



HAL
open science

Lois d'échelle pour le transport de chaleur dans les écoulements turbulents : applications géophysiques et astrophysiques

Gabriel Hadjerci

► **To cite this version:**

Gabriel Hadjerci. Lois d'échelle pour le transport de chaleur dans les écoulements turbulents : applications géophysiques et astrophysiques. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Paris-Saclay, 2024. Français. NNT : 2024UPASP072 . tel-04731823

HAL Id: tel-04731823

<https://theses.hal.science/tel-04731823v1>

Submitted on 11 Oct 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Lois d'échelle pour le transport de
chaleur dans les écoulements
turbulents : applications
géophysiques et astrophysiques
*Scaling Laws for Heat Transport in Geophysical and
Astrophysical Turbulent Flows*

Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n°564, Physique en Île-de-France (PIF)

Spécialité de doctorat : Physique

Graduate School : Physique. Référent : Faculté des sciences d'Orsay

Thèse préparée dans l'unité de recherche **SPEC** (université Paris-Saclay, CEA, CNRS), sous
la direction de **Sébastien AUMAÎTRE**, directeur de recherche, le co-encadrement de
Basile GALLET, directeur de recherche.

Thèse soutenue à Paris-Saclay, le 24 septembre 2024, par

Gabriel HADJERCI

Composition du jury

Membres du jury avec voix délibérative

Caroline MULLER

Professeure, Institute of Science and Technology

Michael LE BARS

Directeur de recherche CNRS, Université Aix-Marseille

Antoine VENAÏLLE

Chargé de recherche CNRS, HDR, Université de Lyon

Alexandros ALEXAKIS

Directeur de recherche CNRS, ENS Paris

Présidente

Rapporteur & Examineur

Rapporteur & Examineur

Examineur

Titre : Lois d'Échelle pour le Transport de Chaleur dans les Écoulements Turbulents : Applications Géophysiques et Astrophysiques

Mots clés : Mélange turbulent, Force de Coriolis, Convection thermique, Turbulence géostrophique, Dynamique des fluides géophysiques

Résumé : Les écoulements turbulents à la surface des planètes et dans les intérieurs stellaires, de par leur nature chaotique et les multiples échelles spatiales et temporelles impliquées, défient toute caractérisation complète de leur dynamique. Pourtant, leur compréhension, cruciale tant pour la modélisation climatique que pour l'étude des astres, exige une quantification précise de leurs propriétés de transport.

Dans une première partie, nous nous intéressons à l'écoulement turbulent émergent dans les océans en réponse à l'instabilité barocline. Nous commençons par analyser sa dynamique dans un modèle simplifié d'océan composé de deux couches de fluide superposées. Une étude approfondie de la taille des vortex générés par l'instabilité nous permet d'affiner la théorie du gaz de vortex, une théorie proposant des lois d'échelle quantifiant l'amplitude du flux de chaleur méridien dans la limite des faibles frictions au niveau du plancher océanique. Nous étendons ensuite cette théorie à des modèles océaniques plus réalistes, pour finalement aboutir à un modèle pleinement 3D,

validant ainsi la robustesse de la théorie du gaz de vortex.

Dans une seconde partie, nous étudions le transport turbulent par convection dans un système tournant rapidement sur lui-même, un processus clé de la dynamique stellaire. Étant donné que ces écoulements sont très turbulents, on s'attend à ce que leurs propriétés à grande échelle soient indépendantes des petites diffusivités moléculaires. Ce régime théorique, connu sous le nom de turbulence géostrophique, est difficilement observable dans les expériences de convection classiques (Rayleigh-Bénard en rotation). Pour surmonter cette difficulté, nous utilisons un dispositif de convection par chauffage radiatif, où un fluide est chauffé en volume près de la paroi inférieure. Dans un premier temps, nous démontrons pourquoi ce système est propice à l'observation du régime de turbulence géostrophique. Puis, grâce à une étude hybride expérimentale-numérique, nous validons les lois d'échelle théoriques pour le transport de chaleur, le champ de vitesse, les fluctuations de température et la structure de l'écoulement.

Title : Scaling Laws for Heat Transport in Geophysical and Astrophysical Turbulent Flows

Keywords : Turbulent mixing, Coriolis force, Thermal convection, Geostrophic turbulence, Geophysical fluid dynamics

Abstract : Turbulent flows on planetary surfaces and within stellar interiors, characterized by their chaotic nature and the variety of spatial and temporal scales they encompass, pose significant challenges to overall predictability. Understanding these flows is crucial for both climate modeling and stellar dynamics, and requires accurate quantification of their transport properties.

In the first part of this thesis, we focus on the turbulent flow that arises in the ocean due to baroclinic instability. We begin by analyzing its dynamics in a simplified two-layer ocean model. A detailed study of the size of the eddy generated by the instability allows us to refine the vortex gas theory - a theory providing scaling laws that quantify the amplitude of the meridional heat flux under low seafloor friction. We then extend this theory to more realistic ocean models, ultimately to a fully 3D model, thereby validating the robustness of the vortex

gas theory.

In the second part, we study turbulent transport by convection in a rapidly rotating system, a process that arises, for example, in stars. Due to the highly turbulent nature of these flows, their large-scale properties are expected to be independent of small molecular diffusivities. This regime, known as geostrophic turbulence, is difficult to observe in conventional convection experiments (such as Rayleigh-Bénard convection under rotation). To address this, we use a radiative heating convection setup, where a fluid layer is internally heated over a small region near the bottom boundary. First, we show why this system is convenient for observing the geostrophic turbulence regime. Then, through a hybrid experimental-numerical study, we validate the theoretical scaling laws for heat transport, velocity field, temperature fluctuations, and flow structure.

Remerciements

Je tiens à remercier mes parents, mon frère, ma sœur et toute ma famille qui m'ont soutenu inconditionnellement de ma naissance jusqu'à aujourd'hui et sans qui je ne serais sûrement pas arrivé jusque-là.

Je remercie également mes amis qui sont venus en nombre m'encourager pour la soutenance. Merci pour les moments inoubliables que j'ai passés avec vous.

Merci au SPHYNX qui m'ont accueilli les bras ouverts. Merci pour les nombreux moments de convivialité en salle café ou au RIE.

Merci à Chris, Murukesh et Alexandre qui ont égayé mon quotidien au laboratoire.

Merci à Julie et Enzo, mes complices avec qui j'ai fait les 400 coups.

Merci à Vincent pour le passage de flambeau assuré de manière prodigieuse.

Merci à Sébastien et Benjamin pour leur encadrement, leur aide, les discussions et le soutien.

Merci à Basile pour cette thèse extraordinaire.

Table des matières

Contexte et motivations	11
I Turbulence barocline	13
1 Introduction à la quasi-géostrophie	15
1.1 Une paramétrisation de la turbulence barocline?	15
1.2 L'approximation quasi-géostrophique	16
1.2.1 Approximation du plan f	16
1.2.2 Géostrophie et équilibre de vent thermique	18
1.2.3 Modèle quasi-géostrophique à une couche de fluide	19
1.3 Modèle quasi-géostrophique à deux couches de fluide	22
1.3.1 Équations	22
1.3.2 Instabilité barocline	24
1.3.3 Décomposition modale	27
1.3.4 Dissipation d'énergie et friction	27
1.3.5 Diffusivité méridienne	28
2 Le modèle du gaz de vortex	31
2.1 Les lois d'échelle du gaz de vortex	31
2.2 Rôle du rayon des tourbillons dans le transport par le gaz de vortex	34
2.2.1 Hypothèse de Gallet et Ferrari : $r_{core} \sim \lambda$	34
2.2.2 Un rayon typique au-delà du rayon de déformation de Rossby : $r_{core} \gg \lambda$	35
2.3 Une loi d'échelle pour le rayon des cœurs de tourbillons	36
2.4 Évaluation numérique	37
2.4.1 Des estimateurs du rayon des cœurs de vortex	37
2.4.2 Validité des nouvelles lois pour la diffusivité	38
2.4.3 Distance intervortex et longueur de mélange	39
2.5 Conclusion	40
3 Profils de stratification quelconques	43
3.1 Problématique	43
3.2 Renormalisation en un système à deux couches de même profondeur	44
3.3 Évaluation numérique	46
3.4 Conclusion	47

4	Modèle d'Eady	49
4.1	Modèle tridimensionnel d'Eady	49
4.1.1	Cadre du modèle	49
4.1.2	Vent thermique et équations	49
4.1.3	Objectifs	52
4.1.4	Premiers résultats	53
4.2	Quasi-géostrophie dans le modèle d'Eady	53
4.2.1	Limite quasi-géostrophique du modèle d'Eady	53
4.2.2	Variables quasi-géostrophiques	56
4.2.3	Dynamique effective bidimensionnelle	58
4.3	Évaluation numérique	59
4.3.1	Diffusivité méridienne dans le modèle d'Eady	59
4.3.2	Un flux méridien verticalement uniforme	59
4.4	Conclusion	61
5	Conclusion et perspectives	63
II	Convection en rotation par chauffage radiatif	73
6	Les régimes ultimes de convection	75
6.1	Introduction	75
6.2	La convection de Rayleigh-Bénard	76
6.3	La convection sans rotation	80
6.3.1	Le régime ultime	80
6.3.2	Le régime classique	80
6.4	Régime de turbulence géostrophique	82
6.5	Motivations	85
7	Convection en rotation par chauffage radiatif	87
7.1	Théorie de la convection par chauffage radiatif	87
7.1.1	Équations	87
7.1.2	Lois d'échelle du régime de turbulence géostrophique	89
7.2	Dispositifs	90
7.2.1	Montage expérimental	90
7.2.2	Implémentation numérique	93
7.3	Résultats expérimentaux et numériques	95
7.3.1	Transport de chaleur	95
7.3.2	Fluctuations de température	96
7.3.3	Vitesse convective	97
7.3.4	Longueur horizontale caractéristique	98
7.4	Conclusion	100

8 Perspectives	101
8.1 Cascade inverse d'énergie	101
8.2 Influence de la longueur d'absorption	105
Bilan	115
Annexes	117

Contexte et motivations

Lorsqu'un fluide est mis en mouvement, il est susceptible de transporter divers traceurs comme des particules ou de la chaleur. Pour cette dernière, on appelle convection thermique le processus de transport correspondant. Avec la conduction et le rayonnement, ils constituent les trois modes principaux de transfert de chaleur. La chaleur possède en plus la particularité d'être un traceur actif de l'écoulement car, grâce à la poussée d'Archimède, elle peut engendrer et maintenir son propre transport. En effet, la densité d'une particule de fluide dépend de sa température. Ainsi, un gradient de température verticale peut créer une force ascendante qui s'oppose à la gravité, et si cette force est suffisamment grande, un écoulement convectif apparaît. Dans ce cas, on parle de convection thermique naturelle. Lorsqu'on discutera de convection dans la suite, il s'agira de ce mécanisme en particulier.

On retrouve ce processus dans les étoiles, où la chaleur générée par les réactions thermonucléaires au cœur est transportée de l'intérieur vers l'extérieur par un écoulement convectif, avant d'être rayonnée. De plus, comme le plasma stellaire conduit l'électricité, ce mouvement convectif engendre un champ magnétique par un processus d'instabilité appelé effet dynamo. Des écoulements convectifs similaires se produisent dans les noyaux planétaires, où ils sont également responsables de la génération de champs magnétiques. Sur Terre, la convection se manifeste aussi dans le manteau, jouant un rôle crucial dans la tectonique des plaques. Elle se produit également dans l'atmosphère, où l'absorption du rayonnement solaire par le sol chauffe l'air environnant, qui s'élève et se refroidit en altitude en émettant des infrarouges. Cette convection atmosphérique est à l'origine de la formation des nuages et de différents courants atmosphériques.

En fait, la majorité des écoulements à la surface des planètes et dans les étoiles sont, de près ou de loin, liés au mécanisme de convection thermique. Par exemple, l'instabilité barocline, qui génère des tourbillons méso-échelles dans l'océan, implique elle aussi un gradient de température et est parfois appelée "convection inclinée". Contrairement à la convection thermique classique, le gradient de température qui alimente cette instabilité n'est pas aligné avec la gravité mais s'étend le long de l'axe méridien (Nord-Sud). Ce gradient peut être maintenu par le chauffage différentiel dû au rayonnement d'une étoile proche ou par le cisaillement imposé à la surface par les vents atmosphériques. En plus de ce forçage thermique, la force de Coriolis, résultant de la rotation de la planète, joue un rôle essentiel et nécessaire à l'apparition de l'instabilité barocline.

L'instabilité barocline comme la convection thermique naturelle, sont des mécanismes d'instabilité. Dans les deux cas, le paramètre responsable de la transition vers un état instable est lié à l'amplitude du forçage thermique. Plus on s'éloigne du seuil d'instabilité, plus l'écoulement émergent est susceptible de devenir turbulent en raison de l'excès

d'énergie injectée. Les écoulements turbulents sont particulièrement efficaces pour mélanger les traceurs, et par la même occasion, ils peuvent réduire le gradient de température, moteur de l'écoulement. Ainsi, connaître l'état d'équilibre d'un système convectif turbulent n'est pas une mince affaire, sans compter la nature chaotique qui rend complexe toute caractérisation complète de l'écoulement. Or, de nombreux écoulements géophysiques et astrophysiques se situent dans une région de l'espace des paramètres où les régimes attendus sont turbulents. Par conséquent, une question centrale dans ce domaine de la physique est celle de la caractérisation du transport par les écoulements turbulents. Comment le système s'équilibre-t-il? Quelle est l'amplitude du flux de chaleur dans l'état équilibré? Quelles sont les caractéristiques des champs de vitesse et de température?

L'objectif de cette thèse est de répondre à ces questions pour la turbulence barocline et la convection thermique en rotation. L'approche adoptée repose sur une étude asymptotique de ces deux systèmes dans la limite des rotations fortes et d'une turbulence pleinement développée. Cette méthode nous permet d'établir des lois d'échelle caractérisant les propriétés de ces écoulements, avec un intérêt particulier pour leurs propriétés de transport. La première partie se concentre sur la turbulence barocline, où nous développons une fermeture diffusivité pour le transport de chaleur, essentielle pour la paramétrisation des tourbillons méso-échelles dans les modèles climatiques. La seconde partie traite de la convection thermique en rotation. À l'aide d'un système expérimental original utilisant un forçage radiatif comme moteur de la convection, on évalue la validité des prédictions asymptotiques. Cette nouvelle configuration a permis, il y a quelques années, la première observation expérimentale du régime de turbulence géostrophique. Dans cette étude, nous approfondissons la caractérisation de ce régime et proposons une description expérimentale et numérique allant au-delà du simple transport de chaleur.

Première partie
Turbulence barocline

1 - Introduction à la quasi-géostrophie

1.1 . Une paramétrisation de la turbulence barocline?

Les océans et les atmosphères planétaires sont des couches de fluide fines, stratifiées en densité et soumises à la rotation rapide de leur planète. Dans les atmosphères, le fluide est mis en mouvement par le chauffage différentiel méridien (nord-sud) qui peut être provoqué par le rayonnement d'une étoile proche [1, 2] ou par un processus de chauffage interne provenant du cœur de la planète [3-5]. Dans les océans, c'est le forçage mécanique par les courants atmosphériques principalement zonaux (est-ouest) qui joue un rôle similaire. Dans les deux cas, ces mécanismes créent un gradient de flottabilité méridien qui coexiste avec un cisaillement vertical de l'écoulement zonale, formant l'équilibre de vent thermique [6-8]. Cependant, cet état est sujet à l'instabilité barocline, capable de rendre l'écoulement turbulent. L'instabilité barocline est, par exemple, responsable de l'émergence de tourbillons méso-échelles dans l'océan terrestre, dont le rayon varie entre 10 et 100 kilomètres [9-11]. Ces tourbillons jouent un rôle crucial dans le transport de la chaleur, du sel et d'autres traceurs comme le carbone [12-14]. Ils contribuent aussi à la stratification de différents bassins océaniques et à la circulation méridienne de retournement [15-17]. Le même constat s'applique aux atmosphères planétaires, comme celle de Jupiter, où la turbulence barocline joue un rôle majeur dans la régulation du climat [18, 19]. Ainsi, la caractérisation de la turbulence barocline est indispensable pour une meilleure compréhension des écoulements géophysiques. Et de même, son intégration dans les modèles climatiques est essentielle pour garantir leur fidélité [20].

Le pas de grille moyen des modèles de climat du CMIP6¹ est de 58 km [20]. Les avancées numériques réalisées jusqu'à présent permettent donc déjà de résoudre certains tourbillons méso-échelles, mais ce n'est pas suffisant pour modéliser l'ensemble de la turbulence barocline dans l'océan. Ainsi, pour limiter les erreurs, la majorité des modèles climatiques paramétrisent la turbulence barocline, c'est-à-dire qu'ils modélisent son impact sur le transport sans résoudre les tourbillons. Pour construire une telle paramétrisation, on peut exploiter la séparation d'échelles dans l'océan et modéliser le transport turbulent à l'échelle du pas de grille par un processus diffusif [21-23]. Notre étude s'inscrit alors dans la continuité des travaux menés par Thompson et Young [24, 25] et Chang et Held [26, 27], et vise à quantifier l'amplitude du flux de chaleur associé à la turbulence barocline en réponse à un gradient de température uniforme imposé. Cette question constitue une première étape dans la construction d'une paramétrisation des tourbillons méso-échelles.

Gallet et Ferrari [28] ont récemment introduit un modèle théorique, nommé la théo-

1. Le CMIP6 (Coupled Model Intercomparison Project Phase 6) est le programme international regroupant les modèles de climat les plus avancées.

rie du gaz de vortex, qui s'est révélé particulièrement efficace pour quantifier le transport par la turbulence barocline. Cette théorie a été validée grâce à un modèle d'océan idéalisé constitué de deux couches de fluide horizontales de densités constantes et de profondeurs égales. Dans notre étude, nous débuterons par une brève présentation de la théorie du gaz de vortex, puis nous en proposerons une modification afin de raffiner les lois d'échelle prédites. Ensuite, nous étendrons cette théorie à un modèle océanique à deux couches de fluide de profondeurs distinctes, correspondant davantage à la configuration océanique réelle. Enfin, nous examinerons le modèle Boussinesq d'Eady, un modèle tridimensionnel de patch océanique, et démontrerons que la théorie du gaz de vortex décrit également le transport par la turbulence barocline dans ce modèle. Dans cette dernière partie, nous aborderons aussi les questions de l'orientation du flux induit par les tourbillons et de la structure verticale du transport, ces deux aspects étant des étapes successives cruciales pour la paramétrisation du transport par la turbulence barocline.

Avant cela, nous présentons dans ce chapitre les outils fondamentaux nécessaires à la compréhension des écoulements géophysiques au sein des couches de fluide externes des planètes. Nous débuterons en examinant l'approximation quasi-géostrophique, une méthode clé pour analyser les couches de fluides en rotation rapide. Ensuite, nous développerons un modèle à deux couches de fluides basé sur cette approximation. Ce modèle, bien que simpliste, nous permettra d'explorer l'instabilité barocline ainsi que les écoulements turbulents qui en résultent.

1.2 . L'approximation quasi-géostrophique

La majorité des informations de ce chapitre provient des trois ouvrages de référence sur l'étude des écoulements géophysiques, rédigés par Pedlosky [6], Salmon [7], et Valis [8].

1.2.1 . Approximation du plan f

Commençons par mettre de côté les effets visqueux et écrivons les équations d'Euler dans un référentiel tournant à une vitesse Ω par rapport à un référentiel galiléen de référence. On note d/dt la dérivée temporelle dans ce référentiel et d/dt' celle dans le référentiel de référence. La relation entre les deux dérivées s'exprime :

$$\frac{d}{dt'} = \frac{d}{dt} + \Omega \times . \quad (1.1)$$

L'équation de la quantité de mouvement dans le référentiel tournant s'écrit alors :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\Omega \times \mathbf{u} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi_G, \quad (1.2)$$

où \mathbf{u} est le vecteur vitesse, ρ la masse volumique, p la pression et Φ_G le potentiel gravitationnel. Il apparaît alors deux nouveaux termes, l'accélération de Coriolis : $2\Omega \times \mathbf{u}$ et

l'accélération centrifuge : $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \nabla \Phi_c$ avec $\Phi_c = -(1/2) r_{\Gamma}^2 \Omega^2$ où r_{Γ} est la distance à l'axe de rotation. Sur Terre, les deux potentiels Φ_c et Φ_G contribuent à construire l'accélération de la pesanteur \mathbf{g} . Le système d'équations qui nous intéresse est donc le suivant :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.3)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} \quad (1.4)$$

Plaçons nous dans le repère de coordonnées sphériques $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\theta)$ représenté sur la figure 1.1. Les composantes des différents vecteurs sont alors indicées respectivement par r, ϕ ou θ . Une approximation classique consiste à négliger la composante Ω_θ de la vitesse de rotation. On note alors $f = 2\Omega_r$, le paramètre de Coriolis.

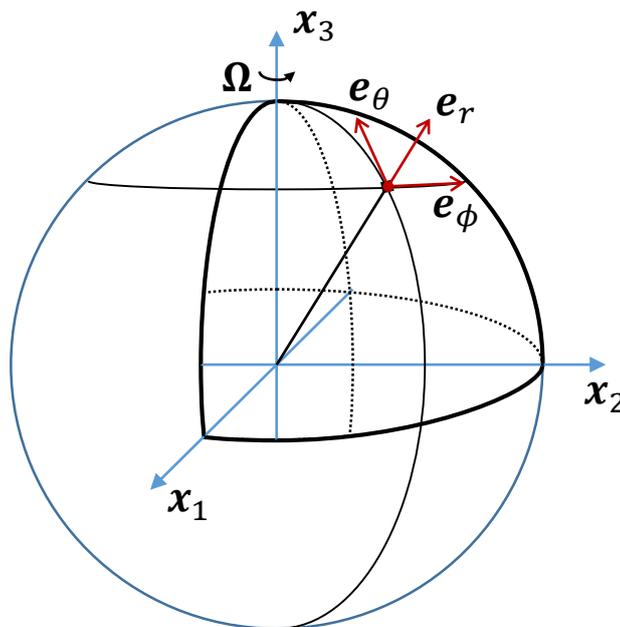


Figure 1.1 – Coordonnées sphériques pour une planète en rotation.

Considérons une parcelle d'atmosphère ou d'océan suffisamment restreinte pour être traitée en première approximation comme étant plane. Dans ce cas, le repère local $(\mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_r)$ peut être approché par un repère cartésien $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. On note H , la profondeur de la parcelle. À l'intérieur de cette parcelle, l'équation de la quantité de mouvement projetée

sur chaque direction peut s'exprimer comme suit :

$$\frac{Du}{Dt} - f v = -\frac{1}{\rho} \partial_x p \quad (1.5)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + f u = -\frac{1}{\rho} \partial_y p \quad (1.6)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \partial_z p - g \quad (1.7)$$

où $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x + v \mathbf{e}_y + w \mathbf{e}_z$. Pour tout de même tenir compte des effets de la courbure de la Terre, il est possible de réaliser le développement de Taylor du paramètre de Coriolis et de conserver ses deux premiers termes de sorte à écrire :

$$f \approx f_0 + \beta y. \quad (1.8)$$

Cette approche est connue sous le nom d'approximation du plan β . Un paramètre β non nul est crucial pour observer des phénomènes caractéristiques tels que la formation de jets zonaux dans l'atmosphère des planètes [25, 29-31]. Dans notre analyse, nous nous limiterons à l'approximation du plan f , où β est nul dans la parcelle de fluide. Cette approximation est en effet suffisante à l'apparition de l'instabilité barocline. Toutefois, il est important de garder en tête que d'autres approximations moins restrictives existent et sont nécessaires pour examiner certains mécanismes géophysiques importants.

1.2.2 . Géostrophie et équilibre de vent thermique

L'approximation quasi-géostrophique est un cadre théorique simple permettant de décrire la dynamique des écoulements géophysiques en rotation rapide, ce qui est pertinent pour l'océan. Soit L l'échelle horizontale caractéristique et U la vitesse typique de l'écoulement. Dans la quasi-géostrophie, nous sommes amenés à envisager un paramètre de Coriolis largement supérieur à la fréquence caractéristique du mouvement U/L . Cela se traduit par :

$$Ro \stackrel{def}{=} \frac{U}{Lf} \ll 1, \quad (1.9)$$

où Ro est le nombre de Rossby. De plus, la quasi-géostrophie repose sur une seconde hypothèse. À l'instar des équations de Saint-Venant, le rapport d'aspect affiné ($H/L \ll 1$) des systèmes océaniques et atmosphériques nous amène à supposer que le gradient vertical de pression satisfait l'équilibre hydrostatique :

$$\partial_z p = -\rho g. \quad (1.10)$$

Cette hypothèse revient à négliger Dw/Dt face au gradient de pression et à la gravité dans l'équation sur la quantité de mouvement verticale (1.7).

Avant d'établir les équations quasi-géostrophiques, il est nécessaire de parler de géostrophie. Dans la limite d'un faible nombre de Rossby, une première approximation consiste

à négliger le terme de dérivé particulaire devant la force de Coriolis et les forces de pression dans les équations (1.5) et (1.6). Dans le cadre de cette approximation, les solutions satisfont l'équilibre géostrophique :

$$\rho f \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_\perp = -\nabla_\perp p, \quad (1.11)$$

où \mathbf{u}_\perp et ∇_\perp sont le vecteur vitesse et le gradient projetés sur le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. Combiner l'équilibre hydrostatique (1.10) à l'équilibre géostrophique (1.11) permet d'obtenir une relation qui relie l'émergence d'un écoulement cisailé à la structure de la stratification en densité :

$$\begin{cases} f\partial_z(\rho v) &= -g\partial_x\rho, \\ f\partial_z(\rho u) &= g\partial_y\rho. \end{cases} \quad (1.12)$$

Dans l'océan, la densité ρ ne varie que de quelques pourcents, c'est pourquoi on peut écrire de manière approchée :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\perp}{\partial z} = \frac{g}{\rho_0 f} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}, -\frac{\partial \rho}{\partial x} \right), \quad (1.13)$$

où ρ_0 est la densité nominale dans la parcelle. Dans le cadre de notre étude, nous supposons que la température est le principal facteur de stratification. On peut par exemple, adopter l'approximation de Boussinesq, où le rapport ρ/ρ_0 est décrit par une fonction affine de la température. Dans ce cas, la relation (1.13) définit l'état d'équilibre entre le gradient de température et le cisaillement vertical dans le fluide, d'où son nom d'équilibre de vent thermique. Ainsi, si on impose un gradient de température méridien (selon \mathbf{e}_y), l'écoulement résultant est zonal (selon \mathbf{e}_x), et vice versa. Cette relation d'équilibre est essentielle pour la compréhension et l'analyse des données géophysiques. Cependant, elle ne permet pas d'explorer l'aspect dynamique de l'écoulement, notamment le transport turbulent qui est le cœur de notre étude. Par conséquent, pour progresser dans notre analyse, il est crucial d'aller au-delà de l'équilibre géostrophique et de prendre en compte les termes de dérivées particulières dans les équations (1.5) et (1.6).

1.2.3 . Modèle quasi-géostrophique à une couche de fluide

Pour débiter par un cadre simple, nous commençons par développer l'approximation quasi-géostrophique dans le cas idéal d'une couche de fluide de densité constante et uniforme. Nous suivrons la méthode exposée par Salmon [7]. Toutefois, d'autres approches équivalentes peuvent être envisagées, telles que le développement asymptotique des champs solutions avec le nombre de Rossby comme petit paramètre (voir [32] et la section 4.2).

Soit une couche de fluide de masse volumique constante ρ_0 reposant sur un fond plat. Cette couche est en rotation à la fréquence $\Omega = f/2$ et est soumise à l'accélération de la pesanteur \mathbf{g} . La surface du fluide est libre et se trouve à l'altitude $z = \eta(x, y, t)$. De plus, on suppose que le fond se trouve à la profondeur $z = -H$, où H désigne la profondeur de la couche lorsque la surface est plane. Ainsi, la profondeur totale à la position (x, y)

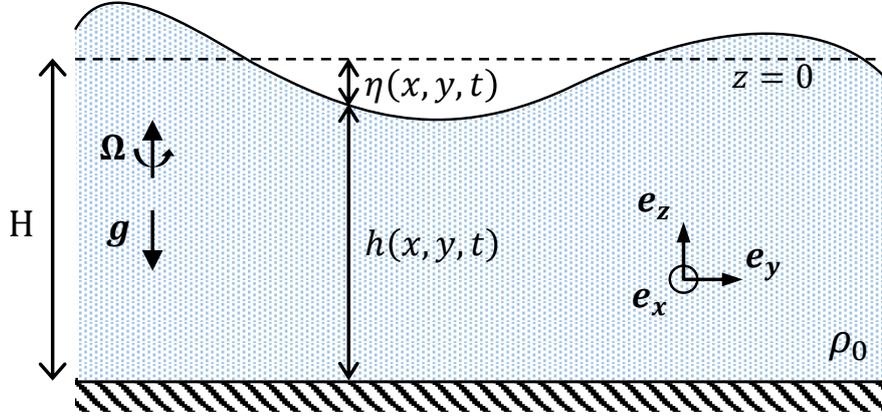


Figure 1.2 – Une couche de fluide de masse volumique ρ_0 uniforme se situe au-dessus d'un fond plat. L'origine de l'axe z est choisi de sorte que le fond se trouve en $z = -H$. La position de la surface à la position (x, y) et à l'instant t est en $z = \eta(x, y, t)$.

à l'instant t s'écrit $h(x, y, t) = H + \eta(x, y, t)$. Une illustration de cette configuration est présentée sur la figure 1.2. On fera en plus l'hypothèse que les variations de hauteur à l'interface sont petites devant la profondeur de la couche de fluide, i.e. $|\eta/H| \ll 1$.

Tout d'abord, l'équilibre hydrostatique vertical (1.10), que nous avons discuté précédemment, demeure une hypothèse clé de l'approximation quasi-géostrophique. Sa réalisation dans le cas particulier d'une densité constante implique :

$$p(x, y, z, t) = \rho_0 g [\eta(x, y, t) - z], \quad (1.14)$$

où nous avons considéré la pression extérieure nulle pour simplifier, puisque la pression n'intervient que sous la forme d'un gradient dans les équations du mouvement. Les équations (1.5) et (1.6), ainsi que la conservation de la masse (1.3) s'écrivent alors :

$$\partial_t \mathbf{u}_\perp + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla) \mathbf{u}_\perp + f \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_\perp = -g \nabla_\perp \eta. \quad (1.15)$$

$$\nabla_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp + \partial_z w = 0, \quad (1.16)$$

À ce système s'ajoute les conditions aux limites au fond et à la surface qui s'écrivent :

$$\begin{cases} w(z = -H) = 0, \\ w(z = \eta) = \frac{D\eta}{Dt}. \end{cases} \quad (1.17)$$

Dans l'équation (1.15), l'hypothèse d'équilibre hydrostatique impose un gradient horizontale de pression invariant verticalement. Il est donc naturel de supposer que la vitesse horizontale \mathbf{u}_\perp est également indépendante de z . Cette hypothèse est en plus confortée par le théorème de Taylor-Proudman, qui stipule que dans un écoulement en rotation rapide de densité uniforme, la vitesse \mathbf{u} tend à s'uniformiser dans la direction de l'axe de rotation [33, 34]. Cependant, il convient de noter que dans notre cas, seule la vitesse horizontale \mathbf{u}_\perp est invariante verticalement, puisque la conservation de la masse (1.16) exige que la vitesse verticale w soit linéaire en z . En somme, nous choisissons d'étudier des solutions pour lesquelles l'écoulement correspond aux mouvements de colonnes de fluide. Cette hypothèse peut également être justifiée par une analyse d'ordre de grandeur plus rigoureuse réintégrant la composante non-hydrostatique de la pression, mais nous ne détaillerons pas ce raisonnement ici (voir Salmon [7]).

Le système d'équation quasi-géostrophique (1.15,1.16,1.17) peut être réécrit sous une forme plus pertinente. La première étape consiste à prendre le rotationnel de l'équation (1.15) afin d'écrire l'équation sur la vorticit   :

$$\partial_t \zeta + \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp \zeta = -(f + \zeta) \nabla_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp, \quad (1.18)$$

o   $\zeta(x, y, t) = \partial_x v - \partial_y u$ est la vorticit   verticale. La seconde   tape consiste    int  grer l'  quation (1.16) afin de reformuler la conservation de la masse :

$$\partial_t h + \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp h = -h \nabla_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp. \quad (1.19)$$

En injectant cette nouvelle expression de $\nabla_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp$ dans l'  quation (1.18), on obtient l'  quation de conservation suivante :

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{f + \zeta}{h} \right) = 0. \quad (1.20)$$

La quantit   $(f + \zeta)/h$, appel  e vorticit   potentielle, rev  t une importance capitale dans l'analyse des   coulements g  ophysiques. La relation (1.20) traduit la fa  on dont une colonne de fluide ajuste sa forme et sa vitesse lors de son d  placement, du fait de la conservation du moment cin  tique.

Finalement, nous n'avons pas encore exploit   l'hypoth  se de faible nombre de Rossby. Ainsi, un dernier raisonnement consiste      crire qu'   l'ordre principal en Ro , les champs de vitesse et de pression satisfont l'  quilibre g  ostrophique (1.11). Dans ce cadre, $\nabla \cdot \mathbf{u}_\perp \approx 0$, ce qui implique que \mathbf{u}_\perp puisse   tre d  crite par une fonction de courant $\Psi(x, y, t)$ telle que :

$$\mathbf{u}_\perp(x, y, t) = -\nabla \times (\Psi \mathbf{e}_z) \text{ et } \nabla_\perp \Psi(x, y, t) = \frac{1}{\rho_0} \nabla_\perp p. \quad (1.21)$$

Cette approche permet d'exprimer la vorticit   verticale comme $\zeta = \Delta \Psi$. De plus, comme Ψ est d  fini    une constante pr  s on peut choisir $\Psi = g\eta/f$. On peut alors reformuler la

vorticité potentielle en fonction de Ψ puis effectuer le développement limité suivant :

$$\begin{aligned}\frac{f + \zeta}{h} &= \frac{1}{H} \frac{f + \Delta\Psi}{1 + \eta/H} \\ &\approx \frac{1}{H} \left(f + \Delta\Psi - \frac{f^2\Psi}{gH} \right).\end{aligned}\quad (1.22)$$

Enfin, en injectant cette expression de la vorticité potentielle dans l'équation traduisant sa conservation (1.20), nous obtenons les équations du modèle quasi-géostrophique à une couche de fluide :

$$\partial_t Q + J(\Psi, Q) = 0, \quad (1.23)$$

$$Q = \Delta\Psi - \frac{1}{\lambda^2}\Psi, \quad (1.24)$$

où Q est la vorticité potentielle quasi-géostrophique, $\lambda = \sqrt{gH}/f$ le rayon de déformation de Rossby et $J(\phi, \psi) = \partial_x\phi \partial_y\psi - \partial_y\phi \partial_x\psi$ l'opérateur jacobien. La première équation exprime la conservation de la vorticité potentielle puisque pour un champ indépendant de z : $D/Dt = \partial_t + \partial_x\Psi\partial_y - \partial_y\Psi\partial_x$. La seconde équation définit la vorticité potentielle en termes de la fonction de courant Ψ . Ce système d'équations sert de base à notre étude, mais seul, il ne suffit pas à caractériser l'instabilité barocline que nous cherchons à comprendre. En effet, cette instabilité nécessite une stratification en densité pour se manifester, ce que nous avons négligé jusque là. Cependant, en superposant plusieurs couches de fluide de densité uniforme différentes, nous pouvons créer des modèles géophysiques simples présentant un gradient de densité discret. Nous allons donc recourir à cette approche pour élaborer un modèle permettant d'étudier le transport de chaleur par la turbulence barocline. On décrit une telle démarche dans la section suivante.

1.3 . Modèle quasi-géostrophique à deux couches de fluide

1.3.1 . Équations

Le modèle à une couche de fluide ne prend pas en compte la stratification en densité de l'océan et de l'atmosphère. Comme cette stratification est nécessaire à l'apparition de l'instabilité barocline, nous allons étendre ce modèle à deux couches de fluide. Le modèle à deux couches de fluide que nous allons utiliser a été introduit pour la première fois par Phillips en 1954 [35]. Il a fait depuis l'objet de nombreuses études [24-27, 36-43].

Considérons deux couches de fluide de densités ρ_1 et ρ_2 , avec $\rho_2 > \rho_1$. Pour la couche i avec $i \in \{1, 2\}$, notons H_i son épaisseur au repos et $h_i(x, y, t)$ son épaisseur au point (x, y) à l'instant t . Définissons également $\eta_i = h_i - H_i$, la variation d'épaisseur de la couche i . Un schéma de cette configuration est représenté en figure 1.3 . Nous supposons que les équations du modèle quasi-géostrophique (1.15) et (1.19) sont vérifiées dans chacune des deux couches. On suppose de plus qu'il existe dans chacune des couches une fonction de courant Ψ_i vérifiant la relation (1.21). Les équations du mouvement dans la couche i

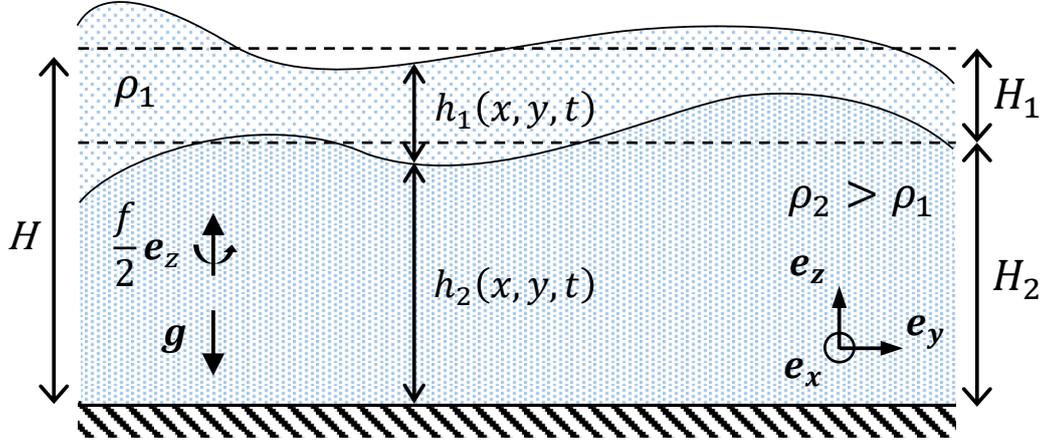


Figure 1.3 – Deux couches de fluides de densités ρ_1 et ρ_2 sont superposées. Au repos, les deux couches ont une profondeur respective H_1 et H_2 . Le système est en rotation par rapport à un référentiel galiléen à la fréquence $f/2$ et soumis à l'accélération de la pesanteur g .

s'écrivent :

$$\partial_t \mathbf{u}_{i;\perp} + (\mathbf{u}_{i;\perp} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{i;\perp} + f \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_{i;\perp} = -\nabla_{\perp} p_i. \quad (1.25)$$

$$\partial_t h_i + \nabla \cdot (h_i \mathbf{u}_{i;\perp}) = 0 \quad (1.26)$$

où $i = 1, 2$ indique la couche considérée et p_i la pression hydrostatique dans cette couche. Le rotationnel d'un gradient étant toujours nul, on retrouve la conservation de la vorticité potentielle (1.20) dans chacune des couches :

$$\frac{D_{\perp}}{Dt} \left(\frac{f + \zeta_i}{h_i} \right) = 0, \quad (1.27)$$

où $\zeta_i = \partial_x v_i - \partial_y u_i$ est la vorticité horizontale dans la couche i .

