



HAL
open science

Optimisation sur des problèmes de traitement de signaux multidimensionnels ou d'images en grandes dimensions

Karima El Qate

► **To cite this version:**

Karima El Qate. Optimisation sur des problèmes de traitement de signaux multidimensionnels ou d'images en grandes dimensions. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Toulon; Université Cadi Ayyad (Marrakech, Maroc). Faculté des sciences et techniques Guéliz, 2022. Français. NNT: 2022TOUL0016 . tel-04752306

HAL Id: tel-04752306

<https://theses.hal.science/tel-04752306v1>

Submitted on 24 Oct 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



كلية العلوم
والتقنيات - مراكش

FACULTE DES SCIENCES
ET TECHNIQUES - MARRAKECH



CENTRE D'ETUDES DOCTORALES
Sciences et Techniques et Sciences Médicales/ ED548 Mer et Sciences

THÈSE EN COTUTELLE

présentée à la Faculté des Sciences et Techniques de Marrakech

pour obtenir le grade de :

Docteur

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Optimisation sur des problèmes de traitement de
signaux multidimensionnels ou d'images en grandes dimensions

par :

Karima EL QATE

(Master : **Modélisation et Calcul Scientifique pour l'Ingénierie Mathématique**)

soutenue le 17 /12 /2022

devant la commission d'examen :

Pr. Aïcha SYAM	PES	FST Marrakech,	Présidente
Pr. Salah BOURENNANE	PU	Ecole Centrale de Marseille,	Rapporteur
Pr. Albera LAURENT	PU	Université de Rennes,	Rapporteur
Pr. Lekbir AFRAITES	PES	FST Beni Mellal,	Rapporteur
Pr. Mohammed EL RHABI	PES	Ecole Centrale Casablanca,	Examineur
Pr. Eric MOREAU	PU	Université de Toulon,	Examineur
Pr. Nadège THIRION-MOREAU	PU	Université de Toulon,	Directrice de thèse
Pr. Abdelilah HAKIM	PES	FST Marrakech,	Directeur de thèse

Karima EL QATE

Optimisation sur des problèmes de traitement
de signaux multidimensionnels ou d'images
en grandes dimensions

Année : 2022

Sciences et Techniques et Sciences
Médicales/ ED548 Mer et Sciences

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières	ii
Liste des figures	iv
Remerciements	vii
Résumé	ix
Abstract	xi
Abréviations	xiii
Introduction générale	xv
I État de l’art	1
1 Outils/rappels/opérateurs mathématiques et rappels d’optimisation	3
1.1 Présentation	4
1.2 Notations et définitions de base des opérateurs tensoriels	4
1.2.1 Notations générales	4
1.2.2 Les opérateurs matriciels	5
1.2.3 Opérateurs tensoriels	7
1.3 Les décompositions tensorielles	9
1.3.1 Formulation du modèle de décomposition de Tucker	9
1.3.2 Formulation du modèle de décomposition canonique polyadique (CP)	10
1.4 Algorithmes d’optimisation déterministe	12
1.4.1 Introduction aux problèmes inverses en traitement de signal et d’image	13
1.4.2 Outils d’analyse variationnelle	17
1.4.3 Algorithmes d’optimisation	23
1.4.4 Quelques algorithmes existants pour les décompositions tensorielles	29
1.5 Conclusion	35
2 Les applications visées avec la présentation des données à traiter dans chacune des applications	37
2.1 L’analyse des données de spectroscopie de fluorescence 3D	38
2.2 Récupération des tenseurs à faible rang	39
2.3 Quelques exemples d’images multidimensionnelles	41
2.4 Conclusion	43
II Contributions	45
3 Un nouvel algorithme primal-dual pour la décomposition CP de tenseurs d’ordre N sous contrainte de non négativité	47
3.1 Introduction	49

3.2	La méthode primale duale à base de gradient projeté	51
3.2.1	Problème Primal-Dual général	51
3.2.2	Problème variationnel	52
3.2.3	La méthode du gradient projeté	53
3.3	Fomulation du problème de la décomposition CP sous contrainte de non négativité	54
3.4	Nouvel algo. de décomposition CP sous contrainte de non négativité : CP-PDPG	55
3.5	Preuve théorique de la convergence de l’algo. CP-PDGPG	57
3.5.1	Hypothèses	58
3.5.2	Résultats théoriques	58
3.6	Simulations numériques	59
3.7	Conclusion	60
4	Complétion d’images hyperspectrales via une factorisation tensorielle avec introduction d’un terme de bi- régularisation	65
4.1	Introduction	67
4.2	Rappels théoriques	69
4.2.1	Notations	69
4.2.2	Rappels mathématiques préliminaires	69
4.2.3	Algorithme de minimisation proximale alternée	70
4.3	Nouveau modèle de complétion tensoriel proposé	71
4.3.1	Formulation du problème :	71
4.3.2	Le processus de minimisation	72
4.4	Simulations numériques	76
4.5	Conclusion	82
5	Complétion des tenseurs de rang faible en utilisant une régularisation à base de norme nucléaire tronquée avec une variation totale non convexe	83
5.1	Introduction	85
5.2	Rappels mathématique préliminaires	86
5.3	Approche proposée	89
5.3.1	Du l_0 -gradient dans le cas matriciel au l_0 -TV dans le cas tensoriel	89
5.3.2	Complétion tensorielle via TNNR avec un terme TV non convexe	90
5.3.3	Processus de minimisation	92
5.4	Résultats numériques	94
5.5	Conclusion	98
	Conclusion générale et perspectives	99
	Annexe	101
	Bibliographie	105

TABLE DES FIGURES

1.1	Les coupes d'un tenseur d'ordre 3.	8
1.2	Décomposition de Tucker	10
1.3	Décomposition CP d'un tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ d'ordre 3	11
1.4	Exemple d'un problème de restauration d'image	14
1.5	(a) Fonction $ \cdot ^p$ pour $p \in \{1, 2, 3, 4\}$, (b) Opérateur proximal $\text{prox}_{\gamma \cdot ^p}(x)$ pour $\gamma = 1$ et $p \in \{1, 2, 3, 4\}$	22
1.6	La valeur de la conjuguée (de Legendre-Fenchel) f^* en un certain $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$	27
1.7	La parabole \mathbf{y}^2 et sa fonction conjuguée $\frac{1}{4}\mathbf{z}^2$	28
2.1	Principe de spectroscopie de fluorescence 3D	39
2.2	Exemples typiques d'images, de gauche à droite : Image en niveaux de gris, Image sur 3 niveaux de couleur ici RGB, Image Multispectrale, et enfin Image Hyperspectrale.	41
3.1	Les FEEM de référence et les FEEM reconstruites par l'algorithme N-way, fast HALS, ADMoM, et par notre algorithme proposé CP-PDPG dans deux cas : sans terme de régularisation et avec terme de régularisation	62
3.2	Les $\hat{R} = 6$ spectres d'émission, spectres d'excitation et concentrations estimées avec l'algorithme CP-PDPG dans deux cas. En ligne rouge solide : les spectres de référence, en ligne verte pointillée : CP-PDPG sans terme de régularisation, en ligne bleue pointillée : CP-PDPG avec terme de régularisation, en ligne noire pointillée : Algorithme ADMoM, en ligne cyan pointillée : algorithme HALS rapide, et en ligne magenta pointillée : Algorithme N-way.	63
3.3	L'erreur d'estimation en fonction des itérations, obtenue avec l'algorithme CP-PDPG suggéré avec le terme de régularisation	64
4.1	Les résultats de complétion de l'ensemble des données <i>PaviaU</i> . La première ligne est le résultat à la bande 73 avec un SR=10% et la deuxième ligne est le résultat à la bande 77 avec un SR=15%. De gauche à droite : l'image originale, l'image incomplète, l'image reconstruite par TMac, LRTC-TV, MF-TV, et au moyen de notre algorithme, respectivement.	79
4.2	La première ligne montre les valeurs PSNR et SSIM de toutes les bandes récupérées de l'image hyperspectrale testée <i>PaviaU</i> avec un SR=10% obtenues par TMac, LRTC-TV, MF-TV, et la méthode suggérée, respectivement. La deuxième ligne montre les valeurs PSNR et SSIM de toutes les bandes récupérées de l'image hyperspectrale testée <i>PaviaU</i> avec un SR=15% obtenues par TMac, LRTC-TV, MF-TV, et la méthode suggérée, respectivement.	79
4.3	Les résultats de complétion de l'ensemble des données <i>Indian Pine</i> . La première ligne est le résultat à la bande 51 avec un SR=10% et la deuxième ligne est le résultat à la bande 51 avec un un SR=15%. De gauche à droite : l'image originale, l'image incomplète, l'image reconstruite par TMac, LRTC-TV, MF-TV, et au moyen de notre algorithme, respectivement.	80

4.4	La première ligne montre les valeurs PSNR et SSIM de toutes les bandes récupérées de l'image hyperspectrale testée <i>Indian Pine</i> avec un SR=10% obtenues par TMac, LRTC-TV, MF-TV, et la méthode suggérée, respectivement. La deuxième ligne montre les valeurs PSNR et SSIM de toutes les bandes récupérées de l'image hyperspectrale testée <i>Indian Pine</i> avec un SR=15% obtenues par TMac, LRTC-TV, MF-TV, et la méthode suggérée, respectivement.	80
4.5	Les résultats de complétion de l'ensemble des données <i>Cuprite</i> . La première ligne est le résultat à la bande 123 avec un SR=10% et la deuxième ligne est le résultat à la bande 82 avec un SR=15%. De gauche à droite : l'image originale, l'image incomplète, l'image reconstruite par TMac, LRTC-TV, MF-TV, et au moyen de notre algorithme, respectivement.	81
4.6	La première ligne montre les valeurs PSNR et SSIM de toutes les bandes récupérées de l'image hyperspectrale testée <i>Cuprite</i> avec un SR=10% obtenues par TMac, LRTC-TV, MF-TV, et la méthode suggérée, respectivement. La deuxième ligne montre les valeurs PSNR et SSIM de toutes les bandes récupérées de l'image hyperspectrale testée <i>Cuprite</i> avec un SR=15% obtenues par TMac, LRTC-TV, MF-TV, et la méthode suggérée, respectivement.	81
5.1	Résultats de la comparaison visuelle de l'image <i>House</i> récupérée. De gauche à droite et en bas, l'image originale, l'image incomplète avec 70% de pixels manquants, les résultats reconstruits par T-TNN, LRTC, MF-TV, et notre algorithme proposé respectivement.	96
5.2	Résultats de la comparaison visuelle de l'image <i>Parthenon</i> récupérée. De gauche à droite et en bas, l'image originale, l'image incomplète avec 70% de pixels manquants, les résultats reconstruits par T-TNN, LRTC, MF-TV, et notre algorithme proposé respectivement.	96
5.3	Résultats de la comparaison visuelle de l'image <i>Papper</i> récupérée. De gauche à droite et en bas, l'image originale, l'image incomplète avec 70% de pixels manquants, les résultats reconstruits par T-TNN, LRTC, MF-TV, et notre algorithme proposé respectivement.	97

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Caractéristiques de différentes images	42
4.1	Les valeurs de PSNR/SSIM obtenues par la reconstruction des images hyperspectrales <i>Cuprite</i> , <i>PaviaU</i> et <i>indian Pine</i> en utilisant différents pourcentage de SR. Pour chaque test, quatre résultats sont fournis : TMac, MF-TV, LRTC-TV, et notre approche proposée HC-BiFR.	78
5.1	Les valeurs de PSNR/SSIM obtenues par la reconstruction des images couleur <i>Parthenon</i> , <i>House</i> et <i>Papper</i> en utilisant différents pourcentage (SR) (10%, 20%, 30%, et 40%). Pour chaque test, quatre résultats sont fournis : T-TNN, LRTC, MF-TV, et notre approche proposée.	95

REMERCIEMENTS

Avant tout propos, permettez-moi de chaleureusement remercier tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à favoriser les conditions qui ont mené à la rédaction de ma thèse de doctorat.

Je tiens d'abord à témoigner toute ma gratitude aux professeurs Abdelilah Hakim et Nadège Thirion-Moreau, qui ont accepté de superviser mon travail, et de me témoigner leur soutien et leur confiance. Je voudrais vous remercier Mr. Hakim, pour votre disponibilité constante, pour votre sens du travail bien fait, de m'avoir communiqué votre expérience et particulièrement de m'avoir laissé une grande liberté dans la réalisation de cette thèse. J'ai eu le plaisir d'apprendre avec vous à visualiser et à sentir les concepts et les équations mathématiques. Pr. Nadège Thirion-Moreau je vous remercie pour la qualité de votre encadrement d'un point de vue scientifique et humain, illustrée par la pertinence de vos remarques et la grande liberté de nos échanges, je vous remercie également pour nos discussions scientifiques extrêmement constructives, votre bienveillance ainsi que votre humilité.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude aux professeurs Mohammed El Rhabi et Eric Moreau d'avoir suivi ce travail tout le long de sa réalisation et pour leur soutien généreux. Grâce à leurs expériences et à leur intelligence académique, ils ont fourni des conseils éclairés.

Je remercie également l'ensemble des membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont témoigné à l'égard de mes travaux de thèse. En particulier, je remercie les rapporteurs Salah BOURENNANE, Albera LAURENT et Lekbir AFRAITES d'avoir accepté d'évaluer mes travaux et à travers leurs remarques constructives d'avoir pu les bonifier. Un grand merci au professeur Aïcha SYAM d'avoir présidé ce jury.

Un grand merci à mes amis Ait Bella Fatim Zahra, Souad Mohaoui et Mohamed Jaouad Lahgazi pour tout ce que l'on a pu échanger aussi bien en amitié qu'en termes de discussions scientifiques. Pour leur écoute attentive et leurs conseils pertinents, tant quand je peinais dans une preuve, que pour mes répétitions d'exposés. Je leur suis extrêmement reconnaissante de m'avoir aidé à survivre à tous les moments stressants.

A tous mes amis, je ne peux trouver des mots justes pour vous exprimer mon affection et mes pensées, vous êtes pour moi des frères, sœurs sur qui je peux compter. En témoignage de l'amitié qui nous unit et des souvenirs de tous les moments que nous avons passés ensemble, je vous dédie ce travail et je vous souhaite une vie pleine de bonheur et de réussite.

Enfin et surtout, je dois exprimer mes profonds remerciements à ma mère, mon père, mes sœurs Fatimaezzahra, Asmae et Hajar, mon frère Yassine. Merci de m'avoir apporté un soutien indéfectible et des encouragements continus tout au long de mes années d'études. À mes parents, merci d'avoir accordé une si grande importance à l'éducation depuis mon enfance. Vous m'avez toujours poussé à accomplir davantage à chaque étape de ma vie. Cet accomplissement n'aurait pas été possible sans vous.

RÉSUMÉ

De nos jours, un large éventail d'ensembles de données s'avère naturellement organisés sous forme de tenseur. En fait, les tenseurs et les outils mathématiques qui leur sont associés sont définis au moyen de l'algèbre multilinéaire et généralisent en cela les matrices et les outils qui leur sont associés grâce l'algèbre linéaire. Les tenseurs sont des tableaux multidimensionnels qui représentent des structures de données d'ordre supérieur (à l'ordre deux, ce sont les matrices et à l'ordre un les vecteurs). En outre, l'algèbre multilinéaire a permis d'établir des correspondances entre différentes manières de représenter les tenseurs par le biais des décompositions tensorielles et les sous-espaces qui forment un tenseur.

L'analyse tensorielle est de plus en plus présente dans de nombreuses applications de traitement des signaux multidimensionnels et d'images en grandes dimensions, de sorte que ces outils sont désormais utilisés pour résoudre de nombreux problèmes liés à l'analyse de données multidimensionnelles. La plupart de ces applications nécessitent la combinaison de données d'observation multidimensionnelles et de modèles mathématiques, conduisant finalement, dans de nombreux problèmes à la résolution d'un problème inverse souvent mal posé. Ces problèmes sont ensuite bien souvent réécrits comme des problèmes d'optimisation.

Nous nous intéressons dans cette thèse à plusieurs points relatifs aux modèles basés sur les décompositions tensorielles et le traitement des données multidimensionnelles. Bien que cela ait fait l'objet de nombreux travaux de recherche, notre objectif est de fournir de nouveaux modèles de reconstruction exploitant certaines contraintes liées à la nature même des données étudiées : parcimonie, rang faible, régularité, non négativité, etc. L'objectif, est également d'introduire des modèles efficaces en termes de qualité de reconstruction et de robustesse (vis à vis d'erreurs de modèle, de bruit, de données manquantes, etc) pour différentes applications. Ceci nous amène alors à bien souvent réécrire le problème traité initialement comme un problème d'optimisation sous différentes contraintes, afin de concevoir des algorithmes spécialement adaptés aux applications que nous considérons. À cet égard, dans ce manuscrit de thèse nous nous intéressons principalement à trois types d'applications : l'analyse des données de spectroscopie de fluorescence 3D pour la surveillance environnementale, la complétion des images hyperspectrales, ainsi que la complétion des images couleurs.

Mots clefs : optimisation déterministe ; problèmes inverses mal posés ; tenseurs d'ordre N ; décompositions tensorielles ; décomposition Canonique Polyadique ; analyse de données multidimensionnelles ; problèmes en grande dimension ; régularisations ; contraintes de non-négativité ; contrainte de rang faible ; contrainte de parcimonie ; surestimation ; spectroscopie de fluorescence ; complétion de données ; méthodes primales-duales ; méthodes proximales ; images hyperspectrales ; images couleurs.

ABSTRACT

Nowadays, a wide range of datasets is naturally organized in tensor form. In fact, tensors and their specific mathematical tools are defined thanks to multi-linear algebra extending analogously how matrices and their tools are established in linear algebra. Tensors are multidimensional arrays that model high-order data structures. In addition, multilinear algebra is able to simultaneously show the correspondences between subspaces that form a tensor using tensor decomposition process.

Recently, tensor analysis has been integrated into multidimensional signal processing and highdimensional image processing applications, so these tools are used to solve many problems related to multidimensional data analysis. Most of these applications require the combination of multidimensional observations data and mathematical models, ultimately leading, in many problems, to the resolution of an often ill-posed inverse problem. These problems are often rewritten as optimization problems.

In this thesis, we are interested in several points related to models based on tensor decompositions and high order processing of multidimensional data. Although this has been the subject of many research works, our objective is to provide new reconstruction models exploiting certain constraints related to the nature of the studied data studied : parsimony, low rank, regularity, non negativity etc., and to introduce efficient models in terms of reconstruction quality and robustness (against model errors, noise, missing data, etc.) for different applications. This often leads us to rewrite the problem initially treated as an optimization problem under different constraints, in order to design algorithms specifically adapted to the applications we will consider. For this purpose, in this work, we are mainly interested in three types of applications : the analysis of 3D fluorescence spectroscopy data for environmental survey, the completion of hyperspectral images and the completion of color images.

Keywords : deterministic optimization ; ill-posed inverse problems ; N-way tensors ; tensor decompositions ; Canonical Polyadic Decomposition ; multidimensional data analysis ; high dimensional problems ; regularizations ; non negativity constraints ; lowrank constraint ; sparsity constraints ; over-factoring ; fluorescence spectroscopy ; tensor completion ; primal-dual methods ; proximal methods ; hyperspectral images ; color images.

ABRÉVIATIONS

TV	Variation Totale (Total Variation)
ADMM	Méthode des Directions Alternées (Alternating Direction Method of Multipliers)
ALS	Méthodes des Moindres Carrés (Alternating Least Square)
LRTR	Récupération des Tenseurs de Rang Faible (Low-Rank Tensor Recovery)
LRTC	Complétion des Tenseurs de Rang Faible (Low-Rank Tensor Completion)
CS	Acquisition Comprimée (Compressed Sensing)
HSI	Image Hyperspectrale (HyperSpectrale Image)
CP	Polyadique Canonique (Canonical Polyadic)
FEEM	Matrice d'Emission d'Excitation de Fluorescence (Fluorescence Emission Excitation Matrix)
RRE	Erreur de Reconstruction Relative
FFT	Transformation de Fourier Rapide (Fast Fourier Transformation)
PSNR	Rapport Signal sur Bruit (Peak Signal to Noise Ratio)
SSIM	Similarité Structurale (Structural Similarity)
TNNR	Régularisation basée sur la Norme Nucléaire Tronquée (Truncated Nuclear Norm Regularization)



INTRODUCTION GÉNÉRALE

Contexte des travaux de thèse

Dernièrement, de nombreux travaux de recherche ont permis de montrer les avantages qu'il peut y avoir à conserver des données multidimensionnelles sous leur forme originale, ce qui nécessite le recours à des outils et opérateurs d'algèbre multilinéaire pour pouvoir préserver la structure des données. Cela permet ainsi d'éviter d'avoir à les réorganiser sous forme vectorielle ou matricielle par le biais d'opérateurs de dépliement et de perdre certaines propriétés de voisinage.

Une méthode efficace pour garder cette structure multidimensionnelle des données est de les stocker dans un tableau à N dimensions lui-même associé à un tenseur d'ordre N (avec $N > 2$). On rappelle qu'un tenseur d'ordre 1 est un vecteur et un tenseur d'ordre 2 est une matrice. L'analyse tensorielle s'est donc avérée depuis quelques années une approche efficace pour conserver les caractéristiques séparées des différents modes et préserver la structure des données. Les décompositions tensorielles, sous toutes leurs formes, constituent un outil très important en matière d'estimation de variables latentes. Comme cet outil est défini de manière abstraite par le biais de l'algèbre multi-linéaire avec une très grande diversité d'algorithmes pouvant en découler, il est important d'étudier leur utilité et leur pertinence dans l'analyse des données multidimensionnelles et d'étendre leurs modèles à des conditions physiques possibles.

De nombreux problèmes de traitement des données multidimensionnelles sont des problèmes inverses. Dans la plupart des cas, la résolution de ces problèmes s'avère être un problème mal posé. La technique la plus courante utilisée pour résoudre les problèmes inverses mal posés consiste à le réécrire comme un problème d'optimisation d'un critère pénalisé ce qui implique des fonctionnelles n'étant ni nécessairement différentiables ni nécessairement convexes. L'objectif de cette thèse est de concevoir de nouvelles méthodes pour résoudre de tels problèmes de d'optimisation (et bien souvent de minimisation).

Cela commence bien souvent par l'utilisation de termes de régularisation efficaces qui visent à renforcer certaines contraintes "physiques" comme la parcimonie, le rang faible, la régularité, la non négativité, etc, dans les formulations d'optimisation. Cela passe aussi par l'utilisation de techniques modernes d'optimisation déterministes comme les méthodes proximales ou les méthodes primales-duales ce qui permettra le développement d'algorithmes efficaces et robustes, appropriés aux applications considérées dans cette thèse.

Ce contexte justifie l'orientation ou la démarche scientifique des travaux de recherche que nous avons menés tout au long de cette thèse et qui nous a conduit à un certain nombre de contributions d'ordre méthodologique que nous présentons rapidement dans la section suivante.

Contributions originales de la thèse

Les travaux présentés dans cette thèse portent sur la conception et le développement d'algorithmes de décomposition et de traitement de données multidimensionnelles ce qui implique des études d'ordre théorique autour des décompositions tensorielles et l'implantation des algorithmes qui en résultent de même que l'étude de leurs propriétés de convergence. L'objectif est de fournir de nouveaux modèles de reconstruction et de traitement pour différentes applications en d'imagerie multidimensionnelle. Plus précisément, nous nous intéressons à la résolution de problèmes inverses rencontrés dans le traitement de différents types d'ensembles d'images. Plus précisément :

1. Dans le chapitre 3, nous nous intéressons au traitement d'ensembles d'images issues de la spectroscopie de fluorescence 3D dans le but de séparer les différents composés présents dans les mélanges étudiés. Nous nous intéressons alors à un modèle particulier de décomposition tensorielle, celui de la décomposition canonique polyadique (CP) également connue sous le nom de Parafac ou Parallel Factor Analysis. Lorsque la quantité de données est très importante, ce problème inverse peut devenir numériquement mal posé et donc difficile à résoudre. Cela nécessite d'introduire des informations a priori sur le système, souvent sous la forme de fonctions de pénalité. Dans notre cas, les matrices facteurs recherchées sont non négatives car elles représentent des quantités physiques : spectres et concentrations qui sont intrinsèquement non négatives. Une des difficultés qui peut se présenter est que la fonction de coût utilisée peut être non différentiable dans certains cas. C'est la raison pour laquelle nous avons proposé de développer un algorithme d'optimisation Primal-Dual à base de Gradient Projeté (PDPG) pour résoudre les problèmes variationnels impliquant de telles fonctions de coût. De plus, malgré son importance théorique, la plupart des approches de la littérature, développées pour la décomposition CP sous contrainte de non négativité, n'ont pas réellement abordé le problème de la convergence des algorithmes proposés. En outre, la plupart des méthodes garantissant un taux de convergence nécessitent des conditions assez restrictives pour leurs analyses théoriques. Par conséquent, il existe toujours un vide théorique concernant le problème de l'étude du taux de convergence sous des hypothèses relativement faibles. Par conséquent, les deux apports de notre travail sont i) la conception d'un nouvel algorithme nommé CP-PDPG ii) la démonstration de sa convergence vers l'ensemble des minimiseurs au taux $O(1/k)$, k étant le nombre d'itérations. Ces travaux ont fait l'objet d'un article de journal dans la revue Springer Multidimensional Systems and Signal processing [56] et de publication dans une conférence internationale [161].
2. Dans le chapitre 4, nous nous intéressons à un autre type de problème : celui de la complétion ou de la reconstruction tenseurs de rang faible. L'objectif principal est de prédire des valeurs manquantes à partir d'un petit ensemble d'observations dans des images hyperspectrales. Les méthodes de rang faible ont connu un grand succès dans les problèmes de complétion de tenseurs. Elles consistent à la récupération des entrées manquantes d'un tenseur partiellement observé. Cependant, l'utilisation du rang faible comme seule contrainte n'est pas suffisant pour permettre une meilleure reconstruction. Nous proposons donc d'exploiter une combinaison des caractéristiques suivantes : un lissage par morceaux, une préservation des bords et une contrainte de cohé-

rence entre bandes spectrales voisines. Par conséquent, nous suggérons d'imposer une double régularisation aux facteurs latents impliqués dans la factorisation tensorielle ceci afin d'assurer une meilleure reconstruction des images hyperspectrales. D'autre part, la contrainte de rang faible est garantie en décomposant le tenseur comme le produit tenseur-matrice mode-3 d'un tenseur et d'une matrice de faible dimension. La préservation des détails locaux dans la reconstruction est l'un des principaux avantages du modèle proposé. Ce travail a fait l'objet d'un article accepté dans un journal international : Journal of Signal Processing Systems.

3. Dans le dernier chapitre, nous abordons le problème des données incomplètes qui a été à l'origine de l'apparition de plusieurs méthodes et algorithmes de complétion. Plus particulièrement, nous nous intéressons aux problèmes de complétion des images couleurs. Les modèles utilisant la norme nucléaire tronquée sont connus comme des approches à faible rang très puissants, pour le cas des problèmes de la complétion matricielle et tensorielle. Cependant, les approches à faible rang sont incapables de caractériser certaines informations supplémentaires présentes dans les données, telles que les propriétés de lissage ou de la préservation de certaines caractéristiques. Nous proposons une nouvelle approche de complétion tensorielle fondée cette fois sur la norme nucléaire tronquée convexe et la variation totale non convexe. En particulier, nous développons un algorithme de minimisation alterné qui combine la méthode de gradient proximal accéléré et une méthode de projection afin de résoudre notre problème d'optimisation suggéré. Ce travail a fait l'objet d'un article accepté dans la revue Scopus Annals of the University of Craiova - Mathematics and Computer Science Series, mais il n'est pas encore publié.

Organisation du manuscrit

Ce document est organisé en deux grandes parties : la première composée de deux chapitres est consacrée à i) introduire la problématique traitée dans cette thèse à savoir celle des problèmes inverses dans un contexte de traitement de signaux multidimensionnels ou d'images qu'il s'agisse de problèmes de séparation/démixage ou de complétion/reconstruction. Cela nous amène à présenter ii) les principales applications auxquelles nous nous sommes intéressés ainsi que les différents types de données manipulées. Ensuite, nous introduisons iii) les outils mathématiques nécessaires à nos développements : nous commençons par les outils d'algèbre multilinéaire (rappels sur les tenseurs, principaux opérateurs tensoriels et matriciels et principaux modèles et les principales décompositions tensorielles auxquels nous nous intéressons), puis iv) nous passons aux problèmes inverses en traitement du signal et des images et nous définissons les outils fondamentaux d'analyse et d'optimisation qui seront utilisés dans le cadre de cette thèse pour résoudre ce type de problèmes. Nous donnons des exemples d'algorithmes d'optimisation déterministes utilisant ces outils pour résoudre des problèmes variationnels. Finalement, nous proposons un état de l'art de certains algorithmes existants pour les décompositions tensorielles. Il est surtout orienté autour de la décomposition CP.

La seconde partie de ce document, composée de 3 chapitres, présente nos différentes

contributions essentiellement théoriques mais également expérimentales sur différents types de problèmes et sur les applications qui leur sont liées.

Dans le premier chapitre de cette partie, nous considérons le modèle de décomposition CP d'un tenseur d'ordre N sous des contraintes de non-négativité et de parcimonie. Une approche d'optimisation déterministe Primal-Dual est proposée ce qui conduit à un nouvel algorithme de décomposition CP sous contrainte de non-négativité et régularisé pour des tenseurs d'ordre N . Des simulations sont effectuées sur des données synthétiques de spectroscopie de fluorescence. L'étude théorique de la convergence de l'algorithme est également réalisée. Dans le second chapitre, nous développons la méthode de minimisation proximale alternée pour traiter un nouveau modèle de complétion des images hyperspectrales basé sur une factorisation tensorielle et un terme de bi-régularisation. Une telle factorisation sert à décomposer le tenseur comme le produit tenseur-matrice mode-3 d'un tenseur de faible dimension et une matrice de faible dimension. Le terme de bi-régularisation est gouverné par la combinaison des propriétés de lissage par morceaux et la contrainte de cohérence entre les bandes spectrales. L'efficacité de notre approche est illustrée sur des données réelles d'images HSI dont une partie des entrées est manquante. Enfin, dans le dernier chapitre de cette partie nous proposons un nouveau modèle de complétion tensorielle qui combine la norme nucléaire tronquée et variation totale non convexe, afin de prédire les valeurs manquantes, bénéficier de la structure lisse et préserver les bords des images couleur. En plus, une combinaison du gradient proximal accéléré pour l'étape convexe et un opérateur de projection pour l'étape non convexe, nous amènent à développer un algorithme de minimisation alterné. Plusieurs simulations numériques sont réalisées et la méthode que nous proposons est comparée à d'autres méthodes de complétion tensorielle aussi bien en terme de mesures visuelles que quantitatives.

Enfin une conclusion générale, une annexe et une étude bibliographique complètent ce document.

Publications

Articles parus ou acceptés pour publication dans des journaux internationaux :

► Karima El Qate, Mohammed El Rhabi, Abdelilah Hakim, Eric Moreau, Nadège Thirion-Moreau. “**A Primal-Dual algorithm for nonnegative N -th order CP tensor decomposition : application to fluorescence spectroscopy data analysis**”. In : *Multidimensional Systems and Signal Processing* (2022), p. 1–18.

► Karima El Qate, Mohammed El Rhabi, Abdelilah Hakim, Eric Moreau, Nadège Thirion-Moreau. “**Hyperspectral image completion via tensor factorization with a bi-regularization term**”. In : *Journal of Signal Processing Systems* (2022) : 1-11.

► K. El Qate, S. Mohaoui, A. Hakim, S. Raghay. “**Color image completion using tensor truncated nuclear norm with l0 total variation**”. In : Annals of the University of Craiova - Mathematics and Computer Science Series (2022), Vol 49, No 2.

Articles de conférences acceptés :

► Karima El Qate, Mohammed El Rhabi, Abdelilah Hakim, Eric Moreau, Nadège Thirion-Moreau. “**A regularized nonnegative third order tensor decomposition using a Primal-Dual Projected Gradient Algorithm : application to 3D fluorescence spectroscopy**”. In : International Conference on Smart Multimedia. Springer. 2018, p. 183–192.



Première partie

État de l'art

OUTILS/RAPPELS/OPÉRATEURS MATHÉMATIQUES ET RAPPELS D'OPTIMISATION

1.1	Présentation	4
1.2	Notations et définitions de base des opérateurs tensoriels	4
1.2.1	Notations générales	4
1.2.2	Les opérateurs matriciels	5
1.2.3	Opérateurs tensoriels	7
1.3	Les décompositions tensorielles	9
1.3.1	Formulation du modèle de décomposition de Tucker	9
1.3.2	Formulation du modèle de décomposition canonique polyadique (CP)	10
1.4	Algorithmes d'optimisation déterministe	12
1.4.1	Introduction aux problèmes inverses en traitement de signal et d'image	13
1.4.2	Outils d'analyse variationnelle	17
1.4.3	Algorithmes d'optimisation	23
1.4.4	Quelques algorithmes existants pour les décompositions tensorielles	29
1.5	Conclusion	35

Ma thèse s'intitule "Optimisation sur des problèmes de traitement de signaux multidimensionnels ou d'images en grandes dimensions". D'une part, "les problèmes de traitement de signaux multidimensionnels ou d'images en grandes dimensions" représente un vaste domaine d'applications et d'autre part, le terme "optimisation" fait référence à un pan mathématique entier. C'est pourquoi, un effort méthodologique particulier et innovant a dû être réalisé afin de combiner ces concepts issus de disciplines différentes. C'est ainsi, que tenseurs, algèbre multi-linéaire et optimisation ont été utilisés pour modéliser au sein d'un cadre assez général les différents problèmes considérés et pour pouvoir ensuite les résoudre.

1.1 Présentation

L'analyse des données permet de traiter des données qui peuvent être très volumineuses et complexes. Elle permet de dégager les aspects les plus intéressants de la structure de celles-ci ou encore de les représenter dans un espace à dimension réduite par des techniques de réduction de dimension par factorisation.

Nombreuses sont les applications modernes dans lesquelles nous sommes confrontés à des données multidimensionnelles notamment dans toutes les applications d'imagerie (fluorescence, optique (multi ou hyperspectrale), médicale (IRM, etc.), radar, acoustique (sonar, sondeurs, etc.)), flux vidéo. Chaque dimension est associée à une variable le long de cette direction.

Ainsi une image dépend de trois variables : coordonnées spatiales x et y et la longueur d'onde λ , le flux vidéo dépend de 4 dimensions : coordonnées spatiales x et y , la longueur d'onde λ et le temps t , les données de spectroscopie de fluorescence 3D dépendent de la longueur d'onde d'émission de fluorescence, de la longueur d'onde d'excitation de n° de réalisation, en 4D, on ajoute une dimension supplémentaire qui est le temps.

Après avoir présenté brièvement le concept fondamental de l'analyse des données multidimensionnelles dans un cadre de réduction de dimension par méthodes de factorisation, les principaux outils d'algèbre multilinéaire qui sont classiquement utilisés pour le traitement de ces données multidimensionnelles vont être introduits. Plus particulièrement, nous rappelons quelques définitions et propriétés des matrices et des tenseurs. Enfin, nous présentons les principales décompositions tensorielles le plus couramment utilisées.

1.2 Notations et définitions de base des opérateurs tensoriels

1.2.1 Notations générales

Sauf mention contraire, tout au long de cette thèse les notations suivantes seront utilisées. Les variables scalaires sont notées en lettres minuscules x , les vecteurs sont représentés par des lettres minuscules en gras \mathbf{x} , les matrices en lettres majuscules en gras \mathbf{X} , et les tenseurs sont en gras calligraphique \mathcal{X} . Ainsi, la i -ième entrée d'un vecteur \mathbf{x} est désignée par x_i , l'élément (i, j) d'une matrice \mathbf{X} est désigné par x_{ij} , et l'élément (i, j, k) d'un tenseur \mathcal{X} d'ordre 3 est désigné par x_{ijk} . Le n -ième élément d'une séquence est désigné par un exposant entre parenthèses, i.e., $\mathbf{X}^{(n)}$ désigne la n -ième matrice d'une séquence.

Dans ce manuscrit, un tenseur est défini comme une application multilinéaire, qui correspond à un tableau multidimensionnel. Formellement [39] on peut définir un tenseur comme suit :

Définition 1 (Tenseur) Soit $I_1, I_2, \dots, I_N \in \mathbb{N}$ qui désignent des bornes supérieures d'indice.

Un tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ d'ordre N est un vecteur à N dimensions dont les éléments x_{i_1, i_2, \dots, i_n} sont indexés par $i_n \in \{1, 2, \dots, I_n\}$, pour $1 \leq n \leq N$.

Le paragraphe suivant sert de compilation structurée afin d'expliquer comment le *produit extérieur* (noté par \circ) de vecteurs contribue au développement d'un sous-espace tensoriel [39].

Le *produit extérieur* de deux vecteurs $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^I$ et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^J$ donne une matrice $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{I \times J}$ définie comme suit :

$$\mathbf{X} = \mathbf{u} \circ \mathbf{v} \quad (1.1)$$

L'équation précédente peut être réécrite sous sa forme scalaire comme suit :

$$x_{ij} = u_i v_j \quad (1.2)$$

pour tout indice $i \in \{1, \dots, I\}$ et tout $j \in \{1, \dots, J\}$. De plus, le produit extérieur de trois vecteurs $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^I$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^J$ et $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^K$ donne un tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$ d'ordre trois selon la formule suivante :

$$\mathcal{X} = \mathbf{u} \circ \mathbf{v} \circ \mathbf{w} \quad (1.3)$$

De la même façon que précédemment on peut réécrire l'équation (1.3) sous sa forme scalaire par :

$$x_{ijk} = u_i v_j w_k \quad (1.4)$$

pour tout $i \in \{1, \dots, I\}$, $j \in \{1, \dots, J\}$, et tout indice $k \in \{1, \dots, K\}$.

Plus généralement, un tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ d'ordre N obtenu par le *produit extérieur* de N vecteurs $\mathbf{a}^{(1)} \in \mathbb{R}^{I_1}, \dots, \mathbf{a}^{(N)} \in \mathbb{R}^{I_N}$ est dit de rang un,

$$\mathcal{X} = \mathbf{a}^{(1)} \circ \dots \circ \mathbf{a}^{(N)} \rightarrow x_{i_1 \dots i_N} = a_{i_1}^{(1)} \dots a_{i_N}^{(N)} \quad (1.5)$$

pour tout $i_n \in \{1, \dots, I_n\}$ et tout $n \in \{1, \dots, N\}$.

Par conséquent, un tenseur est défini comme la somme des produits extérieurs d'un ensemble des vecteurs non nuls, après avoir donné une brève présentation formelle d'un tenseur, nous allons maintenant rappeler quelques opérateurs matriciels, ainsi que les définitions de certains opérateurs tensoriels intéressants pour la suite de ce manuscrit et les problèmes auxquels nous allons nous intéresser.

1.2.2 Les opérateurs matriciels

Définition 2 (Produit de Kronecker ([39])) Soient $\mathbf{U} = (u_{ij}) \in \mathbb{R}^{I \times J}$ et $\mathbf{V} = (v_{kl}) \in \mathbb{R}^{K \times L}$ deux matrices réelles. Le produit de Kronecker des deux matrices \mathbf{U} et \mathbf{V} , noté par $\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$,

est une matrice de taille $IK \times JL$ définie comme suit :

$$\mathbf{U} \otimes \mathbf{V} = \begin{pmatrix} u_{11}\mathbf{V} & u_{12}\mathbf{V} & \dots & u_{1J}\mathbf{V} \\ u_{21}\mathbf{V} & u_{22}\mathbf{V} & \dots & u_{2J}\mathbf{V} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{I1}\mathbf{V} & u_{I2}\mathbf{V} & \dots & u_{IJ}\mathbf{V} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{IK \times JL}$$

Définition 3 (Produit de Khatri-Rao) Soient $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_J] \in \mathbb{R}^{I \times J}$ et $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_J] \in \mathbb{R}^{K \times J}$ deux matrices réelles avec le même nombre de vecteurs colonnes, où $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_J$ sont les vecteurs colonnes de \mathbf{U} , et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_J$ sont les vecteurs colonnes de \mathbf{V} . Le produit de Khatri-Rao de \mathbf{U} et \mathbf{V} est une matrices de taille $IK \times J$, noté par $\mathbf{U} \odot \mathbf{V}$. Il est défini en calculant le produit de Kronecker de leurs vecteurs colonnes correspondants comme suit :

$$\mathbf{U} \odot \mathbf{V} = [\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{u}_J \otimes \mathbf{v}_J] \in \mathbb{R}^{IK \times J}.$$

Définition 4 (Produit de Hadamard) Soient $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{I \times J}$ et $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{I \times J}$ deux matrices réelles de même dimension. Alors, leur produit de Hadamard noté par $\mathbf{U} \square \mathbf{V}$, est défini par :

$$\mathbf{U} \square \mathbf{V} = (u_{ij}v_{ij}) \in \mathbb{R}^{I \times J}$$

Définition 5 (Division de Hadamard) Soient $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{I \times J}$ et $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{I \times J}$ deux matrices réelles de même dimension. Alors, la division de Hadamard de \mathbf{U} par \mathbf{V} noté par $\mathbf{U} \oslash \mathbf{V}$, est définie par :

$$\mathbf{U} \oslash \mathbf{V} = (u_{ij}/v_{ij}) \in \mathbb{R}^{I \times J}$$

Définition 6 (Opérateur diagonal) Soit $\mathbf{U} = (u_{ij}) \in \mathbb{R}^{I \times I}$ une matrice carrée. L'opérateur diagonal de \mathbf{U} , noté par $\text{diag}(\mathbf{U})$ est un vecteur colonne constitué de toutes les entrées diagonales de \mathbf{U} , i.e.

$$\text{diag}(\mathbf{U}) = (u_{11}, u_{22}, \dots, u_{II})^\top \in \mathbb{R}^{I \times 1}$$

Où $(\cdot)^\top$ est l'opérateur de transposition.

Inversement, soit $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_I)^\top \in \mathbb{R}^I$ un vecteur colonne. L'opérateur diagonal appliqué à \mathbf{u} , noté par $\text{Diag}(\mathbf{u})$, donne une matrice diagonale dont les entrées diagonales sont les éléments de \mathbf{u} , i.e.

$$\text{Diag}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{I \times I}$$

Définition 7 (Opérateur de vectorisation) Soit $\mathbf{U} = (u_{ij}) \in \mathbb{R}^{I \times J}$ une matrice. La vectorisation de \mathbf{U} , notée par $\text{vec}(\mathbf{U})$, est l'opération qui déplie les vecteurs de la matrice en une

seule colonne de dimension $IJ \times 1$, c'est-à-dire que

$$\text{vec}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{I1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_{12} \\ \vdots \\ u_{I2} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} u_{1J} \\ \vdots \\ u_{IJ} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{IJ \times 1}$$

Définition 8 (Trace d'une matrice) Soit $\mathbf{U} = (u_{ij}) \in \mathbb{R}^{I \times I}$ une matrice carrée. Alors la trace de \mathbf{U} , notée $\text{Trace}(\mathbf{U})$ est la somme de ses éléments diagonaux, i.e., :

$$\text{trace}(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^I u_{ii}$$

Définition 9 (Produit scalaire de Frobenius) Soient $\mathbf{U} = (u_{ij}) \in \mathbb{R}^{I \times J}$, $\mathbf{V} = (v_{ij}) \in \mathbb{R}^{I \times J}$ deux matrices réelles de même dimensions. Le produit scalaire de \mathbf{U} et \mathbf{V} , noté par $\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$, est défini par :

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle = \text{trace}(\mathbf{UV}^\top)$$

1.2.3 Opérateurs tensoriels

Définition 10 (Produit externe de deux tenseurs) Soient $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ et $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{J_1 \times J_2 \times \dots \times J_M}$ deux tenseurs. Leur produit externe est donné par :

$$\mathcal{Z} = \mathcal{X} \circ \mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N \times J_1 \times J_2 \times \dots \times J_M} \rightarrow z_{i_1 i_2 \dots i_N j_1 j_2 \dots j_M} = x_{i_1 i_2 \dots i_N} y_{j_1 j_2 \dots j_M}$$

Définition 11 (Produit tensoriel n -mode par une matrice) Soient un tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ et une matrice $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{J_n \times I_n}$. Alors, leurs produit suivant le n -ème mode (ou dimension) est donné par :

$$\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times_n \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_{n-1} \times J_n \times I_{n+1} \times \dots \times I_N} \rightarrow z_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j_n i_{n+1} \dots i_N} = \sum_{i_n=1}^{I_n} x_{i_1 i_2 \dots i_n} u_{j_n, i_n}$$

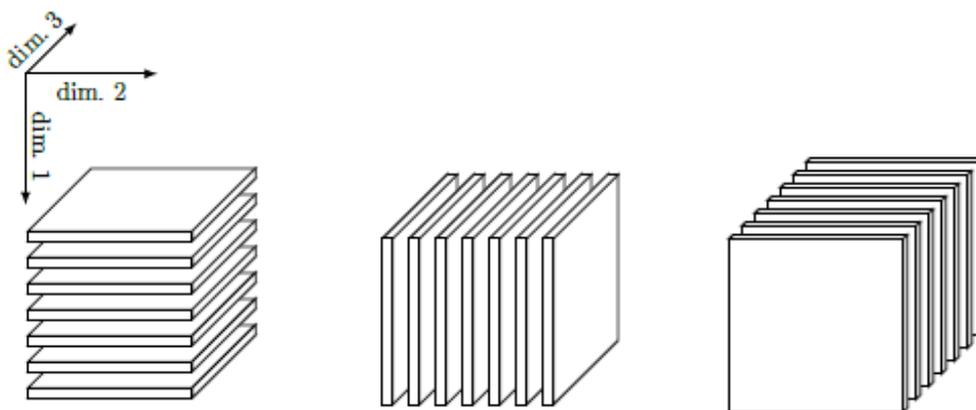
Plus généralement, la notation $\mathcal{X} \times_n \mathbf{U}_n$ représente les produits n -mode sur les modes

(dimensions) 1 à N de \mathcal{X} par $\{\mathbf{U}_n\}_{n=1}^N$, c'est à dire :

$$\mathcal{X} \times_n \mathbf{U}_n = \mathcal{X} \times_1 \mathbf{U}_1 \times_2 \mathbf{U}_2 \times_3 \cdots \times_N \mathbf{U}_N$$

Définition 12 (Les coupes d'un tenseur) *Les coupes d'un tenseur sont des sections bidimensionnelles (matrices) qui peuvent être générées en fixant tous les indices sauf deux. Ainsi, étant donné un tenseur \mathcal{X} d'ordre 3, les coupes horizontales, latérales et frontales sont dénotées par $\mathcal{X}_{i_1::}$, $\mathcal{X}_{:i_2}$, et $\mathcal{X}_{::i_3}$, respectivement [39].*

En terme d'illustration la figure 1.1 représente les trois différentes coupes d'un tenseur d'ordre 3.



