D_j}, S_j, D_{C_j})$ .

2. La population des estimations est générée. Les  $n_{t_{MCS}}$  temps  $t_k^{MCS}$  sont uniformément répartis sur  $[t_{init}, t_{fin}]$  et les  $n_{MCS}$  réalisations  $\mathbf{Z}_l^{MCS}$  de  $\mathbf{Z}$  sont générées aléatoirement par LHS [5] et *Rejection Sampling* [86]. Un point d'estimation se note :

$$(t_k^{MCS}, \mathbf{Z}_l^{MCS}) \quad \forall (k, l) \in \llbracket 1; n_{t_{MCS}} \rrbracket \times \llbracket 1; n_{MCS} \rrbracket$$

avec  $\mathbf{Z}_l^{MCS} = (C_l^{MCS}, p_{D_l}^{MCS}, S_l^{MCS}, D_{C_l}^{MCS})$ .

3. Le dommage  $D^\mu(t_i, C_j, p_{D_j}, S_j)$  est calculé en chacun des points observés.
4. À partir des observations, un estimateur du dommage est construit. La moyenne  $\hat{D}$  et la variance  $\mathbb{V}(\hat{D})$  du dommage estimé sont évaluées en chacun des points MCS.
5. La moyenne  $\hat{G}$  et la variance  $\mathbb{V}(\hat{G})$  de la fonction de performance estimée sont déduites en chacun des points MCS.
6. La fonction d'apprentissage  $U$  est évaluée en chacun des points MCS. Le point à apprendre est de coordonnées  $(t_{k^*}^{MCS}, C_{l^*}^{MCS}, p_{D_{l^*}}^{MCS}, S_{l^*}^{MCS})$ .
7. Le ratio  $P_{U \geq U_C}$  est calculé. Si  $P_{U \geq U_C}$  est supérieur au critère d'arrêt  $P_C$ , la probabilité de défaillance est calculée aux  $n_{t_{MCS}}$  temps. Sinon, la population observée est enrichie et le calcul reprend à partir de la construction de l'estimateur.

##### 4.4.1.2 Définition de l'approche locale

En fonction de l'objectif, il n'est pas toujours utile de disposer de l'évolution de la probabilité de défaillance sur l'entièreté du domaine temporel. Dans un objectif de planification des opérations de maintenance, la connaissance où  $P_f$  atteint une valeur seuil suffit. Ce temps est appelé temps critique  $t_C$  et se définit comme l'instant où le risque de défaillance dépasse une probabilité critique  $P_{fC}$  :

$$t_C \in [t_{init}, t_{fin}] \mid P_f(t_C) = P_{fC} \quad (4.117)$$

Sachant que le dommage est monotone au cours du temps,  $G$  et donc  $P_f$  le sont aussi. À partir de cette observation, l'approche locale a pour objectif d'estimer précisément la probabilité de défaillance au voisinage de  $t_C$ . Afin de définir la taille de l'intervalle temporel considéré, une estimation de l'erreur de métamodélisation sur  $P_f$  est nécessaire. Dans [107], deux estimateurs

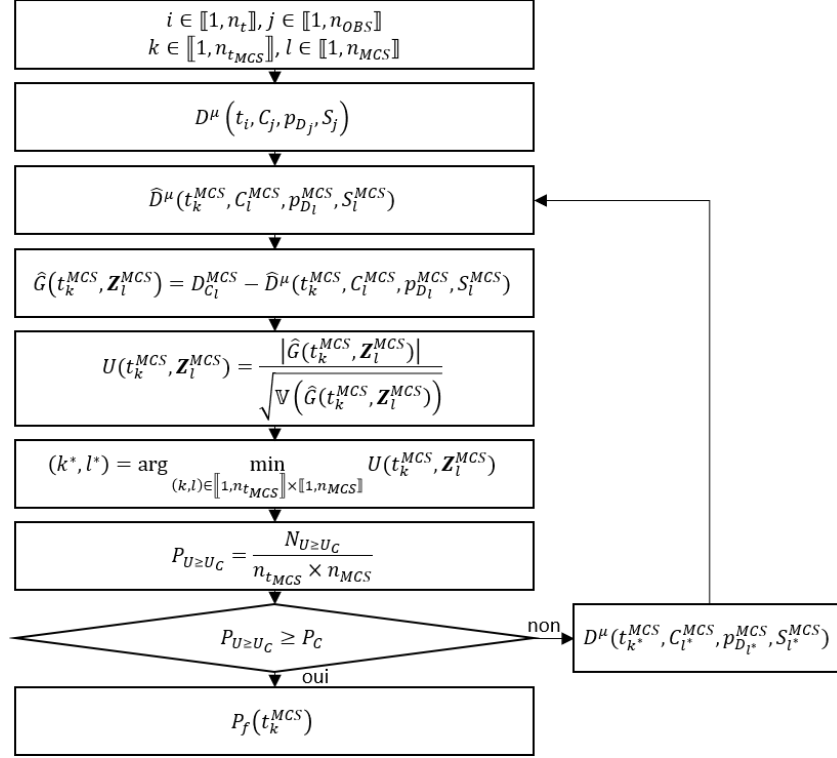


FIGURE 4.6 – Structure algorithmique de la méthode AK-MCS appliquée au modèle 2SD

sont proposés. L'un prend en compte la covariance spatiale et l'autre la néglige. D'après [104] la prise en compte de cette covariance rend l'estimateur plus coûteux mais augmente significativement la précision de l'estimateur lorsque le métamodèle est construit avec peu de points. Dans un objectif d'optimisation des coûts de calculs, c'est l'estimateur sans prise en compte de la corrélation spatiale qui est considéré. Pour  $n_{MCS}$  réalisations matériau  $\mathbf{Z}_l^{MCS}$ , l'estimateur d'erreur de  $P_f(t)$  s'écrit :

$$\xi_{P_f}(t) = \frac{\gamma}{n_{MCS}} \sum_{l=1}^{n_{MCS}} \sqrt{\Phi(-U(t, \mathbf{Z}_l^{MCS})) (1 - \Phi(-U(t, \mathbf{Z}_l^{MCS})))} \quad (4.118)$$

avec  $\gamma = 1.96$  le coefficient d'élargissement associé à un niveau de confiance de 95% et  $\Phi$  la fonction densité de probabilité cumulée d'une variable aléatoire standard normale. Un intervalle de confiance  $[t_C^{\min}, t_C^{\max}]$  de  $t_C$  est alors proposé tel que :

$$\forall t \in [t_C^{\min}, t_C^{\max}], P_f(t) \in [P_f(t_C) - \xi_{P_f}(t_C), P_f(t_C) + \xi_{P_f}(t_C)] \quad (4.119)$$

Si  $P_f(t)$  et  $\xi_{P_f}(t)$  sont croissants au cours du temps alors  $t_C^{\min}$  et  $t_C^{\max}$  se formulent ainsi :

$$t_C^{\min} = \operatorname{argmin}_{t \in [t_{init}, t_{fin}]} |P_f(t) + \xi_{P_f}(t) - P_f(t_C) + \xi_{P_f}(t_C)| \quad (4.120)$$

$$t_C^{\max} = \operatorname{argmin}_{t \in [t_{init}, t_{fin}]} |P_f(t) - \xi_{P_f}(t) - P_f(t_C) - \xi_{P_f}(t_C)| \quad (4.121)$$

Les différentes grandeurs en jeu sont illustrées sur le schéma réalisé en Figure 4.7.

Finalement, l'approche locale consiste à initialement estimer  $P_f(t)$  sur  $[t_{init}, t_{fin}]$  puis à l'aide de (4.120) et (4.121), réduire la taille du domaine temporel. L'opération est répétée jusqu'à ce que le domaine soit suffisamment petit. La grandeur  $R_t$  est définie comme le rapport entre la taille du domaine temporel et la taille du domaine temporel initial tel que :

$$R_t = \frac{t_C^{\max} - t_C^{\min}}{t_{fin} - t_{init}} \quad (4.122)$$

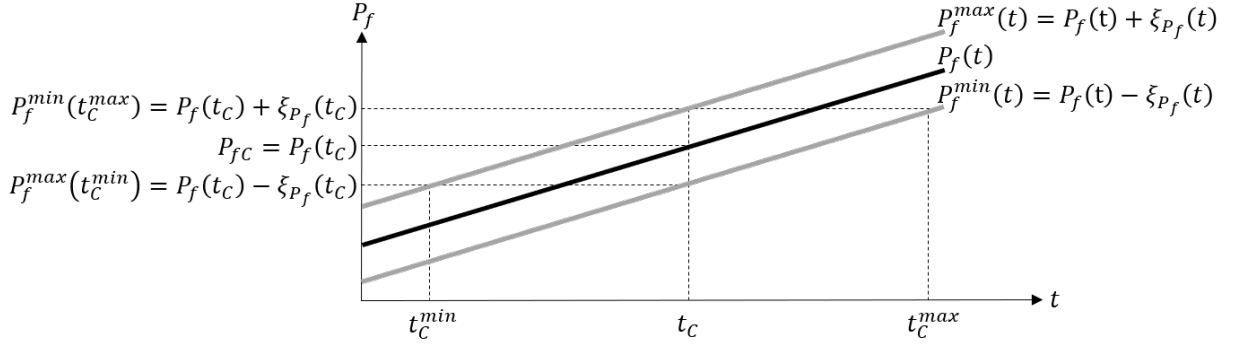


FIGURE 4.7 – Représentation schématique de  $P_f(t)$  et  $\xi_{P_f}(t)$  et localisation des grandeurs  $P_{fC}$ ,  $t_C$ ,  $t_C^{\min}$  et  $t_C^{\max}$

L'approche prend fin lorsque  $R_t \leq R_C$  avec  $R_C$  une valeur seuil fixée par l'utilisateur. Dans le cas particulier d'un apprentissage unique, l'algorithme est détaillé ci-dessous et illustré en Figure 4.8.

1. La population des observations est générée. Les  $n_t$  temps  $t_i$  sont uniformément répartis sur  $[t_{init}, t_{fin}]$  et les  $n_{OBS}$  réalisations  $\mathbf{Z}_j$  de  $\mathbf{Z}$  sont générées aléatoirement par LHS [5] et *Rejection Sampling* [86]. Un point d'observation se note :

$$(t_i, \mathbf{Z}_j) \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1; n_t \rrbracket \times \llbracket 1; n_{OBS} \rrbracket$$

avec  $\mathbf{Z}_j = (C_j, p_{D_j}, S_j, D_{C_j})$ .

2. La population des estimations est générée. Les  $n_{t_{MCS}}$  temps  $t_k^{MCS}$  sont uniformément répartis sur  $[t_{init}, t_{fin}]$  et les  $n_{MCS}$  réalisations  $\mathbf{Z}_l^{MCS}$  de  $\mathbf{Z}$  sont générées aléatoirement par LHS [5] et *Rejection Sampling* [86]. Un point d'estimation se note :

$$(t_k^{MCS}, \mathbf{Z}_l^{MCS}) \quad \forall (k, l) \in \llbracket 1; n_{t_{MCS}} \rrbracket \times \llbracket 1; n_{MCS} \rrbracket$$

avec  $\mathbf{Z}_l^{MCS} = (C_l^{MCS}, p_{D_l}^{MCS}, S_l^{MCS}, D_{C_l}^{MCS})$ .

3. Le dommage  $D^\mu(t_i, C_j, p_{D_j}, S_j)$  est calculé en chacun des points observés.
4. À partir des observations, un estimateur du dommage est construit. La moyenne  $\hat{D}$  et la variance  $\mathbb{V}(\hat{D})$  du dommage estimé sont évaluées en chacun des points MCS.
5. La moyenne  $\hat{G}$  et la variance  $\mathbb{V}(\hat{G})$  de la fonction de performance estimée sont déduites en chacun des points MCS.
6. La fonction d'apprentissage  $U$  est évaluée en chacun des points MCS. Le point à apprendre est de coordonnées  $(t_{k^*}^{MCS}, C_{l^*}^{MCS}, p_{D_{l^*}}^{MCS}, S_{l^*}^{MCS})$ .
7. Les probabilités de défaillance  $P_f(t_k^{MCS})$  et les erreurs commises  $\xi_{P_f}(t_k^{MCS})$  sont calculées aux  $n_{t_{MCS}}$  temps.
8. Les bornes inférieures  $P_f^{\min}(t_k^{MCS})$  et supérieures  $P_f^{\max}(t_k^{MCS})$  de  $P_f(t_k^{MCS})$  sont déduites.
9. Les bornes de la probabilité de défaillance sont lissées en imposant leur monotonie cours du temps et sont notées  $\hat{P}_f^{\min}(t_k^{MCS})$  et  $\hat{P}_f^{\max}(t_k^{MCS})$
10. Si  $P_{fC} \in [\hat{P}_f^{\min}(t_1^{MCS}), \hat{P}_f^{\max}(t_{n_{t_{MCS}}}^{MCS})]$  le domaine temporel est réduit :
  - (a) La probabilité de défaillance critique est bornée tel que  $P_f(t_{k^*}^{MCS}) < P_{fC} < P_f(t_{k^*}^{MCS})$
  - (b) Le temps critique est borné tel que  $t_{k^{\min}}^{MCS} < t_C < t_{k^{\max}}^{MCS}$
  - (c) La grandeur  $R_t$  est évaluée.
  - (d) Si  $R_t \leq R_C$ , le critère d'arrêt est respecté et la méthode prend fin.



- (e) Si  $R_t > R_C$ , le critère d'arrêt n'est pas respecté.
  - i. L'estimateur est enrichi au point d'indice  $(k^*, l^*)$
  - ii. La taille du domaine temporel considérée est réduite et  $n_{t_{MCS}}$  nouveaux temps sont générés uniformément sur le nouveau domaine temporel  $[t_{k_{\min}}^{MCS}, t_{k_{\max}}^{MCS}]$ .
- 11. Si  $P_{fC} \notin [\hat{P}_f^{\min}(t_1^{MCS}), \hat{P}_f^{\max}(t_{n_{t_{MCS}}}^{MCS})]$  le domaine temporel est élargi :
  - (a) L'estimateur est enrichi au point d'indice  $(k^*, l^*)$
  - (b) La taille du domaine temporelle est agrandie et  $n_{t_{MCS}}$  nouveaux temps sont générés uniformément sur le précédent domaine temporel.

Pour aider à la compréhension, la Figure 4.9 illustre les différents cas possibles. La probabilité de défaillance estimée  $P_f(t_k^{MCS})$  est en noir. Les probabilités de défaillance minimale  $P_f^{\min}(t_k^{MCS})$  et maximales  $P_f^{\max}(t_k^{MCS})$  estimées sont en pointillés gris. Les probabilités de défaillance minimale  $\hat{P}_f^{\min}(t_k^{MCS})$  et maximale  $\hat{P}_f^{\max}(t_k^{MCS})$  approximées sous contrainte de monotonie sont en gris. Les deux temps  $t_{k^*}^{MCS}$  et  $t_k^{MCS}$  sont représentés par deux marqueurs noirs. Les deux temps  $t_{k_{\min}}^{MCS}$  et  $t_{k_{\max}}^{MCS}$  définissant les bornes du nouvel intervalle de temps sont représentés par deux marqueurs gris. La Figure 4.9.a illustre le cas où deux nouvelles bornes sont identifiées. La Figure 4.9.b illustre le cas où seule une nouvelle borne est identifiée. La Figure 4.9.c illustre le cas où aucune nouvelle borne n'est identifiée. La Figure 4.9.d illustre le cas où  $P_{fC} \notin [\hat{P}_f^{\min}(t_1^{MCS}), \hat{P}_f^{\max}(t_{n_{t_{MCS}}}^{MCS})]$  (le domaine temporel doit donc être élargi).

