



HAL
open science

Simulation numérique d'écoulements à surface libre avec la Méthode des Eléments-Finis

Leïla Salomon

► **To cite this version:**

Leïla Salomon. Simulation numérique d'écoulements à surface libre avec la Méthode des Eléments-Finis. Milieux fluides et réactifs. ENSTA Bretagne - École nationale supérieure de techniques avancées Bretagne, 2023. Français. NNT : 2023ENTA0013 . tel-04746806

HAL Id: tel-04746806

<https://theses.hal.science/tel-04746806v1>

Submitted on 21 Oct 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE TECHNIQUES AVANCÉES BRETAGNE

ÉCOLE DOCTORALE N° 648
Sciences pour l'Ingénieur et le Numérique
Spécialité : *Mécanique des milieux fluides*

Par

Leïla SALOMON

Simulation numérique d'écoulements à surface libre avec la Méthode des Éléments-Finis.

Thèse présentée et soutenue à Brest, le 20 septembre 2023
Unité de recherche : IRDL

Rapporteurs avant soutenance :

Lisl WEYNANS Maître de Conférences, HDR, Inria Bordeaux Sud-Ouest, IHU Liryc.
Jeroen WACKERS Ingénieur de Recherche, HDR, Ecole Centrale de Nantes.

Composition du Jury :

Président :	Jean-Yves BILLARD	Professeur des Universités, Ecole Navale.
Examinatrice :	Marissa YATES	Chargée de recherche, École des Ponts ParisTech.
Dir. de thèse :	Yves-Marie SCOLAN	Professeur de l'ENSTA Bretagne.
Encadrant de thèse :	Pierre-Michel GUILCHER	Maître de Conférences de l'ENSTA Bretagne.

Invité :

Joseph CHERRORET Responsable technique, DGA Techniques hydrodynamiques.

REMERCIEMENTS

Dans un premier temps, je tiens à remercier les membres du jury qui ont accepté d'évaluer mes travaux et pour l'échange très constructif le jour de la soutenance. Merci à M. Jeroen Wackers et Mme Lisl Weynans d'avoir accepté d'être rapporteur·rice de ce travail de thèse et pour le temps consacré à la relecture du manuscrit. Merci à M. Jean-Yves Billard d'avoir présidé ce jury ainsi qu'à Mme Marissa Yates d'avoir accepté d'être examinatrice. Je tiens particulièrement à remercier les femmes du jury, dont la contribution a été essentielle dans ma quête de parité. Promouvoir l'inclusivité dans ce domaine scientifique constitue une valeur essentielle à mes yeux. Enfin, merci à M. Joseph Cherroret d'avoir accepté de participer à la soutenance, en tant que tuteur DGA.

Au sein du cercle de l'ENSTA-Bretagne, je commencerai par remercier Yves-Marie pour m'avoir permis de réaliser cette thèse.

Je tiens ensuite à remercier évidemment Pierre-Michel pour m'avoir encadré tout au long de ce travail de recherche. Merci de m'avoir transmis ton intérêt pour le monde du numérique. Ton aide, tes conseils, ont constamment été précieux, et tu as su me guider avec une pédagogie exemplaire. La confiance est essentielle pour l'apprentissage, et je tiens à souligner que cela a toujours été le cas avec toi. Je suis consciente de la chance de t'avoir eu comme encadrant, non seulement au cours de ces dernières années, mais également avant cette thèse. Je pense sincèrement que je ne pourrai jamais assez te remercier pour tout.

Je remercie également l'ensemble de mes collègues de l'ENSTA pour avoir rendu mes journées au bureau meilleures, et pour leur soutien dans les moments plus difficiles.

M'éloignant de la sphère de la mécanique des fluides, je tiens bien entendu à remercier l'ensemble de mes proches :

Un grand merci à mes ami·e·s de Brest, même si certain·e·s au moment où j'écris ces

mots, sont actuellement éloigné·e·s de l’horizon brestois. Bien qu’il ait été compliqué de résumer ma thèse après plusieurs tentatives de vulgarisation, vous avez toujours été là pour m’apporter une belle énergie ! Un spécial remerciement à mes copines pleurire, pour avoir été là durant cette dernière année particulière.

Un immense merci à mes amies de longue date, Elise Maëlle et Marine pour avoir toujours été mon trio de soutien !

Merci à mes copains et copines de l’IUEM, qui sont passé·e·s par là avant moi et qui ont su me rassurer dans les moments difficiles. Une belle équipe de Master qui s’est solidifiée avec le temps. Will, Tred, Gwendoul, Ivane, merci !

Je voudrais bien sûr remercier particulièrement ma famille qui a toujours été là pour moi, et pour tout l’amour partagé. Un immense merci à mes parents pour avoir cru en moi et pour m’avoir fait comprendre que je ne les décevrais jamais. Merci à mon grand frère Simon, à Lucie et Inès, notre petit soleil ! Merci à ma grande sœur Barbara, passée par là aussi, qui a toujours su trouver les mots justes pour me redonner confiance et m’encourager ! Merci pour ton aide et tes conseils si précieux. Je tiens aussi à remercier toutes les autres personnes qui viennent compléter cette merveilleuse famille, nous sommes chanceux·euses d’être aussi uni·e·s !

Enfin, je finirai par remercier mon amour, Martin, pour tout l’espoir, la joie, l’amour qu’il me transmet. Ton constant soutien a été la clé de ma réussite. Merci d’être présent, tous les jours, à mes côtés.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	9
Contexte	9
Objectif principal	10
Méthodologie	10
Plan du manuscrit	14
Valorisation des travaux	16
1 Méthodes numériques pour la modélisation des fluides	17
1.1 Modèles mathématiques	17
1.1.1 Equations de Navier-Stokes	17
1.1.2 Equations d'Euler	18
1.1.3 Formulation potentielle	19
1.1.4 Choix des méthodes retenues	19
1.2 Modèles numériques	20
1.2.1 Méthode des Différences-Finies (MDF)	20
1.2.2 Méthode des Volumes-Finis (MVF)	23
1.2.3 Méthode des Eléments-Finis (MEF)	26
1.2.4 Choix de la méthode retenue	28
1.3 Conclusion	29
2 Méthode des Eléments-Finis pour la résolution des EDP	31
2.1 Résolution d'un problème de Poisson en une dimension d'espace	31
2.1.1 Formulation faible discrétisée	32
2.1.2 Système de résolution pour un élément	34
2.1.3 Système de résolution global	36
2.1.4 Conditions aux limites	37
2.1.5 Résolution du système final	38
2.2 Librairie scientifique pour la Méthode des Eléments-Finis	40
2.2.1 Choix de la librairie scientifique Eléments-Finis	41

2.2.2	Aide apportée par la librairie MFEM	42
2.3	Conclusion	44
3	Méthodes numériques pour le suivi de surface libre	45
3.1	Les méthodes « front tracking »	45
3.1.1	Les méthodes PIC et MAC	46
3.1.2	Méthode des marqueurs	47
3.2	Les méthodes « front capturing »	48
3.2.1	La méthode Volume-Of-Fluid	48
3.2.2	La méthode Level-Set	51
3.3	Méthode sans maillage : Smoothed Particle Hydrodynamics	51
3.4	Méthode numérique choisie	52
3.5	Présentation de la méthode Level-Set	54
3.5.1	Principe	54
3.5.2	Fonction distance signée	55
3.5.3	Equation de transport	56
3.5.4	Propriétés de la fonction Level-Set	56
3.5.5	Redistanciation	58
3.6	Méthodes de redistanciation	60
3.6.1	Equation de redistanciation	61
3.6.2	La méthode Fast-Marching	63
3.6.3	Réévaluation des courbes de niveau	66
3.6.4	Méthode de redistanciation choisie	67
3.7	Redistanciation dans le contexte de l'étude	68
3.7.1	Méthode basée sur l'algorithme de Marching-Squares	69
3.7.2	Méthode basée sur l'algorithme de dichotomie	71
3.8	Conclusion	72
4	Modélisation de la surface libre	75
4.1	Modèles numériques pour l'équation de transport Level-Set	75
4.1.1	Les méthodes ENO/WENO	76
4.1.2	Les méthodes Galerkin Discontinu	78
4.2	Résolution d'une équation de transport 1D	78
4.2.1	Formalisme Galerkin pour l'équation de transport	79
4.2.2	Formalisme Galerkin Discontinu pour l'équation de transport	81

4.2.3	Résultats numériques	84
4.3	Discrétisation Galerkin Discontinu de l'équation Level-Set	86
4.3.1	Discrétisation de l'équation de transport dans un élément	88
4.3.2	Discrétisation de l'équation de transport dans le domaine	89
4.4	Discrétisation temporelle de l'équation Level-Set	90
4.4.1	Méthodes explicites Euler/Runge-Kutta	91
4.4.2	Choix du pas de temps	93
4.5	Résultats numériques	93
4.5.1	Rotation d'un cercle dans un champ de vitesse non-déformant	94
4.5.2	Disque de Zalesak	101
4.6	Conclusion	105
5	Modélisation d'un écoulement monofluide à surface libre en deux di-	
	mensions	107
5.1	Présentation du problème	108
5.2	Discrétisation spatiale et temporelle de l'équation de Laplace	114
5.2.1	Discrétisation spatiale	114
5.2.2	Discrétisation temporelle	116
5.3	Couplage avec la méthode Level-Set	116
5.4	Etudes d'un cas de sloshing linéaire	119
5.4.1	Solution analytique	120
5.4.2	Résultats numériques	121
5.5	Conclusion	129
6	Modélisation d'un écoulement bifluide en deux dimensions	133
6.1	Difficultés numériques pour les écoulements incompressibles dans le cadre de la MEF	134
6.1.1	Discrétisation des termes de pression et de vitesse	135
6.1.2	Discrétisation des termes d'advection	139
6.2	Méthodes de stabilisation	140
6.2.1	Nouvelle méthode de projection explicite d'ordre élevé	140
6.2.2	Méthode Galerkin Discontinu pour résoudre les termes advectifs	142
6.3	Description de l'interface pour le traitement biphasique de l'écoulement	142
6.3.1	Méthode d'interface diffuse	145
6.3.2	Méthode d'interface ponctuelle	145

TABLE DES MATIÈRES

6.3.3	Méthode choisie	148
6.4	Résolution des équations d'Euler incompressibles avec une nouvelle méthode de projection d'ordre élevé	149
6.4.1	Formulation globale des équations d'Euler	150
6.4.2	Résumé des étapes de résolution	151
6.4.3	Discrétisation spatiale	153
6.4.4	Discrétisation temporelle	162
6.5	Couplage avec la méthode Level-Set	162
6.6	Résultats numériques	165
6.6.1	Equilibre hydrostatique	165
6.6.2	Sloshing linéaire (faibles déformations)	178
6.6.3	Sloshing non-linéaire	194
6.6.4	Dam-break	203
Conclusion et perspectives		215
	Conclusion	215
	Perspectives	219
Appendices		223
A Résolution à la main d'un système d'équations équivalent au bilan de la QDM en 1D		224
A.1	Résolution à l'ordre spatial $k = 1$	225
A.1.1	Equation de Laplace	225
A.1.2	Dérivée temporelle $\partial v / \partial t$	227
A.2	Résolution pour des ordres spatiaux différents	229
A.2.1	Equation de Laplace à l'ordre $k = 2$	230
A.2.2	Dérivée temporelle $\partial v / \partial t$ à l'ordre $k = 1$	232

INTRODUCTION

Contexte

La simulation numérique d'écoulements à surface libre génère depuis plusieurs dizaines d'années beaucoup de travaux de recherche au sein de la communauté scientifique de la mécanique des fluides. De nos jours, il est possible de modéliser un large choix d'écoulements comportant une variété de phénomènes physiques, à différentes échelles. Ces problématiques touchent plusieurs domaines d'application, comme la biologie, le navale, l'aéronautique, l'astrophysique... .



FIGURE 1 – Frégate naviguant dans un état de mer agité.

En hydrodynamique navale, la simulation d'écoulements à surface libre est d'un grand intérêt, en complément des essais, pour estimer les efforts hydrodynamiques agissant sur les structures navales, et finalement les dimensionner correctement. L'estimation de la résistance à l'avancement d'un navire est particulièrement étudiée, elle correspond par définition à l'effort nécessaire qu'il faut exercer sur ce dernier pour le déplacer d'un mouvement rectiligne uniforme à vitesse constante, sur une mer complètement calme. Plusieurs phénomènes d'origine physique différente contribuent à créer cette résistance (par exemple : la résistance visqueuse et la résistance de vagues). Lorsque les engins maritimes se déplacent dans un état de mer agité (voir Fig. 1¹), ils génèrent une résistance supplémentaire, appelée résistance ajoutée due à la houle. Cette dernière, pouvant re-

1. https://i.ytimg.com/vi/Rq116_BTdIk/maxresdefault.jpg

présenter jusqu'à 40% de la résistance totale, est souvent très mal prise en compte et nécessite le développement d'outils numériques adaptés. De nos jours, les outils numériques se basent essentiellement sur les approches potentielles d'une part, et les approches RANSE (Reynolds-Averaged Navier–Stokes) d'autre part. L'approche potentielle, rapide en temps de calcul, repose sur un modèle linéaire ou second ordre, avec des difficultés pour la prise en compte de la vitesse d'avance. L'approche RANSE s'appuie communément sur une formulation Volumes-Finis des équations de Navier-Stokes et un traitement Volume-Of-Fluid de l'interface. Bien que présentant des atouts indéniables de conservativité, ces méthodes restent d'ordre faible en espace (< 2) et en temps, et sont souvent coûteuses en temps de calcul.

Objectif principal

Les travaux effectués dans cette thèse contribuent au développement d'un outil de simulation numérique permettant d'étudier, à terme, le comportement d'une structure flottante dans la houle, avec ou sans vitesse d'avance. L'outil numérique se base sur une formulation Eléments-Finis afin de discrétiser le jeu d'équations, et d'autoriser l'utilisation de schémas numériques robustes et d'ordres élevés. C'est l'usage de cette méthode de résolution qui constitue l'originalité et l'enjeu principal de cette thèse, puisque les méthodes actuelles se basent généralement sur des formulations Volumes-Finis, limitées sur le choix des ordres d'intégration. Le recours aux schémas d'ordres élevés permet pourtant d'obtenir une grande précision des résultats, et de gagner en temps de calcul.

Méthodologie

Plusieurs méthodes sont actuellement dédiées à la simulation d'écoulements à surface libre. Généralement, ces approches sont construites de manière identique, reposant sur quatre éléments fondamentaux, qui sont :

- 1 - La modélisation de l'écoulement (une ou plusieurs phases).
- 2 - La modélisation de la surface libre, par suivi explicite ou implicite.
- 3 - La discrétisation des équations décrivant l'écoulement et la surface libre.
- 4 - Le traitement numérique du couplage.

Il existe une variété de méthodes numériques pour la discrétisation et la résolution des systèmes d'équations servant à modéliser les mouvements des fluides. L'une des plus anciennes est la Méthode des Différences-Finies (MDF). Cette approche est connue pour être très simple à mettre en œuvre, cependant elle est limitée à l'utilisation de maillages structurés ou structurés par blocs. La Méthode des Volumes-Finis (MVF), apparue plus tard, s'est rapidement popularisée au sein de la communauté CFD (Computational Fluid Dynamics) puisque son formalisme est applicable aux maillages non-structurés. En revanche, elle a le principal inconvénient d'être limitée sur le choix de l'ordre spatial. À l'inverse, la Méthode des Eléments-Finis (MEF), apparue peu de temps après la MDF, est facilement implémentable aux ordres élevés. De nos jours, cette approche est encore peu exploitée en CFD, puisque pendant longtemps, elle présentait des instabilités numériques pour résoudre des problèmes physiques dominés par l'advection. Dans ce travail, nous avons recours à la méthode des Eléments-Finis afin de ne pas être restreint aux schémas spatiaux d'ordre inférieur à deux.

Concernant le traitement de la surface libre, il existe un large choix de méthodes dans la littérature dédiées à sa modélisation. Parmi elles, on distingue deux grandes approches communément appelées « front tracking » et « front capturing ». La première s'intéresse au suivi explicite de la surface libre, en s'appuyant par exemple sur des pointeurs pour la représenter, comme les méthodes PIC [28] et MAC [29]. La seconde approche repose sur une capture implicite de la surface libre, qui est déterminée à l'aide d'un champ scalaire. Parmi les méthodes les plus utilisées, on peut citer les méthodes Volume-Of-Fluid [30] et Level-Set [53]. Dans ce travail, nous mettons en œuvre une approche de type Level-Set, où le formalisme standard est enrichi d'algorithmes complémentaires (redistanciation). En adoptant une discrétisation éléments-finis, cette dernière est naturellement implémentable aux ordres élevés. De plus, elle offre l'avantage de représenter simplement la surface libre de façon continue.

Ces travaux de thèse ont contribué à l'élaboration de deux outils numériques. Le premier étant destiné à la modélisation des écoulements potentiels monofluides à surface libre, et le second aux écoulements bifluides incompressibles et non-visqueux. En raison de plusieurs limitations du premier modèle pour aller chercher un comportement non-linéaire de la surface libre, nous nous sommes finalement restreints au développement de la seconde formulation. Cette dernière s'appuie sur plusieurs hypothèses, supposant l'écoulement à phases :

- instationnaires,
- incompressibles,
- non-visqueuses,
- sans effet de tension de surface.

La résolution du problème mathématique dans ce contexte se réduit à la résolution des équations d'Euler, où les champs de pression et de vitesse doivent être déterminés. Le recours à la méthode des Éléments-Finis pour y parvenir demande une approche particulière afin de stabiliser les schémas numériques. Il existe pour cela différentes alternatives, comme l'utilisation d'éléments-finis stables, comme ceux de Taylor-Hood [67] où l'espace fonctionnel des vitesses est enrichi par rapport à celui de la pression. Ces éléments sont utilisés dans certains travaux pour résoudre un écoulement de Stokes [18] ou un problème de Navier-Stokes incompressibles [26][55]. Il est aussi possible d'avoir recours aux méthodes d'Éléments-Finis stabilisés, à l'instar de ce qui est fait dans les travaux [47][19], où le formalisme initial demande à être modifié pour la résolution d'un problème de Navier-Stokes incompressible/compressible. Enfin, il est possible de se baser sur des méthodes de projection [9][10], que l'on retrouve par exemple dans les travaux [15][66][18][73][25], où les champs de pression et de vitesse sont résolus séparément. Dans ce travail, le choix est fait de développer une méthode de projection afin de résoudre les équations d'Euler. Cependant, le simple recours à cette dernière ne suffit pas à stabiliser le schéma numérique, puisque les termes advectifs présents dans les équations de transport nécessitent également une méthode de stabilisation particulière. Dans le cadre de cette thèse, l'ensemble de ces termes sont stabilisés à l'aide d'une approche Galerkin Discontinu [13][12] qui consiste à décentrer le schéma classiquement utilisé. Cette méthode est appliquée aussi bien au formalisme Level-Set, à l'instar de [54][19][47], qu'aux équations de l'écoulement, de la même

manière que [4][3][11] qui traitent des problèmes d'Euler/Navier-Stokes compressibles.

Dans la littérature, on retrouve les travaux [25][55] qui développent, comme nous, une approche Galerkin Discontinu pour discrétiser spatialement à la fois les équations de l'écoulement et le formalisme Level-Set. Dans [55], les équations de Navier-Stokes incompressibles sont résolues dans différents espaces fonctionnels (Taylor-Hood). Les auteurs [25] ont développé une approche plus similaire à nos travaux, basée sur une méthode de projection pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles. Leur méthode repose sur un schéma explicite-implicite en temps, traitant les termes advectifs explicitement et les termes visqueux implicitement. Nos recherches portent ici sur des problèmes instationnaires caractérisés par une forte dynamique des fluides, où les effets de viscosité sont négligeables. L'utilisation d'un schéma temporel implicite permettant d'utiliser de grands pas de temps n'est pas requis dans ce contexte, puisque l'on veut garantir une représentation précise de la physique sous-jacente (par exemple pour des problèmes de sloshing/dam-break). Ainsi, nous envisageons une discrétisation temporelle entièrement explicite. Ce choix ne pose pas de problème particulier car nous ne traitons pas les termes visqueux de l'écoulement, qui pourraient entraîner une forte restriction sur le choix du pas de temps. L'objectif de cette thèse est de développer une méthode numérique combinant des schémas d'ordre élevé en espace et en temps. Sous leur forme classique, les méthodes de projection (versions explicite et semi-implicite) reposent sur un schéma temporel d'ordre un. Dans ce travail, nous développons une nouvelle méthode de projection, totalement explicite, afin d'autoriser l'utilisation de schémas temporels d'ordre élevé.

Un algorithme de type Runge-Kutta 2 (point milieu) est implémenté dans ce travail afin de coupler la discrétisation temporelle des équations d'Euler au formalisme Level-Set. Il convient de préciser que le schéma pourra se prêter, à l'avenir, à d'autres méthodes explicites d'ordre plus élevé en temps (Runge-Kutta d'ordre 3, 4...).

Enfin, un dernier point essentiel à l'élaboration de notre méthode s'appuie sur le traitement spécifique des coefficients discontinus à l'interface (i.e. la masse volumique dans cette étude). Pour assurer la continuité des fonctions dans les schémas de dérivation, il est possible d'utiliser une approche diffuse de l'interface, où les quantités évoluent de façon continue lors du passage d'un fluide à l'autre. A l'inverse, les méthodes Ghost Fluid [17] permettent d'éviter la diffusion de l'interface. Ces dernières sont souvent employées

au sein du formalisme Différences-Finies [37][15][66]. Les méthodes d'interface diffuse sont connues pour être simples à mettre œuvre lorsqu'elles sont couplées au formalisme Level-Set, on les retrouve par exemple dans les travaux MEF [65][64][73][25][55]. Par ailleurs, elles sont facilement implémentables aux ordres élevés. Pour ces principales raisons, nous nous basons sur cette approche dans le cadre de ce travail.

Plan du manuscrit

Le Chapitre 1 de ce manuscrit présentera différents modèles mathématiques et numériques nécessaires à la modélisation d'écoulements à surface libre. Il définira finalement les deux approches mathématiques retenues dans ce travail, puis il justifiera le choix d'une méthode Eléments-Finis pour la discrétisation et la résolution des jeux d'équations.

Le Chapitre 2 présentera la méthode des Eléments-Finis à travers un problème elliptique en une dimension d'espace. Afin de se concentrer sur la modélisation des écoulements à surface libre, et dans l'optique d'éviter d'implémenter en totalité le formalisme des Eléments-Finis, il a été convenu dans ce travail de s'appuyer sur une librairie MEF existante. Ce chapitre sera aussi consacré à la présentation de la bibliothèque sélectionnée, en expliquant les raisons qui ont motivé ce choix.

Le Chapitre 3 s'intéressera aux méthodes destinées à modéliser la surface libre. Plusieurs approches seront présentées afin de justifier le choix d'une méthode Level-Set. Cette dernière sera ensuite détaillée pour comprendre son principe et sa mise en œuvre dans le contexte de ces travaux.

Dans le Chapitre 4, nous nous concentrerons sur le développement de la méthode Level-Set par le biais du formalisme Eléments-Finis, et nous y détaillerons la méthode Galerkin Discontinu qui est essentielle pour garantir la stabilité du schéma numérique. Nous présenterons également la discrétisation temporelle du schéma en décrivant plusieurs approches explicites en temps (i.e. les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta). La méthode sera finalement validée pour deux cas-tests bien référencés dans la littérature.

Le Chapitre 5 sera dévolu à la modélisation 2D d'un écoulement potentiel à surface libre, en considérant une seule phase. Il passera en revue la description du modèle mathé-

matique ainsi que la discrétisation spatiale et temporelle des équations à résoudre. Un cas de ballottement (sloshing) linéaire sera ensuite présenté afin de discuter de la précision de la méthode. Bien que ces résultats soient intéressants, le choix de ce modèle n'a finalement pas été retenu dans ce travail puisqu'il est fortement limité aux comportements linéaires de la surface libre.

Le Chapitre 6 sera consacré à la présentation du modèle 2D retenu pour ces travaux, qui repose sur la résolution des équations d'Euler incompressibles pour la modélisation d'écoulements bifluïdes. Il abordera les deux grandes difficultés numériques rencontrées pour ce type de problème dans le cadre du formalisme Eléments-Finis, qui conduisent généralement à des instabilités numériques. Par ailleurs, il sera expliqué pourquoi une formulation potentielle n'est pas maintenue dans ce nouveau contexte. La méthode de projection développée dans ce travail pour déterminer les champs de pression et de vitesse sera ensuite expliquée, en présentant les discrétisations spatiale et temporelle des équations. Enfin, les résultats numériques issus de plusieurs cas représentatifs des problématiques navales seront traités afin de discuter de la robustesse du schéma. Ils seront présentés du cas le plus simple au plus complexe : équilibre hydrostatique, ballottement (sloshing) en régime linéaire puis non-linéaire, effondrement d'une colonne d'eau (dam break) avec reconnexion d'interface.

Pour finir, les conclusions inspirées par ce travail de thèse seront présentées dans la dernière partie de ce manuscrit, ainsi que les perspectives envisagées pour la suite de ces travaux.

Valorisation des travaux

Les travaux réalisés dans cette thèse ont donné lieu aux communications et aux publications suivantes.

Communications lors de congrès et séminaires

- Simulation numérique d'écoulements à surface libre avec la Méthode des Eléments-Finis. Séminaire IRDL, 12 mai 2022, Brest.
- Simulation numérique du sloshing à l'aide d'une Méthode Eléments-Finis bifluide. 18èmes Journées de l'Hydrodynamique, JH18, 24 novembre 2022, Chasseneuil-du-Poitou.
- Simulation numérique d'écoulements à surface libre avec la Méthode des Eléments-Finis. Séminaire ENSTA-Bretagne, 5 juin 2023, Brest.

Liste des publications

- L. Salomon et P-M. Guilcher. Simulation numérique du sloshing à l'aide d'une Méthode Eléments-Finis bifluide. *Two-phase flow simulation of sloshing, by finite element method*. Proceeding JH18 2022.
- L. Salomon and P-M. Guilcher. Fully higher-order coupling of finite element and level set methods for two-phase flow with a new explicit projection method. *Computers & Fluids*, 275 :106245, 2024.

MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LA MODÉLISATION DES FLUIDES

La modélisation des écoulements passe généralement par la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles (EDP). Cela demande dans un premier temps de définir un modèle mathématique selon le type d'écoulement traité, puis de sélectionner un modèle numérique dévolu à la discrétisation puis à la résolution des équations.

Ce chapitre commencera par présenter différents modèles mathématiques qui dépendront des hypothèses formulées au départ (écoulement incompressible, non-visqueux, irrotationnel). Il présentera ensuite trois grandes méthodes numériques destinées à résoudre les EDP, dans le but de justifier le choix d'une méthode Eléments-Finis.

1.1 Modèles mathématiques

Cette section s'intéresse aux systèmes d'EDP destinés à décrire le mouvement d'un ou plusieurs fluides dans un domaine borné de \mathbb{R}^2 . La résolution des équations s'appuie généralement sur différentes hypothèses. Dans ce travail, nous supposons tout d'abord que les écoulements sont incompressibles, la masse volumique et la viscosité des fluides sont alors supposées constantes. Par la suite, nous émettrons d'autres hypothèses dans le but d'obtenir différentes formulations mathématiques.

1.1.1 Equations de Navier-Stokes

Dans un premier temps, nous écrivons les équations de Navier-Stokes en appliquant la relation de conservation à la masse (1.1) et à la quantité de mouvement (QDM) (1.2) pour un fluide newtonien. La conservation de l'énergie, découplée du système ci-dessous, n'est pas prise en compte dans cette étude.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \tag{1.2}$$

Chaque fluide est caractérisé par sa masse volumique ρ et sa viscosité cinématique ν . Le terme t représente la variable temps, p désigne la pression et les vecteurs \mathbf{u} , \mathbf{g} désignent respectivement la vitesse du fluide et l'accélération de la pesanteur.

La résolution des équations de Navier-Stokes permet de simuler une variété d'écoulements à caractère visqueux, comme les phénomènes d'instabilité entre deux fluides de viscosité et densité différentes (ex : instabilité de Rayleigh-Taylor [55][34][47][73]). Dans d'autres contextes, elle permet de décrire par exemple la dynamique des fluides dans un réservoir (sloshing) [47][55] ou lors d'un effondrement d'une colonne d'eau (dam-break) [47][73][70]. Bien que ces deux exemples peuvent être traités en passant par la résolution de ce type d'équations, il peuvent toutefois être résolus plus efficacement par des approches non-visqueuses, car la physique sous-jacente s'y prête bien. Pour finir sur un dernier exemple, la résolution des équations de Navier-Stokes peut aussi être utilisée en génie biologique dans le but de simuler des écoulements sanguins [69].

1.1.2 Equations d'Euler

Dans un second temps, nous supposons que le fluide est non-visqueux. Cette hypothèse permet de simplifier l'équation de bilan de la QDM (1.2) afin d'obtenir les équations d'Euler :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} \tag{1.4}$$

La résolution des équations d'Euler est réservée aux écoulements où les forces visqueuses sont négligeables. Ainsi, elle est majoritairement utilisée pour la simulation d'écoulements compressibles. Cependant, *Guzmán et al.* [27] et *Gawlik* [21] ont récemment publié des travaux dans le cadre de la méthode des Eléments-Finis sur la résolution des équations d'Euler incompressibles.

1.1.3 Formulation potentielle

Pour terminer, nous supposons que le champ de vitesse est irrotationnel. De cette condition, nous pouvons déduire qu'il existe un potentiel scalaire ϕ tel que le vecteur \mathbf{u} satisfasse la relation suivante :

$$\nabla\phi = \mathbf{u} \quad (1.5)$$

L'équation de conservation de la masse devient alors une équation de Laplace appliquée au potentiel des vitesses ϕ (1.6). Le bilan de la quantité de mouvement est lui réécrit en s'appuyant sur l'équation de Bernoulli (1.7), avec C désignant une constante (éventuellement dépendante du temps).

$$\Delta\phi = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + gz = C \quad (1.7)$$

Les écoulements potentiels occupent une place importante au sein des problèmes classiques traités en hydrodynamique navale, où les effets de viscosité sont négligeables sur l'écoulement. Au vu des nombreuses hypothèses pouvant être établies, il est possible de calculer analytiquement les solutions dans certains problèmes étudiés (houle d'Airy, sloshing linéaire, modèle de Wagner linéaire...). La théorie potentielle est généralement mise en pratique lors des études liées à la propagation de la houle, mais elle permet aussi de s'intéresser à des phénomènes comme le sloshing, étudié par exemple dans les travaux de *Scolan* [59], ou encore l'étude d'un dam break, retrouvée chez *Cong et Teng* [14].

1.1.4 Choix des méthodes retenues

Dans ce travail de thèse, nous voulions au départ nous baser sur une théorie potentielle, car nous souhaitons, à terme, nous intéresser à la propagation de la houle. Pour cela, un premier code de calcul a été conçu afin de traiter des écoulements monofluides à surface libre, basés sur cette théorie. Cependant, ce travail a fait face à de nombreuses difficultés, d'un point de vue théorique et numérique. Il a donc été réorienté dans le but de développer un outil numérique pour la simulation d'écoulements bifluides. Dans le contexte de cette étude, la mise en œuvre d'une méthode de résolution pour traiter les équations potentielles (1.6) (1.7) est complexe. Pour cela, nous avons suspendu l'hypothèse d'irrotationalité du champ de vitesse, nous ramenant donc à la résolution des équations d'Euler.

Actuellement, peu de travaux sont présents dans la littérature sur la résolution des équations d'Euler incompressibles en biffuide, ce qui est un véritable challenge pour cette étude.

En résumé, deux approches mathématiques sont retenues dans le cadre de cette thèse :

- La théorie potentielle pour des écoulements monofluides à surface libre ;
- La résolution des équations d'Euler incompressibles pour des écoulements biffuides.

1.2 Modèles numériques

La résolution des équations aux dérivées partielles décrites dans la section précédente nécessite l'utilisation d'une méthode numérique spécifique, permettant le passage d'un milieu continu à un milieu discret. Selon les domaines d'applications, plusieurs approches sont dévolues à discrétiser et résoudre le problème numériquement. Parmi celles-ci figurent les méthodes des Différences-Finies, des Volumes-Finis et des Eléments-Finis. Cette section présente le principe de ces trois formalismes afin de justifier le choix d'une approche Eléments-Finis pour cette étude.

1.2.1 Méthode des Différences-Finies (MDF)

La méthode des Différences-Finies est apparue dès l'arrivée des premiers ordinateurs, c'est l'une des plus anciennes permettant la discrétisation des EDP. Elle est désormais connue pour être en partie très simple à mettre en œuvre. Pour présenter la méthode, nous nous appuyons sur l'exemple de la discrétisation de l'équation de Poisson (en une dimension) ci-dessous :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = S \tag{1.8}$$

où les quantités ϕ et S désignent respectivement l'inconnue et le terme source. On utilise ici un maillage régulier, comme présenté sur la Figure 1.1. Pour résoudre l'équation (1.8), il est nécessaire de calculer le gradient de ϕ (dérivée première) puis la divergence de ce dernier (dérivée seconde). L'opérateur différentiel est défini comme une combinaison linéaire des valeurs de ϕ en certains points. Il existe alors une infinité de schémas possibles, tous dépendant du nombre de points utilisés. Pour estimer la dérivée première de la fonction

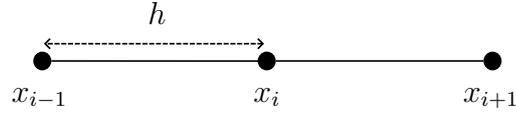


FIGURE 1.1 – Deux mailles régulières (pas d'espace h constant) pour une discrétisation différences-finies.

ϕ au point x_i , nous utilisons par exemple le développement en série de Taylor de ϕ_{i+1} autour du point x_i :

$$\phi_{i+1} = \phi_i + h \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i + \mathcal{O}(h^3) \quad (1.9)$$

L'équation (1.9) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i &= \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} - \underbrace{\frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i}_{\text{erreur de troncature}} + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} + \mathcal{O}(h) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Dans le second membre de l'équation (1.10), le premier terme désigne l'approximation par différences-finies de la dérivée $(\partial \phi / \partial x)_i$ et les autres termes représentent l'erreur liée à cette approximation, que l'on appelle erreur de troncature. La valeur approchée de la dérivée première $(\partial \phi / \partial x)_i$ à l'ordre 1 s'écrit alors :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} \quad (1.11)$$

Ce schéma exprime la dérivée décentrée en aval, mais il est possible d'utiliser le développement en série de Taylor de ϕ_{i-1} autour du point x_i afin de décentrer en amont.

Pour estimer la dérivée $(\partial \phi / \partial x)_i$ à l'ordre 2, nous utilisons le développement en série de Taylor de ϕ_{i+1} et ϕ_{i-1} autour du point x_i :

$$\phi_{i+1} = \phi_i + h \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_i + \mathcal{O}(h^4) \quad (1.12)$$

$$\phi_{i-1} = \phi_i - h \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_i + \mathcal{O}(h^4) \quad (1.13)$$

En soustrayant l'équation (1.13) de (1.12), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i &= \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2h} - \underbrace{\frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)_i}_{\text{erreur de troncature}} + \mathcal{O}(h^3) \\ &= \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (1.14)$$

On obtient ainsi une approximation de la dérivée première $(\partial\phi/\partial x)_i$ à l'ordre 2, selon un schéma centré :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2h} \quad (1.15)$$

En additionnant maintenant l'équation (1.13) à (1.12), nous pouvons exprimer la dérivée seconde $(\partial^2\phi/\partial x^2)_i$ nécessaire à la résolution du problème (1.8) :

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (1.16)$$

L'approximation de la dérivée $(\partial^2\phi/\partial x^2)_i$ par la MDF à l'ordre 2 s'écrit alors :

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} \quad (1.17)$$

La dérivée spatiale (1.11) calculée au point x_i est d'ordre 1 et fait intervenir un seul voisin de x_i . En revanche, les dérivées (1.15) et (1.17) sont d'ordre 2 et font intervenir deux voisins. In fine, la montée en ordre spatial du schéma s'accompagne d'une augmentation du nombre de voisins nécessaires au calcul des dérivées.

La méthode des Différences-Finies est facilement implémentable en raison de la simplicité de son formalisme mathématique. De plus, il est possible de monter naturellement en ordre d'espace. Le formalisme décrit dans cette section en 1D est facilement applicable au cas multidimensionnel, cela demande simplement de reprendre les différentes étapes décrites jusqu'ici en fonction des autres dimensions de l'espace. Le principal inconvénient de cette méthode réside dans le choix de la géométrie du maillage, qui limite son utilisation aux maillages structurés. Ce critère peut devenir rapidement limitant au sein des études numériques, et notamment en hydrodynamique navale. En effet, si le domaine de calcul comprend par exemple une forme de carène, sa géométrie peut rapidement devenir

complexe (voir Fig. 1.2¹).

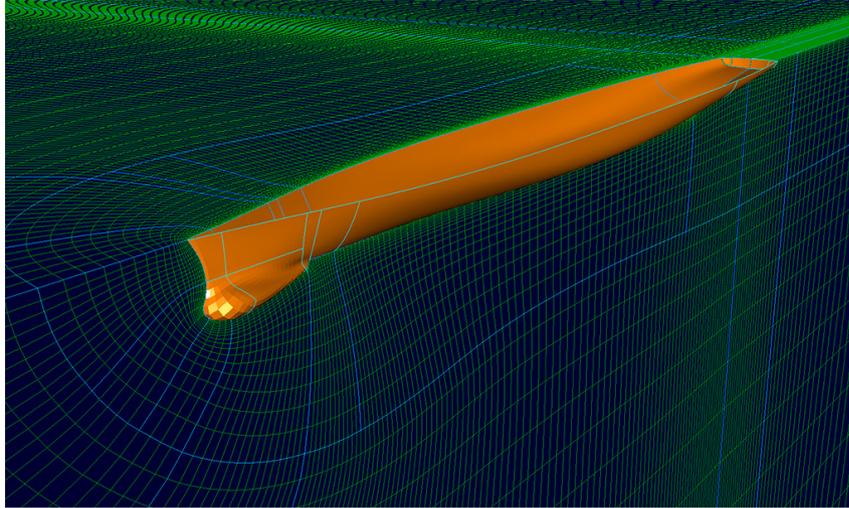


FIGURE 1.2 – Maillage d'un domaine de calcul comprenant une carène de frégate.

1.2.2 Méthode des Volumes-Finis (MVF)

La méthode des Volumes-Finis est apparue pour la première fois dans les années 1980 dans un contexte de géométries simples. Dix ans plus tard, le formalisme s'est étendu aux géométries complexes qui ne pouvaient pas être traitées par la méthode des Différences-Finies, ce qui fut une véritable avancée scientifique dans le domaine de la mécanique des fluides numérique. La MVF consiste à intégrer les équations aux dérivées partielles dans chaque cellule du maillage, appelée également volume de contrôle. Le formalisme s'appuie généralement sur le théorème de la divergence (Green-Ostrogradski) et s'applique particulièrement bien aux équations faisant apparaître l'opérateur divergence. Pour présenter la méthode, nous nous appuyons sur l'exemple de la discrétisation de l'équation (1.18) en deux dimensions, où $(\mathbf{c}\phi)$ et S désignent respectivement un flux advectif et un terme source.

$$\nabla \cdot (\mathbf{c}\phi) = S \quad (1.18)$$

L'équation (1.18) est intégrée dans un volume de contrôle que l'on note V , où le flux $(\mathbf{c}\phi)$ est désigné par la notation $F(\phi, \mathbf{c})$:

$$\int_V \nabla \cdot F(\phi, \mathbf{c}) \, dv = \int_V S \, dv \quad (1.19)$$

1. https://info.pointwise.com/hubfs/Webinars/Past%20Webinars/1024x614_Webinar%20...%E2%80%93%20Structured%20Mesh%20Low%20Speed%20Ship%20-%202012.png

Le théorème de Green-Ostrogradski est ensuite appliqué au membre de gauche de l'équation (1.19) dans le but d'obtenir une intégrale surfacique. Pour un volume V borné par des faces notées f , on obtient alors :

$$\int_f F(\phi, \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} ds = \int_V S dv \quad (1.20)$$

En s'appuyant sur la Figure 1.3, on note le volume concerné V_K et les faces qui l'entourent f_i , avec $i = 1, 2, 3, 4$. L'équation ci-dessus s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^4 \int_{f_i} F(\phi, \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} ds = \int_{V_K} S dv \quad (1.21)$$

La MVF fait l'hypothèse que dans un volume de contrôle V , une fonction est constante et égale à la valeur qu'elle prend au centre de ce dernier, c'est la règle du point milieu. Cette règle peut également s'appliquer sur les faces f du volume : la valeur de la fonction sur une face est constante et égale à la valeur qu'elle prend au centre de cette dernière. En appliquant cette règle aux intégrales de volume et de surface de l'équation (1.21), la formulation discrète peut alors s'écrire :

$$\sum_{i=1}^4 (F(\phi, \mathbf{c})_i \cdot \mathbf{n}_i) f_i = S V_K \quad (1.22)$$

Le flux au centre des faces est remplacé par un flux numérique dépendant du volume de contrôle considéré et/ou de ses voisins, il est noté $G(\phi, \mathbf{c}, \mathbf{n})$. Ce flux est choisi de manière à garantir la consistance et la conservation des quantités transportées. En considérant

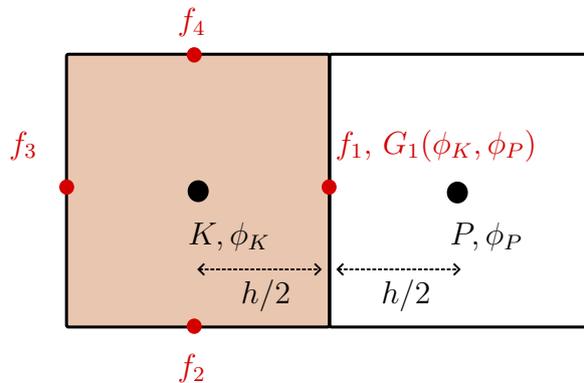


FIGURE 1.3 – Volume de contrôle V_K et son voisin V_P pour un maillage régulier (pas d'espace h constant).

la face f_1 (voir Fig. 1.3), le flux numérique au centre de cette dernière dépend alors des volumes K et P . Il peut être déterminé en interpolant les solutions ϕ depuis leurs valeurs aux centres de K et P . En considérant un maillage régulier, $G(\phi, \mathbf{c}, \mathbf{n})$ peut s'écrire par exemple sous les formes suivantes :

$$G_1(F(\phi_K), F(\phi_P), \mathbf{n}_1) = \begin{cases} \left(\frac{F(\phi_K)}{2} + \frac{F(\phi_P)}{2} \right) \mathbf{n}_1 & \text{(a) schéma centré} \\ F(\phi_K) \mathbf{n}_1 & \text{(b) schéma décentré amont} \\ F(\phi_P) \mathbf{n}_1 & \text{(c) schéma décentré aval} \end{cases} \quad (1.23)$$

Dans ce cas particulier, le flux sur f_1 peut être approximé par un schéma centré d'ordre 2. Cependant, les fonctions d'interpolation utilisées sur des maillages non-structurés ne permettent pas d'obtenir la formulation (1.23)(a) puisque le point f_1 n'est pas aligné (et centré) à K et P (voir Fig. 1.4). De ce fait, le recours aux maillages non-structurés complexifie considérablement l'implémentation des schémas d'ordres $k > 1$. Par exemple, il est possible d'utiliser une reconstruction locale au sens des moindres carrés, ou bien des corrections pour modifier le schéma cartésien initial.

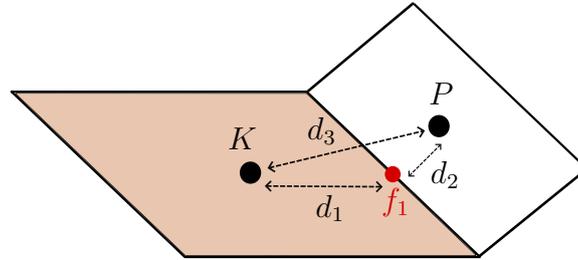


FIGURE 1.4 – Volume de contrôle V_K et son voisin V_P pour un maillage non-structuré.

Tout comme le formalisme Différences-Finies, l'augmentation de l'ordre spatial nécessite d'avoir recours aux voisins du volume de contrôle considéré. Pour s'affranchir de cette dépendance, il est possible de se restreindre à l'ordre 1 (schéma décentré). Ce choix contraint toutefois à rendre diffusif le schéma, il est alors peu souvent retenu. L'estimation des flux aux faces est donc généralement exprimée en fonction de plusieurs volumes. Il existe cependant des situations pathologiques lorsque le maillage est distordu. Pour cette raison, l'ordre 2 dans le formalisme Volumes-Finis est difficilement atteignable pour des

maillages non-structurés.

Malgré la complexification du formalisme mathématique par rapport à la MDF, la méthode des Volumes-Finis est plus facilement applicable aux géométries complexes, ce qui est un véritable atout. De plus, elle impose la conservation des quantités transportées par les équations aux dérivées partielles. Dans le cadre de la mécanique des fluides, cela présente un avantage pour la résolution des équations de conservation (masse, quantité de mouvement, énergie...). Pour ces raisons, la MVF est devenue très populaire au sein de la communauté CFD. En effet, la majeure partie des codes de calcul industriels (Ansys-Fluent, Star-CCM+, Phoenix, FloEFD...) ou des codes collaboratifs (OpenFoam, Saturne, Basilisk...) sont basés sur cette approche. Bien que la méthode dispose de plusieurs avantages, l'augmentation de l'ordre spatial faisant intervenir les voisins des volumes de contrôle devient rapidement fastidieuse. Pour cela, les schémas spatiaux restent généralement inférieurs à l'ordre 2.

1.2.3 Méthode des Éléments-Finis (MEF)

La méthode des Éléments-Finis est relativement ancienne, elle est apparue peu de temps après la MDF. A cette époque, elle fut initialement conçue pour traiter des problèmes de mécanique des solides déformables. La MEF fut longuement écartée pour résoudre des problèmes de mécanique des fluides puisqu'elle présentait des instabilités numériques pour la résolution des problèmes physiques dominés par la convection. Néanmoins, depuis quelques années, le recours à des méthodes de décentrement issues de la communauté des Volumes-Finis rend possible, par exemple, la simulation d'écoulements à surface libre.

De la même manière que le formalisme Volumes-Finis, la méthode des Éléments-Finis repose sur des approximations intégrales. Cette dernière résout toutefois une formulation faible (variationnelle) des équations, en introduisant la notion de fonction test définie sur un espace fonctionnel. Afin de présenter rapidement la méthode, nous nous appuyons sur l'exemple de la discrétisation de l'équation de Poisson (1.24) en deux dimensions. Une étude plus détaillée de la MEF sera présentée dans le chapitre suivant.

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = S \tag{1.24}$$

L'équation (1.24) est multipliée par une fonction test $\omega(x, y)$, choisie suffisamment régulière, avant d'être intégrée dans un élément que l'on note E . On obtient alors la formulation suivante :

$$\int_E \nabla \cdot (\nabla \phi) \omega \, dv = \int_E S \omega \, dv \quad (1.25)$$

Le théorème de Green est ensuite appliqué au membre gauche de l'équation (1.25), nous obtenons ainsi la formulation faible de l'équation de Poisson :

$$-\int_E \nabla \phi \cdot \nabla \omega \, dv + \int_F \omega (\nabla \phi \cdot \mathbf{n}) \, ds = \int_E S \omega \, dv \quad (1.26)$$

La notation F désigne ici les faces de l'élément. Sous cette forme, les contraintes sur la solution ϕ sont affaiblies puisque nous passons d'une dérivée seconde dans la formulation forte (1.24) à une dérivée première. La prochaine étape consiste à définir un espace fonctionnel afin d'approximer la fonction test et la solution ϕ de l'équation (1.26). Il existe pour cela diverses possibilités. Classiquement, on se propose d'approcher les solutions par des polynômes de Lagrange, où leur degré d'interpolation correspond à l'ordre du schéma spatial, que l'on note k . A la différence de la méthode des Volumes-Finis, les nœuds sont disposés aux sommets de l'élément, et non au centre (voir Fig. 1.5 (a)). Pour augmenter l'ordre du schéma spatial, il convient simplement de rajouter des nœuds supplémentaires aux éléments afin d'avoir recours à des polynômes de degré plus élevé. Ceci peut se faire de différents moyens, l'un d'eux est représenté sur la Figure 1.5. En augmentant le degré d'interpolation des polynômes, la solution ϕ peut être approchée de plusieurs façons :

- Pour $k = 0$ la solution ϕ est constante par élément (comme la MVF).
- Pour $k = 1$ la solution ϕ est linéaire par élément.
- Pour $k = 2$ la solution ϕ est quadratique par élément.
- Pour $k = 3$ la solution ϕ est cubique par élément.

Cette approche, tout comme la méthode des Volumes-Finis, est adaptée aux maillages de géométries complexes. Par ailleurs, le recours aux schémas spatiaux d'ordre élevé s'obtient naturellement en ajoutant directement des nœuds sur les éléments, contrairement à la MVF qui nécessite de rechercher les voisins de chaque volume de contrôle. De cette façon, la MEF n'est pas limitée sur le choix de l'ordre spatial, ce qui est un véritable atout.

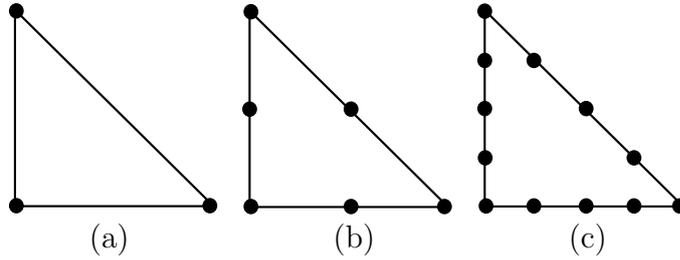


FIGURE 1.5 – Augmentation de l'ordre spatial k dans un élément E triangulaire. (a) $k = 1$, (b) $k = 2$, (c) $k = 3$.

1.2.4 Choix de la méthode retenue

Le Tableau 1.1 ci-dessous synthétise les avantages et les inconvénients des trois méthodes numériques présentées précédemment.

	Différences-Finies	Volumes-Finis	Eléments-Finis
Mise en oeuvre	Simple	Relativement complexe	Complexe
Formalisme mathématique	Simple	Relativement complexe	Complexe
Géométrie complexe du maillage	Très limité	Possible	Possible
Ordre élevé	Possible	Très limité	Possible
Schéma conservatif	Difficile	Oui	Possible

TABLE 1.1 – Comparaison des différentes méthodes numériques.

Au sein de la communauté scientifique de la mécanique des fluides numérique, la première place est actuellement attribuée à la méthode des Volumes-Finis. Contrairement à la méthode des Différences-Finies, cette approche est facilement adaptée aux maillages non-structurés et sa mise en œuvre est relativement simple par rapport à la méthode des Eléments-Finis. De plus, elle impose la conservation des quantités transportées par les EDP. Au cours de nombreuses années, la résolution des équations en mécanique des fluides à l'aide du formalisme Eléments-Finis fut considérablement complexe en raison des instabilités des schémas numériques. Cependant, des méthodes particulières permettent de nos jours de stabiliser les schémas, en modifiant la formulation variationnelle discrète. Ces

méthodes seront détaillées dans un prochain chapitre. Bien que la méthode des Volumes-Finis fassent encore de l'ombre à la méthode des Éléments-Finis au sein de la communauté CFD, cette dernière présente l'avantage d'être compatible aux maillages non-structurés sans être restreinte sur le choix de l'ordre spatial, ce qui permet de gagner en précision et en temps de calcul. Pour cette raison, nous avons choisi d'utiliser une approche Éléments-Finis dans ce travail afin de résoudre les différents jeux d'équations dans le but de simuler des écoulements à surface libre.

1.3 Conclusion

Ce chapitre s'est consacré à la présentation des équations aux dérivées partielles permettant de simuler différentes variétés d'écoulement, puis aux méthodes numériques permettant leur résolution.

Deux formulations mathématiques sont retenues ici : la première considère des écoulements potentiels et la seconde des écoulements non-visqueux (équations d'Euler incompressibles). L'outil numérique développé dans le cadre de cette thèse se base sur une formulation Éléments-Finis afin de discrétiser les différents systèmes d'équations, et d'autoriser l'utilisation de schémas numériques d'ordres élevés sur des maillages non-structurés.

MÉTHODE DES ÉLÉMENTS-FINIS POUR LA RÉOLUTION DES EDP

Dans la première section de ce chapitre, nous introduirons les grandes lignes de la méthode des Éléments-Finis à travers un problème elliptique en une dimension d'espace, qui repose sur un formalisme de Galerkin particulier. Cette approche est couramment utilisée et nous permettra de décrire les principales étapes de résolution des EDP dans un cadre général. Dans ce travail, nous avons choisi de nous appuyer sur une bibliothèque scientifique MEF préexistante afin de nous aider à implémenter l'ensemble du formalisme Éléments-Finis. La seconde section de ce chapitre présentera la bibliothèque choisie et expliquera les raisons de ce choix.

2.1 Résolution d'un problème de Poisson en une dimension d'espace

L'équation de Poisson relie une fonction inconnue $\phi(x)$ à un terme source $f(x)$, comme suit :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + f = 0 \quad (2.1)$$

La fonction est définie dans le domaine $\Omega \in [x_0; x_n]$ (voir Fig. 2.1), où n désigne le nombre d'éléments discrétisant Ω . Deux conditions aux limites sont imposées pour résoudre ce problème : une condition de Neumann en x_0 sur la dérivée de la fonction ϕ , et une condition de Dirichlet en x_n sur ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= C_N \quad \text{sur } x_0 \\ \phi &= C_D \quad \text{sur } x_n \end{aligned} \quad (2.2)$$

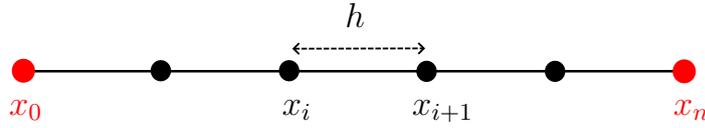


FIGURE 2.1 – Domaine Ω discrétisé en une dimension.

2.1.1 Formulation faible discrétisée

Pour rappel, la méthode des Eléments-Finis consiste à intégrer, dans le domaine Ω , la fonction choisie multipliée par une fonction test suffisamment régulière, notée $\omega(x)$:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + f \right) \omega = 0 \quad (2.3)$$

L'équation ci-dessus est réécrite en utilisant une intégration par parties, la formulation faible de l'équation de Poisson (2.1) s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \left[\omega \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{\partial \Omega} - \int_{\Omega} \omega f = 0 \quad (2.4)$$

Le domaine Ω est discrétisé en plusieurs éléments E appartenant à l'ensemble des éléments \mathcal{E}_h constituant le maillage. Chaque élément représente un segment compris entre deux coordonnées x_i et x_{i+1} . On se propose ici d'approcher la solution ϕ dans un espace fonctionnel polynomial (éléments-finis de type Lagrange). Dans ce cas, l'espace approché des solutions est le suivant :

$$W_h^\phi = \{ \phi_h \in H^1(\Omega); \phi_h|_E \in \mathbb{P}_k(E), \forall E \in \mathcal{E}_h \}$$

où $H^1(\Omega)$ désigne un espace complet de Hilbert :

$$H^1(\Omega) = \{ f \in L^2(\Omega), \nabla f \in (L^2(\Omega))^2 \}$$

avec f la fonction que l'on souhaite approcher et $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions de carré intégrable. $H^1(\Omega)$ présente l'avantage de garantir la continuité de la solution à l'intérieur de chaque élément ainsi qu'entre les éléments adjacents. Il est ensuite nécessaire de restreindre la forme de la fonction test ω . Pour ce faire, il est courant d'utiliser la même base de fonctions polynomiales que celle utilisée pour l'inconnue ϕ .

Le problème discret peut être formulé localement dans un élément E sous la forme suivante :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial \omega_h}{\partial x} \frac{\partial \phi_h}{\partial x} - \left[\omega_h \frac{\partial \phi_h}{\partial x} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_h f = 0 \quad \forall \omega_h \in W_h^\phi \quad (2.5)$$

En choisissant par exemple d'approximer linéairement la solution ϕ dans chaque élément, c'est à dire à $k = 1$, la solution approchée ϕ_h peut alors s'écrire sous la forme d'un polynôme de premier degré :

$$\phi_h(x) = \alpha x + \beta \quad (2.6)$$

Pour un segment quelconque, on note la valeur que peut prendre ϕ aux deux extrémités :

$$\begin{cases} \phi(x_i) = \phi_i \\ \phi(x_{i+1}) = \phi_{i+1} \end{cases} \quad (2.7)$$

Le but est de déterminer ϕ_i et ϕ_{i+1} , appelées valeurs nodales. L'équation (2.6) est réécrite pour chaque nœud du segment $[x_i; x_{i+1}]$:

$$\begin{cases} \phi(x_i) = \alpha x_i + \beta = \phi_i \\ \phi(x_{i+1}) = \alpha x_{i+1} + \beta = \phi_{i+1} \end{cases} \quad (2.8)$$

Les constantes α et β peuvent donc s'écrire : $\alpha = (\phi_{i+1} - \phi_i)/(x_{i+1} - x_i)$ et $\beta = (\phi_i x_{i+1} - \phi_{i+1} x_i)/(x_{i+1} - x_i)$. On suppose ici que le maillage est régulier, on obtient alors $(x_{i+1} - x_i) = h$, avec h le pas d'espace. En substituant α et β dans l'équation (2.6), nous obtenons :

$$\phi_h(x) = \phi_i + \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} \right) (x - x_i)$$

L'équation est réécrite de manière à différencier les deux valeurs nodales à déterminer :

$$\phi_h(x) = \phi_i \left(1 - \frac{x - x_i}{h} \right) + \phi_{i+1} \left(\frac{x - x_i}{h} \right) \quad (2.9)$$

Les quantités $\left(1 - \frac{x - x_i}{h} \right)$ et $\left(\frac{x - x_i}{h} \right)$ sont appelées fonctions de forme, nous les notons respectivement N_1 et N_2 dans ce travail. L'équation ci-dessus est réécrite une nouvelle fois

sous forme vectorielle, en fonction des valeurs nodales :

$$\phi_h = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_{i+1} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Pour obtenir la dérivée première (en espace) de la fonction ϕ , il suffit alors de dériver N_1 et N_2 :

$$\frac{\partial \phi_h}{\partial x} = \begin{pmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_{i+1} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Pour ce cas unidimensionnel d'ordre $k = 1$, les dérivées des fonctions de forme sont constantes et valent : $N_{1,x} = -(1/h)$ et $N_{2,x} = 1/h$. Selon l'approximation de Galerkin, ϕ_h et ω_h utilisent les mêmes fonctions de forme, on peut alors écrire :

$$\omega_h = \begin{pmatrix} \omega_i & \omega_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \omega_h}{\partial x} = \begin{pmatrix} \omega_i & \omega_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{1,x} \\ N_{2,x} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

A ce stade, les fonctions ϕ et ω sont approchées par des polynômes de premier degré composés de fonctions de forme (dépendantes de la dimension x) et de valeurs nodales à déterminer. La prochaine étape consiste à résoudre l'équation (2.5) à l'aide de ces différentes approximations.

2.1.2 Système de résolution pour un élément

Afin de déterminer le système de résolution associé à un élément du maillage, il convient de substituer les équations (2.10) (2.11) (2.12) et (2.13) dans la formulation faible (2.5). Par souci de clarté, la résolution se fera ici terme par terme.

Dans un premier temps, nous traitons la première intégrale de l'équation (2.5) :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial \omega_h}{\partial x} \frac{\partial \phi_h}{\partial x} dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{pmatrix} \omega_i & \omega_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{1,x}^2 & N_{2,x}N_{1,x} \\ N_{1,x}N_{2,x} & N_{2,x}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_{i+1} \end{pmatrix} dx \quad (2.14)$$

En ayant connaissance des fonctions de forme, la matrice présente dans l'équation ci-dessus

s'exprime ainsi :

$$\begin{pmatrix} N_{1,x}^2 & N_{2,x}N_{1,x} \\ N_{1,x}N_{2,x} & N_{2,x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/h^2 & -1/h^2 \\ -1/h^2 & 1/h^2 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas particulier, cette dernière est constante et peut être extraite de l'intégrale. Après intégration, l'équation (2.14) s'écrit sous la forme suivante :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial \omega_h}{\partial x} \frac{\partial \phi_h}{\partial x} dx = (\omega_i \quad \omega_{i+1}) \begin{pmatrix} 1/h & -1/h \\ -1/h & 1/h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_{i+1} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Dans un second temps, nous traitons l'intégrale comprenant le terme source :

$$- \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_h f dx = - (\omega_i \quad \omega_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} f dx \quad (2.16)$$

La fonction source est restreinte à une forme linéaire, de type $f(x) = ax + b$, avec a et b deux constantes données par le problème. Après intégration, on obtient donc l'expression suivante :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} f dx = \begin{pmatrix} -\frac{a}{3h}(x_{i+1}^3 - x_i^3) + \frac{1}{2}(x_{i+1}^2 - x_i^2) \left(a - \frac{b - ax_i}{h} \right) + bx_{i+1} \\ \frac{a}{3h}(x_{i+1}^3 - x_i^3) + \frac{1}{2}(x_{i+1}^2 - x_i^2) \left(\frac{b - ax_i}{h} \right) - bx_i \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Pour plus de simplicité, le membre de droite de l'équation ci-dessus est noté $\{f\}$. L'équation (2.16) s'écrit alors :

$$- \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_h f dx = - (\omega_i \quad \omega_{i+1}) \{f\} \quad (2.18)$$

Pour finir, nous traitons les termes de bord du segment :

$$- \left[\omega_h \frac{\partial \phi_h}{\partial x} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} = -\omega_{i+1} \frac{\partial \phi(x_{i+1})}{\partial x} + \omega_i \frac{\partial \phi(x_i)}{\partial x} = (\omega_i \quad \omega_{i+1}) \begin{pmatrix} \partial \phi(x_i)/\partial x \\ -\partial \phi(x_{i+1})/\partial x \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

En regroupant les équations (2.15) (2.18) et (2.19), le système peut alors s'écrire

(quelque soit les valeurs ω_i et ω_{i+1}) :

$$(\omega_i \ \omega_{i+1}) \begin{pmatrix} 1/h & -1/h \\ -1/h & 1/h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_{i+1} \end{pmatrix} - (\omega_i \ \omega_{i+1}) \{f\} + (\omega_i \ \omega_{i+1}) \begin{pmatrix} \partial\phi(x_i)/\partial x \\ -\partial\phi(x_{i+1})/\partial x \end{pmatrix} = 0 \quad (2.20)$$

Après simplification de l'équation (2.20), le système final s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} 1/h & -1/h \\ -1/h & 1/h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{3h}(x_{i+1}^3 - x_i^3) + \frac{1}{2}(x_{i+1}^2 - x_i^2)(a - \frac{b - ax_i}{h}) + bx_{i+1} \\ \frac{a}{3h}(x_{i+1}^3 - x_i^3) + \frac{1}{2}(x_{i+1}^2 - x_i^2)(\frac{b - ax_i}{h}) - bx_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\partial\phi(x_i)/\partial x \\ \partial\phi(x_{i+1})/\partial x \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Ce système d'équations permet de déterminer les valeurs nodales d'un segment, il est ensuite réécrit pour chaque segment discrétisant le domaine de calcul. La prochaine étape consiste à formuler le système global à résoudre.

2.1.3 Système de résolution global

Il s'agit ici d'assembler l'ensemble des systèmes correspondant aux différents segments de la discrétisation. Dans cette formulation, nous considérons que chaque élément possède au moins un nœud en commun avec ses voisins (voir Fig. 2.1). Pour n éléments et $(n + 1)$ nœuds, on écrit alors :

$$\begin{pmatrix} 1/h & -1/h & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1/h & 2/h & -1/h & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1/h & 2/h & -1/h & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 2/h & -1/h \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1/h & 1/h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_i \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1^1 + f_1^2 \\ \vdots \\ f_i^i + f_i^{(i+1)} \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\partial\phi(x_0)/\partial x \\ \underbrace{\partial\phi(x_1)/\partial x - \partial\phi(x_1)/\partial x}_{=0} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \partial\phi(x_n)/\partial x \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

où la notation $i = 0, 1, \dots, n$ indique : l'élément lorsqu'elle est exprimée en exposant et le nœud lorsqu'elle est exprimée en indice. Notons que les termes de bord sur les nœuds internes du maillage s'annulent dans ce cas-ci grâce à l'utilisation du formalisme de Galerkin, ce qui n'est pas le cas pour les méthodes discontinues (ex : Galerkin Discontinu).

2.1.4 Conditions aux limites

La dernière étape consiste à définir les conditions aux limites (2.2) afin de rendre le problème complet. La formulation (2.22) fait apparaître naturellement deux conditions de Neumann au bord du domaine. Dans ce cas, la condition au point x_0 peut être imposée en substituant le terme $\partial\phi(x_0)/\partial x$ par la valeur C_N . La valeur de la fonction ϕ au point x_n est fournie ici par une condition de Dirichlet que l'on souhaite imposer fortement. Pour cela, il est nécessaire de modifier directement le système linéaire (2.22), par exemple en y remplaçant la dernière ligne de façon à obtenir $\phi_n = C_D$. Dans ce cas-ci, le système final s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} 1/h & -1/h & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1/h & 2/h & -1/h & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1/h & 2/h & -1/h & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 2/h & -1/h \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_i \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1^1 + f_1^2 \\ \vdots \\ f_i^i + f_i^{(i+1)} \\ \vdots \\ C_D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -C_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

La matrice présente dans la formulation (2.23) n'est plus définie symétrique. Il existe toutefois des méthodes particulières pour qu'elle le redevienne, ce qui est généralement nécessaire pour résoudre des systèmes d'équations de grande taille.

Seule la condition de Dirichlet est imposée de façon explicite ici, on parle de condition forte. La condition de Neumann, de son côté, est imposée faiblement, on parle de condition naturelle.

2.1.5 Résolution du système final

Le système (2.23) peut être réécrit plus généralement sous la forme suivante :

$$A\{\phi\} = \{b\} \quad (2.24)$$

avec A une matrice carrée de taille $(n + 1) \times (n + 1)$, $\{\phi\}$ le vecteur inconnu de taille $(n + 1)$ comprenant les valeurs nodales à déterminer, et le second membre $\{b\}$ un vecteur de taille $(n + 1)$, incluant les termes sources et les termes de bord. La résolution du système (2.24) permet de déterminer les valeurs nodales afin de les reporter dans l'équation (2.9), et obtenir ainsi une solution linéaire de ϕ dans chaque élément du maillage. Les solutions approchées issues de différents maillages sont tracées sur la Figure 2.2 et comparées à la solution analytique de l'équation de Poisson. Ces résultats permettent de noter que plus le nombre d'éléments est important pour décrire la fonction ϕ , plus celle-ci est proche des valeurs de référence. Au passage, on peut noter que la condition de Dirichlet est bien imposée fortement : $\phi(x_n) = 3$. De plus, les solutions aux nœuds des éléments se retrouvent en totalité sur la solution analytique, cette observation témoigne à première vue de la puissance de la méthode.

Le système linéaire (2.24) est résolu ici par une méthode directe (algorithme de Gauss).

La Figure 2.3 représente l'évolution du temps de résolution en fonction du nombre d'éléments discrétisant le domaine. Ces résultats indiquent une croissance cubique du temps de calcul avec l'augmentation de n , ce qui limite ainsi le choix du nombre d'éléments

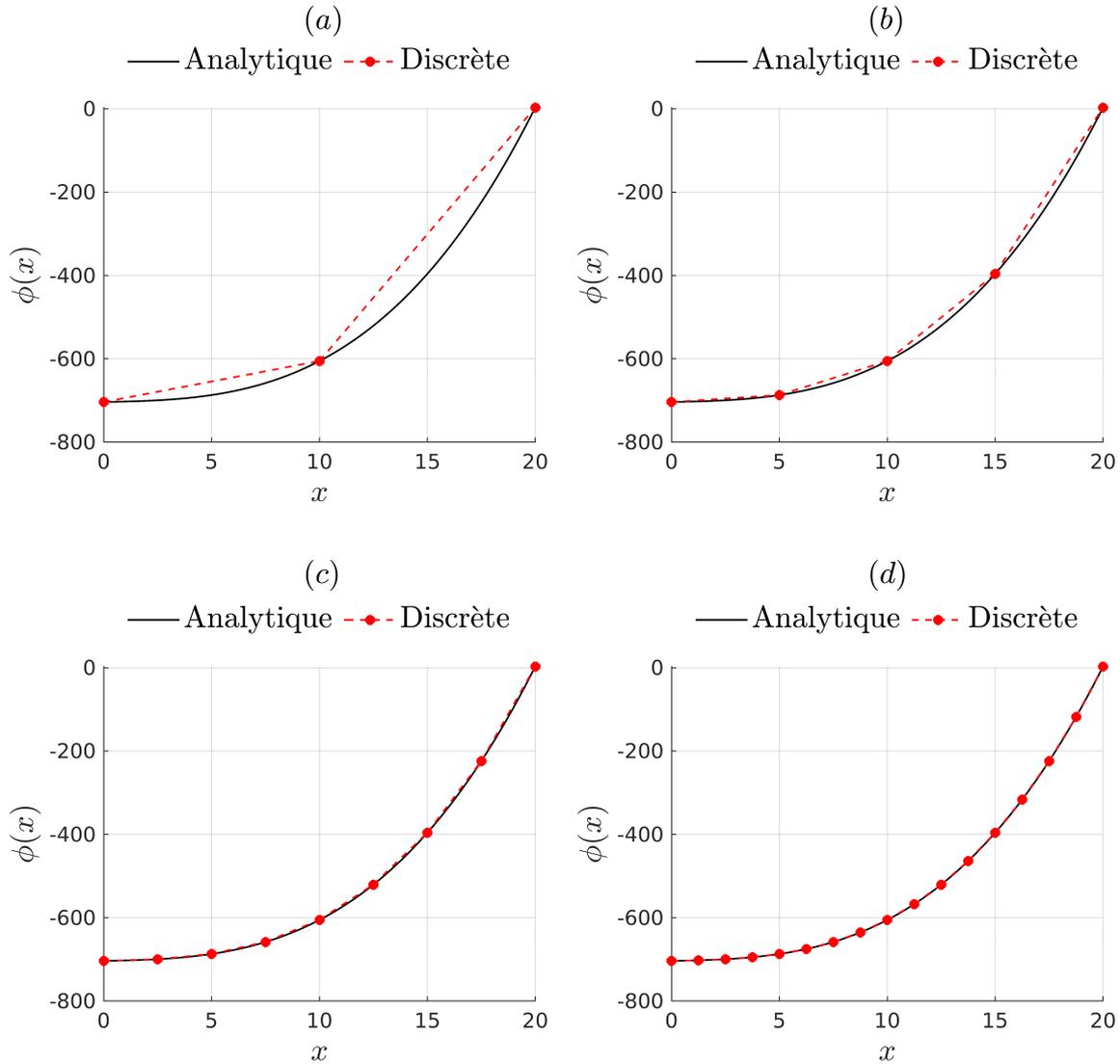


FIGURE 2.2 – Solutions discrétisées de la fonction ϕ pour différents maillages : (a) $n = 2$, (b) $n = 4$, (c) $n = 8$, (d) $n = 16$. Les constantes sont imposées à : $a = -0,5$; $b = -0,1$; $C_N = 1$ et $C_D = 3$.

décrivant le maillage.

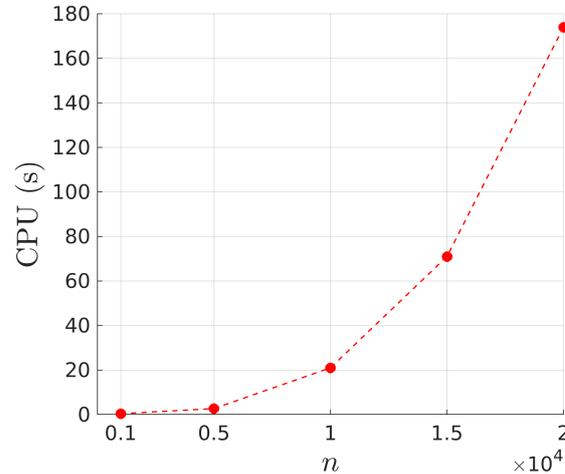


FIGURE 2.3 – Temps CPU pour la résolution du système (2.24), à différentes discrétisations : $n = 1000, 5000, 10000, 15000$ et 20000 .