Coupe selon le mode 1 : $\mathcal{X}_{i_1::}$ Coupe selon le mode 2 : $\mathcal{X}_{:i_2}$ Coupe selon le mode 3 : $\mathcal{X}_{::i_3}$

FIGURE 1.1 – Les coupes d'un tenseur d'ordre 3.

Dépliants d'un tenseur :

Le dépliement d'un tenseur ou sa mise sous forme matricielle (matricization ou unfolding en anglais) est le processus d'association des dimensions successives d'un tenseur en deux groupes afin de les stocker dans une matrice [39]. Ainsi, pour un tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$ la matrice de dépliement du tenseur \mathcal{X} est noté par $\mathbf{X}^{(n)}$ de dimension $I_n \times (\prod_{m=1, m \neq n}^N I_m)$.

A titre d'exemple, pour un tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ d'ordre trois, et comme il existe plusieurs façons de déplier un tenseur d'ordre trois suivant l'un de ses directions, nous présentons plus spécifiquement les 3 matrices de dépliement suivantes (parmi les 6 possibles) :

- $\mathbf{X}^{(1)}$: La matrice de dépliement suivant la première direction de taille $I_1 \times I_2 I_3$.
- $\mathbf{X}^{(2)}$: La matrice de dépliement suivant la deuxième direction de taille $I_2 \times I_3 I_1$.
- $\mathbf{X}^{(3)}$: La matrice de dépliement suivant la troisième direction de taille $I_3 \times I_1 I_2$.

1.3 Les décompositions tensorielles

Les approches basées sur les décompositions matricielles [216] [1] (i.e, décomposition en valeur singulière (SVD), factorisation matricielle non-négative (NMF)) sont des outils puissants pour analyser les données bidimensionnelles, alors que les décompositions tensorielles sont plus flexibles en raison d'un certain nombre d'avantages essentiels pour le traitement des données multidimensionnelles. Cela fera l'objet des sections suivantes. En outre, dans certaines applications pratiques, les décompositions tensorielles sont plus performantes que les décompositions matricielles, comme le montre l'article suivant [38].

Deux décompositions multilinéaires : la décomposition de Tucker et l'analyse factorielle parallèle (PARAFAC), également connue sous le nom de décomposition Canonique Polyadique (CP) font partie des factorisations tensorielles les plus étudiées de la littérature [203] [82]. Elles sont considérées dans de nombreuses applications. Il en existe toutefois bien d'autres : décomposition bloc terme, trains de tenseurs, tenseurs ring, ParaTuck, etc. [92] [217] [234]. Nous présenterons donc en détail, dans le paragraphe suivant, ces deux types de décompositions, plus exactement, nous nous attacherons à présenter leur formulation mathématique. Nous expliciterons ces deux modèles (Tucker et CP) dans le cas des tenseurs d'ordre trois puis évoquerons les questions d'unicité et leurs conditions pour ces deux décompositions.

1.3.1 Formulation du modèle de décomposition de Tucker

La décomposition de Tucker est une forme assez générale de décomposition tensorielle multilinéaire. Dans cette décomposition, un tenseur peut se décomposer à l'aide d'un tenseur cœur et d'un ensemble de matrices facteurs. Dans le cas où les matrices facteurs sont orthogonales, cette décomposition peut être vue comme la généralisation de la très connue décomposition en matrices singulières (SVD). Dans ce cas là, elle prend le nom de HOSVD (en anglais, Higher order SVD) [45]. Mathématiquement parlant, étant donné un tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$, la décomposition de Tucker permet d'approximer \mathcal{X} par un tenseur cœur \mathcal{G} multiplié par une matrice $\mathbf{A}^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times R_n}$ le long de chaque mode n , $n \in \{1, \dots, N\}$, comme suit :

$$\mathcal{X} \approx \mathcal{G} \times_1 \mathbf{A}^{(1)} \times_2 \mathbf{A}^{(2)} \times_3 \dots \times_N \mathbf{A}^{(N)} = \llbracket \mathcal{G}; \mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)} \rrbracket \quad (1.6)$$

Sa formulation scalaire peut être écrite comme suit,

$$x_{i_1 i_2 \dots i_N} \approx \sum_{r_1=1}^{R_1} \sum_{r_2=1}^{R_2} \dots \sum_{r_N=1}^{R_N} g_{r_1 r_2 \dots r_N} a_{i_1, r_1}^{(1)} a_{i_2, r_2}^{(2)} \dots a_{i_N, r_N}^{(N)} \quad (1.7)$$

A titre d'illustration et sans perte de généralité, la figure 1.2 illustre le principe de la décomposition de Tucker d'ordre 3.

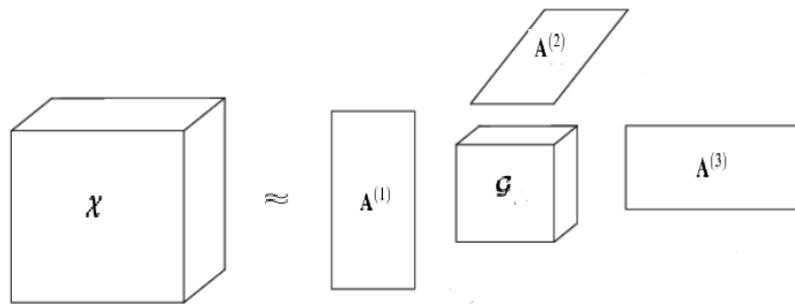


FIGURE 1.2 – Décomposition de **Tucker**

Unicité de la décomposition Tucker

Généralement, la décomposition de Tucker n'est pas unique. En effet, si l'on considère deux tenseurs \mathcal{X} et \mathcal{G} de taille $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N$, et un ensemble de N matrices $\mathbf{A}^{(n)}$ de taille $I_n \times R_n$, $n \in \{1, \dots, N\}$ vérifiant l'approximation (1.6). Alors pour N matrices inversibles $\mathbf{C}^{(n)}$, $n \in \{1, \dots, N\}$ d'inverses respectifs $(\mathbf{C}^{(m)})^{-1}$, $m \in \{1, \dots, N\}$, on a [102] :

$$\mathcal{X} \approx (\mathcal{G} \times_m \mathbf{C}^{(m)}) \times_m (\mathbf{A}^{(m)} (\mathbf{C}^{(m)})^{-1}), \quad 1 \leq m \leq N \quad (1.8)$$

Certaines contraintes peuvent être imposées pour pallier le problème de la non unicité de la décomposition. C'est le cas de l'orthogonalité qui permet de garantir que les sous espaces engendrés par les matrices facteurs soient uniques.

1.3.2 Formulation du modèle de décomposition canonique polyadique (CP)

L'idée de la forme polyadique d'un tenseur a été proposée par Hitchcock en 1927 [87] [86]. Elle consiste à exprimer un tenseur comme la somme d'un nombre fini de tenseurs de rang un. Par la suite, Cattell a proposé des idées pour l'analyse proportionnelle parallèle [32]. Le concept est finalement devenu populaire après sa troisième introduction, par la communauté psychométrique, sous la forme de CANDECOMP (décomposition canonique) par Carroll et Chang [31] et Parafac par Harshman [82]. Kiers désigne la décomposition CANDECOMP/Parafac comme CP dans [98]. Mocks [140] a indépendamment découvert Parafac dans le contexte de l'imagerie cérébrale et l'a appelé le modèle de composants topographiques.

A titre d'exemple, la Figure 1.3 illustre le principe de la décomposition CP dans le cas d'un tenseur d'ordre 3. Formellement, la décomposition CP d'un tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ peut

être définie par la décomposition multilinéaire suivante :

$$\mathcal{X} = \sum_{r=1}^R \mathbf{a}_r^{(1)} \circ \dots \circ \mathbf{a}_r^{(N)} = \llbracket \mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)} \rrbracket \quad (1.9)$$

où $\mathbf{a}_r^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n}$, $\forall n \in \{1, \dots, N\}$, $\forall r \in \{1, \dots, R\}$ sont les *vecteurs facteurs* impliqués dans la décomposition. Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$ et tout $r \in \{1, \dots, R\}$, la matrice $\mathbf{A}^{(n)} = (a_{i_n, r}^{(n)}) = [\mathbf{a}_1^{(n)}, \mathbf{a}_2^{(n)}, \dots, \mathbf{a}_R^{(n)}] \in \mathbb{R}^{I_n \times R}$ est appelée la n -ème *matrice facteur de la décomposition*.

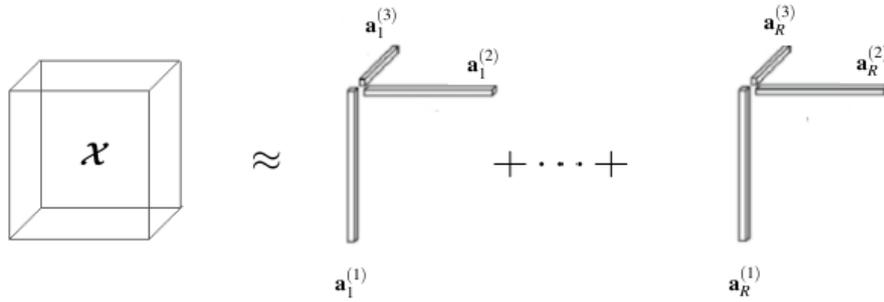


FIGURE 1.3 – Décomposition CP d'un tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ d'ordre 3

Unicité de la décomposition CP

Pour commencer, notons que contrairement à la factorisation matricielle qui nécessite d'imposer des contraintes particulières comme par exemple l'orthogonalité des matrices facteurs impliquées dans la factorisation, la décomposition CP est unique sous des hypothèses. Maintenant, si nous considérons une autre décomposition CP du tenseur \mathcal{X} avec les matrices facteurs $\mathbf{C}^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times R}$, i.e., $\mathcal{X} = \llbracket \mathbf{C}^{(1)}, \dots, \mathbf{C}^{(N)} \rrbracket$, telle que $\mathbf{C}^{(n)} = \mathbf{A}^{(n)} \Pi \Delta_n$, où $\Pi \in \mathbb{R}^{R \times R}$ est une matrice de permutation, et $\Delta_n \in \mathbb{R}^{R \times R}$, $n \in \{1, \dots, N\}$ sont des matrices diagonales et qui vérifient $\Delta_1 \dots \Delta_N = \mathbf{I}_R$. Alors, la décomposition CP (1.9) est dite essentiellement unique. Et ainsi, les matrices facteurs de la décomposition CP d'un tenseur connu peuvent être au mieux estimées à une permutation et à un facteur d'échelle. Nous pouvons donc énoncer le résultat fondamental sur l'unicité de la décomposition CP, qui a été établi pour la première fois par Kruskal [107] pour les tenseurs d'ordre 3, puis généralisé par Sidiropoulos et Bro [184] pour un tenseur d'ordre quelconque. Mais auparavant, il va falloir donner la définition de la notion de rang de Kruskal d'une matrice \mathbf{A} , noté par k_A , qui est le plus grand entier tel que tout famille de k_A colonnes de \mathbf{A} soit linéairement indépendantes [107]. Le théorème d'unicité de la décomposition CP pour un tenseur d'ordre quelconque est donné par :

Théorème 1 Soit $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ le tenseur donné par l'équation (1.9), où $\mathbf{A}^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times R}$, avec $N > 2$ et $R > 1$, si les matrices facteurs $\mathbf{A}^{(n)}$, $n \in \{1, \dots, N\}$ sont telles que leur rang de

Kruskal vérifie la condition suffisante suivante

$$k_{A^{(1)}} + \dots + k_{A^{(N)}} \geq 2R + N - 1$$

Alors, la décomposition CP (1.9) est essentiellement unique.

Après avoir présenté les principaux outils d’algèbre multilinéaire. Plus particulièrement, les définition et les propriétés des matrices, ainsi que les décompositions tensorielles les plus étudiées. Dans la section suivante, nous allons rappeler les outils principaux de l’optimisation, ainsi que différents algorithmes d’optimisation rencontrés dans la littérature.

1.4 Algorithmes d’optimisation déterministe

Les problèmes examinés en traitement du signal/image, comme dans de nombreux autres domaines (mécanique, théorie du contrôle, chimie, etc.), peuvent souvent être réécrits comme des problèmes d’optimisation. Cependant, les modèles sont généralement trop compliqués pour être résolus analytiquement. Ainsi, dans les méthodes de régression [135], d’identification de modèles et d’apprentissage automatique [48] [137], l’objectif est de réduire l’écart entre les données observées et un modèle physique et/ou statistique des données. Les approches générales d’estimation des paramètres sont exprimées sous la forme d’un problème d’optimisation, impliquant souvent la maximisation de la fonction de vraisemblance des données ou la maximisation de la loi a posteriori des paramètres.

Comme les problèmes d’optimisation sont très répandus, ils peuvent prendre différentes formes et avoir différentes caractéristiques. Il n’est pas facile d’établir une catégorisation précise de tous les problèmes d’optimisation, tant ils sont liés entre eux. Cependant, certaines catégories principales peuvent être énumérées : discret/continu, avec/sans contrainte, mono/multi-objectif, déterministe/stochastique, convexe ou non [64] [34].

En outre, l’optimisation est un problème mathématique couramment rencontré dans de nombreuses disciplines. Il s’agit littéralement de trouver la meilleure solution possible et souhaitable. Les problèmes d’optimisation sont nombreux et variés. Mais les méthodes les plus anciennes de résolution des problèmes d’optimisation requièrent bien souvent d’énormes efforts de calcul et c’est tout particulièrement le cas dans le traitement des problèmes en grande dimension. Pour traiter ce cas, de nouvelles méthodes pour la résolution de tels problèmes d’optimisation ont été introduites dans la littérature, tout en faisant particulièrement attention aux coûts de calculs et aux résultats théoriques de convergence [110] [111] [76] [20] [181].

1.4.1 Introduction aux problèmes inverses en traitement de signal et d'image

Dans la plupart des applications de traitement du signal et des images, un signal/image observé \mathbf{z} peut être modélisé comme la sortie d'un système, dont l'entrée est désignée par \mathbf{x} . Mathématiquement parlant, un système d'imagerie ou d'acquisition de signaux est un opérateur \mathbf{T} . En général, l'entrée et la sortie du système peuvent être représentés par des signaux multidimensionnels. Il existe plusieurs façons de décrire différentes formes de l'opérateur \mathbf{T} , certaines catégories principales peuvent être énumérées, par exemple, l'opérateur \mathbf{T} peut servir à modéliser une équation différentielle, une équation intégrale, ou un modèle mathématique général. Un système ou filtre l'opérateur \mathbf{T} peut modéliser la déformation ou la dégradation produite par le dispositif d'acquisition, par exemple, le flou dû au mouvement ou à la turbulence atmosphérique, un masque d'acquisition dans une application d'échantillonnage, une erreur de quantification, et la perte en général d'informations spatiales, temporelles ou spectrales. Il peut également modéliser le processus d'estimation des facteurs d'un modèle, ou le processus de détection dans une image. Cependant, déterminer la sortie \mathbf{z} pour une entrée \mathbf{x} donnée, tout en supposant la connaissance de l'opérateur \mathbf{T} correspond à ce que l'on a coutume d'appeler l'estimation du modèle direct. Inversement trouver le signal/image original inconnu (l'entrée) \mathbf{x} pour une observation \mathbf{z} donnée avec la connaissance de l'opérateur \mathbf{T} , correspond cette fois à la résolution d'un problème inverse. La figure 1.4 donne un exemple de problème inverse, qui correspond à un problème de restauration d'image.

Plus précisément et mathématiquement parlant, dans un cadre discret le but principal des problèmes inverses est de reconstruire le signal/image inconnu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ à partir d'un ensemble de mesures observées $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ de la forme suivante :

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.10)$$

où $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ modélise l'effet du système d'acquisition ou le canal de transmission ou l'effet de la propagation décrit dans le paragraphe précédent, et $\boldsymbol{\varepsilon}$ représentant un bruit d'acquisition et/ou une erreur de modèle.

Résolution des problèmes inverses

La résolution des problèmes inverses dans les applications de TS ou de TI a été l'objet d'une longue histoire de recherche et de développement. Ces problèmes inverses sont également connus sous le nom de problèmes de récupération, et ils sont rencontrés sous différents noms, tels que restauration, déconvolution, inpainting, super-résolution, détection de compression (CS), complétion, etc.

une fois le modèle de dégradation (ou toute autre forme de distorsion) établi, l'étape suivante est la formulation de la recherche d'une solution. Il peut s'agir de la formulation d'une fonction à optimiser en fonction des contraintes imposées par les informations a priori dont on dispose ou de la connaissance que l'on peut avoir du système étudié.

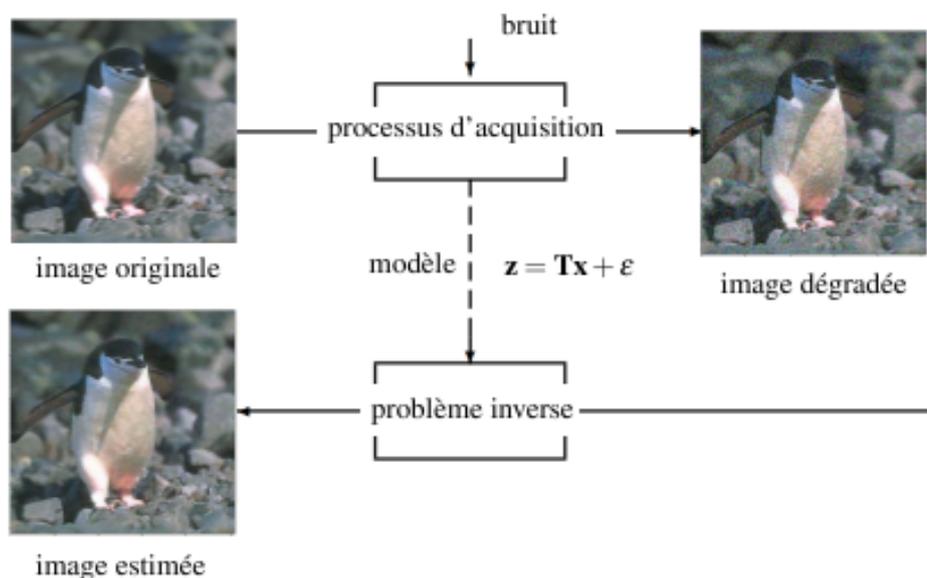


FIGURE 1.4 – Exemple d'un problème de restauration d'image

Bien souvent, la résolution de (1.10) correspond à ce que l'on appelle un problème mal posé [199]. L'application de la théorie de la régularisation le transforme en un problème bien posé qui permettant de fournir des solutions significatives au problème original. Il existe un grand nombre d'approches fournissant des solutions aux problèmes inverses de traitement d'images et de signaux. Pour une revue de ces approches, le lecteur pourra se référer aux références suivantes. Dans [84], deux méthodes de régularisation directe, dont la décomposition en valeurs singulières tronquée [81] et les moindres carrés totale tronquée [58], ainsi que deux méthodes de régularisation itérative, dont les moindres carrés à gradient conjugué [11] et la décomposition QR des moindres carrés [153], sont appliquées pour la résolution du problème inverse dans la tomographie par bioluminescence. Dans [207], les auteurs ont appliqué conjointement trois techniques de régularisation (régularisation de Tikhonov [199], décomposition en valeurs singulières tronquée [81] et décomposition en valeur singulière amortie [55]) et trois méthodes de sélection des paramètres de régularisation, avec un modèle qui étudie la qualité de l'air dans le but d'identifier la meilleure combinaison de la technique de régularisation et de la méthode de sélection des paramètres lors de l'utilisation de la modélisation inverse pour identifier les défauts éventuels d'un inventaire des émissions à l'échelle urbaine. Dans [80], une revue des développements récents de la méthode de la régularisation itérative efficace pour la résolution des problèmes de reconstruction d'image en imagerie atmosphérique a été donnée. Ainsi qu'un certain nombre de préconditionneurs pour la minimisation de la fonction de Tikhonov correspondante a été présenté. Dans [22], les auteurs ont présenté une nouvelle méthode pour certains problèmes linéaires discrets mal posés. Particulièrement, l'approche proposée est basée sur une projection sur des sous-espaces de Krylov matriciels. Ils ont appliqué leur méthode au problème de la restauration d'une image bruitée et floue en utilisant la régularisation de Tikhonov.

La technique la plus courante utilisée pour résoudre les problèmes inverses mal posés

consiste à résoudre un problème d'optimisation formulé de la manière suivante [148] [25] [14] :

$$\hat{\mathbf{x}} \in \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \{f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\} \quad (1.11)$$

où f est la fonction objectif qui dépend typiquement de \mathbf{z} et \mathbf{T} , g est la fonction de régularisation qui incorpore certaines informations a priori sur \mathbf{x} . En outre, la formulation de l'équation (1.11) peut souvent faire l'objet d'une interprétation du maximum a posteriori (MAP) dans un cadre bayésien.

Les développements récents des méthodes d'optimisation peuvent être principalement divisés en deux grandes classes d'approches : les approches déterministes et les approches stochastiques [33] [60] [131] [134] [57]. Dans cette thèse, nous nous concentrons uniquement sur les approches déterministes. Nous présentons différentes formes de modélisation auxquelles nous nous intéressons. Les approches déterministes (par exemple, la programmation linéaire, la programmation non linéaire, etc.) peuvent fournir des outils généraux pour résoudre les problèmes d'optimisation afin d'obtenir un optimum global ou approximativement global. Avec le recours croissant à la modélisation des problèmes d'optimisation dans les applications réelles, un certain nombre de méthodes déterministes pour les problèmes d'optimisation ont été développées. Une discussion et un examen des progrès récents dans les approches d'optimisation déterministe vont être présentés dans le paragraphe suivant.

Les méthodes d'optimisation ont été appliquées dans différents domaines, tels que la conception de systèmes et de bases de données [119] [175] [202], les techniques de conception et de contrôle du génie chimique [172] [61] [62], la planification des systèmes d'énergie électriques [8], en apprentissage automatique [193], la télédétection [90], en finance [70], et la biologie moléculaire [53]. Pour plus de littérature sur les applications ou développements réels des méthodes d'optimisation, le lecteur pourra se référer aux ouvrages suivants. Grossmann [74] a discuté des algorithmes d'optimisation globale et leurs applications dans la conception du génie chimique. De Leone et al. [47] ont proposé diverses applications intéressantes de logiciels à haute performance pour l'optimisation non linéaire. Hendrix [85] a utilisé des techniques d'optimisation globale dans les application de la gestion de l'environnement, la conception géométrique, la conception de produits robustes et l'estimation des paramètres. Floudas et al. [65] ont étudié les approches d'optimisation dans les domaines de la chimie computationnelle et de la biologie moléculaire. Pardalos et al. [155] ont fourni un éventail plus complet et plus large d'approches comprenant des techniques déterministes et heuristiques pour traiter les problèmes d'optimisation globale. Tawarmalani et Sahinidis [196] ont fourni un traitement perspicace et complet de la convexification et de l'optimisation globale de programmation non linéaires continus et mixtes. De plus, Floudas et al. [63] ont présenté un aperçu des progrès de la recherche en optimisation au cours de la période 1998-2003, y compris les résultats avancées déterministes en optimisation globale en programmation non linéaire et applications connexes. Mishra et al. [139] ont discuté la notion de l'optimalité de Kuhn-Tucker, des conditions d'optimalité nécessaires et suffisantes de Karush-Kuhn-Tucker en présence de divers types d'hypothèses de convexité généralisées. Polak [160] a traité des conditions d'optimalité, des algorithmes et des techniques de discrétisation pour les problèmes de programmation non linéaire, d'optimisation semi-infinie

et de contrôle optimal. Il a aussi montré que l'utilisation des fonctions d'optimalité présente plusieurs avantages, il a montré que de nombreux algorithmes d'optimisation utilisent des directions de recherche obtenues en évaluant les fonctions d'optimalité, établissant ainsi une relation claire entre les conditions d'optimalité et les algorithmes. Il a également prouvé que l'établissement des conditions d'optimalité pour des problèmes qui sont très complexes, tels que les problèmes de contrôle optimal avec des contraintes de contrôle et de trajectoire, est beaucoup plus facile en termes de fonctions d'optimalité que de manière classique. Luenberger et Ye [127] ont donné une introduction autonome à la programmation linéaire, et à la théorie de l'optimisation. La présentation de cette introduction couvrent les principaux éléments de la théorie sous-jacente de la programmation linéaire, plusieurs algorithmes numériques les plus efficaces, ainsi que certains de ses applications spéciales importantes. Puis a présenté la théorie de l'optimisation sans contrainte, y compris la dérivation des conditions d'optimalité appropriées et une introduction aux algorithmes basiques, ainsi que l'exploration des propriétés générales des algorithmes.

Nous allons maintenant nous intéresser aux différentes structures spécifiques de contraintes qui peuvent être rencontrées dans un problème d'optimisation, et qui seront utilisées par la suite. En particulier, nous nous intéressons à la propriété de parcimonie d'un vecteur, et à la propriété de rang faible.

► **Propriété de parcimonie** : La notion de sparsité est liée au nombre de coefficients d'une variable multidimensionnelle porteuse d'information.

Définition 13 *Un vecteur (ou une matrice) est dit k -sparse s'il ne contient que k entrées ou composantes non nulles.*

Un choix naturel pour favoriser la parcimonie de la solution est d'utiliser la pseudo-norme l_0 . Par conséquent, les problèmes d'optimisation qui recherchent la parcimonie de la solution peuvent être écrits comme des problèmes d'optimisation comportant la contrainte non convexe donnée par la pseudo-norme l_0 . Celle-ci est définie comme :

$$\|\mathbf{x}\|_0 = |\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i \neq 0\}| \leq K, \quad K \in \{1, \dots, n\} \quad (1.12)$$

Cependant, cette dernière conduit bien souvent à des problèmes d'optimisation très difficiles, voire impossibles à résoudre. Par conséquent, la norme l_1 lui est souvent préférée et est donc largement utilisé pour refléter une contrainte de parcimonie ou pour promouvoir une solution parcimonieuse. Elle est définie comme :

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_i |x_i| \quad (1.13)$$

Il existe un grand nombre de recherches portant sur l'élaboration d'algorithmes d'estimation de signaux parcimonieux. Pour une synthèse de ces méthodes le lecteur peut se référer aux références [178][177] [176] [97] [179] [13].

► **Propriété de rang faible** : il arrive fréquemment que les données à analyser soient de grandes dimensions. Cependant, elles appartiennent généralement à un sous-espace de

dimension beaucoup plus petite que le sous-espace d'observation. Ce phénomène peut être traduit par la structure de faible rang et donne lieu à de nombreuses recherches sur les représentations de faible rang. Cela conduit à des modèles à faible rang fournissant une représentation de dimension plus petite néanmoins capable de capturer les aspects importants des données.

Définition 14 (Rang) *Le rang d'une matrice X est le nombre de vecteurs colonnes (ou lignes) linéairement indépendants de la matrice. On le note généralement par $\text{rang}(X)$.*

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la norme l_1 est utilisée pour la relaxation convexe de la norme l_0 . En d'autres termes, plutôt que de minimiser le nombre d'éléments non nuls dans les problèmes parcimonieux, le problème convexe tente de minimiser la somme des amplitudes des éléments du vecteur. En ce qui concerne le $\text{rang}(X)$ dans les problèmes à rang faible, une alternative consiste à choisir une relaxation en remplacement du rang. Son enveloppe convexe permet d'en obtenir une approximation convexe. Or une approximation convexe du rang est fournie par la norme nucléaire.

Définition 15 (La norme nucléaire) *Supposons que la matrice X possède r valeurs singulières positives de $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$. La norme nucléaire de la matrice X notée $\|\cdot\|_*$, est définie comme la somme de ses valeurs singulières, c'est-à-dire,*

$$\|X\|_* = \sum_{i=1}^r \sigma_i(X) \quad (1.14)$$

La résolution des problèmes impliquant une régularisation à faible rang a attiré une attention considérable, et un grand nombre d'approches d'optimisation ont été proposées dans ce contexte [204] [237] [49] [113] [138] [194] [79] [77].

1.4.2 Outils d'analyse variationnelle

Dans tout le reste de la section, nous considérerons que \mathcal{H} est un espace de Hilbert réel et supposerons que les fonctions f et g appartiennent à l'espace $\Gamma_0(\mathcal{H})$ des fonctions convexes, propres, semi-continues inférieurement de \mathcal{H} dans l'ensemble des nombres réels étendus $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (en prenant parfois $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$).

Définition 16 (Domaine d'une fonction) *Pour une fonction $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ l'espace*

$$\text{dom } f = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) < \infty\}$$

est appelé le domaine de la fonction f .

La question immédiate qui se pose lorsqu'on considère un problème de minimisation est celui de l'existence d'une solution et de son unicité. La valeur optimale d'une fonction

est donnée par $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$. La question de l'existence est celle de savoir si l'inf peut être remplacé par le min. On définit alors :

Définition 17 (Minimiseurs d'un problème de minimisation) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. L'espace des solutions optimales du problème de minimisation $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f$ est défini par :

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) := \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\bar{x}) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ and } f(\bar{x}) < \infty \right\} \quad (1.15)$$

Cette propriété est souvent considérée dans le contexte de l'existence des minimiseurs, cependant, elle apparaît parfois sous différents noms.

Définition 18 (Fonction propre) Une fonction $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée propre si $\text{dom } f \neq \emptyset$.

Définition 19 (Fonction coercive) La fonction $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive, si

$$\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \text{ implique } f(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$$

La fonction indicatrice s'avère particulièrement intéressante pour l'optimisation. Elle est utilisée pour traiter les problèmes d'optimisation sans/avec contrainte dans un cadre unifié.

Définition 20 (La fonction indicatrice) La fonction indicatrice associée à un ensemble non vide $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ est définie par

$$I_{\mathcal{S}}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \in \mathcal{S} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.16)$$

Définition 21 (Fonction semi continue inférieurement (s.c.i)) Une fonction propre $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite semi continue inférieurement en un point $\bar{x} \in \mathcal{H}$ si

$$f(\bar{x}) \leq \liminf_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \quad (1.17)$$

Notons que la fonction f est semi-continue inférieurement (s.c.i) si elle est s.c.i en tout point $\bar{x} \in \mathcal{H}$.

Définition 22 Pour tout sous-espace $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ et tout point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, la distance entre \mathbf{x} et \mathcal{S} est définie et notée par :

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{S}) = \inf\{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|; \mathbf{y} \in \mathcal{S}\} \quad (1.18)$$

Notons que lorsque nous disposons d'espace vide \mathcal{S} , on a $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{S}) = +\infty$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

► **Analyse convexe [10]**

Définition 23 (Espace convexe) Soit \mathcal{C} un sous-ensemble de \mathcal{H} . L'ensemble \mathcal{C} est convexe si

$$(\forall \lambda \in]0, 1[), (\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{C}^2) \quad \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in \mathcal{C} \quad (1.19)$$

Définition 24 (Fonction convexe) Une fonction $f : \mathcal{H} \rightarrow]-\infty, \infty]$ est dite convexe si elle vérifie

$$(\forall \lambda \in]0, 1[), (\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\text{dom})^2) \quad f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}) \quad (1.20)$$

Définition 25 (Fonction strictement convexe) Une fonction $f : \mathcal{H} \rightarrow]-\infty, \infty]$ est dite strictement convexe si elle vérifie

$$(\forall \lambda \in]0, 1[), (\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\text{dom})^2); \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \implies f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) < \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}) \quad (1.21)$$

Remarque 1 Si $f : \mathcal{H} \rightarrow]-\infty, \infty]$ est une fonction convexe, alors son domaine est convexe.

Le résultat suivant démontre l'importance fondamentale de la convexité dans les problèmes de minimisation.

Proposition 1 ([10]) Soit $f : \mathcal{H} \rightarrow]-\infty, \infty]$ une fonction propre et convexe. Alors chaque minimiseur local de la fonction f est un minimiseur.

Définition 26 (Sous-gradient, Sous-différentiel [168]) Soit $f : \mathcal{H} \rightarrow]-\infty, \infty]$ une fonction convexe. Un vecteur $\mathbf{t} \in \mathcal{H}$ est appelé le sous-gradient en $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$, et noté par $\mathbf{t} \in \partial f(\mathbf{x})$ si l'inégalité de sous-gradient suivante est vérifiée :

$$(\forall \mathbf{y} \in \mathcal{H}) \quad f(\mathbf{y}) - \langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{t} \rangle \geq f(\mathbf{x}) \quad (1.22)$$

La fonction f est dite sous-différentiable en $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ si $\partial f(\mathbf{x}) \neq \emptyset$. Si la fonction est sous-différentiable en tous les points $\mathbf{x} \in \text{dom}(f)$, alors la fonction f est dite sous-différentiable. Il est courant d'appeler également l'ensemble des vecteurs du sous-gradient $\partial f(\mathbf{x})$ en un point \mathbf{x} le sous-gradient en \mathbf{x} . Les différentes significations seront toujours claires à partir du contexte.

Partant de l'analyse des fonctions différentiables, nous avons une caractérisation importante des minimiseurs, à savoir que la dérivée (le gradient) de la fonction s'annule nécessairement en un minimum. Comme le sous-gradient est une généralisation du gradient, nous pouvons nous attendre à une propriété analogue pour les fonctions convexes propres. Le théorème suivant formalise cette propriété, qui est connue sous le nom de règle de Fermat.

Théorème 2 (Règle de Fermat [10]) Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$, l'ensemble des minimiseurs globaux de f vérifie alors

$$\operatorname{argmin} f = \{\mathbf{x} \in \mathcal{H} \mid 0 \in \partial f(\mathbf{x})\} \quad (1.23)$$

► Calcul sous-différentiel

Le sous-différentiel est un outil fondamental dans l'analyse des fonctions convexes non différentiables [167]. Dans ce paragraphe, nous discutons des propriétés des sous-différentielles, ainsi que de la relation entre le sous-différentiel et les points critiques d'une fonction. Nous considérerons dans cette section que $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$.

Définition 27 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre et soit $\mathbf{x} \in \operatorname{dom}(f)$. Le sous-différentiel de Fréchet (ou sous-différentiel régulier) de f en \mathbf{x} correspond à l'ensemble suivant

$$\widehat{\partial} f(\mathbf{x}) := \left\{ \hat{\mathbf{t}} \in \mathbb{R}^n \mid \liminf_{\substack{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} (f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, \hat{\mathbf{t}} \rangle) \geq 0 \right\} \quad (1.24)$$

Si $\mathbf{x} \notin \operatorname{dom}(f)$, alors $\widehat{\partial} f(\mathbf{x}) = \emptyset$.

Définition 28 Le sous-différentiel (limite) de f en \mathbf{x} correspond à l'ensemble suivant

$$\partial f(\mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{x}, f(\mathbf{y}_k) \rightarrow f(\mathbf{x}), \hat{\mathbf{t}}_k \in \widehat{\partial} f(\mathbf{y}_k) \rightarrow \mathbf{t}, k \rightarrow \infty \right\} \quad (1.25)$$

Définition 29 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre. L'ensemble des points critiques de f correspond aux zéros de ∂f .

Proposition 2 Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est une fonction propre. Alors [10],

$$\mathbf{x} \in \operatorname{argmin} f \implies 0 \in \partial f(\mathbf{x}) \quad (1.26)$$

Remarque 2 Si la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, alors on a $\partial f(\mathbf{x}) = \{\nabla f(\mathbf{x})\}$.

La notion suivante est utile dans le cadre de l'analyse de la convergence des algorithmes d'optimisation.

Définition 30 Une fonction $f : \mathcal{H} \rightarrow]-\infty, \infty]$ est dite de gradient β -Lipschitz sur un sous-ensemble \mathcal{S} de \mathcal{H} , pour $\beta > 0$, si

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{S}^2 \quad \|\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y})\| \leq \beta \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (1.27)$$

Lorsqu'une fonction $f : \mathcal{H} \rightarrow]-\infty, \infty]$ est la somme d'une fonction différentiable et d'une fonction non différentiable, la règle de différentiation est alors donnée par la proposition suivante

Proposition 3 *Soit $h : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction propre telle que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$, $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$, avec f une fonction propre et différentiable, et g une fonction propre. Nous avons d'après [167] :*

$$(\forall \mathbf{x} \in \text{dom } f), \partial h(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) + \partial g(\mathbf{x}) \quad (1.28)$$

Après avoir donné une brève introduction des outils de base de l'optimisation. Nous nous intéressons dans le paragraphe suivant aux opérateurs proximaux, sur lesquels les méthodes proximales sont basées, ces dernières méthodes nous fournissent un outil puissant pour surmonter la problématique de certaines fonctions de coût non différentiables dans les problèmes d'optimisation.

► Opérateurs proximaux

Ce paragraphe est consacré à la notion d'opérateur proximal fournit par Moreau [143]. L'opérateur proximal ou fonction proximale peut être vu comme une généralisation de la projection sur un ensemble convexe pour un ensemble convexe. L'opérateur proximal est l'un des éléments de construction clés de nombreux algorithmes d'optimisation convexe. Cet opérateur apparaît dans différents algorithmes de minimisation tels que les méthodes Explicite-Implicite (en anglais Forward-Backward) [37], l'algorithme primal-dual [35], l'algorithme de Douglas-Rachford [51], et la méthode des directions alternées (ADMM) [23].

Définition 31 (Opérateur proximal) *L'opérateur proximal d'une fonction $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ est l'opérateur fermement non-expansif défini par :*

$$\text{Prox}_{\lambda f} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} : \mathbf{x} \mapsto \underset{\mathbf{y} \in \mathcal{H}}{\text{argmin}} \left(f(\mathbf{y}) + \frac{1}{2\lambda} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \right) \quad (1.29)$$

Exemple 1 *Nous considérons ici des fonctions de la forme $|\cdot|^p$. Lorsque $p \geq 1$, $|\cdot|^p$ est convexe et nous pouvons obtenir une expression explicite de l'opérateur proximal pour certaines valeurs spécifiques de p . Les opérateurs résultants sont illustrés à la figure 1.5.*

Si $p = 1$, nous avons la norme ℓ_1 , qui est largement utilisée en optimisation pour promouvoir la parcimonie [6], et dont l'opérateur de proximal est connu comme l'opérateur de seuillage doux défini par :

$$(\forall \gamma \in \mathbb{R}_+^*) (\forall x \in \mathbb{R}) \quad \text{prox}_{\gamma|\cdot|_p}(x) = \text{sign}(x) \max\{|x| - \gamma, 0\}. \quad (1.30)$$

Si $p \in \{1, 2, 3, 4\}$, alors on peut utiliser les résultats de [36] qui sont rappelés ci-dessous pour tout $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \text{prox}_{\gamma|\cdot|^p}(x) = \begin{cases} \text{soft}_\gamma(x) & \text{si } p = 1, \\ \frac{x}{1+2\gamma} & \text{si } p = 2, \\ \text{sign}(x) \frac{\sqrt{1+12\gamma|x|}-1}{6\gamma} & \text{si } p = 3, \\ \left(\frac{t+x}{8\gamma}\right)^{1/3} - \left(\frac{t-x}{8\gamma}\right)^{1/3} & \text{si } p = 4. \end{cases}$$

où $t = \sqrt{x^2 + 1/(27\gamma)}$

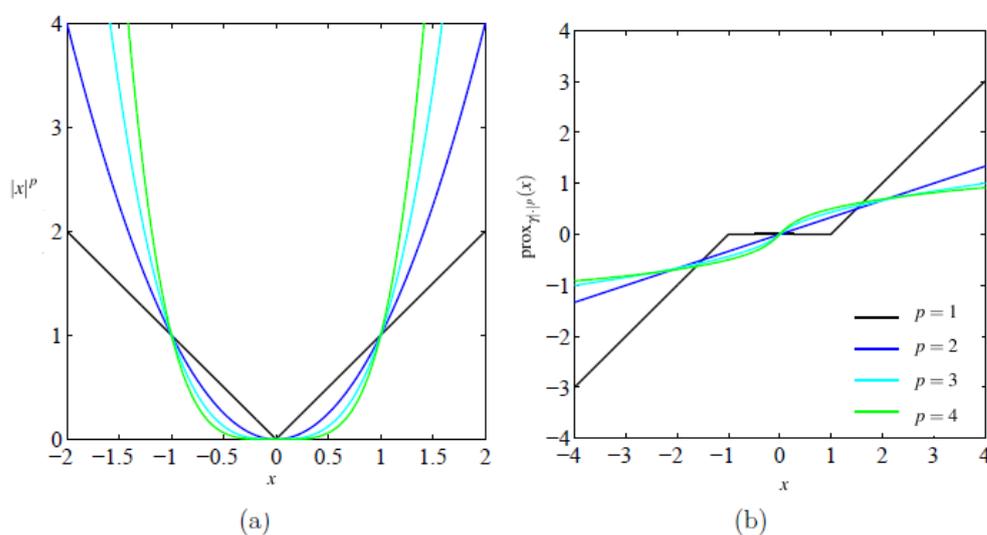


FIGURE 1.5 – (a) Fonction $|\cdot|^p$ pour $p \in \{1, 2, 3, 4\}$, (b) Opérateur proximal $\text{prox}_{\gamma|\cdot|^p}(x)$ pour $\gamma = 1$ et $p \in \{1, 2, 3, 4\}$

► Quelques caractéristiques des opérateurs proximaux

Une autre notation de l'opérateur proximal peut être donnée par le symbole suivant $(I + \lambda \partial f)^{-1}$. Calculons donc le minimiseur du problème dans sa définition au sens de la règle de Fermat (2). On a alors :

$$0 \in \partial \left(f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\lambda} \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 \right) = \partial f(\mathbf{x}) + \frac{1}{\lambda} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad (1.31)$$

Ceci peut être exprimé de manière équivalente comme

$$\bar{\mathbf{x}} \in (I + \lambda \partial f)(\mathbf{x}) \quad (1.32)$$

L'opérateur proximal peut être vu comme une généralisation de l'opérateur de projection sur des ensembles convexes. Considérons la fonction indicatrice $I_{\mathcal{C}}$ d'un ensemble non vide,

fermé et convexe $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$. La valeur de l'opérateur proximal correspondant $(I + \lambda I_{\mathcal{C}})^{-1}$ pour un point $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{H}$ peut être estimée comme le minimiseur des problèmes équivalents suivants

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathcal{H}} I_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\lambda} \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \frac{1}{2\lambda} \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 \quad (1.33)$$

Le problème (1.33) cherche à minimiser la distance quadratique par rapport à l'ensemble convexe \mathcal{C} . Alors ce minimiseur existe et correspond à la projection de $\bar{\mathbf{x}}$ dans l'ensemble convexe \mathcal{C} .

1.4.3 Algorithmes d'optimisation

D'un point de vue optimisation, le choix du bon optimum ou du bon algorithme pour un problème donné est d'une importance cruciale. L'algorithme choisi pour une méthode d'optimisation dépend bien souvent du type de problème, de la qualité souhaitée des solutions, de la ressource informatique disponible, de la limite de temps, ainsi que de la disponibilité des implémentations de l'algorithme [226] [227]. La nature d'un algorithme détermine souvent s'il est adapté à un type de problème particulier. Par exemple, les algorithmes basés sur les méthodes de gradient, comme la méthode d'escalade (hill climbing en anglais), ne conviennent pas à un problème d'optimisation dont la fonction objective définie est discontinue. Inversement, si nous considérons un problème d'optimisation multi-critères, ou avec une fonction objective non linéaire, les algorithmes classiques tels que l'escalade et les algorithmes de descente ne conviennent pas, car il s'agit d'algorithmes de recherche locale. Comme dans la plupart des applications, les ressources informatiques sont limitées, nous devons obtenir de bonnes solutions (pas nécessairement les meilleures) dans un délai raisonnable. Par conséquent, nous devons trouver un équilibre entre les ressources et la qualité de la solution. Nous ne pouvons pas obtenir des solutions avec une qualité garantie, mais nous nous efforçons d'obtenir des solutions de qualité du mieux que nous pouvons.

Après avoir donné une brève présentation sur le choix d'un algorithme cruciale, nous allons présenter maintenant dans la section suivante les algorithmes les plus importants considérés dans les contributions de cette thèse.

► Les algorithmes proximaux

Les méthodes proximales désignent des algorithmes itératifs permettant de minimiser une somme de fonctions convexes non nécessairement différentiables et pouvant faire intervenir des opérateurs linéaires. Cette classe d'algorithmes est basée sur les opérateurs proximaux qui est une généralisation de la projection sur un ensemble convexe (comme défini ci-dessus). La pertinence de ces algorithmes est principalement due à leurs fortes propriétés de convergence, leur robustesse aux erreurs numériques et leur bon comportement numérique. Dans la littérature récente relative à la restauration de signaux et d'images, de nombreux travaux ont considéré les algorithmes proximaux afin de traiter efficacement les problèmes incluant les représentations l_1 [180], wavelet-frame [9], ou des contraintes supplémentaires

telles que la positivité des données [210].

