



HAL
open science

Méthodologie d'optimisation paramétrique appliquée à la dynamique vibratoire intégrant des non-linéarités localisées

Quentin Ragueneau

► **To cite this version:**

Quentin Ragueneau. Méthodologie d'optimisation paramétrique appliquée à la dynamique vibratoire intégrant des non-linéarités localisées. Génie mécanique [physics.class-ph]. HESAM Université, 2024. Français. NNT : 2024HESAC014 . tel-04740020

HAL Id: tel-04740020

<https://theses.hal.science/tel-04740020v1>

Submitted on 16 Oct 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE Sciences et Métiers de l'Ingénieur
Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés

THÈSE

présentée par : **Quentin RAGUENEAU**
soutenue le : **24 juin 2024**

pour obtenir le grade de : **Docteur d'HESAM Université**

préparée au : **Conservatoire national des arts et métiers**

Discipline : **Mécanique, génie mécanique, génie civil**

Spécialité : **Mécanique**

**Méthodologie d'optimisation paramétrique appliquée à la
dynamique vibratoire intégrant des non-linéarités localisées**

THÈSE dirigée par :

M. LEGAY Antoine Professeur des Universités, Cnam Paris

et co-encadrée par :

M. LAURENT Luc Maître de Conférences, Cnam Paris

Jury

M. François LOUF	Professeur des universités, ENS Paris-Saclay	Président
Mme Nathalie BARTOLI	Professeure DR, ONERA, ISAE-SUPAERO	Rapporteuse
M. Franck MASSA	Professeur des universités, UPHF	Rapporteur
Mme. Roberta LIMA	Assistant Professor, PUC Rio de Janeiro	Examinatrice
M. Antoine LEGAY	Professeur des universités, Cnam Paris	Directeur de thèse
M. Luc LAURENT	Maître de conférences, Cnam Paris	Co-encadrant
M. Romain CRAMBUER	Ingénieur Docteur, Ingeliance	Co-encadrant
M. Thomas LARROQUE	Ingénieur, ArianeGroup	Invité
M. Nicolas ROY	Docteur, TOP MODAL	Invité

Remerciements

À l'heure où cette aventure s'achève, il m'importe d'exprimer ma reconnaissance aux personnes ayant contribué à la réussite de ce travail. Je tiens tout d'abord à remercier mes encadrants qui ont su m'apporter le soutien et les ressources nécessaires au bon déroulement de cette thèse et me guider au travers des différents obstacles rencontrés. Je remercie ainsi chaleureusement mon directeur de thèse Antoine Legay, mon co-encadrant Luc Laurent ainsi que mes encadrants industriels Romain Crambuer et Thomas Larroque. Merci pour votre disponibilité, votre écoute, votre suivi, vos conseils et nos échanges réguliers malgré un début confiné en distanciel et la distance entre les deux sites qui m'ont accueilli. Je remercie aussi Matthieu Puyo, qui a parfaitement orchestré la mise en place de cette thèse du côté d'Ingeliance et a toujours œuvré pour me faciliter les choses. Je souhaite ensuite adresser mes sincères remerciements à Nicolas Roy, nos échanges, qui ont toujours été extrêmement constructifs et pédagogiques tout au long de la thèse, m'ont beaucoup apporté. Je tiens à exprimer toute ma gratitude à François Louf pour avoir accepté la présidence du jury. Je remercie également Nathalie Bartoli et Franck Massa d'avoir accepté de rapporter cette thèse ainsi que Roberta Lima pour sa participation au sein du jury. J'ai aussi une pensée pour Pierre-Alain Guidault et Pierre Kerfriden qui ont accepté de participer à mon comité de suivi de thèse et m'ont fait part de leurs judicieuses remarques.

Le déroulement de ces travaux aurait été différent sans les collègues présents au quotidien, que ce soit du côté du LMSSC ou d'Ingeliance où j'ai partagé mon temps. Merci tout d'abord à tous les permanents du laboratoire, vous avez contribué à créer une ambiance chaleureuse qui rend agréable chaque jour passé au LMSSC. En particulier, j'adresse un énorme merci à Philippe qui a assuré tout le soutien technique du premier jour jusqu'aux dernières secondes avant la soutenance. Je remercie tout aussi chaleureusement Marina qui a su naviguer à travers les méandres de l'administration sans jamais perdre sa bonne humeur. Je n'oublie pas les discussions et les bons moments passés en pause café ou repas avec notamment Christophe, Fred, Jean-Baptiste, Lucie, Mathieu ou encore Oliver. Je remercie particulièrement mes acolytes rats de labo du bureau des doctorants (ou d'un peu plus loin), à commencer par les piliers du fond de la salle : Julian, Jean-Baptiste et Julien ; mais aussi Naim, Bastien, Soraya, Julien, Matteo, Florian et Pierre, le petit dernier que j'ai pu croiser lors de mes dernières semaines au LMSSC. Je souhaite ensuite remercier tous les collègues et anciens collègues croisés au sein d'Ingeliance, trop nombreux pour les citer individuellement. Professionnellement vos connaissances et votre maîtrise technique ont été précieuses pour mes travaux et je ne remercierai jamais assez tous

ceux qui ont donné de leur temps afin de m'aider. Mais je retiendrai surtout les moments de détente, les sorties bar, les soirées jeux ou karaoké, les chat-mailleries lors des parties de Skyjo, les sessions escalade, ou encore les divers tournois (attention, je vais maintenant avoir le temps de m'entraîner sur Mario Kart). C'est un plaisir de continuer à travailler avec vous dans cet environnement. Je n'oublie pas non plus les bons moments passés avec les personnes croisées en conférence ou lors de l'école d'hiver à Valmorel.

Je dois aussi beaucoup de la réussite de ce projet à mes amis. Merci tout d'abord à la team parisienne : Ariane, Charlélie, Émilie, Hugo, Roxanne, Simon, Thibault et Xavier. Merci pour les nombreuses soirées dans des bars, les sorties culturelles, les repas dominicaux et tout le reste. Je suis extrêmement reconnaissant de votre accueil à bras ouverts chaque fois que je vous ai sollicité pour un hébergement. J'ai une pensée particulière pour Hugo, présent à mes côtés depuis le primaire et qui a apporté son aide à la relecture de ce manuscrit. On serait sans doute déjà rang champion si je n'avais été autant pris par cette rédaction (non). Un grand merci à Emilie, Thibault et Xavier, ce voyage en Thaïlande a été une véritable bouffée d'air frais au milieu de cette thèse et j'en garderais des souvenirs impérissables. J'adresse enfin d'énormes remerciements à Roxanne, toujours présente pour apporter de la motivation dans les moments difficiles. Nos sessions de travail nocturnes à distance ont été d'une grande utilité. Je continue par remercier les informaticiens bordelais Aloïs, Antoine, Baptiste, Camille, Claire, Corentin, Cyrille, Fabien, Jean Loup, Louis et Marie, qui ont su accepter un matmeca au sein de leur groupe et avec qui j'ai le plaisir de partager des moments forts depuis de nombreuses années maintenant. Je dois une fière chandelle à Antoine qui a bien mérité son surnom de l'école en scrutant ce document à la recherche de la moindre erreur. Je remercie également Aline et les anciens de l'ENSC pour les régulières (ou presque) Bières en Terrasse. Je ne peux pas conclure ces remerciements sans évoquer ma famille, et en particulier mes parents, qui m'ont toujours soutenu durant cette thèse, et plus généralement tout au long de ma scolarité.

Résumé

L'analyse du comportement vibratoire est essentielle pour la conception optimale de certaines structures assemblées complexes. L'intégration de phénomènes non linéaires, en particulier aux interfaces entre les sous-structures, permet la réalisation de simulations numériques haute fidélité. Cependant, le coût de calcul rend inenvisageable l'utilisation de méthodes classiques d'optimisation paramétrique globale sur des structures non linéaires industrielles. L'objectif de ces travaux est d'étudier une stratégie complète permettant la conduite d'une optimisation paramétrique sous contraintes, en dynamique vibratoire, sur des structures industrielles présentant des non-linéarités localisées. La stratégie proposée repose principalement sur deux outils. D'abord, un solveur mécanique dédié, basé sur la méthode de l'équilibrage harmonique et un processus de continuation par pseudo-longueur d'arc permet la réalisation des simulations en dynamique vibratoire. Ensuite, ce solveur mécanique est utilisé pour la construction et l'enrichissement d'un métamodèle de type processus gaussien au sein d'une démarche d'optimisation bayésienne afin de limiter le nombre d'appels au solveur. La stratégie est appliquée pour l'optimisation sans contraintes d'un oscillateur de Duffing puis pour l'optimisation avec une contrainte d'inégalité d'un portique de levage présentant des non-linéarités de contact. Les résultats obtenus montrent les possibilités d'utilisation de la stratégie dans un contexte industriel.

Mots-clés : Dynamique non linéaire, Optimisation bayésienne, Méthode de l'équilibrage harmonique, Processus gaussien, Sous-structuration, Contact

RÉSUMÉ

Abstract

Vibration analysis can be critical for the optimal design of complex assembled structures. Integrating nonlinear phenomenon, especially at the interfaces between substructures, allows for high-fidelity numerical simulations. However, the computational cost makes it impractical to use classical global parametric optimization methods for industrial nonlinear structures. The work aims to study a comprehensive strategy for constrained parametric optimization applied to industrial vibrating structures exhibiting local nonlinearities. The proposed strategy mainly relies on two tools. First, a dedicated mechanical solver based on the Harmonic Balance Method and a pseudo-arclength continuation procedure is used for the dynamic simulations. Then, this mechanical solver is employed for the construction and enrichment of a Gaussian Process surrogate model within a Bayesian Optimization framework in order to limit the number of solver calls. The strategy is applied to unconstrained optimization of a Duffing oscillator and the constrained optimization of a gantry crane with contact nonlinearities. The results obtained suggest the feasibility of deploying the strategy in an industrial setting.

Keywords : Nonlinear dynamics, Bayesian Optimization, Harmonic Balance Method, Gaussian Process, Substructuring, Contact.

ABSTRACT

Table des matières

Remerciements	3
Résumé	5
Abstract	7
Liste des tableaux	13
Liste des figures	17
Introduction	19
1 Optimisation de structures en dynamique vibratoire non linéaire	23
1.1 Optimisation	24
1.1.1 Stratégies d'optimisation	24
1.1.2 Formulation d'un problème d'optimisation paramétrique	25
1.1.2.1 Problème d'optimisation paramétrique	25
1.1.2.2 Solutions du problème d'optimisation	26
1.1.3 Algorithmes d'optimisation	29
1.1.3.1 Optimisation locale	29
1.1.3.2 Optimisation globale	33
1.1.3.3 Optimisation sous contraintes	37
1.2 Dynamique vibratoire des structures	39
1.2.1 Dynamique vibratoire linéaire	39
1.2.1.1 Équation de la dynamique linéaire	39

TABLE DES MATIÈRES

1.2.1.2	Projection modale	43
1.2.1.3	Réponse fréquentielle	45
1.2.2	Dynamique vibratoire non linéaire	46
1.2.2.1	Sources de non-linéarités en mécanique des solides	48
1.2.2.2	Oscillateur de Duffing	49
1.2.2.3	Effets non linéaires	49
1.2.3	Méthodes de résolution en dynamique non linéaire	53
1.2.3.1	Résolution de systèmes algébriques non linéaires	53
1.2.3.2	Méthodes de perturbation	54
1.2.3.3	Méthodes d'intégration temporelle	55
1.2.3.4	Méthode de tir	58
1.2.3.5	Méthodes de collocation	59
1.2.3.6	Méthode de l'équilibrage harmonique	60
1.2.4	Continuation	61
1.2.4.1	Continuation par prédiction-correction	62
1.2.4.2	Méthode asymptotique numérique	66
1.2.5	Stabilité	68
1.2.6	Réduction de modèle	69
1.2.6.1	Condensation sur les degrés de liberté non linéaires	69
1.2.6.2	Sous-structuration	70
1.2.6.3	Techniques de décomposition	71
1.2.6.4	Modes non linéaires	71
1.3	Optimisation de structures en dynamique	72
1.4	Description de la stratégie mise en place	73
2	Méthode de résolution en dynamique vibratoire non linéaire	75
2.1	Solveur dynamique non linéaire	76
2.1.1	Méthode de l'équilibrage harmonique	76
2.1.2	Méthode d'alternance fréquence/temps	78
2.1.3	Méthode de Newton-Raphson	79
2.1.4	Continuation	80
2.1.4.1	Continuation par pseudo-longueur d'arc	80
2.1.4.2	Détection des bifurcations de repliement	82

TABLE DES MATIÈRES

2.1.4.3	Contrôle automatique du pas de continuation	83
2.2	Sous-structuration de Craig-Bampton	83
2.3	Illustration	87
2.3.1	Application 1 : Oscillateur de Duffing	87
2.3.2	Application 2 : Portique de levage industriel	92
2.3.2.1	Description du système	92
2.3.2.2	Sous-structuration	93
2.3.2.3	Dispositif anti-basculement	95
2.3.2.4	Simulation	97
3	Stratégie d'optimisation Bayésienne sous contraintes	103
3.1	Rappel du problème d'optimisation	104
3.2	Modèles de substitution	104
3.3	Création d'un modèle de substitution de type processus gaussien	105
3.3.1	Échantillonnage	105
3.3.2	Processus gaussien	106
3.4	Optimisation bayésienne	108
3.4.1	Optimisation sans contraintes	110
3.4.2	Optimisation sous contraintes d'inégalités	112
3.5	Illustration	113
3.5.1	Optimisation sans contraintes d'une fonction dans un espace de dimension 1.	114
3.5.2	Optimisation sous contraintes d'une fonction dans un espace de dimension 2.	117
4	Application de la stratégie	123
4.1	Synthèse et implémentation de la stratégie	124
4.2	Optimisation sans contraintes : oscillateur de Duffing	125
4.2.1	Présentation du problème	125
4.2.2	Résultats	125
4.3	Optimisation sous contraintes : portique de levage	131
4.3.1	Présentation du problème	131
4.3.2	Résultats	134
	Conclusion	143

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie	147
Annexe A Analyse de Fourier	169
A.1 Séries de Fourier	169
A.2 Transformation de Fourier discrète	170
A.3 La méthode d’alternance fréquence/temps (AFT)	176
Annexe B Calcul semi-analytique des jacobienes	177
Annexe C Méthode de l’équilibrage harmonique avec déplacement imposé	179
Annexe D Calcul de la valeur RMS	181
Liste des acronymes	183
Liste des symboles	185

Liste des tableaux

2.1	Temps de calcul de la réponse fréquentielle de l'oscillateur de Duffing pour différentes méthodes.	92
4.1	Nombre moyen n_y d'évaluations de la fonction objectif avec le critère d'arrêt $c_{EGO} < 0,01$ pour différentes valeurs de nombre d'échantillons initiaux n_e	130

LISTE DES TABLEAUX

Liste des figures

1	Exemples de structures dans les secteurs spatial, aéronautique et nucléaire.	20
1.1	Différents types d'optimisation illustrés sur l'exemple de la minimisation de la masse d'une plaque en traction.	25
1.2	Exemple de minima globaux (■) et locaux (●) sans contraintes en dimension $n_p = 1$	27
1.3	Exemple de minima globaux (■) et locaux (●) avec contraintes en dimension $n_p = 2$ pour la fonction Peaks sur $[-2,5; 2,5]^2$ (cf. (1.5))	28
1.4	Problème de référence.	40
1.5	Représentation schématique d'un oscillateur amorti à 1 degré de liberté.	46
1.6	Réponse dynamique d'un oscillateur harmonique amorti pour différents niveaux d'amortissement et d'excitation avec $m_1 = 1$ kg et $k_1 = 1$ N·m ⁻¹	47
1.7	Représentation schématique d'un oscillateur de Duffing.	49
1.8	Phénomène de saut dans la réponse dynamique d'un oscillateur de Duffing.	50
1.9	Influence de l'amplitude de l'excitation dans la réponse fréquentielle d'un oscillateur de Duffing.	51
1.10	Harmoniques d'ordres supérieurs dans la réponse temporelle d'un oscillateur de Duffing.	52
1.11	Dédoublage de période dans la réponse temporelle d'un oscillateur de Duffing.	52
1.12	Réponse chaotique d'un oscillateur de Duffing.	53
1.13	Réponse transitoire d'un oscillateur de Duffing.	58
1.14	Illustrations de différentes méthodes de prédiction pour $n_{eq} = 1$	63
1.15	Illustrations de différentes méthodes de paramétrisation pour $n_{eq} = 1$ avec une prédiction tangente.	65
1.16	Diagramme représentatif de la stratégie mise en place pour l'optimisation globale sous contraintes de structures en dynamique non linéaire	74

LISTE DES FIGURES

2.1	Principe de la méthode d’alternance fréquence/temps.	79
2.2	Illustration de la continuation mise en place.	81
2.3	Réponse fréquentielle de l’oscillateur de Duffing pour différentes valeurs de k_{nl}	88
2.4	Influence du contrôle du pas Δs sur la réponse fréquentielle de l’oscillateur de Duffing.	89
2.5	Influence de la normalisation sur la réponse fréquentielle de l’oscillateur de Duffing.	90
2.6	Comparaison des réponses fréquentielles de l’oscillateur de Duffing obtenues par intégration temporelle et par HBM.	91
2.7	Modèle du portique de levage.	93
2.8	Création d’un modèle condensé par sous-structuration. Les points \bullet représentent les nœuds d’interface.	94
2.9	Déplacement maximal q_{M_x} de la charge utile selon l’axe X pour les différents modèles avec un déplacement sinusoïdal d’amplitude 2 mm imposé à la base selon la direction X	95
2.10	Représentation d’un dispositif anti-basculement.	96
2.11	Modélisation du contact en un pied du portique	96
2.12	Représentation de la force de contact pour $k_A = 5 \times 10^7 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $k_B = 1 \times 10^8 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $g = 4 \text{ mm}$ et différentes valeurs de ϵ_1 et ϵ_2	97
2.13	Courbes de réponses en fréquence du portique de levage.	99
2.13	Courbes de réponses en fréquence du portique de levage (suite).	100
2.14	Réponses temporelles du portique de levage pour une excitation de 13,41 Hz.	101
2.15	Phénomène de Gibbs apparaissant lors du calcul de la force de contact.	102
3.1	Illustration de différentes méthodes pour tirer 25 échantillons dans $[0, 1]^2$	106
3.2	Illustration d’un métamodèle par processus gaussien de la fonction y d’expression $y : x \mapsto \exp(-\frac{1}{10}x) \cos(x) + \frac{1}{10}x$ sur $\mathcal{D} = [-1; 15]$	109
3.3	Principe général de l’optimisation bayésienne	110
3.4	Illustration du critère de l’amélioration espérée.	112
3.5	Illustration du processus d’enrichissement pour la résolution du problème d’équation (3.18) à partir du métamodèle initial présenté en Figure 3.4.	115
3.6	Résultats de la stratégie d’optimisation appliquée au problème d’équation (3.18) après 10 itérations	116
3.7	Répétition de 50 expériences de résolution du problème d’optimisation d’équation (3.18) pour différentes valeurs de n_e	117
3.8	Représentations de référence des fonctions du problème d’optimisation d’équation (3.19) sur $\mathcal{D} = [-2,5; 2,5]^2$	118
3.9	Illustration du processus d’enrichissement pour la résolution du problème d’équation (3.19)	119

LISTE DES FIGURES

3.9	Illustration du processus d'enrichissement pour la résolution du problème d'équation (3.19) (suite)	120
3.10	Résultats de la stratégie d'optimisation appliquée au problème d'équation (3.19) après 25 itérations	121
3.11	Répétition de 30 expériences de résolution du problème d'optimisation d'équation (3.19) pour différentes valeurs de n_e	121
4.1	Courbes de réponse fréquentielle pour quelques couples (c_1, k_{nl})	126
4.2	Étude paramétrique de l'accélération RMS de l'oscillateur de Duffing.	127
4.3	Référence pour la fonction objectif d'expression (4.4)	128
4.4	Résolution du problème d'équation (4.5) avec 15 échantillons initiaux.	129
4.4	Résolution du problème d'équation (4.5) avec 15 échantillons initiaux (suite).	130
4.5	Résultats de la stratégie d'optimisation appliquée au problème d'équation (4.5) avec un budget de 100 évaluations de y	131
4.6	Répétition de 30 expériences de résolution du problème d'équation (4.5) pour différentes valeurs de n_e avec un budget $n_y = 100$	132
4.7	Modèle du portique de levage.	133
4.8	Spectre d'accélération appliqué à la base du portique de levage.	133
4.9	Réponses fréquentielles du portique de levage.	135
4.10	Quelques itérations de la résolution du problème d'optimisation du portique de levage d'équation (4.12) avec 20 échantillons initiaux.	137
4.10	Quelques itérations de la résolution du problème d'optimisation du portique de levage d'équation (4.12) avec 20 échantillons initiaux (suite).	138
4.11	Résultats de la stratégie d'optimisation appliquée au problème du portique de levage avec un budget de 50 évaluations de y	139
4.12	Réponse dynamique du portique de levage dans sa configuration optimale.	140
4.13	Répétition de 30 expériences de résolution du problème d'optimisation du portique de levage d'équation (4.12) pour différentes valeurs de n_e , avec un budget de 30 itérations.	141
A.1	Représentation temporelle et fréquentielle du signal g défini par l'expression (A.17).	173

LISTE DES FIGURES

Introduction

En ingénierie, la phase de dimensionnement est une étape essentielle dans le processus de conception de structures complexes. Il s'agit de déterminer les formes, dimensions et matériaux qui permettent à chaque pièce d'assurer sa fonction tout au long de sa vie. L'identification de configurations menant à des performances mécaniques optimales est un enjeu crucial afin d'accroître la rentabilité, de diminuer la consommation énergétique ou encore de répondre à des normes de plus en plus exigeantes et en permanente évolution. Si les essais répétés sur des prototypes réels (ou des maquettes à échelle réduite) offrent des solutions généralement trop coûteuses en termes de temps et de budget, des méthodes prédictives peuvent être mises en place grâce à la simulation numérique. Un modèle mathématique basé sur les équations de la mécanique peut être créé afin de simuler le comportement des structures dans chaque configuration. Pour déterminer les structures optimales, des algorithmes d'optimisation sont de plus en plus employés au sein des bureaux d'études. Cette démarche nécessite cependant de trouver un compromis entre deux objectifs contradictoires : le besoin d'un modèle numérique détaillé afin de réaliser des simulations haute fidélité et la capacité à mettre en place une stratégie d'optimisation offrant un coût de calcul raisonnable malgré les appels répétés à la simulation numérique.

Dans le contexte de la dynamique vibratoire des structures, c'est-à-dire lors de l'étude des mouvements oscillatoires d'un système mécanique, les simulations numériques sont généralement réalisées à partir d'une modélisation linéaire ou linéarisée. L'hypothèse de linéarité permet en effet l'utilisation d'outils de résolution efficaces basés par exemple sur l'analyse modale. Cependant, certaines structures peuvent comporter des non-linéarités ayant des effets importants sur le comportement dynamique qui ne peuvent pas être prévus par un modèle linéaire. Les phénomènes localisés de contact et de friction à l'interface entre différentes sous-structures en sont un exemple. Pour assurer la fiabilité des structures pouvant présenter des non-linéarités malgré une modélisation linéaire, d'importantes marges de sécurité doivent être utilisées lors des calculs par simulation numérique. Par exemple, les normes *Eurocodes* de dimensionnement en génie civil parviennent à garantir la fiabilité des structures, mais peuvent parfois conduire à d'importants surdimensionnements [TEICHGRÄBER et al. 2023]. De plus, les effets non linéaires sont difficilement quantifiables et peuvent fortement varier d'une structure à l'autre ou en fonction du type de non-linéarité. Un des enjeux industriels actuel consiste à prendre en compte des non-linéarités dans les simulations en dynamique vibratoire afin de prédire de manière plus sûre le comportement des structures et de réduire, entre autres, le surdimensionnement. Cette problématique



(a) Support de charge utile du lanceur Ariane 5 agrémenté de 4 satellites Galileo [BURRI 2020 ; BURRI et LEGAY 2023]. Crédits photo : [European Space Agency](#).



(b) Soufflante d'un turboréacteur CFM56. Crédits photo : [Michael Krahe](#), licence [CC BY-SA 3.0](#).



(c) Portique de levage sur site nucléaire. Crédits photo : [Mc Levage - RÉEL](#)

FIGURE 1 – Exemples de structures dans les secteurs spatial, aéronautique et nucléaire.

intervient par exemple lors des études de réduction de masse ou de réajustement de structures existantes avec l'objectif d'améliorer la consommation d'énergie ou de réduire les coûts [KUSAKANA 2021]. De nombreux secteurs sont concernés, à l'image du domaine spatial pour lequel la réduction de la masse est un aspect crucial [Y.-C. CHEN et al. 2016]. L'industrie des transports, qui doit améliorer son efficacité énergétique pour répondre aux enjeux climatiques actuels, constitue un autre exemple [CORLU et al. 2020]. Il est aussi possible de citer le secteur du nucléaire dont les normes ont fortement évolué après l'accident de Fukushima en 2011 [FURUTA et KANNO 2017 ; MUNOZ GARCIA et al. 2022], ce qui a nécessité le réajustement des structures présentes sur les sites nucléaires. Des exemples de structures dans ces domaines sont présentés à titre illustratif en Figure 1. Le principal obstacle à l'utilisation de modèles non linéaires réside dans le coût de calcul élevé, étant donné que les méthodes efficaces employées en dynamique linéaire deviennent inopérantes. En plus de cet aspect, la modélisation non linéaire nécessite la prise en considération de phénomènes complexes tels que les bifurcations, les oscillations quasi-périodiques ou encore des comportements chaotiques.

Pour répondre aux problématiques de ses clients, *Ingeliance Technologies* développe plusieurs outils avancés d'analyse en dynamique des structures, dont le logiciel *PRIMODAL*, co-développé avec l'entreprise *TOP MODAL*. Ce logiciel repose sur une approche modale se limitant à des modèles linéaires. Afin de pouvoir contribuer à la conception optimale de structures en s'appuyant sur des simulations haute

fidélité, la recherche de nouveaux outils pour l'optimisation de structures en dynamique vibratoire non linéaire présente un intérêt important. En effet, les logiciels de résolution mécanique actuellement commercialisés proposent peu de solutions en ce qui concerne de tels outils à l'échelle industrielle.

Les travaux présentés dans ce mémoire s'inscrivent dans le cadre de la convention CIFRE 2020/0272 entre *Ingeliance Technologies*, le *Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés (LMSSC)* et l'*Association Nationale de la Recherche et de la Technologie (ANRT)*. Les structures étudiées sont supposées résulter de l'assemblage de sous-structures linéaires, reliées entre elles par des interfaces pouvant présenter des non-linéarités (contact, friction, joint élastomère, etc.). L'objectif principal est ainsi de proposer une stratégie générale permettant de traiter de l'optimisation paramétrique globale sous contraintes de structures localement non linéaires en dynamique vibratoire. Dans cette perspective, deux défis clés émergent :

- (i) un solveur dynamique robuste, capable de résoudre des problèmes non linéaires et de traiter les phénomènes complexes sous-jacents, doit être mis en place ;
- (ii) le nombre de simulations mécaniques haute fidélité coûteuses doit être limité dans le processus d'optimisation.

Dans le cadre de ces travaux, les développements réalisés ciblent principalement le secteur du nucléaire, mais restent extensibles à d'autres domaines, tant du point de vue mécanique que de celui de l'optimisation (spatial, défense, aéronautique, naval, énergie, etc.). En particulier, l'optimisation offre des solutions à la problématique du réajustement des structures existantes suite à l'évolution des normes. La finalité est d'aboutir à des modifications optimales en termes de budget, de délai de réalisation, ou de faisabilité technique par exemple. Les structures considérées sont constituées d'un assemblage de sous-structures linéaires liées entre elles par des interfaces pouvant comporter des non-linéarités.

La stratégie explorée au cours de ces travaux repose ainsi sur le développement et l'association de deux outils. D'abord, les équations du problème dynamique non linéaire sont résolues grâce à un solveur mécanique dédié. Ce dernier tire profit de la localisation des non-linéarités aux interfaces entre des sous-structures linéaires pour créer un modèle réduit en utilisant la méthode de condensation de Craig-Bampton. La résolution se fait ensuite en employant la méthode de l'équilibrage harmonique (HBM ou *Harmonic Balance Method*) associée à la méthode d'alternance fréquence/temps (AFT) ainsi qu'à une procédure de suivi de branche par continuation numérique. Le coût de calcul de la résolution mécanique reste néanmoins trop élevé pour envisager l'emploi d'algorithmes conventionnels d'optimisation globale. Ainsi, dans le but de réduire le nombre de simulations mécaniques à réaliser, le solveur mécanique est ensuite intégré au sein d'une stratégie d'optimisation bayésienne (BO ou *Bayesian Optimization*) sous contraintes basée sur la construction et l'enrichissement d'un modèle de substitution de type processus gaussien (GP ou *Gaussian Process*). La mise en place de la stratégie s'accompagne du développement d'un démonstrateur en langage *Python* pour en examiner les performances. Le développement du solveur dynamique non-linéaire est entrepris sans utiliser de base existante, offrant ainsi une maîtrise complète de chaque paramètre d'ajustement et la possibilité de mesurer leur influence. L'implémentation de la stratégie d'optimisation bayésienne et la création des modèles de substitution se basent en revanche sur des bibliothèques éprouvées.

Le mémoire se compose de quatre chapitres. Le Chapitre 1 (page 23) présente succinctement le contexte de l'optimisation de structures et de la dynamique non linéaire. Une revue des stratégies d'optimisation ainsi que des méthodes de résolution en dynamique non linéaire est proposée, puis une synthèse de précédents travaux de recherche dans le domaine de l'optimisation de structures en dynamique non linéaire est présentée. Le chapitre se clôt par une présentation plus détaillée de la stratégie retenue.

Dans le Chapitre 2 (page 75), le solveur mécanique mis en place est étayé. Les principes théoriques permettant le calcul en dynamique vibratoire non linéaire sont détaillés. Son utilisation est ensuite présentée au travers de deux systèmes dynamiques non linéaires : dans un premier temps sur l'exemple académique d'un oscillateur de Duffing, puis, dans un second temps, sur un portique de levage industriel soumis à des phénomènes de contact. Ces illustrations permettent d'étudier l'influence des paramètres du solveur sur ses performances. La capacité du solveur à restituer les phénomènes non linéaires ainsi que son coût de calcul comparé à d'autres méthodes sont ainsi évalués.

Le Chapitre 3 (page 103) est consacré à l'explication de la stratégie d'optimisation bayésienne. Les éléments théoriques de la construction de modèles de substitution par processus gaussien puis de leur intégration dans une démarche d'optimisation bayésienne sont exposés. Des exemples illustratifs d'optimisation de fonctions mathématiques sont proposés. L'efficacité de la méthode dans la réduction du nombre d'appels au solveur mécanique peut ainsi être montrée sur des problèmes d'optimisation avec ou sans contraintes. Une discussion relative au choix des paramètres de construction des modèles de substitution est aussi proposée.

Finalement, l'application de la stratégie complète d'optimisation en dynamique vibratoire non linéaire est effectuée dans le Chapitre 4 (page 123). La stratégie est d'abord validée en résolvant le problème académique de l'optimisation sans contraintes d'un oscillateur de Duffing. Pour finir, l'optimisation sous contraintes d'une structure industrielle est réalisée en traitant du réajustement optimal d'un portique de levage en considérant des phénomènes de contact. Ces exemples permettent de valider, sur des problèmes complets d'optimisation en dynamique vibratoire non linéaire, les gains affichés par les différents éléments de la stratégie dans les deux chapitres précédents.

Optimisation de structures en dynamique vibratoire non linéaire

Ce chapitre propose une mise en contexte et une revue de la littérature existante au sujet de l'optimisation de structures mécaniques en dynamique vibratoire non linéaire. L'optimisation est d'abord abordée en tant que discipline mathématique. La dynamique vibratoire est ensuite évoquée en mettant l'accent sur les outils d'analyse en dynamique non linéaire. Après cela, une revue des travaux d'optimisation de structures en dynamique non linéaire est présentée. Finalement, la stratégie d'optimisation proposée est détaillée.

Contenu

1.1	Optimisation	24
1.1.1	Stratégies d'optimisation	24
1.1.2	Formulation d'un problème d'optimisation paramétrique	25
1.1.3	Algorithmes d'optimisation	29
1.2	Dynamique vibratoire des structures	39
1.2.1	Dynamique vibratoire linéaire	39
1.2.2	Dynamique vibratoire non linéaire	46
1.2.3	Méthodes de résolution en dynamique non linéaire	53
1.2.4	Continuation	61
1.2.5	Stabilité	68
1.2.6	Réduction de modèle	69
1.3	Optimisation de structures en dynamique	72
1.4	Description de la stratégie mise en place	73

1.1 Optimisation

L'optimisation est une discipline mathématique visant à la sélection du meilleur élément, selon un certain critère, parmi un ensemble de choix disponibles. Cela se traduit mathématiquement par la résolution de problèmes qui consistent à maximiser ou minimiser une ou plusieurs fonctions sur un ensemble. De telles fonctions sont appelées fonctions objectif et notées y dans la suite. En ingénierie, une démarche d'optimisation repose sur l'utilisation des outils mathématiques dédiés durant la phase de conception des structures.

1.1.1 Stratégies d'optimisation

Dans le contexte du dimensionnement optimal de structures, un problème d'optimisation est défini par trois données : un modèle qui permet d'analyser le comportement mécanique de la structure (par exemple une équation provenant d'une modélisation par éléments finis), un critère (éventuellement plusieurs) à maximiser ou minimiser, et un ensemble admissible de variables d'optimisation qui régissent les diverses configurations possibles de la structure, tout en tenant compte d'éventuelles contraintes qui leur sont imposées [ALLAIRE 2006]. Il est possible de distinguer trois types de stratégies d'optimisation.

L'**optimisation paramétrique** (Figure 1.1a) a pour but de trouver la meilleure solution selon le critère d'optimisation en faisant varier certains des paramètres décrivant le système étudié. Pour l'optimisation de structures, il est possible de prendre en compte des paramètres géométriques qui vont influencer la forme de la structure, mais aussi d'autres paramètres inhérents à la structure comme les caractéristiques des matériaux par exemple. C'est ce type d'optimisation qui est mise en œuvre au sein de ces travaux.

L'**optimisation de forme géométrique** (Figure 1.1b) consiste à définir une forme initiale pour la structure paramétrée par un ensemble de variables (par exemple des coefficients de splines ou de polynômes interpolant des nœuds de contrôle). Les différentes configurations admissibles sont ensuite obtenues par variation des frontières de la forme sans en changer la topologie au sens mathématique. Au sein d'un espace de dimension deux, cela signifie que le nombre de composantes connexes de la frontière (soit le nombre de "trous") n'est pas modifié, mais en dimension trois, la notion de topologie est plus compliquée. Cette stratégie peut être vue comme un cas particulier d'optimisation paramétrique ne jouant que sur la géométrie de la structure, mais le nombre de variables d'optimisation est en général plus important [ALLAIRE 2006].

L'**optimisation de forme topologique** (Figure 1.1c) permet la recherche de la forme optimale d'une structure tout en autorisant la modification de sa topologie initiale. La forme n'est alors plus paramétrée par la position de sa frontière, mais par des variables de conception permettant de définir la répartition de matière. Cette stratégie permet ainsi d'obtenir la meilleure forme sans avoir d'idée a priori de la topologie optimale et permet d'envisager une large classe de formes admissibles.

Ces différentes approches sont illustrées en Figure 1.1 avec l'optimisation d'une structure encadrée au niveau de son bord gauche et soumise à un effort sur une partie de son bord droit. La mise en place d'une stratégie d'optimisation paramétrique est abordée plus en détail dans la suite.

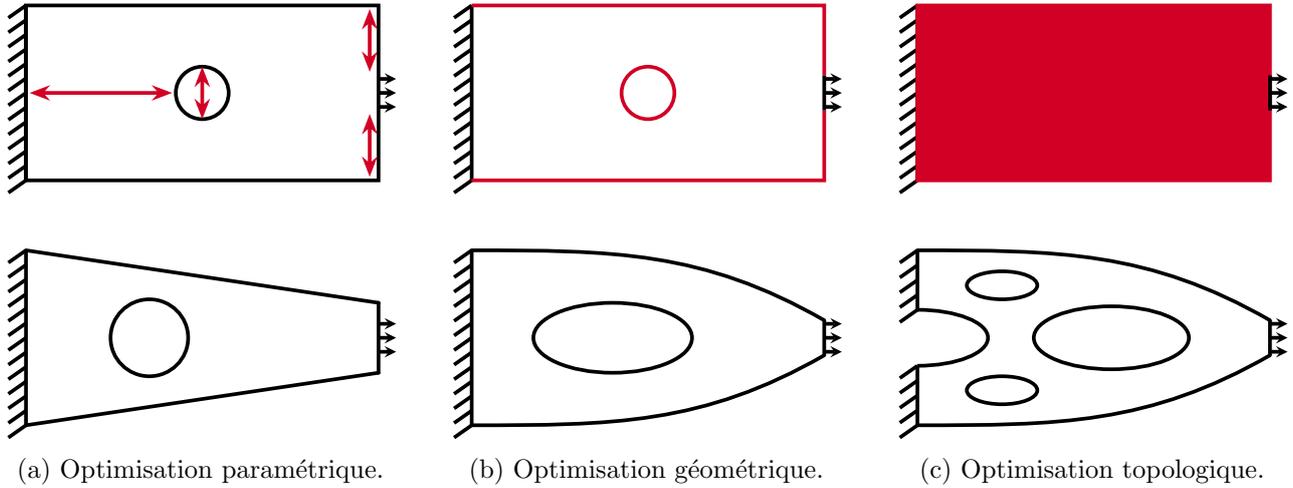


FIGURE 1.1 – Différents types d’optimisation illustrés sur l’exemple de la minimisation de la masse d’une plaque en traction. En haut la configuration initiale avec les variables de conception en rouge, en bas la configuration optimisée.

1.1.2 Formulation d’un problème d’optimisation paramétrique

Les principaux aspects d’un problème d’optimisation paramétrique sont présentés dans cette partie. Un formalisme mathématique est donné afin d’expliquer les principes les plus importants sans se vouloir exhaustif.

1.1.2.1 Problème d’optimisation paramétrique

Un problème d’optimisation paramétrique est régi par un nombre n_p de paramètres de conception appelés variables d’optimisation (les termes de variables de conception ou de variables de décision peuvent aussi être employés). Ces variables sont regroupées au sein d’un vecteur $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ appelé jeu de paramètres. L’espace de conception \mathcal{D} (ou espace de design) est un sous espace de \mathbb{R}^{n_p} qui définit les valeurs admissibles pour chacune des variables d’optimisation. Certains problèmes d’optimisation requièrent que ces paramètres prennent des valeurs parmi un ensemble dénombrable, par exemple des entiers. Ce genre de problème se retrouve surtout dans le domaine de la recherche opérationnelle et entre dans la catégorie des problèmes d’optimisation discrète. Il est aussi possible de définir des problèmes d’optimisation mixte lorsque certains paramètres varient sur des ensembles discrétisés tandis que d’autres varient sur des ensembles non dénombrables. Dans le cadre de ces travaux, les problèmes d’optimisation considérés sont dits continus, c’est-à-dire que l’espace de conception \mathcal{D} est formé du produit cartésien d’intervalles de \mathbb{R} .

Le but de l’optimisation paramétrique consiste à trouver le minimum ou les minima \mathbf{x}^* de la fonction objectif $y : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, également appelée fonction coût. Lorsque qu’aucune autre contrainte que celles sur les bornes admissibles n’est présente sur les paramètres de conception, le problème de

minimisation se résume à résoudre :

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} y(\mathbf{x}). \quad (1.1)$$

Si le but est de maximiser y , il est possible de se ramener à un problème de la forme (1.1) en cherchant à minimiser $-y$. Dans la suite, seuls des problèmes de minimisation sont ainsi considérés. Il est aussi possible de vouloir minimiser plusieurs fonctions objectif à la fois, ce qui caractérise un problème d'optimisation multiobjectif. Cette catégorie d'optimisation n'est pas abordée dans ces travaux ; pour une présentation approfondie, il est suggéré de se référer au livre de COLLETTE et SIARRY (2003).

Généralement, des contraintes additionnelles reliant les paramètres de conception sont prises en compte. Celles-ci sont définies par des fonctions contraintes $h_i : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ qui se classent en deux catégories : les $n_{\mathcal{E}}$ contraintes d'égalités pour les indices $i \in \mathcal{E}$ (avec \mathcal{E} un sous espace de \mathbb{N}), et les $n_{\mathcal{I}}$ contraintes d'inégalités, pour les indices $i \in \mathcal{I}$ (avec \mathcal{I} un sous espace de \mathbb{N} disjoint de \mathcal{E}). Les notations $\mathbf{h}_{\mathcal{E}}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{h}_{\mathcal{I}}(\mathbf{x})$ sont utilisées pour désigner les vecteurs contenant respectivement les contraintes d'égalités et d'inégalités. Le problème d'optimisation paramétrique sous contraintes s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} y(\mathbf{x}), \\ \text{sous la contrainte (s.l.c.) : } \forall i \in \mathcal{E}, h_i(\mathbf{x}) = 0, \\ \forall i \in \mathcal{I}, h_i(\mathbf{x}) \leq 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Les problèmes d'optimisation sous contraintes peuvent être classés selon la nature des fonctions objectif et contraintes.

- Les problèmes de **programmation linéaire** correspondent à des problèmes où la fonction objectif et toutes les fonctions contraintes sont linéaires.
- Les problèmes de **programmation quadratique** sont caractérisés par des fonctions contraintes linéaires et une fonction objectif quadratique.
- Les problèmes de **programmation non linéaire** désignent les problèmes pour lesquels au moins l'une des fonctions contraintes est non linéaire.
- Les problèmes de **programmation convexe** prennent en compte une fonction objectif convexe, des fonctions contraintes d'égalités linéaires et des fonctions contraintes d'inégalités concaves.

1.1.2.2 Solutions du problème d'optimisation

Il est possible de définir deux types de minima, solutions du problème d'optimisation d'équation (1.2) : les minima locaux et les minima globaux.

Soit $\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} \mid \forall i \in \mathcal{E}, h_i(\mathbf{x}) = 0 \text{ et } \forall i \in \mathcal{I}, h_i(\mathbf{x}) \leq 0\}$ l'espace admissible. Un point \mathbf{x}^* de \mathbb{R}^{n_p} est un point de **minimum global** de y sur \mathcal{X} si et seulement si :

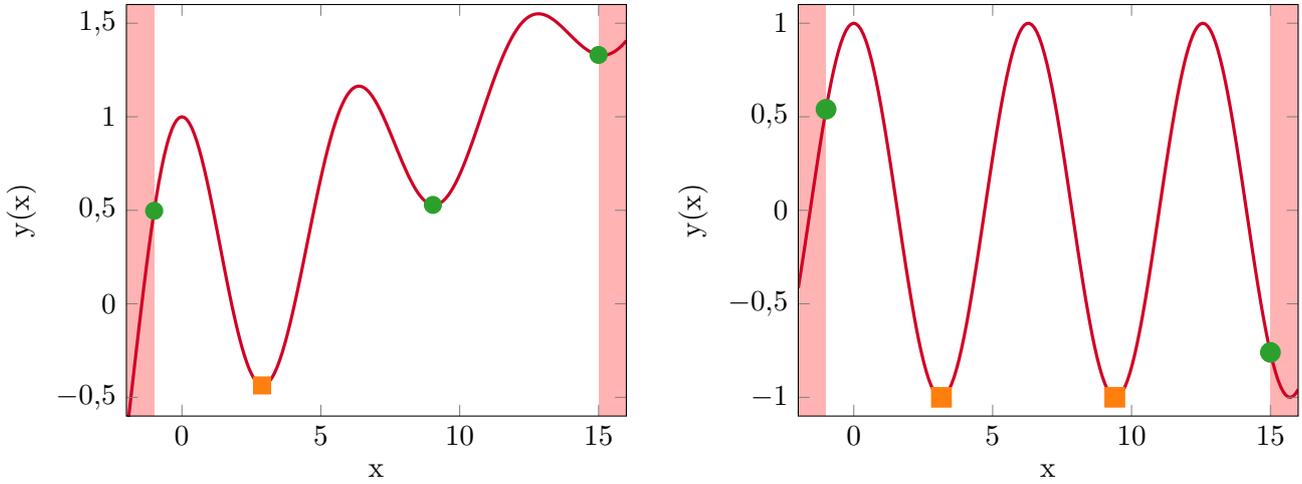
$$\mathbf{x}^* \in \mathcal{X} \text{ et } \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}, y(\mathbf{x}^*) \leq y(\mathbf{x}). \quad (1.3)$$

La quantité $y(\mathbf{x}^*)$ est alors un minimum global de y sur \mathcal{X} .

Un point \mathbf{x}^* de \mathbb{R}^{n_p} est un point de **minimum local** de y sur \mathcal{X} si et seulement si :

$$\mathbf{x}^* \in \mathcal{X} \text{ et } \exists V \in \mathcal{V}(\mathbf{x}^*) \text{ tel que } \forall \mathbf{x} \in V \cap \mathcal{X}, y(\mathbf{x}^*) \leq y(\mathbf{x}), \quad (1.4)$$

1.1. OPTIMISATION



(a) Fonction $y : x \mapsto \exp(-\frac{1}{10}x) \cos(x) + \frac{1}{10}x$ sur $\mathcal{D} = [-1; 15]$.

(b) Fonction $y : x \mapsto \cos(x)$ sur $\mathcal{D} = [-1; 15]$.

FIGURE 1.2 – Exemple de minima globaux (■) et locaux (●) sans contraintes en dimension $n_p = 1$.

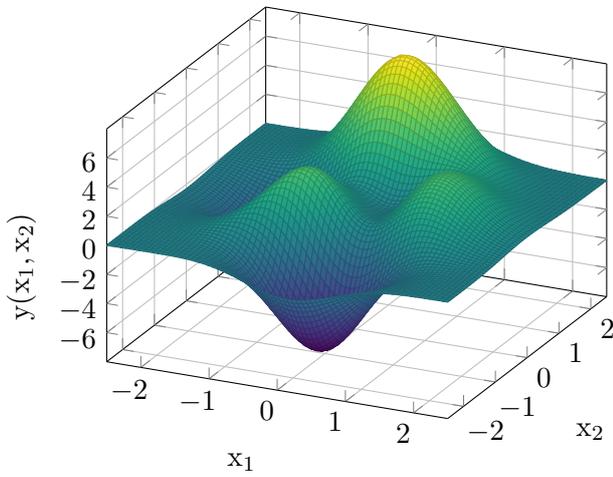
où $\mathcal{V}(\mathbf{x}^*)$ désigne l'ensemble des voisinages de \mathbf{x}^* dans \mathbb{R}^{n_p} . La quantité $y(\mathbf{x}^*)$ est alors un minimum local de y sur \mathcal{X} .

Quelques exemples de minima globaux et locaux, inspirés des travaux de LAURENT (2013), sont donnés en dimension $n_p = 1$ sans contraintes (Figure 1.2) et en dimension $n_p = 2$ avec et sans contraintes (Figure 1.3). La fonction objectif peut ainsi avoir plusieurs minima locaux atteints en des points différents. Il est également possible que le minimum global soit atteint pour différents jeux de paramètres, comme le montre la Figure 1.2b. Il est à noter que la restriction de l'espace de conception \mathcal{D} à un espace borné est susceptible de conduire à l'apparition de minima sur les bords de cet espace (Figures 1.2a, 1.2b et 1.3b). La recherche des minima des fonctions de la Figure 1.2 sur un espace non borné n'a d'ailleurs pas de solution, car la fonction de la Figure 1.2a possède une infinité de minima locaux et aucun minimum global sur \mathbb{R} tandis que la fonction de la Figure 1.2b possède une infinité de minima globaux sur \mathbb{R} . La Figure 1.3 permet d'illustrer l'effet des contraintes sur la fonction Peaks définie par :

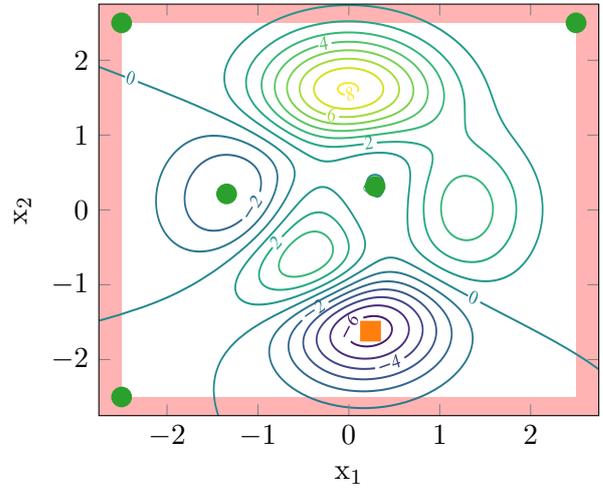
$$y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto 3(1 - x_1)^2 e^{-x_1^2 - (x_2 + 1)^2} - 10\left(\frac{1}{5}x_1 - x_1^3 - x_2^5\right) e^{-x_1^2 - x_2^2} - \frac{1}{3} e^{-(x_1 + 1)^2 - x_2^2} \cdot (1.5)$$

La présence de contraintes dans le problème d'optimisation a une influence importante sur la recherche des minima. Par exemple, les Figures 1.3c et 1.3d montrent que les contraintes introduites entraînent un changement du minimum global ainsi que l'apparition de nouveaux minima locaux.

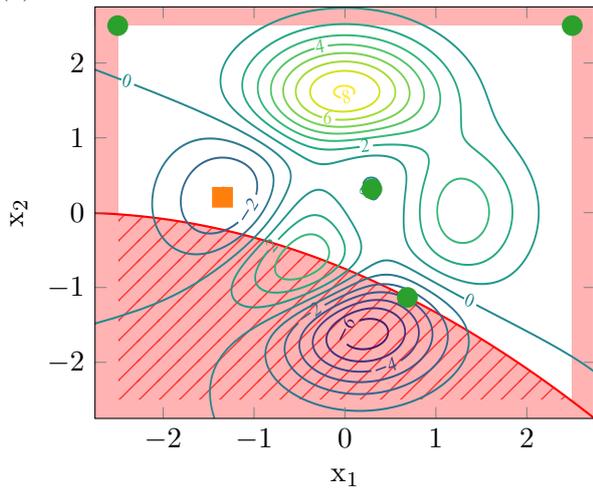
Comme le montrent les exemples précédents, l'existence et l'unicité de la solution à un problème d'optimisation ne sont pas toujours assurées. Il est néanmoins possible de définir des conditions d'optimalité qui garantissent l'existence de solutions lorsque certaines propriétés de la fonction objectif



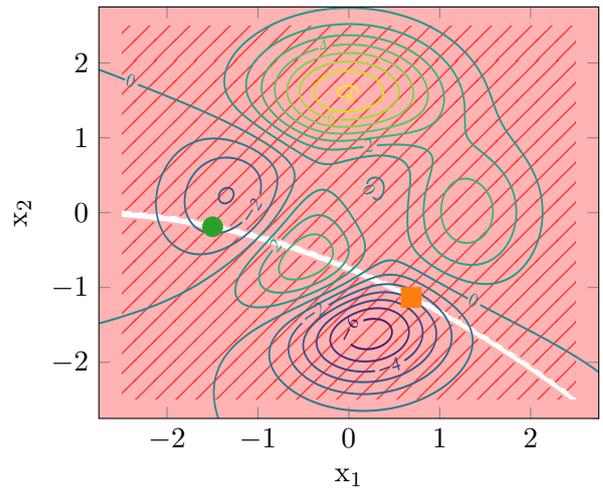
(a) Représentation surfacique de la fonction Peaks.



(b) Minima de la fonction Peaks sans contraintes avec une représentation par lignes de niveaux.



(c) Minima de la fonction Peaks avec la contrainte d'inégalité $h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -12\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1^2 - 6\mathbf{x}_1 - 9 \leq 0$.



(d) Minima de la fonction Peaks avec la contrainte d'égalité $h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -12\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1^2 - 6\mathbf{x}_1 - 9 = 0$.

FIGURE 1.3 – Exemple de minima globaux (■) et locaux (●) avec contraintes en dimension $n_p = 2$ pour la fonction Peaks sur $[-2,5; 2,5]^2$ (cf. (1.5))

ou des fonctions contraintes sont connues. Ces conditions ont été déterminées pour chaque type de problème (sans contraintes, avec contraintes d'égalités, avec contraintes d'inégalités ou avec les deux types de contraintes). Dans le cadre général d'un problème d'optimisation présentant à la fois des contraintes d'égalités et d'inégalités ces résultats d'existence sont nommés conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) [KARUSH 1939; KUHN et TUCKER 1951]. L'ensemble de ces conditions n'est pas détaillé ici, mais peut se trouver dans l'ouvrage de NOCEDAL et S. J. WRIGHT (2006) par exemple. La convergence de certains algorithmes d'optimisation a pu être prouvée à partir de ces conditions.

Dans le cadre de l'optimisation de structures, les fonctions contraintes et objectif sont généralement

évaluées à partir du résultat d'un calcul mécanique, par exemple une simulation par éléments finis. Ainsi, pour des structures complexes, la relation entre les paramètres de conception et les valeurs des fonctions objectif et contraintes n'est pas explicite et il est souvent difficile de connaître une expression mathématique de ces fonctions. Il n'est donc pas possible, a priori, de connaître les propriétés de ces fonctions. En particulier, leur caractère linéaire, différentiable ou convexe demeure généralement inconnu, de même que l'éventuelle existence de minima globaux ou locaux. Au sein de ces travaux, les fonctions associées aux problèmes d'optimisation de structures traités sont évaluées à partir de simulations numériques dont les résultats sont supposés déterministes. Aucune incertitude n'est donc prise en compte quant aux valeurs des fonctions objectif et contraintes.

1.1.3 Algorithmes d'optimisation

Afin de résoudre les problèmes d'optimisation d'équations (1.1) ou (1.2), des stratégies numériques ont été développées. Dans cette section, les algorithmes les plus classiques de résolution d'un problème d'optimisation déterministe sont succinctement présentés. En général, ces algorithmes fonctionnent de manière itérative : à partir d'un point de départ $\mathbf{x}^{(0)}$ dans l'espace de conception \mathcal{D} , une suite d'itérés ($\mathbf{x}^{(m)}$) est générée en suivant une loi d'évolution jusqu'à convergence vers une solution selon un critère propre à chaque algorithme. Dans un premier temps, les algorithmes pour la recherche des minima locaux et globaux d'un problème d'optimisation sans contraintes sont évoqués, puis dans un second temps, la prise en compte de fonctions contraintes est traitée. La liste des méthodes évoquées n'est pas exhaustive et une revue plus détaillée est par exemple dressée dans les travaux de NOCEDAL et S. J. WRIGHT (2006).

1.1.3.1 Optimisation locale

Les algorithmes d'optimisation locale explorent peu l'espace de conception, ils exploitent au maximum les informations disponibles sur l'évolution de la fonction objectif pour tenter de converger vers le minimum local le plus proche du point initial $\mathbf{x}^{(0)}$ grâce à des règles d'évolution. Un choix judicieux du point initial est ainsi nécessaire pour atteindre le minimum global. Les algorithmes sont ici décrits dans le cadre d'un problème d'optimisation sans contraintes. Il est à noter que pour certaines méthodes, la restriction à un domaine de conception \mathcal{D} borné doit être traitée comme l'ajout d'un ensemble de contraintes d'inégalités et faire l'objet d'un traitement spécifique.

Les méthodes de **recherche directe** [M. H. WRIGHT 1996 ; LEWIS et al. 2000] utilisent uniquement les valeurs de la fonction objectif pour localiser le minimum.

- Les méthodes de recherche par motifs généralisés visent à faire évoluer la recherche vers la zone où se trouve le minimum en suivant un ensemble d'instructions prédéfinies contrôlant la direction de recherche. Les algorithmes *evolutionary operation* [BOX 1957], s'inspirant de la sélection naturelle, *pattern search method* [HOOKE et JEEVES 1961] ou encore *multidirectional search algorithm* [TORCZON 1989 ; DENNIS et TORCZON 1991], dont la convergence est prouvée [TORCZON 1991] appartiennent à cette catégorie. Une unification des méthodes de recherche par motifs, avec une preuve de convergence, a été établie sous le nom de *generalized pattern*

search method [TORCZON 1997].

- Les méthodes des directions conjuguées [ROSENBROCK 1960 ; POWELL 1964, 1998 ; FRIMANNSLUND et STEIHAUG 2007] utilisent les informations sur la courbure de la fonction objectif afin de redéfinir la direction de recherche à chaque itération.
- L'algorithme de Nelder-Mead [NELDER et MEAD 1965] et ses variantes [WALTERS et al. 1991] forment une autre classe de méthodes de recherche directe basées sur des simplexes. Ces algorithmes utilisent une figure géométrique (un simplexe) et définissent un ensemble de règles faisant subir au simplexe une série de transformations (expansion, contraction ou rétrécissement). Ces évolutions ont pour but d'adapter le simplexe au comportement local de la fonction objectif jusqu'à ce que les sommets de celui-ci se rapprochent d'un minimum.

Les méthodes de recherche directe ont l'avantage d'être robustes et faciles à mettre en place. En revanche, à l'exception des méthodes de recherche par motifs généralisés, il n'existe pas de propriétés théoriques de convergence.

Les méthodes de **descente de gradient** cherchent à converger vers un minimum local en exploitant les valeurs de la fonction objectif et de ses dérivées. Le principe consiste à converger vers un minimum en itérant selon un pas et une direction de descente calculés par l'algorithme. Lors de l'itération $m + 1$, le jeu de paramètres suivant est calculé de sorte que :

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} + d_m \mathbf{u}_m, \quad (1.6)$$

où d_m et \mathbf{u}_m sont respectivement le pas et la direction de descente qui doivent vérifier :

$$\nabla y(\mathbf{x}^{(m)})^\top \mathbf{u}_m < 0 \text{ et } y(\mathbf{x}^{(m)} + d_m \mathbf{u}_m) < y(\mathbf{x}^{(m)}). \quad (1.7)$$

Différentes méthodes sont classiquement employées.

- L'algorithme du gradient à pas constant assigne une direction de descente opposée à la direction du gradient : $\mathbf{u}_m = -\nabla y(\mathbf{x}^{(m)})$. Le pas de descente d_m est fixe et doit être choisi judicieusement, car un pas trop faible entraîne une convergence trop lente tandis qu'un pas trop grand engendre un risque de dépassement et des difficultés de convergence.
- Afin d'obtenir une meilleure convergence, il est préférable d'adapter le pas de descente à chaque itération. L'algorithme de gradient à pas optimal, aussi appelé algorithme de la plus grande pente (ou *steepest descent*) [CAUCHY 1847], consiste à choisir le pas qui permet d'obtenir la descente la plus performante. Cet algorithme constitue une méthode dite de recherche linéaire, où la direction de descente est d'abord déterminée de sorte que $\mathbf{u}_m = -\nabla y(\mathbf{x}^{(m)})$, puis le pas optimal d_m est cherché comme la solution du problème de minimisation :

$$d_m = \arg \min_{d \geq 0} y(\mathbf{x}^{(m)} + d \mathbf{u}_m). \quad (1.8)$$

En pratique, la recherche de la valeur exacte du pas optimal à chaque itération est trop coûteuse et non nécessaire. Certaines conditions ont ainsi été définies pour en obtenir une approximation, comme les conditions de Wolfe ou de Goldstein [NOCEDAL et S. J. WRIGHT 2006].

- L'algorithme de gradients conjugués [HESTENES et STIEFEL 1952], initialement prévu pour la résolution de systèmes linéaires, peut aussi être utilisé dans le cadre de l'optimisation [FLETCHER

et REEVES 1964]. Cette approche consiste à considérer à l'itération $m > 0$ la direction de descente \mathbf{u}_m de sorte que :

$$\mathbf{u}_m = -\nabla y(\mathbf{x}^{(m)}) - \frac{\|\nabla y(\mathbf{x}^{(m)})\|^2}{\|\nabla y(\mathbf{x}^{(m-1)})\|^2} \mathbf{u}_{m-1}. \quad (1.9)$$

Le pas optimal (1.8) peut ensuite être déterminé en utilisant les méthodes de recherche linéaire.

Les méthodes de **Newton** permettent la recherche des solutions de l'équation $\nabla y(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Ces solutions correspondent aux points critiques de la fonction objectif, mais ne sont pas toujours des minima locaux, comme c'est le cas des points selles¹ par exemple. Pour cela, cette classe de méthode utilise le hessien $\nabla^2 y$ de la fonction objectif, et nécessite que y soit de classe C^2 sur \mathcal{D} et que la matrice hessienne $\nabla^2 y(\mathbf{x})$ soit inversible $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$.

- L'algorithme de Newton s'appuie sur une approximation quadratique de la fonction objectif au voisinage du point obtenu à l'itération m à partir d'un développement de Taylor :

$$y(\mathbf{x}^{(m)} + \Delta \mathbf{x}^{(m)}) \simeq y(\mathbf{x}^{(m)}) + \nabla y(\mathbf{x}^{(m)}) \Delta \mathbf{x}^{(m)} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^{(m)\top} \nabla^2 y(\mathbf{x}^{(m)}) \Delta \mathbf{x}^{(m)}. \quad (1.10)$$

Le gradient de l'approximation (1.10) s'annule pour $\Delta \mathbf{x}^{(m)} = -[\nabla^2 y(\mathbf{x}^{(m)})]^{-1} \nabla y(\mathbf{x}^{(m)})$. Ainsi, l'algorithme cherche à converger vers la solution en itérant de la manière suivante :

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} - [\nabla^2 y(\mathbf{x}^{(m)})]^{-1} \nabla y(\mathbf{x}^{(m)}). \quad (1.11)$$

Il faut cependant être capable de calculer l'inverse de la matrice hessienne à chaque itération. Ce calcul est coûteux en temps et peut même être délicat en cas de mauvais conditionnement, en particulier lorsque le nombre de paramètres de conception est important.

- Les algorithmes quasi-Newton reprennent le principe de l'algorithme de Newton, mais remplacent le calcul de l'inverse de la matrice hessienne par une approximation numérique de celle-ci. En posant $\mathbf{H}_m \simeq [\nabla^2 y(\mathbf{x}^{(m)})]^{-1}$, l'approximation de l'inverse de la matrice hessienne à l'itération m , ainsi que $\delta_m = \mathbf{x}^{(m+1)} - \mathbf{x}^{(m)}$ et $\gamma_m = \nabla y(\mathbf{x}^{(m+1)}) - \nabla y(\mathbf{x}^{(m)})$, la méthode DFP [DAVIDON 1959; FLETCHER et POWELL 1963] propose :

$$\mathbf{H}_{m+1} = \mathbf{H}_m + \frac{\delta_m \delta_m^\top}{\delta_m^\top \gamma_m} - \frac{\mathbf{H}_m \gamma_m \gamma_m^\top \mathbf{H}_m}{\gamma_m^\top \mathbf{H}_m \gamma_m}. \quad (1.12)$$

Une autre méthode quasi-Newton couramment employée est la méthode BFGS [BROYDEN 1970; FLETCHER 1970; GOLDFARB 1970; SHANNO 1970], pour laquelle l'approximation est :

$$\mathbf{H}_{m+1} = \mathbf{H}_m + \left(1 + \frac{\gamma_m^\top \mathbf{H}_m \gamma_m}{\delta_m^\top \gamma_m}\right) \frac{\delta_m \delta_m^\top}{\delta_m^\top \gamma_m} - \frac{\delta_m \gamma_m^\top \mathbf{H}_m + \mathbf{H}_m \gamma_m \delta_m^\top}{\delta_m^\top \gamma_m}. \quad (1.13)$$

Ainsi ces méthodes ne nécessitent que le calcul du gradient de la fonction objectif ce qui permet de mettre en place l'algorithme de Newton avec de très bonnes performances.

1. Soient E et F deux ensembles et une fonction $f : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$, un point $(x_0, y_0) \in E \times F$ est un point selle (ou point col) de f sur $E \times F$ si $\forall (x, y) \in E \times F$, $f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0)$ ou $\forall (x, y) \in E \times F$, $f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y)$

Les méthodes de **région de confiance** [SORENSEN 1982 ; SHULTZ et al. 1985] constituent un autre type de méthodes de descente. Ces algorithmes se basent aussi sur une approximation locale de la fonction objectif autour d'un point itéré et définissent une région autour de ce point dans laquelle le modèle approxime suffisamment bien la fonction. L'itération suivante se fait en déterminant le minimum du modèle approché au sein de cette région. Ainsi, contrairement à la recherche linéaire pour laquelle le pas optimal est recherché après avoir déterminé une direction de descente, les méthodes de région de confiance identifient simultanément la direction et le pas. À l'itération m , l'approximation quadratique donne :

$$y(\mathbf{x}^{(m)} + \Delta\mathbf{x}^{(m)}) \simeq y(\mathbf{x}^{(m)}) + \nabla y(\mathbf{x}^{(m)})\Delta\mathbf{x}^{(m)} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^{(m)\top}\mathbf{B}_m\Delta\mathbf{x}^{(m)}, \quad (1.14)$$

où \mathbf{B}_m est une matrice symétrique. Si $\mathbf{B}_m = \nabla^2 y(\mathbf{x}^{(m)})$, l'approximation correspond au développement de Taylor d'ordre 2, comme pour la méthode de Newton. L'incrément $\Delta\mathbf{x}^{(m)}$ est ensuite recherché comme solution du problème :

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x}^{(m)} = \arg \min_{\Delta\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_p}} & y(\mathbf{x}^{(m)}) + \nabla y(\mathbf{x}^{(m)})\Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^\top \mathbf{B}_m \Delta\mathbf{x}, \\ \text{avec :} & \quad \|\Delta\mathbf{x}\| - \Delta_m \leq 0, \end{aligned} \quad (1.15)$$

où Δ_m est le rayon de la région de confiance. La résolution du problème d'équation (1.15) peut être délicate dans certains cas, mais la solution peut généralement être trouvée avec un coût de calcul abordable, d'autant qu'une valeur approchée suffit à garantir la convergence et de bonnes performances [NOCEDAL et S. J. WRIGHT 2006]. La taille de la région de confiance Δ_m est un paramètre crucial pour l'efficacité de la méthode : s'il est trop petit la convergence de l'algorithme est lente tandis que s'il est trop grand, le minimum du modèle approché risque de se trouver loin du minimum réel de la fonction, il convient alors de recommencer la procédure avec un pas plus petit. En pratique, l'implémentation de ces méthodes se fait en adaptant la taille de la région en fonction des performances de l'algorithme lors des itérations précédentes.

Les méthodes de **gradient stochastique** (*stochastic gradient descent*) [KETKAR 2017] permettent la minimisation d'une fonction objectif qui s'écrit comme une moyenne de N fonctions différentiables :

$$y(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(\mathbf{x}). \quad (1.16)$$

Ce type de problème se retrouve couramment dans les domaines de l'estimation statistique et de l'apprentissage automatique. En utilisant un algorithme de descente de gradient classique, à l'itération $m + 1$ le calcul s'écrit (équation (1.6)) :

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} - d_m \nabla y(\mathbf{x}^{(m)}) = \mathbf{x}^{(m)} - d_m \sum_{i=1}^N \nabla y_i(\mathbf{x}^{(m)}). \quad (1.17)$$

L'algorithme du gradient stochastique propose de remplacer le calcul du gradient de la fonction objectif par le calcul du gradient d'une de ses composantes, tirée aléatoirement, uniquement (ou éventuellement d'un sous-ensemble réduit de composantes). Ainsi, si la composante i est choisie, l'itération $m + 1$ devient :

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} - d_m \nabla y_i(\mathbf{x}^{(m)}). \quad (1.18)$$

Cette démarche permet de réduire le coût de calcul de manière importante lorsque N est très grand. Plusieurs variantes existent telles que les méthodes *AdaGrad* [DUCHI et al. 2011] ou *ADAM* [KINGMA et BA 2017]. Ce dernier algorithme est utilisé au sein de ces travaux pour l’ajustement des hyperparamètres des modèles de substitution créés avec la librairie python *BOTorch* (voir section 3.3.2 (page 106)).

Dans le cadre de l’optimisation locale sans contrainte, les méthodes de descente de gradient et les méthodes quasi-Newton sont généralement les plus utilisées. Cependant, pour des fonctions non convexes, le minimum local obtenu dépend du point d’initialisation choisi.

1.1.3.2 Optimisation globale

Dans le cadre des problèmes d’optimisation de structures considérés dans ces travaux, le minimum global est recherché. Les propriétés de la fonction objectif ne sont généralement pas connues au préalable, ainsi l’emploi de méthodes d’optimisation locale n’est pas réalisable en pratique. En effet, il peut s’avérer impossible de choisir judicieusement le jeu de paramètres initial, ou cela peut engendrer un nombre trop important de calculs coûteux. Il est alors nécessaire d’utiliser un algorithme dédié spécifiquement à la recherche du minimum global. En effet, cet algorithme doit offrir un compromis intéressant entre l’exploration de l’espace de conception, afin de localiser toutes les zones où des minima peuvent être présents, et l’exploitation d’une région candidate, pour obtenir les minima avec précision. Les méthodes d’optimisation globale les plus couramment employées sont présentées dans cette section.

Les méthodes de **recherche aléatoire** [RASTRIGIN 1963 ; SOLIS et WETS 1981] consistent à évaluer la fonction objectif pour des jeux de paramètres tirés aléatoirement. À chaque évaluation, la valeur obtenue est comparée à la meilleure valeur déjà obtenue et le processus se répète. La recherche aléatoire pure finit forcément par converger vers le minimum global lorsque le nombre de points évalués tend vers l’infini, mais un nombre très important d’évaluations de la fonction objectif est nécessaire pour obtenir un résultat suffisamment précis. Cette méthode se révèle tout de même meilleure que la recherche sur une grille complète de l’espace de design \mathcal{D} lorsque n_p est grand [ANDERSSON et BLOOMFIELD 1975]. Ces méthodes peuvent aussi être couplées à des méthodes d’optimisation locale en prenant les points tirés aléatoirement comme les itérés initiaux de l’algorithme. Ces procédures sont désignées sous le nom de méthodes avec redémarrages multiples (ou méthodes *multistart*). Ces stratégies sont plus efficaces que la recherche aléatoire pure, mais elles peuvent converger plusieurs fois vers les mêmes minima locaux et il est difficile de mettre en place un critère d’arrêt idéal. Ainsi, un nombre assez important d’évaluations de la fonction objectif est généralement requis, surtout si celle-ci possède une multitude de minima locaux.

Les méthodes **énumératives** cherchent à détecter les zones de l’espace de conception \mathcal{D} qui ne contiennent pas de minimum en se basant sur une discrétisation de celui-ci. Par exemple, la méthode *DIRECT (Dividing RECTangles)* [JONES, PERTTUNEN et al. 1993] permet de résoudre le problème d’optimisation pour des fonctions lipschitziennes² en construisant itérativement un pavage de \mathcal{D} . Les rectangles du pavage pouvant potentiellement contenir le minimum sont progressivement divisés en cherchant à offrir un bon compromis entre la valeur de la fonction objectif au centre du pavage et la

2. Soient (E, d_E) et (F, d_F) des espaces métriques, l’application $f : E \rightarrow F$ est lipschitzienne si $\exists k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (x_1, x_2) \in E^2, d_F(f(x_1), f(x_2)) \leq kd_E(x_1, x_2)$.

taille des pavés. Ce type de méthodes peut nécessiter un nombre important d'évaluations de la fonction objectif afin de localiser le minimum global.

Les méthodes de **regroupement** (ou *clustering*) [BECKER et LAGO 1970; TÖRN 1977; BOENDER et al. 1982; RINNOOY KAN et TIMMER 1987] commencent par réaliser un échantillonnage de l'espace de conception et évaluent la fonction objectif aux points échantillonnés. Une procédure permet ensuite de former un sous-ensemble des points échantillonnés qui sont prometteurs. Un algorithme d'optimisation locale est ensuite appliqué au départ de chacun des points du sous-ensemble et les recherches qui convergent vers une zone déjà explorée sont abandonnées. Si l'ensemble des minima locaux obtenus ne satisfait pas un certain critère d'arrêt, la stratégie est reproduite avec un nouvel échantillonnage. Ce type de méthodes nécessite néanmoins un nombre important d'échantillons lorsque la fonction objectif possède de nombreux minima.

Les méthodes de **descente généralisées** s'appuient sur le principe des méthodes de descente utilisées dans le cadre de l'optimisation locale [TÖRN et ŽILINSKAS 1989]. Ce type de méthodes cherche à poursuivre la recherche dans une autre zone, potentiellement meilleure, après qu'un minimum local a été atteint. Une première approche consiste à modifier la trajectoire de descente afin que le processus ne s'arrête pas lorsqu'un minimum local est atteint [BRANIN et HOO 1972; GRIEWANK 1981]. Une autre approche consiste à éliminer les minima locaux détectés en pénalisant la fonction objectif. Par exemple la stratégie de LEVY et MONTALVO (1985) cherche un nouveau point d'initialisation de l'algorithme de descente après avoir convergé, en tenant compte des minima déjà obtenus. En considérant que n_m minima ont déjà été atteints, le nouveau point $\mathbf{x}_{n_m+1}^{(0)}$, qui doit vérifier $y(\mathbf{x}_{n_m+1}^{(0)}) \leq y(\mathbf{x}_{n_m}^*)$, est recherché comme un minimum non positif d'une fonction T , appelée fonction tunnel. La fonction T peut par exemple s'écrire :

$$T(\mathbf{x}) = \frac{y(\mathbf{x}) - y(\mathbf{x}_{n_m}^*)}{\prod_{i=1}^{n_m} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^*\|^{2\alpha_i}}, \quad (1.19)$$

où les α_i sont ici des paramètres de répulsion contrôlant l'éloignement du nouveau jeu de paramètres aux points de minimum déjà atteints.

Les méthodes classiquement regroupées sous le terme de **métaheuristique** désignent des algorithmes directs d'optimisation globale (qui ne nécessitent pas le calcul du gradient), capables de s'adapter facilement à un grand nombre de problèmes différents sans grande modification. Il est possible de classer les méthodes métaheuristicques en deux catégories : les méthodes basées sur une métaphore du monde réel et les autres [ABDEL-BASSET et al. 2018]. Une profusion de méthodes de ce type ont été développées, seules les plus courantes sont évoquées ici.

- Les méthodes basées sur une métaphore s'inspirent de mécanismes présents dans les phénomènes naturels ou les comportements sociaux par exemple.
 - Les méthodes **évolutionnaires** [BACK et al. 1997] cherchent à reproduire la théorie de la sélection naturelle de Darwin [DARWIN 1859], selon laquelle les individus les plus performants d'une population ont de meilleures chances de survivre et d'engendrer des descendants encore plus performants. Les algorithmes évolutionnaires respectent un processus itératif. Une population initiale, dont les individus sont des jeux de paramètres \mathbf{x}_i tirés aléatoirement,

est considérée. La performance des individus est mesurée par évaluation de la fonction objectif $y(\mathbf{x}_i)$. À chaque itération, le processus se déroule en trois phases : sélection, croisement et mutation. D'abord, certains individus de la population sont choisis pour leurs performances. Puis par croisement de ces individus, de nouveaux individus sont créés et finalement une perturbation aléatoire de ces individus permet d'obtenir la nouvelle génération de la population. La démarche est répétée sur la nouvelle population jusqu'à ce qu'un critère de convergence soit satisfait. Les méthodes évolutionnaires peuvent se classer selon trois catégories : les algorithmes génétiques [HOLLAND 1962, 1975 ; GOLDBERG 1989], les stratégies d'évolution [RECHENBERG 1973 ; SCHWEFEL 1995 ; STORN et PRICE 1997] et la programmation évolutive [L. J. FOGEL 1962 ; D. B. FOGEL 1994].

- Le **recuit simulé** (ou *simulated annealing*) [KIRKPATRICK et al. 1983 ; ČERNÝ 1985] s'inspire du procédé du recuit utilisé en métallurgie : les caractéristiques d'un matériau métallique sont améliorées en le chauffant graduellement puis en le refroidissant de manière contrôlée. Les phénomènes thermodynamiques se produisant lors du recuit conduisent à la minimisation de l'énergie du système à l'issue du procédé. L'algorithme itératif du recuit simulé vise à reproduire numériquement ces phénomènes en employant l'algorithme de Metropolis [METROPOLIS et al. 1953] conçu pour reproduire le phénomène aléatoire de réagencement des atomes au sein d'un matériau à partir de la distribution de Boltzmann. Par analogie un paramètre fictif de température \mathcal{T} , initialement fixé de manière empirique à une valeur élevée, est introduit et la fonction objectif à minimiser est analogue à l'énergie d'un système thermodynamique. Un point initial $\mathbf{x}^{(0)}$ est choisi (aléatoirement par exemple) au sein de l'espace de conception \mathcal{D} . À l'itération m , un point $\mathbf{x}^{(m)'}$ est choisi dans un voisinage du jeu de paramètres $\mathbf{x}^{(m)}$ et la variation d'énergie $\Delta y^{(m)}$, correspondant à la différence entre $y(\mathbf{x}^{(m)'})$ et la meilleure valeur de la fonction objectif obtenue jusqu'à présent, est calculée. Si la variation $\Delta y^{(m)}$ est négative (la solution est meilleure), l'algorithme avance vers le nouveau point ($\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)'}$). Sinon, l'algorithme avance vers le nouveau point avec une probabilité égale à $\exp(-\frac{\Delta y^{(m)}}{\mathcal{T}^{(m)}})$. Dans le cas où la condition probabiliste n'est pas rencontrée, l'algorithme reste au même point ($\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)}$). Le paramètre \mathcal{T} décroît progressivement au cours des itérations selon une loi prédéfinie. Ainsi, la capacité d'exploration de l'algorithme est assurée en acceptant des mouvements même lorsqu'ils conduisent à une solution de moins bonne qualité. Cependant, la liberté de recherche de l'algorithme est progressivement limitée par la décroissance du paramètre de température, ce qui permet une exploitation satisfaisante.
- Les méthodes reposant sur **l'intelligence en essaims** [BONABEAU et al. 1999] visent à imiter les interactions sociales et coopératives de certaines espèces animales vivant en colonies. En effet, au sein de ces groupes, chaque individu semble avoir un comportement autonome, basé sur son expérience personnelle et les informations partagées avec ses voisins, mais celui-ci œuvre en faveur de l'intérêt général du groupe. Parmi les méthodes les plus utilisées, les algorithmes de colonies de fourmis (ou *Ant Colony Optimization*) [DORIGO 1992 ; DORIGO et GAMBARELLA 1997 ; DORIGO, BIRATTARI et al. 2006], initialement conçus pour des problèmes discrets comme la recherche de chemins optimaux dans un graphe, se basent sur le comportement des fourmis lorsqu'elles cherchent de la nourriture. Au cours de la recherche,

lorsqu'une fourmi trouve une source de nourriture, elle en rapporte à la fourmilière tout en laissant sur son trajet des phéromones volatiles. Dans le cas où plusieurs sources sont trouvées, le trajet vers la source la plus proche est parcouru par un nombre plus important de fourmis que les autres trajets durant le même temps. Ainsi le dépôt de phéromones est plus important sur le trajet optimal. Finalement, cela pousse toutes les fourmis à choisir ce trajet et à délaisser les autres, pour lesquels le taux de phéromones finit par devenir quasi-nul. Les algorithmes de colonies de fourmis simulent numériquement ce comportement en tenant compte du phénomène de dépôt de phéromones et de leur volatilité ainsi que du caractère aléatoire de la recherche. Ce type d'algorithmes a par la suite été étendu afin de traiter des problèmes d'optimisation continus [SOCHA et DORIGO 2008]. Les algorithmes par essaims particulaires [KENNEDY et EBERHART 1995] forment une autre famille de méthodes classiquement employées. L'algorithme pilote le déplacement d'un ensemble de particules (\mathbf{x}_i) formant l'essaim en agissant sur leurs positions et leurs vitesses. L'objectif est de faire converger l'essaim vers le minimum global. Comme pour les algorithmes de colonies de fourmis, chaque individu n'a qu'une vision locale du problème, mais les interactions entre les individus permettent d'obtenir la meilleure solution. À l'itération $m + 1$, la vitesse $\mathbf{v}_i^{(m+1)}$ de la particule i de position $\mathbf{x}_i^{(m)}$ est calculée en tenant compte de :

- la vitesse $\mathbf{v}_i^{(m)}$ de la particule i à l'instant m ;
- la position de la particule $\mathbf{x}_b^{(m)}$ ayant la meilleure performance (la valeur de la fonction objectif la plus faible) parmi les particules voisines ;
- la meilleure position \mathbf{x}_i^* atteinte par la particule au cours des différentes itérations.

La vitesse de la particule i à l'instant $m + 1$ suit alors la formule :

$$\mathbf{v}_i^{(m+1)} = c_1 \mathbf{v}_i^{(m)} + c_2 (\mathbf{x}_i^* - \mathbf{x}_i^{(m)}) + c_3 (\mathbf{x}_b^{(m)} - \mathbf{x}_i^{(m)}), \quad (1.20)$$

où c_1 est fixé arbitrairement et c_2 et c_3 sont choisis aléatoirement. Finalement, la nouvelle position de la particule i est calculée de la manière suivante :

$$\mathbf{x}_i^{(m+1)} = \mathbf{x}_i^{(m)} + \mathbf{v}_i^{(m+1)}. \quad (1.21)$$

Un critère de convergence permet alors l'arrêt du processus itératif. Il est aussi possible de scinder l'essaim en plusieurs sous-groupes.