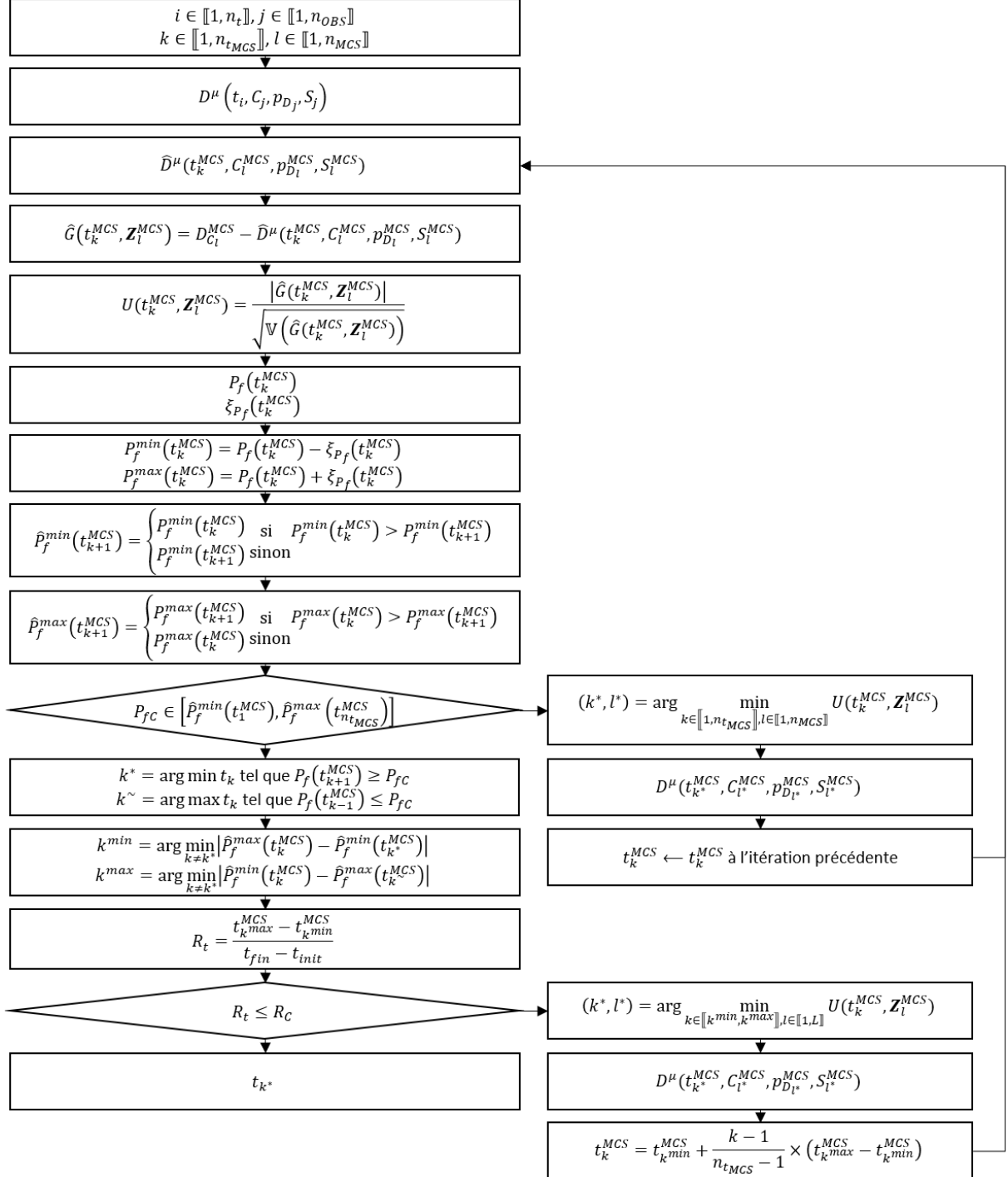
#### 4.4.2 Choix des estimateurs et de la stratégie d'apprentissage

Les approches locale et globale peuvent être appliquées pour différents estimateurs (krigeage, krigeage à gradient ou krigeage multifidélité), différentes stratégies d'apprentissage (uniforme, géométrique ou aux minimums locaux) et différents nombre de points appris par itération ( $n_{APP}$ ). L'objectif de cette section est sélectionner la combinaison la plus adaptée pour chacune des approches. Plusieurs combinaisons sont testées et comparées en considérant le cas d'application présenté en section 3.1 où le chargement appliqué est  $\sigma_3(t)$ . Les grandeurs comparées sont notamment :

- Le nombre d'itérations nécessaire au respect de l'un des critères d'arrêt
- La valeur de l'indicateur de précision à la dernière itération ( $P_{U \geq 1}$  pour l'approche globale et  $R_t$  pour l'approche locale)
- Le coût des observations principales  $D^\mu$
- Le coût des observations secondaires  $\frac{dD^\mu}{dt}$  et  $D_B^\mu$
- Le coût de métamodélisation (le coût d'estimation des hyper-paramètres, de construction de l'estimateur et d'estimation du dommage)
- L'erreur commise sur la quantité d'intérêt ( $P_f$  pour l'approche globale et  $t_C$  pour l'approche locale)

##### 4.4.2.1 Applications de l'approche globale

D'après [108], le nombre d'observations initiales doit être proche du nombre de variables en entrée multiplié par 10. Ainsi, lorsque les observations sont calculées avec le modèle 2SD,  $n_{OBS} = 30$  réalisations de  $(C, p_D, S)$  sont considérées en  $n_t = 5$  temps. De même, lorsque les observations sont calculées avec l'approche RSN et la formulation 1D du modèle 2SD,  $n_{OBS_B} = 60$  réalisations de  $(C, p_D, S)$  sont considérées en  $n_{t_B} = 10$  temps. D'après (4.97), avec  $COV_C = 0.1$  et une probabilité de défaillance minimale à 2%,  $n_{MCS} = 5000$  réalisations de  $\mathbf{Z}$  sont considérées en  $n_{t_{MCS}} = 100$  temps. Finalement, après quelques tests numériques préliminaires,  $U_C$  est fixé à 1,  $P_C$  est fixé à 0.99 et le nombre d'itérations maximal est posé à 140.


 FIGURE 4.8 – Structure algorithmique pour l'estimation du temps critique  $t_C$

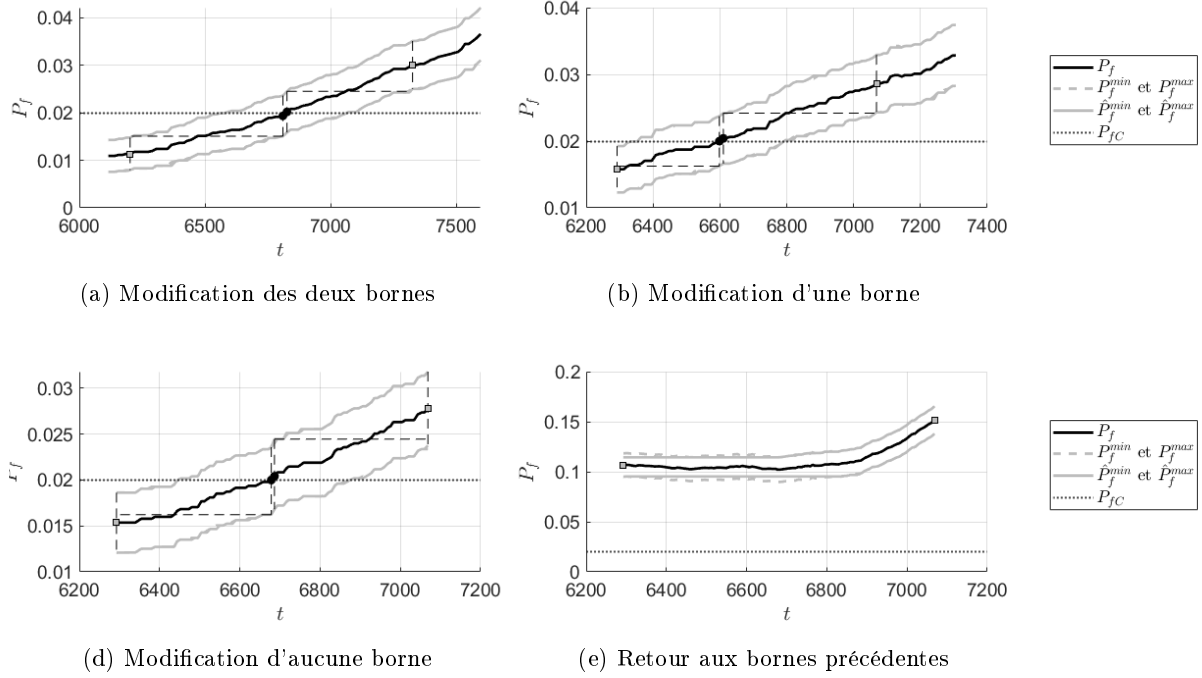


FIGURE 4.9 – Approche locale, illustration des quatre cas entrainant la modification ou non de l'intervalle de temps considéré

L'étude est en trois parties. Dans un premier temps, les estimateurs sont comparés dans la cadre d'un apprentissage unique. Dans un second temps, les stratégies d'apprentissage sont comparées pour un même estimateur et avec  $n_{APP} = 5$ . Dans un dernier temps, les résultats obtenus en faisant varier  $n_{APP}$  sont comparés pour un même estimateur et une même stratégie d'apprentissage.

La Table 4.5 compare les coûts et résultats obtenus en fonction des différents estimateurs dans le cadre d'un apprentissage unique. Concernant le critère d'arrêt  $P_C = 0.99$ , le seul estimateur permettant de le respecter est celui construit par krigeage. C'est d'ailleurs avec cet estimateur que l'erreur sur la probabilité de défaillance est la plus faible. Concernant le coût des observations principales, bien que le nombre de points appris soit le même pour chacun des estimateurs, les coûts sont différents. Cela est du au fait que les points appris lors de l'enrichissement ne sont pas les mêmes. Concernant le coût des observations secondaires, dans le cas du krigeage, aucune source d'observation secondaire n'est exploitée. Ce coût est donc nul. Pour le krigeage à gradient, il est proche de zéro. Comme attendu, le calcul des dérivées du dommage est extrêmement peu coûteux. Pour le krigeage multifidélité, le coût des observations secondaires est faible mais non négligeable. Concernant le coût de métamodélisation, il est le plus faible lorsque le krigeage est utilisé. Pour construire l'estimateur par krigeage à gradient, trois matrices supplémentaires sont calculées. Le coût de construction et d'inversion est donc plus élevé. Entre le krigeage et le krigeage à gradient, un facteur 2 est observé. Pour le krigeage multifidélité, deux estimateurs sont construits avant d'en déduire l'estimateur haute fidélité. Entre le krigeage et le krigeage multifidélité, un facteur 10 est observé. En conclusion, avec le krigeage multifidélité, le coût de métamodélisation est très élevé et le modèle basse fidélité n'apporte pas suffisamment d'informations pour que cela ait un véritable intérêt. L'estimateur construit par krigeage multifidélité n'est donc pas adapté pour l'approche globale.

Les Tables 4.6 et 4.7 comparent les coûts et résultats obtenus en fonction des différentes stratégies d'apprentissage multiple avec  $n_{APP} = 5$ . Le premier présente les résultats obtenus par krigeage et le second par krigeage à gradient. Concernant le critère d'arrêt  $P_C = 0.99$ , toutes les stratégies d'apprentissage multiple appliquées avec le krigeage permettent de le respecter. Ce

	Krigeage	Krigeage à gradient	Krigeage multifidélité
Itération	68	140	140
$P_{U \geq 1}$ (%)	99.00	98.80	98.26
Coût des observations principales (min)	32.0	37.8	40.7
Coût des observations secondaires (min)	0.0	0.0	3.9
Coût de métamodélisation (min)	9.1	37.0	178.2
Coût total (min)	41.1	76.0	226.4
$\frac{1}{n_{t_{MCS}}} \sum_{k=1}^{n_{t_{MCS}}}  P_f^{MCS}(t_k^{MCS}) - P_f(t_k^{MCS}) $	$1.48 \cdot 10^{-3}$	$4.34 \cdot 10^{-3}$	$5.45 \cdot 10^{-3}$

TABLE 4.5 – Comparaison des coûts et résultats obtenus en fonction des estimateur utilisés dans l'approche globale

n'est en revanche pas le cas pour l'estimateur construit pas krigeage à gradient. L'apprentissage uniforme est la stratégie qui entraîne les coûts numériques les plus élevés. Cela s'explique par le choix des points appris qui favorise les *clusters*. Le problème est moins bien conditionné et l'estimation des hyper-paramètres est plus coûteuse. Concernant les apprentissages géométrique et aux minimums locaux, les résultats obtenus avec le krigeage à gradient sont équivalents. L'un ajoute des points d'observation là où la densité des observations est la plus faible et l'autre là où l'erreur de métamodélisation est la plus forte. Or, les zones où l'information est la moins dense sont souvent celles où l'erreur de métamodélisation est la plus forte. En revanche, l'apprentissage aux minimums locaux possède un avantage majeur qui est observé lorsque le krigeage est utilisé. Puisque les points ajoutés sont des minimums locaux, si moins de  $n_{APP}$  minimums locaux sont identifiés alors moins de points sont appris. Cela permet de ne pas augmenter inutilement le nombre de points observés et donc de préserver les coûts de métamodélisation. En conclusion, quelle que soit la stratégie d'apprentissage, le krigeage permet d'aboutir aux résultats les plus précis et les moins coûteux. De plus, l'apprentissage aux minimums locaux a montré un avantage majeur concernant sa flexibilité sur le nombre de points appris par itération. L'estimateur par krigeage et la stratégie d'apprentissage aux minimums locaux sont donc les plus adaptés pour l'approche globale.

	Apprentissage uniforme	Apprentissage géométrique	Apprentissage aux minimums locaux
Itération	66	58	29
$P_{U \geq 1}$ (%)	99.00	99.00	99.00
Coût des observations principales (min)	31.2	29.4	25.5
Coût des observations secondaires (min)	0.0	0.0	0.0
Coût de métamodélisation (min)	31.6	23.5	3.7
Coût total (min)	62.8	52.9	29.2
$\frac{1}{n_{t_{MCS}}} \sum_{k=1}^{n_{t_{MCS}}}  P_f^{MCS}(t_k^{MCS}) - P_f(t_k^{MCS}) $	$5.03 \cdot 10^{-4}$	$2.41 \cdot 10^{-3}$	$1.71 \cdot 10^{-3}$

TABLE 4.6 – Comparaison des coûts et résultats obtenus pour chacune des stratégies d'apprentissage appliquées à un estimateur construit par krigeage

La Table 4.8 compare les coûts et résultats pour différentes valeurs de  $n_{APP}$  pour un estimateur construit par krigeage et une stratégie d'apprentissage aux minimums locaux. Quelle que soit la valeur de  $n_{APP}$ , le coût des observations principales est équivalent. En revanche, le coût de métamodélisation par itération augmente significativement lorsque  $n_{APP} = 10$  mais reste équivalent pour  $n_{APP} = 1$  et  $n_{APP} = 5$ . Cela ce justifie encore un fois par le fait que le critère n'ajoute pas nécessairement le nombre maximal de points. Fixer  $n_{APP}$  à 5 n'est donc pas plus coûteux mais permet de converger plus rapidement. En conclusion, une valeur de  $n_{APP}$  proche

	Apprentissage uniforme	Apprentissage géométrique	Apprentissage aux minimums locaux
Itération	140	140	140
$P_{U \geq 1}$ (%)	94.02	98.37	98.23
Coût des observations principales (min)	43.8	41.95	39.5
Coût des observations secondaires (min)	0.1	0.1	0.1
Coût de métamodélisation (min)	214.6	156.9	157.3
Coût total (min)	263.9	203.8	202.3
$\frac{1}{n_{t_{MCS}}} \sum_{k=1}^{n_{t_{MCS}}}  P_f^{MCS}(t_k^{MCS}) - P_f(t_k^{MCS}) $	$2.03 \cdot 10^{-3}$	$9.21 \cdot 10^{-4}$	$9.52 \cdot 10^{-4}$

TABLE 4.7 – Comparaison des coûts et résultats obtenus pour chacune des stratégies d'apprentissage appliquées à un estimateur construit par krigeage à gradient

de 5 est le choix le plus adapté pour l'approche globale.

	1	5	10
Itération	68	29	18
$P_{U \geq 1}$ (%)	99.00	99.00	99.00
Coût des observations principales (min)	32.2	25.5	24.0
Coût des observations secondaires (min)	0.0	0.0	0.0
Coût de métamodélisation (min)	9.1	3.7	22.9
Coût total (min)	41.1	29.2	46.9
$\frac{1}{n_{t_{MCS}}} \sum_{k=1}^{n_{t_{MCS}}}  P_f^{MCS}(t_k^{MCS}) - P_f(t_k^{MCS}) $	$1.48 \cdot 10^{-3}$	$2.41 \cdot 10^{-3}$	$2.48 \cdot 10^{-3}$

TABLE 4.8 – Comparaison des coûts et résultats obtenus pour différentes valeurs de  $n_{APP}$  pour du krigeage

Les résultats obtenus avec l'approche globale appliquée avec un estimateur construit par krigeage, la stratégie d'apprentissage aux minimums locaux et  $n_{APP} = 5$  sont présentés plus en détails. La Figure 4.10 trace l'évolution de  $P_{U \geq 1}$  au cours des itérations. À l'itération 29, le critère d'arrêt est respecté. Les valeurs de  $P_{U \geq 1}$  aux itérations suivantes sont représentées à titre informatif. En réalité, l'algorithme s'arrête.  $P_{U \geq 1}$  croît au cours des itérations. Certaines discontinuités sont cependant observées. Elles sont causées par une mauvaise estimation des hyperparamètres. La Figure 4.11 permet de situer les points d'observation dans l'espace des variables aléatoires. En blanc, ce sont les points initiaux observés. Il sont évalués en 5 temps répartis uniformément sur le domaine temporel. En couleurs, ce sont les point appris durant les phases d'apprentissage. Leur couleur varie en fonction du temps auquel ils sont associés. Il est observé que quelle que soit la valeur de  $C$  ou  $S$ , les points sont majoritairement appris pour de faibles valeurs de  $p_D$ . La valeur de  $p_D$  a donc une influence prédominante sur le choix du point appris. Cela se justifie avec l'analyse de sensibilité réalisée en section 3.2.2.2.3 qui montre que le dommage est principalement sensible à  $p_D$ . La Figure 4.12 trace trois cartes du dommage estimé. Sur chacune des cartes une projection des points enrichis est représentée. Là où la Figure 4.11 permet d'observer la corrélation spatiale entre les points enrichis, la Figure 4.12 permet d'observer la corrélation temporelle. Une forte corrélation entre  $p_D$  et  $t$  est observée Figure 4.12.a où plus le temps est élevé plus les points sont appris pour des valeurs élevées de  $p_D$ . La Figure 4.13 compare la probabilité de défaillance estimée  $P_f$  à la probabilité de défaillance de référence  $P_f^{MCS}$  (où aucun estimateur n'est utilisé et où le dommage est calculé avec le modèle 2SD aux  $n_{t_{MCS}} \times n_{MCS}$  points). Elles sont très proches et au maximum 40 réalisations sur 5000 sont mal classées. D'après la Figure 4.12, les points sont appris pour des temps supérieurs à 4000 ce qui d'après la Figure 4.13 correspond aux temps où  $P_f$  n'est pas nulle.