Dans cette section, nous avons discrétisé le problème sur un maillage régulier en une dimension pour un ordre spatial $k = 1$, ce qui nous a permis d’obtenir le système linéaire (2.24) sans difficulté particulière, et d’implémenter facilement une méthode de résolution. Le formalisme Eléments-Finis devient beaucoup plus complexe lorsqu’il est appliqué aux maillages non-structurés en plusieurs dimensions, et lorsque les solutions sont approchées par des polynômes d’ordre élevé. Pour cette raison de complexité, il a été convenu de s’appuyer sur une bibliothèque Eléments-Finis afin de nous aider à coder l’ensemble du formalisme.

2.2 Librairie scientifique pour la Méthode des Eléments-Finis

De nos jours, plusieurs bibliothèques Eléments-Finis sont disponibles pour développer des codes de calcul basés sur la MEF, il a donc fallu choisir celle qui convenait le mieux au contexte de ce travail. Cette section présentera la bibliothèque choisie, puis résumera les principales contributions de cette dernière au développement du code de calcul conçu dans cette thèse, à savoir la formulation et la résolution des systèmes d’équations.

2.2.1 Choix de la librairie scientifique Eléments-Finis

Le choix de la bibliothèque s'est basé sur plusieurs critères indispensables. Tout d'abord, le choix de la licence. Certaines d'entre-elles mettent en œuvre la notion de copyleft, demandant à toute personne utilisant la librairie de retranscrire publiquement son code, afin de pouvoir être utilisé, étudié, ou encore modifié. L'exemple le plus connu est la licence GNU GPL (General Public License). Dans ce travail, nous souhaitons sélectionner une librairie s'affranchissant de cette clause de copyleft, ce qui est possible par exemple avec les licences BSD, MIT, ou encore GNU LGPL. Le deuxième choix très important fut le langage de programmation car nous souhaitons développer en langage de haut niveau C++. Le tableau 2.1 regroupe différentes librairies prenant en compte les deux critères venant d'être cités. Un troisième choix très important fut le type de discrétisation : nous voulions avoir recours aux éléments-finis continus et discontinus d'ordre élevé.

Librairie	Dim	Eléments-finis continus et discontinus	Ordre élevé	Parallélisation	Outil de visualisation inclus	Doc
deal.II	1,2,3 D	Oui	Oui	Possible	Non	Assez complexe
libMesh	1,2,3 D	Oui	Oui	Possible	Non	Complexe
GetFEM	1,2,3 D	Oui	Oui	Possible	Non	Assez complexe
MFEM	1,2,3 D	Oui	Oui	Possible	Oui (GLVis)	Simple

TABLE 2.1 – Comparaison de plusieurs bibliothèques scientifiques MEF.

Nous avons finalement retenu la bibliothèque scientifique MFEM car elle satisfait pleinement les critères de sélection. Par ailleurs, elle offre l'avantage d'être très bien documentée et propose des exemples de résolution pour différents types de problèmes, permettant ainsi de faciliter la prise en main de la méthode. Enfin, MFEM fournit un outil de visualisation nommé GLVis, permettant une représentation précise des solutions numériques aux ordres élevés. Ce dernier point est avantageux car il est parfois difficile de trouver un visualisateur externe compatible avec une librairie.

2.2.2 Aide apportée par la librairie MFEM

La résolution des EDP dans le cadre de travail consiste à résoudre des systèmes d'équations équivalents au système (2.24). Prenons le cas général d'un système de résolution pour déterminer une fonction ψ :

$$A\{\psi\} = \{b\} \quad (2.25)$$

Pour rappel, la matrice A et le second membre $\{b\}$ sont connus et le vecteur $\{\psi\}$ a pour composantes les valeurs nodales de la solution à approcher.

Formulation d'un système d'équations

Généralement, l'assemblage du système de résolution (2.25) peut se faire sans trop de difficultés pour le cas suivant :

- problème en une dimension,
- maillage régulier (pas d'espace constant),
- fonctions d'interpolation d'ordre $k = 1$.

En deux dimensions, les fonctions polynomiales approchant la solution ψ deviennent plus complexes. Pour un triangle composé de trois noeuds, la solution ψ peut être approchée dans l'élément sous la forme suivante (pour $k = 1$) :

$$\psi = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Le calcul des fonctions de forme N_1 , N_2 et N_3 dans ce cas est plus difficile qu'en une dimension. Classiquement, on se propose de passer dans un référentiel de référence (voir Fig. 2.4) afin de calculer plus efficacement les intégrales dans le système de résolution. Pour cela, le lien entre l'élément « réel » et l'élément de « référence » se fait par le biais d'une transformation géométrique.

Pour augmenter l'ordre spatial k , il est nécessaire de rajouter des nœuds supplémentaires sur les éléments, ce qui accroît le nombre d'inconnues au problème. Dans ce cas, les fonctions polynomiales approchant les solutions se complexifient davantage : au passage de l'ordre $k = 1$ à 2 puis à 3, les fonctions linéaires deviennent quadratiques puis cubiques.

Par conséquent, la détermination des fonctions de forme N_i , avec $i = 0, 1, \dots, n$ et n le nombre de degrés de liberté d'un élément, devient plus complexe.

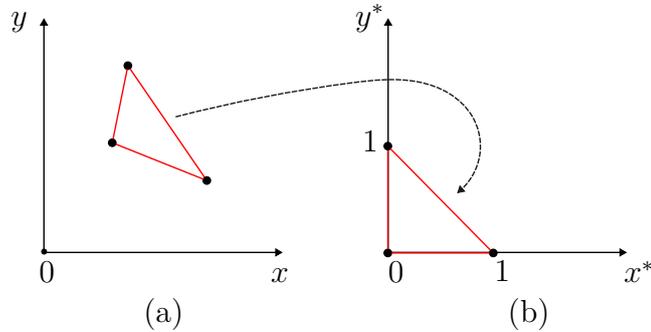


FIGURE 2.4 – Passage d'un élément réel à un élément de référence en deux dimensions : (a) référentiel réel, (b) référentiel de référence.

En résumé, la bibliothèque MFEM apporte une aide considérable dans la construction des systèmes d'équations (2.25), en passant du changement de référentiel à l'intégration des fonctions de formes, même les plus complexes.

Résolution d'un système d'équations

Le système linéaire (2.24) établi dans la section précédente a pu être résolu par méthode directe. Ces méthodes deviennent souvent mal adaptées lorsque la taille du système à résoudre devient trop importante, puisque cela amène à des temps de calcul relativement conséquents (voir Fig. 2.3). Dans ce travail, les systèmes d'équations (2.25) nécessaires à la modélisation des écoulements à surface libre peuvent atteindre des tailles considérables. Pour cela, nous souhaitons avoir recours aux méthodes itératives de résolution. Par comparaison aux méthodes directes, elles sont moins coûteuses en temps de calcul et nécessitent moins de stockage.

Les méthodes itératives sont basées sur la conception d'une suite de solutions $\{\psi\}^m$ censées converger vers la solution recherchée $\{\psi\}$ au cours d'un processus itératif. Après m itérations, nous obtenons une solution approchée $\{\psi\}^m$ qui ne satisfait pas tout à fait l'équation (2.25). En effet, $\{\psi\}^m$ vérifie plutôt :

$$A\{\psi\}^m = \{b\} - \{r\}^m \quad (2.27)$$

où $\{r\}^m = \{b\} - A\{\psi\}^m$ désigne le résidu à l'itération m . En soustrayant l'équation (2.27) de (2.25), nous obtenons :

$$A \underbrace{(\psi - \psi^m)}_{\{\varepsilon\}^m} = \{r\}^m \quad (2.28)$$

Le terme $\{\varepsilon\}^m$ désigne l'erreur entre la solution espérée $\{\psi\}$ et la solution obtenue $\{\psi\}^m$ à l'itération m . Le processus itératif est stoppé à l'aide d'un critère d'arrêt sur l'erreur, autrement dit sur le résidu minimal souhaité. Les méthodes itératives les plus connues sont les algorithmes de Jacobi, de Gauss-Seidel, ou encore du gradient conjugué. La bibliothèque MFEM propose une méthode encore plus efficace, de type Gradient Conjugué Préconditionné (GCP) pour traiter les systèmes de résolution (2.25). Le préconditionnement peut s'avérer essentiel lorsque la matrice A dans (2.25) est mal conditionnée. En effet, un mauvais conditionnement affecte généralement le taux de convergence de la méthode.

2.3 Conclusion

Ce chapitre s'est consacré à la description des principales étapes de résolution des EDP par le biais de la méthode des Eléments-Finis. Pour cela, nous nous sommes basés sur l'exemple de la résolution d'une équation de Poisson en une dimension d'espace. Ce chapitre a permis de se familiariser avec les notions suivantes : formulation faible des équations, fonctions de forme et valeurs nodales des solutions, construction et assemblage du système global de résolution... Afin de se concentrer sur la modélisation des écoulements à surface libre, et dans l'optique d'éviter de redévelopper une nouvelle bibliothèque MEF, il a été convenu dans ce travail de s'appuyer sur une librairie MEF existante. Après avoir examiné plusieurs options, notre choix s'est finalement porté sur la bibliothèque MFEM.

Dans ce manuscrit, deux chapitres seront consacrés à la description de la discrétisation Eléments-Finis des équations de l'écoulement, dans un contexte monofluide et bifluide. Néanmoins, avant de s'y intéresser davantage, il est nécessaire de traiter le problème de surface libre, demandant l'utilisation d'une méthode particulière.

MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LE SUIVI DE SURFACE LIBRE

Pour simuler des écoulements à surface libre/interface mobile, il est essentiel d'obtenir des informations sur les fluides considérés, mais aussi sur l'évolution de la surface libre dans le temps.

Ce chapitre commencera par présenter différentes méthodes permettant de modéliser une interface mobile. Deux grandes approches se distinguent dans la littérature : les méthodes dites « front tracking » et celles dites « front capturing ». Nous passerons en revue les avantages et les inconvénients de différentes méthodes appartenant à ces deux approches pour sélectionner celle qui convient le mieux au contexte de ce travail, à savoir la méthode Level-Set. Cette dernière est également désignée comme la méthode des lignes de niveau. La dernière section de ce chapitre, avant de conclure, sera consacrée à sa description.

3.1 Les méthodes « front tracking »

Les méthodes « front tracking » font partie d'une catégorie de suivi d'interface basée sur une approche lagrangienne. Elles permettent de suivre explicitement l'évolution de l'interface à l'aide de pointeurs, pouvant être des marqueurs, des particules...

L'une de ces approches se base sur des maillages mobiles où la géométrie des éléments s'adapte à la forme de l'interface. Elle demande alors de remailler ou de déformer systématiquement l'ensemble du domaine de calcul, ce qui peut accroître le temps de simulation. Cette méthode, purement lagrangienne, permet de prendre en compte correctement les conditions de saut à l'interface dans un contexte d'écoulement multiphasique. Cependant, elle se révèle peu efficace pour traiter des géométries complexes d'interface, notamment

lorsque cette dernière doit se reconnecter (ex : vague déferlante).

D'autres méthodes s'affranchissent de l'utilisation d'un maillage mobile, nous en présenterons trois dans cette section : les approches Particle-In-Cell (PIC), Marker-And-Cell (MAC) et la méthode des marqueurs. A la différence d'un formalisme purement lagrangien, seuls les pointeurs se voient déplacés afin de suivre l'interface.

3.1.1 Les méthodes PIC et MAC

Les méthodes PIC et MAC s'appuient sur un maillage eulérien fixe, elles sont considérées plus précisément comme des approches « volume tracking », où les particules/marqueurs sont répartis à l'intérieur des cellules du maillage pour y marquer la présence du fluide considéré. L'interface est suivie de façon explicite ici, en traçant le chemin des marqueurs.

La méthode PIC est relativement ancienne, elle apparaît pour la première fois en 1955 dans les travaux d'*Harlow et al.* [28], où le fluide considéré est décrit par un ensemble de particules se déplaçant à travers les cellules, chaque particule ayant une masse constante. Si l'une d'elles traverse une face cellulaire, sa masse est alors soustraite à la cellule « donneuse » puis ajoutée à celle « réceptrice ». Le domaine de calcul est constitué de mailles rectangulaires de taille uniforme, où la solution recherchée est définie au centre de ces dernières tandis que les vitesses sont définies aux sommets. Initialement, les particules sont réparties uniformément à l'intérieur des cellules, puis à chaque pas de temps, une pseudo-vitesse est calculée pour chacune des particules à l'aide d'un schéma de pondération, basé sur les valeurs de la vitesse aux sommets et la valeur de la solution au centre. Ainsi, dans une étape purement lagrangienne, les particules sont déplacées vers de nouvelles positions. De nos jours, cette méthode n'est plus couramment utilisée, elle a cependant joué un rôle important dans le développement de nouvelles techniques numériques.

En 1965, *Harlow et Welch* [29] modifient la méthode PIC en remplaçant les particules par des marqueurs, n'ayant alors aucune masse. Cette méthode devient connue sous le nom de Marker-And-Cell pour la résolution des équations de Navier-Stokes appliquée aux problèmes d'écoulements à surface libre. Le domaine de calcul est similaire à celui de la méthode PIC, on y distingue trois catégories de mailles : celles qui sont remplies de marqueurs, celles qui en sont dépourvues, et celles qui sont supposées enfermer l'interface, notée Γ (voir Fig. 3.1).

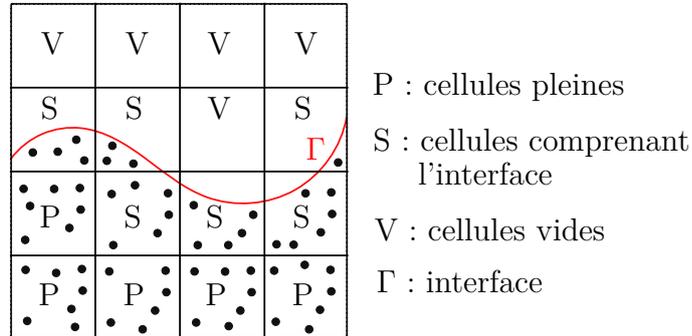


FIGURE 3.1 – Présentation de la méthode MAC « volume tracking ».

Dans le cadre d'une discrétisation différences-finies des équations de Navier-Stokes, les vitesses sont définies sur les faces des cellules et la pression au centre. La vitesse d'un marqueur est ensuite déterminée par interpolation à partir des valeurs aux faces, permettant alors de le déplacer à chaque pas de temps. En suivant le chemin des marqueurs, il est donc possible de connaître l'évolution de l'interface. Toutefois, la répartition des marqueurs dans l'écoulement doit être suffisamment dense pour permettre une localisation précise de l'interface, ce qui implique un coût important en termes de ressources informatiques et de temps de calcul, notamment en trois dimensions.

3.1.2 Méthode des marqueurs

En 1967, *Daly* [16] propose une approche « surface tracking » similaire à la méthode MAC, qui consiste à disposer des marqueurs non pas dans l'ensemble d'un domaine fluide mais uniquement sur l'interface. La forme la plus répandue de cette méthode est proposée plus tard dans les travaux de *Tryggvason* [68], où l'interface est repérée par des marqueurs advectés par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\mathbf{x}_s}{dt} = \mathbf{u}_s(\mathbf{x}_s, t), \quad \mathbf{x}_s \in \Gamma \quad (3.1)$$

Chaque marqueur s est représenté par sa coordonnée \mathbf{x}_s qui vérifie l'équation (3.1), où \mathbf{u}_s désigne sa vitesse. La méthode est illustrée de manière simple sur la Figure 3.2. Elle se révèle très précise lorsque la distance entre deux marqueurs consécutifs reste faible et régulière. Cependant, cette approche a l'inconvénient de ne pas gérer naturellement les changements topologiques de l'interface (ex : reconnexion). Dans ce cas particulier, il est

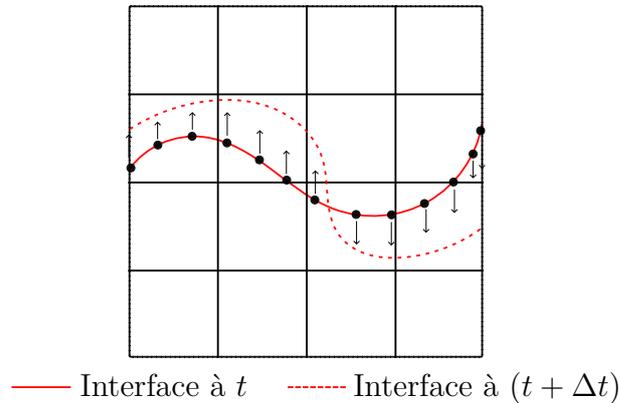


FIGURE 3.2 – Présentation de la méthode des marqueurs « surface tracking ».

nécessaire d'ajouter ou d'enlever des marqueurs. Enfin, cette méthode est coûteuse en temps de calcul en trois dimensions.

3.2 Les méthodes « front capturing »

Les méthodes « front capturing » font partie d'une catégorie de capture d'interface basée sur une approche purement eulérienne. L'interface est capturée grâce à un champ scalaire qui la définit implicitement sur un maillage fixe. Ce champ est noté $f(\mathbf{x}, t)$, avec \mathbf{x} l'espace en une, deux ou trois dimensions et t le temps. Une équation de transport est ensuite utilisée pour le mouvoir et connaître ainsi l'évolution de l'interface. La fonction $f(\mathbf{x}, t)$ est advectée selon une équation d'advection classique, dépendante d'un champ de vitesse \mathbf{u} :

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (3.2)$$

Nous aborderons ici les deux approches les plus connues, à savoir les méthodes Volume-Of-Fluid (VOF) et Level-Set (LS), qui se différencient par le choix de la fonction $f(\mathbf{x}, t)$ et/ou le choix du champ de vitesse.

3.2.1 La méthode Volume-Of-Fluid

En 1976, *Noh et Woodward* [52] introduisent le concept de « fraction volumique » pour connaître le taux de remplissage d'un fluide dans chaque cellule du maillage. Plus tard, en 1981, *Hirt et Nichols* [30] mettent en place la méthode VOF en renforçant les

concepts préexistants. La fonction $f(\mathbf{x}, t)$ de l'équation (3.2) est choisie pour être une fonction discrète taux de présence. Elle est généralement notée $\alpha(\mathbf{x}, t)$ et représente la fraction volumique d'un fluide dans chaque volume de contrôle (voir Fig. 3.3).

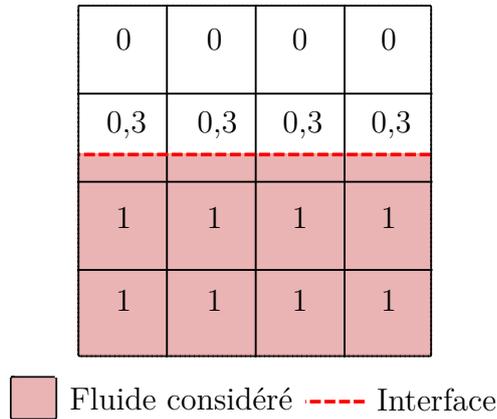


FIGURE 3.3 – Présentation de la méthode Volume-Of-Fluid.

La fraction volumique peut varier théoriquement de 0 à 1 pour le fluide considéré :

- Si $\alpha(\mathbf{x}, t) = 0$ le volume de contrôle ne contient pas ce fluide.
- Si $\alpha(\mathbf{x}, t) = 1$ le volume de contrôle ne contient que ce fluide.
- Si $0 < \alpha(\mathbf{x}, t) < 1$ le volume de contrôle contient un mélange des deux fluides.

Une cellule « mixte », qui contient un mélange des deux fluides, marque alors la présence de l'interface sans préciser toutefois sa position exacte. Dans le cadre d'une approche VOF, l'équation de transport utilisée pour advecter la quantité α est généralement écrite sous sa forme conservative :

$$\frac{\partial \alpha(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \alpha(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad (3.3)$$

A l'inverse des méthodes « front tracking », les méthodes « front capturing » permettent de modéliser les écoulements sans connaître avec précision la position de l'interface, puisque cette dernière n'est pas suivie explicitement. Pour la reconstruire, la méthode VOF nécessite l'utilisation d'algorithmes supplémentaires, plus ou moins complexes à mettre en œuvre. Sans être exhaustif, nous pouvons citer les deux méthodes de reconstruction suivantes :

- La méthode SLIC (Simple Line Interface Calculation), où l'interface est représentée par un segment dans chaque volume de contrôle (voir Fig. 3.4 (b)). Les segments sont parallèles horizontalement ou verticalement au maillage en fonction de la direction du vecteur vitesse.

- La méthode PLIC (Piecewise Linear Interface Calculation) qui conduit à des interfaces non alignées avec le maillage (voir Fig. 3.4 (c)). Leur direction se calcule grâce au gradient de la fonction $\alpha(\mathbf{x}, t)$ qui donne la normale à l'interface. Bien que cette technique soit plus complexe, elle s'avère plus précise.

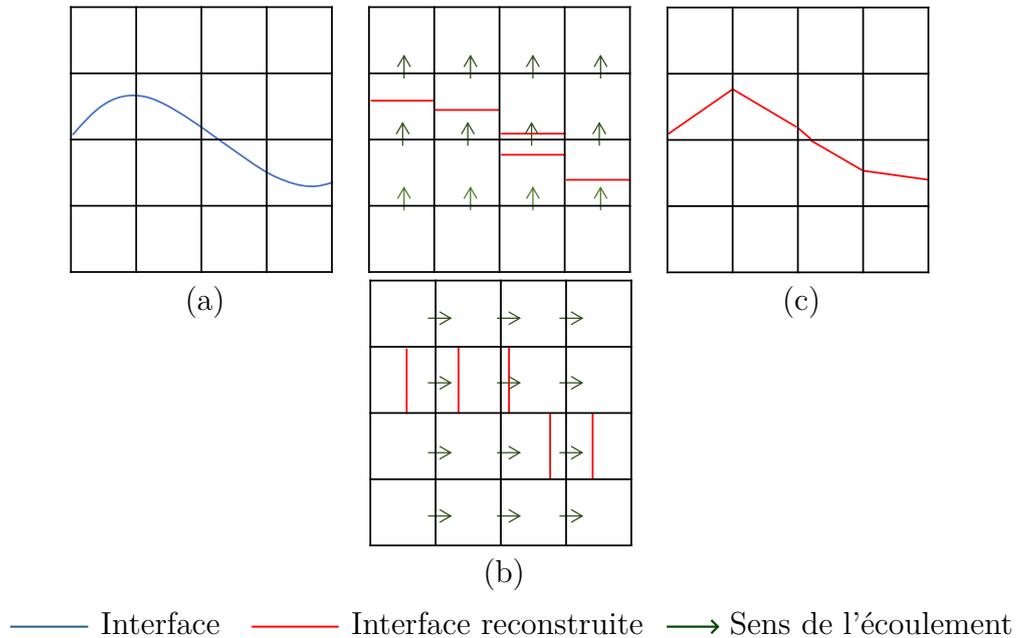


FIGURE 3.4 – (a) Position de l'interface. Reconstruction de l'interface par méthodes (b) SLIC et (c) PLIC.

Le recours aux méthodes conservatives (ex : formalisme Volumes-Finis) pour résoudre l'équation (3.3) permet de conserver naturellement la fraction volumique des fluides transportés, ce qui est un véritable avantage pour la méthode VOF. On note cependant que son principal inconvénient réside dans la reconstruction de l'interface, qui se complexifie davantage en trois dimensions.

3.2.2 La méthode Level-Set

La méthode Level-Set (méthode des lignes de niveau) a été introduite en 1988 par *Osher et Sethian* [53]. La fonction qui définit implicitement l'interface dans cette approche est appelée fonction Level-Set, nous la notons $\chi(\mathbf{x}, t)$ dans ce travail. En réalité, cette fonction désigne une variété d'iso-contours situés à une certaine distance de l'interface. Lorsque cette distance est nulle alors l'iso-contour concerné définit l'interface. Cette dernière est ensuite advectée de manière passive par un champ de vitesse \mathbf{u} . L'équation de transport dans ce cas-ci s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \chi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \chi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (3.4)$$

La position de l'interface est déterminée a posteriori en recherchant les valeurs nulles de la fonction $\chi(\mathbf{x}, t)$. Afin d'approfondir la compréhension de cette méthode, elle sera expliquée plus en détails dans une prochaine section.

A l'inverse de la fraction volumique utilisée dans l'approche VOF, la fonction $\chi(\mathbf{x}, t)$ n'est pas assimilable à une propriété du fluide. Ainsi, la méthode Level-Set n'admet généralement pas de bonnes propriétés de conservation. Malgré ce dernier aspect, elle offre l'avantage de représenter facilement l'interface de façon continue. Par ailleurs, elle est facilement implémentable aux ordres élevés, lorsque la méthode de résolution le permet, en deux et trois dimensions.

3.3 Méthode sans maillage : Smoothed Particle Hydrodynamics

Certaines méthodes n'utilisent pas de maillage, elles font partie de la catégorie « Meshless Methods ». Ces dernières présentent l'avantage d'être particulièrement bien adaptées aux géométries complexes d'interface. Parmi ces approches, on retrouve la méthode Smoothed-Particle-Hydrodynamics (SPH), introduite en 1977 par *Lucy* [44] et *Gingold et Monaghan* [22] dans un contexte astrophysique. Par la suite, elle a été utilisée en mécanique des fluides pour la simulation d'écoulements à surface libre.

Dans ce contexte, le domaine de calcul Ω est discrétisé par un ensemble de particules dont la connectivité peut évoluer au cours de la simulation. Chacune des particules

transporte des attributs comme la masse, la position, l'énergie... L'idée de base de la méthode SPH est fondée sur l'utilisation d'une interpolation intégrale basée sur des noyaux (kernels) qui sont définis dans plusieurs sous-domaines. Un sous-domaine Ω_i regroupe un ensemble de particules autour d'une seule, il est caractérisé par une taille κh , où généralement $\kappa = 2$ (voir Fig. 3.5). La position de l'interface peut être déterminée en s'intéressant aux emplacements des particules qui sont réparties uniquement dans le fluide considéré. Pour une particule i , si plusieurs voisines l'entourent alors l'interface n'est pas présente dans l'espace Ω_i . Au contraire, si l'on note une absence de particule autour de cette dernière, comme la particule j de la Figure 3.5, on peut y supposer la présence de l'interface. Le problème apparaît de manière évidente ici : si les particules ne sont pas réparties de façon homogène dans le fluide alors la description de l'interface peut être imprécise.

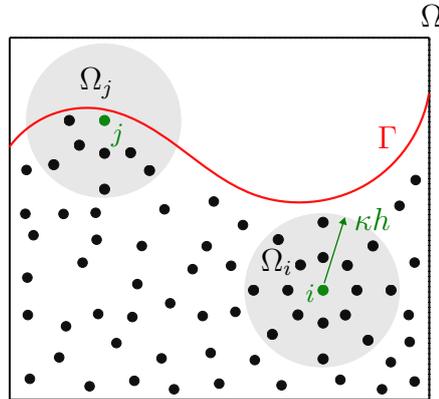


FIGURE 3.5 – Sous-domaines Ω_i et Ω_j de deux particules pour la méthode SPH.

Le succès de la méthode dépend du nombre de particules utilisé. Une grande partie du temps de calcul est consacrée à la recherche des voisines qui définissent le sous-domaine Ω_i d'une particule donnée. Cependant, il n'est pas nécessaire de calculer ou de stocker des données dans l'espace non occupé par le fluide considéré, ce qui est un avantage lors des simulations.

3.4 Méthode numérique choisie

Le Tableau 3.1 présente succinctement les avantages et inconvénients des méthodes lagrangiennes (L) et eulériennes (E) présentées dans les sections précédentes.

Méthodes	Avantages	Inconvénients
MAC (L) 1965	<ul style="list-style-type: none"> - Très bonne précision - Gère les changements topologiques de l'interface 	<ul style="list-style-type: none"> - Exigence élevée en ressources informatiques pour un grand nombre de particules - Temps de calcul élevé en 3D
Marqueurs (L) 1967	<ul style="list-style-type: none"> - Très bonne précision - Nécessite moins de ressources informatiques que les méthodes MAC et SPH (particules uniquement sur l'interface) 	<ul style="list-style-type: none"> - Difficulté pour gérer les changements topologiques de l'interface - Temps de calcul élevé en 3D
SPH (L) 1977	<ul style="list-style-type: none"> - Bonne précision - Gère les changements topologiques de l'interface 	<ul style="list-style-type: none"> - Son succès dépend du nombre de particules utilisé - Exigence élevée en ressources informatiques pour un grand nombre de particules - Temps de calcul élevé en 3D
VOF (E) 1981	<ul style="list-style-type: none"> - Bonne précision - Gère les changements topologiques de l'interface - Naturellement conservative 	<ul style="list-style-type: none"> - Nécessite un algorithme supplémentaire pour décrire l'interface - Description discontinue de l'interface
Level-Set (E) 1988	<ul style="list-style-type: none"> - Bonne précision - Gère les changements topologiques de l'interface - Description continue de l'interface - Naturellement implémentable aux ordres élevés 	<ul style="list-style-type: none"> - Mauvaises propriétés de conservation

TABLE 3.1 – Comparaison des différentes méthodes de modélisation d'interface.

Dans le cadre de cette thèse, nous souhaitons pouvoir gérer d'importantes déformations de l'interface, comme par exemple des phénomènes de reconnexion (ex : vague déferlante), sans que le coût de calcul ne soit trop élevé. En toute logique, notre choix s'est donc porté vers une méthode type « front capturing ». Parmi les deux approches de cette catégorie, nous avons retenu la méthode Level-Set car elle semblait se prêter au mieux au contexte de ce travail. En effet, l'interface est représentée plus simplement et plus précisément qu'avec la méthode VOF. De plus, elle est reconnue pour gérer naturellement les changements topologiques. Enfin, elle est facilement implémentable aux ordres

élevés lorsque la méthode de résolution le permet (ex : formalisme Eléments-Finis).

3.5 Présentation de la méthode Level-Set

De nos jours, la méthode Level-Set est devenue l'une des plus populaires dans la catégorie « front capturing », avec la méthode VOF. Cette section se consacrera à une description plus détaillée de cette approche, introduite précédemment. Nous verrons que la résolution de l'équation de transport, telle que définie dans la partie 3.2.2, ne permet pas de conserver les propriétés de la fonction Level-Set. Pour y remédier, il est généralement nécessaire d'utiliser des algorithmes spéciaux dit de « redistanciation ».

3.5.1 Principe

La méthode est présentée pour un cas simple en deux dimensions. La Figure 3.6 illustre un domaine borné de \mathbb{R}^2 composé de deux milieux fluides Ω_1 et Ω_2 , on note Γ l'interface entre les deux fluides. L'objectif est d'étudier l'évolution de l'interface qui est induite par un champ de vitesse \mathbf{u} au cours du temps.

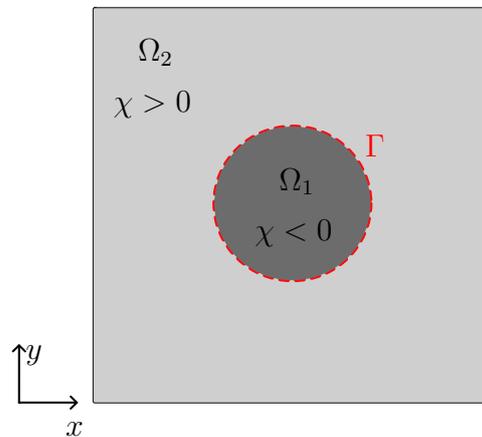


FIGURE 3.6 – Domaine de calcul pour une interface circulaire en deux dimensions.

On qualifie l'interface Γ comme la courbe de niveau zéro d'une fonction régulière Lipschitzienne, notée $\chi(x, y, t)$. Autrement dit, à l'instant t :

$$\Gamma(t) = \{x, y \text{ tels que } \chi(x, y, t) = 0\} \quad (3.5)$$

Pour rappel, la fonction Level-Set $\chi(x, y, t)$ désigne dans son ensemble une variété d'iso-contours situés à une certaine distance de l'interface. En définitive, l'interface est implicitement déterminée par la fonction $\chi(x, y, t)$, c'est donc l'évolution dans le temps de cette fonction qui est étudiée ici.

3.5.2 Fonction distance signée

Dans la littérature, $\chi(x, y, t)$ est généralement initialisée par une fonction distance signée, notée $d(x, y)$. Par convention, nous désignons $\chi < 0$ dans le domaine Ω_1 et $\chi > 0$ dans le domaine Ω_2 (voir Fig. 3.6). Ainsi, la fonction Level-Set prend initialement la forme suivante :

$$\chi(x, y, 0) = \begin{cases} -d(x, y) & \text{si } x, y \in \Omega_1 \\ d(x, y) & \text{si } x, y \in \Omega_2 \\ 0 & \text{si } x, y \in \Gamma \end{cases} \quad (3.6)$$

La fonction $\chi(x, y, 0)$ est illustrée sur la Figure 3.7 pour un domaine carré $x, y \in [0; 10]$ m, où l'interface est centrée en $x_c = y_c = 5$ m avec un rayon $r = 2$ m.

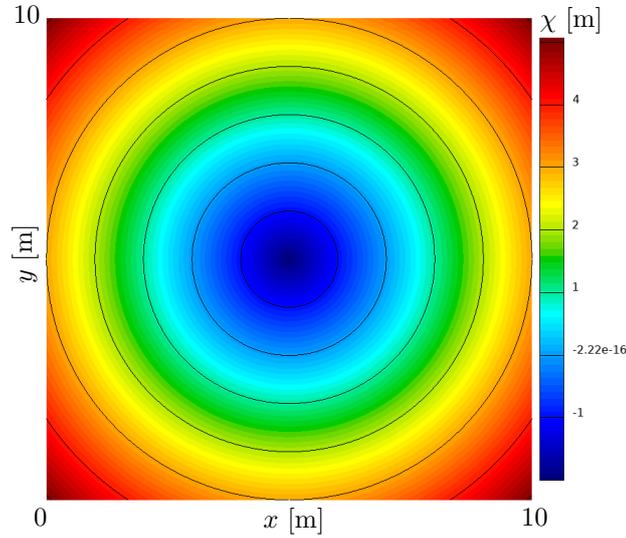


FIGURE 3.7 – Fonction Level-Set pour une interface circulaire en deux dimensions.

Pour une fonction $\chi(x, y, t)$ ayant un caractère distance signée, alors la norme de son gradient peut s'écrire sous la forme de l'équation eikonale suivante :

$$|\nabla\chi| = |\nabla d| = 1 \quad (3.7)$$

3.5.3 Equation de transport

A l'instant initial, la position de l'interface Γ est connue, la fonction Level-Set est alors initialisée en déterminant la plus courte distance entre les coordonnées du domaine et Γ . Le déplacement de l'interface est obtenu naturellement en transportant χ par un champ de vitesse noté \mathbf{u} :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \chi = 0 \quad (3.8)$$

Pour la résolution des écoulements multiphasiques, la vitesse \mathbf{u} au niveau de l'interface se trouve être la solution des équations de l'écoulement (Navier-Stokes, Euler, Potentiel...). Une fois la fonction Level-Set advectée, les valeurs de χ vont permettre de connaître la nouvelle composition du domaine de calcul Ω :

$$\text{Pour un point } (x, y) \begin{cases} \text{Si } \chi(x, y) < 0 \text{ alors } x, y \in \Omega_1 \\ \text{Si } \chi(x, y) > 0 \text{ alors } x, y \in \Omega_2 \\ \text{Si } \chi(x, y) = 0 \text{ alors } x, y \in \Gamma \end{cases}$$

3.5.4 Propriétés de la fonction Level-Set

La fonction χ permet d'accéder à la normale à l'interface et la courbure moyenne, notées respectivement \mathbf{n} et κ , définies comme suit :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \chi}{|\nabla \chi|} \quad (3.9)$$

$$\kappa = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \chi}{|\nabla \chi|} \right) = \nabla \cdot \mathbf{n} \quad (3.10)$$

La monotonie de la fonction Level-Set à l'approche de l'interface permet de calculer précisément les gradients, ce qui est essentiel pour déterminer correctement les quantités (3.9) et (3.10). Ces dernières permettent de déterminer, par exemple, les effets de tension de surface, à l'instar de ce qui est fait dans les travaux de *Maarouf* [45] et *Howard* [31]. Durant la simulation, il est important que la fonction χ ne soit pas trop bruitée, car les perturbations sur cette dernière s'accroîtront à chaque dérivation effectuée au cours des calculs : une première fois pour la normale, puis une seconde fois pour la courbure.

Dans le cadre d'un écoulement bifluide régi par les équations de Navier-Stokes, chaque

fluide est caractérisé par sa masse volumique ρ et sa viscosité ν . La fonction Level-Set permet de déterminer ces quantités de façon globale :

$$\rho(\chi) = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)H(\chi) \quad (3.11)$$

$$\nu(\chi) = \nu_1 + (\nu_2 - \nu_1)H(\chi) \quad (3.12)$$

où $H(\chi)$ désigne une fonction de Heaviside :

$$H(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi < 0 \\ 1 & \text{si } \chi > 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Pour s'affranchir de la discontinuité des quantités ρ et ν à travers l'interface, une solution possible consiste à lisser la fonction de Heaviside. Les auteurs *Tanguy* [15] et *Dalmon* [66] redéfinissent la fonction $H(\chi)$ (3.13) de la façon suivante :

$$H(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi < -\epsilon \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\chi}{\epsilon} + \frac{1}{\pi} \sin \left(\frac{\pi\chi}{\epsilon} \right) \right) & \text{si } |\chi| \leq \epsilon \\ 1 & \text{si } \chi > \epsilon \end{cases} \quad (3.14)$$

Les sauts sont alors imposés sur une épaisseur d'interface fictive. Pour assurer que cette dernière soit constante dans le temps et dans l'espace, il est nécessaire que la fonction Level-Set respecte sa propriété de distance signée. D'après la définition (3.14), l'épaisseur de l'interface est égale à 2ϵ , où ϵ est classiquement défini comme suit :

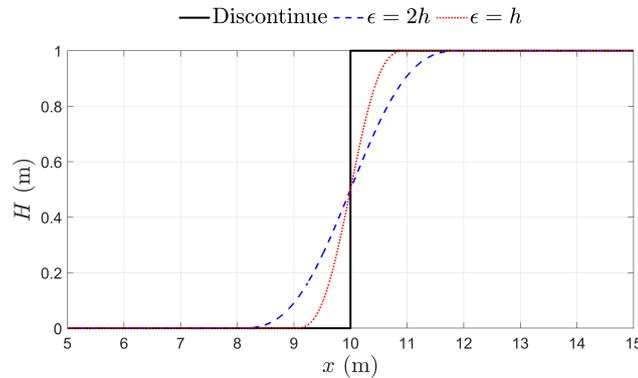


FIGURE 3.8 – Fonction Heaviside $H(x)$ en fonction de x (m). $\chi < 0$ si $x < 10$ et $\chi > 0$ si $x > 10$, $h = 1$ m.

$$\epsilon = \alpha h \quad \text{avec : } 1 \leq \alpha \leq 2 \quad (3.15)$$

avec h la taille de maille. La Figure 3.8 illustre la différence entre la fonction de Heaviside discontinue (3.13) et sa version continue (3.14), pour deux épaisseurs d'interface. Nous verrons à la suite de ce manuscrit qu'il existe d'autres fonctions pour lisser la distribution de Heaviside.

3.5.5 Redistanciation

Le fonction Level-Set est connue pour perdre son caractère de distance signée lorsqu'elle est advectée au cours du temps. En effet, aucune règle n'est appliquée pour conserver cette propriété. *Jesper Grooss* [24] illustre ce phénomène dans sa thèse en prenant l'exemple d'une goutte qui tombe dans un canal (voir Fig. 3.9). A $t = 0$, l'interface est circulaire, elle est ensuite déformée par l'écoulement (voir t_1 et t_2). Pour $t > t_0$, les courbes de niveau ne sont plus équidistantes de l'interface, ce qui témoigne bien que la fonction Level-Set a perdu sa propriété de distance signée. Pour pallier ce problème, il est nécessaire d'utiliser des techniques dites de redistanciation ou de réinitialisation. L'objectif étant de redonner un caractère distance signée à la fonction Level-Set, quand celle-ci la perd au cours de son évolution dans le temps. En principe, l'iso-contour zéro représentant l'interface est maintenu, ce sont les autres courbes de niveau, situées à une certaine distance de Γ , qui sont difficilement conservées. Le problème à résoudre est donc le suivant :

Soit χ_0 définissant implicitement une interface $\Gamma = \{x, y \in \Omega / \chi_0(x, y) = 0\}$ et telle que $|\nabla\chi_0| \neq 1$, déterminer la fonction χ définissant $\Gamma = \{x, y \in \Omega / \chi(x, y) = 0\}$ et telle que $|\nabla\chi| = 1$.

Le formalisme Level-Set est souvent associé à des algorithmes de redistanciation dans la littérature, bien que ces derniers puissent être difficiles à implémenter. Il est donc important de comprendre pourquoi ils sont considérés comme nécessaires. En principe, si l'on ne redistancie pas :

- Il est possible que le gradient $\nabla\chi$ ne soit pas correctement calculé, ce qui peut entraîner des instabilités numériques lors de la résolution de l'équation de transport (3.8).

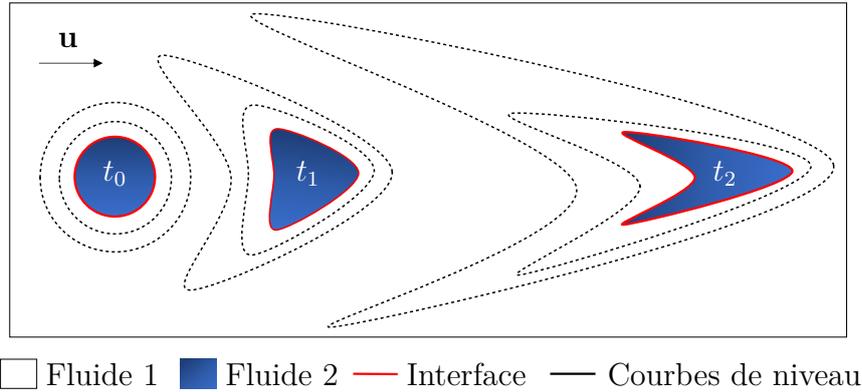


FIGURE 3.9 – Déformation d’une goutte dans un canal.

Cela peut également affecter le calcul de la normale (3.9) ainsi que celui de la courbure (3.10).

- Dans le cadre d’un écoulement bifluide, il est possible que les quantités globales (i.e. la masse volumique et la viscosité) ne soient pas correctement déterminées lorsque l’on épaissit fictivement l’interface à l’aide de la fonction Level-Set.

- L’estimation des iso-contours peut être altérée, ce qui peut conduire à un aplatissement excessif de la fonction Level-Set au niveau de l’interface, et évaluer ainsi de façon erronée sa position. Ceci se traduit généralement par une perte/gain de masse.

Pour contourner l’étape de redistanciation, on ne souhaite donc pas recourir aux trois points venant d’être cités. Pour éviter de déterminer le gradient $\nabla\chi$, il est possible de définir l’équation de transport (3.8) sous sa forme conservative. De ce fait, l’utilisation d’une formulation faible permet de relâcher la contrainte sur la fonction Level-Set : l’équation ne dépend plus du gradient $\nabla\chi$, mais seulement de la fonction χ . Dans le cadre d’un écoulement bifluide, les discontinuités sur les caractéristiques du milieu physique peuvent être conservées lorsque l’on a recours à des méthodes particulières (ex : la méthode Ghost-Fluid, qui sera introduite plus loin dans ce manuscrit). De cette façon, l’interface n’a pas besoin d’être épaissie sur quelques mailles pour déterminer globalement la masse volumique et la viscosité. Enfin, la localisation de l’interface doit être recherchée en post-traitement, sans faire partie du processus de résolution. Généralement, il est difficile de rassembler l’ensemble de ces critères pour modéliser les écoulements à surface libre.

3.6 Méthodes de redistanciation

Plusieurs méthodes sont disponibles pour redistancier/réinitialiser la fonction Level-Set dans la littérature. La résolution numérique de ce type de problème nécessite d'ajouter un ou plusieurs algorithmes au formalisme classique de la méthode LS. Dans cette section, nous présenterons les trois approches les plus connues, à savoir :

- La résolution de l'équation de redistanciation :

$$\frac{\partial \chi}{\partial \tau} + S(\chi_0)(|\nabla \chi| - 1) = 0 \quad (3.16)$$

Pour une fonction Level-Set χ_0 ayant perdu sa propriété de distance signée, la simulation de l'écoulement est figée pour un instant donné afin de procéder à une relaxation de la fonction χ sur un pseudo-temps. Ce dernier est noté τ et doit être suffisamment important pour converger vers un état stationnaire. En effet, à convergence, le caractère de distance signée est bien retrouvé : $|\nabla \chi| = 1$. Cette technique peut coûter cher en temps de calcul, de plus, elle est connue pour faire osciller la position de l'interface.

- La méthode Fast-Marching : On suppose que l'on dispose d'un champ de référence χ qui n'est plus caractérisé par une distance signée mais qui définit implicitement une interface Γ sur un domaine de calcul Ω . Dans ce cas, on souhaite directement déterminer χ solution de l'équation eikonale :

$$\begin{cases} |\nabla \chi| = 1 & \forall (x, y) \in \Omega \\ \chi = 0 & \text{sur } \Gamma \text{ donnée} \end{cases} \quad (3.17)$$

Le calcul de la fonction distance est réalisé des points contenant les valeurs χ les plus faibles (c'est-à-dire proche de Γ) vers les valeurs plus élevées. Cet algorithme est connu pour sa rapidité grâce à un tri par tas. A l'inverse de l'équation de redistanciation, cette méthode conserve la position de l'interface. Cette approche est généralement utilisée sur des maillages structurés dans le formalisme Différence-Finies mais reste peu exploitée dans le formalisme Eléments-Finis.

- Les algorithmes destinés à recalculer les courbes de niveau : Ici l'interface est reconstruite dans un premier temps afin de recalculer dans un second temps la distance minimale entre les coordonnées du domaine et cette dernière. Cette étape peut être très

coûteuse en temps de calcul, pour cela, un tri par tas est généralement utilisé. Cette méthode a le principal avantage de s'affranchir d'une résolution supplémentaire liée à l'équation eikonale. De plus, elle permet, au même titre que la méthode Fast-Marching, de conserver la position de l'interface. Enfin, ces algorithmes sont retrouvés dans différents travaux MEF.

3.6.1 Equation de redistanciation

En 1994, *Sussman et al.* [65] publient un article sur l'équation de redistanciation. Pour chaque fonction χ_0 n'étant plus une distance signée, un pseudo-temps (τ) est introduit pour résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\partial \chi}{\partial \tau} = S(\chi_0)(1 - |\nabla \chi|) \quad (3.18)$$

où $S(\chi_0)$ désigne la fonction signe suivante :

$$S(\chi_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi_0 > 0 \\ 0 & \text{si } \chi_0 = 0 \\ -1 & \text{si } \chi_0 < 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

A l'instant initial $\tau = 0$, la solution χ vaut χ_0 . L'information se propage ici dans la direction normale, de part et d'autre de l'interface, des plus petites valeurs de χ vers les plus grandes. Il n'y a donc pas besoin de conditions aux limites sur les bords du domaine. Si l'équation (3.18) atteint un état stationnaire, alors on retrouve la propriété $|\nabla \chi| = 1$ témoignant du caractère distance signée de χ . Les auteurs utilisent dans leurs travaux une fonction signe lissée afin de stabiliser les calculs en déterminant plus précisément le gradient $\nabla \chi$ nécessaire à la résolution de l'équation (3.18). Cette fonction est définie sous la forme suivante :

$$S(\chi_0) = \frac{\chi_0}{\sqrt{\chi_0^2 + \epsilon^2}} \quad (3.20)$$

Le terme ϵ permet de paramétrer la largeur de la zone de transition entre les valeurs positives et négatives de la fonction signe. Les auteurs emploient dans leurs travaux un schéma différences-finies de type « upwind » pour discrétiser l'équation (3.18).

La résolution de l'équation (3.18) entraîne communément un décalage du niveau zéro de la fonction Level-Set. Pour remédier à ce problème, il existe des corrections d'algo-

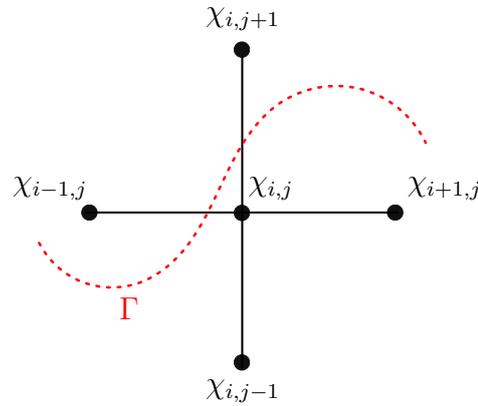


FIGURE 3.10 – Interface passant entre deux nœuds du maillage.

rithmes de réinitialisation. *Russo et Smereka* [57] reprennent les travaux entrepris dans [65] en ayant pour objectif de résoudre plus précisément l'équation (3.18). Les auteurs soulèvent un point important dans leur article : lorsqu'un nœud $x_{i,j}$ et l'un de ses voisins ($x_{i+1,j}, x_{i-1,j}, x_{i,j+1}, x_{i,j-1}$) se situent de part et d'autre de l'interface Γ (voir Fig. 3.10), alors la direction de propagation ne pourra pas se faire d'un côté ou de l'autre de cette dernière, comme expliqué plus haut. Le schéma n'est donc pas réellement « upwind », ils

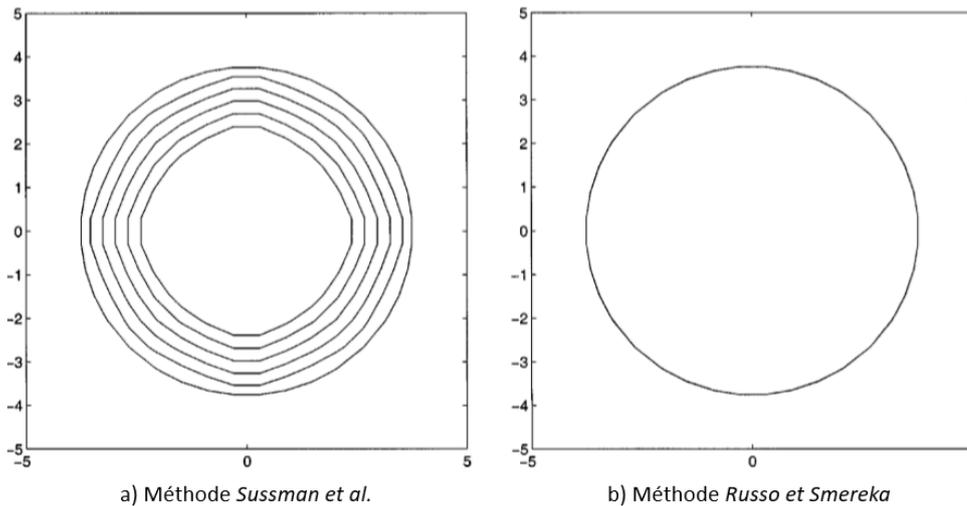


FIGURE 3.11 – Résultats présentés dans les travaux de *Russo et Smereka* [57] pour les deux méthodes de redistanciation. Les lignes de niveau 0 sont tracées pour les nombres d'itération $N = 0, 160, 320, 480, 640, 800$. Domaine $\Omega = [-5, 5] \times [-5, 5]$ avec $\Delta t = 0,5 \Delta x$ et $\Delta x = 10/16$.

proposent alors de le redéfinir lorsqu'un nœud $x_{i,j}$ a l'un de ses voisins de l'autre côté de l'interface. Leurs résultats sont comparés à ceux de *Sussman et al.* [65] sur la Figure 3.11, pour une interface circulaire qui doit rester fixe durant la simulation. Leur correction d'algorithme permet effectivement de l'immobiliser au cours des itérations.

En résumé, cette méthode de redistanciation sous sa forme classique présente le principal désavantage de déplacer la position de l'interface. Pour cette raison, il est nécessaire d'avoir recours à des algorithmes particuliers, pouvant complexifier l'implémentation de la méthode. De plus, le temps d'itérations durant l'étape de relaxation peut parfois s'avérer conséquent, puisque les valeurs de χ sont recalculées à chaque itération dans l'ensemble du domaine, tant que la solution ne converge pas vers un état stationnaire.

3.6.2 La méthode Fast-Marching

Cette méthode ne demande pas de résoudre une équation de redistanciation au cours d'un temps de relaxation, mais plutôt de recalculer directement une distance signée. *J.A Sethian* [60][61] introduit cette méthode principalement dans deux de ses articles. Il définit des schémas numériques afin de résoudre les équations eikonales non-linéaires associées aux équations Hamilton-Jacobi. En effet, l'équation (3.7) est caractéristique d'une fonction distance signée $\chi(x, y)$, faisant partie d'une classe plus large d'équations Hamilton-Jacobi $\mathcal{H}(\chi_x, \chi_y, x, y) = 0$. On peut alors écrire :

$$\mathcal{H} = |\nabla\chi| - 1 \quad (3.21)$$

Le but de cette méthode est d'obtenir χ solution de l'équation (3.7) pour que la fonction Level-Set puisse retrouver sa propriété de distance signée. L'auteur utilise pour cela un schéma de type différences-finies valable pour un maillage régulier, décrit ci-dessous :

$$\max \left[\left(\frac{\chi_{i,j} - \chi_{i-1,j}}{h} \right)_-^2, \left(\frac{\chi_{i+1,j} - \chi_{i,j}}{h} \right)_+^2 \right] + \max \left[\left(\frac{\chi_{i,j} - \chi_{i,j-1}}{h} \right)_-^2, \left(\frac{\chi_{i,j+1} - \chi_{i,j}}{h} \right)_+^2 \right] = 1 \quad (3.22)$$

L'algorithme Fast-Marching se déroule en deux étapes distinctes, avec :

- Une première phase d'initialisation : On dispose d'un ensemble de nœuds adjacents à Γ

qui vont servir de « région initiale » pour démarrer la résolution et propager le calcul vers les zones éloignées. On définit ensuite une « Narrow-Band » (NB) constituée des nœuds voisins de la région initialement définie, où l'équation (3.22) est résolue uniquement en cet endroit du domaine.

- Une seconde phase itérative : On cherche la plus petite valeur de χ dans la Narrow-Band afin de reconstruire cette dernière et de la propager dans l'ensemble du domaine de calcul.

Les prochains paragraphes de cette section résument l'algorithme de la méthode en s'appuyant sur la Figure 3.12.

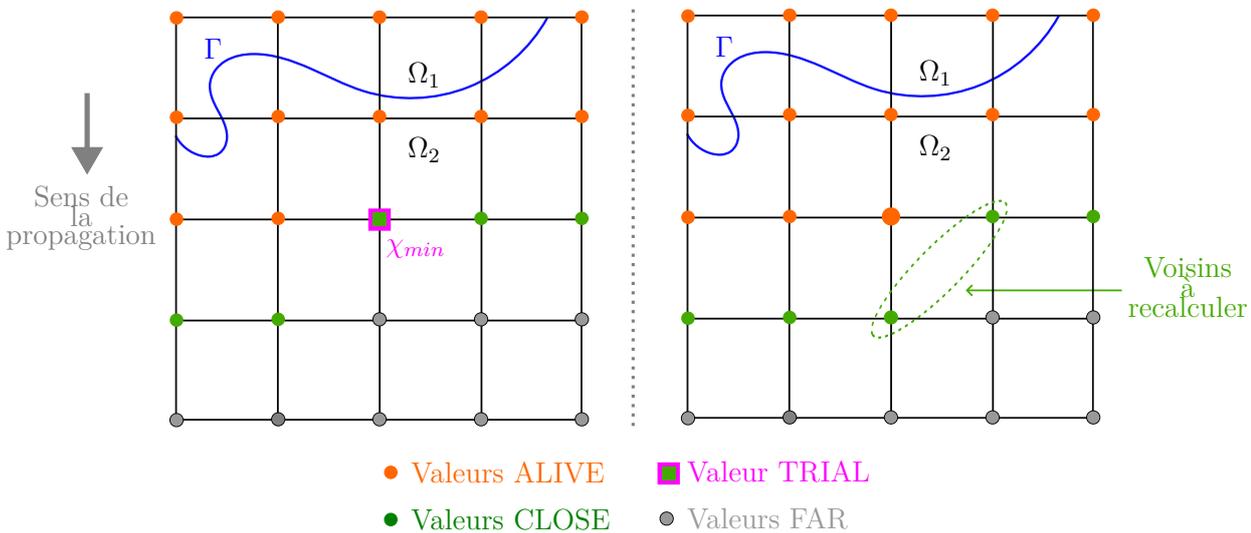


FIGURE 3.12 – Illustration de l'algorithme Fast Marching.

On suppose que le fonction Level-Set définit implicitement l'interface Γ , elle est représentée en bleue sur la Figure 3.12. La phase d'initialisation consiste à rechercher dans un premier temps les cellules en présence de l'interface. Intuitivement, on cherche les régions où χ change de signe. Les valeurs attribuées aux points de ces cellules sont supposées désigner la distance à l'interface. Elles sont alors fixées et nommées « Alive » (points oranges sur la Figure 3.12) et ne seront plus recalculées. Les plus proches voisins des points Alive ($x_{i+1,j}, x_{i-1,j}, x_{i,j-1}, x_{i,j+1}$) sont notés « Close » et forment la Narrow-Band, ce sont les points verts sur la Figure 3.12. Les valeurs en ces points sont calculées par résolution de l'équation quadratique induite par (3.22). Pour terminer cette phase, on note les autres

points « Far » en leur attribuant la valeur $+\infty$, ils sont représentés en gris sur la Figure 3.12.

Une seconde phase itérative est effectuée pour rechercher la plus petite valeur de la Narrow-Band, elle est notée « Trial ». Ce point est désigné par un carré rose sur la Figure 3.12. L'ensemble de ses voisins est désormais considéré comme Close. Pour un voisin qui est Alive, il reste tel quel, si il est Far, il devient alors Close. La valeur Trial est basculée dans la catégorie Alive et les valeurs des voisins Close sont obtenues en résolvant l'équation (3.22) (voir la grille droite sur la Figure 3.12). L'opération est ensuite réitérée en recherchant une nouvelle fois la plus petite valeur de la Narrow-Band, et ainsi de suite. De cette manière, la NB avance et parcourt l'ensemble du domaine, permettant alors d'obtenir une distance signée χ sur chaque point.

La Narrow-Band se propage toujours dans un sens, puis dans l'autre. Sur la Figure 3.12, elle est définie à proximité de l'interface et va se propager dans le domaine Ω_2 . Par la suite, le même processus est réitéré dans le sens du domaine Ω_1 . L'algorithme est résumé sur la Figure 3.13.

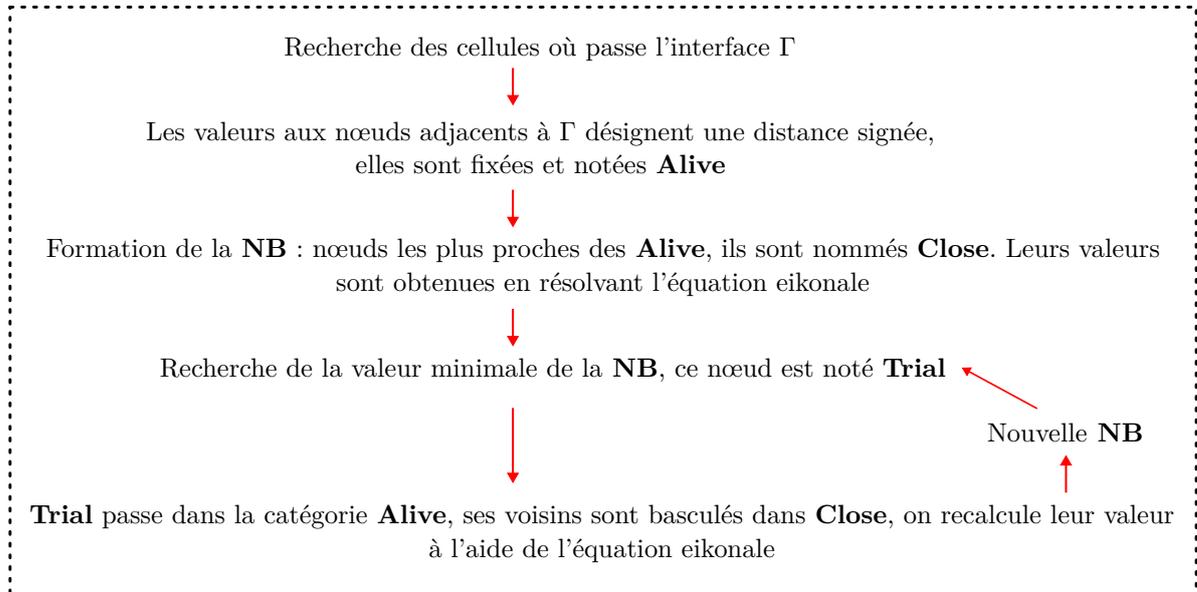


FIGURE 3.13 – Résumé de l'algorithme Fast-Marching.

La valeur minimale de la NB est recherchée à chaque itération dans le but de calculer les valeurs de χ dans un ordre croissant, ce qui est essentiel pour obtenir une approximation consistante de l'équation eikonale. *J. Sethian* démontre dans son article que chaque point admis comme Trial l'est par ordre croissant des valeurs χ . Autrement dit, sur la Figure 3.12, les valeurs de χ qui sont recalculées sur les voisins du point Trial ne peuvent pas être inférieures à la valeur de ce dernier. La propagation de l'information, des valeurs les plus faibles aux valeurs les plus fortes lors de la résolution de l'équation (3.22), est alors respectée.

Cette technique de redistanciation a le sérieux avantage de ne pas décaler l'interface puisque les valeurs Alive sont fixées. L'opération qui requiert le plus de temps dans cet algorithme s'avère être la recherche de χ_{min} dans la NB. Pour cela, *J. Sethian* utilise une structure de tas pour gérer l'ensemble des données et optimiser le temps de calcul. De plus, les valeurs Alive ne sont jamais recalculées, ce qui est un gain de temps supplémentaire. L'algorithme Fast-Marching est donc connu pour être rapide. Cette méthode est principalement utilisée sur des maillages structurés, dans le formalisme Différences-Finies.

3.6.3 Réévaluation des courbes de niveau

A l'inverse des méthodes présentées dans les sections précédentes, cette approche ne s'appuie pas sur l'équation eikonale (3.7) pour définir χ comme étant une fonction distance signée. La première étape consiste ici à reconstruire l'interface en recherchant les valeurs nulles de la fonction Level-Set. Il s'agit ensuite de calculer directement la distance minimale entre les points du domaine et l'interface reconstruite. Cette étape demande rigueur et précision, et peut être coûteuse en temps de calcul. Afin de minimiser les coûts de calcul, elle peut être associée à un algorithme d'arbre enraciné.

Cette méthode de redistanciation est utilisée dans les travaux Eléments-Finis de *Marchandise* [47] et *Pochet et al.* [55]. Les auteurs divisent les éléments du maillage en sous-éléments de manière récursive (voir Fig. 3.14) et effectuent une approximation linéaire sur les bords de ces derniers pour trouver les points appartenant à Γ (lorsque $\chi = 0$). Les coordonnées des points discrétisant l'interface sont ensuite répertoriées dans une structure d'arbre enraciné en se basant sur un algorithme Approximate-Nearest-Neighbor (ANN) [50]. La dernière étape consiste à s'aider de cet arbre afin de calculer la distance la plus courte entre les nœuds du maillage et l'interface discrétisée.

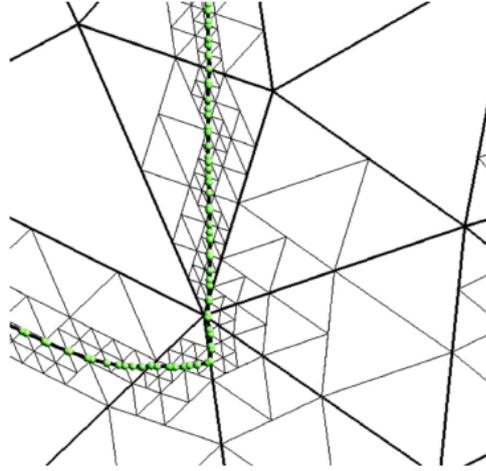


FIGURE 3.14 – Algorithme présenté dans les travaux [47] pour localiser et discrétiser l'interface. En noir, le maillage initial. En gris, les éléments raffinés à quatre niveaux. En vert, l'ensemble des points discrétisant l'interface.

Ces méthodes de redistanciation peuvent être complexes à mettre en œuvre. Cependant, lorsqu'elles sont correctement développées, elles peuvent se révéler très précises et rapides.

3.6.4 Méthode de redistanciation choisie

Le Tableau 3.2 résume les méthodes de redistanciation présentées dans les sections précédentes. Dans ce travail, nous ne souhaitons pas nous baser sur l'équation de redistanciation pour la principale raison que la position de l'interface oscille au cours de la simulation. Bien qu'il existe de nos jours des algorithmes améliorant la méthode, leur mise en œuvre peut rapidement devenir complexe. L'algorithme Fast-Marching est exempt de ce problème mais reste toutefois peu utilisé dans le formalisme Eléments-Finis pour des maillages non-structurés. Par ailleurs, la recours à l'équation eikonale pour ces deux méthodes demande de calculer le gradient de la fonction χ . Cette étape peut s'avérer délicate lorsque l'interface contient des singularités géométriques telles que des angles à 90 degrés. Par exemple, dans le cas d'un dam break où la colonne d'eau décrit initialement un rectangle. Ces situations entraînent finalement des singularités dans le calcul du gradient, qui doivent être traitées avec précaution. Pour ces différentes raisons, nous avons souhaité développer un algorithme similaire à celui de *Marchandise* [47] et *Pochet et al.* [55], qui consiste à discrétiser l'interface afin de recalculer directement la distance minimale entre

les nœuds du maillage et cette dernière. A la différence des auteur·rice·s, l’algorithme développé dans ce travail n’est pas optimisé à l’aide d’une structure d’arbre enraciné.

Méthodes	Recon- struction de Γ	Recours à l’équation eikonale	Oscillation de Γ	Temps de calcul	Implémen- tation
Equation de redistan- ciation	Non	Oui	Oui	Elevé	Simple
Fast- Marching	Non	Oui	Non	Rapide	Complexe
Calculs des courbes de niveau	Oui	Non	Non	Rapide si l’on utilise un algo. d’arbre enraciné	Relativement complexe

TABLE 3.2 – Résumé des principales méthodes de redistanciation.

3.7 Redistanciation dans le contexte de l’étude

Dans ce travail, nous avons mis en œuvre deux méthodes de redistanciation afin de permettre à la fonction Level-Set de conserver son caractère distance signée au cours de la simulation. Ces approches sont basées sur trois étapes, résumées ci-dessous :

La première consiste à rechercher les éléments qui contiennent l’interface Γ . Pour cela, on s’intéresse au signe de la fonction χ sur les nœuds de chaque maille. Si le signe pour l’ensemble de ces derniers n’est pas identique, alors la maille est mixte et contient un mélange des deux fluides, l’interface y est alors présente.

La deuxième étape consiste ensuite à reconstruire Γ dans les mailles mixtes, selon les deux approches suivantes :

- Discrétisation linéaire de l’interface (ex : segments en 2D) en se basant sur un algorithme de Marching-Squares.
- Discrétisation point par point de l’interface en se basant sur un algorithme de dichotomie afin de ne pas se limiter au cas linéaire.

Enfin, la troisième étape se résume à balayer les nœuds présents dans le domaine de calcul afin de calculer la distance la plus courte entre ces derniers et l'interface venant d'être reconstruite.

Cette section est consacrée à la présentation des deux méthodes de redistanciation conçues dans le cadre de cette thèse, qui se différencient principalement par l'étape de reconstruction de l'interface (algo. Marching-Squares ou dichotomie).

3.7.1 Méthode basée sur l'algorithme de Marching-Squares

On considère, en deux dimensions, que l'interface a en tout 16 possibilités de couper une maille rectangulaire en segment. Ces différentes possibilités sont représentées sur la Figure 3.15, et varient en fonction du signe de la Level-Set sur les quatre sommets de l'élément. Connaissant les valeurs de χ aux sommets, une interpolation linéaire est alors utilisée afin de déterminer $\chi = 0$ sur les faces. De cette façon, l'interface est ensuite reconstruite linéairement dans chaque maille mixte du domaine de calcul.

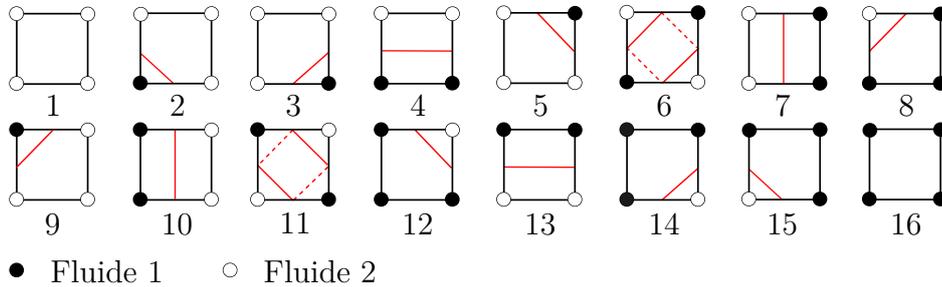


FIGURE 3.15 – Configurations pour l'algorithme de Marching-Squares.

L'étape suivante consiste à redéfinir les courbes de niveau de la fonction Level-Set en calculant la distance minimale entre les nœuds du domaine et Γ . Pour décrire cette étape, nous prenons l'exemple d'un nœud $P \in \Omega$, et d'un segment compris entre deux points $P_1, P_2 \in \Gamma$. En fonction des coordonnées spatiales des points P, P_1 et P_2 , il existe trois configurations possibles (voir Fig. 3.16) pour calculer la plus courte distance, notée d , entre P et $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$:

- Si $(\mathbf{P}\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{n})(\mathbf{P}\mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{n}) < 0$ alors le point P se situe à l'intérieur de la zone délimitée par les normales \mathbf{n} aux points P_1 et P_2 , comme illustré sur la Figure 3.16 (a). Dans ce

cas, d correspond à la distance entre P et le segment, selon la normale \mathbf{n} .

- Si $(\mathbf{PP}_1 \wedge \mathbf{n})(\mathbf{PP}_2 \wedge \mathbf{n}) > 0$ alors le point P est à l'extérieur de la zone, comme illustré sur la Figure 3.16 (b) et (c). Dans ce cas, on calcule la distance entre les points P et P_1 , puis les points P et P_2 , afin de retenir la plus courte.

Le nœud P balaye ensuite l'ensemble des segments i appartenant à l'interface afin de calculer les distances d_i . La valeur χ en ce point correspondra finalement à la distance d_i minimale calculée dans cette boucle. Cette procédure est ensuite réitérée pour chaque nœud du domaine. Le signe initial de la Level Set (+/-) est conservé afin de maintenir une distance signée.

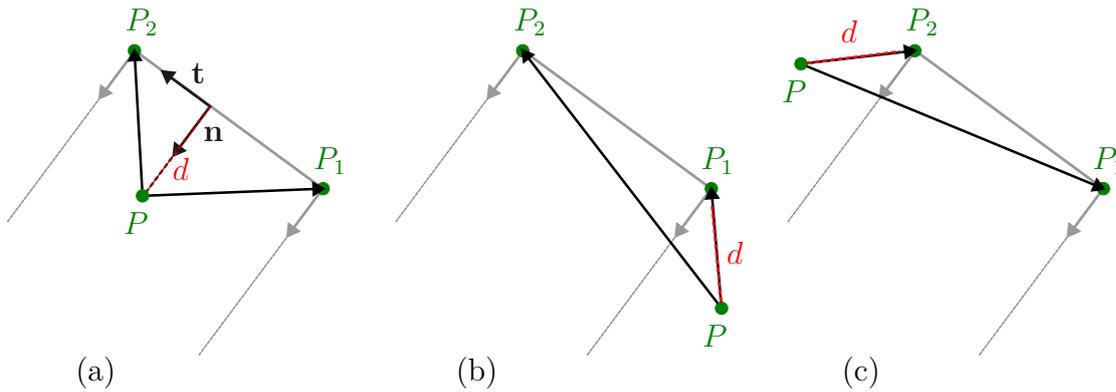


FIGURE 3.16 – Trois configurations (a)(b)(c) pour calculer la distance d minimale entre un nœud $\in \Omega$ et un segment $\in \Gamma$.