Nous nous intéressons dans cette partie aux problèmes d'optimisation du type suivant,

$$\hat{\mathbf{x}} \in \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \quad (1.34)$$

L'algorithme proximal classique [166] générant une suite $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ s'écrit :

Algorithm 1: Algorithme du point proximal

Initialisation : $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_k \in]0, \infty [$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

for $k = 0, 1, \dots$ **do**

$\mathbf{x}_{k+1} \in \text{prox}_{\lambda_k f}(\mathbf{x}_k)$

En écrivant successivement la définition de l'opérateur proximal et la première condition d'optimalité associée, on obtient une version inexacte de l'algorithme proximal :

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}^{k+1}) + \frac{1}{2\lambda_k} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 \leq f(\mathbf{x}^k) \\ \omega^{k+1} \in \partial f(\mathbf{x}^{k+1}); \\ \lambda_k \omega^{k+1} + \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k = 0. \end{cases} \quad (1.35)$$

► **La méthode des directions alternées (ADMM)**

La méthode des directions alternées (en anglais Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM)) résout des problèmes d'optimisation convexes qui peuvent être écrits sous la forme :

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}, \mathbf{z}}{\text{minimiser}} \quad f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \\ & \text{s.t.} \quad \mathbf{Ax} + \mathbf{Bz} = \mathbf{c}, \end{aligned} \quad (1.36)$$

L'avantage de l'ADMM est le découpage qu'il fournit en minimisant le Lagrangien augmenté, défini par :

$$L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) + \mathbf{w}^\top (\mathbf{Ax} + \mathbf{Bz} - \mathbf{c}) + (\rho/2) \|\mathbf{Ax} + \mathbf{Bz} - \mathbf{c}\|_2^2 \quad (1.37)$$

avec $\rho > 0$ un paramètre de pénalité et \mathbf{w} est le multiplicateur de Lagrange.

ADMM consiste à l'itération des mises à jour suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{x}} L_{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{z}^k, \mathbf{w}^k) \\ \mathbf{z}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{z}} L_{\rho}(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{z}, \mathbf{w}^k) \\ \mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{w}^k + \rho(\mathbf{A}\mathbf{x}^{k+1} + \mathbf{B}\mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{c}) \end{cases} \quad (1.38)$$

ADMM peut être écrit sous une forme légèrement différente, qui est souvent plus pratique, en combinant les termes linéaires et quadratiques dans le Lagrangien augmenté et en mettant à l'échelle la variable duale. Définissons par \mathbf{u} une version de la mise à l'échelle des variables duales correspondant à la contrainte d'égalité $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{c}$, ADMM peut être exprimé comme suit [23] :

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + (\rho/2) \|\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{z}^k - \mathbf{c} + \mathbf{u}^k\|_2^2 \\ \mathbf{z}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{z}} g(\mathbf{z}) + (\rho/2) \|\mathbf{A}\mathbf{x}^{k+1} + \mathbf{B}\mathbf{z} - \mathbf{c} + \mathbf{u}^k\|_2^2 \\ \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + (\mathbf{A}\mathbf{x}^{k+1} + \mathbf{B}\mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{c}) \end{cases} \quad (1.39)$$

Une revue complète de l'algorithme ADMM peut être trouvée dans [23] et les références qui y figurent. La qualité de l'ADMM est qu'il converge sous des conditions faibles (dans le cas convexe), tandis qu'une division astucieuse des variables en deux blocs \mathbf{x} et \mathbf{z} peut donner lieu à des mises à jour très efficaces *et/ou* à une mise en œuvre distribuée. Des indications quant au choix du pas optimal peuvent être trouvées dans [173].

► Les algorithmes primaux-duaux

Un problème d'optimisation convexe peut être couplé à un problème dual impliquant les conjugués des fonctions apparaissant dans sa formulation. Dans ce paragraphe, nous étudions l'interaction entre les problèmes primaux et duaux dans le contexte de la dualité de Legendre-Fenchel (LF). Cette dernière approche conduit naturellement aux fonctions de points-selles. Tout d'abord, nous commençons par rappeler la définition du conjugué convexe (transformée de Legendre-Fenchel) [166] [10] d'une fonction :

Définition 32 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre. La conjuguée (de Legendre-Fenchel) $f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow]-\infty, +\infty]$ de la fonction f est définie par

$$f^*(\mathbf{s}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{ \langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x}) \}, \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \quad (1.40)$$

Géométriquement, cela signifie que nous nous intéressons à la recherche d'un point \mathbf{x} de la fonction $f(\mathbf{x})$ tel que la pente de la droite \mathbf{s} passant par $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ ait un maximum d'interception sur l'axe des ordonnées. Il s'agit du point de la courbe dont la pente \mathbf{s} n'est autre que la tangente à ce point (voir la figure 1.6). Confirmons cela par une simple considération

d'une fonction f propre, lsc et convexe. La condition d'optimalité pour $\langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x})$, qui est $0 \in \mathbf{s} - \partial f(\mathbf{x})$, implique immédiatement $\mathbf{s} \in \partial f(\mathbf{x})$. Pour une fonction f différentiable, c'est $\mathbf{x} = \nabla f(\mathbf{x})$.

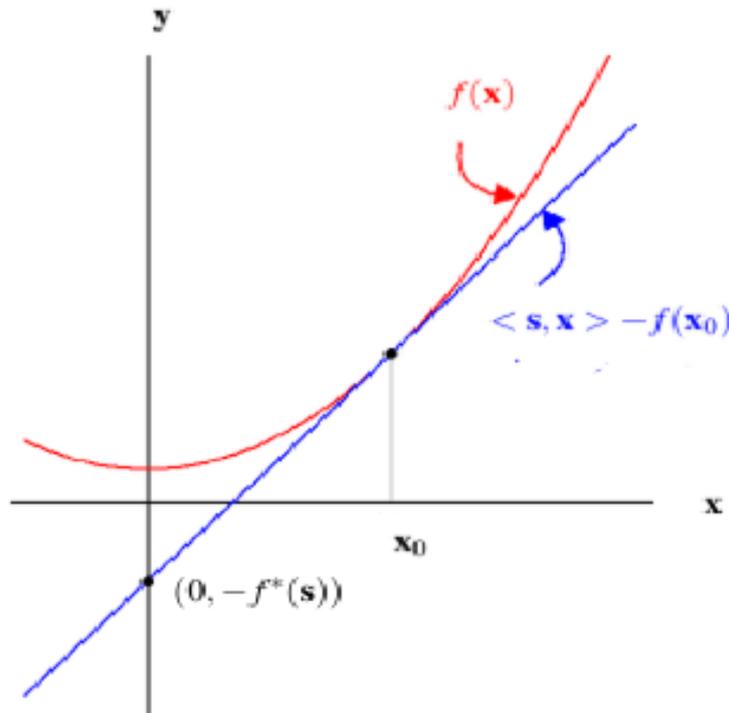


FIGURE 1.6 – La valeur de la conjuguée (de Legendre-Fenchel) f^* en un certain $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$

La dualité est le principe qui consiste à examiner une fonction ou un problème sous deux angles différents, à savoir la forme primale et la forme duale. En théorie de l'optimisation, une compréhension approfondie d'une fonction donnée est généralement souvent nécessaire.

Exemple 2 Soit f la fonction parabolique définie par :

$$f(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^2$$

Le transformé de LF de $f(\mathbf{y})$ pour un vecteur \mathbf{y} n -dimensionnel est définie comme suit :

$$f^*(\mathbf{z}) = \sup_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \{\mathbf{y}\mathbf{z} - f(\mathbf{y})\}$$

La fonction atteint le maximum lorsque

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{y}} (\mathbf{y}\mathbf{z} - \mathbf{y}^2) &= 0 \\ \mathbf{z} - 2\mathbf{y} &= 0 \\ \mathbf{z} &= 2\mathbf{y} \end{aligned}$$

Remplaçons la valeur de y dans la fonction précédente $f^*(z)$, on obtient :

$$f^*(z) = z \frac{z}{2} - \left(\frac{z}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}z^2$$

A titre d'illustration, la figure 1.7 illustre la parabole y^2 et sa fonction conjuguée $\frac{1}{4}z^2$ qui est aussi une parabole

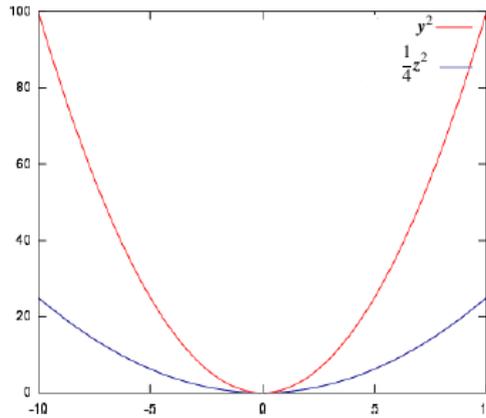


FIGURE 1.7 – La parabole y^2 et sa fonction conjuguée $\frac{1}{4}z^2$

Dans le paragraphe précédent, nous avons fourni une introduction à la notion de dualité, ainsi que la définition de la fonction conjuguée. En utilisant ces deux notions, nous allons pouvoir expliciter plus précisément les problèmes primaux-duaux. Nous nous intéressons dans cette partie aux problèmes d'optimisation du type suivant,

$$\hat{\mathbf{x}} \in \underbrace{\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{H}} \{f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{Kx})\}}_{\text{problème}} \quad (1.41)$$

Où $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$, $g \in \Gamma_0(\mathcal{G})$ et \mathbf{K} est un opérateur linéaire continu de \mathcal{H} dans \mathcal{G} . Habituellement, $g(\mathbf{Kx})$ correspond au terme de régularisation et $f(\mathbf{x})$ correspond au terme de fidélité. La forme duale peut être facilement obtenue en remplaçant $g(\mathbf{Kx})$ par son conjugué convexe, à savoir

$$\hat{\mathbf{y}} \in \underbrace{\max_{\mathbf{y} \in \mathcal{G}} \{f^*(-\mathbf{Ky}) + g(\mathbf{x})\}}_{\text{problème dual}} \quad (1.42)$$

Au lieu de chercher une solution au problème primal (1.41) ou une solution au problème dual (5.16), on cherche à trouver une solution au point selle du problème primal-dual suivant :

$$(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) \in \underbrace{\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{H}} \max_{\mathbf{y} \in \mathcal{G}} \{f(\mathbf{z}) + \langle \mathbf{Kx}, \mathbf{y} \rangle - g^*(\mathbf{y})\}}_{\text{problème primal-dual}} \quad (1.43)$$

Une solution au problème primal-dual pour une paire $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ satisfaisant l'inclusion suivante :

$$\begin{cases} 0 \in \partial f(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{K}^* \hat{\mathbf{y}} \\ 0 \in \partial g^*(\hat{\mathbf{y}}) - \mathbf{K} \hat{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (1.44)$$

où $\hat{\mathbf{x}}$ (resp. $\hat{\mathbf{y}}$) est une solution au problème primal (resp. dual).

Algorithm 2: Algorithme Primal-Dual : Algorithme splitting

Entrées x_0, μ_0, λ, ν

for $k = 0, 1, \dots$ **do**

$$\text{--- } \mathbf{x}_{k+1} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \left\{ f(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{x}, \mathbf{K}^* \mathbf{y}_k \rangle + \frac{1}{2\lambda} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|^2 \right\}$$

$$\text{--- } \mathbf{y}_{k+1} = \underset{\mathbf{y}}{\operatorname{argmin}} \left\{ g^*(\mathbf{y}) - \langle \mathbf{K}(2\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k), \mathbf{y} \rangle + \frac{1}{2\nu} \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_k\|^2 \right\}$$

end

Sorties \mathbf{x}_{k+1} et \mathbf{y}_{k+1} .

Ces problèmes primaux-duaux ont suscité un grand intérêt dans la littérature. Un exemple bien connu des algorithmes primaux-duaux susmentionnés est l'algorithme de Chambolle-Pock [35], dont les principales étapes sont décrites au niveau de l'algorithme 2. D'autres variations de cet algorithme, conçues pour résoudre des problèmes primaux-duaux encore plus généraux que ceux de [35], ont été proposées, par exemple dans [208], [41] et [42].

Par ailleurs, dans le chapitre 3, nous développons ces algorithmes primaux-duaux pour la résolution d'un problème de calcul de la décomposition CP sous contrainte de non négativité. Nous allons également étudier la convergence de l'algorithme que nous allons obtenir à partir le développement de ces algorithmes.

1.4.4 Quelques algorithmes existants pour les décompositions tensorielles

Généralement, le problème d'estimation des variables latentes impliquées dans les décompositions tensorielles, telles que la décomposition CP, Tucker ou d'autres types de décomposition (termes-blocs, etc.), est exprimé sous forme d'un problème d'optimisation sous contrainte. Ce qui conduit au développement de différents algorithmes selon la fonction de coût utilisé. Dans cette section, nous nous intéressons particulièrement aux algorithmes pour le calcul de la décomposition CP dans la littérature. L'algorithme le plus utilisé est celui qui traite les méthodes des moindres carrés (en anglais Alternating Least Squares (ALS)) [82], qui divise la fonction de coût principale en sous-problèmes qui doivent être résolus séparément pour chaque matrice facteur tandis que les autres facteurs sont fixes. Ces sous-problèmes sont traités alternativement jusqu'à ce que la convergence ou un critère d'arrêt soit

atteint. L'ALS est une méthode connue par sa rapidité, et sa simplicité à implémenter. Cependant, la convergence de l'ALS peut être lente, par exemple lorsque les colonnes d'une ou de plusieurs matrices facteurs sont colinéaires. La prise en compte des termes de régularisation et des contraintes, telle que la contrainte de non-négativité, de projection, donnant naissance à de nombreuses variantes de l'algorithme ALS pour le calcul de la décomposition CP, par exemple ALS Non-négative (NALS) [39]. Parfois, les tenseurs peuvent être de grande taille, et le calcul de la décomposition CP par ALS en présence de contraintes qui exigent une projection (comme la non-négativité) peut être très difficile. Dans ce cas, il serait préférable de compresser d'abord les dimensions du tenseur pour que la décomposition CP devienne accessible. Puis la projection est effectuée sur les matrices facteurs décompressées, et ainsi de suite jusqu'à la convergence ou jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit satisfait. L'algorithme est appelé Projected-Compressed ALS (ProCo ALS) [40]. Le principal problème de ProCo ALS est qu'il n'y a aucune garantie que ProCo ALS converge vers un minimum local de la fonction de coût. L'algorithme lui-même est basé sur l'approximation d'un opérateur de projection, mais la performance théorique de cette approximation n'est pas claire. Une méthode qui adapte l'ADMM aux décompositions CP, nommée Optimisation Alternée-Algorithm des directions alternées (en anglais Alternating Optimization-Alternating Direction Method of Multipliers (AO-ADMM)), qui a assuré une décroissance monotone de la fonction objective en utilisant une optimisation alternée (AO), et la possibilité d'incorporer des contraintes de manière flexible à l'aide de l'ADMM. Cependant, dans [150], les auteurs signalent deux problèmes dans l'AO-ADMM liés à l'algorithme qui nécessite une inversion de matrice, et sa difficulté à traiter le chevauchement d'une fonction de régularisation et d'un opérateur linéaire. D'autres algorithmes itératifs basés sur l'algorithme de descente, tels que l'algorithme de gradient, Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt, qui ont été proposés [197] [200] [43], nous ne rappelons dans le paragraphe 1.4.4 du principe général des algorithmes de descente pour le problème de calcul de la décomposition CP.

En outre, certains algorithmes pour le calcul de la décomposition CP en traitement des données de spectroscopie de fluorescence 3D peuvent être trouvés : dans [171], l'algorithme de gradient conjugué non linéaire (en anglais Non Linear Conjugate Gradient (NLCG) Optimisation Algorithm) a été suggéré pour résoudre ce problème. L'algorithme NLCG est robuste à l'initialisation, au bruit et aux problèmes de surestimation du rang. Cependant, cette méthode est très coûteuse en termes de calcul. De plus, il peut s'avérer très difficile de régler les paramètres de régularisation. Une approche proximale à base de l'algorithme explicite-implicite à variable métrique de coordonnées par blocs (en anglais Block Coordinate Variable Metric Forward-Backward (BC-VMFB)) a été également présentée dans [210] comme solution au problème de calcul de la décomposition CP en traitement des données de spectroscopie de fluorescence 3D. Cette méthode déterministe offre un moyen approprié pour prendre en compte les contraintes dures (par exemple, la non-négativité) et les informations a priori (par exemple, la parcimonie, la régularité). Elle est robuste au bruit, à l'initialisation, à la surestimation et converge rapidement. Cependant, comme pour l'algorithme NLCG, ses paramètres de régularisation doivent être choisis soigneusement et sont généralement difficiles à régler.

Dans la partie suivante nous allons donner des formes génériques de quelques algorithmes susmentionnés. Nous allons donc commencer par donner la formulation du problème de minimisation du problème de calcul de la décomposition CP non-négative.

► **Formulation générale du problème d’optimisation de la décomposition CP sous contrainte de non négativité**

Dans cette section nous considérons des tenseurs d’ordre N , en supposant toujours que le rang (approximé) du tenseur est R . Le problème CP (1.9) est un problème inverse dans lequel l’ensemble des N matrices facteurs latents $\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)}$ impliquées dans la factorisation tensorielle sont inconnues et les observations des données originales \mathcal{X} sont données sous la forme d’un tenseur. Pour résoudre ce problème inverse sous des contraintes de non-négativité, nous reformulons (1.9) en un problème d’optimisation pénalisé suivant,

$$\underset{\mathbf{A}^{(n)} \in \mathbb{R}_+^{I_n \times R}, n \in \{1, \dots, N\}}{\text{minimiser}} \quad f(\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)}) + g(\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)}) \quad (1.45)$$

Où la matrice $\mathbf{A}^{(n)} \in \mathbb{R}_+^{I_n \times R}$ est la n -ème *matrice facteur de la décomposition* à estimer. Habituellement, $f : \mathbb{R}_+^{I_1 \times R} \times \dots \times \mathbb{R}_+^{I_N \times R} \rightarrow \mathbb{R}$ correspond au terme de fidélité qui représente la différence entre le tenseur \mathcal{X} et le tenseur reconstruit par $\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)}$, et $g : \mathbb{R}_+^{I_1 \times R} \times \dots \times \mathbb{R}_+^{I_N \times R} \rightarrow]-\infty, +\infty]$ correspond au terme de régularisation.

La fonction f est souvent choisie quadratique même si d’autres types de fonctions de coût ont également été considérée (cf. thèse Xuan Vu [209]). Alors, le problème de minimisation précédent peut être écrit comme suit : La forme duale

Soit $\mathbf{X}_{I_n, I_{-n}}^{(n)} \in \mathbb{R}_+^{I_n \times I_{-n}}$, $I_{-n} = I_1 \dots I_{n-1} I_{n+1} \dots I_N$ la matrice obtenue en dépliant le tenseur \mathcal{X} suivant la n -ème direction, $n \in \{1, \dots, N\}$. Le modèle (1.9) peut être écrit sous une forme matricielle en utilisant le produit de Khatri-Rao (défini ci-dessus (3)) comme suit :

$$\mathbf{X}_{I_n, I_{-n}}^{(n)} = \mathbf{A}^{(n)} (\mathbf{Z}_{I_{-n}, R}^{(-n)})^T, \quad \forall n \in \{1, \dots, N\} \quad (1.46)$$

où $(\cdot)^\top$ est l’opérateur transposé et

$$\mathbf{Z}_{I_{-n}, R}^{(-n)} = \mathbf{A}^{(N)} \odot \dots \odot \mathbf{A}^{(n+1)} \odot \mathbf{A}^{(n-1)} \odot \dots \odot \mathbf{A}^{(1)}, \quad \forall n \in \{1, \dots, N\} \quad (1.47)$$

Alors, une version équivalente du problème de minimisation (??) est donné par :

$$\underset{\mathbf{A}^{(n)} \in \mathbb{R}_+^{I_n \times R}, n \in \{1, \dots, N\}}{\text{minimiser}} \quad \|\mathbf{X}_{I_n, I_{-n}}^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)} (\mathbf{Z}_{I_{-n}, R}^{(-n)})^T\|_F^2 + g(\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)}) \quad (1.48)$$

En outre, la fonction de régularisation $g : \mathbb{R}_+^{I_1 \times R} \times \dots \times \mathbb{R}_+^{I_N \times R} \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est une fonction qui incorpore certaines informations a priori sur les matrices facteurs $\mathbf{A}^{(n)}$, $n \in \{1, \dots, N\}$ sous la forme du régularisateur g présenté dans l’équation (1.45). Nous nous intéressons à des g qui peuvent s’écrire sous la forme suivante :

$$g(\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)}) = g_1(\mathbf{A}^{(1)}) + \dots + g_N(\mathbf{A}^{(N)}) \quad (1.49)$$

Après avoir donné les formes classiques des problèmes de minimisations pour le calcul de la décomposition CP, nous allons maintenant, sans perte de généralité et par souci de simplicité, nous allons présenter quelques algorithmes dans la cas particulier de tenseur d'ordre 3.

► **L'algorithme ALS sous contrainte de non négativité [39]**

Dans l'algorithme Non-négative ALS, une itération est effectuée en résolvant les sous-problèmes suivants :

$$\underset{\mathbf{A}^{(n)} \in \mathbb{R}_+^{I_n \times R}}{\text{minimiser}} \quad \|\mathbf{X}_{I_n, I_{-n}}^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}(\mathbf{Z}_{I_{-n}, R}^{(-n)})^T\|_F^2 + g_n(\mathbf{A}^{(n)}), \quad n \in \{1, \dots, 3\} \quad (1.50)$$

Dans l'algorithmes itératif ALS, la contrainte de non-négativité est assurée à chaque itération en projetant la valeur calculée sur l'orthant non négatif. En conséquence, chaque matrice facteur peut être projetée sur l'orthant non négatif juste après son calcul. L'algorithme Non-négative ALS est résumée dans la forme générique (3). Où nous notons que $\Lambda_{\mathbf{A}^{(n)}}$ est une matrice diagonale de taille $R \times R$ dont les entrées diagonales sont les facteurs de normalisation des colonnes de la matrice facteur $\mathbf{A}^{(n)}$, et Λ est un tenseur diagonal d'ordre N de dimensions $R \times \dots \times R$, dont ses entrées sont la diagonale de $\prod_{n=1}^N \Lambda_{\mathbf{A}^{(n)}}$. Et désignons par le symbole \dagger le pseudo-inverse de Moore-Penrose d'une matrice.

► **L'algorithme d'Optimisation Alternée-Algorithmme des directions alternées (AO-ADMM) [91]**

Dans [91], la technique AO-ADMM a été présentée comme un algorithme puissant et flexible pour calculer la décomposition CP. En alternant les sous-problèmes de la matrice facteur (d'où vient la notion "AO"), si aucune contrainte n'est imposée AO-ADMM sera similaire à la méthode ALS. Cependant, lorsque des contraintes sont impliquées, chaque sous-problème est résolu à l'aide de l'approche ADMM.

En partant du sous-problème d'une matrice facteur $\mathbf{A}^{(n)}$ avec contrainte $g_n(\mathbf{A}^{(n)})$:

$$\underset{\mathbf{A}^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times R}}{\text{minimiser}} \quad \|\mathbf{X}_{I_n, I_{-n}}^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}(\mathbf{Z}_{I_{-n}, R}^{(-n)})^T\|_F^2 + g_n(\mathbf{A}^{(n)}), \quad n \in \{1, \dots, 3\} \quad (1.51)$$

qui peut aussi s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{A}^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times R}}{\text{minimiser}} \quad & \|\mathbf{X}_{I_n, I_{-n}}^{(n)} - \bar{\mathbf{A}}^{(n)}(\mathbf{Z}_{I_{-n}, R}^{(-n)})^T\|_F^2 + g_n(\mathbf{A}^{(n)}), \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}^{(n)} = \bar{\mathbf{A}}^{(n)}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

Ici, ADMM sépare le sous-problème en deux perspectives principales : celle de la mise à jour principale de la décomposition CP où $\bar{\mathbf{A}}^{(n)}$ est impliquée telle que $f(\bar{\mathbf{A}}^{(n)}) = \|\mathbf{X}_{I_n, I_{-n}}^{(n)} -$

Algorithm 3: Non-négative ALS

Entrées Tenseur \mathcal{X} d'ordre N , un rang R .

Initialisation $\mathbf{A}_0^{(2)}$ et $\mathbf{A}_0^{(3)}$

Soit $k = 0$

while *Le critère d'arrêt n'est pas atteint* **do**

$k \leftarrow k + 1$

— Mettre à jour les matrices facteurs

$$\mathbf{A}_k^{(1)} \leftarrow \mathbf{X}_{(1)} \left[\left(\mathbf{A}_{k-1}^{(3)} \odot \mathbf{A}_{k-1}^{(2)} \right)^\top \right]^\dagger; \quad \mathbf{A}_k^{(1)} \leftarrow \max \left(0, \mathbf{A}_k^{(1)} \right)$$

$$\mathbf{A}_k^{(2)} \leftarrow \mathbf{X}_{(2)} \left[\left(\mathbf{A}_{k-1}^{(3)} \odot \mathbf{A}_k^{(1)} \right)^\top \right]^\dagger; \quad \mathbf{A}_k^{(2)} \leftarrow \max \left(0, \mathbf{A}_k^{(2)} \right)$$

$$\mathbf{A}_k^{(3)} \leftarrow \mathbf{X}_{(3)} \left[\left(\mathbf{A}_k^{(2)} \odot \mathbf{A}_k^{(1)} \right)^\top \right]^\dagger; \quad \mathbf{A}_k^{(3)} \leftarrow \max \left(0, \mathbf{A}_k^{(3)} \right)$$

— Soit $\mathbf{A}_k^{(3)}$ absorbant les facteurs de normalisation des colonnes de $\mathbf{A}_k^{(1)}$ and $\mathbf{A}_k^{(2)}$:

$$\mathbf{A}_k^{(1)} \leftarrow \mathbf{A}_k^{(1)} \Lambda_{\mathbf{A}^{(1)}}^{-1};$$

$$\mathbf{A}_k^{(2)} \leftarrow \mathbf{A}_k^{(2)} \Lambda_{\mathbf{A}^{(2)}}^{-1};$$

$$\mathbf{A}_k^{(3)} \leftarrow \mathbf{A}_k^{(3)} \Lambda_{\mathbf{A}^{(1)}} \Lambda_{\mathbf{A}^{(2)}}$$

end

Sorties Normaliser les colonnes de $\mathbf{A}_k^{(3)}$: $\mathbf{A}_k^{(3)} \leftarrow \mathbf{A}_k^{(3)} \Lambda_{\mathbf{A}^{(3)}}^{-1}$ transformer le produit

$\Lambda_{\mathbf{A}^{(1)}} \Lambda_{\mathbf{A}^{(2)}} \Lambda_{\mathbf{A}^{(3)}}$ en un tenseur diagonal Λ d'ordre 3, et retourner $\mathbf{A}^{(1)}$, $\mathbf{A}^{(2)}$, $\mathbf{A}^{(3)}$, Λ .

$\bar{\mathbf{A}}^{(n)} (\mathbf{Z}_{I-n,R}^{(-n)})^T \|_F^2$, et celle des contraintes représentées par $g_n(\mathbf{A}^{(n)})$ où $\mathbf{A}^{(n)}$ est impliquée. En conséquence, en utilisant les étapes de la méthode ADMM, l'expression (1.52) est séparée comme suit :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{A}}^{(n)} \leftarrow \arg \min_{\bar{\mathbf{A}}^{(n)}} f(\bar{\mathbf{A}}^{(n)}) + (1/2) \|\mathbf{A}^{(n)} - \bar{\mathbf{A}}^{(n)} + \mathbf{W}\|_2^2 \\ \mathbf{A}^{(n)} \leftarrow \arg \min_{\mathbf{A}^{(n)}} g_n(\mathbf{A}^{(n)}) + (1/2) \|\mathbf{A}^{(n)} - \bar{\mathbf{A}}^{(n)} + \mathbf{W}\|_2^2 \\ \mathbf{W} \leftarrow \mathbf{W} + \mathbf{A}^{(n)} - \bar{\mathbf{A}}^{(n)} \end{cases} \quad (1.53)$$

où \mathbf{W} est la variable duale qui mesure la proximité entre $\bar{\mathbf{A}}^{(n)}$ et $\mathbf{A}^{(n)}$ à chaque itération, et ADMM itère sur les trois mises à jour jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit satisfait en fonction de \mathbf{W} ou du nombre d'itérations.

Dans [91], les auteurs ont remarqué que tout au long des itérations, la même matrice $(\mathbf{Z}_{I-n,R}^{(-n)})^T \mathbf{X}_{I_n,I-n}^{(n)}$ et la matrice inverse $((\mathbf{Z}_{I-n,R}^{(-n)})^T \mathbf{Z}_{I-n,R}^{(-n)} + \rho \mathbf{I})^{-1}$ sont utilisées. Par conséquent, pour réduire les calculs, ils ont proposé de mettre en cache $(\mathbf{Z}_{I-n,R}^{(-n)})^T \mathbf{Z}_{I-n,R}^{(-n)}$ et la décomposition de Cholesky de $(\mathbf{Z}_{I-n,R}^{(-n)})^T \mathbf{Z}_{I-n,R}^{(-n)} + \rho \mathbf{I} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ est calculé. Alors la forme générique de l'algorithme AO-ADMM pour un seul sous-problème traitant la méthode ADMM est décrit dans (4).

Algorithm 4: L'algorithme AO-ADMM

Entrées $\mathbf{X}_{I_n,I-n}^{(n)}, \mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{Z}_{I-n,R}^{(-n)}, \mathbf{W}, \mathbf{P}, \varepsilon, k_{max}$.

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Z}_{I-n,R}^{(-n)})^T \mathbf{Z}_{I-n,R}^{(-n)};$$

$$\rho = \text{trace}(\mathbf{P})/\mathbf{P};$$

Calculer \mathbf{L} à partir de la décomposition de Cholesky de telle sorte que :

$$\mathbf{G} + (\rho + \mu)\mathbf{I}_k = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

$$\mathbf{U} = (\mathbf{Z}_{I-n,R}^{(-n)})^T \mathbf{X}_{I_n,I-n}^{(n)};$$

répéter

$$\text{— } \bar{\mathbf{A}}^{(n)} \leftarrow (\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{L}(\mathbf{F} + \rho(\mathbf{A}^{(n)} + \mathbf{W})^T)$$

$$\text{— } \mathbf{A}^{(n)} \leftarrow \arg \min_{\mathbf{A}^{(n)}} g_n(\mathbf{A}^{(n)}) + (1/2) \|\mathbf{A}^{(n)} - \bar{\mathbf{A}}^{(n)} + \mathbf{W}\|_2^2$$

$$\text{— } \mathbf{W} \leftarrow \mathbf{W} + \mathbf{A}^{(n)} - \bar{\mathbf{A}}^{(n)}$$

— mettre à jour r et s ((se référer à [91] pour les mises à jour de r et s))

jusqu'à ($r < \varepsilon$ et $s < \varepsilon$) ou ($k_{max} > 0$ et $k \geq k_{max}$)

Sorties $\mathbf{A}^{(n)}$ et \mathbf{W} .

Une autre approche qui adapte l'ADMM au modèle de décomposition CP, a été étudiée dans [77]. Plus particulièrement, au problème de l'estimation du rang d'un tenseur avec des mesures bruitées. Ainsi, ils ont proposé une méthode efficace d'approximation de rang faible pour le modèle de la décomposition CP, capable d'estimer à la fois le rang et les matrices facteurs du tenseur à décomposer, ils commencent par surestimer le rang, puis ils minimisent sur des normes mixtes, utilisées pour promouvoir la parcimonie des matrices facteurs. Cette approche est robuste au problème de la surestimation du rang. Mais, parfois elle n'est pas suffisamment robuste en présence d'un faible SNR.

► **Méthodes à base de l'algorithme de descente [170]**

Comme nous l'avons mentionné avant, ce type d'approches, a été développé pour le problème de calcul de la décomposition CP [170]. Ces méthodes s'appuient sur des algorithmes basés sur le calcul des gradients, par exemple le gradient conjugué, Gauss-Newton (Levenberg-Marquardt et BFGS). Ces méthodes d'optimisation fournissent des outils robustes pour résoudre le problème de calcul de la décomposition CP. Un autre avantage est la facilité d'ajuster le modèle aux informations a priori. Cependant, ce type de méthodes présente aussi des inconvénients, comme le calcul des gradients (ou encore les matrices Hes-

siannes, etc.) est relativement coûteux, ce qui conduit à une complexité plus élevée que les méthodes ALS. Généralement, il est suggéré d'utiliser une fonction de coût ayant la structure suivante :

$$\underset{\mathbf{A}^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times R}, n \in \{1, \dots, N\}}{\text{minimiser}} \quad f(\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)}) + g(\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)}) \quad (1.54)$$

où la fonction $f(\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)}) = \|\mathcal{X} - \llbracket \mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)} \rrbracket\|_F^2$ est donnée dans l'équation (??). Définissons par h une fonction différentiable telle que $h = f + g$, et notons par ∇h la matrice de gradient de h . Cette matrice est composée des matrices de gradient de f et de g , notées par ∇f et ∇g respectivement, soit

$$\nabla h = \nabla f + \nabla g \quad (1.55)$$

Soit \mathbf{x} le vecteur de taille $Q \times 1$, $Q = R \sum_{n=1}^N I_n$ contenant toutes les matrices facteurs empilées en une seule colonne. De même, soit \mathbf{z} le vecteur contenant les matrices de gradient disposées de la même manière. Les vecteurs correspondants \mathbf{x} et \mathbf{z} sont alors définis par :

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} \text{vec} \{ \mathbf{A}_k^{(1)} \} \\ \vdots \\ \text{vec} \{ \mathbf{A}_k^{(N)} \} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{z}_k = \begin{pmatrix} \text{vec} \left\{ \nabla_{\mathbf{A}^{(1)}} h \left(\mathbf{A}_k^{(1)}, \dots, \mathbf{A}_k^{(N)} \right) \right\} \\ \vdots \\ \text{vec} \left\{ \nabla_{\mathbf{A}^{(N)}} h \left(\mathbf{A}_k^{(1)}, \dots, \mathbf{A}_k^{(N)} \right) \right\} \end{pmatrix}. \quad (1.56)$$

Les méthodes à base de l'algorithme de descente consiste à la mise à jour du vecteur \mathbf{x} donné dans l'équation précédente à chaque itération k :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mu_k \mathbf{z}_k \quad (1.57)$$

où $k \in \{1, \dots, k_{max}\}$ et k_{max} est le nombre total d'itérations, et $\mu_k, k \in \{1, \dots, k_{max}\}$ est un pas d'adaptation scalaire. Un pseudo-code résumant les principales étapes est donné en algorithme 5.

Algorithm 5: Algorithme de descente

Entrées $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$, le nombre total d'itération k_{max}

Initialisation Le vecteur $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{Q \times 1}$

Calculer $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^{Q \times 1}$

for $k = 0, 1, \dots, k_{max}$ **do**

- Calculer le pas μ_k
- Mettre à jour $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mu_k \mathbf{z}_k$
- Calculer \mathbf{z} à l'itération $k + 1$.

end

Sorties Le vecteur $\mathbf{x}_{k_{max}}$.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fourni une brève description de la littérature des problèmes inverses dans le contexte de traitement de signaux multidimensionnels ou d'images en grandes dimensions. Nous avons commencé par les outils mathématiques nécessaires. Plus particulièrement, les outils d'algèbre multilinéaire (rappels sur les tenseurs, les principaux opérateurs tensoriels et matriciels et les principales décompositions tensorielles auxquels nous nous intéressons), puis nous avons défini les outils fondamentaux d'analyse et d'optimisation utilisés dans le cadre de notre thèse. Nous avons donné des exemples d'algorithmes d'optimisation déterministes utilisant ces outils pour résoudre des problèmes variationnels. Finalement, nous avons proposé un état de l'art de certains algorithmes existants pour les décompositions tensorielles. Il est surtout orienté autour de la décomposition CP. Dans le chapitre suivant, nous allons présenter les principales applications auxquelles nous nous sommes intéressés ainsi que les différents types de données manipulées.

LES APPLICATIONS VISÉES AVEC LA PRÉSENTATION DES DONNÉES À TRAITER DANS CHACUNE DES APPLICATIONS

2.1	L'analyse des données de spectroscopie de fluorescence 3D	38
2.2	Récupération des tenseurs à faible rang	39
2.3	Quelques exemples d'images multidimensionnelles	41
2.4	Conclusion	43

En général, l'analyse multidimensionnelle trouve des applications dans de nombreux domaines tels que la robotique et la vision par ordinateur, la vision industrielle, l'imagerie acoustique, optique, la télédétection, le génie biomédical, l'analyse de données environnementales, les systèmes de recommandations, la géophysique interne ou externe, etc. [5] [24] [106] [67] [7] [96].

Elle concerne toute application qui nécessite l'étude d'images en grandes dimensions ou des représentations de données multidimensionnelles acquises selon plusieurs modalités. Dans cette thèse, nous nous focaliserons principalement sur trois applications : la spectroscopie de fluorescence 3D, la télédétection et plus spécifiquement la complétion des images hyperspectrales, et enfin la complétion des images couleurs.

2.1 L'analyse des données de spectroscopie de fluorescence 3D

Dans plusieurs domaines tels que la chimie analytique, l'analyse alimentaire et l'analyse environnementale, la spectroscopie de fluorescence est fréquemment utilisée [109]. Il s'agit d'une technique non destructive très sensible qui permet d'accéder à des informations qualitatives et quantitatives sur un large éventail de substances chimiques. La spectroscopie est l'étude de la matière utilisant le rayonnement électromagnétique. Par ailleurs, le phénomène de fluorescence est un type de méthode de luminescence moléculaire. Lorsqu'une onde électromagnétique provenant d'une source lumineuse excite une molécule organique donnée. Une partie de l'énergie électromagnétique peut être absorbée par cette molécule, ce qui provoque son excitation. La molécule excitée peut alors émettre une onde électromagnétique avec une énergie inférieure à celle reçue avant de revenir à son état fondamental. Ce processus est ce qu'on appelle le phénomène de spectroscopie de fluorescence. En outre, une telle molécule est appelée fluorophore si l'onde électromagnétique est émise dans le domaine du visible.

En revanche, chaque solution que l'on cherche à étudier contient généralement un mélange de plusieurs fluorophores dont on cherche à estimer les spectres d'émission, d'excitation et les concentrations. Pour ce faire on utilise des instruments appelés spectrofluorimètre. Les spectres d'excitation et d'émission sont deux types de spectres de fluorescence. Le principe de mesure de ces spectres peut être décrit comme suit : pour obtenir un spectre d'émission, le spectrofluorimètre traditionnel utilise une seule longueur d'onde d'excitation et évalue l'intensité de la lumière émise à plusieurs longueurs d'onde d'émission (de manière réciproque, un monochromateur d'émission est utilisé pour mesurer un spectre d'excitation à une seule longueur d'onde d'émission de fluorescence). Exciter une solution contenant des fluorophores à l'aide d'une longueur d'onde incidente permet de mesurer un spectre émis en retour par fluorescence.

En balayant un ensemble de N longueurs d'onde d'excitation, on peut alors construire une matrice qu'on appelle matrice d'Emission d'Excitation de fluorescence (MEEF ou FEEM en anglais pour Fluorescence Emission Excitation Matrix). Elle correspond aux spectres de luminescence totale encore appelés "spectroscopie de fluorescence 3D". L'image de fluorescence résultante provient donc de la combinaison d'un mélange de plusieurs fluorophores présents dans l'échantillon considéré (voir Figure 2.1). Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [126] [233], ainsi que les références qui y figurent.

Comme indiqué précédemment, dans ce type d'application, nous nous intéressons à des solutions dans lesquelles généralement différents fluorophores sont mélangés. Notre objectif est alors de parvenir à retrouver la composition du mélange c'est-à-dire séparer puis identifier chacun des fluorophores présent de même que sa proportion dans le mélange étudié [188] [190] [171].

La relation entre l'intensité de fluorescence, la longueur d'onde d'excitation, et la longueur d'onde d'émission est exprimée par la loi de Beer-Lambert. Pour de faibles concentra-

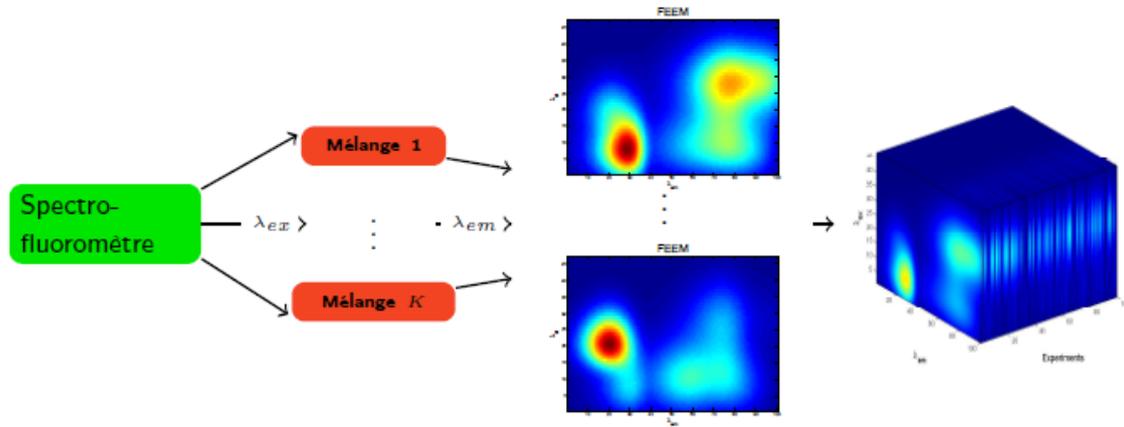


FIGURE 2.1 – Principe de spectroscopie de fluorescence 3D

tions, cette loi peut être linéarisée, et s'écrit alors :

$$I(\lambda_e, \lambda_f) = I_0 \gamma(\lambda_f) \varepsilon(\lambda_e) c \quad (2.1)$$

où I_0 est une constante. λ_e est la longueur d'onde dite d'excitation, c'est à dire celle transmise à l'échantillon lors de l'éclairement. λ_f est la longueur d'onde d'émission. ε est le spectre d'excitation relatif. γ est le spectre d'émission relatif. c représente la concentration du composé organique.

Quand plusieurs composés sont présents dans une solution, cette loi est modifiée comme suit :

$$I(\lambda_e, \lambda_f) = I_0 \sum_{r=1}^R \gamma_r(\lambda_f) \varepsilon_r(\lambda_e) c_r \quad (2.2)$$

Ici, r est l'indice du composé considéré.

On peut également étendre cette relation en ajoutant une dimension temporelle supplémentaire (ou spatiale). En effet, si on dispose de plusieurs échantillons d'eau prélevés à différents moments ou à différents endroits, le spectre 3D est alors défini comme :

$$I(\lambda_e, \lambda_f, k) = I_0 \sum_{r=1}^R \gamma_{k,r}(\lambda_f) \varepsilon_{k,r}(\lambda_e) c_{k,r} \quad (2.3)$$

avec k représentant le numéro de l'échantillon.

2.2 Récupération des tenseurs à faible rang

Le problème de la récupération des tenseurs de rang faible (en anglais low-rank tensor recovery (LRTR)) a récemment été proposé [73] [72] [15] comme une extension logique de l'acquisition comprimée (en anglais compressed sensing (CS)) [30] [50] et du problème de

la récupération de matrices de rang faible. L'objectif dans ce type de problème est d'estimer des tenseurs d'ordre supérieur à partir d'un nombre limité de mesures linéaires. La complétion des tenseurs de rang faible (en anglais low-rank tensor recovery (LRTR)) est une forme particulière de LRTR qui se concentre sur la récupération des entrées manquantes d'un tenseur partiellement observé. Elle est utilisée dans diverses disciplines où les modèles à faible rang peuvent être souvent utilisés pour approximer les tenseurs mesurés, comme la vision par ordinateur [120] [220], l'imagerie hyperspectrale [69] [186], et le traitement des données sismiques [105].

► Formulation du problème LRTR

Soit $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ (voir définition (1)) un tenseur d'intérêt inconnu et soit \mathcal{A} un opérateur de mesure linéaire de $\mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ dans lui même. Étant donné $\mathcal{F} = \mathcal{A}(\mathcal{Y})$ et en supposant que \mathcal{Y} appartient à un ensemble de tenseurs parcimonieux \mathcal{S} , le but du problème de LRTR est de récupérer \mathcal{Y} à partir de \mathcal{F} . Généralement, le problème de minimisation de faible rang pour la récupération des tenseurs est formulé par le problème suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{Y}} \quad & \|\mathcal{A}(\mathcal{Y}) - \mathcal{F}\|_F^2 \\ \text{sous la contrainte de} \quad & \text{rang}(\mathcal{Y}) = r \end{aligned} \quad (2.4)$$

Comme mentionné avant, une particularité importante du problème précédent est lorsque \mathcal{A} est un opérateur d'échantillonnage. Le problème considéré est alors celui de la complétion tensorielle de faible rang (En anglais Low-rank Tensor Completion (LRTC)). Les méthodes de LRTC peuvent être vues comme une généralisation des problèmes de la complétion matricielle de rang bas [29] [128] [162], qui ont connu un grand succès dans un certain nombre d'applications. Cependant, il a été montré dans [121] que pour compléter des tenseurs, les algorithmes de complétion basés sur les tenseurs sont plus efficaces que ceux basés sur des matrices.

Les modèles LRTC sont utilisés dans de nombreuses applications, y compris la vision par ordinateur et le graphisme, le traitement du signal et l'apprentissage automatique [121] [185] [187] [69] [195] [220]. L'objectif principale des méthodes LRTC est de remplir ou restaurer une région manquante ou endommagée d'une image de manière cohérente [17] [103] [104]. Dans ce contexte, nous utiliserons la définition de l'opérateur de projection de \mathcal{Y} sur l'ensemble observé Ω , qui est défini par :

$$\mathcal{P}_\Omega(\mathcal{Y}) = \begin{cases} \mathcal{Y}_{i_1, i_2, \dots, i_n} & \text{si } (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \Omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.5)$$

La formulation mathématique générale du problème de la complétion tensorielle à faible rang est donnée par :

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{Y}} \quad & \text{rang}(\mathcal{Y}) \\ \text{sous la contrainte de} \quad & \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{Y}) = \mathcal{F} \end{aligned} \quad (2.6)$$

où \mathcal{F} est le tenseur observé. Essentiellement, dans les méthodes de LRTR, on souhaite exploiter une faible dimensionnalité conjointement le long de plusieurs modes du tenseur d'in-

térêt afin de le reconstruire à partir d'un petit nombre de mesures/observations. Dans la suite de ce manuscrit, nous nous intéressons particulièrement aux problèmes LRTC, dans lesquels le choix de la notion de rang impliqué dans le problème de minimisation est l'aspect central du problème LRTC.