La différence par rapport au modèle à une seule couche de fluide réside dans le fait que l'équilibre hydrostatique entraîne un couplage à travers l'expression des pressions dans les deux couches :

$$\begin{aligned} p &= -\rho_1 g(z - h_1 - h_2) && \text{dans la couche 1,} \\ p &= -\rho_2 g(z - h_2) + \rho_1 g h_1 && \text{dans la couche 2.} \end{aligned} \quad (1.28)$$

En injectant ces pressions dans l'équation (1.21), on exprime les fonctions de courants dans

chaque couche en fonction des variations d'épaisseur η_1 et η_2 :

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \frac{g}{f}(\eta_1 + \eta_2), \\ \Psi_2 &= \frac{g}{f} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \eta_1 + \eta_2 \right),\end{aligned}\tag{1.29}$$

puis on inverse ces relations :

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{f}{g'}(\Psi_1 - \Psi_2) \\ \eta_2 = \frac{f}{g'}(\Psi_2 - \Psi_1) + \frac{f}{g}\Psi_1 \end{cases}\tag{1.30}$$

où $g' = (\rho_2 - \rho_1)g/\rho_2$ est l'accélération de la pesanteur effective. On suppose, de plus, que les écarts de densité sont faibles entre les deux couches et donc que $(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2 \ll 1$. On peut donc faire l'approximation suivante :

$$\eta_2 \approx \frac{f}{g'}(\Psi_2 - \Psi_1).\tag{1.31}$$

Dans le cadre de cette approximation, on constate que la hauteur totale de fluide au point (x, y) est à peu près constante. Elle s'écrit $h_1(x, y, t) + h_2(x, y, t)$ et vaut approximativement la hauteur totale de fluide au repos $H = H_1 + H_2$.

Enfin, en faisant le même développement limité de la vorticité potentielle que pour le modèle à une couche de fluide, on peut écrire les équations du modèle quasi-géostrophique à deux couches de fluide :

$$\begin{cases} \partial_t Q_1 + J(\Psi_1, Q_1) = 0 \\ \partial_t Q_2 + J(\Psi_2, Q_2) = 0 \end{cases}\tag{1.32}$$

$$\begin{cases} Q_1 = \Delta \Psi_1 + F_1(\Psi_2 - \Psi_1) \\ Q_2 = \Delta \Psi_2 + F_2(\Psi_1 - \Psi_2) \end{cases}\tag{1.33}$$

avec $F_1 = f^2/(g'H_1)$ et $F_2 = f^2/(g'H_2)$. Le système (1.32) exprime la conservation de la vorticité potentielle dans chacune des couches. Le couplage entre les deux couches existe car la définition de la vorticité potentielle Q_i , telle qu'exprimée dans (1.33), fait intervenir les fonctions de courant des deux couches. En somme, le modèle à deux couches de fluide est décrit par quatre équations simples qui possèdent en plus l'avantage d'intégrer facilement des éléments géophysiques essentiels tels que la rotation et la stratification, via les paramètres F_1 et F_2 .

1.3.2 . Instabilité barocline

Maintenant que nous avons formulé les équations de la dynamique pour notre modèle à deux couches présentant une stratification en densité discrète, nous sommes prêts à examiner l'instabilité barocline. Et puisqu'il est question d'instabilité, il faut au préalable s'intéresser à un état d'équilibre dont on s'écarterait. L'état en question est évidemment

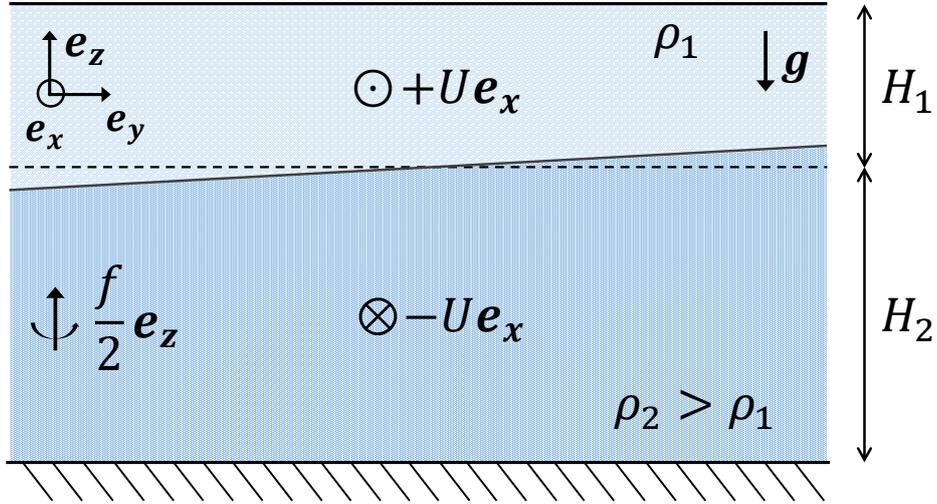


Figure 1.4 – Schéma de l'équilibre de vent thermique dans le modèle quasi-géostrophique à deux couches de fluide. L'état se caractérise par un écoulement cisailé d'amplitude U dans la direction zonale. L'interface entre les deux couches est inclinée dans la direction méridienne pour équilibrer le cisaillement. Ainsi, sur le schéma, une colonne de fluide est en moyenne plus lourde à droite qu'à gauche, ce qui correspond à un fluide plus froid.

l'équilibre de vent thermique que nous avons identifié en (1.13). Dans notre modèle à deux couches conçu pour modéliser l'océan ou l'atmosphère d'une planète, nous postulons l'existence d'un gradient de température dans la direction méridienne e_y , résultant du chauffage différentiel entre l'équateur et les pôles. Ainsi, si l'unique agent stratifiant est la température alors l'équilibre du vent thermique (1.13) implique l'existence d'un écoulement cisailé dans la direction zonale e_x . On transpose ce résultat dans notre modèle à deux couches en considérant un écoulement uniforme $U_1 e_x$ dans la couche du haut et $U_2 e_x$ dans la couche du bas. En termes de fonction de courant, cela correspond à :

$$\dot{\Psi}_1 = -U_1 y \quad \text{et} \quad \dot{\Psi}_2 = -U_2 y, \quad (1.34)$$

où l'on a choisit la notation $\dot{\Psi}$ afin de désigner les solutions de l'équilibre de vent thermique. En injectant ces fonctions de courant dans (1.32) et (1.33), on peut vérifier que l'équilibre de vent thermique défini de la sorte est bien solution des équations du modèle quasi-géostrophique à deux couches de fluide. Pour simplifier les équations, on tire profit de l'invariance Galiléenne et on se place dans le référentiel se déplaçant à la vitesse $(U_1 + U_2)/2 e_x$ de telle sorte que le cisaillement du vent thermique se réduise à $+U e_x$ dans la couche supérieure et $-U e_x$ dans la couche inférieure, avec $U = (U_1 - U_2)/2$. Ainsi, les variables du problème vérifient :

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_1 &= -Uy, & \dot{\Psi}_2 &= Uy, \\ \dot{Q}_1 &= 2F_1 Uy, & \dot{Q}_2 &= -2F_2 Uy. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Un schéma de l'équilibre de vent thermique dans le modèle à deux couches de fluide est représenté sur la figure 1.4 . La relation (1.31) nous indique que l'interface entre les deux couches est un plan incliné dans la direction méridienne avec une pente proportionnelle à U . Puisque dans notre modèle l'unique agent stratifiant est la température, la température moyenne d'une colonne est fixée par la position de l'interface. Plus l'interface est haute, plus une colonne de fluide est lourde et plus sa température est froide. On en déduit que le gradient méridien de température moyennée verticalement dans l'équilibre de vent thermique est proportionnel à $-U$.

Notre attention se porte désormais sur les écarts par rapport à cette solution de référence :

$$\begin{cases} \psi_i &= \Psi_i - \dot{\Psi}_i \\ q_i &= Q_i - \dot{Q}_i \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (1.36)$$

En injectant cette définition dans le système (1.32,1.33), on écrit les équations sur les écarts au vent thermique :

$$\begin{cases} \partial_t q_1 + U \partial_x q_1 + 2F_1 U \partial_x \psi_1 + J(\psi_1, q_1) = 0, \\ \partial_t q_2 - U \partial_x q_2 - 2F_2 U \partial_x \psi_2 + J(\psi_2, q_2) = 0, \end{cases} \quad (1.37)$$

$$\begin{cases} q_1 = \Delta \psi_1 + F_1(\psi_2 - \psi_1), \\ q_2 = \Delta \psi_2 + F_2(\psi_1 - \psi_2). \end{cases} \quad (1.38)$$

Une analyse de stabilité linéaire de ce système d'équations indique que la solution qui satisfait l'équilibre de vent thermique est inconditionnellement instable [8]. L'écoulement émergent peut être turbulent pouvant ainsi considérablement modifier les propriétés de transport. C'est la turbulence barocline. Dans le cadre de l'approximation du plan β , qui prend en compte les variations du paramètre de Coriolis en fonction de la latitude, le paramètre β peut avoir un effet stabilisateur, mais nous avons choisi de ne pas le prendre en compte ici.

Enfin, pour la suite de l'étude, on introduit les deux paramètres suivants :

$$\alpha = \frac{H_1}{H_1 + H_2} = \frac{F_2}{F_1 + F_2} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\sqrt{g'H}}{2f}. \quad (1.39)$$

Le paramètre α est la hauteur relative de la couche supérieure, tandis que λ est le rayon de Rossby relatif au modèle à deux couches de fluide. Flierl [39] propose une méthode pour calibrer le modèle à deux couches de fluide et notamment déterminer la valeur du paramètre α . Dans l'océan, qui constitue notre principal champ d'étude, la couche supérieure serait environ cinq à six fois plus mince que la couche inférieure [40, 44], ce qui correspond à un paramètre α compris entre 1/7 et 1/6. En revanche, dans l'atmosphère, la couche supérieure serait une à deux fois plus épaisse que la couche inférieure [38, 45], soit un paramètre α compris entre 1/2 et 2/3.

1.3.3 . Décomposition modale

L'approche traditionnelle pour examiner le modèle quasi-géostrophique à deux couches de fluide implique l'introduction de deux fonctions de courant spécifiques : la fonction de courant barotrope ψ , représentant la fonction de courant de l'écoulement moyenné verticalement, et la fonction de courant barocline τ , qui reflète le cisaillement vertical [24, 40]. Ces fonctions sont définies par les expressions $\psi = \alpha\psi_1 + (1 - \alpha)\psi_2$ et $\tau = \sqrt{\alpha(1 - \alpha)}(\psi_1 - \psi_2)$. La relation (1.31) établit que τ est proportionnelle aux variations de hauteur de l'interface, ce qui en fait une mesure de la température moyennée verticalement. Dans la suite, on fera souvent référence à τ comme la température. Avec ces variables le système d'équations (1.37) devient :

$$\partial_t(\nabla^2\psi) + J(\psi, \nabla^2\psi) + J(\tau, \nabla^2\tau) + AU\partial_x(\nabla^2\tau) = 0, \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} \partial_t\left(\nabla^2\tau - \frac{\tau}{A^2\lambda^2}\right) + J\left(\psi, \nabla^2\tau - \frac{\tau}{A^2\lambda^2}\right) + J(\tau, \nabla^2\psi) \\ + AU\partial_x\left(\nabla^2\psi + \frac{\psi}{A^2\lambda^2}\right) + \mathcal{T} = 0, \end{aligned} \quad (1.41)$$

où $\mathcal{T} = \frac{2(1-2\alpha)}{A} [J(\tau, \nabla^2\tau) + AU\partial_x(\nabla^2\tau)]$ avec la notation $A = 2\sqrt{\alpha(1 - \alpha)}$.

1.3.4 . Dissipation d'énergie et friction

On suppose des conditions aux limites périodiques pour les écarts ψ et τ . En multipliant par ψ l'équation (1.40) et par τ l'équation (1.41) puis en intégrant sur tout le domaine, on peut écrire le bilan d'énergie du modèle à deux couches de fluide :

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \left[|\nabla\psi|^2 + |\nabla\tau|^2 + \frac{\tau^2}{A^2\lambda^2} \right] d\mathbf{x} = \frac{U}{A^2\lambda^2} \int \tau \partial_x \psi d\mathbf{x}. \quad (1.42)$$

Le cisaillement du vent thermique influe sur l'écoulement via le terme de droite. Il agit comme un réservoir d'énergie pour la turbulence barocline. L'énergie de l'écoulement émergent peut être divisée en deux composantes distinctes : l'énergie barotrope $\int |\nabla\psi|^2/2 d\mathbf{x}$ (purement cinétique) et l'énergie barocline $\int |\nabla\tau|^2/2 + \tau^2/(2A^2\lambda^2) d\mathbf{x}$ (dont le premier terme correspond à une énergie cinétique barocline et le second à une énergie potentielle barocline). Une analyse spectrale de Salmon [40] révèle que l'instabilité barocline injecte de l'énergie barocline dans le système à une échelle relativement grande, qui transite ensuite vers les échelles plus petites. À des échelles de l'ordre du rayon de déformation de Rossby λ , cette énergie barocline est en grande partie convertie en énergie barotrope. La nature bidimensionnelle de l'écoulement barotrope entraîne alors des transferts inverses d'énergie vers les échelles plus grandes. Dans des systèmes réels cette énergie barotrope à grande échelle serait dissipée par de la friction au niveau du sol. C'est pourquoi on décide d'ajouter un terme de friction dans nos équations.

Nous allons examiner deux modèles de friction distincts : une friction linéaire et une friction quadratique. Nous optons pour une friction qui n'agit que dans la couche inférieure en contact avec le sol en accord avec différentes études [41, 42]. Ce choix est

en outre conforté par Chang et Held [26], qui comparent une friction symétrique (identique dans les deux couches) à une friction asymétrique (uniquement dans la couche inférieure). Ils montrent notamment que, dans la limite de faibles frictions qui constituera le cœur de notre étude, les deux modèles présentent des statistiques identiques. Cette friction est représentée par un terme supplémentaire *drag* ajouté à la seconde équation du système (1.37) dans le membre de droite. Ce terme est formulé comme suit :

$$drag = \begin{cases} -2\kappa\nabla^2\psi_2 & \text{friction linéaire,} \\ -\mu[\partial_x(|\nabla\psi_2|\partial_x\psi_2) + \partial_y(|\nabla\psi_2|\partial_y\psi_2)] & \text{friction quadratique,} \end{cases} \quad (1.43)$$

où κ et μ sont les coefficients de friction linéaire et quadratique, respectivement. Ce terme de friction va permettre de dissiper l'énergie injectée par la turbulence barocline et assurer l'existence d'un régime statistiquement stationnaire.

Ainsi, en réécrivant les équations pour les fonctions de courant barocline et barotrope en prenant en compte le terme de friction dans la couche inférieure, on trouve :

$$\partial_t(\nabla^2\psi) + J(\psi, \nabla^2\psi) + J(\tau, \nabla^2\tau) + AU\partial_x(\nabla^2\tau) = (1 - \alpha) drag, \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} \partial_t\left(\nabla^2\tau - \frac{\tau}{A^2\lambda^2}\right) + J\left(\psi, \nabla^2\tau - \frac{\tau}{A^2\lambda^2}\right) + J(\tau, \nabla^2\psi) \\ + AU\partial_x\left(\nabla^2\psi + \frac{\psi}{A^2\lambda^2}\right) + \mathcal{T} = -\frac{A}{2} drag, \end{aligned} \quad (1.45)$$

où, pour rappel, $A = 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$ et $\mathcal{T} = \frac{2(1-2\alpha)}{A} [J(\tau, \nabla^2\tau) + AU\partial_x(\nabla^2\tau)]$. Ces équations serviront de fondement aux deux chapitres suivants. Elles nous permettront d'analyser le transport de chaleur induit par la turbulence barocline que nous cherchons à quantifier.

1.3.5 . Diffusivité méridienne

On souhaite caractériser l'amplitude du transport de chaleur par la turbulence barocline dans le régime statistiquement stationnaire qui émerge en réponse au gradient de température méridien imposé. Sous réserve qu'il existe une séparation d'échelle entre l'écoulement de vent thermique et la turbulence émergente, le flux de chaleur méridien peut être relié au gradient de température dans l'état de base par une diffusivité turbulente D [21, 41, 43]. Or, une telle séparation d'échelle existe toujours dans notre modèle homogène horizontalement. La définition d'un tel coefficient dans le modèle quasi-géostrophique à deux couches de fluide est donnée par Thompson et Young [24] :

$$D = \frac{\langle \tau \partial_x \psi \rangle}{AU} \quad (1.46)$$

où $\langle \cdot \rangle$ représente une moyenne spatiale et temporelle. Cette quantité exprime le rapport entre le flux méridien de chaleur $\langle \tau \partial_x \psi \rangle$ et le gradient méridien de température dans l'état de base $-AU$. Toutefois, en raison de la périodicité du domaine considéré, nous avons

quelque soit la valeur de α : $D = \langle \psi_1 \partial_x \psi_2 \rangle / (2U)$. Cette formulation, que l'on préférera à la précédente, nous permet de nous affranchir de α dans l'expression de la diffusivité. L'objectif de notre étude est donc de quantifier D en fonction des paramètres de contrôle : U , λ , α et du coefficient de friction κ ou μ .

2 - Le modèle du gaz de vortex

2.1 . Les lois d'échelle du gaz de vortex

Dans ce chapitre, on s'intéresse au transport de chaleur dans le modèle à deux couches de fluide quasi-géostrophique dans le cas particulier où les deux couches sont de même profondeur. Cette configuration simplifie grandement le problème et est celle qui a suscité le plus d'études [24, 26, 27, 40, 42, 46-48]. Elle correspond à un paramètre α valant 1/2, ce qui permet de simplifier les équations sur les fonctions de courant barotrope et barocline de la façon suivante :

$$\partial_t(\nabla^2\psi) + J(\psi, \nabla^2\psi) + J(\tau, \nabla^2\tau) + U\partial_x(\nabla^2\tau) = drag/2, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\nabla^2\tau - \frac{\tau}{\lambda^2} \right) + J \left(\psi, \nabla^2\tau - \frac{\tau}{\lambda^2} \right) + J(\tau, \nabla^2\psi) \\ + U\partial_x \left(\nabla^2\psi + \frac{\psi}{\lambda^2} \right) = -drag/2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Le cas où α est quelconque est discuté dans le chapitre suivant. On adimensionne ces équations en utilisant λ comme longueur caractéristique et λ/U comme temps caractéristique. En particulier, on introduit les quantités sans dimension $D_* = D/(U\lambda)$, $\kappa_* = \kappa\lambda/U$ et $\mu_* = \mu\lambda$. Avec cette adimensionnement, U et λ disparaissent des équations et la problématique se reformule plus simplement : Que vaut D_* en fonction de κ_* ou μ_* ?

Depuis l'introduction du modèle à deux couches de fluide par Phillips en 1954 [35], de nombreux chercheurs ont entrepris de répondre à cette problématique. L'approche conventionnelle consiste à analyser l'écoulement dans le domaine spectral, puis à utiliser des arguments liés à la cascade turbulente de Kolmogorov [26, 27, 40, 42, 46-48]. Cependant, Thompson et Young [24] ont montré que pour des faibles coefficients de friction, l'écoulement barotrope se décompose en un ensemble de vortex intenses et de petites tailles par rapport à la distance qui les sépare. Cette structure, comparable à un gaz dilué de vortex, semble mieux décrite dans l'espace physique que dans l'espace spectral. En se basant sur cette représentation spatiale de l'écoulement, Gallet et Ferrari [28] (GF dans la suite) ont introduit une théorie quantitative permettant de déterminer la diffusivité D_* en fonction de κ_* ou μ_* dans la limite asymptotique où ceux-ci tendent vers zéro. Les prédictions obtenues se sont révélées être en meilleur accord avec les données numériques que les théories précédentes basées sur l'étude spectrale de l'écoulement [26].

La théorie du gaz de vortex consiste à modéliser l'écoulement comme un ensemble de vortex de circulation $\pm\Gamma$ interagissant les uns avec les autres. Un schéma du champ de vorticit e barotrope, $\zeta = \Delta\psi$, est repr esent e en figure 2.1. La distance inter-vortex caract eristique est not ee ℓ_{iv} et le rayon des c oeurs de vortex est d esign e par r_{core} . On notera

Champ de la vorticité barotrope $\Delta\psi$ dans une simulation

Représentation idéalisée du gaz de vortex

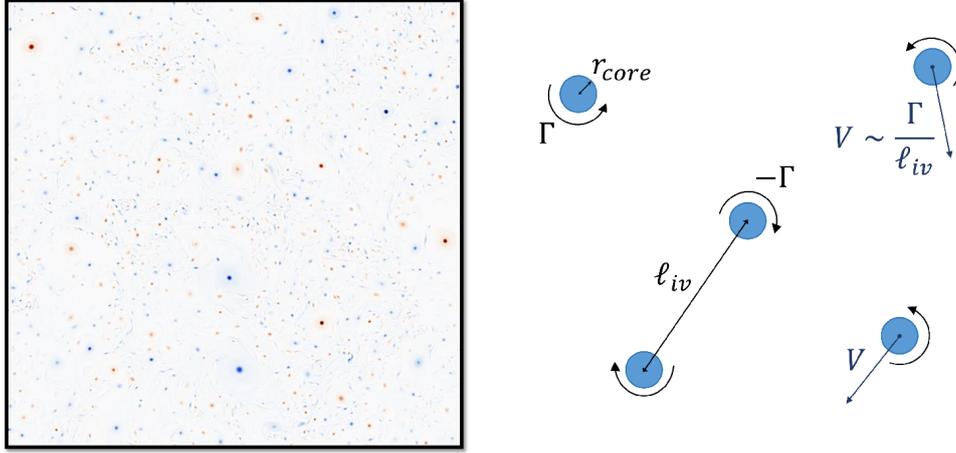


Figure 2.1 – Dans la théorie du gaz de vortex, l’écoulement barotrope est décrit comme un gaz de tourbillons idéalisés de circulation $\pm\Gamma$. Le rayon de tous les tourbillons est identique et vaut r_{core} . Dans cette représentation idéalisée, le champ de température conserve des valeurs élevées dans la région inter-vortex, tandis que la vorticité barotrope s’annule à l’extérieur des cœurs de tourbillon. L’amplitude typique de la vorticité et de la température dans le cœur des tourbillons sont notées ζ_{core} et τ_{core} . La distance typique entre les tourbillons est ℓ_{iv} , et les cœurs de tourbillon errent avec une vitesse typique $V \sim \Gamma/\ell_{iv}$ résultant de l’induction mutuelle.

le rayon des cœurs de vortex sans dimension : $r_* = r_{core}/\lambda$. Le modèle du gaz de vortex décrit un régime dilué, c’est-à-dire qui vérifie $\ell_{iv} \gg r_{core}$. Dans ce modèle, la vorticité est supposée nulle en dehors des cœurs de vortex tandis que la température, elle, peut varier significativement entre les tourbillons. Enfin, en raison de l’induction mutuelle, les vortex se déplacent à une vitesse caractéristique $V \sim \Gamma/\ell_{iv}$.

Pour caractériser le transport par le gaz de vortex, GF commencent par étudier le transport induit par un dipôle de tourbillons dont les circulations sont de signes opposées. Cette configuration idéalisée représente le scénario le plus simple permettant de générer un flux de chaleur. En effet, un seul vortex ne serait pas suffisant pour induire du transport. Les vortex sont espacés d’une distance ℓ_{iv} et se déplacent en tandem à une vitesse constante Γ/ℓ_{iv} en raison de l’induction mutuelle. Ce mouvement de translation engendre et advecte des fluctuations de température. En simulant ce mécanisme, GF démontrent que le transport méridional induit par un dipôle vérifie la loi d’échelle :

$$D \sim \ell_{iv} V . \tag{2.3}$$

Ce résultat est généralisé à l'ensemble du gaz de vortex et constitue le premier argument de la théorie. La relation s'applique en fait à tous les traceurs passifs. Toutefois, il convient de souligner que cela ne signifie pas que la température est un traceur passif, car la vitesse caractéristique V dépend des fluctuations de température.

Deux relations supplémentaires sont nécessaires afin de caractériser ℓ_{iv} et V . Une première relation peut être déduite à l'aide d'un raisonnement qui s'apparente à un argument de chute libre. On considère le mouvement d'une colonne de fluide située dans l'espace inter-vortex. Initialement au repos, cette colonne se déplace librement sur un libre parcours moyen comparable à la distance inter-vortex ℓ_{iv} , convertissant de l'énergie potentielle en énergie cinétique [49]. La variation de densité massique d'énergie potentielle disponible (contenue dans l'écoulement de base) entre la position initiale et finale vaut $U^2 \ell_{iv}^2 / \lambda^2$. De plus, la vitesse qui est initialement nulle, devient de l'ordre de V à la fin du déplacement. Ainsi, en égalisant les variations d'énergie potentielle et d'énergie cinétique, on trouve :

$$V \sim U \ell_{iv} / \lambda. \quad (2.4)$$

La dernière relation est dérivée à partir du bilan d'énergie du système :

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \left[|\nabla \psi|^2 + |\nabla \tau|^2 + \frac{\tau^2}{\lambda^2} \right] d\mathbf{x} = \frac{U}{\lambda^2} \int \tau \partial_x \psi d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int (\text{drag} \times \psi_2) d\mathbf{x}. \quad (2.5)$$

En moyennant temporellement dans le régime statistiquement stationnaire, le terme de dérivé temporelle s'annule, révélant ainsi l'égalité suivante :

$$\frac{DU^2}{\lambda^2} = \begin{cases} \kappa \langle \mathbf{u}^2 \rangle & \text{pour la friction linéaire ,} \\ \frac{\mu}{2} \langle |\mathbf{u}|^3 \rangle & \text{pour la friction quadratique .} \end{cases} \quad (2.6)$$

Le terme de gauche représente le taux d'énergie potentielle libérée par l'instabilité barocline, tandis que le terme de droite est le taux de dissipation de l'énergie cinétique par la friction. Ici, $\mathbf{u} = -\nabla \times (\psi \mathbf{e}_z)$ correspond à la vitesse barotrope. En réalité, la vitesse à considérer devrait être celle de la couche inférieure puisque la friction agit exclusivement sur cette couche. Toutefois, dans la limite des très basses frictions où l'écoulement est majoritairement barotrope [8, 40, 50], l'utilisation de la vitesse barotrope est une approximation justifiée.

Les moments d'ordre 2 et d'ordre 3 du champ de vitesse barotrope dans (2.6) sont évalués en utilisant la représentation du gaz de vortex. Considérons un vortex isolé au centre d'un disque de rayon ℓ_{iv} , la vitesse azimutale au voisinage de celui-ci est $\pm \Gamma / (2\pi r)$, où r est la distance à son centre. Sachant que le vortex est isolé au centre d'un disque de rayon d'ordre ℓ_{iv} , on peut estimer les moments du champ de vitesse de la façon suivante :

$$\langle \mathbf{u}^2 \rangle \sim \frac{1}{\ell_{iv}^2} \int_{r_{\text{core}}}^{\ell_{iv}} \frac{\Gamma^2}{r} dr \sim V^2 \log \left(\frac{\ell_{iv}}{r_{\text{core}}} \right), \quad (2.7)$$

$$\langle |\mathbf{u}|^3 \rangle \sim \frac{1}{\ell_{iv}^2} \int_{r_{\text{core}}}^{\ell_{iv}} \frac{\Gamma^3}{r^2} dr \sim V^3 \frac{\ell_{iv}}{r_{\text{core}}}. \quad (2.8)$$

En effet, même si nous ne savons pas exactement comment le champ de vitesse est régularisé en dessous du rayon r_{core} , cela n'a pas vraiment d'effet sur les moments d'ordres faibles puisque $r_{core} \ll \ell_{iv}$. Ainsi, nous pouvons utiliser le rayon des cœurs de vortex comme valeur seuil pour l'intégration spatiale.

Finalement, en injectant l'estimation des moments (2.7) et (2.8) dans l'équation (2.6), puis en la combinant avec les lois d'échelle (2.3) et (2.4), on trouve la relation suivante pour la diffusivité :

$$D_* \sim r_*^2 \exp\left(\frac{\mathcal{C}}{\kappa_*}\right) \quad \text{pour la friction linéaire,} \quad (2.9)$$

$$D_* \sim r_*/\mu_* \quad \text{pour la friction quadratique,} \quad (2.10)$$

où \mathcal{C} est un paramètre ajustable de la théorie. Cette loi, valable pour des valeurs faibles de κ_* et μ_* , constitue le fondement de la théorie du gaz de vortex. L'étape suivante consiste à déterminer une prédiction pour le rayon des cœurs de vortex r_* .

2.2 . Rôle du rayon des tourbillons dans le transport par le gaz de vortex

2.2.1 . Hypothèse de Gallet et Ferrari : $r_{core} \sim \lambda$

Une prédiction intuitive pour le rayon des cœurs de vortex est celle adoptée par GF. Près du seuil, l'instabilité barocline génère des structures dont la taille typique correspond au rayon de déformation de Rossby [6, 8]. Une première approche consiste alors à supposer que, dans le régime turbulent, le rayon moyen des cœurs de vortex ne s'écarte que peu de l'échelle d'injection de l'énergie du régime linéaire. Ainsi, nous avons :

$$r_{core} \sim \lambda. \quad (2.11)$$

Dans ce cas, les lois (2.9) et (2.10) deviennent :

$$D_* \sim \exp\left(\frac{\mathcal{C}}{\kappa_*}\right) \quad \text{pour la friction linéaire,} \quad (2.12)$$

$$D_* \sim 1/\mu_* \quad \text{pour la friction quadratique.} \quad (2.13)$$

Sur la figure 2.2, nous représentons la diffusivité D_* obtenue à partir de simulations numériques directes (DNS), détaillées dans la section 2.4, en fonction des coefficients de friction adimensionnés. On trace également les prédictions de GF. La prédiction pour la friction linéaire (2.12) montre un accord excellent avec les simulations. Celui-ci est légèrement moins satisfaisant pour la loi quadratique (2.13). En particulier, grâce à de nouvelles simulations à plus basses frictions, on constate que l'accord ne semble pas s'améliorer lorsqu'on diminue fortement la valeur de μ_* . Se pose alors la question : un autre diagnostic pour le rayon des cœurs de tourbillons pourrait-il fournir une meilleure loi dans le cas quadratique tout en conservant un accord aussi solide dans le cas linéaire ?

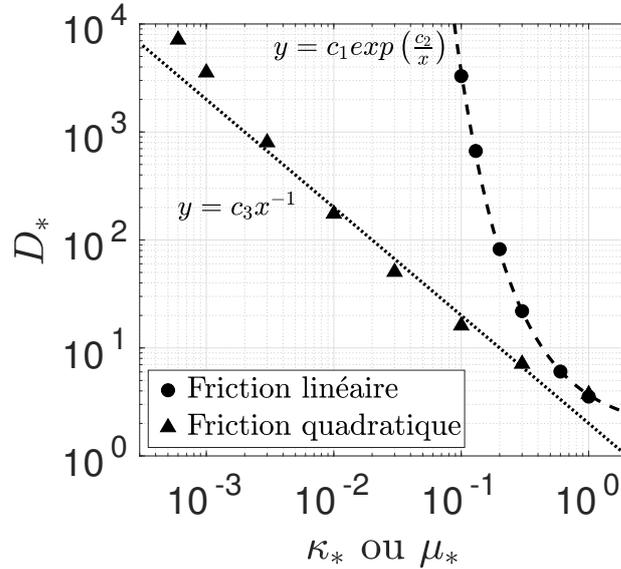


Figure 2.2 – Diffusivité sans dimension en fonction du coefficient de friction sans dimension. Les données proviennent de DNS dont les détails sont donnés dans la section 2.4. En pointillé et en tireté sont tracées les prédictions de GF, (2.12) et (2.13), avec $c_1 = 1.71$, $c_2 = 0.764$ et $c_3 = 2.0$. Les constantes c_1 et c_2 ont été déterminées avec une régression linéaire tandis que c_3 est la valeur donnée par GF.

2.2.2 . Un rayon typique au-delà du rayon de déformation de Rossby : $r_{core} \gg \lambda$

La littérature indique que le rayon des cœurs des tourbillons peut devenir bien plus grand que λ à mesure que les transferts inverses d'énergie s'intensifient [24, 47]. De plus, d'autres modèles phénoménologiques fondés sur des gaz de vortex permettant des collisions et des fusions [51, 52] confirment que le rayon typique des vortex dans ce genre de configuration est plus grand que l'échelle d'injection de l'énergie (et plus grand que la taille des vortex à l'instant initial pour un système en déclin). Ainsi, une piste d'amélioration consiste à évaluer s'il existe une prédiction plus robuste pour le rayon des cœurs de tourbillons, qui prédirait notamment une croissance du rayon lorsqu'on réduit la friction et augmente les transferts inverses d'énergie. Un tel constat nous incite à supposer que r_* croît avec ℓ_{iv}/λ , ou de manière équivalente avec D^* puisque $D_* \sim (\ell_{iv}/\lambda)^2$. Dans la section suivante, nous présentons des arguments en faveur de $r_* \sim D_*^\gamma$ avec $\gamma = 1/4$.

Dans un premier temps, regardons ce que cela implique pour un exposant γ quelconque. Si on injecte cet ansatz dans la loi générale pour la friction linéaire (2.9), on trouve :

$$D_* \sim \exp\left(\frac{\tilde{\mathcal{C}}}{\kappa_*}\right), \quad (2.14)$$

avec $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}/(1 - 2\gamma)$. Or cette constante, tout comme \mathcal{C} , est un paramètre ajustable de

la théorie. Par conséquent, notre nouvelle prédiction dans le cas linéaire est strictement équivalente à la prédiction (2.12) donnée par GF, et cela quelle que soit la valeur du paramètre γ .

Dans le cas de la friction quadratique les choses se passent différemment. En effet, en injectant l'ansatz dans (2.10), on trouve la loi de puissance :

$$D_* \sim \mu_*^{1/(\gamma-1)}, \quad (2.15)$$

dont l'exposant est une fonction de γ . Bien entendu, on retrouve la loi de GF (2.13) lorsque $\gamma = 0$. Cependant, si $\gamma \neq 0$, l'exposant de la loi de puissance n'est plus le même. Ce résultat sur la friction linéaire et la friction quadratique est cohérent avec les observations.

2.3 . Une loi d'échelle pour le rayon des cœurs de tourbillons

Tentons désormais d'établir la valeur de l'exposant γ . Soit $\zeta_{core} = \Delta\psi_{core}$, la vorticité caractéristique d'un cœur de vortex. La circulation d'un vortex s'exprime alors comme $\Gamma \sim \zeta_{core} r_{core}^2$. Comme on connaît le comportement de Γ , une approche pour déterminer r_{core} consiste à estimer d'abord ζ_{core} .

Pour ce faire, on peut commencer par invoquer la conservation de la vorticité potentielle totale dans chacune des couches en négligeant les effets dissipatifs. La vorticité potentielle totale vaut $q_1 + Uy/\lambda^2$ dans la première couche et $q_2 - Uy/\lambda^2$ dans la seconde. Ainsi, les fluctuations de vorticité potentielle sur un libre parcours moyen ℓ_{iv} dans la direction méridionale sont estimées par $q_{1;2} \sim U\ell_{iv}/\lambda^2$. De plus, on a par définition :

$$q_1 = \Delta(\psi + \tau) - \tau/\lambda^2, \quad (2.16)$$

$$q_2 = \Delta(\psi - \tau) + \tau/\lambda^2. \quad (2.17)$$

Or le champ de température τ a pour échelles caractéristiques ℓ_{iv} dans la région inter-vortex et r_{core} dans le cœur des vortex. Dans la limite qui nous intéresse où $\ell_{iv} \gg \lambda$ et $r_* \gg 1$, ces deux échelles sont beaucoup plus grande que λ . Cela signifie que le terme $\Delta\tau$ peut être négligé face à τ/λ^2 dans (2.16) et (2.17). Enfin, puisque la vorticité potentielle dans chacune des couches est un invariant matériel, c'est-à-dire qu'une particule de fluide conserve sa vorticité potentielle le long d'une trajectoire, q_1 et q_2 maintiennent le même ordre de grandeur $U\ell_{iv}/\lambda^2$ à l'intérieur et en dehors des cœurs de vortex. Ainsi, en écrivant q_1 et q_2 à l'intérieur d'un cœur de vortex, on trouve :

$$\zeta_{core} - \tau_{core}/\lambda^2 \sim U\ell_{iv}/\lambda^2, \quad (2.18)$$

$$\zeta_{core} + \tau_{core}/\lambda^2 \sim U\ell_{iv}/\lambda^2. \quad (2.19)$$

En combinant ces deux estimations, on conclut que $\zeta_{core} \sim U\ell_{iv}/\lambda^2$. Puis en constatant que $\Gamma \sim \ell_{iv}V \sim U\ell_{iv}^2/\lambda$, on trouve :

$$r_* \sim (\ell_{iv}/\lambda)^{1/2} \sim D_*^{1/4}, \quad (2.20)$$

soit un exposant $\gamma = 1/4$. Comme discuté dans la section précédente, cet exposant non nul ne modifie pas la loi d'échelle de GF pour le transport dans le cas de la friction linéaire, mais change la loi dans le cas quadratique en suivant la relation (2.15). En somme, les lois d'échelle du régime de gaz de vortex, qui relie la diffusivité aux coefficients de friction linéaire et quadratique, s'expriment respectivement :

$$D_* = c_1 \exp\left(\frac{c_2}{\kappa_*}\right) \quad \text{pour la friction linéaire,} \quad (2.21)$$

$$D_* = c_3 \mu_*^{-4/3} \quad \text{pour la friction quadratique,} \quad (2.22)$$

où c_1 , c_2 et c_3 sont des constantes.