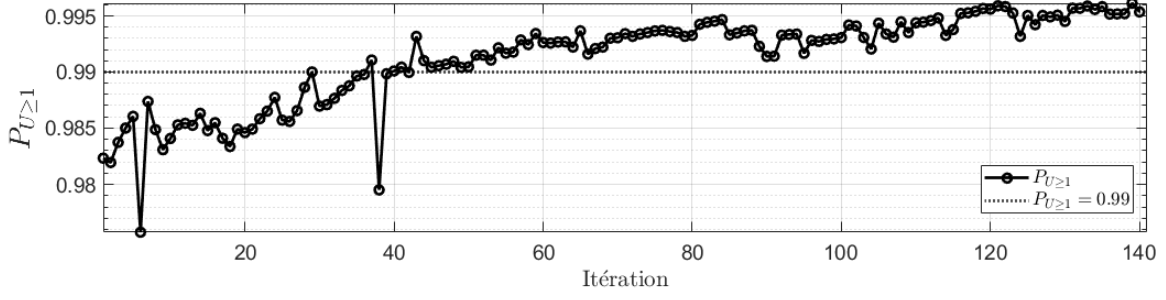
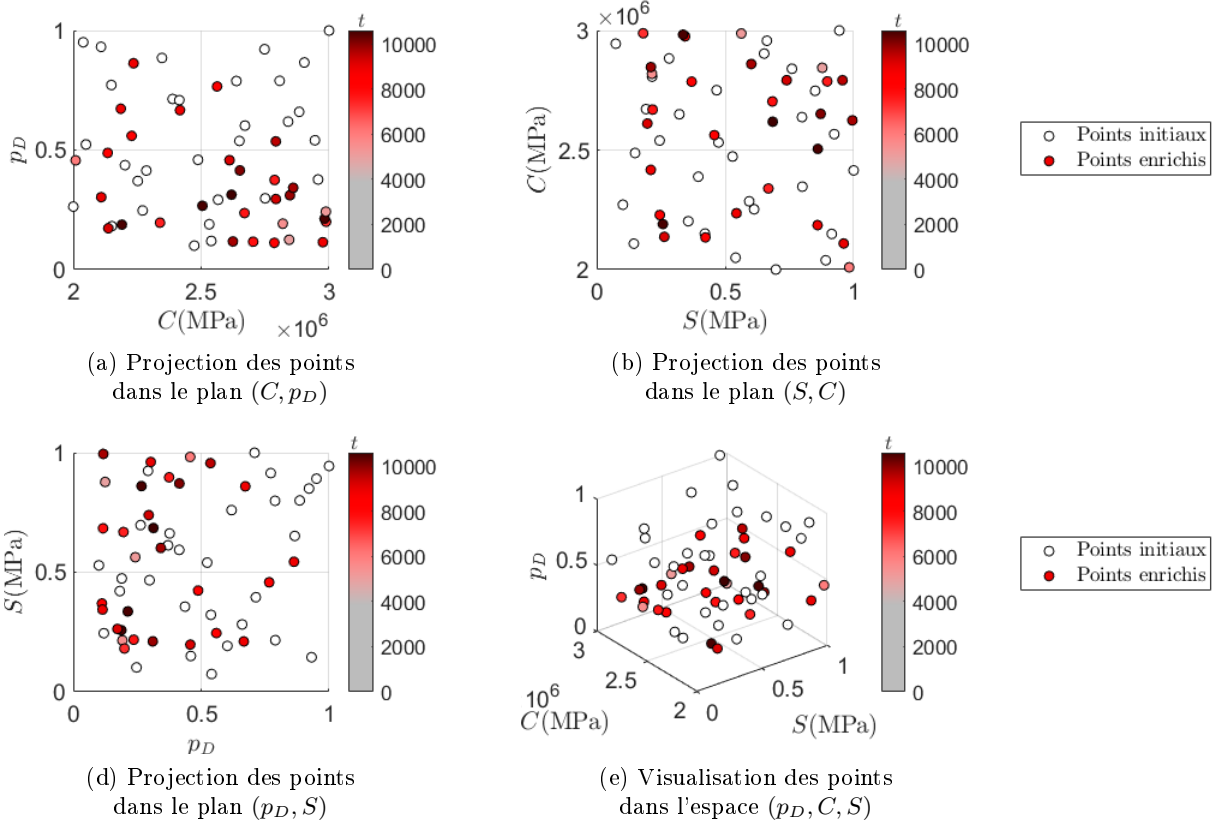

 FIGURE 4.10 – Approche globale, évolution de  $P_{U \geq 1}$  au cours des itérations


FIGURE 4.11 – Approche globale, localisation des points observés

#### 4.4.2.2 Applications de l'approche locale

Comme pour l'approche globale, les valeurs suivantes des paramètres sont considérées :  $n_{OBS} = 30$ ,  $n_t = 5$ ,  $n_{OBS_B} = 60$ ,  $n_{t_B} = 10$ ,  $n_{MCS} = 5000$  et  $n_{t_{MCS}} = 100$ . La probabilité de défaillance critique est fixée à  $P_{fC} = 0.02$  (ce qui correspond à un temps critique exacte  $t_C^{MCS} = 6.668 \cdot 10^3$ ). Après quelques tests numériques préliminaires,  $R_C$  est fixé à 0.06 et le nombre d'itérations maximal est posé égal à 140.

L'approche locale permet de réduire la taille du domaine temporel considéré. L'appliquer avec un apprentissage multiple risque de générer des *clusters* et donc d'entraîner un mauvais conditionnement numérique. Pour cette raison, seule la stratégie d'apprentissage unique ( $n_{APP} = 1$ ) est considérée. Les résultats présentés dans la Table 4.9, sont obtenus à la première itération où  $R_C = 0.06$ . Les trois estimateurs donnent des résultats précis. Le krigeage à gradient nécessite un coût de métamodélisation plus élevé que le krigeage mais converge plus rapidement. En conclusion, le krigeage à gradient appliqué avec un apprentissage unique sont les choix les plus

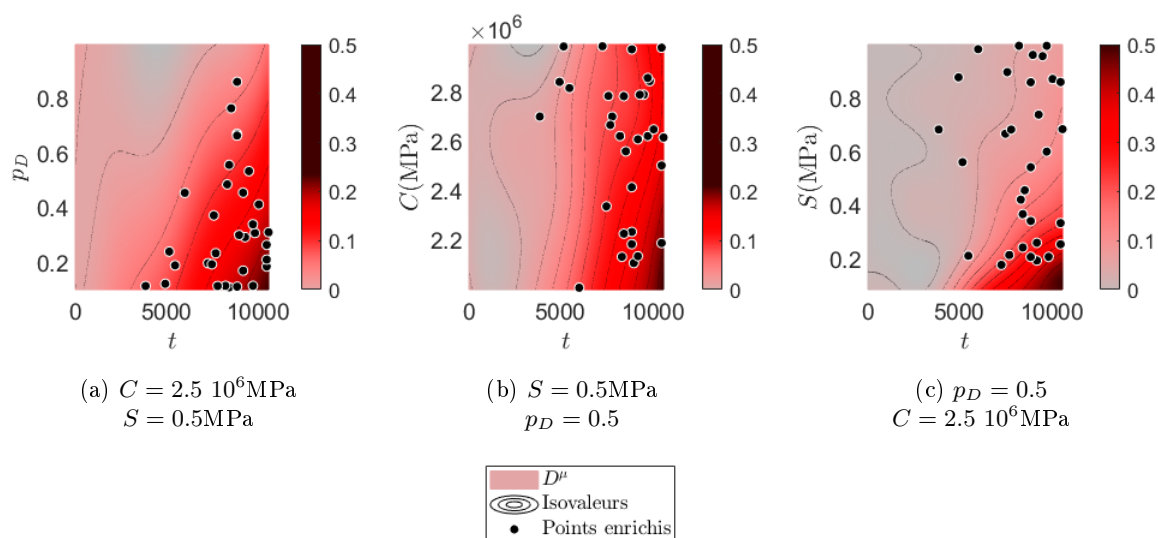


FIGURE 4.12 – Approche globale, cartes du dommage estimé

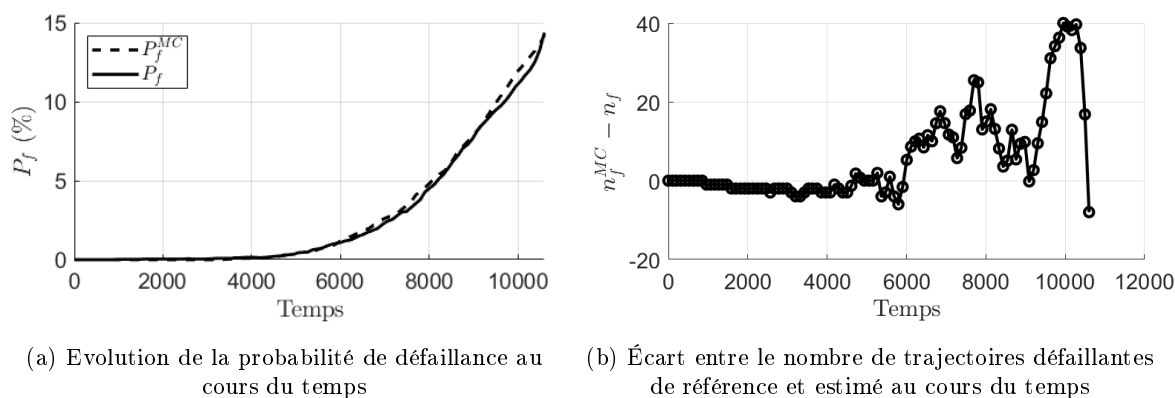


FIGURE 4.13 – Approche globale, probabilité de défaillance estimée

adaptés pour l'approche locale .

	Krigeage	Krigeage à gradient	Krigeage multifidélité
Itération	140	77	89
$R_t$ (%)	6.00	6.00	6.00
Coût des observations principales (min)	34.8	18.4	22.2
Coût des observations secondaires (min)	0.0	0.0	3.4
Coût de métamodélisation (min)	17.1	19.7	78.8
Coût total (min)	51.9	38.1	104.42
$t_C$	$6.870 \cdot 10^3$	$6.661 \cdot 10^3$	$6.438 \cdot 10^3$
$\frac{t_C^{MCS} - t_C}{t_C^{MCS}}$ (%)	3.029	0.105	3.450

TABLE 4.9 – Comparaison des coûts et résultats obtenus pour les stratégies de métamodélisation locales

Les résultats obtenues avec l'approche locale appliquée avec l'estimateur construit par krigeage à gradient pour un apprentissage unique sont présentés plus en détails. La Figure 4.14

trace l'évolution du rapport  $R_t$  au cours des itérations. À l'itération 33 et 71, le rapport augmente. Cela signifie que  $t_C$  n'est pas inclus dans le domaine temporel considéré, ce dernier est donc élargi. Les Figures 4.15 et 4.16 sont équivalentes aux Figures 4.11 et 4.12 obtenues avec l'approche globale. La seule différence est la concentration plus importante des points dans le cas de l'approche locale. La Figure 4.17, compare la probabilité de défaillance estimée  $P_f$  à la probabilité de défaillance de référence  $P_f^{MCS}$  (où aucun estimateur n'est utilisé et où le dommage est calculé avec le modèle 2SD aux  $n_{t_{MCS}} \times n_{MCS}$  points). Elle sont très proches et au maximum 5 réalisations sur 5000 sont mal classées.

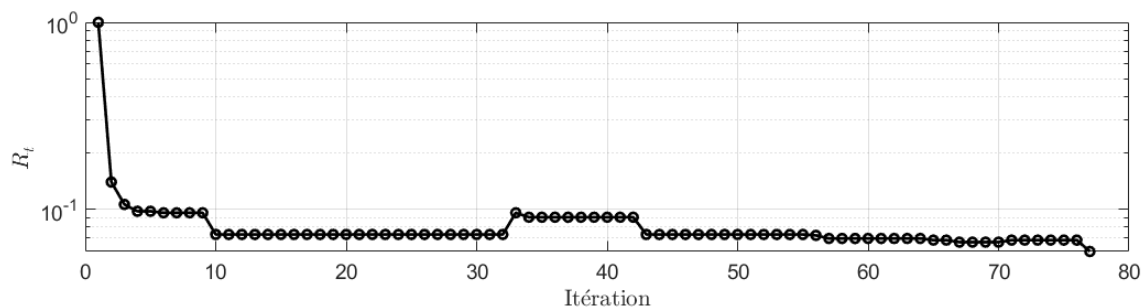


FIGURE 4.14 – Approche locale, du ratio  $R_t$  au cours des itérations

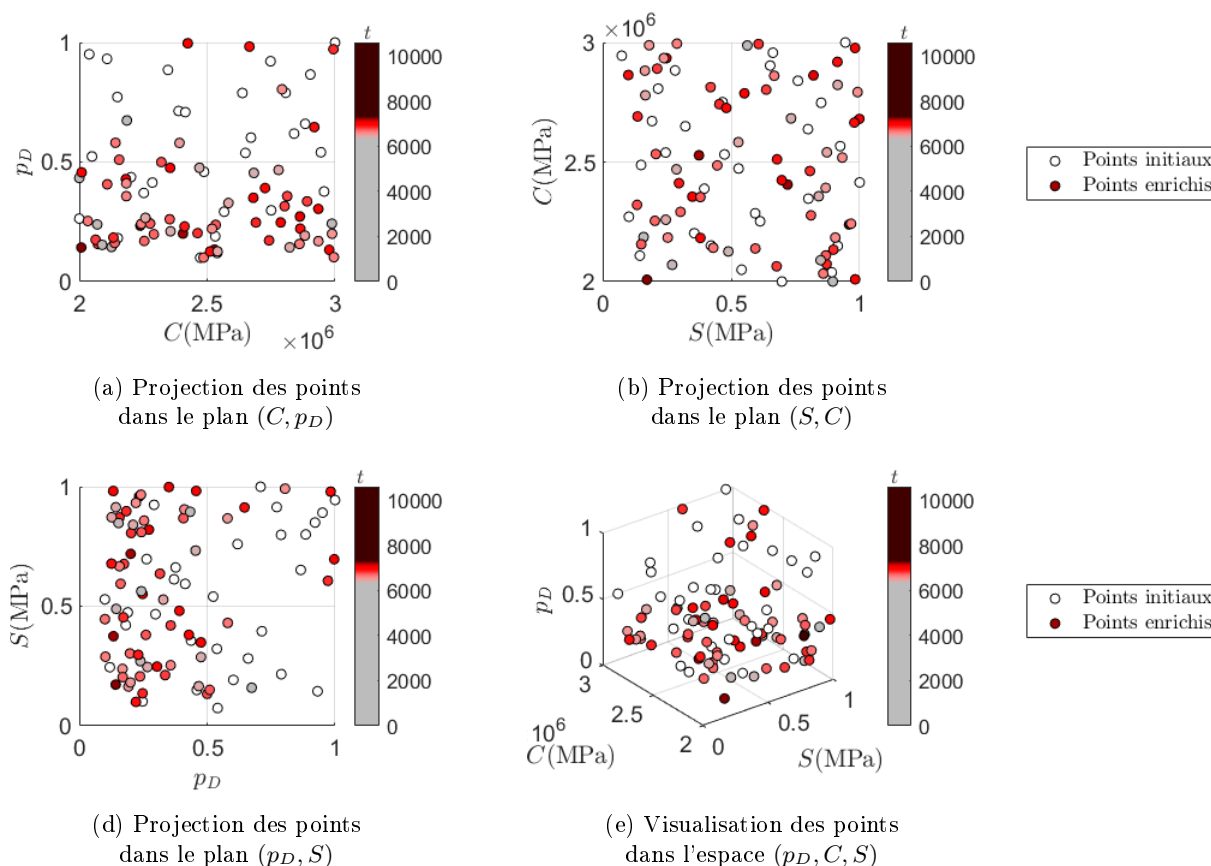


FIGURE 4.15 – Approche locale, localisation des points observés



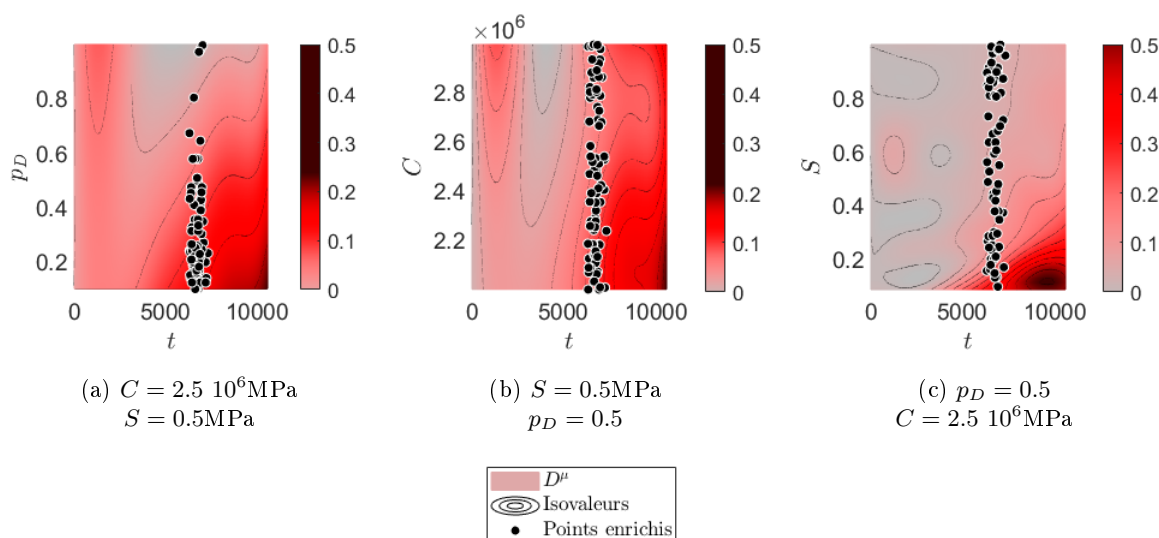


FIGURE 4.16 – Approche locale, cartes du dommage estimé

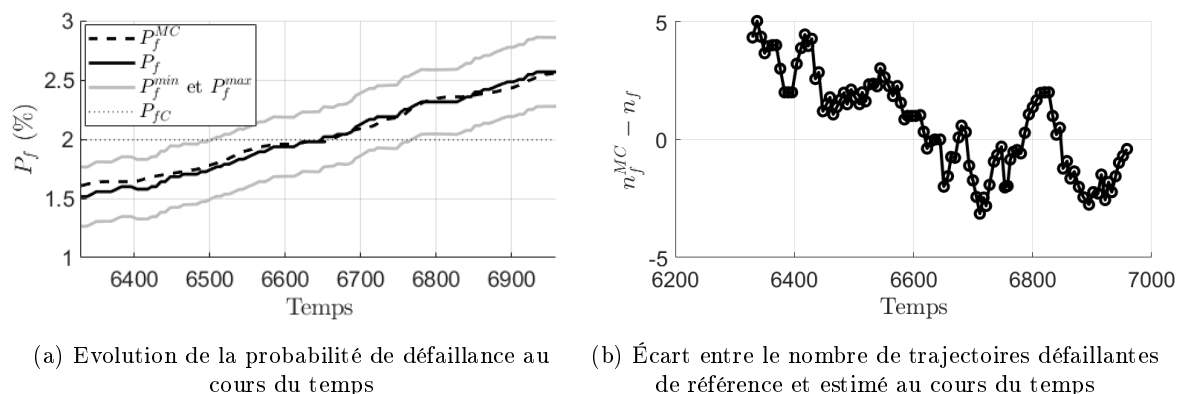


FIGURE 4.17 – Approche locale, probabilité de défaillance estimée

### 4.4.3 Conclusion et mise en parallèle des deux approches

Durant ce chapitre, différents leviers permettant de réduire les coûts numériques ont été étudiés et ont permis d'aboutir à la formulation de deux approches : une globale permettant d'estimer l'évolution de la probabilité de défaillance sur l'entièreté du domaine temporel et une locale permettant d'estimer le temps  $t_C$  pour lequel la probabilité de défaillance atteint un seuil critique. Les leviers étudiés sont axés selon quatre points : le calcul des observations, le choix de la grandeur estimée, le choix de l'estimateur et le développement de stratégies d'apprentissage. Finalement après plusieurs tests numériques, l'approche globale est utilisée avec l'estimateur construit par krigeage, la stratégie d'apprentissage aux minimums locaux et  $n_{APP} = 5$ . L'approche locale est utilisée avec l'estimateur construit par krigeage à gradient et un apprentissage unique. L'efficacité du krigeage à gradient entre l'approche globale et locale est discutée. D'après les résultats, disposer de la dérivée du dommage au cours du temps permet une meilleure estimation du dommage dans le cadre d'une approche locale mais pas pour une approche globale. Cela se justifie par la taille du domaine temporel et la forme d'une trajectoire du dommage. Le dommage est initialement nul puis commence à croître dès lors que  $p^\mu = p_D$ . Le signe de sa dérivée par rapport au temps alterne alors entre nul et positif. Il est nul lorsque la transformation microscopique est élastique et positif lorsque la transformation est plastique endommageable. Ainsi en considérant un domaine temporel large, une trajectoire du dommage peut être approximée