2.3 Quelques exemples d'images multidimensionnelles

Le traitement des informations structurelles latentes de données multidimensionnelles a suscité engouement important en terme de travaux de recherche dans différentes applications. Cependant, numériquement, ces informations peuvent être stockées sous différentes formes selon le type d'image considérée et le type d'application visée. Par exemple, une image peut être en couleur (dans le système de représentation à trois bandes RGB ou dans un autre système), elle peut être multispectrale (entre 4 et 10 bandes), hyperspectrale (au-delà de 10 bandes), etc. (voir le tableau 2.1). Et une application peut être la détection d'objets, l'analyse de scènes dynamiques, la séparation aveugle de source, la reconstruction 3D par tomographie, et le domaine d'application peut être la géophysique interne (sismique), ou externe (télédétection), la robotique autonome, etc.

A titre d'exemple, comme illustré au niveau de la Figure 2.2, une image multispectrale qualifie une image dotée de plusieurs bandes. Une image couleur classique est typiquement multispectrale avec seulement trois bandes, et les images hyperspectrales (HSI) sont des images pour lesquelles nous disposons de centaines, voire des milliers d'images couvrant une large gamme de longueur d'ondes (spectre quasi continu).

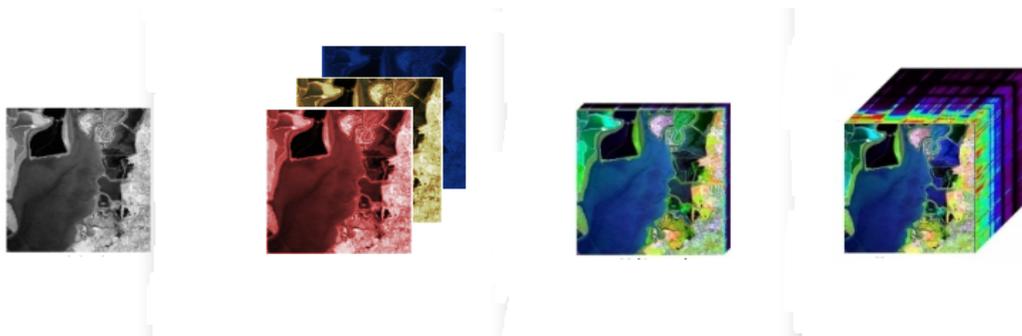


FIGURE 2.2 – Exemples typiques d'images, de gauche à droite : Image en niveaux de gris, Image sur 3 niveaux de couleur ici RGB, Image Multispectrale, et enfin Image Hyperspectrale.

L'imagerie hyperspectrale s'est révélée très prometteuse dans le domaine de la télédétection, notamment pour l'observation de la Terre (ou de la mer en petit fond <15m – bordure du littoral) avec une présence croissante dans des applications terrestres : étude des maladies des plantes, étude et classification des sols, étude du trait de côte, suivi de polluants [124] [118] [71] [163] [198] [192]. Dans un tout autre domaine à savoir, le domaine de défense : la détection de cibles à caractère militaires (mines, avions), etc. [159] [133] [4]. Les applications médicales comprennent : la dépistage du cancer colorectal et gastrique [108] [101] ou

TABLE 2.1 – Caractéristiques de différentes images

	Gris	RGB	Multispectral	Hyperspectral
Information spatiale	Oui	Oui	Oui	Oui
Information spectrale	Non	Limitée	Oui	Oui
Nombres de bandes	1	3	2-10	> 10

des ulcères [151].

L'imagerie hyperspectrale consiste à collecter des données complexes sur tout le spectre électromagnétique, à enregistrer le contenu spectral de chaque pixel de l'image et à faciliter des tâches telles que la détection d'objets, la caractérisation de matériaux et l'identification de processus. Chaque image hyperspectrale (HSI) est naturellement représentée comme une structure tridimensionnelle, appelée hypercube, où deux dimensions sont spatiales et l'une est spectrale, voire à quatre dimensions si un suivi au cours du temps est réalisé. Dans de nombreux cas, les mauvaises conditions météorologiques et/ou des problèmes internes spécifiques aux capteurs hyperspectraux (des instruments d'acquisition des images hyperspectrales) peuvent entraîner une perte d'information pour les HSIs. D'où la nécessité d'introduire des méthodes efficaces pour la récupération des données manquantes [122] [220] [93] [235] [141]. Par conséquent, un certain nombre d'approches de LRTC ont été proposées dans la littérature. La plupart des approches de reconstruction peuvent être classées en quatre grandes catégories d'après [182] :

1. Les approches spatiales [218] [225].
2. Les méthodes spectrales [183] [169].
3. Les méthodes temporelles [68] [213].
4. Les méthodes spatio-temporelles-spectrales [182] [230].

Après cette brève introduction aux images HSIs et à leur utilisation dans les méthodes LRTC, nous allons maintenant fournir une brève présentation des images Couleur codées en RGB. Comme mentionné précédemment, une image couleur RGB est une image multispectrale avec une bande pour chaque couleur rouge (Red), verte (Green) et bleue (Blue), produisant ainsi une combinaison pondérée de ces trois couleurs pour chaque pixel.

De nos jours, les images couleurs sont fréquemment utilisées dans de nombreux problèmes de traitement d'images [158] [132] [144]. Parmi ces problèmes, celui de l'inpainting d'images [18] [21]. Une approche possible consiste à effectuer une méthode de complétion matricielle robuste pour chaque canal, puis l'image finale est reconstruite en combinant les résultats des trois canaux (rouge, vert et bleu). L'inconvénient de cette approche est que les informations inter-canaux ne sont pas prises en compte et utilisées dans la procédure de complétion robuste de l'image couleur. Par ailleurs, une image couleur à trois canaux peut être naturellement considérée comme un tenseur d'ordre trois $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$, où les dimensions I_1 et I_2 définissent les variables spatiales, et la troisième dimension $I_3 = 3$ représente le nombre de couleurs. On peut facilement voir que chaque coupe frontale (voir définition (12)) de ce tenseur d'ordre 3 correspond alors à un canal de l'image couleur.

Comme mentionné précédemment, dans la plupart des cas, certaines entrées des données multidimensionnelles acquises sont manquantes. En raison de la nature multidimensionnelle des images couleur, plusieurs approches de complétion tensorielle ont été proposées dans la littérature [16] [136] [212] [231].

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté de nombreuses applications visées dans le cadre de cette thèse, pour montrer l'efficacité des algorithmes que nous allons proposer. Nous avons également introduit différentes données multidimensionnelles qui sont traitées dans ces applications. Dans les chapitres suivants, nous allons présenter nos différentes contributions essentiellement théoriques mais également expérimentales sur différents types de problèmes et sur les applications qui leur sont liées, à savoir, la spectroscopie de fluorescence 3D, la complétion des images hyperspectrales, et la complétion des images couleurs.

Deuxième partie

Contributions

UN NOUVEL ALGORITHME PRIMAL-DUAL POUR LA DÉCOMPOSITION CP DE TENSEURS D'ORDRE N SOUS CONTRAINTE DE NON NÉGATIVITÉ

3.1	Introduction	49
3.2	La méthode primale duale à base de gradient projeté	51
3.2.1	Problème Primal-Dual général	51
3.2.2	Problème variationnel	52
3.2.3	La méthode du gradient projeté	53
3.3	Fomulation du problème de la décomposition CP sous contrainte de non négativité	54
3.4	Nouvel algo. de décomposition CP sous contrainte de non négati- vité : CP-PDPG	55
3.5	Preuve théorique de la convergence de l'algo. CP-PDGPG	57
3.5.1	Hypothèses	58
3.5.2	Résultats théoriques	58
3.6	Simulations numériques	59
3.7	Conclusion	60

Les décompositions tensorielles sont toujours en cours d'étude et de développement. Le présent chapitre regroupe les principaux résultats de l'une des contributions de cette thèse. Nous nous intéressons à un problème de factorisation tensorielle, plus précisément la décomposition canonique polyadique (CP) dans laquelle sont introduites certaines contraintes. La décomposition CP utilisée dans le cadre de données de spectroscopie de fluorescence conduit à la résolution d'un problème inverse souvent mal posé. Ainsi, des contraintes telles que la non négativité et/ou la parcimonie des matrices facteurs à estimer sont introduites par

l'ajout de fonctions de pénalités. Le but est d'améliorer l'estimation des composantes les plus pertinentes plutôt que de favoriser l'apparition des composés arbitraires fantômes. Un algorithme d'optimisation *Primal-Dual à base de gradient projeté (en anglais(PDPG))* est proposé pour dériver un nouvel algorithme de décomposition CP sous contrainte de non-néagtivité d'un tenseur d'ordre N régularisé. Son efficacité et sa robustesse sont illustrées grâce à des simulations numériques réalisées sur des données modélisant des données de spectroscopie de fluorescence tout en s'affranchissant des problèmes que posent les données expérimentales : non connaissance du rang du tenseur, bruit additif (raies du Raman et du Rayleigh), écart par rapport au modèle CP du fait de différents effet (non linéarité, effet d'écran, etc...). De plus, afin de remplir le vide théorique existant en matière d'étude de la convergence des algorithmes de décomposition CP sous contraintes de non négativité propre à la plupart des algos. que le trouve dans la littérature, nous allons mener l'étude théorique de la convergence de l'algorithme que nous proposons, sous des conditions assez peu contraignantes.

3.1 Introduction

La collecte de données est devenue beaucoup plus facile de nos jours grâce au développement de techniques analytiques modernes qui génèrent une quantité croissante de données et d'informations. Cela conduit de plus en plus à des situations dans lesquelles les données ont une structure intrinsèquement multi-dimensionnelle. C'est typiquement le cas de l'analyse des données de spectroscopie de fluorescence (3D ou 4D). Dans ce contexte, et comme nous l'avons mentionné dans la section 2.1, les intensités de fluorescence de chaque solution sont mesurées pour produire une Matrice d'excitation et d'émission de fluorescence (MEEF). Un ensemble de MEEF constitue alors un tenseur d'ordre 3 [126] [233]. Comparons la relation entre les intensités de fluorescence mesurables de solutions, ainsi que les spectres et les concentrations des composés donnés par la relation (2.3) avec celle de la décomposition CP (1.9). Le nombre de composés chimiques fluorescents présents correspond au rang R du tenseur. Les spectres d'émission et d'excitation γ et ε [126], et les concentrations c de chaque fluorophore correspondent respectivement aux colonnes des matrices facteurs $\mathbf{A}^{(1)}$, $\mathbf{A}^{(2)}$ et $\mathbf{A}^{(3)}$ dans le problème CP (1.9). De plus, les contraintes de non-négativité doivent être prises en compte étant donnée la nature physique des variables latentes. En fait, les quantités physiques considérées sont intrinsèquement non négatives puisqu'elles correspondent aux spectres d'émission et d'excitation et aux concentrations pour les différents échantillons acquis à différents moments dans les applications de monitoring/surveillance ou en différents endroits quand on s'intéresse à du transport de composés. Donc, les matrices facteurs et par conséquent les termes du tenseur qu'elles forment doivent contenir des valeurs non-négatives. La décomposition CP est alors appelée la décomposition CP sous contrainte de non-négativité ou décomposition CP non négative.

En outre, l'une des principales difficultés rencontrées dans les applications pratiques est que le rang réel du tenseur observé est souvent inconnu. Plusieurs travaux ont été consacrés au problème de l'estimation du rang du tenseur [28] [44], mais ce problème reste difficile et ouvert. Par conséquent, prendre en compte d'autres contraintes liées à des informations a priori que l'on peut avoir, permet de rendre les méthodes plus robustes vis à vis d'erreurs de modèle parmi lesquels la surestimation du rang du tenseur. C'est pourquoi nous nous intéressons dans ce chapitre à une nouvelle méthode régularisée assurant la parcimonie des matrices facteurs et donc insensible aux problèmes de surestimation. Notons que d'autres approches parcimonieuses ont été développées [77] [78] [79].

Plusieurs travaux de recherche ont abordé le problème du calcul de la décomposition CP, en le réécrivant comme un problème d'optimisation, et plus précisément comme un problème de minimisation impliquant la somme d'une fonction différentiable (non nécessairement convexe) et d'une fonction convexe (non nécessairement différentiable). Différentes approches ont été développées soit basées sur des schémas d'optimisation déterministes [210] [100] [156] [221] [115] [228] ou stochastiques [129] [211]. Concernant les algorithmes d'optimisation déterministes, ils peuvent être classés en plusieurs types d'algorithmes : les méthodes directes [174] [188], les algorithmes alternés [31], les algorithmes de descente [66] et les méthodes qui résolvent le problème d'optimisation après une étape de compression

ou de réduction de la taille du tenseur [40] [46]. Un algorithme original est présenté dans ce chapitre qui s'inscrit dans le cadre des algorithmes itératifs déterministes et offre une alternative pertinente aux problèmes d'optimisation dans le cas de tenseurs de grande taille (tenseurs Big Data). Il s'agit d'un algorithme primal-dual à base de gradient projeté (PDGP) [164] [238], qui est connu pour sa capacité à décomposer le critère initial en une somme de termes plus simples qui peuvent être traités individuellement, et de manière parallèle ce qui est particulièrement intéressant dans le cas de la grande dimension [165].

Dans ce chapitre, nous établissons également, sous certaines hypothèses que nous détaillerons dans la suite de ce chapitre, un résultat quant à la convergence de cet algo. CP-PDGP sous contrainte de non négativité. Il existe relativement peu de travaux qui traitent de ce type de problème (c'est-à-dire l'établissement de la preuve théorique de la convergence des algorithmes CP). Une méthode itérative, inspirée de ce que l'on appelle l'algorithme des moindres carrés alternatifs (ALS) a été proposée dans [205]. L'idée était d'établir un théorème de convergence locale pour calculer des approximations de tenseurs canoniques de faible rang sans contrainte de non-négativité. Une des principales limitations de cette approche est que pour des rangs plus grands, la plupart des difficultés liées au comportement global de l'algorithme ALS semblent étroitement liées au fait que le problème d'approximation lui-même peut être mal posé ou mal conditionné. Une autre analyse de convergence, décrite dans [222] nécessite de mettre à jour chaque bloc qui comprend les variables du problème sous-jacent, en minimisant une relaxation prox-linéaire particulière, au moins une fois par nombre fixe d'itérations où l'ordre de mise à jour peut être effectué soit aléatoirement soit de manière cyclique, ce qui peut être coûteux en terme de temps de calcul. Plus récemment, un algorithme a également été discuté. Il concerne le problème de la décomposition de Tucker sous contrainte de non-négativité et sa convergence théorique a été établie [201].

Il est également connu que certaines approches de décomposition CP non négative sont des extensions habituelles des techniques standard de factorisation matricielles non négatives (NMF). Les propriétés de convergence des méthodes NMF ont été discutées dans [59] [117]. Plus précisément, les mises à jour proposées dans [116], garantissent un point stationnaire qui est le point limite de l'erreur quadratique moyenne (EQM ou Least mean square error en anglais) du problème d'optimisation. Un inconvénient de la NMF est qu'elle ne peut définir que des relations de données par paires. Par conséquent, sous des conditions relativement faibles, un vide théorique existe toujours pour l'analyse de la convergence.

L'algorithme CP-PDPG non-négatif développé dans ce chapitre est basé sur la mise à jour d'une seule variable par itération. Une telle approche joue un rôle clef dans la résolution des problèmes d'optimisation de grandes dimensions, offrant la possibilité d'une implémentation parallèle pour effectuer certaines étapes de calcul puisque les variables primales et duales peuvent être mises à jour de manière très flexible. Enfin, nos principales contributions en ce qui concerne les décompositions CP non négatives sont les suivantes : (i) fournir un nouvel algorithme et faire la preuve théorique de sa convergence, en prouvant sous des conditions peu contraignantes sa convergence vers l'ensemble des minimiseurs au taux $O(1/k)$, k étant le nombre d'itérations, (ii) réaliser des simulations numériques afin de mettre en évi-

dence l'efficacité de notre approche en terme de qualité de la solution estimée, (iii) pouvoir estimer efficacement le rang du tenseur et éviter ainsi les problèmes de surestimation/surapprentissage (overfactoring en anglais).

Après une introduction, la deuxième section est consacrée à la formulation générale des approches primal-dual à base de gradient projeté. Ensuite, les principales propriétés de la décomposition polyadique canonique non-négative et ses liens avec l'analyse multidimensionnelle sont rappelés. Nous présentons alors notre approche CP non-négative -basée sur l'algorithme Primal-Dual à base de Gradient Projeté, et en dérivons une forme générique de notre algo. Nous passons à la preuve théorique de la garantie de convergence de notre algo. proposé est effectuée. Finalement, des simulations numériques sont réalisées afin de mieux évaluer l'efficacité de notre approche en terme de qualité de la solution trouvée. Cela nous permet également de vérifier les conditions de convergence trouvées.

3.2 La méthode primale duale à base de gradient projeté

Dans cette section, nous présentons une approche originale capable de résoudre des problèmes classiques de traitement des signaux multidimensionnels, à savoir l'approche primale duale à base gradient projeté (PDPG). Pour ce faire, nous allons d'abord fournir une brève description du principe de la méthode [208], [41] et [42].

3.2.1 Problème Primal-Dual général

Les problèmes d'optimisation apparaissent naturellement dans de nombreux domaines d'application. Il est donc illusoire d'espérer résoudre tous les problèmes d'optimisation ou des problèmes d'optimisation trop généraux avec au moyen d'une seule méthode générique. Il est donc nécessaire de se limiter - si l'on souhaite obtenir des algorithmes utilisables dans notre cas pratique, à des classes de problèmes beaucoup plus restreintes. Nous nous intéressons donc dans cette partie uniquement aux problèmes du type

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N} \{f_0(\mathbf{z}) + f_1(K\mathbf{z})\} \quad (3.1)$$

où $f_0(\cdot)$ et $f_1(\cdot)$ sont des fonctions propres, convexes, semi continues inférieures définies sur l'ensemble \mathbb{R}^N , et K un opérateur linéaire (voir 1.4.3). Nous nous intéressons plus particulièrement aux méthodes primales-duales puisque le contrôle des itérations a lieu dans les espaces primaux et duaux tout au long du processus de minimisation. Il nous reste donc à trouver la formulation primale-duale d'un tel problème d'optimisation.

En utilisant la définition du conjugué convexe (transformée de Legendre-Fenchel (32)) (voir 1.4.3), nous pouvons rappeler le théorème d'équivalence primale-duale suivant :

Théorème 3 [54] Soit $f_0 : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction fermée et convexe définie sur l'ensemble

U , f_1 une fonctionnelle fermée et convexe définie sur l'ensemble V et soit $K : U \rightarrow V$ un opérateur linéaire continu. Alors, nous avons l'équivalence suivante :

$$\underbrace{\min_{z \in U} \{f_0(z) + f_1(Kz)\}}_{\text{Primale}} = \min_{z \in U} \underbrace{\max_{y \in V^*} \{\langle Kz, y \rangle - f_1^*(y) + f_0(z)\}}_{\text{Primale-Duale}} \quad (3.2)$$

où z et y sont les variables primale et duale, respectivement, f_1^* est le conjugué convexe de f_1 , et V^* est l'espace dual de V .

3.2.2 Problème variationnel

Les problèmes de résolution primale-duale entrent dans le cadre général des problèmes de résolution d'inégalités variationnelles. Tout d'abord, rappelons les définitions des sous-et super -gradients [168] :

Définition 33 (Sous-gradient) La sous-dérivée d'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ en un point z_0 dans l'ensemble ouvert convexe U est l'ensemble $\partial^- f(z_0)$ de tous les éléments $c \in U^*$ tels que

$$f(z) - f(z_0) \geq \langle c, z - z_0 \rangle \quad (3.3)$$

Pour une fonction convexe f , l'ensemble $\partial^- f(z_0)$ est toujours fermé et non vide.

Définition 34 (Super-gradient) La super-dérivée d'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ en un point z_0 dans l'ensemble ouvert convexe U est l'ensemble $\partial^+ f(z_0)$ de tous les éléments $c \in U^*$ tels que

$$f(z) - f(z_0) \leq \langle c, z - z_0 \rangle \quad (3.4)$$

Pour une fonction concave f , l'ensemble $\partial^+ f(z_0)$ est toujours fermé et non vide.

Avant d'aborder le problème spécifique défini par (3.2), nous considérons d'abord le problème général de la recherche du point selle d'une fonction convexe-concave de deux variables $g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, où $g(\cdot, \cdot)$ est supposée convexe en \mathbf{u} et concave en \mathbf{v} . Les variables \mathbf{u} et \mathbf{v} appartiennent respectivement à des ensembles convexes fermés U et V . Le problème à résoudre s'énonce alors comme suit :

$$\min_{\mathbf{u} \in U} \max_{\mathbf{v} \in V} \{g(\mathbf{u}, \mathbf{v})\} \quad (3.5)$$

Comme la recherche directe d'un point selle (3.5) de g sur $U \times V$ n'est pas facile, nous montrerons comment la résolution de l'inégalité variationnelle associée nous permet d'approcher la solution de ce problème en réécrivant (3.5) comme suit :

$$\text{chercher } \mathbf{z}^* \in Z = U \times V \text{ t.q. } \langle \mathbf{z} - \mathbf{z}^*, \mathbf{h}(\mathbf{z}^*) \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{z} \in Z \quad (3.6)$$

où $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \partial_{\mathbf{u}}g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ -\partial_{\mathbf{v}}g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{pmatrix}$.

Par définition [10], la paire $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) \in U \times V$ est un point selle de (3.5) lorsque,

$$g(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) \leq g(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) \leq g(\mathbf{u}, \mathbf{v}^*), \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in U \times V \quad (3.7)$$

et pour tout $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in U \times V$, $\mathbf{c}_1 \in \partial_{\mathbf{u}}^-g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ et $\mathbf{c}_2 \in \partial_{\mathbf{v}}^+g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, nous avons

$$\begin{cases} g(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) \geq g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{c}_1, \mathbf{u}^* - \mathbf{u} \rangle \\ g(\mathbf{u}, \mathbf{v}^*) \geq g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{c}_2, \mathbf{v}^* - \mathbf{v} \rangle. \end{cases} \quad (3.8)$$

D'après (3.7) et (3.8), nous pouvons conclure que

$$\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{u} - \mathbf{u}^* \rangle + \langle -\mathbf{c}_2, \mathbf{v} - \mathbf{v}^* \rangle \geq 0, \quad (3.9)$$

à partir duquel on peut conclure le résultat.

3.2.3 La méthode du gradient projeté

Maintenant, nous allons voir comment l'inégalité variationnelle précédente (3.6) peut être résolue en utilisant la méthode du gradient projeté. Dans ce but, nous donnons la proposition suivante, dont la preuve est fournie en Annexe B :

Proposition 4 [19] *Soit r un paramètre positif et Z un ensemble convexe, un élément \mathbf{z}^* est solution de (3.6) si et seulement si*

$$\mathbf{z}^* = P_Z\{\mathbf{z}^* - r\mathbf{h}(\mathbf{z}^*)\} \quad (3.10)$$

où $P_Z\{\mathbf{z}\}$ désigne la projection orthogonale du point \mathbf{z} sur l'ensemble convexe fermé et non vide Z .

Pour résoudre (3.10), on utilise la méthode du point fixe qui conduit finalement à l'algorithme itératif suivant :

Étant donné $\mathbf{z} \in Z$, calculer la solution à l'étape $n + 1$ en itérant le schéma suivant :

$$\mathbf{z}_{n+1}^* = P_Z\{\mathbf{z}_n^* - r\mathbf{h}(\mathbf{z}_n^*)\} \quad (3.11)$$

Tous les résultats nécessaires ont maintenant été rappelés ou établis. Nous sommes maintenant en mesure de considérer le problème spécifique de la décomposition CP sous différentes contraintes (non négativité, parcimonie) qui nous permettrions de construire un algorithme de décomposition CP non négatif basé sur une approche primale duale à base de gradient projeté.

3.3 Formulation du problème de la décomposition CP sous contrainte de non négativité

Nous faisons ici référence à l'introduction des tenseurs dans la section 1.2. En particulier, nous nous intéresserons à la décomposition CP de tenseurs d'ordre N , qui a été décrite dans la section 1.3.2. Ainsi, dans cette section, nous rappelons et discutons les principales propriétés de la décomposition CP non négative, qui joue un rôle central dans notre contribution. Comme nous l'avons mentionné avant, d'un point de vue mathématique, un modèle CP est le résultat de la factorisation d'un tenseur d'ordre N en une combinaison linéaire de tenseurs de rang un. Nous rappelons qu'un tenseur de rang un et d'ordre N est défini comme le produit extérieur, noté \circ , de N vecteurs $\mathbf{a}^{(n)}$. Ainsi, la décomposition canonique polyadique d'un tenseur d'ordre N non négatif $\mathcal{X} \in \mathbb{R}_+^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ s'écrit :

$$\mathcal{X} = \sum_{r=1}^R \mathbf{a}_r^{(1)} \circ \mathbf{a}_r^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{a}_r^{(N)} = \llbracket \mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)} \rrbracket \quad (3.12)$$

où $\mathbf{a}_r^{(n)} \in \mathbb{R}_+^{I_n}, \forall n \in \{1, \dots, N\}$ sont les *loading vectors*. Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, la matrice $\mathbf{A}^{(n)} = (a_{i_n, r}^{(n)}) = [\mathbf{a}_1^{(n)}, \mathbf{a}_2^{(n)}, \dots, \mathbf{a}_R^{(n)}] \in \mathbb{R}_+^{I_n \times R}$ et est appelée la n -ième *matrice facteur* ou plus simplement le n -ième *facteur*.

La décomposition CP peut également être exprimée sous la forme d'une matrice en dépliant le tenseur \mathcal{X} dans une direction préférée n , où $n \in \{1, \dots, N\}$. Cette matrice est alors désignée par $\mathbf{X}_{I_n, I_{-n}}^{(n)} \in \mathbb{R}_+^{I_n \times I_{-n}}$, où $I_{-n} = I_1 \dots I_{n-1} I_{n+1} \dots I_N$. Pour ce faire, comme nous l'avons vu dans la section 1.2.3, on utilise un produit tensoriel particulier appelé produit de Khatri-Rao (voir la définition (3)), noté \odot . La matrice $\mathbf{X}_{I_n, I_{-n}}^{(n)}$ s'écrit comme suit :

$$\mathbf{X}_{I_n, I_{-n}}^{(n)} = \mathbf{A}^{(n)} (\mathbf{Z}_{I_{-n}, R}^{(-n)})^T, \quad \forall n \in \{1, \dots, N\} \quad (3.13)$$

où $(\cdot)^T$ représente l'opérateur de transposition et

$$\mathbf{Z}_{I_{-n}, R}^{(-n)} = \mathbf{A}^{(N)} \odot \dots \odot \mathbf{A}^{(n+1)} \odot \mathbf{A}^{(n-1)} \odot \dots \odot \mathbf{A}^{(1)}, \quad \forall n \in \{1, \dots, N\} \quad (3.14)$$

La relation (3.12) peut être réécrite de manière similaire sous sa forme scalaire, ce qui conduit à :

$$x_{i_1, \dots, i_N} = \sum_{r=1}^R a_{i_1, r}^{(1)} \dots a_{i_N, r}^{(N)} \quad (3.15)$$

pour tout $(i_1, i_2, \dots, i_N) \in \mathcal{I} = \{1, \dots, I_1\} \times \{1, \dots, I_2\} \times \dots \times \{1, \dots, I_N\}$.

Remarque : par souci de simplicité, pour une matrice donnée $\mathbf{A}^{(n)} \in \mathbb{R}_+^{I_n \times R}$ la notation suivante $\mathbf{A}^{(n)} \geq \varepsilon, n \in \{1, \dots, N\}$, signifie que tous les éléments de la matrice $\mathbf{A}^{(n)}$ sont supérieurs à une certaine valeur epsilon choisie suffisamment petite.

3.4 Nouvel algo. de décomposition CP sous contrainte de non négativité : CP-PDPG

Nous en venons maintenant à notre problème de décomposition CP original dont le but est d'estimer les N matrices facteurs sous un certain nombre de contraintes physiques. Typiquement, le problème de décomposition CP est reformulé comme un problème d'optimisation (minimisation) décrit par (3.16), (3.17) et (3.18). Nous proposons de traiter ce problème d'optimisation grâce à l'approche primale duale à base de gradient projeté introduite dans la première section. Ainsi, le problème est reformulé comme suit :

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{A}^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times R}}{\text{Minimiser}} \quad h(\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)}) + q(\mathbf{A}^{(n)}) \\ & \text{sous la contrainte de} \quad \mathbf{A}^{(n)} \geq \varepsilon, n \in \{1, \dots, N\}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

où le premier terme correspond à un terme de fidélité mesurant la façon dont le tenseur observé suit un modèle CP, *i.e.*

$$h(\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)}) = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{X}_{I_n, I-n}^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)} (\mathbf{Z}_{I-n, R}^{(-n)})^T \right\|_F^2 \quad (3.17)$$

où $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius. En ce qui concerne le second terme, nous optons pour les termes de régularisation suivants

$$q(\mathbf{A}^{(n)}) = \alpha^{(n)} \|\mathbf{A}^{(n)}\|_1 \quad (3.18)$$

où $\alpha^{(n)}, n \in \{1, \dots, N\}$ sont des paramètres de régularisation non négatifs et $\|\cdot\|_1$ est la norme l_1 pour renforcer la parcimonie.

Nous suivons maintenant les étapes précédentes rappelées dans la section précédente, afin de résoudre notre problème d'optimisation. En comparant le problème d'optimisation suivant avec le modèle primal-dual du théorème 3, nous obtenons :

$$\begin{cases} f_0(\mathbf{A}^{(n)}) = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{X}_{I_n, I-n}^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)} (\mathbf{Z}_{I-n, R}^{(-n)})^T \right\|_F^2 \\ f_1(K\mathbf{A}^{(n)}) = \alpha^{(n)} \sum_{i_n, r} |a_{i_n, r}^{(n)}| \end{cases} \quad (3.19)$$

Définissons maintenant les fonctionnelles :

$$\begin{aligned} K : U &\rightarrow V & \text{et} & & f_1 : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{A} &\mapsto \mathbf{A} & & & \mathbf{Y} &\mapsto \sum_{i_n} \sum_r f(y_{i_n, r}^{(n)}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

avec

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= |x|. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Nous trouvons que le conjugué f^* de la fonction f est égal à :

$$\begin{aligned} f^* : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } |s| \leq 1 \\ +\infty & \text{if } |s| > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ainsi, en utilisant le théorème 3, et en utilisant le fait que les résultats établis dans la section précédente peuvent être facilement étendus au cas des matrices [206], on obtient finalement le problème primal-dual équivalent à résoudre :

$$\min_{\mathbf{A}^{(n)} \in U} \max_{\mathbf{Y}^{(n)} \in V^*} \{g(\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{Y}^{(n)})\} \quad (3.23)$$

où

$$U = \{\mathbf{A}^{(n)} \in \mathbb{R}_+^{I_n \times R}; \quad \varepsilon \leq a_{inr}^{(n)} \leq 1\} \quad (3.24)$$

$$V^* = \{\mathbf{Y}^{(n)} \in \mathbb{R}_+^{I_n \times R}; \quad f(y_{inr}^{(n)}) \leq 1 \text{ et } y_{inr}^{(n)} \geq \varepsilon\} \quad (3.25)$$

comme $f_1^*(\mathbf{Y}^{(n)}) = 0$, pour $\mathbf{Y}^{(n)} \in V^*$, nous avons finalement :

$$g(\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{Y}^{(n)}) = \alpha^{(n)} \langle \mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{Y}^{(n)} \rangle + \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_{I_n, I_n}^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}(\mathbf{Z}_{I_n, R}^{(-n)})^T\|_F^2. \quad (3.26)$$

Nous rappelons que les matrices de gradient de h dans (3.17) par rapport à $\mathbf{A}^{(n)}$ pour tout $n = 1, \dots, N$, sont données par [39] :

$$\nabla_n h(\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)}) = - \left(\mathbf{X}_{I_n, I_n}^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}(\mathbf{Z}_{I_n, R}^{(-n)})^T \right) \mathbf{Z}_{I_n, R}^{(-n)}$$

où ∇_n désigne le gradient par rapport à $\mathbf{A}^{(n)}$.

Pour plus de détails sur la théorie matricielle ainsi que sur les propriétés des dérivées matricielles, le lecteur pourra se référer à [130] [112] [26] [88].

Maintenant, en utilisant l'équation d'inégalité (3.6) nous obtenons pour chaque (i_n, r) ,

$$\mathbf{H}(\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{Y}^{(n)}) = \begin{pmatrix} \alpha^{(n)} \mathbf{Y}^{(n)} - \left(\mathbf{X}_{I_n, I_n}^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}(\mathbf{Z}_{I_n, R}^{(-n)})^T \right) \mathbf{Z}_{I_n, R}^{(-n)} \\ -\alpha^{(n)} \mathbf{A}^{(n)} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Enfin, il nous reste à effectuer la dernière étape qui consiste à appliquer l'algorithme de projection. Il permet d'obtenir une estimation courante $(\mathbf{A}_{k+1}^{(n)}, \mathbf{Y}_{k+1}^{(n)})$ à l'itération $k+1$ des matrices que nous recherchons. Elles sont données par les équations suivantes :

$$\mathbf{Y}_{k+1}^{(n)} = P_{V^*} \left\{ \mathbf{Y}_k^{(n)} + \tau_k^{(n)} \alpha^{(n)} \mathbf{A}_k^{(n)} \right\} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{A}_{k+1}^{(n)} = P_U \left\{ \mathbf{A}_k^{(n)} - \sigma_k^{(n)} \left(\alpha^{(n)} \mathbf{Y}_{k+1}^{(n)} - [\mathbf{X}_{I_n, I_{-n}}^{(n)} - \mathbf{A}_k^{(n)} (\mathbf{Z}_{I_{-n}, R}^{(-n)})^T] \mathbf{Z}_{I_{-n}, R}^{(-n)} \right) \right\} \quad (3.29)$$

Finalement, nous pouvons résumer l'algo. CP-PDPG de la manière suivante :

Le principe de l'algorithme CP-PDPG :

— **Étape 0. Initialisations.**

Choisir les paramètres $\sigma_{min}^{(n)}$, $\sigma_{max}^{(n)}$, $\tau_{min}^{(n)}$ et $\tau_{max}^{(n)}$ avec $0 < \sigma_{min}^{(n)} < \sigma_{max}^{(n)}$ et $0 < \tau_{min}^{(n)} < \tau_{max}^{(n)}$, $\forall n \in \{1, \dots, N\}$,

Choisir au hasard selon une loi uniforme $A_0^{(n)}$, $Y_0^{(n)}$, $\forall n \in \{1, \dots, N\}$

Fixer $k \leftarrow 0$.

— **Étape 1.** Pour $n = 1, \dots, N$ faire

- **Choix des hyper-paramètres.** choisir $\sigma_k^{(n)} \in [\sigma_{min}^{(n)}, \sigma_{max}^{(n)}]$ et $\tau_k^{(n)} \in [\tau_{min}^{(n)}, \tau_{max}^{(n)}]$

• **Estimation de $\mathbf{Y}_{k+1}^{(n)}$** en fonction de (3.28)

• **Estimation de $\mathbf{A}_{k+1}^{(n)}$** en fonction (3.29)

— **Étape 2.** Si aucun des critères d'arrêt n'est satisfait, mettre à jour $k \leftarrow k + 1$, et revenir à **Étape 1** sinon s'arrêter.

Dans la suite du chapitre, les paramètres de régularisation $\alpha^{(n)}$ sont choisis non pas variable au cours des itérations mais fixés à une valeur donnée, *c'est-à-dire* qu'en choisissant $\alpha_{min}^{(n)}$ et $\alpha_{max}^{(n)}$ qui vérifient $0 < \alpha_{min}^{(n)} < \alpha_{max}^{(n)}$ pour tous les $n \in \{1, \dots, N\}$, on a $\alpha^{(n)} \in [\alpha_{min}^{(n)}, \alpha_{max}^{(n)}]$.

Dans la section suivante, nous allons étudier les conditions de convergence de de l'algo. CP-PDPG que nous venons de proposer.

3.5 Preuve théorique de la convergence de l'algo. CP-PDGP

Dans cette section, nous fournissons un résultat théorique permettant d'établir la convergence de l'algo. CP-PDPG. Nous montrons qu'il converge au taux $O(1/k)$ pour une fonction point selle avec une certaine marge d'erreur que nous établirons également.

3.5.1 Hypothèses

L'étude de la convergence est réalisée en considérant $\tau_k^{(n)}$ et $\sigma_k^{(n)}$ égaux à une valeur fixe $\tau^{(n)}$ et $\sigma^{(n)}$ en fonction des différents pas de l'algorithme. La convergence sera obtenue pour

tous les $\tau^{(n)}$ et $\sigma^{(n)}$ suffisamment petits. Nous considérons l'hypothèse suivante :

Hypothèses (Bornitude des sous-gradients). Les sous-gradients $\partial_{\mathbf{A}_k^{(n)}} g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)})$ et $\partial_{\mathbf{Y}_k^{(n)}} g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)})$ sont bornés [145], *c'est-à-dire.*, qu'il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\| \partial_{\mathbf{A}_k^{(n)}} g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)}) \|_F \leq L \quad \text{et} \quad \| \partial_{\mathbf{Y}_k^{(n)}} g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)}) \|_F \leq L \quad (3.30)$$

Remarque : Dans notre cas, cette hypothèse est satisfaite car les ensembles U et V^* sont compacts.

3.5.2 Résultats théoriques

Théorème 4 (Convergence de de l'algo. CP-PDPG). *Considérons que l'hypothèse de bornitude des sous-gradients est vérifiée. Soient $\mathbf{A}_k^{(n)}$ et $\mathbf{Y}_k^{(n)}$ des séquences générées par la méthode primale-duale à base de gradient projeté définies par (3.28)-(3.29) et que $(\mathbf{A}_*^{(n)}, \mathbf{Y}_*^{(n)}) \in U \times V^*$ soit un point de selle de $g(\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{Y}^{(n)})$.*

Si nous définissons $\widehat{\mathbf{A}}_k^{(n)} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}_i^{(n)}$ et $\widehat{\mathbf{Y}}_k^{(n)} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{Y}_i^{(n)}$, nous avons donc pour tout $k \geq 1$

$$-\frac{1}{k} \sup \left\{ \frac{\| \mathbf{Y}_0^{(n)} - \mathbf{Y}_*^{(n)} \|^2}{2\tau^{(n)}} + \frac{\| \mathbf{A}_0^{(n)} - \widehat{\mathbf{A}}_k^{(n)} \|^2}{2\sigma^{(n)}} \right\} - \frac{\rho L^2}{2} \leq g(\widehat{\mathbf{A}}_k^{(n)}, \widehat{\mathbf{Y}}_k^{(n)}) - g(\mathbf{A}_*^{(n)}, \mathbf{Y}_*^{(n)}) \leq \frac{1}{k} \sup \left\{ \frac{\| \mathbf{A}_0^{(n)} - \mathbf{A}_*^{(n)} \|^2}{2\sigma^{(n)}} + \frac{\| \mathbf{Y}_0^{(n)} - \widehat{\mathbf{Y}}_k^{(n)} \|^2}{2\tau^{(n)}} \right\} + \frac{\rho L^2}{2}$$

où $\rho = \max\{\sigma^{(n)}, \tau^{(n)}\}$.

Pour établir ce résultat, nous considérons le lemme suivant qui est principalement inspiré du travail effectué dans [145]. La preuve de ce lemme est donnée dans l'annexe A.

Lemme 1 *Considérons que l'hypothèse de bornitude des sous-gradients est vérifiée. Soient $\mathbf{A}_k^{(n)}$ et $\mathbf{Y}_k^{(n)}$ les suites générées par CP-PDPG et définies par (3.28)-(3.29) et soit une paire arbitraire $(\mathbf{A}^{(n)}, \{\mathbf{Y}^{(n)}\}) \in U \times V^*$. Si nous définissons $\widehat{\mathbf{A}}_k^{(n)} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}_i^{(n)}$ et $\widehat{\mathbf{Y}}_k^{(n)} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{Y}_i^{(n)}$ nous avons donc pour tout $k \geq 1$*

1. Les suites $\widehat{\mathbf{A}}_k^{(n)}$ et $\widehat{\mathbf{Y}}_k^{(n)}$ ($k \geq 1$) définies dans le théorème sont appelées les suites de Césaro.

$$\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} g(\mathbf{A}_i^{(n)}, \mathbf{Y}_i^{(n)}) - g(\mathbf{A}^{(n)}, \widehat{\mathbf{Y}}_k^{(n)}) \leq \frac{\|\mathbf{A}_0^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}\|^2}{2\sigma^{(n)}k} + \frac{\sigma^{(n)}L^2}{2} \quad \forall \mathbf{A}^{(n)} \in U \quad (3.31)$$

$$-\frac{\|\mathbf{Y}_0^{(n)} - \mathbf{Y}^{(n)}\|^2}{2\tau^{(n)}k} - \frac{\tau^{(n)}L^2}{2} \leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} g(\mathbf{A}_i^{(n)}, \mathbf{Y}_i^{(n)}) - g(\widehat{\mathbf{A}}_k^{(n)}, \mathbf{Y}^{(n)}) \quad \forall \mathbf{Y}^{(n)} \in V^* \quad (3.32)$$

Le résultat démontré dans le théorème montre que nous avons pu prouver la convergence vers un minimiseur pour notre algorithme de décomposition CP sous contrainte de non négativité avec une marge d'erreur $\frac{\rho L^2}{2}$ avec le taux $O(1/k)$. Le niveau de la marge d'erreur, qui est causé par le pas constant, peut être contrôlé en choisissant une petite valeur de pas.

3.6 Simulations numériques

L'objectif de cette section est maintenant d'illustrer l'efficacité de notre algorithme à travers de nombreuses simulations numériques. Cependant, l'intérêt de l'algorithme CP-PDPG proposé dans le contexte spécifique de l'analyse expérimentale des données environnementales reste hors du cadre de ce chapitre. C'est la raison pour laquelle, seules des données synthétiques (i.e. simulées numériquement) seront considérées dans ce chapitre afin de contrôler précisément le rang du tenseur et la nature du modèle : en l'occurrence ici un modèle trilineaire.

Pour mieux comparer les performances de notre algorithme avec celles obtenues avec d'autres méthodes, nous considérons dans l'exemple suivant un tenseur \mathcal{X} d'ordre 3 ($N = 3$) simulé numériquement. Le rang réel R du tenseur \mathcal{X} est fixé à 5. En ce qui concerne les deux premières matrices facteurs $\mathbf{A}^{(1)}$ et $\mathbf{A}^{(2)}$, respectivement, chaque vecteur colonne de leurs R constituants représente les spectres d'émission (resp. d'excitation) des R composés qui sont considérés. Par conséquent, la matrice $\mathbf{a}_r^{(1)}(\mathbf{a}_r^{(2)})^T$, $\forall r = 1, \dots, R$, représente la matrice dite d'émission et d'excitation de fluorescence (FEEM). En outre, les spectres synthétiques sont générés à l'aide de mélanges de fonctions de distribution gaussiennes ou lognormales généralisées. En ce qui concerne la troisième matrice facteur $\mathbf{A}^{(3)}$, ses vecteurs constitutifs qui représentent les concentrations de chacun des composés R sont simulés en utilisant une distribution uniforme. Pour étudier les performances de la méthode suggérée, nous la comparons ici avec l'algorithme bien connu N -way [27], l'algorithme HALS rapide (fHALS) décrit dans [157] avec des contraintes de non-négativité, et l'algorithme de factorisation tensorielle non négative (NTF) basé sur ADMoM suggéré dans [115].

Nous considérons un tenseur \mathcal{X} d'ordre 3 et de dimensions ($I_1 \times I_2 \times I_3 = 100 \times 47 \times 100$). Nous nous plaçons dans le cas surestimé où nous supposons que $\widehat{R} = 6$ composés sont présents (alors que seulement $R = 5$ composés ont été simulés dans le mélange). L'algorithme est initialisé au moyen d'une initialisations aléatoires arbitraires. L'une des mesures d'erreur spécifiques souvent utilisées pour évaluer les algorithmes de décomposition CP est l'erreur de reconstruction relative (RRE), donnée par :

$$\text{RRE} = \frac{\|\hat{\mathcal{X}} - \mathcal{X}\|_F^2}{\|\mathcal{X}\|_F^2}$$

où $\hat{\mathcal{X}}$ représente le tenseur reconstruit.

Pour nos simulations, les paramètres suivants ont été utilisés pour l'algorithme CP-PDPG : $\sigma^{(1)} = \sigma^{(3)} = 0.00058$, $\sigma^{(2)} = 0.008$ et $\tau^{(n)} = 10^{-4}$, for ; $n = 1, 2, 3$. Les paramètres de régularisation $\alpha^{(n)}$, ; $n = 1, 2, 3$ ont été fixés à 0.075. Ces paramètres sont soigneusement ajustés en se basant sur nos suggestions afin d'obtenir des performances optimales. Pour déterminer quand mettre fin à la procédure à un niveau de précision souhaité, nous adoptons deux critères d'arrêt : nous identifions le moment où l'erreur relative est inférieure à un seuil prédéfini et nous limitons le nombre maximal d'itérations. Les matrices d'excitation d'émission de fluorescence (FEEM) estimées sont présentées à la figure 3.1. Les spectres d'émission et d'excitation estimés ainsi que les concentrations estimées sont présentés dans la figure 3.1. Nous observons clairement que la version régularisée de notre algorithme CP-PDPG peut détecter précisément l'absence du sixième composant, et donc qu'elle estime avec précision les matrices facteurs et a la capacité de surmonter le problème du surestimation. Ce qui n'est pas le cas de l'algorithme ADMoM, de l'algorithme fast HALS, N -way et de la version non régularisée de notre algorithme qui créent tous des composés "fantômes" ajoutés artificiellement. Enfin, l'erreur d'estimation en fonction des itérations, obtenue avec l'algo. CP-PDPG dans le cas de la version régularisée est donnée au niveau de la figure 3.3. Nous pouvons observer que l'erreur relative de reconstruction diminue fortement en quelques itérations, ce qui démontre le bon comportement de convergence de notre algorithme. Ceci est en bon accord avec les résultats théoriques puisqu'il a été prouvé que le taux de convergence est en $O(1/k)$.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un algorithme primal-dual à base de gradient projeté (PDPG) pour résoudre efficacement le problème de la décomposition CP non-négative. Nous avons également effectué l'analyse théorique de convergence de notre algorithme CP-PDPG suggéré sous certaines hypothèses, et prouvé qu'il conduit à des résultats compétitifs. En plus, nous avons illustré numériquement la robustesse de notre algorithme lors de considérations du problème de sur-factorisation, c'est-à-dire que la robustesse de notre algorithme en présence d'un problème de surestimation du rang i.e que notre algo. permet de récupérer des vecteurs colonnes nuls et non d'estimer des grandeurs inexistantes. Par la suite, dans le chapitre 4 nous présenterons une nouvelle méthode de complétion des images hyperspectrales dans laquelle nous exploiterons à nouveau une factorisation tensorielle et où des contraintes physique seront introduites comme a priori.