2.4 . Évaluation numérique

Afin d'évaluer la validité des nouvelles prédictions, nous avons réalisé des DNS du système (2.1, 2.2) dans un domaine périodique $(x, y) \in [0, L]^2$. Nous avons focalisé notre attention sur le cas de la friction quadratique, car celui de la friction linéaire ne présente pas de changement par rapport à GF. Nous avons exploré une gamme de μ_* allant de 10^{-4} à 1. Afin de dissiper les petits filaments de vorticité nous avons ajouté des termes d'hyperviscosité $-\nu \nabla^{10} \psi$ et $-\nu \nabla^8 [\nabla^2 \tau - \lambda^{-2} \tau]$ à droite des équations (2.1) et (2.2), respectivement. Le coefficient d'hyperdiffusivit  sans dimension a été fixé à $\nu_* = \nu / (U \lambda^7) = 10^{-13}$, permettant ainsi d'atteindre le régime de très faible friction tout en garantissant des lois d'échelles indépendantes de ν_* . De plus, nous avons opté pour des tailles de domaine très grandes afin que D_* se rapproche autant que possible de sa valeur asymptotique pour un domaine de taille infinie.   ce sujet, nous avons estimé que nos valeurs de D_* présentaient une marge d'erreur de 10% par rapport à leurs valeurs asymptotique lorsque $L \rightarrow +\infty$.

2.4.1 . Des estimateurs du rayon des cœurs de vortex

Le point central de cette nouvelle théorie réside dans l'idée que le rayon des cœurs de tourbillons augmente à mesure que les transferts inverses s'intensifient. Ainsi, mesurer r_* pour différentes valeurs de μ_* s'impose comme la première vérification intuitive. Il n'est cependant pas aisé d'extraire r_* de nos simulations puisque celui-ci n'a pas de définition mathématique explicite. Pour répondre à ce problème, nous avons construit des estimateurs se comportant comme r_* dans la limite des faibles coefficients de frictions. Ces estimateurs sont construits à partir des moments du champ de vorticité barotrope dont la définition est donnée par $\zeta_n = \langle \zeta^n \rangle^{1/n}$ pour le moment d'ordre n . Dans le modèle du gaz de vortex, la vorticité vaut ζ_{core} à l'intérieur des cœurs de vortex et zéro en dehors. Par conséquent, une estimation de ces moments est donnée par :

$$\zeta_n \sim \left(\zeta_{core} \frac{r_{core}^2}{\ell_{iv}^2} \right)^{1/n} \sim \zeta_{core} r_*^{2/n} D_*^{-1/n} \sim \frac{U}{\lambda} r_*^{2(\frac{1}{n}-1)} D_*^{1-\frac{1}{n}}, \quad (2.23)$$

où nous avons utilisé la relation $D \sim \ell_{iv} V \sim \Gamma \sim \zeta_{core} r_{core}^2$ pour exprimer ζ_{core} en fonction de D_* et r_* .   partir de cette estimation, on définit l'estimateur r_n associé au moment

d'ordre n de la vorticité, vérifiant $r_n \sim r_*$ dans la limite du gaz de vortex :

$$r_n = \left(\frac{\lambda \zeta_n}{U} \right)^{\frac{n}{2(1-n)}} D_*^{1/2}. \quad (2.24)$$

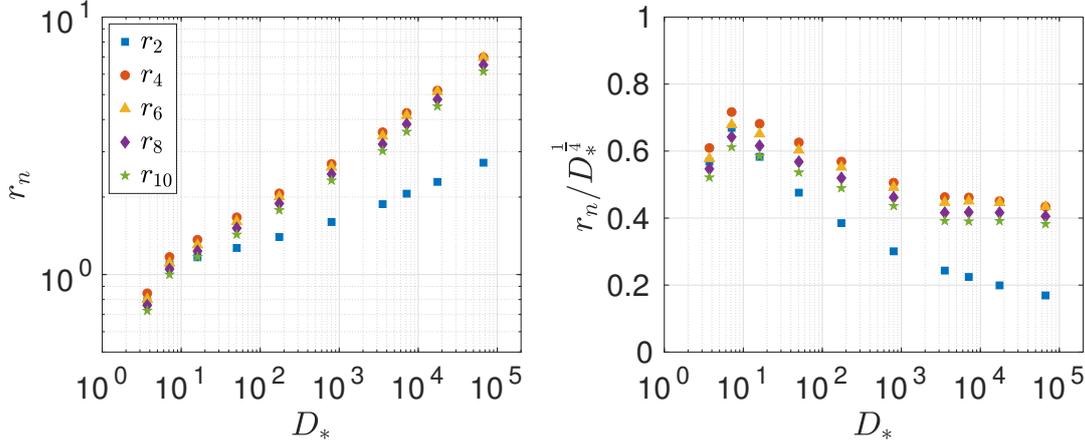


Figure 2.3 – Les estimateurs $(r_n)_{n \in \{2,4,6,8,10\}}$ du rayon de cœur des tourbillons en fonction de la diffusivité D_* . Tous les estimateurs avec $n > 2$ présentent un accord excellent avec la prédiction (2.20) comme illustré par la figure compensée à droite.

Afin d'étudier le comportement du rayon typique des cœurs de vortex, on trace sur la figure 2.3 les estimateurs r_n , pour n pair allant de 2 à 10, en fonction de D_* . On constate que pour $n > 2$, le comportement des estimateurs concorde parfaitement avec la prédiction (2.20). Cependant, pour $n = 2$, l'exposant de la loi d'échelle est légèrement inférieur à la prédiction. Cette divergence peut être attribuée au fait que la théorie du gaz de vortex offre une bonne description des vortex les plus intenses peuplant l'écoulement. Les moments d'ordres élevés sont sensibles à ces vortex, mais les moments d'ordres faibles capturent aussi les  v nements de plus faible intensité se produisant entre ces vortex.

2.4.2 . Validité des nouvelles lois pour la diffusivité

Maintenant que nous avons confirmé que l'exposant traduisant la dépendance du rayon des cœurs de vortex v rifieait $\gamma \approx 1/4$, on affiche sur la figure 2.4 la diffusivité D_* en fonction de μ_* .   droite, on représente aussi D_* compensée par les deux prédictions : celle de GF ($\gamma = 0$) et la nouvelle prédiction ($\gamma = 1/4$). La loi de GF montre un accord satisfaisant pour les frictions modérément faibles situées autour de $\mu_* \in [3 \times 10^{-3}, 0.3]$. Toutefois, pour des frictions très faibles, $\mu_* \lesssim 3 \times 10^{-3}$, les données numériques s'écartent de cette prédiction pour converger vers la loi ajustée (2.22). Il est intéressant de noter que cette plage de friction correspond à celle où nos points numériques concordent avec la prédiction pour le rayon des cœurs de tourbillons (voir figure 2.3). Enfin, une régression linéaire sur cet intervalle révèle que le meilleur ajustement pour les données numériques est donné par : $D_* \sim \mu_*^{-1.303}$, présentant ainsi un écart relatif inférieur à 3% par rapport à l'exposant théorique.

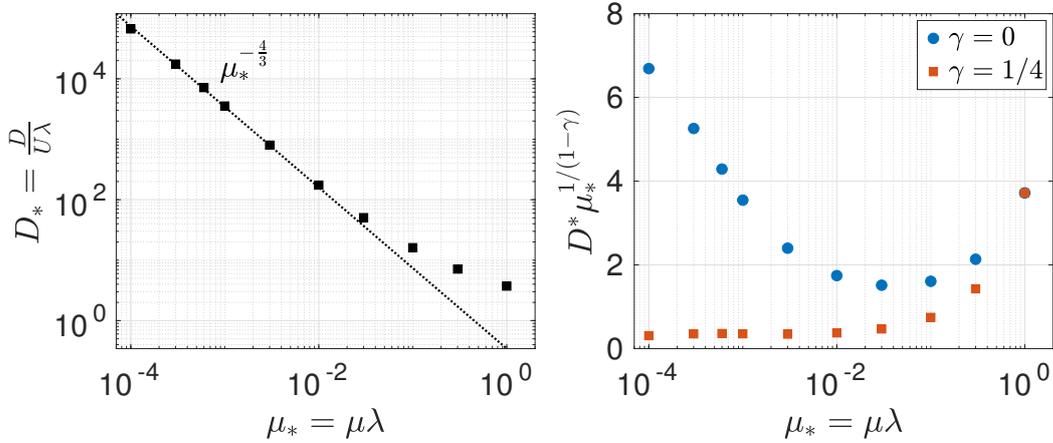


Figure 2.4 – La diffusivité D_* en fonction du coefficient de friction quadratique μ_* . Les points sont raisonnablement en accord avec la théorie de GF (2.13) pour des frictions modérément faibles. Pour des frictions asymptotiquement faibles, le comportement observé devient celui de la nouvelle prédiction (2.22), comme illustré sur la figure compensée à droite.

2.4.3 . Distance intervortex et longueur de mélange

La théorie que nous avons établie fournit aussi une prédiction pour la dépendance de ℓ_{iv} par rapport au coefficient de friction. Pour la friction quadratique, elle s'écrit :

$$\frac{\ell_{iv}}{\lambda} \sim \mu_*^{-2/3}. \quad (2.25)$$

Comme pour le rayon des cœurs de vortex, des estimateurs peuvent être introduits afin d'estimer la distance inter-vortex. Cette fois-ci, on utilise les moments du champ de température : $\tau_n = \langle |\tau|^n \rangle^{1/n}$. D'ailleurs, la longueur de mélange $\ell_2 = \tau_2/(U\lambda)$ est communément utilisée comme estimateur pour la longueur inter-vortex sans dimension ℓ_{iv}/λ [24, 28]. C'est en effet la longueur caractéristique la plus simple associée aux fluctuations de température. Sur la figure 2.5 est tracée ℓ_2 en fonction de μ_* . On constate que le comportement asymptotique de ℓ_2 pour $\mu_* \ll 1$ est raisonnablement bien capturé par la loi (2.25). Cependant, l'exposant mesuré sur la dernière décade est légèrement plus faible que $-2/3$, une régression linéaire fournit un exposant de l'ordre de -0.56 . Ce résultat est déjà très satisfaisant et pourrait s'améliorer à mesure que l'on réduit μ_* . Toutefois, comme discuté précédemment, la théorie du gaz de vortex décrit principalement les vortex intenses peuplant l'écoulement. Ainsi, on peut se demander si un estimateur plus sensible à ces vortex ne fournirait pas une meilleure estimation de la distance inter-vortex. Cela nous amène à définir l'estimateur alternatif $\ell_\infty = \tau_\infty/(U\lambda)$, où $\tau_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$. En effet, défini de la sorte, τ_∞ est aussi la moyenne temporelle du maximum spatiale de la valeur absolue de τ . Il capture alors la température au cœur du vortex le plus intense et fournit par la même occasion un estimateur pour la température typique τ_{core} . Ainsi, en

utilisant encore une fois les estimations (2.18) et (2.19), on vérifie bien que :

$$\ell_\infty \sim \frac{\ell_{iv}}{\lambda}, \quad (2.26)$$

dans la limite des faibles frictions. Sur la figure 2.5, on trace ℓ_∞ en fonction de μ_* vérifiant ainsi la validité de la prédiction (2.25). En effet, les données numériques montrent un accord excellent avec la théorie, et cela même sur la dernière décade où l'exposant de fit est de l'ordre de -0.69 .

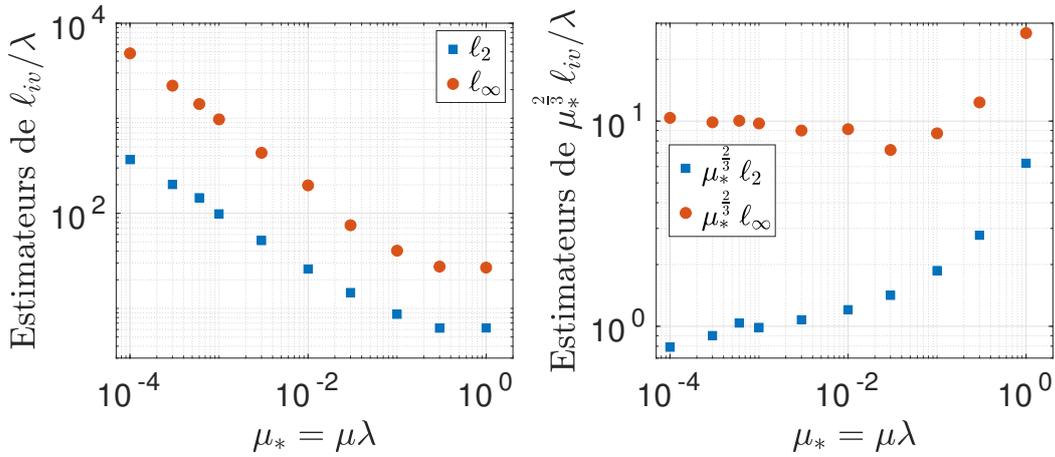


Figure 2.5 – Les deux estimateurs ℓ_2 et ℓ_∞ de la longueur inter-vortex sans dimension en fonction du coefficient de friction quadratique. L'accord avec la prédiction asymptotique (2.25) est très bon, comme illustré sur la figure compensée à droite.

2.5 . Conclusion

En résumé, nous avons formulé une prédiction pour le rayon caractéristique des cœurs de tourbillon dans le régime de faible friction de la turbulence barocline. En combinant cette prédiction avec le travail de GF, nous avons établi une loi d'échelle reliant la diffusivité D_* aux coefficients de friction linéaire et quadratique κ_* et μ_* . Dans le cas de la friction linéaire, la loi dérivée est équivalente à celle de GF. Toutefois, pour la friction quadratique, l'exposant de la loi de puissance est modifié et conduit à un meilleur accord avec les données numériques, en particulier pour les très basses frictions.

Même si la théorie de la spirale d'Ekman préconise l'utilisation d'une friction linéaire, la dissipation dans les couches limites est plus fréquemment modélisée par une friction quadratique afin de prendre en compte la rugosité du fond marin [38, 53]. Certains modèles adoptent même une condition de friction mixte, formulée comme un produit de deux vitesses, mais équivalente à une friction linéaire pour des vitesses au fond faibles [54]. Il est donc particulièrement satisfaisant d'un point de vue physique qu'une même

théorie puisse englober à la fois la friction linéaire et la friction quadratique. Cela est crucial pour une compréhension complète de la dynamique océanique, qui nécessite a priori la maîtrise des deux types de frictions.

3 - Profils de stratification quelconques

3.1 . Problématique

Le modèle à deux couches de fluide de même profondeur modélise une portion d’océan ou d’atmosphère stratifiée uniformément en densité, c’est-à-dire, dont la densité croît linéairement avec la profondeur. Dans la section précédente, nous avons développé une théorie visant à quantifier la diffusivité effective la turbulence barocline dans ce système, avec pour objectif final de paramétriser les propriétés de transport des tourbillons méso-échelles dans l’océan. Cependant, la plupart des environnements réels divergent de ce modèle idéalisé. Par exemple, dans l’océan qui représente notre principal champ d’étude, la couche supérieure serait cinq à six fois plus mince que la couche inférieure [40, 44]. En revanche, dans l’atmosphère, elle serait plutôt une à deux fois plus épaisse [38, 45]. Ainsi, un modèle à deux couches de profondeurs inégales reflète mieux les systèmes réels et est donc un meilleur candidat pour paramétriser le transport de chaleur méridien par les tourbillons méso-échelles. Cependant, l’introduction de couches de fluide de profondeurs arbitraires ajoute de nouveaux termes aux équations, complexifiant considérablement le problème [36, 37, 39, 44, 55, 56]. En particulier, ces nouveaux termes pourraient réduire le degré de barotropisation du système. Par conséquent, prédire le transport global induit par la turbulence barocline dans un modèle à deux couches de fluide avec des profondeurs arbitraires constitue à la fois un défi pour tester la robustesse de la théorie du gaz de vortex récemment développée, et la prochaine étape logique pour l’étendre à des situations plus réalistes.

Comme dans la section précédente, nous adimensionnons les équations sur les fonctions de courant barotrope et barocline (1.44) et (1.45) avec U et λ , ce qui réduit le nombre de paramètres de contrôle à deux. Le premier est le coefficient de friction sans dimension $\kappa_* = \kappa\lambda/U$ ou $\mu_* = \mu\lambda$. Le second est la taille relative de la couche supérieure $\alpha = H_1/H$. Ainsi, le problème revient à déterminer les fonctions \mathcal{D}_{lin} et $\mathcal{D}_{\text{quad}}$ telles que :

$$D_* = \begin{cases} \mathcal{D}_{\text{lin}}(\alpha, \kappa_*) & \text{pour la friction linéaire,} \\ \mathcal{D}_{\text{quad}}(\alpha, \mu_*) & \text{pour la friction quadratique,} \end{cases} \quad (3.1)$$

où $D_* = D/(U\lambda)$ est la diffusivité sans dimension. Afin d’évaluer D_* , nous avons réalisé des DNS des équations (1.44) et (1.45) dans un domaine périodique $(x, y) \in [0, L]^2$. Comme pour le système avec des couches de profondeurs égales, nous avons considéré des termes d’hyperviscosité afin de dissiper les petits filaments de vorticité. Leurs expressions dans les équations (1.44) et (1.45) est équivalente à une dissipation hypervisqueuse $-\nu\Delta q_{1,2}$ à droite des équations de conservation de la vorticité potentielle dans chacune des deux couches (1.37). Le code utilisé est un code pseudo-spectral similaire à celui décrit dans la partie 2.4. Nous avons choisi quatre valeurs différentes de α : 1/7, 1/3, 1/2 et 2/3, ce qui nous a permis de couvrir une gamme variée de structures, allant de celle de

l'océan à celle de l'atmosphère terrestre. Pour le coefficient de friction, nous avons pris $\kappa_* \in [0.06, 1]$ pour la friction linéaire et $\mu_* \in [6 \times 10^{-4}, 1]$ pour la friction quadratique. Cela nous a permis d'obtenir des valeurs de D_* atteignant environ 10^4 , quel que soit α . Comme pour l'étude précédente, nous avons choisi l'hyperviscosité ν et la taille du domaine L de manière à ce que leur impact sur les propriétés de transport de l'écoulement soit négligeable.

Sur la figure 3.1, nous avons représenté la diffusivité D_* en fonction du coefficient de friction pour quatre valeurs différentes de α . Nous observons que D_* varie de manière significative avec α , que ce soit pour la friction linéaire ou pour la friction quadratique.

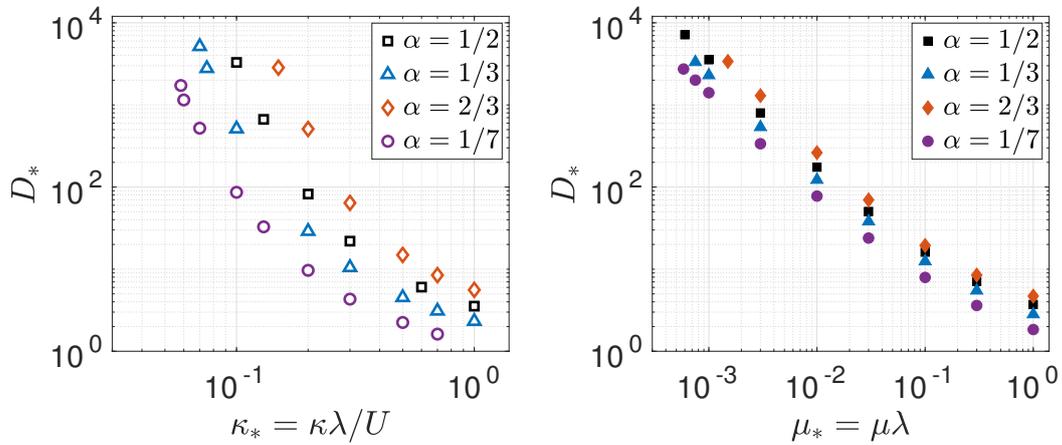


Figure 3.1 – Diffusivité en fonction des coefficients de friction linéaire (à gauche) et quadratique (à droite) pour différentes valeurs de α .

3.2 . Renormalisation en un système à deux couches de même profondeur

La compréhension du comportement asymptotique dans le cas très particulier où les deux couches de fluide ont la même profondeur peut nous aider à saisir le cas plus général où α est quelconque. Pour ce faire, on commence par introduire les quantités renormalisées $\hat{U} = AU$ et $\hat{\lambda} = A\lambda$. On peut ainsi réécrire les équations pour les modes barotrope et barocline, (1.44) et (1.45), de la façon suivante :

$$\partial_t(\nabla^2\psi) + J(\psi, \nabla^2\psi) + J(\tau, \nabla^2\tau) + \hat{U}\partial_x(\nabla^2\tau) = \widehat{\text{drag}}/2, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t\left(\nabla^2\tau - \frac{\tau}{\hat{\lambda}^2}\right) + J\left(\psi, \nabla^2\tau - \frac{\tau}{\hat{\lambda}^2}\right) \\ & + J(\tau, \nabla^2\psi) + \hat{U}\partial_x\left(\nabla^2\psi + \frac{\psi}{\hat{\lambda}^2}\right) + \mathcal{T} = -\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\widehat{\text{drag}}/2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

où $\widehat{\text{drag}} = 2(1 - \alpha) \text{drag}$.

Commençons par supposer que le terme \mathcal{T} est négligeable, une approximation que l'on justifiera *a posteriori*. Dans ce cas, les membres de gauche des deux équations sont exactement les mêmes que ceux du cas particulier avec des profondeurs égales (voir (2.1) et (2.2)). La seule différence est que ce sont maintenant les paramètres renormalisés \hat{U} et $\hat{\lambda}$ qui interviennent. Ainsi, on peut s'attendre à ce que le transport dans le système renormalisé soit contrôlé par la théorie du gaz de vortex, où le terme de friction correspondant reste à déterminer en analysant les membres de droite.

Après renormalisation, les termes de droite des équations (3.2) et (3.3) sont identiques à ceux du cas particulier où $\alpha = 1/2$, à l'exception du terme de friction dans l'équation sur le mode barocline, pour lequel apparaît un préfacteur dépendant de α . Cependant, comme expliqué dans la section précédente, pour des faibles frictions, l'écoulement régi par la théorie du gaz de vortex se barotropise, et c'est la friction agissant sur le mode barotrope qui dissipe l'énergie injectée par l'instabilité barocline. C'est ce constat qui nous avait amené à écrire le bilan d'énergie (2.6) avec la vitesse barotrope au lieu de la vitesse dans la couche du fond. Ainsi en partant du même constat, on en déduit que dans la loi d'échelle du gaz de vortex, il faut considérer la friction agissant sur le mode barotrope. Celui-ci correspond au terme de friction de l'équation (3.2), duquel on peut négliger la partie faisant intervenir la fonction de courant barocline τ , soit un coefficient de friction renormalisé $\hat{\kappa} = 2(1 - \alpha)\kappa$ ou $\hat{\mu} = 2(1 - \alpha)\mu$. Tout ça mis bout à bout, nous permet d'écrire que le coefficient de diffusivité sans dimension du système renormalisé est indépendant de α et suit la même loi que le système à deux couches de fluide de même profondeur. Soit, pour la friction linéaire et quadratique respectivement :

$$\frac{D}{\hat{\lambda}\hat{U}} = \begin{cases} \mathcal{D}_{\text{lin}}(\alpha = 1/2, \hat{\kappa} \hat{\lambda}/\hat{U}) \\ \mathcal{D}_{\text{quad}}(\alpha = 1/2, \hat{\mu} \hat{\lambda}) \end{cases} \quad (3.4)$$

Or, on connaît l'expression de \mathcal{D}_{lin} et $\mathcal{D}_{\text{quad}}$ dans le cas particulier où $\alpha = 1/2$ puisqu'il s'agit des prédictions dérivées dans la partie précédente. Elle sont données par les équations (2.21) et (2.22). En substituant dans (3.4), on trouve la diffusivité pour la friction linéaire et la friction quadratique avec α quelconque :

$$\mathcal{D}_{\text{lin}}(\alpha, \kappa_*) = c_1 4\alpha(1 - \alpha) \exp \left[\frac{c_2}{2(1 - \alpha)\kappa_*} \right], \quad (3.5)$$

$$\mathcal{D}_{\text{quad}}(\alpha, \mu_*) = c_3 \frac{\alpha^{1/3}}{4^{1/3}(1 - \alpha)\mu_*^{4/3}}, \quad (3.6)$$

où c_1 , c_2 et c_3 sont des constantes, les mêmes que dans les lois d'échelle (2.21) et (2.22).

Les lois (3.5) et (3.6) nous renseignent sur la dépendance de la diffusivité en fonction de la taille relative de la couche supérieure α . Leur avantage réside dans le fait qu'elles n'introduisent pas de nouveaux paramètres de calibration par rapport au système à deux

couches de même profondeur. Cependant, pour les obtenir nous avons supposé que l'on pouvait négliger le terme \mathcal{T} dans l'équation (3.3). Pour évaluer cette hypothèse, nous nous appuyons sur la dynamique supposée être celle d'un gaz de vortex. Cette théorie implique deux processus majeurs dans l'équation de la température (3.3) : la déformation du gradient méridien moyen de température par la vitesse barotrope, et surtout, le transport des fluctuations de température par l'écoulement barotrope. Ce dernier processus est porté par le terme $J(\psi, \nabla^2 \tau - \tau/(A^2 \lambda^2))$. Pour une valeur donnée de la taille relative $\alpha = \mathcal{O}(1)$, les deux termes présents dans \mathcal{T} correspondent à l'advection de $\nabla^2 \tau$ par la vitesse barocline $-\nabla \times (\tau \mathbf{e}_z)$ et par l'écoulement de base U . Ces deux vitesses sont bien plus petites que la vitesse barotrope $-\nabla \times (\psi \mathbf{e}_z)$ en raison de la barotropisation de l'écoulement. Autrement dit, ces deux termes advectifs sont sous-dominants par rapport au terme d'advection $J(\psi, \nabla^2 \tau - \tau/(A^2 \lambda^2))$, régissant la théorie du gaz de vortex. Par conséquent, cette estimation suggère que \mathcal{T} est négligeable dans la limite de friction faible, conférant ainsi une cohérence intrinsèque aux lois d'échelle (3.5) et (3.6).

3.3 . Évaluation numérique

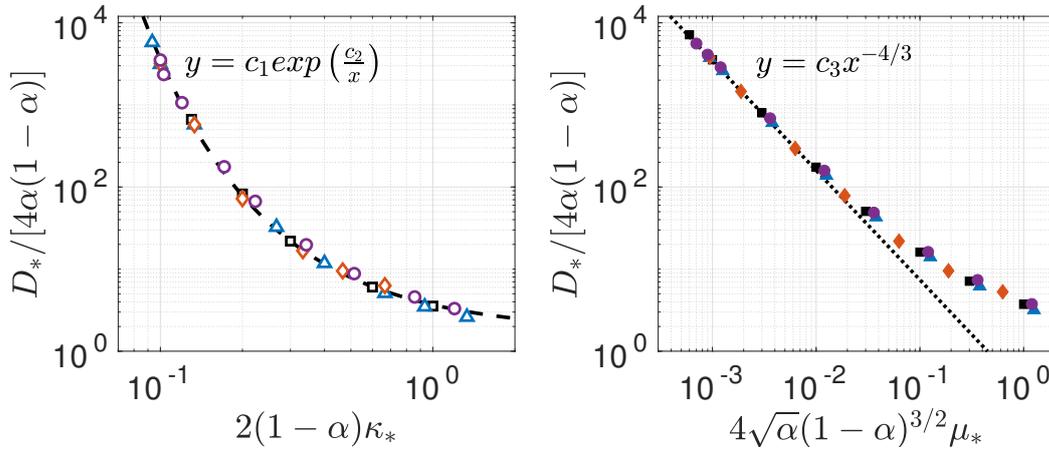


Figure 3.2 - Diffusivité renormalisée en fonction des coefficients de friction linéaire (à gauche) et quadratique (à droite) renormalisés pour différentes valeurs de α . Les symboles et couleurs sont les mêmes que dans la figure 3.1. Les courbes en tiret et en pointillé sont les prédictions (3.5) et (3.6) avec $c_1 = 1.7128$, $c_2 = 0.7644$ et $c_3 = 0.3436$.

Les prédictions théoriques (3.5) et (3.6), nous suggèrent de tracer la diffusivité renormalisée $D_*/[4\alpha(1-\alpha)]$ en fonction du coefficient de friction renormalisé $2(1-\alpha)\kappa_*$ ou $4\sqrt{\alpha}(1-\alpha)^{3/2}\mu_*$. Une telle courbe est affichée en figure 3.2. On constate alors que dans la limite des faibles coefficients de friction, les points numériques s'alignent sur une courbe maîtresse dont le comportement est capturé par les prédictions du cas $\alpha = 1/2$ dérivées dans la partie précédente.

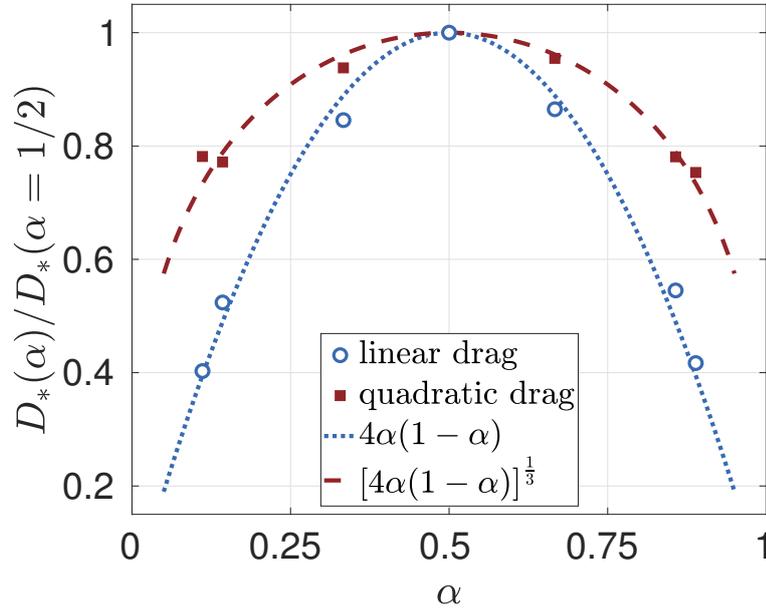


Figure 3.3 – Diffusivité renormalisée par sa valeur pour deux couches de même profondeur pour un coefficient de friction agissant sur le mode barotrope constant (friction linéaire, $K = 5 \times 10^{-2}$; friction quadratique, $M = 5 \times 10^{-4}$). Les lignes sont les prédictions (3.7) et (3.8), qui ne font pas intervenir de paramètre de calibration.

Une approche alternative pour valider les prédictions consiste à faire varier α , tout en maintenant fixe la valeur du coefficient de friction sans dimension agissant sur le mode barotrope, que nous noterons $K = (1 - \alpha)\kappa_*$ ou $M = (1 - \alpha)\mu_*$. En se basant sur les équations (3.5) et (3.6), on peut anticiper que les rapports ci-dessous seront déterminés par les prédictions suivantes, dépourvues de tout paramètre ajustable :

$$\frac{\mathcal{D}_l(\alpha, K/[(1 - \alpha)])}{\mathcal{D}_l(1/2, 2K)} = 4\alpha(1 - \alpha), \quad (3.7)$$

$$\frac{\mathcal{D}_q(\alpha, M/[(1 - \alpha)])}{\mathcal{D}_q(1/2, 2M)} = [4\alpha(1 - \alpha)]^{1/3}, \quad (3.8)$$

pour la friction linéaire et quadratique respectivement. On choisit alors de tracer ces rapports en fonction de α sur la figure 3.3 pour une valeur de K et une valeur de M données. On constate que les données numériques sont en excellent accord avec la théorie pour les deux types de friction.

3.4 . Conclusion

Dans cette section, nous avons développé une théorie permettant de quantifier la diffusion induite par la turbulence barocline dans le modèle à deux couches de fluide avec

des profondeurs arbitraires. L'approche adoptée repose sur la renormalisation des équations gouvernant les modes barotrope et barocline, que nous avons combinée avec les lois d'échelle du gaz de vortex, traduisant le comportement asymptotique de la diffusivité dans la limite des faibles frictions. Les prédictions obtenues ont la particularité de ne nécessiter aucun paramètre de calibration supplémentaire par rapport au cas particulier où les couches de fluide sont de même profondeur. Enfin, pour valider quantitativement cette théorie, nous avons réalisé des DNS démontrant la robustesse de la théorie du gaz de vortex.

Cette théorie représente un premier pas significatif vers la projection d'une parcelle océanique 3D sur ses deux principaux modes [57, 58]. L'objectif serait de mieux comprendre les propriétés du transport dans une parcelle d'océan en analysant le modèle à deux couches qui lui correspond.

4 - Modèle d'Eady

4.1 . Modèle tridimensionnel d'Eady

4.1.1 . Cadre du modèle

La stratification en densité discrète induite par la superposition de deux couches de fluide de masses volumiques distinctes, fait du modèle à deux couches de fluide la représentation la plus élémentaire permettant de modéliser l'instabilité barocline. Cependant, ce modèle peut paraître assez grossier et il est raisonnable de se demander si les lois d'échelle obtenues dans les parties précédentes s'étendent à une parcelle d'océan tridimensionnelle. C'est la question à laquelle nous tenterons de répondre dans ce chapitre.

Pour ce faire, on étudie le modèle d'Eady Boussinesq, consistant en un patch d'océan 3D où coexistent un gradient méridien uniforme de flottabilité et un cisaillement vertical uniforme de l'écoulement zonal [10]. On commence par écrire les équations de Boussinesq pour un fluide en rotation stratifié en densité dans un domaine 3D $(x, y, z) \in [0, L] \times [0, L] \times [0, H]$, avec la gravité et la rotation orientées suivant la verticale :

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + f \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla p + \alpha g T \mathbf{e}_z + \nu_{\perp} \Delta_{\perp} \mathbf{u} + \nu_z \partial_{zz} \mathbf{u}, \quad (4.1)$$

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nu_{b;\perp} \Delta_{\perp} T + \nu_{b;z} \partial_{zz} T, \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (4.3)$$

où $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ et $T(x, y, z, t)$ sont les champs de vitesse et de température potentielle. Le champ $p(x, y, z, t)$ désigne le rapport entre la pression et la valeur nominale de la masse volumique. Les paramètres de contrôle intervenant dans les équations sont le coefficient de dilatation thermique α , l'accélération de la pesanteur g , le paramètre de Coriolis f , les viscosités ν_{\perp} et ν_z , et les diffusivités thermiques $\nu_{b;\perp}$ et $\nu_{b;z}$. On sépare les diffusivités en une composante horizontale (indice \perp) et une composante verticale (indice z) car le problème fait intervenir des longueurs caractéristiques différentes dans ces deux directions. Pour des raisons de simplicité, la température T est l'unique agent stratifiant considéré.

Notre recherche se focalise sur les océans et les atmosphères planétaires, qui sont des couches de fluides peu profondes en rotation rapide et fortement stratifiées. Pour rappel, ce cadre a motivé l'utilisation de l'approximation quasi-géostrophique dans les sections précédentes. Dans ce chapitre, nous maintenons ce même contexte d'application et visons à déterminer si la théorie du gaz de vortex reste pertinente pour décrire les propriétés de transport dans le modèle pleinement 3D d'Eady.

4.1.2 . Vent thermique et équations

Comme dans les chapitres précédents, on s'intéresse aux perturbations par rapport à un écoulement de base induit par l'équilibre de vent thermique. Cet état de base peut

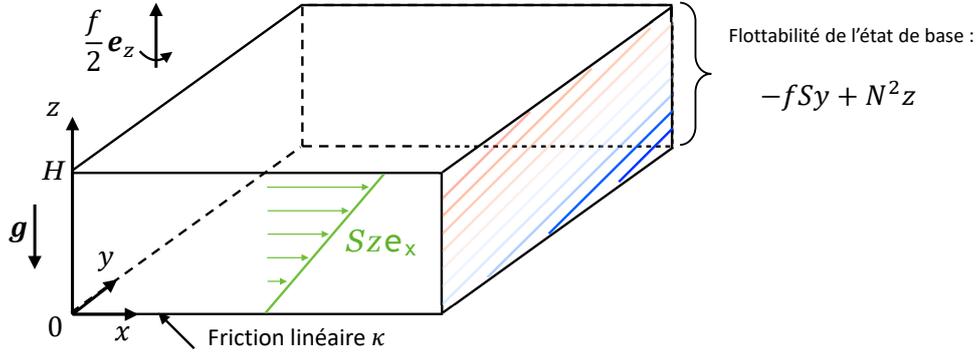


Figure 4.1 – Schéma de l'état de base du modèle d'Eady. Une couche de fluide plane, stratifiée en densité, dans un référentiel tournant à la fréquence $f/2$, est soumise à un gradient méridien de flottabilité. Un écoulement uniformément cisailé dans la direction zonale co-existe avec le gradient méridien de flottabilité, du fait de l'équilibre de vent thermique.

être décrit par un écoulement zonal uniformément cisailé, impliquant un gradient de température uniforme dans la direction méridienne :

$$\mathbf{U} = Sz \mathbf{e}_x, \quad \alpha g \tau = -fSy + N^2z. \quad (4.4)$$

Le gradient de température méridien donné par l'équilibre de vent thermique est proportionnel au cisaillement zonal S . Nous avons aussi considéré un terme de stratification verticale uniforme dont le gradient est proportionnel au paramètre N^2 , où N est la fréquence de Brunt-Väisälä dans l'état de base. Un schéma de l'état de base est affiché en figure 4.1.

