



**HAL**  
open science

# Stratification d'Ekedahl-Oort pour les modèles de Pappas-Rapoport des variétés de Shimura

Diego Berger

► **To cite this version:**

Diego Berger. Stratification d'Ekedahl-Oort pour les modèles de Pappas-Rapoport des variétés de Shimura. Géométrie algébrique [math.AG]. Institut Polytechnique de Paris, 2024. Français. NNT : 2024IPPAX044 . tel-04746932

**HAL Id: tel-04746932**

**<https://theses.hal.science/tel-04746932v1>**

Submitted on 21 Oct 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Stratification des modèles de Pappas-Rapoport des variétés de Shimura

Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Paris  
préparée à l'école Polytechnique

École doctorale n°574 École doctorale de Mathématiques Hadamard (EDMH)  
Spécialité de doctorat : Mathématiques fondamentales

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 26/06/2024, par

**DIEGO BERGER**

Composition du Jury :

Fabrizio Andreatta Professeur, Université de Milan	Président
Xu Shen Professeur, Chinese Academy of Sciences	Rapporteur
Fabrizio Andreatta Professeur, Université de Milan	Rapporteur
Giada Grossi Chargée de recherche, Université Sorbonne Paris Nord (LAGA)	Examinatrice
Valentin Hernandez Maître de conférence, Université Paris Sud Orsay	Examineur
Stéphane Bijakowski Professeur, École polytechnique (CMLS)	Directeur de thèse
Benoit Stroh Professeur des universités, Sorbonne Université (IMJ-PRG)	Co-directeur de thèse



## Résumé

Dans cette thèse nous étudions la géométrie de la réduction de certaines variétés de Shimura modulo un nombre premier  $p$ . Plus précisément on considère la réduction modulo  $p$  des modèles entiers des variétés de Shimura de type PEL construits par Pappas et Rapoport. Dans le cas d'une donnée PEL de type Hilbert, on montre que la stratification induite par le polygone de Hodge est une bonne stratification (l'adhérence d'une strate est une union disjointe de strates). Ensuite nous calculons les  $\mathcal{G}$ -orbites de la fibre spéciale du modèle local de Pappas-Rapoport dans le cas Hilbert, où  $\mathcal{G}$  est le groupe associé à la donnée PEL. Ces orbites induisent une bonne stratification de la fibre spéciale de la variété de Shimura, que l'on appelle stratification de Kottwitz-Rapoport (analogue à la stratification de Kottwitz-Rapoport des modèles entiers de Kottwitz). Dans un travail récent, Xu Shen et Yuqiang Zheng ont défini une stratification d'Ekedahl-Oort des modèles entiers de Pappas-Rapoport. Dans le cas Hilbert nous montrons que « l'intersection » de leur stratification avec la stratification de Kottwitz-Rapoport est une bonne stratification.

Dans la seconde partie de cette thèse nous nous intéressons aux modèles locaux dans le contexte de la théorie de Hodge  $p$ -adique. Nous définissons un plongement en niveau entier des modèles locaux de Pappas-Rapoport dans une certaine Grassmannienne affine de type Beilinson-Drinfeld, analogue au plongement défini Scholze et Weinstein pour les modèles entiers de Kottwitz.

## Abstract

In this thesis we study the geometry of the reduction of certain Shimura varieties modulo a prime number  $p$ . More precisely, we consider the reduction modulo  $p$  of the integral models of PEL-type Shimura varieties constructed by Pappas and Rapoport. In the case of Hilbert-type PEL data, we show that the stratification induced by the Hodge polygon is a good stratification (the adherence of a stratum is a disjoint union of strata). Next, we compute the  $\mathcal{G}$ -orbits of the special fiber of the Pappas-Rapoport local model in the Hilbert case, where  $\mathcal{G}$  is the group associated with the PEL datum. These orbits induce a good stratification of the special fiber of the Shimura variety, which we call Kottwitz-Rapoport stratification (analogous to the Kottwitz-Rapoport stratification of integral Kottwitz models). In a recent work, Xu Shen and Yuqiang Zheng have defined an Ekedahl-Oort stratification of integer Pappas-Rapoport models. In the Hilbert case we show that “the intersection” of their stratification with the Kottwitz-Rapoport stratification is a good stratification.

In the second part of this thesis, we focus on local models in the context of  $p$ -adic Hodge theory. We define an integer-level embedding of Pappas-Rapoport local models into a certain affine Grassmannian of Beilinson-Drinfeld type, analogous to the embedding defined by Scholze and Weinstein for Kottwitz local models.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction et présentation des résultats</b>	<b>7</b>
1.1	Introduction . . . . .	7
1.2	Présentation des résultats . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Modèle de Pappas-Rapoport des variétés de Shimura</b>	<b>27</b>
2.1	Variété de Shimura de type PEL . . . . .	27
2.2	Modèle entier de Kottwitz . . . . .	36
2.3	Modèle local PEL . . . . .	42
2.4	Modèle local de Pappas-Rapoport . . . . .	51
2.5	Modèle entier de Pappas-Rapoport . . . . .	57
2.6	Modèle canonique . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Stratification de Hodge</b>	<b>61</b>
3.1	Grassmanniennes affines . . . . .	62
3.2	Applications . . . . .	72
3.3	Comparaison entre les stratifications KR et Hodge . . . . .	86
3.4	Le cas Hilbert . . . . .	94
3.5	Stratification en orbites . . . . .	100
<b>4</b>	<b>Stratification d’Ekedahl-Oort</b>	<b>109</b>
4.1	Problèmes et stratégies . . . . .	110
4.2	Rappels de théorie de Dieudonné . . . . .	113
4.3	Travaux de Xu Shen et Yuqiang Zheng . . . . .	124
4.4	Stratification de type EKOR : le cas Hilbert . . . . .	126
<b>5</b>	<b>Modèles locaux et diamants</b>	<b>133</b>
5.1	Présentation du problème . . . . .	133
5.2	Notations et rappels . . . . .	135
5.3	Préliminaire de géométrie $p$ -adique . . . . .	139
5.4	Différentes grassmanniennes affines . . . . .	146
5.5	Modèles locaux . . . . .	157
5.6	Modèle de Pappas-Rapoport . . . . .	160
5.7	Description des images . . . . .	166

## Remerciements

Tout d'abord je voudrais remercier mes deux directeurs de thèse Stéphane et Benoît de m'avoir accompagné tout au long de ces trois années de thèse (quatre en réalité...). Ma façon d'avancer dans le monde de la géométrie arithmétique a été grandement façonnée par toutes les discussions que j'ai pu avoir avec vous.

Stéphane tu m'as appris à analyser des problèmes en partant d'exemples spécifiques qui peuvent souvent être résolus par des calculs explicites. L'intuition se développe alors au fur et à mesure des calculs et il y a un côté très rassurant à travailler avec des objets tangibles.

De façon presque duale, Benoît tu m'as appris à reformuler le problème de façon plus abstraite<sup>1</sup>. Prendre ce recul permet de mieux comprendre le contexte du problème, ainsi que les différentes approches utilisées et utilisables pour l'aborder. Ce processus est souvent long et demande un certain travail bibliographique, mais il y a ici aussi un côté très rassurant : on comprend le paysage dans lequel on évolue.

Je pense que ces deux approches peuvent se ressentir dans ce manuscrit : les chapitres 3 et 4 ont été écrits suite à des discussions avec Stéphane, tandis que le chapitre 5 fait suite à des discussions avec Benoît. Il n'y a pas de fracture entre ces deux approches mathématiques comme il n'y a pas de fracture entre ces deux parties du manuscrit, le passage de l'un à l'autre se fait de manière continue.

Dans mon éducation mathématique, je n'oublie pas Antoine Ducros qui m'a encadré en première année de Master. C'est lui qui m'a initié au merveilleux monde de la géométrie algébrique. Je pense que ses cours n'ont laissé personne indifférent.

Je tiens également à remercier F.Andreatta et X.Shen d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce manuscrit, ainsi que G.Grossi et V.Hernandez d'avoir accepté de faire parti du jury de ma soutenance.

Ensuite j'aimerais remercier le personnel administratif et informatique du CMLS. Les conditions de travail dans lesquelles j'ai pu mener cette thèse ont été excellentes, je n'ai jamais manqué de rien<sup>2</sup> et j'ai toujours été très bien accompagné.

Je remercie également les autres doctorants avec qui j'ai partagé ces trois années de thèse : Thibault, Arnaud, Sebastian, Andrea, Doan, Gabriel, Melvyn, Andrés, Tal, Paul et d'autres qui se reconnaîtront.

Je tiens évidemment à remercier ma famille et mes amis qui ont toujours été là pour moi. Grosse dédicace à Pierro, Tieums, Louis, Rapha, Julio, Ariane, Muni, Rauffe et tous les autres. Au moment où j'écris ce texte j'ai une rupture totale de la poulie A4, donc grosse dédicace à LaBruce mon frère de poulie. J'ai également une pensée pour Razmo et tous les adhérents de la FFGM.

Enfin j'aimerais remercier la personne qui partage ma vie depuis maintenant 7 ans.

---

<sup>1</sup>Je garde en mémoire ce TD de géométrie différentielle en Master 1 où tu nous présentais le lemme de Yoneda pour démontrer que deux atlas de la sphère induisaient la même structure de variété différentielle.

<sup>2</sup>Il faut savoir que dans un autre laboratoire l'administration s'est permis de mettre à la poubelle mon vélo et 4 de mes livres

Louise, je crois que je suis trop pudique pour exprimer ici les sentiments qui me viennent lorsque je pense à toi et que j'écris ces lignes. Merci pour tout.

# Chapitre 1

## Introduction et présentation des résultats

### 1.1 Introduction

Cette thèse en mathématiques fondamentales s’inscrit dans le domaine de la géométrie arithmétique et plus précisément dans celui de l’étude des variétés de Shimura. Introduites par G.Shimura en 1963 dans dans les articles [Shi63] [Shi70], les variétés de Shimura<sup>1</sup> et leur formalisme tel qu’on le connaît actuellement ont été définies par Deligne à travers deux papiers fondateurs [Del71][Del79]. Ces variétés jouent un rôle central en arithmétique et plus particulièrement dans le cadre du programme de Langlands. La géométrie de ces variétés est très riche et contient des informations arithmétiques qui ont eu de nombreuses applications en théorie des nombres. Les congruences entre formes modulaires peuvent par exemple se lire sur la réduction modulo  $p$  des courbes modulaires, qui sont des cas particuliers de variétés de Shimura. Dans cette thèse on étudiera la géométrie la réduction modulo  $p$  d’une certaine classe de variétés de Shimura, appelées variétés de Shimura de type PEL. Le dernier chapitre de cette thèse s’éloigne un peu du sujet initial et porte sur des applications des travaux fondateurs de Scholze et Weinstein [SW20] en théorie de Hodge  $p$ -adique, dans le cadre des modèles locaux des variétés de Shimura de type PEL.

Avant de présenter les résultats de cette thèses, je vais tenter de faire une courte introduction à la géométrie arithmétique, et essayer de donner quelques motivations concernant les travaux de recherche que nous effectuons tous les jours. Ce qui suit est très approximatif et je vais volontairement mettre sous le tapis des détails techniques. L’objectif est de rendre la lecture accessible à un public large.

**Problème de la somme de quatre carrés.** Commençons par un petit calcul :

$$2023 = 1^2 + 2^2 + 13^2 + 43^2$$

---

<sup>1</sup>Il me semble que l’appellation « variété de Shimura » apparait pour la première fois dans [Lan76].



Le nombre 2023 peut donc s'écrire comme la somme de 4 carrés entiers. On peut trouver d'autres écritures de cette forme, par exemple :

$$2023 = 19^2 + 19^2 + 25^2 + 26^2$$

Deux questions viennent alors à l'esprit :

- (1) Est ce que tout nombre entier positif peut s'écrire comme la somme de 4 carrés entiers ?
- (2) Combien de décompositions existe-t-il pour un entier ?

La réponse à la première question est positive : pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  il existe quatre entiers  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$  tels que :

$$n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Ce résultat est plus connu sous le nom de théorème de Lagrange et a été démontré par Lagrange en 1770 ([Lag70]). Pour la deuxième question, on aimerait avoir une formule explicite en fonction de  $n \in \mathbb{N}$  pour la quantité :

$$r_4(n) = \#\{(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \mid n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2\}$$

Jacobi a démontré en 1834 ([Jac34]) que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  on avait l'égalité suivante :

$$r_4(n) = 8 \sum_{\substack{d|n, \\ 4 \nmid d}} d \tag{1.1.1}$$

Par exemple pour  $n = 2023 = 7 \times 17^2$  on trouve qu'il y a

$$r_4(2023) = 8(1 + 7 + 17 + 119 + 289 + 2023) = 19\,648$$

possibilités d'écrire 2023 comme somme de quatre carrés entiers. Pour comprendre comment on peut arriver à démontrer l'égalité (1.1.1), considérons la série suivante :

$$\Theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n^2 z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}, \quad q = e^{2\pi i z}$$

Cette série converge absolument sur le demi-plan de Poincaré complexe :

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$$

Pour faire le lien avec les nombres  $r_4(n)$ , considérons la série génératrice :

$$F(q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} r_4(n) q^n = 1 + 8q + 24q^2 + 32q^3 + 24q^4 + 48q^5 + 96q^6 + \dots$$

La formule de sommation de Cauchy pour les produits de séries montre que l'on a l'égalité :

$$F(q) = \Theta(z)^4$$

Par conséquent pour connaître les entiers  $r_4(n)$  il suffit de connaître les coefficients apparaissant dans la série  $\Theta(z)^4$ . Cela suggère donc d'étudier la série  $\Theta(z)$ . On peut montrer que cette série satisfait les équations fonctionnelles suivantes :

$$\Theta(z+1) = \Theta(z), \quad \Theta\left(\frac{-1}{4z}\right) = \sqrt{-2iz} \Theta(z)$$

Il en découle que pour toute matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  telle que  $c \equiv 0 \pmod{4}$  la série  $\Theta(z)^4$  satisfait l'équation :

$$\Theta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^4 = (cz+d)^2 \Theta(z)^4$$

**Formes modulaires.** Cela nous amène à la définition de formes modulaires. Avant de donner une définition précise, fixons quelques notations. Le groupe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  agit sur le demi-plan de Poincaré  $\mathbb{H}$  par homographie

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \tag{1.1.2}$$

Un sous groupe de congruence est un sous groupe  $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  qui contient un sous-groupe  $\Gamma(N)$  pour un certain entier  $N \geq 0$ , où  $\Gamma(N) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  est le sous-groupe défini par

$$\Gamma(N) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

Par exemple le groupe  $\Gamma_0(4)$  utilisé pour la série  $\Theta(z)^4$  est un sous-groupe de congruence car il satisfait :

$$\Gamma(4) \subset \Gamma_0(4) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \pmod{4} \right\}$$

On peut maintenant donner la définition d'une forme modulaire. Fixons  $\Gamma$  un sous groupe de congruence est  $k \in \mathbb{Z}$  un entier. Une forme modulaire de niveau  $\Gamma$  et de poids  $k$  est une fonction complexe sur le demi plan de Poincaré :

$$f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$$

qui satisfait les conditions suivantes :

(1)  $f$  est holomorphe sur  $\mathbb{H}$

(2) pour toute matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  et tout  $z \in \mathbb{H}$  on a la l'égalité

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$$

(3)  $f$  est holomorphe aux pointes.<sup>2</sup>

On notera  $\mathcal{M}_k(\Gamma)$  l'ensemble des formes modulaires de poids  $k$  et de niveau  $\Gamma$ . Une fonction satisfaisant les hypothèses (1) et (2) est appelée forme faiblement modulaire. Un exercice élémentaire montre que l'équation fonctionnelle satisfaite par une forme modulaire  $f$  de niveau  $\Gamma$  et de poids  $k$  impose l'égalité suivante pour tout  $z \in \mathbb{H}$  :

$$f(z+h) = f(z)$$

où  $h \in \mathbb{N}$  est un certain entier qui dépend du niveau  $\Gamma$ . Autrement dit  $f$  est horizontalement périodique. En particulier  $f$  se factorise par l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\} \\ z &\longmapsto q = e^{2i\pi z/h} \end{aligned}$$

et admet un développement en série de Fourier :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(f) q^n, \quad q = e^{2i\pi z/h}$$

Pour le groupe  $\Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  la condition «  $f$  est holomorphes aux pointes » est équivalente à ce que la fonction induite sur le disque épointé  $\mathbb{D}^*$  se prolonge en une fonction holomorphe sur le disque tout entier  $\mathbb{D}$  (ou autrement dit que les coefficients  $a_n(f)$  soient nuls pour tout  $n < 0$ ). Puisque  $|q| = e^{-2\pi \mathrm{Im}(z)/h}$ , on voit que  $|q| \rightarrow 0$  lorsque  $\mathrm{Im}(z) \rightarrow \infty$ . La condition 3 est donc une condition sur le comportement de  $f$  lorsque  $\mathrm{Im}(z) \rightarrow \infty$ . Le développement en série de Fourier de  $f$  est aussi appelé le «  $q$ -développement » de  $f$ .

Revenons à notre problème des sommes de quatre carrés. Nous avons vu que la série  $\Theta(z)^4$  était une forme modulaire de poids 2 et de niveau  $\Gamma_0(4)$ . Une étude approfondie de l'espace  $\mathcal{M}_2(\Gamma_0(4))$  des formes modulaires de poids 2 et de niveau  $\Gamma_0(4)$  montre que c'est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 2. Trouver une base de  $\mathcal{M}_2(\Gamma_0(4))$  ainsi que les coordonnées de  $\Theta(z)^4$  dans cette base nous permettrait d'obtenir une formule pour les coefficients  $r_4(n)$ . Pour ce faire, introduisons les séries d'Eisenstein de niveau  $k$ , où  $k \geq 4$  est un entier pair :

$$G_k(z) = \frac{(k-1)!}{2(2\pi i)^k} \sum_{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(cz+d)^k}$$

C'est une forme modulaire de poids  $k$  et de niveau  $\Gamma(1)$  dont le  $q$ -développement est :

$$G_k(q) = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n \tag{1.1.3}$$

---

<sup>2</sup>pour tout  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  la quantité  $|(cz+d)^{-k} f(\frac{az+b}{cz+d})|$  est bornée lorsque  $\mathrm{Im}(z) \rightarrow \infty$

où  $B_k$  désigne le  $k$ -ème nombre de Bernoulli et  $\sigma_{k-1}(n)$  désigne la fonction arithmétique :

$$\sigma_{k-1}(n) = \sum_{\substack{d|n, \\ d>0}} d^{k-1}$$

Notons que pour  $k = 2$  la formule (1.1.3) fait sens et nous permet donc de définir  $G_2(q)$ , bien que cette dernière ne soit pas une forme modulaire. Il est commode d'introduire les séries d'Eisenstein normalisées :

$$E_k = -\frac{2k}{B_k}G_k = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n)q^n$$

de sorte à ce que le coefficient constant soit égal à 1. Voici quelques exemples :

$$E_2(q) = 1 - 24 \sum_{n \geq 1} \sigma_1(n)q^n = 1 - 24q - 72q^2 - 96q^3 - 168q^4 - 144q^5 + \dots$$

$$E_4(q) = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n)q^n = 1 + 240q + 2160q^2 + 6720q^3 + 17520q^4 + \dots$$

$$E_6(q) = 1 - 504 \sum_{n \geq 1} \sigma_5(n)q^n = 1 - 504q - 16632q^2 - 122976q^3 - 532728q^4 + \dots$$

Bien que  $E_2$  ne soit pas une forme modulaire, on peut montrer que les séries  $E_2(q) - 2E_2(q^2)$  et  $E_2(q) - 4E_2(q^4)$  sont des formes modulaires de poids 2 et de niveau  $\Gamma_0(4)$  qui forment une base de  $\mathcal{M}_2(\Gamma_0(4))$ . Il ne reste plus qu'à trouver les coordonnées de  $\Theta(z)^4$  dans cette base. En comparant les premières valeurs des  $q$ -développements respectifs on obtient la relation :

$$\Theta(z)^4 = F(q) = -\frac{1}{3}(E_2(q) - 4E_2(q^2))$$

et finalement l'égalité souhaitée en identifiant les coefficients des deux séries ci-dessus :

$$r_4(n) = 8 \sum_{\substack{d|n, \\ 4 \nmid d}} d$$

Cet exemple explique l'une des caractéristique des formes modulaires : ce sont des objets analytiques qui possèdent, de par l'équation fonctionnelle qu'ils satisfont, des propriétés arithmétiques remarquables.

**Congruences entre formes modulaires.** Nous avons vu plus haut que les formes modulaires  $E_4$  et  $E_6$  avaient des coefficients de Fourier entiers. Voici un autre exemple de forme modulaire dont les coefficients de Fourier sont entiers :

$$\Delta = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n \geq 1} \tau(n)q^n$$

où  $\tau$  désigne la fonction tau de Ramanujan. C'est une forme modulaire de niveau  $\Gamma(1)$  et de poids 12, appelée discriminant modulaire. Voici les premiers termes de sa  $q$ -expansion :

$$\Delta = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + 4830q^5 - 6048q^6 + \dots$$

Ramanujan a démontré en 1916 ([[Ram16](#)]) que l'on avait la congruence suivante :

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691} \quad (n \geq 1)$$

Donnons quelques éléments de preuve. Les deux fonctions arithmétiques  $\tau(n)$  et  $\sigma_{11}(n)$  apparaissent respectivement dans les séries  $\Delta$  et  $E_{12}$ . Le premier coefficient de Fourier de  $\Delta$  est nul, on dit que c'est une forme cuspidale. On peut montrer que l'espace  $S_{12}(\Gamma(1))$  des formes cuspidales de poids 12 et de niveau  $\Gamma(1)$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 1. Le série d'Eisenstein  $E_{12}$  est de poids 12 mais n'est pas une forme cuspidale, son premier coefficient étant égal à 1 :

$$E_{12}(q) = 1 + \frac{65520}{691} \sum_{n \geq 1} \sigma_{11}(n)q^n = 1 + \frac{65520}{691}q + \frac{134250480}{691}q^2 + \frac{11606736960}{691}q^3 + \dots$$

L'idée est de considérer la forme modulaire  $E_{12} - E_6^2$ . C'est une forme modulaire cuspidale de poids 12 par construction. D'après ce qui précède elle est donc proportionnelle à  $\Delta$ . Une inspection des premiers coefficients montre que l'on a l'égalité :

$$E_{12} - E_6^2 = \frac{762048}{691} \Delta$$

En identifiant chacun des coefficients (après avoir multiplié des deux cotés par 691 pour enlever les dénominateurs) et en réduisant modulo 691 on obtient la congruence :

$$65520\sigma_{11}(n) \equiv 762048\tau(n) \pmod{691}$$

Le résultat en découle car  $65520 \equiv 762048 \equiv 566 \pmod{691}$  est inversible modulo 691. La congruence de Ramanujan découle donc d'une congruence entre deux formes modulaires<sup>3</sup> :

$$691E_{12} \equiv \Delta \pmod{691}$$

Les congruences de Ramanujan ont été généralisées par la suite avec les travaux de Serre et Deligne [[Ser06](#)], [[Del06](#)], [[Ser67](#)], Swinnerton-Dyer [[SD73](#)], et Katz [[Kat75](#)].

**Courbes modulaires.** Une courbe elliptique  $E$  sur  $\mathbb{C}$  est un tore complexe de dimension 1, c'est-à-dire un quotient  $E = \mathbb{C}/\Lambda$  où  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  est un réseau. De façon plus concrète, un résultat sur les fonctions elliptiques de Weierstrass nous garantit que toute courbe elliptique peut être vue comme l'ensemble des solutions de l'équation complexe<sup>4</sup> :

$$y^2 = x^3 + ax + b \quad (x, y) \in \mathbb{C}^2$$

<sup>3</sup>plus précisément : entre les coefficients de Fourier de même indices.

<sup>4</sup>où plus rigoureusement comme l'ensemble des solution  $[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  de l'équation homogène associée

Quitte à composer avec une homothétie, on peut supposer que le réseau  $\Lambda$  est de la forme  $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ , où  $\tau \in \mathbb{H}$  désigne un point du demi-plan de Poincaré supérieur. Etant donné  $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$  un petit calcul montre que les courbes elliptiques  $E_\tau$  et  $E_{\tau'}$  sont isomorphes si et seulement si il existe une matrice  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  telle que  $\gamma \cdot \tau = \tau'$  (ici  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  agit sur  $\mathbb{H}$  par homographie (1.1.2)). Autrement dit on dispose d'une bijection :

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} &\longrightarrow \{E \text{ courbes elliptiques sur } \mathbb{C}\} / \sim \\ [\tau] &\longmapsto E_\tau = \mathbb{C} / (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau) \end{aligned}$$

où le membre de droite désigne l'ensemble des courbes elliptiques complexes à isomorphismes près. Ce quotient est appelé courbe modulaire. Il est naturel de se demander ce qu'il se passe lorsque l'on remplace  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  par un sous-groupe de congruence. Pour les groupes  $\Gamma(N)$  on obtient une bijection :

$$\Gamma(N) \backslash \mathbb{H} \longrightarrow \left\{ (E, \eta) \mid \begin{array}{l} E \text{ courbe elliptique sur } \mathbb{C} \\ \eta : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \simeq E[N] \end{array} \right\}$$

où  $E[N]$  désigne les points de  $N$ -torsion. Ce quotient est appelé courbe modulaire de niveau  $\Gamma(N)$ . On dispose d'une description similaire pour les quotients par les sous-groupes de congruence généraux. On notera  $Y_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{H}$  la courbe modulaire de niveau  $\Gamma$ . Intéressons nous aux 1-formes différentielles sur  $Y_\Gamma$ . Elles sont de la forme

$$\omega(z) = f(z)dz$$

où  $f$  est une fonction holomorphe défini sur  $\mathbb{H}$ . Pour que  $\omega$  soit bien défini sur le quotient  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  elle doit satisfaire l'équation :

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \\ &= f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} dz \\ &= f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \frac{1}{(cz+d)^2} dz = \omega(z) \end{aligned}$$

Autrement dit  $f$  doit satisfaire l'équation fonctionnelle d'une forme modulaire de poids  $k = 2$  et de niveau  $\Gamma$ . Un raisonnement analogue pour un entier  $k \in \mathbb{Z}$  quelconque permet de réinterpréter les formes (faiblement) modulaires de poids  $2k$  et de niveau  $\Gamma$  comme des  $k$ -formes différentielles sur  $Y_\Gamma$ . Pour résumer les formes (faiblement) modulaires de poids  $2k$  et de niveau  $\Gamma$  peuvent s'interpréter comme des éléments du groupe de cohomologie

$$H^0(Y_\Gamma, (\Omega_{Y_\Gamma}^1)^{\otimes k}) \tag{1.1.4}$$

**Remarque 1.1.1.** Pour parler de formes modulaires il faut introduire la compactification  $X_\Gamma$  de la courbe modulaire  $Y_\Gamma$ . Le bord  $D = X_\Gamma - Y_\Gamma$  s'interprète comme l'ensemble des

pointes et la relation  $2i\pi dz = dq/q$  nous permet de réinterpréter les formes modulaires de poids  $2k$  et de niveau  $\Gamma$  comme des  $k$ -formes différentielles sur  $X_\Gamma$  avec un pôle d'ordre au plus  $k$  le long du bord  $D$  (condition d'holomorphicité aux pointes). En résumé les formes modulaires de poids  $2k$  et de niveau  $\Gamma$  peuvent s'interpréter comme des éléments du groupe :

$$H^0(X_\Gamma, (\Omega_{X_\Gamma}^1)^{\otimes k}(-kD))$$

Pour simplifier la lecture nous omettons cette condition au bord et nous appellerons forme modulaire ce qu'il faudrait appeler forme faiblement modulaire.

**Version schématique des courbes modulaires.** La discussion ci-dessus nous fournit un point de vue géométrique sur les formes modulaires. De nombreux outils de géométrie complexes peuvent notamment être utilisés pour démontrer des propriétés sur les espaces de formes modulaires (dimensions des espaces  $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ , opérateurs de Hecke...). Pour pouvoir étudier les congruences modulo un entier, il faut pouvoir parler de formes modulaires à coefficients (de Fourier) entiers, ce qui n'est pas possible puisque nous travaillons pour le moment sur  $\mathbb{C}$ . Pour résoudre ce problème il est nécessaire de passer dans le monde des schémas. Pour simplifier, plaçons nous dans le cadre du sous-groupe de congruence  $\Gamma(N)$ . On définit le foncteur

$$Y_{\Gamma(N)} : \text{Sch}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \longrightarrow \text{Set}$$

$$S \longmapsto \left\{ (E, \eta) \mid \begin{array}{l} E \rightarrow S \text{ courbe elliptique} \\ \eta : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})_S^2 \simeq E[N] \end{array} \right\} / \sim$$

où  $\eta$  est une similitude symplectique<sup>5</sup>  $\text{Sch}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]}$  désigne la catégorie des schémas sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{N}])$ . Un résultat de Serre [Gro61] (Appendice) montre que pour  $N \geq 3$  ce foncteur est représentable par un schéma, que l'on continue de noter  $Y_{\Gamma(N)}$ . Ce schéma vient avec une courbe elliptique universelle :

$$E^{\text{univ}} \xrightarrow{\quad e \quad} Y_{\Gamma(N)}$$

où  $e : Y_{\Gamma(N)} \rightarrow E^{\text{univ}}$  désigne la section unité. On définit le fibré de Hodge comme le faisceau :

$$\omega = e^* \Omega_{E^{\text{univ}}/Y_{\Gamma(N)}}^1$$

qui est un faisceau localement libre de rang 1. Soit  $R$  un anneau sur  $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ . On appelle forme modulaire de poids  $k$  de niveau  $\Gamma(N)$  à coefficients dans  $R$  les éléments du groupe :

$$H^0(Y_{\Gamma(N)}, \omega^{\otimes k} \otimes_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} R)$$

Pour faire le lien avec la définition dans le cas complexe il est nécessaire d'introduire l'isomorphisme de Kodaira-Spencer :

$$\omega^{\otimes 2} \simeq \Omega_{Y_{\Gamma(N)}}^1$$

qui redonne pour les poids pairs la définition géométrique (1.1.4) dans le cas complexe.

---

<sup>5</sup>où  $E[N]$  est muni de l'accouplement de Weil et  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})_S^2$  de l'accouplement symplectique standard.

Dans [Kat75] Katz utilise ce point de vue géométrique pour étudier de façon systématique les congruences entre formes modulaires modulo un nombre premier  $p$ . Dans ces travaux il utilise de façon cruciale une forme modulaire appelée invariant de Hasse, construite comme suit :

1. Si  $S$  est un schéma de caractéristique  $p$  et  $f : E \rightarrow S$  est une courbe elliptique on dispose du morphisme de Frobenius (relatif)  $F : E \rightarrow E^{(p)}$ . Le Frobenius induit une application :

$$F^* : (R^1 f_* \mathcal{O}_E)^{(p)} = (R^1 f_* \mathcal{O}_E)^{\otimes p} \rightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_E$$

Le dual de cette application est une section d'une puissance du fibré de Hodge :

$$\text{Ha} \in H^0(S, \omega_{E/S}^{\otimes(p-1)})$$

appelée invariant de Hasse de la courbe elliptique  $E/S$ .

2. On applique cette construction à la courbe elliptique universelle sur  $\mathbb{F}_p$  :

$$E^{\text{univ}} \otimes \mathbb{F}_p \rightarrow Y_{\Gamma(N)} \otimes \mathbb{F}_p$$

Le  $q$ -développement de l'invariant de Hasse est 1. Un résultat de Deligne montre que pour tout  $p \geq 5$  la  $q$  expansion de la série d'Eisenstein  $E_{p-1}$  est congru à 1 modulo  $p$ . Autrement dit on a la congruence :

$$\text{Ha} \equiv E_{p-1} \pmod{p}$$

et la forme modulaire  $E_{p-1}$  apparaît alors comme un relèvement de l'invariant de Hasse en caractéristique 0. C'est cette congruence qui a permis à Katz de retrouver (et généraliser) géométriquement des résultats de congruences modulo  $p$  (resp. modulo des puissances de  $p$ ) de Swinnerton-Dyer [SD73].

**Stratification des variété de Shimura.** On rappelle qu'une courbe elliptique  $E/\mathbb{F}_p$  est dite ordinaire (resp. supersingulière) si le groupe des points de  $p$ -torsion  $E[p](\overline{\mathbb{F}}_p)$  contient  $p$  éléments (resp. contient un seul élément). Cette distinction permet de construire une décomposition de la fibre spéciale :

$$Y_{\Gamma(N)} \otimes \mathbb{F}_p = Y_{\text{ordinaire}} \bigsqcup Y_{\text{supersingulier}} \tag{1.1.5}$$

où  $Y_{\text{ordinaire}}$  (resp.  $Y_{\text{supersingulier}}$ ), appelé lieu ordinaire (resp. lieu supersingulier), correspond aux points dont la courbe elliptique est ordinaire (resp. supersingulière). L'une des propriétés élémentaires de l'invariant de Hasse construit ci-dessus est que son lieu d'inversibilité correspond précisément au lieu ordinaire, et son lieu d'annulation au lieu supersingulier. On dit que cette décomposition est une « stratification » car le lieu ordinaire est dense dans la fibre spéciale. L'utilisation de l'invariant de Hasse et du lieu



ordinaire a eu de nombreuses applications arithmétiques, notamment dans l'étude des congruences entre formes modulaires (voir par exemple [Hid86]).

Les courbes modulaires sont des cas particulier de ce que l'on appelle des variétés de Shimura. Dans cette thèse on s'intéresse aux variétés de Shimura de type PEL. Ce sont des espaces de modules de variétés abéliennes munies de certaines données. Ces variétés permettent de définir des objets analogues aux formes modulaires (formes modulaires de Hilbert, formes modulaires de Siegel etc). Comme pour les courbes modulaires, certaines propriétés arithmétiques de ces objets sont encodées dans la géométrie de la fibre spéciale de la variété de Shimura correspondante. Malheureusement il se peut que le lieu ordinaire de ces variétés (défini comme le lieu des variétés abéliennes de  $p$ -rang maximal) soit vide, ce qui pose problème notamment lorsque l'on souhaite généraliser les travaux de Hida [Hid86][Hid02] à des groupes plus généraux que  $GL_2$ . Dans ce cas il faut alors remplacer le lieu ordinaire par le lieu  $\mu$ -ordinaire, qui est un ouvert défini par une certaine condition sur la variété abélienne (et qui coïncide avec le lieu ordinaire lorsque ce dernier est non-vide). Il faut également définir un invariant de Hasse qui détecte ce lieu  $\mu$ -ordinaire. De tels invariants ont été construits dans [GN13][Her16] lorsque la donnée PEL est non ramifiée, et dans [BH16] dans le cas ramifié. A l'exception d'une donnée PEL de type (AR) (voir 2.2.1 pour une définition précise), le lieu  $\mu$ -ordinaire est toujours un ouvert dense de la fibre spéciale. Ce résultat a été démontré par Wedhorn [Wed99] dans le cas non ramifié et par Bijakowski et Hernandez dans [BH22b].

D'autres stratifications généralisant (1.1.5) ont également été définies pour des variétés de Shimura plus générales que les courbes modulaires, voir par exemple [Oor01] (cas Siegel) [GO00] (cas Hilbert) [VW13] (cas PEL non-ramifié). Parmi elles on trouve la stratification d'Ekedahl-Oort, dont les strates correspondent aux classes d'isomorphismes des sous-groupes de  $p$ -torsion des variétés abéliennes. Comme pour le cas de la courbe modulaire on peut définir certaines sections du fibré de Hodge, appelés invariants de Hasse généralisés, dont les lieux de non-annulation correspondent exactement aux strates d'Ekedahl-Oort (voir [Gor01][GK15]). Ces stratifications et ces invariants de Hasse ont eu de nombreuses applications arithmétiques, notamment pour des calculs en cohomologie cohérente (voir par exemple [Box15a],[GK15]).

Les stratification d'Ekedahl-Oort des variétés de Shimura de type PEL ont été construites uniquement dans le cas non-ramifié<sup>6</sup>. L'objectif de cette thèse est de construire des stratifications de type Ekedahl-Oort pour des variétés de Shimura de type PEL dont la donnée PEL est ramifiée.

## 1.2 Présentation des résultats

La définitions des variétés de Shimura et des variétés de Shimura de type PEL sont assez techniques, en particulier lorsque l'on souhaite définir les modèles entiers. Nous allons donc nous placer dans le cas le plus simple, le cas Hilbert PEL. Bien sûr nous

---

<sup>6</sup>Au cours de cette thèse Xu Shen et Yuqiang Zheng ont construit une stratification d'Ekedahl-Oort dans le cas d'une donnée PEL ramifiée.

préciserons pour chaque résultat s'il est vrai dans le cas PEL général.

**Modèles entiers de Kottwitz** Pour ne pas compliquer les définitions, nous allons directement nous placer sur  $\mathbb{Z}_p$ . Soit  $F/\mathbb{Q}$  une extension totalement réelle de degré  $d = [F : \mathbb{Q}]$ . Notons  $\mathcal{D}$  la donnée Hilbert PEL associée (de type (C) et  $g = 1$ , voir section 3.2.2.1). On se place en niveau  $K = K_p K^p \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F^f)$  parahorique maximal en  $p$ . Notons  $\mathrm{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\mathrm{naïf}}$  le schéma sur  $\mathbb{Z}_{(p)}$  représentant le foncteur qui a un schéma  $S$  associe les tuples  $(A, \lambda, \iota, \kappa)$  où  $A/S$  est une variété abélienne de dimension  $d$ ,  $\lambda$  est une polarisation première à  $p$ ,  $\iota$  est une action de l'anneau d'entiers  $\mathcal{O}_F$  sur  $A$ , et  $\kappa$  est une structure de niveau première à  $p$ . On demande également à ce que la donnée satisfasse la condition de déterminant de Kottwitz (voir 2.3.5, 2.3.4). Le schéma  $\mathrm{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\mathrm{naïf}}$  est appelé modèle entier de Kottwitz de la donnée  $\mathcal{D}$ . Sur  $\mathbb{Z}_p$  on dispose d'une décomposition :

$$\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p = \bigoplus_{v|p} \mathcal{O}_{F_v}$$

où  $F_v$  désigne la complétion de  $F$  le long de la place  $v$  au dessus de  $p$ . Comme nous allons nous intéresser à la réduction modulo  $p$  du schéma  $\mathrm{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\mathrm{naïf}}$ , on peut regarder le changement de base de  $\mathrm{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\mathrm{naïf}}$  sur  $\mathbb{Z}_p$ . La donnée d'une action  $\iota$  sur un schéma abélien sur  $\mathbb{Z}_p$  est alors équivalente à une action des anneaux  $\mathcal{O}_{F_v}$  pour toute place  $v$  au dessus de  $p$ . Pour ne pas alourdir les notations, on suppose qu'il n'y a qu'une seule place au dessus de  $p$  dans  $F$ , et on fait l'abus de noter  $F/\mathbb{Q}_p$  l'extension associée. On continue également de noter  $\mathrm{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\mathrm{naïf}}$  le changement de base du modèle de Kottwitz sur  $\mathbb{Z}_p$ .

Soit  $S$  un schéma sur  $\mathbb{Z}_p$  et  $(A, \lambda, \iota, \kappa) \in \mathrm{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\mathrm{naïf}}(S)$ . On dispose de la filtration de Hodge :

$$0 \rightarrow \omega_{A/S} \rightarrow H_{\mathrm{dR}}^1(A/S) \rightarrow \mathrm{Lie}_{A^\vee/S} \rightarrow 0$$

Le  $\mathcal{O}_S$ -module  $H_{\mathrm{dR}}^1(A/S)$  est muni par functorialité d'une action de l'anneau  $\mathcal{O}_F$  et est localement libre de rang 2 en tant que  $\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S$ -module. Notons  $\mathcal{G}$ , le schéma en groupe sur  $\mathbb{Z}_p$  des automorphismes du réseau  $\Lambda = \mathcal{O}_F^2$  et  $\mu$  le cocaractère de Hodge de  $\mathcal{G}$  associé à la donnée  $\mathcal{D}$ . Il est bien connu que l'on dispose d'un « diagramme de modèle local » :

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\mathrm{naïf}, \square} & \\ \varphi \swarrow & & \searrow \psi \\ \mathrm{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\mathrm{naïf}} & & \mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\mathrm{naïf}} \end{array}$$

où  $\varphi$  désigne le  $\mathcal{G}$ -torseur paramétrant les trivialisations du faisceau  $H_{\mathrm{dR}}^1(A/S)$ ,  $\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\mathrm{naïf}}$  est le schéma paramétrant les sous  $\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S$ -modules  $\mathcal{F} \subset \Lambda \otimes \mathcal{O}_S$  localement libre de rang  $d$  (en tant que  $\mathcal{O}_S$ -module) satisfaisant la condition de déterminant de Kottwitz, et  $\psi$  est induit par la filtration de Hodge. Le schéma  $\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\mathrm{naïf}}$  est appelé modèle local (naïf) pour la donnée  $(\mathcal{D}, K^p)$ . Le groupe  $\mathcal{G}$  agit sur le schéma  $\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\mathrm{naïf}}$  et induit une décomposition en orbites de la fibre spéciale

$$\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\mathrm{naïf}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{F}}_p = \coprod_{w \in \mathrm{Adm}_K(\mu)} M_w$$

appelée stratification de Kottwitz-Rapoport. Ces orbites correspondent aux classes d'isomorphismes de filtration  $\mathcal{F} \subset \Lambda$ . L'ensemble  $\text{Adm}_K(\mu)$  est appelé ensemble admissible (de niveau  $K$ )<sup>7</sup>. Il est partiellement ordonné et possède un élément maximal  $w_0 \in \text{Adm}_K(\mu)$ . La stratification ci-dessus est une bonne stratification dans le sens où pour tout  $w \in \text{Adm}_K(\mu)$  on a la relation d'adhérence :

$$\overline{M_w} = \bigsqcup_{w' \leq w} M_{w'}$$

La strate maximale  $M_{w_0}$  est un ouvert dense de  $\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\text{naïf}} \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$  et coïncide avec le lieu lisse. Le morphisme  $\psi$  étant lisse, cette décomposition en orbites induit une stratification :

$$\mathcal{Sh}_{(\mathcal{G}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{F}}_p = \coprod_{w \in \text{Adm}_K(\mu)} S_w$$

également appelée stratification de Kottwitz-Rapoport (KR). Par définition les strates paramétrisent les classes d'isomorphismes de filtration de Hodge  $\omega_A \subset H_{\text{dR}}^1(A)$ .

Fixons une extension finie  $K/\mathbb{Q}_p$  contenant la clôture galoisienne de  $F$ . Soit  $S$  un schéma sur  $\mathcal{O}_K$ . Si l'extension  $F/\mathbb{Q}_p$  est non ramifiée on dispose d'une décomposition en somme directe :

$$\omega_{A/S} = \bigoplus_{\varphi: \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_K} \omega^{(\varphi)} \quad (1.2.1)$$

où  $\omega^{(\varphi)}$  désigne la sous-espace où  $\mathcal{O}_F$  agit via le plongement  $\varphi : \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_K$ . La stratification KR est alors composée d'une seule orbite et par conséquent la fibre spéciale  $\mathcal{Sh}_{(\mathcal{G}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$  est lisse. Si l'on suppose l'extension  $F/\mathbb{Q}_p$  ramifiée on ne dispose pas de décomposition en somme directe du faisceau  $\omega_{A/S}$  et la stratification KR est alors non-triviale. En particulier dans le cas ramifiée la fibre spéciale n'est pas lisse.

**Modèles entiers de Pappas-Rapoport** Pour remédier à ce problème de lissité <sup>8</sup> Pappas et Rapoport ont défini dans [PR02] un modèle entier qui est lisse. Pour simplifier les notations, on suppose l'extension  $F/\mathbb{Q}_p$  totalement ramifiée. Fixons une numérotation  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_e\}$  des plongements de  $F$  dans  $K$ . Pappas et Rapoport ont construit dans [PR02] un modèle entier  $\mathcal{Sh}_{(\mathcal{G}, K^p)}^{\text{PR}}$  qui dont les  $S$ -points classifient les tuples  $(A, \lambda, \iota, \kappa, \omega^{(\bullet)})$  où  $(A, \lambda, \iota, \kappa) \in \mathcal{Sh}_{(\mathcal{G}, K^p)}^{\text{naïf}}(S)$  et  $\omega^{(\bullet)}$  est une filtration du fibré de Hodge de  $A/S$  :

$$0 = \omega^{(0)} \subset \omega^{(1)} \subset \dots \subset \omega^{(e)} = \omega_{A/S} \quad (1.2.2)$$

satisfaisant pour tout  $1 \leq i \leq e$  :

<sup>7</sup>Pour être rigoureux, il faudrait faire la distinction entre la décomposition en orbites de la fibre spéciale du modèle naïf  $\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\text{naïf}} \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$  qui n'est pas plat, et celle du « vrai » modèle local (la clôture schématique de la fibre générique  $\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\text{naïf}} \otimes \mathbb{Q}_p$  dans  $\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\text{naïf}}$ ) qui est plat. Dans la littérature, l'ensemble admissible désigne l'ensemble des orbites dans le « vrai » modèle local. Dans le cas Hilbert les deux schémas coïncident et il n'y a donc pas besoin de faire de distinction.

<sup>8</sup>Les travaux de Pappas-Rapoport portaient plutôt sur les problèmes de platitude.

- $\omega^{(i)}$  est localement facteur direct de rang  $i$  sur  $S$
- pour tout  $a \in \mathcal{O}_F$  on a l'inclusion :

$$(a \otimes 1 - 1 \otimes \varphi_i(a)) \cdot \omega^{(i)} \subset \omega^{(i-1)}$$

Si  $S$  est un schéma sur  $K$ , alors la décomposition en somme directe (1.2.1) est toujours valide et nous fournit une filtration canonique satisfaisant les propriétés ci-dessus. L'oubli de cette filtration induit un morphisme :

$$\pi : \mathbf{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \longrightarrow \mathbf{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K$$

qui est un isomorphisme en fibre générique. Il est naturel de se demander si la filtration KR de la fibre spéciale du modèle de Kottwitz induit, en tirant en arrière le long du morphisme  $\pi$ , une bonne stratification du modèle de Pappas-Rapport. La réponse est non en général comme l'ont montré Bijakowski et Hernandez dans [BH22b] (Proposition 3.9). On note  $k$  le corps résiduel de  $K$ . Dans le cas Hilbert on montre le théorème suivant

**Théorème 1.2.1** (Théorème 3.4.5). *Soit  $\mathcal{D}$  une donnée PEL de type Hilbert. La décomposition :*

$$\mathbf{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes_{\mathcal{O}_K} k = \coprod_{\lambda \in \text{Adm}_K(\mu)} S_\lambda^{\text{PR}}, \quad S_\lambda^{\text{PR}} := \pi^{-1}(S_\lambda^{\text{naïf}})$$

est une bonne stratification de  $\mathbf{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes_{\mathcal{O}_K} k$ . Pour tout  $\lambda \in \text{Adm}_K(\mu)$ , la strate  $S_\lambda^{\text{PR}}$  est quasi-projective lisse de dimension :

$$\dim(S_\lambda^{\text{PR}}) = \langle \rho, |\mu_\bullet| + \lambda \rangle$$

Dans le théorème ci-dessus  $\mu_\bullet = (\mu_\varphi)_{\varphi: F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}}$  désigne le cocaractère de Hodge de la donnée Hilbert et  $|\mu_\bullet| = \sum_\varphi \mu_\varphi$  (voir la section 3.4 pour plus de détails).

On se place maintenant dans le cas d'une donnée PEL quelconque. Notons  $\mathbf{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{can}}$  le sous-schéma de  $\mathbf{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}}$  défini comme l'image schématique de la composée :

$$\mathbf{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \rightarrow \mathbf{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K \rightarrow \mathbf{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}}$$

Dans le cas Hilbert ce schéma coïncide avec  $\mathbf{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}}$ <sup>9</sup>. On montre le résultat suivant concernant la géométrie du morphisme  $\pi$  en restriction aux strates KR.

**Théorème 1.2.2** (Théorème 3.2.19). *Soit  $\mathcal{D}$  une donnée PEL ne faisant intervenir que des facteurs de type (AL) ou (C). Pour tout  $\lambda \in \text{Adm}_K(\mu)$  la restriction du morphisme  $\pi$  :*

$$\pi|_\lambda : \mathcal{S}_\lambda^{\text{PR}} \longrightarrow \mathcal{S}_\lambda^{\text{can}}$$

est un morphisme plat.

<sup>9</sup>Dans le cas Hilbert se morphisme est surjectif et le schéma  $\mathbf{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}}$  est plat, voir [PR00] ou 3.2.7.

En particulier en restriction aux strates KR le morphisme est ouvert. Dans le cas ramifié, de nombreuses stratifications ont été définies pour les modèles  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{G}, K^p)}^{\text{naïf}}$  et  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{G}, K^p)}^{\text{can}}$  et ont toutes pour point commun de raffiner la stratification KR. Ce théorème implique que les stratifications d'une strate  $S_\lambda$  remontent bien en une bonne stratification de  $S_\lambda^{\text{PR}}$  (voir la discussion 4.1.2.2 pour plus de détails).

Comme pour le modèle entier de Kottwitz on dispose d'un diagramme de modèle local

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{S}h_{(\mathcal{G}, K^p)}^{\text{PR}, \square} & \\ \varphi \swarrow & & \searrow \psi \\ \mathcal{S}h_{(\mathcal{G}, K^p)}^{\text{PR}} & & \mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\text{PR}} \end{array}$$

où  $\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\text{PR}}$  désigne le schéma paramétrant les filtrations  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \subset \Lambda$  satisfaisant les mêmes conditions que (1.2.2). Le schéma  $\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\text{PR}}$  est également muni d'une action du groupe  $\mathcal{G}$  mais la description des orbites dans la fibre spéciale semble compliquée en générale. Ces orbites correspondent aux classes d'isomorphismes de filtration  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \subset \Lambda$ . Dans [Bij22] le calcul de ces classes d'isomorphismes est fait pour le cas Hilbert-Siegel et le cas unitaire, pour des indices de ramifications  $e \leq 3$ . On montre le résultat suivant dans le cas Hilbert :

**Théoreme 1.2.3** (§3.5.4). *Pour une donnée PEL de type Hilbert d'indice de ramification  $e \leq 5$  le nombre de  $\mathcal{G}_k$ -orbites dans la fibre spéciale  $\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\text{PR}} \otimes_{\mathcal{O}_K} k$  est fini et induit une bonne stratification :*

$$\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\text{PR}} \otimes_{\mathcal{O}_K} k = \coprod_{w \in \mathcal{A}(\mu_\bullet)} M_w$$

où  $\mathcal{A}(\mu_\bullet)$  est un certain ensemble partiellement ordonné explicite indexant les orbites.

La description des ensembles  $\mathcal{A}(\mu_\bullet)$  pour  $e \leq 4$  est donnée dans la section 3.5.3.

**Stratification Ekedahl-Oort** Dans le cas de la courbe modulaire, on peut définir une stratification de la fibre spéciale en distinguant les courbes elliptiques ordinaires et les courbes elliptiques supersingulières. Cette distinction correspond aux (deux) classes d'isomorphismes des sous-groupes de  $p$ -torsion des courbes elliptiques. Dans le cas Siegel, si  $A$  est une variété abélienne principalement polarisée, on peut regarder la classe d'isomorphisme du sous-groupe de  $p$ -torsion  $A[p]$  (muni de sa polarisation). Ce processus induit une stratification de la fibre spéciale, appelée stratification d'Ekedahl-Oort, qui généralise la stratification ordinaire/supersingulière de la courbe modulaire. Initialement introduite par Oort dans [Oor01], les stratifications d'Ekedahl-Oort des variétés de Shimura ont été généralisées aux variétés de Shimura de type abéliennes de bonne réduction. La théorie des modules de Dieudonné permet de réinterpréter cette stratification en classes d'isomorphismes comme une stratification induite par un

morphisme lisse vers un champ algébrique :

$$\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{F}_p}\text{-Zip}$$

où  $\mathcal{G}_{\mathbb{F}_p}\text{-Zip}$  est un champ paramétrisant des modules de Dieudonné munis d'une  $\mathcal{G}_{\mathbb{F}_p}$ -structure (voir [PWZ12] pour plus de détails concernant la théorie des  $F$ -zip). Dans [SZ22] les auteurs ont défini une stratification de type Ekedahl-Oort de la fibre spéciale des modèles entiers de Pappas-Rapoport. Cette stratification est induite par un morphisme lisse vers un certain champ de  $F$ -zip :

$$\zeta : \mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes_{\mathcal{O}_K} k \longrightarrow \mathcal{G}_k^{\text{split}}\text{-Zip} \quad (1.2.3)$$

où  $\mathcal{G}^{\text{split}}$  est un certain groupe réductif sur  $\mathcal{O}_K$  qui coïncide avec  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_K$  si l'extension  $F/\mathbb{Q}_p$  est non-ramifiée. Le champ  $\mathcal{G}_k^{\text{split}}\text{-Zip}$  est le champ des  $F$ -zip avec  $\mathcal{G}_k^{\text{split}}$ -structure comme défini dans [PWZ12]. Le morphisme (1.2.3) induit une bonne stratification de la fibre spéciale :

$$\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes_{\mathcal{O}_K} k = \coprod_{z \in \text{EO}} S_z$$

où EO est un certain ensemble partiellement ordonné indexant les strates. On dispose donc de deux morphismes de champs algébriques :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k & \\ \psi \swarrow & & \searrow \zeta \\ \left[ (\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\text{PR}})_k / \mathcal{G}_k \right] & & \mathcal{G}_k^{\text{split}}\text{-Zip} \end{array}$$

induisant respectivement les stratifications KR et EO. Il est naturel de se demander si « l'intersection » de ces deux stratification est une bonne stratification. On montre le théorème suivant :

**Théorème 1.2.4** (Théorème 4.4.2). *On suppose que  $\mathcal{D}$  est une donnée de type Hilbert et que  $e \leq 4$ . Dans ce cas la stratification :*

$$\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes_{\mathcal{O}_K} k = \coprod_{(z, w) \in \text{EO} \times \mathcal{A}(\mu_\bullet)} S_{(z, w)}, \quad S_{(z, w)} = \psi^{-1}(w) \cap \zeta^{-1}(z)$$

est une bonne stratification : les strates sont non vides et pour tout  $(z, w) \in \text{EO} \times \mathcal{A}(\mu_\bullet)$  on a la relation d'adhérence :

$$\overline{S_{(z, w)}} = \bigsqcup_{(z', w') \leq (z, w)} S_{(z', w')}$$

où  $(z', w') \leq (z, w)$  si et seulement si  $z' \leq z$  et  $w' \leq w$ .

**Modèles locaux et diamants.** Classiquement l'étude de la fibre spéciale des modèles locaux se fait en plongeant ces derniers dans des grassmanniennes affines pour des groupes adaptés au modèle local étudié. Dans le cas (AL) par exemple Pappas et Rapoport utilisent dans [PR02] [PR00] une immersion fermée sur  $\mathbb{F}_p$  (pour simplifier on suppose que le corps réflexe est  $\mathbb{Q}_p$ ) :

$$\iota^{\text{naïf}} : \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu)}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p \hookrightarrow \text{Gr}_{\text{GL}_d} \quad (1.2.4)$$

où  $\text{Gr}_{\text{GL}_d}$  désigne la grassmannienne affine classique pour le groupe  $\text{GL}_d$  paramétrant les réseaux  $\Lambda \subset \mathbb{F}_p[[u]]^d$ . Dans [SW20] Scholze et Weinstein ont défini une grassmannienne affine de type Beilinson-Drinfeld sur la « courbe »  $\text{Spd } \mathbb{Z}_p$ , ce qui leur permet de définir une immersion fermée du modèle local directement sur  $\mathbb{Z}_p$ . Donnons quelques explications sur leur construction. Soit  $S = \text{Spa}(R, R^+) \in \text{Perf}_{\mathbb{F}_p}$  un espace perfectoïde sur  $\mathbb{F}_p$  et  $\varpi \in R^+$  une pseudo-uniformisante. Notons

$$\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}(S) = \text{Spa } W(R^+) \setminus V([\varpi]) \quad (1.2.5)$$

C'est un espace adique analytique sur  $\text{Spa}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ . Rappelons qu'un morphisme  $S \rightarrow \text{Spd } \mathbb{Z}_p$  correspond à un untilt  $S^\# \rightarrow \text{Spa } \mathbb{Z}_p$ , et que ce dernier induit un diviseur de Cartier

$$\iota : S^\# \hookrightarrow \mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}(S)$$

(voir la section 5.3 pour des rappels de géométrie de Hodge  $p$ -adique). Si  $\mathcal{G}$  est un groupe parahorique sur  $\mathbb{Z}_p$ , la grassmannienne affine de Scholze-Weinstein est le foncteur qui à  $S \in \text{Perf}_{\mathbb{F}_p}$  associe :

$$\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}, \mathcal{G}, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)}(S) \cong \left\{ (S^\#, \mathcal{E}, \beta) \left| \begin{array}{l} S^\# \rightarrow \text{Spa } \mathbb{Z}_p \text{ untilt de } S \\ \mathcal{E} \in \text{Tors}(\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}(S), \mathcal{G}), \\ \beta : \mathcal{E}|_{\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}(S) \setminus \iota(S^\#)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_0|_{\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}(S) \setminus \iota(S^\#)} \end{array} \right. \right\} / \sim$$

avec  $\beta$  méromorphe le long de  $\iota(S^\#)$ . Ci-dessus  $\text{Tors}(\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}(S), \mathcal{G})$  désigne la catégorie des  $\mathcal{G}$ -torseurs sur  $\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}(S)$  pour la topologie étale. Lorsque le groupe  $\mathcal{G}$  est le groupe associé à une donnée PEL quelconque, cette grassmannienne affine leur permet de définir une immersion fermée de (petits)  $v$ -faisceaux sur  $\text{Spd } \mathbb{Z}_p$  :

$$\iota^{\text{SW}} : \mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\text{naïf}, \diamond} \hookrightarrow \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}, \mathcal{G}, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)}$$

où  $\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\text{naïf}, \diamond}$  désigne le  $v$ -faisceau associé au schéma  $\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\text{naïf}}$  comme dans [SW20], c'est-à-dire le  $v$ -faisceau associé à l'analytification de  $\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\text{naïf}}$  sur  $\text{Spa}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$  en appliquant le foncteur diamant  $(\cdot)^\diamond$  de [SW20] (voir 5.3 pour plus de détails). Dans le cas du groupe  $\mathcal{G} = \text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d$  par exemple, la grassmannienne affine d'arrivée est celle pour le groupe  $\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d$ , et non pas pour le groupe  $\text{GL}_d$  comme c'est le cas avec le plongement de Pappas-Rapoport (1.2.4).

On aimerait pouvoir construire un plongement analogue pour les modèles de Pappas-Rapoport  $\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\text{PR}}$ . La première étape est de construire un plongement sur  $\mathbb{Z}_p$  du modèle

local naif  $\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\text{naif}}$  dans une grassmannienne affine pour le groupe  $\text{GL}_d$  (utilisé par Pappas et Rapoport) et non pas pour le groupe  $\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d$  (utilisé par Scholze-Weinstein). Pour effectuer ce changement de groupe, on étudie le morphisme entre « courbes » :

$$\pi : \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F} \rightarrow \mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p} \quad (1.2.6)$$

où  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}$  est l'espace analogue à (1.2.5) défini en utilisant les vecteurs de Witt ramifiés  $W_{\mathcal{O}_F}$ . Si  $H$  est un groupe réductif sur  $\mathcal{O}_F$ , on définit alors la grassmannienne affine suivante, qui à  $S \in \text{Perf}_{\mathbb{F}_p}$  associe :

$$\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)}(S) = \left\{ (S^\sharp, \mathcal{E}, \beta) \left| \begin{array}{l} S^\sharp \rightarrow \text{Spa } \mathbb{Z}_p \text{ untilt de } S \\ \mathcal{E} \in \text{Tors}(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S), H), \\ \beta : \mathcal{E}|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S) \setminus \pi^{-1}(S^\sharp)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_0|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S) \setminus \pi^{-1}(S^\sharp)} \end{array} \right. \right\} / \sim$$

avec  $\beta$  méromorphe le long de  $\pi^{-1}(S^\sharp) \subset \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S)$ . On dispose d'un morphisme canonique de  $v$ -faisceaux sur  $\text{Spd } \mathbb{Z}_p$  :

$$\begin{array}{ccc} \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}, \text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} H, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)} & \longrightarrow & \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)} \\ (\mathcal{P}, \beta) & \longmapsto & (\varepsilon_* \pi^* \mathcal{P}, \varepsilon_* \pi^* \beta) \end{array}$$

où  $\varepsilon : \pi^* \pi_* H \rightarrow H$  désigne le morphisme d'adjonction. Li-Huerta a prouvé dans [LH22] (Proposition 4.1) que ce morphisme est un isomorphisme en fibre générique. On montre que c'est également un isomorphisme en niveau entier :

**Théorème 1.2.5** (Théorème 5.4.24). *Le morphisme de petits  $v$ -faisceaux sur  $\text{Spd } \mathbb{Z}_p$  :*

$$\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}, \text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} H, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)} \longrightarrow \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)}$$

*est un isomorphisme.*

La preuve de ce théorème est différente de celle de [LH22]. En fibre générique le morphisme (1.2.6) est étale et le résultat en découle directement. En fibre spéciale le morphisme est ramifié et la preuve de Li-Huerta ne s'applique plus. En fait le théorème ci-dessus est un résultat standard sur les morphismes finis en géométrie algébrique classique, remontant aux travaux de Giraud [Gir71].

Le théorème ci-dessus nous permet de travailler avec le groupe  $H$  qui est réductif, contrairement au groupe  $\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} H$  qui n'est pas réductif si  $F/\mathbb{Q}_p$  est ramifiée<sup>10</sup>. On montre alors le résultat suivant pour le groupe  $\mathcal{G} = \text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d$  :

<sup>10</sup>Dans le cas du groupe  $\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathbb{G}_m$  par exemple on a la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \{g \equiv 1 \pmod{\pi}\} \rightarrow (\mathbb{F}_p[\pi]/(\pi^e))^\times \xrightarrow{x \mapsto 0} \mathbb{F}_p^\times \rightarrow 0$$

où  $\{g \equiv 1 \pmod{\pi}\}$  est un sous-groupe unipotent.



**Théoreme 1.2.6** (Proposition 5.5.4, Proposition 5.5.5). *On dispose d'une immersion fermée de petits  $v$ -faisceaux sur  $\mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p$  :*

$$l_v^{\mathrm{naif}} : \mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\mathrm{naif}, \diamond} \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, \mathrm{GL}_n, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p)}$$

*De plus cette immersion fermée est compatible avec  $l^{\mathrm{SW}}$  dans le sens où on dispose du diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n, \mu)}^{\mathrm{naif}, \diamond} & \\ \swarrow l^{\mathrm{SW}} & & \searrow l_v^{\mathrm{naif}} \\ \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}, \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p)} & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, \mathrm{GL}_n, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p)} \end{array}$$

*où la flèche horizontale du bas désigne l'isomorphisme du théorème précédent.*

En d'autres termes l'immersion fermée  $l_v^{\mathrm{naif}}$  ne nous apporte rien de nouveau. Elle nous permet néanmoins de travailler avec une grassmannienne affine pour le groupe  $\mathrm{GL}_n$  qui est réductif, ce qui nous permettra notamment de décrire son image en termes de variétés de Schubert (voir 5.7.2).

Dans [PR02] les auteurs montrent que la fibre spéciale du modèle local  $\mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\mathrm{PR}}$  s'identifie à un produit de convolution de cellules de Schuberts dans des grassmanniennes affines pour le groupe  $\mathrm{GL}_d$ . Pour obtenir un résultat similaire en niveau entier on introduit la grassmannienne affine suivante qui à  $S \in \mathrm{Perf}_k$  associe :

$$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_K)}(S) = \left\{ (S^\sharp, \mathcal{E}_i, \beta_i)_{i \in \{1, \dots, e\}} \left| \begin{array}{l} S^\sharp \rightarrow \mathrm{Spa} \mathcal{O}_K \text{ untilt de } S \\ \mathcal{E}_i \in \mathrm{Tors}(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S), H), \\ \beta_i : \mathcal{E}_i|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S) \setminus S_i^\sharp} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{i-1}|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S) \setminus S_i^\sharp} \end{array} \right. \right\} / \sim$$

avec  $\beta_i$  méromorphe le long de  $S_i^\sharp \subset \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S)$ . Ci-dessus les untilts  $S_i^\sharp \rightarrow \mathrm{Spa} \mathcal{O}_F$  sont les untilts induits par les morphismes

$$S^\sharp \rightarrow \mathrm{Spa} \mathcal{O}_K \xrightarrow{\varphi_i} \mathrm{Spa} \mathcal{O}_F$$

En composant les modifications  $\beta_i$  on obtient un morphisme de convolution :

$$m : \begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_K)} & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p)}|_{\mathrm{Spd} \mathcal{O}_K} \\ (S^\sharp, \mathcal{E}_i, \beta_i) & \longmapsto & (S^\sharp, \mathcal{E}_e, \beta_e \circ \dots \circ \beta_1) \end{array} \quad (1.2.7)$$

Pour le groupe  $H = \mathrm{GL}_d$  et  $\mathcal{G} = \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_d$  on montre le théorème suivant :

**Théoreme 1.2.7** (Théorème 5.6.12). *Il existe une immersion fermée naturelle de petits  $v$ -faisceaux sur  $\mathrm{Spd} \mathcal{O}_K$*

$$l_v^{\mathrm{PR}} : \mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\mathrm{PR}, \diamond} \hookrightarrow \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, \mathrm{GL}_n, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_K)}$$

telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{PR}, \diamond} & \xrightarrow{\iota_v^{\text{PR}}} & \widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, \text{GL}_n, \text{Spd } \mathcal{O}_K)} \\
 \downarrow & & \downarrow m \\
 M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu)}^{\text{naif}, \diamond} |_{\mathcal{O}_K} & \xrightarrow{\iota_v^{\text{naif}}} & \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, \text{GL}_n, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)} |_{\mathcal{O}_K}
 \end{array}$$

Le théorème ci-dessus devrait s'étendre sans difficulté à des données PEL de type (AL) et (C) sans hypothèse sur le niveau (c'est-à-dire en niveau parahorique quelconque). Il s'agirait essentiellement de réécrire les preuves en introduisant l'accouplement symplectique et les chaînes de réseaux auto-duale comme cela est fait dans [PR02].

## Notations

- Si  $S$  est un schéma on notera  $\text{LNSch}/_S$  la catégorie des schémas localement noethériens sur  $S$ .
- $J_{2g}$  désigne la matrice de l'accouplement symplectique standard.

**Définition 1.2.8.** *Soit  $S$  un espace topologique. Une stratification de  $S$  par rapport à un ensemble partiellement ordonné  $(I, \leq)$  est une décomposition en sous-espaces localement fermés :*

$$S = \coprod_{i \in I} S_i$$

*telle que pour tout  $i \in I$  on ait la relation d'adhérence :*

$$\overline{S_i} \subset \coprod_{j \leq i} S_j$$

*Une stratification est appelée bonne stratification si de plus elle satisfait pour tout  $i \in I$  :*

$$\overline{S_i} = \coprod_{j \leq i} S_j$$

# Chapitre 2

## Modèle de Pappas-Rapoport des variétés de Shimura

Dans ce premier chapitre nous allons définir les objets qui nous intéressent dans cette thèse : variétés de Shimura, leurs modèles entiers et les modèles locaux. Pour les variétés de Shimura, les références standards sont les deux papiers de Deligne [Del71], [Del79]. Pour les modèles entiers et les modèles locaux, nous allons essentiellement suivre les références [Kot92],[PR02] et [PRS11]. Pour faciliter la lecture j'ai fait le choix de réécrire en détails et avec des exemples tout le matériel classique concernant les variétés de Shimura et leurs modèles entiers. Le lecteur déjà familier avec ces notions peut donc passer les premières sections de ce chapitre sans problème.

### 2.1 Variété de Shimura de type PEL

Nous allons ici (et dans tout le reste de cette thèse) nous concentrer sur les variétés de Shimura de type PEL qui sont des cas particuliers de variétés de Shimura au sens de Deligne [Del79].

#### 2.1.1 Donnée de Shimura de type PEL

Soit  $p > 0$  un nombre premier. Nous allons directement donner la définition d'une donnée PEL entière en  $p$ , bien que cela ne soit pas nécessaire pour définir les différents objets de cette section qui vivent tous en fibre générique.

Soit  $\mathcal{D} = (B, *, V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{O}_B, \Lambda, h)$  une donnée PEL entière en  $p$  et  $G$  le groupe réductif sur  $\mathbb{Q}$  associé. C'est-à-dire :

- $B$  est une  $\mathbb{Q}$ -algèbre semi-simple de dimension finie, munie d'une involution positive  $*$ <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>i.e.  $\text{Tr}(x^*x) > 0$  pour tout  $x \in B \setminus \{0\}$ , où  $\text{Tr} : B \rightarrow \mathbb{Q}$  désigne la trace de la multiplication

- $V$  est un  $B$ -module fidèle de type fini,
- $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{Q}$  est une forme symplectique telle que  $\langle bv, w \rangle = \langle v, b^*w \rangle$  pour tout  $b \in B$  et  $v, w \in V$ ,
- $\mathcal{O}_B$  est un  $\mathbb{Z}_{(p)}$ -ordre dans  $B$  stable par  $*$ , tel que  $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} \mathbb{Z}_p$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -ordre maximal dans  $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$
- $(\Lambda, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un  $\mathcal{O}_B$ -réseau dans  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  de type PEL ([Lan13] définition 1.2.1.3)<sup>2</sup>
- $G$  est le groupe algébrique sur  $\mathbb{Q}$  des automorphismes de  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , i.e. pour tout  $R \in \text{Alg}/\mathbb{Q}$  :
$$G(R) = \{ (g, c(g)) \in \text{GL}_B(V_R) \times \mathbb{G}_m(R) \mid \langle gv, gw \rangle = c(g) \langle v, w \rangle \text{ pour tout } v, w \in V \}$$
- $h : \mathbb{S} = \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_m) \rightarrow G_{\mathbb{R}}$  est un morphisme de groupe qui définit une structure de Hodge de type  $\{(-1, 0), (0, -1)\}$  sur  $V_{\mathbb{R}}$  et tel que  $\langle \cdot, h(\sqrt{-1}) \cdot \rangle$  soit une forme bilinéaire symétrique définie positive.

On notera  $R$  le centre de  $B$ , et  $F = R^{*=1}$  les invariants par  $*$ .

**Remarque 2.1.1.** Une donnée PEL est un tuple  $\mathcal{D} = (B, *, V, \langle \cdot, \cdot \rangle, h)$  qui satisfait les mêmes hypothèses que ci-dessus.