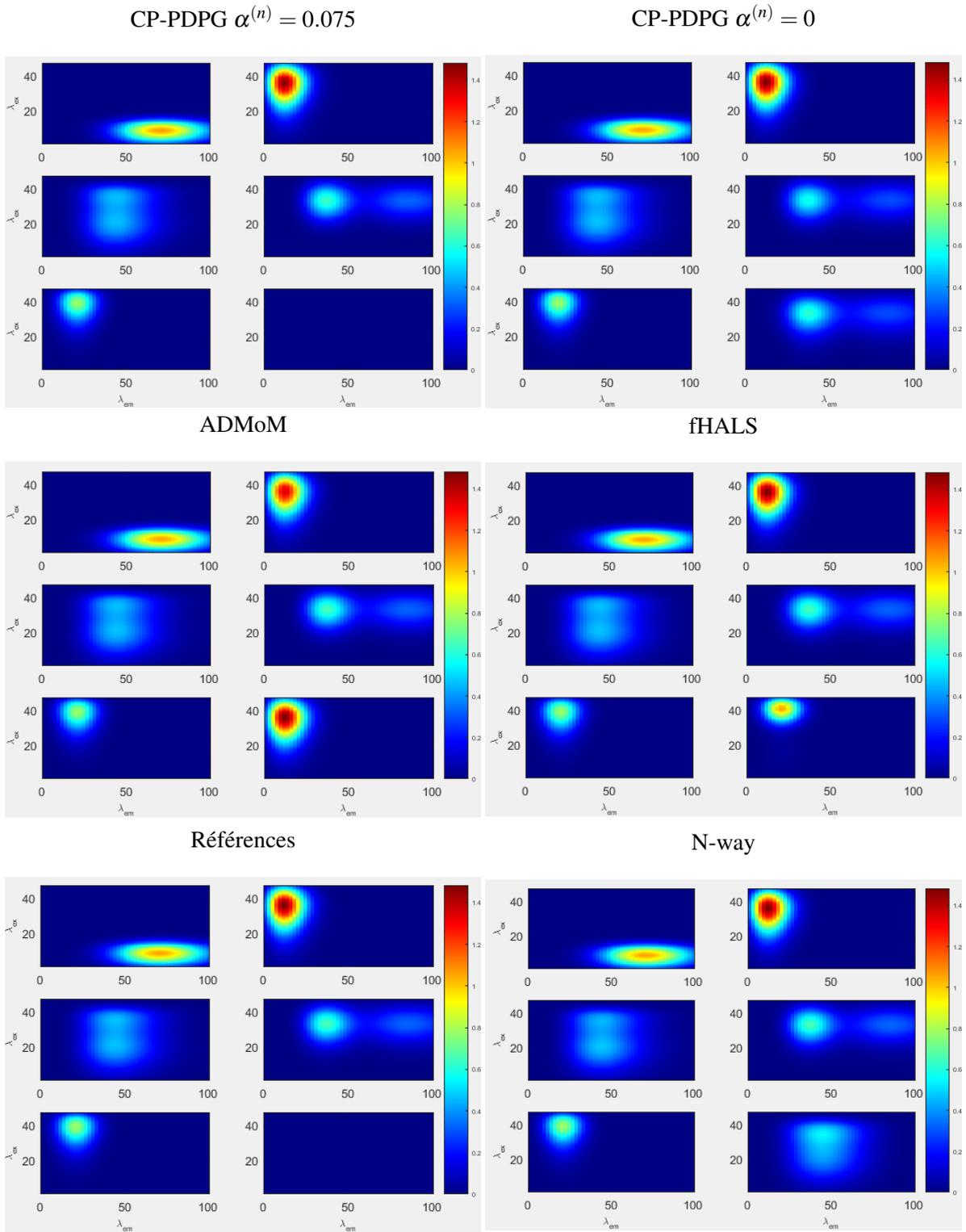


FIGURE 3.1 – Les FEEM de référence et les FEEM reconstruites par l’algorithme N-way, fast HALS, ADMoM, et par notre algorithme proposé CP-PDPG dans deux cas : sans terme de régularisation et avec terme de régularisation

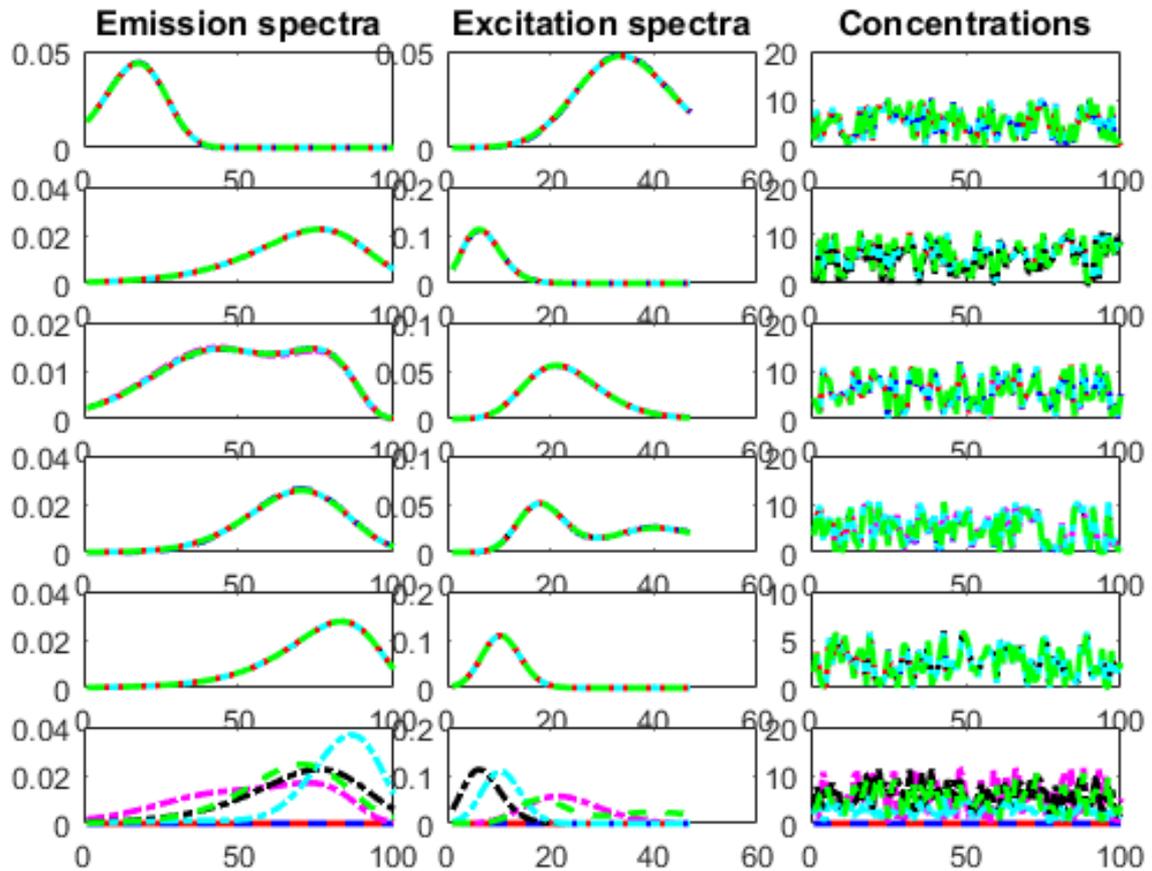


FIGURE 3.2 – Les $\hat{R} = 6$ spectres d'émission, spectres d'excitation et concentrations estimées avec l'algorithme CP-PDPG dans deux cas. En ligne rouge solide : les spectres de référence, en ligne verte pointillée : CP-PDPG sans terme de régularisation, en ligne bleue pointillée : CP-PDPG avec terme de régularisation, en ligne noire pointillée : Algorithme ADMoM, en ligne cyan pointillée : algorithme HALS rapide, et en ligne magenta pointillée : Algorithme N-way.

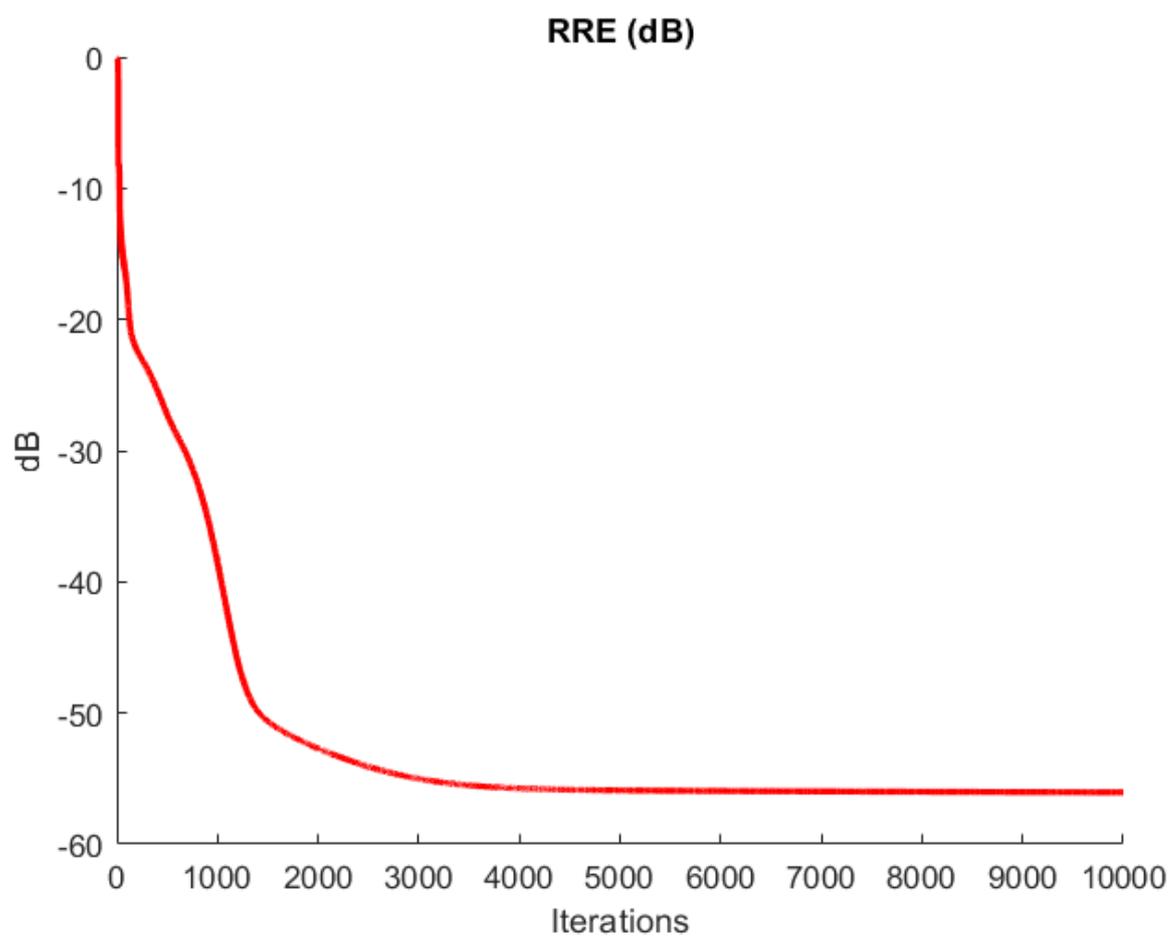


FIGURE 3.3 – L'erreur d'estimation en fonction des itérations, obtenue avec l'algorithme CP-PDPG suggéré avec le terme de régularisation

COMPLÉTION D'IMAGES HYPERSPECTRALES VIA UNE FACTORISATION TENSORIELLE AVEC INTRODUCTION D'UN TERME DE BI- RÉ- GULARISATION

4.1	Introduction	67
4.2	Rappels théoriques	69
4.2.1	Notations	69
4.2.2	Rappels mathématiques préliminaires	69
4.2.3	Algorithme de minimisation proximale alternée	70
4.3	Nouveau modèle de complétion tensoriel proposé	71
4.3.1	Formulation du problème :	71
4.3.2	Le processus de minimisation	72
4.4	Simulations numériques	76
4.5	Conclusion	82

La disponibilité de données multidimensionnelles dans divers domaines d'application nécessite le développement d'outils toujours plus avancés et performants pour l'extraction d'informations pertinentes. Dans ce chapitre, nous nous intéressons principalement au problème de complétion des images hyperspectrales (HSI) dans lequel l'objectif principal réside dans la récupération des entrées manquantes d'un tenseur (HSI dans notre cas) partiellement observé en exploitant le cadre théorique des méthodes de faible rang. Cependant, les méthodes qui n'exploitent que la propriété de rang faible ignorent généralement l'extraction des structures locales lesquelles contribuent généralement considérablement à la qualité de reconstruction. C'est pourquoi, nous proposons dans ce chapitre une méthode qui combine des propriétés de lissage par morceaux et la contrainte de cohérence entre les bandes spectrales, ce qui conduit souvent à des résultats prometteurs en matière de problème de complétion

de tenseurs de faible rang. De plus, la priorité de rang faible est garantie en décomposant le tenseur comme le produit tenseur-matrice mode-3 d'un tenseur de faible dimension et une matrice de faible dimension. Par conséquent, nous proposons dans ce chapitre un nouveau modèle de complétion des images hyperspectrales basé sur une factorisation tensorielle à laquelle nous ajoutons un terme de bi-régularisation. Pour le processus de minimisation, nous considérons la méthode de minimisation proximale alternée (en anglais Proximal Alternating Minimization (PAM)) pour résoudre notre modèle de complétion. Numériquement, l'efficacité de notre approche est illustrée au moyen de nombreuses simulations réalisées sur différentes images HSI présentant des données manquantes.

4.1 Introduction

Nous faisons ici référence à l'introduction des problèmes de la récupération des tenseurs à faible rang. En particulier, nous porterons notre attention sur les problèmes de complétion tensorielle, qui ont été décrits dans la section 2.2. Nous faisons aussi mention aux images hyperspectrales présentées dans la section 2.3. Ainsi, comme nous l'avons mentionné auparavant, une image HSI est une donnée tridimensionnelle dans laquelle l'information spatiale est représentée par les deux premières dimensions, tandis que l'information spectrale est représentée par la troisième dimension. Une image HSI désigne une image dotée de centaines, voire des milliers de bandes. En conséquence, la corrélation spectrale joue un rôle fondamental dans la modélisation des algorithmes de reconstruction des HSIs. Ainsi, la modélisation d'une HSI sous forme de matrice ignore en fait les corrélations entre tous les pixels spatiaux et les bandes spectrales. De ce fait, dans les problèmes de reconstruction, cela peut conduire à des résultats sous-optimaux ou peu satisfaisants en terme de qualité visuelle. Dans la même veine d'idée, la modélisation tensorielle a démontré son efficacité dans la modélisation des données d'ordre élevé du monde réel. En particulier pour les HSIs, l'utilisation du modèle tensoriel garantit une exploitation directe des priorités spatiales et spectrales. Ainsi, l'objectif principal de ce chapitre est de reconstruire les éléments manquants d'une image hyperspectrale (HSI) donnée, désignée par \mathcal{Y} , à partir d'un ensemble observé Ω .

Comme nous l'avons mentionné dans la section 2.2, pour les méthodes de complétion tensorielle, une approche commune consiste à minimiser directement le rang du tenseur et à mettre à jour le tenseur de faible rang :

$$\begin{aligned} & \min_{\mathcal{Y}} \text{rang}(\mathcal{Y}) \\ & \text{t.q } \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{Y}) = \mathcal{F} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Où \mathcal{F} est le tenseur observé, et \mathcal{P}_{Ω} est l'opérateur de projection de \mathcal{Y} sur l'ensemble observé Ω , qui est défini par :

$$\mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{Y}) = \begin{cases} \mathcal{Y}_{i_1, i_2, \dots, i_n} & \text{si } (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \Omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.2)$$

Avec différentes définitions du rang tensoriel, il existe de nombreux modèles d'optimisation pour les problèmes de complétion tensorielle. L'opérateur $\text{rang}(\mathcal{Y})$ peut avoir différentes significations, telles que le rang de la décomposition CP [52], le rang de la décomposition multilinéaire de Tucker [203], le rang de la décomposition en trains de tenseurs [152]. En effet, le modèle de complétion tensorielle (4.1) souffre de différents problèmes. Premièrement, le rang est une fonction non convexe par rapport à \mathcal{Y} , et le problème (4.1) est NP-difficile et pourrait souffrir de minimums locaux. Pour remédier à ce que cela ne se produise, un autre type de méthodes consiste à minimiser directement le rang tensoriel. Cependant, il arrive souvent que les limitations du rang tensoriel ne soient pas disponibles dans certaines applications. Lorsque seules quelques observations sont disponibles, le choix d'une méthode de minimisation de rang élevé peut conduire à un sur-ajustement. Des méthodes de relaxation ont été proposées pour se remédier à ce problème. Dans cette veine, la norme nucléaire

(norme de trace) est alors considérée comme un remplaçant convexe de la fonction de rang non convexe. Ainsi, la complétion tensorielle basée sur la minimisation de la norme nucléaire tensorielle est défini comme suit :

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{Y}} \|\mathcal{Y}\|_* \\ \text{t.q } \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{Y}) = \mathcal{F} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Cependant, l'extension de la définition de la norme nucléaire dans le cas d'un tenseur s'avère une question compliquée. Par conséquent, plusieurs versions des normes nucléaires tensorielles ont été proposées, mais elles sont assez différentes les unes des autres. Dans [120] les auteurs ont d'abord proposé une approche de complétion du tenseur basée sur la somme des normes nucléaires des matrices obtenus après dépliement du tenseur, et qui définit comme suit :

$$\|\mathcal{Y}\|_* := \sum_{i=1}^N \alpha_i \|\mathbf{Y}^{(i)}\|_* \quad (4.4)$$

où $\mathbf{Y}^{(i)}$ est la mise sous forme matricielle du tenseur \mathcal{Y} suivant le mode i , α_i est une constante qui satisfait la condition suivante $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$. Différentes méthodes ont considéré la somme des normes nucléaires des matrices de dépliement comme un critère et ont dérivé des algorithmes spécifiques pour le problème de la complétion tensorielle [69]. La méthode susmentionnée qui exploite la norme nucléaire d'une matrice fait appel à la décomposition en valeurs singulières (SVD) avec une complexité de calcul élevée pour résoudre le problème de minimisation. Bien que les plus grandes valeurs singulières soient généralement associées aux informations majeures, les méthodes basées sur la minimisation de la norme nucléaire traitent chaque valeur singulière de la même manière. Par conséquent, pour préserver la composante principale des données, une solution consiste à attribuer des pondérations plus faibles aux plus grandes valeurs singulières [75]. Cependant, cela ajouterait plus de paramètres, ce qui pourrait rendre le processus d'estimation moins robuste.

Dans ce chapitre, nous apportons différentes contributions. Premièrement, la propriété de faible rang des HSIs est exprimée comme le produit tenseur-matrice mode-3 d'un tenseur de faible dimension et d'une matrice de faible dimension [17]. Ainsi, si l'on considère une image hyperspectrale donnée $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$, elle peut être factorisée de la manière suivante :

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Z} \times_3 \mathbf{A} \quad (4.5)$$

où $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times r}$ ($r \ll I_3$) représente le facteur spatial et $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{I_3 \times r}$ représente le facteur spectral.

Ensuite, pour préserver la continuité spectrale des images HSIs pendant le processus de complétion, l'approche proposée consiste à créer un lien entre un modèle préalable et l'information spectrale particulière présentée par l'image HSI. Par conséquent, la contrainte de lissage par morceaux le long du domaine spatial ainsi que la contrainte de continuité du facteur spectral sont considérées dans un modèle unifié. De tels modèles ont été déjà utilisés pour des problèmes de débruitage [83] [236], mais à notre connaissance, personne n'a étendu ces outils au problème de complétion. Par conséquent, dans ce chapitre, nous développons un modèle de complétion des images HSIs via une factorisation tensorielle avec une régula-

risation bi-facteurs. Ce modèle sera noté HC-BiFR.

Enfin, en ce qui concerne la résolution du problème d'optimisation considéré, nous développons un algorithme efficace de minimisation proximale alternée (PAM) [2] [3]. Des études numériques illustreront le fait que la méthode que nous proposons permet d'améliorer considérablement la qualité des images HSI reconstruites à partir d'un petit ensemble de données observées.

4.2 Rappels théoriques

4.2.1 Notations

Comme nous l'avons mentionné dans la section 1.2.3, pour un tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ d'ordre N , la matrice de dépliement (unfolding en anglais) du tenseur \mathcal{X} est noté par $\mathbf{X}^{(n)}$ de dimension $I_n \times (\prod_{m=1, m \neq n}^N I_m)$. L'opérateur inverse du dépliement est désigné par fold et défini comme suit :

$$\mathcal{X} = \text{fold}_n \left(\mathbf{X}^{(n)} \right) \quad (4.6)$$

La norme de Frobenius d'un tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ d'ordre N est définie comme suit :

$$\|\mathcal{X}\|_F = \left(\sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_N=1}^{I_N} (x_{i_1 i_2 \dots i_N})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.7)$$

où $x_{i_1 i_2 \dots i_N}$ est le (i_1, i_2, \dots, i_N) -ème élément du tenseur \mathcal{X} .

Le produit scalaire de deux tenseurs de même taille \mathcal{X} et \mathcal{Y} est défini comme suit :

$$\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N} x_{i_1 i_2 \dots i_N} \cdot y_{i_1 i_2 \dots i_N} \quad (4.8)$$

La norme $l_{1,1}$ d'un tenseur est définie comme la somme des valeurs absolues de tous ses éléments. L'opérateur $\text{diag}(\mathbf{X})$ d'une matrice \mathbf{X} représente un vecteur colonne dont les éléments sont les éléments diagonaux de \mathbf{X} , et $\text{ones}(m, n)$ désigne une matrice $m \times n$ dont les éléments sont tous égaux à 1.

4.2.2 Rappels mathématiques préliminaires

Théorème 5 *En supposant que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et $\mathbf{X}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, alors l'équation classique suivante de la matrice de Sylvester*

$$\mathbf{AX} + \mathbf{XB} = \mathbf{C} \quad (4.9)$$

admet une solution unique si et seulement si $\mathbf{G} = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I}_m$ est une matrice inversible, où \otimes désigne le produit de Kronecker, \mathbf{I}_n la matrice identité de taille $n \times n$ et $()^T$ l'opérateur transposé. En particulier, si les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} vérifient

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_1 \Lambda_1 \mathbf{U}_1^T, \quad \mathbf{B} = \mathbf{U}_2 \Lambda_2 \mathbf{U}_2^T \quad (4.10)$$

où Λ_1 et Λ_2 sont des matrices diagonales et \mathbf{U}_1 et \mathbf{U}_2 sont des matrices unitaires, alors la solution unique est donnée par

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}_1 \left((\mathbf{1} \oslash \mathbf{T}) \odot (\mathbf{U}_1^T \mathbf{C} \mathbf{U}_2) \right) \mathbf{U}_2^T \quad (4.11)$$

où “ \odot ” représente la multiplication élément par élément (ou produit de Hadamard), “ \oslash ” représente la division élément par élément et \mathbf{T} est une matrice donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & (\text{diag}(\Lambda_1), \text{diag}(\Lambda_1), \dots, \text{diag}(\Lambda_1))^T \\ & + (\text{diag}(\Lambda_2), \text{diag}(\Lambda_2), \dots, \text{diag}(\Lambda_2)) \end{aligned}$$

Preuve 1 voir [195].

4.2.3 Algorithme de minimisation proximale alternée

Dans de nombreuses applications, la fonction de coût à minimiser s'avère non différentiable voire même non convexe. Grâce à une approche proximale, ce type de problème peut être résolu efficacement au moyen d'un algorithme particulier appelé minimisation alternée. Nous faisons ici référence aux sections 1.4.2 et 1.4.3 qui présentent une introduction sur les opérateurs proximaux, ainsi que certains algorithmes proximaux.

Dans le cas plus général, on considère le problème de la minimisation d'une fonction f d'une variable \mathbf{x} décomposée en plusieurs sous-ensembles ou blocs de variables $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \in \mathbf{X}$, où l'ensemble \mathbf{X} est le produit cartésien de n ensembles convexes fermés : $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \dots \times \mathbf{X}_n$ avec $\mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$:

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

L'algorithme PAM consiste à mettre à jour la fonction f à chaque itération k par rapport à un seul bloc de variables tandis que les autres blocs sont maintenus fixes. L'optimisation est effectuée de manière cyclique par rapport à tous les blocs. Ainsi, cela implique que le problème (4.12) peut être résolu de manière itérative selon l'algorithme suivant

Algorithm 6: L'algorithme de minimisation proximale alternée

- **Étape 1 :** Initialiser \mathbf{x}^0 , fixer $k = 0$, et $\gamma_i > 0$
- **Étape 2 :** Pour $i = 1, \dots, n$ faire

$$\mathbf{x}_i^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{y}_i} f(\mathbf{x}_1^{k+1}, \dots, \mathbf{y}_i, \dots, \mathbf{x}_n^k) + \frac{\gamma_i}{2} \|\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i^k\|_2^2$$

- **Étape 3 :** Mettre à jour $\mathbf{x}^{k+1} = (\mathbf{x}_1^{k+1}, \dots, \mathbf{x}_n^{k+1})$ et $k = k + 1$ et revenir à l'étape 2.
-

4.3 Nouveau modèle de complétion tensoriel proposé

Dans ce paragraphe, nous proposons de résoudre le problème d'estimation des entrées manquantes d'une HSI partiellement observée. Pour résoudre ce problème, et comme indiqué précédemment, l'exploitation des connaissances a priori est une des principales considérations pour la complétion des HSIs. À partir de la discussion faite dans l'introduction ci-dessus, en combinant les propriétés de rang faible et des termes de régularisations sur les facteurs spatial \mathcal{Z} et spectral \mathbf{A} présentés dans (4.5), nous allons proposer un nouveau modèle de complétion tensoriel.

4.3.1 Formulation du problème :

Nous introduisons un modèle de reconstruction des HSIs basé sur une factorisation tensorielle et une régularisation bi-facteurs, à savoir

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{A}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y}} \frac{1}{2} \|\mathcal{Y} - \mathcal{Z} \times_3 \mathbf{A}\|_F^2 + \tau \sum_{i=1}^2 \|(\mathcal{Z} \times_i \mathbf{D}_i)\|_{1,1} + \mu \|\mathbf{D}_3 \mathbf{A}\|_F^2 \\ \text{t.q } \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{Y}) = \mathcal{F} \end{aligned} \quad (4.13)$$

où τ et μ sont des paramètres de régularisation, et \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2 représentent des opérateurs différentiels linéaires du premier ordre dans la première et la deuxième direction, respectivement. Enfin, \mathbf{D}_3 représente l'opérateur différentiel linéaire du premier ordre dans la troisième direction. Maintenant, en supposant qu'un tenseur $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ d'ordre 3 est considéré, nous définissons les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} H(\mathbf{A}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y}) = \frac{1}{2} \|\mathcal{Y} - \mathcal{Z} \times_3 \mathbf{A}\|_F^2 \\ R_1(\mathbf{A}) = \mu \|\mathbf{D}_3 \mathbf{A}\|_F^2 \\ R_2(\mathcal{Z}) = \tau \sum_{i=1}^2 \|(\mathcal{Z} \times_i \mathbf{D}_i)\|_{1,1} \\ R_3(\mathcal{Y}) = \iota(\mathcal{Y}) \end{cases} \quad (4.14)$$

où $\iota(\cdot)$ est la fonction indicatrice suivante :

$$\iota(\mathcal{Y}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{Y}) = \mathcal{F} \\ \infty, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.15)$$

La fonction $H(\mathbf{A}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y})$ correspond au terme de fidélité utilisé pour promouvoir la propriété de rang faible du tenseur sous-jacent. Par ailleurs, les termes $R_1(\mathbf{A})$ et $R_2(\mathcal{Z})$ visent à renforcer la contrainte de continuité du facteur spectral et à améliorer le lissage par morceaux le long du premier et deuxième mode, respectivement.

4.3.2 Le processus de minimisation

Le modèle proposé au niveau de l'équation (4.13) peut être reformulé par le problème de minimisation suivant :

$$\min f(\mathbf{A}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y}) = \min_{\mathbf{A}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y}} H(\mathbf{A}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y}) + R_1(\mathbf{A}) + R_2(\mathcal{Z}) + R_3(\mathcal{Y}) \quad (4.16)$$

La fonction de coût qui doit être minimisée est la somme d'un certain nombre de fonctions, dont certaines peuvent être non différentiables ou même non convexes. Ce type de problème peut être résolu à l'aide d'un algorithme de minimisation alternée proximale (PAM). Ainsi, afin de résoudre le problème d'optimisation (4.16), nous mettons à jour \mathbf{A} , \mathcal{Z} , et nous estimons \mathcal{Y} séquentiellement comme suit :

$$\mathbf{A}_{l+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{A}} H(\mathbf{A}, \mathcal{Z}_l, \mathcal{Y}_l) + R_1(\mathbf{A}) + \frac{\gamma}{2} \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_l\|_F^2 \quad (4.17)$$

$$\mathcal{Z}_{l+1} = \operatorname{argmin}_{\mathcal{Z}} H(\mathbf{A}_{l+1}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y}_l) + R_2(\mathcal{Z}) + \frac{\gamma}{2} \|\mathcal{Z} - \mathcal{Z}_l\|_F^2 \quad (4.18)$$

$$\mathcal{Y}_{l+1} = \operatorname{argmin}_{\mathcal{Y}} H(\mathbf{A}_{l+1}, \mathcal{Z}_{l+1}, \mathcal{Y}) + R_3(\mathcal{Y}) + \frac{\gamma}{2} \|\mathcal{Y} - \mathcal{Y}_l\|_F^2 \quad (4.19)$$

où $\gamma > 0$ est le paramètre proximal.

Ce qui est encore équivalent à :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 : & \operatorname{argmin}_{\mathbf{A}, \mathcal{Z}} Q(\mathbf{A}, \mathcal{Z}) = H(\mathbf{A}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y}_l) + R_1(\mathbf{A}) + R_2(\mathcal{Z}) + \frac{\gamma}{2} \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_l\|_F^2 + \frac{\gamma}{2} \|\mathcal{Z} - \mathcal{Z}_l\|_F^2 \\ \mathcal{P}_2 : & \mathcal{Y}_{l+1} = \operatorname{argmin}_{\mathcal{Y}} H(\mathbf{A}_{l+1}, \mathcal{Z}_{l+1}, \mathcal{Y}) + R_3(\mathcal{Y}) + \frac{\gamma}{2} \|\mathcal{Y} - \mathcal{Y}_l\|_F^2 \end{cases} \quad (4.20)$$

Le problème (4.20) peut clairement être résolu en deux étapes. Les facteurs de faible dimension \mathbf{A} et \mathcal{Z} avec les priorités de lissage et de continuité sont conjointement étudiés via la première étape en résolvant le problème \mathcal{P}_1 . Par ailleurs, la résolution du problème \mathcal{P}_2 conduit à une deuxième étape qui consiste en la reconstruction du tenseur \mathcal{Y} . Ainsi dans ce qui suit nous développons le processus de minimisation de notre problème (4.20).

► Étape d'une Régularisation Bi-Facteurs basé sur la factorisation tensorielle : résolution du problème \mathcal{P}_1

Dans cette partie, nous expliquons la démarche de calcul des mises à jour de la matrice et du tenseur incorporés dans le problème \mathcal{P}_1 . Nous résolvons donc deux sous-problèmes. Tout d'abord, nous mettons à jour la matrice \mathbf{A} à l'itération $(l+1)$, puis le tenseur sera mis à jour \mathcal{Z} va être mettre a jour également à l'itération $(l+1)$.

Sous-problème 1 : Estimation de la matrice de faible dimension A

Le sous-problème 1 est donné par :

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{A}} \frac{1}{2} \|\mathcal{Y}_l - \mathcal{Z}_l \times_3 \mathbf{A}\|_F^2 + \mu \|\mathbf{D}_3 \mathbf{A}\|_F^2 + \frac{\gamma}{2} \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_l\|_F^2 \quad (4.21)$$

Puisque le modèle dans (4.5) peut être réécrit sous sa forme matricielle équivalente comme suit :

$$\mathbf{Y}^{(3)} = \mathbf{A} \mathbf{Z}^{(3)} \quad (4.22)$$

Alors, (4.21) est équivalent au problème de minimisation suivant :

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{A}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Y}_l^{(3)} - \mathbf{A} \mathbf{Z}_l^{(3)}\|_F^2 + \mu \|\mathbf{D}_3 \mathbf{A}\|_F^2 + \frac{\gamma}{2} \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_l\|_F^2 \quad (4.23)$$

La fonction objectif du sous-problème ci-dessus est convexe et lisse, c'est-à-dire continuellement différentiable. Par conséquent, elle a une solution fermée obtenue en résolvant l'égalité suivante :

$$\nabla_{\mathbf{A}} Q(\mathbf{A}, \mathcal{Z}_l) = 0 \quad (4.24)$$

Par conséquent, une solution peut être obtenue directement en résolvant l'équation de Sylvestre suivante :

$$\mathbf{A} \mathbf{Z}_l^{(3)} \left(\mathbf{Z}_l^{(3)} \right)^T + 2\mu (\mathbf{D}_3)^T \mathbf{D}_3 \mathbf{A} + \gamma \mathbf{A} = \mathbf{Y}_l^{(3)} \left(\mathbf{Z}_l^{(3)} \right)^T + \gamma \mathbf{A}_l \quad (4.25)$$

Enfin, en utilisant le théorème 5, nous pouvons donner de manière simple une solution du sous-problème (4.21) comme suit :

$$\mathbf{A}_{l+1} = \mathbf{F}_l^T \left((1 \otimes \mathbf{T}_l) \odot (\mathbf{F}_l \mathbf{G} \mathbf{U}_l) \right) \mathbf{U}_l^T \quad (4.26)$$

où

$$\mathbf{G} = \left(\mathbf{Y}^{(3)} \right) \left(\mathbf{Z}_l^{(3)} \right)^T + \gamma \mathbf{A}_l$$

et

$$\mathbf{T}_l = (\operatorname{diag}(\Psi_l), \operatorname{diag}(\Psi_l), \dots, \operatorname{diag}(\Psi_l)) + \gamma \operatorname{ones}(d_3, r) + (\operatorname{diag}(\Sigma_l), \operatorname{diag}(\Sigma_l), \dots, \operatorname{diag}(\Sigma_l))^T.$$

En effet, dans (4.25), on peut voir que la matrice $\mathbf{D}_3^T \mathbf{D}_3$ est une matrice circulante et que la matrice $\mathbf{Z}_l^{(3)} \left(\mathbf{Z}_l^{(3)} \right)^T$ est une matrice symétrique. Par conséquent, nous utilisons la transformée de Fourier rapide (FFT) 1-D et la décomposition SVD pour diagonaliser $\mathbf{D}_3^T \mathbf{D}_3$ et

$\mathbf{Z}_l^{(3)} \left(\mathbf{Z}_l^{(3)} \right)^T$, respectivement. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_3^T \mathbf{D}_3 &= \mathbf{F}_l^T \Psi_l \mathbf{F}_l \\ \mathbf{Z}_l^{(3)} \left(\mathbf{Z}_l^{(3)} \right)^T &= \mathbf{U}_l \Sigma_l \mathbf{U}_l^T \end{aligned} \quad (4.27)$$

où \mathbf{F}_l est la matrice de transformée de Fourier discrète (DFT) 1-D.

Sous-problème 2 : Estimation du tenseur de faible dimension \mathcal{Z}

Après que la nouvelle matrice de faible dimension \mathbf{A} ait été obtenue à l'itération $(l+1)$, nous pouvons mettre à jour le tenseur de faible dimension \mathcal{Z}_{l+1} à l'itération $(l+1)$. Par conséquent, dans cette partie nous nous intéressons à la résolution du sous problème suivant :

$$\operatorname{argmin}_{\mathcal{Z}} \frac{1}{2} \|\mathcal{Y} - \mathcal{Z} \times_3 \mathbf{A}_{l+1}\|_F^2 + \tau \sum_{i=1}^2 \|\mathcal{Z} \times_i \mathbf{D}_i\|_{1,1} + \frac{\gamma}{2} \|\mathcal{Z} - \mathcal{Z}_l\|_F^2 \quad (4.28)$$

Nous pouvons remarquer que le sous-problème (4.28) s'inscrit dans le cadre de la méthode des multiplicateurs à direction alternée (ADMM) [ADMM1]. Ainsi, nous pouvons le réécrire comme le problème sous contrainte suivant :

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}_{\mathcal{Z}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2} \quad & \frac{1}{2} \|\mathcal{Y} - \mathcal{Z} \times_3 \mathbf{A}_{l+1}\|_F^2 + \tau \sum_{i=1}^2 \|\mathcal{M}_i\|_{1,1} + \frac{\gamma}{2} \|\mathcal{Z} - \mathcal{Z}_l\|_F^2 \\ \text{t.q.} \quad & \mathcal{Z} \times_i \mathbf{D}_i = \mathcal{M}_i, i = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

La forme concise de la fonction lagrangienne augmentée de (4.29) peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} L_\alpha(\mathcal{Z}, \mathcal{M}_i, \mathcal{P}_i) &= \frac{1}{2} \|\mathcal{Y} - \mathcal{Z} \times_3 \mathbf{A}_{l+1}\|_F^2 + \frac{\gamma}{2} \|\mathcal{Z} - \mathcal{Z}_l\|_F^2 \\ &+ \sum_{i=1}^2 \left\{ \tau \|\mathcal{M}_i\|_{1,1} + \langle \mathcal{Z} \times_i \mathbf{D}_i - \mathcal{M}_i, \mathcal{P}_i \rangle + \frac{\alpha}{2} \|\mathcal{Z} \times_i \mathbf{D}_i - \mathcal{M}_i\|_F^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.30)$$

où $\mathcal{P}_i (i = 1, 2)$ sont les multiplicateurs de Lagrange et $\alpha > 0$ est le paramètre de pénalité. Par conséquent, ADMM transforme de manière itérative le problème (4.30) en trois sous problèmes exprimés au niveau de l'équation suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{Z}_{l+1, p+1} = \operatorname{argmin}_{\mathcal{Z}} L_\alpha(\mathcal{Z}, \mathcal{M}_i^p, \mathcal{P}_i^p) \\ \mathcal{M}_i^{p+1} = \operatorname{argmin}_{\mathcal{M}_i} L_\alpha(\mathcal{Z}_{l+1, p+1}, \mathcal{M}_i, \mathcal{P}_i^p) \\ \mathcal{P}_i^{p+1} = \mathcal{P}_i^p + \alpha \left(\mathcal{Z}_{l+1, p+1} \times_i \mathbf{D}_i - \mathcal{M}_i^{p+1} \right) \end{cases} \quad (4.31)$$

Nous résolvons donc respectivement $\mathcal{Z}_{l+1, p+1}$ et \mathcal{M}_i^{p+1} dans (4.31). Pour $\mathcal{Z}_{l+1, p+1}$, nous

résolvons le problème suivant :

$$\operatorname{argmin}_{\mathcal{Z}} \frac{1}{2} \|\mathcal{Y} - \mathcal{Z} \times_3 \mathbf{A}_{l+1}\|_F^2 + \frac{\gamma}{2} \|\mathcal{Z} - \mathcal{Z}_l\|_F^2 + \sum_{i=1}^2 \frac{\alpha}{2} \left\| \mathcal{Z} \times_i \mathbf{D}_i - \mathcal{M}_i^p + \frac{\mathcal{P}_i^p}{\alpha} \right\|_F^2$$

qui peut être directement résolu par l'équation suivante :

$$\mathcal{Z} \times_3 \left((\mathbf{A}_{l+1})^T \mathbf{A}_{l+1} \right) + \sum_{i=1}^2 \alpha \mathcal{Z} \times_i (\mathbf{D}_i^T \mathbf{D}_i) + \gamma \mathcal{Z} = \mathcal{G} \quad (4.32)$$

où

$$\mathcal{G} = \mathcal{Y} \times_3 (\mathbf{A}_{l+1})^T + \sum_{i=1}^2 \alpha \left(\mathcal{M}_i^p - \frac{\mathcal{P}_i^p}{\alpha} \right) \times_i \mathbf{D}_i^T + \gamma \mathcal{Z}_l \quad (4.33)$$

L'équation (4.32) peut être réécrite sous sa forme matricielle de la manière équivalente suivante :

$$(\mathbf{Z}^{(3)})^T \left((\mathbf{A}_{l+1})^T \mathbf{A}_{l+1} \right) + \gamma (\mathbf{Z}^{(3)})^T + \alpha \left[(\mathbf{I}_{d_2} \otimes \mathbf{D}_l^T \mathbf{D}_l) + (\mathbf{D}_2^T \mathbf{D}_2 \otimes \mathbf{I}_{d_l}) \right] (\mathbf{Z}^{(3)})^T = (\mathbf{G}^{(3)})^T \quad (4.34)$$

Nous utilisons à nouveau le théorème 5 pour résoudre l'équation (4.34). Ainsi, comme $\left[(\mathbf{I}_{d_2} \otimes \mathbf{D}_l^T \mathbf{D}_l) + (\mathbf{D}_2^T \mathbf{D}_2 \otimes \mathbf{I}_{d_l}) \right]$ a une structure de bloc circulant, et la matrice $(\mathbf{A}_{l+1})^T \mathbf{A}_{l+1}$ est une matrice symétrique. Ainsi, nous employons la FFT 2-D et la SVD pour diagonaliser $\left[(\mathbf{I}_{d_2} \otimes \mathbf{D}_l^T \mathbf{D}_l) + (\mathbf{D}_2^T \mathbf{D}_2 \otimes \mathbf{I}_{d_l}) \right]$ et $(\mathbf{A}_{l+1})^T \mathbf{A}_{l+1}$, respectivement. Soit donc :

$$\left[(\mathbf{I}_{d_2} \otimes \mathbf{D}_l^T \mathbf{D}_l) + (\mathbf{D}_2^T \mathbf{D}_2 \otimes \mathbf{I}_{d_l}) \right] = \mathbf{F}_2^T \Psi_2 \mathbf{F}_2 \quad \text{et} \quad (\mathbf{A}_{l+1})^T \mathbf{A}_{l+1} = \mathbf{U}_2 \Sigma_2 \mathbf{U}_2^T$$

où \mathbf{F}_2 est la matrice DFT 2-D et \mathbf{U}_2 est une matrice unitaire. Par conséquent, nous pouvons résoudre efficacement (4.34) comme suit :

$$\mathcal{Z}_{l+1,p+1} = \operatorname{fold}_3 \left(\left[(\mathbf{F}_2)^T \left((\mathbf{1} \otimes \mathbf{T}_2) \odot \left(\mathbf{F}_2 (\mathbf{G}^{(3)})^T \mathbf{U}_2 \right) \right) \mathbf{U}_2^T \right]^T \right) \quad (4.35)$$

où \mathbf{T}_2 est définie comme suit :

$$\mathbf{T}_2 = (\operatorname{diag}(\Psi_2), \operatorname{diag}(\Psi_2), \dots, \operatorname{diag}(\Psi_2)) + \gamma \operatorname{ones}(d_l d_2, r) + (\operatorname{diag}(\Sigma_2), \operatorname{diag}(\Sigma_2), \dots, \operatorname{diag}(\Sigma_2))^T.$$

Maintenant, pour l'estimation de \mathcal{M}_i^{p+1} ; ($i = 1, 2$), nous résolvons le problème suivant :

$$\operatorname{argmin}_{\mathcal{M}_i, i=1,2} \tau \|\mathcal{M}_i\|_{l,1} + \frac{\alpha}{2} \left\| \mathcal{Z}_{l+1,p+1} \times_i \mathbf{D}_i - \mathcal{M}_i + \frac{\mathcal{P}_i^p}{\alpha} \right\|_F^2 \quad (4.36)$$

qui est obtenu directement par :

$$\mathcal{M}_i^{p+1} = S_{\tau/\alpha} \left(\mathcal{Z}_{l+1,p+1} \times_i \mathbf{D}_i + \frac{\mathcal{P}_i^p}{\alpha} \right) \quad (4.37)$$

où $S_\beta(\cdot)$ désigne l'opérateur de seuillage doux avec le seuil β , défini par :

$$[S_\beta(x)]_{ij} = \text{sign}(x_{ij}) \max\{|x_{ij}| - \beta, 0\}$$

► **Étape de reconstruction du tenseur : résolution du problème \mathcal{P}_2**

La reconstruction du tenseur est l'étape finale de notre processus de complétion. Par conséquent, le tenseur à estimer peut être reconstruit en utilisant les facteurs incorporés dans la factorisation tensorielle proposée, et qui sont étudiés lors de la première étape. Nous traitons donc le sous problème par rapport à \mathcal{Y} suivant :

$$\underset{\mathcal{Y}}{\text{argmin}} \frac{1}{2} \|\mathcal{Y} - \mathcal{Z}_{l+1} \times_3 \mathbf{A}_{l+1}\|_F^2 + \iota(\mathcal{Y}) + \frac{\gamma}{2} \|\mathcal{Y} - \mathcal{Y}_l\|_F^2 \quad (4.38)$$

où $\iota(\mathcal{Y})$ est définie par l'équation (4.15). Maintenant, comme $\mathcal{P}_{\Omega^c}(\mathcal{F}) = 0$, nous pouvons donner l'estimation du tenseur \mathcal{Y} au moyen de l'équation suivante :

$$\mathcal{Y}_{l+1} = \mathcal{P}_{\Omega^c} \left(\frac{\mathcal{Z}_{l+1} \times_3 \mathbf{A}_{l+1} + \gamma \mathcal{Y}_l}{1 + \gamma} \right) + \mathcal{F}, \quad (4.39)$$

où \mathcal{F} représente les données observées.