On décompose notre solution en deux composantes : la composante de vent thermique et l'écart à cet état de base, soit :

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{U}(z) + v(x, y, z, t), \quad (4.5)$$

$$\alpha g T(x, y, z, t) = \alpha g \tau(y, z) + b(x, y, z, t), \quad (4.6)$$

où b est l'écart à l'état de base de la flottabilité. Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, le champ de vitesse relatif aux écarts, $\mathbf{v} = (u, v, w)$, est à divergence nulle. En injectant (4.5) et (4.6) dans les équations (4.1) et (4.2), on obtient les équations sur les écarts :

$$\partial_t \mathbf{v} + Sz \partial_x \mathbf{v} + S w \mathbf{e}_x + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + f \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} = -\nabla p + b \mathbf{e}_z + \nu_{\perp} \partial_{\perp} \mathbf{v} + \nu_z \partial_{zz} \mathbf{v}, \quad (4.7)$$

$$\partial_t b - fSv + N^2w + Sz \partial_x b + \mathbf{v} \cdot \nabla b = \nu_{b;\perp} \partial_{\perp} b + \nu_{b;z} \partial_{zz} b. \quad (4.8)$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, on considérera que les champs relatifs aux écarts, \mathbf{v} et b , sont périodiques dans la direction horizontale. De plus, on imposera une condition de flux nul à la surface et au fond :

$$\partial_z b|_{z=0} = \partial_z b|_{z=H} = 0. \quad (4.9)$$

De la même manière, on considérera que le champ de vitesse \mathbf{v} est "stress-free" à la surface :

$$w|_{z=0} = 0, \quad \partial_z \mathbf{v}|_{z=H} = 0. \quad (4.10)$$

Et enfin, en ce qui concerne la condition aux limites cinématique au fond, l'idéal serait d'adopter une condition "no-slip", $\mathbf{v}|_{z=0} = 0$. Cependant, ce type de condition entraîne une forte friction, en raison de l'apparition d'une couche limite d'Ekman dont la taille typique est $\sqrt{\nu_z/f}$. Résoudre numériquement cette couche limite semble impossible pour des valeurs réalistes des paramètres. De plus, avoir une couche limite laminaire près d'un plancher océanique parfaitement plat ne paraît pas très réaliste. C'est pourquoi nous optons plutôt pour une condition aux limites frictionnelle, formulée de la manière suivante :

$$w|_{z=0} = 0, \quad \partial_z \mathbf{v}|_{z=0} = \frac{\kappa H}{\nu_z} \mathbf{v}|_{z=0}. \quad (4.11)$$

De cette manière, nous pouvons réguler l'intensité de la friction en ajustant le coefficient κ . Il s'agit d'une friction linéaire au fond, un type de friction déjà étudié précédemment pour le modèle à deux couches de fluide. Il est intéressant de remarquer que la dissipation d'énergie effective dans le cœur de l'écoulement en lien avec cette condition aux limites correspond à un coefficient de friction effectif :

$$\kappa_{eff} = \frac{\sqrt{2\nu_z}}{H + \frac{\sqrt{2f\nu_z}}{\kappa} + \frac{fH\nu_z}{\kappa^2}} \times \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{f\nu_z}{2}} \frac{1}{\kappa H} \right), \quad (4.12)$$

qui implique aussi la diffusivité verticale ν_z . Ce résultat est détaillé dans l'annexe A . Il est également démontré que κ_{eff} correspond à la friction de pompage relative à la spirale d'Ekman de telle sorte que $w|_{0^+} = \kappa_{eff} \zeta|_{0^+}$, où 0^+ désigne la valeur de la coordonnée verticale z juste au dessus de la couche limite d'Ekman.

On adimensionne les équations avec H et f^{-1} comme longueur et temps caractéristiques.

$$(x^\#, y^\#, z^\#) = (x, y, z)/H, \quad (u^\#, v^\#, w^\#) = (u, v, w)/(fH), \quad t^\# = ft, \quad (4.13)$$

$$b^\# = b/(f^2 H), \quad p^\# = p/(f^2 H^2), \quad E_i = \nu_i/(fH^2), \quad \kappa^\# = \kappa/f. \quad (4.14)$$

Dans une optique de simplifier les équations, on abandonne la notation $\#$. Les équations sans dimension s'écrivent alors :

$$\partial_t \mathbf{v} + Ro z \partial_x \mathbf{v} + Ro w \mathbf{e}_x + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} = -\nabla p + b \mathbf{e}_z + E_\perp \partial_\perp \mathbf{v} + E_z \partial_{zz} \mathbf{v}, \quad (4.15)$$

$$\partial_t b - Ro v + \left(\frac{N}{f} \right)^2 w + Ro z \partial_x b + \mathbf{v} \cdot \nabla b = E_{b,\perp} \partial_\perp b + E_{b,z} \partial_{zz} b, \quad (4.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4.17)$$

où $Ro = S/f$ est le nombre de Rossby. Enfin, les conditions aux limites sans dimension s'écrivent :

$$w|_{z=1} = 0, \quad \partial_z \mathbf{v}_\perp|_{z=1} = 0, \quad (4.18)$$

$$w|_{z=0} = 0, \quad \partial_z \mathbf{v}_\perp|_{z=0} = \frac{\kappa}{E_z} \mathbf{v}_\perp|_{z=0}, \quad (4.19)$$

$$\partial_z b|_{z=0} = \partial_z b|_{z=1} = 0. \quad (4.20)$$

4.1.3 . Objectifs

On souhaite quantifier le transport de chaleur méridien dans le régime statistiquement stationnaire atteint par les solutions du système (4.15,4.16,4.17) avec les conditions aux limites (4.18,4.19,4.20). L'objectif est de montrer que la théorie du gaz de vortex permet aussi de quantifier le transport de chaleur méridien dans le modèle d'Eady. On étudiera alors le flux de flottabilité $\langle vb \rangle$, où $\langle \cdot \rangle$ représente une moyenne spatiale et temporelle.

Dans cette optique, nous avons réalisé des DNS de ce système en utilisant le solveur pseudo-spectral `Coral` [59], qui a été testé et validé à l'aide de résultats analytiques [60], et comparé avec `Dedalus Software`, un autre solveur pseudo-spectral [61]. Le solveur `Coral` utilise une décomposition spatiale de Fourier dans les directions horizontales et de Chebyshev dans la direction verticale. Les conditions aux limites au fond et à la surface sont imposées grâce à la méthode de "basis recombination". Les simulations sont initialisées soit à partir d'un bruit de faible amplitude, soit à partir de la solution d'une simulation précédente. Comme dans les chapitres précédents, nous nous intéressons à la situation où la taille horizontale du domaine L est très grande devant la longueur de mélange et l'échelle typique contenant l'énergie. Cela nous garantit des propriétés de transport indépendantes de la largeur du domaine L . De même, les diffusivités horizontales sont choisies suffisamment faibles pour ne pas affecter les propriétés de transport dans le régime statistiquement stationnaire.

Le rôle des diffusivités verticales quant à lui, est plus délicat. En effet, elles sont cruciales pour satisfaire les conditions aux limites (4.18), (4.19), et (4.20). Les couches limites se développant alors près des parois peuvent induire des effets agéostrophiques, non-caractérisés par le modèle du gaz de vortex. Dans notre étude, on s'intéresse à la limite où les diffusivités verticales sont très faibles. Dans ce cas, elles ne devraient a priori pas influencer le cœur de l'écoulement autrement que par le coefficient de friction effectif κ_{eff} . Cette hypothèse est confortée par une analyse plus approfondie de l'impact des diffusivités verticales, que nous discutons dans Gallet et al. [32]. Nous n'approfondirons pas davantage cette question ici, mais nous admettons que pour les valeurs de diffusivités choisies, les propriétés de transport de l'écoulement sont entièrement dominées par la dynamique du cœur, n'impliquant E_z et $E_{b;z}$ que via le coefficient de friction effectif κ_{eff} .

Enfin, on s'intéresse également au rayon de déformation de Rossby, dont la définition est moins évidente que dans le modèle à deux couches de fluide. Dans le modèle d'Eady, la stratification totale de flottabilité est donnée par l'expression adimensionnée $(N/f)^2 z + \bar{b}(z)$, où l'opérateur $\bar{\cdot}$ indique une moyenne horizontale combinée à une moyenne temporelle. Contrairement au modèle à deux couches de fluide, où la stratification était entièrement dictée par l'état de base, dans le modèle d'Eady, l'écoulement émergent peut également contribuer à la stratification via le terme $\bar{b}(z)$. Nous pouvons alors tenter d'introduire un rayon de déformation de Rossby qui lorsqu'il est normalisé par H , exprime le rapport entre la fréquence de Brunt-Väisälä totale $\mathcal{N} = (\partial_z \overline{\alpha g T})^{1/2}$ et

le paramètre de Coriolis f . Ainsi, en supposant que la stratification émergente est à peu près uniforme, nous définissons le rayon de déformation de Rossby λ comme suit :

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{N}{f}\right)^2 + \bar{b}(1) - \bar{b}(0)}. \quad (4.21)$$

Pour rappel, dans cette définition λ est adimensionné par la profondeur de la couche de fluide H .

4.1.4 . Premiers résultats

Sur la figure 4.2, plusieurs grandeurs sont tracées pour rendre compte des aspects qualitatifs des solutions du modèle d'Eady dans le régime statistiquement stationnaire. Dans un premier temps, sur la visualisation 3D du champ de flottabilité totale, on observe que l'écoulement reste fortement stratifié, avec une pente typique des isopycnes très faible. Dans un second temps, on compare deux simulations. On appelle simulation (1), la simulation correspondant aux trois premières représentations, et simulation (2), celle correspondant aux deux dernières. La simulation (1) a été réalisée avec une rotation plus lente et une stratification plus faible que la simulation (2). De plus, le coefficient de friction sans dimension est plus faible dans la simulation (1) que dans la simulation (2). Dans la simulation (1), la vorticité au cœur de l'écoulement ressemble a un gaz de vortex dilué mais celui-ci présente une asymétrie cyclone-anticyclone. Cette asymétrie est probablement liée à la formation de structures ag ostrophiques fines proche de la surface [62-65]. La simulation (2) quant à elle présente un gaz de vortex moins dilué en raison du coefficient de friction plus fort. Cependant, la symétrie cyclone-anticyclone typique de la quasi-géostrophie est, elle, bien vérifiée.

Sur la figure 4.3, on trace le flux méridien de flottabilité $\langle vb \rangle$ en fonction du coefficient de friction κ . Le flux mesuré varie de plus de quatre ordre de grandeur sur l'entièreté de nos simulations. De plus, on constate que le transport croît à mesure que l'on réduit le coefficient de friction, et décroît rapidement lorsqu'on réduit le nombre de Rossby.

4.2 . Quasi-géostrophie dans le modèle d'Eady

4.2.1 . Limite quasi-géostrophique du modèle d'Eady

En raison du contexte géophysique de notre étude et des coupes de vorticité tracées sur la figure 4.2, on anticipe une dynamique quasi-géostrophique dans le cœur de l'écoulement. On se propose donc d'examiner la limite quasi-géostrophique des équations du modèle d'Eady afin d'identifier les caractéristiques spécifiques de cette dynamique. En procédant ainsi, on espère établir une loi théorique permettant d'expliquer les données brutes de la figure 4.3. De plus, cette approche nous permettra de déterminer si les propriétés de transport observées sont effectivement régies par la quasi-géostrophie ou si les phénomènes ag ostrophiques exercent une influence non-négligeable.

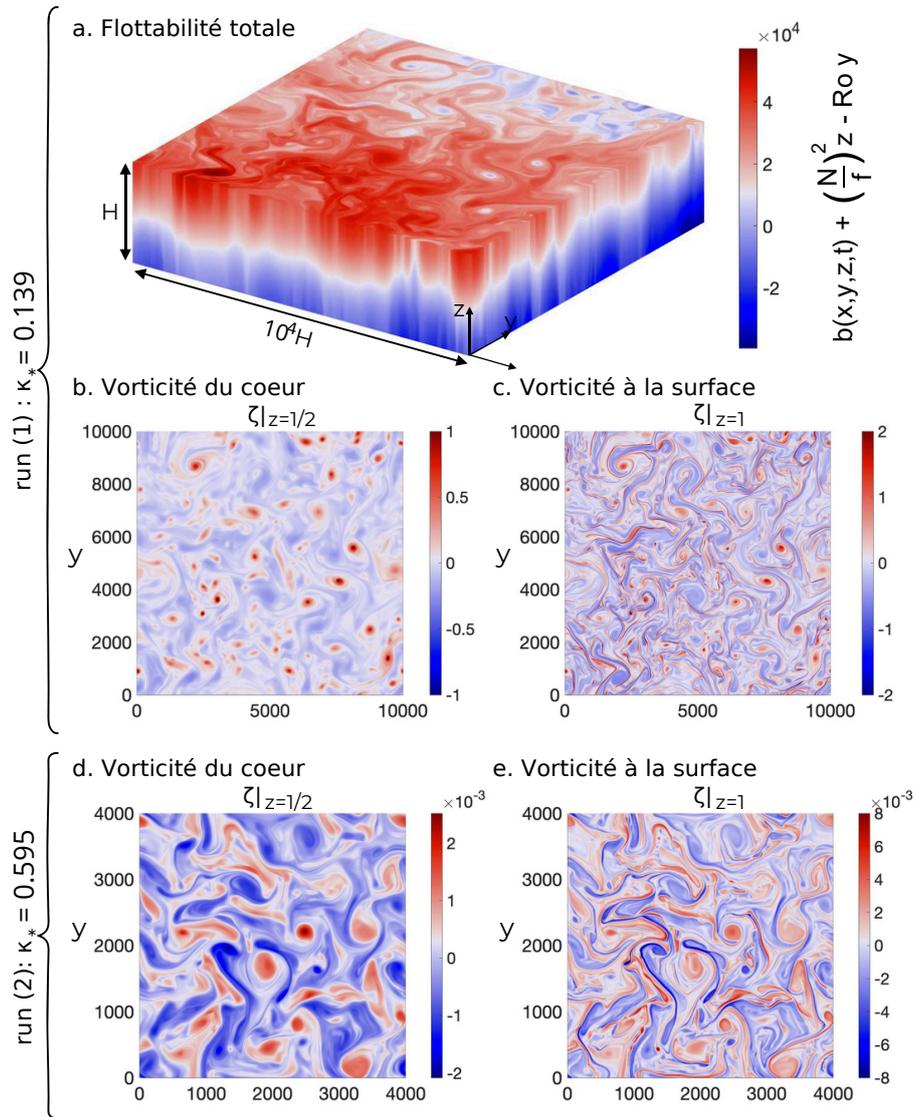


Figure 4.2 – Représentation de différents champs dans le régime statistiquement stationnaire pour deux simulations distinctes. La simulation (1) correspond aux paramètres suivants : $Ro = 2.5$, $(N/f)^2 = 30000$ et $\kappa_* = 0.139$ (défini en équation (4.37)). Quant à la simulation (2), elle est définie par les paramètres suivants : $Ro = 0.0255$, $(N/f)^2 = 40000$ et $\kappa_* = 0.595$. La figure (a) illustre le champ de flottabilité totale. On souligne la différence d'échelles entre la direction horizontale et la direction verticale, ainsi que la faible pente des isopycnes. Les figures (b) et (d) présentent une coupe horizontale de la vorticité dans le cœur de l'écoulement, tandis que les figures (c) et (e) montrent une coupe de la vorticité à la surface.

La procédure standard pour obtenir la limite quasi-géostrophique du modèle d'Eady est de réaliser un développement asymptotique des équations (4.15) et (4.16) avec Ro comme petit paramètre [8]. Il est nécessaire aussi de supposer que la pente des isopycnes

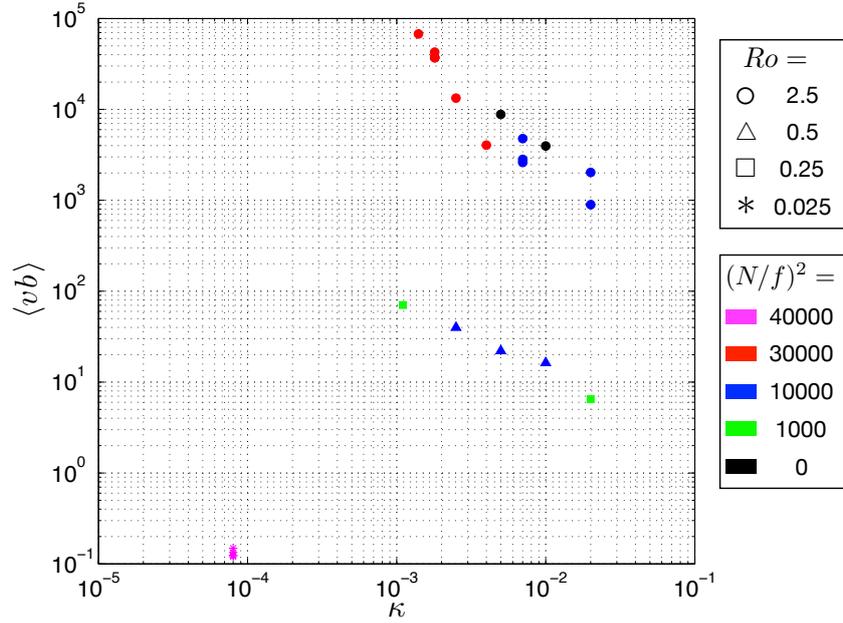


Figure 4.3 – Flux de flottabilité méridien sans dimension en fonction du coefficient de friction adimensionné. Le nombre de Rossby et la stratification de l'état de base $(N/f)^2$ sont variés sur plusieurs ordres de grandeur.

est très petites $Ro/\lambda^2 \ll 1$. Ici, on reproduit ce développement en supposant que la stratification est uniforme¹ et que $\lambda = \mathcal{O}(1)$. On considère donc un développement de la forme :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{v}} &= Ro \mathbf{v}^{(0)} + Ro^2 \mathbf{v}^{(1)} + \dots \\ \tilde{p} &= Ro p^{(0)} + Ro^2 p^{(1)} + \dots \\ \tilde{b} &= Ro b^{(0)} + Ro^2 b^{(1)} + \dots\end{aligned}\quad (4.22)$$

où le tilde représente les écarts par rapport aux champs moyennés horizontalement. Nous supposons que ces écarts dépendent de l'espace mais varient lentement avec une variable de temps $\hat{t} = Rot$. Les termes diffusifs dans le cœur du domaine sont négligés. De plus, le coefficient de friction présent dans la condition aux limites de pompage au fond, $w|_{0+} = \kappa_{eff} \zeta|_{0+}$, est supposé être de l'ordre de Ro , c'est-à-dire $\kappa_{eff} = Ro \hat{\kappa}$, où $\hat{\kappa}$ est de l'ordre de l'unité. Ainsi, à l'ordre 1 en Ro , on a :

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}^{(0)} = -\nabla p^{(0)} + b^{(0)} \mathbf{e}_z, \quad (4.23)$$

avec les conditions aux limites : $w^{(0)}|_{0+} = w^{(0)}|_1 = 0$. On retrouve ainsi l'équilibre géostrophique et l'équilibre hydrostatique, dont la solution est :

$$\mathbf{v}^{(0)} = -\nabla \times (p^{(0)} \mathbf{e}_z), \quad b^{(0)} = \partial_z p^{(0)}. \quad (4.24)$$

1. Cette hypothèse est valable sous réserve que la stratification émergente soit uniforme ou négligeable. Dans Gallet et al. [32], nous allons au-delà de la quasi-géostrophie et confirmons que c'est bien le cas.

À cet ordre la vitesse verticale disparaît et la vorticité verticale s'écrit $\zeta^{(0)} = \Delta_{\perp} p^{(0)}$.   l'ordre suivant, les équations sur la vorticité et sur la flottabilité, deviennent :

$$\partial_t \Delta_{\perp} p^{(0)} + z \partial_x \Delta_{\perp} p^{(0)} + J(p^{(0)}, \Delta_{\perp} p^{(0)}) = \partial_z w^{(1)}, \quad (4.25)$$

$$\partial_t \partial_z p^{(0)} - \partial_x p^{(0)} + z \partial_{xz} p^{(0)} + J(p^{(0)}, \partial_z p^{(0)}) = -\lambda^2 w^{(1)}, \quad (4.26)$$

En dérivant l'équation (4.26) par rapport à z , puis en y ajoutant l'équation (4.25) multipliée par λ^2 , on élimine le terme $w^{(1)}$. On trouve alors le système d'équation :

$$\partial_t q + J(p^{(0)}, q) + z \partial_x q = 0, \quad (4.27)$$

$$q = \Delta_{\perp} p^{(0)} + \frac{\partial_{zz} p^{(0)}}{\lambda^2}, \quad (4.28)$$

où q est la vorticité potentielle dans le modèle d'Eady. La première équation traduit la conservation de la vorticité potentielle dans notre couche de fluide. Les conditions aux limites pour clore le système sont les suivantes : $w^{(1)}|_{0^+} = \hat{\kappa} \Delta_{\perp} p^{(0)}|_{0^+}$ et $w^{(1)}|_1 = 0$. Il faut évaluer (4.26) en $z = 0^+$ et en $z = 1$ pour les rendre applicables :

$$\partial_t \partial_z p^{(0)}|_1 - \partial_x p^{(0)}|_1 + \partial_{xz} p^{(0)}|_1 + J(p^{(0)}|_1, \partial_z p^{(0)}|_1) = 0, \quad (4.29)$$

$$\partial_t \partial_z p^{(0)}|_{0^+} - \partial_x p^{(0)}|_{0^+} + J(p^{(0)}|_{0^+}, \partial_z p^{(0)}|_{0^+}) + \lambda^2 \hat{\kappa} \Delta_{\perp} p^{(0)}|_{0^+} = 0. \quad (4.30)$$

La dynamique quasi-géostrophique de notre portion d'océan est régie par l'équation de conservation (4.27) de la vorticité potentielle (4.28), avec les conditions aux limites (4.29) et (4.30). Cette équation de conservation met en lumière le lien entre les variations de la vorticité verticale, $\zeta = \Delta_{\perp} \tilde{p}$, et les mouvements verticaux des isopycnes. Pour illustrer ce mécanisme, considérons une colonne de fluide cylindrique entre deux isopycnes. Lorsque cette colonne se contracte ou s'étend à cause du rapprochement ou de l'éloignement des isopycnes, la vorticité verticale de la colonne varie de manière analogue au principe de conservation du moment cinétique.

4.2.2 . Variables quasi-géostrophiques

Les coefficients κ et E_z n'influent sur la dynamique quasi-géostrophique que par le biais du coefficient de friction effectif associé au pompage d'Ekman. Ainsi, on peut restreindre le nombre de paramètres sans dimension, en introduisant le changement de variables quasi-géostrophique :

$$\hat{t} = \frac{\lambda}{Ro} T, \quad x = \lambda X, \quad y = \lambda Y, \quad (4.31)$$

$$\tilde{p} = Ro \lambda P(X, Y, z, T), \quad q = \frac{Ro}{\lambda} Q(X, Y, z, T). \quad (4.32)$$

Avec ce changement de variables, les équations quasi-géostrophiques deviennent :

$$\partial_T Q + J_{\mathbf{X}}(P, Q) + z \partial_X Q = 0, \quad (4.33)$$

$$Q = \Delta_{\mathbf{X}; \perp} P + \partial_{zz} P, \quad (4.34)$$

$$\partial_T \partial_z P|_1 - \partial_X P|_1 + \partial_{Xz} P|_1 + J_{\mathbf{X}}(P|_1, \partial_z P|_1) = 0, \quad (4.35)$$

$$\partial_T \partial_z P|_{0^+} - \partial_X P|_{0^+} + J_{\mathbf{X}}(P|_{0^+}, \partial_z P|_{0^+}) + \frac{\kappa_{eff} \lambda}{Ro} \Delta_{\mathbf{X}; \perp} P|_{0^+} = 0, \quad (4.36)$$

où $J_{\mathbf{X}}(f, g) = \partial_X f \partial_Y g - \partial_Y f \partial_X g$ et $\Delta_{\mathbf{X}; \perp} = \partial_{XX} + \partial_{YY}$. Ce système d'équations présente une particularité notable. En effet, il ne dépend que d'un seul paramètre de contrôle :

$$\kappa_* = \frac{\kappa_{eff} \lambda}{Ro}. \quad (4.37)$$

Ce paramètre joue un rôle similaire au coefficient de friction adimensionné du modèle à deux couches de fluide, tel qu'introduit et utilisé dans les sections précédentes. Ainsi, une fois le régime statistiquement stationnaire atteint, les solutions de ce système d'équations exhibent un transport méridien de flottabilité, $D_* = \langle \partial_X P \partial_Z P \rangle = \langle vb \rangle / (Ro^2 \lambda)$, ne dépendant que de κ_* , soit :

$$D_* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle vb \rangle}{Ro^2 \lambda} = \mathcal{F} \left(\kappa_* = \frac{\kappa_{eff} \lambda}{Ro} \right), \quad (4.38)$$

où \mathcal{F} est la fonctionnelle décrivant la dépendance de la diffusivité méridienne quasi-géostrophique par rapport au coefficient de friction sans dimension. Le changement de variables quasi-géostrophique nous a permis de mettre en évidence de manière rigoureuse la quantité significative D_* et son unique paramètre de contrôle κ_* . Cependant, une analogie avec le modèle à deux couches de fluide aurait également abouti au même résultat. En effet, dans le modèle d'Eady, le nombre de Rossby est l'équivalent de la vitesse de cisaillement du modèle à deux couches de fluide. Ainsi, de la même manière que pour le modèle à deux couches de fluide, D_* représente le flux méridional divisé par le produit entre la vitesse de cisaillement au carré et le rayon de déformation de Rossby, tandis que κ_* équivaut au produit du coefficient de friction au fond et du rayon de déformation de Rossby, le tout divisé par la vitesse de cisaillement.

La théorie du gaz de vortex vise à quantifier les propriétés de transport d'un écoulement quasi-géostrophique dans la limite de basse friction en modélisant son champ de vorticité dans l'espace réel par une repr esentation id alis ee de gaz de vortex. Ici, elle nous permet d'obtenir une expression th eorique pour la fonctionnelle \mathcal{F} . Comme on consid ere une stratification uniforme avec une friction linéaire, il s'agit de la pr ediction d eriv ee dans le chapitre 2 et donn ee par :

$$D_* = c_1 \exp \left(\frac{c_2}{\kappa_*} \right) \quad (4.39)$$

où c_1 et c_2 sont des param etres ajustables qui d ependent a priori du mod ele consid er e. Finalement, si la dynamique quasi-g eostrophique du c oeur de l' ecoulement gouverne effectivement le transport de flottabilité, alors la loi (4.39) doit également s'appliquer aux solutions du mod ele d'Eady complet.

4.2.3 . Dynamique effective bidimensionnelle

Le système d'équations quasi-géostrophique (4.33,4.34, 4.35,4.36) peut être résolu efficacement en utilisant la méthode suivante.

On commence par constater que $Q = 0$ est une solution triviale de (4.33). La conservation de la vorticité potentielle nous indique alors que si $Q = 0$ à l'instant initial alors $Q = 0$ tout le temps. Supposons que c'est le cas. On décompose P en une série de Fourier dans les directions horizontales :

$$P(X, Y, z, T) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{P}_{\mathbf{k}}(z, T) \times e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}}, \quad (4.40)$$

où $\mathbf{X} = (X, Y)$ et où le vecteur d'onde horizontal \mathbf{k} prend les valeurs discrètes compatibles avec les conditions aux limites horizontales. On en profite pour introduire les notations suivantes pour les séries de Fourier de P et de sa dérivée verticale aux frontières :

$$P|_{0+} = \sum_{\mathbf{k}} \{P|_0\}_{\mathbf{k}}(T) \times e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}}, \quad (4.41)$$

$$P|_1 = \sum_{\mathbf{k}} \{P|_1\}_{\mathbf{k}}(T) \times e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}}, \quad (4.42)$$

$$\partial_z P|_{0+} = \sum_{\mathbf{k}} \{\partial_z P|_0\}_{\mathbf{k}}(T) \times e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}}, \quad (4.43)$$

$$\partial_z P|_1 = \sum_{\mathbf{k}} \{\partial_z P|_1\}_{\mathbf{k}}(T) \times e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}}. \quad (4.44)$$

En injectant (4.40) dans l'équation de conservation de la vorticité potentielle (4.33) avec $Q = 0$, on trouve pour chaque vecteur d'onde :

$$-k^2 \hat{P}_{\mathbf{k}} + \partial_{zz} \hat{P}_{\mathbf{k}} = 0, \quad (4.45)$$

avec $k = |\mathbf{k}|$. La solution de cette équation s'exprime en fonction de $\{\partial_z P|_0\}_{\mathbf{k}}$ et $\{\partial_z P|_1\}_{\mathbf{k}}$:

$$\hat{P}_{\mathbf{k}}(z, T) = la \frac{-\{\partial_z P|_0\}_{\mathbf{k}} \cosh[k(z-1)] + \{\partial_z P|_1\}_{\mathbf{k}} \cosh(kz)}{k \sinh(k)}. \quad (4.46)$$

En évaluant cette expression de la solution en $z = 0$ et en $z = 1$, on établit deux relations d'inversion reliant $\{P|_0\}_{\mathbf{k}}$ et $\{P|_1\}_{\mathbf{k}}$ aux dérivées verticales $\{\partial_z P|_0\}_{\mathbf{k}}$ et $\{\partial_z P|_1\}_{\mathbf{k}}$:

$$\{P|_0\}_{\mathbf{k}} = \frac{-\{\partial_z P|_0\}_{\mathbf{k}} \cosh(k) + \{\partial_z P|_1\}_{\mathbf{k}}}{k \sinh(k)}, \quad (4.47)$$

$$\{P|_1\}_{\mathbf{k}} = \frac{-\{\partial_z P|_0\}_{\mathbf{k}} + \{\partial_z P|_1\}_{\mathbf{k}} \cosh(k)}{k \sinh(k)}. \quad (4.48)$$

On constate donc que les inconnues indépendantes du système d'équations quasi-géostrophiques (4.33,4.34,4.35,4.36) se réduisent à deux champs horizontaux dépendants du temps. En d'autres termes, si l'on connaît $P|_{0+}$ et $P|_1$ à un instant T , on peut déduire la

solution complète dans tout le domaine en utilisant les relations d'inversion (4.47,4.48) et l'expression de la solution dans l'ensemble du domaine (4.46). D'un point de vue numérique, il nous suffit de résoudre les équations sur les conditions aux limites ((4.35),(4.36)) à chaque pas de temps, les relations d'inversions introduisant un couplage entre les deux équations via les dérivées verticales $\partial_z P|_{0+}$ et $\partial_z P|_1$. La quasi-géostrophie nous a donc permis de transformer un problème pleinement 3D en un problème 2D. Le code utilisé pour résoudre ce problème 2D est similaire à celui décrit dans la partie 2.4. De plus, nous avons ajouté un terme d'hyperviscosité $-\nu\Delta_{\mathbf{x},\perp}^4\partial_z P|_1$ et $-\nu\Delta_{\mathbf{x},\perp}^4\partial_z P|_{0+}$ à droite de (4.35) et (4.36), afin de dissiper l'enstrophie à petite échelle. La valeur du coefficient d'hyperviscosité sans dimension ν a été choisi suffisamment faible afin de ne pas affecter les propriétés de transport dans le régime statistiquement stationnaire. De même, la taille du domaine a été choisie suffisamment grande pour éviter tout effet de taille finie.

En conclusion, en plus d'avoir découvert une méthode simple et peu coûteuse pour simuler la limite quasi-géostrophique du modèle d'Eady, nous avons démontré que la dynamique quasi-géostrophique dans ce modèle est décrite par deux équations 2D couplées (comme pour le modèle à deux couches de fluide mais avec des équations différentes).

4.3 . Évaluation numérique

4.3.1 . Diffusivité méridienne dans le modèle d'Eady

Dans cette partie, on cherche à évaluer la validité de la loi (4.39). Pour cela, on réalise des DNS du modèle d'Eady complet et de sa version quasi-géostrophique. Ainsi, on trace sur la figure 4.4, la diffusivité D_* en fonction du coefficient de friction κ_* , à la fois pour le modèle d'Eady 3D et pour sa version quasi-géostrophique. Dans cette représentation, l'ensemble de nos données s'aligne sur une courbe maîtresse en accord avec la prédiction (4.39) avec des coefficients mesurés par régression linéaire valant $c_1 = 0.32$ et $c_2 = 0.61$. Ce résultat va dans le sens d'une annulation de la vorticité potentielle dans le cœur de l'écoulement, comme supposé dans la sous-section 4.2.3. De plus, cela signifie que, malgré la présence de processus ag ostrophiques, le transport de flottabilité dans le modèle d'Eady 3D est bien dominé par une dynamique quasi-géostrophique. Finalement, la théorie du gaz de vortex permet effectivement de quantifier le transport de cette dynamique quasi-géostrophique. Cela valide en particulier le fait que le raisonnement construit en utilisant l'intuition physique fournie par le modèle à deux couches de fluide quasi-géostrophique se prolonge à des modèles pleinement 3D comme le modèle d'Eady.

4.3.2 . Un flux méridien verticalement uniforme

La limite quasi-géostrophique du modèle d'Eady permet d'obtenir une prédiction pour la dépendance verticale du flux de flottabilité. En effet, en reprenant l'idée que la vorticité potentielle s'annule dans le modèle quasi-géostrophique, alors à toutes profondeurs on a :

$$0 = \overline{vq} = \overline{p_x p_{xx}} + \overline{p_x p_{yy}} + \frac{1}{\lambda^2} \overline{p_x p_{zz}} = \frac{1}{\lambda^2} \partial_z \overline{vb}. \quad (4.49)$$

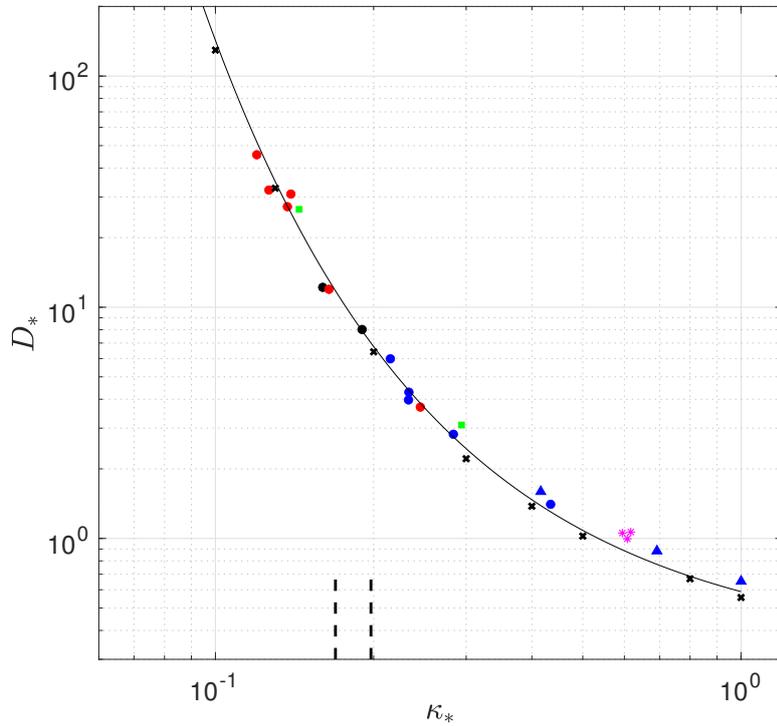


Figure 4.4 – Diffusivité D_* en fonction du coefficient de friction renormalisé κ_* dans le modèle d'Eady. Les couleurs sont les mêmes que sur la figure 4.3. Les croix correspondent aux simulations des équations quasi-géostrophiques. La courbe pleine correspond à la prédiction du gaz de vortex (4.39) avec $c_1 = 0.32$ et $c_2 = 0.61$.

En d'autres termes, dans la limite quasi-géostrophique, le flux méridien de flottabilité demeure uniforme verticalement. Cette prédiction est illustrée sur la figure 4.5, où nous avons tracé le profil du flux de flottabilité méridien pour les simulations (1) et (2) de la figure 4.2. Nous constatons ainsi que cette prédiction quasi-géostrophique est en très bon accord avec les simulations réalisées à l'aide du modèle d'Eady. Dans les deux cas, nous observons que le flux de flottabilité méridien reste constant dans le cœur de l'écoulement, s'écartant très légèrement de cette constante au niveau du fond et de la surface.

Dans cette étude, nous nous sommes principalement concentrés sur le flux méridien de flottabilité. Cependant, un résultat classique est que le flux total suit la direction des isopycnes [22, 66-68]. Cela se traduit par l'égalité $\langle wb \rangle = \frac{Ro}{\lambda^2} \langle vb \rangle$, où Ro/λ^2 représente la pente des isopycnes. Ainsi, sur la figure 4.5, nous avons tracé $\lambda^2 \overline{wb}$ en plus de $Ro \overline{vb}$. Nous observons alors que dans le cœur de l'écoulement, ces deux termes sont effectivement à peu près égaux, confirmant ainsi ce résultat. À la surface et au fond, les effets visqueux induisent un léger écart par rapport à la valeur au centre. Dans l'article Gallet et al. [32] nous proposons une analyse plus approfondie du flux vertical de flottabilité dans le modèle d'Eady et nous mettons également l'accent sur l'examen détaillé de la stratification

émergente.

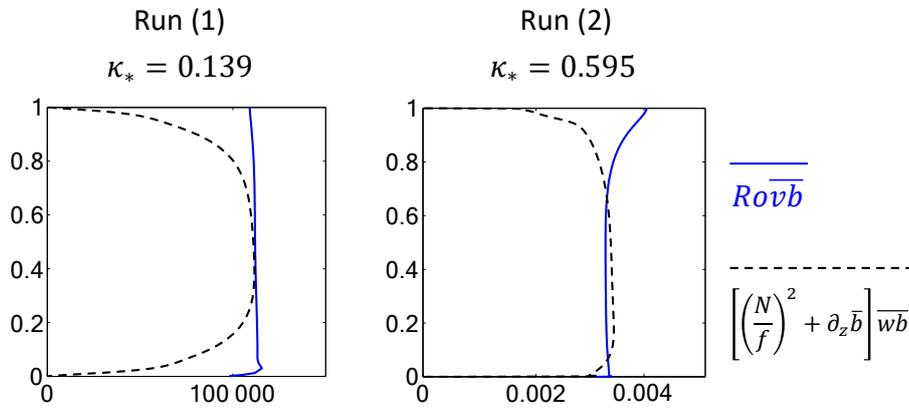


Figure 4.5 – Profils verticaux des flux méridien et vertical normalisés. Les simulations (1) et (2) correspondent à celles de la figure 4.2.