**Remarque 2.1.2.** On adopte ici la définition et les conventions de [Lan13]. Elles diffèrent d'autres références comme [VW13]. Dans ces références les auteurs définissent directement les espaces de modules sur  $\mathbb{Z}_p$ , et non pas sur  $\mathbb{Z}_{(p)}$  (ce qui ne change rien si l'on souhaite juste étudier la fibre spéciale). C'est pourquoi dans leur contexte la définition d'une donnée PEL entière en  $p$  utilise un réseau  $\Lambda$  directement sur  $\mathbb{Z}_p$ , et non pas sur  $\mathbb{Z}_{(p)}$  comme ci-dessus. Leur hypothèse sur le fait que l'accouplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induit un accouplement parfait  $\Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}_p$  (ici  $\Lambda$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -module) se déduira de l'hypothèse «  $p$  est un *bon* nombre premier » que l'on fera plus tard (voir hypothèse 2.2.1)

On note  $\mu_h : \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}} \rightarrow G_{\mathbb{C}}$  le cocaractère tel que  $\mu_h(z)$  agisse via  $z$  sur  $V^{(-1,0)}$  et via 1 sur  $V^{(0,-1)}$ . On notera cette décomposition

$$V_{\mathbb{C}} = V_0 \oplus V_1 \tag{2.1.1}$$

avec  $V_0 = V^{(-1,0)}$  et  $V_1 = V^{(0,-1)}$ . On note  $[\mu]$  la classe de  $G(\mathbb{C})$ -conjugaison de  $\mu_h$ . Le cocaractère  $\mu_h$  s'appelle le *cocaractère de Hodge* associé à la donnée  $\mathcal{D}$ . On fera souvent l'abus de noter  $\mu$  la classe de conjugaison  $[\mu]$ , que l'on voit comme un élément

$$[\mu] \in \text{Hom}(\mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}, G_{\mathbb{C}}) / \text{Int}(G(\mathbb{C})) \cong \mathbb{X}_*(T)^+$$

---

<sup>2</sup>En particulier  $(\Lambda, \langle \cdot, \cdot \rangle) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

après avoir fixé une chambre dominante. Le  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathbb{X}_*(T)^+$  est muni d'une action du groupe de Galois  $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$ . Le corps de définition de  $[\mu] \in \mathbb{X}_*(T)^+$  s'appelle le *corps réflexe* et est noté  $E(\mathcal{D}) = E$  (c'est un corps de nombre). Par définition la décomposition (2.1.1) est définie sur  $E$ . Il découle des définitions que l'accouplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induit un isomorphisme :

$$V_0 \simeq V_1^\vee = \text{Hom}_E(V_1, E) \quad (2.1.2)$$

et que  $V_0$  et  $V_1$  sont totalement isotropes pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (voir [Lan13] section 1.2.5 par exemple). Attention, pour que l'isomorphisme ci-dessus soit un isomorphisme de  $B$ -modules, il faut munir le module  $\text{Hom}_E(V_1, E)$  de l'action de  $B$  via  $*$  :  $B \rightarrow B^{\text{opp}}$ <sup>3</sup>. Enfin on notera  $\mathcal{G}$  le schéma en groupe sur  $\mathbb{Z}$  défini par :

$$\mathcal{G}(R) = \{ (g, c(g)) \in \text{GL}_B(\Lambda_R) \times \mathbb{G}_m(R) \mid \langle gx, gy \rangle = c(g)\langle x, y \rangle \text{ pour tout } x, y \in \Lambda \}$$

C'est un modèle entier de  $G$  sur  $\mathbb{Z}$ , qui n'est pas nécessairement lisse (voir [Lan13] Remarque 1.2.1.6).

**Remarque 2.1.3.** Il découle des définitions que l'on a les égalités :

$$\dim_{\mathbb{C}}(V_0) = \dim_{\mathbb{C}}(V_1) = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{Q}}(V)$$

Les sous espaces  $V_0$  et  $V_1$  sont donc totalement isotropes de dimension maximales, et par conséquent

$$V_0^\perp = V_0, \quad V_1^\perp = V_1$$

Ce sont donc des sous-espaces Lagrangien de  $V$ .

## 2.1.2 Variété de Shimura associée

Si  $\mathcal{D} = (B, *, V, \langle \cdot, \cdot \rangle, h)$  est une donnée PEL, on notera  $X$  la classe de  $G(\mathbb{R})$ -conjugaison de  $h : \mathbb{S} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ . La proposition suivante justifie le lien entre donnée PEL et variété de Shimura au sens de Deligne [Del79].

**Proposition 2.1.4.** *Soit  $\mathcal{D}$  une donnée PEL et  $(G, X)$  la donnée associée. Alors  $(G, X)$  satisfait les axiomes (SV1), (SV2) et (SV4) de [Del79] (§ 2.1.1).*

**Remarque 2.1.5.** En général il se peut qu'une donnée  $(G, X)$  associée à une donnée PEL  $\mathcal{D}$  ne satisfasse pas l'axiome (SV3). Lorsque  $(G, X)$  satisfait l'axiome (SV3) on dit que c'est une *donnée de Shimura de type PEL*. Il arrive cependant que l'on s'intéresse à des espaces de modules faisant intervenir des données PEL ne satisfaisant pas l'axiome (SV3). Ces espaces de modules sont intéressants en tant que tels, même si le formalisme de Deligne sur les données de Shimura ne peut pas leur être appliqué.

<sup>3</sup>cela vient du fait que  $\langle b, \cdot \rangle = \langle \cdot, b^* \rangle$  pour tout  $b \in \mathcal{O}_B$ .

**Définition 2.1.6.** Soit  $(G, X)$  une donnée de Shimura et  $K \subset G(\mathbb{A}_f)$  un sous-groupe compacte ouvert, on note :

$$\mathrm{Sh}_K(G, X) := G(\mathbb{Q}) \backslash [X \times G(\mathbb{A}_f) / K]$$

où  $K$  agit sur  $G(\mathbb{A}_f)$  par translation à droite, et  $G(\mathbb{Q})$  agit sur  $X \times G(\mathbb{A}_f)$  par translation à gauche sur les deux facteurs (simultanément). Si la donnée de Shimura  $(G, X)$  provient d'une donnée PEL  $\mathcal{D}$  on notera également  $\mathrm{Sh}_{(\mathcal{D}, K)}$  la variété de Shimura associée.

**Composantes connexes.** Soit  $X_+ \subset X$  une composante connexe. Le stabilisateur de  $X_+$  dans  $G(\mathbb{Q})$  est  $G(\mathbb{Q}) = G(\mathbb{R})_+ \cap G(\mathbb{Q})$ . Par densité<sup>4</sup>,  $G(\mathbb{Q})$  agit transitivement sur les composantes connexes de  $X$  et par conséquent :

$$\mathrm{Sh}_K(G, X) \simeq G(\mathbb{Q})_+ \backslash [X_+ \times G(\mathbb{A}_f) / K]$$

Le quotient  $G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}_f) / K$  est fini ([Bor63] Théorème 5.1). On fixe  $(g_i)_{i \in I}$  un système de représentants et on définit les groupes  $\Gamma_i = G(\mathbb{Q})_+ \cap g_i K g_i^{-1}$ . Les groupes  $\Gamma_i \subset G(\mathbb{Q})_+$  sont des sous-groupes arithmétiques. On dispose d'une décomposition en composantes connexes :

$$\mathrm{Sh}_K(G, X) = \coprod_{i \in I} \Gamma_i \backslash X_+$$

**Structure complexes.** Soit  $\mu \in [\mu]$  un cocaractère de Hodge. Soit  $P_\mu \subset G_{\mathbb{C}}$  le sous-groupe parabolique de type  $\mu$  défini par

$$P_\mu = \{g \in G_{\mathbb{C}} \mid \varprojlim_{t \rightarrow 0} \mathrm{Ad}(\mu(t)) \cdot g \text{ existe}\}$$

Notons  $\mathrm{Flag}_{(G_{\mathbb{C}}, \mu)}$  la variété de drapeaux paramétrant les sous-groupes paraboliques de  $G_{\mathbb{C}}$  de type  $\mu$ , qui est une variété complexe. Bien que le parabolique  $P_\mu$  dépende du choix du représentant  $\mu \in [\mu]$ , la variété de drapeau  $\mathrm{Flag}_{(G_{\mathbb{C}}, \mu)}$  n'en dépend pas. On dispose du plongement de Borel :

$$\begin{aligned} X &\hookrightarrow \mathrm{Flag}_{(G_{\mathbb{C}}, \mu)} \\ h &\longmapsto P_{\mu_h} \end{aligned}$$

qui permet de munir  $X$  d'une structure de variété complexe ([GN20] Proposition 4.2). On peut montrer que la variété  $\mathrm{Sh}_K(G, X)$  possède une structure de variété complexe, dès lors que le sous-groupe  $K$  est assez petit<sup>5</sup>. En fait par un théorème de Baily-Borel, lorsque  $K$  est assez petit, les variétés  $\mathrm{Sh}_K(G, X)$  sont algébriques. Plus précisément, se sont les analytifiés de variétés algébriques  $S_K$  quasi-projectives sur  $\mathbb{C}$  ([BB66]) :

$$S_K(\mathbb{C}) = \mathrm{Sh}_K(G, X)$$

<sup>4</sup>c'est le théorème d'approximation faible pour les groupes algébriques, voir [Del71] § 0.4 ou [PRR93] Section 7 pour plus de détails.

<sup>5</sup>On se ramène au cas des composantes connexes  $\Gamma_i \backslash X_+$ , qui sont des quotients d'un domaine hermitien symétrique par des groupes sans torsion : on peut donc les munir d'une structure complexe telle que le morphisme quotient soit un holomorphisme (notez que les groupes  $\Gamma_i$  sont sans torsion puisque  $K$  est assez petit).

### 2.1.3 Modèles canoniques

La variété de drapeaux  $\text{Flag}_{(G_C, \mu)}$  est une variété algébrique définie sur le corps réflexe  $E = E(G, X)$ . Il est donc naturel de se demander si les variétés algébriques  $S_K$  peuvent être définies sur  $E$ . En d'autres termes on cherche ici un modèle, appelés *modèle canonique*<sup>6</sup> pour les variétés algébriques  $S_K$ . On a le théorème suivant

**Théorème 2.1.7** ([Del71],[Del79], [Mil83]). *Soit  $(G, X)$  une donnée de Shimura et  $E$  le corps réflexe associé. Pour tout  $K \subset G(\mathbb{A}_f)$  compact ouvert assez petit il existe une variété algébrique  $S_K \rightarrow \text{Spec } E$  telle que  $S_K(\mathbb{C}) = \text{Sh}_K(G, X)$ . De plus pour tout  $K' \subset K$  compact ouvert assez petit l'application canonique*

$$\text{Sh}_{K'}(G, X) \rightarrow \text{Sh}_K(G, X)$$

*est l'analytifié d'un morphisme  $S_{K'} \rightarrow S_K$  fini étale et défini sur  $E$ .*

**Remarque 2.1.8.** L'avantage de la description adélique de Deligne est que l'on dispose d'une action naturelle de  $G(\mathbb{A}_f)$  sur la limite projective :

$$\text{Sh}(G, X) := \varprojlim_{K \subset G(\mathbb{A}_f)} \text{Sh}_K(G, X)$$

où  $K \subset G(\mathbb{A}_f)$  parcourt les sous groupes compacts ouverts. Cette action est appelée action par *correspondance de Hecke*. D'après le théorème précédent, on dispose donc d'une action de  $G(\mathbb{A}_f)$  sur les groupes de cohomologies étales  $\varprojlim_K H_{\text{ét}}^i(S_K, \mathbb{Q}_\ell)$ , où  $\ell$  un nombre premier. Par ailleurs, les variétés algébriques  $S_K$  étant définies sur un corps de nombre  $E$ , elles sont naturellement munies d'une action du groupe de Galois  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ . Il n'est pas difficile de voir que cette action est compatible avec l'action de Hecke. C'est le point de départ d'une longue route vers le programme de Langlands. Notez que rien de toute cela n'est possible si l'on travaille uniquement avec les composantes connexes  $\Gamma_i \backslash X$ , car il n'y a pas de raison a priori pour qu'elles soient définies sur le même corps de nombre.

**Exemple 2.1.9** (Courbes modulaires). L'exemple le plus simple de variété de Shimura (après les tores...) est donné par les courbes modulaires. On considère la donnée PEL  $\mathcal{D} = (B, *, V, \langle \cdot, \cdot \rangle, h)$  donnée par :

$$B = \mathbb{Q}, \quad * = \text{id}, \quad V = \mathbb{Q}^2, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le groupe algébrique pour cette donnée est  $G \cong \text{GL}_2 = \text{GSp}_2$ , et on suppose que  $h$  est donné par

$$h(a + ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a + ib \in \mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^\times$$

---

<sup>6</sup>Pour une définition rigoureuse du modèle canonique, voir [Del79] 2.2.5).



Le stabilisateur de  $h$  est  $K_\infty \simeq \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cdot \mathbb{R}^\times$  et par conséquent on dispose d'une identification :

$$X \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cdot \mathbb{R}^\times$$

Par ailleurs le groupe  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$  agit transitivement sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \mathbb{H}^\pm$  par homographie, avec  $\mathbb{H}^\pm = \mathbb{H}^+ \sqcup \mathbb{H}^-$  et  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$  désigne le demi-plan de Poincaré supérieur (resp.  $\mathbb{H}^-$  le demi plan de Poincaré inférieur). Le stabilisateur de  $i$  pour cette action est également égal à  $K_\infty$ . Cela nous fournit une identification  $X \simeq \mathbb{H}^\pm$ . En particulier  $X$  n'est pas connexe. Ajoutons maintenant une structure de niveau. On note  $K(N)$  le sous groupe compact ouvert de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$  défini par :

$$K(N) = \mathrm{Ker}(\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$$

Un petit calcul montre que l'application déterminant induit une bijection :

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+ \setminus \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f) / K(N) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}^\times / \det(K(N)) \simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$$

Le sous groupe  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+ \cap K(N) = \Gamma(N) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  est normal et par conséquent  $\Gamma_i = \Gamma(N)$  pour tout  $i \in I$ . Finalement on obtient donc la description suivante de la variété de Shimura de niveau  $K(N)$  :

$$\mathrm{Sh}_{K(N)}(\mathrm{GL}_2, \mathbb{H}^\pm) = \coprod_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \Gamma(N) \setminus \mathbb{H}^+$$

où l'on reconnaît la *courbe modulaire* de niveau  $\Gamma(N)$  usuelle  $Y(N)^+ = \Gamma(N) \setminus \mathbb{H}^+$ . Il est bien connu que l'application

$$\begin{aligned} \Gamma(N) \setminus \mathbb{H}^+ &\longrightarrow \left\{ (E, \eta) \mid \begin{array}{l} E \text{ courbe elliptique sur } \mathbb{C} \\ \eta : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \simeq E[N] \end{array} \right\} \\ [\tau] &\longmapsto (E_\tau, \eta_\tau) \end{aligned}$$

est une bijection, où l'on note :

$$E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}), \quad \eta_\tau : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \longrightarrow E_\tau[N] \quad (2.1.3)$$

$$(a, b) \longmapsto \frac{a}{N}\tau + \frac{b}{N}$$

En d'autres termes les points  $Y(N)^+$  paramétrisent des courbes elliptiques munies d'une *structure de niveau*  $N$ . Pour être plus précis, une structure de niveau  $N$  sur une courbe elliptique  $E$  sur  $\mathbb{C}$  est un couple  $(\eta, \varphi)$  avec

$$\eta : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \simeq E[N], \quad \varphi : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \simeq \mu_N$$

tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} & \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ \eta \downarrow & & \downarrow \varphi \\ E[N] \times E[N] & \xrightarrow{e_N} & \mu_N \end{array}$$

où  $e_N$  désigne l'accouplement de Weil. Dans la bijection (2.1.3) on a fixé l'isomorphisme  $\varphi_0 : a \mapsto e^{2ia\pi/N}$ , de sorte à ce que la formule pour  $\eta_\tau$  soit bien compatible avec l'accouplement de Weil. Notons  $Y(N)$  l'ensemble des triplés  $(E, \eta, \varphi)$  où  $E$  est une courbe elliptique sur  $\mathbb{C}$  et  $(\eta, \varphi)$  une structure de niveau. L'oubli de  $\varphi$  est un  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ -torseur et le choix d'une section  $\varphi_0$  induit un isomorphisme

$$\begin{aligned} Y(N)^+ \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times &\longrightarrow Y(N) \\ ((E, \eta, \varphi_0), \alpha) &\longmapsto (E, \eta, \varphi_0 \cdot \alpha) \end{aligned}$$

Finalement on trouve donc que la variété  $\mathrm{Sh}_{K(N)}(\mathrm{GL}_2, \mathbb{H}^\pm) = Y(N)$  paramétrise les triplés  $(E, \eta, \varphi)$  où  $E$  est une courbe elliptique sur  $\mathbb{C}$  et  $(\eta, \varphi)$  est une structure de niveau. Pour ce qui est du modèle canonique de  $\mathrm{Sh}_{K(N)}(\mathrm{GL}_2, \mathbb{H}^\pm)$ , un simple calcul montre que le corps réflexe est  $E = \mathbb{Q}$ . D'après le Théorème 2.1.7 il existe donc un modèle  $S_K$  défini sur  $\mathrm{Spec} \mathbb{Q}$ . Nous verrons plus loin que dans cette situation l'existence de  $S_K$  découle en fait directement de la représentabilité de l'espace de module associé à la donnée PEL  $\mathcal{D}$  (avec un niveau  $K$  assez petit).

**Remarque 2.1.10.** Notez que les variétés  $Y(N)^+$  sont définies sur  $\mathrm{Spec} \mathbb{Q}(\zeta_N)$  (on a besoin d'une racine de l'unité pour définir  $\varphi_0$ ) et par conséquent la limite  $\varprojlim_N Y(N)^+$  est définie uniquement sur  $\mathrm{Spec} \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ . Travailler avec les composantes connexes  $Y(N)^+$  nous fait donc ici perdre l'action du groupe de Galois  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  en cohomologie étale, ce qui est problématique lorsque l'on travaille dans le contexte du programme de Langlands.

## 2.1.4 Points complexes

Nous avons vu avec l'exemple de la courbe modulaire que certaines données de Shimura donnent lieu à des variétés de Shimura ayant une interprétation modulaire. Nous allons voir que les variétés de Shimura de type *PEL* paramétrisent des variétés abéliennes munies d'une *polarisation*, d'une structure d'*endomorphisme* et d'une structure de niveau (*level*). Si l'on veut généraliser la notion de « structure de niveau  $N$  » de l'exemple 2.1.3 à d'autres niveau  $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ , il faut définir une notion « adélique » de structure de niveau  $K$  sur une variété abélienne. Cela est possible en considérant le module de Tate de la variété abélienne comme nous allons le voir.

Par ailleurs pour certaines raisons arithmétiques, il arrive que l'on préfère travailler avec des variétés abéliennes à isogénie près, qui ont l'avantage de former une catégorie semi-simple. Par exemple dans [Kot92], Kottwitz compte les points des variétés de Shimura sur des corps finis<sup>7</sup> en réduisant ce problème à un calcul de classe d'isogénies. Il faut alors faire attention à deux points :

---

<sup>7</sup>Cela donne des informations sur la cohomologie étale de la fibre spéciale via la formule des traces. Dans le cas de bonne réduction la cohomologie de la fibre spéciale et de la fibre générique coïncident.

1. La notion de polarisation n'est pas stable par isogénie. Pour y remédier Deligne définit la notion de *polarisation homogène* (voir [Del71] 4.3). Une polarisation homogène est un élément  $[\lambda] \in (\text{Hom}^{\text{sym}}(A, A^\vee) \otimes \mathbb{Q})/\mathbb{Q}^\times$  qui est la classe d'une polarisation  $\lambda : A \rightarrow A^\vee$ . Cette notion est équivalente la notion de  $\mathbb{Q}^\times$ -polarisation de [Lan13].
2. Le foncteur sur la catégorie des variétés abéliennes complexes  $A \mapsto H_{\text{ét}}^1(A, \widehat{\mathbb{Z}})$  induit par le module de Tate n'est pas invariant par isogénie. Il faut donc considérer le module de Tate rationnel  $H_{\text{ét}}^1(A, \mathbb{A}_f)$  qui est lui invariant par isogénie.

La proposition suivante due à Deligne [Del71] décrit les données paramétrisées par les points complexes des variétés de Shimura de type PEL dans le cas d'un niveau  $K$  non nécessairement principal<sup>8</sup>.

**Proposition 2.1.11** ([Del71] 4.11). *Soit  $\mathcal{D} = (B, *, V, \langle \cdot, \cdot \rangle, h)$  une donnée PEL et  $(G, X)$  la donnée de Shimura associée. On dispose d'une bijection entre l'ensemble*

$$\text{Sh}_K(G, X) = G(\mathbb{Q}) \backslash [X \times G(\mathbb{A}_f)/K]$$

et l'ensemble des quadruplets  $(A, \iota, \lambda, \kappa)$  à isogénie<sup>9</sup> près avec :

1.  $A$  est une variété abélienne sur  $\mathbb{C}$ ,
2.  $\lambda : A \rightarrow A^\vee$  est une  $\mathbb{Q}^\times$ -polarisation,
3.  $\iota : B \hookrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  est un morphisme de  $\mathbb{Q}$ -algèbres compatible avec l'involution de Rosati,
4.  $\eta$  est une structure de niveau  $K$ , c'est-à-dire une  $K$ -orbite d'isomorphismes  $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f$ -linéaires

$$\kappa : V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^1(A, \mathbb{A}_f)$$

telle qu'il existe un isomorphisme  $\varphi : \mathbb{A}_f \simeq \mathbb{A}_f(1)$  faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f \times V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} & \mathbb{A}_f \\ \kappa \downarrow & & \downarrow \varphi \\ H_{\text{ét}}^1(A, \mathbb{A}_f) \times H_{\text{ét}}^1(A, \mathbb{A}_f) & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda} & \mathbb{A}_f(1) \end{array}$$

5.  $\text{Lie}(A)$  est isomorphe à  $V_{\mathbb{R}}$  en tant que  $B_{\mathbb{C}}$ -modules,

<sup>8</sup>C'est-à-dire de la forme  $K = K(N)$  avec  $N > 0$  un entier.

<sup>9</sup>Si l'on veut travailler avec les classes d'isomorphismes, alors il faut voir  $A$  comme une variété abélienne à isogénie près.

6. Les  $(B, *)$ -modules symplectiques  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  et  $(H_1(A, \mathbb{Q}), \langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda)$  sont isomorphes à un facteur de similitude près<sup>10</sup>

*Démonstration.* Voir [Del71] Théorème 4.11. Pour faciliter la lecture nous allons tout de même décrire la bijection. On commence par fixer un isomorphisme  $(B, *)$ -linéaire

$$f : V \simeq H_1(A, \mathbb{Q})$$

qui envoie  $\mathbb{Q} \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\mathbb{Q} \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$  (ceci est possible d'après l'hypothèse (6)). Alors

$$f \circ \eta : V \otimes \mathbb{A}_f \xrightarrow{\kappa} V_f(A, \mathbb{C}) \simeq H_1(A, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f \xrightarrow{f} V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f$$

définit un élément de  $G(\mathbb{A}_f)$ . La  $K$ -orbite  $\eta$  définit donc un élément  $\eta \in G(\mathbb{A}_f)/K$ . Le morphisme

$$J : V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \xrightarrow{f} H_1(A, \mathbb{R}) \simeq \text{Lie}(A) \xrightarrow{i} \text{Lie}(A) \simeq H_1(A, \mathbb{R}) \xrightarrow{f} V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$$

définit une structure complexe  $(B, *)$ -linéaire sur  $(V_{\mathbb{R}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  telle que les  $B_{\mathbb{C}}$ -modules  $(V_{\mathbb{R}}, J)$  et  $(V_{\mathbb{R}}, I)$  soient isomorphes (ici on utilise l'hypothèse (5)), i.e.  $h_J \in X = G(\mathbb{R}) \cdot h$  (ici  $I$  désigne la structure complexe induite par  $h$ ). Finalement l'élément  $(h_J, \eta) \in X \times G(\mathbb{A}_f)/K$  est bien défini modulo le choix d'une trivialisaton  $V \simeq H_1(A, \mathbb{Q})$ . Par conséquent l'élément :

$$[h_J, \eta] \in G(\mathbb{Q}) \backslash [X \times G(\mathbb{A}_f)/K]$$

est bien défini. Réciproquement, étant donné  $[h_J, \eta]$  on définit le tore complexe  $A = (V_{\mathbb{R}}, J)/\Lambda$ , où  $\Lambda$  désigne n'importe quel réseaux sur lequel  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est à valeur dans  $\mathbb{Z}$ <sup>11</sup>. L'accouplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $(V_{\mathbb{R}}, J)$  fait de  $A$  une variété abélienne. Enfin la structure de  $B$ -module de  $V$  induit un morphisme  $\iota : B \rightarrow \text{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ , et  $\eta = g$  définit une structure de niveau  $K$ . Le reste des conditions se vérifie sans difficulté.  $\square$

**Exemple 2.1.12** (Courbes modulaires (suite)). Nous allons maintenant vérifier que la description des points complexes de la Proposition 2.1.11 coïncide avec celle que nous avons donnée pour la courbe modulaire dans l'exemple 2.1.3.

On se place donc de nouveau dans le cadre du groupe  $G = \text{GL}_2$  et d'un sous groupe de niveau  $K(N) = \text{Ker}(\text{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$ . Soit  $(E, \eta)$  avec  $E$  une courbe elliptique sur  $\mathbb{C}$  et  $\eta$  une structure de niveau  $N$  (au sens de 2.1.3), c'est-à-dire un isomorphisme

$$\eta : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \simeq E[N]$$

compatible avec l'accouplement de Weil à un  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ -facteur près. On doit montrer que la structure de niveau  $\eta$  se prolonge en une structure de niveau  $K(N)$  (au sens de 2.1.11). Pour construire un isomorphisme

$$(\mathbb{A}_f)^2 \simeq H_{\text{ét}}^1(E, \mathbb{A}_f)$$

<sup>10</sup>I.e. il existe un isomorphisme de  $(B, *)$ -module  $f : V \simeq H_1(A, \mathbb{Q})$  tel que  $f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda = \alpha \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle$  pour un certains  $\alpha \in \mathbb{Q}^\times$

<sup>11</sup>Pour un autre choix de réseau  $\Lambda'$ , il existe un entier  $n$  tel que  $\frac{1}{n}\Lambda' \subset \Lambda \subset n\Lambda'$ , par conséquent  $\Lambda'$  fournit une variété abélienne dans la même classe d'isogénie.

nous allons montrer l'existence d'un isomorphisme en pointillé faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{Z}}^2 & \overset{\kappa}{\dashrightarrow} & H_{\text{ét}}^1(E, \widehat{\mathbb{Z}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 & \xrightarrow{\eta} & E[N] \end{array}$$

et qui soit compatible avec la réduction de l'accouplement de Weil en un sens évident. Mais l'existence de  $\kappa$  est clair car le morphisme de réduction :

$$\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$$

est surjectif (voir la Remarque 2.1.14). Bien sûr  $\kappa$  n'est pas unique, il n'est bien défini que modulo  $K(N)$ . Il s'en suit que la  $K(N)$ -orbite de  $\kappa \otimes \mathbb{Q} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$  est bien définie et nous fournit une structure de niveau  $K(N)$ . Si l'on note  $E \otimes \mathbb{Q}$  le plongement de  $E$  dans la catégorie des courbes elliptiques à isogénie près, l'application

$$(E, \eta) \longmapsto (E \otimes \mathbb{Q}, \kappa \otimes \mathbb{Q})$$

est la bijection annoncée<sup>12</sup>

**Remarque 2.1.13.** Dans l'exemple précédent nous nous sommes placés au niveau  $\mathbb{C}$ -points, mais les arguments sont très généraux et fonctionnent pour les espaces de modules sur  $\mathbb{Q}$  définis de façon évidente via les descriptions 2.1.3 et 2.1.11.

**Remarque 2.1.14.** Une structure de niveau  $N$  au sens de l'exemple 2.1.3 est ce que l'on appelle une *structure de niveau naïve* ([Lan13] 1.3.6). Pour comprendre pourquoi elle est « naïve » il faut revenir à la construction de l'exemple précédent. Le point clé réside dans la surjectivité pour  $\mathcal{G} = \mathrm{GL}_2$  de l'application :

$$\mathcal{G}(\widehat{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$$

C'est cette surjectivité qui nous a permis de relever la structure de niveau naïve en une structure de niveau  $K(N)$ . Mais la surjectivité de ce morphisme n'est pas automatique ! Notez qu'ici on utilise le fait que  $\mathrm{GL}_2$  soit lisse, ce qui n'est pas vrai pour  $\mathcal{G}$  en général. On consultera [Lan13] Remarque 1.2.1.6, Corollaire 1.2.3.12, pour plus de détails concernant la lissité de  $\mathcal{G}$ .

## 2.2 Modèle entier de Kottwitz

Dans cette section nous allons définir les *modèles entiers* des variétés de Shimura de type PEL définies par Kottwitz dans [Kot92]. Ces modèles entiers sont définis sur  $\mathcal{O}_{E,(p)}$  ce qui nous permettra dans la suite de cette thèse d'étudier la *fibres spéciale* de ces modèles, c'est-à-dire leur réduction modulo  $p$ .

<sup>12</sup>Il faut tout de même un peu travailler pour montrer que c'est une bijection. L'injectivité découle essentiellement du fait que  $H_{\text{ét}}^1(\cdot, \widehat{\mathbb{Z}})$  est pleinement fidèle. Pour la surjectivité, voir [Del71] 4.2. ou [Lan13] 1.3.5.

## 2.2.1 Hypothèses

Pour définir ces modèles entiers nous aurons besoins de certaines conditions sur la donnée  $\mathcal{D}$  et sur le nombre premier  $p$ . Les problèmes concernant la réduction modulo  $p$  de ces modèles se trouvent essentiellement à deux niveaux : la structure de niveau  $K$  et la ramification dans la donnée  $\mathcal{D}$ . Généralement on parle de condition de « bonne réduction » lorsque l'on suppose le niveau maximal en  $p$  et lorsque la donnée  $\mathcal{D}$  est non ramifiée : dans ce cas les schémas ainsi définis sont lisses sur  $\mathcal{O}_{E,(p)}$ . Dans cette thèse on se place dans le cas où le niveau est maximal en  $p$ , mais on autorise la ramification. Plus précisément dans tout le reste de cette thèse nous ferons les hypothèses suivantes :

### Hypothèses.

1. On suppose que le groupe  $G$  est connexe.
2. On suppose que  $B_{\mathbb{Q}_p}$  est isomorphe à un produit d'algèbres de matrices sur des extensions finies de  $\mathbb{Q}_p$  (possiblement ramifiées).
3. On suppose que  $p$  est un bon nombre premier (voir [BH22b] § 2.4), c'est-à-dire :

$$p \nmid [\Lambda^\sharp : \Lambda], \quad \Lambda^\sharp = \{x \in V \mid \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}, \forall y \in \Lambda\}$$

Donnons quelques explications concernant ces hypothèses.

- Soit  $B = B_1 \times \cdots \times B_r$  une décomposition de  $B$  en facteurs simples. Puisque l'involution est positive, chacun des facteurs est stable par  $*$ <sup>13</sup>. On suppose donc pour simplifier que  $B$  est simple. Notons  $R$  son centre et  $F = R^{*=1}$  les invariants sous  $*$ , qui est un corps totalement réel. On sait d'après le théorème de Wedderburn que  $B$  est de la forme  $M_n(D)$  où  $D$  est une algèbre à division sur  $\mathbb{Q}$ . La classification des algèbres à divisions munies d'une involution positive (due à Albert, voir [Lan13] Proposition 1.2.1.13) nous donne à isomorphismes près 3 possibilités (voir [Lan13] Définition 1.2.1.15) :

- (A)  $[R : F] = 2$  avec  $F$  est une extension totalement imaginaire. Dans ce cas  $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$  est un produit de  $[F : \mathbb{Q}]$  copies de  $M_n(\mathbb{C})$  munies de leur involution  $X \mapsto \overline{X}^t$ .
- (C)  $R = F$  avec  $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$  un produit de  $[F : \mathbb{Q}]$  copies de  $M_n(\mathbb{R})$  munies de leur involution  $X \mapsto X^t$ .
- (D)  $R = F$  avec  $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$  un produit de  $[F_0 : \mathbb{Q}]$  copies de  $M_n(\mathbb{H})$  munies de leur involution  $X \mapsto \overline{X}^t$ .

Ici  $\mathbb{H}$  désigne l'algèbre des quaternions d'Hamilton. Un calcul montre que le groupe  $G$  est connexe si et seulement si aucun des facteurs  $B_i$  n'est de type (D). La première hypothèse exclut donc les facteurs de type (D) de notre donnée PEL.

---

<sup>13</sup> $B_i^*$  est également un facteur simple donc si  $B_i^* = B_j \neq B_i$  alors  $B_i B_j = 0$ , ce qui contredit la positivité de  $*$ .

- D'après la seconde hypothèses on dispose d'une décomposition sur  $\mathbb{Q}_p$  :

$$B \simeq \prod_{i=1}^r B_i = \prod_{i=1}^r M_{m_i}(R_i)$$

Supposons pour simplifier que  $B = B_i$  est simple. Il y a alors 4 possibilités :

- (C) (symplectique) :  $R = F$  et  $*$  = id.
- (AL) (linéaire) :  $F = R \times R$  et  $*$  :  $(a, b) \mapsto (b, a)$
- (AU) (unitaire non-ramifié) :  $R/F$  non ramifiée de degré 2 avec  $*$   $\in \text{Gal}(R/\mathbb{Q}_p)$  d'ordre 2.
- (AR) (unitaire ramifié) :  $R/F$  ramifiée de degré 2 avec  $*$   $\in \text{Gal}(F/\mathbb{Q}_p)$  d'ordre 2.

- On dit que  $p$  est un *bon* nombre premier si il satisfait la condition :

$$p \nmid [\Lambda^\sharp : \Lambda], \quad \Lambda^\sharp = \{x \in V \mid \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}, \forall y \in \Lambda\}$$

Cette condition diffère de la Définition 1.4.1.1 de [Lan13] car ici on autorise la ramification et on a exclu les facteurs de type (D). Si  $p \nmid [\Lambda^\sharp : \Lambda]$  alors  $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$  est auto-dual pour l'accouplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On peut alors montrer que  $p$  ne contribue pas au niveau (voir la discussion avant la Proposition 2.2.7 pour plus de détails).

**Remarque 2.2.1.** Il découle également de la dernière hypothèse que le groupe  $\mathcal{G}$  est lisse sur  $\mathbb{Z}_p$ , voir [Lan13] Corollaire 1.2.3.12.

**Exemple 2.2.2.** (Hilbert-Siegel)

Soit  $F/\mathbb{Q}$  une extension totalement réelle. Une donnée PEL de la forme :

$$B = F, \quad * = \text{id}, \quad V = F^{2g}, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle = \text{Tr}_{F/\mathbb{Q}} \circ (\cdot, \cdot)$$

où  $(\cdot, \cdot)$  désigne l'accouplement  $F$ -linéaire symplectique standard sur  $F^{2g}$  (i.e. donné par la matrice  $J_{2g}$ ), est appelée donnée de type Hilbert-Siegel. Dans ce cas on a :

$$B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p = \bigoplus_{v|p} F_v$$

où  $F_v$  désigne la complétion  $v$ -adique de  $F$ . En d'autres termes  $I$  est l'ensemble des places  $v$  au dessus de  $p$  dans  $F$ .

## 2.2.2 L'espace de module

Nous avons vu avec la Proposition 2.1.11 que les points complexes d'une variété de Shimura de type PEL paramétrisent des variétés abéliennes munies d'une polarisation, d'une structure d'endomorphisme et d'une structure de niveau satisfaisant certaines conditions. Si l'on veut définir un modèle entier sur  $\mathbb{Z}_{(p)}$  il faut faire attention à plusieurs points :

1. La condition (5) de 2.1.11 n'a pas de sens si  $A$  n'est pas une variété abélienne sur  $\mathbb{C}$ .
2. La condition (6) de 2.1.11 n'a pas de sens pour un schéma abélien général.
3. On ne peut pas autoriser tous les sous-groupes  $K_p \subset \mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)$  pour la définition des sous-groupes  $K_p K^p \subset G(\mathbb{A}_f)$ . Par exemple pour le sous groupe compact ouvert  $K = \text{Ker}(\mathcal{G}(\widehat{\mathbb{Z}}) \rightarrow \mathcal{G}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))$ , une structure de niveau  $K$  correspond à une trivialisaton de la  $p$ -torsion de la variété abélienne. Mais cela n'a pas de sens en caractéristique  $p$ .

La solution trouvée par Kottwitz pour le point (1) dans [Kot92] est la *condition de déterminant* (voir définition ci-dessous) qui est une condition qui « relève » la condition (5). Pour le point (2) la condition (6) est oubliée, ce qui implique que la fibre générique du modèle entier ainsi défini est un union de copies du modèle canonique (voir la Proposition 2.2.7). Enfin pour le point (3), on contourne le problème en travaillant en niveau « parahorique maximal » en  $p$ , i.e.  $K_p = \mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)$ . On dit que l'on travaille avec des structures de niveau « en dehors de  $p$  ». Informellement, dans le cadre de structures de niveaux  $N$  naïves, cela revient à demander à ce que  $p \nmid N$ .

**Définition 2.2.3.** Soit  $\mathcal{D} = (B, *, V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{O}_B, \Lambda, h)$  une donnée PEL entière en  $p$  satisfaisant les hypothèses 2.2.1. Soit  $K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$  un sous groupe compact ouvert. On note  $\text{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}}$  la catégorie fibrée en groupoïde sur  $\text{LNSch}/\mathcal{O}_{E,(p)}$  dont la fibre au dessus de  $(S \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_{E,(p)})$  est la catégorie  $\text{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}}(S)$  dont les objets sont les tuples  $(A, \lambda, \iota, \eta^p)$  satisfaisant les propriétés suivantes :

- $A \rightarrow S$  est un schéma abélien,
- $\lambda : A \rightarrow A^\vee$  est une  $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$ -polarisation,
- $\iota : \mathcal{O}_B \hookrightarrow \text{End}_S(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$  est un morphisme de  $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbres compatible avec l'involution de Rosati
- $\eta^p$  est une structure de niveau  $K^p$ , c'est-à-dire pour un point géométrique dans chaque composante connexe  $\bar{s}$ , une  $K^p$ -orbite stable sous l'action de  $\pi_{\text{ét}}^1(S, \bar{s})$ , d'isomorphismes  $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f^p$ -linéaires

$$\eta^p : V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f^p \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^1(A_{\bar{s}}, \mathbb{A}_f)$$



tels qu'il existe un isomorphisme  $\varphi : \mathbb{A}_f^p \simeq \mathbb{A}_f^p(1)$  faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f^p \times V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f^p & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} & \mathbb{A}_f^p \\ \kappa \downarrow & & \downarrow \varphi \\ H_{\text{ét}}^1(A_{\bar{s}}, \mathbb{A}_f) \times H_{\text{ét}}^1(A_{\bar{s}}, \mathbb{A}_f) & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle_{\lambda}} & \mathbb{A}_f^p(1) \end{array}$$

- $(A, \iota)$  satisfait la condition de déterminant de Kottwitz :

$$\det(a | \omega_{A/S}) = \det(a | V_0) \quad \forall a \in \mathcal{O}_B$$

(voir [Lan13] Définition 1.3.4.1 pour plus de détails).

Un morphisme entre deux objets  $(A, \lambda, \iota, \eta)$  et  $(A', \lambda', \iota', \eta')$  est la donnée d'une  $\mathbb{Z}_{(p)}^{\times}$ -isogénie  $f : A \rightarrow A'$  telle que

- $\lambda = r \cdot f^{\vee} \circ \lambda' \circ f$  pour un certains  $r \in \mathbb{Z}_{(p)}^{\times}$ ,
- $f \circ i = i' \circ f$
- $f^* \eta'^p = \eta^p$  (voir [Lan13] Définition 1.4.2.1 pour plus de détails)

Ci-dessus une  $\mathbb{Z}_{(p)}^{\times}$ -polarisation  $\lambda : A \rightarrow A^{\vee}$  est un élément  $\lambda \in \text{Hom}(A, A^{\vee}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$  donné par une classe d'équivalence  $(N, \alpha)$ , telle que  $N$  soit un entier premier avec  $p$ , et  $\alpha : A \rightarrow A^{\vee}$  une polarisation telle que le rang du schéma en groupe fini plat  $\text{Ker}(\alpha)$  soit premier avec  $p$ . Deux couples  $(N, \alpha)$ ,  $(N', \alpha')$  sont équivalents si  $N\alpha' = N'\alpha$ . De façon informelle, on écrira  $\lambda = [N]^{-1}\alpha$  (noter que cette égalité a un sens dans la catégorie à  $\mathbb{Z}_{(p)}^{\times}$ -isogénies).

**Remarque 2.2.4.** Dans la définition de la structure de niveau  $\eta^p$  utilise le groupe fondamental étale  $\pi_{\text{ét}}^1(S, \bar{s})$ . Pour que la définition ci-dessus est un sens lorsque  $S$  n'est pas connexe, il faut que l'on puisse travailler sur chacune des composantes connexes séparément. C'est pourquoi on se restreint à la catégorie des schémas localement noethériens car les composantes connexes des schémas localement noethériens sont ouvertes (et fermées).

**Remarque 2.2.5.** Pour la condition sur le déterminant ci-dessus il existe en fait deux conventions. Le caractère de Hodge induit une décomposition de  $B_{\mathbb{C}}$ -module  $V_{\mathbb{C}} = V_0 \oplus V_1$ . De l'autre coté, si  $A$  est une variété abélienne sur  $\mathbb{C}$ , on dispose de la décomposition de Hodge

$$H^1(A, \mathbb{C}) \cong H_{\text{dR}}^1(A/\mathbb{C}) \cong H^1(A, \mathcal{O}_A) \oplus H^0(A, \Omega_A^1)$$

où  $H^0(A, \Omega_A^1) = \text{Lie}(A)^{\vee}$  est le dual de l'algèbre de Lie de  $A$  et  $H^1(A, \mathcal{O}_A) = \omega_A$  est le faisceau des différentielles invariantes. La condition ci-dessus sur le déterminant impose que  $V_0$  et  $\omega_A$  soient isomorphes en tant que  $B_{\mathbb{C}}$ -modules. L'autre convention demande à ce que pour tout  $a \in \mathcal{O}_B$  on ait  $\det(a | \text{Lie}(A)) = \det(a | V_1)$ , ce qui impose

l'existence d'un isomorphisme de  $B_{\mathbb{C}}$  module  $V_1 \simeq \text{Lie}(A)$ . Dans [Kot92] Kottwitz définit la condition sur le déterminant en comparant  $V_1$  et  $\text{Lie}(A)$ . Les deux conventions sont bien sûr équivalentes.

La proposition suivante est standard lorsque l'on connaît un peu de théorie des schémas de Hilbert.

**Proposition 2.2.6** ([MFK94], [Kot92] Section 5).  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naïf}}$  est un champ algébrique de Deligne-Mumford. De plus si  $K^p$  est assez petit, alors il est représentable par un schéma quasi-projectif sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_{E, (p)}$ .

### 2.2.3 Comparaison avec le modèle canonique

On se place dans le cas d'un sous-groupe de niveau  $K = \mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)K^p$  avec  $K^p$  assez petit. Nous allons comparer la fibre générique  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes E$  du schéma défini par Kottwitz avec le modèle canonique  $S_K$ .

On commence par comparer l'ensemble des points complexes  $S_K(\mathbb{C})$  et  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naïf}}(\mathbb{C})$ . Soit donc  $(A, \lambda, \iota, \eta^p) \in \mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naïf}}(\mathbb{C})$ . Les seules conditions à analyser sont les conditions (4), (5) et (6) de la description 2.1.11. La condition (5) découle directement de la condition imposée sur le déterminant (voir Remarque 2.2.5). Pour la condition (6) nous devons calculer les classes d'isomorphismes de  $B$ -modules symplectiques. Ces classes sont classifiées par l'ensemble  $H^1(\mathbb{Q}, G)$ . Pour calculer cet ensemble Kottwitz utilise un raisonnement du type local-global. Notons  $H = H_1(A, \mathbb{Q})$  et  $\xi_H \in H^1(\mathbb{Q}, G)$  (resp.  $\xi_V \in H^1(\mathbb{Q}, G)$ ) la classe de  $H$  (resp. de  $V$ ) en tant que  $B$ -modules symplectiques. On a :

- Sur  $\mathbb{R}$ . Il découle également de la condition sur le déterminant que  $H_{\mathbb{R}}$  et  $V_{\mathbb{R}}$ , munis de leur structure complexe, sont isomorphes en tant que  $B_{\mathbb{C}}$ -modules. On peut alors montrer que  $(H_{\mathbb{R}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\lambda})$  et  $(V_{\mathbb{R}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sont en fait isomorphes en tant que  $B_{\mathbb{R}}$ -modules symplectiques ([Kot92], Lemme 4.2). Par conséquent on a l'égalité  $\xi_V = \xi_H \in H^1(\mathbb{R}, G)$ .
- Sur  $\mathbb{Q}_{\ell} \neq \mathbb{Q}_p$ . La structure de niveau  $\eta$  implique directement que les  $B_{\mathbb{Q}_{\ell}}$ -modules symplectiques  $(V_{\mathbb{Q}_{\ell}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  et  $(H_{\mathbb{Q}_{\ell}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\lambda})$  sont isomorphes. On a donc l'égalité  $\xi_V = \xi_H \in H^1(\mathbb{Q}_{\ell}, G)$  pour tout  $\ell \neq p$ .
- Sur  $\mathbb{Q}_p$ . Puisque l'on considère des variétés abéliennes à  $\mathbb{Z}_{(p)}^{\times}$ -isogénie, le  $\mathbb{Z}_p$ -module  $\Lambda_H = H_1(A, \mathbb{Z}_p)$  est bien défini. C'est un  $\mathcal{O}_B$ -réseau auto-dual dans  $H_{\mathbb{Q}_p}$ . Soit  $\xi$  tel que  $V \simeq V^{(\xi)}$ . D'après [Kot92] Lemme 7.2 il existe un isomorphisme symplectique  $\varphi : V_{\mathbb{Q}_p}^{(\xi)} \simeq H_{\mathbb{Q}_p}$  tel que  $\varphi(\Lambda_p) = \Lambda_H$ , où  $\Lambda_p = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ .

Par conséquent :

$$\xi_V - \xi_H \in \ker^1(\mathbb{Q}, G) := \text{Ker}\left(H^1(\mathbb{Q}, G) \rightarrow \prod_v H^1(\mathbb{Q}_v, G)\right)$$

D'après un résultat de Borel et Serre le groupe  $\ker(\mathbb{Q}, G)$  est fini ([BS64] Théorème 7.1). On fixe un représentant  $V^{(\xi)}$  pour chaque  $\xi \in (\xi_V + \ker^1(\mathbb{Q}, G))$ . Par définition les  $V^{(\xi)}$  sont des  $B$ -modules symplectiques isomorphes à  $V_{\mathbb{Q}_v}$  (avec structure symplectique) pour toutes places  $v$ . On note  $G^{(\xi)}$  le groupe d'automorphismes du  $B$ -module symplectique  $V^{(\xi)}$ . Soit  $\xi$  tel que  $V \simeq V^{(\xi)}$ . Comme expliqué plus haut, il existe un isomorphisme symplectique  $\varphi : V_{\mathbb{Q}_p}^{(\xi)} \simeq H_{\mathbb{Q}_p}$  tel que  $\varphi(\Lambda_p) = \Lambda_H$ . Par conséquent  $\Lambda_H$  induit un élément bien défini dans  $g \in G(\mathbb{Q}_p)/K_p$  (on rappelle que  $K_p = \mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)$  désigne les éléments qui stabilisent  $\Lambda$ ). On obtient finalement un élément :

$$\eta := (g, \eta^p) \in G(\mathbb{Q}_p)/K_p \times G(\mathbb{A}_f^p)/K^p = G(\mathbb{A}_f)/K$$

et on a donc étendu la structure de niveau  $K^p$  en une structure en niveau  $K$ . Il découle alors de la Proposition 2.1.11 que l'on a l'égalité :

$$\mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naïf}}(\mathbb{C}) = \bigsqcup_{\xi \in \ker^1(\mathbb{Q}, G)} \mathcal{S}h_K(G^{(\xi)}, X)$$

Ci-dessus  $\mathcal{S}h_K(G^{(\xi)}, X)$  classifie les tuples  $(A, \lambda, \iota, \eta)$  tels que  $H$  soit isomorphes à  $V^{(\xi)}$  (voir la Proposition 2.1.11). Si l'on note  $S_K^{(\xi)}$  le modèle canonique de  $\mathcal{S}h_K(G^{(\xi)}, X)$ , une inspection des différents espaces de modules montre que l'on a en fait la proposition suivante :

**Proposition 2.2.7** ([Kot92] §7). *Il existe un isomorphisme de schémas sur  $E$  :*

$$\mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} E = \bigsqcup_{\xi \in \ker^1(\mathbb{Q}, G)} S_K^{(\xi)}$$

En d'autres termes la fibre générique du modèle entier construit par Kottwitz est une union de copies de modèles canoniques pour des formes intérieures de  $G$  qui sont isomorphes à  $G$  en toutes les places. D'après cette proposition l'obstruction à ce que  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naïf}}$  soit un modèle entier au sens strict du terme est mesurée par le groupe  $\ker^1(\mathbb{Q}, G)$ , c'est-à-dire le groupe qui mesure le défaut du *principe de Hasse* pour  $G$ . La proposition suivante nous assure que cette situation n'arrive pas souvent :

**Proposition 2.2.8** ([Kot92]). *Le groupe  $\ker^1(\mathbb{Q}, G)$  est trivial dans les situations suivantes :*

1.  $G$  est de type (C)
2.  $G$  est de type (A) avec  $n$  pair<sup>14</sup>

## 2.3 Modèle local PEL

Dans cette section nous allons définir les modèles locaux associés aux données PEL entière, comme cela est fait dans [RZ96]. Ces modèles locaux vont nous permettre d'étudier les propriétés locales des modèles entier de Kottwitz des variété de Shimura de type PEL par l'intermédiaire des « diagrammes de modèles locaux ».

<sup>14</sup>i.e. le diagramme de Dynkin de  $G$  est de type  $(A_{n-1})$  avec  $n$  pair.

### 2.3.1 Notations

Soit  $\mathcal{D}$  une donnée PEL entière en  $p$ . A partir de maintenant et pour toute la suite de cette thèse on se place dans le cadre  $p$ -adique, i.e. on fait les changements de bases :

$$\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p := (B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, *, V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p, \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p, h) \quad (2.3.1)$$

Par hypothèse après changement de base sur  $\mathbb{Q}_p$  on dispose d'une décomposition

$$B_{\mathbb{Q}_p} \simeq \prod_{i=1}^r B_i = \prod_{i=1}^r M_{m_i}(R_i) \quad (2.3.2)$$

On note  $I = \{1, \dots, r\}$ . Par équivalence de Morita, cette décomposition induit une décomposition de  $V$  sur  $\mathbb{Q}_p$  :

$$V_{\mathbb{Q}_p} = \bigoplus_{i \in I} V_i^{m_i} \quad (2.3.3)$$

où chaque  $V_i$  est un  $R_i$ -module libre<sup>15</sup> de rang :

$$d_i = \text{rank}_{R_i} V_i$$

En particulier on a :

$$\dim_{\mathbb{Q}_p}(V_i) = \begin{cases} 2n_i d_i & \text{si } i \text{ est de type (AL) ou (AU)} \\ n_i d_i & \text{si } i \text{ est de type (C)} \end{cases}$$

On notera  $G_i$  le groupe réductif sur  $\mathbb{Q}_p$  associé à  $V_i$  :

$$G_i(R) = \{(g_i, c_i(g_i)) \in \text{GL}_{R_i}(V_i \otimes R) \times \mathbb{G}_m(R) \mid \langle g_i v, g_i w \rangle = c_i(g_i) \langle v, w \rangle \text{ pour tout } v, w \in V_i\}$$

Par définition le groupe  $G_{\mathbb{Q}_p}$  peut être retrouvé à partir des  $G_i$  via le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{Q}_p} & \longrightarrow & \prod_{i \in I} G_i \\ c \downarrow & & \downarrow (c_i)_{i \in I} \\ \mathbb{G}_m & \xrightarrow{\Delta} & \prod_{i \in I} \mathbb{G}_m \end{array}$$

En d'autres termes c'est le sous groupe du produit des  $G_i$  où tous les facteurs de similitudes sont égaux. On fixe un isomorphisme  $\mathbb{C} \simeq \overline{\mathbb{Q}_p}$ . Soit  $v|_p$  la place au dessus de  $p$  donnée par le plongement ainsi fixé  $\mathbb{Q} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ . Cela nous permet de considérer la classe de  $G(\overline{\mathbb{Q}_p})$ -conjugaison  $[\mu]$  avec :

$$\mu : \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}_p}} \rightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$$

<sup>15</sup>Dans les cas (C), (AU) et (AR) l'assertion est évidente. Dans le cas (AL) cela découle l'existence de la forme symplectique  $*$ -linéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

le changement de base de  $\mu$  sur  $\overline{\mathbb{Q}_p}$ . Si on note  $E_v$  la complétion  $v$ -adique du corps réflexe, alors  $E_v$  contient le corps de définition de  $[\mu]$ . Par abus de notation on continue de noter  $E = E_v$ . Pour tout  $i \in I$  la projection de  $G$  sur  $G_i$  induit un cocaractère :

$$\mu_i : \mathbb{G}_{m,E} \rightarrow G_{i,E}$$

En niveau entier on dispose également d'une décomposition du réseau  $\Lambda$  :

$$\Lambda_{\mathbb{Z}_p} = \bigoplus_{i \in I} \Lambda_i^{m_i}$$

où chaque  $\Lambda_i$  est un  $\mathcal{O}_{R_i}$ -réseau dans  $V_i$ . On notera  $\mathcal{G}_i/\mathbb{Z}_p$  le sous-groupe parahorique de  $G_i$  associé au réseau  $\Lambda_i$ . De la même manière  $\mathcal{G}_{\mathbb{Z}_p}$  est le sous groupe du produit des  $\mathcal{G}_i$  où tous les facteurs de similitudes sont égaux.

On appelle donnée PEL  $p$ -adique une donnée comme en (2.3.1)<sup>16</sup>. Par la suite nous serons amenés à étudier des modules avec «  $\mathcal{D}$ -structure », i.e. munis d'une action de  $B$ , d'un accouplement symplectique etc. Comme ci-dessus, par équivalence de Morita si on note  $\mathcal{D}_i = (R_i, *, V_i, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{O}_{R_i}, \Lambda_i)$  pour tout  $i \in I$ , on a l'équivalence de catégories :

$$\begin{aligned} \left\{ \text{Modules avec } \mathcal{D}\text{-structure} \right\} &\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} \left\{ \text{Modules avec } \mathcal{D}_i\text{-structure} \right\} \\ \mathcal{F} &\longmapsto (\mathcal{F}_i)_{i \in I} \\ \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i^{m_i} &\longleftarrow (\mathcal{F}_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

On appellera donnée PEL  $p$ -adique *simple* une donnée  $\mathcal{D}$  où  $I = \{*\}$  est un singleton et  $m_* = 1$ . L'équivalence ci-dessus est donc une décomposition en facteurs simples. Par définition les objets  $G_i, \mathcal{G}_i, \mu_i$  sont les objets associés au facteur simple  $\mathcal{D}_i$ .

**Remarque 2.3.1.** Par la suite nous allons travailler avec un ensemble  $I$  quelconque mais comme expliqué ci-dessus tous les objets ne seront que des sommes directes sur  $I$  d'objets avec  $\mathcal{D}_i$  structures. Nous invitons donc le lecteur à lire les définitions dans le cas  $I = \{*\}$ , i.e. avec  $\mathcal{D}$  donnée PEL  $p$ -adique simple.

**Donnée PEL non ramifiée** Soit  $\mathcal{D}$  une donnée PEL  $p$ -adique. Il est naturel de se demander quelles sont les conditions pour que le groupe  $\mathcal{G}$  soit réductif. Pour répondre à cette question, on peut supposer que la donnée  $\mathcal{D}$  est simple. On a alors la proposition suivante :

**Proposition 2.3.2** ([BC79] 1.10.2). *Soit  $G$  un groupe réductif sur  $\mathbb{Q}_p$ . Alors  $G$  admet un modèle réductif  $\mathcal{G}$  sur  $\mathbb{Z}_p$  si et seulement si  $G$  est quasi-déployé et se déploie sur une extension non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$ .*

<sup>16</sup>Bien sûr on demande à ce qu'elle satisfasse les hypothèses 2.2.1

*Démonstration.* Pour plus de détails voir [Con14] Corollaire 5.2.14, et [hc].  $\square$

On dira qu'une donnée PEL  $p$ -adique  $\mathcal{D}$  est *non ramifiée* si le groupe  $\mathcal{G}$  associé est réductif (c'est le cas hyperspécial).

Donnons un exemple pour bien comprendre le rôle de la ramification.

**Exemple 2.3.3.** Le groupe  $\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n$  n'est pas réductif si  $F/\mathbb{Q}_p$  est ramifiée. Pour le voir, il suffit de regarder la suite exacte suivante permettant de calculer le quotient réductif  $\mathcal{G}_0^{\text{rdt}}$  de la fibre spécial  $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G} \otimes \mathbb{F}_p$  :

$$0 \rightarrow U \rightarrow \text{Res}_{(\mathbb{F}_p[x]/x^e)|\mathbb{F}_p} \text{GL}_n \xrightarrow{x \mapsto 0} \text{GL}_n \rightarrow 0$$

où  $U$  est le sous groupe unipotent<sup>17</sup> défini par :

$$U(R) = \{g \in \text{GL}_n(R[x]/x^e) \mid g \equiv \text{id} \pmod{x}\}$$

En d'autres termes  $\mathcal{G}_0^{\text{rdt}} = \text{GL}_n$  et l'indice de ramification  $e$  mesure précisément l'obstruction à ce que  $\mathcal{G}$  soit réductif.

**Remarque 2.3.4.** L'exemple ci-dessus du calcul du quotient réductif est en fait très général et est valable pour n'importe quel groupe de la forme  $\mathcal{G} = \text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} H$  (voir [Oes84] Appendice 3 pour une preuve).

## 2.3.2 Définition

La définition suivante est due à Rapoport et Zink dans [RZ96]. Comme nous nous sommes placé dans le cas parahorique maximal, la « chaîne auto-duale de réseaux polarisés ( $\mathcal{L}$ ) » ([RZ96], section 3) est réduite à un seul réseau auto-dual  $\Lambda \subset V$ .

**Définition 2.3.5.** Soit  $\mathcal{D}$  une donnée PEL  $p$ -adique. Le modèle local naïf pour la donnée  $\mathcal{D}$ , noté  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}$ , est la catégorie fibrée en groupoïde sur  $\text{LNSch}/\mathcal{O}_E$  dont la fibre au dessus de  $(S \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_E)$  est la catégorie  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}(S)$  des sous  $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$ -modules  $\mathcal{F} \subset \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$

- $\mathcal{F}$  est localement sur  $S$  un  $\mathcal{O}_S$ -facteur direct de  $\Lambda_S$
- Pour tout  $a \in \mathcal{O}_B$  on a l'égalité polynomiale suivante

$$\det(a \mid \mathcal{F}) = \det(a \mid V_0)$$

- $\mathcal{F}$  est totalement isotrope pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

---

<sup>17</sup>Pour montrer que  $U$  est unipotent il suffit de le montrer au niveau des points ([?] Corollaire 15.12). Pour tout élément  $g \in U$  on a  $g - \text{id}$  qui est nilpotent par définition. Il s'en suit que  $g$  est unipotent, et finalement que  $U$  est un groupe algébrique unipotent.

**Remarque 2.3.6.** Soit  $S$  un schéma sur  $\mathcal{O}_E$  et  $\mathcal{F} \in \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naif}}(S)$ . Par définition on a l'inclusion  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^{\perp}$  où  $\mathcal{F}^{\perp} = \text{Ker}(\Lambda_S = \Lambda_S^{\vee} \rightarrow \mathcal{F}^{\vee})$ . Il découle de la condition sur le déterminant que l'on a l'égalité :

$$\text{rank}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}) = \dim_E(V_0) = \frac{1}{2} \text{rank}(\Lambda)$$

et par conséquent  $\mathcal{F}^{\perp}$  et  $\mathcal{F}$  ont le même  $\mathcal{O}_S$ -rang. Puisque ces deux  $\mathcal{O}_S$ -modules sont des  $\mathcal{O}_S$ -facteurs directs de  $\Lambda_S$  de même rang, ils sont donc égaux. En d'autres termes  $\mathcal{F}$  est isotrope maximal (Lagrangien).

**Remarque 2.3.7.** Comme expliqué précédemment, si on note  $(\mathcal{D}_i)_{i \in I}$  les facteurs simples de  $\mathcal{D}$  alors on a un isomorphisme canonique :

$$\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naif}} \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathbb{M}_{\mathcal{D}_i}^{\text{naif}}$$

Dans la pratique cette identification va nous permettre de nous ramener au cas d'une donnée PEL  $p$ -adique simple.

### 2.3.3 Lien avec le modèle entier de Kottwitz

Soit  $\mathcal{D}$  une donnée PEL  $p$ -adique et  $K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$  un sous groupe compact ouvert. Nous allons maintenant expliquer le lien entre le modèle entier  $\mathcal{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naif}}$  et le modèle local  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naif}}$ .

Soit  $S$  un schéma sur  $\mathcal{O}_E$ , et  $(A, \lambda, \iota, \eta^p) \in \mathcal{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naif}}(S)$ . Il y a une suite exacte de  $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$ -modules

$$0 \rightarrow \omega_{A/S} \rightarrow H_{\text{dR}}^1(A/S) \rightarrow \text{Lie}_{A^{\vee}/S} \rightarrow 0 \quad (2.3.4)$$

appelée *filtration de Hodge*<sup>18</sup>. On considère  $\mathcal{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naif}, \square}$  la catégorie fibrée en groupoïde sur  $\text{LNSch}/\mathcal{O}_E$  dont la fibre au dessus de  $(S \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_E)$  est la catégorie  $\mathcal{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naif}, \square}(S)$  des tuples  $(A, \lambda, \iota, \eta^p, \gamma)$  où  $(A, \lambda, \iota, \eta^p) \in \mathcal{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naif}}$  et

$$\gamma : H_{\text{dR}}^1(A/S) \simeq \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$$

est une trivialisaton du premier groupe de cohomologie de DeRham de  $A$ . Bien sûr on demande à ce que cet isomorphisme soit  $\mathcal{O}_B$ -linéaire et compatible avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ <sup>19</sup>. Notez que  $\mathcal{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naif}, \square}$  est muni d'une action du groupe  $\mathcal{G}$ , où ce dernier agit sur la trivialisaton  $\gamma$ . L'oubli de cette trivialisaton fournit un morphisme :

$$\varphi : \mathcal{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naif}, \square} \longrightarrow \mathcal{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naif}}$$

L'un des résultats majeurs de [RZ96] est le suivant

<sup>18</sup>« Hodge » vient du fait qu'elle est induite par la dégénération de la suite spectrale de Hodge

<sup>19</sup>C'est un isomorphisme de « chaînes auto-duales de réseaux polarisées » dans le cas particulier où  $K_p$  est maximal parahorique.

**Proposition 2.3.8** ([RZ96] Théorème 3.16). *Le morphisme  $\varphi : \mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naif}, \square} \rightarrow \mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naif}}$  est un  $\mathcal{G}$ -torseur.*

Par ailleurs, la trivialisaton  $\gamma$  nous fournit un morphisme vers le modèle local

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naif}, \square} &\longrightarrow \mathbb{M}_{\mathcal{O}}^{\text{naif}} \\ (A, \lambda, \iota, \gamma) &\longmapsto \gamma(\omega_{A/S}) \subset \Lambda_S \end{aligned}$$

Le fait que ce morphisme soit bien défini découle essentiellement des définitions des espaces de modules  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naif}}$  et  $\mathbb{M}_{\mathcal{O}}^{\text{naif}}$ . On a alors la proposition suivante qui résulte de la théorie de Grothendieck-Messing et du théorème de Serre-Tate :

**Proposition 2.3.9** ([dJ91] [RZ96]). *Le morphisme  $\psi : \mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naif}, \square} \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathcal{O}}^{\text{naif}}$  est lisse,  $\mathcal{G}$ -équivariant, et de dimension relative  $\dim \mathcal{G}$ .*

*Démonstration.* Le fait que le morphisme soit  $\mathcal{G}$ -équivariant est évident. La lissité découle de Grothendieck-Messing, voir [dJ91] Proposition 4.5.  $\square$

En d'autres termes on dispose d'un diagramme de modèle local au sens de [RZ96] :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naif}, \square} & \\ \varphi \swarrow & & \searrow \psi \\ \mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naif}} & & \mathbb{M}_{\mathcal{O}}^{\text{naif}} \end{array}$$

Ce qui correspond à un morphisme de champs algébriques

$$\mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naif}} \longrightarrow [\mathbb{M}_{\mathcal{O}}^{\text{naif}} / \mathcal{G}] \quad (2.3.5)$$

lisse de dimension relative  $\dim \mathcal{G}$ . Ce morphisme permet d'étudier les propriétés locales (lissité, platitude...) de  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naif}}$  à partir des propriétés locales de  $\mathbb{M}_{\mathcal{O}}^{\text{naif}}$  qui est un objet plus simple à manipuler.

**Remarque 2.3.10.** Soit  $S$  un schéma sur  $\mathcal{O}_E$ , et  $(A, \lambda, \iota, \eta^p) \in \mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naif}}(S)$ . L'action de  $\mathcal{O}_B$  sur  $A$  et la décomposition de  $\mathcal{O}_B$  (2.3.2) induisent des décompositions :

$$\omega_{A/S} = \bigoplus_{i \in I} \omega_i^{m_i}, \quad H_{\text{dR}}^1(A/S) = \bigoplus_{i \in I} H_i^{m_i}, \quad \text{Lie}_{A^\vee/S} = \bigoplus_{i \in I} L_i^{m_i}$$

compatibles à la filtration de Hodge (2.3.4) dans le sens où pour tout  $i \in I$  on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \omega_i \rightarrow H_i \rightarrow L_i \rightarrow 0$$

On obtient pour tout  $i \in I$  un morphisme :

$$\begin{aligned} \psi_i : \mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naif}, \square} &\longrightarrow \mathbb{M}_{\mathcal{O}_i}^{\text{naif}} \\ (A, \lambda, \iota, \gamma) &\longmapsto \gamma(\omega_i) \subset \Lambda_{i,S} \end{aligned}$$

Bien sûr  $\psi = \bigoplus_{i \in I} \psi_i$ , en accord avec la Remarque 2.3.7.



### 2.3.4 La condition de déterminant

Pour mieux comprendre le modèle local  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}$  nous allons expliciter la condition de déterminant. On suit en partie les explications de [VW13] et [Lan13] Lemme 1.2.5.19.

On peut supposer que  $\mathcal{D}$  est une donnée PEL  $p$ -adique simple, i.e.  $B = R$ . Soit  $S$  un schéma sur  $\mathcal{O}_E$  et  $\mathcal{F} \subset \Lambda_S$  un sous  $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$ -module totalement isotrope et localement un facteur direct en tant que  $\mathcal{O}_S$ -module. Pour le moment on ne fait aucune hypothèse sur la ramification de  $F$ . Supposons pour commencer que  $S$  est le spectre d'un corps algébriquement clos  $C$  de caractéristique 0. Dans ce cas on a une décomposition :

$$\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} C = V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C = \bigoplus_{\varphi: R \rightarrow C} V^{(\varphi)}, \quad \text{où } V^{(\varphi)} = V \otimes_{R, \varphi} C \quad (2.3.6)$$

En particulier la donnée de  $\mathcal{F} \subset \Lambda_C$  est équivalente à la donnée d'un tuple  $(\mathcal{F}_\varphi)_\varphi$ . On a donc pour tout  $a \in \mathcal{O}_B$  :

$$\det(a | \mathcal{F}) = \prod_{\varphi} \det(a | \mathcal{F}_\varphi) = \prod_{\varphi} \varphi(a)^{\dim(\mathcal{F}_\varphi)}$$

Par conséquent  $\mathcal{F}_\varphi$  satisfait la condition de déterminant si et seulement si  $\dim(\mathcal{F}_\varphi) = \dim(V_1^{(\varphi)})$  pour tout plongement  $\varphi : R \rightarrow C$ . Si on note  $P = \text{Stab}_G(\mathcal{F} \subset \Lambda_S)$  le stabilisateur de  $\mathcal{F}$ , on a donc que  $\mathcal{F}$  satisfait la condition de déterminant si et seulement si  $P$  est un parabolique de type  $\mu$  avec :

$$\mu : \mathbb{G}_{m, C} \rightarrow G_C \subset \text{GL}_B(V_C) \subset \prod_{\varphi: R \rightarrow C} \text{GL}(V^{(\varphi)})$$

le cocaractère de Hodge que l'on voit comme un produit  $\mu = (1^{r_\varphi}, 0^{d-r_\varphi})_\varphi$  où  $r_\varphi = \dim_C(W^{(\varphi)})$  et  $d = \text{rank}_R(V)$ . Comme ces deux conditions peuvent être testées au niveaux des points géométriques, on obtient la proposition suivante :

**Proposition 2.3.11.** *On a un isomorphisme en fibre générique :*

$$\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathcal{O}_E} E \cong G/P_\mu$$

Si l'on ne suppose plus que  $S$  est au dessus de  $E$ , la situation est plus compliquée. Cependant si l'on suppose que  $F/\mathbb{Q}_p$  est non ramifiée, alors la décomposition (2.3.6) ci-dessus reste valable même si  $C$  est de caractéristique  $p$  car on a l'égalité au niveau des plongements

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{O}_R, \overline{\mathbb{Q}_p}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{O}_R, \overline{\mathbb{F}_p})$$

On a alors le résultat suivant avec les notations évidentes :

**Proposition 2.3.12.** *Si la donnée  $\mathcal{D}$  est non ramifiée, alors on a un isomorphisme :*

$$\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}} \cong \mathcal{G}/\mathcal{P}_\mu$$

En particulier  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}$  est lisse sur  $\mathcal{O}_E$ .

Ci-dessus  $\mathcal{P}_\mu \subset \mathcal{G}$  est le sous-groupe parabolique sur  $\mathcal{O}_E$  induit par le cocaractère  $\mu$ . Notez que si la donnée  $\mathcal{D}$  est non ramifiée, alors le groupe  $\mathcal{G}$  est réductif (Proposition 2.3.2).

Si on ne suppose plus la donnée  $\mathcal{D}$  non ramifiée, la décomposition (2.3.6) ne reste valable qu'en fibre générique et la proposition précédente est donc fautive. En fibre spéciale si l'on suppose l'extension  $F/\mathbb{Q}_p$  totalement ramifiée par exemple, la somme directe sur tous les plongements  $\varphi$  est triviale et la condition sur le déterminant ne nous donne que la dimension de  $\mathcal{F}$  (voir aussi la Remarque 2.4.2). Le problème vient du fait que si  $F/\mathbb{Q}_p$  est ramifiée et  $S$  est un schéma de caractéristique  $p$ , alors  $\mathcal{F} \in \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}(S)$  n'est pas nécessairement projectif en tant que  $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$ -module.

### 2.3.5 Fibre spéciale

On s'intéresse maintenant à la fibre spéciale du modèle local  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}$ . On note  $\kappa$  le corps résiduel de  $E$ , et  $\mathcal{G}_{\kappa} = \mathcal{G} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \kappa$ . Dans [RZ96], les auteurs ont calculé les  $\mathcal{G}_{\kappa}$ -orbites dans la fibre spéciale  $M_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}} := \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \kappa$ . Dans leurs travaux ils se placent en niveau parahorique  $K$  quelconque, ce qui rend la combinatoire des relations d'adhérences entre orbites un peu complexe. En niveau parahorique maximal, qui est le cas qui nous intéresse, la situation est plus simple. Notons  $\text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu)$  l'ensemble de ces orbites, appelé ensemble admissible de niveau  $K$  naïf (notation non standard). Par définition on dispose d'une décomposition du modèle local naïf en  $\mathcal{G}_{\kappa}$ -orbites :

$$M_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}} = \coprod_{w \in \text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu)} M_w$$

L'ensemble  $\text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu)$  est muni d'une relation d'ordre partielle. On a la proposition suivante :

**Proposition 2.3.13** ([RZ96], [PR02], [PR00]). *Cette stratification est une bonne stratification dans le sens où pour tout  $w \in \text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu)$  on a la relation d'adhérence :*

$$\overline{M_w} = \bigsqcup_{w' \leq w} M_{w'}$$

Nous expliciterons la combinatoire de l'ensemble  $\text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu)$  ainsi que la géométrie des strates dans le prochain chapitre.

**Remarque 2.3.14.** On fera attention à ne pas confondre  $\text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu)$  l'ensemble admissible naïf de niveau  $K$  et  $\text{Adm}_K(\mu)$  l'ensemble admissible de niveau  $K$  (2.6.3). La notation  $\text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu)$  est non standard.

D'après la proposition précédente on dispose d'un homéomorphisme

$$|[M_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}/\mathcal{G}_{\kappa}]| \simeq \text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu)$$

où  $|\cdot|$  désigne l'espace topologique sous-jacent et  $\text{Adm}_K(\mu)$  est muni de la topologie induite par l'ordre partiel  $\leq$  (c'est un espace  $T_0$ ). En combinant cet homéomorphisme avec le morphisme de champs algébriques :

$$\text{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \kappa \rightarrow [M_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}/\mathcal{G}_{\kappa}] \quad (2.3.7)$$

on obtient une décomposition en sous-schémas localement fermés (structure réduite) :

$$\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \kappa = \coprod_{w \in \text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu)} S_w$$

Puisque le morphisme (2.3.7) est lisse, donc en particulier ouvert, cette stratification est une bonne stratification, i.e. pour tout  $w \in \text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu)$  on a la relation d'adhérence :

$$\overline{S_w} = \bigsqcup_{w' \leq w} S_{w'}$$

Cette stratification est appelée stratification de *Kottwitz-Rapoport* (KR).

