



**HAL**  
open science

# Géométries combinatoires et aléatoires - quelques exemples

Adrien Kassel

► **To cite this version:**

Adrien Kassel. Géométries combinatoires et aléatoires - quelques exemples. Combinatoire [math.CO]. Ecole Normale Supérieure de Lyon, Université de Lyon, 2023. tel-04756527

**HAL Id: tel-04756527**

**<https://theses.hal.science/tel-04756527v1>**

Submitted on 28 Oct 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université de Lyon & CNRS  
École Normale Supérieure de Lyon  
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées



MÉMOIRE PRÉSENTÉ POUR OBTENIR LE  
DIPLOME D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

---

# Géométries combinatoires et aléatoires

---

quelques exemples

---

Adrien KASSEL  
Mai 2023

Rapporteurs :  $\left\{ \begin{array}{l} \text{M. Omid AMINI} \\ \text{M. Charles BORDENAVE} \\ \text{M. Kilian RASCHEL} \end{array} \right.$

Soutenance publique le vendredi 26 mai 2023 à l'École Normale Supérieure de Lyon

Jury :  $\left\{ \begin{array}{ll} \text{M. Omid AMINI} & \text{Rapporteur} \\ \text{M. Nathanaël BERESTYCKI} & \text{Examineur} \\ \text{M. Charles BORDENAVE} & \text{Rapporteur} \\ \text{Mme Alice GUIONNET} & \text{Présidente} \\ \text{M. Grégory MIERMONT} & \text{Examineur} \\ \text{M. Kilian RASCHEL} & \text{Rapporteur} \end{array} \right.$



## PRÉFACE

Dans ce mémoire, je présente une synthèse des résultats mathématiques que j'ai obtenus depuis la soutenance de ma thèse de doctorat en juin 2013. Ces résultats sont le fruit de plusieurs collaborations et ont été publiés dans une douzaine d'articles en anglais avec Thierry Lévy (7), David Wilson (3), David Cimasoni (2), Dmitry Chelkak (1), Ewain Gwynne (1) et Jason Miller (1). La liste détaillée de ces publications se trouve un peu plus loin. Je présente en quelques mots dans cette courte préface un survol du cadre dans lequel s'inscrit ce travail et des motivations qui le sous-tendent.

---

Un *graphe* est un ensemble de sommets dont certaines paires distinguées sont appelées arêtes et auxquelles on pense comme à des chemins reliant les sommets à leurs extrémités. Sur cet espace discret, on considère des fonctions, que l'on peut voir comme associant un *spin* (c'est-à-dire une variable que l'on visualise comme un petit vecteur ayant une liberté de « rotation ») à chaque sommet. Les graphes, finis ou infinis, constituent un cadre mathématique naturel et privilégié pour l'étude de mesures de probabilité sur des ensembles discrets de spins corrélés.

Ces mesures de probabilité sont issues de modèles idéalisés de la matière en physique théorique appelés communément *modèles de physique statistique*. C'est de cet héritage historique que provient l'usage du mot *spin*. La raison d'être première de ces modèles est de mettre en lumière les mécanismes conduisant aux phénomènes physiques de transition de phase. Dans le cadre des modèles de ferromagnétisme par exemple, le graphe reproduit le réseau cristallin des atomes d'un morceau de métal.

Des exemples de tels modèles sont le *modèle d'Ising* du ferromagnétisme (qui porte le nom de l'étudiant de son concepteur en 1925, Lenz) pour lequel les spins valent  $\pm 1$ , et plus généralement la famille des *modèles de Potts* (1951) pour laquelle les spins sont à valeurs dans un ensemble à  $q \geq 2$  éléments (le modèle d'Ising correspond à  $q = 2$ ), ainsi que le *tas de sable abélien* (introduit formellement par Dhar en 1990, sur la base du modèle de criticité auto-organisée proposé par Bak, Tang et Wiesenfeld en 1987).

Ces modèles de spins peuvent parfois être traduits en configurations aléatoires d'arêtes avec contraintes topologiques, comme des *arbres couvrants* ou d'autres *sous-graphes aléatoires*. Leurs fonctions de partition sont des *polynômes en plusieurs variables* importants en combinatoire algébrique, comme le *polynôme de Tutte*. C'est notamment le cas pour la famille des *modèles de Fortuin–Kasteleyn*, qui généralise les modèles de Potts–Ising mentionnés plus haut.

Lorsque les variables de ces polynômes sont attachées aux arêtes du graphe, elles déterminent également une *structure euclidienne* sur l'espace des fonctions sur les sommets et les arêtes du graphe. La compréhension du lien structurel, déterminé par un modèle de physique statistique donné, entre : cette géométrie euclidienne, les mesures de probabilité sur les sous-graphes, et les polynômes multivariés, conduit à des questions d'ordre purement mathématique en *géométrie combinatoire*. Certains auteurs parlent dans ce cas de « combinatoire physique », ou de manière peut-être plus paradoxale, de « physique combinatoire ».

Dans les familles de modèles de physique statistique mentionnées, certains modèles sont plus à même d'être étudiés que les autres car leurs fonctions de partition et leurs fonctions de corrélation s'expriment à l'aide d'identités explicites, calculables en temps polynomial (en la taille du graphe); on dit qu'ils sont *intégrables*. C'est par exemple le cas des modèles dits *déterminantaux* où ces identités font intervenir le déterminant de matrices associées au graphe.

En étudiant ces modèles intégrables, aux propriétés algébriques très particulières, on s'éloigne sans doute un peu des systèmes physiques réels, beaucoup plus complexes, mais on a accès à de riches structures mathématiques. Du point de vue de la physique statistique, on parle de « modèles-jouet », mais du point de vue mathématique, ces objets sont fondamentaux.

Si l'on voit un graphe comme un espace géométrique discret, la physique théorique des interactions (et sa notion de spins à valeurs dans un *groupe de jauge*), ainsi que la géométrie différentielle (et ses notions de *fibré*, *connexion*, *transport parallèle* et *holonomie*), invitent à y considérer des structures additionnelles, comme la donnée de variables sur les arêtes à valeurs dans un groupe de matrices. On cherche alors à étudier de nouveaux modèles aléatoires sur le graphe qui incorporent cette *symétrie de jauge*.

Les contributions principales présentées dans ce mémoire sont les suivantes. Je présente le calcul de certaines observables du modèle d'Ising planaire et du tas de sable abélien planaire. J'introduis de nouveaux modèles aléatoires : la famille des *arbres couvrants actifs*, certaines familles de *sous-graphes aléatoires déterminantaux*, les *forêts couvrantes quantiques*, ainsi que les *soupes de boucles tordues* par l'holonomie d'une connexion et leurs théorèmes dits « d'isomorphisme » avec des *champs de vecteurs gaussiens tordus*. Je définis ce faisant une généralisation des *polynômes de Symanzik* et en donne une interprétation probabiliste. Ces polynômes sont à ce jour surtout étudiés en physique mathématique d'où ils émanent et ont été utilisés en géométrie tropicale ; peu semble-t-il en théorie des probabilités.

Lorsque l'on considère une suite croissante de graphes finis dont la taille tend vers l'infini, on observe de nouvelles propriétés pour les modèles associés. Dans la limite dite *thermodynamique*, la structure limite est un graphe discret infini et l'on peut observer des *transitions de phase*. Dans la limite d'*échelle* continue, où la maille des graphes tend vers zéro, on trouve des *géométries aléatoires* continues.

Un aspect fascinant du domaine des mathématiques que j'ai succinctement présenté ci-dessus est la façon dont les familles de modèles discrets possèdent des analogues continus ayant une structure en famille similaire. On peut ainsi conjecturer l'existence d'objets continus aléatoires compliqués à partir de propriétés algébriques sur des structures finies, et ceci a donné lieu à de nombreux travaux dans les dernières décennies. En dimension 2, ceci ouvre sur le monde de la géométrie conforme aléatoire dont les objets centraux sont le *mouvement brownien*, l'*évolution de Schramm–Loewner* et le *champ libre gaussien*. Les travaux récents dans ce domaine ont montré à quel point les deux mondes (discrets et continus) sont liés. J'énonce une conjecture supplémentaire dans ce sens (la convergence des arbres couvrants actifs vers l'évolution de Schramm–Loewner), ainsi qu'un théorème qui énonce une variante de cette convergence dans le cas où le graphe planaire est lui-même aléatoire (on parle de *carte aléatoire*).

Pour résumer, je m'attache dans ce mémoire à mettre en exergue des liens entre *structure* et *aléa* par l'étude de modèles de physique statistique discrets, avec comme motivation la construction hypothétique à long terme d'objets géométriques continus (lignes, surfaces, champs) aléatoires dont on pourrait comprendre la structure algébrique profonde grâce à l'observation de leurs analogues discrets.

À la suite du travail présenté ici, une piste que j'espère explorer davantage consiste à remplacer les graphes par des complexes simpliciaux, et par leurs versions métriques qui sont des espaces métriques de complexité intermédiaire entre le discret et le continu.

**Remerciements.** Je remercie tous mes coauteurs, Thierry Lévy, David Wilson, David Cimasoni, Dmitry Chelkak, Ewain Gwynne, et Jason Miller, pour tout ce qu'ils m'ont appris et pour le travail effectué en commun, qui constitue la matière de ce mémoire. Avec eux j'ai pu m'émerveiller, avec humour, de la profondeur des objets simples. Je tiens à remercier tout particulièrement Thierry Lévy pour de très nombreux échanges qui ont donné lieu à des travaux qui occupent une place majeure dans ce mémoire.

## LISTE DES ARTICLES PRÉSENTÉS

1. [Kas15] *Learning about critical phenomena from scribbles and sandpiles.*  
**ESAIM : Proc.**, 51 (2015) 60–73.
2. [KW16a] *Active spanning trees and Schramm–Loewner evolution*, avec D. B. Wilson.  
**Physical Review E**, 93, 062121 (2016).
3. [KW16b] *The looping rate and sandpile density of planar graphs*, avec D. B. Wilson.  
**The American Mathematical Monthly**, 123(1):19–39, 2016.
4. [CCK17] *Revisiting the combinatorics of the 2D Ising model*, avec D. Chelkak et D. Cimasoni.  
**Annales de l’Institut Henri Poincaré Comb. Phys. Interact.**, 4 (2017), no. 3, 309–385.
5. [GKMW18] *Active spanning trees with bending energy on planar maps and SLE-decorated Liouville quantum gravity for  $\kappa > 8$* , avec E. Gwynne, J. P. Miller et D. B. Wilson.  
**Communications in Mathematical Physics**, 2018, Vol. 358, Issue 3, 1065–1115.
6. [KL20] *A colourful path to matrix-tree theorems*, avec T. Lévy.  
**Algebraic Combinatorics**, Volume 3 (2020) no. 2, pp. 471–482.
7. [KL21] *Covariant Symanzik identities*, avec T. Lévy.  
**Probability and Mathematical Physics**, 2-3 (2021), 419–475.
8. [KL22a] *Determinantal probability measures on Grassmannians*, avec T. Lévy.  
**Annales de l’Institut Henri Poincaré Comb. Phys. Interact.** 9 (2022), no. 4, 659–732.
9. [KL22b] *Determinantal random subgraphs*, avec T. Lévy.  
**Pré-publication soumise**, arXiv:2212.06819, hal-03899489, 2022.
10. [CK23] *Graph coverings and twisted operators*, avec D. Cimasoni.  
**Algebraic Combinatorics**, Volume 6 (2023) no. 1, pp. 75–94.
11. [KL23a] *On the mean projection theorem for determinantal point processes*, avec T. Lévy.  
**ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.** 20, 497–504 (2023).
12. [KL23c] *Quantum spanning forests*, avec T. Lévy.  
**Version préliminaire**, 75 pp, 2023.
13. [KL23b] *Determinant of block matrices and Laplacians of quiver representations*, avec T. Lévy.  
**Version préliminaire**, 19 pp, 2023.



## REMERCIEMENTS

Je remercie chaleureusement Omid Amini, Charles Bordenave et Kilian Raschel d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce mémoire et pour le temps et l'énergie qu'ils ont consacrés à sa lecture et à son évaluation. Je remercie également Nathanaël Berestycki, Alice Guionnet et Grégory Miermont d'avoir accepté de former, avec les rapporteurs, le jury de soutenance.

Le travail présenté dans ce mémoire est le fruit de plusieurs collaborations avec : Dmitry Chelkak, David Cimasoni, Ewain Gwynne, Thierry Lévy, Jason P. Miller et David B. Wilson. Je suis heureux d'avoir pu joindre mes forces aux leurs sur des projets de recherche enthousiasmants. Je n'aurais en aucun cas pu faire ce travail seul et je les remercie tous très vivement pour le travail que nous avons effectué ensemble et pour tout ce qu'ils m'ont appris en chemin.

Je tiens à remercier tout particulièrement Thierry Lévy pour nos très nombreux échanges mathématiques et amicaux depuis plus de dix ans. Je lui suis reconnaissant d'avoir très tôt suggéré que nous étudions ensemble des couplages entre modèles discrets et théorie de jauge, ce qui nous mena dans des méandres d'explorations aléatoires dans lesquels nous naviguons encore. Je remercie David Wilson pour son invitation à Redmond et pour nos discussions sur le tas de sable abélien et les arbres couvrants actifs. Je remercie David Cimasoni pour nos discussions amicales, depuis notre rencontre aux Diablerets, sur le modèle d'Ising et les revêtements de graphes ; je le remercie pour son invitation à Genève. Merci à Dima Chelkak d'avoir un jour suggéré, alors que nous traversions un pont genevois sur l'Arve, d'étudier le modèle XOR-Ising ensemble et pour les longues discussions sur le modèle d'Ising planaire qui s'ensuivirent à l'Institute for Theoretical Studies de Zurich. Je remercie Ewain Gwynne et Jason Miller, rencontrés au Newton Institute de Cambridge, d'avoir partagé avec moi leur expertise sur la géométrie aléatoire.

Merci à Richard Kenyon pour l'impulsion qu'il me donna lors de mon doctorat sous sa direction, et qui continue d'inspirer et de guider ma recherche à ce jour. Merci à lui de m'avoir présenté David Wilson. Merci à Wendelin Werner pour son accueil post-doctoral à Zurich qui me permit de rencontrer David Cimasoni et de côtoyer sur place Dima Chelkak. Je le remercie de m'avoir fait confiance et de m'avoir donné, avec générosité, toute liberté dans l'organisation de ma recherche lors de ces trois années qui furent très stimulantes scientifiquement et me permirent, dans un environnement exceptionnel à tous points de vue, de poursuivre et d'entamer des collaborations importantes. Merci à Nathanaël Berestycki pour son accueil à Cambridge lors de séjours au Newton Institute qui me permirent de rencontrer Ewain Gwynne et Jason Miller.

Je remercie chaleureusement Alice Guionnet et Grégory Miermont pour leur accueil bienveillant à l'UMPA de l'ENS de Lyon lors de mon recrutement au CNRS en 2016. Merci à toutes les collègues de la communauté mathématique zurichoise en 2013–2016, et de la communauté mathématique lyonnaise depuis 2016 pour l'agréable ambiance de travail et de vie quotidienne.

Au fil des années, j'ai bénéficié de nombreuses discussions avec des chercheuses et chercheurs au-delà de mes coauteurs sus-mentionnés ; je les remercie toutes et tous. Je souhaiterais remercier en particulier, pour des discussions importantes qui ont façonné ma vision de certains objets mathématiques ainsi que pour leurs invitations : Omid Amini, Juhan Aru, Titus Lupu, Jean-Christophe Mourrat, Wei Qian, Yilin Wang. Je les remercie aussi pour leur soutien et leurs encouragements.



Pour de longues séances de discussion qui, bien qu'elles n'aboutirent pas à des publications, furent très stimulantes, je remercie Stéphane Benoist, Ron Rosenthal, Xin Sun. Pour des conversations mathématiques inspirantes, longues ou brèves, et pour certaines il y a bien longtemps, je remercie également Cédric Boutillier, Sunil Chhita, Antoine Dahlqvist, Mikael de la Salle, Béatrice de Tilière, Javier Fresán, Christophe Garban, Caroline Klivans, Lionel Levine, Igor Pak, Eveliina Peltola, Gábor Pete, Sanjay Ramassamy, Marianna Russkikh, Avelio Sepúlveda, Alain-Sol Sznitman, Wei Wu, Hao Wu.

Je remercie Héloïse Constantin de m'avoir choisi comme directeur pour encadrer sa thèse de doctorat. Cette première expérience d'encadrement, depuis trois ans, a été très enrichissante.

Je remercie Paul Vigneaux pour ses conseils avisés lors de la préparation de mon dossier de candidature à l'habilitation. Je remercie Aurélien Garivier d'avoir accepté d'écrire une lettre de soutien pour ce dossier. Je remercie Magalie Le Borgne, Virginia Goncalves et Jessica Danglehant pour leurs conseils et leur aide dans la préparation de ma soutenance. Merci à Micaël Calvas pour son aide dans la préparation logistique de la visio-conférence.

Je remercie ma famille et tou-te-s mes ami-e-s et proches pour leur affection et leur soutien.

# Table des matières

Table des figures	ix
Chapitre 1. Introduction	1
1. Contexte	1
2. Géométries combinatoires	8
3. Géométries aléatoires	15
4. Organisation du texte	21
Chapitre 2. Cas des graphes planaires	23
1. Modèle d'Ising	23
2. Tas de sable abélien	26
3. Arbres couvrants actifs	29
4. Cartes planaires décorées	33
Chapitre 3. Mesures de probabilité déterminantales	37
1. Existence et linéarisation	37
2. Théorème de projection moyenne	40
3. Matroïdes et polymatroïdes	42
4. Interprétation physique	46
5. Cas quaternion	46
Chapitre 4. Sous-graphes aléatoires	49
1. Arbres couvrants et forêts couvrantes d'unicycles	49
2. Sous-graphes couvrants connexes	50
3. Sous-graphes couvrants acycliques	51
4. Identités multilinéaires et complexité	53
Chapitre 5. Polynômes en plusieurs indéterminées	57
1. Polynômes de Kirchhoff et Symanzik	57
2. Développements en boucles de Wilson	61
3. Revêtements de graphes et factorisations	67
Chapitre 6. Incarnations aléatoires d'une connexion	71
1. Philosophie des théorèmes d'isomorphisme	71
2. Champs de vecteurs gaussiens	72
3. Chemins aléatoires	74
4. Soupes de boucles	75
5. Forêts couvrantes quantiques	78
Chapitre 7. Perspectives de recherche	85
1. Au-delà des graphes discrets	85
2. Structures algébriques	88
3. Géométrie aléatoire	89
Bibliographie	93
Notations	105
Index	107



## Table des figures

1.1 Un arbre plan à 50 sommets.	1
1.2 À gauche, le chemin de Dyck associé au mot de Dyck <b>aaabbabb</b> correspondant au bon parenthésage $((())())$ . À droite, l'arbre plan enraciné associé. L'arbre est obtenu en contractant horizontalement l'aire grisée sous la courbe du chemin de Dyck. Réciproquement, le chemin de Dyck donne la distance à la racine des sommets explorés par la fonction de contour de l'arbre.	2
1.3 Arbres couvrants et couplages parfaits.	3
1.4 Approximation discrète du mouvement brownien plan par une marche aléatoire sur le réseau carré $\mathbb{Z}^2$ . La trajectoire plane au centre a pour coordonnées deux mouvements browniens unidimensionnels (représentés de part et d'autre) qui peuvent être indépendants (pour le cas canonique, comme ici) ou corrélés (pour un processus plus général; voir le théorème 1.26).	7
1.5 Deux représentations d'un graphe fini connexe à 6 sommets : à gauche, ses arêtes géométriques; à droite, ses arêtes (orientées).	9
1.6 Résumé des propriétés basiques des matroïdes circulaires et bicirculaires.	13
1.7 Dynamiques de l'équation de Schramm–Loewner pour $\kappa < 4$ à gauche, et $\kappa \geq 4$ à droite.	18
1.8 Approximation discrète d'un champ libre gaussien en dimension 2.	20
2.1 Stabilisation d'un tas de sable, lorsque le puits est le bord d'un graphe donné par une grille carrée $3 \times 3$ .	26
2.2 Chaîne de Markov sur les arbres couvrants et unicycles couvrants.	28
2.3 L'intersection d'une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$ avec le « simplifié » de sa trajectoire passée. L'unique boucle simple ainsi créée est représentée en orange.	29
2.4 Un arbre couvrant actif d'une grille carrée $15 \times 15$ , représenté par sa courbe de contour, avec ses arêtes actives marquées en rouge.	30
2.5 Correspondance non bijective entre sous-graphes couvrants et arbres couvrants actifs : à tout arbre couvrant $T$ est associé $2^{a(T)}$ sous-graphes couvrants, obtenus en changeant le statut (ouverte/fermée, i.e. présente/absente) des arêtes de $G$ actives pour $T$ .	31
2.6 Activités (notées par une étoile) d'un arbre couvrant selon le point base et le sens de l'exploration de contour.	32
2.7 Variance du nombre de tours de la courbe de contour en fonction de $y$ , comparée à la valeur théorique pour $SLE_\kappa$ , donnée dans [MS17b], où $\kappa$ est relié à $y$ par (27). Les deux courbes (empirique : points bleus; et théorique : courbe continue en rouge) sont presque indistinguables.	33
2.8 En haut à gauche : une carte planaire enracinée $(M, e_0)$ décorée par un arbre couvrant $T$ (en gras). En haut à droite : la carte duale $M^*$ (en pointillés) décorée par l'arbre couvrant dual $T^*$ (en gras). En bas à gauche : la quadrangulation $Q$ (en blanc) dont les sommets sont l'union des sommets de $M$ et de $M^*$ (son dual planaire est le graphe médial de $M$ ). En bas à droite : la courbe de contour « de Peano » $\lambda$ (en vert).	34
2.9 Le mot et le chemin associés à une carte planaire enracinée décorée par un arbre couvrant.	35
2.10 À gauche : la paire d'excursions qui forme le patron de la carte planaire enracinée boisée de la figure 2.8; cette dernière est obtenue par recollement le long de la courbe verte et des doubles-flèches (bleues et rouges) horizontales. La courbe verte est la courbe de contour de l'arbre couvrant, dite « courbe de Peano ». À droite : une approximation de la paire d'excursions	

browniennes qui forme le processus limite obtenu lorsque le nombre d'arêtes tend vers l'infini. En effectuant le même recollement on trouve la « Peanosphère ».	36
3.1 Illustration du théorème de projection moyenne pour les processus déterminantaux. L'espace aléatoire $E_X$ est un estimateur non biaisé de $H$ .	40
3.2 Plongement de Plücker et coordonnées associées : à gauche, un cube unité dans un sous-espace vectoriel $H$ de $E$ ; au milieu, ses ombres projetées sur les plans de coordonnées dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ ; à droite, le vecteur unité engendrant la droite $\wedge^n H$ , représentant $H$ dans $\wedge^n E$ .	42
4.1 Une forêt couvrante d'unicycles dont les composantes connexes sont représentées en différentes couleurs et les cycles sont représentés en gras. Ici le graphe $G$ est une grille $15 \times 15$ . L'échantillon est tiré selon la loi déterminantale (37) associée à un choix aléatoire de connexion $h$ .	49
4.2 Un sous-graphe couvrant connexe avec 4 cycles indépendants; le « 2-coeur » (c'est-à-dire le sous-graphe obtenu en effaçant itérativement les sommets de valence strictement plus petite que 2) de ce sous-graphe est représenté en gras. Ici le graphe $G$ est une grille $15 \times 15$ . L'échantillon est tiré selon la loi déterminantale (39) associée à un choix aléatoire de 1-formes $\theta_i$ .	51
4.3 Une forêt couvrante (c'est-à-dire, un sous-graphe couvrant acyclique) à 5 composantes connexes, représentées en différentes couleurs. Ici le graphe $G$ est une grille $15 \times 15$ . L'échantillon est tiré selon la loi déterminantale (40) associée à un choix aléatoire de 1-formes $\phi_i$ .	52
4.4 Un graphe à deux cycles avec un choix d'orientation pour chaque arête.	53
5.1 Démonstration picturale « à la Zeilberger » des théorèmes « matrix-tree » de Kirchhoff, Zaslavsky, Chaiken, Forman, Kenyon.	63
5.2 Graphe « papillon » de rang $N = 5$ de $G$ , vu au-dessus d'une arête. Ce graphe a $N^2$ arêtes orientées au-dessus de chaque arête orientée du graphe $G$ .	64
6.1 Un fibré vectoriel discret $F$ au-dessus d'un graphe, muni d'une connexion $h$ , vu au-dessus d'une arête.	72
6.2 Quatre échantillons (un par colonne) d'un champ de vecteurs libre gaussien, sur un fibré de rang $N = 2$ au-dessus d'un réseau carré associé à une connexion périodique.	73
6.3 Un graphe pondéré très simple : un sommet interne, une boucle, un puits.	76
6.4 Calcul des fonctions de corrélation en plusieurs sommets d'un champ de vecteurs aléatoire par transport parallèle le long de chemins aléatoires. En gris clair, la soupe de boucles; en gris foncé, les chemins aléatoires qui appartiennent aux sommets $\{x_1, x_2, x_3\}$ avec les sommets $\{y_1, y_2, y_3\}$ .	79
6.5 Illustration du calcul de la dérivée covariante discrète associée à une connexion $h$ pour une section $f$ le long d'une arête $e$ .	79
6.6 Forêts couvrantes quantiques sur un fibré de rang $N = 2$ et $N = 3$ où le graphe $G$ est une grille de taille $15 \times 15$ . La connexion $h$ est elle-même aléatoire, tirée selon la mesure de Yang–Mills planaire.	80
6.7 Ligne du haut : les marginales d'une forêt couvrante quantique associée à une connexion spéciale unitaire en rang $N = 2$ . Ligne du bas : deux échantillons i.i.d. de la mesure Q-déterminantale, sur les forêts couvrantes d'unicycles, associée à cette même connexion.	81
6.8 Le problème de Kirchhoff dans un réseau électrique avec champ de jauge.	82
6.9 Une grille carrée avec ses conditions au bord fermées (à gauche) et libres (à droite).	84

## Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons le cadre dans lequel s'inscrit notre travail, en incluant quelques définitions et résultats importants par d'autres auteurs, puis inventorions nos contributions personnelles (qui, elles, figurent dans les chapitres suivants, et en encadré).

La question principale qui nous a intéressé peut se résumer de la façon suivante : *Quels liens existent-ils entre la structure géométrique d'un espace et les processus aléatoires qui y vivent ?* Cette question est classique et ambitieuse et nous ne l'abordons que dans un cadre bien particulier et assez élémentaire, néanmoins riche de surprises et d'enseignements.

### 1. Contexte

Le travail présenté dans ce mémoire se trouve à l'intersection de plusieurs domaines : la combinatoire algébrique, la théorie des probabilités, la physique statistique, l'informatique théorique. Historiquement, ces domaines se sont développés, principalement depuis le XIXe siècle et au cours du XXe siècle, en lien les uns avec les autres. Pour autant, chacun des domaines ayant ses motivations propres, ils portent tous un regard différent sur les mêmes notions, par exemple celles de graphes, d'arbres et de polynômes.<sup>1</sup>

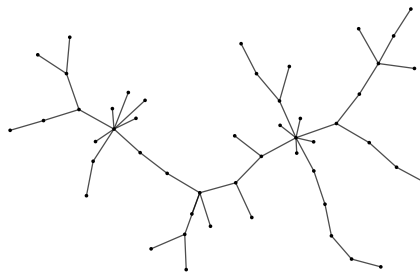


FIGURE 1.1. Un arbre plan à 50 sommets.

Donnons maintenant un petit panorama de ces domaines à travers quelques exemples choisis.

**1.1. Combinatoire.** Le but principal de la combinatoire est l'étude de classes finies d'objets discrets. La question primordiale est le dénombrement, exact ou approximatif, de ces classes, et l'étude des relations fonctionnelles entre différentes classes, au moyen notamment de bijections constructives.

1.1.1. *Arbres étiquetés.* Une des familles d'entiers les plus connues<sup>2</sup>, après celle des coefficients binomiaux, est la suite des nombres de Catalan, définis pour tout entier  $n \geq 0$ , par

$$(1) \quad C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

et référencée sous l'entrée A000108 dans l'encyclopédie en ligne des suites d'entiers (OEIS) de N. Sloane. Ces nombres ont de multiples interprétations, voir [Sta15] qui en présente plus de

1. La notion mathématique d'arbre joue un rôle central dans ce mémoire et l'illustration de la figure 1.1 montre que la ressemblance avec une branche d'arbre naturelle n'est pas fortuite.

2. Voir l'opinion sentencieuse de D. Zeilberger à ce sujet ici : <https://sites.math.rutgers.edu/~zeilberg/Opinion49.html>.

deux-cent. L'une d'elles est que  $C_n$  compte le nombre d'expressions bien parenthésées obtenues à partir de  $n$  paires de parenthèses ouvrantes-fermantes, aussi connues sous le nom de mots de Dyck : un mot de Dyck en deux lettres  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$  de longueur  $2n$  est un mot contenant  $n$  fois la lettre  $\mathbf{a}$  et  $n$  fois la lettre  $\mathbf{b}$  de telle sorte que tout préfixe contienne au moins autant de  $\mathbf{a}$  que de  $\mathbf{b}$ .

Un mot de Dyck se représente par un chemin de Dyck, c'est-à-dire le graphe d'une excursion de marche au plus proche voisin de longueur  $2n$  sur  $\mathbb{N}$  partant de 0, voir la figure 1.2. Compter ces chemins peut se faire au moyen d'une astuce de symétrie qui permet de déterminer parmi tous les  $\binom{2n}{n}$  mots contenant  $n$  fois  $\mathbf{a}$  et  $n$  fois  $\mathbf{b}$ , ceux qui ne sont pas de Dyck : il y en a  $\binom{2n}{n-1}$ . Le nombre de mots de Dyck de longueur  $2n$  est donc bien :  $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = C_n$ .

Un chemin de Dyck de longueur  $n$  peut, à son tour, être vu comme la courbe de contour d'un arbre enraciné à  $n$  arêtes (donc  $n+1$  sommets) plongé dans le plan, dit arbre plan enraciné ; voir la figure 1.2. En conséquence, le nombre d'arbres plans enracinés à  $n$  sommets est le nombre de Catalan  $C_{n-1}$ . Voir la figure 1.1 pour un arbre plan aléatoire pour  $n = 50$ .

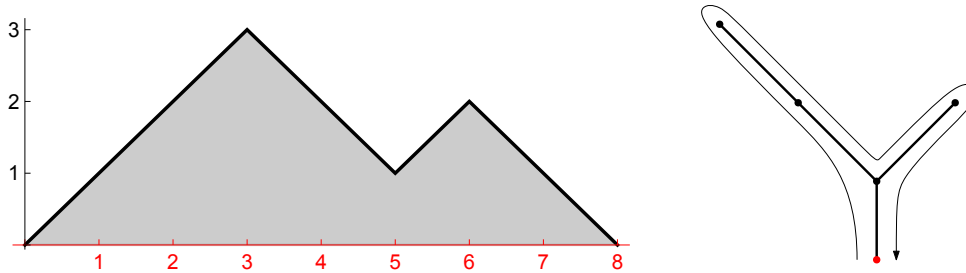


FIGURE 1.2. À gauche, le chemin de Dyck associé au mot de Dyck  $\mathbf{aaabbabb}$  correspondant au bon parenthésage  $((())())$ . À droite, l'arbre plan enraciné associé. L'arbre est obtenu en contractant horizontalement l'aire grisée sous la courbe du chemin de Dyck. Réciproquement, le chemin de Dyck donne la distance à la racine des sommets explorés par la fonction de contour de l'arbre.

Un résultat bien connu de Cayley [**Cay88**] donne une formule simple pour le nombre d'arbres à  $n$  sommets étiquetés de 1 à  $n$  (non plan, cette fois), appelés arbres de Cayley, et dont nous notons  $\mathcal{A}_n$  l'ensemble.

THÉORÈME 1.1 (A. Cayley, 1888). *Le nombre d'arbres couvrants étiquetés à  $n$  sommets vaut*

$$(2) \quad |\mathcal{A}_n| = n^{n-2}.$$

Une démonstration bijective élégante de cette formule a été donnée par A. Joyal [**Joy81**], voir [**AZ10**, chapitre 30]. Elle utilise le fait que le nombre de graphes fonctionnels<sup>3</sup> sur  $n$  sommets vaut  $n^n$ , et que tout graphe fonctionnel dont deux sommets (qui peuvent être égaux) sont marqués est en bijection avec un arbre sur  $n$  sommets étiquetés. Le nombre de ces derniers, c'est-à-dire le cardinal de  $\mathcal{A}_n$ , vaut donc  $n^n/n^2 = n^{n-2}$ .

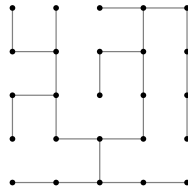
3. Un graphe fonctionnel représente une fonction  $f$  de  $\{1, \dots, n\}$  dans  $\{1, \dots, n\}$ . À tout sommet  $i$ , on associe l'arête reliant  $i$  à  $f(i)$  dans le graphe « vraiment complet » à  $n$  sommets, c'est-à-dire le graphe complet auquel on a ajouté une boucle en chaque sommet. Pour cette raison, un graphe fonctionnel est aussi connu sous le nom de pseudo-forêt, ou forêt couvrante d'unicycles. Compter le nombre de graphes fonctionnels dont les cycles sont non-orientés est difficile, voir 4§4.3.

1.1.2. *Graphes, cycles eulériens et arbres couvrants.* On fait remonter l'origine de la théorie des graphes à L. Euler et à sa résolution en 1735 du problème des sept ponts de Königsberg. Un cycle eulérien d'un graphe est une succession d'arêtes bien enchaînées qui revient à son point de départ et qui passe par toutes les arêtes du graphe exactement une fois. Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un tel chemin est que le degré de chaque sommet soit pair : c'est par cette observation qu'Euler répondit à la négative au problème de l'existence d'une promenade passant exactement une fois par tous les ponts de Königsberg au-dessus du fleuve Pregel ; voir [HW04]. On rencontrera des cycles eulériens plus tard à nouveau (au paragraphe 2§3), sous la forme de la courbe de contour d'un arbre couvrant d'un graphe planaire.

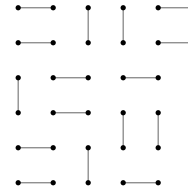
Un arbre couvrant d'un graphe est un sous-ensemble minimal d'arêtes qui relie tous les sommets entre eux. G. Kirchhoff, né à Königsberg, utilisa les arbres couvrants pour résoudre en 1847 le problème du calcul du courant induit dans un réseau électrique par un générateur.

La formule de Cayley (2) peut se réinterpréter comme donnant le nombre d'arbres couvrants d'un graphe complet sur  $n$  sommets. On peut la déduire du théorème plus ancien de Kirchhoff associé à son travail sur l'électricité [Kir47] qui donne le nombre d'arbres couvrants enracinés d'un graphe fini connexe comme le produit des valeurs propres non nulles du laplacien combinatoire du graphe<sup>4</sup> ; voir le théorème 1.6. L'expression n'est pas aussi simple que dans le cas de la formule de Cayley, mais elle est très pratique et robuste puisqu'elle est valable pour tous les graphes. Elle souligne aussi le fait que l'énumération de ces arbres dépend de la géométrie du graphe sous-jacent, par le biais du spectre de son laplacien. Une démonstration élégante de ce théorème est donnée dans [Zei85], et nous la généralisons dans [KL20].

Le nombre d'arbres couvrants d'un graphe fini connexe est souvent appelé la complexité du graphe. Il est vrai que ce nombre est rapidement très grand même pour un graphe à peu de sommets dès lors qu'il contient suffisamment de cycles. La figure 1.3(a) représente un arbre couvrant d'une grille carrée  $5 \times 5$ , qui contient  $557'568'000$  arbres couvrants ; voir la suite A007341 dans l'encyclopédie en ligne des suites d'entiers (OEIS).



(a) L'un des  $557'568'000$  arbres couvrants d'une grille carrée de taille  $5 \times 5$ .



(b) L'un des  $6'728$  couplages parfaits d'une grille carrée de taille  $6 \times 6$ .

FIGURE 1.3. Arbres couvrants et couplages parfaits.

1.1.3. *Couplages parfaits.* D'autres objets combinatoires sont plus difficiles à énumérer que les arbres couvrants. C'est le cas notamment des couplages parfaits d'un graphe fini connexe ; voir la figure 1.3(b). Rappelons qu'un couplage d'un graphe est un sous-ensemble d'arêtes tel que tout sommet est contenu dans au plus l'une de ces arêtes. Le couplage est dit parfait si tout sommet est inclus dans exactement l'une de ces arêtes. Contrairement au cas des arbres couvrants, un graphe fini (même s'il possède bien un nombre pair de sommets) n'admet pas toujours de couplage parfait. Dans le cas d'un graphe biparti, on peut réécrire, de façon presque tautologique, le nombre de couplages parfaits d'un graphe fini comme la racine carrée du permanent de sa

4. Le laplacien combinatoire est la matrice  $\Delta = D - A$  définie comme étant égale à la matrice diagonale des degrés des sommets à laquelle on retranche la matrice d'adjacence.



matrice d'adjacence. Énumérer les couplages parfaits, ou calculer le permanent d'une matrice à coefficients  $\{0, 1\}$  sont des problèmes difficiles, au sens de la théorie de la complexité, et ont donné lieu à la définition par L. Valiant [Val79] d'une classe de complexité appelée  $\#P$ . Ce qui rend cette classe intéressante, entre autres, c'est que le problème de décision associé (vérifier qu'une collection d'arêtes est bien un couplage parfait) se résout en temps polynomial en le nombre de sommets (on dit que ce problème de décision est dans la classe  $P$ ).

Dans le cas où le graphe est planaire, la formule de P. Kasteleyn [Kas67] permet en revanche de calculer le nombre de couplages parfaits aisément, puisqu'elle exprime ce nombre comme un déterminant, que l'on peut calculer en temps polynomial (avec un ordinateur) par les algorithmes de résolution de systèmes linéaires du type pivot de Gauss.

**THÉORÈME 1.2** (P. Kasteleyn, 1967). *Soit  $G$  un graphe fini connexe planaire. Il y a un choix (local<sup>5</sup>) de signes  $\underline{\tau} = (\tau_e)_e$  sur les arêtes de  $G$  tel que si  $A_{\underline{\tau}}$  désigne la matrice d'adjacence signée de  $G$ , le nombre de couplages parfaits de  $G$  vaut*

$$|\mathcal{P}(G)| = \sqrt{|\det A_{\underline{\tau}}|}.$$

Une première version de ce théorème dans le cas d'une grille carrée a été trouvée indépendamment par Kasteleyn et Temperley–Fisher en 1961 ; voir la suite A099390 dans l'OEIS.

Encore plus que pour le cas des arbres couvrants, le nombre de couplages parfaits d'un graphe est très variable selon la géométrie du graphe. Ce phénomène s'illustre dans l'étude des couplages parfaits aléatoires, dont les phases dépendent de la forme du bord des graphes planaires considérés ; voir par exemple [Kas16] pour une introduction imagée.

**1.1.4. Cartes planaires et cartes boisées.** Dans les années 1960, W. Tutte entama une étude combinatoire des cartes planaires, définies comme la classe combinatoire des graphes planaires plongés, modulo homéomorphisme [Tut63]. Une carte planaire est dite enracinée lorsqu'une arête est distinguée. Tutte obtint notamment une expression pour le nombre de cartes planaires enracinées à  $n$  arêtes : il y en a

$$2 \frac{3^n}{n+2} C_n,$$

où  $C_n$  est le  $n$ -ième nombre de Catalan défini par l'équation (1).

R. Mullin généralisa l'énumération des arbres plans à l'énumération de cartes planaires décorées par un arbre couvrant [Mul67], dite carte boisée ; voir la figure 2.8.

Si la carte est enracinée, une carte boisée est déterminée par la structure de l'arbre couvrant  $T$  et de son arbre dual  $T^*$  (obtenu comme le complémentaire de ses arêtes duales). Ces deux arbres plans enracinés pouvant être génériques et mélangés de toutes les façons possibles, on voit, en vertu de la formule pour le nombre d'arbres plans enracinés rappelée au début de ce chapitre, que le nombre de cartes boisées enracinées à  $n$  arêtes est

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2k} C_k C_{n-k} = C_n C_{n+1},$$

où  $C_k$  est le  $k$ -ième nombre de Catalan (1) ; voir [Ber07] pour une explication détaillée.

**1.2. Physique mathématique.** Comme le montrent les exemples ci-dessus (Kirchhoff ; Kasteleyn), la résolution de certains problèmes d'énumération combinatoire a été motivée par des questions de physique (courant dans un réseau électrique ; cristal en solution).

---

5. Le qualificatif « local » dans l'énoncé signifie que le choix de signes est déterminé par des conditions sur les faces du graphe planaire.

1.2.1. *Mécanique statistique.* La physique statistique a pour but d'étudier des systèmes constitués d'un grand nombre de particules en interaction, dont on suppose qu'elles suivent une loi de probabilité. À partir de lois simples à l'échelle microscopique, on cherche à comprendre si des phénomènes macroscopiques peuvent émerger, qu'ils soient déterministes ou aléatoires, et le cas échéant, à décrire leur loi. Le but est de décrire, ou reproduire par la modélisation, des observations physiques. Par exemple, on cherche à retrouver le comportement de transition de phase dans le cadre idéalisé d'un système constitué d'une infinité de spins en interaction.

En combinant la formule pour l'entropie  $S = k_B \ln \Omega$  énoncée par Boltzmann en 1877, où  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $\Omega$  désigne le nombre d'états microscopiques du système de particules, et la relation entre l'énergie  $E$ , la température  $T$  et l'entropie  $S$ , la distribution canonique d'un ensemble à l'équilibre thermodynamique est donnée par la mesure trouvée par L. Boltzmann (1868) et formalisée par J. W. Gibbs (1902), dite mesure de Boltzmann–Gibbs :

$$(3) \quad \mathbb{P}(\sigma) \propto \exp(-\beta E(\sigma)) d\sigma,$$

où  $\beta$  est l'inverse de la température multipliée par la constante de Boltzmann. Voir par exemple le cours [DGLR01, chapitre V] pour une explication détaillée.

1.2.2. *Modèles aléatoires.* Comme on l'a dit, l'un des buts principaux des modèles de physique statistique est d'expliquer les mécanismes de passage du microscopique au macroscopique dans les phénomènes de transition de phase et de mettre en lumière les phénomènes de brisure spontanée de symétrie. Parmi les modèles réalistes, seuls un petit nombre ont été découverts qui se prêtent à des résolutions calculatoires exactes.

Parmi les modèles sur réseaux, on distingue le modèle d'Ising, introduit par Lenz en 1925, puis sa généralisation au modèle de Potts, et enfin au modèle de Fortuin–Kasteleyn. Il y a aussi un lien avec les modèles à 6 sommets (modèle de glace) [BKW76].

Comme dans l'exemple introductif sur les arbres plans et les chemins de Dyck, de nombreuses bijections et correspondances combinatoires ou probabilistes ont été élaborées pour relier les modèles entre eux et déduire des propriétés par transfert.