Finalement, l'algorithme que nous proposons peut être résumé de la manière suivante.

Algorithm 7: Algorithme de complétion d'images hyperspectrales

- **Entrées :** le tenseur observé \mathcal{F} , l'ensemble des index des entrées observées Ω ;
- **Initialisation** $\mathcal{P}_\Omega(\mathcal{Y}) = \mathcal{F}$, \mathbf{A}_0 , \mathcal{Z}_0
- **Tant que** la convergence n'est pas atteinte et que $l < \max_l$ **Faire**

Étape de la régularisation Bi-Facteurs basé sur la factorisation tensorielle

- mettre à jour \mathbf{A}_{l+1} par l'équation (4.26)
- mettre à jour \mathcal{Z}_{l+1} par l'équation (4.35)

Étape de reconstruction du tenseur

- mettre à jour le tenseur reconstruit \mathcal{Y}_{l+1} par l'équation (4.39)

Renvoyer le tenseur \mathcal{Y}

4.4 Simulations numériques

Dans cette section, nous testons les performances de notre méthode de complétion des HSIs basée sur une factorisation tensorielle et une bi-facteurs régularisation (HC-BiFR) proposée en menant des expériences approfondies sur des HSIs réelles. Nous échantillons

aléatoirement quelques entrées des données d'origine et récupérons le tenseur entier avec différents pourcentage de données dont on dispose par rapport au nombre total de données (très connu en anglais sous le terme Sampling Rate (SR)). Afin d'évaluer de manière exhaustive la méthode proposée, nous comparons notre algorithme avec trois méthodes différentes de complétion tensorielle, à savoir TMac [220], ce modèle utilise uniquement une factorisation matricielle parallèle de rang faible de toutes les matrices dépliées le long de tous les modes du tenseur. MF-TV [93] qui est aussi basée sur la factorisation matricielle parallèle de rang faible avec une régularisation de variation totale TV sur le facteur correspondant au troisième mode, et LRTC-TV [114], qui est une méthode de décomposition de Tucker et qui intègre la variation totale sur l'image hyperspectrale originale dans la complétion du tenseur de rang faible. Tous les paramètres impliqués dans le modèle proposé sont soigneusement ajustés en se basant sur des tests empiriques afin d'obtenir des performances optimales.

Dans cette section, nous utilisons trois images hyperspectrales publiques, nommées *the Airborne Visible/Infrared Imaging Spectrometer (AVIRIS) Cuprite data*¹ et *Pavia University dataset*² dans lesquelles nous ne sélectionnons qu'une partie de $(150 \times 150 \times 130)$, et $(200 \times 200 \times 103)$, respectivement. De même qu'une partie de la taille $(145 \times 145 \times 130)$ du *Indian Pines Data Set*³. Deux indices de performance sont utilisés : le rapport signal sur bruit (En anglais peak signal to noise ratio (PSNR)) et la similarité structurelle (structural similarity (SSIM)), sont sélectionnés pour évaluer quantitativement la qualité globale des résultats reconstruits. Nous reportons les valeurs des indices de performance PSNR et SSIM obtenues avec toutes les méthodes comparées dans le Tableau 4.1. Les meilleurs résultats obtenus sont mis en évidence au moyen de gras. Nous pouvons observer que la méthode HC-BiFR que nous proposons obtient des résultats globalement supérieurs à ceux de toutes les méthodes comparées dans tous les tests effectués.

Les figures 4.1 et 4.2 montrent les résultats de complétion à la bande 77 pour un taux d'échantillonnage de 15% et à la bande 73 pour un taux d'échantillonnage de 10% pour l'ensemble de données réelles HSI *PaviaU*, dans laquelle les effets visuels, ainsi que les valeurs PSNR/SSIM de chaque frame reconstruite par les quatre méthodes comparées sont incluses. Il est évident que les résultats de TMac fournissent peu de détails tout au long du processus de reconstruction. Car TMac ne prend en compte que la propriété de faible dimension sans aucune considération de contraintes sur les données à estimer. Cependant, nous pouvons voir que les sorties de LRTC-TV, qui intègrent la propriété de lissage dans le modèle de complétion, présentent des zones floues visibles qui entraînent l'absence de certains détails. De plus, dans les résultats du modèle MF-TV, nous pouvons clairement observer que différentes entrées sont manquantes. En outre, l'algorithme HC-BiFR proposé a une capacité remarquable à compléter les informations manquantes. En plus de la qualité visuelle, notre modèle démontre une supériorité dans les valeurs de PSNR et SSIM sur toutes les images récupérées. En général, le HC-BiFR proposé présente de nombreux avantages par rapport aux autres méthodes de complétion/reconstruction des informations locales.

De même, les figures 4.3, 4.5, 4.4 et 4.6 montrent les résultats de reconstruction à différentes bandes des ensembles de données *Indian Pine* et *Cuprite*, avec 90% et 85% d'éléments man-

1. <http://lesun.weebly.com/hyperspectral-data-set.html>
 2. http://www.ehu.es/ccwintco/index.php/Hyperspectral_Remote_Sensing_Scenes#Pavia_Centre_and_University
 3. http://www.ehu.es/ccwintco/index.php/Hyperspectral_Remote_Sensing_Scenes#Indian_Pines

quants représentés par des données séparées, en incorporant les effets visuels et les valeurs de PSNR/SSIM sur toutes les frames récupérées. La stratégie proposée offre des résultats visuellement supérieurs à ceux des autres méthodes. De plus, comme on peut le constater, dans la plupart des bandes des ensembles de données *Indian Pine* et *Cuprite*, les valeurs de PSNR et SSIM obtenues par la méthode suggérée sont supérieures à celles obtenues par les méthodes comparables.

TABLE 4.1 – Les valeurs de PSNR/SSIM obtenues par la reconstruction des images hyperspectrales *Cuprite*, *PaviaU* et *indian Pine* en utilisant différents pourcentage de SR. Pour chaque test, quatre résultats sont fournis : TMac, MF-TV, LRTC-TV, et notre approche proposée HC-BiFR.

SR	10%		20%		30%		40%		50%	
Méthodes	PSNR	SSIM								
<i>Cuprite</i>										
TMac	32.315	0.7736	33.723	0.833	44.081	0.981	50.639	0.992	50.391	0.993
MF-TV	37.928	0.933	39.111	0.947	39.984	0.956	41.034	0.965	42.13	0.973
LRTC-TV	30.591	0.699	32.847	0.793	34.752	0.861	36.554	0.907	38.387	0.939
HC-BiFR	45.246	0.984	48.781	0.993	50.541	0.995	52.723	0.996	54.006	0.997
<i>PaviaU</i>										
TMac	25.648	0.621	27.375	0.731	38.188	0.951	41.735	0.973	45.553	0.9857
MF-TV	31.760	0.703	38.01	0.896	42.04	0.964	43.723	0.977	45.176	0.981
LRTC-TV	24.645	0.627	27.845	0.768	30.005	0.845	31.866	0.96	33.823	0.931
HC-BiFR	41.203	0.974	45.520	0.984	47.701	0.988	49.088	0.991	50.366	0.993
<i>Indian Pine</i>										
TMac	34.770	0.8147	35.936	0.853	37.508	0.896	39.059	0.925	40.146	0.941
MF-TV	36.774	0.822	40.610	0.927	42.058	0.947	43.16	0.959	44.399	0.968
LRTC-TV	34.645	0.7942	37.188	0.864	38.904	0.904	40.453	0.932	41.942	0.951
HC-BiFR	40.870	0.935	43.407	0.957	45.065	0.968	46.186	0.975	47.355	0.981

..

COMPLÉTION D'IMAGES HYPERSPECTRALES VIA UNE FACTORISATION TENSORIELLE
 AVEC INTRODUCTION D'UN TERME DE BI- RÉGULARISATION

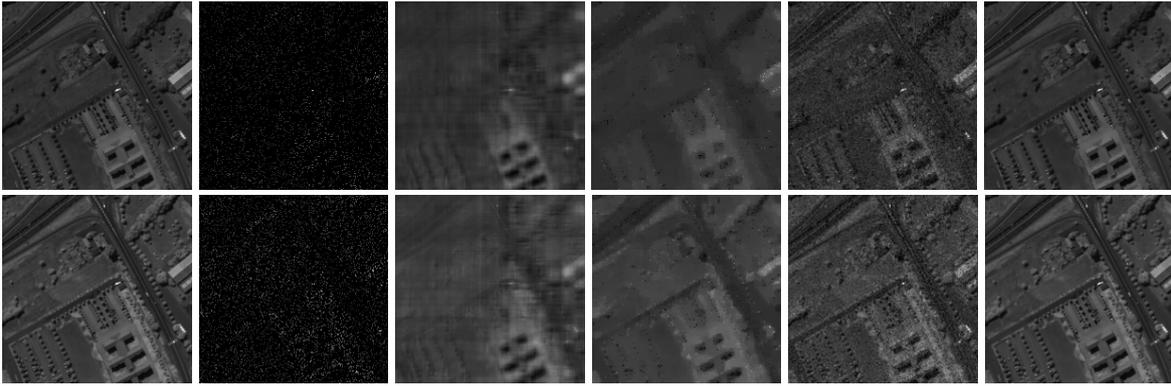


FIGURE 4.1 – Les résultats de complétion de l'ensemble des données *PaviaU*. La première ligne est le résultat à la bande 73 avec un SR=10% et la deuxième ligne est le résultat à la bande 77 avec un SR=15%. De gauche à droite : l'image originale, l'image incomplète, l'image reconstruite par TMac, LRTC-TV, MF-TV, et au moyen de notre algorithme, respectivement.

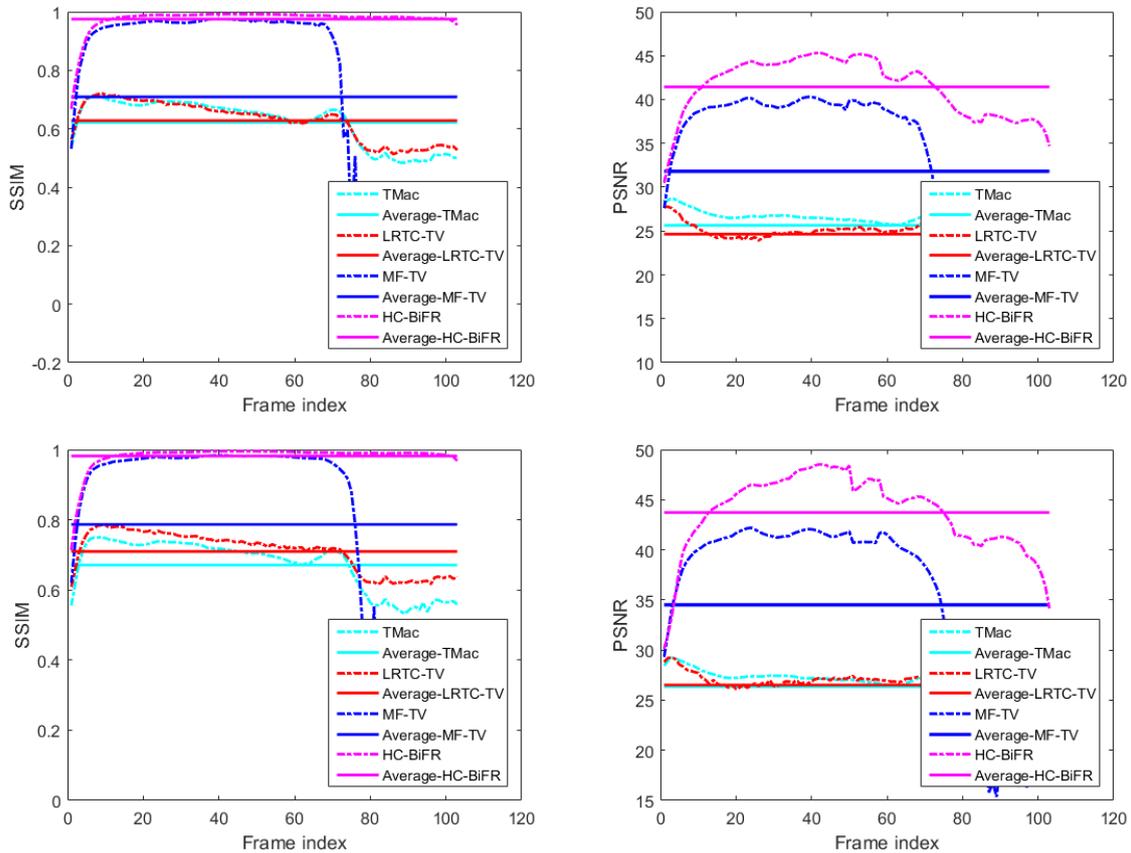


FIGURE 4.2 – La première ligne montre les valeurs PSNR et SSIM de toutes les bandes récupérées de l'image hyperspectrale testée *PaviaU* avec un SR=10% obtenues par TMac, LRTC-TV, MF-TV, et la méthode suggérée, respectivement. La deuxième ligne montre les valeurs PSNR et SSIM de toutes les bandes récupérées de l'image hyperspectrale testée *PaviaU* avec un SR=15% obtenues par TMac, LRTC-TV, MF-TV, et la méthode suggérée, respectivement.

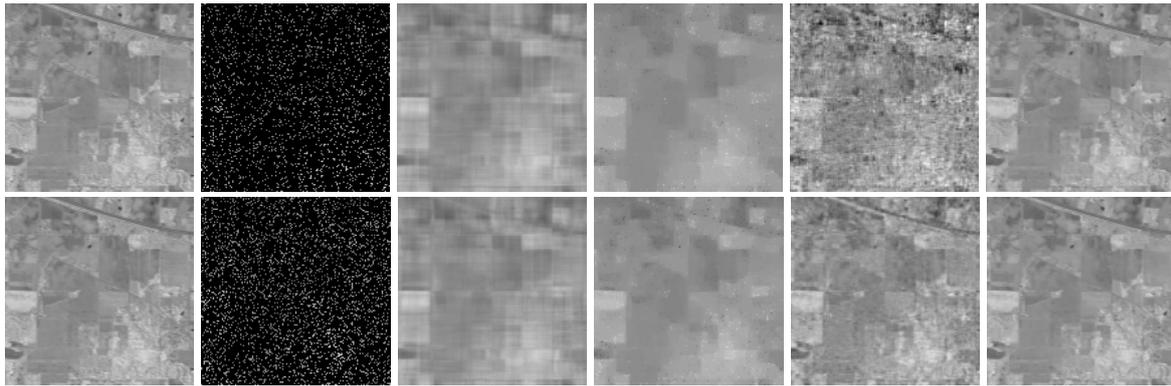


FIGURE 4.3 – Les résultats de complétion de l'ensemble des données *Indian Pine*. La première ligne est le résultat à la bande 51 avec un SR=10% et la deuxième ligne est le résultat à la bande 51 avec un un SR=15%. De gauche à droite : l'image originale, l'image incomplète, l'image reconstruite par TMac, LRTC-TV, MF-TV, et au moyen de notre algorithme, respectivement.

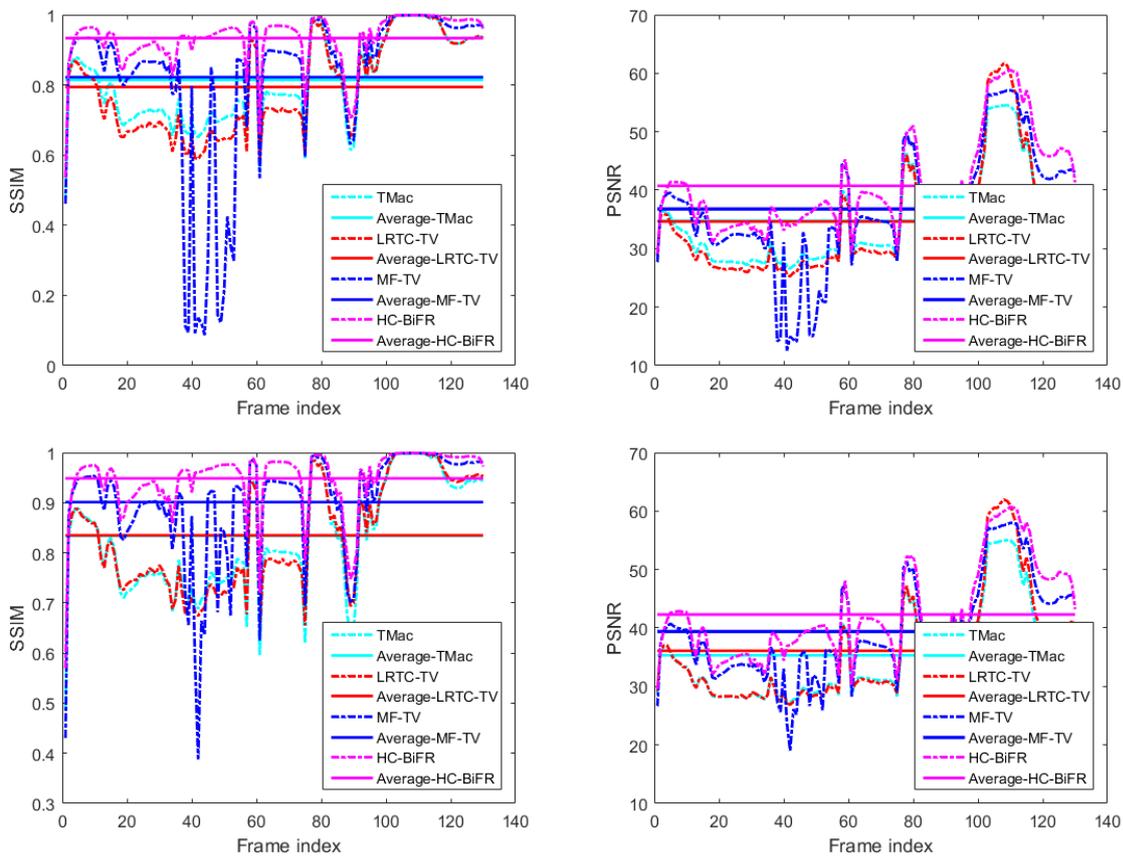


FIGURE 4.4 – La première ligne montre les valeurs PSNR et SSIM de toutes les bandes récupérées de l'image hyperspectrale testée *Indian Pine* avec un SR=10% obtenues par TMac, LRTC-TV, MF-TV, et la méthode suggérée, respectivement. La deuxième ligne montre les valeurs PSNR et SSIM de toutes les bandes récupérées de l'image hyperspectrale testée *Indian Pine* avec un SR=15% obtenues par TMac, LRTC-TV, MF-TV, et la méthode suggérée, respectivement.

COMPLÉTION D'IMAGES HYPERSPECTRALES VIA UNE FACTORISATION TENSORIELLE
 AVEC INTRODUCTION D'UN TERME DE BI- RÉGULARISATION

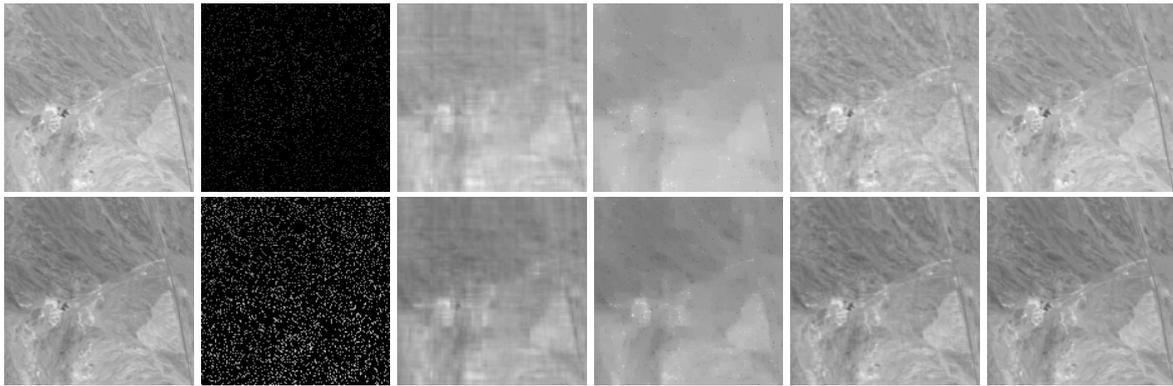


FIGURE 4.5 – Les résultats de complétion de l'ensemble des données *Cuprite*. La première ligne est le résultat à la bande 123 avec un SR=10% et la deuxième ligne est le résultat à la bande 82 avec un SR=15%. De gauche à droite : l'image originale, l'image incomplète, l'image reconstruite par TMac, LRTC-TV, MF-TV, et au moyen de notre algorithme, respectivement.

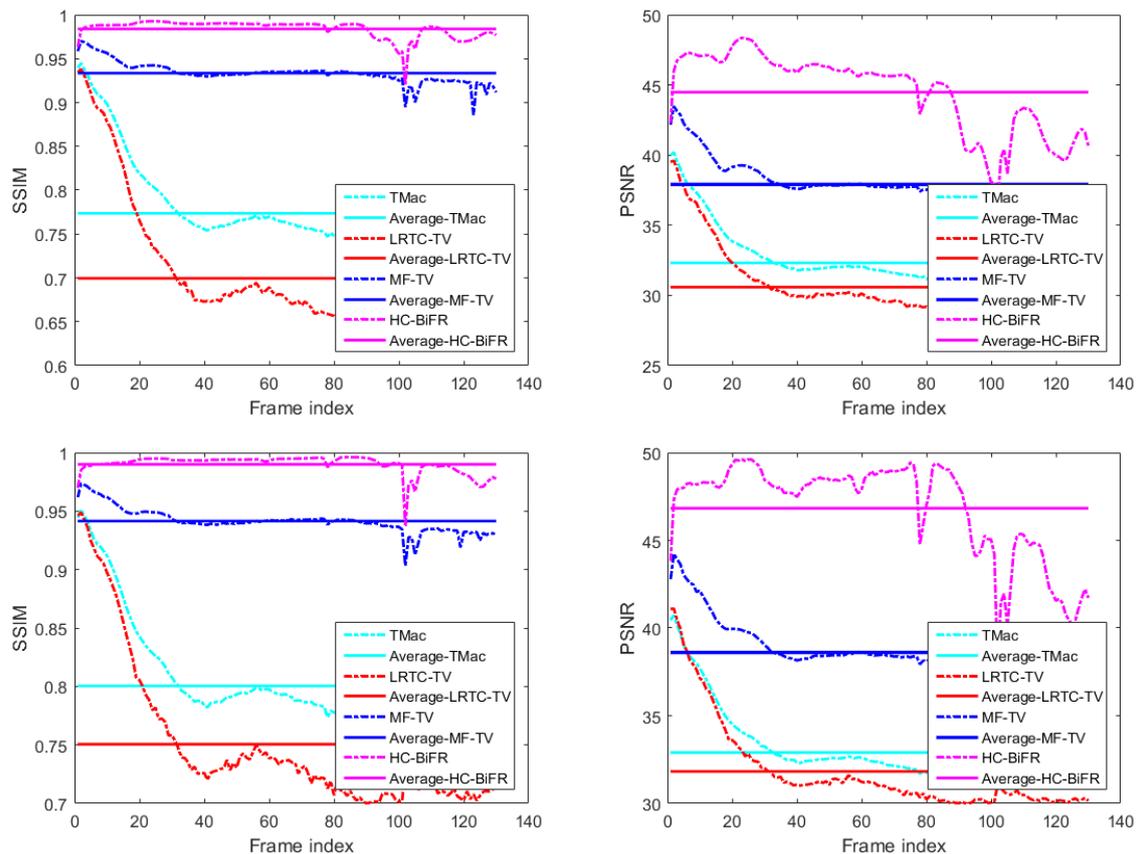


FIGURE 4.6 – La première ligne montre les valeurs PSNR et SSIM de toutes les bandes récupérées de l'image hyperspectrale testée *Cuprite* avec un SR=10% obtenues par TMac, LRTC-TV, MF-TV, et la méthode suggérée, respectivement. La deuxième ligne montre les valeurs PSNR et SSIM de toutes les bandes récupérées de l'image hyperspectrale testée *Cuprite* avec un SR=15% obtenues par TMac, LRTC-TV, MF-TV, et la méthode suggérée, respectivement.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un modèle de complétion des images hyperspectrales HC-BiFR. Ainsi, en plus de l'information de faible rang garanti par la factorisation tensorielle proposée, la contrainte de lissage par morceaux sur le facteur spatial et la contrainte de corrélation sur le facteur spectral sont également exploitées. Le modèle proposé exploite davantage certaines connaissances quant à la structure des images HSI et offre des avantages majeurs pour la reconstruction des détails locaux, notamment pour mettre en valeur les bords intéressants. Ceci a été illustré par des résultats expérimentaux sur plusieurs exemples d'images HSIs réelles. Globalement, nous avons pu constater que l'approche proposée donne de meilleurs résultats que les autres méthodes de complétion tensorielle classiques de la littérature. Cela a été mis en évidence par des simulations numériques. Ensuite, dans le chapitre suivant nous présentons également un autre problème de complétion tensorielle, et que nous allons appliquer à des images couleur.

COMPLÉTION DES TENSEURS DE RANG FAIBLE EN UTILISANT UNE RÉGULARISATION À BASE DE NORME NUCLÉAIRE TRONQUÉE AVEC UNE VARIATION TOTALE NON CONVEXE

5.1	Introduction	85
5.2	Rappels mathématique préliminaires	86
5.3	Approche proposée	89
5.3.1	Du l_0 -gradient dans le cas matriciel au l_0 -TV dans le cas tensoriel	89
5.3.2	Complétion tensorielle via TNNR avec un terme TV non convexe	90
5.3.3	Processus de minimisation	92
5.4	Résultats numériques	94
5.5	Conclusion	98

Lors du processus d’acquisition d’une image couleur, des informations importantes peuvent être perdues en raison du bruit, d’une occlusion ou même d’un capteur défectueux. Par conséquent, il arrive que l’on ait des images couleur avec des pixels manquants et/ou corrompus. La nécessité d’un processus de reconstruction est donc d’un grand intérêt. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons particulièrement à un nouveau modèle de complétion tensorielle dans lequel le point principal est de prédire les valeurs manquantes dans les images couleur. Pour bénéficier de la structure lisse et de la propriété de préservation des bords des images visuelles, nous proposons un modèle de complétion tensorielle qui cherche la parcimonie du gradient via la norme l_0 . Le modèle proposé combine la norme nucléaire tronquée qui garantit la propriété de rang faible et la variation totale non convexe pour exploiter efficacement la propriété de lissage. Plusieurs expériences ont été réalisées afin de démontrer les

performances de la méthode que nous suggérons. Nous la comparons à d'autres approches de complétion tensorielle au moyen de plusieurs indices de performances.

5.1 Introduction

Plusieurs approches existantes d'approximation des matrices à faible rang traitent les données d'entrée de manière bidimensionnelle. Plus précisément, lors de la récupération d'une image couleur, les algorithmes sont appliqués à chaque canal individuellement, puis les résultats sont combinés les uns avec les autres. Le fait que les informations structurelles entre les canaux ne soient pas prises en compte révèle une déficience explicite. Des études récentes considèrent une image couleur comme une donnée 3D et donc sa récupération se formule comme un problème de complétion tensorielle de faible rang [16] [136] [212] [231].

Des études récentes sur le problème de complétion des images couleur portent sur une combinaison de différents types de contraintes à priori. Pan et al. [154] ont proposé une approche qui est capable d'explorer efficacement la parcimonie des données du tenseur au moyen de la transformée en cosinus discrète (En anglais discrete cosine transform (DCT)). Plus précisément, ils introduisent deux modèles de complétion tensorielle basés sur la DCT ainsi que deux algorithmes pour leurs résolutions. Le premier est un problème de minimisation de la norme nucléaire pondérée basé sur la DCT. Le second est problème résolvant un modèle de complétion tensoriel basé sur la DCT. Dans [15], Bengua et al. ont suggéré une approche basée sur le rang de format Train de Tenseurs (TT). Ils ont également suggéré deux algorithmes pour résoudre les problèmes LRTC basés sur l'optimisation du rang d'un TT. Le premier algorithme appelé complétion tensorielle de faible rang de format Train de Tenseurs (TT) simple (SiLRTC-TT) résout un problème d'optimisation basé sur la norme nucléaire TT. Le second algorithme, appelé la factorisation matricielle parallèle de rang bas via tensor train (TMac- TT), utilise un modèle de factorisation matricielle multilinéaire pour approximer le rang TT d'un tenseur, en contournant la SVD. Jia et al. [94] ont également présenté une méthode de complétion des images couleur à partir d'un sous-ensemble aléatoire de leurs pixels corrompus. Leur analyse se focalise sur l'utilisation de la matrice quaternion comme représentation d'images en couleur, ils proposent de résoudre un problème d'optimisation convexe, qui minimise la norme nucléaire de la matrice quaternion, et la norme l_1 des entrées de la matrice quaternion creuse.

Comme nous l'avons mentionné avant, des études existantes ont proposé plusieurs définitions de la norme nucléaire tensorielle. Cependant, elles sont limitées et peuvent ne pas approcher avec précision le rang réel d'un tenseur, et elles n'utilisent pas explicitement la propriété de faible rang dans l'optimisation. Récemment, basé sur la nouvelle définition du produit tenseur-tenseur (voir l'équation (35)), un nouveau schéma de décomposition tensorielle, défini comme la décomposition en valeurs singulières des tenseurs (En anglais tensor singular value decomposition t-SVD), a été proposé dans [99], qui possède certaines propriétés qui sont similaires au cas matriciel. Par conséquent, Zhang et al. [232] ont défini la norme nucléaire tubale (Tubal-NN) comme la somme des normes nucléaires de toutes les tranches frontales dans le domaine de Fourier. Contrairement aux approches basées sur la norme nucléaire qui minimisent la somme de toutes les valeurs singulières, des problèmes de régularisation basée sur une norme nucléaire tronquée TNNR [89] ont été proposés. La norme nucléaire tronquée TNNR est définie comme la norme nucléaire moins la somme des r plus grandes valeurs singulières, de sorte que les informations (correspondant aux plus

petites valeurs singulières) peuvent être filtrées et qu’une récupération très compétitive peut être obtenue. La norme nucléaire tronquée s’est avérée être plus précise et plus robuste dans l’approximation de la fonction du rang dans le cas des matrices et tenseurs [229] [89] [189] [123][142].

Le terme de régularisation variation totale (TV) a été largement utilisé comme un terme efficace pour explorer la structure de lissage par morceaux des données, en raison de sa propriété avantageuse de préservation des bords. Bien qu’il ait été initialement proposé dans les applications de débruitage [191], il a néanmoins été adapté avec succès à diverses applications. Pour les problèmes de complétion tensorielle de faible rang, un terme de variation totale, défini par l_1 TV, a été introduit pour exploiter la régularité spectrale le long de la troisième dimension [93] [95]. Ces méthodes ont atteint des performances remarquables. Cependant, elles n’exploitent que le lissage spectral et ignorent la structure spatiale par morceaux présentée dans le premier et le deuxième mode. En outre, le modèle convexe -basé sur l_1 TV pénalise les grandes amplitudes de gradient, ce qui peut influencer la préservation des bords de l’image. Par conséquent, pour préserver efficacement plus d’informations, une nouvelle TV basée sur la norme l_0 , notée par l_0 TV a été introduite dans [215].

Il existe moins de travaux exploitant le terme l_0 -gradient. Xu et al. [219] ont proposé une méthode efficace basée sur une expression l_0 parcimonie généralisée pour les problèmes de défloutage des mouvements. En raison d’une fraction importante de pixels non nuls dans les images avec plusieurs bandes, Xue et al. [223] ont étendu le l_0 -gradient ci-dessus en un gradient faible et ont converti cette régularisation dans le cadre de la propriété rang bas. Dans [214], Wang et al. ont développé le terme l_0 -gradient pour explorer les informations de la structure spatiale et spectrale et ils l’ont combiné avec un modèle de décomposition Tucker de rang faible. Cependant, les degrés de lissage de ces méthodes sont contrôlés par un paramètre, qui est choisi par les utilisateurs. Pour pallier cette limitation, Ono [149] a proposé une nouvelle projection de l_0 -gradient, qui utilise directement un paramètre pour contrôler le degré de lissage.

Motivé par cela, nous développons un modèle hybride à travers lequel la priorité de rang faible et la propriété de lissage sont étudiées dans le problème de complétion tensorielle en combinant la norme nucléaire tronquée et la variation totale non convexe. Enfin, pour le processus de minimisation nous développons un algorithme de minimisation alternatif qui combine la méthode gradient proximal accéléré et une méthode de projection.

5.2 Rappels mathématique préliminaires

Dans cette section, nous introduisons quelques notations et définitions de base utilisées dans le reste de ce chapitre. Comme nous l’avons déjà mentionné avant, il sera pratique de décomposer un tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ d’ordre 3 en diverses coupes et d’avoir une indexation sur ceux-ci. Les lignes horizontales, latérales et frontales de \mathcal{X} sont désignées par les notations inspirées de Matlab $\mathcal{X}(i, :, :)$, $\mathcal{X}(:, i, :)$ et $\mathcal{X}(:, :, i)$, respectivement. En outre, la coupe frontale $\mathcal{X}(:, :, i)$ est notée comme suit $\mathbf{X}^{(i)}$. Ici, une paire d’opérateurs de pliage (En anglais

fold / **unfold**) sont définis comme suit :

$$\mathbf{unfold}(\mathcal{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(1)} \\ \mathbf{X}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}^{(I_3)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{fold}(\mathbf{unfold}(\mathcal{X})) = \mathcal{X}.$$

Pour donner la définition de la multiplication entre deux tenseurs, nous introduisons le concept de conversion de \mathcal{X} en une matrice circulante en bloc, définie comme suit :

$$\mathbf{bcirc}(\mathcal{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(1)} & \mathbf{X}^{(I_3)} & \mathbf{X}^{(I_3-1)} & \dots & \mathbf{X}^{(2)} \\ \mathbf{X}^{(2)} & \mathbf{X}^{(1)} & \mathbf{X}^{(I_3)} & \dots & \mathbf{X}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{X}^{(I_3)} & \mathbf{X}^{(I_3-1)} & \mathbf{X}^{(I_3-2)} & \dots & \mathbf{X}^{(1)} \end{bmatrix},$$

Ainsi, la définition de la multiplication entre deux tenseurs, notée par produit-T, est donné par :

Définition 35 (Produit-T [99]) Soient $\mathcal{X}_1 \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ et $\mathcal{X}_2 \in \mathbb{R}^{I_2 \times I_4 \times I_3}$ des tenseurs d'ordre trois. Alors le produit tensoriel (produit-T) $\mathcal{X}_1 * \mathcal{X}_2$ est un tenseur de dimension $I_1 \times I_4 \times I_3$ donné par :

$$\mathcal{X}_1 * \mathcal{X}_2 = \mathbf{fold}(\mathbf{bcirc}(\mathcal{X}_1) \cdot \mathbf{unfold}(\mathcal{X}_2)). \quad (5.1)$$

Définition 36 Soit $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ un tenseur donné. La transposée conjuguée de \mathcal{X} , désignée par $\mathcal{X}^T \in \mathbb{R}^{I_2 \times I_1 \times I_3}$, est obtenue en transposant de manière conjuguée chaque tranche frontale, puis en inversant l'ordre des tranches frontales transposées de 2 à I_3 .

Définition 37 Le tenseur \mathcal{Q} est orthogonal au sens du produit-T si :

$$\mathcal{Q} * \mathcal{Q}^T = \mathcal{Q}^T * \mathcal{Q} = \mathcal{I}.$$

Définition 38 (Tenseur f-diagonal) Le tenseur \mathcal{X} est appelé f-diagonal si chaque coupe frontale de \mathcal{X} est une matrice diagonale.

Nous définissons la décomposition en valeurs singulières d'un tenseur, notée par T-SVD.

Définition 39 (La décomposition en valeurs singulières d'un tenseur) Soit $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ un tenseur d'ordre 3, la T-SVD est définie comme suit

$$\mathcal{X} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^T, \quad (5.2)$$

où \mathcal{U} et \mathcal{V} sont orthogonaux de dimensions $I_1 \times I_1 \times I_3$ et $I_2 \times I_2 \times I_3$, respectivement, et \mathcal{S} est un tenseur f-diagonal de dimension $I_1 \times I_2 \times I_3$.

Nous considérons la transformation de Fourier discrète (En anglais Discrete Fourier Transformation (DFT)) des tenseurs. Pour un tenseur \mathcal{X} , nous désignons par $\hat{\mathcal{X}}$ le résultat de la DFT sur \mathcal{X} le long de la 3ème dimension, c'est-à-dire en effectuant la DFT sur tous les frames de \mathcal{X} . En utilisant une commande Matlab définie par `fft`, on a $\hat{\mathcal{X}} = \text{fft}(\mathcal{X}, [], 3)$. De la même manière, nous pouvons calculer \mathcal{X} à partir de $\hat{\mathcal{X}}$ en utilisant la `fft` inverse, c'est-à-dire, $\mathcal{X} = \text{ifft}(\hat{\mathcal{X}}, [], 3)$. En plus, nous définissons $\hat{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ comme une matrice diagonale par bloc dont le i ème bloc sur la diagonale est la i ème tranche frontale $\hat{\mathbf{X}}_{(i)}$ de $\hat{\mathcal{X}}$.

La matrice circulante par blocs peut être diagonalisée par blocs dans le domaine de Fourier, ce qui conduit à :

$$(\mathbf{F}_{I_3} \otimes \mathbf{I}_{I_1}) \cdot \text{bcirc}(\mathcal{X}) \cdot (\mathbf{F}_{I_3}^* \otimes \mathbf{I}_{I_2}) = \hat{\mathbf{X}}.$$

où \mathbf{F}_{I_3} de dimension $I_3 \times I_3$ désigne la matrice de la transformée de Fourier discrète, \otimes désigne le produit de Kronecker, F^* désigne la transposée conjuguée de F , et "." désigne le produit matriciel standard.

Maintenant, nous définissons la norme nucléaire tronquée d'un tenseur (En anglais Tensor Truncated nuclear norm (TTNN)),

Définition 40 (TTNN) *Étant donné un tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$, la norme nucléaire tronquée du tenseur, notée par $\|\mathcal{X}\|_r$ est définie comme la somme de $\min(I_1, I_2) - r$ valeurs singulières minimales*

$$\|\mathcal{X}\|_r = \sum_{i=r+1}^{\min(I_1, I_2)} \sigma_i(\mathcal{X}). \quad (5.3)$$

Théorème 6 ([89]) *Pour toute matrice donnée $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, et toute matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ telles que $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_{r \times r}$, $\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{I}_{r \times r}$, et tout r positif ($r < \min(n, m)$), on a*

$$\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}^T) \leq \sum_{i=r+1}^{\min(n, m)} \sigma_i(\mathbf{X}) \quad (5.4)$$

D'après le théorème 6, et les définitions (40) et (39), la norme nucléaire tronquée d'un tenseur (5.3) précédent peut être reformulée comme suit :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{X}\|_r &= \|\hat{\mathbf{X}}^{(1)}\|_r = \sum_{i=r+1}^{\min(I_1, I_2)} \sigma_i(\hat{\mathbf{X}}^{(1)}) = \|\hat{\mathbf{X}}^{(1)}\|_* - \sum_{i=1}^r \sigma_i(\hat{\mathbf{X}}^{(1)}), \\ &= \|\hat{\mathbf{X}}^{(1)}\|_* - \max_{\substack{\hat{\mathbf{A}}^{(1)}(\hat{\mathbf{A}}^{(1)})^T = \mathbf{I} \\ \hat{\mathbf{Q}}^{(1)}(\hat{\mathbf{Q}}^{(1)})^T = \mathbf{I}}} \text{tr}(\hat{\mathbf{A}}^{(1)} \hat{\mathbf{X}}^{(1)} (\hat{\mathbf{Q}}^{(1)})^T), \\ &= \|\mathcal{X}\|_* - \max_{\substack{\mathcal{A} * \mathcal{A}^T = \mathcal{I} \\ \mathcal{Q} * \mathcal{Q}^T = \mathcal{I}}} \text{tr}(\mathcal{A} * \mathcal{X} * \mathcal{Q}^T). \end{aligned}$$

Définition 41 (La pseudo-norme mixte $l_{1,0}$ [149]) Pour un vecteur donné $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ et des ensembles d'indices $s_1, \dots, s_i, \dots, s_n$, ($1 \leq n \leq m$) qui satisfont les propriétés suivantes

- chaque s_i est un sous-ensemble de $1, \dots, m$,
- $s_i \cap s_l = \emptyset$ pour tout $i \neq l$
- $\cup_{i=1}^n s_i = 1, \dots, m$

La pseudo-norme mixte $l_{1,0}$ de \mathbf{y} est définie comme suit :

$$\|\mathbf{y}\|_{1,0}^s = \left\| \left(\|\mathbf{y}_{s_1}\|_1, \dots, \|\mathbf{y}_{s_1}\|_1, \dots, \|\mathbf{y}_{s_n}\|_1 \right) \right\|_0 \quad (5.5)$$

où \mathbf{y}_{s_i} désigne un sous-vecteur de \mathbf{y} dont ses entrées sont spécifiées par s_i et $\|\cdot\|_0$ calcule le nombre d'entrées non nulles dans (\cdot) .

Définition 42 (Fonction indicatrice) Soit \mathcal{B} un opérateur donné et γ un entier fixe positif, la fonction indicatrice de la pseudo-norme mixte $l_{1,0}$ est définie comme suit

$$I_{\|\mathcal{B}\cdot\|_{1,0}^s}(\mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \|\mathcal{B}\mathbf{y}\|_{1,0}^s \leq \gamma \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.6)$$

5.3 Approche proposée

Nous introduisons un modèle de complétion tensorielle à faible rang basé sur TNNR. De plus, un terme de régularisation TV nonconvexe est inclus pour améliorer les composantes importantes dans les données considérées. Avant de présenter le nouveau modèle de complétion tensorielle basé sur le terme $l_0\text{TV}$ et le terme TNNR, nous allons d'abord passer en revue le terme $l_0\text{TV}$.

5.3.1 Du l_0 -gradient dans le cas matriciel au $l_0\text{-TV}$ dans le cas tensoriel

Le terme de pénalité l_0 -gradient est devenu un outil puissant pour assurer la propriété de préservation des bords en contrôlant globalement le nombre de gradients non nuls [215]. Le terme l_0 -gradient d'une matrice $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{h,v}$ est défini par :

$$\begin{aligned} l_0\text{TV}(\mathbf{Z}) &= \sum C(\|D_1\mathbf{Z}\|_1 + \|D_2\mathbf{Z}\|_1) \\ &= \sum_i^h \sum_j^v C(|\mathbf{z}_{i+1,j} - \mathbf{z}_{i,j}| + |\mathbf{z}_{i,j+1} - \mathbf{z}_{i,j}|) \end{aligned} \quad (5.7)$$

où D_1 et D_2 sont les opérateurs différentiels linéaires du premier ordre dans la première et la deuxième direction de l'image. $C(\mathbf{Z})$ est une fonction binaire qui compte le nombre de gradients non nuls et qui vérifie :

$$C(\mathbf{Z}) := \begin{cases} 1, & \text{si } \mathbf{Z} \neq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.8)$$

Maintenant, en étendant cette définition du l_0 -gradient au cas tensoriel, la définition devient pour un tenseur d'ordre 3 donné $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}^{h,v,b}$ comme suit :

$$l_0\text{TV}(\mathcal{Z}) = \sum_i^h \sum_j^v C \left(\sum_k^b (|\mathcal{Z}_{i+1,j,k} - \mathcal{Z}_{i,j,k}| + |\mathcal{Z}_{i,j+1,k} - \mathcal{Z}_{i,j,k}|) \right) \quad (5.9)$$

où les valeurs des gradients sont définies comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{Z}_{i,j+1,k} - \mathcal{Z}_{i,j,k} = 0, & \text{si } i = h \\ \mathcal{Z}_{i+1,j,k} - \mathcal{Z}_{i,j,k} = 0, & \text{si } j = v \end{cases} \quad (5.10)$$

Ici, le terme $l_0\text{TV}(\mathcal{X})$ compte les valeurs non-nulle de l'information de différence spatiale à l'aide de l'information du troisième mode. En utilisant la définition 41, une autre formulation de $l_0\text{TV}$ devient :

$$l_0\text{TV}(\mathcal{Z}) = \|\mathcal{B}D\mathcal{Z}\|_{1,0}^s \quad (5.11)$$

où l'opérateur D est l'opérateurs différentiel linéaire du premier ordre dans la première et la deuxième direction. L'opérateur \mathcal{B} force les valeurs des gradients à être nulles lorsque $i = h$ et $j = v$.

5.3.2 Complétion tensorielle via TNNR avec un terme TV non convexe

Avant de présenter notre modèle de complétion, nous allons tout d'abord donner une brève introduction au modèle de complétion tensorielle via TNNR.