comme une fonction bilinéaire. La connaissance de la dérivée du dommage par rapport au temps en plusieurs points n'apporte que très peu d'informations. En revanche, en considérant un domaine temporel réduit, une trajectoire du dommage est hautement non linéaire. La connaissance de la dérivée du dommage par rapport au temps en plusieurs points est donc très utile.

Dans le chapitre suivant ces deux approches sont appliquées à un cas d'étude réel.

# Chapitre 5

## Application au cas d'une station de mesures en mer

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Matériel et mesures</b>	<b>98</b>
5.1.1	Station de mesure BIOCOLMAR	98
5.1.2	Modélisation mécanique du tube instrumenté	99
5.1.3	Mesures de déformations au cours du temps	99
5.1.4	Amplification et extrapolation des mesures de déformation	102
<b>5.2</b>	<b>Application des approches développées</b>	<b>105</b>
5.2.1	Application de l'approche globale	105
5.2.2	Application de l'approche locale	106
<b>5.3</b>	<b>Prise en compte de l'aléa de chargement</b>	<b>107</b>

---

Les approches globale et locale permettent respectivement d'estimer à moindre coût la probabilité de défaillance  $P_f(t)$  et le temps critique  $t_C$  en prenant en compte l'aléa matériau. L'objectif de ce chapitre est d'exploiter ce faible coût numérique pour étudier l'influence de l'aléa de chargement sur ces grandeurs. Pour ce faire, le cas d'une station de mesures instrumentée en mer est considéré et quatre chargements sont étudiés.

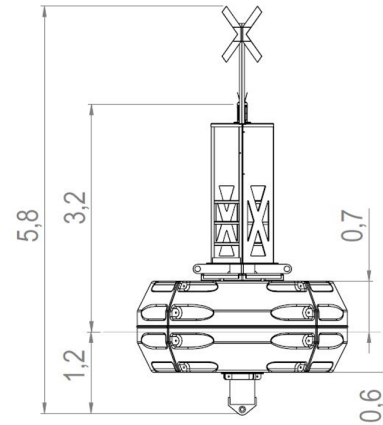
### 5.1 Matériel et mesures

#### 5.1.1 Station de mesure BIOCOLMAR

Issue d'un brevet de Nantes Université, la station de mesures BIOCOLMAR a été installée au large de la côte du Croisic (sur le site UN e-SEA de Nantes Université) dans le but de collecter des données sur l'environnement d'un site en mer voisin d'un champs d'éoliennes. Comme représenté sur la Figure 5.1, la station est constituée de panneaux photovoltaïques fixés sur une bouée. Sur la partie inférieure de cette dernière, un tube immergé permet de transmettre les efforts du flotteur à l'ancrage. L'amarrage est réalisé par une chaîne reliant le tube à des collecteurs de biocolonisation puis à un corps-mort. Deux jauges optiques sont soudées de part et d'autre du tube et mesurent son allongement longitudinal.



(a) Photographie réalisée en service par Franck Schoefs



(b) Plan

FIGURE 5.1 – Station BIOCOLMAR

### 5.1.2 Modélisation mécanique du tube instrumenté

La station de mesure ainsi que sa chaîne sont schématisées sur la Figure 5.2. Entre son poids et la poussée d'Archimède, la station est à l'équilibre. En fonction de la marée et de la hauteur de la houle, la longueur de la chaîne varie et par conséquent son poids tracté aussi. Sous l'hypothèse que la bouée reste verticale, l'effort de la chaîne sur le tube est uni-axial. Le tube est finalement modélisé par une barre 1D encadrée en une extrémité et sollicitée en traction de l'autre. Par conséquent les mesures de déformations réalisées par les deux jauges sont attendues égales.

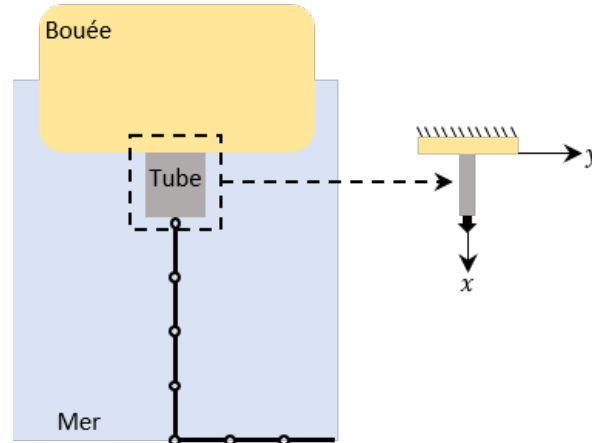


FIGURE 5.2 – Schématisation de la station BIOCOLMAR et de la modélisation du tube

### 5.1.3 Mesures de déformations au cours du temps

Un ensemble de mesures de déformations a été collecté notamment entre le 2 et le 4 Octobre 2017 sur des intervalles de temps variables. En moyenne, une mesure est conservée toutes les 3.5h. Les travaux réalisés dans [109] ont permis de post-traiter ces mesures. La Table 5.1 recense les déformations moyennes mesurées sur  $n_{MES} = 16$  intervalles de temps. Malgré le fait que les déformations mesurées par les deux jauges soient attendues égales, un écart moyen d'environ  $40 \mu\text{m.m}^{-1}$  est observé. Cela est dû au fait que les jauges ont été calibrées après avoir été soudées sur le tube mais avant le transport et la mise en mer. Des déformations plastiques ont alors pu se produire lors de ces phases de manutention. Une recalibration des deux jauges est donc réalisée

en considérant que la déformation moyenne enregistrée pour chaque jauge devrait être identique (d'après l'hypothèse de la barre en traction).

Intervalle de temps (h)	Jauge 1 ( $\mu\text{m.m}^{-1}$ )	Jauge 2 ( $\mu\text{m.m}^{-1}$ )
0	97.01	141.69
3	96.78	141.50
10	97.31	141.90
12	97.14	141.78
15	97.41	142.23
18	98.24	143.15
21	99.68	144.49
24	98.01	142.71
27	97.40	142.30
34	99.98	144.99
36	100.01	145.29
39	100.29	145.24
42	99.72	144.72
45	99.28	144.35
48	97.74	142.58
51	96.35	140.81

TABLE 5.1 – Déformations mesurées en fonction du temps

Initialement, les déformations moyennes des jauges 1 et 2 sont notées  $\boldsymbol{\epsilon}^{J1}$  et  $\boldsymbol{\epsilon}^{J2}$ . Après recalibration, elles sont notées  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{J1}$  et  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{J2}$ . L'espérance des déformations recalibrées se calcule ainsi :

$$\mathbb{E}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{J1}) = \mathbb{E}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{J2}) = \frac{\mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}^{J1}) + \mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}^{J2})}{2} \quad (5.1)$$

Deux facteurs de recalibration  $\delta^{J1}$  et  $\delta^{J2}$  sont déduits tels que :

$$\delta^{J1} = \frac{\mathbb{E}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{J1})}{\mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}^{J1})} \quad (5.2)$$

$$\delta^{J2} = \frac{\mathbb{E}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{J2})}{\mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}^{J2})} \quad (5.3)$$

Finalement, les déformations recalibrées se calculent comme suivant et leur valeur sont listées dans la Table 5.2.

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{J1} = \delta^{J1} \boldsymbol{\epsilon}^{J1} \quad (5.4)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{J2} = \delta^{J2} \boldsymbol{\epsilon}^{J2} \quad (5.5)$$

Intervalle de temps (h)	Jauge 1 ( $\mu\text{m.m}^{-1}$ )	Jauge 2 ( $\mu\text{m.m}^{-1}$ )
0	97.30	97.3
3	97.17	97.12
10	97.44	97.53
12	97.36	97.4
15	97.67	97.61
18	98.30	98.25
21	99.22	99.36
24	98.00	98.07
27	97.72	97.60
34	99.56	99.59
36	99.77	99.61
39	99.74	99.83
42	99.38	99.39
45	99.12	99.05
48	97.91	97.86
51	96.69	97.79

TABLE 5.2 – Déformations recalibrées en fonction du temps

La Figure 5.3 permet de comparer les valeurs obtenues entre les jauges 1 et 2 recalibrées. Une courbe de tendance est tracée par régression linéaire. De plus, sachant que les déformations mesurées par les deux jauges devraient être égales, une courbe de référence est aussi représentée. Malgré les erreurs de mesures, la recalibration permet d'obtenir deux courbes relativement similaires. Par la suite, les déformations obtenues par régression linéaire sont alors supposées exactes et les écarts  $\epsilon^{MES} - \tilde{\epsilon}^{J1}$  et  $\epsilon^{MES} - \tilde{\epsilon}^{J2}$  sont considérés comme des erreurs de mesures. L'ensemble de ces valeurs est indiqué dans la Table 5.4. À partir de ces valeurs, l'espérance et la variance des erreurs de mesures sont exprimées et calculées comme suivant :

$$\mathbb{E}^{MES} = \frac{\mathbb{E}(\epsilon^{MES} - \tilde{\epsilon}^{J1}) + \mathbb{E}(\epsilon^{MES} - \tilde{\epsilon}^{J2})}{2} = -6.25 \cdot 10^{-10} \mu\text{m.m}^{-1} \quad (5.6)$$

$$\mathbb{V}^{MES} = \frac{\mathbb{V}(\epsilon^{MES} - \tilde{\epsilon}^{J1}) + \mathbb{V}(\epsilon^{MES} - \tilde{\epsilon}^{J2})}{2} = 0.05 \mu\text{m}^2.\text{m}^{-2} \quad (5.7)$$

Ces moments statistiques permettront par la suite de proposer un modèle d'erreur.

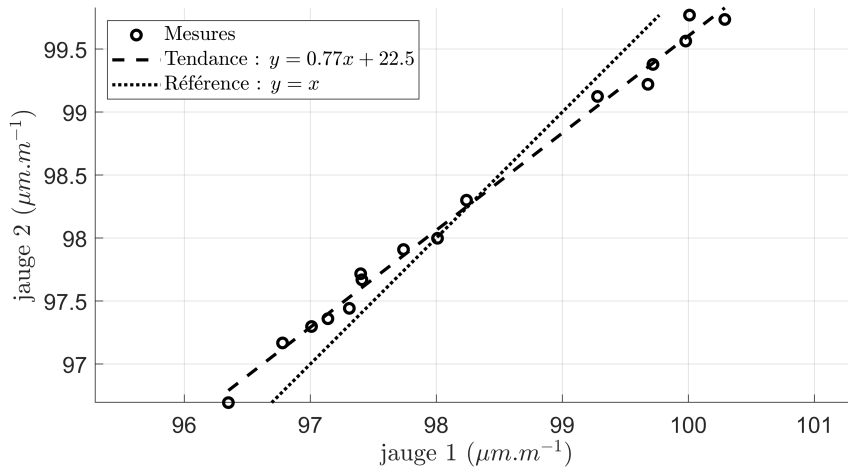


FIGURE 5.3 – Déformations mesurées par la jauge 2 en fonction de la jauge 1

Intervalle de temps (h)	Valeurs exactes ( $\mu\text{m.m}^{-1}$ )	Écart avec la jauge 1 ( $\mu\text{m.m}^{-1}$ )	Écart avec la jauge 2 ( $\mu\text{m.m}^{-1}$ )
0	97.01	-0.29	-0.29
3	96.78	-0.39	-0.34
10	97.31	-0.13	-0.22
12	97.14	-0.22	-0.26
15	97.41	-0.26	-0.20
18	98.24	-0.06	-0.01
21	99.68	0.46	0.32
24	98.01	0.01	-0.06
27	97.40	-0.32	-0.20
34	99.98	0.42	0.39
36	100.01	0.24	0.40
39	100.29	0.55	0.46
42	99.72	0.34	0.33
45	99.28	0.16	0.23
48	97.74	-0.17	-0.12
51	96.35	-0.34	-0.44

TABLE 5.3 – Déformations supposées exactes et erreurs de mesures

## 5.1.4 Amplification et extrapolation des mesures de déformation

### 5.1.4.1 Amplification des mesures de déformations

La structure étant susmentionnée, il est probable qu'aucun dommage significatif ne se produise avant plusieurs dizaines d'années. Par conséquent, les déformations mesurées sont amplifiées afin d'accélérer le processus d'endommagement. De façon à conserver la même espérance, les déformations amplifiées se calculent :

$$\boldsymbol{\epsilon}^{AMP} = AMP \times (\boldsymbol{\epsilon}^{MES} - \mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}^{MES})) + \mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}^{MES}) \quad (5.8)$$

avec AMP le coefficient d'amplification. À partir de (5.6) et (5.7), l'espérance et la variance des erreurs de mesures amplifiées s'écrivent :

$$\mathbb{E}^{AMP} = \mathbb{E}^{MES} \quad (5.9)$$

$$\mathbb{V}^{AMP} = AMP^2 \times \mathbb{V}^{MES} \quad (5.10)$$

Le choix de la valeur de AMP est réalisé dans la sous-section suivante après que les signaux de déformations aient été extrapolés.

### 5.1.4.2 Extrapolation des mesures de déformations

À partir des  $n_{MES} = 16$  valeurs de  $\boldsymbol{\epsilon}^{AMP}$ , quatre types de signaux de déformations sont définis afin de comparer l'impact de leur constitution et de l'erreur de mesure sur le dommage.

- Le premier est déterministe. Il est défini à partir des mesures de déformations amplifiées et est supposé sans erreur. Le signal  $\boldsymbol{\epsilon}^{(0)}$  est une extrapolation de  $\boldsymbol{\epsilon}^{AMP}$  sur  $[t_{init}, t_{fin}]$ . Ainsi,  $\boldsymbol{\epsilon}^{AMP}$  est répété  $n_{REP}$  fois tel que :

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(0)} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(0)} & \dots & \epsilon_j^{(0)} & \dots & \epsilon_{n_0}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

avec  $j \in \llbracket 1; n_0 \rrbracket$  et  $n_0 = n_{MES} \times n_{REP}$ .

- Le second est stochastique. Il est défini à partir des mesures de déformations amplifiées et des erreurs associées. Le signal  $\boldsymbol{\epsilon}_k^{(1)}$  est l'addition du signal  $\boldsymbol{\epsilon}^{(0)}$  et d'une réalisation  $\xi_k^{VA}$  de la variable aléatoire  $\xi^{VA} \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}^{AMP}, \mathbb{V}^{AMP})$  tel que :

$$\boldsymbol{\epsilon}_k^{(1)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^{(0)} + \xi_k^{VA} & \dots & \varepsilon_j^{(0)} + \xi_k^{VA} & \dots & \varepsilon_{n_0}^{(0)} + \xi_k^{VA} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

avec  $k \in \llbracket 1; n_\varepsilon \rrbracket$ .

- Le troisième est stochastique. Il est aussi défini à partir des mesures de déformations amplifiées et des erreurs associées. La seule différence avec le signal précédent est que, cette fois ci, l'erreur est considérée variable au cours du temps. Le signal  $\boldsymbol{\epsilon}_k^{(2)}$  est l'addition du signal  $\boldsymbol{\epsilon}^{(0)}$  et d'une réalisation  $\boldsymbol{\xi}_k^{(2)}$  du processus gaussien stationnaire avec corrélation gaussienne  $\boldsymbol{\xi}^{PG}$  de paramètres  $(\mathbb{E}^{AMP}, \mathbb{V}^{AMP}, \mathbb{L}^{AMP})$  tel que :

$$\boldsymbol{\epsilon}_k^{(2)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^{(0)} + \xi_{1,k}^{PG} & \dots & \varepsilon_j^{(0)} + \xi_{j,k}^{PG} & \dots & \varepsilon_{n_0}^{(0)} + \xi_{n_0,k}^{PG} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

avec  $\mathbb{L}^{MES}$  la longueur de corrélation posée égale à la durée moyenne entre deux mesures soit 3.6 h.