## 2.3.6 Exemples

Pour finir cette section donnons quelques exemples de modèles locaux.

**Exemple 2.3.15** (Courbe modulaire, niveau hyperspécial). On se place dans le cas de la courbe modulaire en niveau hyperspécial, i.e :

$$\mathcal{O}_B = \mathbb{Z}_p, \quad \Lambda = \mathbb{Z}_p^2, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et  $K = K_p K^p \subset \text{GL}_2(\mathbb{A}_f)$  avec  $K_p = \text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$  maximal hyperspécial<sup>20</sup>. Dans ce cas le groupe  $\mathcal{G} = \text{GL}_{2, \mathbb{Z}_p}$  est réductif. Soit  $\mathcal{F} \in \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}$ . Il est simple de voir que pour cette donnée la condition sur le déterminant est équivalente à ce que  $\mathcal{F}$  soit de rang 1, et que la condition sur l'isotropie est triviale. Par conséquent  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}} = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_p}^1$ , est lisse, et le morphisme (2.3.5) est donné par :

$$\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \longrightarrow \left[ \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_p}^1 / \text{GL}_{2, \mathbb{Z}_p} \right]$$

En fibre spéciale, l'action de  $\text{GL}_{2, \mathbb{F}_p}$  sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^1$  étant transitive, la stratification (KR) de  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes \mathbb{F}_p$  est triviale. Notez que dans le cas de la courbe modulaire  $\mu = (1, 0)$  et ot bien en fibre générique  $\text{GL}_2/P_{(1,0)} = \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^1$ .

**Exemple 2.3.16** (Hilbert). Pour simplifier, plaçons nous dans le cas d'une extension  $F/\mathbb{Q}_p$  totalement ramifiée et d'une donnée PEL de type Hilbert :

$$\mathcal{O}_B = \mathcal{O}_F, \quad \Lambda = \mathcal{O}_F^2, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle = \text{Tr}_{F/\mathbb{Q}_p} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On commence par la fibre générique. Soit donc  $S$  un schéma sur  $\overline{\mathbb{Q}_p}$ . Il est simple de voir que la décomposition de  $\mathcal{F} \in \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}(S)$  :

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{\varphi: F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}} \mathcal{F}_{\varphi}$$

<sup>20</sup> « Hyperspécial » veut dire que le groupe  $\mathcal{G}$  sur  $\mathbb{Z}_p$  associé est réductif

implique que  $\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$ -module localement libre car chacun des facteurs  $\mathcal{F}_\varphi$  est de rang 1 sur  $\mathcal{O}_S$ . On trouve donc

$$\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \cong (\text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}_2) / (\text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} P_{(1,0)}) \cong \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathbb{P}^1$$

Il n'y a pas de contradiction avec la Proposition 2.3.11 car l'inclusion  $G \hookrightarrow \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}_2$  induit un isomorphisme :

$$G/P_\mu \xrightarrow{\sim} (\text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}_2) / (\text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} P_{(1,0)})$$

où  $G = (\text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}_2)^{\det \in \mathbb{Q}_p^\times}$  est le groupe associé à la donnée PEL et  $\mu = (1, 0)^{[F:\mathbb{Q}_p]}$  désigne le cocaractère de Hodge.

En fibre spéciale cette fois-ci la situation est non triviale. Soit  $\mathcal{F} \in \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}(k)$ . Par définition c'est un sous module  $\mathcal{O}_F \otimes k$ -module :

$$\mathcal{F} \subset \frac{k[\pi]}{(\pi^e)} \oplus \frac{k[\pi]}{(\pi^e)}$$

qui est localement libre de rang  $e$  en tant que  $k$ -espace vectoriel (ici on a fixé une uniformisante  $\pi \mapsto x$ ). Par les diviseurs élémentaires, il existe une base  $(e_1, e_2)$  de  $(\mathcal{O}_F \otimes k)^2$  telle que

$$\mathcal{F} = \pi^i e_1 \oplus \pi^j e_2 \quad j \leq i, \quad i + j = e$$

Notez qu'il est alors automatiquement isotrope. Nous allons montrer dans le chapitre suivant que la stratification (KR) coïncide avec la stratification par les couples  $(i, j)$  ci-dessus (Proposition 3.3.3), et que le lieu lisse de  $M_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}$  coïncide avec la strate  $(e, 0)$ , appelée lieu de Rapoport dans [DP94].

**Remarque 2.3.17.** Nous verrons dans le chapitre suivant que le passage du groupe  $G$  au groupe  $\text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}_2$  fonctionne en toute généralité (voir (3.2.1), (3.2.8)).

## 2.4 Modèle local de Pappas-Rapoport

L'exemple précédent met en avant un phénomène général : lorsque la donnée PEL est ramifiée, le modèle entier  $\text{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}}$  n'est pas lisse (même en niveau parahorique maximal). Dans [PR02] Pappas et Rapoport ont défini un modèle local qui est lisse et que nous allons maintenant décrire.

### 2.4.1 Notations

#### 2.4.1.1 Donnée rationnelle

Soit  $\mathcal{D}$  une donnée PEL  $p$ -adique. On garde les notations de 2.3.1. On dispose donc de décompositions :

$$B_{\mathbb{Q}_p} = \prod_{i=1}^r M_{m_i}(R_i), \quad V_{\mathbb{Q}_p} = \bigoplus_{i \in I} V_i^{m_i}$$

et on note  $F_i$  les invariants de  $R_i$  sous l'involution  $*$ . Soit  $K$  une extension galoisienne contenant tous les plongements de  $\mathbb{Q}_p$ -algèbres  $R_i \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ . On note  $\mathcal{O}_K$  l'anneau d'entiers de  $K$  et  $k$  son corps résiduel. D'après la preuve de [Lan13] 1.2.5.7, on a l'inclusion  $E \subset K$ . Pour tout  $i \in I$  on note  $\Sigma_i = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(R_i, \overline{\mathbb{Q}_p})$ . Sur  $K$  on peut continuer la décomposition 2.3.3 :

$$V \otimes_{\mathbb{Q}_p} K = \bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{\varphi \in \Sigma_i} V_i^{(\varphi)}, \quad V_i^{(\varphi)} = V_i \otimes_{R_i, \varphi} K \quad (2.4.1)$$

De la même manière la filtration de Hodge  $V = W \oplus W'$  se décompose sur  $K$  :

$$W \otimes_{\mathbb{Q}_p} K = \bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{\varphi \in \Sigma_i} W_i^{(\varphi)}, \quad W' \otimes_{\mathbb{Q}_p} K = \bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{\varphi \in \Sigma_i} W_i'^{(\varphi)}$$

où comme précédemment  $W_i^{(\varphi)}$  et  $W_i'^{(\varphi)}$  désignent les sous-espaces où  $R_i$  agit via le plongement  $\varphi : R_i \rightarrow K$ . Pour tout  $i \in I$  et tout  $\varphi \in \Sigma_i$  on définit les entiers :

$$r_i^{(\varphi)} := \dim_K W_i^{(\varphi)}$$

Avec cette notations, on peut écrire pour tout  $i \in I$  :

$$\mu_i = \{(1^{r_\varphi}, 0^{d_i - r_\varphi})\}_{\varphi \in \Sigma_i}$$

où l'on voit  $\mu_i$  comme un élément du produit :

$$\mu_i : (\mathbb{G}_m)_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \rightarrow (G_i)_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \subset \text{GL}_{R_i}(V_i \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}_p}) \subset \prod_{\varphi \in \Sigma_i} \text{GL}(V \otimes_{R_i, \varphi} \overline{\mathbb{Q}_p})$$

Notez que l'involution  $*$  agit sur chacun des  $\Sigma_i$  comme un permutation. On notera  $\varphi \mapsto \sigma \cdot \varphi$  cette permutation. Notez que pour tout  $i \in I$  et tout  $\varphi \in \Sigma_i$  on a l'égalité :

$$r_i^{(\sigma\varphi)} + r_i^{(\varphi)} = d_i$$

Pour tout  $i \in I$  on fixe une numérotation :

$$\Sigma_i^{\text{nr}} = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F_i^{\text{nr}}, K) = \{\varphi_{i,1}, \dots, \varphi_{i,f_i}\}$$

Notons  $\Sigma_{i,j} \subset \Sigma_i$  le sous-ensemble des plongements  $\varphi : R_i \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$  dont la restriction à  $F_i^{\text{nr}}$  coïncide avec  $\varphi_{i,j} : F_i^{\text{nr}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ . C'est un sous-ensemble de cardinal :

$$N_i := \#\Sigma_{i,j} = \begin{cases} e_i & \text{si } i \text{ est de type (C)} \\ 2e_i & \text{si } i \text{ est de type (AL), (AU), (AR)} \end{cases}$$

On fixe une numérotation :

$$\Sigma_{i,j} = \{\varphi_{i,j}^1, \dots, \varphi_{i,j}^{N_i}\}$$

qui satisfait la propriété suivante : deux plongements ayant la même restriction à  $F_i$  sont successifs. En d'autres termes on demande à ce que  $\varphi$  et  $\sigma\varphi$  soient successif pour tout  $\varphi \in \Sigma_{i,j}$ . Notons  $L_i = \{1, \dots, N_i\}$  Les objets définis précédemment peuvent donc être indexés par  $i \in I, j \in J_i, l \in L_i$  :

$$W_{i,j}^l := W_i^{(\varphi_{i,j}^l)}, \quad r_{i,j}^l := \dim_K W_{i,j}^l$$

### 2.4.1.2 Donnée entière

En niveau entier la situation est différente. Pour comprendre ce qu'il se passe, plaçons nous dans le cas simple  $I = \{*\}$ . On travaille donc avec une seule extension finie  $F/\mathbb{Q}_p$ . La théorie de Galois nous fournit un morphisme naturel :

$$\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K \longrightarrow \prod_{\varphi: F \rightarrow K} \mathcal{O}_K \quad (2.4.2)$$

$$a \otimes b \longmapsto (\varphi(a)b)_\varphi \quad (2.4.3)$$

Bien sûr en fibre générique, c'est-à-dire après avoir appliqué  $\cdot \otimes_{\mathbb{Z}_p} K$ , ce morphisme est un isomorphisme. En niveau entier la situation dépend de la ramification :

**Lemme 2.4.1.** *Le morphisme ci-dessus est un isomorphisme si et seulement si  $F/\mathbb{Q}_p$  est non ramifiée.*

*Démonstration.* C'est une version algébrique du fait géométrique bien connu : la catégorie des revêtements finis étales d'un anneau Hensélien est équivalente à celle de son corps résiduel. Voici une autre preuve bien plus élémentaire qui m'a été donnée par Andrea Marrama que je remercie. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une  $\mathbb{Z}_p$ -base de  $\mathcal{O}_F$ . Cette base nous fournit une  $\mathcal{O}_K$ -base du  $\mathcal{O}_K$ -module  $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$ . Dans cette base le déterminant du morphisme (2.4.2) est donné par le discriminant  $D_{F/\mathbb{Q}_p}$  de l'extension  $F/\mathbb{Q}_p$ . Il est alors bien connue que  $F/\mathbb{Q}_p$  est non ramifiée si et seulement si le discriminant  $D_{F/\mathbb{Q}_p}$  est inversible. Le résultat en découle.  $\square$

Par conséquent, contrairement à (2.4.1), on ne dispose pour  $\Lambda$  que d'une décomposition

$$\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K \cong \bigoplus_{i \in I} \Lambda_i^{m_i}, \quad \Lambda_i \cong \bigoplus_{j=1}^{f_i} \Lambda_{i,j} \quad (2.4.4)$$

induite par la décomposition

$$\mathcal{O}_{F_i} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K = \bigoplus_{j=1}^{f_i} \mathcal{O}_{F_i} \otimes_{\mathcal{O}_{F_i}^{\text{nr}}, \varphi_{i,j}} \mathcal{O}_K$$

(au dessus  $\Lambda_{i,j}$  désigne donc le sous-espace où  $\mathcal{O}_{F_i}^{\text{nr}}$  agit via  $\varphi_{i,j}$ , conformément à la décomposition de  $\mathcal{O}_{F_i}$  ci-dessus). Mais on ne peut pas raffiner cette décomposition via les plongements  $\varphi_{i,j}^l \in \Sigma_{i,j}$ . En fibre spéciale sur  $\kappa$  la situation devient encore plus claire :

$$\mathcal{O}_{F_i} \otimes_{\mathbb{Z}_p} k \simeq \begin{cases} k^{f_i} & \text{si } F_i \text{ est non ramifiée} \\ k[\pi_i]/(\pi_i^{e_i}) & \text{si } F_i \text{ est totalement ramifiée} \end{cases}$$

**Remarque 2.4.2.** Comme expliqué dans [BH22b] Exemple 2.20, les  $k$ -modules  $k^e$  et  $k[\pi]/(\pi^e)$  sont de mêmes dimensions, tous deux munis d'une action de  $\mathcal{O}_F$  (action triviale pour le premier), de déterminant égaux, mais ne sont pas isomorphes en tant que  $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} k$ -modules.

**Remarque 2.4.3.** Comme expliqué avec la Remarque 2.3.7, les objets que nous allons étudier sont des modules muni d'une  $\mathcal{D}$  structure. Les différentes décompositions ci-dessus sont inoffensives et le lecteur est invité à se placer dans le cas  $I = \{*\}$  et  $J = \{*\}$  (on rappelle que  $J_i = \{1, \dots, f_i\}$ ), i.e. dans le cas d'une seule extension totalement ramifiée  $F/\mathbb{Q}_p$ .

## 2.4.2 Définition

Si  $S$  est un schéma sur  $\mathbb{Z}_p$  et si  $x \in \mathcal{O}_B$ , on notera  $[x]$  son action sur  $\Lambda_S$ , i.e.  $[x] = x \otimes 1 \in \mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$ .

**Définition 2.4.4.** *Le modèle local de Pappas-Rapoport pour la donnée  $\mathcal{D}$ , noté  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}}$ , est la catégorie fibrée en groupoïde sur  $\text{LNSch}/_{\mathcal{O}_K}$  dont la fibre au dessus de  $(S \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K)$  est la catégorie  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}}(S)$  des données pour tout  $i \in I, j \in J_i$  de filtrations de  $\mathcal{O}_B \otimes \mathcal{O}_S$ -modules :*

$$0 = \mathcal{F}_{i,j}^{(N_i+1)} \subset \mathcal{F}_{i,j}^{(N_i)} \subset \mathcal{F}_{i,j}^{(N_i-1)} \subset \dots \subset \mathcal{F}_{i,j}^{(1)} \subset \Lambda_{i,j}$$

1.  $\mathcal{F}_{i,j}^{(1)}$  est totalement isotropes,
2. Pour tout  $a \in \mathcal{O}_B$  on a l'égalité polynomiale suivante :

$$\det(a | \mathcal{F}_{i,j}^{(1)}) = \det(a | W_{i,j})$$

3.  $\mathcal{F}_{i,j}^{(l)}$  et  $\Lambda_{i,j}/\mathcal{F}_{i,j}^{(l)}$  sont localement sur  $S$  des  $\mathcal{O}_S$ -modules libres,
4. Le gradué  $\mathcal{F}_{i,j}^{(l)}/\mathcal{F}_{i,j}^{(l-1)}$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module localement libre de rang  $r_{i,j}^l$
5. Pour tout  $a \in \mathcal{O}_{R_i}$  on a l'inclusion :

$$([a] - \varphi_{i,j}^l(a)) \cdot \mathcal{F}_{i,j}^{(l)} \subset \mathcal{F}_{i,j}^{(l-1)}$$

6. (a) Si  $R_i = F_i$  (c'est-à-dire  $i$  est de type (C) et  $N_i = e_i$ ), pour tout  $a \in \mathcal{O}_{R_i}$  et pour tout  $l = 1, \dots, e_i$  on a l'inclusion

$$([a] - \varphi_{i,j}^1(a)) \cdots ([a] - \varphi_{i,j}^l(a)) \cdot \left( \mathcal{F}_{i,j}^{(l+1)} \right)^\perp \subset \mathcal{F}_{i,j}^{(l+1)}$$

- (b) Si  $R_i \neq F_i$  (c'est-à-dire  $i$  est de type (AL) ou (AU) et  $N_i = 2e_i$ ), pour tout  $a \in \mathcal{O}_{R_i}$  et pour tout  $l = 1, \dots, e_i$  on a l'inclusion

$$([a] - \varphi_{i,j}^1(a)) \cdots ([a] - \varphi_{i,j}^{2l}(a)) \cdot \left( \mathcal{F}_{i,j}^{(2l+1)} \right)^\perp \subset \mathcal{F}_{i,\sigma(j)}^{(2l+1)}$$

En plongeant ce foncteur dans un produit de grassmanniennes classiques on obtient la proposition suivante :

**Proposition 2.4.5.** *Le foncteur  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}}$  est représentable par un schéma projectif sur  $\mathcal{O}_K$ .*

**Remarque 2.4.6.** La définition de  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}}$  que l'on utilise ici est celle de [PR02]. Nous ferons le lien avec la définition de [BH22b] dans les sections 3.2.1.1 et 3.2.2.1.

### 2.4.3 Propriétés

Pour toute la suite de cette thèse nous ferons l'hypothèse suivante :

**Hypothèses.** *On exclut les facteurs de type (AR) de la donnée  $\mathcal{D}$*

Cette hypothèse va nous assurer que le modèle local de Pappas-Rapoport  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}}$  est bien lisse (voir proposition 2.4.8).

Soit  $S$  un schéma sur  $\mathcal{O}_K$  et  $\mathcal{F} \in \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}(S)$ . Comme pour  $\Lambda$ , on a une décomposition (voir (2.4.4))

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{j \in J_i} \mathcal{F}_{i,j}$$

où  $\mathcal{F}_{i,j}$  est le sous espace où  $\mathcal{O}_{F_i^{\text{pr}}}$  agit via  $\varphi_{i,j}$ . Il découle de la définition de  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}}$  que le morphisme suivant est bien défini :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}} &\longrightarrow \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_K \\ (\mathcal{F}_{i,j}^{(\bullet)})_{i,j} &\longmapsto \bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{j \in J_i} \mathcal{F}_{i,j}^{(1)} \end{aligned}$$

**Proposition 2.4.7.** *Ce morphisme induit un isomorphisme en fibre générique :*

$$\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}} \otimes_{\mathcal{O}_K} K \xrightarrow{\sim} \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathcal{O}_E} K$$

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i)_{i \in I} \in \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}(K)$ . Comme en (2.4.1), sur  $K$  on a une décomposition en somme directe :

$$\mathcal{F}_i \otimes_{\mathbb{Q}_p} K = \bigoplus_{\varphi \in \Sigma_i} \mathcal{F}_i^{(\varphi)} = \bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{j \in J_i} \bigoplus_{l=1}^{N_i} \mathcal{F}_i^{(\varphi_{i,j}^l)}$$

où  $\mathcal{F}_i^{(\varphi)}$  désigne le sous espace où  $R_i$  agit via le plongement  $\varphi$ . Pour tout  $(i, j, l)$  on pose :

$$\mathcal{F}_{i,j}^{(l)} := \bigoplus_{k=1}^l \mathcal{F}_i^{(\varphi_{i,j}^k)}$$

En faisant varier  $l$  on obtient une filtration  $\mathcal{F}_{i,j}^{(\bullet)}$  de  $\mathcal{F}_{i,j}$ . Il est alors simple de voir que cette filtration ainsi définie est la seule filtration possible de  $\mathcal{F}_{i,j}$  satisfaisant les conditions 2.4.4.  $\square$

L'un des résultats majeurs de [PR02] (voir [SZ22] Proposition A.8 pour le cas général) est que le modèle local  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}}$  est une sorte de produit de convolution de modèles locaux naïfs non ramifiés. Plus précisément, pour tout  $(i, j, l)$  on définit le  $\mathcal{O}_K$ -module :

$$\Lambda_{i,j}^l := \Lambda_i \otimes_{\mathcal{O}_{R_i, \varphi_{i,j}^l}} \mathcal{O}_K$$



On peut le munir d'un accouplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle_l$  ([PR02] Proposition 9.3, voir aussi [BH22b] section 2). On note  $\mathcal{G}_{i,j}^l$  le groupe des automorphismes de  $(\Lambda_{i,j}^l, \langle \cdot, \cdot \rangle_l)$ . Par construction c'est un groupe réductif sur  $\mathcal{O}_K$ . On définit alors  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}(i,j,l)}^{\text{naïf}}$  comme le foncteur qui à un schéma  $S$  sur  $\mathcal{O}_K$  associe les sous  $\mathcal{O}_S$ -modules  $\mathcal{F} \subset (\Lambda_{i,j}^l)_S$  tels que :

1.  $\mathcal{F}$  est localement un  $\mathcal{O}_S$ -facteur direct de  $(\Lambda_{i,j}^l)_S$  de rang  $r_{i,j}^l$ .
2.  $\mathcal{F}$  est totalement isotrope pour l'accouplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle_l$ .

En d'autres termes  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}(i,j,l)}^{\text{naïf}}$  est le modèle local « non ramifié » pour le groupe  $\mathcal{G}_{i,j}^l$  et le cocaractère  $\mu_{i,j}^l$ . On a alors le résultat crucial suivant :

**Proposition 2.4.8** ([PR02]). *Il existe un diagramme*

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR},\square} & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}} & & \prod_{(i,j,l)} \mathbb{M}_{\mathcal{D}(i,j,l)}^{\text{naïf}} \end{array}$$

où  $p_1$  et  $p_2$  sont des  $\prod_{i,j,l \geq 2} \mathcal{G}_{i,j}^l$ -torseurs (pour des actions différentes). En particulier  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}}$  est lisse sur  $\mathcal{O}_K$ .

Donnons quelques explications concernant ce résultat. Soit  $S$  un schéma sur  $\mathcal{O}_K$  et  $(\mathcal{F}_{i,j}^{(l)})_{(i,j,l)} \in \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}}(S)$ . On définit pour tout  $(i,j,l)$  le  $\mathcal{O}_S$ -module suivant :

$$\Upsilon_{i,j}^l := \text{Ker}([\pi_i] - \pi_{i,j}^l \mid \Lambda_{i,j} / \mathcal{F}_{i,j}^{(l-1)}) \simeq \text{Ker}([\pi_i] - \pi_{i,j}^l \mid (\mathcal{F}_{i,j}^{(l-1)})^\perp / \mathcal{F}_{i,j}^{(l-1)})$$

Notez que par définition de  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}}$  on a l'inclusion :

$$\mathcal{F}_{i,j}^{(l)} / \mathcal{F}_{i,j}^{(l-1)} \hookrightarrow \Upsilon_{i,j}^l \quad (2.4.5)$$

Le sous-module  $\mathcal{F}_{i,j}^{(l)} / \mathcal{F}_{i,j}^{(l-1)}$  est totalement isotrope pour l'accouplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle_l$  ([PR02], Proposition 9.3). On définit finalement  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR},\square}(S)$  est l'ensemble des tuples  $(\mathcal{F}_{i,j}^{(l)}, \tau_{i,j}^{(l)})_{(i,j,l)}$  comme  $(\mathcal{F}_{i,j}^{(l)})_{(i,j,l)} \in \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}}(S)$  et pour tout  $(i,j,l)$  une trivialisations

$$\tau_{i,j}^{(l)} : \Upsilon_{i,j}^l \xrightarrow{\sim} \Lambda_{i,j}^l$$

Le morphisme  $p_1$  correspond au morphisme d'oubli de  $(\tau_{i,j}^{(l)})_{(i,j,l)}$  et le morphisme  $p_2$  est induit par les filtrations (2.4.5) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR},\square} & \longrightarrow & \prod_{(i,j,l)} \mathbb{M}_{\mathcal{D}(i,j,l)}^{\text{naïf}} \\ (\mathcal{F}_{i,j}^{(l)}, \tau_{i,j}^{(l)})_{(i,j,l)} & \longmapsto & (\tau_{i,j}^{(l)}(\mathcal{F}_{i,j}^{(l)} / \mathcal{F}_{i,j}^{(l-1)})) \end{array}$$

Le fait que  $p_2$  soit bien défini découle essentiellement de la définition de  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}}$ . La difficulté dans le résultat ci-dessus se trouve donc dans le fait de prouver que localement il existe une trivialisaton de  $\Upsilon_{i,j}^l$  (ce qui montre que  $p_1$  et  $p_2$  sont des  $\prod_{i,j,l \geq 2} \mathcal{G}_{i,j}^l$ -torseurs). Enfin l'assertion sur la lissité découle de l'existence de ce diagramme de toseurs et du fait que les modèles locaux non ramifiés  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}(i,j,l)}^{\text{naïf}}$  sont lisses car on a exclu les facteurs de type (AR).

**Remarque 2.4.9.** En fibre spéciale la situation est plus simple : dans ce cas on a l'égalité

$$\Upsilon_{i,j}^l = \pi_i^{-1} \mathcal{F}_{i,j}^{(l-1)} / \mathcal{F}_{i,j}^{(l-1)}$$

et la filtration (2.4.5) se lit simplement :

$$\mathcal{F}_{i,j}^{(l)} / \mathcal{F}_{i,j}^{(l-1)} \hookrightarrow \pi_i^{-1} \mathcal{F}_{i,j}^{(l-1)} / \mathcal{F}_{i,j}^{(l-1)} \quad (2.4.6)$$

Nous reviendrons sur ces gradués et ce diagramme de modèles locaux dans le chapitre sur les stratification d'Ekedahl-Oort, lorsque l'on définira les invariants de Hasse primitifs.

## 2.5 Modèle entier de Pappas-Rapoport

On dispose maintenant d'un modèle local  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}}$  qui est lisse sur  $\mathcal{O}_K$  et qui possède la même fibre générique que le modèle local  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}$ . Cela nous permet de définir de façon abstraite le modèle de Pappas-Rapoport via le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} & \longrightarrow & [\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}} / \mathcal{G}_{\mathcal{O}_K}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} & \longrightarrow & [\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}} / \mathcal{G}_{\mathcal{O}_K}] \end{array} \quad (2.5.1)$$

Plus explicitement on a la définition suivante :

**Définition 2.5.1.**  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}}$  est la catégorie fibrée en groupoïde sur  $\text{LNSch}/\mathcal{O}_K$  dont la fibre au dessus de  $(S \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K)$  est la catégorie  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}}(S)$  dont les objets sont les tuples  $(A, \lambda, \iota, \eta^p, \underline{\omega})$  où  $(A, \lambda, \iota, \eta^p) \in \mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}}(S)$  et  $\underline{\omega}$  est la donnée pour tout  $(i, j)$  d'une filtration de  $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$ -modules :

$$0 = \omega_{i,j}^{(N_i+1)} \subset \omega_{i,j}^{(N_i)} \subset \omega_{i,j}^{(N_i-1)} \subset \dots \subset \omega_{i,j}^{(1)} = \omega_{i,j} \subset \mathcal{H}_{i,j}$$

1.  $\omega_{i,j}^{(l)}$  et  $\mathcal{H}_{i,j}/\omega_{i,j}^{(l)}$  sont localement sur  $S$  des  $\mathcal{O}_S$ -modules libres,
2.  $\omega_{i,j}^{(l)}/\omega_{i,j}^{(l-1)}$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module localement libre de rang  $r_{i,j}^l$
3. Pour tout  $a \in \mathcal{O}_{R_i}$  on a l'inclusion :

$$([a] - \varphi_{i,j}^l(a)) \cdot \omega_{i,j}^{(l)} \subset \omega_{i,j}^{(l-1)}$$

4. (a) Si  $R_i = F_i$  (c'est-à-dire  $i$  est de type (C) et  $N_i = e_i$ ), pour tout  $a \in \mathcal{O}_{R_i}$  et pour tout  $l = 1, \dots, e_i$  on a l'inclusion

$$([a] - \varphi_{i,j}^1(a)) \cdots ([a] - \varphi_{i,j}^l(a)) \cdot (\omega_{i,j}^{(l+1)})^\perp \subset \omega_{i,j}^{(l+1)}$$

- (b) Si  $R_i \neq F_i$  (c'est-à-dire  $i$  est de type (AL) ou (AU) et  $N_i = 2e_i$ ), pour tout  $a \in \mathcal{O}_{R_i}$  et pour tout  $l = 1, \dots, e_i$  on a l'inclusion

$$([a] - \varphi_{i,j}^1(a)) \cdots ([a] - \varphi_{i,j}^{2l}(a)) \cdot (\omega_{i,j}^{(2l+1)})^\perp \subset \omega_{i,\sigma(j)}^{(2l+1)}$$

On dispose d'un morphisme d'oubli naturel

$$\begin{aligned} \mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_K \\ (A, \lambda, \iota, \eta^p, \underline{\omega}) &\longmapsto (A, \lambda, \iota, \eta^p) \end{aligned}$$

Il découle directement des résultats de la section précédente sur le modèle local  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}}$  que l'on a les propositions suivantes :

**Proposition 2.5.2.** *Si  $K^p$  est assez petit, le foncteur  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}}$  est représentable par un schéma quasi-projectif sur  $\mathcal{O}_K$ . De plus en fibre générique on a un isomorphisme :*

$$\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes_{\mathcal{O}_K} K \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathcal{O}_E} K$$

*Démonstration.* Découle de 2.4.7 et 2.5.1. □

**Proposition 2.5.3.** *Le schéma  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}}$  est lisse sur  $\mathcal{O}_K$ .*

*Démonstration.* Découle de 2.4.8 et 2.5.1. □

## 2.6 Modèle canonique

On suit [PR02] section 15. On définit le modèle local canonique  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{can}}$  de la donnée  $\mathcal{D}$  comme l'image schématique :

$$\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{can}} := \text{Im} \left( \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}} \xrightarrow{\pi} \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_K \rightarrow \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}} \right)$$

**Proposition 2.6.1** ([PR02]). *Le schéma  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{can}}$  est un sous schéma fermé de  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}$  tel que :*

1.  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{can}}$  est plat sur  $\mathcal{O}_E$ ,
2. En fibre générique on a  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{can}} \otimes_{\mathcal{O}_E} E \cong \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathcal{O}_E} E$
3. La fibre spéciale  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{can}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \kappa$  est réduite.

Par conséquent  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{can}}$  est la clôture schématique de la fibre générique  $G/P_\mu$  dans  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}$ .

*Démonstration.* Le point (1) découle de la proposition 2.4.8 et le point (2) de la proposition 2.4.7. Pour le point (3), voir [PR02] Théorème 12.2 et 7.3.  $\square$

**Remarque 2.6.2.** En fait on aurait pu directement définir le modèle local canonique  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{can}}$  comme la clôture schématique de la fibre générique  $G/P_\mu$  dans le modèle local naïf  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}$ . Mais il serait alors difficile d'étudier les propriétés géométrique de la fibre spéciale.

Par construction l'action du groupe  $\mathcal{G}$  sur  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}$  stabilise  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{can}}$ . Il est naturel de se demander si l'on peut avoir une description explicite de la fibre spéciale  $M_{\mathcal{D}}^{\text{can}} = \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{can}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \kappa$  en termes de strate KR de  $M_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}$ .

**Proposition 2.6.3** ([RZ96],[Lev16],[PR02],[HR20]). *Il existe un sous-ensemble partiellement ordonné*

$$\text{Adm}_K(\mu) \subset \text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu)$$

*et une décomposition en union disjointes de sous-schémas localement fermés*

$$M_{\mathcal{D}}^{\text{can}} = \coprod_{w \in \text{Adm}_K(\mu)} M_w^{\text{can}}$$

*telle que les propriétés suivantes soient satisfaites pour tout  $w \in \text{Adm}_K(\mu)$  :*

1.  $M_w$  est une  $\mathcal{G}_\kappa$ -orbite lisse quasi-projective,
2. On a la relation d'adhérence :

$$\overline{M_w} = \bigsqcup_{w' \leq w} M_{w'}$$

3. Le lieu lisse de  $M_{\mathcal{D}}^{\text{can}}$  coïncide avec la strate  $M_{w_0}$  où  $w_0 \in \text{Adm}_K(\mu)$  désigne l'élément maximal.

*En particulier c'est une bonne stratification de  $M_{\mathcal{D}}^{\text{can}}$ . L'ensemble  $\text{Adm}_K(\mu)$  s'appelle l'ensemble admissible de niveau  $K$ .*

On renvoie à [RZ96] section 3 pour la définition de  $\text{Adm}_K(\mu)$ . On explicitera cette proposition dans les (C) et (AL) dans le chapitre suivant (voir les propositions 3.2.3, 3.2.10). La seule assertion à prouvé ici c'est que l'ensemble  $\text{Adm}_K(\mu)$  correspond bien à l'ensemble des éléments admissibles de niveau  $K$  défini dans [RZ96]. Nous donnerons une preuve de ce résultat dans les cas (AL) et (C).

**Remarque 2.6.4.** Nous verrons que dans le cas (C) l'inclusion  $\text{Adm}_K(\mu) \subset \text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu)$  est en fait une égalité. Dans le cas (AL), nous verrons que cette inclusion peut être stricte, et dépend de la donnée  $\mu$  (voir 3.2.9 pour un exemple).

Ce modèle local canonique nous permet, comme dans le cas du splitting modèle, de définir un modèle entier de notre variété de Shimura via le produit cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{can}} & \longrightarrow & [\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{can}} / \mathcal{G}_{\mathcal{O}_E}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} & \longrightarrow & [\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}} / \mathcal{G}_{\mathcal{O}_E}] \end{array}$$

Malheureusement nous n'avons pas de description de  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{can}}$  comme un espace de module (de même pour  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{can}}$ ) ce qui peut rendre l'étude de sa géométrie un peu compliquée. Par construction  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{can}}$  est muni d'un « diagramme de modèle local »

$$\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{can}} \longrightarrow [\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{can}} / \mathcal{G}_{\mathcal{O}_E}] \quad (2.6.1)$$

qui est lisse par construction. Par conséquent, comme pour  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes \kappa$ , la décomposition en orbites du modèle local nous fournit une stratification :

$$\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{can}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \kappa = \coprod_{w \in \text{Adm}_K(\mu)} S_w$$

Puisque le morphisme (2.6.1) est lisse, donc en particulier ouvert, cette décomposition bénéficie des propriétés suivantes :

1. C'est une bonne stratification, i.e. pour tout  $w \in \text{Adm}_K(\mu)$  on a la relation d'adhérence :

$$\overline{S_w} = \bigsqcup_{w' \leq w} S_{w'}$$

2. Le lieu lisse de  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{can}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \kappa$  coïncide avec la strate  $S_{w_0}$  où  $w_0 \in \text{Adm}_K(\mu)$  désigne l'élément maximal.

Cette stratification est également appelée stratification de *Kottwitz-Rapoport* (KR). Nous expliciterons les stratifications KR de  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}}$  et  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{can}}$  dans les cas (AL) et (C) dans le chapitre suivant.

Pour résumé la fin de ce chapitre sur les modèles locaux, on a le diagramme commutatif suivant aux carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} & \longrightarrow & \mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{can}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_K & \longrightarrow & \mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_K \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}} / \mathcal{G}_{\mathcal{O}_K}] & \longrightarrow & [\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{can}} / \mathcal{G}_{\mathcal{O}_K}] & \longrightarrow & [\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}} / \mathcal{G}_{\mathcal{O}_K}] \end{array} \quad (2.6.2)$$

# Chapitre 3

## Stratification de Hodge

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à la stratification (KR) des fibres spéciales des modèles entiers définis dans le chapitre précédent, et son comportement vis-à-vis des morphismes :

$$\pi : \mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes_{\mathcal{O}_K} k \longrightarrow \mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{can}} \otimes_{\mathcal{O}_E} k \hookrightarrow \mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathcal{O}_E} k$$

où  $k$  désigne le corps résiduel de  $K$ . Il est naturel de se demander si la stratification :

$$\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes_{\mathcal{O}_K} k = \coprod_{\lambda \in \text{Adm}_K(\mu)} S_\lambda^{\text{PR}}, \quad S_\lambda^{\text{PR}} = \pi^{-1}(S_\lambda)$$

est une bonne stratification. On sait que la réponse est négative en générale voir comme l'ont montré Bijakowski et Hernandez dans [BH22b] (Proposition 3.9). Nous allons démontrer que la réponse est affirmative dans le cas Hilbert. Par ailleurs, il existe de nombreuses stratifications de  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{can}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \kappa$  qui raffinent la stratification (KR) (voir 4.1.2.2) dans le sens où pour tout  $\lambda \in \text{Adm}_K(\mu)$  il existe une stratification :

$$S_\lambda = \coprod_{w \in W} S_{\lambda, w}$$

où  $W$  est un certain ensemble partiellement ordonné. Il est donc naturel d'étudier la restriction du morphisme  $\pi$  à une strate (KR) :

$$\pi : S_\lambda^{\text{PR}} \longrightarrow S_\lambda$$

pour comprendre le comportement des stratifications des strates  $S_\lambda$  vis à vis du morphisme  $\pi$ . Nous allons montrer qu'en restriction à une strate (KR) le morphisme  $\pi$  est en fait plat, et donc en particulier préserve les relations d'adhérences.

Pour démontrer tous ces résultats, nous allons traduire toutes ces questions en termes de produit de convolution de grassmanniennes affines. Dans ce contexte on dispose des travaux de Haines [Hai06] qui vont nous faciliter la tâche. Ce point de vue va également nous permettre d'interpréter géométriquement les polygones de Hodge et de Pappas-Rapoport définis dans [BH16].

Le problème avec la stratification (KR) de  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k$  est qu'elle est induite par une décomposition de  $M_{\mathcal{D}}^{\text{can}}$  en  $\mathcal{G}_k$ -orbites. Elle est donc induite par le « mauvais » modèle local. Il est plus naturel d'étudier la stratification induite par le morphisme vers le « bon » modèle local :

$$\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes_{\mathcal{O}_K} k \rightarrow [M_{\mathcal{D}}^{\text{PR}}/\mathcal{G}_k]$$

Par construction la décomposition en  $\mathcal{G}_k$ -orbites de  $M_{\mathcal{D}}^{\text{PR}}$  est en bijection avec les classes d'isomorphismes de filtration de Pappas-Rapoport (voir [Bij22]). Il semble difficile de calculer ces orbites en général car leur nombre peut être infini. La fin de ce chapitre est dédiée au calcul de ces orbites dans le cas Hilbert.

## 3.1 Grassmanniennes affines

### 3.1.1 Rappels

Le début de cette section est constitué essentiellement de rappels sur la géométrie des grassmanniennes affines que l'on peut retrouver dans [Xin16] par exemple.

Soit  $G$  un groupe réductif connexe déployé lisse sur un corps  $k$ . On fixe un tore déployé  $T \subset G$  sur  $k$  et un borel  $B$  le contenant. On notera  $\langle, \rangle : \mathbb{X}^\bullet(T) \times \mathbb{X}_\bullet(T) \rightarrow \mathbb{Z}$  le produit scalaire,  $\mathbb{X}_\bullet(T)^+$  l'ensemble des cocaractères  $B$ -dominants et  $2\rho \in \mathbb{X}^*(T)$  la somme des racines positives. On note  $\text{Alg}_k$  la catégorie des  $k$ -algèbres. On définit le groupes de lacets  $LG$  et le groupe d'arcs  $L^+G$  comme les foncteurs  $\text{Alg}_k \rightarrow \text{Sets}$  qui à une  $k$  algèbre  $R$  associent :

$$LG(R) = G(R((u))), \quad L^+G(R) = G(R[[u]])$$

On définit la grassmannienne affine pour le groupe  $G$  comme le quotient (pour la topologie étale ou fppf puisque  $G$  est lisse)

$$\text{Gr}_G = LG/L^+G$$

Ce quotient est ind-représentable par un schéma propre sur  $\text{Spec } k$ . En utilisant le fait que  $G$  soit supposé lisse on peut montrer que l'on a en fait une description explicite de ce quotient :

$$\text{Gr}_G(R) = \left\{ (\mathcal{E}, \beta) \left| \begin{array}{l} \mathcal{E} \text{ est un } G \text{ torseur sur } \mathbb{D}_R, \\ \beta : \mathcal{E}|_{\mathbb{D}_R^*} \simeq \mathcal{E}^0|_{\mathbb{D}_R^*} \text{ est une trivialisation} \end{array} \right. \right\} / \sim$$

où  $\mathbb{D}_R = \text{Spec } R[[u]]$  désigne le disque unité,  $\mathbb{D}_R^* = \text{Spec } R((u))$  le disque unité époiné et  $\mathcal{E}^0$  le  $G$ -torseur trivial sur  $\mathbb{D}_R$ . Dans la définition ci dessus  $\mathcal{E}$  est un  $G$ -torseur pour la topologie fppf ou étale (encore une fois puisque  $G$  est supposé lisse). Par la suite nous noterons  $\mathcal{E} \dashrightarrow \mathcal{E}^0$  la trivialisation  $\beta : \mathcal{E}|_{\mathbb{D}_R^*} \simeq \mathcal{E}^0|_{\mathbb{D}_R^*}$ .

Par la suite nous aurons besoin du lemme facile suivant :

**Lemme 3.1.1.** *Soit  $G_1, G_2$  deux groupes réductifs connexes déployés lisses sur  $k$ . On dispose d'un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Gr}_{G_1 \times G_2} \simeq \mathrm{Gr}_{G_1} \times \mathrm{Gr}_{G_2}$$

*Démonstration.* Il suffit de voir que le résultat est vrai au niveau des foncteurs :

$$L(G_1 \times G_2)(R) = (G_1 \times G_2)(R((u))) = G_1(R((u))) \times G_2(R((u)))$$

□

### 3.1.2 Champ de Hecke

On dispose d'une action à gauche :

$$\begin{aligned} L^+G \times \mathrm{Gr}_G &\longrightarrow \mathrm{Gr}_G \\ (g, (\mathcal{E}, \beta)) &\longmapsto (\mathcal{E}, g \cdot \beta) \end{aligned}$$

dont le quotient est appelé champ de Hecke

$$\mathcal{H}\mathrm{ck}_G = [L^+G \backslash LG / L^+G]$$

Par construction il associe à une  $k$  algèbre  $R$

$$\mathcal{H}\mathrm{ck}_G(R) = \left\{ (\mathcal{E}, \mathcal{E}'\beta) \mid \begin{array}{l} \mathcal{E}, \mathcal{E}' \text{ sont des } G \text{ torseurs sur } \mathbb{D}_R, \\ \beta : \mathcal{E}|_{\mathbb{D}_R^*} \simeq \mathcal{E}'|_{\mathbb{D}_R^*} \text{ est un isomorphisme} \end{array} \right\} / \sim$$

Lorsque le contexte est clair, on notera simplement  $\mathcal{H}\mathrm{ck}$  et  $\mathrm{Gr}$  les objets  $\mathcal{H}\mathrm{ck}_G$  et  $\mathrm{Gr}_G$ . On rappelle que par la décomposition de Cartan, on peut associer à une modification  $\beta : \mathcal{E} \dashrightarrow \mathcal{E}'$ , sa position relative  $\mathrm{Inv}(\beta) \in \mathbb{X}_\bullet(T)^+$  via la bijection

$$\begin{aligned} G(k[[u]]) \backslash G(k((u))) / G(k[[u]]) &\longrightarrow \mathbb{X}_\bullet(T)^+ \\ [g] &\longmapsto \mathrm{Inv}(g) \\ [u^\lambda] &\longleftarrow \lambda \end{aligned}$$

où  $u^\lambda = \lambda(u) \in T(k((u)))$ . Pour tout élément  $\lambda \in \mathbb{X}_\bullet(T)^+$  on définit les sous-foncteur  $\mathrm{Gr}_{\leq \lambda} \subset \mathrm{Gr}_G$  resp.  $\mathrm{Gr}_\lambda \subset \mathrm{Gr}_G$  par la propriété suivante : pour tout  $R \in \mathrm{Alg}_k$ , un morphisme  $\mathrm{Spec} R \rightarrow \mathrm{Gr}_G$  donné par un couple  $(\mathcal{E}, \beta)$  se factorise par  $\mathrm{Gr}_{\leq \lambda}$  resp.  $\mathrm{Gr}_\lambda$  si pour tout point géométrique  $x \rightarrow \mathrm{Spec} R$  le couple induit  $(\mathcal{E}_x, \beta_x)$  satisfait :

$$\mathrm{Inv}(\beta_x) \leq \lambda, \quad \text{resp. } \mathrm{Inv}(\beta_x) = \lambda$$

On peut montrer que  $\mathrm{Gr}_{\leq \lambda}$  est fermé dans  $\mathrm{Gr}_G$ , et que  $\mathrm{Gr}_\lambda \subset \mathrm{Gr}_{\leq \lambda}$  est ouvert. On le muni  $\mathrm{Gr}_{\leq \lambda}$  de la structure de sous-schéma réduit et  $\mathrm{Gr}_\lambda$  de la structure canonique d'ouvert.



**Remarque 3.1.2.** On fera attention au fait que  $\text{Gr}_\lambda$  et  $\text{Gr}_{\leq\lambda}$  n'ont a priori pas de description modulaire.

De la même manière on définit  $\mathcal{H}\text{ck}_\lambda$  et  $\mathcal{H}\text{ck}_{\leq\lambda}$ . La proposition suivante résume la plupart des propriétés de la décomposition de  $\text{Gr}_G$  en  $L^+G$ -orbites.

**Proposition 3.1.3.** 1. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{X}_\bullet(T)^+$  on a  $\text{Gr}_\lambda = L^+G \cdot u^\lambda$  est une  $L^+G$ -orbite.

2.  $\text{Gr}_\lambda$  est une variété quasi-projective lisse de dimension  $\langle 2\rho, \lambda \rangle$

3. On dispose d'une décomposition de  $\text{Gr}_G$  en  $L^+G$ -orbites

$$\text{Gr} = \coprod_{\lambda \in \mathbb{X}_\bullet(T)^+} \text{Gr}_\lambda$$

4. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{X}_\bullet(T)^+$  on a la relation d'adhérence

$$\overline{\text{Gr}_\lambda} = \bigcup_{\lambda' \leq \lambda} \text{Gr}_{\lambda'}$$

5. L'ouvert dense  $\text{Gr}_\lambda \subset \text{Gr}_{\leq\lambda}$  coïncide avec le lieu lisse de  $\text{Gr}_{\leq\lambda}$ .

*Démonstration.* Les points (1), (2), (3), (4) sont démontrés dans [Xin16] (Proposition. 2.1.5). Pour (5) on pourra trouver une preuve dans [MOV03] (Corollary B)  $\square$

**Remarque 3.1.4.** La proposition précédente nous fournit une description de l'espace topologique sous-jacent au champ de Hecke borné :

$$|\mathcal{H}\text{ck}_{\leq\lambda}| \simeq \{\lambda' \in \mathbb{X}_\bullet(T)^+ \mid \lambda' \leq \lambda\}$$

L'identification ci-dessus est un homéomorphisme où la topologie du membre de droite est celle induite par la relation d'ordre sur  $\mathbb{X}_\bullet(T)^+$ .

**Remarque 3.1.5.** Si  $\mu \in \mathbb{X}_\bullet(T)^+$  est minuscule alors on dispose d'une identification

$$\text{Gr}_\mu \simeq G/P_\mu$$

où  $P_\mu$  désigne le sous groupe parabolique associé à  $\mu$ . En effet on dispose de deux morphismes dont on montre qu'ils sont réciproques l'un de l'autre :

$$\begin{array}{ccc} \text{Gr}_\mu & \longrightarrow & G/P_\mu \\ g \cdot u^\mu & \longmapsto & [\text{ev}(g)] \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} G/P_\mu & \longrightarrow & \text{Gr}_\mu \\ [g] & \longmapsto & g \cdot u^\mu \end{array}$$

où  $\text{ev} : L^+G \rightarrow G$ ,  $g \mapsto g \pmod{u}$  et  $G \hookrightarrow L^+G$  désigne le groupe des lacets « constants ».

### 3.1.3 Produit de convolution

On définit le produit de  $n$ -convolution  $\mathrm{Gr}\tilde{\times} \dots \tilde{\times}\mathrm{Gr}$  comme étant le champ paramétrant les modifications  $(\beta_i, \mathcal{E}_i)_{1 \leq i \leq n}$  :

$$\mathcal{E}_n \dashrightarrow \mathcal{E}_{n-1} \dashrightarrow \dots \dashrightarrow \mathcal{E}_1 \dashrightarrow \mathcal{E}^0$$

En composant ces modifications on obtient un morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}\tilde{\times} \dots \tilde{\times}\mathrm{Gr} & \longrightarrow & \mathrm{Gr} \\ (\mathcal{E}_n \dashrightarrow \dots \dashrightarrow \mathcal{E}^0) & \longmapsto & (\mathcal{E}_n \dashrightarrow \mathcal{E}^0) \end{array}$$

appelé morphisme de convolution. Ce procédé fournit également pour tout  $1 \leq i \leq n$  un morphisme :

$$\begin{array}{ccc} m_i : \mathrm{Gr}\tilde{\times} \dots \tilde{\times}\mathrm{Gr} & \longrightarrow & \mathrm{Gr} \\ (\mathcal{E}_n \dashrightarrow \dots \dashrightarrow \mathcal{E}^0) & \longmapsto & (\mathcal{E}_i \dashrightarrow \mathcal{E}^0) \end{array}$$

Ces morphismes mis ensemble nous fournissent un isomorphisme :

$$\prod_{i=1}^n m_i : \mathrm{Gr}\tilde{\times} \dots \tilde{\times}\mathrm{Gr} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr} \times \dots \times \mathrm{Gr}$$

En particulier le produit de convolution  $\mathrm{Gr}\tilde{\times} \dots \tilde{\times}\mathrm{Gr}$  est ind-représentable. De la même manière que pour  $\mathrm{Gr}$ , on dispose d'une uniformisation du produit de convolution :

$$\mathrm{Gr}\tilde{\times} \dots \tilde{\times}\mathrm{Gr} \simeq LG \times^{L+G} \dots \times^{L+G} LG \times^{L+G} \mathrm{Gr}$$

Via cet isomorphisme le morphisme de convolution devient le morphisme de multiplication :

$$\begin{array}{ccc} LG \times^{L+G} \dots \times^{L+G} LG \times^{L+G} \mathrm{Gr} & \longrightarrow & LG/L+G \\ (g_n, \dots, [g_1]) & \longmapsto & [g_n \dots g_1] \end{array}$$

Par la suite pour alléger les notations et lorsque le nombre  $n$  est explicite nous noterons le produit de  $n$ -convolution  $\tilde{\mathrm{Gr}} = \mathrm{Gr}\tilde{\times} \dots \tilde{\times}\mathrm{Gr}$ . Pour tout  $n$ -uplet de cocaractères  $\lambda_\bullet = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{X}_\bullet(T)^+)^n$  on définit les sous schémas localement fermés du produit de convolution :

$$\tilde{\mathrm{Gr}}_{\lambda_\bullet} := \left\{ (\mathcal{E}_i, \beta_i) \in \tilde{\mathrm{Gr}} \mid \mathrm{Inv}(\beta_i) = \lambda_i \right\}, \quad \tilde{\mathrm{Gr}}_{\leq \lambda_\bullet} := \left\{ (\mathcal{E}_i, \beta_i) \in \tilde{\mathrm{Gr}} \mid \mathrm{Inv}(\beta_i) \leq \lambda_i \right\} \quad (3.1.1)$$

Il n'est pas difficile de montrer qu'on dispose alors d'une bonne stratification pour tout  $\mu_\bullet \in (\mathbb{X}_*(T)^+)^n$  :

$$\tilde{\mathrm{Gr}}_{\leq \mu_\bullet} = \bigcup_{\lambda_\bullet \leq \mu_\bullet} \tilde{\mathrm{Gr}}_{\lambda_\bullet}$$

où  $\lambda_\bullet \leq \mu_\bullet \Leftrightarrow \lambda_i \leq \mu_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Notez que si chacun des  $\mu_i$  est minuscule cette stratification est constituée d'une seule strate à savoir  $\tilde{\mathrm{Gr}}_{\leq \mu_\bullet} = \tilde{\mathrm{Gr}}_{\mu_\bullet}$ . Par la suite si  $\lambda_\bullet = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  est un  $n$ -uplet de cocaractères on notera  $|\lambda_\bullet| := \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ .

**Proposition 3.1.6.**  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mu_\bullet}$  est lisse. En particulier si  $\mu_i$  est minuscule pour tout  $i = 1, \dots, n$ , alors  $\widetilde{\text{Gr}}_{\leq \mu_\bullet}$  est lisse.

*Démonstration.* On commence par regarder le morphisme de projection

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\text{Gr}}_{(\mu_1, \mu_2)} & \longrightarrow & \text{Gr}_{\mu_1} \\ (\mathcal{E}_2 \dashrightarrow \mathcal{E}_1 \dashrightarrow \mathcal{E}^0) & \longmapsto & (\mathcal{E}_1 \dashrightarrow \mathcal{E}^0) \end{array}$$

En termes de groupes de lacets, ce morphisme correspond à la projection sur la première coordonnée :

$$LG_{\mu_1} \times^{L+G} \text{Gr}_{\mu_2} \rightarrow \text{Gr}_{\mu_1}$$

où  $LG_{\mu_1} = p^{-1}(\text{Gr}_{\mu_1}) \subset LG$  avec  $p : LG \rightarrow \text{Gr}$  la projection. Par définition ce morphisme est une fibration avec pour fibre  $\text{Gr}_{\mu_2}$  (identification non canonique) et est donc lisse. Enfin puisque  $\text{Gr}_{\mu_1}$  est lisse, il s'en suit que  $\widetilde{\text{Gr}}_{(\mu_1, \mu_2)}$  l'est également. Le résultat s'en déduit par récurrence.  $\square$

**Remarque 3.1.7.** En particulier si  $\mu_\bullet = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  avec chacun des  $\mu_i$  minuscule, alors le morphisme de convolution

$$m_{\mu_\bullet} : \widetilde{\text{Gr}}_{\mu_\bullet} \rightarrow \text{Gr}_{\leq |\mu_\bullet|}$$

est une résolution des singularités. Elle est parfois appelé résolution de Demazure en référence à [Dem74]. Dans le cas  $G = \text{GL}_2$  et  $\mu_i = (1, 0)$ , la preuve précédente nous dit que le produit de convolution est obtenu par des fibrations successives en  $\text{Gr}_{\mu_i} = G/P_{\mu_i} \simeq \mathbb{P}_k^1$ .

On rappelle le résultat standard suivant concernant ce morphisme de convolution :

**Proposition 3.1.8.** Le morphisme  $m_{\mu_\bullet}$  est propre et birationnel. Plus précisément il est propre et induit un isomorphisme en restriction à l'ouvert dense  $\text{Gr}_{|\mu_\bullet|} \subset \text{Gr}_{\leq |\mu_\bullet|}$  :

$$m_{\mu_\bullet} : m_{\mu_\bullet}^{-1}(\text{Gr}_{|\mu_\bullet|}) \xrightarrow{\sim} \text{Gr}_{|\mu_\bullet|}$$

*Démonstration.* Voir par exemple [PR06] 9.6.  $\square$

Le théorème suivant décrit la géométrie du morphisme de convolution :

**Théorème 3.1.9** (T.Haines, [Hai06]). Soit  $\mu_\bullet = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  un  $n$ -uplet de cocaractères quelconques. Alors

1. Le morphisme  $m_{\mu_\bullet} : \widetilde{\text{Gr}}_{\leq \mu_\bullet} \rightarrow \text{Gr}_{\leq |\mu_\bullet|}$  est une fibration localement triviale en restriction à  $\text{Gr}_\lambda \subset \text{Gr}_{\leq |\mu_\bullet|}$  pour tout  $\lambda \leq |\mu_\bullet|$ .
2. Si chacun des  $\mu_i$  est minuscule alors pour tout  $y \in \text{Gr}_\lambda$  la fibre  $m_{\mu_\bullet}^{-1}(y)$  est équidimensionnelle de dimension  $\langle \rho, |\mu_\bullet| - \lambda \rangle$ .

*Démonstration.* Le point (1) correspond au Lemme 2.1 de [Hai06] et le point (2) correspond au Théorème 1.1 de *loc cit.*  $\square$

**Remarque 3.1.10.** Le point (1) découle directement d'un fait plus général : si  $p : X \rightarrow Y$  est un morphisme  $G$ -équivariant tel que  $G$  agit transitivement sur  $Y$ , alors en choisissant un point de base  $y_0 \in Y$  on obtient un isomorphisme  $G$ -équivariant :

$$G \times^H p^{-1}(y_0) \simeq X$$

où  $H = \text{Stab}_G(y_0)$ . Sous cette forme il n'est pas difficile de voir que si la projection  $G \rightarrow G/H$  admet une section localement, alors  $p$  admet également une section localement. Dans notre situation le morphisme  $m : m^{-1}(\text{Gr}_\lambda) \rightarrow \text{Gr}_\lambda$  est bien  $L^+G$  équivariant,  $\text{Gr}_\lambda$  est une  $L^+G$ -orbite par définition, et Haines prouve que le morphisme de projection

$$L^+G \longrightarrow L^+G / (L^+G \cap t^\lambda \cdot L^+G \cdot t^{-\lambda})$$

admet localement une section.

**Remarque 3.1.11.** On obtient une formule pour calculer la dimension des strates  $m_{\mu_\bullet}^{-1}(\text{Gr}_\lambda)$  avec  $\lambda \leq |\mu_\bullet|$  :

$$\begin{aligned} \dim(m_{\mu_\bullet}^{-1}(\text{Gr}_\lambda)) &= \dim(m_{\mu_\bullet}^{-1}(y)) + \dim(\text{Gr}_\lambda) \\ &= \langle \rho, |\mu_\bullet| - \lambda \rangle + \langle 2\rho, \lambda \rangle \\ &= \langle \rho, |\mu_\bullet| + \lambda \rangle \end{aligned}$$

voir [Hai03], section 2.2 (ici on est dans le cas où tous les  $\mu_i$  sont minuscules).

## 3.1.4 Exemples

### 3.1.4.1 Cas linéaire

En utilisant le fait qu'un  $\text{GL}_n$ -torseur  $\mathcal{E}$  sur  $\mathbb{D}_R$  (où  $R$  est une  $k$ -algèbre) correspond à un  $R[[u]]$ -module  $\Lambda$  localement libre de rang  $n$ , on obtient une description de la grassmannienne affine pour  $\text{GL}_n$  en termes de réseaux :

$$\text{Gr}_{\text{GL}_n}(R) = \left\{ \Lambda \subset R((u))^n \mid \begin{array}{l} \Lambda \text{ } R[[u]]\text{-module localement libre,} \\ \Lambda \otimes_{R[[u]]} R((u)) \simeq R((u))^n \end{array} \right\}$$

En prenant  $T = \mathbb{G}_m^n$  le tore des matrices diagonales la décomposition de Cartan prend la forme :

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}^n)^+ &\longrightarrow \text{GL}_n(k[[u]]) \backslash \text{GL}_n(k((u))) / \text{GL}_n(k[[u]]) \\ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\longmapsto u^\lambda = \text{diag}(u^{\lambda_1}, \dots, u^{\lambda_n}) \end{aligned}$$

En termes de réseaux cela se traduit comme suit : pour tout réseau  $\Lambda \subset k((u))^n$  il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\Lambda_0 = k[[u]]^n$  et  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{Z}^n)^+$  tels que  $(u^{\lambda_1}e_1, \dots, u^{\lambda_n}e_n)$  soit une base de  $\Lambda$ . Ici on a utilisé la notation

$$(\mathbb{Z}^n)^+ = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n\}$$

**Remarque 3.1.12.** Concrètement pour  $\mathrm{GL}_n$  si  $\Lambda \subset k((u))^n$  est un réseau alors pour  $N$  assez grand  $u^N \Lambda_0 \subset \Lambda$  et l'invariant  $\mathrm{Inv}(\Lambda, \Lambda_0) = (a_1, \dots, a_n)$  est caractérisé par :

$$\Lambda/u^N \Lambda_0 \simeq \bigoplus_{i=1}^n k[u]/(u^{N-a_i})$$

Désormais nous noterons  $\Lambda_0 := k[[u]]^n$  le réseau associé au  $\mathrm{GL}_n$ -torseur trivial  $\mathcal{E}^0$ .

**Exemple 3.1.13.** Voici quelques exemples :

1. Pour  $\mu = (1^d, 0^{n-d})$  on obtient en termes de réseaux :

$$\mathrm{Gr}_{(1^d, 0^{n-d})}(k) = \{ \Lambda \subset \Lambda_0 := k[[u]]^n \mid u\Lambda_0 \subset \Lambda \subset \Lambda_0, \dim_k \Lambda_0/\Lambda = d \}$$

Notons  $V = \Lambda_0/u\Lambda_0$ , c'est un  $k$ -module libre de rang  $n$ . Le sous-module  $\Lambda/u\Lambda_0$  est par hypothèse libre de rang  $n-d$ . On dispose donc d'une bijection :

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}_{(1^d, 0^{n-d})}(k) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Grass}(V, n-d) \\ \Lambda &\longmapsto (\Lambda/u\Lambda_0 \subset V) \end{aligned}$$

où  $\mathrm{Grass}(V, d)$  est la grassmannienne classique paramétrant les sous-espaces de  $V$  de dimension  $d$ . En fait, en accord avec la remarque 3.1.5, on peut montrer que cette bijection est un isomorphisme de schémas.

2. Pour  $\mathrm{GL}_2$  et  $\mu = (e, 0)$  on trouve :

$$\mathrm{Gr}_{\leq(e,0)}(k) = \{ \Lambda \mid u^e \Lambda_0 \subset \Lambda \subset \Lambda_0, \dim_k \Lambda_0/\Lambda = e \}$$

Soit  $\Lambda \in \mathrm{Gr}_{\leq(e,0)}(k)$ . Il existe un plus petit entier  $i \leq e$  tel que  $u^i \Lambda \subset u^e \Lambda_0$ . Notons  $N(\Lambda)$  ce nombre (notation non standard). On obtient alors la description suivante des différentes strates

$$\mathrm{Gr}_{(i, e-i)}(k) = \{ \Lambda \mid N(\Lambda) = i, \dim_k \Lambda_0/\Lambda = e \}$$

3. On s'intéresse au produit de  $e$ -convolution pour le groupe  $\mathrm{GL}_d$ . Pour des cocaractères  $\mu_i = (1^{s_i}, 0^{d-s_i})$  on a la description suivante

$$\mathrm{Gr}_{(1^{s_1}, 0^{d-s_1})} \tilde{\times} \dots \tilde{\times} \mathrm{Gr}_{(1^{s_e}, 0^{d-s_e})}(k) = \{ \Lambda_e \subset \dots \subset \Lambda_1 \subset \Lambda_0 \mid u\Lambda_{i-1} \subset \Lambda_i, \dim_k \Lambda_{i-1}/\Lambda_i = s_i \}$$

Le morphisme de convolution prend la forme

$$\begin{aligned} m : \mathrm{Gr}_{(1^{s_1}, 0^{d-s_1})} \tilde{\times} \dots \tilde{\times} \mathrm{Gr}_{(1^{s_e}, 0^{d-s_e})} &\longrightarrow \mathrm{Gr}_{\leq|(1^{s_i}, 0^{d-s_i})_i|} \\ (\Lambda_e \subset \dots \Lambda_1 \subset \Lambda_0) &\longmapsto \Lambda_e \end{aligned}$$

On peut prolonger une filtration  $(\Lambda_e \subset \dots \Lambda_1 \subset \Lambda_0)$  comme ci-dessus en posant pour tout  $0 \leq i \leq e$  :

$$\Lambda_{2e-i} := u^{e-i} \Lambda_i$$

On obtient une filtration :

$$u^e \Lambda_0 = \Lambda_{2e} \subset \cdots \subset \Lambda_e \subset \cdots \Lambda_1 \subset \Lambda_0$$

telle que  $u\Lambda_i \subset \Lambda_{i+1}$  et dont les gradués sont pour tout  $1 \leq i \leq e$  de rangs :

$$\dim_k \Lambda_{i-1}/\Lambda_i = s_i, \quad \dim_k \Lambda_{2e-i}/\Lambda_{2e-(i-1)} = d - s_i$$

La figure suivante permet je l'espère de mieux visualiser la dimension des gradués :

$$\cdots \curvearrowright \Lambda_{e+2} \xrightarrow{d-s_{e-1}} \Lambda_{e+1} \xrightarrow{d-s_e} \Lambda_e \xrightarrow{s_e} \Lambda_{e-1} \xrightarrow{s_{e-1}} \Lambda_{e-2} \curvearrowright \cdots$$

On pose  $V_0 = \Lambda_0/u^e \Lambda_0$ . Soit  $(\Lambda_{2e} \subset \cdots \subset \Lambda_e \subset \cdots \subset \Lambda_0)$  une filtration comme ci-dessus. Cette filtration induit une filtration de  $V_0$  :

$$0 = V_{2e} \subset \cdots \subset V_e \subset \cdots \subset V_0, \quad V_i := \Lambda_i/u^e \Lambda_0$$

On définit  $\text{Fil}^{\text{PR}}(V_0, (s_1, \dots, s_e))$  comme l'ensemble des filtrations :

$$0 = \mathcal{F}^{(0)} \subset \cdots \subset \mathcal{F}^{(e)} \subset \cdots \subset \mathcal{F}^{(2e)} = V_0$$

dont les gradués sont de rangs :

$$\dim_k \mathcal{F}^{(i)}/\mathcal{F}^{(i-1)} = \begin{cases} d - s_i & \text{si } i \leq e \\ s_i & \text{si } i > e \end{cases}$$

et telles que :

- (i)  $u \cdot \mathcal{F}^{(i)} \subset \mathcal{F}^{(i-1)}$  pour tout  $1 \leq i \leq 2e$
- (ii)  $(u^{e-i})^{-1}(\mathcal{F}^{(i)}) = \mathcal{F}^{(2e-i)}$  pour tout  $1 \leq i \leq e$

Par construction la filtration construite ci-dessus satisfait (à un changement d'indices près) :

$$(V_{2e} \subset \cdots \subset V_e \subset \cdots \subset V_0) \in \text{Fil}^{\text{PR}}(V_0, (s_1, \dots, s_e))$$

Réciproquement, puisque  $u^e \Lambda_0 \subset \Lambda_e$ , la filtration  $V_\bullet$  détermine entièrement la filtration  $\Lambda_\bullet$ . Plus précisément si on note  $p : \Lambda_0 \rightarrow \Lambda_0/u^e \Lambda_0$  le morphisme de projection alors on a une bijection :

$$\begin{aligned} \text{Gr}_{(1^{s_1}, 0^{d-s_1})} \tilde{\times} \cdots \tilde{\times} \text{Gr}_{(1^{s_e}, 0^{d-s_e})}(k) &\xrightarrow{\sim} \text{Fil}^{\text{PR}}(V_0, (s_1, \dots, s_e)) \\ (\Lambda_{2e} \subset \cdots \subset \Lambda_0) &\longmapsto p(\Lambda_{2e} \subset \cdots \subset \Lambda_0) \\ p^{-1}(\mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{2e}) &\longleftarrow (\mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{2e}) \end{aligned}$$

**Remarque 3.1.14.** Bien sûr le prolongement des filtrations est ici artificiel et on peut donc s'en passer lorsque l'on travaille uniquement avec  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mu_\bullet}$ . Mais pour faire le lien entre  $\mathbb{M}_{\mathcal{G}}^{\text{PR}}$  et  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mu_\bullet}$ , il est plus simple de prolonger les filtrations dans leurs définitions respectives, comme nous l'avons fait ci-dessus.

Dans le dernier exemple ci-dessus concernant le produit de convolution, on peut être plus explicite concernant l'image du morphisme de convolution :

$$\begin{aligned} |(1^{s_i}, 0^{d-s_i})_i| &= \sum_{i=1}^e (1^{s_i}, 0^{d-s_i}) \\ &= (\#\{s_i \geq 1\}, \#\{s_i \geq 2\}, \dots, \#\{s_i \geq d\}) \end{aligned}$$

On trouve donc la partition *duale* de  $(s_1, \dots, s_e)$ .

### 3.1.4.2 Cas symplectique

On se place maintenant dans le cas du groupe  $G = \mathrm{GSp}_{2g}$ . Soit  $R \in \mathrm{Alg}_k$ . Soit  $(e_1, \dots, e_g, f_1, \dots, f_g)$  la base standard de  $R((u))^{2g}$ . On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  l'accouplement  $R[[u]]$ -linéaire symplectique standard définit par :

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0, \quad \langle f_i, f_j \rangle = 0, \quad \langle e_i, f_j \rangle = \delta_{i,j}$$

On note  $\Lambda_0 = R[[u]]^{2g}$  le réseau standard. Pour tout réseau  $\Lambda \subset R((u))^{2g}$  on définit le réseau dual :

$$\Lambda^\vee := \{x \in R((u))^{2g} \mid \langle x, y \rangle \in R[[u]] \text{ pour tout } y \in \Lambda\}$$

On dit que  $\Lambda$  est auto-dual si  $\Lambda = \Lambda^\vee$ . Dans ce cas l'accouplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est parfait, en restriction à  $\Lambda$ , i.e. induit un isomorphisme avec le dual  $R[[u]]$ -linéaire  $\Lambda \simeq \mathrm{Hom}_{R[[u]]}(\Lambda, R[[u]])$ . Le réseau  $\Lambda_0$  est auto-dual. Comme pour le cas de  $\mathrm{GL}_n$ , le dictionnaire entre  $\mathrm{GSp}_{2g}$ -torseurs et modules symplectiques nous donne la description suivante :

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{GSp}_{2g}}(R) = \left\{ \Lambda \subset R((u))^{2g} \mid \begin{array}{l} \Lambda \text{ } R[[u]]\text{-module localement libre,} \\ \Lambda \otimes_{R[[u]]} R((u)) \simeq R((u))^{2g} \\ \Lambda = a \cdot \Lambda^\vee \text{ pour un certain } a \in R((u))^\times \end{array} \right\}$$

On note  $T$  le tore standard de  $\mathrm{GSp}_{2g}$ , et  $B$  le Borel des matrices triangulaires supérieures. La décomposition de Cartan est similaire à celle pour le groupe  $\mathrm{GL}_n$ , où cette fois-ci la chambre dominante est donnée par :

$$\mathbb{X}_\bullet(T)^+ = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}, c) \in \mathbb{Z}^{2g+1} \mid \begin{array}{l} \lambda_i + \lambda_{2g+1-i} = c \text{ pour tout } i \\ \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_g \geq \lambda_{g+1} \geq \dots \geq \lambda_{2g} \end{array} \right\}$$

**Exemple 3.1.15.** 1. Dans le cas  $\mu = (e^g, 0^g)$  pour un entier  $e \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  on trouve :

$$\mathrm{Gr}_{(e^g, 0^g)}(k) = \left\{ \Lambda \subset k((u))^{2g} \mid \begin{array}{l} u^e \Lambda_0 \subset \Lambda \subset \Lambda_0, \dim_k \Lambda_0 / \Lambda = eg \\ \Lambda = a \cdot \Lambda^\vee \text{ pour un certain } a \in k((u))^\times \end{array} \right\}$$

En particulier si  $\Lambda \in \mathrm{Gr}_{(e^g, 0^g)}(k)$  alors  $\langle \Lambda, \Lambda \rangle \subset u^e k[[u]]$  et par conséquent  $\Lambda / u^e \Lambda_0$  est totalement isotrope pour l'accouplement sur  $V = \Lambda_0 / u^e \Lambda_0$  induit par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Réciproquement, soit  $W \subset V$  est de dimension  $eg$  et totalement isotrope pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On note  $p : \Lambda_0 \rightarrow \Lambda_0/u^e\Lambda_0$  la projection. On définit le réseau  $\Lambda := p^{-1}(W) \subset \Lambda_0$ . On vérifie à la main sans difficulté que l'on a  $\Lambda = u^{-e}\Lambda^\vee$ , i.e.  $\Lambda \in \text{Gr}_{\text{GSP}_{2g}}(k)$ . Enfin puisque  $W$  est de dimension  $eg$  il s'en suit que  $\Lambda \in \text{Gr}_{(eg,0g)}(k)$ . Autrement dit on a une bijection :

$$\begin{aligned} \text{Gr}_{(eg,0g)}(k) &\xrightarrow{\sim} \{W \subset V, | W^\perp = W\} \\ \Lambda &\longmapsto \Lambda/u^e\Lambda_0 \end{aligned}$$

Le membre de droite est la grassmannienne paramétrant les sous-espaces Lagrangien dans  $\Lambda_0/u^e\Lambda_0$ .