► Modèle de complétion tensorielle via TNNR

Étant donné un tenseur $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ avec des éléments manquants¹, le problème de complétion tensorielle via la norme nucléaire tronquée $\|\mathcal{X}\|_r$ est formulé comme suit :

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{X}} \|\mathcal{X}\|_* - \max_{\substack{\mathcal{A} * \mathcal{A}^T = \mathcal{I} \\ \mathcal{Q} * \mathcal{Q}^T = \mathcal{I}}} \text{tr}(\mathcal{A} * \mathcal{X} * \mathcal{Q}^T) \\ \text{t.q. } \|\mathcal{P}_\Omega(\mathcal{X}) - \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{M})\|_F \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.12)$$

où \mathcal{A} et \mathcal{Q} sont mis à jour à chaque itération en utilisant la décomposition en valeurs singulières du tenseur à calculer \mathcal{X} . Nous définissons l'opérateur de sélection des r premières colonnes dans la deuxième dimension de \mathcal{U} et \mathcal{V} , avec la notation inspirée par Matlab, utilisée également pour la mise à jour de \mathcal{A} et \mathcal{Q} à chaque itération,

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}(:, 1:r, :)^T, \quad \mathcal{Q} = \mathcal{V}(:, 1:r, :)^T. \quad (5.13)$$

1. $\mathcal{P}_\Omega(\mathcal{M})$ est \mathcal{F} défini dans le chapitre précédent.

Le tenseur \mathcal{X} peut être mis à jour en minimisant la fonction objectif suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{X}} \quad & \|\mathcal{X}\|_* - \text{tr}(\mathcal{A} * \mathcal{X} * \mathcal{Q}^T) \\ \text{s.t.} \quad & \|\mathcal{P}_\Omega(\mathcal{X}) - \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{M})\|_F \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Maintenant nous allons présenter le modèle que nous proposons. Ainsi, comme nous l'avons déjà mentionné, nous développons dans ce chapitre un nouvel algorithme de complétion tensorielle (En anglais tensor completion (TC)), plus particulièrement la complétion des images couleur, en utilisant une combinaison de TNNR et un terme de régularisation TV non convexe, que l'on nomme TC- l_0 TV.

► Complétion tensorielle via TNNR- l_0 TV

La formulation proposée pour le modèle suggéré peut être exprimée par le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{X}} \quad & \frac{\mu}{2} \|\mathcal{P}_\Omega(\mathcal{X}) - \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{M})\|_F^2 - \text{tr}(\mathcal{A} * \mathcal{X} * \mathcal{Q}^T) + \|\mathcal{X}\|_* \\ \text{s.t.} \quad & \|BD\mathcal{X}\|_{1,0}^s \leq \gamma \end{aligned} \quad (5.15)$$

Tout d'abord, une variable auxiliaire \mathcal{W} est introduite, nous réécrivons donc notre problème (5.15) pour obtenir le problème équivalent suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{W}, \mathcal{X}} \quad & \frac{\mu}{2} \|\mathcal{P}_\Omega(\mathcal{X}) - \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{M})\|_F^2 - \text{tr}(\mathcal{A} * \mathcal{X} * \mathcal{Q}^T) + \|\mathcal{X}\|_* + I_{\|\mathcal{B}\cdot\|_{1,0}^s}(\mathcal{W}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{W} = D\mathcal{X} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Ce qui est également équivalent au problème basique suivant :

$$\min_{\mathcal{W}, \mathcal{X}} \quad \frac{\mu}{2} \|\mathcal{P}_\Omega(\mathcal{X}) - \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{M})\|_F^2 - \text{tr}(\mathcal{A} * \mathcal{X} * \mathcal{Q}^T) + \frac{\rho}{2} \|\mathcal{W} - D\mathcal{X}\|_F^2 + \|\mathcal{X}\|_* + I_{\|\mathcal{B}\cdot\|_{1,0}^s}(\mathcal{W}) \quad (5.17)$$

5.3.3 Processus de minimisation

Pour résoudre le problème mentionné précédemment, nous proposons une méthode alternée basée sur une méthode de gradient proximal accéléré [146] et une méthode de projection. L'algorithme du gradient proximal accéléré applique alternativement la méthode du gradient proximal à chaque sous-problème. Tandis que nous considérons la méthode de projection pour calculer la variable auxiliaire que nous avons introduite dans le paragraphe précédent. La fonction objectif est la somme d'une fonction lisse et d'une fonction convexe. Ainsi, soit

f la fonction lisse définie comme suit :

$$f(\mathcal{X}, \mathcal{W}) = \frac{\mu}{2} \|\mathcal{P}_\Omega(\mathcal{X}) - \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{M})\|_F^2 - \text{tr}(\mathcal{A} * \mathcal{X} * \mathcal{Q}^T) + \frac{\rho}{2} \|\mathcal{W} - \mathbf{D}\mathcal{X}\|_F^2 \quad (5.18)$$

Par conséquent, notre problème original est équivalent au problème de minimisation suivant :

$$\min_{\mathcal{W}, \mathcal{X}} f(\mathcal{X}, \mathcal{W}) + \|\mathcal{X}\|_* + I_{\|\mathcal{B}\cdot\|_{1,0}^s}(\mathcal{W}) \quad (5.19)$$

Étape 1 : Estimation du tenseur \mathcal{X}

La méthode du gradient proximal accéléré (En anglais Accelerated Proximal Gradient (APG)) utilise la méthode proposée par Nesterov pour accélérer la convergence du gradient proximal [147]. Au lieu de faire des approximations quadratiques autour de \mathcal{X} , la méthode APG fait l'approximation par rapport à une autre variable \mathcal{Y} qui est une combinaison linéaire de \mathcal{X} . Une modification aussi simple donnera un taux de convergence de $O(1/k^2)$. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [146] [12]. Par conséquent, l'estimation de \mathcal{X} à l'itération $k+1$ est obtenue de manière itérative en utilisant le schéma accéléré du gradient proximal suivant :

$$\begin{cases} t_k = \frac{1 + \sqrt{4t_{k-1}^2 + 1}}{2} \\ w_k = \frac{t_{k-1} - 1}{t_k} \\ \mathcal{Y}_k = \mathcal{X}_k + w_k (\mathcal{X}_k - \mathcal{X}_{k-1}) \\ \mathcal{X}_{k+1} = \text{prox}_{\tilde{\rho}}^{\|\cdot\|_*} (\mathcal{Y}_k - \tilde{\rho}^{-1} \nabla_{\mathcal{Y}_k} f(\mathcal{Y}_k, \mathcal{W}_k)) \end{cases} \quad (5.20)$$

Où $\tilde{\rho} = \frac{\mu}{\rho}$, et nous avons facilement $\nabla_{\mathcal{X}} f(\mathcal{X}, \mathcal{W}) = \mu(\mathcal{P}_\Omega(\mathcal{X}) - \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{M})) - \mathcal{A}_k^T * \mathcal{Q}_k + \rho \mathbf{D}^T (\mathcal{W}_k - \mathbf{D}\mathcal{X})$

En outre, nous désignons par $\text{prox}^{\|\cdot\|_*}$ l'application proximale définie par :

$$\text{Prox}_{\tilde{\rho}}^{\|\cdot\|_*}(\mathcal{Z}) = \arg \min_{\mathcal{X}} \frac{1}{2} \|\mathcal{X} - \mathcal{Z}\|_F^2 + \tilde{\rho} \|\mathcal{X}\|_*$$

L'opérateur proximal du terme de régularisation de la norme nucléaire est donné par l'opérateur de seuillage des valeurs singulières, désigné par $\mathcal{D}_{\tilde{\rho}}(\mathcal{X})$.

$$\mathcal{D}_{\tilde{\rho}}(\mathcal{X}) = \mathcal{U} * \mathcal{S}_{\tilde{\rho}}(\mathcal{S}) * \mathcal{V}^T. \quad (5.21)$$

où $\mathcal{S}_{\tilde{\rho}}$ est l'opérateur de seuillage doux. Dans le cas tensoriel, le seuillage est appliqué sur chaque coupe frontale du tenseur donné $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ à savoir,

$$\mathcal{S}_\tau(\mathcal{X}) = \text{ifft}(\mathcal{S}_\tau(\hat{\mathcal{X}})), \quad (5.22)$$

où

$$\mathcal{S}_\tau(\hat{\mathbf{X}}^{(i)}) = \text{diag}(\max\{\sigma_i - \tau, 0\}_{1 \leq i \leq r}), \quad i = 1, 2, \dots, I_3. \quad (5.23)$$

Étape 2 : Estimation de la variable auxiliaire \mathcal{W}

Maintenant, le sous-problème de \mathcal{W} peut être comme le problème de minimisation sous contrainte suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{W}} \quad & \|\mathcal{W} - \mathcal{X}_{k+1}\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & \|\mathcal{B}\mathcal{W}\|_{1,0}^s \leq \gamma \end{aligned} \quad (5.24)$$

où \mathcal{X}^{k+1} le tenseur reconstruit à l'itération $k+1$ dans l'étape de gradient accéléré.

La résolution du problème (5.24) est effectuée grâce à la proposition suivante.

Proposition 5 ([149]) *Définissons $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ comme un vecteur connu, et γ comme un entier non-négatif. Soit W une matrice binaire diagonale connue, et soit $s_1, \dots, s_i, \dots, s_n (1 \leq n \leq m)$ des ensembles d'indices satisfaisant les conditions de la définition 41. Sans perte de généralité, $\mathbf{W}\mathbf{y} = (\mathbf{y}_{s_1}^T \dots \mathbf{y}_{s_n}^T)^T$ sont supposés. $\mathbf{y}_{s_1} \dots \mathbf{y}_{s_n}$ sont triés par ordre décroissant, à savoir $\|\mathbf{y}_{s_{\bar{1}}}\|_2 > \|\mathbf{y}_{s_{\bar{2}}}\|_2 > \dots > \|\mathbf{y}_{s_{\bar{n}}}\|_2$, où $\mathbf{y}_{s_{\bar{1}}} \dots \mathbf{y}_{s_{\bar{n}}}$ sont obtenus avec le nouvel ordre, et les ensembles d'indices originaux i ont \bar{i} qui leur correspond un par un.*

Dans le problème suivant :

$$\mathbf{z}^* \in \underset{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m}{\text{argmin}} \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|^2 \quad \text{t.q.} \quad \|\mathbf{W}\mathbf{z}\|_{1,0}^s \leq \alpha$$

l'une des solutions optimales est donnée par :

$$\mathbf{z}^* = \begin{cases} \mathbf{y}, & \text{si } \|\mathbf{W}\mathbf{y}\|_{1,0}^s \leq \alpha, \\ \left(\bar{\mathbf{y}}_{s_{\bar{1}}}^\top \dots \bar{\mathbf{y}}_{s_{\bar{n}}}^\top \right)^\top + (\mathbf{I} - \mathbf{W})\mathbf{y}, & \text{si } \|\mathbf{W}\mathbf{y}\|_{1,0}^s > \alpha, \end{cases}$$

où

$$\bar{\mathbf{y}}_{s_{\bar{k}}}^\top := \begin{cases} \mathbf{y}_{s_{\bar{k}}}^\top, & \text{si } k \in \{(1), \dots, (\alpha)\}, \\ \mathbf{0}, & \text{si } k \in \{(\alpha+1), \dots, (n)\} \end{cases}$$

Enfin, notre algorithme peut être résumé comme suit.

Algorithm 8: Algorithme de complétion des images couleur

-
- **Entrées** le tenseur \mathcal{M} avec des données incomplètes, l'ensemble des indices des entrées observées Ω ;
 - **Initialisation** $\mathcal{X}_0 = \mathcal{M}$, t_0 , w_0, μ et ρ
 - **Tant que** la convergence n'est pas atteinte et $k < \max_k$ **Faire**
Étape de gradient accéléré :
 - mettre à jour \mathcal{X}_{k+1} donné par le schéma (5.20)**Étape de projection**
 - mettre à jour \mathcal{W}_{k+1} par la résolution du problème (5.24)
 - Renvoyer** tenseur \mathcal{X}
-

5.4 Résultats numériques

Dans cette section, nous évaluons la performance de reconstruction sur des images couleur de l'algorithme de complétion proposé. Les images *Parthenon*, *House* et *Papper* sont choisies pour nos tests. Les valeurs manquantes sont tirées de manière aléatoire. Nous comparons notre méthode avec trois méthodes de complétion tensorielle, notamment T-TNN [224], LRTC [125], et MF-TV [93].

Le rapport signal sur bruit (PSNR) et la similarité structurelle (SSIM) sont des critères couramment utilisés pour évaluer quantitativement la qualité globale des résultats reconstruits par les différents algorithmes. Les valeurs PSNR et SSIM les plus élevées impliquent généralement un meilleur résultat de reconstruction.

Le tableau 5.1 présente les valeurs de PSNR et SSIM obtenues avec toutes les méthodes comparées sur les trois images choisies avec 90 %, 80 %, 70 %, et 60 % de pixels manquants. Les résultats de PSNR et SSIM les plus élevés sont indiqués en gras. On peut constater que notre algorithme TC- l_0 TV obtient les meilleurs résultats de reconstruction sur la grande majorité des images quel que soit le pourcentage de données manquantes considéré. En moyenne, notre algorithme TC- l_0 TV surpasse les autres méthodes de complétion tensorielle de manière significative et obtient des améliorations en terme de qualité visuelle des images reconstruites. Les figures 5.1, 5.2 et 5.3 montrent une comparaison visuelle des images de reconstruction avec 70 % de pixels manquants. Comme on peut le voir, notre méthode et la méthode T-TNN, qui s'appuient toutes deux sur la propriété de faible rang via la norme nucléaire tronquée, conduisent aux meilleurs résultats visuels. Alors que T-TNN est proche à notre approche en terme de qualité visuelle, notre reconstruction génère beaucoup moins d'artefacts visuels que T-TNN. Car cette dernière ne prend en compte que la propriété de faible rang sans aucune considération de contraintes sur les données à estimer, ce qui montre l'utilité de l'ajout du terme de régularisation l_0 TV dans le modèle de complétion. En plus, on peut voir que les résultats de MF-TV fournissent peu de détails tout au long du processus de reconstruction. De même, on peut remarquer l'absence de quelques pixels lors de la reconstruction en utilisant la méthode LRTC. Nos résultats sont bien meilleurs que ceux

obtenues par les autres méthodes, tant en qualité visuelle qu'en termes des valeurs PSNR et SSIM.

TABLE 5.1 – Les valeurs de PSNR/SSIM obtenues par la reconstruction des images couleur *Parthenon*, *House* et *Papper* en utilisant différents pourcentage (SR) (10%, 20%, 30%, et 40%). Pour chaque test, quatre résultats sont fournis : T-TNN, LRTC, MF-TV, et notre approche proposée.

SR	10%		20%		30%		40%	
	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
<i>Parthenon</i>								
T-TNN	20.91	0.3568	23.98	0.5446	26.18	0.6643	28.06	0.7601
LRTC	20.22	0.3129	23.56	0.4951	25.85	0.6242	27.66	0.7229
MF-TV	16.96	0.2636	19.28	0.3246	23.92	0.5107	29.33	0.7563
TC-l_0TV	21.29	0.3701	24.13	0.5572	26.18	0.6722	28.26	0.7564
<i>House</i>								
T-TNN	20.34	0.3817	24.81	0.6241	27.92	0.7538	30.32	0.8295
LRTC	19.77	0.3533	24.54	0.6037	27.61	0.7380	30.10	0.8208
MF-TV	9.378	0.0496	17.68	0.3116	26.68	0.7640	28.33	0.8553
TC-l_0TV	20.59	0.4112	25.18	0.6142	28.12	0.7651	30.63	0.8297
<i>Papper</i>								
T-TNN	18.78	0.3874	22.81	0.6289	25.71	0.7616	28.43	0.8521
LRTC	18.39	0.3689	22.60	0.6180	25.47	0.7520	28.56	0.8472
MF-TV	8.259	0.0608	13.76	0.2140	20.86	0.5117	28.75	0.8264
TC-l_0TV	19.86	0.4241	23.30	0.6377	26.16	0.7734	28.75	0.8608

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré un nouveau modèle de complétion d'images couleur en introduisant un terme de régularisation de variation totale non convexe, afin d'estimer et d'améliorer globalement les contours importants. En outre, nous avons intégré la norme nucléaire tronquée pour présenter la propriété de rang faible des méthodes de complétion tensorielle. L'idée principale est d'incorporer la norme l_0 sur les images de différence spatiale sans ignorer l'information spectrale. Pour montrer l'efficacité de l'algorithme proposé sur les images couleur, différentes simulations numériques ont été réalisées sur un tenseur d'ordre trois. La méthode proposée a démontré une amélioration considérable en terme de qualité visuelle et quantitative.

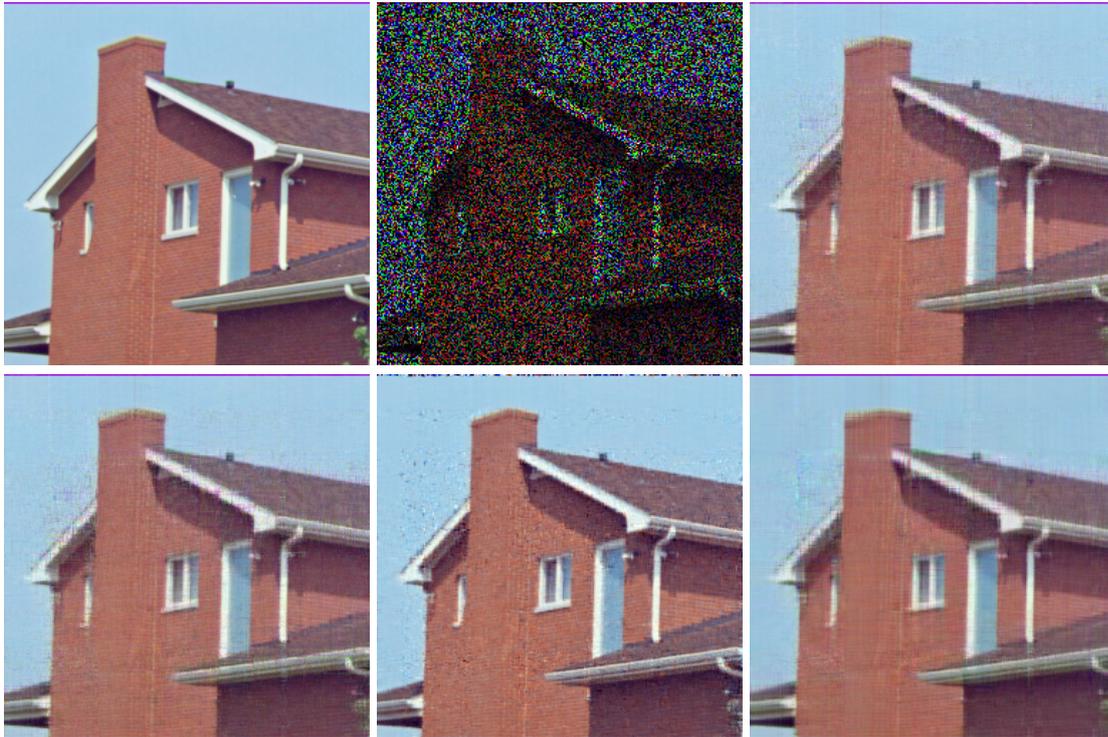


FIGURE 5.1 – Résultats de la comparaison visuelle de l'image *House* récupérée. De gauche à droite et en bas, l'image originale, l'image incomplète avec 70% de pixels manquants, les résultats reconstruits par T-TNN, LRTC, MF-TV, et notre algorithme proposé respectivement.

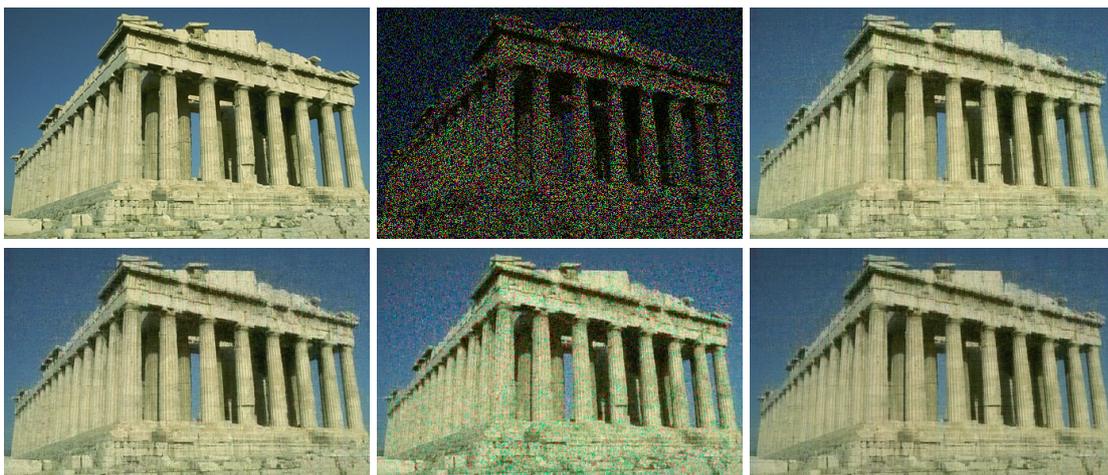


FIGURE 5.2 – Résultats de la comparaison visuelle de l'image *Parthenon* récupérée. De gauche à droite et en bas, l'image originale, l'image incomplète avec 70% de pixels manquants, les résultats reconstruits par T-TNN, LRTC, MF-TV, et notre algorithme proposé respectivement.

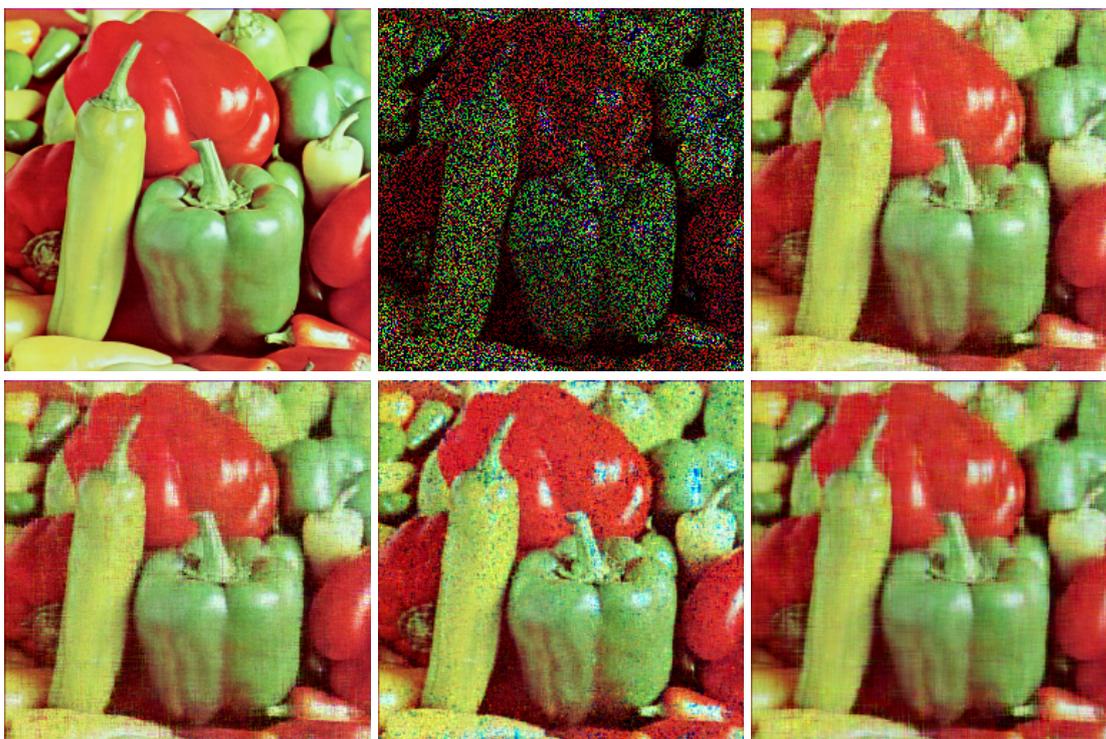


FIGURE 5.3 – Résultats de la comparaison visuelle de l'image *Pepper* récupérée. De gauche à droite et en bas, l'image originale, l'image incomplète avec 70% de pixels manquants, les résultats reconstruits par T-TNN, LRTC, MF-TV, et notre algorithme proposé respectivement.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Au cours de ce travail de thèse nous avons développé différentes contributions, dans trois directions majeures, à savoir l'amélioration de nouveaux modèles, dans lesquels nous introduisons différentes décompositions tensorielles, ainsi que certaines contraintes validées par différents termes de régularisation. La deuxième direction concerne le développement des algorithmes d'optimisation déterministes utilisés dans le processus de résolution des modèles suggérés, ainsi que la dérivation d'algorithmes efficaces. Ensuite, de nombreuses applications ont été considérées afin de démontrer l'efficacité de nos algorithmes. De même différentes données multidimensionnelles ont été traitées dans ces applications. Dans la première contribution, nous avons considéré un problème de décomposition de tenseurs d'ordre N , à savoir la décomposition CP. Ce problème inverse consiste à factoriser un tenseur d'ordre N en une somme minimale de tenseurs de rang 1. Puisque ce problème inverse est souvent mal posé, l'utilisation de la contrainte de non-négativité, en plus d'une contrainte de parcimonie sur les matrices facteur de la décomposition CP permet de surmonter cette difficulté et garantit l'existence de la solution. Par ailleurs, dans l'application de l'analyse des données de spectroscopie de fluorescence, les spectres et les concentrations des variables latentes sont généralement non-négatifs, et donc peuvent être modélisés par une décomposition CP non-négative. Par conséquent, nous avons développé un algorithme original *Primal-Dual*, ce qui nous a permis de dériver un nouvel algorithme CP-PDPG, insensible aux problèmes de surestimation. Nous avons également prouvé sa convergence théorique sous des conditions légères. Enfin, nos résultats sont validés à travers l'analyse des données de spectroscopie de fluorescence. Dans la deuxième contribution, nous avons présenté un nouveau modèle de complétion tensorielle de faible rang, dans lequel nous avons appliqué la factorisation décomposant le tenseur comme le produit tenseur-matrice mode-3 d'un tenseur de faible dimension et une matrice de faible dimension. Une combinaison des propriétés de lissage par morceaux et la contrainte de cohérence entre les bandes spectrales conduisant à une double régularisation, a été également incorporée dans le modèle suggéré. La réalisation de certaines simulations numériques sur des images HSIs avec des données manquantes en utilisant notre algorithme a montré l'efficacité de notre approche. Finalement, une dernière contribution a été présentée, dans laquelle nous nous sommes intéressés au développement d'un algorithme de minimisation alternatif, combinant un algorithme du gradient proximal accéléré pour une étape convexe et un opérateur de projection pour une étape non convexe. A cet égard, nous avons proposé un nouveau modèle de complétion tensorielle qui combine la norme nucléaire tronquée et la variation totale non convexe. Enfin, l'application de notre algorithme aux images couleurs avec des données manquantes a permis d'efficacement prédire les valeurs manquantes, de bénéficier de la structure lisse, et de préserver les bords des images couleurs. Cependant, l'un des inconvénients des méthodes suggérées tout au long de ce manuscrit, est le fait qu'elles peuvent s'avérer toujours très difficile de régler les paramètres de régularisation, Ces paramètres doivent toujours être choisis arbitrairement par les utilisateurs finaux. Une autre limitation qui peut être également rencontrée durant le traitement de ces méthodes, est que parfois lorsque des données réelles sont considérées, ces méthodes peuvent devenir très coûteuses en terme de temps de calcul.

Nos recherches futures concerneront l'extension de l'analyse théorique des approches

étudiées tout au long de cette thèse à d'autres types de décomposition (Tucker, termes-blocs, etc.), et leur adaptation à d'autres problèmes de données manquantes. Nous étudierons également d'autres méthodes d'optimisation afin de concevoir des versions accélérées qui donnent de meilleurs taux de convergence. D'autres tests pourraient être effectués pour mieux exploiter la richesse des approches présentées : autres types de termes de régularisation, opérateurs de seuillages pondérés, etc. Un moyen d'automatiser le processus de recherche des paramètres de régularisation serait également très intéressant.

ANNEXE

Annexe A

Les étapes de notre preuve sont très similaires à l'analyse fournie par N. Angelia et O. Asuman dans [145] dans le contexte de la dualité lagrangienne, où ils considèrent un problème d'optimisation primal convexe et son dual lagrangien. Ensuite, avant de prouver le théorème 4, nous énoncerons le lemme suivant :

Lemme 2 Soient $\{\mathbf{A}_k^{(n)}\}$ et $\{\mathbf{Y}_k^{(n)}\}$ les suites générées par l'algorithme du sous-gradient. On a alors :

1. Pour tout $\mathbf{A}^{(n)} \in U$ et pour tout $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_{k+1}^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}\|^2 \leq & \|\mathbf{A}_k^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}\|^2 - 2\sigma^{(n)} \left(g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)}) - g(\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)}) \right) \\ & + (\sigma^{(n)})^2 \|\partial_{\mathbf{A}^{(n)}} g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)})\|^2 \end{aligned}$$

2. Pour tout $\mathbf{Y}^{(n)} \in V^*$ et pour tout $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Y}_{k+1}^{(n)} - \mathbf{Y}^{(n)}\|^2 \leq & \|\mathbf{Y}_k^{(n)} - \mathbf{Y}^{(n)}\|^2 + 2\tau^{(n)} \left(g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)}) - g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}^{(n)}) \right) \\ & + (\tau^{(n)})^2 \|\partial_{\mathbf{Y}^{(n)}} g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)})\|^2 \end{aligned}$$

Preuve 2 En ce qui concerne la première inégalité du lemme 2, pour tout $\mathbf{A}_k^{(n)} \in U$ et tout $k \geq 0$.

Concernant la première inégalité du lemme 2, pour tout $\mathbf{A}_k^{(n)} \in U$ et toute $k \geq 0$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_{k+1}^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}\|^2 &= \|P_U\{\mathbf{A}_k^{(n)} - \sigma^{(n)} \partial_{\mathbf{A}^{(n)}} g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)})\} - \mathbf{A}^{(n)}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{A}_k^{(n)} - \sigma^{(n)} \partial_{\mathbf{A}^{(n)}} g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)}) - \mathbf{A}^{(n)}\|^2 \\ &= \|\mathbf{A}_k^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}\|^2 - 2\sigma^{(n)} (\mathbf{A}_k^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)})^T \partial_{\mathbf{A}^{(n)}} g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)}) \\ &\quad + (\sigma^{(n)})^2 \|\partial_{\mathbf{A}^{(n)}} g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)})\|^2 \end{aligned}$$

Puisque la fonction $g(\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{Y}^{(n)})$ est convexe par rapport $\mathbf{A}^{(n)}$ pour chaque $\mathbf{Y}^{(n)} \in V^*$, et comme $\partial_{\mathbf{A}^{(n)}} g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)})$ est le sous-gradient de $g(\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)})$ par rapport à $\mathbf{A}^{(n)}$

avec $\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{A}_k^{(n)}$, nous obtenons pour tout $\mathbf{A}^{(n)}$

$$\partial_{\mathbf{A}^{(n)}} g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)})^T (\mathbf{A}^{(n)} - \mathbf{A}_k^{(n)}) \leq g(\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)}) - g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)})$$

ou de manière équivalente

$$-\partial_{\mathbf{A}^{(n)}} g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)})^T (\mathbf{A}_k^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}) \leq g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)}) - g(\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)})$$

Par conséquent, pour tout $\mathbf{A}_k^{(n)} \in U$ et tout $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_{k+1}^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}\|^2 &\leq \|\mathbf{A}_k^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}\|^2 - 2\sigma^{(n)} (g(\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)}) - g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)})) \\ &\quad + (\sigma^{(n)})^2 \|\partial_{\mathbf{A}^{(n)}} g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)})\|^2 \end{aligned}$$

2. De la même manière, et en utilisant la concavité de la fonction $g(\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{Y}^{(n)})$ par rapport à $\mathbf{Y}^{(n)}$ pour chaque $\mathbf{A}^{(n)} \in U$, nous pouvons établir la deuxième inégalité du Lemme 2.

Maintenant, nous allons donner la preuve du Lemme 1 :

Preuve 3 En utilisant le premier point du lemme 2 et l'hypothèse de bornitude de $\partial_{\mathbf{A}^{(n)}} g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)})$, nous avons pour tout $\mathbf{A}^{(n)} \in U$ et tout $i \geq 0$,

$$\|\mathbf{A}_{i+1}^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}\|^2 \leq \|\mathbf{A}_i^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}\|^2 - 2\sigma^{(n)} \left(g(\mathbf{A}_i^{(n)}, \mathbf{Y}_i^{(n)}) - g(\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{Y}_i^{(n)}) \right) + (\sigma^{(n)})^2 L^2$$

par conséquent,

$$g(\mathbf{A}_i^{(n)}, \mathbf{Y}_i^{(n)}) - g(\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{Y}_i^{(n)}) \leq \frac{1}{2\sigma^{(n)}} \left(\|\mathbf{A}_i^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}\|^2 - \|\mathbf{A}_{i+1}^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}\|^2 \right) + \frac{\sigma^{(n)} L^2}{2}$$

Faisons maintenant la somme de la dernière relation de $i = 0, \dots, k-1$, nous obtenons pour tout $\mathbf{A}^{(n)} \in U$ et $i \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} \left(g(\mathbf{A}_i^{(n)}, \mathbf{Y}_i^{(n)}) - g(\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{Y}_i^{(n)}) \right) &\leq \frac{1}{2\sigma^{(n)}} \left(\|\mathbf{A}_0^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}\|^2 - \|\mathbf{A}_k^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}\|^2 \right) \\ &\quad + \frac{k\sigma^{(n)} L^2}{2} \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} g(\mathbf{A}_i^{(n)}, \mathbf{Y}_i^{(n)}) - \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} g(\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{Y}_i^{(n)}) \leq \frac{\|\mathbf{A}_0^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}\|^2}{2\sigma^{(n)}k} + \frac{\sigma^{(n)}L^2}{2}$$

Comme la fonction $g(\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{Y}^{(n)})$ est concave par rapport $\mathbf{Y}^{(n)}$ pour toute $\mathbf{A}^{(n)} \in U$ fixe, on a,

$$\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} g(\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{Y}_i^{(n)}) \leq g(\mathbf{A}^{(n)}, \widehat{\mathbf{Y}}_i^{(n)})$$

En combinant les deux relations précédentes, nous obtenons pour tout $\mathbf{A}^{(n)} \in U$ et $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} g(\mathbf{A}_i^{(n)}, \mathbf{Y}_i^{(n)}) - g(\mathbf{A}^{(n)}, \widehat{\mathbf{Y}}_k^{(n)}) \leq \frac{\|\mathbf{A}_0^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}\|^2}{2\sigma^{(n)}k} + \frac{\sigma^{(n)}L^2}{2}$$

établissant ainsi la relation (3.31).

De la même manière, en utilisant le deuxième point du Lemme 2, la convexité de la fonction g par rapport à $\mathbf{A}^{(n)}$ et l'hypothèse de bornitude de $\partial_{\mathbf{Y}^{(n)}} g(\mathbf{A}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_k^{(n)})$, nous pouvons établir la deuxième relation (3.32) dans le lemme 2.

Maintenant, nous allons établir la preuve du théorème 4.

Preuve 4 Utilisant $\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{A}_*^{(n)}$ et $\mathbf{Y}^{(n)} = \mathbf{Y}_*^{(n)}$ dans les relations (3.31) et (3.32), respectivement, nous obtenons pour tout $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} g(\mathbf{A}_i^{(n)}, \mathbf{Y}_i^{(n)}) - g(\mathbf{A}_*^{(n)}, \widehat{\mathbf{Y}}_k^{(n)}) &\leq \frac{\|\mathbf{A}_0^{(n)} - \mathbf{A}_*^{(n)}\|^2}{2\sigma^{(n)}k} + \frac{\sigma^{(n)}L^2}{2} \\ - \frac{\|\mathbf{Y}_0^{(n)} - \mathbf{Y}_*^{(n)}\|^2}{2\tau^{(n)}k} - \frac{\tau^{(n)}L^2}{2} &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} g(\mathbf{A}_i^{(n)}, \mathbf{Y}_i^{(n)}) - g(\widehat{\mathbf{A}}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_*^{(n)}) \end{aligned}$$

comme U et V^* sont des espaces convexes, donc $\widehat{\mathbf{A}}_k^{(n)} \in U$ et $\widehat{\mathbf{Y}}_k^{(n)} \in V^*$ pour tout $k \geq 1$. Par conséquent, la relation de point-selle (5.16), nous avons

$$g(\mathbf{A}_*^{(n)}, \widehat{\mathbf{Y}}_k^{(n)}) \leq g(\mathbf{A}_*^{(n)}, \mathbf{Y}_*^{(n)}) \leq g(\widehat{\mathbf{A}}_k^{(n)}, \mathbf{Y}_*^{(n)})$$

En combinant les trois relations précédentes, nous obtenons donc,

$$-\frac{\|\mathbf{Y}_0^{(n)} - \mathbf{Y}_*^{(n)}\|^2}{2\tau^{(n)}k} - \frac{\tau^{(n)}L^2}{2} \leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} g(\mathbf{A}_i^{(n)}, \mathbf{Y}_i^{(n)}) - g(\mathbf{A}_*^{(n)}, \mathbf{Y}_*^{(n)}) \leq \frac{\|\mathbf{A}_0^{(n)} - \mathbf{A}_*^{(n)}\|^2}{2\sigma^{(n)}} + \frac{\sigma^{(n)}L^2}{2} \quad (5.25)$$

De plus, comme $\widehat{\mathbf{A}}^{(n)} \in U$ et $\widehat{\mathbf{Y}}^{(n)} \in V^*$ pour tout $k \geq 1$, utilisant le lemme 2 avec $\mathbf{A}^{(n)} = \widehat{\mathbf{A}}^{(n)}$

et $\mathbf{Y}^{(n)} = \widehat{\mathbf{Y}}^{(n)}$, nous obtenons pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} g(\mathbf{A}_i^{(n)}, \mathbf{Y}_i^{(n)}) - g(\widehat{\mathbf{A}}_k^{(n)}, \widehat{\mathbf{Y}}_k^{(n)}) &\leq \frac{\|\mathbf{A}_0^{(n)} - \widehat{\mathbf{A}}_k^{(n)}\|^2}{2\sigma^{(n)}k} + \frac{\sigma^{(n)}L^2}{2} \\ -\frac{\|\mathbf{Y}_0^{(n)} - \widehat{\mathbf{Y}}_k^{(n)}\|^2}{2\tau^{(n)}k} - \frac{\tau^{(n)}L^2}{2} &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} g(\mathbf{A}_i^{(n)}, \mathbf{Y}_i^{(n)}) - g(\widehat{\mathbf{A}}_k^{(n)}, \widehat{\mathbf{Y}}_k^{(n)}) \end{aligned}$$

En multipliant par -1 les relations précédentes et en les combinant, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} -\frac{\|\mathbf{A}_0^{(n)} - \widehat{\mathbf{A}}_k^{(n)}\|^2}{2\sigma^{(n)}k} - \frac{\sigma^{(n)}L^2}{2} &\leq g(\widehat{\mathbf{A}}_k^{(n)}, \widehat{\mathbf{Y}}_k^{(n)}) - \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} g(\mathbf{A}_i^{(n)}, \mathbf{Y}_i^{(n)}) \leq \\ &\frac{\|\mathbf{A}_0^{(n)} - \widehat{\mathbf{A}}_k^{(n)}\|^2}{2\sigma^{(n)}} + \frac{\sigma^{(n)}L^2}{2} \end{aligned} \quad (5.26)$$

En utilisant cette dernière relation ainsi que (5.25), nous démontrons finalement le résultat énoncé par le théorème de convergence 4.

Annexe B

Dans cette annexe, nous fournissons la preuve de la proposition 4. Tout d'abord, nous avons besoin des résultats suivants :

Lemme 3 Soit $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, un vecteur $\mathbf{x} \in Z$ égale à $P_Z\{\mathbf{z}\}$ si et seulement si :

$$\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{z} - \mathbf{x} \rangle \leq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in Z \quad (5.27)$$

Preuve 5 Par la définition de la projection orthogonale, $P_Z\{\mathbf{z}\}$ is the minimizer of $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2$ sur tout $\mathbf{x} \in Z$, En plus, si un vecteur $\mathbf{z} \in Z$ minimise $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, alors $\langle \mathbf{y} - \mathbf{z}, \nabla f(\mathbf{z}) \rangle \geq 0, \forall \mathbf{y} \in Z$. Nous avons donc :

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \quad (5.28)$$

et par conséquent, on a :

$$\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{z} - \mathbf{x} \rangle \leq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in Z \quad (5.29)$$

Finalement, la preuve de la proposition 4 est donné par :

Preuve 6 Supposons que $\mathbf{z}^* = P_Z\{\mathbf{z}^* - r\mathbf{h}(\mathbf{z}^*)\}$, alors, en utilisons le lemme 3, nous avons :

$$\langle \mathbf{z} - \mathbf{z}^*, -r\mathbf{h}(\mathbf{z}^*) \rangle \leq 0 \quad \forall \mathbf{z} \in Z \quad (5.30)$$

et puisque r est positif, il s'ensuit que \mathbf{z}^* résout l'inégalité (3.6). Inversement, supposons que \mathbf{z}^* résout l'inégalité (3.6), alors :

$$\langle \mathbf{z} - \mathbf{z}^*, r\mathbf{h}(\mathbf{z}^*) \rangle \leq 0 \quad \forall \mathbf{z} \in Z \quad (5.31)$$

qui peut être réécrit comme suit :

$$\langle \mathbf{z} - \mathbf{z}^*, \mathbf{z}^* - (\mathbf{z}^* - r\mathbf{h}(\mathbf{z}^*)) \rangle \leq 0 \quad \forall \mathbf{z} \in Z \quad (5.32)$$

et en utilisant le lemme 3, on obtient

$$\mathbf{z}^* = P_Z\{\mathbf{z}^* - r\mathbf{h}(\mathbf{z}^*)\} \quad (5.33)$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Hervé ABDI. “Singular value decomposition (SVD) and generalized singular value decomposition”. In : *Encyclopedia of measurement and statistics* (2007), p. 907-912.
- [2] Hédÿ ATTOUCH, Jérôme BOLTE, Patrick REDONT et Antoine SOUBEYRAN. “Proximal alternating minimization and projection methods for nonconvex problems: An approach based on the Kurdyka-Łojasiewicz inequality”. In : *Mathematics of operations research* 35.2 (2010), p. 438-457.
- [3] Hedy ATTOUCH, Jérôme BOLTE et Benar Fux SVAITER. “Convergence of descent methods for semi-algebraic and tame problems: proximal algorithms, forward-backward splitting, and regularized Gauss-Seidel methods”. In : *Mathematical Programming* 137.1 (2013), p. 91-129.
- [4] Maria AXELSSON, Ola FRIMAN, Trym Vegard HAAVARDSHOLM et Ingmar RENHORN. “Target detection in hyperspectral imagery using forward modeling and in-scene information”. In : *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing* 119 (2016), p. 124-134.
- [5] Nicholas AYACHE. “Medical computer vision, virtual reality and robotics”. In : *Image and vision computing* 13.4 (1995), p. 295-313.
- [6] Francis BACH, Rodolphe JENATTON, Julien MAIRAL, Guillaume OBOZINSKI et al. “Optimization with sparsity-inducing penalties”. In : *Foundations and Trends® in Machine Learning* 4.1 (2012), p. 1-106.
- [7] Subhabrata BANERJEE, Charles S GULAS et Easwar IYER. “Shades of green: A multidimensional analysis of environmental advertising”. In : *Journal of advertising* 24.2 (1995), p. 21-31.
- [8] RC BANSAL. “Optimization methods for electric power systems: An overview”. In : *International Journal of Emerging Electric Power Systems* 2.1 (2005).
- [9] Chenglong BAO, Bin DONG, Likun HOU, Zuowei SHEN, Xiaoqun ZHANG et Xue ZHANG. “Image restoration by minimizing zero norm of wavelet frame coefficients”. In : *Inverse problems* 32.11 (2016), p. 115004.
- [10] Heinz H BAUSCHKE, Patrick L COMBETTES et al. *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*. T. 408. Springer, 2011.
- [11] Fermín SV BAZÁN. “CGLS-GCV: a hybrid algorithm for low-rank-deficient problems”. In : *Applied numerical mathematics* 47.2 (2003), p. 91-108.
- [12] Amir BECK et Marc TEBOULLE. “A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems”. In : *SIAM journal on imaging sciences* 2.1 (2009), p. 183-202.

- [13] Hanna BECKER, Laurent ALBERA, Pierre COMON, J-C NUNES, Rémi GRIBONVAL, Julien FLEUREAU, Philippe GUILLOTTEL et Isabelle MERLET. “SISSY: An efficient and automatic algorithm for the analysis of EEG sources based on structured sparsity”. In : *NeuroImage* 157 (2017), p. 157-172.
- [14] José Yunier BELLO CRUZ. “On proximal subgradient splitting method for minimizing the sum of two nonsmooth convex functions”. In : *Set-Valued and Variational Analysis* 25.2 (2017), p. 245-263.
- [15] Johann A BENGUA, Ho N PHIEN, Hoang Duong TUAN et Minh N DO. “Efficient tensor completion for color image and video recovery: Low-rank tensor train”. In : *IEEE Transactions on Image Processing* 26.5 (2017), p. 2466-2479.
- [16] Johann A BENGUA, Ho N PHIEN, Hoang Duong TUAN et Minh N DO. “Efficient tensor completion for color image and video recovery: Low-rank tensor train”. In : *IEEE Transactions on Image Processing* 26.5 (2017), p. 2466-2479.
- [17] Marcelo BERTALMIO, Guillermo SAPIRO, Vincent CASELLES et Coloma BALLESTER. “Image inpainting”. In : *Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. 2000, p. 417-424.
- [18] Marcelo BERTALMIO, Guillermo SAPIRO, Vincent CASELLES et Coloma BALLESTER. “Image inpainting”. In : *Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. 2000, p. 417-424.
- [19] Dimitri P BERTSEKAS. “Tsitsiklis, Parallel and Distributed Computation”. In : *Prentice Hall* 3 (1989), p. 191-233.
- [20] Silvia BONETTINI et Marco PRATO. “New convergence results for the scaled gradient projection method”. In : *Inverse Problems* 31.9 (2015), p. 095008.
- [21] Folkmar BORNEMANN et Tom MÄRZ. “Fast image inpainting based on coherence transport”. In : *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 28.3 (2007), p. 259-278.
- [22] A BOUHAMIDI et K JBILOU. “Sylvester Tikhonov-regularization methods in image restoration”. In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 206.1 (2007), p. 86-98.
- [23] Stephen BOYD, Neal PARIKH, Eric CHU, Borja PELEATO, Jonathan ECKSTEIN et al. “Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers”. In : *Foundations and Trends® in Machine learning* 3.1 (2011), p. 1-122.
- [24] David J BRADY. *Optical imaging and spectroscopy*. John Wiley & Sons, 2009.
- [25] Kristian BREDIES. “A forward–backward splitting algorithm for the minimization of non-smooth convex functionals in Banach space”. In : *Inverse Problems* 25.1 (2008), p. 015005.
- [26] John BREWER. “Kronecker products and matrix calculus in system theory”. In : *IEEE Transactions on circuits and systems* 25.9 (1978), p. 772-781.