C'est par exemple le cas de la bijection de Temperley qui relie le modèle de dimères et le modèle d'arbres couvrants, ou de la bijection de Fisher [Fis66] qui relie le modèle d'Ising planaire et le modèle de dimères. C'est aussi le cas de la bijection « ardente » (*burning bijection*) de Dhar–Majumdar [MD92] entre le tas de sable abélien et les arbres couvrants. C'est aussi le cas de la correspondance d'Edwards–Sokal entre le modèle de Potts et le modèle de Fortuin–Kasteleyn. Ce dernier modèle est aussi en correspondance avec le modèle de glace carrée (dit modèle à 6 sommets – *6 vertex model*) de Baxter–Kelland–Wu.

Nous verrons d'autres exemples de correspondances entre modèles :

- la correspondance (bijection de Mullin et *burger bijection* de Sheffield) entre cartes boisées et marches dans  $\mathbb{Z}^2$  contraintes à rester dans un quadrant, au chapitre 2 ;
- les théorèmes d'isomorphisme entre champs gaussiens et soupes de boucles, au chapitre 6.

1.2.3. *Théorie quantique des champs, et invariance conforme des modèles critiques 2D.* La théorie quantique des champs s'intéresse aux champs de particules suivant des lois quantiques. C'est le cas des particules élémentaires au cœur des atomes. Les calculs d'interaction entre ces particules ont été formalisés par R. Feynman et font intervenir des « intégrales de chemin ». Lorsque l'on opère un changement de variable mathématique appelé rotation de Wick, les théories deviennent euclidiennes et les intégrales peuvent être formalisées à l'aide de processus stochastiques comme le mouvement brownien.

Dans les années 1970 et 1980, le développement de la théorie quantique des champs en dimension 2 et la théorie du flot de renormalisation conduisirent les physiciens, notamment Belavin,

Polyakov et Zamolodchikov, à conjecturer que les modèles de physique statistique planaires, à leur point critique, étaient invariants par transformations conformes [BPZ84a, BPZ84b].

1.2.4. *Champs de jauge.* La physique théorique modélise les interactions fondamentales de la matière (à l'exception de la gravité) comme des champs de jauge à valeurs dans les groupes  $U(1)$  (interaction électromagnétique),  $U(2)$  (interaction électrofaible),  $SU(3)$  (interaction forte), sur un espace-temps donné par une variété lorentzienne de dimension 4. La théorie de Yang–Mills [YM54] généralise les interactions à des champs de jauge à valeurs dans des groupes plus généraux, comme les groupes orthogonaux réels  $O(N)$ , complexe unitaire  $U(N)$  ou symplectique (au sens de quaternion unitaire)  $Sp(N)$ .

Depuis les années 1970, il est reconnu que la notion de champ de jauge est équivalente mathématiquement à la notion de connexion d'un fibré vectoriel ou fibré principal, une théorie développée indépendamment depuis le début du XXe siècle par des géomètres et topologues [Yan14]. De manière heuristique, la mesure de Yang–Mills est une mesure sur les connexions  $\mathcal{A}(F)$  d'un fibré  $F$  dont la densité par rapport à une mesure de Lebesgue (qui n'existe pas sur cet ensemble de dimension infinie) serait définie par l'équation

$$\mathbb{P}(A) \propto \exp(-\beta' \mathcal{E}(F_A)) dA,$$

où  $F_A$  est le tenseur de courbe associé à la connexion  $A$ , où  $\mathcal{E}(F_A)$  est une certaine forme quadratique que l'on interprète comme l'« énergie » de la connexion, et où  $\beta'$  est une constante d'interaction qui joue le rôle de l'inverse d'une « température ».

Une approche à l'étude de ces mesures passe par la discrétisation : c'est la théorie de jauge sur réseau, introduite par K. Wilson [Wil74] ; voir également [Shr88].

1.2.5. *Gravité quantique.* Afin de concilier gravitation et interactions quantiques, A. Polyakov proposa un programme dans le cadre des théories quantiques de dimension 2. Dans deux articles célèbres [Pol81a, Pol81b] il appelait de ses vœux le développement d'un calcul de surfaces aléatoires, semblable au calcul des chemins aléatoires intervenant dans les intégrales de Feynman et formalisé comme des processus aléatoires (notamment le mouvement brownien) par la suite.

1.2.6. *Couplages champs–matière.* En physique quantique, les champs de matière se classent en deux grandes catégories : les fermions et les bosons. Une question importante est de comprendre l'interaction des champs de matière et des champs d'interaction (champs de jauge, ou gravité quantique).

Dans le cadre des modèles présentés plus haut, un champ de matière correspondrait à une configuration de dimères ou d'arbres couvrants (cas fermioniques), ou à un champ libre gaussien (cas bosonique). Et un champ d'interaction pourrait être une métrique aléatoire ou une connexion aléatoire.

Dans le cas de modèles couplés à une métrique aléatoire, la relation dite de KPZ (pour Knizhnik, Polyakov et Zamolodchikov) établit une correspondance entre exposants critiques du modèle sur espace métrique déterministe et modèle sur espace métrique aléatoire ; voir [Gar13].

**1.3. Théorie des probabilités et lois universelles.** Le but de la théorie des probabilités est l'étude mathématique du hasard. En particulier, on y cherche à comprendre des relations entre variables aléatoires notamment en décrivant, par des algorithmes, la génération de lois de probabilités complexes à partir de variables aléatoires dont la loi est simple (variable de Bernoulli, variable gaussienne, etc.).

Un des succès de la théorie des probabilités a été d'identifier des lois de probabilités dites universelles, puisqu'elles apparaissent comme limite de nombreux processus lorsque la taille du système tend vers l'infini. Ceci fait écho à la théorie des classes d'universalité en physique et

à des notions comme celle de point fixe du groupe de renormalisation en physique mathématique [WF72].

Le théorème le plus ancien dans ce sens est le théorème-limite central (de Moivre, Laplace). La loi universelle dans ce cas est la loi gaussienne. Plus tard, ce théorème a été étendu au théorème d'invariance de Donsker qui donne la convergence de marches aléatoires vers le mouvement brownien ; voir figure 1.4.

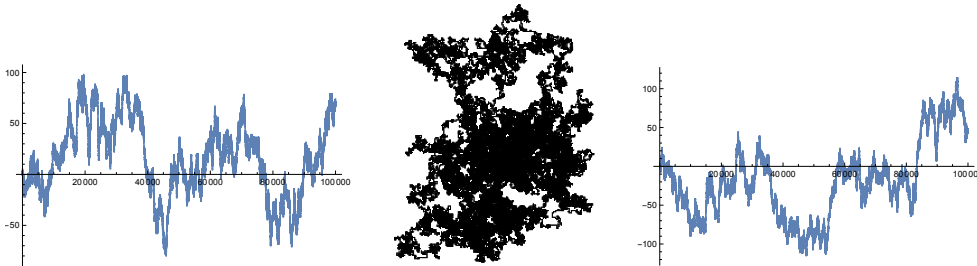


FIGURE 1.4. Approximation discrète du mouvement brownien plan par une marche aléatoire sur le réseau carré  $\mathbb{Z}^2$ . La trajectoire plane au centre a pour coordonnées deux mouvements browniens unidimensionnels (représentés de part et d'autre) qui peuvent être indépendants (pour le cas canonique, comme ici) ou corrélés (pour un processus plus général ; voir le théorème 1.26).

Des exemples plus modernes d'universalité sont les suivants :

- L'évolution de Schramm–Loewner (2000) est la limite des interfaces des modèles critiques planaires :
  - arbre couvrant uniforme [Sch00, LSW04],
  - modèle de dimères et double-dimères [Ken11, Dub19, BC21],
  - percolation critique sur les sommets du réseau triangulaire [Smi01],
  - modèle d'Ising et FK–Ising [Smi10a, CS12b].
- La loi de Tracy–Widom (1994) est la limite de plus grandes valeurs de certains modèles contraints :
  - la plus grande valeur propre d'une matrice Hermitienne aléatoire du GUE (*Gaussian Unitary Ensemble*, convenablement normalisée [TW96],
  - la plus grande part d'une partition aléatoire selon la mesure de Plancherel, convenablement normalisée [BDJ99] ; voir [MS14] également.
- La classe d'universalité de KPZ (identifiée par Kardar, Parisi et Zhang) est la limite des modèles d'interfaces de croissance [Cor12].

**1.4. Informatique théorique, théorie du signal et apprentissage statistique.** Nous l'avons vu au paragraphe 1§1.1, les questions de dénombrement mènent aux questions de complexité : évaluer la difficulté de compter des classes d'objets très nombreux. Compter le nombre d'arbres couvrants d'un graphe ou compter le nombre de couplages parfaits d'un graphe planaire sont des problèmes « faciles » (Kirchhoff, Kasteleyn) : on dit que ces problèmes sont dans la classe FP. Compter le nombre de couplages parfaits d'un graphe général est « difficile » (Valiant) : on dit qu'il est dans la classe #P. Nous mentionnons d'autres exemples au paragraphe 4§4.3.

Pour plus de détails sur les classes de complexité, nous nous référons à [Vaz01] ; voir aussi le texte de Knuth [Knu76] sur l'importance des nombres finis et une approche heuristique et illustrée au concept de complexité.

La complexité d'une classe d'objet a aussi des liens avec la difficulté d'échantillonner la mesure uniforme sur cet ensemble. Même lorsque l'on ne peut pas compter facilement de manière

exacte, on peut parfois compter facilement de manière approchée, et ceci à l'aide d'algorithmes d'échantillonnages en temps polynomial [Jer03]. Un exemple intéressant est donné par les forêts couvrantes d'unicycles, voir 4§4.3.

Les graphes sont utiles à la modélisation ailleurs qu'en physique mathématique. Ils servent à modéliser des jeux de données structurées, ou des réseaux d'agents qui interagissent. Des questions comme la propagation d'opinions et la formation de communauté d'affinités sont étudiées. Le laplacien discret covariant (qui joue un rôle central dans ce mémoire et qui sera introduit au paragraphe 1§2 suivant) apparaît aussi dans des questions de synchronisation [BSS13, SW12b]. Les processus déterminantaux ont trouvé des applications en apprentissage statistique [KT<sup>+</sup>12] et en algèbre linéaire randomisée [DM21].

Après cette brève introduction au contexte très général dans lequel s'inscrit notre recherche, entrons dans le vif de notre sujet. Les parties 1§2 et 1§3 introduisent des définitions et résultats importants en géométrie combinatoire, et en géométrie aléatoire, respectivement, auxquels il nous sera utile de nous référer dans les chapitres suivants.

## 2. Géométries combinatoires

On s'intéressera dans les chapitres suivants à des géométries discrètes aléatoires, mais avant même de considérer un aléa, on présente les objets combinatoires déterministes sous-jacents.

**2.1. Graphes finis.** La structure basique la plus importante de tout ce mémoire est donnée par la notion de graphe, et nous commençons par en donner une définition formelle.

DEFINITION 1.3. *Un graphe est un quintuplet  $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E}, s, t, i)$  où*

- $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{E}$  sont deux ensembles non vides,
- $s, t : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{V}$  sont deux applications telles que pour tout  $v \in \mathbf{V}$ , les ensembles  $s^{-1}(v)$  et  $t^{-1}(v)$  sont finis,
- $i$  est une involution sans point fixe de  $\mathbf{E}$ , telle que  $t \circ i = s$ .

Si  $\mathbf{V}$  est fini on dit que le graphe est fini. Les éléments de  $\mathbf{V}$  sont les sommets du graphe et les éléments de  $\mathbf{E}$  sont ses arêtes (orientées). Toute arête  $e$  est dirigée et relie sa source  $s(e)$  à son but  $t(e)$ . On utilisera les notations  $\underline{e} = s(e)$ ,  $\bar{e} = t(e)$  et  $e^{-1} = i(e)$  pour la source, le but et l'inverse d'une arête. On note généralement un graphe  $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  sans mentionner les applications  $s, t, i$ .

L'involution  $i$  induit une relation d'équivalence sur  $\mathbf{E}$  et on définit l'ensemble des arêtes géométriques du graphe comme le quotient

$$[\mathbf{E}] = \mathbf{E}/i.$$

On écrit  $[e]$  pour l'arête géométrique correspondant à l'arête  $e : [e] = \{e, e^{-1}\} = [e^{-1}]$ .

Dans ce mémoire, nous considérons, sauf explicitement dit, des graphes non dirigés (la théorie des graphes dirigés mène à d'autres questions ; par exemple la notion de connexité y est différente, voir 5§3.6). Nous pensons à chaque arête géométrique comme à une arête non orientée. Parfois, il est utile d'avoir un représentant de chaque arête géométrique sous une forme orientée, et nous noterons  $\mathbf{E}^+$  l'ensemble des arêtes correspondant à un tel choix.

La figure 1.5 montre un graphe tel que nous l'entendons dans ce mémoire. Nous autorisons en général les arêtes multiples (c'est-à-dire  $e \neq e' \in \mathbf{E}$  telles que  $s(e) = s(e')$  et  $t(e) = t(e')$ ) et les boucles ( $e \in \mathbf{E}$  telle que  $s(e) = t(e)$ ).

Dans ce texte, nous considérons des *sous-graphes couvrants* d'un graphe  $G$ . Il s'agit des graphes avec pour ensemble de sommets  $\mathbf{V}$  et pour arêtes un sous-ensemble de  $\mathbf{E}$  stable par inverse ; autrement dit un sous-ensemble d'arêtes géométriques, qui viennent avec les arêtes orientées des deux orientations correspondantes.

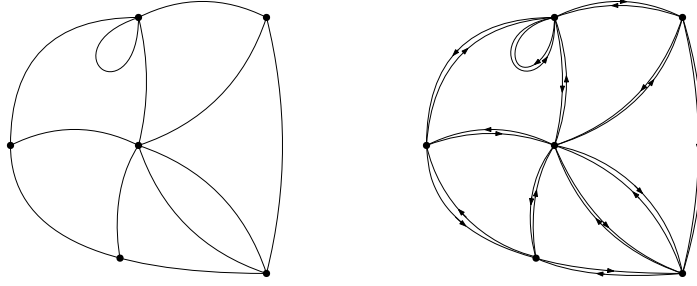


FIGURE 1.5. Deux représentations d'un graphe fini connexe à 6 sommets : à gauche, ses arêtes géométriques ; à droite, ses arêtes (orientées).

**2.2. Chaînes et cochaînes.** On aura besoin de notions élémentaires d'homologie et cohomologie des graphes. Soit  $G$  un graphe fini.

Soit  $C_0(G, \mathbb{Z})$  le  $\mathbb{Z}$ -module libre sur l'ensemble  $V$  des sommets de  $G$ , et soit  $C_1(G, \mathbb{Z})$  le quotient du  $\mathbb{Z}$ -module libre sur  $E$  par le sous-module engendré par  $\{e + e^{-1} : e \in E\}$  ; ce sont les groupes de chaînes du graphe. On note aussi  $C^0(G, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(C_0(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$  et  $C^1(G, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(C_1(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$  les groupes abéliens dits de cochaînes.

L'application de *bord*  $\partial : C_1(G, \mathbb{Z}) \rightarrow C_0(G, \mathbb{Z})$  est définie par

$$(4) \quad \partial e = \bar{e} - \underline{e},$$

et l'application de *cobord*  $\delta : C^0(G, \mathbb{Z}) \rightarrow C^1(G, \mathbb{Z})$  (appelée aussi dérivée discrète) par

$$\delta v = \sum_{e \in E: \bar{e}=v} e.$$

On définit les deux groupe abéliens libres suivants :

$$Z_1(G, \mathbb{Z}) = \ker \partial \quad \text{et} \quad B^1(G, \mathbb{Z}) = \text{im } \delta.$$

On appelle *cycles* les éléments de  $Z_1(G, \mathbb{Z})$  et *coupures* ceux de  $B^1(G, \mathbb{Z})$ .

**2.3. Arbres couvrants et bases intégrales fondamentales.** Supposons  $G$  connexe. Un arbre couvrant de  $G$  est un sous-graphe couvrant  $T$  de  $G$  qui est connexe et tel que  $Z_1(T, \mathbb{Z}) = 0$ .

Étant donné un arbre couvrant  $T$ , on définit pour toute arête  $e \notin T$ , le cycle fondamental  $\gamma(T, e)$  comme le cycle minimal déterminé par l'ajout de  $[e]$  à  $T$ , et orienté par  $e$ . De même, pour toute arête  $e \in T$ , on définit la coupure fondamentale  $\kappa(T, e)$  comme étant l'élément de  $B^1(G, \mathbb{Z})$  associé.

Un résultat bien connu énonce que pour tout arbre couvrant  $T$  de  $G$ , l'ensemble  $\{\gamma(T, e) : e \in T \cap E^+\}$  est une base intégrale de  $Z_1(G, \mathbb{Z})$ , et que l'ensemble  $\{\kappa(T, e) : e \in E^+ \setminus T\}$  est une base intégrale de  $B^1(G, \mathbb{Z})$ .

Ces résultats sont à la base de la théorie algébrique des graphes. On peut notamment en déduire les formules de type *matrix-tree* (voir 4§4.1).<sup>6</sup>

**2.4. Polynôme de Tutte.** Le polynôme de Tutte d'un graphe fini est un polynôme en deux variables important que l'on retrouvera plus loin dans ce texte. Une version de ce polynôme en plusieurs indéterminées (indicées par les arêtes), notée  $\mathcal{Z}_G(\underline{x})$  est naturelle aussi, puisqu'elle se spécialise au polynôme de Kirchhoff d'énumération des arbres couvrants, et joue le rôle de fonction de partition du modèle FK ; voir [Sok05] et le chapitre 2. Rappelons que le polynôme de Tutte d'un graphe fini [Tut54, Tut04], dans son expression due à Whitney qui généralise

6. Le lien avec des objets comme le groupe jacobien d'un graphe et le groupe du tas de sable sont brièvement expliqués dans [KL22b, §2.3].

au cas de deux variables le polynôme univarié dit chromatique<sup>7</sup> de Birkhoff [Whi32], est un invariant de graphe donné par le polynôme en deux variables suivant.

DEFINITION 1.4. *Le polynôme de Tutte d'un graphe fini  $G$  est défini par*

$$(5) \quad \mathcal{Z}_G(x, y) = \sum_{H \leq G} (x-1)^{k(H)-k(G)} (y-1)^{|E(H)|-|V(G)|+k(H)},$$

où la somme porte sur les sous-graphes couvrants  $H$  de  $G$ ,  $k(H)$  désigne le nombre de composantes connexes de  $H$  et  $|E(H)|$  est le nombre d'arêtes géométriques de  $H$ .

Le polynôme de Tutte d'un graphe fini non connexe est le produit des polynômes de Tutte de ses composantes connexes. On supposera donc dorénavant que le graphe  $G$  dont on considère le polynôme de Tutte est connexe.

Le polynôme de Tutte possède une définition récursive, à l'origine de son étude par Tutte. Pour toute arête  $e$ , on note  $G \setminus \{e\}$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en supprimant  $e$ , et on note  $G_{/e}$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en  $y$  contractant l'arête  $e$ . Si  $G$  n'a pas d'arête, on pose  $\mathcal{Z}_G(x, y) = 1$ . Puis pour tout graphe  $G$  possédant au moins une arête, on a :

- $\mathcal{Z}_G(x, y) = x \mathcal{Z}_{G_{/e}}(x, y)$  si  $e$  est un isthme, c'est-à-dire une arête telle que  $k(G \setminus \{e\}) > k(G)$  (autrement dit,  $\mathbb{1}_e - \mathbb{1}_{e^{-1}}$  est une coupure) ;
- $\mathcal{Z}_G(x, y) = y \mathcal{Z}_{G \setminus \{e\}}(x, y)$  si  $e$  est une boucle, c'est-à-dire que  $s(e) = t(e)$  (autrement dit,  $e$  est un cycle) ;
- $\mathcal{Z}_G(x, y) = \mathcal{Z}_{G \setminus \{e\}}(x, y) + \mathcal{Z}_{G_{/e}}(x, y)$  si  $e$  n'est ni une boucle ni un isthme.

Cette définition récursive fait écho à l'expression (25), plus bas, du polynôme de Tutte d'un graphe fini connexe en fonction de l'activité de ses arbres couvrants ; expression donnée originellement par Tutte.

Lorsque le graphe  $G$  est planaire et que  $G^*$  désigne le dual d'un plongement de  $G$  dans la sphère, on a  $\mathcal{Z}_G(x, y) = \mathcal{Z}_{G^*}(y, x)$ .

En utilisant la définition récursive ci-dessus, on peut calculer le polynôme de Tutte en pratique. Par exemple, on trouve aisément que le polynôme de Tutte d'un graphe cyclique sur  $n$  sommets vaut  $\mathcal{Z}_G(x, y) = y + \sum_{k=1}^n x^k$ . Le polynôme de Tutte du graphe de la figure 4.4 (en  $y$  ignorant les orientations des arêtes) vaut  $\mathcal{Z}_G(x, y) = x + 2x^2 + x^3 + y + 2xy + y^2$ .

**2.5. Fibrés et espaces euclidiens de formes.** Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On considère l'espace vectoriel  $C_1(G, \mathbb{K}) = C_1(G, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{K}$  des chaînes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , et son dual  $\Omega^1(G) = \Omega^1(G, \mathbb{K}) = \text{Hom}(C_1(G, \mathbb{K}), \mathbb{K})$ , appelées aussi cochaînes ou 1-formes, et que l'on identifie avec l'espace des fonctions antisymétriques sur les arêtes. De même on considère l'espace de chaînes  $C_0(G, \mathbb{K})$  et son dual  $\Omega^0(G)$ , l'espace des fonctions sur les sommets, appelées aussi 0-formes.

Étant donné un entier  $N \geq 1$ , supposons qu'à chaque sommet soit associé un  $\mathbb{K}$ -espace euclidien  $F_v$  de dimension  $N$  et à chaque arête  $e$ , un espace vectoriel  $F_e$  de même dimension, tel que  $F_{e^{-1}} = F_e$ . On appelle cette donnée un fibré vectoriel  $F$  de rang  $N$  au-dessus du graphe. On étend alors naturellement les définitions des formes à des espaces de formes à valeurs dans le fibré :  $\Omega^0(F)$  et  $\Omega^1(F)$ .

On munit ces espaces vectoriels de structures euclidiennes qui dépendent d'un choix de poids  $\underline{x} = (x_e)_{e \in E}$  tels que  $x_{e^{-1}} = x_e > 0$ . Pour tout sommet  $v \in V$ , on pose

$$\lambda_v = \sum_{e \in E: e=v} x_e,$$

7. Un polynôme  $\chi_G(\lambda)$  en une variable associé au graphe dont l'évaluation sur un entier  $n \geq 1$  donne le nombre de coloriage propres (les sommets sont coloriés de telle sorte que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur) à  $n$  couleurs du graphe.

et on pense à  $(\lambda_v)_{v \in \mathbf{V}}$  comme à une mesure de référence sur  $\mathbf{V}$ . Les produits scalaires sont définis, pour tous  $f, g \in \Omega^0(\mathbf{F})$  et  $\psi, \omega \in \Omega^1(\mathbf{F})$ , par

$$(6) \quad (f, g) = \sum_{v \in \mathbf{V}} \lambda_v \langle f_v, g_v \rangle_v, \quad \text{et} \quad (\psi, \omega) = \sum_{e \in \mathbf{E}^+} x_e \langle \psi_e, \omega_e \rangle_e.$$

Une « justification » pour le choix de tels produits scalaires pondérés par les poids  $\underline{x}$  est donnée dans [KL21].<sup>8</sup>

**2.6. Connexion, holonomie et dérivée discrète covariante.** Étant donné un fibré, on peut lui associer une connexion, c'est-à-dire un ensemble d'isomorphismes  $h_{v,e}, h_{e,v}$ , pour  $v \sim e$ , de sorte que  $h_{e,v} = h_{v,e}^{-1}$ . Voir la figure 6.1 pour une illustration. On utilisera souvent la définition suivante.

DEFINITION 1.5. *Étant donné une connexion sur un fibré au-dessus d'un graphe, et  $\gamma = (x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n)$  un chemin, on appelle holonomie et on note  $\text{hol}_h(\gamma) \in \text{Hom}(\mathbf{F}_{x_0}, \mathbf{F}_{x_n})$  la composée des isomorphismes  $\text{hol}_h(\gamma) = h_{x_n, e_{n-1}} \circ h_{e_{n-1}, x_{n-1}} \cdots \circ h_{e_0, x_0}$ .*

La dérivée discrète covariante est définie comme l'opérateur linéaire  $d_h : \Omega^0(\mathbf{F}) \rightarrow \Omega^1(\mathbf{F})$  qui à tout  $f \in \Omega^0(\mathbf{F})$  et tout  $e \in \mathbf{E}$  associe

$$d_h f(e) = h_{e, \bar{e}} f(\bar{e}) - h_{e, \underline{e}} f(\underline{e}).$$

Voir la figure 6.5 pour une illustration de cette définition.

On définit le laplacien (discret) covariant pour tout  $f \in \Omega^0(\mathbf{F})$  et tout  $v \in \mathbf{V}$ , par

$$(7) \quad (\Delta_h f)(v) = \sum_{e \in \mathbf{E}: \bar{e}=v} x_e (f(\bar{e}) - h_{\bar{e}, \underline{e}} f(\underline{e})).$$

Soit  $\mathbf{G}$  un graphe fini connexe. On utilisera la décomposition orthogonale de l'espace des 1-formes en formes exactes et formes fermées

$$(8) \quad \Omega^1(\mathbf{G}) = \text{im } d_h \oplus \ker d_h^*,$$

où  $d_h^*$  désigne l'adjoint de  $d$ , et qui s'interprète comme une divergence discrète.

**2.7. Polynômes en plusieurs variables.** La formule de Cayley (2) présentée au début de ce chapitre est un cas particulier du théorème 1.6 suivant. Étant donné un sous-ensemble de sommets  $\mathbf{W}$ , on appelle forêt couvrante enracinée sur  $\mathbf{W}$  ou des cycles, l'ensemble des sous-graphes couvrants, dont chaque composante connexe est soit un arbre contenant un unique sommet de  $\mathbf{W}$ , soit un unicycle ne contenant aucun sommet de  $\mathbf{W}$ . Notons  $\mathcal{U}_{\mathbf{W}}(\mathbf{G})$  l'ensemble de ces sous-graphes.

THÉORÈME 1.6 (G. Kirchhoff 1847 ; T. Zaslavsky 1982 ; S. Chaiken, 1982 ; R. Forman, 1993 ; R. Kenyon, 2011). *Supposons qu'un graphe fini connexe  $\mathbf{G}$  soit muni d'un fibré  $\mathbf{F}$  de rang 1 et d'une connexion unitaire  $h$  sur  $\mathbf{F}$ . Alors pour tout  $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ , on a*

$$(9) \quad \det(\Delta_h)_{\mathbf{W}^c}^{\mathbf{W}^c} = \sum_{F \in \mathcal{U}_{\mathbf{W}}(\mathbf{G})} \underline{x}^F \prod_{c \text{ cycle de } F} |1 - \text{hol}_h(c)|^2,$$

où  $\text{hol}_h(c)$  est l'holonomie de la connexion  $h$  le long du cycle  $c$  (pour un choix arbitraire d'orientation) et  $(\Delta_h)_{\mathbf{W}^c}^{\mathbf{W}^c}$  désigne la compression, sur l'espace des 0-formes nulles sur  $\mathbf{W}$ , du laplacien covariant associé à  $h$ .

8. Dans [KL22b], nous insistons de plus sur l'idée que si l'on souhaite munir de surcroît les espaces de chaînes de structures euclidiennes, alors il est naturel de considérer sur les 1-chaînes un produit scalaire dépendant des inverses des poids,  $\underline{x}^{-1}$ , selon le principe inventé : « Les chaînes résistent, les cochaînes conduisent ».



Ce théorème a été démontré, depuis sa forme première et par raffinements successifs jusqu'à la version énoncée ici, par Kirchhoff, Zaslavsky, Chaiken, Forman et Kenyon [Kir47, Zas82, Cha82, For93, Ken11]. On y revient au chapitre 5.

Dans une autre direction, la formule de Cayley (2) est aussi un cas particulier du théorème suivant ; voir [Pit99, Eq. (39)] et [Sta99, Theorem 5.3.4]. Il donne une interprétation d'un développement multinomial en termes de forêts couvrantes enracinées d'un graphe complet.

**THÉORÈME 1.7** (J. Pitman, R. Stanley, 1999). *On considère le graphe complet  $G$  sur les sommets  $\{1, \dots, n\}$ . Pour toute forêt couvrante  $F$  munie d'un sommet-racine par composante connexe, on note  $\deg_i(F)$  le nombre de sommets qui sont connectés à  $i$  dans  $F$  et à distance de la racine 1 de plus que la distance de  $i$  à la racine. Pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on a*

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_k^\bullet(G)} x_1^{\deg_1(F)} \dots x_n^{\deg_n(F)} = \binom{n-1}{k-1} (x_1 + \dots + x_n)^{n-k},$$

où la somme porte sur l'ensemble  $\mathcal{F}_k^\bullet(G)$  des forêts couvrantes à  $k$  composantes, donc chaque composante est enracinée.

**2.8. Complexes simpliciaux.** Comme il n'est question de complexes simpliciaux que de manière marginale dans ce texte, nous en donnons la définition la plus simple.<sup>9</sup>

Un complexe simplicial de dimension  $m \geq 1$  sur un ensemble fini de sommets  $V$  est la donnée d'un ensemble de  $m$ -faces, qui sont des sous-ensembles de cardinal  $m+1$  de  $V$ . On considère pour tout  $k \geq 1$ , l'ensemble des  $k$ -faces comme étant les sous-ensembles de cardinal  $k+1$  inclus dans une  $m$ -face. On dit que la dimension d'une  $k$ -face est  $k$ .<sup>10</sup> On note  $X_k$  l'ensemble des  $k$ -faces de  $X$ . Chaque  $k$ -face, pour  $k \geq 1$ , possède deux orientations.

Un complexe simplicial est un complexe de chaînes au sens suivant : pour tout  $k \in \{1, \dots, m\}$ , on définit les groupes abéliens de chaînes  $C_k(X, \mathbb{Z})$  comme les combinaisons à coefficients entiers des  $k$ -faces orientées. On définit les opérateurs de bord  $\partial_k : C_k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{k-1}(X, \mathbb{Z})$  par une généralisation de l'opérateur de bord  $\partial$  qui associe à une arête la différence de ses sommets (voir l'équation (4)). Deux sous-groupes de  $C_k(X, \mathbb{Z})$  sont notables : le sous-groupe des cycles  $Z_k(X, \mathbb{Z}) = \ker \partial_k$  et le sous-groupe des bords  $B_k(X, \mathbb{Z}) = \text{im } \partial_{k+1}$ . Puisque  $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ , on a  $B_k(X, \mathbb{Z}) \subset Z_1(X, \mathbb{Z})$  et on définit les groupes d'homologie comme le quotient  $H_k(X, \mathbb{Z}) = Z_k(X, \mathbb{Z}) / B_k(X, \mathbb{Z})$ .

On dit qu'un sous-complexe simplicial de dimension  $k$  est  $\mathbb{Q}$ -acyclique si ses groupes d'homologie (relative) à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  sont nuls. On note  $\mathcal{A}_n^{(k)}$  l'ensemble des sous-complexes de dimension  $k$ , couvrants au sens où ils contiennent tout  $X_{k-1}$ ,  $\mathbb{Q}$ -acycliques et maximaux, d'un simplexe  $X_n$  sur  $n$  sommets étiquetés ; et on appelle les éléments de  $\mathcal{A}_n^{(k)}$  des arbres de Kalai puisqu'ils ont été introduits par Kalai, qui démontra le théorème suivant [Kal83].

**THÉORÈME 1.8** (G. Kalai, 1983). *On a*

$$\sum_{K \in \mathcal{A}_n^{(k)}} |H_{k-1}(K, \mathbb{Z})|^2 = n \binom{n-2}{k}.$$

Le théorème de Cayley (théorème 1.1) correspond au cas  $k = 0$  du théorème de Kalai. Duval–Klivans–Martin [DKM09], puis Lyons [Lyo09] et Catanzaro–Chernyak–Klein [CCK15]

9. Dans le cas  $m = 1$ , la définition présentée ici n'est pas aussi générale que la notion de graphe présentée plus haut, qui elle, autorise par exemple les boucles et les arêtes multiples.

10. On voit en ce sens que la notion de complexe simplicial n'est pas aussi générale que l'on pourrait le souhaiter : pour un complexe simplicial, les faces de dimension 2 sont nécessairement des triangles par exemple.

ont généralisé cette identité au cas de complexes plus généraux, et munis de poids. Elle fut aussi utilisée par [RV15].

**2.9. Matroïdes.** La théorie des matroïdes a été introduite par H. Whitney [Whi35] et indépendamment T. Nakasawa [NK09], comme une abstraction de la notion d'indépendance combinatoire observée dans un graphe ; voir [Ard18, Ard21, Oxl11]. G. Rota proposa d'appeler les matroïdes des « géométries combinatoires » ; terminologie non retenue (voir [Cun12]) mais que nous trouvons très évocatrice et qui motive le choix de titre de cette partie et du mémoire.

DEFINITION 1.9. *Un matroïde  $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$  sur un ensemble fini  $S$  est la donnée d'une collection non vide  $\mathcal{I}$  de parties de  $S$ , appelées sous-ensembles indépendants, telle que*

- si  $J \subset I$ , et  $I \in \mathcal{I}$ , alors  $J \in \mathcal{I}$  ;
- si  $I, J \in \mathcal{I}$  et  $|J| < |I|$ , il existe  $i \in I \setminus J$  tel que  $J \cup \{i\} \in \mathcal{I}$ .

On appelle *base* un élément de  $\mathcal{I}$  maximal pour l'inclusion, et on note  $\mathcal{B}$  l'ensemble des bases de  $\mathcal{M}$ . Les bases ont toutes le même cardinal, appelé *rang* du matroïde. La fonction de rang  $r_{\mathcal{M}}$  définie par  $r_{\mathcal{M}}(J) = \max\{|I| : I \subset J, I \in \mathcal{I}\}$  associe à  $J$  le rang du matroïde  $\mathcal{M}$  restreint à  $J$ .

Les *circuits* de  $\mathcal{M}$  sont les parties non-indépendantes (on dit dépendantes) minimales. Les parties *génératrices* (ou *couvrantes*), sont les sous-ensembles de  $S$  qui contiennent une base (c'est-à-dire un élément de  $\mathcal{B}$ ).

**2.10. Matroïdes circulaire et bicirculaire.** On a déjà rencontré plus haut dans le théorème 1.6 deux familles de sous-graphes couvrants : les arbres couvrants, et les forêts couvrantes d'unicycles. Les arbres couvrants et les forêts couvrantes d'unicycles d'un graphe sont, respectivement, les bases des matroïdes *circulaires* et *bicirculaires*. Il s'agit de matroïdes définis sur l'ensemble des arêtes géométriques du graphe. Les noms de ces matroïdes proviennent de la nature de leurs circuits qui sont les cycles simples et les 2-cycles, respectivement.

Dans [SP72], il est démontré que ce sont les deux seuls matroïdes sur l'ensemble des arêtes d'un graphe pour lesquelles les circuits sont une *classe d'isomorphisme* de graphes *connexes*.

Les matroïdes circulaires et bicirculaires ont des similarités mais se comportent aussi très différemment ; voir notamment le paragraphe 4§4.3. Dans le tableau de la figure 1.6, on recense leurs propriétés de base. On y utilise les notations suivantes. Pour  $I \subset [E]$ , on note  $k(I)$  le nombre de composantes connexes du sous-graphe couvrant  $(V, I)$ . On note  $k_0(I) \leq k(I)$  le nombre de composantes connexes acycliques du graphe  $(V, I)$ , c'est-à-dire le nombre de ses composantes connexes qui sont des arbres. On suppose de plus que  $G$  est connexe et qu'il contient au moins un cycle, de sorte que  $k_0(G) = 0$  et  $k(G) = 1$ .

MATROÏDE	CIRCUITS	INDÉPENDANTS	BASES	FONCTION DE RANG	RANG
circulaire	cycles	forêts couvrantes	arbres couvr.	$ V  - k(I)$	$ V  - 1$
bicirculaire	bicycles	u. d'arbr. et d'unicycl.	for. couvr. d'unicycl.	$ V  - k_0(I)$	$ V $

FIGURE 1.6. Résumé des propriétés basiques des matroïdes circulaires et bicirculaires.

**2.11. Polynômes générateurs et stabilité.** Les polynômes en plusieurs indéterminées sont utilisés comme fonction génératrice de suites combinatoires, ou de mesures de probabilités.<sup>11</sup> Un exemple important pour nous est le polynôme donné par l'équation (9). Il s'agit en général de polynômes à coefficients positifs, entiers ou réels.

11. On peut faire remonter cet usage au moins à l'étude des arbres généalogiques aléatoires par Bienaymé (1845) et Galton–Watson (1875).

L'étude des propriétés des polynômes en plusieurs indéterminées a de fortes implications sur les propriétés des coefficients, et donc des mesures de probabilité associées [Pem12]. Par exemple, des recherches sur les notions d'unimodalité de suites d'entiers [Sta89], ou de dépendance négative [Pem00, Gri06] ont connu des développements grâce à l'étude des polynômes et des matroïdes [Brä15, BBL09, SS14, Sok05, BH20].

Introduisons la notion importante de *stabilité* d'un polynôme en plusieurs indéterminées.

DEFINITION 1.10. *Un polynôme en plusieurs variables est stable si pour tout  $\underline{z} \in \mathbb{C}^d$  on a  $p(z_1, \dots, z_d) \neq 0$  lorsque  $\text{Im}(z) > 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ .*

L'utilité de cette notion pour nous vient du théorème suivant.

THÉORÈME 1.11 (Borcea–Brändén–Liggett, 2009). *Le polynôme générateur d'une mesure déterminantale associée à un noyau auto-adjoint est stable.*

En particulier, une mesure déterminantale associée à un noyau auto-adjoint a la propriété de Rayleigh forte, et est négativement associée; voir le paragraphe 1§3.2.

**2.12. Intégrales de Feynman et polynômes de Symanzik.** Un exemple important de polynômes stables (au sens de la définition 1.10) sont les polynômes de Symanzik, qui apparaissent en théorie quantique des champs dans des calculs d'intégrales de Feynman associées à un graphe. Nous renvoyons à l'introduction de [ABGF16] pour une présentation mathématique de ces intégrales.

En adaptant les notations de [ABGF16], l'amplitude associée à un graphe  $G$  (non pondéré) muni d'un « moment externe »  $\vec{q} \in (\mathbb{R}^D)^V$  satisfaisant la condition<sup>12</sup>  $\sum_{v \in V} \vec{q}_v = 0$ , est définie par

$$(10) \quad I_G(\vec{q}) = \int_{(\mathbb{R}_+)^E} \exp \left( -i \frac{\Psi_{G, \vec{q}}^{(2)}(\underline{x})}{\Psi_G^{(1)}(\underline{x})} \right) \frac{\prod_{e \in E} dx_e}{\sqrt{\Psi_G^{(1)}(\underline{x})}},$$

où l'argument de l'exponentielle dans l'intégrande fait intervenir les deux premiers polynômes de Symanzik, définis par

$$\Psi_G^{(1)}(\underline{x}) = \sum_{T \in \mathcal{T}(G)} \underline{x}^{E \setminus T} \quad \text{et} \quad \Psi_{G, \vec{q}}^{(2)}(\underline{x}) = \sum_{F = \{T, T'\} \in \mathcal{F}_2(G)} -\langle \vec{q}(\mathbf{V}(T)), \vec{q}(\mathbf{V}(T')) \rangle \underline{x}^{E \setminus F},$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne une norme de Minkowski sur  $\mathbb{R}^D$ , et  $\vec{q}(\mathbf{V}(T)) = \sum_{v \in V} \vec{q}_v$ . L'entier  $D$  représente la dimension de l'espace-temps de la théorie physique sous-jacente.

Lors de la démonstration d'un théorème sur les processus déterminantaux associés à ces polynômes [KL22b], exposée au chapitre 3, nous calculons, dans le cas  $D = 1$  (« non-réaliste physiquement ») et en utilisant la norme euclidienne au lieu d'une norme de Minkowski, le ratio  $\Psi_{G, \vec{q}}^{(2)}/\Psi_G^{(1)}$  comme un produit scalaire :

$$(11) \quad \frac{\Psi_{G, \vec{q}}^{(2)}(\underline{x})}{\Psi_G^{(1)}(\underline{x})} = \langle q, \mathfrak{G}q \rangle_{\underline{x}^{-1}},$$

où  $\mathfrak{G}$  est la fonction de Green associé aux poids  $\underline{x}^{-1}$ . Il s'agit d'une forme quadratique, version combinatoire de « l'accouplement de hauteur » de [ABGF16].

Le théorème de stabilité d'Amini [Ami19, Theorem 1.1] stipule que ce ratio, fonction des paramètres  $\underline{x}$ , a une variation bornée à l'infini. Cette variation correspond à une déformation de la géométrie euclidienne associée au graphe pondéré comme l'illustre le cas particulier suivant.

12. Cette condition est appelée « loi de conservation » des moments extérieurs  $\vec{q} = (\vec{q}_v)_{v \in V}$  dans [ABGF16].

THÉORÈME 1.12 (O. Amini, 2016). *Pour tout  $q \in \Omega^0(\mathbb{G})$  tel que  $\sum_{v \in \mathbb{V}} q(v) = 0$ , et pour toute collection de poids réels strictement positifs  $\underline{x}_0$ , la fonction rationnelle  $F_q : (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{E}^+} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\underline{x} \mapsto \langle\langle q, \mathfrak{G}q \rangle\rangle_{\underline{x}^{-1}}$  vérifie  $F_q(\underline{x} + \underline{x}_0) - F_q(\underline{x}) = O_{\underline{x}}(1)$  lorsque  $\underline{x} \rightarrow \infty$ .*

La démonstration d’Amini utilise une analyse combinatoire fine de la structure du graphe d’échange des arbres couvrants d’un graphe. Il s’agit du même graphe qui apparaît dans la chaîne de Markov utilisée pour échantillonner les arbres actifs au paragraphe 2§3.3 et l’étude de ce graphe pourrait donner des informations précises sur le temps de mélange de cette chaîne.

**2.13. Différentes interprétation des graphes décorés.** La notion de graphe décoré est protéiforme et on la retrouve dans des domaines très variés des mathématiques :

- combinatoire algébrique énumérative : arbres, cartes planaires, etc. [Tut63, Tut04] ;
- approximation discrète d’une géométrie continue [Ken97, Sch00, Smi01, LSW04, Mie13, Lup19a, BLR20] ;
- graphes isoradiaux et analyse complexe discrète [BdTR17] ;
- graphes comme outils de calcul : diagrammes de Feynman en physique théorique des interactions fondamentales et calculs de moments de matrices aléatoires [FGZJ95, MW23] ;
- graphes signés et décorés pour engendrer des revêtements de graphes [Zas82, GT77] ;
- suites infinies de graphes croissants et propriétés d’expansion [Bor20, BC19] ;
- géométrie tropicale d’un graphe métrique vu comme limite de surfaces dégénérées [AN20] ;
- outils de classification en géométrie algébrique : représentations de carquois [Bri12], graphes duaux de courbes nodales [BE91, Cha21] ;

Le travail présenté dans ce mémoire se rapproche plutôt des premiers points de vue sur les graphes donnés dans cette liste, mais nous aimerions à l’avenir élargir notre point de vue et nous inspirer des autres.