2. On s'intéresse au produit de  $e$ -convolution. Pour  $\mu_\bullet = (1^g, 0^g)^e$  on trouve :

$$\text{Gr}_{\mu_\bullet}(k) = \left\{ \Lambda_e \subset \dots \subset \Lambda_1 \subset \Lambda_0 \mid \begin{array}{l} u\Lambda_{i-1} \subset \Lambda_i, \dim_k \Lambda_{i-1}/\Lambda_i = g \\ \Lambda_i = a_i \cdot \Lambda_i^\vee \text{ pour un certain } a_i \in k((u))^\times \end{array} \right\}$$

Comme pour le cas de  $\text{GL}_n$ , on peut prolonger cette filtration en posant  $\Lambda_{e+k} = u^k\Lambda_{e-k}$ . En réduisant modulo  $u^e$  on obtient une filtration de  $k[u]/(u^e)$ -modules :

$$0 = V_{2e} \subset V_{2e-1} \subset \dots V_e \subset \dots V_1 \subset V_0 = \Lambda_0/u^e\Lambda_0$$

qui pour tout  $1 \leq i \leq 2e$  satisfait  $uV_{i-1} \subset V_i$ . Pour tout  $\Lambda \subset k((u))^{2g}$  on définit  $\Lambda^{(\perp=k)} = \{x \in R((u))^{2g} \mid \langle x, \Lambda \rangle \subset u^k k[[u]]\}$ . Par construction  $u^k\Lambda_{e-k} = \Lambda_{e+k}$ , et donc on a :

$$V_{e+k}^\perp = \Lambda_{e+k}^{(\perp=e)} \otimes k[u]/(u^e) = \Lambda_{e-k}^{(\perp=e-k)} \otimes k[u]/(u^e)$$

Or par définition de la filtration on a  $\Lambda_{e-k} \subset \Lambda_{e-k}^{(\perp=e-k)}$ , on a donc l'inclusion  $V_{e-k} \subset V_{e+k}^\perp$ . En comparant les rangs respectif, on obtient finalement l'égalité  $V_{e-k} = V_{e+k}^\perp$ . Si on définit  $\text{Fil}^{\text{PR}}(V_0, \langle \cdot, \cdot \rangle, (g, \dots, g))$  comme l'ensemble des filtrations :

$$0 = \mathcal{F}^{(0)} \subset \dots \subset \mathcal{F}^{(e)} \subset \dots \subset \mathcal{F}^{(2e)} = V_0$$

dont les gradués sont de rangs :

$$\dim_k \mathcal{F}^{(i)} / \mathcal{F}^{(i-1)} = g$$

et telles que :

- (i)  $u \cdot \mathcal{F}^{(i)} \subset \mathcal{F}^{(i-1)}$  pour tout  $1 \leq i \leq 2e$
- (ii)  $(u^{e-i})^{-1}(\mathcal{F}^{(i)}) = \mathcal{F}^{(2e-i)}$  pour tout  $1 \leq i \leq e$
- (iii)  $\mathcal{F}^{(2e-i)} = (\mathcal{F}^{(i)})^\perp$  pour tout  $1 \leq i \leq e$



alors d'après ce qui précède la filtration construite ci-dessus satisfait (à un changement d'indice près) :

$$(V_{2e} \subset \cdots \subset V_e \subset \cdots \subset V_0) \in \text{Fil}^{\text{PR}}(V_0, \langle \cdot, \cdot \rangle, (g, \dots, g))$$

Comme pour le cas de  $\text{GL}_d$  on obtient une bijection :

$$\begin{aligned} \text{Gr}_{(1^g, 0^g)} \tilde{\times} \cdots \tilde{\times} \text{Gr}_{(1^g, 0^g)}(k) &\xrightarrow{\sim} \text{Fil}^{\text{PR}}(V_0, \langle \cdot, \cdot \rangle, (g, \dots, g)) \\ (\Lambda_{2e} \subset \cdots \subset \Lambda_0) &\longmapsto p(\Lambda_{2e} \subset \cdots \subset \Lambda_0) \\ p^{-1}(\mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{2e}) &\longleftarrow (\mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{2e}) \end{aligned}$$

## 3.2 Applications

Nous allons maintenant plonger les fibres spéciales des modèles locaux  $\mathbb{M}_{\mathcal{O}}^{\text{naïf}}$  et  $\mathbb{M}_{\mathcal{O}}^{\text{PR}}$  dans certaines grassmanniennes affines, de sorte à pouvoir appliquer les différents résultats de la section précédente.

### 3.2.1 Le cas (AL)

#### 3.2.1.1 Notations

On se place dans le cas d'une donnée de type (AL) simple. Soit  $F/\mathbb{Q}_p$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ ,  $B = F \times F$  munie de son involution  $(x, y)^* = (y, x)$ ,  $\mathcal{O}_B = \mathcal{O}_F \times \mathcal{O}_F$ . On suppose pour simplifier que  $F/\mathbb{Q}_p$  est totalement ramifiée. Soit  $V = B^d = V_1 \oplus V_2$  et  $\Lambda = \mathcal{O}_B^d = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ . On fixe une base  $(e_1^1, \dots, e_d^1)$  de  $\Lambda_1$  et  $(e_1^2, \dots, e_d^2)$  de  $\Lambda_2$ . On définit l'accouplement :

$$\langle e_i^1, e_j^1 \rangle = 0 = \langle e_i^2, e_j^2 \rangle, \quad \langle e_i^1, e_j^2 \rangle = \delta_{i,j} = -\langle e_i^2, e_j^1 \rangle$$

Par construction  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induit un isomorphisme de  $\mathcal{O}_F$ -modules  $\Lambda_1^{\vee} \simeq \Lambda_2$ . Un petit calcul montre que le groupe  $G$  associé à cette donnée est :

$$\begin{aligned} G &= \{(g, c(g) \cdot (g^t)^{-1}) \mid g \in \text{GL}_F(V_1), c(g) \in \mathbb{G}_m\} \subset \text{GL}_F(V_1) \times \text{GL}_F(V_2) \\ &= \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}_d \times \mathbb{G}_m \end{aligned}$$

et de même  $\mathcal{G} = \text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d \times \mathbb{G}_m$ . Sur  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  on a une décomposition :

$$V_{i, \overline{\mathbb{Q}_p}} = \bigoplus_{\varphi: F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}} V_i^{(\varphi)}, \quad i = 1, 2$$

où  $F$  agit sur  $V_i^{(\varphi)}$  via  $\varphi$ . Dans cette situation on a pour tout plongement  $\varphi : F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$  :

$$\text{rank}_{B \otimes_F \overline{\mathbb{Q}_p}} V^{(\varphi)} = \dim_{\overline{\mathbb{Q}_p}} V_1^{(\varphi)} = \dim_{\overline{\mathbb{Q}_p}} V_2^{(\varphi)} = d$$

Par ailleurs on a une décomposition induite par le cocaractère de Hodge :

$$V_{\overline{\mathbb{Q}}_p} = W \oplus W', \quad W = W_1 \oplus W_2, \quad W' = W'_1 \oplus W'_2$$

De nouveau on peut raffiner ces décompositions :

$$W_i = \bigoplus_{\varphi: F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} W_i^{(\varphi)}, \quad W'_i = \bigoplus_{\varphi: F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} W'_i{}^{(\varphi)} \quad i = 1, 2$$

où  $F$  agit sur  $W_i^{(\varphi)}$  via le plongement  $\varphi$ . On note  $r_\varphi = \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_p} W_1^{(\varphi)}$  et  $s_\varphi = \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_p} W_2^{(\varphi)}$ . L'identification  $W^\vee \simeq W'$  étant compatible avec l'action de  $\mathcal{O}_F \times \mathcal{O}_F$ , il s'en suit que pour tout  $\varphi$  on a l'égalité :

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_p} W_1^{(\varphi)} = \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_p} W_2'^{(\varphi)}$$

Par conséquent on a l'égalité :

$$r_\varphi + s_\varphi = \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_p} V_2^{(\varphi)} = d$$

Avec ces notations le cocaractère de Hodge est donné par :

$$\begin{aligned} \mu &= (\mu_1, \mu_2) \\ &= \left( (1^{\dim W_1^{(\varphi)}}, 0^{\dim W_1'^{(\varphi)}}), (1^{\dim W_2^{(\varphi)}}, 0^{\dim W_2'^{(\varphi)}}) \right)_\varphi \\ &= \left( (1^{r_\varphi}, 0^{s_\varphi}), (1^{s_\varphi}, 0^{r_\varphi}) \right)_\varphi \end{aligned}$$

où l'on voit  $\mu$  comme un cocaractère à valeurs dans  $\mathrm{GL}_F(V_1) \times \mathrm{GL}_F(V_2)$ . Soit maintenant  $S$  un schéma sur  $\mathcal{O}_E$  et  $\mathcal{F} \in \mathbb{M}_{\mathcal{F}}^{\mathrm{naïf}}(S)$ . On a :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \subset \Lambda_{1,S} \oplus \Lambda_{2,S} = \Lambda_S$$

Par hypothèse  $\mathcal{F}$  est isotrope maximal ie  $\mathcal{F}^\perp = \mathcal{F}$ . Or on a l'égalité :

$$(\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2)^\perp = \mathcal{F}_2^\perp \oplus \mathcal{F}_1^\perp$$

En d'autres termes l'un des deux facteurs détermine entièrement l'autre. On obtient donc un isomorphisme :

$$\mathbb{M}_{\mathcal{F}}^{\mathrm{naïf}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_d, \mu_1)}^{\mathrm{naïf}} \quad (3.2.1)$$

$$(\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2) \longmapsto (\mathcal{F}_1 \subset \Lambda_1) \quad (3.2.2)$$

où  $\mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_d, \mu_1)}^{\mathrm{naïf}}$  le modèle local naïf pour le groupe  $\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_d$  et le cocaractère  $\mu_1$  ([PR02] Partie 1), i.e. le foncteur qui à un schéma  $S$  sur  $\mathcal{O}_E$  associe les sous  $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$ -modules  $\mathcal{F} \subset \Lambda_{1,S}$  tels que :

1.  $\mathcal{F}$  est localement un  $\mathcal{O}_S$ -facteur direct de rang  $r = \sum_\varphi r_\varphi$ .
2.  $\mathcal{F}$  satisfait la condition de déterminant relatif au cocaractère  $\mu_1$ .

Comme en 2.4.4 on fixe une extension finie  $K$  contenant la clôture galoisienne de  $F$ , et on fixe une numérotation  $\text{Hom}(F, \overline{\mathbb{Q}}_p) = \{\varphi_1, \dots, \varphi_e\}$ . Le même raisonnement que dans le paragraphe ci-dessus montre que l'on a un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_1)}^{\text{PR}} \\ (\mathcal{F}^{(i)} = \mathcal{F}_1^{(i)} \oplus \mathcal{F}_2^{(i)})_{1 \leq i \leq 2e} &\longmapsto (\mathcal{F}_1^{(1+2i)})_{0 \leq i \leq e} \end{aligned}$$

où  $\mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_1)}^{\text{PR}}$  le modèle local de Pappas-Rapoport pour le groupe  $\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d$  et le cocaractère  $\mu_1$  ([PR02] Partie 1), i.e. le foncteur qui à un schéma  $S$  sur  $\mathcal{O}_K$  associe les filtrations

$$0 = \mathcal{F}^{(0)} \subset \mathcal{F}^{(1)} \subset \dots \subset \mathcal{F}^{(e)} \subset \Lambda_{1,S} \quad (3.2.3)$$

telles que pour tout  $1 \leq i \leq e$  :

1.  $\mathcal{F}^{(i)}$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module stable par  $\mathcal{O}_F$ .
2.  $\mathcal{F}^{(i)}$  est localement un  $\mathcal{O}_S$ -facteur direct de rang  $r_1 + \dots + r_i$ .
3. Pour tout  $a \in \mathcal{O}_F$  on a l'inclusion

$$([a] - \varphi_i(a)) \cdot \mathcal{F}^{(i)} \subset \mathcal{F}^{(i-1)}$$

A partir de maintenant nous ferons l'abus de notations de noter  $\Lambda$  et  $\mu$  ce qui devrait être  $\Lambda_1$  et  $\mu_1$ . Par ailleurs pour se souvenir que  $\mu$  est un tuples de cocaractères nous noterons :

$$\mu_{\bullet} := \mu = (1^{r_{\varphi}}, 0^{n-r_{\varphi}})_{\varphi} \in \mathbb{X}_{\bullet}(\text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m^d)^+ = \prod_{\varphi} (\mathbb{Z}^d)^+$$

On notera les fibres spéciales géométriques de ces modèles par :

$$\begin{aligned} M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_{\bullet})}^{\text{naïf}} &= \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_{\bullet})}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \kappa, \\ M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_{\bullet})}^{\text{PR}} &= \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_{\bullet})}^{\text{PR}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \kappa \end{aligned}$$

Les isomorphismes précédents entre les modèles locaux sont compatibles dans le sens où les carrés suivants est cartésien :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{PR}} & \longrightarrow & \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{can}} & \longrightarrow & \mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}} \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_{\bullet})}^{\text{PR}} & \longrightarrow & \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_{\bullet})}^{\text{can}} & \longrightarrow & \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_{\bullet})}^{\text{naïf}} \end{array} \quad (3.2.4)$$

où  $\mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_{\bullet})}^{\text{can}}$  est également défini comme l'image schématique du morphisme

$$\mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_{\bullet})}^{\text{PR}} \rightarrow \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_{\bullet})}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_K \rightarrow \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_{\bullet})}^{\text{naïf}}$$

De plus, ces carrés sont compatibles avec les actions de  $\mathcal{G}$  et  $\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d$  dans le sens où les morphismes verticaux sont compatibles avec l'action de  $\mathcal{G}$  à gauche et l'action de  $\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d$  à droite. En particulier on a une bijection au niveau des orbites :

$$M_{\mathcal{G}}^{\text{naïf}}(\kappa)/\mathcal{G}(\kappa) \simeq M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_{\bullet})}^{\text{naïf}}(\kappa)/\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d(\kappa)$$

Cela induit en particulier un homéomorphisme au niveau des espaces topologiques sous-jacents :

$$|[M_{\mathcal{G}}^{\text{naïf}}/\mathcal{G}_{\kappa}]| \simeq |[M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_{\bullet})}^{\text{naïf}}/\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d \otimes k]|$$

Le même résultat est vrai pour les  $\mathcal{G}_{\kappa}$ -orbites dans  $M_{\mathcal{G}}^{\text{can}}$  et  $M_{\mathcal{G}}^{\text{PR}}$ .

**Remarque 3.2.1.** On fera attention au fait que l'isomorphisme ci-dessus est ensembliste (topologique) et est bien sûr faux au niveau des champs quotients<sup>1</sup>.

Dans le cas (AL) nous travaillerons avec les modèle locaux pour  $\text{GL}_d$  car ils permettent de faire plus facilement le lien avec les grassmannienne affines.

**Remarque 3.2.2.** Si l'on ne suppose plus que  $F/\mathbb{Q}_p$  est totalement ramifiée, alors il faut prendre la somme directe sur l'ensemble  $J = \{1, \dots, f\}$  des isomorphismes (3.2.4). Plus précisément sur  $\mathcal{O}_K$  on a :

$$\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K \cong \bigoplus_{\varphi: F^{\text{nr}} \rightarrow K} \text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathcal{O}_{F^{\text{nr}}}} \text{GL}_d \otimes_{\mathcal{O}_{F^{\text{nr}}}, \varphi} \mathcal{O}_K \quad (3.2.5)$$

et le cocaractère  $\mu_{\bullet}$  est donné par :

$$\begin{aligned} \mu_{\bullet} &= (1^{r_{\psi}}, 0^{d-r_{\psi}})_{\psi: F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}} \\ &= \prod_{\varphi: F^{\text{nr}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}} \prod_{\psi|\varphi} (1^{r_{\psi}}, 0^{d-r_{\psi}}) \\ &= \prod_{\varphi: F^{\text{nr}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}} \mu_{\bullet}^{\varphi} \end{aligned}$$

avec

$$\mu_{\bullet}^{\varphi} = (1^{r_{\psi}}, 0^{d-r_{\psi}})_{\psi|\varphi} = \prod_{\psi|\varphi} (1^{r_{\psi}}, 0^{d-r_{\psi}})$$

La notation  $\psi|\varphi$  utilisée ci-dessus veut dire que  $\psi : F \rightarrow K$  est un plongement dont la restriction à  $F^{\text{nr}}$  coïncide avec  $\varphi$ , i.e.  $\psi \in \text{Hom}_{F^{\text{nr}}, \varphi}(F, K)$ . Avec ces notations l'isomorphisme (3.2.5) induit une décomposition du modèle local naïf :

$$\mathbb{M}_{\mathcal{G}}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_K \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\varphi: F^{\text{nr}} \rightarrow K} \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathcal{O}_{F^{\text{nr}}}} \text{GL}_d, \mu_{\bullet}^{\varphi})}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathcal{O}_{F^{\text{nr}}}} \mathcal{O}_K$$

Par la suite nous aurons également besoin du caractère  $\mu_2$  que nous noterons :

$$\mu_{\bullet}^{\vee} = (1^{s_{\varphi}}, 0^{d-s_{\varphi}})_{\varphi: F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}} = (1^{d-r_{\varphi}}, 0^{r_{\varphi}})_{\varphi: F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}}$$

pour se souvenir qu'il est donné par la partition  $(s_1, \dots, s_e) = (d - r_1, \dots, d - r_e)$ .

<sup>1</sup>De la même manière que pour un groupe  $G$  quelconque le champ  $[*/G]$  est topologiquement juste un point !

### 3.2.1.2 Plongement du modèle local naïf

Désormais nous ferons l'abus de noter  $\Lambda = \mathcal{O}_F^d$  (ce qui correspond à  $\Lambda_1$  dans 3.2.1.1). Le choix d'une uniformisante  $\pi \in \mathcal{O}_F$  nous fournit une identification :

$$\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \kappa \simeq \kappa[[u]]/(u^e), \quad \pi \otimes 1 \mapsto u$$

Cela induit un isomorphisme de  $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \kappa$ -modules :

$$\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \kappa \simeq \Lambda_0 \otimes_{\kappa[[u]]} \kappa[[u]]/(u^e)$$

où  $\Lambda_0 := \kappa[[u]]^d$  désigne le réseau standard de rang  $d$ . On note  $p$  la projection :

$$p : \Lambda_0 \rightarrow \Lambda_0 \otimes_{\kappa[[u]]} \kappa[[u]]/(u^e)$$

Soit  $(S \rightarrow \text{Spec } \kappa)$  un schéma sur  $\kappa$  et  $\mathcal{F} \in M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}}(S)$ . L'identification précédente permet de voir  $\mathcal{F}$  comme un sous module de  $\Lambda_0 \otimes_{\kappa[[u]]} \mathcal{O}_S[[u]]/(u^e)$ . On définit le  $\mathcal{O}_S[[u]]$ -module  $\Lambda_{\mathcal{F}}$  comme étant

$$\Lambda_{\mathcal{F}} := p^{-1} \left( \mathcal{F} \subset \Lambda_0 \otimes_{\kappa[[u]]} \mathcal{O}_S[[u]]/(u^e) \right) \quad (3.2.6)$$

Ce procédé induit un monomorphisme :

$$\iota : M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}} \hookrightarrow \text{Gr}_{\text{GL}_d}$$

Puisque  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}}$  est propre,  $\iota$  est une immersion fermée. Par construction on dispose des inclusions de réseaux

$$u^e \Lambda_{0,S} \subset \Lambda_{\mathcal{F}} \subset \Lambda_{0,S}$$

dont les gradués sont des  $\mathcal{O}_S$ -modules localement libres de rang  $r$ . Ces informations caractérisent complétement l'image de  $\iota$ . On a la proposition suivante :

**Proposition 3.2.3.** *L'immersion fermée  $\iota$  est équivariante pour l'action de  $\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d \otimes \kappa$  à gauche et  $L^+ \text{GL}_d$  à droite. Elle induit un isomorphisme*

$$\left( M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}} \right)_{\text{red}} \simeq \bigsqcup_{\lambda \leq \lambda_{\max}} \text{Gr}_\lambda$$

où  $\lambda_{\max} \in \mathbb{X}_\bullet(\mathbb{G}_m^d)^+$  est le cocaractère

$$\lambda_{\max} = (\underbrace{e, \dots, e}_c, f, 0, \dots, 0)$$

avec  $ed - r = ce + f$  la division euclidienne de  $ed - r$  par  $e$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F} \in M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}}(\kappa)$ . Par les diviseurs élémentaires, il existe des entiers  $(a_1, \dots, a_d)$  et une base  $(e_1, \dots, e_d)$  de  $\Lambda \otimes \kappa$  tels que :

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^d \kappa[u]/(u^e) \cdot u^{a_i} e_i \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^d \kappa[u]/(u^e) \cdot e_i = \Lambda \otimes \kappa$$

La condition sur le rang de  $\mathcal{F}$  implique que  $(e - a_1) + \dots + (e - a_d) = r$ . Le réseau associé à  $\mathcal{F}$  est

$$\Lambda_{\mathcal{F}} = \bigoplus_{i=1}^d \kappa[[u]] \cdot u^{a_i} e_i \hookrightarrow \kappa[[u]]^d = \Lambda_0$$

On trouve donc finalement (quitte à faire une permutation) :

$$\text{Inv}(\Lambda_{\mathcal{F}}, \Lambda_0) = (a_1, \dots, a_n) \in \{\lambda \in \mathbb{X}_\bullet(\mathbb{G}_m^d)^+ \mid \lambda \leq \lambda_{\max}\}$$

On conclut alors comme pour l'exemple 3.1.13.  $\square$

La stratification (KR) de  $M_{\mathcal{O}}^{\text{naïf}}$  est donc donnée par :

$$M_{\mathcal{O}}^{\text{naïf}} = \coprod_{\lambda \leq \lambda_{\max}} M_\lambda, \quad M_\lambda = \iota^{-1}(\text{Gr}_\lambda)$$

En d'autres termes l'ensemble des cocaractères  $\mu_\bullet$ -admissibles naïfs de niveau  $K^p = \text{GL}_d(\mathcal{O}_F)$  (parahorique maximal) est ici tout à fait explicite :

$$\text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu_\bullet) = \{\lambda \leq (e, \dots, e, f, 0, \dots, 0)\}$$

### 3.2.1.3 Plongement du modèle de Pappas-Rapoport

Soit maintenant  $(\mathcal{F}^{(1)}, \dots, \mathcal{F}^{(e)}) \in M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{PR}}$ . Comme pour l'exemple 3.1.13 on commence par prolonger la filtration  $(\mathcal{F}^{(1)}, \dots, \mathcal{F}^{(e)})$  en posant  $\mathcal{F}^{(e+i)} = (\pi^i)^{-1} \mathcal{F}^{(e-i)}$ . La proposition suivante découle directement de l'exemple 3.1.13.

**Proposition 3.2.4.** *Le morphisme*

$$\begin{aligned} \iota^{\text{PR}} : M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{PR}} &\longrightarrow \text{Gr} \tilde{\times} \dots \tilde{\times} \text{Gr} \\ (\mathcal{F}^{(1)} \subset \dots \subset \mathcal{F}^{(e)}) &\longmapsto (\Lambda_{\mathcal{F}^{(e)}} \subset \dots \subset \Lambda_{\mathcal{F}^{(2e-1)}}) \end{aligned}$$

*est une immersion fermée équivariante pour l'action de  $\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n \otimes k$  à gauche et  $L^+ \text{GL}_n$  à droite. Il induit un isomorphisme :*

$$M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{PR}} \simeq \widetilde{\text{Gr}}_{\mu_\bullet}^\vee$$

*Démonstration.* Clairement le morphisme  $\iota^{\text{PR}}$  est un monomorphisme et puisque le schéma  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{PR}}$  est propre,  $\iota^{\text{PR}}$  est une immersion fermée. Il découle de l'exemple 3.1.13 que l'on a un isomorphisme de schémas :

$$\left( M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{PR}} \right)_{\text{red}} \simeq \widetilde{\text{Gr}}_{\mu_\bullet}^\vee$$

D'après 2.4.8 le schéma  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{PR}}$  est lisse et donc en particulier réduit. Le résultat en découle.  $\square$

### 3.2.1.4 Plongement du modèle canonique

Les deux plongements décrits ci-dessus sont compatibles dans le sens où carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{PR}} & \xrightarrow{\iota^{\text{PR}}} & \widetilde{\text{Gr}} \\ p \downarrow & & \downarrow m \\ M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}} & \xrightarrow{\iota} & \text{Gr} \end{array}$$

Il est maintenant beaucoup plus simple de décrire la fibre spéciale du modèle local  $M_{\mathcal{O}}^{\text{can}}$ . D'après la proposition précédente elle est donnée par l'image du morphisme  $m_{\mu_\bullet^\vee}$  :

$$\left( M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{can}} \right)_{\text{red}} \simeq \text{Im}(m_{\mu_\bullet^\vee}) = \bigsqcup_{\lambda \leq |\mu_\bullet^\vee|} \text{Gr}_\lambda \quad (3.2.7)$$

La stratification (KR) de  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{can}}$  est donc donnée par :

$$M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{can}} = \bigsqcup_{\lambda \leq |\mu_\bullet^\vee|} M_\lambda, \quad M_\lambda = \iota^{-1}(\text{Gr}_\lambda)$$

L'ensemble des cocaractères  $\mu_\bullet$  admissible est donc donné par :

$$\text{Adm}_K(\mu) = \{ \lambda \in (\mathbb{Z}^d)^+ \mid \lambda \leq |\mu_\bullet^\vee| \}$$

**Proposition 3.2.5.** *Le morphisme  $\iota$  induit un isomorphisme de schémas :*

$$M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{can}} \simeq \bigsqcup_{\lambda \leq |\mu_\bullet^\vee|} \text{Gr}_\lambda$$

*Démonstration.* Découle de (3.2.7) et du fait que la fibre spéciale  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{can}}$  est réduite (puisque  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{PR}}$  est réduit).  $\square$

**Remarque 3.2.6.** L'inclusion  $\text{Adm}_K(\mu) \subset \text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu)$  découle de l'inégalité  $|\mu_\bullet^\vee| \leq \lambda_{\max}$  et cette inégalité découle des égalités suivantes (voir 3.1.13) :

$$ed - r = (d - r_1) + \cdots + (d - r_e) = s_1 + \cdots + s_e$$

$$|\mu_\bullet^\vee| = |(1^{s_i}, 0^{d-s_i})_i| = (\#\{s_i \geq 1\}, \dots, \#\{s_i \geq d\})$$

Il est naturel de se demander quand est ce que le schéma  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}}$  est plat ? En d'autres termes, quand-est ce que  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{can}} = M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}}$  ? Si l'on analyse la condition en fibre spéciale, une première condition est donnée par l'égalité :

$$|\mu_\bullet^\vee| = \lambda_{\max}$$

car les fibres spéciales  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{can}}$  et  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}}$  sont (topologiquement) des unions d'orbites indexées par les ensembles  $\text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu)$  et  $\text{Adm}_K(\mu)$ . Si cette condition est satisfaite alors on a l'égalité en tant qu'espaces topologiques :

$$|M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{can}}| = |M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}}|$$

Pour obtenir l'égalité en tant que schéma, il suffit de montrer que  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}}$  est réduit (puisque le membre de gauche est réduit). D'après [PR00], cette condition est équivalente à ce que le schéma (sur  $\kappa$ ) :

$$\mathcal{N}_{r,e} = \{A \in \text{Mat}_{r \times r} \mid A^e = 0, \det(T \cdot I - A) = T^r\}$$

soit réduit. Lorsque  $r \leq e$ , c'est un résultat de Kostant<sup>2</sup>. On sait depuis les travaux [MWY19] (Théorème 3.8) que  $\mathcal{N}_{r,e}$  est également réduit lorsque  $r \geq e$ .

**Corollaire 3.2.7** ([PR00] Corollaire 5.9). *Le modèle local naïf  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}}$  est plat si et seulement si  $|\mu_\bullet^\vee| = \lambda_{\max}$ .*

On a :

$$|\mu_\bullet^\vee| = \lambda_{\max} \Leftrightarrow \text{les } (s_i)_{i \leq e} \text{ diffèrent d'au plus 1}$$

**Remarque 3.2.8.** La condition  $|\mu_\bullet^\vee| = \lambda_{\max}$  est équivalente à la condition  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\min}$  de [PR00].

**Exemple 3.2.9.** Donnons un exemple où l'inclusion  $M_{\mathcal{D}}^{\text{can}} \subset M_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}$  est stricte. On se place dans le cas  $d = e = 3$ . On considère la partition  $(s_1, s_2, s_3) = (1, 2, 3)$  donnant lieu aux cocaractères :

$$\begin{aligned} \mu_\bullet^\vee &= (1^{s_1}, 0^{d-s_1}) \\ &= ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)) \end{aligned}$$

Dans ce cas on a :

$$|\mu_\bullet^\vee| = (3, 2, 1), \quad \lambda_{\max} = (3, 3, 0)$$

et donc l'inclusion  $M_{\mathcal{D}}^{\text{can}} \subset M_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}$  est stricte.

Pour résumer dans le cas (AL) on a le diagramme commutatif suivant aux carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} M_{\mathcal{D}}^{\text{PR}} & \longrightarrow & M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{PR}} & \xrightarrow{\iota^{\text{PR}}} & \widetilde{\text{Gr}}_{\mu_\bullet^\vee} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M_{\mathcal{D}}^{\text{can}} & \longrightarrow & M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}} & \xrightarrow{\iota} & \text{Gr}_{\leq |\mu_\bullet^\vee|} \end{array}$$

et où les flèches horizontales sont des isomorphismes respectant les orbites respectives.

<sup>2</sup>Je n'ai malheureusement pas trouvé de référence précise, voir [PR00] Conjecture 5.8



## 3.2.2 Le cas (C)

### 3.2.2.1 Notations

On se place maintenant dans le cas d'une donnée de type (C) simple. Soit donc  $B = F$ , muni de son involution triviale  $* = \text{id}$ ,  $\mathcal{O}_B = \mathcal{O}_F$ , avec  $F/\mathbb{Q}_p$  extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ . On suppose pour simplifier que  $F/\mathbb{Q}_p$  est totalement ramifiée. Soit  $V = F^{2g}$ . On fixe une  $F$ -base  $(e_1, \dots, e_g, f_1, \dots, f_g)$  de  $V$ . On définit l'accouplement symplectique à valeur dans  $F$  :

$$\{e_i, e_j\} = 0 = \{f_i, f_j\}, \quad \{e_i, f_j\} = \delta_{ij}$$

On obtient un accouplement symplectique à valeurs dans  $\mathbb{Q}$  en composant avec la trace :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (v, w) &\longmapsto \text{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\{v, w\}) \end{aligned}$$

Le  $\mathcal{O}_F$ -réseau engendré par la base ci-dessus n'est pas auto-dual pour l'accouplement. Soit donc  $\delta \in \mathcal{D}_{F/\mathbb{Z}_p}^{-1}$  un générateur de l'inverse de la différentielle. On définit :

$$\Lambda := \text{Span}_{\mathcal{O}_F}(e_1, \dots, e_g, \delta f_1, \dots, \delta f_g)$$

qui est bien auto-dual par définition de la différentielle. Le groupe réductif sur  $\mathbb{Q}_p$  associé à cette donnée PEL est :

$$\begin{aligned} G(R) &= \{g \in \text{GSp}_{2g}(R \otimes_{\mathbb{Q}_p} F) \mid \det(g) \in R^\times\} \\ &= (\text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GSp}_{2g})^{\det \in \mathbb{Q}_p^\times} \end{aligned}$$

qui est un sous-groupe de  $\text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GSp}_{2g}$ . Le groupe parahorique pour cette donnée PEL est :

$$\mathcal{G} = (\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g})^{\det \in \mathbb{Z}_p^\times}$$

et le cocaractère de Hodge est  $\mu_\bullet = (1^g, 0^g)_\varphi$ . Soit  $\mathbb{M}_{\mathcal{O}}^{\text{naïf}}$  le modèle local naïf associé (Définition 2.3.5). On suit les travaux de [Har12]. On définit l'accouplement  $\mathcal{O}_F$ -linéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle' : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathcal{O}_F$  par  $\langle \cdot, \cdot \rangle' = \delta^{-1} \{ \cdot, \cdot \}$ . Il est parfait et est représenté par la matrice  $J_{2g}$ . On définit alors  $\mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}}$  comme le foncteur qui à un schéma  $S$  sur  $\mathcal{O}_E = \mathbb{Z}_p$  associe les sous  $\mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_F$ -modules  $\mathcal{F} \subset \Lambda_S$  tels que :

1.  $\mathcal{F}$  est localement sur  $S$  un  $\mathcal{O}_S$ -facteur direct de  $\Lambda_S$
2. Pour tout  $a \in \mathcal{O}_F$  on a l'égalité polynomiale suivante

$$\det(a \mid \mathcal{F}) = \det(a \mid V_0)$$

3.  $\mathcal{F}^{\perp \langle \cdot, \cdot \rangle'} = \mathcal{F}$

i.e. on a juste changé la condition d'isotropie sur  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en une condition d'isotropie sur  $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ . Soit  $S$  un schéma sur  $\mathbb{Z}_p$ . D'après [Har12] Corollaire 5.3.2, si  $\mathcal{F} \subset \Lambda_S$  on a :

$$\mathcal{F}^{\perp \langle \cdot, \cdot \rangle'} = \mathcal{F}^{\perp \langle \cdot, \cdot \rangle}$$

Par conséquent, aux vues de la Remarque 2.3.6 on a un isomorphisme canonique

$$\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}} \cong \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_{\bullet})}^{\text{naïf}} \quad (3.2.8)$$

Le groupe  $\mathcal{G}$  agit sur  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}$ , et le groupe  $\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}$  agit sur  $\mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_{\bullet})}^{\text{naïf}}$ . Il découle de [Har12] Proposition 5.6.8 que l'on a une bijection au niveau des orbites :

$$M_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}(\bar{k})/\mathcal{G}(\bar{k}) \simeq M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_{\bullet})}^{\text{naïf}}(\bar{k})/\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}(\bar{k})$$

Cela induit en particulier un homéomorphisme au niveau des espaces topologiques sous-jacents :

$$|[M_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}/\mathcal{G}]| \simeq |[M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_{\bullet})}^{\text{naïf}}/\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g} \otimes \kappa]|$$

### 3.2.2.2 Plongement du modèle local naïf

On note  $(\Lambda_0 := \kappa[[u]]^{2g}, \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$  le réseau symplectique standard de dimension  $2g$  sur  $\kappa$  (voir 3.1.15). Notons  $(x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g)$  la base symplectique standard de  $\Lambda_0$ . Comme pour le cas (AL) le choix d'une uniformisante  $\pi \in \mathcal{O}_F$  nous fournit un isomorphisme de  $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \kappa$ -modules symplectiques :

$$\begin{aligned} (\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \kappa, \langle \cdot, \cdot \rangle') &\xrightarrow{\sim} (\Lambda_0 \otimes_{\kappa[[u]]} \kappa[[u]]/(u^e), \langle \cdot, \cdot \rangle_0) \\ e_i &\longmapsto x_i \\ \delta f_i &\longmapsto y_i \end{aligned}$$

On note  $p$  la projection :

$$p : \Lambda_0 \rightarrow \Lambda_0 \otimes_{\kappa[[u]]} \kappa[[u]]/(u^e)$$

Soit  $(S \rightarrow \text{Spec } \kappa)$  un schéma sur  $\kappa$  et  $\mathcal{F} \in M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_{\bullet})}^{\text{naïf}}(S)$ . L'identification précédente permet de voir  $\mathcal{F}$  comme un sous module de  $\Lambda_0 \otimes_{\kappa[[u]]} \mathcal{O}_S[[u]]/(u^e)$ . On définit le  $\mathcal{O}_S[[u]]$ -module  $\Lambda_{\mathcal{F}}$  comme étant

$$\Lambda_{\mathcal{F}} := p^{-1} \left( \mathcal{F} \subset \Lambda_0 \otimes_{\kappa[[u]]} \mathcal{O}_S[[u]]/(u^e) \right) \quad (3.2.9)$$

Ce procédé induit une immersion fermée :

$$\iota : M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_{\bullet})}^{\text{naïf}} \hookrightarrow \text{Gr}_{\text{GSp}_{2g}}$$

Par construction on dispose des inclusions de réseaux

$$u^e \Lambda_{0,S} \subset \Lambda_{\mathcal{F}} \subset \Lambda_{0,S}$$

dont les gradués sont des  $\mathcal{O}_S$ -modules localement libres de rang  $eg$ . Ces informations caractérisent complément l'image de  $\iota$  (voir l'Exemple 3.1.15). On a donc la proposition suivante :

**Proposition 3.2.10.** *L'immersion fermée  $\iota$  est équivariante pour l'action de  $\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g} \otimes \kappa$  à gauche et  $L^+ \text{GSp}_{2g}$  à droite. Elle induit un isomorphisme*

$$\left( M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}} \right)_{\text{red}} \simeq \bigcup_{\lambda \leq \lambda_{\max}} \text{Gr}_\lambda$$

où  $\lambda_{\max} = (e^g, 0^g)$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F} \in M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}}(\kappa)$ . Par les diviseurs élémentaires, il existe des entiers  $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$  et une base symplectique  $(e_1, \dots, e_g, f_1, \dots, f_g)$  de  $\Lambda \otimes \kappa$  tels que :

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^g \frac{(u^{a_i} e_i)}{(u^e)} \bigoplus_{i=1}^g \frac{(u^{b_i} f_i)}{(u^e)} \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^g \frac{\kappa[u]}{(u^e)} e_i \bigoplus_{i=1}^g \frac{\kappa[u]}{(u^e)} f_i = \Lambda \otimes \kappa$$

La condition sur le rang et l'isotropie de  $\mathcal{F}$  implique que pour tout  $1 \leq i \leq g$  on ait l'égalité :

$$a_i + b_i = e$$

Le réseau associé à  $\mathcal{F}$  est :

$$\Lambda_{\mathcal{F}} = \bigoplus_{i=1}^g (\kappa[u] \cdot u^{a_i} e_i \oplus \kappa[u] \cdot u^{e-a_i} f_i) \hookrightarrow \kappa[u]^{2g} = \Lambda_0$$

On trouve donc finalement (quitte à faire une permutation) :

$$\text{Inv}(\Lambda_{\mathcal{F}}, \Lambda_0) = (a_1, \dots, a_g, e - a_1, \dots, e - a_g) \in \{\lambda \in \mathbb{X}_\bullet(T)^+ \mid \lambda \leq \lambda_{\max}\}$$

(voir 3.1.15 pour les détails concernant les notations). On conclut alors comme pour l'exemple 3.1.15.  $\square$

La stratification (KR) de  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}}$  est donc donnée par :

$$M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}} = \bigsqcup_{\lambda \leq (e^g, 0^g)} M_\lambda, \quad M_\lambda = \iota^{-1}(\text{Gr}_\lambda)$$

L'ensemble des cocaractères  $\mu_\bullet$ -admissibles naïfs de niveau  $K^p = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_p)$  (parahorique maximal) est ici tout à fait explicite :

$$\text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu_\bullet) = \{\lambda \leq (e^g, 0^g)\}$$

### 3.2.2.3 Plongement du modèle de Pappas-Rapoport

De la même manière que pour  $\text{GL}_d$ , on dispose d'une immersion fermée pour le modèle de Pappas-Rapoport  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{PR}}$  dans un produit de convolution de grassmanniennes affines. Notez que dans le cas de  $\text{GSp}_{2g}$  la situation est symétrique :

$$\mu_\bullet = (1^g, 0^g)_{1 \leq i \leq e} = \mu_\bullet^\vee$$

ce qui se lit sur les filtrations de Pappas-Rapoport :

$$\mathcal{F}^{(1)} \subset \dots \subset \mathcal{F}^{(e)} \subset \dots \subset \mathcal{F}^{2e} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} k$$

comme le fait que la dimensions des gradués  $\mathcal{F}^{(i+1)}/\mathcal{F}^{(i)}$  est la même pour  $i \leq e$  et  $i \geq e$ .

**Proposition 3.2.11.** *Le morphisme*

$$\begin{aligned} \iota^{\text{PR}} : M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{PR}} &\longrightarrow \text{Gr} \tilde{\times} \dots \tilde{\times} \text{Gr} \\ (\mathcal{F}^{(1)} \subset \dots \subset \mathcal{F}^{(e)}) &\longmapsto (\Lambda_{\mathcal{F}^{(e)}} \subset \dots \subset \Lambda_{\mathcal{F}^{(2e-1)}}) \end{aligned}$$

est une immersion fermée équivariant pour l'action de  $\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g} \otimes k$  à gauche et  $L^+ \text{GSp}_{2g}$  à droite. Il induit un isomorphisme :

$$M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{PR}} \simeq \widetilde{\text{Gr}}_{\mu_\bullet}$$

*Démonstration.* Exactement comme pour le cas de  $\text{GL}_d$ , voir 3.2.4. □

### 3.2.2.4 Plongement du modèle canonique

Les deux plongements décrits ci-dessus sont compatibles dans le sens où le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{PR}} & \xrightarrow{\iota^{\text{PR}}} & \widetilde{\text{Gr}} \\ p \downarrow & & \downarrow m \\ M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}} & \xrightarrow{\iota} & \text{Gr}_{\leq |\mu_\bullet|} \end{array}$$

Il est maintenant beaucoup plus simple de décrire la fibre spéciale modèle local  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{can}}$ . D'après la proposition précédente elle est donnée par l'image du morphisme  $m_{\mu_\bullet}$  :

$$\left( M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{can}} \right)_{\text{red}} \simeq \text{Im}(m_{\mu_\bullet}) = \bigsqcup_{\lambda \leq |\mu_\bullet|} \text{Gr}_\lambda \quad (3.2.10)$$

La stratification (KR) de  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_d, \mu_\bullet)}^{\text{can}}$  est donc donnée par :

$$M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{can}} = \bigsqcup_{\lambda \leq |\mu_\bullet|} M_\lambda, \quad M_\lambda = \iota^{-1}(\text{Gr}_\lambda)$$

L'ensemble des cocaractères  $\mu_\bullet$  admissibles est donc donné par :

$$\text{Adm}_K(\mu) = \{\lambda \leq (e^g, 0^g)\}$$

**Proposition 3.2.12.** *Le morphisme  $\iota$  induit un isomorphisme de schémas :*

$$M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{can}} \simeq \bigsqcup_{\lambda \leq |\mu_\bullet|} \text{Gr}_\lambda$$

*Démonstration.* Exactement comme pour le cas de  $GL_d$  : cela découle de (3.2.10) et du fait que la fibre spéciale  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{can}}$  est réduite (puisque  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{PR}}$  est réduit).  $\square$

**Remarque 3.2.13.** Cette fois ci on a l'égalité :

$$\text{Adm}_K(\mu) = \text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu)$$

Cela se traduit géométriquement par le fait que les schémas  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{can}}$  et  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}}$  contiennent les mêmes  $\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g} \otimes \kappa$ -orbites, i.e. les mêmes strates KR. Ensemblistement les schémas  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}}$  et  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{can}}$  ont donc la même fibre générique et la même fibre spéciale. Il est naturel de se demander si  $M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}}$  est plat, ce qui est équivalent à ce que l'on ait l'égalité entre schémas (et non pas juste en tant qu'espaces topologiques) :

$$M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{can}} = M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}}$$

Comme pour le cas de  $GL_d$ , cette égalité peut être reformulée en termes de platitude d'un certain espace de matrices (voir [PR02] remarque 12.5). Contrairement au cas de  $GL_d$ , je n'ai pas trouvé de résultat concernant cette conjecture.

Pour résumer dans le cas (C) on a le diagramme commutatif suivant aux carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} M_{\mathcal{D}}^{\text{PR}} & \longrightarrow & M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{PR}} & \xrightarrow{\iota^{\text{PR}}} & \widetilde{\text{Gr}}_{\mu_\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M_{\mathcal{D}}^{\text{can}} & \longrightarrow & M_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GSp}_{2g}, \mu_\bullet)}^{\text{can}} & \xrightarrow{\iota} & \text{Gr}_{\leq |\mu_\bullet|} \end{array}$$

et où les flèches horizontales sont des isomorphismes respectant les orbites respectives.

### 3.2.3 Applications

Nous allons maintenant appliquer les résultats connus sur les grassmanniennes affines et leurs produits de convolution à nos modèles locaux. On en déduira des corollaires sur la géométrie de la fibre spéciale des modèles entiers des variétés de Shimura.

**Hypothèses.** Dans tout ce qui suit  $\mathcal{D}$  désigne une donnée PEL  $p$ -adique simple de type (AL) ou (C).

L'hypothèse sur la simplicité de  $\mathcal{D}$  peut-être enlevée, elle permet uniquement de ne pas alourdir les notations. L'hypothèse sur les facteurs de type (AL) et (C) permet

d'utiliser les plongements des modèles locaux dans les grassmanniennes affines définis dans les sections précédentes 3.2.1.1, 3.2.2.1 :

$$\begin{array}{ccc}
M_{\mathcal{D}}^{\text{PR}} & \xrightarrow{\iota^{\text{PR}}} & \widetilde{\text{Gr}}_{\mu_{\bullet}} \\
p \downarrow & & \downarrow m_{\mu_{\bullet}} \\
M_{\mathcal{D}}^{\text{can}} & \xrightarrow{\iota} & \text{Gr}_{\leq |\mu_{\bullet}|}
\end{array} \tag{3.2.11}$$

où Gr désigne la grassmannienne affine pour le groupe  $\text{GL}_n$  dans le cas (AL) et pour le groupe  $\text{GSp}_{2g}$  dans le cas (C).

**Remarque 3.2.14.** Le carré cartésien ci-dessus, ainsi que la Proposition 3.1.3, donnent une preuve de la Proposition 2.3.13 dans le cas d'une donnée PEL ne faisant intervenir que des facteurs de type (AL) ou (C).

**Proposition 3.2.15.** Soit  $w_0$  l'élément maximal de  $\text{Adm}_K(\mu)$ . Le morphisme  $p : M_{\mathcal{D}}^{\text{PR}} \rightarrow M_{\mathcal{D}}^{\text{can}}$  est un isomorphisme en restriction à  $M_{w_0}$ .

*Démonstration.* Découle du carré cartésien 3.2.11 et de la Proposition 3.1.8 car par définition  $w_0 = |\mu_{\bullet}^{\vee}|$ .  $\square$

**Proposition 3.2.16.** Pour tout  $\lambda \in \text{Adm}_K(\mu)$  on a

1.  $p : p^{-1}(M_{\lambda}^{\text{can}}) \rightarrow M_{\lambda}^{\text{can}}$  est une fibration localement triviale
2. Pour tout  $y \in M_{\lambda}^{\text{can}}$  la fibre  $p^{-1}(y)$  est équidimensionnelle de dimension

$$\dim(p^{-1}(y)) = \langle \rho, |\mu_{\bullet}| - \lambda \rangle$$

3. La strate  $p^{-1}(M_{\lambda}^{\text{can}})$  est quasi-projective lisse de dimension :

$$\dim(p^{-1}(M_{\lambda})) = \langle \rho, |\mu_{\bullet}| + \lambda \rangle$$

*Démonstration.* Découle du Théorème 3.1.9 et de la Remarque 3.1.11.  $\square$

On peut maintenant appliquer tous ces résultats à la stratification de  $\mathcal{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k$  :

$$\mathcal{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k = \coprod_{\lambda \in \text{Adm}_K(\mu)} S_{\lambda}^{\text{PR}}, \quad S_{\lambda}^{\text{PR}} = \pi^{-1}(S_{\lambda}^{\text{can}})$$

pour comprendre son comportement vis à vis du morphisme  $\pi : \mathcal{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \rightarrow \mathcal{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{can}}$ . Le diagramme de modèle local (2.3.7) nous fournit directement les résultats suivants :

**Corollaire 3.2.17.** Pour tout  $\lambda \in \text{Adm}_K(\mu)$  la strate  $S_{\lambda}^{\text{PR}}$ , est quasi-projective lisse de dimension :

$$\dim(S_{\lambda}^{\text{PR}}, ) = \langle \rho, |\mu_{\bullet}| + \lambda \rangle$$

*Démonstration.* Découle directement du diagramme de modèle local (2.3.7) et de la Proposition 3.2.16.  $\square$

**Corollaire 3.2.18.** *Soit  $w_0$  l'élément maximal de  $\text{Adm}_K(\mu)$ . Le morphisme*

$$\pi : \text{Sh}_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{PR}} \rightarrow \text{Sh}_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{can}}$$

*est un isomorphisme en restriction à la strate ouverte  $S_{w_0}^{\text{can}}$ .*

Pour les autres strates KR, on a le théorème suivant :

**Théorème 3.2.19.** *Pour tout  $\lambda \in \text{Adm}_K(\mu)$  la restriction du morphisme  $\pi$  :*

$$\pi|_{\lambda} : \mathcal{S}_{\lambda}^{\text{PR}} \longrightarrow \mathcal{S}_{\lambda}^{\text{can}}$$

*est un morphisme plat.*

*Démonstration.* En restriction à une strate KR d'invariant  $\lambda \in \text{Adm}_K(\mu)$  le carré cartésien (2.6.2) devient :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{\lambda}^{\text{PR}} & \longrightarrow & [M_{\lambda}^{\text{PR}}/\mathcal{G}_k] \\ \pi \downarrow & & \downarrow \bar{p} \\ \mathcal{S}_{\lambda}^{\text{can}} & \longrightarrow & [M_{\lambda}^{\text{can}}/\mathcal{G}_k] \end{array}$$

qui est lui aussi cartésien. Il suffit de montrer que le morphisme  $\bar{p}$  est plat. Ce dernier s'inscrit dans un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} M_{\lambda}^{\text{PR}} & \xrightarrow{p} & M_{\lambda}^{\text{can}} \\ \downarrow & & \downarrow q \\ [M_{\lambda}^{\text{PR}}/\mathcal{G}_k] & \xrightarrow{\bar{p}} & [M_{\lambda}^{\text{can}}/\mathcal{G}_k] \end{array}$$

Or d'après le théorème 3.1.9 et la proposition 3.2.16 le morphisme  $p$  est localement trivial et donc en particulier plat (le schéma de base  $\text{Spec } k$  est un corps). Le morphisme  $q$  étant fidèlement plat, on conclut par [Sta18], Lemme 100.25.4.  $\square$

### 3.3 Comparaison entre les stratifications KR et Hodge

Dans cette section on explique le lien entre les stratifications de Hodge et KR de la fibre spéciale de  $\text{Sh}_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naïf}}$ . L'objectif est de donner une interprétation géométrique des différents objets définis dans [BH16] (polygone de Hodge, polygone de Pappas-Rapoport...).

### 3.3.1 Polygone de Hodge

On suit les travaux de [BH16]. Soit donc  $G$  un groupe  $p$ -divisible sur un corps parfait  $k$  de caractéristique  $p$ . On note  $\sigma$  le Frobenius de  $W(k)$ . Soit  $F/\mathbb{Q}_p$  une extension finie de degré  $n = ef$  avec  $e$  l'indice de ramification et  $f$  le degré résiduel. On suppose que  $k$  contient le corps résiduel et  $\mathcal{O}_F$ . Soit  $\pi \in \mathcal{O}_F$  une uniformisante. Soit  $(M(G), F)$  le module de Dieudonné de  $G$  sur  $k$ . C'est un  $W(k)$ -module libre de rang  $h$ , avec  $h$  la hauteur de  $G$ . On suppose que  $G$  est muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$  :

$$\iota : \mathcal{O}_F \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}_p}(G)$$

On note  $F^{\text{nr}}$  l'extension maximale non ramifiée dans  $F$ . L'action de  $\mathcal{O}_F$  sur  $M(G)$  induit une décomposition :

$$M(G) = \bigoplus_{\varphi: F^{\text{nr}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} M_\varphi$$

où  $M_\varphi$  désigne le sous  $W(k)$ -module où  $\mathcal{O}_{F^{\text{nr}}}$  agit via le plongement  $\varphi : \mathcal{O}_{F^{\text{nr}}} \rightarrow W(k)$ . Puisque l'endomorphisme  $F$  est  $\sigma$ -linéaire, on a :

$$F(M_{\sigma^{-1}\cdot\varphi}) \subset M_\varphi$$

Pour tout  $\varphi : F^{\text{nr}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$  on note

$$W_{\mathcal{O}_F, \varphi}(k) = \mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_{F^{\text{nr}}, \varphi}} W(k)$$

l'anneau des vecteurs de Witt ramifiés. C'est un anneau de valuation discrète avec pour uniformisante  $\pi$ . Par construction  $M_\varphi$  est un  $W_{\mathcal{O}_F, \varphi}(k)$ -module libre de rang fini indépendant de  $\varphi$  ([BH16], Proposition 1.1.6). Par les diviseurs élémentaires pour tout  $\varphi \in J$  il existe des entiers  $a_{1, \varphi}, \dots, a_{h, \varphi} \in \mathbb{N}$  tels que :

$$M_\varphi / F(M_{\sigma^{-1}\cdot\varphi}) = \bigoplus_{i=1}^h W_{\mathcal{O}_F, \varphi}(k) / (\pi^{a_{i, \varphi}})$$

On peut supposer que les valuations sont ordonnées :  $a_{1, \varphi} \geq \dots \geq a_{h, \varphi}$  (ici notre convention est l'opposée de celle de [BH16]), i.e.  $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{Z}^h)^+$ . On définit le polygone de Hodge relativement à  $\varphi : F^{\text{nr}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$  comme étant le polygone à abscisses de rupture entières sur  $[0, h]$  défini par  $\text{Hodge}_{\mathcal{O}_F, \varphi}(M(G), F, \iota)(0) = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq h$  :

$$\text{Hodge}_\varphi(M(G), F, \iota)(i) = a_{1, \varphi} + \dots + a_{i, \varphi}$$

Le polygone de Hodge de  $(M(G), F, \iota)$  est alors définie comme la moyenne sur tous les plongements :

$$\text{Hodge}_{\mathcal{O}_F}(M(G), F, \iota)(i) = \frac{1}{f} \sum_{\varphi: F^{\text{nr}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} \text{Hodge}_\varphi(M(G), F, \iota)(i)$$

pour tout  $0 \leq i \leq h$ . Notez que le polygone  $\text{Hodge}_\varphi(M(G), F, \iota)$  détermine entièrement les entiers  $a_{1, \varphi}, \dots, a_{h, \varphi} \in \mathbb{N}$ , ce qui est faux pour le polygone  $\text{Hodge}_{\mathcal{O}_F}(M(G), F, \iota)$ .



### 3.3.2 Combinatoire

On considère  $\text{Gr}_{\text{GL}_n}$  la grassmannienne affine pour le groupe  $\text{GL}_n$  définie sur un corps  $k$ . Soit  $x \in \text{Gr}_{(e, \dots, e)}$  un point défini sur  $k$ , donné par un réseau  $\Lambda \subset k((u))^n$ . Ce réseau doit satisfaire les inclusions :

$$u^e \Lambda_0 \subset \Lambda \subset \Lambda_0$$

De la même manière pour tout cocaractère  $\lambda = (b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{Z}^n)^+$  et tout réseau  $\Lambda \in \text{Gr}_\lambda(k)$ , si  $b_i \leq e$  pour tout  $1 \leq i \leq n$  alors les inclusions ci-dessus doivent être satisfaites. On définit l'ensemble :

$$(\mathbb{Z}_{\leq e}^n)^+ = \{\lambda = (b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{Z}^n)^+ \mid b_i \leq e \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n\}$$

Notez que cet ensemble est très différent de  $\{\lambda \leq (e, \dots, e)\}$  donné par l'ordre de Bruhat. Soit  $\lambda = (b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{Z}_{\leq e}^n)^+$  et  $\Lambda \in \text{Gr}_\lambda(k)$  un réseau. Par la décomposition de Cartan, il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\Lambda_0$  tels que :

$$\Lambda = \bigoplus_{i=1}^n k[[u]] \cdot u^{b_i} e_i \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^n k[[u]] \cdot e_i = \Lambda_0$$

Pour faire le lien avec le Polygone de Hodge on doit s'intéresser au quotient :

$$\Lambda/u^e \Lambda_0 \simeq \bigoplus_{i=1}^n k[[u]]/(u^{e-b_i}) \cdot e_i$$

L'analogie du polygone de Hodge pour la filtration  $\Lambda \subset \Lambda_0$  est donné par les invariants :

$$\begin{aligned} (e - b_1, \dots, e - b_n) &= (e, \dots, e) - (b_1, \dots, b_n) \\ &= (e, \dots, e) - \text{Inv}(\Lambda, \Lambda_0) \end{aligned}$$

**Définition 3.3.1.** (Non standard) Soit  $\Lambda \subset k((u))^n$  un réseau défini par un point  $x \in \text{Gr}$  satisfaisant les inclusions :

$$u^e \Lambda_0 \subset \Lambda \subset \Lambda_0$$

On définit l'invariant de Hodge de  $x$  :

$$\text{Hodge}(x) = \text{Hodge}(\Lambda) := (e, \dots, e) - \text{Inv}(\Lambda, \Lambda_0) \in (\mathbb{Z}^n)^+$$

**Remarque 3.3.2.** Ici on fait l'abus de notation de noter  $(e, \dots, e) - \text{Inv}(\Lambda, \Lambda_0)$  le représentant dans la chambre dominante. Avec les notations de l'exemple avant la définition, cela revient à réarranger les entiers dans l'ordre décroissant :

$$(e, \dots, e) - (b_1, \dots, b_n) = (e - b_n, \dots, e - b_1)$$

Par construction l'invariant  $\text{Hodge}(x)$  ne dépend que de la  $L^+G$ -orbite de  $x$ . Pour tout  $\lambda \in (\mathbb{Z}_{\leq e}^n)^+$  on obtient donc une application bien définie :

$$\begin{aligned} \text{Hodge} : |\mathcal{Hck}_{\leq \lambda}| &\longrightarrow (\mathbb{Z}^n)^+ \\ x &\longmapsto \text{Hodge}(x) \end{aligned}$$

Bien sûr cette application dépend de l'entier  $e$ .

### 3.3.3 Stratification de Hodge

Soit  $\mathcal{D}$  une donnée PEL  $p$ -adique de type (AL) ou (C). Soit  $x \in \mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes k$  un point défini sur un corps  $\kappa(x)$ , et  $G$  le groupe  $p$ -divisible associé. Notez que  $G$  est muni d'une polarisation  $\lambda$  et d'une structure d'endomorphisme  $\iota$ . On suppose pour commencer que  $\kappa(x)$  est un corps parfait. En suivant les notations des sections 3.2.1.1 et 3.2.2.1, on distingue deux situations :

- (AL) Dans ce cas  $\mathcal{O}_B = \mathcal{O}_F \times \mathcal{O}_F$  avec  $(x, y)^* = (y, x)$ . Cela induit une décomposition  $G = H \times H^D$ . Le groupe  $p$ -divisible  $H$  est de hauteur  $h = nd$ . La donnée de  $(G, \lambda, \iota)$  est équivalente à la donnée de  $(H, \iota)$ . Dans ce cas  $(M(H), F, \iota)$  est un  $W(\kappa(x))$ -module libre de rang  $h$  muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$  (sans polarisation). On peut alors associer à  $x$  les polygones suivants :

$$\text{Hodge}_\varphi(x) = \text{Hodge}_\varphi(M(H), F, \iota), \quad \text{Hodge}_{\mathcal{O}_B}(x) = \text{Hodge}_{\mathcal{O}_F}(M(H), F, \iota)$$

- (C) Dans ce cas  $\mathcal{O}_B = \mathcal{O}_F$  et  $(G, \lambda, \iota)$  est un groupe  $p$ -divisible polarisé de hauteur  $h = 2ng$ . Par conséquent  $(M(G), F, \iota)$  est un  $W(\kappa(x))$ -module symplectique libre de rang  $2ng$  muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$ . On peut alors associer à  $x$  les polygones suivants :

$$\text{Hodge}_\varphi(x) = \text{Hodge}_\varphi(M(G), F, \iota), \quad \text{Hodge}_{\mathcal{O}_F}(x) = \text{Hodge}_{\mathcal{O}_F}(M(G), F, \iota)$$

Si maintenant  $\kappa(x)$  n'est pas parfait, alors on définit les polygones ci-dessus après avoir fait le changement de base  $\kappa(x) \rightarrow \kappa(x)^{\text{perf}}$ . Ces polygones nous permettent de définir deux stratifications des espaces topologiques sous-jacents :

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes k| &\longrightarrow ((\mathbb{Q}^h)^+)^{[F:\mathbb{Q}_p]}, & |\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes k| &\longrightarrow (\mathbb{Q}^h)^+ \\ x &\longmapsto (\text{Hodge}_\varphi(x))_\varphi & x &\longmapsto \text{Hodge}_{\mathcal{O}_F}(x) \end{aligned}$$

La relation d'ordre pour la stratification de gauche est la relation « produit », i.e. la relation d'ordre donnée par :

$$(\text{Hodge}_\varphi(x))_\varphi \leq (\text{Hodge}_\varphi(y))_\varphi \Leftrightarrow \text{Hodge}_\varphi(x) \leq \text{Hodge}_\varphi(y) \quad \forall \varphi \in \Sigma^{\text{nr}}$$

La stratification par le polygone  $\text{Hodge}_{\mathcal{O}_F}$  est appelée *stratification de Hodge* dans [BH22b].

**Proposition 3.3.3.** *La stratification de  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes \kappa$  induite par l'application  $x \mapsto (\text{Hodge}_\varphi(x))_\varphi$  coïncide avec la stratification (KR).*

*Démonstration.* Puisque les deux stratifications sont des stratifications « produit » sur tous les  $\varphi \in J$  et que leurs relations d'ordres sont des relations d'ordres « produit » sur tous les  $\varphi \in J$ , on peut supposer que  $J = \{*\}$  (voir 3.2.2). Il découle des différents

résultats dans les cas (AL) et (C) que la stratification (KR) de  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes \kappa$  est induite par la composition des morphisme

$$\zeta : |\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes \kappa| \rightarrow |[M_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}/\mathcal{G}_{\kappa}]| \rightarrow |\mathcal{H}ck_{\text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu)}|$$

ici  $\mathcal{H}ck$  désigne le champ de Hecke pour le groupe  $\text{GL}_d$  dans le cas (AL) et  $\text{GSp}_{2g}$  dans le cas (C). Il suffit donc de montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes k| & \xrightarrow{\zeta} & |\mathcal{H}ck_{\text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu)}| \\ & \searrow \text{Hodge}_{\varphi}(\cdot) & \downarrow \text{Hodge}(\cdot) \\ & & (\mathbb{Q}^h)^+ \end{array}$$

Notez que l'on a bien l'inclusion  $\text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu) \subset (\mathbb{Z}_{\leq e}^n)^+$  donc l'application de droite est bien définie. Soit  $x \in |\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes \kappa|$  définit sur un corps  $k$ . Soit  $G$  le groupe  $p$ -divisible sur  $k$  associé (noté  $H$  dans le cas (AL)). Pour calculer  $\zeta(x)$  on commence par fixer une trivialisaton  $\Lambda \otimes k \simeq H_{\text{dR}}^1(G)$ . Avec les notations de (5.2.1),  $\zeta(x)$  est alors donné par  $\text{Inv}(\Lambda_{\omega_G}, \Lambda_0)$  où  $\Lambda_{\omega_G}$  désigne le réseau associé au faisceau  $\omega_G$  via (5.2.1). Notez que cet invariant ne dépend pas du choix de la trivialisaton. Dans ce cas l'invariant  $(a_1, \dots, a_h) := \text{Hodge}(\Lambda_{\omega_G})$  satisfait par construction :

$$\omega_G = \Lambda_{\omega_G}/u^e \Lambda_0 \simeq \bigoplus_{i=1}^h k[u]/(u^{a_i})$$

Le résultat découle alors des identifications

$$\omega_G = M(G)/FM(G), \quad M(G)/pM(G) = H_{\text{dR}}^1(G)$$

□

**Remarque 3.3.4.** La proposition ci-dessus dit simplement que si l'on a

$$\omega_G \simeq \bigoplus_{i=1}^h k[u]/(u^{a_i})$$

Alors la stratification de Hodge est donnée par l'invariant  $(a_1, \dots, a_n)$ , et la stratification KR est donnée par l'invariant  $(e - a_n, \dots, e - a_1)$ .

Le corollaire suivant concernant la stratification induite par le polygone de Hodge  $\text{Hodge}_{\mathcal{O}_F}(\cdot)$  est immédiat.

**Corollaire 3.3.5.** *Les strates de Hodge de  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes \kappa$  sont des unions de strates (KR). Si  $f = 1$ , alors ces deux stratifications coïncident.*

**Remarque 3.3.6.** Bien sûr les deux résultats ci-dessus restent valables si l'on ne suppose pas que la donnée  $\mathcal{D}$  est simple (voir remarque 2.3.7).

### 3.3.4 Polygone de Pappas-Rapoport

Soit  $\mathcal{D}$  une donnée PEL  $p$ -adique de type (AL) ou (C). On conserve les notations de 3.2.1.1 et 3.2.2.1. Soit  $\mu_\bullet$  le cocaractère de Hodge associé (dans le cas (AL) c'est le cocaractère  $\mu_1$ , voir 3.2.1.1). Ce caractère est de la forme :

$$\mu_\bullet = (1^{r_\psi}, 0^{d-r_\psi})_{\varphi:F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} = \prod_{\varphi:F^{\text{nr}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} (1^{r_\psi}, 0^{d-r_\psi})_{\psi|\varphi} = \prod_{\varphi:F^{\text{nr}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} \mu_\bullet^\varphi$$

Dans [BH16] les auteurs définissent le polygone de Pappas Rapoport de cette donnée comme étant :

$$\text{PR}(\mu_\bullet) = \frac{1}{f} \sum_{\varphi:F^{\text{nr}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} \text{PR}(\mu_\bullet^\varphi), \quad \text{PR}(\mu_\bullet^\varphi) = \sum_{\psi|\varphi} \text{PR}(\mu_\psi)$$

où  $\text{PR}(\mu_\psi)$  est le polygone de pente  $1/e$  avec multiplicité  $r_\psi$  et pente 0 avec multiplicité  $d - r_\psi$ . A partir de maintenant on voit ces polygones comme des tuples d'entiers.

$$\begin{aligned} e \cdot \text{PR}(\mu_\bullet^\varphi) &= \sum_{\psi|\varphi} e \cdot \text{PR}(\mu_\psi) \\ &= \sum_{\psi|\varphi} (1^{r_\psi}, 0^{d-r_\psi}) \\ &= |\mu_\bullet^\varphi| \\ &= (\#\{r_\psi \geq 1\}, \dots, \#\{r_\psi \geq d\}) \end{aligned}$$

On rappelle que l'on a défini en 3.2.1.1 le cocaractère :

$$\mu_\bullet^\vee = (1^{s_\psi}, 0^{d-s_\psi})_{\psi:F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p}, \quad s_\psi + r_\psi = d$$

et que l'ordre de bruhat sur  $(\mathbb{Z}^d)^+ : (n_1, \dots, n_d) \leq (m_1, \dots, m_d)$  si et seulement si le système d'équations suivant est satisfait :

$$\begin{aligned} (1) : & \quad n_1 \leq m_1 \\ (2) : & \quad n_1 + n_2 \leq m_1 + m_2 \\ & \quad \dots \\ (d-1) : & \quad n_1 + \dots + n_{d-1} \leq m_1 + \dots + m_{d-1} \\ (d) : & \quad n_1 + \dots + n_d = m_1 + \dots + m_d \end{aligned}$$

**Lemme 3.3.7.** *Pour tout  $\varphi : F^{\text{nr}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$  on a (pour l'ordre de bruhat) :*

$$(a_1, \dots, a_n) \leq |\mu_\bullet^\varphi| \Leftrightarrow (e - a_d, \dots, e - a_1) \leq |(\mu_\bullet^\varphi)^\vee|$$

*Démonstration.* On peut omettre l'indice  $\varphi$ . Par symétrie, il suffit de prouver une implication. Soit donc  $(a_1, \dots, a_d) \leq |\mu_\bullet|$ . Pour simplifier notons  $(b_1, \dots, b_d) = (e -$

$a_d, \dots, e - a_1$ ). Dans ce cas on a d'après l'équation (d) ci-dessus :

$$\begin{aligned} a_1 + \dots + a_d &= \sum_{k=1}^d \#\{r_\psi \geq k\} \\ &= \sum_{k=1}^d \#\{r_\psi = k\} \cdot k \\ &= \sum_{\psi} r_\psi \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d (e - a_i) &= ed - \sum_{i=1}^d a_i \\ &= ed - \sum_{\psi} r_\psi \\ &= \sum_{\psi} s_\psi \\ &= \sum_{k=1}^d \#\{s_\psi \geq k\} \end{aligned}$$

En d'autres termes l'équation (d) de l'inégalité  $(b_1, \dots, b_d) \leq |(\mu_\bullet)^\vee|$  est satisfaite. Montrons que l'équation :

$$(d-1) : \quad \sum_{k=1}^{d-1} b_k \leq \sum_{k=1}^{d-1} \#\{s_\psi \geq k\}$$

est également satisfaite. Puisque l'équation (d) est satisfaite, l'équation  $(d-1)$  est équivalente à ce que :

$$b_d \geq \#\{s_\psi \geq d\}$$

Puisque  $r_\psi + s_\psi = d$ , cette inégalité est équivalente à ce que :

$$e - a_1 \geq \#\{r_\psi = 0\} = e - \#\{r_\psi = 1\}$$

ce qui est vrai d'après l'équation (1) pour l'inégalité  $(a_1, \dots, a_d) \leq |\mu_\bullet|$ . Les autres inégalités se démontrent par récurrence de la même manière.  $\square$

**Corollaire 3.3.8.** *Pour tout  $x \in |\mathrm{Sh}_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\mathrm{PR}} \otimes \kappa|$  on a les inégalités :*

$$\mathrm{Hodge}_\varphi(x) \leq \mathrm{PR}(\mu_\bullet^\varphi), \quad \mathrm{Hodge}_{\mathcal{O}_B}(x) \leq \mathrm{PR}(\mu_\bullet)$$

*Démonstration.* Découle du lemme 3.3.7 et de la proposition 3.3.3.  $\square$

**Remarque 3.3.9.** Dans [BH16] les auteurs définissent le polygone de Pappas-Rapoport d'une donnée  $\mu_\bullet$  pour répondre à la question suivante : étant donnée une filtration de Pappas-Rapoport  $(\mathcal{F}^{(i)})_{1 \leq i \leq e}$  de type  $\mu_\bullet$ , quels sont les polygones de Hodge possibles pour  $\mathcal{F}^{(e)}$  ? Géométriquement cela revient à se demander quelle est l'image du morphisme de convolution :

$$m_{\mu_\bullet} : \widetilde{\text{Gr}}_{\mu_\bullet} \rightarrow \text{Gr}$$

Par conséquent l'inégalité  $\text{Hodge}(x) \leq \text{PR}(\mu_\bullet)$  est une simple reformulation du fait que l'image de  $m_{\mu_\bullet}$  est l'union des strates  $\text{Gr}_\lambda$  pour  $\lambda \leq |\mu_\bullet^\vee|$ .

Les corollaires suivants découlent directement de tout ce qui précède.

**Corollaire 3.3.10.** *Soit  $w_0 \in \text{Adm}_K(\mu)$  l'élément maximal. Alors  $x \in S_{w_0}^{\text{PR}}$  si et seulement si  $\text{Hodge}_{\mathcal{O}_B}(x) = \text{PR}(\mu_\bullet)$ .*

**Corollaire 3.3.11.** *Le morphisme  $\pi : \mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k \rightarrow \mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{can}} \otimes k$  est un isomorphisme en restriction sous-schéma :*

$$\{x \in |\mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes k| \mid \text{Hodge}_{\mathcal{O}_B}(x) = \text{PR}(\mu_\bullet)\}$$

*Démonstration.* Cela découle de ce qui précède et du corollaire 3.2.18.  $\square$

**Remarque 3.3.12.** Le corollaire ci-dessus dit que le lieu de Rapoport généralisé [BH22b] (définition 2.28) coïncide avec la strate KR dense (donnée par l'élément  $w_0 \in \text{Adm}_K(\mu)$  maximal).