Nous verrons plus tard dans ce manuscrit que cette méthode offre l'avantage d'être rapide pour redistancier la fonction χ . Elle a cependant l'inconvénient de discrétiser l'interface uniquement par des segments (cas linéaire). Ainsi, lorsque l'équation de transport Level-Set est résolue aux ordres spatiaux $k > 1$, cette méthode ramène systématiquement la fonction χ à l'ordre 1, ce qui peut détériorer la qualité des résultats numériques. L'algorithme développé dans cette étude est conçu pour des maillages quadrangulaires. Toutefois, une version similaire peut facilement être adaptée pour des maillages triangulaires.

3.7.2 Méthode basée sur l'algorithme de dichotomie

Cette méthode permet de reconstruire l'interface sans être limité au cas linéaire. Cette dernière est discrétisée dans ce cas point par point, noté P_i , avec $i = 1, \dots, m$ et m désignant le nombre de points. Pour cela, les mailles mixtes sont balayées par des segments verticaux (et/ou horizontaux) où les valeurs $\chi = 0$ sont recherchées à l'aide d'un algorithme de dichotomie. Cette étape se déroule dans le référentiel de référence, où l'ensemble des mailles forment un carré dans lequel $x, y \in [0; 1]$. Il est possible de choisir le nombre de segments qui détermineront, in fine, les m points discrétisant l'interface (voir Fig. 3.17). Dans cette approche, on suppose qu'un segment n'admet qu'une seule valeur $\chi = 0$, et qu'il est donc coupé une seule fois par l'interface. Si il est coupé deux fois, le signe de la fonction χ à ses deux extrémités est identique, l'algorithme considère dans ce cas que le segment ne

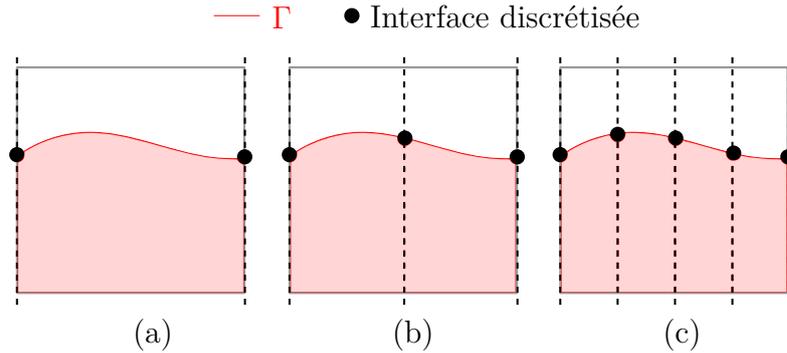


FIGURE 3.17 – Discrétisation par dichotomie, maille balayée (verticalement) par : (a) 2 segments, (b) 3 segments, (c) 5 segments.

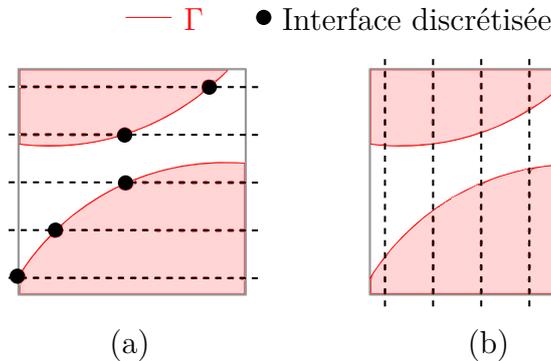


FIGURE 3.18 – (a) Maille balayée horizontalement par 5 segments. (b) Maille balayée verticalement par 5 segments (reconnexion).

traverse qu'un seul fluide. Pour une forte déformation de l'interface, il est donc important de balayer la maille mixte verticalement et horizontalement, puisque d'une configuration à l'autre, on peut y considérer la présence ou l'absence de l'interface. Cette remarque est illustrée sur la Figure 3.18. Dans ce cas, si la maille est balayée horizontalement, l'algorithme permet la discrétisation de Γ . En revanche, si elle est balayée verticalement, l'algorithme ne « voit » pas l'interface et considère ainsi qu'il y a reconnexion du fluide.

A la suite de cette étape, la distance la plus courte, notée d , d'un nœud $\mathbf{x} \in \Omega$ aux points P_i s'obtient comme suit :

$$d(\mathbf{x}) = \min_i(\text{dist}(\mathbf{x}, P_i)) \quad (3.23)$$

Cette procédure est ensuite réitérée pour chaque nœud du domaine. De la même manière que la méthode précédemment décrite, le signe initial de la Level Set (+/-) est conservé afin de maintenir une distance signée.

Cette méthode a le sérieux avantage de ne pas être limitée à une description linéaire de l'interface. De plus, elle est développée pour des maillages quadrangulaires et triangulaires. Néanmoins, nous verrons plus loin dans ce manuscrit que cette méthode devient rapidement coûteuse en temps de calcul lorsque l'interface est discrétisée très finement.

3.8 Conclusion

Ce chapitre s'est intéressé aux méthodes numériques dévolues au traitement de l'interface. Deux principales catégories ont pu être abordées : la première repose sur une représentation explicite de l'interface, tandis que la seconde utilise un champ scalaire pour une représentation implicite.

L'approche retenue dans ce travail est la méthode Level-Set, où l'interface Γ est représentée et suivie implicitement par une fonction distance signée, notée χ . Dans le contexte de cette étude, cela revient finalement à initialiser χ en calculant la distance la plus courte entre les nœuds du maillage et Γ . Cette fonction est ensuite advectée par un champ de vitesse qui se trouve être généralement la solution des équations de l'écoulement.

Cette méthode permet de décrire facilement l'interface tout en gérant naturellement

les changements topologiques. Ce dernier aspect se révèle très intéressant si l'on souhaite s'intéresser, par exemple, au déferlement d'une vague. De plus, elle est facilement implémentable aux ordres élevés en deux et trois dimensions, ce qui est alors compatible avec le formalisme Eléments-Finis d'ordre élevé. La méthode a cependant le désavantage de ne pas conserver le caractère de distance signée de la fonction Level-Set. Pour remédier à ce problème, il est alors nécessaire d'avoir recours à une technique particulière de redistanciation. Dans ce travail, les algorithmes développés consistent à reconstruire l'interface afin de recalculer correctement la distance la plus courte entre les nœuds du domaine et cette dernière. Selon le cas étudié, la fonction Level-Set doit être redistanciée plus ou moins fréquemment. Nous verrons d'ailleurs dans ce travail qu'il est parfois nécessaire de redistancier à chaque pas de temps

La prochaine étape consiste désormais à mettre en œuvre une méthode de type Level-Set dans le cadre d'une formulation Eléments-Finis.

MODÉLISATION DE LA SURFACE LIBRE

Ce chapitre est consacré à la mise en œuvre de la méthode Level-Set dans le cadre du formalisme Eléments-Finis.

Tout d'abord, la première section présentera deux grandes approches destinées à la discrétisation spatiale de l'équation Level-Set, à savoir les méthodes (W)ENO et Galerkin Discontinu (GD). Nous justifierons finalement notre choix d'opter pour le formalisme GD dans le cadre de ce travail. Par la suite, nous présenterons la résolution d'une équation de transport 1D en utilisant un schéma centré (Galerkin) puis décentré (GD). Cet exemple permettra de justifier la nécessité d'adopter un schéma décentré afin de garantir la stabilité du schéma, pour ce type d'équation. Pour résoudre la partie temporelle de l'équation Level-Set, nous avons recours à des méthodes explicites de type Runge-Kutta (RK). Les troisième et quatrième sections de ce chapitre détailleront alors l'approche GD-RK employée pour résoudre l'équation de transport (3.8). Enfin, les résultats numériques issus de deux cas-tests seront présentés afin de valider la méthode.

Dans ce chapitre, la fonction Level-Set est advectée par des champs de vitesse analytiques et la résolution de l'équation de transport (3.8) ne nécessite ni le calcul du gradient $\nabla\chi$, ni la reconstruction de l'interface. Pour ces raisons, aucun algorithme de redistanciation n'est utilisé.

4.1 Modèles numériques pour l'équation de transport Level-Set

La résolution de l'équation de transport (3.8) est connue pour développer des instabilités numériques lorsqu'elle est discrétisée spatialement par des schémas centrés, ce qui nécessite alors l'utilisation de schémas numériques adaptés. Dans cette section, nous in-

troduirons deux méthodes couramment utilisées dans la littérature :

- Les méthodes ENO/WENO combinées aux schémas TVD Runge-Kutta.
- Les méthodes Galerkin Discontinu combinées aux schémas Runge-Kutta.

4.1.1 Les méthodes ENO/WENO

En 1988, *Shu et Osher* [62] se basent sur des schémas de type ENO (Essentially Non Oscillatory) pour discrétiser les lois hyperboliques. Par la suite, *Liu et al.* [42] améliorent la méthode en proposant des schémas WENO (Weighted Essentially Non Oscillatory), ces deux approches sont fréquemment utilisées pour résoudre l'équation de transport (3.8). Elles sont initialement basées sur une discrétisation de type différences-finies et sont essentiellement utilisées sur des maillages structurés.

Les méthodes ENO se basent sur l'utilisation d'un stencil d'interpolation adaptatif qui obtient systématiquement les informations provenant de la région où la solution est localement la plus régulière. Ces schémas sont généralement précis jusqu'au troisième ordre. La méthode est présentée à l'ordre 3 selon la définition de *Tanguy* [66], en s'appuyant sur la discrétisation différences-finies 1D de l'équation de transport (3.8). Pour résoudre l'équation au point x_i , la procédure consiste à calculer $\chi_{i\pm 1/2}$ (voir Fig. 4.1) selon différentes étapes :

- Etape 1 : schéma « upwind » d'ordre 1 :

$$\chi_{i+1/2}^{(1)} = \chi_{m_1} \quad \text{avec} \quad m_1 = \begin{cases} i & \text{si } u_{i+1/2} > 0 \\ i + 1 & \text{si } u_{i+1/2} < 0 \end{cases}$$

- Etape 2 : schéma d'ordre 2 :

$$\chi_{i+1/2}^{(2)} = \chi_{i+1/2}^{(1)} + \frac{h}{2}(1-2(m_1-i))c_1, \quad c_1 = \begin{cases} a_1 & \text{si } |a_1| \leq |b_1| \\ b_1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{\chi_{m_1} - \chi_{m_1-1}}{h} \\ b_1 = \frac{\chi_{m_1+1} - \chi_{m_1}}{h} \end{cases}$$

On définit le coefficient suivant :

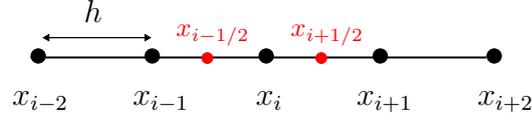


FIGURE 4.1 – Discrétisation d'un domaine 1D régulier pour la méthode ENO.

$$m_2 = \begin{cases} m_1 - 1 & \text{si } |a_1| \leq |b_1| \\ m_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Etape 3 : schéma d'ordre 3 :

$$\chi_{i+1/2}^{(3)} = \chi_{i+1/2}^{(2)} - \frac{h^2}{3}(3(m_2 - i)^2 - 1)c_2$$

avec :

$$c_2 = \begin{cases} a_2 & \text{si } |a_2| \leq |b_2| \\ b_2 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_2 = \frac{\chi_{m_2-1} - 2\chi_{m_2} + \chi_{m_2+1}}{h^2} \\ b_2 = \frac{\chi_{m_2} - 2\chi_{m_2+1} + \chi_{m_2+2}}{h^2} \end{cases}$$

En employant la méthode d'Euler explicite pour l'intégration temporelle, le schéma ENO3 s'obtient alors sous la forme suivante :

$$\chi_i^{n+1} = \chi_i^n - \Delta t \left(\frac{\chi_{i+1/2}^{n(3)} - \chi_{i-1/2}^{n(3)}}{h} \right) u_i \quad (4.1)$$

Les méthodes WENO sont formulées à partir des schémas ENO pondérés, dans lesquelles il existe une combinaison des différentes approximations ENO possibles. Si l'une des approximations ENO est interpolée à travers une discontinuité, on lui attribue alors un poids minimum de façon à ce que sa contribution, et donc les erreurs numériques qui en résultent, soient minimisées. Initialement d'ordre 4, la précision de cette méthode a été augmentée jusqu'à l'ordre 5, qui est généralement la version la plus utilisée.

Les méthodes (W)ENO sont généralement couplées aux schémas temporels explicites de type TVD (Total-Variation-Diminishing) Runge-Kutta, que l'on retrouve par exemple dans les travaux [15][69]. Les méthodes TVD sont conçues pour préserver la variation totale de la solution et éviter la production d'oscillations parasites. En comparaison aux méthodes Runge-Kutta, il est plus courant d'utiliser des approches TVD lorsqu'elles sont

combinées aux schémas (W)ENO, car elles offrent une meilleure stabilité et une meilleure résolution des discontinuités dans la solution.

Les méthodes (W)ENO sont connues pour être difficilement implémentables puisque leur formalisme devient rapidement très complexe. De plus, elles sont principalement utilisées dans le cadre de la MDF sur des maillages structurés. Récemment, *Liu et Jiao* [41] ont étendu la méthode WENO au formalisme volumes-finis sur des maillages non-structurés. Toutefois, cette mise en œuvre demande de complexifier davantage l’approche initiale.

4.1.2 Les méthodes Galerkin Discontinu

La méthode Galerkin Discontinu a été introduite par *Reed et Hill* [56], puis étudiée par *Lesaint et Raviart* [39][38] pour les équations d’advection linéaires. Plus récemment, *Cockburn et Shu* [13][12] ont travaillé sur la résolution des problèmes spatio-temporels en s’appuyant sur ce formalisme, couplé aux méthodes explicites Runge-Kutta. Pour une discrétisation de type éléments-finis, ces approches permettent de décentrer le schéma classique (Galerkin) en introduisant un flux numérique sur les faces des éléments du maillage, dans le but de le stabiliser. Il existe pour cela différentes fonctions de flux numérique, telles que les fonctions upwind, Lax-Friedrichs, Roe... Le formalisme de cette méthode sera expliqué plus en détails dans la section suivante.

Depuis ces dernières années, les méthodes GD ont beaucoup gagné en notoriété, puisqu’à l’inverse des approches (W)ENO, elles sont facilement implémentables. Leur formalisme s’applique sans difficulté aux maillages non-structurés et l’augmentation de l’ordre spatial se fait naturellement dans le cadre de la MEF. De plus, ces approches assurent de bonnes propriétés de conservation. Ainsi, pour ces nombreuses raisons, nous avons choisi d’utiliser une méthode Galerkin Discontinu afin de résoudre l’équation de transport Level-Set, à l’instar des travaux [54][19][47][55][25].

4.2 Résolution d’une équation de transport 1D

Cette section est destinée en partie à familiariser les lecteur·rice·s au formalisme GD, tout en le comparant à la méthode Galerkin. Le formalisme discontinu est présenté en

s'appuyant sur l'exemple de la résolution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial(uc)}{\partial x} \quad (4.2)$$

où u désigne la solution à approcher, c la vitesse d'advection (constante), et (uc) le flux que l'on note $F(u, c)$. On intègre dans le domaine Ω l'équation (4.2) multipliée par une fonction test suffisamment régulière, notée $\omega(x)$:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial F(u, c)}{\partial x} \omega \quad (4.3)$$

Le membre de droite de l'équation ci-dessus est décomposé en utilisant une intégration par parties, la formulation faible de l'équation (4.2) s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} F(u, c) - [F(u, c)\omega]_{\partial\Omega} \quad (4.4)$$

4.2.1 Formalisme Galerkin pour l'équation de transport

Le domaine Ω est discrétisé en plusieurs éléments (segments) E appartenant à l'ensemble des éléments \mathcal{E}_h constituant le maillage. Dans un premier temps, on se propose d'approcher la solution u dans l'espace fonctionnel polynomial suivant :

$$W_h^1 = \{u_h \in H^1(\Omega); u_h|_E \in \mathbb{P}_k(E), \forall E \in \mathcal{E}_h\}$$

où $H^1(\Omega)$ assure la continuité de la solution dans chaque élément, puis d'un élément à l'autre. Le problème discret peut être formulé localement dans E sous la forme suivante :

$$\int_E \frac{\partial u_h}{\partial t} \omega_h = \int_E \frac{\partial \omega_h}{\partial x} F(u_h, c) - [F(u_h, c)\omega_h]_{x_i}^{x_{i+1}} \quad \forall \omega_h \in W_h^1 \quad (4.5)$$

La solution u et la fonction test ω sont approchées dans cet exemple par des polynômes de premier degré :

$$u_h = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix}, \quad \omega_h = \begin{pmatrix} \omega_i & \omega_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

où les fonctions de forme N_1 et N_2 sont définies précédemment dans la section 2.1.1. Les formes polynomiales (4.6) sont reportées dans l'équation 4.5 pour obtenir le système suivant :

$$\int_E \begin{pmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 \\ N_2 N_1 & N_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i,t} \\ u_{i+1,t} \end{pmatrix} = \int_E c \begin{pmatrix} N_{1,x} N_1 & N_{1,x} N_2 \\ N_{2,x} N_1 & N_{2,x} N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -F(u_i, c) \\ F(u_{i+1}, c) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

La notation du système (4.7) peut être simplifiée sous la forme :

$$M \begin{pmatrix} u_{i,t} \\ u_{i+1,t} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -F(u_i, c) \\ F(u_{i+1}, c) \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

où M et T désignent respectivement les matrices de masse et de transport.

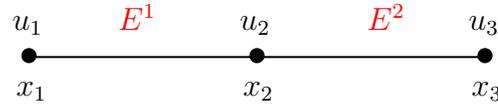


FIGURE 4.2 – Discrétisation d’un domaine 1D régulier en deux éléments E^1 et E^2 , pour la méthode Galerkin.

Afin de faciliter la présentation du problème, le domaine Ω est discrétisé en deux éléments, nécessitant alors trois nœuds x_1 , x_2 et x_3 (voir Fig. 4.2). Le système global dans ce cas s’écrit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} M_{11}^1 & M_{12}^1 & 0 \\ M_{21}^1 & M_{22}^1 + M_{11}^2 & M_{12}^2 \\ 0 & M_{21}^2 & M_{22}^2 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} u_{1,t} \\ u_{2,t} \\ u_{3,t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} T_{11}^1 & T_{12}^1 & 0 \\ T_{21}^1 & T_{22}^1 + T_{11}^2 & T_{12}^2 \\ 0 & T_{21}^2 & T_{22}^2 \end{pmatrix}}_{\mathcal{T}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} -F(u_1, c) \\ \underbrace{F(u_2, c) - F(u_2, c)}_{=0} \\ F(u_3, c) \end{pmatrix}}_{\text{Flux aux frontières de } \Omega} \quad (4.9)$$

Les indices des termes M et T correspondent au numéro de la ligne/colonne des matrices, et les exposants au numéro de l’élément. \mathcal{M} et \mathcal{T} désignent les matrices globales de masse et de transport, après l’assemblage des sous-systèmes associés au différents éléments de la discrétisation. Le dernier vecteur du système ci-dessus désigne le flux aux extrémités

des éléments. Dans cette configuration, le flux entre deux segments adjacents s'annule, le vecteur ne contient alors que les conditions d'entrée/sortie.

4.2.2 Formalisme Galerkin Discontinu pour l'équation de transport

Dans un second temps, on se propose d'approcher la solution u dans l'espace fonctionnel polynomial suivant :

$$W_h^2 = \{u_h \in L^2(\Omega); u_h|_E \in \mathbb{P}_k(E), \forall E \in \mathcal{E}_h\}$$

L'espace $L^2(\Omega)$ assure la continuité de la solution dans chaque élément, tout en autorisant une discontinuité de cette dernière entre deux éléments adjacents. Pour deux segments discrétisant Ω , on compte alors quatre solutions à approcher : u_1^1 , u_2^1 , u_2^2 et u_3^2 , où l'indice et l'exposant désignent respectivement le nœud et l'élément (voir Fig. 4.3).

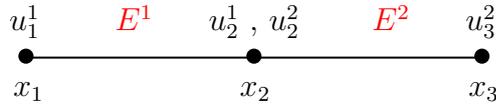


FIGURE 4.3 – Discrétisation d'un domaine 1D régulier en deux éléments E^1 et E^2 , pour la méthode Galerkin Discontinu.

Les fonctions u et ω sont approchées ici par des polynômes (4.6) identiques au cas précédent. Le système d'équations est écrit une première fois pour l'élément E_1 :

$$\int_{E^1} \begin{pmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 \\ N_2 N_1 & N_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,t}^1 \\ u_{2,t}^1 \end{pmatrix} = \int_{E^1} c \begin{pmatrix} N_{1,x} N_1 & N_{1,x} N_2 \\ N_{2,x} N_1 & N_{2,x} N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ F(u_2^1, c) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -F(u_1^1, c) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

La notation du système ci-dessus peut être simplifiée sous la forme suivante :

$$M^1 \begin{pmatrix} u_{1,t}^1 \\ u_{2,t}^1 \end{pmatrix} = T_G^1 \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ F(u_2^1, c) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -F(u_1^1, c) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

où M^1 désigne la matrice de masse et T_G^1 la contribution de Galerkin de la matrice transport. Le système d'équations est écrit une seconde fois pour l'élément E_2 :

$$M^2 \begin{pmatrix} u_{2,t}^2 \\ u_{3,t}^2 \end{pmatrix} = T_G^2 \begin{pmatrix} u_2^2 \\ u_3^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -F(u_2^2, c) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ F(u_3^2, c) \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

La prochaine étape consiste à assembler les deux sous-systèmes (4.11) et (4.12) :

$$\begin{pmatrix} M_{11}^1 & M_{12}^1 & 0 & 0 \\ M_{21}^1 & M_{22}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{11}^2 & M_{12}^2 \\ 0 & 0 & M_{21}^2 & M_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,t}^1 \\ u_{2,t}^1 \\ u_{2,t}^2 \\ u_{3,t}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{G11}^1 & T_{G12}^1 & 0 & 0 \\ T_{G21}^1 & T_{G22}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{G11}^2 & T_{G12}^2 \\ 0 & 0 & T_{G21}^2 & T_{G22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ F(u_2^1, c) \\ -F(u_2^2, c) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -F(u_1^1, c) \\ 0 \\ 0 \\ F(u_3^2, c) \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Le vecteur désignant le flux aux extrémités des éléments est décomposé en deux parties distinctes : l'une représentant les flux aux frontières du domaine et permettant ainsi d'imposer des conditions d'entrée/sortie, et l'autre exprimant les flux entre les deux segments adjacents.

Pour poursuivre, il est nécessaire de remplacer le flux au nœud x_2 par un flux numérique, noté $G(u_2^1, u_2^2, c)$, dépendant des solutions u_2^1 et u_2^2 . Pour rappel, ce flux est choisi de façon à être consistant et conservatif. Le système (4.13) s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} M_{11}^1 & M_{12}^1 & 0 & 0 \\ M_{21}^1 & M_{22}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{11}^2 & M_{12}^2 \\ 0 & 0 & M_{21}^2 & M_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,t}^1 \\ u_{2,t}^1 \\ u_{2,t}^2 \\ u_{3,t}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{G11}^1 & T_{G12}^1 & 0 & 0 \\ T_{G21}^1 & T_{G22}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{G11}^2 & T_{G12}^2 \\ 0 & 0 & T_{G21}^2 & T_{G22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ G(u_2^1, u_2^2, c) \\ -G(u_2^1, u_2^2, c) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -F(u_1^1, c) \\ 0 \\ 0 \\ F(u_3^2, c) \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Dans le cadre de ce travail, nous choisissons une formulation de type « upwind » permettant d'une part de décentrer le schéma, et d'autre part de conserver les quantités

transportées au passage d'un élément à l'autre. Le calcul du flux entre deux éléments prend en compte le flux le plus proche en amont de l'interface, en se basant sur la direction de l'écoulement. Par conséquent, il y a deux possibilités de définir $G(u_2^1, u_2^2, c)$ au nœud x_2 :

$$\begin{aligned} G(u_2^1, u_2^2, c) &= u_2^1 c \quad \text{si } c > 0 \\ G(u_2^1, u_2^2, c) &= u_2^2 c \quad \text{si } c < 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Le système (4.14) peut donc s'écrire selon deux manières différentes :

Cas où $c > 0$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} M_{11}^1 & M_{12}^1 & 0 & 0 \\ M_{21}^1 & M_{22}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{11}^2 & M_{12}^2 \\ 0 & 0 & M_{21}^2 & M_{22}^2 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} u_{1,t}^1 \\ u_{2,t}^1 \\ u_{2,t}^2 \\ u_{3,t}^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} T_{G_{11}}^1 & T_{G_{12}}^1 & 0 & 0 \\ T_{G_{21}}^1 & T_{G_{22}}^1 - c & 0 & 0 \\ 0 & c & T_{G_{11}}^2 & T_{G_{12}}^2 \\ 0 & 0 & T_{G_{21}}^2 & T_{G_{22}}^2 \end{pmatrix}}_{\mathcal{T}} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} -F(u_1^1, c) \\ 0 \\ 0 \\ F(u_3^2, c) \end{pmatrix}}_{\text{Flux aux frontières de } \Omega} \quad (4.16)$$

Cas où $c < 0$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} M_{11}^1 & M_{12}^1 & 0 & 0 \\ M_{21}^1 & M_{22}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{11}^2 & M_{12}^2 \\ 0 & 0 & M_{21}^2 & M_{22}^2 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} u_{1,t}^1 \\ u_{2,t}^1 \\ u_{2,t}^2 \\ u_{3,t}^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} T_{G_{11}}^1 & T_{G_{12}}^1 & 0 & 0 \\ T_{G_{21}}^1 & T_{G_{22}}^1 & -c & 0 \\ 0 & 0 & T_{G_{11}}^2 + c & T_{G_{12}}^2 \\ 0 & 0 & T_{G_{21}}^2 & T_{G_{22}}^2 \end{pmatrix}}_{\mathcal{T}} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} -F(u_1^1, c) \\ 0 \\ 0 \\ F(u_3^2, c) \end{pmatrix}}_{\text{Flux aux frontières de } \Omega} \quad (4.17)$$

Dans cette configuration, la matrice de masse renferme des valeurs identiques à celles utilisées dans la méthode de Galerkin, à la différence qu'il n'y a pas de couplage au nœud x_2 , commun aux deux éléments. La matrice de transport dans ce cas-ci contient bien la contribution de Galerkin standard mais avec un terme supplémentaire, désignant le décentrement upwind. Par comparaison avec la première approche, la taille du système d'équations à résoudre dans le cadre du formalisme GD est plus importante puisqu'il requiert plus de degrés de liberté, ce qui se traduit par un coût de calcul plus élevé.

4.2.3 Résultats numériques

L'équation (4.2) est résolue pour deux cas simples qui diffèrent par l'initialisation de la fonction u : continue ou discontinue. Ces études permettront de comparer la stabilité des schémas issus des deux formalismes. Les systèmes d'équations sont résolus ici par méthode directe (algorithme de Gauss), et l'avance temporelle est basée sur une méthode d'Euler explicite.

On considère dans un premier temps une fonction initialement continue :

$$u(x, 0) = x \tag{4.18}$$

définie dans le domaine $x \in [0; 1]$, où le flux aux frontières vaut :

$$F(u, c) = \begin{cases} u(0, t)c & \text{en } x = 0 \\ u(1, t)c & \text{en } x = 1 \end{cases} \tag{4.19}$$

L'évolution temporelle de la fonction $u(x, t)$ au point $x = 0$ est tracée sur la Figure 4.4 pour les deux méthodes, en considérant $c = -1$. Ces résultats permettent de noter que la solution diverge pour un schéma centré, à l'inverse du formalisme upwind qui assure un schéma stable.

Dans le deuxième cas, la fonction initiale est caractérisée par une discontinuité, elle est décrite comme suit :

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1/3 \\ 1 & \text{si } x > 1/3 \end{cases} \tag{4.20}$$

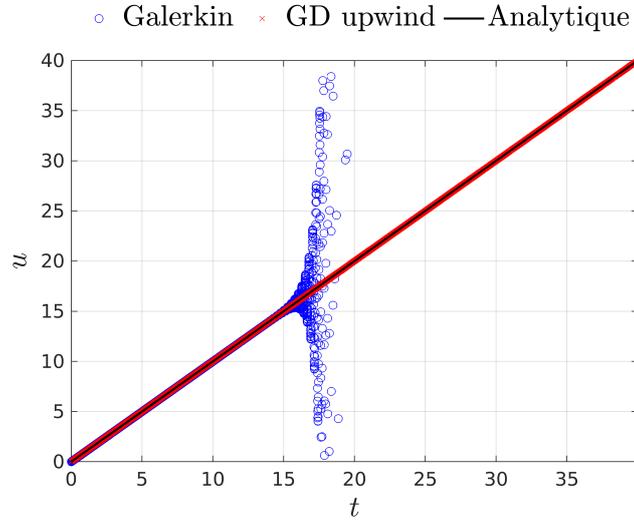


FIGURE 4.4 – $u(0, t)$ en fonction du temps pour 15 éléments. $\Delta t = h/10$, $t_f = 40$, $k = 1$.

Le domaine de calcul est identique au cas précédent. On impose une vitesse $c = 1$, la marche est donc déplacée vers la droite du domaine. Le flux aux frontières vaut :

$$F(u, c) = \begin{cases} 0 & \text{en } x = 0 \\ u(1, t)c & \text{en } x = 1 \end{cases} \quad (4.21)$$

La fonction $u(x, t)$ est représentée graphiquement en fonction de la variable x sur les Figures 4.54.6 pour les deux méthodes, à différents instants. Dans les deux cas, le saut initial de la fonction n'est pas correctement conservé au cours de la simulation, comme ce qui a pu être observé dans les travaux de *Cockburn et Shu* [13] et *Marchandise* [47]. Le schéma upwind est toutefois plus stable, puisqu'à l'inverse du schéma centré, nous ne voyons pas apparaître d'oscillations parasites en amont de la marche. On retrouve également cette observation dans [47].

Les deux exemples présentés dans cette section ont pu souligner l'importance de décentrer le schéma pour résoudre une équation incluant des termes advectifs. En effet, l'utilisation d'un schéma centré peut entraîner l'apparition d'oscillations numériques allant jusqu'à faire diverger la solution.

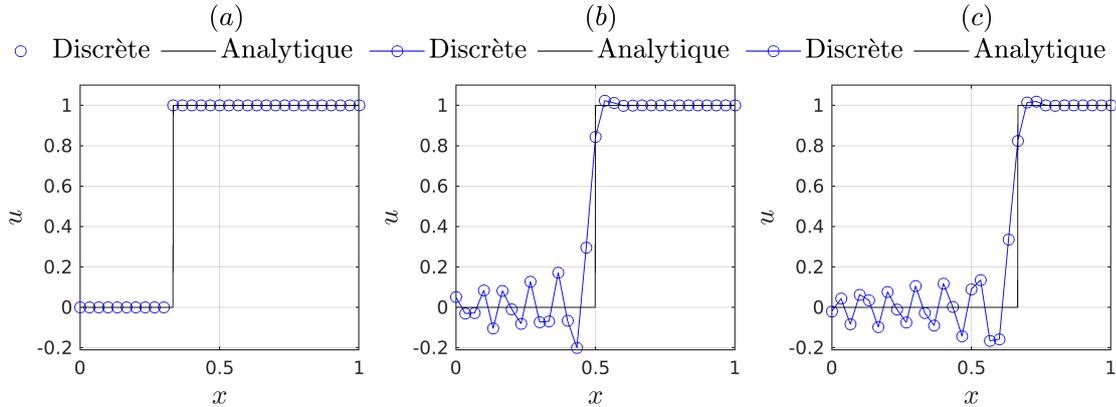


FIGURE 4.5 – u en fonction de x pour un schéma centré (30 éléments) aux temps : (a) $t = 0$, (b) $t = 500\Delta t$, (c) $t = 1000\Delta t$. $\Delta t = h/100$, $k = 1$.

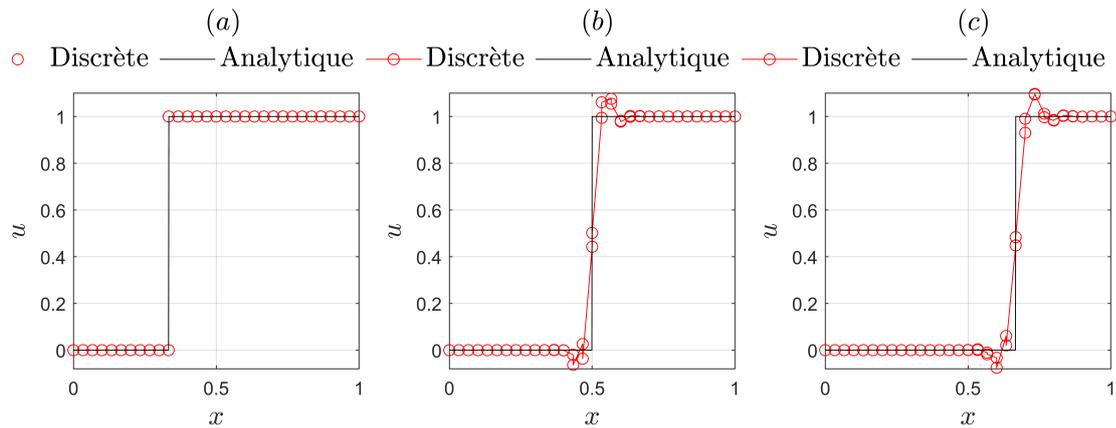


FIGURE 4.6 – u en fonction de x pour un schéma décentré upwind (30 éléments) aux temps : (a) $t = 0$, (b) $t = 500\Delta t$, (c) $t = 1000\Delta t$. $\Delta t = h/100$, $k = 1$.

4.3 Discrétisation Galerkin Discontinu de l'équation Level-Set

La simulation d'écoulements incompressibles assure un champ de vitesse \mathbf{u} à divergence nulle, l'équation de transport (3.8) peut alors être réécrite sous sa forme conservative :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\chi) = 0 \tag{4.22}$$

Sous cette forme, l'équation (4.22) est caractérisée par son flux ($\mathbf{u}\chi$) et se prête bien à une discrétisation de type Galerkin Discontinu. La prochaine étape consiste à intégrer l'équation (4.22) dans le domaine Ω , en la multipliant par une fonction test $\omega(\mathbf{x})$ choisie suffisamment régulière. On obtient alors :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial t} \omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{u}\chi) \omega = 0 \quad (4.23)$$

Le théorème de Green est ensuite appliqué à la deuxième intégrale afin d'obtenir la formulation faible de l'équation (4.22) :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial t} \omega = \int_{\Omega} \chi(\mathbf{u} \cdot \nabla \omega) - \int_{\partial \Omega} \chi(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \omega \quad (4.24)$$

Notons E un élément appartenant à l'ensemble des éléments \mathcal{E}_h constituant le maillage. Sur chaque élément $E \in \mathcal{E}_h$, les fonctions tests et la solution χ sont approchées par des fonctions polynomiales d'ordre $k \geq 0$, continues sur chaque élément mais discontinues d'une maille à l'autre (voir Fig. 4.7).

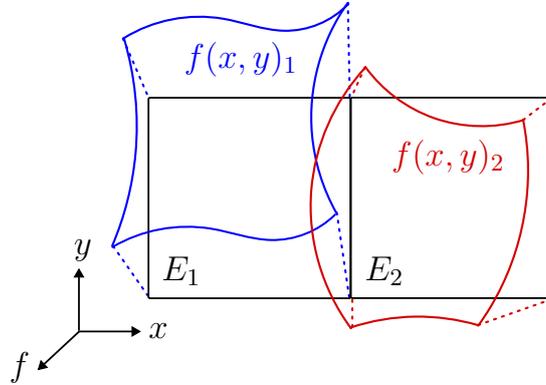


FIGURE 4.7 – Exemple d'une fonction $f(x, y)$ discontinue entre deux éléments E_1 et E_2 .

Dans ce cas, l'espace fonctionnel (scalaire) des solutions est le suivant :

$$W_h^s = \{\chi_h \in L^2(\Omega); \chi_h|_E \in \mathbb{P}_k(E), \forall E \in \mathcal{E}_h\} \quad (4.25)$$

Nous nous concentrerons dans un premier temps sur la discrétisation locale de l'équation (4.24) pour un élément du maillage. Cette étape permettra de mieux concevoir le décentrement upwind, introduit précédemment au sein d'une maille en une dimension.

Par la suite, nous présenterons la discrétisation générale dans l'ensemble du domaine Ω , servant de modèle de référence pour l'implémentation de l'équation de transport Level-Set.

4.3.1 Discrétisation de l'équation de transport dans un élément

Le problème discret peut être formulé localement dans un élément E sous la forme suivante :

$$\int_E \frac{\partial \chi_h}{\partial t} \omega_h = \int_E \chi_h (\mathbf{u} \cdot \nabla \omega_h) - \sum_{F \in \partial E} \int_F \omega_h G(\chi_h, \mathbf{u}, \mathbf{n}) \quad \forall \omega_h \in W_h^s \quad (4.26)$$

où les fonctions approchées χ_h et ω_h sont définies par des polynômes de Lagrange :

$$\chi_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) \chi_i \quad \text{et} \quad \omega_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) \omega_j \quad (4.27)$$

n indique ici le nombre de degré de liberté dans l'élément. La notation F dans l'équation (4.26) désigne une face d'un élément appartenant à l'ensemble des faces \mathcal{F}_h du maillage. Elle est notée F_i si elle est interne au maillage (séparation de deux éléments) et $F_{\partial\Omega}$ si elle appartient au bord du domaine (voir Fig. 4.8).

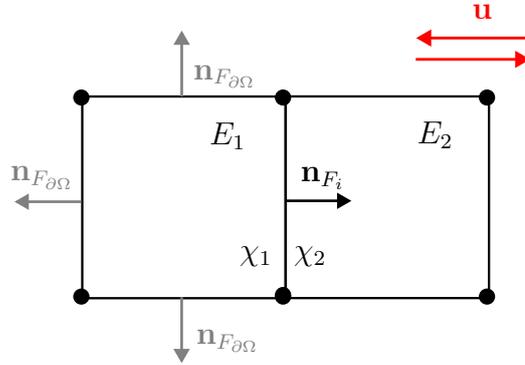


FIGURE 4.8 – Domaine de calcul (2D) constitué de deux éléments pour une discrétisation de type Galerkin Discontinu.

Pour rappel, la formulation Galerkin Discontinu utilisée dans ce travail remplace le flux imposé initialement sur les faces \mathcal{F}_h par un flux numérique $G(\chi_h, \mathbf{u}, \mathbf{n})$ de type « upwind ». Selon la direction de l'écoulement, le flux aux faces $F \in F_i$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$G(\chi_h, \mathbf{u}, \mathbf{n}) = \chi_{UP}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F) \quad (4.28)$$

où χ_{UP} (voir Fig. 4.8) s'obtient ainsi :

$$\chi_{UP} = \begin{cases} \chi_1 & \text{si } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F > 0 \\ \chi_2 & \text{si } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F < 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

Il s'agit simplement de la généralisation de la notion de décentrement upwind en 2D, introduite précédemment en une dimension. Ce formalisme est classiquement retrouvé dans le cadre de la méthode des Volumes-Finis. Le flux $G(\chi_h, \mathbf{u}, \mathbf{n})$ peut s'écrire mathématiquement sous une forme plus globale :

$$G(\chi_h, \mathbf{u}, \mathbf{n}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F)\{\chi_h\} + \frac{1}{2}|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F|[[\chi_h]] \quad (4.30)$$

où $\{\}$ et $[[\]]$ désignent respectivement la moyenne et le saut :

$$\{f\} = \frac{f_1 + f_2}{2} \quad \text{et} \quad [[f]] = f_1 - f_2 \quad (4.31)$$

4.3.2 Discrétisation de l'équation de transport dans le domaine

Le problème discret peut être formulé plus généralement dans le domaine Ω sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \chi_h}{\partial t} \omega_h = \int_{\Omega} \chi_h (\mathbf{u} \cdot \nabla \omega_h) - \int_{\partial \Omega} \omega_h (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \chi_h - \sum_{F \in F_i} \int_F \{\chi_h \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F\}^* [[\omega_h]] \quad \forall \omega_h \in W_h^s \quad (4.32)$$

avec :

$$\{\chi_h \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F\}^* = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F)\{\chi_h\} + \frac{1}{2}|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F|[[\chi_h]] \quad (4.33)$$

Dans l'équation (4.32), les deux premières intégrales du membre de droite correspondent aux contributions de Galerkin, alors que la troisième désigne les termes de décentrage upwind, nécessaires à la stabilité du schéma numérique. La formulation mathématique (4.32) retenue dans cette étude est issue des travaux [47][19][54]. Le problème approché peut être réécrit sous une forme matrice-vecteur, comme suit :

$$M \frac{d}{dt} \{\chi\} = T \{\chi\} + \{c\} \quad (4.34)$$

Les composantes du vecteur $\{\chi\}$ dans l'équation ci-dessus correspondent aux valeurs nodales de la fonction Level-Set, au temps t . Le vecteur $\{c\}$ contient les termes de bord, les matrices M et T désignent respectivement les matrices de masse et de transport dont les i,j -ièmes éléments sont donnés par :

$$M_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j \quad (4.35)$$

$$T_{ij} = \int_{\Omega} N_i (\mathbf{u} \cdot \nabla N_j) - \sum_{F \in F_i} \int_F \{N_i \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F\}^* [[N_j]] \quad (4.36)$$

$$c_j = \int_{\partial\Omega} N_j (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \chi_{CL} \quad (4.37)$$

Le terme χ_{CL} présent dans l'intégrale de bord désigne la condition à imposer sur la fonction χ aux frontières du domaine. Lorsque ce dernier est borné par des parois fixes, l'intégrale sur $\partial\Omega$ est supposée nulle, du fait de la condition de non-pénétration du fluide. La dérivée partielle par rapport au temps dans l'équation (4.34) devient une dérivée totale, car les nœuds du maillage restent fixes. Le système linéaire (4.34) est résolu par une méthode itérative du gradient conjugué. Pour améliorer la rapidité de convergence, la méthode s'appuie sur l'utilisation d'un préconditionneur de Jacobi.

4.4 Discrétisation temporelle de l'équation Level-Set

La formulation GD de l'équation de transport (4.22) est couplée dans ce travail avec une avance temporelle explicite de type Euler/Runge-Kutta. Le schéma le plus classique et le plus facile à implémenter est basé sur la méthode d'Euler explicite (ordre 1). Cependant, il est généralement préférable d'opter pour une approche de type Runge-Kutta. Pour un même pas de temps, les schémas RK sont conçus pour réduire les erreurs numériques et obtenir des résultats plus précis. Le couplage GD/RK est également utilisé dans les travaux [13][47][19][54].

4.4.1 Méthodes explicites Euler/Runge-Kutta

Pour une variable inconnue notée $y(t)$, sa dérivée temporelle s'exprime de la façon suivante :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f(t, y) \quad (4.38)$$

En supposant que nous connaissons la solution y à l'instant initial, nous disposons alors de l'information $y(t_n) = y_n$, où n représente l'itération temporelle. L'objectif consiste alors à déterminer la valeur de y au temps $n + 1$. Pour ce faire, nous procédons comme suit :

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \sum_{i=1}^{\Theta} b_i k_i \quad \text{avec } \Theta \text{ le nombre de sous-étapes} \quad (4.39)$$

Les termes k_i désignent des coefficients dépendant directement de la dérivée (4.38). Dans ce chapitre, nous utilisons des méthodes inférieures ou égales au quatrième ordre, disponibles avec la bibliothèque MFEM. Les quatre premiers coefficients k sont alors exprimés ci-dessous :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + c_2 \Delta t, y_n + \Delta t(a_{21} k_1)), \\ k_3 &= f(t_n + c_3 \Delta t, y_n + \Delta t(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)), \\ k_4 &= f(t_n + c_4 \Delta t, y_n + \Delta t(a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3)) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Les coefficients a , b et c sont définis selon le tableau de Butcher [8] (voir Tab. 4.1). Le nombre de coefficients ainsi que la taille du Tableau 4.1 dépendent de la méthode utilisée. Ce dernier est réexprimé en fonction des méthodes de Euler (voir Tab. 4.2), de Runge-Kutta 2 (voir Tab. 4.3), de Runge-Kutta 3 (voir Tab. 4.4 et 4.5) et de Runge-Kutta 4 (voir Tab. 4.6).

c_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
c_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
c_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
c_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
	b_1	b_2	b_3	b_4

TABLE 4.1 – Tableau de Butcher.

Euler explicite :

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

TABLE 4.2 – Méthode d’Euler explicite, ordre 1.

RK2 :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & 1-(1/2\alpha) & 1/2\alpha \end{array}$$

TABLE 4.3 – Méthode de Runge-Kutta 2.

Le coefficient α dépend ici de la version choisie :

$\alpha = 1/2$ pour la méthode explicite du point milieu.

$\alpha = 1$ pour la méthode de Heun.

$\alpha = 2/3$ pour la méthode de Ralston.

RK3 :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$

TABLE 4.4 – Méthode du troisième ordre de Kutta.

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{array}$$

TABLE 4.5 – Méthode SSP (Strong Stability Preserving) Runge-Kutta 3.

RK4 :

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
	1/8	3/8	3/8	1/8

TABLE 4.6 – Méthode classique du quatrième ordre.

4.4.2 Choix du pas de temps

L'avance temporelle étant explicite dans ce travail, il est nécessaire de déterminer judicieusement le pas de temps Δt . Pour éviter que la solution numérique ne devienne instable, on compare la distance parcourue par l'information au cours d'un pas de temps, à la taille de maille h . En somme, cette analyse de stabilité a pour but de restreindre le choix du pas de temps. On définit alors :

$$\Delta t = \text{CFL} \min_{i \in \mathcal{E}_h} \left(\frac{h_i}{\|\mathbf{u}\|_i} \right) \quad (4.41)$$

où le terme CFL désigne le nombre de Courant (adimensionnel), dépendant de l'ordre en temps et en espace, et h_i correspond à la mesure de la taille de l'élément i . *Cockburn et Shu* [13] montrent dans leurs travaux que la combinaison d'un schéma Runge-Kutta d'ordre $(k+1)$ avec une méthode Galerkin Discontinu de degré d'interpolation k est stable dans L^2 pour la relation suivante :

$$\text{CFL} \leq \frac{1}{2k+1} \quad (4.42)$$

Une étude plus détaillée sur le choix du pas de temps sera présentée dans la prochaine section.

4.5 Résultats numériques

Dans cette section, l'équation de transport est résolue pour deux cas-tests (en 2D) classiquement utilisés dans la littérature. Les résultats numériques issus de ces études permettront de discuter des performances de la méthode. Pour rappel, la discrétisation s'appuie sur une approche Galerkin Discontinu pour résoudre les termes advectifs de

l'équation (4.22), et sur une discrétisation explicite du terme temporel, dépendante de l'ordre (en temps) choisi :

- Ordre 1 : Méthode Euler explicite.
- Ordre 2 : Méthode RK2 Ralston.
- Ordre 3 : Méthode SSP-RK3.
- Ordre 4 : Méthode classique d'ordre 4.

4.5.1 Rotation d'un cercle dans un champ de vitesse non-déformant

Ce cas-test est présenté dans les travaux [47][19][54], où les auteur·rice·s utilisent également un couplage GD/RK dans le cadre du formalisme Eléments-Finis. L'interface, initialement circulaire, forme progressivement un « serpent » à fine queue qui nécessite une certaine précision pour être capturée correctement. A la moitié de la simulation, le champ de vitesse est inversé et la solution est déformée en retour. Au temps final, le champ scalaire χ peut alors être comparé aux conditions initiales afin d'estimer la précision de la méthode.

Le domaine de calcul Ω est un carré de $[0;1] \times [0;1]$ m. L'interface initiale, notée Γ , est un cercle séparant deux milieux Ω_1 et Ω_2 , centrée en $x = x_c = 0,5$ m et $y = y_c = 0,75$ m, de rayon $r = 0,15$ m. La fonction Level-Set χ est initialisée selon la fonction distance signée suivante :

$$\chi(x, y, 0) = d(x, y) = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} - r \quad (4.43)$$

Les lignes de niveau ainsi que la position de l'interface au départ de la simulation sont présentées sur la Figure 4.9. Le champ de vitesse analytique \mathbf{u} est décrit ci-dessous :

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \sin(2\pi y) \sin^2(\pi x) \\ v(x, y, t) &= -\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \sin(2\pi x) \sin^2(\pi y) \end{aligned} \quad (4.44)$$

La période d'inversement est prise égale à $T = 8$ s. On vérifie facilement que la vitesse \mathbf{u} est à divergence nulle, et qu'elle s'annule sur les frontières de Ω .

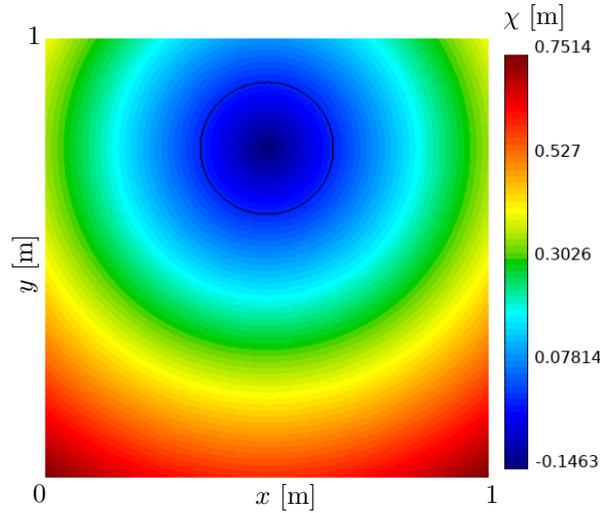


FIGURE 4.9 – Fonction distance signée à $t = 0$ pour la rotation d'un cercle dans un champ de vitesse non déformant, Γ est représentée en noire.

Etude sur le choix du pas de temps

Comme expliqué dans la section précédente, le nombre de Courant permet de donner un ordre de grandeur au pas de temps Δt pour lequel la simulation fonctionne, il existe alors une valeur CFL_{\max} pour laquelle les calculs deviennent instables. *Cockburn et Shu* [13] recherchent par méthode heuristique cette valeur pour différentes combinaisons d'ordres spatial et temporel, leurs résultats sont présentés dans le Tableau 4.7 pour des maillages réguliers 1D. Nous souhaitons réaliser une étude similaire pour ce cas-test, où

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
Euler	-	-	-
RK2	0,33	-	-
RK3	0,409	0,209	0,13
RK4	0,464	0,235	0,145

TABLE 4.7 – Résultats de *Cockburn et Shu* [13] : CFL_{\max} obtenus par méthode heuristique.

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
Euler	0,15	0,05	0,02
RK2	0,31	0,14	0,09
RK3	0,37	0,18	0,11
RK4	0,41	0,2	0,12

TABLE 4.8 – CFL_{\max} obtenus par méthode heuristique pour des maillages réguliers.

les résultats sont présentés dans le Tableau 4.8.

Les résultats issus du Tableau 4.8 suivent ceux des auteurs : lorsque l'ordre spatial augmente, le CFL_{\max} diminue, à l'inverse, lorsque l'ordre temporel augmente, le CFL_{\max} augmente. Les cases non renseignées dans le Tableau 4.7 témoignent d'une simulation instable. Dans notre cas, les valeurs CFL_{\max} indiquées dans le Tableau 4.8 assurent un bon déroulement de la simulation. Pour des maillages réguliers à l'ordre spatial k et l'ordre temporel $(k + 1)$, la relation (4.42) est redéfinie dans ce travail sous la forme suivante :

$$CFL \leq \frac{0,9}{2k + 1} \quad (4.45)$$

Les résultats présentés dans la suite de ce chapitre sont obtenus en se basant sur le nombre de Courant défini ci-dessus.

Etude de convergence sur l'ordre spatial

Afin d'évaluer la précision de la méthode, nous estimons à la fin de la simulation l'erreur E_{Γ} sur la position de l'interface :

$$E_{\Gamma} = \frac{1}{r} \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{n}} \quad (4.46)$$

avec n le nombre de points discrétisant l'interface. Les coordonnées (x_i, y_i) de ces points sont obtenues à l'aide d'un algorithme de dichotomie recherchant les valeurs $\chi_{\text{num}} = 0$. Le terme d_i s'obtient finalement en calculant la distance entre les points (x_i, y_i) et l'interface exacte :

$$d_i = \sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2} - r \quad (4.47)$$

La distance d_i devient nulle lorsque les points (x_i, y_i) se situent sur l'interface exacte. L'erreur E_{Γ} correspond en fait à la norme L^2 adimensionnée de la fonction distance d_i , elle est tracée sur la Figure 4.10 pour différentes tailles de maille h , aux ordres spatiaux $k = 1, 2$ et 3 . Les maillages utilisés pour cette étude sont réguliers.

Bien que l'augmentation de l'ordre spatial permette aux solutions d'être plus précises et de converger plus rapidement, l'ordre de convergence de l'erreur E_{Γ} pour $k = 3$ est limité à 2,4 dans ce cas-ci. Pour rappel, la fonction Level-Set perd son caractère de fonction

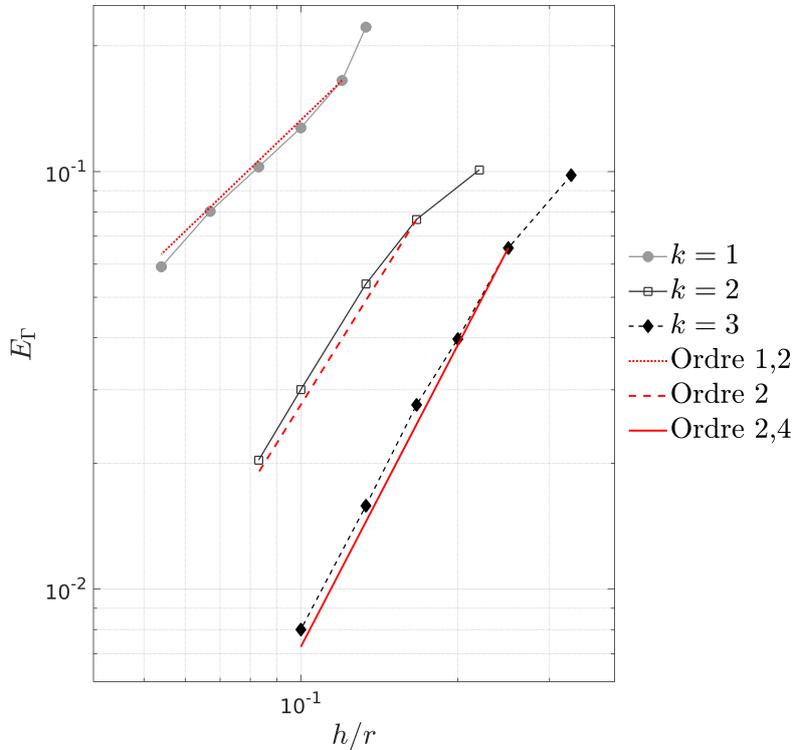


FIGURE 4.10 – Erreur E_Γ en fonction du maillage pour différents ordres spatiaux. Les ordres de convergence sont tracés en rouge.

distance signée au cours de la simulation, elle n'est donc plus assurée d'être régulière. Cette limitation pourrait donc venir de la mauvaise régularité de la fonction χ . Ce phénomène est également observé dans les travaux [54], où la convergence des erreurs est limitée à l'ordre 2 pour ce cas-test.

Visualisation des résultats

A la fin de la simulation, le champ scalaire χ permet de reconstruire l'interface en recherchant les valeurs $\chi_{\text{num}} = 0$. Les Figures 4.11 et 4.12 représentent la position de l'interface Γ au temps final $t_f/T = 1$, pour différents maillages à différents ordres spatiaux. Réduire la taille de maille h et/ou augmenter l'ordre spatial k permet de mieux coïncider les positions initiales et finales de l'interface. Ces figures sont accompagnées du Tableau 4.9 qui indique l'erreur E_Γ et le temps de calcul pour les différentes catégories.

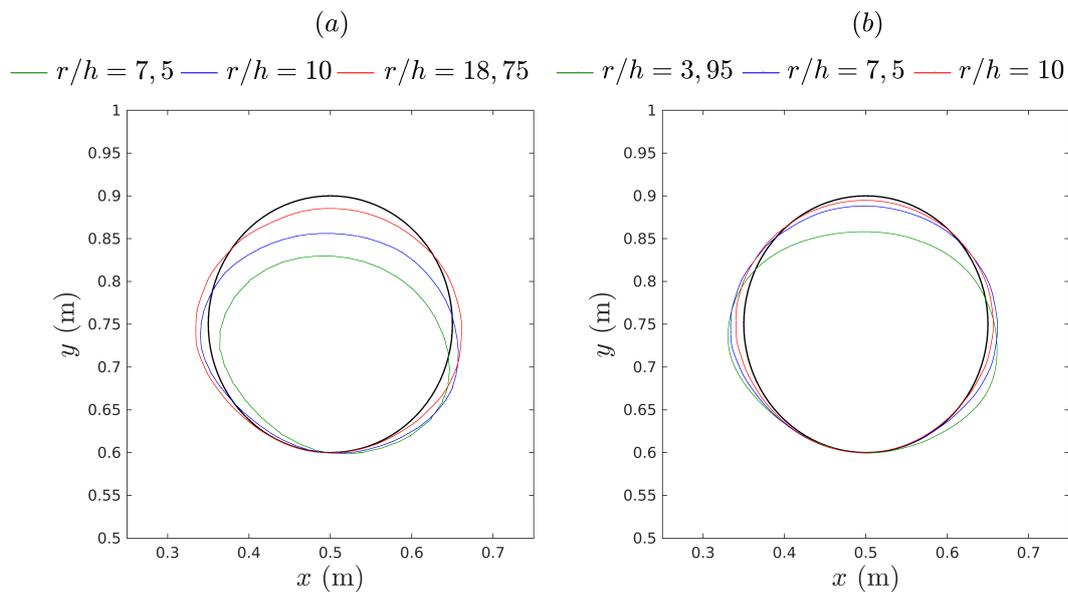


FIGURE 4.11 – Positions finales de l’interface en fonction du maillage aux ordres (a) $k = 1$ et (b) $k = 2$, pour la rotation d’un cercle. La position initiale de l’interface (référence) est tracée en noire.

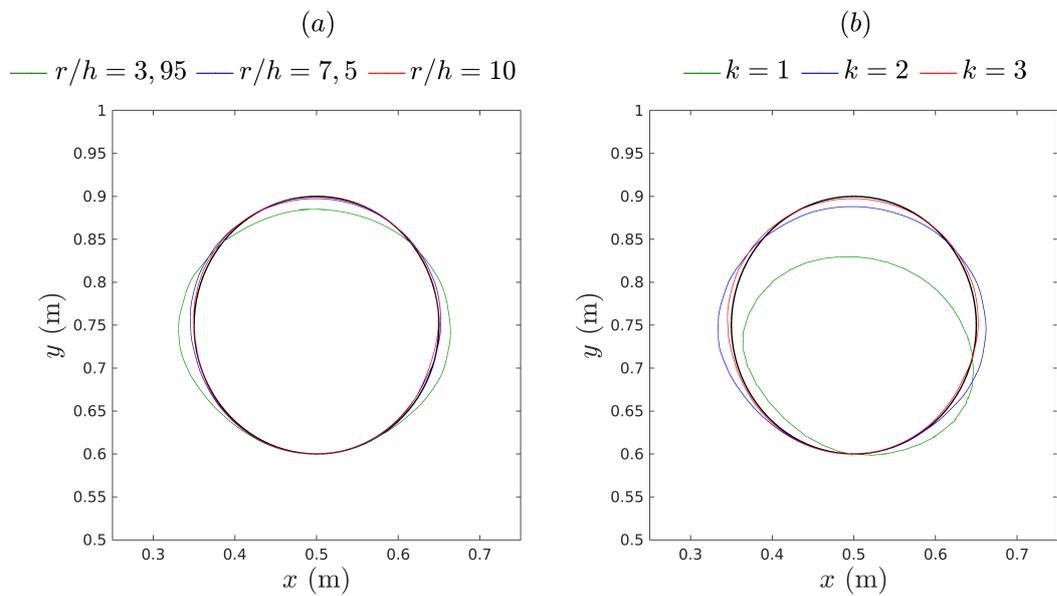


FIGURE 4.12 – Positions finales de l’interface (a) en fonction du maillage à l’ordre $k = 3$, (b) en fonction de l’ordre k pour $r/h = 7,5$, pour la rotation d’un cercle. La position initiale de l’interface est tracée en noire.

	$k = 1$			$k = 2$			$k = 3$		
$h(m)$	0,02	0,015	0,008	0,038	0,02	0,015	0,038	0,02	0,015
r/h	7,5	10	18,75	3,95	7,5	10	3,95	7,5	10
DDL	10000	18496	63504	6084	22500	41616	10816	40000	76984
E_Γ	0,222	0,128	0,059	0,123	0,054	0,03	0,067	0,016	0,009
CPU(s)	38	95	575	38	270	676	171	1270	3197

TABLE 4.9 – Erreur E_Γ sur la position de l’interface et temps de simulation pour différents maillages : $r/h = 3,95 ; 7,5 ; 10 ; 18,75$ ce qui correspond respectivement à 676, 2500, 4624 et 15876 éléments, pour la rotation d’un cercle.

Le raffinement du maillage et/ou la montée de l’ordre spatial s’accompagne d’une augmentation du temps de calcul, ce qui est attendu puisque l’on enrichit le domaine Ω avec des degrés de liberté (DDL) supplémentaires. Le temps CPU est tracé en fonction des DDL pour les différents ordres k sur la Figure 4.13.

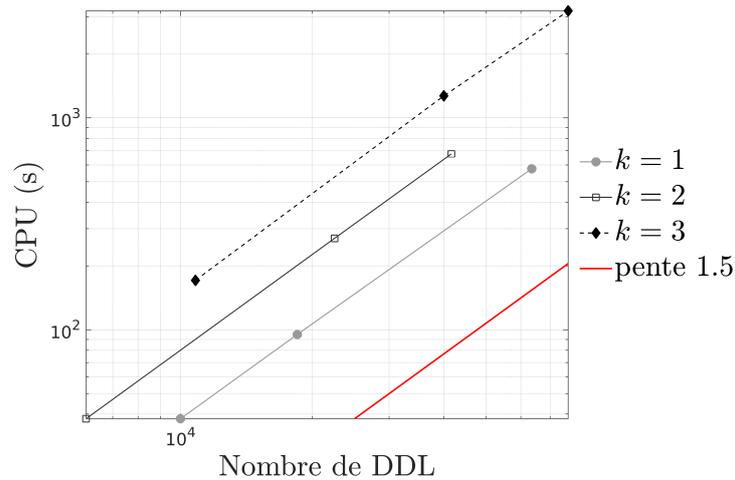


FIGURE 4.13 – Temps CPU en fonction du nombre de degrés de liberté du maillage.

La Figure 4.14 représente la fonction Level-Set dans le domaine de calcul Ω au temps $t_f/T = 1$ pour un maillage fixé ($r/h = 10$) aux ordres spatiaux $k = 1, 2$ et 3 . Ces sorties graphiques permettent de confirmer qu’en augmentant l’ordre des éléments pour un h fixé, on obtient une solution plus précise : l’interface retrouve davantage sa position initiale et les iso-contours sont mieux définis.

L’évolution temporelle de la fonction Level-Set est illustrée sur la Figure 4.15. Ces résultats sont issus d’un maillage raffiné ($r/h = 18,75$) afin de pouvoir capturer précisé-

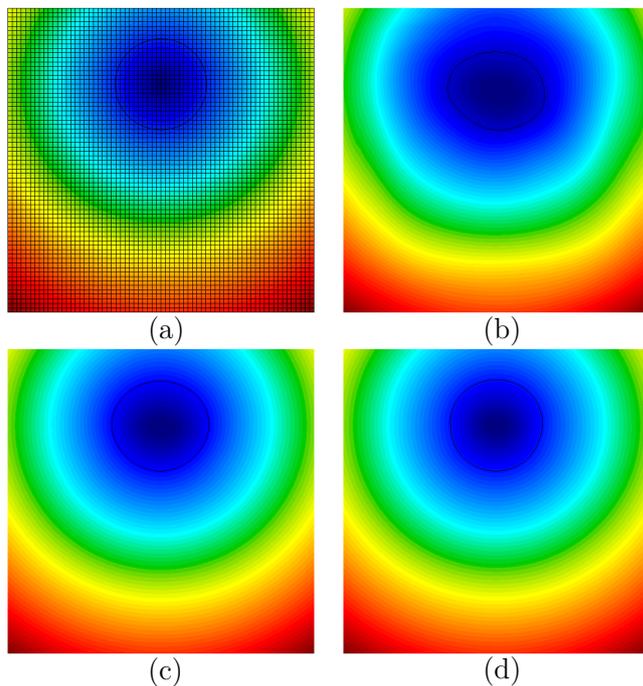


FIGURE 4.14 – (a) Fonction Level-Set au temps initial où le maillage est représenté ($r/h = 10$). Fonction Level-Set à $t/T = 1$ pour (b) $k = 1$, (c) $k = 2$, (d) $k = 3$, pour la rotation d'un cercle. L'interface est représentée en noire.

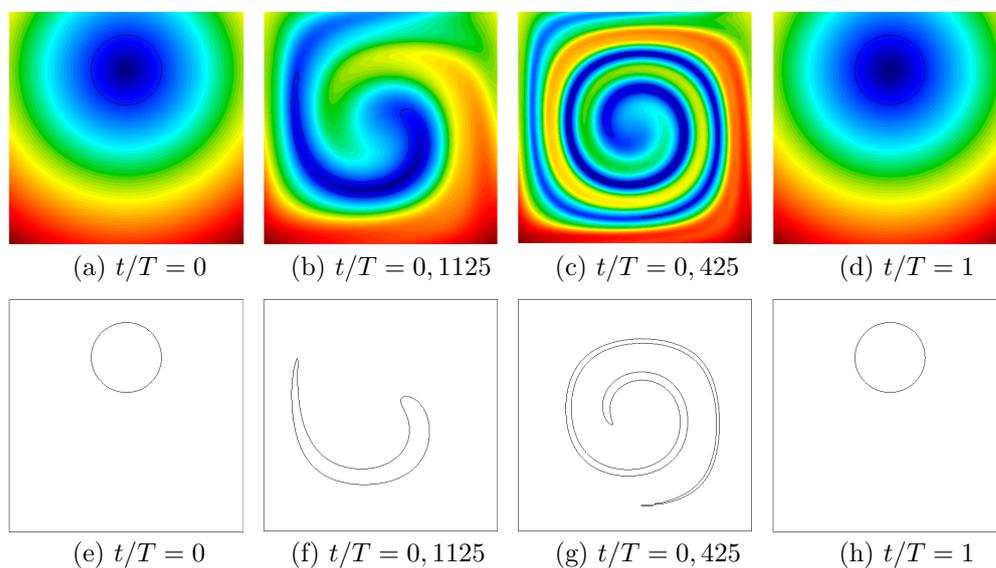


FIGURE 4.15 – (a)(b)(c)(d) Evolution dans le temps de la fonction χ . (e)(f)(g)(h) Evolution dans le temps de l'interface, pour la rotation d'un cercle. $r/h = 18, 75$; $k = 3$, RK4.

ment l'interface. Après s'être déformée en « serpent », l'interface retrouve bien sa forme initiale (i.e. un cercle). Les résultats obtenus peuvent être mis en parallèle avec les travaux [19][47] pour souligner leur similitude. Le temps de calcul requis pour cette simulation est important puisque le maillage est dense, et s'élève à 4h50. En comparant les aires initiale et finale de l'interface, nous estimons une perte de 0,02 % de masse pour ce cas de figure.

4.5.2 Disque de Zalesak

Le cas-test de Zalesak [72] consiste à suivre la rotation d'un corps rigide formant initialement un disque fendu rectangulairement. La fonction Level-set désignant la distance entre ce disque et les nœuds du domaine est advectée par un champ de vitesse indépendant du temps. La principale difficulté dans ce cas-test est de conserver les angles vifs de l'interface, qui tendent à disparaître lorsque la dissipation numérique est trop élevée. Nous nous en tiendrons ici à une étude qualitative des résultats, moins approfondie que l'étude précédente.

Le domaine de calcul Ω est un cercle de rayon $R = 50$ m, centré en $(50;50)$. A l'instant initial, l'interface sépare deux milieux Ω_1 et Ω_2 en formant un disque fendu rectangulairement, centré en $(50;75)$, de rayon $r = 15$ m. Le champ de vitesse analytique

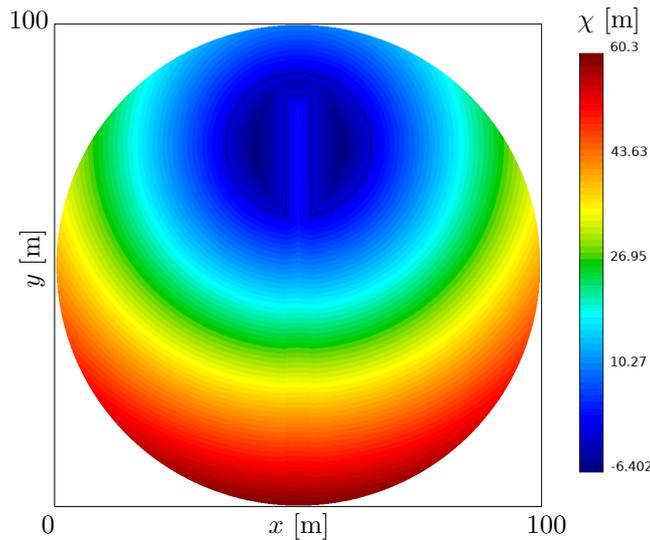


FIGURE 4.16 – Fonction distance signée à $t = 0$ pour le test de Zalesak. L'interface est représentée en noire.

\mathbf{u} (à divergence nulle) permettant d’advecter la fonction Level-Set est défini ci-dessous :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \left(\frac{\pi}{314}\right) (50 - y) \\ v(x, y) &= \left(\frac{\pi}{314}\right) (x - 50) \end{aligned} \tag{4.48}$$

Le temps final de la simulation est imposé à $t_f = 628$ s, il correspond au temps nécessaire pour que le disque réalise une rotation complète autour de l’origine. Le domaine étant circulaire, les maillages utilisés ici sont d’ordre 2 (voir Fig. 4.17). De cette façon, les éléments peuvent épouser parfaitement la frontière du domaine, évitant alors les effets de bord lors des simulations.

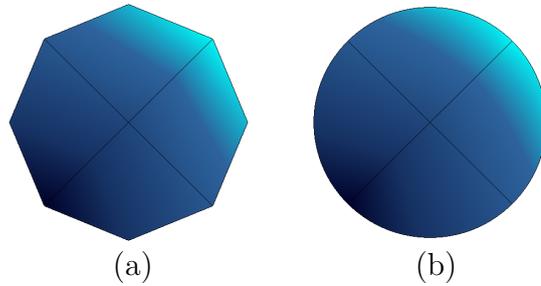


FIGURE 4.17 – Domaine Ω discrétisé par un maillage : (a) d’ordre 1, (b) d’ordre 2.

La discrétisation de l’interface au temps final est représentée sur les Figures 4.18 et 4.19, pour deux types de maillage, aux ordres $k = 1, 2$ et 3 . La montée en ordre d’espace permet une nouvelle fois d’améliorer les résultats : la position de l’interface coïncide davantage avec la forme initiale du disque et les angles de la fente sont moins lissés. Le Tableau 4.10 indique l’erreur E_Γ et le temps de calcul en fonction des paramètres h et k . L’erreur E_Γ correspond toujours à la norme L^2 adimensionnée de la distance entre les points discrétisant Γ et la position de l’interface de référence.