### 3. Géométries aléatoires

Dans cette partie, nous introduisons des objets probabilistes importants auxquels nous faisons référence dans la suite du mémoire.

**3.1. Processus déterminantaux.** Soit  $S$  un espace métrique séparable complet et  $\lambda$  une mesure de Radon sur  $S$ .

Un processus ponctuel sur  $S$  est un ensemble discret aléatoire de points de  $S$ . Ses fonctions de corrélations donnent la densité de probabilité de voir un nombre fini de points à des endroits fixés. Le formalisme précis dans le cas d’un ensemble  $S$  continu utilise la notion de mesure de comptage aléatoire ; voir [Kal17].

DEFINITION 1.13. *Un processus déterminantal sur  $S$  est un processus ponctuel dont les fonctions de corrélations  $(\rho_m)_{m \geq 1}$  existent et sont données par les mineurs d’un noyau. Plus précisément, cette deuxième condition signifie qu’il existe une fonction mesurable  $K : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , appelée noyau du processus, telle que pour tout  $m \geq 1$  et  $z_1, \dots, z_m \in S$ , on ait*

$$(12) \quad \rho_m(z_1, \dots, z_m) = \det (K(z_i, z_j))_{1 \leq i, j \leq m} .$$

La condition sur les noyaux  $K$  qui définissent de tels processus est encore mystérieuse dans le cas général. Dans le cas auto-adjoint en revanche, on a la caractérisation complète suivante [Mac75, Sos00, ST03].

THÉORÈME 1.14 (O. Macchi, A. Soshnikov, Shirai–Takahashi). *Un opérateur à noyau de classe trace engendre un processus déterminantal si et seulement si son spectre est dans  $[0, 1]$ .*

Un des premiers exemples de processus déterminantiaux provient de la théorie des matrices aléatoires ; voir [AGZ10].

**THÉORÈME 1.15** (Dyson–Gaudin–Mehta). *Le spectre d’une matrice hermitienne aléatoire gaussienne (dite GUE, pour Gaussian Unitary Ensemble) de taille  $N \times N$  est un processus ponctuel, associé au noyau de projection sur les polynômes de degré  $N - 1$  dans  $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2/4}\lambda)$ .*

Un autre exemple important est la mesure de probabilité uniforme sur les arbres couvrants.

**THÉORÈME 1.16** (Burton–Pemantle, 1993). *La mesure de probabilité uniforme sur les arbres couvrants d’un graphe fini est déterminantiale, associée au noyau de projection sur les 1-formes exactes.*

R. Kenyon [Ken11] a étendu ce résultat plus tard au cas des forêts couvrants d’unicycles, et une version dans le cas quaternion existe aussi [Kas15] ; voir chapitre 4.

**THÉORÈME 1.17** (R. Kenyon, 2009). *La mesure de probabilité sur les forêts couvrantes d’unicycles d’un graphe fini donnant un poids  $\prod_{c \text{ cycle}} |1 - \text{hol}_h(c)|^2$ , où  $h$  est une connexion unitaire de rang 1, est déterminantiale associée au noyau de projection sur les 1-formes exactes pour la dérivée discrète covariante.*

Une autre mesure déterminantiale importante obtenue par une version discrète des polynômes orthogonaux permet d’étudier des partitions d’entier aléatoires (travaux de Baik, Borodin, Olshanski, Okounkov, Deift, Johansson). Dans le cas du GUE et de ces mesures (qui asymptotiquement sont proches de la mesure de Plancherel sur les partitions, venant de la théorie des représentations), on voit apparaître un processus ponctuel universel associé au noyau d’Airy. C’est ainsi que la loi de Tracy–Widom mentionnée au paragraphe 1§1.3 fait son apparition.

Il y a aussi des processus déterminantiaux à noyaux non auto-adjoints. En voici un exemple dans le cas fini, cas particulier du modèle de dimères ; voir [Kas16] pour une introduction imagée.

**THÉORÈME 1.18** (R. Kenyon, 1997). *La mesure uniforme sur les couplages parfaits d’un graphe fini est déterminantiale, de noyau non symétrique.*

La démonstration de Kenyon [Ken97] repose sur le théorème de Kasteleyn (théorème 1.2) et un usage de la formule de Jacobi pour le calcul de mineurs de l’inverse d’une matrice.

Un exemple frappant de processus déterminantal infini sur le disque unité du plan complexe a été trouvé par Y. Peres et B. Virág [PV05].

**THÉORÈME 1.19** (Peres–Virág, 2001). *Le processus ponctuel des zéros de la fonction analytique aléatoire gaussienne  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , où les  $(a_n)_{n \geq 0}$  sont i.i.d. gaussiennes complexes standard, est déterminantal, associé à la projection sur l’espace de Bergman des fonctions analytiques  $L^2(\mathbb{D}, \lambda)$ .*

Citons deux résultats intéressants propres au cas infini [Lyo03].

**THÉORÈME 1.20** (R. Lyons, 2003). *La loi d’un processus déterminantal sur un ensemble discret ordonné  $S$  a une filtration asymptotique triviale.*

On retrouve ainsi l’énoncé de la « loi du 0 ou 1 » de Kolmogorov pour les suites de variables aléatoires indépendantes, ici dans un cas de variables négativement corrélées.

**THÉORÈME 1.21** (R. Lyons, 2003). *Soit  $S$  un ensemble discret et  $H$  un sous-espace fermé de  $\ell^2(S)$ . Soit  $X$  un sous-ensemble aléatoire de  $S$  tiré selon la loi déterminantiale associée à  $H$ . Alors, presque sûrement, l’adhérence de la projection orthogonale de  $H$  sur  $\ell^2(X)$  est égale à  $\ell^2(X)$ .*

Cet énoncé est beaucoup plus facile à démontrer dans le cas de rang fini (voir le lemme 3.6), et il est alors complété par le théorème de projection moyenne (voir théorème 3.7).

**3.2. Association négative et positive.** Une propriété importante satisfaite par les processus déterminantaux est l'association négative. Celle-ci implique en particulier que les corrélations sont négatives. Si  $X$  est un sous-ensemble aléatoire de  $S$ , on dit que sa loi vérifie l'association négative si pour toutes fonctions  $f, g : 2^S \rightarrow \mathbb{R}$  croissantes et tout sous-ensemble  $R$  de  $S$ , on a

$$(13) \quad \mathbb{E}[f(X \cap R)g(X \cap (S \setminus R))] \leq \mathbb{E}[f(X \cap R)] \mathbb{E}[g(X \cap (S \setminus R))] .$$

Une manière de démontrer cette propriété est d'utiliser la propriété plus forte dite de « Rayleigh forte » suivante, qui porte sur la fonction génératrice. Une mesure de probabilité sur  $2^S$  vérifie la propriété de Rayleigh forte lorsque sa fonction génératrice  $\mathbb{E}(\prod_{i \in X} z_i)$  est stable. Il est démontré dans [BBL09, Defs 2.9–2.10, Prop. 3.5] qu'une mesure déterminantale vérifie la propriété de Rayleigh forte.

La propriété d'association négative fait écho à la propriété d'association positive, qui est vérifiée par une mesure de probabilité sur  $2^S$  lorsque pour toutes  $f, g : 2^S \rightarrow \mathbb{R}$  croissantes, on a

$$(14) \quad \mathbb{E}[f(X)g(X)] \geq \mathbb{E}[f(X)] \mathbb{E}[g(X)] .$$

THÉORÈME 1.22 (Fortuin–Kasteleyn–Ginibre, 1971). *Le modèle FK pour  $q \geq 1$  satisfait la propriété d'association positive.*

Nous nous référons à l'appendice de [Gri06] pour l'histoire de ce résultat fondamental qui a permis de grandes avancées dans la compréhension du modèle FK pour  $q \geq 1$ . Il se démontre maintenant par l'inégalité démontrée par Holley. Le cas du modèle FK pour  $q \in [0, 1[$  est bien moins étudié et compris en l'absence d'un tel résultat. Voir [GW04, Gri06] pour des conjectures à ce sujet. Voir aussi les progrès récents grâce à la géométrie algébrique des matroïdes [BH18].

**3.3. Forêts couvrantes uniformes.** La mesure uniforme sur les arbres couvrants d'un graphe fini possède deux limites en volume infini lorsque la suite de graphes finis est une exhaustion d'un graphe fini, avec conditions aux bords libres ou fermées, notées WSF et FSF pour wired et free spanning forest.

THÉORÈME 1.23 (I. Benjamini, R. Lyons, Y. Peres, O. Schramm, 2001). *Soit  $d \geq 2$ . Sur  $\mathbb{Z}^d$ , on a  $WSF = FSF$ . De plus, si  $d \leq 4$ , la forêt est presque sûrement connexe, et si  $d > 4$ , elle contient une infinité de composantes connexes. Chaque composante connexe est infinie et possède un unique bout<sup>13</sup>.*

Un des outils utilisés par [BLPS01] pour démontrer ce théorème est l'algorithme trouvé par D. B. Wilson [Wil96] dans sa thèse qui échantillonne un arbre couvrant uniforme par le biais de marches aléatoires à boucles effacées (un type de marche auto-évitante introduite par G. F. Lawler en 1980 [Law80] pour trouver une alternative au modèle de marche auto-évitante du chimiste, spécialiste des polymères, P. J. Flory qu'il est difficile d'étudier par manque d'intégrabilité du modèle).

THÉORÈME 1.24 (D. B. Wilson, 1996). *On peut échantillonner la mesure uniforme sur les arbres couvrants par le biais de marches aléatoires à boucles effacées.*

Il existe d'autres algorithmes (dus notamment à Aldous et Broder) pour échantillonner cette mesure. Ils sont tous reliés de manière plus ou moins directe au théorème « Markov chain tree

13. La notion de bout a été introduite par R. Halin en théorie des graphes, suivant la définition donnée par H. Freudenthal dans le contexte des groupes topologiques. Le fait d'avoir un unique bout pour un arbre infini  $T$  signifie que pour toute arête  $e$ ,  $T \setminus \{e\}$  possède une unique composante connexe infinie. Ceci est équivalent au fait que pour toute paire de chemins infinis sans rebroussements dans l'arbre, les deux chemins diffèrent seulement par un nombre fini de sommets.

*theorem* » dont Aldous dit qu'il est « peut-être l'un des résultats les plus souvent redécouverts en théorie des probabilités » [Ald90] ; voir [PT18, Theorem 3.1] et les références qui y figurent.

Une des démonstrations de l'algorithme de Wilson repose sur une méthode combinatoire reliée à la théorie des empilements de pièces de X. Viennot, comme l'a montré P. Marchal [Mar00]. Cet algorithme fait partie d'une famille d'algorithmes de rejet partiel identifiée par M. Jerrum [Jer21] récemment. Un autre cas particulier échantillonne les forêts couvrantes d'unicycles [KK17, Kas15, GJ21].

**3.4. Évolution de Schramm–Loewner.** L'évolution de Schramm–Loewner (SLE) est une famille de courbes continues aléatoires sans croisement (mais avec possible auto-intersection) qui possèdent une propriété d'invariance par transformations conformes. Il en existe plusieurs variantes, mais décrivons celle appelée « évolution chordale » ; pour plus de détails, voir par exemple l'appendice de [MP10] par O. Schramm et W. Werner.

Pour tout domaine simplement connexe du plan  $D$  muni de deux points marqués sur son bord, notés  $a$  et  $b$ , l'évolution de Schramm–Loewner  $\gamma(t)$  de  $a$  à  $b$  dans  $D$  est caractérisée par la propriété de « Markov conforme » : pour tout temps  $t > 0$ , le futur de la trajectoire est une évolution de Schramm–Loewner dans le domaine  $D \setminus K_t$ , qui va de  $\gamma(t)$  à  $b$ , où  $K_t$  est le complémentaire dans  $D$  de la composante connexe de  $D \setminus \gamma[0, t]$  contenant  $b$  ; voir la figure 1.7.

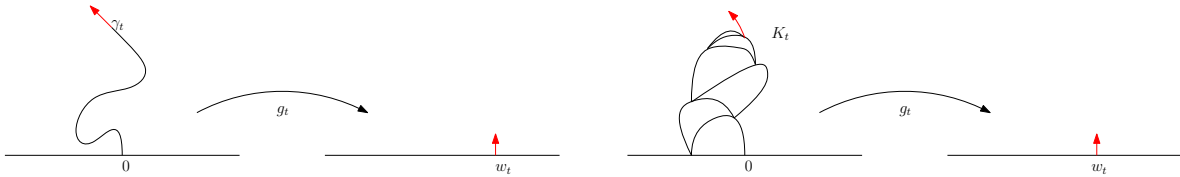


FIGURE 1.7. Dynamiques de l'équation de Schramm–Loewner pour  $\kappa < 4$  à gauche, et  $\kappa \geq 4$  à droite.

Puisqu'en vertu du théorème d'uniformisation de Riemann [dSG10], tous les domaines simplement connexes propres du plan sont conformément équivalents, il suffit de décrire le processus sur le demi-plan supérieur  $\mathbb{H}$ . Pour cela, on considère l'équation différentielle de Loewner chordale sur une famille d'applications conformes  $(g_t)$ , définie, pour tous  $t > 0$  et  $z \in \mathbb{H}$  par

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - w_t},$$

où  $g_0(z) = z$ . En définissant  $\tau_z = \inf\{t > 0 : g_t(z) \text{ n'est plus défini}\}$ , et en posant  $K_t = \{z \in \overline{\mathbb{H}} : \tau_z \leq t\}$ , l'application  $g_t$  est un homéomorphisme conforme entre  $\mathbb{H} \setminus K_t$  et  $\mathbb{H}$ .<sup>14</sup>

L'évolution de Schramm–Loewner est le processus stochastique de compacts croissants  $(K_t)_{t \geq 0}$  ainsi obtenu en considérant  $\kappa > 0$  et prenant pour  $(w_t)_{t \geq 0}$  le processus  $(W_t)_{t \geq 0} = (B_{\kappa t})_{t \geq 0}$ , où  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien sur  $\mathbb{R}$  partant de 0 au temps  $t = 0$ . S. Rohde et O. Schramm [RS05] ont montré que l'évolution de Schramm–Loewner peut bien être décrite par une courbe continue  $(\gamma_t)_{t \geq 0}$ , même si elle est définie implicitement, confirmant ainsi l'heuristique ci-dessus.

Cette courbe est fractale et V. Beffara [Bef08] donna sa dimension de Hausdorff de son image :  $\min(1 + \kappa/8, 2)$ . Lorsque  $\kappa < 4$ , la courbe est simple ; pour  $\kappa \in [4, 8[$  la courbe rebondit sur le passé de sa trajectoire ; et pour  $\kappa \geq 8$ , elle remplit tout l'espace. Il y a une dualité entre  $\text{SLE}_\kappa$  et  $\text{SLE}_{\kappa'}$  lorsque  $\kappa' = 16/\kappa$ . De façon simplifiée : le bord du compact  $K_t$  engendré par  $\text{SLE}_\kappa$  avec  $\kappa' > 8$  est une courbe  $\text{SLE}_\kappa$  avec  $\kappa = 16/\kappa'$ .

14. K. Loewner trouva cette équation en 1923 dans son travail sur la conjecture de Bieberbach (1916) portant sur la croissance des coefficients des fonctions univalentes, maintenant théorème de L. de Branges (1985).

Schramm introduisit cette famille de processus aléatoires afin de construire la limite d'échelle des courbes aléatoires discrètes apparaissant dans les modèles de physique statistique planaire critiques. Des résultats dans ce sens ont été obtenus, voir le paragraphe 1§1.3.<sup>15</sup>

Il existe d'autres variantes de SLE que la version chordale : la version radiale qui relie le centre du disque avec son bord ; la version planaire ou sur la sphère de Riemann ; et des variantes branchantes et qui remplissent l'espace (voir théorème 1.26).

**3.5. Soupes de boucles et CLE.** Étant donné un espace polonais  $S$  muni d'une mesure sigma-finie  $\lambda$  et d'un processus de Markov de noyau de transition  $p_t(u, v)$ , il y a une mesure infinie naturelle sur les boucles paramétrées de  $S$ , que nous notons  $\mu$ , voir [LJ11]. Elle est obtenue en normalisant une mesure d'excursion Markovienne sur les chemins paramétrés par  $[0, t]$  partant et arrivant en  $u$  :

$$(16) \quad \mu(\cdot) = \int_S \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{P}_{u,u}^t(\cdot) p_t(u, u) \frac{dt}{t} d\lambda(u).$$

Dans le cas où  $S = \mathbb{R}^2$  et le processus de Markov est le mouvement brownien, G. Lawler et W. Werner [LW04] ont défini la « soupe de boucle brownienne » d'intensité  $c > 0$  comme le processus de Poisson d'intensité  $c\mu/2$ .

On peut fixer un domaine simplement connexe du plan  $D$  et considérer la restriction du processus de Poisson aux boucles de ce domaine. Pour  $c \leq 1$ , la soupe ne recouvre pas tout le domaine et on peut considérer les composantes connexes de ces amas de boucles. Leur frontière est un processus de boucles qui peuvent se toucher, mais ne se croisent pas. Ce processus est invariant conforme et appelé CLE (pour *conformal loop ensemble*). Il a été défini ainsi par S. Sheffield et W. Werner [SW12a]. Ces boucles sont localement des SLE de paramètre  $\kappa$  où la relation entre  $c$  et  $\kappa$  est

$$(17) \quad c = \frac{(3\kappa - 8)(6 - \kappa)}{2\kappa}.$$

La quantité  $c$  est aussi égale à la charge centrale de la théorie quantique des champs conforme correspondante [Nie82], qui a une interprétation en termes de représentations de l'algèbre de M. Virasoro d'opérateurs différentiels.

Au niveau discret, une soupe de boucles de marches aléatoires est définie de manière analogue : cela correspond au cas où  $S$  est un graphe et le processus de Markov est une marche aléatoire [LJ11]. Lupu a démontré que la soupe discrète converge vers la soupe continue [Lup19a].

Un fait important est que l'ensemble des boucles (correctement définies et réarrangées) effacées par l'algorithme de Wilson (voir théorème 1.24) est une soupe de boucles de marche aléatoire d'intensité  $c = 1$  ; voir [LJ11, Law18, WP21]. Par affinement<sup>16</sup> du processus de Poisson correspondant afin d'en réduire l'intensité, on peut ainsi obtenir une soupe de boucles de toute intensité  $c \leq 1$ . C'est ainsi que les simulations spectaculaires de CLE par D. Wilson ont été obtenues ; on peut les consulter en temps réel sur les sites webs suivants : cle3.org et cle4.org.

**3.6. Champ libre gaussien.** Le champ libre gaussien<sup>17</sup> dans un domaine du plan avec condition zéro au bord est, de façon heuristique, une fonction aléatoire gaussienne dont les corrélations sont données par la fonction de Green. De façon équivalente, il s'agirait d'une gaussienne

15. Cela a aussi permis à Lawler, Schramm et Werner d'identifier le bord externe d'un cluster de trajectoire de mouvement brownien planaire comme étant  $\text{SLE}_{8/3}$  et de calculer ainsi sa dimension fractale, égale à  $4/3$ , démontrant ainsi la conjecture de B. Mandelbrot.

16. On pourrait dire écrémage, dans le cas d'une soupe.

17. La terminologie est redondante : en physique, l'objet analogue est appelé champ libre, car il n'y a pas d'interactions, comme celle donnée par un potentiel quartique souvent considéré. D'un point de vue mathématique, il s'agit d'un processus gaussien. L'usage a fait qu'en théorie des probabilités on utilise les deux qualificatifs.



dont la densité par rapport à une mesure de Lebesgue  $\lambda$  sur l'espace des fonctions continues (qui n'existe pas), serait définie par l'équation

$$(18) \quad \mathbb{P}(\Phi) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\|d\Phi\|^2\right) \lambda(\Phi).$$

Cette définition aurait un sens si l'on regarde une approximation discrète, ce que l'on appelle le champ libre discret, et c'est une manière de définir le champ libre continu par passage à la limite.

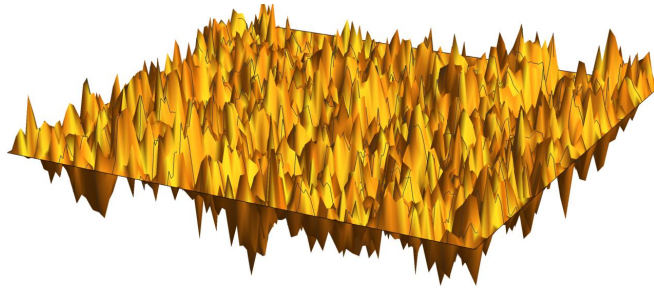


FIGURE 1.8. Approximation discrète d'un champ libre gaussien en dimension 2.

Cette « fonction » est en fait trop irrégulière pour être définie ponctuellement (voir la figure 1.8) et il faut en fait la considérer comme une distribution de Schwartz, vivant dans un espace de Sobolev. On peut néanmoins aussi définir le processus par ses valeurs moyennes sur des cercles, qui elles définissent bien des valeurs finies [WP21].

**3.7. Théorèmes d'isomorphisme.** Il y a des liens profonds entre SLE, CLE, et le champ libre gaussien, voir par exemple [WP21]. Ces liens ont notamment leurs origines dans les théorèmes dits d'isomorphisme qui relient la loi du temps local d'un processus de Markov et la loi du carré des valeurs d'une fonction gaussienne de covariance donnée par l'inverse du noyau du processus de Markov [LJ11, Szn12]; voir le paragraphe 6§1.

Voir [BHS21] pour des généralisations des théorèmes d'isomorphisme au cas où les spins sont à valeurs dans des espaces non euclidiens.

**3.8. Espaces métriques aléatoires.** Les cartes aléatoires possèdent des limites discrètes en volume infini, où la convergence a lieu au sens local de Benjamini–Schramm, par des résultats de Krikun et Angel–Schramm.

Lorsque l'on s'intéresse plutôt à la limite d'échelle continue, l'étude des modèles de physique statistique bi-dimensionnels critiques ont donné naissance à la géométrie conforme aléatoire.

La limite des arbres aléatoires finis est décrite par l'arbre continu aléatoire d'Aldous [Ald91]. Cet arbre se construit aussi par recollement d'une excursion brownienne, vue comme sa fonction de contour (voir la figure 1.2). C'est un espace métrique aléatoire. Notons que les graphes fonctionnels qui apparaissent dans la bijection de Joyal mentionnée en introduction de ce chapitre ont aussi une limite d'échelle similaire [AMP05].

La théorie des cartes aléatoires et ses développements probabilistes ont fourni une réponse partielle au souhait de Polyakov évoqué au paragraphe 1.2.5. Un résultat fondamental a été démontré indépendamment dans [Mie13, LG13].

THÉORÈME 1.25 (J.-F. Le Gall, G. Miermont, 2011). *Les cartes planaires aléatoires convergent vers la sphère brownienne.*

Ce résultat a été généralisé à toutes les surfaces compactes par J. Bettinelli et G. Miermont [BM22]. Par une approche très différente, une métrique aléatoire sur la sphère, dépendant d'un paramètre  $\gamma$ , a aussi été définie dans [DMS21].

**THÉORÈME 1.26** (Duplantier–Miller–Sheffield, 2014). *Le recollement de deux excursions browniennes corrélées (vues comme deux arbres réels continus aléatoires) crée un espace métrique aléatoire qui a la même loi qu'une sphère munie d'une métrique aléatoire de Liouville décorée par un SLE qui remplit l'espace.*

Lorsque le paramètre  $\gamma$  vaut  $\sqrt{8/3}$ , la sphère aléatoire ainsi construite correspond à la sphère brownienne, ainsi que démontré par J. Miller et S. Sheffield [MS20].

D'autres approches aux métriques aléatoires planaires existent, notamment celles utilisant les empilements de cercles, le chaos multiplicatif gaussien, etc. On se réfère au texte de survol [She22] pour une introduction illustrée à ce résultat et au domaine très vaste de recherche associé en géométrie conforme aléatoire.

**3.9. Champs d'holonomie.** En dimension 2, la mesure de Yang–Mills (voir 1.2.4) est définie implicitement comme un champ d'holonomie aléatoire [Sen97, LéV10]; voir aussi [Che19]. Si le groupe de jauge est un groupe unitaire, cette mesure donne à tout cycle simple une holonomie égale au mouvement brownien sur le groupe unitaire, évalué au temps égal à l'aire entouré par le cycle. Deux cycles disjoints ont des holonomies indépendantes. C'est ainsi que nous avons échantillonné l'environnement de jauge aléatoire pour les simulations de la figure 6.6.

La loi d'un champ d'holonomie est caractérisée par ses boucles de Wilson, c'est-à-dire, l'espérance des produits de trace d'holonomies le long d'un nombre fini de lacets. Dans le cas planaire, ces observables peuvent se calculer au moyen d'équations qui réduisent l'amas de lacets à des boucles simples; ce sont les équations de Makeenko–Migdal. Ces dernières sont reliées aux équations de Schwinger–Dyson et à la formule d'intégration par parties par rapport à la mesure de Haar sur le groupe de jauge compact considéré; voir [LéV20].

La limite où la taille des matrices dans le groupe de jauge tend vers l'infini a été étudiée par T. Lévy. L'objet limite déterministe est le champ maître sur le plan [LéV10].

Dans d'autres développements récents, le cas de la sphère et d'autres surfaces compactes de genre arbitraire a été étudié [DN20]. La théorie des processus markoviens d'holonomie a aussi été étendue [CDG17]. En dimension supérieure et dans la version discrétisée des théories de jauge sur réseau, S. Chatterjee a obtenu de nouveaux résultats, voir [Cha19].

Construire des couplages de champs d'holonomie avec un modèle de physique statistique est une question encore ouverte. C'est une des motivations derrière nos travaux [KL21, KL23c]. Il y a d'autres travaux dans cette direction [CC22] par une approche très différente.

#### 4. Organisation du texte

Dans le chapitre 2, nous présentons nos résultats spécifiques aux graphes planaires; ce chapitre est basé sur les articles [CCK17, KW16b, Kas15, KW16a, GKMW18]. Dans le chapitre 3 nous présentons nos résultats sur les processus déterminantaux issus de [KL22a, KL23a, KL22b]. Dans le chapitre 4 nous introduisons des familles de sous-graphes déterminantaux définis dans [KL22b]. Dans le chapitre 5 nous rassemblons différentes formules déterminantales et les étudions du point de vue des polynômes en plusieurs indéterminées et des revêtements de graphes; ceci correspond aux articles [KL20, KL23b, CK23]. Dans le chapitre 6 nous présentons les résultats relatifs à la présence d'une connexion et à ses incarnations aléatoires; ceci repose sur [KL21, KL23c]. Enfin, dans le court chapitre 7 nous présentons quelques perspectives pour la suite de notre travail où nous nous appuyons sur certaines formules issues de [KL20, CK23, Kas15].

## Inventaire des contributions personnelles

Les contributions exposées dans ce mémoire figurent en encadré dans le texte avec le code couleur suivant : définition, remarque, lemme, proposition, théorème, conjecture, question.

### Chapitre 2.

- théorème 2.1 : les mineurs-pfaffiens de l'inverse de la matrice de Kac–Ward sont les observables fermioniques à plusieurs points
- théorème 2.2 : expression déterminantale de la fonction de partition du modèle XOR-Ising
- théorème 2.3 : densité du tas de sable abélien pour les réseaux planaires périodiques
- définition 2.4 : modèle d'arbre couvrant actif
- conjecture 2.5 : convergence de la courbe de contour d'un arbre couvrant actif vers l'évolution de Schramm–Loewner
- remarque 2.6 : mélange de la chaîne d'échange pondérée sur les bases
- théorème 2.7 : convergence dans le cas des cartes planaires

### Chapitre 3.

- lemme 3.1 : caractérisation de processus déterminantaux par leur fonction de partition
- définition 3.2 : processus déterminant. linéaires
- proposition 3.3 : algorithme d'échantillonnage d'un processus déterminantal linéaire
- théorème 3.4 : théorème de projection moyenne
- corollaire 3.5 : version duale du théorème de projection moyenne
- lemme 3.6 : définition de la projection aléatoire associée à un processus déterminantal dans le cas continu
- théorème 3.7 : théorème de projection moyenne continu et calcul de la variance
- lemme 3.8 : processus déterminantaux conditionnels
- proposition 3.9 : inégalités polymatroïdales
- théorème 3.10 : interprétation physique d'un processus déterminantal comme une mesure quantique
- définition 3.11 : processus Q-déterminantaux

### Chapitre 4.

- théorème 4.1 : forêts couvrantes d'unicycles Q-déterminantales
- théorème 4.2 : sous-graphes couvrants connexes déterminantaux
- théorème 4.3 : sous-graphes couvrants acycliques déterminantaux
- question 4.4 : existence d'un modèle dual aux forêts couvrantes d'unicycles
- proposition 4.5 : identités multilinéaires
- question 4.6 : nombre de sous-graphes couvrants connexes à nombre de Betti fixé
- remarque 4.7 : mesure uniforme non-dét. sur les forêts couvrantes d'unicycles

### Chapitre 5.

- définition 5.1 : polynômes d'énumération connexe
- définition 5.2 : polynômes d'énumération acyclique
- corollaire 5.3 : stabilité des polynômes d'énumération acyclique et connexe

- proposition 5.4 : quotients de polynômes
- lemme 5.5 : lemme de Schur
- question 5.6 : généralisation du théorème de stabilité d'Amini
- définition 5.7 : définition du  $\tau$ -déterminant
- théorème 5.8 : formules matrix-tree classiques
- théorème 5.9 : nouvelles formules matrix-tree
- proposition 5.10 : formule invariante de jauge
- lemme 5.11 : produit eulérien
- théorème 5.12 autre formule invariante de jauge
- théorème 5.13 : revêtements de graphes et opérateurs tordus
- corollaire 5.14 : revêtements de graphes et divisibilité de polynômes
- proposition 5.15 : coefficients invariants positifs

### Chapitre 6.

- lemme 6.1 : inégalité de Kato discrète
- définition 6.2 : champs de vecteurs gaussiens
- définition 6.3 : holonomie tordue
- proposition 6.4 : formule de Feynman–Kac covariante
- définition 6.5 : soupe de boucles covariante
- théorème 6.6 : théorème d'isomorphisme
- théorème 6.7 : théorème d'isomorphisme dans le cas d'une connexion à holonomies de traces positives
- définition 6.8 : champ de vecteurs aléatoire non-gaussien en environnement aléatoire
- théorème 6.9 : identité de Symanzik covariante
- définition 6.10 : forêt couvrante quantique
- théorème 6.11 : trace et superposition de forêts d'unicycles
- proposition 6.12 : le cas de  $SU(2)$
- théorème 6.13 : connexions infinitésimales
- théorème 6.14 : théorème de transfert électrique de Kirchhoff
- lemme 6.15 : inégalité de monotonie de Rayleigh
- définition 6.16 : régularité géométrique
- théorème 6.17 : mesures en volume infini

### Chapitre 7.

- définition 7.1 : forêt couvrante quantique simpliciale
- théorème 7.2 : formule matrix-tree sur un complexe simplicial
- théorème 7.3 : revêtement de complexes simpliciaux et divisions de polynômes
- question 7.4 : formule pour l'énumération de certains complexes simpliciaux acycliques
- question 7.5 : bijection de Joyal étendue
- remarque 7.6 : mesure canonique sur un fibré
- question 7.7 : modèles « FK » et de forêt couvrante d'unicycles active dans le cas bicirculaire
- remarque 7.8 : SLE sur les surfaces compactes
- remarque 7.9 : mesure sur les graphes de SLE

## Cas des graphes planaires

Dans ce chapitre nous présentons quelques résultats sur des modèles de physique statistique dans le cadre d'un graphe planaire : le modèle d'Ising et sa version XOR (dont le nom vient de l'acronyme anglais pour désigner le « ou » exclusif en logique booléenne), le modèle du tas de sable abélien, et le modèle des arbres couvrants actifs (que nous avons introduit avec David Wilson). Tous ces modèles sont reliés entre eux, et une manifestation de ce fait est que leurs fonctions de partition sont des spécialisations du polynôme de Tutte, voir la définition 1.4.

Rappelons qu'un graphe est dit planaire s'il peut être dessiné sur le plan (ou la sphère) de telle sorte que ses arêtes ne se croisent pas.

C'est un fait maintes fois observé que la planarité d'un graphe entraîne des simplifications drastiques dans la complexité du calcul de certaines quantités lui étant associées (voir le théorème 1.2 par exemple).

Notons que tout graphe fini peut se dessiner sur une surface orientée de genre suffisamment élevé. Parfois, comme dans le cas du modèle d'Ising ou de dimères, les techniques de calcul d'observables propres aux graphes planaires se généralisent au cas d'un tel graphe surfacique, mais les expressions font intervenir plus de termes, dont le nombre augmente avec le genre.

### 1. Modèle d'Ising

Le modèle d'Ising ferromagnétique sur un graphe fini  $G = (V, E)$  est une mesure de probabilité sur les configurations de « spins »  $\pm 1$  affectés aux sommets de  $G$  qui favorise l'alignement (c'est-à-dire l'égalité des valeurs) des spins voisins plus la température, dont l'inverse est noté  $\beta$ , est basse. Plus précisément, la probabilité d'une configuration de spins  $\sigma \in \{-1, 1\}^V$  est donnée par la relation de proportionnalité

$$\mathbb{P}(\sigma) \propto e^{-\beta H_{\underline{J}}(\sigma)},$$

où l'énergie  $H_{\underline{J}}(\sigma)$  d'une configuration de spins  $\sigma$  est définie par

$$H_{\underline{J}}(\sigma) = - \sum_{e \in E^+} J_e \sigma_e \sigma_{\bar{e}},$$

où  $J_e > 0$  est la constante d'interaction de l'arête  $e$ , qui satisfait  $J_e = J_{e^{-1}}$ . Le facteur de normalisation, appelé fonction de partition du modèle, est égal à

$$\mathcal{Z}_{\text{Ising}}(G, \underline{J}, \beta) = \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^V} e^{-\beta H_{\underline{J}}(\sigma)}.$$

Dans le cas où le graphe  $G$  est planaire, le modèle est dit intégrable, notamment car sa fonction de partition peut être calculée explicitement (ce résultat célèbre et classique remonte à L. Onsager en 1944 dans le cas du réseau carré).

Une approche pratique au calcul de cette fonction de partition consiste à traduire cette dernière en termes de fonction génératrice de sous-graphes : nous allons voir que la fonction de partition du modèle est proportionnelle à la fonction génératrice des sous-graphes dont chaque sommet est de degré pair (une union de cycles) dont nous notons l'ensemble  $\mathcal{E}(G)$ . Afin d'établir la correspondance entre ces deux fonctions de partition, on introduit une fonction de poids  $\underline{x} = (x_e)_{e \in E}$  sur les arêtes qui est symétrique :  $x_e = x_{e^{-1}}$  pour tout  $e \in E$ . Pour tout  $C \in \mathcal{E}(G)$ ,

notons  $\underline{x}^C$  le produit des poids des arêtes de  $C$ . Considérons la fonction génératrice de ces sous-graphes « pairs » :

$$(19) \quad \mathcal{Z}_{\text{pair}}(\mathbf{G}, \underline{x}) = \sum_{C \in \mathcal{E}(\mathbf{G})} \underline{x}^C.$$

Les fonctions de partitions  $\mathcal{Z}_{\text{Ising}}(\mathbf{G}, \underline{J}, \beta)$  et  $\mathcal{Z}_{\text{pair}}(\mathbf{G}, \underline{x})$  sont proportionnelles pour un choix adapté de  $x_e$  en fonction de  $\beta$  et  $J_e$ , pour tout  $e \in \mathbf{E}$ . Plus précisément, B. L. van der Waerden démontra en 1941 que l'on a

$$\mathcal{Z}_{\text{Ising}}(\mathbf{G}, \underline{J}, \beta) = 2^{|\mathbf{V}|} \mathcal{Z}_{\text{pair}}(\mathbf{G}, \underline{x}) \prod_{e \in \mathbf{E}^+} \cosh(\beta J_e),$$

lorsque  $x_e = \tanh(\beta J_e)$  pour tout  $e \in \mathbf{E}^+$ .

Pour des raisons historiques (et calculatoires), le polynôme  $\mathcal{Z}_{\text{pair}}(\mathbf{G}, \underline{x})$  s'appelle aussi polynôme du « développement en haute température » du modèle d'Ising. Il existe un polynôme associé, appelé polynôme du « développement en basse température », mais nous ne l'utiliserons pas ici ; voir [CCK17, Introduction]. Dans le cas planaire qui nous intéresse ici, ces deux polynômes sont de toute façon essentiellement les mêmes.

**1.1. Formule de Kac–Ward.** En 1952, Kac et Ward [KW52] ont donné une formule pour exprimer le polynôme  $\mathcal{Z}_{\text{pair}}(\mathbf{G}, \underline{x})$  comme le déterminant d'une matrice d'adjacence modifiée, appelée matrice de Kac–Ward. Pour définir la matrice de Kac–Ward il faut d'abord choisir un plongement du graphe dans le plan. Rappelons que pour une arête orientée  $e$ , on note  $s(e)$  sa source et  $t(e)$  son but, et  $e^{-1}$  l'arête avec l'orientation opposée. Pour deux arêtes orientées  $e$  et  $e'$  telles que  $t(e) = s(e')$  (c'est-à-dire, bien enchaînées), on note  $w(e, e')$  l'angle entre leurs vecteurs tangents au sommet commun. La matrice de Kac–Ward est une matrice carrée indexée par les arêtes orientées du graphe, définie par

$$(20) \quad \mathcal{KW}(\mathbf{G}, \underline{x}) = \mathbf{I} - \mathbf{T},$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité et  $\mathbf{T}$  est définie par

$$\mathbf{T}_{e, e'} = \begin{cases} \exp[\frac{i}{2}w(e, e')] \cdot (x_e x_{e'})^{1/2} & \text{si } t(e) = s(e') \text{ et } e' \neq e^{-1}; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La célèbre *formule de Kac–Ward* [KW52] stipule que

$$(21) \quad \det[\mathcal{KW}(\mathbf{G}, \underline{x})] = [\mathcal{Z}_{\text{pair}}(\mathbf{G}, \underline{x})]^2,$$

et ce fut une longue histoire [She60, Vdo65, DZM<sup>+</sup>99, KLM13, Hel14] pour en donner une démonstration rigoureuse pour un graphe planaire général ; voir l'article récent de M. Lis [Lis16] pour une présentation courte et affinée de cette démonstration.

Avec Dmitry Chelkak et David Cimasoni nous avons donné une démonstration différente et très courte de cette formule classique [CCK17]. Elle repose sur l'observation simple que la matrice  $\mathbf{K}$ , obtenue à partir de  $\mathcal{KW}$  en permutant les lignes correspondant à une arête et son arête inverse, est hermitienne.

Sur cette base, l'article [CCK17] explore de manière approfondie la combinatoire du modèle d'Ising sur un graphe fini avec poids (symétriques)  $(x_e)_e$  quelconques, et genre arbitraire (pas nécessairement planaire). Il n'est pas possible d'aborder tous les points développés dans cet article ici, et nous isolons deux résultats intéressants dans la suite.

**1.2. Observables fermioniques à plusieurs points.** Notre approche nous permet par ailleurs de donner une formule combinatoire pour des observables « à plusieurs points » qui jouent un rôle dans les preuves de convergence des corrélations entre spins dans la limite d'échelle [CHI15]. Pour cela nous opérons une autre modification élémentaire sur la matrice  $K$  afin d'obtenir une matrice réelle antisymétrique  $\widehat{K}$ .

Il est à ce jour bien connu que les entrées de la matrice inverse de Kac–Ward (modifiée) sont égales aux observables combinatoires à deux points proposées par Smirnov comme outil pratique pour étudier la limite d'échelle du modèle critique d'Ising dans des domaines planaires arbitraires. Depuis les travaux pionniers de Smirnov, ces observables sont généralement définies directement, sans référence à la matrice de Kac–Ward, mais il est intéressant de noter que leur définition est née de considérations faites par Smirnov conjointement avec Kenyon [Smi10b, Remark 4] sur des techniques matricielles propres au modèle de dimères.

Avant de pouvoir formuler notre résultat, nous avons besoin d'une définition supplémentaire. Soit  $(G^\diamond, \underline{x})$  le graphe pondéré obtenu à partir de  $(G, \underline{x})$  en ajoutant un sommet  $z_e$  au milieu de chaque arête  $e$  de  $G$ , et en donnant le poids  $x_e^{1/2}$  à chacune des deux arêtes résultantes de  $G^\diamond$ . Étant donné une collection  $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$  d'arêtes orientées de  $G$ , soit  $\mathcal{C}(e_1, \dots, e_{2n})$  l'ensemble des sous-graphes  $P$  de  $G^\diamond$  qui ne contiennent pas les arêtes  $(s(e_k), z_{e_k})$ , contiennent les arêtes  $(z_{e_k}, t(e_k))$  si  $e_k^{-1} \notin \{e_1, \dots, e_{2n}\}$ , et tels que tout sommet de  $G^\diamond$  distinct de  $z_{e_1}, \dots, z_{e_{2n}}$  soit de degré pair dans  $P$ . L'ensemble  $\mathcal{C}(\emptyset)$  n'est autre que l'ensemble  $\mathcal{E}(G)$  des sous-graphes pairs de  $G$  mentionné plus haut.

L'énoncé suivant provient de [CCK17, Theorem 1.2].

**THÉORÈME 2.1.** *Soit  $G$  un graphe planaire muni d'une fonction de poids  $\underline{x}$  sur les arêtes. Considérons un ensemble d'arêtes orientées  $e_1, \dots, e_{2n}$ . Alors on a*

$$\text{Pf}[\widehat{K}_{e_j, e_k}^{-1}]_{j, k=1}^{2n} = [\mathcal{Z}_{\text{pair}}(G, \underline{x})]^{-1} \cdot \sum_{P \in \mathcal{C}(e_1, \dots, e_{2n})} \tau(P) \underline{x}^P,$$

où  $\text{Pf}$  désigne le pfaffien et  $\tau(P)$  est un certain signe défini en fonction de la topologie de  $P$  sur un revêtement à deux feuilletts du graphe.

Le cas  $n = 1$  de cette formule redonne la définition combinatoire standard des observables à deux points comme somme sur l'ensemble  $\mathcal{C}(e, e')$ , dont on sait qu'elle est l'entrée de l'inverse de la matrice de Kac–Ward modifiée. Pour  $n \geq 2$ , on retrouve la définition combinatoire des observables « à plusieurs points » comme des sommes sur  $\mathcal{C}(e_1, \dots, e_{2n})$ . Le théorème 2.1 affirme que ces dernières sont le pfaffien d'une matrice dont les coefficients sont les premières.