- Parmi les méthodes métaheuristiques qui ne sont pas basées sur une métaphore, la **recherche tabou** (ou *tabu search*) [GLOVER 1986 ; GLOVER et al. 1993] est la plus populaire. Cette méthode cherche à améliorer les performances des méthodes de recherche locales. Contrairement à ces dernières, à chaque itération l'algorithme de recherche tabou autorise l'avance vers une solution plus mauvaise lorsque aucune meilleure solution n'existe dans le voisinage (lorsqu'un minimum local a été atteint). De plus des restrictions sont introduites pour empêcher la recherche d'avancer vers des solutions déjà calculées (certains déplacements sont tabous, d'où le nom de la méthode). Cette démarche permet d'éviter l'arrêt de l'algorithme lorsqu'un minimum local est rencontré et favorise l'exploration du domaine de conception pour trouver d'autres minima.

Ces méthodes peuvent se révéler très efficaces pour traiter certains problèmes, mais leurs performances dépendent notablement de certains paramètres internes dont le réglage est délicat sans connaissance a

priori sur le problème. Ainsi un nombre important d'évaluations de la fonction objectif est souvent nécessaire.

Dans le but de réduire le nombre d'appels à la fonction objectif dont l'évaluation peut être coûteuse, des stratégies d'optimisation utilisant **un métamodèle** de la fonction objectif ont été développées [QUEIPO et al. 2005]. Un métamodèle, aussi appelé modèle de substitution, est un modèle mathématique construit par apprentissage à partir d'observations et fournissant en un temps négligeable une approximation d'une quantité d'intérêt coûteuse à évaluer (ici la fonction objectif). Il existe plusieurs types de modèles de substitution : régression polynomiale, méthode de surfaces de réponses, processus gaussien, fonction de base radiale (RBF ou *Radial Basis Function*), forêt d'arbres décisionnels (*random forest*), machine à vecteurs de support (SVM ou *Support Vector Machine*) ou encore réseau de neurones artificiels par exemple. Les méthodes d'optimisation globales peuvent alors être employées sur le métamodèle sans se soucier du nombre d'itérations, car l'approximation de la fonction objectif par métamodèle est obtenue presque instantanément. Cependant, afin d'obtenir un résultat suffisamment précis, les modèles de substitution doivent fournir une approximation de bonne qualité au niveau des minima, ce qui nécessite un nombre assez important d'observations dans ces zones lors de la construction du modèle (c'est-à-dire un nombre élevé d'évaluations de la fonction objectif). De plus, les régions comportant des minima n'étant pas connues, des observations sur un échantillonnage dense de tout l'espace de conception \mathcal{D} sont souvent nécessaires ce qui est très coûteux. Les stratégies d'**optimisation bayésienne** étendent l'utilisation des modèles de substitution [MOCKUS et al. 1978 ; JONES, SCHONLAU et al. 1998 ; FRAZIER 2018 ; LE RICHE et PICHENY 2021]. Elles s'appuient sur un critère de décision, appelé fonction d'acquisition, pour enrichir itérativement le métamodèle en cherchant à détecter les zones de minima potentiels à partir des informations fournies par le métamodèle. Il est ainsi possible de démarrer la procédure d'optimisation avec un premier modèle de substitution grossier comportant peu d'observations, et de converger vers le minimum global en rajoutant un nombre raisonnable d'observations. Cette stratégie permettant de réduire le nombre d'évaluations de la fonction objectif, elle est mise en place dans le cadre de ces travaux en utilisant un métamodèle de type processus gaussien. Les développements théoriques sur la construction du modèle et le déroulement de l'optimisation se retrouvent en chapitre 3 (page 103).

1.1.3.3 Optimisation sous contraintes

Les algorithmes d'optimisation précédemment décrits permettent de résoudre des problèmes d'optimisation sans contraintes. Afin de prendre en compte des problèmes avec des contraintes $\mathbf{h}_{\mathcal{G}} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{h}_{\mathcal{I}} \leq \mathbf{0}$, des stratégies spécifiques, dont les plus courantes sont expliquées dans cette section, doivent être employées.

Les méthodes de **pénalisation** consistent à altérer la fonction objectif de manière à ce qu'elle prenne des valeurs importantes lorsque les contraintes ne sont pas vérifiées. La nouvelle fonction objectif s'écrit alors :

$$y_p(\mathbf{x}) = y(\mathbf{x}) + \frac{1}{\varepsilon} p(\mathbf{x}), \quad (1.22)$$

où $p : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de pénalité prenant des valeurs importantes lorsque les contraintes

sont violées. Ce type de méthodes permet ainsi de transformer un problème d'optimisation sous contraintes en un problème d'optimisation sans contraintes qu'il est possible de résoudre avec les méthodes précédemment évoquées. Les méthodes de pénalisation peuvent néanmoins conduire à des problèmes mal conditionnés qu'il est difficile de résoudre numériquement. De plus le choix du paramètre ε est délicat et joue un rôle prépondérant dans la résolution du problème d'optimisation.

Les méthodes **lagrangiennes** permettent de résoudre un problème d'optimisation avec des contraintes d'égalités en utilisant une fonction \mathcal{L} , nommée Lagrangien, qui combine la fonction objectif et les fonctions contraintes en faisant intervenir de nouveaux coefficients, les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{n_{\mathcal{E}}}$. Le Lagrangien s'écrit alors :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = y(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}_{\mathcal{E}}(\mathbf{x}). \quad (1.23)$$

Si \mathbf{x}^* est une solution du problème d'optimisation sous contraintes, il existe un vecteur $\boldsymbol{\lambda}^*$ tel que la fonction \mathcal{L} admet une différentielle nulle au point $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$. Les solutions du problème d'optimisation sous contraintes peuvent alors se trouver en cherchant les points critiques du Lagrangien. Ce type de méthodes peut être étendu à des problèmes comportant aussi des contraintes d'inégalités si les conditions KKT sont vérifiées. Le problème revient alors à un problème de recherche de point selle qui peut par exemple être résolu par la méthode d'Uzawa [UZAWA 1958 ; BACUTA 2006]. Il est aussi possible de transformer le problème initial pouvant être fortement non linéaire en une suite de problèmes quadratiques sous contraintes linéaires, plus faciles à résoudre, grâce à la technique de *Sequential Quadratic Programming* [BOGGS et TOLLE 1995]. Cette stratégie repose sur une approximation quadratique du Lagrangien grâce à la méthode de Newton ou une méthode quasi-Newton.

Les méthodes de **points intérieurs** [FORSGREN et al. 2002] permettent la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes d'inégalités en le transformant en un problème de minimisation d'une fonction barrière. Il est par exemple possible d'utiliser la fonction barrière logarithmique B définie par :

$$B(\mathbf{x}) = y(\mathbf{x}) - \mu_B \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{I}}} \ln(-h_i(\mathbf{x})), \quad (1.24)$$

où μ_B est un paramètre réel positif. Lorsque ce paramètre est petit, la fonction B a un comportement similaire à la fonction objectif y sauf dans les zones où les contraintes sont proches de 0. En cherchant à minimiser B pour une séquence de valeurs de μ_B tendant vers 0, les solutions obtenues convergent vers un minimum du problème sous contraintes original. Ce type de méthode peut aussi être adapté pour prendre en compte des contraintes d'égalités.

De nombreuses autres manières de prendre en compte les contraintes, spécifiques à certains algorithmes, ont été développées. Certaines approches incluent la méthode de Nelder-Mead [LUERSEN et al. 2004], les méthodes de descente de gradients [X. B. CHEN et KOSTREVA 1999] ou encore les méthodes de régions de confiance [BYRD et al. 1987] pour n'en mentionner que quelques-unes, sans prétendre à l'exhaustivité. Dans le cadre de la stratégie d'optimisation bayésienne déployée dans ces travaux, la prise en compte des contraintes d'inégalités est réalisée au travers de la fonction d'acquisition utilisée pour l'enrichissement du métamodèle [SCHONLAU et al. 1998 ; GARDNER, KUSNER et al. 2014]. De plus amples détails sont donnés en section 3.4.2 (page 112).

Pour l'optimisation de structures, l'évaluation de la fonction objectif et des éventuelles fonctions contraintes du problème d'optimisation se fait à partir de la résolution d'un problème mécanique. Dans le cadre de ces travaux, il s'agit de résoudre un problème de dynamique vibratoire.

1.2 Dynamique vibratoire des structures

Un système dynamique est un système dont l'état varie dans le temps. Ainsi, l'étude des structures mécaniques en dynamique nécessite la détermination de grandeurs évoluant dans le temps (déplacements, vitesses, accélérations, etc.) qui caractérisent l'évolution temporelle des structures. Dans le cadre de ces travaux, seules les réponses forcées de structures soumises à des excitations vibratoires harmoniques sont considérées.

1.2.1 Dynamique vibratoire linéaire

Un phénomène est dit linéaire si les effets sont proportionnels aux causes. Ainsi, dans un système linéaire, la réponse à toute combinaison linéaire d'entrées est la même combinaison linéaire de réponses. Il est courant de modéliser les structures mécaniques de manière linéaire. Dans de nombreux problèmes courant d'ingénierie, il s'agit en effet d'une hypothèse qui permet d'aboutir à un modèle suffisamment représentatif de la réalité. L'intérêt d'une modélisation linéaire est qu'elle permet l'utilisation de méthodes efficaces de résolution par simulation numérique. Ces dernières sont brièvement présentées dans la suite.

1.2.1.1 Équation de la dynamique linéaire

Cette section présente succinctement les développements permettant de formuler le problème de dynamique d'une structure linéaire élastique dans un référentiel galiléen. De plus amples détails peuvent se trouver dans les ouvrages de BONNET et FRANGI (2007) ou LEGAY (2022) par exemple. Le problème de référence en mécanique des milieux continus consiste en l'étude d'un solide déformable défini par un domaine Ω^s , un sous-espace de \mathbb{R}^3 , de frontière extérieure fermée $\partial\Omega^s$. Chaque point est caractérisé par un matériau ayant pour propriétés mécaniques une masse volumique ρ et un tenseur d'élasticité $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ (d'ordre 4). Le solide subit une force volumique \mathbf{f} dans Ω^s et une force surfacique \mathbf{f}^d sur la frontière $\partial_{\mathbf{f}}\Omega^s$. Un déplacement \mathbf{u}^d est imposé sur la frontière $\partial_{\mathbf{u}}\Omega^s$. Les frontières $\partial_{\mathbf{u}}\Omega^s$ et $\partial_{\mathbf{f}}\Omega^s$ forment une partition de $\partial\Omega^s$:

$$\partial\Omega^s = \partial_{\mathbf{u}}\Omega^s \cup \partial_{\mathbf{f}}\Omega^s, \quad \text{et} \quad \partial_{\mathbf{u}}\Omega^s \cap \partial_{\mathbf{f}}\Omega^s = \emptyset. \quad (1.25)$$

Une représentation illustrative en dimension 2 est fournie en Figure 1.4.

Le principal objectif d'une étude en dynamique est de déterminer l'évolution dans le temps du champ de déplacement \mathbf{u} et du champ de contraintes $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ en tout point M de Ω^s . La variable de temps est notée t et évolue dans un intervalle $[0; t_f]$ de \mathbb{R}_+ . Les propriétés mécaniques ρ et $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ sont supposées constantes dans le temps. Le déplacement d'un point de Ω^s est décrit par un vecteur de \mathbb{R}^3 , comprenant

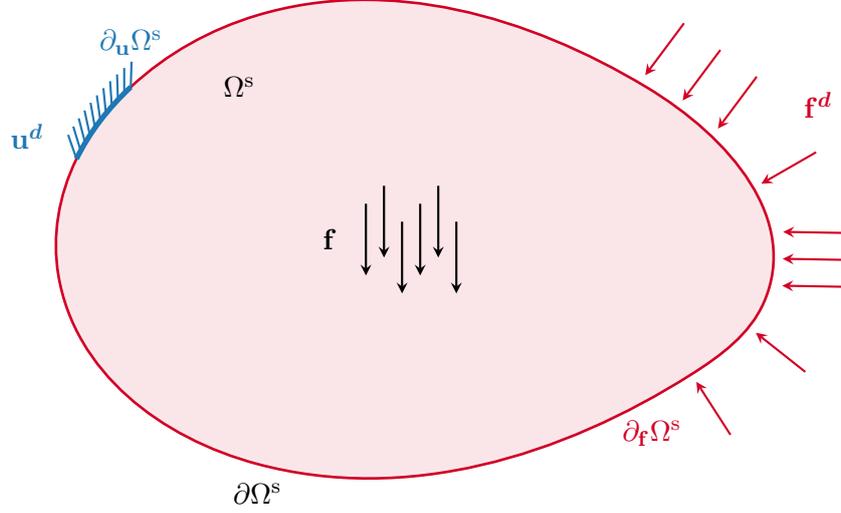


FIGURE 1.4 – Problème de référence.

une composante pour chaque direction de l'espace. L'ensemble \mathcal{U} des déplacements dans le solide est ainsi défini de la manière suivante :

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} : \Omega^s \times [0; t_f] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (M, t) \mapsto \mathbf{u}(M, t) \end{array} \right\}. \quad (1.26)$$

Le champ de contraintes est décrit par un tenseur d'ordre 2 représentant une forme bilinéaire sur \mathbb{R}^3 . L'ensemble \mathcal{S} des contraintes dans le solide est défini par :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}} : \Omega^s \times [0; t_f] \rightarrow L_2(\mathbb{R}^3) \\ (M, t) \mapsto \underline{\underline{\sigma}}(M, t) \end{array} \right\}. \quad (1.27)$$

En pratique, l'objectif est de déterminer les 9 coefficients de la matrice représentant le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ dans une base de \mathbb{R}^3 donnée.

Le formalisme de la mécanique des milieux continus permet de définir les relations intervenant dans le solide. Les conditions cinématiques imposent :

$$\forall M \in \partial_{\mathbf{u}}\Omega^s, \forall t \in [0; t_f], \mathbf{u}(M, t) = \mathbf{u}^d(M, t). \quad (1.28)$$

Les équations d'équilibre de la dynamique s'écrivent :

$$\forall M \in \Omega^s, \forall t \in [0; t_f], \quad \mathbf{div} \underline{\underline{\sigma}}(M, t) + \mathbf{f}(M, t) = \rho(M) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(M, t), \quad (1.29)$$

$$\forall M \in \partial_{\mathbf{f}}\Omega^s, \forall t \in [0; t_f], \quad \underline{\underline{\sigma}}(M, t) \cdot \mathbf{n}(M, t) = \mathbf{f}^d(M, t), \quad (1.30)$$

avec \mathbf{n} le vecteur normal à $\partial_{\mathbf{f}}\Omega^s$ au point M . L'opérateur « \cdot » désigne le produit tensoriel contracté. Les conditions initiales sont définies par :

$$\forall M \in \Omega^s, \quad \mathbf{u}(M, 0) = \mathbf{u}_0(M) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(M, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(M). \quad (1.31)$$

En élasticité linéaire, la loi de comportement s'écrit :

$$\forall M \in \Omega^s, \forall t \in [0; t_f], \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(M, t) = \underline{\underline{\mathbf{C}}}(M) : \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\mathbf{u}(M, t)), \quad (1.32)$$

où $\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$ est le tenseur des déformations. L'opérateur « : » désigne le produit tensoriel doublement contracté. Dans l'hypothèse de petites déformations, ce tenseur correspond au tenseur de Green-Lagrange linéarisé :

$$\forall M \in \Omega^s, \forall t \in [0; t_f], \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\mathbf{u}(M, t)) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u}(M, t) + \nabla^T \mathbf{u}(M, t) \right). \quad (1.33)$$

Les équations (1.28) à (1.33) constituent ce qui est appelé la formulation forte du problème d'équilibre en élasticité. Les conditions aux limites (1.28) et (1.30) assurent l'existence et l'unicité de la solution en contrainte et en déformation. D'autres conditions aux limites sont également possibles, comme des conditions de périodicité ou de symétrie. L'hypothèse est faite que le solide se déforme en restant continu. De plus, afin d'éviter des cas pathologiques correspondant peu à la physique, une certaine régularité est exigée. Dans le cadre de la formulation forte précédemment présentée, il est ainsi exigé que le déplacement soit deux fois continument différentiable par morceaux. En revanche pour la formulation par éléments finis qui est introduite dans la suite et utilisée tout au long de ces travaux, l'hypothèse que \mathbf{u} et $\nabla \mathbf{u}$ sont de carré intégrable sur Ω^s est suffisante. L'ensemble \mathcal{U}^{u^d} des déplacements admissibles est alors défini par :

$$\mathcal{U}^{u^d} = \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{U} \mid \mathbf{u} \text{ continu et régulier sur } \Omega^s \text{ et } \mathbf{u} = \mathbf{u}^d \text{ sur } \partial_u \Omega^s \times [0; t_f] \right\}. \quad (1.34)$$

Il est aussi utile d'introduire l'ensemble \mathcal{U}^0 des déplacements admissibles à zéro :

$$\mathcal{U}^0 = \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{U} \mid \mathbf{u} \text{ continu et régulier sur } \Omega^s \text{ et } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial_u \Omega^s \times [0; t_f] \right\}. \quad (1.35)$$

L'équation de la dynamique (1.29) peut aussi être exprimée sous une forme faible équivalente par multiplication par un champ virtuel $\mathbf{w} \in \mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{w} \in \mathcal{U}, \forall t \in [0; t_f], \quad & \int_{\Omega^s} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(M, t) : \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\mathbf{w}(M, t)) \, dV + \int_{\Omega^s} \rho(M) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(M, t) \mathbf{w}(M, t) \, dV \\ & = \int_{\Omega^s} \mathbf{f}(M, t) \mathbf{w}(M, t) \, dV + \int_{\partial \Omega^s} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(M, t) \cdot \mathbf{n}(M, t) \mathbf{w}(M, t) \, dS. \end{aligned} \quad (1.36)$$

L'équation (1.36) correspond au principe des puissances virtuelles lorsque \mathbf{w} est homogène à une vitesse. En incorporant les autres équations du problème dynamique, et en restreignant le champ virtuel sur l'ensemble \mathcal{U}^0 , il vient la formulation faible du problème de dynamique en déplacement qui consiste à trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^{u^d}$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{w} \in \mathcal{U}^0, \forall t \in [0; t_f], \quad & \int_{\Omega^s} \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\mathbf{u}(M, t)) : \underline{\underline{\mathbf{C}}}(M) : \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(\mathbf{w}(M, t)) \, dV + \int_{\Omega^s} \rho(M) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(M, t) \mathbf{w}(M, t) \, dV \\ & = \int_{\Omega^s} \mathbf{f}(M, t) \mathbf{w}(M, t) \, dV + \int_{\partial_f \Omega^s} \mathbf{f}^d(M, t) \mathbf{w}(M, t) \, dS, \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\forall M \in \Omega^s, \quad \mathbf{u}(M, 0) = \mathbf{u}_0(M) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(M, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(M). \quad (1.38)$$

Sauf cas particuliers, il n'est pas possible de déterminer une solution analytique du problème d'équations (1.37) et (1.38).

La méthode des éléments finis [ZIENKIEWICZ et al. 1967] cherche à approcher la solution en déplacement \mathbf{u} dans un espace de dimension finie. L'approximation \mathbf{u}^h est ainsi recherchée sur un sous-espace vectoriel de dimension finie n de \mathcal{U} , noté \mathcal{U}^h . Le domaine Ω^s est approché par un domaine Ω^h appelé maillage. L'espace \mathcal{U}^h est engendrée par une base de n fonctions, appelées fonctions de formes. Cette base est construite de sorte que la projection du champ de déplacement corresponde au déplacement de chacun des nœuds du maillage. Ainsi, le mouvement en fonction du temps t d'une structure mécanique discrétisée par la méthode des éléments finis est décrit par une fonction position $\mathbf{q} : [0; t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$, ainsi que ses dérivées successives par rapport à t formant les fonctions vitesse $\dot{\mathbf{q}}$ et accélération $\ddot{\mathbf{q}}$. Le vecteur $\mathbf{q}(t)$ correspond à la projection du champ de déplacement dans la base des fonctions de formes et chacune de ses composante correspond à un degré de liberté (ddl) de la structure à l'instant t . La substitution de l'approximation par éléments finis dans l'équation (1.37) conduit à un système différentiel linéaire de la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_{\text{ext}}(t). \quad (1.39)$$

Les notations \mathbf{M} et \mathbf{K} désignent respectivement les matrices de masse et de raideur de la structure. Ce sont des matrices carrées constantes, réelles et symétriques de dimension $(n \times n)$ qui proviennent de la modélisation. La matrice de masse \mathbf{M} est de plus supposée inversible. La fonction $\mathbf{f}_{\text{ext}} : [0; t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ correspond à la force excitatrice extérieure agissant sur chacun des degrés de liberté (ddls) de la structure. Des phénomènes dissipatifs (frottements, liaisons, etc.) sont néanmoins souvent présents. Ces derniers sont pris en compte par ajout d'un amortissement visqueux. L'équation de la dynamique linéaire est alors de la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_{\text{ext}}(t). \quad (1.40)$$

La matrice \mathbf{C} correspond à la matrice d'amortissement, réelle, symétrique de dimension $(n \times n)$. Dans le cas d'une excitation vibratoire harmonique de pulsation ω telle qu'apparaissant dans ces travaux, la force excitatrice peut s'écrire :

$$\mathbf{f}_{\text{ext}}(t) = \mathbf{f}_0 \cos(\omega t + \psi_0), \quad (1.41)$$

avec $\mathbf{f}_0 \in \mathbb{R}_+^n$ et $\psi_0 \in [0; 2\pi]$ respectivement l'amplitude et le déphasage de l'excitation.

La solution de l'équation (1.40) est la somme d'une solution homogène (calculée pour $\mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$) et d'une solution particulière. La solution homogène, relative au régime transitoire, a une amplitude décroissant exponentiellement dans le temps, ce qui rend sa contribution négligeable après un certain temps. La solution particulière correspond au régime permanent et c'est sa détermination qui est recherchée dans le cadre de ces travaux. Pour un système linéaire, la réponse en régime permanent à une sollicitation harmonique (1.41) est un signal harmonique de même pulsation ω .

Le passage dans l'ensemble des nombres complexes permet de résoudre plus facilement l'équation (1.40). La force excitatrice (1.41) peut en effet aussi s'écrire :

$$\mathbf{f}_{\text{ext}}(t) = \Re \left(\mathbf{f}_0 e^{j\omega t} \right), \quad (1.42)$$

où j désigne l'unité imaginaire, \Re la partie réelle et $\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}_0 e^{j\psi_0} \in \mathbb{C}^n$. Soit $\mathbf{q} : [0; t_f] \rightarrow \mathbb{C}^n$ une solution complexe en régime permanent de l'équation :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_0 e^{j\omega t}. \quad (1.43)$$

Une solution \mathbf{q} de l'équation (1.40) peut alors s'écrire :

$$\mathbf{q}(t) = \Re(\mathbf{q}(t)). \quad (1.44)$$

La résolution de l'équation (1.43) suffit donc à déterminer la solution de l'équation de la dynamique (1.40).

La solution en régime permanent \mathbf{q} de l'équation (1.43) est harmonique de pulsation ω et peut donc se mettre sous la forme :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 e^{j\omega t}. \quad (1.45)$$

La réécriture de l'équation (1.43) à l'aide de l'expression (1.45) permet d'éliminer la dépendance en temps et d'aboutir au système linéaire suivant dans \mathbb{C}^n :

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{q}_0 = \mathbf{f}_0. \quad (1.46)$$

Le module complexe $|\mathbf{q}_0|$ correspond à l'amplitude du déplacement des ddls et l'argument $\arg(\mathbf{q}_0)$ à leur déphasage. Le système linéaire (1.46) peut être résolu numériquement de manière relativement efficace par l'emploi de solveurs linéaires directs (utilisation de la factorisation LU, de la factorisation de Cholesky, etc.) ou itératifs (méthode de Jacobi, méthode de Gauss-Seidel, méthode du gradient conjugué, etc.). Un panorama détaillé des méthodes de résolution des systèmes linéaires se trouvent dans le livre de DUREISSEIX (2008, Chapitre 1). De plus les matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} ne comportent en général que peu de termes non nuls, elles sont dites creuses. Il est alors possible de les stocker informatiquement sous forme creuse ce qui permet une importante économie de mémoire et des temps de calculs réduits pour certaines opérations matricielles [TEWARSON 1973]. En dynamique vibratoire, l'objectif est en général de caractériser la réponse des structures en fonction de la fréquence d'excitation. Ainsi, plutôt que de résoudre le système (1.46) pour une fréquence donnée, un outil plus puissant est souvent employé : l'analyse modale.

1.2.1.2 Projection modale

L'approche modale consiste dans un premier temps à caractériser les modes propres de la structure, qui correspondent aux couples comprenant les fréquences (ou pulsations) de résonances pour lesquelles l'amplitude de la réponse vibratoire de la structure est maximale ainsi que la solution associée. Les modes propres correspondent aux solutions complexes non-nulles de l'équation sans amortissement ni excitation :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}. \quad (1.47)$$

Les solutions sont recherchées sous la forme :

$$\mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\phi} e^{j\Omega t}, \quad (1.48)$$

avec $\phi \in \mathbb{R}^n$ et $\Omega \in \mathbb{R}_+$. En injectant l'expression (1.48) dans l'équation (1.47), il s'agit alors de déterminer les couples $(\Omega; \phi)$ solutions de l'équation :

$$-\Omega^2 \mathbf{M}\phi + \mathbf{K}\phi = \mathbf{0}, \quad (1.49)$$

ce qui peut être reformulé sous la forme de l'équation aux valeurs propres généralisée :

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M})\phi = \mathbf{0}. \quad (1.50)$$

Les matrices \mathbf{M} et \mathbf{K} sont réelles symétriques et si la structure n'admet pas de modes de corps rigides (lorsque les conditions aux limites en déplacement ne lui permettent pas de se déplacer sans se déformer), la matrice \mathbf{M} est aussi définie positive. Dans cette situation, le problème d'équation (1.50) admet n valeurs propres réelles non-nulles indépendantes $(\Omega_i^2)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ associées à n vecteurs propres $(\phi_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ formant une base orthogonale. Les valeurs Ω_i sont les pulsations propres, les vecteurs ϕ_i sont les formes propres et les couples $(\Omega_i; \phi_i)$, classés par ordre croissant des Ω_i , définissent les modes propres. Le problème aux valeurs propres généralisé d'équation (1.50) peut être résolu numériquement de différentes manières (méthode des puissances, méthode de Householder, méthode de Lanczos, etc.) [DUREISSEIX 2008, Chapitre 2].

Dans un second temps, les matrices sont projetées sur la base modale formée par les vecteurs $(\phi_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$. Ces vecteurs propres, qui sont définis à une multiplication par un scalaire près, sont généralement choisis pour que la projection modale de la matrice de masse \mathbf{M} soit unitaire (normalisation par la masse). Il vient ainsi :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \phi_i^\top \mathbf{M}\phi_i = 1, \quad (1.51)$$

et alors :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \phi_i^\top \mathbf{K}\phi_i = \Omega_i^2. \quad (1.52)$$

La matrice d'amortissement \mathbf{C} est couramment choisie pour représenter un amortissement modal, de sorte que sa projection modale peut s'écrire :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \phi_i^\top \mathbf{C}\phi_i = 2\xi_i \Omega_i. \quad (1.53)$$

Les taux d'amortissement modaux ξ_i sont déterminés en fonction des propriétés des matériaux ou d'essais expérimentaux afin de correspondre au mieux à l'amortissement réel de la structure. La projection de la matrice \mathbf{C} dans la base modale est alors diagonale. Il existe d'autres choix pour la matrice d'amortissement qui donnent aussi une projection diagonale comme l'amortissement de Rayleigh [RAYLEIGH 1877] ou les séries de Caughey [CAUGHEY 1960] qui reposent sur des combinaisons linéaires des matrices \mathbf{M} et \mathbf{K} .

L'équation (1.46) peut finalement être résolue par superposition modale. La projection sur la base modale donne :

$$\mathbf{q}_0 = \Phi \mathbf{q}_m = \sum_{i=1}^n q_{m_i} \phi_i, \quad (1.54)$$

avec $\Phi = [\phi_1 \ \cdots \ \phi_n]$ la matrice des formes propres de taille $(n \times n)$ et $\mathbf{q}_m = [q_{m_1} \ \cdots \ q_{m_n}]^\top$ le vecteur projeté de taille n . La projection de l'équation (1.46) s'écrit alors :

$$\Phi^\top (-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \Phi \mathbf{q}_m = \Phi^\top \mathbf{f}_0. \quad (1.55)$$

Les matrices projetées dans la base modale étant diagonales, le problème d'équation (1.55) forme un système de n équations indépendantes. En utilisant les expressions des projections (1.51), (1.52) et (1.53), il résulte :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, q_{mi} = \frac{\phi_i^\top \mathbf{f}_0}{-\omega^2 + 2j\xi_i\Omega_i + \Omega_i^2}. \quad (1.56)$$

Il est ainsi possible d'obtenir la solution de l'équation (1.46) par superposition modale à partir de l'expression (1.54) :

$$\mathbf{q}_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i^\top \mathbf{f}_0}{-\omega^2 + 2j\xi_i\Omega_i + \Omega_i^2} \phi_i. \quad (1.57)$$

Grâce à cette méthode, il suffit d'un seul calcul lourd (la résolution du problème aux valeurs propres (1.50)) pour ensuite obtenir rapidement la réponse dynamique de la structure à n'importe quelle fréquence ou amplitude d'excitation. De plus pour les problèmes de grande taille, la base modale est généralement tronquée à un ordre p (dans ce cas, $\Phi = [\phi_1 \ \cdots \ \phi_p]$). La solution obtenue est alors une approximation dont l'erreur diminue lorsque p augmente. Le choix de la valeur de p se fait par des considérations empiriques en fonction du type de structure, du chargement, et du type d'analyse [LI et GUNTER 1982].

1.2.1.3 Réponse fréquentielle

La réponse en fréquence décrit la réponse forcée en régime permanent d'une structure en fonction de la fréquence de l'excitation harmonique qu'elle subit. Ce type d'analyse permet de caractériser le comportement des structures et est couramment utilisé en phase de conception. Avec une modélisation linéaire, l'amplitude de la réponse est proportionnelle à l'amplitude de l'excitation. Dans ce cas, la Fonction de Réponse en Fréquence (FRF), qui décrit l'amplitude de la réponse d'un système normalisée par l'amplitude de l'excitation, est utilisée.

La FRF est illustrée avec l'exemple d'un oscillateur mécanique amorti à 1 ddl constitué d'un système masse-ressort-amortisseur excité par une force harmonique, comme représenté en Figure 1.5. L'équation du mouvement de ce système reprend la forme de l'équation (1.40) pour $n = 1$ et s'écrit :

$$m_1 \ddot{q}(t) + c_1 \dot{q}(t) + k_1 q(t) = f_0 \cos(\omega t). \quad (1.58)$$

Le passage dans l'ensemble des nombres complexes revient à déterminer q_0 solution de :

$$(-\omega^2 m_1 + j\omega c_1 + k_1) q_0 = f_0, \quad (1.59)$$

avec $f_0 = f_0$, car il n'y a pas de déphasage au niveau de l'excitation dans cet exemple. L'oscillateur possède une pulsation propre $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ associée à la forme propre normalisant la masse $\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{m_1}}$. L'amortissement modal est tel que :

$$\frac{c_1}{m_1} = 2\xi_0\Omega_0, \quad (1.60)$$

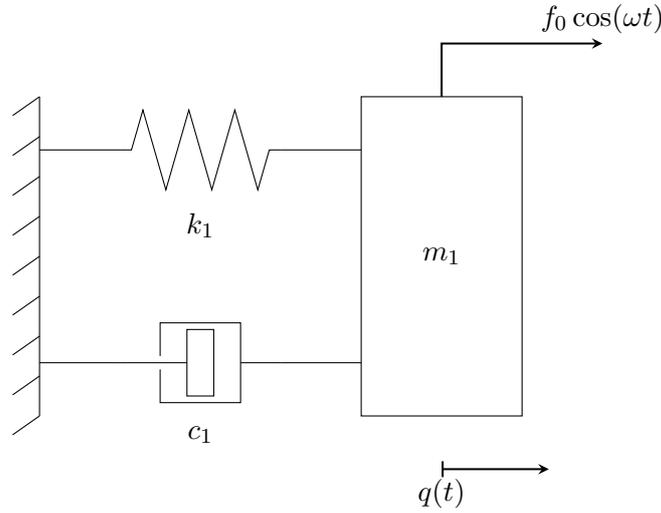


FIGURE 1.5 – Représentation schématique d'un oscillateur amorti à 1 degré de liberté.

ce qui donne un taux d'amortissement $\xi_0 = \frac{c_1}{2m_1\Omega_0}$. L'amplitude complexe de la solution s'exprime alors :

$$q_0 = \frac{f_0/m_1}{-\omega^2 + j2\xi_0\Omega_0\omega + \Omega_0^2}. \quad (1.61)$$

Finalement l'expression analytique solution permanente de l'équation (1.58) s'écrit :

$$q(t) = |q_0| \cos(\omega t + \arg(q_0)), \quad (1.62)$$

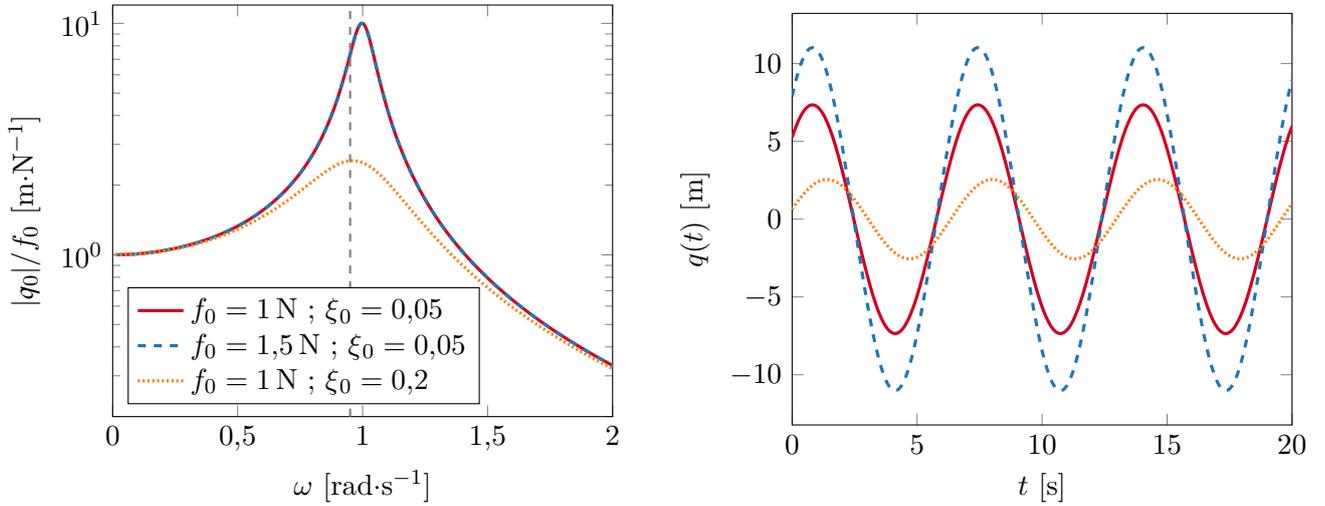
avec :

$$|q_0| = \frac{f_0/m_1}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_0\Omega_0\omega)^2}} \text{ et } \arg(q_0) = \arctan\left(\frac{2\xi_0\Omega_0\omega}{\Omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (1.63)$$

La réponse de l'oscillateur amorti est présentée en Figure 1.6 pour $m_1 = 1 \text{ kg}$ et $k_1 = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ en faisant varier l'amortissement et le niveau d'excitation. Le tracé de la FRF en Figure 1.6a met en évidence le phénomène de résonance avec un pic d'amplitude autour de la pulsation propre $\Omega_0 = 1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. L'expression analytique (1.63) permet de déterminer qu'un maximum d'amplitude apparait à la pulsation $\omega = \Omega_0\sqrt{1 - 2\xi_0^2}$ si $\xi_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$. La Figure 1.6 permet aussi de mettre en évidence le fait que pour un système linéaire, la FRF ne dépend pas de l'amplitude de l'excitation. Enfin, la Figure 1.6b montre le déphasage provoqué par l'amortissement, tel qu'indiqué par l'expression (1.62).

1.2.2 Dynamique vibratoire non linéaire

La modélisation linéaire permet une représentation réaliste pour des structures élastiques avec de petits déplacements. Cependant, hors de ce cadre, ou lorsque que certains phénomènes tels que le contact et le frottement doivent être pris en compte, des effets non linéaires peuvent avoir une influence importante sur le comportement des structures. Pour prendre en compte ces phénomènes, il



(a) Fonction de Réponse en Fréquence.

 (b) Réponse temporelle en régime permanent pour $\omega = 0,95 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

 FIGURE 1.6 – Réponse dynamique d'un oscillateur harmonique amorti pour différents niveaux d'amortissement et d'excitation avec $m_1 = 1 \text{ kg}$ et $k_1 = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$.

est possible d'en faire une approximation linéaire afin de garder un système d'équations linéaires, mais cela augmente l'erreur de modélisation de manière difficilement quantifiable et il devient nécessaire d'utiliser d'importantes marges de sécurité dans le dimensionnement. À l'inverse, une modélisation non linéaire peut être adoptée dans l'objectif de réaliser des simulations numériques haute fidélité afin d'approcher plus précisément le comportement réel ou de réduire les marges de sécurité. Un terme non linéaire s'ajoute alors à l'équation (1.40) et la dynamique d'une structure est ainsi régie par un système non linéaire qui peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \mathbf{f}_{\text{ext}}(t). \quad (1.64)$$

Le terme \mathbf{f}_{nl} contient les efforts non linéaires qui ne dépendent généralement que des déplacements et vitesses (c'est le cas pour les phénomènes considérés dans ces travaux). Une non-linéarité est dite régulière lorsque la fonction \mathbf{f}_{nl} est de classe C^∞ . Dans le cadre de la dynamique non linéaire, il n'est plus possible de parler de fonction de réponse en fréquence, car la réponse normalisée n'est plus indépendante de l'amplitude d'excitation (voir section 1.2.2.3 (page 49)). Les termes « réponse fréquentielle » ou « courbe de réponse en fréquence » [COLAÏTIS 2021] sont alors utilisés tout au long de ce document pour désigner la représentation d'une quantité d'intérêt (maximum de déplacement ou d'accélération, amplitude d'un harmonique, etc.) en fonction de la fréquence ou de la pulsation d'excitation.

1.2.2.1 Sources de non-linéarités en mécanique des solides

Dans cette section, les mécanismes physiques pouvant être à l'origine de phénomènes non linéaires en mécanique des solides sont succinctement détaillés.

Les **non-linéarités matérielles** sont engendrées par la présence de matériaux à loi de comportement non linéaire. La relation entre contraintes et déformations n'est alors plus linéaire ce qui amène un terme non linéaire lors de la modélisation par éléments finis. Parmi les types de matériaux non linéaires, se retrouvent par exemple les matériaux élasto-plastiques [R. HILL 1950 ; HASHIGUCHI 2009], les élastomères hyperélastiques [KHANIKI et al. 2022], les matériaux à mémoire de forme [CARTMELL et al. 2012 ; MOUSSA 2011] ou encore certains matériaux composites [CASTAÑEDA et SUQUET 1997].

Les **non-linéarités géométriques** proviennent des grands déplacements des structures. Lorsque l'hypothèse des petites perturbations n'est plus valide, il n'est plus possible de justifier la linéarisation du tenseur des déformations de Green-Lagrange qui lie déformation et déplacement dans la modélisation par éléments finis. Un des exemples les plus classiques de système mécanique présentant une non-linéarité géométrique est le pendule pesant, dont l'approximation à l'ordre 3 donne un oscillateur de Duffing qui fait l'objet d'une présentation plus détaillée en section 1.2.2.2 (page 49), et qui sera utilisé en tant que cas académique pour les méthodes développées dans cette thèse. Les non-linéarités géométriques sont également présentes dans certains instruments de musique [THOMAS 2001] et dans les grandes structures industrielles telles que les bâtiments élancés [J. LEE et al. 2013], les ponts [LAZER et MCKENNA 1990], les ailes d'avions [PATIL et HODGES 2004] ou pour les pales de machines tournantes [VAKAKIS 1992 ; THOMAS et al. 2016]. Ce type de non-linéarité est aussi utilisé pour le contrôle de vibrations dans les absorbeurs dynamiques non linéaires (NES ou *Nonlinear Energy Sink*) [DING et L.-Q. CHEN 2020].

Les phénomènes de **contacts et de frottements secs** sont sources de non-linéarités non régulières. Il s'agit de phénomènes localisés à l'interface entre deux systèmes en contact qui entraînent une évolution non linéaire de la raideur. Ce type de non-linéarités se retrouve dans de nombreux systèmes mécaniques dans tous les domaines de l'industrie comme les roulements à billes [HARRIS 1986], les engrenages [AMBARISHA et PARKER 2007], les butées mécaniques [DETROUX, RENSON et al. 2015], la modélisation de liaisons boulonnées [GAUL et NITSCHKE 2001], les systèmes de freinage [CHARGIN et al. 1997], les générateurs de vapeur [ALCORTA GALVAN 2021], les roues aubagées (interface en pied d'aube [LEGRAND et al. 2010] et contact rotor/stator [PETROV et EWINS 2003]) ou encore lors de l'entrechoquement entre bâtiments [ANAGNOSTOPOULOS 1988] entre autres. Il s'agit du principal type de non-linéarités qui est envisagé pour les applications industrielles de ces travaux.

Le **couplage multiphysique** peut aussi avoir une forte incidence sur la réponse d'une structure lorsque le comportement non linéaire d'un système couplé non solide influence celui de la structure. Il est possible de citer par exemple les phénomènes aéroélastiques [DOWELL et al. 2003], les couplages piézoélectriques [AGNES et INMAN 1996 ; LOSSOUARN et al. 2018], ou les isolateurs sismiques actifs et semi-actifs [TEODORESCU 2013].

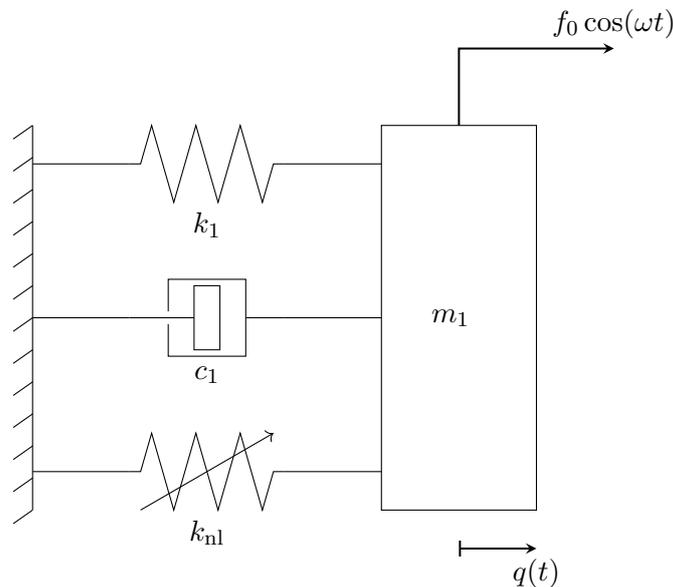


FIGURE 1.7 – Représentation schématique d'un oscillateur de Duffing.

1.2.2.2 Oscillateur de Duffing

Afin d'illustrer les effets non linéaires, un oscillateur de Duffing est étudié. Il s'agit d'un système à 1 ddl possédant une non-linéarité géométrique sous la forme d'une raideur cubique. Introduit en 1918 par l'ingénieur allemand Georg Duffing pour l'étude des larges oscillations des pendules [DUFFING 1918], cet oscillateur constitue un problème bien étudié dans la littérature scientifique qui correspond à la modélisation de différents systèmes mécaniques ou électriques [KOVACIC et BRENNAN 2011]. Une représentation de l'oscillateur de Duffing est montrée en Figure 1.7 et l'équation du mouvement, nommée équation de Duffing, reprend l'équation de l'oscillateur amorti (1.58) en y ajoutant une raideur cubique k_{nl} :

$$m_1 \ddot{q}(t) + c_1 \dot{q}(t) + k_1 q(t) + k_{nl} q^3(t) = f_0 \cos(\omega t). \quad (1.65)$$

Cela décrit un système qui s'assouplit ($k_{nl} < 0$) ou se durcit ($k_{nl} > 0$) au cours de son mouvement. Bien que l'oscillateur de Duffing puisse être considéré comme l'un des mécanismes non linéaires les plus élémentaires, avec une non-linéarité régulière à l'expression analytique relativement simple, il permet d'exhiber un vaste registre de phénomènes non linéaires.

1.2.2.3 Effets non linéaires

La présence de non-linéarités dans les structures conduit à l'apparition de phénomènes particuliers qui ne peuvent s'expliquer avec une modélisation linéaire. L'oscillateur de Duffing (1.65) est utilisé tout au long de cette section pour illustrer ces phénomènes.

Des bifurcations peuvent intervenir dans la réponse dynamique des systèmes non linéaires. Elles correspondent au cas où une petite variation d'un paramètre entraîne un changement majeur. Une

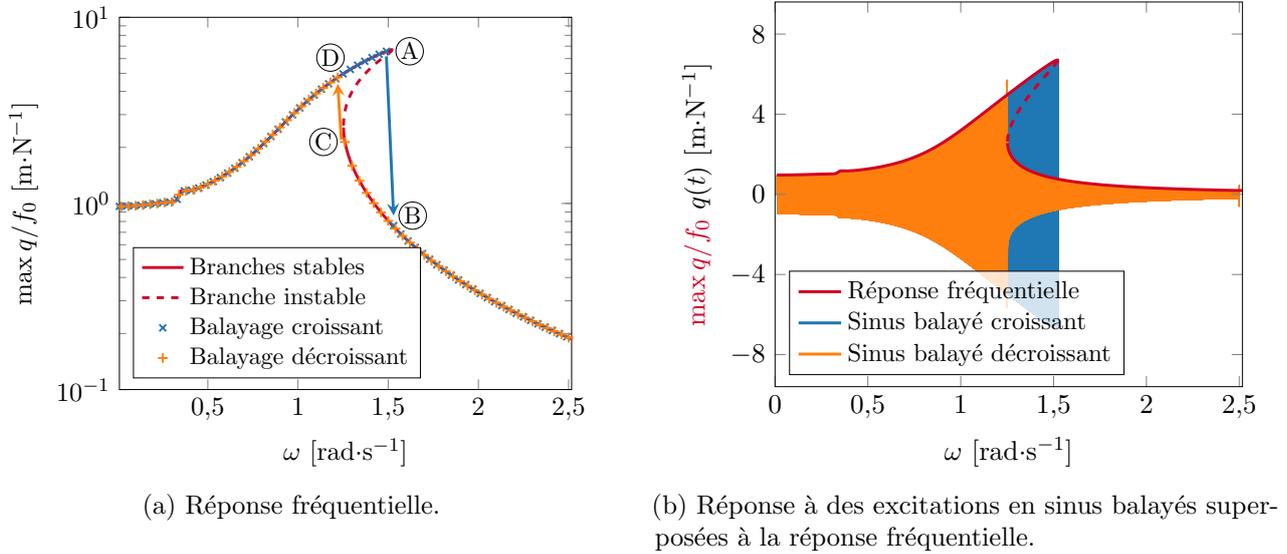


FIGURE 1.8 – Phénomène de saut dans la réponse dynamique d’un oscillateur de Duffing pour $m_1 = 1$ kg, $c_1 = 0,1$ kg·s⁻¹, $k_1 = 1$ N·m⁻¹, $k_{nl} = 0,04$ N·m⁻³, $f_0 = 1$ N.

branche de solutions correspond à la courbe reliant l’ensemble des solutions pour un paramètre λ variant continument (la fréquence ou la pulsation dans le cas d’une réponse fréquentielle) et le passage d’une branche à l’autre se fait au niveau des points de bifurcations. Une branche peut être qualifiée de stable ou d’instable si toutes les solutions la constituant sont respectivement stables ou instables. Une bifurcation peut donner lieu à l’apparition de sauts dans la réponse fréquentielle. La Figure 1.8 montre ce phénomène lors d’une bifurcation de type repliement (ou col-nœud). Les branches stables et instables de la réponse fréquentielle de référence sont calculées par la méthode de l’équilibrage harmonique (HBM ou *Harmonic Balance Method*) détaillée en section 2.1.1 (page 76). Sur la Figure 1.8a, un schéma d’intégration temporelle (détaillé en section 1.2.3.3 (page 55)) est utilisé pour calculer le maximum de la réponse temporelle en régime permanent pour une fréquence d’excitation donnée. La réponse fréquentielle est ensuite obtenue en balayant progressivement une plage de fréquences d’excitation. À chaque nouvelle fréquence, les conditions initiales choisies pour initialiser l’intégration temporelle correspondent aux conditions initiales de la réponse permanente obtenue à la fréquence précédente. Lorsque les fréquences sont balayées dans le sens croissant, un saut est visible entre les points *A* et *B* de la Figure 1.8a tandis que lorsque les fréquences sont balayées dans un sens décroissant, le comportement est différent et le saut se produit entre les points *C* et *D*. Ce résultat met aussi en avant le phénomène d’hystérésis présent dans les systèmes non linéaires : la réponse d’une structure dépend de son historique d’excitation. Ces effets se retrouvent sur la Figure 1.8b où une excitation en sinus balayé est appliquée. Il s’agit d’une excitation temporelle qui, à chaque instant, est équivalente à une excitation sinusoïdale dont la fréquence est fonction du temps. Ce type d’excitation permet donc de reproduire une réponse fréquentielle à partir de la réponse temporelle obtenue et est largement utilisé lors d’essais vibratoires.

Un autre effet non linéaire important est la dépendance de la réponse fréquentielle à l’amplitude

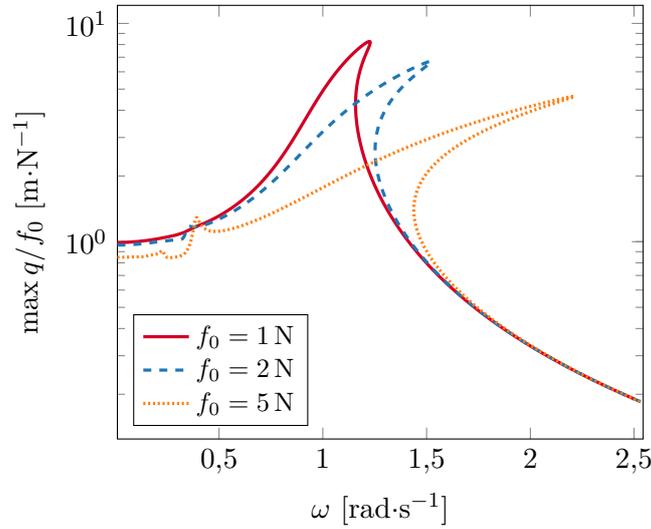


FIGURE 1.9 – Influence de l’amplitude de l’excitation dans la réponse fréquentielle d’un oscillateur de Duffing pour $m_1 = 1 \text{ kg}$, $c_1 = 0,1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$, $k_1 = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $k_{nl} = 0,01 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$, et différentes valeurs de f_0 .

d’excitation. Dans le cas d’un système linéaire, la FRF reste identique pour toute amplitude d’excitation comme l’illustre la Figure 1.6a. En revanche, en présence de non-linéarités, lorsque l’amplitude d’excitation varie, le niveau d’amortissement de la réponse fréquentielle diffère et la fréquence de résonance se trouve décalée. Ces phénomènes sont pleinement mis en valeur dans le cas de l’oscillateur de Duffing en Figure 1.9 sur laquelle les réponses ont été obtenues par la HBM.

Comme il l’a été montré en section 1.2.1 (page 39), pour un système linéaire, la réponse à une excitation harmonique est un signal harmonique de même fréquence. Dans le cas d’une structure non linéaire la réponse à une telle excitation peut en revanche comporter des harmoniques d’ordres supérieurs. Dans ce cas le signal de réponse reste périodique de fréquence identique à l’excitation, mais son spectre fréquentiel est plus riche. La Figure 1.10 donne un exemple de réponse dynamique comportant des harmoniques d’ordres supérieurs (calcul effectué par intégration temporelle). C’est aussi la présence de ces harmoniques d’ordres supérieurs qui entraîne l’apparition de pics à basse fréquence dans la réponse fréquentielle de la Figure 1.9 pour une amplitude d’excitation de 5 N.

Des phénomènes de bifurcation par doublement de période peuvent aussi intervenir au sein des structures non linéaires. Ils se produisent lorsque qu’une petite variation d’un paramètre entraîne une réponse possédant une période deux fois supérieure à celle d’origine. Ce phénomène peut s’enchaîner en cascade donnant des réponses dont la période est un multiple de la période de l’excitation. La Figure 1.11a montre une réponse dont la période est quatre fois supérieure à la période d’excitation, toujours calculée par intégration temporelle. Le doublement de période se manifeste aussi dans l’étude du spectre fréquentiel qui contient des sous-harmoniques, c’est-à-dire des pics d’amplitude associés à des fractions de la fréquence fondamentale. Ainsi pour le signal de la Figure 1.11 dont la période est quadruplée, les harmoniques présentes dans le spectre fréquentiel représenté en Figure 1.11b correspondent aux multiples du quart de la fréquence d’excitation.

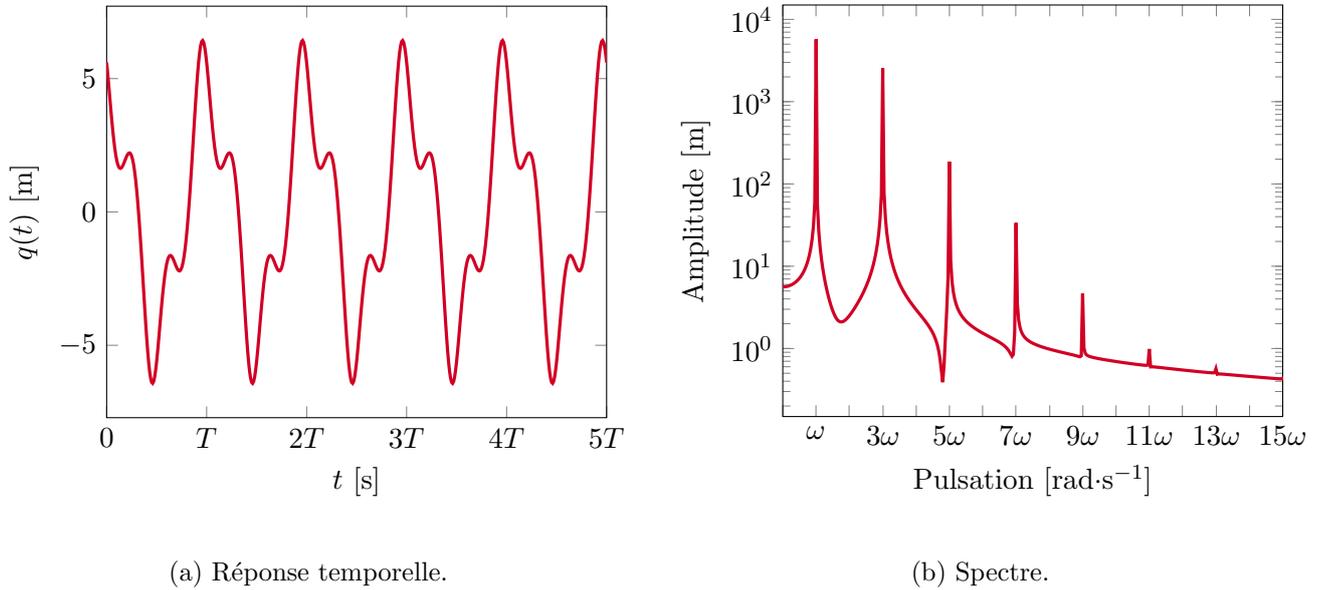


FIGURE 1.10 – Harmoniques d’ordres supérieurs dans la réponse temporelle d’un oscillateur de Duffing pour $m_1 = 1 \text{ kg}$, $c_1 = 0,1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$, $k_1 = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $k_{nl} = 0,01 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$, $f_0 = 5 \text{ N}$, $\omega = 0,39 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

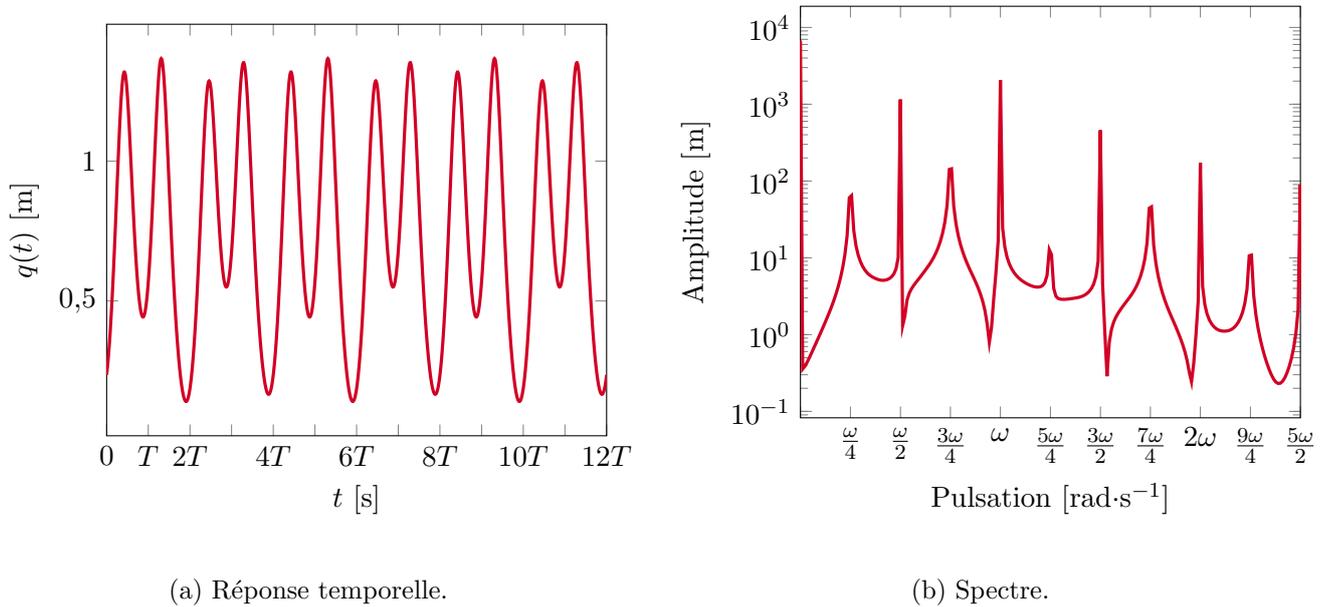
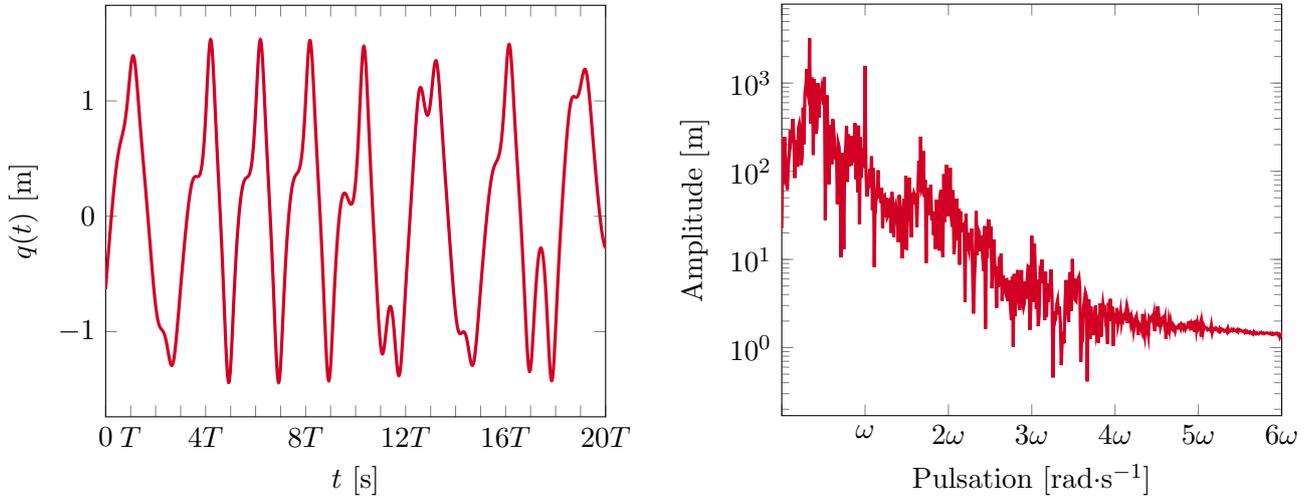


FIGURE 1.11 – Dédoublé de période dans la réponse temporelle d’un oscillateur de Duffing pour $m_1 = 1 \text{ kg}$, $c_1 = 0,3 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$, $k_1 = -1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $k_{nl} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$, $f_0 = 0,29 \text{ N}$, $\omega = 1,2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Finalement, une structure non linéaire peut présenter un comportement chaotique et il y a alors perte de la périodicité de la réponse. La Figure 1.12 expose la réponse d’un oscillateur de Duffing dans une configuration lui donnant un comportement chaotique (calcul par intégration temporelle). Ce régime étant difficile à prévoir, les structures sont généralement conçues de manière à éviter la présence



(a) Réponse temporelle.

(b) Spectre.

FIGURE 1.12 – Réponse chaotique d'un oscillateur de Duffing pour $m_1 = 1 \text{ kg}$, $c_1 = 0,3 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$, $k_1 = -1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $k_{\text{nl}} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$, $f_0 = 0,5 \text{ N}$, $\omega = 1,2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

de comportements chaotiques.

La plage d'étude de ces travaux de thèse se limite à des structures présentant une réponse vibratoire périodique, de période identique à l'excitation (pouvant éventuellement comporter des harmoniques d'ordres supérieurs). Les méthodes de résolution présentées dans la suite tiennent compte de cette hypothèse.

1.2.3 Méthodes de résolution en dynamique non linéaire

Dans cette partie, les principales méthodes de recherche des solutions périodiques de l'équation (1.64) sont évoquées. Le terme de solveur dynamique non linéaire est utilisé pour désigner ces méthodes.

1.2.3.1 Résolution de systèmes algébriques non linéaires

De manière générale, il n'est pas possible d'obtenir une expression analytique de la solution d'une équation non linéaire. Des méthodes numériques peuvent alors être utilisées afin d'approximer la solution. Certaines des méthodes numériques introduites dans cette section pour résoudre le système (1.64) proposent de rechercher la solution sous une forme prédéfinie. La résolution consiste alors à tenter d'annuler le résidu correspondant à la différence entre la solution approchée et la solution exacte. Cela se traduit par un système algébrique non linéaire de la forme :

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0}, \quad (1.66)$$

où $\boldsymbol{\eta}$ correspond au vecteur contenant les termes de la solution approchée, \mathbf{A} est la matrice correspondant à la partie linéaire du résidu, \mathbf{f}_{nl} est le vecteur contenant les termes non linéaires, et \mathbf{f}_{ext} le vecteur

contenant les termes de la force excitatrice extérieure.

Le système (1.66) est généralement résolu en utilisant des algorithmes itératifs tels que la méthode de Newton-Raphson [DEUFLHARD 2004] ou des méthodes dérivées de celle-ci comme les méthodes dites quasi-Newton [FLETCHER et POWELL 1963; BROYDEN 1965] ou encore la méthode de Newton-Krylov [KNOLL et KEYES 2004]. Une alternative, davantage appliquée en mécanique des fluides, consiste à utiliser des méthodes de résolution en pseudo-temps [GOPINATH et JAMESON 2005; SICOT et al. 2008; SALLES et al. 2011; H. HUANG et EKICI 2014]. Les solveurs dynamiques présentés dans cette section sont développés en utilisant l’algorithme de Newton-Raphson pour résoudre les équations du type (1.66), mais d’autres algorithmes itératifs peuvent aussi être employés pour la résolution de ce type d’équation.

1.2.3.2 Méthodes de perturbation

Les méthodes de perturbation forment un ensemble de méthodes analytiques visant à la recherche de solutions approchées sous la forme d’un développement asymptotique (généralement tronqué à quelques termes) faisant intervenir un paramètre de perturbation ϵ [NAYFEH 1973]. La solution approximative établie est supposée se rapprocher de la solution exacte lorsque le paramètre ϵ tend vers 0. Dans le cas de l’équation de la dynamique non linéaire (1.64), les termes non linéaires sont considérés proportionnels à un tel paramètre de perturbation :

$$\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \epsilon \widehat{\mathbf{f}}_{\text{nl}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)). \quad (1.67)$$

Cette forme peut apparaître naturellement dans l’équation ou être introduite de manière artificielle. La solution \mathbf{q} est recherchée sous la forme d’un développement en série de puissances croissantes de ϵ :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0(t) + \epsilon \mathbf{q}_1(t) + \epsilon^2 \mathbf{q}_2(t) + \dots + \epsilon^p \mathbf{q}_p(t) + \mathcal{O}(\epsilon^{p+1}). \quad (1.68)$$

Un ensemble de p équations différentielles est obtenu en injectant l’expression (1.68) dans l’équation (1.64) et en isolant les termes de même puissance de ϵ . La détermination des termes \mathbf{q}_i , $i \in \llbracket 0; p \rrbracket$ peut alors se faire par la résolution analytique en cascade de ces équations. Cependant, les intégrations successives peuvent faire apparaître dans la solution approchée des termes dits séculiers, qui tendent vers l’infini lorsque le temps t augmente, par exemple des expressions de la forme $t \sin(\omega t)$. L’approximation est alors uniquement valide sur une plage de temps limitée. Afin de palier le problème des termes séculiers, plusieurs variations de la méthode ont été proposées telles que la méthode des moyennes [BOGOLIUBOV et MITROPOLSKY 1961], la méthode de Lindstedt-Poincaré [POINCARÉ 1892] ou encore la méthode des échelles multiples [NAYFEH et MOOK 1979].

Les méthodes de perturbation permettent ainsi une résolution analytique de l’équation de la dynamique non linéaire, et bien qu’elles soient historiquement limitées à de faibles non-linéarités, certains travaux ont permis de les étendre à de plus fortes non-linéarités [RAZZAK et al. 2018; PAKDEMIRLI et al. 2009]. Cependant, le travail analytique devient conséquent dès qu’un développement d’un ordre supérieur ou égal à 2 est considéré, ce qui limite l’application de ces méthodes à des systèmes de petite taille.

1.2.3.3 Méthodes d'intégration temporelle

L'équation de la dynamique non linéaire (1.64) peut aussi être résolue numériquement par intégration temporelle. Cela permet de reconstituer pas à pas l'évolution de la solution dans le temps à partir d'un jeu de conditions initiales. Il n'y a aucun a priori sur la forme de la réponse ce qui permet de pouvoir traiter tout type de non-linéarité avec tout type d'excitation et le calcul des solutions quasi-périodiques ou chaotiques est possible. Dans le cas de la recherche d'une réponse périodique en régime permanent, il est néanmoins nécessaire de calculer l'intégralité de la solution transitoire avant d'atteindre le régime permanent.

Afin de mettre en place un schéma d'intégration, le temps est discrétisé en $n_t + 1$ instants t_i et les notations \mathbf{q}_i , $\dot{\mathbf{q}}_i$ et $\ddot{\mathbf{q}}_i$ sont introduites pour désigner respectivement les déplacements, vitesses et accélérations à l'instant t_i ($\mathbf{q}_i = \mathbf{q}(t_i)$, etc.). Pour tout $i \in \llbracket 0; n_t \rrbracket$, l'équation de la dynamique non linéaire s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{K}\mathbf{q}_i + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) = \mathbf{f}_{\text{ext}}(t_i). \quad (1.69)$$

Le pas de temps est noté h_i , de sorte que $h_i = t_i - t_{i-1}$, $i \in \llbracket 1; n_t \rrbracket$. Un schéma d'intégration numérique peut être explicite, lorsque le calcul des termes à l'instant t_{i+1} ne fait intervenir que des termes calculés aux instants précédents, ou bien implicite, si ce n'est pas le cas [DOKAINISH et SUBBARAJ 1989; SUBBARAJ et DOKAINISH 1989]. Les schémas d'intégration se distinguent par trois propriétés.

- La **consistance** assure que l'erreur de troncature introduite par la discrétisation tend vers 0 lorsque le pas de temps h_i tend vers 0.
- La **stabilité** signifie que la solution du problème discrétisé (1.69) reste bornée.
- La **convergence** vérifie que la différence entre la solution exacte et la solution numérique tend vers 0 lorsque h_i tend vers 0. Le théorème de Lax [LAX et RICHTMYER 1956] prévoit que pour un schéma numérique consistant, la stabilité est une condition nécessaire et suffisante pour assurer sa convergence.

Les schémas les plus répandus pour résoudre directement l'équation différentielle du second ordre (1.64) dans les logiciels industriels de calcul par éléments finis se basent sur le schéma d'intégration de Newmark [NEWMARK 1959]. Dans sa version générale, ce schéma utilise un développement de Taylor au premier ordre des déplacements et des vitesses sous la forme suivante :

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + h\dot{\mathbf{q}}_i + h^2\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{\mathbf{q}}_i + h^2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}, \quad (1.70)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{i+1} = \dot{\mathbf{q}}_i + h(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{q}}_i + h\gamma\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}. \quad (1.71)$$

Le pas de temps est ici considéré constant, $\forall i \in \llbracket 0; n_t \rrbracket$, $h_i = h$. Les paramètres de quadrature β et γ permettent d'ajuster les caractéristiques du schéma d'intégration voulu. Le schéma de Newmark est explicite lorsque $\beta = 0$. Si $\gamma \leq \frac{1}{2}$, le schéma est instable tandis que si $\frac{1}{2} \leq \gamma$ et $2\beta \leq \gamma$, le schéma est conditionnellement stable et si $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 2\beta$, il est inconditionnellement stable. Plusieurs valeurs du couple $(\beta; \gamma)$ sont classiquement utilisées. Ainsi, $(\beta = 0; \gamma = \frac{1}{2})$ donne le schéma des différences finies centrées, $(\beta = \frac{1}{4}; \gamma = \frac{1}{2})$ correspond au schéma de l'accélération moyenne, souvent utilisé en dynamique des structures parce qu'il est inconditionnellement stable, $(\beta = \frac{1}{12}; \gamma = \frac{1}{2})$ donne le schéma de Fox-Goodwin ou encore $(\beta = \frac{1}{6}; \gamma = \frac{1}{2})$ correspond à celui de l'accélération linéaire. En injectant les

expressions (1.70) et (1.71) dans l'équation (1.69) à l'instant t_{i+1} , il vient :

$$(\mathbf{M} + h\gamma\mathbf{C} + h^2\beta\mathbf{K})\ddot{\mathbf{q}}_{i+1} = \mathbf{f}_{\text{ext}}(t_{i+1}) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{K}\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{f}_{\text{nl}}(\hat{\mathbf{q}}_i + h^2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}, \hat{\mathbf{q}}_i + h\gamma\dot{\mathbf{q}}_{i+1}), \quad (1.72)$$

où les notations $\hat{\mathbf{q}}_i = \mathbf{q}_i + h\dot{\mathbf{q}}_i + h^2(\frac{1}{2} - \beta)\ddot{\mathbf{q}}_i$ et $\hat{\dot{\mathbf{q}}}_i = \dot{\mathbf{q}}_i + h(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{q}}_i$ sont employées pour une meilleure lisibilité. Dans le cas linéaire, l'accélération $\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}$ s'obtient par simple résolution du système linéaire, car les termes $\hat{\mathbf{q}}_i$ et $\hat{\dot{\mathbf{q}}}_i$ ne dépendent que de quantités déjà évaluées à l'instant précédent. En revanche, le terme non linéaire fait intervenir des quantités à l'instant t_{n+1} , une procédure itérative de Newton-Raphson est alors utilisée dans le but d'annuler le résidu :

$$\mathbf{r}(\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}) = (\mathbf{M} + h\gamma\mathbf{C} + h^2\beta\mathbf{K})\ddot{\mathbf{q}}_{i+1} + \mathbf{C}\hat{\mathbf{q}}_i + \mathbf{K}\hat{\mathbf{q}}_i + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\hat{\mathbf{q}}_i + h^2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}, \hat{\dot{\mathbf{q}}}_i + h\gamma\dot{\mathbf{q}}_{i+1}) - \mathbf{f}_{\text{ext}}(t_{i+1}). \quad (1.73)$$

À partir d'une valeur initiale $\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(0)}$, la valeur de $\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}$ est approchée par itérations successives de sorte qu'à l'itération (m) :

$$\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m+1)} = \ddot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)} + \Delta\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)}, \quad (1.74)$$

avec :

$$\mathbf{r}(\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)}) + \mathbf{J}_r(\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)})\Delta\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)} = \mathbf{0}. \quad (1.75)$$

La matrice \mathbf{J}_r correspond à la jacobienne de \mathbf{r} :

$$\mathbf{J}_r(\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)}) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{i+1}}(\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)}) = \mathbf{M} + h\gamma\mathbf{C} + h^2\beta\mathbf{K} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}(\hat{\mathbf{q}}_i + h^2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}, \hat{\dot{\mathbf{q}}}_i + h\gamma\dot{\mathbf{q}}_{i+1})}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{i+1}}(\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)}). \quad (1.76)$$

Par théorème de dérivation des fonctions composées, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}(\hat{\mathbf{q}}_i + h^2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}, \hat{\dot{\mathbf{q}}}_i + h\gamma\dot{\mathbf{q}}_{i+1})}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_{i+1}}(\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)}) &= \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}(\hat{\mathbf{q}}_i + h^2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)}, \hat{\dot{\mathbf{q}}}_i + h\gamma\dot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)})}{\partial \mathbf{q}} h^2\beta \\ &+ \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}(\hat{\mathbf{q}}_i + h^2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)}, \hat{\dot{\mathbf{q}}}_i + h\gamma\dot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} h\gamma. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Finalement, la jacobienne s'écrit :

$$\mathbf{J}_r(\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)}) = \mathbf{M} + h\gamma \left(\mathbf{C} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q}_{i+1}^{(m)}, \dot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) + h^2\beta \left(\mathbf{K} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q}_{i+1}^{(m)}, \dot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)})}{\partial \mathbf{q}} \right), \quad (1.78)$$

avec :

$$\mathbf{q}_{i+1}^{(m)} = \hat{\mathbf{q}}_i + h^2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)}, \quad (1.79)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)} = \hat{\dot{\mathbf{q}}}_i + h\gamma\dot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)}. \quad (1.80)$$

Les expressions des dérivées partielles de \mathbf{f}_{nl} peuvent généralement être connues analytiquement, il faut sinon les évaluer numériquement. L'incrément $\Delta\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)}$ est alors obtenu par résolution du système linéaire (1.75) et les corrections suivantes sont appliquées à chaque itération :

$$\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m+1)} = \ddot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)} + \Delta\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)}, \quad (1.81)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m+1)} = \dot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)} + h\gamma\Delta\dot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(m)}, \quad (1.82)$$

$$\mathbf{q}_{i+1}^{(m+1)} = \mathbf{q}_{i+1}^{(m)} + h^2\beta\Delta\mathbf{q}_{i+1}^{(m)}. \quad (1.83)$$

Le processus itératif est initié en choisissant $\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(0)} = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{q}}_{i+1}^{(0)} = \widehat{\dot{\mathbf{q}}}_i$ et $\mathbf{q}_{i+1}^{(0)} = \widehat{\mathbf{q}}_i$ et s'arrête lorsque la norme euclidienne du résidu est inférieure à un petit paramètre ε . Plusieurs extensions de la méthode de Newmark ont été développées en ajoutant de l'amortissement numérique sans dégrader la précision donnant lieu aux schémas de type α -généralisé [CHUNG et HULBERT 1993].

La méthode de Newmark telle que décrite dans cette section est d'ordre 2, ce qui signifie que l'erreur de troncature introduite est en $\mathcal{O}(h^3)$. Pour une meilleure précision, des schémas d'ordres supérieurs peuvent être employés, comme ceux issus des familles de méthodes de Runge-Kutta [BUTCHER 2003] ou d'Adams-Bashforth [BASHFORTH 1883] qui permettent la résolution d'équations différentielles d'ordre 1 en temps. Il faut alors reformuler l'équation (1.64) sous la forme de l'équation d'état :

$$\dot{\mathbf{q}}^*(t) = \mathbf{g}(\mathbf{q}^*, t) = \mathbf{L}\mathbf{q}^*(t) - \mathbf{f}_{\text{nl}}^*(\mathbf{q}^*(t)) + \mathbf{f}_{\text{ext}}^*(t), \quad (1.84)$$

avec :

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{\text{nl}}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_{\text{nl}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{\text{ext}}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_{\text{ext}} \end{bmatrix}. \quad (1.85)$$

La taille du système est ainsi doublée entraînant un coût de calcul plus important, ce qui fait que la méthode de Newmark est généralement privilégiée pour les systèmes de grande taille.

Les méthodes d'intégration temporelle sont assez simples à mettre en place et permettent le calcul de tout type de solutions en prenant en compte tout type de non-linéarités. Le calcul de la solution pour un incrément de temps peut se faire de manière relativement rapide selon le système, mais le pas de temps h doit être assez petit pour bien décrire la solution en présence de fortes non-linéarités comme le contact. De plus, lors de la recherche de solutions périodiques, il est nécessaire de calculer la solution jusqu'à l'apparition d'un régime permanent. Or le moment où les effets transitoires sont suffisamment faibles pour être négligés devant les effets du régime permanent n'est pas connu a priori. Dans le cas de systèmes faiblement amortis, cette transition peut se produire après un temps t assez long dans la réponse temporelle, ce qui entraîne une durée de résolution importante. Un exemple est donné en Figure 1.13, pour lequel une phase transitoire d'environ 30 périodes perdure avant de voir l'oscillateur de Duffing s'établir en un régime permanent. Il faut donc effectuer le calcul sur une longue plage de temps afin d'assurer l'obtention d'une solution périodique, ce qui donne une résolution coûteuse, surtout lorsqu'un très petit pas de temps doit être employé. Afin d'obtenir une réponse fréquentielle, le processus est répété en balayant séquentiellement la plage de fréquences étudiée. Une autre solution consiste à prendre une excitation sous la forme d'un sinus balayé qui à chaque instant équivaut à une excitation sinusoïdale d'une fréquence dépendante du temps. Dans ce cas, la vitesse de balayage des fréquences doit être assez faible et le pas de temps très petit sans qu'il existe de règle générale pour déterminer ces valeurs. Finalement, quelle que soit la technique utilisée, l'obtention d'une réponse fréquentielle par des méthodes d'intégration temporelle est coûteuse en ressources informatiques. Par ailleurs, en présence de non-linéarité, plusieurs solutions peuvent exister pour une même fréquence d'excitation, comme il l'est montré en section 1.2.2 (page 46). La solution procurée par les méthodes d'intégration à ces fréquences va ainsi dépendre des conditions initiales utilisées et seule une solution stable peut être obtenue ce qui explique les phénomènes de sauts observés en Figure 1.8.

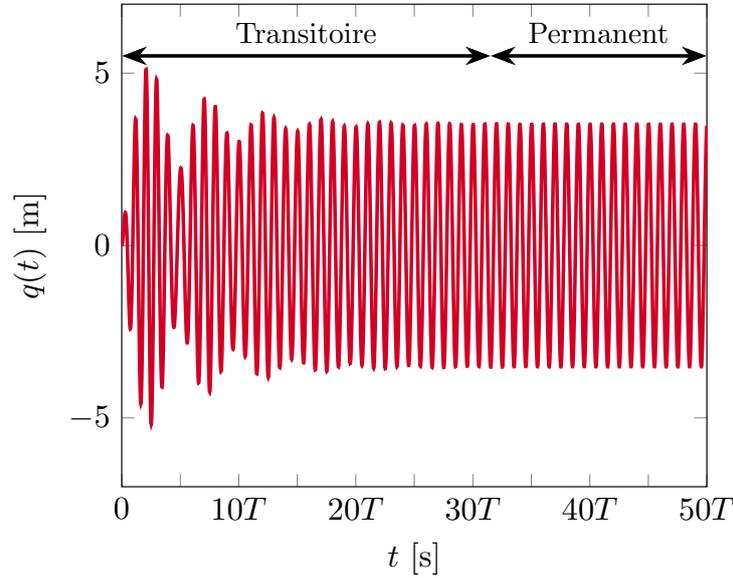


FIGURE 1.13 – Réponse transitoire d'un oscillateur de Duffing pour $m_1 = 1 \text{ kg}$, $c_1 = 0,05 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$, $k_1 = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $k_{nl} = 0,01 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$, $f_0 = 1 \text{ N}$, $\omega = 0,9 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Les méthodes d'intégration temporelle constituent le principal outil pour les calculs dynamiques non linéaires dans la majorité des logiciels de calculs industriels par éléments finis. Cependant, lorsqu'il s'agit d'utiliser ce type de méthode au sein d'une boucle d'optimisation pour laquelle la réponse fréquentielle doit être calculée plusieurs dizaines de fois, le coût de calcul devient prohibitif pour des structures de grande taille. Un solveur dynamique non linéaire plus efficace et capable de prendre en compte des bifurcations est recherché pour cette thèse. Le schéma de Newmark ayant l'avantage de ne pas nécessiter d'hypothèses sur la forme de la solution, il est néanmoins utilisé afin d'obtenir une solution de référence à laquelle sont comparés les résultats obtenus par d'autres solveurs.