4.4 . Conclusion

En résumé, nous avons étudié le modèle Boussinesq d'Eady, qui se distingue du modèle à deux couches de fluide quasi-géostrophique par le fait qu'il est complètement 3D. Nous avons montré que le transport de chaleur méridien est gouverné par la dynamique quasi-géostrophique du cœur de l'écoulement dans la limite où la vitesse de rotation et la stratification sont fortes. En examinant la limite quasi-géostrophique des équations du modèle d'Eady, nous avons déterminé le coefficient de diffusivité méridien pertinent D_* ainsi que l'unique paramètre de contrôle κ_* . Enfin, en appliquant la théorie du gaz de vortex, nous avons établi une loi d'échelle reliant D_* et κ_* , laquelle a été confirmée par des DNS.

De manière plus générale, ce résultat est particulièrement satisfaisant car il indique que la théorie du gaz de vortex, élaborée et validée à partir de modèles partiellement 3D, est également capable de fournir des prédictions valides pour le transport de chaleur dans des modèles totalement 3D.

5 - Conclusion et perspectives

Dans cette partie, nous avons établi une loi d'échelle pour la diffusivité méridienne de chaleur par la turbulence barocline à l'aide du modèle quasi-géostrophique à deux couches de fluide dans la limite de friction faible au fond. En nous appuyant sur la théorie du gaz de vortex de Gallet et Ferrari [28] et en étudiant en profondeur le rayon des cœurs de tourbillons, nous avons étendu la théorie et affiné la prédiction dans le cas d'une friction quadratique. Nous avons testé et validé cette nouvelle prédiction dans un modèle à deux couches de profondeurs égales. La seconde étape de notre travail a consisté à étendre nos lois d'échelle pour le transport de chaleur à un modèle à deux couches de fluide avec des profondeurs arbitraires, le but étant de se rapprocher d'un modèle océanique plus réaliste. Pour ce faire, nous avons renormalisé les variables et paramètres du problème, nous ramenant ainsi, dans la limite asymptotique de faible friction, à un modèle à deux couches de profondeurs identiques. Enfin, nous avons étudié le modèle d'Eady, un modèle tridimensionnel de patch d'océan. Nous avons démontré que les lois établies dans les deux premières parties pouvaient également être utilisées pour décrire le transport de chaleur dans ce modèle, étendant ainsi encore davantage la pertinence de la théorie du gaz de vortex.

Mon travail sur le modèle à deux couches de fluide quasi-géostrophique a été compilé en deux articles publiés dans *Physical Review Fluids* en 2023 [69] et 2024 [70]. Mon travail sur la limite quasi-géostrophique du modèle d'Eady a contribué à l'écriture d'un article sur les propriétés de transport dans le modèle d'Eady 3D. L'article en question est une collaboration entre notre équipe au CEA et des membres de l'équipe ClIMA au MIT, et a été publié dans *Journal of Fluid Mechanics* en 2022 [32].

Les prochaines étapes vers une paramétrisation de la turbulence barocline sont multiples. Tout d'abord, il est nécessaire de considérer un paramètre β non nul pour prendre en compte la courbure de la planète, qui peut avoir une influence significative sur les propriétés de transport. Ensuite, il faut revoir la structure verticale uniforme du modèle d'Eady abordée dans la partie 4. En effet, dans le contexte du courant circum-polaire Antarctique, par exemple, une description précise du transport par les tourbillons méso-échelles nécessiterait un état de base avec un cisaillement vertical non uniforme et une inversion du gradient de vorticité potentielle à une certaine profondeur [6, 71-73]. En ce qui concerne le modèle à deux couches de fluide, Gallet et Ferrari [74] ont étendu la théorie du gaz de vortex pour inclure l'effet β , dans le cas particulier où les couches sont de mêmes profondeurs. En parallèle, Meunier et al. [57, 58] ont étudié un modèle plus général de patch d'océan, en prenant en compte un paramètre β non nul et un cisaillement non uniforme. En utilisant des arguments basés sur la dynamique quasi-géostrophique de l'écoulement, ils ont retrouvé analytiquement la forme de la paramétrisation de Gent-McWilliams/Redi, prédominante dans les modèles de climat [20, 22, 23]. De plus, ils ont

établi une théorie quantitative permettant de prédire la structure verticale du transport de flottabilité, remettant ainsi en question la pratique courante d'utiliser des coefficients de diffusion verticalement invariants. Il leur manque cependant une théorie quantifiant l'amplitude du flux de chaleur pour obtenir une paramétrisation complète basée sur des arguments physiques. La théorie du gaz de vortex, qui fournit cette information, nécessite une adaptation supplémentaire pour inclure β et un cisaillement non uniforme. Un raisonnement analogue à celui présenté dans le chapitre 3 permettrait peut-être d'étendre le résultat de Gallet et Ferrari [74] à un modèle avec des couches de profondeurs arbitraires. Une telle démarche pourrait ainsi nous fournir la loi d'échelle manquante et permettre de conclure dans la situation d'intérêt pratique.

Bibliographie

- [1] Gareth P. Williams. "Planetary Circulations : 2. The Jovian Quasi-Geostrophic Regime". In : *Journal of Atmospheric Sciences* 36.5 (1979). Place : Boston MA, USA Publisher : American Meteorological Society, p. 932-969. doi : [10.1175/1520-0469\(1979\)036<0932:PCTJQG>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1979)036<0932:PCTJQG>2.0.CO;2).
- [2] G. P. Williams. "Jovian Dynamics. Part III : Multiple, Migrating, and Equatorial Jets". In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 60.10 (2003). Place : Boston MA, USA Publisher : American Meteorological Society, p. 1270-1296. doi : [10.1175/1520-0469\(2003\)60<1270:JDPIMM>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(2003)60<1270:JDPIMM>2.0.CO;2).
- [3] F. H. Busse. "A simple model of convection in the Jovian atmosphere". In : *Icarus* 29.2 (1976), p. 255-260. doi : [https://doi.org/10.1016/0019-1035\(76\)90053-1](https://doi.org/10.1016/0019-1035(76)90053-1).
- [4] Jonathan Aurnou, Moritz Heimpel et Johannes Wicht. "The effects of vigorous mixing in a convective model of zonal flow on the ice giants". In : *Icarus* 190.1 (2007), p. 110-126. doi : <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2007.02.024>.
- [5] K. L. Chan et H. G. Mayr. "A shallow convective model for Jupiter's alternating wind bands". In : *Journal of Geophysical Research : Planets* 113.E10 (2008). _eprint : <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2008JE003124>. doi : <https://doi.org/10.1029/2008JE003124>.
- [6] Joseph Pedlosky. *Geophysical fluid dynamics*. eng. 2. ed., Nachdr. Springer study edition. New York : Springer, 2003. isbn : 978-0-387-96387-7 978-3-540-96387-5.
- [7] Rick Salmon. *Lectures on Geophysical Fluid Dynamics*. en. Oxford University Press, mai 1998. isbn : 978-0-19-510808-8 978-0-19-756103-4. doi : [10.1093/oso/9780195108088.001.0001](https://doi.org/10.1093/oso/9780195108088.001.0001).
- [8] Geoffrey K. Vallis. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics : Fundamentals and Large-Scale Circulation*. 2^e éd. Cambridge University Press, juin 2017. isbn : 978-1-107-06550-5 978-1-107-58841-7. doi : [10.1017/9781107588417](https://doi.org/10.1017/9781107588417).
- [9] J. G. Charney. "THE DYNAMICS OF LONG WAVES IN A BAROCLINIC WESTERLY CURRENT". en. In : *Journal of Meteorology* 4.5 (oct. 1947), p. 136-162. doi : [10.1175/1520-0469\(1947\)004<0136:TDOLWI>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1947)004<0136:TDOLWI>2.0.CO;2).
- [10] E. T. Eady. "Long Waves and Cyclone Waves". en. In : *Tellus* 1.3 (jan. 1949), p. 33-52. doi : [10.3402/tellusa.v1i3.8507](https://doi.org/10.3402/tellusa.v1i3.8507).

- [11] James C. McWilliams et Julianna H. S. Chow. "Equilibrium Geostrophic Turbulence I : A Reference Solution in a beta-Plane Channel". en. In : *Journal of Physical Oceanography* 11.7 (juill. 1981), p. 921-949. doi : [10.1175/1520-0485\(1981\)011<0921:EGTIAR>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1981)011<0921:EGTIAR>2.0.CO;2).
- [12] Worth D. Nowlin et John M. Klinck. "The physics of the Antarctic Circumpolar Current". en. In : *Reviews of Geophysics* 24.3 (août 1986), p. 469-491. doi : [10.1029/RG024i003p00469](https://doi.org/10.1029/RG024i003p00469).
- [13] John Marshall et Timour Radko. "Residual-Mean Solutions for the Antarctic Circumpolar Current and Its Associated Overturning Circulation". en. In : *Journal of Physical Oceanography* 33.11 (nov. 2003), p. 2341-2354. doi : [10.1175/1520-0485\(2003\)033<2341:RSFTAC>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(2003)033<2341:RSFTAC>2.0.CO;2).
- [14] Denis L. Volkov, Lee-Lueng Fu et Tong Lee. "Mechanisms of the meridional heat transport in the Southern Ocean". en. In : *Ocean Dynamics* 60.4 (août 2010), p. 791-801. doi : [10.1007/s10236-010-0288-0](https://doi.org/10.1007/s10236-010-0288-0).
- [15] Christopher L. Wolfe et Paola Cessi. "What Sets the Strength of the Mid-depth Stratification and Overturning Circulation in Eddy Ocean Models?" In : *Journal of Physical Oceanography* 40.7 (2010). Place : Boston MA, USA Publisher : American Meteorological Society, p. 1520-1538. doi : [10.1175/2010JP04393.1](https://doi.org/10.1175/2010JP04393.1).
- [16] Maxim Nikurashin et Geoffrey Vallis. "A Theory of Deep Stratification and Overturning Circulation in the Ocean". In : *Journal of Physical Oceanography* 41.3 (2011). Place : Boston MA, USA Publisher : American Meteorological Society, p. 485-502. doi : [10.1175/2010JP04529.1](https://doi.org/10.1175/2010JP04529.1).
- [17] Maxim Nikurashin et Geoffrey Vallis. "A Theory of the Interhemispheric Meridional Overturning Circulation and Associated Stratification". In : *Journal of Physical Oceanography* 42.10 (2012). Place : Boston MA, USA Publisher : American Meteorological Society, p. 1652-1667. doi : [10.1175/JP0-D-11-0189.1](https://doi.org/10.1175/JP0-D-11-0189.1).
- [18] Junjun Liu et Tapio Schneider. "Mechanisms of Jet Formation on the Giant Planets". In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 67.11 (2010). Place : Boston MA, USA Publisher : American Meteorological Society, p. 3652-3672. doi : [10.1175/2010JAS3492.1](https://doi.org/10.1175/2010JAS3492.1).
- [19] Peter L. Read, Roland M. B. Young et Daniel Kennedy. "The turbulent dynamics of Jupiter's and Saturn's weather layers : order out of chaos?" In : *Geoscience Letters* 7.1 (juill. 2020), p. 10. doi : [10.1186/s40562-020-00159-3](https://doi.org/10.1186/s40562-020-00159-3).
- [20] Helene T. Hewitt et al. "Resolving and Parameterising the Ocean Mesoscale in Earth System Models". In : *Current Climate Change Reports* 6.4 (déc. 2020), p. 137-152. doi : [10.1007/s40641-020-00164-w](https://doi.org/10.1007/s40641-020-00164-w).
- [21] Isaac M. Held. "The macroturbulence of the troposphere". en. In : *Tellus A* 51.1 (jan. 1999), p. 59-70. doi : [10.1034/j.1600-0870.1999.t01-1-00006.x](https://doi.org/10.1034/j.1600-0870.1999.t01-1-00006.x).

- [22] Peter R. Gent et James C. McWilliams. "Isopycnal Mixing in Ocean Circulation Models". In : *Journal of Physical Oceanography* 20.1 (1990). Place : Boston MA, USA Publisher : American Meteorological Society, p. 150-155. doi : [10.1175/1520-0485\(1990\)020<0150:IMIOCM>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1990)020<0150:IMIOCM>2.0.CO;2).
- [23] Peter R. Gent. "The Gent–McWilliams parameterization : 20/20 hindsight". In : *Ocean Modelling* 39.1 (2011), p. 2-9. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2010.08.002>.
- [24] Andrew F. Thompson et William R. Young. "Scaling Baroclinic Eddy Fluxes : Vortices and Energy Balance". en. In : *Journal of Physical Oceanography* 36.4 (avr. 2006), p. 720-738. doi : [10.1175/JPO2874.1](https://doi.org/10.1175/JPO2874.1).
- [25] Andrew F. Thompson et William R. Young. "Two-Layer Baroclinic Eddy Heat Fluxes : Zonal Flows and Energy Balance". In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 64.9 (2007). Place : Boston MA, USA Publisher : American Meteorological Society, p. 3214-3231. doi : [10.1175/JAS4000.1](https://doi.org/10.1175/JAS4000.1).
- [26] Chiung-Yin Chang et Isaac M. Held. "The Control of Surface Friction on the Scales of Baroclinic Eddies in a Homogeneous Quasigeostrophic Two-Layer Model". In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 76.6 (juin 2019), p. 1627-1643. doi : [10.1175/JAS-D-18-0333.1](https://doi.org/10.1175/JAS-D-18-0333.1).
- [27] Chiung-Yin Chang et Isaac M. Held. "The Parameter Dependence of Eddy Heat Flux in a Homogeneous Quasigeostrophic Two-Layer Model on a beta Plane with Quadratic Friction". In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 78.1 (jan. 2021), p. 97-106. doi : [10.1175/JAS-D-20-0145.1](https://doi.org/10.1175/JAS-D-20-0145.1).
- [28] Basile Gallet et Raffaele Ferrari. "The vortex gas scaling regime of baroclinic turbulence". en. In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 117.9 (mars 2020), p. 4491-4497. doi : [10.1073/pnas.1916272117](https://doi.org/10.1073/pnas.1916272117).
- [29] Peter B. Rhines. "Waves and turbulence on a beta-plane". In : *Journal of Fluid Mechanics* 69.3 (1975), p. 417-443. doi : [10.1017/S0022112075001504](https://doi.org/10.1017/S0022112075001504).
- [30] Geoffrey K. Vallis et Matthew E. Maltrud. "Generation of Mean Flows and Jets on a Beta Plane and over Topography". In : *Journal of Physical Oceanography* 23.7 (1993). Place : Boston MA, USA Publisher : American Meteorological Society, p. 1346-1362. doi : [10.1175/1520-0485\(1993\)023<1346:GOMFAJ>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1993)023<1346:GOMFAJ>2.0.CO;2).
- [31] Simon Cabanes et al. "A laboratory model for deep-seated jets on the gas giants". In : *Nature Physics* 13.4 (avr. 2017), p. 387-390. doi : [10.1038/nphys4001](https://doi.org/10.1038/nphys4001).
- [32] Basile Gallet et al. "Transport and emergent stratification in the equilibrated Eady model : the vortex-gas scaling regime". en. In : *Journal of Fluid Mechanics* 948 (oct. 2022), A31. doi : [10.1017/jfm.2022.501](https://doi.org/10.1017/jfm.2022.501).

- [33] Joseph Proudman. "On the motion of solids in a liquid possessing vorticity". en. In : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 92.642 (juill. 1916), p. 408-424. doi : [10.1098/rspa.1916.0026](https://doi.org/10.1098/rspa.1916.0026).
- [34] Geoffrey I. Taylor. "Motion of solids in fluids when the flow is not irrotational". en. In : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 93.648 (mars 1917), p. 99-113. doi : [10.1098/rspa.1917.0007](https://doi.org/10.1098/rspa.1917.0007).
- [35] Norman A. Phillips. "Energy Transformations and Meridional Circulations associated with simple Baroclinic Waves in a two-level, Quasi-geostrophic Model". en. In : *Tellus* 6.3 (jan. 1954), p. 274-286. doi : [10.3402/tellusa.v6i3.8734](https://doi.org/10.3402/tellusa.v6i3.8734).
- [36] Brian K. Arbic et Glenn R. Flierl. "Baroclinically Unstable Geostrophic Turbulence in the Limits of Strong and Weak Bottom Ekman Friction : Application to Midocean Eddies". en. In : *Journal of Physical Oceanography* 34.10 (oct. 2004), p. 2257-2273. doi : [10.1175/1520-0485\(2004\)034<2257:BUGTIT>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(2004)034<2257:BUGTIT>2.0.CO;2).
- [37] Brian K. Arbic et Glenn R. Flierl. "Effects of Mean Flow Direction on Energy, Isotropy, and Coherence of Baroclinically Unstable Beta-Plane Geostrophic Turbulence". en. In : *Journal of Physical Oceanography* 34.1 (jan. 2004), p. 77-93. doi : [10.1175/1520-0485\(2004\)034<0077:EOMFDO>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(2004)034<0077:EOMFDO>2.0.CO;2).
- [38] Brian K. Arbic et Robert B. Scott. "On Quadratic Bottom Drag, Geostrophic Turbulence, and Oceanic Mesoscale Eddies". en. In : *Journal of Physical Oceanography* 38.1 (jan. 2008), p. 84-103. doi : [10.1175/2007JP03653.1](https://doi.org/10.1175/2007JP03653.1).
- [39] Glenn R. Flierl. "Models of vertical structure and the calibration of two-layer models". en. In : *Dynamics of Atmospheres and Oceans* 2.4 (août 1978), p. 341-381. doi : [10.1016/0377-0265\(78\)90002-7](https://doi.org/10.1016/0377-0265(78)90002-7).
- [40] Rick Salmon. "Two-layer quasi-geostrophic turbulence in a simple special case". en. In : *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* 10.1 (jan. 1978), p. 25-52. doi : [10.1080/03091927808242628](https://doi.org/10.1080/03091927808242628).
- [41] Valentina Pavan et Isaac M. Held. "The Diffusive Approximation for Eddy Fluxes in Baroclinically Unstable Jets". In : *Journal of Atmospheric Sciences* 53.9 (1996). Place : Boston MA, USA Publisher : American Meteorological Society, p. 1262-1272. doi : [10.1175/1520-0469\(1996\)053<1262:TDAFEF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1996)053<1262:TDAFEF>2.0.CO;2).
- [42] Vitaly D. Larichev et Isaac M. Held. "Eddy Amplitudes and Fluxes in a Homogeneous Model of Fully Developed Baroclinic Instability". en. In : *Journal of Physical Oceanography* 25.10 (oct. 1995), p. 2285-2297. doi : [10.1175/1520-0485\(1995\)025<2285:EAAFIA>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1995)025<2285:EAAFIA>2.0.CO;2).

- [43] Dale B. Haidvogel et Isaac M. Held. "Homogeneous Quasi-Geostrophic Turbulence Driven by a Uniform Temperature Gradient". In : *Journal of Atmospheric Sciences* 37.12 (1980). Place : Boston MA, USA Publisher : American Meteorological Society, p. 2644-2660. doi : [10.1175/1520-0469\(1980\)037<2644:HQGTDB>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1980)037<2644:HQGTDB>2.0.CO;2).
- [44] Lee-Lueng Fu et Glenn R. Flierl. "Nonlinear energy and enstrophy transfers in a realistically stratified ocean". en. In : *Dynamics of Atmospheres and Oceans* 4.4 (avr. 1980), p. 219-246. doi : [10.1016/0377-0265\(80\)90029-9](https://doi.org/10.1016/0377-0265(80)90029-9).
- [45] C. B. Fandry et L. M. Leslie. "A Two-Layer Quasi-Geostrophic Model of Summer Trough Formation in the Australian Subtropical Easterlies". en. In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 41.5 (mars 1984), p. 807-818. doi : [10.1175/1520-0469\(1984\)041<0807:ATLQGM>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1984)041<0807:ATLQGM>2.0.CO;2).
- [46] Rick Salmon. "Baroclinic instability and geostrophic turbulence". en. In : *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* 15.1 (jan. 1980), p. 167-211. doi : [10.1080/03091928008241178](https://doi.org/10.1080/03091928008241178).
- [47] Isaac M. Held et Vitaly D. Larichev. "A Scaling Theory for Horizontally Homogeneous, Baroclinically Unstable Flow on a Beta Plane". en. In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 53.7 (avr. 1996), p. 946-952. doi : [10.1175/1520-0469\(1996\)053<0946:ASTFHH>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1996)053<0946:ASTFHH>2.0.CO;2).
- [48] Shih-Nan Chen. "Revisiting the Baroclinic Eddy Scalings in Two-Layer, Quasi-geostrophic Turbulence : Effects of Partial Barotropization". In : *Journal of Physical Oceanography* 53.3 (mars 2023), p. 891-913. doi : [10.1175/JPO-D-22-0102.1](https://doi.org/10.1175/JPO-D-22-0102.1).
- [49] J. S. A. Green. "Transfer properties of the large-scale eddies and the general circulation of the atmosphere". en. In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 96.408 (avr. 1970), p. 157-185. doi : [10.1002/qj.49709640802](https://doi.org/10.1002/qj.49709640802).
- [50] P B Rhines. "Geostrophic Turbulence". en. In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 11.1 (jan. 1979), p. 401-441. doi : [10.1146/annurev.fl.11.010179.002153](https://doi.org/10.1146/annurev.fl.11.010179.002153).
- [51] G. F. Carnevale et al. "Evolution of vortex statistics in two-dimensional turbulence". en. In : *Physical Review Letters* 66.21 (mai 1991), p. 2735-2737. doi : [10.1103/PhysRevLett.66.2735](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.66.2735).
- [52] Jeffrey B. Weiss et James C. McWilliams. "Temporal scaling behavior of decaying two-dimensional turbulence". en. In : *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics* 5.3 (mars 1993), p. 608-621. doi : [10.1063/1.858647](https://doi.org/10.1063/1.858647).
- [53] Adrian E Gill. *Atmosphere-ocean dynamics*. T. 30. Academic press, 1982.
- [54] Antoine Venaille, Geoffrey K. Vallis et K. Shafer Smith. "Baroclinic Turbulence in the Ocean : Analysis with Primitive Equation and Quasigeostrophic Simulations". en. In : *Journal of Physical Oceanography* 41.9 (sept. 2011), p. 1605-1623. doi : [10.1175/JPO-D-10-05021.1](https://doi.org/10.1175/JPO-D-10-05021.1).

- [55] B. L. Hua et D. B. Haidvogel. "Numerical Simulations of the Vertical Structure of Quasi-Geostrophic Turbulence". en. In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 43.23 (déc. 1986), p. 2923-2936. doi : [10.1175/1520-0469\(1986\)043<2923:NSOTVS>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1986)043<2923:NSOTVS>2.0.CO;2).
- [56] K. Shafer Smith et Geoffrey K. Vallis. "The Scales and Equilibration of Mid-ocean Eddies : Freely Evolving Flow". en. In : *Journal of Physical Oceanography* 31.2 (fév. 2001), p. 554-571. doi : [10.1175/1520-0485\(2001\)031<0554:TSAEOM>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(2001)031<0554:TSAEOM>2.0.CO;2).
- [57] Julie Meunier, Benjamin Miquel et Basile Gallet. "A direct derivation of the Gent–McWilliams/Redi diffusion tensor from quasi-geostrophic dynamics". en. In : *Journal of Fluid Mechanics* 963 (mai 2023), A22. doi : [10.1017/jfm.2023.347](https://doi.org/10.1017/jfm.2023.347).
- [58] Julie Meunier, Benjamin Miquel et Basile Gallet. "Vertical Structure of Buoyancy Transport by Ocean Baroclinic Turbulence". en. In : *Geophysical Research Letters* 50.17 (sept. 2023), e2023GL103948. doi : [10.1029/2023GL103948](https://doi.org/10.1029/2023GL103948).
- [59] Benjamin Miquel. "Coral : a parallel spectral solver for fluid dynamics and partial differential equations". In : *Journal of Open Source Software* 6.65 (sept. 2021), p. 2978. doi : [10.21105/joss.02978](https://doi.org/10.21105/joss.02978).
- [60] Benjamin Miquel et al. "On the role of the Prandtl number in convection driven by heat sources and sinks". en. In : *Journal of Fluid Mechanics* 900 (oct. 2020), R1. doi : [10.1017/jfm.2020.485](https://doi.org/10.1017/jfm.2020.485).
- [61] Keaton J. Burns et al. "Dedalus : A flexible framework for numerical simulations with spectral methods". en. In : *Physical Review Research* 2.2 (avr. 2020), p. 023068. doi : [10.1103/PhysRevResearch.2.023068](https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.023068).
- [62] B. J. Hoskins et F. P. Bretherton. "Atmospheric Frontogenesis Models : Mathematical Formulation and Solution". In : *Journal of Atmospheric Sciences* 29.1 (1972). Place : Boston MA, USA Publisher : American Meteorological Society, p. 11-37. doi : [10.1175/1520-0469\(1972\)029<0011:AFMMFA>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1972)029<0011:AFMMFA>2.0.CO;2).
- [63] Patrice Klein et al. "Upper Ocean Turbulence from High-Resolution 3D Simulations". In : *Journal of Physical Oceanography* 38.8 (2008). Place : Boston MA, USA Publisher : American Meteorological Society, p. 1748-1763. doi : [10.1175/2007JP03773.1](https://doi.org/10.1175/2007JP03773.1).
- [64] Francesco Ragone et Gualtiero Badin. "A study of surface semi-geostrophic turbulence : freely decaying dynamics". In : *Journal of Fluid Mechanics* 792 (2016), p. 740-774. doi : [10.1017/jfm.2016.116](https://doi.org/10.1017/jfm.2016.116).
- [65] Lia Siegelman et al. "Enhanced upward heat transport at deep submesoscale ocean fronts". In : *Nature Geoscience* 13.1 (jan. 2020), p. 50-55. doi : [10.1038/s41561-019-0489-1](https://doi.org/10.1038/s41561-019-0489-1).

- [66] Martha H. Redi. "Oceanic Isopycnal Mixing by Coordinate Rotation". In : *Journal of Physical Oceanography* 12.10 (1982). Place : Boston MA, USA Publisher : American Meteorological Society, p. 1154-1158. doi : [10.1175/1520-0485\(1982\)012<1154:OIMBCR>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1982)012<1154:OIMBCR>2.0.CO;2).
- [67] Trevor J. McDougall. "Neutral Surfaces". en. In : *Journal of Physical Oceanography* 17.11 (nov. 1987), p. 1950-1964. doi : [10.1175/1520-0485\(1987\)017<1950:NS>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1987)017<1950:NS>2.0.CO;2).
- [68] Trevor J. McDougall, Sjoerd Groeskamp et Stephen M. Griffies. "On Geometrical Aspects of Interior Ocean Mixing". In : *Journal of Physical Oceanography* 44.8 (2014). Place : Boston MA, USA Publisher : American Meteorological Society, p. 2164-2175. doi : [10.1175/JPO-D-13-0270.1](https://doi.org/10.1175/JPO-D-13-0270.1).
- [69] Gabriel Hadjerci et Basile Gallet. "Vortex core radius in baroclinic turbulence : Implications for scaling predictions". In : *Physical Review Fluids* 8.9 (2023). Publisher : APS, p. 094501.
- [70] Gabriel Hadjerci et Basile Gallet. "Two-layer baroclinic turbulence with arbitrary layer depths". In : *Physical Review Fluids* 9.5 (2024). Publisher : APS, p. L051802.
- [71] J. G. Charney et M. E. Stern. "On the Stability of Internal Baroclinic Jets in a Rotating Atmosphere". In : *Journal of Atmospheric Sciences* 19.2 (1962). Place : Boston MA, USA Publisher : American Meteorological Society, p. 159-172. doi : [10.1175/1520-0469\(1962\)019<0159:OTS0IB>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1962)019<0159:OTS0IB>2.0.CO;2).
- [72] K. Shafer Smith et John Marshall. "Evidence for Enhanced Eddy Mixing at Middepth in the Southern Ocean". In : *Journal of Physical Oceanography* 39.1 (2009). Place : Boston MA, USA Publisher : American Meteorological Society, p. 50-69. doi : [10.1175/2008JP03880.1](https://doi.org/10.1175/2008JP03880.1).
- [73] Ryan Abernathey et al. "Enhancement of Mesoscale Eddy Stirring at Steering Levels in the Southern Ocean". In : *Journal of Physical Oceanography* 40.1 (2010). Place : Boston MA, USA Publisher : American Meteorological Society, p. 170-184. doi : [10.1175/2009JP04201.1](https://doi.org/10.1175/2009JP04201.1).
- [74] Basile Gallet et Raffaele Ferrari. "A Quantitative Scaling Theory for Meridional Heat Transport in Planetary Atmospheres and Oceans". en. In : *AGU Advances* 2.3 (sept. 2021). doi : [10.1029/2020AV000362](https://doi.org/10.1029/2020AV000362).

Deuxième partie

**Convection en rotation par
chauffage radiatif**

6 - Les régimes ultimes de convection

6.1 . Introduction

La convection désigne l'ensemble des mouvements internes d'un fluide qui ont pour effet de transporter des éléments comme des particules, de la chaleur ou de l'humidité. Ce phénomène peut être forcé artificiellement, par exemple avec un ventilateur d'ordinateur qui génère un écoulement pour advecter la chaleur. Mais la convection peut également émerger naturellement lorsqu'il y a un gradient de température dans le fluide. En effet, comme la densité d'une particule de fluide dépend de sa température, une inhomogénéité thermique peut engendrer des mouvements sous l'effet de la poussée d'Archimède. On parle alors de convection thermique naturelle. Cet écoulement tend à mélanger le fluide, et si le gradient de température n'est pas maintenu par une source externe, le champ de température finit par s'homogénéiser complètement.

La convection thermique naturelle constitue le thème principal de cette partie. Elle présente un intérêt important puisqu'elle est omniprésente dans les contextes géophysiques et astrophysiques. Par exemple, les étoiles possèdent une zone dite "convective" où la stratification en densité est instable, permettant à la chaleur d'être transportée par convection de l'intérieur vers l'extérieur avant d'être rayonnée ou transférée à une autre zone [1, 2]. De plus, en raison de la conductivité électrique du plasma stellaire, cet écoulement peut amplifier le champ magnétique de l'étoile par effet dynamo [2, 3]. Un rôle similaire est joué par la convection thermique dans le noyau terrestre, où le mouvement du métal liquide dans le noyau externe entretient le champ géomagnétique [4, 5]. D'autres exemples de convection se trouvent à la surface de la Terre et sur d'autres planètes. Dans les océans, les profondeurs et la surface sont habituellement isolées l'une de l'autre, mais dans des régions spécifiques comme la mer du Labrador ou la mer du Groenland, la convection permet un mélange entre les deux [6]. Dans l'atmosphère humide, la convection est responsable de la formation des nuages, où l'évaporation et la condensation de l'eau peuvent influencer la dynamique atmosphérique [7, 8].

Lorsqu'on analyse ces phénomènes, on constate que leurs longueurs et vitesses caractéristiques sont particulièrement grandes, surtout lorsqu'on compare leur produit à la viscosité cinématique des fluides impliqués. Autrement dit, le nombre de Reynolds de ces écoulements est extrêmement élevé, ce qui implique sans aucun doute une turbulence intense, particulièrement efficace pour mélanger les fluides. Cependant, la quantification exacte d'un tel mélange est complexe en raison de la nature désordonnée des écoulements turbulents. Pour comprendre les phénomènes géophysiques et astrophysiques qui peuplent l'univers, il est donc nécessaire de caractériser les écoulements turbulents qu'ils impliquent. De nombreux chercheurs ont tenté de développer des théories permettant de prédire les propriétés de la convection turbulente [9-14]. La théorie la plus

reconnue se base sur la loi zéro de la turbulence, selon laquelle les petites diffusivités moléculaires ne devraient pas influencer les quantités à grande échelle. Le régime turbulent décrit dans cette théorie est parfois appelé régime "ultime" puisque, dans ce régime de turbulence pleinement développée, aucun état "encore plus" turbulent ne peut être atteint.

Nous ne cachons pas notre intérêt pour les écoulements géophysiques et astrophysiques, c'est pourquoi un ingrédient essentiel que nous prendrons en compte dans cette étude est la force de Coriolis, résultant de la rotation de la planète ou de l'étoile considérée. En général, ces vitesses de rotation sont beaucoup plus élevées que la fréquence caractéristique du mouvement convectif. Ce constat, en plus de la nature turbulente discutée précédemment, nous conduit à étudier le régime ultime de convection en rotation rapide, également appelé régime de "turbulence géostrophique". Ce régime a été identifié pour la première fois par Stevenson en 1979 [13], puis formalisé mathématiquement par Julien et al. [15] à l'aide d'un développement asymptotique dans la limite des vitesses de rotation élevées. Pendant longtemps, ce régime n'a pas pu être observé dans une configuration de convection réaliste, ni expérimentalement ni numériquement. Cependant, Bouillaut et al. [16] ont récemment rapporté l'observation de la loi d'échelle du régime de turbulence géostrophique pour le transport de chaleur, dans une expérience innovante de convection en rotation par chauffage radiatif. Ce type de configuration avait déjà porté ses fruits quelques années auparavant pour le régime ultime de convection sans rotation [17]. L'objectif de notre travail est de caractériser plus en profondeur le régime de turbulence géostrophique, en allant au-delà de la simple étude du flux de chaleur. Pour cela, nous poursuivons l'étude expérimentale de Bouillaut et al. [16], tout en la complétant par une étude numérique du même système, ce qui nous permet d'accéder à des grandeurs inaccessibles en laboratoire. Cette approche nous permet d'examiner la validité des prédictions du régime de turbulence géostrophique pour le champ de vitesse, les fluctuations de température et la structure de l'écoulement, le tout dans une configuration réaliste de système convectif.

Avant de discuter ces résultats, nous introduisons dans ce chapitre les outils et notions nécessaires à l'étude de la convection turbulente.

6.2 . La convection de Rayleigh-Bénard

Les premières études physiques sur la convection thermique remontent à un peu plus d'un siècle. En 1900, Henri Bénard décrit les mouvements convectifs qui se produisent dans une fine couche de fluide avec une surface libre, dont la paroi inférieure est en contact avec une plaque de métal traversée par un flux de chaleur vertical uniforme [18]. Quelques années plus tard, Lord Rayleigh formalise analytiquement les observations de Bénard en étudiant la stabilité linéaire d'une couche de fluide bidimensionnelle comprise entre deux plaques espacées d'une distance H [19]. La plaque inférieure est maintenue

à une température $T_0 + \Delta T$, tandis que la plaque supérieure est à la température T_0 . Rayleigh adopte des conditions aux limites cinématiques correspondant à des conditions de glissement aux parois. Il montre que pour un certain écart de température ΔT , des rouleaux de convection apparaissent, améliorant considérablement le transport de chaleur. Cette configuration avec un fluide compris entre deux plaques à température fixée, a été nommée en hommage à ces deux chercheurs : la convection de Rayleigh-Bénard. Depuis lors, la convection de Rayleigh-Bénard a été étudiée sous tous les angles possibles, expérimentalement et numériquement, dans des configurations bidimensionnelles et tridimensionnelles, avec des conditions aux limites d'adhérence ou de glissement, avec ou sans rotation, etc... Aujourd'hui, la grande majorité des études sur la convection thermique se concentre sur cette configuration classique [14, 20-25].

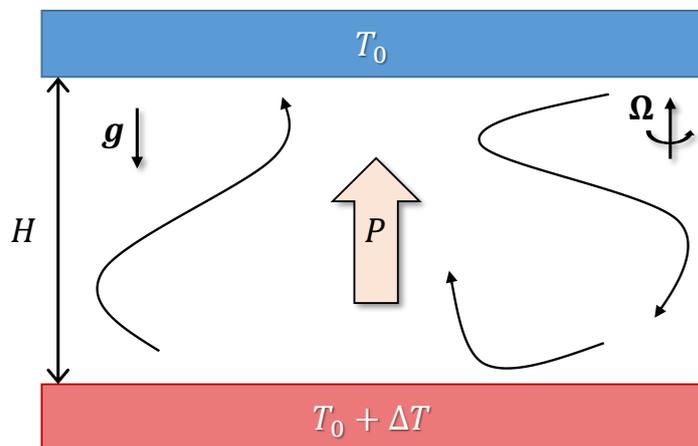


Figure 6.1 – Un schéma illustrant la convection de Rayleigh-Bénard, où une couche de fluide est confinée entre deux plaques horizontales. La différence de température ΔT entre la plaque inférieure chaude et la plaque supérieure froide induit un écoulement convectif dans le fluide, qui contribue au flux de chaleur P entre les deux plaques.

Sur la figure 6.1 est représenté un schéma de la configuration de Rayleigh-Bénard. On suppose que le dispositif complet est en rotation par rapport à un référentiel galiléen à la vitesse $\Omega \mathbf{e}_z$ et que le fluide est soumis à l'accélération de la pesanteur $-\mathbf{g} \mathbf{e}_z$. Pour étudier, la dynamique de l'écoulement émergent on peut utiliser les équations de Navier-Stokes. Cependant, il faut bien faire attention au fait que la densité n'est pas constante puisque ce sont ses variations avec la température qui sont le moteur de la convection thermique. Pour prendre en compte les variations de la densité ρ , l'approche usuelle est de considérer l'approximation de Boussinesq [26]. Cette approximation consiste à supposer que les variations de densité agissent dans les équations uniquement au travers du terme de poussée d'Archimède. En dehors de ce terme, la masse volumique est prise constante et

vaut ρ_0 , la masse volumique à la température T_0 . Dans le terme de poussée d'Archimède on suppose qu'elle varie linéairement avec la température :

$$\rho(T) = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)), \quad (6.1)$$

où α est le coefficient de dilatation thermique supposé constant. Ainsi nous pouvons écrire les équations du mouvement dans le référentiel tournant, en négligeant les effets centrifuges :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (6.2)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P - \frac{\rho(T)}{\rho_0} g \mathbf{e}_z + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (6.3)$$

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T. \quad (6.4)$$

où $\mathbf{u} = (u, v, w)$, P et T sont respectivement les champs de vitesse, de pression et de température. Dans l'approximation de Boussinesq, la viscosité cinématique ν et la diffusivité thermique κ sont supposées constantes. On prend comme référence de l'axe verticale z la plaque inférieure de sorte que les conditions aux limites thermiques s'expriment :

$$T(z = 0) = T_0 + \Delta T \quad \text{et} \quad T(z = H) = T_0, \quad (6.5)$$

avec H la taille verticale de la couche de fluide.