Avec Dmitry Chelkak et David Cimasoni, nous pensons que cette formule, valable dans un cadre général, devrait pouvoir s'appliquer à la démonstration de la convergence, dans la limite d'échelle lorsque la maille des graphes tend vers zéro, des corrélations de spins dans des domaines plus généraux que ceux traités dans [CHI15].

**1.3. Modèle XOR-Ising.** Nous avons étendu les formules du paragraphe 2§1.2 au cas du modèle XOR-Ising défini comme le produit sommet par sommet de deux modèles d'Ising faiblement corrélés.

Dans le cas d'un graphe plan  $G = (V, E)$  dont les spins au bord sont conditionnés à être  $+1$ , nous définissons une matrice  $\widetilde{K}$  qui joue le rôle d'une matrice de Kac–Ward pour ce nouveau modèle. Soit  $\mathcal{Z}_{\text{dbl-1}}(G, \underline{x})$  la fonction de partition de ce modèle. L'énoncé suivant figure dans [CCK17, Theorem 1.4].

THÉORÈME 2.2. *On a*

$$\mathcal{Z}_{dbl-I}(\mathbf{G}, \mathbf{x}) = (-1)^{|\mathbf{E}|} \det \tilde{\mathbf{K}}.$$

Un des intérêts de ce modèle XOR-Ising (qui est un cas particulier du modèle d’Ashkin–Teller de spins à 4 couleurs [AT43]) vient de son lien avec la « bosonisation » du modèle d’Ising et d’une conjecture de Wilson [Wil11] qui prédit la convergence des interfaces entre clusters de spins +1 et clusters de spins −1 vers une variante de SLE<sub>4</sub>.

Une question ouverte est de savoir si l’on peut utiliser notre formule combinatoire pour suivre un programme analogue à celui de Smirnov et ses coauteurs [Smi10a, CS12b, CDCH<sup>+</sup>14] qui montrèrent la convergence des interfaces du modèle d’Ising critique vers SLE<sub>3</sub>. C’est la question qui nous a poussé à écrire [CCK17], voir la remarque 1.5 dans cet article, où nous pensions pouvoir suivre une approche similaire à celle de Kenyon [Ken14] et Dubédat [Dub19] pour le modèle de double-dimères, mais qui ne semble pas fonctionner directement pour le modèle XOR-Ising (voir aussi la remarque au début du paragraphe 5§2 de ce mémoire).

Il est à noter que bien que le modèle d’Ising soit centenaire [DC22], il continue de connaître d’importants développements, comme par exemple dans le travail récent de Chelkak [Che20] qui établit un lien de ce modèle avec la géométrie lorentzienne et les surfaces minimales.

## 2. Tas de sable abélien

La criticité auto-organisée est un concept popularisé par Bak, Tang et Wiesenfeld [BTW87] qui désigne des systèmes qui se stabilisent d’eux-mêmes à un point critique caractérisé par des corrélations à longue portée. Le tas de sable abélien est un modèle de criticité auto-organisée introduit par Deepak Dhar en 1989 [Dha90]. Il est défini à partir d’une chaîne de Markov comme suit.

Une configuration de sable sur un graphe fini connexe  $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  muni d’un sommet distingué – appelé le « puits » – est une fonction  $\sigma : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{Z}$  à valeurs entières sur les sommets du graphe dont la valeur en tout sommet distinct du puits est positive ; on dit que  $\sigma(v)$  est le nombre de grains de sable au sommet  $v$ . La configuration est dite instable s’il existe un sommet  $v$  distinct du puits où la fonction excède le degré  $\deg_v$  du sommet dans le graphe. Dans ce cas de figure, un éboulement peut se produire, qui entraîne la perte de  $\deg_v$  grains de sables en  $v$  et l’ajout d’un grain de sable à chaque sommet voisin de  $v$ . Une suite d’éboulements est appelée une avalanche.

En partant d’une configuration instable, il existe toujours une avalanche qui la stabilise puisque les grains de sable en excès sont absorbés tôt ou tard par le puits, par connexité du graphe  $\mathbf{G}$ . Le fait que la configuration stable finale ne dépende pas de l’ordre d’occurrence des éboulements explique le qualificatif d’abélien donné au modèle, et fut initialement démontré par D. Dhar.<sup>1</sup> La figure 2.1 montre un exemple de stabilisation.

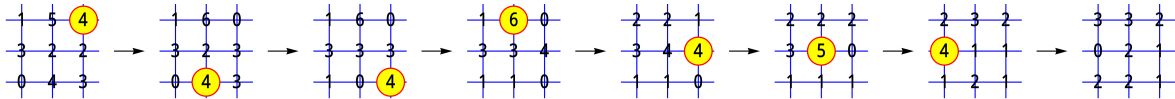


FIGURE 2.1. Stabilisation d’un tas de sable, lorsque le puits est le bord d’un graphe donné par une grille carrée  $3 \times 3$ .

1. L’argument qui permet de le démontrer est proche de celui démontrant la validité de l’algorithme de Wilson, voir théorème 1.24. L. Levine et ses coauteurs ont inscrit ces deux exemples au sein d’une théorie des réseaux abéliens [BL16]

La stabilisation d'une pile de sable en l'origine de  $\mathbb{Z}^2$  donne lieu à de beaux motifs. Il y a même une structure fractale lorsque la taille de cette pile tend vers l'infini et que l'on passe à une limite d'échelle [LPS16].

**2.1. Configurations récurrentes.** En partant d'une configuration de sable, une étape de la chaîne de Markov qui définit le modèle consiste à choisir uniformément un sommet distinct du puits, à ajouter un grain de sable au tas en ce sommet, et à stabiliser la configuration. Il existe une unique mesure stationnaire pour cette dynamique qui est la mesure uniforme sur un sous-ensemble de configurations stables appelées configurations récurrentes. L'étude probabiliste du tas de sable abélien consiste en l'étude de cette mesure.

Notons que l'ensemble des configurations stables hérite de la structure de monoïde abélien de  $\mathbb{Z}^V$ , et que l'ensemble des configurations récurrentes est l'idéal minimal de ce monoïde : c'est donc un groupe. Ce groupe abélien est appelé groupe du tas de sable. L'élément identité de ce groupe n'est pas facile à identifier et donne lieu à de riches motifs, lorsque le graphe sous-jacent est une grille carrée de grande taille, voir [CP18, Kli19].<sup>2</sup>

Sur un graphe infini, la mesure peut être définie par un processus limite en approchant le graphe infini par une suite exhaustive de graphes finis [JW14].

Les avalanches jusqu'à stabilisation ont été étudiées par Gabrielov [Gab93] et leur géométrie est reliée à la combinatoire des forêts couvrantes à deux composantes. Dans le cas d'un graphe planaire, quelques résultats sur la loi de la taille de la coupure de  $\mathcal{G}$  déterminée par ces forêts [KKW15] et sur les fluctuations d'occurrence de motifs dans le tas de sable abélien [KW15a] sont obtenus dans nos travaux de thèse antérieurs, voir aussi [Kas15] pour un survol.

On se réfère aux textes [HLM<sup>+</sup>08, CP18] pour plus de détails sur le modèle du tas de sable abélien.

**2.2. Densité stationnaire.** Une question restée longtemps ouverte a été le calcul de la densité  $\bar{\sigma}$  du tas de sable sur un réseau régulier du plan, c'est-à-dire le nombre moyen de grains de sable par sommet dans le régime stationnaire de la chaîne de Markov ci-dessus.

Par une formule de Criel Merino López [ML97], obtenue dans sa thèse sous la direction de Dominic Welsh à Oxford, cette densité s'exprime comme un rapport d'évaluations du polynôme de Tutte (ceci était auparavant une conjecture due à N. Biggs qui avait introduit le modèle de « chip firing », analogue du modèle du tas de sable [Big99]). Des démonstrations bijectives de ce fait ont été données dans [CLB03], puis dans [Ber08].

Pour le réseau carré, le physicien Peter Grassberger avait conjecturé sur la base de simulations numériques non publiées dans les années 1990 que la densité est  $\bar{\sigma} = 17/8$ . Ceci n'a été démontré que récemment, presque deux décennies plus tard, par trois groupes indépendants [KW15b, PPR11, CS12a].

Avec David Wilson [KW16b], nous avons donné une démonstration beaucoup plus élémentaire de ce résultat qui s'applique également à tout autre réseau plan  $\mathbb{Z}^2$ -périodique. De plus, la démonstration a le mérite d'expliquer « pourquoi » l'on trouve une densité rationnelle pour les trois réseaux réguliers du plan.

Dans le théorème suivant, nous donnons quelques valeurs exactes ainsi obtenues. Nous ne sommes pas certains de la nomenclature française pour les réseaux réguliers du plan et préférons utiliser celle en anglais pour être précis. Nous renvoyons à [KW16b, Table 1] pour plus de valeurs exactes.

---

<sup>2</sup> Lorsque l'on considère ce groupe sur un graphe aléatoire, il satisfait l'heuristique de Cohen–Lenstra [CKL<sup>+</sup>15] comme cela a été démontré récemment par M. Matchett Wood [Woo17].



**THÉORÈME 2.3.** *La densité du tas de sable d'un des trois réseaux réguliers (carré, triangulaire, hexagonal) du plan, dont on note  $\text{deg}$  le degré des sommets et  $\text{deg}_*$  le degré des faces, est égale à*

$$\bar{\sigma} = \frac{\text{deg}}{2} \left( 1 + \frac{1}{\text{deg}_*^2} \right).$$

*Pour les réseaux « trihexagonal », « rhombille », « truncated hexagonal » et « triakis triangular », les valeurs sont respectivement :  $13/6$ ,  $17/8$ ,  $959/600$  et  $167/50$ . Pour le réseau « square-octagon », la densité est le nombre transcendant*

$$\frac{25}{16} - \frac{\arccos(3)}{8\sqrt{2}\pi} + \frac{3 \arccos(3)^2}{16\pi^2}.$$

La démonstration repose sur le calcul explicite du nombre de forêts couvrantes à deux composantes d'une approximation finie du graphe infini par un graphe fini planaire  $G$ , dont nous notons l'ensemble  $\mathcal{F}_2(G)$ , en le comparant au polynôme générateur des arbres couvrants de  $G$  dont nous notons  $\mathcal{T}(G)$  l'ensemble. Pour cela, on simplifie des résultats de [LC81, Myr92] en s'appuyant aussi sur [LP14]. Plus précisément la démonstration repose sur l'équation [KW16b, Eq. (2)] qui, pour un graphe sans arête multiple, stipule que

$$(22) \quad \frac{\sum_{F \in \mathcal{F}_2(G)} \underline{x}^F}{\sum_{T \in \mathcal{T}(G)} \underline{x}^T} = \sum_{u \sim v} x_{uv} \left( (A_{u,v}^{(w)} - A_{v,u}^{(w)})^2 - A_{u,v}^{(w)} A_{v,u}^{(w)} \right),$$

où  $A_{u,v}^{(w)} = (\Delta^{(w)})_{u,u}^{-1} - (\Delta^{(w)})_{u,v}^{-1}$  et  $\Delta$  est le laplacien discret et  $w$  un sommet distingué. La fonction  $A$  s'appelle noyau potentiel de Green.

Il est intéressant de comparer cette formule avec celle pour les quotients de polynômes de Symanzik (voir le paragraphe 5§1.4). Dans les deux cas, le ratio s'exprime comme une forme quadratique.

**2.3. Boucles effacées.** Lorsqu'une marche aléatoire parcourt le graphe, elle engendre une chaîne de Markov sur les arbres couvrants orientés, dont les pas intermédiaires sont des unicycles orientés, voir figure 2.2. Cette chaîne de Markov permet de faire le lien entre la densité du tas de sable et le taux d'effacement de boucles d'une marche aléatoire.

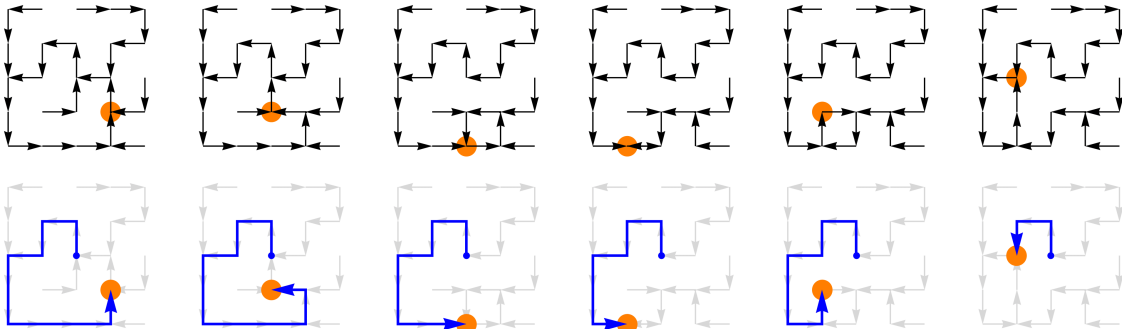


FIGURE 2.2. Chaîne de Markov sur les arbres couvrants et unicycles couvrants.

Étant donné un chemin orienté  $\gamma$  de longueur finie dans un graphe, on appelle « simplifié » de  $\gamma$ , le chemin simple obtenu en effaçant chronologiquement les boucles de  $\gamma$ .

Une quantité reliée à la densité stationnaire du tas de sable est le « taux d’effacement de boucles », c’est-à-dire le taux auquel une marche aléatoire partant d’un sommet fixé repasse pour la première fois sur le « simplifié » de sa trajectoire passée.

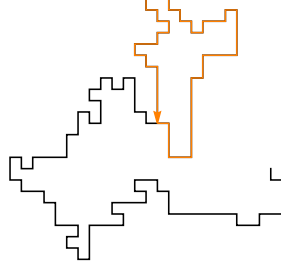


FIGURE 2.3. L’intersection d’une marche aléatoire dans  $\mathbb{Z}^2$  avec le « simplifié » de sa trajectoire passée. L’unique boucle simple ainsi créée est représentée en orange.

Ce lien entre tas de sable et unicycles a été mis à profit pour étudier le tas de sable et la mesure uniforme sur les unicycles couvrants d’une carte aléatoire par X. Sun et D. Wilson [SW16]. En retour, cette approche a aussi motivé le fait de démontrer la conjecture 2.5 dans le cadre des cartes aléatoires, voir théorème 2.7.

### 3. Arbres couvrants actifs

Un des points communs à la plupart des modèles présentés plus haut (arbres couvrants, tas de sable abélien, modèle d’Ising) est d’avoir une fonction de partition donnée (à des transformations élémentaires près) par une spécialisation du polynôme de Tutte (voir la définition 1.4).

Le modèle de Potts à  $q$  couleurs, qui généralise le modèle d’Ising ( $q = 2$ ) a été mis en correspondance avec un modèle de sous-graphes aléatoires par Fortuin et Kasteleyn dans les années 1960. Rappelons que le modèle de Fortuin et Kasteleyn (dit modèle FK) de paramètres  $(p, q) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+$  est une mesure de probabilité sur les sous-graphes couvrants  $H$  de  $G$  tirés avec une probabilité proportionnelle à

$$(23) \quad \mathbb{P}(H) \propto \left( \frac{p}{1-p} \right)^{|E(H)|} q^{k(H)}.$$

Sa fonction de partition,

$$(24) \quad \mathcal{Z}_{\text{FK}}(G, p, q) = \sum_{H \leq G} (p/(1-p))^{|E(H)|} q^{k(H)},$$

est essentiellement égale au polynôme de Tutte puisque, par (5), on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_G(x, y) &= (x-1)^{-k(G)} (y-1)^{-|V|} \sum_{H \leq G} (y-1)^{|E(H)|} ((x-1)(y-1))^{k(H)} \\ &= (x-1)^{-k(G)} (y-1)^{-|V|} \sum_{H \leq G} \mathcal{Z}_{\text{FK}}(G, p, q), \end{aligned}$$

lorsque  $(p, q)$  et  $(x, y)$  sont liés par les relations  $q = (x-1)(y-1)$  et  $p/(1-p) = y-1$ .

Un modèle relié au modèle de Fortuin–Kasteleyn, le modèle de boucles  $O(n)$  avec  $n = \sqrt{q}$  (dans sa phase dense, pour la correspondance avec le modèle FK) a été étudié par les physiciens, notamment Nienhuis et Cardy même pour des valeurs de  $n$  négatives, où l’interprétation probabiliste n’a plus de sens.

Rappelons que si  $G$  est un graphe planaire, plongé dans la sphère, et que  $G^*$  désigne son dual planaire, alors  $\mathcal{Z}_{G^*}(x, y) = \mathcal{Z}_G(y, x)$ . On en déduit que si  $x = y \geq 1$ , l'évaluation du polynôme de Tutte donne la fonction de partition du modèle de Fortuin–Kasteleyn de paramètre  $q = (y - 1)^2$  à son point auto-dual

$$p = \sqrt{q}/(1 + \sqrt{q}),$$

c'est-à-dire, la valeur pour laquelle la loi du complémentaire du dual d'un sous-graphe couvrant  $H$  de  $G$  tiré sous la loi FK de paramètres  $(p, q)$  a la loi FK sur  $G^*$  de paramètres  $(p, q)$ . Dans les cas d'intérêt les plus courants, ce point auto-dual correspond bien au point *critique* [BDC12].

**3.1. Définition.** Avec David Wilson [KW16a], nous avons introduit un nouveau modèle probabiliste dans le cas d'un graphe fini connexe planaire  $G$  : les arbres couvrants actifs. Il s'agit d'une généralisation de l'arbre couvrant uniforme qui étend le modèle de Fortuin–Kasteleyn au cas de poids négatifs  $q \geq -1$ . Le modèle dépend d'un paramètre  $y \in \mathbb{R}_+$  : il attribue à tout arbre couvrant un poids proportionnel à  $y^a$  où  $a$  est l'activité totale de l'arbre (somme des activités interne  $a_i$  et externe  $a_e$ , voir plus bas).

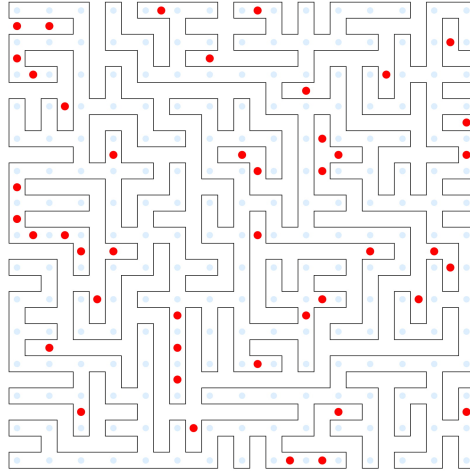


FIGURE 2.4. Un arbre couvrant actif d'une grille carrée  $15 \times 15$ , représenté par sa courbe de contour, avec ses arêtes actives marquées en rouge.

**DEFINITION 2.4** (Arbre couvrant actif). *Soit  $G$  un graphe fini connexe planaire, plongé dans le plan. L'arbre couvrant actif de paramètre  $y > 0$  est la mesure de probabilité sur les arbres couvrants de  $G$  qui attribue à  $T \in \mathcal{T}(G)$  une probabilité proportionnelle à  $y^{a(T)}$ , où  $a(T) = a_i(T) + a_e(T)$  est l'activité (d'exploration) totale de l'arbre  $T$ .*

La définition du modèle provient du fait que le polynôme de Tutte s'exprime comme une somme sur les arbres couvrants d'un certain poids  $x^{a_i}y^{a_e}$  où  $a_i$  est l'activité interne de l'arbre et  $a_e$  l'activité externe de l'arbre :

$$(25) \quad \mathcal{Z}_G(x, y) = \sum_{T \in \mathcal{T}(G)} x^{a_i(T)} y^{a_e(T)}.$$

L'équation (25) est d'ailleurs l'expression originelle donnée par Tutte pour définir son polynôme éponyme ; voir l'article de survol historique de Tutte à ce sujet [Tut04].

Notons que, bien que l'activité d'un arbre couvrant dépende du graphe  $G$ , on ne consigne pas explicitement cette dépendance dans la notation.

Il existe plusieurs notions d'activité qui mènent à la même identité (25), voir [Cou14, Bac22]. Ces notions d'activité dépendent d'un choix d'ordre sur les arêtes. Une arête de  $T$  est dite active si elle est d'indice maximal dans la coupure fondamentale associée à  $T$ . Une arête du complémentaire de  $T$  est dite active si elle est maximale dans le cycle fondamental déterminé par son ajout à l'arbre. Une arête active est dite *interne* si elle appartient à l'arbre, et *externe* sinon.

Dans le cas de la définition originelle de Tutte, cet ordre est fixé et ne dépend pas de l'arbre. La formule (25) dans le cas de cette notion d'activité se vérifie alors aisément à l'aide de la caractérisation récursive du polynôme de Tutte rappelée au chapitre 1, juste après la définition 1.4. On peut aussi donner une autre démonstration bijective en utilisant la correspondance entre sous-graphes couvrants et arbres couvrants illustrée sur la figure 2.5 ; voir [Ber08].

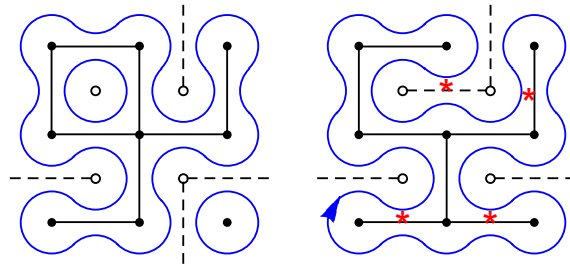


FIGURE 2.5. Correspondance non bijective entre sous-graphes couvrants et arbres couvrants actifs : à tout arbre couvrant  $T$  est associé  $2^{a(T)}$  sous-graphes couvrants, obtenus en changeant le statut (ouverte/fermée, i.e. présente/absente) des arêtes de  $G$  actives pour  $T$ .

Une autre notion d'activité, mise en lumière par Olivier Bernardi [Ber08], est particulièrement utile dans le cas des graphes planaires et c'est celle que nous utilisons<sup>3</sup>. L'ordre sur les arêtes qui définit la notion d'activité de Bernardi dépend de l'arbre.

En regardant le contour de l'arbre<sup>4</sup>, et partant d'un sommet marqué sur le graphe, il y a un ordre de parcours des arêtes qui détermine la notion d'activité que nous utilisons (selon la règle énoncée plus haut relative à un ordre sur les arêtes). La figure 2.4 montre, pour un arbre couvrant choisi, les arêtes actives par un point rouge. La même convention est utilisée dans les figures 2.5 et 2.6 où les arêtes actives sont marquées par une étoile rouge.

En d'autres termes, une arête est active si l'exploration du sous-arbre jusqu'au moment de son exploration détermine si l'arête doit être ou non dans l'arbre couvrant total. L'activité d'un arbre dépend en fait du point base et du sens de l'exploration ; voir la figure 2.6 pour une illustration de ce fait.

**3.2. Conjecture.** Une conjecture de Nienhuis bien connue [KN04] classe les modèles FK et  $O(n)$  selon leur classe d'universalité de Schramm–Loewner, notée  $\kappa$ , par la relation :

$$(26) \quad n = \sqrt{q} = -2 \cos \left( \frac{4\pi}{\kappa} \right).$$

3. Nous utilisons la même à une petite modification de convention près.

4. Le contour de l'arbre peut s'apparenter à un cycle eulérien sur le graphe médial de  $G$ .

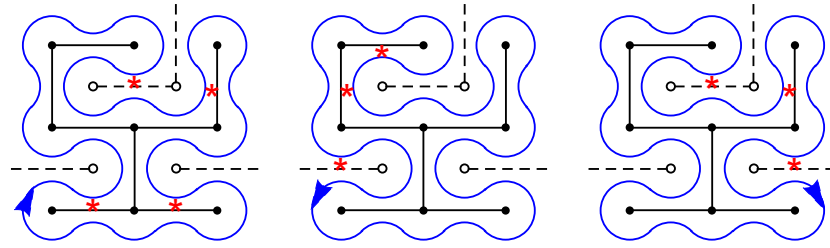


FIGURE 2.6. Activités (notées par une étoile) d'un arbre couvrant selon le point base et le sens de l'exploration de contour.

En nous appuyant sur les prédictions d'invariance conforme des travaux de Nienhuis [Nie82] et Cardy [Car05] et au vu de la propriété de Markov spatiale de notre modèle, nous étendons cette conjecture à notre modèle.

Afin de formuler cette conjecture, appelons « courbe de Peano » la courbe de contour qui serpente entre un arbre couvrant et son dual sur un graphe planaire plongé.<sup>5</sup>

CONJECTURE 2.5 (Converges des arbres couvrants actifs vers l'évolution de Schramm—Loewner). Soit  $y \in [0, 1)$ . Si un domaine simplement connexe du plan est approché par une portion du réseau carré, la courbe de Peano d'un arbre couvrant  $y$ -actif converge, dans la limite où la maille tend vers zéro, vers une évolution de Schramm–Loewner de paramètre  $\kappa \geq 4$  donné par

$$(27) \quad \frac{y-1}{2} = -\cos\left(\frac{4\pi}{\kappa}\right).$$

Le cas  $y = 1$  de cette conjecture est en fait le théorème de Lawler–Schramm–Werner [LSW04] qui stipule la convergence de la courbe de contour de l'arbre couvrant uniforme vers l'évolution de Schramm–Loewner de paramètre  $\kappa = 8$ .

Insistons sur le fait que la définition d'activité que nous utilisons dépend de l'ordre d'exploration et en particulier du sens d'exploration. La conjecture 2.5 est ainsi compatible avec la non-réversibilité de l'évolution de Schramm–Loewner  $SLE_\kappa$  pour  $\kappa > 8$ , contrairement à la réversibilité pour les valeurs de  $\kappa$  plus petites, ainsi que ce fut démontré par D. Zhan pour  $0 \leq \kappa \leq 4$ , par Miller–Sheffield pour  $\kappa \in [4, 8]$  et par Lawler–Schramm–Werner pour  $\kappa = 8$ .

Nous avons testé notre conjecture grâce à des simulations numériques poussées utilisant une chaîne de Markov simple sur les arbres couvrants. Les résultats sont très convaincants, voir les résultats de simulation dans [KW16a] dont l'un est donné dans la figure 2.7.

Le cas  $y = 0$  correspond à la mesure de probabilité uniforme sur les arbres couvrants ayant un nombre minimal d'arêtes actives. Bernardi [Ber08] a construit une bijection entre ces arbres et les orientations bipolaires du graphe ; une orientation bipolaire est une orientation des arêtes du graphe de telle sorte qu'il y ait exactement une source et un puits (une bijection avait été donnée précédemment par Gioan et Las Vergnas [GLV05] pour la notion d'activité de Tutte). Grâce à la bijection de Bernardi, notre conjecture 2.5 implique qu'une certaine courbe de Peano bipolaire définie dans [KMSW19] devrait converger vers  $SLE_{12}$  et les branches de l'arbre vers  $SLE_{4/3}$ . Cette variante de notre conjecture fut démontré récemment dans le cadre (que nous verrons plus bas) des cartes planaires aléatoires [KMSW19].

5. Le nom de G. Peano est associé à cette courbe puisque sa limite d'échelle est une courbe qui remplit l'espace, comme la fameuse courbe éponyme qu'il exposa en 1890.

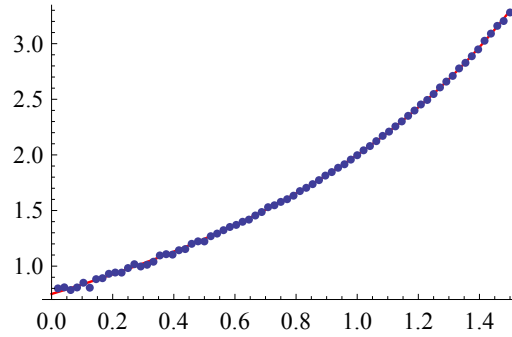


FIGURE 2.7. Variance du nombre de tours de la courbe de contour en fonction de  $y$ , comparée à la valeur théorique pour  $\text{SLE}_\kappa$ , donnée dans [MS17b], où  $\kappa$  est relié à  $y$  par (27). Les deux courbes (empirique : points bleus ; et théorique : courbe continue en rouge) sont presque indistinguables.

**3.3. Chaîne de Markov sur le graphe d'échange du matroïde circulaire.** La chaîne de Markov utilisée dans [KW16a] pour échantillonner les arbres couvrants actifs de façon approximative utilise le pas suivant : choisir une arête aléatoire, l'ajouter à l'arbre si elle n'est pas dedans, ou la retirer sinon, puis ôter ou ajouter une arête uniforme du cycle fondamental, ou de la coupure fondamentale respectivement. Lorsque  $y = 1$ , cette chaîne de Markov mélange rapidement comme démontré dans [FM92]. Une généralisation de ce théorème à la chaîne de Markov d'échange de bases d'un matroïde a été démontré récemment dans [ALGV19]. Lorsque  $y \neq 1$ , on ne sait pas si la chaîne mélange rapidement, mais avec David Wilson, nous avons vérifié empiriquement que c'était le cas pour nos simulations.

REMARQUE 2.6. *Comme observé en discussion avec Omid Amini suite à la lecture de ce mémoire, il est naturel de se demander si la méthode de [ALGV19] ne permettrait pas d'étendre le résultat de mélange rapide au cas de cette marche pondérée, ou plus généralement d'une marche pondérée par le poids matroïdal  $x^{a_i(T)} y^{a_e(T)}$  pour  $T \in \mathcal{B}$ .*

#### 4. Cartes planaires décorées

Les résultats de convergence de modèles discrets sur réseau déterministe vers l'évolution de Schramm–Loewner (SLE) sont assez rares. Dans le modèle FK, seuls ont été traités rigoureusement les cas  $y = 1$  (arbre couvrant uniforme) [LSW04] et  $y = 1 + \sqrt{2}$  (FK–Ising) [CDCH<sup>+</sup>14, KS19].

Sheffield a le premier établi une forme de convergence répondant à la conjecture (26) dans le cadre où le graphe est lui-même aléatoire, et le nombre d'arêtes tend vers l'infini. Le modèle discret est alors celui d'une carte aléatoire à nombre fixé d'arêtes, choisie avec un poids proportionnel à la fonction de partition du modèle FK. Utilisant une bijection de Mullin–Bernardi, Sheffield montre comment décorer une carte planaire par un modèle FK critique de paramètre  $\mathfrak{q} \in [0, 4]$  revient à la décorer par un arbre couvrant actif (même s'il n'utilise pas ce terme) de poids  $y \in [1, 3]$ . Voir la figure 2.8 pour une illustration d'une carte décorée par un arbre, dite carte boisée.

Pour expliquer son résultat de manière plus précise, il nous faut expliquer la notion de « sphère quantique » due à Duplantier, Miller et Sheffield [DMS21]. En effet, le fait que le graphe soit lui-même aléatoire signifie que la limite est portée par une surface aléatoire, appelée « gravité quantique de Liouville ».

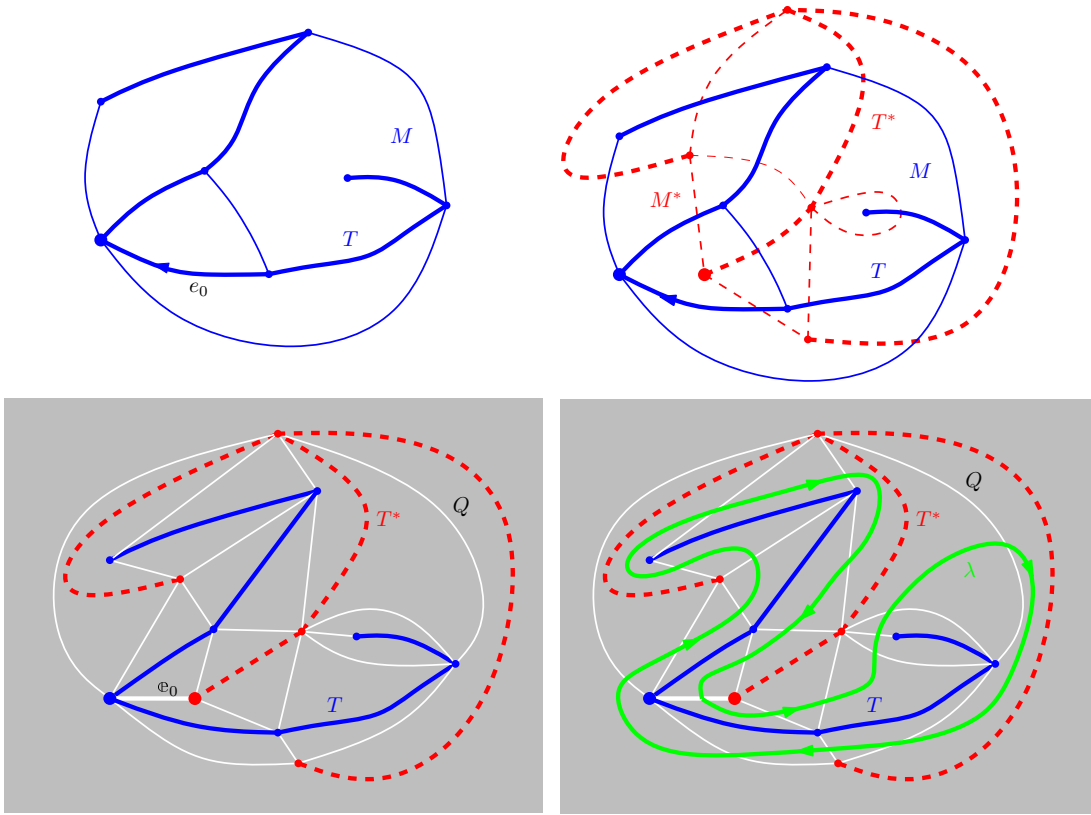


FIGURE 2.8. En haut à gauche : une carte planaire enracinée  $(M, e_0)$  décorée par un arbre couvrant  $T$  (en gras). En haut à droite : la carte duale  $M^*$  (en pointillés) décorée par l'arbre couvrant dual  $T^*$  (en gras). En bas à gauche : la quadrangulation  $Q$  (en blanc) dont les sommets sont l'union des sommets de  $M$  et de  $M^*$  (son dual planaire est le graphe médial de  $M$ ). En bas à droite : la courbe de contour « de Peano »  $\lambda$  (en vert).

Une *sphère quantique* est intuitivement une sphère munie d'une métrique riemannienne dont le facteur conforme par rapport à la métrique euclidienne est  $\exp(\gamma\Phi)$ , où  $\Phi$  est un champ libre gaussien et  $\gamma \in (0, 2)$  (ceci n'est pas bien défini au sens strict puisque  $\Phi$  est une distribution de Schwartz (aléatoire) dont on ne peut pas prendre l'exponentielle).

Duplantier, Miller et Sheffield ont démontré qu'une sphère quantique (respectivement un *cône quantique*) de paramètre  $\gamma$  décorée par un SLE remplissant toute la sphère de paramètre  $\kappa = 16/\gamma^2$  contient la même information qu'une certaine excursion brownienne bi-dimensionnelle (sur un intervalle fini, respectivement infini) de corrélation  $-\cos(4\pi/\kappa)$  entre ses coordonnées (voir le théorème 1.26).

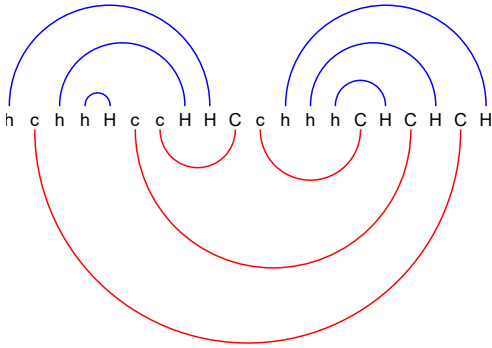
Le théorème de convergence de Sheffield établit la convergence de l'excursion discrète vers cette excursion brownienne. On parle de convergence « au sens de la Peanosphère ».

Avec Ewain Gwynne, Jason Miller et David Wilson [GKMW18] nous avons démontré la convergence au sens de la Peanosphère de cartes aléatoires décorées par un modèle d'arbre couvrant aléatoire à deux paramètres ( $y \geq 0$  et  $z \geq 0$ ) qui généralise le modèle d'arbre couvrant actif de la section précédente. On parle de cartes aléatoires boisées. Nous donnons à ce modèle le nom d'arbres couvrants actifs avec énergie de pliage puisque le paramètre  $z$  prend en compte les plis dans la courbe de contour de l'arbre.

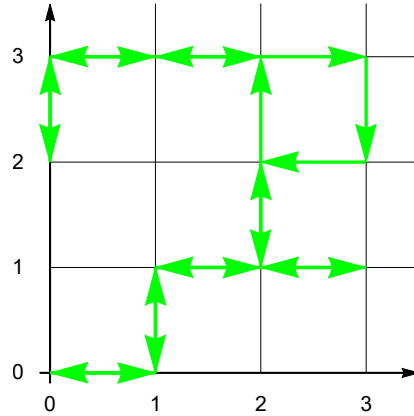
**THÉORÈME 2.7.** *Une carte plane uniforme à  $m$  arêtes, pondérée par un arbre couvrant actif avec énergie de pliage de paramètre  $(y, z)$ , converge au sens de la Peanosphère, lorsque  $m$  tend vers l'infini, vers un cône quantique décoré de paramètre  $\gamma$  où  $\gamma$  est déterminé par les valeurs de  $y$  et  $z$ .*

La démonstration repose sur une généralisation de la bijection de Sheffield [She16], qui elle-même est une version probabiliste de la bijection de Mullin revue par Bernardi. Ce résultat étend le résultat de [She16, DMS21] qui établit cette convergence dans le cas  $z = 1, y \in [1, 3)$ . Le lien entre les paramètres  $(y, z)$  et la valeur de  $\kappa$  de la géométrie aléatoire limite n'est pas parfaitement élucidé ; voir la légende de la figure 8 dans [GKMW18].

Donnons un peu plus d'explications sur l'idée de la démonstration du théorème 2.7, en utilisant un exemple illustré (figures 2.9 et 2.10). Cet exemple est décrit en volume fini, mais notre résultat de convergence porte bien sur des cartes infinies. L'analogie que nous décrivons porterait sur la convergence vers une sphère quantique décorée au lieu d'un cône quantique décoré. Ce résultat est connu dans le cas  $z = 1$  et  $y \in [1, 3)$  par [GS15]. Dans notre cadre général, cela n'a pas été démontré mais cela semble probable bien que plus technique à démontrer à cause de la contrainte du volume fini (qui brise l'indépendance des marches aléatoires) ; néanmoins, les illustrations en volume fini sont plus faciles à comprendre et c'est pour cela que nous choisissons d'illustrer la démonstration dans ce cadre.



(a) Mot associé à la carte décorée de la figure 2.8. Les cordes représentent l'appariement entre les « commandes » et les « burgers ».



(b) Trace du chemin parcouru par les préfixes croissants du mot  $hchhHccHHCchhhCHCHCH$ . Ce chemin donne le nombre de « hamburgers » et « cheeseburgers » disponibles au « comptoir » à chaque instant.

FIGURE 2.9. Le mot et le chemin associés à une carte plane enracinée décorée par un arbre couvrant.

Étant donné une carte plane  $M$ , on considère la carte duale  $M^*$  et  $Q$  la quadrangulation associée (dont le dual plane est le graphe médial) ; voir la figure 2.8. Formellement, étant donné un arbre couvrant  $T$  de  $M$ , la courbe de Peano  $\lambda$  est une suite d'arêtes bien enchaînées de  $Q^*$ . Le triplet  $(M, e_0, T)$  peut être encodé par une excursion de marche aléatoire simple bi-dimensionnelle dans le premier quadrant, avec  $2n$  pas.



Rappelons qu'un mot de Dyck en deux lettres  $\{a, A\}$  est un mot tel que tout préfixe contient au moins autant de  $a$  que de  $A$ . L'excursion de marche aléatoire dans le premier quadrant de  $\mathbb{Z}^2$  peut se représenter par un mot dans l'alphabet  $\{h, c, H, C\}$ <sup>6</sup> qui correspond à deux mots de Dyck (l'un en les lettres  $\{h, H\}$ , l'autre en les lettres  $\{c, C\}$ ) dont les lettres sont entremêlées ; voir la figure 2.9.

L'idée de Sheffield [She16] est que l'on peut échantillonner une carte décorée par un arbre couvrant actif en enrichissant l'alphabet de sorte que certaines lettres prennent en considération la pondération  $y^{a(T)}$ . Cette description, et notre généralisation, sont un peu techniques, et nous renvoyons à l'article [GKMW18] pour les détails. Ce que l'on peut retenir, c'est qu'il y a une manière, à partir d'échantillons i.i.d. dans un alphabet, de construire de manière déterministe un chemin aléatoire dans le premier quadrant dont les coordonnées ont la corrélation voulue.

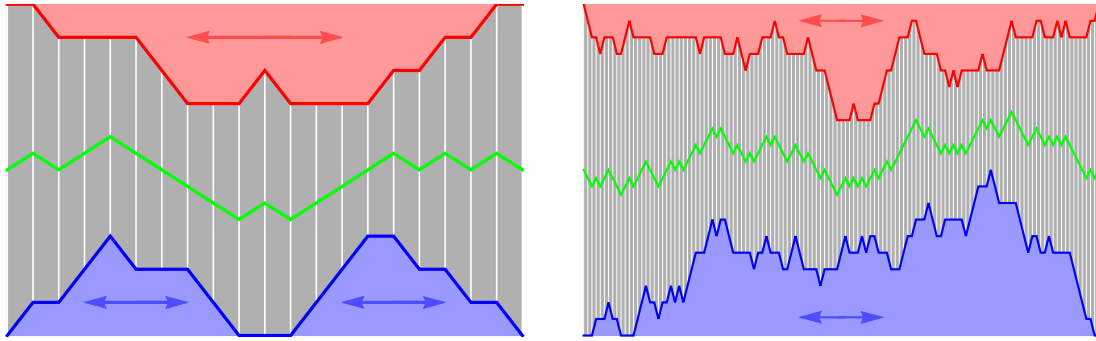


FIGURE 2.10. À gauche : la paire d'excursions qui forme le patron de la carte planaire enracinée boisée de la figure 2.8 ; cette dernière est obtenue par recollement le long de la courbe verte et des doubles-flèches (bleues et rouges) horizontales. La courbe verte est la courbe de contour de l'arbre couvrant, dite « courbe de Peano ». À droite : une approximation de la paire d'excursions browniennes qui forme le processus limite obtenu lorsque le nombre d'arêtes tend vers l'infini. En effectuant le même recollement on trouve la « Peanosphère ».

Une fois ces bijections établies, le cœur de la démonstration du théorème 2.7 consiste en la démonstration de la convergence d'une paire d'excursions de marche aléatoire corrélées, vers une paire d'excursions browniennes corrélées ; voir la figure 2.10. L'interprétation en termes d'espace métrique aléatoire repose ensuite sur le théorème de Duplantier–Miller–Sheffield (voir théorème 1.26) qui voit une excursion brownienne dans le premier quadrant du plan comme le recollement de deux arbres aléatoires continus, et donc une sphère aléatoire munie d'une courbe aléatoire remplissant l'espace : la « Peanosphère ».