La Figure 4.20 illustre l’évolution temporelle de la fonction Level-Set dans Ω . Les résultats présentés ici sont issus d’un maillage relativement fin ($r/h = 28, 8$; 23114 éléments) et le temps de calcul s’élève à 1h40. Les positions initiale et finale de l’interface sont comparées sur la Figure 4.21. Bien qu’à l’instant final les angles de l’interface soient encore légèrement lissés, on note une très forte similarité avec la position initiale du disque.

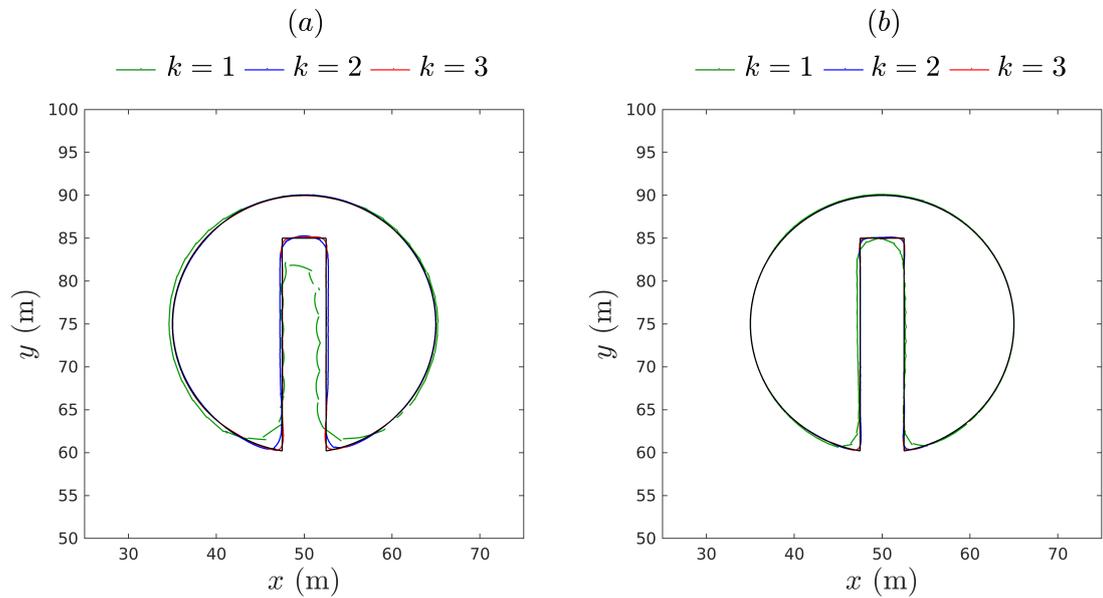


FIGURE 4.18 – Positions finales de l'interface en fonction de l'ordre spatial pour (a) $r/h = 7, 9$ et (b) $r/h = 15$, pour le test de Zalesak. L'interface de référence est tracée en noire.

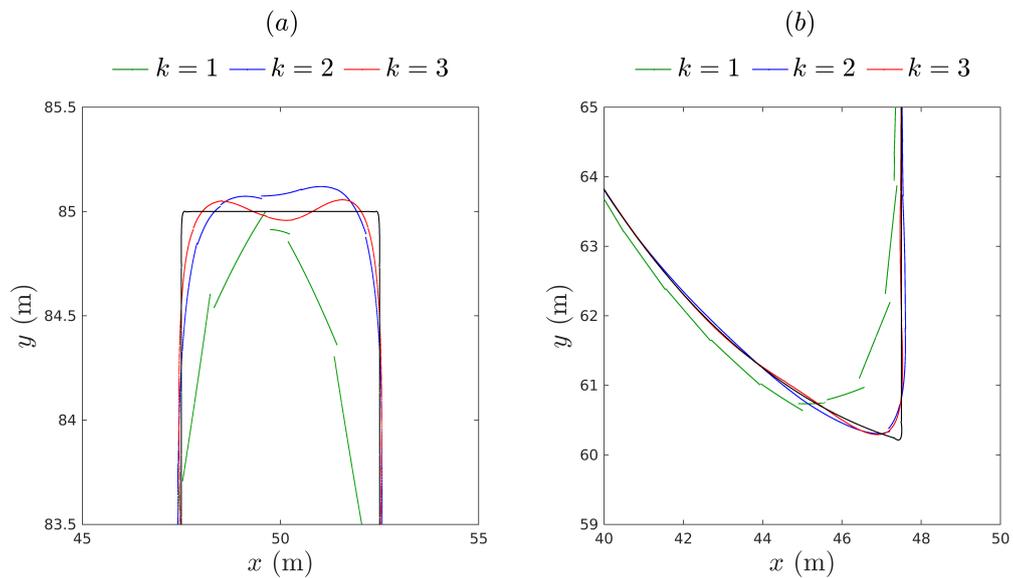


FIGURE 4.19 – (a) Haut de la fente et (b) coin inférieur gauche, en fonction de l'ordre spatial pour $r/h = 15$. L'interface de référence est tracée en noire.

k	$r/h = 7,9$ (1764 éléments)			$r/h = 15$ (6400 éléments)		
	1	2	3	1	2	3
DDL	7056	15867	28224	25600	57600	102400
E_Γ	0,038	0,01	0,003	0,013	0,002	0,001
CPU(s)	3	20	115	15	132	800

TABLE 4.10 – Erreur E_Γ sur la position de l'interface et temps de simulation pour différents paramètres h et k , pour le test de Zalesak.

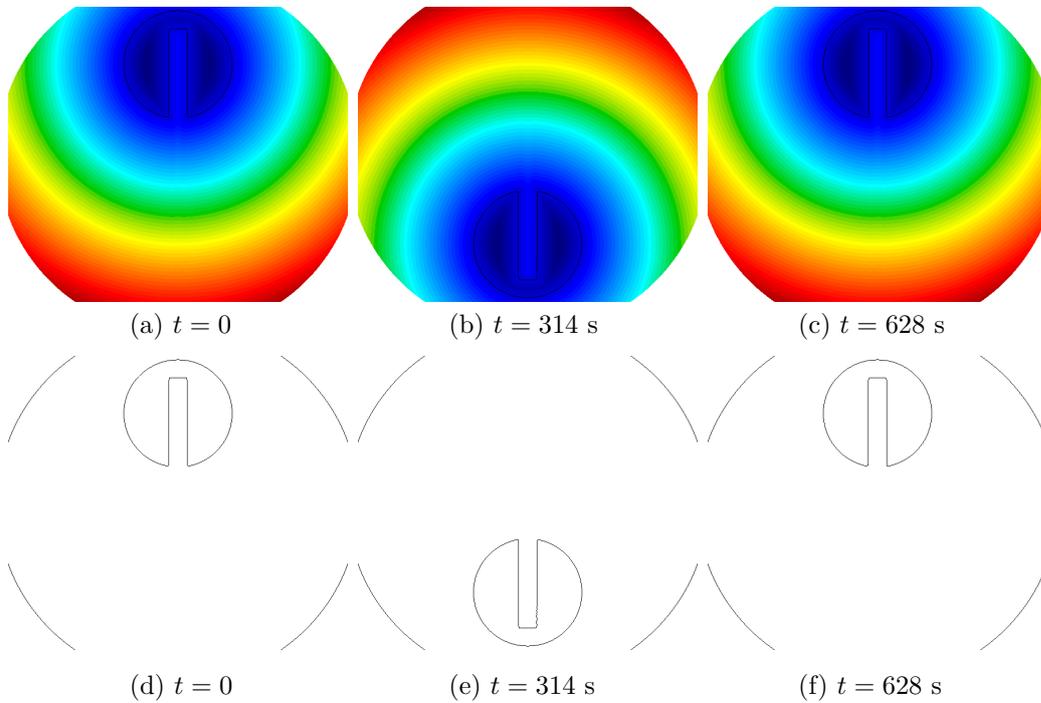


FIGURE 4.20 – (a)(b)(c) Evolution dans le temps de la fonction χ . (d)(e)(f) Evolution dans le temps de l'interface, pour le test de Zalesak. $r/h = 28,8$; $k = 3$, RK4.

Les résultats issus de ces deux cas-tests sont probants et confirment la fiabilité du schéma numérique. Pour consulter davantage de résultats provenant de la littérature, nous invitons les lecteur-ice-s à se référer aux travaux de *Marchandise* [47], *Di Pietro et al.* [54] ou encore *Billaud-Friess* [19] pour ces deux cas d'étude.

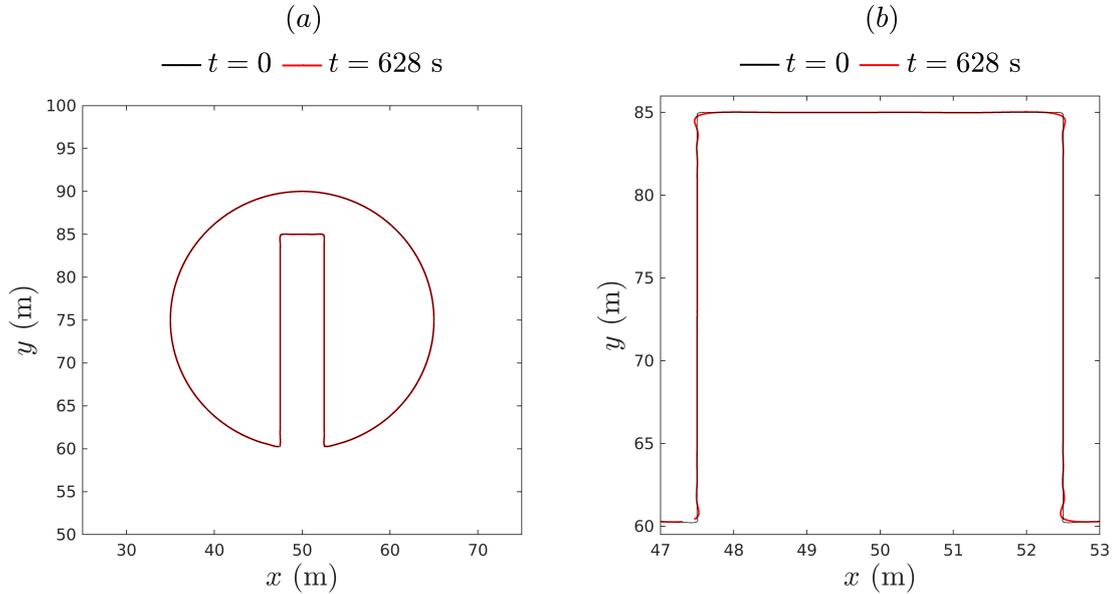


FIGURE 4.21 – (a) Positions de l'interface en fonction du temps, (b) zoom sur la fente. $r/h = 28,8$; $k = 3$, RK4.

4.6 Conclusion

Ce chapitre s'est consacré à la résolution de l'équation de transport Level-Set permettant de suivre implicitement l'évolution de l'interface, et d'y capturer sa position.

Dans ce travail, nous utilisons une approche de type Galerkin Discontinu/Runge-Kutta afin de discrétiser la fonction Level-Set. Cette méthode, facilement implémentable à l'inverse des formalismes (W)ENO, a su faire ses preuves dans plusieurs travaux MEF afin d'assurer la stabilité du schéma numérique. Par ailleurs, elle permet de maintenir de bonnes propriétés de conservation.

Ce chapitre a porté sur l'étude de deux cas-tests, fréquemment étudiés dans la littérature, afin de discuter de la précision de la méthode. Dans ces cas particuliers, il n'était pas nécessaire de préserver le caractère distance signée de la fonction Level-Set, puisque la résolution de l'équation de transport (4.22) ne dépendait ni du gradient $\nabla\chi$, ni de la reconstruction de l'interface. De plus, les champs de vitesse présents dans le terme advectif étaient analytiques, et donc indépendants de la fonction χ . Ces études n'ont donc pas nécessité d'algorithmes de redistanciation. Les résultats issus de ces deux cas-tests ont

permis de démontrer la stabilité du schéma numérique, tout en confirmant la conservation de l'iso-contour zéro de la Level-Set (i.e. l'interface), sans méthode de redistanciation.

Le problème de surface libre étant désormais traité, il s'agit maintenant de s'intéresser à la modélisation des fluides afin de pouvoir y simuler leurs mouvements, pour différentes configurations.

MODÉLISATION D'UN ÉCOULEMENT MONOFLUIDE À SURFACE LIBRE EN DEUX DIMENSIONS

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux écoulements potentiels instationnaires à surface libre, constitués d'une seule phase. Notons Ω un domaine de \mathbb{R}^2 borné par une frontière $\partial\Omega$, ce dernier est représenté sur la Figure 5.1. La surface libre est traitée à l'aide de la méthode Level-Set, décrite dans le Chapitre 4.

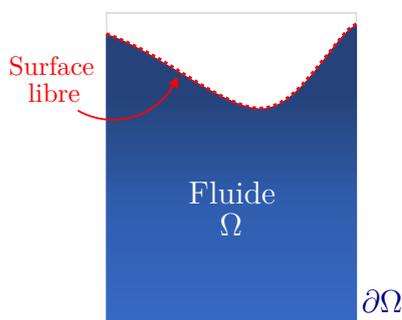


FIGURE 5.1 – Domaine de calcul Ω en deux dimensions pour des écoulements monofluides.

La première partie de ce chapitre présentera les différentes équations nécessaires pour résoudre ce type d'écoulement, ainsi que le traitement des conditions limites à appliquer sur la frontière libre du domaine. La deuxième section détaillera les discrétisations spatiale et temporelle du problème, avant de traiter le couplage avec la méthode Level-Set. Les résultats numériques issus d'un cas de sloshing linéaire seront ensuite présentés, et pourront être comparés à une solution connue du problème en théorie potentielle. Enfin, nous expliquerons pourquoi nous avons décidé de ne pas poursuivre le développement de la méthode pour ce type d'écoulement.

5.1 Présentation du problème

La formulation mathématique pour un écoulement potentiel se résume à définir dans un premier temps une équation de Laplace sur le potentiel des vitesses ϕ :

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (5.1)$$

L'écoulement est constitué d'une phase liquide séparée d'une phase vide par une frontière libre, notée Γ . Pour rendre le problème complet, il est nécessaire d'imposer certaines conditions sur les frontières du domaine. Le comportement du fluide est décrit par l'équation (5.1), cependant, il n'y a aucune information pour décrire le comportement du vide. La surface libre est alors matérialisée en supposant que le fluide ne puisse pas la traverser. Cela revient finalement à considérer que la vitesse d'un point \mathbf{x} à l'interface vaut la vitesse du fluide : c'est la condition cinématique de surface libre. Dans ce contexte, rappelons que la vitesse de l'écoulement vaut le gradient du potentiel des vitesses. On suppose également l'équilibre des contraintes à l'interface, ce qui concerne uniquement la pression pour ce type d'écoulement. La pression sur Γ vaut donc la pression p_0 extérieure, c'est la condition dynamique de surface libre. Enfin, les parois en contact avec la phase liquide sont considérées fixes et imperméables au fluide. Cela équivaut à imposer une condition de Neumann sur la dérivée spatiale du potentiel ϕ . Les différentes hypothèses concernant les conditions aux limites venant d'être citées sont résumées ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(a)} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \nabla\phi \cdot \nabla \mathbf{x} = \nabla\phi \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \\ \text{(b)} & p = p_0 \quad \text{sur } \Gamma \\ \text{(c)} & \nabla\phi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Notons que la position de la frontière libre Γ constitue une inconnue du problème. Par ailleurs, la condition dynamique de surface libre nécessite de passer par la pression. En pratique, on va chercher à substituer cette dernière condition par une condition limite équivalente, plus simple à prendre en compte.

Dans le cadre de la théorie potentielle, il est courant de désigner la localisation de la surface libre par son élévation $y = \eta(x, t)$, rendant alors la surface libre monovaluée (voir Fig. 5.2). Dans ce cas, la condition (5.2)(a) est reformulée et le système (5.2) s'écrit comme suit :

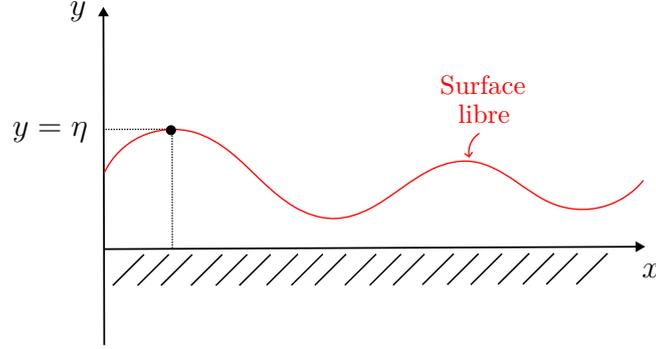


FIGURE 5.2 – Surface libre monovaluée dans un domaine 2D.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(a)} & \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla \eta - \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{sur } \eta \\ \text{(b)} & p = p_0 \quad \text{sur } \eta \\ \text{(c)} & \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega \end{array} \right. \quad (5.3)$$

La condition cinématique (5.3)(a) porte en partie sur l'élévation de la surface libre η . Cependant, dans le cadre de cette étude, η ne constitue pas une inconnue du problème et on préférera reformuler la condition en fonction du potentiel des vitesses ϕ et de la fonction Level-Set χ . Sur la surface libre, la fonction Level-Set désigne l'iso-valeur zéro : $\chi = 0$. Par ailleurs, il est également possible de noter que la condition $y - \eta = 0$ est vérifiée à cet endroit, on peut alors établir la relation suivante :

$$\eta = y - \chi \quad \text{sur } \eta \quad (5.4)$$

En substituant la définition ci-dessus dans l'équation (5.3)(a), on obtient :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla \chi = 0 \quad \text{sur } \eta \quad (5.5)$$

La condition cinématique de surface libre revient finalement à résoudre l'équation Level-Set sur η , en considérant que le champ advectif correspond au gradient du potentiel des vitesses de l'écoulement. Par extension, l'équation ci-dessus est résolue dans tout le domaine de calcul.

La condition dynamique de surface libre (5.3)(b) est elle aussi réexprimée selon les inconnues du problème. Pour cela, on établit une relation entre la pression p et le potentiel

des vitesses ϕ , selon l'équation de Bernoulli instationnaire. En imposant $p_0 = 0$, on obtient alors :

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + g\eta \right) = 0 \quad \text{sur } \eta \quad (5.6)$$

L'équation (5.6) fait intervenir la dérivée temporelle du potentiel ϕ sur la surface libre. En ayant connaissance de cette quantité à l'instant initial, on peut alors établir une loi d'évolution pour mettre à jour ϕ sur η au cours du temps. La condition initiale portant sur la pression est donc remplacée par une condition de Dirichlet portant sur le potentiel, que l'on note :

$$\phi = \phi_D \quad \text{sur } \eta \quad (5.7)$$

Pour mettre à jour le potentiel des vitesses sur la surface libre, on utilise l'équation de Bernoulli (5.6) afin d'écrire la loi d'évolution suivante :

$$\frac{d\phi_D}{dt} = \frac{\partial \phi_D}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_D = \frac{1}{2} (\nabla \phi_D)^2 - g\eta \quad \text{sur } \eta \quad (5.8)$$

où la vitesse d'advection \mathbf{u} correspond au gradient du potentiel des vitesses de l'écoulement.

Une possibilité pour appliquer directement ϕ_D sur η est de faire correspondre le maillage à la géométrie de la surface libre, cette méthode est retrouvée par exemple dans les travaux de *Cong et Teng* [14]. Pour résoudre l'équation (5.1) dans le cadre du formalisme Eléments-Finis, les auteurs utilisent une approche de type « cut cell », où les cellules mixtes qui contiennent la surface libre sont découpées de manière à créer un maillage adapté au domaine fluide. Cette méthode semble assez restrictive puisque les auteurs utilisent uniquement des cellules triangulaires, où différents cas de découpe doivent être traités (voir Fig. 5.3). De plus, la surface libre est assimilée uniquement à une représentation linéaire (segment) au sein des cellules mixtes. Enfin, il convient de souligner que le passage en trois dimensions représente un défi majeur pour cette méthode.

Dans le cadre de ce travail, nous souhaitons plutôt utiliser un maillage eulérien fixe, où la surface libre évolue à l'intérieur du domaine de calcul. Dans ce cas, le domaine Ω incluant le fluide est étendu pour former un domaine de substitution, noté $\tilde{\Omega}$. Ce dernier inclut désormais une partie de la phase vide. L'une des difficultés ici concerne alors la

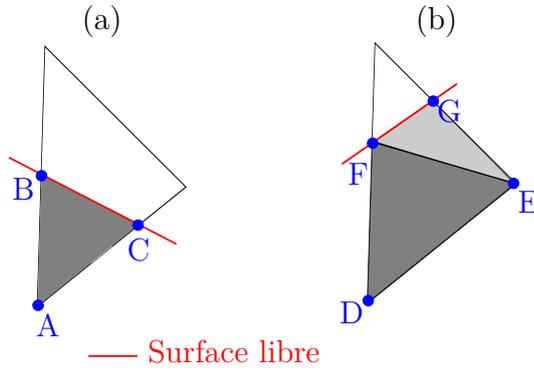


FIGURE 5.3 – Méthode « cut cell » [14] où le fluide est représenté par les parties grisées de la cellule. En fonction de la position de la surface libre : (a) la cellule est découpée en un seul triangle, ou bien (b) la cellule est découpée en deux triangles.

condition limite à imposer sur la frontière qui n'est pas en contact avec le fluide, puisqu'elle est inconnue. Ce problème est illustré sur la Figure 5.4.

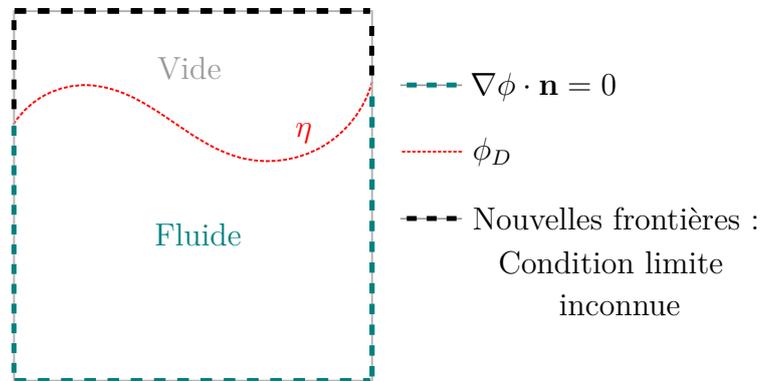


FIGURE 5.4 – Problème de condition limite dans le domaine de substitution $\tilde{\Omega}$.

Pour surmonter cette difficulté, nous nous appuyons sur une méthode de frontière intégrée (Embedded Boundary Method), où la condition de Dirichlet ϕ_D n'est pas directement imposée sur η (qui évolue au cours du temps), mais de façon « équivalente » sur le maillage fixe. Au sein de cette étude, les équations sont discrétisées et résolues uniquement dans le domaine physique, les cellules entièrement composées de vide sont alors exclues du calcul.

Dans ce chapitre, nous partons du principe que la surface libre subit de très faibles perturbations. Cette hypothèse permet d'émettre certaines simplifications. La condition dynamique de surface libre (5.8) est alors reformulée en utilisant une technique de perturbation combinée au développement limité de Taylor en $y = 0$. Pour cela, nous définissons un petit paramètre ε afin d'écrire les décompositions suivantes :

$$\eta = \varepsilon\eta^{(1)} + \varepsilon^2\eta^{(2)} + \dots \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial t} + \varepsilon^2\eta^{(1)}\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial y\partial t} + \dots \quad (5.10)$$

$$\nabla\phi = \varepsilon\nabla\phi^{(1)} + \varepsilon^2\nabla\phi^{(2)} + \varepsilon^2\eta^{(1)}\frac{\partial}{\partial y}\nabla\phi^{(1)} + \dots \quad (5.11)$$

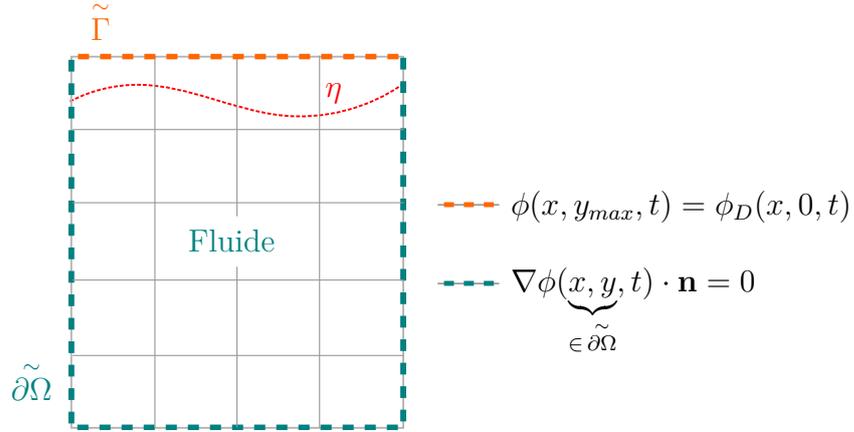
L'équation (5.8) est reformulée en tenant compte de ces différentes décompositions. On souhaite ici se restreindre au problème linéaire d'ordre 1, on obtient dans ce cas :

$$\frac{\partial\phi_D^{(1)}}{\partial t} = -g\eta^{(1)} \quad \text{en } y = 0 \quad (5.12)$$

C'est finalement l'équation (5.12) qui permet de mettre à jour la condition de Dirichlet ϕ_D . Dans un contexte de faibles déformations de la surface libre, celle-ci évolue toujours dans les mêmes cellules du maillage. On cherche donc à désigner une condition de Dirichlet sur la frontière supérieure du domaine, notée $\tilde{\Gamma}$, où les mailles mixtes à cet endroit contiennent l'interface séparant le fluide du domaine extérieur. Cette frontière est positionnée à la coordonnée $y = y_{max}$. On cherche à imposer une condition limite sur $\tilde{\Gamma}$ garantissant ϕ_D en $y = 0$. Il est évident que cette condition équivalente doit différer de la solution ϕ_D . Cependant, dans une première approche, nous imposons directement la condition ϕ_D sur $\tilde{\Gamma}$ (voir Fig 5.5). Cette approximation entraîne une erreur, plus ou moins importante si la frontière fixe est plus ou moins éloignée de la surface libre. On peut finalement écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi_D(x, 0, t)}{\partial t} = -g\eta & \text{en } y = 0 \\ \phi(x, y_{max}, t) = \phi_D(x, 0, t) & \text{sur } \tilde{\Gamma} \end{cases} \quad (5.13)$$

Pour une application plus générale de la méthode (déformations de la surface libre plus importantes), il est nécessaire de mettre au point une approche particulière pour sélectionner, à chaque pas de temps, les mailles contenant le fluide et les mailles mixtes. De cette

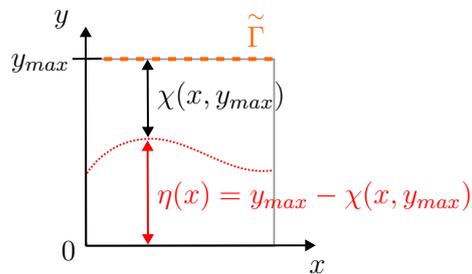

 FIGURE 5.5 – Conditions limites sur les frontières du domaine $\tilde{\Omega}$.

façon, la surface libre est maintenue le plus proche possible de la frontière $\tilde{\Gamma}$ où l'on impose la condition de Dirichlet ϕ_D , ce qui permet alors d'obtenir une approximation plus précise.

L'élevation de la surface libre η , présente dans l'équation (5.13), est déterminée selon la valeur que prend la fonction Level-Set sur la frontière supérieure $\tilde{\Gamma}$. L'équation (5.13) est donc réexprimée sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi_D}{\partial t} = -g(y_{max} - \chi) & \text{sur } \tilde{\Gamma} \\ \phi = \phi_D & \text{sur } \tilde{\Gamma} \end{cases} \quad (5.14)$$

où χ représente une fonction distance. Pour de faibles déformations de la surface libre, la distance minimale entre cette dernière et la frontière $\tilde{\Gamma}$ dépend uniquement de la coordonnée y , comme illustré sur la Figure 5.6.


 FIGURE 5.6 – Calcul de $\eta(x)$ en fonction de $\chi(x, y_{max})$ pour une faible déformation de la surface libre.

Il est nécessaire ici de formuler la condition limite sur $\tilde{\Gamma}$ de manière consistante, sur les nœuds de la grille. Au sein du formalisme Eléments-Finis, cela peut se faire en l'appliquant faiblement, par exemple au moyen d'une formulation de Nitsche [51].

5.2 Discrétisation spatiale et temporelle de l'équation de Laplace

Cette section se concentre d'une part sur la description de la discrétisation spatiale de l'équation (5.1), qui constitue classiquement un problème elliptique. Le formalisme Eléments-Finis utilisé à cet effet a été introduit auparavant dans le Chapitre 2 pour ce type de problème, en une dimension. D'autre part, cette section aborde la description explicite du schéma temporel, choisi de manière similaire à celui employé pour résoudre l'équation de transport Level-Set.

5.2.1 Discrétisation spatiale

L'équation (5.1) est multipliée par une fonction test $\omega(x, y)$ choisie suffisamment régulière, puis intégrée dans le domaine de calcul $\tilde{\Omega}$:

$$\int_{\tilde{\Omega}} \nabla \cdot (\nabla \phi) \omega = 0 \quad (5.15)$$

Le théorème de Green est ensuite appliqué à l'équation ci-dessus afin d'obtenir la formulation faible de l'équation de Laplace :

$$\int_{\tilde{\Omega}} \nabla \phi \cdot \nabla \omega - \int_{\partial \tilde{\Omega}} \omega (\nabla \phi \cdot \mathbf{n}) - \int_{\Gamma} \omega (\nabla \phi \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (5.16)$$

La condition de glissement du fluide aux parois suppose que les intégrales sur les frontières latérales et au fond du domaine sont nulles. Il reste à imposer la condition de Dirichlet, qui pour rappel est appliquée faiblement sur la frontière supérieure du domaine. Une approche envisageable consiste à utiliser la formulation de Nitsche, qui se traduit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \int_{\tilde{\Omega}} \nabla \phi \cdot \nabla \omega - \underbrace{\int_{\tilde{\Gamma}} \omega (\nabla \phi \cdot \mathbf{n})}_{\text{consistance}} - \underbrace{\int_{\tilde{\Gamma}} \phi (\nabla \omega \cdot \mathbf{n})}_{\text{symétrie}} + \underbrace{\frac{\alpha}{h} \int_{\tilde{\Gamma}} \omega \phi}_{\text{coercivité}} \\
 = - \int_{\tilde{\Gamma}} \phi_D (\nabla \omega \cdot \mathbf{n}) + \frac{\alpha}{h} \int_{\tilde{\Gamma}} \omega \phi_D
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Plus spécifiquement, la définition ci-dessus se réfère à la forme symétrique de la formulation de Nitsche. À la différence de la méthode présentée pour résoudre l'équation de Laplace 1D dans le Chapitre 2, la condition de Dirichlet n'est pas définie de manière forte. En effet, le système linéaire n'est pas directement modifié afin de forcer la solution ϕ_D sur $\tilde{\Gamma}$. La formulation faible de la condition de Dirichlet fait intervenir un paramètre de pénalisation/stabilisation, noté α , associé à la taille de maille h . Pour faire référence à ce formalisme, nous pouvons nous appuyer sur les travaux de *Johansson et al.* [35], où les auteurs se basent sur une formulation de Nitsche afin de simuler des écoulements potentiels électro-hydrodynamiques, dans le contexte des méthodes de frontière intégrées.

Pour chaque élément $E \in \mathcal{E}_h$, les fonctions tests et la solution ϕ sont approximées par des fonctions polynomiales d'ordre $k \geq 0$, continues sur chaque élément puis d'un élément à l'autre. L'espace fonctionnel des solutions est le suivant :

$$W_h^\phi = \{\phi_h \in H^1(\tilde{\Omega}); \phi_h|_E \in \mathbb{P}_k(E), \forall E \in \mathcal{E}_h\} \tag{5.18}$$

La formulation discrète de l'équation (5.17) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 \int_{\tilde{\Omega}} \nabla \phi_h \cdot \nabla \omega_h - \int_{\tilde{\Gamma}} \omega_h (\nabla \phi_h \cdot \mathbf{n}) - \int_{\tilde{\Gamma}} \phi_h (\nabla \omega_h \cdot \mathbf{n}) + \frac{\alpha}{h} \int_{\tilde{\Gamma}} \omega_h \phi_h \\
 = - \int_{\tilde{\Gamma}} \phi_D (\nabla \omega_h \cdot \mathbf{n}) + \frac{\alpha}{h} \int_{\tilde{\Gamma}} \omega_h \phi_D \quad \forall \omega_h \in W_h^\phi
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Les fonctions approchées ϕ_h et ω_h présentes dans l'équation ci-dessus sont définies par des polynômes de Lagrange :

$$\phi_h(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \phi_i \quad \text{et} \quad \omega_h(x, y) = \sum_{j=1}^n N_j(x, y) \omega_j \tag{5.20}$$

avec n le nombre de degré de liberté dans l'élément. Le problème approché (5.19) peut

finalement s'exprimer sous la forme matrice-vecteur suivante :

$$A\{\phi\} = \{b\} \quad (5.21)$$

où le vecteur $\{\phi\}$ contient les valeurs nodales à déterminer. La matrice A et le vecteur $\{b\}$ sont eux connus et leurs i,j -ièmes éléments sont donnés par :

$$A_{ij} = \int_{\tilde{\Omega}} \nabla N_i \cdot \nabla N_j - \int_{\tilde{\Gamma}} N_j (\nabla N_i \cdot \mathbf{n}) - \int_{\tilde{\Gamma}} N_i (\nabla N_j \cdot \mathbf{n}) + \frac{\alpha}{h} \int_{\tilde{\Gamma}} N_i N_j \quad (5.22)$$

$$b_j = - \int_{\tilde{\Gamma}} \phi_D (\nabla N_j \cdot \mathbf{n}) + \frac{\alpha}{h} \int_{\tilde{\Gamma}} N_j \phi_D \quad (5.23)$$

Le système linéaire (5.21) est résolu par une méthode du Gradient Conjugué avec un préconditionneur de Gauss-Seidel.

5.2.2 Discrétisation temporelle

Pour mettre à jour la condition de Dirichlet (5.14) sur le potentiel des vitesses, il est nécessaire de définir un schéma temporel. La résolution de l'équation de transport Level-Set (4.22) étant basée sur des schémas temporels explicites, nous optons pour le même type de discrétisation afin de traiter le problème (5.14). Précisons que la dérivée temporelle du potentiel ϕ_D est résolue spatialement de façon ponctuelle, sans recourir à une discrétisation éléments-finis. Nous privilégions une méthode de type Runge-Kutta 2 (point milieu) à la méthode d'Euler afin d'assurer la stabilité du schéma numérique. La restriction sur le pas de temps Δt s'effectue toujours selon le choix du nombre de Courant CFL.

5.3 Couplage avec la méthode Level-Set

Nous venons de présenter la méthode de résolution de l'équation de Laplace permettant de mettre en mouvement le fluide étudié. La méthode Level-Set, utilisée pour suivre l'évolution de la surface libre, est quant à elle détaillée dans le Chapitre 4. Il reste toutefois à spécifier la condition limite à imposer sur la solution χ aux frontières du domaine.

Le bord inférieur et les parois latérales sont considérés fixes, les intégrales sur ces fron-

tières dans l'équation (4.32) sont alors nulles, du fait de la condition de non-pénétration du fluide. Il reste à spécifier la condition limite sur la frontière supérieure $\tilde{\Gamma}$, où la vitesse du fluide est autorisée à entrer ou sortir du domaine. Il est donc nécessaire de définir une condition d'entrée/sortie à cet endroit.

Si $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) < 0$ sur la frontière $\tilde{\Gamma}$, alors le flux est entrant (voir Fig. 5.7(a)) et χ doit être correctement spécifiée car la solution est advectée dans le domaine. Pour cela, on se propose généralement de rechercher une solution physique qui convient au problème étudié. En revanche, si $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) > 0$ sur $\tilde{\Gamma}$, le flux est sortant (voir Fig. 5.7(b)) et n'affecte pas la solution. Dans ce cas, il est habituel d'imposer la solution numérique au bord. La frontière $\tilde{\Gamma}$ étant très proche de la surface libre, il est essentiel de ne pas imposer une condition d'entrée inappropriée, au risque de perturber le mouvement de cette dernière. Par conséquent, la recherche d'une condition d'entrée pour la fonction Level-Set devient complexe. Dans ce travail, nous proposons d'utiliser la solution numérique à la frontière $\chi(x, y_{max}, t)$ lorsque le flux est sortant, mais aussi entrant. Il convient de prendre garde car ce choix peut favoriser l'apparition d'instabilités numériques. En effet, la moindre perturbation à l'entrée risque d'être propagée dans l'ensemble du domaine de calcul, et peut ainsi contaminer rapidement la solution. En choisissant cette option, on évite toutefois d'imposer une condition d'entrée inappropriée qui risquerait de nuire à la précision des résultats.

Il s'agit désormais de coupler les deux méthodes de résolution (surface libre/fluide) puisque la vitesse servant à advecter la fonction Level-Set se trouve être le gradient du potentiel des vitesses, où ϕ est déterminé selon l'équation (5.1). De plus, la position de la

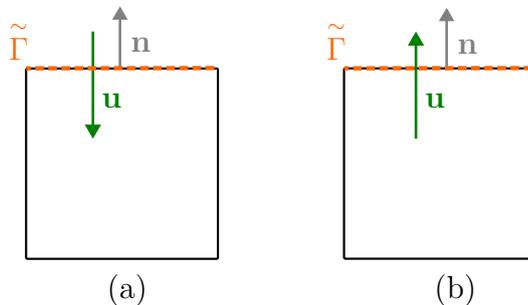


FIGURE 5.7 – Représentation d'un flux (a) entrant et (b) sortant.

surface libre η , nécessaire au calcul de la condition de Dirichlet, est déterminée en fonction de la valeur χ sur la frontière supérieure du domaine. Dans ce chapitre, nous développons une méthode RK2 (point milieu) afin d'associer l'avance temporelle des équations (4.22) et (5.14). L'algorithme 1 résume le couplage Laplace/Level-Set afin de simuler numéri-

Algorithme 1 Calculer ϕ et χ

/* Initialisation

$t \leftarrow t^0, \chi \leftarrow \chi^0, \phi_D \leftarrow \phi_D^0.$

Calculer $\Delta t = \text{CFL} \min(h/||\mathbf{u}||);$

while $t < t^{max}$ **do**

$t \leftarrow t^n, \chi \leftarrow \chi^n, \phi_D \leftarrow \phi_D^n.$

/* Résolution dans l'espace continu H^1 (approximation Galerkin)

Calculer $\phi : \Delta\phi = 0;$

Calculer $K_1(\phi_D) = \partial\phi_D/\partial t = -g(y_{max} - \chi)$ sur $\tilde{\Gamma};$

/* Résolution dans l'espace discontinu L^2 (approximation GD)

Projection des solutions ϕ dans l'espace L^2

Calculer $\mathbf{u} = \nabla\phi;$

Calculer $K_1(\chi) = \partial\chi/\partial t = -\nabla \cdot (\mathbf{u}\chi);$

/* Calculer ϕ_D et χ au temps $t = t^n + \Delta t/2$ (Euler explicite)

$\phi_D^{n+1/2} = \phi_D^n + (\Delta t/2)K_1(\phi_D);$

$\chi^{n+1/2} = \chi^n + (\Delta t/2)K_1(\chi);$

$t \leftarrow t^{n+1/2}, \chi \leftarrow \chi^{n+1/2}, \phi_D \leftarrow \phi_D^{n+1/2}.$

/* Résolution dans l'espace continu H^1 (approximation Galerkin)

Calculer $\phi : \Delta\phi = 0;$

Calculer $K_2(\phi_D) = \partial\phi_D/\partial t = -g(y_{max} - \chi)$ sur $\tilde{\Gamma};$

/* Résolution dans l'espace discontinu L^2 (approximation GD)

Projection des solutions ϕ dans l'espace L^2

Calculer $\mathbf{u} = \nabla\phi;$

Calculer $K_2(\chi) = \partial\chi/\partial t = -\nabla \cdot (\mathbf{u}\chi);$

/* Calculer ϕ_D et χ au temps $t = t^n + \Delta t$ (Runge-Kutta 2)

$\phi_D^{n+1} = \phi_D^n + \Delta t K_2(\phi_D);$

$\chi^{n+1} = \chi^n + \Delta t K_2(\chi);$

Algorithme de redistanciation

$t \leftarrow t^{n+1}.$

end while

quement des écoulements monofluides.

À la différence du chapitre précédent, nous utilisons ici une méthode de redistanciation. Le champ de vitesse n'étant plus analytique, cette étape se révèle essentielle pour assurer la stabilité du schéma numérique. La méthode utilisée dans cette section s'appuie sur l'algorithme de dichotomie décrit dans le Chapitre 3.

5.4 Etudes d'un cas de sloshing linéaire

Nous traitons dans cette section un cas de sloshing où l'on considère de très faibles mouvements du fluide. Rappelons que cette hypothèse permet en partie de considérer que la surface libre ne puisse pas traverser les cellules du maillage.

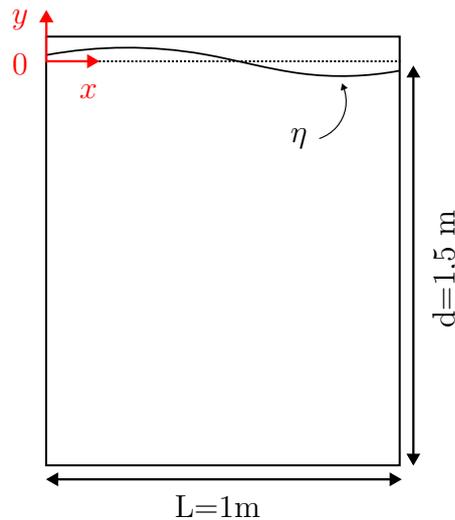


FIGURE 5.8 – Domaine de calcul $\tilde{\Omega}$ pour un cas de sloshing monofluide.

Les résultats de cette étude sont obtenus à partir de maillages réguliers, où le domaine de calcul est illustré sur la Figure 5.8. Dans ce chapitre, nous menons une analyse qualitative des résultats dans le but de discuter de la précision de la méthode de manière non exhaustive, tout en soulignant ses limites.

La surface libre est centrée en $y = 0$ et initialisée selon le premier mode linéaire de déformation :

$$\eta(x, t = 0) = A \cos(\kappa x) \quad (5.24)$$

avec $A = 0,005$ m l'amplitude d'oscillation et κ le nombre d'onde ($\kappa = \pi/L$), où $L = 1$ m désigne la largeur du réservoir. On peut considérer ici une faible déformation de la surface libre car sa cambrure reste inférieure à 1% ($2A/\lambda = 0,5\%$). Pour ce cas-test, le champ de vitesse est nul dans $\tilde{\Omega}$ à l'instant initial, la surface libre doit alors naturellement osciller avec la gravité. On considère ici $\mathbf{u} = \sqrt{gL}$ la valeur de référence pour la vitesse de l'écoulement. Le problème complet est résumé ci-dessous :

$$\begin{aligned} & \text{(a) } \Delta\phi = 0 \quad \text{dans } \tilde{\Omega} \\ & \text{(b) } \mathbf{u} = \nabla\phi \quad \text{dans } \tilde{\Omega} \\ \text{(c) } & \frac{\partial\phi_D}{\partial t} = -g(y_{max} - \chi) \quad \text{sur } \tilde{\Gamma} \\ & \text{(d) } \phi = \phi_D \quad \text{sur } \tilde{\Gamma} \\ & \text{(e) } \nabla\phi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\tilde{\Omega} \\ \text{(f) } & \frac{\partial\chi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\chi) = 0 \quad \text{dans } \tilde{\Omega} \end{aligned} \quad (5.25)$$

La méthode de redistanciation utilisée pour ce cas-test se base sur l'algorithme de dichotomie. Les mouvements de la surface libre sont considérés très faibles pour ce ballottement, seuls quelques points sont alors nécessaires à la discrétisation de cette dernière afin de recalculer une fonction χ distance signée. Pour un ordre spatial $k = 1$, les valeurs $\chi = 0$ sont recherchées sur les bords gauche et droit de chaque maille mixte. A l'ordre $k = 2$, on recherche une valeur nulle supplémentaire, au centre des mailles. Enfin, pour $k = 3$, les valeurs $\chi = 0$ sont recherchées sur les bords gauche et droit, au quart, au milieu et au trois quarts de chaque maille mixte (voir Fig. 3.17). Il n'est pas nécessaire d'enrichir davantage la discrétisation de la surface libre ici, cela augmenterait le temps de simulation sans y gagner considérablement en précision.

5.4.1 Solution analytique

Il existe une solution analytique de l'équation de Laplace pour le ballottement d'un fluide dans une cuve, basée sur une théorie linéaire en profondeur finie. L'expression analytique du potentiel des vitesses ϕ est la suivante :

$$\phi_a(x, y, t) = \frac{Ag \cosh[\kappa(y + d)]}{\omega \cosh(\kappa d)} \cos(\kappa x) \sin(\omega t) \quad (5.26)$$

où d désigne ici la profondeur du fluide, selon la hauteur moyenne de la surface libre. La pulsation ω est donnée par la relation de dispersion ci-dessous :

$$\omega^2 = g\kappa \tanh(\kappa d) \quad (5.27)$$

Par ailleurs, la période d'oscillation s'obtient en fonction de la pulsation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5.28)$$

En théorie linéaire, la variable $\eta(x, t)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\eta(x, t) = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{y=0} \quad (5.29)$$

En combinant les équations (5.26) et (5.29), nous obtenons alors une solution analytique pour l'élévation de la surface libre :

$$\eta_a(x, t) = -A \cos(\kappa x) \cos(\omega t) \quad (5.30)$$

5.4.2 Résultats numériques

Cette section présente les résultats numériques issus du code de calcul développé dans ce travail. L'avance temporelle se base ici sur une méthode RK2 (point milieu) où le pas de temps pour les différents ordres spatiaux k est paramétré par les nombres adimensionnels suivants :

$$\text{CFL} = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 1 \\ 0.75 & \text{pour } k = 2 \\ 0.45 & \text{pour } k = 3 \end{cases} \quad (5.31)$$

Influence du paramètre de stabilisation

Dans la formulation de Nitsche (5.17), le paramètre α joue un rôle important dans la stabilité du schéma. Cette section se concentre sur l'influence de ce paramètre sur la précision des résultats numériques. Les simulations sont effectuées pour un maillage de

taille $L/h = 16$, à différents ordres spatiaux k et pour différents α . La frontière supérieure $\tilde{\Gamma}$ est positionnée initialement à $y_{max} = 0,01$ m ($A/y_{max} = 0,5$). La Figure 5.9 représente l'évolution temporelle de la surface libre η de $t = 2,5T$ à $t = 3T$. Les variables η et t sont adimensionnalisées ici par l'amplitude A et la période T d'oscillation, respectivement.

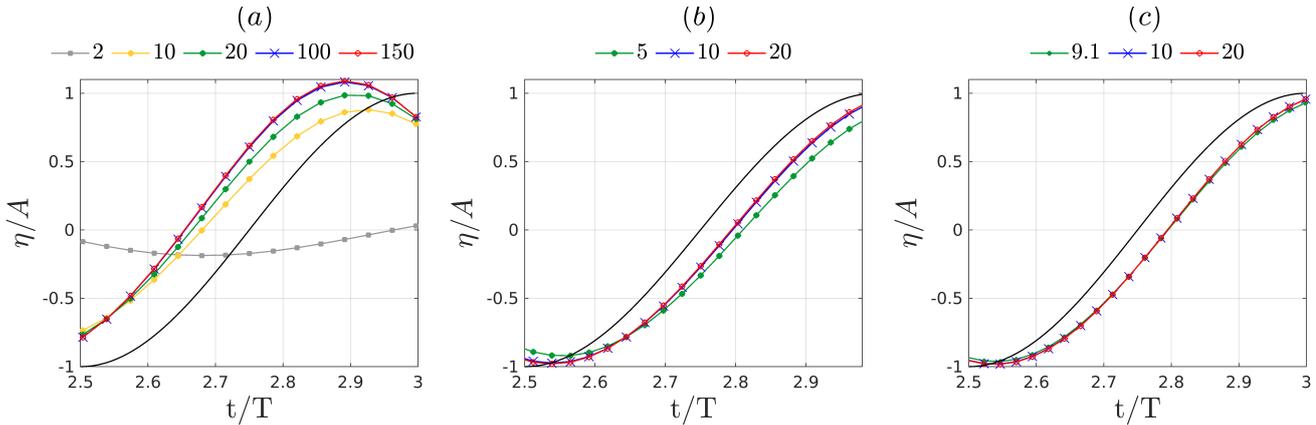


FIGURE 5.9 – Elévation de la surface libre sur la frontière droite du domaine, en fonction du temps, pour (a) $k = 1$, (b) $k = 2$ et (c) $k = 3$. La solution η_a est tracée en noire. $L/h = 16$ ($A/h = 0.08$), $A/y_{max} = 0,5$.

Classiquement, on se propose de définir de manière heuristique la valeur α minimale pour laquelle la simulation fonctionne. Cette dernière représente le seuil en dessous duquel les solutions numériques divergent. Dans ce travail, cette valeur est notée α_{min} , selon l'ordre spatial du schéma nous retenons les valeurs suivantes :

$$\alpha_{min} = \begin{cases} 2 & \text{pour } k = 1 \\ 5 & \text{pour } k = 2 \\ 9,1 & \text{pour } k = 3 \end{cases} \quad (5.32)$$

À mesure que l'on augmente l'ordre k , α_{min} augmente également. Pour $k = 1$, l'augmentation du paramètre de stabilisation permet aux résultats de tendre vers une même solution (à partir de $\alpha = 100$). À l'ordre $k = 2$, les résultats tendent vers une même solution, différente de la précédente, pour un paramètre bien inférieur ($\alpha = 10$) à celui retenu pour $k = 1$. Pour $k = 3$, les solutions sont pratiquement équivalentes pour l'ensemble des valeurs α utilisées. Ces résultats mettent en évidence une corrélation entre l'ordre spatial du schéma et le choix du paramètre de stabilisation.

La méthode de Nitsche peut présenter des limitations lorsque les cellules du maillage sont composées d'une légère quantité du fluide considéré. Afin de vérifier cet aspect, nous étudions le comportement des solutions numériques lorsque la frontière $\tilde{\Gamma}$ est éloignée de l'interface. Pour cela, nous fixons $y_{max} = 0.03$ m ($A/y_{max} = 0,17$), les cellules situées en haut du domaine contiennent alors moins de fluide que dans le cas précédent (pour $A/y_{max} = 0,5$). La Figure 5.10 représente l'évolution temporelle de η à l'ordre $k = 1$ pour ce nouveau cas. Alors que les résultats précédents ne divergeaient pour aucune valeur du paramètre de stabilisation, les solutions divergent ici pour $\alpha > 10$. Ces observations permettent de conclure que le taux de remplissage des cellules par le fluide a un impact significatif sur le choix du paramètre α , et donc sur la stabilité du schéma numérique.

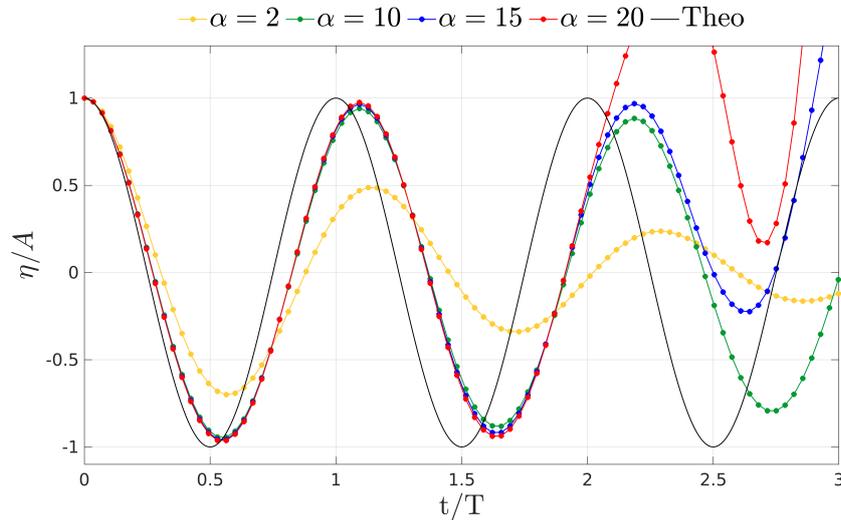


FIGURE 5.10 – Elévation de la surface libre sur la frontière droite du domaine, en fonction du temps, pour différents paramètres de stabilisation. $k = 1$, $L/h = 16$ ($A/h = 0.08$), $A/y_{max} = 0,17$.

Augmentation de l'ordre spatial

Nous effectuons ici trois simulations aux ordres spatiaux $k = 1, 2$ et 3 . Afin de rapprocher la surface libre de la frontière supérieure du domaine, nous fixons cette dernière à $y_{max} = 0.01$ m. D'après l'étude précédente, le paramètre α est défini selon l'ordre des éléments :

$$\alpha = \begin{cases} 100 & \text{pour } k = 1 \\ 20 & \text{pour } k = 2 \\ 10 & \text{pour } k = 3 \end{cases} \quad (5.33)$$

Les Figures 5.11 et 5.12 présentent les évolutions temporelles des variables ϕ et η . Le potentiel des vitesses est adimensionnalisé et noté $\phi^* = \phi(\omega/Ag)$. Les résultats montrent que la période d'oscillation pour ϕ et η à l'ordre $k = 1$ est sensiblement inférieure à celle de référence (5.28). En augmentant l'ordre spatial, les solutions se rapprochent davantage d'une même solution. Il est toutefois important de noter que l'on ne tend pas vers la période de référence, mais plutôt vers une solution qui s'en rapproche. Sur la Figure 5.11, remarquons que l'amplitude d'oscillation de la solution ϕ à l'ordre $k = 1$ se décale de la hauteur moyenne au cours de la simulation. Ce phénomène de déviation est moins observable aux ordres supérieurs. À l'inverse, le mouvement de la surface libre ne paraît pas être impacté par cette déviation (voir Fig. 5.12), cela peut provenir de la dérivation du potentiel ϕ , nécessaire pour obtenir le champ de vitesse. La déviation observée sur la Figure 5.11 viendrait donc d'une constante présente dans le champ scalaire ϕ . Pour les deux figures, les solutions numériques issues des ordres spatiaux $k = 2$ et 3 sont globalement équivalentes et proches des solutions attendues (5.26)(5.30).

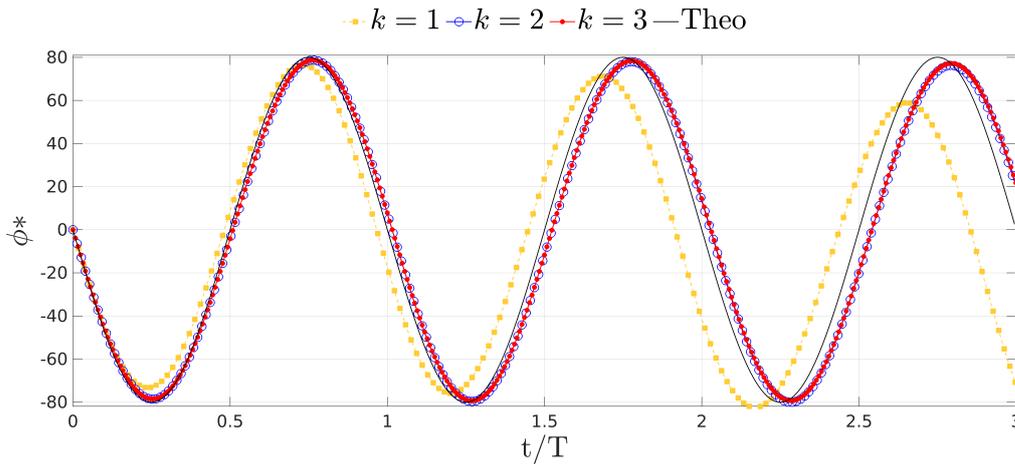


FIGURE 5.11 – Potentiel des vitesses en fonction du temps sur la frontière droite du domaine ($y = -0.052$ m), pour différents ordres spatiaux. $L/h = 16$ ($A/h = 0.08$), $A/y_{max} = 0,5$.

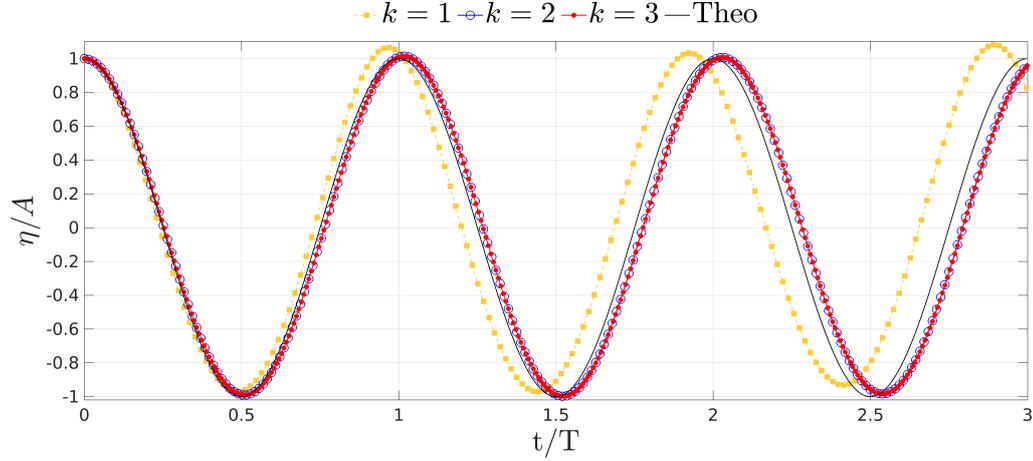


FIGURE 5.12 – Elévation de la surface libre en fonction du temps sur la frontière droite du domaine, pour différents ordres spatiaux. $L/h = 16$ ($A/h = 0.08$), $A/y_{max} = 0,5$.

Position de la frontière $\tilde{\Gamma}$

L'objectif de cette section est d'étudier l'influence de la position $\tilde{\Gamma}$ sur les simulations. Dans le but d'optimiser la précision des résultats, les calculs sont effectués à l'ordre 2 en espace et en temps. La Figure 5.13 présente les solutions numériques pour une frontière $\tilde{\Gamma}$ située à différentes positions ($y_{max} = 0,03$ m, 0,01 m et 0,0051 m). Remarquons que les solutions tendent vers la solution théorique η_a lorsque la distance entre la surface libre et $\tilde{\Gamma}$ diminue. Cette observation est cohérente puisque cela revient finalement à se rapprocher du cas attendu où la condition de Dirichlet ϕ_D est imposée en $y = 0$.

En imposant la condition ϕ_D sur $\tilde{\Gamma}$ et non en $y = 0$, on affecte donc la convergence des résultats en raison de l'approximation effectuée. Pour pallier ce problème, il pourrait être envisageable de réaliser un développement limité des valeurs ϕ sur la frontière $\tilde{\Gamma}$ par rapport aux valeurs ϕ_D en $y = 0$. En réalité, nous effectuons ici un développement limité d'ordre 0, il serait donc judicieux d'utiliser des ordres > 0 pour obtenir des résultats plus précis.

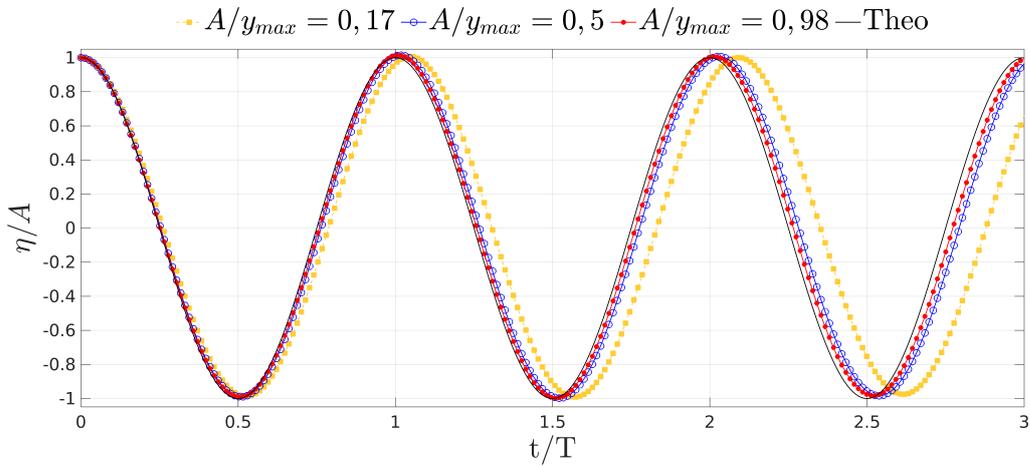


FIGURE 5.13 – Elévation de la surface libre sur la frontière droite du domaine, en fonction du temps, pour différentes positions de la frontière $\tilde{\Gamma}$. $k = 2$, $L/h = 16$ ($A/h = 0.08$).

Résultats numériques pour dix périodes

La simulation est finalement effectuée pour dix périodes d'oscillation ($t_f = 10T$) sur un maillage moins grossier (voir Fig. 5.16 (a)) où $A/y_{max} = 0,98$. Le schéma spatial est d'ordre 2 afin d'optimiser la précision des résultats, tout en évitant un temps de calcul trop long.

Les Figures 5.14 et 5.15 présentent l'évolution temporelle de l'élévation de la surface libre et la position de cette dernière au temps final. Les résultats numériques issus de ce cas-test sont en bon accord avec la solution de référence (5.30). La régularité de l'amplitude d'oscillation observée sur la Figure 5.14 pour dix périodes témoigne que le schéma est très peu dissipatif. On remarque toutefois une différence d'amplitude entre les solutions numérique et théorique sur la Figure 5.15, ceci s'explique par le déphasage de la période d'oscillation, observé sur la Figure 5.14. Il convient de rappeler que ces différences viennent de la condition de Dirichlet ϕ_D qui n'est pas directement imposée en $y = 0$, et qu'elles ne peuvent être corrigées davantage dans ce cas car la frontière $\tilde{\Gamma}$ est rapprochée au maximum du fluide ($A/y_{max} \approx 1$).

Les solutions numériques de la fonction Level-Set, du champ de vitesse et du potentiel

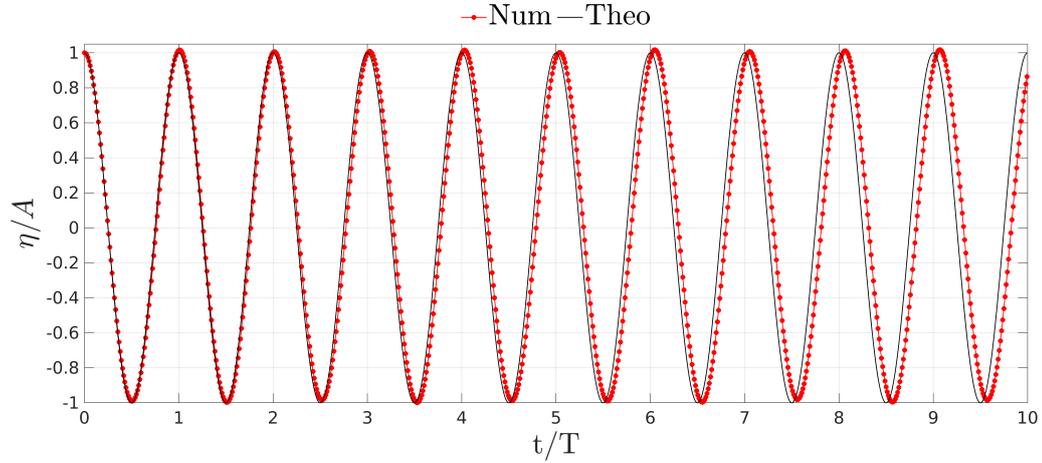


FIGURE 5.14 – Elévation de la surface libre sur la frontière droite du domaine, en fonction du temps. $k = 2$, $L/h = 34$ ($A/h = 0.17$).

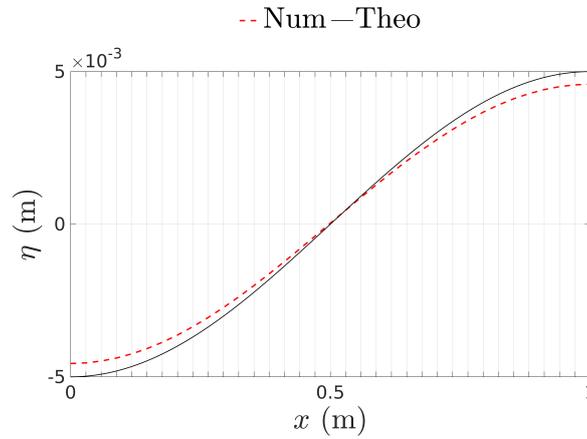


FIGURE 5.15 – Position de la surface libre dans $\tilde{\Omega}$ à $t_f = 10T$. $k = 2$, $L/h = 34$ ($A/h = 0.17$).

des vitesses sont représentées dans le domaine $\tilde{\Omega}$, sur les Figures 5.16, 5.17 et 5.18, au temps $t_f = 10T$. Ces sorties graphiques permettent de confirmer le bon déroulement de la simulation numérique puisque l'écoulement ne présente aucune anomalie particulière au temps final.

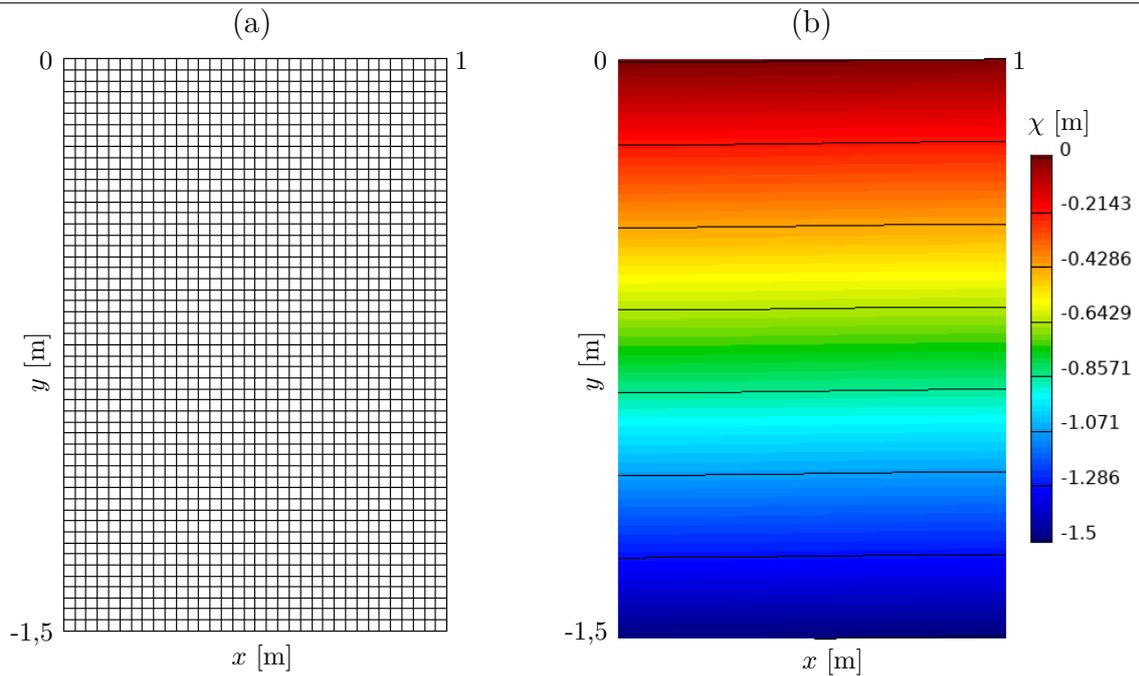


FIGURE 5.16 – (a) Maillage $L/h = 34$, (b) fonction Level-Set à t_f .

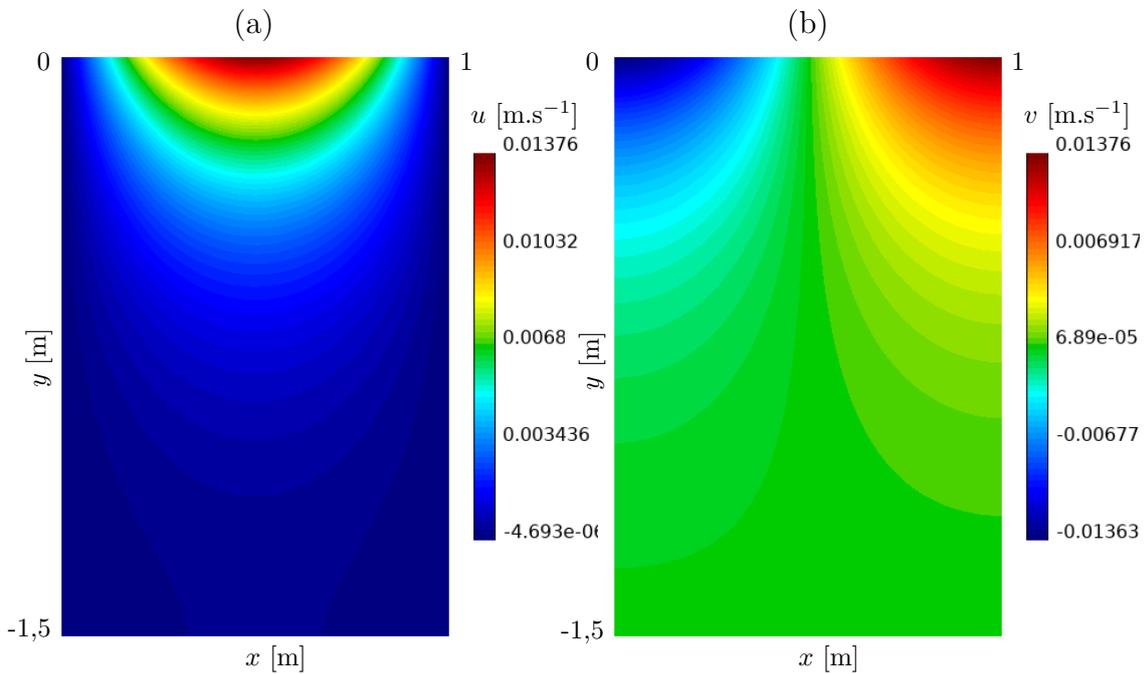


FIGURE 5.17 – (a) Composante u à t_f , (b) composante v à t_f .

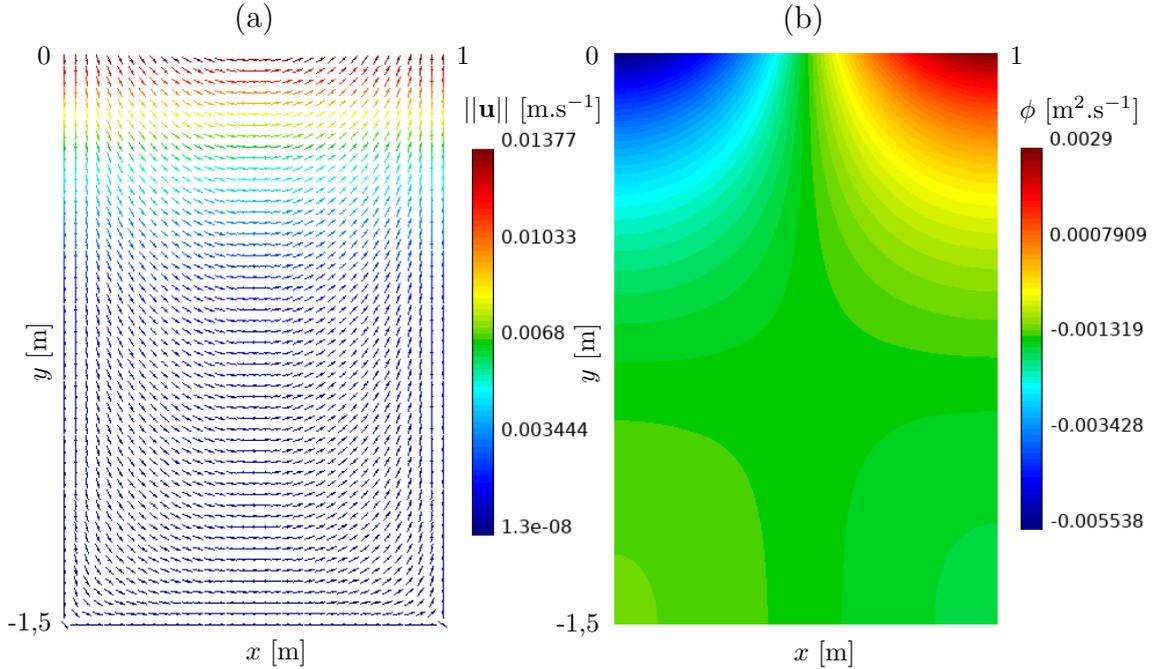


FIGURE 5.18 – (a) Champ de vitesse à t_f où la barre de couleurs indique la norme de \mathbf{u} , (b) potentiel des vitesses à t_f .