Il existe une solution purement conductive correspondant à un écoulement immobile. En injectant $\mathbf{u} = 0$ dans les équations, on peut expliciter cette solution :

$$\begin{cases} \nabla \hat{P} = \rho(\hat{T}) \mathbf{g}, \\ \hat{T}(z) = T_0 + \Delta T(1 - z/H), \end{cases} \quad (6.6)$$

où le chapeau désigne la solution purement conductive. Les écarts à cette solution représentent la contribution convective de l'écoulement. On les notera $\theta = T - \hat{T}$ et $p = P - \hat{P}$. Les équations pour ces nouvelles variables s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (6.7)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \alpha \theta g \mathbf{e}_z + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (6.8)$$

$$\partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \kappa \nabla^2 \theta + w \frac{\Delta T}{H}. \quad (6.9)$$

On peut adimensionner les équations avec H comme longueur caractéristique, H^2/κ comme temps caractéristique, $\rho_0 H^3$ comme masse caractéristique et ΔT comme température caractéristique. Cela revient à considérer les variables sans dimension suivantes :

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{H}, \quad t^* = t \frac{\kappa}{H^2}, \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{u} \frac{H}{\kappa}, \quad \theta^* = \frac{\theta}{\Delta T} \quad \text{et} \quad p^* = p \frac{H^2}{\rho_0 \kappa^2}. \quad (6.10)$$

Les équations du mouvement sans dimension sont :

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (6.11)$$

$$\partial_{t^*} \mathbf{u}^* + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* + \frac{Pr}{E} \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}^* = -\nabla^* p^* + Ra Pr \theta^* \mathbf{e}_z + Pr (\nabla^*)^2 \mathbf{u}^*, \quad (6.12)$$

$$\partial_{t^*} \theta^* + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \theta^* = (\nabla^*)^2 \theta^* + w^*, \quad (6.13)$$

où ∇^* désigne l'opérateur gradient adimensionnés par H . Dans la suite la notation $(\cdot)^*$ sera abandonnée pour préserver la clarté des équations. Trois paramètres sans dimension naturels apparaissent dans ce système d'équations. Le premier est le nombre de Rayleigh : $Ra = \alpha g \Delta T H^3 / (\kappa \nu)$. Il caractérise l'amplitude du forçage thermique par rapport à la dissipation par diffusion. Le second paramètre est le nombre de Prandtl : $Pr = \nu / \kappa$. Il compare la diffusion de quantité de mouvement par la viscosité à la diffusion de chaleur. Enfin, le dernier paramètre est le nombre d'Ekman : $E = \nu / (2\Omega H^2)$. Il quantifie le rapport entre les effets des forces visqueuses et ceux de la force de Coriolis.

On souhaite caractériser les propriétés de l'écoulement émergent. Pour ce faire, on peut définir différents nombres adimensionnés formalisant chacun une propriété. Le plus étudié en convection est le nombre de Nusselt : $Nu = PH / (\rho_0 C \kappa \Delta T)$, avec C la capacité thermique massique du fluide et P le flux de chaleur surfacique moyen à travers n'importe quelle surface horizontale dans le régime statistiquement stationnaire. Ce paramètre permet de quantifier l'efficacité du transport de chaleur par la convection. En effet, il s'agit du rapport entre le flux total P et le flux purement conductif $\rho_0 C \kappa \Delta T / H$. Ainsi, le nombre de Nusselt vaut 1 pour un état purement conductif et devient supérieur lorsque la convection est enclenchée. L'objectif du travail présenté dans ce chapitre est d'aller au-delà de la simple considération du transport de chaleur et de caractériser le régime statistiquement stationnaire du système en explorant d'autres grandeurs telles que les fluctuations de températures, le champ de vitesse ou la taille horizontale typique ℓ_{\perp} . C'est pourquoi, on introduit le nombre de Reynolds Re , le nombre de Rayleigh construit avec les fluctuations $Ra^{(\theta)}$ et la longueur horizontale sans dimension ℓ_{*}^{\perp} :

$$Re = \frac{\sqrt{\langle \mathbf{u}^2 \rangle} H}{\nu}, \quad Ra^{(\theta)} = \frac{\alpha g H^3 \theta_{\text{std}}}{\nu \kappa}, \quad \ell_{*}^{\perp} = \frac{\ell_{\perp}}{H}, \quad (6.14)$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne une moyenne spatiale, $\bar{\cdot}$ désigne une moyenne temporelle et où $\theta_{\text{std}} = \sqrt{\overline{(\theta - \bar{\theta})^2}}$ représente l'écart type de θ à un z donné (voir la section sur les mesures expérimentales dans le chapitre suivant 7.2).

Nous nous intéressons aux régimes pleinement turbulents atteints en réponse à un forçage thermique intense, c'est-à-dire pour des nombres de Rayleigh très élevés. Ces régimes sont parfois qualifiés de "régimes ultimes de convection". On recherche des lois d'échelle pour ces régimes asymptotiques reliant les grandeurs émergentes aux paramètres de contrôle sous la forme de lois de puissance. Par exemple, pour le nombre de

Nusselt, cela revient à écrire que dans la limite où $Ra \gg 1$, nous avons :

$$Nu \sim Ra^\beta Pr^\gamma E^\chi, \quad (6.15)$$

où β, γ et χ sont des constantes. Dans ce chapitre, nous discuterons du régime ultime sans rotation et du régime ultime en rotation rapide, également appelé régime de turbulence géostrophique. Nous écrivons les lois d'échelle pour les différentes quantités adimensionnées d'intérêt dans ces deux limites.

6.3 . La convection sans rotation

6.3.1 . Le régime ultime

La prédiction théorique du régime ultime sans rotation est attribuée à Kraichnan et Spiegel [1, 11, 12]. En raison de la nature turbulente des écoulements naturels, il est généralement admis que les diffusivités moléculaires κ et ν ne devraient pas affecter le comportement des grandeurs à grande échelle telles que le nombre de Nusselt [6, 12]. Cet argument d'indépendance vis-à-vis des diffusivités moléculaires, trouve son origine dans la loi zéro de la turbulence. Dans la convection sans rotation, les grandeurs sont évidemment indépendantes du nombre d'Ekman. Ainsi, en supposant que les lois de puissance du régime ultime ne font pas intervenir ν et κ , on montre qu'il n'existe qu'une seule combinaison d'exposants possible pour chacun des paramètres d'intérêt [11, 12]. Pour le nombre de Nusselt, la seule relation entre P et ΔT qui ne fait pas intervenir ν et κ conduit à :

$$Nu \sim Ra^{1/2} Pr^{1/2}. \quad (6.16)$$

En appliquant la même méthode on trouve les lois d'échelle pour les autres grandeurs :

$$\frac{\langle \mathbf{u}^2 \rangle^{1/2} H}{\nu} \sim Ra^{1/2} Pr^{-1/2}, \quad (6.17)$$

$$\frac{\ell^\perp}{H} \sim 1, \quad (6.18)$$

$$\frac{\theta_{\text{std}}}{\Delta T} \sim 1. \quad (6.19)$$

6.3.2 . Le régime classique

Ce régime ultime est cependant compliqué à observer dans la convection de Rayleigh-Bénard puisque l'apparition de couches limites au niveau des parois est susceptible de réintroduire les diffusivités moléculaires dans les lois d'échelle.

Un autre régime théorique, appelé "régime classique" de convection, décrit un état où les couches limites dominant le transport de chaleur. Ce régime a été proposé simultanément par Malkus [10] et Priestley [9] en 1954. Une approche dimensionnelle, proposée par Howard en 1966 [27], permet de retrouver simplement les prédictions de ce régime. Un schéma du profil de température moyen dans l'expérience de Rayleigh-Bénard, illustré en

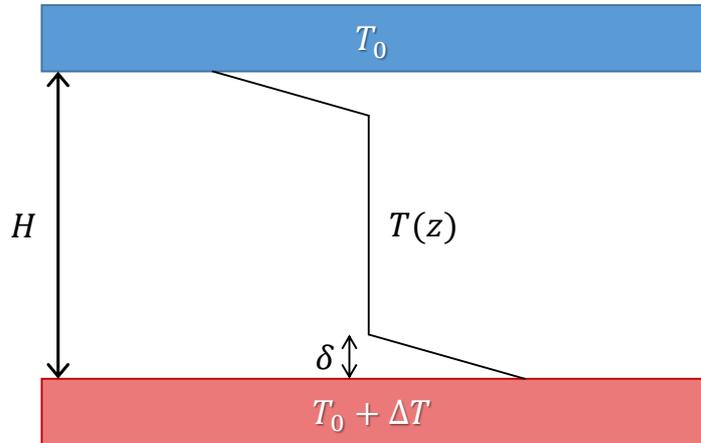


Figure 6.2 – Ce schéma représente le profil de température moyen dans le régime classique de convection. Le mélange assure que, en moyenne, le cœur de l'écoulement reste isotherme. Les couches limites, caractérisées par leur épaisseur δ , restreignent le mouvement du fluide, nécessitant ainsi une diffusion de la chaleur à travers elles. Cette contrainte limite considérablement le flux de chaleur P et réintroduit une dépendance en ν et κ .

figure 6.2, vient soutenir ce raisonnement. Si le transport de chaleur est principalement gouverné par la diffusion au sein des couches limites, alors, en moyenne temporelle et horizontale, le cœur de l'écoulement reste isotherme en raison du mélange turbulent intense, tandis que les variations de température verticales se concentrent dans les couches limites. L'idée centrale est que ces couches limites sont marginalement stables, c'est-à-dire que le nombre de Rayleigh de la couche limite est égal au nombre de Rayleigh critique pour la convection :

$$Ra^{(\delta)} = \alpha g \Delta T \delta^3 / \kappa \nu \approx Ra_c \quad (6.20)$$

où δ est l'épaisseur de la couche limite et Ra_c le nombre de Rayleigh critique pour la convection. Cet argument repose sur le fait que, si ce nombre de Rayleigh est inférieur à Ra_c , la taille de la couche limite peut croître par diffusion jusqu'à atteindre $Ra^{(\delta)} = Ra_c$. En revanche, s'il est supérieur, la couche limite serait instable et s'éroderait spontanément pour diminuer δ . Comme Ra_c est une constante, on peut déduire de ce raisonnement la taille de la couche limite :

$$\frac{\delta}{H} \sim Ra^{-1/3}. \quad (6.21)$$

Or le flux de chaleur est uniquement déterminé par la diffusion dans les couches limites, soit :

$$P \sim \frac{\rho_0 C \kappa \Delta T}{\delta}. \quad (6.22)$$

Finalement, on peut en déduire la loi d'échelle du régime classique pour le nombre de Nusselt :

$$Nu \sim Ra^{1/3}. \quad (6.23)$$

Les expériences de convection de Rayleigh-Bénard standard fournissent des exposants se situant entre 0.26 et 0.38 [20, 21, 23-25, 28-31]. Les valeurs les plus élevées de l'exposant $\beta = 0.38$, obtenues pour des nombres de Rayleigh de l'ordre de 10^{14} , pourraient être compatibles avec une transition vers un régime ultime, moyennant les corrections logarithmiques de Kraichnan [11]. Cependant, ces exposants restent tous inférieurs à l'exposant $\beta = 1/2$ du régime ultime tel que prédit par Spiegel [1, 12]. On en conclut que la convection de Rayleigh-Bénard classique n'est pas le dispositif le plus adapté pour observer en convection sans rotation un régime complètement indépendant des diffusivités, principalement en raison de la présence de couches limites aux parois qui limitent le transport de chaleur.

6.4 . Régime de turbulence géostrophique

Intéressons-nous désormais à la convection en rotation. Dans cette configuration, établir des lois d'échelle asymptotiques est plus complexe que pour le cas sans rotation en raison de la dépendance au nombre d'Ekman. Cette dépendance empêche de déterminer une unique combinaison d'exposants en se basant uniquement sur l'indépendance vis-à-vis des diffusivités. Par conséquent, un argument supplémentaire est nécessaire pour parvenir à une conclusion. Bien que la recherche d'une telle relation soit complexe pour des vitesses de rotation quelconques, il est possible de développer un raisonnement lorsque la rotation est très rapide, c'est-à-dire lorsque $E \ll 1$.

Tout d'abord, dans cette limite, le nombre de Rayleigh critique de la convection en rotation Ra_c croît avec la vitesse de rotation selon la relation $Ra_c \sim E^{-4/3}$. En d'autres termes, à Ra fixé, plus la vitesse de rotation augmente, plus on se rapproche du seuil, et donc moins l'écoulement est turbulent. Pour que l'écoulement redevienne turbulent, il faut alors augmenter le nombre de Rayleigh, ce qui atténue l'impact de la rotation [32], et ainsi de suite. Le régime turbulent en rotation rapide, aussi appelé régime de turbulence géostrophique, est donc contraint par le seuil de la convection, imposant une interdépendance entre les deux limites $Ra \gg 1$ et $E \ll 1$. En 1979, Stevenson [13] a proposé pour la première fois de nouvelles relations, dont la plupart sont basées sur l'analyse de stabilité linéaire de la convection en rotation rapide. Plus tard, Julien et al. [15] ont proposé une autre méthode pour obtenir les mêmes relations à l'aide d'un développement asymptotique des équations en puissances de $E^{1/3}$. Ce raisonnement permet de construire un système d'équations réduit impliquant un nombre limité de paramètres sans dimension. En particulier, dans ce système, la dépendance en E et Ra ne s'exprime plus qu'à travers un paramètre de supercriticalité $\widetilde{Ra} = RaE^{4/3} \sim Ra/Ra_c$. Une analyse approfondie de ce modèle réduit permet de diagnostiquer que le nombre de Nusselt tel qu'on l'a défini, ne dépend que de \widetilde{Ra} et de Pr . Enfin, combiner ce résultat à l'argument d'indépendance vis

à vis des diffusivités permet de conclure sur la dépendance du nombre de Nusselt dans le régime de turbulence géostrophique.

Dans cette section, nous proposons une méthode alternative pour retrouver les lois d'échelle du régime de turbulence géostrophique pour n'importe quelle quantité. Cette approche repose sur l'observation que la limite $E \ll 1$ fournit un système d'équations réduit, valable tant dans le régime de turbulence géostrophique que proche du seuil. La première étape consiste donc à décrire le comportement des grandeurs relatives au mode le plus instable à l'aide d'une analyse de stabilité linéaire [33]. Ainsi, dans la limite $E \ll 1$, l'état marginal est décrit par les relations asymptotiques suivantes :

$$\text{Longueur horizontale :} \quad \ell^\perp \sim HE^{1/3} \quad (6.24a)$$

$$\text{Longueur verticale :} \quad \ell_z \sim H \quad (6.24b)$$

$$\text{Rapport entre les fluctuations de température et de vitesse :} \quad \theta_{\text{std}} \sim \frac{\Delta TH}{\kappa} \langle w^2 \rangle^{1/2} E^{2/3} \quad (6.24c)$$

$$\text{Relation entre les composantes de la vitesse :} \quad \langle u^2 \rangle \sim \langle v^2 \rangle \sim \langle w^2 \rangle. \quad (6.24d)$$

On peut généraliser ces relations à une distance finie du seuil $\widetilde{Ra} = \mathcal{O}(E^0)$, en remplaçant le signe \sim dans chacune d'entre elles par un signe égal et en les multipliant par une fonction générique $\mathcal{F}(\widetilde{Ra}, Pr)$ (qui a priori diffère pour chacune de ces relations). En effet, au seuil \widetilde{Ra} est une constante ce qui permet de retrouver la dépendance en E .

Toujours dans la limite $E \ll 1$, l'analyse de stabilité linéaire fournit aussi le taux de croissance du mode le plus instable, à un \widetilde{Ra} fixé au dessus du seuil :

$$\sigma \sim \frac{\kappa}{H^2} E^{-2/3}. \quad (6.25)$$

La saturation des différents champs est déterminée par les non-linéarités dominantes [13] qui sont de type advectives et issues de l'expression de la dérivée particulaire :

$$\partial_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) = \partial_t + \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp + w \partial_z. \quad (6.26)$$

Dans le régime linéaire où les perturbations sont encore faibles et où l'instabilité croît exponentiellement, le terme de dérivée temporelle ∂_t est de l'ordre du taux de croissance σ , tandis que les non-linéarités sont négligeables. La saturation commence donc lorsque les non-linéarités deviennent comparables au taux de croissance. En utilisant, les lois d'échelle de l'état marginal (6.24a-6.24d), on montre que dans le régime linéaire le terme d'advection vertical est négligeable devant l'advection horizontale :

$$w \partial_z \sim \frac{w}{H} \sim \frac{u_\perp}{H} \sim \frac{\ell^\perp}{H} \times \frac{u_\perp}{\ell^\perp} \sim E^{1/3} \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp \ll \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp. \quad (6.27)$$

On en conclut que la saturation commence lorsque $\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp \sim \langle \mathbf{u}^2 \rangle^{1/2} / \ell^\perp$ devient comparable à σ . En injectant ce résultat dans les relations relatif au régime linéaire (6.24a-6.24d), on trouve la loi d'échelle pour la vitesse à saturation :

$$\langle \mathbf{u}^2 \rangle^{1/2} = \frac{\kappa}{H} E^{-1/3} \mathcal{F}(\widetilde{Ra}, Pr), \quad (6.28)$$

qu'on peut écrire de manière équivalente pour le nombre de Reynolds :

$$\frac{\langle w^2 \rangle^{1/2} H}{\nu} \sim \frac{\langle \mathbf{u}^2 \rangle^{1/2} H}{\nu} = E^{-1/3} \mathcal{F}(\widetilde{Ra}, Pr). \quad (6.29)$$

En tenant compte du fait que le flux de chaleur $P/(\rho_0 C)$ se comporte loin du seuil comme le flux convectif $\langle w\theta \rangle \sim \langle w^2 \rangle^{1/2} \theta_{\text{std}}$, nous pouvons utiliser des combinaisons des relations (6.24) et (6.28) pour établir les lois d'échelle de toutes les autres grandeurs d'intérêt à une distance finie du seuil. On a donc :

$$Nu = \mathcal{F}(\widetilde{Ra}, Pr), \quad (6.30a)$$

$$\frac{\ell^\perp}{H} = E^{1/3} \mathcal{F}(\widetilde{Ra}, Pr), \quad (6.30b)$$

$$\frac{\ell_z}{H} = \mathcal{F}(\widetilde{Ra}, Pr), \quad (6.30c)$$

$$\frac{\theta_{\text{std}}}{\Delta T} = E^{1/3} \mathcal{F}(\widetilde{Ra}, Pr), \quad (6.30d)$$

où \mathcal{F} désigne toujours une fonction générique qui diffère entre chaque relation. Ces relations fournissent la forme du développement asymptotique adopté par Julien et al. [15].

En convection en rotation, la turbulence s'intensifie à mesure que le nombre de Rayleigh augmente, mais elle est amortie lorsque le nombre d'Ekman diminue. Par conséquent, l'existence d'un régime pleinement turbulent indépendant des diffusivités dans la région de l'espace des paramètres où les relations (6.30) sont vérifiées n'est pas garantie. Cependant, faisons l'hypothèse audacieuse qu'un tel régime existe. L'hypothèse d'indépendance vis-à-vis des diffusivités permet alors de conclure sur les dépendances asymptotiques des différentes fonctions \mathcal{F} . En effet, les exposants des lois de puissance devront être choisis de manière à exclure ν et κ . On construit alors les lois d'échelle du régime de turbulence géostrophique :

$$Nu \sim \frac{\widetilde{Ra}^{3/2}}{Pr^{1/2}} \sim Ra^{3/2} E^2 Pr^{-1/2}, \quad (6.31)$$

$$\frac{\ell^\perp}{H} \sim E^{1/3} \sqrt{\frac{\widetilde{Ra}}{Pr}} \sim E \sqrt{\frac{Ra}{Pr}}, \quad (6.32)$$

$$\frac{\ell_z}{H} \sim 1, \quad (6.33)$$

$$\frac{\langle \mathbf{u}^2 \rangle^{1/2} H}{\nu} \sim E^{-1/3} \frac{\widetilde{Ra}}{Pr} \sim \frac{Ra E}{Pr}, \quad (6.34)$$

$$\frac{\theta_{\text{std}}}{\Delta T} \sim E^{1/3} \sqrt{\frac{\widetilde{Ra}}{Pr}} \sim E \sqrt{\frac{Ra}{Pr}}. \quad (6.35)$$

Comme pour la convection de Rayleigh-Bénard classique, les expériences et simulations de convection de Rayleigh-Bénard en rotation rencontrent des difficultés pour observer le régime de turbulence géostrophique. Les exposants de la loi sur le nombre de Nusselt mesurés sont souvent bien plus grands que $\beta = 3/2$ à faible nombre de Rayleigh (proche du seuil de la convection) et trop petits à grand nombre de Rayleigh [32, 34, 35]. En laboratoire, pour atteindre de grands nombres de Rayleigh tout en maintenant un faible nombre d'Ekman, une approche naturelle consiste à utiliser des cuves cylindriques hautes de petit rayon afin de limiter les effets centrifuges [34-37]. Cependant, ces cuves en forme de cigare présentent un problème car ce rapport d'aspect est favorable à l'émergence de modes de bords influençant le transport de chaleur [38-41]. En ce qui concerne les simulations, lorsque des conditions de glissement aux parois sont considérées, la loi pour le nombre de Nusselt affiche l'exposant $3/2$ du régime de turbulence géostrophique. Toutefois, dans une configuration plus réaliste avec des parois adhérentes introduisant des couches limites, l'exposant β est plus proche de 3, correspondant au régime classique de Malkus en rotation rapide [42, 43]. Néanmoins, Song et al. ont récemment réalisé des simulations numériques directes (DNS) avec des conditions d'adhérence aux parois à très grand nombre de Rayleigh, qui montrent la loi du régime de turbulence géostrophique pour leur valeur la plus faible du nombre d'Ekman [44].

6.5 . Motivations

La majeure partie de la littérature sur la convection thermique se concentre sur la configuration de Rayleigh-Bénard. Cela peut s'expliquer par sa simplicité de mise en œuvre, tant d'un point de vue théorique qu'expérimental. Cependant, comme nous l'avons vu, cette configuration n'est pas toujours la plus adaptée pour décrire des écoulements géophysiques ou astrophysiques, en raison de l'influence prépondérante qu'ont les couches limites aux parois sur le transport de chaleur. Autrement dit, il peut être intéressant de s'écarter de la configuration traditionnelle de Rayleigh-Bénard si l'on souhaite étudier les régimes ultimes de convection.

Pour ce faire, plusieurs stratégies peuvent être adoptées. Tout d'abord, on peut étudier la convection dans un canal vertical très étroit reliant un réservoir de fluide chaud en bas à un réservoir de fluide froid en haut [45-48]. Un régime indépendant des diffusivités a été observé dans cette configuration, mais celui-ci dépend explicitement de la largeur du canal. Bien que cette observation constitue un accomplissement significatif dans le domaine de la convection, elle n'est pas nécessairement pertinente pour les écoulements géophysiques et astrophysiques qui ne font pas intervenir cette largeur. Ensuite, il est également possible de perturber la couche limite qui freine la convection en utilisant des parois rugueuses [49-54]. Dans certaines expériences sans rotation utilisant ce type de parois, un exposant $\beta = 1/2$ a été observé sur une certaine gamme de Ra . Cependant, il a également été démontré que cet exposant diminue à mesure que le nombre de Rayleigh augmente et que la couche limite commence à épouser la rugosité des parois. Ainsi,

la taille caractéristique de la rugosité joue un rôle crucial dans ce type de configuration, limitant le domaine d'observation d'un régime ultime. Une rugosité multi-échelles (fractale) serait peut-être une méthode efficace pour observer un tel régime pour des nombres de Rayleigh arbitrairement grands[55].

Enfin, la méthode étudiée dans cette thèse consiste à utiliser un procédé de chauffage par absorption de lumière visible dans un fluide coloré. À l'instar du travail numérique présenté par Barker et al. [56], cette approche expérimentale repose sur l'utilisation d'un chauffage interne pour contourner les effets contraignants des couches limites. En combinant un chauffage radiatif avec un refroidissement interne effectif, il devient possible d'observer un régime dominé par la dynamique turbulente du cœur de l'écoulement [16, 17, 57-59]. Cette méthode a permis de confirmer expérimentalement les prédictions théoriques du régime ultime concernant le transport de chaleur en convection, aussi bien sans rotation qu'en rotation rapide. L'objectif de ce chapitre est d'approfondir la compréhension de la dynamique turbulente de la convection en rotation rapide induite par chauffage radiatif en allant au-delà de la simple considération du transport de chaleur. Il s'agit alors de confirmer la validité des prédictions du régime de turbulence géostrophique concernant les fluctuations de température, la vitesse et la taille caractéristique de l'écoulement. Une difficulté inhérente aux expériences de convection par chauffage radiatif est l'opacité du fluide qui rend compliquées les mesures de vitesses (voir [59] pour le cas sans rotation). Ainsi, nous exposons ici une approche hybride, alliant une analyse approfondie des données expérimentales de Bouillaut et al. [16] à une étude numérique du champ de vitesse et de la structure de l'écoulement en convection par chauffage radiatif.

7 - Convection en rotation par chauffage radiatif

7.1 . Théorie de la convection par chauffage radiatif

7.1.1 . Équations

Dans cette section, nous exposons les concepts théoriques de la convection induite par chauffage radiatif. Considérons une couche de fluide de profondeur H , thermiquement isolée sur toutes ses frontières et éclairée par dessous par une source lumineuse. Ce fluide absorbe uniformément toutes les longueurs d'onde de la lumière, avec une longueur d'absorption ℓ . Si l'on note P le flux lumineux par unité de surface appliqué à la frontière inférieure du fluide en $z = 0$, la loi de Beer-Lambert nous indique que l'absorption de la lumière induit un chauffage interne dont l'amplitude décroît avec la hauteur z :

$$Q_H(z) = \frac{P}{\ell} e^{-z/\ell}. \quad (7.1)$$

En plus de ce chauffage radiatif, on considère également un refroidissement interne homogène :

$$Q_C = - \left(1 - e^{-H/\ell}\right) \frac{P}{H} < 0, \quad (7.2)$$

dont l'intégrale spatiale sur tout le domaine est l'opposée de celle du chauffage radiatif. Expérimentalement, ce refroidissement aura pour origine le chauffage séculaire de l'ensemble du fluide (voir section 7.2.1). La totalité de la chaleur injectée est ainsi compensée par le refroidissement, garantissant l'existence d'un régime statistiquement stationnaire pour les champs de vitesse et de température. La figure 7.1 propose une représentation schématique du cadre théorique de la convection par chauffage radiatif.

La couche de fluide est soumise à l'accélération de la gravité $-g\mathbf{e}_z$ et tourne à la fréquence $\Omega\mathbf{e}_z$ par rapport à un référentiel galiléen. Nous limitons notre étude à la gamme de paramètres où l'accélération centrifuge est négligeable [60, 61]. Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, les propriétés du fluide sont supposées indépendantes de la température, à l'exception de la masse volumique ρ , dont les variations sont conservées dans la poussée d'Archimède et supposées proportionnelles à la température. On note $p(\mathbf{x}, t)$ le champ de pression réduite, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ le champ de vitesse et $\theta(\mathbf{x}, t)$ la variable de température. Ainsi, les équations de la dynamique s'écrivent :

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla p + \alpha g \theta \mathbf{e}_z + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (7.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (7.4)$$

$$\partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \kappa \nabla^2 \theta + \frac{Q_H(z) + Q_C}{\rho_0 C}, \quad (7.5)$$

où C désigne la capacité thermique massique du fluide, α son coefficient de dilatation thermique, κ sa diffusivité thermique, ν sa viscosité cinématique, et ρ_0 la masse volu-

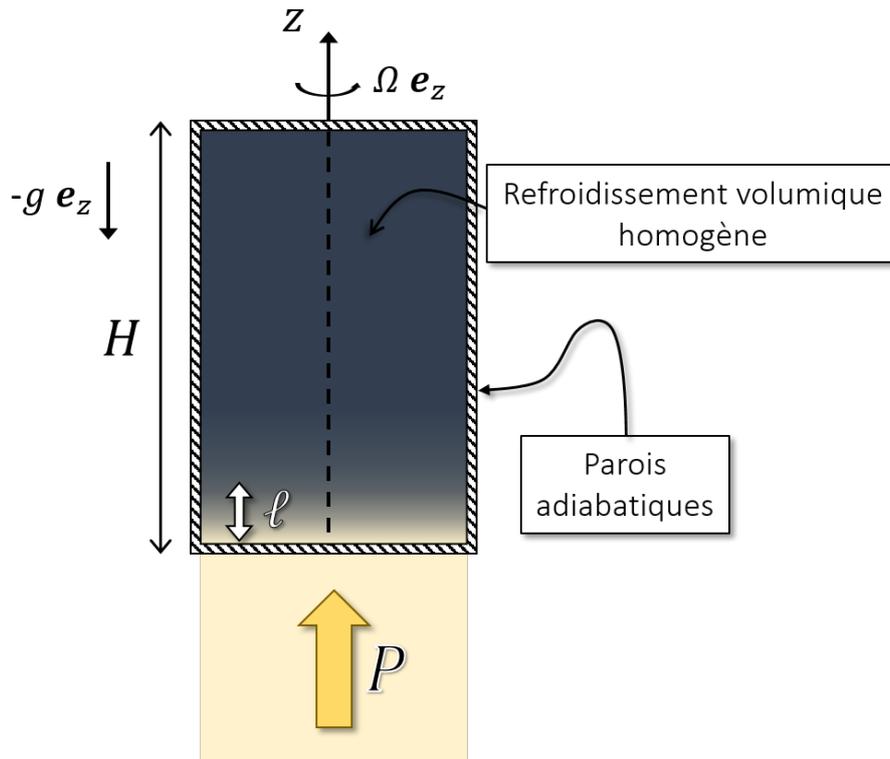


Figure 7.1 – Schéma représentant la configuration théorique de la convection en rotation induite par chauffage radiatif. Une couche de fluide se trouve dans une cuve thermiquement isolée de hauteur H . Elle est soumise à l'accélération de la gravité $-g\mathbf{e}_z$ et tourne à la fréquence $\Omega\mathbf{e}_z$ par rapport à un référentiel galiléen. Elle reçoit un flux lumineux P par sa surface inférieure, ce qui induit un chauffage interne décroissant exponentiellement avec la profondeur sur une longueur caractéristique ℓ . Un refroidissement volumique homogène est aussi considéré afin de compenser la chaleur injectée et de garantir l'existence d'un régime statistiquement stationnaire.

mique de référence.

L'adimensionnement du système d'équations (7.3,7.4,7.5) tel que décrit en (6.10) permet de nous restreindre à quatre paramètres sans dimension :

$$E = \frac{\nu}{2\Omega H^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad Ra^{(P)} = \frac{\alpha g P H^4}{\rho_0 C \kappa^2 \nu} \quad \text{et} \quad \tilde{\ell} = \frac{\ell}{H}. \quad (7.6)$$

En convection par chauffage radiatif, nous retrouvons les nombres d'Ekman et de Prandtl, déjà introduits pour la convection de Rayleigh-Bénard. Cependant, dans ce contexte, le paramètre clé lié au forçage thermique est le flux sans dimension, que l'on appellera Rayleigh-flux $Ra^{(P)}$. De plus, cette forme de convection implique un nouveau paramètre, la longueur d'absorption sans dimension $\tilde{\ell}$, qui caractérise la structure du chauffage interne.

La plupart des travaux de recherche se concentre sur l'étude des propriétés du transport de chaleur en convection. Dans notre cas, cela revient à évaluer la différence de température ΔT qui émerge entre le bas et le haut de la cuve en réponse au chauffage radiatif. En d'autres termes, pour un Rayleigh-flux fixé $Ra^{(P)}$ on souhaite connaître le nombre de Rayleigh usuel Ra , ou de manière équivalente, le nombre de Nusselt Nu , dont les définitions sont données par :

$$Ra = \frac{\alpha g \Delta T H^3}{\nu \kappa}, \quad Nu = \frac{Ra^{(P)}}{Ra} = \frac{PH}{\rho_0 C \kappa \Delta T}. \quad (7.7)$$

En d'autres termes, en convection par chauffage radiatif, le nombre de Rayleigh est une grandeur émergente de l'écoulement qui est reliée au nombre de Nusselt par le Rayleigh-flux.

L'objectif du travail présenté dans ce chapitre est d'aller au-delà de la simple considération du transport de chaleur et de caractériser le régime statistiquement stationnaire du système en explorant d'autres grandeurs telles que les fluctuations de température, le champ de vitesse ou la taille horizontale typique ℓ_\perp . C'est pourquoi on étudiera le nombre de Reynolds Re , le nombre de Rayleigh construit avec les fluctuations $Ra^{(\theta)}$ et la longueur horizontale sans dimension ℓ_*^\perp , que nous avons introduits dans le chapitre précédent et qui sont définis par (6.14).

7.1.2 . Lois d'échelle du régime de turbulence géostrophique

Dans le chapitre précédent, nous avons établi les lois d'échelle du régime de turbulence géostrophique pour la configuration de Rayleigh-Bénard (voir section 6.4). Ces lois peuvent être traduites en termes de Rayleigh-flux en utilisant la relation (7.7), qui relie le nombre de Nusselt, le nombre de Rayleigh et le Rayleigh-flux. Cette adaptation est pertinente, car l'analyse de stabilité linéaire de la convection par chauffage radiatif est similaire à celle de Rayleigh-Bénard [59]. En effet, le Rayleigh-flux critique suit une relation identique à celle du nombre de Rayleigh : $Ra_c^{(P)} \sim E^{-4/3}$. Cela permet de construire un paramètre de supercriticalité, $\widetilde{Ra}^{(P)} = Ra^{(P)} E^{4/3}$, analogue à \widetilde{Ra} pour la convection de Rayleigh-Bénard en rotation. Ainsi, pour les paramètres de contrôle de la convection par chauffage radiatif, les lois du régime de turbulence géostrophique s'expriment sous la forme :

$$Nu \sim \left(Ra^{(P)} \right)^{3/5} E^{4/5} Pr^{-1/5}, \quad (7.8)$$

$$\frac{\ell^\perp}{H} \sim \left(Ra^{(P)} \right)^{1/5} E^{3/5} Pr^{-2/5}, \quad (7.9)$$

$$\frac{\ell_z}{H} \sim 1, \quad (7.10)$$

$$\frac{\langle \mathbf{u}^2 \rangle^{1/2} H}{\nu} \sim \left(Ra^{(P)} \right)^{2/5} E^{1/5} Pr^{-4/5}, \quad (7.11)$$

$$Ra^{(\theta)} \sim \left(Ra^{(P)} \right)^{3/5} E^{-1/5} Pr^{-1/5}. \quad (7.12)$$

Pour mettre en valeur la nature indépendante des diffusivités du régime de turbulence géostrophique, une approche consiste à introduire des paramètres sans dimension qui ne font pas intervenir ν et κ . À l'aide de multiplications par des combinaisons du nombre d'Ekman et du nombre de Prandtl, on peut réécrire les lois d'échelle du régime de turbulence géostrophique de sorte à faire disparaître ν et κ à droite et à gauche. Le paramètre de contrôle privilégié devient alors :

$$\mathcal{R} = \frac{Ra^{(P)} E^3}{Pr^2}. \quad (7.13)$$

Ce paramètre correspond à la version sans diffusivité du Rayleigh-flux. On notera avec une étoile en indice, la formulation indépendante des diffusivités pour les paramètres émergents d'intérêt, qui sont :

$$Nu_* = \frac{NuE}{Pr}, \quad Ra_*^{(\theta)} = \frac{Ra^{(\theta)} E^2}{Pr}, \quad Re_* = E Re, \quad \ell_*^\perp = \frac{\ell^\perp}{H}. \quad (7.14)$$

Grandeur dimensionnelle	Paramètre sans dimension	Forme indépendante des diffusivités	Prédiction du régime GT
ΔT	$Nu = \frac{PH}{\rho C_\kappa \Delta T}$	$Nu_* = E Pr^{-1} Nu$	$Nu_* \sim \mathcal{R}^{\frac{3}{5}}$
θ_{std}	$Ra^{(\theta)} = \frac{\alpha g H^3 \theta_{\text{std}}}{\kappa \nu}$	$Ra_*^{(\theta)} = E^2 Pr^{-1} Ra^{(\theta)}$	$Ra_*^{(\theta)} \sim \mathcal{R}^{\frac{3}{5}}$
$\langle \mathbf{u}^2 \rangle^{1/2}$	$Re = \frac{\langle \mathbf{u}^2 \rangle^{1/2} H}{\nu}$	$Re_* = E Re$	$Re_* \sim \mathcal{R}^{\frac{2}{5}}$
ℓ^\perp	$\frac{\ell^\perp}{H}$	$\ell_*^\perp = \frac{\ell^\perp}{H}$	$\ell_*^\perp \sim \mathcal{R}^{\frac{1}{5}}$

Table 7.1 – Lois d'échelles pour les différentes grandeurs émergentes d'intérêt dans le régime de turbulence géostrophique (GT), exprimée en fonction du Rayleigh-flux sans diffusivité $\mathcal{R} = Ra^{(P)} E^3 / Pr^2$.

Les nouvelles lois d'échelle dans leur formulation sans diffusivité présentent une structure plus compacte et élégante. Elles sont détaillées dans le tableau 7.1. Dans la suite, nous présenterons les approches expérimentales et numériques qui nous ont permis d'étudier ces grandeurs. Ensuite, nous analyserons les données obtenues afin de vérifier si les prédictions énoncées dans le tableau 7.1 sont confirmées ou non.