Dans le cadre de volume infini du théorème 2.7, les excursions sont remplacées par des marches positives infinies, et l'espace limite est un cône quantique. Par un abus de langage popularisé par Sheffield et ses coauteurs, on parle encore de convergence au sens de la Peanosphère dans ce cas.

6. L'origine de ces lettres provient d'une métaphore culinaire de Sheffield [She16], qui voyait les lettres comme des commandes et services de hamburgers et cheeseburgers à un comptoir.

## Mesures de probabilité déterminantales

Dans ce chapitre, nous rassemblons quelques faits utiles sur les mesures de probabilité déterminantales. Nous ne considérons principalement que le cas discret, mais mentionnons le lien avec le cas continu dans le cas d'un noyau de projection de rang fini au paragraphe 3§2.2.

Les processus déterminantaux [Lyo03] sont apparus dans le travail de thèse d'Odile Macchi en optique quantique [Mac75] et ont été nommés ainsi par Borodin et Olshanski au tournant du siècle [Bor11]. Ils apparaissent notamment comme loi du spectre de matrices aléatoires hermitiennes gaussiennes (GUE). Dans le cas discret, ils sont utilisés pour étudier la mesure de Plancherel sur les partitions d'entiers (une mesure de probabilité non déterminantale, issue de la théorie des représentations linéaires du groupe symétrique). Nous n'abordons aucun de ces aspects ici et nous concentrons sur le cas discret général inspiré de Lyons [Lyo03] et ses spécialisations à des modèles de graphes aléatoires.

### 1. Existence et linéarisation

Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $E$  un espace euclidien de dimension finie et  $H$  un sous-espace de  $E$ . Soit  $(e_i)_{i \in S}$  une base orthonormée de  $E$ .

**1.1. Mesures déterminantales sur un ensemble fini.** Un sous-ensemble aléatoire  $X$  de  $S$  est déterminantal associé à  $H$  dans la base  $(e_i)_{i \in S}$  si pour tout sous-ensemble  $J \subset S$ , on a

$$(28) \quad \mathbb{P}(J \subset X) = \det(\Pi^H)_{E_J}^{E_J},$$

où  $\Pi^H$  est la projection orthogonale sur  $H$  et  $(\Pi^H)_{E_J}^{E_J}$  sa compression sur le sous-espace vectoriel  $E_J = \bigoplus_{i \in J} \mathbb{K}e_i$ , dit « sous-espace de coordonnées ».

La probabilité d'un sous-ensemble  $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_n\}$  de  $S$  de cardinal  $n$ , est le carré de la projection de  $\iota_H$  sur  $\mathbb{K}e_I$ , où  $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$  et où  $\iota_H$  est le produit extérieur des éléments d'une base orthonormée de  $H$ , appelé plongement de Plücker de  $H$ . Le fait que la somme des probabilités vaille 1 est une ré-interprétation du théorème de Pythagore dans la  $n$ -ième puissance extérieure de  $E$  appliqué au vecteur  $\iota_H$  et sa décomposition dans la base orthonormée de  $\bigwedge^n E$ ,  $(e_I)_{I \in \binom{S}{n}}$ , déterminée par la base orthonormée  $(e_i)_{i \in S}$  de  $E$ .

**1.2. Construction routinière.** Le lemme 3.1 suivant énonce le fait que pour démontrer qu'un sous-espace aléatoire est déterminantal associé à une projection auto-adjointe il suffit de démontrer une égalité polynomiale de type « matrix-tree ». Ce lemme est utile pour démontrer les théorèmes du chapitre 4.

Étant donnés des poids  $\underline{x} = (x_i)_{i \in S}$  strictement positifs, on considère le produit scalaire sur  $E$ , que l'on dit « tordu » par  $\underline{x}$ , défini, pour tous  $u, v \in E$ , par

$$(29) \quad \langle u, v \rangle_{\underline{x}} = \sum_{i \in S} x_i \bar{u}_i v_i,$$

où  $u_i$ , resp.  $v_i$ , sont les coefficients de  $u$ , resp.  $v$ , dans la base  $(e_i)_{i \in S}$ . L'expression (29) donne la forme générale d'un produit scalaire pour lequel la base  $(e_i)_{i \in S}$  soit orthogonale.

On note  $C = \text{diag}(x_i : i \in S)$  la matrice diagonale des  $(x_i)_{i \in S}$ . Le lemme suivant est démontré dans [KL22b, lemme 3.1]. Un tel résultat qui est utilisé sous des formes *ad hoc* dans plusieurs

exemples fait sans doute partie du folklore, mais nous ne l'avons pas trouvé énoncé sous cette forme précise dans la littérature.

LEMME 3.1. *Soit  $w : 2^S \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction positive non identiquement nulle. Soit  $a$  une application linéaire injective d'un espace euclidien dans  $E$ . Supposons que pour tout  $\underline{x} \in ]0, \infty[^S$ , on ait*

$$(30) \quad \det(a^*a) = \sum_{B \subseteq S} \underline{x}^B w(B),$$

*où  $a^*$  est l'adjoint de  $a$  par rapport au produit scalaire tordu (29) sur  $E$ . Alors, pour tout  $\underline{x} \in ]0, \infty[^S$ , la mesure de probabilité sur  $2^S$  qui donne à  $B$  une probabilité*

$$(31) \quad \mathbb{P}(B) \propto \underline{x}^B w(B)$$

*est déterminantale, associée à la projection orthogonale sur  $\text{im } a$ , où la notion d'orthogonalité se réfère au produit scalaire tordu (29).*

Le lemme précédent permet notamment de démontrer les théorèmes de Burton–Pemantle (théorème 1.16) sur les arbres couvrants uniformes et de Kenyon (théorème 1.17) sur les forêts couvrantes d'unicycles aléatoires, à partir de la formule matrix-tree du théorème 1.6.

Nous verrons au paragraphe 5§2.1 une manière d'obtenir des identités de la forme (30).

**1.3. Linéarisation.** L'idée de ce paragraphe est simple mais s'avère conceptuellement utile. On peut voir un sous-ensemble  $X$  de  $S$  comme un sous-espace de coordonnées  $E_X = \bigoplus_{i \in X} \mathbb{K}e_i$ , et si l'ensemble  $S$  est partitionné en  $S = \sqcup_{a=1}^p S_a$ , on peut moyenner sur le choix de base  $(e_i)_{i \in S_a}$  de l'espace vectoriel  $E_{S_a}$ . Ceci permet d'obtenir un espace aléatoire qui ne « voit » pas le détail à l'intérieur de chaque élément  $S_a$  de la partition de  $S$ . Ce processus de moyenne rappelle celui bien connu dans le cadre de la théorie des processus déterminantaux qui permet d'étendre la construction des processus déterminantaux définis par un noyau de projection, à ceux définis par une contraction positive (un barycentre de projections) en voyant ces derniers comme des mélanges statistiques des premiers; voir [HKPV09]. Notre point de vue est de considérer cela aussi du point de vue du processus ponctuel lui-même. L'idée de remplacer les points par des espaces est assez classique, et apparaît notamment dans [Oko05, §1.3]. Expliquons les choses plus précisément maintenant.

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension finie  $d$ . On appelle scindement  $\sigma$  de  $E$  une décomposition orthogonale  $E = \bigoplus_{i \in S} E_i$ . La grassmannienne de  $E$  est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $E$ . On considère le sous-ensemble  $\text{Gr}(E, \sigma)$  de la grassmannienne défini comme l'ensemble des sous-espaces vectoriels  $Q$  de  $E$  qui sont adaptés au scindement : il s'agit de l'ensemble des  $Q \in \text{Gr}(E)$  tels que  $Q = \bigoplus_{i \in S} (Q \cap E_i)$ . Cette grassmannienne est naturellement stratifiée par les vecteurs de dimensions  $(n_i)_{i \in S} = (\dim(Q \cap E_i))_{i \in S}$ , et on note  $\text{Gr}_{\underline{n}}(E, \sigma)$  les sous-grassmanniennes correspondantes.

Pour tout entier  $n \in \{0, \dots, d\}$ , la grassmannienne  $\text{Gr}_n(E)$  des sous-espaces de  $E$  de dimension  $n$  est munie de l'unique mesure de Haar  $\nu_n^E$  de volume total égal au coefficient binomial  $\binom{d}{n}$ . Pour tout  $\underline{n} = (n_i)_{i \in S} \in \prod_{i \in S} \{0, \dots, \dim E_i\}$ , on définit ensuite la mesure  $\nu_{\underline{n}}^{E, \sigma}$  sur  $\text{Gr}_{\underline{n}}(E, \sigma)$  comme image du produit des mesures  $\nu_{n_i}^{E_i}$ . On définit enfin  $\nu^{E, \sigma} = \sum_{\underline{n}} \nu_{\underline{n}}^{E, \sigma}$  et on l'appelle la mesure de référence sur  $\text{Gr}(E, \sigma)$ . Si  $\dim E_i = 1$  pour tout  $i \in S$ , il s'agit de la mesure de comptage sur  $2^S$ , de sorte que l'on peut aussi appeler  $\nu^{E, \sigma}$  une mesure de « comptage continu ».

Dans la suite, on appelle *noyau* sur  $E$ , un opérateur  $k \in \text{End}(E)$  qui est auto-adjoint et dont le spectre est dans l'intervalle  $[0, 1]$ ; symboliquement, on a donc  $0 \leq k = k^* \leq 1$ .

**DEFINITION 3.2** (Processus déterminantal linéaire). *Le processus déterminantal linéaire associé à un noyau  $k$  et un scindement  $\sigma$  de  $E$  est la mesure de probabilité  $\mu_{\sigma,k}^E$  sur  $\text{Gr}(E, \sigma)$  dont la densité est  $Q \mapsto \det(k\Pi^Q + (\text{id} - k)\Pi^{Q^\perp})$  par rapport à la mesure de référence  $\nu^{E, \sigma}$ .*

L'article [KL22a] est consacré à la définition précise de ces mesures et à l'étude de leurs propriétés de base dans le cas où  $E$  est de dimension finie ou infinie.

**1.4. Algorithme d'échantillonnage.** Voici un algorithme pour échantillonner un tel processus.

**PROPOSITION 3.3.** *Soit  $(E, \sigma)$  un espace euclidien scindé. Soit  $k$  un noyau sur  $E$ . Dans tout élément  $E_i$  du scindement  $\sigma$ , on tire une base orthonormée uniformément aléatoire. L'union de ces bases forme une base orthonormée aléatoire  $(e_1, \dots, e_d)$  de  $E$ . Soit  $K$  la matrice de  $k$  dans cette base. On échantillonne un processus déterminantal de noyau  $K$  sur  $\{1, \dots, d\}$ . Ceci produit un sous-ensemble aléatoire  $X$  de  $\{1, \dots, d\}$ . Le sous-espace aléatoire  $Q = E_X = \text{Vect}(e_i : i \in X)$  de  $E$  a la loi  $\mu_{\sigma,k}^E$ .*

Donnons brièvement une description de l'algorithme qui permet d'échantillonner un processus ponctuel déterminantal  $X$  sur  $\{1, \dots, d\}$  associé au noyau  $K$ . Cet algorithme récursif (partant de  $X = \emptyset$ ) généralise [HKPV09, Algorithm 18] au cas où le noyau n'est pas nécessairement une projection :<sup>1</sup>

- on écrit  $K = \begin{pmatrix} K_{11} & R \\ C & K' \end{pmatrix}$  comme une matrice par blocs de taille  $(1, (d-1)) \times (1, (d-1))$ ,
- on ajoute 1 à  $X$  avec probabilité  $K_{11}$ ,
- si 1 a été choisi (de sorte que  $K_{11} > 0$ ), on échantillonne un sous-ensemble aléatoire  $X'$  de  $\{2, \dots, d\}$  associé au noyau  $K' - K_{11}^{-1}CR$  et on pose  $X = \{1\} \cup X'$ ,
- si 1 n'a pas été choisi (et donc  $K_{11} < 1$ ), on échantillonne un sous-ensemble aléatoire  $X'$  de  $\{2, \dots, d\}$  associé au noyau

$$I_{d-1} - ((I_{d-1} - K') - (1 - K_{11})^{-1}CR) = K' + (1 - K_{11})^{-1}CR,$$

et on pose  $X = X'$ .

Le fait que cet algorithme soit correct est une conséquence de la formule du complément de Schur (voir le lemme 5.5).

Cet algorithme requiert seulement l'échantillonnage de variables de Bernoulli et quelques opérations d'algèbre linéaire. Choisir une base orthonormée uniformément aléatoire peut se faire en utilisant une variable aléatoire gaussienne et le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt, voir [Dia05].

Cet algorithme permet d'échantillonner concrètement un processus déterminantal linéaire et c'est ainsi que les simulations de mesures déterminantales de ce mémoire, comme par exemple la figure 6.6, ont été échantillonnées.

1. Dans la littérature, la méthode d'échantillonnage privilégiée semble être celle qui consiste à écrire le processus comme un mélange de processus associé à des projections, mais la méthode décrite ici est plus directe. Voir aussi [LGD20].

## 2. Théorème de projection moyenne

Dans la suite, nous allons utiliser le langage de l'algèbre extérieure. Nous renvoyons à [KL22a, § 5] pour des explications. Les propriétés des processus déterminantaux proviennent de la géométrie euclidienne associée à la puissance extérieure de sous-espaces d'un espace vectoriel donné.

Dans un travail récent [KL23a] avec Thierry Lévy, nous avons étendu au cas continu un énoncé pour les processus déterminantaux sur un ensemble discret. Ce théorème nous a permis de faire des calculs de fonctions de partition (voir chapitre 4).

Nous rappelons tout d'abord l'énoncé dans le cas discret, avant d'expliquer sa généralisation au cas continu.

**2.1. Cas discret.** Soit  $E$  un espace euclidien de dimension finie  $d$ , et  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  une base orthonormée de  $E$ . On pose  $S = \{1, \dots, d\}$  et on considère  $H$  un sous-espace de  $E$  de dimension  $n$ . Soit  $X$  le processus ponctuel déterminantal sur  $S$  associé à la matrice  $K = (\langle e_i, \Pi^H e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq d}$ , où  $\Pi^H$  est la projection orthogonale sur  $H$ . Pour tout  $X \subseteq S$ , soit  $E_X = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C}e_x$  le sous-espace de coordonnées correspondant.

L'énoncé suivant est démontré dans [KL22a]. Le cas de degré 1 de cette égalité (l'algèbre extérieure de  $E$  est graduée) était connu au moins depuis le travail de Lyons [Lyo03]. Voir aussi [CCK13, CCK15]. Nous l'appelons « théorème de projection moyenne ».

**THÉORÈME 3.4.** *Presque sûrement  $E = H \oplus E_X^\perp$ , et en notant  $P_X$  la projection sur  $H$  parallèlement à  $E_X^\perp$ , on a*

$$\mathbb{E}[\wedge P_X] = \wedge \Pi^H.$$

Autrement dit, dans une base fixée de  $E$ , l'espérance de tout mineur de la matrice de la projection aléatoire  $P_X$  est égale au mineur correspondant de la matrice de  $\Pi^H$ .

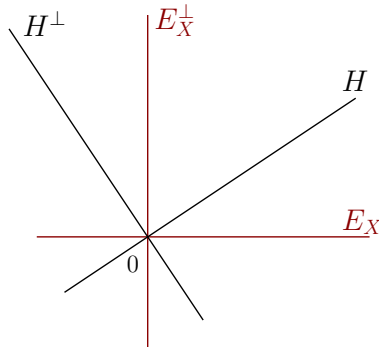


FIGURE 3.1. Illustration du théorème de projection moyenne pour les processus déterminantaux. L'espace aléatoire  $E_X$  est un estimateur non biaisé de  $H$ .

En passant à l'adjoint, on déduit une version duale du théorème précédente sous la forme :

$$\mathbb{E}[\wedge P_{\parallel H^\perp}^{E_X}] = \wedge \Pi^H,$$

où  $P_{\parallel H^\perp}^{E_X}$  est la projection sur  $E_X$  parallèlement à  $H^\perp$ , qui est l'adjoint de la projection  $P_X$ .

Le corollaire 3.5 suivant nous est utile dans la démonstration des résultats du chapitre 4 et du théorème de Kirchoff généralisé (théorème 6.14) au chapitre 6. Ce corollaire découle du

théorème 3.4 en utilisant le fait que l'orthogonal du sous-espace  $E_X$  a la même loi que le sous-espace aléatoire  $E_{X'}$ , où  $X'$  est un sous-ensemble aléatoire de  $S$  de loi déterminantale associée à  $H^\perp$  et à la base orthonormée  $(e_i)_{i \in S}$ .

COROLLAIRE 3.5. *Presque sûrement, on a*

$$\mathbb{E}[\wedge \mathbf{P}_{\|E_X}^{H^\perp}] = \wedge \Pi^{H^\perp},$$

où  $\mathbf{P}_{\|E_X}^{H^\perp}$  est la projection sur  $H^\perp$  parallèlement à  $E_X$ .

Nous expliquons maintenant comment étendre cet énoncé à tout processus ponctuel déterminantal associé à une projection orthogonale de rang fini sur un espace polonais quelconque  $S$ , de sorte qu'il s'applique par exemple à tout « ensemble polynomial orthogonal », voir [Lyo14, §3.8]. Cette extension est le contenu du Théorème 3.7. Une extension du Théorème 3.4 au cas d'une projection de rang infini (dans le cas où  $S$  est discret ou continu) serait intéressante. Un exemple de cette situation est étudié dans [BQ22], où les auteurs étudient, entre autres, l'analogie continu de  $\mathbf{P}_X$  dans le cas du noyau de Bergman.

**2.2. Cas continu.** On suppose maintenant que  $S$  est un ensemble polonais, muni d'une mesure de Radon positive  $\lambda$ . On pose  $E = L^2(S, \lambda)$ , on note  $C(S)$  l'espace des fonctions continues sur  $S$ , et on considère un sous-espace  $H$  de  $E \cap C(S)$  de dimension finie  $n$ .

Soit  $\text{Conf}_n(S)$  l'ensemble des collections de  $n$  points distincts de  $S$ , et  $\mu$  la mesure de probabilité déterminantale sur  $\text{Conf}_n(S)$  associée à la projection orthogonale sur  $H$ . Cela signifie qu'en choisissant une base orthonormée  $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq n}$  de  $H$ , on a pour toute fonction continue bornée, symétrique en les variables,  $T : S^n \rightarrow \mathbb{C}$ , l'égalité

$$(32) \quad \int_{\text{Conf}_n(S)} T(X) \, \mathbf{d}\mu(X) = \frac{1}{n!} \int_{S^n} T(x_1, \dots, x_n) |\det(\varphi_j(x_i)_{1 \leq i, j \leq n})|^2 \, \mathbf{d}\lambda^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n),$$

où le membre de droite ne dépend pas du choix de la base orthonormée. On note  $X$  un sous-espace aléatoire de  $S$  distribué selon la loi  $\mu$ , et on note  $\mathbb{E}[T(X)]$  la quantité égale aux deux membres de l'égalité (32).

Il découle de (32) que  $\mu$ -presque tout  $X$  est un *ensemble d'unicité* pour  $H$ , dans le sens où deux éléments de  $H$  qui coïncident sur  $X$  sont égaux. Cela nous permet de définir une projection aléatoire sur  $H$  associée à  $X$ , de la façon suivante.

LEMME 3.6. *Pour  $\mu$ -presque tout  $X \in \text{Conf}_n(S)$ , on a la décomposition*

$$\mathcal{C}(S) = H \oplus \mathcal{C}(S; X),$$

où  $\mathcal{C}(S; X) = \{f \in \mathcal{C}(S) : f|_X = 0\}$ .

En vertu de ce lemme, on définit  $\mathbf{P}_X$  comme étant la projection sur  $H$  parallèlement à  $\mathcal{C}(S; X)$ . Si  $S$  est en fait discret, cette projection est égale à la projection sur  $H$  parallèlement à  $E_X^\perp$  définie plus haut.

Pour  $g_1, \dots, g_m \in E \cap \mathcal{C}(S)$ , on définit  $g_1 \wedge \dots \wedge g_m \in L^2(S^m, \frac{1}{m!} \lambda^{\otimes m}) \cap \mathcal{C}(S^m)$  en posant, pour tous  $y_1, \dots, y_m \in S$ ,

$$(33) \quad (g_1 \wedge \dots \wedge g_m)(y_1, \dots, y_m) = \det(g_j(y_i)_{1 \leq i, j \leq m}).$$

On définit aussi, pour tout  $m \geq 1$  et  $k \in \{1, \dots, m\}$ , la quantité  $\Pi_k(g_1 \wedge \dots \wedge g_m)$  comme la somme de toutes les fonctions obtenues à partir de  $g_1 \wedge \dots \wedge g_m$  en remplaçant  $k$  des  $g_i$  par leur projection sur  $H^\perp$ , et les  $(m - k)$  autres par leur projection sur  $H$ .

On étend maintenant le théorème 3.4 au cas d'un espace  $S$  continu. Nous renforçons aussi le théorème 3.4 dans le cas discret, en précisant le calcul de la variance.

**THÉORÈME 3.7.** *Pour tout  $m \geq 1$ , et toutes  $f_1, \dots, f_m \in E \cap \mathcal{C}(S)$ , on a*

$$\mathbb{E}[\mathbb{P}_X f_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_X f_m] = \Pi^H f_1 \wedge \dots \wedge \Pi^H f_m,$$

$$\text{Var}(\mathbb{P}_X f_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_X f_m) = \sum_{k=1}^m \binom{n-m+k}{k} \|\Pi_k(f_1 \wedge \dots \wedge f_m)\|^2.$$

Des résultats dans l'esprit des théorèmes 3.4 et 3.7 ont également été obtenus dans le contexte de la résolution de systèmes d'équations linéaires singuliers, par exemple dans [Ber86a, BTT90, EZ60] et plus récemment dans le contexte des méthodes d'intégration numérique par algorithme de Monte-Carlo [GBV19] et de l'« échantillonnage actif » pour la régression linéaire [DW18, Thms 5, 6, 7]; voir également [AB13, MS17a, DWH22]. En particulier, notre énoncé généralise directement [EZ60, GBV19].

Dans [DLM20, Def. 4], les auteurs définissent la classe des matrices aléatoires pour lesquelles l'espérance de tout mineur est égale au mineur correspondant de l'espérance de la matrice, donnent des propriétés de base, et fournissent quelques exemples. Le théorème 3.4 et [KL22a, Thm 5.9] donnent des familles d'exemples de telles matrices aléatoires, à savoir les matrices  $\mathbb{P}_X$ . Une étude systématique de cette classe de matrices aléatoires serait certainement intéressante.

### 3. Matroïdes et polymatroïdes

Nous avons rappelé la définition d'un matroïde au chapitre 1, définition 1.9; voir aussi [Ard18, Ard21, Ox11].

**3.1. Support.** Par définition, le support d'une mesure déterminantale associée à une projection orthogonale sur un sous-espace  $H$  de dimension  $n$  d'un espace euclidien  $E$  de dimension finie  $d$  (muni d'une base orthonormée  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ ), est un matroïde, voir [Lyo03].

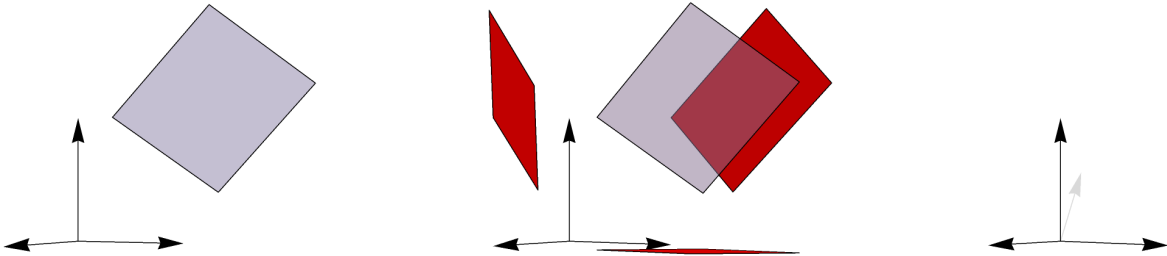


FIGURE 3.2. Plongement de Plücker et coordonnées associées : à gauche, un cube unité dans un sous-espace vectoriel  $H$  de  $E$ ; au milieu, ses ombres projetées sur les plans de coordonnées dans la base  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ ; à droite, le vecteur unité engendrant la droite  $\wedge^n H$ , représentant  $H$  dans  $\wedge^n E$ .

En effet, si  $\iota_H$  désigne le plongement de Plücker de  $H$  dans  $\wedge^n E$ , alors ses coordonnées dans la base  $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} : i_1 < \dots < i_n\}$  sont appelées coordonnées de Plücker de  $H$  et représentent les multivecteurs associés aux « ombres projetées » d'un cube unité dans  $H$ ; voir la figure 3.2.

Comme déjà évoqué au paragraphe 3§1.1, le théorème de Pythagore dit que la somme des modules au carré de ses coefficients est égale à 1. Le calcul déterminantal nous montre alors

que ces modules au carré sont la probabilité pour qu'un ensemble aléatoire  $X$  sous la mesure déterminantale associée à  $H$  dans la base  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  soit égal à  $\{i_1, \dots, i_n\}$ . En résumé :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = \{i_1 < \dots < i_n\}) &= |(\iota_H, e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n})|^2 \\ &= \det \left( (e_{i_k}, \Pi^H e_{i_\ell}) \right)_{1 \leq k, \ell \leq n} = \text{vol}^2 \left( P \left[ \Pi^H(e_{i_1}), \dots, \Pi^H(e_{i_n}) \right] \right), \end{aligned}$$

où  $P \left[ \Pi^H(e_{i_1}), \dots, \Pi^H(e_{i_n}) \right]$  est le polytope engendré par les projections orthogonales des vecteurs  $\{e_{i_k} : 1 \leq k \leq n\}$  sur  $H$ .

**3.2. Représentation.** Les matroïdes qui apparaissent dans ce contexte sont, par construction, représentables sur le corps  $\mathbb{K}$  (et tout corps de caractéristique nulle) : dire que le matroïde  $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$  est représentable signifie qu'il existe une application linéaire  $R$  de  $E$  vers un espace vectoriel cible  $F$ , tel que les éléments de  $\mathcal{I}$  soient les  $I \subset S$  pour lesquels la famille  $\{R(e_i) : i \in I\}$  est linéairement indépendante. Ainsi, le sous-espace  $Z = \ker R$  encode la dépendance linéaire du matroïde  $\mathcal{M}$ . Soit  $b$  la dimension de  $Z$ . Par le théorème du rang en algèbre linéaire, le rang du matroïde est donc  $n = \dim \text{im} R = \dim E - \dim Z = d - b$ .

De nombreux matroïdes intéressants sont représentables, et le point de vue des matroïdes aide à comprendre leur structure (même si l'on pourrait penser à première vue qu'il suffirait de les étudier du point de vue de l'algèbre linéaire).<sup>2</sup>

**3.3. Exemples.** Au chapitre suivant, nous verrons des exemples de mesures déterminantales sur les graphes. Par l'observation du paragraphe 3§3.1, leurs supports sont donc des matroïdes sur l'ensemble des arêtes géométriques  $[E]$ . Détaillons ici ces exemples :

- le matroïde circulaire  $\mathcal{M}_{\text{circ}}(\mathbf{G})$  dont les parties indépendantes sont les forêts couvrantes ;
- le matroïde bicirculaire  $\mathcal{M}_{\text{bicirc}}(\mathbf{G})$  dont les parties indépendantes sont les forêts couvrantes d'arbres et d'unicycles ;
- pour toute connexion unitaire  $h$ , le matroïde «  $h$ -bicirculaire », dont les parties indépendantes sont les forêts couvrantes d'arbres et d'unicycles d'holonomie non triviale par rapport à  $h$  ;
- pour tout  $k \geq 1$ , le matroïde  $\mathcal{M}_{\text{circ}}^{0,k}(\mathbf{G})$  dont l'ensemble des bases est  $\mathcal{C}_k(\mathbf{G})$  ; ses circuits sont les sous-graphes minimaux de premier nombre de Betti égal à  $k + 1$  ;
- pour tout  $k \geq 1$ , le matroïde  $\mathcal{M}_{\text{circ}}^{k,0}(\mathbf{G})$  dont l'ensemble des bases est  $\mathcal{F}_{k+1}(\mathbf{G})$  ; ses circuits sont les cycles simples et les forêts couvrantes à  $k$  composantes connexes ;
- comme dans le cas bicirculaire plus haut, on peut définir des sous-matroïdes des deux derniers à l'aide de chaînes  $\phi_1, \dots, \phi_k$  et cochaînes  $\theta_1, \dots, \theta_k$  ; voir le chapitre 4.

**3.4. Stratification.** Cette interprétation probabiliste se prolonge au cas de la stratification matroïdale de la grassmannienne due à [GGMS87]. En effet, on peut comprendre cette dernière comme partitionnant  $\text{Gr}_n(E)$  sous la forme  $\bigsqcup_{\mathcal{M}} \mathcal{G}_{\mathcal{M}}$ , obtenue en associant à tout matroïde  $\mathcal{M}$  sur  $S$  de rang  $n$ , l'ensemble  $\mathcal{G}_{\mathcal{M}}$  des sous-espaces  $H \in \text{Gr}_n(E)$  dont la mesure déterminantale associée  $\mathbb{P}_H$  dans la base  $(e_i)_{i \in S}$  a pour support l'ensemble des bases  $\mathcal{B}(\mathcal{M})$  de  $\mathcal{M}$ .

Dans le cas complexe  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , il y a une action naturelle du tore  $(\mathbb{C}^*)^d / \mathbb{C}^*$  sur  $\text{Gr}_n(E)$  par multiplication dans chaque direction des vecteurs de coordonnées  $(e_i)_{i \in S}$ , modulo facteur multiplicatif global. Cette action est hamiltonienne par rapport à la structure symplectique naturelle sur la grassmannienne et engendre une application moment, qui se trouve être une version

2. Pourtant, c'est une exception, car en vertu d'un théorème récent de Nelson, « presque tous » (en un sens quantitatif mathématique) les matroïdes ne sont pas représentables [Nel18].



vectorielle de la mesure d'incidence  $\mu_H$ , restreinte aux singletons, de la mesure de probabilité déterminantale correspondante :

$$\mu : \text{Gr}_n(E) \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad H \mapsto \sum_{T \in \mathcal{B}(\mathcal{M})} \mathbb{P}_H(\mathbf{X} = T) \left( \sum_{i \in T} e_i \right) = \sum_{i=1}^d \mathbb{P}_H(i \in \mathbf{X}) e_i = \sum_{i=1}^d \mu_H(\{i\}) e_i.$$

De plus, pour tout matroïde  $\mathcal{M}$  de rang  $n$ , l'adhérence de l'image de  $\mathcal{G}_{\mathcal{M}}$  par l'application moment  $\mu$  est le polytope des bases du matroïde  $\mathcal{M}$ , défini comme étant l'enveloppe convexe dans  $\mathbb{R}^n$  de la collection de vecteurs  $\{\sum_{i \in T} e_i : T \in \mathcal{B}(\mathcal{M})\}$ ; voir [GGMS87, Ard21].

Une autre stratification plus pratique (dont les strates sont plus lisses) a été construite par Postnikov dans le cas de la grassmannienne réelle positive [Pos06].

**3.5. Conditionnement.** On a déjà rencontré, lors de la présentation de l'algorithme d'échantillonnage au paragraphe 3§1.4, les processus déterminantaux conditionnés à contenir un point, ou à ne pas contenir un point. Plus généralement, on peut décrire le processus conditionné à rester dans un sous-ensemble.

Le support d'une mesure déterminantale conditionné à rester dans un sous-ensemble  $K$ , est l'ensemble des bases du matroïde restreint  $\mathcal{M}_K$ , c'est-à-dire le matroïde sur  $K$  dont la collection des sous-ensembles indépendants est l'ensemble des éléments de  $\mathcal{I}$  qui sont dans  $K$ .

LEMME 3.8. *Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Soit  $\mathbf{X}$  le sous-espace aléatoire de  $S$  de loi déterminantale associée à  $\Pi^H$  dans la base orthonormée  $(e_i)_{i \in S}$ . Soit  $K \subset S$  tel que  $\mathbb{P}(\mathbf{X} \subset K) > 0$ . Le sous-espace aléatoire  $\mathbf{X}$  conditionné à rester dans  $K$  est distribué selon la loi déterminantale sur  $2^K$  associée à la projection orthogonale sur le sous-espace  $\Pi^{E_K}(H)$ , où  $E_K = \bigoplus_{i \in K} \mathbb{K}e_i$ .*

Notons que l'hypothèse  $\mathbb{P}(\mathbf{X} \subset K) > 0$  est équivalente à  $E_{K^c} \cap H = \{0\}$ , ou à  $E_K + H^\perp = E$ . Ce lemme est démontré dans [KL22b, Lemma 3.3]. L'idée de la démonstration est d'utiliser le théorème de Pythagore dans la  $n$ -ième puissance extérieure de  $E$  de façon associative.

**3.6. Polynôme de Tutte d'un matroïde.** Le polynôme de Tutte d'un matroïde  $\mathcal{M}$  sur  $S$  est défini par

$$(34) \quad \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(x, y) = \sum_{J \subset S} (x-1)^{r_{\mathcal{M}}(S) - r_{\mathcal{M}}(J)} (y-1)^{|J| - r_{\mathcal{M}}(J)},$$

où  $r_{\mathcal{M}}$  est la fonction de rang de  $\mathcal{M}$  définie au paragraphe 1§2.9. Cette expression coïncide bien avec l'expression du polynôme de Tutte classique (5) dans le cas du matroïde circulaire d'un graphe fini connexe, et donne donc, à des facteurs près, la fonction de partition du modèle FK et du modèle des arbres couvrants actifs comme on l'a expliqué au chapitre 2. Cette définition était présente dans la thèse de Tutte mais fut publiée par Crapo.

Comme le polynôme de Tutte classique, le polynôme de Tutte d'un matroïde admet une caractérisation récursive en termes de contraction et suppression (voir 1§2.4). Elle est identique à celle pour le matroïde circulaire, une fois que l'on a défini les notions équivalentes. Une *boucle* de  $\mathcal{M}$  est un point de  $S$  qui n'est contenu dans aucune base ; un *isthme* est un point de  $S$  contenu dans toute base, et :

- si  $i_0 \in S$  n'est pas une boucle, on définit le matroïde  $\mathcal{M}_{/i_0}$  sur  $S \setminus \{i_0\}$  dont les ensembles indépendants sont  $\{I \setminus \{i_0\} : i_0 \in I \in \mathcal{I}\}$  ;
- si  $i_0 \in S$  n'est pas un isthme, on définit le matroïde  $\mathcal{M} \setminus \{i_0\}$  sur  $S \setminus \{i_0\}$  dont les ensembles indépendants sont  $\{I \in \mathcal{I} : i_0 \notin I\}$ .

Par un résultat de Crapo [**Cra69**], on a

$$(35) \quad \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(x, y) = \sum_{T \in \mathcal{B}} x^{a_i(T)} y^{a_e(T)},$$

pour une notion adaptée d'activité dépendant d'un ordre sur  $S$ .

Certaines évaluations du polynôme de Tutte ont une interprétation facile :

- $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(2, 2) = 2^{|S|}$  par (34) ;
- $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(2, 1) = |\mathcal{I}|$  par (34) ;
- $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(1, 2) = |\mathcal{S}|$ , où  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des parties couvrantes/génératrices de  $\mathcal{M}$ , par (34) ;
- $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(1, 1) = |\mathcal{B}|$  par (35).

Il existe une notion de matroïde dual à un matroïde  $\mathcal{M}$ , noté  $\mathcal{M}^*$ , qui est le matroïde sur l'ensemble  $S$  dont les bases sont les sous-ensembles de la forme  $S \setminus T$ , où  $T$  est une base de  $\mathcal{M}$ . C'est l'analogie de la dualité planaire pour les graphes planaires. Il découle de la définition de l'activité et de l'expression symétrique (35) que l'on a

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{M}^*}(x, y) = \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(y, x),$$

une propriété que nous avons utilisée dans le cas des graphes planaires au chapitre 2.

**3.7. Exemple du matroïde bicirculaire.** D'après l'expression pour la fonction de rang du matroïde bicirculaire donnée au paragraphe 1§2.10, on trouve que pour le matroïde bicirculaire, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\mathcal{M}_{\text{bicirc}}(\mathcal{G})}(x, y) &= \sum_{\mathbf{H} \leq \mathcal{G}} (x-1)^{k_0(\mathbf{H})-1} (y-1)^{|\mathbf{E}(\mathbf{H})| - |\mathbf{V}| + k_0(\mathbf{H})} \\ &= (x-1)^{-1} (y-1)^{|\mathbf{V}|} \sum_{\mathbf{H} \leq \mathcal{G}} (y-1)^{|\mathbf{E}(\mathbf{H})|} ((x-1)(y-1))^{k_0(\mathbf{H})}, \end{aligned}$$

où  $k_0(\mathbf{H})$  est le nombre de composantes connexes du sous-graphe couvrant  $\mathbf{H}$  qui sont des arbres.

On peut aussi calculer le polynôme de Tutte du matroïde  $h$ -bicirculaire pour toute connexion unitaire  $h$ .

**3.8. Polymatroïdes.** Dans le cadre des processus déterminantaux linéaires, le support de la trace  $(n_i)_{i \in S} = (\dim(\mathbf{Q} \cap E_i))_{i \in S}$  d'un espace aléatoire  $\mathbf{Q} \in \text{Gr}(E, \sigma)$  est un polymatroïde.

Un polymatroïde est une généralisation d'un matroïde, où l'on autorise le rang d'une partie à être plus grand que le cardinal de cette partie. De la même façon qu'un matroïde représentable (et représenté) correspond à une configuration de vecteurs (ou de manière équivalente, une configuration d'hyperplans), un polymatroïde représentable (et représenté) correspond à une configuration de sous-espaces de dimension arbitraire.

Nous montrons dans [**KL22a**, Proposition 4.9] que le support de la mesure  $\mu_{\sigma, k}^E$  est déterminé par le support de sa trace. En particulier, le support est caractérisé par les inégalités suivantes, voir [**KL22a**, Proposition 4.12].

**PROPOSITION 3.9.** *Soit  $(E, \sigma)$  un espace euclidien scindé ; on note  $\underline{d} = (\dim E_i)_{i \in S}$ . Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Soit  $n = \dim H$ . Soit  $\underline{n} = (n_1, \dots, n_s) \leq \underline{d}$  tel que  $n_1 + \dots + n_s = n$ . On a alors équivalence entre les propriétés suivantes :*

1.  $\mu_{\sigma, \Pi H}^E(\text{Gr}_{\underline{n}}(E, \sigma)) > 0$ .
2. Pour tout  $T \subset \{1, \dots, s\}$ , on a l'inégalité :  $\sum_{t \in T} n_t \geq \dim(H \cap \bigoplus_{t \in T} E_t)$ .

Dans certains cas comme le modèle de forêt couvrante quantique du chapitre 6, le matroïde est transverse, et les inégalités de la proposition 3.9 sont alors équivalentes aux inégalités de Hall–Rado–Welsh généralisant le théorème des appariements de Hall.<sup>3</sup>

#### 4. Interprétation physique

Expliquons maintenant comment un processus déterminantal linéaire (DLP, voir la définition 3.2) peut s’interpréter comme l’observation de l’état physique d’un système quantique. L’état physique est lui-même une superposition d’états « purs », déterminée par un endomorphisme auto-adjoint positif de trace 1, appelé « densité d’états » et noté  $\rho_k \in \text{End}(\wedge E)$  associé à l’opérateur  $k$ . Lorsque  $k < \text{id}$ , on a  $\rho_k = \det(\text{id} - k) \wedge (k(\text{id} - k)^{-1})$ .

Contrairement à l’état (qui dépend seulement de  $k$ ), l’observable, quant à elle, dépend du scindement  $\sigma$  ; on peut ainsi voir la symétrie du système comme associée à une certaine précision de l’observation (qui ne voit pas les détails « plus fins » que le scindement à l’intérieur des blocs  $E_i$  qui le constituent). On le sait bien d’un point de vue probabiliste : si le scindement est adapté à  $k$ , on voit un processus i.i.d. sur  $S$ , alors que sinon on a des corrélations négatives strictement.

Un processus déterminantal est un exemple de mesure à valeurs dans les opérateurs positifs (POVM pour *positive operator valued measure*) comme l’atteste le théorème suivant.

On considère « l’observable uniforme » associée à un scindement  $\sigma$  :

$$O_\sigma : B \mapsto \int_B \Pi^{\iota(Q)} d\nu^{E,\sigma}(Q),$$

où  $\iota(Q)$  est le plongement de Plücker de  $Q$ .

**THÉORÈME 3.10.** *Pour tout noyau admissible  $k \in \text{End}(E)$  et tout borélien  $B$  de  $\text{Gr}(E, \sigma)$ , on a*

$$\mathbb{P}(Q \subset B) = \text{Tr}_{\wedge E}(O_\sigma(B)\rho_k)$$

#### 5. Cas quaternion

Les processus déterminantaux se généralisent au cas où le corps de base est l’anneau à division des quaternions ; voir [KL22a, §6]. Rappelons que l’algèbre des quaternions réels est définie comme

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + d\mathfrak{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

où les éléments  $i, j, \mathfrak{k}$  satisfont les relations

$$i^2 = j^2 = \mathfrak{k}^2 = ij\mathfrak{k} = -1.$$

Il s’agit d’une algèbre à division réelle de dimension 4. Le coefficient  $a$  de  $q = a + bi + cj + d\mathfrak{k}$  est appelé partie réelle de  $q$  et noté  $\text{Re}(q)$ . On définit de plus une involution par la conjugaison  $q = a + bi + cj + d\mathfrak{k} \mapsto \bar{q} = a - bi - cj - d\mathfrak{k}$  ; on a en particulier  $q + \bar{q} = 2\text{Re}(q)$ .

On appelle espace vectoriel *quaternionique* tout module à droite sur  $\mathbb{H}$ . Comme  $\mathbb{H}$  est une algèbre à division, il y a bien une notion de base et de dimension, de sorte que parler d’espace vectoriel n’est pas incohérent, même si la notion est différente que dans le cas réel ou complexe.

Sur un espace vectoriel quaternionique  $E$ , un produit scalaire est une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{H}$  qui est additive en chaque variable, et quaternion-sesquilinéaire au sens où pour tous  $v, w \in E$  et tous  $q, r \in \mathbb{H}$ , on ait

$$\langle vq, wr \rangle = \bar{q}\langle v, w \rangle r.$$

<sup>3</sup> Le théorème de Hall avait d’abord été généralisé par Tutte avant d’être étendu par Rado et Welsh. Les contributions de Tutte à la théorie des graphes et matroïdes sont très nombreuses, voir [Mul03].

De plus, on suppose que  $\langle v, v \rangle$  est un réel positif pour tout  $v \in E$ , et qu'il vaut 0 seulement si  $v = 0$ . Sur l'espace vectoriel quaternionique  $\mathbb{H}^d$ , il y a un produit scalaire standard

$$\langle (q_1, \dots, q_d), (r_1, \dots, r_d) \rangle = \sum_{i=1}^d \bar{q}_i r_i.$$

On appelle noyau un endomorphisme auto-adjoint d'espace vectoriel quaternionique muni d'un produit scalaire, dont les valeurs propres (à droite) sont réelles et entre 0 et 1.