1.2.3.4 Méthode de tir

La méthode de tir propose un schéma numérique pour la résolution de problèmes différentiels aux conditions aux limites. Elle peut être employée pour la recherche de solutions périodiques en dynamique en transformant l'équation d'état (1.84) en un problème aux limites grâce à la condition de périodicité [PEETERS et al. 2009]. En faisant l'hypothèse que la solution \mathbf{q}^* de conditions initiales $\mathbf{q}^*(0) = \mathbf{q}_0^*$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, il faut annuler :

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}_0^*, T) = \mathbf{q}_{q_0^*}^*(T) - \mathbf{q}_0^*, \quad (1.86)$$

où $\mathbf{q}_{q_0^*}^*$ correspond à la solution de l'équation d'état (1.84) pour les conditions initiales \mathbf{q}_0^* . La fonction non-analytique \mathbf{h} est appelée fonction de tir. Elle est évaluée en calculant la solution \mathbf{q}^* sur une période par une méthode d'intégration temporelle comme celles évoquées en section 1.2.3.3 (page 55). L'intégration ne s'effectuant que sur une période, le coût de calcul est réduit. Le problème d'équation (1.86) est résolu en itérant sur les conditions initiales par la méthode de Newton-Raphson.

En partant d'une valeur initiale $\mathbf{q}_0^{\star(0)}$, l'itération (m) donne :

$$\mathbf{q}_0^{\star(m+1)} = \mathbf{q}_0^{\star(m)} + \Delta\mathbf{q}_0^{\star(m)}, \quad (1.87)$$

avec :

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}_0^{\star(m)}, T) + \mathbf{J}_h(\mathbf{q}_0^{\star(m)}, T)\Delta\mathbf{q}_0^{\star(m)} = \mathbf{0}. \quad (1.88)$$

La matrice jacobienne $\mathbf{J}_h = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}_0^{\star}}$ n'a pas d'expression analytique et doit donc être évaluée numériquement, par différences finies par exemple, ce qui demande alors au moins $2n + 1$ évaluations de la fonction de tir \mathbf{h} et donc $2n + 1$ intégrations temporelles.

Dans le cas d'un système forcé, la période de la solution recherchée est connue, mais la méthode de tir peut aussi être employée en considérant la période comme une inconnue supplémentaire, pour une structure en oscillations libre par exemple. Pour cela, les corrections se font aussi sur la période à chaque itération en rajoutant une condition afin de fermer le système d'équations.

La méthode de tir permet ainsi directement l'obtention de solutions périodiques dans le domaine temporel sans calcul du régime transitoire. La durée de résolution est ainsi réduite comparée à l'intégration temporelle directe. Elle autorise de plus la mise en place de méthodes de continuation pour le calcul des différentes branches de la réponse fréquentielle (ces méthodes sont expliquées en section 1.2.4 (page 61)). La méthode tir est ainsi appliquée pour l'analyse en dynamique non linéaire dans certaines études (par exemple [SUNDARARAJAN et NOAH 1997; RIBEIRO 2004; KERSCHEN, PEETERS, GOLINVAL et STÉPHAN 2013; STOYKOV et MARGENOV 2014]). Cependant, l'évaluation de la jacobienne devient très coûteuse pour des structures de grande taille ce qui est problématique dans le cadre d'une optimisation paramétrique.

1.2.3.5 Méthodes de collocation

Afin de résoudre l'équation (1.64), les méthodes de type Galerkin cherchent une approximation de la solution sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions de base $\mathcal{B}_G = (v_i)_{i \in \llbracket 0; N \rrbracket}$:

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=0}^N \boldsymbol{\alpha}_i v_i(t). \quad (1.89)$$

En injectant l'expression (1.89) dans l'équation de la dynamique (1.64), il vient le résidu :

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{B}_G) = \sum_{i=0}^N (\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}_i \ddot{v}_i(t) + \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}_i \dot{v}_i(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{\alpha}_i v_i(t)) + \mathbf{f}_{nl}(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{B}_G) - \mathbf{f}_{ext}(t). \quad (1.90)$$

Le principe de la méthode de Galerkin est de rendre ce résidu orthogonal à une base de fonctions tests $(\zeta_i)_{i \in \llbracket 0; N \rrbracket}$. Dans le cas de la recherche de solutions périodiques, la base de Fourier, contenant les fonctions trigonométriques, est généralement utilisée comme base de fonctions d'approximation :

$$v_0(t) = 1, \quad \forall i \in \llbracket 1; n_h \rrbracket, \quad v_{2i-1}(t) = \cos(i\omega t), \quad v_{2i}(t) = \sin(i\omega t). \quad (1.91)$$

La méthode de collocation trigonométrique [SAMOILENKO et RONTO 1979] permet la recherche de solutions dans le domaine fréquentiel en déterminant les coefficients de Fourier associés à cette base en utilisant des fonctions de Dirac comme fonctions tests :

$$\forall i \in \llbracket 0; 2n_h + 1 \rrbracket, \zeta_i(t) = \delta(t - t_i). \quad (1.92)$$

Cela permet d'évaluer le résidu \mathbf{r} en $2n_h + 1$ instants différents t_i appelés points de collocation et aboutit à la résolution d'un système algébrique de taille $2n_h + 1$ dont les inconnues sont les coefficients de Fourier. Ce système peut être résolu par les méthodes évoquées en section 1.2.3.1 (page 53). La méthode de collocation trigonométrique a été utilisée dans certaines études pour la recherche de réponses dynamiques de structures non linéaires [JEAN et NELSON 1990; J. Y. ZHAO et al. 1994; C.-S. CHEN et al. 1997].

La méthode de collocation orthogonale [de BOOR et SWARTZ 1973; DOEDEL 2007] cherche à approximer la solution sous la forme d'une fonction périodique polynomiale par morceaux. La période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, est divisée en n_t intervalles $[t_i; t_{i+1}]$, $i \in \llbracket 0; n_t - 1 \rrbracket$. Sur chaque intervalle, la solution est recherchée sur la base des polynômes de Lagrange de degré p , notés $\ell_{k,i}$, $k \in \llbracket 0; p \rrbracket$:

$$\forall i \in \llbracket 0; n_t - 1 \rrbracket, \forall t \in [t_i; t_{i+1}], \mathbf{q}(t) = \sum_{k=0}^p \mathbf{q}_{k,i} \ell_{k,i}(t). \quad (1.93)$$

Les inconnues à déterminer sont alors les $(p + 1)n_t$ termes $\mathbf{q}_{k,i}$ correspondant à la valeur de la solution aux points d'interpolation. Les fonctions de Dirac sont encore une fois utilisées comme fonctions tests afin que sur chaque intervalle, les points de collocation correspondent aux p points de Gauss-Legendre. Ces derniers sont définis comme les racines du polynôme de Legendre d'ordre p ramené sur l'intervalle $[t_i; t_{i+1}]$ ajoutés au point en t_i . Cela donne un système algébrique de pn_t équations pour $(p + 1)n_t$ inconnues qui est complété par les conditions de continuité ($n_t - 1$ équations) :

$$\forall i \in \llbracket 1; n_t - 1 \rrbracket, \sum_{k=0}^p \mathbf{q}_{k,i} \ell_{k,i}(t_i) = \mathbf{q}(t_i) = \sum_{k=0}^p \mathbf{q}_{k,i-1} \ell_{k,i-1}(t_i), \quad (1.94)$$

et la condition de périodicité (1 équation) :

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}(t_{n_t}). \quad (1.95)$$

Comme pour les autres méthodes décrites précédemment, le système est ensuite résolu par un des algorithmes cités en section 1.2.3.1 (page 53). Plusieurs programmes informatiques intégrant la méthode de collocation orthogonale sont disponibles [ASCHER et al. 1979; DOEDEL et OLDEMAN 2007; DHOOGHE et al. 2008; DANKOWICZ et SCHILDER 2020, 2013], mais cette méthode reste généralement utilisée sur des problèmes de petite taille et est peu appliquée en mécanique des structures [KARKAR et al. 2014].

1.2.3.6 Méthode de l'équilibrage harmonique

La méthode de l'équilibrage harmonique se classe aussi parmi les méthodes de Galerkin (1.89) et permet la recherche de solutions périodiques du problème d'équation (1.64) dans le domaine fréquentiel.

Cette technique a d'abord été introduite en tant que méthode de résolution analytique [KRYLOFF et BOGOLIUBOFF 1950; NAKHLA et VLACH 1976; NAYFEH et MOOK 1979] puis a été améliorée, la rendant bien adaptée à une résolution numérique [LAU et CHEUNG 1981; PIERRE et al. 1985; CAMERON et GRIFFIN 1989; CHEUNG et al. 1990]. Comme pour la méthode de collocation trigonométrique, la base de Fourier est utilisée comme base de fonctions d'approximation et c'est cette même base qui est exploitée pour les fonctions tests.

La HBM permet de traiter une large variété de non-linéarités tout en gardant un coût de calcul raisonnable par rapport aux autres méthodes de résolution en dynamique non linéaire. De récents développements ont associé la HBM avec des procédures de continuation et des techniques de réduction afin d'obtenir la réponse fréquentielle de structures non linéaires à l'échelle industrielle [SARROUY et SINOÛ 2011]. Il est possible de citer par exemple l'étude de phénomènes de contacts et frottements sur des turbomachines [POUDOU et PIERRE 2003; MABILIA et al. 2019; VADCARD et al. 2022], des générateurs de vapeur [MOUSSI 2013; ALCORTA GALVAN 2021] et des engins spatiaux [DETROUX, RENSON et al. 2015], mais aussi la prise en compte de matériaux non linéaires, pour des isolateurs de vibrations en élastomères par exemple [JAUMOILLÉ et al. 2011]. La HBM est désormais proposée au sein de plusieurs logiciels dont une liste non exhaustive est disponible dans le livre de Krack et Gross [KRACK et GROSS 2019]. En raison des avantages qu'elle propose et de sa popularité commençant à sortir du monde académique, la HBM est utilisée au sein du solveur mécanique mis en place dans cette thèse. Le principe détaillé de la méthode est ainsi fourni en section 2.1.1 (page 76).

1.2.4 Continuation

Dans la section précédente, certaines méthodes permettant la recherche d'une solution périodique dans une configuration donnée ont été présentées. Cependant, comme évoqué en section 1.2.2.3 (page 49), la détermination de branches de solutions suivant l'évolution d'un paramètre de contrôle λ sur un intervalle $[\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$ est généralement souhaitée afin de bien décrire la dynamique des structures étudiées. Ce paramètre de contrôle est typiquement la pulsation ω lors de la recherche de réponses fréquentielles, mais peut aussi être différent lors de certaines analyses, par exemple l'énergie cinétique du système, la vitesse de rotation d'une machine tournante, une variable intervenant dans les efforts non linéaires, une variable du problème d'optimisation paramétrique, etc. Les techniques de continuation [ALLGOWER et GEORG 1990; BEYN et al. 2002], ou de suivi de branche (de l'anglais *path following*), offrent des outils pour le calcul de branches de solutions de systèmes algébriques non linéaires de la forme :

$$\mathbf{r}(\mathbf{z}, \lambda) = \mathbf{0}. \quad (1.96)$$

La fonction $\mathbf{r} : \mathbb{R}^{n_{\text{eq}}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ décrit le résidu d'un système algébrique de n_{eq} équations d'inconnues $\mathbf{z} = [z_1 \ \cdots \ z_{n_{\text{eq}}}]^T$ auxquelles s'ajoutent le paramètre de contrôle λ . À titre d'exemple, pour la méthode de tir, \mathbf{z} correspond au vecteur \mathbf{q}_0^* des conditions initiales de la solution périodique, tandis que pour les méthodes de Galerkin, \mathbf{z} s'identifie au vecteur $[\boldsymbol{\alpha}_0^T \ \cdots \ \boldsymbol{\alpha}_N^T]^T$ contenant les coefficients de la combinaison linéaire des fonctions de base. Il s'agit alors de rechercher dans $\mathbb{R}^{n_{\text{eq}}+1}$ la solution $\boldsymbol{\eta} = [\mathbf{z}^T \ \lambda]^T$ du système (1.96). Comme ce système ne comporte que n_{eq} équations, il convient

de l'augmenter d'une équation de paramétrisation. Les techniques de continuation fournissent des itérés initiaux pour les méthodes de résolution itératives du système (1.96) en utilisant le fait que, pour un paramètre donné, la solution reste généralement proche d'une solution déjà obtenue dans un voisinage de ce paramètre. Ainsi, en plus de permettre le suivi des branches de solutions, les techniques de continuation améliorent la convergence des algorithmes itératifs employés pour la résolution des équations sur les résidus. Il existe deux grandes familles de techniques de continuation qui sont présentées par la suite : les méthodes par prédiction-correction et la méthode asymptotique numérique (MAN).

1.2.4.1 Continuation par prédiction-correction

Les méthodes de prédiction-correction proposent une résolution en deux étapes. D'abord une prédiction est effectuée à partir des informations connues sur les solutions calculées précédemment. Cette prédiction sert d'itération initiale à l'algorithme itératif (typiquement la méthode de Newton-Raphson déjà évoquée). Finalement, les itérations successives constituent les corrections qui se font selon une direction contrôlée par la paramétrisation. Plusieurs variantes peuvent ainsi exister en combinant différentes stratégies de prédiction, de paramétrisation et de résolution itérative.

En notant $\boldsymbol{\eta}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k^\top & \lambda_k \end{bmatrix}^\top$, la $k^{\text{ème}}$ solution déjà calculée sur une branche, la solution suivante sur la branche, notée $\boldsymbol{\eta}_{k+1}$ est obtenue de manière itérative. Les prédicteurs fournissent la valeur de l'itération initiale $\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(0)}$ où les termes $\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(m)}$ désignent les itérations successives permettant de converger vers $\boldsymbol{\eta}_{k+1}$. Les prédictions se font selon un pas de prédiction Δs_{k+1} , qui correspond à la distance euclidienne entre $\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(0)}$ et $\boldsymbol{\eta}_k$ en dimension $n_{\text{eq}} + 1$. Le choix du pas Δs_{k+1} est discuté plus loin. Différents types de prédicteurs sont couramment utilisés.

- Une **prédiction sécante** (Figure 1.14a) se positionne sur la droite formée par les deux précédentes solutions :

$$\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(0)} = \boldsymbol{\eta}_k + \Delta s_{k+1} \frac{\boldsymbol{\eta}_k - \boldsymbol{\eta}_{k-1}}{\|\boldsymbol{\eta}_k - \boldsymbol{\eta}_{k-1}\|}. \quad (1.97)$$

Cette méthode nécessite d'avoir préalablement obtenu au moins deux solutions.

- Une **prédiction tangente** (Figure 1.14b) est formée sur la droite tangente à la dernière solution calculée :

$$\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(0)} = \boldsymbol{\eta}_k + \Delta s_{k+1} \mathbf{t}_k. \quad (1.98)$$

Le vecteur tangent $\mathbf{t}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_z \\ \mathbf{t}_\lambda \end{bmatrix}$ est l'unique solution du système linéaire :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_z(\boldsymbol{\eta}_k) & \mathbf{J}_\lambda(\boldsymbol{\eta}_k) \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_z \\ \mathbf{t}_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.99)$$

où $\mathbf{J}_z = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}}$ et $\mathbf{J}_\lambda = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}$ désignent respectivement les matrices jacobienes du résidu \mathbf{r} par rapport à \mathbf{z} et λ . Plutôt que de résoudre le système (1.99), d'autres stratégies peuvent être employées, comme l'algorithme de Keller [KELLER 1983; CARDONA et al. 1998].

- Les **prédictions polynomiales** d'ordre p (Figure 1.14c) sont construites sur l'unique polynôme d'interpolation de Lagrange interpolant l'abscisse curviligne des $p + 1$ dernières solutions

obtenues :

$$\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(0)} = \sum_{i=k-d}^i \ell_i(\Delta s_{k+1}) \boldsymbol{\eta}_i, \quad (1.100)$$

où $\forall i \in \llbracket 0; p \rrbracket$, ℓ_i désigne les polynômes de Lagrange interpolant l'abscisse curviligne $s(\boldsymbol{\eta}_{k-i})$ des $p+1$ précédentes solutions. L'abscisse curviligne s est centrée en $\boldsymbol{\eta}_k$ de sorte que :

$$\begin{cases} s(\boldsymbol{\eta}_k) = 0, \\ s(\boldsymbol{\eta}_{k-i}) = s(\boldsymbol{\eta}_{k-i+1}) - \|\boldsymbol{\eta}_{k-i+1} - \boldsymbol{\eta}_{k-i}\|, \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \\ s(\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(0)}) = \Delta s_{k+1}. \end{cases} \quad (1.101)$$

La prédiction sécante correspond en réalité à une prédiction polynomiale d'ordre 1.

- Il est aussi possible d'obtenir le prochain itéré initial en incrémentant une des composantes de $\boldsymbol{\eta}$ tout en laissant les autres fixes :

$$\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(0)} = \boldsymbol{\eta}_k + \Delta s_{k+1} \mathbf{e}_i, \quad (1.102)$$

où \mathbf{e}_i correspond au vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n_{\text{eq}}+1}$ dont la $i^{\text{ème}}$ composante vaut 1 tandis que toutes les autres sont nulles. Ce type d'initialisation est plutôt utilisé lorsqu'il n'y pas vraiment de stratégie de continuation mise en place, car cette méthode ne demande pas d'effort calculatoire supplémentaire. Cependant, elle n'utilise pas d'informations sur l'évolution de la solution (il est donc discutable de vraiment parler de prédiction), ce qui donne généralement un itéré initial de moins bonne qualité.

Étant donné que ces prédicteurs se basent sur un certain nombre de solutions déjà calculées, il faut pouvoir déterminer les premières solutions. Une stratégie classique consiste à trouver le premier point $\boldsymbol{\eta}_0$ en choisissant la solution du système linéaire dérivé de (1.96) (pour $\mathbf{f}_{\text{nl}} = \mathbf{0}$) comme itéré initial et d'effectuer les corrections pour $\lambda_0 = \lambda_{\text{min}}$ fixé. La convergence pouvant être difficile, une alternative consiste à calculer la solution par une autre méthode, par exemple une intégration numérique. Si d'autres solutions sont nécessaires pour initialiser la méthode de prédiction, le procédé peut être répété en incrémentant λ , mais ces solutions peuvent aussi être obtenues par continuation avec prédiction tangente qui ne nécessite qu'une solution préalable.

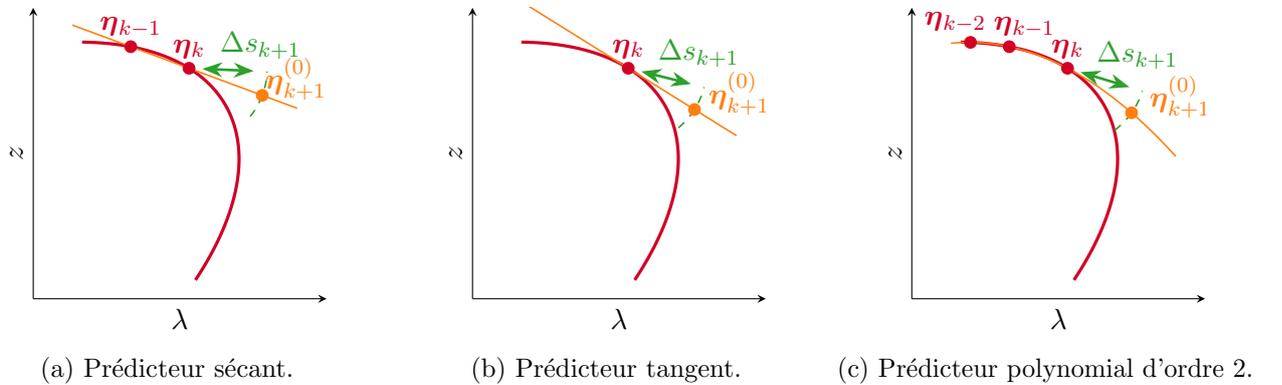


FIGURE 1.14 – Illustrations de différentes méthodes de prédiction pour $n_{\text{eq}} = 1$.

Une fois la prédiction réalisée, les corrections s'effectuent grâce un algorithme itératif tel que ceux évoqués en section 1.2.3.1 (page 53). Dans la suite les itérations sont décrites pour la méthode de Newton-Raphson classique.

La paramétrisation permet de fixer une direction de descente pour les corrections de l'algorithme de résolution utilisé. Le système (1.96) est alors agrémenté d'une équation de paramétrisation $p_{k+1}(\mathbf{z}, \lambda)$ ce qui donne le système étendu :

$$\begin{cases} \mathbf{r}(\mathbf{z}, \lambda) = \mathbf{0}, \\ p_{k+1}(\mathbf{z}, \lambda) = 0. \end{cases} \quad (1.103)$$

Plusieurs choix de paramétrisation peuvent être effectués.

- La **paramétrisation séquentielle** (Figure 1.15a), aussi appelée paramétrisation naturelle, consiste à garder le paramètre de contrôle λ constant au cours des itérations. C'est de cette manière que sont décrites les méthodes en section 1.2.3 (page 53). L'équation de paramétrisation s'écrit alors :

$$p_{k+1}(\mathbf{z}, \lambda) = \lambda - \lambda_{k+1}^{(0)} = 0. \quad (1.104)$$

Les itérations de la méthode de Newton-Raphson donnent ainsi :

$$\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(m+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{k+1}^{(m)} + \Delta \mathbf{z}_{k+1}^{(m)} \\ \lambda_{k+1}^{(0)} \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \mathbf{J}_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}_{k+1}^{(m)}, \lambda_{k+1}^{(0)}) \Delta \mathbf{z}_{k+1}^{(m)} = -\mathbf{r}(\mathbf{z}_{k+1}^{(m)}, \lambda_{k+1}^{(0)}). \quad (1.105)$$

Au niveau des points de bifurcations, la matrice jacobienne $\mathbf{J}_{\mathbf{z}}$ devient singulière. La paramétrisation séquentielle échoue en ces points ce qui ne permet pas le changement de branche en cas de repliement par exemple.

- La **paramétrisation sélective** (ou locale) fixe à tour de rôle une composante de $\boldsymbol{\eta}$:

$$p_{k+1}(\mathbf{z}, \lambda) = \boldsymbol{\eta}_{k+1,i} - \boldsymbol{\eta}_{k+1,i}^{(0)} = 0, \quad (1.106)$$

où $\boldsymbol{\eta}_{k,i}$ désigne la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\boldsymbol{\eta}$. L'indice i est généralement choisi comme l'indice du terme ayant subi la plus grande variation relative $\Delta \boldsymbol{\eta}_{k,i}$ entre les deux solutions précédemment calculées :

$$i = \arg \max_{i \in \llbracket 1; n_{\text{eq}}+1 \rrbracket} (\Delta \boldsymbol{\eta}_{k,i}), \quad \text{avec } \Delta \boldsymbol{\eta}_{k,i} = \frac{|\boldsymbol{\eta}_{k,i} - \boldsymbol{\eta}_{k-1,i}|}{\boldsymbol{\eta}_{k,i}}. \quad (1.107)$$

- La **paramétrisation par longueur d'arc** (Figure 1.15b) impose que la longueur d'arc entre $\boldsymbol{\eta}_k$ et chacune des corrections reste identique et égale à Δs_{k+1} . La solution recherchée doit donc se situer dans une hypersphère de $\mathbb{R}^{n_{\text{eq}}+1}$ de rayon Δs_{k+1} centrée en $\boldsymbol{\eta}_k$:

$$p_{k+1}(\mathbf{z}, \lambda) = \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_k\|^2 + (\lambda - \lambda_k)^2 - \Delta s_{k+1}^2 = 0. \quad (1.108)$$

Les corrections simultanées s'écrivent :

$$\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(m+1)} = \boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(m)} + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{z}_{k+1}^{(m)} \\ \Delta \lambda_{k+1}^{(m)} \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{z}}(\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(m)}) & \mathbf{J}_{\lambda}(\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(m)}) \\ 2(\mathbf{z}_{k+1}^{(m)} - \mathbf{z}_k)^{\top} & 2(\lambda_{k+1}^{(m)} - \lambda_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{z}_{k+1}^{(m)} \\ \Delta \lambda_{k+1}^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{r}(\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(m)}) \\ -p_{k+1}(\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(m)}) \end{bmatrix}, \quad (1.109)$$

car :

$$\frac{\partial p_{k+1}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, \lambda) = 2(\mathbf{z} - \mathbf{z}_k) \quad \text{et} \quad \frac{\partial p_{k+1}}{\partial \lambda}(\mathbf{z}, \lambda) = 2(\lambda - \lambda_k). \quad (1.110)$$

- La **paramétrisation orthogonale** (Figure 1.15c), ou par pseudo-longueur d'arc, consiste à imposer que la direction de descente reste orthogonale à la direction de la prédiction $(\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(0)} - \boldsymbol{\eta}_k)$. L'équation de paramétrisation fixe alors que la solution recherchée doit se trouver sur un hyperplan de $\mathbb{R}^{n_{\text{eq}}+1}$ normal à la direction de prédiction :

$$\rho_{k+1}(\mathbf{z}, \lambda) = (\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(0)} - \boldsymbol{\eta}_k)^\top (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(0)}) = 0. \quad (1.111)$$

Les itérations de la méthode de Newton-Raphson deviennent alors :

$$\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(m+1)} = \boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(m)} + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{z}_{k+1}^{(m)} \\ \Delta \lambda_{k+1}^{(m)} \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{J}_z(\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(m)}) & \mathbf{J}_\lambda(\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(m)}) \\ (\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(0)} - \boldsymbol{\eta}_k)^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{z}_{k+1}^{(m)} \\ \Delta \lambda_{k+1}^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{r}(\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(m)}) \\ -\rho_{k+1}(\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(m)}) \end{bmatrix}, \quad (1.112)$$

car l'expression de la dérivée de ρ_{k+1} est connue :

$$\frac{\partial \rho_{k+1}}{\partial \boldsymbol{\eta}} = (\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(0)} - \boldsymbol{\eta}_k)^\top. \quad (1.113)$$

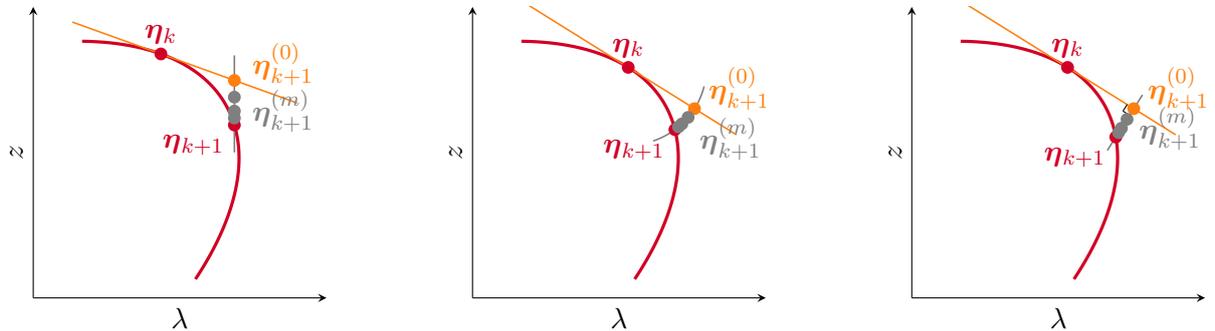
- La **paramétrisation de Moore-Penrose**, ou de Gauss-Newton, ne repose pas sur une équation de paramétrisation, mais suit la logique de la méthode de Newton-Raphson en utilisant le pseudo-inverse de Moore-Penrose [RAKHA 2004] de la matrice jacobienne rectangulaire \mathbf{J}_r , définie par :

$$\mathbf{J}_r^+ = \mathbf{J}_r^\top (\mathbf{J}_r \mathbf{J}_r^\top)^{-1}. \quad (1.114)$$

Les itérations successives s'écrivent alors :

$$\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(m+1)} = \boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(m)} + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{z}_{k+1}^{(m)} \\ \Delta \lambda_{k+1}^{(m)} \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{z}_{k+1}^{(m)} \\ \Delta \lambda_{k+1}^{(m)} \end{bmatrix} = -\mathbf{J}_r^+(\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(m)}) \mathbf{r}(\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{(m)}). \quad (1.115)$$

Le point obtenu après convergence correspond au point de la branche de solution qui est le plus proche du point prédit au sens des moindres carrés.



(a) Paramétrisation séquentielle. (b) Paramétrisation par longueur d'arc. (c) Paramétrisation orthogonale.

FIGURE 1.15 – Illustrations de différentes méthodes de paramétrisation pour $n_{\text{eq}} = 1$ avec une prédiction tangente.

Un aspect important de la procédure de continuation réside dans le choix du pas Δs . En effet, un pas trop grand mène vers une prédiction trop éloignée ce qui demande un nombre important de corrections avant convergence et peut même parfois entraver la convergence. De plus certains phénomènes non linéaires peuvent ne pas être observés si le pas est trop grand. À l'inverse, un pas trop petit conduit à une discrétisation excessive ce qui donne un coût de calcul élevé. Ainsi, le contrôle du pas Δs joue un rôle primordial dans l'efficacité de la résolution. Afin d'optimiser le coût de calcul, il est préférable d'adapter le pas à chaque nouvelle solution, d'où la notation Δs_{k+1} employée [ALLGOWER et GEORG 1990]. Cette adaptation se fait selon des règles empiriques selon le problème étudié, sans qu'il semble exister de loi générale [KRACK et GROSS 2019]. Une stratégie courante consiste à multiplier le pas employé pour la solution précédente par un coefficient a_{s_k} dépendant du nombre n_k^{it} d'itérations effectuées jusqu'à convergence pour le calcul de la précédente solution [SARROUY et SINOÛ 2011] :

$$\Delta s_{k+1} = a_{s_k} \Delta s_k. \quad (1.116)$$

Le coefficient a_{s_k} est déterminé en comparant n_k^{it} avec un nombre ciblé d'itérations n^{cib} fixé arbitrairement. Différentes alternatives ont été proposées comme $a_{s_k} = 2^{\frac{n^{\text{cib}} - n_k^{\text{it}}}{n^{\text{cib}}}}$ [PELETAN 2012], $a_{s_k} = \sqrt{\frac{n^{\text{cib}}}{n_k^{\text{it}}}}$ [CARDONA et al. 1998], ou encore $a_{s_k} = \frac{n^{\text{cib}}}{n_k^{\text{it}}}$ [DEMAILLY 2003]. Il est aussi souhaitable de borner Δs dans un intervalle $[\Delta s_{\min}; \Delta s_{\max}]$ afin d'éviter les problèmes décrits au début de ce paragraphe. Si le pas atteint la valeur Δs_{\min} , cela signifie que le correcteur éprouve des difficultés de convergence et il devient préférable de stopper l'exécution de la procédure. Lorsque le nombre d'itérations en cours dépasse un certain seuil, il peut aussi être avantageux de recommencer à l'étape de prédiction avec une valeur de Δs plus faible, par exemple en le réduisant de moitié.

Lorsque l'écart d'ordres de grandeurs entre \mathbf{z} et λ est important, une mise à l'échelle peut être effectuée afin d'améliorer l'efficacité de la continuation. Des coefficients pondérateurs sont alors introduits dans l'équation de paramétrisation. Par exemple, pour une paramétrisation par longueur d'arc, un coefficient $\zeta_{p_{k+1}} \in]0; 1[$ peut être utilisé de sorte que :

$$p_{k+1}(\mathbf{z}, \lambda) = \zeta_{p_{k+1}} \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_k\|^2 + (1 - \zeta_{p_{k+1}})(\lambda - \lambda_k)^2 - \Delta s_{k+1}^2 = 0. \quad (1.117)$$

Une autre pondération possible consiste à introduire un coefficient $\sigma_{p_{k+1}} = \frac{\|\mathbf{z}_k\|}{\lambda_k}$ [BLAIR et al. 1997] :

$$p_{k+1}(\mathbf{z}, \lambda) = \frac{1}{\sigma_{p_{k+1}}^2} \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_k\|^2 + (\lambda - \lambda_k)^2 - \Delta s_{k+1}^2 = 0. \quad (1.118)$$

Cette mise à l'échelle a aussi une influence importante sur la rapidité du calcul des branches de solutions par le solveur.

1.2.4.2 Méthode asymptotique numérique

La méthode asymptotique numérique (MAN) [COCHELIN, DAMIL et al. 2007] s'inspire des méthodes de perturbation afin de proposer une alternative semi-analytique aux méthodes par prédiction-corrrection.

Le principe est de rechercher par morceaux les solutions sur une branche sous la forme de séries entières d'un paramètre de chemin a tronquées à l'ordre p . Au voisinage d'un point $\boldsymbol{\eta}_0$ connu, la solution a pour expression :

$$\boldsymbol{\eta}(a) = \boldsymbol{\eta}_0 + \sum_{i=1}^p a^i \boldsymbol{\eta}_i. \quad (1.119)$$

En injectant cette expression dans l'équation (1.96), il vient la forme :

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\eta}(a)) = \sum_{i=1}^p a^i \mathbf{r}_i = 0, \quad (1.120)$$

ce qui implique que :

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \mathbf{r}_i = 0. \quad (1.121)$$

Pour chaque ordre i , l'équation (1.121) est un système linéaire en $\boldsymbol{\eta}_i$:

$$\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\eta}_0) \boldsymbol{\eta}_i = f_i^{\text{MAN}}, \quad (1.122)$$

où le second membre f_i^{MAN} ne dépend que des inconnues d'ordre inférieur à i . L'expression (1.122) forme un système de n_{eq} équations pour $n_{\text{eq}} + 1$ inconnues, il faut donc le fermer avec une équation provenant du choix du paramètre de chemin a . En choisissant ce paramètre comme la pseudo-longueur d'arc, il vient :

$$a = (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0)^{\text{T}} \boldsymbol{\eta}_1, \quad (1.123)$$

ce qui à chaque ordre donne les équations supplémentaires :

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\eta}_1\|^2 = 1 \\ \boldsymbol{\eta}_1^{\text{T}} \boldsymbol{\eta}_i = 0 \quad \text{si } i \in \llbracket 2; p \rrbracket. \end{cases} \quad (1.124)$$

Le système (1.122) augmenté de l'équation correspondante peut alors être résolu en cascade.

La solution obtenue vérifie le critère $\|\mathbf{r}(\boldsymbol{\eta}(a))\| < \varepsilon$ sur un intervalle fini $[0, a_{\text{max}}]$. En supposant que le résidu soit dominé par le terme d'ordre $p + 1$ de la série (le premier négligé), une approximation de a_{max} s'écrit :

$$a_{\text{max}} = \left(\frac{\varepsilon}{\|f_{p+1}^{\text{MAN}}\|} \right)^{\frac{1}{p+1}}. \quad (1.125)$$

La procédure est ensuite répétée en partant du dernier point valable, c'est-à-dire avec $\boldsymbol{\eta}_0 = \boldsymbol{\eta}(a_{\text{max}})$, jusqu'à ce que l'intégralité de la branche soit déterminée. Si toutefois le résidu est trop grand, le critère de tolérance n'est plus vérifié et il convient alors d'appliquer des corrections à la solution trouvée en $\boldsymbol{\eta}(a_{\text{max}})$ par un algorithme de résolution itérative. La MAN peut ainsi être vue comme une extension des méthodes de prédiction-correction utilisant un prédicteur d'ordre élevé qui fournit généralement une prédiction suffisamment bonne pour rendre inutile l'étape de correction.

La MAN possède plusieurs avantages. D'abord, une seule inversion de matrice est nécessaire à chaque pas de continuation, ce qui implique que le temps de calcul n'est que légèrement supérieur à celui d'un prédicteur tangent. Ensuite, la taille du pas s'adapte automatiquement en fonction de la

tolérance ε recherchée. Finalement, la MAN fournit une description analytique (continue par morceaux) des branches de solutions, à l'inverse des méthodes de prédiction-corrrection qui ne fournissent qu'une discrétisation des branches. En revanche, une reformulation des équations du système (1.96) sous forme quadratique est requise ce qui peut être fastidieux suivant la complexité du terme non linéaire. La MAN a été tout de même utilisée avec plusieurs types de non-linéarités (voir par exemple [ABICHOU et al. 2002; DUIGOU et al. 2003; COCHELIN et VERGEZ 2009; KARKAR et al. 2013; MOUSSI et al. 2015; MEDALE et COCHELIN 2015]), notamment grâce à la résolution proposée par le programme *MANLAB* [GUILLOT, COCHELIN et al. 2018], mais le traitement des non-linéarités non-régulières comme le contact nécessite d'effectuer une régularisation. Une étude comparative [WOIWODE et al. 2020] des deux approches montre ainsi une meilleure efficacité des méthodes par prédiction-corrrection par rapport à la MAN pour les non-linéarités de contact.

1.2.5 Stabilité

Les méthodes de résolution précédemment détaillées permettent d'obtenir les solutions qui vérifient mathématiquement l'équation de la dynamique (1.64). Néanmoins, afin de cerner plus précisément le comportement dynamique de la structure étudiée, il est intéressant de pouvoir caractériser la stabilité de ces solutions. En effet, certaines solutions mathématiques peuvent ne jamais être observées en réalité, car une infime perturbation suffit à déstabiliser une structure répondant par une solution instable pour l'amener vers un autre état stable. Un changement de la stabilité d'une solution suite à la variation d'un paramètre correspond à une bifurcation du système examiné, l'étude de la stabilité permet ainsi la détection de certaines bifurcations. Dans le cadre de cette thèse, l'accent est surtout mis sur la résolution de l'équation du mouvement dans le cadre d'une stratégie d'optimisation paramétrique, l'étude de la stabilité se présente comme un complément qui peut être intégré au solveur dynamique, mais ne fait pas l'objet d'une exploration poussée ici. Les méthodes d'analyse de la stabilité sont ainsi succinctement évoquées dans cette section, de plus amples détails peuvent se trouver au sein des thèses de PELETAN (2012) ou COLAÏTIS (2021).

Il existe plusieurs manières de définir la stabilité. La stabilité au sens de Lyapunov, la stabilité lagrangienne, la stabilité asymptotique ou encore la stabilité orbitale forment des notions de stabilité globale. Toutefois, il est plus courant en dynamique d'examiner la stabilité locale des solutions périodiques. Cela consiste à déterminer l'influence d'une petite perturbation sur un système suivant une solution périodique. Si la perturbation s'atténue au cours du temps, la solution est considérée comme stable, sinon, elle est instable. En dynamique non linéaire, il n'est pas possible d'analyser a priori la stabilité d'une solution, mais il est possible de la déterminer par un calcul supplémentaire une fois la solution déterminée.

La théorie de Floquet [FLOQUET 1883] permet l'étude de la stabilité dans le domaine temporel. Elle s'appuie sur le calcul d'une matrice de monodromie \mathbf{M} de taille $2n$ associée à une solution périodique dont les valeurs propres complexes ϱ_i sont appelées multiplicateurs de Floquet. Si au moins un de ces multiplicateurs possède un module inférieur à 1, la solution est instable.

La méthode de Hill [G. W. HILL 1886] étend la théorie de Floquet au domaine fréquentiel. Cette démarche fait intervenir la recherche des valeurs d'une matrice de Hill tronquée $\tilde{\mathcal{H}}$ de taille $2n(2n_h + 1)$,

avec n_h le nombre d'harmoniques dans la réponse. Il est ensuite possible d'approcher les $2n$ multipliateurs de Floquet à partir des $2n$ valeur propres de $\widetilde{\mathcal{H}}$ possédant la plus petite partie imaginaire. Les autres valeurs propres n'ont pas de sens physique. Cette méthode est intéressante lorsque que les solutions sont obtenues avec la méthode de l'équilibrage harmonique associée à une procédure de continuation, car la matrice $\widetilde{\mathcal{H}}$ est alors un sous-produit des calculs effectués et sa détermination ne demande pas d'efforts supplémentaires. Des applications de la méthode de Hill-Floquet avec la HBM peuvent se trouver dans divers travaux, voir par exemple [DETROUX, RENSON et al. 2015; WU et al. 2022; XIE et al. 2017; GUILLOT, LAZARUS et al. 2020].

1.2.6 Réduction de modèle

Les structures industrielles possèdent généralement un très grand nombre de ddls ce qui rend coûteuse l'application des méthodes de résolution en dynamique non linéaire sur une structure complète. Afin de réduire la taille du système non linéaire à résoudre, des méthodes de réduction de modèles sont couramment mises en place [de KLERK et al. 2008]. Certaines de ces méthodes pouvant offrir un gain pour le calcul de la réponse fréquentielle en dynamique non linéaire sont présentées dans cette section.

1.2.6.1 Condensation sur les degrés de liberté non linéaires

La condensation consiste à partitionner les ddls linéaires et non linéaires. Pour une structure comportant un nombre n_l de ddls linéaires notés \mathbf{q}^l , et un nombre n_{nl} de ddls non linéaires notés \mathbf{q}^{nl} , cette partition s'effectue grâce à une matrice de passage \mathbf{P} :

$$\mathbf{q} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^l \\ \mathbf{q}^{nl} \end{bmatrix}. \quad (1.126)$$

Pour un système algébrique de la forme (1.66), obtenu par une méthode de type Galerkin par exemple, cela donne :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{ll} & \mathbf{A}^{lnl} \\ \mathbf{A}^{nll} & \mathbf{A}^{nlnl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^l \\ \boldsymbol{\eta}^{nl} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{nl}^{nl}(\boldsymbol{\eta}^{nl}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ext}^l \\ \mathbf{f}_{ext}^{nl} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (1.127)$$

La première ligne du système (1.127) permet d'obtenir la relation :

$$\boldsymbol{\eta}^l = \mathbf{A}^{ll^{-1}} \left(\mathbf{f}_{ext}^l - \mathbf{A}^{lnl} \boldsymbol{\eta}^{nl} \right), \quad (1.128)$$

qui peut ensuite être injectée dans la seconde ligne :

$$\left(\mathbf{A}^{nlnl} - \mathbf{A}^{nll} \mathbf{A}^{ll^{-1}} \mathbf{A}^{lnl} \right) \boldsymbol{\eta}^{nl} + \mathbf{f}_{nl}^{nl}(\boldsymbol{\eta}^{nl}) - \left(\mathbf{f}_{ext}^{nl} - \mathbf{A}^{nll} \mathbf{A}^{ll^{-1}} \mathbf{f}_{ext}^l \right) = \mathbf{0} \quad (1.129)$$

La résolution non linéaire se fait alors sur l'équation (1.129) de taille n_{nl} .

La technique de condensation sur les ddls non linéaires permet donc de diminuer la taille du système pour lequel les méthodes coûteuses de résolution non linéaire sont employées. Cette condensation permet donc d'améliorer l'efficacité du calcul de solutions en dynamique non linéaire et a notamment été utilisée avec une résolution par HBM [SARROUY et SINOÛ 2011]. Il faut néanmoins déterminer

l'inverse \mathbf{A}^{n-1} ce qui est coûteux pour des structures de grande taille, d'autant plus que l'opération doit être répétée à chaque fréquence d'excitation évaluée lors du calcul d'une réponse fréquentielle. Il peut alors être avantageux de coupler cette technique avec une procédure de sous-structuration.

1.2.6.2 Sous-structuration

Les méthodes de sous-structuration sont des méthodes de synthèse modale permettant de déterminer le comportement dynamique d'une structure assemblée lorsque le comportement de chacune des sous-structures qui la composent est connu. De la même manière que pour la superposition modale détaillée en section 1.2.1.2 (page 43), il s'agit de projeter l'équation de la dynamique sur une base réduite. La solution approchée dans le sous-espace réduit est notée \mathbf{q}_r et le changement de base se fait grâce à une matrice de passage \mathbf{P} :

$$\mathbf{q} = \mathbf{P}\mathbf{q}_r. \quad (1.130)$$

Parmi les différents types de sous-structuration existants, la méthode de Craig-Bampton [CRAIG JR et BAMPION 1968] est largement répandue en mécanique des structures. Cette méthode est une amélioration de celle proposée par HURTY (1960), et est parfois dénommée méthode de Hurty/Craig-Bampton. Il s'agit d'une approche à interface fixe : pour chaque sous-structure, la base de réduction est formée d'un ensemble tronqué de modes propres linéaires à interface fixe, complétée par des modes statiques de liaison. Cette projection a l'avantage de laisser inchangés les ddls d'interface, seuls les ddls internes aux sous-structures sont condensés. En revanche, les modes propres du modèle complet ne sont pas exactement conservés dans le modèle réduit. Le principe de la procédure est détaillé en section 2.2 (page 83).

Des méthodes à interface libre ont aussi été développées comme les méthodes de MacNeal [MACNEAL 1971] ou de Craig-Chang [CRAIG JR et CHANG 1976]. Dans ce cas, la base de réduction est constituée d'un ensemble de modes propres linéaires à interface libre, auxquels sont ajoutés des vecteurs de flexibilité résiduelle. Le modèle réduit conserve exactement les modes propres du modèle complet, mais les ddls d'interface n'apparaissent plus directement dans la projection et l'application d'un chargement ou d'un déplacement n'est pas directe ce qui fait que ces méthodes sont peu aisées à mettre en œuvre.

Les méthodes à interface hybride proposent un compromis intéressant en prenant en compte des modes propres obtenus avec certains ddls d'interface fixe et d'autres d'interface libre. Ce type de méthode est implémenté dans le code de calcul par éléments finis (EF) *ABAQUS* et fait l'objet un brevet [M. KIM et al. 2013]. Pour cet algorithme, les modes statiques de liaison sont ajoutés à l'ensemble des modes propres à interface hybride pour former la base de réduction. Cela a l'avantage de conserver les ddls d'interface dans le modèle réduit tout en permettant un comportement dynamique plus proche du modèle complet.

Les méthodes de sous-structuration permettent ainsi une réduction importante de la taille du système à résoudre lorsque que les non-linéarités sont localisées à l'interface de sous-structures linéaires. Il est alors avantageux d'employer une méthode conservant les ddls d'interface, car le terme non linéaire dans l'équation de la dynamique reste alors inchangé.

1.2.6.3 Techniques de décomposition

La méthode de *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) [KOSAMBI 1943; KARHUNEN 1947; LOÈVE 1948] permet d'obtenir une base réduite contenant les composantes principales d'un système à partir d'observations sur le modèle complet. Cette technique trouve des applications dans de nombreux domaines, par exemple pour la caractérisation d'écoulements turbulents [BERKOOZ et al. 1993], en traitement d'images [KIRBY et SIROVICH 1990], ou encore pour la compression de données [ANDREWS et al. 1967]. La POD permet la formation de modèles réduits de structures en dynamique en utilisant une décomposition des variables de temps et d'espace [KERSCHEN, GOLINVAL et al. 2005]. Cette approche requiert néanmoins d'effectuer d'abord un calcul coûteux sur le modèle complet afin d'obtenir suffisamment d'observations pour permettre la création d'une base réduite représentative du comportement de la structure. La méthode de *Proper Generalized Decomposition* (PGD) [CHINESTA et al. 2011] utilise aussi une décomposition des variables afin de décrire la solution comme la somme d'un nombre réduit de produits de fonctions. Les fonctions constituant chaque terme de la somme sont obtenues de manière itérative. Le modèle réduit ainsi créé est enrichi progressivement, sans connaissance a priori sur la solution.

1.2.6.4 Modes non linéaires

Par analogie avec la projection modale pour les systèmes linéaires, des approches de synthèse modale basées sur des modes non linéaires ont été développées. Comme pour les modes propres, les modes non linéaires sont des solutions aux propriétés particulières de l'équation homogène :

$$M\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \mathbf{0}. \quad (1.131)$$

Les modes normaux non linéaires ont d'abord été définis par ROSENBERG (1960) comme les solutions entraînant une vibration à l'unisson, c'est-à-dire une vibration synchrone de tous les ddls du système. Afin de tenir compte de possibles résonances internes, SHAW et PIERRE (1991, 1993) étendent cette définition en décrivant ces modes comme des variétés invariantes de dimension 2 dans l'espace des phases. Il est possible de se référer aux travaux de VAKAKIS et al. (1996) et KERSCHEN, PEETERS, GOLINVAL et VAKAKIS (2009) pour un panorama de ces concepts. Afin de traiter des systèmes dissipatifs, les modes normaux non linéaires ont été étendus grâce au concept de mode complexe non linéaire [LAXALDE et THOUVEREZ 2009], qui correspond à une solution périodique ou quasi-périodique d'un système dynamique non linéaire autonome.

Cependant, ces modes non linéaires ne sont pas aussi pratiques à l'emploi que leurs analogues linéaires. D'abord, leur calcul est beaucoup plus difficile, mais surtout, les propriétés d'orthogonalité et de superposition modale ne sont plus vérifiées. Des méthodes de réduction de modèle utilisant des modes non linéaires ont néanmoins été développées d'abord sur des systèmes de petite taille [JEZEQUEL et LAMARQUE 1991; CHONG et IMREGUN 2001; GIBERT 2003], puis plus récemment sur des structures de plus grande taille [KRACK, PANNING-VON SCHEIDT et WALLASCHEK 2013; KRACK, PANNING-VON SCHEIDT, WALLASCHEK et al. 2013; JOANNIN 2017; X.-R. HUANG et al. 2018; MABILIA 2020].

1.3 Optimisation de structures en dynamique

L'optimisation de structures en dynamique se révèle bien plus complexe qu'en statique. En effet, les contraintes évoluent dans le temps et l'espace admissible peut être amené à être fortement non convexe, voire disjoint [E. H. JOHNSON 1976]. De plus le coût de calcul de la fonction objectif et des fonctions contraintes est bien plus important, ce qui rend l'utilisation de méthodes d'optimisation globale très coûteuse sur des structures de grande taille, car elles demandent souvent un nombre important d'évaluations de la fonction objectif. Des études d'optimisation sous contraintes de structures en dynamique ont néanmoins été menées, en considérant généralement des problèmes d'optimisation locale [KANG et al. 2006], bien que certains travaux aient adopté une approche globale [PANTELIDES et TZAN 1997; BAUMAL et al. 1998; BUCHER 1998; KOCER et ARORA 1999; LIAO et J. WANG 2013].

La considération d'une modélisation non linéaire de la structure rend encore plus ardue l'optimisation des structures, le coût de calcul devenant prohibitif avec des méthodes d'optimisation globale classiques sur des structures industrielles. L'application de stratégies d'optimisation de structures en dynamique non linéaire forme ainsi un vaste champ de recherche. Dans ce cadre, l'optimisation topologique fait notamment l'objet d'un nombre important d'études, voir par exemple [BUHL et al. 2000; DENIMAL, EL HADDAD et al. 2021; DENIMAL, RENSON et al. 2022; JUNG et GEA 2004; H.-A. LEE et PARK 2015; LIN et al. 2022; RAPONI, BUJNY, OLHOFFER, BORJA et al. 2021; RAPONI, BUJNY, OLHOFFER, AULIG et al. 2019; SHOBEIRI 2020; REN et al. 2019]. De manière générale, des techniques d'optimisation sont utilisées dans certains travaux afin d'ajuster des absorbeurs dynamiques de vibrations [BOROSON et MISSOUM 2017; DOU et JENSEN 2015; JORDANOV et CHESHANKOV 1988; BORGES et al. 2010]. Des approches traitant spécifiquement des phénomènes de contact, avec ou sans frottement, peuvent se trouver dans les travaux de ZHANG et NIU (2018), MYŚLIŃSKI et WRÓBLEWSKI (2017), KLARBRING (1992) et BEREMLIJSKI et al. (2002). L'optimisation est aussi utilisée dans le contexte de la résistance des structures au crash et a fait l'objet de plusieurs développements visant à améliorer l'efficacité des stratégies employées [CHOI et CHO 1998; RAPONI, BUJNY, OLHOFFER, BORJA et al. 2021; RAPONI, BUJNY, OLHOFFER, AULIG et al. 2019; LIU et al. 2017]. Une revue des techniques d'optimisation dans la construction de structures parasismiques a aussi été récemment proposée. Afin de contourner la difficulté posée par la coûteuse résolution du problème dynamique non linéaire, certaines stratégies d'optimisation se reposent sur des chargements statiques équivalents [Y.-I. KIM et PARK 2010; PARK 2011; H.-A. LEE et PARK 2015; REN et al. 2019].

La méthode de l'équilibrage harmonique, utilisée dans cette thèse pour le calcul de réponses fréquentielles en dynamique non linéaire (voir Chapitre 2 (page 75)), a été employée lors de plusieurs études d'optimisation. La HBM a notamment été combinée à des méthodes de descente de gradient [DOU et JENSEN 2015; DOU, STRACHAN et al. 2015]. Elle a aussi été employée pour le calcul de modes normaux non linéaires au sein d'autres travaux d'optimisation [KRACK, TATZKO et al. 2014; DETROUX, NOËL et al. 2021]. Finalement, la HBM a été utilisée pour la création et l'enrichissement de métamodèles au sein de procédures d'optimisation bayésienne [DENIMAL, RENSON et al. 2022; YUAN et al. 2021].

La résolution de problèmes d'optimisation en dynamique non linéaire constitue ainsi un domaine de recherche actif. Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le développement d'une stratégie

générale d'optimisation paramétrique globale sous contraintes de structures non linéaires en dynamique vibratoire. La stratégie développée doit pouvoir être appliquée sur des structures de tailles industrielles présentant des non-linéarités localisées.

1.4 Description de la stratégie mise en place

Afin de répondre à la problématique de l'optimisation sous contraintes de structures en dynamique avec une prise en compte du comportement non linéaire, une stratégie spécifique est mise en place. Le déroulement de cette stratégie est représenté en Figure 1.16. Elle repose sur l'utilisation de la méthode de l'équilibrage harmonique pour la création et l'enrichissement d'un métamodèle de type processus gaussien dans le cadre d'une procédure d'optimisation bayésienne.

Les évaluations de la fonction objectif et des fonctions contraintes pour un jeu de paramètres donné se font grâce à un calcul mécanique sur un modèle par éléments finis de la structure dans la configuration ainsi définie. Les valeurs des fonctions sont déterminées à partir du calcul de la réponse en fréquence réalisé grâce un solveur mécanique dédié qui fait intervenir la HBM associée à une procédure de continuation par pseudo-longueur d'arc. Ce solveur mécanique est détaillé en Chapitre 2 (page 75) et est implémenté au travers d'un programme en *Python* développé pour l'occasion.

Le solveur mécanique est ensuite intégré un sein d'une procédure d'optimisation bayésienne sous contraintes. Dans un premier temps, un échantillonnage initial peu dense de l'espace de design \mathcal{D} est réalisé. La fonction objectif et les fonctions contraintes sont alors évaluées aux points $\mathbf{x}^{(i)}$ échantillonnées en faisant appel au solveur mécanique. Des métamodèles indépendants de type processus gaussiens sont ensuite construits pour chaque fonction à partir des échantillons et des réponses associées. Ces processus gaussiens permettent de générer des prédictions moyennes \hat{y} et $i \in \mathcal{I}$, correspondant respectivement aux approximations de la fonction objectif y et des fonctions contraintes d'inégalités h_i . Les processus gaussiens permettent aussi d'obtenir conjointement les valeurs de variance s_y^2 et $s_{h_i}^2$ qui leur sont associées, ce qui fournit une indication sur le niveau de confiance à accorder à l'approximation. Dans un second temps les modèles de substitution sont enrichis intelligemment de manière itérative avec pour objectif de détecter la région du minimum global et d'affiner la prédiction dans cette zone. À chaque itération, la détection du point suivant se fait grâce à la fonction d'acquisition de l'amélioration espérée contrainte (CEI ou *Constrained Expected Improvement*) . Cette fonction combine les informations obtenues par appel au métamodèle et les informations sur les points déjà calculés afin d'associer à chaque point de l'espace de conception une valeur représentative de la possibilité que ce point soit un meilleur minimum global de la fonction objectif qui respecte les contraintes. Le point à ajouter se détermine alors par recherche du maximum de la fonction d'acquisition, ce qui peut être fait de manière peu coûteuse, car l'évaluation de la fonction d'acquisition implique uniquement des appels au métamodèle, avec un coût de calcul négligeable. Une fois le nouvel échantillon déterminé, les valeurs de la fonction objectif et des fonctions contraintes sont calculées en ce point par appel au solveur mécanique et les processus gaussiens sont reconstruits pour tenir compte de ce nouvel échantillon. Le processus est répété itérativement jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit satisfait. La solution finalement obtenue correspond au point dont la valeur de la fonction objectif est la plus basse parmi les points

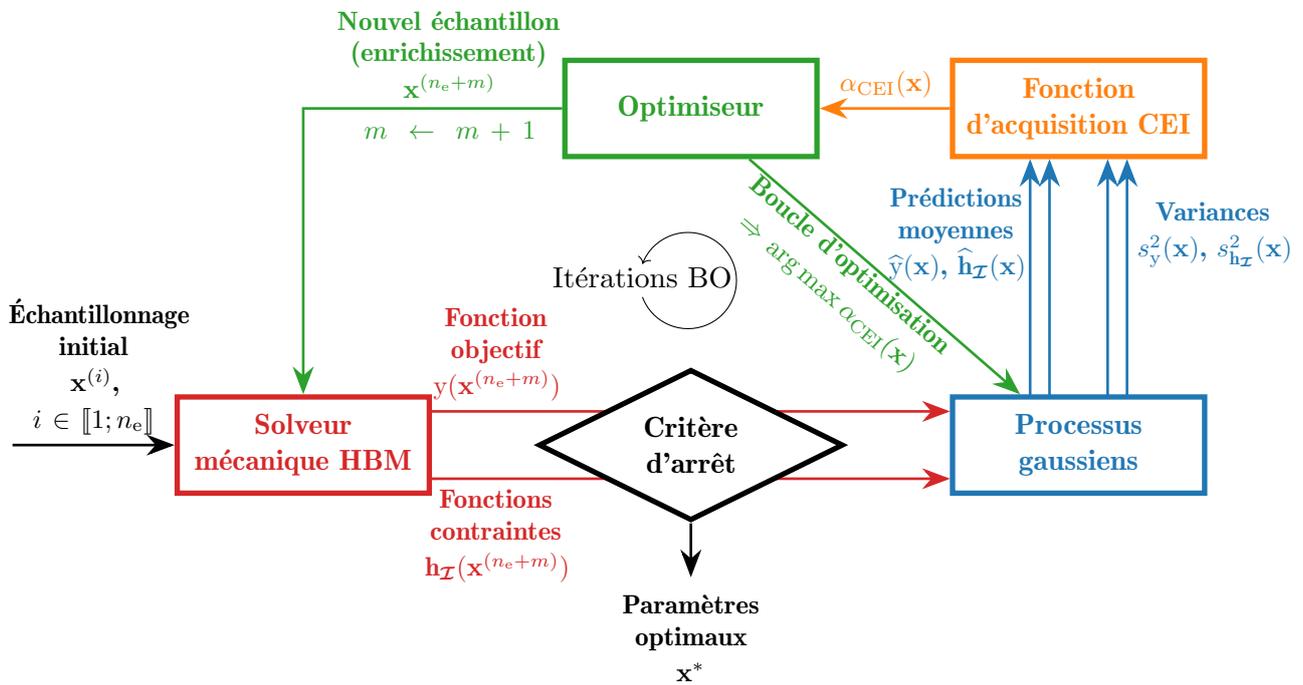


FIGURE 1.16 – Diagramme représentatif de la stratégie mise en place pour l’optimisation globale sous contraintes de structures en dynamique non linéaire

échantillonnés qui respectent les contraintes. La création des processus gaussiens et le déroulement de l’optimisation bayésienne sont détaillés en Chapitre 3 (page 103). L’implémentation de ces opérations se fait en *Python* en utilisant la librairie *BOTorch*.

La stratégie est appliquée sur deux systèmes dynamiques non linéaires dans le Chapitre 4 (page 123). Une optimisation sans contraintes est d’abord menée sur le cas académique d’un oscillateur de Duffing avant de traiter l’optimisation sous contraintes d’un portique de levage industriel.

Méthode de résolution en dynamique vibratoire non linéaire

Dans ce chapitre, le solveur mécanique mis en place pour le calcul de structures en dynamique non linéaire est développé. L'objectif est de pouvoir déterminer la réponse fréquentielle d'une structure présentant des non-linéarités localisées aux interfaces. Tout d'abord, la méthodologie de résolution est détaillée. Cette dernière repose sur la méthode de l'équilibrage harmonique associée à une procédure d'alternance fréquence/temps. Une procédure de continuation par prédiction tangente et correction orthogonale est ensuite mise en place pour le calcul des réponses fréquentielles. Par la suite, la méthode de sous-structuration aux interfaces de Craig-Bampton est présentée. Cette méthode permet de profiter de la localisation des non-linéarités afin de travailler avec des modèles condensés occasionnant un coût de calcul moins important. Enfin, l'utilisation du solveur mécanique est illustrée à travers son application, d'abord sur un système académique, puis sur une structure à l'échelle industrielle.

Contenu

2.1	Solveur dynamique non linéaire	76
2.1.1	Méthode de l'équilibrage harmonique	76
2.1.2	Méthode d'alternance fréquence/temps	78
2.1.3	Méthode de Newton-Raphson	79
2.1.4	Continuation	80
2.2	Sous-structuration de Craig-Bampton	83
2.3	Illustration	87
2.3.1	Application 1 : Oscillateur de Duffing	87
2.3.2	Application 2 : Portique de levage industriel	92

2.1 Solveur dynamique non linéaire

Comme énoncé en section 1.2.2 (page 46), pour une structure discrétisée par éléments finis en n ddl soumis à une excitation harmonique de pulsation ω , fréquence f et période T , la position \mathbf{q} de chacun des degrés de liberté est régie par l'équation (1.64) retranscrite ici :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \mathbf{f}_{\text{ext}}(t). \quad (2.1)$$

Le solveur mécanique doit être capable de déterminer une solution périodique de l'équation (2.1) en régime permanent (lorsqu'une telle solution existe) sur une plage de fréquences d'excitation (variation de ω).

Le solveur mécanique mis en place consiste en l'utilisation de la méthode de l'équilibrage harmonique pour la résolution de l'équation (2.1) associée à une procédure de continuation pour le suivi des bifurcations de type repliement.

2.1.1 Méthode de l'équilibrage harmonique

La méthode de l'équilibrage harmonique [KRYLOFF et BOGOLIUBOFF 1950 ; NAKHLA et VLACH 1976 ; NAYFEH et MOOK 1979 ; LAU et CHEUNG 1981 ; PIERRE et al. 1985 ; CAMERON et GRIFFIN 1989 ; CHEUNG et al. 1990] a pour objectif la recherche d'une solution périodique de pulsation ω au système (2.1) dans le domaine fréquentiel. Une telle solution \mathbf{q} est approchée par sa décomposition en séries de Fourier tronquée à l'ordre n_h :

$$\mathbf{q}(t) \simeq \mathbf{a}_0 + \sum_{i=1}^{n_h} (\mathbf{a}_i \cos(i\omega t) + \mathbf{b}_i \sin(i\omega t)), \quad (2.2)$$

avec \mathbf{a}_i et \mathbf{b}_i les vecteurs contenant les coefficients de Fourier de \mathbf{q} , respectivement associés aux termes en cosinus et en sinus, qui constituent les inconnues dans le domaine fréquentiel. De la même manière, les vecteurs des coefficients de Fourier de \mathbf{f}_{nl} et \mathbf{f}_{ext} sont respectivement notés $(\mathbf{a}_i^{\text{nl}}, \mathbf{b}_i^{\text{nl}})$ et $(\mathbf{a}_i^{\text{ext}}, \mathbf{b}_i^{\text{ext}})$:

$$\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \simeq \mathbf{a}_0^{\text{nl}} + \sum_{i=1}^{n_h} (\mathbf{a}_i^{\text{nl}} \cos(i\omega t) + \mathbf{b}_i^{\text{nl}} \sin(i\omega t)), \quad (2.3)$$

$$\mathbf{f}_{\text{ext}}(\omega, t) \simeq \mathbf{a}_0^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^{n_h} (\mathbf{a}_i^{\text{ext}} \cos(i\omega t) + \mathbf{b}_i^{\text{ext}} \sin(i\omega t)). \quad (2.4)$$

La décomposition employée pour l'expression (2.2) permet d'obtenir des solutions de fréquence identique à l'excitation, en incluant des harmoniques d'ordres supérieurs jusqu'à l'ordre n_h . Le choix de n_h peut se faire de manière empirique lorsque le nombre d'harmoniques dans la réponse de la structure a pu être évalué au préalable, ou la valeur de n_h peut être choisie de manière à offrir un certain compromis entre précision et coût de calcul. Afin de pouvoir calculer des branches de solution après bifurcations par dédoublement de période et de prendre en compte les sous-harmoniques comme abordé en section 1.2.2.3 (page 49), il est nécessaire d'introduire un paramètre entier ν correspondant à l'ordre de la sous-harmonique considéré et de remplacer ω par $\frac{\omega}{\nu}$ dans l'expression (2.2). La présence de

avec :

$$\nabla_i = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Le système (2.9) peut être résolu par l'intermédiaire des méthodes citées en section 1.2.3.1 (page 53) (méthode de Newton-Raphson, méthodes quasi-Newton, etc.). La force d'excitation étant harmonique, ses coefficients de Fourier $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext}}$ sont connus. En revanche, la détermination du vecteur $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}$ pose plus de difficultés. Il est en effet rare de pouvoir déterminer de manière analytique les efforts non linéaires dans le domaine fréquentiel et ces derniers sont alors déterminés numériquement par un algorithme d'alternance fréquence/temps.

2.1.2 Méthode d'alternance fréquence/temps

La méthode d'alternance fréquence/temps (AFT) [CAMERON et GRIFFIN 1989] permet de déterminer $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}(\tilde{\mathbf{q}}, \omega)$ à chaque itération en alternant entre les domaines fréquentiels et temporels grâce aux transformations de Fourier discrètes directe et inverse (voir Annexe A (page 169)). Le processus est illustré en Figure 2.1 où l'application de la transformation de Fourier discrète directe (DFT ou *Discrete Fourier Transform*) est désignée par la fonction \mathcal{F} tandis que la notation \mathcal{F}^{-1} est utilisée pour la transformation de Fourier discrète inverse (DFT⁻¹).

Connaissant le terme $\tilde{\mathbf{q}}$, la DFT⁻¹ permet une évaluation de \mathbf{q} et $\dot{\mathbf{q}}$ en n_t instants $t_j = \frac{j}{n_t} \frac{2\pi}{\omega}$, $j \in \llbracket 1; n_t \rrbracket$ uniformément répartis sur une période :

$$\mathbf{q} = \left[\mathbf{q}(t_1)^\top \quad \dots \quad \mathbf{q}(t_{n_t})^\top \right]^\top = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{\mathbf{q}}), \quad (2.13)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \left[\dot{\mathbf{q}}(t_1)^\top \quad \dots \quad \dot{\mathbf{q}}(t_{n_t})^\top \right]^\top = \mathcal{F}^{-1}(\omega \nabla \tilde{\mathbf{q}}). \quad (2.14)$$

Les efforts non linéaires peuvent alors être évalués dans le domaine temporel aux instants t_j :

$$\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left[\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q}(t_1), \dot{\mathbf{q}}(t_1))^\top \quad \dots \quad \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q}(t_{n_t}), \dot{\mathbf{q}}(t_{n_t}))^\top \right]^\top. \quad (2.15)$$

L'utilisation de la DFT permet ensuite de revenir dans le domaine fréquentiel et d'obtenir le terme $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}$. Finalement, la méthode alternance fréquence/temps (AFT) se résume par l'expression :

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}(\tilde{\mathbf{q}}, \omega) = \mathcal{F}(\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathcal{F}^{-1}(\tilde{\mathbf{q}}), \mathcal{F}^{-1}(\omega \nabla \tilde{\mathbf{q}}))). \quad (2.16)$$

Le choix du nombre de pas de temps n_t lors de la discrétisation temporelle est un paramètre important dans la résolution. Afin d'éviter les erreurs dues au repliement du spectre, le critère de Nyquist-Shannon [SHANNON 1949] impose une borne inférieure : $n_t > 2n_h$ (voir Annexe A (page 169)), mais une valeur bien plus grande est souvent nécessaire pour disposer d'une estimation suffisamment précise des termes non linéaires, surtout en cas de non-linéarités non régulières [COLAÏTIS 2021 ; KRACK, SALLES et al. 2017]. Certaines règles empiriques ont été élaborées afin de déterminer un nombre d'échantillons n_t idéal en fonction du type de système mécanique étudié (par exemple $n_t = \min(500 + 25n_h, 2000)$), mais il ne semble pas exister de consensus sur une pratique générale [WOIWODE et al. 2020]. Dans ces

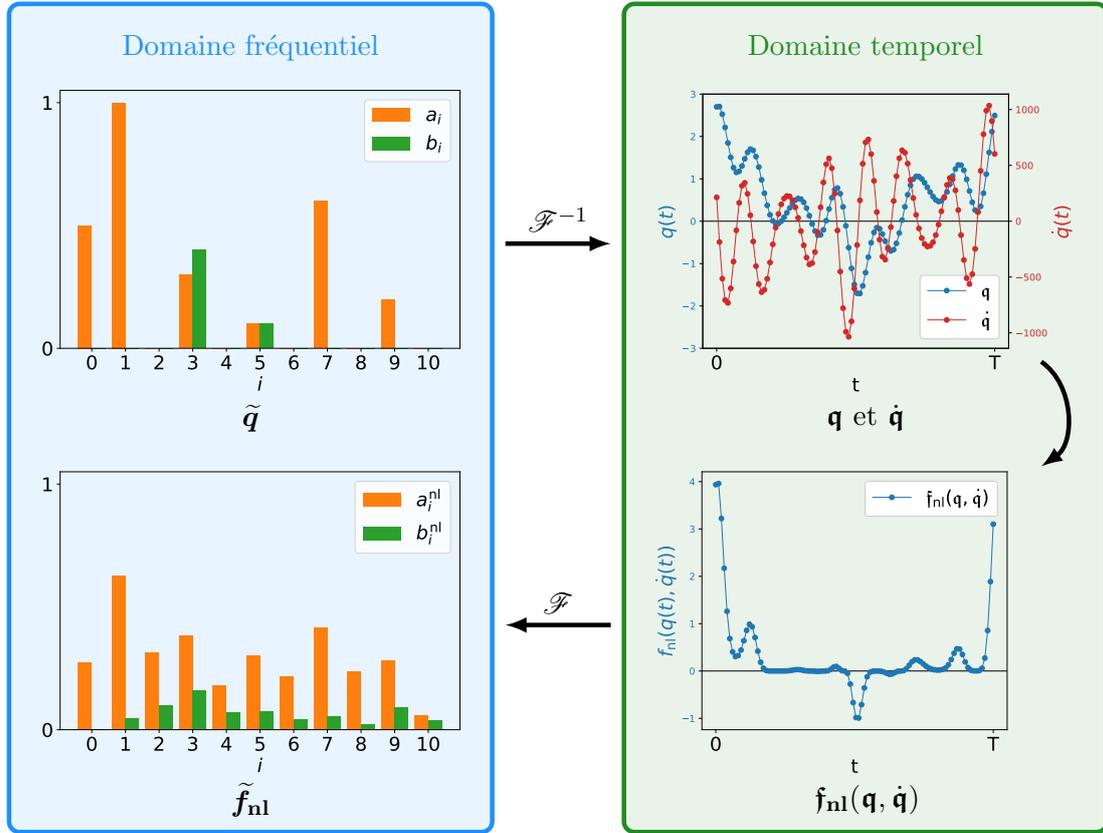


FIGURE 2.1 – Principe de la méthode d’alternance fréquence/temps.

travaux, le choix de ce nombre est réalisé de manière empirique afin d’offrir un bon compromis entre précision et coût de calcul.

La méthode AFT permet ainsi de rendre possible la résolution de l’équation (2.9) pour tout type de non-linéarité. La méthode devant être répétée à chaque itération de la résolution, elle peut faire augmenter le coût de calcul de façon assez importante pour de grandes valeurs de n_t , l’algorithme *Fast Fourier Transform* (FFT) [COOLEY et TUKEY 1965] permet d’exécuter efficacement la DFT ce qui rend la méthode viable.

2.1.3 Méthode de Newton-Raphson

Pour une pulsation d’excitation ω donnée, le système non linéaire (2.9) est résolu en utilisant la méthode de Newton-Raphson [DEUFLHARD 2004]. Cet algorithme consiste à rechercher itérativement la solution $\tilde{\mathbf{q}}^{(m+1)}$ en s’appuyant sur le développement de Taylor du résidu au premier ordre en $\tilde{\mathbf{q}}^{(m)}$:

$$\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{q}}^{(m+1)}, \omega) = \tilde{\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{q}}^{(m)} + \Delta\tilde{\mathbf{q}}^{(m)}, \omega) = \tilde{\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{q}}^{(m)}, \omega) + \mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\mathbf{q}}^{(m)}, \omega)\Delta\tilde{\mathbf{q}}^{(m)} + o(\|\Delta\tilde{\mathbf{q}}^{(m)}\|^2), \quad (2.17)$$

2.1. SOLVEUR DYNAMIQUE NON LINÉAIRE

où $\Delta\tilde{\mathbf{q}}^{(m)}$ correspond à la correction effectuée à l'itération (m) et $\mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{q}}}$ désigne la jacobienne de $\tilde{\mathbf{r}}$ par rapport à $\tilde{\mathbf{q}}$ telle que :

$$\mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\mathbf{q}}, \omega) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\mathbf{q}}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega) + \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\mathbf{q}}, \omega). \quad (2.18)$$

La méthode AFT permet de déterminer la jacobienne $\mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{q}}}$ de manière semi-analytique ce qui permet un gain de temps significatif par rapport à une évaluation purement numérique par différences finies par exemple. Le calcul est détaillé en Annexe B (page 177). Il résulte de l'expression (2.17) les relations de récurrence :

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(m+1)} = \tilde{\mathbf{q}}^{(m)} + \Delta\tilde{\mathbf{q}}^{(m)}, \quad (2.19)$$

et :

$$\mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\mathbf{q}}^{(m)}, \omega) \Delta\tilde{\mathbf{q}}^{(m)} = -\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{q}}^{(m)}, \omega), \quad (2.20)$$

En partant d'une valeur initiale $\tilde{\mathbf{q}}^{(0)}$, les corrections $\Delta\tilde{\mathbf{q}}^{(m)}$ sont successivement appliquées en résolvant le système linéaire (2.20). Les itérations sont répétées tant que la norme euclidienne du résidu $\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{q}}^{(m)}, \omega)$ reste supérieure à un petit paramètre positif ε choisi arbitrairement en fonction de la précision voulue.

Lorsque la méthode converge, cela se fait en général avec peu d'itérations. Cette convergence n'est en revanche assurée que sur un intervalle autour de la racine recherchée. Si l'estimation initiale $\tilde{\mathbf{q}}^{(0)}$ est trop éloignée de la solution, la méthode peut diverger ou converger vers une autre racine. Un choix usuel pour $\tilde{\mathbf{q}}^{(0)}$ consiste à prendre la solution linéaire du système (2.9) (pour $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}} = \tilde{\mathbf{0}}$) ou à approcher la solution non linéaire par une autre méthode. Lors du calcul d'une réponse fréquentielle les solutions précédemment calculées pour d'autres pulsations peuvent être utilisées pour déterminer une meilleure estimation initiale. C'est ce mécanisme qu'utilisent notamment les techniques de continuation.

2.1.4 Continuation

Lors de la résolution du système (2.9) sur une plage de pulsations d'excitation l'utilisation de la méthode de Newton-Raphson telle que décrite en section 2.1.3 (page 79) en balayant séquentiellement l'intervalle des pulsations peut être délicate. En effet, comme il l'a été évoqué, le choix de l'estimation initiale est important dans l'efficacité de la convergence. De plus, comme il l'a été montré en section 1.2.2.3 (page 49), lorsque des bifurcations apparaissent, plusieurs solutions peuvent coexister pour une même fréquence d'excitation en fonction de l'historique de chargement. La matrice jacobienne $\mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{q}}}$ est alors singulière aux points de repliement et la méthode de Newton ne peut plus être appliquée. Une méthode de continuation est mise en place afin de pouvoir suivre la réponse fréquentielle le long des différentes branches ainsi que de détecter et surmonter les bifurcations de repliement.

2.1.4.1 Continuation par pseudo-longueur d'arc

Dans le cadre du solveur mécanique élaboré dans cette section, une continuation de type prédiction-correction est implémentée, car cela convient mieux pour de fortes non-linéarités telles que celles engendrées par du contact unilatéral [WOIWOODE et al. 2020]. Un prédicteur tangent est utilisé afin de déterminer l'itération initiale, puis les corrections sont réalisées de manière orthogonale (ou par

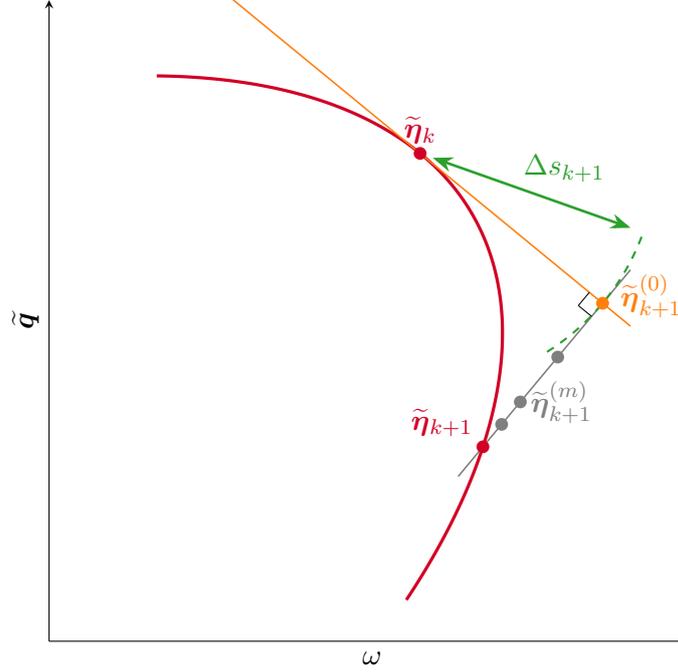


FIGURE 2.2 – Illustration de la continuation mise en place.

pseudo-longueur d'arc). Une illustration schématique de la méthode dans un espace de dimension 1 est proposée en Figure 2.2 et les éléments théoriques sont abordés dans le paragraphe suivant en considérant la variation du paramètre ω conformément à la recherche de la réponse fréquentielle, mais les développements restent valables pour le calcul des branches de solution suivant l'évolution de n'importe quel paramètre λ [GRENAT et al. 2019].

L'objectif est de calculer de proche en proche l'ensemble des points $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = [\tilde{\boldsymbol{q}}^\top \ \omega]^\top$ de $\mathbb{R}^{\tilde{n}+1}$ qui annulent le résidu $\tilde{\boldsymbol{r}}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) = \tilde{\boldsymbol{r}}(\tilde{\boldsymbol{q}}, \omega)$ pour ω dans un intervalle $[\omega_1; \omega_2]$. À partir de la $k^{\text{ème}}$ solution $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_k = [\tilde{\boldsymbol{q}}_k^\top \ \omega_k]^\top$ déjà calculée, la solution suivante $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{k+1}$ est déterminée de manière itérative. La notation $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{k+1}^{(m)}$ correspond à la valeur obtenue à l'itération m . Dans un premier temps, l'itération initiale $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{k+1}^{(0)}$ est définie grâce à une prédiction tangente. Le vecteur tangent $\mathbf{t}_k = [\mathbf{t}_{\tilde{\boldsymbol{q}}_k}^\top \ t_{\omega_k}]^\top$ est évalué grâce à l'algorithme de Keller [KELLER 1983 ; CARDONA et al. 1998]. Le vecteur \mathbf{t}_k est de taille $\tilde{n} + 1$ avec $\mathbf{t}_{\tilde{\boldsymbol{q}}_k} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ et $t_{\omega_k} \in \mathbb{R}$. Le développement de Taylor au premier ordre donne :

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(\tilde{\boldsymbol{q}}_k + \mathbf{t}_{\tilde{\boldsymbol{q}}_k}, \omega_k + t_{\omega_k}) = \tilde{\boldsymbol{r}}(\tilde{\boldsymbol{q}}_k, \omega_k) + \mathbf{J}_{\tilde{\boldsymbol{q}}}(\tilde{\boldsymbol{q}}_k, \omega_k) \mathbf{t}_{\tilde{\boldsymbol{q}}_k} + \mathbf{J}_{\omega}(\tilde{\boldsymbol{q}}_k, \omega_k) t_{\omega_k}, \quad (2.21)$$

avec \mathbf{J}_{ω} la jacobienne de $\tilde{\boldsymbol{r}}$ par rapport à ω dont l'expression est détaillée en Annexe B (page 177). En introduisant $\widehat{\mathbf{t}}_{\tilde{\boldsymbol{q}}_k}$ tel que $\mathbf{t}_{\tilde{\boldsymbol{q}}_k} = t_{\omega_k} \widehat{\mathbf{t}}_{\tilde{\boldsymbol{q}}_k}$, il vient :

$$t_{\omega_k} \mathbf{J}_{\tilde{\boldsymbol{q}}}(\tilde{\boldsymbol{q}}_k, \omega_k) \widehat{\mathbf{t}}_{\tilde{\boldsymbol{q}}_k} + \mathbf{J}_{\omega}(\tilde{\boldsymbol{q}}_k, \omega_k) t_{\omega_k} = \tilde{\mathbf{0}}. \quad (2.22)$$

Le terme $\widehat{\mathbf{t}}_{\tilde{\boldsymbol{q}}_k}$ est donc évalué par résolution du système linéaire :

$$\mathbf{J}_{\tilde{\boldsymbol{q}}}(\tilde{\boldsymbol{q}}_k, \omega_k) \widehat{\mathbf{t}}_{\tilde{\boldsymbol{q}}_k} = -\mathbf{J}_{\omega}(\tilde{\boldsymbol{q}}_k, \omega_k). \quad (2.23)$$

2.1. SOLVEUR DYNAMIQUE NON LINÉAIRE

Le vecteur tangent \mathbf{t}_k est cherché de façon à être unitaire :

$$\|\mathbf{t}_k\|^2 = t_{\omega_k}^2 \widehat{\mathbf{t}_{\tilde{\mathbf{q}}_k}}^\top \widehat{\mathbf{t}_{\tilde{\mathbf{q}}_k}} + t_{\omega_k}^2 = 1, \quad (2.24)$$

soit :

$$t_{\omega_k} = \varsigma_k \frac{1}{\sqrt{\widehat{\mathbf{t}_{\tilde{\mathbf{q}}_k}}^\top \widehat{\mathbf{t}_{\tilde{\mathbf{q}}_k}} + 1}}, \quad (2.25)$$

où $\varsigma_k \in \{-1; 1\}$ contrôle le sens du vecteur tangent. La prédiction $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{k+1}^{(0)}$ s'effectue le long du vecteur tangent \mathbf{t}_k sur une hypersphère de rayon Δs_{k+1} :

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{k+1}^{(0)} = \tilde{\boldsymbol{\eta}}_k + \Delta s_{k+1} \mathbf{t}_k. \quad (2.26)$$

La direction de la prédiction, contrôlée par le signe ς_k , doit changer lorsque des bifurcations de repliement sont rencontrées. La méthode pour détecter ces bifurcations, et donc définir la valeur de ς_k , est expliquée dans la sous-section suivante (section 2.1.4.2 (page 82)).