7.2 . Dispositifs

7.2.1 . Montage expérimental

Le dispositif expérimental, élaboré par Bouillaut et al. [16], constitue une version en rotation de l'expérience de convection par chauffage radiatif initialement conçue par Lepot et al. [17]. Une représentation schématique est proposée sur la figure 7.2. Un réservoir cylindrique contenant un mélange d'eau et d'encre noire tourne à une vitesse Ω autour de l'axe vertical. Un projecteur puissant illumine la cuve par en dessous. La lumière

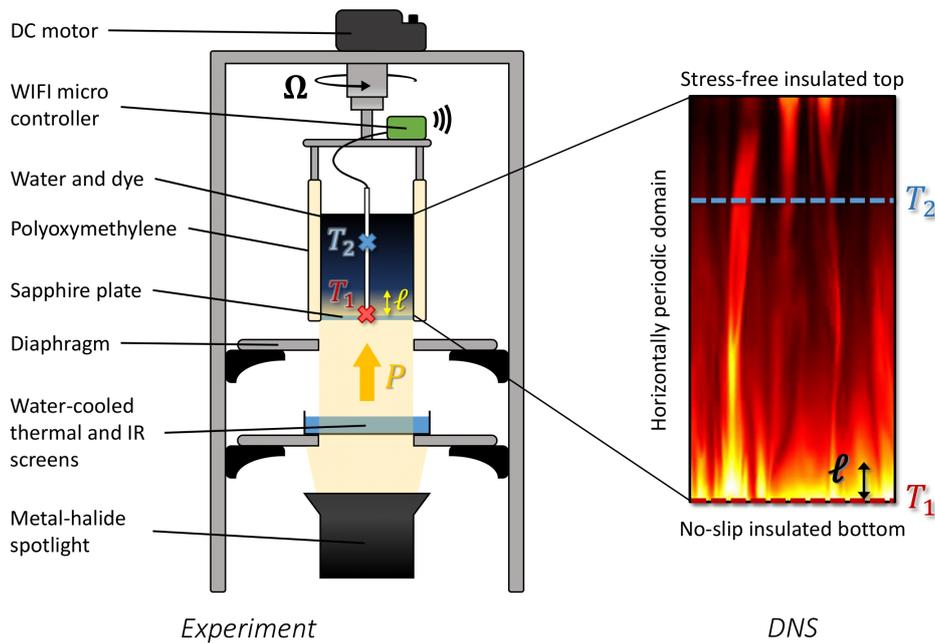


Figure 7.2 – Réalisations expérimentale (à gauche) et numérique (à droite) de la convection en rotation induite par chauffage radiatif. L'absorption d'un flux lumineux ascendant par le fluide coloré crée une source de chaleur interne qui diminue exponentiellement avec la hauteur sur une longueur d'absorption typique ℓ . Le réchauffement séculaire du fluide engendre un refroidissement effectif correspondant à un refroidissement uniforme dans tout le volume, compensant la source de chaleur radiative en moyenne verticale.

traverse une couche d'eau froide, filtrant ainsi les rayonnements infrarouges avant d'atteindre la plaque inférieure transparente de la cuve. L'absorption de la lumière visible par l'encre engendre une source de chaleur interne conforme à l'équation (7.1), où la longueur d'absorption ℓ est directement conditionnée par la concentration d'encre, supposée uniforme. La longueur d'absorption sans dimension ℓ/H est choisie constante tout au long de cette étude. Plus précisément, nous optons pour $\ell/H = 0.048$, valeur s'avérant suffisante pour contourner les couches limites inférieures et instaurer un régime de convection thermique indépendant des diffusivités [16].

Une particularité du dispositif et qu'il n'inclut pas de mécanisme de refroidissement. Cependant, il est possible de se ramener à un ensemble de variables soumis à un refroidissement homogène en tirant profit du chauffage séculaire dans l'ensemble du fluide. En effet, si on considère notre montage expérimental sans refroidissement, cela revient à imposer $Q_C = 0$ dans l'équation (7.5) :

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T + \frac{Q_H(z)}{\rho_0 C}, \quad (7.15)$$

où $T(\mathbf{x}, t)$ désigne la température à l'intérieur de la cuve. En intégrant cette équation dans tous l'espace et en tirant profit des conditions aux limites adiabatiques, on trouve :

$$\frac{d\langle T \rangle}{dt} = \frac{P}{\rho C H} \left(1 - e^{-H/\ell} \right), \quad (7.16)$$

ce qui indique que la température moyenne dans la cuve $\langle T \rangle$ croît linéairement avec le temps. C'est le chauffage séculaire. Ce résultat théorique est valable expérimentalement tant que les pertes et échanges avec l'extérieur sont négligeables, ce qui constitue une approximation valide tant que $\langle T \rangle$ reste à quelques degrés de la température ambiante (voir figure 7.3). On introduit alors la variable $\theta(\mathbf{x}, t) = T(\mathbf{x}, t) - \langle T \rangle(t)$. Il s'avère que l'équation d'évolution pour cette variable est exactement l'équation (7.5), avec Q_H et Q_C inclus. De plus, la poussée d'Archimède dans l'équation (7.3) peut être écrite de manière équivalente $\alpha g T \mathbf{e}_z$ ou $\alpha g \theta \mathbf{e}_z$, puisque la différence entre ces deux termes peut être absorbé par le gradient de pression. En conclusion, le système d'équations (7.3,7.4,7.5) modélise bien notre dispositif expérimental.

La surface du fluide est laissée libre, ce qui permet de faire varier facilement la hauteur H entre 10 et 25 cm. Notre second paramètre de contrôle est la vitesse de rotation Ω , que l'on fait varier entre 10 et 85 tours par minute (RPM). L'espace des paramètres sans dimension sondé dans l'étude est représenté en figure 7.4. Nous nous sommes assurés que les effets centrifuges n'impactent pas les mesures, tout comme dans Bouillaut et al. [16].

Pour caractériser le champ de température, nous utilisons trois thermocouples placés le long de l'axe vertical à des profondeurs de $z = 0$, $z = 0.25H$ et $z = 0.75H$. La cuve est d'abord remplie à une hauteur précise H avec un mélange d'eau et d'encre noire à environ $10^\circ C$. Ensuite, le moteur est mis en marche à une vitesse de rotation Ω . Après avoir attendu au moins dix minutes pour permettre l'établissement d'une rotation solide, on allume le spot lumineux. À l'issue d'un régime transitoire, les trois sondes mesurent une dérive linéaire de température commune avec une pente donnée par l'équation (7.16). Un exemple de séries temporelles est affiché en figure 7.3. Suite à l'analyse ci-dessus, toute différence de température entre deux sondes présente un signal statistiquement stable à condition que (i) la phase transitoire initiale soit terminée et (ii) la température du fluide soit raisonnablement proche de la température ambiante (généralement $\pm 5^\circ C$). De même, les fluctuations de température autour de la dérive moyenne sont statistiquement stationnaires lorsque les conditions (i) et (ii) sont remplies. Les données expérimentales consistent en l'écart de température ΔT déjà mesuré dans Bouillaut et al. [16], que nous complétons par une mesure des fluctuations de température. La méthode utilisée pour calculer les fluctuations consiste à retirer la dérive linéaire d'un signal de température puis à calculer la valeur RMS du signal statistiquement stationnaire résultant. On analysera les fluctuations en $z = 0.25H$.

7.2.2 . Implémentation numérique

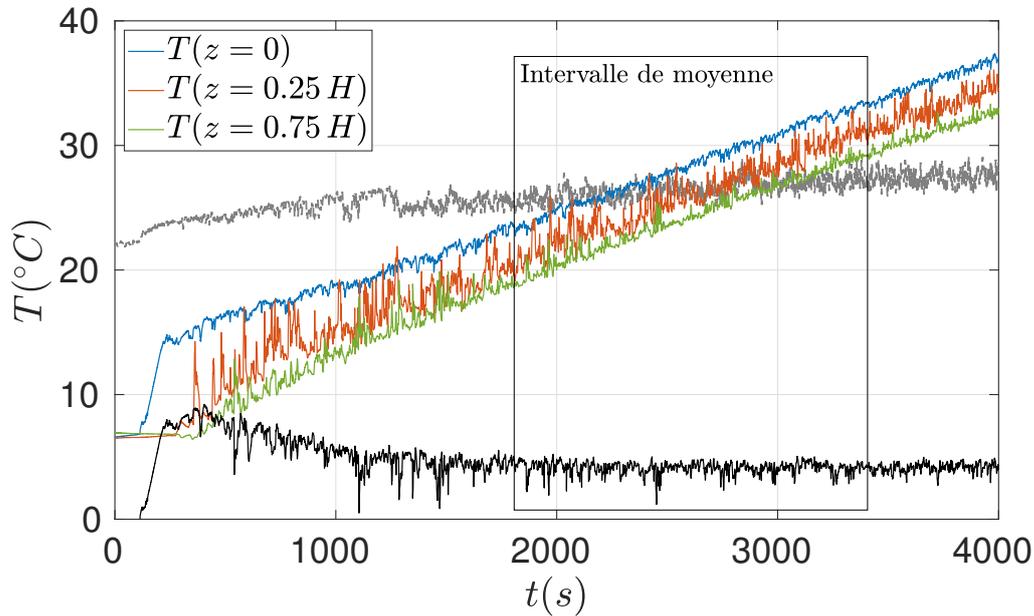


Figure 7.3 – Exemple de séries temporelles des températures au sein de l'expérience de convection par chauffage radiatif. Les trois courbes en couleur représentent les mesures brutes de température fournies par les trois thermocouples. La courbe grise indique la température ambiante. La courbe noire montre l'écart de température $\Delta T = T(z = 0) - T(z = 0.75H)$. L'encadré représente l'intervalle de temps utilisé pour effectuer les différentes moyennes, choisi de manière à ce que la température dans la cuve soit proche de la température ambiante, afin de minimiser l'effet des échanges thermiques avec l'extérieur.

Afin de caractériser le système au-delà des seules quantités accessibles en laboratoire, on réalise en plus des DNS du système d'équations (7.3,7.4,7.5) dans un domaine horizontalement périodique. On utilise le solveur pseudo-spectral `Coral` [62], validé à la fois par des résultats analytiques [58] et par des solutions calculées à l'aide du solveur `Dedalus` [63]. `Coral` utilise une décomposition spatiale Chebyshev-Fourier-Fourier et un schéma temporel implicite-explicite. Dans cette étude, les frontières supérieures et inférieures sont isolées ($\partial_z \theta = 0$) et impénétrables ($w = 0$). Pour reproduire l'expérience le plus fidèlement possible, les conditions aux limites cinématiques sont "no-slip" en bas ($u = v = 0$) et "stress-free" en haut ($\partial_z u = \partial_z v = 0$).

Notre étude numérique se focalise sur le voisinage de la région de l'espace des paramètres où les résultats expérimentaux de Bouillaut et al. sont en accord avec la prédiction du régime de turbulence géostrophique pour le nombre de Nusselt (voir l'espace des paramètres en figure 7.4). Ainsi, on a choisi des valeurs du nombre d'Ekman entre 5×10^{-7} et 10^{-4} , et des valeurs du Rayleigh-flux entre 10^{11} et 10^{12} . Le nombre de Prandtl quant à lui est fixé à 7 pour toutes les simulations. Le rapport d'aspect est choisi entre $[0.35, 1]$,

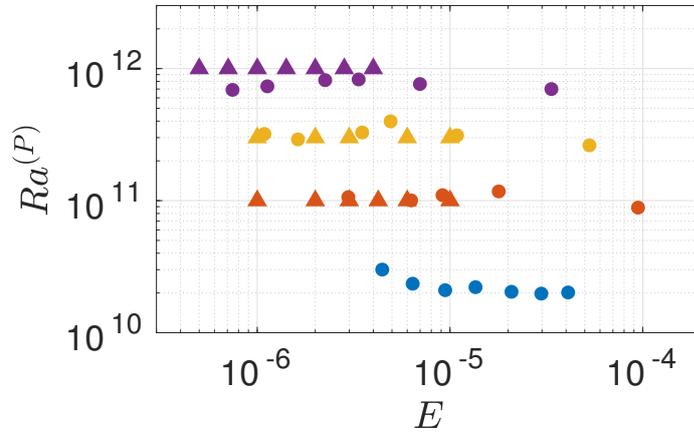


Figure 7.4 – Espace des paramètres couvert par l’ensemble des points de données présents dans l’étude. Les cercles représentent les données expérimentales ($Pr \approx 7$), tandis que les triangles représentent les DNS ($Pr = 7$).

ce qui permet d’avoir au moins quatre longueurs d’onde du mode le plus instable dans la direction horizontale pour chaque simulation numérique.

Les simulations sont initialisées soit à partir d’un bruit de faible amplitude, soit à partir d’un checkpoint d’une simulation précédente. Une fois que le régime transitoire est terminé, nous calculons les différents paramètres sans dimension en réalisant des moyennes dans le régime statistiquement stationnaire. En raison des conditions périodiques dans la direction horizontale, le système numérique est invariant par translation horizontale. Par conséquent, lors de la réalisation d’une moyenne temporelle \bar{q} d’une quantité q extraite des simulations, nous ajoutons une moyenne spatiale horizontale pour accélérer la convergence.

Autant que possible, nous essayons d’extraire des simulations les quantités équivalentes aux mesures expérimentales. Par exemple, pour calculer l’écart de température ΔT , nous commençons par moyenner horizontalement et temporellement θ aux positions $z = 0$ et $z = 0.75H$, puis nous déterminons la différence entre ces deux valeurs. Ensuite, pour obtenir le nombre de Rayleigh basé sur les fluctuations de température, $Ra^{(\theta)}$, nous évaluons θ_{std} à $z = 0.25$. Pour calculer le nombre de Reynolds émergent, absent des mesures expérimentales, nous calculons la vitesse rms $\langle \overline{u^2} \rangle^{1/2}$. Et enfin, nous choisissons de calculer une longueur horizontale caractéristique ℓ^\perp , définie de la façon suivante :

$$\ell^\perp = \left(\frac{\langle \overline{\psi^2} \rangle}{\langle \overline{\mathbf{u}^2} \rangle} \right)^{1/2}, \quad (7.17)$$

où $\psi(x, y, z, t)$ est la fonction de courant toroidale calculée en prenant le laplacien hori-

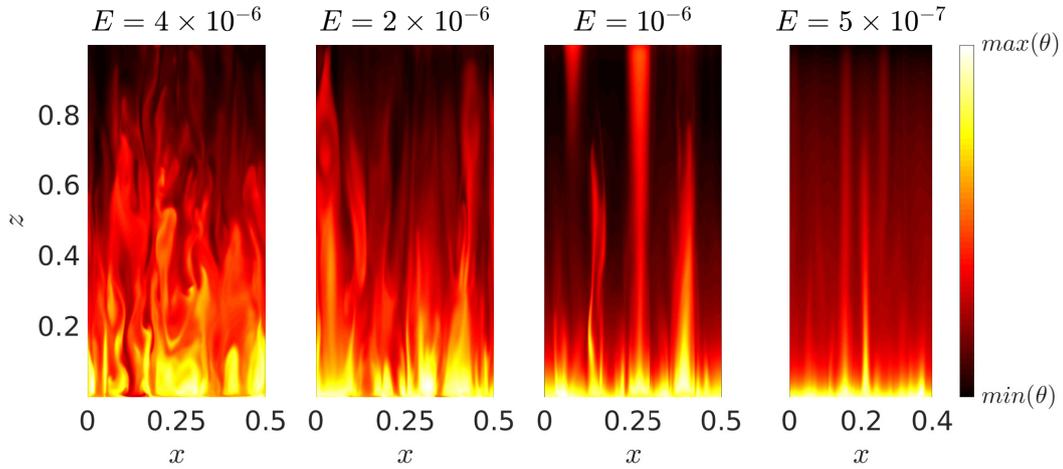


Figure 7.5 – Tranches verticales de température extraites des DNS avec $Ra^{(P)} = 10^{12}$. De gauche à droite, le nombre de Rayleigh-flux sans diffusivité (7.13) est $\mathcal{R} = 1.31 \times 10^{-6}, 1.63 \times 10^{-7}, 2.04 \times 10^{-8}, 2.55 \times 10^{-9}$. L'écoulement développe des structures colonnaires plus fines à mesure que le taux de rotation augmente (de gauche à droite).

zontal inverse de la vorticité verticale ζ .

Dans la figure 7.5, on trace quatre tranches verticales du champ de température pour un nombre de Rayleigh-flux fixé à $Ra^{(P)} = 10^{12}$ et des valeurs décroissantes du nombre d'Ekman, correspondant à une augmentation de la vitesse de rotation. On observe des structures plus fines avec une forte cohérence verticale à mesure que la vitesse de rotation augmente. Au-delà de cette observation qualitative, nous discutons dans la section suivante des prédictions caractérisant les champs de vitesse et de température dans le régime de turbulence géostrophique.

7.3 . Résultats expérimentaux et numériques

7.3.1 . Transport de chaleur

Comme discuté précédemment, une question centrale en convection turbulente est la loi d'échelle reliant le flux de chaleur à la différence de température verticale ΔT . La loi d'échelle du régime de turbulence géostrophique pour le transport de chaleur a été validée par Bouillaut et al. pour la convection par chauffage radiatif, en traçant Nu_* en fonction de \mathcal{R} pour les données expérimentales. En effet, comme résumé dans le tableau 7.1, l'intérêt de la formulation sans diffusivité est que les données, présentées de cette manière, s'alignent sur une courbe maîtresse si les propriétés à grande échelle sont in-

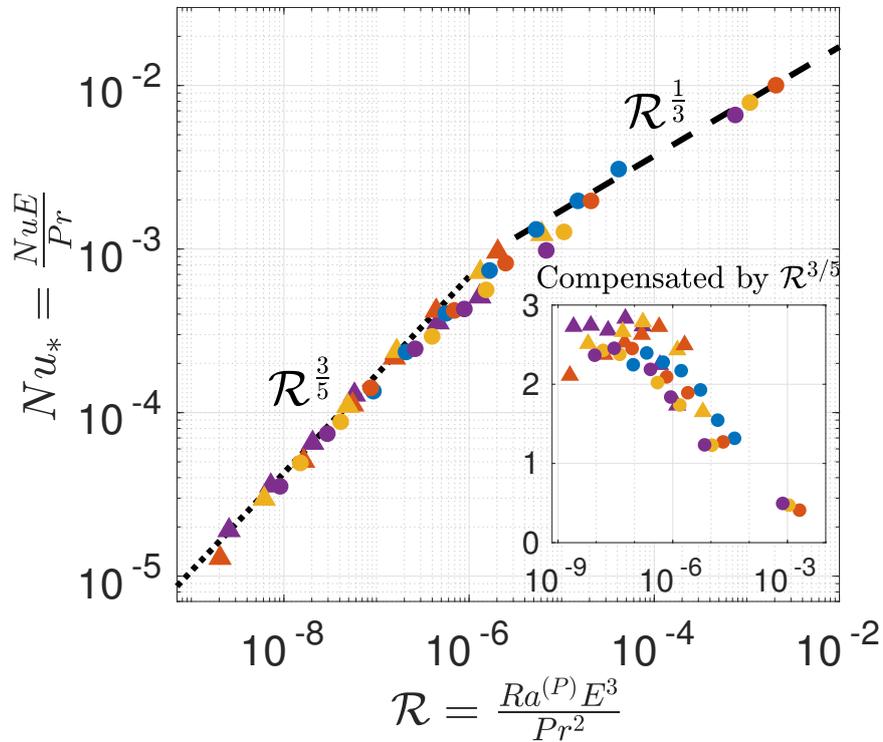


Figure 7.6 – Nombre de Nusselt sans diffusivité Nu_* en fonction du Rayleigh-flux sans diffusivité \mathcal{R} . Les symboles sont identiques à ceux de la figure 7.4. La ligne en pointillés indique l'exposant $3/5$ de la loi d'échelle du régime de turbulence géostrophique. La ligne en tirets correspond à la prédiction du régime ultime non-rotatif, caractérisé par un exposant de $1/3$ dans cette représentation. L'encart montre $Nu_*/\mathcal{R}^{3/5}$ en fonction de \mathcal{R} .

dépendantes de ν et κ . Nous reproduisons cette représentation dans la figure 7.6 en y ajoutant les données numériques. On confirme de nouveau l'accord entre les données expérimentales et la prédiction $Nu_* \sim \mathcal{R}^{3/5}$ pour $\mathcal{R} \leq 3 \times 10^{-7}$. De plus, les données numériques montrent également un excellent accord avec cette prédiction. La représentation compensée souligne particulièrement bien cet accord, nous indiquant que les préfacteurs des lois d'échelle pour les données expérimentales et numériques sont totalement compatibles, le préfacteur numérique étant supérieur d'environ 15%.

7.3.2 . Fluctuations de température

Nous nous tournons maintenant vers les fluctuations de température, que nous mesurons à la fois expérimentalement et numériquement. Pour évaluer la validité de la prédiction du régime de turbulence géostrophique, nous traçons sur la figure 7.7 le nombre de Rayleigh basé sur les fluctuations de température, dans sa version sans diffusivités $Ra_*^{(\theta)}$, en fonction de \mathcal{R} . Cette représentation conduit à une très bonne superposition des données, indiquant une dynamique indépendante des diffusivités. Les données ex-

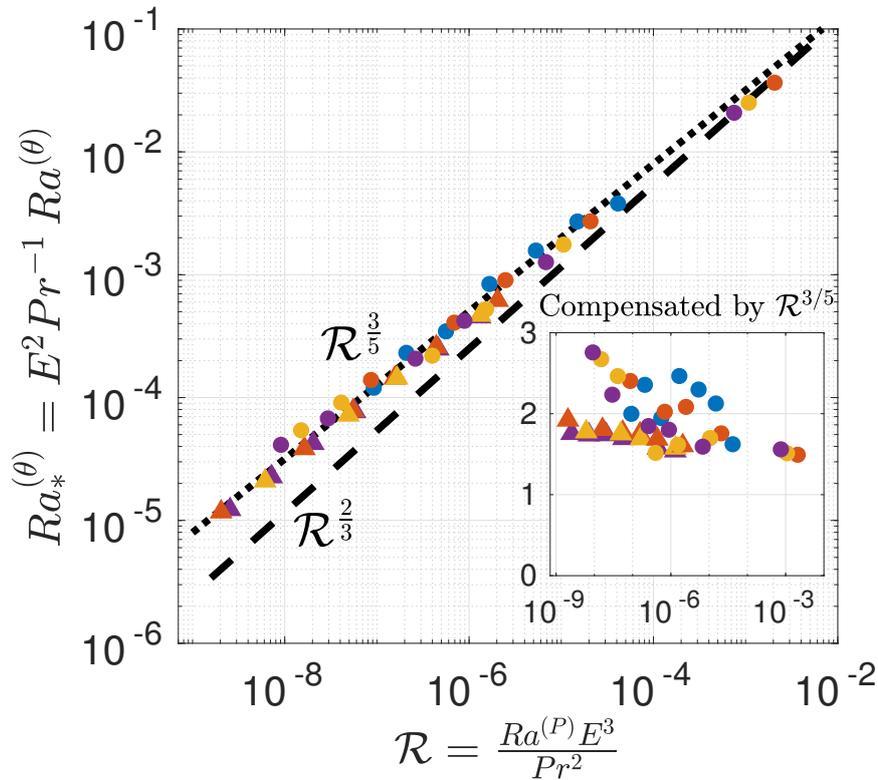


Figure 7.7 – Nombre de Rayleigh basé sur les fluctuations dans sa version sans diffusivité $Ra_*^{(\theta)}$ en fonction de \mathcal{R} . Les symboles sont identiques à ceux de la figure 7.4. La ligne en pointillés représente la prédiction du régime de turbulence géostrophique $\mathcal{R}^{3/5}$, tandis que la ligne en tirets indique la loi d'échelle du régime ultime sans rotation $\mathcal{R}^{2/3}$. L'encart montre $Ra_*^{(\theta)}/\mathcal{R}^{3/5}$ en fonction de \mathcal{R} .

périmentales montrent un peu plus de dispersion que les données numériques, ces dernières bénéficiant d'une moyenne horizontale en plus de la moyenne temporelle lors du calcul des fluctuations de température rms (voir section 7.2.2). Néanmoins, la prédiction théorique $\mathcal{R}^{3/5}$ est validée sur quatre décades de \mathcal{R} pour les deux types de données, avec un préfacteur supérieur d'environ 20% pour les données expérimentales. De manière quelque peu surprenante, la validité de la prédiction semble s'étendre au-delà de $\mathcal{R} = 3 \times 10^{-7}$. Ainsi, la prédiction pour $Ra^{(\theta)}$ est validée sur une plage plus étendue de \mathcal{R} que celle pour Nu_* .

7.3.3 . Vitesse convective

Contrairement aux expériences en laboratoire, les simulations numériques directes permettent d'évaluer facilement le champ de vitesse. Cela nous permet de vérifier la validité de la prédiction sur la vitesse RMS dans le fluide. Sur la figure 7.8, nous traçons le nombre de Reynolds sans diffusivité Re_* en fonction de \mathcal{R} . Nous obtenons à nouveau une

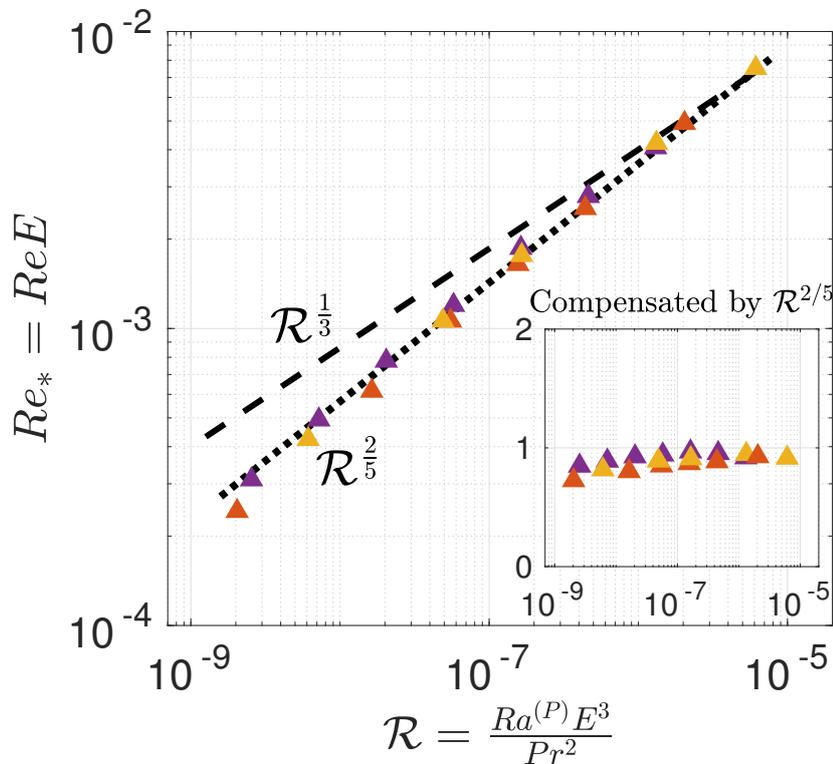


Figure 7.8 – Nombre de Reynolds dans sa version sans diffusivité Re_* en fonction de \mathcal{R} . Les symboles sont identiques à ceux de la figure 7.4. La ligne en pointillés représente la prédiction du régime de turbulence géostrophique $\mathcal{R}^{2/5}$, tandis que la ligne en tirets indique la loi d'échelle du régime ultime sans rotation $\mathcal{R}^{1/3}$. L'encart montre $Re_*/\mathcal{R}^{2/5}$ en fonction de \mathcal{R} .

excellente superposition des données numériques sur une courbe maîtresse, indiquant une dynamique indépendante des diffusivités. Cette courbe est en excellent accord avec la prédiction du régime de turbulence géostrophique $\mathcal{R}^{2/5}$, comme le montre le guide visuel sur la figure principale et la représentation compensée dans l'encadré. La figure présente également la prédiction $\mathcal{R}^{1/3}$ associée au régime ultime de convection thermique sans rotation (6.17), qui est incompatible avec les points de données en rotation rapide. De plus, la prédiction du régime de turbulence géostrophique pour Re_* semble être valide sur une plage plus étendue de \mathcal{R} que celle pour Nu_* . Cela pourrait s'expliquer par la proximité des exposants $2/5$ et $1/3$ des lois d'échelle pour les régimes rotatif et sans rotation, induisant possiblement une région de transition très douce et étendue entre les deux comportements en loi de puissance.

7.3.4 . Longueur horizontale caractéristique

Afin de caractériser davantage l'écoulement convectif, nous nous tournons maintenant vers son échelle horizontale caractéristique, extraite des simulations numériques

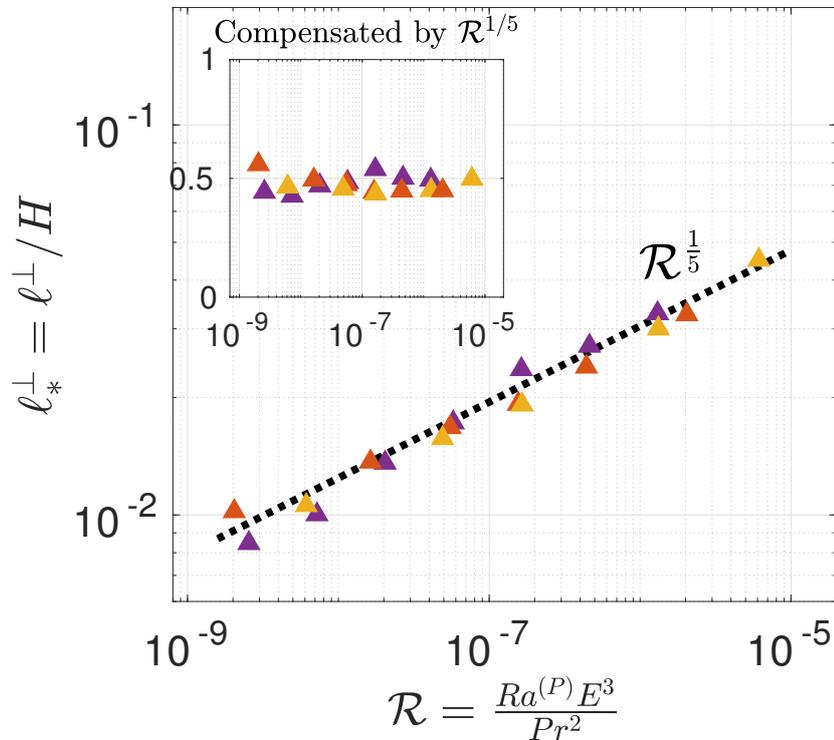


Figure 7.9 – Échelle horizontale caractéristique ℓ_*^\perp en fonction de \mathcal{R} . Les symboles sont identiques à ceux de la figure 7.4. La ligne en pointillés représente la prédiction du régime de turbulence géostrophique $\mathcal{R}^{1/5}$. L’encart montre $\ell_*^\perp / \mathcal{R}^{1/5}$ en fonction de \mathcal{R} .

directes selon la définition (7.17). Sur la figure 7.9, nous traçons ℓ_*^\perp en fonction de \mathcal{R} pour l’ensemble de données numériques. Une fois de plus, cette représentation conduit à une bonne superposition des données, bien que la dispersion soit plus importante que pour les quantités précédentes. Cela est probablement dû à la loi d’échelle du régime de turbulence géostrophique moins prononcée, en $\mathcal{R}^{1/5}$, pour cette quantité. Le guide visuel dans la figure principale indique un bon accord avec cette prédiction, ce qui est confirmé par la représentation compensée dans l’encadré.

Concernant la définition (7.17), il est intéressant de se questionner sur la pertinence de cet estimateur pour la longueur horizontale caractéristique. En effet, des études antérieures ont observé diverses lois d’échelle en utilisant différentes définitions, mais seules quelques-unes concordent avec le régime de turbulence géostrophique [64, 65]. Une explication à ce constat réside dans le fait que la plupart de ces autres estimateurs sont directement liés aux échelles dissipatives et, par conséquent, à la viscosité. Par exemple, pour étudier la dynamique indépendante des diffusivités, il est inapproprié d’utiliser une variable construite à partir de l’échelle de Kolmogorov ou de Taylor. De la même manière, la vorticité verticale est une grandeur fortement influencée par les phénomènes visqueux,

comme on peut l'observer avec les filaments de vorticité. Ainsi, il est peu pertinent de construire un estimateur basé sur le moment d'ordre 2 de la vorticité. C'est pour cette raison que nous avons jugé la fonction de courant toroïdale particulièrement pertinente pour décrire la dynamique à grande échelle de l'écoulement.

7.4 . Conclusion

En se basant sur une étude hybride expérimentale et numérique, nous avons validé les prédiction théoriques du régime de turbulence géostrophique pour la convection en rotation rapide par chauffage radiatif. Les lois d'échelle pour les fluctuations de température, la vitesse et l'échelle horizontale de l'écoulement sont observées sur de nombreuses décades du Rayleigh-flux sans diffusivité, \mathcal{R} . Ces prédiction semblent décrire l'écoulement sur une gamme de paramètres plus grande que la prédiction pour le transport de chaleur.

La même observation semble s'appliquer au système de Rayleigh-Bénard en rotation, où des études numériques indiquent que l'observation de la prédiction du régime de turbulence géostrophique pour le transport de chaleur nécessite des valeurs de paramètres plus extrêmes que les prédiction pour la vitesse et la structure de l'écoulement [44, 66]. Au niveau expérimental, Vogt et al. [67] ont rapport  des mesures de vitesse en accord avec la loi d'échelle du régime de turbulence géostrophique, mais la prédiction pour le transport de chaleur reste difficile à observer. De même, Guervilly et al. [68] dans une étude numérique de convection en rotation dans une coquille sphérique, rapportent des lois d'échelles indépendantes des diffusivités pour le nombre de Reynolds et l'échelle azimutale de l'écoulement. Cependant le nombre de Nusselt n'a pas encore atteint le régime de turbulence géostrophique. Ces observations semblent donc confirmer que la loi pour le nombre de Nusselt se manifeste plus tard dans le régime asymptotique des paramètres de contrôle relatifs à la turbulence géostrophique.

Le travail présenté dans ce chapitre a été compilé dans un article accepté pour publication dans *Journal of Fluid Mechanics*, mais il n'est pas encore paru. Pour l'instant, il peut être consulté sur Arxiv [69].

En conclusion, la convection par chauffage radiatif est une méthode efficace et robuste pour observer et quantifier les régimes indépendants des diffusivités, avec ou sans rotation. Pour approfondir l'étude des écoulements géophysiques et astrophysiques sans diffusivité, la prochaine étape serait d'ajouter des éléments d'intérêt, tels qu'un champ magnétique, qui joue un rôle significatif dans les intérieurs stellaires et planétaires.

8 - Perspectives

8.1 . Cascade inverse d'énergie

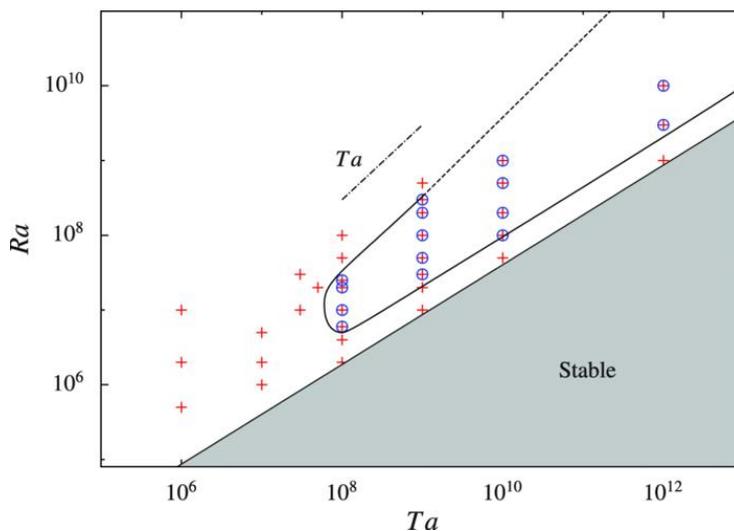


Figure 8.1 – Figure provenant de Favier et al. [70], représentant l'espace des paramètres explorés dans leur étude. Le nombre de Taylor est défini par la relation $Ta = E^{-2}$. Les points entourés en bleu indiquent les cas où une circulation à grande échelle a été observée. Cette représentation permet de visualiser les limites d'un régime où une cascade inverse d'énergie est présente. Ces limites sont illustrées par la courbe noire, dont la section en pointillés représente une délimitation hypothétique. La zone grisée correspond à l'état stable, dont la frontière suit la relation $Ra \propto E^{-4/3}$.

Plusieurs études numériques sur la convection en rotation rapportent l'existence d'une région de l'espace des paramètres où se forme un écoulement à grande échelle invariant verticalement [70-74]. Cette structure condensée à l'échelle de la boîte est réminiscente de la dynamique bidimensionnelle, favorisée par la rotation, impliquant des transferts inverses d'énergie vers les nombres d'onde les plus faibles. Si le nombre d'Ekman est suffisamment faible et que le nombre de Rayleigh se situe dans un intervalle précis, une transition vers un état condensé peut être observée. Favier et al. [70] suggèrent que les frontières délimitant un tel régime suivent une loi en $Ra \sim E^{-4/3}$ pour la limite inférieure, et $Ra \sim E^{-2}$ pour la limite supérieure (voir figure 8.1 représentant l'espace des paramètres sondé dans leur étude). À nombre d'Ekman fixé, les expériences [32], ainsi que les résultats présentés dans cette thèse, montrent que pour des nombres de Rayleigh très élevés, on retrouve le régime de convection sans rotation. Ainsi, si un régime de condensation existe, il doit se situer entre le régime de turbulence géostrophique et

le régime ultime sans rotation.

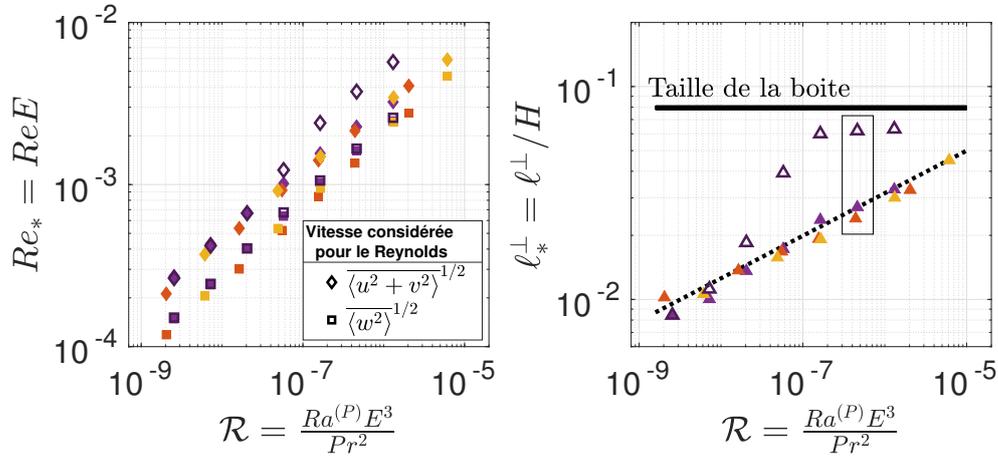


Figure 8.2 – Nombre de Reynolds et longueur horizontale dans leur version indépendante des diffusivités en fonction du Rayleigh-flux sans diffusivité \mathcal{R} . La couleur code le Rayleigh-flux de manière similaire à la figure 7.4. Les points pleins sont les simulations du chapitre 7.1. Les points creux ont été réalisés pour les mêmes valeurs des paramètres, mais avec une condition de glissement aux parois au lieu d’une condition d’adhérence. Pour le nombre de Reynolds, à gauche, nous avons distingué la composante horizontale et la composante verticale en isolant la vitesse RMS horizontale et la vitesse RMS verticale. Pour la longueur horizontale, la ligne en pointillés représente la prédiction du régime de turbulence géostrophique en $\mathcal{R}^{1/5}$. La ligne pleine correspond à la taille horizontale de la boîte pour le rapport d’aspect des points violets (divisée par $2\pi H$ pour coller à la définition de l^\perp/H). L’encadré délimite les trois cas tests de la figure 8.3.