- [27] Rasmus BRO. “PARAFAC. Tutorial and applications”. In : *Chemometrics and intelligent laboratory systems* 38.2 (1997), p. 149-171.
- [28] Rasmus BRO et Henk AL KIERS. “A new efficient method for determining the number of components in PARAFAC models”. In : *Journal of Chemometrics: A Journal of the Chemometrics Society* 17.5 (2003), p. 274-286.
- [29] Jian-Feng CAI, Emmanuel J CANDÈS et Zuowei SHEN. “A singular value thresholding algorithm for matrix completion”. In : *SIAM Journal on optimization* 20.4 (2010), p. 1956-1982.
- [30] Emmanuel J CANDÈS, Justin ROMBERG et Terence TAO. “Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information”. In : *IEEE Transactions on information theory* 52.2 (2006), p. 489-509.
- [31] J Douglas CARROLL et Jih-Jie CHANG. “Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an N-way generalization of “Eckart-Young” decomposition”. In : *Psychometrika* 35.3 (1970), p. 283-319.
- [32] Raymond B CATTELL. ““Parallel proportional profiles” and other principles for determining the choice of factors by rotation”. In : *Psychometrika* 9.4 (1944), p. 267-283.
- [33] Marco CAVAZZUTI. “Deterministic optimization”. In : *Optimization methods*. Springer, 2013, p. 77-102.
- [34] Marco CAVAZZUTI. *Optimization methods: from theory to design scientific and technological aspects in mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [35] Antonin CHAMBOLLE et Thomas POCK. “A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging”. In : *Journal of mathematical imaging and vision* 40.1 (2011), p. 120-145.
- [36] Caroline CHAUX, Patrick L COMBETTES, Jean-Christophe PESQUET et Valérie R WAJS. “A variational formulation for frame-based inverse problems”. In : *Inverse Problems* 23.4 (2007), p. 1495.
- [37] George HG CHEN et R Tyrrell ROCKAFELLAR. “Convergence rates in forward-backward splitting”. In : *SIAM Journal on Optimization* 7.2 (1997), p. 421-444.
- [38] Andrzej CICHOCKI, Danilo MANDIC, Lieven DE LATHAUWER, Guoxu ZHOU, Qibin ZHAO, Cesar CAIAFA et Huy Anh PHAN. “Tensor decompositions for signal processing applications: From two-way to multiway component analysis”. In : *IEEE signal processing magazine* 32.2 (2015), p. 145-163.
- [39] Andrzej CICHOCKI, Rafal ZDUNEK, Anh Huy PHAN et Shun-ichi AMARI. *Nonnegative matrix and tensor factorizations: applications to exploratory multi-way data analysis and blind source separation*. John Wiley & Sons, 2009.
- [40] Jeremy COHEN, Rodrigo Cabral FARIAS et Pierre COMON. “Fast decomposition of large nonnegative tensors”. In : *IEEE Signal Processing Letters* 22.7 (2014), p. 862-866.

- [41] Patrick L COMBETTES et Jean-Christophe PESQUET. “Primal-dual splitting algorithm for solving inclusions with mixtures of composite, Lipschitzian, and parallel-sum type monotone operators”. In : *Set-Valued and variational analysis* 20.2 (2012), p. 307-330.
- [42] Patrick L COMBETTES et Băng C VŪ. “Variable metric forward–backward splitting with applications to monotone inclusions in duality”. In : *Optimization* 63.9 (2014), p. 1289-1318.
- [43] Pierre COMON. “Tensor decompositions”. In : *Mathematics in signal processing V* (2002), p. 1-24.
- [44] Joao Paulo CL da COSTA, Martin HAARDT et Florian ROMER. “Robust methods based on the HOSVD for estimating the model order in PARAFAC models”. In : *2008 5th IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop*. IEEE. 2008, p. 510-514.
- [45] Lieven DE LATHAUWER, Bart DE MOOR et Joos VANDEWALLE. “A multilinear singular value decomposition”. In : *SIAM journal on Matrix Analysis and Applications* 21.4 (2000), p. 1253-1278.
- [46] Lieven DE LATHAUWER, Bart DE MOOR et Joos VANDEWALLE. “Computation of the canonical decomposition by means of a simultaneous generalized Schur decomposition”. In : *SIAM journal on Matrix Analysis and Applications* 26.2 (2004), p. 295-327.
- [47] Renato DE LEONE, Almerico MURLI, Panos M PARDALOS et Gerardo TORALDO. *High performance algorithms and software in nonlinear optimization*. T. 24. Springer Science & Business Media, 2013.
- [48] Feng DING, Peter X LIU et Guangjun LIU. “Gradient based and least-squares based iterative identification methods for OE and OEMA systems”. In : *Digital Signal Processing* 20.3 (2010), p. 664-677.
- [49] Weisheng DONG, Guangming SHI, Xin LI, Yi MA et Feng HUANG. “Compressive sensing via nonlocal low-rank regularization”. In : *IEEE transactions on image processing* 23.8 (2014), p. 3618-3632.
- [50] David L DONOHO. “Compressed sensing”. In : *IEEE Transactions on information theory* 52.4 (2006), p. 1289-1306.
- [51] Jim DOUGLAS et Henry H RACHFORD. “On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables”. In : *Transactions of the American mathematical Society* 82.2 (1956), p. 421-439.
- [52] J DOUGLAS CARROLL, Sandra PRUZANSKY et Joseph B KRUSKAL. “CANDE-LINC: A general approach to multidimensional analysis of many-way arrays with linear constraints on parameters”. In : *Psychometrika* 45.1 (1980), p. 3-24.

- [53] Joseph G ECKER, Michael KUPFERSCHMID, CE LAWRENCE, AA REILLY et ACH SCOTT. “An application of nonlinear optimization in molecular biology”. In : *European Journal Of Operational Research* 138.2 (2002), p. 452-458.
- [54] Ivar EKELAND et Roger TEMAM. *Convex analysis and variational problems*. SIAM, 1999.
- [55] MP EKSTROM et RL RHOADS. “On the application of eigenvector expansions to numerical deconvolution”. In : *Journal of Computational Physics* 14.4 (1974), p. 319-340.
- [56] Karima EL QATE, Mohammed EL RHABI, Abdelilah HAKIM, Eric MOREAU et Nadège THIRION-MOREAU. “A Primal-Dual algorithm for nonnegative N-th order CP tensor decomposition: application to fluorescence spectroscopy data analysis”. In : *Multidimensional Systems and Signal Processing* (2022), p. 1-18.
- [57] Yu M ERMOLIEV et RJ-B WETS. *Numerical techniques for stochastic optimization*. Springer-Verlag, 1988.
- [58] Ricardo D FIERRO, Gene H GOLUB, Per Christian HANSEN et Dianne P O’LEARY. “Regularization by truncated total least squares”. In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 18.4 (1997), p. 1223-1241.
- [59] Lorenzo FINESSO et Peter SPREIJ. “Nonnegative matrix factorization and I-divergence alternating minimization”. In : *Linear Algebra and its Applications* 416.2-3 (2006), p. 270-287.
- [60] Christodoulos A FLOUDAS. *Deterministic global optimization: theory, methods and applications*. T. 37. Springer Science & Business Media, 2013.
- [61] Christodoulos A FLOUDAS. “Global optimization in design and control of chemical process systems”. In : *Journal of Process Control* 10.2-3 (2000), p. 125-134.
- [62] Christodoulos A FLOUDAS. “Recent advances in global optimization for process synthesis, design and control: enclosure of all solutions”. In : *Computers & Chemical Engineering* 23 (1999), S963-S973.
- [63] Christodoulos A FLOUDAS, Ioannis G AKROTIRIANAKIS, S CARATZOULAS, Clifford A MEYER et Josef KALLRATH. “Global optimization in the 21st century: Advances and challenges”. In : *Computers & Chemical Engineering* 29.6 (2005), p. 1185-1202.
- [64] Christodoulos A FLOUDAS et Panos M PARDALOS. *Encyclopedia of optimization*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [65] Christodoulos A FLOUDAS et Panos M PARDALOS. *Optimization in computational chemistry and molecular biology: local and global approaches*. T. 40. Springer Science & Business Media, 2000.
- [66] Alain FRANC. “Etude algébrique des multitableaux: Apport de l’algèbre tensorielle”. Thèse de doct. Doctorat Statistique option: biostatistique, Université de Montpellier II, 1992.

- [67] Achilleas S FRANGAKIS, Arne STOSCHEK et Reiner HEGERL. “Wavelet transform filtering and nonlinear anisotropic diffusion assessed for signal reconstruction performance on multidimensional biomedical data”. In : *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 48.2 (2001), p. 213-222.
- [68] Salvador GABARDA et Gabriel CRISTOBAL. “Cloud covering denoising through image fusion”. In : *Image and Vision Computing* 25.5 (2007), p. 523-530.
- [69] Silvia GANDY, Benjamin RECHT et Isao YAMADA. “Tensor completion and low-rank tensor recovery via convex optimization”. In : *Inverse problems* 27.2 (2011), p. 025010.
- [70] Manfred GILLI et Enrico SCHUMANN. “Heuristic optimisation in financial modeling”. In : *Annals of operations research* 193.1 (2012), p. 129-158.
- [71] Alexander FH GOETZ. “Three decades of hyperspectral remote sensing of the Earth: A personal view”. In : *Remote Sensing of Environment* 113 (2009), S5-S16.
- [72] Donald GOLDFARB et Zhiwei QIN. “Robust low-rank tensor recovery: Models and algorithms”. In : *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 35.1 (2014), p. 225-253.
- [73] Lars GRASEDYCK, Daniel KRESSNER et Christine TOBLER. “A literature survey of low-rank tensor approximation techniques”. In : *GAMM-Mitteilungen* 36.1 (2013), p. 53-78.
- [74] Ignacio E GROSSMANN. *Global optimization in engineering design*. T. 9. Springer Science & Business Media, 2013.
- [75] Shuhang GU, Lei ZHANG, Wangmeng ZUO et Xiangchu FENG. “Weighted nuclear norm minimization with application to image denoising”. In : *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*. 2014, p. 2862-2869.
- [76] Elaine T HALE, Wotao YIN et Yin ZHANG. “Fixed-point continuation for ℓ_1 -minimization: Methodology and convergence”. In : *SIAM Journal on Optimization* 19.3 (2008), p. 1107-1130.
- [77] Xu HAN, Laurent ALBERA, Amar KACHENOURA, Lotfi SENHADJI et Huazhong SHU. “Low rank canonical polyadic decomposition of tensors based on group sparsity”. In : *2017 25th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*. IEEE. 2017, p. 668-672.
- [78] Xu HAN, Laurent ALBERA, Amar KACHENOURA, Huazhong SHU et Lotfi SENHADJI. “Block term decomposition with rank estimation using group sparsity”. In : *2017 IEEE 7th International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP)*. IEEE. 2017, p. 1-5.
- [79] Xu HAN, Laurent ALBERA, Amar KACHENOURA, Huazhong SHU et Lotfi SENHADJI. “Robust multilinear decomposition of low rank tensors”. In : *International Conference on Latent Variable Analysis and Signal Separation*. Springer. 2018, p. 3-12.

- [80] Martin HANKE. "Iterative regularization techniques in image reconstruction". In : *Surveys on solution methods for inverse problems*. Springer, 2000, p. 35-52.
- [81] Per Christian HANSEN. "Truncated singular value decomposition solutions to discrete ill-posed problems with ill-determined numerical rank". In : *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 11.3 (1990), p. 503-518.
- [82] Richard A HARSHMAN et al. "Foundations of the PARAFAC procedure: Models and conditions for an " explanatory" multimodal factor analysis". In : (1970).
- [83] Wei HE, Quanming YAO, Chao LI, Naoto YOKOYA et Qibin ZHAO. "Non-local meets global: An integrated paradigm for hyperspectral denoising". In : *Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. 2019, p. 6868-6877.
- [84] Xiaowei HE, Jie TIAN, Yan WU, Yanbin HOU, Nunu REN et Kuan PENG. "Study of four regularization methods for the inverse problem in bioluminescence tomography". In : *Medical Imaging 2009: Biomedical Applications in Molecular, Structural, and Functional Imaging*. T. 7262. SPIE. 2009, p. 703-712.
- [85] Eligius Maria Theodorus HENDRIX. *Global optimization at work*. Wageningen University et Research, 1998.
- [86] Frank L HITCHCOCK. "Multiple invariants and generalized rank of a p-way matrix or tensor". In : *Journal of Mathematics and Physics* 7.1-4 (1928), p. 39-79.
- [87] Frank L HITCHCOCK. "The expression of a tensor or a polyadic as a sum of products". In : *Journal of Mathematics and Physics* 6.1-4 (1927), p. 164-189.
- [88] Are HJORUNGNES et David GESBERT. "Complex-valued matrix differentiation: Techniques and key results". In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 55.6 (2007), p. 2740-2746.
- [89] Yao HU, Debing ZHANG, Jieping YE, Xuelong LI et Xiaofei HE. "Fast and accurate matrix completion via truncated nuclear norm regularization". In : *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence* 35.9 (2012), p. 2117-2130.
- [90] Fang HUANG, Jun LU, Jian TAO, Li LI, Xicheng TAN et Peng LIU. "Research on optimization methods of ELM classification algorithm for hyperspectral remote sensing images". In : *IEEE Access* 7 (2019), p. 108070-108089.
- [91] Kejun HUANG, Nicholas D SIDIROPOULOS et Athanasios P LIAVAS. "A flexible and efficient algorithmic framework for constrained matrix and tensor factorization". In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 64.19 (2016), p. 5052-5065.
- [92] Borbála HUNYADI, Daan CAMPS, Laurent SORBER, Wim Van PAESSCHEN, Maarten De VOS, Sabine Van HUFFEL et Lieven De LATHAUWER. "Block term decomposition for modelling epileptic seizures". In : *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing* 2014.1 (2014), p. 1-19.

- [93] Teng-Yu JI, Ting-Zhu HUANG, Xi-Le ZHAO, Tian-Hui MA et Gang LIU. “Tensor completion using total variation and low-rank matrix factorization”. In : *Information Sciences* 326 (2016), p. 243-257.
- [94] Zhigang JIA, M NG et G SONG. “A quaternion framework for robust color images completion”. In : *Preprint, May* (2018).
- [95] Tai-Xiang JIANG, Ting-Zhu HUANG, Xi-Le ZHAO, Teng-Yu JI et Liang-Jian DENG. “Matrix factorization for low-rank tensor completion using framelet prior”. In : *Information Sciences* 436 (2018), p. 403-417.
- [96] Przemysław KAZIENKO, Katarzyna MUSIAL et Tomasz KAJDANOWICZ. “Multidimensional social network in the social recommender system”. In : *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans* 41.4 (2011), p. 746-759.
- [97] Qifa KE et Takeo KANADE. “Robust subspace computation using L1 norm”. In : (2003).
- [98] Henk AL KIERS. “Towards a standardized notation and terminology in multiway analysis”. In : *Journal of Chemometrics: A Journal of the Chemometrics Society* 14.3 (2000), p. 105-122.
- [99] Misha E KILMER, Karen BRAMAN, Ning HAO et Randy C HOOVER. “Third-order tensors as operators on matrices: A theoretical and computational framework with applications in imaging”. In : *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 34.1 (2013), p. 148-172.
- [100] Jingu KIM et Haesun PARK. “Fast nonnegative tensor factorization with an active-set-like method”. In : *High-Performance Scientific Computing*. Springer, 2012, p. 311-326.
- [101] Shuu KIYOTOKI, Jun NISHIKAWA, Takeshi OKAMOTO, Kouichi HAMABE, Mari SAITO, Atsushi GOTO, Yusuke FUJITA, Yoshihiko HAMAMOTO, Yusuke TAKEUCHI, Shin SATORI et al. “New method for detection of gastric cancer by hyperspectral imaging: a pilot study”. In : *Journal of biomedical optics* 18.2 (2013), p. 026010.
- [102] Tamara G KOLDA et Brett W BADER. “Tensor decompositions and applications”. In : *SIAM review* 51.3 (2009), p. 455-500.
- [103] Nikos KOMODAKIS. “Image completion using global optimization”. In : *2006 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'06)*. T. 1. IEEE. 2006, p. 442-452.
- [104] Thommen KORAH et Christopher RASMUSSEN. “Spatiotemporal inpainting for recovering texture maps of occluded building facades”. In : *IEEE Transactions on Image Processing* 16.9 (2007), p. 2262-2271.
- [105] Nadia KREIMER, Aaron STANTON et Mauricio D SACCHI. “Tensor completion based on nuclear norm minimization for 5D seismic data reconstruction”. In : *Geophysics* 78.6 (2013), p. V273-V284.

- [106] Gerhard KRIEGER, Nicolas GEBERT et Alberto MOREIRA. “Multidimensional waveform encoding: A new digital beamforming technique for synthetic aperture radar remote sensing”. In : *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 46.1 (2007), p. 31-46.
- [107] Joseph B KRUSKAL. “Three-way arrays: rank and uniqueness of trilinear decompositions, with application to arithmetic complexity and statistics”. In : *Linear algebra and its applications* 18.2 (1977), p. 95-138.
- [108] Ryuichi KUMASHIRO, Kozo KONISHI, Tohru CHIBA, Tomohiko AKAHOSHI, Shotarō NAKAMURA, Masaharu MURATA, Morimasa TOMIKAWA, Takayuki MATSUMOTO, Yoshihiko MAEHARA et Makoto HASHIZUME. “Integrated endoscopic system based on optical imaging and hyperspectral data analysis for colorectal cancer detection”. In : *Anticancer research* 36.8 (2016), p. 3925-3932.
- [109] JR LACKOWICZ. “Principles of Fluorescence Spectroscopy, 1999”. In : *Kluwer Academic, New York* ().
- [110] Nikos D LAGAROS, Vagelis PLEVRIS et Manolis PAPADRAKAKIS. “Neurocomputing strategies for solving reliability-robust design optimization problems”. In : *Engineering Computations* (2010).
- [111] Ilja LEBEDEV et Victor GERGEL. “Heterogeneous parallel computations for solving global optimization problems”. In : *Procedia Computer Science* 66 (2015), p. 53-62.
- [112] Hanoch LEV-ARI. “Efficient solution of linear matrix equations with application to multistatic antenna array processing”. In : *Communications in Information & Systems* 5.1 (2005), p. 123-130.
- [113] Shuangjiang LI et Hairong QI. “A Douglas–Rachford splitting approach to compressed sensing image recovery using low-rank regularization”. In : *IEEE Transactions on Image Processing* 24.11 (2015), p. 4240-4249.
- [114] Xutao LI, Yunming YE et Xiaofei XU. “Low-rank tensor completion with total variation for visual data inpainting”. In : *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. T. 31. 1. 2017.
- [115] Athanasios P LIAVAS et Nicholas D SIDIROPOULOS. “Parallel algorithms for constrained tensor factorization via alternating direction method of multipliers”. In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 63.20 (2015), p. 5450-5463.
- [116] Chih-Jen LIN. “On the convergence of multiplicative update algorithms for nonnegative matrix factorization”. In : *IEEE Transactions on Neural Networks* 18.6 (2007), p. 1589-1596.
- [117] Chih-Jen LIN. “Projected gradient methods for nonnegative matrix factorization”. In : *Neural computation* 19.10 (2007), p. 2756-2779.
- [118] Tao LIN et Salah BOURENNANE. “Hyperspectral image processing by jointly filtering wavelet component tensor”. In : *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 51.6 (2012), p. 3529-3541.

- [119] Xuemin LIN et Maria ORLOWSKA. “An integer linear programming approach to data allocation with the minimum total communication cost in distributed database systems”. In : *Information Sciences* 85.1-3 (1995), p. 1-10.
- [120] Ji LIU, Przemyslaw MUSIALSKI, Peter WONKA et Jieping YE. “Tensor completion for estimating missing values in visual data”. In : *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence* 35.1 (2012), p. 208-220.
- [121] Ji LIU, Przemyslaw MUSIALSKI, Peter WONKA et Jieping YE. “Tensor completion for estimating missing values in visual data”. In : *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence* 35.1 (2012), p. 208-220.
- [122] Ji LIU, Przemyslaw MUSIALSKI, Peter WONKA et Jieping YE. “Tensor completion for estimating missing values in visual data”. In : *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence* 35.1 (2012), p. 208-220.
- [123] Qing LIU, Zhihui LAI, Zongwei ZHOU, Fangjun KUANG et Zhong JIN. “A truncated nuclear norm regularization method based on weighted residual error for matrix completion”. In : *IEEE Transactions on Image Processing* 25.1 (2015), p. 316-330.
- [124] Xuefeng LIU, Qiaoqiao SUN, Yue MENG, Min FU et Salah BOURENNANE. “Hyperspectral image classification based on parameter-optimized 3D-CNNs combined with transfer learning and virtual samples”. In : *Remote Sensing* 10.9 (2018), p. 1425.
- [125] Canyi LU, Jiashi FENG, Yudong CHEN, Wei LIU, Zhouchen LIN et Shuicheng YAN. “Tensor robust principal component analysis: Exact recovery of corrupted low-rank tensors via convex optimization”. In : *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*. 2016, p. 5249-5257.
- [126] Xavier LUCIANI. “Analyse numérique des spectres de fluorescence 3D issus de mélanges non linéaires”. Thèse de doct. Université du Sud Toulon Var, 2007.
- [127] David G LUENBERGER, Yinyu YE et al. *Linear and nonlinear programming*. T. 2. Springer, 1984.
- [128] Shiqian MA, Donald GOLDFARB et Lifeng CHEN. “Fixed point and Bregman iterative methods for matrix rank minimization”. In : *Mathematical Programming* 128.1 (2011), p. 321-353.
- [129] Takanori MAEHARA, Kohei HAYASHI et Ken-ichi KAWARABAYASHI. “Expected tensor decomposition with stochastic gradient descent”. In : *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. T. 30. 1. 2016.
- [130] Jan R MAGNUS et Heinz NEUDECKER. *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. John Wiley & Sons, 2019.
- [131] George D MAGOULAS et Michael N VRAHATIS. “Adaptive algorithms for neural network supervised learning: a deterministic optimization approach”. In : *International Journal of Bifurcation and Chaos* 16.07 (2006), p. 1929-1950.

- [132] Julien MAIRAL, Michael ELAD et Guillermo SAPIRO. “Sparse representation for color image restoration”. In : *IEEE Transactions on image processing* 17.1 (2007), p. 53-69.
- [133] Ihab MAKKI, Rafic YOUNES, Clovis FRANCIS, Tiziano BIANCHI et Massimo ZUCCHETTI. “A survey of landmine detection using hyperspectral imaging”. In : *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing* 124 (2017), p. 40-53.
- [134] Kurt MARTI et al. *Stochastic optimization methods*. T. 2. Springer, 2005.
- [135] Joao MENDES-MOREIRA, Carlos SOARES, Alípio Mário JORGE et Jorge Freire De SOUSA. “Ensemble approaches for regression: A survey”. In : *Acm computing surveys (csur)* 45.1 (2012), p. 1-40.
- [136] Jifei MIAO, Kit Ian KOU et Wankai LIU. “Low-rank quaternion tensor completion for recovering color videos and images”. In : *Pattern Recognition* 107 (2020), p. 107505.
- [137] Steve MILLER et Richard STARTZ. “Feasible generalized least squares using machine learning”. In : *Available at SSRN 2966194* (2018).
- [138] Bamdev MISHRA, Gilles MEYER, Francis BACH et Rodolphe SEPULCHRE. “Low-rank optimization with trace norm penalty”. In : *SIAM Journal on Optimization* 23.4 (2013), p. 2124-2149.
- [139] Shashi Kant MISHRA, Shou-Yang WANG et Kin Keung LAI. *Generalized convexity and vector optimization*. T. 90. Springer, 2009.
- [140] J MOCKS. “Topographic components model for event-related potentials and some biophysical considerations”. In : *IEEE transactions on biomedical engineering* 35.6 (1988), p. 482-484.
- [141] Souad MOHAOUI, Abdelilah HAKIM et Said RAGHAY. “Tensor completion via bi-level minimization with fixed-point constraint to estimate missing elements in noisy data”. In : *Advances in Computational Mathematics* 47.1 (2021), p. 1-27.
- [142] Souad MOHAOUI, Abdelilah HAKIM et Said RAGHAY. “Tensor completion via bi-level minimization with fixed-point constraint to estimate missing elements in noisy data”. In : *Advances in Computational Mathematics* 47.1 (2021), p. 1-27.
- [143] Jean Jacques MOREAU. “Fonctions convexes duales et points proximaux dans un espace hilbertien”. In : *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 255 (1962), p. 2897-2899.
- [144] Sarif Kumar NAIK et CA MURTHY. “Standardization of edge magnitude in color images”. In : *IEEE Transactions on Image Processing* 15.9 (2006), p. 2588-2595.
- [145] Angelia NEDIĆ et Asuman OZDAGLAR. “Subgradient methods for saddle-point problems”. In : *Journal of optimization theory and applications* 142.1 (2009), p. 205-228.

- [146] Yu NESTEROV. “Gradient methods for minimizing composite functions”. In : *Mathematical programming* 140.1 (2013), p. 125-161.
- [147] Yurii E NESTEROV. “A method for solving the convex programming problem with convergence rate $O(1/k^2)$ ”. In : *Dokl. akad. nauk Sssr*. T. 269. 1983, p. 543-547.
- [148] Peter OCHS, Thomas BROX et Thomas POCK. “iPiasco: inertial proximal algorithm for strongly convex optimization”. In : *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 53.2 (2015), p. 171-181.
- [149] Shunsuke ONO. “ L_{0} Gradient Projection”. In : *IEEE Transactions on Image Processing* 26.4 (2017), p. 1554-1564.
- [150] Shunsuke ONO et Takuma KASAI. “Efficient constrained tensor factorization by alternating optimization with primal-dual splitting”. In : *2018 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. IEEE. 2018, p. 3379-3383.
- [151] Hiroyuki OSAWA et Hironori YAMAMOTO. “Present and future status of flexible spectral imaging color enhancement and blue laser imaging technology”. In : *Digestive Endoscopy* 26 (2014), p. 105-115.
- [152] Ivan V OSELEDETS. “Tensor-train decomposition”. In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 33.5 (2011), p. 2295-2317.
- [153] Christopher C PAIGE et Michael A SAUNDERS. “LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares”. In : *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 8.1 (1982), p. 43-71.
- [154] Chenjian PAN, Chen LING, Hongjin HE, Liqun QI et Yanwei XU. “A DCT-based Tensor Completion Approach for Recovering Color Images and Videos from Highly Undersampled Data”. In : *arXiv preprint arXiv:2110.09298* (2021).
- [155] Panos M PARDALOS et H Edwin ROMEIJN. *Handbook of Global Optimization: Volume 2*. T. 62. Springer Science & Business Media, 2013.
- [156] Anh Huy PHAN et Andrzej CICHOCKI. “PARAFAC algorithms for large-scale problems”. In : *Neurocomputing* 74.11 (2011), p. 1970-1984.
- [157] Anh-Huy PHAN, Petr TICHAVSKÝ et Andrzej CICHOCKI. “Fast alternating LS algorithms for high order CANDECOMP/PARAFAC tensor factorizations”. In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 61.19 (2013), p. 4834-4846.
- [158] Konstantinos PLATANIOTIS et Anastasios N VENETSANOPOULOS. *Color image processing and applications*. Springer Science & Business Media, 2000.
- [159] Nicola PLAYLE. “Detection of landmines using hyperspectral imaging”. In : *Detection and Remediation Technologies for Mines and Minelike Targets XI*. T. 6217. SPIE. 2006, p. 85-93.
- [160] Elijah POLAK. *Optimization: algorithms and consistent approximations*. T. 124. Springer Science & Business Media, 2012.

- [161] Karima El QATE, Mohammed El RHABI, Abdelilah HAKIM, Eric MOREAU et Nadège THIRION-MOREAU. “A regularized nonnegative third order tensor decomposition using a Primal-Dual Projected Gradient Algorithm: application to 3D fluorescence spectroscopy”. In : *International Conference on Smart Multimedia*. Springer. 2018, p. 183-192.
- [162] Benjamin RECHT, Maryam FAZEL et Pablo A PARRILO. “Guaranteed minimum-rank solutions of linear matrix equations via nuclear norm minimization”. In : *SIAM review* 52.3 (2010), p. 471-501.
- [163] Nadine RENARD, Salah BOURENNANE et Jacques BLANC-TALON. “Denoising and dimensionality reduction using multilinear tools for hyperspectral images”. In : *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters* 5.2 (2008), p. 138-142.
- [164] Audrey REPETTI. “Algorithmes d’optimisation en grande dimension: applications à la résolution de problèmes inverses”. Thèse de doct. Paris Est, 2015.
- [165] Audrey REPETTI, Emilie CHOUZENOUX et Jean-Christophe PESQUET. “Un petit tutoriel sur les méthodes primales-duales proximales pour l’optimisation convexe”. In : *GRETSI*. 2015.
- [166] R Tyrrell ROCKAFELLAR. “Monotone operators and the proximal point algorithm”. In : *SIAM journal on control and optimization* 14.5 (1976), p. 877-898.
- [167] R Tyrrell ROCKAFELLAR et Roger J-B WETS. *Variational analysis*. T. 317. Springer Science & Business Media, 2009.
- [168] RT ROCKAFELLAR. *Convex Analysis, Princeton Univ. Press*. 1970.
- [169] David P ROY, Junchang JU, Philip LEWIS, Crystal SCHAAF, Feng GAO, Matt HANSEN et Erik LINDQUIST. “Multi-temporal MODIS–Landsat data fusion for relative radiometric normalization, gap filling, and prediction of Landsat data”. In : *Remote Sensing of Environment* 112.6 (2008), p. 3112-3130.
- [170] Jean-Philip ROYER. “Identification aveugle de mélanges et décomposition canonique de tenseurs: application à l’analyse de l’eau”. Thèse de doct. Université Nice Sophia Antipolis, 2013.
- [171] Jean-Philip ROYER, Nadège THIRION-MOREAU, Pierre COMON, Roland REDON et Stéphane MOUNIER. “A regularized nonnegative canonical polyadic decomposition algorithm with preprocessing for 3D fluorescence spectroscopy”. In : *Journal of Chemometrics* 29.4 (2015), p. 253-265.
- [172] Hong S RYOO et Nikolaos V SAHINIDIS. “Global optimization of nonconvex NLPs and MINLPs with applications in process design”. In : *Computers & Chemical Engineering* 19.5 (1995), p. 551-566.
- [173] Ernest K RYU et Stephen BOYD. “Primer on monotone operator methods”. In : *Appl. Comput. Math* 15.1 (2016), p. 3-43.
- [174] Eugenio SANCHEZ et Bruce R KOWALSKI. “Tensorial resolution: a direct trilinear decomposition”. In : *Journal of Chemometrics* 4.1 (1990), p. 29-45.

- [175] Rathindra SARATHY, Bala SHETTY et Arun SEN. “A constrained nonlinear 0–1 program for data allocation”. In : *European Journal of Operational Research* 102.3 (1997), p. 626-647.
- [176] Mark SCHMIDT. “Least squares optimization with L1-norm regularization”. In : *CS542B Project Report 504* (2005), p. 195-221.
- [177] Mark SCHMIDT, Glenn FUNG et Rmer ROSALES. “Fast optimization methods for l1 regularization: A comparative study and two new approaches”. In : *European Conference on Machine Learning*. Springer. 2007, p. 286-297.
- [178] Mark SCHMIDT, Glenn FUNG et Romer ROSALES. “Optimization methods for l1-regularization”. In : *University of British Columbia, Technical Report TR-2009-19* (2009).
- [179] Mark SCHMIDT, Alexandru NICULESCU-MIZIL, Kevin MURPHY et al. “Learning graphical model structure using L1-regularization paths”. In : *AAAI*. T. 7. 2007, p. 1278-1283.
- [180] Ivan SELESNICK. “Sparse regularization via convex analysis”. In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 65.17 (2017), p. 4481-4494.
- [181] Ohad SHAMIR et Tong ZHANG. “Stochastic gradient descent for non-smooth optimization: Convergence results and optimal averaging schemes”. In : *International conference on machine learning*. PMLR. 2013, p. 71-79.
- [182] Huanfeng SHEN, Xinghua LI, Qing CHENG, Chao ZENG, Gang YANG, Huifang LI et Liangpei ZHANG. “Missing information reconstruction of remote sensing data: A technical review”. In : *IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine* 3.3 (2015), p. 61-85.
- [183] Huanfeng SHEN, Xinghua LI, Liangpei ZHANG, Dacheng TAO et Chao ZENG. “Compressed sensing-based inpainting of aqua moderate resolution imaging spectroradiometer band 6 using adaptive spectrum-weighted sparse Bayesian dictionary learning”. In : *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 52.2 (2013), p. 894-906.
- [184] Nicholas D SIDIROPOULOS et Rasmus BRO. “On the uniqueness of multilinear decomposition of N-way arrays”. In : *Journal of Chemometrics: A Journal of the Chemometrics Society* 14.3 (2000), p. 229-239.
- [185] Marco SIGNORETTO, Lieven DE LATHAUWER et Johan AK SUYKENS. “Nuclear norms for tensors and their use for convex multilinear estimation”. In : *Submitted to Linear Algebra and Its Applications* 43 (2010).
- [186] Marco SIGNORETTO, Raf Van de PLAS, Bart DE MOOR et Johan AK SUYKENS. “Tensor versus matrix completion: A comparison with application to spectral data”. In : *IEEE Signal Processing Letters* 18.7 (2011), p. 403-406.

- [187] Marco SIGNORETTO, Raf Van de PLAS, Bart DE MOOR et Johan AK SUYKENS. “Tensor versus matrix completion: A comparison with application to spectral data”. In : *IEEE Signal Processing Letters* 18.7 (2011), p. 403-406.
- [188] Age K SMILDE, Paul GELADI et Rasmus BRO. *Multi-way analysis: applications in the chemical sciences*. John Wiley & Sons, 2005.
- [189] Yun SONG, Jie LI, Xi CHEN, Dengyong ZHANG, Qiang TANG et Kun YANG. “An efficient tensor completion method via truncated nuclear norm”. In : *Journal of Visual Communication and Image Representation* 70 (2020), p. 102791.
- [190] Colin A STEDMON, Stiig MARKAGER et Rasmus BRO. “Tracing dissolved organic matter in aquatic environments using a new approach to fluorescence spectroscopy”. In : *Marine chemistry* 82.3-4 (2003), p. 239-254.
- [191] David M STRONG, Peter BLOMGREN et Tony F CHAN. “Spatially adaptive local-feature-driven total variation minimizing image restoration”. In : *Statistical and Stochastic Methods in Image Processing II*. T. 3167. SPIE. 1997, p. 222-233.
- [192] Mary B STUART, Andrew JS MCGONIGLE et Jon R WILLMOTT. “Hyperspectral imaging in environmental monitoring: a review of recent developments and technological advances in compact field deployable systems”. In : *Sensors* 19.14 (2019), p. 3071.
- [193] Shiliang SUN, Zehui CAO, Han ZHU et Jing ZHAO. “A survey of optimization methods from a machine learning perspective”. In : *IEEE transactions on cybernetics* 50.8 (2019), p. 3668-3681.
- [194] Nasrin TAHERI, Xu HAN, Ahmad KARFOUL, Karim ANSARI-ASL, Isabelle MERLET, Lotfi SENHADJI, Laurent ALBERA et Amar KACHENOURA. “Brain source localization using constrained low rank canonical Polyadic decomposition”. In : *2018 52nd Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*. IEEE. 2018, p. 811-815.
- [195] Huachun TAN, Bin CHENG, Wuhong WANG, Yu-Jin ZHANG et Bin RAN. “Tensor completion via a multi-linear low-n-rank factorization model”. In : *Neurocomputing* 133 (2014), p. 161-169.
- [196] Mohit TAWARMALANI et Nikolaos V SAHINIDIS. “Convex extensions and envelopes of lower semi-continuous functions”. In : *Mathematical Programming* 93.2 (2002), p. 247-263.
- [197] Jorge TENDEIRO, Mohammed Bennani DOSSE et Jos MF TEN BERGE. “First and second-order derivatives for CP and INDSCAL”. In : *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems* 106.1 (2011), p. 27-36.
- [198] Stefan THOMAS, Matheus Thomas KUSKA, David BOHNENKAMP, Anna BRUGGER, Elias ALISAAC, Mirwaes WAHABZADA, Jan BEHMANN et Anne-Katrin MAHLEIN. “Benefits of hyperspectral imaging for plant disease detection and plant protection: a technical perspective”. In : *Journal of Plant Diseases and Protection* 125.1 (2018), p. 5-20.

- [199] Andrej TIKHONOV. *Solutions of ill-posed problems*.
- [200] Giorgio TOMASI et Rasmus BRO. “A comparison of algorithms for fitting the PARAFAC model”. In : *Computational Statistics & Data Analysis* 50.7 (2006), p. 1700-1734.
- [201] A. TRAORÉ, M. BERAR et A. RAKOTOMAMONJY. “Online multimodal dictionary learning”. In : *Neurocomputing* 368 (2019), p. 163-179.
- [202] Jung-Fa TSAI et Han-Lin LI. “Technical note—On optimization approach for multidisk vertical allocation problems”. In : *European journal of operational research* 165.3 (2005), p. 835-842.
- [203] Ledyard R TUCKER. “Some mathematical notes on three-mode factor analysis”. In : *Psychometrika* 31.3 (1966), p. 279-311.
- [204] Madeleine UDELL, Corinne HORN, Reza ZADEH, Stephen BOYD et al. “Generalized low rank models”. In : *Foundations and Trends® in Machine Learning* 9.1 (2016), p. 1-118.
- [205] André USCHMAJEV. “Local convergence of the alternating least squares algorithm for canonical tensor approximation”. In : *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 33.2 (2012), p. 639-652.
- [206] Lieven VANDENBERGHE et Stephen BOYD. “A primal—dual potential reduction method for problems involving matrix inequalities”. In : *Mathematical programming* 69.1 (1995), p. 205-236.
- [207] Ana Y VANOYE et Alberto MENDOZA. “Application of direct regularization techniques and bounded—variable least squares for inverse modeling of an urban emissions inventory”. In : *Atmospheric Pollution Research* 5.2 (2014), p. 219-225.
- [208] Bǎng Công VŨ. “A splitting algorithm for dual monotone inclusions involving co-coercive operators”. In : *Advances in Computational Mathematics* 38.3 (2013), p. 667-681.
- [209] Thi Thanh Xuan VU. “Optimisation déterministe et stochastique pour des problèmes de traitement d’images en grande dimension”. Thèse de doct. Aix-Marseille, 2017.
- [210] Xuan VU, Caroline CHAUX, Nadège THIRION-MOREAU, Sylvain MAIRE et Elfrida Mihaela CARSTEA. “A new penalized nonnegative third-order tensor decomposition using a block coordinate proximal gradient approach: Application to 3D fluorescence spectroscopy”. In : *Journal of Chemometrics* 31.4 (2017), e2859.
- [211] Xuan Thanh VU, Sylvain MAIRE, Caroline CHAUX et Nadege THIRION-MOREAU. “A new stochastic optimization algorithm to decompose large nonnegative tensors”. In : *IEEE Signal Processing Letters* 22.10 (2015), p. 1713-1717.
- [212] Andong WANG, Zhihui LAI et Zhong JIN. “Noisy low-tubal-rank tensor completion”. In : *Neurocomputing* 330 (2019), p. 267-279.

- [213] Jialei WANG, Peder A OLSEN, Andrew R CONN et Aurélie C LOZANO. “Removing clouds and recovering ground observations in satellite image sequences via temporally contiguous robust matrix completion”. In : *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. 2016, p. 2754-2763.
- [214] Minghua WANG, Qiang WANG et Jocelyn CHANUSSOT. “L₀ Gradient Regularized Low-Rank Tensor Model for Hyperspectral Image Denoising”. In : *2019 10th Workshop on Hyperspectral Imaging and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing (WHISPERS)*. IEEE. 2019, p. 1-6.
- [215] Minghua WANG, Qiang WANG et Jocelyn CHANUSSOT. “Tensor Low-Rank Constraint and L₀ Total Variation for Hyperspectral Image Mixed Noise Removal”. In : *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing* 15.3 (2021), p. 718-733.
- [216] Yu-Xiong WANG et Yu-Jin ZHANG. “Nonnegative matrix factorization: A comprehensive review”. In : *IEEE Transactions on knowledge and data engineering* 25.6 (2012), p. 1336-1353.
- [217] Leandro R XIMENES, Gérard FAVIER, André LF de ALMEIDA et Yuri CB SILVA. “PARAFAC-PARATUCK semi-blind receivers for two-hop cooperative MIMO relay systems”. In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 62.14 (2014), p. 3604-3615.
- [218] Hanwen XU, Xinming TANG, Bo AI, Xiaoming GAO, Fanlin YANG et Zhen WEN. “Missing data reconstruction in VHR images based on progressive structure prediction and texture generation”. In : *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing* 171 (2021), p. 266-277.
- [219] Li XU, Shicheng ZHENG et Jiaya JIA. “Unnatural l₀ sparse representation for natural image deblurring”. In : *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*. 2013, p. 1107-1114.
- [220] Yangyang XU, Ruru HAO, Wotao YIN et Zhixun SU. “Parallel matrix factorization for low-rank tensor completion”. In : *arXiv preprint arXiv:1312.1254* (2013).
- [221] Yangyang XU et Wotao YIN. “A block coordinate descent method for regularized multiconvex optimization with applications to nonnegative tensor factorization and completion”. In : *SIAM Journal on imaging sciences* 6.3 (2013), p. 1758-1789.
- [222] Yangyang XU et Wotao YIN. “A globally convergent algorithm for nonconvex optimization based on block coordinate update”. In : *Journal of Scientific Computing* 72.2 (2017), p. 700-734.
- [223] Hongyang XUE, Shengming ZHANG et Deng CAI. “Depth image inpainting: Improving low rank matrix completion with low gradient regularization”. In : *IEEE Transactions on Image Processing* 26.9 (2017), p. 4311-4320.
- [224] Shengke XUE, Wenyuan QIU, Fan LIU et Xinyu JIN. “Low-rank tensor completion by truncated nuclear norm regularization”. In : *2018 24th International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*. IEEE. 2018, p. 2600-2605.

- [225] Chao YANG, Xin LU, Zhe LIN, Eli SHECHTMAN, Oliver WANG et Hao LI. “High-resolution image inpainting using multi-scale neural patch synthesis”. In : *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*. 2017, p. 6721-6729.
- [226] Xin-She YANG. *Engineering optimization: an introduction with metaheuristic applications*. John Wiley & Sons, 2010.
- [227] Xin-She YANG et Slawomir KOZIEL. *Computational optimization and applications in engineering and industry*. T. 359. Springer Science & Business Media, 2011.
- [228] Rafał ZDUNEK et Tomasz SADOWSKI. “Segmented convex-hull algorithms for near-separable NMF and NTF”. In : *Neurocomputing* 331 (2019), p. 150-164.
- [229] Debing ZHANG, Yao HU, Jieping YE, Xuelong LI et Xiaofei HE. “Matrix completion by truncated nuclear norm regularization”. In : *2012 IEEE Conference on computer vision and pattern recognition*. IEEE. 2012, p. 2192-2199.
- [230] Qiang ZHANG, Qiangqiang YUAN, Chao ZENG, Xinghua LI et Yancong WEI. “Missing data reconstruction in remote sensing image with a unified spatial-temporal-spectral deep convolutional neural network”. In : *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 56.8 (2018), p. 4274-4288.
- [231] Tianheng ZHANG, Jianli ZHAO, Qiuxia SUN, Bin ZHANG, Jianjian CHEN et Maoguo GONG. “Low-rank tensor completion via combined Tucker and Tensor Train for color image recovery”. In : *Applied Intelligence* (2021), p. 1-16.
- [232] Zemin ZHANG, Gregory ELY, Shuchin AERON, Ning HAO et Misha KILMER. “Novel methods for multilinear data completion and de-noising based on tensor-SVD”. In : *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*. 2014, p. 3842-3849.
- [233] Huiyu ZHAO. “Analyse de la matière organique et ses propriétés dans l’environnement naturel en spectroscopie de fluorescence 3D traitée par PARAFAC”. Thèse de doct. Université de Toulon, 2011.
- [234] Qibin ZHAO, Guoxu ZHOU, Shengli XIE, Liqing ZHANG et Andrzej CICHOCKI. “Tensor ring decomposition”. In : *arXiv preprint arXiv:1606.05535* (2016).
- [235] Yu-Bang ZHENG, Ting-Zhu HUANG, Teng-Yu JI, Xi-Le ZHAO, Tai-Xiang JIANG et Tian-Hui MA. “Low-rank tensor completion via smooth matrix factorization”. In : *Applied Mathematical Modelling* 70 (2019), p. 677-695.
- [236] Yu-Bang ZHENG, Ting-Zhu HUANG, Xi-Le ZHAO, Yong CHEN et Wei HE. “Double-factor-regularized low-rank tensor factorization for mixed noise removal in hyperspectral image”. In : *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 58.12 (2020), p. 8450-8464.
- [237] Xiaowei ZHOU, Can YANG, Hongyu ZHAO et Weichuan YU. “Low-rank modeling and its applications in image analysis”. In : *ACM Computing Surveys (CSUR)* 47.2 (2014), p. 1-33.

- [238] Dominique ZOSSO et Aurélien BUSTIN. “A primal-dual projected gradient algorithm for efficient Beltrami regularization”. In : *Computer Vision and Image Understanding* (2014), p. 14-52.