**Remarque 3.3.13.** Il est naturel de se demander si le lieu de Rapoport, c'est-à-dire le lieu où le fibré de Hodge  $\omega$  du schéma abélien universel est libre en tant que  $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \kappa$ -module, est dense ou non dans  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{can}} \otimes \kappa$  (ou de la même manière pour  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{PR}}$ ). Attention ici la question porte sur le lieu de Rapoport, et non sur le lieu de *Rapoport généralisé* de [BH22b], ce dernier désignant le lieu où le polygone de Hodge coïncide avec le polygone de Pappas-Rapoport. Premièrement, si le lieu de Rapoport dans  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes \kappa$  est vide, alors il en est de même pour  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{can}} \otimes \kappa$ . On peut donc supposer que le lieu de Rapoport de  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes \kappa$  est non vide. Dans ce cas on a nécessairement :

$$\lambda_{\max} = (e, \dots, e, 0, \dots, 0)$$

où  $\lambda_{\max} \in \text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu)$  désigne l'élément maximal. Cette condition est équivalente à ce que  $e$  divise  $r = r_1 + \dots + r_e$  (3.2.3). Ensuite le lieu de Rapoport  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{can}} \otimes \kappa$  est non vide si et seulement si  $\text{Adm}_K(\mu) = \text{Adm}_K^{\text{naïf}}(\mu)$ . Cette dernière condition est équivalente à ce que  $r_1 = \dots = r_e$ . Dans le cas (C) cette condition est toujours satisfaite. Dans le cas (AL), l'exemple 3.2.9 montre que ce n'est pas vrai en général : pour le cocaractère

$$\mu_\bullet = ((1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 0))$$

le lieu de Rapoport de  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes \kappa$  est dense, et vide dans  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{can}} \otimes \kappa$ .

### 3.3.4.1 Formulation abstraite du polygone de Hodge

On a vu dans les sections 3.2.1.1 et 3.2.2.1 que pour calculer la stratification (KR) on pouvait se placer dans le cadre d'un groupe réductif  $G = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} H$  où  $H$  est un groupe hyperspécial sur  $F$ , et d'un niveau maximal parahorique  $K = (\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} H)(\mathbb{Z}_p) = H(\mathcal{O}_F)$  (puisque  $H$  est non-ramifié on fait l'abus de notation de noter également  $H$  son modèle réductif sur  $\mathcal{O}_F$ ). Soit  $S \subset H$  un tore maximal. Alors  $T = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} S$  est un tore maximal de  $G$ . On note  $\Gamma_0 = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\check{\mathbb{Q}_p})$ . L'ensemble  $\mu$ -admissible de niveau  $K$  est un sous-ensemble du double quotient :

$$\text{Adm}_K(\mu) \subset W_K \backslash \widetilde{W} / W_K \simeq \mathbb{X}_\bullet(T)_{\Gamma_0} / W_0$$

défini par Kottwitz et Rapoport (voir [KR00],[RZ96] pour une définition précise). Cet ensemble paramétrise les orbites dans le modèle local canonique ([Lev16] Théorème 2.3.5). L'isomorphisme de droite est dû au fait que l'on se place ici dans le cas  $K$  maximal parahorique. Sur  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  et  $\check{\mathbb{Q}_p}$  on a les décompositions

$$T(\overline{\mathbb{Q}_p}) = \prod_{\varphi:F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}} S(\overline{\mathbb{Q}_p}), \quad T(\check{\mathbb{Q}_p}) = \prod_{\varphi:F^{\text{nr}} \rightarrow \check{\mathbb{Q}_p}} S(\check{F}) = \prod_{\varphi:F^{\text{nr}} \rightarrow \check{\mathbb{Q}_p}} T'(\check{\mathbb{Q}_p})$$

où  $T' = \text{Res}_{F/F^{\text{nr}}} S$ . Par conséquent :

$$\mathbb{X}_\bullet(T) \simeq \prod_{\varphi:F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}} \mathbb{X}_\bullet(S), \quad \mathbb{X}_\bullet(T)_{\Gamma_0} \simeq \prod_{\varphi:F^{\text{nr}} \rightarrow \check{\mathbb{Q}_p}} \mathbb{X}_\bullet(T')_{\Gamma_0}$$

L'égalité de droite découle du fait que le groupe de Galois  $\Gamma_0$  agit trivialement sur les plongements  $\varphi : F^{\text{nr}} \rightarrow \check{\mathbb{Q}_p}$ . Cela nous permet de définir une application :

$$\begin{aligned} \Sigma : \mathbb{X}_\bullet(T)_{\Gamma_0} &\simeq (\mathbb{X}_\bullet(T')_{\Gamma_0})^f \longrightarrow \mathbb{X}_\bullet(T)_{\Gamma_0, \mathbb{Q}} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_f) &\longmapsto \frac{1}{f}(\lambda_1 + \dots + \lambda_f) \end{aligned}$$

L'avantage de cette définition est qu'elle est écrite purement dans un langage de théorie des groupes et ne fait appel à aucune interprétation modulaire. En particulier, en restreignant cette application au lieu  $\mu$ -admissible de niveau  $K$ , on obtient une application bien définie :

$$\text{Hdg} : |\mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{can}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \kappa| \longrightarrow \mathbb{X}_\bullet(T)_{\Gamma_0, \mathbb{Q}}$$

Le schéma  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{can}}$  n'ayant pas d'interprétation modulaire en général, cette application permet de définir la stratification de Hodge de ce dernier purement en termes de théorie des groupes.

## 3.4 Le cas Hilbert

On se place maintenant dans le cas d'une donnée PEL de type Hilbert, i.e. une donnée PEL de type (C) avec  $g = 1$  (voir 3.2.2.1). Le groupe réductif associé à cette donnée

est  $G = \mathrm{GL}_2 = \mathrm{GSp}_2$ . Nous allons montrer que dans ce cas la stratification de Hodge est une bonne stratification de  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\mathrm{PR}} \otimes \kappa$ . D'après la section précédente, cela revient à se demander si le morphisme de convolution

$$m_{\mu_\bullet} : \widetilde{\mathrm{Gr}}_{\mu_\bullet} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\leq |\mu_\bullet|}$$

préserve les relations d'adhérences de la stratifications en cellules de Schubert :

$$\mathrm{Gr}_{\leq |\mu_\bullet|} = \bigsqcup_{\lambda \leq |\mu_\bullet|} \mathrm{Gr}_\lambda$$

On a le résultat suivant :

**Proposition 3.4.1.** *Si  $\mu_i = (1, 0)$  pour tout  $i = 1, \dots, e$ , alors  $\{m^{-1}(\mathrm{Gr}_\lambda)\}_{\lambda \leq |\mu|}$  définit une bonne stratification de  $\mathrm{Gr}_{(1,0)} \tilde{\times} \dots \tilde{\times} \mathrm{Gr}_{(1,0)}$ . En d'autres termes si on note  $X_\lambda := m^{-1}(\mathrm{Gr}_\lambda)$  alors pour tout  $\lambda \leq |(e, 0)|$*

$$\overline{X_\lambda} = \bigcup_{\lambda' \leq \lambda} X_{\lambda'}$$

*Démonstration.* On rappelle que d'après l'exemple 3.1.13, si  $(\Lambda_e \subset \dots \subset \Lambda_0) \in \mathrm{Gr}_{(1,0)} \tilde{\times} \dots \tilde{\times} \mathrm{Gr}_{(1,0)}$ , on peut prolonger cette filtration :

$$u^e \Lambda_0 = \Lambda_{2e} \subset \dots \subset \Lambda_e \subset \dots \subset \Lambda_0$$

en posant  $\Lambda_{e+k} = u^k \Lambda_{e-k}$ . La filtration  $(\Lambda_{2e-1} \subset \dots \subset \Lambda_e)$  détermine entièrement la filtration  $(\Lambda_e \subset \dots \subset \Lambda_1)$ . Dans ce qui suit, pour que la preuve soit compréhensible aux lecteurs voulant uniquement travailler avec les filtrations  $(\mathcal{F}^{(1)} \subset \dots \subset \mathcal{F}^{(e)})$  de  $M_{\mathcal{D}}^{\mathrm{PR}}$ , nous allons travailler avec la filtration :

$$(\Lambda_1 \subset \dots \subset \Lambda_e) := (\Lambda_{2e-1} \subset \dots \subset \Lambda_e)$$

i.e. on fait le changement d'indice  $k \leftrightarrow 2e - k$ . Avec ces notations la filtration  $(\Lambda_1 \subset \dots \subset \Lambda_e)$  correspond bien à la filtration  $(\mathcal{F}^{(1)} \subset \dots \subset \mathcal{F}^{(e)})$  de (3.2.3).

Soit  $\lambda = (i, j) < (e, 0) = |\mu_\bullet|$  (pour  $\lambda = (e, 0)$  il n'y a rien à démontrer). Soit  $x \in X_\lambda$  un point de corps résiduel  $k$ . Notons  $(\Lambda_1 \subset \dots \subset \Lambda_e)$  la filtration associée. Soient  $v_1, \dots, v_e \in \Lambda_0$  des éléments tels que  $\Lambda_k = \Lambda_{k-1} \oplus (k \cdot v_k)$  (somme directe en tant que  $k$ -espaces vectoriels). On définit des entiers pour tout  $1 \leq k \leq e$  :

$$s_k = \min\{s \mid u^s \Lambda_k \subset u^e \Lambda_0\} = N(\Lambda_k)$$

où  $N(\Lambda_k)$  est l'entier défini en (3.1.13). On a :

$$\mathrm{Inv}(\Lambda_k, \Lambda_0) = (e - k + s_k, e - s_k)$$



On note  $k_0 = \max\{k \mid s_k = s_{k-1}\}$ . Notez que  $k_0 \neq 0$  car on a supposé  $(i, j) < (e, 0)$ . Notons  $(a, b) = \text{Inv}(\Lambda_{k_0}, \Lambda_0)$  avec  $a \geq b$ . On a alors par hypothèse  $(a+1, b) = \text{Inv}(\Lambda_{k_0-1}, \Lambda_0)$ . Soit  $(e_1, e_2)$  une base de  $\Lambda_0$  telle que :

$$\Lambda_{k_0-1} = \langle u^{a+1}e_1, u^b e_2 \rangle$$

Puisque  $u \cdot v_{k_0} \in \Lambda_{k_0-1}$ , on peut écrire dans cette base :

$$v_{k_0} = xu^a e_1 + yu^{b-1} e_2$$

On a nécessairement  $y = 0$  car sinon on aurait  $u^{s_{k_0}} \cdot v_{k_0} \notin u^e \Lambda_0$ . Par conséquent on peut écrire

$$v_{k_0} = u^a e_1, \quad \Lambda_{k_0} = \Lambda_{k_0-1} \oplus (k \cdot u^a e_1) = \langle u^a e_1, u^b e_2 \rangle$$

Ensuite par définition pour tout  $n \geq 1$  on a :

$$u \cdot v_{k_0+n} \in \Lambda_{k_0+n-1} = \Lambda_{k_0-1} \bigoplus_{\ell=0}^{n-1} (k \cdot v_{k_0+\ell})$$

On peut donc fixer une décomposition par récurrence :

$$v_{k_0+n} = \frac{w_n}{u} + \sum_{\ell=0}^{n-1} x_{n,\ell} \frac{v_{k_0+\ell}}{u}, \quad w_n \in \Lambda_{k_0-1}, \quad x_{n,\ell} \in k$$

Nous allons maintenant définir une déformation sur  $R = k[[t]]$  de notre filtration initiale. Soit  $J := \{n \mid x_{n,n-1} = 0\}$ . On travaille dans :

$$\Lambda_0 \otimes_k R = (k[[u]])^2 \otimes_k k[[t]]$$

On commence par déformer trivialement la filtration pour tout  $\ell \leq k_0 - 1$  :

$$\tilde{\Lambda}_\ell := \Lambda_\ell \otimes_k k[[t]]$$

Pour  $\ell = k_0$  on définit

$$\tilde{v}_{k_0} = u^a e_1 + tu^{b-1} e_2 = v_{k_0} + tu^{b-1} e_2$$

et on pose

$$\tilde{\Lambda}_{k_0} = \tilde{\Lambda}_{k_0-1} \oplus (k \cdot \tilde{v}_{k_0})$$

Ensuite on déforme par récurrence sur  $n$  en fonction de si  $n \in J$  ou  $n \notin J$  :

1. ( $n \in J$ ) Dans ce cas on définit

$$\tilde{v}_{k_0+n} = v_{k_0+n} + t \frac{\tilde{v}_{k_0+(n-1)}}{u}$$

2. ( $n \notin J$ ) Dans ce cas on définit

$$\tilde{v}_{k_0+n} = \frac{w_n}{u} + \sum_{\ell=0}^{n-1} x_{n,\ell} \frac{\tilde{v}_{k_0+\ell}}{u}$$

Dans les deux situations on définit la déformation de  $\Lambda_{k_0+n}$  comme étant :

$$\tilde{\Lambda}_{k_0+n} = \tilde{\Lambda}_{k_0+(n-1)} \oplus (R \cdot \tilde{v}_{k_0+n})$$

Il faut vérifier que l'équation  $u \cdot \tilde{v}_{k_0+n} \in \tilde{\Lambda}_{k_0+(n-1)}$  est bien satisfaite. Pour la situation (2) c'est évident. Pour la situation (1) il faut voir que par hypothèse on a

$$u \cdot \tilde{v}_{k_0+n} = w_n + \sum_{\ell=0}^{n-2} x_{n,\ell} \tilde{v}_{k_0+\ell} + t \tilde{v}_{k_0+(n-1)} \in \tilde{\Lambda}_{k_0+(n-2)} \oplus (k \cdot \tilde{v}_{k_0+(n-1)}) = \tilde{\Lambda}_{k_0+(n-1)}$$

Au point fermé  $t = 0$  on a  $\tilde{v}_{k_0} = v_{k_0}$  et par suite  $\tilde{v}_{k_0+n} = v_{k_0+n}$  pour tout  $n \geq 1$ . Par conséquent cette filtration correspond bien à une déformation de notre filtration initiale. Au point générique  $\text{Frac}(R)$ , pour calculer  $\text{Inv}(\tilde{\Lambda}_e[\frac{1}{t}], \Lambda_0[\frac{1}{t}])$ , il faut voir que par construction on a pour tout  $n \geq 1$  :

$$\tilde{s}_{k_0+n} = \tilde{s}_{k_0+n} + 1$$

et que par conséquent puisque  $\tilde{s}_{k_0} = s_{k_0} + 1$  on trouve

$$\tilde{s}_e = \tilde{s}_{k_0+e-k_0} = \tilde{s}_{k_0} + e - k_0 = s_{k_0} + 1 + e - k_0 = s_e + 1$$

On a donc bien en fibre générique :

$$\text{Inv} \left( \tilde{\Lambda}_e \left[ \frac{1}{t} \right], \Lambda_0 \left[ \frac{1}{t} \right] \right) = (i+1, j-1)$$

En d'autres termes on a construit une filtration  $\tilde{\Lambda}_1 \subset \dots \subset \tilde{\Lambda}_e$  qui définit un  $R$ -point :

$$\{x, \eta\} = \text{Spec } R \rightarrow \text{Gr}_{(1,0)} \tilde{\times} \dots \tilde{\times} \text{Gr}_{(1,0)}$$

(ci-dessus  $x$  désigne le point fermé et  $\eta$  le point générique) tel que  $\eta \in X_{(i+1, j-1)}$ . En particulier  $x \in \overline{\{\eta\}} \subset \overline{X_{(i+1, j-1)}}$  et le résultat en découle. □

**Remarque 3.4.2.** L'idée de la preuve est la suivante.

1. Si  $\Lambda_e = \langle u^i e_1, w^j e_2 \rangle$  alors on aimerait déformer sur  $k[[t]]$  en prenant l'élément  $\tilde{v}_e = u^i e_1 + t w^{j-1} e_2$ . Le problème est que cet élément ne satisfait pas nécessairement  $u \cdot \tilde{v}_e \in \Lambda_{e-1}$ . Il faut donc déformer  $\Lambda_{e-1}$  également. Le problème est que cette déformation doit de nouveau satisfaire l'équation  $u \cdot \tilde{\Lambda}_{e-1} \subset \Lambda_{e-2} \dots$

2. Il existe un rang  $k_0$  tel que la déformation  $\tilde{\Lambda}_{k_0}$  existe. Autrement dit on peut trouver un élément  $\tilde{v}_{k_0}$  de la « bonne valuation », c'est-à-dire celle de  $v_{k_0}$  moins 1.
3. Ensuite on déforme par récurrence les  $v_{k_0+n}$  en à « divisant par  $u$  » à chaque étape de sorte à faire apparaître du  $u^{j-1}$  dans la décomposition de  $\tilde{v}_e$ .

Donnons un exemple explicite de déformation. On considère la filtration

$$\Lambda_1 = \langle u^3 e_1, u^2 e_2 \rangle, \quad \Lambda_2 = \langle u^2 e_1, u^2 e_2 \rangle, \quad \Lambda_3 = \langle u^2 e_1, u e_2 \rangle$$

que l'on réécrit avec les notations de la preuve :

$$\Lambda_1 = \langle u^3 e_1, u^2 e_2 \rangle, \quad \Lambda_2 = \Lambda_1 \oplus \langle u^2 e_1 \rangle, \quad \Lambda_3 = \Lambda_2 \oplus \langle u e_2 \rangle$$

La déformation construite dans la preuve est :

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_1 &= \langle u^3 e_1, u^2 e_2 \rangle \\ \tilde{\Lambda}_2 &= \tilde{\Lambda}_1 \oplus \langle u^2 e_1 + t u e_2 \rangle \\ \tilde{\Lambda}_3 &= \tilde{\Lambda}_2 \oplus \langle u e_2 + t(u e_1 + t e_2) \rangle \end{aligned}$$

où l'on a bien :

$$u \cdot (u e_2 + t u e_1 + t e_2) = u^2 e_2 + t(u^2 e_1 + t u e_2) \tilde{\Lambda}_2$$

**Remarque 3.4.3.** Le théorème ci-dessus n'est pas vrai dans le cas général (voir [BH22b] Proposition 3.9 pour un contre exemple). En fait dans la preuve ci dessus on utilise un fait spécifique au cas  $G = \mathrm{GL}_2$  : si  $\Lambda \in \mathrm{Gr}_{\leq(e,0)}$  alors avec les notations de 3.1.13 :

$$\Lambda \in \mathrm{Gr}_{(i,j)} \Leftrightarrow N(\Lambda) = i$$

L'invariant  $N(\Lambda)$  est égal à l'indice de nilpotence de  $u \in \mathrm{End}(\Lambda/u^e \Lambda_0)$  ce qui rend le calcul de  $\mathrm{Hodge}(\Lambda) = \mathrm{Inv}(\Lambda, \Lambda_0)$  beaucoup plus simple à calculer en pratique. La preuve du Théorème 3.4.1 consiste simplement à déformer une filtration  $\Lambda_1 \subset \dots \subset \Lambda_e$  de sorte à faire apparaître le bon indice de nilpotence en fibre générique.

**Corollaire 3.4.4.** *Si  $\mathcal{D}$  est une donnée de type Hilbert, alors la décomposition :*

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathrm{PR}} = \coprod_{\lambda \in \mathrm{Adm}_K(\mu)} M_{\lambda}^{\mathrm{PR}}, \quad M_{\lambda}^{\mathrm{PR}} := p^{-1}(M_{\lambda}^{\mathrm{can}})$$

*est une bonne stratification de  $M_{\mathcal{D}}^{\mathrm{PR}}$ .*

On rappelle que si  $\mathcal{D}$  une donnée Hilbert quelconque, i.e.  $I$  et  $J$  ne sont pas réduits à un élément, alors l'ensemble  $\mu$ -admissible de niveau  $K$  est un produit sur  $I$  et  $J$  :

$$\text{Adm}_K(\mu_\bullet) = \prod_{i \in I} \prod_{\varphi: F_i^{\text{nr}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} \text{Adm}_{K_i}(\mu_\bullet^{(i,\varphi)}) \subset \prod_{i \in I} \prod_{\varphi: F_i^{\text{nr}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} (\mathbb{Z}^2)^+$$

On étend la forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de chacune des copies de  $(\mathbb{Z}^2)^+$  en posant :

$$\langle (x_{(i,\varphi)}), (y_{(i,\varphi)}) \rangle = \sum_{i \in I} \sum_{\varphi: F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} \langle x_{(i,\varphi)}, y_{(i,\varphi)} \rangle$$

Avec ces notations pour tous  $\lambda = (\lambda_{(i,\varphi)}) \in \text{Adm}_K(\mu)$  on a :

$$\langle \rho, |\mu_\bullet| + \lambda \rangle = \sum_{i \in I} \sum_{\varphi: F^{\text{nr}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} \langle \rho, |\mu_\bullet^{(i,\varphi)}| + \lambda_{(i,\varphi)} \rangle$$

On peut maintenant énoncer le principal résultat de ce chapitre :

**Théoreme 3.4.5.** *Soit  $\mathcal{D}$  une donnée PEL de type Hilbert. La décomposition :*

$$\text{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k = \prod_{\lambda \in \text{Adm}_K(\mu)} S_\lambda^{\text{PR}}, \quad S_\lambda^{\text{PR}} := \pi^{-1}(S_\lambda^{\text{can}})$$

est une bonne stratification de  $\text{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k$ . Pour tout  $\lambda \in \text{Adm}_K(\mu)$ , la strate  $S_\lambda^{\text{PR}}$  est quasi-projective lisse de dimension :

$$\dim(S_\lambda^{\text{PR}}) = \langle \rho, |\mu_\bullet| + \lambda \rangle$$

*Démonstration.* On peut supposer  $\mathcal{D}$  simple. D'après la proposition 3.4.1 on dispose d'une bonne stratification du produit de convolution

$$\widetilde{\text{Gr}}_{\mu_\bullet} = \bigcup_{\lambda \in \text{Adm}(\mu)_K} m^{-1}(\text{Gr}_\lambda)$$

Puisque le morphisme de convolution  $m : \widetilde{\text{Gr}}_{\mu_\bullet} \rightarrow \text{Gr}_{\leq |\mu_\bullet|}$  est  $L^+G$ -équivariant, cette stratification est stable sous l'action de  $L^+G$ . Autrement dit chacune des strates est une union de  $L^+G$ -orbites. Par conséquent cette stratification descend au quotient en une bonne stratification du champ  $\text{Hecke}_{\mu_\bullet} = [L^+G \backslash \text{Gr}_{\mu_\bullet}]$  :

$$\text{Hecke}_{\mu_\bullet} = \bigcup_{\lambda \in \text{Adm}(\mu)_K} [L^+G \backslash m^{-1}(\text{Gr}_\lambda)]$$

Comme pour le cas 2.3.7 en utilisant que le morphisme

$$\zeta : \text{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes_{\mathcal{O}_K} k \rightarrow [M_{\mathcal{D}}^{\text{PR}} / \mathcal{G}_k] \rightarrow \text{Hecke}_{\mu_\bullet}$$

est lisse, et donc en particulier préserve les relations d'adhérences, on obtient le résultat concernant la stratification. Enfin puisque  $\zeta$  est lisse de dimension relative  $\dim \mathcal{G}$  on a :

$$\begin{aligned}
\dim S_\lambda^{\text{PR}} &= \dim [M_\lambda^{\text{PR}}/\mathcal{G}] + \dim \mathcal{G} \\
&= \dim M_\lambda^{\text{PR}} + \dim \mathcal{G} - \dim \mathcal{G} \\
&= \dim m^{-1}(\text{Gr}_\lambda) \\
&= \dim \text{Gr}_\lambda + \dim m^{-1}(y) \\
&= \langle 2\rho, \lambda \rangle + \langle \rho, |\mu_\bullet| - \lambda \rangle \\
&= \langle \rho, |\mu_\bullet| + \lambda \rangle
\end{aligned}$$

□

**Remarque 3.4.6.** Encore une fois on peut être plus explicite concernant la dimension des strates. Pour  $\lambda = (i, j) \leq (e, 0)$  on a :

$$\begin{aligned}
\dim S_{(i,j)}^{\text{naïf}} &= \langle 2\rho, (i, j) \rangle & \dim S_{(i,j)}^{\text{PR}} &= \langle \rho, (e, 0) + (i, j) \rangle \\
&= e - 2j & &= e - j
\end{aligned}$$

## 3.5 Stratification en orbites

Comme expliqué dans l'introduction de ce chapitre, la stratification (KR) n'est pas la stratification « naturelle » à considérer sur le splitting modèle  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{G}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k$ . La stratification naturelle est celle induite par le morphisme :

$$\mathcal{S}h_{(\mathcal{G}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k \rightarrow [M_{\mathcal{G}}^{\text{PR}}/\mathcal{G}]$$

et par la décomposition en  $\mathcal{G}$ -orbites de  $M_{\mathcal{G}}^{\text{PR}}$ . Nous allons ici expliquer comment calculer ces orbites et leurs relations d'adhérences dans le cas d'une donnée PEL de type (AL).

### 3.5.1 Stratégie

Pour calculer ces orbites nous allons utiliser un raisonnement similaire à [PR00]. On commence par fixer un  $k$ -espace vectoriel  $V$  de dimension  $r$ . Soient  $(r_1, \dots, r_e)$  une partition de  $r$  en  $e$  entiers. On note  $\text{Flag}(r_1, \dots, r_e)$  le schéma dont les  $R$ -points, pour  $R \in \text{Alg}_k$ , classifient les filtrations :

$$0 = V_0 \subset \dots \subset V_e = V_R$$

dont les gradués sont de dimension  $\text{rang}_R(V_i/V_{i-1}) = r_i$ . On considère le faisceau  $\mathcal{N}$  qui à  $R \in \text{Alg}_k$  associe :

$$\mathcal{N}(R) = \{(u, V_\bullet) \in \text{End}_R(V_R) \times \text{Flag}(r_1, \dots, r_e) \mid u \cdot V_i \subset V_{i-1}\}$$

Notons  $\mathcal{N}$  le cone nilpotent de  $\mathrm{GL}(V)$  le morphisme de projection

$$\mathcal{N} \longrightarrow N$$

est appelé *résolution de Springer* du cone nilpotent. Les fibres de ce morphisme sont appelés *fibres de Springer* et jouent un rôle crucial en théorie des représentations (voir [Yun16] pour une introduction au sujet). On considère également le foncteur  $M_{\mathcal{G}}^{\mathrm{PR},\square}$  qui à  $R \in \mathrm{Alg}_k$  associe les couples  $(\mathcal{F}^{(\bullet)}, \varphi)$  où  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \in M_{\mathcal{G}}^{\mathrm{PR}}(R)$  et :

$$\varphi : \mathcal{F}^{(e)} \simeq V_R$$

est une trivialisaton. Le morphisme d'oubli de la trivialisaton :

$$M_{\mathcal{G}}^{\mathrm{PR},\square} \rightarrow M_{\mathcal{G}}^{\mathrm{PR}}$$

est un  $\mathrm{GL}(V)$ -torseur. Par ailleurs on dispose d'un morphisme :

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{G}}^{\mathrm{PR},\square} &\rightarrow \mathcal{N} \\ (\mathcal{F}^{(\bullet)}, \varphi) &\longmapsto (\varphi_*\pi, \varphi(\mathcal{F}^{(\bullet)})) \end{aligned}$$

qui est  $\mathrm{GL}(V)$ -équivariant et lisse d'après [PR00] Théorème 5.4. Ce morphisme est également invariant par l'action groupe  $\mathcal{G}_k$  sur  $M_{\mathcal{G}}^{\mathrm{PR},\square}$  :

$$g \cdot (\mathcal{F}^{(\bullet)}, \varphi) = (g \cdot \mathcal{F}^{(\bullet)}, \varphi \cdot g^{-1})$$

Pour résumé on obtient un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} [M_{\mathcal{G}}^{\mathrm{PR},\square}/\mathcal{G}_k] & \xrightarrow{\psi^{\square}} & \mathcal{N} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [M_{\mathcal{G}}^{\mathrm{PR}}/\mathcal{G}_k] & \xrightarrow{\psi} & [\mathcal{N}/\mathrm{GL}(V)] \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des morphismes lisses et les flèches verticales sont des  $\mathrm{GL}(V)$ -torseurs. Puisque  $\psi$  est lisse, il se comporte bien vis-à-vis des relations d'adhérences. Il reste à vérifier que  $\psi$  permet de calculer les  $\mathcal{G}$ -orbites.

**Proposition 3.5.1.** *Le morphisme  $\psi$  est injectif au niveau des  $k$ -points.*

*Démonstration.* Il suffit de prouver l'assertion pour le morphisme  $\psi^{\square}$ . Soit donc deux éléments  $(\mathcal{F}^{(\bullet)}, \varphi), (\mathcal{F}'^{(\bullet)}, \varphi') \in M_{\mathcal{G}}^{\mathrm{PR},\square}(k)$  qui ont la même image par  $\psi^{\square}$ . Alors  $g = \varphi^{-1} \circ \varphi' \in \mathrm{Isom}_k(\mathcal{F}^{(e)}, \mathcal{F}'^{(e)})$ . De plus  $g$  commute avec  $\pi$  car  $\varphi_*\pi = \varphi'_*\pi$ . Par conséquent  $g$  est en fait un isomorphisme de  $k[\pi]/(\pi^e)$ -modules. Il suffit maintenant de prouver que l'on peut étendre  $g$  en un élément de  $\mathcal{G}$ . Soient  $(a_1, \dots, a_d), (a'_1, \dots, a'_d)$  des entiers et  $(e_1, \dots, e_d), (e'_1, \dots, e'_d)$  deux  $k[\pi]/(\pi^e)$ -base de  $\Lambda \otimes k$  tels que :

$$\mathcal{F}^{(e)} = \bigoplus_{i=1}^d \frac{k[u]}{(u^e)} \cdot \pi^{a_i} e_i, \quad \mathcal{F}'^{(e)} = \bigoplus_{i=1}^d \frac{k[u]}{(u^e)} \cdot \pi^{a'_i} e'_i$$

Soit  $I \subset \{1, \dots, d\}$  (resp  $I'$ ) les indices tels que  $a_i \leq e - 1$  (resp.  $a'_i \leq e - 1$ ). Puisque  $g$  commute avec  $\pi$  on a :

$$g\left(\bigoplus_{i \in I} \frac{k[u]}{(u^e)} \cdot \pi^{a_i} e_i\right) = \bigoplus_{i \in I'} \frac{k[u]}{(u^e)} \cdot \pi^{a'_i} e'_i$$

Quitte à faire une permutation, on peut donc supposer que  $I = I'$ . Notons  $g_1$  (resp  $g_2$ ) la restriction de  $g$  à la somme directe sur les indices  $i \in I$  (resp  $i \notin I$ ). Pour tout  $i \in I$  on fixe un élément  $y_i \in \Lambda \otimes k$  tel que

$$\pi^{a_i} y_i = g(u^{a_i} e_i)$$

On note  $\tilde{g}_1$  et  $\tilde{g}_2$  les morphisme de  $k[u]/(u^e)$ -modules définis par

$$\begin{array}{ccc} \tilde{g}_1 : \bigoplus_{i \in I} \frac{k[u]}{(u^e)} \cdot e_i & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} \frac{k[u]}{(u^e)} \cdot e_i, \\ e_i & \longmapsto & y_i \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \tilde{g}_2 : \bigoplus_{i \notin I} \frac{k[u]}{(u^e)} \cdot e_i & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} \frac{k[u]}{(u^e)} \cdot e_i \\ e_i & \longmapsto & e_i \end{array}$$

Notons  $\tilde{g} = \tilde{g}_1 \oplus \tilde{g}_2$ . Clairement  $\tilde{g}$  coïncide avec  $g$  sur  $\mathcal{F}^{(e)}$ . Il est également clair que  $\tilde{g}_2$  est un isomorphisme, donc si on prouve que  $\tilde{g}_1$  est également un isomorphisme, il en découlera que  $\tilde{g} \in \mathcal{G}$  convient. On peut donc supposer que  $I = \{1, \dots, d\}$ . Il suffit de prouver que  $\tilde{g}$  est injectif. Le point clé est le suivant : pour tout  $x \in \Lambda \otimes k$ , il existe  $N \geq 0$  tel que  $\pi^N x \in \mathcal{F}^{(e)}$  et  $\pi^N x \neq 0$ . Cela découle de l'hypothèse  $I = \{1, \dots, d\}$  (en travaillant avec la base  $(e_1, \dots, e_d)$  par exemple). Mais alors  $\tilde{g}$  est nécessairement injectif et le résultat en découle.  $\square$

Il découle donc de ce qui précède que le morphisme de champs algébriques :

$$\left[ M_{\mathcal{G}}^{\text{PR}} / \mathcal{G}_k \right] \longrightarrow \left[ \mathcal{N} / \text{GL}(V) \right]$$

permet de calculer les  $\mathcal{G}$ -orbites dans  $M_{\mathcal{G}}^{\text{PR}}$  (Proposition précédente) et leurs relations d'adhérences (le morphisme est lisse et donc en particulier ouvert).

### 3.5.2 Orbites dans la résolution de Springer

Pour calculer les orbites dans  $\mathcal{N}$ , on peut regarder les projections suivantes :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{N} & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ \text{Flag}(r_1, \dots, r_e) & & N \end{array}$$

où  $N$  désigne le cône nilpotent. On peut alors

1. Calculer les fibres de  $q$  au dessus de chaque  $\text{GL}(V)$ -orbite dans  $N$ . Cela revient à fixer un  $x_\lambda$  dans chaque orbite  $N_\lambda \subset N$  et voir quelles sont les (classes d'isomorphismes) de filtrations  $V_\bullet$  compatibles avec  $x_\lambda$ .

2. Calculer les fibres de  $p$  au dessus de chaque  $\mathrm{GL}(V)$ -orbite dans  $\mathrm{Flag}(r_1, \dots, r_e)$ .  
Puisqu'il y a une seule orbite dans  $\mathrm{Flag}(r_1, \dots, r_e)$ , cela revient à fixer une filtration  $V_\bullet$  et voir quels sont les (classes d'isomorphismes) de  $x \in N$  compatibles avec  $V_\bullet$ .

Nous allons adopter la deuxième stratégie. Soit donc  $V_\bullet \in \mathrm{Flag}(r_1, \dots, r_e)$  une filtration. On note  $G = \mathrm{GL}(V)$ , et  $P \subset G$  le sous-groupe parabolique induit par cette filtration. Par définition la fibre de  $p$  au dessus de  $V_\bullet$  est :

$$p^{-1}(V_\bullet) \simeq \mathrm{Lie}(P_u)$$

où  $P_u$  désigne le radical unipotent de  $P$ , et le sous-groupe qui agit sur cette fibre est  $P$ . Par conséquent on dispose d'une bijection (au niveau des  $k$ -points) :

$$\mathcal{N}/G \simeq \mathrm{Lie}(P_u)/P$$

**Remarque 3.5.2.** Pour faire le lien avec le modèle local  $M_{\mathcal{F}}^{\mathrm{PR}}$ , notons  $M_{\mathcal{F}}^{\mathrm{PR}, \square\square}$  le foncteur qui paramétrise les couples  $(\mathcal{F}^{(\bullet)}, \varphi)$  où  $\mathcal{F}^{(\bullet)} \in M_{\mathcal{F}}^{\mathrm{PR}}$  et  $\psi : \mathcal{F}^{(\bullet)} \simeq V_\bullet$  est une trivialisatation de la filtration. Le morphisme d'oubli de la trivialisatation :

$$M_{\mathcal{F}}^{\mathrm{PR}, \square\square} \longrightarrow M_{\mathcal{F}}^{\mathrm{PR}}$$

est un  $P$ -torseur et le carré suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} M_{\mathcal{F}}^{\mathrm{PR}, \square\square} & \longrightarrow & \mathrm{Lie}(P_u) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_{\mathcal{F}}^{\mathrm{PR}} & \longrightarrow & [\mathrm{Lie}(P_u)/P] \end{array}$$

où la flèche horizontale du haut envoie un couple  $(\mathcal{F}^{(\bullet)}, \varphi)$  sur l'élément  $\varphi_* u \in \mathrm{Lie}(P_u)$ .

L'étude du quotient  $\mathrm{Lie}(P_u)/P$  est un vaste problème qui devient rapidement compliqué lorsque la dimension de  $V$  augmente. Dans le cas  $G = \mathrm{GL}(V)$  par exemple on a le théorème suivant :

**Théoreme 3.5.3** ([HR97] Théorème 1.2). *Soit  $k$  un corps infini,  $V$  un  $k$  espace vectoriel et  $P \subset \mathrm{GL}(V)$  un sous groupe parabolique. Alors le nombre de  $P$ -orbites dans  $\mathrm{Lie}(P_u)$  est fini si et seulement si  $\ell(P_u) \leq 4$ .*

Ci-dessus  $\ell(P_u)$  désigne la classe de nilpotence de  $P_u$ . En particulier dans le cas où  $P = B$  est un sous-groupe de Borel, le nombre d'orbites est infini lorsque  $\dim(V) \geq 6$ .

**Remarque 3.5.4.** Même si le nombre de  $P$ -orbites dans  $\mathrm{Lie}(P_u)$  est infini, il est possible que le nombre de  $\mathcal{G}$ -orbites dans  $M_{\mathcal{F}}^{\mathrm{PR}}$  soit fini dans certains cas de petites dimension. En effet l'image du morphisme

$$M_{\mathcal{F}}^{\mathrm{PR}, \square\square} \longrightarrow \mathrm{Lie}(P_u)$$

est stricte en générale. Il est donc possible que le nombre de  $P$ -orbites dans cette image soit fini, bien que le nombre de  $P$ -orbites dans  $\mathrm{Lie}(P_u)$  soit infini.



### 3.5.3 Exemples

Nous allons donner des exemples de calculs d'orbites dans le cas Hilbert pour des indices de ramifications  $e \leq 4$ . Tout ce qui suit est largement inspiré des travaux [BV17].

On s'intéresse au groupe  $G = \mathrm{GL}_e$  et  $B$ -orbites dans  $\mathrm{Lie}(B_u)$ . Notez que les orbites qui nous intéressent sont celles contenues dans le sous-ensemble :

$$\{x \in \mathrm{Lie}(B_u) \mid \dim(\mathrm{Ker}(x)) = 1 \text{ ou } 2\} \quad (3.5.1)$$

Fixons quelques notations. On peut supposer que  $B$  est sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. On note  $E_{ij} \in \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_e)$  la matrice avec que des 0 et un 1 en coordonnée  $(i, j)$ . On a une décomposition du radical nilpotent :

$$\mathrm{Lie}(B_u) = \bigoplus_{i < j} E_{i,j} \cdot k$$

Cela nous fournit une identification :

$$\mathrm{Lie}(B_u) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n(k)$$

où  $n = e(e-1)/2$ . On notera  $x_{ij}$  les coordonnées sur  $\mathbb{A}^n$ . Travailler avec  $\mathbb{A}^n$  nous permettra de lire plus facilement les relations d'adhérences entre orbites. Dans tout ce qui suit si  $x \in k[x_{ij}]_{i < j}$  on notera  $V(x)$  (resp.  $D(x)$ ) le fermé (resp. l'ouvert) défini par  $x$ .

#### Invariants de $M_{\mathcal{D}}^{\mathrm{PR}}$

Sur  $M_{\mathcal{D}}^{\mathrm{PR}}$  on dispose de plusieurs invariants : le polygone de Hodge 3.3.3 et les invariants de Hasse partiels 4.2.3.2. Dans la situation que l'on considère ici, les invariants de Hasse partiels  $m^{(2)}, \dots, m^{(e)}$  sont donnés par les applications « multiplication par  $\pi$  » au niveau des gradués :

$$m^{(i)} : \mathcal{F}^{(i)} / \mathcal{F}^{(i-1)} \xrightarrow{-\pi} \mathcal{F}^{(i-1)} / \mathcal{F}^{(i-2)} \quad (3.5.2)$$

(voir la section 4.2.3.2 pour plus de détails). Il est simple de calculer ces invariants sur  $\mathrm{Lie}(B_u)$ . En effet si  $x \in \mathrm{Lie}(B_u)$  est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{12} & \cdots & x_{1e} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & x_{e(e-1)} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Alors les invariants  $m^{(2)}, \dots, m^{(e)}$  sont donnés respectivement par  $x_{12}, \dots, x_{e(e-1)}$  et le polygone de Hodge est donné par le tableau de Young associé à cette matrice.

**Cas  $e = 2$**

On s'intéresse au groupe  $\mathrm{GL}_2$ . Nous allons particulièrement détailler cet exemple pour que les exemples suivant, plus lourds en notations, soient tout aussi compréhensibles. Dans ce cas les matrices  $x \in \mathrm{Lie}(B_u)$  sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est simple de voir qu'il y a deux orbites :

$$\mathbb{A}^1 = V(x_{12}) \sqcup D(x_{12})$$

où  $V(x_{12})$  est l'orbite de 0 et  $D(x_{12})$  est l'orbite de n'importe quelle matrice telle que  $x_{12} \neq 0$  (la matrice  $E_{12}$  par exemple). On représente les relations d'adhérence par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{c} \mathcal{O}(E_{12}) \\ \uparrow \\ \mathcal{O}(0) \end{array}$$

Dans ce diagramme  $\mathcal{O}(0)$  désigne l'orbite de 0,  $\mathcal{O}(E_{12})$  désigne l'orbite de  $E_{12}$ , i.e. l'orbite où  $x_{12}$  est non nul. La flèche  $A \rightarrow B$  veut dire que l'orbite  $A$  est contenu dans l'adhérence de l'orbite  $B$ . Dans le cas  $e = 2$  la condition (3.5.1) est triviale. Par conséquent les  $\mathcal{G}$ -orbites dans  $M_{\mathcal{G}}^{\mathrm{PR}}$  sont bien listées ci-dessus. On continue de noter  $\mathcal{O}(E_{12})$  et  $\mathcal{O}(0)$  les orbites correspondantes dans  $M_{\mathcal{G}}^{\mathrm{PR}}$ . On donne ci-dessus un représentant dans chacune de ces orbites :

$$\left[ 0 \subset \langle ue_2 \rangle \subset \langle ue_1, ue_2 \rangle \subset \Lambda \otimes k \right] \in \mathcal{O}(0)$$

$$\left[ 0 \subset \langle ue_2 \rangle \subset \langle e_2 \rangle \subset \Lambda \otimes k \right] \in \mathcal{O}(E_{12})$$

où la notation  $\langle \rangle$  veut dire « engendré en tant que  $k[u]/(u^2)$ -module ». Dans ce cas on a :

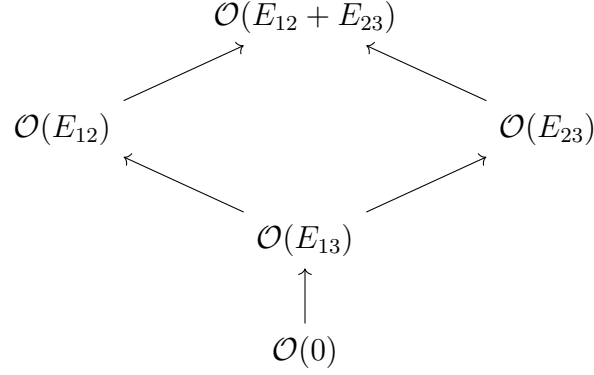
$$\mathrm{Hodge}(\mathcal{O}(E_{12})) = (2, 0), \quad \mathrm{Hodge}(\mathcal{O}(0)) = (1, 1)$$

Par conséquent le polygone de Hodge détermine complètement la stratification en orbites de  $M_{\mathcal{G}}^{\mathrm{PR}}$ . Notez que l'invariant de Hasse partiel  $m^{(2)}$  est également complètement déterminé par le polygone de Hodge dans ce cas.

**Remarque 3.5.5.** Ici on suit les notations de [BV17] pour désigner les orbites. On fera attention au fait que ces notations n'utilisent pas des conditions fermées comme cela est fait généralement dans le cadre de stratification.

**Cas  $e = 3$**

On se place maintenant dans le cas du groupe  $GL_3$ . Dans ce cas le diagramme représentant les  $B$ -orbites dans  $\text{Lie}(B_u)$  et leur relations d'adhérences est le suivant :



Ci-dessus la notation  $\mathcal{O}(E_{12} + E_{23})$  désigne l'orbite de  $E_{12} + E_{23}$ , i.e. l'orbite où  $x_{12}$  et  $x_{23}$  sont non nuls. Pour une preuve de ce résultat voir [BV17]. Notez que l'orbite  $\mathcal{O}(0)$  ne satisfait pas la condition (3.5.1). Par conséquent il n'y a que 4 orbites dans  $M_{\mathcal{G}}^{\text{PR}}$ . Le tableau suivant donne la valeur des différents invariants sur chacune de ces orbites :

	$\mathcal{O}(E_{12} + E_{23})$	$\mathcal{O}(E_{12})$	$\mathcal{O}(E_{23})$	$\mathcal{O}(E_{13})$
Hodge	(3, 0)	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)
$m^{(3)}$	1	0	1	0
$m^{(2)}$	1	1	0	0

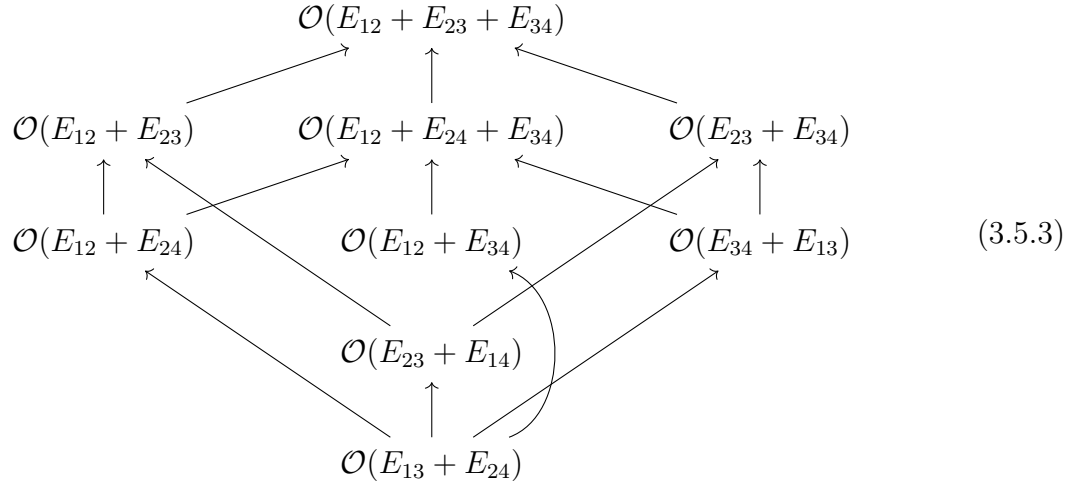
On voit donc ici que le polygone de Hodge ne permet pas de déterminer les orbites dans  $M_{\mathcal{G}}^{\text{PR}}$ . Par conséquent la stratification en  $\mathcal{G}$ -orbite de  $M_{\mathcal{G}}^{\text{PR}}$  est plus fine que la stratification de Hodge.

**Remarque 3.5.6.** Dans le cas  $e = 3$  on trouve donc que les invariants de Hasse partiels  $m^{(2)}, m^{(3)}$  et le polygone de Hodge déterminent entièrement la classe d'isomorphisme de la filtration de Pappas-Rapoport (en fait dans le cas Hilbert les invariants de Hasse partiels déterminent également le polygone de Hodge comme on peut le voir dans le tableau ci-dessus). On retrouve donc un cas particulier de [Bij22].

**Cas  $e = 4$**

On se place maintenant dans le cas du groupe  $GL_4$ . On peut montrer qu'il y a 16  $B$ -orbites dans  $\text{Lie}(B_u)$  (voir [BV17]). Le diagramme suivant représente les  $B$ -orbites dans

$\text{Lie}(B_u)$  satisfaisant la condition (3.5.1), et leurs relations d'adhérences :



Il y a donc 9 orbites dans  $M_{\mathcal{O}}^{\text{PR}}$ . Le tableau suivant donne la valeur des différents invariants sur chacune de ces orbites :

	Hodge	$m^{(2)}$	$m^{(3)}$	$m^{(4)}$
$\mathcal{O}(E_{12} + E_{23} + E_{34})$	(4, 0)	1	1	1
$\mathcal{O}(E_{12} + E_{24} + E_{34})$	(3, 1)	1	0	1
$\mathcal{O}(E_{12} + E_{23})$	(3, 1)	1	1	0
$\mathcal{O}(E_{23} + E_{34})$	(3, 1)	0	1	1
$\mathcal{O}(E_{12} + E_{34})$	(2, 2)	1	0	1
$\mathcal{O}(E_{12} + E_{24})$	(3, 1)	1	0	0
$\mathcal{O}(E_{23} + E_{14})$	(2, 2)	0	1	0
$\mathcal{O}(E_{34} + E_{13})$	(3, 1)	0	0	1
$\mathcal{O}(E_{13} + E_{24})$	(2, 2)	0	0	0

**Remarque 3.5.7.** Les relations d'adhérences décrites par le diagramme ci-dessus ont déjà été obtenu dans [Ber23] de façon différente (voir section 7.3.1). Cependant, le fait que la liste des strates soit exhaustive, i.e. correspond bien aux  $\mathcal{G}$ -orbites, est un résultat nouveau nouveau.

Lorsque le nombre d'orbite est fini, on notera  $\mathcal{A}(\mu_\bullet)$  l'ensemble (partiellement ordonné) de ces orbites. La stratification KR de la fibre spéciale  $\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\text{PR}} \otimes k$  est la stratification induite par cette décomposition en orbites :

$$\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\text{PR}} \otimes_{\mathcal{O}_K} k = \coprod_{w \in \mathcal{A}(\mu_\bullet)} M_w \tag{3.5.4}$$

C'est une bonne stratification et les calculs précédent décrivent complètement les relations d'adhérences entre strates.

**Remarque 3.5.8.** Le lecteur intéressé par le cas  $e = 5$  pourra trouver la liste des  $B$ -orbites dans  $\text{Lie}(B_u)$  dans [BV17]. Pour obtenir les  $\mathcal{G}$ -orbites dans  $M_{\mathcal{G}}^{\text{PR}}$ , il suffit de voir quelles orbites satisfont la condition (3.5.1). Il serait intéressant de voir dans le cas  $e = 6$ , qui est le premier cas où le nombre de  $B$ -orbites dans  $\text{Lie}(B_u)$  est infini, si le nombre de  $\mathcal{G}$ -orbites est toujours fini.

# Chapitre 4

## Stratification d'Ekedahl-Oort

Ce chapitre est consacré aux stratification d'Ekedahl-Oort (EO) des fibres spéciales des modèles entiers de Pappas-Rapoport des variétés de Shimura. Les stratifications EO des variété de Shimura est un vaste sujet dont l'origine remonte aux travaux de Oort [Oor01]. Dans son article, Oort définit une stratification de la fibre spéciale des variété de Siegel en classifiant les classes d'isomorphismes des sous-groupes de  $p$ -torsion des variétés abéliennes. Ces travaux ont été généralisés aux variétés de Shimura de type abélien de bonne réduction (ce qui inclus les variétés de Shimura de type PEL non ramifié), voir [Zha18],[SZ21]. Lorsque la donnée PEL est non ramifiée, la stratification EO de la fibre spéciale est très bien comprise et a eu de nombreuses applications (voir [GK15] par exemple). La situation est plus complexe dans le cas d'une donnée PEL ramifiée. La première section de ce chapitre donne un aperçu des différents travaux sur les stratification la fibre spéciale du modèle naif dans le cas ramifié ([SYZ21],[AG03],[YCO20]). Avant l'article [SZ22], il n'y avait pas encore de définition de stratification EO lorsque la donnée PEL est ramifiée. Dans cet article Xu Shen et Yuqiang Zheng définissent un groupe réductif  $\mathcal{G}^{\text{split}}$  sur  $\mathcal{O}_K$  et un morphisme de champs algébriques :

$$\mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes_{\mathcal{O}_K} k \longrightarrow \mathcal{G}_k^{\text{split}}\text{-Zip}$$

où  $\mathcal{G}_k^{\text{split}}\text{-Zip}$  est le champ des  $F$ -zip avec  $\mathcal{G}_k^{\text{split}}$ -structure comme définit dans [PWZ12],[VW13]. Les auteurs montrent que ce morphisme est lisse, induisant donc une bonne stratification qu'ils appellent stratification EO de la fibre spéciale des modèles de Pappas-Rapoport. Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à l'interaction entre les stratifications de la fibre spéciale des modèles de Pappas-Rapoport induites par les deux morphismes :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{S}h_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \mathcal{G}_k^{\text{split}}\text{-Zip} & & [M_{\mathcal{O}}^{\text{PR}}/\mathcal{G}_k] \end{array}$$

Nous allons montrer que dans le cas Hilbert pour un indice de ramification  $e \leq 4$  l'intersection de ces deux stratification est également une bonne stratification.

## 4.1 Problèmes et stratégies

### 4.1.1 Le cas non ramifié

On se place ici dans le cas d'une donnée  $\mathcal{D}$  non ramifiée. Dans ce cas la variété de Shimura associée est de bonne réduction et les modèles  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}}$ ,  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}}$ ,  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{can}}$  coïncident. Nous allons rappeler la définition de la stratification EO de la fibre spéciale  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes k$ . Il y a deux interprétations de cette stratification :

- Deux points  $x, y \in |\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes k|$  sont dans la même strate EO si et seulement si il existe un isomorphisme  $A_x[p] \simeq A_y[p]$  (compatible avec la  $\mathcal{D}$ -structure). On peut montrer qu'il existe un nombre fini de classes d'isomorphismes (et donc un nombre fini de strates).
- Il existe un champ algébrique  $\mathcal{G}_\kappa\text{-Zip}^\mu$ , et un morphisme lisse :

$$\zeta : \mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes k \longrightarrow \mathcal{G}_\kappa\text{-Zip}^\mu$$

L'espace topologique sous-jacent  $|\mathcal{G}_\kappa\text{-Zip}^\mu|$  est un espace  $T_0$  avec un nombre fini de point. On définit alors la stratification EO comme le tiré en arrière de la stratification naturelle de  $|\mathcal{G}_\kappa\text{-Zip}^\mu|$ .

Le lien entre les deux définitions est fait par la théorie de Dieudonné comme suit. Soit  $x \in |\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes k|$  et  $A$  la variété abélienne associée. On note  $M(A[p]) = (M, F, V)$  le module de Dieudonné de  $A[p]$ . Il y a deux filtrations :

$$0 \subset \text{Ker}(F) \subset M, \quad 0 \subset \text{Ker}(V) \subset M$$

qui satisfont  $\text{Ker}(F) = \text{Im}(V)$  et  $\text{Ker}(V) = \text{Im}(F)$ . On obtient en particulier deux isomorphismes :

$$\varphi_0 : (M/\text{Ker}(F))^{(p)} \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(V), \quad \varphi_1 : (\text{Ker}(F))^{(p)} \xrightarrow{\sim} (M/\text{Ker}(F))$$

On peut montrer que la donnée  $(M, \text{Ker}(F), \text{Ker}(V), \varphi_0, \varphi_1)$  (avec sa  $\mathcal{D}$ -structure) permet de retrouver  $(M, F, V)$  (avec sa  $\mathcal{D}$ -structure). Le champ  $\mathcal{G}_\kappa\text{-Zip}^\mu$  est précisément le champ qui classe (à isomorphisme près) ces données. L'indice  $\mathcal{G}_\kappa$  est là pour indiquer que ces objets sont munis d'une  $\mathcal{D}$ -structure. Puisque le foncteur  $A[p] \mapsto M(A[p])$  induit par la théorie de Dieudonné est une équivalence de catégorie, il en découle que les deux définitions de la stratification EO ci-dessus coïncident

### 4.1.2 Le cas ramifié

On se place maintenant dans le cas d'une donnée  $\mathcal{D}$  ramifiée. Pour plusieurs raisons arithmétiques, il est préférable de travailler avec  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}}$  (resp.  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{can}}$ ) qui est lisse (resp. plat) .

### 4.1.2.1 Stratification EO

Lorsque l'on tente de définir une stratification EO de  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k$  on rencontre les problèmes suivants :

- En présence de ramification le nombre de classes d'isomorphismes de groupe  $A[p]$  (avec  $\mathcal{D}$ -structure) peut être infini (voir l'appendice de [AG03]).
- En présence de ramification le groupe  $\mathcal{G}_k$  n'est pas réductif et le champ  $\mathcal{G}_k\text{-Zip}^\mu$  ne se comporte pas bien.

On rencontre exactement les mêmes problèmes avec  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{can}}$ <sup>1</sup>. Il y a alors deux stratégies pour tenter de contourner ces problèmes :

- Même si le nombre de classes d'isomorphismes est infini, peut-être qu'il est possible de « regrouper » certaines classes d'isomorphismes ensemble pour définir une stratification avec un nombre fini de strates. Il faut alors trouver une « bonne » manière de regrouper ces classes d'isomorphismes.
- Trouver le bon analogue du champ  $\mathcal{G}_k\text{-Zip}^\mu$ , adapter au modèles de Pappas-Rapoport.

La deuxième approche a été suivie par Xu Shen et Yuqiang Zheng dans [SZ22] et leur a permis de définir une stratification EO de la fibre spéciale  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k$  qui bénéficie de toutes les propriétés géométriques attendues. Nous reviendrons sur leurs travaux dans la section 4.3.

Concernant la première approche, il est déjà difficile de faire fonctionner cette idée dans le cas le plus simple d'une donnée Hilbert d'indice de ramification  $e = 2$ . Pour le moment je n'ai pas trouvé de façon intelligente de regrouper les classes d'isomorphismes. Cependant, dans [How20] l'auteur parvient à rassembler les classes d'isomorphismes dans le cas de courbes de Shimura, par l'intermédiaire de l'application de Hodge-Tate définie par Scholze-Weinstein.

### 4.1.2.2 Autres stratifications

Dans le cas ramifié, plusieurs stratification des fibres spéciales des modèles  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}}$  et  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{can}}$  ont été définie (la stratification KR par exemple). On distingue de type de stratification : celles faisant intervenir des données d'algèbre linéaire et celles faisant intervenir des données d'algèbres  $\text{Frob}_\kappa$ -linéaire, où  $\text{Frob}_\kappa$  désigne le Frobenius de  $\kappa$ . La stratification KR et la stratification de Hodge font intervenir des données d'algèbres linéaires via le modèle local  $\mathbb{M}_{\mathcal{D}}^{\text{naïf}}$ . Les stratifications EO et de Newton par exemple font intervenir des données d'algèbres  $\text{Frob}_\kappa$ -linéaire via la théorie de Dieudonné. Dans le

<sup>1</sup>même si  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{can}}$  n'a pas d'interprétation modulaire, on peut tenter de définir une stratification EO comme cela a été fait dans le cas des variétés de Shimura de type abélien.



chapitre précédent nous nous sommes intéressé à des stratification de  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}}$ ,  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{can}}$ ,  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naif}}$  provenant de leurs modèles locaux respectifs. Il est naturel de se demander si il existe des stratification faisant intervenir des données  $\text{Frob}_\kappa$ -linéaires dans le cas d'une donnée  $\mathcal{D}$  qui est ramifiée. Voici quelques exemples de stratifications définies dans le cas ramifié.

1. Dans [SYZ21] les auteurs définissent un raffinement de la stratification KR appelé stratification EKOR. Pour chaque strate  $S_\lambda \subset \mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{can}} \otimes \kappa$  ils définissent un morphisme lisse :

$$\zeta_\lambda : S_\lambda \longrightarrow \mathcal{G}_0^{\text{rdt}}\text{-Zip}^{J_\lambda}$$

où  $\mathcal{G}_0^{\text{rdt}}$  désigne le quotient réductif de  $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p$  et  $\mathcal{G}_0^{\text{rdt}}\text{-Zip}^\lambda$  désigne le champ des  $\mathcal{G}_0^{\text{rdt}}\text{-Zip}$  de type  $J_\lambda$  (voir [SYZ21] Définition 1.1.5 et Proposition 4.2.6). La stratification est alors définie comme étant celle induite par celle du champ  $\mathcal{G}_0^{\text{rdt}}\text{-Zip}^{J_\lambda}$  via le morphisme  $\zeta_\lambda$ . Leur construction est beaucoup plus générale et s'applique aux variétés de Shimura de type abélien sans hypothèse sur le niveau en  $p$

2. Dans [AG03] les auteurs calculs explicitement dans le cas Hilbert les polygones de Newton sur chacune des strates KR. Plus précisément en suivant les notations de [AG03], pour tout  $\lambda = (i, j) \in \text{Adm}_K(\mu)$  et tout  $x \in S_{(i, j)}$  il existe une  $(\mathcal{O}_F \otimes W(k))$ - base du module de Dieudonné (ici  $k$  désigne n'importe quel corps algébriquement clos de caractéristique  $p$ ) associé dans laquelle le Frobenius est donné par la matrice ([AG03], Proposition 4.10) :

$$F = \begin{pmatrix} \pi^m & c\pi^i \\ \pi^j & 0 \end{pmatrix}$$

où  $m \geq j$  et  $c \in (\mathcal{O}_F \otimes W(k))^\times$ . Ils définissent ensuite les quantités :

$$n = \begin{cases} m & \text{si } m \leq i \\ i & \text{sinon} \end{cases} \quad \lambda(n) = \min \left\{ \frac{n}{g}, \frac{1}{2} \right\}$$

La stratification de  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naif}} \otimes \kappa$  est alors définie via cet invariant  $n$  :

$$\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naif}} \otimes \kappa = \coprod_{\substack{i+j=e \\ i \leq n \leq j}} S_{(i, j)}^{(n)}$$

Cet invariant leur permet de calculer explicitement le polygone de Newton sur chacune des strates  $S_{(i, j)}^{(n)}$ . Plus précisément si  $x \in S_{(i, j)}^{(n)}$  alors ([AG03], Théorème 9.2) :

$$\text{Newt}(x) = \{\lambda(n), \dots, \lambda(n), 1 - \lambda(n), \dots, 1 - \lambda(n)\}$$

(chacune des pentes avec multiplicité  $e$ ).

3. Toujours dans le cas Hilbert dans [YCO20] les auteurs associent à tout point  $x \in \mathcal{Sh}_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes \kappa$  un invariant  $c(x) = (c_\tau(x))_{\tau \in \Sigma^{\text{nr}}}$ , où  $\Sigma^{\text{nr}} = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F, \overline{\mathbb{Q}_p})$ , appelé invariant de congruence qui mesure la position relative des filtrations (voir la [YCO20] Définition 5.2 pour être plus précis) :

$$F(M_{\sigma^{-1}\tau}) \subset M_\tau, \quad V(M_{\sigma\tau}) \subset M_\tau$$

où  $(M, F, V)$  désigne le module de Dieudonné associé à  $x$  et où les  $(M_\tau)_{\tau \in \Sigma^{\text{nr}}}$  désignent les facteurs directs dans la décomposition

$$M \simeq \bigoplus_{\tau \in \Sigma^{\text{nr}}} M_\tau, \quad F : M_{\sigma^{-1}\tau} \rightarrow M_\tau, \quad V : M_{\sigma\tau} \rightarrow M_\tau$$

L'invariant  $c(x) = (c_\tau(x))_{\tau \in \Sigma^{\text{nr}}}$  permet de définir une stratification qui permet de raffiner la stratification KR ([YCO20] Définition 6.1) :

$$\mathcal{Sh}_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{naïf}} \otimes \kappa = \prod_{\lambda \in \text{Adm}_K(\mu)} S_\lambda, \quad S_\lambda = \prod_{c \in \tau_L} \mathcal{Q}_c(S_\lambda)$$

où  $\mathcal{Q}_c(S_\lambda)$  désigne l'ensemble des points d'invariant de congruence  $c \in \tau_L$  et  $\tau_L$  est un certain ensemble défini dans [YCO20] Définition 3.2.1.

Chacune de ces stratification est un raffinement de la stratification KR. On peut espérer qu'un tel processus soit possible pour les modèles de Pappas-Rapoport  $\mathcal{Sh}_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{PR}}$ . La stratification a raffiner devrait alors être la stratification KR, c'est-à-dire celle induite par le modèle local  $\mathbb{M}_{\mathcal{O}}^{\text{PR}}$ , car comme nous l'avons la stratification de Hodge, c'est-à-dire celle induite par le modèle local  $\mathbb{M}_{\mathcal{O}}^{\text{naïf}}$ , n'est pas une bonne stratification. Dans la section 4.4 on présente un analogue de la stratification EKOR pour  $\mathcal{Sh}_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{PR}}$  dans le cas Hilbert  $e \leq 4$ .

## 4.2 Rappels de théorie de Dieudonné

Cette section est composée essentiellement de rappels sur la théorie de Dieudonné cristalline. Nous présentons tous les outils nécessaires pour pouvoir déformer un groupe  $p$ -divisible le long d'un morphisme  $k[[t]] \rightarrow k$  où  $k$  est un corps de caractéristique  $p$ . Nous aurons besoin de la théorie de Dieudonné cristalline [BBM82], de la théorie des display de Zink et Lau [Zin02], [Lau09], [Lau14] et de Grothendieck-Messing [Mes72]. En fait, nous pourrions nous contenter de la théorie des display car elle englobe les anneaux locaux complet de corps résiduels parfait comme  $k^{\text{perf}}[[t]]$  (où  $k^{\text{perf}}$  désigne la perfection de  $k$ ), ce qui nous suffit amplement pour nos problèmes de déformations.

### 4.2.1 Théorie de Dieudonné cristalline

#### 4.2.1.1 Cristal de Dieudonné

Soit  $k$  un corps parfait de caractéristique  $p$  et  $S$  un schéma sur  $k$ . Soit  $A \rightarrow S$  un schéma abélien. On note  $G = A[p^\infty]$  le groupe  $p$ -divisible associé. On note  $\Sigma = \text{Spec}(W(k))$ ,

et  $\underline{G}$  le faisceau sur le site cristallin  $\text{Cris}(S/\Sigma)$  induit par  $G$ . En suivant les notations de [BBM82] on note :

$$\mathcal{E}(G) := \mathcal{E}\text{xt}_{S/\Sigma}^1(\underline{G}, \mathcal{O}_{S/\Sigma})$$

le cristal de Dieudonné contravariant de  $G$ . C'est un  $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ -cristal localement libre de rang  $h$  où  $h$  désigne la hauteur de  $G$  ([BBM82], Corollaire 1.4.7). Notez qu'avec cette convention, les applications :

$$F : \mathcal{E}(G)^{(p)} \rightarrow \mathcal{E}(G), \quad V : \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{E}(G)^{(p)}$$

(où  $(\cdot)^{(p)}$  désigne le twist par le Frobenius) sont induites respectivement par :

$$F : G \rightarrow G^{(p)}, \quad V : G^{(p)} \rightarrow G$$

Si l'on évalue ce cristal sur l'épaississement  $(S \xrightarrow{\text{id}} S)$  on obtient une filtration de  $\mathcal{O}_S$ -modules localement libres ([BBM82], Corollaire 3.3.5)

$$0 \longrightarrow \omega_G \longrightarrow \mathcal{E}(G)_{(S \xrightarrow{\text{id}} S)} \longrightarrow \omega_{G^D}^\vee \longrightarrow 0 \quad (4.2.1)$$

appelée filtration de Hodge. D'après [BBM82] Proposition 3.3.7 on dispose d'un isomorphisme

$$\mathcal{E}\text{xt}_{S/\Sigma}^1(\underline{A}, \mathcal{O}_{S/\Sigma}) \simeq \mathcal{E}\text{xt}_{S/\Sigma}^1(\underline{G}, \mathcal{O}_{S/\Sigma})$$

reliant le cristal de  $A/S$  et celui de son groupe  $p$ -divisible, compatible aux filtrations de Hodge respectives. En combinant maintenant avec l'isomorphisme ([BBM82], Proposition 2.5.8) :

$$\mathcal{E}\text{xt}_{S/\Sigma}^1(\underline{A}, \mathcal{O}_{S/\Sigma})_{(S \rightarrow S)} \simeq H_{\text{dR}}^1(A/S)$$

on retrouve la filtration de Hodge induit par la suite spectrale de Hodge bien connue :

$$0 \longrightarrow \omega_A \longrightarrow H_{\text{dR}}^1(A/S) \longrightarrow \omega_{A^t}^\vee \longrightarrow 0$$

Toujours d'après [BBM82] (Proposition 4.3.10) on dispose d'un isomorphisme :

$$\omega_G^{(p)} \simeq \mathcal{E}(G)_{(S \rightarrow S)} / F(\mathcal{E}(G)_{(S \rightarrow S)})$$

Les morphismes  $F$  et  $V$  de  $G$  induisent un diagramme commutatif aux lignes horizontales exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \omega_G & \longrightarrow & \mathcal{E}(G)_{(S \rightarrow S)} & \longrightarrow & \omega_{G^D}^\vee \longrightarrow 0 \\ & & V \downarrow & & V \downarrow & & V \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \omega_G^{(p)} & \longrightarrow & \mathcal{E}(G)_{(S \rightarrow S)}^{(p)} & \longrightarrow & (\omega_{G^D}^\vee)^{(p)} \longrightarrow 0 \\ & & F \downarrow & & F \downarrow & & F \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \omega_G & \longrightarrow & \mathcal{E}(G)_{(S \rightarrow S)} & \longrightarrow & \omega_{G^D}^\vee \longrightarrow 0 \end{array}$$

Les composées verticales sont nulles car égales à  $p$ . Puisque  $F$  est nul sur  $\omega_G^{(p)}$  le morphisme  $F$  se factorise en :

$$F : (\omega_{GD}^\vee)^{(p)} \longrightarrow \mathcal{E}(G)_{(S \rightarrow S)}$$

De même  $V$  est nul sur  $\omega_{GD}^\vee$  (utiliser que  $V_G = F_{GD}^D$ ) donc on obtient une factorisation :

$$V : \mathcal{E}(G)_{(S \rightarrow S)} \rightarrow \omega_G^{(p)} \quad (4.2.2)$$

Nous aurons besoin de cette factorisation pour définir l'invariant de Hasse primitif dans la section 4.2.3.2.

#### 4.2.1.2 Module de Dieudonné

Plaçons nous maintenant dans le cas où  $S = \text{Spec}(k)$  est le spectre d'un corps  $k$  parfait de caractéristique  $p$ . On note :

$$\mathbb{D}(G) := \text{Hom}_S(G, CW)$$

le module de Dieudonné contravariant au sens de Fontaine ([Fon77] ou [BBM82] Section 4.2). En évaluant notre cristal le long de l'épaississement  $(W(k) \rightarrow k)$  on obtient un isomorphisme de  $W(k)$  module compatible avec  $F$  et  $V$  des deux cotés :

$$\mathcal{E}(G)_{(W(k) \rightarrow k)} \simeq \mathbb{D}(G)^{(p)}$$

(voir [BBM82] Théorème 4.2.14). La réduction modulo  $p$  de cet isomorphisme permet l'identification de la  $p$ -torsion :

$$\mathcal{E}\text{xt}_{S/\Sigma}^1(G[p], \mathcal{O}_{S/\Sigma}) \simeq \mathbb{D}(G[p])^{(p)} \simeq (\mathbb{D}(G)/p\mathbb{D}(G))^{(p)}$$

où  $\mathcal{E}\text{xt}_{S/\Sigma}^1(G[p], \mathcal{O}_{S/\Sigma})$  est le cristal associé au groupe fini plat de  $p$ -torsion  $G[p]$ . Par définition  $\mathcal{E}(G)$  étant un cristal, il commute aux changements de bases et par conséquent la réduction modulo  $p$  ci dessus redonne l'identification bien connue entre le module de Dieudonné de la  $p$ -torsion et le premier groupe de cohomologie de De Rham :

$$\mathcal{E}(G)_{(W(k) \rightarrow k)} \otimes_{W(k)} k \simeq \mathcal{E}(G)_{(k \rightarrow k)} \simeq H_{\text{dR}}^1(A/k)$$

#### 4.2.1.3 Structure d'endomorphisme

On s'intéresse au cas où  $A/S$  est muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$  où  $F/\mathbb{Q}_p$  est une extension de degré fini. D'après [Far06] on dispose du résultat suivant :

**Proposition 4.2.1** ([Far06], Lemme B.1). *Soit  $\mathcal{E}$  un  $F$ -cristal en  $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ -modules localement libre de rang fini sur  $\text{Cris}(S/\Sigma)$  muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$ . Alors  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{O}_{S/\Sigma} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$ -module localement libre sur  $\text{Cris}(S/\Sigma)$ .*

**Remarque 4.2.2.** D'après [BBM82] on dispose d'un isomorphisme :

$$\omega_G \simeq \mathcal{E}\text{xt}^1(\underline{G}, \mathcal{J}_{S/\Sigma})_{(S \rightarrow S)}$$

où  $\mathcal{J}_{S/\Sigma}$  est le faisceau d'idéal à puissances divisées. Or  $\mathcal{E}\text{xt}^1(\underline{G}, \mathcal{J}_{S/\Sigma})$  n'est à priori pas un cristal et donc la proposition ci-dessus ne s'applique pas.