Une fois l'itéré initial $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{k+1}^{(0)}$ déterminé, les corrections correspondent aux itérations de la méthode de Newton-Raphson en rajoutant au système d'équation (2.9) la condition que les points doivent se trouver dans un hyperplan orthogonal au vecteur tangent \mathbf{t}_k afin de fermer le système. De manière identique à la section 2.1.3 (page 79), l'itéré $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{k+1}^{(m)}$ est incrémenté de $\Delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{k+1}^{(m)} = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{\mathbf{q}}_{k+1}^{(m)\top} & \Delta \omega_{k+1}^{(m)} \end{bmatrix}^\top$. La condition d'orthogonalité se traduit par l'expression :

$$\mathbf{t}_{\tilde{\mathbf{q}}_k}^\top \Delta \tilde{\mathbf{q}}_{k+1}^{(m)} + t_{\omega_k} \Delta \omega_{k+1}^{(m)} = 0. \quad (2.27)$$

La correction $\Delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{k+1}^{(m)}$ est alors déterminée par la résolution du système linéaire :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{k+1}^{(m)}) & \mathbf{J}_{\omega}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{k+1}^{(m)}) \\ \mathbf{t}_{\tilde{\mathbf{q}}_k}^\top & t_{\omega_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \tilde{\mathbf{q}}_{k+1}^{(m)} \\ \Delta \omega_{k+1}^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{k+1}^{(m)}) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Comme expliqué précédemment, la valeur du prochain point $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{k+1}$ est fixé à convergence lorsque $\|\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{k+1}^{(m)})\| < \varepsilon$.

2.1.4.2 Détection des bifurcations de repliement

Afin de détecter les bifurcations de repliement, et ainsi de fixer la valeur de ς_k lors de la prédiction, une fonction test est utilisée [BEYN et al. 2002]. Un repliement intervient lorsque la matrice jacobienne $\mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{q}}}$ a une unique valeur propre nulle. Le calcul de $\det(\mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}_k))$ permet donc de détecter les bifurcations. Pour suivre les branches dans la continuation, ς_k doit avoir le même signe que ce déterminant :

$$\varsigma_k = \text{sgn} \left(\det(\mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}_k)) \right). \quad (2.29)$$

La matrice jacobienne du système augmenté (2.28) n'est plus singulière aux points de bifurcation et la solution peut ainsi être déterminée dans tout l'espace.

2.1.4.3 Contrôle automatique du pas de continuation

Comme évoqué en section 1.2.4.1 (page 62), la mise en place d'un contrôle automatique du pas Δs permet des gains importants en coût de calcul. Voici les stratégies d'adaptation de Δs mises en place au sein du solveur mécanique implémenté dans ces travaux.

- Une pondération telle qu'introduite par BLAIR et al. (1997) est mise en place lorsque $\|\tilde{\mathbf{q}}_k\| > 1$ afin de maîtriser les écarts d'ordres de grandeur. L'équation (2.25) devient alors :

$$t_{\omega_k} = \varsigma_k \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_{p_{k+1}}^2} \widehat{\mathbf{t}}_{\tilde{\mathbf{q}}_k}^T \widehat{\mathbf{t}}_{\tilde{\mathbf{q}}_k} + 1}}, \quad (2.30)$$

avec $\sigma_{p_{k+1}} = \frac{\|\tilde{\mathbf{q}}_k\|}{\omega_k}$.

- Les valeurs que peut prendre le pas Δs sont restreintes à un intervalle $[\Delta s_{\min}, \Delta s_{\max}]$. Lorsque la valeur prévue pour Δs dépasse Δs_{\max} , celle-ci reste fixée à Δs_{\max} afin de garantir un balayage suffisamment dense de la plage de fréquences. Si la valeur prévue devient inférieure à Δs_{\min} , le solveur éprouve des difficultés à converger et il est préférable d'interrompre l'exécution et de retenter avec d'autres paramètres, voire avec une autre méthode.
- Pour le calcul de la $(k + 1)^{\text{ème}}$ solution de la réponse fréquentielle, l'adaptation du pas est réalisée selon la formule :

$$\Delta s_{k+1} = 2^{\frac{n^{\text{cib}} - n_k^{\text{it}}}{n^{\text{cib}}}} \Delta s_k, \quad (2.31)$$

avec n_k^{it} le nombre d'itérations nécessaire lors du calcul de la solution précédente et n^{cib} le nombre d'itérations ciblé. Initialement, la valeur $\Delta s_0 = \frac{\Delta s_{\max}}{5}$ est choisie arbitrairement, il pourrait aussi être demandé à l'utilisateur de définir cette valeur initiale comme un paramètre supplémentaire.

- Lors de la phase de correction, si le nombre d'itérations dépasse n^{cib} , le processus est arrêté et une nouvelle prédiction est effectuée avec un pas Δs diminué, par exemple en le divisant par 5. Ainsi, la formule (2.31) ne sert que pour augmenter le pas, car avec cette règle, n_k^{it} est toujours inférieur ou égal à n^{cib} . En effet, les différents tests ont montré qu'il était généralement plus efficace de directement recommencer tout le processus de continuation avec une valeur plus petite de Δs lorsque le nombre d'itérations devient trop important. L'ampleur de la réduction est ici totalement arbitraire et pourrait certainement faire l'objet d'améliorations.

Les paramètres Δs_{\min} , Δs_{\max} et n^{cib} sont à définir par l'utilisateur de manière empirique. La structure étudiée ainsi que la précision ε désirée ont une influence importante sur le choix de ces paramètres, mais il ne semble pas exister de règle universelle permettant d'obtenir une efficacité optimale du solveur. Une discussion plus détaillée de l'influence de ces paramètres est présentée en section 2.3.1 (page 87).

2.2 Sous-structuration de Craig-Bampton

Dans le cas où les non-linéarités présentes dans la structure sont localisées, la mise en place de la méthode de sous-structuration de Craig-Bampton [CRAIG JR et CHANG 1976] présente un fort intérêt.

2.2. SOUS-STRUCTURATION DE CRAIG-BAMPTON

Cette méthode est intégrée à de nombreux logiciels de calculs par éléments finis et est régulièrement utilisée lors de calculs de structures en dynamique. Dans un premier temps, le principe de la sous-structuration est développé dans le cas d'une seule sous-structure, puis la méthode est étendue au cas d'un assemblage de plusieurs sous-structures.

Pour une sous-structure, les ddls sont réorganisés afin de regrouper les n_s ddls internes à la sous-structure, notés \mathbf{q}^s , et les n_f ddls d'interface (ou de frontière), notés \mathbf{q}^f . La dépendance au temps est volontairement omise pour plus de clarté.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^s \\ \mathbf{q}^f \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Les ddls d'interface comprennent notamment les ddls sur lesquels sont appliqués une force ou un déplacement et les ddls situés à la jonction entre deux structures. Dans le cadre de ces travaux, les non-linéarités sont supposées localisées. Ainsi, les ddls intégrant un comportement non linéaire sont aussi inclus dans les ddls d'interface. Il n'y a donc aucune force extérieure ni aucun effort non linéaire qui s'exercent sur les ddls internes. L'équation de la dynamique s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} M^{ss} & M^{sf} \\ M^{fs} & M^{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}^s \\ \ddot{\mathbf{q}}^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^{ss} & C^{sf} \\ C^{fs} & C^{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^s \\ \dot{\mathbf{q}}^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K^{ss} & K^{sf} \\ K^{fs} & K^{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^s \\ \mathbf{q}^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{nl}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{ext}^f \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Comme énoncé en section 1.2.6.2 (page 70), l'objectif est de projeter l'équation (2.33) sur une base réduite. La solution approchée dans le sous-espace réduit, notée \mathbf{q}_r , s'obtient grâce à une matrice de passage \mathbf{P} :

$$\mathbf{q} = \mathbf{P}\mathbf{q}_r. \quad (2.34)$$

Pour la méthode de Craig-Bampton, la matrice \mathbf{P} est obtenue à partir de modes propres linéaires à interface fixe et de modes statiques de liaison.

Les modes propres linéaires à interface fixe sont les couples (Ω, ϕ) tels que :

$$(\mathbf{K}^{ss} - \Omega^2 \mathbf{M}^{ss})\phi = \mathbf{0}. \quad (2.35)$$

Ils correspondent aux modes propres de la sous-structure non amortie lorsque tous les ddls d'interface sont encastés. Il existe n_s solutions à l'équation (2.35), mais seules les p premières (selon les valeurs croissantes des pulsations propres Ω) sont conservées. Les p formes propres correspondantes ϕ sont normalisées pour que la projection de la matrice \mathbf{M}^{ss} soit la matrice identité et ces vecteurs sont assemblés afin de former une matrice notée Φ . Le nombre p de modes conservés est généralement conditionné par un critère fréquentiel dépendant du problème considéré. Il est usuel de garder les modes dont la fréquence propre est inférieure à deux ou trois fois la fréquence maximale de la plage considérée pour l'étude [GIRARD et ROY 2003].

Un mode statique de liaison est obtenu en calculant le déplacement statique de la sous-structure lorsque le déplacement d'un ddl d'interface est imposé à 1 tandis que les déplacements de tous les autres ddls d'interface sont fixés à 0. L'opération est répétée pour chaque ddl de \mathbf{q}^f et les modes statiques de liaison obtenus sont assemblés au sein d'une matrice notée Ψ . Cette matrice correspond au résultat de l'équation :

$$\Psi = -\mathbf{K}^{ss-1} \mathbf{K}^{sf}, \quad (2.36)$$

mais en pratique, Ψ est calculée en fixant tour à tour les ddls d'interface. En effet, il s'agit de résoudre n_f fois un système linéaire, avec n_f généralement assez petit, ce qui est numériquement moins coûteux que d'inverser la matrice \mathbf{K}^{ss} , dont la taille n_s peut être très importante.

La matrice de passage \mathbf{P} , de taille $(n_s + n_f) \times (p + n_f)$, s'écrit :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \Phi & \Psi \\ \mathbb{0}_{n_f, p} & \mathbf{I}_{n_f} \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Les ddls d'interface ne sont pas condensés et le vecteur position réduit peut s'écrire :

$$\mathbf{q}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_c \\ \mathbf{q}^f \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

où les ddls condensés associés à \mathbf{q}_c n'ont pas de sens physique. Les matrices s'écrivent dans la base réduite :

$$\mathbf{M}_r = \mathbf{P}^\top \mathbf{M} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{M}_{\Phi\Psi} \\ \mathbf{M}_{\Psi\Phi} & \mathbf{M}_{\Psi} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{C}_r = \mathbf{P}^\top \mathbf{C} \mathbf{P}, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{P}^\top \mathbf{K} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Phi} & \mathbb{0}_{p, n_f} \\ \mathbb{0}_{n_f, p} & \mathbf{K}_{\Psi} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Les matrices \mathbf{K}_{Φ} et \mathbf{K}_{Ψ} sont diagonales et donc la matrice \mathbf{K}_r est, elle aussi, diagonale. Les effets non linéaires et les forces extérieures ne s'exercent que sur les ddls d'interface, ainsi la projection ne change pas la valeur des termes non-nuls des vecteurs des efforts extérieurs et non linéaires :

$$\mathbf{P}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\text{ext}}^f \end{bmatrix}}_{(n_s+n_f) \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\text{ext}}^f \end{bmatrix}}_{(p+n_f) \times 1} = \mathbf{f}_{\text{ext}_r}, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{P}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\text{nl}}^f \end{bmatrix}}_{(n_s+n_f) \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\text{nl}}^f \end{bmatrix}}_{(p+n_f) \times 1} = \mathbf{f}_{\text{nl}_r}. \quad (2.43)$$

Les notations $\mathbf{f}_{\text{ext}_r}$ et \mathbf{f}_{nl_r} désignent respectivement les efforts extérieurs et les efforts non linéaires dans la base réduite (ce sont des vecteurs de \mathbb{R}^{p+n_f}). Finalement, l'équation du mouvement projetée se ramène à un système de taille $p + n_f$:

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}_r \mathbf{q}_r + \mathbf{f}_{\text{nl}_r} = \mathbf{f}_{\text{ext}_r}. \quad (2.44)$$

La méthode s'étend pour un assemblage de n_a sous-structures. Le vecteur contenant la position des ddls internes de la sous-structure numérotée i est noté \mathbf{q}_i^s tandis que le vecteur \mathbf{q}^f contient la position de tous les ddls d'interface de l'assemblage. Pour chaque sous-structure, la matrice des modes propres à interface fixe tronquée à l'ordre p_i , notée Φ_i , ainsi que la matrice des modes statiques de liaisons, notée Ψ_i , sont calculées. Comme dans le cas d'une sous-structure, les ddls de l'assemblage sont réorganisés

2.2. SOUS-STRUCTURATION DE CRAIG-BAMPTON

afin de regrouper les ddls internes de chaque sous-structure et les ddls d'interface, puis une projection sur une base réduite est réalisée à l'aide d'une matrice de passage P :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^{s\top} & \dots & \mathbf{q}_i^{s\top} & \dots & \mathbf{q}_{n_a}^{s\top} & \mathbf{q}^f \top \end{bmatrix}^\top = P \mathbf{q}_r. \quad (2.45)$$

La matrice de passage est construite de la manière suivante :

$$P = \begin{bmatrix} \Phi_1 & & & & \Psi_1 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \Phi_i & & \Psi_i \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \Phi_{n_a} & \Psi_{n_a} \\ & & & & & I_{n_f} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

La projection des matrices dans la base réduite donne :

$$M_r = P^\top M P = \begin{bmatrix} I_{p_1} & & & & M_{\Phi\Psi_1} \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & I_{p_i} & & M_{\Phi\Psi_i} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & I_{p_{n_a}} & M_{\Phi\Psi_{n_a}} \\ M_{\Psi\Phi_1} & \dots & M_{\Psi\Phi_i} & \dots & M_{\Psi\Phi_{n_a}} & M_\Psi \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

$$C_r = P^\top C P, \quad (2.48)$$

et

$$K_r = P^\top K P = \begin{bmatrix} K_{\Phi_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & K_{\Phi_i} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & K_{\Phi_{n_a}} & \\ & & & & & K_\Psi \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

avec K_r diagonale. La projection de l'équation du mouvement dans la base réduite donne un système de taille $n_f + \sum_{i=1}^{n_a} p_i$ similaire à l'équation (2.44).

La méthode de sous-structuration de Craig-Bampton est très avantageuse lorsque peu de ddls d'interface sont présents. Le comportement peut en effet généralement être approché avec une précision suffisante en ne gardant que quelques modes propres à interface fixe dans la base de réduction. La taille du système réduit est ainsi considérablement inférieure à celle de l'assemblage complet. Cette méthode peut être complétée par une condensation sur les ddls non linéaires du système réduit telle qu'évoquée en section 1.2.6.1 (page 69). Toutefois, cette approche n'est généralement pas optimale lorsque les ddls d'interface sont en nombre restreint, car les avantages de la condensation sont annulés par le coût de calcul nécessaire à celle-ci.

2.3 Illustration

Le solveur mécanique précédemment détaillé est implémenté par l'intermédiaire d'un programme en *Python* développé pour l'occasion. Il est ainsi possible de maîtriser les différents éléments du solveur afin de l'adapter au mieux et de tester l'influence de certaines des variables. Dans cette section, les résultats obtenus par le solveur sur quelques exemples de problèmes dynamiques non linéaires sont présentés afin d'illustrer les caractéristiques de la méthode. Différentes valeurs des paramètres inhérents à la méthode sont testés afin de discuter de leur influence.

2.3.1 Application 1 : Oscillateur de Duffing

L'exemple académique de l'oscillateur de Duffing, déjà présenté en section 1.2.2.2 (page 49), est d'abord utilisé afin d'illustrer le solveur dynamique non linéaire. Pour rappel, l'équation du mouvement de ce système à un ddl soumis à une force excitatrice harmonique s'écrit :

$$m_1\ddot{q}(t) + c_1\dot{q}(t) + k_1q(t) + k_{nl}q^3(t) = f_0 \cos(\omega t). \quad (2.50)$$

La Figure 2.3 montre l'utilisation du solveur dynamique non linéaire pour la résolution de l'équation de Duffing (2.50) avec différents niveaux de non-linéarité. Ce résultat met en avant la capacité de la méthode utilisée à obtenir la réponse fréquentielle de structures non linéaires. Les bifurcations de type repliement sont bien prises en compte et visibles au travers du retournement des courbes, que ce soit dans le cas d'un système assouplissant $k_{nl} < 0$ ou durcissant $k_{nl} > 0$.

Afin de montrer l'intérêt de la stratégie d'adaptation du pas Δs , la Figure 2.4 compare différentes réponses fréquentielles, obtenues avec un pas de continuation fixe ou avec la stratégie de contrôle du pas détaillée en section 2.1.4.3 (page 83). Dans chaque cas le nombre de pas de fréquences engendrés par la procédure de continuation est indiqué et constitue le principal outil de comparaison. Le temps d'exécution est aussi donné à titre indicatif, mais il convient de noter que l'implémentation du solveur pourrait sans doute être optimisée. Cela fournit néanmoins un ordre de grandeur intéressant pour comparer les différentes configurations du solveur. Les problèmes liés à l'utilisation d'un pas Δs fixe sont clairement mis en avant. Un trop grand pas résulte en un coût de calcul diminué, mais le résultat obtenu ne permet pas de représenter l'intégralité du comportement dynamique du système. La Figure 2.4a montre que pour l'exemple de l'oscillateur de Duffing, certaines petites résonances à basses fréquences sont ignorées par rapport à la réponse fréquentielle obtenue en Figure 2.4b. À l'opposé, un trop petit pas permet d'obtenir une réponse fréquentielle plus complète, mais engendre un nombre très important de pas de fréquences et donc un coût de calcul conséquent (Figure 2.4b). La Figure 2.4c illustre tout l'intérêt de la stratégie d'adaptation : la réponse fréquentielle obtenue décrit un comportement similaire à la Figure 2.4b alors que le nombre de pas de fréquences reste assez réduit. La taille du pas est automatiquement réduite dans les zones problématiques, ce qui permet, par exemple, de bien représenter les petites résonances à basses fréquences. Dans les autres zones, Δs peut rester assez grand sans que cela ne pose problème. Au-delà des problématiques d'efficacité, garder un pas de continuation fixe peut poser des problèmes de convergence en cas de fortes non-linéarités. En effet, un pas trop grand peut aussi empêcher le solveur de converger dans certaines zones critiques, il est alors primordial

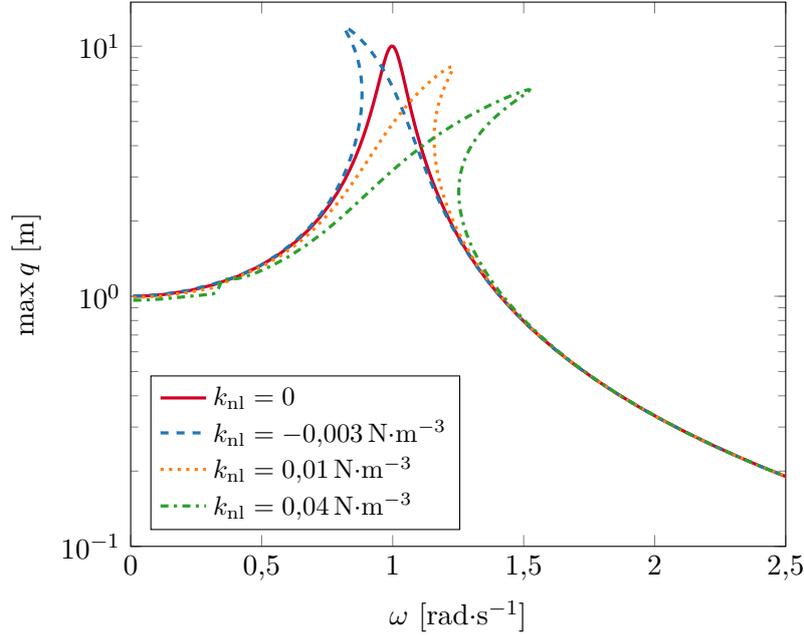


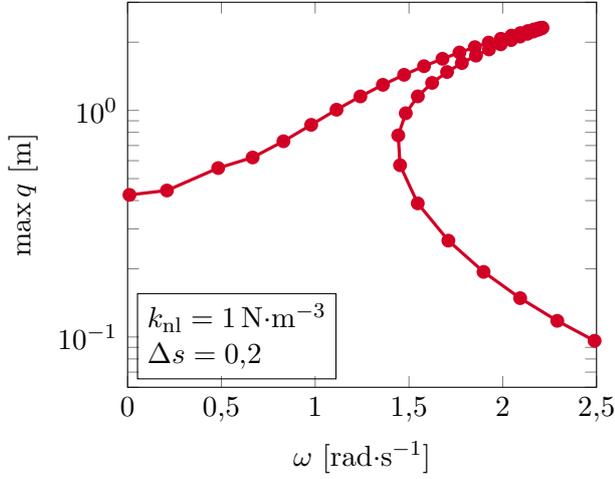
FIGURE 2.3 – Réponse fréquentielle de l'oscillateur de Duffing pour différentes valeurs de k_{nl} avec $m_1 = 1$ kg, $c_1 = 0,1$ kg·s⁻¹, $k_1 = 1$ N·m⁻¹ et $f_0 = 10$ N. Les paramètres $n_h = 20$, $n_t = 60$ et $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$ sont utilisés pour la HBM avec un pas Δs variable contrôlé par $\Delta s_{\max} = 0,1$ et $n^{\text{cib}} = 5$.

d'avoir une manière de réduire ce pas. Par exemple sur la Figure 2.4d, la réponse fréquentielle pour une valeur de k_{nl} cinq fois plus importante est obtenue en 14s avec 140 pas de fréquences. En fixant à 50 itérations la limite pour la convergence, il faut utiliser un pas fixe $\Delta s = 0,005$ afin de réussir à obtenir cette réponse, ce qui demande 193 s d'exécution et 2053 pas de fréquences.

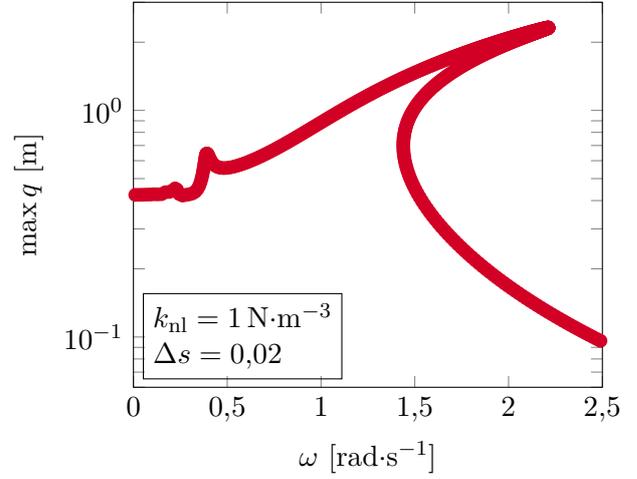
Lorsque la valeur de $\|\tilde{\mathbf{q}}_k\|$ est d'un ordre de grandeur bien supérieur à ω_k , la prédiction tangente sans pondération conduit à devoir calculer la solution pour un nombre très important de pas de fréquences. La Figure 2.5 illustre ce phénomène en représentant la réponse fréquentielle obtenue sans pondération (Figure 2.5a) et avec la pondération présentée en section 2.1.4.3 (page 83) (Figure 2.5b). La pondération se traduit par une réduction considérable du nombre de pas de fréquences nécessaire pour le calcul de la réponse fréquentielle (d'un facteur supérieur à 7). Le temps de calcul est divisé par 3, ce qui constitue un gain significatif, mais montre que le calcul de la solution à chaque pas de fréquence est alors plus long, car il faut un nombre plus important d'itérations avant convergence. La stratégie de pondération et d'adaptation du pas permet donc un gain important sur le coût de calcul. Des améliorations sont en revanche encore certainement possibles, mais il est difficile de mettre en place une règle générale performante pour tout problème.

Finalement, la réponse fréquentielle obtenue par le solveur HBM est comparée avec des réponses obtenues par intégration temporelle avec le schéma de Newmark (présenté en section 1.2.3.3 (page 55)). Sur la Figure 2.6a, la réponse temporelle pour une fréquence d'excitation donnée est calculée sur 30 périodes afin de s'assurer d'atteindre le régime permanent. Ce nombre a été déterminé empiriquement pour cette configuration du système étudié, mais il est difficile de l'estimer à l'avance. Une détection

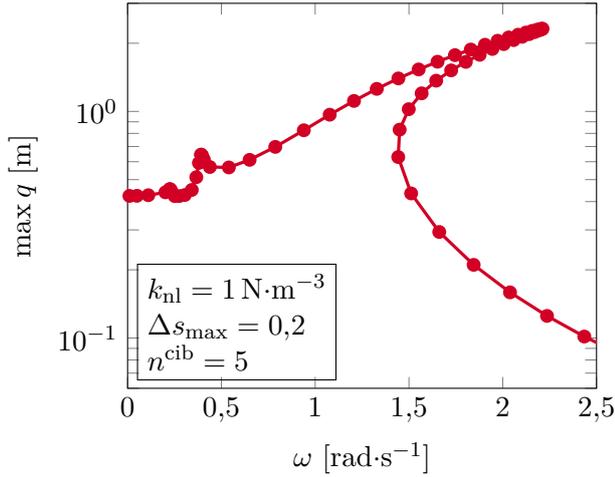
2.3. ILLUSTRATION



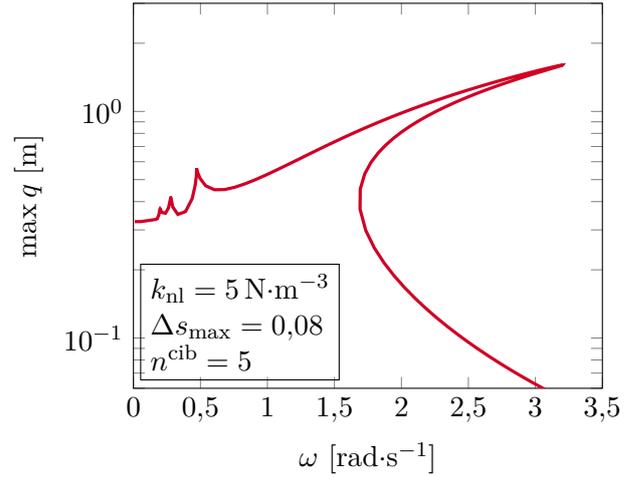
(a) Pas fixe $\Delta s = 0,2$. Total de 47 pas de fréquences et 5 s d'exécution.



(b) Pas fixe $\Delta s = 0,02$. Total de 485 pas de fréquences et 40 s d'exécution.



(c) Pas adaptatif avec $\Delta s_{\max} = 0,2$ et $n^{\text{cib}} = 5$. Total de 64 pas de fréquences et 8 s d'exécution.

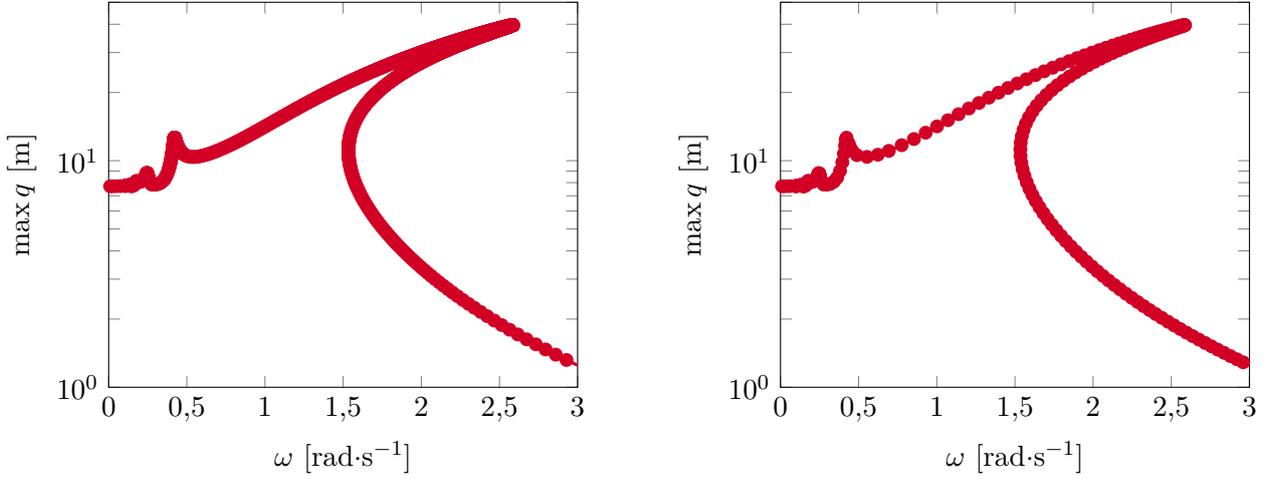


(d) Pas adaptatif pour une plus forte non-linéarité avec $\Delta s_{\max} = 0,08$ et $n^{\text{cib}} = 5$. Total de 140 pas de fréquences et 14 s d'exécution.

FIGURE 2.4 – Influence du contrôle du pas Δs sur la réponse fréquentielle de l'oscillateur de Duffing. Les valeurs $m_1 = 1 \text{ kg}$, $c_1 = 0,1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$, $k_1 = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ et $f_0 = 0,5 \text{ N}$ restent fixes. Les paramètres $n_h = 20$, $n_t = 60$ et $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$ sont utilisés pour la HBM.

du régime permanent au cours du calcul pourrait éventuellement être mise en place afin d'améliorer les performances de l'intégration temporelle, mais ce n'est pas l'objet de ces travaux. Le calcul est ensuite répété en incrémentant la fréquence d'excitation afin de construire la réponse fréquentielle. Différents pas de temps (proportionnels à la période d'excitation) sont comparés. Sauf mention contraire, les conditions initiales (CI) pour le calcul d'une réponse temporelle à une fréquence donnée sont choisies

2.3. ILLUSTRATION



(a) Sans pondération. Total de 1476 pas de fréquences pour 192 s d'exécution

(b) Avec pondération. Total de 198 pas de fréquences pour 62 s d'exécution

FIGURE 2.5 – Influence de la normalisation sur la réponse fréquentielle de l'oscillateur de Duffing avec $m_1 = 1 \text{ kg}$, $c_1 = 0,1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$, $k_1 = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $k_{nl} = 0,005 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$ et $f_0 = 10 \text{ N}$. Les paramètres $n_h = 20$, $n_t = 60$ et $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$ sont utilisés pour la HBM avec un pas Δs variable contrôlé par $\Delta s_{\max} = 0,1$ et $n^{\text{cib}} = 5$.

pour correspondre aux CI de la réponse calculée pour la fréquence précédente. L'utilisation de CI nulles signifie en revanche qu'à chaque fréquence, la réponse temporelle est calculée en fixant initialement le déplacement et la vitesse à 0. La Figure 2.6a met en avant le phénomène de saut dans la réponse fréquentielle, déjà évoqué en section 1.2.2.3 (page 49), et montre qu'un pas de temps h trop grand entraîne une imprécision dans la réponse fréquentielle. Le choix des conditions initiales n'a pas d'influence sur le régime permanent lorsqu'une seule solution stable est possible (mis à part éventuellement le temps nécessaire avant d'atteindre ce régime permanent). En revanche, pour les fréquences où plusieurs solutions stables coexistent, le choix des conditions initiales détermine vers laquelle des solutions le régime permanent converge. Ainsi, pour la courbe obtenue avec des CI nulles sur la Figure 2.6a, le phénomène de saut ne se produit pas à la même fréquence.

Une autre manière d'obtenir la réponse fréquentielle de structures avec un schéma d'intégration temporelle consiste à utiliser une excitation en sinus balayé. Cette excitation temporelle balaye une plage de pulsation $[\omega_1, \omega_2]$ sur un temps T_f en étant équivalente à chaque instant à une excitation sinusoïdale. Cette excitation a pour expression :

$$\mathbf{f}_{\text{ext}}(t) = \mathbf{f}_0 \sin \left(\omega_1 t + \frac{\omega_2 - \omega_1}{2T_f} t^2 \right). \quad (2.51)$$

À chaque instant t , la pulsation correspondante vaut $\frac{\omega_2 - \omega_1}{T_f} t + \omega_1$. La vitesse de balayage est ici linéaire et vaut $v_s = \frac{\omega_2 - \omega_1}{T_f}$. C'est ce type d'excitation qui est généralement utilisé pour obtenir expérimentalement les réponses fréquentielles des structures. Lorsque le sinus balayé est utilisé en

2.3. ILLUSTRATION

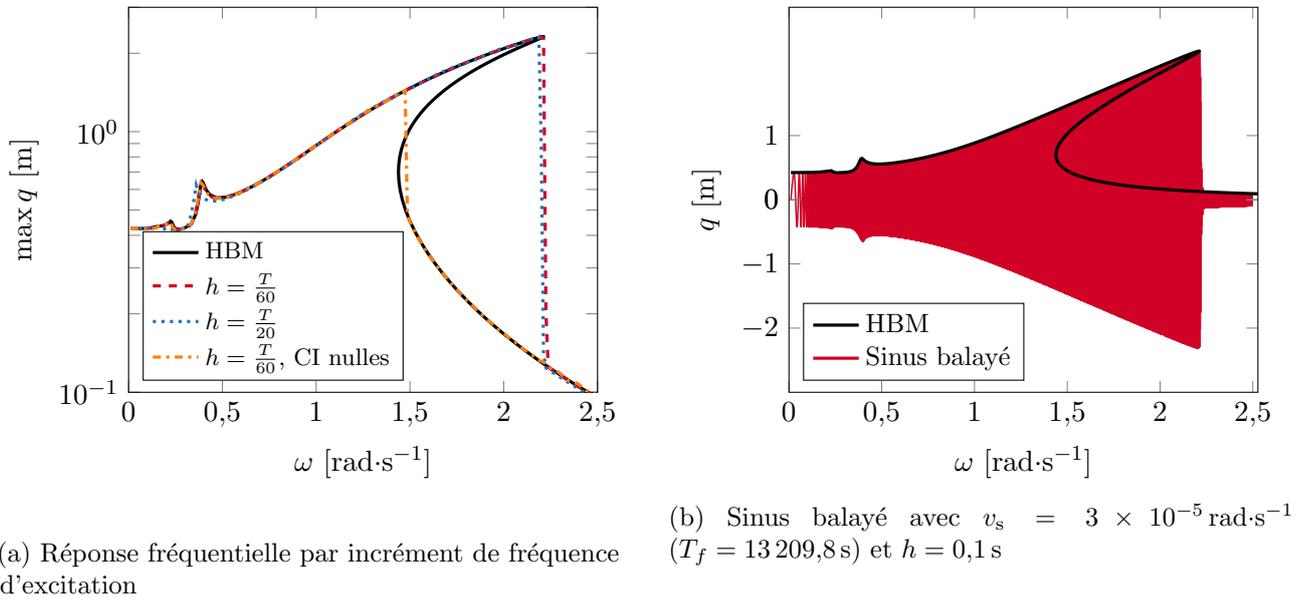


FIGURE 2.6 – Comparaison des réponses fréquentielles de l’oscillateur de Duffing obtenues par intégration temporelle et par HBM. Les simulations sont réalisées pour $m_1 = 1 \text{ kg}$, $c_1 = 0,1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$, $k_1 = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $k_{nl} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$ et $f_0 = 0,5 \text{ N}$.

simulation numérique, un seul calcul par intégration temporelle est nécessaire pour obtenir la réponse fréquentielle. Cependant, pour obtenir une précision satisfaisante, une vitesse de balayage assez lente (et donc un temps T_f grand) ainsi qu’un pas de temps suffisamment petit sont souvent nécessaires. Sur la Figure 2.6b, une réponse satisfaisante a pu être obtenue avec ce sinus balayé pour $v_s = 3 \times 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $h = 0,1 \text{ s}$ ce qui correspond à un total de 131 400 pas de temps. Le choix d’un pas de temps plus grand ou d’une vitesse de balayage plus rapide entraîne une baisse de la précision de la réponse obtenue. L’utilisation d’un sinus balayé avec une vitesse de balayage logarithmique pourrait permettre de meilleures performances sans perte de précision pour les basses fréquences, mais cela n’est pas l’objectif de ces travaux.

Les temps CPU de calcul pour obtenir les courbes de la Figure 2.6 (ainsi que deux autres calculs par sinus balayé non représentés) sont comparés dans la Table 2.1. Il est important de rappeler que les temps sont donnés à titre indicatif afin de comparer les ordres de grandeurs. L’efficacité de chacune des méthodes peut être influencée par leurs implémentations ainsi que par les paramètres choisis pour le calcul. Il est tout de même possible de remarquer que le solveur mécanique basé sur la HBM avec un pas de continuation adaptatif propose une meilleure efficacité que les méthodes d’intégration temporelle, tout en permettant la prise en compte de bifurcations et le suivi des différentes branches de la réponse fréquentielle.

2.3. ILLUSTRATION

TABLE 2.1 – Temps de calcul de la réponse fréquentielle de l'oscillateur de Duffing pour différentes méthodes. Les simulations sont réalisées pour $m_1 = 1 \text{ kg}$, $c_1 = 0,1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$, $k_1 = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $k_{nl} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$ et $f_0 = 0,5 \text{ N}$.

Méthode	Paramètres	Nombre de pas de fréquences	Nombre total de pas de temps	Temps d'exécution
HBM	$n_h = 20$, $n_t = 60$, $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$, $\Delta s_{\max} = 0,05$, $n^{\text{cib}} = 5$	210		17 s
Newmark par incréments	$T_f = 30T$, $h = \frac{T}{60}$, CI solution précédente	200	360 000	645 s
Newmark par incréments	$T_f = 30T$, $h = \frac{T}{20}$, CI solution précédente	200	120 000	227 s
Newmark par incréments	$T_f = 30T$, $h = \frac{T}{60}$, CI nulles	200	360 000	490 s
Newmark avec sinus balayé	$T_f = 13\,209,8 \text{ s}$, $v_s = 3 \times 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $h = 0,1 \text{ s}$		131 400	174 s
Newmark avec sinus balayé	$T_f = 13\,209,8 \text{ s}$, $v_s = 3 \times 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $h = 0,25 \text{ s}$		52 560	88 s
Newmark avec sinus balayé	$T_f = 3962,9 \text{ s}$, $v_s = 1 \times 10^{-4} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $h = 0,1 \text{ s}$		39 420	55 s

2.3.2 Application 2 : Portique de levage industriel

La méthode de résolution du problème mécanique est ensuite appliquée au cas industriel d'un portique de levage dont le modèle est représenté en Figure 2.7. Il s'agit d'une structure mobile (généralement sur rails, mais parfois sur pneus) conçue pour porter de lourdes charges.

2.3.2.1 Description du système

La structure étudiée est constituée d'un portique roulant se déplaçant sur des rails dans une direction transversale à sa longueur (axe X sur la Figure 2.7). Un chariot reposant sur deux rails

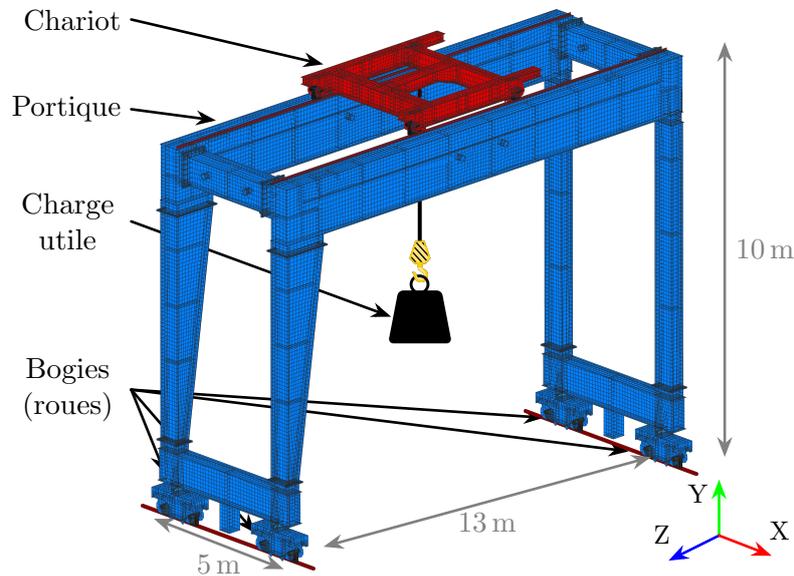


FIGURE 2.7 – Modèle du portique de levage.

circule au sommet de l'ensemble dans le sens de la longueur (axe Z). Ce chariot supporte le matériel de levage permettant le transport de la charge utile. Le portique étudié possède une longueur d'environ 13 m, pour une largeur d'environ 5 m et une hauteur d'environ 10 m. Les portiques de levage évoluent régulièrement dans des environnements à risques (par exemple sur des sites nucléaires) ce qui les contraint à respecter des normes particulièrement exigeantes. L'une des principales préoccupations est d'empêcher le renversement de la structure lorsqu'elle subit un déplacement à sa base, comme cela peut se produire lors d'épisodes sismiques.

Le modèle éléments finis de la structure représenté en Figure 2.7 est constitué de 44 335 éléments coques en acier avec un comportement élastique linéaire. Les liaisons boulonnées sont modélisées à l'aide de 302 éléments ressorts. Le modèle comporte aussi 42 éléments poutres et 12 masses ponctuelles afin de modéliser les roues et leurs axes. Afin de simplifier la modélisation, la charge utile est modélisée par une masse ponctuelle placée au centre du chariot, ce qui permet d'éviter d'avoir à prendre en compte les effets complexes induits par le balancement d'un câble souple. La simulation est ainsi effectuée selon l'hypothèse des petites perturbations. Au total, le modèle complet comporte 43 722 nœuds ce qui correspond à environ 260 000 ddls . La plage de fréquences d'intérêt est comprise de 0 Hz à 35 Hz, typique d'une excitation sismique.

2.3.2.2 Sous-structuration

Le logiciel *PRIMODAL*, co-développé par Ingeliance et Top Modal, offre des outils avancés d'analyse en dynamique. Il permet notamment d'obtenir les opérateurs de la sous-structuration de Craig-Bampton à partir d'une simulation d'analyse modale avec *MSC Nastran*. Ce logiciel est ainsi utilisé afin de réaliser une condensation par sous-structuration de Craig-Bampton du modèle de portique de levage.

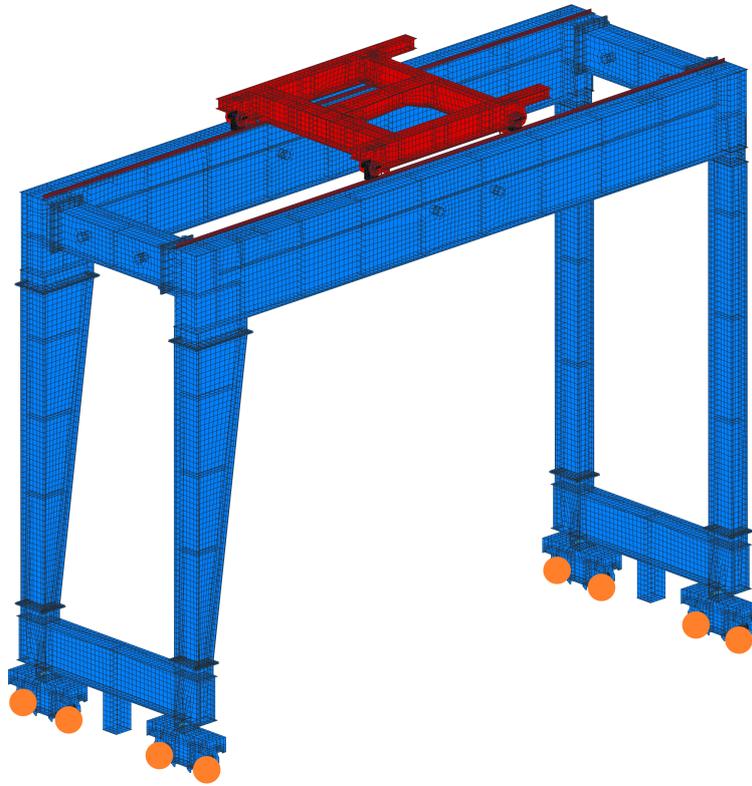


FIGURE 2.8 – Création d’un modèle condensé par sous-structuration. Les points ● représentent les nœuds d’interface.

Le modèle condensé est créé en fixant le chariot au centre du portique et en considérant l’ensemble comme une unique sous-structure. Cette sous-structure comporte alors 8 nœuds d’interfaces (48 ddl) situés au niveau des roues (Figure 2.8). Les 87 modes propres à interfaces fixes dont la pulsation propre est inférieure à 70 Hz (deux fois le maximum de la plage de fréquences d’intérêt) sont conservés au sein de la matrice ϕ . Le modèle condensé comporte alors un total de 135 ddl .

Le comportement dynamique du modèle condensé est comparé à celui du modèle complet en calculant les réponses fréquentielles pour une excitation sinusoïdale d’amplitude 2 mm de la base dans la direction X . Cela correspond à un déplacement imposé sur le ddl de translation selon X de chacun des 8 nœuds d’interface. Les autres ddl de ces nœuds sont encastés. Le déplacement de la masse ponctuelle modélisant la charge utile selon l’axe X , noté q_{M_x} , est analysé. La Figure 2.9 représente ainsi la courbe de réponse fréquentielle de la valeur maximale de q_{M_x} sur la plage $[0;35]$ Hz pour les deux modèles. Les simulations sont ici effectuées avec le logiciel *MSC Nastran*. Ce résultat montre que le modèle condensé permet d’obtenir un comportement dynamique proche de celui du modèle original sur la plage de 0 Hz à 35 Hz. De légères différences sont visibles pour les plus hautes fréquences, mais l’approximation obtenue est suffisamment satisfaisante pour utiliser ce modèle.

La mise en place d’une procédure de sous-structuration permet ainsi de réduire considérablement le nombre de ddl du système à résoudre, en le faisant passer d’environ 260 000 à une centaine. Le solveur

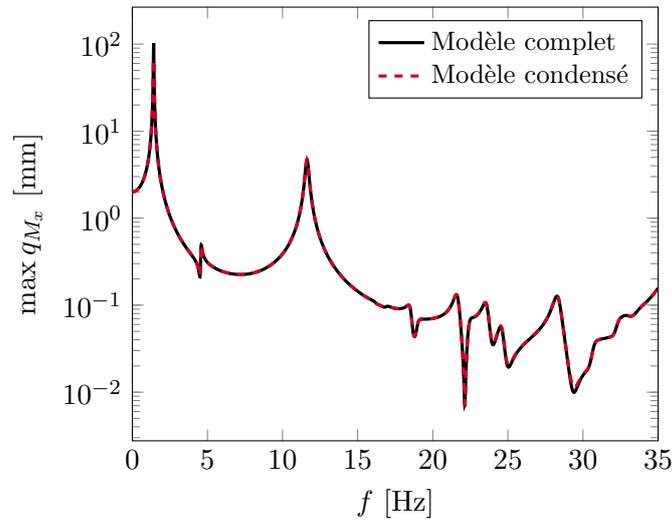


FIGURE 2.9 – Déplacement maximal q_{M_x} de la charge utile selon l’axe X pour les différents modèles avec un déplacement sinusoïdal d’amplitude 2 mm imposé à la base selon la direction X .

mécanique peut ainsi être utilisé directement sur ces modèles condensés afin de calculer la réponse fréquentielle du portique de levage tout en considérant les effets non linéaires pouvant être présents sur les ddls d’interface.

2.3.2.3 Dispositif anti-basculement

Afin d’éviter le renversement du portique, le dimensionnement d’un dispositif anti-basculement est étudié. Une illustration schématisée d’un tel dispositif est présentée en Figure 2.10. Le système est constitué d’une poutre ancrée à la base dont le bord supérieur est placé à quelques centimètres d’un pied du portique afin de bloquer son déplacement vertical.

Un tel mécanisme laisse apparaître des phénomènes de contact dans deux zones : après le décollement d’une roue, la structure peut heurter le dispositif anti-basculement, puis lors de la retombée un contact se produit entre la roue et le rail (ou directement le sol si le portique est équipé de pneumatiques). De manière à simplifier la modélisation pour cet exemple, chaque bogie (Figure 2.11a) muni d’un dispositif anti-basculement est remplacé par une simple roue. Une telle roue est modélisée par un nœud dont le ddl de translation verticale (selon l’axe Y), est sujet à du contact dans les deux directions (Figure 2.11b). La modélisation de ce contact est détaillée dans la suite sur un nœud dont la position du ddl de translation verticale est désignée par q^{dab} .

La prise en compte du contact est représentée en Figure 2.11c et s’inspire d’une méthode de pénalisation [WEYLER et al. 2012]. Dans cette méthode, la manifestation du contact correspond à l’ajout d’une raideur de pénalisation au niveau du ddl en contact. Plus cette raideur est faible, plus l’interpénétration entre les solides en contact est importante. Lorsque la raideur de pénalisation s’approche de l’infini, la modélisation tend à dépendre un contact unilatéral, mais une valeur trop grande implique un mauvais conditionnement de la matrice de raideur de la structure, ce qui peut

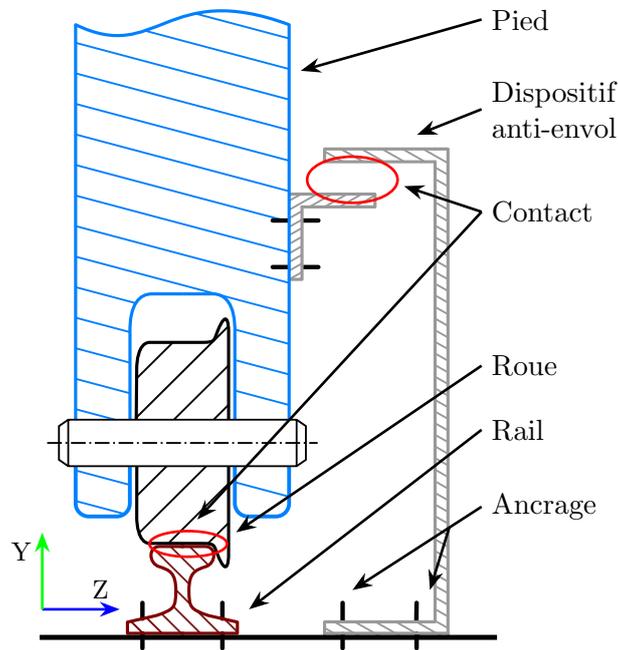


FIGURE 2.10 – Représentation d'un dispositif anti-basculement.

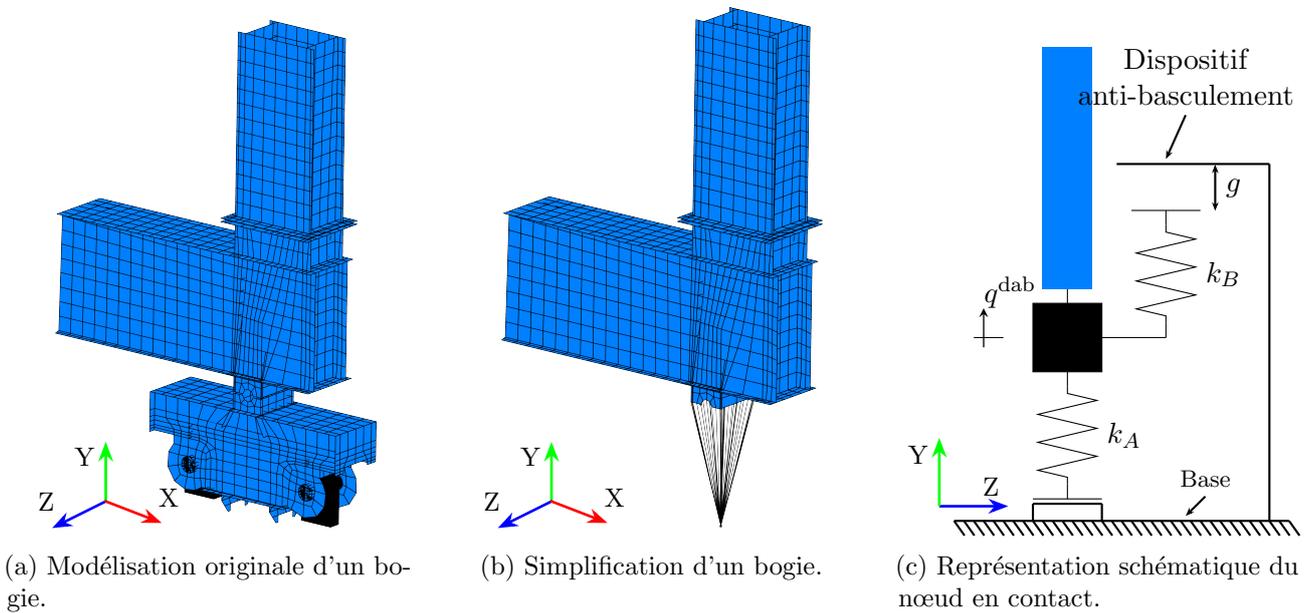


FIGURE 2.11 – Modélisation du contact en un pied du portique

compliquer la résolution numérique. Dans le cadre de la modélisation du dispositif anti-basculement, l'objectif n'est pas de modéliser un contact unilatéral, il faut plutôt voir le nœud en contact comme un sous-modèle du bogie pouvant se déformer (tout comme le dispositif anti-basculement). Le contact avec la base (le sol ou un éventuel rail) entraîne l'ajout d'une raideur k_A sur le ddl en contact, sans

2.3. ILLUSTRATION

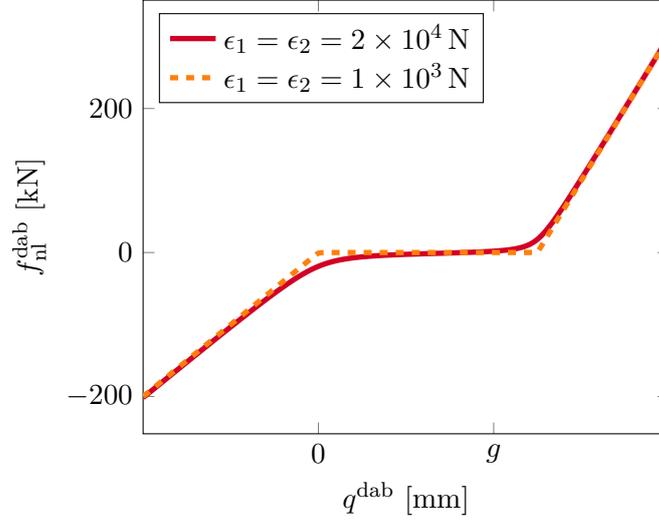


FIGURE 2.12 – Représentation de la force de contact pour $k_A = 5 \times 10^7 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $k_B = 1 \times 10^8 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $g = 4 \text{ mm}$ et différentes valeurs de ϵ_1 et ϵ_2 .

jeu initial. Pour ce qui est du contact avec le dispositif anti-basculément, une raideur k_B est ajoutée avec un jeu initial noté g . Ces raideurs traduisent en réalité des propriétés matérielles et géométriques. L'effort non linéaire $f_{\text{nl}}^{\text{dab}}$ s'exerçant alors sur le ddl en contact s'écrit ainsi :

$$f_{\text{nl}}^{\text{dab}}(g, k_A, k_B) = \begin{cases} k_A q^{\text{dab}} & \text{si } q^{\text{dab}} \leq 0, \\ 0 & \text{si } 0 < q^{\text{dab}} < g, \\ k_B(q^{\text{dab}} - g) & \text{si } q^{\text{dab}} \geq g. \end{cases} \quad (2.52)$$

Afin d'améliorer la robustesse de la résolution mécanique, la loi de contact (2.52) est régularisée en suivant la proposition de COLAÏTIS (2021) :

$$f_{\text{nl}}^{\text{dab}}(g, k_A, k_B) = \frac{k_A q^{\text{dab}}}{2} - \sqrt{\left(\frac{k_A q^{\text{dab}}}{2}\right)^2 + \epsilon_1^2} + \frac{k_B(q^{\text{dab}} - g)}{2} + \sqrt{\left(\frac{k_B(q^{\text{dab}} - g)}{2}\right)^2 + \epsilon_2^2}. \quad (2.53)$$

Les paramètres ϵ_1 et ϵ_2 permettent d'ajuster la régularisation de la loi de contact. Lorsqu'ils sont nuls, l'expression (2.53) équivaut à la loi non régularisée (2.52). La force de contact régularisée est illustrée en Figure 2.12 pour différents paramètres de régularisation.

2.3.2.4 Simulation

Le solveur mécanique non linéaire est utilisé pour le calcul de la réponse fréquentielle de ce portique de levage muni d'un dispositif anti-basculément. Afin d'illustrer le comportement du portique de levage et les effets induits par l'ajout du dispositif anti-basculément, le portique est soumis à un déplacement forcé sinusoïdal d'amplitude 2 mm à sa base selon la direction X (la plus critique pour le basculement). L'hypothèse forte qu'un seul pied du portique ne se décolle à la fois est posée. Ainsi, seul un des 4 pieds peut se détacher et être sujet à des phénomènes de contact, tandis que les 3 autres restent ancrés à la

2.3. ILLUSTRATION

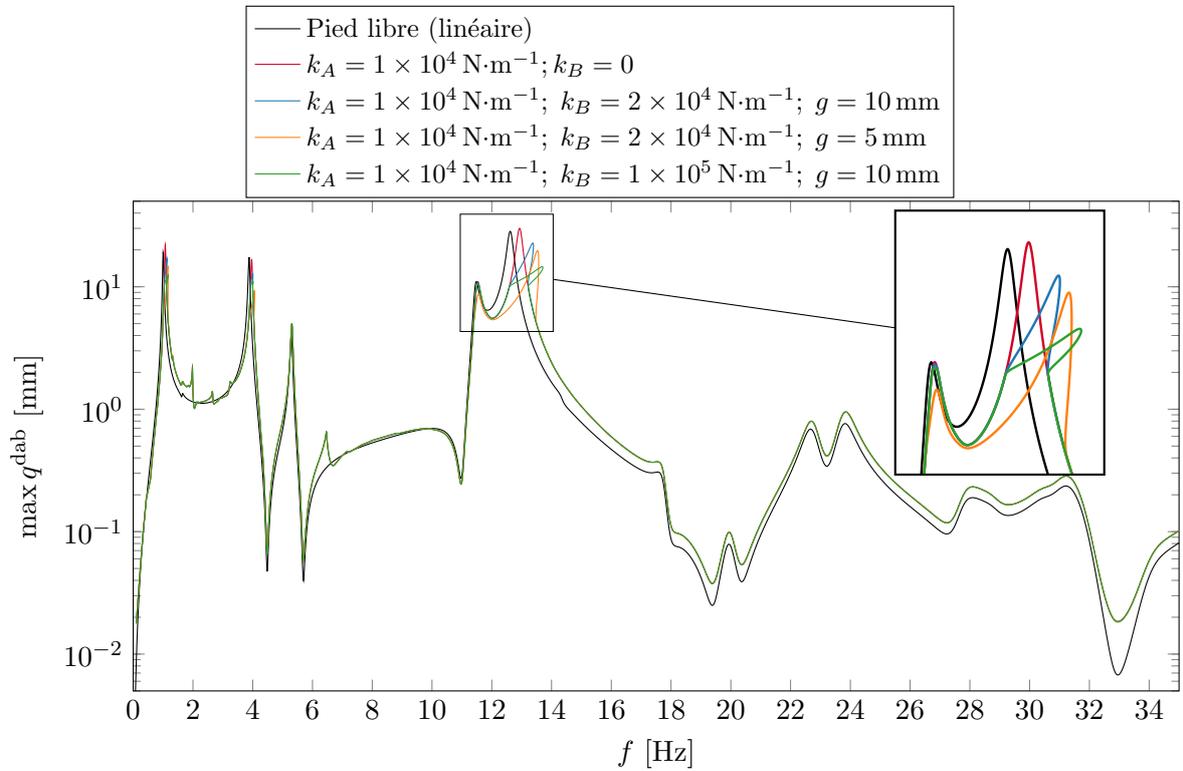
base. La simplification du bogie se fait uniquement sur le pied subissant du contact, dont la position est désigné par q^{dab} . Le modèle condensé utilisé pour cette étude se base alors sur 80 modes propres à interfaces fixes et 42 ddls d'interface soit un total de 122 ddls . L'étude se fait pour une fréquence d'excitation variant sur la plage de 0 Hz à 35 Hz.

La Figure 2.13 montre les courbes de réponses en fréquence obtenues pour le déplacement vertical q^{dab} du pied en contact, la vitesse transversale \dot{q}_{M_x} au centre du chariot et la force de contact $f_{\text{nl}}^{\text{dab}}$ dans différentes configurations. Les simulations sont menées avec $n_h = 20$, $n_t = 2048$ et un pas de continuation adaptatif. La régularisation du contact se fait en prenant à chaque calcul $\epsilon_1 = 2 \times 10^{-2} k_A$ et $\epsilon_2 = 2 \times 10^{-2} k_B$. Ces valeurs proviennent d'observations empiriques et permettent d'obtenir un compromis satisfaisant entre une loi de contact représentative et une résolution numérique efficace. Par rapport à un pied totalement libre, l'ajout du contact avec la base (cas $k_B = 0$) entraîne un décalage des fréquences de résonances ainsi que l'apparition de pics supplémentaires, surtout à basses fréquences, bien visibles sur la Figure 2.13b. Il est aussi possible de noter que l'amplitude de la vitesse \dot{q}_{M_x} augmente significativement. Lorsque le dispositif anti-basculement est présent, les réponses fréquentielles suivent celle du cas $k_B = 0$ jusqu'à ce que le déplacement vertical du pied dépasse la valeur du jeu g (Figures 2.13a et 2.13b). La Figure 2.13d permet d'illustrer les fréquences d'excitation conduisant à un contact avec le dispositif. Le contact avec le dispositif anti-basculement entraîne des bifurcations de type repliement ainsi qu'un décalage du pic de résonance comme illustré notamment par les grossissements sur les Figures 2.13a et 2.13c. La Figure 2.13c permet aussi de remarquer que l'ajout de la non-linéarité a une influence complexe et difficile à anticiper sur la vitesse transversale \dot{q}_{M_x} .

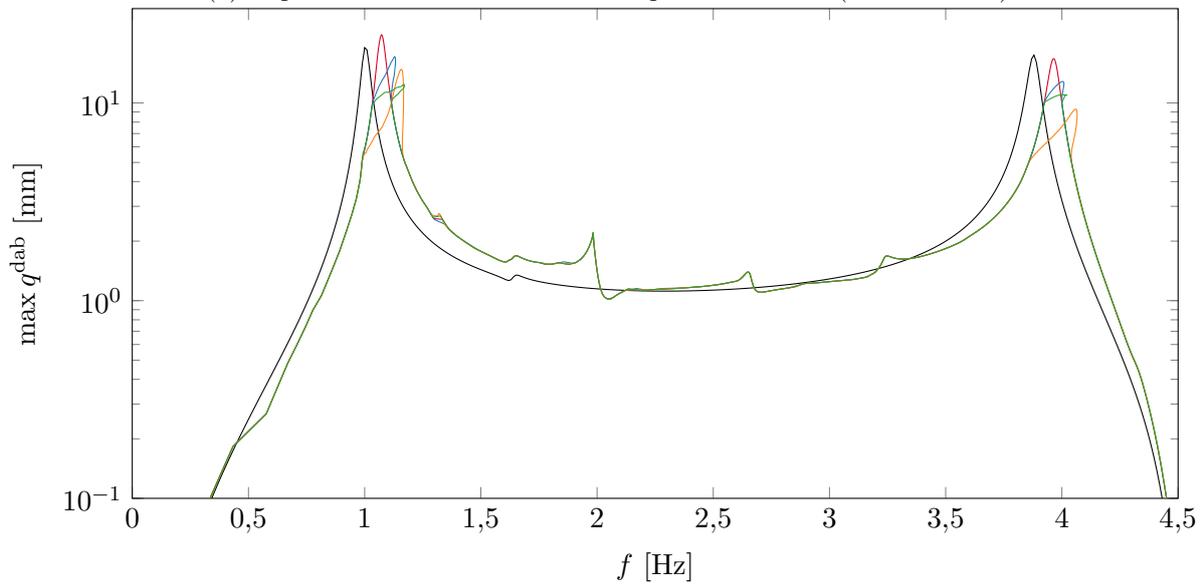
Les réponses temporelles obtenues pour une fréquence d'excitation de 13,41 Hz sont comparées sur la Figure 2.14 à celles obtenues avec une intégration temporelle faisant office de référence dans trois configurations (linéaire, contact avec la base uniquement et présence d'un dispositif anti-basculement). Les résultats obtenus avec le solveur mécanique se superposent parfaitement avec ceux de l'intégration temporelle sur les Figures 2.14a et 2.14b. L'effet de la non-linéarité se retrouve sur ces deux figures où, pour une même excitation, l'amplitude des réponses diffère de manière notable. La Figure 2.14c représentant l'effort non linéaire $f_{\text{nl}}^{\text{dab}}$ permet de distinguer les phases de contact avec la base ($f_{\text{nl}}^{\text{dab}} < 0$), celles où aucun contact n'a lieu ($f_{\text{nl}}^{\text{dab}} \simeq 0$), et enfin les éventuelles phases de contact avec le dispositif anti-basculement ($f_{\text{nl}}^{\text{dab}} > 0$). Les résultats obtenus par HBM semblent se superposer à ceux de référence, mais les vues plus détaillées des efforts non linéaires fournies en Figure 2.15 mettent en avant la présence du phénomène de Gibbs [GIBBS 1898, 1899]. Il s'agit d'un effet de bord inhérent aux séries de Fourier qui se traduit par la présence de fortes oscillations au voisinage des points de discontinuité de la dérivée d'un signal de classe C^1 par morceaux. Le phénomène de Gibbs peut être atténué en augmentant les coefficients ϵ_1 et ϵ_2 dans la régularisation de l'effort de contact donnée par l'équation (2.53) ou en implémentant un filtrage des harmoniques [COLAÏTIS et BATAILLY 2021].

L'illustration ainsi présentée montre la capacité du solveur mécanique à traiter des structures industrielles présentant des phénomènes de contact localisés. La procédure de condensation de Craig-Bampton permet de réduire la taille du système résolu par HBM tout en conservant une très bonne représentation du comportement de la structure sur la plage de fréquences considérée. Les résultats obtenus sont conformes à la référence calculée par intégration temporelle et la réponse fréquentielle du

2.3. ILLUSTRATION



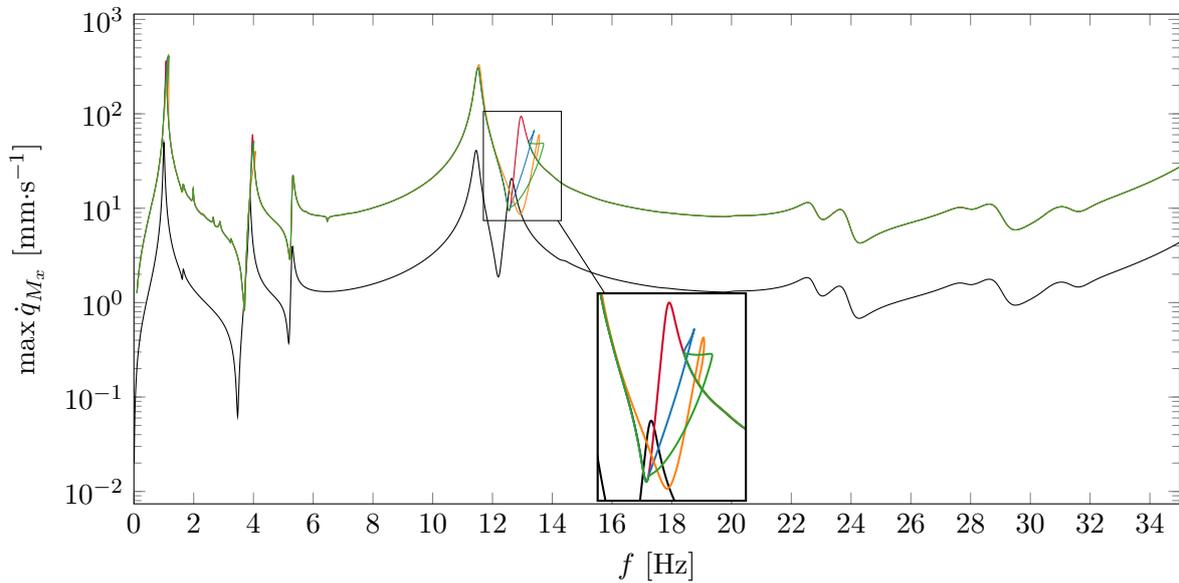
(a) Déplacement vertical maximal du pied en contact (selon l'axe Y).



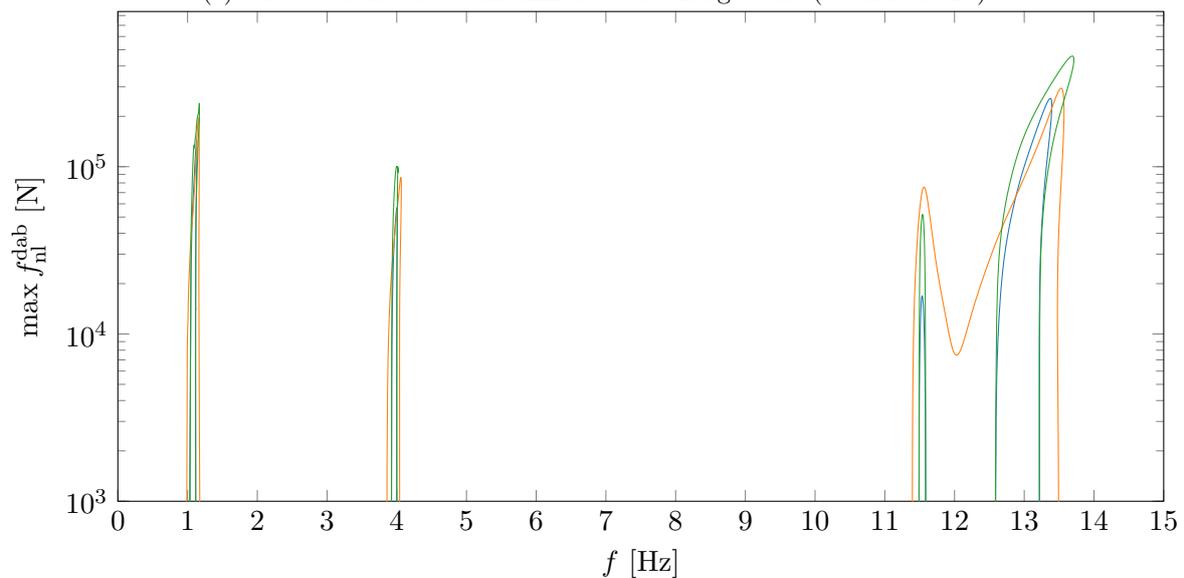
(b) Déplacement vertical maximal du pied en contact focalisé sur la plage de 0 Hz à 4,5 Hz

FIGURE 2.13 – Courbes de réponses en fréquence du portique de levage.

2.3. ILLUSTRATION



(c) Vitesse transversale maximale de la charge utile (selon l'axe X).

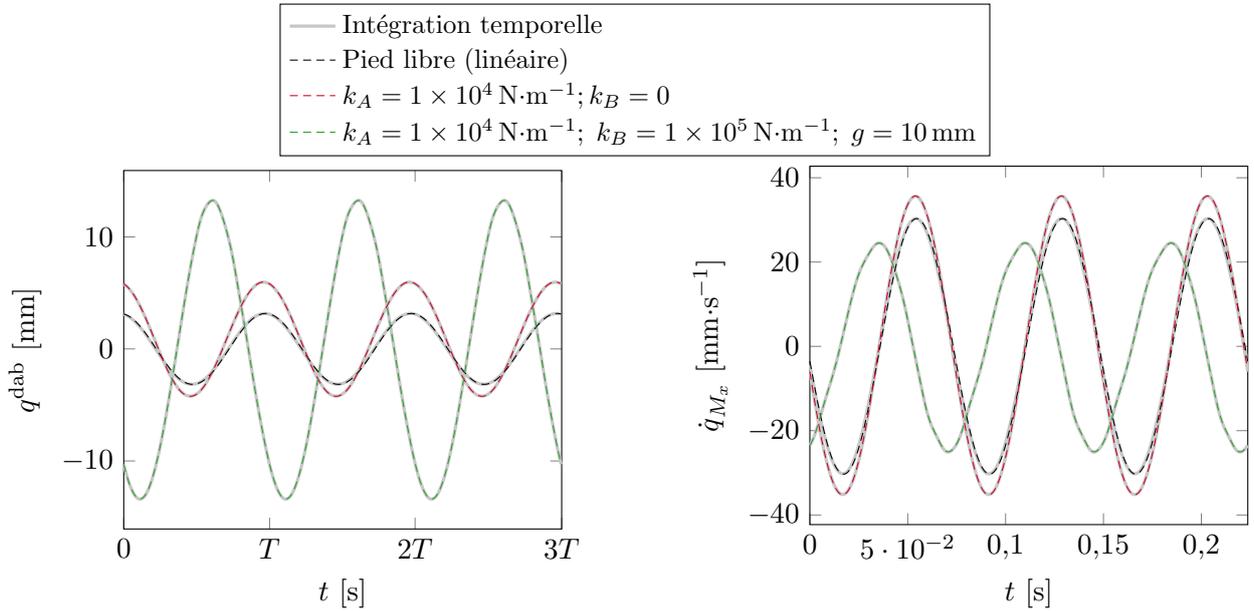


(d) Force de contact maximale au niveau du dispositif anti-basculement (selon l'axe Y), restreinte à la plage de fréquences sur laquelle le contact se produit.

FIGURE 2.13 – Courbes de réponses en fréquence du portique de levage (suite).

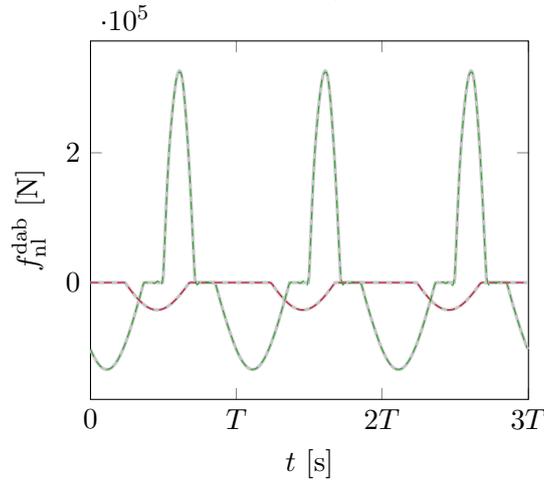
portique de levage a pu être déterminée en incluant les bifurcations par repliement. La gestion de la non-linéarité de contact peut s'avérer délicate numériquement en cas de très fortes raideurs de contact, mais la stratégie de régularisation mise en place permet d'en faciliter la résolution. La détermination des paramètres de régularisation ϵ_1 et ϵ_2 n'est néanmoins pas évidente et relève de constatations empiriques. Les paramètres de la HBM ont aussi un rôle important dans la convergence du solveur mécanique en cas de fortes non-linéarités. Il est notamment nécessaire d'affiner largement la discrétisation temporelle

2.3. ILLUSTRATION



(a) Déplacement vertical du pied en contact (selon l'axe Y).

(b) Vitesse transversale de la charge utile (selon l'axe X).



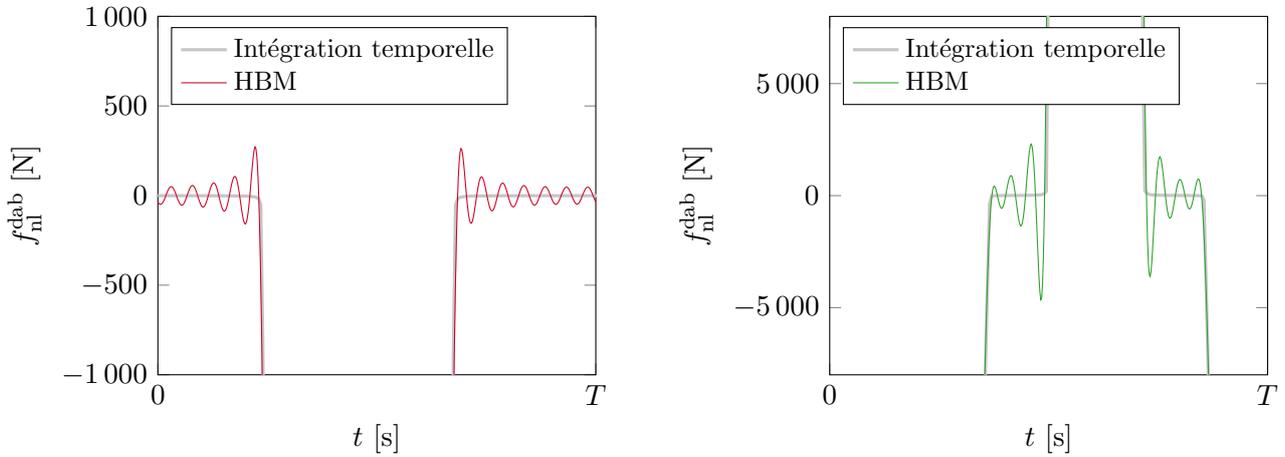
(c) Force de contact au niveau du dispositif anti-basculement (selon l'axe Y).

FIGURE 2.14 – Réponses temporelles du portique de levage pour une excitation de 13,41 Hz.

n_t lors de la méthode AFT pour que le solveur puisse traiter des phénomènes de contact les plus forts, ce qui a un impact important sur le temps de calcul.

Le solveur mécanique mis en place au sein de cette thèse est basé sur la méthode de l'équilibrage harmonique avec une procédure d'alternance fréquence/temps, associée à une procédure de continuation par pseudo-longueur d'arc. Ce solveur permet de déterminer les branches de solutions d'une structure non linéaire au cours de la variation de la fréquence de l'excitation qu'elle subit. Pour de grandes structures

2.3. ILLUSTRATION



(a) Force de contact au niveau du dispositif anti-basculement pour $k_A = 1 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ et $k_B = 0$.

(b) Force de contact au niveau du dispositif anti-basculement pour $k_A = 1 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $k_B = 1 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ et $g = 10 \text{ mm}$.

FIGURE 2.15 – Phénomène de Gibbs apparaissant lors du calcul de la force de contact.

présentant des non-linéarités localisées, une condensation de Craig-Bampton peut préalablement être réalisée afin de réduire considérablement la taille du système à résoudre sans altérer le comportement dynamique. Les illustrations présentées permettent de montrer les résultats obtenus par la méthode sur des cas académiques et industriels. L'influence des paramètres de la méthode est aussi succinctement explorée. Il est montré que ces paramètres peuvent avoir une influence significative sur les performances de la méthode ainsi que sur sa capacité à traiter des fortes non-linéarités. Il reste difficile de formuler des généralités sur le choix optimal pour ces paramètres qui dépendent du problème étudié et sont déterminés empiriquement pour les cas traités dans ces travaux. Par conséquent, une analyse approfondie des performances du solveur mécanique, ainsi que sa comparaison avec d'autres méthodes, s'avèrent ardues. Il ressort tout de même que les temps de calculs, bien que trop importants pour mettre en place une stratégie d'optimisation classique, semblent rendre possible le déploiement d'une stratégie d'optimisation bayésienne. En outre, la capacité du solveur mécanique à prendre en compte les bifurcations dans la réponse fréquentielle permet d'obtenir une meilleure compréhension du comportement des structures étudiées comparé à d'autres méthodes. La méthode de résolution en dynamique non linéaire présentée dans ce chapitre est ainsi utilisée au sein d'une stratégie d'optimisation bayésienne dans la suite de ces travaux.