- Le quatrième est stochastique. Il est uniquement défini à partir de l'espérance et de la variance de l'ensemble des mesures de déformations amplifiées. Le signal  $\boldsymbol{\epsilon}_k^{(3)}$  est une réalisation d'un processus gaussien stationnaire avec corrélation gaussienne  $\boldsymbol{\epsilon}^{(3)}$  de paramètres  $(\mathbb{E}^{(3)}, \mathbb{V}^{(3)}, \mathbb{L}^{(3)})$  tel que :

$$\boldsymbol{\epsilon}_k^{(3)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,k}^{(3)} & \dots & \varepsilon_{j,k}^{(3)} & \dots & \varepsilon_{n_0,k}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

avec  $\mathbb{E}^{(3)}$  l'espérance,  $\mathbb{V}^{(3)}$  la variance et  $\mathbb{L}^{(3)}$  la longueur de corrélation. Pour que ce signal soit équivalent aux précédents, sa variance et son espérance sont posées égales à celles des déformations amplifiées :

$$\mathbb{E}^{(3)} = \mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}^{AMP}) \quad (5.15)$$

$$\mathbb{V}^{(3)} = \mathbb{V}(\boldsymbol{\epsilon}^{AMP}) \quad (5.16)$$

De plus, la longueur de corrélation est choisie de façon à ce que les réalisations  $\boldsymbol{\epsilon}_k^{(3)}$  soient en moyenne composées du même nombre de cycles (au sens Rainflow) que  $\boldsymbol{\epsilon}^{(0)}$ .

#### 5.1.4.3 Génération de quatre signaux de déformations

D'après [110], la demie durée de vie d'une éolienne en mer est estimée à une quinzaine d'années. Un état de service de 16 ans est donc considéré avec  $[t_{init}, t_{fin}] = [0, 1.40160 \cdot 10^5]$  h. Par conséquent,  $n_{REP}$  est fixé à 2748. De plus, s'agissant d'un tube en acier standard de construction navale, les caractéristiques matériau du tube sont équivalentes à celles de l'assemblage tubulaire étudié dans le Chapitre 2. Pour que le dommage moyen soit significatif, le signal des déformations est amplifié d'un coefficient multiplicateur  $AMP = 800$ . Un extrait des quatre modèles de signaux est représenté en Figure 5.4. Pour les signaux aléatoires ( $\boldsymbol{\epsilon}_k^{(1)}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_k^{(2)}$  et  $\boldsymbol{\epsilon}_k^{(3)}$ ),  $n_\varepsilon = 5$  réalisations sont tracées. Les signaux obtenus sont discontinus parce qu'ils sont tracés avec un intervalle de temps entre chaque point égale à l'intervalle de temps des mesures (environ 3.4h).

À noter que les réalisations des processus  $\boldsymbol{\xi}^{PG}$  et  $\boldsymbol{\epsilon}^{(3)}$  ont été générées par expansion de Karhunen Loève [84] avec la librairie Uqlab [85].



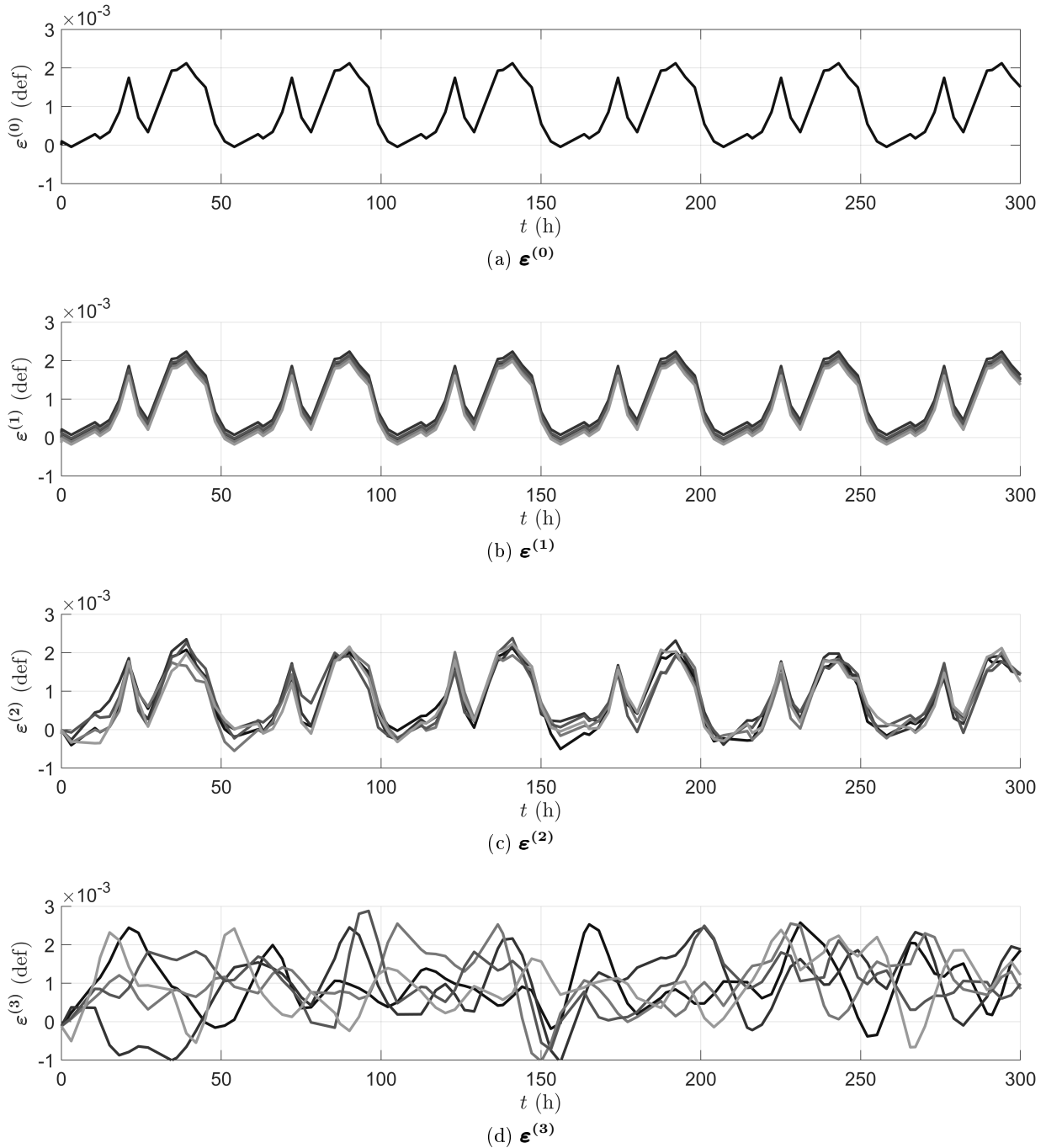


FIGURE 5.4 – Extrait des signaux de déformation pour  $t \in [0; 300]\text{h} \subset [t_{init}; t_{fin}]$

## 5.2 Application des approches développées

Les approches globale et locale sont appliquées pour chacun des quatre signaux. Les résultats obtenus sont ensuite comparés aux résultats obtenus avec la méthode de Monte Carlo. Cette dernière consiste à n'utiliser aucun estimateur et à calculer chacun des points avec le modèle 2SD. Cette méthode étant très coûteuse, seul l'aléa matériau est considéré. Par conséquent, 5000 réalisations de  $\mathbf{Z}$  et seule une réalisation par signal stochastique ( $n_\varepsilon = 1$ ) sont considérées. De plus, puisque les signaux sont des signaux de déformations, aucun problème à l'échelle macroscopique n'a besoin d'être traité. Via la relation de localisation (1.28), le problème à l'échelle microscopique est donc directement résolu.

### 5.2.1 Application de l'approche globale

Comme il a été conclu dans le Chapitre 4, l'approche globale est appliquée avec un estimateur construit par krigeage, une stratégie d'apprentissage aux minimums locaux et  $n_{APP} = 5$  points appris par itération. Le dommage est initialement observé pour  $n_{OBS} = 30$  réalisations de  $(C, p_D, S)$  en  $n_t = 5$  temps. Ces observations sont calculées avec le modèle 2SD en considérant un pas de temps  $\Delta t = 0.01$  h. La probabilité de défaillance est calculée à partir du dommage estimé pour  $n_{MCS} = 5000$  réalisations de  $\mathbf{Z}$  en  $n_{t_{MCS}} = 100$  temps. Les paramètres  $U_C$  et  $P_C$  sont respectivement fixés à 1 et 0.99.

L'évolution des probabilités de défaillance est tracée sur la Figure 5.5 avec  $P_f^{MC}$  la probabilité de référence (Monte Carlo),  $P_f$  la probabilité estimée et  $P_{fC}$  la probabilité critique. Le coût de calcul de l'approche globale et la moyenne de la somme des écarts entre la probabilité estimée et la probabilité de référence sont indiqués dans la Table 5.4. L'écart commis est relativement faible quel que soit le signal et le coût numérique est acceptable. Si le lecteur souhaite comparer ces résultats aux résultats obtenus au Chapitre 4, il est important de préciser que le domaine temporel considéré ainsi que le pas de temps ne sont pas les mêmes. Les signaux de contraintes traités dans le Chapitre 4 sont discrétisés en  $\frac{1.0600 \cdot 10^4}{0.05} = 2.1200 \cdot 10^5$  temps tandis que les signaux de déformations le sont en  $\frac{1.2264 \cdot 10^5}{0.01} = 1.2264 \cdot 10^7$  temps. Il est donc compréhensible que le coût numérique soit plus élevé lorsque les signaux de déformation sont considérés.

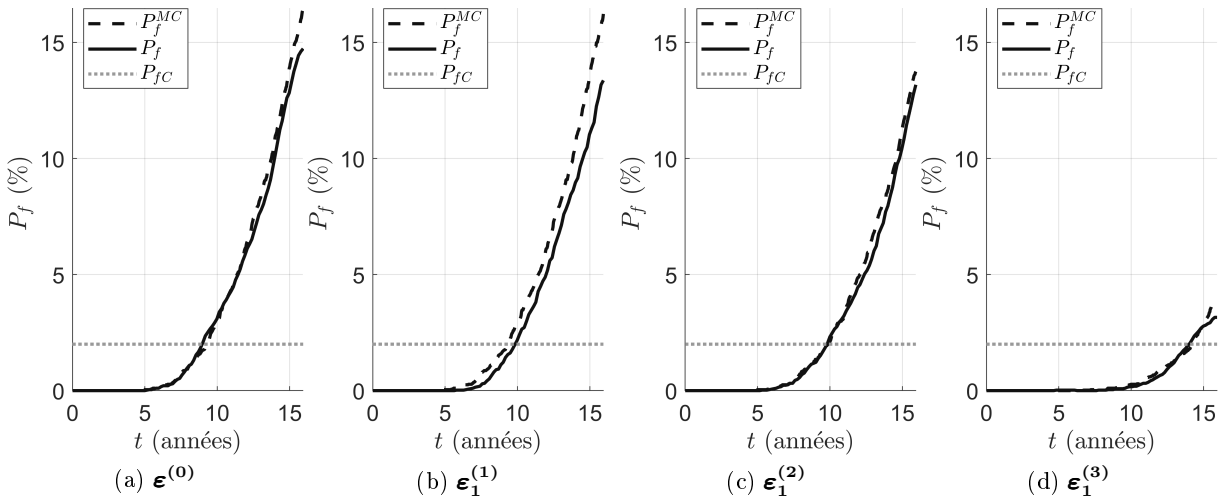


FIGURE 5.5 – Approche globale appliquée à quatre signaux de déformation

		$\epsilon^{(0)}$	$\epsilon_1^{(1)}$	$\epsilon_1^{(2)}$	$\epsilon_1^{(3)}$
$\frac{1}{n_{t_{MCS}}} \sum_{k=1}^{n_{t_{MCS}}} P_f^{MCS}(t_k) - P_f(t_k)$		$2.487 \cdot 10^{-3}$	$6.642 \cdot 10^{-3}$	$2.110 \cdot 10^{-3}$	$0.810 \cdot 10^{-3}$
Coût (min)		31.8	48.8	25.5	15.2

 TABLE 5.4 – Erreur moyenne commise sur l'estimation de  $P_f$  avec l'approche globale

### 5.2.2 Application de l'approche locale

Comme conclu dans le Chapitre 4, l'approche locale est appliquée avec un estimateur construit par krigeage à gradient et une stratégie d'apprentissage unique ( $n_{APP} = 1$ ). Le dommage est initialement observé pour  $n_{OBS} = 30$  réalisations de  $(C, p_D, S)$  en  $n_t = 5$  temps. Ces observations sont calculées avec le modèle 2SD en considérant un pas de temps  $\Delta t = 0.01$  h. La probabilité de défaillance est calculée à partir du dommage estimé pour  $n_{MCS} = 5000$  réalisations de  $\mathbf{Z}$  en  $n_{t_{MCS}} = 100$  temps. La probabilité de défaillance critique  $P_{fC}$  et le critère d'arrêt  $R_C$  sont respectivement fixés à 0.02 et 0.06.

L'évolution des probabilités de défaillance est tracée sur la Figure 5.6 avec  $P_f^{MC}$  la probabilité de référence (Monte Carlo),  $P_f$  la probabilité estimée moyenne,  $P_f^{\min}$  la probabilité estimée minimale  $P_f^{\max}$  la probabilité estimée maximale et  $P_{fC}$  la probabilité critique. Le coût de calcul de l'approche locale et l'erreur relative sur  $t_C$  sont indiqués dans la Table 5.4. L'erreur commise ne dépasse pas les 3% et le coût numérique est acceptable.

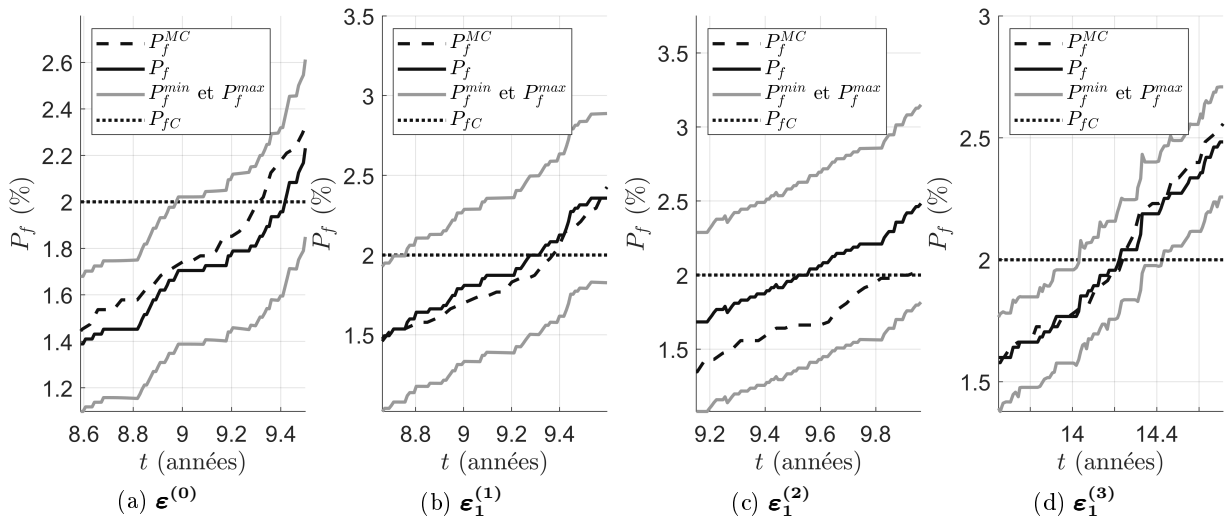


FIGURE 5.6 – Approche locale appliquée à quatre signaux de déformation

	$\epsilon^{(0)}$	$\epsilon_1^{(1)}$	$\epsilon_1^{(2)}$	$\epsilon_1^{(3)}$
$\frac{t_C^{MCS} - t_C}{t_C^{MCS}}$ (%)	-1.12	0.61	3.68	0.11
Coût (min)	27.0	36.7	18.6	45.5

 TABLE 5.5 – Erreur relative commise sur l'estimation de  $t_C$  avec l'approche locale

### 5.3 Prise en compte de l'aléa de chargement

En plus de l'aléa matériau, l'influence de l'aléa de chargement sur le dommage calculé avec le modèle 2SD est étudiée. Pour propager l'aléa de chargement à moindre coût à partir des travaux réalisés, il est possible d'appliquer les approches globale et locale (qui prennent en compte la variabilité matériau) pour  $n_\varepsilon$  réalisations de chargements. La structure étant en service, l'approche locale pour la planification des opérations de maintenance est favorisée à l'approche globale qui est plus adaptée pour le dimensionnement. Par conséquent, une distribution de  $t_C$  est estimée à partir des  $n_\varepsilon$  réalisations estimées de  $t_C$ . Le coût numérique maximal est fixé à 150 heures de calculs. D'après la Table 5.5, l'estimation de  $t_C$  est réalisée pour un coût moyen de 32 min. De plus, sachant que l'un des quatre signaux est déterministe, le nombre de réalisations considérées pour chacun des signaux aléatoires est  $n_\varepsilon = 100$ . Ce nombre étant faible, la variabilité des signaux risque de ne pas être précisément caractérisée. Pour compenser ce manque d'informations, les réalisations sont générées par par LHS [5].

Les distributions obtenues de  $t_C$  sont illustrées indépendamment sur la Figure 5.7 et collectivement sur la Figure 5.8. L'espérance et la variance de chaque distribution sont indiquées dans la Table 5.6.