## 4.2.2 Déformations

### 4.2.2.1 Grothendieck-Messing

Nous allons maintenant rappeler quelques résultats sur les déformations des groupes de Barsotti-Tate.

Soit  $S_0 \hookrightarrow S$  une immersion fermée nilpotente munie d'une structure de puissances divisées (PD-structure), avec  $p$  localement nilpotent. On dispose d'un morphisme sur le site  $\text{Cris}(S_0/\Sigma)$  :

$$(S_0 \rightarrow S_0, \gamma_0) \longrightarrow (S_0 \hookrightarrow S, \gamma)$$

Si  $\mathcal{F}$  est un cristal en  $\mathcal{O}_{S_0/\Sigma}$ -module alors par définition on dispose d'un isomorphisme de  $\mathcal{O}_{S_0}$ -modules canonique :

$$\mathcal{F}_{(S_0 \hookrightarrow S)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_0} \simeq \mathcal{F}_{(S_0 \rightarrow S_0)}$$

On note  $\text{BT}(S)$  la catégorie des groupes de Barsotti-Tate sur  $S$ . Soit  $G \in \text{BT}(S)$  un tel groupe. On note  $\mathcal{E}(G)$  le cristal associé et  $G|_{S_0} = G \times_S S_0$  le changement de base. On a alors un isomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_S$ -module :

$$\mathcal{E}(G)_{(S \rightarrow S)} \simeq \mathcal{E}(G|_{S_0})_{(S_0 \hookrightarrow S)}$$

En effet d'un coté on dispose d'un isomorphisme :

$$\mathcal{E}(G|_{S_0})_{(S_0 \hookrightarrow S)} \simeq \mathcal{E}(G)_{(S_0 \hookrightarrow S)}$$

provenant essentiellement de la définition du cristal  $\mathcal{E}(G)$  ([PW79], (2.3)). De l'autre coté puisque  $\mathcal{E}(G)$  est un cristal, le morphisme  $(S_0 \rightarrow S) \rightarrow (S \rightarrow S)$  dans  $\text{Cris}(S/\Sigma)$  induit un isomorphisme :

$$\mathcal{E}(G)_{(S_0 \hookrightarrow S)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S = \mathcal{E}(G)_{(S \rightarrow S)}$$

et le résultat en découle. Cet isomorphisme est compatible aux filtrations de Hodge :

$$\begin{array}{ccccc} \omega_G & \longrightarrow & \mathcal{E}(G)_{(S \rightarrow S)} & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{E}(G|_{S_0})_{(S_0 \hookrightarrow S)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \omega_{G|_{S_0}} & \longrightarrow & \mathcal{E}(G|_{S_0})_{(S_0 \rightarrow S_0)} & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{E}(G|_{S_0})_{(S_0 \hookrightarrow S)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_0} \end{array}$$

dans le sens où le diagramme est commutatif et la ligne du bas correspond à la réduction de la ligne du haut.

**Définition 4.2.3.** Soit  $G_0 \in \text{BT}(S_0)$  un groupe de Barsotti-Tate sur  $S_0$ . Une filtration  $\text{Fil}^1 \subset \mathcal{E}(G_0)_{(S_0 \hookrightarrow S)}$  est dite admissible si c'est un  $\mathcal{O}_S$ -module localement facteur direct de  $\mathcal{E}(G_0)_{(S_0 \hookrightarrow S)}$  qui relève  $\omega_{G_0} \subset \mathcal{E}(G_0)_{(S_0 \rightarrow S_0)}$ .

D'après ce qui précède si  $G \in \text{BT}(S)$  relève  $G_0 \in \text{BT}(S_0)$  alors  $\omega_G \subset \mathcal{E}(G)_{(S \rightarrow S)} \simeq \mathcal{E}(G|_{S_0})_{(S_0 \rightarrow S)}$  est une filtration admissible. On note  $\text{DefBT}(S_0 \hookrightarrow S)$  la catégorie dont les objets sont les couples  $(G_0, \text{Fil}^1)$  où  $G_0 \in \text{BT}(S_0)$ ,  $\text{Fil}^1 \subset \mathcal{E}(G_0)_{(S_0 \rightarrow S)}$  est une filtration admissible et où les morphismes  $(G_0, \text{Fil}^1) \rightarrow (G'_0, \text{Fil}'^1)$  sont les morphismes  $G_0 \rightarrow G'_0$  compatibles avec les filtrations respectives. On peut maintenant énoncer le théorème de Grothendieck-Messing :

**Théorème 4.2.4** ([Mes72] V.1.6). *Le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} \text{BT}(S) & \longrightarrow & \text{DefBT}(S_0 \hookrightarrow S) \\ G & \longmapsto & (G|_{S_0}, \omega_G \subset \mathcal{E}(G|_{S_0})_{(S_0 \rightarrow S)}) \end{array}$$

*est une équivalence de catégorie.*

#### 4.2.2.2 Applications

Dans cette section nous allons voir comment appliquer le théorème de déformation de Grothendieck-Messing le long de l'immersion fermée  $k[[t]] \rightarrow k$ , qui n'est pas munie de PD-structure. Cela nous sera utile lorsque nous voudrons calculer des relations d'adhérences entre strates de nos variétés de Shimura (voir Proposition 4.2.8).

Soit  $R$  un anneau de caractéristique  $p$  et  $I$  un idéal tel que  $I^2 = 0$ . On peut munir  $I$  d'une PD-structure faisant du morphisme  $\text{Spec } R/I \rightarrow \text{Spec } R$  une immersion fermée nilpotente avec PD-structure. En effet il suffit de poser  $\gamma_1(x) = x$  et  $\gamma_n(x) = 0$  pour tout  $n \geq 2$  et tout  $x \in I$ . Nous allons appliquer cette remarque à la suite d'immersions fermées :

$$\cdots \rightarrow k[t]/(t^{n+1}) \rightarrow k[t]/(t^n) \rightarrow k[t]/(t^{n-1}) \rightarrow \cdots \rightarrow k[t]/(t^2) \rightarrow k$$

Pour tout  $n \geq 1$  on note  $R_n = k[t]/(t^n)$ ,  $I_n = \text{Ker}(k[t]/(t^n) \rightarrow k[t]/(t^{n-1}))$  et  $S_n = \text{Spec } R_n$ . Chaque immersion fermée  $S_{n-1} \hookrightarrow S_n$  est définie par un idéal  $I_n = (t^{n-1})/(t^n)$  satisfaisant  $I_n^2 = 0$ . D'après ce qui précède on peut donc munir chacune de ces immersions fermées d'une PD-structure. Le résultat suivant fonctionne pour tout anneau  $R$  local complet de corps résiduel parfait.

**Proposition 4.2.5** ([Lau09], Lemme 2.10). *Soit  $G_1 \in \text{BT}(k)$  et  $\text{Fil}^1 \subset \mathcal{E}(G_1)_{(k \rightarrow k)} \otimes_k k[[t]]$  un relèvement de  $\omega_{G_1} \subset \mathcal{E}(G_1)_{(k \rightarrow k)}$  qui est localement un facteur direct. Alors il existe  $G \in \text{BT}(k[[t]])$  tel que :*

1.  $G$  est un relèvement de  $G_1$  le long de  $\text{Spec } k \rightarrow \text{Spec } k[[t]]$
2.  $\mathcal{E}(G)_{(k[[t]] \rightarrow k[[t]])} \simeq \mathcal{E}(G)_{(k \rightarrow k)} \otimes_k k[[t]]$
3.  $\omega_G \simeq \text{Fil}^1$  (via l'identification ci dessus)

*Démonstration.* Nous allons utiliser la théorie des display de Zink et Lau. Posons  $R = k[[t]]$  et  $S = \text{Spec } R$ . Notez que se donner un groupe  $p$ -divisible  $G \in \text{BT}(S)$  c'est se donner un système compatible de groupes  $p$ -divisibles  $(G_n)_{n \geq 1}$  où  $G_n \in \text{BT}(S_n)$  ([Lau14] Lemme 2.15). Nous allons donc construire pour tout  $n \geq 2$  un groupe  $p$ -divisible  $G_n \in \text{BT}(S_n)$  satisfaisant les propriétés souhaitées. Puisque pour tout  $n \geq 2$  l'anneau  $R_n$  est un anneau local artinien sur lequel  $p$  est nilpotent et de corps résiduel parfait, on dispose donc d'une équivalence de catégorie  $\text{BT}(S_n) \cong \text{Disp}(R_n)$ . On note  $\mathcal{P}_1 = (P_1, Q_1, F_1, V_1^{-1})$  le display associé à  $G_1$  par Lau ([Lau14], Théorème A). Toujours d'après *loc cit*, Théorème A, on dispose d'un isomorphisme canonique entre le cristal de Dieudonné de  $G_1$  et le cristal associé à  $\mathcal{P}_1$  par Zink ([Zin02] ou [Lau14]) :

$$\mathcal{E}(G_1) \simeq \mathbb{D}(\mathcal{P}_1)$$

Le cristal  $\mathbb{D}(\mathcal{P}_1)$  étant défini sur le site  $\text{Cris}_{\text{adm}}(R) \subset \text{Cris}(R)$  des épaissements avec pd-structure  $(B \rightarrow A, \delta)$  avec  $A$  admissible (i.e. si le nilradical  $\mathcal{N}_R$  est « bounded nilpotent » et que  $R_{\text{red}} = R/\mathcal{N}_R$  est un anneau parfait de caractéristique  $p$ ), l'isomorphisme ci-dessus est un isomorphisme de cristaux sur le site  $\text{Cris}_{\text{adm}}(R)$  et on fait ici l'abus de notation d'également noter  $\mathcal{E}(G_1)$  la restriction du cristal  $\mathcal{E}(G_1)$  au site  $\text{Cris}_{\text{adm}}(R)$ . En particulier en évaluant sur l'épaississement tautologique  $(S_1 \rightarrow S_1)$  on obtient un isomorphisme canonique de  $R_1$ -modules :

$$\mathcal{E}(G_1)_{(S_1 \rightarrow S_1)} \simeq P_1 \otimes_{\mathbb{W}(R_1)} R_1 \tag{4.2.3}$$

D'après la remarque précédente,  $R_2 \rightarrow R_1$  est muni d'une PD-structure nilpotente, et par conséquent se donner un relèvement  $\mathcal{P}_2 \in \text{Disp}(R_2)$  de  $\mathcal{P}_1$  c'est se donner un relèvement  $\text{Fil}_{(2)}^1 \subset \mathbb{D}(\mathcal{P}_1)_{(R_2 \rightarrow R_1)}$  (voir [Lau14], Corollaire 2.10, ou [Lau09] Lemme 4.2). On pose  $P_2 = P_1 \otimes_{\mathbb{W}(R_1)} \mathbb{W}(R_2)$  (notez qu'on dispose pour tout  $n \geq 2$  d'un morphisme  $R_1 \rightarrow R_n$ ). D'après [Lau14], Section 2.6, on a par construction du cristal  $\mathbb{D}(\mathcal{P}_1)$  un isomorphisme :

$$\mathbb{D}(\mathcal{P}_1)_{(R_2 \rightarrow R_1)} \simeq P_2 \otimes_{\mathbb{W}(R_2)} R_2 = P_1 \otimes_{\mathbb{W}(R_1)} R_2$$

Via l'isomorphisme (4.2.3) on obtient :

$$\mathcal{E}(G_1)_{(S_1 \rightarrow S_1)} \otimes_{R_1} R_2 \simeq \mathbb{D}(\mathcal{P}_1)_{(R_2 \rightarrow R_1)}$$

On définit le relèvement de la filtration de Hodge de  $\mathcal{P}_1$  comme étant :

$$\text{Fil}_{(2)}^1 := \text{Fil}^1 \otimes_R R_2 \subset \mathcal{E}(G_1)_{(S_1 \rightarrow S_1)} \otimes_{R_1} R_2 \simeq \mathbb{D}(\mathcal{P}_1)_{(R_2 \rightarrow R_1)}$$

Ce relèvement définit une display  $\mathcal{P}_2 \in \text{Disp}(R_2)$  et donc un groupe  $p$ -divisible  $G_2 \in \text{BT}(S_2)$ . On dispose de nouveau d'une identification entre cristaux  $\mathcal{E}(G_2) \simeq \mathbb{D}(\mathcal{P}_2)$ . Puisque  $G_2$  est un relèvement de  $G_1$  le long de  $S_1 \hookrightarrow S_2$  on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(G_2)_{(S_2 \rightarrow S_2)} &\simeq \mathcal{E}(G_1)_{(S_1 \hookrightarrow S_2)} \\ &\simeq \mathbb{D}(\mathcal{P}_1)_{(R_2 \rightarrow R_1)} \\ &\simeq \mathcal{E}(G_1)_{(S_1 \rightarrow S_1)} \otimes_{R_1} R_2 \\ &\simeq \mathcal{E} \otimes_R R_2 \end{aligned}$$

où l'on a posé  $\mathcal{E} := \mathcal{E}(G_1)_{(S_1 \rightarrow S_1)} \otimes_{R_1} R$ . On continue le processus par induction en posant pour tout  $n \geq 3$  :

$$P_n := P_1 \otimes_{\mathbb{W}(R_1)} \mathbb{W}(R_n), \quad \text{Fil}_{(n)}^1 := \text{Fil}^1 \otimes_R R_n \subset \mathbb{D}(\mathcal{P}_{n-1})_{(R_n \rightarrow R_{n-1})}$$

ce qui nous fournit à chaque étape un display  $\mathcal{P}_n \in \text{Disp}(R_n)$  et un groupe  $p$ -divisible  $G_n \in \text{BT}(S_n)$  satisfaisant les équations :

$$\omega_{G_n} \simeq \text{Fil}_{(n)}^1, \quad \mathcal{E}(G_n)_{(S_n \rightarrow S_n)} \simeq \mathcal{E} \otimes_R R_n$$

Par passage à la limite on obtient un groupe  $p$ -divisible  $G \in \text{BT}(S)$  satisfaisant par construction :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(G)_{(S \rightarrow S)} &\simeq \varprojlim_n \mathcal{E} \otimes_R R_n \simeq \mathcal{E} \\ \omega_G &\simeq \varprojlim_n \text{Fil}_{(n)}^1 \simeq \varprojlim_n \text{Fil}^1 \otimes_R R_n \simeq \text{Fil}^1 \end{aligned}$$

ce qui démontre les points (1), (2), (3). □

#### Remarque 4.2.6.

1. En fait la proposition ci-dessus est une reformulation en termes de cristaux de Dieudonné des lemmes 2.15 et 2.16 de [Lau14]. Cette reformulation est possible grâce à l'identification entre le cristal de Dieudonné  $\mathcal{E}(G)$  et le cristal associé à un display  $\mathbb{D}(\mathcal{P})$ . Nous aurions très bien pu nous passer de la théorie de Dieudonné cristalline et simplement utiliser la théorie des displays.
2. L'un des apports de la théorie des displays dans la preuve ci-dessus est qu'elle rend explicite le calcul du faisceau  $\mathcal{E}(G_n)_{(R_{n+1} \rightarrow R_n)}$  : il suffit de prendre n'importe quel  $\mathcal{P}_{n+1}$  qui relève le display  $\mathcal{P}_n$  (voir [Zin02] Théorème 3). Cela découle du fait que le morphisme de « frame »  $(\mathcal{D}_{R_{n+1}/R_n} \rightarrow \mathcal{D}_{R_n})$  est cristallin (voir [Lau14] Proposition 2.8). Dans la preuve ci-dessus à chaque étape nous avons défini le display  $\mathcal{P}_{n+1}$  comme étant le changement de base de  $\mathcal{P}_1$  le long de la section  $R_1 \rightarrow R_{n+1}$ . La proposition ci-dessus n'est donc qu'un passage à la limite d'un fait bien connu.

Énonçons pour finir un lemme dont nous aurons besoin dans la section 4.2.3.2 :

**Lemme 4.2.7.** *Soit  $S_0 = \text{Spec } R/I \hookrightarrow S = \text{Spec } R$  une immersion fermée telle que  $I^2 = 0$ . Soit  $G_0 \in \text{BT}(S_0)$  un groupe  $p$ -divisible sur  $S_0$ . Soit  $\text{Fil}_{(1)}^1, \text{Fil}_{(2)}^1 \subset \mathcal{E}(G_0)_{(S_0 \rightarrow S)}$  deux filtrations admissibles. Dans  $\mathcal{E}(G_0)_{(S_0 \rightarrow S)}^{(p)}$  on dispose de l'égalité :*

$$(\text{Fil}_{(1)}^1)^{(p)} = (\text{Fil}_{(2)}^1)^{(p)}$$

*En particulier le faisceau  $\omega_G^{(p)}$  ne dépend pas du relèvement  $G \in \text{BT}(S)$ .*



*Démonstration.* C'est un simple résultat d'algèbre commutative. On pose  $M = \mathcal{E}(G_0)_{(S_0 \hookrightarrow S)}$ . C'est un  $R$ -module. Puisque  $\mathcal{E}$  est un cristal on dispose de l'identification  $\mathcal{E}(G_0)_{(S_0 \rightarrow S_0)} = M/IM$ . Soit donc  $N_1, N_2 \subset M$  tels que  $N_1/IM = N_2/IM$ . On veut montrer que  $N_1^{(p)} = N_2^{(p)} \subset M \otimes_{R, \sigma} R$  où  $\sigma : R \rightarrow R$  désigne le Frobenius. Mais c'est clair puisque  $0 = IM^{(p)} \subset M \otimes_{R, \sigma} R$  (voir que  $im \otimes 1 = m \otimes \sigma(i)$  et que  $\sigma(i) = 0$  car par hypothèse  $I^2 = 0$ ).  $\square$

### 4.2.2.3 Relations d'adhérences

On termine cette section en par un résultat dont nous aurons besoin par la suite lorsque nous nous intéresserons aux relations d'adhérences entre strates de nos variétés de Shimura. Ce résultat est certainement bien connu et est notamment utiliser dans [BH22a] (Preuve du théorème 4.11) mais à défaut d'avoir trouvé une preuve, nous allons en proposer une ci-dessous.

**Proposition 4.2.8.** *Soit  $X$  un un schéma noethérien de caractéristique  $p > 0$  et  $Y \subset X$  un sous schéma localement fermé. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $x \in \overline{Y}$
2. Il existe  $y \in Y$  tel que  $y \rightsquigarrow x$
3. Il existe une extension de corps  $k/\kappa(x)$  et un morphisme de schémas  $\text{Spec } k[[t]] \rightarrow X$  qui envoi le point fermé sur  $x$  et le point générique sur  $y$ .

*Démonstration.* (3)  $\Rightarrow$  (1) découle de la continuité du morphisme. (1)  $\Rightarrow$  (2) découle du lemme 4.2.9 ci dessous et du fait que l'espace topologique sous-jacent à un schéma soit sobre et qu'un espace topologique noethérien sobre soit spectral (dans un espace topologique noethérien tout sous-ensemble est quasi-compact). Montrons que (2)  $\Rightarrow$  (3). D'après le lemme 4.2.10 ci dessous, il existe un anneau de valuation discrète  $R$  satisfaisant les propriétés du point (3). Le théorème de structure de Cohen nous assure que  $\widehat{R} \simeq k[[t]]$  où  $\widehat{R}$  désigne la complétion le long de l'idéal maximal  $\mathfrak{m} \subset R$  et  $k = R/\mathfrak{m}$  désigne le corps résiduel. Le morphisme  $\text{Spec } \widehat{R} \rightarrow X$  satisfait les propriétés souhaitées.  $\square$

**Lemme 4.2.9.** *Soit  $X$  un espace topologique spectral, et  $Y \subset X$  un sous ensemble constructible. Alors*

$$\overline{Y} = \bigcup_{y \in Y} \overline{\{y\}}$$

*Démonstration.* Voir [Sta18] Lemme 5.23.6.  $\square$

**Lemme 4.2.10.** *Soit  $X$  un schéma noethérien et  $y \rightsquigarrow x$  une spécialisation. Alors il existe un anneau de valuation discrète  $R$  et un morphisme  $\text{Spec } R \rightarrow X$  qui envoie le point fermé sur  $x$  et le point générique sur  $y$ .*

*Démonstration.* Voir [Sta18] Lemme 28.5.10.  $\square$

### 4.2.3 Invariant de Hasse partiels

Suivant les travaux [RX14],[BH16], nous allons maintenant définir les invariants de Hasse partiels pour les modèles entiers de Pappas-Rapoport. Comme nos résultats ne concerne que le cas Hilbert, nous allons uniquement définir ces invariants de le cas de donnée où le cocaractère de Hodge  $\mu$  satisfait  $r_\varphi = r_0$  est constant pour tout  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F, \overline{\mathbb{Q}_p})$ . Le lecteur intéressé par le cas général pourra consulter [BH16].

#### 4.2.3.1 Invariant de Hasse classique

Soit  $G$  un groupe de Barsotti-Tate sur un schéma  $S$  de caractéristique  $p$ . Le Verschiebung  $\text{Ver} : G^{(p)} \rightarrow G$  induit un morphisme :

$$\text{Ver}^* : \omega_G \longrightarrow \omega_G^{(p)}$$

En prenant le déterminant de ce morphisme on obtient une section

$$\text{Ha}(G) \in H^0(S, (\det \omega_G)^{\otimes (p-1)}) \quad (4.2.4)$$

appelée invariant de Hasse. On a alors la proposition bien connue suivante :

**Proposition 4.2.11.** *Soit  $G$  un groupe  $p$ -divisible sur un corps  $k$  de caractéristique  $p > 0$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $G$  est ordinaire
2. On a l'égalité de polygones  $\text{Newton}(G) = \text{Hodge}(G)$
3.  $\text{Ha}(G)$  est inversible

*Démonstration.* Voir [Kat79] section 1.6 par exemple. □

En d'autres termes l'invariant de Hasse permet de comparer les polygones de Newton et de Hodge de  $G$ .

#### 4.2.3.2 Invariants de Hasse primitifs

Soit  $(G, \iota)$  un groupe  $p$ -divisible sur  $S$  muni d'une action  $\iota : \mathcal{O}_F \rightarrow \text{End}_S(G)$ . On dispose de décompositions :

$$\mathcal{E}(G) = \bigoplus_{\varphi: F^{\text{nr}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}} \mathcal{E}_\varphi, \quad \omega_G = \bigoplus_{\varphi: F^{\text{nr}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}} \omega_\varphi$$

On suppose que  $(G, \iota)$  est muni d'une filtration de Pappas-Rapoport pour la donnée  $\mu$ , i.e. d'une filtration pour tout  $\varphi \in \Sigma^{\text{nr}} = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F, \overline{\mathbb{Q}_p})$  :

$$0 = \omega_\varphi^{(0)} \subset \omega_\varphi^{(1)} \subset \dots \subset \omega_\varphi^{(e)} = \omega_\varphi$$

telles que pour tout  $1 \leq i \leq e$  :

- $\omega_\varphi^{(i)}$  est localement un sous- $\mathcal{O}_S$ -facteur directe de  $\omega_\varphi$
- $\pi \cdot \omega_\varphi^{(i)} \subset \omega_\varphi^{(i-1)}$
- les gradués  $\omega_\varphi^{(i)}/\omega_\varphi^{(i-1)}$  sont localement libre de rang  $r_0$ .

C'est le cas par exemple si  $G$  provient d'un  $S$ -point de  $\mathcal{Sh}_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{PR}}$ .

Pour tout  $2 \leq i \leq e$  on définit l'application  $M_\varphi^{(i)}$  comme étant la multiplication par  $\pi$  au niveau des gradués :

$$M_\varphi^{(i)} : \omega_\varphi^{(i)}/\omega_\varphi^{(i-1)} \longrightarrow \omega_\varphi^{(i-1)}/\omega_\varphi^{(i-2)}$$

Ce morphisme induit une section appelée *invariant de Hasse primitif* :

$$m_\varphi^{(i)}(G) \in H^0\left(S, \det\left(\omega_\varphi^{(i-1)}/\omega_\varphi^{(i-2)}\right) \otimes \det\left(\omega_\varphi^{(i)}/\omega_\varphi^{(i-1)}\right)\right)$$

Puisque l'on a supposé que  $r_\varphi = r_0$  pour tout  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F, \overline{\mathbb{Q}_p})$ , on a d'après 3.3.13 que la strate KR maximale de  $\mathcal{Sh}_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k$  coïncide avec le lieu de Rapoport, c'est-à-dire le lieu où le faisceau  $\omega_G$  est localement libre en tant que  $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_S$ -module. La proposition suivante montre que les invariants de Hasse primitifs permettent de détecter cette strate.

**Proposition 4.2.12.** *On suppose que  $S = \text{Spec } k$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\text{Hodge}_\varphi(G, \iota) = (e, \dots, e, 0, \dots, 0) = \text{PR}_\varphi(\mu)$
2.  $m_\varphi^{(i)} \neq 0$  pour tout  $2 \leq i \leq e$
3.  $\omega_\varphi$  est un  $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} k$ -module libre de rang  $r_0$ .

*Démonstration.* L'équivalence entre (1) et (3) a déjà été vu 3.3.13. Supposons (2). Soient  $v_1, \dots, v_{r_0} \in \omega_\varphi^{(e)}$  des vecteurs tels que leur réduction forme une  $k$ -base du gradué  $\omega_\varphi^{(e)}/\omega_\varphi^{(e-1)}$ . Par définition des invariants de Hasse primitifs  $(v_1, \dots, v_{r_0})$  est une  $\mathcal{O}_F \otimes k$ -base de  $\omega_\varphi^{(e)}$ .  $\square$

Par ailleurs il découle de (4.2.2) que le Verschiebung  $V : G^{(p)} \rightarrow G$  induit une application :

$$V_\varphi : \mathcal{E}_\varphi \rightarrow \omega_{\sigma^{-1}\varphi}^{(p)} = (\omega_{\sigma^{-1}\varphi}^{(e)})^{(p)}$$

et donc On considère la composée :

$$\mathcal{E}_\varphi[\pi] \simeq \mathcal{E}_\varphi/\mathcal{E}_\varphi[\pi^{e-1}] \xrightarrow{V_\varphi} (\omega_{\sigma^{-1}\varphi}^{(e)}/\omega_{\sigma^{-1}\varphi}^{(e-1)})^{(p)}$$

Autrement dit si  $x \in \mathcal{E}_\varphi[\pi]$  il existe  $y \in \mathcal{E}_\varphi$  tel que  $x = \pi^{e-1} \cdot y$  et on lui associe alors  $V_\varphi(y)$ . En restreignant ce morphisme à  $\omega_{G,\varphi}^{(1)} \subset \mathcal{E}_\varphi[\pi]$  on obtient finalement un morphisme :

$$\text{Ha}_\varphi : \omega_\varphi^{(1)} \rightarrow (\omega_{\sigma^{-1}\varphi}^{(e)}/\omega_{\sigma^{-1}\varphi}^{(e-1)})^{(p)} \quad (4.2.5)$$

et donc une section

$$\text{ha}_\varphi(G) \in H^0\left(S, \det\left(\omega_{\sigma^{-1}\varphi}^{(e)}/\omega_{\sigma^{-1}\varphi}^{(e-1)}\right)^{\otimes p} \otimes \det\left(\omega_\varphi^{(1)}\right)^{-1}\right)$$

Cette section est appelée également *invariant de Hasse primitif*.

### 4.2.3.3 Invariant de Hasse partiel

Le Verschiebung de  $G$  induit également une application au niveau des gradués :

$$V_\varphi^{(i)} : \omega_\varphi^{(i)}/\omega_\varphi^{(i-1)} \longrightarrow (\omega_{\sigma^{-1}\varphi}^{(i)}/\omega_{\sigma^{-1}\varphi}^{(i-1)})^{\otimes p}$$

et donc une section

$$v_\varphi^{(i)} \in H^0\left(S, \det\left(\omega_{\sigma^{-1}\varphi}^{(i)}/\omega_{\sigma^{-1}\varphi}^{(i-1)}\right)^{\otimes p} \otimes \det\left(\omega_\varphi^{(i)}/\omega_\varphi^{(i-1)}\right)^{-1}\right)$$

appelée *invariant de Hasse partiel*.

**Remarque 4.2.13.** Les invariants de Hasse partiels ont d'abord été introduits dans le cadre non ramifié par Goren et Oort dans [GO00]. Dans ce cas il n'y a pas de filtration de Pappas-Rapoport et il découle directement des définitions que l'on a l'égalité (cf. [GO00] Théorème 2.1)

$$\text{Ha}(G) = \prod_{\varphi} v_\varphi \in H^0(S, (\det \omega_G)^{\otimes (p-1)})$$

Les invariants de Hasse partiels « factorisent » donc l'invariant de Hasse classique, ce qui justifie leur appellation.

Il découle des différentes construction que l'on a l'égalité pour tout  $2 \leq i \leq e$  :

$$V_\varphi^{(i)} = (M_\varphi^{(i+1)})^{(p)} \circ \dots \circ (M_\varphi^{(e)})^{(p)} \circ \text{Ha}_\varphi \circ M_\varphi^{(1)} \circ \dots \circ M_\varphi^{(i)} \quad (4.2.6)$$

Les invariants primitifs  $\text{ha}_\varphi, m_\varphi^{(2)}, \dots, m_\varphi^{(e)}$  factorisent donc les invariants de Hasse partiels. Pour uniformiser les notations on définit  $m_\varphi^{(1)} := \text{ha}_\varphi$ . L'équation (4.2.6) montre que les invariants primitifs permettent de tester l'ordinarité de  $G$  :

**Proposition 4.2.14** ([BH16]). *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $G$  est ordinaire.
2. Pour tout  $\varphi \in \Sigma^{\text{nr}}$  et tout  $1 \leq i \leq e$  la section  $m_\varphi^{(i)}$  est inversible.

**Remarque 4.2.15.** La proposition précédente reste valable pour une donnée  $\mathcal{D}$  plus générale comme l'on montré Bijakowski et Hernandez dans [BH16], mais il faut alors prendre le lieu  $\mu$ -ordinaire et redéfinir les invariants de Hasse primitifs. Comme nos résultats concernent uniquement le cas Hilbert, nous n'aurons pas besoin de ces travaux.

### 4.3 Travaux de Xu Shen et Yuqiang Zheng

Dans la section précédente nous avons défini les invariants de Hasse primitifs et vu qu'ils permettait de détecter le lieu  $\mu$ -ordinaire. Dans le cas non ramifié, chronologiquement, les invariants de Hasse ont été définis après la stratification EO, dans l'objectif de pouvoir détecter les strates EO [Box15b]. Dans le cas ramifié, les invariants de Hasse primitifs ont été définis avant les stratification EO des modèles  $\mathcal{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}}$ .

Etant donné que la stratification EO des modèles de Pappas-Rapoport a déjà été définie dans [SZ22], je vais ici tenter d'expliquer pourquoi leur définition est tout à fait naturelle. Ces explications constitue ma stratégie initiale pour la construction d'une stratification EO des modèles de Pappas-Rapoport.

Pour simplifier plaçons nous dans le cas d'une donnée  $\mathcal{D}$  de type Hilbert-Siegel i.e. d'une donnée de type (C) (3.2.2.1). On peut supposé que la donnée PEL est simple ie  $I = \{*\}$ . Soit donc  $S$  un schéma sur  $k$  et  $(A, \iota, \lambda, \eta^p, \underline{\omega}) \in \mathcal{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}}(S)$ . On note  $G = A[p]$  le sous groupe de  $p$ -torsion. On conserve les notations de la section 2.4. Comme nous l'avons-vu en 2.4.8 localement il existe un isomorphisme de  $\mathcal{O}_S$ -module :

$$\Upsilon_j^{(l)} = \pi^{-1}(\omega_j^{(l-1)})/\omega_j^{(l-1)} \simeq \Lambda_j^{(l)} = \Lambda \otimes_{\mathcal{O}_F, \varphi_j^l} \mathcal{O}_S$$

où  $\varphi_j^l : \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_K$  est un plongement (avec une numérotation fixée en 2.4). A partir de maintenant on note pour tout  $(i, j, l)$  :

$$M^{\text{split}} := \bigoplus_{1 \leq l \leq e} \bigoplus_{1 \leq j \leq f} M_j^{(l)}, \quad M_j^{(l)} = \Upsilon_j^{(l)}$$

L'idée est cette décomposition devrait être l'analogue de la décomposition du module de Dieudonné de  $A[p]$  dans le cas non ramifié :

$$M(G) = \bigoplus_{\varphi: F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} M_\varphi$$

On définit le réseau :

$$\Lambda^{\text{split}} := \bigoplus_{1 \leq l \leq e} \bigoplus_{1 \leq j \leq f} \Lambda_j^{(l)}$$

et on note  $\mathcal{G}^{\text{split}}$  le groupe des automorphismes (compatibles avec la donnée  $\mathcal{D}$ ). Par construction le groupe  $\mathcal{G}^{\text{split}}$  est réductif car c'est le produit des groupes réductifs associés aux  $\Lambda_j^{(l)}$  (l'action de  $\mathcal{O}_F$  est triviale sur  $\Lambda_j^{(l)}$ ). Si l'on fait l'abus de notation de noter  $\mathcal{G} = \text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} H$  (voir 3.2.2.1) alors en fibre spéciale on a :

$$\mathcal{G}_\kappa = \text{Res}_{(\kappa[u]/(u^e))/\mathbb{F}_p} H, \quad \mathcal{G}_\kappa^{\text{split}} = \text{Res}_{\kappa/\mathbb{F}_p} H^e$$

le groupe  $\mathcal{G}_\kappa^{\text{split}}$  se comporte donc comme si la donnée était non ramifiée. D'après ce qui précède le faisceau :

$$\underline{\text{Isom}}(M^{\text{split}}, \Lambda^{\text{split}})$$

est un  $\mathcal{G}_k^{\text{split}}$ -torseur sur  $\text{Sh}_{(\mathcal{O}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k$ . On aimerait donc trouver une structure de  $\mathcal{G}_k^{\text{split}}$ -zip sur  $M^{\text{split}}$ . Pour poursuivre dans cette direction, il faut donc définir des morphismes  $F$  et  $V$  sur  $M^{\text{split}}$ . L'idée est alors de définir  $F$  et  $V$  de sorte à ce que les invariants de Hasse primitifs mesurent la position relative des filtrations sur le « module de Dieudonné »  $M$ . On distingue deux situations :

- Pour tout  $2 \leq l \leq e_i$  le module  $M_j^{(l)}$  est muni de deux filtrations :

$$C_j^{(l)} := \omega_j^{(l)} / \omega_j^{(l-1)} \subset M_j^{(l)}, \quad D_j^{(l)} := \pi^{-1}(\omega_j^{(l-2)}) / \omega_j^{(l-1)} \subset M_j^{(l)}$$

Par construction les invariants  $m_j^{(l)}$  mesurent la position relative de ces deux filtrations. On définit pour tout  $2 \leq l \leq e$  le morphisme :

$$\begin{aligned} V_j^{(l)} : M_j^{(l)} &\longrightarrow M_j^{(l-1)} \\ x &\longmapsto \pi x \end{aligned}$$

et le morphismes  $F_j^{(l)} : M_j^{(l-1)} \rightarrow M_j^{(l)}$  comme celui induit par l'inclusion  $\pi^{-1}(\omega_j^{(l-1)}) \subset \pi^{-1}(\omega_j^{(l)})$ . Par construction on a les égalités :

$$\text{Ker}(V_j^{(l)}) = D_j^{(l)} = \text{Im}(F_j^{(l)}), \quad \text{Ker}(F_j^{(l)}) = C_j^{(l)} = \text{Im}(V_j^{(l)})$$

- Pour  $l = 1$  on dispose de deux morphismes :

$$\begin{aligned} V_j^{(1)} : M_j^{(1)} &\longrightarrow M_{j-1}^{(e)}, & F_j^{(1)} : M_{j-1}^{(e)} &\longrightarrow M_j^{(1)} \\ x &\longmapsto V(\pi^{1-e}x) & x &\longmapsto F(x) \end{aligned}$$

qui sont respectivement  $\sigma^{-1}$ -linéaire et  $\sigma$ -linéaire. Le problème est qu'en général  $\text{Ker}(V_j^{(1)}) \neq \text{Im}(F_j^{(1)})$ . La solution trouvée par les auteurs dans [SZ22] est la suivante : il existe un isomorphisme canonique

$$g_j : M_j^{(1)} \longrightarrow M_j^{(1)}$$

qui envoie  $\text{Ker}(V_j^{(1)})$  sur  $\text{Im}(F_j^{(1)})$ .

On s'intéresse donc au triplet  $(M, F, V)$  où  $F$  et  $V$  sont les sommes directes des morphismes définis ci-dessus. On aimerait pouvoir donner une structure de  $\mathcal{G}_k^{\text{split}}$ -zip sur cette donnée, le problème est que les morphismes  $F$  et  $V$  ne sont pas  $\sigma$ -linéaire resp.  $\sigma^{-1}$ -linéaire en général. Notons  $\mu^{\text{split}}$  le cocaractère :

$$\mu^{\text{split}} := \prod_{j,l} \mu_j^{(l)} : \mathbb{G}_m \rightarrow \mathcal{G}_k^{\text{split}}$$

On note  $(P_+, P_-)$  les sous-groupes paraboliques induits,  $(U_-, U_+)$  les sous-groupes unipotents induits et  $L = P_+ \cap P_-$  le sous-groupe de Levi. On notera  $(\Lambda^{\text{split}}, C_0, D_0, \varphi_0, \varphi_1)$  le  $\mathcal{G}_k^{\text{split}}$ -zip de type  $\mu^{\text{split}}$  trivial. D'après tout ce qui précède on a la proposition suivante :

**Proposition 4.3.1** ([SZ22] Proposition 3.8). *On considère l'isomorphisme de groupe :*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{G}_\kappa^{\text{split}} &\longrightarrow \mathcal{G}_\kappa^{\text{split}} \\ (g_1, \dots, g_e) &\longmapsto (g_2, \dots, g_e, g_1^p) \end{aligned}$$

Alors :

1.  $I := \underline{\text{Isom}}(M^{\text{split}}, \Lambda^{\text{split}})$  est un  $\mathcal{G}_\kappa^{\text{split}}$ -torseur sur  $\mathcal{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k$
2.  $I_+ := \underline{\text{Isom}}(0 \subset C \subset M^{\text{split}}, 0 \subset C_0 \subset \Lambda^{\text{split}})$  est un  $P_+$ -torseur sur  $\mathcal{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k$ .
3.  $I_+ := \underline{\text{Isom}}(0 \subset D \subset M^{\text{split}}, 0 \subset D_0 \subset \Lambda^{\text{split}})$  est un  $P_-^\varphi$ -torseur sur  $\mathcal{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k$ .
4. Il existe un isomorphisme  $L^\varphi$ -équivariant  $\iota : (I_+/U_+)^\varphi \simeq I_-/U_-^\varphi$

*Démonstration.* Découle des définitions en observant que les seuls morphismes  $\sigma$ -linéaires ont pour indice  $l = 1$ .  $\square$

Pour obtenir un objet de  $\mathcal{G}_\kappa^{\text{split}}\text{-Zip}^{(\mu^{\text{split}})}$ , l'astuce trouvée dans [SZ22] est de considérer le morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} \varphi' : \mathcal{G}_\kappa^{\text{split}} &\longrightarrow \mathcal{G}_\kappa^{\text{split}} \\ (g_1, \dots, g_e) &\longmapsto (g_e, g_1^p, \dots, g_{e-1}^p) \end{aligned}$$

Ce morphisme satisfait  $\varphi \circ \varphi' = \varphi' \circ \varphi = \sigma$ . Par conséquent  $I_-^{\varphi'}$  est un  $P_-^\sigma$ -torseur sur  $\mathcal{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k$  et on déduit du point 4. en faisant le changement de base  $(\cdot)^{\varphi'}$  l'existence d'un isomorphisme :

$$\iota^{\varphi'} : (I_+/U_+)^{(p)} \simeq I_-^{\varphi'}/U_-^{(p)}$$

La donnée  $(I, I_+, I_-^{\varphi'}, \iota^{\varphi'})$  nous fournit un morphisme de champs algébriques sur  $k$  :

$$\zeta^{\text{split}} : \mathcal{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k \longrightarrow \mathcal{G}_\kappa^{\text{split}}\text{-Zip}^{(\mu^{\text{split}})} \quad (4.3.1)$$

Comme dans le cas de bonne réduction, les auteurs définissent la stratification EO comme la stratification induite par le morphisme  $\zeta^{\text{split}}$ . Il montre alors que c'est un morphisme lisse (la preuve est identique au cas non ramifiée), et donc que cette stratification est une bonne stratification.

## 4.4 Stratification de type EKOR : le cas Hilbert

On se place désormais dans le cas d'une donnée  $\mathcal{D}$  de type Hilbert simple (c'est-à-dire d'une donnée de type (C) avec  $g = 1$  et  $I = \{*\}$ ). On dispose de deux morphismes de champs algébriques :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k & \\ \zeta^{\text{split}} \swarrow & & \searrow \psi \\ \mathcal{G}_\kappa^{\text{split}}\text{-Zip} & & [M_{\mathcal{D}}^{\text{PR}}/\mathcal{G}_\kappa] \end{array}$$

La flèche de gauche correspond au morphisme (4.3.1) construit dans [SZ22] et induisant la stratification EO, et le second est le morphisme induit par le diagramme de modèle local (2.5.1) induisant la stratification KR. Dans la section 3.5.3 nous avons calculé les  $\mathcal{G}_k$ -orbites dans  $M_{\mathcal{D}}^{\text{PR}}$ . Comme le montre le tableau 3.5.3, dans le cas  $e = 4$  les invariants  $m^{(2)}$ ,  $m^{(3)}$ ,  $m^{(4)}$  ne permettent pas de détecter chaque orbite. Les morphismes ci-dessus donnent donc lieu à des stratifications différentes. Il est naturel de se demander si la stratification « produit » :

$$\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k = \coprod_{(z,w) \in \text{EO} \times \mathcal{A}(\mu_{\bullet})} S_{(z,w)}, \quad S_{(z,w)} := (\zeta^{\text{split}})^{-1}(z) \cap (\psi)^{-1}(w)$$

est une bonne stratification et si oui quelles sont ses relations d'adhérences entre strates. Bien sûr ici on demande à ce que le nombre d'orbites dans  $M_{\mathcal{D}}^{\text{PR}}$  soit fini, ce qui inclut les cas  $e \leq 5$  (voir 3.5.8). Nous allons répondre à cette question dans le cas Hilbert. On commence par la remarque suivante :

**Proposition 4.4.1** ([SZ22] Exemple 4.4). *Dans le cas Hilbert la stratification d'Ekedahl-Oort de  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k$  coïncide avec la stratification induite par les invariants de Hasse primitifs.*

Cette proposition est l'analogie du fait que dans le cas Hilbert non ramifié les strates sont indexées par le groupe de Weyl  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$  et que les invariants de Hasse partiels permettent de détecter chacune de ces strates. En d'autres termes du point de vue de la stratification EO dans le cas non ramifiée les variétés de Hilbert se comporte comme un « produit » de courbes modulaires.

Cette proposition va nous permettre de montrer le théorème suivant :

**Théorème 4.4.2** ([Ber23]). *On suppose que  $\mathcal{D}$  est une donnée de type Hilbert et que pour tout  $i \in I$  on ai  $e_i \leq 4$ . Dans ce cas la stratification :*

$$\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k = \coprod_{(z,w) \in \text{EO} \times \mathcal{A}(\mu_{\bullet})} S_{(z,w)}$$

*est une bonne stratification : les strates sont non vides et pour tout  $(z, w) \in \text{EO} \times \mathcal{A}(\mu_{\bullet})$  on a la relation d'adhérence :*

$$\overline{S_{(z,w)}} = \bigsqcup_{(z',w') \leq (z,w)} S_{(z',w')}$$

*où  $(z', w') \leq (z, w)$  si et seulement si  $z' \leq z$  et  $w' \leq w$ .*

*Démonstration.* Pour les cas  $e \leq 3$ , il n'y a rien à montrer car dans ces cas la stratification EO de  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}}$  est plus fine que la stratification KR de  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}}$ . D'après la proposition précédente et le tableau (3.5.3), si  $x \in S_{(z,w)}$ , le couple  $(z, w)$  est entièrement déterminé par les invariants

$$(m_1(x), m_2(x), m_3(x), m_4(x), \text{Hodge}(x))$$



En d'autres termes la stratification ci-dessus peut se réécrire :

$$\mathcal{S}h_{(\mathcal{G}, K^p)}^{\text{PR}} \otimes k = \coprod_{w \in \mathcal{A}(\mu_\bullet)} S_w^{(m_1)} \coprod_{w \in \mathcal{A}(\mu_\bullet)} S_w$$

où  $S_w^{(m_1)}$  (resp.  $S_w$ ) est le lieu de  $S_w^{\text{PR}}$  où  $m_1$  est nul (resp. inversible). Soit  $w' \leq w$  deux éléments de  $\mathcal{A}(\mu_\bullet)$ . Pour prouver le théorème, il suffit de montrer les assertions suivantes :

1. Si  $x \in S_{w'}$ , alors il existe  $y \in S_w$  tel que  $x \in \overline{\{y\}}$ .
2. Si  $x \in S_w^{(m_1)}$ , alors il existe  $y \in S_w$  tel que  $x \in \overline{\{y\}}$ .
3. Si  $x \in S_{w'}^{(m_1)}$ , alors il existe  $y \in S_w^{(m_1)}$  tel que  $x \in \overline{\{y\}}$ .

La première condition est évidente car la condition «  $m_1$  inversible » est stable par généralisation. Il suffit donc de montrer les assertions (2) et (3).

**Assertion (2)** Nous allons montrer que l'assertion (2) est vraie sans hypothèse sur l'indice de ramification  $e$ . Soit donc  $x \in S_w^{(m_1)}$  un point défini sur un corps  $k(x)$ . Pour ne pas alourdir les notations, on notera  $k = k(x)$  ce corps. On note  $\mathcal{E}$  le cristal associé à  $x$ . Nous allons construire une déformation sur  $R = k[[t]]$  de ce cristal telle qu'en fibre générique on ait  $m_1 \neq 0$ , et sans que les autres invariants ne soient modifiés. Soit  $\mathcal{F}^{(1)} := F((\omega^{(e+1)})^{(p)})$  où  $\omega^{(e+1)} := \pi^{-1}(\omega^{(e-1)})$ . D'après [Bij16] Proposition 3.12, il existe un isomorphisme

$$\mathcal{E}[\pi]/\mathcal{F}^{(1)} \simeq (\omega^{(e)}/\omega^{(e-1)})^{(p)}$$

faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \omega^{(1)} & \longrightarrow & \mathcal{E}[\pi]/\mathcal{F}^{(1)} \\ & \searrow m_1 & \downarrow \simeq \\ & & (\omega^{(e)}/\omega^{(e-1)})^{(p)} \end{array}$$

où le morphisme du haut est celui induit par l'inclusion  $\omega^{(1)} \subset \mathcal{E}[\pi]$ . Puisque les gradués sont de dimension 1, la condition  $m_1 = 0$  est équivalente à l'égalité  $\omega^{(1)} = \mathcal{F}^{(1)}$  dans  $\mathcal{E}[\pi]$ . Dans tout ce qui suit on notera  $\mathcal{E}_{(n)}, \mathcal{F}_{(n)}^{(1)}, \omega_{(n)}^{(k)}$  etc les objets définis sur  $R_n = k[t]/(t^n)$ . D'après le lemme 4.2.7 on dispose d'un relèvement  $\mathcal{F}_{(2)}^{(1)}$  sur  $R_2$  qui ne dépend pas du choix des relèvements  $\omega_{(2)}^{(e)}$  et  $\omega_{(2)}^{(e-1)}$  sur  $R_2$ . Soit  $\Lambda_{(1)}^{(1)} \subset \dots \subset \Lambda_{(1)}^{(e)}$  la filtration associée à  $0 \subset \omega_{(1)}^{(1)} \subset \dots \subset \omega_{(1)}^{(e)}$  via 3.2.3. Comme pour la preuve de 3.4.1, on fait l'abus de notation de voir cette filtration comme un élément de  $\widetilde{\text{Gr}}_{\mu_\bullet}(R_1)$ . Soit  $(g_1, \dots, g_e) \in \text{GL}_2(R_1((u)))$  tel que :

$$\Lambda_{(1)}^{(i)} = g_i \cdot \Lambda_{(1)}^{(i-1)}, \quad \Lambda_{(1)}^{(0)} = u^e \cdot \Lambda_0$$

Soit  $\Lambda_{\mathcal{F}_{(2)}^{(1)}}$  le  $R_2[[u]]$ -réseau associé à  $\mathcal{F}_{(2)}^{(1)}$ . On définit :

$$\Lambda_{(2)}^{(i+1)} = g_{i+1} \cdot \Lambda_{(1)}^{(i)}, \quad \Lambda_{(2)}^{(1)} \neq \Lambda_{\mathcal{F}_{(2)}^{(1)}}$$

où chacun des  $g_{i+1} \in \mathrm{GL}_2(R_2((u)))$  est vu ici via la section  $R_1 \rightarrow R_2$  et  $\Lambda_{(2)}^{(1)}$  désigne n'importe quel  $R_2[[u]]$ -réseau relevant  $\Lambda_{(1)}^{(1)}$  et satisfaisant la condition  $\Lambda_{(2)}^{(1)} \neq \Lambda_{\mathcal{F}_{(2)}^{(1)}}$ . Si on note  $g_{\mathcal{F}} \in \mathrm{GL}_2(R_2((u)))$  le lacet définissant  $\Lambda_{\mathcal{F}_{(2)}^{(1)}}$  alors il suffit par exemple de choisir  $\Lambda_{(2)}^{(1)} = (g \cdot g_{\mathcal{F}}) \cdot u^e \Lambda_0$  avec  $g \in \mathrm{GL}_2(R_2[[u]])$  relevant  $1 \in \mathrm{GL}_2(R_1[[u]])$  et  $g \neq 1$ . Par réduction modulo ( $u^e$ ) on obtient une filtration  $0 \subset \omega_{(2)}^{(1)} \subset \cdots \subset \omega_{(2)}^{(e)}$  satisfaisant  $\omega_{(2)}^{(1)} \neq \mathcal{F}_{(2)}^{(1)}$ . On continue le processus par récurrence sur  $n \geq 2$ . Supposons donnés  $\mathcal{E}_{(n)}, \omega_{(n)}^{(k)}$  etc sur  $R_n$ . On définit alors la déformation sur  $R_{n+1}$  comme étant (avec les notations similaires au cas  $n = 2$ ) :

$$\Lambda_{(n+1)}^{(i+1)} = g_{i+1} \cdot \Lambda_{(n+1)}^{(i)}, \quad \Lambda_{(n+1)}^{(1)} \otimes_{R_{n+1}} R_n = \Lambda_{(n)}^{(1)}$$

où  $\Lambda_{(n+1)}^{(1)}$  désigne n'importe quel relèvement de  $\Lambda_{(n)}^{(1)}$  sur  $R_{n+1}$ . Cette propriété de relèvement nous assure que la condition  $\Lambda_{(n+1)}^{(1)} \neq \Lambda_{\mathcal{F}_{(n+1)}^{(1)}}$  est satisfaite (car elle l'est après réduction à  $R_n$ ). De nouveau après réduction modulo ( $u^e$ ) on obtient une filtration  $0 \subset \omega_{(n+1)}^{(1)} \subset \cdots \subset \omega_{(n+1)}^{(e)}$  sur  $R_{n+1}$  satisfaisant  $\omega_{(n+1)}^{(1)} \neq \mathcal{F}_{(n+1)}^{(1)}$ . On obtient par passage à la limite une filtration  $0 \subset \omega_{(\infty)}^{(1)} \subset \cdots \subset \omega_{(\infty)}^{(e)}$  qui satisfait  $\omega_{(\infty)}^{(1)} \neq \mathcal{F}_{(\infty)}^{(1)}$ . Par Gronthendieck-Messing et Serre-Tate ce processus nous fournit un morphisme :

$$\mathrm{Spec} R \rightarrow \mathrm{Sh}_{(\mathcal{F}, K^p)}^{\mathrm{PR}} \otimes k$$

Par construction le point générique  $y \in \mathrm{Spec} R$  satisfait  $m_1(y) \neq 0$ . Par ailleurs puisque l'on a utilisé les mêmes éléments  $g_1, \dots, g_e \in \mathrm{GL}(R[[u]])$  pour construire cette déformation, il en découle que  $x$  et  $y$  sont dans la même strate KR. Le point  $y$  satisfait donc les propriétés souhaitées.

**Assertion (3)** Soit  $x \in S_w^{(m_1)}$ . L'invariant  $w'$  est entièrement déterminé par le quadruplé (Hodge( $x$ ),  $m_2(x)$ ,  $m_3(x)$ ,  $m_4(x)$ ) (voir (3.5.3)). Notons  $\mathcal{T} = \{m_2, m_3, m_4\}$ . Si  $\lambda \in \mathrm{Adm}_K(\mu)$  et  $T \subset \mathcal{T}$  on notera  $(\lambda, T) \in \mathcal{A}(\mu_\bullet)$  l'élément induit via le tableau (3.5.3). Par définition :

$$(\lambda', T') = w' \leq w = (\lambda, T) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda' \leq \lambda \text{ et } T \subset T'$$

Notons  $w' = (\lambda', T')$  et  $w = (\lambda, T)$ . Puisque la stratification EO est une bonne stratification il existe  $y \in S_{(? , T)}^{(m_1)}$  tel que  $x \in \overline{\{y\}}$  (voir 4.2.9), où  $? \in \mathrm{Adm}_K(\mu)$  est un élément a priori indéterminé. On a gagné si  $? = \lambda$ . En analysant le diagramme (3.5.3), on trouve que les seuls cas qui posent problèmes sont :

$$S_{(2,2)}^{(m_1, m_2, m_3, m_4)} \subset \overline{S_{(2,2)}^{(m_1, m_3)}}, \quad S_{(2,2)}^{(m_1, m_3)} \subset \overline{S_{(3,1)}^{(m_1, m_3)}}$$

Nous allons montrer ces relations d'adhérences séparément.

1.  $S_{(2,2)}^{(m_1, m_2, m_3, m_4)} \subset \overline{S_{(2,2)}^{(m_1, m_3)}}$ . Soit  $S \in S_{(2,2)}^{(m_1 m_2, m_3, m_4)}$  et  $0 \subset \omega_{(1)}^{(1)} \subset \omega_{(1)}^{(2)} \subset \omega_{(1)}^{(3)} \subset \omega_{(1)}^{(4)}$  la filtration associée. Par définition on a les égalités :

$$\omega_{(1)}^{(1)} = \mathcal{F}_{(1)}^{(1)}, \quad \omega_{(1)}^{(2)} = \mathcal{E}_{(1)}[u]$$

$$\omega_{(1)}^{(3)} = u^{-1}(\omega_{(1)}^{(1)}), \quad \omega_{(1)}^{(4)} = u^{-1}(\omega_{(1)}^{(2)}) = \mathcal{E}_{(1)}[u^2]$$

On fixe des bases :

$$\langle v_{(1)}^{(1)} \rangle = \omega_{(1)}^{(1)}, \quad \langle v_{(1)}^{(1)}, v_{(1)}^{(2)} \rangle = \omega_{(1)}^{(2)}$$

Comme dans la preuve de l'assertion (2), d'après le Lemme 4.2.7, on dispose d'un relèvement  $\mathcal{F}_{(2)}^{(1)}$  de  $\mathcal{F}_{(1)}^{(1)}$  sur  $R_2$ . On fixe un relèvement  $v_{(2)}^{(1)}$  sur  $R_2$  de  $v_{(1)}^{(1)}$  tel que  $\mathcal{F}_{(2)}^{(1)} = \langle v_{(2)}^{(1)} \rangle$  et un élément  $\alpha_{(2)} \in u^{-1}(\mathcal{F}_{(2)}^{(1)}) \setminus \mathcal{E}_{(2)}[u]$ . On choisit également un élément  $v_{(2)}^{(2)} \in \mathcal{E}_{(2)}[u]$  qui relève  $v_{(1)}^{(2)}$ . On définit alors la déformation sur  $R_2$  comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(2)} &= \mathcal{E} \otimes_{R_1} R_2 & \omega_{(2)}^{(1)} &= \langle v_{(2)}^{(1)} \rangle = \mathcal{F}_{(2)}^{(1)} \\ \omega_{(2)}^{(2)} &= \omega_{(2)}^{(1)} \oplus \langle v_{(2)}^{(2)} + t\alpha_{(2)} \rangle, & \omega_{(2)}^{(3)} &= u^{-1}(\omega_{(2)}^{(1)}), & \omega_{(2)}^{(4)} &= \mathcal{E}_{(2)}[u^2] \end{aligned}$$

Par construction on a bien  $u \cdot (v_{(2)}^{(2)} + t\alpha_{(2)}) \neq 0$ . On continue le processus par récurrence sur  $n \geq 2$ . Supposons donnés  $\mathcal{E}_{(n)}, \omega_{(n)}^{(k)}$  etc sur  $R_n$ . D'après le lemme 4.2.7 on dispose d'un relèvement canonique  $\mathcal{F}_{(n+1)}^{(1)}$  sur  $R_{n+1}$ . On définit la déformation sur  $R_{n+1}$  comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(n+1)} &= \mathcal{E} \otimes_{R_1} R_{n+1} & \omega_{(n+1)}^{(1)} &= \mathcal{F}_{(n+1)}^{(1)} \\ \omega_{(n+1)}^{(3)} &= u^{-1}(\omega_{(n+1)}^{(1)}), & \omega_{(n+1)}^{(4)} &= \mathcal{E}_{(n+1)}[u^2] \end{aligned}$$

et on prend n'importe quel relèvement  $\omega_{(n+1)}^{(2)} \subset u^{-1}(\mathcal{F}_{(n+1)}^{(1)})$  de  $\omega_{(n)}^{(2)}$ , la condition  $\omega_{(n+1)}^{(2)} \neq \mathcal{E}_{(n+1)}[u]$  étant assurée par cette propriété de relèvement. Comme dans le cas de l'assertion (2) on obtient par passage à la limite un élément  $y \in S_{(2,2)}^{(m_1, m_3)}$  qui satisfait les propriétés souhaitées.

2.  $S_{(2,2)}^{(m_1, m_3)} \subset \overline{S_{(3,1)}^{(m_1, m_3)}}$ . Soit  $x \in S_{(2,2)}^{(m_3)}$  et  $0 \subset \omega_{(1)}^{(1)} \subset \omega_{(1)}^{(2)} \subset \omega_{(1)}^{(3)} \subset \omega_{(1)}^{(4)}$  la filtration associée. Par définition on a les égalités :

$$\omega_{(1)}^{(1)} = \mathcal{F}_{(1)}^{(1)}, \quad \omega_{(1)}^{(3)} = u^{-1}(\omega_{(1)}^{(1)}), \quad \omega_{(1)}^{(4)} = \mathcal{E}_{(1)}[u^2]$$

Soit  $v_{(1)}^{(4)} \in \omega_{(1)}^{(4)}$  tel que  $\omega_{(1)}^{(4)} = \omega_{(1)}^{(3)} \oplus \langle v_{(1)}^{(4)} \rangle$ . Comme dans la preuve de l'assertion (2), d'après le Lemme 4.2.7, on dispose d'un relèvement  $\mathcal{F}_{(2)}^{(1)}$  de  $\mathcal{F}_{(1)}^{(1)}$  sur  $R_2$ . On définit la déformation sur  $R_2$  comme suit :

$$\mathcal{E}_{(2)} = \mathcal{E} \otimes_{R_1} R_2 \quad \omega_{(2)}^{(1)} = \mathcal{F}_{(2)}^{(1)}, \quad \omega_{(2)}^{(3)} = u^{-1}(\omega_{(2)}^{(1)})$$

Ensuite on choisit un élément  $\alpha_{(2)} \in u^{-1}(\omega_{(2)}^{(3)}) \setminus \mathcal{E}_{(2)}[u^2]$  et un élément  $v_{(2)}^{(4)} \in u^{-1}(\omega_{(2)}^{(3)} \cap \mathcal{E}_{(2)}[u])$  qui relève  $v_{(1)}^{(4)}$ . On définit alors :

$$\omega_{(2)}^{(4)} = \omega_{(2)}^{(3)} \oplus \langle v_{(1)}^{(4)} + t\alpha_{(2)} \rangle$$

On continue le processus par récurrence sur  $n \geq 2$ . Supposons donnés  $\mathcal{E}_{(n)}, \omega_{(n)}^{(k)}$  etc sur  $R_n$ . D'après le lemme 4.2.7 on dispose d'un relèvement canonique  $\mathcal{F}_{(n+1)}^{(1)}$  sur  $R_{n+1}$ . On définit la déformation sur  $R_{n+1}$  comme suit :

$$\mathcal{E}_{(n+1)} = \mathcal{E} \otimes_{R_1} R_{n+1}, \quad \omega_{(n+1)}^{(1)} = \mathcal{F}_{(n+1)}^{(1)}, \quad \omega_{(n+1)}^{(3)} = u^{-1}(\omega_{(n+1)}^{(1)})$$

et on prend n'importe quel relèvement  $\omega_{(n+1)}^{(2)}, \omega_{(n+1)}^{(4)}$ . Les propriétés  $\omega_{(n+1)}^{(2)} \neq \mathcal{E}_{(n+1)}[u]$  et  $\omega_{(n+1)}^{(4)} \neq \mathcal{E}_{(n+1)}[u^2]$  sont assurées par cette propriété de relèvement. Comme dans le cas de l'assertion (2) on obtient par passage à la limite un élément  $y \in S_{(3,1)}^{(m_1, m_3)}$  qui satisfait les propriétés souhaitées.

Nous allons maintenant montrer que les strates sont non vides. D'après les calculs de déformations précédents il suffit de montrer que la strate fermée  $S_{(2,2)}^{(m_1, m_2, m_3, m_4)}$  est non vide. Nous allons utiliser les travaux de Goren et Andreatta [AG03]. Soit  $x \in S_{(2,2)}^{\text{naïf}}$  (la strate KR de  $\text{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{naïf}}$  donnée par le polygone de Hodge (2, 2)) un point défini sur un corps  $k$  algébriquement clos et  $G$  le groupe  $p$ -divisible associé. D'après la Proposition 4.10 de *loc cit* il existe une base  $(e_1, e_2)$  de  $\mathcal{E}(G)$  telle que la filtration de Hodge soit donnée par :

$$\omega_G = \langle u^2 e_1, u^2 e_2 \rangle$$

et que le Frobenius soit donné dans cette base par :

$$F = \begin{pmatrix} u^m & cu^2 \\ u^2 & 0 \end{pmatrix}$$

où  $m \geq 2$  et  $c \in (\mathcal{O}_L \otimes k)^\times$ . On définit la filtration de Pappas Rapoport comme suit :

$$\omega^{(1)} = \langle u^3 e_2 \rangle, \quad \omega^{(2)} = \langle u^3 e_1, u^3 e_2 \rangle, \quad \omega^{(3)} = \langle u^3 e_1 u^2 e_2 \rangle, \quad \omega^{(4)} = \langle u^2 e_1, u^2 e_2 \rangle$$

Cela définit un point  $\tilde{x} \in \text{Sh}_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}}$ . Un simple calcul montre que pour cette filtration on a :

$$\mathcal{F}^{(1)} := F(u^{-1}(\omega^{(3)})^{(p)}) = \langle cu^3 e_2 \rangle$$

En particulier  $\omega^{(1)} = \mathcal{F}^{(1)}$  et par conséquent  $m_1(\tilde{x}) = 0$ . Il est également simple de voir que  $m_2(\tilde{x}) = m_3(\tilde{x}) = m_4(\tilde{x}) = 0$ . Par conséquent  $\tilde{x} \in S_{(2,2)}^{(m_1, m_2, m_3, m_4)}$  et cette dernière strate est donc non vide. □

**Remarque 4.4.3.** Le théorème ci-dessus nous dit essentiellement que l'on peut inverser l'invariant  $m_1$  sans toucher aux autres invariants et réciproquement. Ce qui est assez surprenant dans la preuve de ce théorème c'est que l'on change une donnée  $\sigma$ -linéaire (l'invariant  $m_1$ ) via une déformation d'une donnée linéaire (filtration de Pappas-Rapoport). C'est le Lemme 4.2.7 qui rend ce processus possible. Si nous avions voulu déformer directement sur  $k[[t]]$ , il aurait été difficile de calculer le faisceau  $\mathcal{F}^{(1)}$ .

Dans la preuve de ce théorème, étant donné que l'assertion (2) est vraie sans hypothèse sur l'indice de ramification, nous avons utilisé le fait que  $e = 4$  uniquement pour prouver l'assertion (3). Il est donc naturel de faire la conjecture suivante :

**Conjecture 4.4.4.** *Le théorème 4.4.2 est vrai dans le cas  $e = 5$ .*

Pour des indices de ramification  $e \geq 6$ , il n'est pas clair si la stratification KR de  $\mathcal{S}h_{(\mathcal{D}, K^p)}^{\text{PR}}$  possède un nombre fini de strates et si c'est une bonne stratification, la conjecture ci-dessus n'est donc pas bien définie pour de tels indices.

# Chapitre 5

## Modèles locaux et diamants

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux modèles locaux dans le cadre des travaux de Scholze-Weinstein [SW20] en géométrie de Hodge  $p$ -adique. Soit  $\mathcal{D}$  une donnée PEL et  $K$  une structure de niveau. On note  $(\mathcal{G}, \mu)$  la donnée associée. Dans leurs travaux les auteurs définissent une immersion fermée du ( $v$ -faisceau associé au) modèle local naïf dans une grassmannienne affine de type Beilinson-Drinfeld :

$$\iota^{\text{SW}} : \mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\text{naif}, \diamond} \hookrightarrow \text{Gr}_{\mathcal{G}, \text{Spd } \mathcal{O}_E} \quad (5.0.1)$$

Contrairement au cas schématique où nous avons construit une immersion fermée de la fibre spéciale dans une grassmannienne affine locale classique (3.2.3, 3.2.10), le morphisme construit par Scholze et Weinstein est au dessus de (du  $v$ -faisceau associé à)  $\mathcal{O}_E$ , c'est-à-dire en niveau entier. Pour le modèle local de Pappas-Rapoport  $\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\text{PR}}$  nous avons construit une immersion fermée de sa fibre spéciale dans un produit de convolution de grassmanniennes affines. L'objectif de ce chapitre est de construire pour les modèles locaux de Pappas-Rapoport un analogue du plongement de Scholze-Weinstein (5.1.1), c'est-à-dire un plongement en niveau entier pour les  $v$ -faisceaux associés aux schémas  $\mathbb{M}_{(\mathcal{G}, \mu)}^{\text{PR}}$ .

L'objectif de ce chapitre est également de manipuler les différents outils développés en théorie de Hodge  $p$ -adique dans [SW20] et [FS21], avec des exemples très concrets provenant des modèles locaux des variétés de Shimura. De nombreux rappels seront donc fait tout le long du chapitre pour faciliter la lecture.

### 5.1 Présentation du problème

#### 5.1.1 Modèle local naïf

Plaçons nous dans le cadre d'une donnée  $(\mathcal{G}, \mu) = (\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu)$  où  $F/\mathbb{Q}_p$  est une extension finie. Supposons pour simplifier que le corps réflexe est  $E = \mathbb{Q}_p$ . Dans [SW20] les auteurs définissent une immersion fermée du ( $v$ -faisceau associé au) modèle local

naïf dans une grassmannienne affine de type Beilinson-Drinfeld :

$$\iota^{\text{SW}} : \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}, \diamond} \hookrightarrow \text{Gr}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)} \quad (5.1.1)$$

Le faisceau  $\text{Gr}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)}$  paramétrise des modifications de  $\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n$ -torseurs sur un espace analytique  $\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p} = \mathcal{Y}_{[0, \infty)}$  construit dans [SW20]. Si  $S = \text{Spa}(R, R^+)$  est un espace perfectoïde affinoïde de caractéristique  $p$  et  $\varpi \in R^+$  est une pseudo-uniformisante, alors

$$\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p} = \text{Spa } W(R^+) \setminus V([\varpi])$$

(voir section 5.3.2 pour plus de détails). Dans [PR02] (voir aussi 3.2.3) les auteurs ont construit une immersion fermée de la fibre spéciale du modèle local :

$$\iota^{\text{naïf}} : \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p \hookrightarrow \text{Gr}_{\text{GL}_n} \quad (5.1.2)$$

On ne peut pas directement comparer  $\iota^{\text{naïf}}$  et la fibre spéciale de  $\iota^{\text{SW}}$  car ces deux morphismes ne sont pas dans la même catégorie ( $\iota^{\text{SW}}$  est un morphisme de  $v$ -faisceaux). On peut cependant remarquer que les deux grassmanniennes affines d'arrivées ne sont pas pour les mêmes groupes. En ce sens l'immersion fermée  $\iota^{\text{SW}}$  n'est donc pas un « prolongement » sur  $\text{Spd } \mathbb{Z}_p$  du morphisme  $\iota^{\text{naïf}}$  ie :

$$\iota^{\text{SW}}|_{\text{Spd } \mathbb{F}_p} \neq (\iota^{\text{naïf}})^\diamond$$

Dans ce chapitre nous allons construire une grassmannienne affine de type Beilinson-Drinfeld notée  $\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, \text{GL}_n, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)}$  paramétrant des modifications de  $\text{GL}_n$ -torseurs sur l'espace analytique  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}$  (version sur  $\mathcal{O}_F$  de l'espace  $\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}$ ). Cette grassmannienne affine nous permet de construire une version «  $v$ -faisceutique » du morphisme  $\iota^{\text{naïf}}$ , c'est-à-dire une immersion fermée de  $v$ -faisceaux sur  $\text{Spd } \mathbb{Z}_p$  :

$$\iota_v^{\text{naïf}} : \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}, \diamond} \hookrightarrow \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, \text{GL}_n, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)} \quad (5.1.3)$$

Cette immersion fermée permet notamment de travailler avec le groupe  $\text{GL}_n$  qui est réductif (contrairement au groupe  $\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n$  qui n'est pas réductif si  $F/\mathbb{Q}_p$  est ramifiée). Ce sera un point important lorsque nous voudrons calculer l'image de cette immersion fermée.

### 5.1.2 Modèle local de Pappas-Rapoport

Comme nous l'avons vu au chapitre 3 si l'extension  $F/\mathbb{Q}_p$  est non ramifiée le schéma  $\mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}}$  n'est pas lisse. Soit  $K$  un corps contenant la clôture galoisienne de  $F$ , d'anneau d'entier  $\mathcal{O}_K$  et de corps résiduel  $k$ . Dans [PR02] (voir aussi 3.2.4) les auteurs ont construit un modèle local  $\mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{PR}}$  qui est lisse sur  $\mathcal{O}_K$ , ainsi qu'une immersion fermée de sa fibre spéciale :

$$\iota^{\text{PR}} : \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{PR}} \otimes_{\mathcal{O}_K} k \hookrightarrow \text{Gr}_{\text{GL}_n} \tilde{\times} \dots \tilde{\times} \text{Gr}_{\text{GL}_n}$$

dans un produit de convolution de grassmanniennes affines pour le groupe  $GL_n$ . Cette immersion fermée induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} GL_n, \mu_\bullet)}^{\text{PR}} |_{\text{Spec } k} & \xleftarrow{\iota^{\text{PR}}} & \text{Gr}_{GL_n} \tilde{\times} \dots \tilde{\times} \text{Gr}_{GL_n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} GL_n, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}} |_{\text{Spec } k} & \xleftarrow{\iota^{\text{naïf}}} & \text{Gr}_{GL_n} \end{array}$$

où le morphisme de droite est le morphisme de convolution usuel. Nous allons construire dans ce chapitre une grassmannienne affine de convolution de type Beilinson-Drinfeld sur  $\text{Spd } \mathcal{O}_K$  pour le groupe  $GL_n$ , notée  $\widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \text{Spd } \mathcal{O}_K})}$ , ainsi qu'un morphisme de convolution :

$$\widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \text{Spd } \mathcal{O}_K})} \longrightarrow \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \text{Spd } \mathbb{Z}_p})} |_{\text{Spd } \mathcal{O}_K}$$

Cette grassmannienne affine nous permet de construire un analogue «  $v$ -faisceutique » de  $\iota^{\text{PR}}$  en niveau entier sur  $\text{Spd } \mathcal{O}_K$  :

$$\iota_v^{\text{PR}} : \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} GL_n, \mu_\bullet)}^{\text{PR}, \diamond} \hookrightarrow \widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \text{Spd } \mathcal{O}_K})}$$

Cette immersion fermée est compatible avec  $\iota_v^{\text{naïf}}$  dans le sens où le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} GL_n, \mu_\bullet)}^{\text{PR}, \diamond} & \xleftarrow{\iota_v^{\text{PR}}} & \widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \text{Spd } \mathcal{O}_K})} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} GL_n, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}, \diamond} |_{\text{Spd } \mathcal{O}_K} & \xleftarrow{\iota_v^{\text{naïf}}} & \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \text{Spd } \mathbb{Z}_p})} |_{\text{Spd } \mathcal{O}_K} \end{array}$$

## 5.2 Notations et rappels

Pour ne pas alourdir le chapitre, nous allons travailler dans le cas (AL) en niveau parahorique maximal, i.e. avec le groupe  $\mathcal{G} = \text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} GL_n$ . Nous ferons quelques remarques à la fin du chapitre concernant le cas PEL général.