5.5 Conclusion

Ce chapitre s'est consacré à la mise en œuvre d'un outil numérique spécialement conçu pour la simulation d'écoulements potentiels monofluides à surface libre. Les résultats issus d'un cas de sloshing linéaire ont été présentés afin de valider la méthode pour des faibles mouvements.

Le choix est fait pour cette méthode d'utiliser un maillage fixe où la surface libre évolue à l'intérieur de ce dernier. Le domaine de calcul Ω comprenant initialement le fluide est alors étendu afin d'obtenir un domaine de substitution $\tilde{\Omega}$. Celui-ci comprend les mailles mixtes contenant l'interface fluide/domaine extérieur (vide). Par conséquent, la condition dynamique de surface libre n'est pas imposée directement sur η , mais sur la frontière $\tilde{\Gamma}$ étant en contact avec le domaine extérieur. Pour cela, la condition est imposée faiblement à l'aide d'une formulation de Nitsche. Cette méthode est basée sur le choix d'un paramètre de stabilisation demandant à être choisi judicieusement. D'après plusieurs travaux [46][35][40], cette approche est connue pour souffrir d'instabilités lorsque les mailles

mixtes contiennent seulement une petite fraction du domaine physique, le paramètre de stabilisation devient alors inadapté (trop grand) dans ces zones. Les résultats présentés dans ce chapitre ont pu montrer que le taux de remplissage des cellules mixtes par le fluide joue effectivement un rôle sur le choix du paramètre α , et donc sur la stabilité du schéma.

Il existe d'autres approches permettant de s'affranchir de ces instabilités, comme la « Shifted Boundary Method » de *Main et Scovazzi* [46]. Les auteurs proposent de déplacer la frontière $\tilde{\Gamma}$ de façon à ce que les mailles mixtes ne soient plus comprises dans le domaine de calcul (voir Fig 5.19). Le potentiel ϕ et les fonctions test de l'équation (5.17) sont redéfinis dans ce cas à l'aide d'un développement limité de Taylor :

$$\begin{aligned}\phi(\tilde{\Gamma}) &= \phi(\eta) + \nabla\phi(\eta) \cdot \mathbf{d} + O(\|\mathbf{d}\|^2) \\ \omega(\tilde{\Gamma}) &= \omega(\eta) + \nabla\omega(\eta) \cdot \mathbf{d} + O(\|\mathbf{d}\|^2)\end{aligned}\tag{5.34}$$

où \mathbf{d} désigne la distance (selon les dimensions de l'espace) entre la surface libre et la frontière de substitution. La condition de Dirichlet sur ϕ est toujours imposée à l'aide d'une formulation de Nitsche. Cette méthode, bien que prometteuse, s'avère cependant complexe à mettre en œuvre numériquement. Elle demande de réadapter la formulation

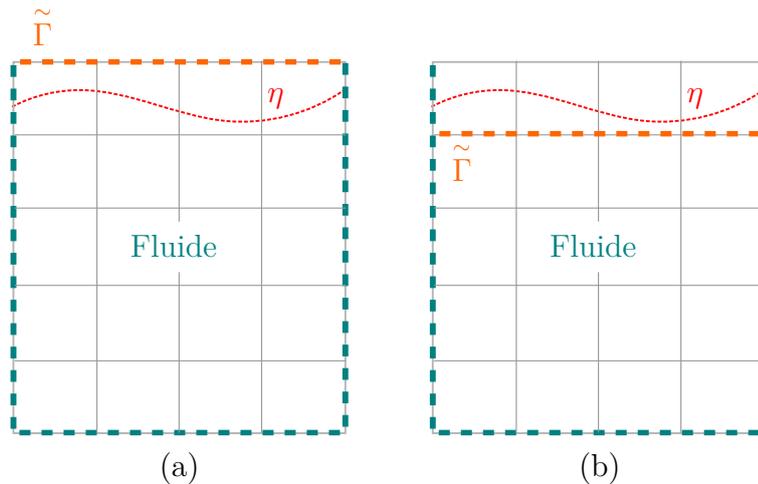


FIGURE 5.19 – Position de la frontière $\tilde{\Gamma}$ pour (a) la méthode développée dans ce travail, et pour (b) la Shifted Boundary Method.

MEF en impliquant des développements relativement conséquents, pour cela, elle n'est pas retenue pour la suite de ce travail.

Pour rappel, notre objectif est de traiter des non-linéarités de la surface libre. Pour y parvenir, il serait alors nécessaire d'améliorer les performances de l'outil numérique développé dans ce chapitre. Dans un premier temps, il conviendrait de traiter les termes non-linéaires présents dans l'équation de Bernoulli. Ces derniers peuvent être assimilés à une composante advective de l'équation, demandant certainement l'utilisation d'une approche particulière pour les résoudre. A ce stade de l'avancée des travaux, poursuivre le développement de la méthode semblait complexe pour différentes raisons. En effet, nous supposons que la surface libre ne pouvait pas traverser les éléments du maillage. Cette hypothèse n'est plus envisageable lorsque l'écoulement subit de fortes déformations. Pour appliquer faiblement la condition de Dirichlet sur l'une des frontières du domaine, il serait alors nécessaire de redéfinir le maillage à chaque fois que la surface libre traverse les éléments, de façon à ce que la frontière $\tilde{\Gamma}$ ne soit jamais trop éloignée du fluide. Bien que l'on ne souhaiterait pas faire correspondre le maillage à la géométrie de la surface libre, il serait toutefois contraignant de le redéfinir régulièrement. De plus, il paraît assez évident que l'utilisation d'une méthode de Nitsche sous sa forme classique nous confronterait à des instabilités numériques lorsque nous souhaiterons traiter des cas à forte dynamique.

Après réflexions et discussions, il a donc été convenu de revoir le modèle en traitant un autre cas de figure : les écoulements bifluïdes, où la partie vide comprise dans le domaine $\tilde{\Omega}$ est remplacée par un second fluide aux propriétés connues. Les conditions de surface libre peuvent alors s'appliquer naturellement, sans avoir recours à la formulation de Nitsche, et sans nécessairement redéfinir le maillage du domaine de calcul.

MODÉLISATION D'UN ÉCOULEMENT BIFLUIDE EN DEUX DIMENSIONS

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux écoulements incompressibles instationnaires, constitués désormais de deux fluides séparés par une interface mobile, et soumis à la gravité. Notons Ω un domaine de \mathbb{R}^2 borné par une frontière $\partial\Omega$, ce dernier se décompose en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 associés aux deux fluides (voir Fig. 6.1). L'interface est traitée une nouvelle fois par le biais d'une approche Level-Set, décrite précédemment.

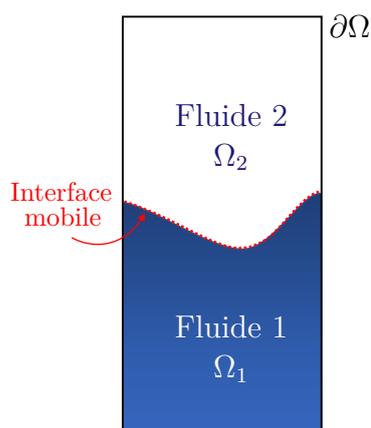


FIGURE 6.1 – Domaine de calcul Ω en deux dimensions pour des écoulements bifluides.

La première section de ce chapitre abordera les deux grandes difficultés rencontrées lors de la résolution d'un problème incompressible dans le cadre de la MEF, qui conduisent généralement à des instabilités numériques. Nous aborderons ensuite les méthodes de stabilisation retenues pour y remédier. La deuxième partie de ce chapitre présentera le modèle dévolu à la description des deux phases de l'écoulement, ramenant finalement le choix du modèle mathématique aux équations d'Euler incompressibles. La discrétisation spatiale et temporelle de ces équations sera ensuite traitée, avant d'aborder le couplage avec la méthode Level-Set. Enfin, la dernière section présentera les résultats numériques

issus de plusieurs cas représentatifs des problématiques navales, pour lesquels on dispose de solutions de référence.

6.1 Difficultés numériques pour les écoulements incompressibles dans le cadre de la MEF

La résolution d'un problème incompressible fait face à deux difficultés d'ordre numérique. La première concerne la discrétisation des termes de pression et de vitesse, lorsque ces deux variables sont résolues à l'aide d'un seul système d'équations. La seconde concerne la discrétisation des termes advectifs lorsque ces derniers sont prédominants dans l'écoulement. Afin de clarifier ces difficultés, nous nous appuyons sur la résolution monofluide des équations de Navier-Stokes, rappelées ci-dessous :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (6.2)$$

Les champs de pression et de vitesse sont approchés dans deux espaces d'éléments-finis distincts, conduisant à une formulation mixte du problème. La formulation faible de l'équation de conservation de la masse est multipliée par une fonction test notée q et l'équation de conservation de la quantité de mouvement par une autre fonction notée \mathbf{v} . En prenant $\rho = 1 \text{ kg.m}^{-3}$, les formulations faibles et continues des équations (6.1) et (6.2) s'écrivent sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q = 0 \quad (6.3)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} \nu \nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \quad (6.4)$$

Pour une dimension d , nous définissons les espaces S_h^p , T_h^p de $L^2(\Omega)$, et $S_h^{\mathbf{u}}$, $T_h^{\mathbf{u}}$ de $H^1(\Omega)^d$ et $H_0^1(\Omega)^d$, respectivement. Ces derniers sont utilisés dans les travaux [47] pour résoudre un problème de Navier-Stokes, où $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ désignent deux espaces de Hilbert, définis comme suit :

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega), \nabla f \in (L^2(\Omega))^2\}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega), \nabla f \in (L^2(\Omega))^2, f = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

Le terme f utilisé dans les définitions ci-dessus désigne la fonction que l'on souhaite approcher. Le problème discret peut alors s'écrire sous la forme suivante :

Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in S_h^{\mathbf{u}} \times S_h^p$ tels que $(\mathbf{v}_h, q_h) \in T_h^{\mathbf{u}} \times T_h^p$:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}_h) q_h = 0 \quad (6.5)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h - \int_{\Omega} p_h (\nabla \cdot \mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_h \quad (6.6)$$

La méthode de Galerkin conduit à résoudre le système suivant :

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & 0 \\ \mathbf{S}(\mathbf{U}) & \mathbf{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

\mathbf{U} et P désignent ici les vecteurs comprenant les valeurs nodales des champs de vitesse et de pression. Le terme $\mathbf{S}(\mathbf{U})$ est lui composé des deux parties suivantes : $\mathbf{S}(\mathbf{U}) = (\mathbf{M}/\Delta t) + \mathbf{L}(\mathbf{U})$, avec \mathbf{M} la matrice de masse et \mathbf{L} la matrice d'advection-diffusion comprenant les termes advectifs et visqueux. Les termes \mathbf{G} et \mathbf{D} représentent les opérateurs discrets gradient et divergence. Enfin, $\mathbf{F} = \mathbf{g}$ désigne les forces extérieures (i.e. la gravité ici). Le problème réside ici dans le fait que la matrice \mathcal{A} soit définie comme étant non-symétrique et parfois singulière, ce qui peut compromettre la stabilité du schéma numérique.

6.1.1 Discrétisation des termes de pression et de vitesse

La résolution du système (6.7) pour déterminer les quantités p et \mathbf{u} amène régulièrement à des difficultés d'ordre numérique. Si les espaces approchés de la pression, des vitesses et des fonctions tests associées ne sont pas correctement choisis, des oscillations non-physiques de pression peuvent alors apparaître dans la solution. La condition de Babuska-Brezzi [2] permet de vérifier la bonne compatibilité des espaces approchés. Généralement, elle n'est pas satisfaite lorsque l'interpolation vitesse-pression est identique (voir Fig. 6.2). Les autrices *Marchandise* [47] et *Billaud Friess* [19] présentent dans leurs travaux ces instabilités numériques obtenues sur le champ de pression pour la simulation d'un écoulement de Stokes.

Pour satisfaire la condition de Babuska-Brezzi, il est possible d'utiliser des éléments-finis stables, où généralement l'espace des vitesses est enrichi par rapport à la pression. Plusieurs types d'éléments respectent cette condition, dont ceux de Taylor-Hood [67] (voir Fig. 6.3), utilisés dans les travaux [1] pour la résolution d'un écoulement de Stokes, et dans [26] pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles.

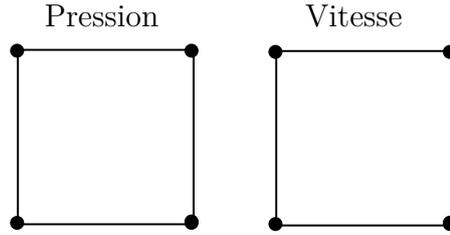


FIGURE 6.2 – Éléments-Finis incompatibles $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$.

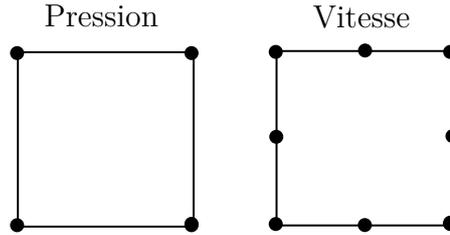


FIGURE 6.3 – Éléments de Taylor-Hood $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_2$.

Stabilisation de la matrice \mathcal{A}

Il est possible de contourner la condition de Babuska-Brezzi en ajoutant au système (6.7) une matrice, notée \mathbf{C} , renforçant la positivité de \mathcal{A} afin de la stabiliser. Le système (6.7) se réécrit alors sous la forme suivante :

$$\mathcal{A}^\tau \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & -\mathbf{C} \\ \mathbf{S}(\mathbf{U}) & \mathbf{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Cette modification revient finalement à introduire un terme de stabilisation, noté τ , dans l'équation de continuité (6.1). Il existe différentes méthodes pour cela, comme la méthode Pressure Stabilization [6] où l'équation (6.1) est réécrite sous la forme suivante :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \tau \nabla^2 p \quad (6.9)$$

Le terme τ désigne un coefficient de stabilisation qui demande d'être choisi judicieusement afin d'assurer la convergence et la précision de la méthode. Cette approche a le principal inconvénient d'être inconsistante. Afin de l'améliorer, *Hughes et al.* [33] développent une méthode similaire, appelée Pressure Stabilization Petrov-Galerkin (PSPG), qu'ils utilisent dans leurs travaux pour la résolution d'un écoulement de Stokes. Le problème discret pour ce type d'écoulement peut s'écrire classiquement sous la forme suivante :

Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in S_h^{\mathbf{u}} \times S_h^p$ tels que $(\mathbf{v}_h, q_h) \in T_h^{\mathbf{u}} \times T_h^p$:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}_h) q_h = 0 \quad (6.10)$$

$$\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h - \int_{\Omega} p_h (\nabla \cdot \mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \quad (6.11)$$

La quantité \mathbf{f} désigne ici un terme source. La méthode PSPG consiste à modifier la formulation Galerkin standard, présentée ci-dessus, en ajoutant une perturbation aux fonctions tests :

$$\tilde{\mathbf{v}}_h = \mathbf{v}_h + \tau \nabla q_h \quad (6.12)$$

De la même façon que la méthode Pressure Stabilization, on retrouve finalement un terme supplémentaire dans l'équation de continuité. Afin d'assurer la consistance de la méthode, la perturbation est multipliée dans ce cas-ci par le résidu de l'équation de quantité de mouvement. Le problème discret présenté plus haut pour un écoulement de Stokes est réécrit en s'appuyant sur une formulation PSPG :

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}_h) q_h + \int_{\Omega} (\tau \nabla q_h) R = 0 \quad (6.13)$$

$$\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h - \int_{\Omega} p_h (\nabla \cdot \mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \quad (6.14)$$

avec $R = (\nabla p_h - \nu \nabla^2 \mathbf{u}_h - \mathbf{f})$ le résidu de l'équation de bilan de la QDM et τ le coefficient de stabilisation défini sur chaque élément du maillage.

Méthode de projection

La condition de Babuska-Brezzi peut se contourner d'une seconde façon en se basant sur une méthode de projection. Plutôt que de définir un système général pour résoudre les équations (6.1)(6.2), cette approche se base sur la résolution de plusieurs équations

familiales et simples à résoudre. Selon les travaux de *Chorin* [9][10], le principe de la méthode repose sur la décomposition de Hodge de tout champ vectoriel en la somme d'un champ à divergence nulle et d'un champ à rotationnel nul (dérivant d'un potentiel scalaire). Par conséquent, on peut écrire :

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{V} + \mathbf{A} \quad \text{avec : } \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \text{et : } \nabla \wedge \mathbf{A} = 0 \quad (\mathbf{A} = \nabla \phi) \quad (6.15)$$

De cette façon, la vitesse et la pression peuvent être résolues séparément. Dans une version de sa formulation, *Chorin* propose une discrétisation explicite en temps qui s'exprime sous la forme suivante :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (6.16)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \frac{\nabla p^{n+1}}{\rho} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^n - \mathbf{g} = 0 \quad (6.17)$$

où les champs de vitesse et de pression de l'écoulement sont inconnus à l'instant t^{n+1} . La première étape dite de prédiction consiste à calculer un champ de vitesse intermédiaire, noté \mathbf{u}^* , où l'on omet le terme de pression :

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^n - \mathbf{g} = 0 \quad (6.18)$$

Une étape de soustraction (6.17) - (6.18) est réalisée afin d'obtenir l'équation suivante :

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \Delta t \left(\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho} \right) \quad (6.19)$$

Selon la définition (6.15), le champ vectoriel (6.19) peut se décomposer en deux composantes : l'une à divergence nulle et l'autre à rotationnel nul. En considérant la masse volumique constante, on peut écrire :

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \nabla \phi \quad \text{avec : } \phi = \frac{\Delta t p^{n+1}}{\rho} \quad (6.20)$$

On retrouve bien la décomposition du champ \mathbf{u}^* en une composante à divergence nulle ($\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$) et une composante dérivant d'un potentiel scalaire ϕ . En appliquant l'opérateur divergence à l'équation (6.19), on obtient alors une équation de Poisson sur la pression (PPE) :

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho} \right) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} \quad (6.21)$$

Après résolution de ce système linéaire, l'inconnue p^{n+1} est déterminée dans l'ensemble du domaine, et la vitesse \mathbf{u}^{n+1} est finalement calculée selon la décomposition (6.19) :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \left(\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho} \right) \quad (6.22)$$

6.1.2 Discrétisation des termes d'advection

La deuxième difficulté numérique réside dans la discrétisation des termes liés à l'advection. Le formalisme classique Galerkin présente des instabilités numériques lors de la résolution d'un problème où les termes advectifs sont prépondérants par rapport aux termes visqueux. Ceci est dû à l'utilisation d'un schéma centré lors de l'avance en temps. *Billaud Friess* [19] illustre dans ses travaux l'instabilité de la méthode Galerkin pour la résolution d'une équation d'advection-diffusion, où la solution numérique oscille violemment lorsque l'advection domine. Le problème discret pour ce type d'équation peut s'écrire classiquement sous la forme suivante :

Trouver $u_h \in S_h^{\mathbf{u}}$ tel que $v_h \in T_h^{\mathbf{u}}$:

$$\int_{\Omega} v_h (\mathbf{a} \cdot \nabla u_h) + \int_{\Omega} \nabla v_h \cdot (\kappa \nabla u_h) = \int_{\Omega} f v_h \quad (6.23)$$

Les termes \mathbf{a} , κ et f désignent respectivement le champ d'advection, le coefficient de diffusion et le terme source. Il existe plusieurs approches afin de stabiliser le schéma numérique ici, dont la méthode Streamline-Upwind [32]. Cette dernière repose sur la construction d'un opérateur de diffusion artificielle agissant uniquement dans la direction de l'écoulement. L'équation (6.23) est alors réécrite de cette façon :

$$\int_{\Omega} v_h (\mathbf{a} \cdot \nabla u_h) + \int_{\Omega} \nabla v_h \cdot (\kappa \nabla u_h) + \int_{\Omega} \nabla v_h \cdot (\tilde{K} \nabla u_h) = \int_{\Omega} f v_h \quad (6.24)$$

avec \tilde{K} le tenseur de diffusion, noté :

$$\tilde{K} = \tilde{\kappa} Q = \tilde{\kappa} \left(\frac{\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \right) \quad (6.25)$$

Le terme $\tilde{\kappa}$ désigne le terme de diffusion artificielle. En étant multiplié par Q , la diffusion

se fait uniquement dans les directions des lignes de courant. Comme la méthode Pressure Stabilization, cette approche a le désavantage de ne pas être consistante. Pour pallier ce problème, *Brooks et Hughes* [7] développent une méthode Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG), où les fonctions test v_h sont modifiées en ajoutant une perturbation de type Streamline Upwind qui agit uniquement dans la direction de l'écoulement :

$$\tilde{v}_h = v_h + \tau(\mathbf{a} \cdot \nabla v_h) \quad (6.26)$$

L'équation (6.23) est alors réécrite en se basant sur ce formalisme :

$$\int_{\Omega} v_h(\mathbf{a} \cdot \nabla u_h) + \int_{\Omega} \nabla v_h \cdot (\kappa \nabla u_h) + \int_{\Omega} \tau(\mathbf{a} \cdot \nabla v_h) R = \int_{\Omega} f v_h \quad (6.27)$$

avec $R = (\mathbf{a} \cdot \nabla u_h - \nabla \cdot (\kappa \nabla u_h) - f)$ le résidu de l'équation d'advection-diffusion et τ le coefficient de stabilisation défini sur chaque élément du maillage.

6.2 Méthodes de stabilisation

Dans le cadre de ce travail, il est donc nécessaire de sélectionner une méthode permettant de :

- discrétiser correctement les termes de pression et de vitesse,
- stabiliser le schéma lorsqu'il y a une prédominance des termes advectifs dans le problème.

6.2.1 Nouvelle méthode de projection explicite d'ordre élevé

Pour circonvenir la condition de Babuska-Brezzi, nous nous appuyons sur une méthode de projection afin de résoudre les équations régissant l'écoulement. Cette section servira simplement d'introduction à la méthode développée dans cette thèse. Une explication détaillée, appliquée à la formulation mathématique retenue dans ces travaux, sera fournie dans une section suivante.

Dans la version décrite précédemment 6.1.1, la vitesse et la pression sont résolues au pas de temps suivant selon une approche explicite. La décomposition de Hodge dans ce cas de figure est appliquée directement sur la vitesse, ce qui restreint le choix de l'avance temporelle à la méthode d'Euler explicite. Utiliser cette formulation dans le cadre de

notre travail constituerait une limitation majeure, car nous serions contraints à utiliser un schéma temporel du premier ordre. L'objectif principal de la thèse, consistant à développer une méthode d'ordre élevé en espace et en temps, ne serait donc pas atteint. Pour surmonter cette limitation, nous développons une nouvelle méthode de projection, où la décomposition de Hodge est appliquée sur la dérivée (en temps) de la vitesse.

A l'instant initial, la quantité \mathbf{u} est connue et vérifie bien la condition d'incompressibilité (6.1). Dans ce travail, nous faisons l'hypothèse que la divergence du champ de vitesse est nulle à l'instant t^n et $t^{n+\Theta}$, avec $\Theta \in [0, 1]$ un paramètre dépendant des différentes étapes de l'avance temporelle. On peut alors considérer :

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = 0 \quad (6.28)$$

L'équation (6.17) est réécrite dans ce cas sans la décomposition d'Euler :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^n + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \frac{\nabla p^n}{\rho} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^n - \mathbf{g} = 0 \quad (6.29)$$

La première étape consiste à déterminer une dérivée temporelle intermédiaire, où le gradient de pression est omis :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^* + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^n - \mathbf{g} = 0 \quad (6.30)$$

L'étape de soustraction (6.29)-(6.30) est réalisée afin d'obtenir :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^* = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^n + \frac{\nabla p^n}{\rho} \quad (6.31)$$

On retrouve bien la décomposition du champ $(\partial \mathbf{u} / \partial t)^*$ en une composante à divergence nulle ($\nabla \cdot (\partial \mathbf{u} / \partial t)^n = 0$) et une composante irrotationnelle dérivant d'un potentiel scalaire $\phi = p^n / \rho$. En appliquant l'opérateur divergence à cette décomposition, on obtient l'équation de Poisson suivante :

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p^n}{\rho} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^* \quad (6.32)$$

Après résolution de cette équation, l'inconnue p^n est déterminée dans l'ensemble du domaine. La dérivée temporelle $(\partial \mathbf{u} / \partial t)^n$ est finalement calculée selon la décomposition

(6.31) :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)^n = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)^* - \frac{\nabla p^n}{\rho} \quad (6.33)$$

A cette étape, il est possible de choisir le schéma temporel explicite que l'on souhaite (Euler, RK2, RK3...) afin de déterminer en une ou plusieurs étapes \mathbf{u}^{n+1} .

Cette méthode a le principal avantage de ne pas être restreinte au premier ordre pour le schéma temporel. Néanmoins, à la différence du schéma de *Chorin*, l'hypothèse d'incompressibilité (6.28) est imposée seulement sur le schéma spatial. Ceci peut conduire à une valeur epsilonesque de la divergence du champ de vitesse, venant des erreurs numériques associées à l'intégration temporelle.

6.2.2 Méthode Galerkin Discontinu pour résoudre les termes advectifs

Afin de résoudre les équations fluides dépendantes d'une partie advective, nous utilisons dans ce travail une approche Galerkin Discontinu, de la même façon que pour résoudre l'équation de transport Level-Set. A l'inverse de la méthode Petrov-Galerkin (SUPG) décrite plus haut, cette dernière ne dépend pas d'un paramètre de stabilisation, qui pour rappel doit être choisi judicieusement afin d'assurer la convergence et la précision de la méthode. De plus, les espaces d'approximation des fonctions tests sont identiques à ceux des solutions, ce qui permet de simplifier l'implémentation du schéma numérique. Certains auteurs se sont eux aussi penchés sur une approche Galerkin Discontinu pour résoudre à la fois l'équation de transport Level-Set et les équations fluides, à l'instar des travaux réalisés par *Pochet et al.* [55] et *Grooss et Hesthaven* [25].

6.3 Description de l'interface pour le traitement biphasique de l'écoulement

Pour modéliser un écoulement bifluide, il est nécessaire de décrire chaque phase correspondant aux domaines Ω_1 et Ω_2 à l'aide d'un modèle mathématique approprié. Les équations de Navier-Stokes offrent l'avantage de pouvoir représenter l'écoulement dans

une approche globale. Ainsi, nous commençons par exprimer la formulation incompressible des équations de Navier-Stokes pour chacune des phases Ω_i :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega_i \quad (6.34)$$

$$\rho_i \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{g} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu_i D(\mathbf{u})) \quad \text{dans } \Omega_i \quad (6.35)$$

où μ_i et ρ_i désignent la viscosité dynamique et la masse volumique associées au fluide i , et $D(\mathbf{u}) = 1/2(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$. Pour rappel, les quantités μ et ρ peuvent être définies à l'aide d'une distribution de Heaviside, pouvant être paramétrée au moyen de la fonction Level-Set :

$$\begin{aligned} \rho(\chi) &= \rho_1(1 - H(\chi)) + \rho_2 H(\chi) \\ \mu(\chi) &= \mu_1(1 - H(\chi)) + \mu_2 H(\chi) \end{aligned} \quad (6.36)$$

avec :

$$H(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi < 0 \\ 1 & \text{si } \chi > 0 \end{cases} \quad (6.37)$$

On considère un volume V , occupé par les deux fluides, dont la taille est infime par rapport au rayon de courbure local de l'interface. Ce volume est décomposé en deux parties distinctes V_1 et V_2 , représentant les volumes associés à chaque phase de l'écoulement (voir Fig. 6.4). Dans un premier temps, les équations (6.34)(6.35) sont intégrées dans chacun des deux volumes V_1 et V_2 , ce qui permet d'écrire :

$$\int_{V_1} \nabla \cdot \mathbf{u}_1 + \int_{V_2} \nabla \cdot \mathbf{u}_2 = 0 \quad (6.38)$$

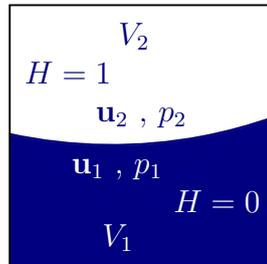


FIGURE 6.4 – Décomposition d'un volume V en deux volumes V_1 et V_2 .

$$\begin{aligned}
 & \int_{V_1} \rho_1 \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 - \mathbf{g} \right) + \int_{V_2} \rho_2 \left(\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}_2 - \mathbf{g} \right) \\
 & \quad = - \int_{V_1} \nabla p_1 - \int_{V_2} \nabla p_2 \\
 & \quad + \int_{V_1} \nabla \cdot (2\mu_1 D(\mathbf{u}_1)) + \int_{V_2} \nabla \cdot (2\mu_2 D(\mathbf{u}_2))
 \end{aligned} \tag{6.39}$$

Pour obtenir une formulation plus globale, la fonction de Heaviside (6.37) définie plus haut est utilisée pour intégrer les équations de Navier-Stokes dans le volume V ($V_1 \cup V_2$). Cette dernière agit comme une fonction indicatrice permettant de déterminer le fluide à traiter. On peut alors écrire :

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{u}_1 (1 - H(\chi)) + \nabla \cdot \mathbf{u}_2 H(\chi) = 0 \tag{6.40}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_V \rho_1 (1 - H(\chi)) \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 - \mathbf{g} \right) + \rho_2 H(\chi) \left(\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}_2 - \mathbf{g} \right) \\
 & \quad = - \int_V \nabla p_1 (1 - H(\chi)) + \nabla p_2 H(\chi) \\
 & \quad + \int_V \nabla \cdot (2\mu_1 (1 - H(\chi)) D(\mathbf{u}_1)) + \nabla \cdot (2\mu_2 H(\chi) D(\mathbf{u}_2))
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

À ce stade, plusieurs hypothèses peuvent être formulées au sein du volume V pour simplifier le système d'équations ci-dessus. La première suppose l'absence de glissement entre les deux fluides, ce qui implique que les composantes normales et tangentielles de la vitesse restent continues à travers l'interface. La seconde hypothèse considère que les contraintes visqueuses sont négligeables par rapport à la pression, ce qui conduit également à la continuité de la pression à l'interface. Pour un petit volume, on peut alors écrire :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u} \quad \text{et} \quad p_i = p \tag{6.42}$$

En supposant la définition (6.36) et l'approximation (6.42) dans la formulation (6.40)(6.41), le système d'équations (6.34)(6.35) peut être réécrit sous une forme globale, exprimée comme suit :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{6.43}$$

$$\rho(\chi) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{g} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu(\chi) D(\mathbf{u})) \quad \text{dans } \Omega \tag{6.44}$$

Il s'agit désormais de traiter la discontinuité de la viscosité et de la masse volumique entre les deux fluides. Pour cela, le traitement de l'interface doit se faire de façon appropriée. Au sein de la littérature, deux méthodes peuvent être utilisées à cet effet. La première se base sur une approche diffuse de l'interface, où la viscosité et la masse volumique évoluent de façon continue lors du passage d'un fluide à l'autre. La deuxième, quant à elle, se base sur une approche ponctuelle de l'interface, où les discontinuités sur les caractéristiques du milieu physique sont conservées. Deux méthodes issues de chacune de ces deux approches sont présentées dans cette section.

6.3.1 Méthode d'interface diffuse

Pour éviter la discontinuité de la viscosité et de la masse volumique au travers de l'interface, il est possible d'avoir recours aux fonctions lissées afin d'approximer numériquement la distribution de Heaviside (6.37). Ce concept a été introduit auparavant dans la section 3.5.4. L'interface dans ce cas de figure est épaissie artificiellement sur quelques mailles afin de prendre en compte les conditions de saut et d'imposer naturellement les conditions de surface libre (6.42).

En définitive, un seul système d'équations est résolu pour simuler le mouvement de deux fluides. Cette approche est généralement bien adaptée lorsque les mailles comprenant le mélange des fluides sont plus petites que le rayon de courbure local de l'interface. Cette méthode peut se retrouver par exemple dans les travaux MEF [65][64][73][25][55].

6.3.2 Méthode d'interface ponctuelle

La Méthode Ghost Fluid (MGF) est une approche d'interface ponctuelle souvent retrouvée dans la littérature. Elle a été introduite par *Fedkiw et al.* [17] pour résoudre des écoulements compressibles non-visqueux avec discontinuité de l'entropie. De façon générale, cette approche conserve la discontinuité sur les caractéristiques du milieu physique, ce qui demande alors de modifier les schémas de dérivation intersectés par l'interface. Pour cela, la méthode nécessite de connaître précisément la position de cette dernière. A partir de chaque région des fluides, les solutions discontinues sont extrapolées de l'autre côté de l'interface, en ayant connaissance du saut. Ces nouvelles valeurs sont communément appelées « ghost values », et remplacent les valeurs réelles situées de l'autre côté de l'interface. Cette méthode permet ainsi d'assurer la continuité des fonctions dans les

schémas de dérivation. La MGF est habituellement utilisée dans le cadre de la méthode des Différences-Finies, on la retrouve par exemple dans les travaux de *Tanguy* [66] et *Dalmon* [15] pour la résolution des équations de Navier-Stokes.

Nous nous appuyons ici sur le formalisme utilisé par ces deux auteurs afin de présenter les grandes lignes de la méthode. A titre d'exemple, nous discrétisons une équation de Laplace portant sur la pression, en une dimension, dans laquelle la masse volumique varie de manière discontinue d'une région à l'autre :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right) = 0 \quad (6.45)$$

Le domaine de calcul est représenté sur la Figure 6.5, il est composé de deux fluides ayant chacun sa propre masse volumique. Ces dernières sont notées ρ^- et ρ^+ et appartiennent respectivement aux domaines Ω_1 et Ω_2 . Pour une interface située entre deux nœuds x_i et x_{i+1} , la discrétisation différences-finies s'écrit :

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{1}{\rho} \right)_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x} \right) - \left(\frac{1}{\rho} \right)_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x} \right) \right] \quad (6.46)$$

Le terme $(1/\rho)_{i-\frac{1}{2}}$ est constant dans la maille $[x_{i-1}; x_i]$ et vaut $(1/\rho)^-$. A l'inverse, $(1/\rho)_{i+\frac{1}{2}}$ n'est pas constant dans $[x_i; x_{i+1}]$ car la maille est composée des deux fluides. En supposant la continuité du flux à l'interface Γ , on peut écrire :

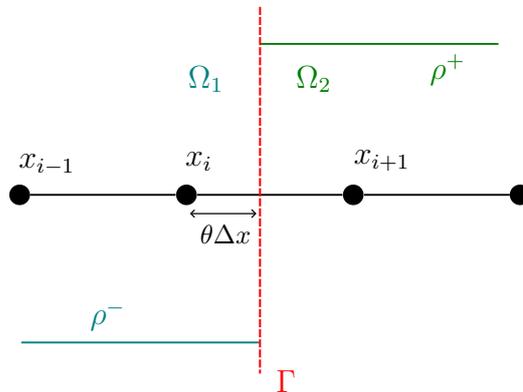


FIGURE 6.5 – Discontinuité de la masse volumique dans un domaine de calcul 1D.

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x}\right) = \left(\frac{1}{\rho}\right)^+ \left(\frac{p_{i+1} - p_\Gamma}{(1-\theta)\Delta x}\right) = \left(\frac{1}{\rho}\right)^- \left(\frac{p_\Gamma - p_i}{\theta\Delta x}\right) \quad (6.47)$$

où θ désigne une variable dépendante de la fonction Level-Set :

$$\theta = \frac{|\chi_i|}{|\chi_i| + |\chi_{i+1}|} \quad (6.48)$$

La pression sur l'interface peut alors être estimée selon la continuité du flux :

$$p_\Gamma = \frac{\theta p_{i+1} (1/\rho)^+ + (1-\theta) p_i (1/\rho)^-}{(1/\rho)^+ \theta + (1/\rho)^- (1-\theta)} \quad (6.49)$$

La pression p_Γ est ensuite introduite dans l'équation (6.47) pour obtenir :

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{(1/\rho)^+ (1/\rho)^-}{(1/\rho)^+ \theta + (1-\theta) (1/\rho)^-} \quad (6.50)$$

Le coefficient $1/\rho$ est redéfini dans la maille mixte $[x_i; x_{i+1}]$, il est désormais continu et le schéma de dérivation (6.46) ne présente plus de discontinuité. La méthode présentée ici est valable pour les schémas différence-finies. Dans un contexte MEF, son implémentation devient plus délicate car les schémas de dérivation sont plus complexes.

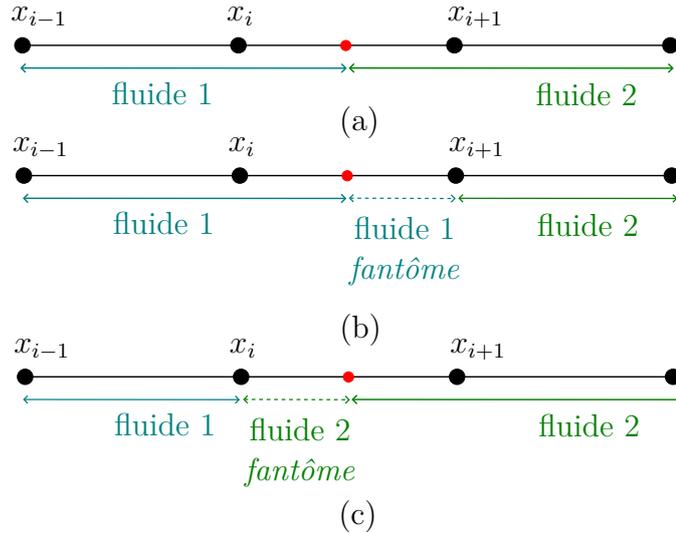


FIGURE 6.6 – (a) Maille mixte $[x_i; x_{i+1}]$ (b) Extension du fluide 1 (c) Extension du fluide 2.

Billaud Friess [19] présente dans son travail une version MGF/MEF pour la résolution des équations de Navier-Stokes compressible/incompressible. Elle suppose qu'une maille mixte est finalement composée d'un seul des deux fluides, où le fluide réel présent dans l'élément est complété par un fluide fantôme de même nature (voir Fig. 6.6). Chaque nœud d'une maille mixte se voit attribuer la pression et la vitesse du fluide réel, mais la masse volumique et la viscosité du fluide fantôme. L'auteur montre que la MGF dans ce cas de figure dégénère mal en pratique lorsque l'interface s'approche d'un nœud du maillage. Pour remédier à ce problème, elle s'appuie sur une fonction couleur qui calcule la proportion de chaque fluide dans les mailles afin de définir des valeurs moyennes pour les quantités discontinues. Malgré sa robustesse, la mise en œuvre de cette méthode est complexe car elle nécessite de réorganiser les systèmes matriciels permettant de résoudre les différents systèmes linéaires.

6.3.3 Méthode choisie

La mise en œuvre d'une méthode Ghost Fluid peut s'avérer complexe lorsqu'elle est associée à une discrétisation de type éléments-finis. De plus, son application aux ordres élevés n'est pas triviale. À l'inverse, les méthodes d'interface diffuse sont simples à mettre en œuvre, tout en étant facilement applicables aux ordres élevés. Pour cela, nous avons retenu ce type d'approche pour ce travail.

Il convient de noter que la formulation globale (6.43)(6.44) repose sur plusieurs approximations, ce qui limite le choix du modèle mathématique pour décrire l'écoulement. La poursuite des travaux visant à simuler des écoulements potentiels est difficilement envisageable dans un contexte de formulation globale. En effet, la résolution de l'équation de Laplace sur le potentiel des vitesses ne permet pas de distinguer les deux fluides, puisqu'elle ne fait pas intervenir la masse volumique $\rho(\chi)$. Afin de différencier les fluides, il est alors nécessaire de traiter également l'équation de Bernoulli. Ceci est peu conventionnel dans le cadre de la théorie potentielle, puisque cette dernière est généralement résolue en post-traitement, pour déterminer le champ de pression. De plus, trouver une formulation globale appropriée pour l'équation de Bernoulli constitue un défi majeur, puisque l'on suppose que les fluides sont irrotationnels et qu'il y a glissement à l'interface. Pour ces raisons, il a été convenu de modifier le modèle mathématique en se ramenant aux équations d'Euler. Dans ce cas, il n'est plus nécessaire de considérer l'hypothèse d'irrotationalité et la résolution de l'équation de Bernoulli n'est plus requise.

Le système d'équations (6.43)(6.44) est alors simplifié en omettant les termes visqueux. Le recours aux équations d'Euler entraîne implicitement la présence de glissement à l'interface, ce qui s'écarte de l'hypothèse formulée initialement pour obtenir la formulation globale des équations de Navier-Stokes. Cette dernière suppose, en effet, l'absence de glissement à l'interface. À l'avenir, il est envisageable de corriger cette limitation en prenant en compte la viscosité de l'écoulement. Cependant, cela peut entraîner d'autres difficultés puisqu'il est nécessaire de traiter un terme supplémentaire dans le système d'équations.

Bien que les méthodes d'interface diffuse offrent indéniablement l'avantage d'être facilement implémentables, elles sont connues pour générer des courants parasites autour de la surface libre en raison du lissage de la fonction de Heaviside, ce qui constitue leur principal inconvénient. Ces vitesses parasites doivent alors être caractérisées afin d'être contrôlées, de façon à ce qu'elles n'influent pas sur la stabilité du schéma numérique.

6.4 Résolution des équations d'Euler incompressibles avec une nouvelle méthode de projection d'ordre élevé

Dans le cadre de cette thèse, l'outil numérique développé pour la simulation d'écoulements bifluïdes repose sur l'utilisation des équations d'Euler incompressibles.

Cette section débutera par la présentation de la formulation globale des équations régissant l'écoulement, qui permet de s'affranchir de la discontinuité de la masse volumique à l'interface en utilisant un seul système d'équations. Nous résumerons ensuite les différentes étapes de résolution, qui s'appuient sur la méthode de projection mise en œuvre dans cette thèse, pour calculer les champs de pression et de vitesse séparément. Cette section présentera enfin la discrétisation spatiale et temporelle des équations à résoudre, avant d'aborder le couplage avec la méthode Level-Set.

6.4.1 Formulation globale des équations d'Euler

L'écoulement est supposé être à phases incompressibles et non-visqueuses, le modèle mathématique se réduit ici aux équations d'Euler, rappelées ci-dessous :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (6.51)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho(\chi)} + \mathbf{g} \quad \text{dans } \Omega \quad (6.52)$$

où $\rho(\chi)$ désigne la masse volumique globale, définie selon la fonction Level-Set :

$$\rho(\chi) = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)H(\chi) \quad (6.53)$$

Dans ce travail, la fonction $H(\chi)$ est spécifiquement choisie pour être continue à l'interface. Cette dernière est définie comme suit :

$$H(\chi) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{\chi}{2\epsilon} \right) \right) \quad (6.54)$$

La définition ci-dessus est utilisée dans les travaux de *Zhao et al.* [73] afin de caractériser globalement la masse volumique et la viscosité des fluides, dans le but de résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles.

Pour rendre le problème complet, il est essentiel de fournir une condition initiale pour le champ de vitesse, puis de spécifier les conditions aux frontières du domaine sur la vitesse et la pression. Pour rappel, les conditions à l'interface sont naturellement prises en compte dans la formulation globale des équations d'Euler.

Conditions aux limites

Le domaine de calcul Ω est supposé borné par des parois fixes où l'on impose une condition de non pénétration des fluides. On obtient donc une vitesse normale nulle aux parois :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (6.55)$$

Dans le cadre de ce travail, nous résolvons une équation de Poisson pour obtenir le champ de pression. Cette dernière nécessite de spécifier des conditions aux limites du

domaine. Nous faisons le choix ici d'imposer une condition de Neumann sur la pression, définie selon les équations (6.52) et (6.55) :

$$\frac{\nabla p}{\rho(\chi)} \cdot \mathbf{n} = -[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (6.56)$$

Conditions à l'interface

Pour deux fluides non-visqueux et sans effet de tension de surface, les conditions de saut à l'interface impliquent la continuité :

- des vitesses normales :

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma \quad (6.57)$$

- de la pression :

$$p_1 = p_2 \quad \text{sur } \Gamma \quad (6.58)$$

Pour rappel, l'utilisation d'une interface diffuse impose non seulement la continuité de la vitesse normale, mais également celle de la vitesse tangentielle, sous-entendant qu'il n'y a pas de glissement à l'interface. Cette hypothèse est réductrice dans le cadre de ce travail, car elle suppose que l'écoulement est visqueux. Cette limitation pourra être levée par la suite, si la formulation évolue vers les équations de Navier-Stokes.

6.4.2 Résumé des étapes de résolution

Dans le contexte de cette étude, nous optons pour une méthode de résolution explicite en temps. Les évaluations des dérivées temporelles et spatiales dans ce cas peuvent alors être découplées. Le système d'équations à résoudre est basé sur la méthode de projection présentée dans la section 6.2.1 de ce manuscrit, où le terme de viscosité est omis. Dans cette approche, la dérivée temporelle du champ de vitesses est évaluée en deux étapes :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \begin{cases} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho(\chi)} \\ = \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} \end{cases} \quad (6.59)$$

Par identification à l'équation (6.30) (en omettant le terme de viscosité), les dérivées $\partial \mathbf{u}_1 / \partial t$ et $\partial \mathbf{u}_2 / \partial t$ peuvent se définir sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^* = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (6.60)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho(\chi)} \quad (6.61)$$

Afin de simplifier la notation, nous utiliserons les termes $\mathbf{u}_{1,t}$ et $\mathbf{u}_{2,t}$ pour désigner respectivement $\partial \mathbf{u}_1 / \partial t$ et $\partial \mathbf{u}_2 / \partial t$. L'équation de Poisson sur la pression est ensuite obtenue en considérant la contrainte d'incompressibilité ($\nabla \cdot (\partial \mathbf{u} / \partial t) = 0$) :

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p}{\rho(\chi)} \right) = \nabla \cdot \mathbf{u}_{1,t} \quad (6.62)$$

La prise en compte d'une masse volumique globale pour l'écoulement conduit à résoudre une équation de Poisson anisotrope sur la pression. Pour chaque pas de temps, les différentes étapes de résolution peuvent se résumer de la façon suivante :

- Etape 1 : Résoudre (6.60) afin d'obtenir la composante $\mathbf{u}_{1,t}$.
- Etape 2 : Résoudre (6.62) pour déterminer la pression.
- Etape 3 : Résoudre (6.61) afin d'obtenir la composante $\mathbf{u}_{2,t}$.
- Etape 4 : Enfin, résoudre (6.59) pour déterminer $(\partial \mathbf{u} / \partial t)$.
- Etape 5 : Avance temporelle (explicite).

L'équation (6.60) (étape 1) est résolue dans un espace discontinu afin d'y appliquer le formalisme Galerkin Discontinu, qui est nécessaire pour stabiliser le schéma numérique. Une première option envisageable pour résoudre l'équation de Poisson (6.62) (étape 2) serait d'utiliser un espace discontinu similaire à l'étape précédente, comme ce qui est retrouvé dans les travaux [25]. Cependant, il est important de préciser que le formalisme Discontinu Galerkin n'a pas été initialement conçu pour résoudre des problèmes elliptiques. Dans ce contexte, l'une des principales difficultés est d'imposer des conditions limites de type Dirichlet. De plus, il est nécessaire de spécifier un flux numérique aux faces internes du maillage. Dans cette thèse, nous décidons d'utiliser des méthodes spécifiquement adaptées à chaque problème traité afin de tirer parti des avantages de la méthode Élément-Finis, et ainsi exploiter au maximum ses capacités. Pour cela, l'équation de Poisson (6.62) est résolue dans un espace continu à l'aide d'un formalisme classique de type

Galerkin.

Il est important de noter que l'équation de continuité (6.51) est résolue de façon implicite dans cette étude, à travers l'équation de Poisson (6.62).

6.4.3 Discrétisation spatiale

Cette section détaille la discrétisation spatiale des équations (6.60)(6.61)(6.62), en suivant l'ordre des étapes mentionné précédemment. Chaque étape implique l'utilisation d'outils numériques adaptés pour traiter au mieux les spécificités des équations à résoudre.

Terme d'advection

Nous résolvons dans un premier temps l'équation (6.60). Celle-ci contient la partie advective de la dérivée temporelle (6.59), on adopte alors une formulation de type Galerkin Discontinu afin de décentrer le schéma. Nous prenons également soin de choisir un espace fonctionnel commun pour la vitesse et la fonction Level Set, car cette dernière est advectée par le champ de vitesse de l'écoulement.

L'équation (6.60) est résolue dans ce travail composante par composante, la formulation faible qui en résulte est alors exprimée en deux parties :

$$\int_{\Omega} u_{1,t} \omega = - \int_{\Omega} \omega(\mathbf{u} \cdot \nabla u) \quad (6.63)$$

$$\int_{\Omega} v_{1,t} \omega = - \int_{\Omega} \omega(\mathbf{u} \cdot \nabla v) - g\omega \quad (6.64)$$

Les deux composantes du vecteur $\mathbf{u}_{1,t}$ sont discrétisées selon la même méthode. Afin de ne pas alourdir la description, nous présenterons uniquement la discrétisation de la composante $u_{1,t}$.

Sur chaque élément $E \in \mathcal{E}_h$, les fonctions tests et la solution $u_{1,t}$ sont approchées par des fonctions polynomiales d'ordre $k \geq 0$, continues sur chaque élément mais discontinues d'une maille à l'autre. L'espace fonctionnel (scalaire) des solutions est identique à celui de la fonction Level-Set χ , il est rappelé ci-dessous :

$$W_h^s = \{u_{1,th} \in L^2(\Omega); u_{1,th}|_E \in \mathbb{P}_k(E), \forall E \in \mathcal{E}_h\} \quad (6.65)$$

Remarquons que les équations de transport des composantes de vitesse (6.63) et (6.64) sont écrites sous forme convective, à l'inverse de l'équation de transport Level-Set (4.23) qui est sous forme conservative. La contribution GD appliquée sur les faces des éléments pour décentrer le schéma fait intervenir ici un terme supplémentaire, venant de l'intégration par parties des termes advectifs. Le problème discret peut être formulé généralement dans le domaine Ω sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} u_{1,th} \omega_h = - \int_{\Omega} \omega_h (\mathbf{u} \cdot \nabla u_h) - \sum_{F \in F_i} \int_F \{\omega_h \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F\}^* [[u_h]] \quad \forall \omega_h \in W_h^s \quad (6.66)$$

avec :

$$\{\omega_h \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F\}^* = -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F) \{\omega_h\} + \frac{1}{2} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F| [[\omega_h]] \quad (6.67)$$

Dans la définition (6.66), la première intégrale du membre de droite désigne la contribution de Galerkin. Les termes surfaciques correspondent au décentrement appliqué aux faces internes F_i , entre éléments. La formulation ne fait pas intervenir de termes de bord puisque l'on suppose la non pénétration des fluides sur les parois fixes.

Les fonctions approchées $u_{1,th}$, u_h et ω_h présentes dans l'équation (6.66) sont définies par des polynômes de Lagrange. Le problème approché peut finalement s'écrire comme suit :

$$M\{u_{1,t}\} = T\{u\} \quad (6.68)$$

Les vecteurs $\{u_{1,t}\}$ et $\{u\}$ contiennent les valeurs nodales des solutions et M , T désignent les matrices de masse et de transport dont les i,j -ièmes éléments sont donnés par :

$$M_{ij} = \int_{\Omega} N_i^u N_j^u \quad (6.69)$$

$$T_{ij} = - \int_{\Omega} N_j^u (\mathbf{u} \cdot \nabla N_i^u) - \sum_{F \in F_i} \int_F \{N_j^u \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F\}^* [[N_i^u]] \quad (6.70)$$

L'équation (6.64) est résolue de la même manière en ajoutant le terme de gravité. Le système (6.68) peut être réexprimé sous une forme plus générale en prenant en compte les deux composantes des champs vectoriels $\mathbf{u}_{1,t}$ et \mathbf{u} :

$$\mathbf{M}\{\mathbf{u}_{1,t}\} = \mathbf{T}\{\mathbf{u}\} + \mathbf{g} \quad (6.71)$$

Le terme \mathbf{g} désigne ici un vecteur source représentant l'accélération de pesanteur. L'espace fonctionnel (vectoriel) de la solution $\mathbf{u}_{1,th}$ est défini de la façon suivante :

$$W_h^{\mathbf{v}} = \{\mathbf{u}_{1,th} \in (L^2(\Omega))^2; \mathbf{u}_{1,th}|_E \in (\mathbb{P}_k(E))^2, \forall E \in \mathcal{E}_h\} \quad (6.72)$$

Le système linéaire (6.71) est résolu par une méthode itérative du gradient conjugué utilisant un préconditionneur de Jacobi.

Champ de pression

L'équation de Poisson (6.62) peut être résolue puisque le membre de droite (terme source) est désormais connu. Ici, nous avons recours à une formulation classique de type Galerkin, qui est initialement conçue pour la résolution de ce type de problème. La formulation faible de l'équation (6.62) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla p}{\rho(\chi)} \right) \omega = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}_{1,t}) \omega \quad (6.73)$$

Le théorème de Green est appliqué dans ce cas aux deux membres de l'équation :

$$- \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \frac{\nabla p}{\rho(\chi)} + \int_{\partial\Omega} \omega \left(\frac{\nabla p}{\rho(\chi)} \cdot \mathbf{n} \right) = - \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \mathbf{u}_{1,t} + \int_{\partial\Omega} \omega (\mathbf{u}_{1,t} \cdot \mathbf{n}) \quad (6.74)$$

Pour chaque élément $E \in \mathcal{E}_h$, les fonctions tests et la solution p sont approximées par des fonctions polynomiales d'ordre $k \geq 0$, continues sur chaque élément puis d'un élément à un autre. L'espace fonctionnel des solutions est défini comme suit :

$$W_h^p = \{p_h \in H^1(\Omega); p_h|_E \in \mathbb{P}_k(E), \forall E \in \mathcal{E}_h\} \quad (6.75)$$

La formulation discrète de l'équation (6.74) s'écrit :

$$\int_{\Omega} \nabla \omega_h \cdot \frac{\nabla p_h}{\rho(\chi)} = \int_{\Omega} \nabla \omega_h \cdot \mathbf{u}_{1,t} - \int_{\partial\Omega} \omega_h (\mathbf{u}_{1,t} \cdot \mathbf{n}) + \int_{\partial\Omega} \omega_h \left(\frac{\nabla p_h}{\rho(\chi)} \cdot \mathbf{n} \right) \quad (6.76)$$

$\forall \omega_h \in W_h^p$

pour $\mathbf{u}_{1,t}$ solution de (6.71). Les fonctions approchées p_h et ω_h présentes dans l'équation (6.76) sont définies par des polynômes de Lagrange. Le problème approché s'obtient

finalement sous la forme suivante :

$$A\{p\} = \{b\} \quad (6.77)$$

Le vecteur $\{p\}$ contient les valeurs nodales de la pression à déterminer, et les i,j -ièmes éléments de la matrice A et du vecteur $\{b\}$ sont donnés par :

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \frac{1}{\rho(\chi)} \nabla N_i^p \cdot \nabla N_j^p \quad (6.78)$$

$$b_j = \int_{\Omega} \nabla N_j^p \cdot \mathbf{u}_{1,t} - \int_{\partial\Omega} N_j^p (\mathbf{u}_{1,t} \cdot \mathbf{n}) + \int_{\partial\Omega} N_j^p \left(\frac{\nabla p}{\rho(\chi)} \cdot \mathbf{n} \right) \quad (6.79)$$

Le terme $(\frac{\nabla p}{\rho(\chi)} \cdot \mathbf{n})$ présent dans b_j désigne la condition de Neumann (6.56) définie selon la condition de non pénétration des fluides sur les parois fixes. L'utilisation seule de ce type de condition limite conduit à une solution de pression définie à une constante près (éventuellement dépendante du temps). Pour fixer cette constante, nous imposons sur un nœud du maillage une condition forte de type Dirichlet sur p (classiquement $p = 0$).

La variation de la masse volumique influe sur les performances de la méthode de résolution choisie. Lorsque le ratio (ρ_2/ρ_1) devient très faible, la matrice A est mal conditionnée et la méthode du gradient conjugué voit ses performances considérablement chuter. Il est alors essentiel d'appliquer ici un préconditionnement du système pour s'affranchir du mauvais conditionnement de A . Pour résoudre le système (6.77), on utilise une méthode du gradient conjugué avec un préconditionneur de Gauss-Seidel. Ce dernier s'avère plus adapté pour ce type de résolution que le préconditionneur de Jacobi, utilisé pour résoudre les équations de transport.

Précisons que la fonction $1/\rho(\chi)$ présente dans les termes (6.78)(6.79) n'est pas analytique puisqu'elle dépend directement de la discrétisation éléments-finis de la fonction Level-Set. Cette dernière étant obtenue dans l'espace discontinu des solutions, une étape de projection est nécessaire pour déterminer $1/\rho(\chi)$ dans l'espace continu de la pression. En revanche, le vecteur $\mathbf{u}_{1,t}$ (présent dans le terme source) qui est préalablement calculé dans l'espace discontinu des vitesses W_h^v ne nécessite pas d'étape de projection pour résoudre le problème. Dans le but de clarifier davantage ces deux dernières remarques, nous proposons de discrétiser un problème simplifié en 1D, similaire à celui (6.62), exprimé sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(C \frac{\partial p}{\partial y} \right) = S \quad (6.80)$$

où C et S désignent respectivement un coefficient et un terme source, discrétisés dans un espace discontinu des solutions. Pour un domaine de calcul Ω (voir Fig. 6.7) défini en une dimension où $y \in [y_1; y_3]$, on impose les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} C \frac{\partial p}{\partial y} = -g & \text{sur } y_1 \\ p = 0 & \text{sur } y_3 \end{cases} \quad (6.81)$$

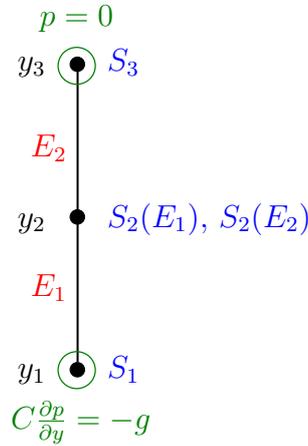


FIGURE 6.7 – Domaine de calcul Ω en une dimension pour résoudre le problème (6.80).

Pour une fonction test $\omega(y)$ choisie suffisamment régulière, la formulation faible et continue de l'équation (6.80) s'écrit :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} C \frac{\partial p}{\partial y} = - \int_{\Omega} \omega S + \left[\omega C \frac{\partial p}{\partial y} \right]_{\partial \Omega} \quad (6.82)$$

Le domaine Ω est discrétisé en deux éléments E_1 et E_2 . Chacun de ces éléments représente un segment compris entre deux coordonnées y_i et y_{i+1} . La solution p est approchée dans l'espace fonctionnel continu W_h^p (6.75) et les quantités C et S sont définies initialement dans l'espace fonctionnel discontinu W_h^s (6.65). Une première étape consiste ici à projeter le coefficient C dans le même espace (continu) que la solution p . L'équation (6.82) est réécrite sous sa forme discrétisée pour un élément (segment) compris entre deux nœuds y_i et y_{i+1} :

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\partial \omega_h}{\partial y} C_h \frac{\partial p_h}{\partial y} = - \int_{y_i}^{y_{i+1}} \omega_h S_h + \left[\omega_h C_h \frac{\partial p_h}{\partial y} \right]_{y_i}^{y_{i+1}} \quad \forall \omega_h \in W_h^p \quad (6.83)$$

avec $C_h \in W_h^p$ et $S_h \in W_h^s$. Pour chaque élément du maillage, on considère que les quantités p , ω , C et S sont définies par des fonctions polynomiales (éléments de type Lagrange) d'ordre $k = 1$. Ces dernières s'écrivent sous la forme suivante :

$$p_h = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ p_{i+1} \end{pmatrix}, \quad \omega_h = \begin{pmatrix} \omega_i & \omega_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} \quad (6.84)$$

$$C_h = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_i \\ C_{i+1} \end{pmatrix}, \quad S_h = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_i \\ S_{i+1} \end{pmatrix} \quad (6.85)$$

Le membre gauche de l'équation (6.83) est reformulé en considérant les définitions ci-dessus :

$$\begin{aligned} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\partial \omega_h}{\partial y} C_h \frac{\partial p_h}{\partial y} &= \int_{y_i}^{y_{i+1}} \begin{pmatrix} N_{1,y} \\ N_{2,y} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} N_1 & N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_i \\ C_{i+1} \end{pmatrix}}_{\text{Coefficient } C \text{ discret}} \begin{pmatrix} N_{1,y} & N_{2,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ p_{i+1} \end{pmatrix} \\ &= \int_{y_i}^{y_{i+1}} \begin{pmatrix} N_{1,y}^2 N_1 C_i + N_{1,y}^2 N_2 C_{i+1} & N_{1,y} N_{2,y} N_1 C_i + N_{1,y} N_{2,y} N_2 C_{i+1} \\ N_{2,y} N_{1,y} N_1 C_i + N_{2,y} N_{1,y} N_2 C_{i+1} & N_{2,y}^2 N_1 C_i + N_{2,y}^2 N_2 C_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ p_{i+1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.86)$$

La matrice (2,2) obtenue dans l'équation ci-dessus désigne l'opérateur du laplacien anisotrope discret. Lorsque l'on définit le coefficient C comme étant une constante $C = 1$, on vérifie facilement que la matrice désigne l'opérateur du laplacien discret :

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} \begin{pmatrix} N_{1,y}^2 & N_{1,y} N_{2,y} \\ N_{2,y} N_{1,y} & N_{2,y}^2 \end{pmatrix} \quad (6.87)$$

L'intégrale présente dans le membre droit de l'équation (6.83), désignant le terme source, est reformulée en considérant les définitions (6.84)(6.85) :

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} \omega_h S_h = \int_{y_i}^{y_{i+1}} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} N_1 & N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_i \\ S_{i+1} \end{pmatrix}}_{\text{Terme source } S \text{ discret}} = \int_{y_i}^{y_{i+1}} \begin{pmatrix} N_1^2 S_i + N_1 N_2 S_{i+1} \\ N_2 N_1 S_i + N_2^2 S_{i+1} \end{pmatrix} \quad (6.88)$$

Enfin, les termes de bord pour un élément du maillage s'écrivent :

$$\left[\omega_h C_h \frac{\partial p_h}{\partial y} \right]_{y_i}^{y_{i+1}} = \begin{pmatrix} -C_i \frac{\partial p_h}{\partial y}(y_i) \\ C_{i+1} \frac{\partial p_h}{\partial y}(y_{i+1}) \end{pmatrix} \quad (6.89)$$

En partant de l'équation (6.83) et en se basant sur les définitions (6.86)(6.88)(6.89), le système d'équations pour les deux éléments E_1 et E_2 s'écrivent :

$$\underbrace{\int_{y_1}^{y_2} \begin{pmatrix} N_{1,y}^2 N_1 C_1 + N_{1,y}^2 N_2 C_2 & N_{1,y} N_{2,y} N_1 C_1 + N_{1,y} N_{2,y} N_2 C_2 \\ N_{2,y} N_{1,y} N_1 C_1 + N_{2,y} N_{1,y} N_2 C_2 & N_{2,y}^2 N_1 C_1 + N_{2,y}^2 N_2 C_2 \end{pmatrix}}_{A^1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = - \underbrace{\int_{y_1}^{y_2} \begin{pmatrix} N_1^2 S_1 + N_1 N_2 S_2(E_1) \\ N_2 N_1 S_1 + N_2^2 S_2(E_1) \end{pmatrix}}_{F^1} + \begin{pmatrix} -C_1 \frac{\partial p_h}{\partial y}(y_1) \\ C_2 \frac{\partial p_h}{\partial y}(y_2) \end{pmatrix} \quad (6.90)$$

et :

$$\underbrace{\int_{y_2}^{y_3} \begin{pmatrix} N_{1,y}^2 N_1 C_2 + N_{1,y}^2 N_2 C_3 & N_{1,y} N_{2,y} N_1 C_2 + N_{1,y} N_{2,y} N_2 C_3 \\ N_{2,y} N_{1,y} N_1 C_2 + N_{2,y} N_{1,y} N_2 C_3 & N_{2,y}^2 N_1 C_2 + N_{2,y}^2 N_2 C_3 \end{pmatrix}}_{A^2} \begin{pmatrix} p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = - \underbrace{\int_{y_2}^{y_3} \begin{pmatrix} N_1^2 S_2(E_2) + N_1 N_2 S_3 \\ N_2 N_1 S_2(E_2) + N_2^2 S_3 \end{pmatrix}}_{F^2} + \begin{pmatrix} -C_2 \frac{\partial p_h}{\partial y}(y_2) \\ C_3 \frac{\partial p_h}{\partial y}(y_3) \end{pmatrix} \quad (6.91)$$

Les opérateurs du laplacien anisotrope sont notés A^1 et A^2 pour les éléments E_1 et E_2 , respectivement. Les vecteurs du terme source sont notés F^1 et F^2 . Le terme source étant discrétisé dans un espace discontinu, il existe alors deux valeurs de S au nœud y_2 , comme illustré sur la Figure 6.7. Pour les différencier, on note entre parenthèse l'élément auquel la valeur correspond.

Le système global à résoudre pour les deux éléments E_1 et E_2 s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 & 0 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 + A_{11}^2 & A_{12}^2 \\ 0 & A_{21}^2 & A_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 + F_1^2 \\ F_2^2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -C_1 \frac{\partial p_h}{\partial y}(y_1) \\ C_2 \frac{\partial p_h}{\partial y}(y_2) - C_2 \frac{\partial p_h}{\partial y}(y_2) \\ C_3 \frac{\partial p_h}{\partial y}(y_3) \end{pmatrix}}_{=0} \quad (6.92)$$

Le système d'équations ci-dessus est obtenu en conservant les valeurs du terme source telles que définies initialement dans l'espace fonctionnel discontinu. Toutefois, pour s'assurer que les termes de bord sur les nœuds internes du maillage s'annulent, il est nécessaire que le coefficient C soit continu d'un élément à l'autre. C'est pourquoi nous avons effectué une étape de projection afin de définir C dans l'espace continu de la solution p . En appliquant les conditions aux limites (6.81), le système final s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 & 0 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 + A_{11}^2 & A_{12}^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 + F_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.93)$$

Cet exemple, qui peut être assimilé au problème de Poisson (6.62) (où $C = 1/\rho(\chi)$ et $S = \nabla \cdot \mathbf{u}_{1,t}$), démontre qu'il est possible d'utiliser un formalisme Galerkin pour résoudre l'équation (6.62), tout en conservant le vecteur $\mathbf{u}_{1,t}$ dans l'espace discontinu des vitesses W_h^s . Ainsi, aucune étape de projection n'est requise pour traiter le terme source. Néanmoins, il est nécessaire de projeter la fonction discrète $1/\rho(\chi)$ dans l'espace de la pression W_h^p pour s'assurer que les termes aux faces internes du maillage s'annulent. La fonction χ est initialement définie comme étant une fonction distance signée, garantissant alors d'être continue. Bien que cette dernière soit résolue à l'aide d'un formalisme Galerkin Discontinu, nous utilisons, à la fin de chaque pas de temps, un algorithme de redistanciation pour conserver la caractère distance signée de la fonction χ , ce qui assure alors la continuité de la solution au cours du temps. Ainsi, l'étape de projection n'admet aucune approximation pour définir $1/\rho(\chi)$ dans l'espace de la pression.

Gradient du champ de pression

La pression étant désormais connue dans l'ensemble du domaine de calcul Ω , la composante $\mathbf{u}_{2,t}$ peut alors être déterminée. La formulation faible de l'équation (6.61) peut s'écrire :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_{2,t} \cdot \mathbf{w} = - \int_{\Omega} \frac{\nabla p}{\rho(\chi)} \cdot \mathbf{w} \quad (6.94)$$

Sur chaque élément $E \in \mathcal{E}_h$, les fonctions tests et les solutions $\mathbf{u}_{2,t}$ sont approchées par des fonctions polynomiales d'ordre $k \geq 0$, continues sur chaque élément mais discontinues d'une maille à l'autre. L'espace fonctionnel est identique à celui des solutions $\mathbf{u}_{1,t}$ (6.72). La formulation discrète de l'équation (6.94) peut alors s'écrire :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_{2,th} \cdot \mathbf{w}_h = - \int_{\Omega} \frac{\nabla p_h}{\rho(\chi)} \cdot \mathbf{w}_h \quad \forall \mathbf{w}_h \in W_h^{\mathbf{v}} \quad (6.95)$$

pour p_h solution de l'équation (6.77). La formulation utilisée ici est de type mixte car elle fait intervenir deux espaces fonctionnels différents pour les quantités $\mathbf{u}_{2,t}$ et p . Cette étape permet ainsi de relier ces deux espaces distincts. Une nouvelle fois, les fonctions approchées $\mathbf{u}_{2,th}$ et \mathbf{w}_h présentes dans l'équation (6.95) sont définies par des polynômes de Lagrange. Le problème approché s'obtient finalement sous la forme suivante :

$$\mathbf{M}\{\mathbf{u}_{2,t}\} = \mathbf{G}\{p\} \quad (6.96)$$

avec \mathbf{M} la matrice de masse, identique à celle utilisée dans le problème (6.71), et \mathbf{G} la matrice gradient, dont les i,j -ièmes éléments sont donnés par :

$$\mathbf{M}_{ij} = \int_{\Omega} N_i^{\mathbf{v}} N_j^{\mathbf{v}} \quad (6.97)$$

$$\mathbf{G}_{ij} = - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho(\chi)} N_j^{\mathbf{v}} \nabla N_i^p \quad (6.98)$$

Le système linéaire (6.96) est résolu par une méthode itérative du gradient conjugué utilisant un préconditionneur de Jacobi.

Recomposition du champ de vitesse

La dernière étape consiste à déterminer le champ de vitesse dans l'ensemble du domaine Ω selon la décomposition (6.59) :

$$\frac{d}{dt}\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{u}_{1,t}\} + \{\mathbf{u}_{2,t}\} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{T}\{\mathbf{u}\} + \mathbf{g}) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}\{p\} \quad (6.99)$$

Ainsi, le système global peut se présenter sous la forme suivante :

$$\mathbf{M} \frac{d}{dt} \{\mathbf{u}\} = \mathbf{T}\{\mathbf{u}\} + \mathbf{g} + \mathbf{G}\{p\} \quad (6.100)$$

La dérivée partielle par rapport au temps dans l'équation ci-dessus devient une dérivée totale, car les nœuds du maillage restent fixes.

6.4.4 Discrétisation temporelle

La résolution des équations d'Euler dans ce travail repose sur l'utilisation d'une méthode de projection explicite. Pour résoudre un problème de Navier-Stokes incompressible, *Franco et al.* [18] et *Grooss et Hesthaven* [25] privilégient une méthode de projection basée sur un schéma d'intégration temporelle implicite-explicite, afin de discrétiser les termes visqueux et advectifs, respectivement. Puisque la viscosité n'est pas prise en compte ici, cela ne pose pas de problème particulier pour utiliser un schéma temporel purement explicite. Ce choix est cohérent avec la résolution de l'équation de transport Level-Set, qui utilise également une avance temporelle explicite.