- Premièrement, sachant que le signal  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$  est déterministe, la valeur de  $t_C$  associée à  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$  est déterministe. Sa variance est donc nulle.
- Deuxièmement, les distributions de  $t_C$  obtenues pour les signaux  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$  ont une espérance équivalente à celle obtenue lorsque  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$  est considéré. Cela semble cohérent puisque les signaux  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$  sont définis avec une erreur d'espérance proche de zéro ( $\mathbb{E}^{AMP} \simeq 0$ ).
- Troisièmement, bien les signaux  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$  aient la même variance  $\mathbb{V}^{AMP}$ , les variances de  $t_C$  sont bien distinctes. Elle en environ 45 fois plus élevée pour le signal  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$ . Cela se justifie par la corrélation imposée dans  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$  qui rend certaines réalisations très rares et réduit donc la variabilité de  $t_C$ .
- Quatrièmement, bien que  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(3)}$  aient la même espérance, la même variance et en moyenne le même nombre de cycles, l'espérance de  $t_C$  obtenue avec  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$  est nettement supérieure à celle obtenue pour les trois autres signaux. En d'autres termes, malgré le fait que  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(3)}$  soient statistiquement équivalents, les distributions de  $t_C$  sont bien distinctes. Cela est dû à la prise en compte de l'influence de l'historique de chargement par le modèle 2SD.

Pour finir, recontextualiser ces résultats dans un objectif de surveillance permet de prendre du recul sur l'intérêt de l'approche locale et plus précisément sur l'utilisation du modèle 2SD. Considérons  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$  comme le signal des déformations exactes perçues par la station BIOCOLMAR. Dans un contexte de SHM,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$  sont des signaux issues de mesures réalisées tout au long de la durée de vie de la bouée. Au contraire, si aucune mesure n'est réalisée,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(3)}$  est un signal défini à partir des connaissance de l'état de mer. Ainsi, les résultats montrent que l'approche locale permet de correctement estimer  $t_C$  si des mesures ont été réalisées et donc que l'historique de chargement est connu. Les erreurs relatives moyennes obtenues pour  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$  sont respectivement de 6.80 % et  $-0.32$  %. En revanche, si aucune mesure n'est réalisée, l'historique de chargement n'est pas connu et l'estimation de  $t_C$  est entachée d'une erreur relative moyenne non négligeable :  $-48.80$  %.

	$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}^{(3)}$
$\mathbb{E}(t_C)$ (années)	9.416	10.06	9.386	14.04
$\mathbb{V}(t_C)$ (années <sup>2</sup> )	0	3.409	0.076	0.069

TABLE 5.6 – Espérance et variance de  $t_C$  en fonction des types de signaux de déformations

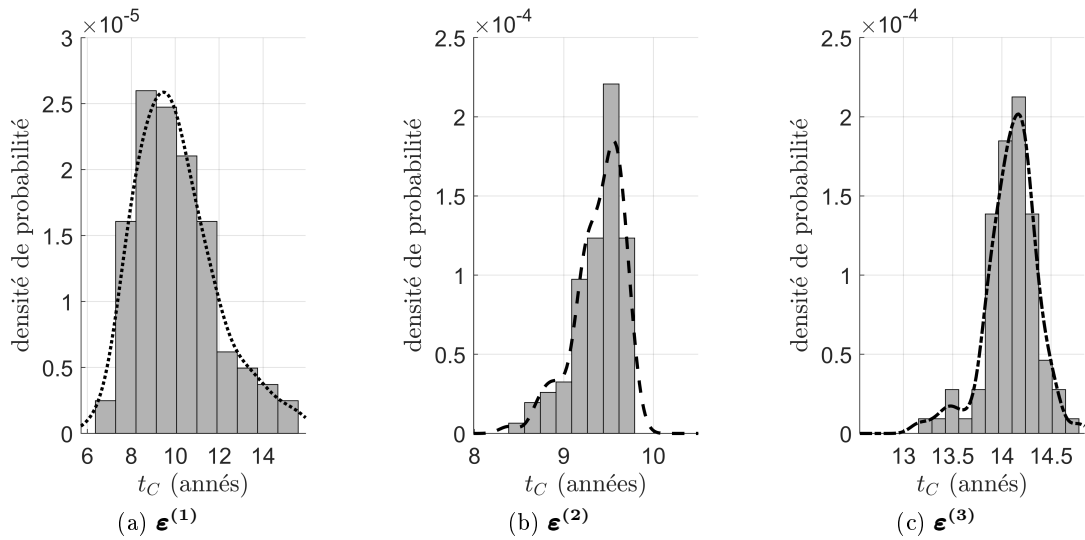


FIGURE 5.7 – Distributions probabilistes de  $t_C$  en fonction des signaux aléatoires appliqués

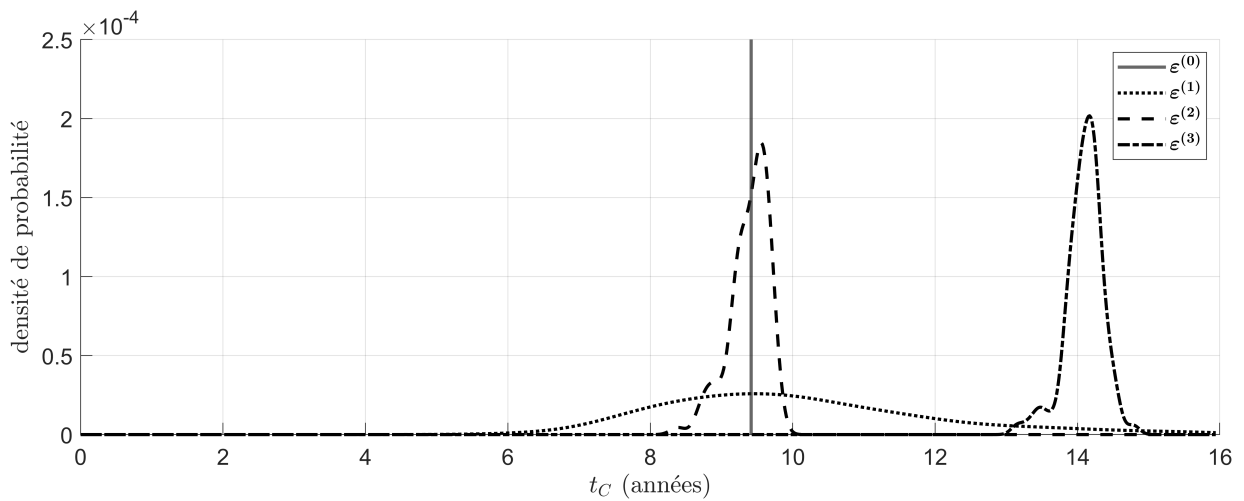


FIGURE 5.8 – Confrontation des distributions probabilistes de  $t_C$  en fonction des signaux de déformation appliqués

# Conclusion générale et perspectives

## Conclusion générale

L'évaluation du dommage en fatigue est un véritable défi : obtenir des résultats de simulation précis implique d'importants coûts numériques. En conséquence, son estimation est généralement réalisée avec des approximations fortes. Parmi elles, le cumul linéaire du dommage néglige l'influence de l'historique de chargement. Grâce au gain numérique induit, des approches fiabilistes ont pu être développées afin de prendre en compte différentes sources d'incertitudes telles que le chargement, la géométrie ou le matériau. Cependant, que ce soit pour le dimensionnement ou le suivi en service de structures, le besoin de précision est grandissant. C'est selon cet axe que ce sont orientés ces travaux.

La non prise en compte de l'historique de chargement est reconsidérée. Un modèle d'endommagement continu est alors sélectionné, le modèle 2SD. C'est un modèle déterministe particulièrement adapté pour les structures métalliques sollicitées en fatigue polycyclique. Afin de prendre en compte l'aléa matériau et d'accroître la précision des résultats, les paramètres du modèle 2SD sont calibrés. À partir d'une étude bibliographique les paramètres à considérer incertains sont sélectionnés. Ils sont au nombre de 4 :  $(C, S, D_C, p_D)$ . Leur calibration est réalisée à partir de courbes SN probabilistes en trois étapes : choix des supports par analyse de sensibilité élastique, génération d'un ensemble de distributions candidates par la méthode MCMC et sélection d'un jeu de distributions permettant de disposer de résultats conservatifs. Les variables aléatoires  $(C, S)$  sont identifiées comme indépendantes et suivant une loi uniforme tandis que  $(S, D_C)$  sont identifiées comme corrélées et suivant une loi log-normale. Ces distributions sont associées à une erreur conservative moyenne sur le nombre de cycles à rupture de 10%.

Une fois le modèle calibré et l'aléa matériau défini, l'influence de l'historique de chargement est étudiée. Pour cela le modèle est appliqué à un cas d'étude 2D pour cinq chargements différents. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus avec un cumul linéaire du dommage, c'est-à-dire en ne prenant pas en compte l'influence de l'historique de chargement. Différentes observations sont réalisées. Premièrement, la qualité de la calibration du modèle 2SD est validée puisqu'il permet d'obtenir la même probabilité de défaillance qu'avec un cumul linéaire du dommage lorsque le chargement est d'amplitude constante (l'influence de l'historique de chargement est nulle). Deuxièmement, pour deux signaux dont la seule différence est l'ordre d'apparition des cycles de chargement, le modèle 2SD permet de calculer deux probabilités de défaillance bien distinctes (contrairement à un cumul linéaire). Troisièmement, pour deux signaux d'amplitudes aléatoires, le cumul linéaire du dommage sous-estime la probabilité de défaillance d'un facteur 2 et 3 par rapport au modèle 2SD sur les cas d'études choisis. L'intérêt de prendre en compte l'influence de l'historique de chargement étant démontré, il s'agit ensuite de réduire le coût numérique du modèle 2SD lorsque l'aléa matériau est considéré.

Deux approches basées sur le krigeage sont développées selon deux objectifs. Pour le dimensionnement en fatigue, la connaissance de l'évolution de la probabilité de défaillance est d'une grande aide. Une approche dite globale reprenant la structure algorithmique de la méthode AK-MCS est développée. Après divers tests numériques, l'approche globale est considérée optimale lorsque le dommage est estimé par krigeage avec un apprentissage adaptatif multiple. Pour la

planification des opérations de maintenance, la connaissance de l'instant où la probabilité de défaillance dépasse une valeur critique est très utile. Une approche dite locale est développée afin de répondre à ce besoin. Dans sa structure algorithmique, elle est équivalente à l'approche globale à la différence que le domaine temporel considéré n'est plus fixe mais variable. Après divers tests numériques, l'approche locale est considérée optimale lorsque le dommage est estimé par krigeage à gradient avec un apprentissage adaptatif unique. Finalement, quelle que soit l'approche, le coût numérique est d'environ 40 minutes soit un gain d'un facteur 250 par rapport à une approche sans métamodélisation.

Les coûts numériques maintenant réduits, les deux approches sont appliquées à un cas d'étude réel : une station de mesures en mer. À partir de mesures de déformations, quatre types de signaux sont définis : le premier est déterministe et sans erreur de mesure, le second est probabiliste avec une erreur constante, le troisième est probabiliste avec une erreur variable au cours du temps et le quatrième est un processus gaussien avec corrélation gaussienne. L'efficacité des approches globale et locale est démontrée après que les approches aient été appliquées sur chacun des chargements. Ensuite, à partir de l'approche locale, l'intérêt du modèle 2SD est questionné lorsque le chargement est incertain. Si l'utilisateur dispose de mesures, l'historique de chargement est connu et les résultats obtenus sont précis. En revanche, si aucune mesure n'est disponible, l'historique de chargement est inconnu et le modèle 2SD conduit à une estimation du dommage peu précise.

## Perspectives

Les travaux proposés dans ce manuscrit ouvrent la voie à plusieurs perspectives.

Le coût numérique des approches globale et locale peut encore être réduit. Deux pistes sont envisagées. Premièrement, que ce soit pour le krigeage ou le krigeage à gradient, les deux estimateurs sont construits à partir d'un krigeage de type ordinaire. Le plan moyen estimé n'étant pas constant, un krigeage universel pourrait donc être plus approprié. Tout l'enjeu pour judicieusement appliquer ce dernier repose alors sur le choix des fonctions d'interpolation. Deuxièmement, les programmes sont réalisés sous Matlab. Ce logiciel est basé sur un langage interprété et ne permet pas une gestion approfondie de la mémoire ou des ressources de calculs. Réimplémenter les programmes avec un langage compilé tel que C++ est donc un moyen efficace afin de réduire les coûts numériques en temps et en mémoires.

À plus long terme, pour améliorer la modélisation, la complexité du problème considéré peut être accrue. Trois pistes sont envisagées. Premièrement, la seule source d'incertitude considérée avec une stratégie d'optimisation des coûts numériques est l'aléa matériau. D'autres sources d'incertitudes pourraient être considérées. Dans le cas des assemblages soudés, il est montré que la variabilité géométrique a une influence importante sur le calcul du dommage en fatigue [111]. On pourrait alors prendre en compte l'aléa géométrique en métamodélisant le dommage en fonction d'un plus grand nombre de variables. D'après [108], le krigeage reste efficace pour une dizaine de variables en entrée. Puisque jusqu'à présent 4 variables ont été considérées, l'ajout d'autres variables ne nécessiterait pas de modifications importantes des approches développées. Ce n'est donc a priori pas un verrou. En revanche, un travail équivalent à celui présenté en Annexe 2 doit être réalisé afin de conserver une formulation permettant d'estimer à moindre coût l'instant où le dommage s'amorce. Deuxièmement, pour éviter des coûts numériques trop importants, les travaux sont réalisés en ne considérant qu'un seul élément endommageable. Même dans l'objectif d'étudier l'évolution du dommage au sein d'un *hot spot*, considérer un unique élément n'est pas réaliste. Une stratégie permettant d'appliquer les approches globale et locale à un ensemble d'éléments doit être investiguée. Les coûts numériques alors induits peuvent être réduits en parallélisant les calculs ou encore en mettant en place une méthode telle que *k-means clustering* [112]. Cette dernière consiste à réaliser des clusters d'éléments voisins soumis à des déformations macroscopiques équivalentes et de ne considérer qu'un seul élément microscopique pour chacun de ces clusters. Troisièmement, les paramètres matériau du modèle sont calibrés

à partir de courbes SN probabilistes. Cela peut être interprété comme une calibration initiale du modèle. Dans un objectif de suivi de structures en service, cette calibration pourrait être mise à jour à partir de mesures réalisées au cours du temps. Cela permettrait de réajuster les estimations fournies par le modèle et d'augmenter la précision au cours du temps. Cela nécessite donc d'investiguer des stratégies de mise à jour du modèle au cours du temps telles que celle évoquée dans [113].



# Annexes

## Annexe 1 : Application du modèle 2SD en 1D avec une amplitude de contraintes constante

Un signal d'amplitude constante  $\Delta\sigma$  est considéré. La Figure 5.9 permet d'illustrer les grandeurs considérées. Elle représente l'évolution des contraintes macroscopique (en rouge) et microscopique (en noir) durant un cycle de chargement OABCD.

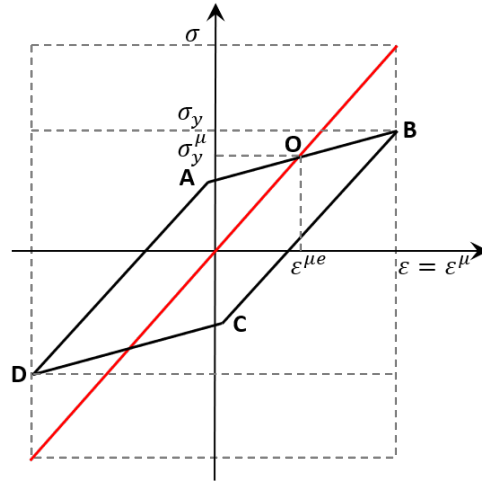


FIGURE 5.9 – Diagramme des contraintes-déformations pour un cycle de chargement OABCD

Avant l'initiation du dommage, avec  $\varepsilon = \varepsilon^\mu$  et  $\varepsilon^\mu = \varepsilon^{\mu e} + \varepsilon^{\mu p}$ , la déformation plastique microscopique s'écrit :

$$\varepsilon^{\mu p} = \varepsilon - \varepsilon^{\mu e} \quad (5.17)$$

Avec la loi de Hooke  $E\varepsilon = \sigma$  à l'échelle macroscopique et  $E\varepsilon^{\mu e} = \tilde{\sigma}^\mu$  à l'échelle microscopique, l'équation précédente devient :

$$E\varepsilon^{\mu p} = \sigma - \tilde{\sigma}^\mu \quad (5.18)$$

De plus, durant la transformation OA  $\tilde{\sigma}^\mu - X^\mu > 0$ , la surface de charge s'écrit :

$$f = |\tilde{\sigma}^\mu - X^\mu| - \sigma_y^\mu = 0 \Rightarrow X^\mu = \tilde{\sigma}^\mu - \sigma_y^\mu \quad (5.19)$$

Puisque le dommage initial vaut 0,  $\tilde{\sigma}^\mu = \sigma^\mu$  et par conséquent l'expression précédente devient :

$$X^\mu = \sigma^\mu - \sigma_y^\mu \quad (5.20)$$

D'après la formulation de l'écroûissage cinématique linéaire et (5.20), la déformation plastique microscopique est exprimée telle que :

$$dX^\mu = \frac{2}{3}C d\varepsilon^{\mu p} \Rightarrow \varepsilon^{\mu p} = \frac{3}{2C}(\sigma^\mu - \sigma_y^\mu) \quad (5.21)$$