### 5.2.1 Notations

Soit  $F/\mathbb{Q}_p$  une extension de degré  $[F : \mathbb{Q}_p] = e$  que l'on suppose totalement ramifiée pour simplifier les notations. Soit  $K/\mathbb{Q}_p$  une extension contenant la clôture galoisienne de  $F$ . On note  $\mathcal{O}_F$  l'anneau d'entiers de  $F$  et on fixe  $\pi \in F$  une uniformisante. On note  $\mathcal{O}_K$  l'anneau d'entier de  $K$  et  $k$  son corps résiduel. On note  $\Sigma = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F, K)$ . On dispose d'un morphisme de  $\mathcal{O}_K$ -algèbres :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K &\longrightarrow \prod_{\varphi \in \Sigma} \mathcal{O}_K^{(\varphi)} \\ a \otimes b &\longmapsto (\varphi(a)b)_\varphi \end{aligned}$$



où  $\mathcal{O}_K^{(\varphi)}$  désigne l'anneau  $\mathcal{O}_K$  muni de sa structure de  $\mathcal{O}_F$ -algèbre via le morphisme  $\varphi : \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_K$ . Ce morphisme n'est pas un isomorphisme car on a supposé l'extension  $F/\mathbb{Q}_p$  (totalemment) ramifiée. On notera  $p_\varphi$  la projection sur la composante  $\varphi$ . De la même manière si  $R$  est une  $\mathcal{O}_K$ -algèbre alors on dispose d'un morphisme :

$$R \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F = R \otimes_{\mathcal{O}_K} (\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F) \longrightarrow \prod_{\varphi \in \Sigma} R^{(\varphi)}$$

On notera également  $p_\varphi$  la projection sur la composante  $\varphi$  de ce morphisme.

Si  $X$  est un schéma et  $G$  est un schéma groupe sur  $X$  on écrira  $\text{Tors}(X, G)$  pour désigner la catégorie des  $G$  torseurs sur  $X$  pour la topologie étale.

## 5.2.2 Grassmannienne affine locale classique

Soit  $k$  un corps et  $G$  un schéma en groupe lisse sur  $k$ . La grassmannienne affine locale<sup>1</sup> (classique) pour le groupe  $G$  est le foncteur qui à une  $k$ -algèbre  $R$  associe l'ensemble :

$$\text{Gr}_G(R) = \left\{ (\mathcal{E}, \beta) \mid \begin{array}{l} \mathcal{E} \in \text{Tors}(\mathbb{D}_R, G), \\ \beta : \mathcal{E}|_{\mathbb{D}_R^*} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_0|_{\mathbb{D}_R^*} \end{array} \right\} / \sim$$

où  $\mathcal{E}_0$  désigne le torseur trivial,  $\mathbb{D}_R = \text{Spec } R[[t]]$  le disque unité sur  $R$ , et  $\mathbb{D}_R^* = \text{Spec } R((t))$  le disque unité épointé. Lorsque  $G = \text{GL}_n$ , via l'identification entre  $\text{GL}_n$ -torseurs et modules localement libres on obtient la description suivante

$$\text{Gr}_G(R) = \left\{ \Lambda \subset R((t))^n \mid \begin{array}{l} \Lambda \text{ } R[[t]]\text{-module localement libre,} \\ \Lambda[\frac{1}{t}] = R((t))^n \end{array} \right\}$$

## 5.2.3 Modèle local naïf

Nous allons définir le modèle local naïf pour une donnée PEL correspondant au groupe  $\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n$ , comme cela a été fait en 3.2.1.1.

Soit  $V$  un  $F$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . On fixe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $V$ . On note  $\Lambda$  le  $\mathcal{O}_F$ -module libre de base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Pour tout plongement  $\varphi \in \Sigma$  on fixe un entier  $0 \leq r_\varphi \leq n$ . Avec ces entiers on définit le cocaractère :

$$\mu_\bullet := (1^{r_\varphi}, 0^{n-r_\varphi})_{\varphi \in \Sigma} : (\mathbb{G}_m)_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \rightarrow (\text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}_n)_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \cong \prod_{\varphi \in \Sigma} \text{GL}_n$$

On note  $E$  le corps de définition de  $\mu$  (appelé corps réflexe),  $\mathcal{O}_E$  son anneau d'entier et  $\kappa$  son corps résiduel. Le modèle local PEL naïf pour le groupe  $\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n$  et le cocaractère  $\mu_\bullet = (1^{r_\varphi}, 0^{n-r_\varphi})_{\varphi \in \Sigma}$  noté  $\mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}}$ , est le schéma sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_E$  représentant le foncteur qui à  $(S \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_E)$  associe l'ensemble  $\mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}}$  des  $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$ -sous modules  $\mathcal{F} \subset \Lambda_S := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$  tels que

<sup>1</sup>Le terme « locale » est là pour rappeler que cette grassmannienne affine vit au dessus du point  $*$  =  $\text{Spec } k$ , contrairement aux grassmanniennes affines globales de type Beilinson-Drinfeld qui vivent au dessus d'une courbe.

- $\mathcal{F}$  est localement sur  $S$  (pour la topologie Zariski) un  $\mathcal{O}_S$ -facteur direct de  $\Lambda_S$  de rang  $r = \sum_{\varphi} r_{\varphi}$ .
- $\mathcal{F}$  satisfait la condition de déterminant de Kottwitz relative à  $\mu$  :

$$\forall a \in \mathcal{O}_F, \quad \det(a | \mathcal{F}) = \prod_{\varphi \in \Sigma} \varphi(a)^{r_{\varphi}}$$

Par construction  $\mathcal{G} = \text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n$  est le schéma en groupe sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}_p$  des automorphismes de  $\Lambda$  (vu comme un  $\mathbb{Z}_p$ -module) compatibles avec l'action de  $\mathcal{O}_F$ .

## 5.2.4 Plongement de Pappas-Rapoport

Classiquement le plongement de la fibre spéciale de  $\mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_{\bullet})}^{\text{naïf}}$  utilisé dans [PR02] est défini comme suit. Soit  $R \in \text{Alg}_k$ . Le choix d'une uniformisante  $\pi \in \mathcal{O}_F$  nous fournit une identification :

$$\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \simeq R[[u]]/(u^e), \quad \pi \otimes 1 \mapsto u$$

Cela induit un isomorphisme de  $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$ -modules :

$$\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \simeq \tilde{\Lambda}_R \otimes_{R[[u]]} R[[u]]/(u^e)$$

où  $\tilde{\Lambda}_R = (R[[u]])^n$  désigne le réseau trivial. On note  $p$  la projection :

$$p : \tilde{\Lambda}_R \rightarrow \tilde{\Lambda}_R \otimes_{R[[u]]} R[[u]]/(u^e)$$

Soit  $\mathcal{F} \in \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_{\bullet})}^{\text{naïf}}(R)$ . On définit le réseau :

$$\Lambda_{\mathcal{F}} := p^{-1} \left( \mathcal{F} \subset \tilde{\Lambda}_R \otimes_{R[[u]]} R[[u]]/(u^e) \right) \quad (5.2.1)$$

**Proposition 5.2.1.** *On dispose d'une immersion fermée :*

$$\begin{array}{ccc} \iota^{\text{naïf}} : \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_{\bullet})}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \kappa & \hookrightarrow & \text{Gr}_{\text{GL}_n} \\ \mathcal{F} & \longmapsto & \Lambda_{\mathcal{F}} \end{array}$$

*Démonstration.* Voir 3.2.3. □

**Remarque 5.2.2.** Le plongement ci-dessus a été défini via la projection  $R[[u]] \rightarrow R[u]/(u^e)$  et la variable considérée dans la décomposition de Cartan est donc la variable «  $u = \pi$  ». On a le diagramme commutatif aux lignes horizontales exactes :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} (R[u]/u^e) \\ p \uparrow & & p \uparrow & & p \uparrow \\ \text{Ker}(p) = (u^e) & \longrightarrow & \Lambda_{\mathcal{F}} & \longrightarrow & \tilde{\Lambda}_R \end{array}$$

### 5.2.5 Travaux de B.Levin

Les travaux de B.Levin dans [Lev16] permettent de définir un modèle local plat dans le cas de groupes définis par une restriction de Weil. Ces travaux sont bien plus généraux que le cas PEL et on se propose ici de voir le lien entre ces travaux et ceux de [PR02].

Pour simplifier les notations on se place dans le cas d'un groupe  $H$  réductif sur  $\mathbb{Z}_p$ . On fait l'abus de notation de continuer de noter  $H = H \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[u]$  l'extension constante. Soit  $E(u) \in \mathbb{Z}_p[u]$  le polynôme minimal de  $\pi \in \mathcal{O}_F$  (c'est un polynôme d'Eisenstein). On note  $D \subset \mathbb{A}_{\mathbb{Z}_p}^1$  le diviseur défini par l'équation  $E(u) = 0$ .

**Définition 5.2.3** ([Lev16] Définition 2.2.3). *Pour tout  $\mathbb{Z}_p$ -algèbre  $R$  on définit :*

$$\mathrm{Gr}_H^{E(u)}(R) = \left\{ (\mathcal{E}, \beta) \mid \begin{array}{l} \mathcal{E} \in \mathrm{Tors}(\mathbb{A}_R^1, H), \\ \beta : \mathcal{E}|_{\mathbb{A}_R^1 \setminus D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^0|_{\mathbb{A}_R^1 \setminus D} \end{array} \right\} / \sim$$

**Exemple 5.2.4.** Lorsque  $F = \mathbb{Q}_p$  le polynôme minimal est simplement  $E(u) = u - p$ . Dans ce cas la grassmannienne affine  $\mathrm{Gr}_H^{E(u)}$  coïncide avec la grassmannienne affine construite par Pappas et Zhu dans [PZ11] (5.11).

Après changement de base à une extension de  $\mathbb{Q}_p$  dans laquelle le polynôme  $E(u)$  possède  $e = [F : \mathbb{Q}_p]$  racines distinctes (par exemple l'extension  $K/\mathbb{Q}_p$ ) le diviseur  $D$  devient la somme de  $e$  points distincts. A l'inverse en fibre spéciale  $E(u) = u^e$  et par conséquent le diviseur  $D$  est réduit à un point (attention il n'est pas réduit au sens de la géométrie algébrique!). Géométriquement on a la proposition suivante :

**Proposition 5.2.5** ([Lev16] Proposition 2.2.8). *Le foncteur  $\mathrm{Gr}_H^{E(u)}$  est représentable par un ind-schéma qui est ind-projectif sur  $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}_p$ . De plus :*

1. *En fibre générique on dispose d'un isomorphisme :*

$$\mathrm{Gr}_H^{E(u)} \times_{\mathrm{Spec} \mathbb{Z}_p} \mathrm{Spec} \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}_{\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(H_F)}$$

2. *En fibre spéciale on dispose d'un isomorphisme :*

$$\mathrm{Gr}_H^{E(u)} \times_{\mathrm{Spec} \mathbb{Z}_p} \mathrm{Spec} \mathbb{F}_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}_{H_{\mathbb{F}_p}}$$

**Définition 5.2.6.** *Soit  $\mu : \mathbb{G}_m \rightarrow (\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(H_F))_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$  une classe de conjugaison de cocaractères minuscules. On note  $E$  le corps réflexe de  $\mu$ . Le modèle local pour le couple  $(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p}(H_{\mathcal{O}_F}), \mu)$ , noté  $\mathrm{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p}(H_{\mathcal{O}_F}), \mu)}^{\mathrm{Levin}}$  est définie comme étant la clôture schématique du sous schéma :*

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(H_F)}^{\leq \mu} \hookrightarrow (\mathrm{Gr}_H^{E(u)})_{\mathcal{O}_E}$$

**Exemple 5.2.7.** Explicitons cette définition pour le groupe  $H = \mathrm{GL}_n$  et pour un cocaractère  $\mu = (1^{r_\varphi}, 0^{n-r_\varphi})_{\varphi \in \Sigma}$ . Par construction si  $R$  est une  $\mathcal{O}_E$ -algèbre alors  $\mathrm{Gr}_{\mathrm{GL}_n}^{E(u)}(R)$  est l'ensemble des  $R[u]$ -modules projectifs  $M \subset (M_0 \otimes R)[\frac{1}{E(u)}]$  tels que  $M[\frac{1}{E(u)}] = (M_0 \otimes R)[\frac{1}{E(u)}]$ , où  $M_0 = (\mathcal{O}_E[u])^n$  désigne le réseau trivial. Notons  $p : R[u] \rightarrow R[u]/E(u)$  la projection. En écrivant  $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \simeq R[u]/E(u)$  et en utilisant un procédé similaire à 5.2.1, si  $\mathcal{F} \in \mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\mathrm{naïf}}(R)$  on construit un réseau  $M_{\mathcal{F}} := p^{-1}(\mathcal{F}) \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{GL}_n}^{E(u)}(R)$ . Ce procédé nous fournit une immersion fermée sur  $\mathcal{O}_E$  :

$$\iota^{\mathrm{Levin}} : \mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\mathrm{naïf}} \hookrightarrow (\mathrm{Gr}_{\mathrm{GL}_n}^{E(u)})_{\mathcal{O}_E} \quad (5.2.2)$$

Par construction en fibre spéciale sur  $\kappa$  on a l'égalité  $E(u) = u^e$  et par conséquent les deux réseaux  $\Lambda_{\mathcal{F}}$  et  $M_{\mathcal{F}}$  coïncident. Dit autrement, le morphisme  $\iota^{\mathrm{Levin}}$  ci-dessus coïncide en fibre spéciale avec le plongement  $\iota^{\mathrm{naïf}}$  (5.2.1).

**Proposition 5.2.8.** *L'immersion fermée  $\iota^{\mathrm{Levin}}$  induit un isomorphisme de schémas :*

$$\mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\mathrm{naïf}} \simeq \mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n, \mu)}^{\mathrm{Levin}} \quad (5.2.3)$$

si et seulement si les  $(r_\varphi)_{\varphi \in \Sigma}$  diffèrent d'au plus 1.

*Démonstration.* La condition sur les entiers  $(r_\varphi)_{\varphi \in \Sigma}$  est équivalente à ce que le schéma  $\mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\mathrm{naïf}}$  soit plat d'après [PR00] Corollaire 4.3 (voir aussi 3.2.7), et est donc égale à la clôture schématique de sa fibre générique. Le résultat en découle car la fibre générique de  $\mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\mathrm{naïf}}$  s'identifie à  $\mathrm{Gr}_{\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}}^{\leq \mu}(H_F)$  via le morphisme  $\iota$ .  $\square$

**Remarque 5.2.9.** Les travaux de [Lev16] et [PR02] utilisent le même procédé pour passer de  $\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n$ -torseurs à des  $\mathrm{GL}_n$ -torseurs : ils changent la base sur laquelle sont les toseurs. Plus précisément si  $S$  est un schéma sur  $\mathrm{Spec} \mathcal{O}_E$ , via l'équivalence de catégorie entre  $\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n$ -torseurs et  $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$ -modules localement libres de rang  $n$ , le  $\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n$ -torseur trivial  $\mathcal{E}_0$  sur  $S$  correspond au  $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$ -module :

$$E_0 = (\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S)^n$$

En utilisant la présentation  $\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}_p[u]/E(u)$  on obtient via la projection  $\mathbb{Z}_p[u] \rightarrow \mathbb{Z}_p[u]/E(u)$  le  $\mathrm{GL}_n$ -torseur trivial sur  $\mathbb{A}_S^1$  :

$$\widetilde{E}_0 = \mathcal{O}_S[u]^n$$

On a donc « intégré » l'action de l'anneau  $\mathcal{O}_F$  « dans la courbe  $\mathbb{A}_{\mathcal{O}_E}^1$  » via la variable formelle  $u = \pi$ . Nous utiliserons le même procédé dans la Section 5.5.

### 5.3 Préliminaire de géométrie $p$ -adique

Dans cette partie nous allons faire quelques rappels de géométrie  $p$ -adique. Je suppose le lecteur familier avec les différents concepts de [SW20] et [Sch22].

### 5.3.1 Le foncteur diamant

On note  $\text{Perf}_k$  la catégorie des espaces perfectoides de caractéristique  $p$  sur  $k$ , que l'on munit de la  $v$ -topologie. On note  $\widetilde{\text{Perf}}_k$  le topos associé. On suit les explications de [AGLR22] §2.2 et [PR23] §2.1.

#### 5.3.1.1 Pour les espaces (pré)-adique

Soit  $X$  un espace pré-adique sur  $\text{Spa}(\mathbb{Z}_p)$  ([SW20], Appendice lecture 3). Le  $v$ -faisceau  $X^\diamond$  sur  $\text{Spd}(\mathbb{Z}_p)$  est le foncteur qui à  $S \in \text{Perf}_{\mathbb{F}_p}$  associe les classes d'isomorphismes de triplets  $(S^\sharp, \iota, x)$  avec :

- (1)  $(S^\sharp, \iota)$  est un untilt de  $S$  sur  $\text{Spa}(\mathbb{Z}_p)$ .
- (2)  $x : S^\sharp \rightarrow Y$  est un morphisme d'espaces pré-adiques au dessus de  $\text{Spa}(\mathbb{Z}_p)$ .

#### 5.3.1.2 Pour les schémas

Pour les schémas on dispose de deux constructions pour associer à un schéma sur  $\mathbb{Z}_p$  un  $v$ -faisceau.

- Soit  $X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}_p$  un schéma de type fini séparé. On peut associer à  $X$  un espace adique sur  $\text{Spa } \mathbb{Z}_p$  :

$$X^{\text{an}} := X \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}_p} \text{Spa } \mathbb{Z}_p$$

où le produit fibré est au sens de Huber ([Hub94] Proposition 3.8). On définit alors le  $v$ -faisceau sur  $\text{Spd}(\mathbb{Z}_p)$  :

$$X^\diamond := (X^{\text{an}})^\diamond$$

Au niveau des points, ce foncteur coïncide avec la faisceautisation du préfaisceau qui à un objet  $S = \text{Spa}(R, R^+) \in \text{Perf}_{\mathbb{F}_p}$  associe les classes d'isomorphismes de triplets  $(\text{Spa}(R^\sharp, R^{\sharp+}), \iota, x)$  où  $(\text{Spa}(R^\sharp, R^{\sharp+}), \iota)$  est un untilt de  $\text{Spa}(R, R^+)$  et  $x : \text{Spec}(R^\sharp) \rightarrow X$  est un morphisme de schémas au dessus de  $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ , i.e.  $x \in X(R^\sharp)$ .

- Soit  $X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}_p$  un schéma de type fini séparé. Notons  $\widehat{X} \rightarrow \text{Spf}(\mathbb{Z}_p)$  le schéma formel donné par la complétion  $p$ -adique de  $X$ , et  $\widehat{X}^{\text{ad}} \rightarrow \text{Spa}(\mathbb{Z}_p)$  l'espace adique associé. On définit le  $v$ -faisceau sur  $\text{Spd}(\mathbb{Z}_p)$  :

$$X^\blacklozenge := (\widehat{X}^{\text{ad}})^\diamond$$

Au niveau des points, ce foncteur coïncide avec la faisceautisation du préfaisceau qui à un objet  $S = \text{Spa}(R, R^+) \in \text{Perf}_{\mathbb{F}_p}$  associe les classes d'isomorphismes de triplets  $(\text{Spa}(R^\sharp, R^{\sharp+}), \iota, x)$  où  $(\text{Spa}(R^\sharp, R^{\sharp+}), \iota)$  est un untilt de  $\text{Spa}(R, R^+)$  et  $x : \text{Spec}(R^{\sharp+}) \rightarrow X$  est un morphisme de schémas au dessus de  $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ , i.e.  $x \in X(R^{\sharp+})$ .

L'inclusion de schémas  $\mathrm{Spec}(R^\sharp) \rightarrow \mathrm{Spec}(R^{\sharp+})$  induit un morphisme de  $v$ -faisceaux au dessus de  $\mathbb{Z}_p$  :

$$X^\blacklozenge \hookrightarrow X^\diamond \quad (5.3.1)$$

qui est une immersion ouverte (on a supposé que  $X$  était séparé et de type fini sur  $\mathbb{Z}_p$ ). Ce morphisme de  $v$ -faisceau est induit par le morphisme d'espaces adiques au dessus de  $\mathrm{Spa}(\mathbb{Z}_p)$  :

$$\widehat{X}^{\mathrm{ad}} \hookrightarrow X^{\mathrm{an}}$$

en appliquant le foncteur  $(\cdot)^\diamond$ . Il découle du critère valuatif de propreté que ces morphismes sont des isomorphismes lorsque  $X$  est propre sur  $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$  (pour plus de détails voir [Hub94] 4.6).

### 5.3.2 Les courbes

Soit  $E$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ , d'anneau d'entiers  $\mathcal{O}_E$  et de corps résiduel  $k$ . Par la suite  $E$  désignera  $F$  ou  $\mathbb{Q}_p$ . On fixe une uniformisante  $\pi \in E$ . Soit  $S = \mathrm{Spa}(R, R^+) \in \mathrm{Perf}_k$  un espace perfectoïde et  $\varpi \in R^+$  une pseudo-uniformisante. Comme dans [FS21] (Section II.1.1) on définit :

$$\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}^{[0, \infty]}(S) := \mathrm{Spa} W_{\mathcal{O}_E}(R^+) \setminus V(\pi, [\varpi])$$

C'est un espace adique analytique sur  $\mathcal{O}_E$ . L'indice  $(\cdot)_{\mathcal{O}_E}$  est là pour rappeler que les coefficients utilisées sont les vecteurs de Witt ramifiés  $W_{\mathcal{O}_E}(\cdot)$ . On dispose d'une application continue sur l'espace topologique sous-jacent :

$$\kappa : |\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}^{[0, \infty]}(S)| \longrightarrow [0, \infty]$$

qui envoie un point  $x \in \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S)$  sur  $\log |[\varpi](\tilde{x})| / \log |\pi(\tilde{x})|$  où  $\tilde{x}$  est la générisation de rang 1 de  $x$ . Pour tout intervalle  $I = [a, b] \subset [0, \infty]$  avec  $a, b \in \mathbb{Q}$  on définit l'ouvert :

$$\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}^I := \{|\pi|^b \leq |[\varpi]| \leq |\pi|^a\} \subset \kappa^{-1}(I)$$

Ce sont des ouverts rationnels de  $\mathrm{Spa} W_{\mathcal{O}_E}(R^+)$  et par conséquent sont des espaces adiques affinoïdes :

$$\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}^I = \mathrm{Spa}(B_{\mathcal{O}_E}^I(S), B_{\mathcal{O}_E}^{I,+}(S))$$

On définit également les espaces adiques suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}^{[0, \infty)}(S) &= \mathrm{Spa} W_{\mathcal{O}_E}(R^+) \setminus V([\varpi]) \\ \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}^{(0, \infty]}(S) &= \mathrm{Spa} W_{\mathcal{O}_E}(R^+) \setminus V(\pi) \end{aligned}$$

Pour ne pas alourdir les notations nous noterons par la suite  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) = \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}^{[0, \infty)}(S)$ . Attention cette notation diffère de [SW20] où  $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{[0, \infty]}$ , mais elles coïncident avec celles de [FS21]. On a le théorème suivant dû à Kedlaya et dont nous aurons besoin par la suite :

**Théoreme 5.3.1** ([SW20] Théorème 13.1.3, [Ked15] Théorème 4.10). *Soit  $\mathrm{Spa}(C, C^+) \in \mathrm{Perf}_k$  avec  $C$  algébriquement clos. L'espace adique  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(C, C^+)$  est fortement noethérien.*

**Remarque 5.3.2.** Ce résultat est crucial car il nous permettra par la suite d'utiliser les travaux de Huber [Hub96] qui sont démontrés dans le cadre d'espaces adiques fortement noethériens.

On peut maintenant passer au lien entre  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S)$  et les untilts de  $S$ .

**Proposition 5.3.3** ([?] Proposition II.1.2). *Il existe un isomorphisme naturel :*

$$\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S)^\diamond \cong \mathrm{Spd} \mathcal{O}_E \times S$$

Enfin la proposition suivante caractérise les untilts de  $S$  :

**Proposition 5.3.4** ([?] Proposition II.1.4). *Les objets suivants sont en bijections naturelles :*

1. *Sections de la projection  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S)^\diamond \rightarrow S$ ,*
2. *Morphismes  $S \rightarrow \mathrm{Spd} \mathcal{O}_E$ ,*
3. *Untilts  $S^\sharp \rightarrow \mathrm{Spa} \mathcal{O}_E$  de  $S$ .*

*De plus, étant donné un untilt  $S^\sharp \rightarrow \mathrm{Spa} \mathcal{O}_E$  de  $S$ , l'immersion fermée naturelle*

$$S^\sharp \hookrightarrow \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S)$$

*fait de  $S^\sharp$  un diviseur de Cartier sur  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S)$ .*

Par la suite nous serons amenés à travailler avec des modifications de toiseurs sur l'espace adique  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}$  et il sera utile de pouvoir comparer ces objets avec des objets classique dans le monde des schémas. Soit  $S = \mathrm{Spa}(R, R^+) \in \mathrm{Perf}_k$ , on définit donc une version algébrique de  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S)$  :

$$\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}^{\mathrm{alg}}(S) := \mathrm{Spec} W_{\mathcal{O}_E}(R^+) \setminus V(\pi, [\varpi])$$

Il découle des définitions que l'on dispose d'un morphisme d'espaces localement annelés :

$$f : \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \rightarrow \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}^{\mathrm{alg}}(S)$$

Kedlaya et Liu ont alors démontré le Théorème suivant de type GAGA :

**Théoreme 5.3.5** ([Ked19] 3.8, [Gle20] 2.1.12). *Soit  $S = \mathrm{Spa}(R, R^+) \in \mathrm{Perf}_k$ . Le foncteur image inverse  $f^* : \mathrm{Vect}(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}^{\mathrm{alg}}) \rightarrow \mathrm{Vect}(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E})$  induit une équivalence exacte de catégories entre la catégorie des fibrés vectoriels sur  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}^{\mathrm{alg}}$  et celle des fibrés vectoriels sur  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}$ .*

Enfin le corollaire suivant nous assure que les notions de modifications de fibrés vectoriels sur  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}$  et  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}^{\mathrm{alg}}$  coïncident :

**Corollaire 5.3.6.** *Le foncteur image inverse induit une équivalence*

$$f^* : \text{Vect}(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}^{\text{alg}}) \rightarrow \text{Vect}(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E})$$

entre la catégorie dont les objets sont les fibrés vectoriels sur  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}^{\text{alg}}$  (resp. fibrés vectoriels sur  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}$ ) et dont les morphismes sont les fonctions sur  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}^{\text{alg}} \setminus V(\xi)$  (resp. fonctions méromorphes le long de l'idéal  $(\xi)$ ).

*Démonstration.* [Gle20] Corollaire 2.1.14 □

### 5.3.3 Préparations aux restrictions de Weil

#### 5.3.3.1 Morphismes entre courbes

Soit  $S = \text{Spa}(R, R^+) \in \text{Perf}_{\mathbb{F}_p}$  un espace perfectoïde. On dispose des deux espaces analytiques :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S) &= \text{Spa } W_{\mathcal{O}_F}(R^+) \setminus V([\varpi]) \\ \mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}(S) &= \text{Spa } W(R^+) \setminus V([\varpi]) \end{aligned}$$

Le morphisme canonique  $W(R^+) \rightarrow W_{\mathcal{O}_F}(R^+)$  induit un morphisme au niveau des espaces adiques :

$$\pi : \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S) \longrightarrow \mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}(S)$$

**Définition 5.3.7.** *Pour tout entier  $d > 0$  on définit les petits  $v$ -faisceaux sur  $\text{Perf}_{\mathbb{F}_p}$  :*

$$\text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}}^d := (\text{Spd } \mathcal{O}_F)^d / \Sigma_d$$

$$\text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}}^d := (\text{Spd } \mathbb{Z}_p)^d / \Sigma_d$$

#### 5.3.3.2 Théorème de factorisation

Soit  $S \rightarrow \text{Spd } \mathbb{Z}_p$  un morphisme donné par un untilt  $S^\sharp = \text{Spa}(R^\sharp, R^{\sharp+}) \rightarrow \text{Spa } \mathbb{Z}_p$ . On dispose du morphisme de Fontaine :

$$\begin{aligned} \theta : W(R^+) &\longrightarrow R^{\sharp+} \\ \sum_{i \geq 0} [a_i] p^i &\longmapsto \sum a_i^\sharp p^i \end{aligned}$$

dont le noyau est engendré par un élément  $\xi \in W(R^+)$  primitif de degré 1 au sens de la définition suivante :

**Définition 5.3.8** ([?] 1.4.3). *Un élément  $\xi \in W(R^+)$  est dit primitif de degré  $d > 0$  :*

1.  $a_0 \in R^{\circ\circ} \cap R^\times$
2.  $a_1, \dots, a_{d-1} \in R^{\circ\circ}$



3.  $a_d \in R^{\circ \times}$

On dispose du théorème de factorisation de Fargues-Fontaine :

**Théorème 5.3.9** ([FFpdPC18] Théorème 2.4.1). *Soit  $\mathrm{Spa}(C, C^+) \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$  un corps. On suppose  $C$  algébriquement clos. Soit  $\xi \in W(C^+)$  primitif de degré  $d > 0$ . Alors il existe  $\xi_1, \dots, \xi_d \in W(C^+)$  primitifs de degré 1 tels que l'on ait la factorisation :*

$$\xi = \xi_1 \cdots \xi_d \in W(C^+)$$

D'après la remarque VI.1.3 de [FS21], il découle du théorème de factorisation ci-dessus que le  $v$ -faisceau  $\mathrm{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}}^d$  paramétrisant les éléments primitifs de degré  $d$ . Bien sûr les résultats ci-dessus restent valables si l'on prend l'anneau de coefficients  $\mathcal{O}_F$  plutôt que  $\mathbb{Z}_p$ .

**Remarque 5.3.10.** Malheureusement je n'ai pas trouvé de preuve de la remarque VI.1.3 de [FS21]. Notons  $\widetilde{\mathrm{Div}}_{\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}}^d$  le  $v$ -faisceau sur  $\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$  paramétrisant les éléments primitifs de degré  $d$ . On dispose d'un morphisme canonique :

$$\begin{aligned} (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_F)^d &\longrightarrow \widetilde{\mathrm{Div}}_{\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}}^d \\ (\xi_1, \dots, \xi_d) &\longmapsto \xi_1 \cdots \xi_n \end{aligned}$$

qui est un isomorphisme au niveau des points géométriques d'après le théorème de factorisation. Pour conclure que c'est un isomorphisme de (petits)  $v$ -faisceaux, il faudrait prouver que ce morphisme est quasi-compact quasi-séparé, ce que je n'ai pas réussi à faire.

On a le lemme suivant :

**Lemme 5.3.11.** *Soit  $\xi \in W(R^+)$  primitif de degré 1. Alors  $\xi \in W_{\mathcal{O}_F}(R^+)$  est primitif de degré  $e = [F : \mathbb{Q}_p]$ .*

*Démonstration.* Il suffit de voir que via l'application canonique  $W(R^+) \rightarrow W_{\mathcal{O}_F}(R^+)$  l'élément  $\xi = \sum_{i \geq 0} [a_i] p^i$  s'envoie sur  $\sum_{i \geq 0} [a_i] \pi^{ie}$ .  $\square$

Il résulte de ce lemme que l'on dispose d'un morphisme de petits  $v$ -faisceaux :

$$\pi^{-1} : \mathrm{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}}^1 \longrightarrow \mathrm{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}}^e \quad (5.3.2)$$

qui envoie un élément  $\xi \in W(R^+)$  primitif de degré 1 sur l'élément  $\xi \in W_{\mathcal{O}_F}(R^+)$  primitif de degré  $e$ .

**Remarque 5.3.12.** Ce morphisme est l'analogue de l'application « fibre » pour un morphisme  $\pi : X \rightarrow Y$  fini surjectif de degré  $d$  entre courbes propres lisses sur un corps  $k$  :

$$\begin{aligned} \pi^{-1} : \mathrm{Div}_Y^1 &\longrightarrow \mathrm{Div}_X^d \\ y &\longmapsto \pi^{-1}(\{y\}) \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Au niveau des points, si  $S$  est un schéma cette application envoie un diviseur de Cartier relatif  $D \subset Y_S$  sur le diviseur  $(D \times_{Y_S} X_S \subset X_S)$ . On fera attention au fait que dans le cadre des schémas le faisceau des diviseurs de Cartier de degré 1 sur  $Y$  (resp. de degré  $d$  sur  $X$ ) est représenté par  $Y$  (resp. par la  $d$ -ème puissance symétrique de  $X$ ). Cette correspondance envoie un point  $y \in Y(S)$  sur le diviseur  $D = \Gamma_y \subset Y \times_k S$  donné par le graphe de  $y$  (ce qui justifie la notation (5.3.3)). La situation est différente pour  $\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}$  où le faisceau des diviseurs de degré 1 (resp. de degré  $d$  sur  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}$ ) est donné par  $\mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p$  qui n'est qu'un  $v$ -faisceau (resp. par  $(\mathrm{Spd} \mathcal{O}_F)^d / \Sigma_d$ ). Dans notre contexte l'application fibre est donnée par le produit cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(S^\sharp) & \hookrightarrow & \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^\sharp & \hookrightarrow & \mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}(S) \end{array}$$

où  $S^\sharp \subset \mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}(S)$  joue le rôle analogue du graphe  $\Gamma_y \subset Y \times_k S$  associé à un point  $y : S \rightarrow Y$ .

### 5.3.4 Études des fibres

Nous allons décrire l'image du morphisme fibre  $\pi^{-1}$  (5.3.2) au niveau des points géométriques. Soit  $S = \mathrm{Spa}(C, C^+) \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$  où  $C$  est un corps perfectoïde que l'on suppose algébriquement clos et  $S \rightarrow \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p$  un morphisme vu comme un point de  $\mathrm{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}}^1(S)$ . On note  $S^\sharp \rightarrow \mathrm{Spa} \mathbb{Z}_p$  l'untilt associé. On dispose d'un morphisme canonique de  $\mathcal{O}_F$ -algèbres :

$$W(C^+) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F = W_{\mathcal{O}_F}(C^+) \xrightarrow{\theta \otimes 1} C^{\sharp+} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F \rightarrow \prod_{\varphi \in \Sigma} C_\varphi^{\sharp+} \quad (5.3.4)$$

où  $\Sigma = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{O}_F, C^{\sharp+})$ . Notons  $\theta_\varphi = p_\varphi \circ (\theta \otimes 1)$  la composée avec la projection sur la composante indexée par  $\varphi \in \Sigma$ . On définit pour tout  $\varphi \in \Sigma$  l'élément  $\xi_\varphi := \pi - [\varphi(\pi)^p] \in W_{\mathcal{O}_F}(C^+)$ , qui est un élément primitif de degré 1. Par construction on a :

$$\mathrm{Ker}(\theta_\varphi) = (\xi_\varphi)$$

et ces éléments satisfont l'égalité :

$$\xi = u \prod_{\varphi \in \Sigma} \xi_\varphi \in W_{\mathcal{O}_F}(C^+)$$

où  $\xi = p - [p^p] \in W(C^+)$  est un générateur de  $\mathrm{Ker}(\theta)$  et  $u \in W_{\mathcal{O}_F}(C^+)^\times$  est un élément inversible. En effet si  $C$  est de caractéristique  $p$ , alors  $\xi_\varphi = \pi$  pour tout  $\varphi \in \Sigma$  et  $\xi = p$  et donc cela découle de l'égalité d'idéaux  $(\pi^e) = (p)$ . Si  $C$  est caractéristique 0, alors la flèche de droite dans l'équation (5.3.4) est injective (c'est un isomorphisme après changement de base à  $C^\sharp$ ), et par conséquent on a l'égalité au niveau des noyaux

$\text{Ker}(\theta \otimes 1) = \text{Ker}(\prod_{\varphi} \theta_{\varphi})$ , c'est-à-dire  $(\xi) = (\prod_{\varphi} \xi_{\varphi})$  dans  $W_{\mathcal{O}_F}(C^+)$ . Géométriquement cela se traduit par l'égalité dans  $\text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}}^e(S)$  :

$$\pi^{-1}(S^{\sharp}) = \sum_{\varphi} D_{\varphi, S^{\sharp}}$$

où  $D_{\varphi, S^{\sharp}} \subset \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S)$  désigne le diviseur associé à  $\xi_{\varphi} \in W_{\mathcal{O}_F}(C^+)$ . On a donc distingué deux situations :

1.  $S \rightarrow \text{Spd } \mathbb{Q}_p$ . Dans ce cas les  $\xi_{\varphi}$  sont deux à deux distincts car les plongements  $\varphi : \mathcal{O}_F \rightarrow C^+$  sont deux à deux distincts. En termes de diviseurs on a donc :

$$\pi^{-1}(S^{\sharp}) = \prod_{\varphi} D_{\varphi, S^{\sharp}}$$

avec tous les  $D_{\varphi, S^{\sharp}} \in \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}}^1(S)$  distincts.

2.  $S \rightarrow \text{Spd } \mathbb{F}_p$ . Dans ce cas les  $\xi_{\varphi} = \pi$  sont tous égaux car donnés par l'unique morphisme  $\varphi : \mathcal{O}_F \rightarrow \mathbb{F}_p \rightarrow C^+$ . En termes de diviseurs cela se traduit par l'égalité dans  $\text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}}^e(S)$

$$\pi^{-1}(S^{\sharp}) = e \cdot D_{\varphi, S^{\sharp}}$$

où  $D_{\varphi, S^{\sharp}}$  est le diviseur défini par  $\xi_{\varphi} = \pi \in W_{\mathcal{O}_F}(C^+)$  (le même pour tout  $\varphi \in \Sigma$ ).

Pour résumer la situation on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spd } \mathbb{F}_p & \hookrightarrow & \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}}^1 & \longleftarrow & \text{Spd } \mathbb{Q}_p \\ \downarrow & & \downarrow \pi^{-1} & & \downarrow \\ \Delta & \hookrightarrow & \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}}^e & \longleftarrow & \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}}^e \setminus \Delta^{(e)} \end{array} \quad (5.3.5)$$

où  $\Delta^{(e)}$  désigne l'ensemble des diagonales dans  $\text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}}^e = (\text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}}^1)^e / \Sigma_d$  (c'est-à-dire le lieu où les points sont deux à deux distincts) et  $\Delta$  le lieu où tous les points sont égaux.

**Remarque 5.3.13.** Dans [LH22] Huerta travaille en fibre générique sur  $\text{Spd } \mathbb{Q}_p$ , alors qu'ici nous travaillons en niveau entier sur  $\text{Spd } \mathbb{Z}_p$ . La différence est que le morphisme  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F} \rightarrow \mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}$  est étale en fibre générique, ce qui se traduit par la flèche verticale de droite dans le diagramme ci-dessus. La ramification en fibre spéciale amène quelques complications, en particulier lorsque l'on souhaite comparer les toseurs sur  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}$  et  $\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}$  (comparer [LH22] 1.7 et la preuve du Théorème 5.4.24)

## 5.4 Différentes grassmanniennes affines

Dans cette section nous allons rappeler les définitions des différentes grassmanniennes affines introduites par Scholze et Weinstein dans [SW20] et dont nous auront besoin pour définir les plongement des modèles locaux.

### 5.4.1 Notations

Soit  $S \in \text{Perf}_{\mathbb{F}_p}$  et  $S \rightarrow \text{Spd } \mathbb{Z}_p$  un morphisme. On note  $\pi^{-1}(S^\sharp) \in \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}}^e$  le diviseur associé via le morphisme (5.3.2), et  $\mathcal{I}(\pi^{-1}(S^\sharp))$  le faisceau d'idéal de définition. On notera  $B_D^+(S^\sharp)$  l'anneau des sections globales de la complétion de  $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S)}$  le long de  $\mathcal{I}(\pi^{-1}(S^\sharp))$ , et  $B_D(S^\sharp) = B_D^+(S^\sharp)[\frac{1}{\mathcal{I}(\pi^{-1}(S^\sharp))}]$ . Plus explicitement dans le cas affinoïde avec  $(\xi) = \text{Ker}(\theta)$  alors :

$$B_D^+(S^\sharp) = \varprojlim_n W_{\mathcal{O}_F}(R^+)[\varpi^{-1}]/(\xi)^n$$

Notez que  $\mathcal{O}_F$  étant fini plat sur  $\mathbb{Z}_p$  (ou simplement en prenant la présentation  $\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}_p[u]/E(u)$ ) et que  $(W_{\mathcal{O}_F}(C^\sharp)[\varpi^{-1}]/(\xi^n))_{n \in \mathbb{N}}$  est un système projectif surjectif, on dispose d'un isomorphisme canonique

$$B_D^+(S^\sharp) \cong B_{\text{dR}}^+(S^\sharp) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$$

où  $B_{\text{dR}}^+(S^\sharp)$  dénote l'anneau des sections globales de la complétion de  $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}(S)}$  le long de  $\mathcal{I}_{S^\sharp}$ .

#### Remarque 5.4.1.

1. Si  $F = \mathbb{Q}_p$  on retrouve l'anneau des périodes de de Rham  $B_{\text{dR}}^+(R^\sharp, R^{\sharp+})$  :

$$B_{\text{dR}}^+(S^\sharp) = \varprojlim_n W(R^+)[\varpi^{-1}]/(\xi)^n$$

2. Si  $S^\sharp = S \rightarrow \text{Spa } \mathbb{F}_p$  est de caractéristique  $p$  alors  $\xi = p$  et :

$$B_D^+(S^\sharp) = \varprojlim_n W_{\mathcal{O}_F}(R^+)[\varpi^{-1}]/(p)^n = W_{\mathcal{O}_F}(R)$$

On suppose maintenant que l'on a un morphisme  $S = \text{Spa}(R, R^+) \rightarrow \text{Spd } \mathcal{O}_K$ . Notons  $S^\sharp = \text{Spa}(R^\sharp, R^{\sharp+}) \rightarrow \text{Spa}(\mathcal{O}_K, \mathcal{O}_K)$  l'untilt associé. On continue de noter  $B_D^+(S^\sharp)$  l'anneau des sections globales de la complétion de  $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S)}$  le long de  $\mathcal{I}(\pi^{-1}(S^\sharp))$ , où l'on voit  $S^\sharp \rightarrow \text{Spa } \mathcal{O}_K \rightarrow \text{Spa } \mathbb{Z}_p$  comme un  $S$ -point de  $\text{Spd } \mathbb{Z}_p$ . Ensuite pour tout plongement  $\varphi \in \Sigma$  la composition

$$S^\sharp \rightarrow \text{Spa } \mathcal{O}_K \xrightarrow{\varphi} \text{Spa } \mathcal{O}_F$$

induit un  $S$ -point de  $\text{Spd } \mathcal{O}_F$ , que l'on notera  $S_\varphi^\sharp$ . On notera  $B_{\text{dR}, \mathcal{O}_F}^+(S_\varphi^\sharp)$  l'anneau des sections globales de la complétion de  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S)$  le long de  $S_\varphi^\sharp$ . Plus explicitement dans le cas affinoïde avec les notations de 5.3.4 si  $(\xi_\varphi) = \text{Ker}(\theta_\varphi)$  alors :

$$B_{\text{dR}, \mathcal{O}_F}^+(S_\varphi^\sharp) = \varprojlim_n W_{\mathcal{O}_F}(R^+)[\varpi^{-1}]/(\xi_\varphi)^n$$

Il découle de l'égalité  $(\xi) = (\prod_\varphi \xi_\varphi)$  que l'on dispose d'un isomorphisme :

$$B_D^+(S^\sharp)^{\wedge \xi_\varphi} \cong B_{\text{dR}, \mathcal{O}_F}^+(S_\varphi^\sharp)$$

où  $B_D^+(S^\sharp)^{\wedge \xi_\varphi}$  dénote la complétion de  $B_D^+(S^\sharp)$  le long de l'idéal  $(\xi_\varphi)$ .

**Exemple 5.4.2.** Si  $S^\sharp = S \rightarrow \mathrm{Spa} k$  est de caractéristique  $p$  alors  $\xi_\varphi = \pi$  pour tout  $\varphi \in \Sigma$  et par conséquent :

$$B_{\mathrm{dR}, \mathcal{O}_F}^+(S_\varphi^\sharp) = \varprojlim_n W_{\mathcal{O}_F}(R^+)[\varpi^{-1}]/(\pi)^n = W_{\mathcal{O}_F}(R)$$

pour tout  $\varphi \in \Sigma$ .

## 5.4.2 Grassmannienne affine des vecteurs de Witt

Soit  $E$  un corps de valuation discrète complet de caractéristique 0,  $\mathcal{O}_E$  son anneau d'entier,  $k$  son corps résiduel, et  $\pi \in \mathcal{O}_E$  une uniformisante. On note  $\mathrm{Alg}_k^{\mathrm{perf}}$  la catégorie des  $k$ -algèbres parfaites. Soit  $G$  un groupe réductif sur  $E$ , et  $\mathcal{G}$  un modèle parahorique sur  $\mathcal{O}_E$ .

**Définition 5.4.3** ([Zhu17]). *La grassmannienne affine des vecteurs de Witt à coefficient dans  $\mathcal{O}_E$  est le pré-faisceau sur  $\mathrm{Alg}_k^{\mathrm{perf}}$  qui à une  $k$ -algèbre parfaite  $R$  associe :*

$$\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{W_{\mathcal{O}_E}}(R) = \left\{ (\mathcal{E}, \beta) \mid \begin{array}{l} \mathcal{E} \in \mathrm{Tors}(\mathrm{Spec} W_{\mathcal{O}_E}(R), \mathcal{G}), \\ \beta : \mathcal{E}|_{\mathrm{Spec} W_{\mathcal{O}_E}(R)[\frac{1}{\pi}]} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_0|_{\mathrm{Spec} W_{\mathcal{O}_E}(R)[\frac{1}{\pi}]} \end{array} \right\} / \sim$$

On a alors la proposition suivante :

**Proposition 5.4.4** ([BS16]). *Le foncteur  $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{W_{\mathcal{O}_E}}$  est ind-représentable par une limite inductive de perfectiones de variétés projectives.*

Par la suite nous aurons besoin du lemme suivant sur le comportement de ces grassmanniennes affines vis-à-vis des restrictions de Weil :

**Lemme 5.4.5.** *Soit  $H$  un groupe réductif sur  $\mathcal{O}_F$ . On dispose d'un isomorphisme canonique :*

$$\mathrm{Gr}_H^{W_{\mathcal{O}_F}} \simeq \mathrm{Gr}_{\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} H}^W$$

*Démonstration.* Si  $R$  est un  $k$ -algèbre parfaite on a les égalités suivantes au niveau des groupes de lacets :

$$\begin{aligned} L_{W_{\mathcal{O}_F}}^+ H(R) &= H(W_{\mathcal{O}_F}(R)) \\ &= H(W(R) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F) \\ &= \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} H(W(R)) \\ &= L^+ \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} H(R) \end{aligned}$$

Le résultat découle alors de la description des grassmanniennes affines des vecteurs de Witt en termes de groupes de lacets (voir [Zhu17] Lemme 1.3)  $\square$

### 5.4.3 Grassmannienne affine de Scholze-Weinstein

Soit  $E$  un corps de valuation discrète complet de caractéristique 0,  $\mathcal{O}_E$  son anneau d'entier,  $k$  son corps résiduel, et  $\pi \in \mathcal{O}_E$  une uniformisante. Soit  $G$  un groupe réductif sur  $E$  et  $\mathcal{G}$  un modèle parahorique sur  $\mathcal{O}_E$ . Si  $S \rightarrow \mathrm{Spd} \mathcal{O}_E$  est un morphisme donné par un untilt  $S^\sharp$ , on notera  $B_{\mathrm{dR}}^+(S^\sharp)$  la complétion de  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S)$  le long de  $\iota : S^\sharp \hookrightarrow \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S)$ , et  $B_{\mathrm{dR}}(S^\sharp) = B_{\mathrm{dR}}^+[1/\mathcal{I}(S^\sharp)]$  où  $\mathcal{I}(S^\sharp)$  est l'idéal définissant  $S^\sharp$ .

#### 5.4.3.1 Avec une patte

**Définition 5.4.6.** *La grassmannienne affine de Scholze-Weinstein est le foncteur sur  $\mathrm{Perf}_k$  qui à  $S$  associe :*

$$\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)}(S) \cong \left\{ (S^\sharp, \mathcal{E}, \beta) \left| \begin{array}{l} S^\sharp \rightarrow \mathrm{Spa} \mathcal{O}_E \text{ untilt de } S \\ \mathcal{E} \in \mathrm{Tors}(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S), \mathcal{G}), \\ \beta : \mathcal{E}|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \iota(S^\sharp)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_0|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \iota(S^\sharp)} \end{array} \right. \right\} / \sim$$

avec  $\beta$  méromorphe le long de  $\iota(S^\sharp)$

**Remarque 5.4.7.** Dans tout ce qui suit nous utiliserons la notation  $\mathrm{Gr}_{(X, G, \mathcal{C})}$  pour se souvenir que l'on regarde un espace de module des modifications de  $\mathcal{G}$ -torseurs sur une courbe  $X$ , fibrée au dessus de  $\mathcal{C}$ .

Notez que par définition ce foncteur vient avec un morphisme :

$$\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)} \longrightarrow \mathrm{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^1 = \mathrm{Spd} \mathcal{O}_E$$

La description suivante de la grassmannienne affine de Scholze-Weinstein découle du théorème de Beauville-Lazlo et du théorème de Kedlaya-Liu 5.3.6 ([Ked19] 3.8) :

**Proposition 5.4.8** ([SW20] Proposition 20.3.2). *Pour tout  $S = \mathrm{Spa}(R, R^+) \in \mathrm{Perf}_k$  on a :*

$$\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)}(S) = \left\{ (S^\sharp, \mathcal{E}, \beta) \left| \begin{array}{l} S^\sharp \rightarrow \mathrm{Spa} \mathcal{O}_E \text{ untilt de } S \\ \mathcal{E} \in \mathrm{Tors}(\mathrm{Spec} B_{\mathrm{dR}}^+(R^\sharp), \mathcal{G}), \\ \beta : \mathcal{E}|_{\mathrm{Spec} B_{\mathrm{dR}}(R^\sharp)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_0|_{\mathrm{Spec} B_{\mathrm{dR}}(R^\sharp)} \end{array} \right. \right\} / \sim$$

*Démonstration.* Voir par exemple la discussion après la définition 2.1.21 de [Gle20].  $\square$

**Remarque 5.4.9.** Cette description a l'avantage d'être plus simple à manipuler car les toseurs sont des toseurs sur des schémas (et non pas des espaces adiques) et nous évite d'utiliser la notion de méromorphie.

**Proposition 5.4.10** ([SW20] Proposition 20.3.2, 21.2.1). *Le préfaisceau  $\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)}$  est un petit  $v$ -faisceau. De plus le morphisme structural*

$$\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)} \longrightarrow \mathrm{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^1$$

*est ind-propre et ind-représentable en diamant localement spatial.*

Soit  $S \rightarrow \mathrm{Spd} \mathcal{O}_E$  un morphisme donné par un untilt  $S^\# \rightarrow \mathrm{Spa} \mathcal{O}_E$ . Si  $S^\# = S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$  est de caractéristique  $p$  alors on a l'égalité :

$$B_{\mathrm{dR}}^+(R) = W_{\mathcal{O}_E}(R)$$

La proposition suivante est alors essentiellement formelle :

**Proposition 5.4.11** ([SW20] 20.3). *En fibre spéciale sur  $\mathrm{Spd} k$  on dispose d'un isomorphisme de  $v$ -faisceaux :*

$$\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)}|_{\mathrm{Spd} k} \cong (\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}^{W_{\mathcal{O}_E}})^\diamond$$

*Démonstration.* Découle de la remarque précédente et de la description de la grassmannienne affine  $\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)}$  via le théorème de Beauville-Lazlo, voir Proposition 5.4.8.  $\square$

### 5.4.3.2 Avec plusieurs pattes

Nous allons maintenant rappeler la définition des grassmanniennes affines à plusieurs pattes.

**Définition 5.4.12.** *Soit  $d$  un entier positif. La grassmannienne affine à  $d$ -pattes est le foncteur sur  $\mathrm{Perf}_k$  qui à  $S$  associe :*

$$\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^d)}(S) \cong \left\{ ((S_i^\#), \mathcal{E}, \beta) \left| \begin{array}{l} S_i^\# \rightarrow \mathrm{Spa} \mathcal{O}_E \text{ untilt de } S, \\ \mathcal{E} \in \mathrm{Tors}(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S), \mathcal{G}), \\ \beta : \mathcal{E}|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \cup_i S_i^\#} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_0|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \cup_i S_i^\#} \end{array} \right. \right\} / \sim$$

avec  $\beta$  méromorphe le long de  $\cup_{i=1}^d S_i^\#$ .

**Proposition 5.4.13** ([SW20] Proposition 20.5.2, 20.5.4). *Le préfaisceau  $\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^d)}$  est un petit  $v$ -faisceau. De plus si  $\mathcal{G}$  est réductif le morphisme structural*

$$\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^d)} \longrightarrow (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^d$$

*est ind-propre et ind-représentable en diamant localement spatial*

**Remarque 5.4.14.** Comme dans [SW20] § 21.2, il devrait être possible d'étendre la proposition précédente au cas  $\mathcal{G}$  parahorique en prouvant que si  $\rho : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$  est une immersion fermée, alors le morphisme induit :

$$\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^d)} \longrightarrow \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathrm{GL}_n, (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^d)}$$

est une immersion fermée.

**Remarque 5.4.15.** Donnons un analogue dans le cas classique (i.e. des schémas). Soit  $X/k$  une courbe propre lisse où  $k$  est un corps, et  $G$  un groupe lisse sur  $X$ . On dispose de la grassmannienne affine de Beilinson-Drinfeld classique :

$$\mathrm{Gr}_{(G, X^d)} \rightarrow X^d \tag{5.4.1}$$

dont la fibre au dessus de  $(x_1, \dots, x_d) \in X(S)$  paramétrise les  $G$ -torseurs sur  $X \times_k S$  munis d'une trivialisaton sur  $(X \times_k S) \setminus \cup_i \Gamma_{x_i}$  avec  $\Gamma_{x_i} \subset X \times_k S$  le graphe de  $x_i : X \rightarrow S$ . Il est bien connu que le morphisme structural (5.4.1) est un isomorphisme sur  $X^d \setminus \Delta^{(d)}$  où  $\Delta^{(d)}$  désigne l'ensemble des diagonales, et une grassmannienne affine locale classique sur  $\Delta$  avec  $\Delta$  le lieu où  $x_1 = \dots = x_d$  (fermé).

**Proposition 5.4.16.** *On a les assertions suivantes :*

1. *Au dessus de  $\Delta \subset (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^d$  on a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^d)}|_{\Delta} \cong \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)}$$

2. *Au dessus de  $(\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^d \setminus \Delta^{(d)}$  on a un isomorphisme naturel :*

$$\left( \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^d)} \right) |_{(\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^d \setminus \Delta^{(d)}} \cong \left( \prod_{i=1}^d \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)} \right) |_{(\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^d \setminus \Delta^{(d)}}$$

*Démonstration.* La preuve est exactement la même que dans le cadre de grassmannienne affines classiques  $\mathrm{Gr}_{(G, X^d)}$ . Pour faciliter la lecture nous allons détailler la preuve dans le cas  $d = 3$ . La preuve générale est complètement analogue. L'isomorphisme au dessus du lieu  $\Delta$  est évident. Montrons celui au dessus de  $(\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^3 \setminus \Delta^{(3)}$ . Soit  $S \in \mathrm{Perf}_k$  un espace perfectoïde. On se donne donc des untirts  $(S_1^\#, S_2^\#, S_3^\#) \in (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)(S)^3$  deux à deux distincts, ainsi qu'une trivialisaton de  $\mathcal{G}$ -torseurs :

$$\beta : \mathcal{E} |_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_1^\#, S_2^\#, S_3^\#\}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_0 |_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_1^\#, S_2^\#, S_3^\#\}}$$

On définit les  $\mathcal{G}$ -torseurs suivants :

$$\mathcal{E}^{(1)} = \mathrm{Glue} \left( \mathcal{E} |_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_2^\#, S_3^\#\}}, \mathcal{E}_0 |_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_1^\#\}}, \beta \right)$$

$$\mathcal{E}^{(2)} = \mathrm{Glue} \left( \mathcal{E} |_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_1^\#, S_3^\#\}}, \mathcal{E}_0 |_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_2^\#\}}, \beta \right)$$

$$\mathcal{E}^{(3)} = \mathrm{Glue} \left( \mathcal{E} |_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_1^\#, S_2^\#\}}, \mathcal{E}_0 |_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_3^\#\}}, \beta \right)$$

où  $\mathrm{Glue}(\mathcal{F}_1|_{U_1}, \mathcal{F}_2|_{U_2}, \beta)$  désigne le faisceau sur  $U_1 \cup U_2$  obtenu par recollement des faisceaux  $\mathcal{F}_1|_{U_1}$  et  $\mathcal{F}_2|_{U_2}$  (faisceaux sur  $U_1$  et  $U_2$  respectivement) via l'isomorphisme  $\beta$  sur l'intersection  $U_1 \cap U_2$ . Par construction ces faisceaux sont munis de trivialisations :

$$\beta_i : \mathcal{E}^{(i)} |_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_i^\#\}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_0 |_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_i^\#\}}, \quad i = 1, 2, 3$$

ce qui nous fournit donc un élément  $(\mathcal{E}^{(i)}, \beta_i, S_i^\#)_{i=1,2,3} \in \prod_{i=1}^3 \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)}$ . Réciproquement soit  $(\mathcal{E}^{(i)}, \beta_i, S_i^\#)_{i=1,2,3} \in \prod_{i=1}^3 \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)}$ . On définit

$$\mathcal{E}' = \mathrm{Glue} \left( \mathcal{E}^{(1)} |_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_2^\#, S_3^\#\}}, \mathcal{E}^{(2)} |_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_1^\#, S_3^\#\}}, \beta_2^{-1} \circ \beta_1 \right)$$



qui est un  $\mathcal{G}$ -torseur sur  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_3^\sharp\}$ , muni d'une trivialisation :

$$\beta' : \mathcal{E}'|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_1^\sharp, S_2^\sharp, S_3^\sharp\}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_0|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_1^\sharp, S_2^\sharp, S_3^\sharp\}}$$

Pour étendre ce toseur à  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S)$  tout entier on recolle ensuite avec  $\mathcal{E}^{(3)}$  :

$$\mathcal{E} = \text{Glue}\left(\mathcal{E}', \mathcal{E}^{(3)}|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_1^\sharp, S_2^\sharp\}}, \beta_3^{-1} \circ \beta'\right)$$

qui est lui aussi muni d'une trivialisation au dessus de  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_1^\sharp, S_2^\sharp, S_3^\sharp\}$ . Il est simple de vérifier que les deux constructions sont réciproques l'une de l'autre.  $\square$

### 5.4.3.3 Version symétrique

La grassmannienne affine à  $d$ -pattes peut être « symétrisée » en ne regardant pas le champ sur  $(\text{Spd } \mathcal{O}_E)^d$  mais sur  $\text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^d$ . Plus précisément :

**Définition 5.4.17.** *Soit  $d$  un entier positif. On définit le foncteur sur  $\text{Perf}_k$  qui à  $S$  associe :*

$$\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^d)}(S) \cong \left\{ (D, \mathcal{E}, \beta) \mid \begin{array}{l} D \in \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^d(S), \\ \mathcal{E} \in \text{Tors}(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S), \mathcal{G}), \\ \beta : \mathcal{E}|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_0|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus D} \end{array} \right\} / \sim$$

avec  $\beta$  méromorphe le long de  $D \subset \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S)$ .

Le carré suivant est cartésien et permet de faire le lien entre la grassmannienne affine à  $d$ -pattes et sa version symétrique :

$$\begin{array}{ccc} \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, (\text{Spd } \mathcal{O}_E)^d)} & \longrightarrow & \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^d)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\text{Spd } \mathcal{O}_E)^d & \longrightarrow & \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^d \end{array}$$

Le  $v$ -faisceau  $\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^d)}$  a été étudié par Fargues et Scholze dans [FS21]. Ils montrent en particulier le résultat suivant :

**Proposition 5.4.18** ([FS21] Proposition III.1.3, VI.1.7). *Le préfaisceau  $\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^d)}$  est un petit  $v$ -faisceau. De plus si  $\mathcal{G}$  est réductif le morphisme structural*

$$\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^d)} \longrightarrow \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^d$$

*est ind-propre et ind-représentable en diamant localement spatial.*

**Remarque 5.4.19.** Encore une fois la proposition précédente devrait s'étendre au cas  $\mathcal{G}$  parahorique quelconque. En effet si la proposition 5.4.13 s'étend au cas  $\mathcal{G}$  parahorique alors le résultat découle par exemple de [LH22] Lemme 2.5 pour la propriété et de [Sch22] Proposition 13.4 pour l'assertion représentable en diamant localement spatial.

### 5.4.4 Grassmannienne affine à la B.Levin

Nous allons maintenant définir une grassmannienne affine adaptée aux schémas en groupes donnés par des restrictions de Weil. L'idée est très similaire aux travaux de B.Levin [Lev16].

Soit  $H$  un groupe réductif sur  $\mathcal{O}_F$ . On note  $\pi : \text{Spec } \mathcal{O}_F \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}_p$  et  $G = \text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} H = \pi_* H$  la restriction de Weil. On fera l'abus de notation de noter également  $G$  et  $H$  les objets  $G^{\text{an}}$  et  $H^{\text{an}}$  qui sont des espaces adiques en groupe sur  $\text{Spa } \mathbb{Z}_p$  et  $\text{Spa } \mathcal{O}_F$  respectivement. Soit  $S \in \text{Perf}_{\mathbb{F}_p}$  un espace perfectoïde. Puisque le diagramme suivant est cartésien (voir la preuve du Théorème 5.4.24) :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S) & \xrightarrow{\pi'} & \mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}(S) \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ \text{Spa } \mathcal{O}_F & \xrightarrow{\pi} & \text{Spa } \mathbb{Z}_p \end{array}$$

on a un isomorphisme canonique :

$$\text{Res}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}/\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}} H_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}} \cong G_{\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}}$$

où  $H_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}} := f'^{-1}H$  et  $G_{\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}} = f^{-1}G$ . Par conséquent et pour simplifier les notations,  $H$  désignera le groupe sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_F$ ,  $\text{Spa } \mathcal{O}_F$ ,  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}$  et  $G$  celui sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}_p$ ,  $\text{Spa } \mathbb{Z}_p$  et  $\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}$ . On notera également  $\pi$  pour désigner le morphisme entre les objets sur  $\mathcal{O}_F$  et les objets sur  $\mathbb{Z}_p$ . Cette remarque nous assure que ces notations sont cohérentes et que dans chacun des cas on a bien  $G = \pi_* H$ .

**Définition 5.4.20.** On définit le foncteur sur  $\text{Perf}_{\mathbb{F}_p}$  qui à  $S$  associe :

$$\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)}(S) = \left\{ (S^\sharp, \mathcal{E}, \beta) \left| \begin{array}{l} S^\sharp \rightarrow \text{Spa } \mathbb{Z}_p \text{ untilt de } S \\ \mathcal{E} \in \text{Tors}(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S), H), \\ \beta : \mathcal{E}|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S) \setminus \pi^{-1}(S^\sharp)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_0|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S) \setminus \pi^{-1}(S^\sharp)} \end{array} \right. \right\} / \sim$$

avec  $\beta$  méromorphe le long de  $\pi^{-1}(S^\sharp) \subset \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S)$ .

De nouveau par Beauville-Lazlo et 5.3.6 on a la description suivante :

**Proposition 5.4.21.** Pour tout  $S \in \text{Perf}_k$  on a :

$$\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)}(S) = \left\{ (S^\sharp, \mathcal{E}, \beta) \left| \begin{array}{l} S^\sharp \rightarrow \text{Spa } \mathbb{Z}_p \text{ untilt de } S \\ \mathcal{E} \in \text{Tors}(\text{Spec } B_D^+(S^\sharp), H), \\ \beta : \mathcal{E}|_{\text{Spec } B_D(S^\sharp)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_0|_{\text{Spec } B_D(S^\sharp)} \end{array} \right. \right\} / \sim$$

**Proposition 5.4.22.** Le préfaisceau  $\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)}$  est un petit  $v$ -faisceau. De plus le morphisme structural

$$\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)} \longrightarrow \text{Spd } \mathbb{Z}_p$$

est ind-propre et ind-représentable en diamant localement spatial.

*Démonstration.* Le fait que  $\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p)}$  soit un petit  $v$ -faisceau découle des arguments de [FS21] Proposition III.1.3. Ensuite par définition on a le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p)} & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \mathrm{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}}^e)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p & \xrightarrow{\pi^{-1}} & \mathrm{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}}^e \end{array} \quad (5.4.2)$$

où le morphisme de droite est ind-propre et ind-représentable en diamant localement spatial (Proposition 5.4.18). Être représentable en diamant localement spatial est une propriété stable par changement de base ([Sch22] Proposition 13.4.), le résultat en découle.  $\square$

**Remarque 5.4.23.** On suit les notations de la Remarque 5.3.12. Soit donc  $\pi : X \rightarrow Y$  un morphisme fini entre courbes propres lisses sur un corps  $k$ . Soit  $H$  un groupe réductif sur  $Y$  et  $G = \pi_* H$  sa restriction de Weil. On dispose la version « symétrique » de la grassmannienne affine à  $d$ -pattes :

$$\mathrm{Gr}_{(H, \mathrm{Div}_Y^d)} \longrightarrow \mathrm{Div}_Y^d$$

qui à un schéma  $S$  sur  $k$  associe l'ensemble des triplets  $(D, \mathcal{E}, \beta)$  où  $D \subset Y \times_k S$  est un diviseur de Cartier relatif effectif sur  $Y \times_k S$  et  $\beta$  est une trivialisaton du  $H$ -torseur  $\mathcal{E}$  sur  $(Y \times_k S) \setminus D$ . En faisant le lien avec le morphisme « fibre » de la Remarque 5.3.12, on peut maintenant définir une grassmannienne affine à 1 patte sur  $X$  en prenant le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}_{(Y, H, \mathrm{Div}_X^1)} & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_{(Y, H, \mathrm{Div}_Y^d)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Div}_X^1 & \xrightarrow{\pi^{-1}} & \mathrm{Div}_Y^d \end{array}$$

Par définition si  $S$  est un schéma sur  $k$  alors  $\mathrm{Gr}_{(Y, H, \mathrm{Div}_X^1)}(S)$  paramétrise les triplets  $(x, \mathcal{E}, \beta)$  où  $x \in X(S)$ ,  $\mathcal{E}$  est un  $H$ -torseurs sur  $Y \times_k S$  et  $\beta$  est une trivialisaton sur  $(Y \times_k S) \setminus \pi^{-1}(x)$ . Le  $v$ -faisceau  $\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p)}$  est l'analogue de la grassmannienne affine  $\mathrm{Gr}_{(Y, H, \mathrm{Div}_X^1)}$  pour le morphisme  $\pi : \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F} \rightarrow \mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}$ . Puisque l'on a supposé le morphisme  $\pi$  fini, il est bien connu (voir la discussion qui suit) que l'on dispose d'un isomorphisme canonique de schémas :

$$\mathrm{Gr}_{(X, G, \mathrm{Div}_X^1)} \cong \mathrm{Gr}_{(Y, H, \mathrm{Div}_X^1)}$$

Nous allons voir dans la section qui suit que ce résultat est également vrai pour les  $v$ -faisceaux  $\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p)}$  et  $\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}, \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} H, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p)}$ .

### 5.4.5 Lien entre les deux

Dans cette section nous allons comparer les grassmannienne affines  $\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}, \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} H, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p)}$  et  $\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p)}$ .