Cependant, les études numériques portant sur l’émergence de structures à l’échelle de la boîte partagent une caractéristique commune : l’application de conditions de glissement aux parois. En effet, les conditions d’adhérence ont pour effet de générer un processus de friction au niveau du fond, limitant ainsi l’énergie des grandes échelles. Pour approfondir cette question, nous avons réalisé des simulations similaires à celles présentées dans le chapitre 7.1, à $Ra^{(P)} = 10^{12}$, mais avec des conditions de glissement aux parois. Les séries temporelles obtenues révèlent une première observation marquante : la présence d’un régime transitoire caractérisé par une croissance lente de l’énergie cinétique, contraste notable par rapport aux simulations habituelles avec conditions d’adhérence. Après un long transitoire, un état d’équilibre est finalement atteint. Ce phénomène est bien documenté dans la littérature [70], où on l’explique par le temps pris par les transferts inverses d’énergie pour opérer pleinement et atteindre la taille de la boîte. Une fois les transferts contraints par la taille de la boîte, une saturation de l’énergie cinétique s’ensuit. Sur la figure 8.2, nous présentons le nombre de Reynolds sans diffusivité diagnostiqué dans l’état statistiquement stationnaire dans nos simulations du chapitre 7.1, ainsi que dans nos nouvelles simulations avec des conditions aux limites de glissement. Cette

fois-ci, nous faisons le choix de distinguer le nombre de Reynolds basé sur la vitesse horizontale de celui basé sur la vitesse verticale. Pour des faibles Rayleigh-flux sans diffusivité \mathcal{R} , les points sont superposés pour les conditions aux limites "stress-free" et "no-slip". Cependant, au-delà d'un certain \mathcal{R} , la courbe pour le nombre de Reynolds horizontal se séparent, tandis que celle du nombre de Reynolds vertical demeure presque inchangée. Ce résultat indique l'apparition d'un écoulement horizontal intense dans les simulations "stress-free", en accord avec une condensation de l'énergie dans les modes horizontaux les plus faibles. Ce résultat est confirmé par la courbe de ℓ_*^\perp en fonction de \mathcal{R} sur laquelle on observe aussi une déviation des points "stress-free" par rapport au régime de turbulence géostrophique vérifié par les points "no-slip". L'échelle caractéristique horizontale croît avec \mathcal{R} jusqu'à atteindre la taille horizontale de la boîte.

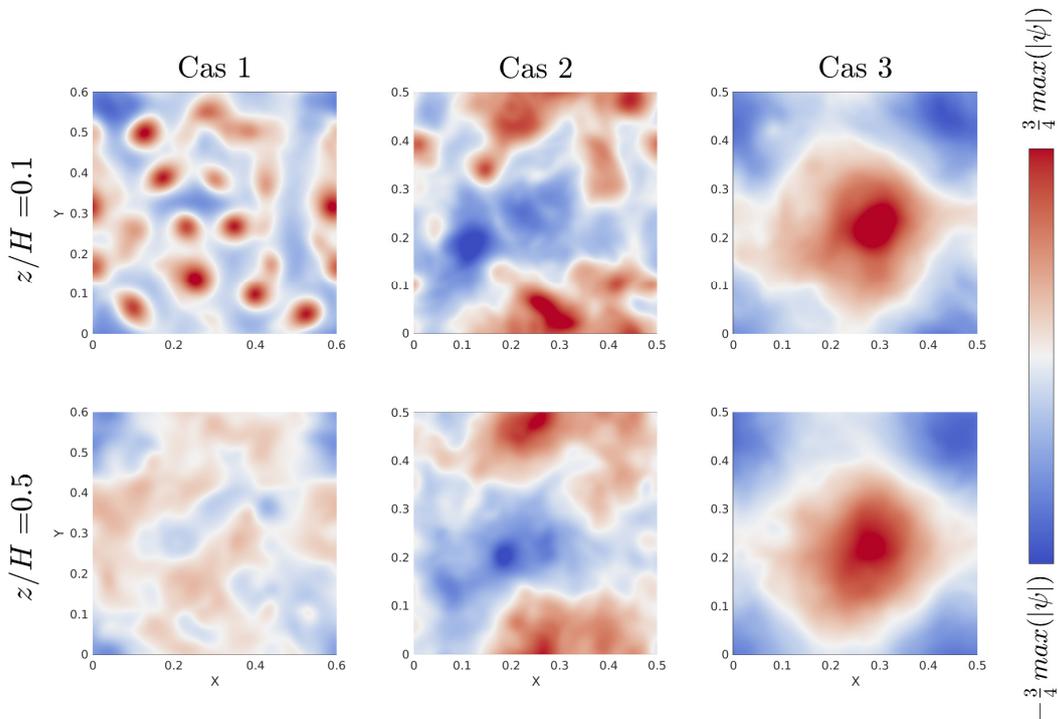


Figure 8.3 – Coupes horizontales de la fonction de courant toroïdale à $z = 0.1H$ et $z = 0.5H$ dans le régime statistiquement stationnaire, pour trois simulations avec $\mathcal{R} \approx 4.7 \times 10^{-7}$. Les trois cas correspondent aux trois simulations dans l'encadré de la figure 8.2 :
- Cas 1 : triangle orange plein, $Ra^{(P)} = 10^{11}$, "No-Slip".
- Cas 2 : triangle violet plein, $Ra^{(P)} = 10^{12}$, "No-Slip".
- Cas 3 : triangle violet creux, $Ra^{(P)} = 10^{12}$, "Stress-Free".

Sur la figure 8.3, nous présentons des coupes horizontales de la fonction de courant toroïdale $\psi = \Delta_\perp^{-1}\zeta$ pour trois simulations différentes dans l'état statistiquement stationnaire. Le cas 3, correspondant à une simulation avec des conditions de glissement,

présente clairement une structure condensée à l'échelle de la boîte. En revanche, le cas 1, avec des conditions d'adhérence et un Rayleigh-flux modéré, révèle plusieurs petites structures sans cohérence verticale. Cet état est totalement différent de celui observé dans le cas 3. En comparaison, le cas 2, avec un $Ra^{(P)}$ légèrement plus élevé, semble représenter un état intermédiaire. Peut-on alors envisager un état partiellement condensé dans les simulations avec conditions d'adhérence, sans que cela affecte notablement les lois d'échelle pour le nombre de Reynolds ou la longueur horizontale caractéristique? Il est important de garder à l'esprit que ψ , par sa nature, met en valeur les grandes échelles d'un écoulement. Une analyse de la vorticité verticale ζ ne permet pas de tirer de conclusions aussi claires.

Sur la figure 7.6 du chapitre précedent, qui montre le nombre de Nusselt sans diffusivité en fonction de \mathcal{R} , on constate un alignement imparfait des points pour des valeurs intermédiaires de \mathcal{R} , soit entre 6×10^{-6} et 10^{-5} . Il est intéressant de noter que les points correspondant à de faibles valeurs de $Ra^{(P)}$ suivent la loi du régime de turbulence géostrophique en $\mathcal{R}^{3/5}$ plus longtemps que ceux avec $Ra^{(P)} \approx 10^{12}$. Cette absence d'alignement suggère que les diffusivités jouent un rôle dans la dynamique observée. Cela soulève les questions suivantes : serait-il possible que le transport de chaleur dans la convection en rotation avec parois adhérentes soit affecté par des transferts inverses d'énergie, r miniscents d'un état condensé observable lorsque des conditions de glissement aux parois sont considérées? Ce phénomène pourrait-il être attribué à la friction qui freine ces transferts, réintroduisant ainsi la viscosité dans les lois d'échelle régissant le transport de chaleur dans la zone de rotation intermédiaire?

Nous avons cherché à caractériser l'émergence d'un écoulement à grande échelle dans nos expériences à l'aide d'une caméra thermique mesurant la température à la surface. Pour calculer une vitesse de rotation d'ensemble à la surface, nous avons mesuré la corrélation entre deux images successives dans le référentiel en rotation, en appliquant une rotation à l'une des deux images. En déterminant l'angle de rotation maximisant la corrélation, nous avons pu calculer la vitesse d'une circulation horizontale à l'échelle de la cuve. Nos résultats tendent à montrer l'existence d'un mouvement de rotation d'ensemble à la surface, dont la vitesse est faible comparée à la fréquence de rotation de la cuve. Ce mouvement rotatif, présent dans l'ensemble de nos données, est toujours anticyclonique. Cependant, dans le cadre d'une condensation de l'énergie aux grandes échelles, on ne s'attend pas à observer une circulation d'ensemble pour la totalité des points réalisés, ce qui nous amène à nous questionner sur l'influence potentielle de phénomènes parasites sur cette circulation. En particulier, dans la limite où la circulation d'ensemble est faible, il est difficile de distinguer ce qui relève d'une éventuelle condensation de ce qui pourrait être dû aux effets centrifuges ou aux modes de bord. De plus, la technique ne permet pas une mesure précise lorsqu'il n'y a pas de structures de température facilement identifiables à la surface.   de faibles $\widetilde{Ra}^{(P)}$, les colonnes de température clairement identifiables permettent des corrélations significatives entre deux images. Cepen-

dant, pour des $\widetilde{Ra}^{(P)}$ plus élevés, les structures colonnaires cèdent la place à des filaments de température à la dynamique plus rapide, rendant le processus de corrélation moins fiable.

En conclusion, une étude numérique apparaît comme une approche plus appropriée pour déterminer l'existence de transferts inverses d'énergie en convection en rotation avec des conditions d'adhérence aux parois, ainsi que leur impact potentiel sur le transport de chaleur.

8.2 . Influence de la longueur d'absorption

Le principe de la convection par chauffage radiatif repose sur l'idée que les couches limites perturbent ou entravent le transport de chaleur. En injectant l'énergie au-delà des couches limites, on réduit leur influence, permettant ainsi d'observer les régimes ultimes de convection, régis par la dynamique indépendante des diffusivités au cœur de l'écoulement. Dans le cas de la convection sans rotation, Lepot et al. [17] et Bouillaut et al. [57] ont démontré qu'une réduction de la longueur d'absorption induit une transition vers le régime classique de convection en $Ra^{1/3}$. Cela paraît cohérent puisqu'on retrouve la dynamique de Rayleigh-Bénard lorsque la longueur d'absorption est bien inférieure à la taille des couches limites. Cela soulève une question importante : qu'en est-il de la convection en présence de rotation ?

Nous avons alors entrepris de tester la dépendance en ℓ/H dans nos expériences. Cependant, le nombre de points de données requis pour une analyse concluante est considérable, car il est nécessaire de réaliser presque autant de mesures que celles effectuées dans l'étude du chapitre 7.1, et ce, pour plusieurs valeurs de ℓ/H . À ce stade, le nombre de mesures réalisées ne permet pas encore de formuler une conclusion définitive. Les mesures supplémentaires à venir devraient nous permettre de clarifier cette dépendance.

Bibliographie

- [1] Edward A Spiegel. "Convection in stars I. Basic Boussinesq convection". In : *Annual review of astronomy and astrophysics* 9.1 (1971). Publisher : Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, p. 323-352.
- [2] P. Garaud. "Journey to the center of stars : The realm of low Prandtl number fluid dynamics". In : *Phys. Rev. Fluids* 6.3 (mars 2021). Publisher : American Physical Society, p. 030501. doi : [10.1103/PhysRevFluids.6.030501](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.6.030501).
- [3] Leon Mestel. *Stellar magnetism*. T. 154. Oxford University Press, 2012.
- [4] Andrew Jackson. "Intense equatorial flux spots on the surface of the Earth's core". In : *Nature* 424.6950 (2003). Publisher : Nature Publishing Group UK London, p. 760-763.
- [5] JM Aurnou et al. "Rotating convective turbulence in Earth and planetary cores". In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 246 (2015). Publisher : Elsevier, p. 52-71.
- [6] John Marshall et Friedrich Schott. "Open-ocean convection : Observations, theory, and models". In : *Reviews of geophysics* 37.1 (1999). Publisher : Wiley Online Library, p. 1-64.
- [7] JUAN PEDRO MELLADO. "The evaporatively driven cloud-top mixing layer". In : *Journal of Fluid Mechanics* 660 (2010), p. 5-36. doi : [10.1017/S0022112010002831](https://doi.org/10.1017/S0022112010002831).
- [8] Caroline Muller et Sophie Abramian. "The cloud dynamics of convective storm systems". In : *Physics Today* 76.5 (mai 2023), p. 28-28. doi : [10.1063/PT.3.5234](https://doi.org/10.1063/PT.3.5234).
- [9] CHB Priestley. "Convection from a large horizontal surface". In : *Australian Journal of Physics* 7.1 (1954). Publisher : CSIRO Publishing, p. 176-201.
- [10] Willem VR Malkus. "The heat transport and spectrum of thermal turbulence". In : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 225.1161 (1954). Publisher : The Royal Society London, p. 196-212.
- [11] Robert H Kraichnan. "Turbulent thermal convection at arbitrary Prandtl number". In : *The Physics of Fluids* 5.11 (1962). Publisher : American Institute of Physics, p. 1374-1389.
- [12] Edward A Spiegel. "A Generalization of the Mixing-Length Theory of Turbulent Convection." In : *Astrophysical Journal, vol. 138, p. 216* 138 (1963), p. 216.

- [13] David J. Stevenson. "Turbulent thermal convection in the presence of rotation and a magnetic field : A heuristic theory". en. In : *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* 12.1 (jan. 1979), p. 139-169. doi : [10.1080/03091927908242681](https://doi.org/10.1080/03091927908242681).
- [14] Siegfried Grossmann et Detlef Lohse. "Scaling in thermal convection : a unifying theory". In : *Journal of Fluid Mechanics* 407 (2000). Publisher : Cambridge University Press, p. 27-56.
- [15] Keith Julien, Edgar Knobloch et Joseph Werne. "A New Class of Equations for Rotationally Constrained Flows". In : *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 11.3-4 (juin 1998), p. 251-261. doi : [10.1007/s001620050092](https://doi.org/10.1007/s001620050092).
- [16] Vincent Bouillaut et al. "Experimental observation of the geostrophic turbulence regime of rapidly rotating convection". en. In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 118.44 (nov. 2021), e2105015118. doi : [10.1073/pnas.2105015118](https://doi.org/10.1073/pnas.2105015118).
- [17] Simon Lepot, Sébastien Aumaître et Basile Gallet. "Radiative heating achieves the ultimate regime of thermal convection". en. In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 115.36 (sept. 2018), p. 8937-8941. doi : [10.1073/pnas.1806823115](https://doi.org/10.1073/pnas.1806823115).
- [18] Henri Bénard. "Étude expérimentale des courants de convection dans une nappe liquide.—Régime permanent : tourbillons cellulaires". In : *J. Phys. Theor. Appl.* 9.1 (1900), p. 513-524.
- [19] Lord Rayleigh. "LIX. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side". In : *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 32.192 (1916). Publisher : Taylor & Francis, p. 529-546.
- [20] Antoine Naert, T Segawa et M Sano. "High-Reynolds-number thermal turbulence in mercury". In : *Physical Review E* 56.2 (1997). Publisher : APS, R1302.
- [21] X Chavanne et al. "Rayleigh-Bénard convection at very high Rayleigh numbers close to the ^4He critical point". In : *Cryogenics* 38.12 (1998). Publisher : Elsevier, p. 1191-1198.
- [22] Gregory P Chini et Stephen M Cox. "Large Rayleigh number thermal convection : heat flux predictions and strongly nonlinear solutions". In : *Physics of Fluids* 21.8 (2009). Publisher : AIP Publishing.
- [23] P-E Roche et al. "On the triggering of the Ultimate Regime of convection". In : *New Journal of Physics* 12.8 (août 2010), p. 085014. doi : [10.1088/1367-2630/12/8/085014](https://doi.org/10.1088/1367-2630/12/8/085014).
- [24] Xiaozhou He et al. "Transition to the ultimate state of turbulent Rayleigh-Bénard convection". In : *Physical review letters* 108.2 (2012). Publisher : APS, p. 024502.

- [25] C. R. Doering, S. Toppaladoddi et J. S. Wettlaufer. "Absence of Evidence for the Ultimate Regime in Two-Dimensional Rayleigh-Bénard Convection". In : *Phys. Rev. Lett.* 123.25 (déc. 2019). Publisher : American Physical Society, p. 259401. doi : [10.1103/PhysRevLett.123.259401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.259401).
- [26] Edward A Spiegel et G Veronis. "On the Boussinesq approximation for a compressible fluid." In : *Astrophysical Journal*, vol. 131, p. 442 131 (1960), p. 442.
- [27] Louis N Howard. "Convection at high Rayleigh number". In : *Applied Mechanics : Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964*. Springer, 1966, p. 1109-1115.
- [28] Bernard Castaing et al. "Scaling of hard thermal turbulence in Rayleigh-Bénard convection". In : *Journal of Fluid Mechanics* 204 (1989). Publisher : Cambridge University Press, p. 1-30.
- [29] S Cioni, Sergio Ciliberto et Joël Sommeria. "Strongly turbulent Rayleigh-Bénard convection in mercury : comparison with results at moderate Prandtl number". In : *Journal of Fluid Mechanics* 335 (1997). Publisher : Cambridge University Press, p. 111-140.
- [30] Xiaojue Zhu et al. "Transition to the Ultimate Regime in Two-Dimensional Rayleigh-Bénard Convection". en. In : *Physical Review Letters* 120.14 (avr. 2018), p. 144502. doi : [10.1103/PhysRevLett.120.144502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.144502).
- [31] Kartik P Iyer et al. "Classical $1/3$ scaling of convection holds up to $Ra = 10^{15}$ ". In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 117.14 (2020). Publisher : National Acad Sciences, p. 7594-7598.
- [32] Rudie PJ Kunnen. "The geostrophic regime of rapidly rotating turbulent convection". In : *Journal of Turbulence* 22.4-5 (2021). Publisher : Taylor & Francis, p. 267-296.
- [33] S Chandrasekhar. "Hydrodynamic and hydromagnetic stability". In : (jan. 1961).
- [34] J. S. Cheng et al. "Laboratory-numerical models of rapidly rotating convection in planetary cores". en. In : *Geophysical Journal International* 201.1 (avr. 2015), p. 1-17. doi : [10.1093/gji/ggu480](https://doi.org/10.1093/gji/ggu480).
- [35] Jonathan S. Cheng et al. "Laboratory exploration of heat transfer regimes in rapidly rotating turbulent convection". en. In : *Physical Review Fluids* 5.11 (nov. 2020), p. 113501. doi : [10.1103/PhysRevFluids.5.113501](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.5.113501).
- [36] Robert E. Ecke et Joseph J. Niemela. "Heat Transport in the Geostrophic Regime of Rotating Rayleigh-Bénard Convection". en. In : *Physical Review Letters* 113.11 (sept. 2014), p. 114301. doi : [10.1103/PhysRevLett.113.114301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.114301).
- [37] Marcel Wedi et al. "Rotating turbulent thermal convection at very large Rayleigh numbers". en. In : *Journal of Fluid Mechanics* 912 (avr. 2021), A30. doi : [10.1017/jfm.2020.1149](https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1149).

- [38] Xuan Zhang et al. "Boundary Zonal Flow in Rotating Turbulent Rayleigh-Bénard Convection". en. In : *Physical Review Letters* 124.8 (fév. 2020), p. 084505. doi : [10.1103/PhysRevLett.124.084505](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.084505).
- [39] Xuan Zhang, Robert E. Ecke et Olga Shishkina. "Boundary zonal flows in rapidly rotating turbulent thermal convection". en. In : *Journal of Fluid Mechanics* 915 (mai 2021), A62. doi : [10.1017/jfm.2021.74](https://doi.org/10.1017/jfm.2021.74).
- [40] Marcel Wedi et al. "Experimental evidence for the boundary zonal flow in rotating Rayleigh-Bénard convection". en. In : *Journal of Fluid Mechanics* 939 (mai 2022), A14. doi : [10.1017/jfm.2022.195](https://doi.org/10.1017/jfm.2022.195).
- [41] Louise Terrien, Benjamin Favier et Edgar Knobloch. "Suppression of Wall Modes in Rapidly Rotating Rayleigh-Bénard Convection by Narrow Horizontal Fins". en. In : *Physical Review Letters* 130.17 (avr. 2023), p. 174002. doi : [10.1103/PhysRevLett.130.174002](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.130.174002).
- [42] Eric M King, Stephan Stellmach et Jonathan M Aurnou. "Heat transfer by rapidly rotating Rayleigh-Bénard convection". In : *Journal of Fluid Mechanics* 691 (2012). Publisher : Cambridge University Press, p. 568-582.
- [43] Stephan Stellmach et al. "Approaching the asymptotic regime of rapidly rotating convection : boundary layers versus interior dynamics". In : *Physical review letters* 113.25 (2014). Publisher : APS, p. 254501.
- [44] Jiaying Song, Olga Shishkina et Xiaojue Zhu. "Scaling regimes in rapidly rotating thermal convection at extreme Rayleigh numbers". In : *Journal of Fluid Mechanics* 984 (2024), A45. doi : [10.1017/jfm.2024.249](https://doi.org/10.1017/jfm.2024.249).
- [45] Mathieu Gibert et al. "High-Rayleigh-number convection in a vertical channel". In : *Physical review letters* 96.8 (2006). Publisher : APS, p. 084501.
- [46] Mathieu Gibert et al. "Heat convection in a vertical channel : Plumes versus turbulent diffusion". In : *Physics of Fluids* 21.3 (2009). Publisher : AIP Publishing.
- [47] Murali R Cholemani et Jaywant H Arakeri. "Axially homogeneous, zero mean flow buoyancy-driven turbulence in a vertical pipe". In : *Journal of fluid mechanics* 621 (2009). Publisher : Cambridge University Press, p. 69-102.
- [48] Jean-Christophe Tisserand et al. "Convection in a vertical channel". In : *New Journal of Physics* 12.7 (2010). Publisher : IOP Publishing, p. 075024.
- [49] Y. Shen, P. Tong et K.-Q. Xia. "Turbulent Convection over Rough Surfaces". en. In : *Physical Review Letters* 76.6 (fév. 1996), p. 908-911. doi : [10.1103/PhysRevLett.76.908](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.908).
- [50] S. Ciliberto et C. Laroche. "Random Roughness of Boundary Increases the Turbulent Convection Scaling Exponent". en. In : *Physical Review Letters* 82.20 (mai 1999), p. 3998-4001. doi : [10.1103/PhysRevLett.82.3998](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.3998).

- [51] Y.-B. Du et P. Tong. "Turbulent thermal convection in a cell with ordered rough boundaries". en. In : *Journal of Fluid Mechanics* 407 (mars 2000), p. 57-84. doi : [10.1017/S0022112099007624](https://doi.org/10.1017/S0022112099007624).
- [52] P.-E. Roche et al. "Observation of the 12 power law in Rayleigh-Bénard convection". en. In : *Physical Review E* 63.4 (mars 2001), p. 045303. doi : [10.1103/PhysRevE.63.045303](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.63.045303).
- [53] X.-L. Qiu, K.-Q. Xia et P. Tong. "Experimental study of velocity boundary layer near a rough conducting surface in turbulent natural convection". en. In : *Journal of Turbulence* 6 (jan. 2005), N30. doi : [10.1080/14685240500460733](https://doi.org/10.1080/14685240500460733).
- [54] J.-C. Tisserand et al. "Comparison between rough and smooth plates within the same Rayleigh-Bénard cell". en. In : *Physics of Fluids* 23.1 (jan. 2011), p. 015105. doi : [10.1063/1.3540665](https://doi.org/10.1063/1.3540665).
- [55] Srikanth Toppaladoddi et al. "Thermal convection over fractal surfaces". en. In : *Journal of Fluid Mechanics* 907 (jan. 2021), A12. doi : [10.1017/jfm.2020.826](https://doi.org/10.1017/jfm.2020.826).
- [56] Adrian J. Barker, Adam M. Dempsey et Yoram Lithwick. "Theory and simulations of rotating convection". In : *The Astrophysical Journal* 791.1 (juill. 2014), p. 13. doi : [10.1088/0004-637X/791/1/13](https://doi.org/10.1088/0004-637X/791/1/13).
- [57] Vincent Bouillaut et al. "Transition to the ultimate regime in a radiatively driven convection experiment". en. In : *Journal of Fluid Mechanics* 861 (fév. 2019), R5. doi : [10.1017/jfm.2018.972](https://doi.org/10.1017/jfm.2018.972).
- [58] Benjamin Miquel et al. "On the role of the Prandtl number in convection driven by heat sources and sinks". en. In : *Journal of Fluid Mechanics* 900 (oct. 2020), R1. doi : [10.1017/jfm.2020.485](https://doi.org/10.1017/jfm.2020.485).
- [59] Vincent Bouillaut. "Radiative heating achieves the geostrophic turbulence regime of convection". English. Fluid Dynamics [physics.flu-dyn]. Université Paris-Saclay, 2022.
- [60] Susanne Horn et Jonathan M. Aurnou. "Regimes of Coriolis-Centrifugal Convection". en. In : *Physical Review Letters* 120.20 (mai 2018), p. 204502. doi : [10.1103/PhysRevLett.120.204502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.204502).
- [61] Susanne Horn et Jonathan M. Aurnou. "Rotating convection with centrifugal buoyancy : Numerical predictions for laboratory experiments". en. In : *Physical Review Fluids* 4.7 (juill. 2019), p. 073501. doi : [10.1103/PhysRevFluids.4.073501](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.4.073501).
- [62] Benjamin Miquel. "Coral : a parallel spectral solver for fluid dynamics and partial differential equations". In : *Journal of Open Source Software* 6.65 (sept. 2021), p. 2978. doi : [10.21105/joss.02978](https://doi.org/10.21105/joss.02978).

- [63] Keaton J. Burns et al. "Dedalus : A flexible framework for numerical simulations with spectral methods". en. In : *Physical Review Research* 2.2 (avr. 2020), p. 023068. doi : [10.1103/PhysRevResearch.2.023068](https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.023068).
- [64] Nils B de Vries, Adrian J Barker et Rainer Hollerbach. "Tidal dissipation due to the elliptical instability and turbulent viscosity in convection zones in rotating giant planets and stars". In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 524.2 (2023). Publisher : Oxford University Press, p. 2661-2683.
- [65] Tobias G Oliver et al. "Small scale quasigeostrophic convective turbulence at large Rayleigh number". In : *Physical Review Fluids* 8.9 (2023). Publisher : APS, p. 093502.
- [66] Keith Julien et al. "Heat transport in low-Rossby-number Rayleigh-Bénard convection". In : *Physical review letters* 109.25 (2012). Publisher : APS, p. 254503.
- [67] Tobias Vogt, Susanne Horn et Jonathan M. Aurnou. "Oscillatory thermal-inertial flows in liquid metal rotating convection". en. In : *Journal of Fluid Mechanics* 911 (mars 2021), A5. doi : [10.1017/jfm.2020.976](https://doi.org/10.1017/jfm.2020.976).
- [68] Céline Guervilly, Philippe Cardin et Nathanaël Schaeffer. "Turbulent convective length scale in planetary cores". In : *Nature* 570.7761 (2019). Publisher : Nature Publishing Group UK London, p. 368-371.
- [69] Gabriel Hadjerci et al. "Rapidly rotating radiatively driven convection : experimental and numerical validation of the geostrophic turbulence's scaling predictions". In : *arXiv preprint arXiv :2401.16200* (2024).
- [70] B. Favier, L. J. Silvers et M. R. E. Proctor. "Inverse cascade and symmetry breaking in rapidly rotating Boussinesq convection". en. In : *Physics of Fluids* 26.9 (sept. 2014), p. 096605. doi : [10.1063/1.4895131](https://doi.org/10.1063/1.4895131).
- [71] Antonio M. Rubio et al. "Upscale Energy Transfer in Three-Dimensional Rapidly Rotating Turbulent Convection". en. In : *Physical Review Letters* 112.14 (avr. 2014), p. 144501. doi : [10.1103/PhysRevLett.112.144501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.144501).
- [72] Céline Guervilly, David W Hughes et Chris A Jones. "Large-scale vortices in rapidly rotating Rayleigh-Bénard convection". In : *Journal of Fluid Mechanics* 758 (2014). Publisher : Cambridge University Press, p. 407-435.
- [73] S. Maffei et al. "On the inverse cascade and flow speed scaling behaviour in rapidly rotating Rayleigh-Bénard convection". en. In : *Journal of Fluid Mechanics* 913 (avr. 2021), A18. doi : [10.1017/jfm.2020.1058](https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1058).
- [74] Xander M de Wit et al. "Discontinuous transitions towards vortex condensates in buoyancy-driven rotating turbulence". In : *Journal of Fluid Mechanics* 936 (2022). Publisher : Cambridge University Press, A43.
- [75] Gabriel Hadjerci et Basile Gallet. "Vortex core radius in baroclinic turbulence : Implications for scaling predictions". In : *Physical Review Fluids* 8.9 (2023). Publisher : APS, p. 094501.

- [76] Gabriel Hadjerci et Basile Gallet. "Two-layer baroclinic turbulence with arbitrary layer depths". In : *Physical Review Fluids* 9.5 (2024). Publisher : APS, p. L051802.
- [77] Basile Gallet et al. "Transport and emergent stratification in the equilibrated Eady model : the vortex-gas scaling regime". en. In : *Journal of Fluid Mechanics* 948 (oct. 2022), A31. doi : [10.1017/jfm.2022.501](https://doi.org/10.1017/jfm.2022.501).

Bilan

Dans cette thèse, nous avons étudié deux phénomènes majeurs responsables du transport de la chaleur dans des contextes géophysiques et astrophysiques, chacun impliquant des écoulements turbulents.

Le premier phénomène étudié est la turbulence barocline. Présente dans les océans et les atmosphères planétaires, elle est d'une importance capitale pour la régulation du climat sur Terre. Notre étude s'est concentrée sur la théorie du gaz de vortex développée par Gallet et Ferrari, qui permet de prédire l'amplitude du flux de chaleur dans des conditions de faible friction au niveau du fond. En analysant le rayon des cœurs de vortex dans le modèle à deux couches de fluide quasi-géostrophique, nous avons proposé une amélioration de cette théorie. Plus précisément, notre proposition affine la loi d'échelle dans le cas où la friction est quadratique. Nous avons ensuite utilisé ce résultat pour étendre la théorie du gaz de vortex à un modèle à deux couches de fluide avec des profondeurs différentes. Enfin, nous avons vérifié que les lois du gaz de vortex décrivent également les propriétés de transport d'un modèle entièrement 3D : le modèle d'Eady.

Le second phénomène étudié est la convection turbulente en rotation, particulièrement le régime de turbulence géostrophique, pertinent pour décrire des mécanismes naturels tels que les zones convectives des étoiles en rotation rapide. Puisque ce régime est difficile à observer dans les expériences classiques de Rayleigh-Bénard, nous avons proposé une méthode alternative pour mettre en évidence ses différentes lois d'échelle. Nous avons poursuivi l'étude expérimentale de Bouillaut et al. sur la convection en rotation par chauffage radiatif et l'avons complétée par une étude numérique, permettant d'accéder à des données inaccessibles en laboratoire. Cette approche nous a permis de valider les prédictions du régime de turbulence géostrophique pour le champ de vitesse, les fluctuations de température et la structure de l'écoulement dans une configuration qui peut effectivement être réalisée en laboratoire.

Les résultats de cette thèse ont été publiés dans quatre articles, dont trois sur la turbulence barocline et un sur la convection thermique. Mon travail sur le modèle à deux couches de fluide quasi-géostrophique a abouti à la publication de deux articles dans *Physical Review Fluids* en 2023 [1] et 2024 [2]. De plus, mes recherches sur la limite quasi-géostrophique du modèle d'Eady ont contribué à un article sur les propriétés de transport dans le modèle d'Eady 3D. Cet article, fruit d'une collaboration entre notre équipe au CEA et des membres de l'équipe CliMA au MIT, a été publié dans *Journal of Fluid Mechanics* en 2022 [3]. Enfin, mon travail sur la convection thermique par chauffage radiatif a abouti à la publication d'un article dans *Journal of Fluid Mechanics*. Bien que cet article ne soit pas encore paru, il peut être consulté sur Arxiv [4]. Enfin, un article de revue sur la convection engendrée par forçage radiatif est en cours de révision.

Liste de publications

1. Gabriel Hadjerci et Basile Gallet. "Vortex core radius in baroclinic turbulence : Implications for scaling predictions". In : *Physical Review Fluids* 8.9 (2023). Publisher : APS, p. 094501
2. Gabriel Hadjerci et Basile Gallet. "Two-layer baroclinic turbulence with arbitrary layer depths". In : *Physical Review Fluids* 9.5 (2024). Publisher : APS, p. L051802
3. Basile Gallet et al. "Transport and emergent stratification in the equilibrated Eady model : the vortex-gas scaling regime". en. In : *Journal of Fluid Mechanics* 948 (oct. 2022), A31. issn : 0022-1120, 1469-7645. doi : [10.1017/jfm.2022.501](https://doi.org/10.1017/jfm.2022.501)
4. Gabriel Hadjerci et al. "Rapidly rotating radiatively driven convection : experimental and numerical validation of the geostrophic turbulence's scaling predictions". In : *arXiv preprint arXiv :2401.16200* (2024)

Annexes

Annexe A : Coefficient de friction effectif associé au pompage d'une spirale d'Ekman tronquée

La condition aux limites de friction exprimée en (4.11) induit une dissipation en deux étapes. Premièrement, elle entraîne une dissipation frictionnelle directement à la frontière en $z = 0$. Deuxièmement, elle génère un cisaillement vertical proche de la paroi, engendrant ainsi une dissipation visqueuse. En effet, une spirale d'Ekman tronquée relie le cœur de l'écoulement à la condition frictionnelle au fond. Cette dissipation visqueuse additionnelle extrait également de l'énergie du cœur de l'écoulement. Nous nous intéressons donc à la dissipation effective d'énergie provoquée par la condition frictionnelle (4.11).

Soit un écoulement horizontal dans le cœur $(U, V, 0)$, raccordé à la condition aux limites (4.11) par une spirale d'Ekman. Au voisinage de la frontière, les équations adimensionnées de la couche limite s'écrivent :

$$V - v = E_z \partial_{zz} u, \quad (8.1)$$

$$u - U = E_z \partial_{zz} v, \quad (8.2)$$

où u et v sont les vitesses horizontales dans la couche limite. Les termes U et V correspondent au gradient de pression horizontal. La solution qui vérifie les conditions aux limites s'écrit sous la forme complexe :

$$u + iv = (U + iV)F(z), \quad (8.3)$$

avec

$$F(z) = 1 - \frac{\exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2E_z}}z\right)}{1 + (1+i)\frac{\sqrt{E_z}}{\sqrt{2}\kappa}}. \quad (8.4)$$

Comme expliqué dans le paragraphe introductif, la friction effective sur le cœur de l'écoulement peut être séparée en deux contributions : la contribution au niveau de la paroi, notée κ_1 , et la contribution visqueuse dans la couche limite, notée κ_2 . Ainsi, le coefficient de friction effectif s'exprime par $\kappa_{eff} = \kappa_1 + \kappa_2$. D'un point de vue énergétique, ce coefficient de friction effectif peut être défini comme le rapport entre la puissance totale dissipée et l'énergie cinétique du cœur de l'écoulement. Par conséquent, κ_1 est donné par :

$$\kappa_1 = \frac{\kappa |u(z=0) + iv(z=0)|^2}{|U + iV|^2} = \kappa |F(0)|^2, \quad (8.5)$$

tandis que κ_2 est donné par :

$$\begin{aligned}\kappa_2 &= \frac{E_z \int_0^1 (\partial_z u)^2 + (\partial_z v)^2 dz}{|U + iV|^2} \\ &\approx E_z \int_0^\infty |F'(z)|^2 dz = \frac{\sqrt{E_z/2}}{\left(1 + \sqrt{\frac{E_z}{2}} \frac{1}{\kappa}\right)^2 + \frac{E_z}{2\kappa^2}}\end{aligned}\quad (8.6)$$

Une autre méthode pour déterminer κ_{eff} consiste à calculer le coefficient de friction associé au pompage d'Ekman dans le cœur de l'écoulement, où la vitesse n'est pas tout à fait uniforme horizontalement. Si l'on note ζ la vorticité dans le cœur, alors la vitesse verticale au-dessus de la spirale d'Ekman est donnée par $W|_{0+} = \kappa_3 \zeta|_{0+}$, où κ_3 devrait théoriquement être égal à κ_{eff} . Pour simplifier, considérons un écoulement purement barotrope $U(y)$ qui varie lentement avec y . La vorticité dans le cœur de l'écoulement s'écrit alors $\zeta = -U'(y)$.

L'écoulement dans la couche limite s'exprime :

$$u + iv = U(y)F(z), \quad (8.7)$$

et avec la condition d'incompressibilité, la vitesse verticale dans la couche limite devient :

$$\partial_z w = -U'(y)Im\{F(z)\}. \quad (8.8)$$

En intégrant de part et d'autre de la couche limite et en appliquant la condition au limite au fond (4.11), on trouve :

$$W|_{0+} = \zeta|_{0+} \int_0^\infty Im\{F(z)\} dz. \quad (8.9)$$

On en conclut que :

$$\kappa_3 = \frac{\sqrt{2E_z}}{\left(1 + \frac{\sqrt{2E_z}}{\kappa}\right)^2 + \frac{E_z}{\kappa^2}} \times \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{E_z}{2}} \frac{1}{\kappa}\right). \quad (8.10)$$

On peut vérifier que les deux approches fournissent le même résultat : $\kappa_{eff} = \kappa_3 = \kappa_1 + \kappa_2$.