**DEFINITION 3.11** (Processus Q-déterminantal). *Étant donné un espace vectoriel euclidien quaternionique scindé  $(E, \sigma)$  et un noyau  $k$  sur  $E$ , il existe une unique mesure Q-déterminantale associée.*

Cette mesure est équivariante sous l'action du groupe  $U(E, \sigma) \simeq \prod_{i=1}^d U(E_i)$  des isométries de  $E$ , appelées transformations *symplectiques*, qui préservent le scindement  $\sigma = (E_1, \dots, E_d)$ .

Un exemple de mesure de probabilité Q-déterminantale est donné dans le théorème 4.1. Notons que l'algorithme d'échantillonnage de la proposition 3.3 s'applique aussi aux processus Q-déterminantaux, et c'est ainsi que les figures 4.1 et 6.7 ont été obtenues.

Les processus quaternion déterminantaux sont un cas particulier de processus pfaffiens qui eux correspondent aux cas de processus quaternion-complexes, voir [Meh04, Kas13, Kar14]. Les processus pfaffiens se comportent très différemment et en particulier ils ne satisfont pas de propriété d'association négative (et même de corrélation négative) en général.



## Sous-graphes aléatoires

Dans ce chapitre, nous présentons certaines mesures de probabilité déterminantales sur des familles particulières de sous-graphes couvrants d'un graphe fini connexe  $G$ . On suppose que ce graphe est muni de poids réels strictement positifs sur les arêtes  $\underline{x} = (x_e)_{e \in E}$ , qui sont symétriques :  $x_e = x_{e^{-1}} > 0$ , pour tout  $e \in E$ .

### 1. Arbres couvrants et forêts couvrantes d'unicycles

Il est bien connu (depuis Burton et Pemantle, 1993, [BP93] ; voir le théorème 1.16) que la mesure de probabilité uniforme sur les arbres couvrants d'un graphe fini connexe  $G$ , vue comme un sous-ensemble aléatoire d'arêtes, est déterminantale. Elle est associée au sous-espace  $\text{im}(d)$  des 1-formes exactes, où  $d$  est la dérivée discrète sur le graphe (appelée aussi opérateur de cobord) ; voir les paragraphes 1§2.2 et 1§2.6.

Plus récemment, Kenyon [Ken11] a trouvé une mesure déterminantale sur les forêts couvrantes d'unicycles d'un graphe, associée à l'espace  $\text{im}(d_h)$ , où  $d_h$  est la dérivée discrète covariante associée à une connexion unitaire  $h$  sur un fibré de rang 1 (voir le théorème 1.17). Une forêt couvrante d'unicycles est un sous-graphe contenant tous les sommets et dont chaque composante connexe contient autant de sommets que d'arêtes (donc un unique cycle). On note  $\mathcal{U}(G)$  l'ensemble de ces forêts d'unicycles et pour toute forêt  $F \in \mathcal{U}(G)$ , on note  $\mathcal{C}(F)$  l'ensemble de ses cycles.

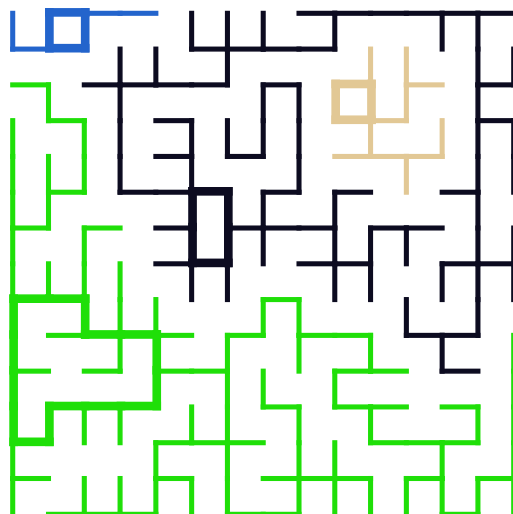


FIGURE 4.1. Une forêt couvrante d'unicycles dont les composantes connexes sont représentées en différentes couleurs et les cycles sont représentés en gras. Ici le graphe  $G$  est une grille  $15 \times 15$ . L'échantillon est tiré selon la loi déterminantale (37) associée à un choix aléatoire de connexion  $h$ .

Étant donné une connexion unitaire  $h$  sur un fibré réel, complexe, ou quaternion de rang 1, on définit la mesure de probabilité sur  $\mathcal{U}(\mathbb{G})$  par la relation de proportionnalité<sup>1</sup>

$$(37) \quad \mathbb{P}(F) \propto \underline{x}^F \prod_{c \in \mathcal{C}(F)} |1 - \text{hol}_h(c)|^2.$$

Le théorème suivant étend le résultat de Kenyon au cas quaternion, comme démontré dans [Kas13]. Une autre démonstration de ce fait est donnée dans [Kas15] et la théorie des processus quaternion déterminantaux est exposée de manière plus générale dans [KL22a].<sup>2</sup>

**THÉORÈME 4.1.** *La mesure de probabilité sur  $\mathcal{U}(\mathbb{G})$  définie par (37) est (quaternion) déterminantale, associée au sous-espace  $\text{im } d_h$  de  $\Omega^1(\mathbb{F})$ .*

Une stratégie pour démontrer ces résultats (théorème de Burton–Pemantle, théorème de Kenyon, théorème 4.1) consiste à trouver une expression déterminantale pour la fonction de partition, puis à utiliser le lemme 3.1. Dans [KL20] nous donnons une démonstration unifiée pour le calcul des fonctions de partition des mesures ci-dessus (voir chapitre 5).

En utilisant le théorème 3.4, on peut calculer d'autres fonctions de partition déterminantales associées à un graphe, ce qui permet d'obtenir les résultats que nous exposons dans la suite de ce chapitre (et qui sont démontrés dans [KL22b]).

Rappelons la décomposition orthogonale (8) de l'espace des 1-formes en formes exactes et formes fermées

$$(38) \quad \Omega^1(\mathbb{G}) = \text{im } d \oplus \ker d^*,$$

où  $d^*$  désigne l'adjoint de  $d$ . Dans la suite, on va considérer des sous-espaces qui « altèrent » cette décomposition en « déplaçant le curseur », c'est-à-dire en augmentant l'espace  $\text{im } d$  ou en le diminuant.

## 2. Sous-graphes couvrants connexes

Pour tout  $k \geq 1$ , soit  $\mathcal{C}_k(\mathbb{G})$  l'ensemble des sous-graphes couvrants connexes de  $\mathbb{G}$  dont le premier nombre de Betti est égal à  $k$ , autrement dit l'ensemble des sous-graphes connexes contenant tous les sommets et avec exactement  $|\mathbb{V}| - 1 + k$  arêtes, où  $|\mathbb{V}|$  désigne le nombre de sommets de  $\mathbb{G}$ .

Étant données des 1-formes  $\theta_1, \dots, \theta_k$  linéairement indépendantes dans  $\ker d^*$ , on définit la mesure de probabilité sur  $\mathcal{C}_k(\mathbb{G})$  par la relation de proportionnalité

$$(39) \quad \mathbb{P}(K) \propto \left| \det (\theta_i(\gamma_j))_{1 \leq i, j \leq k} \right|^2 \underline{x}^K,$$

où pour tout  $K$  on a choisi une base intégrale  $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$  du groupe abélien libre  $Z_1(K, \mathbb{Z})$ , le groupe des cycles de  $K$  (voir le paragraphe 1§2.2).

1. À la lecture de ce mémoire, Kilian Raschel nous a suggéré d'étudier d'autres mesures de probabilité que celles-ci, par exemple celle où l'exposant 2 serait remplacé par un paramètre  $\beta > 0$  :

$$(36) \quad \mathbb{P}(F) \propto \underline{x}^F \prod_{c \in \mathcal{C}(F)} |1 - \text{hol}_h(c)|^\beta,$$

ce qui rappelle l'étude des  $\beta$ -ensembles discrets [BGG17]. On pourrait tout aussi bien tenter d'étudier les mesures de probabilité sur  $\mathcal{U}(\mathbb{G})$  donnant à  $F$  une probabilité proportionnelle à  $\underline{x}^F \exp \left[ -\beta \sum_{c \in \mathcal{C}(F)} \text{Re}(\text{hol}_h(c)) \right]$ . Néanmoins, nous ne connaissons aucun résultat d'intégrabilité exacte pour ces mesures.

2. Pour ces raisons, nous incluons néanmoins ce résultat dans ce mémoire (qui porte sur le travail après la thèse de doctorat).

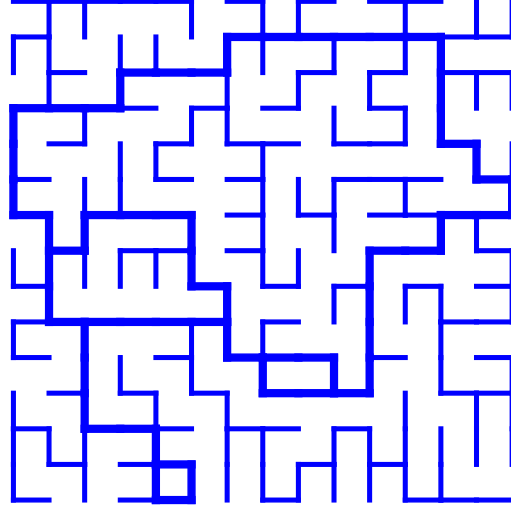


FIGURE 4.2. Un sous-graphe couvrant connexe avec 4 cycles indépendants; le « 2-cœur » (c'est-à-dire le sous-graphe obtenu en effaçant itérativement les sommets de valence strictement plus petite que 2) de ce sous-graphe est représenté en gras. Ici le graphe  $G$  est une grille  $15 \times 15$ . L'échantillon est tiré selon la loi déterminantale (39) associée à un choix aléatoire de 1-formes  $\theta_i$ .

**THÉORÈME 4.2.** *La mesure de probabilité sur  $\mathcal{C}_k(G)$  définie par (39) est déterminantale, associée au sous-espace  $\text{im } d \oplus \text{Vect}(\theta_1, \dots, \theta_k)$  de  $\Omega^1(G)$ .*

Un échantillon de cette mesure de probabilité est donné sur la figure 4.2.

La démonstration du théorème 4.2 donnée dans [KL22b] repose sur l'utilisation du théorème de projection moyenne (dans sa version du corollaire 3.5) afin d'obtenir le coefficient de normalisation (la fonction de partition) de la mesure (39) sous la forme d'un déterminant; nous utilisons ensuite le lemme 3.1.

Lorsque la connexion  $h$  du paragraphe 4§1 converge vers une connexion triviale ( $h = e^{it\theta}$  avec  $t \rightarrow 0$ ), la mesure de probabilité déterminantale se concentre sur les unicycles couvrants et la mesure de probabilité limite est celle du cas  $k = 1$  du théorème 4.2 avec  $\theta_1 = \theta$ . Cette observation a déjà été faite par Kenyon [Ken11] (qui ne mentionnait cependant pas l'espace  $\text{im}(d) \oplus \mathbb{K}\theta$ ) et nous la généralisons au paragraphe 6§5.3.

### 3. Sous-graphes couvrants acycliques

Pour tout  $k \geq 1$ , soit  $\mathcal{F}_k(G)$  l'ensemble des forêts couvrantes à  $k$  composantes connexes, c'est-à-dire des sous-graphes couvrants acycliques à  $k$  composantes connexes.

Étant données des 1-chaînes  $\phi_1, \dots, \phi_k$  linéairement indépendantes telles que

$$\text{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_k) \cap Z_1(G, \mathbb{K}) = \{0\},$$

on définit une mesure de probabilité sur  $\mathcal{F}_{k+1}(G)$  par la relation de proportionnalité

$$(40) \quad \mathbb{P}(F) \propto \left| \det(\kappa_i(\phi_j))_{1 \leq i, j \leq k} \right|^2 \underline{x}^F,$$

où  $(\kappa_1, \dots, \kappa_k)$  est une base du groupe abélien libre  $B^1(F, \mathbb{Z})$ , le groupe des coupures déterminées par  $F$  (voir le paragraphe 1§2.2).



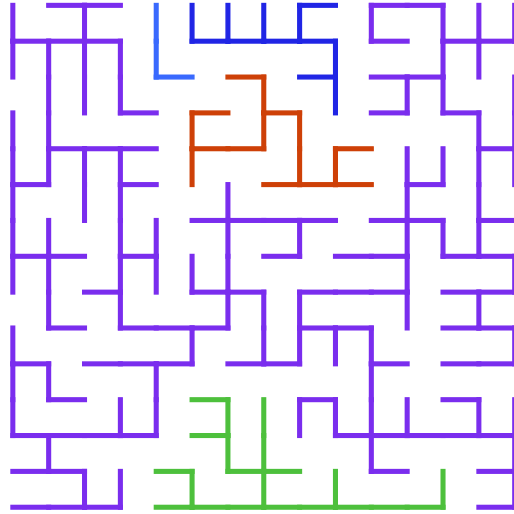


FIGURE 4.3. Une forêt couvrante (c'est-à-dire, un sous-graphe couvrant acyclique) à 5 composantes connexes, représentées en différentes couleurs. Ici le graphe  $\mathbf{G}$  est une grille  $15 \times 15$ . L'échantillon est tiré selon la loi déterminantale (40) associée à un choix aléatoire de 1-formes  $\phi_i$ .

**THÉORÈME 4.3.** *La mesure de probabilité sur  $\mathcal{F}_{k+1}(\mathbf{G})$  définie par (40) est déterminantale, associée au sous-espace  $\text{im } d \cap \text{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_k)^\perp$  de  $\Omega^1(\mathbf{G})$ .*

Un échantillon de cette mesure de probabilité est donné sur la figure 4.3.

Comme pour le théorème 4.2, la démonstration du théorème 4.3 donnée dans [KL22b] repose sur l'utilisation du théorème de projection moyenne (dans sa version du corollaire 3.5) afin d'obtenir le coefficient de normalisation (la fonction de partition) de la mesure (40) sous la forme d'un déterminant ; nous utilisons ensuite le lemme 3.1.

Nous montrons dans [KL22b] pourquoi ces deux énoncés sont les deux faces duales d'une spécialisation d'un théorème plus général valable pour les matroïdes représentables ; voir [KL22b, Theorem 6.17].

La remarque qui suit le théorème 4.2 suggère la question suivante.

**QUESTION 4.4.** *Existe-t-il une mesure déterminantale naturelle sur un ensemble de sous-graphes de  $\mathbf{G}$ , telle que dans la limite d'un paramètre, on retrouve la mesure sur  $\mathcal{F}_2(\mathbf{G})$  considérée plus haut ? Si  $\mathbf{G}$  est planaire, par dualité, on peut considérer le complémentaire du dual d'une forêt couvrante d'unicycles, mais qu'en est-il en général ?*

Plus généralement, on peut poser la question d'identifier toutes les mesures déterminantales ci-dessus (pour tout  $k \geq 1$ , pas uniquement  $k = 1$ ) comme des limites au bord d'un ensemble de mesures déterminantales naturelles paramétrées par des connexions ou des généralisations de connexions. Un exemple dans ce sens est donné au chapitre 6 ; voir le théorème 6.13.

Une autre piste dans cette direction serait de considérer les mesures à l'ordre  $k$  comme obtenues par développement limité d'une fonction de partition dépendant d'une « superconnexion » déterminée par les  $(\theta_i)_{1 \leq i \leq k}$ . Pourrait-on construire une dérivée covariante associée à la puissance

extérieure d'un fibré de rang 1 dans l'esprit de [Wit82] (cette question provient d'une discussion avec Alain-Sol Sznitman il y a plusieurs années) ?

#### 4. Identités multilinéaires et complexité

La démonstration des théorèmes 4.2 et 4.3 repose sur des identités multilinéaires qui généralisent le théorème classique dit « matrix-tree » et attribué à Kirchhoff. Afin de les manipuler plus aisément, nous avons utilisé, dans [KL22b], le langage de l'algèbre extérieure, qui permet en quelque sorte de « linéariser la multilinéarité ».

Dans [KL22b, §6] nous avons montré comment ces identités sont plus largement valables dans le cadre des matroïdes, et avons donné une généralisation des théorèmes 4.2 et 4.3 dans ce cadre (voir [KL22b, Theorem 6.17]).

**4.1. Une version vectorielle du matrix-tree theorem.** Donnons ici l'une de ces identités (voir [KL22b, corollaire 2.2] pour la démonstration) et illustrons-la sur un exemple très simple. C'est une version vectorielle d'une identité de polynômes déterminantaux qui apparaît par exemple dans [Ami19, Lemma 3.1].

Étant donné un sous-ensemble d'arêtes  $A \subset [E]$ , dont nous notons  $A^c$  le complémentaire dans  $[E]$ , appelons  $\pi_A$  la projection sur le premier facteur de la décomposition  $C_1(\mathbf{G}, \mathbb{Z}) = C_1(A, \mathbb{Z}) \oplus C_1(A^c, \mathbb{Z})$ . Rappelons que  $b_1$  désigne le premier nombre de Betti de  $\mathbf{G}$ , c'est-à-dire le rang de son groupe des cycles  $Z_1(\mathbf{G}, \mathbb{Z})$ .

PROPOSITION 4.5. *Sur  $\wedge^{b_1} Z_1(\mathbf{G}, \mathbb{Z})$  on a l'égalité d'endomorphismes*

$$(41) \quad \sum_{T \in \mathcal{T}(\mathbf{G})} \wedge^{b_1} \pi_{T^c} = \text{id},$$

*où la somme porte sur tous les arbres couvrants de  $\mathbf{G}$ .*

Notons qu'une telle égalité serait incorrecte sans l'exposant  $b_1$ .

**4.2. Un exemple simple.** Considérons l'exemple simple du graphe de la figure 4.4 pour lequel  $b_1 = 2$ , comme l'illustre l'exemple suivant. Nous en avons choisi une orientation pour chaque arête géométrique :  $E^+ = \{a, b, c, d, e\}$ . Ce graphe possède 8 arbres couvrants dont la liste des sous-graphes complémentaires s'écrit  $\{ae, be, ce, de, ac, ad, bc, bd\}$ .

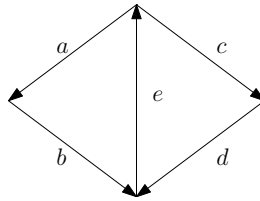


FIGURE 4.4. Un graphe à deux cycles avec un choix d'orientation pour chaque arête.

Une base intégrale du groupe libre de ses cycles  $Z_1(\mathbf{G}, \mathbb{Z})$  est donnée par  $\{a + b + e, c + d + e\}$ . En développant le produit extérieur suivant, on obtient

$$(a + b + e) \wedge (c + d + e) = a \wedge c + a \wedge d + a \wedge e + b \wedge c + b \wedge d + b \wedge e - c \wedge e - d \wedge e,$$

et cette égalité illustre l'équation (41) appliquée à l'élément  $(a + b + e) \wedge (c + d + e)$  de  $\wedge^{b_1} Z_1(\mathbf{G})$ . En calculant  $\sum_{T \in \mathcal{T}(\mathbf{G})} \pi_{T^c}$  appliqué à  $a + b + e$  on trouve  $3a + 3b + 4e \neq a + b + e$ , ce qui confirme la nécessité, déjà mentionnée plus haut, de l'exposant  $b_1$  dans l'équation (41).

**4.3. Complexité.** Le fait qu'il y ait des identités multilinéaires impliquant le caractère déterminantal de la mesure uniforme sur les arbres couvrants, est un témoin du fait que dénombrer les arbres couvrants d'un graphe fini connexe  $G$ , c'est-à-dire calculer  $|\mathcal{T}(G)|$ , est un « problème facile » (on dit de classe FP).

Comme on l'a rappelé au chapitre 1, il n'en va pas de même pour toutes les classes de sous-graphes. Faisons un bref tour d'horizon des classes de graphes que nous avons considérées plus haut, à la lumière de la théorie de la complexité.

4.3.1. *Dénombrer facile.* Nous avons déjà vu que dénombrer  $\mathcal{F}_k(G)$  est facile (de classe FP), car il existe une formule explicite sous la forme d'une combinaison linéaire de déterminants de taille polynomiale due à Myrvold [Myr92]; l'exemple du cas  $k = 2$  est donné à l'équation (22).

La question (duale, en un certain sens) de dénombrer  $\mathcal{C}_k(G)$  n'a pas été traitée dans la littérature semble-t-il, et nous conduit à la question suivante.

QUESTION 4.6. *Existe-t-il une formule pour dénombrer les sous-graphes connexes à nombre de cycle fixé d'un graphe fini connexe ?*

Après avoir soutenu ce mémoire, nous avons trouvé l'article [Cho92] (peu connu puisqu'il ne semble pas cité à ce jour) qui semble répondre en partie à cette question. L'auteur y donne une méthode récursive pour compter les sous-graphes connexes à nombre de Betti fixé en se ramenant à des sous-graphes planaires. Il ne détaille pas la formule finale ainsi obtenue, mais si cette méthode termine en temps polynomial, elle donnerait en principe une réponse affirmative à la question.

4.3.2. *Dénombrer difficile.* Présentons maintenant des problèmes de comptage dont on sait qu'ils sont difficiles (#P-difficiles) :

- Compter les unicycles couvrants d'un graphe, par un résultat de Giménez et Noy [GN06, §3]<sup>3</sup>;
- Compter les forêts couvrantes (c'est-à-dire les ensembles indépendants du matroïde circulaire de  $G$ , qui est l'évaluation  $\mathcal{Z}_G(2, 1)$  du polynôme de Tutte, voir 3§3.6), par un résultat de Welsh [Wel93];
- Compter les sous-graphes connexes (c'est-à-dire les parties génératrices du matroïde circulaire, qui est l'évaluation  $\mathcal{Z}_G(1, 2)$  du polynôme de Tutte), par un résultat de Provan et Ball [PB83].

Puisqu'il n'existe pas de formule explicite, il est intéressant de consulter les suites de cardinaux de ces ensembles pour des suites de graphes particuliers. Dans l'encyclopédie en ligne des suites d'entiers (OEIS), le nombre de forêts couvrantes d'unicycles sur un graphe complet est accessible sous l'entrée A137916 et celui du nombre d'unicycles couvrants sur un graphe complet est référencé sous A001429.

Comme suggéré par Kilian Raschel, on peut s'interroger sur la nature des séries génératrices (simples ou exponentielles) de ces suites de nombre. Nous ne savons pas s'il existe des résultats dans cette direction; il est à noter que pour la suite des nombres (a priori plus simples, surtout que l'on en a une expression explicite) d'arbres enracinés du graphe complet (donc, d'après la formule de Cayley (2), la suite  $(n^{n-1})_{n \geq 1}$ ), des résultats de cette nature n'ont été obtenus que récemment [BJP20].

---

3. La démonstration de ces auteurs utilise une courte réduction, en deux étapes, à un problème de comptage de couplages parfaits, dont on sait qu'il s'agit d'un problème #P-difficile par un travail célèbre de Valiant [Val79], dans lequel cette classe de complexité est en fait introduite.

4.3.3. *Dénombrement approché.* Pour les forêts couvrantes d'unicycles (les éléments de  $\mathcal{U}(\mathbf{G})$ ), il existe un algorithme d'échantillonnage exact en temps polynomial (à base de marches aléatoires à boucles effacées) des mesures de probabilité de la forme

$$\mathbb{P}_\alpha(U) \propto \underline{x}^U \prod_{c \in \mathcal{C}(U)} (\alpha(c) + \alpha(c^{-1})),$$

où  $\alpha$  est une fonction sur les cycles telle que  $\alpha(c) \in [0, 1]$  pour tout cycle  $c$  de  $\mathbf{G}$ ; voir [KK17, Kas15, GJ21]. Cet algorithme généralise l'algorithme de Wilson (voir le théorème 1.24).<sup>4</sup>

Cet algorithme permet en particulier d'échantillonner de manière exacte en temps polynomial la mesure de probabilité uniforme sur  $\mathcal{U}(\mathbf{G})$ . Ceci a permis à H. Guo et M. Jerrum de donner un algorithme aléatoire en temps polynomial (dont l'acronyme anglais est FPRAS pour *fully polynomial randomized approximation scheme*) pour le dénombrement approximatif des unicycles couvrants [GJ21].

4.3.4. *Inégalités de corrélations.* Associées aux questions de complexité de dénombrement, il y a des questions d'inégalités de corrélations; voir par exemple les conjectures de Grimmett–Winkler [GW04] concernant les mesures de probabilité uniformes sur  $\mathcal{F}(\mathbf{G})$  et  $\mathcal{C}(\mathbf{G})$  qui auraient des corrélations négatives.

La mesure de probabilité uniforme sur les arbres couvrants est déterminantale. En particulier cette mesure satisfait la *propriété de Rayleigh forte* (la forme la plus forte connue à ce jour de dépendance négative) [BBL09]. Cette propriété n'a pas été démontrée pour tout matroïde, mais une forme plus faible de corrélation négative a été démontrée récemment dans [BH20].

D'autres exemples de mesures déterminantales sur les structures discrètes sont les arbres couvrants simpliciaux définis dans [Lyo03]. Kenyon a trouvé une mesure déterminantale naturelle sur les forêts couvrantes d'unicycles dans [Ken11] (celle évoquée au début de ce chapitre et dans le théorème 1.17). Néanmoins, ceci ne permet pas d'en déduire directement des propriétés sur la mesure de probabilité uniforme sur  $\mathcal{U}(\mathbf{G})$ , d'après la remarque suivante.

REMARQUE 4.7. *La mesure de probabilité uniforme sur  $\mathcal{U}(\mathbf{G})$  n'est pas déterminantale en général.*

Justifions cette remarque. Un matroïde est dit unimodulaire s'il est représentable sur  $\mathbb{R}$  par une matrice dont toutes les sous-matrices carrées ont un déterminant à valeur dans  $\{-1, 0, 1\}$  (on dit que la matrice est totalement unimodulaire).<sup>5</sup>

Le fait qu'un matroïde unimodulaire ait un nombre de bases calculable par un déterminant a été observé par Maurer [Mau76]. En vertu du théorème de Giménez et Noy cité plus haut, le matroïde bicirculaire n'est donc pas unimodulaire. Comme observé par Lyons [Lyo03, Corollary 5.5], qui cite [Whi87, Theorem 3.1.1], l'unimodularité est équivalente à la régularité (c'est-à-dire, le fait d'être représentable sur tout corps, ce qui est équivalent, par un résultat de Tutte, au fait d'être représentable à la fois sur  $\mathbb{F}_2$  et  $\mathbb{F}_3$ ). Le matroïde bicirculaire n'est donc pas représentable à la fois sur  $\mathbb{F}_2$  et  $\mathbb{F}_3$ , ce qui est bien connu. Pourtant, comme tout matroïde transversal, le matroïde bicirculaire est représentable sur tout corps infini. La question de trouver sur quels corps finis il est représentable a été étudiée en partie par Zaslavsky.

4. D'autres généralisations de l'algorithme de Wilson ont été données dans des travaux antérieurs au nôtre, notamment dans [BBGJ07], [GP14] et sans doute dans d'autres travaux dont nous n'avons pas connaissance. Cet algorithme a des liens profonds avec les empilements de pièces à la Viennot [Mar00], et une version qui subsume les précédentes fait l'objet de l'algorithme de rejet partiel de Guo et Jerrum [Jer21].

5. Une caractérisation des matroïdes unimodulaires est donnée dans [Sey80].



## Polynômes en plusieurs indéterminées

On a déjà rencontré le polynôme de Tutte dans le cadre du modèle de Fortuin–Kasteleyn et des arbres couvrants actifs. Les modèles de graphes aléatoires du chapitre 4 donnent aussi lieu, par le biais de leurs fonctions génératrices, à des polynômes à plusieurs variables intéressants qui généralisent le polynôme de Kirchhoff.

Dans ce chapitre, nous reprenons certaines des formules déterminantales des précédents chapitres et en introduisons de nouvelles. Nous les étudions du point de vue des polynômes en plusieurs indéterminées.

Certains de ces polynômes ont des interprétations claires comme fonctions génératrices de mesures de probabilité (définitions 5.1 et 5.2). D'autres, dont on ne voit pas directement que leurs coefficients sont positifs, sont plutôt considérés pour leur intérêt algébrique et combinatoire (théorèmes 5.9, 5.10, 5.12).

Dans la suite,  $G$  est un graphe fini connexe et l'on considère des polynômes en des variables indicées par les arêtes  $\underline{x} = (x_e)_{e \in [E]}$ .

### 1. Polynômes de Kirchhoff et Symanzik

**1.1. Polynômes d'énumération des arbres couvrants.** Considérons le polynôme d'énumération des arbres couvrants d'un graphe fini connexe  $G$ , dit polynôme de Kirchhoff :

$$(42) \quad \tau_G(\underline{x}) = \sum_{T \in \mathcal{T}(G)} \underline{x}^T.$$

Il s'agit d'une limite d'évaluations du « polynôme de Tutte en plusieurs variables »

$$(43) \quad \mathcal{Z}_{\text{FK}}(G, \underline{x}, \mathbf{q}) = \sum_{H \leq G} \underline{x}^{|\mathbb{E}(H)|} \mathbf{q}^{k(H)},$$

qui est une généralisation à plusieurs variables de la fonction de partition  $\mathcal{Z}_{\text{FK}}(G, \mathbf{p}, \mathbf{q})$  du modèle de Fortuin–Kasteleyn (24) (que l'on retrouve en prenant  $x_e = \mathbf{p}/(1 - \mathbf{p})$  pour tout  $e \in [E]$ ). Plus précisément, pour tout  $0 < \alpha < 1$ , on a

$$\tau_G(\underline{x}) = \lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \mathbf{q}^{-\alpha(|V|-1)-1} \mathcal{Z}_{\text{FK}}(G, \underline{x}\mathbf{q}^\alpha, \mathbf{q}).$$

Voir [Sok05] pour une étude détaillée de ce polynôme en plusieurs variables et sa généralisation aux matroïdes.

Le polynôme de Kirchhoff étant la fonction génératrice d'une mesure de probabilité déterminantale (la mesure de probabilité uniforme sur les arbres couvrants de  $G$ ), il s'agit d'un polynôme stable, c'est-à-dire qu'il ne s'annule pas lorsque toutes ses variables ont une partie imaginaire strictement positive ; voir le paragraphe 1§2.11 et [BBL09].

**1.2. Polynômes d'énumération acyclique et connexe uniformes.** Comme on l'a vu dans le cas du polynôme de Tutte associé à un matroïde au paragraphe 3§3.6, certaines spécialisations du polynôme de Tutte donnent le cardinal de l'ensemble des forêts couvrantes (c'est-à-dire l'ensemble des parties indépendantes du matroïde circulaire) et le cardinal de l'ensemble des sous-graphes couvrants connexes (c'est-à-dire l'ensemble des parties génératrices du matroïde circulaire). Dans le cas multivarié, on a une généralisation correspondante [Sok05] comme suit :

— Le polynôme

$$C_G(\underline{x}) = \sum_{K \in \mathcal{C}(G)} \underline{x}^K = \lim_{q \rightarrow 0} q^{-1} \mathcal{Z}(G, \underline{x}, q)$$

est le polynôme générateur de l'ensemble  $\mathcal{C}(G)$  des sous-graphes couvrants connexes de  $G$ .

— Le polynôme

$$A_G(\underline{x}) = \sum_{F \in \mathcal{F}(G)} \underline{x}^F = \lim_{q \rightarrow 0} q^{-|V|} \mathcal{Z}(G, \underline{x}q, q)$$

est le polynôme générateur de l'ensemble  $\mathcal{F}(G)$  des sous-graphes couvrants acycliques, c'est-à-dire des forêts couvrantes, de  $G$ .

Ces polynômes sont un peu mystérieux notamment car l'évaluation du cardinal de  $\mathcal{C}(G)$  et  $\mathcal{F}(G)$ , c'est-à-dire les évaluations  $C_G(\underline{1})$  et  $A_G(\underline{1})$ , sont  $\#P$ -difficiles comme on l'a rappelé au paragraphe 4§4.3 (voir en particulier les conjectures de [GW04] qui portent sur les corrélations sous la mesure de probabilité uniforme sur  $\mathcal{C}(G)$  et  $\mathcal{F}(G)$ ).

Nous allons introduire des variantes des polynômes  $C_G(\underline{x})$  et  $A_G(\underline{x})$  en restreignant la somme aux ensembles  $\mathcal{C}_k(G)$  et  $\mathcal{F}_k(G)$  et en attribuant un poids déterminantal (non uniforme en général) aux éléments de ces ensembles.

**1.3. Polynômes d'énumération acyclique et connexe déterminantaux.** Tout d'abord, on définit les polynômes générateurs des sous-graphes couvrants à premier nombre de Betti (à nombre de cycles indépendants) fixé. Chacun de ces polynômes prend en paramètre un élément, noté  $\vartheta$ , de la puissance extérieure correspondante des 1-formes.

**DEFINITION 5.1** (Polynômes d'énumération connexe). *Soit  $k \geq 1$  et  $\vartheta \in \Omega^1(G)^{\wedge k}$ . On définit les polynômes d'énumération connexe*

$$C_G^{(k)}(\vartheta, \underline{x}) = \sum_{K \in \mathcal{C}_k(G)} \left| \det (\theta_i(\gamma_j))_{1 \leq i, j \leq k} \right|^2 \underline{x}^K$$

où  $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$  est une base intégrale du groupe abélien libre  $Z_1(F, \mathbb{Z})$ .

On définit également les polynômes générateurs des forêts couvrantes (non enracinées) à nombre de composantes connexes fixé. Chacun de ces polynômes prend en paramètre un élément, noté  $\varphi$ , de la puissance extérieure correspondante des 1-chaînes.

**DEFINITION 5.2** (Polynômes d'énumération acyclique). *Soit  $k \geq 1$  et  $\varphi \in C_1(G, \mathbb{K})^{\wedge k}$ . On définit les polynômes d'énumération acyclique*

$$A_G^{(k)}(\varphi, \underline{x}) = \sum_{F \in \mathcal{F}_{k+1}(G)} \left| \det (\kappa_i(\phi_j))_{1 \leq i, j \leq k} \right|^2 \underline{x}^F$$

où  $(\kappa_1, \dots, \kappa_k)$  est une base intégrale du groupe abélien libre  $B^1(F, \mathbb{Z})$ .

Si l'on pose  $k = 0$  dans les définitions ci-dessus, on retrouve le polynôme de Kirchhoff  $T_G(\underline{x})$ .

Au chapitre 4 précédent, nous avons vu que des évaluations particulières de ces polynômes sont les fonctions génératrices de mesures déterminantales (voir théorème 4.2 et théorème 4.3). Il en découle (par [BBL09], comme pour le polynôme de Kirchhoff ci-dessus) l'énoncé suivant.

**COROLLAIRE 5.3.** *Soit  $k \geq 1$ . Soit  $\theta_1, \dots, \theta_k \in \ker d^*$  et  $\phi_1, \dots, \phi_k \in \text{im } d$ . Posons  $\vartheta = \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_k$  et  $\varphi = \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k$ . Les polynômes réels en plusieurs indéterminées  $C_G^{(k)}(\vartheta, \underline{x})$  et  $A_G^{(k)}(\varphi, \underline{x})$  sont stables en tant qu'éléments de  $\mathbb{R}[\underline{x}]$ .*

**1.4. Quotients de polynômes.** Au cours de la démonstration des théorèmes 4.2 et 4.3 (qui figure dans [KL22b]), nous avons démontré les identités suivantes.

**THÉORÈME 5.4** (Quotients de polynômes). *On a*

$$(44) \quad \frac{C_G^{(k)}(\vartheta, \underline{x})}{T_G(\underline{x})} = \|\wedge^k \Pi^{\ker(d^*)} \vartheta\|^2.$$

et

$$(45) \quad \frac{A_G^{(k)}(\varphi, \underline{x})}{T_G(\underline{x})} = \|\wedge^k \Pi^{\text{im}(d)}(J_{\underline{x}}\varphi)\|^2$$

où  $J_{\underline{x}} : C_1(G, \mathbb{C}) \rightarrow \Omega^1(G, \mathbb{C})$  associe à toute arête  $e$  la cochaîne  $x_e^{-1}(\mathbb{1}_e - \mathbb{1}_{e^{-1}})$ .

Donnons une description concrète du membre de droite de l'équation (44). Étant donné des 1-formes  $\theta_1, \dots, \theta_k$ , on définit l'application multilinéaire  $\omega_{\underline{\theta}} : \mathbb{K}^k \rightarrow \Omega^1(G)$  par  $\omega_{\underline{\theta}}(r_1, \dots, r_k) = r_1\theta_1 + \dots + r_k\theta_k$ . Avec cette notation, si  $\vartheta = \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_k$ , on a  $\|\wedge^k \Pi^{\ker(d^*)} \vartheta\|^2 = \det(\omega_{\underline{\theta}}^* \Pi^{\ker d^*} \omega_{\underline{\theta}})$ .

La démonstration du théorème 5.4 repose sur le théorème de projection moyenne, dans sa version du corollaire 3.5.

La démonstration des théorèmes 4.2 et 4.3 utilise le théorème 5.4 combiné avec la formule du complément de Schur, écrite de la façon suivante.<sup>1</sup> Ceci permet en effet d'écrire les polynômes  $C_G^{(k)}(\vartheta, \underline{x})$  et  $A_G^{(k)}(\varphi, \underline{x})$  comme des déterminants de la forme  $\det(a^*a)$  pour une application linéaire  $a$  adaptée et d'utiliser le lemme 3.1.

**LEMME 5.5** (Complément de Schur). *Soit  $a : E_0 \rightarrow E_1$  une application linéaire injective entre espaces euclidiens de dimension finie. Soit  $H$  un sous-espace de  $E_0$ . Alors*

$$\det(a^*a) = \det\left(1^{H^\perp} a^* a 1_{H^\perp}\right) \det\left(1^H a^* \Pi^{\ker(1^{H^\perp} a^*)} a 1_H\right).$$

Le déterminant  $\det(a^*a)$  est le carré du volume dans  $E_1$  de l'image par  $a$  d'un paralléloèdre unité de  $E_0$ . Le lemme 5.5 exprime ce volume comme un produit de deux volumes de dimensions inférieures associés à une décomposition de  $E_0$  en somme directe orthogonale.

**1.5. Polynômes de Symanzik.** Nous faisons maintenant le lien entre les polynômes introduits plus haut et les polynômes de Symanzik dont nous avons parlé dans l'introduction (voir le paragraphe 1§2.12).

Dans le cas  $k = 1$ , le poids dans  $A_G^{(1)}(\varphi, \underline{x})$  associé à  $F \in \mathcal{F}_2(G)$  est  $|\kappa_1(\phi_1)|^2$  où  $\phi_1 \in \text{im } d^*$  et  $\kappa_1$  engendre  $B^1(F, \mathbb{Z})$ . La cochaîne  $\phi_1$  est l'image par  $d^*$  d'une fonction sur  $V$ . Notons  $\vec{q} = (\vec{q}_v)_{v \in V}$  cette fonction, avec une notation qui rappelle une collection de moments vectoriels en

1. La formule du complément de Schur  $\det M = \det A \det(D - CA^{-1}B)$  s'obtient en multipliant à gauche une matrice par blocs  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  par  $\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & D \end{pmatrix}$ .



mécanique. Comme  $\phi_1$  est orthogonale à  $\ker d$ , qui est la droite des fonctions constantes sur  $\mathbf{V}$ , on a donc la propriété :  $\sum_{v \in \mathbf{V}} \vec{q}_v = 0$ .

Pour toute forêt couvrante  $F \in \mathcal{F}_2(\mathbf{G})$ , soit  $T$  un des deux arbres de la forêt  $F$  et considérons la coupure  $\kappa_1 = \delta(\sum_{v \in \mathbf{V}(T)} \mathbb{1}_v)$ . Alors  $\kappa(\phi)$  est égal au signe près à  $\vec{q}(\mathbf{V}(T)) = \sum_{v \in \mathbf{V}(T)} \vec{q}_v$ , et le carré de cette quantité ne dépend pas du choix de l'arbre. Avec cette notation, en sommant sur tous les  $F$  possibles, on trouve

$$(46) \quad \Psi_{\mathbf{G}, \vec{q}}^{(2)}(\underline{x}) = \sum_{F=\{T, T'\} \in \mathcal{F}_2(\mathbf{G})} |\vec{q}(\mathbf{V}(T))|^2 \underline{x}^{\mathbf{E} \setminus F}$$

qui porte le nom de *second polynôme de Symanzik* dans la littérature, voir [BW10, ABBGF16, Ami19].<sup>2</sup>

Plus généralement, pour tout  $k \geq 2$ , et  $F \in \mathcal{F}_{k+1}(\mathbf{G})$  on choisit  $T_1, \dots, T_k$  une énumération des arbres de la forêt  $F$  sauf un, et l'on considère une base intégrale du groupe abélien libre  $B^1(F, \mathbb{Z})$  composée des coupures  $\kappa_i = \delta(\sum_{v \in \mathbf{V}(T_i)} \mathbb{1}_v)$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Soit  $\phi_1, \dots, \phi_k \in \text{im } d^*$  et choisissons des  $q_i$  tels que  $\phi_i = d^* q_i$ . Le poids de la forêt  $F \in \mathcal{F}_{k+1}(\mathbf{G})$  donné par (40) se réécrit

$$\left| \det(\kappa_j(\phi_i))_{1 \leq i, j \leq k} \right|^2 \underline{x}^F = \left| \det(q_i(\mathbf{V}(T_j)))_{1 \leq i, j \leq k} \right|^2 \underline{x}^F.$$

La fonction de partition correspondante, en utilisant la convention sur les monômes en  $\underline{x}$  suggérée par (46), est donc égale à

$$(47) \quad \Psi_{\mathbf{G}, q_1, \dots, q_k}^{(k+1)}(\underline{x}) = \sum_{F \in \mathcal{F}_{k+1}(\mathbf{G})} \left| \det(q_i(\mathbf{V}(T_j)))_{1 \leq i, j \leq k} \right|^2 \underline{x}^{\mathbf{E} \setminus F}$$

et l'on peut considérer ce polynôme, à valeurs dans  $\mathbb{R}[x_e : e \in [\mathbf{E}]]$ , comme une généralisation du second polynôme de Symanzik aux ordres supérieurs  $k+1 \geq 3$ .

De ce qui précède, on obtient, en posant  $\varphi = \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k$ , la relation

$$\Psi_{\mathbf{G}, q_1, \dots, q_k}^{(k+1)}(\underline{x}) = \underline{x}^{[\mathbf{E}]} \mathbf{A}_{\mathbf{G}}(\varphi, \underline{x}^{-1}).$$

Réécrivons le ratio apparaissant dans l'exponentielle de l'intégrale de Feynman (10) avec nos notations. Il s'agit d'une fonction rationnelle des variables  $x_e$  de degré 1, que l'on peut écrire, en factorisant le numérateur et le dénominateur par  $\underline{x}^{\mathbf{E}}$ , comme

$$\frac{\Psi_{\mathbf{G}, \vec{q}}^{(2)}(\underline{x})}{\Psi_{\mathbf{G}}^{(1)}(\underline{x})} = \frac{\mathbf{A}_{\mathbf{G}}^{(1)}(\varphi, \underline{x}^{-1})}{\mathbf{T}_{\mathbf{G}}(\underline{x}^{-1})}.$$

Le théorème d'Amini (voir théorème 1.12 du chapitre introductif 1) stipule que ce ratio a une variation bornée en les paramètres  $\underline{x}$ . La démonstration d'Amini utilise une analyse combinatoire fine de la structure du graphe d'échange.<sup>3</sup>

On peut se demander s'il y a des théorèmes de stabilité (au sens plus fort d'Amini) pour les polynômes de rang plus élevé, et pour les polynômes de Symanzik associés aux sous-graphes connexes, étant donné qu'il y a des familles de polynômes dont les quotients ont des expressions similaires.