Chapitre 3

Stratégie d'optimisation Bayésienne sous contraintes

Ce chapitre est consacré à la description de la stratégie d'optimisation bayésienne mise en place. Les éléments relatifs à la création de modèles de substitution de type processus gaussien sont détaillés. Leur utilisation dans le cadre d'une stratégie d'optimisation bayésienne est ensuite présentée. La stratégie est illustrée avec la résolution de problèmes d'optimisation de fonctions mathématiques avec et sans contraintes.

Contenu

3.1	Rappel du problème d'optimisation	104
3.2	Modèles de substitution	104
3.3	Création d'un modèle de substitution de type processus gaussien	105
3.3.1	Échantillonnage	105
3.3.2	Processus gaussien	106
3.4	Optimisation bayésienne	108
3.4.1	Optimisation sans contraintes	110
3.4.2	Optimisation sous contraintes d'inégalités	112
3.5	Illustration	113
3.5.1	Optimisation sans contraintes d'une fonction dans un espace de dimension 1.	114
3.5.2	Optimisation sous contraintes d'une fonction dans un espace de dimension 2.	117

3.1 Rappel du problème d'optimisation

Pour rappel, l'ambition est ici de résoudre un problème d'optimisation paramétrique sous contraintes d'inégalités pouvant se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} y(\mathbf{x}), \\ \text{s.l.c. : } &\forall i \in \mathcal{I}, h_i(\mathbf{x}) \leq 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Il s'agit ainsi de trouver le jeu de paramètres $\mathbf{x}^* \in \mathcal{D}$, où $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n_p}$ est l'espace de conception, qui minimise une fonction objectif y , tout en respectant d'éventuelles contraintes d'inégalités $h_i(\mathbf{x}^*) \leq 0$, $\forall i \in \mathcal{I}$ (avec $h_i : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$). Pour un jeu de paramètres $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ donné, les fonctions objectif et contraintes sont évaluées à partir d'un calcul mécanique de réponse fréquentielle grâce au solveur dynamique non linéaire développé au Chapitre 2 (page 75).

La stratégie d'optimisation bayésienne implique dans un premier temps la création d'un modèle de substitution de la fonction objectif et des fonctions contraintes afin d'obtenir une approximation de ces dernières. Ce métamodèle est ensuite utilisé au sein d'une démarche d'enrichissement intelligente, permettant de converger vers le minimum global \mathbf{x}^* .

3.2 Modèles de substitution

Un modèle de substitution (ou métamodèle) est un modèle mathématique cherchant à approximer une fonction à partir d'un nombre limité de données d'observation. Plusieurs utilisations des métamodèles peuvent se trouver dans l'ingénierie. Par exemple, ils peuvent servir à gérer des données bruitées ou manquantes, à fournir une connaissance des relations entre les variables, ou encore à interpoler les résultats provenant d'évaluations coûteuses, comme c'est le cas dans le cadre de l'optimisation bayésienne [FORRESTER et al. 2008]. La littérature scientifique au sujet des modèles de substitution est vaste et de nombreuses méthodes ont été développées lors des quarante dernières années. En particulier, il est possible de trouver des travaux comparant les modèles de substitution dans un objectif général d'approximation [GIUNTA et WATSON 1998; JIN et al. 2001; SIMPSON, POPLINSKI et al. 2001; B.-S. KIM et al. 2009; D. ZHAO et XUE 2010; Y. ZHAO et al. 2023], dans le cadre de l'optimisation [SIMPSON, MISTREE et al. 1998; STANDER et al. 2004; FANG et al. 2005; BARTON et MECKESHEIMER 2006; PAIVA et al. 2010; EISENHOWER et al. 2012; VIANA et al. 2013; LEIFSSON et KOZIEL 2016; CHATTERJEE et al. 2019; DELAZERI et al. 2022; MUKHTAR et al. 2023], pour la quantification des incertitudes [JU et al. 2016; C. WANG et al. 2022], au sein d'approches multifidélité [FERNÁNDEZ-GODINO 2023] ou encore pour l'analyse de sensibilité [CHENG et al. 2020]. Parmi les méthodes répertoriées, les processus gaussiens [RASMUSSEN et C. K. I. WILLIAMS 2005; GRAMACY 2020] se montrent être des métamodèles robustes pouvant être utilisés pour des applications variées. Ce type de métamodèle n'est pas toujours le meilleur pour certaines applications, mais il offre une bonne polyvalence, même avec un faible nombre de données d'observation, ainsi qu'un estimateur d'erreur basé sur un cadre probabiliste rigoureux permettant de définir des critères d'enrichissement dans le cadre d'une optimisation bayésienne. La stratégie d'optimisation développée dans ces travaux emploie ainsi des modèles de substitution de type

processus gaussien dont le principe est détaillé dans la section suivante.

3.3 Création d'un modèle de substitution de type processus gaussien

Afin de détailler la méthode d'élaboration des processus gaussiens utilisés dans le cadre de l'optimisation bayésienne, une fonction $y : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est considérée. En pratique des métamodèles indépendants sont créés pour chacune des fonctions objectif et contraintes.

3.3.1 Échantillonnage

La construction d'un modèle de substitution se base sur un ensemble d'échantillons de l'espace de conception $\mathbf{x}^{(i)}$, $i \in \llbracket 1; n_e \rrbracket$ et sur les réponses associés $y(\mathbf{x}^{(i)})$. Pour obtenir cet échantillonnage, il est nécessaire de mettre en place un plan d'expériences numériques [SACKS et al. 1989]. Dans le cadre de cette thèse les résultats des simulations numériques sont supposés déterministes, aucune variabilité n'est ainsi prise en compte dans les observations $y(\mathbf{x}^{(i)})$. Le développement de plans d'expériences numériques forme un domaine de recherche à part entière, et de nombreuses méthodes ont été étudiées, dont une synthèse peut se trouver dans la thèse de FRANCO (2008).

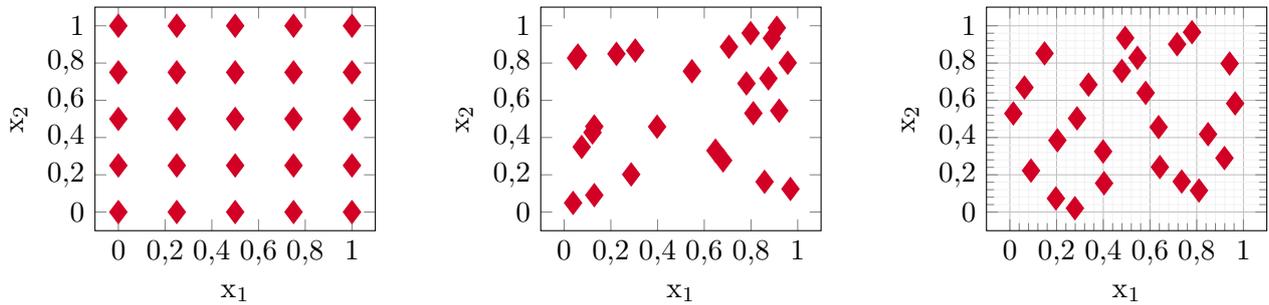
Dans ces travaux, une distribution par hypercube latin (LHS ou *Latin Hypercube Sampling*) [MCKAY et al. 1979] est utilisée afin de réaliser l'échantillonnage. Cette méthode permet de fournir de manière relativement simple et quasi aléatoire des échantillons non redondants assez bien répartis. La stratégie LHS repose sur un découpage de chacun des n_p axes de \mathcal{D} en n_e segments de même longueur ce qui résulte en maillages de $n_e^{n_p}$ cellules. Parmi ce maillage, n_e cellules sont choisies de manière à ce qu'en projection sur chacun des axes de \mathcal{D} , chaque cellule soit sélectionnée exactement une fois. Pour finir, un point est retenu dans chacune des cellules choisies en réalisant un tirage aléatoire suivant une distribution uniforme. Ainsi les points $\mathbf{x}^{(i)}$, $i \in \llbracket 1; n_e \rrbracket$ d'un hypercube $[0, 1]^{n_p}$ sont obtenus par la formule :

$$\forall k \in \llbracket 1; n_p \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1; n_e \rrbracket, \mathbf{x}_k^{(i)} = \frac{\sigma_k(i) - U_k^{(i)}}{n_e}, \quad (3.2)$$

où les σ_k sont n_p permutations distinctes (choisies aléatoirement) de $\llbracket 1; n_e \rrbracket$ et $U_k^{(i)}$ est une valeur aléatoire de distribution uniforme sur $[0, 1]$. Les ensembles $(\sigma_1(i), \dots, \sigma_{n_p}(i))$ et $(U_1^{(i)}, \dots, U_{n_p}^{(i)})$ représentent alors respectivement la cellule dans laquelle se trouve le point $\mathbf{x}^{(i)}$ et l'endroit où se situe ce point dans la cellule. Cependant, les permutations retenues peuvent laisser certaines zones sans points lorsque le nombre d'échantillons est faible. Afin d'obtenir un échantillonnage de bonne qualité pour la création des modèles de substitution, plusieurs tirages LHS sont générés et le meilleur est sélectionné selon un critère adapté. Parmi les différentes stratégies existantes [LAURENT 2013], le critère *maximin* [M. E. JOHNSON et al. 1990] est ici utilisé. Cette stratégie vise à maximiser la distance minimale entre deux points échantillonnés.

La Figure 3.1 permet de comparer un tirage par LHS à d'autres méthodes en dimension 2. Un échantillonnage suivant une grille (Figure 3.1a) permet une bonne répartition dans l'espace, mais demande un nombre d'échantillons important, qui croît exponentiellement avec la dimension n_p . De plus,

3.3. CRÉATION D'UN MODÈLE DE SUBSTITUTION DE TYPE PROCESSUS GAUSSIEN



(a) Échantillonnage suivant une grille.

(b) Échantillonnage aléatoire.

(c) Échantillonnage par LHS.

FIGURE 3.1 – Illustration de différentes méthodes pour tirer 25 échantillons dans $[0, 1]^2$.

avec un maillage trop grossier, d'importantes zones vides d'échantillons apparaissent. L'échantillonnage présenté en Figure 3.1b est obtenu en effectuant un tirage complètement aléatoire selon une loi uniforme. L'inconvénient de cette méthode est que deux points très proches l'un de l'autres peuvent être tirés tandis que de grandes zones sont laissées vides. Finalement, le tirage effectué par LHS avec un critère *maximin* montré en Figure 3.1c propose une meilleure répartition. La représentation d'une grille 25×25 sur la Figure 3.1c permet de vérifier qu'exactly un point est tiré sur chaque ligne et chaque colonne.

3.3.2 Processus gaussien

Un processus gaussien est un processus stochastique pour lequel chaque collection finie de variables aléatoires suit une loi normale multidimensionnelle. Une régression par processus gaussien est un modèle statistique qui utilise ce type de processus aléatoire pour la création de modèles de substitution à partir d'observations [RASMUSSEN et C. K. I. WILLIAMS 2005 ; FORRESTER et al. 2008 ; GRAMACY 2020]. La prédiction par processus gaussien a d'abord été utilisée par KRIGE (1951) dans le domaine géostatistique, où la méthode se nomme désormais krigeage (ou *kriging* en anglais) [MATHERON 1963], ainsi qu'en météorologie [THOMPSON 1956]. La méthode a ensuite été étendue pour l'approximation de réponses déterministes dans un contexte de simulations numériques [SACKS et al. 1989], ce qui a inspiré la stratégie *Efficient Global Optimization* (EGO) [JONES, SCHONLAU et al. 1998] à la base de l'optimisation bayésienne telle que formulée dans ces travaux. Les processus gaussiens sont désormais largement utilisés dans de nombreux domaines du fait de leur robustesse et de leur qualité d'approximation pour un faible nombre d'observations. En outre, ils fournissent une estimation de l'erreur sur les prédictions effectuées, ce qui s'avère particulièrement utile pour la propagation d'incertitudes, ou, comme cela est développé par la suite, dans l'objectif d'enrichir le métamodèle de manière judicieuse. Les observations obtenues par simulation numérique étant supposées déterministes, l'estimation de l'erreur ne tient alors compte que de la distance par rapport aux points échantillonnés.

La création d'un métamodèle de la fonction y par processus gaussien suppose que cette fonction est la réalisation d'un processus aléatoire Y décrit par sa fonction moyenne μ et sa fonction de covariance κ . Pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, la variable aléatoire $Y(\mathbf{x})$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu(\mathbf{x}), \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{x}))$ de sorte que

3.3. CRÉATION D'UN MODÈLE DE SUBSTITUTION DE TYPE PROCESSUS GAUSSIEN

$Y(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) + Z(\mathbf{x})$, avec $Z(\mathbf{x})$ une variable aléatoire de moyenne nulle vérifiant $\forall(i, j) \in \llbracket 1; n_e \rrbracket^2$, $\text{cov}(Z(\mathbf{x}^{(i)}), Z(\mathbf{x}^{(j)})) = \kappa(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)})$. Ainsi, l'espérance \mathbb{E} et la variance σ^2 de $Y(\mathbf{x})$ s'écrivent :

$$\mathbb{E}(Y(\mathbf{x})) = \mathbb{E}(\mu(\mathbf{x}) + Z(\mathbf{x})) = \mu(\mathbf{x}), \quad (3.3)$$

$$\sigma_{Y(\mathbf{x})}^2 = \text{Var}(Y(\mathbf{x})) = \text{Var}(\mu(\mathbf{x}) + Z(\mathbf{x})) = \text{Var}(Z(\mathbf{x})) = \sigma_{Z(\mathbf{x})}^2. \quad (3.4)$$

La fonction moyenne μ est ici recherchée sous la forme d'une régression linéaire (ce qui correspond au krigeage universel) :

$$\mu(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^p \beta_k f_k(\mathbf{x}). \quad (3.5)$$

Les $(f_k)_{k \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ sont p fonctions de base (généralement choisies polynomiales) et les $(\beta_k)_{k \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ sont les coefficients de régression associés. De nombreuses fonctions de covariance κ ont été développées afin de représenter la structure de covariance du processus gaussien Y [RASMUSSEN et C. K. I. WILLIAMS 2005]. La fonction Matérn 5/2 [MATÉRN 1960] est retenue pour les applications de cette thèse, car elle est reconnue comme un choix général intéressant pour l'optimisation bayésienne [LE RICHE et PICHENY 2021]. Pour deux jeux de paramètres échantillonnés $\mathbf{x}^{(i)}$ et $\mathbf{x}^{(j)}$, la fonction de covariance prend alors la forme :

$$\kappa(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) = \sigma_Y^2 \left(1 + \sqrt{5}d + \frac{5}{3}d^2 \right) \exp(-\sqrt{5}d), \quad (3.6)$$

où $d = (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)})^\top \Theta^{-2} (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)})$ correspond à la distance entre $\mathbf{x}^{(i)}$ et $\mathbf{x}^{(j)}$ normalisée par les paramètres de longueurs de corrélation formant la matrice Θ .

Les hyperparamètres $\beta = [\beta_1 \dots \beta_k \dots \beta_p]^\top$, Θ et σ_Y^2 sont ajustés afin que le processus gaussien Y corresponde aux n_e observations. Cela se fait en utilisant des méthodes d'optimisation pour maximiser le logarithme de la vraisemblance marginale L . La vraisemblance est une fonction d'un jeu d'hyperparamètres qui correspond à la probabilité que le processus Y donne les résultats observés sachant le jeu d'hyperparamètres considéré. La fonction opposée à minimiser $-\log L$ s'écrit [FORRESTER et al. 2008 ; LAURENT 2013] :

$$-\log L(\beta, \sigma_Y^2, \Theta) = \frac{n_e}{2} \log(2\pi) + \frac{n_e}{2} \log(\sigma_Y^2) + \frac{1}{2} \log(\det(\mathcal{K})) + \frac{1}{2\sigma_Y^2} (\mathbf{y} - \mathbf{F}\beta)^\top \mathcal{K}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{F}\beta), \quad (3.7)$$

avec \mathbf{y} le vecteur des réponses observées ($\mathbf{y} = [y(\mathbf{x}^{(1)}) \dots y(\mathbf{x}^{(n_e)})]^\top$), \mathbf{F} la matrice des fonctions de régression de taille $n_e \times p$ telle que $\forall i \in \llbracket 1; n_e \rrbracket$, $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $(\mathbf{F})_{ik} = f_k(\mathbf{x}^{(i)})$, et \mathcal{K} la matrice de covariance de taille $n_e \times n_e$ telle que $\forall(i, j) \in \llbracket 1; n_e \rrbracket^2$ $(\mathcal{K})_{ij} = \kappa(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)})$. La matrice \mathcal{K} dépend ainsi des hyperparamètres σ_Y^2 et Θ , bien que cette dépendance ne soit pas représentée afin d'améliorer la lisibilité. En dérivant analytiquement la fonction L , il est possible d'obtenir la relation suivante entre les valeurs β^* , σ_Y^{2*} et Θ^* qui maximisent la vraisemblance :

$$\beta^* = (\mathbf{F}^\top \mathcal{K}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^\top \mathcal{K}^{-1} \mathbf{y}, \quad (3.8)$$

où la matrice de covariance \mathcal{K} est ici associée à la fonction de covariance pour les paramètres σ_Y^{2*} et Θ^* ajustés. Dans cette thèse, les hyperparamètres sont optimisés en utilisant la méthode de gradient

stochastique ADAM [KINGMA et BA 2017], particulièrement adaptée à ce genre de problème, avec de multiples redémarrages afin de favoriser l'exploration.

Afin de former un métamodèle de la fonction y , une prédiction en un point $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathcal{D}$ est obtenue en construisant le meilleur prédicteur linéaire non biaisé $\hat{Y}(\mathbf{x}^{(0)})$ de la variable aléatoire $Y(\mathbf{x}^{(0)})$ [GRAMACY 2020]. La prédiction moyenne $\hat{y}(\mathbf{x}^{(0)})$ et la variance $s_y^2(\mathbf{x}^{(0)})$ de ce prédicteur s'écrivent :

$$\hat{y}(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{f}^{(0)\top} \boldsymbol{\beta}^* + \boldsymbol{\kappa}^{(0)\top} \mathcal{K}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{F} \boldsymbol{\beta}^*), \quad (3.9)$$

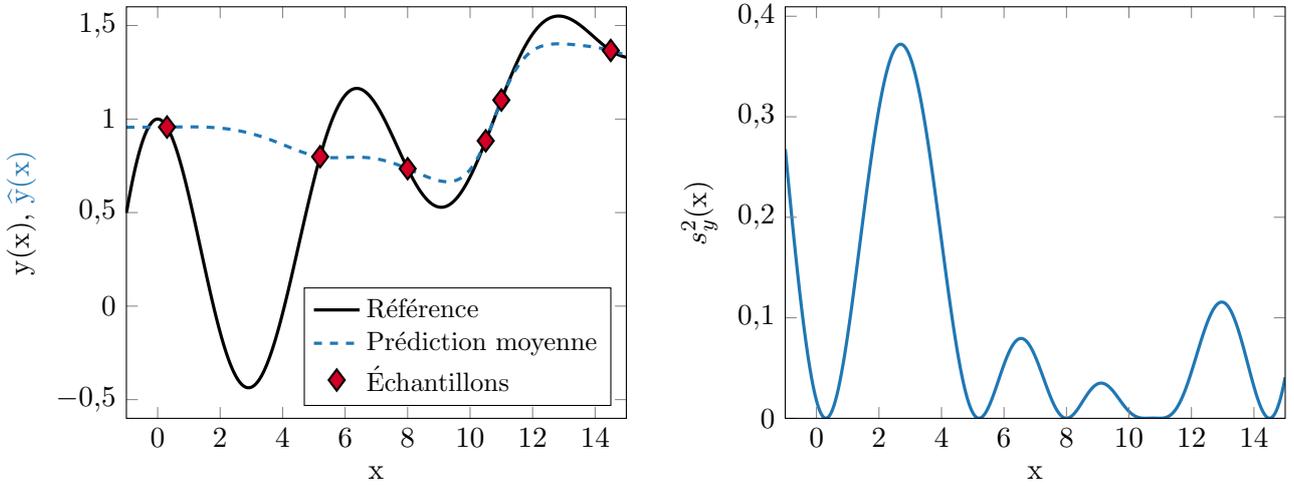
$$s_y^2(\mathbf{x}^{(0)}) = \sigma_Y^2 - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\kappa}^{(0)} \\ \mathbf{f}^{(0)} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathcal{K} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^\top & \mathbb{0}_p \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\kappa}^{(0)} \\ \mathbf{f}^{(0)} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

avec $\mathbf{f}^{(0)} = [f_1(\mathbf{x}^{(0)}) \dots f_k(\mathbf{x}^{(0)}) \dots f_p(\mathbf{x}^{(0)})]^\top$ le vecteur contenant les fonctions de régressions évaluées en $\mathbf{x}^{(0)}$ et $\boldsymbol{\kappa}^{(0)}$ le vecteur des covariances croisées tel que $\forall i \in \llbracket 1; n_e \rrbracket$, $(\boldsymbol{\kappa}^{(0)})_i = \kappa(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(0)})$. Il est ainsi possible d'obtenir une approximation \hat{y} de y en tout point de \mathcal{D} , correspondant à la valeur moyenne fournie par l'estimateur \hat{Y} en chaque point. Un modèle de substitution de y est ainsi créé. De plus, l'information sur la variance de l'estimateur \hat{Y} permet de quantifier l'erreur d'approximation. Comme les données d'observation sont supposées déterministes, la variance est uniquement dépendante de la distance aux points échantillonnés et celle-ci s'annule en ces points. Ce renseignement sur l'erreur d'approximation peut alors être utilisé pour ajouter intelligemment des données d'observation, dans le but d'améliorer la qualité du métamodèle.

Un exemple de métamodèle est montré en Figure 3.2 pour approcher sur $\mathcal{D} = [-1; 15]$ la fonction $y : x \mapsto \exp(-\frac{1}{10}x) \cos(x) + \frac{1}{10}x$, déjà présentée en Figure 1.2 dans le Chapitre 1 (page 23). Le processus gaussien est construit à partir de 6 échantillons. Avec ce faible nombre d'observations, la prédiction représentée en Figure 3.2a est logiquement assez éloignée de la fonction réelle, mais les propriétés des processus gaussiens font que la fonction est exactement interpolée au niveau des échantillons. L'information sur la variance, représentée en Figure 3.2b permet de bien mettre en évidence les endroits où l'approximation peut être améliorée.

3.4 Optimisation bayésienne

Après avoir construit des modèles de substitution des fonctions objectif et contraintes, il est possible d'utiliser un algorithme d'optimisation globale sous contraintes classique sur les fonctions approchées fournies par les métamodèles. En effet, leur coût d'évaluation est négligeable par rapport au coût du calcul mécanique et il n'y a donc pas de difficulté à effectuer un nombre important d'itérations. Cependant, afin d'obtenir le résultat optimal avec une bonne précision, il faut que la région du minimum global, inconnue a priori, soit fidèlement représentée par le métamodèle. Lorsque aucune information n'est connue sur le comportement des fonctions, cela requiert alors de construire les modèles de substitution en utilisant un échantillonnage relativement dense de l'espace de conception \mathcal{D} , ce qui implique donc un nombre important d'évaluations des fonctions objectif et contraintes. Dans le cadre de l'optimisation paramétrique de structures en dynamique non linéaire, le coût de calcul associé à ces évaluations est trop important pour rendre la stratégie d'optimisation sur les métamodèles intéressante.



(a) Approximation fournie par le métamodèle.

(b) Variance associée.

FIGURE 3.2 – Illustration d'un métamodèle par processus gaussien de la fonction y d'expression $y : x \mapsto \exp(-\frac{1}{10}x) \cos(x) + \frac{1}{10}x$ sur $\mathcal{D} = [-1; 15]$.

Les stratégies d'optimisation bayésienne [MOCKUS et al. 1978 ; JONES, SCHONLAU et al. 1998 ; FRAZIER 2018 ; LE RICHE et PICHENY 2021] ont pour but de rendre possible l'optimisation de fonctions onéreuses à calculer en cherchant à réduire le plus possible le nombre d'évaluations. Le principe général de l'optimisation bayésienne est représenté en Figure 3.3. La première étape consiste à construire des métamodèles des fonctions objectif et contraintes à partir d'un faible nombre n_e d'échantillons $\mathbf{x}^{(i)}$, $i \in \llbracket 1; n_e \rrbracket$ tirés avec une méthode LHS (section 3.3.1 (page 105)). Ces premiers métamodèles, peu représentatifs des fonctions qu'ils approximent au vu du faible nombre de données d'observations, sont ensuite enrichis itérativement. Les informations obtenues grâce aux modèles de substitution sont ainsi utilisées afin de déterminer des zones potentiellement intéressantes dans l'espace de conception en utilisant un critère, appelé fonction d'acquisition. La recherche du maximum de cette fonction d'acquisition à chaque itération permet de déterminer les zones aux potentiels les plus intéressants. Les métamodèles sont alors enrichis itérativement par ajout de nouveaux échantillons dans ces zones, ce qui évite une densification de tout l'espace \mathcal{D} . L'objectif est qu'à la fin de processus d'enrichissement, les modèles de substitution fournissent une approximation de très bonne qualité autour du minimum global (la précision de l'approximation loin de cette zone n'a pas d'importance). La notation $\mathbf{x}^{(n_e+m)}$ est utilisée pour désigner le $m^{\text{ème}}$ point ajouté. De nombreuses fonctions d'acquisitions ont été élaborées afin de déterminer un point d'enrichissement d'un modèle de substitution [FUHG et al. 2021]. La stratégie d'optimisation bayésienne utilisée dans cette thèse est détaillée dans la suite, d'abord dans le cadre d'un problème d'optimisation sans contraintes, puis pour de l'optimisation sous contraintes d'inégalités.

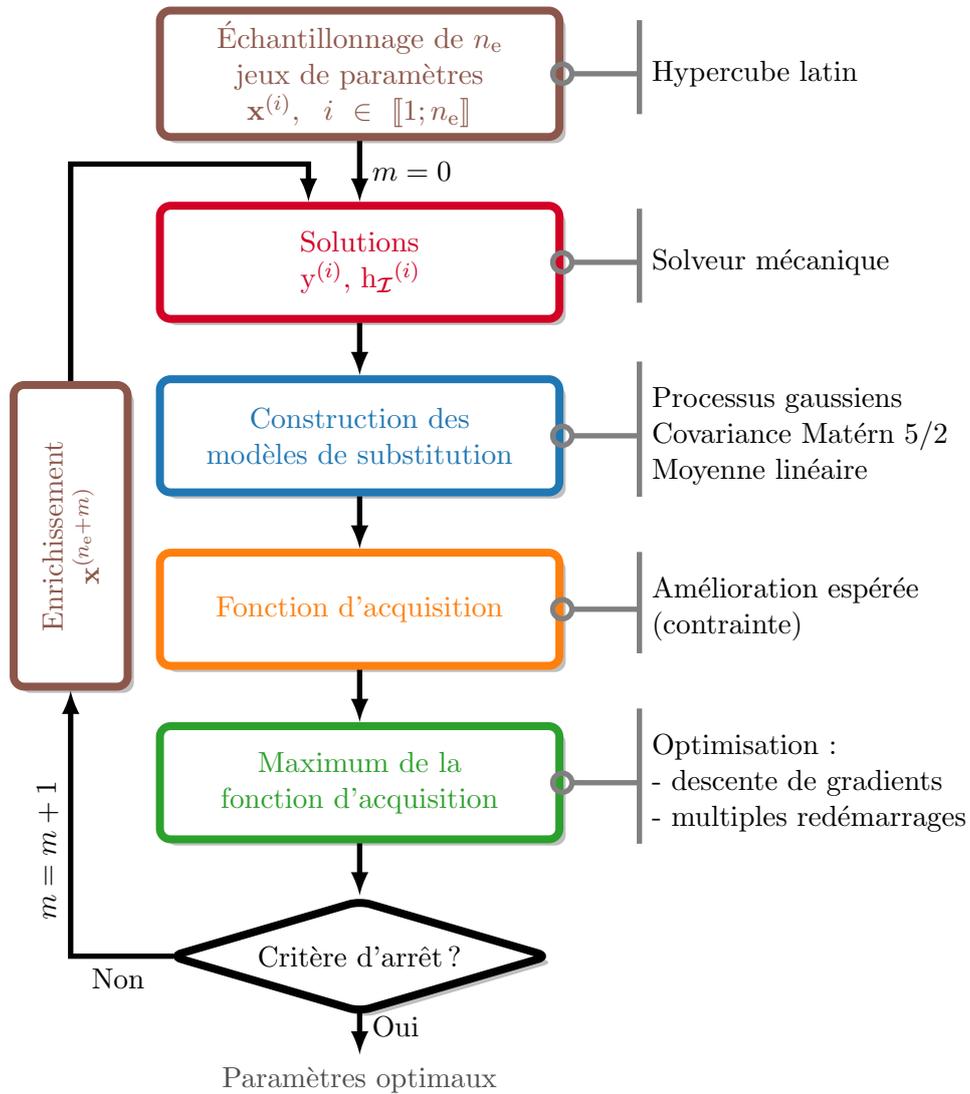


FIGURE 3.3 – Principe général de l’optimisation bayésienne

3.4.1 Optimisation sans contraintes

Comme cela a déjà été énoncé au sein du Chapitre 1 (page 23), dans le cadre d’un problème d’optimisation sans contraintes, l’objectif est de trouver le jeu de paramètres \mathbf{x}^* qui minimise la fonction objectif y sur \mathcal{D} sans aucune autre considération :

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} y(\mathbf{x}). \quad (3.11)$$

La stratégie d’optimisation bayésienne mise en place pour résoudre le problème d’équation (3.11) suit la stratégie EGO [JONES, SCHONLAU et al. 1998] en utilisant le critère de l’amélioration espérée (EI ou *Expected Improvement*) [SCHONLAU 1997] comme fonction d’acquisition pour l’enrichissement

d'un métamodèle de type processus gaussien. Ce critère offre un très bon compromis entre l'exploration et l'exploitation en pondérant les zones où le modèle de substitution prédit un minimum et les zones où l'erreur de prédiction est importante. Lors de l'itération $m + 1$ du processus d'enrichissement, la fonction objectif a été évaluée pour les n_e jeux de paramètres de l'échantillonnage initial, puis sur les m points ajoutés. Un estimateur \hat{Y} d'un processus gaussien Y , ajusté à partir des $n_e + m$ observations, est construit. Ce métamodèle fournit ainsi une prédiction moyenne \hat{y} et la variance associée s_y . En tout point \mathbf{x} de \mathcal{D} , la fonction d'acquisition α_{EI} , associée au critère de l'EI, s'écrit :

$$\begin{aligned}\alpha_{\text{EI}}(\mathbf{x}) &= \mathbb{E}(I(\mathbf{x}|y_{\min}^m)) \\ &= (y_{\min}^m - \hat{y}(\mathbf{x})) \Phi(z(\mathbf{x})) + s_y(\mathbf{x})\phi(z(\mathbf{x})).\end{aligned}\quad (3.12)$$

Le terme $I(\mathbf{x}|y_{\min}^m) = \max(y_{\min}^m - \hat{Y}(\mathbf{x}); 0)$ correspond à l'amélioration statistique par rapport à y_{\min}^m , le minimum observé sur les $n_e + m$ échantillons. Les notations ϕ et Φ désignent respectivement la densité de probabilité et la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. La fonction z est définie telle que $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$, $z(\mathbf{x}) = \frac{y_{\min}^m - \hat{y}(\mathbf{x})}{s_y(\mathbf{x})}$. L'enrichissement se fait au point pour lequel le critère de l'EI est maximal :

$$\mathbf{x}^{(n_e+m+1)} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} \alpha_{\text{EI}}(\mathbf{x}). \quad (3.13)$$

Pour des données déterministes, comme c'est le cas ici, la fonction d'acquisition s'annule aux points déjà évalués, ce qui présente l'avantage d'empêcher l'ajout de nouveaux points aux endroits où des observations sont déjà disponibles. La détermination de la fonction α_{EI} ne fait intervenir que les estimations fournies par le modèle de substitution de la fonction objectif. Son coût de calcul est donc faible. Lorsque la dimension n_p n'est pas trop grande, il est ainsi possible de calculer α_{EI} sur une grille fine de l'espace \mathcal{D} afin d'en déterminer le maximum. En revanche, en plus grande dimension, un algorithme d'optimisation est préféré afin de résoudre le problème d'équation (3.13). La fonction d'acquisition possède généralement un nombre important de maxima locaux, ce qui rend difficile l'obtention du maximum global. Cela n'est néanmoins pas critique, car un point de maximum local demeure un point d'enrichissement intéressant. Dans ces travaux, l'optimisation de la fonction d'acquisition se fait par une méthode de descente de gradient avec plusieurs redémarrages. Cette méthode est directement intégrée dans le module python *BoTorch*, utilisé dans ces travaux pour exécuter la stratégie d'optimisation.

Le modèle de substitution de la Figure 3.2a est repris pour illustrer le critère de l'amélioration espérée. Ainsi, sur la Figure 3.4, la fonction α_{EI} est superposée à la représentation de ce métamodèle. Cet exemple est révélateur de l'intérêt de la fonction d'acquisition choisie qui prend en compte la zone du minimum prédit (ici autour de $\mathbf{x} = 9$), afin de permettre l'exploitation, mais aussi les zones pour lesquelles la variance associée à l'estimateur construit est maximale, afin de ne pas négliger l'exploration. Ce critère propose donc un moyen efficace pour définir comment enrichir le métamodèle afin de réussir à approcher de manière précise le minimum global.

À la fin du processus itératif, le jeu de paramètres optimal \mathbf{x}^* obtenu est le point correspondant à la valeur la plus faible de la fonction objectif parmi les points échantillonnés ($y(\mathbf{x}^*) = y_{\min}^m$). Le choix d'une condition d'arrêt des itérations permettant une bonne convergence vers le minimum global de la fonction objectif est délicat et aucun consensus ne semble exister sur un critère général [LE RICHE

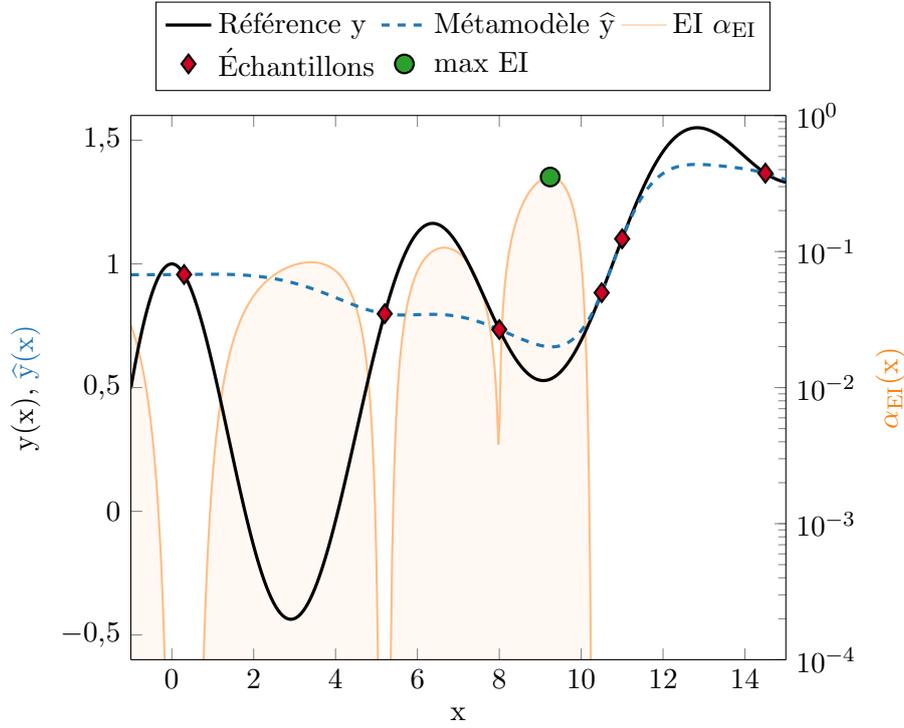


FIGURE 3.4 – Illustration du critère de l’amélioration espérée.

et PICHENY 2021]. Une stratégie courante consiste à définir un budget : l’algorithme est stoppé soit lorsqu’un nombre maximum d’évaluations de la fonction objectif est atteint, soit lorsqu’un temps total de calcul est dépassé. D’autres critères utilisant les valeurs de la fonction d’acquisition ont aussi été développés. Par exemple, dans le cadre d’un problème d’optimisation sans contraintes, la méthode EGO compare le rapport entre la valeur maximale de α_{EI} et y_{\min}^m à un petit paramètre δ_{EGO} . Ainsi, l’enrichissement est arrêté lorsque :

$$c_{EGO} = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} \frac{\alpha_{EI}(\mathbf{x})}{|y_{\min}^m|} < \delta_{EGO}. \quad (3.14)$$

La valeur de δ_{EGO} est fixée empiriquement, généralement autour de 1%.

3.4.2 Optimisation sous contraintes d’inégalités

Lorsque des contraintes d’inégalités sont présentes, le problème d’optimisation s’écrit sous la forme (3.1) rappelée ici :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} y(\mathbf{x}), \\ \text{s.l.c. : } &\forall i \in \mathcal{I}, h_i(\mathbf{x}) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

La stratégie d’optimisation bayésienne reste similaire à celle d’un problème d’optimisation sans contraintes. En plus de celui de la fonction objectif, des métamodèles indépendants sont construits

3.5. ILLUSTRATION

pour chaque fonction contrainte à partir des mêmes échantillons $\mathbf{x}^{(i)}$. Dans le cadre de ces travaux, les évaluations des fonctions objectif et contraintes se font à partir du résultat du même calcul dynamique non linéaire. Ainsi, pour un jeu de paramètres $\mathbf{x}^{(i)}$, les observations sur chacune des fonctions correspondent à un appel au solveur mécanique. La différence majeure vient d’une modification de la fonction d’acquisition utilisée afin d’éviter un enrichissement dans une région non admissible. Le critère de l’amélioration espérée contrainte (CEI ou *Constrained Expected Improvement*) [SCHONLAU et al. 1998 ; GARDNER, KUSNER et al. 2014] est alors utilisé. Il consiste à pondérer l’EI par les probabilités de satisfaire les $n_{\mathcal{I}}$ contraintes d’inégalités $P(\widehat{H}_j(\mathbf{x}) \leq 0)$, où \widehat{H}_j désigne l’estimateur associé aux fonctions contraintes h_j , pour $j \in \mathcal{I}$. Étant donné que $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$, $\widehat{H}_j(\mathbf{x})$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\widehat{h}_j(\mathbf{x}), s_{h_j}^2(\mathbf{x}))$, cette probabilité a pour expression :

$$P(\widehat{H}_j(\mathbf{x}) \leq 0) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{s_{h_j}(\mathbf{x})\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(t - \widehat{h}_j(\mathbf{x}))^2}{s_{h_j}^2(\mathbf{x})}} dt. \quad (3.16)$$

La fonction d’acquisition α_{CEI} associée au critère CEI s’écrit :

$$\alpha_{\text{CEI}} = \mathbb{E}(\mathbf{I}(\mathbf{x}|y_{\min}^m)) \prod_{j \in \mathcal{I}} P(\widehat{H}_j(\mathbf{x}) \leq 0). \quad (3.17)$$

Dans ce cas, y_{\min}^m correspond au minimum des observations qui se trouvent dans la région admissible $\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} \mid \forall j \in \mathcal{I}, h_j(\mathbf{x}) \leq 0\}$.

La suite de la démarche d’optimisation bayésienne est identique à celle décrite pour la résolution d’un problème d’optimisation sans contraintes. L’enrichissement se fait au point qui maximise α_{CEI} , et y_{\min}^m converge itérativement vers le minimum global du problème d’optimisation sous contraintes.

3.5 Illustration

La stratégie d’optimisation bayésienne est implémentée au sein d’un programme python en utilisant le module *BoTorch* [BALANDAT et al. 2020]. Ce module manipule des métamodèles par processus gaussien provenant du module *GPyTorch* [GARDNER, PLEISS et al. 2018] et intègre directement des outils pour le calcul et la recherche du maximum des fonctions d’acquisitions. Ces deux modules sont basés sur la bibliothèque *PyTorch* [PASZKE et al. 2019]. Le module *pyDOE* [PYDOE 2013] est employé afin de réaliser le tirage initial des échantillons par la méthode LHS. La stratégie d’optimisation bayésienne est illustrée sur des fonctions tests purement mathématiques en petite dimension afin de pouvoir visualiser le mode opératoire. Un problème d’optimisation sans contraintes en dimension 1 et un problème avec une contrainte d’inégalité en dimension 2 sont étudiés. Les performances de la stratégie d’optimisation sont étudiées en fonction du nombre n_y d’appels à la fonction objectif y , car dans un contexte d’optimisation de structures en dynamique non linéaire, l’évaluation de cette fonction représente la quasi-intégralité du coût de calcul lors de la résolution d’un problème d’optimisation.

3.5.1 Optimisation sans contraintes d'une fonction dans un espace de dimension 1.

Dans un premier temps, la fonction de la Figure 1.2a est à nouveau prise pour un exemple d'optimisation sans contraintes. Le problème d'optimisation s'écrit :

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in [-1; 15]} \left(\exp\left(-\frac{1}{10}\mathbf{x}\right) \cos(\mathbf{x}) + \frac{1}{10}\mathbf{x} \right). \quad (3.18)$$

La Figure 3.5 présente le déroulement des premières itérations de l'optimisation bayésienne à partir du métamodèle précédemment construit qui sert d'exemple sur les Figures 3.2 et 3.4. Le métamodèle initial est donc construit sur la base de six observations. La Figure 3.5 montre que pour la première itération, l'enrichissement se fait au niveau du minimum local ($x = 9,2$ environ) mais que le critère de l'amélioration espérée permet, dès la deuxième itération, d'enrichir le métamodèle dans une zone proche du minimum global, pour laquelle le manque d'observations résulte en une mauvaise approximation de la fonction réelle. Les itérations suivantes permettent d'affiner la prédiction et d'obtenir rapidement une valeur assez précise du minimum global. La Figure 3.6 représente l'évolution de différentes quantités jusqu'à 10 itérations de ce processus d'optimisation bayésienne. La Figure 3.6a montre que le minimum des observations y_{\min}^m converge rapidement vers une valeur proche du minimum global obtenu avant de s'affiner très légèrement lors des dernières itérations. Ce résultat est confirmé par la Figure 3.6b sur laquelle est représenté l'écart relatif entre y_{\min}^m et un minimum global de référence obtenu numériquement en calculant la fonction objectif sur un maillage extrêmement fin de son voisinage. Finalement, le critère (3.14) est représenté en Figure 3.6c. Il est possible de voir que le critère c_{EGO} devient inférieur à une valeur $\delta_{\text{EGO}} = 1\%$ après 4 itérations (soit 10 évaluations de y) ce qui permet d'obtenir le minimum global avec un écart relatif de $1,2 \times 10^{-6}$ si ce critère est utilisé pour arrêter le processus itératif.

Afin de mieux mesurer les performances de la stratégie d'optimisation, 50 expériences de résolution du problème d'équation (3.18) sont réalisées pour un nombre différent d'échantillons de départ, avec à chaque fois un nouveau tirage initial. Cela permet d'obtenir l'évolution moyenne du minimum y_{\min}^m , de l'écart relatif et du critère c_{EGO} ainsi que les variances associées en fonction du nombre d'appels n_y . Ces courbes sont représentées en Figure 3.7 pour un nombre d'échantillons initiaux n_e valant 3, 6, puis 10. Les résultats obtenus montrent que pour $n_e = 6$ et $n_e = 10$, l'algorithme converge rapidement vers le minimum global avec une bonne précision. En revanche, pour $n_e = 3$, la variance de la série des y_{\min}^m reste assez élevée, même après plusieurs itérations, mais l'algorithme finit par converger avec un écart relatif satisfaisant. Cela peut s'expliquer par le fait qu'avec seulement 3 observations initiales, le métamodèle fournit une trop mauvaise approximation de la fonction objectif et pour certains tirages défavorables l'algorithme va se concentrer pendant plusieurs itérations sur des minima locaux avant que le critère ne permette l'exploration vers le minimum global. L'évolution moyenne du critère c_{EGO} présentée en Figure 3.7d montre que, pour $n_e = 6$ et $n_e = 10$, son utilisation en tant que critère d'arrêt avec une valeur $\delta_{\text{EGO}} = 1\%$ permet d'obtenir un minimum global avec une bonne précision après très peu d'itérations. En revanche, pour $n_e = 3$, le critère c_{EGO} passe en moyenne une première fois sous la valeur de 1% alors que l'écart relatif moyen est encore assez élevé, tout comme la variance sur les valeurs des minima obtenus. Le critère c_{EGO} peut ainsi être piégeux pour un faible nombre d'échantillons initiaux, mais semble bien fonctionner lorsque qu'une valeur n_e suffisamment grande est choisie. Dans

3.5. ILLUSTRATION

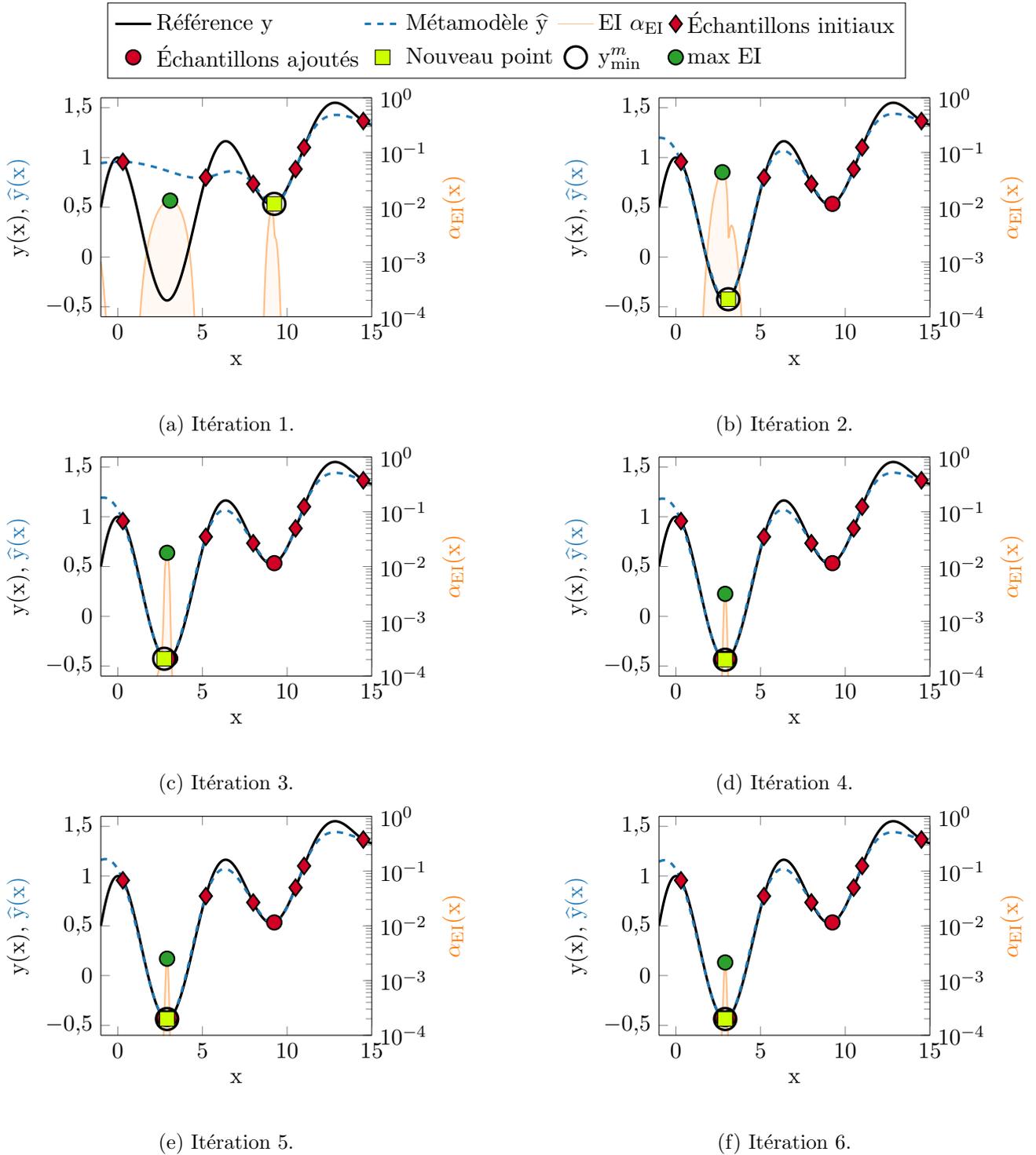
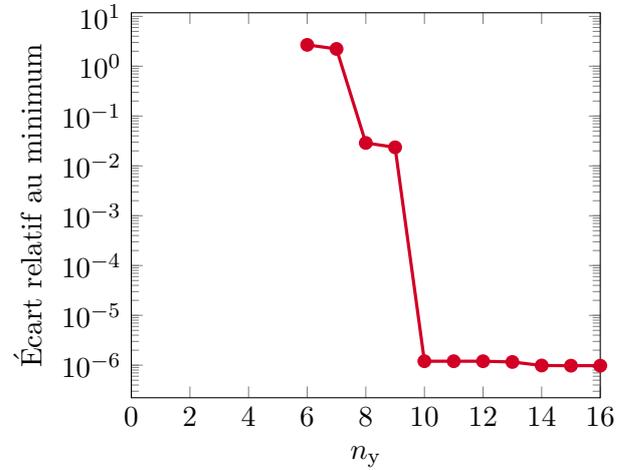
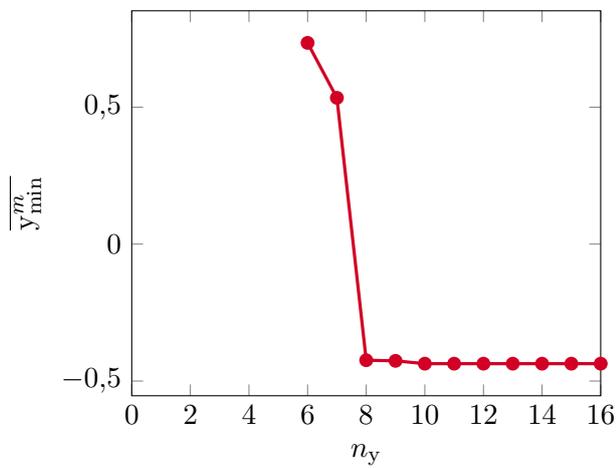


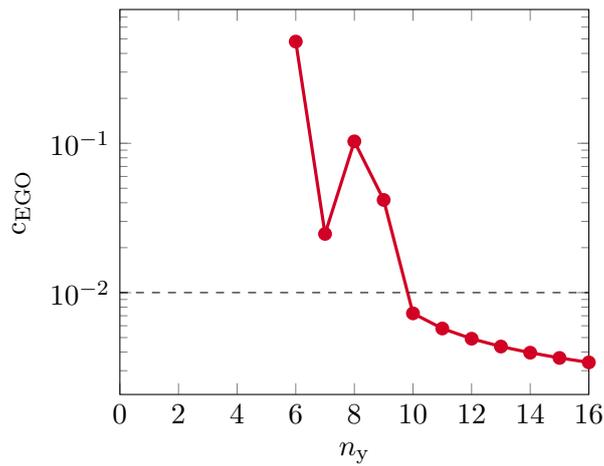
FIGURE 3.5 – Illustration du processus d’enrichissement pour la résolution du problème d’équation (3.18) à partir du métamodèle initial présenté en Figure 3.4.

3.5. ILLUSTRATION



(a) Évolution du minimum des échantillons y_{\min}^m .

(b) Évolution de l'écart relatif entre y_{\min}^m et le minimum de référence.



(c) Évolution du critère c_{EGO} .

FIGURE 3.6 – Résultats de la stratégie d'optimisation appliquée au problème d'équation (3.18) après 10 itérations

leur publication sur la stratégie EGO, JONES, SCHONLAU et al. (1998) recommandent de choisir un nombre initial d'échantillons égal à 10 fois la dimension de l'espace de conception : $n_e = 10n_p$.

3.5. ILLUSTRATION

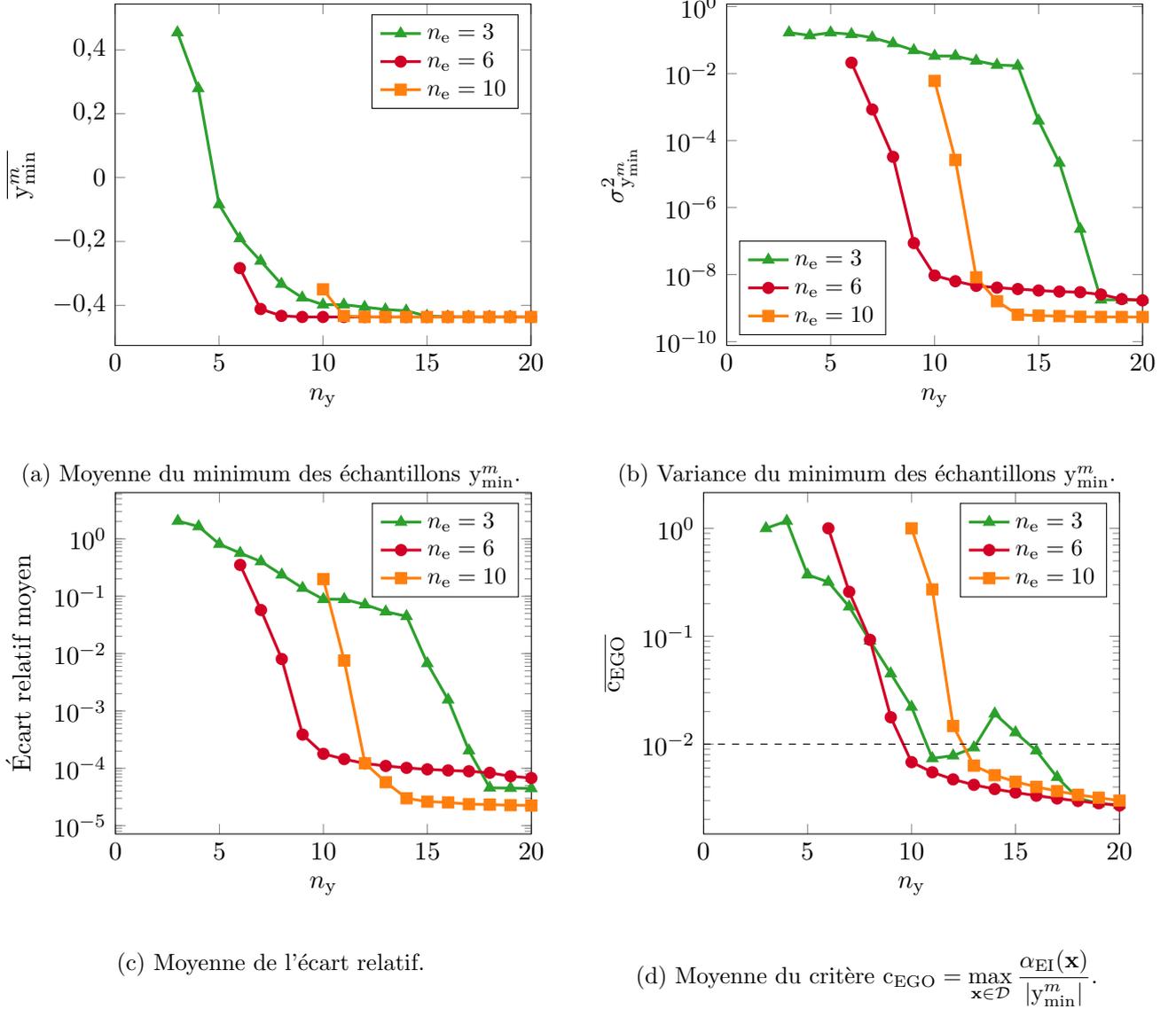


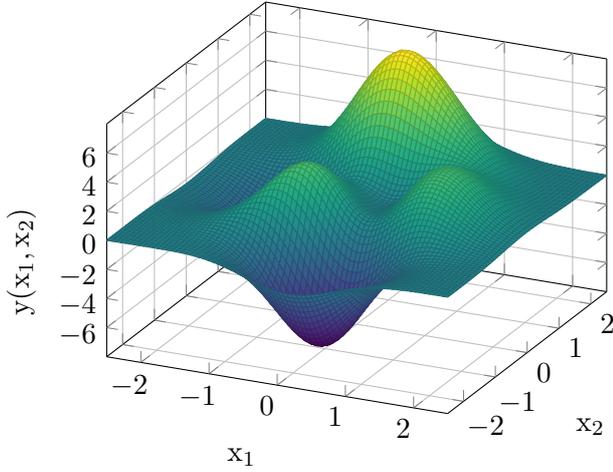
FIGURE 3.7 – Répétition de 50 expériences de résolution du problème d'optimisation d'équation (3.18) pour différentes valeurs de n_e .

3.5.2 Optimisation sous contraintes d'une fonction dans un espace de dimension 2.

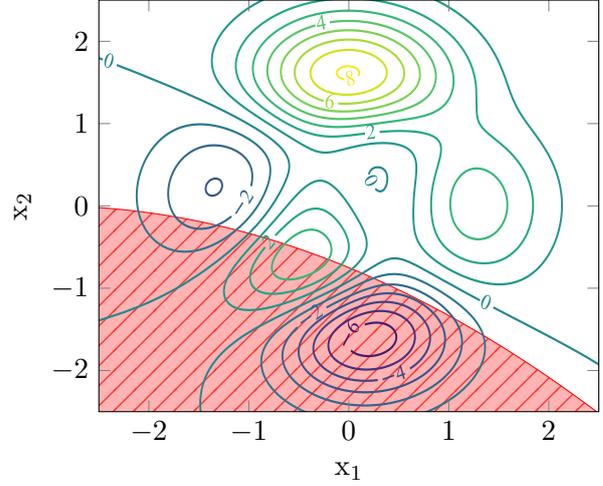
Dans un second temps, le problème d'optimisation avec une contrainte d'inégalité de la fonction Peaks, donné en exemple en Figure 1.3c, est traité. Le problème s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* = & \arg \min_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in [-2,5; 2,5]^2} y(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \\ \text{s.l.c. :} & h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.5. ILLUSTRATION



(a) Représentation surfacique de la fonction Peaks.



(b) Représentations en lignes de niveaux de la fonction Peaks et de la limite définie par la fonction contrainte (3.21)

FIGURE 3.8 – Représentations de référence des fonctions du problème d’optimisation d’équation (3.19) sur $\mathcal{D} = [-2,5; 2,5]^2$

$\forall (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathcal{D} = [-2,5; 2,5]^2$, les fonctions objectif et contrainte s’écrivent :

$$y(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 3(1 - x_1)^2 e^{-x_1^2 - (x_2+1)^2} - 10\left(\frac{1}{5}x_1 - x_1^3 - x_2^5\right)e^{-x_1^2 - x_2^2} - \frac{1}{3}e^{-(x_1+1)^2 - x_2^2}, \quad (3.20)$$

et

$$h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -12x_2 - x_1^2 - 6x_1 - 9. \quad (3.21)$$

La représentation surfacique de la fonction Peaks sur un maillage de référence, ainsi que les représentations en lignes de niveaux de y et h sur \mathcal{D} sont rappelées en Figure 3.8.

Quelques itérations d’une résolution du problème d’équation (3.19) sont présentées en Figure 3.9 afin d’illustrer le déroulement de la stratégie dans le cas d’une optimisation sous contraintes. Les modèles de substitution sont initialisés avec 10 échantillons (Figure 3.9a) et le processus d’enrichissement est répété sur 35 itérations. Jusqu’à l’itération 10 (Figure 3.9c), de nombreux points sont ajoutés autour du minimum local situé au bord de la frontière vers $(0,68; -1,13)$. À l’itération 12 (Figure 3.9d) la zone du minimum global est atteinte par le processus d’enrichissement. Les itérations suivantes se consacrent à l’exploitation de cette zone, ce qui permet d’affiner assez précisément le résultat obtenu (Figure 3.9e). Pour un nombre total de 35 évaluations de la fonction objectif et de la fonction contrainte, le processus d’enrichissement permet de former un métamodèle qui fournit une approximation satisfaisante des zones critiques pour le problème d’optimisation d’équation (3.19). En effet, outre l’exploitation réussie du minimum global, des échantillons ont été ajoutés dans des régions comportant des minima locaux, ce qui permet de s’assurer que le minimum global ne peut pas être localisé dans ces zones. De nombreux points sont aussi ajoutés à la frontière du domaine admissible. Les représentations de la fonction d’acquisition en Figure 3.9 lors des différentes itérations montre que α_{CEI} est généralement fortement

3.5. ILLUSTRATION

irrégulière et présente une multitude de maxima locaux. Un effort important est ainsi nécessaire afin d'en détecter le maximum. Les évolutions complètes du minimum admissible y_{\min}^m et de la valeur maximale de la fonction d'acquisition tout au long du processus d'optimisation sont présentées en Figure 3.10. Dans cet exemple, la stratégie d'optimisation converge rapidement vers le minimum global avec une bonne précision. La valeur maximale de la fonction d'acquisition décroît globalement, mais peut localement présenter quelques hausses entre deux itérations successives.

Comme pour le problème d'équation (3.18), les performances de la stratégie dans la résolution du problème d'optimisation sous contraintes d'équation (3.19) sont étudiées en effectuant 30 expériences de résolution pour différentes valeurs de n_e , avec un budget total de 50 évaluations des fonctions objectif et contrainte. Les résultats moyens sont présentés en Figure 3.11. Ces résultats montrent que la stratégie d'optimisation mise en place est généralement capable de trouver le minimum global avec une précision satisfaisante lorsque le nombre initial d'échantillons est parmi les plus importants des cas

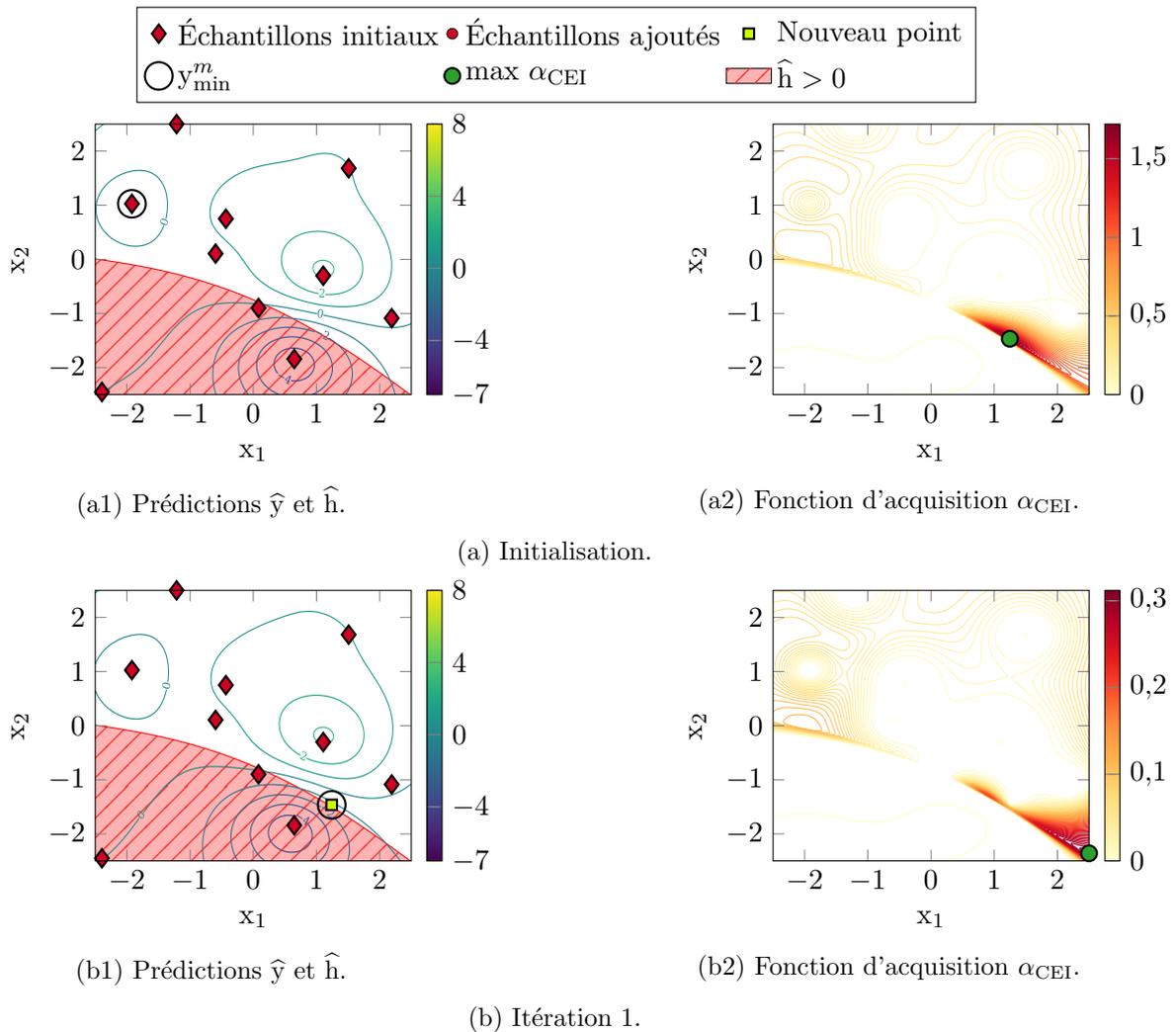
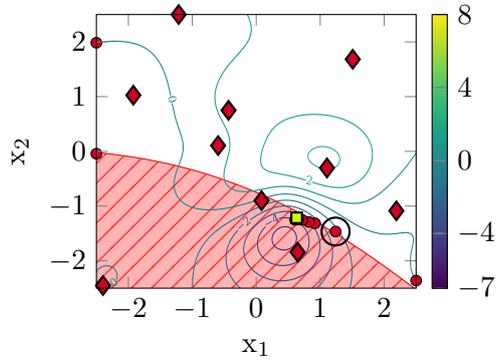
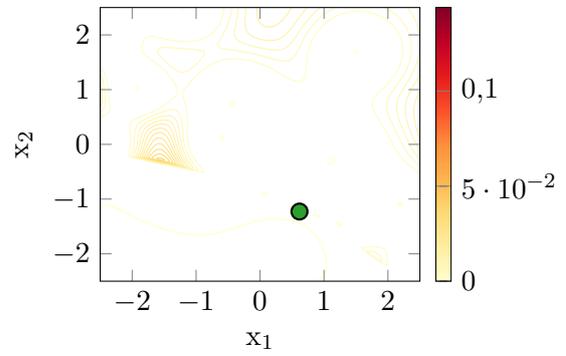


FIGURE 3.9 – Illustration du processus d'enrichissement pour la résolution du problème d'équation (3.19)

3.5. ILLUSTRATION

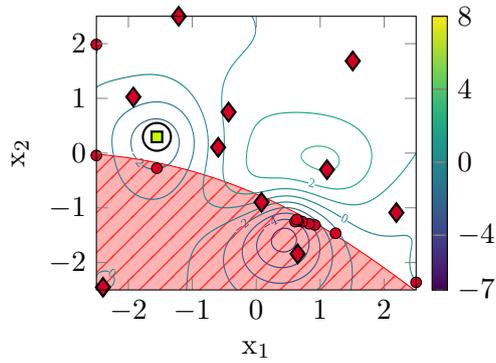


(c1) Prédications \hat{y} et \hat{h} .

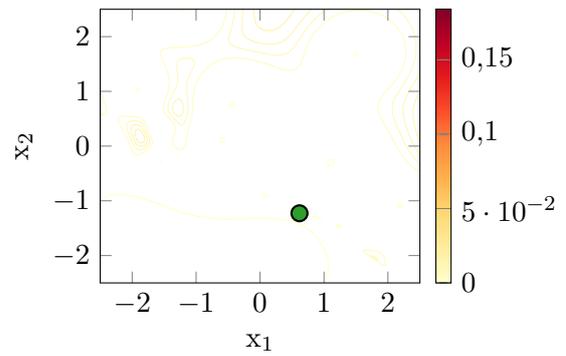


(c2) Fonction d'acquisition α_{CEI} .

(c) Itération 10.

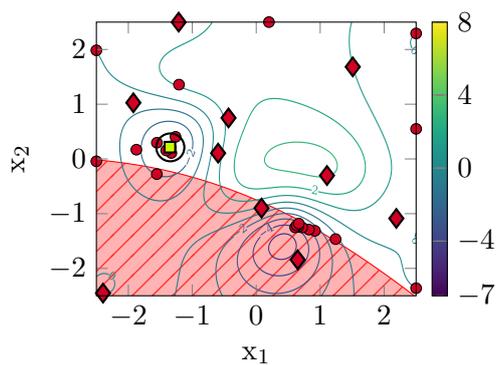


(d1) Prédications \hat{y} et \hat{h} .

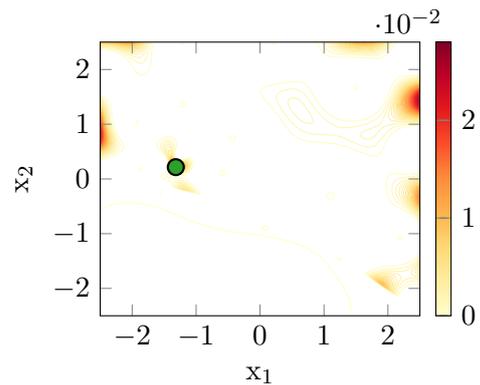


(d2) Fonction d'acquisition α_{CEI} .

(d) Itération 12.



(e1) Prédications \hat{y} et \hat{h} .

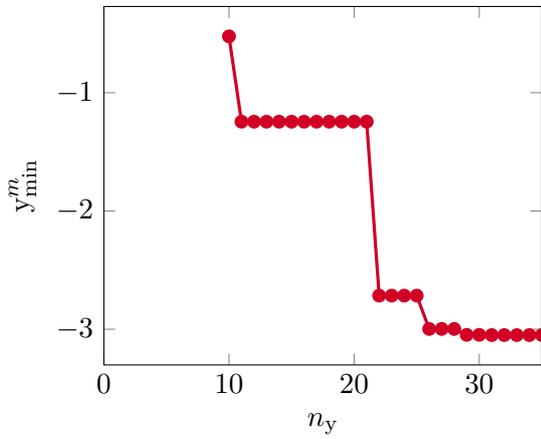


(e2) Fonction d'acquisition α_{CEI} .

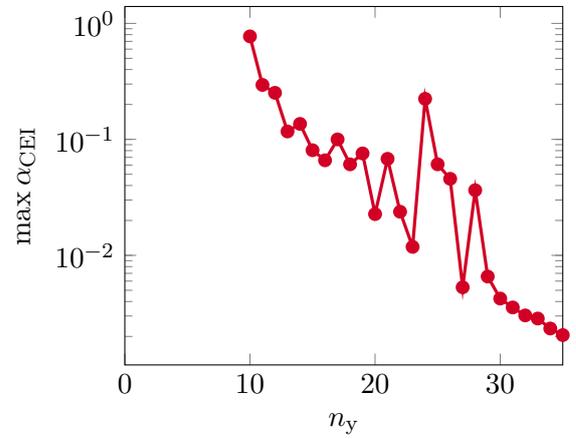
(e) Itération 25.

FIGURE 3.9 – Illustration du processus d'enrichissement pour la résolution du problème d'équation (3.19) (suite)

3.5. ILLUSTRATION

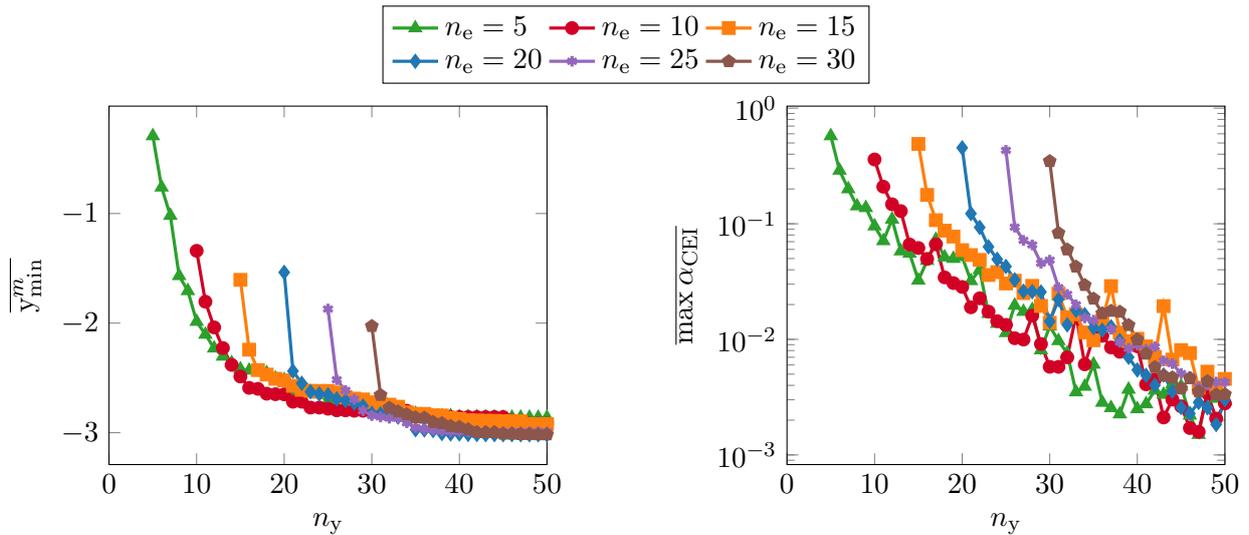


(a) Évolution du minimum des échantillons y_{\min}^m .



(b) Évolution du maximum de la fonction d'acquisition α_{CEI} .

FIGURE 3.10 – Résultats de la stratégie d'optimisation appliquée au problème d'équation (3.19) après 25 itérations



(a) Moyenne du minimum des échantillons y_{\min}^m .

(b) Moyenne de la fonction d'acquisition α_{CEI} .

FIGURE 3.11 – Répétition de 30 expériences de résolution du problème d'optimisation d'équation (3.19) pour différentes valeurs de n_e .

étudiés ($n_e > 20$). Il faut néanmoins noter que lors de certaines expériences, le processus d'enrichissement n'est pas capable d'explorer tout le domaine et reste toujours coincé autour du minimum local après les 50 évaluations. Ce comportement apparaît surtout pour les valeurs de n_e les plus faibles, lorsque de grandes régions de l'espace de conception ne sont pas couvertes par l'échantillonnage initial. Ce type de difficulté est attendu lors de l'optimisation de fonctions délicates et est cohérent avec les résultats présentés par BAGHERI et al. (2017). La Figure 3.11b montre que la valeur maximale de

3.5. ILLUSTRATION

la fonction d'acquisition décroît tout au long des itérations. Il pourrait ainsi être envisagé un critère d'arrêt similaire au critère (3.14) dans le cas de l'optimisation sous contraintes.

L'application de l'optimisation bayésienne à l'optimisation de fonctions mathématiques montre sa capacité à résoudre un problème d'optimisation globale, avec ou sans contraintes, tout en ne demandant que très peu d'évaluations de la fonction objectif. Cette stratégie d'optimisation est ainsi bien adaptée à la résolution de problème d'optimisation possédant une fonction objectif coûteuse, comme c'est le cas des problèmes envisagés dans ces travaux de thèse. Les performances de la méthode sont comparables avec celles de précédents travaux traitant de l'optimisation bayésienne [GARDNER, KUSNER et al. 2014; UNGREDDA et BRANKE 2021]. Les exemples présentés en dimension 1 et 2 permettent de visualiser et d'identifier les points clés de la stratégie d'optimisation bayésienne, qui fonctionne de manière similaire à plus haute dimension. En particulier le choix du nombre initial d'échantillons a un rôle prépondérant dans l'efficacité de la méthode. Comme souligné dans les travaux de LE RICHE et PICHENY (2021), un nombre relativement faible peut conduire aux meilleures performances, mais si ce nombre est trop faible, la stratégie peut éprouver des difficultés à explorer tout le domaine de conception. Le meilleur choix est fortement dépendant du problème traité, mais la valeur $n_e = 10n_p$ semble être un compromis intéressant pour la plupart des problèmes, même dans le cas d'une optimisation sous contraintes. La sélection de la fonction d'acquisition ainsi que du critère d'arrêt peut aussi avoir une influence importante et mériterait une exploration plus détaillée. Aucune étude comparative poussée de différents algorithmes d'optimisation globale sous contrainte, incluant différentes variations de stratégies d'optimisation bayésienne, n'a été identifiée dans la littérature.

Chapitre 4

Application de la stratégie

La démarche d'optimisation bayésienne détaillée dans le Chapitre 3 (page 103) est utilisée dans un contexte d'optimisation paramétrique de structures en dynamique non linéaire. Cela permet la recherche des paramètres optimaux d'un système mécanique dont les fonctions objectif et contraintes sont évaluées grâce au solveur mécanique défini dans le Chapitre 2 (page 75). Dans un premier temps, une synthèse de la stratégie mise en place est proposée, puis, dans un second temps, la stratégie est appliquée à deux problèmes d'optimisation paramétrique en dynamique non linéaire : l'optimisation sans contraintes d'un oscillateur de Duffing, et l'optimisation sous contraintes d'un portique de levage.

Contenu

4.1 Synthèse et implémentation de la stratégie	124
4.2 Optimisation sans contraintes : oscillateur de Duffing	125
4.2.1 Présentation du problème	125
4.2.2 Résultats	125
4.3 Optimisation sous contraintes : portique de levage	131
4.3.1 Présentation du problème	131
4.3.2 Résultats	134

4.1 Synthèse et implémentation de la stratégie

La stratégie mise en place pour ces travaux de thèse repose sur une démarche d'optimisation bayésienne réalisée par un programme python utilisant des modules partagés par la communauté. Un échantillonnage de l'espace de conception \mathcal{D} est réalisé avec la méthode LHS en s'appuyant sur le module *pyDOE* [PYDOE 2013]. Des modèles de substitution indépendants de la fonction objectif et des fonctions contraintes sont créés au travers d'un objet *SingleTaskGP* du module *BoTorch* [BALANDAT et al. 2020]. Les hyperparamètres de ce métamodèle sont ajustés en maximisant le logarithme de la vraisemblance marginale grâce à l'optimiseur ADAM de *PyTorch* [KINGMA et BA 2017; PASZKE et al. 2019]. Un processus itératif d'enrichissement de ces métamodèles est ensuite appliqué. La maximisation d'une fonction d'acquisition permet de déterminer le point d'enrichissement. Les fonctions d'acquisition présentées en section 3.4 (page 108) sont intégrées au sein des modèles de *BoTorch*. Le module inclut aussi un optimiseur de ces fonctions basé sur une méthode de descente avec redémarrages. À la fin du processus itératifs, le résultat de l'optimisation correspond au minimum parmi les observations se situant dans l'espace admissible .

L'évaluation des fonctions objectif et contraintes se fait à partir d'un calcul dynamique non linéaire de la réponse fréquentielle de la structure étudiée. Le solveur mécanique permettant ce calcul correspond à la méthode détaillée au Chapitre 2 (page 75). Le solveur est implémenté au travers d'un programme python développé de manière autonome spécifiquement pour ces travaux. La réponse fréquentielle est ainsi obtenue en utilisant la méthode de l'équilibrage harmonique couplée à une procédure de continuation par prédiction tangente et corrections employant une paramétrisation par pseudo-longueur d'arc [SARROUY et SINOÛ 2011]. Le programme développé donne la possibilité de configurer toutes les variables de la méthode dont l'influence a été discuté au Chapitre 2 (page 75), notamment le nombre d'harmoniques n_h , la discrétisation en temps n_t lors de l'utilisation des transformations de Fourier discrètes ou encore la stratégie d'adaptation automatique du pas de continuation.

Lorsque cela est possible, une réduction du modèle de la structure par une procédure de sous-structuration de Craig-Bampton [CRAIG JR et BAMPION 1968] est effectuée. Une analyse modale de la structure à interface fixe est réalisé à l'aide des logiciels de calcul par éléments finis *MSC Nastran* ou *Abaqus*. Le logiciel *PRIMODAL* [PRIMODAL 2020] permet ensuite d'obtenir les opérateurs du modèle réduit à partir du résultat de ce calcul. Pour les applications considérées dans ces travaux, les paramètres du problème d'optimisation n'ont d'influence que sur l'interface entre les sous-structures. Ainsi, il n'est pas nécessaire de créer un modèle réduit pour chaque jeu de paramètres évalué. Seule une condensation est nécessaire et le processus d'optimisation complet peut être conduit sur le modèle réduit. Un appel au solveur mécanique avec un jeu de paramètres différent induit alors une modification au niveau des ddls d'interfaces, qui ne sont pas condensés avec la méthode de Craig-Bampton. Il peut néanmoins être envisagé de reconstruire un modèle réduit à chaque appel au solveur mécanique afin de résoudre un problème d'optimisation pour lequel les paramètres ont aussi une influence sur les sous-structures.

4.2 Optimisation sans contraintes : oscillateur de Duffing

Afin de valider la stratégie sur un problème mécanique non linéaire académique, l'optimisation sans contraintes des paramètres d'un oscillateur de Duffing, présenté en section 1.2.2.2 (page 49), est étudiée.