Nous privilégions dans cette étude une méthode de type Runge-Kutta à la méthode d'Euler afin de recourir à des pas de temps plus grands, et de gagner ainsi en temps de calcul. Pour rappel, *Cockburn et Shu* [11] et *Bassi et Rebay* [4][3] s'appuient eux-aussi sur des schémas Runge-Kutta (couplés à la discrétisation DG) afin de résoudre numériquement les équations d'Euler/Navier-Stokes compressibles. La restriction sur le pas de temps Δt s'effectue toujours selon le choix du nombre de Courant, qui sera étudié dans une prochaine section.

6.5 Couplage avec la méthode Level-Set

Les précédentes sections de ce chapitre ont décrit les différentes étapes de résolution pour mettre en mouvement deux fluides distincts, séparés par une interface mobile. La méthode Level-Set présentée dans le Chapitre 4 est utilisée pour traiter le problème d'interface. Cette section vise donc à coupler ces deux méthodes de résolution.

Le couplage entre les deux méthodes se manifeste de plusieurs façons. Tout d'abord, l'équation de Poisson sur la pression est résolue en calculant la masse volumique globale de l'écoulement, qui est elle-même définie en fonction de la fonction Level-Set χ . Par ailleurs,

la vitesse advectant la fonction Level-Set χ se trouve être le champ de vitesse de l'écoulement, qui est déterminé en résolvant l'équation de bilan de la quantité de mouvement.

Dans le cadre de cette thèse, nous développons un algorithme RK2 (point milieu) afin de coupler l'avance temporelle des équations d'Euler et Level-Set. Précisons que le schéma numérique peut se prêter à d'autres méthodes d'ordre temporel plus élevé, qu'il sera, à terme, possible de développer. L'algorithme 2 présente le couplage Euler/Level-Set. Les sous-étapes temporelles permettant de déterminer la pression et la vitesse au pas de temps suivant sont représentées sur la Figure 6.8.

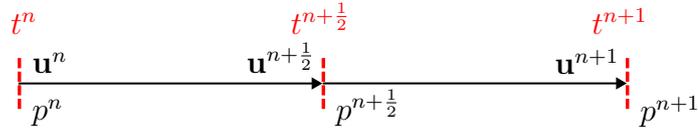


FIGURE 6.8 – Sous-étapes temporelles pour calculer les champs de pression et de vitesse.

Algorithme 2 Calculer \mathbf{u} , p et χ

/* Initialisation

$t \leftarrow t^0$, $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u}^0$, $\chi \leftarrow \chi^0$.

while $t < t^{max}$ **do**

$t \leftarrow t^n$, $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u}^n$, $\chi \leftarrow \chi^n$.

Calculer $\Delta t = CFL \min(h/||\mathbf{u}||)$;

/* Résolution dans l'espace discontinu L^2 (approximation GD)

Calculer $\mathbf{u}_{1,t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{g}$;

/* Résolution dans l'espace continu H^1 (approximation Galerkin)

Projection des solutions χ dans l'espace H^1 ;

Calculer $\rho(\chi) = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)H(\chi)$;

Calculer $p^n : \nabla \cdot (\frac{\nabla p}{\rho(\chi)}) = \nabla \cdot (\mathbf{u}_{1,t})$;

/* Résolution dans l'espace discontinu L^2 (approximation GD)

Calculer $\mathbf{u}_{2,t} = -\frac{\nabla p}{\rho(\chi)}$;

Calculer $K_1(\mathbf{u}) = \partial\mathbf{u}/\partial t = \mathbf{u}_{1,t} + \mathbf{u}_{2,t}$;

Calculer $K_1(\chi) = \partial\chi/\partial t = -\nabla(\chi\mathbf{u})$;

/* Calculer \mathbf{u} et χ au temps $t = t^n + \Delta t/2$ (Euler explicite)

$\mathbf{u}^{n+1/2} = \mathbf{u}^n + (\Delta t/2)K_1(\mathbf{u})$;

$\chi^{n+1/2} = \chi^n + (\Delta t/2)K_1(\chi)$;

$t \leftarrow t^{n+1/2}$, $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u}^{n+1/2}$, $\chi \leftarrow \chi^{n+1/2}$.

/* Résolution dans l'espace discontinu L^2 (approximation GD)

Calculer $\mathbf{u}_{1,t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{g}$;

/* Résolution dans l'espace continu H^1 (approximation Galerkin)

Projection des solutions χ dans l'espace H^1 ;

Calculer $\rho(\chi) = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)H(\chi)$;

Calculer $p^{n+1/2} : \nabla \cdot (\frac{\nabla p}{\rho(\chi)}) = \nabla \cdot (\mathbf{u}_{1,t})$;

/* Résolution dans l'espace discontinu L^2 (approximation GD)

Calculer $\mathbf{u}_{2,t} = -\frac{\nabla p}{\rho(\chi)}$;

Calculer $K_2(\mathbf{u}) = \partial\mathbf{u}/\partial t = \mathbf{u}_{1,t} + \mathbf{u}_{2,t}$;

Calculer $K_2(\chi) = \partial\chi/\partial t = -\nabla(\chi\mathbf{u})$;

/* Calculer \mathbf{u} et χ au temps $t = t^n + \Delta t$ (Runge-Kutta 2)

$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t K_2(\mathbf{u})$;

$\chi^{n+1} = \chi^n + \Delta t K_2(\chi)$;

Algorithme de redistanciation

$t \leftarrow t^{n+1}$.

end while

6.6 Résultats numériques

Cette section présente plusieurs problèmes de référence afin de valider l'outil numérique et d'évaluer la précision et la capacité de la méthode proposée.

Les différentes problématiques seront présentées du cas le plus simple au plus complexe et chacune d'elles sera comparée à une solution de référence. On commencera par traiter un cas d'équilibre hydrostatique, où la surface libre est au repos. Cette étude permettra de s'intéresser particulièrement aux vitesses parasites qui surviennent près de l'interface. Ensuite, deux cas de sloshing seront traités, l'un en régime linéaire et l'autre en régime non-linéaire. L'écoulement dans ce second cas sera dominé par l'advection, il permettra donc de discuter de la stabilité du schéma numérique. Enfin, une étude de dam break sera présentée afin de considérer un cas à forte dynamique avec reconnexion d'interface.

Les maillages consacrés aux simulations numériques dans ce chapitre sont composés de quadrangles.

6.6.1 Equilibre hydrostatique

Le domaine de calcul Ω est représenté sur la Figure 6.9, où les deux fluides sont caractérisés par leur masse volumique : $\rho_1 = 10 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, avec un ratio $r = 1/100$. Initialement, la surface libre est positionnée horizontalement à une altitude $y = 0$, et l'on impose un champ de vitesse nul dans Ω . Le principe de ce cas-test est de maintenir l'équilibre entre les deux fluides en s'assurant que la force résultante de l'accélération de pesanteur s'équilibre avec les forces de pression.

Solutions analytiques

Pour ce problème, il est possible de déterminer la pression analytique p_a^ϵ , indépendante du temps, en tenant compte de l'épaisseur de l'interface :

$$p_a^\epsilon(y) = -g(\rho_2 - \rho_1) \left[\frac{y}{2} - \epsilon \ln \left(2 \cosh \left(\frac{y}{2\epsilon} \right) \right) \right] - g\rho_1 y + C \quad (6.101)$$

avec : $C = g(\rho_2 - \rho_1) \left[\frac{y_D}{2} - \epsilon \ln \left(2 \cosh \left(\frac{y_D}{2\epsilon} \right) \right) \right] + g\rho_1 y_D$

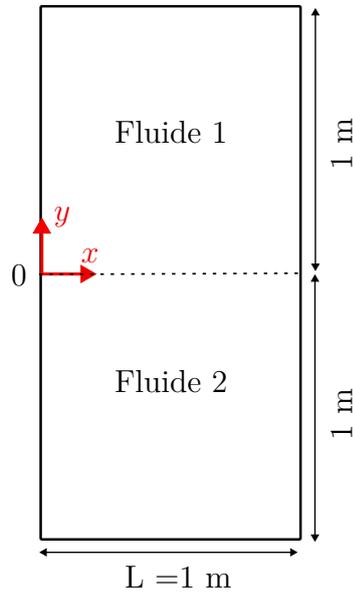


FIGURE 6.9 – Domaine de calcul Ω pour deux fluides au repos, en deux dimensions.

Il est aussi possible de déterminer la pression analytique réelle (physique) issue de chacun des fluides, elle est notée p_a et se définit sous la forme suivante :

$$p_a(y) = \begin{cases} \rho_1 g(y_D - y) & \text{dans le fluide 1} \\ g(\rho_1 y_D - \rho_2 y) & \text{dans le fluide 2} \end{cases} \quad (6.102)$$

Afin de garantir l'équilibre entre les deux fluides, les quantités \mathbf{u} et p ne doivent pas évoluer dans le temps. Le champ de vitesse analytique vaut alors la valeur du champ de vitesse initial :

$$\mathbf{u}_a = 0 \quad (6.103)$$

Calcul d'erreur sur la pression à $t = 0$

Nous comparons dans un premier temps la pression numérique obtenue avec une masse volumique globale, à la pression analytique (6.101) attendue dans ce cas. Nous estimons pour cela l'erreur E_p^ϵ , définie comme suit :

$$E_p^\epsilon = \frac{1}{\rho g L} \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{[p_{num} - p_a]_i^2}{n}} \quad (6.104)$$

avec n le nombre de degrés de liberté présents dans le domaine de calcul. L'erreur E_p^ϵ correspond en fait à la norme L^2 adimensionnée de la pression. Cette dernière est déterminée dans cette section pour deux types de maillages : structurés et non-structurés, où la zone de transition est constante et paramétrée par $\epsilon/L = 0,035$.

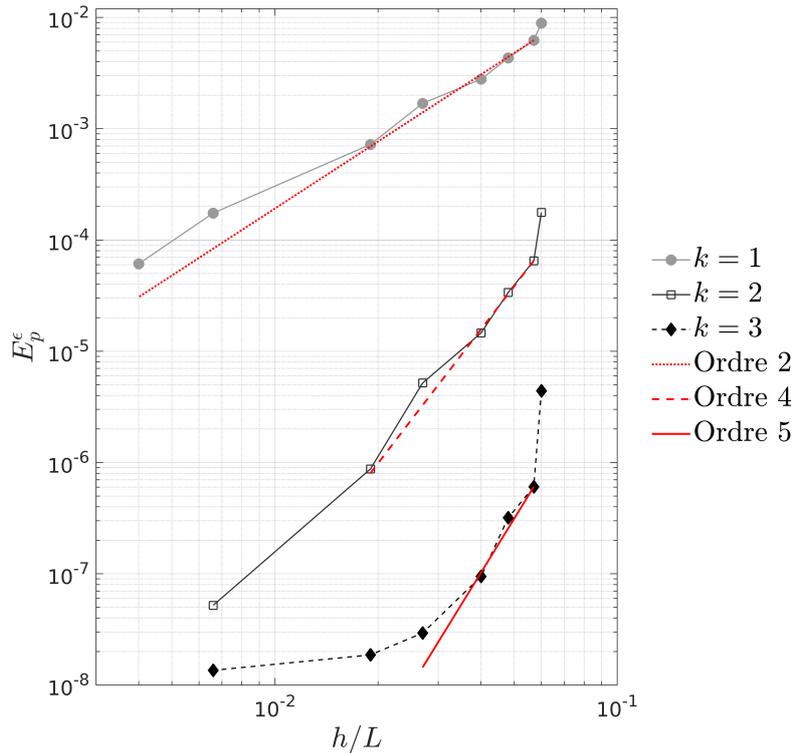


FIGURE 6.10 – Erreur E_p^ϵ en fonction de h/L pour des maillages non-structurés quadrangulaires. Les ordres de convergence sont tracés en rouge.

La Figure 6.10 présente l'évolution de l'erreur E_p^ϵ pour différents ordres spatiaux k sur des maillages non-structurés quadrangulaires. Les ordres de convergence correspondants sont également indiqués. Les résultats montrent que les solutions à $k = 1$ convergent à l'ordre $(k + 1)$ tandis que celles à $k = 2$ et 3 convergent à l'ordre $(k + 2)$. L'erreur E_p^ϵ est ensuite tracée sur la Figure 6.11 pour des maillages réguliers. Dans ce cas, les solutions convergent aux mêmes ordres que les maillages non-structurés. A l'ordre $k = 3$, on remarque bien une zone de convergence suivie d'une zone de saturation, où les solutions atteignent une précision maximale.

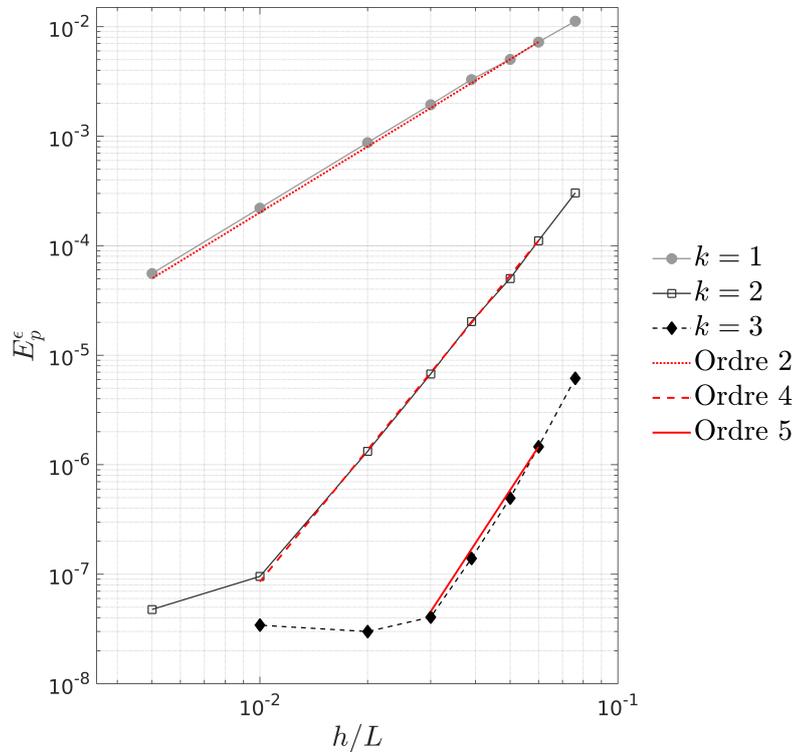


FIGURE 6.11 – Erreur E_p^ϵ en fonction de h/L pour des maillages structurés quadrangulaires. Les ordres de convergence sont tracés en rouge.

Les résultats obtenus témoignent de la robustesse du schéma numérique utilisé pour résoudre l'équation de Poisson sur la pression. En effet, les solutions convergent plus rapidement que l'ordre spatial qui leur est attribué. Nous verrons dans la section à venir que l'utilisation d'un maillage régulier permet d'optimiser la précision des résultats.

Dans ce travail, l'interface est épaissie fictivement pour permettre une évolution continue de la masse volumique entre les deux fluides. Comme mentionné en début de chapitre, l'utilisation d'une interface diffuse peut conduire à la formation de courants parasites. Ce phénomène sera étudié dans les prochaines sections.

Vitesses parasites dans la zone de transition à $t = t_0 + \Delta t$

A l'instant initial, le champ de vitesse est imposé nul dans l'ensemble du domaine, pour qu'il le soit toujours au pas de temps suivant, il est nécessaire que sa dérivée $\partial \mathbf{u} / \partial t$ le soit aussi. Nous nous concentrons ici sur le comportement de la dérivée temporelle du champ de vitesse, afin d'éviter le calcul direct de la vitesse qui nécessiterait l'utilisation d'un schéma temporel. La composante $\partial v / \partial t$ est tracée sur la Figure 6.12, pour tout $x = 1$ m à la fin du pas de temps initial. La fonction $1/\rho$ varie rapidement sur environ sept mailles. Dans cette zone, on remarque une anomalie des termes de vitesse. En augmentant l'ordre spatial du schéma, ces oscillations numériques peuvent toutefois être réduites de manière significative. Ceci s'explique par le fait que le gradient de pression est résolu avec une plus grande précision dans les éléments proches de l'interface, ce qui permet ainsi d'obtenir des solutions moins bruitées.

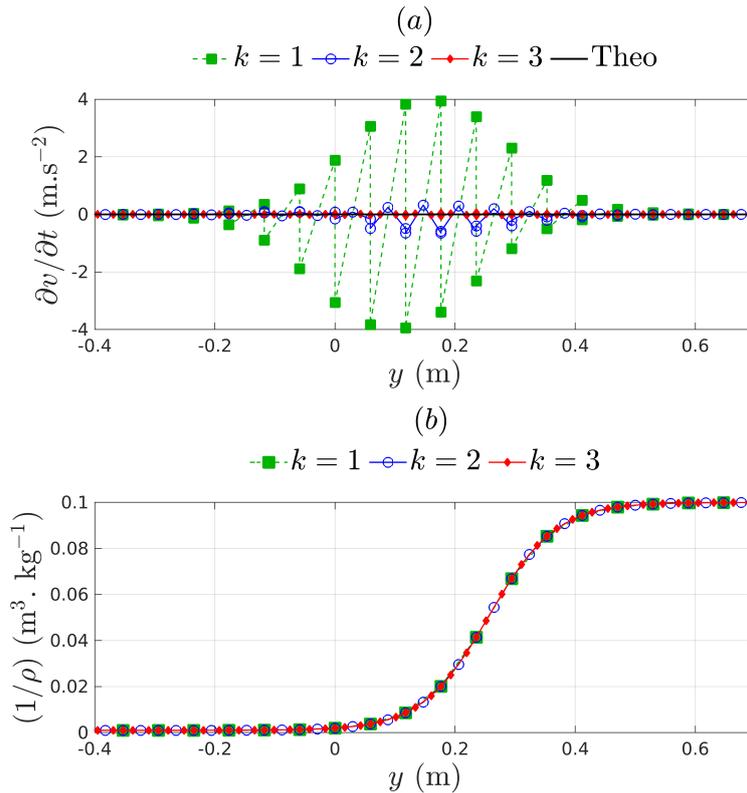


FIGURE 6.12 – (a) Composante $\partial v / \partial t$ sur la frontière droite du domaine Ω et (b) zone de transition de la fonction $1/\rho$, aux ordres $k = 1, 2$ et 3 , pour $L/h = 18$ et $\epsilon = h$.

Calcul d'erreur sur la dérivée du champ de vitesse à $t = t_0 + \Delta t$

Dans cette section, nous menons une étude plus détaillée sur le comportement des courants parasites dans l'écoulement. On désigne $E_{v,t}$ la norme L^2 adimensionnée de la composante $(\partial v / \partial t)$, estimée à la fin du premier pas de temps. Elle est définie sous la forme suivante :

$$E_{v,t} = \frac{1}{g} \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{[(\partial v / \partial t)_{num}]_i^2}{n}} \quad (6.105)$$

En réalité, l'erreur calculée sur le champ de vitesse ou sa dérivée temporelle dérive directement des vitesses parasites. Rappelons que pour résoudre le terme $\nabla p / \rho(\chi)$ présent dans l'équation de bilan de la quantité de mouvement, nous utilisons une formulation mixte d'éléments-finis. En effet, les solutions sont calculées dans l'espace des vitesses, tout en utilisant les valeurs nodales et fonctions de forme obtenues dans l'espace de la pression. Il est donc possible ici d'utiliser des ordres spatiaux différents pour résoudre p et \mathbf{u} .

Dans un premier temps, nous déterminons l'erreur $E_{v,t}$ pour des maillages non-structurés composés de quadrangles (voir Fig. 6.13 (a)), où la zone de transition entre les deux fluides

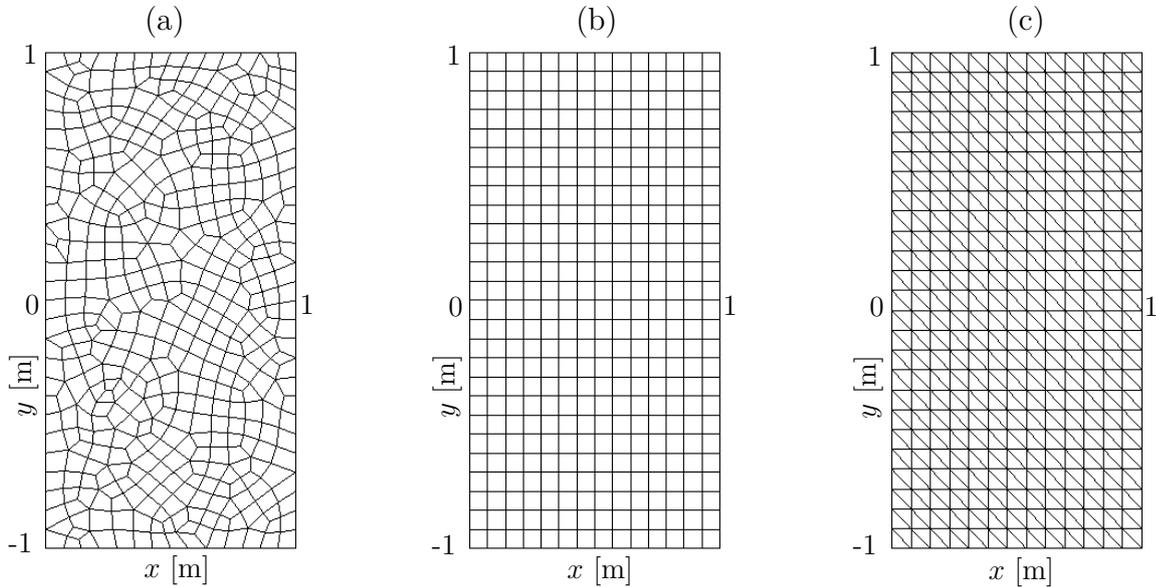


FIGURE 6.13 – Exemples d'un maillage (a) quadrangulaire non-structuré, (b) régulier et (c) triangulaire.

est constante ($\epsilon/L = 0,035$). La Figure (6.14) présente l'évolution de l'erreur $E_{v,t}$ en fonction de la taille de maille, pour deux catégories :

- Catégorie 1 : la pression et la vitesse sont résolues au même ordre k ,
- Catégorie 2 : la vitesse est résolue à l'ordre k et la pression à l'ordre $k + 1$.

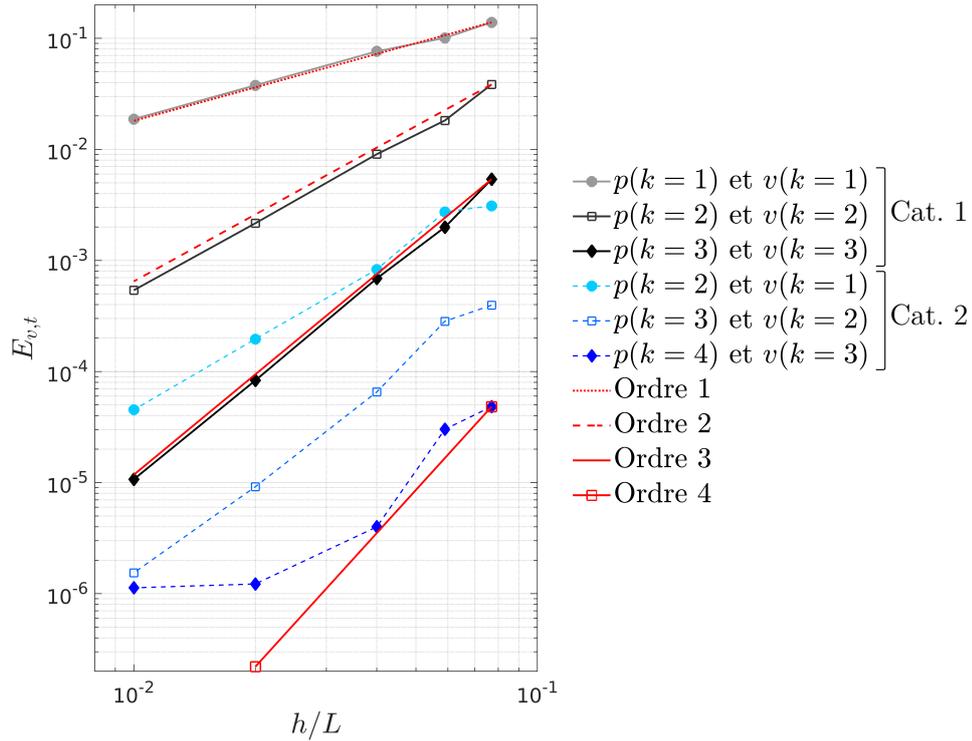


FIGURE 6.14 – Erreur $E_{v,t}$ en fonction de h/L pour des maillages non-structurés quadrangulaires. Les ordres de convergence sont tracés en rouge.

Tout d'abord, il est observé que les vitesses parasites tendent vers zéro à mesure que la taille de maille h diminue. Par ailleurs, leur formation et leur comportement diffèrent selon la catégorie 1 ou 2. En effet, lorsque l'on résout la pression avec un ordre de plus que la vitesse, l'erreur $E_{v,t}$ est réduite, ce qui indique que les vitesses parasites sont moins présentes dans le domaine Ω . Cette observation est attendue puisque l'équation de bilan de la quantité de mouvement fait intervenir le gradient de la pression. En augmentant l'ordre sur p , l'ensemble des termes de l'équation de CQDM sont d'ordre k , ce qui permet alors d'améliorer les résultats. Les ordres de convergence sont indiqués et permettent de noter que les solutions convergent à l'ordre k pour la première catégorie, et à l'ordre $(k+1)$

pour la seconde, ce qui nous amène à conclure que les solutions convergent à l'ordre de la pression.

Dans un second temps, l'erreur $E_{v,t}$ est tracée pour des maillages réguliers (voir Fig. 6.13 (b)) sur la Figure 6.15, pour trois catégories, on rajoute ici la résolution de la vitesse avec un ordre supplémentaire (Catégorie 3). Dans ce cas, les solutions convergent toujours à l'ordre k pour la catégorie 1. On remarque par ailleurs que les résultats sont peu modifiés pour la catégorie 3, lorsque la vitesse est calculée avec un ordre de plus. En revanche, les courants parasites deviennent négligeables, indépendamment du maillage et de l'ordre considérés, pour la catégorie 2.

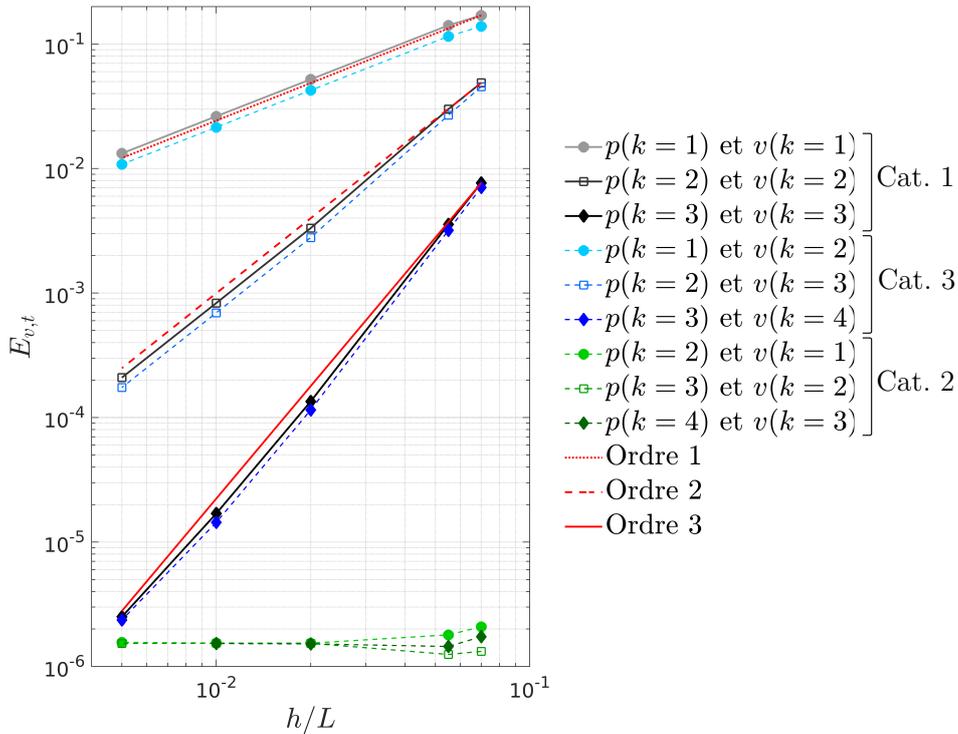


FIGURE 6.15 – Erreur $E_{v,t}$ en fonction de h/L pour des maillages structurés quadrangulaires. Les ordres de convergence sont tracés en rouge.

L'erreur $E_{v,t}$ est estimée une dernière fois pour un troisième type de maillage, dans lequel les éléments des maillages réguliers sont divisés en deux pour former des triangles (voir Fig. 6.13 (c)). L'objectif ici est de vérifier si le comportement des vitesses parasites, lorsque la pression est calculée avec un ordre supplémentaire, est similaire à celui observé

pour les maillages réguliers. Les résultats sont présentés sur la Figure 6.16. Remarquons qu'ils suivent un comportement similaire à ceux issus de la Figure 6.14. En effet, en augmentant l'ordre sur la pression, l'erreur $E_{v,t}$ est réduite et converge plus rapidement. A la différence de la Figure 6.15, cette dernière n'est toutefois pas négligeable.

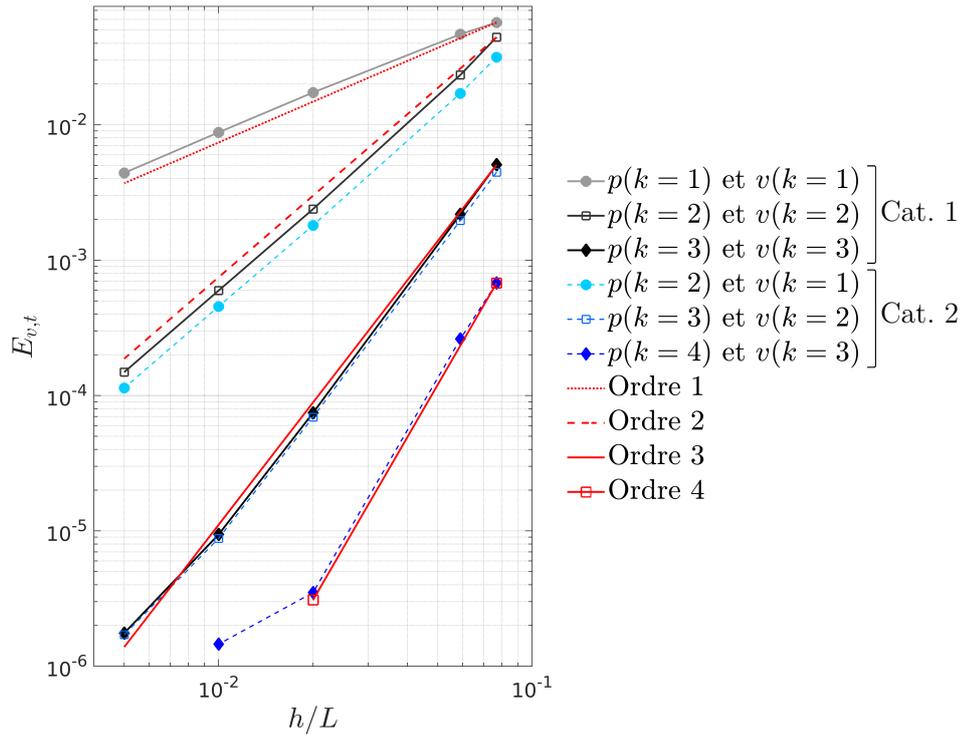


FIGURE 6.16 – Erreur $E_{v,t}$ en fonction de h/L pour des maillages triangulaires. Les ordres de convergence sont tracés en rouge.

La résolution de la pression avec un ordre supplémentaire, sur des maillages réguliers, permet donc de rendre négligeables les courants parasites présents au début de la simulation. Ainsi, ils ne peuvent pas affecter la stabilité du schéma, ce qui constitue un avantage significatif. Une étude sur papier (détaillée en Annexe A) a pu être réalisée afin de confirmer cette analyse.

Influence de l'épaisseur de l'interface

Introduire une épaisseur de l'interface dans ce travail n'est pas justifiable physiquement. L'objectif de cette section vise à vérifier s'il existe une valeur optimale pour le

paramètre ϵ , qui régule sa largeur.

La pression réelle physique (6.102) est calculée dans un premier temps pour les deux fluides, afin d'estimer l'erreur E_p suivante :

$$E_p = \frac{1}{\rho g L} \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{[p_{num} - p_a]_i^2}{n}} \quad (6.106)$$

L'erreur E_p est tracée sur la Figure 6.17 pour un maillage régulier, en fonction du paramètre spatial ϵ . Les résultats numériques sont comparés à une solution analytique où l'interface est considérée sans épaisseur. Cependant, nous introduisons dans notre approche un épaissement fictif de cette dernière, les solutions ne peuvent donc pas converger vers la solution analytique physique (6.102), mais plutôt vers la solution (6.101). Dans ce cas, l'ordre de convergence des solutions issues de la Figure 6.17 est identique pour les trois

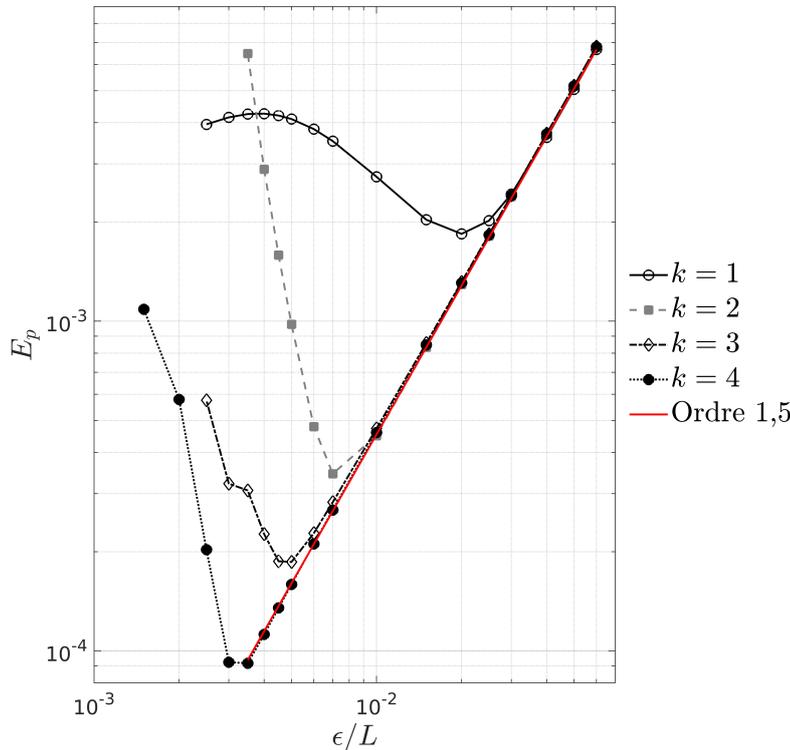


FIGURE 6.17 – Erreur E_p en fonction de ϵ/L pour un maillage régulier, $L/h = 50$. L'ordre de convergence est tracé en rouge.

ordres spatiaux et vaut 1, 5. Par ailleurs, les résultats convergent jusqu'à une certaine valeur du paramètre ϵ , dépendante de l'ordre k . En dessous, l'erreur commence à augmenter. La valeur optimale approximative ϵ_{opt} est répertoriée dans le Tableau 6.1, en fonction de l'ordre d'interpolation. On note ici une assez bonne approximation pour $\epsilon_{opt}/h = 1/k$.

k	ϵ_{opt}	ϵ_{opt}/h	Loi empirique ($1/k$)
1	0.03	1.5	1
2	0.01	0.5	0.5
3	0.006	0.3	0.33
4	0.0035	0.175	0.25

TABLE 6.1 – Paramètre ϵ_{opt} en fonction de l'ordre spatial k .

En réduisant l'épaisseur de l'interface, on se rapproche du cas réel, ce qui permet aux solutions de tendre vers la solution théorique (6.102). Toutefois, si la valeur attribuée à ϵ rend cette épaisseur trop mince par rapport à la taille de maille h , alors les solutions numériques ne peuvent pas être calculées avec précision. En effet, à l'ordre $k = 1$ (solution linéaire), si l'épaisseur de l'interface est plus fine que la maille, alors la fonction $1/\rho$ entre les deux fluides ne pourra pas être correctement décrite. Par conséquent, on obtient une mauvaise description de la pression. En augmentant l'ordre spatial du schéma, le domaine de calcul est enrichi avec des nœuds supplémentaires. Les quantités $1/\rho$ et p peuvent alors être calculées plus précisément dans les cellules situées proche de l'interface, à l'aide de polynômes d'interpolation aux degrés plus élevés. Pour ces raisons, les valeurs ϵ_{opt} peuvent être réduites lorsque l'on augmente l'ordre k .

L'erreur $E_{v,t}$ est tracée dans un second temps sur la Figure 6.18 jusqu'aux différentes valeurs ϵ_{opt} , dépendantes de k . Lorsque l'on réduit l'épaisseur de la surface libre dans ce cas-ci, nous augmentons la formation de courants parasites. Ce phénomène est justifiable puisqu'en réduisant ϵ , on force les quantités $1/\rho$ et p à varier plus rapidement dans la zone de transition, ce qui rend le calcul du terme $\nabla p/\rho(\chi)$ plus délicat dans les éléments proches de l'interface. L'augmentation de l'ordre spatial permet cependant de réduire une nouvelle fois les vitesses parasites dans ce cas-ci.

Le choix du paramètre ϵ nécessite donc de trouver un compromis : suffisamment petit pour calculer la pression avec précision, mais suffisamment grand pour éviter une forte

influence des vitesses parasites. Pour cela, nous établissons la loi suivante :

$$\epsilon = h/k \tag{6.107}$$

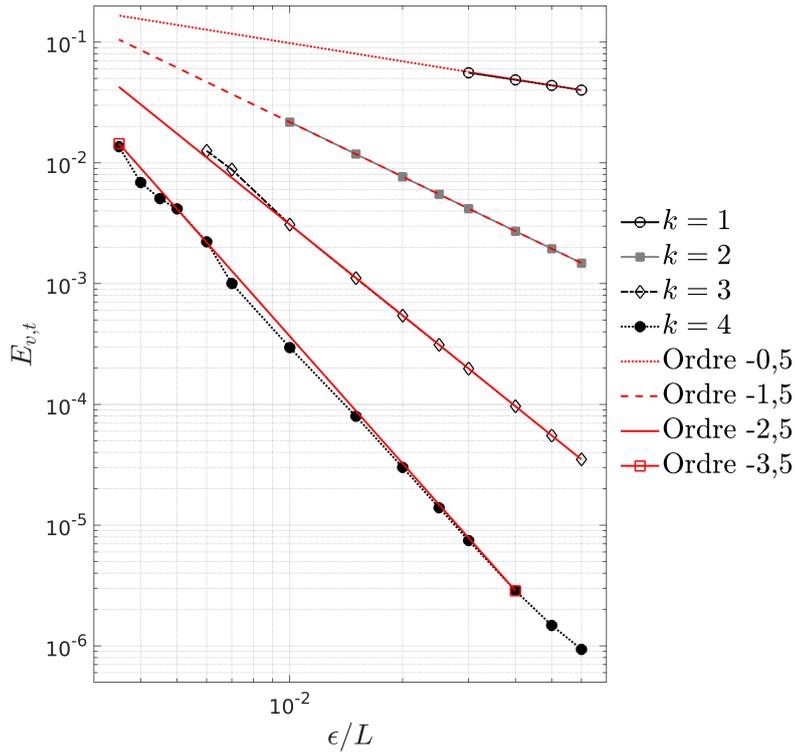


FIGURE 6.18 – Erreur $E_{v,t}$ en fonction de ϵ/L pour un maillage régulier, $L/h = 50$. Les ordres de convergence sont tracés en rouge.

Avance temporelle

Nous effectuons une simulation jusqu'au temps final $t_f = 10$ s, pour un maillage de taille $L/h = 14$, où l'épaisseur de l'interface est paramétrée par $\epsilon = h/k$. Afin de s'assurer de la stabilité du schéma numérique, l'interface est initialisée à $y = 0.005$ m, de façon à ne pas être confondue avec le maillage. Par ailleurs, la pression est calculée pour un ordre de plus que la vitesse. Bien que ce cas-test soit simple à mettre en œuvre, il peut être délicat à valider. En effet, tout déséquilibre de l'interface peut rapidement affecter les résultats. Dans ce cas d'étude, ce sont les vitesses parasites qui sont directement en

lien avec la stabilité du schéma.

Une étude préliminaire a permis de définir un pas de temps Δt , en fonction de l'ordre spatial k , pour lequel les courants parasites sont négligeables au temps $t = 10$ s. L'avance temporelle se base sur une méthode RK2 où $\Delta t = 0.11$ s pour $k = 1$ et $\Delta t = 0.03$ s pour $k = 2$. A la fin de chaque pas de temps, la fonction Level-Set est redistanciée en reconstruisant l'interface par méthode de dichotomie. Le mouvement de cette dernière étant négligeable ici, seuls deux ou trois points par maille suffisent à sa discrétisation, pour $k = 1$ et 2 respectivement. La solution χ est représentée dans Ω sur la Figure 6.19 aux

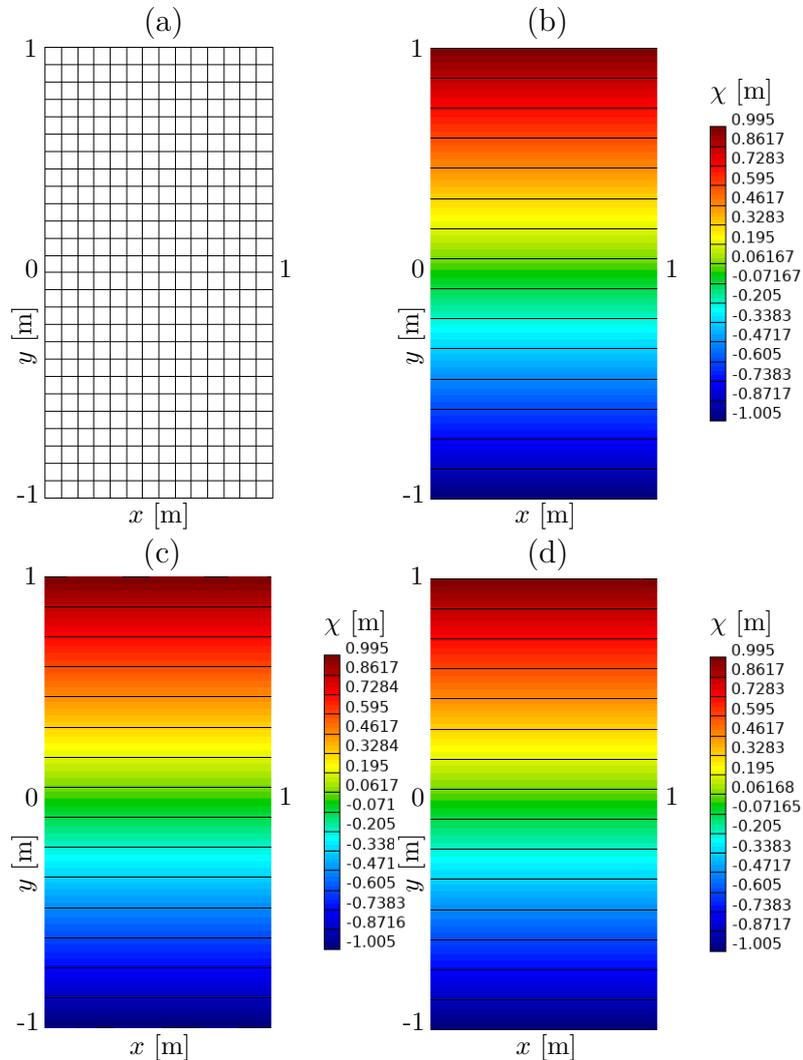


FIGURE 6.19 – (a) Maillage : $L/h = 14$. (b) χ à $t_0 = 0$. (c) χ à $t_f = 10$ s pour $k = 1$ (91 itérations). (d) χ à $t_f = 10$ s pour $k = 2$ (333 itérations).

instants t_0 et t_f . On remarque bien ici que le système n'a pas évolué et que les solutions finales sont identiques à celles initiales, l'équilibre hydrostatique a bien été bien conservé.

Conclusion

La simulation des écoulements nécessite la résolution des équations d'Euler, où les champs de pression et de vitesse doivent être déterminés. Les études menées pour ce cas-test ont montré dans un premier temps que le schéma numérique converge quel que soit l'ordre spatial utilisé. Le Tableau 6.2 résume les différents ordres de convergence pour les quantités à déterminer. Il convient de noter que lorsque la pression est résolue avec un ordre de plus que la vitesse sur des maillages réguliers, alors les courants parasites au début de la simulation tendent drastiquement vers zéro. Pour cette raison, nous nous baserons sur cette configuration afin d'obtenir les solutions numériques issues des prochains cas-tests. Désormais, lorsque l'on indiquera l'ordre du schéma spatial k , on considérera que la pression est résolue à $k + 1$.

Maillage	(NS)	(S)	(NS)	(S)
Ordre p et \mathbf{u}	Egaux	Egaux	+1 pour p	+1 pour p
Convergence de la pression	<ul style="list-style-type: none"> • $(k + 1)$ à $k = 1$ • $(k + 2)$ à $k = 2$ et 3 	<ul style="list-style-type: none"> • $(k + 1)$ à $k = 1$ • $(k + 2)$ à $k = 2$ et 3 	-	-
Convergence de la vitesse (bruit parasite)	k	k	$(k + 1)$	Pas de bruit parasite

TABLE 6.2 – Récapitulatif des ordres de convergence pour les champs de pression et de vitesse, pour des maillages structurés (S) et non-structurés (NS), composés de quadrangles.

Ces études se sont intéressées dans un second temps à l'influence de l'épaisseur de l'interface sur les solutions numériques, afin de déterminer une loi de paramétrisation sur la grandeur ϵ (6.107). Cette dernière servira de référence aux prochains cas d'étude.

6.6.2 Sloshing linéaire (faibles déformations)

Le domaine de calcul Ω pour ce second cas-test est similaire au précédent (voir Fig. 6.9). La position de la surface libre, désignée par $\eta(x, t)$ dans cette section, est initialisée selon le premier mode linéaire de déformation :

$$\eta(x, t = 0) = A \cos(\kappa x) + 0,01 \quad (6.108)$$

avec $A = 0,005$ m l'amplitude d'oscillation et κ le nombre d'onde ($\kappa = \pi/L$), $L = 1$ m désigne la largeur du réservoir. L'interface est centrée en $y = 0,01$ m afin de ne pas être confondue avec le maillage. Les fluides sont caractérisés par les mêmes densités que le cas précédent et le champ de vitesse est toujours nul à l'instant initial. Dans ce cas-test, l'interface doit naturellement osciller avec la gravité, on considère $\mathbf{u} = \sqrt{gL}$ la valeur de référence pour la vitesse de l'écoulement, afin de définir les pas de temps de simulation.

La méthode de redistanciation utilisée ici est similaire à celle utilisée pour l'équilibre hydrostatique, ainsi que pour le ballotement linéaire dans le contexte d'écoulement monofluide. Les mouvements de la surface libre étant considérés très faibles, seuls quelques points sont alors nécessaires à la discrétisation de cette dernière afin de recalculer une fonction χ distance signée.

Solution analytique

La solution analytique pour l'élévation de la surface libre, en théorie potentielle linéarisée, est rappelée ci-dessous pour ce cas de figure :

$$\eta_a(x, t) = A \cos(\kappa x) \cos(\omega t) + 0,01 \quad (6.109)$$

où la pulsation ω est définie ici pour un écoulement biffuide :

$$\omega = \sqrt{g\kappa \tanh(\kappa d) R} \quad (6.110)$$

avec d la hauteur du fluide 2, et R un paramètre dépendant du ration de la masse volumique, défini comme suit :

$$R = \frac{(1-r)}{(1+r)} \quad (6.111)$$

La solution (6.109) servira de référence pour comparer les résultats numériques issus de ce cas-test.

Etude du schéma temporel

L'étude sur l'équilibre hydrostatique a permis de vérifier la bonne convergence des schémas spatiaux, cette section s'intéresse ici à la convergence des schémas temporels.

Dans un premier temps, nous réalisons une étude préliminaire afin d'estimer le comportement de l'interface selon les deux types d'avance temporelle suivants : Euler et Runge-Kutta 2 (point milieu). Le pas de temps est défini selon la relation $\Delta t = CFL(h/\sqrt{gL})$. Deux simulations sont effectuées pour ces deux méthodes sur un maillage relativement grossier ($L/h = 14$), où le nombre de Courant est fixé à $CFL = 1$. La Figure 6.20 présente l'élévation de la surface libre sur la frontière droite du domaine de calcul, en fonction du temps t . Les variables η et t sont adimensionnalisées par l'amplitude A et la période T d'oscillation, respectivement.

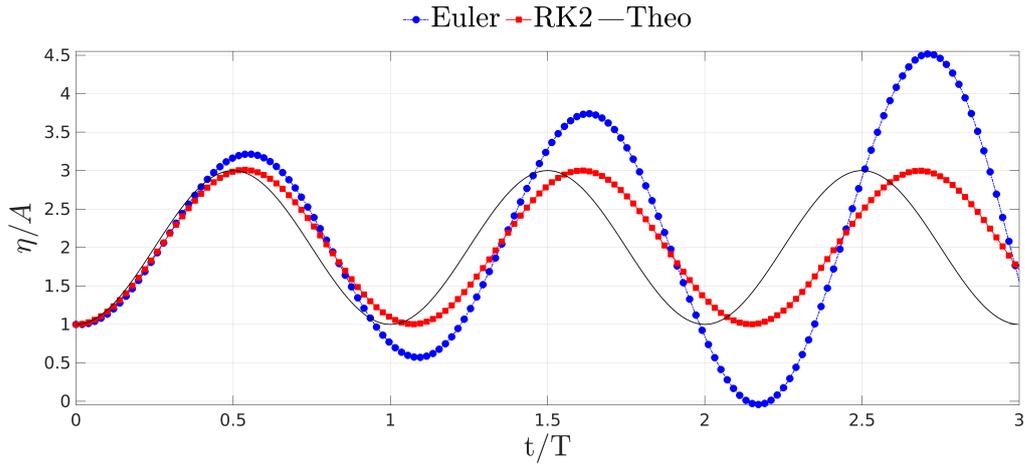


FIGURE 6.20 – Evolution temporelle de l'élévation de la surface libre sur la frontière droite du domaine, pour deux schémas temporels. $k = 1$, $L/h = 14$ ($A/h = 0,07$).

On remarque à partir de ces résultats que le choix de la méthode influe sur l'amplitude d'oscillation, pour un pas de temps fixe. L'erreur maximale entre l'amplitude numérique et théorique, lors de la simulation, est alors estimée sur la frontière droite du domaine Ω . Elle est notée E_A et se définit de la façon suivante :

$$E_A = \frac{\max(A_{num}) - A_{theo}}{A_{theo}} \quad (6.112)$$

L'erreur E_A est calculée pour trois périodes d'oscillation, puis tracée sur les Figures 6.21 6.22 6.23 pour différents nombres de Courant, aux ordres spatiaux $k = 1, 2$ et 3 , respectivement. Le Tableau 6.3 répertorie les valeurs E_A en fonction des différents cas de figure. Les nombres CFL maximaux, utilisés dans ce tableau et sur les Figures 6.21 6.22 6.23, correspondent aux valeurs seuils nécessaires au bon déroulement de la simulation.

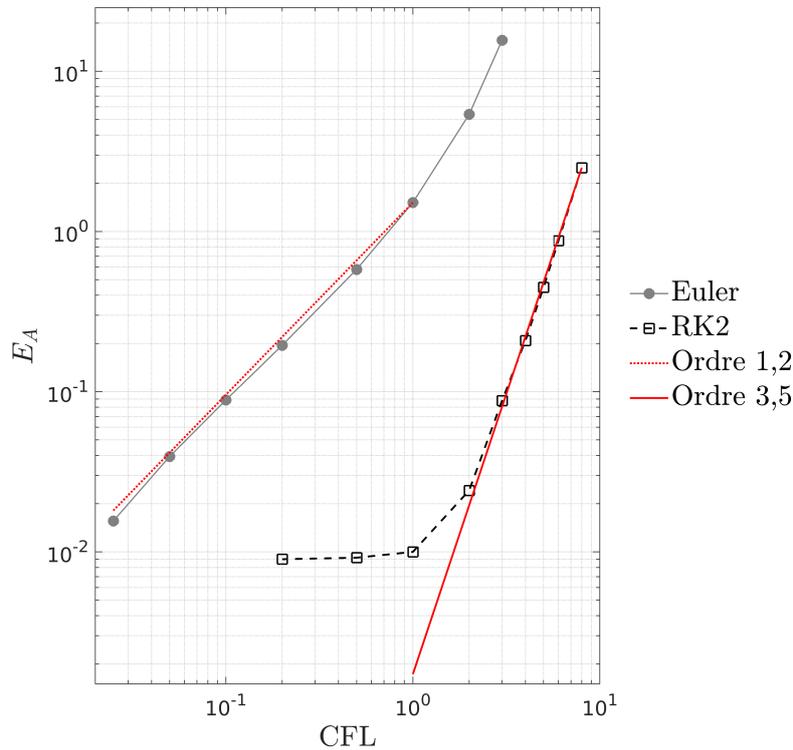


FIGURE 6.21 – Erreur E_A en fonction du nombre CFL pour $k = 1$. $L/h = 14$ ($A/h = 0,07$). Les ordres de convergence sont tracés en rouge.

Pour $k = 1$ (voir Fig. 6.21), la méthode d'Euler converge à l'ordre 1,2 lorsque la méthode RK2 converge à l'ordre 3,5. Dans ce cas, la vitesse de convergence de la méthode RK2 est bien plus rapide et permet d'utiliser des valeurs CFL plus élevées, ce qui est un véritable avantage pour la simulation. Pour $k = 2$ et $k = 3$ (voir Fig. 6.22 et 6.23), les valeurs seuils du nombre de Courant diminuent pour chacune des méthodes. Cette observation est cohérente avec les résultats issus du cas-test du « serpent » , présenté dans la partie 4.5.1 de ce manuscrit. Par ailleurs, remarquons que le schéma RK2 converge moins

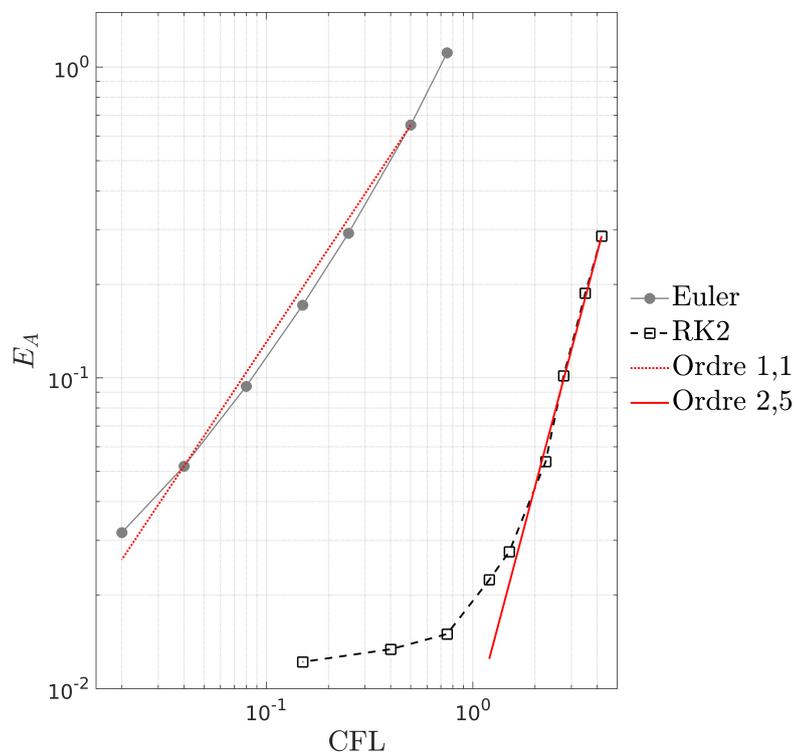


FIGURE 6.22 – Erreur E_A en fonction du nombre CFL pour $k = 2$. $L/h = 14$ ($A/h = 0,07$). Les ordres de convergence sont tracés en rouge.

rapidement lorsque l'ordre spatial k augmente. Pour conserver l'ordre de convergence initial, tout en augmentant k , il serait sûrement nécessaire d'avoir recours à des méthodes Runge-Kutta d'ordres plus élevés. Cependant, il est important de noter que pour $k = 3$, le schéma RK2 converge à l'ordre de la méthode (i.e. 2), ce qui justifie son utilisation pour les simulations d'ordre $k = 1, 2$ ou 3.

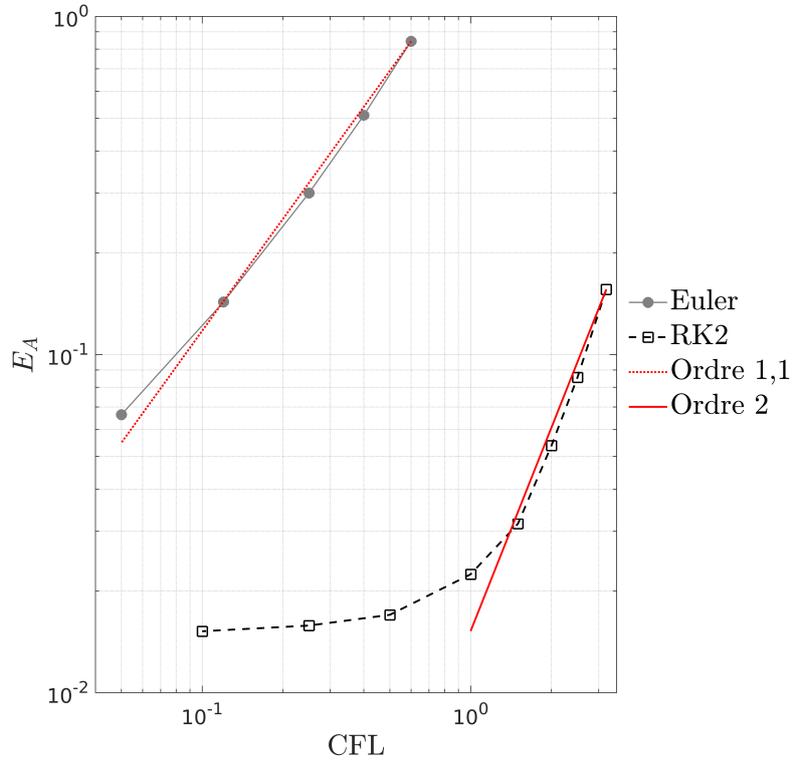


FIGURE 6.23 – Erreur E_A en fonction du nombre CFL pour $k=3$. $L/h = 14$ ($A/h = 0,07$). Les ordres de convergence sont tracés en rouge.

La méthode RK2 permet donc d'utiliser, pour tout ordre spatial k , un pas de temps bien supérieur à la méthode d'Euler, ce qui réduit alors considérablement le temps de calcul. Pour une erreur fixée à $E_A = 0,1$, le ratio moyen du nombre de Courant vaut $\text{CFL}_{\text{RK2}} / \text{CFL}_{\text{Euler}} = 32$. Cette étude a permis de confirmer le choix de la méthode RK2 pour les prochaines simulations à venir, où le pas de temps Δt sera paramétré par les nombres de Courant suivants :

$$\text{CFL} = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 1 \\ 0.75 & \text{pour } k = 2 \\ 0.45 & \text{pour } k = 3 \end{cases} \quad (6.113)$$

EULER $k = 1$		RK2 $k = 1$		EULER $k = 2$		RK2 $k = 2$		EULER $k = 3$		RK2 $k = 3$	
CFL	E_A	CFL	E_A	CFL	E_A	CFL	E_A	CFL	E_A	CFL	E_A
3	15.620	8	2.500	0.75	1.111	4.2	0.286	0.6	0.844	3.2	0.156
2	5.385	6	0.875	0.5	0.651	3.5	0.187	0.4	0.510	2.5	0.086
1	1.517	5	0.449	0.25	0.292	2.75	0.102	0.25	0.300	2	0.054
0.5	0.580	4	0.209	0.15	0.171	2.25	0.054	0.12	0.143	1.5	0.032
0.2	0.195	3	0.088	0.08	0.094	1.5	0.028	0.05	0.066	1	0.022
0.1	0.089	2	0.024	0.04	0.052	1.2	0.022	-	-	0.5	0.017
0.05	0.039	1	0.010	0.02	0.032	0.75	0.015	-	-	0.25	0.016
0.025	0.016	0.5	0.009	-	-	0.4	0.013	-	-	0.1	0.015
-	-	0.2	0.009	-	-	0.15	0.012	-	-	-	-

 TABLE 6.3 – Erreur E_A en fonction du nombre de Courant CFL pour différents schémas numériques.

Etudes sur le maillage/ordre spatial

Jusqu'à présent, nous avons pu vérifier les bonnes propriétés de convergence des schémas spatiaux et temporels. L'objectif de cette section consiste à étudier l'influence du maillage ainsi que de l'ordre spatial sur la précision des résultats.

Dans un premier temps, plusieurs simulations sont effectuées pour trois périodes d'oscillation ($t_f = 3T$), pour différents maillages aux ordres spatiaux $k = 1, 2$ et 3 . L'épaisseur de l'interface est toujours paramétrée selon la relation (6.107), et le pas de temps est défini selon les nombres CFL (6.113). La Figure 6.24 présente l'évolution de l'élévation de la surface libre sur la frontière droite du domaine, pour la troisième période. Ces résultats témoignent que le choix du maillage ainsi que l'ordre du schéma spatial influent sur la période d'oscillation. Le raffinement du maillage et/ou l'augmentation de l'ordre spatial permet aux solutions de tendre vers la solution théorique (6.109). Afin de comparer quantitativement ces résultats, nous déterminons l'erreur E_T entre la période d'oscillation numérique et celle attendue :

$$E_T = \frac{(T_{num} - 2\pi/\omega)\omega}{2\pi} \quad (6.114)$$

où ω est rappelée dans la définition (6.110). La Figure 6.25 présente l'évolution de l'erreur E_T en fonction du maillage. Cette dernière est estimée pour la troisième période. Les résultats montrent que les solutions convergent aux ordres 1,6 ; 1,9 et 2,2 pour $k = 1, 2$ et 3 respectivement. La pression étant résolue en considérant une masse volumique globale,

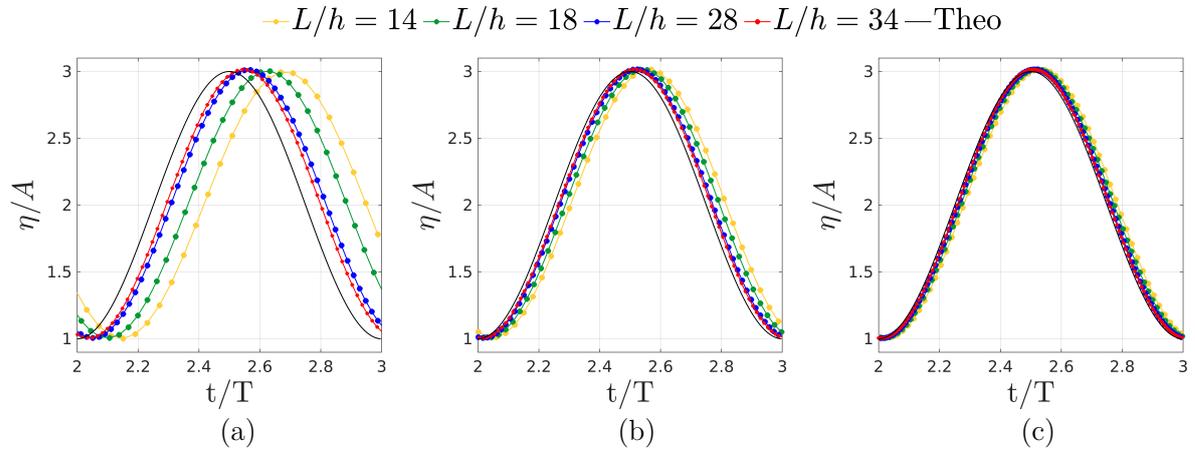


FIGURE 6.24 – Elévation de la surface libre sur la frontière droite du domaine, en fonction du temps (troisième période), pour différents maillages aux ordres : (a) $k = 1$, (b) $k = 2$ et (c) $k = 3$.

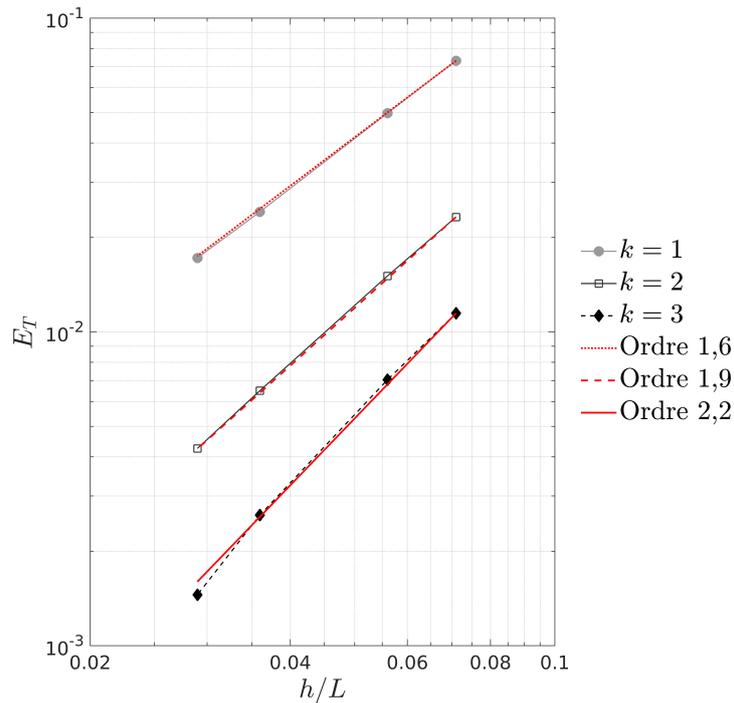


FIGURE 6.25 – Erreur E_T en fonction de h/L pour des maillages réguliers. Les ordres de convergence sont tracés en rouge.

les résultats ne convergent pas vers la solution physique attendue, mais vers une solution prenant en compte la continuité de la masse volumique dans le domaine. Le lissage des discontinuités à l'interface limite alors l'ordre de convergence de la méthode numérique. La Figure 6.25 met en évidence cette remarque. En effet, la convergence de l'erreur E_T semble se limiter à un ordre proche de deux. Ce type d'observation est également retrouvé dans les travaux MEF [55], où la convergence de l'erreur sur le champ de vitesse pour un écoulement de Poiseuille bifluide est limitée au premier ordre.

Dans un second temps, trois simulations sont effectuées pour un maillage fixe aux ordres $k = 1, 2$ et 3 , jusqu'au temps final $t_f = 3T$. La masse volumique globale est représentée sur la Figure 6.26 au départ de la simulation. Remarquons que l'augmentation de l'ordre k permet bien de réduire la zone de transition entre les deux fluides. La Figure 6.27 présente l'élévation de la surface libre en fonction du temps, sur la frontière droite du domaine de calcul. Ces résultats permettent de constater une nouvelle fois que l'augmentation de l'ordre spatial k permet aux solutions numériques de tendre vers la solution de référence. Pour quantifier cette remarque, le Tableau 6.4 indique l'erreur E_T sur la dernière période, en fonction de l'ordre d'interpolation. Par ailleurs, le volume du fluide 2 est contrôlé au cours de la simulation afin de vérifier la conservation de la masse. Pour

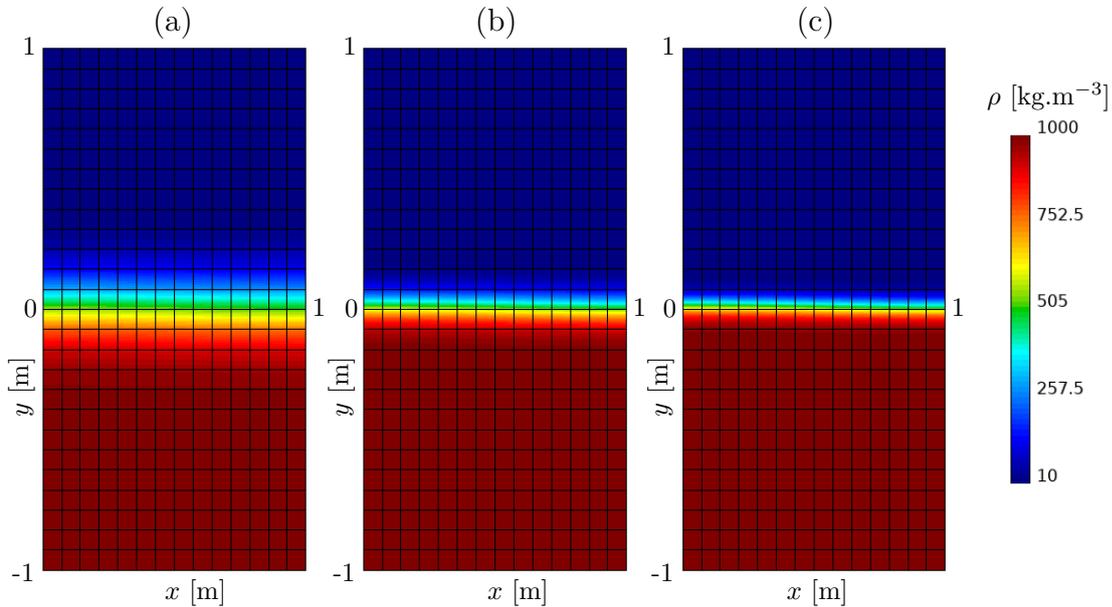


FIGURE 6.26 – Masse volumique globale dans le domaine de calcul pour : (a) $k = 1$, (b) $k = 2$, (c) $k = 3$. $L/h = 14$ ($A/h = 0,07$).

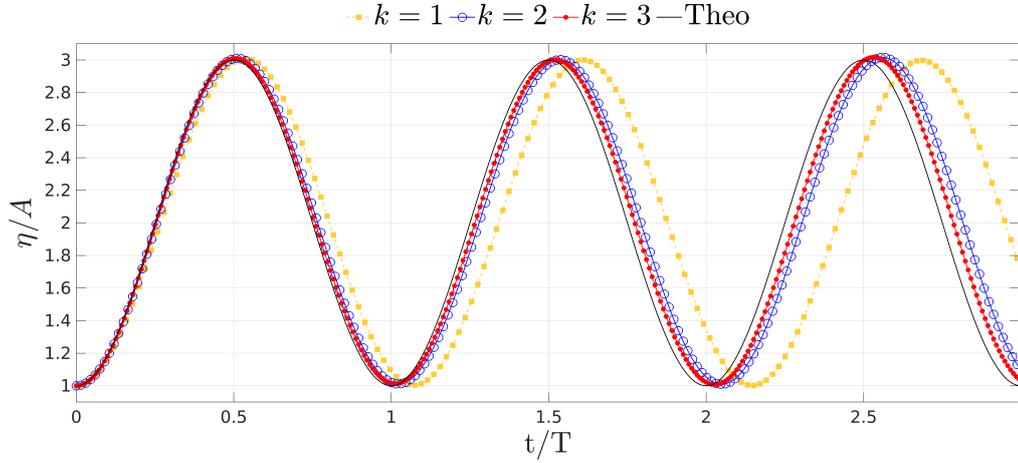


FIGURE 6.27 – Evolution temporelle de l'élévation de la surface libre sur la frontière droite du domaine, pour différents ordres spatiaux. $L/h = 14$ ($A/h = 0,07$).

cela, la variation ΔV_2^n est déterminée à chaque pas de temps, elle est définie sous la forme suivante :

$$\Delta V_2^n = \frac{V_2^0 - V_2^n}{V_{tot}} \quad \text{avec : } n = 1, 2, \dots, t_n. \quad (6.115)$$

où t_n désigne le nombre d'itérations temporelles, V_2^0 et V_2^n le volume du fluide 2 à l'instant initial et à l'itération n , et V_{tot} le volume total des deux fluides. Pour ces trois simulations, les variations ΔV_2^n restent inférieures aux valeurs indiquées dans le Tableau 6.4. Bien que le schéma numérique ne soit pas intrinsèquement conservatif, on note $(\Delta V_2^n)_{\max} \approx 0$ quel que soit l'ordre choisi, ce qui témoigne d'une bonne propriété de conservation de la masse. La dernière colonne du Tableau 6.4 renseigne finalement le temps de calcul pour les trois simulations.

k	E_T	$(\Delta V_2^n)_{\max}$	Temps CPU (s)
1	7,3%	$2,6 \cdot 10^{-5}$	10
2	2,3%	$5 \cdot 10^{-6}$	43
3	1,1%	$7 \cdot 10^{-6}$	215

TABLE 6.4 – Erreur sur la dernière période d'oscillation, variation maximale du volume V_2 et temps de simulation. $L/h = 14$ ($A/h = 0,07$).