2. En physique théorique, pour chaque sommet  $v$ , le moment extérieur  $\vec{q}_v$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^D$  avec  $D \geq 2$ , où  $D = D_{\text{espace}} + 1$  représente la dimension d'un « espace-temps » (muni d'une métrique de Minkowski). Le cas  $D = 1$  considéré ici n'a donc pas vraiment de signification physique.

3. Il semble que ce soit le même graphe qui apparaisse dans la chaîne de Markov utilisée pour échantillonner les arbres actifs au paragraphe 2§3.3 et l'étude de ce graphe pourrait donner des informations plus précises sur le temps de mélange de cette chaîne ; voir aussi [ALGV19] où une propriété d'expansion de ces graphes est démontrée (conjecture de Mihail–Vazirani) qui implique des bornes sur le temps de mélange de la marche aléatoire.

QUESTION 5.6. *Les quotients de polynômes (45) et (44) vérifient-ils un théorème de stabilité comme dans le théorème 1.12 d’Amini ?*

Il y a des travaux de M. Piquerez [Piq19] qui démontrent de tels résultats pour des généralisations des polynômes de Symanzik dans le cadre des matroïdes. Piquerez montre une propriété de stabilité en étudiant le graphe d’échange d’un matroïde. Dans l’introduction de cet article, le lien entre polynômes de Symanzik (généralisés) et processus déterminantaux est aussi brièvement évoqué.

D’autres généralisations des polynômes de Symanzik sont proposées dans [KRTW10, Tan21] mais elles sont différentes semble-t-il. Par ailleurs, ces auteurs montrent comment les polynômes sont des limites d’évaluation de polynômes de Tutte multivariés. Avec notre approche, nous pouvons aussi définir ces polynômes comme des limites d’autres polynômes (voir le théorème 6.13).

## 2. Développements en boucles de Wilson

Une question centrale qui nous a occupé a été de trouver des généralisations de la formule matrix-tree pour le déterminant d’autres opérateurs que le laplacien discret classique.

Une première tentative infructueuse, en prélude à la collaboration avec Dmitry Chelkak et David Cimasoni [CCK17], a été le calcul du Q-déterminant d’une matrice de Kac–Ward tordue par une connexion dans  $SL_2(\mathbb{C})$ , comme Kenyon pour le modèle de double-dimères [Ken14]. Nous pensions ainsi obtenir une fonction de partition pour le modèle XOR-Ising, présenté au chapitre 2. Cette tentative n’a pas donné le résultat escompté (le Q-déterminant d’un tel opérateur compte des configurations plus générales, car certaines annulations qui ont lieu dans le cas classique ne se produisent pas dans le cas tordu) et nous l’avons abandonnée pour le moment. Néanmoins il serait intéressant d’analyser en détail le développement combinatoire ainsi obtenu, même s’il n’est pas directement relié au modèle d’Ising.

Pour l’opérateur laplacien tordu, les choses se présentent mieux et avec Thierry Lévy nous avons obtenu plusieurs formules [KL20, KL23c, KL23b] qui répondent à la question :

$$\det \Delta_h = ? \in \mathbb{C}[x].$$

C’est d’ailleurs cette question combinatoire qui nous a aussi poussé à étudier les versants probabilistes pour lesquelles une puissance de ce déterminant est la fonction de partition ; ceux-ci sont exposés au chapitre 6 avec notamment : les champs gaussiens tordus, les soupes de boucles tordues, et les forêts couvrantes quantiques.

Mais revenons d’abord à la question algébrique de calculer ce déterminant en lui donnant une « interprétation combinatoire ». <sup>4</sup> Un point qui a été au centre de notre motivation a été de trouver des expressions les plus invariantes de jauge possible, en particulier où le déterminant du laplacien covariant est exprimé à l’aide de traces d’holonomie de cycles. En théorie de jauge discrète, l’espérance de produits de traces de l’holonomie de cycles par rapport à une connexion aléatoire est une observable centrale qui s’appelle une « boucle de Wilson » (du nom de K. Wilson, créateur de cette théorie [Wil74]), ce qui justifie l’expression usitée dans le titre de cette partie.

**2.1. Théorème « matrix-tree » en rang 1.** Dans [KL20] nous avons donné une démonstration courte de théorèmes matrix-tree classiques (calcul du déterminant du laplacien avec connexion sur un fibré de rang  $N = 1$ ). Celle-ci suit une approche picturale due à Zeilberger [Zei85] et résumée sur la figure 5.1.

Nous l’avons obtenue dans le cadre d’une généralisation (théorème 5.8) pour laquelle il nous faut introduire quelques notations, et en particulier le concept de  $\tau$ -déterminant.

4. Voir l’avis illustré d’I. Pak sur cette notion [Pak22].

2.1.1.  $\tau$ -déterminant. Soit  $R$  un anneau et  $S$  un anneau commutatif. Soit  $\tau : R \rightarrow S$  un morphisme de  $\mathbb{Z}$ -modules, c'est-à-dire une fonction additive. On dit que  $\tau$  est une trace si  $\tau$  est centrale, au sens où pour tous  $r, r' \in R$ , on a  $\tau(rr') = \tau(r'r)$ .

DEFINITION 5.7 ( $\tau$ -déterminant). Soit  $\tau$  une trace sur un anneau  $R$ . On définit pour toute matrice  $M \in M_d(R)$  son  $\tau$ -déterminant par

$$\det_{\tau}(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \varepsilon(\sigma) \prod_{\substack{c \text{ cycle de } \sigma \\ c=(i_1 \dots i_r)}} \tau(M_{i_1 i_2} M_{i_2 i_3} \dots M_{i_r i_1}),$$

où  $\mathfrak{S}_d$  est le groupe symétrique sur  $d$  éléments.

Ce déterminant se spécialise au déterminant usuel dans le cas réel ou complexe, et au  $Q$ -déterminant de Moore dans le cas quaternion. Ce déterminant n'a pas de bonnes propriétés en général, mais il vérifie cependant certaines propriétés intéressantes (voir les propositions 6.7 et 6.9 de [KL22a]).

2.1.2. *Matrice de type laplacien*. Soit  $n \geq 2$  un entier et soit  $V = \{1, \dots, n\}$  l'ensemble des sommets d'un graphe complet. Soit  $E$  l'ensemble des arêtes de ce graphe, c'est-à-dire l'ensemble des couples ordonnés de sommets distincts :  $E = \{(i, j) \in V^2 : i \neq j\}$ . Nous pensons à l'arête  $(i, j)$  comme allant de  $i$  à  $j$ .<sup>5</sup>

Soit  $H$  un anneau, que nous ne supposons pas commutatif. Les exemples que nous avons en tête sont  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ , ou  $\mathbb{H}$ . Soit  $R = H[x_{ij} : (i, j) \in E]$  l'anneau de polynômes en  $n(n-1)$  indéterminées à coefficients dans  $H$ . On considère  $n(n-1)$  éléments de  $H$ ,  $\{h_{ij}, (i, j) \in E\}$ . Comme le suggère la notation, on pense à  $x_{ij}$  et  $h_{ij}$  comme étant attachés à l'arête  $(i, j)$ .

On définit la matrice  $\Delta \in M_n(R)$  en posant, pour tout  $(i, j) \in E$ ,

$$(48) \quad \Delta_{ij} = -h_{ij}x_{ij}$$

et, pour tout  $i \in V$ ,

$$(49) \quad \Delta_{ii} = \sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij}.$$

L'utilisation de la couleur<sup>6</sup> joue un rôle dans l'explication de la démonstration en permettant de se souvenir de l'origine des coefficients dans les développements de déterminants.

On choisit un anneau commutatif  $K$  et un morphisme central de  $\mathbb{Z}$ -modules  $\tau : H \rightarrow K$ . Ici, les exemples que nous avons en tête pour  $K$  sont  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et pour  $\tau$  l'application identité ou la partie réelle. On pose  $S = K[x_{ij} : (i, j) \in E]$ . Le morphisme  $\tau$  s'étend en un morphisme de  $R$  dans  $S$  que l'on note encore  $\tau$ .

Soit  $m \in \{1, \dots, n\}$ . On considère la sous-matrice principale  $m \times m$ , notée  $\Delta_{[m]}$ , de  $\Delta$  obtenue en effaçant les lignes et colonnes d'indices supérieurs strictement à  $m$ . Nous donnons plus bas un développement combinatoire pour le  $\tau$ -déterminant de  $\Delta_{[m]}$ .

5. Comme nous allons munir les arêtes de poids, les résultats peuvent se réinterpréter afin de prendre en compte des graphes avec des arêtes multiples (et pondérées). Nous pouvons aussi traiter le cas de graphes avec des boucles en ajoutant des termes diagonaux  $x_{ii}(1 - h_{ii})$ .

6. Notons que le membre de droite de l'équation (48) est coloré en rouge, ce qui est utile dans la démonstration du théorème 5.8 illustré à la figure 5.1.

2.1.3. *Forêts couvrantes enracinées sur des sommets ou des cycles.* On définit le *bord* du graphe, ou son *puits*, comme étant le sous-ensemble  $W = \{m+1, \dots, n\} \subset V$ . On définit également  $U = \{1, \dots, m\} = V \setminus W$ , l'ensemble des sommets internes.

On dit qu'un sous-ensemble  $F \subset E$  est une *forêt couvrante enracinée sur des cycles et le puits* (avec pour puits  $W$ ) s'il contient exactement  $m$  arêtes, une arête sortant de chaque sommet  $i \in U$  (voir la figure 5.1).<sup>7</sup> On note  $\mathcal{U}_m^{\rightarrow}(\mathbf{G})$  l'ensemble des forêts couvrantes enracinées sur des cycles et le puits  $W$ . La flèche dans cette notation est là pour nous rappeler que tout élément de  $\mathcal{U}_m^{\rightarrow}(\mathbf{G})$  est une configuration d'arêtes dirigées.

2.1.4. *Formule et démonstration graphique.* Soit  $F \in \mathcal{U}_m^{\rightarrow}(\mathbf{G})$ . On pose  $\underline{x}^F = \prod_{(i,j) \in F} x_{ij}$ . En utilisant la décomposition en composantes connexes du graphe non dirigé sous-jacent à  $(V, F)$ , on peut partitionner le graphe dirigé  $(V, F)$  en morceaux disjoints, chacun étant : ou bien un arbre enraciné en un sommet de  $W$  dont toutes les arêtes pointent vers cette racine, ou bien un arbre enraciné sur un cycle (aussi appelé unicycle) dont tous les sommets sont dans  $U$ . À  $F$  on associe la collection  $\mathcal{C}(F)$  des cycles de ses unicycles : c'est une famille (potentiellement vide) de cycles simples disjoints dans  $U$ .

Pour tout cycle  $c$ , dont les sommets sont  $i_1, \dots, i_r$  dans cet ordre cyclique, on associe (de façon non déterminée ; et déterminée à conjugaison près) le produit  $h_c = h_{i_1 i_2} \dots h_{i_r i_1} \in H$ , et surtout la quantité bien définie  $\tau(h_c) = \tau(h_{i_1 i_2} \dots h_{i_r i_1}) \in K$ .

THÉORÈME 5.8 (Formule de type « matrix-tree »). Dans l'anneau  $S = K[x_{ij}, (i, j) \in E]$ , on a l'égalité

$$\det_{\tau} \Delta_{[m]} = \sum_{F \in \mathcal{U}_m^{\rightarrow}(\mathbf{G})} \underline{x}^F \prod_{c \in \mathcal{C}(F)} (1 - \tau(h_c)).$$

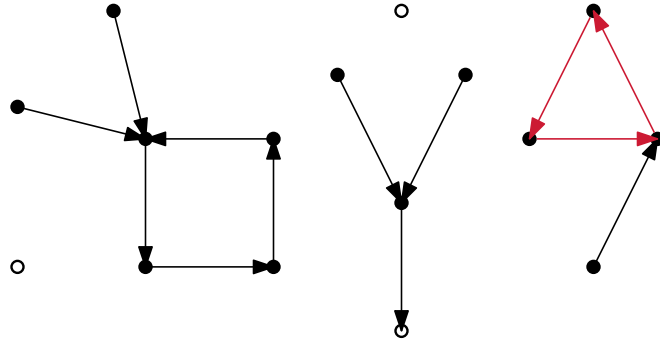


FIGURE 5.1. Démonstration picturale « à la Zeilberger » des théorèmes « matrix-tree » de Kirchhoff, Zaslavsky, Chaiken, Forman, Kenyon.

Notre démonstration de ce théorème est illustrée sur la figure 5.1. Elle suit les étapes suivantes :

- (1) on développe le  $\tau$ -déterminant de  $\Delta_{[m]}$  comme somme sur des permutations ; tout cycle non-trivial de chaque permutation est représenté par un cycle rouge du graphe et affublé du poids  $-\tau(h_c)\underline{x}^c$  ; les points fixes  $i$  de chaque permutation ont un poids  $\Delta_{ii} = \sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij}$  ;

<sup>7</sup> Ces objets combinatoires ou leurs variantes sont aussi appelées *graphes fonctionnels*, *pseudo-forêts*, ou *bases du matroïde bicirculaire* dans la littérature.

- (2) pour tout point fixe  $i$  de toute permutation, on développe graphiquement  $\Delta_{ii}$  comme une somme sur le choix d'une arête sortante  $(i, j)$  d'un sommet (différent du puits) que l'on représente en noir, affublé du poids  $x_{ij}$  ;
- (3) on a alors à ce stade une somme sur les configurations de la figure 5.1. En oubliant les couleurs, on peut rassembler les termes de la somme et on trouve bien une somme sur les forêts couvrantes enracinées sur des cycles et le puits  $F$ , affublées d'un poids égal à  $\underline{x}^F$  multiplié par le produit sur les cycles de  $1 - \tau(h_c)$ , cqfd.

Ce théorème se spécialise aux énoncés de Kirchhoff, Zaslavsky, Chaiken, Forman, Kenyon ; voir [Cha82, Zas82, For93, Ken11].

Dans le cas du théorème de Kenyon, on retrouve en effet la version  $SL_2$  de son énoncé (et pas uniquement le cas spécial unitaire  $SU_2$ ). Une démonstration dans le cas unitaire (réel, complexe ou quaternion) a aussi été donnée dans [Kas15] basée sur une décomposition par boucles effacées comme dans l'algorithme de Wilson.

**2.2. Matrices de matrices.** En ayant pour motivation l'étude du laplacien discret covariant sur un graphe, défini par l'équation (7), on considère maintenant un cas matriciel, où à toute arête  $(i, j) \in E$  est associée une matrice de taille  $N \times N$ ,  $h_{ij} \in M_N(H)$ . On définit la matrice  $\Delta$  à partir des équations (48) et (49), où l'on comprend maintenant  $a_{ij}$  comme  $x_{ij}I_N$  dans (49). C'est une matrice de taille  $n \times n$ , dont les coefficients sont des matrices  $N \times N$  et on la voit par conséquent comme une matrice  $Nn \times Nn$  à coefficients dans  $H$ .

Dans le théorème 5.9, on calcule le  $\tau$ -déterminant de la matrice  $\Delta_{[Nm]}$ , de taille  $Nm \times Nm$ , obtenue à partir de  $\Delta$  en effaçant les lignes et colonnes d'indices strictement supérieurs à  $Nm$ .

Dans ce but, nous introduisons, au-dessus du graphe  $G = (V, E)$ , un autre graphe que nous notons  $G^{\boxtimes N}$ . L'ensemble de ses sommets est  $V \times \{1, \dots, N\}$ . Ainsi, un sommet de  $G^{\boxtimes N}$  est un couple  $(i, k)$  où  $i \in \{1, \dots, n\}$  est un sommet de  $G$  et  $k \in \{1, \dots, N\}$  peut-être utilisé pour indexer une ligne ou colonne d'une matrice  $N \times N$ . Les arêtes de  $G^{\boxtimes N}$  sont tous les couples  $((i, k), (j, l))$  tels que  $(i, j)$  soit une arête de  $G$  et  $(k, l) \in \{1, \dots, N\}^2$ . Notons que dans le graphe  $G^{\boxtimes N}$  il n'y a pas d'arête « verticale » (c'est-à-dire une arête de la forme  $((i, k), (j, l))$  avec  $i = j$ ).<sup>8</sup>

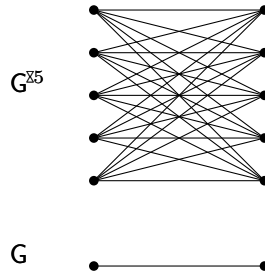


FIGURE 5.2. Graphe « papillon » de rang  $N = 5$  de  $G$ , vu au-dessus d'une arête. Ce graphe a  $N^2$  arêtes orientées au-dessus de chaque arête orientée du graphe  $G$ .

À toute arête  $((i, k), (j, l))$  de  $G^{\boxtimes N}$ , on associe d'une part la variable  $x_{ij}$  et d'autre part l'élément  $h_{((i,k),(j,l))}^{\boxtimes} = (h_{ij})_{kl}$  de  $H$ , c'est-à-dire le  $(k, l)$ -ième coefficient de la matrice  $h_{ij}$ .

On définit le puits du graphe  $G^{\boxtimes N}$  comme étant l'ensemble  $W \times \{1, \dots, N\}$  de tous les sommets situés 'au-dessus' d'un sommet de  $W$ . La formule que nous donnons dans le théorème 5.9 fait

8. Cette construction ne semble pas avoir de nom standard et nous l'appelons informellement « le graphe papillon » de rang  $N$  de  $G$ . Comme nous l'a suggéré l'un-e des rapporteurs de l'article [KL20], on pourrait dire que  $G^{\boxtimes N}$  est le produit lexicographique de  $G$  et du graphe à  $N$  sommets sans arête.

apparaître un sous-ensemble particulier de l'ensemble  $\mathcal{U}_{m,N}^{\rightarrow}$  des forêts couvrantes enracinées sur des cycles et le puits de  $\mathbb{G}^{\times N}$ . Pour décrire cet ensemble, on dit qu'une arête est horizontale si elle est de la forme  $((i,k), (j,l))$  avec  $k=l$ . On dit alors qu'un élément  $F$  de  $\mathcal{U}_{m,N}^{\rightarrow}$  est *horizontal* si toute arête de  $F$  qui n'est pas dans un cycle est horizontale. On note  $\mathcal{HU}_{m,N}^{\rightarrow}$  le sous-ensemble correspondant de  $\mathcal{U}_{m,N}^{\rightarrow}$ . De plus, on dit qu'un cycle de  $F$  est horizontal si toutes ses arêtes sont horizontales. À l'inverse, on dit qu'un cycle est *incliné* s'il n'est pas horizontal. On note  $\mathcal{H}(F)$  la collection des cycles horizontaux de  $F$ , et par  $\mathcal{S}(F)$  la collection de ses cycles tordus. Pour tout cycle  $c$  of  $F$ , on définit  $h_c^{\times}$  comme étant le produit des nombres  $h_{((i,k),(j,l))}^{\times}$  associés aux arêtes du cycle  $c$ .

**THÉORÈME 5.9.** *Dans l'anneau  $S = K[x_{ij}, (i,j) \in \mathbf{E}]$ , on a l'égalité*

$$\det_{\tau} \Delta_{[Nm]} = \sum_{F \in \mathcal{HU}_{m,N}^{\rightarrow}(\mathbf{G})} \underline{x}^F \prod_{c \in \mathcal{H}(F)} (1 - \tau(h_c^{\times})) \prod_{c \in \mathcal{S}(F)} (-\tau(h_c^{\times})).$$

**2.3. Une première formule invariante de jauge.** Avec Thierry Lévy, nous avons obtenu d'autres formules pour le déterminant du laplacien tordu par une connexion qui sont détaillées dans [KL23b].

Afin d'en énoncer une, il nous faut quelques notations. Tout cycle  $c$  de  $\mathbf{G}$  s'écrit de manière unique comme la puissance (pour la concaténation) d'un cycle primitif :  $c = \eta^k$  ; on note  $\text{val}(c) = k$  cette puissance, que l'on appelle valuation de  $c$ .

On note  $\mathcal{C}(\mathbf{G}, N)$  la collection des multi-ensembles (c'est-à-dire des familles d'éléments avec répétition possible) de cycles (orientés et non basés) de  $\mathbf{G}$ , dont le nombre de visites total en chaque sommet n'excède pas  $N$ . Si  $C \in \mathcal{C}(\mathbf{G}, N)$ , on note  $C!$  le produit des factorielles des multiplicités des éléments distincts de  $C$ . On note aussi  $\|C\|$  le cardinal de  $C$  où les éléments de ce multi-ensemble sont comptés avec leur multiplicité.

Dans l'énoncé suivant, pour simplifier la formule, on utilise le laplacien discret covariant *normalisé*  $L_h$  (défini plus bas à l'équation (52)).

**THÉORÈME 5.10.** *On a*

$$\det L_h = \sum_{C \in \mathcal{C}(\mathbf{G}, N)} \frac{(-1)^{\|C\|}}{C!} \prod_{c \in C} \frac{\text{Tr}(\text{hol}_h(c))}{\text{val}(c)} p(c),$$

où  $p(c) = \prod_{e \in c} p_e$  est la probabilité qu'une marche aléatoire réalise les pas contenus dans  $c$ .

Dans le cas de rang  $N = 1$ , on retrouve la formule de Chaiken–Forman–Kenyon [Cha82, For93, Ken11] à l'aide de la resommation expliquée dans [KL20].

Nous avons donné deux démonstrations de ce résultat [KL23b]. La première est purement combinatoire et basée sur un calcul de matrices par blocs et l'usage d'un argument de comptage qui rappelle l'algorithme du « restaurant chinois » de Pitman [Pit06] pour échantillonner une permutation aléatoire uniforme.

Une autre approche à cette formule utilise le produit infini suivant (cet argument qui utilise le produit infini pour obtenir une identité polynomiale est inspiré de la formule d'Amitsur et de [RS87]).

**2.4. Produit Eulérien.** En utilisant l'identité  $\exp \text{Tr} \log = \det$ , et le calcul de la trace par blocs, on trouve aussi la formule suivante ; cette formule est connue sous une forme proche par les travaux d'Amitsur [Ami80] et Reutenauer–Schützenberger [RS87].

LEMME 5.11. *On a*

$$\det L_h = \prod_{c \in \mathcal{P}(\mathbf{G})} \det(\text{id} - p(c)\text{hol}_h(c)),$$

*où le produit porte sur les cycles (non basés) primitifs du graphe (c'est-à-dire qui ne sont pas la puissance de concaténation d'un cycle plus court).*

Ce produit rappelle le développement d'Euler de la fonction zeta de Riemann en produit indexé par les nombres premiers, et des analogies en ce sens sont bien connues ; voir [For98a].

**2.5. Une deuxième formule invariante de jauge.** Dans un travail récent avec Thierry Lévy [KL23b], nous avons obtenu une autre formule invariante. Elle est valable (ainsi en fait que les deux derniers énoncés ci-dessus) dans le cadre un peu plus général suivant (la généralisation vient du fait que l'on ne considère plus des fibres de dimension égale sur les sommets). On considère le graphe complet  $\mathbf{G}$  sur  $\{1, \dots, p\}$ , et on se donne des entiers  $n_a \geq 1$  pour tout  $a \in \{1, \dots, p\}$ . De plus, on se donne des poids complexes  $x_{ab}$  pour tout  $a \neq b \in \{1, \dots, p\}$  et des matrices complexes  $U_{ab}$  de taille  $n_a \times n_b$  pour tout  $a \neq b \in \{1, \dots, p\}$ .

On forme la matrice par blocs  $\Delta = \Delta_{\underline{x}, \underline{U}}$  définie par

$$\Delta_{aa} = \left( \sum_{b \neq a} x_{ab} \right) I_{n_a} \text{ et } \Delta_{ab} = -x_{ab} U_{ab} \text{ pour tout } a \neq b \in \{1, \dots, p\}.$$

Cette matrice est une variante du laplacien discret covariant adapté à un « fibré » dont les fibres sont de dimensions variables (on pourrait parler de manière un peu pédante de « représentation de carquois » : un graphe dirigé dont les arêtes dirigées sont munies d'applications linéaires de dimensions compatibles aux sommets).

On définit pour tous  $a \in \{1, \dots, p\}$  les ensembles  $I_a = \{n_1 + \dots + n_{a-1} + 1, \dots, n_1 + \dots + n_{a-1} + n_a\}$ . On pose  $n = \sum_{a=1}^p n_a$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on définit  $a(i) \in \{1, \dots, p\}$  comme étant l'indice  $a$  tel que  $i \in I_a$ .

Considérons l'ensemble

$$\Xi = \{ \xi : \{1, \dots, n\} \rightarrow E \text{ telle que } \forall i \in \{1, \dots, n\}, \xi(i) \in E_{a(i)} \}$$

que l'on interprète comme l'ensemble des configurations de  $n_a$  flèches sortantes ordonnées en chaque sommet  $a \in \{1, \dots, p\}$ .<sup>9</sup> On définit alors, pour tout  $\xi \in \Xi$ , l'ensemble

$$\Sigma(\xi) = \{ \sigma \in \mathfrak{S}_n : \forall c = (i_1 \cdots i_r) \preceq \sigma, a(i_1) = \dots = a(i_r) \text{ ou } \forall s \in \llbracket r \rrbracket, \xi(i_s) = (a(i_s), a(\sigma(i_s))) \},$$

que l'on interprète comme l'ensemble des permutations des flèches-arêtes de  $\xi$  dont les cycles sont de deux types :

1. soit le cycle permute des flèches de  $\xi$  issues du même sommet  $a$  ;
2. soit le cycle permute des flèches de  $\xi$  qui sont bien enchaînées de sorte qu'elles forment un cycle véritable du graphe.

On note  $C(\sigma)$  l'ensemble des cycles de  $\sigma$  du deuxième type.

Enfin, pour tout cycle  $c$  du graphe, on définit l'holonomie  $\text{hol}_U(c)$  comme le produit des matrices  $U_{ab}$  le long du cycle : ce produit n'est défini qu'à conjugaison près (c'est-à-dire, à changement du point base du cycle près ; ce qui donne des matrices de tailles variables si les  $n_a$  ne sont pas tous égaux), mais sa trace est bien définie.

<sup>9</sup>. Deux flèches différentes peuvent correspondre à la même arête de  $\mathbf{G}$ , c'est pour cela que l'on parle de flèches, pour ne pas avoir à parler de multi-ensemble d'arêtes.

THÉORÈME 5.12. *On a*

$$\det \Delta_{\underline{x}, U} = \frac{1}{n_1! \dots n_p!} \sum_{\xi \in \Xi} \underline{x}^\xi \sum_{\sigma \in \Sigma(\xi)} \prod_{\sigma \in C(\sigma)} -\text{Tr}(\text{hol}_U(c)).$$

À nouveau, lorsque l'on spécialise cette formule au cas  $n_1 = \dots = n_p = 1$ , on retrouve aisément la formule de Chaiken–Forman (c'est-à-dire l'énoncé du théorème 5.8 lorsque  $m = 0$  et le  $\tau$ -déterminant est le déterminant usuel).

### 3. Revêtements de graphes et factorisations

Avant de considérer l'étude de fibrés vectoriels de rang supérieur au chapitre 6, nous considérons dans cette partie le cadre plus combinatoire des revêtements de graphes (auxquels on peut penser comme à un fibré dont les fibres sont des ensembles finis), un sujet bien connu en combinatoire.

Une de nos motivations pour étudier les revêtements de graphes finis est qu'ils sont notamment utiles lorsque l'on cherche à approcher un graphe infini possédant beaucoup de symétries (comme le graphe de Cayley d'une présentation d'un groupe de type fini). C'est par exemple le cas des réseaux  $\mathbb{Z}^d$ -périodiques, comme le réseau carré planaire si  $d = 2$  ou ses généralisations hypercubiques en dimension  $d$ , qu'il est courant, en physique statistique par exemple, d'approcher par des tours de revêtements de graphes sur le tore. Si l'on cherche à approcher des graphes hyperboliques (comme des pavages hyperboliques du disque de Poincaré), il faut approcher par des graphes surfaciques dont le genre tend vers l'infini, et la situation est plus compliquée.

**3.1. Revêtements de graphes.** Donnons la définition d'un revêtement de graphes (voir par exemple [CK23, définition 2.3] pour plus de détails). Soit  $\mathbf{G}$  un graphe fini connexe. Un revêtement de  $\mathbf{G}$  par un graphe fini connexe  $\tilde{\mathbf{G}}$  est un morphisme de graphe  $p : \tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$  (c'est-à-dire une application envoyant les sommets sur les sommets, et les arêtes sur les arêtes, de sorte que les relations d'incidence soient préservées) qui est surjectif et tel que pour tout sommet  $\tilde{v}$  de  $\tilde{\mathbf{G}}$ , le voisinage immédiat de  $\tilde{v}$  dans  $\tilde{\mathbf{G}}$  soit isomorphe à celui de  $p(\tilde{v})$  dans  $\mathbf{G}$ . Le degré du revêtement est le cardinal commun des fibres  $p^{-1}(v)$ , pour  $v \in \mathbf{V}$ .

Étant donné un graphe fini  $\mathbf{G}$ , on note  $\pi_1(\mathbf{G}, v)$  son groupe fondamental basé en un sommet  $v$ , c'est-à-dire le groupe des chemins orientés basés en  $v$ , dont la loi de composition est la concaténation. Dans la suite, on omettra la mention du sommet  $v$  et on écrira simplement  $\pi_1(\mathbf{G})$ , sachant que les résultats présentés ne dépendent pas du choix de point-base.

Un revêtement de graphes  $p : \tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$  induit un morphisme injectif de groupes  $p_* : \pi_1(\tilde{\mathbf{G}}) \rightarrow \pi_1(\mathbf{G})$  par projection des chemins de  $\tilde{\mathbf{G}}$  sur leur trace dans  $\mathbf{G}$ .

Un revêtement est dit normal lorsque son groupe d'automorphismes  $\text{Aut}(p)$ , défini comme le sous-groupe du groupe d'automorphismes de  $\tilde{\mathbf{G}}$  qui commutent à la projection  $p$ , agit transitivement sur chaque fibre  $p^{-1}(v)$  pour tout  $v \in \mathbf{V}$ .<sup>10</sup>

Un résultat de Gross et Tucker [GT77] énonce que tout revêtement de degré  $d$  d'un graphe  $\mathbf{G}$  peut s'obtenir en décorant les arêtes de  $\mathbf{G}$  par des permutations dans  $\mathfrak{S}_d$ . Ce résultat permet de faire le lien entre graphes décorés et revêtements. Nous n'utilisons pas ce résultat, mais il nous a permis par exemple d'engendrer des exemples de revêtements et de vérifier sur des exemples la conjecture [CDH<sup>+</sup>22, Conjecture 1.7].

10. Le revêtement est dit normal, car cette condition est équivalente au fait que  $p_*(\pi_1(\tilde{\mathbf{G}}))$  soit un sous-groupe normal de  $\pi_1(\mathbf{G})$ . Dans ce cas, le groupe d'automorphismes  $\text{Aut}(p)$  est isomorphe au quotient  $\pi_1(\mathbf{G})/p_*(\pi_1(\tilde{\mathbf{G}}))$ , de cardinal égal au degré du revêtement, et s'appelle le groupe de Galois.



**3.2. Revêtements de graphes et opérateurs tordus.** Une connexion sur  $G$  associée au fibré trivial  $G \times W$ , où  $W$  est un espace vectoriel de dimension finie, est la donnée d'un automorphisme de  $W$  sur chaque arête orientée, de telle sorte qu'inverser l'orientation d'une arête transforme l'automorphisme en son inverse. Une connexion induit naturellement une représentation linéaire du groupe fondamental dans le groupe linéaire  $GL(W)$  (en composant les automorphismes le long des arêtes du lacet), et réciproquement, toute représentation de  $\pi_1(G)$  peut se réaliser à partir d'une connexion.

On considère un revêtement de  $G$  par un graphe fini  $\tilde{G}$ . Ce revêtement induit une injection du groupe fondamental  $\pi_1(\tilde{G})$  dans  $\pi_1(G)$ . Pour toute représentation  $\rho$  de  $\pi_1(\tilde{G})$ , notons  $\rho^\#$  la représentation induite sur  $\pi_1(G)$ . En choisissant des connexions sur  $G$  et  $\tilde{G}$  qui réalisent ces représentations, on peut tordre les matrices d'adjacence correspondantes, que l'on notera

$$A_G^\rho \quad \text{et} \quad A_G^{\rho^\#},$$

étant entendu que ces opérateurs sont bien définis modulo conjugaison (diagonale par blocs).

**3.3. Représentation et conjugaison.** Le résultat principal de [CK23, théorème 3.6] est le suivant.

THÉORÈME 5.13. *Les matrices  $A_G^\rho$  et  $A_G^{\rho^\#}$  sont conjuguées et tous leurs mineurs principaux sont égaux.*

La formulation ci-dessus est un peu plus précise que celle de [CK23, théorème 3.6] puisqu'elle mentionne les mineurs principaux. Ce raffinement découle en effet de la démonstration de [CK23] puisque la conjugaison est 'diagonale' (en un sens adapté); et on peut aussi obtenir ce résultat plus précis en appliquant le résultat à des mineurs de graphes (i.e. des sous-graphes).

**3.4. Fonctions de partition.** Il existe plusieurs modèles de physique statistique sur un graphe fini, dont les fonctions de partition  $\mathcal{Z}$  sont données par le déterminant  $\det A_G$  d'un opérateur d'adjacence d'un graphe associé au graphe initial :

$$\mathcal{Z} = \det A_G.$$

C'est notamment le cas du modèle d'arbre couvrant uniforme, du modèle d'Ising planaire, ou du modèle de dimères planaire, comme on l'a rappelé aux chapitres 1 et 2.

On parle de fonction de partition *tordue* lorsque, dans ce calcul de déterminant, l'opérateur d'adjacence est tordu par une représentation  $\rho$  du groupe fondamental  $\pi_1(G)$  comme précédemment.

Soient  $\underline{x} = (x_e)_{e \in E}$  des variables associées aux arêtes du graphe. On peut pondérer la matrice d'adjacence par ces poids et considérer les fonctions de partition tordues associées,  $\det A_G^\rho$ , comme des polynômes en les variables  $x_e$  à coefficients complexes.

Si l'on est dans la situation d'un revêtement de graphe comme précédemment, on peut déduire certaines propriétés de la fonction de partition  $\det A_{\tilde{G}}$  d'un modèle sur  $\tilde{G}$ , de celle  $\det A_G$  du modèle correspondant sur  $G$ .<sup>11</sup>

Si  $\rho$  est la représentation triviale, la représentation induite  $\rho^\#$  a un facteur trivial, et la fonction de partition de  $G$  divise alors celle de  $\tilde{G}$  (dans  $\mathbb{C}[x_e : e \in E]$ , ou même dans  $\mathbb{Z}[x_e : e \in E]$  sous certaines hypothèses). Lorsque le revêtement est normal, c'est-à-dire que l'injection du

11. Bien qu'ayant un but (la construction de suites de graphes qui sont des « expanseurs » de Ramanujan) différent du nôtre, l'article [HPS18], sur lequel Omid Amini attira notre attention à la lecture de ce mémoire, traite de notions similaires à celles de ce chapitre. Il serait intéressant d'étudier les liens existants du point de vue des polynômes qui apparaissent dans ce travail.

groupe  $\pi_1(\tilde{G})$  dans  $\pi_1(G)$  définit un sous-groupe distingué, on a même une décomposition explicite de  $\rho^\#$  en somme de représentations irréductibles, ce qui permet d'exprimer la fonction de partition sur  $\tilde{G}$  comme un produit de fonctions de partition tordues sur  $G$ .

**3.5. Exemples de factorisation.** Donnons deux exemples d'utilisation de cette factorisation des représentations en facteurs irréductibles.

3.5.1. *Nombre d'arbres couvrants.* Si  $G$  est un graphe à un sommet et deux arêtes, et  $\tilde{G}$  une grille torique  $n \times m$ , nous sommes dans le cas d'un revêtement normal, dont le groupe de Galois est  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ . Les représentations irréductibles de ce groupe abélien sont de degré 1, et, puisque le groupe est un produit de groupe cycliques, sont déterminées par un couple de racines de l'unité  $(z, w) \neq (1, 1)$ . D'après la décomposition explicite mentionnée plus haut, on trouve que le nombre d'arbres couvrants de  $\tilde{G}$  est égal à

$$(50) \quad nm \prod_{\substack{z^n=1, z \neq 1 \\ w^m=1, w \neq 1}} (4 - z - 1/z - w - 1/w)$$

où chaque facteur  $4 - z - 1/z - w - 1/w$  est une fonction de partition tordue sur  $G$ , et on retrouve là une formule bien connue (voir par exemple [oeis.org/A212800](http://oeis.org/A212800)).

3.5.2. *Bouteille de Klein.* David Cimasoni [**Cim22**] a utilisé le théorème 5.13 pour calculer précisément le développement asymptotique de la fonction de partition du modèle de dimères et du modèle d'Ising sur la bouteille de Klein, lorsque celle-ci est approchée par une suite de graphes  $(G_n)_{n \geq 1}$ , et que  $n$  tend vers l'infini. Contrairement au cas plus classique du tore (qui correspond par exemple à une suite de graphes  $(G_n)_{n \geq 1}$  exhaustant  $\mathbb{Z}^2$  avec conditions au bord périodiques), les représentations irréductibles du groupe fondamental de la bouteille de Klein ne sont pas toutes abéliennes, et certaines sont de dimension 2.

**3.6. Exemple de divisibilité.** Donnons un exemple d'application du théorème 5.13. Considérons le polynôme de Kirchhoff  $T_G(x)$  défini en (42) qui donne la fonction de partition des arbres couvrants de  $G$ . Ce polynôme se calcule comme le déterminant d'une sous-matrice du laplacien discret à l'aide du *matrix-tree theorem*. Combiné à la factorisation évoquée plus haut, une application du lemme de Gauss dans l'anneau  $\mathbb{Z}[\underline{x}]$  permet d'obtenir le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 5.14.** *Le polynôme  $T_G(x)$  divise le polynôme  $T_{\tilde{G}}(x)$  dans  $\mathbb{Z}[x_e, e \in E]$ . De plus, les coefficients du quotient (qui est un polynôme homogène à coefficients entiers) sont positifs.*

En particulier, on retrouve le résultat suivant, dû à Berman [**Ber86b**] : le nombre d'arbres couvrants de  $G$  divise le nombre d'arbres couvrants de  $\tilde{G}$ .

Illustrons le corollaire 5.14 sur un exemple simple. Soit  $G$  un graphe complet sur 3 sommets dont on note  $x_1, x_2, x_3$  les poids sur les arêtes. Considérons un revêtement connexe  $\tilde{G}$  de degré 2 de  $G$ , où  $\tilde{G}$  est un cycle sur 6 sommets. On calcule alors facilement :

$$T_G(x) = x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 \quad \text{et} \quad T_{\tilde{G}}(x) = 2(x_1x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_3) = 2x_1x_2x_3T_G(x),$$

si bien que l'on vérifie la divisibilité de  $T_{\tilde{G}}(x)$  par  $T_G(x)$  dans  $\mathbb{Z}[\underline{x}]$  dans ce cas, ainsi que la positivité des coefficients du quotient.

Notons que pour cet exemple, on peut aussi calculer les polynômes de Tutte de  $G$  et  $\tilde{G}$  et l'on trouve :

$$\mathcal{Z}_G(x, y) = x + x^2 + y \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}_{\tilde{G}}(x, y) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + y,$$

si bien que le premier polynôme ne divise pas le second. Par contre  $\mathcal{Z}_G(x, 1)$  divise bien  $\mathcal{Z}_{\tilde{G}}(x, 1)$ . Nous ne savons pas s'il y a des résultats de divisibilité pour le polynôme de Tutte, ou sa version multivariée, en général ; voir cependant des travaux récents sur un cas particulier [Ver21].

**3.7. Positivité des coefficients du quotient.** On peut exprimer explicitement le quotient des polynômes du corollaire 5.14 ci-dessus ; il s'agit du déterminant d'un laplacien tordu, dont des expressions sont calculées plus haut, voir le paragraphe 5§2. Il s'agit de fonctions de partitions de CRSF (en rang 1) et de fonctions de partitions de forêts couvrantes quantiques (voir le chapitre 6 suivant) en rang plus élevé, ou alors d'autres expressions polynomiales discutées plus haut.

La positivité des coefficients énoncée dans le corollaire 5.14 découle du théorème de Pythagore dans une puissance extérieure de l'espace des 1-formes. En effet, ce théorème implique la décomposition suivante (voir [KL23c] ou [CK23, appendice A]).

PROPOSITION 5.15. *Soit  $h$  une connexion régulière (c'est-à-dire telle que  $\ker d_h = \{0\}$ ) sur un fibré de rang  $N$  d'un graphe (non dirigé) fini connexe muni de poids  $\underline{x}$ . On a*

$$(51) \quad \det(\Delta_h) = \sum_{\underline{n} \in \Pi(G, N)} a_{\underline{n}}(h) \underline{x}^{\underline{n}}$$

où  $a_{\underline{n}}(h)$  est un nombre réel positif, qui est invariant par transformation de jauge sur  $h$ . La somme, quant à elle, porte sur les configurations d'entiers  $\Pi(G, N) \subset \{1, \dots, N\}^{\mathbb{E}^+}$  sur les arêtes qui sont les traces de l'union de  $N$  forêts couvrantes d'unicycles.

La condition sur les entiers ( $\underline{n} \in \Pi(G, N)$ ) est un cas particulier du théorème 5.12 ci-dessus, ainsi que du théorème 6.11 exposé au chapitre 6 suivant. Ce dernier théorème est équivalent à une variante de la proposition 5.15 ci-dessus (en considérant des mineurs principaux) qui donne plus d'information lorsque l'on autorise la connexion  $h$  à être singulière (i.e.  $\ker d_h \neq \{0\}$ ), auquel cas le déterminant ci-dessus vaut 0.

En rédigeant ce mémoire, nous avons découvert qu'un article récent [CDH<sup>+</sup>22] avait obtenu indépendamment le même énoncé que le corollaire 5.14 (il l'énonce plus généralement dans le cadre des graphes dirigés, ce que l'on peut aussi obtenir par notre méthode). Ces auteurs mentionnent que les ratios de ces fonctions de partition apparaissent dans la théorie des algèbres amassées, voir [GP19]. Ils posent la question de la positivité des coefficients dans le cas général des graphes dirigés.