Ainsi, avec (5.18) et (5.21), la contrainte microscopique s'écrit :

$$\sigma^\mu = \frac{2C\sigma + 3E\sigma_y^\mu}{2C + 3E} \quad (5.22)$$

Et avec (5.20) et (5.22), l'écroissage cinématique linéaire se lit :

$$X^\mu = \frac{2C(\sigma - \sigma_y^\mu)}{2C + 3E} \quad (5.23)$$

De plus, puisqu'un cycle correspond à un cumul plastique microscopique  $\Delta p^\mu = 4\varepsilon^{\mu p}$ , avec (5.21) l'équation précédente devient :

$$\Delta p^\mu = \frac{12(\sigma - \sigma_y^\mu)}{2C + 3E} \quad (5.24)$$

Finalement, l'expression du nombre de cycles  $N_D$  nécessaire pour initier le dommage est obtenue :

$$N_D \Delta p^\mu = p_D \quad (5.25)$$

$$N_D = \frac{2C + 3E}{12(\sigma - \sigma_y^\mu)} p_D \quad (5.26)$$

D'après la définition de l'énergie élastique libérée et de la loi de Hooke,  $Y^\mu$  s'exprime :

$$Y^\mu = \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^\mu \varepsilon^{\mu e} \quad (5.27)$$

$$Y^\mu = \frac{\tilde{\sigma}^{\mu 2}}{2E} \quad (5.28)$$

Avec (5.19), l'incrément d'écroissage se formule  $dX^\mu = d\tilde{\sigma}^\mu$ . Ainsi, avec (5.21), l'incrément de la déformation plastique microscopique se formule :

$$d\varepsilon^{\mu p} = \frac{3}{2C} d\tilde{\sigma}^\mu \quad (5.29)$$

À partir de la définition du dommage et des deux equations précédentes, l'incrément du dommage s'écrit :

$$dD^\mu = \left( \frac{Y^\mu}{S} \right)^s dp^\mu \quad (5.30)$$

$$dD^\mu = \left( \frac{\tilde{\sigma}^{\mu 2}}{2ES} \right)^s \frac{3}{2C} |d\tilde{\sigma}^\mu| \quad (5.31)$$

Le dommage associé à un cycle s'exprime alors comme suivant :

$$\Delta D^\mu = \int_{OABCD} dD^\mu \quad (5.32)$$

$$\Delta D^\mu = \frac{3}{2C(2ES)^s} \int_{OABCD} \tilde{\sigma}^{\mu 2s} |d\tilde{\sigma}^\mu| \quad (5.33)$$

$$\Delta D^\mu = \frac{3}{C(2ES)^s} \int_{DOA} \tilde{\sigma}^{\mu 2s} d\tilde{\sigma}^\mu \quad (5.34)$$

Puisque en A,  $\tilde{\sigma}_A^\mu = \tilde{\sigma}^\mu$  et en D,  $\tilde{\sigma}_A^\mu = \sigma_y^\mu - (\tilde{\sigma}_A^\mu - \sigma_y^\mu) = 2\sigma_y^\mu - \tilde{\sigma}^\mu$  alors les bornes de l'intégrale sont :

$$\Delta D^\mu = \frac{3}{C(2ES)^s} \int_{2\sigma_y^\mu - \tilde{\sigma}^\mu}^{\tilde{\sigma}^\mu} \tilde{\sigma}^{\mu 2s} d\tilde{\sigma}^\mu \quad (5.35)$$

$$\Delta D^\mu = \frac{3 \left( \tilde{\sigma}^{\mu 2s+1} - (2\sigma_y^\mu - \tilde{\sigma}^\mu)^{2s+1} \right)}{C(2ES)^s (2s + 1)} \quad (5.36)$$

Finalement, sachant que  $dN\Delta D^\mu = dD^\mu$ , la formulation du nombre de cycle menant à la rupture est :

$$dN = \frac{C(2ES)^s(2s+1)}{3(\tilde{\sigma}^{\mu^{2s+1}} - (2\sigma_y^\mu - \tilde{\sigma}^\mu)^{2s+1})} dD^\mu \quad (5.37)$$

$$\int_{N_D}^N dN = \frac{C(2ES)^s(2s+1)}{3(\tilde{\sigma}^{\mu^{2s+1}} - (2\sigma_y^\mu - \tilde{\sigma}^\mu)^{2s+1})} \int_0^{D_C} dD^\mu \quad (5.38)$$

$$N = N_D + \frac{C(2ES)^s(2s+1)}{3(\tilde{\sigma}^{\mu^{2s+1}} - (2\sigma_y^\mu - \tilde{\sigma}^\mu)^{2s+1})} D_C \quad (5.39)$$

## Annexe 2 : Relations entre les variables internes microscopiques du modèle 2SD

Si  $p_n^\mu \leq p_D$ , alors la transformation est sans dommage et l'incrément de plasticité s'écrit :

$$\Delta p^\mu = \frac{f_n}{3\mu + C} \quad (5.40)$$

avec  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ . À partir de cette expression, la déformation microscopique plastique  $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mu p}$  est exprimé en fonction de  $C$  :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mu p} = \frac{2\mu P^D : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y^\mu N_{n+1}}{2\mu + \frac{2}{3}C} \quad (5.41)$$

Pour  $C_i$  et  $C_j$  deux réalisations de  $C$ , les déformations  $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mu p}(C_i)$  et  $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mu p}(C_j)$  s'écrivent :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mu p}(C_i) = \frac{2\mu P^D : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e(C_i) - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y^\mu N_{n+1}(C_i)}{2\mu + \frac{2}{3}C_i} \quad (5.42)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mu p}(C_j) = \frac{2\mu P^D : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e(C_j) - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y^\mu N_{n+1}(C_j)}{2\mu + \frac{2}{3}C_j} \quad (5.43)$$

Puisque  $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e$  est une grandeur macroscopique, elle ne dépend pas de  $C$ . La relation suivante est obtenue :

$$\left(2\mu + \frac{2}{3}C_i\right) \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mu p}(C_i) + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y^\mu N_{n+1}(C_i) = \left(2\mu + \frac{2}{3}C_j\right) \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mu p}(C_j) + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y^\mu N_{n+1}(C_j) \quad (5.44)$$

Sous l'hypothèse que  $N_{n+1}$  ne dépende pas non plus de  $C$ , la relation se réécrit :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mu p}(C_i) = \frac{2\mu + \frac{2}{3}C_j}{2\mu + \frac{2}{3}C_i} \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\mu p}(C_j) \quad (5.45)$$

Il en est déduit deux relations similaires pour  $p_{n+1}^\mu$  et  $\mathbf{X}_{n+1}^\mu$  :

$$p_{n+1}^\mu(C_i) = \frac{2\mu + \frac{2}{3}C_j}{2\mu + \frac{2}{3}C_i} p_{n+1}^\mu(C_j) \quad (5.46)$$

$$\mathbf{X}_{n+1}^\mu(C_i) = \frac{(2\mu + \frac{2}{3}C_i) C_i}{(2\mu + \frac{2}{3}C_j) C_j} \mathbf{X}_{n+1}^\mu(C_j) \quad (5.47)$$

La proposition « si  $p_n^\mu \leq p_D$ , alors  $N_{n+1}$  ne dépend pas de  $C$  » est démontrée par récurrence :

- Soit  $n = 1$ , la première itération où il y a plasticité sans dommage à l'échelle microscopique. À l'itération  $n = 0$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\mu p}$ ,  $\mathbf{X}_0^\mu$  et  $p_0^\mu$  sont donc nuls et le vecteur  $\mathbf{N}_1$  s'écrit :

$$\mathbf{N}_1 = \frac{\mathbb{P}^D : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^{\mu e} - \mathbf{X}_0^\mu}{\left\| \mathbb{P}^D : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^{\mu e} - \mathbf{X}_0^\mu \right\|} \quad (5.48)$$

$$= \frac{2\mu\mathbb{P}^D : (\boldsymbol{\varepsilon}_1^e - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{\mu p}) - \mathbf{X}_0^\mu}{\left\| 2\mu\mathbb{P}^D : (\boldsymbol{\varepsilon}_1^e - \boldsymbol{\varepsilon}_0^{\mu p}) - \mathbf{X}_0^\mu \right\|} \quad (5.49)$$

$$= \frac{2\mu\mathbb{P}^D : \boldsymbol{\varepsilon}_1^e}{\left\| 2\mu\mathbb{P}^D : \boldsymbol{\varepsilon}_1^e \right\|} \quad (5.50)$$

$\mathbf{N}_1$  dépend uniquement de  $\boldsymbol{\varepsilon}_1^e$  qui est un grandeur macroscopique et ne dépend donc pas de  $\mathbf{Z}$ . Par conséquent  $\mathbf{N}_1$  ne dépend pas de  $\mathbf{Z}$ . La proposition est donc vraie pour  $n = 1$ .

- Soit  $n$ , la  $n^{\text{ème}}$  itération où il y a plasticité sans dommage à l'échelle microscopique. Les variables internes microscopiques s'écrivent :

$$\begin{cases} f_n &= \sqrt{3/2} \left\| 2\mu\mathbb{P}^D : (\boldsymbol{\varepsilon}_n^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}^{\mu p}) \right\| - \sigma_y^\mu \\ p_n^\mu &= p_{n-1}^\mu + \Delta p^\mu = p_{n-1}^\mu + \frac{f_2}{3\mu+C} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\mu p} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{\mu n-1}^{\mu p} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}^{\mu p} + \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta p \mathbf{N}_n \\ \mathbf{X}_n^\mu &= \mathbf{X}_{n-1}^\mu + \Delta \mathbf{X}^\mu = \mathbf{X}_{n-1}^\mu + \sqrt{\frac{2}{3}} C \Delta p \mathbf{N}_n \end{cases} \quad (5.51)$$

Le vecteur  $\mathbf{N}_n$  s'écrit :

$$\mathbf{N}_n = \frac{\mathbb{P}^D : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^{\mu e} - \mathbf{X}_{n-1}^\mu}{\left\| \mathbb{P}^D : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^{\mu e} - \mathbf{X}_{n-1}^\mu \right\|} \quad (5.52)$$

Pour simplifier les expressions, seul le numérateur est considéré :

$$\mathbb{P}^D : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n^{\mu e} - \mathbf{X}_{n-1}^\mu = 2\mu\mathbb{P}^D : (\boldsymbol{\varepsilon}_n^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}^{\mu p}) - \mathbf{X}_{n-1}^\mu \quad (5.53)$$

$$= 2\mu\mathbb{P}^D : \boldsymbol{\varepsilon}_n^e - 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}^{\mu p} - \mathbf{X}_{n-1}^\mu \quad (5.54)$$

$$= 2\mu\mathbb{P}^D : \boldsymbol{\varepsilon}_n^e - 2\mu\sqrt{\frac{3}{2}} \Delta p \mathbf{N}_{n-1} - \sqrt{\frac{2}{3}} C \Delta p \mathbf{N}_{n-1} \quad (5.55)$$

$$= 2\mu\mathbb{P}^D : \boldsymbol{\varepsilon}_n^e - 2\mu\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{f_n}{3\mu+C} \mathbf{N}_{n-1} - \sqrt{\frac{2}{3}} C \frac{f_n}{3\mu+C} \mathbf{N}_{n-1} \quad (5.56)$$

$$= 2\mu\mathbb{P}^D : \boldsymbol{\varepsilon}_n^e - \sqrt{\frac{2}{3}} f_n \mathbf{N}_{n-1} \quad (5.57)$$

$$= 2\mu\mathbb{P}^D : \boldsymbol{\varepsilon}_n^e - \left\| 2\mu\mathbb{P}^D : (\boldsymbol{\varepsilon}_n^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}^{\mu p}) \right\| \mathbf{N}_{n-1} + \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y^\mu \mathbf{N}_{n-1} \quad (5.58)$$

Le vecteur  $\mathbf{N}_n$  se réécrit donc :

$$\mathbf{N}_n = \frac{2\mu\mathbb{P}^D : \boldsymbol{\varepsilon}_n^e - \left\| 2\mu\mathbb{P}^D : (\boldsymbol{\varepsilon}_n^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}^{\mu p}) \right\| \mathbf{N}_{n-1} + \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y^\mu \mathbf{N}_{n-1}}{\left\| 2\mu\mathbb{P}^D : \boldsymbol{\varepsilon}_n^e - \left\| 2\mu\mathbb{P}^D : (\boldsymbol{\varepsilon}_n^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}^{\mu p}) \right\| \mathbf{N}_{n-1} + \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y^\mu \mathbf{N}_{n-1} \right\|} \quad (5.59)$$

Sous l'hypothèse que  $\mathbf{N}_{n-1}$  ne dépend pas de  $\mathbf{Z}$  alors  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}^{\mu p}$  ne dépend pas non plus de  $\mathbf{Z}$ . De même pour  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^e$  qui est une grandeur macroscopique. Par conséquent si  $\mathbf{N}_{n-1}$  ne dépend pas de  $\mathbf{Z}$  alors  $\mathbf{N}_n$  n'en dépend pas non plus. La proposition est donc héréditaire.

- La proposition est vraie pour  $n = 1$  et est héréditaire, par récurrence elle est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

# Bibliographie

- [1] Y. Lei, “Fatigue reliability of ship structures,” 2010.
- [2] N. C. Metropolis and S. M. Ulam, “The monte carlo method.,” *Journal of the American Statistical Association*, vol. 44 247, pp. 335–41, 1949.
- [3] A. Tabandeh, G. Jia, and P. Gardoni, “A review and assessment of importance sampling methods for reliability analysis,” *Structural Safety*, vol. 97, p. 102216, 2022.
- [4] S.-K. Au and J. L. Beck, “Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 16, no. 4, pp. 263–277, 2001.
- [5] M. D. Shields and J. Zhang, “The generalization of latin hypercube sampling,” *Reliability Engineering System Safety*, vol. 148, pp. 96–108, 2016.
- [6] A. M. Hasofer and N. Lind, “Exact and invariant second-moment code format,” *Journal of Engineering Mechanics-asce*, vol. 100, pp. 111–121, 1974.
- [7] K. Breitung, “Asymptotic approximations for multinormal integrals,” *Journal of Engineering Mechanics-asce*, vol. 110, pp. 357–366, 1984.
- [8] V. N. Vapnik, “The nature of statistical learning theory,” in *Statistics for Engineering and Information Science*, 2000.
- [9] Q. Pan and D. Dias, “An efficient reliability method combining adaptive support vector machine and monte carlo simulation,” *Structural Safety*, vol. 67, pp. 85–95, 2017.
- [10] F. Schoefs, “Sensitivity approach for modelling the environmental loading of marine structures through a matrix response surface,” *Reliability Engineering System Safety*, vol. 93, no. 7, pp. 1004–1017, 2008. Bayesian Networks in Dependability.
- [11] N. Wiener, “The homogeneous chaos,” *American Journal of Mathematics*, vol. 60, p. 897, 1938.
- [12] W. Schoutens, “Stochastic processes and orthogonal polynomials,” 2000.
- [13] G. Matheron, *Traité de géostatistique appliquée : Le Krigeage*. No. vol. 2 in Mémoires du BRGM, Ed. B.R.G.M., 1963.
- [14] B. Echard, N. Gayton, and M. Lemaire, “Ak-mcs : An active learning reliability method combining kriging and monte carlo simulation,” *Structural Safety*, vol. 33, no. 2, pp. 145–154, 2011.
- [15] B. Echard, N. Gayton, M. Lemaire, and N. Relun, “A combined importance sampling and kriging reliability method for small failure probabilities with time-demanding numerical models,” *Reliability Engineering System Safety*, vol. 111, pp. 232–240, 2013.
- [16] W. Fauriat and N. Gayton, “Ak-sys : An adaptation of the ak-mcs method for system reliability,” *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 123, pp. 137–144, 2014.
- [17] C. Tong, Z. Sun, Q. Zhao, Q. Wang, and S. Wang, “A hybrid algorithm for reliability analysis combining kriging and subset simulation importance sampling,” *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 29, pp. 3183–3193, 2015.

- [18] Z. Lv, Z. Lu, and P. Wang, “A new learning function for kriging and its applications to solve reliability problems in engineering,” *Comput. Math. Appl.*, vol. 70, pp. 1182–1197, 2015.
- [19] X. Huang, J. Chen, and H. Zhu, “Assessing small failure probabilities by ak-ss : An active learning method combining kriging and subset simulation,” *Structural Safety*, vol. 59, pp. 86–95, 2016.
- [20] N. Lelièvre, P. Beaurepaire, C. Mattrand, and N. Gayton, “Ak-mcsi : A kriging-based method to deal with small failure probabilities and time-consuming models,” *Structural Safety*, 2018.
- [21] N. Lelièvre, “Développement des méthodes ak pour l’analyse de fiabilité. focus sur les évènements rares et la grande dimension,” 2018.
- [22] Z. Han and S. Görtz, “Hierarchical kriging model for variable-fidelity surrogate modeling,” *AIAA Journal*, vol. 50, pp. 1885–1896, 2012.
- [23] R. Zimmermann and Z. Han, “Simplified cross-correlation estimation for multi-fidelity surrogate cokriging models,” 2010.
- [24] M. C. Kennedy and A. O’Hagan, “Predicting the output from a complex computer code when fast approximations are available,” *Biometrika*, vol. 87, pp. 1–13, 2000.
- [25] B. Sudret, “Problèmes de fiabilité dépendant du temps,” 2008.
- [26] E. Mrabet, “Optimisation de la fiabilité des structures contrôlées,” 2016.
- [27] S. O. Rice, “Mathematical analysis of random noise,” *Bell System Technical Journal*, vol. 23, pp. 282–332, 1944.
- [28] C. Andrieu-Renaud, B. Sudret, and M. Lemaire, “The phi2 method : a way to compute time-variant reliability,” *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, vol. 84, pp. 75–86, 2004.
- [29] B. Sudret, “Analytical derivation of the outcrossing rate in time-variant reliability problems,” *Structure and Infrastructure Engineering*, vol. 4, pp. 353 – 362, 2008.
- [30] L. Hawchar, C.-P. E. Soueidy, and F. Schoefs, “Principal component analysis and polynomial chaos expansion for time-variant reliability problems,” *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, vol. 167, pp. 406–416, 2017.
- [31] Z. Wang and P. Wang, “A new approach for reliability analysis with time-variant performance characteristics,” *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, vol. 115, pp. 70–81, 2013.
- [32] Z. Hu and X. Du, “Mixed efficient global optimization for time-dependent reliability analysis,” *Journal of Mechanical Design*, vol. 137, p. 051401, 2015.
- [33] Z. Hu and S. Mahadevan, “A single-loop kriging surrogate modeling for time-dependent reliability analysis,” *Journal of Mechanical Design*, vol. 138, p. 061406, 2016.
- [34] Z. Wang and W. Chen, “Confidence-based adaptive extreme response surface for time-variant reliability analysis under random excitation,” *Structural Safety*, vol. 64, pp. 76–86, 2017.
- [35] M. Ahmadivala, *Towards optimal maintenance planning of existing structures based on time-dependent reliability analysis*. Theses, Université Clermont Auvergne [2017-2020], Dec. 2020.
- [36] L. Hawchar, *Développement de méthodes fiabilistes dépendantes du temps pour l’analyse de durabilité des structures*. PhD thesis, 2016.
- [37] X. Pitoiset and A. Preumont, “Méthodes spectrales pour une analyse en fatigue des structures métalliques sous chargements aléatoires multiaxiaux,” 2001.
- [38] S. Lambert, “Contribution à l’analyse de l’endommagement par fatigue et au dimensionnement de structures soumises à des vibrations aléatoires,” 2007.