4.2.1 Présentation du problème

Pour rappel, l'oscillateur de Duffing est un système à un ddl qui possède une non-linéarité cubique. Un oscillateur forcé par une excitation harmonique en force est considéré. L'équation du mouvement s'écrit :

$$m_1 \ddot{q}(t) + c_1 \dot{q}(t) + k_1 q(t) + k_{nl} q^3(t) = f_0 \cos(\omega t). \quad (4.1)$$

Le problème d'optimisation étudié est inspiré de l'article de BALARAM et al. (2012). La quantité d'intérêt à optimiser est la valeur quadratique moyenne (RMS) de l'accélération de l'oscillateur, notée \ddot{q}_{RMS} , qui s'écrit dans le cas d'un signal de période T :

$$\ddot{q}_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \ddot{q}^2(t) dt}. \quad (4.2)$$

Cette quantité peut s'obtenir directement à partir des coefficients de Fourier $\tilde{\mathbf{q}}$ de la réponse de l'oscillateur :

$$\ddot{q}_{\text{RMS}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2n_h+1} \frac{1}{2} (\omega^2 \nabla^2 \tilde{\mathbf{q}})_i^2}, \quad (4.3)$$

où ∇ est l'opérateur différentiel tel que défini par l'équation (2.11). Les paramètres de conception sont le coefficient d'amortissement c_1 variant sur une plage de $0,1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ à $1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ ainsi que la raideur non linéaire k_{nl} variant sur une plage de $0,1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$ à $2 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$. Les paramètres de masse, de raideur linéaire et d'amplitude d'excitation sont respectivement fixés aux valeurs $m_1 = 1 \text{ kg}$, $k_1 = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ et $f_0 = 0,3 \text{ N}$. Avec ces valeurs, les réponses de l'oscillateur de Duffing sont périodiques, de période identique à l'excitation, sur tout l'espace de conception. La fonction objectif $y : [0,1; 1] \times [0,1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ du problème d'optimisation correspond au maximum atteint par \ddot{q}_{RMS} sur une plage de pulsation d'excitation de $0,01 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ à $2,5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$:

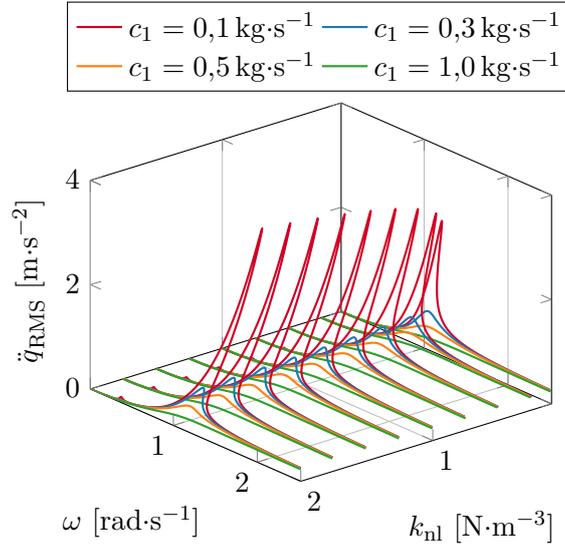
$$y(c_1, k_{nl}) = \max_{\omega \in [0,01; 2,5]} \ddot{q}_{\text{RMS}}(c_1, k_{nl}, \omega). \quad (4.4)$$

Le problème d'optimisation s'écrit alors :

$$(c_1^*, k_{nl}^*) = \arg \min_{\substack{c_1 \in [0,1; 1] \\ k_{nl} \in [0,1; 2]}} y(c_1, k_{nl}). \quad (4.5)$$

4.2.2 Résultats

Afin d'étudier l'influence des paramètres de conception, les courbes de réponse fréquentielle de \ddot{q}_{RMS} pour différents couples de valeurs (c_1, k_{nl}) sont tracés en Figures 4.1 et 4.2. Les résultats sont obtenus


 FIGURE 4.1 – Courbes de réponse fréquentielle pour quelques couples (c_1, k_{nl}) .

en utilisant les paramètres $n_h = 20$, $n_t = 60$, $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$, $\Delta s_{\max} = 0,05$ et $n^{\text{cib}} = 8$ pour la HBM. Ces valeurs sont conservées lors de tous les calculs réalisés dans cette section. L'analyse paramétrique tirée de ces deux Figures permet de conjecturer que lorsque le paramètre c_1 augmente, l'accélération \dot{q}_{RMS} diminue, tandis que lorsque k_{nl} augmente, \dot{q}_{RMS} augmente.

Étant donné que le coût d'évaluation de la fonction objectif y reste raisonnable pour ce système à un ddl (un peu moins d'une seconde en moyenne), il est possible de calculer y sur un maillage assez fin de l'espace de conception $\mathcal{D} = [0,1; 1] \times [0,1; 2]$ afin d'utiliser ce résultat comme référence. La dimension de l'espace de conception permet de tracer la fonction objectif de référence sur la Figure 4.3. Cette simulation confirme que le minimum sur l'espace de conception est atteint pour $c_1^* = 1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ et $k_{nl}^* = 0,1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$ et vaut environ $y(c_1^*, k_{nl}^*) = 0,2451 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. La Figure 4.3 semble aussi montrer que la fonction objectif est convexe et ne possède qu'un minimum global sur \mathcal{D} . Par conséquent, pour ce cas précis, des algorithmes d'optimisation locale seraient sans doute plus efficaces, mais l'objectif est ici de valider la stratégie générale d'optimisation en dynamique non linéaire sur un exemple relativement simple. Il est néanmoins important de noter que y semble comporter une région de très faible pente qui est presque un plateau, ce qui peut poser problème à certaines méthodes, notamment celles basées sur la descente de gradient.

L'application de la stratégie d'optimisation pour la résolution du problème d'équation (4.5) est illustrée en Figure 4.4. Le modèle de substitution initial est créé à l'aide de 15 échantillons (Figure 4.4a). Le critère c_{EGO} devient inférieur à $\delta_{\text{EGO}} = 0.01$ après 33 itérations, soit 48 appels au solveur mécanique (Figure 4.4d). Les évolutions du minimum et du critère c_{EGO} sont représentées sur la Figure 4.5. La comparaison des Figures 4.3 et 4.4d montre bien que le métamodèle n'approche pas parfaitement la fonction objectif sur tout l'espace \mathcal{D} , mais qu'une approximation de très bonne qualité est proposée dans la zone dans laquelle se trouve le point de minimum global. Dès la première itération, l'enrichissement se fait au point de minimum global, avec un écart inférieur à la précision machine (Figure 4.4b). Cela

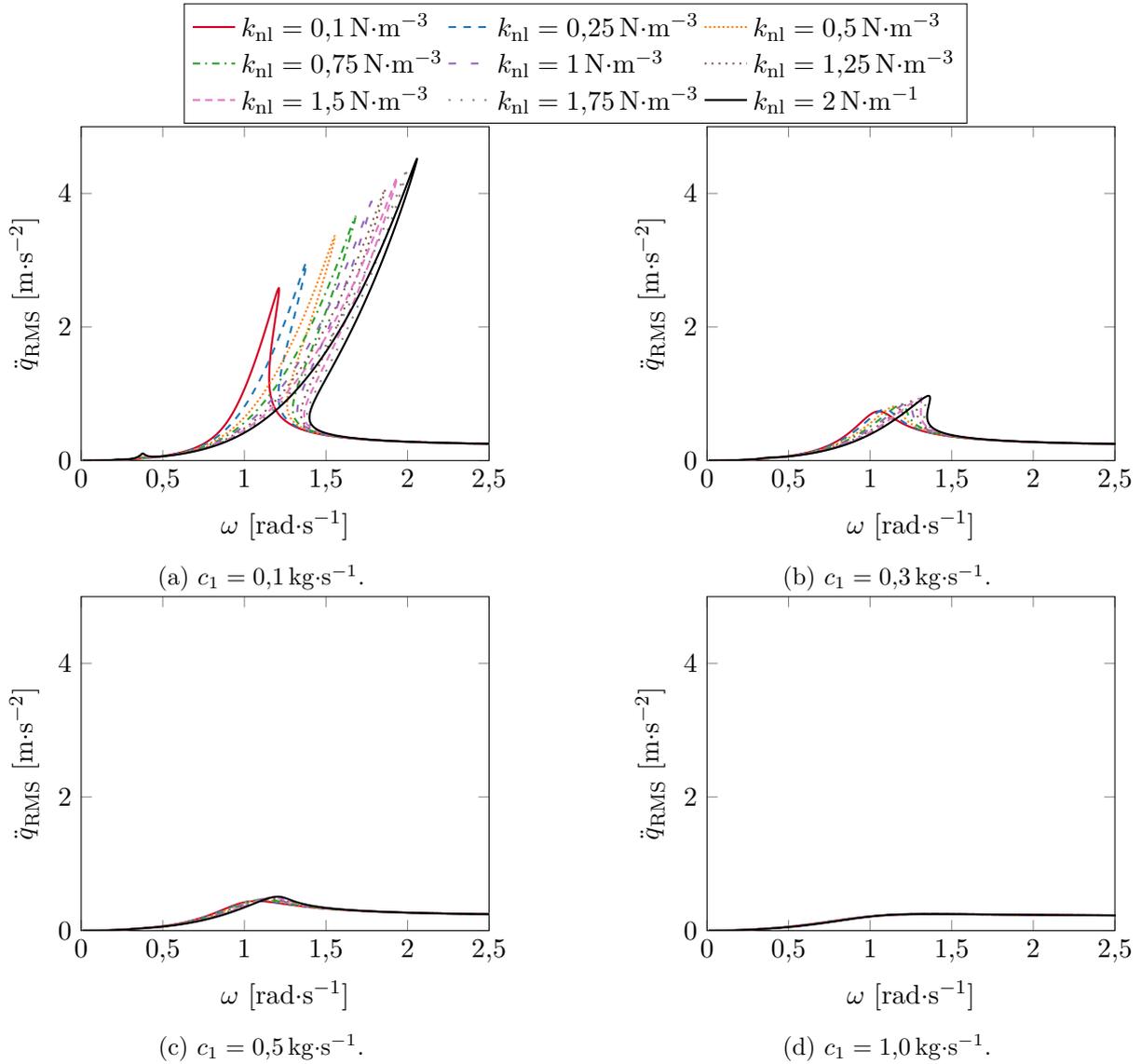
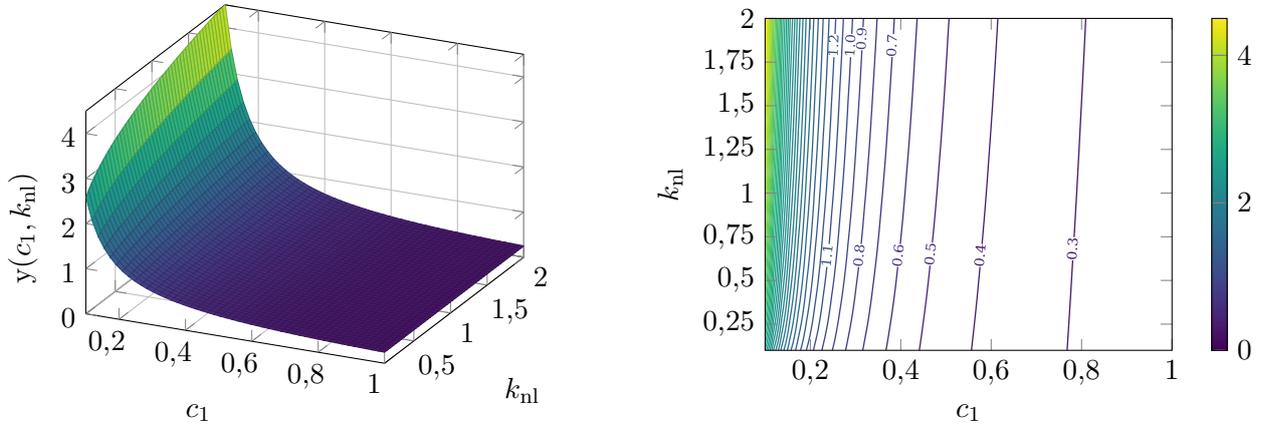


FIGURE 4.2 – Étude paramétrique de l’accélération valeur quadratique moyenne (RMS ou *Root Mean Square*) de l’oscillateur de Duffing. Voir aussi Figure 4.1.

peut s’expliquer par le fait que la fonction objectif est convexe et que la taille de l’échantillonnage de départ est suffisante pour que le métamodèle fournisse une approximation fiable du comportement de celle-ci. Cependant, le processus d’enrichissement se poursuit pendant un nombre encore important d’itérations avant que la condition $c_{\text{EGO}} < 0.01$ ne soit satisfaite. En effet, après les premières itérations, la variance dans la prédiction fournie par le métamodèle reste importante et il est nécessaire d’ajouter plus de points afin qu’elle diminue. De plus, la fonction objectif présente une zone se rapprochant d’un plateau au sein de laquelle la valeur de y reste très proche de celle du minimum global. Ainsi, il est nécessaire que l’approximation fournie dans cette région soit de bonne qualité pour que c_{EGO} diminue. La Figure 4.4d montre ainsi que de très nombreux points sont ajoutés sur la bordure $c_1 = 1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$. La



(a) Représentation surfacique de la fonction objectif (4.4).

(b) Représentation par lignes de niveau de la fonction objectif (4.4).

FIGURE 4.3 – Référence pour la fonction objectif d’expression (4.4)

Figure 4.5b permet aussi de voir que le critère c_{EGO} diminue lentement, mais progressivement au cours de l’enrichissement. Ce critère d’arrêt permet donc d’assurer l’obtention du minimum global de manière fiable, car de nombreuses observations sont faites dans la zone de faible pente. Cependant, dans ce cas précis, un critère d’arrêt basé sur un budget, même assez faible, permet d’obtenir le résultat avec un nombre réduit d’évaluations de la fonction objectif.

La résolution du problème d’équation (4.5) est effectuée pour différents nombres d’échantillons initiaux avec la répétition de 30 expériences à chaque fois. L’analyse de l’évolution du minimum des échantillons y_{min}^m ainsi que du critère c_{EGO} est présentée en Figure 4.6. Ces résultats montrent que le minimum global est à chaque fois observé après quelques itérations seulement du processus d’enrichissement. En revanche, comme pour l’exemple présenté précédemment, c_{EGO} diminue progressivement et lentement dans tous les cas. La Table 4.1 résume le nombre moyen d’appels au solveur mécanique en fonction de n_e . La synthèse de tous ces résultats laisse apparaître que le plus faible nombre d’échantillons de départ étudié ($n_e = 10$), permet les meilleures performances, quel que soit le critère d’arrêt considéré. En effet, c’est ce cas qui permet de voir converger le critère c_{EGO} le plus rapidement, et c’est aussi ce cas qui permet de voir la valeur y_{min}^m atteindre le minimum global avec le moins d’évaluations de la fonction objectif. De manière générale, plus n_e est grand et moins la résolution semble performante. Cela rejoint les conclusions de LE RICHE et PICHENY (2021) montrant qu’un faible nombre d’échantillons de départ est préférable. Il faut néanmoins veiller à ne pas prendre un nombre trop bas, car les expériences de la section 3.5 (page 113) montrent qu’un trop mauvais métamodèle initial peut nécessiter un effort supplémentaire important lors de l’enrichissement pour atteindre une approximation globale de qualité suffisante. Ainsi pour cet exemple spécifique le choix $n_e = 10n_p$ (donc $n_e = 20$ ici) n’est pas le plus performant, car la fonction objectif ne présente pas de particularités qui rendraient son approximation plus délicate. Cette option offre néanmoins des performances correctes et représente un choix par défaut judicieux en l’absence d’informations préalables sur la topologie de la fonction objectif.

4.2. OPTIMISATION SANS CONTRAINTES : OSCILLATEUR DE DUFFING

La pertinence d'utiliser le critère d'arrêt c_{EGO} pour cet exemple peut être remise en question. Celui-ci amène en effet à réaliser un nombre important d'évaluations de la fonction objectif, alors que le minimum global est observé dès les premières itérations. Par conséquent, pour les spécificités de ce problème d'optimisation, telles que la convexité de la fonction objectif avec la présence d'un plateau, un critère basé sur un faible budget semble plus approprié. Le critère permet néanmoins de s'assurer qu'un minimum global ne peut pas exister ailleurs, ce qui demande un effort d'enrichissement cohérent, compte tenu de la faible pente de la fonction objectif.

Cet exemple académique d'optimisation d'un oscillateur de Duffing montre que la stratégie développée permet ainsi de résoudre un problème d'optimisation sans contraintes en dynamique non linéaire, tout en limitant le nombre d'appels au solveur mécanique. Les choix effectués pour le modèle de substitution et pour le critère d'enrichissement se montrent ainsi pertinents. Le solveur mécanique reposant sur la HBM permet de plus d'évaluer la fonction objectif de manière relativement efficace, tout

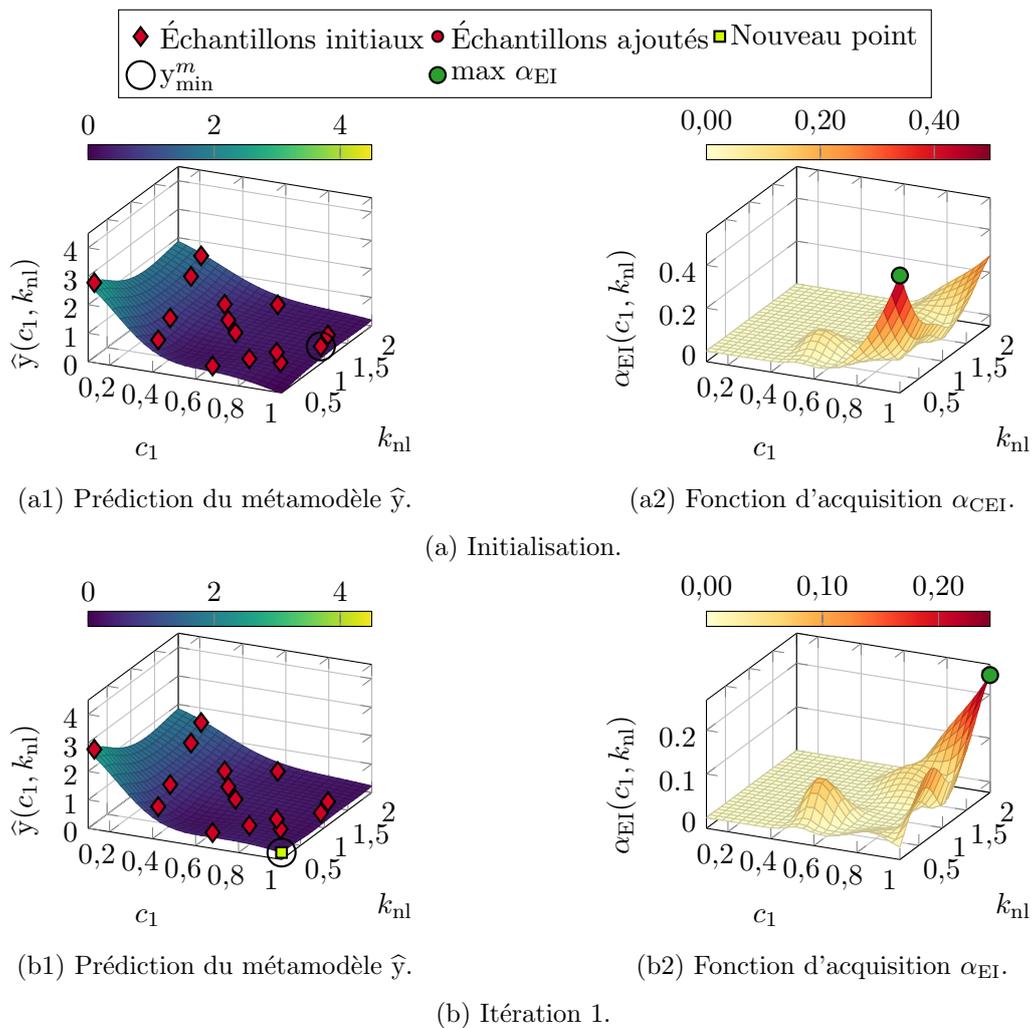


FIGURE 4.4 – Résolution du problème d'équation (4.5) avec 15 échantillons initiaux.

4.2. OPTIMISATION SANS CONTRAINTES : OSCILLATEUR DE DUFFING

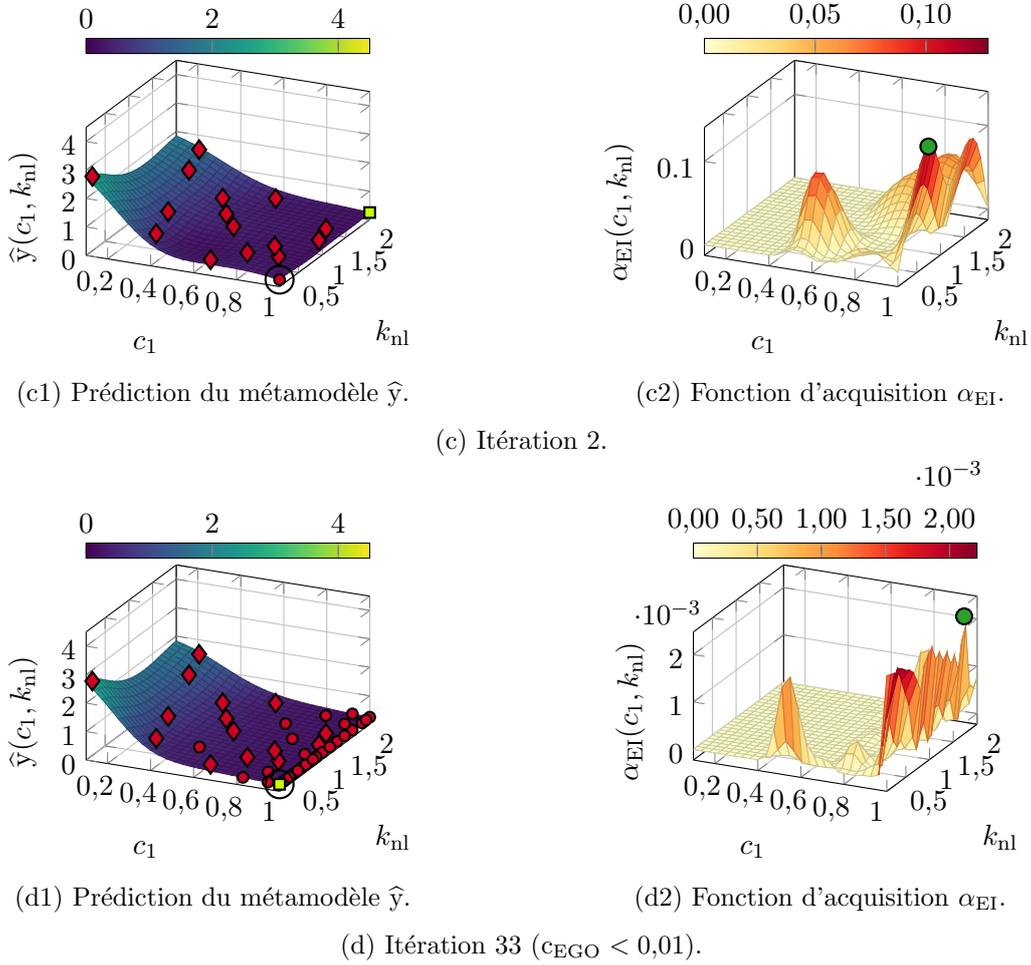
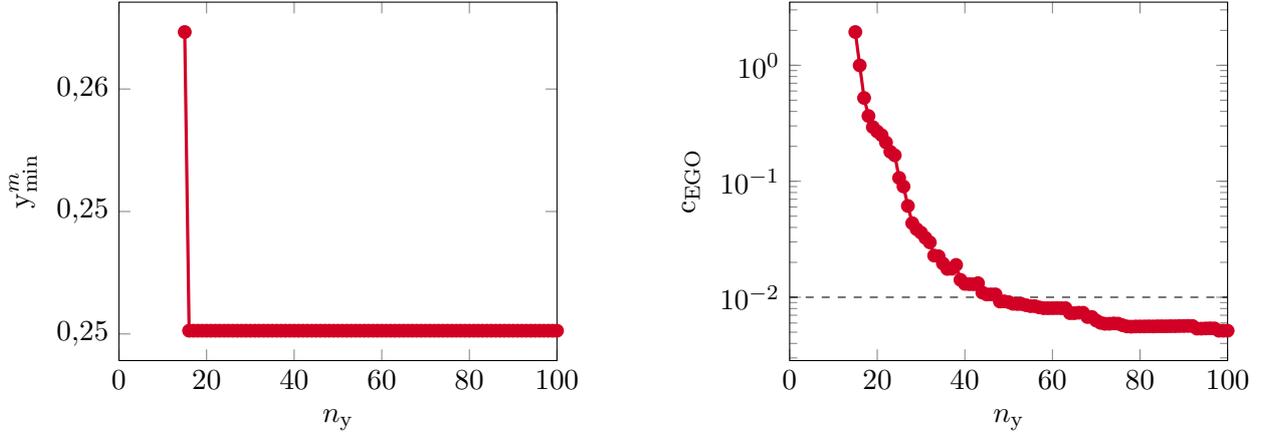


FIGURE 4.4 – Résolution du problème d'équation (4.5) avec 15 échantillons initiaux (suite).

TABLE 4.1 – Nombre moyen n_y d'évaluations de la fonction objectif avec le critère d'arrêt $c_{EGO} < 0,01$ pour différentes valeurs de nombre d'échantillons initiaux n_e .

n_e	Itérations	n_y
10	35	45
15	47	62
20	59	79
25	58	83
30	59	89

en prenant en compte les effets non linéaires. Un programme permettant de reproduire cet exemple est accessible sur Zenodo [RAGUENEAU, LAURENT et LEGAY 2023].


 (a) Évolution du minimum des échantillons y_{\min}^m .

 (b) Évolution du critère c_{EGO} .

 FIGURE 4.5 – Résultats de la stratégie d'optimisation appliquée au problème d'équation (4.5) avec un budget de 100 évaluations de y .

4.3 Optimisation sous contraintes : portique de levage

La stratégie d'optimisation est désormais appliquée à un problème d'optimisation sous contraintes de la structure industrielle du portique de levage, présenté en section 2.3.2 (page 92).

4.3.1 Présentation du problème

Au cours de leur cycle de vie, les conceptions des portiques de levage peuvent nécessiter une réévaluation avec des critères plus stricts, que ce soit en raison d'une évolution des normes ou du fait de leur réutilisation au sein d'un programme différent dans un autre environnement (voir par exemple les travaux de D. WILLIAMS et LANG (1980)). Le problème traité dans cette section concerne le réajustement d'une telle structure évoluant dans un environnement nucléaire en se concentrant sur la conception optimale d'un dispositif anti-basculement tel qu'étudié en section 2.3.2.3 (page 95). La modélisation de ce dispositif est à nouveau présentée en Figure 4.7. Trois des pieds du portique restent fixés à la base tandis que le quatrième peut être sujet à du contact tel que défini en section 2.3.2.3 (page 95). Pour rappel l'effort non linéaire de contact, donné en équation (2.53), s'écrit :

$$f_{\text{nl}}^{\text{dab}}(g, k_A, k_B) = \frac{k_A q^{\text{dab}}}{2} - \sqrt{\left(\frac{k_A q^{\text{dab}}}{2}\right)^2 + \epsilon_1^2} + \frac{k_B(q^{\text{dab}} - g)}{2} + \sqrt{\left(\frac{k_B(q^{\text{dab}} - g)}{2}\right)^2 + \epsilon_2^2}. \quad (4.6)$$

Le problème consiste à dimensionner de manière optimale le dispositif anti-basculement, afin d'éviter le renversement de la structure. Pour cela, la vitesse du centre de masse du portique de levage doit être limitée tandis que la force de contact $f_c^+ = \max(0, f_{\text{nl}}^{\text{dab}})$ s'exerçant sur le dispositif anti-basculement doit être suffisamment faible pour assurer la résistance de l'ancrage. Afin de simplifier l'étude, la vitesse est examinée au niveau de la masse ponctuelle au centre du chariot, bien que ce ne soit pas exactement la position du centre de masse. Seule la composante selon la direction X est considérée, car la direction

4.3. OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES : PORTIQUE DE LEVAGE

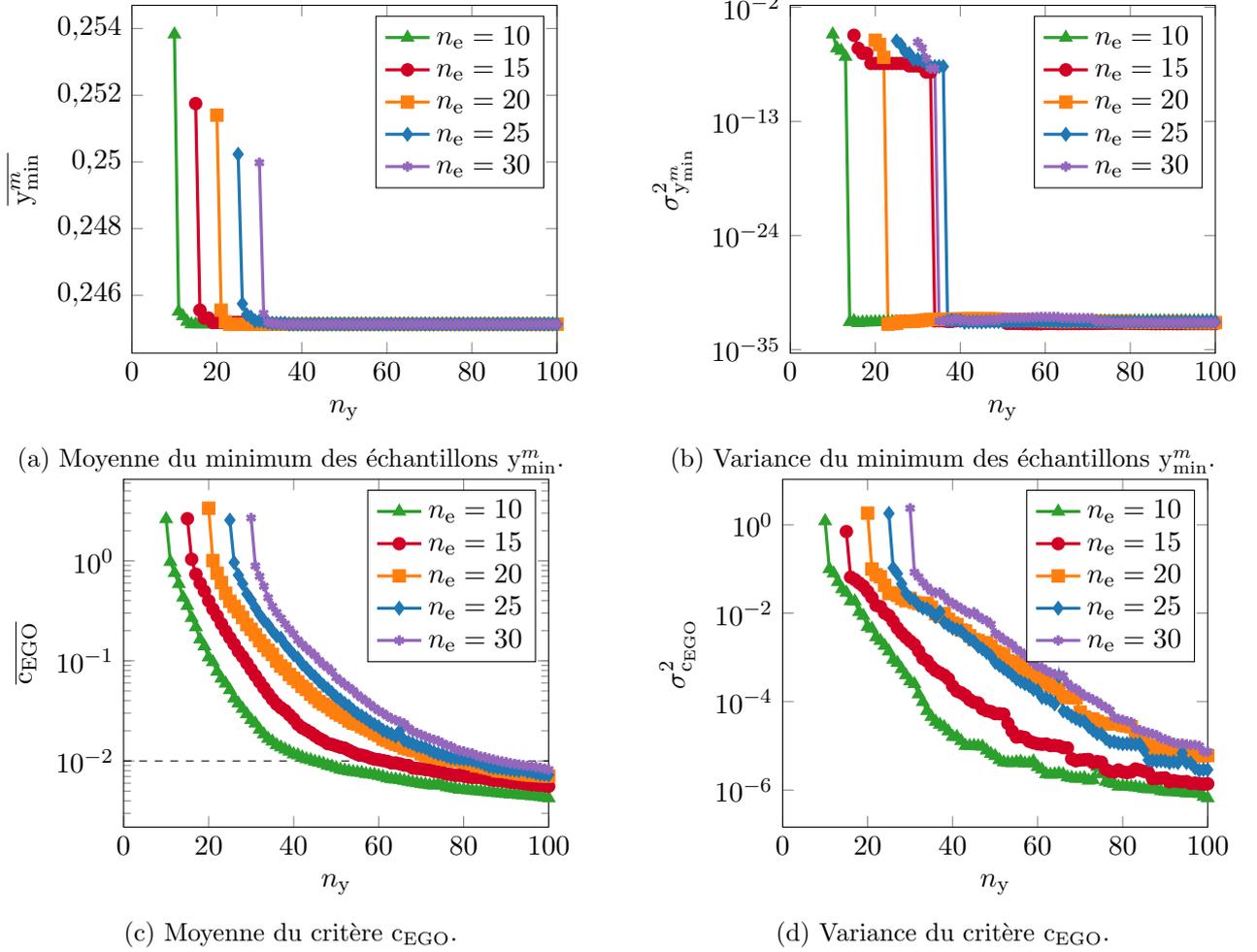


FIGURE 4.6 – Répétition de 30 expériences de résolution du problème d'équation (4.5) pour différentes valeurs de n_e avec un budget $n_y = 100$.

transversale est la plus critique pour le basculement. Cette quantité est notée \dot{q}_{M_x} et peut prendre des valeurs positives ou négatives selon le sens du mouvement.

Un déplacement harmonique, noté u_{Base} , est imposé à la base du portique dans la direction transversale (axe X), de sorte que l'amplitude de l'accélération de la base \ddot{u}_{Base} varie selon la fréquence d'excitation f pour être représentative d'un spectre d'excitation sismique :

$$\ddot{u}_{\text{Base}}(t) = A_{\text{Base}}(f) \cos(2\pi ft). \quad (4.7)$$

L'amplitude A_{Base} est défini sur la plage de fréquences de 0 Hz à 35 Hz par le spectre présenté en Figure 4.8. Celui-ci est défini à partir des spectres de plusieurs accélérogrammes sismiques générés aléatoirement selon la norme Eurocode 8 [AFNOR 2010] pour les sites nucléaires. Ainsi, l'amplitude A_{Base} considérée possède une valeur maximale constante pour les basses fréquences (entre 1 Hz et 6 Hz) et décroît légèrement pour les fréquences supérieures.

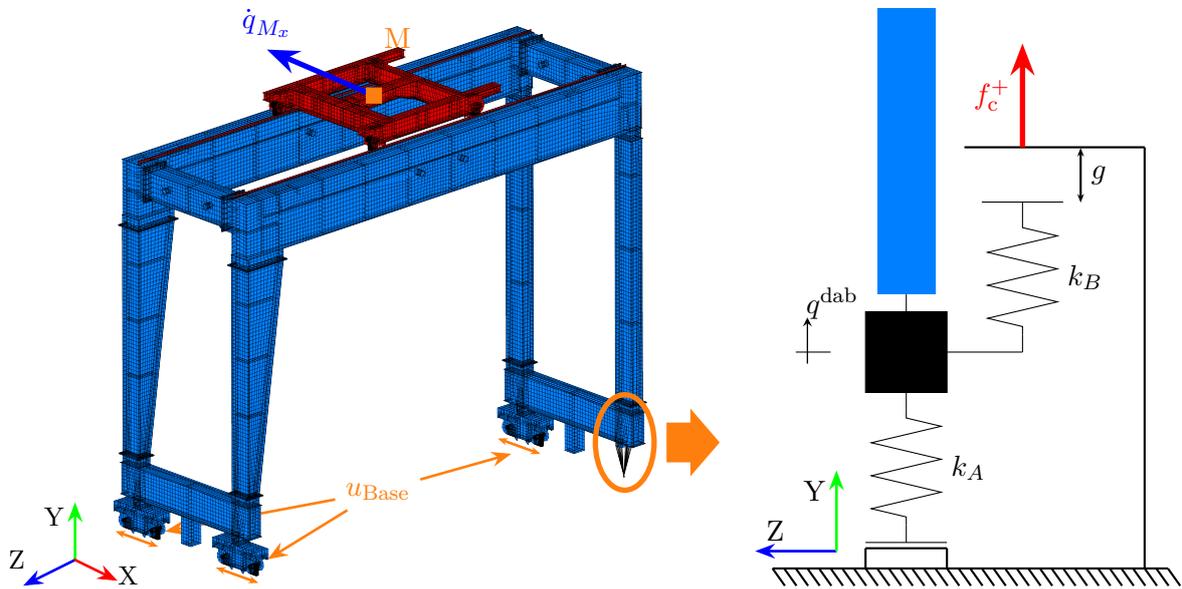


FIGURE 4.7 – Modèle du portique de levage.

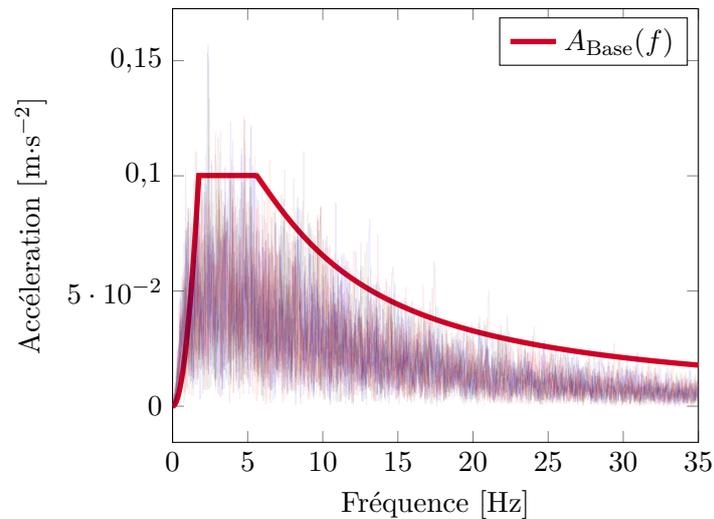


FIGURE 4.8 – Spectre d'accélération appliqué à la base du portique de levage.

Les paramètres de conception retenus sont la raideur k_B , variant de $0 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ à $1 \times 10^8 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, et le jeu g , variant de 5 mm à 40 mm , du contact avec le dispositif anti-basculement. La raideur du contact avec la base est fixé à $k_A = 1 \times 10^7 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. L'objectif est ainsi de définir de manière optimale les paramètres influant le contact avec le dispositif anti-basculement sans présumer de la solution technologique retenue. Le paramètre k_B notamment est dérivable de la géométrie et des matériaux utilisés. Les paramètres de régularisation sont pris tels que $\epsilon_1 = 200 \text{ N}$ et $\epsilon_2 = 2 \times 10^{-5} k_B$ (ajusté à chaque nouveau jeu de paramètres). Ces valeurs, provenant d'une brève analyse empirique, permettent généralement une meilleure convergence du solveur mécanique sans dégrader la solution de manière trop

importante. Comme annoncé précédemment, la quantité à minimiser est l'accélération transversale \dot{q}_{M_x} du centre du chariot. Une analyse sommaire faite à l'aide du logiciel *Hilti PROFIS Engineering* [HILTI 2022] permet de définir la valeur maximale de la force de contact assurant l'intégrité de l'ancrage du dispositif anti-basculement selon la norme Eurocode 2 [AFNOR 2019]. Il en résulte que la force de contact ne doit pas dépasser une valeur $f_c^+_{\max} = 200$ kN, ce qui constitue une contrainte d'inégalité du problème d'optimisation.

Afin de transcrire mathématiquement le problème d'optimisation, les paramètres de conception considérés sont :

$$\mathbf{x} = (g, k_B) \in \mathcal{D}, \quad (4.8)$$

où l'espace de conception \mathcal{D} est défini tel que :

$$\mathcal{D} = [5 \times 10^{-3}; 40 \times 10^{-3}] \times [0; 1 \times 10^8]. \quad (4.9)$$

La fonction objectif a pour expression :

$$y(g, k_B) = \max_{f \in [0; 35] \text{ Hz}} \dot{q}_{M_x}(g, k_B, f), \quad (4.10)$$

et la fonction contrainte s'écrit :

$$h(g, k_B) = \max_{f \in [0; 35] \text{ Hz}} f_c^+(g, k_B, f) - f_c^+_{\max}. \quad (4.11)$$

Finalement le problème d'optimisation étudié s'écrit :

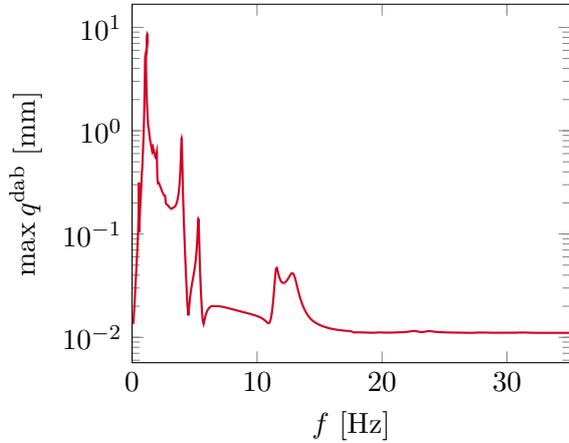
$$\begin{aligned} (g^*, k_B^*) &= \arg \min_{(g, k_B) \in \mathcal{D}} y(g, k_B), \\ \text{s.l.c.} \quad &h(g, k_B) < 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.3.2 Résultats

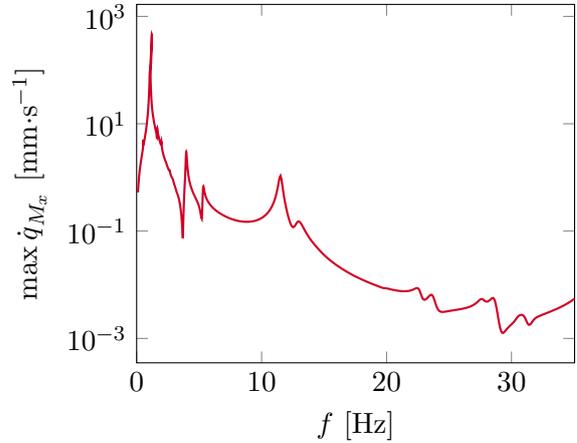
La première étape consiste à créer un modèle condensé du portique en considérant l'ensemble du portique et du chariot comme une sous-structure, d'une manière identique à la condensation présentée en section 2.3.2.2 (page 93).

Les Figures 4.9a et 4.9b représentent les courbes de réponses fréquentielles du déplacement vertical q^{dab} du pied sujet au contact et de la vitesse transversale \dot{q}_{M_x} du centre du chariot, obtenues avec le solveur mécanique. Le jeu de paramètres utilisé pour ce calcul correspond à $g = 5$ mm et $k_B = 1 \times 10^8$ N·m⁻¹, qui est le cas présentant les plus fortes non-linéarités dans l'espace de conception. Le solveur mécanique est employé avec $n_h = 20$, $n_t = 2048$ et un pas de continuation adaptatif. La résolution demande environ 40 minutes et 649 pas de fréquences ont été générés. Les Figures 4.9a et 4.9b montrent que seul le premier pic de résonance peut provoquer un contact avec le dispositif anti-basculement. Ainsi, lors de la résolution du problème d'optimisation, la solution n'est calculée que sur la plage [0; 3] Hz afin d'éviter un long calcul inutile. Les Figures 4.9c et 4.9d représentent les réponses fréquentielles sur cette plage réduite en les comparant au cas où aucun dispositif anti-basculement n'est présent. Ce dernier cas correspond aux jeux de paramètres pour lesquels $k_B = 0$ et

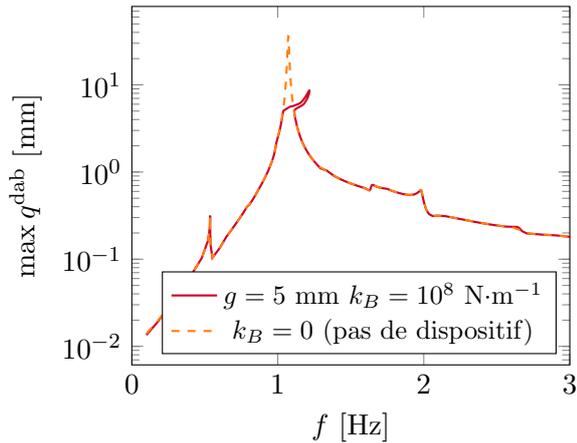
4.3. OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES : PORTIQUE DE LEVAGE



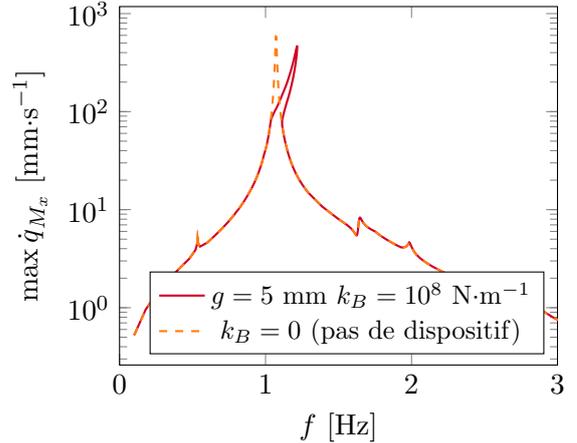
(a) Déplacement vertical q^{dab} pour $g = 5 \text{ mm}$ et $k_B = 1 \times 10^8 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$.



(b) Vitesse transversale \dot{q}_{M_x} pour $g = 5 \text{ mm}$ et $k_B = 1 \times 10^8 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$.



(c) Déplacement vertical q^{dab} sur la plage de fréquences réduite pour différentes configurations.



(d) Vitesse transversale \dot{q}_{M_x} sur la plage de fréquences réduite pour différentes configurations.

FIGURE 4.9 – Réponses fréquentielles du portique de levage. Les paramètres de la HBM sont : $n_h = 20$, $n_t = 2048$, $\Delta s_{\text{max}} = 0,25$, $n^{\text{cib}} = 9$.

reste un problème non linéaire, car le contact entre le pied et la base est toujours pris en compte. La Figure 4.9c permet de remarquer que le déplacement vertical maximal du pied vaut environ 36 mm, ainsi les jeux de paramètres pour lesquels g est supérieur à cette valeur ne présentent pas non plus de contact avec le dispositif anti-basculément et entraînent une réponse fréquentielle identique au cas $k_B = 0$. Les Figures 4.9c et 4.9d mettent aussi en avant le fait que le contact avec le dispositif conduit à une bifurcation de type repliement et à un décalage de la fréquence du pic de résonance.

La stratégie d'optimisation globale sous contraintes est appliquée à la résolution du problème d'équation (4.12) avec un nombre initial de 20 échantillons et un budget de 50 appels au solveur mécanique (soit 30 itérations). Quelques étapes du processus d'enrichissement sont représentées en Figure 4.10. La stratégie mise en place est capable de détecter un minimum global qui n'est pas

intuitif avec relativement peu d'évaluations de la fonction objectif. Le minimum obtenu se trouve sur la frontière du domaine admissible formée par la contrainte. Ce constat n'est pas surprenant étant donné que plus le dispositif cherche à diminuer la vitesse transversale, plus le contact devient intense. De nombreux points sont ajoutés le long de la frontière, ce qui montre que la fonction d'acquisition est bien adaptée à la résolution de ce type de problème. En effet, la frontière du domaine admissible est ainsi approchée avec une très bonne précision, ce qui permet de détecter la meilleure valeur de la fonction objectif le long de cette frontière de manière fiable. Les évolutions du minimum et de la fonction d'acquisition au cours des itérations sont représentées en Figure 4.11. La Figure 4.11a montre que de meilleurs jeux de paramètres sont progressivement détectés au cours du processus d'enrichissement et le minimum global finit par être détecté après 16 itérations. La Figure 4.11b permet de voir que la valeur de la fonction d'acquisition décroît globalement, mais peut parfois s'accroître entre deux itérations, notamment lorsqu'une meilleure valeur de y_{\min}^m est évaluée.

Les paramètres optimaux obtenus suite à la résolution du problème d'optimisation d'équation (4.12) sont $g^* = 21,47 \text{ mm}$ et $k_B^* = 7,1281 \times 10^7 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. Cette configuration donne lieu à une vitesse transversale maximale de $484,34 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ et une force de contact maximale de $199,992 \text{ kN}$. Les résultats de la simulation du portique de levage dans cette configuration optimale sont présentés en Figure 4.12. La Figure 4.12a montre que la courbe de réponse fréquentielle de \dot{q}_{M_x} est similaire à celle obtenue en Figure 4.9, avec une bifurcation de type repliement pour les fréquences où le contact avec le dispositif anti-bascullement peut se produire. La représentation temporelle pour une fréquence d'excitation au niveau du pic à $1,11 \text{ Hz}$ est tracé en Figure 4.12c. Le signal semble sinusoïdal, mais des harmoniques d'ordre supérieur sont bien présentes dans la réponse. La Figure 4.12b confirme que le contact avec le dispositif anti-bascullement se produit seulement sur une petite plage de fréquences. La représentation temporelle de la force de contact $f_{\text{nl}}^{\text{dab}}$ au niveau du pic (Figure 4.12d) montre clairement l'alternance de contacts intermittents entre le sol et le dispositif anti-bascullement. La Figure 4.12d met aussi en avant le phénomène de Gibbs inhérent aux séries de Fourier.

La résolution du problème d'équation (4.12) est répétée pour différentes valeurs de n_e en réalisant 30 expériences à chaque fois. Le critère d'arrêt du processus d'enrichissement est fixé en définissant un budget de 30 itérations pour chaque expérience. La valeur moyenne du minimum y_{\min}^m ainsi que la variance associée sont représentés en Figure 4.13. Ces résultats montrent que la stratégie proposée permet d'obtenir une valeur fiable du minimum global avec un nombre d'évaluations de la fonction objectif réduit. Quel que soit le nombre d'échantillons de départ, la valeur du minimum admissible des points échantillonnés décroît rapidement dès les premières itérations, ce qui signifie que la région dans laquelle se trouve le minimum est rapidement identifiée. Les dernières itérations réalisent l'exploitation de cette zone afin de fournir le minimum le plus précis possible avec le budget alloué. Comme pour le problème précédent, les meilleures performances sont atteintes avec un faible nombre d'échantillons de départ. La règle $n_e = 10n_p$ n'est donc pas le choix idéal dans ce cas, ce qui peut s'expliquer par le fait que les fonctions objectif et contrainte sont suffisamment régulières pour que la stratégie d'optimisation fonctionne avec un nombre initial d'échantillons bien inférieur.

L'exemple traité dans cette section montre que la stratégie d'optimisation proposée rend envisageable la résolution de problèmes d'optimisation paramétrique sous contraintes de structures présentant des

4.3. OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES : PORTIQUE DE LEVAGE

non-linéarités localisés. Les paramètres optimaux pour la réalisation d'un dispositif anti-bascullement peuvent être obtenus avec un nombre réduit d'appels au solveur mécanique, ce qui donne un temps de résolution acceptable. Pour donner un ordre d'idée, avec l'implémentation réalisée, il faut compter en moyenne environ dix heures pour obtenir les paramètres optimaux de manière précise avec un nombre initial de 10 échantillons. Cet exemple industriel laisse entrevoir certaines limites de la stratégie comme le choix des quantités n_e , n_h , n_t , n^{cib} qui sont très dépendantes du problème et pour lesquelles il est difficile de formuler une pratique générale.

La résolution du problème d'optimisation sans contraintes sur l'oscillateur de Duffing permet de valider la stratégie et d'examiner le déroulement de chacune des étapes, de la détermination du plan d'expérience initial jusqu'à la validation de la condition d'arrêt, en passant par le calcul de la réponse fréquentielle pour chaque jeu de paramètres échantillonné, la création des modèles de substitution et la

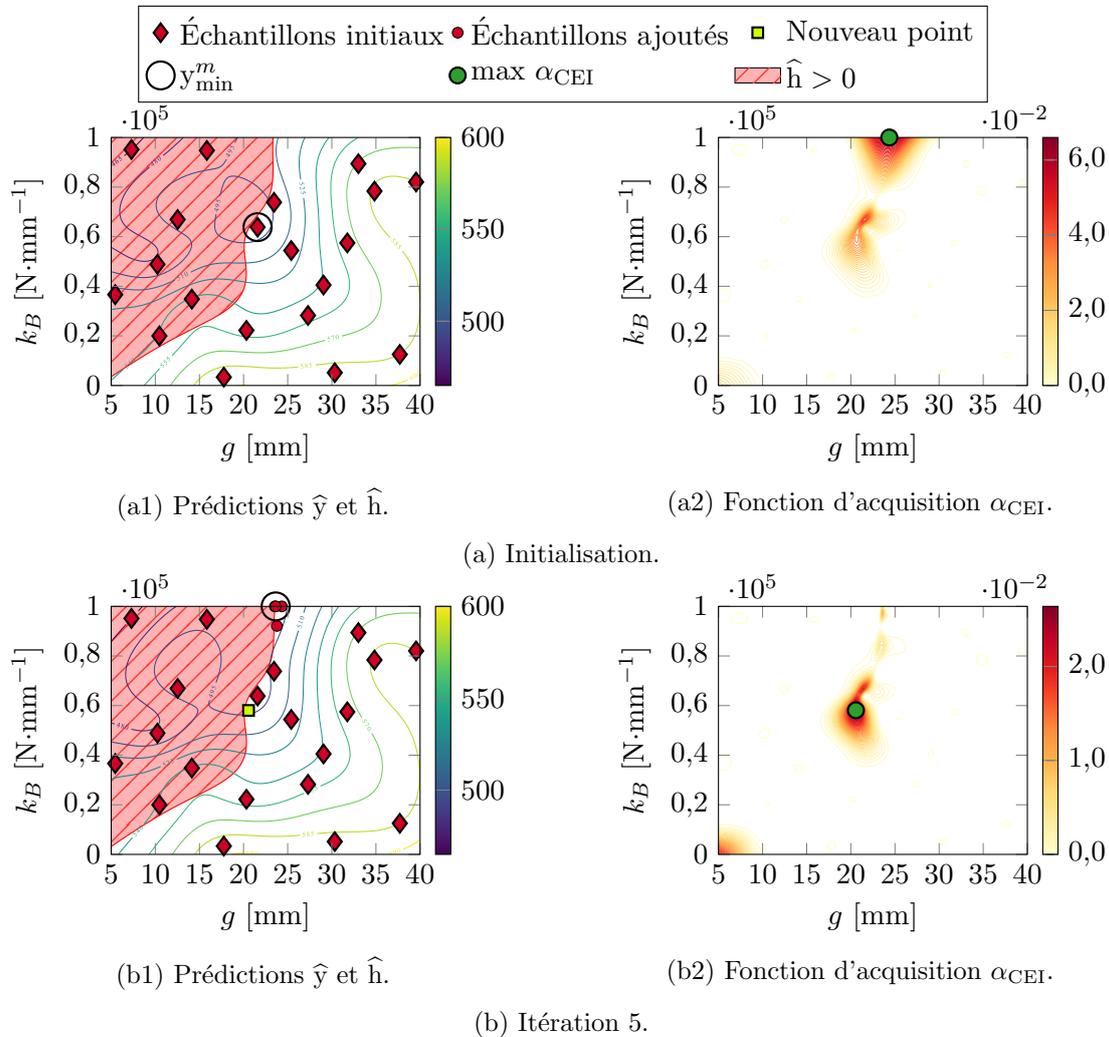


FIGURE 4.10 – Quelques itérations de la résolution du problème d'optimisation du portique de levage d'équation (4.12) avec 20 échantillons initiaux.

4.3. OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES : PORTIQUE DE LEVAGE

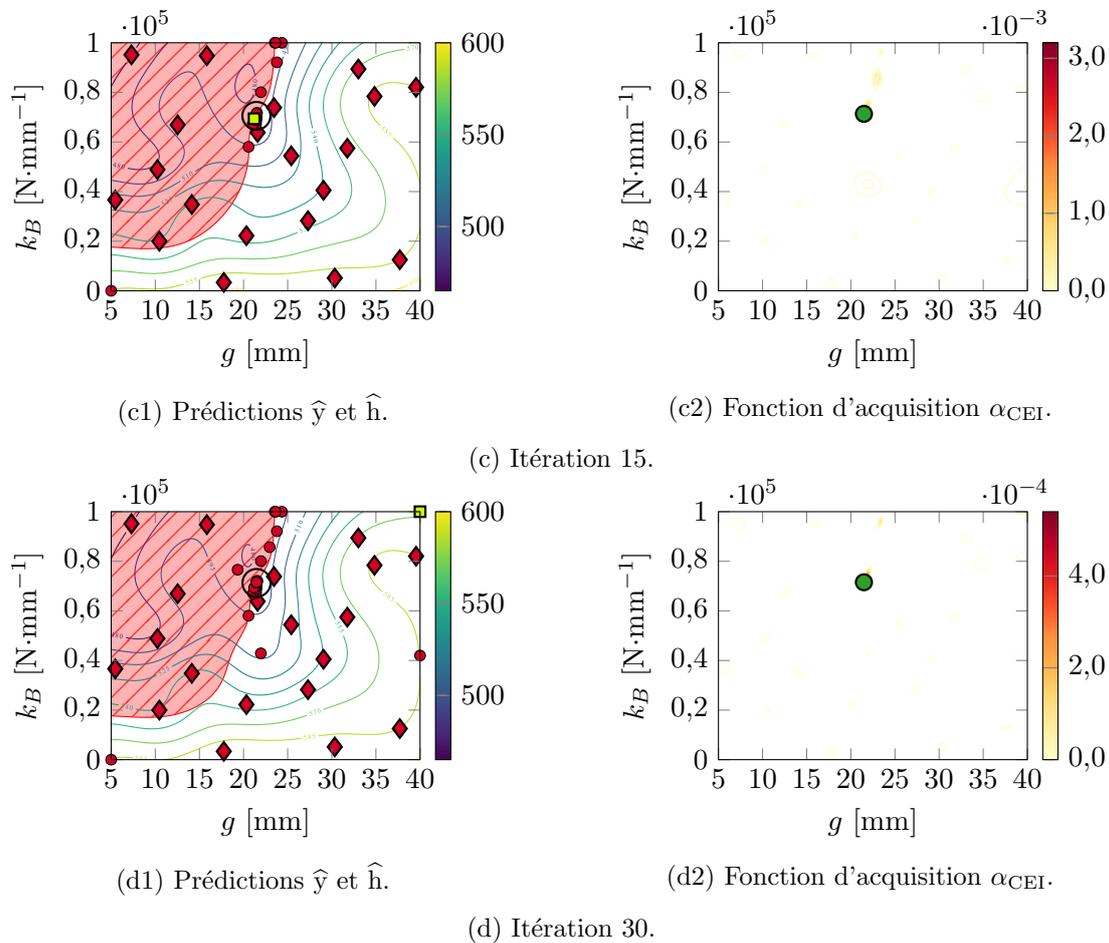
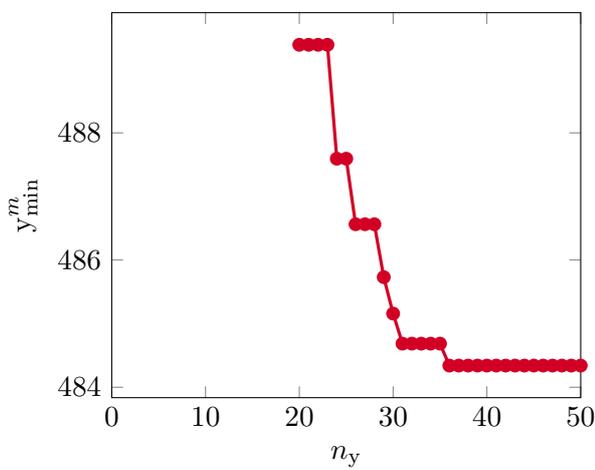


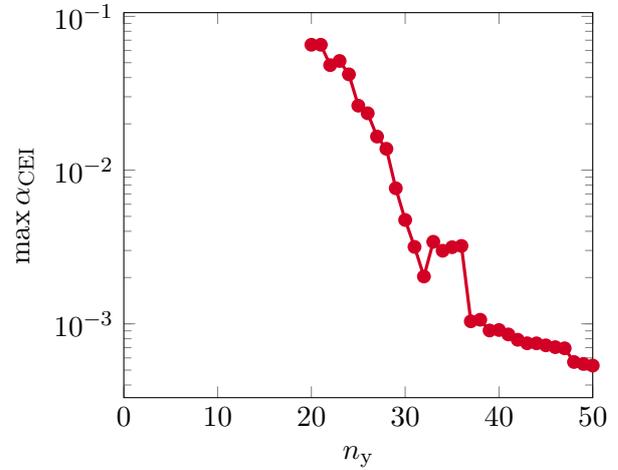
FIGURE 4.10 – Quelques itérations de la résolution du problème d'optimisation du portique de levage d'équation (4.12) avec 20 échantillons initiaux (suite).

démarche d'enrichissement. Après cet exemple académique, la transition vers l'échelle industrielle se fait au travers de l'illustration du réajustement d'un portique de levage dans un environnement nucléaire. La procédure de sous-structuration aux interfaces permet l'obtention d'un modèle réduit de cette structure de taille industrielle tout en conservant la modélisation du contact présent à l'interface. Le solveur mécanique est alors capable de fournir la réponse fréquentielle du portique en un temps raisonnable bien que la gestion numérique du contact soit assez délicate et nécessite un ajustement empirique des paramètres internes à la méthode. La stratégie parvient ainsi à fournir les paramètres optimaux pour la conception d'un dispositif anti-basculement avec des performances satisfaisantes, tout en respectant la contrainte. Les expériences répétées montrent la robustesse de la stratégie et la répétabilité du résultat obtenu. Ainsi, les exemples présentés dans cette section laissent entrevoir la possibilité d'une application industrielle de la stratégie mise en œuvre dans ces travaux. L'aptitude à résoudre un problème d'optimisation sous contraintes en respectant l'objectif de réduire le nombre de résolutions mécaniques est mise en évidence, de même que la capacité à prendre en compte des phénomènes non linéaires localisés. Les performances de la stratégie peuvent néanmoins être notablement influencés

4.3. OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES : PORTIQUE DE LEVAGE



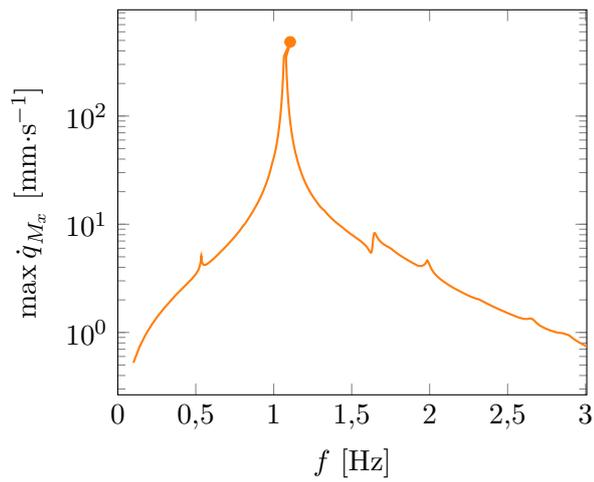
(a) Évolution du minimum des échantillons y_{\min}^m .



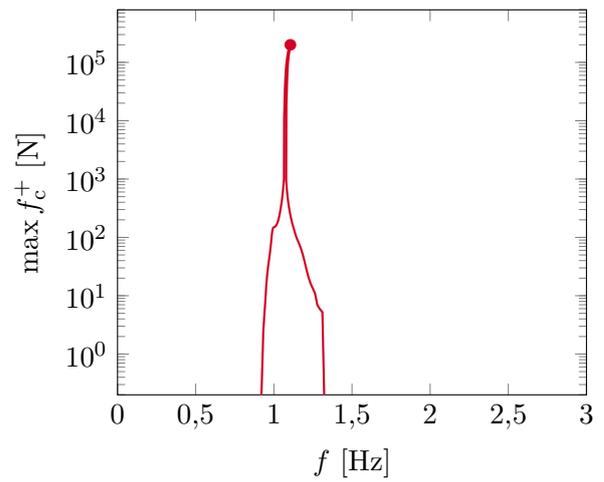
(b) Évolution du maximum de la fonction d'acquisition α_{CEI} .

FIGURE 4.11 – Résultats de la stratégie d'optimisation appliquée au problème du portique de levage avec un budget de 50 évaluations de y .

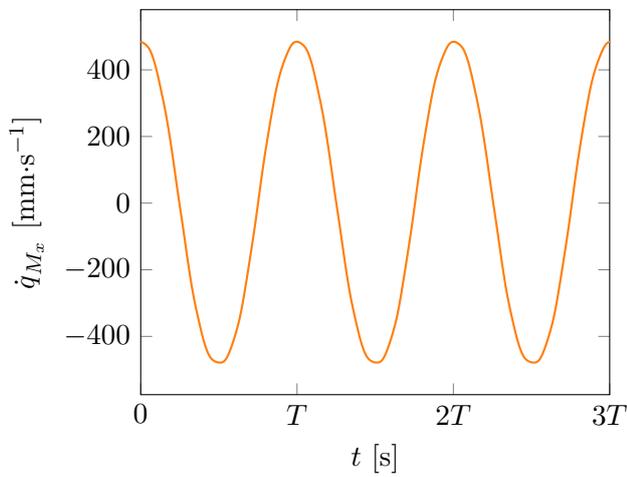
par les paramètres internes à chaque méthode (nombre d'harmoniques, discrétisation temporelle de la DFT, taille de l'échantillonnage initial, etc.). La sélection des valeurs idéales pour ces derniers est généralement dépendante du problème considéré et doit alors se faire de manière empirique.



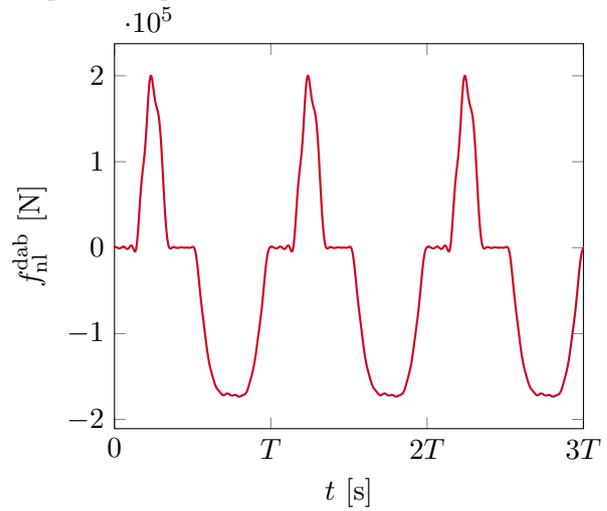
(a) Vitesse transversale - Réponse fréquentielle.



(b) Force de contact avec le dispositif anti-basculement - Réponse fréquentielle.

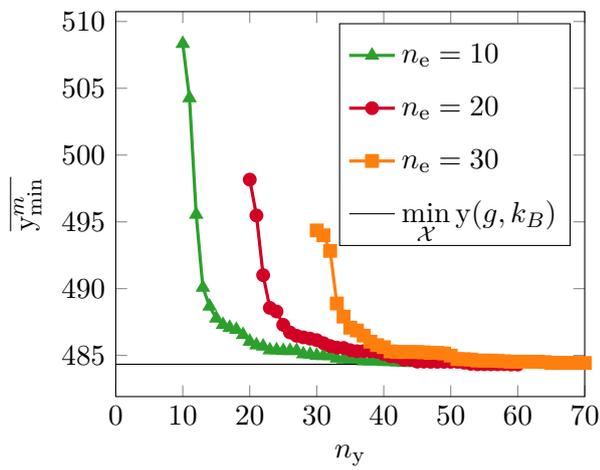


(c) Vitesse transversale - Réponse temporelle.

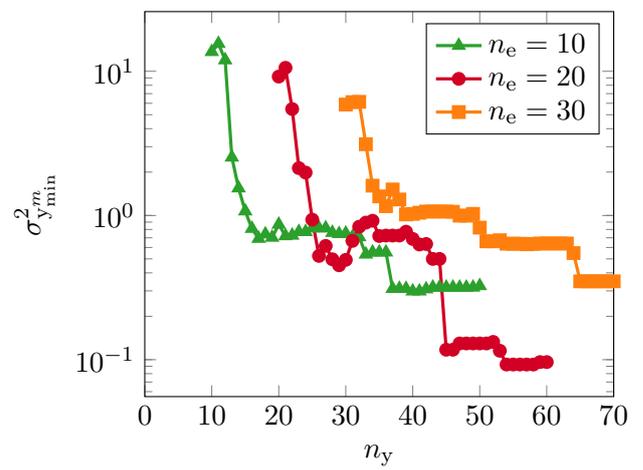


(d) Force de contact au pied du portique - Réponse temporelle.

FIGURE 4.12 – Réponse dynamique du portique de levage dans sa configuration optimale. Les réponses temporelles sont tracés sur 3 périodes pour la fréquence d’excitation maximale (1,11 Hz).



(a) Moyenne du minimum des échantillons y_{\min}^m .



(b) Variance du minimum des échantillons y_{\min}^m .

FIGURE 4.13 – Répétition de 30 expériences de résolution du problème d'optimisation du portique de levage d'équation (4.12) pour différentes valeurs de n_e , avec un budget de 30 itérations.

4.3. OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES : PORTIQUE DE LEVAGE

Conclusion

Conclusion générale

Ces travaux de thèse s’inscrivent dans le cadre du développement d’outils numériques avancés pour la conception de structures. Une stratégie d’optimisation globale sous contraintes de structures en dynamique vibratoire non linéaire est proposée. Cette approche vise à concilier la nécessité de mener des simulations haute fidélité avec la mise en œuvre d’une procédure d’optimisation peu coûteuse et applicable sur des structures de tailles industrielles. Un solveur mécanique dédié permet le calcul par éléments finis des réponses dynamiques de structures assemblées présentant des non-linéarités aux interfaces. Une condensation de Craig-Bampton est effectuée afin de construire un modèle réduit de la structure étudiée. Les équations dynamiques non linéaires sont ensuite résolues sur le modèle réduit grâce à la HBM associée à une procédure d’AFT. Le suivi des branches de solution selon l’évolution de la fréquence d’excitation est assuré par une procédure de continuation numérique par prédiction tangente et corrections orthogonales (ou par pseudo-longueur d’arc). Le solveur mécanique est ensuite utilisé au sein d’une procédure d’optimisation bayésienne sous contraintes visant à réduire le nombre d’appels à ce dernier. Les fonctions objectif et contraintes sont approchées par des modèles de substitution de type processus gaussien qui sont itérativement enrichis de manière intelligente. Le critère de l’amélioration espérée contrainte est utilisé en tant que fonction d’acquisition afin de déterminer les points d’enrichissement qui permettent de converger vers une approximation fine autour du minimum global du problème d’optimisation. La stratégie ainsi mise en œuvre fait l’objet d’un programme en langage *Python* basé sur une implémentation originale du solveur mécanique et l’utilisation de bibliothèques existantes pour la boucle d’optimisation bayésienne. Ces travaux ont fait l’objet d’une publication dans une revue à comité de lecture [RAGUENEAU, LAURENT, LEGAY, LARROQUE et al. 2024], de présentations lors de conférences nationales et internationales [RAGUENEAU, LAURENT, LEGAY, LARROQUE et al. 2022, 2023a,b], ainsi que d’un dépôt de code sur Zenodo [RAGUENEAU, LAURENT et LEGAY 2023].

Le solveur fréquentiel en dynamique non linéaire permet de traiter des problèmes non linéaires avec des performances intéressantes, bien que la comparaison précise de son coût de calcul avec des méthodes d’intégration temporelle demeure délicate en raison de l’influence des paramètres d’ajustement de chacune des méthodes. Le solveur développé permet notamment d’incorporer des phénomènes de bifurcations, fréquents en dynamique non linéaire, ce qui dépasse les possibilités offertes par les méthodes

CONCLUSION

couramment utilisées dans l'industrie. La stratégie de condensation permet de traiter des structures de tailles industrielles qui présentent des non-linéarités localisées. L'étude d'influence des paramètres internes au solveur sur ses performances montre que leur choix peut avoir un impact significatif, mais celui-ci dépend fortement du problème traité sans qu'il existe d'approches permettant de les définir de manière idéale.

La stratégie d'optimisation bayésienne atteint son objectif de résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes en réduisant le nombre d'évaluations des fonctions objectif et contraintes. L'utilisation de processus gaussien avec une fonction de covariance Matérn 5/2 semble un choix robuste pour la création de modèles de substitution, bien que d'autres alternatives puissent être envisageables. La fonction d'acquisition de l'amélioration espérée contrainte permet de gérer les contraintes du problème d'optimisation de manière satisfaisante. Lorsque les fonctions à optimiser sont suffisamment régulières, un nombre d'échantillons de départ très faible permet généralement les meilleures performances, mais cela peut poser des difficultés à converger vers le minimum global sur certaines fonctions problématiques, comme les fonctions présentant un nombre très important de minima locaux. Le choix d'un nombre d'échantillons de départ égal à dix fois la dimension de l'espace de conception semble un bon compromis lorsque qu'aucune information n'est connue a priori sur les fonctions du problème d'optimisation, ce qui est généralement le cas des problèmes rencontrés dans l'industrie. La sélection d'un critère d'arrêt de l'enrichissement reste à préciser. Si un critère basé sur un budget permet une planification et un contrôle utiles dans l'industrie, la mise en œuvre de critères basés sur les données du modèle de substitution pourrait permettre de réduire le coût de calcul.

La stratégie est appliquée pour la résolution du problème académique d'optimisation sans contraintes d'un oscillateur de Duffing, puis pour le réajustement optimal sous contraintes d'un portique de levage industriel. Les résultats obtenus montrent la capacité de la stratégie à traiter des structures de grandes tailles (au sens de la discrétisation par éléments finis) présentant des non-linéarités localisées. Le problème d'optimisation peut être résolu avec un nombre limité d'appels coûteux au solveur mécanique, tout en respectant les éventuelles contraintes. La répétition de la stratégie avec des nombres différents d'échantillons de départ montre sa robustesse ainsi que la constance des résultats obtenus. Le démonstrateur développé constitue un outil intéressant pour l'implémentation de la stratégie d'optimisation et permet d'envisager le développement de solutions industrielles. La stratégie mise en place paraît ainsi pertinente pour mener à bien l'optimisation paramétrique de structures industrielles, en veillant à maintenir un coût de calcul viable tout en conservant une fiabilité élevée dans la modélisation des phénomènes non linéaires en dynamique vibratoire.

Perspectives

Plusieurs perspectives découlent de ces travaux. En premier lieu, le passage à l'échelle industrielle peut être examiné de manière plus approfondie en appliquant la stratégie sur des problèmes d'optimisation en dynamique non linéaire plus complets. Cela implique la prise en compte d'un nombre plus élevé de variables de conception, ainsi que la considération de multiples contraintes. La complexification du modèle mécanique avec l'ajout de plusieurs ddls non linéaires ainsi que la prise en compte de

CONCLUSION

différents types de non-linéarités s'intègre aussi dans cette optique. Par exemple, le modèle du portique de levage peut être amélioré en prenant en compte la possibilité du décollement de chacun des pieds. Des phénomènes de contact entre les galets du chariot et le portique peuvent aussi être ajoutés, tandis que le grand déplacement de la masse suspendue au câble peut faire l'objet d'une modélisation par un élément s'apparentant à un oscillateur de Duffing.

La recherche autour de l'application de la HBM à l'échelle industrielle est active. Les récents développements ne sont pas intégrés au sein du solveur mécanique utilisé dans ces travaux, car l'objectif principal est l'exploration de la stratégie complète d'optimisation. Il est ainsi possible d'améliorer les performances du solveur mécanique en implémentant par exemple une démarche de sélection automatique des harmoniques [JAUMOILLÉ et al. 2010] ou un processus de filtrage de l'effet de Gibbs [COLAÏTIS et BATAILLY 2021]. La détection et le suivi d'autres types de bifurcations ainsi que l'étude de la stabilité des branches calculées [DETROUX, RENSON et al. 2015] permettraient de rendre le solveur plus robuste tout en enrichissant ses capacités à fournir une analyse des comportements dynamiques non linéaires complexes. Les stratégies d'adaptation automatique du pas de continuation mériteraient plus de considération. Ces dernières sont peu détaillées dans la littérature et aucune étude comparative n'a été identifiée. Pourtant, l'adaptation du pas influe de manière prépondérante sur le temps de calcul de la réponse fréquentielle et de meilleures stratégies semblent pouvoir être mises en place. Les développements autour de l'utilisation de la HBM pour le calcul de modes normaux non linéaires [CHONG et IMREGUN 2001 ; JOANNIN et al. 2017 ; FERHATOGLU et al. 2020] peuvent aussi être pertinents dans le cadre de l'optimisation. Il est ainsi envisageable d'utiliser ces modes pour l'évaluation de la fonction objectif.

Dans le but d'améliorer le processus d'optimisation bayésienne, la comparaison détaillée de différentes fonctions d'acquisition et différents critères d'arrêt de l'enrichissement pourrait faire émerger de meilleures pratiques. Le calcul analytique des gradients des fonctions du problème d'optimisation permet l'utilisation de modèles de substitution améliorés par gradients, conduisant à une optimisation plus performante [LAURENT et al. 2019]. La détermination d'une expression analytique de ces gradients avec la HBM constitue ainsi une perspective séduisante en vue d'améliorer les performances.

Finalement, pour les applications présentées dans ce mémoire comme pour de nombreux autres problèmes en dynamique vibratoire, l'évaluation des fonctions du problème d'optimisation fait seulement intervenir les valeurs maximales des réponses fréquentielles calculées. Ainsi, des méthodes capables de directement déterminer le pic de résonance sur la plage de fréquence considérée [DENIMAL, RENSON et al. 2022] ou de suivre ce pic lors de la variation d'un paramètre du problème d'optimisation [XIE et al. 2016 ; GRENAT et al. 2019] présentent un fort intérêt. Cependant, le choix de calculer l'intégralité de la réponse fréquentielle a été fait au sein de ces travaux afin de pouvoir prendre en considération d'éventuels problèmes d'optimisation nécessitant la connaissance du comportement dynamique complet de la structure pour l'évaluation des fonctions objectif et contraintes. De plus, les quantités d'intérêt pour l'évaluation des fonctions objectif et contrainte n'atteignent pas nécessairement leurs valeurs maximales aux mêmes fréquences. L'exploration d'une méthode capable de suivre simultanément les pics des toutes les quantités d'intérêt lors de la variation des paramètres de conception présenterait alors un intérêt important pour l'amélioration de la stratégie d'optimisation.

CONCLUSION

Bibliographie

- ABDEL-BASSET, M., L. ABDEL-FATAH et A. K. SANGAIAH. « Chapter 10 - Metaheuristic Algorithms : A Comprehensive Review ». In : *Computational Intelligence for Multimedia Big Data on the Cloud with Engineering Applications*. Sous la dir. d'A. K. SANGAIAH, M. SHENG et Z. ZHANG. Intelligent Data-Centric Systems. London : Academic Press, 2018, p. 185-231. ISBN : 978-0-12-813314-9. DOI : [10.1016/B978-0-12-813314-9.00010-4](https://doi.org/10.1016/B978-0-12-813314-9.00010-4) (cf. p. 34).
- ABICHOU, H., H. ZAHROUNI et M. POTIER-FERRY. « Asymptotic numerical method for problems coupling several nonlinearities ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191.51 (2002), p. 5795-5810. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/S0045-7825\(02\)00497-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00497-8) (cf. p. 68).
- AFNOR. *NF EN 1998-1 : Eurocode 8 : Design of structures for earthquake resistance - Part 1 : general rules, seismic actions and rules for buildings*. Paris, 2010 (cf. p. 132).
- AFNOR. *NF EN 1992-4 : Eurocode 2 : Design of concrete structures - Part 4 : design of fastenings for use in concrete*. Paris, 2019 (cf. p. 134).
- AGNES, G. S. et D. J. INMAN. « Nonlinear piezoelectric vibration absorbers ». In : *Smart Materials and Structures* 5.5 (1996), p. 704. ISSN : 0964-1726. DOI : [10.1088/0964-1726/5/5/018](https://doi.org/10.1088/0964-1726/5/5/018) (cf. p. 48).
- ALCORTA, R., S. BAGUET, B. PRABEL, P. PITEAU et G. JACQUET-RICHARDET. « Period doubling bifurcation analysis and isolated sub-harmonic resonances in an oscillator with asymmetric clearances ». In : *Nonlinear Dynamics* 98.4 (2019), p. 2939-2960. ISSN : 1573-269X. DOI : [10.1007/s11071-019-05245-6](https://doi.org/10.1007/s11071-019-05245-6) (cf. p. 77).
- ALCORTA GALVAN, R. « Prediction of non-linear responses and bifurcations of impacting systems : Contribution to the understanding of steam generator vibrations ». Thèse de doctorat. France : INSA de Lyon, 2021. ADRESSE : <https://hal.science/tel-03406785> (cf. p. 48, 61).
- ALLAIRE, G. *Conception optimale de structures*. T. 58. Mathématiques & applications. Berlin, Heidelberg : Springer, 2006. ISBN : 978-3-540-36710-9. DOI : [10.1007/978-3-540-36856-4](https://doi.org/10.1007/978-3-540-36856-4) (cf. p. 24).
- ALLGOWER, E. L. et K. GEORG. *Numerical Continuation Methods*. T. 13. Springer Series in Computational Mathematics. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1990. ISBN : 978-3-642-64764-2. DOI : [10.1007/978-3-642-61257-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-61257-2) (cf. p. 61, 66).
- AMBARISHA, V. K. et R. G. PARKER. « Nonlinear dynamics of planetary gears using analytical and finite element models ». In : *Journal of Sound and Vibration* 302.3 (2007), p. 577-595. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2006.11.028](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.11.028) (cf. p. 48).