On dispose d'un morphisme d'adjonction :

$$\varepsilon : \pi^* \pi_* H \longrightarrow H$$

qui nous fournit un morphisme de groupoïdes :

$$\begin{array}{ccccc} \psi : \text{Tors}(\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}, \pi_* H) & \longrightarrow & \text{Tors}(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, \pi^* \pi_* H) & \longrightarrow & \text{Tors}(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H) \\ \mathcal{P} & \longmapsto & \pi^* \mathcal{P} & \longmapsto & \varepsilon_* \pi^* \mathcal{P} \end{array} \quad (5.4.3)$$

Puisque  $\varepsilon$  est un morphisme de groupe,  $\varepsilon_*$  envoie le torseur trivial sur le torseur trivial, et par conséquent on obtient un morphisme canonique de petits  $v$ -faisceaux :

$$\begin{array}{ccc} \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}, \text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} H, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)} & \longrightarrow & \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)} \\ (\mathcal{P}, \beta) & \longmapsto & (\varepsilon_* \pi^* \mathcal{P}, \varepsilon_* \pi^* \beta) \end{array}$$

**Théoreme 5.4.24.** *Le morphisme de petits  $v$ -faisceaux*

$$\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}, \text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} H, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)} \longrightarrow \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)}$$

*est un isomorphisme.*

**Remarque 5.4.25.** Avant de donner la preuve de cette proposition, expliquons l'analogie dans le cadre des schémas. Soit donc  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme entre schémas,  $G$  un groupe sur  $X$  que l'on suppose dans un premier temps commutatif. On dispose de la suite spectrale de Leray :

$$E_2^{p,q} = H^p(Y_{\text{ét}}, R^q f_*(G)) \Rightarrow H^{p+q}(X_{\text{ét}}, G)$$

et en particulier de la suite exacte en petits degrés :

$$1 \longrightarrow H^1(Y_{\text{ét}}, f_* G) \longrightarrow H^1(X_{\text{ét}}, G) \longrightarrow H^0(X_{\text{ét}}, R^1 f_* G) \longrightarrow \dots$$

En utilisant l'identification entre le premier groupe de cohomologie et les torseurs on obtient le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^1(Y_{\text{ét}}, f_* G) & \longrightarrow & H^1(X_{\text{ét}}, G) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \text{Tors}(Y_{\text{ét}}, f_* G) & \xrightarrow{\psi} & \text{Tors}(X_{\text{ét}}, G) \end{array}$$

En particulier  $\psi$  est un isomorphisme si et seulement si  $H^0(X_{\text{ét}}, R^1 f_* G) = 0$ . Si maintenant  $G$  n'est pas commutatif, on ne dispose pas de la suite spectrale de Leray mais Giraud a tout de même construit dans [Gir71] (Proposition 3.1.3) une suite exacte :

$$1 \longrightarrow H^1(Y_{\text{ét}}, f_* G) \longrightarrow H^1(X_{\text{ét}}, G) \longrightarrow H^0(X_{\text{ét}}, R^1 f_* G) \quad (5.4.4)$$

qui bien sûr coïncide avec celle donnée par la suite spectrale de Leray lorsque  $G$  est commutatif. Par conséquent pour prouver que  $\psi$  est un isomorphisme il suffit de prouver que  $R^1 f_* G = 0$ . On a alors le résultat suivant en cohomologie étale :

**Proposition 5.4.26** ([AGV71], Exposé VIII Proposition 5.5, Remarque 5.8). *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme fini, et  $G$  un faisceau en groupe sur  $X$ . Alors  $R^1 f_* G = 0$ .*

*Proof of the Theorem 5.4.24.* Les deux petits  $v$ -faisceaux sont ind-propre (Proposition 5.4.22 et 5.4.10) donc il suffit de vérifier l'assertion au niveau des  $(C, C^+)$ -points où  $C$  est un corps algébriquement clos. Dans ce cas d'après le Théorème 5.3.1 les espaces adiques  $\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}(C, C^+)$  et  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(C, C^+)$  sont fortement noethériens. On dispose d'un théorème analogue à 5.4.26 pour les espaces adiques fortement noethérien ([Hub96], Proposition 2.6.3). Par conséquent il suffit de montrer que le morphisme  $\pi$  est fini. Mais c'est très général : soit  $S \in \text{Perf}_{\mathbb{F}_p}$ , le diagramme suivant est cartésien<sup>2</sup> :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}(S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spa } \mathcal{O}_F & \longrightarrow & \text{Spa } \mathbb{Z}_p \end{array}$$

(Pour ne pas alourdir les notations nous ne noterons plus  $(S)$ ). En effet les morphismes  $\text{Spa } \mathcal{O}_F \rightarrow \text{Spa } \mathbb{Z}_p$  et  $\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p} \rightarrow \text{Spa } \mathbb{Z}_p$  sont analytiques ([SW20] Définition 5.1.4) et on peut donc calculer simplement le produit fibré ([SW20] Proposition 5.1.5). Plus précisément, notons :

$$B_{\mathcal{O}_F}^{[0,n]} = W_{\mathcal{O}_F}(R^+) \langle \frac{\pi^n}{[\varpi]} \rangle [\frac{1}{[\varpi]}], \quad B_{\mathbb{Z}_p}^{[0,n]} = W(R^+) \langle \frac{p^n}{[\varpi]} \rangle [\frac{1}{[\varpi]}]$$

L'espace analytique  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}$  (resp.  $\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}$ ) est recouvert par les espaces adiques  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}^{[0,n]} = \text{Spa}(B_{\mathcal{O}_F}^{[0,n]}, B_{\mathcal{O}_F}^{[0,n],+})$  (resp.  $\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}^{[0,n]} = \text{Spa}(B_{\mathbb{Z}_p}^{[0,n]}, B_{\mathbb{Z}_p}^{[0,n],+})$ ) où  $B_{\mathcal{O}_F}^{[0,n],+}$  désigne la clôture intégrale de  $W_{\mathcal{O}_F}(R^+) \langle \frac{\pi^n}{[\varpi]} \rangle$  dans  $B_{\mathcal{O}_F}^{[0,n]}$  (resp. clôture intégrale de  $W(R^+) \langle \frac{p^n}{[\varpi]} \rangle$  dans  $B_{\mathbb{Z}_p}^{[0,n]}$ ) (voir 5.3.2 ou pour plus de détails [FS21] Proposition II.1.1). Il suffit de montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  le diagramme suivant est cartésien dans la catégorie des paires de Huber complètes :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spa}(B_{\mathcal{O}_F}^{(n)}, B_{\mathcal{O}_F}^{(n),+}) & \longrightarrow & \text{Spa}(B_{\mathbb{Z}_p}^{(n)}, B_{\mathbb{Z}_p}^{(n),+}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spa } \mathcal{O}_F & \longrightarrow & \text{Spa } \mathbb{Z}_p \end{array}$$

Mais cela découle de l'égalité :

$$B_{\mathcal{O}_F}^{(n)} = B_{\mathbb{Z}_p}^{(n)} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$$

et de [Sta18] Lemme 10.147.4, car  $\mathcal{O}_F$  est une  $\mathbb{Z}_p$  algèbre lisse et donc on a également l'égalité  $B_{\mathcal{O}_F}^{(n),+} = B_{\mathbb{Z}_p}^{(n),+} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$ . Par changement de base le morphisme  $\pi : \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F} \rightarrow \mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}$  est donc fini et par conséquent  $R^1 \pi_* G = 0$ . Le résultat découle alors de la suite exacte de Giraud (5.4.4).  $\square$

<sup>2</sup>Notez que c'est évident après passage aux diamants (bien que ce ne soit pas exploitable ici car le foncteur  $(\cdot)^\diamond$  n'est pas pleinement fidèle sur la catégorie des espaces analytiques)

**Remarque 5.4.27.** Comme expliqué en 5.3.13, les travaux [LH22] se passent en fibre générique et sur  $\mathrm{Spa} \mathbb{Q}_p$  le morphisme  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F} \rightarrow \mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}$  est étale. La preuve du Théorème 5.4.24 est donc plus simple en fibre générique (voir [LH22] Proposition 4.1).

**Remarque 5.4.28.** Le théorème précédent peut également être démontré en utilisant la description schématique des grassmanniennes affines données par le théorème de Beauville-Lazlo et le fait que le morphisme  $B_{\mathrm{dR}}^+ \rightarrow B_D^+$  est fini (voir 5.4.1).

On déduit du théorème précédent une extension à  $\mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p$  d'un résultat de Li-Huerta [LH22] (Proposition 4.1) valable sur  $\mathrm{Spd} \mathbb{Q}_p$  :

**Corollaire 5.4.29.** *Le carré suivant est cartésien :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}, \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} H, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p)} & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \mathrm{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}}^e)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathrm{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}}^e \end{array}$$

Le théorème précédent permet également de comprendre pourquoi la grassmannienne affine  $\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p)}$  est l'analogie «  $v$ -faisceutique » de la grassmannienne affine construite dans [Lev16] (voir 5.2.5). Plus précisément on a le corollaire suivant :

**Corollaire 5.4.30.** 1. *En fibre générique sur  $\mathrm{Spd} \mathbb{Q}_p$  on dispose d'un isomorphisme :*

$$\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p)}|_{\mathrm{Spd} \mathbb{Q}_p} \simeq \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}, \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} H, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p)}|_{\mathrm{Spd} \mathbb{Q}_p}$$

2. *En fibre spéciale sur  $\mathrm{Spd} \mathbb{F}_p$  on dispose d'un isomorphisme :*

$$\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p)}|_{\mathrm{Spd} \mathbb{F}_p} \simeq (\mathrm{Gr}_H^{W_{\mathcal{O}_F}})^{\diamond}$$

*Démonstration.* En fibre générique l'assertion est évidente. En fibre spéciale le résultat découle du lemme 5.4.5.  $\square$

## 5.5 Modèles locaux

Cette section est dédiée aux plongements des modèles locaux  $\mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\mathrm{naïf}}$  dans les différentes grassmanniennes affines définies dans la section précédente.

### 5.5.1 Plongement de Scholze-Weinstein

Le plongement de Scholze-Weinstein ([SW20] 21.6.10) est défini comme suit. Soit  $S = \mathrm{Spa}(R, R^+) \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$ . Par définition  $\mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\mathrm{naïf}, \diamond}(S) = \{(S^\sharp, \mathcal{F})\}$  où  $S^\sharp$  est un untilt de  $S$  et  $\mathcal{F} \in \mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\mathrm{naïf}}(R^\sharp)$ . On a alors un morphisme :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{naif}, \diamond}(R, R^+) &\longrightarrow \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}, \text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)}(R, R^+) \\ (S^\sharp, \mathcal{F}) &\longmapsto (S^\sharp, \Lambda_{\mathcal{F}}^{\text{SW}}) \end{aligned}$$

où  $\Lambda_{\mathcal{F}}^{\text{SW}}$  est défini comme étant

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathcal{F}}^{\text{SW}} &= \text{Ker}(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{\text{dR}}^+(R^\sharp) \xrightarrow{\theta} \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} R^\sharp \rightarrow (\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} R^\sharp)/\mathcal{F}) \\ &= \theta^{-1}(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

**Proposition 5.5.1** ([SW20] 21.6.10). *Ce procédé induit une immersion fermée de petits  $v$ -faisceaux sur  $\text{Spd } \mathcal{O}_E$  :*

$$\iota^{\text{SW}} : \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{naif}, \diamond} \hookrightarrow \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}, \text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)} \big|_{\text{Spd } \mathcal{O}_E}$$

**Remarque 5.5.2.** Supposons que  $S^\sharp = S$  est de caractéristique  $p$ . Dans ce cas  $B_{\text{dR}}^+(R^\sharp) = W(R)$  et la variable considérée dans la décomposition de Cartan est donc la variable  $\xi = p$ . On a le diagramme commutatif aux lignes horizontales exactes :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \\ \theta \uparrow & & \theta \uparrow & & \theta \uparrow \\ \text{Ker}(\theta) = (p) & \longrightarrow & \Lambda_{\mathcal{F}} & \longrightarrow & \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(R) \end{array}$$

## 5.5.2 Plongement de Pappas-Rapoport

Nous allons définir un analogue du plongement de Pappas-Rapoport (voir Proposition 5.2.1) en niveau entier. Soit  $S = \text{Spa}(R, R^+) \in \text{Perf}_{\mathbb{F}_p}$  et  $(S^\sharp, \mathcal{F}) \in \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{naif}, \diamond}(S)$ . On dispose d'une surjection :

$$\theta_F : W_{\mathcal{O}_F}(R^+) \left[ \frac{1}{\varpi} \right] = W(R^+) \left[ \frac{1}{\varpi} \right] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F \longrightarrow R^\sharp \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$$

Le morphisme  $\theta_F$  s'étend à la complétion le long de  $(\xi) = \text{Ker}(\theta)$  :

$$\hat{\theta}_F : B_D^+(R^\sharp) \longrightarrow R^\sharp \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$$

et en termes de réseaux :

$$\hat{\theta}_F : B_D^+(R^\sharp)^n \longrightarrow (R^\sharp \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F)^n = R^\sharp \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$$

On définit alors :

$$\Lambda_{\mathcal{F}} := \hat{\theta}_F^{-1}(\mathcal{F})$$

Par construction on a le diagramme commutatif aux lignes horizontales exactes :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & (R^\sharp \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F)^n \\ \hat{\theta}_F \uparrow & & \hat{\theta}_F \uparrow & & \hat{\theta}_F \uparrow \\ \text{Ker}(\hat{\theta}_F) = (\xi) & \longrightarrow & \Lambda_{\mathcal{F}} & \longrightarrow & (B_D^+(R^\sharp))^n \end{array}$$

**Remarque 5.5.3.** Si  $S^\sharp = S$  est de caractéristique  $p$  alors  $\xi = p$  est le diagramme ci-dessus devient :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & (R^\sharp \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F)^n \\ \hat{\theta}_F \uparrow & & \hat{\theta}_F \uparrow & & \hat{\theta}_F \uparrow \\ \text{Ker}(\hat{\theta}_F) = (\pi^e) & \longrightarrow & \Lambda_{\mathcal{F}} & \longrightarrow & (W_{\mathcal{O}_F}(R))^n \end{array}$$

Cette construction est donc bien l'analogie de la construction 5.2.1 car la variable considérée est la variable  $\pi \in W_{\mathcal{O}_F}(R)$ .

**Proposition 5.5.4.** *On dispose d'une immersion fermée de petits  $v$ -faisceaux sur  $\text{Spd } \mathcal{O}_E$  :*

$$\begin{array}{ccc} \iota_v^{\text{naif}} : \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{naif}, \diamond} & \hookrightarrow & \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, \text{GL}_n, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)} |_{\text{Spd } \mathcal{O}_E} \\ & & \mathcal{F} \hookrightarrow \Lambda_{\mathcal{F}} \end{array} \quad (5.5.1)$$

*Démonstration.* Identique à la preuve de [SW20] Corollaire 21.6.10 :  $\mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{naif}, \diamond}$  est propre et  $\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, \text{GL}_n, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)}$  est ind-propre donc le morphisme est propre également. Un monomorphisme propre est une immersion fermée (même dans le monde des  $v$ -faisceaux ! Voir [SW20] 17.4.8).  $\square$

**Proposition 5.5.5.** *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{naif}, \diamond} & \\ \iota^{\text{SW}} \swarrow & & \searrow \iota_v^{\text{naif}} \\ \text{Gr}_{(\mathbb{Z}_p, \text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)} & \xrightarrow{\cong} & \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, \text{GL}_n, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)} \end{array}$$

*Démonstration.* Soit  $(R, R^+) \in \text{Perf}_{\mathbb{F}_p}$  et  $(R^\sharp, R^{\sharp+})$  un untilt au dessus de  $\mathbb{Z}_p$ . On dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} B_{\text{dR}}^+(R^\sharp) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda & \xrightarrow{\quad} & B_D^+(R^\sharp)^n \\ \theta \otimes 1 \searrow & & \swarrow \hat{\theta}_F \\ & R^\sharp \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda & \end{array}$$

où la flèche du haut est un isomorphisme (voir 5.4.1). Le résultat découle alors des définitions des réseaux  $\Lambda_{\mathcal{F}}$  et  $\Lambda_{\mathcal{F}}^{\text{SW}}$  comme l'image inverse de  $\mathcal{F}$  par les applications  $\hat{\theta}_F$  et  $\theta \otimes 1$  respectivement.  $\square$

**Remarque 5.5.6.** En d'autres termes la Proposition 5.5.4 ne nous donne rien de nouveau comparé aux travaux de Scholze-Weinstein [SW20]. Le plongement  $\iota^{\text{naif}}$  nous sera plus utile pour deux raisons :



- $\mathrm{GL}_n$  est réductif (contrairement au groupe  $\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p}\mathrm{GL}_n$ ) et la description de l'image de  $\iota_v^{\mathrm{naïf}}$  en termes de variétés de Schubert est plus simple à calculer (voir section 5.7.2).
- La définition du modèle local de Pappas-Rapoport  $\mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p}\mathrm{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\mathrm{PR}}$  fait intervenir des filtrations correspondant à des modifications successives de  $\mathrm{GL}_n$ -torseurs, et non de  $\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p}\mathrm{GL}_n$ -torseurs. Nous verrons dans la section 5.6.3 que le morphisme naturel  $\mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p}\mathrm{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\mathrm{PR}, \diamond} \rightarrow \mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p}\mathrm{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\mathrm{naïf}, \diamond}$  pourra s'interpréter comme un certain produit de convolution au-dessus de  $\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H}, \mathrm{Spd}\mathbb{Z}_p)}$ .

## 5.6 Modèle de Pappas-Rapoport

Dans cette section nous allons nous intéresser au modèle local de Pappas-Rapoport  $\mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p}\mathrm{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\mathrm{PR}}$ . On garde les notations de 5.4.

### 5.6.1 Produit de convolution

On commence par définir le produit de convolution de grassmanniennes affines.

**Définition 5.6.1.** *Soit  $d > 0$  un entier et  $I = \{1, \dots, d\}$ . Le  $d$ -produit de convolution est le foncteur sur  $\mathrm{Perf}_k$  qui à  $S$  associe :*

$$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E, \mathcal{G}}, (\mathrm{Spd}\mathcal{O}_E)^d)}(S) = \left\{ (S_i^\sharp, \mathcal{E}_i, \beta_i)_{i \in I} \mid \begin{array}{l} S_i^\sharp \rightarrow \mathrm{Spa}\mathcal{O}_E \text{ untilt de } S \\ \mathcal{E}_i \in \mathrm{Tors}(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S), \mathcal{G}), \\ \beta_i : \mathcal{E}_i|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus S_i^\sharp} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{i-1}|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus S_i^\sharp} \end{array} \right\} / \sim$$

avec  $\beta_i$  méromorphe le long de  $S_i^\sharp \subset \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S)$ .

De nouveau par Beauville-Lazlo et 5.3.6 on a la description suivante :

**Proposition 5.6.2.** *Pour tout  $S \in \mathrm{Perf}_k$  on a :*

$$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E, \mathcal{G}}, (\mathrm{Spd}\mathcal{O}_E)^d)}(S) = \left\{ (S_i^\sharp, \mathcal{E}_i, \beta_i) \mid \begin{array}{l} S_i^\sharp \rightarrow \mathrm{Spa}\mathcal{O}_E \text{ untilt de } S \\ \mathcal{E}_i \in \mathrm{Tors}(\mathrm{Spec}B_{\mathrm{dR}}^+(S_i^\sharp), \mathcal{G}), \\ \beta_i : \mathcal{E}_i|_{\mathrm{Spec}B_{\mathrm{dR}}(S_i^\sharp)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{i-1}|_{\mathrm{Spec}B_{\mathrm{dR}}(S_i^\sharp)} \end{array} \right\} / \sim$$

Dans [SW20] les auteurs montrent un certains nombre de résultats concernant le bon comportement de cette grassmannienne affine de convolution :

**Proposition 5.6.3** ([SW20] Proposition 20.5.2, 20.5.4). *Le préfaisceau  $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E, \mathcal{G}}, (\mathrm{Spd}\mathcal{O}_E)^d)}$  est un petit  $v$ -faisceau. De plus si  $\mathcal{G}$  est réductif le morphisme structural*

$$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E, \mathcal{G}}, (\mathrm{Spd}\mathcal{O}_E)^d)} \longrightarrow (\mathrm{Spd}\mathcal{O}_E)^d$$

*est ind-propre et ind-représentable en diamant localement spatial.*

On dispose d'un morphisme de convolution :

$$\begin{aligned}
m : \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^d)} &\longrightarrow \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \mathrm{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^d)} \\
(S_i^\sharp, \mathcal{E}_i, \beta_i)_{i \in I} &\longmapsto (S_1^\sharp + \cdots + S_d^\sharp, \mathcal{E}_d, \beta_d \circ \cdots \circ \beta_1)
\end{aligned} \tag{5.6.1}$$

**Remarque 5.6.4.** La situation est « dé-symétrisée » dans le sens où le produit de convolution vit au dessus du produit  $(\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^d$  et non pas du produit symétrique  $\mathrm{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^d$  :

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^d)} &\longrightarrow & \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \mathrm{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^d)} \\
\downarrow & & \downarrow \\
(\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^d &\longrightarrow & \mathrm{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^d
\end{array}$$

Attention ce diagramme n'est pas cartésien (bien sûr il est commutatif).

En fait ce morphisme de convolution se factorise par un autre produit de convolution, qui lui est un morphisme  $v$ -faisceaux sur  $(\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^d$  :

$$\begin{aligned}
m : \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^d)} &\longrightarrow \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^d)} \\
(S_i^\sharp, \mathcal{E}_i, \beta_i)_{i \in I} &\longmapsto ((S_i^\sharp)_{i \in I}, \mathcal{E}_d, \beta_d \circ \cdots \circ \beta_1)
\end{aligned} \tag{5.6.2}$$

où le membre de droite est la grassmannienne affine à  $d$  pattes.

**Proposition 5.6.5.** *Le morphisme de convolution (5.6.2) satisfait les propriétés suivantes :*

1. Sur  $(\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^d \setminus \Delta^{(d)}$  c'est un isomorphisme.
2. Sur  $\Delta \subset (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^d$  il coïncide avec le morphisme de  $v$ -faisceaux sur  $\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E$  :

$$\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)} \widetilde{\times} \cdots \widetilde{\times} \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)} \longrightarrow \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)}$$

où le membre de gauche désigne le foncteur qui à  $S \rightarrow \mathrm{Spd} \mathcal{O}_E$  associe les tuples  $(S^\sharp, (\mathcal{E}_i, \beta_i)_{i \in I})$  avec  $S^\sharp$  un untild de  $S$  sur  $\mathcal{O}_E$ ,  $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$  un  $d$ -uplet de  $\mathcal{G}$ -torseurs sur  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S)$ , et  $(\beta_i : \mathcal{E}_i|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus S^\sharp} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{i-1}|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus S^\sharp})_{i \in I}$  des modifications successives de torseur trivial  $\mathcal{E}_0$ .

*Démonstration.* L'assertion (2) découle des définitions. Pour l'assertion (1), comme pour Proposition 5.4.16, nous allons donner une preuve dans cas  $d = 3$ . Encore une fois la preuve générale n'est pas plus compliquée. Soient  $(S_1^\sharp, S_2^\sharp, S_3^\sharp) \in (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_E)^3$  deux à deux distincts. On se donne une suite de modifications de  $\mathcal{G}$ -torseurs sur  $\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S)$  :

$$\begin{aligned}
\beta_2 : \mathcal{E}_3|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_3^\sharp\}} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_2|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_3^\sharp\}} \\
\beta_1 : \mathcal{E}_2|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_2^\sharp\}} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_2^\sharp\}}
\end{aligned}$$

$$\beta_3 : \mathcal{E}_1|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_1^\#\}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_0|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_1^\#\}}$$

Son image par le morphisme de convolution est donnée par la composition :

$$\beta : \mathcal{E}_3|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_1^\#, S_2^\#, S_3^\#\}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_0|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_1^\#, S_2^\#, S_3^\#\}}$$

Il suffit de voir que l'on peut retrouver les  $(\mathcal{E}_i, \beta_i)$  par recollement et par induction :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \text{Glue}\left(\mathcal{E}_3|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_2^\#, S_3^\#\}}, \mathcal{E}_0|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_1^\#\}}, \beta\right) \\ \mathcal{E}_2 &= \text{Glue}\left(\mathcal{E}_3|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_3^\#\}}, \mathcal{E}_1|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_2^\#\}}, \beta'\right) \end{aligned}$$

où  $\beta' : \mathcal{E}_3|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_2^\#, S_3^\#\}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S) \setminus \{S_2^\#, S_3^\#\}}$  est l'isomorphisme obtenu par construction de  $\mathcal{E}_1$ . Ces recollements ainsi définis sont naturellement munis des trivialisations  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ . Il est simple de voir que les deux constructions sont réciproques l'une de l'autre.  $\square$

**Remarque 5.6.6.** Attention pour énoncer un résultat analogue pour le morphisme de convolution (5.6.1) il faut faire attention à l'action du groupe symétrique  $\Sigma_d$  (c'est un  $\Sigma_d$ -torseur sur le complémentaire de l'ensemble des diagonales).

## 5.6.2 Produit de convolution pour le modèle local

Pour définir le produit de convolution adapté au splitting modèle  $\mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{PR}}$  nous devons « dé-symétriser » la situation de façon similaire à 5.6.4. Pour ce faire on commence par fixer une numérotation  $\Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_e\}$ . Soit  $S \rightarrow \text{Spd } \mathcal{O}_K$  un morphisme donné par un untilt  $S^\# \rightarrow \text{Spa } \mathcal{O}_K$ . Pour tout  $i \in I = \{1, \dots, e\}$  on peut regarder la composition :

$$S^\# \rightarrow \text{Spa } \mathcal{O}_K \xrightarrow{\varphi_i} \text{Spa } \mathcal{O}_F$$

qui est un  $S$ -points de  $\text{Spd } \mathcal{O}_F$  que l'on notera  $S_{\varphi_i}^\#$ . Ce procédé nous fournit un morphisme petits  $v$ -faisceaux :

$$\begin{aligned} \text{Spd } \mathcal{O}_K &\longrightarrow (\text{Spd } \mathcal{O}_F)^e \\ S^\# &\longmapsto (S_{\varphi_1}^\#, \dots, S_{\varphi_e}^\#) \end{aligned}$$

On a le diagramme commutatif suivant (mais pas cartésien) :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spd } \mathcal{O}_K & \longrightarrow & (\text{Spd } \mathcal{O}_F)^e \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spd } \mathbb{Z}_p & \xrightarrow{\pi^{-1}} & (\text{Spd } \mathcal{O}_F)^e / \Sigma_e \end{array}$$

Avant de nous concentrer sur le groupe  $\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n$ , on se place dans le cas d'un groupe réductif  $H$  sur  $\mathcal{O}_F$  comme pour la section 5.4. On définit  $\widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Spd } \mathcal{O}_K)}$  via le

carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Spd } \mathcal{O}_K)} & \longrightarrow & \widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, (\text{Spd } \mathcal{O}_F)^e)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spd } \mathcal{O}_K & \longrightarrow & (\text{Spd } \mathcal{O}_F)^e \end{array} \quad (5.6.3)$$

Plus explicitement :

**Définition 5.6.7.** On définit le foncteur sur  $\text{Perf}_k$  qui à  $S = \text{Spa}(R, R^+)$  associe :

$$\widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Spd } \mathcal{O}_K)}(S) = \left\{ (S^\sharp, \mathcal{E}_i, \beta_i) \left| \begin{array}{l} S^\sharp \rightarrow \text{Spa } \mathcal{O}_K \text{ untilt de } S \\ \mathcal{E}_i \in \text{Tors}(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S), H), \\ \beta_i : \mathcal{E}_i|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S) \setminus S_{\varphi_i}^\sharp} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{i-1}|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S) \setminus S_{\varphi_i}^\sharp} \end{array} \right. \right\} / \sim$$

avec  $\beta_i$  méromorphe le long de  $S_{\varphi_i}^\sharp \subset \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}(S)$ .

De nouveau par Beauville-Lazlo et 5.3.6 on a la description suivante :

**Proposition 5.6.8.** Pour tout  $S \in \text{Perf}_k$  on a :

$$\widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Spd } \mathcal{O}_K)}(S) = \left\{ (S, \mathcal{E}_i, \beta_i) \left| \begin{array}{l} S^\sharp \rightarrow \text{Spa } \mathcal{O}_K \text{ untilt de } S \\ \mathcal{E}_i \in \text{Tors}(\text{Spec } B_D^+(S^\sharp), H), \\ \beta_i : \mathcal{E}_i|_{\text{Spec } B_D^+[\frac{1}{\mathcal{I}_i}]} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{i-1}|_{\text{Spec } B_D^+[\frac{1}{\mathcal{I}_i}]} \end{array} \right. \right\} / \sim$$

où  $\mathcal{I}_i$  désigne l'idéal associé à l'untilt  $S_{\varphi_i}^\sharp$

**Proposition 5.6.9.** Le préfaisceau  $\widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Spd } \mathcal{O}_K)}$  est un petit  $v$ -faisceau. De plus le morphisme structural

$$\widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Spd } \mathcal{O}_K)} \longrightarrow \text{Spd } \mathcal{O}_K$$

est ind-propre et ind-représentable en diamant localement spatial.

*Démonstration.* Découle du carré cartésien (5.6.3) et du résultat analogue pour la grassmannienne affine de convolution  $\widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, (\text{Spd } \mathcal{O}_F)^e)} \rightarrow (\text{Spd } \mathcal{O}_F)^e$  (Proposition 5.6.3).  $\square$

On dispose d'un morphisme de convolution :

$$m : \begin{array}{ccc} \widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Spd } \mathcal{O}_K)} & \longrightarrow & \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)}|_{\text{Spd } \mathcal{O}_K} \\ (S^\sharp, \mathcal{E}_i, \beta_i) & \longmapsto & (S^\sharp, \mathcal{E}_e, \beta_e \circ \cdots \circ \beta_1) \end{array} \quad (5.6.4)$$

compatible avec (5.6.1) dans le sens où le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Spd } \mathcal{O}_K)} & \longrightarrow & \widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, (\text{Spd } \mathcal{O}_F)^e)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)}|_{\text{Spd } \mathcal{O}_K} & \longrightarrow & \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}}^e)} \end{array}$$

En fait sur  $\mathrm{Spd} \mathcal{O}_K$  le morphisme  $\mathrm{Spd} \mathcal{O}_K \rightarrow (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_F)^d$  nous fournit une section :

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_F}^e)} |_{\mathrm{Spd} \mathcal{O}_K} & \\ & \nearrow s & \downarrow \\ \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p})} |_{\mathrm{Spd} \mathcal{O}_K} & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Div}^e_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}}})} |_{\mathrm{Spd} \mathcal{O}_K} \end{array}$$

Plus explicitement ce morphisme envoie un triplet  $(S^\sharp, \mathcal{E}, \beta)$  sur le triplet  $((S^\sharp_{\varphi_i})_i, \mathcal{E}, \beta)$  où les  $S^\sharp_{\varphi_i} \rightarrow \mathrm{Spa} \mathcal{O}_F$  sont obtenus en composant  $S^\sharp \rightarrow \mathrm{Spa} \mathcal{O}_K$  avec les morphismes  $\varphi_i : \mathrm{Spa} \mathcal{O}_K \rightarrow \mathrm{Spa} \mathcal{O}_F$ . Cette section induit un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_K})} & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_F)^e})} |_{\mathrm{Spd} \mathcal{O}_K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p})} |_{\mathrm{Spd} \mathcal{O}_K} & \xrightarrow{s} & \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_F)^e})} |_{\mathrm{Spd} \mathcal{O}_K} \end{array} \quad (5.6.5)$$

La proposition suivante permet de faire le lien avec la grassmannienne affine de convolution définie dans [SW20] (voir 5.6.1).

**Proposition 5.6.10.**

1. En fibre spéciale sur  $\mathrm{Spd} k$  on dispose d'un isomorphisme de  $v$ -faisceaux :

$$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_K})} |_{\mathrm{Spd} k} \simeq (\mathrm{Gr}_H^{W_{\mathcal{O}_F}})^\diamond \tilde{\times} \dots \tilde{\times} (\mathrm{Gr}_H^{W_{\mathcal{O}_F}})^\diamond$$

2. En fibre générique sur  $\mathrm{Spd} K$  le morphisme de convolution est un isomorphisme :

$$m : \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_K})} |_{\mathrm{Spd} K} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p})} |_{\mathrm{Spd} K}$$

*Démonstration.* De façon similaire à (5.3.5), on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spd} k & \longrightarrow & \mathrm{Spd} \mathcal{O}_K & \longleftarrow & \mathrm{Spd} K \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Delta & \longrightarrow & (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_F)^e & \longleftarrow & (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_F)^e \setminus \Delta^{(e)} \end{array}$$

Le résultat découle alors du carré cartésien (5.6.5) et de la Proposition 5.6.1.  $\square$

### 5.6.3 Splitting local modèle

On rappelle que l'on a fixé une numérotation  $\Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_e\}$ . Le cocaractère  $\mu_\bullet$  est donc de la forme  $\mu_\bullet = (1^{r_i}, 0^{n-r_i})$  pour un  $e$ -uplé d'entiers  $(r_1, \dots, r_e)$ . On considère le foncteur  $\mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\mathrm{PR}}$  qui à un schéma  $(S \rightarrow \mathrm{Spec} \mathcal{O}_K)$  associe l'ensemble des filtrations  $(\mathcal{F}_i)_i$  de  $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$ -sous modules de  $\Lambda_S$  :

$$\mathcal{F}_e \subset \mathcal{F}_{e-1} \subset \dots \subset \mathcal{F}_1 \subset \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$$

telles que :

- Les  $\mathcal{F}_i$  sont Zariski-localement des  $\mathcal{O}_S$ -facteurs directs de  $\Lambda_S$  de rang  $r_i$
- Pour tout  $a \in \mathcal{O}_F$  et pour tout  $i = 1, \dots, e$

$$(a \otimes 1 - 1 \otimes \varphi_i(a)) \cdot \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{i+1}$$

**Remarque 5.6.11.** Attention : la définition ci-dessus diffère de la définition dans [PR02]. Mais cette différence est sans conséquence, voir [PR02] Paragraphe 6.3, ou encore [Ber23] (Exemple 3.9 (4) et Proposition 4.8). Nous adoptons la définition ci-dessus pour ne pas alourdir les notations.

Finalement on arrive au résultat annoncé dans l'introduction :

**Théoreme 5.6.12.** *Il existe une immersion fermée naturelle de petits  $v$ -faisceaux sur  $\mathrm{Spd} \mathcal{O}_K$*

$$\iota_v^{\mathrm{PR}} : \mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\mathrm{PR}, \diamond} \rightarrow \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, \mathrm{GL}_n, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_K)} \quad (5.6.6)$$

telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\mathrm{PR}, \diamond} & \xrightarrow{\iota_v^{\mathrm{PR}}} & \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, \mathrm{GL}_n, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_K)} \\ \downarrow & & \downarrow m \\ M_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n, \mu)}^{\mathrm{naif}, \diamond} |_{\mathrm{Spd} \mathcal{O}_K} & \xrightarrow{\iota_v^{\mathrm{naif}}} & \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, \mathrm{GL}_n, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p)} |_{\mathrm{Spd} \mathcal{O}_K} \end{array} \quad (5.6.7)$$

*Démonstration.* Soit  $S = \mathrm{Spa}(R, R^+) \in \mathrm{Perf}_k$  et  $(S^\sharp, \mathcal{F}) \in \mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\mathrm{PR}, \diamond}(S)$ . On dispose d'une surjection :

$$\theta_F : W_{\mathcal{O}_F}(R^+) \left[ \frac{1}{\varpi} \right] = W(R^+) \left[ \frac{1}{\varpi} \right] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F \longrightarrow R^\sharp \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$$

Le morphisme  $\theta_F$  s'étend à la complétion le long de  $(\xi) = \mathrm{Ker}(\theta)$  :

$$\hat{\theta}_F : B_D^+(R^\sharp) \longrightarrow R^\sharp \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$$

et en termes de réseaux :

$$\hat{\theta}_F : B_D^+(R^\sharp)^n \longrightarrow (R^\sharp \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_L)^n = R^\sharp \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$$

On définit alors :

$$\Lambda_i := \hat{\theta}_F^{-1}(\mathcal{F}_i)$$

Par construction on a donc une filtration :

$$\Lambda_e \subset \dots \subset \Lambda_1 \subset B_D^+(R^\sharp)^n$$

Si on prend  $\xi_i = \pi - [\tau_i(\pi)^\flat] \in W_{\mathcal{O}_F}(R)$  on a l'égalité :

$$\theta_F(\xi_i) = \pi \otimes 1 - 1 \otimes \tau_i(\pi)$$

Par conséquent, par définition des  $(\mathcal{F}_i)_i$ , pour tout  $i = 1, \dots, e$  on a l'inclusion :

$$\xi_i \cdot \Lambda_i \subset \Lambda_{i+1}$$

En particulier on dispose de l'égalité :

$$\Lambda_i \otimes_{B_D^+(R^\sharp)} B_D^+(R^\sharp) \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_i \end{bmatrix} = \Lambda_{i+1} \otimes_{B_D^+(R^\sharp)} B_D^+(R^\sharp) \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_i \end{bmatrix}$$

Ce procédé nous fournit donc un élément de  $\widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}, \text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)}(S)$  et par functorialité de la construction cela nous fournit un morphisme de  $v$ -faisceaux sur  $\text{Spd } \mathcal{O}_K$  :

$$\begin{array}{ccc} \text{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{PR}, \diamond} & \longrightarrow & \widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathbb{Z}_p}, \text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)} \\ (\mathcal{F}_e \subset \dots \subset \mathcal{F}_1) & \longmapsto & (\Lambda_e \subset \dots \subset \Lambda_1) \end{array}$$

Ce morphisme est une immersion fermée car la source est propre et la cible ind-propre d'après 5.6.9. Le fait que le diagramme (5.6.7) soit cartésien découle directement des descriptions des objets qu'ils paramétrisent et des constructions des morphismes  $\iota_v^{\text{PR}}$  (voir (5.6.6)) et  $\iota_v^{\text{naïf}}$  (voir 5.5.4)  $\square$

**Remarque 5.6.13.** La construction ci-dessus devrait s'étendre sans trop de difficulté à des chaînes de réseaux polarisées quelconques comme cela est fait dans [SW20] (section 21).

## 5.7 Description des images

On rappelle que le modèle local canonique est défini comme l'image schématique :

$$\text{M}_{\mathcal{G}}^{\text{can}} := \text{Im} \left( \text{M}_{\mathcal{G}}^{\text{PR}} \xrightarrow{\pi} \text{M}_{\mathcal{G}}^{\text{naïf}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_K \rightarrow \text{M}_{\mathcal{G}}^{\text{naïf}} \right)$$

On notera  $\iota_v^{\text{can}}$  l'immersion fermée de  $v$ -faisceaux sur  $\text{Spd } \mathbb{Z}_p$  obtenue par composition

$$\text{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{can}, \diamond} \longrightarrow \text{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}, \diamond} \xrightarrow{\iota_v^{\text{naïf}}} \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, \text{GL}_n, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)}$$

Dans cette section nous allons décrire l'image des plongements  $\iota_v^{\text{PR}}$  et  $\iota_v^{\text{can}}$  en termes de variétés de Schubert. Cette description est rendue possible par le fait que nous travaillons avec des grassmanniennes affines pour le groupe  $\text{GL}_n$  qui est réductif (contrairement au groupe  $\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n$ ).

### 5.7.1 Cellules de Schubert

On commence par quelques rappels sur les cellules de Schubert comme définies dans [FS21] §VI.2. Soit donc  $\mathcal{G}$  un groupe réductif sur  $\mathcal{O}_E$  que l'on suppose déployé. On fixe un tore déployé et un Borel  $T \subset B \subset \mathcal{G}$ . On note  $\mathbb{X}_\bullet(T)^+$  le  $\mathbb{Z}$ -module des cocaractères  $B$ -dominants.

Soit  $S = \text{Spa}(C, C^+) \rightarrow \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^1$  un morphisme donné par un untilt  $S^\sharp = \text{Spa}(C^\sharp, C^{\sharp+})$ . Supposons  $C$  algébriquement clos. Dans ce cas  $B_{\text{dR}}^+(C^\sharp)$  est un anneau de valuation discrète d'uniformisante  $\xi$  et de corps de fraction  $B_{\text{dR}}(C^\sharp)$ . On dispose alors de la décomposition de Cartan :

$$\mathbb{X}_\bullet(T)^+ \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}(B_{\text{dR}}^+(C^\sharp)) \backslash \mathcal{G}(B_{\text{dR}}(C^\sharp)) / \mathcal{G}(B_{\text{dR}}^+(C^\sharp)) \quad (5.7.1)$$

$$\mu \longmapsto [\mu(\xi)] \quad (5.7.2)$$

où  $\mu(\xi) \in T(B_{\text{dR}}(C^\sharp))$  désigne l'image de  $\xi$  par le cocaractère  $\mu : \mathbb{G}_m \rightarrow T$ .

Maintenant soient  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  deux  $\mathcal{G}$ -torseurs sur  $\text{Spec } B_{\text{dR}}^+(C^\sharp)$ , et  $\beta$  un isomorphisme entre  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  sur  $\text{Spec } B_{\text{dR}}(C^\sharp)$ . L'anneau  $B_{\text{dR}}^+(C^\sharp)$  est un anneau complet de valuation discrète avec un corps résiduel algébriquement clos et par conséquent les  $\mathcal{G}$ -torseur  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  sont triviaux. Fixons des trivialisations  $\beta_1 : \mathcal{E}_1 \simeq \mathcal{E}_0$  et  $\beta_2 : \mathcal{E}_2 \simeq \mathcal{E}_0$  sur  $\text{Spec } B_{\text{dR}}^+(C^\sharp)$ . La composition  $\beta_1 \cdot \beta \cdot \beta_2^{-1}$  est un automorphisme du  $\mathcal{G}$ -torseur trivial  $\mathcal{E}_0$  sur  $\text{Spec } B_{\text{dR}}(C^\sharp)$ , i.e. un élément du groupe  $\mathcal{G}(B_{\text{dR}}(C^\sharp))$ . Cet élément est bien défini modulo le choix des trivialisations  $\beta_1$  et  $\beta_2$ , c'est-à-dire modulo la multiplication par un élément de  $\mathcal{G}(B_{\text{dR}}^+(C^\sharp))$  à gauche et à droite. On notera

$$\text{Inv}(\beta) \in \mathbb{X}_\bullet(T)^+$$

l'élément induit via la décomposition de Cartan (5.7.1), que l'on appelle abusivement la position relative de  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$ . On obtient pour tout point géométrique  $S \rightarrow \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^1$  une application bien définie :

$$\begin{aligned} \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^1)}(S) &\longrightarrow \mathbb{X}_\bullet(T)^+ \\ (S^\sharp, \mathcal{E}, \beta) &\longmapsto \text{Inv}(\beta) \end{aligned}$$

**Cas  $d = 1$**

En suivant [FS21] VI.2.2, on définit pour tout  $\mu \in \mathbb{X}_\bullet(T)^+$  :

$$\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^1)}^\mu \subset \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^1)}$$

comme le sous-foncteur des points  $S \rightarrow \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^1)}$  donnés par des triplets  $(S^\sharp, \mathcal{E}, \beta)$  tels que pour tout point géométrique  $\text{Spa}(C, C^+) \rightarrow S$  la position relative de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}_0$  en  $\text{Spa}(C^\sharp, C^{\sharp+})$  est égale à  $\mu$ . On définit ensuite le foncteur :

$$\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^1)}^{\leq \mu} := \bigsqcup_{\mu' \leq \mu} \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^1)}^{\mu'}$$

Le foncteur  $\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^1)}^{\leq \mu}$  est un petit  $v$ -faisceau qui est propre sur  $\text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^1$  ([FS21] Proposition VI.2.3). De plus on a l'égalité :

$$\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^1)} = \varprojlim_{\mu} \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^1)}^{\leq \mu}$$



## Cas général

On passe maintenant au cas d'un entier  $d > 0$  quelconque. De nouveau on suit les explications de [FS21]. Soit  $S \rightarrow \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^d$  un point donné par un diviseur de Cartier  $D_S \subset \mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}(S)$  de degré  $d$ . En un point géométrique  $\text{Spa}(C, C^+) \rightarrow S$  le diviseur  $D_{(C, C^+)}$  est l'union disjoint de  $d$  diviseurs de Cartier (non ordonnés) de degré 1, correspondant à un  $I$ -uplet d'utilits non ordonnés  $\text{Spa}(C_i^\sharp, C_i^{\sharp+})$  avec  $|I| = d$ .

Suivant [FS21] VI.2.2, on définit pour tout  $d$ -uplet non ordonné  $\mu_\bullet = (\mu_j)_{j \in J}$  d'éléments  $\mu_j \in \mathbb{X}_\bullet(T)^+$  avec  $|J| = d$

$$\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^d)}^{\leq \mu_\bullet} \subset \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^d)}$$

comme le sous-foncteur des points  $S \rightarrow \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, \text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}}^d)}$  donnés par des triplets  $(D_S, \mathcal{E}, \beta)$  tels que pour tout point géométrique  $\text{Spa}(C, C^+) \rightarrow S$ , si l'on note  $(\text{Spa}(C_i^\sharp, C_i^{\sharp+}))_{i \in I}$  le  $I$ -uplet d'utilits non ordonnés associé à  $D_S$  avec  $|I| = d$ , il existe une bijection  $\psi : J \simeq I$  telle que la position relative de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}_0$  en  $\text{Spa}(C_i^\sharp, C_i^{\sharp+})$  est bornée par

$$\sum_{\substack{j \in J \\ C_i^\sharp = C_{\psi(j)}^\sharp}} \mu_j$$

## Produit de convolution

On s'intéresse maintenant au produit de convolution. Suivant [SW20] 20.5.3, on définit pour tout  $d$ -uplet de cocaractère  $\mu_\bullet = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in (\mathbb{X}_\bullet(T)^+)^d$  on définit

$$\widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, (\text{Spd } \mathcal{O}_E)^d)}^{\mu_\bullet} \subset \widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, (\text{Spd } \mathcal{O}_E)^d)}$$

comme le sous-foncteur des points  $S \rightarrow \widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, (\text{Spd } \mathcal{O}_E)^d)}$  donnés par des  $d$ -uplets  $(S_i^\sharp, \mathcal{E}_i, \beta_i)_{i \in \{1, \dots, d\}}$  tels que pour tout point géométrique  $\text{Spa}(C, C^+) \rightarrow S$ , si l'on note  $\text{Spa}(C_i^\sharp, C_i^{\sharp+})$  les utilits induits, la position relative de  $\mathcal{E}_i$  et  $\mathcal{E}_{i-1}$  en  $\text{Spa}(C_i^\sharp, C_i^{\sharp+})$  est égale à  $\mu_i$  pour tout  $i = 1, \dots, d$ . On définit ensuite le sous-foncteur :

$$\widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, (\text{Spd } \mathcal{O}_E)^d)}^{\leq \mu_\bullet} = \bigsqcup_{\mu'_\bullet \leq \mu_\bullet} \widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_E}, \mathcal{G}, (\text{Spd } \mathcal{O}_E)^d)}^{\mu'_\bullet}$$

## Pour les restrictions de Weil

On peut maintenant définir les variétés de Schubert pour nos grassmanniennes affines  $\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)}$  et  $\widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, H, \text{Spd } \mathcal{O}_K)}$ , où  $H$  est un groupe réductif déployé sur  $\mathcal{O}_F$ . Soit

$$\mu_\bullet = (\mu_\varphi)_{\varphi \in \Sigma} : \mathbb{G}_m \rightarrow \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} H(\overline{\mathbb{Q}_p}) = \prod_{\varphi \in \Sigma} H(\overline{\mathbb{Q}_p})$$

un cocaractère.

### Définition 5.7.1.

1. On définit le sous-foncteur

$$\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p})}^{\leq \mu_\bullet} \subset \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p})}$$

comme l'image inverse de  $\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}}^e})}^{\leq \mu_\bullet} \subset \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}}^e})}$  par le morphisme de  $v$ -faisceaux  $\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p})} \rightarrow \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}}^e})}$  (voir (3.2.11)).

2. On définit le sous-foncteur :

$$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_K})}^{\mu_\bullet} \subset \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_K})}$$

comme l'image inverse de  $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_F)^e})}^{\mu_\bullet} \subset \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_F)^e})}$  par le morphisme de  $v$ -faisceaux  $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_K})} \rightarrow \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_F)^e})}$  (voir (5.6.3)).

On a la proposition suivante :

**Proposition 5.7.2** ([SW20] 20.5.4). *L'image de  $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_K})}^{\leq \mu_\bullet}$  par le morphisme de convolution*

$$m : \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Spd} \mathcal{O}_K})} \rightarrow \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p})} |_{\mathrm{Spd} \mathcal{O}_K}$$

est égale à  $\mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p})}^{\leq \mu_\bullet} |_{\mathrm{Spd} \mathcal{O}_K}$ .

*Démonstration.* Le résultat découle de l'assertion analogue pour le morphisme de convolution  $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, (\mathrm{Spd} \mathcal{O}_F)^e})} \rightarrow \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, H, \mathrm{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}}^e})}$  ([SW20] Proposition 20.5.4).  $\square$

### 5.7.2 Images des modèles locaux

Comme pour la section 3.2.1.1, étant donné un cocaractère

$$\mu_\bullet = (\mu_\varphi)_{\varphi \in \Sigma} = (1^{r_\varphi}, 0^{n-r_\varphi})_{\varphi \in \Sigma} \in \mathbb{X}_\bullet(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathbb{G}_m^d)^+ = \prod_{\varphi \in \Sigma} (\mathbb{Z}^d)^+$$

on notera

$$\mu_\bullet^\vee = (\mu_\varphi^\vee)_{\varphi \in \Sigma} = (1^{n-r_\varphi}, 0^{r_\varphi})_{\varphi \in \Sigma}$$

On peut maintenant énoncer le résultat principal de cette section :

**Théoreme 5.7.3.** (1) *L'immersion fermée  $\iota_v^{\mathrm{can}}$  induit un isomorphisme de  $v$ -faisceaux sur  $\mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p$  :*

$$\mathbb{M}_{(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\mathrm{can}, \diamond} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, \mathrm{GL}_n, \mathrm{Spd} \mathbb{Z}_p})}^{\leq \mu_\bullet^\vee}$$

(2) L'immersion fermée  $\iota_v^{\text{PR}}$  induit un isomorphisme de  $v$ -faisceaux sur  $\text{Spd } \mathcal{O}_K$  :

$$\mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{PR}, \diamond} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, \text{GL}_n, \text{Spd } \mathcal{O}_K)}^{\mu_\bullet^\vee}$$

En résumé on a le diagramme cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{PR}, \diamond} & \longrightarrow & \widetilde{\text{Gr}}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, \text{GL}_n, \text{Spd } \mathcal{O}_K)}^{\mu_\bullet^\vee} \\ \downarrow & & \downarrow m \\ \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{can}, \diamond} |_{\text{Spd } \mathcal{O}_K} & \longrightarrow & \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, \text{GL}_n, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)}^{\leq \mu_\bullet^\vee} |_{\text{Spd } \mathcal{O}_K} \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des isomorphismes.

*Démonstration.* Commençons par le point (1). Puisque les deux  $v$ -faisceaux sont propres sur  $\text{Spd } \mathbb{Z}_p$ , il suffit de montrer que c'est un isomorphisme au niveau des points géométriques. Soit donc  $S = \text{Spa}(C, C^+) \rightarrow \text{Spd } \mathbb{Z}_p$  un point géométrique donné par un untilt  $S^\sharp = \text{Spa}(C^\sharp, C^{\sharp+})$ . On distingue deux situations :

- $C^\sharp$  est de caractéristique 0. Dans ce cas comme nous l'avons vu en 5.3.4 le  $S$ -point de  $\text{Div}_{\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}}^e$  induit par le morphisme  $\pi^{-1}$  est donné par un  $\Sigma$ -uplet d'untilts  $(S_\varphi^\sharp)_{\varphi \in \Sigma}$  sur  $\mathcal{O}_F$  deux à deux distincts. Dans ce cas avec les notations de 5.4.1 on dispose d'un isomorphisme :

$$B_D^+(C^\sharp) = \prod_{\varphi \in \Sigma} B_{\text{dR}, \mathcal{O}_F}^+(C_\varphi^\sharp) \quad (5.7.3)$$

provenant de l'égalité d'idéaux  $(\xi) = (\prod_\varphi \xi_\varphi)$  et du fait que les idéaux  $(\xi_\varphi)$  sont deux à deux distincts. Si  $M$  est un  $B_D^+(C^\sharp)$ -module on notera

$$M = \bigoplus_{\varphi \in \Sigma} M_\varphi$$

la décomposition de  $M$  induite par (5.7.3). Notons  $M_0 = B_D^+(C^\sharp)^n$  le  $B_D^+(C^\sharp)$ -réseau trivial de rang  $n$ . Par définition  $\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F}, \text{GL}_n, \text{Spd } \mathbb{Z}_p)}^{\leq \mu_\bullet^\vee}(C, C^+)$  paramétrise les  $B_D^+(C^\sharp)$ -réseaux  $M \subset M_0[\frac{1}{\xi}]$  tels que la position relative de  $M_\varphi$  et  $M_{0,\varphi}$  soit bornée par  $\mu_\varphi^\vee$ . Plus explicitement pour un cocaractère  $\mu_\varphi^\vee = (1^{n-r_\varphi}, 0^{r_\varphi})$  cette condition est équivalente aux conditions  $\xi_\varphi \cdot M_{0,\varphi} \subset M_\varphi \subset M_{0,\varphi}$  et  $\dim_{C^\sharp}(M_{0,\varphi}/M_\varphi) = n - r_\varphi$ . De l'autre coté puisque  $C^\sharp$  est sur  $\mathbb{Q}_p$  on a l'égalité

$$\mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}, \diamond}(C^\sharp) = \mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{can}, \diamond}(C^\sharp)$$

et il est donc équivalent de prouver l'assertion pour  $\mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}, \diamond}(C^\sharp)$ . Soit donc  $\mathcal{F} \subset (C^\sharp \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F)^n$  est un élément de  $\mathbb{M}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{naïf}, \diamond}(C, C^+)$  alors la décomposition :

$$C^\sharp \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F = \prod_{\varphi \in \Sigma} C_\varphi^\sharp$$

induit une décomposition

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{\varphi \in \Sigma} \mathcal{F}_\varphi$$

La condition de Kottwitz est équivalente à ce que  $\dim_{C^\#}(\mathcal{F}_\varphi) = r_\varphi$  pour tout  $\varphi \in \Sigma$  (voir la discussion 2.3.4). Pour finir on a le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} B_D^+(C^\#) & \xrightarrow{\widehat{\theta}_F} & C^\# \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F \\ \wedge^{\xi_\varphi} \downarrow & & \downarrow p_\varphi \\ B_{\text{dR}, \mathcal{O}_F}^+(C_\varphi^\#) & \xrightarrow{\widehat{\theta}_\varphi} & C_\varphi^\# \end{array}$$

où  $\widehat{\theta}_\varphi$  désigne l'application de Fontaine usuelle associée à l'untilt  $C_\varphi^\#$ . Il est maintenant simple de voir que la construction :

$$\begin{aligned} \text{Ml}_{(\text{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}_p} \text{GL}_n, \mu_\bullet)}^{\text{naif}, \diamond}(C, C^+) &\longrightarrow \text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, \text{GL}_n, \text{Spd } \mathbb{Z}_p})}^{\leq \mu_\bullet}(C, C^+) \\ (\mathcal{F} = \bigoplus_{\varphi \in \Sigma} \mathcal{F}_\varphi) &\longmapsto (\Lambda_{\mathcal{F}} = \bigoplus_{\varphi \in \Sigma} \Lambda_{\mathcal{F}_\varphi}) \end{aligned}$$

est une bijection, où  $\Lambda_{\mathcal{F}_\varphi} := \widehat{\theta}_\varphi^{-1}(\mathcal{F}_\varphi)$ .

- $C^\#$  est de caractéristique  $p$ . Dans ce cas les untills  $(C_\varphi^\#)_{\varphi \in \Sigma}$  sont tous égaux. Notons  $M_0 = W_{\mathcal{O}_F}(C^\#)^n$ . Il s'en suit que  $\text{Gr}_{(\mathcal{Y}_{\mathcal{O}_F, \text{GL}_n, \text{Spd } \mathbb{Z}_p})}^{\leq \mu_\bullet}(C, C^+)$  paramétrise les  $W_{\mathcal{O}_F}(C)$ -réseaux  $M \subset M_0[\frac{1}{p}]$  tels que la position relative de  $M$  et  $M_0$  soit bornée par

$$\sum_{\varphi \in \Sigma} \mu_\varphi^\vee$$

L'assertion découle alors de 3.2.5.

Le point (2) se démontre de la même manière, en observant que les conditions

$$\xi_i \cdot \Lambda_i \subset \Lambda_{i+1}, \quad \dim_C(\Lambda_i/\Lambda_{i+1}) = r_i$$

(avec les notations de la preuve du théorème 5.6.12) sont équivalentes à ce que la position relative de  $\Lambda_i$  et  $\Lambda_{i+1}$  soit égale à  $\mu_i^\vee = (1^{n-r_i}, 0^{r_i})$  au point  $S_{\varphi_i}^\#$ . □

# Bibliographie

- [AG03] Fabrizio Andreatta and Eyal Z. Goren. *Geometry of Hilbert modular varieties over totally ramified primes*. *International Mathematics Research Notices*, 2003 :1785–1835, 2003.
- [AGLR22] Johannes Anschütz, Ian Gleason, João Lourenço, and Timo Richarz. On the  $p$ -adic theory of local models, 2022.
- [AGV71] Michael Artin, Alexander Grothendieck, and Jean-Louis Verdier. *Théorie de Topos et Cohomologie Etale des Schemas I, II, III*, volume 269, 270, 305 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1971.
- [BB66] W. L. Baily and A. Borel. Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. *Annals of Mathematics*, 84(3) :442–528, 1966.
- [BBM82] Pierre Berthelot, Lawrence Breen, and William Messing. *Théorie de Dieudonné Cristalline II*. Springer Berlin Heidelberg, 1982.
- [BC79] A. Borel and W. Casselman. *Automorphic Forms, Representations and L-Functions : Automorphic Forms, Representations and L-functions*. Automorphic Forms, Representations, and L-functions. American Mathematical Society, 1979.
- [Ber23] Diego Berger. Stratification des variétés de hilbert en présence de ramification, 2023.
- [BH16] Stéphane Bijakowski and Valentin Hernandez. *Groupes  $p$ -divisibles avec condition de Pappas-Rapoport et invariants de Hasse*. *Journal de l'Ecole Polytechnique - Mathématiques*, 4, 11 2016.
- [BH22a] Stéphane Bijakowski and Valentin Hernandez. *On the geometry of the Pappas-Rapoport models in the (AR) case*. 2022. Preprint on webpage at <http://stephane-bijakowski.perso.math.cnrs.fr/AR.pdf>.
- [BH22b] Stéphane Bijakowski and Valentin Hernandez. *On The geometry of the Pappas-Rapoport models for PEL shimura varieties*. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, page 1–43, 2022.

- [Bij16] Stéphane Bijakowski. *The compatibility with the duality for partial Hasse invariants*. 03 2016.
- [Bij22] Stéphane Bijakowski. *Hodge Stratification in low dimension*. 2022.
- [Bor63] Armand Borel. Some finiteness properties of adèle groups over number fields. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 16 :5–30, 1963.
- [Box15a] George Boxer. Torsion in the coherent cohomology of shimura varieties and galois representations. *arXiv : Number Theory*, 2015.
- [Box15b] George Boxer. Torsion in the coherent cohomology of shimura varieties and galois representations, 2015.
- [BS64] Armand Borel and J. P. Serre. Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 39 :111–164, 1964.
- [BS16] Bhargav Bhatt and Peter Scholze. Projectivity of the witt vector affine grassmannian. *Inventiones mathematicae*, 209, 12 2016.
- [BV17] Madeleine Burkhart and David Vella. Defining equations of nilpotent orbits for borel subgroups of modality zero in type an, 2017.
- [Con14] Brian Conrad. Reductive group schemes. *Autour des schémas en groupes*, 1(93-444) :24, 2014.
- [Del71] Pierre Deligne. Travaux de Shimura. In *Séminaire Bourbaki : vol. 1970/71, exposés 382-399*, number 13 in Séminaire Bourbaki. Springer-Verlag, 1971. talk :389.
- [Del79] Pierre Deligne. Variétés de shimura : interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques, 1979.
- [Del06] Pierre Deligne. Formes modulaires et représentations  $\ell$ -adiques. In *Séminaire Bourbaki vol. 1968/69 Exposés 347-363*, pages 139–172. Springer, 2006.
- [Dem74] Michel Demazure. *Désingularisation des variétés de Schubert généralisées*. *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure*, 7(1) :53–88, 1974.
- [dJ91] A.J. de Jong. *The Moduli Spaces of Principally Polarized Abelian Varieties with  $\Gamma_0(p)$ -level Structure*. Rijksuniversiteit Utrecht. Mathematisch Instituut, 1991.
- [DP94] Pierre Deligne and Georgios Pappas. *Singularités des espaces de modules de Hilbert en les caractéristiques divisant le discriminant*. *Compositio Mathematica*, 90(1) :59–79, 1994.

- [Far06] Laurent Fargues. *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld : Décomposition cellulaire de la tour de Lubin-Tate*, 2006.
- [FFpdPC18] Laurent Fargues, Jean Marc Fontaine, and préface de Pierre Colmez. Courbes et fibrés vectoriels en théorie de hodge p-adique. *Astérisque*, 406 :1–382, 2018.
- [Fon77] Jean-Marc Fontaine. *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*. Number 47-48 in *Astérisque*. Société mathématiques de France, 1977.
- [FS21] Laurent Fargues and Peter Scholze. Geometrization of the local langlands correspondence, 2021.
- [Gir71] J. Giraud. *Cohomologie non abélienne*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Springer, 1971.
- [GK15] Wushi Goldring and Jean-Stefan Koskivirta. Strata hasse invariants, hecke algebras and galois representations. *Inventiones mathematicae*, pages 1–98, 2015.
- [Gle20] Ian Gleason. Specialization maps for scholze's category of diamonds. 2020.
- [GN13] Wushi Goldring and Marc-Hubert Nicole. The  $\mu$ -ordinary hasse invariant of unitary shimura varieties. *Crelle's Journal*, 2017 :137–151, 2013.
- [GN20] A. Genestier and B. C. Ngô. Lectures on Shimura varieties. In *Shimura varieties*, volume 457 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 22–71. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2020.
- [GO00] Eyal Goren and Frans Oort. Stratifications of hilbert modular varieties. *Journal of Algebraic Geometry*, 9, 01 2000.
- [Gor01] Eyal Z. Goren. Hasse invariants for hilbert modular varieties. *Israel Journal of Mathematics*, 122 :157–174, 2001.
- [Gro61] Alexander Grothendieck. Techniques de construction en géométrie analytique. X. Construction de l'espace de Teichmüller. *Séminaire Henri Cartan*, 13(2), 1960-1961. talk :17.
- [Hai03] Thomas J. Haines. Structure constants for hecke and representation rings, 2003.
- [Hai06] Thomas Haines. *Equidimensionality of convolution morphisms and applications to saturation problems*. *Advances in Mathematics*, 207 :297–327, 12 2006.
- [Har12] Philipp Hartwig. *Kottwitz-Rapoport and p-rank strata in the reduction of Shimura varieties of PEL type*. PhD thesis, Sep 2012.

- [hc] Kestutis Cesnavicius (<https://mathoverflow.net/users/5498/kestutis-cesnavicius>). On unramified  $p$ -adic groups. MathOverflow. URL :<https://mathoverflow.net/q/184548> (version : 2014-10-16).
- [Her16] Valentin Hernandez. Invariants de hasse ordinaires. *arXiv : Number Theory*, pages 1519–1607, 2016.
- [Hid86] Haruzo Hida. Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Ser. 4, 19(2) :231–273, 1986.
- [Hid02] Haruzo Hida. Control theorems of coherent sheaves on shimura varieties of pel type. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 1(1) :1–76, 2002.
- [How20] Benjamin Howard. On the Ekedahl–Oort stratification of shimura curves. *Algebra and Number Theory*, 14(4) :961–990, jun 2020.
- [HR97] Lutz Hille and Gerhard Röhrle. On parabolic subgroups of classical groups with a finite number of orbits on the unipotent radical. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 325(5) :465–470, 1997.
- [HR20] Thomas J. Haines and Timo Richarz. The test function conjecture for local models of Weil-restricted groups. *Compositio Mathematica*, 156(7) :1348–1404, jul 2020.
- [Hub94] R. Huber. A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties. *Mathematische Zeitschrift*, 217(4) :513–552, 1994.
- [Hub96] R. Huber. *Étale Cohomology of Rigid Analytic Varieties and Adic Spaces*. Aspects of Mathematics. Vieweg+Teubner Verlag, 1996.
- [Jac34] C.G.J. Jacobi. De compositione numerorum e quatuor quadratis. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1834(12) :167–172, 1834.
- [Kat75] Nicholas M. Katz. Higher congruences between modular forms. *Annals of Mathematics*, 101(2) :332–367, 1975.
- [Kat79] Nicholas M. Katz. Slope filtration of  $f$ -crystals. In *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes - (Juillet 1978) (I) : Groupe formels, représentations galoisiennes et cohomologie des variétés de caractéristique positive*, number 63 in Astérisque, pages 113–163. Société mathématique de France, 1979.
- [Ked15] Kiran S. Kedlaya. Noetherian Properties of Fargues-Fontaine Curves. *International Mathematics Research Notices*, 2016(8) :2544–2567, 07 2015.



- [Ked19] Kiran S. Kedlaya. Some ring-theoretic properties of  $A_{\text{inf}}$ , 2019.
- [Kot92] Robert E. Kottwitz. *Points on Some Shimura Varieties Over Finite Fields*. *Journal of the American Mathematical Society*, 5(2) :373–444, 1992.
- [KR00] Robert E. Kottwitz and Michael Rapoport. Minuscule alcoves for  $GL_n$  and  $GSp_{2n}$ . *manuscripta mathematica*, 102 :403–428, 2000.
- [Lag70] Joesph Louis Lagrange. *Démonstration d’un théorème d’arithmétique*, pages 189–201. 1770.
- [Lan76] Robert Langlands. Some contemporary problems with origins in the jugendtraum. *Amer. Math. Soc*, pages 401–418, 1976.
- [Lan13] Kai-Wen Lan. *Arithmetic Compactifications of PEL-Type Shimura Varieties*. Princeton University Press, 2013.
- [Lau09] Eike Lau. Frames and finite group schemes over complete regular local rings, 2009.
- [Lau14] Eike Lau. *Relations between Dieudonné displays and crystalline Dieudonné theory*. *Algebra and Number Theory*, 8(9) :2201–2262, dec 2014.
- [Lev16] Brandon Levin. Local models for Weil-restricted groups. *Compositio Mathematica*, 152(12) :2563–2601, 2016.
- [LH22] Siyan Daniel Li-Huerta. The plectic conjecture over local fields, 2022.
- [Mes72] William Messing. *The Crystals Associated to Barsotti-Tate Groups : with Applications to Abelian Schemes*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1972.
- [MFK94] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan. *Geometric Invariant Theory*. *Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete, 3 Folge/A Series of Modern Surveys in Mathematics Series*. Springer Berlin Heidelberg, 1994.
- [Mil83] J. S. Milne. *The Action of an Automorphism of  $C$  On a Shimura Variety and its Special Points*, pages 239–265. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.
- [MOV03] Anton Malkin, Viktor Ostrik, and Maxim Vybornov. *The minimal degeneration singularities in the affine Grassmannians*. 2003. <https://arxiv.org/abs/math/0305095>.
- [MWY19] Dinakar Muthiah, Alex Weekes, and Oded Yacobi. On a conjecture of pappas and rapoport about the standard local model for  $gl_d$ , 2019.

- [Oes84] Joseph Oesterlé. Nombres de tamagawa et groupes unipotentes en caractéristique  $p$ . *Inventiones mathematicae*, 78 :13–88, 1984.
- [Oor01] Frans Oort. *A Stratification of a Moduli Space of Abelian Varieties*, pages 345–416. Birkhäuser Basel, Basel, 2001.
- [PR00] G. Pappas and M. Rapoport. Local models in the ramified case i. the el-case, 2000.
- [PR02] George Pappas and Michael Rapoport. *Local models in the ramified case II. Splitting models*. *Duke Mathematical Journal*, 127, 06 2002.
- [PR06] Georgios Pappas and Michael Rapoport. Twisted loop groups and their affine flag varieties. *Advances in Mathematics*, 219 :118–198, 2006.
- [PR23] Georgios Pappas and Michael Rapoport.  $p$ -adic shtukas and the theory of global and local shimura varieties, 2023.
- [PRR93] V. Platonov, A. Rapinchuk, and R. Rowen. *Algebraic Groups and Number Theory*. ISSN. Elsevier Science, 1993.
- [PRS11] G. Pappas, M. Rapoport, and B. Smithling. Local models of shimura varieties, i. geometry and combinatorics, 2011.
- [PW79] Berthelot Pierre and Messing William. Théorie de Dieudonné cristalline I. In *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes - (Juillet 1978) (I) : Groupe formels, représentations galoisiennes et cohomologie des variétés de caractéristique positive*, number 63 in Astérisque. Société mathématique de France, 1979.
- [PWZ12] Richard Pink, Torsten Wedhorn, and Paul Ziegler. *F-zips with additional structure*. *Pacific Journal of Mathematics*, 274, 08 2012.
- [PZ11] Georgios Pappas and Xinwen Zhu. Local models of shimura varieties and a conjecture of kottwitz. *Inventiones mathematicae*, 194 :147–254, 2011.
- [Ram16] Srinivasa Ramanujan. On certain arithmetical functions. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 22(9) :159–184, 1916.
- [RX14] Davide Reduzzi and Liang Xiao. *Partial Hasse invariants on splitting models of Hilbert modular varieties*. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 50, 05 2014.
- [RZ96] M. Rapoport and Th. Zink. *Period Spaces for  $p$ -divisible Groups (AM-141)*. Princeton University Press, 1996.
- [Sch22] Peter Scholze. Etale cohomology of diamonds, 2022.

- [SD73] H. P. F. Swinnerton-Dyer. On  $\ell$ -adic representations and congruences for coefficients of modular forms. In Willem Kuyik and Jean-Pierre Serre, editors, *Modular Functions of One Variable III*, pages 1–55, Berlin, Heidelberg, 1973. Springer Berlin Heidelberg.
- [Ser67] Jean-Pierre Serre. Une interprétation des congruences relatives à la fonction  $\tau$  de ramanujan. *Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, 9(1) :1–17, 1967.
- [Ser06] Jean-Pierre Serre. Congruences et formes modulaires. In *Séminaire Bourbaki vol. 1971/72 Exposés 400–417*, pages 319–338. Springer, 2006.
- [Shi63] Goro Shimura. On analytic families of polarized abelian varieties and automorphic functions. *Annals of Mathematics*, 78(1) :149–192, 1963.
- [Shi70] Goro Shimura. On canonical models of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. *Annals of Mathematics*, 91(1) :144–222, 1970.
- [Sta18] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2018.
- [SW20] Peter Scholze and Jared Weinstein. *Berkeley Lectures on  $p$ -adic Geometry : (AMS-207)*. Princeton University Press, 05 2020.
- [SYZ21] Xu Shen, Chia-Fu Yu, and Chao Zhang. *EKOR strata for Shimura varieties with parahoric level structure*. *Duke Mathematical Journal*, 170(14) :3111 – 3236, 2021.
- [SZ21] Xu Shen and Chao Zhang. Stratifications in good reductions of shimura varieties of abelian type, 2021.
- [SZ22] Xu Shen and Yuqiang Zheng.  $f$ -zips with additional structure on splitting models of shimura varieties, 2022.
- [VW13] Eva Viehmann and Torsten Wedhorn. *Ekedahl–Oort and Newton strata for Shimura varieties of PEL type*. *Mathematische Annalen*, 356(4) :1493–1550, jan 2013.
- [Wed99] Torsten Wedhorn. Ordinarity in good reductions of Shimura varieties of PEL-type. *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure*, Ser. 4, 32(5) :575–618, 1999.
- [Xin16] Zhu Xinwen. *An introduction to affine Grassmannians and the geometric Satake equivalence*. 2016. <https://arxiv.org/abs/1603.05593>.
- [YCO20] Chia-Fu Yu, Ching-Li Chai, and Frans Oort. *Stratifying Lie Strata of Hilbert Modular Varieties*. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 24(6) :1307 – 1352, 2020.

- [Yun16] Zhiwei Yun. Lectures on springer theories and orbital integrals, 2016.
- [Zha18] Chao Zhang. Ekedahl-oort strata for good reductions of shimura varieties of hodge type. *Canadian Journal of Mathematics*, 70(2) :451–480, 2018.
- [Zhu17] Xinwen Zhu. Affine grassmannians and the geometric satake in mixed characteristic. *Annals of Mathematics*, 185(2) :403–492, 2017.
- [Zin02] Thomas Zink. *The display of a formal  $p$ -divisible group*. *Astérisque*, pages 127–248, 2002.

**Titre :** Stratification des modèles de Pappas-Rapoport des variétés de Shimura

**Mots clés :** Géométrie arithmétique, formes modulaires, variétés de Shimura

**Résumé :** Dans cette thèse nous étudions la géométrie de la réduction de certaines variétés de Shimura modulo un nombre premier  $p$ . Plus précisément on considère la réduction modulo  $p$  des modèles entiers des variétés de Shimura de type PEL construits par Pappas et Rapoport. Dans le cas d'une donnée PEL de type Hilbert, on montre que la stratification induite par le polygone de Hodge est une bonne stratification (l'adhérence d'une strate est une union disjointe de strates). Ensuite nous calculons les  $G$ -orbites de la fibre spéciale du modèle local de Pappas-Rapoport dans le cas Hilbert, où  $G$  est le groupe associé à la donnée PEL. Ces orbites induisent une bonne stratification de la fibre spéciale de la variété de Shimura, que l'on appelle stratification

de Kottwitz-Rapoport (analogue à la stratification de Kottwitz-Rapoport des modèles entiers de Kottwitz). Dans un travail récent, Xu Shen et Yuqiang Zheng ont défini une stratification d'Ekedahl-Oort des modèles entiers de Pappas-Rapoport. Dans le cas Hilbert nous montrons que « l'intersection » de leur stratification avec la stratification de Kottwitz-Rapoport est une bonne stratification. Dans la seconde partie de cette thèse nous nous intéressons aux modèles locaux dans le contexte de la théorie de Hodge  $p$ -adique. Nous définissons un plongement en niveau entier des modèles locaux de Pappas-Rapoport dans une certaine Grassmannienne affine de type Beilinson-Drinfeld, analogue au plongement défini par Scholze et Weinstein pour les modèles entiers de Kottwitz.

**Title :** Stratification of Pappas-Rapoport models of Shimura varieties

**Keywords :** Arithmetic geometry, modular forms, Shimura varieties

**Abstract :** In this thesis we study the geometry of the reduction of certain Shimura varieties modulo a prime number  $p$ . More precisely, we consider the reduction modulo  $p$  of the integer models of PEL-type Shimura varieties constructed by Pappas and Rapoport. In the case of Hilbert-type PEL data, we show that the stratification induced by the Hodge polygon is a good stratification (the adherence of a stratum is a disjoint union of strata). Next, we compute the  $G$ -orbits of the special fiber of the Pappas-Rapoport local model in the Hilbert case, where  $G$  is the group associated with the PEL datum. These orbits induce a good stratification of the special fiber of the Shimura variety, which we call Kottwitz-Rapoport stratification

(analogous to the Kottwitz-Rapoport stratification of integer Kottwitz models). In a recent work, Xu Shen and Yuqiang Zheng have defined an Ekedahl-Oort stratification of integer Pappas-Rapoport models. In the Hilbert case we show that “the intersection” of their stratification with the Kottwitz-Rapoport stratification is a good stratification. In the second part of this thesis, we focus on local models in the context of  $p$ -adic Hodge theory. We define an integer-level embedding of Pappas-Rapoport local models into a certain affine Grassmannian of Beilinson-Drinfeld type, analogous to the embedding defined by Scholze and Weinstein for Kottwitz local models.