- [39] M. A. Miner, “Cumulative Damage in Fatigue,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 12, pp. A159–A164, 03 2021.
- [40] A. Palmgren, “Die lebensdauer von kugellagern,”
- [41] M. Matsuichi and T. Endo, “Fatigue of metals subjected to varying stress,” 1968.
- [42] S. Downing and D. Socie, “Simple rainflow counting algorithms,” *International Journal of Fatigue*, vol. 4, no. 1, pp. 31–40, 1982.
- [43] M. Obermayr, C. Riess, and J. Wilde, “A novel online 4-point rainflow counting algorithm for power electronics,” *Microelectronics Reliability*, vol. 120, p. 114112, 2021.
- [44] S. Stephanov, “A curvilinear integral method for multiaxial fatigue life computing under non-proportional, arbitrary or random stressing,” *International Journal of Fatigue*, vol. 15, no. 6, pp. 467–472, 1993.
- [45] I. Papadopoulos, *Papadopoulos I. V., Fatigue Polycyclique des Métaux, Thèse de Doctorat de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées*, 1987. PhD thesis, 04 2020.
- [46] F. Morel, “Fatigue multiaxiale sous chargement d’amplitude variable,” 1996.
- [47] J. Lemaître, “A course on damage mechanics,” 1992.
- [48] L. Kachanov, “Time of rupture process under deep conditions,” *Izv. Akad. Nauk SSSR*, vol. 8, p. 26, 1958.
- [49] J. Lemaitre and I. Doghri, “Damage 90 : a post processor for crack initiation,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 115, no. 3, pp. 197–232, 1994.
- [50] C. M. Suh and H. Kitagawa, “Crack growth behaviour of fatigue microcracks in low carbon steels,” *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 9, no. 6, pp. 409–424, 1987.
- [51] B. Rocher, F. Schoefs, M. François, A. Salou, and A.-L. Caouissin, “A two-scale probabilistic time-dependent fatigue model for offshore steel wind turbines,” *International Journal of Fatigue*, vol. 136, p. 105620, 2020.
- [52] M. L. Wilkins, “Calculation of elastic-plastic flow,” 1963.
- [53] A. E. Hami and B. Radi, *Incertitudes, optimisation et fiabilité des structures*. No. vol. 1, Lavoisier, 2013.
- [54] Y. Bai and W.-L. Jin, “Chapter 33 - random variables and uncertainty analysis,” in *Marine Structural Design (Second Edition)* (Y. Bai and W.-L. Jin, eds.), pp. 615–625, Oxford : Butterworth-Heinemann, second edition ed., 2016.
- [55] W. L. Oberkampf, T. G. Trucano, and C. Hirsch, “Verification, validation, and predictive capability in computational engineering and physics,” *Applied Mechanics Reviews*, vol. 57, pp. 345–384, 12 2004.
- [56] C. J. Roy and W. L. Oberkampf, “A complete framework for verification, validation, and uncertainty quantification in scientific computing (invited),” 2010.
- [57] K. T. Hu and G. E. Orient, “The 2014 Sandia Verification and Validation Challenge : Problem Statement,” *Journal of Verification, Validation and Uncertainty Quantification*, vol. 1, p. 011001, 02 2016.
- [58] C. W. Fox and S. J. Roberts, “A tutorial on variational bayesian inference,” *Artificial Intelligence Review*, vol. 38, pp. 85 – 95, 2011.
- [59] T. A. El Moselhy and Y. M. Marzouk, “Bayesian inference with optimal maps,” *Journal of Computational Physics*, vol. 231, no. 23, pp. 7815–7850, 2012.
- [60] C. Villani, *Optimal transport – Old and new*, vol. 338, pp. xxii+973. 01 2008.
- [61] J. B. Nagel and B. Sudret, “Spectral likelihood expansions for bayesian inference,” *Journal of Computational Physics*, vol. 309, pp. 267–294, 2016.

- [62] N. Wagner, S. Holochwost, C. Danko, C. Propper, and J. Coffman, “Wagner et al. - 2021 - observed peer competence moderates links between c,” *Early Childhood Research Quarterly*, vol. 54, pp. 286–293, 01 2021.
- [63] D. Straub, I. Papaioannou, and W. Betz, “Bayesian analysis of rare events,” *Journal of Computational Physics*, vol. 314, 03 2016.
- [64] W. K. Hastings, “Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications,” *Biometrika*, vol. 57, pp. 97–109, 1970.
- [65] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller, “Equation of state calculations by fast computing machines,” *Journal of Chemical Physics*, vol. 21, pp. 1087–1092, 1953.
- [66] H. Haario, E. Saksman, and J. Tamminen, “An adaptive metropolis algorithm,” *Bernoulli*, vol. 7, pp. 223–242, 2001.
- [67] S. Duane, A. Kennedy, B. J. Pendleton, and D. Roweth, “Hybrid monte carlo,” *Physics Letters B*, vol. 195, no. 2, pp. 216–222, 1987.
- [68] J. R. Goodman and J. Weare, “Ensemble samplers with affine invariance,” 2010.
- [69] DNV, “Rp-c203 : Fatigue of offshore steel structures,” 2014.
- [70] A. de Recherche sur les Structures Métalliques Marines, *Assemblages tubulaires soudés. Guides Pratiques sur les Ouvrages en Mer*. Technip, Paris, 1985.
- [71] S. Bucas, “Reliability assessment of tower crane structural members,” 2015.
- [72] Q. A. Huchet, “Kriging based methods for the structural damage assessment of offshore wind turbines,” 2018.
- [73] S. Marquez and J. Sørensen, “Fatigue reliability and calibration of fatigue design factors for offshore wind turbines,” *Energies*, vol. 5, 12 2012.
- [74] H. O. Madsen, S. Krenk, and N. Lind, “Methods of structural safety,” 2006.
- [75] D. Straub, “Generic approaches to risk based inspection planning for steel structures,” 2004.
- [76] B. Rocher, “Fiabilité des fondations d’éoliennes et de sous-stations électriques en mer soumises à de la fatigue,” 2013.
- [77] C. Freyssinet, V. Rey, F. Schoefs, and T. Moro, “Bayesian calibration of a non linear damage model of steel structures with random material property : Sensitivity analysis and reliability assessment,” *Engineering Structures*, vol. 295, p. 116853, 2023.
- [78] S. Im and J. Choung, “Comparison of fatigue provisions in various codes and standards-part 1 : Basic design s-n curves of non-tubular steel members,” *Journal of Ocean Engineering and Technology*, vol. 35, 03 2021.
- [79] J. Lemaître and R. Desmorat, “Engineering damage mechanics : Ductile, creep, fatigue and brittle failures,” 2005.
- [80] R. Desmorat and J. Lemaître, “Section 6.15 – a two-scale model for quasi-brittle and fatigue damage,” 2001.
- [81] K. G. Papakonstantinou, H. Nikbakht, and E. Eshra, “Hamiltonian mcmc methods for estimating rare events probabilities in high- dimensional problems,” *Probabilistic Engineering Mechanics*, p. 103485, 2023.
- [82] J. Lemaître, “Handbook of materials behavior models,” 2001.
- [83] F. Pianosi, K. J. Beven, J. E. Freer, J. W. Hall, J. Rougier, D. B. Stephenson, and T. Wagener, “Sensitivity analysis of environmental models : A systematic review with practical workflow,” *Environ. Model. Softw.*, vol. 79, pp. 214–232, 2014.
- [84] R. G. Ghanem and P. D. Spanos, “Spectral stochastic finite-element formulation for reliability analysis,” *Journal of Engineering Mechanics-asce*, vol. 117, pp. 2351–2372, 1991.



- [85] M. Moustapha, N. Fajraoui, S. Marelli, and B. Sudret, “Uqlab user manual – random fields, chair of risk, safety and uncertainty quantification,” 2022.
- [86] W. R. Gilks and P. Wild, “Adaptive rejection sampling for gibbs sampling,” *Quality Engineering*, vol. 37, pp. 417–420, 1992.
- [87] E. Borgonovo, “A new uncertainty importance measure,” *Reliability Engineering System Safety*, vol. 92, no. 6, pp. 771–784, 2007.
- [88] S. Marelli, C. Lamas, K. Konakli, C. Mylonas, P. Wiederkehr, and B. Sudret, “Uqlab user manual – sensitivity analysis, chair of risk safety and uncertainty quantification,” 2022.
- [89] D. G. Krige, “A statistical approach to some basic mine valuation problems on the witwatersrand, by d.g. krige, published in the journal, december 1951 : introduction by the author,” *Journal of The South African Institute of Mining and Metallurgy*, vol. 52, pp. 201–203, 1951.
- [90] N. Cressie, “Statistics for spatial data, revised edition.,” *Biometrics*, vol. 50, p. 319, 1994.
- [91] A. Swan, “H. wackernagel, 1995. multivariate geostatistics. an introduction with applications. xiv 256 pp. berlin, heidelberg, new york, barcelona, budapest, hong kong, london, milan, paris, tokyo : Springer-verlag. price dm 74.00, Ös 540.20, sfr 71.50 (hard covers). isbn 3 540 60127 9.,” *Geological Magazine*, vol. 133, no. 5, p. 628–628, 1996.
- [92] L. Laurent, *Stratégie multiparamétrique et métamodèles pour l’optimisation multiniveaux de structures*. Theses, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, Dec. 2013.
- [93] O. Dubrule, “Cross validation of kriging in a unique neighborhood,” *Journal of the International Association for Mathematical Geology*, vol. 15, pp. 687–699, 1983.
- [94] G. Matheron, “Les variables régionalisées et leur estimation : une application de la théorie de fonctions aléatoires aux sciences de la nature,” 1965.
- [95] P. K. Kitanidis, “Statistical Estimation of Polynomial Generalized Covariance Functions and Hydrologic Applications,” *Water Resources Research*, vol. 19, pp. 909–921, Aug. 1983.
- [96] J. Alonso, H.-s. Chung, and J. T, “Using gradients to construct cokriging approximation models for high-dimensional design optimization problems,” 03 2002.
- [97] A. Thenon, *Utilisation de méta-modèles multi-fidélité pour l’optimisation de la production des réservoirs*. Theses, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, Mar. 2017.
- [98] C. Agrell, “Gaussian processes with linear operator inequality constraints,” *Journal of Machine Learning Research*, vol. 20, pp. 1–36, 08 2019.
- [99] B. J. Bichon, M. Eldred, L. P. Swiler, S. Mahadevan, and J. M. McFarland, “Efficient global reliability analysis for nonlinear implicit performance functions,” *AIAA Journal*, vol. 46, pp. 2459–2468, 2008.
- [100] V. Picheny, D. Ginsbourger, O. Roustant, R. T. Haftka, and N.-H. Kim, “Adaptive designs of experiments for accurate approximation of a target region,” *Journal of Mechanical Design*, vol. 132, p. 071008, 2010.
- [101] J. Bect, D. Ginsbourger, L. Li, V. Picheny, and E. Vazquez, “Sequential design of computer experiments for the estimation of a probability of failure,” *Statistics and Computing*, vol. 22, pp. 773–793, apr 2011.
- [102] Z. Wen, H. Pei, H. X. Liu, and Z. feng Yue, “A sequential kriging reliability analysis method with characteristics of adaptive sampling regions and parallelizability,” *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, vol. 153, pp. 170–179, 2016.
- [103] J. Ma, Z. Ren, G. Zhao, Y. Zhang, and C.-S. Koh, “A new reliability analysis method combining adaptive kriging with weight index monte carlo simulation,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 54, no. 3, pp. 1–4, 2018.

- 
- [104] L. Mell, *Métamodèle multi-fidélité pour l'estimation de probabilité de défaillance : application aux structures EMR*. Theses, Centrale Nantes, 2021.
- [105] B. Gaspar, Â. P. Teixeira, and C. G. Soares, "A study on a stopping criterion for active refinement algorithms in kriging surrogate models," 2015.
- [106] Y. Xiong and S. Sampath, "A fast-convergence algorithm for reliability analysis based on the ak-mcs," *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 213, p. 107693, 2021.
- [107] Z. Wang and A. Shafieezadeh, "On confidence intervals for failure probability estimates in kriging-based reliability analysis," *Reliability Engineering System Safety*, vol. 196, p. 106758, 2020.
- [108] P. Ranjan, D. R. Bingham, and G. Michailidis, "Sequential experiment design for contour estimation from complex computer codes," *Technometrics*, vol. 50, pp. 527 – 541, 2008.
- [109] A. Florent and F. Schoefs, "Dépouillement de mesures de déformation effectuées sur la station biocolmar," in *Rapport de stage de L3 Mécanique, UFR Sciences et Techniques*, 2018.
- [110] K. Ortegon, L. F. Nies, and J. W. Sutherland, "Preparing for end of service life of wind turbines," *Journal of Cleaner Production*, vol. 39, pp. 191–199, 2013.
- [111] G. Hultgren, R. Mansour, and Z. Barsoum, "Fatigue strength assessment of welded joints incorporating the variability in local weld geometry using a probabilistic framework," *International Journal of Fatigue*, vol. 167, p. 107364, 2023.
- [112] M. A. Benaïmeche, J. Yvonnet, B. Bary, and Q. He, "A k-means clustering machine learning-based multiscale method for anelastic heterogeneous structures with internal variables," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 123, pp. 2012 – 2041, 2022.
- [113] E. García-Macías and F. Ubertini, "Real-time bayesian damage identification enabled by sparse pce-kriging meta-modelling for continuous shm of large-scale civil engineering structures," *Journal of Building Engineering*, vol. 59, p. 105004, 2022.



**Titre :** Approximation stochastique du dommage en fatigue pour le suivi en service de structure

**Mots clés :** Fiabilité, Fatigue, Modèle d'endommagement, Métamodèle, Krigage

**Résumé :** L'endommagement par fatigue est un phénomène s'initiant à l'échelle microscopique. Sous l'effet de sollicitations répétées et de faibles amplitudes, de microfissures apparaissent jusqu'à générer l'amorçage d'une fissure à l'échelle macroscopique. Cette dernière peut alors se propager et mener jusqu'à la ruine de la structure. Pour prévenir ce risque, la modélisation et la simulation de ce phénomène sont une nécessité. Du fait des dizaines de milliers de cycles considérés, l'estimation précise du dommage en fatigue est un véritable défi. En conséquence, le calcul du dommage est généralement réalisé en négligeant l'influence de l'historique de chargement. Cette approximation a l'avantage de grandement diminuer les coûts numériques. Grâce à ce gain, des approches fiabilistes ont pu être développées afin de prendre en compte différentes sources d'incertitudes telles que le chargement, la géométrie ou le matériau. Cependant, dans un objectif d'optimisation de la durée vie et de la fiabilité des structures, le besoin d'une représentation réaliste de l'historique et des incertitudes matériau est grandissant. Ceci constitue le ressort des travaux présentés dans ce mémoire. Un modèle d'endommagement prenant en compte l'historique de chargement est sélectionné et calibré à partir de courbes SN probabilistes. Son coût numérique est réduit par la mise en place de métamodèles. Il en résulte deux approches numériques prenant en compte la variabilité matériau. La première permet d'estimer l'évolution de la probabilité de défaillance au cours du temps lors du dimensionnement de structures. La seconde permet d'estimer l'instant auquel la probabilité de défaillance dépasse une valeur critique et peut servir d'aide à la planification des opérations de maintenance. Ces deux approches sont appliquées sur un cas d'étude réel : la station de mesures.

**Title:** Stochastic fatigue damage approximation for in-service monitoring

**Keywords:** Reliability, Fatigue, Damage model, Surrogate model, Kriging

**Abstract:** Fatigue damage is a phenomenon beginning at the microscopic scale. Under the effect of repeated low-amplitude stresses, micro-cracks appear and initiate a crack at the macroscopic scale. This crack may spread and lead to the failure of the structure. To prevent this risk, it is crucial to model and simulate this phenomenon. Considering that thousands of cycles are involved, computing the damage evolution accurately is a numerical challenge. As a result, the influence of the loading history is usually neglected, which greatly reduces computational costs. Therefore, reliability approaches can be applied to consider different sources of uncertainty, such as loading, geometry or material. However, optimizing lifetime and reliability requires an accurate computation of the damage history. This work aims at answering these questions. First, a damage model that takes into account the loading history is selected and calibrated with probabilistic SN curves. Second, computational costs are managed by using a kriging-based approximation of the damage. It results in two numerical strategies that take material variability into account. The first one is used to estimate the probability of failure over time at the design stage. The second one is used to estimate the moment when the probability of failure exceeds a critical value and may guide the planning of maintenance operations. These two approaches are applied to an offshore measurement station.