BIBLIOGRAPHIE

- ANAGNOSTOPOULOS, S. A. « Pounding of buildings in series during earthquakes ». In : *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 16.3 (1988), p. 443-456. ISSN : 1096-9845. DOI : [10.1002/eqe.4290160311](https://doi.org/10.1002/eqe.4290160311) (cf. p. 48).
- ANDERSSON, R. S. et P. BLOOMFIELD. « Properties of the random search in global optimization ». In : *Journal of Optimization Theory and Applications* 16.5 (1975), p. 383-398. ISSN : 1573-2878. DOI : [10.1007/BF00933849](https://doi.org/10.1007/BF00933849) (cf. p. 33).
- ANDREWS, C., J. DAVIES et G. SCHWARZ. « Adaptive data compression ». In : *Proceedings of the IEEE* 55.3 (1967), p. 267-277. ISSN : 1558-2256. DOI : [10.1109/PROC.1967.5481](https://doi.org/10.1109/PROC.1967.5481) (cf. p. 71).
- ASCHER, U., J. CHRISTIANSEN et R. D. RUSSELL. « A collocation solver for mixed order systems of boundary value problems ». In : *Mathematics of Computation* 33.146 (1979), p. 659-679. ISSN : 0025-5718. DOI : [10.1090/S0025-5718-1979-0521281-7](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1979-0521281-7) (cf. p. 60).
- BACK, T., U. HAMMEL et H.-P. SCHWEFEL. « Evolutionary computation : comments on the history and current state ». In : *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 1.1 (1997), p. 3-17. ISSN : 1941-0026. DOI : [10.1109/4235.585888](https://doi.org/10.1109/4235.585888) (cf. p. 34).
- BACUTA, C. « A Unified Approach for Uzawa Algorithms ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 44.6 (2006), p. 2633-2649. ISSN : 0036-1429. DOI : [10.1137/050630714](https://doi.org/10.1137/050630714) (cf. p. 38).
- BAGHERI, S. et al. « Constraint handling in efficient global optimization ». In : *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference. GECCO '17*. New York, NY : Association for Computing Machinery, 2017, p. 673-680. ISBN : 978-1-4503-4920-8. DOI : [10.1145/3071178.3071278](https://doi.org/10.1145/3071178.3071278) (cf. p. 121).
- BALANDAT, M. et al. « BoTorch : A Framework for Efficient Monte-Carlo Bayesian Optimization ». In : *Advances in Neural Information Processing Systems. Annual Conference on Neural Information Processing Systems 2020, NeurIPS 2020*. T. 33. virtual : Curran Associates, Inc., 2020, p. 21524-21538. ISBN : 978-1-71382-954-6. ADRESSE : <https://proceedings.neurips.cc/paper/2020/hash/f5b1b89d98b7286673128a5fb112cb9a-Abstract.html> (cf. p. 113, 124).
- BALARAM, B., M. D. NARAYANAN et P. K. RAJENDRAKUMAR. « Optimal design of multi-parametric nonlinear systems using a parametric continuation based Genetic Algorithm approach ». In : *Nonlinear Dynamics* 67.4 (2012), p. 2759-2777. ISSN : 1573-269X. DOI : [10.1007/s11071-011-0187-z](https://doi.org/10.1007/s11071-011-0187-z) (cf. p. 125).
- BARTON, R. R. et M. MECKESHEIMER. « Chapter 18 Metamodel-Based Simulation Optimization ». In : *Simulation*. Sous la dir. de S. G. HENDERSON et B. L. NELSON. T. 13. Handbooks in Operations Research and Management Science. Amsterdam : Elsevier (North Holland), 2006, p. 535-574. ISBN : 978-0-444-51428-8. DOI : [10.1016/S0927-0507\(06\)13018-2](https://doi.org/10.1016/S0927-0507(06)13018-2) (cf. p. 104).
- BASHFORTH, F. *An attempt to test the theories of capillary action by comparing the theoretical and measured forms of drops of fluid. With an explanation of the method of integration employed in constructing the tables which give the theoretical forms of such drops*. Avec la coll. de J. C. ADAMS. Cambridge : Cambridge University Press, 1883. 162 p. (cf. p. 57).
- BAUMAL, A. E., J. J. MCPHEE et P. H. CALAMAI. « Application of genetic algorithms to the design optimization of an active vehicle suspension system ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 163.1 (1998), p. 87-94. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/S0045-7825\(98\)00004-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00004-8) (cf. p. 72).
- BECKER, R. W. et G. V. LAGO. « A global optimization algorithm ». In : *Proceedings of the 8th Allerton Conference on Circuits and Systems Theory*. Monticello, IL, 1970, p. 3-12 (cf. p. 34).

- BEREMLIJSKI, P., J. HASLINGER, M. KOCVARA et J. OTRATA. « Shape Optimization in Contact Problems with Coulomb Friction ». In : *SIAM Journal on Optimization* 13.2 (2002), p. 561-587. ISSN : 1052-6234. DOI : [10.1137/S1052623401395061](https://doi.org/10.1137/S1052623401395061) (cf. p. 72).
- BERKOOZ, G., P. HOLMES et J. L. LUMLEY. « The Proper Orthogonal Decomposition in the Analysis of Turbulent Flows ». In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 25.1 (1993), p. 539-575. DOI : [10.1146/annurev.fl.25.010193.002543](https://doi.org/10.1146/annurev.fl.25.010193.002543) (cf. p. 71).
- BEYN, W.-J., A. CHAMPNEYS, E. DOEDEL, W. GOVAERTS, Y. A. KUZNETSOV et B. SANDSTEDT. « Chapter 4 - Numerical Continuation, and Computation of Normal Forms ». In : *Handbook of Dynamical Systems*. Sous la dir. de B. FIEDLER. T. 2. Handbook of Dynamical Systems. Amsterdam : Elsevier Science, 2002, p. 149-219. ISBN : 978-0-444-50168-4. DOI : [10.1016/S1874-575X\(02\)80025-X](https://doi.org/10.1016/S1874-575X(02)80025-X) (cf. p. 61, 82).
- BLAIR, K. B., C. M. KROUSGRILL et T. N. FARRIS. « Harmonic Balance and Continuation Techniques in the Dynamic Analysis of Duffing's Equation ». In : *Journal of Sound and Vibration* 202.5 (1997), p. 717-731. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1006/jsvi.1996.0863](https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0863) (cf. p. 66, 83).
- BOENDER, C. G. E., A. H. G. RINNOOY KAN, G. T. TIMMER et L. STOUGIE. « A stochastic method for global optimization ». In : *Mathematical Programming* 22.1 (1982), p. 125-140. ISSN : 1436-4646. DOI : [10.1007/BF01581033](https://doi.org/10.1007/BF01581033) (cf. p. 34).
- BOGGS, P. T. et J. W. TOLLE. « Sequential Quadratic Programming ». In : *Acta Numerica* 4 (1995), p. 1-51. ISSN : 0962-4929. DOI : [10.1017/S0962492900002518](https://doi.org/10.1017/S0962492900002518) (cf. p. 38).
- BOGOLIUBOV, N. N. et Y. A. MITROPOLSKY. *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*. Philadelphia, PA : Gordon & Breach, 1961. 548 p. ISBN : 978-0-677-20051-4 (cf. p. 54).
- BONABEAU, E., M. DORIGO et G. THERAULAZ. *Swarm Intelligence : From Natural to Artificial Systems*. 1st edition. New York, NY : Oxford University Press, 1999. 320 p. ISBN : 978-0-19-513158-1. DOI : [10.1093/oso/9780195131581.001.0001](https://doi.org/10.1093/oso/9780195131581.001.0001) (cf. p. 35).
- BONNET, M. et A. FRANGI. *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*. Palaiseau : Editions de l'École Polytechnique, 2007. 326 p. ISBN : 978-2-7302-1349-3. Google Books : [xHqVvUjDIFEC](https://books.google.fr/books?id=xHqVvUjDIFEC) (cf. p. 39).
- BORGES, R. A., A. M. G. de LIMA et V. STEFFEN JR. « Robust Optimal Design of a Nonlinear Dynamic Vibration Absorber Combining Sensitivity Analysis ». In : *Shock and Vibration* 17.4-5 (2010), p. 507-520. ISSN : 1070-9622. DOI : [10.3233/SAV-2010-0544](https://doi.org/10.3233/SAV-2010-0544) (cf. p. 72).
- BOROSON, E. et S. MISSOUM. « Stochastic optimization of nonlinear energy sinks ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 55.2 (2017), p. 633-646. ISSN : 1615-1488. DOI : [10.1007/s00158-016-1526-y](https://doi.org/10.1007/s00158-016-1526-y) (cf. p. 72).
- BOX, G. E. P. « Evolutionary Operation : A Method for Increasing Industrial Productivity ». In : *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)* 6.2 (1957), p. 81-101. ISSN : 0035-9254. DOI : [10.2307/2985505](https://doi.org/10.2307/2985505) (cf. p. 29).
- BRANIN, F. H. et S. K. HOO. « A Method for Finding Multiple Extrema of a Function of n Variables ». In : *Numerical Methods for Non-linear Optimization*. London : Academic Press, 1972, p. 231-237. ISBN : 978-0-12-455650-8 (cf. p. 34).
- BROYDEN, C. G. « A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations ». In : *Mathematics of Computation* 19.92 (1965), p. 577-593. ISSN : 0025-5718. DOI : [10.1090/S0025-5718-1965-0198670-6](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1965-0198670-6) (cf. p. 54).
- BROYDEN, C. G. « The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms 1. General Considerations ». In : *IMA Journal of Applied Mathematics* 6.1 (1970), p. 76-90. ISSN : 0272-4960. DOI : [10.1093/imamat/6.1.76](https://doi.org/10.1093/imamat/6.1.76) (cf. p. 31).

BIBLIOGRAPHIE

- BUCHER, I. « Parametric Optimization of Structures Under Combined Base Motion Direct Forces and Static Loading ». In : *Journal of Vibration and Acoustics* 124.1 (1998), p. 132-140. ISSN : 1048-9002. DOI : [10.1115/1.1424888](https://doi.org/10.1115/1.1424888) (cf. p. 72).
- BUHL, T., C. PEDERSEN et O. SIGMUND. « Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 19.2 (2000), p. 93-104. ISSN : 1615-1488. DOI : [10.1007/s001580050089](https://doi.org/10.1007/s001580050089) (cf. p. 72).
- BURRI, S. « Contributions à l'optimisation topologique de liaisons amortissantes pour des applications spatiales ». Thèse de doctorat. Paris : HESAM université, 2020. ADRESSE : <https://hal.science/tel-03179845> (cf. p. 20).
- BURRI, S. et A. LEGAY. « Static reinforcement and vibration reduction of structures using topology optimization ». In : *Mechanics & Industry* 24 (2023), p. 14. ISSN : 2257-7777, 2257-7750. DOI : [10.1051/meca/2023003](https://doi.org/10.1051/meca/2023003) (cf. p. 20).
- BUTCHER, J. C. « Runge–Kutta Methods ». In : *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. 3rd edition. Chichester : John Wiley & Sons, Ltd, 2016 [2003]. Chap. 3, p. 143-331. ISBN : 978-1-119-12150-3. DOI : [10.1002/9781119121534](https://doi.org/10.1002/9781119121534) (cf. p. 57).
- BYRD, R. H., R. B. SCHNABEL et G. A. SHULTZ. « A Trust Region Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 24.5 (1987), p. 1152-1170. ISSN : 0036-1429. DOI : [10.1137/0724076](https://doi.org/10.1137/0724076) (cf. p. 38).
- CAMERON, T. M. et J. H. GRIFFIN. « An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems ». In : *Journal of Applied Mechanics* 56.1 (1989), p. 149-154. ISSN : 0021-8936. DOI : [10.1115/1.3176036](https://doi.org/10.1115/1.3176036) (cf. p. 61, 76, 78).
- CARDONA, A., A. LERUSSE et M. GÉRADIN. « Fast Fourier nonlinear vibration analysis ». In : *Computational Mechanics* 22.2 (1998), p. 128-142. ISSN : 1432-0924. DOI : [10.1007/s004660050347](https://doi.org/10.1007/s004660050347) (cf. p. 62, 66, 81).
- CARTMELL, M. P., A. J. ŽAK et O. A. GANILOVA. « Applications for Shape Memory Alloys in Structural and Machine Dynamics ». In : *Nonlinear Dynamic Phenomena in Mechanics*. Sous la dir. de J. WARMINSKI, S. LENCI, M. P. CARTMELL, G. REGA et M. WIERCIGROCH. Solid Mechanics and Its Applications. Dordrecht : Springer Netherlands, 2012, p. 115-158. ISBN : 978-94-007-2473-0. DOI : [10.1007/978-94-007-2473-0_3](https://doi.org/10.1007/978-94-007-2473-0_3) (cf. p. 48).
- CASTAÑEDA, P. P. et P. SUQUET. « Nonlinear Composites ». In : *Advances in Applied Mechanics*. Sous la dir. d'E. van der GIESSEN et T. Y. WU. T. 34. Elsevier (Academic Press), 1997, p. 171-302. ISBN : 978-0-12-002034-8. DOI : [10.1016/S0065-2156\(08\)70321-1](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70321-1) (cf. p. 48).
- CAUCHY, A. L. « Méthode générale pour la résolution des systemes d'équations simultanées ». In : *Comptes Rendus de l'Academie des Science* 25 (1847), p. 536-538 (cf. p. 30).
- CAUGHEY, T. K. « Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems ». In : *Journal of Applied Mechanics* 27.2 (1960), p. 269-271. ISSN : 0021-8936. DOI : [10.1115/1.3643949](https://doi.org/10.1115/1.3643949) (cf. p. 44).
- ČERNÝ, V. « Thermodynamical approach to the traveling salesman problem : An efficient simulation algorithm ». In : *Journal of Optimization Theory and Applications* 45.1 (1985), p. 41-51. ISSN : 1573-2878. DOI : [10.1007/BF00940812](https://doi.org/10.1007/BF00940812) (cf. p. 35).
- CHARGIN, M. L., L. W. DUNNE et D. N. HERTING. « Nonlinear dynamics of brake squeal ». In : *Finite Elements in Analysis and Design* 28.1 (1997), p. 69-82. ISSN : 0168-874X. DOI : [10.1016/S0168-874X\(97\)81963-4](https://doi.org/10.1016/S0168-874X(97)81963-4) (cf. p. 48).
- CHATTERJEE, T., S. CHAKRABORTY et R. CHOWDHURY. « A Critical Review of Surrogate Assisted Robust Design Optimization ». In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 26.1 (2019), p. 245-274. ISSN : 1886-1784. DOI : [10.1007/s11831-017-9240-5](https://doi.org/10.1007/s11831-017-9240-5) (cf. p. 104).

BIBLIOGRAPHIE

- CHEN, Y.-C., B.-K. HUANG, Z.-T. YOU, C.-Y. CHAN et T.-M. HUANG. « Optimization of lightweight structure and supporting bipod flexure for a space mirror ». In : *Applied Optics* 55.36 (2016), p. 10382-10391. ISSN : 2155-3165. DOI : [10.1364/AO.55.010382](https://doi.org/10.1364/AO.55.010382) (cf. p. 20).
- CHEN, C.-S., S. NATSIAVAS et H. D. NELSON. « Stability Analysis and Complex Dynamics of a Gear-Pair System Supported by a Squeeze Film Damper ». In : *Journal of Vibration and Acoustics* 119.1 (1997), p. 85-88. ISSN : 1048-9002. DOI : [10.1115/1.2889691](https://doi.org/10.1115/1.2889691) (cf. p. 60).
- CHEN, X. B. et M. M. KOSTREVA. « A generalization of the norm-relaxed method of feasible directions ». In : *Applied Mathematics and Computation* 102.2 (1999), p. 257-272. ISSN : 0096-3003. DOI : [10.1016/S0096-3003\(98\)10025-5](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(98)10025-5) (cf. p. 38).
- CHENG, K., Z. LU, C. LING et S. ZHOU. « Surrogate-assisted global sensitivity analysis : an overview ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 61.3 (2020), p. 1187-1213. ISSN : 1615-1488. DOI : [10.1007/s00158-019-02413-5](https://doi.org/10.1007/s00158-019-02413-5) (cf. p. 104).
- CHEUNG, Y. K., S. H. CHEN et S. L. LAU. « Application of the incremental harmonic balance method to cubic non-linearity systems ». In : *Journal of Sound and Vibration* 140.2 (1990), p. 273-286. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/0022-460X\(90\)90528-8](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90528-8) (cf. p. 61, 76).
- CHINESTA, F., P. LADEVEZE et E. CUETO. « A Short Review on Model Order Reduction Based on Proper Generalized Decomposition ». In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 18.4 (2011), p. 395-404. ISSN : 1886-1784. DOI : [10.1007/s11831-011-9064-7](https://doi.org/10.1007/s11831-011-9064-7) (cf. p. 71).
- CHOI, K. et S. CHO. « Design sensitivity analysis and optimization of nonlinear structural dynamics using DYNA3D ». In : *7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*. Multidisciplinary Analysis Optimization Conferences. St. Louis, MO : American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998. DOI : [10.2514/6.1998-4721](https://doi.org/10.2514/6.1998-4721) (cf. p. 72).
- CHONG, Y. et M. IMREGUN. « Development and Application of a Nonlinear Modal Analysis Technique for MDOF Systems ». In : *Journal of Vibration and Control* 7.2 (2001), p. 167-179. ISSN : 1077-5463. DOI : [10.1177/107754630100700202](https://doi.org/10.1177/107754630100700202) (cf. p. 71, 145).
- CHUNG, J. et G. M. HULBERT. « A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation : The Generalized- α Method ». In : *Journal of Applied Mechanics* 60.2 (1993), p. 371-375. ISSN : 0021-8936. DOI : [10.1115/1.2900803](https://doi.org/10.1115/1.2900803) (cf. p. 57).
- COCHELIN, B., N. DAMIL et M. POTIER-FERRY. *Méthode asymptotique numérique*. Paris : Hermes Science Publications - Lavoisier, 2007, p. 297. ISBN : 978-2-7462-1567-2. ADRESSE : <https://hal.science/hal-00487343> (cf. p. 66).
- COCHELIN, B. et C. VERGEZ. « A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions ». In : *Journal of Sound and Vibration* 324.1 (2009), p. 243-262. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2009.01.054](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.01.054) (cf. p. 68).
- COLAÏTIS, Y. et A. BATAILLY. « The harmonic balance method with arc-length continuation in blade-tip/casing contact problems ». In : *Journal of Sound and Vibration* 502 (2021), p. 116070. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2021.116070](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116070) (cf. p. 98, 145).
- COLAÏTIS, Y. « Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter ». Thèse de doctorat. Canada : École Polytechnique de Montréal, 2021. ADRESSE : <https://hal.science/tel-03318777> (cf. p. 47, 68, 78, 97).
- COLLETTE, Y. et P. SIARRY. *Multiobjective Optimization*. Sér. sous la dir. de R. ROY. Corrected 2nd printing. Decision Engineering. Berlin, Heidelberg : Springer, 2004 [2003]. ISBN : 978-3-540-40182-7. DOI : [10.1007/978-3-662-08883-8](https://doi.org/10.1007/978-3-662-08883-8) (cf. p. 26).

- COOLEY, J. W. et J. W. TUKEY. « An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series ». In : *Mathematics of Computation* 19.90 (1965), p. 297-301. ISSN : 0025-5718. DOI : [10.1090/S0025-5718-1965-0178586-1](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1965-0178586-1) (cf. p. 79, 175).
- CORLU, C. G., R. de la TORRE, A. SERRANO-HERNANDEZ, A. A. JUAN et J. FAULIN. « Optimizing Energy Consumption in Transportation : Literature Review, Insights, and Research Opportunities ». In : *Energies* 13.5 (5 2020), p. 1115. ISSN : 1996-1073. DOI : [10.3390/en13051115](https://doi.org/10.3390/en13051115) (cf. p. 20).
- CRAIG JR, R. R. et M. BAMPPTON. « Coupling of substructures for dynamic analyses. » In : *AIAA Journal* 6.7 (1968), p. 1313-1319. ISSN : 0001-1452. DOI : [10.2514/3.4741](https://doi.org/10.2514/3.4741) (cf. p. 70, 124).
- CRAIG JR, R. R. et C.-J. CHANG. « Free-interface methods of substructure coupling for dynamic analysis ». In : *AIAA Journal* 14.11 (1976), p. 1633-1635. ISSN : 0001-1452. DOI : [10.2514/3.7264](https://doi.org/10.2514/3.7264) (cf. p. 70, 83).
- DANKOWICZ, H. et F. SCHILDER. *Recipes for Continuation*. Philadelphia, PA : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013. 564 p. ISBN : 978-1-61197-256-6. DOI : [10.1137/1.9781611972573](https://doi.org/10.1137/1.9781611972573) (cf. p. 60).
- DANKOWICZ, H. et F. SCHILDER. *Continuation Core and Toolboxes (COCO)*. Version 2020. 2020. ADRESSE : <https://sourceforge.net/projects/cocotools/> (cf. p. 60).
- DARWIN, C. *On The Origin of Species*. London : John Murray, 1859 (cf. p. 34).
- DAVIDON, W. C. *Variable Metric Method for Minimization*. Rapport technique ANL-5990. Lemont, IL : Argonne National Lab., 1959. DOI : [10.2172/4252678](https://doi.org/10.2172/4252678) (cf. p. 31).
- De BOOR, C. et B. SWARTZ. « Collocation at Gaussian Points ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 10.4 (1973), p. 582-606. ISSN : 0036-1429. JSTOR : [2156271](https://www.jstor.org/stable/2156271). ADRESSE : <https://www.jstor.org/stable/2156271> (cf. p. 60).
- De KLERK, D., D. J. RIXEN et S. N. VOORMEEREN. « General Framework for Dynamic Substructuring : History, Review and Classification of Techniques ». In : *AIAA Journal* 46.5 (2008), p. 1169-1181. ISSN : 0001-1452. DOI : [10.2514/1.33274](https://doi.org/10.2514/1.33274) (cf. p. 69).
- DELAZERI, G., M. RITT et M. de SOUZA. « Comparing Surrogate Models for Tuning Optimization Algorithms ». In : *Learning and Intelligent Optimization*. 16th International Conference on Learning and Intelligent Optimization, LION 16, Milos Island, Greece. Sous la dir. de D. E. SIMOS, V. A. RASSKAZOVA, F. ARCHETTI, I. S. KOTSIREAS et P. M. PARDALOS. Lecture Notes in Computer Science. Cham : Springer International Publishing, 2022, p. 347-360. ISBN : 978-3-031-24866-5. DOI : [10.1007/978-3-031-24866-5_26](https://doi.org/10.1007/978-3-031-24866-5_26) (cf. p. 104).
- DEMAILLY, D. « Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel — Application à la dynamique rotor ». Thèse de doctorat. France : École Centrale de Lyon, 2003. ADRESSE : <https://hal.science/tel-00587168> (cf. p. 66).
- DENIMAL, E., F. EL HADDAD, C. WONG et L. SALLES. « Topological Optimization of Under-Platform Dampers With Moving Morphable Components and Global Optimization Algorithm for Nonlinear Frequency Response ». In : *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 143.021021 (2021). ISSN : 0742-4795. DOI : [10.1115/1.4049666](https://doi.org/10.1115/1.4049666) (cf. p. 72).
- DENIMAL, E., L. RENSON, C. WONG et L. SALLES. « Topology optimisation of friction under-platform dampers using moving morphable components and the efficient global optimization algorithm ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 65.2 (2022), p. 56. ISSN : 1615-1488. DOI : [10.1007/s00158-021-03158-w](https://doi.org/10.1007/s00158-021-03158-w) (cf. p. 72, 145).
- DENNIS Jr., J. E. et V. TORCZON. « Direct Search Methods on Parallel Machines ». In : *SIAM Journal on Optimization* 1.4 (1991), p. 448-474. ISSN : 1052-6234. DOI : [10.1137/0801027](https://doi.org/10.1137/0801027) (cf. p. 29).

- DETROUX, T., L. RENSON, L. MASSET et G. KERSCHEN. « The harmonic balance method for bifurcation analysis of large-scale nonlinear mechanical systems ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 296 (2015), p. 18-38. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2015.07.017](https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.07.017) (cf. p. [48](#), [61](#), [69](#), [145](#)).
- DETROUX, T., J.-P. NOËL et G. KERSCHEN. « Tailoring the resonances of nonlinear mechanical systems ». In : *Nonlinear Dynamics* 103.4 (2021), p. 3611-3624. ISSN : 1573-269X. DOI : [10.1007/s11071-020-06002-w](https://doi.org/10.1007/s11071-020-06002-w) (cf. p. [72](#)).
- DEUFLHARD, P. *Newton Methods for Nonlinear Problems*. T. 35. Springer Series in Computational Mathematics. Berlin, Heidelberg : Springer Verlag, 2011 [2004]. ISBN : 978-3-642-23898-7. DOI : [10.1007/978-3-642-23899-4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-23899-4) (cf. p. [54](#), [79](#)).
- DHOOGHE, A., W. GOVAERTS, Yu. A. KUZNETSOV, H. G. MEIJER et B. SAUTOIS. « New features of the software MatCont for bifurcation analysis of dynamical systems ». In : *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* 14.2 (2008), p. 147-175. ISSN : 1387-3954. DOI : [10.1080/13873950701742754](https://doi.org/10.1080/13873950701742754) (cf. p. [60](#)).
- DING, H. et L.-Q. CHEN. « Designs, analysis, and applications of nonlinear energy sinks ». In : *Nonlinear Dynamics* 100.4 (2020), p. 3061-3107. ISSN : 1573-269X. DOI : [10.1007/s11071-020-05724-1](https://doi.org/10.1007/s11071-020-05724-1) (cf. p. [48](#)).
- DOEDEL, E. J. « Lecture Notes on Numerical Analysis of Nonlinear Equations ». In : *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems : Path following and boundary value problems*. Sous la dir. de B. KRAUSKOPF, H. M. OSINGA et J. GALÁN-VIOQUE. Understanding Complex Systems. Dordrecht : Springer Netherlands, 2007, p. 1-49. ISBN : 978-1-4020-6356-5. DOI : [10.1007/978-1-4020-6356-5_1](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6356-5_1) (cf. p. [60](#)).
- DOEDEL, E. J. et B. E. OLDEMAN. « AUTO-07P : Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations ». Montreal, 2007. ADRESSE : <https://www.macs.hw.ac.uk/~gabriel/auto07/auto.html> (cf. p. [60](#)).
- DOKAINISH, M. A. et K. SUBBARAJ. « A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics—I. Explicit methods ». In : *Computers & Structures* 32.6 (1989), p. 1371-1386. ISSN : 0045-7949. DOI : [10.1016/0045-7949\(89\)90314-3](https://doi.org/10.1016/0045-7949(89)90314-3) (cf. p. [55](#)).
- DORIGO, M. et L. GAMBARDILLA. « Ant colony system : a cooperative learning approach to the traveling salesman problem ». In : *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 1.1 (1997), p. 53-66. ISSN : 1941-0026. DOI : [10.1109/4235.585892](https://doi.org/10.1109/4235.585892) (cf. p. [35](#)).
- DORIGO, M. « Optimization, Learning and Natural Algorithms ». Thèse de doctorat. Italie : Politecnico di Milano, 1992 (cf. p. [35](#)).
- DORIGO, M., M. BIRATTARI et T. STUTZLE. « Ant colony optimization ». In : *IEEE Computational Intelligence Magazine* 1.4 (2006), p. 28-39. ISSN : 1556-6048. DOI : [10.1109/MCI.2006.329691](https://doi.org/10.1109/MCI.2006.329691) (cf. p. [35](#)).
- DOU, S. et J. S. JENSEN. « Optimization of nonlinear structural resonance using the incremental harmonic balance method ». In : *Journal of Sound and Vibration* 334 (2015), p. 239-254. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2014.08.023](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.08.023) (cf. p. [72](#)).
- DOU, S., B. S. STRACHAN, S. W. SHAW et J. S. JENSEN. « Structural optimization for nonlinear dynamic response ». In : *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 373.2051 (2015), p. 20140408. DOI : [10.1098/rsta.2014.0408](https://doi.org/10.1098/rsta.2014.0408) (cf. p. [72](#)).
- DOWELL, E., J. EDWARDS et T. STRGANAC. « Nonlinear Aeroelasticity ». In : *Journal of Aircraft* 40.5 (2003), p. 857-874. ISSN : 0021-8669. DOI : [10.2514/2.6876](https://doi.org/10.2514/2.6876) (cf. p. [48](#)).

- DUCHI, J., E. HAZAN et Y. SINGER. « Adaptive Subgradient Methods for Online Learning and Stochastic Optimization ». In : *Journal of Machine Learning Research* 12.61 (2011), p. 2121-2159. ISSN : 1533-7928. ADRESSE : <http://jmlr.org/papers/v12/duchi11a.html> (cf. p. 33).
- DUFFING, G. *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*. T. 41–42. Sammlung Vieweg. Braunschweig : F. Vieweg & Sohn, 1918 (cf. p. 49).
- DUIGOU, L., E. MOSTAFA DAYA et M. POTIER-FERRY. « Iterative algorithms for non-linear eigenvalue problems. Application to vibrations of viscoelastic shells ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192.11 (2003), p. 1323-1335. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/S0045-7825\(02\)00641-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00641-2) (cf. p. 68).
- DUREISSEIX, D. « Méthodes numériques appliquées à la conception par éléments finis ». DEA. Lecture. Montpellier, France, 2008. ADRESSE : <https://cel.hal.science/cel-00351713> (cf. p. 43, 44).
- EISENHOWER, B., Z. O'NEILL, S. NARAYANAN, V. A. FONOBEROV et I. MEZIĆ. « A methodology for meta-model based optimization in building energy models ». In : *Energy and Buildings* 47 (2012), p. 292-301. ISSN : 0378-7788. DOI : [10.1016/j.enbuild.2011.12.001](https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2011.12.001) (cf. p. 104).
- FANG, H., M. RAIS-ROHANI, Z. LIU et M. F. HORSTEMEYER. « A comparative study of metamodeling methods for multiobjective crashworthiness optimization ». In : *Computers & Structures* 83.25 (2005), p. 2121-2136. ISSN : 0045-7949. DOI : [10.1016/j.compstruc.2005.02.025](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2005.02.025) (cf. p. 104).
- FERHATOGLU, E., E. CIGEROGLU et H. N. ÖZGÜVEN. « A novel modal superposition method with response dependent nonlinear modes for periodic vibration analysis of large MDOF nonlinear systems ». In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 135 (2020), p. 106388. ISSN : 0888-3270. DOI : [10.1016/j.ymssp.2019.106388](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.106388) (cf. p. 145).
- FERNÁNDEZ-GODINO, M. G. « Review of multi-fidelity models ». In : *Advances in Computational Science and Engineering* 1.4 (2023), p. 351-400. ISSN : 2837-1739. DOI : [10.3934/acse.2023015](https://doi.org/10.3934/acse.2023015) (cf. p. 104).
- FLETCHER, R. « A new approach to variable metric algorithms ». In : *The Computer Journal* 13.3 (1970), p. 317-322. ISSN : 0010-4620. DOI : [10.1093/comjnl/13.3.317](https://doi.org/10.1093/comjnl/13.3.317) (cf. p. 31).
- FLETCHER, R. et M. J. D. POWELL. « A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization ». In : *The Computer Journal* 6.2 (1963), p. 163-168. ISSN : 0010-4620. DOI : [10.1093/comjnl/6.2.163](https://doi.org/10.1093/comjnl/6.2.163) (cf. p. 31, 54).
- FLETCHER, R. et C. M. REEVES. « Function minimization by conjugate gradients ». In : *The Computer Journal* 7.2 (1964), p. 149-154. ISSN : 0010-4620. DOI : [10.1093/comjnl/7.2.149](https://doi.org/10.1093/comjnl/7.2.149) (cf. p. 30).
- FLOQUET, G. « Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques ». In : *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 12.2 (1883), p. 47-88. ISSN : 1873-2151. DOI : [10.24033/asens.220](https://doi.org/10.24033/asens.220) (cf. p. 68).
- FOGEL, D. B. « Evolutionary programming : an introduction and some current directions ». In : *Statistics and Computing* 4.2 (1994), p. 113-129. ISSN : 1573-1375. DOI : [10.1007/BF00175356](https://doi.org/10.1007/BF00175356) (cf. p. 35).
- FOGEL, L. J. « Autonomous Automata ». In : *Industrial Research* 4 (1962), p. 14-19. ISSN : 0019-8722 (cf. p. 35).
- FORRESTER, A. I. J., A. SÓBESTER et A. J. KEANE. *Engineering Design via Surrogate Modelling : A Practical Guide*. Chichester : John Wiley & Sons Ltd, 2008. ISBN : 978-0-470-06068-1. DOI : [10.1002/9780470770801](https://doi.org/10.1002/9780470770801) (cf. p. 104, 106, 107).
- FORSQREN, A., P. E. GILL et M. H. WRIGHT. « Interior Methods for Nonlinear Optimization ». In : *SIAM Review* 44.4 (2002), p. 525-597. ISSN : 0036-1445. DOI : [10.1137/S0036144502414942](https://doi.org/10.1137/S0036144502414942) (cf. p. 38).

BIBLIOGRAPHIE

- FRANCO, J. « Planification d'expériences numériques en phase exploratoire pour la simulation des phénomènes complexes ». Thèse de doctorat. France : Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2008. ADRESSE : <https://hal.science/tel-00803107> (cf. p. 105).
- FRAZIER, P. I. *A Tutorial on Bayesian Optimization*. 2018. DOI : [10.48550/ARXIV.1807.02811](https://doi.org/10.48550/ARXIV.1807.02811) (cf. p. 37, 109).
- FRIMANNSLUND, L. et T. STEIHAUG. « A generating set search method using curvature information ». In : *Computational Optimization and Applications* 38.1 (2007), p. 105-121. ISSN : 0926-6003. DOI : [10.1007/s10589-007-9038-8](https://doi.org/10.1007/s10589-007-9038-8) (cf. p. 30).
- FUHG, J. N., A. FAU et U. NACKENHORST. « State-of-the-Art and Comparative Review of Adaptive Sampling Methods for Kriging ». In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 28.4 (2021), p. 2689-2747. ISSN : 1886-1784. DOI : [10.1007/s11831-020-09474-6](https://doi.org/10.1007/s11831-020-09474-6) (cf. p. 109).
- FURUTA, K. et T. KANNO. « How the Fukushima Daiichi Accident Changed (or not) the Nuclear Safety Fundamentals? » In : *Resilience : A New Paradigm of Nuclear Safety : From Accident Mitigation to Resilient Society Facing Extreme Situations*. Sous la dir. de J. AHN, F. GUARNIERI et K. FURUTA. Cham : Springer International Publishing, 2017, p. 35-45. ISBN : 978-3-319-58768-4. DOI : [10.1007/978-3-319-58768-4_3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-58768-4_3) (cf. p. 20).
- GARDNER, J., M. J. KUSNER, Z. XU, K. Q. WEINBERGER et J. P. CUNNINGHAM. « Bayesian Optimization with Inequality Constraints ». In : *Proceedings of the 31st International Conference on Machine Learning*. International Conference on Machine Learning. Sous la dir. d'E. P. XING et T. JEBARA. T. 32. Proceedings of Machine Learning Research 2. Beijing, China, 2014, p. 937-945. ADRESSE : <https://proceedings.mlr.press/v32/gardner14.html> (cf. p. 38, 113, 122).
- GARDNER, J., G. PLEISS, K. Q. WEINBERGER, D. BINDEL et A. G. WILSON. « GPyTorch : Blackbox Matrix-Matrix Gaussian Process Inference with GPU Acceleration ». In : *Advances in Neural Information Processing Systems*. Annual Conference on Neural Information Processing Systems 2018, NeurIPS 2018. T. 31. Montréal : Curran Associates, Inc., 2018, p. 7587-7597. ISBN : 978-1-5108-8447-2. ADRESSE : <https://proceedings.neurips.cc/paper/2018/hash/27e8e17134dd7083b050476733207ea1-Abstract.html> (cf. p. 113).
- GAUL, L. et R. NITSCHKE. « The Role of Friction in Mechanical Joints ». In : *Applied Mechanics Reviews* 54.2 (2001), p. 93-106. ISSN : 0003-6900. DOI : [10.1115/1.3097294](https://doi.org/10.1115/1.3097294) (cf. p. 48).
- GIBBS, J. W. « Fourier's Series ». In : *Nature* 59.1522 (1898), p. 200-200. ISSN : 1476-4687. DOI : [10.1038/059200b0](https://doi.org/10.1038/059200b0) (cf. p. 98).
- GIBBS, J. W. « Fourier's Series ». In : *Nature* 59.1539 (1899), p. 606-606. ISSN : 1476-4687. DOI : [10.1038/059606a0](https://doi.org/10.1038/059606a0) (cf. p. 98).
- GIBERT, C. « Fitting Measured Frequency Response Using Non-linear Modes ». In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 17.1 (2003), p. 211-218. ISSN : 0888-3270. DOI : [10.1006/mssp.2002.1562](https://doi.org/10.1006/mssp.2002.1562) (cf. p. 71).
- GIRARD, A. et N. ROY. *Dynamique des structures industrielles*. Paris : Hermes Science Publications - Lavoisier, 2003. 416 p. ISBN : 978-2-7462-0748-6 (cf. p. 84).
- GIUNTA, A. et L. WATSON. « A comparison of approximation modeling techniques - Polynomial versus interpolating models ». In : *7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*. Multidisciplinary Analysis Optimization Conferences. St. Louis, MO : American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998. DOI : [10.2514/6.1998-4758](https://doi.org/10.2514/6.1998-4758) (cf. p. 104).
- GLOVER, F. « Future paths for integer programming and links to artificial intelligence ». In : *Computers & Operations Research*. Applications of Integer Programming 13.5 (1986), p. 533-549. ISSN : 0305-0548. DOI : [10.1016/0305-0548\(86\)90048-1](https://doi.org/10.1016/0305-0548(86)90048-1) (cf. p. 36).

BIBLIOGRAPHIE

- GLOVER, F., E. TAILLARD et E. TAILLARD. « A user's guide to tabu search ». In : *Annals of Operations Research* 41.1 (1993), p. 1-28. ISSN : 1572-9338. DOI : [10.1007/BF02078647](https://doi.org/10.1007/BF02078647) (cf. p. 36).
- GOLDBERG, D. E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Boston, MA : Addison Wesley, 1989. 432 p. ISBN : 978-0-201-15767-3 (cf. p. 35).
- GOLDFARB, D. « A family of variable-metric methods derived by variational means ». In : *Mathematics of Computation* 24.109 (1970), p. 23-26. ISSN : 0025-5718, 1088-6842. DOI : [10.1090/S0025-5718-1970-0258249-6](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1970-0258249-6) (cf. p. 31).
- GOPINATH, A. et A. JAMESON. « Time Spectral Method for Periodic Unsteady Computations over Two- and Three- Dimensional Bodies ». In : *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Aerospace Sciences Meetings. Reno, NV : American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005. DOI : [10.2514/6.2005-1220](https://doi.org/10.2514/6.2005-1220) (cf. p. 54).
- GRAMACY, R. B. *Surrogates : Gaussian Process Modeling, Design and Optimization for the Applied Sciences*. Texts in Statistical Science. Boca Raton, FL : Chapman & Hall/CRC, 2020. ISBN : 978-0-367-41542-6. ADRESSE : <http://bobby.gramacy.com/surrogates/> (cf. p. 104, 106, 108).
- GRENAT, C., S. BAGUET, C.-H. LAMARQUE et R. DUFOUR. « A multi-parametric recursive continuation method for nonlinear dynamical systems ». In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 127 (2019), p. 276-289. DOI : [10.1016/j.ymsp.2019.03.011](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2019.03.011) (cf. p. 81, 145).
- GRIEWANK, A. O. « Generalized descent for global optimization ». In : *Journal of Optimization Theory and Applications* 34.1 (1981), p. 11-39. ISSN : 0022-3239. DOI : [10.1007/BF00933356](https://doi.org/10.1007/BF00933356) (cf. p. 34).
- GUILLOT, L., B. COCHELIN et C. VERGEZ. *Manlab - an interactive path-following and bifurcation analysis software*. Version 4.0. 2018. ADRESSE : <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr/> (cf. p. 68).
- GUILLOT, L., A. LAZARUS, O. THOMAS, C. VERGEZ et B. COCHELIN. « A purely frequency based Floquet-Hill formulation for the efficient stability computation of periodic solutions of ordinary differential systems ». In : *Journal of Computational Physics* 416 (2020), p. 109477. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1016/j.jcp.2020.109477](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109477) (cf. p. 69).
- HARRIS, T. A. *Rolling Bearing Analysis*. 4th Edition. New York : John Wiley & Sons, 2000 [1986]. 1104 p. ISBN : 978-0-471-35457-4 (cf. p. 48).
- HASHIGUCHI, K. *Elastoplasticity Theory*. Sér. sous la dir. de F. PFEIFFER et P. WRIGGERS. T. 42. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin, Heidelberg : Springer, 2009. ISBN : 978-3-642-00272-4. DOI : [10.1007/978-3-642-00273-1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-00273-1) (cf. p. 48).
- HESTENES, M. et E. STIEFEL. « Methods of conjugate gradients for solving linear systems ». In : *Journal of Research of the National Bureau of Standards* 49.6 (1952), p. 409-436. ISSN : 0091-0635. DOI : [10.6028/jres.049.044](https://doi.org/10.6028/jres.049.044) (cf. p. 30).
- HILL, G. W. « On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon ». In : *Acta Mathematica* 8.1 (1886), p. 1-36. ISSN : 0001-5962. DOI : [10.1007/BF02417081](https://doi.org/10.1007/BF02417081) (cf. p. 68).
- HILL, R. *The Mathematical Theory Of Plasticity*. Oxford Classic Texts in the Physical Sciences. New York : Oxford University Press U.S.A., 1998 [1950]. 372 p. ISBN : 978-0-19-850367-5 (cf. p. 48).
- HILTI. *PROFIS Engineering Suite*. Hilti, 2022. ADRESSE : <https://www.hilti.com/content/hilti/W1/US/en/business/business/engineering/profis-engineering.html> (cf. p. 134).
- HOLLAND, J. H. « Outline for a Logical Theory of Adaptive Systems ». In : *Journal of the ACM* 9.3 (1962), p. 297-314. ISSN : 0004-5411. DOI : [10.1145/321127.321128](https://doi.org/10.1145/321127.321128) (cf. p. 35).
- HOLLAND, J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems : An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence*. Cambridge, MA : The MIT Press, 1992 [1975]. ISBN : 978-0-262-58111-0. DOI : [10.7551/mitpress/1090.001.0001](https://doi.org/10.7551/mitpress/1090.001.0001) (cf. p. 35).

BIBLIOGRAPHIE

- HOOKE, R. et T. A. JEEVES. « “Direct Search” Solution of Numerical and Statistical Problems ». In : *Journal of the Association for Computing Machinery* 8.2 (1961), p. 212-229. ISSN : 0004-5411. DOI : [10.1145/321062.321069](https://doi.org/10.1145/321062.321069) (cf. p. 29).
- HUANG, H. et K. EKICI. « Stabilization of High-Dimensional Harmonic Balance Solvers Using Time Spectral Viscosity ». In : *AIAA Journal* 52.8 (2014), p. 1784-1794. ISSN : 0001-1452. DOI : [10.2514/1.J052698](https://doi.org/10.2514/1.J052698) (cf. p. 54).
- HUANG, X.-R., L. JÉZÉQUEL, S. BESSET, L. LI et O. SAUVAGE. « Nonlinear modal synthesis for analyzing structures with a frictional interface using a generalized Masing model ». In : *Journal of Sound and Vibration* 434 (2018), p. 166-191. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2018.07.027](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.07.027) (cf. p. 71).
- HURTY, W. C. « Vibrations of Structural Systems by Component Mode Synthesis ». In : *Journal of the Engineering Mechanics Division* 86.4 (1960), p. 51-69. DOI : [10.1061/JMCEA3.0000162](https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0000162) (cf. p. 70).
- JAUMOILLÉ, V., J.-J. SINOÛ et B. PETITJEAN. « An adaptive harmonic balance method for predicting the nonlinear dynamic responses of mechanical systems—Application to bolted structures ». In : *Journal of Sound and Vibration* 329.19 (2010), p. 4048-4067. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2010.04.008](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.04.008) (cf. p. 145).
- JAUMOILLÉ, V., J.-J. SINOÛ et B. PETITJEAN. « Simulation of Payne Effect of Elastomeric Isolators with a Harmonic Balance Method ». In : *Shock and Vibration* 19 (2011), p. 1281-1295. ISSN : 1070-9622. DOI : [10.3233/SAV-2012-0670](https://doi.org/10.3233/SAV-2012-0670) (cf. p. 61).
- JEAN, A. N. et H. D. NELSON. « Periodic response investigation of large order non-linear rotordynamic systems using collocation ». In : *Journal of Sound and Vibration* 143.3 (1990), p. 473-489. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/0022-460X\(90\)90737-K](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90737-K) (cf. p. 60).
- JEZEQUEL, L. et C. H. LAMARQUE. « Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory ». In : *Journal of Sound and Vibration* 149.3 (1991), p. 429-459. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/0022-460X\(91\)90446-Q](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90446-Q) (cf. p. 71).
- JIN, R., W. CHEN et T. SIMPSON. « Comparative studies of metamodelling techniques under multiple modelling criteria ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 23.1 (2001), p. 1-13. ISSN : 1615-1488. DOI : [10.1007/s00158-001-0160-4](https://doi.org/10.1007/s00158-001-0160-4) (cf. p. 104).
- JOANNIN, C. « Réduction de modèle par sous-structuration et modes non-linéaires : Application à la dynamique des roues aubagées ». Thèse de doctorat. France : École Centrale de Lyon, 2017. ADRESSE : <https://hal.science/tel-01800400> (cf. p. 71).
- JOANNIN, C., B. CHOUVION, F. THOUVEREZ, J.-P. OUSTY et M. MBAYE. « A nonlinear component mode synthesis method for the computation of steady-state vibrations in non-conservative systems ». In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 83 (2017), p. 75-92. ISSN : 0888-3270. DOI : [10.1016/j.ymsp.2016.05.044](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2016.05.044) (cf. p. 145).
- JOHNSON, E. H. « Disjoint design spaces in the optimization of harmonically excited structures ». In : *AIAA Journal* 14.2 (1976), p. 259-261. ISSN : 0001-1452. DOI : [10.2514/3.7084](https://doi.org/10.2514/3.7084) (cf. p. 72).
- JOHNSON, M. E., L. M. MOORE et D. YLVIKAKER. « Minimax and maximin distance designs ». In : *Journal of Statistical Planning and Inference* 26.2 (1990), p. 131-148. ISSN : 0378-3758. DOI : [10.1016/0378-3758\(90\)90122-B](https://doi.org/10.1016/0378-3758(90)90122-B) (cf. p. 105).
- JONES, D. R., C. D. PERTTUNEN et B. E. STUCKMAN. « Lipschitzian optimization without the Lipschitz constant ». In : *Journal of Optimization Theory and Applications* 79.1 (1993), p. 157-181. ISSN : 1573-2878. DOI : [10.1007/BF00941892](https://doi.org/10.1007/BF00941892) (cf. p. 33).

BIBLIOGRAPHIE

- JONES, D. R., M. SCHONLAU et W. J. WELCH. « Efficient Global Optimization of Expensive Black-Box Functions ». In : *Journal of Global Optimization* 13.4 (1998), p. 455-492. ISSN : 1573-2916. DOI : [10.1023/A:1008306431147](https://doi.org/10.1023/A:1008306431147) (cf. p. [37](#), [106](#), [109](#), [110](#), [116](#)).
- JORDANOV, I. N. et B. I. CHESHANKOV. « Optimal design of linear and non-linear dynamic vibration absorbers ». In : *Journal of Sound and Vibration* 123.1 (1988), p. 157-170. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/S0022-460X\(88\)80085-3](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(88)80085-3) (cf. p. [72](#)).
- JU, Y., C. ZHANG et L. MA. « Artificial intelligence metamodel comparison and application to wind turbine airfoil uncertainty analysis ». In : *Advances in Mechanical Engineering* 8.5 (2016), p. 1687814016647317. ISSN : 1687-8132. DOI : [10.1177/1687814016647317](https://doi.org/10.1177/1687814016647317) (cf. p. [104](#)).
- JUNG, D. et H. C. GEA. « Topology optimization of nonlinear structures ». In : *Finite Elements in Analysis and Design* 40.11 (2004), p. 1417-1427. ISSN : 0168-874X. DOI : [10.1016/j.finel.2003.08.011](https://doi.org/10.1016/j.finel.2003.08.011) (cf. p. [72](#)).
- KANG, B.-S., G.-J. PARK et J. S. ARORA. « A review of optimization of structures subjected to transient loads ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 31.2 (2006), p. 81-95. ISSN : 1615-1488. DOI : [10.1007/s00158-005-0575-4](https://doi.org/10.1007/s00158-005-0575-4) (cf. p. [72](#)).
- KARHUNEN, K. « Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ». In : *Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Series A I* 37 (1947), p. 1-79. ISSN : 1239-629X (cf. p. [71](#)).
- KARKAR, S., B. COCHELIN et C. VERGEZ. « A high-order, purely frequency based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions : The case of non-polynomial nonlinearities ». In : *Journal of Sound and Vibration* 332.4 (2013), p. 968-977. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2012.09.033](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.09.033) (cf. p. [68](#)).
- KARKAR, S., B. COCHELIN et C. VERGEZ. « A comparative study of the harmonic balance method and the orthogonal collocation method on stiff nonlinear systems ». In : *Journal of Sound and Vibration* 333.12 (2014), p. 2554-2567. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2014.01.019](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.01.019) (cf. p. [60](#)).
- KARUSH, W. « Minima of functions of several variables with inequalities as side conditions ». Thèse de doctorat. Illinois : University of Chicago, Departement of Mathematics, 1939. 27 p. ADRESSE : <http://pi.lib.uchicago.edu/1001/cat/bib/4111654> (cf. p. [28](#)).
- KELLER, H. B. « The Bordering Algorithm and Path Following Near Singular Points of Higher Nullity ». In : *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 4.4 (1983), p. 573-582. ISSN : 0196-5204. DOI : [10.1137/0904039](https://doi.org/10.1137/0904039) (cf. p. [62](#), [81](#)).
- KENNEDY, J. et R. EBERHART. « Particle swarm optimization ». In : *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*. Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks. T. 4. Perth, WA, Australia, 1995, p. 1942-1948. DOI : [10.1109/ICNN.1995.488968](https://doi.org/10.1109/ICNN.1995.488968) (cf. p. [36](#)).
- KERSCHEN, G., M. PEETERS, J.-C. GOLINVAL et C. STÉPHAN. « Nonlinear Modal Analysis of a Full-Scale Aircraft ». In : *Journal of Aircraft* 50.5 (2013), p. 1409-1419. ISSN : 0021-8669. DOI : [10.2514/1.C031918](https://doi.org/10.2514/1.C031918) (cf. p. [59](#)).
- KERSCHEN, G., J.-C. GOLINVAL, A. F. VAKAKIS et L. A. BERGMAN. « The Method of Proper Orthogonal Decomposition for Dynamical Characterization and Order Reduction of Mechanical Systems : An Overview ». In : *Nonlinear Dynamics* 41.1 (2005), p. 147-169. ISSN : 1573-269X. DOI : [10.1007/s11071-005-2803-2](https://doi.org/10.1007/s11071-005-2803-2) (cf. p. [71](#)).
- KERSCHEN, G., M. PEETERS, J.-C. GOLINVAL et A. F. VAKAKIS. « Nonlinear normal modes, Part I : A useful framework for the structural dynamicist ». In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 23.1 (2009), p. 170-194. DOI : [10.1016/j.ymssp.2008.04.002](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.04.002) (cf. p. [71](#)).

- KETKAR, N. « Stochastic Gradient Descent ». In : *Deep Learning with Python : A Hands-on Introduction*. Berkeley, CA : Apress, 2017, p. 113-132. ISBN : 978-1-4842-2766-4. DOI : [10.1007/978-1-4842-2766-4_8](https://doi.org/10.1007/978-1-4842-2766-4_8) (cf. p. 32).
- KHANIKI, H. B., M. H. GHAYESH, R. CHIN et M. AMABILI. « A review on the nonlinear dynamics of hyperelastic structures ». In : *Nonlinear Dynamics* 110.2 (2022), p. 963-994. ISSN : 1573-269X. DOI : [10.1007/s11071-022-07700-3](https://doi.org/10.1007/s11071-022-07700-3) (cf. p. 48).
- KIM, B.-S., Y.-B. LEE et D.-H. CHOI. « Comparison study on the accuracy of metamodeling technique for non-convex functions ». In : *Journal of Mechanical Science and Technology* 23.4 (2009), p. 1175-1181. ISSN : 1976-3824. DOI : [10.1007/s12206-008-1201-3](https://doi.org/10.1007/s12206-008-1201-3) (cf. p. 104).
- KIM, M., V. BELSKY et M. BELYI. « Substructure generation using automated multilevel substructuring ». Brev. amér. 20130124150A1. DASSAULT SYSTEMES SIMULIA CORP. 2013. ADRESSE : <https://patents.google.com/patent/US20130124150A1/ja> (cf. p. 70).
- KIM, Y.-I. et G.-J. PARK. « Nonlinear dynamic response structural optimization using equivalent static loads ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199.9 (2010), p. 660-676. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2009.10.014](https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.10.014) (cf. p. 72).
- KINGMA, D. P. et J. BA. *Adam : A Method for Stochastic Optimization*. 2017. DOI : [10.48550/arXiv.1412.6980](https://doi.org/10.48550/arXiv.1412.6980) (cf. p. 33, 108, 124).
- KIRBY, M. et L. SIROVICH. « Application of the Karhunen-Loeve procedure for the characterization of human faces ». In : *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 12.1 (1990), p. 103-108. ISSN : 1939-3539. DOI : [10.1109/34.41390](https://doi.org/10.1109/34.41390) (cf. p. 71).
- KIRKPATRICK, S., C. D. GELATT et M. P. VECCHI. « Optimization by Simulated Annealing ». In : *Science* 220.4598 (1983), p. 671-680. DOI : [10.1126/science.220.4598.671](https://doi.org/10.1126/science.220.4598.671) (cf. p. 35).
- KLARBRING, A. « On the problem of optimizing contact force distributions ». In : *Journal of Optimization Theory and Applications* 74.1 (1992), p. 131-150. ISSN : 1573-2878. DOI : [10.1007/BF00939896](https://doi.org/10.1007/BF00939896) (cf. p. 72).
- KNOLL, D. A. et D. E. KEYES. « Jacobian-free Newton-Krylov methods : a survey of approaches and applications ». In : *Journal of Computational Physics* 193.2 (2004), p. 357-397. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1016/j.jcp.2003.08.010](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.08.010) (cf. p. 54).
- KOCER, F. Y. et J. S. ARORA. « Optimal Design of H-Frame Transmission Poles for Earthquake Loading ». In : *Journal of Structural Engineering* 125.11 (1999), p. 1299-1308. ISSN : 0733-9445. DOI : [10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1999\)125:11\(1299\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1999)125:11(1299)) (cf. p. 72).
- KOSAMBI, D. D. « Statistics in function space ». In : *Journal of the Indian Mathematical Society* 7 (1943), p. 76-88. ISSN : 0019-5839. ADRESSE : <http://repository.ias.ac.in/99240/> (cf. p. 71).
- KOVACIC, I. et M. J. BRENNAN. *The Duffing Equation : Nonlinear Oscillators and their Behaviour*. Chichester : John Wiley & Sons, 2011. 397 p. ISBN : 978-0-470-71549-9. DOI : [10.1002/9780470977859](https://doi.org/10.1002/9780470977859) (cf. p. 49).
- KRACK, M. et J. GROSS. *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*. Mathematical Engineering. Cham : Springer International Publishing, 2019. ISBN : 978-3-030-14022-9. DOI : [10.1007/978-3-030-14023-6](https://doi.org/10.1007/978-3-030-14023-6) (cf. p. 61, 66).
- KRACK, M., L. PANNING-VON SCHEIDT et J. WALLASCHEK. « A method for nonlinear modal analysis and synthesis : Application to harmonically forced and self-excited mechanical systems ». In : *Journal of Sound Vibration* 332 (2013), p. 6798-6814. DOI : [10.1016/j.jsv.2013.08.009](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.08.009) (cf. p. 71).
- KRACK, M., L. PANNING-VON SCHEIDT, J. WALLASCHEK, C. SIEWERT et A. HARTUNG. « Reduced Order Modeling Based on Complex Nonlinear Modal Analysis and Its Application to Bladed Disks

BIBLIOGRAPHIE

- With Shroud Contact ». In : *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 135.102502 (2013). ISSN : 0742-4795. DOI : [10.1115/1.4025002](https://doi.org/10.1115/1.4025002) (cf. p. 71).
- KRACK, M., L. SALLES et F. THOUVEREZ. « Vibration Prediction of Bladed Disks Coupled by Friction Joints ». In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 24.3 (2017), p. 589-636. DOI : [10.1007/s11831-016-9183-2](https://doi.org/10.1007/s11831-016-9183-2) (cf. p. 78).
- KRACK, M., S. TATZKO, L. PANNING-VON SCHEIDT et J. WALLASCHEK. « Reliability optimization of friction-damped systems using nonlinear modes ». In : *Journal of Sound and Vibration* 333.13 (2014), p. 2699-2712. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2014.02.008](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.02.008) (cf. p. 72).
- KRIGE, D. G. « A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand ». In : *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy* 52.6 (1951), p. 119-139. ISSN : 0038-223X. ADRESSE : https://hdl.handle.net/10520/AJA0038223X_4792 (cf. p. 106).
- KRYLOFF, N. et N. BOGOLIUBOFF. *Introduction to Non-Linear Mechanics*. T. 11. Annals of Mathematics Studies. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1950. 106 p. ISBN : 978-0-691-07985-1. DOI : [10.1515/9781400882274](https://doi.org/10.1515/9781400882274) (cf. p. 61, 76).
- KUHN, H. W. et A. W. TUCKER. « Nonlinear Programming ». In : *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Sous la dir. de G. GIORGI et T. H. KJELDSSEN. Berkeley et Los Angeles : University of California Press, 1951, p. 481-492. DOI : [10.1007/978-3-0348-0439-4_11](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0439-4_11) (cf. p. 28).
- KUSAKANA, K. « Optimal energy management of a retrofitted Rubber Tyred Gantry Crane with energy recovery capabilities ». In : *Journal of Energy Storage* 42 (2021), p. 103050. ISSN : 2352-152X. DOI : [10.1016/j.est.2021.103050](https://doi.org/10.1016/j.est.2021.103050) (cf. p. 20).
- LAU, S. L. et Y. K. CHEUNG. « Amplitude Incremental Variational Principle for Nonlinear Vibration of Elastic Systems ». In : *Journal of Applied Mechanics* 48.4 (1981), p. 959-964. ISSN : 0021-8936. DOI : [10.1115/1.3157762](https://doi.org/10.1115/1.3157762) (cf. p. 61, 76).
- LAURENT, L. « Stratégie multiparamétrique et métamodèles pour l'optimisation multiniveaux de structures ». Thèse de doctorat. France : École Normale Supérieure de Cachan, 2013. ADRESSE : <https://hal.science/tel-00972299> (cf. p. 27, 105, 107).
- LAURENT, L., R. LE RICHE, B. SOULIER et P.-A. BOUCARD. « An Overview of Gradient-Enhanced Metamodels with Applications ». In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 26.1 (2019), p. 61-106. ISSN : 1886-1784. DOI : [10.1007/s11831-017-9226-3](https://doi.org/10.1007/s11831-017-9226-3) (cf. p. 145).
- LAX, P. D. et R. D. RICHTMYER. « Survey of the stability of linear finite difference equations ». In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 9.2 (1956), p. 267-293. ISSN : 1097-0312. DOI : [10.1002/cpa.3160090206](https://doi.org/10.1002/cpa.3160090206) (cf. p. 55).
- LAXALDE, D. et F. THOUVEREZ. « Complex non-linear modal analysis for mechanical systems : Application to turbomachinery bladings with friction interfaces ». In : *Journal of Sound and Vibration* 322.4 (2009), p. 1009-1025. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2008.11.044](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.11.044) (cf. p. 71).
- LAZER, A. C. et P. J. MCKENNA. « Large-Amplitude Periodic Oscillations in Suspension Bridges : Some New Connections with Nonlinear Analysis ». In : *SIAM Review* 32.4 (1990), p. 537-578. ISSN : 0036-1445. DOI : [10.1137/1032120](https://doi.org/10.1137/1032120) (cf. p. 48).
- LE RICHE, R. et V. PICHENY. « Revisiting Bayesian optimization in the light of the COCO benchmark ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 64.5 (2021), p. 3063-3087. ISSN : 1615-1488. DOI : [10.1007/s00158-021-02977-1](https://doi.org/10.1007/s00158-021-02977-1) (cf. p. 37, 107, 109, 111, 122, 128).

BIBLIOGRAPHIE

- LEE, H.-A. et G.-J. PARK. « Nonlinear dynamic response topology optimization using the equivalent static loads method ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 283 (2015), p. 956-970. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2014.10.015](https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.10.015) (cf. p. 72).
- LEE, J., D. PARK, K. LEE et N. AHN. « Geometric nonlinear analysis of tall building structures with outriggers ». In : *The Structural Design of Tall and Special Buildings* 22.5 (2013), p. 454-470. ISSN : 1541-7808. DOI : [10.1002/tal.715](https://doi.org/10.1002/tal.715) (cf. p. 48).
- LEGAY, A. *Calcul des structures par éléments finis*. Cnam Paris, 2022. ADRESSE : http://antoinelegay.free.fr/Calcul_des_structures_par_elements_finis_Legay.pdf (cf. p. 39).
- LEGRAND, M., C. PIERRE et B. PESEUX. « Structural modal interaction of a four degree-of-freedom bladed disk and casing model ». In : *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 5.4 (2010), p. 041013. ISSN : 1555-1415. DOI : [10.1115/1.4001903](https://doi.org/10.1115/1.4001903) (cf. p. 48).
- LEIFSSON, L. et S. KOZIEL. « Surrogate modelling and optimization using shape-preserving response prediction : A review ». In : *Engineering Optimization* 48.3 (2016), p. 476-496. ISSN : 0305-215X. DOI : [10.1080/0305215X.2015.1016509](https://doi.org/10.1080/0305215X.2015.1016509) (cf. p. 104).
- LEVY, A. V. et A. MONTALVO. « The Tunneling Algorithm for the Global Minimization of Functions ». In : *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 6.1 (1985), p. 15-29. ISSN : 0196-5204, 2168-3417. DOI : [10.1137/0906002](https://doi.org/10.1137/0906002) (cf. p. 34).
- LEWIS, R. M., V. TORCZON et M. W. TROSSET. « Direct search methods : then and now ». In : *Journal of Computational and Applied Mathematics. Numerical Analysis 2000. Vol. IV : Optimization and Nonlinear Equations* 124.1 (2000), p. 191-207. ISSN : 0377-0427. DOI : [10.1016/S0377-0427\(00\)00423-4](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00423-4) (cf. p. 29).
- LI, D. F. et E. J. GUNTER. « A Study of the Modal Truncation Error in the Component Mode Analysis of a Dual-Rotor System ». In : *Journal of Engineering for Power* 104.3 (1982), p. 525-532. ISSN : 0022-0825. DOI : [10.1115/1.3227311](https://doi.org/10.1115/1.3227311) (cf. p. 45).
- LIAO, H. et J. WANG. « Maximization of the vibration amplitude and bifurcation analysis of nonlinear systems using the constrained optimization shooting method ». In : *Journal of Sound and Vibration* 332.16 (2013), p. 3781-3793. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2013.02.034](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.02.034) (cf. p. 72).
- LIN, Q., Y. ZHOU, N. YANG, J. HONG et C. WANG. « Design of component structure in assemblies for simultaneously regulating contact pressure distribution and natural frequencies ». In : *European Journal of Mechanics - A/Solids* 94 (2022), p. 104557. ISSN : 0997-7538. DOI : [10.1016/j.euromechsol.2022.104557](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104557) (cf. p. 72).
- LIU, K., D. DETWILER et A. TOVAR. « Optimal Design of Nonlinear Multimaterial Structures for Crashworthiness Using Cluster Analysis ». In : *Journal of Mechanical Design* 139.101401 (2017). ISSN : 1050-0472. DOI : [10.1115/1.4037620](https://doi.org/10.1115/1.4037620) (cf. p. 72).
- LOÈVE, M. « Fonctions Aléatoires du Second Ordre. Suivi d'une Note de Michel Loève ». In : LÉVY, P. *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Paris : Gauthier-Villars, 1948 (cf. p. 71).
- LOSSOUARN, B., J.-F. DEÛ et G. KERSCHEN. « A fully passive nonlinear piezoelectric vibration absorber ». In : *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 376.2127 (2018), p. 20170142. ISSN : 1364-503X. DOI : [10.1098/rsta.2017.0142](https://doi.org/10.1098/rsta.2017.0142) (cf. p. 48).
- LUERSEN, M., R. LE RICHE et F. GUYON. « A constrained, globalized, and bounded Nelder–Mead method for engineering optimization ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 27.1 (2004), p. 43-54. ISSN : 1615-1488. DOI : [10.1007/s00158-003-0320-9](https://doi.org/10.1007/s00158-003-0320-9) (cf. p. 38).
- MABILIA, A. « Dynamique non-linéaire d'une soufflante en rotation ». Thèse de doctorat. France : École Centrale de Lyon, 2020. ADRESSE : <https://hal.science/tel-03152435> (cf. p. 71).

- MABILIA, A., C. GIBERT, F. THOUVEREZ et E. DE JAEGHERE. « Nonlinear Forced Response of a Composite Fan Blade Actuated by Piezoelectric Patches : Simulation and Testing ». In : *Nonlinear Dynamics, Volume 1*. Sous la dir. de G. KERSCHEN. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series. Cham : Springer International Publishing, 2019, p. 351-362. ISBN : 978-3-319-74280-9. DOI : [10.1007/978-3-319-74280-9_37](https://doi.org/10.1007/978-3-319-74280-9_37) (cf. p. 61).
- MACNEAL, R. « A hybrid method of component mode synthesis ». In : *Computers and Structures* 1.4 (1971), p. 581-601. ISSN : 0045-7949. DOI : [10.1016/0045-7949\(71\)90031-9](https://doi.org/10.1016/0045-7949(71)90031-9) (cf. p. 70).
- MATÉRN, B. *Spatial Variation*. Sér. sous la dir. de D. BRILLINGER, S. FIENBERG, J. GANI, J. HARTIGAN et K. KRICKEBERG. Second Edition. T. 36. Lecture Notes in Statistics. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1986 [1960]. ISBN : 978-0-387-96365-5. DOI : [10.1007/978-1-4615-7892-5](https://doi.org/10.1007/978-1-4615-7892-5) (cf. p. 107).
- MATHERON, G. « Principles of geostatistics ». In : *Economic Geology* 58.8 (1963), p. 1246-1266. ISSN : 0361-0128. DOI : [10.2113/gsecongeo.58.8.1246](https://doi.org/10.2113/gsecongeo.58.8.1246) (cf. p. 106).
- MCKAY, M. D., R. J. BECKMAN et W. J. CONOVER. « Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code ». In : *Technometrics* 21.2 (1979), p. 239-245. ISSN : 0040-1706. DOI : [10.1080/00401706.1979.10489755](https://doi.org/10.1080/00401706.1979.10489755) (cf. p. 105).
- MEDALE, M. et B. COCHELIN. « High performance computations of steady-state bifurcations in 3D incompressible fluid flows by Asymptotic Numerical Method ». In : *Journal of Computational Physics* 299 (2015), p. 581-596. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1016/j.jcp.2015.07.021](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.07.021) (cf. p. 68).
- METROPOLIS, N., A. W. ROSENBLUTH, M. N. ROSENBLUTH, A. H. TELLER et E. TELLER. « Equation of State Calculations by Fast Computing Machines ». In : *The Journal of Chemical Physics* 21.6 (1953), p. 1087-1092. ISSN : 0021-9606. DOI : [10.1063/1.1699114](https://doi.org/10.1063/1.1699114) (cf. p. 35).
- MOCKUS, J., V. TIESIS et A. ZILINSKAS. « The application of Bayesian methods for seeking the extremum ». In : *Towards Global Optimization*. Sous la dir. de L. C. W. DIXON et G. P. SZEGÖ. T. 2. Amsterdam : North-Holland, 1978, p. 117-129. ISBN : 978-0-444-85171-0 (cf. p. 37, 109).
- MOUSSA, M. O. « Modélisation du comportement dynamique non-linéaire des structures en matériaux mémoire de forme ». Thèse de doctorat. France : École polytechnique X, 2011. ADRESSE : <https://hal.science/pastel-00675919> (cf. p. 48).
- MOUSSI, E. H., S. BELLIZZI, B. COCHELIN et I. NISTOR. « Nonlinear normal modes of a two degrees-of-freedom piecewise linear system ». In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 64-65 (2015), p. 266-281. ISSN : 0888-3270. DOI : [10.1016/j.ymsp.2015.03.017](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2015.03.017) (cf. p. 68).
- MOUSSI, E. H. « Analyse de structures vibrantes dotées de non-linéarités localisées à jeu à l'aide des modes non-linéaires ». Thèse de doctorat. France : Université d'Aix-Marseille, 2013. ADRESSE : <https://hal.science/tel-00933366> (cf. p. 61).
- MUKHTAR, A., A. S. H. M. YASIR et M. F. M. NASIR. « A machine learning-based comparative analysis of surrogate models for design optimisation in computational fluid dynamics ». In : *Helvion* 9.8 (2023). ISSN : 2405-8440. DOI : [10.1016/j.helivon.2023.e18674](https://doi.org/10.1016/j.helivon.2023.e18674) (cf. p. 104).
- MUNOZ GARCIA, J. E., C. PÉTESCH et T. LEBARBÉ. « Adaptation of Standards to Innovative Reactors ». In : ASME 2022 Pressure Vessels & Piping Conference. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, 2022. DOI : [10.1115/PVP2022-85479](https://doi.org/10.1115/PVP2022-85479) (cf. p. 20).
- MYŚLIŃSKI, A. et M. WRÓBLEWSKI. « Structural optimization of contact problems using Cahn–Hilliard model ». In : *Computers & Structures*. CIVIL-COMP 2 180 (2017), p. 52-59. ISSN : 0045-7949. DOI : [10.1016/j.compstruc.2016.03.013](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.03.013) (cf. p. 72).
- NAKHLA, M. et J. VLACH. « A piecewise harmonic balance technique for determination of periodic response of nonlinear systems ». In : *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 23.2 (1976), p. 85-91. ISSN : 1558-1276. DOI : [10.1109/TCS.1976.1084181](https://doi.org/10.1109/TCS.1976.1084181) (cf. p. 61, 76).

BIBLIOGRAPHIE

- NAYFEH, A. H. et D. T. MOOK. *Nonlinear Oscillations*. New York : John Wiley & Sons, 1995 [1979]. 720 p. ISBN : 978-0-471-12142-8. DOI : [10.1002/9783527617586](https://doi.org/10.1002/9783527617586) (cf. p. 54, 61, 76).
- NAYFEH, A. H. *Perturbation Methods*. New York : John Wiley & Sons, 2000 [1973]. 440 p. ISBN : 978-0-471-39917-9. DOI : [10.1002/9783527617609](https://doi.org/10.1002/9783527617609) (cf. p. 54).
- NELDER, J. A. et R. MEAD. « A Simplex Method for Function Minimization ». In : *The Computer Journal* 7.4 (1965), p. 308-313. ISSN : 0010-4620. DOI : [10.1093/comjnl/7.4.308](https://doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308) (cf. p. 30).
- NEWMARK, N. M. « A Method of Computation for Structural Dynamics ». In : *Journal of the Engineering Mechanics Division* 85.3 (1959), p. 67-94. DOI : [10.1061/JMCEA3.0000098](https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0000098) (cf. p. 55).
- NOCEDAL, J. et S. J. WRIGHT. *Numerical Optimization*. Second Edition. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. New York : Springer New York, 2006. ISBN : 978-0-387-30303-1. DOI : [10.1007/978-0-387-40065-5](https://doi.org/10.1007/978-0-387-40065-5) (cf. p. 28-30, 32).
- PAIVA, R. M., A. R. D. CARVALHO, C. CRAWFORD et A. SULEMAN. « Comparison of Surrogate Models in a Multidisciplinary Optimization Framework for Wing Design ». In : *AIAA Journal* 48.5 (2010), p. 995-1006. ISSN : 0001-1452. DOI : [10.2514/1.45790](https://doi.org/10.2514/1.45790) (cf. p. 104).
- PAKDEMIRLI, M., M. M. F. KARAHAN et H. BOYACI. « A New Perturbation Algorithm With Better Convergence Properties : Multiple Scales Lindstedt Poincare Method ». In : *Mathematical and Computational Applications* 14.1 (2009), p. 31-44. ISSN : 2297-8747. DOI : [10.3390/mca14010031](https://doi.org/10.3390/mca14010031) (cf. p. 54).
- PANTELIDES, C. P. et S.-R. TZAN. « Optimal design of dynamically constrained structures ». In : *Computers & Structures* 62.1 (1997), p. 141-149. ISSN : 0045-7949. DOI : [10.1016/S0045-7949\(96\)00243-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(96)00243-X) (cf. p. 72).
- PARK, G.-J. « Technical overview of the equivalent static loads method for non-linear static response structural optimization ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 43.3 (2011), p. 319-337. ISSN : 1615-1488. DOI : [10.1007/s00158-010-0530-x](https://doi.org/10.1007/s00158-010-0530-x) (cf. p. 72).
- PASZKE, A. et al. « PyTorch : An Imperative Style, High-Performance Deep Learning Library ». In : *Advances in Neural Information Processing Systems*. Annual Conference on Neural Information Processing Systems 2019, NeurIPS 2019. T. 32. Vancouver : Curran Associates, Inc., 2019. ISBN : 978-1-71380-793-3. ADRESSE : https://papers.neurips.cc/paper_files/paper/2019/hash/bdbca288fee7f92f2bfa9f7012727740-Abstract.html (cf. p. 113, 124).
- PATIL, M. J. et D. H. HODGES. « On the importance of aerodynamic and structural geometrical nonlinearities in aeroelastic behavior of high-aspect-ratio wings ». In : *Journal of Fluids and Structures* 19.7 (2004), p. 905-915. ISSN : 0889-9746. DOI : [10.1016/j.jfluidstructs.2004.04.012](https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2004.04.012) (cf. p. 48).
- PEETERS, M., R. VIGUIÉ, G. SÉRANOUR, G. KERSCHEN et J.-C. GOLINVAL. « Nonlinear normal modes, Part II : Toward a practical computation using numerical continuation techniques ». In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 23.1 (2009), p. 195-216. ISSN : 0888-3270. DOI : [10.1016/j.ymsp.2008.04.003](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2008.04.003) (cf. p. 58).
- PELETAN, L. « Stratégie de modélisation simplifiée et de résolution accélérée en dynamique non linéaire des machines tournantes : Application au contact rotor-stator ». Thèse de doctorat. France : INSA de Lyon, 2012. ADRESSE : <https://hal.science/tel-00808515> (cf. p. 66, 68).
- PETROV, E. P. et D. J. EWINS. « Analytical Formulation of Friction Interface Elements for Analysis of Nonlinear Multi-Harmonic Vibrations of Bladed Disks ». In : *Journal of Turbomachinery* 125.2 (2003), p. 364-371. ISSN : 0889-504X. DOI : [10.1115/1.1539868](https://doi.org/10.1115/1.1539868) (cf. p. 48).

BIBLIOGRAPHIE

- PIERRE, C., A. A. FERRI et E. H. DOWELL. « Multi-Harmonic Analysis of Dry Friction Damped Systems Using an Incremental Harmonic Balance Method ». In : *Journal of Applied Mechanics* 52.4 (1985), p. 958-964. ISSN : 0021-8936. DOI : [10.1115/1.3169175](https://doi.org/10.1115/1.3169175) (cf. p. 61, 76).
- POINCARÉ, H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Méthodes de MM. Newcomb, Gylden, Lindstedt et Bohlin*. Paris : Hachette Livre BNF, 2018 [1892]. 491 p. ISBN : 978-2-329-25003-8 (cf. p. 54).
- POUDOU, O. et C. PIERRE. « Hybrid Frequency-Time Domain Methods for the Analysis of Complex Structural Systems with Dry Friction Damping ». In : *44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. Norfolk, VA : American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2003. DOI : [10.2514/6.2003-1411](https://doi.org/10.2514/6.2003-1411) (cf. p. 61).
- POWELL, M. J. D. « An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives ». In : *The Computer Journal* 7.2 (1964), p. 155-162. ISSN : 0010-4620. DOI : [10.1093/comjnl/7.2.155](https://doi.org/10.1093/comjnl/7.2.155) (cf. p. 30).
- POWELL, M. J. D. « Direct search algorithms for optimization calculations ». In : *Acta Numerica* 7 (1998), p. 287-336. ISSN : 0962-4929. DOI : [10.1017/S0962492900002841](https://doi.org/10.1017/S0962492900002841) (cf. p. 30).
- PRIMODAL. *Innovative Software for Structural Dynamics*. Version 3.1. Labège : Top Modal, 2020. ADRESSE : <http://www.topmodal.fr/primodal/> (cf. p. 124).
- PYDOE. *The experimental design package for python*. 2013. ADRESSE : <https://pythonhosted.org/pyDOE/index.html> (cf. p. 113, 124).
- QUEIPO, N. V., R. T. HAFTKA, W. SHYY, T. GOEL, R. VAIDYANATHAN et P. KEVIN TUCKER. « Surrogate-based analysis and optimization ». In : *Progress in Aerospace Sciences* 41.1 (2005), p. 1-28. ISSN : 0376-0421. DOI : [10.1016/j.paerosci.2005.02.001](https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2005.02.001) (cf. p. 37).
- RAGUENEAU, Q., L. LAURENT et A. LEGAY. *BO-HBM-ex*. Version v1.0.4. Zenodo, 2023. DOI : [10.5281/zenodo.10277696](https://doi.org/10.5281/zenodo.10277696) (cf. p. 130, 143).
- RAGUENEAU, Q., L. LAURENT, A. LEGAY, T. LARROQUE et R. CRAMBUER. « Optimisation paramétrique par métamodèle en dynamique vibratoire non linéaire avec résolution fréquentielle ». In : *25ème Congrès Français de Mécanique, CFM 2022*. Nantes, France, 2022. ADRESSE : <https://hal.science/hal-03770669> (cf. p. 143).
- RAGUENEAU, Q., L. LAURENT, A. LEGAY, T. LARROQUE et R. CRAMBUER. « Global Parametric Optimization for Structures with Nonlinear Joints in Vibration ». In : *Third International Nonlinear Dynamics Conference, NODYCON 2023*. Rome, Italy, 2023. ADRESSE : <https://hal.science/hal-04077051> (cf. p. 143).
- RAGUENEAU, Q., L. LAURENT, A. LEGAY, T. LARROQUE et R. CRAMBUER. « Strategy for Global Parametric Optimization in Nonlinear Vibration : Application on a Gantry Crane ». In : *9th International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, COMPDYN 2023*. Athens, Greece : ECCOMAS, 2023. ADRESSE : <https://hal.science/hal-04077038> (cf. p. 143).
- RAGUENEAU, Q., L. LAURENT, A. LEGAY, T. LARROQUE et R. CRAMBUER. « A constrained Bayesian Optimization framework for structural vibrations with local nonlinearities ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 67.4 (2024), p. 47. ISSN : 1615-1488. DOI : [10.1007/s00158-024-03747-5](https://doi.org/10.1007/s00158-024-03747-5) (cf. p. 143).
- RAKHA, M. A. « On the Moore–Penrose generalized inverse matrix ». In : *Applied Mathematics and Computation* 158.1 (2004), p. 185-200. ISSN : 0096-3003. DOI : [10.1016/j.amc.2003.09.004](https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.09.004) (cf. p. 65).

BIBLIOGRAPHIE

- RAPONI, E., M. BUJNY, M. OLHOFFER, N. AULIG, S. BORIA et F. DUDDECK. « Kriging-assisted topology optimization of crash structures ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 348 (2019), p. 730-752. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2019.02.002](https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.02.002) (cf. p. 72).
- RAPONI, E., M. BUJNY, M. OLHOFFER, S. BORIA et F. DUDDECK. « Hybrid Strategy Coupling EGO and CMA-ES for Structural Topology Optimization in Statics and Crashworthiness ». In : *Computational Intelligence*. International Joint Conference on Computational Intelligence IJCCI 2019. Sous la dir. de J. J. MERELO, J. GARIBALDI, A. LINARES-BARRANCO, K. WARWICK et K. MADANI. T. 922. Studies in Computational Intelligence. Cham : Springer International Publishing, 2021, p. 55-84. ISBN : 978-3-030-70594-7. DOI : [10.1007/978-3-030-70594-7_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-70594-7_3) (cf. p. 72).
- RASMUSSEN, C. E. et C. K. I. WILLIAMS. *Gaussian Processes for Machine Learning*. Second printing. Adaptive Computation and Machine Learning. Cambridge, MA : The MIT Press, 2006 [2005]. 248 p. ISBN : 978-0-262-18253-9. DOI : [10.7551/mitpress/3206.001.0001](https://doi.org/10.7551/mitpress/3206.001.0001) (cf. p. 104, 106, 107).
- RASTRIGIN, L. A. « The convergence of the random search method in the extremal control of a many parameter system ». In : *Automaton & Remote Control* 24.11 (1963), p. 1337-1342. ISSN : 0005-1179 (cf. p. 33).
- RAZZAK, M. A., M. Z. ALAM et M. N. SHARIF. « Modified multiple time scale method for solving strongly nonlinear damped forced vibration systems ». In : *Results in Physics* 8 (2018), p. 231-238. ISSN : 2211-3797. DOI : [10.1016/j.rinp.2017.12.015](https://doi.org/10.1016/j.rinp.2017.12.015) (cf. p. 54).
- RECHENBERG, I. *Evolutionstrategie : Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution*. Stuttgart : Frommann-Holzboog, 1973. 182 p. ISBN : 978-3-7728-0373-4 (cf. p. 35).
- REN, C., H.-t. MIN et T.-f. MA. « An Efficient Topology Optimization Strategy for Structural Crashworthiness Using Model and ESLs Reduction Method ». In : *DEStech Transactions on Computer Science and Engineering* 0.iteee (iteee 2019). ISSN : 2475-8841. DOI : [10.12783/dtcse/iteee2019/28769](https://doi.org/10.12783/dtcse/iteee2019/28769) (cf. p. 72).
- RIBEIRO, P. « Non-linear forced vibrations of thin/thick beams and plates by the finite element and shooting methods ». In : *Computers & Structures*. Computational Mechanics in Portugal 82.17 (2004), p. 1413-1423. ISSN : 0045-7949. DOI : [10.1016/j.compstruc.2004.03.037](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.03.037) (cf. p. 59).
- RINNOOY KAN, A. H. G. et G. T. TIMMER. « Stochastic global optimization methods part I : Clustering methods ». In : *Mathematical Programming* 39.1 (1987), p. 27-56. ISSN : 1436-4646. DOI : [10.1007/BF02592070](https://doi.org/10.1007/BF02592070) (cf. p. 34).
- ROSENBERG, R. M. « Normal Modes of Nonlinear Dual-Mode Systems ». In : *Journal of Applied Mechanics* 27.2 (1960), p. 263-268. ISSN : 0021-8936. DOI : [10.1115/1.3643948](https://doi.org/10.1115/1.3643948) (cf. p. 71).
- ROSENBROCK, H. H. « An Automatic Method for Finding the Greatest or Least Value of a Function ». In : *The Computer Journal* 3.3 (1960), p. 175-184. ISSN : 0010-4620. DOI : [10.1093/comjnl/3.3.175](https://doi.org/10.1093/comjnl/3.3.175) (cf. p. 30).
- SACKS, J., W. J. WELCH, T. J. MITCHELL et H. P. WYNN. « Design and Analysis of Computer Experiments ». In : *Statistical Science* 4.4 (1989), p. 409-423. ISSN : 0883-4237. DOI : [10.1214/ss/1177012413](https://doi.org/10.1214/ss/1177012413) (cf. p. 105, 106).
- SALLES, L., L. BLANC, F. THOUVEREZ, A. M. GOUSKOV et P. JEAN. « Dual Time Stepping Algorithms With the High Order Harmonic Balance Method for Contact Interfaces With Fretting-Wear ». In : *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 134.3 (2011), p. 032503. ISSN : 0742-4795. DOI : [10.1115/1.4004236](https://doi.org/10.1115/1.4004236) (cf. p. 54).
- SAMOILENKO, A. M. et N. I. RONTA. *Numerical-analytic methods of investigating periodic solutions*. Moscow : Mir Publishers, 1979. ISBN : 978-0-8285-1514-6 (cf. p. 60).