La position de l'interface dans le domaine Ω est représentée sur la Figure 6.28 au temps final, pour les différentes simulations. Lorsque l'ordre spatial k est augmenté, la solution

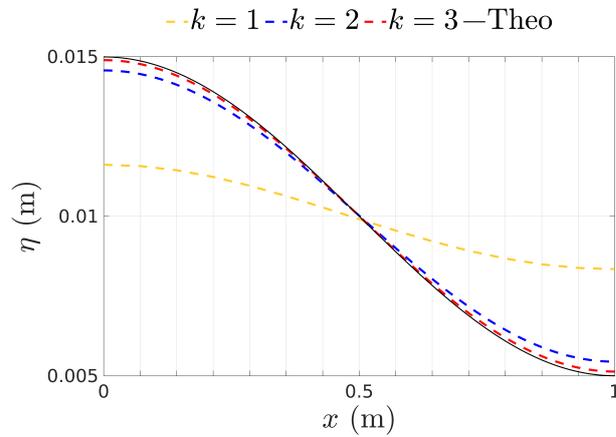


FIGURE 6.28 – Position de l'interface dans Ω au temps final pour différents ordres spatiaux. $L/h = 14$ ($A/h = 0,07$).

numérique se rapproche davantage de la position η attendue. Dans le but de visualiser l'influence de l'ordre k sur les solutions au sein des éléments, la composante u du champ de vitesse est représentée sur la Figure 6.29, au temps final. Au passage de l'ordre $k = 1$

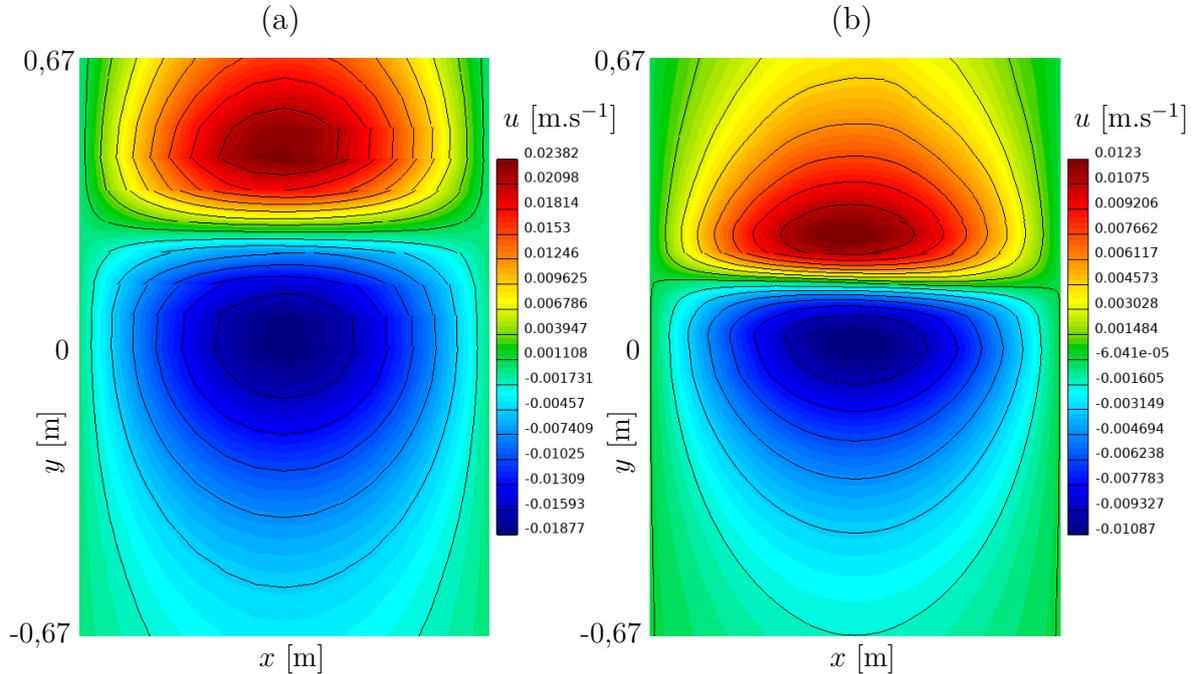


FIGURE 6.29 – Composante u du champ de vitesse au temps final pour : (a) $k = 1$, (b) $k = 2$. $L/h = 14$ ($A/h = 0,07$).

à $k = 2$, on observe que la nature de la solution à l'intérieur de chaque élément évolue de façon linéaire à quadratique.

Les études menées dans cette section permettent de confirmer que l'augmentation de l'ordre spatial ainsi que le raffinement du maillage conduisent à une meilleure précision des solutions numériques. Cependant, cela s'accompagne d'une augmentation du temps de calcul.

Nous réalisons une dernière étude afin de vérifier s'il est plus avantageux, en termes de précision et de coût de calcul, d'augmenter l'ordre spatial ou de raffiner le maillage. La Figure 6.30 présente l'évolution de l'erreur E_T en fonction du temps CPU, pour différents maillages aux ordres $k = 1, 2$ et 3 . Tout d'abord, remarquons que pour une erreur fixée, il est plus intéressant d'effectuer une simulation en utilisant un maillage grossier à l'ordre $k > 1$ plutôt qu'un maillage fin à $k = 1$. Cela permet de gagner en temps de calcul. Cette remarque est moins évidente entre les ordres $k = 2$ et 3 . Les simulations effectuées à $k = 3$ permettent d'obtenir une très bonne précision, cependant elles sont très coûteuses en temps de calcul. Pour éviter une utilisation trop gourmande en ressources informatiques,

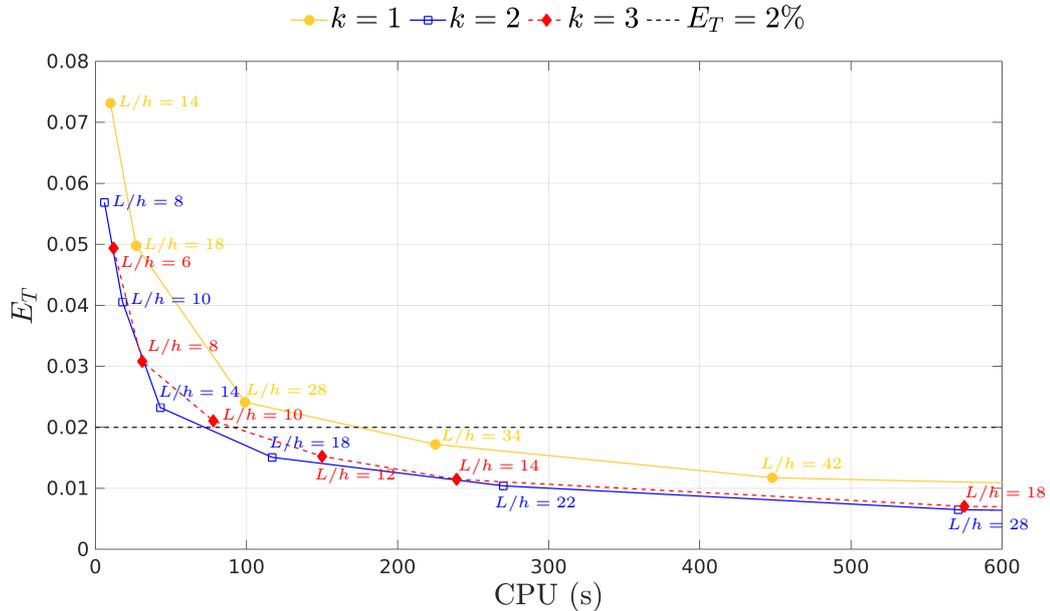


FIGURE 6.30 – Erreur E_T en fonction du temps CPU, pour différents maillages aux ordres $k = 1, 2$ et 3 .

il est donc judicieux d'effectuer les simulations à l'ordre $k = 2$. Pour une erreur fixée à 2%, on évalue le temps CPU à 174 s pour l'ordre $k = 1$, tandis qu'à l'ordre $k = 2$ il est estimé à 72 s, on évalue alors un ratio d'environ 2,4.

Résultats numériques pour dix périodes

La simulation est désormais effectuée pour dix périodes d'oscillation sur un maillage plus fin (voir Fig. 6.31). Le schéma spatial est d'ordre 2 afin d'optimiser la précision des résultats, tout en évitant un temps de calcul excessif. La Figure 6.32 présente l'élévation de la surface libre en fonction du temps, sur la frontière droite du domaine de calcul. Les résultats numériques sont en très bon accord avec la solution théorique. L'amplitude et la période d'oscillation varient peu lors de la simulation, ce qui témoigne que le schéma est très peu dissipatif. La position de la surface libre est représentée sur la Figure 6.33, au temps final. La solution numérique est une nouvelle fois très proche de la valeur théorique. La différence d'amplitude entre les deux solutions vient du déphasage de la période d'oscillation. Pour minimiser cette différence, il est nécessaire de raffiner le maillage ou d'augmenter l'ordre spatial k , de façon à s'approcher davantage du cas réel où $\epsilon \rightarrow 0$.

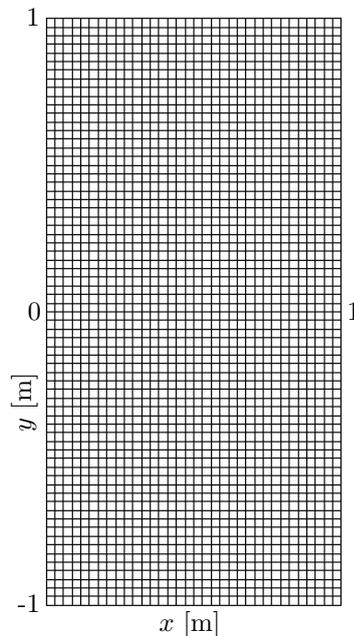


FIGURE 6.31 – Maillage : $L/h = 34$.

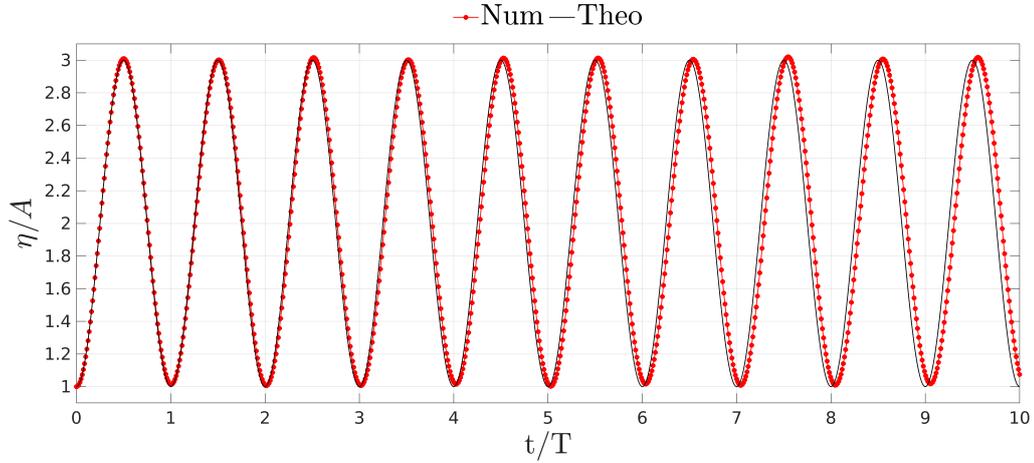


FIGURE 6.32 – Evolution temporelle de l'élévation de la surface libre sur la frontière droite du domaine. $L/h = 34$ ($A/h = 0,17$), $k = 2$.

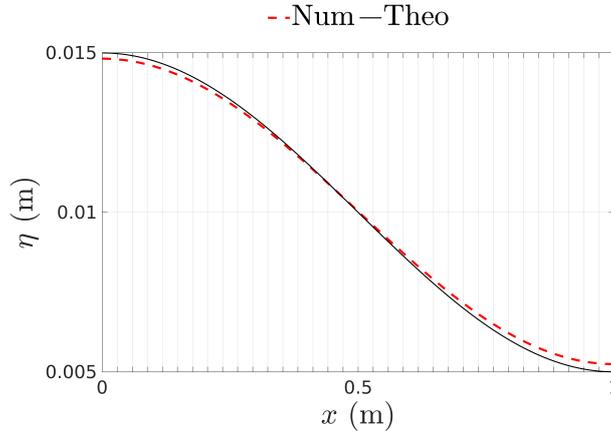


FIGURE 6.33 – Position de la surface libre dans Ω au temps final $t_f = 10T$. $L/h = 34$ ($A/h = 0,17$), $k = 2$.

Les Figures 6.34 6.35 6.36 représentent les solutions numériques de la fonction Level-Set, ainsi que des champs de vitesse et de pression à la fin de la simulation. Ces sorties graphiques permettent de vérifier qu'il n'y a aucune anomalie particulière dans l'écoulement. L'instant final $t_f = 10T$ correspond au moment où le champ de vitesse s'inverse, les composantes tendent alors vers une valeur nulle. Afin d'éviter de décrire cet instant, le champ de vitesse est représenté à $t = 9,8T$ sur la Figure 6.35. Par ailleurs, nous vérifions

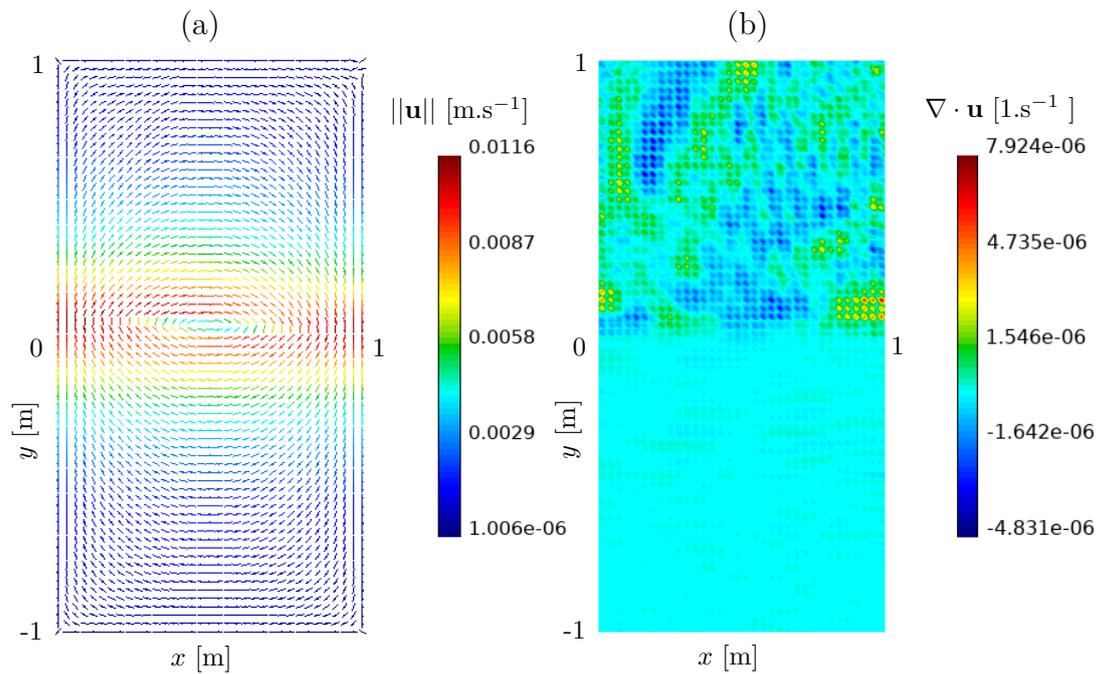


FIGURE 6.34 – (a) Champ de vitesse à t_f , où la barre de couleur désigne la norme de \mathbf{u} . (b) Divergence du champ de vitesse à t_f .

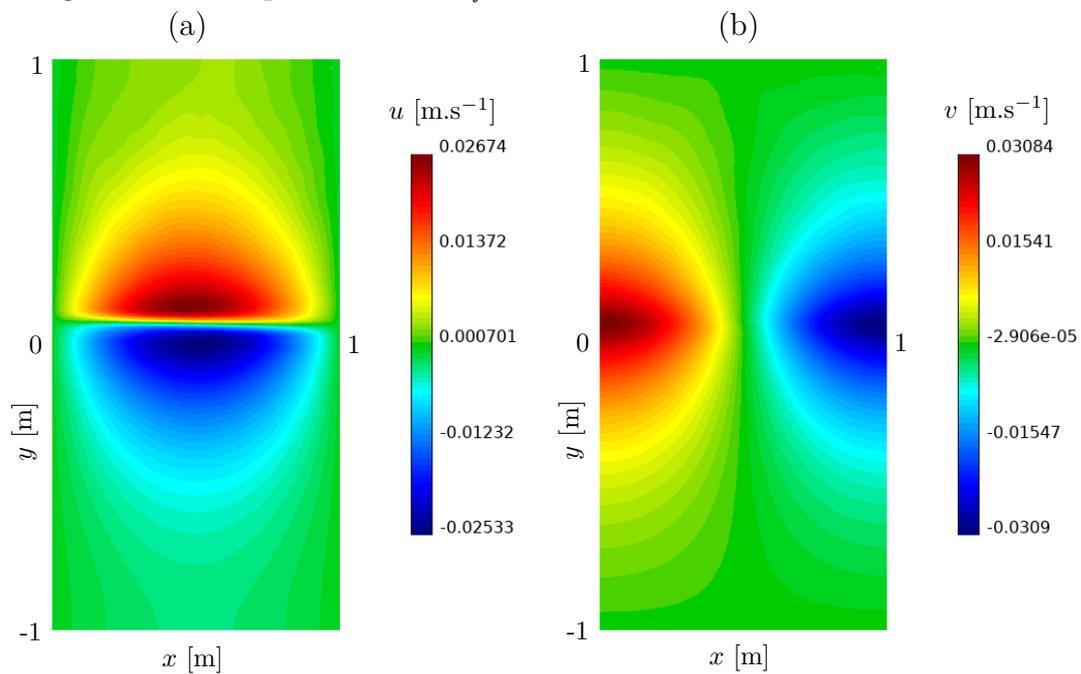


FIGURE 6.35 – (a) Composante u à $t = 9,8T$. (b) Composante v à $t = 9,8T$.

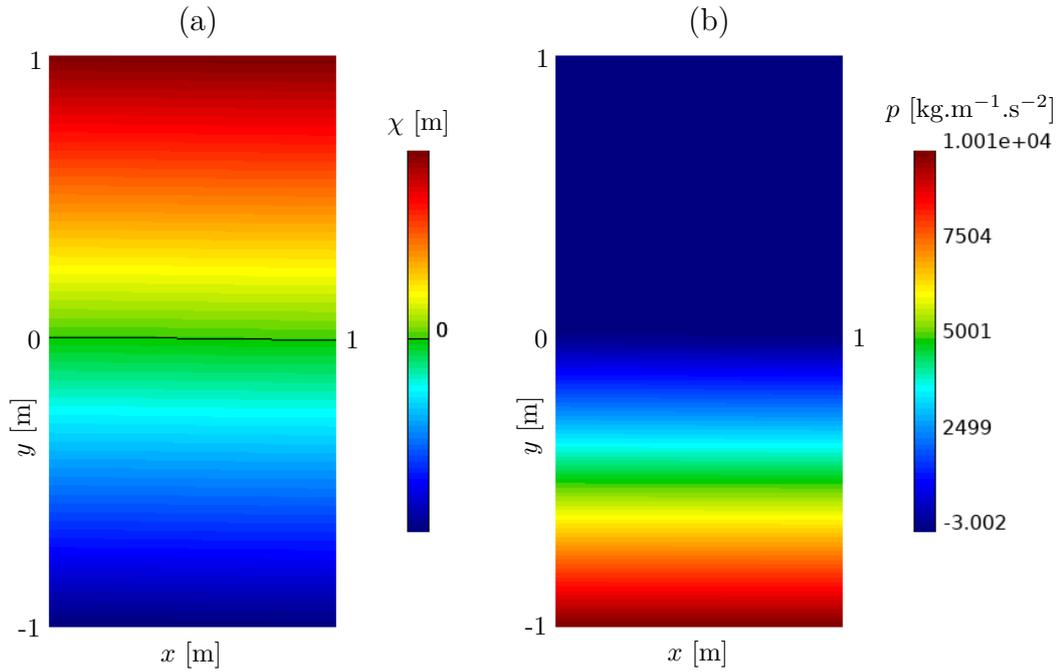


FIGURE 6.36 – (a) Fonction Level-Set à t_f , l’interface est tracée en noire. (b) Champ de pression à t_f .

la contrainte d’incompressibilité puisque l’équation de continuité est résolue de façon implicite dans ce travail. La divergence du champ de vitesse est représentée sur la Figure 6.34 (b), où les solutions sont très proches d’une valeur nulle dans l’ensemble du domaine, ce qui permet de valider a posteriori l’hypothèse d’incompressibilité. Pour cette simulation, les variations (ΔV_2^n) restent inférieures à $1,6 \cdot 10^{-5}$ et le temps de calcul s’élève à 1h16.

Conclusion

Les études menées pour ce cas-test ont montré que le schéma numérique converge pour deux avances temporelles de type Euler et RK2. Les résultats ont toutefois démontré la puissance de la méthode RK2 face à la première. En effet, les schémas convergent plus rapidement pour l’ensemble des ordres spatiaux k . De plus, il est possible d’utiliser des pas de temps plus grands, ce qui permet de réduire considérablement le temps requis pour la simulation. Une nouvelle fois, l’augmentation de l’ordre spatial a conduit les solutions numériques à se rapprocher davantage de la solution de référence. Nous avons également constaté qu’il est plus avantageux d’augmenter l’ordre spatial du schéma que de raffiner le maillage, cela permet de gagner en précision et en temps de calcul. Finalement, nous

avons effectué une simulation sur plusieurs périodes d'oscillation afin de vérifier la stabilité du schéma numérique.

L'interface pour ce sloshing en régime linéaire oscillait très faiblement. Par conséquent, l'écoulement était peu impacté par la présence des termes advectifs dans l'équation de bilan de la quantité de mouvement. On vise maintenant à valider la stabilité du schéma lorsque l'écoulement est dominé par l'advection.

6.6.3 Sloshing non-linéaire

Le domaine Ω et l'initialisation de la surface libre sont similaires au cas précédent. L'amplitude d'oscillation est toutefois imposée à $A = 0,05$ m, conduisant à l'apparition de non-linéarités de la surface libre. Les fluides sont caractérisés par les mêmes densités que le cas précédent, et le champ de vitesse est toujours nul à l'instant initial. Dans ce cas de figure, nous gardons la même valeur de référence $\mathbf{u} = \sqrt{gL}$ pour la vitesse de l'écoulement.

Contrairement au cas de ballonnement précédent, l'interface suit des mouvements non-linéaires ici, la méthode de redistanciation demande alors de discrétiser cette dernière plus finement. Pour rappel, deux méthodes sont mises en œuvre dans ce travail afin de permettre à la fonction Level-Set de conserver son caractère distance signée. La première se base sur un algorithme de Marching-Squares, qui reconstruit l'interface de façon linéaire (par segments) dans chaque maille mixte du domaine Ω . La seconde, pour sa part, balaye chaque maille mixte par m segments verticaux afin d'y retrouver les valeurs $\chi = 0$ par dichotomie. En augmentant le nombre m de segments, l'interface est discrétisée plus précisément sans être limitée par une description linéaire.

Les solutions numériques pour ce cas-test seront comparées aux résultats issus du code de calcul totalement non-linéaire FSID, basé sur un modèle potentiel bifluide [58].

Choix de la méthode de redistanciation

Cette section s'intéresse à l'influence des deux algorithmes de redistanciation sur la précision des résultats numériques. La discrétisation par méthode de dichotomie balaye chaque maille mixte par un nombre m de segments, dépendant de l'ordre spatial du schéma :

$$m = \begin{cases} 50 & \text{pour } k = 1 \\ 150 & \text{pour } k = 2 \\ 250 & \text{pour } k = 3 \end{cases} \quad (6.116)$$

Les Figures 6.37 6.38 et 6.39 présentent l'élévation de la surface libre en fonction du temps, pour les deux algorithmes aux ordres spatiaux $k = 1, 2$ et 3 . A l'ordre $k = 1$, les résultats numériques issus des deux méthodes sont identiques. Cette observation est attendue puisque la discrétisation par dichotomie décrit une interface linéaire, de la même façon que l'algorithme Marching-Squares. A l'ordre $k = 2$, la méthode de dichotomie offre une meilleure précision par rapport à l'approche Marching-Squares, ce qui est d'autant plus observable à l'ordre $k = 3$. En effet, lorsque l'équation de transport Level-Set est résolue aux ordres $k = 2$ et 3 , l'algorithme Marching-Squares ramène systématiquement les valeurs de χ à l'ordre $k = 1$, ce qui affecte les résultats au cours de la simulation. Cependant, ce dernier présente l'avantage d'être plus rapide (voir Tab. 6.5). Pour chacune des deux méthodes de redistanciation, le Tableau 6.6 indique la répartition du temps de calcul pour une sous étape de l'algorithme Runge-Kutta, à l'ordre $k = 1$. En utilisant l'algorithme de dichotomie, le coût de calcul de l'étape de redistanciation constitue une proportion significative du temps de calcul total, représentant environ 67%. En revanche, la méthode de Marching-Squares ne représente qu'une petite partie du temps de calcul,

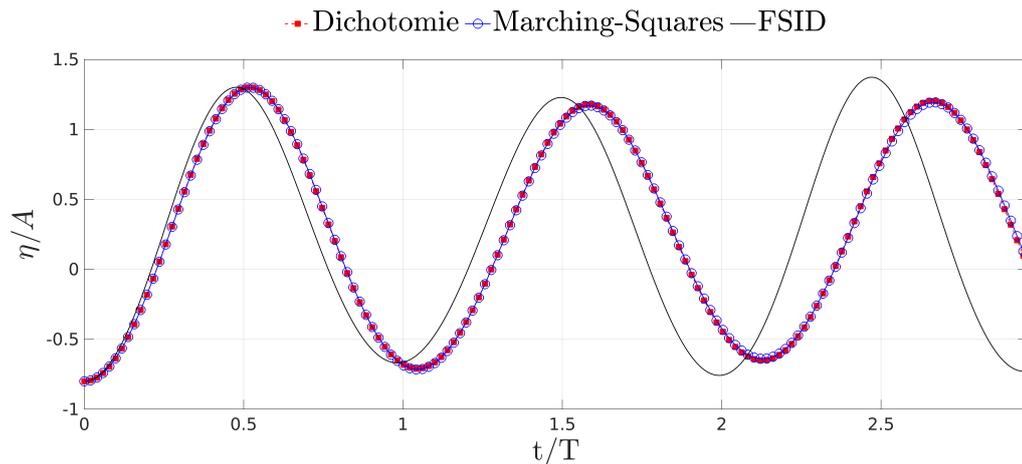


FIGURE 6.37 – Evolution temporelle de l'élévation de la surface libre sur la frontière droite du domaine, pour $k = 1$. $L/h = 14$ ($A/h = 0,7$).

soit environ 11%.

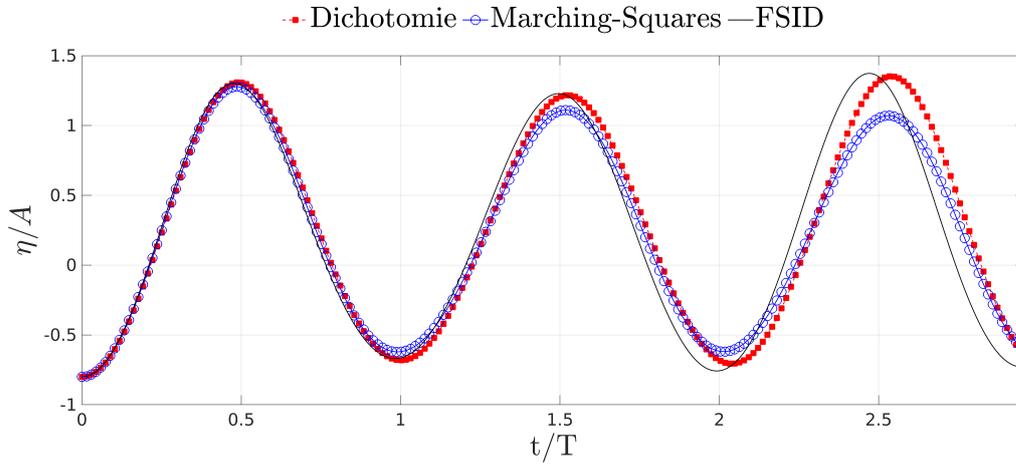


FIGURE 6.38 – Evolution temporelle de l'élévation de la surface libre sur la frontière droite du domaine, pour $k = 2$. $L/h = 14$ ($A/h = 0,7$).

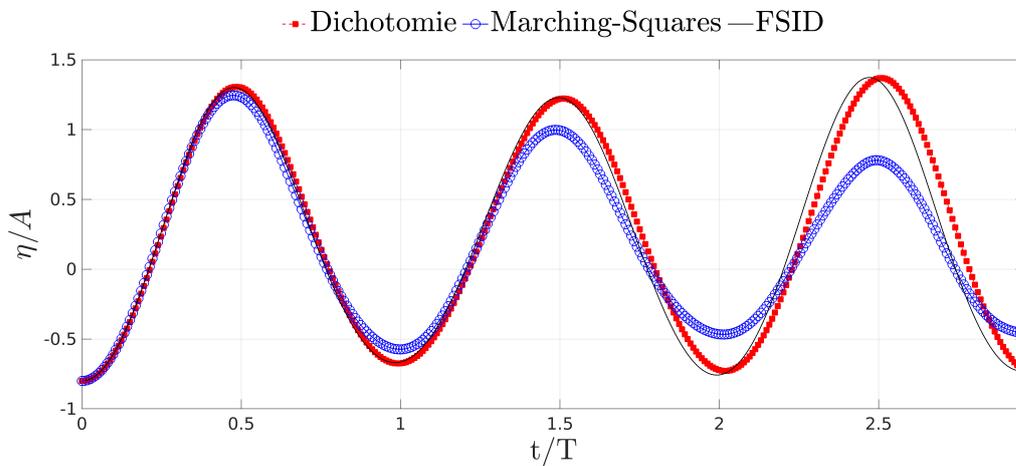


FIGURE 6.39 – Evolution temporelle de l'élévation de la surface libre sur la frontière droite du domaine, pour $k = 3$. $L/h = 14$ ($A/h = 0,7$).

L'utilisation de l'algorithme Marching-Squares présente le principale avantage d'être plus rapide que la discrétisation par dichotomie. Cependant, il affecte la qualité des résultats lorsque la fonction Level-Set n'est plus approchée par des polynômes du premier

Marching-Squares		Dichotomie	
k	Temps CPU (s)	k	Temps CPU (s)
1	9	1	23
2	45	2	146
3	218	3	671

TABLE 6.5 – Temps de simulation pour les deux méthodes de redistanciation.

Étapes	Marching-Squares		Dichotomie	
	CPU(s)	%	CPU(s)	%
PPE	0,0196	42,7	0,0143	15,5
Bilan QDM	0,0138	30	0,0119	12,8
Eq. LS	0,0073	16	0,0046	5
Redis.	0,0052	11,3	0,0616	66,7
Total	0,0459	100	0,0924	100

TABLE 6.6 – Répartition du temps de calcul pour les différentes étapes de résolution à l'ordre $k = 1$, pour un demi pas de temps.

degré (approximation linéaire). Pour cela, il conviendra d'utiliser cet algorithme pour effectuer des simulations à l'ordre $k = 1$. Pour des ordres supérieurs, la discrétisation par dichotomie sera privilégiée.

Augmentation de l'ordre spatial

Cette section s'intéresse de nouveau à l'influence de l'ordre spatial sur la précision des résultats numériques. La méthode de redistanciation pour les schémas d'ordre $k = 1$ se base ici sur l'algorithme de Marching-Squares. Pour les ordres plus élevés, elle s'appuie sur la méthode de dichotomie, où le nombre de points m discrétisant l'interface est défini plus haut (6.116). Trois simulations sont effectuées pour $k = 1, 2$ et 3 , jusqu'au temps final $t_f = 3T$. La Figure 6.40 présente l'élévation de la surface libre en fonction du temps. Remarquons une nouvelle fois que l'augmentation de l'ordre spatial k permet aux solutions numériques de tendre vers la solution de référence. Pour confirmer cette observation, le Tableau 6.7 indique l'erreur sur la première période d'oscillation, selon l'ordre d'interpolation. Au cours de la simulation, la variation (ΔV_2^n) est toujours contrôlée et reportée dans le Tableau 6.7. Par comparaison au précédent cas de sloshing linéaire, les valeurs maximales $(\Delta V_2^n)_{\max}$ indiquées ici sont plus importantes. La dynamique étant plus présente dans le cadre d'un régime non-linéaire, les mouvements des fluides y sont donc plus importants et peuvent favoriser l'apparition d'erreur sur la conservation des volumes de

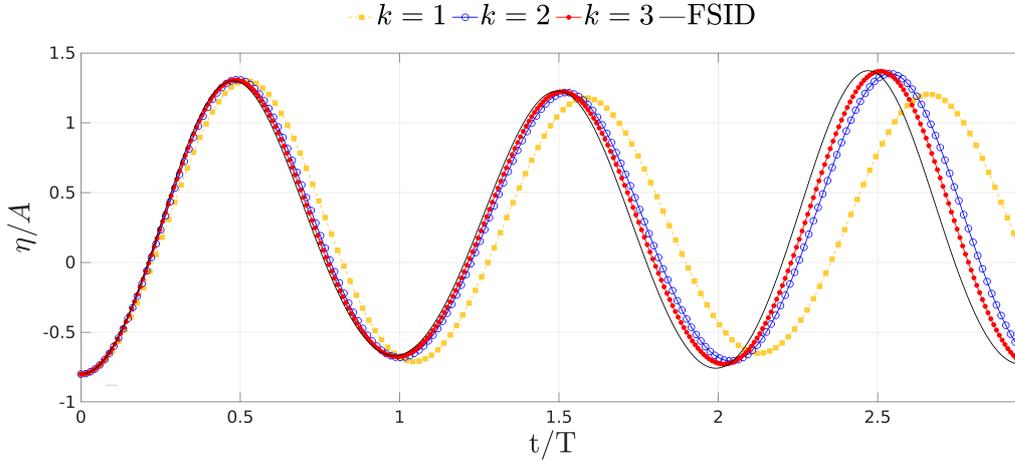


FIGURE 6.40 – Evolution temporelle de l'élévation de la surface libre sur la frontière droite du domaine, pour différents ordres spatiaux. $L/h = 14$ ($A/h = 0,7$).

k	E_T	$(\Delta V_2^n)_{\max}$	Temps CPU (s)
1	5,5%	$3,6 \cdot 10^{-4}$	9
2	1,5%	$7,5 \cdot 10^{-4}$	146
3	0,8%	$4,9 \cdot 10^{-4}$	671

TABLE 6.7 – Erreur sur la première période d'oscillation, variation maximale du volume V_2 et temps de simulation. $L/h = 14$ ($A/h = 0,7$).

chaque fluide. Toutefois, le schéma assure toujours une bonne propriété de conservation de la masse. L'interface entre les deux fluides est reconstruite dans le domaine de calcul à la fin des trois simulations. Les résultats sont présentés sur la Figure 6.41 et permettent de noter qu'en augmentant l'ordre spatial du schéma, la position de l'interface s'approche de celle attendue.

La Figure 6.42 présente l'élévation de la surface libre en fonction du temps, pour trois maillages à l'ordre $k = 2$. Le nombre de points discrétisant l'interface au cours de la redistanciation varie en fonction de l'ordre spatial, mais aussi de la taille de maille. Nous prenons ici $m = 100, 150$ et 250 pour $L/h = 8, 14$ et 34 , respectivement. A nouveau, le raffinement du maillage conduit les solutions à converger vers la solution de référence.

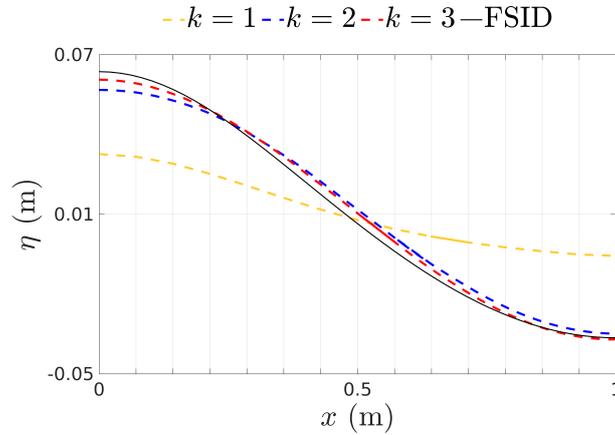


FIGURE 6.41 – Position de la surface libre dans Ω au temps final pour différents ordres spatiaux. $L/h = 14$ ($A/h = 0,7$).

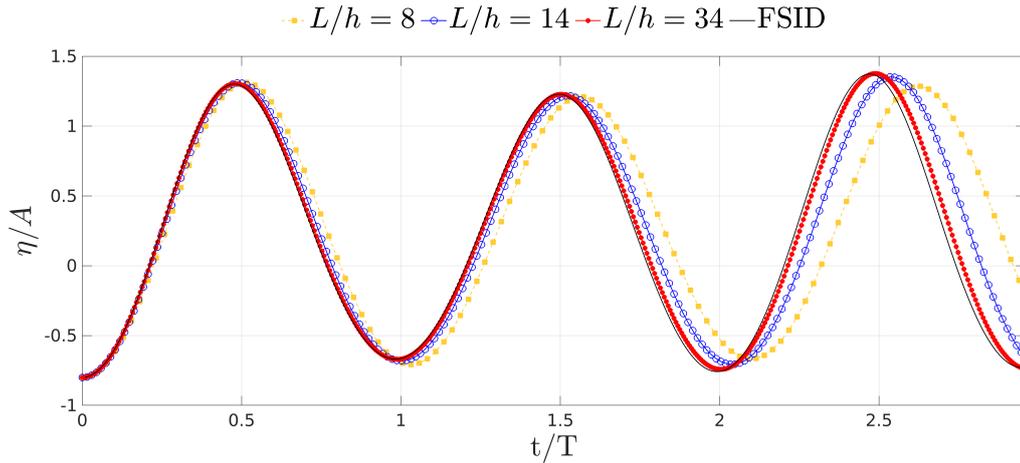


FIGURE 6.42 – Evolution temporelle de l'élévation de la surface libre sur la frontière droite du domaine, pour différents maillages à l'ordre $k=2$.

Résultats numériques pour six périodes

Dans cette section, nous effectuons une simulation pour six périodes d'oscillation ($t_f = 6T$) afin de confirmer la stabilité du schéma numérique. Cette dernière est réalisée sur un maillage relativement fin ($L/h = 34$).

Les Figures 6.43 et 6.44 présentent l'évolution temporelle de l'élévation de la surface

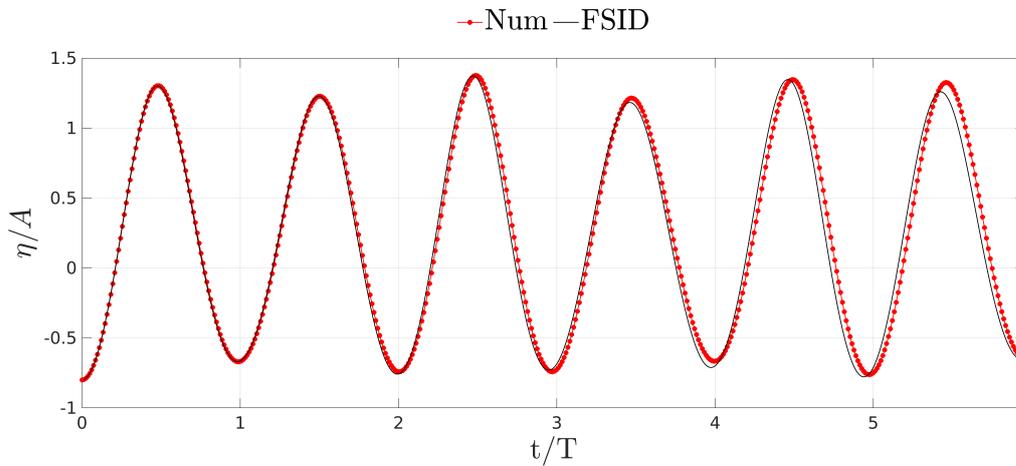


FIGURE 6.43 – Evolution temporelle de l'élévation de la surface libre sur la frontière droite du domaine. $L/h = 34$ ($A/h = 1,7$), $k = 2$.

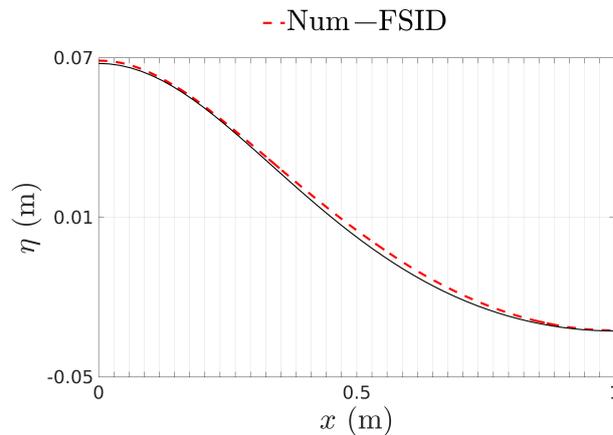


FIGURE 6.44 – Position de la surface libre dans Ω à $t_f = 6T$. $L/h = 34$ ($A/h = 1,7$), $k = 2$.

libre et la position de cette dernière au temps final. Les résultats numériques issus de ce cas-test sont toujours en bon accord avec la solution de référence. Les Figures 6.45 6.46 et 6.47 présentent les solutions numériques dans l'ensemble du domaine à la fin de la simulation. On vérifie de cette façon qu'il n'y a pas de singularité dans l'écoulement. On remarque ici que les non-linéarités de la surface libre influent sur la symétrie des composantes du champ \mathbf{u} . Par ailleurs, l'hypothèse d'incompressibilité est toujours vérifiée sur la Figure 6.46 (b). Les variations (ΔV_2^n) restent inférieures à $6,85 \cdot 10^{-4}$ pour cette

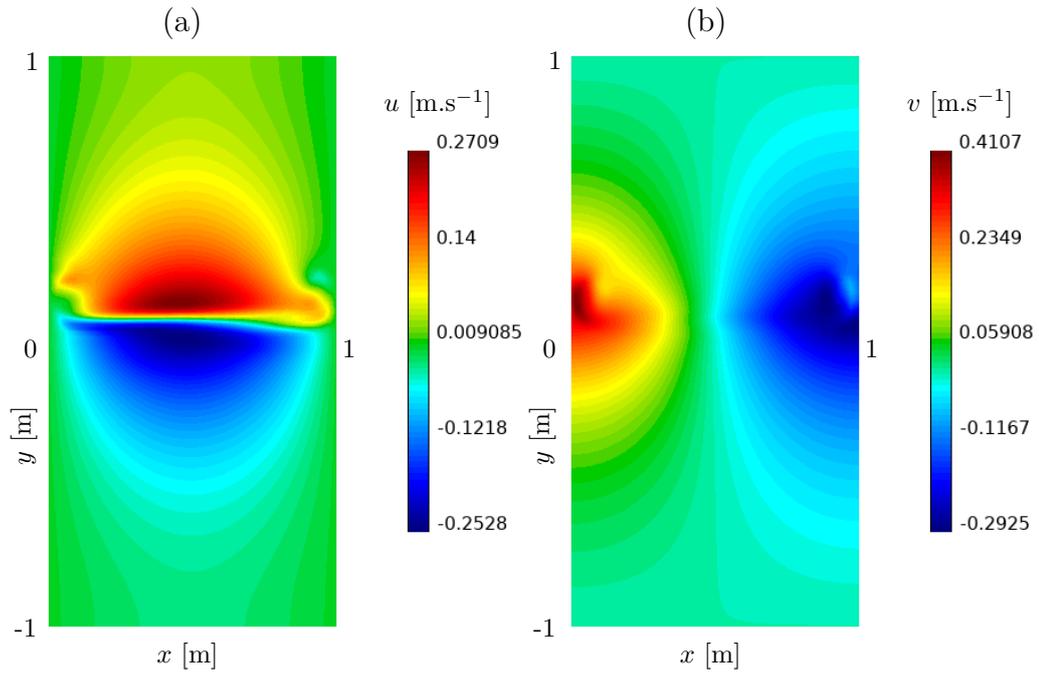


FIGURE 6.45 – (a) Composante u à $t = 5, 7T$. (b) Composante v à $t = 5, 7T$.

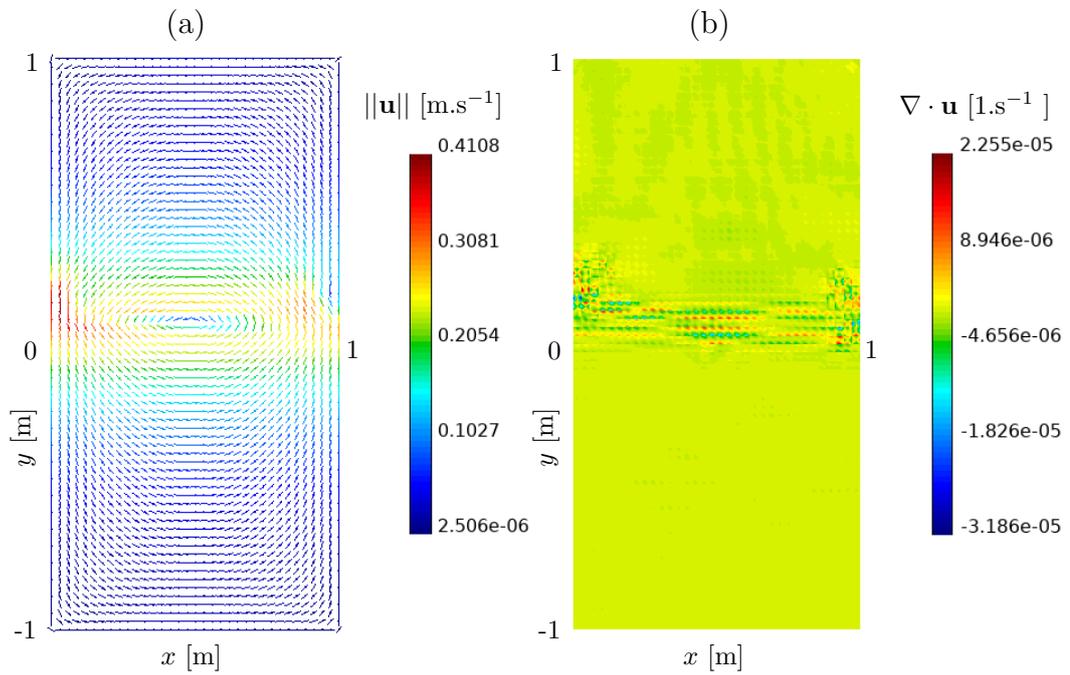


FIGURE 6.46 – (a) Champ de vitesse à $t = 5, 7T$, où la barre de couleur désigne la norme de \mathbf{u} . (b) Divergence du champ de vitesse à t_f .

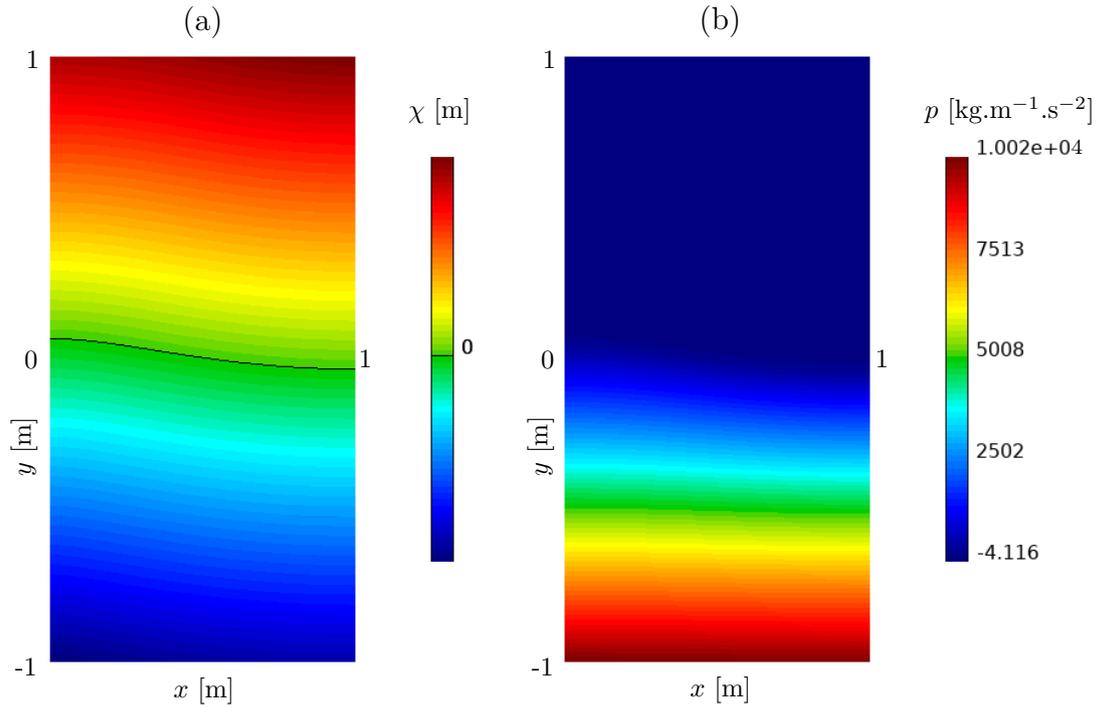


FIGURE 6.47 – (a) Fonction Level-Set à t_f , l'interface est tracée en noire. (b) Champ de pression à t_f .

simulation, et le temps de calcul s'élève à 3h43.

Conclusion

Ce cas-test a permis de confirmer une nouvelle fois la robustesse du schéma numérique, même lorsque l'écoulement est dominé par l'advection. Rappelons que ce phénomène peut agir fortement sur la stabilité du schéma, c'est pourquoi nous avons recours à une méthode spécifique de type Galerkin Discontinu. Il a également été constaté qu'il faut prêter une attention particulière sur la méthode de redistanciation utilisée, puisqu'elle peut avoir un impact significatif sur la précision des résultats. Cette remarque a pu être observée avec l'algorithme de Marching Squares. Bien que cette méthode soit adaptée aux simulations d'ordre $k = 1$ et qu'elle soit plus rapide que la discrétisation par dichotomie, elle altère la qualité des résultats pour des ordres $k > 1$. Ce cas d'étude a finalement permis de prendre conscience du coût numérique de la méthode de redistanciation (par dichotomie) développée dans ce travail, qui peut rapidement devenir une limitation lorsque l'on souhaite travailler avec des maillages très fins, aux ordres élevés.

Les études menées pour ces deux cas de sloshing (régimes linéaire et non-linéaire) ont su montrer de très bons résultats, bien que les maillages utilisés étaient relativement grossiers. À notre connaissance, il est peu courant de trouver dans la littérature des méthodes numériques en CFD qui utilisent ce type de maillages. Dans la plupart des cas, les maillages sont très denses, ce qui entraîne inévitablement des temps de calcul très longs. Pour étayer cette remarque, on peut se référer aux travaux [23][5][71], où les auteurs traitent numériquement un cas de sloshing dans le cadre d'une méthode Volumes-Finis/VOF.

Jusqu'à présent, les mouvements des fluides ne subissaient pas de grandes déformations. Nous souhaitons désormais valider le schéma numérique pour des écoulements présentant de forts changements topologiques de surface libre, avec reconnexion de cette dernière.

6.6.4 Dam-break

Le problème consiste ici à initialiser une colonne d'eau entretenue par un barrage, qui est soudainement retiré afin de libérer le fluide. Au sein de la littérature, ce problème fait l'objet de nombreuses études, notamment à travers des travaux expérimentaux [49] [43], numériques [48][73][70][63], ainsi que des travaux combinant une approche numérique et expérimentale [36][20]. Dans ce travail, l'écoulement est divisé en deux phases, représentées par de l'air et de l'eau. Chacune de ces phases est définie par les masses volumiques suivantes : $\rho_{air} = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho_{eau} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$. Le domaine de calcul est borné par des parois fixes et imperméables aux fluides.

Les résultats issus de ce cas-test sont obtenus en réinitialisant la fonction Level-Set à l'aide de l'algorithme de Marching-Squares, afin de gagner considérablement en temps de calcul. Pour être cohérent avec la méthode, la fonction Level-Set et le champ de vitesse sont obtenus à l'ordre $k = 1$ en espace. La pression est toujours résolue avec un ordre de plus. Comparativement aux cas-tests précédents, la dynamique des fluides est plus importante dans cette étude, ce qui permet d'utiliser une épaisseur d'interface plus fine ($\epsilon = h/2$ pour $k = 1$). En effet, les vitesses parasites à proximité de l'interface sont moins significatives que la vitesse du fluide.

Colonne d'eau verticale

Dans un premier temps, la simulation est effectuée pour une colonne d'eau verticale (hauteur > largeur). Le domaine Ω est représenté sur la Figure 6.48, il correspond à la configuration utilisée dans les travaux de *Wen* [70] (à l'exception de la hauteur du réservoir), où l'auteur utilise une discrétisation de type volumes-finis pour traiter numériquement ce cas-test.

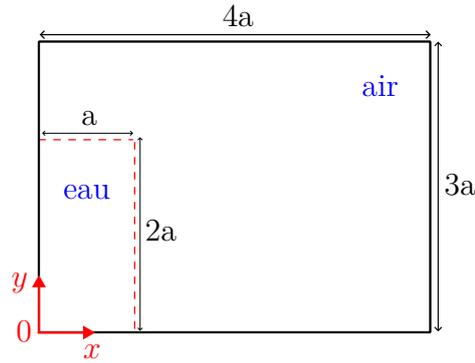


FIGURE 6.48 – Domaine de calcul Ω pour un cas de dam-break (colonne d'eau verticale) à $t = 0$. $a = 0,05715$ m.

Le champ de vitesse est initialement nul, la colonne d'eau doit alors naturellement s'effondrer sous l'influence de la gravité, puis frapper le mur droit de la cuve. Par la suite, l'eau doit glisser le long de cette paroi avant de retomber sous l'effet de la gravité en formant une bosse verticale. Cette dernière évolue jusqu'à former une vague, qui par la suite doit se reconnecter avec l'eau présente dans le fond de la cuve. Cette étape conduit à enfermer une poche d'air dans l'eau, et à former ensuite une langue du front qui doit s'élargir tout en se propageant vers la gauche, jusqu'à heurter la paroi. La vitesse maximale de l'écoulement varie fortement en fonction des différentes étapes venant d'être décrites, pour cela, le pas de temps Δt est adaptatif et vaut :

$$\Delta t = 0,3 \frac{h}{\|\mathbf{u}_{\max}\|} \quad (6.117)$$

La Figure 6.49 présente le maillage utilisé pour la simulation ($a/h = 32$), ainsi que la masse volumique globale et la fonction Level-Set à l'instant initial. *Martin et Moyce* [49] ont réalisé une expérience de laboratoire, qui sert actuellement de référence dans la littérature pour ce type d'écoulement. Par conséquent, les résultats numériques obtenus pour cette simulation sont comparés aux premières étapes de cette expérience, avant que

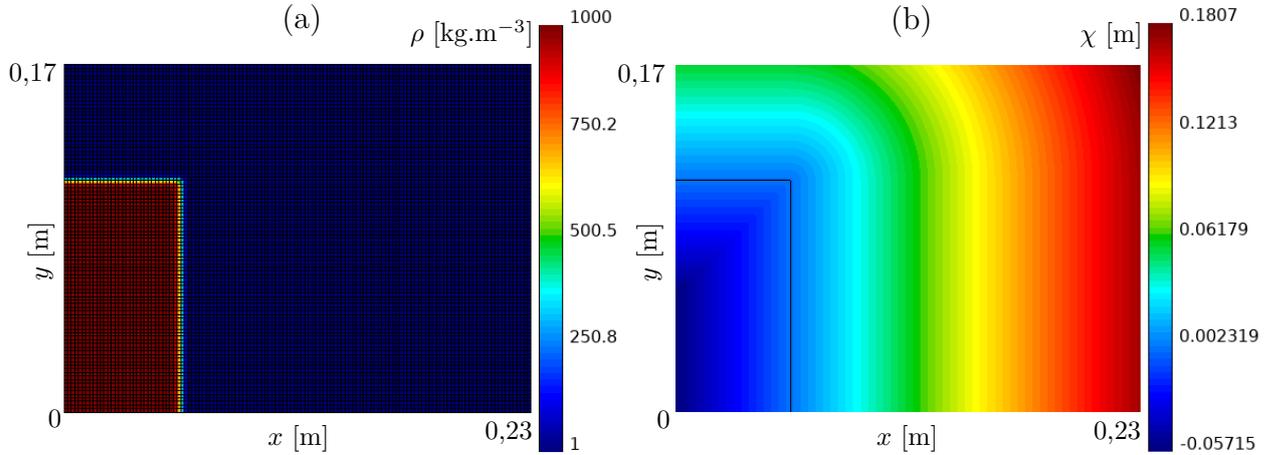


FIGURE 6.49 – Colonne d'eau verticale : (a) Initialisation de la masse volumique dans Ω , sur un maillage $a/h = 32$. (b) Initialisation de la fonction Level-Set dans Ω , l'interface est tracée en noire.

l'eau n'atteint la paroi droite du réservoir. L'évolution temporelle de l'interface sur les parois inférieure et gauche de la cuve est tracée sur la Figure 6.50. Les grandeurs spatiales et temporelle sont adimensionnalisées ici, selon le paramètre a et l'accélération de

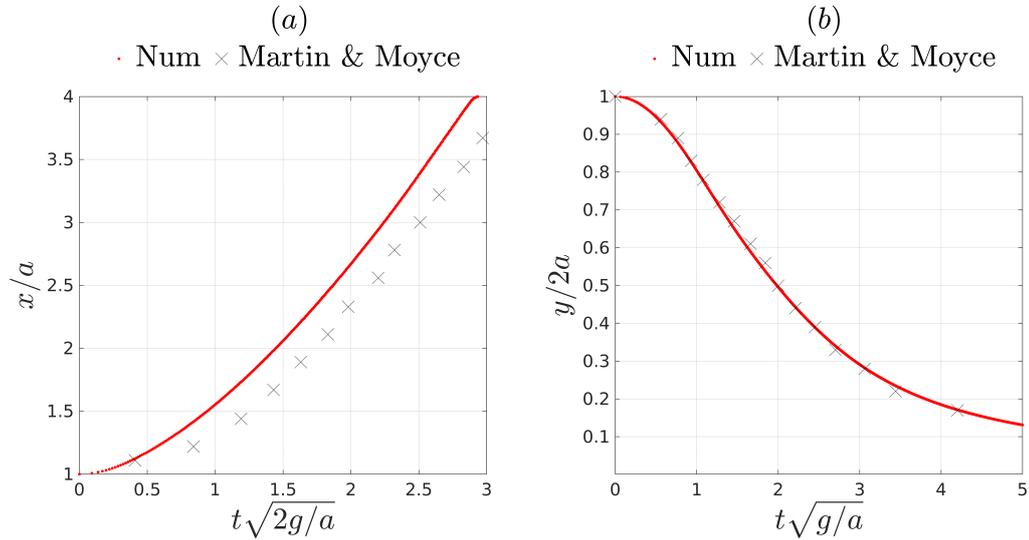


FIGURE 6.50 – (a) Evolution temporelle de l'interface au fond de la cuve. (b) Evolution temporelle de l'interface sur la paroi gauche de la cuve. Les quantités sont adimensionnalisées.

la pesanteur. Les résultats présentés sur ces figures sont cohérents avec les données expérimentales. Cependant, l'expérience prédit une vitesse de propagation du front plus lente. Cette observation est généralement retrouvée au sein des études numériques présentes dans la littérature [73]. Cela est dû en partie aux conditions limites de glissement libre imposées sur les surfaces du réservoir, qu'il n'est pas possible de reproduire expérimentalement.

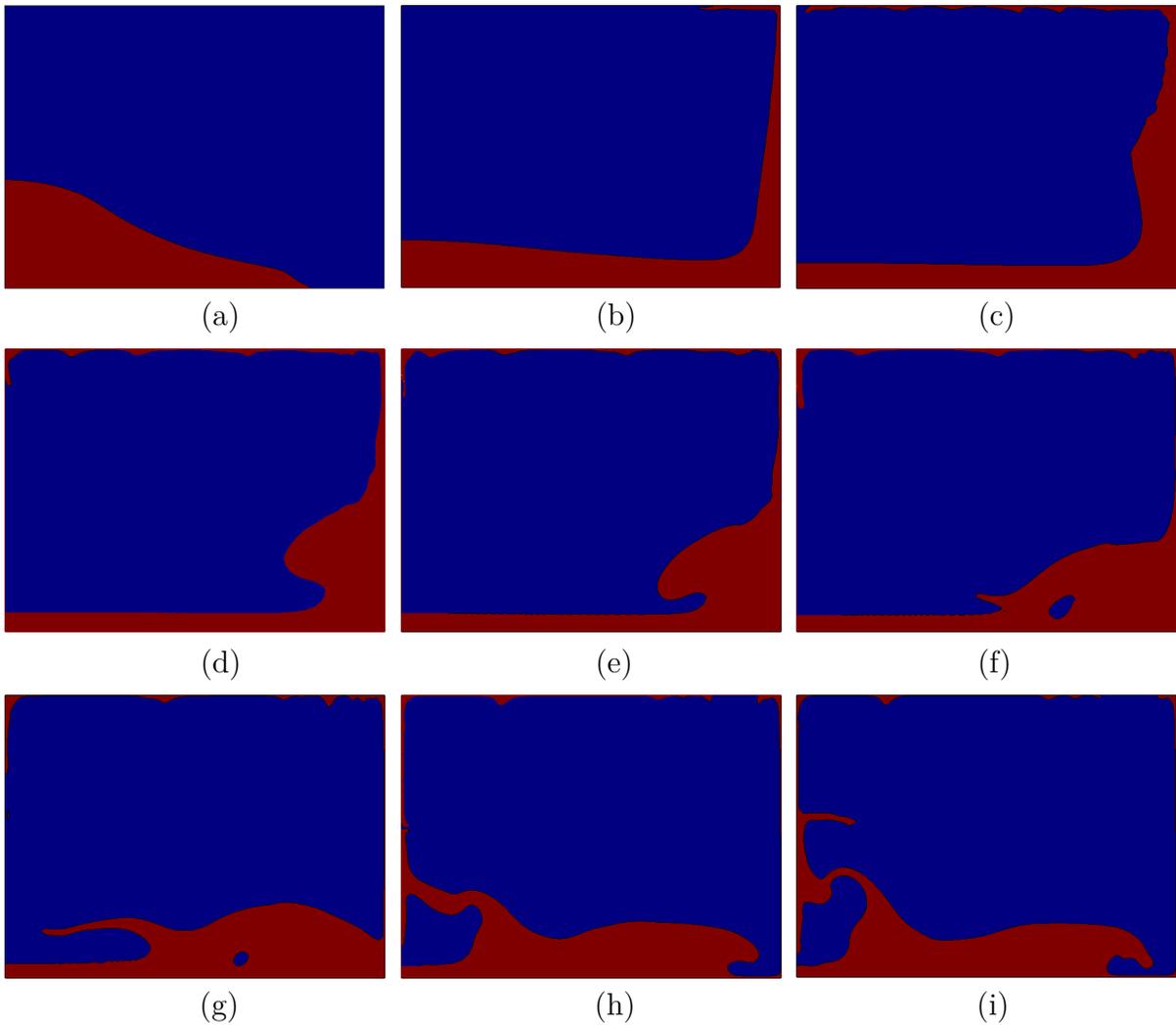


FIGURE 6.51 – Position de la surface libre à différents moments de la simulation : (a) $t^* = 1,70$, (b) $t^* = 3,28$, (c) $t^* = 4,85$, (d) $t^* = 5,6$, (e) $t^* = 6,16$, (f) $t^* = 6,55$, (g) $t^* = 7,2$, (h) $t^* = 8,26$, (i) $t^* = 8,52$. Résultats issus de la méthode développées dans ce travail de thèse.

L'évolution temporelle de l'interface est représentée sur la Figure 6.51, où les résultats décrivent bien les différentes étapes attendues du problème, mentionnées plus haut dans cette section. On se réfère ici au temps adimensionnalisé, défini par $t^* = t\sqrt{g/a}$. La vitesse de l'écoulement dans ce cas de figure peut amener à définir de très petites valeurs du pas de temps Δt , il est alors cohérent de penser qu'une redistanciation à chaque itération ne semble pas nécessaire. Suite à une étude préliminaire, nous avons constaté que redistancier à chaque pas de temps, avec l'algorithme de Marching-Squares, amène à l'apparition de singularités sur l'interface. Ainsi, nous avons effectué plusieurs tests dans lesquels nous avons modifié le nombre de redistanciation en fonction de la vitesse de l'écoulement. Pour obtenir les résultats présentés sur la Figure 6.51, il a fallu redistancier tous les 10 pas de temps jusqu'à $t^* = 3,28$, puis tous les 20 pas de temps jusqu'à $t^* = 4,85$, et enfin tous les 8 pas de temps jusqu'au temps final. Ces résultats peuvent être comparés à ceux obtenus à partir d'un code de calcul SPH, présentés sur la Figure 6.52, où le nombre de particules est équivalent au maillage utilisé pour cette simulation. Dans l'ensemble, les résultats issus

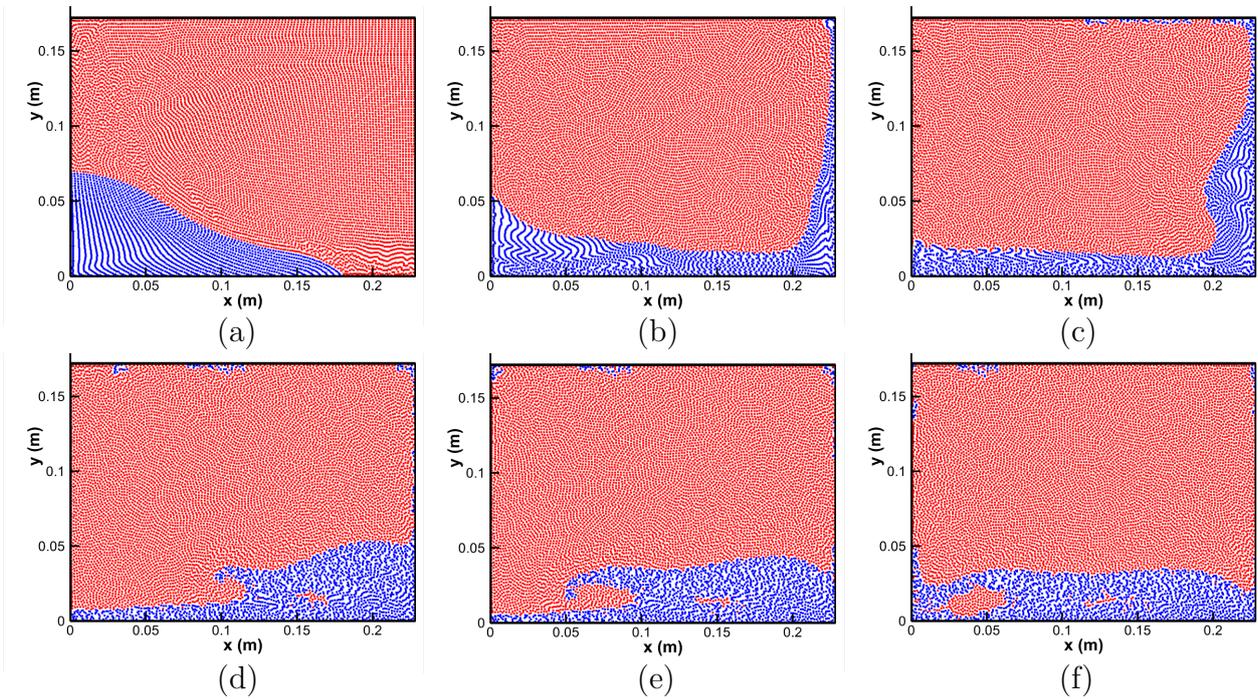


FIGURE 6.52 – Position de la surface libre à différents moments de la simulation : (a) $t^* = 1,70$, (b) $t^* = 3,28$, (c) $t^* = 4,85$, (d) $t^* = 6,55$, (e) $t^* = 7,2$, (f) $t^* = 8,26$. Résultats issus d'une méthode SPH.

des deux codes de calcul suivent une tendance similaire. Afin d'obtenir une comparaison supplémentaire, nous invitons les lecteur·rice·s à comparer nos résultats numériques aux travaux MVF de *Wen* [70], qui sont en bon accord avec ce travail. Le temps de calcul est relativement conséquent pour ce cas-test puisqu'il s'élève à 9h15. Il reste cependant bien inférieur à celui du code SPH présenté sur la Figure 6.52, qui est estimé à 180h. Pour finir, nous vérifions l'hypothèse d'incompressibilité en déterminant la divergence du champ de vitesse au temps final (voir Fig. 6.53). Dans ce cas-ci, les valeurs maximales de la divergence sont plus importantes que pour les autres cas-tests, ce phénomène est attendu puisque qu'ici l'écoulement subit de fortes déformations, amenant donc plus facilement à des erreurs d'approximation. Toutefois, les solutions sont toujours proches d'une valeur nulle dans l'ensemble du domaine.

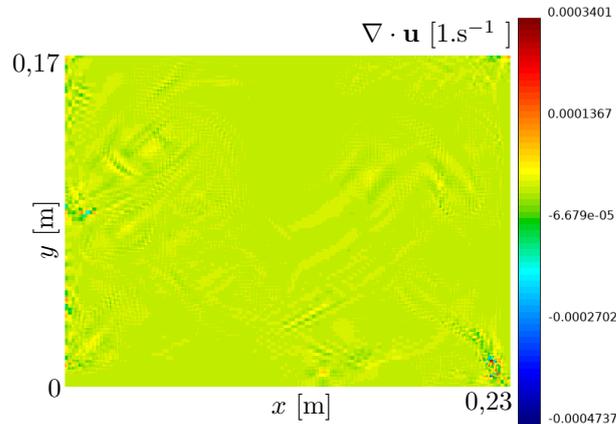


FIGURE 6.53 – Divergence du champ de vitesse au temps final de la simulation.

Colonne d'eau horizontale

Dans un second temps, la simulation est effectuée pour une colonne d'eau horizontale (largeur > hauteur). Dans cette section, deux domaines spécifiques sont établis à partir de deux études distinctes de la littérature. Ces configurations nous permettent de confronter nos résultats numériques à d'autres données expérimentales et numériques.

Tout d'abord, le domaine Ω est représenté sur la Figure 6.54, il correspond à celui utilisé dans l'expérience de *Lobovský et al.* [43]. On cherche à étudier ici l'évolution de la pression à la base de la frontière gauche du domaine. La Figure 6.55 présente le maillage

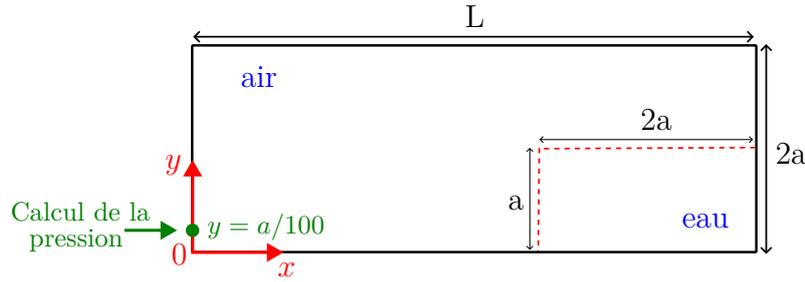


FIGURE 6.54 – Domaine de calcul Ω pour un cas de dam-break (colonne d’eau horizontale 1) à $t = 0$. $a = 0,3$ m ; $L = 1,61$ m.