BIBLIOGRAPHIE

- SARROUY, E. et J.-J. SINOÛ. « Non-Linear Periodic and Quasi-Periodic Vibrations in Mechanical Systems - On the use of the Harmonic Balance Methods ». In : *Advances in Vibration Analysis Research*. Rijeka : IntechOpen, 2011. Chap. 21, p. 419-434. ISBN : 978-953-307-209-8. DOI : [10.5772/15638](https://doi.org/10.5772/15638) (cf. p. [61](#), [66](#), [69](#), [124](#)).
- SCHONLAU, M. « Computer Experiments and Global Optimization ». Thèse de doctorat. Canada : University of Waterloo, 1997. ADRESSE : <http://hdl.handle.net/10012/190> (cf. p. [110](#)).
- SCHONLAU, M., W. J. WELCH et D. R. JONES. « Global versus Local Search in Constrained Optimization of Computer Models ». In : *Lecture Notes-Monograph Series* 34 (1998), p. 11-25. ISSN : 0749-2170. DOI : [10.1214/lrms/1215456182](https://doi.org/10.1214/lrms/1215456182) (cf. p. [38](#), [113](#)).
- SCHWEFEL, H.-P. *Evolution and Optimum Seeking*. 1st edition. Sixth-Generation Computer Technology Series. New York : Wiley-Interscience, 1995. 456 p. ISBN : 978-0-471-57148-3 (cf. p. [35](#)).
- SHANNO, D. F. « Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization ». In : *Mathematics of Computation* 24.111 (1970), p. 647-656. ISSN : 0025-5718, 1088-6842. DOI : [10.1090/S0025-5718-1970-0274029-X](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1970-0274029-X) (cf. p. [31](#)).
- SHANNON, C. « Communication in the Presence of Noise ». In : *Proceedings of the IRE* 37.1 (1949), p. 10-21. ISSN : 2162-6634. DOI : [10.1109/JRPROC.1949.232969](https://doi.org/10.1109/JRPROC.1949.232969) (cf. p. [78](#), [171](#)).
- SHAW, S. W. et C. PIERRE. « Non-linear normal modes and invariant manifolds ». In : *Journal of Sound and Vibration* 150.1 (1991), p. 170-173. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/0022-460X\(91\)90412-D](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90412-D) (cf. p. [71](#)).
- SHAW, S. W. et C. PIERRE. « Normal Modes for Non-Linear Vibratory Systems ». In : *Journal of Sound and Vibration* 164.1 (1993), p. 85-124. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1006/jsvi.1993.1198](https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1198) (cf. p. [71](#)).
- SHOBEIRI, V. « Bidirectional evolutionary structural optimization for nonlinear structures under dynamic loads ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 121.5 (2020), p. 888-903. ISSN : 1097-0207. DOI : [10.1002/nme.6249](https://doi.org/10.1002/nme.6249) (cf. p. [72](#)).
- SHULTZ, G. A., R. B. SCHNABEL et R. H. BYRD. « A Family of Trust-Region-Based Algorithms for Unconstrained Minimization with Strong Global Convergence Properties ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 22.1 (1985), p. 47-67. ISSN : 0036-1429. DOI : [10.1137/0722003](https://doi.org/10.1137/0722003) (cf. p. [32](#)).
- SICOT, F., G. PUIGT et M. MONTAGNAC. « Block-Jacobi Implicit Algorithms for the Time Spectral Method ». In : *AIAA Journal* 46.12 (2008), p. 3080-3089. ISSN : 0001-1452. DOI : [10.2514/1.36792](https://doi.org/10.2514/1.36792) (cf. p. [54](#)).
- SIMPSON, T. W., F. MISTREE, J. KORTE et T. MAUERY. « Comparison of response surface and kriging models for multidisciplinary design optimization ». In : *7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*. Multidisciplinary Analysis Optimization Conferences. St. Louis, MO : American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998. DOI : [10.2514/6.1998-4755](https://doi.org/10.2514/6.1998-4755) (cf. p. [104](#)).
- SIMPSON, T. W., J. POPLINSKI, P. N. KOCH et J. ALLEN. « Metamodels for Computer-based Engineering Design : Survey and recommendations ». In : *Engineering with Computers* 17.2 (2001), p. 129-150. ISSN : 1435-5663. DOI : [10.1007/PL00007198](https://doi.org/10.1007/PL00007198) (cf. p. [104](#)).
- SOCHA, K. et M. DORIGO. « Ant colony optimization for continuous domains ». In : *European Journal of Operational Research* 185.3 (2008), p. 1155-1173. ISSN : 0377-2217. DOI : [10.1016/j.ejor.2006.06.046](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.06.046) (cf. p. [36](#)).
- SOLIS, F. J. et R. J.-B. WETS. « Minimization by Random Search Techniques ». In : *Mathematics of Operations Research* 6.1 (1981), p. 19-30. ISSN : 0364-765X. DOI : [10.1287/moor.6.1.19](https://doi.org/10.1287/moor.6.1.19) (cf. p. [33](#)).

BIBLIOGRAPHIE

- SORENSEN, D. C. « Trust-region methods for unconstrained minimization ». In : *Nonlinear Optimization 1981*. Sous la dir. de M. J. D. POWELL. NATO conference series II : Systems science. London : Academic Press, 1982. ISBN : 978-0-12-563860-9 (cf. p. 32).
- STANDER, N., W. ROUX, M. GIGER, M. REDHE, N. FEDOROVA et J. HAARHOFF. « A Comparison of Metamodeling Techniques for Crashworthiness Optimization ». In : *10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*. Multidisciplinary Analysis Optimization Conferences. Albany, NY : American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2004. DOI : [10.2514/6.2004-4489](https://doi.org/10.2514/6.2004-4489) (cf. p. 104).
- STORN, R. et K. PRICE. « Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces ». In : *Journal of Global Optimization* 11.4 (1997), p. 341-359. ISSN : 1573-2916. DOI : [10.1023/A:1008202821328](https://doi.org/10.1023/A:1008202821328) (cf. p. 35).
- STOYKOV, S. et S. MARGENOV. « Numerical computation of periodic responses of nonlinear large-scale systems by shooting method ». In : *Computers & Mathematics with Applications*. Efficient Algorithms for Large Scale Scientific Computations 67.12 (2014), p. 2257-2267. ISSN : 0898-1221. DOI : [10.1016/j.camwa.2014.01.023](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2014.01.023) (cf. p. 59).
- STRUTT, J. W. (3rd Baron Rayleigh). *The theory of sound*. T. 1. London : Macmillan and co., 1877 (cf. p. 44).
- SUBBARAJ, K. et M. A. DOKAINISH. « A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics—II. Implicit methods ». In : *Computers & Structures* 32.6 (1989), p. 1387-1401. ISSN : 0045-7949. DOI : [10.1016/0045-7949\(89\)90315-5](https://doi.org/10.1016/0045-7949(89)90315-5) (cf. p. 55).
- SUNDARARAJAN, P. et S. T. NOAH. « Dynamics of Forced Nonlinear Systems Using Shooting/Arc-Length Continuation Method—Application to Rotor Systems ». In : *Journal of Vibration and Acoustics* 119.1 (1997), p. 9-20. ISSN : 1048-9002. DOI : [10.1115/1.2889694](https://doi.org/10.1115/1.2889694) (cf. p. 59).
- TEICHGRÄBER, M., M. FUSSEDER, K.-U. BLETZINGER et D. STRAUB. « Non-linear structural models and the partial safety factor concept ». In : *Structural Safety* 103 (2023), p. 102341. ISSN : 0167-4730. DOI : [10.1016/j.strusafe.2023.102341](https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2023.102341) (cf. p. 19).
- TEODORESCU, C. S. « Commande de systèmes d'isolation antisismique mixte ». Thèse de doctorat. France : Université Paris Sud - Paris XI, 2013. ADRESSE : <https://hal.science/tel-00904280> (cf. p. 48).
- TEWARSON, R. P. *Sparse Matrices*. T. 99. Mathematics in Science and Engineering. New York : Academic Press, 1973. ISBN : 978-0-12-685650-7 (cf. p. 43).
- THOMAS, O., A. SÉNÉCHAL et J.-F. DEÛ. « Hardening/softening behavior and reduced order modeling of nonlinear vibrations of rotating cantilever beams ». In : *Nonlinear Dynamics* 86.2 (2016), p. 1293-1318. ISSN : 1573-269X. DOI : [10.1007/s11071-016-2965-0](https://doi.org/10.1007/s11071-016-2965-0) (cf. p. 48).
- THOMAS, O. « Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques - Application aux instruments de percussion ». Thèse de doctorat. France : Université Pierre et Marie Curie - Paris VI; Telecom ParisTech, 2001. ADRESSE : <https://hal.science/tel-00005656> (cf. p. 48).
- THOMPSON, P. D. « Optimum Smoothing of Two-Dimensional Fields ». In : *Tellus* 8.3 (1956), p. 384-393. ISSN : 0040-2826. DOI : [10.3402/tellusa.v8i3.9008](https://doi.org/10.3402/tellusa.v8i3.9008) (cf. p. 106).
- TORCZON, V. « Multidirectional search : A direct search algorithm for parallel machines ». Thèse de doctorat. Texas : Rice University, 1989. ADRESSE : <https://scholarship.rice.edu/handle/1911/16304> (cf. p. 29).
- TORCZON, V. « On the Convergence of the Multidirectional Search Algorithm ». In : *SIAM Journal on Optimization* 1.1 (1991), p. 123-145. ISSN : 1052-6234. DOI : [10.1137/0801010](https://doi.org/10.1137/0801010) (cf. p. 29).

- TORCZON, V. « On the Convergence of Pattern Search Algorithms ». In : *SIAM Journal on Optimization* 7.1 (1997), p. 1-25. ISSN : 1052-6234. DOI : [10.1137/S1052623493250780](https://doi.org/10.1137/S1052623493250780) (cf. p. 30).
- TÖRN, A. « Cluster Analysis Using Seed Points and Density-Determined Hyperspheres as an Aid to Global Optimization ». In : *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 7.8 (1977), p. 610-616. ISSN : 0018-9472. DOI : [10.1109/TSMC.1977.4309787](https://doi.org/10.1109/TSMC.1977.4309787) (cf. p. 34).
- TÖRN, A. et A. ŽILINSKAS. « Methods of generalized descent ». In : *Global Optimization*. Sous la dir. d'A. TÖRN et A. ŽILINSKAS. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg : Springer, 1989, p. 53-63. ISBN : 978-3-540-50871-7. DOI : [10.1007/3-540-50871-6_3](https://doi.org/10.1007/3-540-50871-6_3) (cf. p. 34).
- UNGREDDA, J. et J. BRANKE. *Bayesian Optimisation for Constrained Problems*. 2021. DOI : [10.48550/arXiv.2105.13245](https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.13245). preprint (cf. p. 122).
- URABE, M. « Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems ». In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 20.2 (1965), p. 120-152. ISSN : 1432-0673. DOI : [10.1007/BF00284614](https://doi.org/10.1007/BF00284614) (cf. p. 77).
- UZAWA, H. « Iterative Methods for Concave Programming ». In : *Studies in linear and non-linear programming*. Sous la dir. de K. J. ARROW, L. HURWICZ et H. UZAWA. Stanford Mathematical Studies in the Social Sciences II. Stanford, CA : Stanford University Press, 1958, p. 154-165. ADRESSE : <https://archive.org/details/studiesinlinear0000arro> (cf. p. 38).
- VADCARD, T., Y. COLAÏTIS, A. BATAILLY et F. THOUVEREZ. « Assessment of Two Harmonic Balance Method-Based Numerical Strategies for Blade-Tip/Casing Interactions : Application to NASA Rotor67 ». In : *ASME Turbo Expo 2022 : Turbomachinery Technical Conference and Exposition*. ASME Turbo Expo 2022 : Turbomachinery Technical Conference and Exposition. T. 8B. Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air. Rotterdam : American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, 2022, V08BT27A009. DOI : [10.1115/GT2022-81694](https://doi.org/10.1115/GT2022-81694) (cf. p. 61).
- VAKAKIS, A. F. « Dynamics of a nonlinear periodic structure with cyclic symmetry ». In : *Acta Mechanica* 95.1 (1992), p. 197-226. ISSN : 1619-6937. DOI : [10.1007/BF01170813](https://doi.org/10.1007/BF01170813) (cf. p. 48).
- VAKAKIS, A. F., L. I. MANEVITCH, Y. V. MIKHLIN, V. N. PILIPCHUK et A. A. ZEVIN. *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. 1st edition. Wiley Series in Nonlinear Science. New York : Wiley-VCH, 1996. 552 p. ISBN : 978-0-471-13319-3. DOI : [10.1002/9783527617869](https://doi.org/10.1002/9783527617869) (cf. p. 71).
- VIANA, F. A. C., R. T. HAFTKA et L. T. WATSON. « Efficient global optimization algorithm assisted by multiple surrogate techniques ». In : *Journal of Global Optimization* 56.2 (2013), p. 669-689. ISSN : 1573-2916. DOI : [10.1007/s10898-012-9892-5](https://doi.org/10.1007/s10898-012-9892-5) (cf. p. 104).
- WALTERS, F. H., L. R. P. JR, S. L. MORGAN et S. N. DEMING. *Sequential Simplex Optimization : A Technique for Improving Quality and Productivity in Research, Development, and Manufacturing*. Boca Raton, FL : CRC Press, 1991. 352 p. ISBN : 978-0-8493-5894-4 (cf. p. 30).
- WANG, C., X. QIANG, M. XU et T. WU. « Recent Advances in Surrogate Modeling Methods for Uncertainty Quantification and Propagation ». In : *Symmetry* 14.6 (6 2022), p. 1219. ISSN : 2073-8994. DOI : [10.3390/sym14061219](https://doi.org/10.3390/sym14061219) (cf. p. 104).
- WEYLER, R., J. OLIVER, T. SAIN et J. C. CANTE. « On the contact domain method : A comparison of penalty and Lagrange multiplier implementations ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Special Issue on Advances in Computational Methods in Contact Mechanics 205–208 (2012), p. 68-82. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2011.01.011](https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.01.011) (cf. p. 95).
- WILLIAMS, D. et D. A. LANG. « Analysis of a Gantry Crane for Severe Seismic Criteria ». In : *Proceedings of the Seventh World Conference on Earthquake Engineering*. 7th World Conference on Earthquake Engineering. T. 8. Istanbul, Turkey, 1980, p. 459 (cf. p. 131).

- WOIWODE, L. et al. « Comparison of two algorithms for Harmonic Balance and path continuation ». In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 136 (2020), p. 106503. ISSN : 0888-3270. DOI : [10.1016/j.ymsp.2019.106503](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2019.106503) (cf. p. 68, 78, 80).
- WRIGHT, M. H. « Direct search methods : Once scorned, now respectable ». In : *Numerical Analysis 1995*. Sous la dir. de D. F. GRIFFITHS et G. A. WATSON. Pitman Research Notes in Mathematics Series. Harlow : Longman, 1996, p. 191-208. ISBN : 978-0-582-27633-8 (cf. p. 29).
- WU, J., L. HONG et J. JIANG. « A robust and efficient stability analysis of periodic solutions based on harmonic balance method and Floquet-Hill formulation ». In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 173 (2022), p. 109057. ISSN : 0888-3270. DOI : [10.1016/j.ymsp.2022.109057](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2022.109057) (cf. p. 69).
- XIE, L., S. BAGUET, B. PRABEL et R. DUFOUR. « Numerical Tracking of Limit Points for Direct Parametric Analysis in Nonlinear Rotordynamics ». In : *Journal of Vibration and Acoustics* 138.021007 (2016). ISSN : 1048-9002. DOI : [10.1115/1.4032182](https://doi.org/10.1115/1.4032182) (cf. p. 145).
- XIE, L., S. BAGUET, B. PRABEL et R. DUFOUR. « Bifurcation tracking by Harmonic Balance Method for performance tuning of nonlinear dynamical systems ». In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 88 (2017), p. 445-461. DOI : [10.1016/j.ymsp.2016.09.037](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2016.09.037) (cf. p. 69).
- YUAN, Y., A. JONES, R. SETCHFIELD et C. W. SCHWINGSHACKL. « Robust design optimisation of underplatform dampers for turbine applications using a surrogate model ». In : *Journal of Sound and Vibration* 494 (2021), p. 115528. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2020.115528](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115528) (cf. p. 72).
- ZHANG, W. et C. NIU. « A linear relaxation model for shape optimization of constrained contact force problem ». In : *Computers & Structures* 200 (2018), p. 53-67. ISSN : 0045-7949. DOI : [10.1016/j.compstruc.2018.02.005](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2018.02.005) (cf. p. 72).
- ZHAO, D. et D. XUE. « A comparative study of metamodeling methods considering sample quality merits ». In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 42.6 (2010), p. 923-938. ISSN : 1615-1488. DOI : [10.1007/s00158-010-0529-3](https://doi.org/10.1007/s00158-010-0529-3) (cf. p. 104).
- ZHAO, J. Y., I. W. LINNETT et L. J. MCLEAN. « Stability and Bifurcation of Unbalanced Response of a Squeeze Film Damped Flexible Rotor ». In : *Journal of Tribology* 116.2 (1994), p. 361-368. ISSN : 0742-4787. DOI : [10.1115/1.2927236](https://doi.org/10.1115/1.2927236) (cf. p. 60).
- ZHAO, Y., C. JIANG, M. A. VEGA, M. D. TODD et Z. HU. « Surrogate Modeling of Nonlinear Dynamic Systems : A Comparative Study ». In : *Journal of Computing and Information Science in Engineering* 23.1 (2023), p. 011001. ISSN : 1530-9827. DOI : [10.1115/1.4054039](https://doi.org/10.1115/1.4054039) (cf. p. 104).
- ZIENKIEWICZ, O. C., R. L. TAYLOR et J. Z. ZHU. *The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals*. 7th edition. Oxford : Butterworth-Heinemann, 2013 [1967]. 756 p. ISBN : 978-1-85617-633-0. DOI : [10.1016/C2009-0-24909-9](https://doi.org/10.1016/C2009-0-24909-9) (cf. p. 42).

BIBLIOGRAPHIE

Analyse de Fourier

A.1 Séries de Fourier

Les séries de Fourier sont un outil mathématique performant d'analyse de fonctions périodiques. Afin de rester en cohérence avec l'utilisation faite dans ce manuscrit, les développements de cette section s'effectuent en considérant une fonction \mathbf{g} de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} \mathbf{g} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (\mathbf{g}_1(t), \dots, \mathbf{g}_n(t)) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

La fonction \mathbf{g} est supposée périodique de période T :

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{g}(t_0) = \mathbf{g}(t_0 + T). \quad (\text{A.2})$$

De plus, chaque fonction composante de \mathbf{g} est supposée continue sur \mathbb{R} et de classe C^1 par morceaux. Les fonctions \mathbf{g}_k , $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ sont ainsi intégrables sur toute période et la notation $\int \mathbf{g}(t)dt$ est utilisée pour désigner le vecteur de \mathbb{R}^n qui contient l'intégrale de chacune des fonctions composantes :

$$\int \mathbf{g}(t)dt = \left[\int \mathbf{g}_1(t)dt \quad \dots \quad \int \mathbf{g}_n(t)dt \right]^T. \quad (\text{A.3})$$

Dans ce cas, \mathbf{g} admet une décomposition en série de Fourier :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{g}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_i e^{ji\omega t}, \quad (\text{A.4})$$

où ω désigne la pulsation associée à T ($\omega = \frac{2\pi}{T}$). Les coefficients $\mathbf{c}_i \in \mathbb{C}^n$, $\forall i \in \mathbb{Z}$, appelés coefficients de Fourier complexes, ont pour expression :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{c}_i = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{g}(t) e^{-ji\omega t} dt. \quad (\text{A.5})$$

A.2. TRANSFORMATION DE FOURIER DISCRÈTE

Dans le cas de fonctions à valeurs réelles, $\forall i > 0$, les termes de c_i sont les conjugués des termes de c_{-i} . La série de Fourier peut alors aussi s'écrire sous la forme trigonométrique avec des coefficients réels :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{g}(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{i=-1}^{\infty} (\mathbf{a}_i \cos(i\omega t) + \mathbf{b}_i \sin(i\omega t)), \quad (\text{A.6})$$

avec :

$$\mathbf{a}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{g}(t) dt, \quad (\text{A.7})$$

$$\forall i > 0, \quad \mathbf{a}_i = \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{g}(t) \cos(i\omega t) dt, \quad (\text{A.8})$$

$$\forall i > 0, \quad \mathbf{b}_i = \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{g}(t) \sin(i\omega t) dt. \quad (\text{A.9})$$

Le lien entre les coefficients réels et complexes se fait grâce à la formule d'Euler :

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{a}_0, \quad \forall i > 0, \quad \mathbf{c}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_i - j\mathbf{b}_i) \quad \text{et} \quad \mathbf{c}_{-i} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_i + j\mathbf{b}_i), \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{c}_0, \quad \forall i > 0, \quad \mathbf{a}_i = \mathbf{c}_i + \mathbf{c}_{-i} = 2\Re(\mathbf{c}_i) \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_i = j(\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_{-i}) = -2\Im(\mathbf{c}_i). \quad (\text{A.11})$$

A.2 Transformation de Fourier discrète

La transformation de Fourier est une opération qui étend pour les fonctions non périodiques le développement en série de Fourier. Cette transformation associe toute fonction intégrable à une autre fonction appelée transformée de Fourier. Cette transformée de Fourier décrit le spectre fréquentiel de la fonction d'origine. La transformation de Fourier discrète directe (DFT) est un outil permettant d'obtenir la transformée de Fourier de signaux finis et discrets, ce qui est le cas de tous les signaux obtenus par traitement numérique. La DFT permet de représenter dans le domaine fréquentiel une suite d'échantillons d'une fonction uniformément répartis dans le temps. La période d'échantillonnage est notée T_e et la fréquence associée f_e . Pour une suite de n_t échantillons $(\mathbf{g}_j)_{j \in \llbracket 0; n_t - 1 \rrbracket}$ de la fonction \mathbf{g} . La transformée de Fourier discrète de ces échantillons correspond aux coefficients $(\tilde{\mathbf{g}}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ définis par :

$$\mathcal{F} \left((\mathbf{g}_j)_{j \in \llbracket 0; n_t - 1 \rrbracket} \right) = (\tilde{\mathbf{g}}_i)_{i \in \mathbb{Z}}, \quad (\text{A.12})$$

avec :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad \tilde{\mathbf{g}}_i = \frac{1}{n_t} \sum_{j=0}^{n_t-1} \mathbf{g}_j e^{-j2\pi \frac{ij}{n_t}}. \quad (\text{A.13})$$

Les propriétés de la fonction exponentielle donnent :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad \tilde{\mathbf{g}}_{n_t+i} = \tilde{\mathbf{g}}_i \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{g}}_{n_t-i} = \tilde{\mathbf{g}}_{-i}. \quad (\text{A.14})$$

Les termes $\tilde{\mathbf{g}}_i$ décrivent la contribution de la fréquence $f_i = i \frac{f_e}{n_t}$, ce qui est applicable uniquement lorsque i est compris dans un intervalle $I = \left[\left\lfloor -\frac{n_t}{2} \right\rfloor + 1; \left\lfloor \frac{n_t}{2} \right\rfloor \right]$ en raison des relations de l'équation

A.2. TRANSFORMATION DE FOURIER DISCRÈTE

(A.14). L'ensemble des $(|\tilde{\mathbf{g}}_i|)_{i \in I}$ correspond au spectre en amplitude de la fonction \mathbf{g} et l'ensemble des $(\text{Arg}(\tilde{\mathbf{g}}_i))_{i \in I}$ correspond à son spectre de phase. Étant donné que seules les fréquences comprises entre $-\frac{f_e}{2}$ et $\frac{f_e}{2}$ peuvent être représentées, il est nécessaire de respecter le critère de Shannon-Nyquist [SHANNON 1949] afin de représenter correctement un signal discrétisé :

Théorème 1 *La représentation discrète d'un signal exige des échantillons régulièrement espacés à une fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la fréquence maximale f_{\max} présente dans ce signal.*

De plus, lorsque la fonction \mathbf{g} est à valeurs réelles, $\tilde{\mathbf{g}}_{-i}$ est le conjugué de $\tilde{\mathbf{g}}_i$ pour tout i . Il suffit ainsi de calculer les valeurs de $\tilde{\mathbf{g}}_i$ pour $i \in \left[\left[0; \left\lfloor \frac{n_t}{2} \right\rfloor \right] \right]$ afin d'obtenir le spectre maximal.

Dans la suite, il est choisi de réordonner les termes $\tilde{\mathbf{g}}_i$ sur l'intervalle $\llbracket 0; n_t - 1 \rrbracket$, afin de se rapprocher de la manière dont les termes sont traités informatiquement et parce qu'il est plus compréhensible de manipuler des indices positifs. Ainsi, avec cette convention :

- si n_t est pair :
 - $\forall i \in \left[\left[0; \frac{n_t}{2} \right] \right]$, $\tilde{\mathbf{g}}_i$ décrit la contribution de la fréquence $i \frac{f_e}{n_t}$ (fréquences positives) ;
 - $\forall i \in \left[\left[\frac{n_t}{2} + 1; n_t - 1 \right] \right]$, $\tilde{\mathbf{g}}_i$ décrit la contribution de la fréquence $(i - n_t) \frac{f_e}{n_t}$ (fréquences négatives) ;
- si n_t est impair :
 - $\forall i \in \left[\left[0; \frac{n_t - 1}{2} \right] \right]$, $\tilde{\mathbf{g}}_i$ décrit la contribution de la fréquence $i \frac{f_e}{n_t}$ (fréquences positives) ;
 - $\forall i \in \left[\left[\frac{n_t + 1}{2}; n_t - 1 \right] \right]$, $\tilde{\mathbf{g}}_i$ décrit la contribution de la fréquence $(i - n_t) \frac{f_e}{n_t}$ (fréquences négatives).

La transformation de Fourier discrète inverse (DFT⁻¹) permet de retransformer les termes fréquentiels dans le domaine temporel. À partir d'une suite de termes $(\tilde{\mathbf{g}}_i)_{i \in \llbracket 0; n_t - 1 \rrbracket}$, correspondant à la représentation fréquentielle d'une fonction \mathbf{g} en utilisant la convention précédemment énoncée, la DFT⁻¹ permet de retrouver les coefficients $(\mathbf{g}_j)_{j \in \mathbb{N}}$:

$$\mathcal{F}^{-1}((\tilde{\mathbf{g}}_i)_{i \in \llbracket 0; n_t - 1 \rrbracket}) = (\mathbf{g}_j)_{j \in \mathbb{N}}, \quad (\text{A.15})$$

avec :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{g}_j = \sum_{i=0}^{n_t-1} \tilde{\mathbf{g}}_i e^{j2\pi \frac{ij}{n_t}}. \quad (\text{A.16})$$

Les coefficients \mathbf{g}_j correspondent à la valeur de la fonction \mathbf{g} aux points $t_j = \frac{j}{f_e}$. Comme pour la transformation directe, les propriétés de l'exponentielle font que seuls les termes pour $j \in \llbracket 0; n_t - 1 \rrbracket$ présentent un intérêt, car ceux-ci se répètent. La normalisation par le facteur $\frac{1}{n_t}$ peut s'effectuer au choix lors de la transformation directe ou lors de la transformation inverse. D'autres facteurs de normalisation peuvent également être utilisés. Avec le choix effectué ici, le terme $\tilde{\mathbf{g}}_0$ correspond à

A.2. TRANSFORMATION DE FOURIER DISCRÈTE

la valeur moyenne de la fonction et certains termes de la transformée de Fourier discrète peuvent s'identifier à la décomposition en série de Fourier lorsque le pas de fréquence $\frac{f_e}{n_t}$ divise la fréquence de la fonction \mathbf{g} .

La Figure A.1 donne un exemple d'application de la DFT sur la fonction \mathbf{g} définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \mathbf{g}(t) = 10 + 5 \cos(2\pi \times 50 \times t) + 2 \sin(3 \times 2\pi \times 50 \times t) + 8 \cos(5 \times 2\pi \times 50 \times t - \frac{\pi}{4}) \quad (\text{A.17})$$

La fonction \mathbf{g} est périodique de fréquence fondamentale $f_0 = 50$ Hz et est échantillonnée en 105 points entre $t = 0$ s et $t = 0,10$ s, soit une fréquence d'échantillonnage de 1050 Hz (Figure A.1a). La composante maximale présente dans le signal possède une fréquence de 250 Hz donc le critère de Shannon est bien respecté. La transformée de Fourier du signal discrétisé comporte alors 105 termes représentant la contribution des fréquences entre -520 Hz et 520 Hz avec un pas de 10 Hz. Seules les contributions des fréquences comprises entre 0 Hz à 300 Hz sont représentées sur les spectres des Figures A.1b et A.1c. Trois sommets sont présents, montrant la contribution de la composante continue (0 Hz), ainsi que celle des fréquences 50 Hz, 150 Hz et 250 Hz. Un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$ est observé pour la composante à 150 Hz tandis qu'un déphasage de $-\frac{\pi}{4}$ est observé pour la composante à 250 Hz, ce qui correspond bien à la définition du signal donné par l'expression (A.17).

Dans le cas de fonctions à valeurs réelles, l'expression (A.16) peut se mettre sous la forme trigonométrique.

— Si n_t est impair :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_j &= \sum_{i=0}^{\frac{n_t-1}{2}} \tilde{\mathbf{g}}_i e^{j2\pi \frac{ij}{n_t}} + \sum_{i=\frac{n_t+1}{2}}^{n_t-1} \tilde{\mathbf{g}}_i e^{j2\pi \frac{ij}{n_t}}, \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{n_t-1}{2}} \tilde{\mathbf{g}}_i e^{j2\pi \frac{ij}{n_t}} + \sum_{i=\frac{n_t-1}{2}}^1 \tilde{\mathbf{g}}_{n_t-i} e^{-j2\pi \frac{ij}{n_t}} \quad (\text{changement de variable } i' = n_t - i), \\ &= \tilde{\mathbf{g}}_0 + \sum_{i=1}^{\frac{n_t-1}{2}} (\Re(\tilde{\mathbf{g}}_i) + j\Im(\tilde{\mathbf{g}}_i)) e^{j2\pi \frac{ij}{n_t}} + \sum_{i=1}^{\frac{n_t-1}{2}} (\Re(\tilde{\mathbf{g}}_i) - j\Im(\tilde{\mathbf{g}}_i)) e^{-j2\pi \frac{ij}{n_t}} \\ &\hspace{15em} (\tilde{\mathbf{g}}_{n_t-i} \text{ est le conjugué de } \tilde{\mathbf{g}}_i), \\ &= \tilde{\mathbf{g}}_0 + \sum_{i=1}^{\frac{n_t-1}{2}} (\Re(\tilde{\mathbf{g}}_i) + j\Im(\tilde{\mathbf{g}}_i)) (\cos(2\pi \frac{ij}{n_t}) + j \sin(2\pi \frac{ij}{n_t})) \\ &\hspace{15em} + (\Re(\tilde{\mathbf{g}}_i) - j\Im(\tilde{\mathbf{g}}_i)) (\cos(2\pi \frac{ij}{n_t}) - j \sin(2\pi \frac{ij}{n_t})), \\ &= \tilde{\mathbf{g}}_0 + \sum_{i=1}^{\frac{n_t-1}{2}} 2\Re(\tilde{\mathbf{g}}_i) \cos(2\pi \frac{ij}{n_t}) - 2\Im(\tilde{\mathbf{g}}_i) \sin(2\pi \frac{ij}{n_t}). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

A.2. TRANSFORMATION DE FOURIER DISCRÈTE

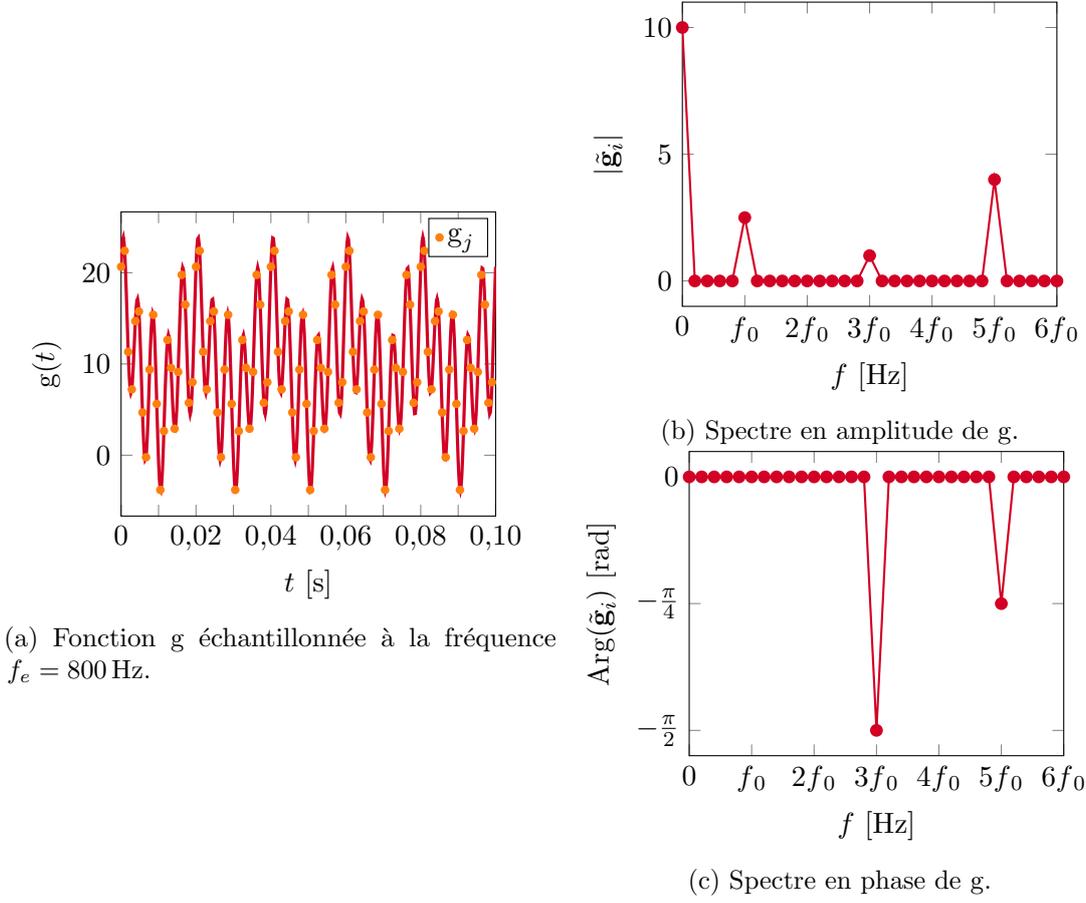


FIGURE A.1 – Représentation temporelle et fréquentielle du signal g défini par l'expression (A.17).

— Si n_t est pair :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}_j &= \sum_{i=0}^{\frac{n_t}{2}} \tilde{\mathbf{g}}_i e^{j2\pi \frac{ij}{n_t}} + \sum_{i=\frac{n_t}{2}+1}^{n_t-1} \tilde{\mathbf{g}}_i e^{j2\pi \frac{ij}{n_t}}, \\
 &= \sum_{i=0}^{\frac{n_t}{2}} \tilde{\mathbf{g}}_i e^{j2\pi \frac{ij}{n_t}} + \sum_{i=\frac{n_t}{2}-1}^1 \tilde{\mathbf{g}}_{n_t-i} e^{-j2\pi \frac{ij}{n_t}} \quad (\text{changement de variable } i' = n_t - i), \\
 &= \tilde{\mathbf{g}}_0 + \tilde{\mathbf{g}}_{\frac{n_t}{2}} e^{-j\pi j} + \sum_{i=1}^{\frac{n_t}{2}} 2\Re(\tilde{\mathbf{g}}_i) \cos(2\pi \frac{ij}{n_t}) - 2\Im(\tilde{\mathbf{g}}_i) \sin(2\pi \frac{ij}{n_t}), \\
 &= \tilde{\mathbf{g}}_0 + \tilde{\mathbf{g}}_{\frac{n_t}{2}} \cos(\pi j) + \sum_{i=1}^{\frac{n_t}{2}} 2\Re(\tilde{\mathbf{g}}_i) \cos(2\pi \frac{ij}{n_t}) - 2\Im(\tilde{\mathbf{g}}_i) \sin(2\pi \frac{ij}{n_t}) \quad (\tilde{\mathbf{g}}_{\frac{n_t}{2}} \text{ est réel pur}). \quad (\text{A.19})
 \end{aligned}$$

Ainsi la transformation de Fourier discrète inverse peut s'écrire sous la forme trigonométrique :

$$\mathbf{g}_j = \mathbf{a}_0 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_t}{2} \rfloor} \mathbf{a}_i \cos(2\pi \frac{ij}{n_t}) + \mathbf{b}_i \sin(2\pi \frac{ij}{n_t}), \quad (\text{A.20})$$

A.2. TRANSFORMATION DE FOURIER DISCRÈTE

avec :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_0 &= \tilde{\mathbf{g}}_0, \\
 \forall i \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad 0 < i < \frac{n_t}{2}, \quad \mathbf{a}_i &= 2\Re(\tilde{\mathbf{g}}_i) \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_i = -2\Im(\tilde{\mathbf{g}}_i), \\
 \text{Si } n_t \text{ est pair,} \quad \mathbf{a}_{\frac{n_t}{2}} &= \Re(\tilde{\mathbf{g}}_{\frac{n_t}{2}}) = \tilde{\mathbf{g}}_{\frac{n_t}{2}} \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_{\frac{n_t}{2}} = \Im(\tilde{\mathbf{g}}_{\frac{n_t}{2}}) = 0.
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

Réciproquement :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{g}}_0 &= \mathbf{a}_0, \\
 \forall i \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad 0 < i < \frac{n_t}{2}, \quad \tilde{\mathbf{g}}_i &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}_i - j\mathbf{b}_i) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{g}}_{n_t-i} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_i + j\mathbf{b}_i), \\
 \text{Si } n_t \text{ est pair,} \quad \tilde{\mathbf{g}}_{\frac{n_t}{2}} &= \mathbf{a}_{\frac{n_t}{2}}.
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

La DFT directe de l'équation (A.13) peut aussi se mettre sous forme trigonométrique. La transformée de Fourier discrète correspond alors à la suite des coefficients réels $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)_{i \in [0; \lfloor \frac{n_t}{2} \rfloor]}$ définis par :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_0 &= \frac{1}{n_t} \sum_{j=0}^{n_t-1} \mathbf{g}_j \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_0 = \mathbf{0}, \\
 \forall i \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad 0 < i < \frac{n_t}{2}, \quad \mathbf{a}_i &= \frac{2}{n_t} \sum_{j=0}^{n_t-1} \mathbf{g}_j \cos(2\pi \frac{ij}{n_t}) \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_i = \frac{2}{n_t} \sum_{j=0}^{n_t-1} \mathbf{g}_j \sin(2\pi \frac{ij}{n_t}), \\
 \text{Si } n_t \text{ est pair,} \quad \mathbf{a}_{\frac{n_t}{2}} &= \frac{1}{n_t} \sum_{j=0}^{n_t-1} \mathbf{g}_j \cos(\pi j) \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_{\frac{n_t}{2}} = \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

Il est aussi possible de garder uniquement la contribution des fréquences comprises entre $-n_h \frac{f_e}{n_t}$ et $n_h \frac{f_e}{n_t}$ avec $n_h < \lfloor \frac{n_t}{2} \rfloor$. Dans le cadre de la méthode d'AFT, n_h correspond à l'ordre de troncature fixé. Il est ainsi possible d'alléger les calculs en considérant de faibles valeurs de n_h , mais le spectre fréquentiel obtenu est moins riche. Un compromis est donc nécessaire afin de pouvoir représenter le signal de manière satisfaisante. Dans le cas d'une fonction à valeurs réelles, la transformation inverse s'écrit alors :

$$\mathbf{g}_j = \sum_{i=0}^{n_h} \tilde{\mathbf{g}}_i e^{j2\pi y_i \frac{ij}{n_t}} + \sum_{i=n_t-n_h}^{n_t-1} \tilde{\mathbf{g}}_i e^{j2\pi \frac{ij}{n_t}} = \sum_{i=0}^{n_h} \mathbf{a}_i \cos(2\pi \frac{ij}{n_t}) + \mathbf{b}_i \sin(2\pi \frac{ij}{n_t}). \tag{A.24}$$

A.2. TRANSFORMATION DE FOURIER DISCRÈTE

Les transformations de Fourier discrètes directe et inverse reviennent à une multiplication matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n_h} \\ \mathbf{b}_{n_h} \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_j \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{n_t} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_j \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{n_t} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{F}} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n_h} \\ \mathbf{b}_{n_h} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.25})$$

avec :

$$\mathbf{F} = \frac{2}{n_t} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \cos(2\pi \frac{1}{n_t}) & \cdots & \cos(2\pi \frac{j}{n_t}) & \cdots & \cos(2\pi \frac{(n_t-1)}{n_t}) \\ \sin(2\pi \frac{1}{n_t}) & \cdots & \sin(2\pi \frac{j}{n_t}) & \cdots & \sin(2\pi \frac{(n_t-1)}{n_t}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cos(2\pi \frac{i}{n_t}) & \cdots & \cos(2\pi \frac{ij}{n_t}) & \cdots & \cos(2\pi \frac{i(n_t-1)}{n_t}) \\ \sin(2\pi \frac{i}{n_t}) & \cdots & \sin(2\pi \frac{ij}{n_t}) & \cdots & \sin(2\pi \frac{i(n_t-1)}{n_t}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cos(2\pi \frac{n_h}{n_t}) & \cdots & \cos(2\pi \frac{n_h j}{n_t}) & \cdots & \cos(2\pi \frac{n_h(n_t-1)}{n_t}) \\ \sin(2\pi \frac{n_h}{n_t}) & \cdots & \sin(2\pi \frac{n_h j}{n_t}) & \cdots & \sin(2\pi \frac{n_h(n_t-1)}{n_t}) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n, \quad (\text{A.26})$$

et

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(2\pi \frac{1}{n_t}) & \sin(2\pi \frac{1}{n_t}) & \cdots & \cos(2\pi \frac{i}{n_t}) & \sin(2\pi \frac{i}{n_t}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 1 & \cos(2\pi \frac{j}{n_t}) & \sin(2\pi \frac{j}{n_t}) & \cdots & \cos(2\pi \frac{ij}{n_t}) & \sin(2\pi \frac{ij}{n_t}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 1 & \cos(2\pi \frac{n_t-1}{n_t}) & \sin(2\pi \frac{n_t-1}{n_t}) & \cdots & \cos(2\pi \frac{i(n_t-1)}{n_t}) & \sin(2\pi \frac{i(n_t-1)}{n_t}) & \cdots \\ & & & \cdots & \cos(2\pi \frac{n_h}{n_t}) & \sin(2\pi \frac{n_h}{n_t}) & \\ & & & & \vdots & \vdots & \\ & & & \cdots & \cos(2\pi \frac{n_h j}{n_t}) & \sin(2\pi \frac{n_h j}{n_t}) & \\ & & & & \vdots & \vdots & \\ & & & \cdots & \cos(2\pi \frac{n_h(n_t-1)}{n_t}) & \sin(2\pi \frac{n_h(n_t-1)}{n_t}) & \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n. \quad (\text{A.27})$$

\mathbf{I}_n est la matrice identité de taille n , la dimension des coefficients.

Si $n_h = \frac{n_t}{2}$, l'avant-dernière ligne de \mathbf{F} est multipliée par un facteur $\frac{1}{2}$ (et la dernière ne comporte que des termes nuls).

L'algorithme « naïf » de la transformée de Fourier discrète demande $n_t(2n_h + 1)$ opérations, mais un algorithme plus performant, appelé *Fast Fourier Transform* (FFT), a été mis au point par COOLEY et TUKEY (1965) et possède une complexité en $O(n_t \log n_t)$ ce qui rend l'outil très intéressant.

A.3 La méthode d'alternance fréquence/temps (AFT)

La méthode d'AFT, détaillé en section 2.1.2 (page 78), utilise la transformation de Fourier discrète directe et inverse pour transiter entre les domaines fréquentiel et temporel. Le vecteur $\tilde{\mathbf{q}}$, contenant les $2n_h + 1$ premiers termes trigonométriques $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$ de la décomposition en série de Fourier selon l'expression (A.6), est initialement connu. Afin d'utiliser la méthode d'AFT, ces termes doivent être identifiés aux coefficients obtenus par la transformation de Fourier discrète d'équation (A.23). Cela signifie que les fréquences $f_i = i \frac{f_e}{n_t}$ associées à la transformée de Fourier discrète doivent être égales aux fréquences $i \frac{\omega}{2\pi}$ des harmoniques de la décomposition en série de Fourier. La fréquence d'échantillonnage doit ainsi suivre la relation :

$$f_e = \frac{\omega n_t}{2\pi}. \quad (\text{A.28})$$

En pratique, le nombre n_t d'échantillons dans le domaine temporel constitue le paramètre d'ajustement la HBM. Le critère de Shannon impose :

$$f_e > 2f_{\max} = \frac{n_h \omega}{2\pi}, \quad (\text{A.29})$$

et par conséquent :

$$n_t > 2n_h. \quad (\text{A.30})$$

Ainsi, tant que le critère d'équation (A.30) est respecté, la méthode d'AFT permet la détermination dans le domaine fréquentiel des termes non linéaires provenant de la HBM.

Calcul semi-analytique des jacobiennes

Lorsque la méthode d'AFT est utilisée pour déterminer les termes non linéaires de la HBM, il est possible d'obtenir une expression semi-analytique des jacobiennes $\mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{q}}}$ et \mathbf{J}_{ω} intervenant dans l'équation (2.21) de la section 2.1.4.1 (page 80). Ces matrices doivent ainsi être calculées à chaque itération de la méthode de Newton-Raphson et interviennent aussi lors de la réalisation des prédictions tangentes. La HBM aboutit au système matriciel d'inconnues $(\tilde{\mathbf{q}}, \omega) \in \mathbb{R}^{\tilde{n}} \times \mathbb{R}$:

$$\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{q}}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega)\tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}(\tilde{\mathbf{q}}, \omega) - \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext}}, \quad (\text{B.1})$$

et le terme $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}$ est déterminé par la méthode d'AFT :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}(\tilde{\mathbf{q}}, \omega) &= \mathcal{F}(\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathcal{F}^{-1}(\tilde{\mathbf{q}}), \mathcal{F}^{-1}(\omega\nabla\tilde{\mathbf{q}}))), \\ &= \mathbf{F}\mathbf{f}_{\text{nl}}(\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{q}}, \omega\tilde{\mathbf{F}}\nabla\tilde{\mathbf{q}}). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Les notations \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ et \mathbf{f}_{nl} sont reprises de la section 2.1.2 (page 78) et correspondent aux vecteurs de taille n_t respectivement obtenus après passage dans le domaine temporel.

La jacobienne $\mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{q}}}$ de $\tilde{\mathbf{r}}$ par rapport à $\tilde{\mathbf{q}}$ s'écrit :

$$\mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\mathbf{q}}, \omega) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\mathbf{q}}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega) + \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\mathbf{q}}, \omega), \quad (\text{B.3})$$

et par théorème de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\mathbf{q}}, \omega) = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{F}} + \omega \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{F}}\nabla. \quad (\text{B.4})$$

La jacobienne \mathbf{J}_{ω} de $\tilde{\mathbf{r}}$ par rapport à ω s'écrit :

$$\mathbf{J}_{\omega}(\tilde{\mathbf{q}}, \omega) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial \omega}(\tilde{\mathbf{q}}, \omega) = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega}(\omega) + \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}}{\partial \omega}(\tilde{\mathbf{q}}, \omega), \quad (\text{B.5})$$

avec :

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega}(\omega) = 2\omega\nabla^2 \otimes \mathbf{M} + \nabla \otimes \mathbf{C}. \quad (\text{B.6})$$

Toujours par théorème de dérivation des fonctions composées, il vient :

$$\frac{\partial \tilde{f}_{\text{nl}}}{\partial \omega}(\tilde{\mathbf{q}}, \omega) = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{F}} \nabla \tilde{\mathbf{q}}. \quad (\text{B.7})$$

Ce calcul semi-analytique utilisant les termes déjà calculés par la méthode d'AFT permet un gain de temps significatif comparé à un calcul numérique, tel qu'un calcul par différences finies par exemple.

Méthode de l'équilibrage harmonique avec déplacement imposé

Lorsqu'un déplacement est imposé sur certains ddls , une modification est apportée au résidu d'équation (2.9), que la HBM cherche à annuler. Les ddls de la structure peuvent être réarrangés et séparés entre les n^{imp} ddls \mathbf{q}^{imp} sur lesquels le déplacement est imposé et les n^{lib} ddls libres \mathbf{q}^{lib} dont le déplacement est inconnu et recherché :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{\text{lib}} \\ \mathbf{q}^{\text{imp}} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

Les matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} peuvent ainsi se décomposer sous la forme :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\text{ll}} & \mathbf{K}^{\text{li}} \\ \mathbf{K}^{\text{il}} & \mathbf{K}^{\text{ii}} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Les mêmes notations sont adoptées pour \mathbf{M} et \mathbf{C} .

Les termes de la décomposition en séries de Fourier suivent aussi le réarrangement de l'équation (C.1) :

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^{\text{lib}} \\ \mathbf{a}_0^{\text{imp}} \end{bmatrix}, \quad \forall i \in \llbracket 1; n_h \rrbracket, \quad \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i^{\text{lib}} \\ \mathbf{a}_i^{\text{imp}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_i^{\text{lib}} \\ \mathbf{b}_i^{\text{imp}} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Le déplacement imposé est supposé périodique donc les termes $\mathbf{a}_i^{\text{imp}}$ et $\mathbf{b}_i^{\text{imp}}$ sont connus. L'expression

du résidu s'écrit alors :

$$\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{q}}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega) \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^{\text{lib}} \\ \mathbf{a}_0^{\text{imp}} \\ \mathbf{a}_1^{\text{lib}} \\ \mathbf{a}_1^{\text{imp}} \\ \mathbf{b}_1^{\text{lib}} \\ \mathbf{b}_1^{\text{imp}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n_h}^{\text{lib}} \\ \mathbf{a}_{n_h}^{\text{imp}} \\ \mathbf{b}_{n_h}^{\text{lib}} \\ \mathbf{b}_{n_h}^{\text{imp}} \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}(\tilde{\mathbf{q}}, \omega) - \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext}}. \quad (\text{C.4})$$

En regroupant les termes, il vient :

$$\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{q}}, \omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{\text{ll}}(\omega) & \mathbf{Z}^{\text{li}}(\omega) \\ \mathbf{Z}^{\text{il}}(\omega) & \mathbf{Z}^{\text{ii}}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^{\text{lib}} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{\text{imp}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}^{\text{lib}} \\ \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}^{\text{imp}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext}}^{\text{lib}} \\ \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext}}^{\text{imp}} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.5})$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{q}}^{\text{lib}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^{\text{lib}} \\ \mathbf{a}_1^{\text{lib}} \\ \mathbf{b}_1^{\text{lib}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n_h}^{\text{lib}} \\ \mathbf{b}_{n_h}^{\text{lib}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{q}}^{\text{imp}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^{\text{imp}} \\ \mathbf{a}_1^{\text{imp}} \\ \mathbf{b}_1^{\text{imp}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n_h}^{\text{imp}} \\ \mathbf{b}_{n_h}^{\text{imp}} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

Le terme $\tilde{\mathbf{q}}^{\text{lib}}$ étant l'inconnue à déterminer, seule la première ligne de l'équation (C.5) est conservée. Le problème de la HBM avec déplacement imposé revient alors à chercher le couple $(\tilde{\mathbf{q}}^{\text{lib}}, \omega)$ dans $\mathbb{R}^{n^{\text{lib}}} \times \mathbb{R}$ qui annule le résidu :

$$\tilde{\mathbf{r}}^{\text{lib}}(\tilde{\mathbf{q}}^{\text{lib}}, \omega) \mathbf{Z}^{\text{ll}}(\omega) \tilde{\mathbf{q}}^{\text{lib}} + \mathbf{Z}^{\text{li}}(\omega) \tilde{\mathbf{q}}^{\text{imp}} + \tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}^{\text{lib}} - \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext}}^{\text{lib}}, \quad (\text{C.7})$$

avec :

$$\mathbf{Z}^{\text{ll}}(\omega) = \omega^2 \nabla^2 \otimes \mathbf{M}^{\text{ll}} + \omega \nabla \otimes \mathbf{C}^{\text{ll}} + \mathbf{I}_{\tilde{n}} \otimes \mathbf{K}^{\text{ll}}, \quad (\text{C.8})$$

et :

$$\mathbf{Z}^{\text{li}}(\omega) = \omega^2 \nabla^2 \otimes \mathbf{M}^{\text{li}} + \omega \nabla \otimes \mathbf{C}^{\text{li}} + \mathbf{I}_{\tilde{n}} \otimes \mathbf{K}^{\text{li}}, \quad (\text{C.9})$$

La seconde ligne de l'équation (C.5) peut alors éventuellement être utilisée pour déterminer les forces de réaction $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext}}^{\text{imp}}$, mais celles-ci ne sont pas recherchées dans ces travaux.

Calcul de la valeur RMS

Il est possible de déterminer analytiquement la valeur quadratique moyenne (RMS) d'un signal décomposé en série de Fourier. Les développements décrits dans cette annexe considèrent un signal q à valeurs dans \mathbb{R} , mais les éléments présentés peuvent s'adapter à un signal à valeurs dans \mathbb{R}^n en réalisant les opérations sur chaque terme. Ainsi, la fonction $q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, T -périodique de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$, s'écrit sous la forme d'une série de Fourier tronquée à l'ordre n_h :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad q(t) &= a_0 + \sum_{i=1}^{n_h} a_i \cos(i\omega t) + b_i \sin(i\omega t), \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^{n_h} c_i \cos(i\omega t + \psi_i), \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

avec $c_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ et $\psi_i = \arctan(-\frac{b_i}{a_i})$.

La valeur RMS q_{RMS} a pour définition :

$$q_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T q^2(t) dt}. \quad (\text{D.2})$$

Le développement de l'intégrale donne :

$$\begin{aligned} \int_0^T q^2(t) dt &= \int_0^T a_0^2 dt + \int_0^T 2a_0 \sum_{i=1}^{n_h} c_i \cos(i\omega t + \psi_i) dt + \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{n_h} c_i \cos(i\omega t + \psi_i) \right)^2 dt, \\ &= Ta_0^2 + 2a_0 \sum_{i=1}^{n_h} c_i \underbrace{\int_0^T \cos(i\omega t + \psi_i) dt}_{=0} \\ &\quad + \int_0^T \sum_{i=1}^{n_h} (c_i \cos(i\omega t + \psi_i))^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n_h} c_i \cos(i\omega t + \psi_i) c_j \cos(j\omega t + \psi_j) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= T a_0^2 + \sum_{i=1}^{n_h} c_i^2 \underbrace{\int_0^T \cos^2(i\omega t + \psi_i) dt}_{=\frac{T}{2}} \\
 &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq n_h} c_i c_j \underbrace{\int_0^T \frac{1}{2} (\cos((i+j)\omega t + \psi_i + \psi_j) + \cos((i-j)\omega t + \psi_i - \psi_j)) dt}_{=0}, \\
 &= T a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{i=1}^{n_h} c_i^2. \tag{D.3}
 \end{aligned}$$

Ainsi l'expression analytique de la valeur RMS est :

$$q_{\text{RMS}} = \sqrt{a_0^2 + \sum_{i=1}^{n_h} \frac{c_i^2}{2}} = \sqrt{a_0^2 + \sum_{i=1}^{n_h} \frac{1}{2} (a_i^2 + b_i^2)}. \tag{D.4}$$

Il est possible d'en déduire les valeurs RMS des dérivées successives de q :

$$\dot{q}_{\text{RMS}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_h} \frac{(i\omega)^2}{2} (a_i^2 + b_i^2)}, \tag{D.5}$$

et

$$\ddot{q}_{\text{RMS}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_h} \frac{(i\omega)^4}{2} (a_i^2 + b_i^2)}. \tag{D.6}$$

Liste des acronymes

AFT Alternance fréquence/temps ou *Alternating Frequency/Time*.

ANRT Association Nationale de la Recherche et de la Technologie.

BO Optimisation bayésienne ou *Bayesian Optimization*.

CEI Amélioration espérée contrainte ou *Constrained Expected Improvement*.

CI Conditions initiales.

CPU Processeur ou *Central Processing Unit*.

ddl Degré de liberté.

DFT Transformation de Fourier discrète directe ou *direct Discrete Fourier Transform*.

DFT⁻¹ Transformation de Fourier discrète inverse ou *Inverse Discrete Fourier Transform*.

EF Éléments finis.

EGO *Efficient Global Optimization*.

EI Amélioration espérée ou *Expected Improvement*.

FFT *Fast Fourier Transform*.

FRF Fonction de Réponse en Fréquence.

GP Processus gaussien ou *Gaussian Process*.

HBM Méthode de l'équilibrage harmonique ou *Harmonic Balance Method*.

KKT Conditions de Karush-Kuhn-Tucker.

LHS Échantillonnage par hypercube latin ou *Latin Hypercube Sampling*.

LMSSC Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés.

MAN Méthode Asymptotique Numérique.

NES Absorbeur dynamique non linéaire ou *Nonlinear Energy Sink*.

PGD *Proper Generalized Decomposition*.

POD *Proper Orthogonal Decomposition*.

RBF Fonction de base radial.

RMS Moyenne quadratique ou *Root Mean Square*.

SVM Machine à vecteurs de support ou *Support Vector Machine*.

Liste des symboles

$\mathbb{0}_k$ Matrice carrée nulle de taille k .

$\mathbb{0}_{k,l}$ Matrice nulle de taille $k \times l$.

$\tilde{\mathbf{0}}$ Vecteur nul de taille \tilde{n} .

\mathbf{A} Matrice générale d'un système algébrique non linéaire.

A_{Base} Amplitude de l'accélération à la base du portique.

\mathcal{B}_G Base de fonctions d'approximation de la méthode de Galerkin : $\mathcal{B}_G = (v_i)_{i \in \llbracket 0; N \rrbracket}$.

\mathcal{B}_k Vecteurs formant la base canonique de \mathbb{R}^k : $\mathcal{B}_k = (\mathbf{e}_i)_{i \in \llbracket 0; k \rrbracket}$.

\mathbf{B}_m Matrice symétrique pour l'approximation quadratique.

B Fonction barrière.

$\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ Tenseur d'élasticité (tenseur d'ordre 4).

\mathbf{C} Matrice d'amortissement.

\mathbf{C}_r Matrice d'amortissement réduite.

C^1 Classe des fonctions dont les dérivées partielles sont continues.

C^2 Classe des fonctions dont les dérivées partielles d'ordre 2 sont continues.

C^∞ Classe des fonctions indéfiniment dérivables.

\mathcal{D} Espace de conception.

\mathcal{E} Ensemble des indices des fonctions contraintes d'égalité.

\mathbf{F} Matrice des fonctions de régression évaluées aux points échantillonnés.

\mathbf{F} Matrice de la DFT.

\mathcal{F} Transformation de Fourier discrète directe.

$\tilde{\mathbf{F}}$ Matrice de la DFT⁻¹.

\mathcal{F}^{-1} Transformation de Fourier discrète inverse.

$\widetilde{\mathbf{H}}$ Matrice de Hill tronquée à l'ordre n_h .

\widehat{H}_i Estimateur associé à la fonction contrainte h .

\mathbf{H}_m Approximation de l'inverse de la matrice hessienne à l'itération m .

I Processus aléatoire de l'amélioration statistique : $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}, I(\mathbf{x}|y_{\min}^m) = \max(y_{\min}^m - \widehat{Y}(\mathbf{x}); 0)$.

- \mathcal{I} Ensemble des indices des fonctions contraintes d'inégalité.
- \mathbf{I}_k Matrice identité de taille k .
- \Im Partie imaginaire.
- \mathbf{J}_h Jacobienne de la fonction de tir h .
- $\mathbf{J}_{\tilde{q}}$ Jacobienne du résidu par rapport à \tilde{q} .
- \mathbf{J}_r Jacobienne du résidu r .
- \mathbf{J}_r^+ Pseudo-inverse de \mathbf{J}_r .
- \mathbf{J}_z Jacobienne du résidu par rapport à z .
- \mathbf{J}_λ Jacobienne du résidu par rapport à λ .
- \mathbf{J}_ω Jacobienne du résidu par rapport à ω .
- \mathbf{K} Matrice de raideur.
- \mathcal{K} Matrice de corrélation.
- \mathbf{K}_r Matrice de raideur réduite.
- \mathcal{L} Lagrangien.
- \mathbf{L} Matrice d'état.
- L Vraisemblance marginale.
- $L_p(E)$ Ensemble des formes p -linéaires sur E .
- \mathbf{M} Matrice de masse.
- \mathcal{M} Matrice de monodromie.
- \mathbf{M}_r Matrice de masse réduite.
- N Nombres de fonctions de base.
- \mathcal{N} Loi de probabilité normale.
- \mathbf{P} Matrice de passage.
- P Probabilité.
- \Re Partie réelle.
- \mathcal{S} Ensemble des contraintes dans un solide déformable.
- T Période (en s).
- T Fonction tunnel.
- \mathcal{T} Paramètre de température.
- T_e Période d'échantillonnage (en s).
- T_f Temps total de calcul d'une solution temporelle.
- \mathcal{U} Ensemble des déplacements dans un solide déformable.
- U Variable aléatoire de distribution uniforme sur $[0, 1]$.
- \mathcal{U}^0 Ensemble des déplacements admissibles à zéro.
- \mathcal{U}^h Ensemble de dimension fini des déplacements approchés par la méthode des éléments finis.
- \mathcal{U}^{u^d} Ensemble des déplacements admissibles.
- \mathcal{V} Ensemble des voisinages.

- V Voisinage.
 \mathcal{X} Espace admissible.
 Y Processus gaussien.
 \hat{Y} Estimateur du processus gaussien Y .
 \mathbf{Z} Matrice du système d'équation de la HBM.
 Z Processus aléatoire.
- \mathbb{C} Ensemble des nombres complexes.
 \mathbb{E} Espérance.
 \mathbb{N} Ensemble des nombres entiers naturels.
 \mathbb{R} Ensemble des nombres réels.
 \mathbb{R}_+ Ensemble des nombres réels positifs.
 \mathbb{Z} Ensemble des nombres entiers relatifs.
- Δs Pas de continuation.
 Θ Matrice des paramètres de longueurs de corrélation de la fonction kernel Matérn 5/2.
 Φ Matrice de la base modale.
 Φ Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right).$$
 Ψ Matrice des modes statiques de liaison.
 Ω Pulsation propre.
 Ω^h Maillage approchant Ω^s .
 Ω^s Corps solide déformable continu.
- a Paramètre de chemin de la MAN.
 \mathbf{a}_i Vecteur des coefficients de Fourier réels de \mathbf{q} associé au terme en cosinus.
 $\mathbf{a}_i^{\text{ext}}$ Vecteur des coefficients de Fourier réels de \mathbf{f}_{ext} associé au terme en cosinus.
 $\mathbf{a}_i^{\text{imp}}$ Vecteur des coefficients de Fourier réels de \mathbf{q}^{imp} associé au terme en cosinus.
 $\mathbf{a}_i^{\text{lib}}$ Vecteur des coefficients de Fourier réels de \mathbf{q}^{lib} associé au terme en cosinus.
 \mathbf{a}_i^{nl} Vecteur des coefficients de Fourier réels de \mathbf{f}_{nl} associé au terme en cosinus.
 a_{s_k} Coefficient d'adaptation du pas de prédiction Δs .
 \mathbf{b}_i Vecteur des coefficients de Fourier réels de \mathbf{q} associé au terme en sinus.
 $\mathbf{b}_i^{\text{ext}}$ Vecteur des coefficients de Fourier réels de \mathbf{f}_{ext} associé au terme en sinus.
 $\mathbf{b}_i^{\text{imp}}$ Vecteur des coefficients de Fourier réels de \mathbf{q}^{imp} associé au terme en sinus.
 $\mathbf{b}_i^{\text{lib}}$ Vecteur des coefficients de Fourier réels de \mathbf{q}^{lib} associé au terme en sinus.
 \mathbf{b}_i^{nl} Vecteur des coefficients de Fourier réels de \mathbf{f}_{nl} associé au terme en sinus.
 c_1 Coefficient d'amortissement (en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$).
 c_{EGO} Critère d'arrêt des itérations de l'optimisation bayésienne dans la méthode EGO.

c_i Vecteur des coefficients de Fourier complexes.

\mathbf{c}_i Vecteur défini par $\mathbf{c}_i = \sqrt{\mathbf{a}_i^2 + \mathbf{b}_i^2}$.

d Paramètre de distance de la fonction kernel Matérn 5/2.

d_E Distance sur l'espace métrique E . L'application $d_E : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie les propriétés de :

- Symétrie : $\forall (x_1, x_2) \in E^2, d_E(x_1, x_2) = d_E(x_2, x_1)$;
- Séparation : $\forall (x_1, x_2) \in E^2, d_E(x_1, x_2) = 0 \iff x_1 = x_2$;
- Inégalité triangulaire : $\forall (x_1, x_2, x_3) \in E^3, d_E(x_1, x_2) \leq d_E(x_1, x_3) + d_E(x_3, x_2)$.

Un espace métrique est un ensemble auquel est associé une telle distance.

d_m Pas de descente.

$\partial_{\mathbf{f}}\Omega^s$ Surface subissant une force surfacique \mathbf{f}^d .

$\partial_{\mathbf{u}}\Omega^s$ Surface sur laquelle un déplacement \mathbf{u}^d est imposé.

$\partial\Omega^s$ Surface extérieure d'un corps solide déformable Ω^s .

e Nombre d'Euler. $e \simeq 2,718281828459045$.

erf Fonction d'erreur de \mathbb{R} dans $[-1; 1]$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

\mathbf{f} Force volumique en mécanique des milieux continus.

\mathbf{f}^d Force surfacique en mécanique des milieux continus.

f Fréquence (en Hz).

f_0 Amplitude de l'excitation.

f_0 Amplitude complexe de l'excitation.

$\mathbf{f}^{(0)}$ Vecteur des p termes $f_k(\mathbf{x}^{(0)})$ de la base de régression exprimés au point $\mathbf{x}^{(0)}$.

f_c^+ Force de contact s'exerçant sur le dispositif anti-envol.

f_e Fréquence d'échantillonnage (en Hz).

\mathbf{f}_{ext} Force excitatrice extérieure.

$\tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext}}$ Vecteur regroupant les coefficients de Fourier de \mathbf{f}_{ext} .

$\mathbf{f}_{\text{ext}}^*$ Force excitatrice extérieure dans l'espace d'état.

$\mathbf{f}_{\text{ext},r}$ Vecteur réduit de la force excitatrice extérieure.

f_k Fonctions de base (de \mathcal{D} dans \mathbb{R}^{n_p}) de la fonction moyenne μ .

f^{MAN} Second membre dans les équations de la MAN.

\mathbf{f}_{nl} Termes non linéaires.

$\tilde{\mathbf{f}}_{\text{nl}}$ Vecteur regroupant les coefficients de Fourier de \mathbf{f}_{nl} .

\mathbf{f}_{nl} Efforts non linéaires discrétisés en n_t instants.

$\widehat{\mathbf{f}}_{\text{nl}}$ Approximation de \mathbf{f}_{nl} dans les méthodes de perturbations.

\mathbf{f}_{nl}^* Termes non linéaires dans l'espace d'état.

$f_{\text{nl}}^{\text{dab}}$ Force de contact.

$\mathbf{f}_{\text{nl},r}$ Vecteur réduit des termes non linéaires.

\mathbf{g} Fonction T -périodique quelconque de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n .

\mathbf{g} Fonction d'état.

- $\tilde{\mathbf{g}}$ Transformée de Fourier de la fonction \mathbf{g} .
- g Jeu initial entre le ddl en contact et le dispositif anti-envol.
- \mathbf{h} Fonction de tir.
- h Pas de temps.
- \mathbf{h}_i Fonctions contraintes.
- $\mathbf{h}_{\mathcal{E}}$ Vecteur des fonctions contraintes d'égalité.
- $\mathbf{h}_{\mathcal{I}}$ Vecteur des fonctions contraintes d'inégalité.
- j Unité imaginaire ($j^2 = -1$).
- k_1 Raideur (en $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$).
- k_A Raideur de contact avec le sol/le rail.
- k_B Raideur de contact avec le dispositif anti-envol.
- k_{nl} Raideur non linéaire.
- ℓ_k Polynômes d'interpolation de Lagrange.
- m_1 Masse (en kg).
- \mathbf{n} Vecteur normal.
- n Nombre de ddls.
- \tilde{n} Taille du vecteur des coefficients de Fourier : $\tilde{n} = n(2n_h + 1)$.
- $n_{\mathcal{E}}$ Nombre de contraintes d'égalité.
- $n_{\mathcal{I}}$ Nombre de contraintes d'inégalité.
- n_a Nombres de sous-structures dans un assemblage.
- n^{cib} Nombre d'itérations ciblées d'un algorithme de résolution itérative.
- n_e Nombre d'échantillons.
- n_{eq} Taille de la solution \mathbf{z} d'un système d'équations algébriques général.
- n_f Nombres de ddls d'interface.
- n_h Ordre de troncature de la décomposition en séries de Fourier.
- n^{imp} Nombre de ddls dont le déplacement est imposé.
- n^{it} Nombre d'itérations jusqu'à convergence d'un algorithme de résolution itérative.
- n_l Nombre de ddls linéaires.
- n^{lib} Nombre de ddls libres.
- n_m Nombre de minima locaux atteints au sein d'un processus itératif.
- n_{nl} Nombre de ddls non linéaires.
- n_p Nombre de paramètres de conception.
- n_s Nombres de ddls interne d'une sous-structure.
- n_t Taille de la discrétisation en temps.
- n_y Nombre d'évaluations de la fonction objectif y .
- p Fonction de pénalisation.
- ρ Paramétrisation.

- \mathbf{q} Fonction position des ddls.
- $\dot{\mathbf{q}}$ Fonction vitesse des ddls.
- $\ddot{\mathbf{q}}$ Fonction accélération des ddls.
- q Position complexe.
- \mathbf{q} Position discrétisée en n_t instants.
- \mathbf{q}^* Vecteur d'état : $\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$.
- $\tilde{\mathbf{q}}$ Vecteur regroupant les coefficients de Fourier de \mathbf{q} .
- q_0 Amplitude complexe du déplacement.
- \mathbf{q}_0^* Conditions initiales du vecteur d'état \mathbf{q}^* .
- q_c Position des degrés de liberté condensés.
- q^{dab} Position d'un ddl subissant du contact.
- q^f Position des degrés de liberté d'interface.
- q^{imp} Position des degrés de liberté dont le déplacement est imposé.
- q^l Degrés de liberté linéaires.
- q^{lib} Position des degrés de liberté « libres ».
- q_m Projection modale de \mathbf{q} .
- q_{M_x} Déplacement de la charge utile selon l'axe X .
- q^{nl} Degrés de liberté non linéaires.
- $q_{q_0}^*$ Solution de l'équation d'état pour les conditions initiales q_0^* .
- q_r Position projetée sur un espace réduit.
- \ddot{q}_{RMS} Accélération quadratique moyenne..
- q^s Position des degrés de liberté internes d'une sous-structure.
- r Résidu.
- \tilde{r} Résidu dans le domaine fréquentiel.
- s Abscisse curviligne.
- s_y Écart type associé à la prédiction moyenne \hat{y} .
- t Variable de temps (en s).
- \mathbf{t} Vecteur tangent.
- t_f Temps final définissant l'intervalle temporel de l'étude dynamique.
- \mathbf{u} Déplacement.
- \mathbf{u}_0 Déplacement initial.
- $\dot{\mathbf{u}}_0$ Vitesse initiale.
- u_{Base} Déplacement (imposé) à la base du portique.
- \mathbf{u}^d Déplacement imposé.
- \mathbf{u}^h Déplacement approché par la méthode des éléments finis.
- \mathbf{u}_m Direction de descente.

\mathbf{v} Vitesse.

v_s Vitesse de balayage d'un sinus balayé.

\mathbf{w} Déplacement virtuel.

\mathbf{x} Jeu de paramètres.

y Fonction objectif.

y Fonction de \mathcal{D} dans \mathbb{R} .

\mathbf{y} Réponses associées aux échantillons $\mathbf{x}^{(i)}$, $i \in \llbracket 1; n_e \rrbracket$: $\mathbf{y} = \left[y(\mathbf{x}^{(1)}) \ \cdots \ y(\mathbf{x}^{(n_e)}) \right]^\top$.

y_{\min}^m Minimum observé de y respectant les éventuelles contraintes $h_{\mathcal{I}}$ parmi un échantillon de $n_e + m$ points : $y_{\min}^m = \min_{i \in \llbracket 1; n_e + m \rrbracket} y(\mathbf{x}^{(i)}) | h_{\mathcal{I}}(\mathbf{x}^{(i)}) \leq \mathbf{0}$.

\mathbf{z} Solution de taille n_{eq} d'un système général d'équations algébriques : $\mathbf{z} = \left[z_1 \ \cdots \ z_{n_{\text{eq}}} \right]^\top$.

z Fonction de \mathcal{D} dans \mathbb{R} telle que $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$, $z(\mathbf{x}) = \frac{y_{\min}^m - \hat{y}(\mathbf{x})}{s_y(\mathbf{x})}$.

α_{CEI} Fonction d'acquisition de l'amélioration espérée contrainte.

α_{EI} Fonction d'acquisition de l'amélioration espérée.

$\boldsymbol{\alpha}$ Coefficients de la méthode de Galerkin : $\boldsymbol{\alpha} = \left[\boldsymbol{\alpha}_0^\top \ \cdots \ \boldsymbol{\alpha}_N^\top \right]^\top$.

β Paramètre du schéma de Newmark.

$\boldsymbol{\beta}$ Vecteur des coefficients de régression de la fonction moyenne μ .

β_k Coefficients de régression de la fonction moyenne μ .

γ Paramètre du schéma de Newmark.

$\boldsymbol{\gamma}_m$ Vecteur pour les méthodes quasi-newton : $\boldsymbol{\gamma}_m = \nabla y(\mathbf{x}^{(m+1)}) - \nabla y(\mathbf{x}^{(m)})$.

δ Fonction de Dirac.

δ_{EGO} Petit réel positif, paramétrant le critère d'arrêt c_{EGO} dans la méthode EGO.

$\boldsymbol{\delta}_m$ Vecteur pour les méthodes quasi-newton : $\boldsymbol{\delta}_m = \mathbf{x}^{(m+1)} - \mathbf{x}^{(m)}$.

$\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$ Tenseur des déformations (tenseur d'ordre 2).

ε Petit paramètre réel positif.

ϵ Paramètre de perturbation.

ϵ_1 Premier paramètre de régularisation de la loi de contact.

ϵ_2 Second paramètre de régularisation de la loi de contact.

$\boldsymbol{\zeta}$ Base de fonctions test de la méthode de Galerkin : $\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\zeta}_i)_{i \in \llbracket 0; N \rrbracket}$.

$\zeta_{\rho_{k+1}}$ Coefficient pondérateur de la paramétrisation.

$\boldsymbol{\eta}$ Vecteur constitué des inconnues d'un système algébrique.

$\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ Vecteur regroupant la solution dans le domaine fréquentiel et un paramètre de continuation :

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \left[\tilde{\mathbf{q}}^\top \ \lambda \right]^\top.$$

κ Fonction de covariance (ou fonction *kernel*) de \mathcal{D}^2 dans $\mathbb{R}_+^{n_p}$.

$\boldsymbol{\kappa}^{(0)}$ Vecteur des covariances croisées entre le point $\mathbf{x}^{(0)}$ et les échantillons $\mathbf{x}^{(i)}$, $i \in \llbracket 1; n_e \rrbracket$.

$\boldsymbol{\lambda}$ Multiplicateurs de Lagrange.

- λ Paramètre variable d'une branche de solution.
- μ_B Paramètre de la fonction barrière.
- μ Fonction moyenne de \mathcal{D} dans \mathbb{R}^{n_p} .
- ν Ordre des sousharmoniques prises en compte.
- ξ Taux d'amortissement modal.
- π Rapport constant de la circonférence d'un cercle à son diamètre. $\pi \simeq 3,141592653589793$.
- ρ Masse volumique.
- ϱ_i Mutiplicateurs de Floquet.
- $\underline{\underline{\sigma}}$ Tenseur des contraintes (tenseur d'ordre 2).
- σ Permutation de $\llbracket 1; n_e \rrbracket$.
- ς Signe du vecteur tangent.
- σ_X Écart type d'une variable aléatoire X .
- $\sigma_{p_{k+1}}$ Coefficient pondérateur de la paramétrisation.
- ϕ Forme propre.
- ϕ Fonction densité de probabilité de la loi normale centrée réduite de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,
- $$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$
- ψ Déphasage.
- ψ_0 Déphasage de l'excitation.
- ω Pulsation (en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$).
- ∇ Opérateur différentiel.
- \square^T Transposée.

Résumé : L'analyse du comportement vibratoire est essentielle pour la conception optimale de certaines structures assemblées complexes. L'intégration de phénomènes non linéaires, en particulier aux interfaces entre les sous-structures, permet la réalisation de simulations numériques haute fidélité. Cependant, le coût de calcul rend inenvisageable l'utilisation de méthodes classiques d'optimisation paramétrique globale sur des structures non linéaires industrielles. L'objectif de ces travaux est d'étudier une stratégie complète permettant la conduite d'une optimisation paramétrique sous contraintes, en dynamique vibratoire, sur des structures industrielles présentant des non-linéarités localisées. La stratégie proposée repose principalement sur deux outils. D'abord, un solveur mécanique dédié basé sur la méthode de l'équilibrage harmonique et un processus de continuation par pseudo-longueur d'arc permet la réalisation des simulations en dynamique vibratoire. Ensuite, ce solveur mécanique est utilisé pour la construction et l'enrichissement d'un métamodèle de type processus gaussien au sein d'une démarche d'optimisation bayésienne afin de limiter le nombre d'appels au solveur. La stratégie est appliquée pour l'optimisation sans contraintes d'un oscillateur de Duffing puis pour l'optimisation sous contrainte d'un portique de levage présentant des non-linéarités de contact. Les résultats obtenus montrent les possibilités d'utilisation de la stratégie dans un contexte industriel.

Mots clés : Dynamique non linéaire, Optimisation bayésienne, Méthode de l'équilibrage harmonique, Processus gaussien, Sous-structuration, Contact

Abstract : Vibration analysis can be critical for the optimal design of complex assembled structures. Integrating nonlinear phenomenon, especially at the interfaces between substructures, allows for high-fidelity numerical simulations. However, the computational cost makes it impractical to use classical global parametric optimization methods for industrial nonlinear structures. The work aims to study a comprehensive strategy for constrained parametric optimization applied to industrial vibrating structures exhibiting local nonlinearities. The proposed strategy mainly relies on two tools. First, a dedicated mechanical solver based on the Harmonic Balance Method and a pseudo-arclength continuation procedure is used for the dynamic simulations. Then, this mechanical solver is employed for the construction and enrichment of a Gaussian Process surrogate model within a Bayesian Optimization framework in order to limit the number of solver calls. The strategy is applied to unconstrained optimization of a Duffing oscillator and the constrained optimization of a gantry crane with contact nonlinearities. The results obtained suggest the feasibility of deploying the strategy in an industrial setting.

Keywords : Nonlinear dynamics, Bayesian Optimization, Harmonic Balance Method, Gaussian Process, Substructuring, Contact