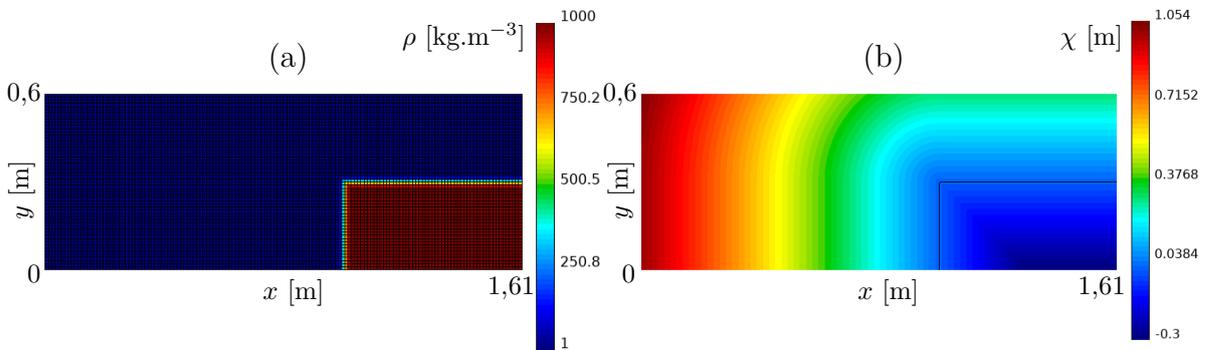


FIGURE 6.55 – Colonne d’eau horizontale : (a) Initialisation de la masse volumique dans Ω , sur un maillage $a/h = 28$. (b) Initialisation de la fonction Level-Set dans Ω , l’interface est tracée en noire.

utilisé pour la simulation ($a/h = 28$), ainsi que la masse volumique globale et la fonction Level-Set à l’instant initial. La fonction Level-Set ainsi que le champ de pression sont représentés dans le domaine Ω sur la Figure 6.56, pour deux étapes de la simulation. On remarque une surpression dans le coin inférieur gauche du domaine lorsque l’eau glisse sur la paroi. Afin de mesurer quantitativement ce phénomène, l’historique de pression est tracé sur la Figure 6.57, au point $[x = 0 ; y = a/100]$ pour différents maillages. Ces résultats mettent en évidence un pic de pression lorsque l’eau atteint la paroi. A mesure que l’on raffine le maillage, ce pic de pression converge vers une solution proche de celle issue de l’expérience de *Lobovský et al.* [43] (voir Fig. 6.58). Cependant, remarquons que la pression numérique, une fois atteint son pic, décroît moins fortement par rapport aux données expérimentales. Cette observation est également retrouvée dans les travaux de *Garoosi et al.* [20] (voir Fig. 6.58), où les auteurs traitent numériquement ce cas-test

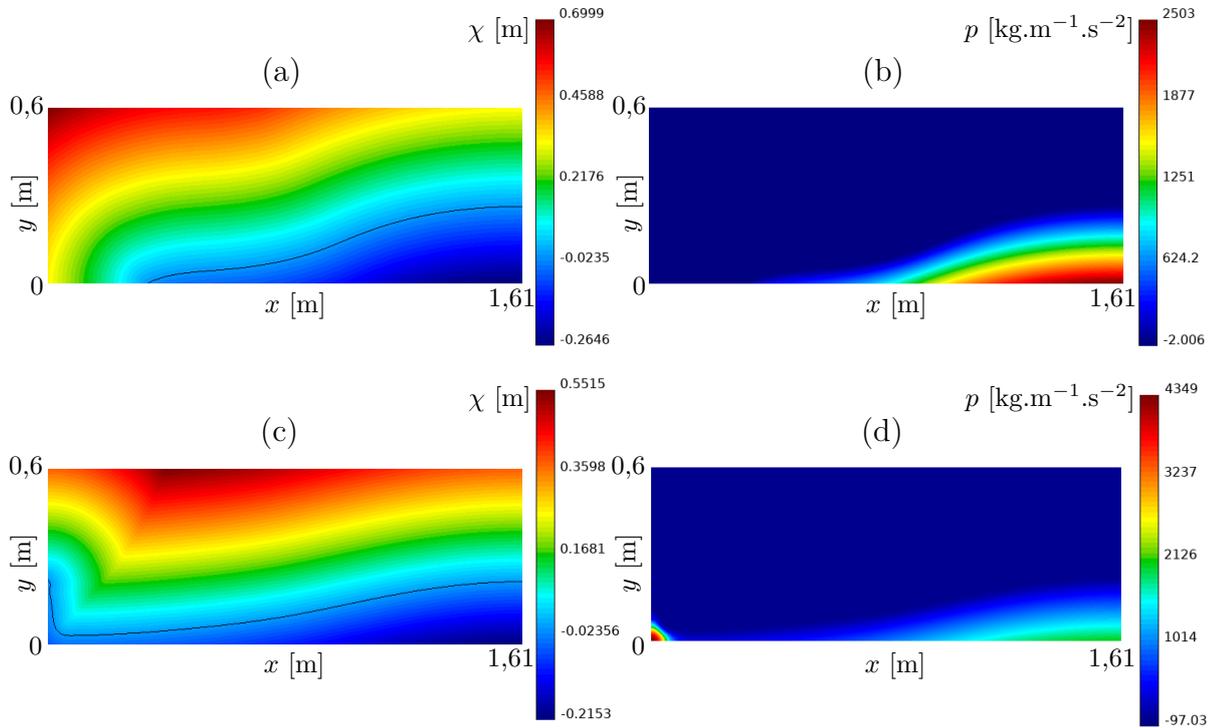


FIGURE 6.56 – (a) Fonction Level-Set (interface tracée en noire) et (b) champ de pression à $t^* = 1,80$. (c) Fonction Level-Set (interface tracée en noire) et (d) champ de pression à $t^* = 2,80$. $a/h = 28$.

avec OpenFOAM (méthode Volumes-Finis/VOF). Bien que notre maillage soit beaucoup plus grossier (13680 éléments) que celui utilisé dans les travaux MVF/VOF [20] (154560 éléments), il est important de noter que le pic de pression obtenu avec notre méthode se rapproche davantage des valeurs expérimentales que les résultats numériques issus de [20].

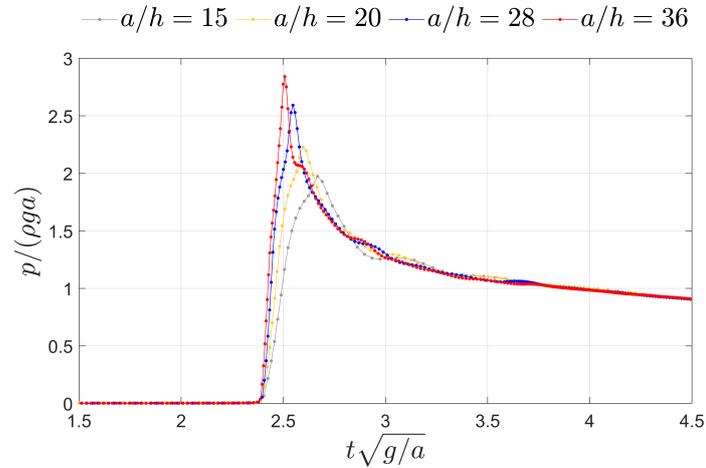


FIGURE 6.57 – Pression en fonction du temps sur la paroi gauche du domaine, à $y = a/100$. Les quantités sont adimensionnalisées.

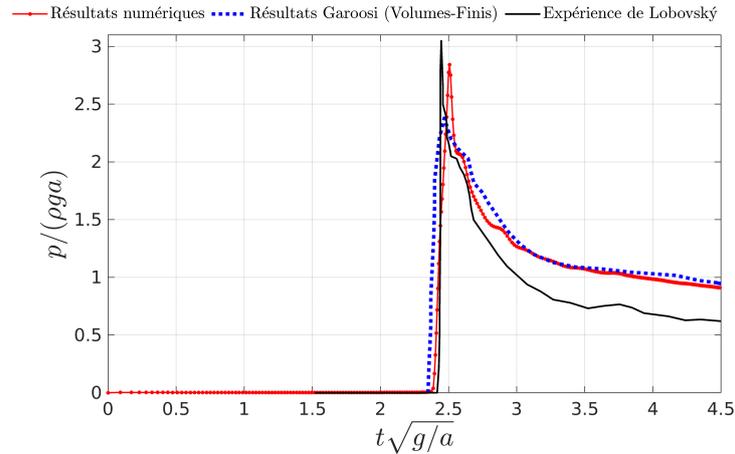


FIGURE 6.58 – Pression en fonction du temps sur la paroi gauche du domaine, à $y = a/100$. Les quantités sont adimensionnalisées. Comparaison des résultats numériques ($a/h = 36$) aux résultats issus de l'expérience de *Lobovský et al.* [43] (courbe noire) et aux résultats numériques de *Garosi et al.* [20] (courbe bleue).

Le domaine Ω est représenté une nouvelle fois sur la Figure 6.59, il correspond à celui utilisé dans les travaux de *Simsek et Islek* [63]. A la différence du domaine 6.54, la colonne d'eau s'étend ici sur plusieurs mètres, ce qui conduit à définir un domaine de calcul relativement grand. On cherche à comparer ici le temps de calcul entre notre approche numérique et une méthode Volumes-Finis.

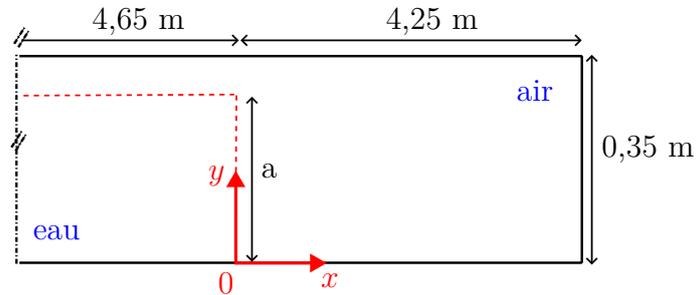


FIGURE 6.59 – Domaine de calcul Ω pour un cas de dam-break (colonne d'eau horizontale 2) à $t = 0$. $a = 0,25$ m.

La Figure 6.60 présente le profil de la colonne d'eau à $t^* = 1,13$ pour trois maillages. Le temps de calcul s'élève ici à 56 s, 10 minutes et 2h43 pour 3576 ($a/h = 8,5$), 14256 ($a/h = 17$) et 58656 ($a/h = 34$) éléments, respectivement. *Simsek et Islek* [63] réalisent la même étude pour trois maillages plus fins, où le temps de calcul s'élève à 1h12, 2h30 et 3h36 pour 62000, 93000 et 140000 éléments, respectivement. Le temps CPU de notre méthode est supérieur à celui de la méthode Volumes-Finis/VOF des auteurs [63]. Rappelons que notre schéma est d'ordre $k = 2$ pour résoudre spatialement la pression. D'après le tableau 6.6 présenté précédemment, l'équation de Poisson (PPE) est l'étape de simulation qui requiert le plus de temps. Par conséquent, le temps de calcul pour ces maillages denses devient rapidement élevé. Toutefois, remarquons que les solutions convergent ici pour 3576 éléments. Dans leurs travaux, les auteurs [63] observent une convergence des résultats à partir de 93000 éléments. Bien que le temps CPU de notre méthode soit plus important

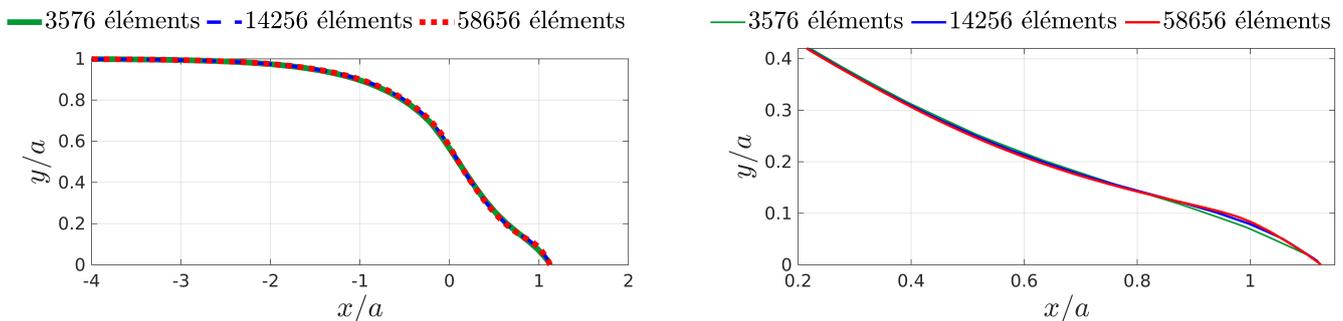


FIGURE 6.60 – Positions de l'interface obtenues avec différents maillages, à $t^* = 1,13$. Les quantités sont adimensionnalisées.

pour un même nombre d'éléments, elle nous permet d'utiliser des maillages moins fins et donc de gagner considérablement en temps de calcul.

Conclusion

Ce cas-test a permis de confirmer dans un premier temps la robustesse du schéma numérique pour des écoulements caractérisés par une forte dynamique des fluides. De plus, il a validé la capacité de la méthode à traiter des déformations complexes d'interface (phénomène de reconnexion). Dans un second temps, ce cas-test a permis de réaliser plusieurs études comparatives avec d'autres méthodes numériques. En comparaison avec une méthode SPH, qui est spécifiquement adaptée aux écoulements à surface libre où la topologie des fluides évolue de manière significative, notre méthode s'est avérée considérablement plus rapide en termes de temps de calcul. Pour un même nombre d'éléments discrétisant le domaine, elle est toutefois moins rapide qu'une approche Volumes-Finis [63]. Cependant, elle converge plus rapidement et permet d'utiliser des maillages plus grossiers, ce qui amène finalement à des temps de simulation nettement inférieurs à ceux de la méthode [63]. Par ailleurs, notre méthode s'est révélée particulièrement précise pour calculer le champ de pression de l'écoulement. En comparaison avec une méthode Volumes-Finis [20], elle décrit un pic de pression (sur la paroi gauche) plus proche des valeurs expérimentales [43], et ce pour un maillage plus grossier.

Pour rappel, la méthode de redistanciation basée sur l'algorithme de dichotomie pour le cas du sloshing non-linéaire s'avérait très coûteuse en temps de calcul pour des maillages fins et/ou pour des schémas d'ordre spatial $k > 1$. Pour cela, nous avons souhaité nous restreindre dans un premier temps à l'algorithme Marching-Squares dans cette étude, nous limitant alors à résoudre spatialement la Level-Set et la vitesse à l'ordre $k = 1$ en espace, et la pression à l'ordre $k = 2$. Pour résoudre le problème aux ordres plus élevés, il serait nécessaire d'utiliser l'algorithme de dichotomie, puisque nous avons vu précédemment que le Marching-Squares est peu compatible aux ordres $k > 1$. Il convient toutefois de noter que le nombre de degrés de liberté devient rapidement très élevé dans ce cas-ci, en particulier pour des ordres spatiaux supérieurs à 1. La méthode de dichotomie demande alors une discrétisation très précise de l'interface pour être robuste, amenant inévitablement à des temps de simulation excessivement élevés. Par ailleurs, il est essentiel de préciser que l'utilisation de l'algorithme de dichotomie peut présenter une limitation pour des fortes déformations de l'interface à l'échelle de la maille. En effet, l'interface

peut dans ce cas traverser la maille plusieurs fois et les segments qui la balayent sont alors interceptés par plusieurs valeurs $\chi = 0$. La maille mixte voit alors une reconnexion des fluides, ce qui entraîne une mauvaise représentation des phénomènes physiques. Afin d'éviter cette situation pathologique, il serait nécessaire de se restreindre à l'utilisation de maillages fins ou de subdiviser les éléments en sous-éléments dans l'algorithme. Cette étude a donc permis de confirmer la principale limitation de la méthode : l'algorithme de redistanciation. A ce stade, il serait donc nécessaire de passer le code en parallèle afin d'optimiser le temps de simulation pour la méthode de dichotomie, tout en veillant à ce que l'algorithme puisse gérer efficacement les fortes déformations de l'interface à toute échelle. Sinon, il serait nécessaire de modifier la méthode Marching-Squares afin d'être applicable aux ordres élevés.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Conclusion

L'ensemble des travaux présentés dans cette thèse ont contribué au développement d'un outil numérique consacré à la modélisation d'écoulements à surface libre. Cet outil est destiné, à terme, à l'étude du comportement d'une structure flottante dans la houle. La simulation numérique passe nécessairement par la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles, qui demande d'être discrétisé à l'aide d'une méthode numérique. Dans ce travail, nous avons développé un code de calcul basé sur une formulation Eléments-Finis afin d'autoriser l'utilisation de schémas numériques d'ordres élevés en espace et en temps. C'est l'usage de cette méthode de résolution qui constitue la principale originalité de cette thèse, puisque les approches actuelles se basent généralement sur des formulations Volumes-Finis, limitées sur le choix des ordres d'intégration (< 2).

Deux outils numériques ont pu être développés au cours de ces travaux : le premier modélisant des écoulements monofluides à surface libre, et le second des écoulements bifluides. Bien que les résultats issus du premier modèle furent intéressants pour un cas de sloshing linéaire, l'implémentation de ce dernier aux cas non-linéaires fut complexe pour plusieurs raisons : prise en compte des termes non-linéaires dans les équations, reformulation d'une méthode (Nitsche) plus robuste et reconstruction régulière du maillage. Pour cela, nous nous sommes finalement restreints au développement du second modèle, où les écoulements sont supposés être à phases instationnaires, incompressibles et non-visqueuses.

Pour élaborer une telle approche, il a été nécessaire de concevoir une méthode particulière pour modéliser l'interface mobile entre les deux fluides. Dans ce travail, nous avons mis en œuvre une méthode de type Level-Set [53], où l'interface est capturée implicitement à l'aide d'une fonction particulière. Cette dernière désigne une variété d'iso-contours situés à une certaine distance de l'interface, qui est représentée par l'iso-contour nul. Cette méthode est discrétisée selon une approche Galerkin Discontinu/Runge-Kutta inspirée des

travaux [54][47][19]. L'approche standard a pu être enrichie d'algorithmes complémentaires de redistanciation. Le recours à l'équation de redistanciation [65], classiquement utilisée, entraîne généralement une quantité excessive de gain/perte de masse. Dans ce travail, deux méthodes spécifiques de redistanciation inspirées des travaux [47][55] ont pu être développées, où l'objectif consiste à reconstruire directement l'interface afin de recalculer la distance séparant les nœuds du maillage et cette dernière. La première s'appuie sur un algorithme de Marching-Squares, où l'interface est représentée par des segments, et la seconde sur un algorithme de dichotomie, où l'interface est discrétisée point par point. Ces méthodes de redistanciation ont su assurer à plusieurs reprises une bonne propriété de conservation de la masse.

La modélisation des écoulements implique la résolution des équations d'Euler incompressibles, où les champs de pression et de vitesse doivent être déterminés. Dans ce travail, la stabilité du schéma numérique est assurée par :

- L'utilisation d'une méthode Galerkin Discontinu [13][12] afin de résoudre la partie advective de l'équation de bilan de la quantité de mouvement, à l'instar de ce qui est fait dans les travaux [4][3][11].

- L'utilisation d'une méthode de projection explicite [9][10], consistant à résoudre séparément les champs de pression et de vitesse, comme retrouvé dans les travaux [18][73][25].

La méthode de projection [9][10] sous sa forme classique vise à utiliser une décomposition de Hodge sur le champ de vitesse, ce qui restreint le choix de l'avance temporelle à une méthode d'ordre 1. Dans cette thèse, nous avons développé une nouvelle méthode de projection, où la décomposition de Hodge est appliquée sur la dérivée (en temps) de la vitesse, ce qui permet d'autoriser l'utilisation de schémas temporels d'ordre élevé. Par conséquent, la méthode mise en œuvre dans ce travail de thèse est basée en totalité sur des schémas numériques d'ordre élevé (en espace et en temps). Cette méthode de projection a le principal avantage de ne pas être restreinte au premier ordre sur le schéma temporel, tout en reposant sur une implémentation simple. Elle a toutefois l'inconvénient d'imposer l'hypothèse d'incompressibilité seulement sur le schéma spatial. Nous avons donc pris soin de vérifier pour l'ensemble de nos simulations que la divergence du champ de vitesse vérifiait bien une valeur négligeable, très proche de zéro.

Cette étude s'est basée sur l'utilisation d'avances temporelles totalement explicites

afin de garantir une représentation précise de la physique sous-jacente. Dans le cadre de cette thèse, nous avons développé deux algorithmes basés sur les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta 2 (point milieu), afin de coupler la modélisation de l'écoulement et de l'interface.

Une approche diffuse de l'interface a été sélectionnée à l'occasion de ce travail, où la masse volumique peut évoluer de façon continue lors de la transition d'un fluide à l'autre. Ce choix revient finalement à épaissir fictivement l'interface. Bien que cette méthode soit simple à mettre en œuvre, elle est connue pour générer des vitesses parasites à proximité de l'interface. Il a donc été nécessaire de les caractériser afin de les contrôler.

Les travaux [25][55] sont eux aussi basés sur un formalisme Galerkin Discontinu pour résoudre à la fois les équations de l'écoulement (Navier-Stokes incompressible) et l'équation de transport Level-Set. Leur approche repose, comme nous, sur l'utilisation d'une épaisseur d'interface fictive pour résoudre les équations de l'écoulement. A la différence de nos travaux, les auteurs [55] résolvent un seul système d'équations pour résoudre la partie traitant de l'écoulement (équations de continuité et de conservation de la quantité de mouvement), où la variable de pression se situe dans l'espace fonctionnel d'ordre réduit $k - 1$, tandis que le champ de vitesse se situe dans l'espace fonctionnel d'ordre k (Taylor-Hood). L'approche utilisée par les auteurs [25] est plus similaire à la notre puisqu'elle est basée sur une méthode de projection pour résoudre les équations de l'écoulement. Leur schéma repose sur une méthode explicite-implicite en temps, pour traiter les termes advectifs explicitement et les termes visqueux implicitement. Cette approche est couramment utilisée pour la résolution des problèmes de Navier-Stokes incompressibles. Les auteurs présentent ce schéma sous sa forme classique, où l'équation de Poisson sur la pression est obtenue en utilisant une méthode Euler explicite d'ordre 1 (en omettant les termes visqueux). L'étape de correction pour obtenir la vitesse et prendre en compte les termes visqueux utilise une approximation implicite, de type BDF (Backward-Differentiation-Formula) pouvant être d'ordre élevé, et une extrapolation des termes advectifs. La décomposition temporelle explicite d'ordre faible et implicite d'ordre élevé amène généralement à des erreurs qui viennent détruire l'ordre de convergence de la méthode. Cette remarque, généralement retrouvée au sein de la littérature, est mise en avant dans leur papier. Pour pallier ce problème, les auteurs ont recours à une méthode particulière de correction. Dans cette thèse, nous nous sommes basés sur une nouvelle méthode de projection, où le schéma

repose sur une discrétisation purement explicite et simple à mettre en œuvre. Contrairement à la méthode précédemment décrite, l'équation de Poisson sur la pression n'est pas obtenue en utilisant une approximation Euler explicite, ce qui permet d'obtenir, in fine, un schéma temporel d'ordre élevé en totalité. Par ailleurs, ce formalisme explicite permet d'être cohérent avec la résolution de l'équation de transport Level-Set, qui est basée sur le même schéma temporel. Contrairement à notre approche, les auteurs [25] choisissent de résoudre l'équation de Poisson sur la pression dans un espace fonctionnel discontinu (DG). Pourtant, l'équation de Poisson représente un problème elliptique pour lequel la méthode Galerkin Discontinu n'est pas initialement conçue, ce qui demande une technique particulière de résolution. Tout d'abord, les conditions limites de type Dirichlet ne peuvent pas, contrairement à notre méthode, être imposées de manière forte. Pour définir les conditions limites, les auteurs ont recours à une méthode de pénalisation, introduisant un terme de pénalité. Par ailleurs, il est nécessaire de spécifier un flux numérique entre les éléments internes du maillage, où les auteurs proposent de définir un flux centré. Dans cette thèse, nous avons décidé d'utiliser des méthodes spécifiques, adaptées à chaque problème traité. Pour cela, nous avons résolu l'équation de Poisson dans un espace continu à l'aide d'un formalisme classique de type Galerkin. Bien que les vitesses soient résolues dans un espace discontinu, nous avons pu démontrer que cette méthode ne pose pas de problème particulier pour la résolution.

Plusieurs cas représentatifs des problématiques navales ont pu être traités au cours de cette thèse, afin de valider l'outil numérique tout en évaluant ses performances. Les études menées pour un cas simple d'équilibre hydrostatique ont montré dans un premier temps que le schéma numérique converge quel que soit l'ordre spatial utilisé. Ce cas-test a permis dans un second temps de caractériser les courants parasites survenant dès le premier pas de temps. Pour les contrôler, il est possible d'augmenter l'ordre spatial afin de résoudre plus précisément les gradients de pression et de vitesse. Nous avons également constaté que la résolution de la pression avec un ordre de plus que la vitesse sur des maillages réguliers offre le sérieux avantage de rendre négligeable les courants parasites au départ de la simulation. Enfin, ce cas-test s'est intéressé à l'influence de l'épaisseur de l'interface sur les solutions numériques, où nous avons pu établir une loi de paramétrisation pour la définir. L'interface doit être suffisamment fine pour résoudre la pression avec précision, mais suffisamment épaisse pour éviter une forte influence des vitesses parasites. Les résultats obtenus pour un cas de sloshing linéaire ont montré que

le schéma numérique converge pour deux avances temporelles de type Euler explicite et Runge-Kutta 2 (point milieu). Les résultats ont toutefois démontré l'avantage de la seconde approche, puisqu'elle permet d'utiliser des pas de temps plus grands. Par ailleurs, l'augmentation de l'ordre spatial a permis aux solutions numériques de converger plus facilement vers la solution théorique. Il a été démontré qu'il est plus avantageux, en termes de précision et temps de calcul, d'augmenter l'ordre spatial que de raffiner le maillage. Les études menées pour un cas de sloshing non-linéaire ont permis de confirmer la robustesse du schéma numérique, même lorsque l'écoulement est dominé par l'advection. Une nouvelle fois, l'augmentation de l'ordre spatial a permis d'améliorer la précision des solutions numériques afin de mieux converger vers la solution de référence. Ce cas-test a permis d'étudier, en outre, l'influence de la méthode de redistanciation sur les résultats numériques. Il s'est avéré que l'algorithme de Marching-Squares est fortement limité aux simulations numériques du premier ordre (en espace). Au delà, l'algorithme de dichotomie est recommandé de façon à ne plus restreindre la description de l'interface par des segments. Cependant, cette dernière peut devenir très coûteuse en temps de calcul pour des maillages fins, ainsi qu'aux ordres élevés. Enfin, les études menées sur le dam break ont permis de valider la méthode pour un écoulement fortement dynamique, tout en confirmant sa capacité à gérer des déformations complexes d'interface. Par exemple, lorsque la vague se forme et se reconnecte avec l'eau présente au fond du réservoir. Les comparaisons effectuées entre différentes méthodes numériques et l'approche développée dans cette thèse ont confirmé l'efficacité et la précision de la méthode, même lorsqu'elle est utilisée sur des maillages grossiers. Ceci se traduit alors par un gain significatif en termes de temps de calcul.

Perspectives

L'outil numérique développé dans le cadre de cette thèse a été conçu pour résoudre, à terme, des problèmes de tenue à la mer. Ce type de problème nécessite de prendre en compte la houle, pouvant être fortement non-linéaire, et de traiter des géométries complexes telles que la carène d'un bateau. Par conséquent, plusieurs aspects du code actuel nécessitent des améliorations.

Le code est actuellement dédié à une résolution en deux dimensions. Pour résoudre des problématiques industrielles, il est nécessaire d'envisager une extension en trois dimen-

sions. Ce point d'amélioration peut être effectué naturellement via la librairie MFEM, qui est adaptée aux simulations 1D, 2D et 3D. Les simulations en trois dimensions nécessitent toutefois beaucoup de ressources informatiques, de puissance et de temps de calcul. A ce stade, il serait alors nécessaire d'adapter les schémas numériques au calcul parallèle (par ex : MPI) afin de répartir la charge de calcul sur plusieurs cœurs. Cette étape est parfaitement réalisable avec la bibliothèque MFEM puisqu'elle offre cette fonctionnalité.

Les problématiques navales présentées dans ce travail ont été traitées par une approche non-visqueuse (équations d'Euler), car la physique sous-jacente s'y prêtait bien. Pour étudier le comportement d'une structure flottante dans la houle, il est important de considérer les termes visqueux à proximité de cette dernière afin de modéliser plus précisément les phénomènes physiques associés. Cependant, il n'est pas nécessaire de les prendre en compte loin de la structure. A titre d'exemple, rappelons que la résistance à l'avancement d'un navire peut être décomposée en deux parties : la résistance de vagues et la résistance visqueuse. La viscosité de l'écoulement dans ce cas doit alors être prise en compte. Pour traiter une physique plus complexe, incluant la viscosité, il est alors nécessaire de résoudre les équations de Navier-Stokes. La méthode de résolution telle qu'elle est développée ne présente pas de difficulté particulière pour adapter le formalisme mathématique. Cependant, il pourrait être utile d'adapter la méthode de projection à un schéma explicite-implicite, pour résoudre les termes advectifs et visqueux respectivement, comme dans les travaux [25][18].

L'étude du sloshing en régime non-linéaire a permis de mettre en évidence la principale limitation de notre méthode : l'algorithme de redistanciation. Le recours à l'algorithme de dichotomie, dans sa version actuelle, peut s'avérer trop coûteux en temps de calcul lorsque l'on emploie des maillages fins, ou lorsque l'on effectue des simulations aux ordres élevés (en espace). En effet, dans ces deux cas de figure, il est nécessaire de discrétiser très finement l'interface de façon à recalculer précisément la fonction distance signée. Pour améliorer la version actuelle, il serait possible de stocker les points discrétisant l'interface au sein d'une structure d'arbre enraciné, à l'instar des travaux [47][55], ce qui optimiserait grandement le temps de calcul. Sinon, il serait possible d'adapter une nouvelle fois la méthode au calcul parallèle.

L'adaptation du code au calcul parallèle permettrait d'autres possibilités dans le cadre

de ces travaux. En effet, le temps de simulation jusqu'à présent n'est pas excessivement long puisque nous utilisons des maillages réguliers, où le choix des ordres spatiaux pour résoudre la pression et la vitesse permet de réduire fortement les courants parasites. Sur des maillages non-structurés, il est nécessaire d'avoir recours aux maillages fins, en particulier au niveau de l'interface, et/ou aux schémas d'ordre élevé afin de limiter l'apparition de ces courants. Pour s'en affranchir totalement, il serait envisageable de développer une méthode de type Ghost Fluid, où l'interface dans ce cas de figure est représentée ponctuellement. Sinon, il serait possible de s'inspirer de la méthode utilisée dans les travaux [19], où les mailles traversées par l'interface sont traitées par l'intermédiaire de grandeurs moyennes définies sur chaque élément. Ces dernières étant pondérées par une fonction couleur, représentant la proportion du fluide considéré dans une maille. A noter toutefois que ces deux approches représentent l'interface linéairement, et que leur implémentation aux ordres élevés n'est pas triviale. Le recours à ces méthodes demanderait finalement de modifier judicieusement les systèmes linéaires permettant de résoudre les champs de pression et de vitesse.

La version actuelle de l'outil numérique constitue une base solide pour modéliser à l'avenir des problématiques de tenue à la mer. Dans son état actuel, il n'y a pas de limitations majeures pour réaliser les différentes perspectives mentionnées précédemment.

Appendices

RÉSOLUTION À LA MAIN D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS ÉQUIVALENT AU BILAN DE LA QDM EN 1D

On souhaite résoudre à la main un système d'équations équivalent à l'équation de Poisson sur la pression et à l'équation de bilan de la quantité de mouvement, afin de souligner l'avantage de résoudre la pression et la vitesse à l'ordre $k + 1$ et k (en espace), respectivement.

Dans cette section, l'équation de Poisson est redéfinie afin de simplifier sa résolution. Pour cela, le coefficient non-constant initial $1/\rho(\chi)$ est modifié et vaut simplement y . La « pression » p et la dérivée temporelle $\partial v/\partial t$ sont déterminées à la fin du premier pas de temps, en tenant compte du champ de vitesse initial, imposé nul. Cela conduit ainsi à la résolution d'une équation de Laplace (et non de Poisson) sur la « pression ». Les formulations fortes des équations à résoudre s'écrivent alors :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -y \frac{\partial p}{\partial y} - g \quad (\text{A.2})$$

Pour un domaine de calcul Ω défini en une dimension où $y \in [y_1; y_n]$, avec n désignant le nombre de nœuds, on impose les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} y \frac{\partial p}{\partial y} = -g & \text{sur } y_1 \\ p = 0 & \text{sur } y_n \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

Selon les conditions exprimées ci-dessus, les solutions analytiques pour les quantités p et

$\partial v/\partial t$ s'obtiennent sous les formes suivantes :

$$p_a = g(\ln(y_{max}) - \ln(y)) \quad (\text{A.4})$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_a = 0 \quad (\text{A.5})$$

avec y_{max} la coordonnée du nœud y_n .

A.1 Résolution à l'ordre spatial $k = 1$

Dans cette section, les quantités p et $\partial v/\partial t$ sont résolues pour un même ordre spatial ($k = 1$). Le domaine de calcul établi pour cette étude est présenté sur la Figure A.1.

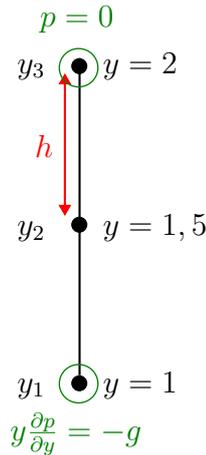


FIGURE A.1 – Domaine de calcul Ω en une dimension, pour $k = 1$.

A.1.1 Equation de Laplace

Pour une fonction test $\omega(y)$ choisie suffisamment régulière, la formulation faible de l'équation (A.1) s'écrit :

$$\int_{\Omega} y \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} dy = \int_{\partial \Omega} y \frac{\partial p}{\partial y} \omega dy \quad (\text{A.6})$$

Le domaine Ω est discrétisé en deux éléments E_1 et E_2 de taille h . Chacun de ces éléments représente un segment compris entre deux coordonnées y_i et y_{i+1} . La solution p

est approchée dans un espace fonctionnel polynomial (éléments-finis de type Lagrange), défini comme suit :

$$W_h^p = \{p_h \in H^1(\Omega); p_h|_E \in \mathbb{P}_k(E), \forall E \in \mathcal{E}_h\}$$

L'équation (A.6) est réécrite sous sa forme discrétisée pour un élément (segment) compris entre deux nœuds y_i et y_{i+1} :

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} y \frac{\partial p_h}{\partial y} \frac{\partial \omega_h}{\partial y} dy = \left[y \frac{\partial p_h}{\partial y} \omega_h \right]_{y_i}^{y_{i+1}} \quad \forall \omega_h \in W_h^p \quad (\text{A.7})$$

Pour chaque élément du maillage, la fonction test ω et la solution p sont approchées par des fonctions polynomiales d'ordre $k = 1$. Ces dernières peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$p_h = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ p_{i+1} \end{pmatrix}, \quad \omega_h = \begin{pmatrix} \omega_i & \omega_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

A l'ordre $k = 1$, les fonctions de forme ci-dessus valent :

$$N_1 = \left(1 - \frac{y - y_i}{h}\right), \quad N_2 = \frac{y - y_i}{h} \quad (\text{A.9})$$

et leur première dérivée spatiale s'écrit :

$$N_{1,y} = -\frac{1}{h}, \quad N_{2,y} = \frac{1}{h} \quad (\text{A.10})$$

L'équation (A.7) est alors reformulée en considérant les approximations (A.8), (A.9) et (A.10) :

$$\begin{pmatrix} N_{1,y}^2 & N_{1,y}N_{2,y} \\ N_{2,y}N_{1,y} & N_{2,y}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ p_{i+1} \end{pmatrix} \int_{y_i}^{y_{i+1}} y dy = \begin{pmatrix} -y_i \frac{\partial p}{\partial y}(y_i) \\ y_{i+1} \frac{\partial p}{\partial y}(y_{i+1}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

La notation du système linéaire ci-dessus est simplifiée en posant :

$$N \begin{pmatrix} p_i \\ p_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_i \frac{\partial p}{\partial y}(y_i) \\ y_{i+1} \frac{\partial p}{\partial y}(y_{i+1}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

avec :

$$N = \begin{pmatrix} N_{1,y}^2 & N_{1,y}N_{2,y} \\ N_{2,y}N_{1,y} & N_{2,y}^2 \end{pmatrix} \frac{y_{i+1}^2 - y_i^2}{2} \quad (\text{A.13})$$

Ce système matriciel est ensuite écrit pour chaque élément E_1 et E_2 . L'étape suivante consiste à assembler les différents systèmes correspondant aux deux éléments constituant le maillage. Afin de garantir la continuité de la solution d'un élément à l'autre, le nœud y_2 (voir Fig. A.1) est commun aux segments E_1 et E_2 . Le système d'équations pour l'ensemble des éléments peut donc s'écrire :

$$\begin{pmatrix} N_{E_1}^{11} & N_{E_1}^{12} & 0 \\ N_{E_1}^{21} & N_{E_1}^{22} + N_{E_2}^{11} & N_{E_2}^{12} \\ 0 & N_{E_2}^{21} & N_{E_2}^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 \frac{\partial p}{\partial y}(y_1) \\ 0 \\ -y_3 \frac{\partial p}{\partial y}(y_3) \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Pour rendre le problème complet, il est nécessaire d'imposer des conditions aux limites avant de procéder à l'étape de résolution. Pour cela, on impose la condition de Neumann suivante : $-y_1 \frac{\partial p}{\partial y}(y_1) = g$, et la condition de Dirichlet suivante : $p(y_3) = 0$. Nous obtenons finalement :

$$\begin{pmatrix} N_{E_1}^{11} & N_{E_1}^{12} & 0 \\ N_{E_1}^{21} & N_{E_1}^{22} + N_{E_2}^{11} & N_{E_2}^{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Le système ci-dessus est résolu par une méthode directe de Gauss, afin de déterminer les valeurs nodales. La solution est ensuite comparée à la solution analytique et aux valeurs numériques obtenues par notre code de calcul. La Figure A.2 montre que les résultats obtenus par résolution éléments-finis à la main sont similaires à ceux issus du code, tout en étant en bon accord avec la solution analytique.

A.1.2 Dérivée temporelle $\partial v / \partial t$

La deuxième étape de résolution consiste à déterminer la dérivée temporelle de la solution v aux nœuds du maillage. La formulation faible de l'équation (A.2) s'écrit ici :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} \omega = - \int_{\Omega} y \frac{\partial p}{\partial y} \omega - \int_{\Omega} g \omega \quad (\text{A.16})$$

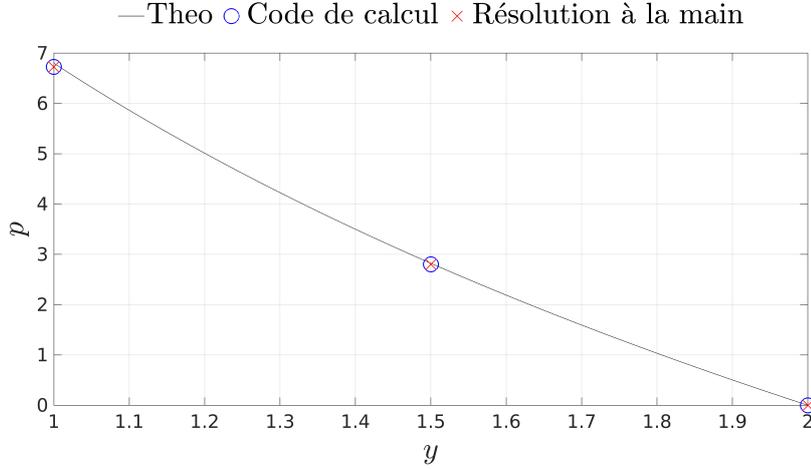


FIGURE A.2 – Discrétisations de p à l'ordre $k = 1$.

La solution $\partial v/\partial t$ est approchée dans l'espace fonctionnel polynomial suivant :

$$W_h^{\partial v/\partial t} = \{(\partial v/\partial t)_h \in L^2(\Omega); (\partial v/\partial t)_h|_E \in \mathbb{P}_k(E), \forall E \in \mathcal{E}_h\}$$

L'équation (A.16) est réécrite sous sa forme discrétisée pour un élément compris entre deux nœuds y_i et y_{i+1} :

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_h \omega_h = - \int_{y_i}^{y_{i+1}} y \frac{\partial p_h}{\partial y} \omega_h - \int_{y_i}^{y_{i+1}} g \omega_h \quad \forall \omega_h \in W_h^{\partial v/\partial t} \quad (\text{A.17})$$

Les fonctions tests ainsi que les solutions p et $(\partial v/\partial t)$ sont approchées par des fonctions polynomiales d'ordre $k = 1$, on obtient alors le système ci-dessous :

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} \begin{pmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 \\ N_2 N_1 & N_2^2 \end{pmatrix} dy \begin{pmatrix} \frac{\partial v_i}{\partial t} \\ \frac{\partial v_{i+1}}{\partial t} \end{pmatrix} = - \int_{y_i}^{y_{i+1}} y \begin{pmatrix} N_1 N_{1,y} & N_1 N_{2,y} \\ N_2 N_{1,y} & N_2 N_{2,y} \end{pmatrix} dy \begin{pmatrix} p_i \\ p_{i+1} \end{pmatrix} - \int_{y_i}^{y_{i+1}} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} g dy \quad (\text{A.18})$$

La notation du système (A.18) est simplifiée sous la forme suivante :

$$M \begin{pmatrix} \frac{\partial v_i}{\partial t} \\ \frac{\partial v_{i+1}}{\partial t} \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} p_i \\ p_{i+1} \end{pmatrix} - \{b\} \quad (\text{A.19})$$

avec M , K et $\{b\}$ définis comme suit :

$$M = \int_{y_i}^{y_{i+1}} \begin{pmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 \\ N_2 N_1 & N_2^2 \end{pmatrix} dy \quad (\text{A.20})$$

$$K = \int_{y_i}^{y_{i+1}} y \begin{pmatrix} N_1 N_{1,y} & N_1 N_{2,y} \\ N_2 N_{1,y} & N_2 N_{2,y} \end{pmatrix} dy \quad (\text{A.21})$$

$$\{b\} = \int_{y_i}^{y_{i+1}} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} g dy \quad (\text{A.22})$$

Les solutions ici sont discontinues de l'élément E_1 à E_2 . L'étape d'assemblage est donc différente de celle de l'équation de Laplace :

$$\begin{pmatrix} M_{E_1}^{11} & M_{E_1}^{12} & 0 & 0 \\ M_{E_1}^{21} & M_{E_1}^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{E_2}^{11} & M_{E_2}^{12} \\ 0 & 0 & M_{E_2}^{21} & M_{E_2}^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t}(E_1) \\ \frac{\partial v_2}{\partial t}(E_2) \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} K_{E_1}^{11} & K_{E_1}^{12} & 0 & 0 \\ K_{E_1}^{21} & K_{E_1}^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{E_2}^{11} & K_{E_2}^{12} \\ 0 & 0 & K_{E_2}^{21} & K_{E_2}^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2(E_1) \\ p_2(E_2) \\ p_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2(E_1) \\ b_2(E_2) \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Le système d'équations ci-dessus est lui aussi résolu par une méthode de Gauss. La solution est ensuite comparée à la solution analytique et aux valeurs numériques obtenues par notre code de calcul. La Figure A.3 permet de souligner que les résultats obtenus par résolution éléments-finis à la main sont équivalents aux résultats numériques. Pour les deux cas, les solutions discrétisées ne correspondent pas à la solution analytique attendue.

A.2 Résolution pour des ordres spatiaux différents

Dans cette section, l'équation (A.7) est résolue avec un ordre supplémentaire que l'équation (A.17). Le domaine de calcul à l'ordre $k = 2$ est présenté sur la Figure A.4.

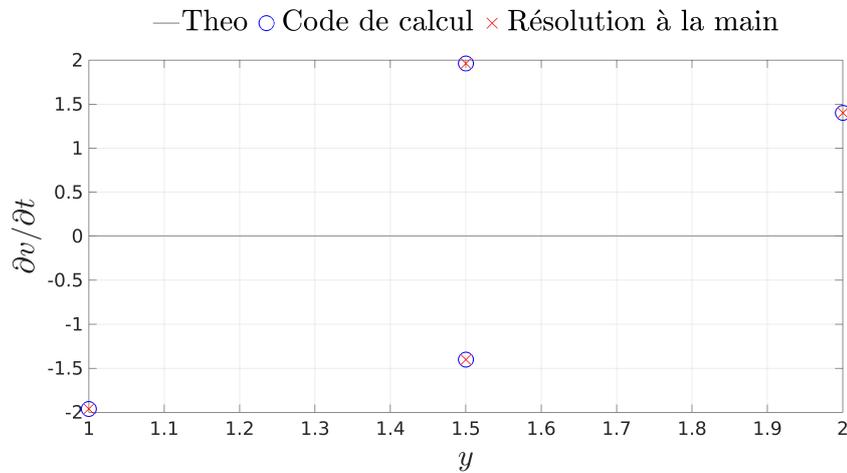


FIGURE A.3 – Discrétisations de $\partial v/\partial t$ à l'ordre $k = 1$, avec p résolue à l'ordre $k = 1$.

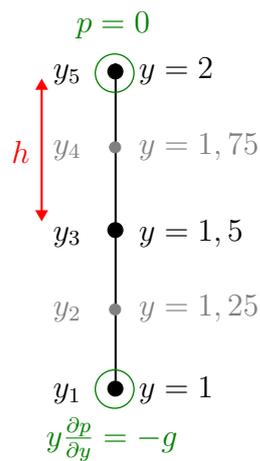


FIGURE A.4 – Domaine de calcul Ω en une dimension, pour $k = 2$.

A.2.1 Equation de Laplace à l'ordre $k = 2$

Pour chacun des éléments E_1 et E_2 compris entre deux coordonnées y_i et y_{i+1} , on rajoute ici un nœud $y_{i+1/2}$ situé au centre du segment (voir Fig. A.4). La fonction test ω et la solution p sont désormais approchées par des fonctions polynomiales d'ordre $k = 2$, écrites sous la forme suivante :

$$p_h = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ p_{i+1/2} \\ p_{i+1} \end{pmatrix}, \quad \omega_h = \begin{pmatrix} \omega_i & \omega_{i+1/2} & \omega_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

A l'ordre $k = 2$, les fonctions de forme ci-dessus valent :

$$\begin{aligned} T_1 &= \left(1 - \frac{y - y_i}{h}\right) \left(2 \left(1 - \frac{y - y_i}{h}\right) - 1\right) \\ T_2 &= 4 \left(1 - \frac{y - y_i}{h}\right) \left(\frac{y - y_i}{h}\right) \\ T_3 &= \left(\frac{y - y_i}{h}\right) \left(2 \left(\frac{y - y_i}{h}\right) - 1\right) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

et leur première dérivée spatiale s'écrit :

$$T_{1,y} = \frac{4}{h^2}y - \left(\frac{3}{h} + \frac{4}{h^2}y_i\right), \quad T_{2,y} = -\frac{8}{h^2}y + \left(\frac{4}{h} + \frac{8}{h^2}y_i\right), \quad T_{3,y} = \frac{4}{h^2}y - \left(\frac{1}{h} + \frac{4}{h^2}y_i\right) \quad (\text{A.26})$$

Le système de résolution de l'équation (A.7) pour un élément s'écrit dans ce cas-ci :

$$T \begin{pmatrix} p_i \\ p_{i+1/2} \\ p_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_i \frac{\partial p}{\partial y}(y_i) \\ 0 \\ y_{i+1} \frac{\partial p}{\partial y}(y_{i+1}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

avec :

$$T = \int_{y_i}^{y_{i+1}} y \begin{pmatrix} T_{1,y}^2 & T_{1,y}T_{2,y} & T_{1,y}N_{3,y} \\ T_{2,y}T_{1,y} & T_{2,y}^2 & T_{2,y}T_{3,y} \\ T_{3,y}N_{1,y} & T_{3,y}T_{2,y} & T_{3,y}^2 \end{pmatrix} dy \quad (\text{A.28})$$

On procède ensuite à l'étape d'assemblage en imposant la condition de Neumann suivante : $-y_1 \frac{\partial p}{\partial y}(y_1) = g$, et la condition de Dirichlet suivante : $p(y_5) = 0$. Le système d'équations pour l'ensemble des éléments peut donc s'écrire :

$$\begin{pmatrix} T_{E_1}^{11} & T_{E_1}^{12} & T_{E_1}^{13} & 0 & 0 \\ T_{E_1}^{21} & T_{E_1}^{22} & T_{E_1}^{23} & 0 & 0 \\ T_{E_1}^{31} & T_{E_1}^{32} & T_{E_1}^{33} + T_{E_2}^{11} & T_{E_2}^{12} & T_{E_2}^{13} \\ 0 & 0 & T_{E_2}^{21} & T_{E_2}^{22} & T_{E_2}^{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

La solution obtenue via le système (A.29) est comparée à la solution analytique et aux valeurs numériques issues de notre code. Sur la Figure A.5, les résultats obtenus par résolution à la main sont une nouvelle fois similaires aux résultats numériques. Par ailleurs, remarquons que les solutions discrétisées à l'ordre $k = 2$ sont plus précises qu'à l'ordre $k = 1$ puisqu'elles se confondent davantage avec la solution analytique.

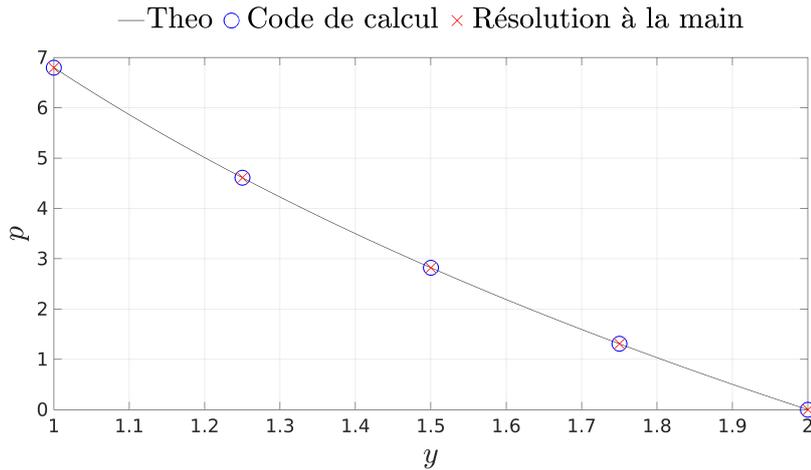


FIGURE A.5 – Discrétisations de p à l'ordre $k = 2$.

A.2.2 Dérivée temporelle $\partial v/\partial t$ à l'ordre $k = 1$

La résolution de l'équation (A.17) est de type mixte. Elle utilise ici les fonctions de forme de la solution p à l'ordre $k = 2$ pour déterminer la solution $\partial v/\partial t$ à l'ordre $k = 1$. Dans cette section, les fonctions polynomiales approchant les quantités p et $\partial v/\partial t$, ainsi que les fonctions tests, sont notées respectivement :

$$p_h = (T_1 \ T_2 \ T_3) \begin{pmatrix} p_i \\ p_{i+1/2} \\ p_{i+1} \end{pmatrix}, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_h = (N_1 \ N_2) \begin{pmatrix} \frac{\partial v_i}{\partial t} \\ \frac{\partial v_{i+1}}{\partial t} \end{pmatrix}, \quad \omega_h = (\omega_i \ \omega_{i+1}) \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

où les termes N et T désignent les fonctions de formes à l'ordre $k = 1$ et 2 . Le système de résolution de l'équation (A.17) s'écrit, pour un élément :

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} \begin{pmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 \\ N_2 N_1 & N_2^2 \end{pmatrix} dy \begin{pmatrix} \frac{\partial v_i}{\partial t} \\ \frac{\partial v_{i+1}}{\partial t} \end{pmatrix} = - \int_{y_i}^{y_{i+1}} y \begin{pmatrix} N_1 T_{1,y} & N_1 T_{2,y} & N_1 T_{3,y} \\ N_2 T_{1,y} & N_2 T_{2,y} & N_2 T_{3,y} \end{pmatrix} dy \begin{pmatrix} p_i \\ p_{i+1/2} \\ p_{i+1} \end{pmatrix} - \int_{y_i}^{y_{i+1}} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} g dy \quad (\text{A.31})$$

La notation du système (A.31) est simplifiée sous la forme suivante :

$$M \begin{pmatrix} \frac{\partial v_i}{\partial t} \\ \frac{\partial v_{i+1}}{\partial t} \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} p_i \\ p_{i+1/2} \\ p_{i+1} \end{pmatrix} - \{b\} \quad (\text{A.32})$$

où les matrices M et K , ainsi que le vecteur $\{b\}$ sont définis de cette façon :

$$M = \int_{y_i}^{y_{i+1}} \begin{pmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 \\ N_2 N_1 & N_2^2 \end{pmatrix} dy \quad (\text{A.33})$$

$$K = \int_{y_i}^{y_{i+1}} y \begin{pmatrix} N_1 T_{1,y} & N_1 T_{2,y} & N_1 T_{3,y} \\ N_2 T_{1,y} & N_2 T_{2,y} & N_2 T_{3,y} \end{pmatrix} dy \quad (\text{A.34})$$

$$\{b\} = \int_{y_i}^{y_{i+1}} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} g dy \quad (\text{A.35})$$

Les valeurs nodales de la quantité $\partial v / \partial t$ peuvent alors être déterminées grâce à la résolution du système final suivant :

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} M_{E_1}^{11} & M_{E_1}^{12} & 0 & 0 \\ M_{E_1}^{21} & M_{E_1}^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{E_2}^{11} & M_{E_2}^{12} \\ 0 & 0 & M_{E_2}^{21} & M_{E_2}^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t}(E_1) \\ \frac{\partial v_2}{\partial t}(E_2) \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} \end{pmatrix} \\
= & - \begin{pmatrix} K_{E_1}^{11} & K_{E_1}^{12} & K_{E_1}^{13} & 0 & 0 & 0 \\ K_{E_1}^{21} & K_{E_1}^{22} & K_{E_1}^{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{E_2}^{11} & K_{E_2}^{12} & K_{E_2}^{13} \\ 0 & 0 & 0 & K_{E_2}^{21} & K_{E_2}^{22} & K_{E_2}^{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3(E_1) \\ p_3(E_2) \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2(E_1) \\ b_2(E_2) \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.36})
\end{aligned}$$

La solution obtenue via le système (A.36) est comparée à la solution analytique et aux valeurs numériques issues de notre code, sur la Figure A.6. Les solutions discrétisées tendent cette fois-ci vers les valeurs analytiques : les résultats obtenus par résolution à la main sont nuls et les résultats numériques sont de l'ordre de 10^{-6} (précision maximale). Lorsque la quantité p est résolue avec un ordre supplémentaire, alors la dérivée temporelle $\partial v/\partial t$ est bien nulle sur les nœuds du maillage.

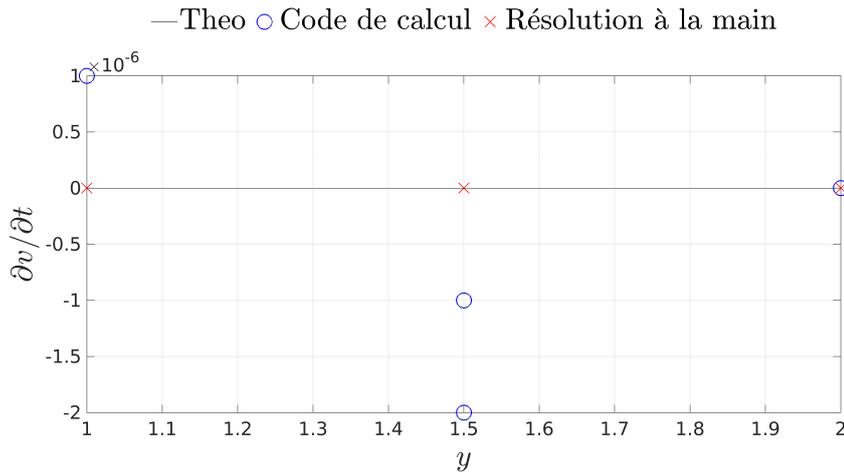


FIGURE A.6 – Discrétisations de $\partial v/\partial t$ à l'ordre $k = 1$, avec p résolue à l'ordre $k = 2$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R.W. Anderson, V.A. Dobrev, T.V. Kolev, D. Kuzmin, M. Quezada de Luna, R.N. Rieben, and V.Z. Tomov. High-order local maximum principle preserving (mpp) discontinuous galerkin finite element method for the transport equation. *J. Comput. Phys.*, 334 :102–124, 2017.
- [2] I. Babuška. The finite element method with lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, 20(3) :179–192, 1973.
- [3] F. Bassi and S. Rebay. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible navier–stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 131(2) :267–279, 1997.
- [4] F. Bassi and S. Rebay. High-order accurate discontinuous finite element solution of the 2d euler equations. *Journal of Computational Physics*, 138(2) :251–285, 1997.
- [5] DJ. Benson and W. Ng. Validation of slosh modeling approach using star-ccm+. Technical report, 2018.
- [6] F. Brezzi and J. Pitkäranta. On the stabilization of finite element approximations of the stokes equations. In *Efficient Solutions of Elliptic Systems : Proceedings of a GAMM-Seminar Kiel, January 27 to 29, 1984*, pages 11–19. Springer, 1984.
- [7] A.N Brooks and T.J.R Hughes. Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32(1-3) :199–259, 1982.
- [8] J.C Butcher. *Numerical methods for ordinary differential equations*. John Wiley & Sons, 2016.
- [9] A.J Chorin. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of Computational Physics*, 2(1) :12–26, 1967.
- [10] A.J Chorin. Numerical solution of the navier-stokes equations. *Mathematics of Computation*, 22(104) :745–762, 1968.

-
- [11] B. Cockburn and C.-W. Shu. *The P1-RKDG method for two-dimensional Euler equations of gas dynamics*, volume 91. NASA Langley Research Center. Institute for Computer Applications in Science and Engineering., 1991.
- [12] B. Cockburn and C.-W. Shu. The local discontinuous galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35(6) :2440–2463, 1998.
- [13] B. Cockburn and C.-W. Shu. Runge–kutta discontinuous galerkin methods for convection-dominated problems. *Journal of Scientific Computing*, 16 :173–261, 2001.
- [14] L. Cong and B. Teng. An fem-level-set numerical model for potential flow with free surface. *Procedia Engineering*, 126 :237–241, 2015.
- [15] A. Dalmon. *Simulation numérique du ballonnement d’ergol et modélisation de l’interaction fluides-membrane dans un réservoir de satellite*. PhD thesis, Université Toulouse 3, 2018.
- [16] B.J. Daly. Numerical study of two fluid rayleigh-taylor instability. *Phys. Fluids*, 10 :297–307, 1967.
- [17] R.P. Fedkiw, T.Aslam, B. Merriman, and S. Osher. A non-oscillatory eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method). *Journal of Computational Physics*, 152(2) :457–492, 1999.
- [18] M. Franco, J.-S. Camier, J.Andrej, and W.Pazner. High-order matrix-free incompressible flow solvers with gpu acceleration and low-order refined preconditioners. *Computers and Fluids*, 203, 4 2020.
- [19] M. Billaud Friess. *Éléments finis stabilisés pour des écoulements diphasiques compressible-incompressible*. PhD thesis, Université de Bordeaux 1, 2009.
- [20] F. Garoosi, A.N Mellado-Cusichua, M. Shademani, and A. Shakibaeinia. Experimental and numerical investigations of dam break flow over dry and wet beds. *International Journal of Mechanical Sciences*, 215 :106946, 2022.
- [21] E.S. Gawlik and F. Gay-Balmaz. A conservative finite element method for the incompressible euler equations with variable density. *Journal of Computational Physics*, 412 :109439, 2020.
- [22] R.A Gingold and J.J Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics : theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181 :375–389, 1977.

-
- [23] B. Godderidge, S. Turnock, M. Tan, and C. Earl. An investigation of multiphase cfd modelling of a lateral sloshing tank. *Computers & Fluids*, 38(2) :183–193, 2009.
- [24] J. Grooss. *A Level Set Discontinuous Galerkin Method for Free Surface Flows — and Water-Wave Modeling*. PhD thesis, Technical University of Denmark, 2005.
- [25] J. Grooss and J.S Hesthaven. A level set discontinuous galerkin method for free surface flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(25-28) :3406–3429, 2006.
- [26] S. Groß, V. Reichelt, and A. Reusken. A finite element based level set method for two-phase incompressible flows. *Computing and Visualization in Science*, 9 :239–257, 2006.
- [27] J. Guzmán, C.-W. Shu, and F.A. Sequeira. H(div) conforming and DG methods for incompressible Euler’s equations. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 37(4) :1733–1771, 11 2016.
- [28] F.H Harlow, M. Evans, and R.D Richtmyer. *A Machine Calculation Method for Hydrodynamic Problems*. LAMS (Los Alamos Scientific Laboratory). Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, 1955.
- [29] F.H Harlow and J.E Welch. Numerical calculations of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of Fluids*, 12 :2182–2198, 1965.
- [30] C.W Hirt and B.D Nichols. Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39 :201–225, 1981.
- [31] A.A. Howard and A.M. Tartakovsky. A conservative level set method for n-phase flows with a free-energy-based surface tension model. *Journal of Computational Physics*, 426 :109955, 2021.
- [32] T.J.R Hughes and A.N Brooks. A multi-dimensional upwind scheme with no cross-wind diffusion. In *T.J.R. Hughes, ed., Finite Element Methods for Convection Dominated Flows, AMD*, volume 34, (ASME, New York, 1979).
- [33] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, and M. Balestra. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : V. circumventing the babuška-brezzi condition : a stable petrov-galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59(1) :85–99, 1986.

-
- [34] S.P. Jaiswal and M. Gavara. Study of rayleigh-taylor instability in viscosity-stratified fluid layers. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 134 :105773, 2022.
- [35] A. Johansson, M. Garzon, and J.A. Sethian. A three-dimensional coupled nitsche and level set method for electrohydrodynamic potential flows in moving domains. *Journal of Computational Physics*, 309 :88–111, 2016.
- [36] S. Koshizuka and Y. Oka. Moving particle semi-implicit method : Fully lagrangian analysis of incompressible flows. In *Proceedings of the European Congress on computational methods in applied sciences and engineering (ECCOMAS), Barcelona, Spain*, pages 11–14, 2000.
- [37] B. Lalanne, L.R. Villegas, S. Tanguy, and F. Risso. On the computation of viscous terms for incompressible two-phase flows with level set/ghost fluid method. *Journal of Computational Physics*, 301 :289–307, 2015.
- [38] P. Lesaint. *Sur la résolution des systèmes hyperboliques du premier ordre par des méthodes d'éléments finis*. PhD thesis, Université Paris VI, 1975.
- [39] P. Lesaint and P.-A. Raviart. On a finite element method for solving the neutron transport equation. In Carl de Boor, editor, *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, pages 89–123. Academic Press, 1974.
- [40] B. Liu and D. Tan. A nitsche stabilized finite element method for embedded interfaces : Application to fluid-structure interaction and rigid-body contact. *Journal of Computational Physics*, 413 :109461, 2020.
- [41] H. Liu and X. Jiao. Wls-eno : Weighted-least-squares based essentially non-oscillatory schemes for finite volume methods on unstructured meshes. *Journal of Computational Physics*, 314 :749–773, 2016.
- [42] X.-D. Liu, S. Osher, and T. Chan. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *Journal of Computational Physics*, 115(1) :200–212, 1994.
- [43] L. Lobovský, E. Botia-Vera, F. Castellana, J. Mas-Soler, and A. Souto-Iglesias. Experimental investigation of dynamic pressure loads during dam break. *Journal of Fluids and Structures*, 48 :407–434, 2014.
- [44] L.B Lucy. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astronomical Journal*, 82 :1013–1024, 1977.

-
- [45] S. Maarouf, C. Bernardi, and D. Yakoubi. Characteristics/finite element analysis for two incompressible fluid flows with surface tension using level set method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 394 :114843, 2022.
- [46] A. Main and G. Scovazzi. The shifted boundary method for embedded domain computations. part i : Poisson and stokes problems. *Journal of Computational Physics*, 372 :972–995, 2018.
- [47] E. Marchandise. *Simulation of three-dimensional two-phase flows : coupling of a stabilized finite element method with a discontinuous level set approach*. PhD thesis, Université Catholique de Louvain, 2006.
- [48] E. Marchandise and J.-F. Remacle. A stabilized finite element method using a discontinuous level set approach for solving two phase incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 219(2) :780–800, 2006.
- [49] J.C. Martin and W.J. Moyce. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 244 :312 – 324, 1952.
- [50] D.M Mount, N.S Arya, R. Netanyahu, and Silverman. An optimal algorithm for approximate nearest neighbor searching. *Journal of the ACM*, 45, 1998.
- [51] J. Nitsche. Über ein variationsprinzip zur lösung von dirichlet-problemen bei verwendung von teilräumen, die keinen randbedingungen unterworfen sind. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 36 :9–15, 1971.
- [52] W.F. Noh and P. Woodward. A simple line interface calculation (slic). In *Proceedings of the 5th International Conference on Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics*, 59, pages 330–340, 1976.
- [53] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal Of Computational Physics*, 79 :12–49, 1988.
- [54] D.A. Di Pietro, S. Lo Forte, and N. Parolini. Mass preserving finite element implementations of the level set method. *Applied Numerical Mathematics*, 56(9) :1179–1195, 2006. Numerical Methods for Viscosity Solutions and Applications.
- [55] F. Pochet, K. Hillewaert, P. Geuzaine, J.-F. Remacle, and E. Marchandise. A 3d strongly coupled implicit discontinuous galerkin level set-based method for modeling two-phase flows. *Computers Fluids*, 87 :144–155, 2013. USNCCM Moving Boundaries.

-
- [56] W.H. Reed and T.R Hill. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. *Los Alamos Report LA-UR*, pages 473–479, 1973.
- [57] G. Russo and P. Smereka. A remark on computing distance functions. *Journal Of Computational Physics*, 163 :51–67, 2000.
- [58] Y.-M. Scolan. Some aspects of the flip-through phenomenon : A numerical study based on the desingularized technique. *Journal of Fluids and Structures*, 26(6) :918–953, 2010.
- [59] Y.-M. Scolan and L.Brosset. Numerical simulation of highly nonlinear sloshing in a tank due to forced motion. In *The 26th International Ocean and Polar Engineering Conference*. OnePetro, 2016.
- [60] J.A. Sethian. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *PNAS*, 93 :1591–1595, 1996.
- [61] J.A. Sethian. Fast marching methods. *SIAM*, 41 :199–235, 1999.
- [62] C.-W. Shu and S. Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *Journal of Computational Physics*, 77(2) :439–471, 1988.
- [63] O. Simsek and H. Islek. 2d and 3d numerical simulations of dam-break flow problem with rans, des, and les. *Ocean Engineering*, 276 :114298, 2023.
- [64] M. Sussman and E.G. Puckett. A coupled level set and volume-of-fluid method for computing 3d and axisymmetric incompressible two-phase flows. *Journal of Computational Physics*, 162(2) :301–337, 2000.
- [65] M. Sussman, P. Smereka, and Stanley Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal Of Computational Physics*, 114 :146–159, 1994.
- [66] S. Tanguy. *Développement d’une méthode de suivi d’interface. Applications aux écoulements diphasiques*. PhD thesis, Université de Rouen, 2004.
- [67] C. Taylor and P. Hood. A numerical solution of the navier-stokes equations using the finite element technique. *Computers & Fluids*, 1(1) :73–100, 1973.
- [68] S.O. Unverdi and G. Tryggvason. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. *J. Comput. Phys*, 100 :25–37, 1992.
- [69] P. Vigneaux. *Méthodes Level Set pour des problèmes d’interface en microfluidique*. PhD thesis, Université Bordeaux I, 2008.

-
- [70] X. Wen. Wet/dry areas method for interfacial (free surface) flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 71(3) :316–338, 2013.
- [71] M.-A Xue, Z. Jiang, P. Lin, J. Zheng, X. Yuan, and L. Qian. Sloshing dynamics in cylindrical tank with porous layer under harmonic and seismic excitations. *Ocean Engineering*, 235 :109373, 2021.
- [72] S.T. Zalesak. Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. *Journal of Computational Physics*, 31(3) :335–362, 1979.
- [73] L. Zhao, J. Mao, X. Bai, X. Liu, T. Li, and J.J.R. Williams. Finite element implementation of an improved conservative level set method for two-phase flow. *Computers Fluids*, 100 :138–154, 2014.



Titre : Simulation numérique d'écoulements à surface libre avec la Méthode des Eléments-Finis.

Mot clés : Écoulement à surface libre, méthode des Eléments-Finis, méthode Level-Set, Galerkin Discontinu, méthode de projection explicite d'ordre élevé.

Résumé : Cette thèse est consacrée au développement d'un outil de simulation numérique permettant d'étudier, à terme, le comportement d'un navire sur houle fortement non-linéaire. Ce travail se concentre spécifiquement sur la simulation numérique d'écoulements à interface mobile, à caractères instationnaires, incompressibles et non-visqueux. La méthode repose sur la modélisation des écoulements bifluïdes, décrits par les équations d'Euler incompressibles. Une approche Level-Set est utilisée pour capturer l'interface entre les deux fluides. Ce formalisme offre l'avantage de représenter l'écoulement dans une approche globale, permettant ainsi de s'affranchir des discontinuités présentes à l'interface. À la différence des codes CFD classiques employés en hydrodynamique navale, qui sont généralement basés sur des formulations Volumes-Finis/VOF limitées sur le choix des ordres d'intégration, la discrétisation spatiale se fait à l'aide d'une méthode Eléments-Finis. Cette

dernière autorise l'utilisation de schémas numériques robustes et d'ordre élevé afin d'améliorer la précision des résultats, tout en réduisant le temps de calcul. La stabilité du schéma numérique est assurée en partie par l'utilisation d'une approche Galerkin Discontinu, qui permet de décentrer les schémas de résolution en présence de termes advectifs, et aussi par l'utilisation d'une méthode de projection, qui consiste à résoudre séparément les champs de pression et de vitesse. Pour garantir un schéma numérique d'ordre élevé en espace et en temps, une nouvelle méthode de projection explicite est proposée, où la décomposition de Hodge est appliquée à la dérivée de la vitesse. Finalement, les résultats numériques obtenus, issus de plusieurs cas représentatifs des problématiques navales, permettent de valider l'outil numérique tout en confirmant la puissance de la méthode développée.

Title: Numerical simulation of free surface flows with a Finite Element Method.

Keywords: Free surface flow, Finite Element method, Level-Set method, Discontinuous Galerkin, projection method.

Abstract: This thesis is dedicated to the development of a solver for the subsequent study of ship behavior in nonlinear waves. This dissertation specifically focuses on the numerical simulation of unsteady, incompressible and inviscid free surface flows. The method is based on a two-phase flow, described by incompressible Euler equations. A Level-Set approach is used to capture the interface between the two fluids. This formalism offers the advantage of representing the flow in a global approach, thereby eliminating any discontinuities at the interface. Unlike classical CFD codes commonly employed in the field of naval hydrodynamics, which are usually founded on finite-volume/VOF formulations and have limited options for the interpolation order, the proposed method

uses a finite-element discretization. This approach allows the implementation of robust, high-order numerical schemes. Numerical scheme stability is ensured in part by the use of a Discontinuous Galerkin method, which allows the use of non-centered schemes, but also by the use of a projection method, which consists in solving separately the pressure and the velocity fields. To ensure a high-order numerical scheme in space and time, a new explicit projection method is proposed, where the Hodge decomposition is applied to the velocity derivative. Finally, the numerical results from several representative naval problem cases validate the solver and confirm the effectiveness of the developed method.