Notre démonstration de la positivité des coefficients dans le cadre non-dirigé (voir [CK23, appendice A] qui utilise la proposition 5.15) repose sur une propriété de symétrie et ne s'étend pas directement au cas dirigé.

Rappelons que sur un graphe dirigé, la notion d'arbre couvrant est remplacée par celle d'arborescence, c'est-à-dire un arbre couvrant enraciné dont toutes les arêtes sont dirigées vers la racine, et compatible avec l'orientation du graphe sous-jacent. La conjecture est démontrée par ses auteurs dans le cas des revêtements de degré 2, mais pas dans le cas général, où elle demeure plus mystérieuse.

Les auteurs de [CDH<sup>+</sup>22] suggèrent de chercher une correspondance bijective entre une arborescence du graphe  $G$ , muni d'un  $N$ -uplet de forêts couvrantes d'unicycles orientés, et une arborescence de  $\tilde{G}$  afin de démontrer directement que les coefficients sont des nombres entiers positifs. Cette approche, si elle était fructueuse, serait très instructive et permettrait sans doute de traiter le cas dirigé aussi.

## Incarnations aléatoires d'une connexion

Dans ce chapitre, nous traitons de fibrés vectoriels sur les graphes avec connexion, et discutons des processus aléatoires associés. Une des motivations est l'étude de processus ayant une « symétrie de jauge » (plus précisément, qui sont équivariants par transformation de jauge).

On a dit dans l'introduction (voir 1§2.13) comment les décorations de graphe apparaissent dans différents contextes, et au chapitre précédent, on a vu comment elles apparaissent naturellement dans l'étude des revêtements. Dans ce chapitre, on prend le point de vue qu'un graphe avec fibré et connexion est une approximation discrète d'une géométrie continue, et on pense à l'holonomie de cette connexion comme un transport parallèle.

Le chapitre suit le plan suivant : on introduit d'abord l'idée des théorèmes d'isomorphisme entre champs gaussiens et temps locaux, et on se sert de ce point de vue pour introduire les analogues de ces objets et résultats dans le cadre des graphes avec fibré et connexion. C'est le versant « bosonique » de l'histoire qui voit les processus sur les graphes comme des modèles jouets de particules élémentaires [LJ11]. On s'intéresse ensuite au versant « fermionique » de cette histoire : on introduit les forêts couvrantes quantiques, et établissons le lien avec les réseaux électriques avec champ de jauge, et mentionnons l'extension au cas des graphes infinis.

### 1. Philosophie des théorèmes d'isomorphisme

Vers 1980, E. Dynkin [Dyn80] initia l'étude mathématique des liens profonds qui existent entre un champ markovien et un processus markovien lorsque ces deux partagent le même générateur. Il suivait en cela les travaux pionniers de K. Symanzik [Sym69]<sup>1</sup> qui avait établi, pour les besoins de la théorie euclidienne des champs, une correspondance heuristique entre champs aléatoires et trajectoires aléatoires.

L'étude simultanée de champs aléatoires sur un espace et de trajectoires aléatoires sur le même espace peut être interprétée comme une incarnation probabiliste du principe général selon lequel la géométrie d'un espace peut être étudiée en considérant non seulement ses points, mais aussi les fonctions qui sont définies sur cet espace.

La situation décrite par Symanzik, Dynkin, et d'autres après eux, provient de l'existence d'un opérateur différentiel (disons un laplacien) qui donne naissance d'une part à un champ aléatoire (le champ libre gaussien), et d'autre part à une dynamique aléatoire (le mouvement brownien). Les deux objets aléatoires disent chacun quelque chose de la géométrie de l'espace sous-jacent, et le problème général est de comprendre comment les propriétés de l'un reflètent les propriétés de l'autre.

Un cadre général pour étudier ce problème consiste à se placer sur une variété riemannienne et à considérer le laplacien associé. Plus généralement, on peut considérer un fibré euclidien ou hermitien muni d'une connexion unitaire sur une variété riemannienne. Dans ce cas, il y a un laplacien  $L_h$  qui agit sur les sections du fibré, et le champ aléatoire est un champ de vecteurs aléatoire.

Avec Thierry Lévy [KL21] nous avons étudié un cadre discret de ce problème en remplaçant la variété par un graphe fini. Dans ce cadre fini, on évite des considérations analytiques de renormalisation, et on peut se concentrer sur ce que la structure de fibré et de connexion apporte

---

1. Il s'agit bien du même Symanzik que celui dont le nom est porté par les polynômes rencontrés plus tôt dans ce mémoire.

de nouveau. Nous avons étendu plusieurs théorèmes d'isomorphisme classiques dû à Dynkin, Eisenbaum, Le Jan, Sznitman et Symanzik. Dans le cas classique, le champ gaussien est relié à des temps d'occupation de trajectoires aléatoires. Dans notre cas, le champ de vecteurs gaussien est relié à des holonomies (le transport parallèle le long de la connexion, voir les définitions 1.5 et 6.3) de trajectoires aléatoires. Les démonstrations de ces résultats présentées dans [KL21] sont autonomes, et permettent de donner un éclairage plus géométrique aux énoncés classiques.

## 2. Champs de vecteurs gaussiens

On considère un fibré (réel, complexe ou quaternionique) vectoriel  $F$  de rang (fini, que l'on notera  $N < \infty$ ) arbitraire au-dessus d'un graphe fini  $G$ , muni d'une connexion (isométrique). Considérons le cas réel, il s'agit du choix d'une matrice orthogonale sur chaque arête orientée ; voir la figure 6.1. L'holonomie d'un chemin  $\gamma$ , notée  $\text{hol}_h(\gamma)$ , est le produit ordonné des matrices le long du chemin.

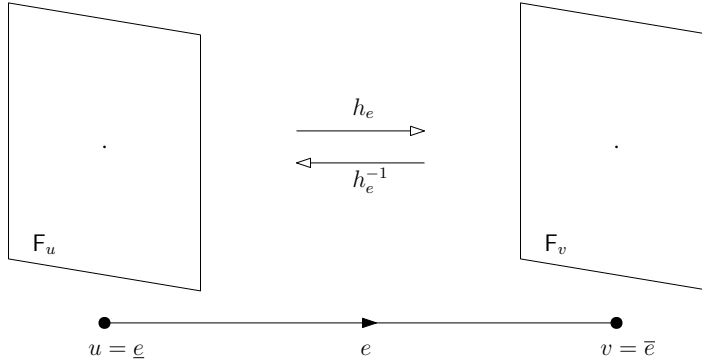


FIGURE 6.1. Un fibré vectoriel discret  $F$  au-dessus d'un graphe, muni d'une connexion  $h$ , vu au-dessus d'une arête.

Dans cette partie, on considère à nouveau que  $G$  est muni de poids  $x_e = x_{e^{-1}} > 0$  symétriques et strictement positifs sur ses arêtes. On considère les produits scalaires sur les 0-formes et 1-formes définis aux équations (6) du chapitre 1.

On fixe aussi un sous-ensemble non vide  $W$  de sommets que l'on appelle puits ; les sommets de  $V \setminus W$  sont appelés sommets propres.

On définit l'opérateur  $\widehat{L}_h$  pour toute 0-forme  $f \in \Omega^0(F)$  à valeurs dans le fibré par

$$\widehat{L}_h f(v) = \frac{1}{\lambda_v} \sum_{e \in \mathbf{E}: \bar{e}=v} x_e (f(\bar{e}) - h_e f(\underline{e}))$$

et sa compression  $L_h$  sur l'espace  $\Omega^0(V \setminus W, F)$  des 0-formes du fibré qui sont nulles sur  $W$ . On appelle l'opérateur  $L_h$ , le laplacien discret covariant normalisé (pour le distinguer du laplacien discret covariant  $\Delta_h$  plus combinatoire considéré au chapitre 5). On a

$$(52) \quad L_h = \Lambda^{-1} \Delta_h,$$

où  $\Lambda$  est l'opérateur qui agit de manière scalaire sur chaque fibre  $F_v$  en  $y$  multipliant les vecteurs par  $\lambda_v$ .

LEMME 6.1 (Lemme de Kato). *L'opérateur  $L_h$  est auto-adjoint et positif et sa plus petite valeur propre est bornée inférieurement par la plus petite valeur propre du laplacien discret associé au poids  $\underline{x}$  compressé sur l'espace des fonctions nulles sur le puits  $W$ .*

En vertu de ce lemme, et puisque le puits  $W$  est supposé non vide,  $L_h$  est bien strictement positif et la connexion  $h$  induit une forme quadratique définie positive sur  $\Omega^0(V \setminus W, F)$  :

$$(53) \quad \mathcal{E}_h(f) = \frac{1}{2} \sum_{e \in E} x_e \|f_{\underline{e}} - h_e^{-1} f_{\bar{e}}\|^2 = (f, L_h f)$$

sur l'espace des champs de vecteurs sur les sommets du graphe, nuls sur le puits, la somme portant ici sur toutes les arêtes. A cette forme quadratique, on associe un vecteur gaussien centré  $\Phi$ , que l'on appelle le champ de vecteurs libre gaussien (voir la figure 6.2).

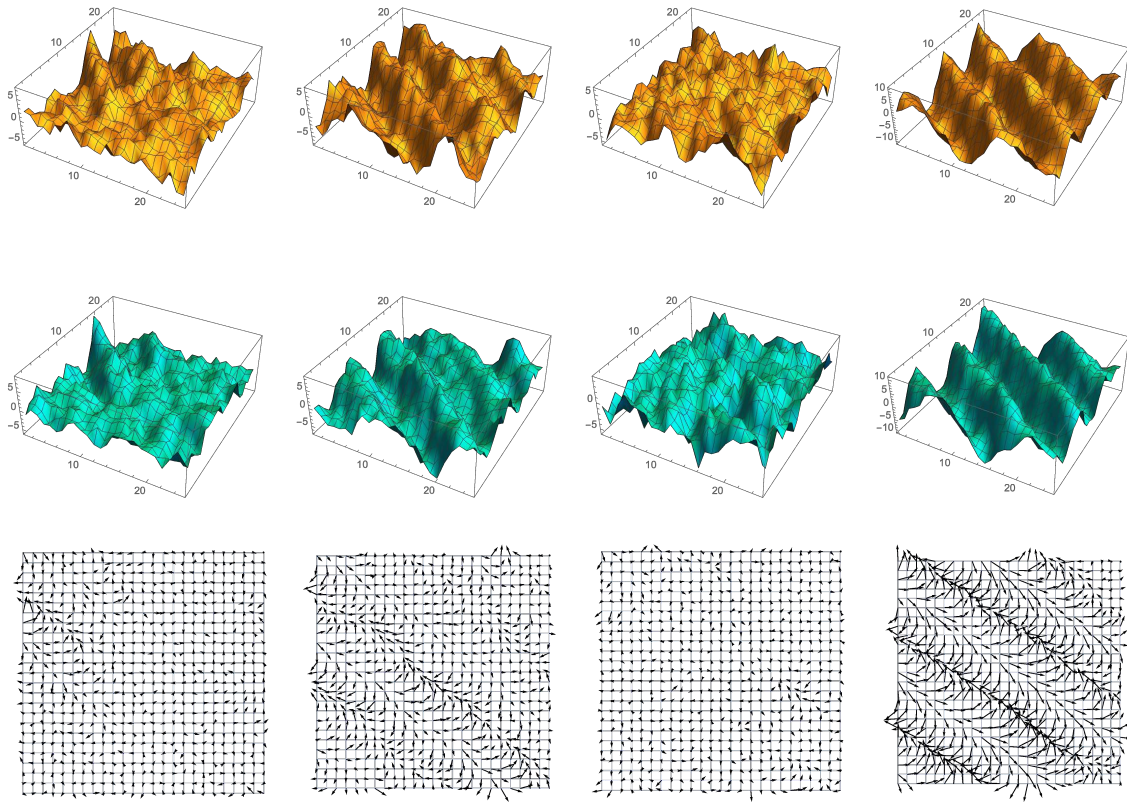


FIGURE 6.2. Quatre échantillons (un par colonne) d'un champ de vecteurs libre gaussien, sur un fibré de rang  $N = 2$  au-dessus d'un réseau carré associé à une connexion périodique.

DEFINITION 6.2. *Le champ de vecteurs libre gaussien sur un graphe muni d'une connexion unitaire est le vecteur gaussien centré  $\Phi$  associé à la forme quadratique (53).*

Informellement,  $\Phi$  est la fluctuation gaussienne canonique autour des sections d'énergie de Dirichlet minimale. Lorsque l'holonomie le long d'un cycle est non triviale, il n'est pas possible de trouver une section horizontale (dont la dérivée covariante soit nulle). Ainsi, le long d'un cycle dont l'holonomie est éloignée de l'identité, la valeur absolue du champ aura tendance à être plus faible. Cette heuristique est compatible avec le théorème d'isomorphisme plus bas (voir le théorème 6.6 et l'exemple de 6§4.2).

La loi du champ  $\Phi$  est équivariante sous l'action du groupe de jauge  $\prod_{v \in \mathbf{V}} U(\mathbf{F}_v)$ , au sens où si  $j \in \prod_{v \in \mathbf{V}} U(\mathbf{F}_v)$ , et  $j \cdot h$  désigne la connexion obtenue par conjugaison des  $h_e$  par  $j_v$  :

$$(j \cdot h)_e = j_{\bar{e}} \circ h_e \circ j_e^{-1},$$

la loi du champ associé à  $j \cdot h$  est la même que celle de  $j(\Phi) = (j_v(\Phi_v))_{v \in \mathbf{V}}$ . Ceci découle du fait que par (53), on a  $\mathcal{E}_{j \cdot h}(j \cdot f) = \mathcal{E}(f)$  pour tout  $f$ .

En théorie constructive des champs, un tel champ gaussien associé à une connexion est appelé « champ de Higgs » et fut notamment étudié dans [BFS79]. Plus récemment, il apparaît aussi dans le travail [CC22].

### 3. Chemins aléatoires

On considère, partant de tout sommet interne  $v \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{W}$ , la marche aléatoire partant de  $v$ , dont les pas sont distribués parmi les plus proches voisins proportionnellement aux poids  $x_e$ , et qui est arrêtée lorsqu'elle touche le puits. On note  $\mathbb{P}_v$  sa loi.

La covariance du champ de vecteurs libre gaussien a une expression en termes de marche aléatoire. En effet, si  $u$  et  $v$  sont des sommets et si  $\xi$  et  $\eta$  sont des vecteurs de la fibre au-dessus de  $u$  et  $v$ , alors

$$(54) \quad \mathbb{E}[\langle \xi, \Phi_u \rangle \langle \Phi_v, \eta \rangle] = \int \langle \xi, \text{hol}_h(\gamma)^{-1}(\eta) \rangle d\nu_{u,v}(\gamma),$$

où  $\nu_{u,v}$  est une mesure finie sur l'ensemble des chemins entre  $u$  et  $v$  (voir [KL21, définition 1.10]). Plus précisément, la mesure  $\nu_{u,v}$  est définie, pour tous sommets  $u, v \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{W}$ , et  $F$  fonction mesurable bornée sur l'espace des chemins  $\mathbf{P}(\mathbf{G})$ , par la formule

$$(55) \quad \int_{\mathbf{P}(\mathbf{G})} F(\gamma) d\nu_{u,v}(\gamma) = \int_{\mathbf{P}(\mathbf{G}) \times [0, \infty[} F(\gamma|_{[0,t]}) \mathbb{1}_{\{\gamma_t=v\}} \frac{1}{\lambda_v} d\mathbb{P}_u(\gamma) dt.$$

Le membre de droite de l'expression (54) fait apparaître la *section de Green*  $G_h$  définie pour tous sommets  $u, v$  par :

$$(56) \quad (G_h)_{u,v} = \int \text{hol}_h(\gamma)^{-1} d\nu_{u,v}(\gamma) \in \text{Hom}(\mathbf{F}_v, \mathbf{F}_u),$$

qui est l'inverse de  $\Delta_h = \Lambda L_h$ .<sup>2</sup>

Par la formule d'Isserlis–Wick, on peut transformer (54) en une expression pour les moments du champ  $\Phi$ , c'est-à-dire les quantités de la forme  $\mathbb{E}[(f_1, \Phi) \cdots (f_k, \Phi)]$ , où  $f_1, \dots, f_k$  sont des champs de vecteurs. Cette expression est une intégrale de produits de coefficients de matrices le long de chemins par rapport à une mesure finie.

On appelle potentiel sur le fibré, la donnée d'un endomorphisme auto-adjoint positif  $H_v \in \text{End}(\mathbf{F}_v)$  de la fibre en chaque sommet, que l'on suppose nul sur les sommets du puits. Étant donné un potentiel  $H = (H_v)_{v \in \mathbf{V}}$ , on définit une notion d'holonomie tordue, notée  $\text{hol}_{h,H}(\gamma)$ , pour les chemins  $\gamma$  à paramétrisation continue (ces chemins passent un temps positifs en chaque sommet, et traversent les arêtes instantanément).

2. Les notations diffèrent de [KL21] pour les besoins d'harmonisation des notations de ce mémoire.

**DEFINITION 6.3.** Soit  $\gamma = ((x_0, \tau_0), e_1, \dots, e_n, (x_n, \tau_n))$  un chemin continu sur  $\mathbf{G}$ , où  $\tau_i$  désigne le temps passé au sommet  $i$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ . On suppose que  $\tau_n < \infty$  ou  $H_{x_n} = 0$ . L'holonomie de  $h$  tordue par le potentiel  $H$  le long de  $\gamma$  est l'application linéaire

$$\text{hol}_{h,H}(\gamma) = e^{-\tau_n H_{x_n}} \circ h_{e_n} \circ \dots \circ e^{-\tau_1 H_{x_1}} \circ h_{e_1} \circ e^{-\tau_0 H_{x_0}} : F_{x_0} \rightarrow F_{x_n}.$$

Tous les résultats obtenus dans [KL21] découlent plus ou moins directement de formules un peu plus générales mais similaires à (54). On étend notamment des résultats de Le Jan [LJ11] et Sznitman [Szn12]. Ils découlent notamment d'une formule de Feynman–Kac covariante pour le laplacien covariant normalisé auquel on ajoute un potentiel :

$$(57) \quad L_{h,H} = \Lambda^{-1} \Delta_h + H,$$

que nous énonçons dans la proposition suivante.

**PROPOSITION 6.4.** On a, pour tout  $f \in \Omega^0(\mathbf{V} \setminus \mathbf{W})$ , tout  $v \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{W}$ , et  $t \geq 0$  :

$$(58) \quad (e^{-tL_{h,H}} f)(v) = \int_{\mathbf{P}(\mathbf{G})} \text{hol}_{h,H}(\gamma_{|[0,t]^{-1}}) f(\gamma_t) d\mathbb{P}_v(\gamma).$$

Comme dans le cas de la formule de Feynman–Kac classique, la formule ci-dessus donne une expression pour l'évaluation, en une section  $f$ , du semi-groupe  $e^{-tL_{h,H}}$  engendré par l'opérateur  $L_{h,H}$  comme une moyenne par rapport à la trajectoire d'une marche aléatoire de la valeur de  $f$  au point visité par la marche au temps  $t$ . Ici, cette moyenne prend de plus en compte tout le passé de la trajectoire jusqu'au temps  $t$  par le biais de l'holonomie  $\text{hol}_{h,H}(\gamma_{|[0,t]^{-1}})$  qui transporte la valeur de  $f$  au point  $\gamma_t$  dans la fibre au-dessus de  $x$ .

## 4. Soupes de boucles

**4.1. Théorèmes d'isomorphisme.** Rappelons qu'il y a une mesure de référence  $\mu$  sur les boucles paramétrées d'un graphe (pondéré), voir (16). Voir aussi les définitions 1.11 et 1.12 dans [KL21]. Cette mesure est infinie, et sigma-finie, et elle donne naissance à un processus de Poisson d'intensité  $c\mu$  pour tout  $c > 0$ . On appelle la réalisation d'un tel processus une « soupe de boucles ». On verra plus généralement qu'il est pertinent de considérer des soupes de boucles associées à d'autres mesures absolument continues par rapport à  $\mu$ .

**DEFINITION 6.5.** Soit  $h$  une connexion unitaire. On définit  $\mu_h^+$  et  $\mu_h^-$  comme les parties positives et négatives de la mesure  $\text{Re}[\text{Tr}(\text{hol}_h(\cdot))] \mu(\cdot)$ , où  $\mu$  est la mesure de référence sur les boucles paramétrées du graphe.

On définit le temps local d'un chemin comme étant la fonction associant à tout sommet la durée totale de temps passée par le chemin en ce sommet. Le temps local d'un ensemble de chemins est la somme des temps locaux de chaque chemin. Étant donné un ensemble de chemins  $\mathcal{L}$ , on notera

$$(59) \quad (\ell_v(\mathcal{L}))_{v \in \mathbf{V}}$$

le champ d'occupation total correspondant.

Le théorème suivant généralise le théorème d'isomorphisme de Le Jan [LJ11].



**THÉORÈME 6.6.** *Soit  $\Phi$  un champ de vecteurs libre gaussien associé à une connexion unitaire (ou orthogonale)  $h$ . Soit  $\alpha = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})$ . Soit  $\mathcal{L}_-$  une soupe de boucles d'intensité  $\frac{\alpha}{2}\mu_h^-$  et  $\mathcal{L}_+$  une soupe de boucles d'intensité  $\frac{\alpha}{2}\mu_h^+$ . Le champ d'occupation  $\left(\frac{1}{2}\|\Phi_v\|^2 + \ell_v(\mathcal{L}_-)\right)_{v \in \mathbb{V}}$  a la même loi que le champ d'occupation  $(\ell_v(\mathcal{L}_+))_{v \in \mathbb{V}}$ , ce que l'on écrit :*

$$(60) \quad \left(\frac{1}{2}\|\Phi_v\|^2 + \ell_v(\mathcal{L}_-)\right)_{v \in \mathbb{V}} \stackrel{(loi)}{=} (\ell_v(\mathcal{L}_+))_{v \in \mathbb{V}} .$$

Une version plus raffinée de ce résultat, et qui inclut de plus la généralisation du théorème d'isomorphisme de Sznitman [Szn12], se trouve dans [KL21, Theorem 6.6].

**4.2. Illustration sur un cas très simple.** Considérons le graphe de la figure 6.3 : il contient deux sommets, dont un puits  $W = \{w\}$ , et deux arêtes dont une boucle  $[e]$ . Sur ce graphe, toute boucle n'a de temps local qu'en  $v$ .

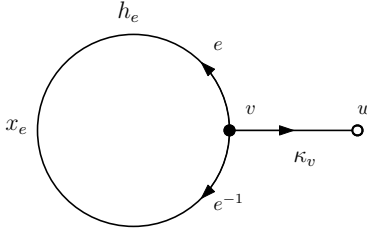


FIGURE 6.3. Un graphe pondéré très simple : un sommet interne, une boucle, un puits.

Commençons par le cas, où l'holonomie sur la boucle est triviale égale à 1 (c'est comme si l'on avait enlevé la boucle). Un calcul simple montre que la loi d'une variable aléatoire exponentielle  $Y$  de paramètre  $\kappa$  peut s'écrire comme la somme des valeurs d'un processus ponctuel de Poisson sur  $\mathbb{R}_+$  d'intensité  $\mu = e^{-\kappa t} \frac{dt}{t}$  que nous notons  $(Z_i)_{i \geq 1}$ . En effet, on calcule la transformée de Laplace de ce processus de Poisson à l'aide de la formule de Campbell et, pour tout  $\alpha > 0$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( e^{-\alpha \sum_{i=1}^{\infty} Z_i} \right) &= \exp \left( \int (e^{-\alpha t} - 1) e^{-\kappa t} \frac{dt}{t} \right) = \exp(\log(\kappa) - \log(\kappa + \alpha)) \\ &= \frac{\kappa}{\kappa + \alpha} = \kappa \int_0^{\infty} e^{-\alpha y} e^{-\kappa y} dy = \mathbb{E} \left( e^{-\alpha Y} \right) . \end{aligned}$$

De plus, si  $X$  désigne une variable aléatoire réelle gaussienne de variance  $\sigma^2 = \kappa^{-1}$  et de moyenne nulle, on a

$$\mathbb{E} \left( e^{-\alpha \frac{X^2}{2}} \right) = \left( \frac{\kappa}{\kappa + \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

On en conclut que la loi de la somme des valeurs du processus ponctuel de Poisson d'intensité moitié (donc  $\mu/2$ ), noté  $(\tilde{Z}_i)_{i \geq 1}$ , est égale à la moitié du carré de la variable aléatoire réelle gaussienne de variance  $\sigma^2 = \kappa^{-1}$ . On écrit ceci de façon symbolique sous la forme :

$$(61) \quad \frac{X^2}{2} \stackrel{(loi)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{Z}_i .$$

Traisons maintenant le cas en présence de la boucle et plaçons-nous sur un fibré de rang  $N$  sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , avec une holonomie  $h_e \in O(N)$  ou  $U(N)$ , respectivement. On note  $\alpha = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})$ .

Soit  $X$  une variable gaussienne sur  $\mathbb{K}^N$  de moyenne nulle et de variance

$$(62) \quad \Sigma^2 = (x_e(2I_N - h_e - h_e^*) + \kappa_v I_N)^{-1} .$$

Soit  $(Z'_i)_{i \geq 1}$  un processus de Poisson de boucles d'intensité  $\alpha \mu_h^+ / 2$ , et  $(Z''_i)_{i \geq 1}$  un processus de Poisson de boucles d'intensité  $\alpha \mu_h^- / 2$ , où  $\mu_h$  est la mesure sur les boucles définie en (16) pondérée par  $\text{Re}[\text{Tr}(\text{hol}_h(\cdot))]$ , et  $\mu_h^+ = \max(\mu_h, 0)$  et  $\mu_h^- = \min(\mu_h, 0)$  désignent ses parties positives et négatives. Alors, par un calcul similaire à celui plus haut, on trouve

$$(63) \quad \frac{\|X\|^2}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} Z''_i \stackrel{(\text{loi})}{=} \sum_{i=1}^{\infty} Z'_i .$$

Le théorème d'isomorphisme, théorème 6.6 (60), généralise (considérablement) les équations (61) et (63) au cas de graphes arbitraires, mais l'idée de notre démonstration est similaire. En rang  $N \geq 1$ , on voit sur l'exemple du graphe simple de la figure 6.3, que la covariance (62) peut être choisie arbitraire dans  $O(N)$ , resp.  $U(N)$ , en ajustant les paramètres.

**4.3. Cas des holonomies de trace positive.** Une manière de s'affranchir du temps local apparaissant dans le membre de gauche de (60) est de considérer une connexion qui a la propriété que la trace de toute boucle est positive. Ainsi la mesure  $\mu_h$  est positive.

**THÉORÈME 6.7.** *Le temps local d'une soupe de boucles d'intensité  $\alpha/2|\text{Tr}(\cdot)|^2 \mu$  a la même loi que le champ des normes au carré d'un champ de vecteurs libre gaussien associé à la connexion  $h \otimes h^*$  sur un fibré de rang  $N^2$ .*

Dans [Lup19b], T. Lupu applique cet énoncé au cas où le fibré est donné par celui des matrices hermitiennes de taille  $N \times N$  et analyse en détail les corrélations de ce champ en faisant apparaître des somme sur des cartes planaires. Ce faisant il réalise la prouesse de généraliser à la fois les théorèmes d'isomorphisme de Dynkin–Le Jan [Dyn80, LJ11] et les développements d'intégrales de matrices en termes de cartes de Brézin–Itykson–Parisi–Zuber [tH74, BIPZ78].

**4.4. Identité de Symanzik covariante.** Dans son travail sur le sujet, Symanzik souhaitait étudier les corrélations de champs plus généraux que le champ libre gaussien. La méthode suivante permet, en prenant une espérance sous une connexion aléatoire, de modifier la loi de  $\Phi$ . Pour autant, les techniques des théorèmes d'isomorphisme s'appliquent encore, et on obtient alors des expressions pour les corrélations de cette loi non gaussienne en termes d'espérances de traces d'holonomies de chemins aléatoires par rapport à une connexion aléatoire. Afin de pouvoir énoncer le théorème 6.9 nous avons besoin de quelques notations supplémentaires que nous introduisons maintenant.

On note  $\mathcal{A}(\mathbb{F})$  l'ensemble des connexions unitaires sur  $\mathbb{F}$ . On note  $\mathcal{H}(\mathbb{F})$  l'espace vectoriel des potentiels, c'est-à-dire des éléments  $H \in \prod_{v \in \mathbb{V}} \text{End}(\mathbb{F}_v)$  tel que  $H_v$  est auto-adjoint et positif, et  $H_w = 0$  lorsque  $w$  appartient au puits  $\mathbb{W}$ . L'espace  $\mathcal{A}(\mathbb{F})$  est un espace topologique compact et  $\mathcal{H}(\mathbb{F})$  est un espace vectoriel de dimension finie. On munit ces deux espaces de leur tribu borélienne.

Rappelons que la notation  $\alpha$  désigne la dimension  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})$ .

DEFINITION 6.8. Soit  $\mathbf{P}$  une mesure de probabilité de Borel sur  $\mathcal{A}(\mathbb{F}) \times \mathcal{H}(\mathbb{F})$ . On définit la mesure de probabilité  $\mathbb{P}^{\mathbf{P}}$  sur  $\Omega^0(\mathbb{V} \setminus \mathbb{W}, \mathbb{F})$ , pour toute fonction mesurable bornée  $F$  sur  $\Omega^0(\mathbb{V} \setminus \mathbb{W}, \mathbb{F})$ , par

$$\int_{\Omega^0(\mathbb{V} \setminus \mathbb{W}, \mathbb{F})} F(f) \, d\mathbb{P}^{\mathbf{P}}(f) = \frac{1}{Z^{\mathbf{P}}} \int_{\Omega^0(\mathbb{V} \setminus \mathbb{W}, \mathbb{F}) \times \mathcal{A}(\mathbb{F}) \times \mathcal{H}(\mathbb{F})} F(f) e^{-\frac{1}{2}(f, \Delta_{g,K} f)_{\Omega^0}} \, d\text{Leb}_{\Omega^0}(f) d\mathbf{P}(g, K),$$

où

$$(64) \quad Z^{\mathbf{P}} = \pi^{\frac{\alpha r |\mathbb{V}|}{2}} \int_{\mathcal{A}(\mathbb{F}) \times \mathcal{H}(\mathbb{F})} \det \Delta_{g,K}^{-\frac{\alpha}{2}} \, d\mathbf{P}(g, K).$$

Si  $\mathbf{P}$  est la masse de Dirac en  $(h, H)$ , alors  $\mathbb{P}^{\mathbf{P}} = \mathbb{P}^{h,H}$ . Dans ce cas on note  $Z^{\mathbf{P}}$  simplement par  $Z^{h,H}$ , au lieu de  $Z^{\delta(h,H)}$ . Insistons sur le fait qu'en général  $\mathbb{P}^{\mathbf{P}}$  n'est pas égal à  $\int_{\mathcal{A}(\mathbb{F}) \times \mathcal{H}(\mathbb{F})} \mathbb{P}^{g,K} \, d\mathbf{P}(g, K)$ , mais plutôt à

$$(65) \quad \mathbb{P}^{\mathbf{P}} = \frac{1}{Z^{\mathbf{P}}} \int_{\mathcal{A}(\mathbb{F}) \times \mathcal{H}(\mathbb{F})} Z^{g,K} \mathbb{P}^{g,K} \, d\mathbf{P}(g, K).$$

L'énoncé suivant est démontré dans [KL21, Theorem 7.3].

On note  $\nu = \sum_{u \in \mathbb{V} \setminus \mathbb{W}} \sum_{v \in \mathbb{V} \setminus \mathbb{W}} \nu_{u,v} \lambda_v$  la mesure sur les chemins entre paires de sommets, où  $\nu_{u,v}$  est la mesure mentionnée dans l'équation (54) (voir [KL21, Définition 1.10]).

THÉORÈME 6.9. Soit  $\mathbb{G}$  un graphe fini connexe pondéré avec un puits. Soit  $\mathbb{F}$  un fibré vectoriel complexe ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) sur  $\mathbb{G}$  de rang  $N$  muni d'une connexion unitaire  $h$ . Soit  $\mathbf{P}$  une mesure de probabilité borélienne sur  $\mathcal{A}(\mathbb{F}) \times \mathcal{H}(\mathbb{F})$  et soit  $\mathcal{L}$  une soupe de boucles d'intensité  $N\alpha\mu/2$ .

Pour tout choix de  $2k$  sections  $f_1, \dots, f_k, f'_1, \dots, f'_k$  de  $\mathbb{F}$ , on a

$$(66) \quad \mathbb{E}^{\mathbf{P}} \left[ \prod_{i=1}^k (f_i, \Phi) \prod_{i=1}^k (\Phi, f'_i) \right] = \frac{\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} \otimes \int_{\nu^{\otimes k}} \left[ \prod_{\gamma \in \mathcal{L}} \text{tr}(\text{hol}_{g,K}(\gamma^{-1})) \sum_{\sigma} \prod_{l=1}^k \lambda_{\underline{\gamma}_l} \langle f_l(\underline{\gamma}_l), \text{hol}_{g,K}(\gamma^{-1}) f'_{\sigma(l)}(\overline{\gamma}_l) \rangle_{\underline{\gamma}_l} \right]}{\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} \left[ \prod_{\gamma \in \mathcal{L}} \text{tr}(\text{hol}_{g,K}(\gamma^{-1})) \right]},$$

où la somme porte sur les toutes les permutations de  $\{1, \dots, k\}$ .

Une illustration du théorème 6.9 est donnée par la figure 6.4. On y représente le cas  $k = 3$  pour un choix de sections particulières  $f_1, f_2, f_3$  dont les supports consistent en un unique sommet noté respectivement  $x_1, x_2, x_3$ ; on fait la même hypothèse sur les sections  $f'_1, f'_2, f'_3$  dont les supports respectifs sont les sommets  $y_1, y_2, y_3$ .

## 5. Forêts covariantes quantiques

On considère un fibré  $\mathbb{F} = \bigoplus_{v \in \mathbb{V}} \mathbb{F}_v \bigoplus_{e \in \mathbb{E}^+} \mathbb{F}_e$  sur un graphe fini  $\mathbb{G}$ , une connexion unitaire  $h$ , un opérateur de dérivée covariante  $d_h$  et son adjoint  $d_h^*$  pour des produits scalaires naturels appropriés définis à l'équation (6) du chapitre 1. Ici,  $\mathbb{F}_v$  désigne la fibre au-dessus du sommet  $v$  et  $\mathbb{F}_e$  la fibre au-dessus de l'arête  $e$ ; ces espaces vectoriels sont tous de dimension  $N$ , le rang du

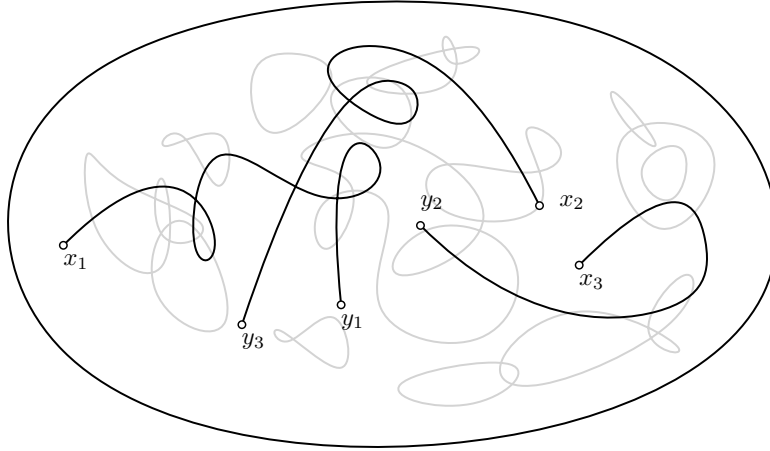


FIGURE 6.4. Calcul des fonctions de corrélation en plusieurs sommets d'un champ de vecteurs aléatoire par transport parallèle le long de chemins aléatoires. En gris clair, la soupe de boucles; en gris foncé, les chemins aléatoires qui appartiennent aux sommets  $\{x_1, x_2, x_3\}$  avec les sommets  $\{y_1, y_2, y_3\}$ .

fibré. Le calcul de la dérivée covariante discrète d'une section est illustré sur la figure 6.5; voir le chapitre 1 pour la définition.

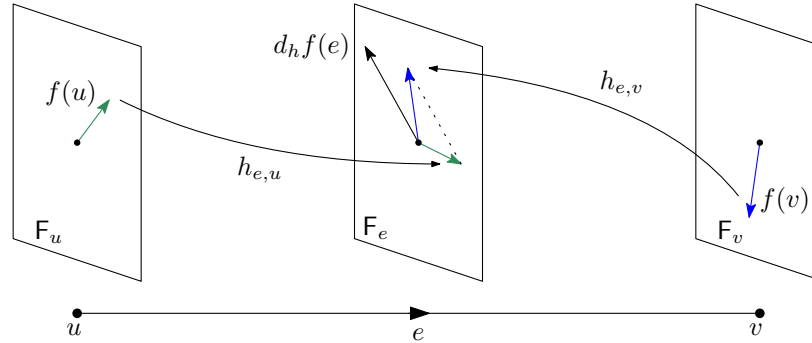


FIGURE 6.5. Illustration du calcul de la dérivée covariante discrète associée à une connexion  $h$  pour une section  $f$  le long d'une arête  $e$ .

Avec Thierry Lévy [KL23c], nous avons proposé une généralisation des processus déterminantaux classiques sur les graphes (arbre couvrant uniforme [BP93] et forêts couvrantes d'unicycles déterminantaux de Kenyon [Ken11]) au cas où le graphe est muni d'un fibré vectoriel de rang  $N \geq 2$  et d'une connexion unitaire. L'idée est d'associer un tel processus au sous-espace  $\text{im}(d_h)$  de  $\Omega^1(\mathbb{F})$  (des 1-formes à valeurs dans le fibré). Il s'agit d'un processus linéaire déterminantal, au sens de la définition donnée au chapitre 3 (définition 3.2).

**5.1. Graphes finis.** On définit tout d'abord le modèle de forêts couvrantes quantiques sur un graphe connexe fini.

DEFINITION 6.10. Une forêt couvrante quantique (QSF, pour quantum spanning forest) est un sous-espace aléatoire de l'espace  $\Omega^1(\mathbb{F})$  qui est adapté, autrement dit de la forme  $\mathbb{Q} = \bigoplus_e \mathbb{Q}_e$ , où  $\mathbb{Q}_e \subset \mathbb{F}_e$ , et dont la loi est déterminantale, associée à  $\text{im } d_h$ .

Presque sûrement, l'espace aléatoire  $\mathcal{Q}$  est «  $h$ -acyclique » au sens où  $\mathcal{Q} \cap \ker d_h^* = \{0\}$ , et il est maximal pour cette propriété.

On appelle trace de  $\mathcal{Q}$  le champ d'entiers  $(\dim \mathcal{Q}_e)_{e \in \mathbb{E}^+}$ . La trace vérifie la propriété énoncé dans le théorème suivant.

**THÉORÈME 6.11.** *Soit  $k = \dim \ker d_h$  la dimension de l'espace des sections horizontales du fibré. Presque sûrement, il existe alors  $k$  arbres couvrants et  $N - k$  forêts couvrantes d'unicycles tels que la trace de la forêt couvrante quantique  $\mathcal{Q}$  soit le champ d'occupation de l'union de ces  $k$  arbres et  $N - k$  forêts d'unicycles.*

Une question sur laquelle nous travaillons encore est de déterminer (supposons que  $k = 0$  pour simplifier) une loi de probabilité sur les  $N$ -uplets de forêts couvrantes d'unicycles et un algorithme qui permette, en partant de ces forêts, d'engendrer l'espace aléatoire  $\mathcal{Q}$ . Une difficulté provient du fait que les  $N$  forêts ne sont pas déterminées de manière unique par l'espace  $\mathcal{Q}$ .

La figure 6.6 montre un échantillon d'une forêt couvrante quantique associée à un échantillon de la mesure de Yang–Mills planeaire, voir [Lév20].

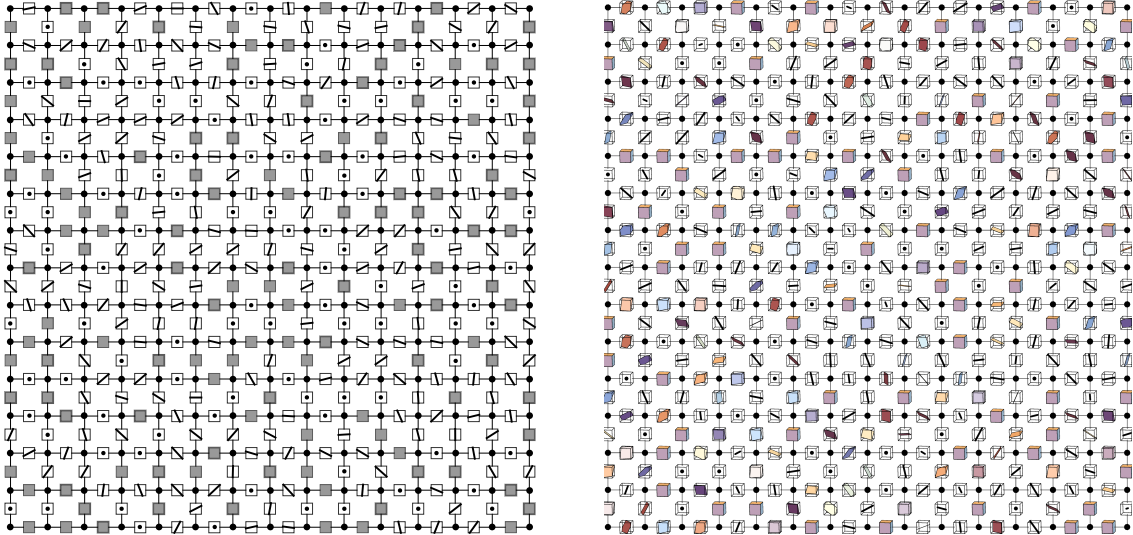


FIGURE 6.6. Forêts couvrantes quantiques sur un fibré de rang  $N = 2$  et  $N = 3$  où le graphe  $G$  est une grille de taille  $15 \times 15$ . La connexion  $h$  est elle-même aléatoire, tirée selon la mesure de Yang–Mills planeaire.

Le cas où la connexion a des holonomies à valeurs dans  $SU(2)$  est spécial. Dans ce cas, il existe un processus  $\mathcal{Q}$ -déterminantal associé, et on a une factorisation, donnée dans l'énoncé suivant, et illustrée sur la figure 6.7.

**PROPOSITION 6.12.** *La loi de la trace d'une forêt couvrante quantique associée à une connexion dans  $SU(2)$  est égale à la loi de la somme de deux forêts couvrantes d'unicycles i.i.d. tirées selon la loi  $\mathcal{Q}$ -déterminantale associée.*

**5.2. Polymatroïdes.** Dans le cas  $k = 0$ , le théorème 6.11 reflète le fait que le support du processus déterminantal dans une base orthogonale adaptée au fibré associé à  $\text{im} d_h$  est un matroïde  $N$ -transverse [EF65, PW70, Wel69].

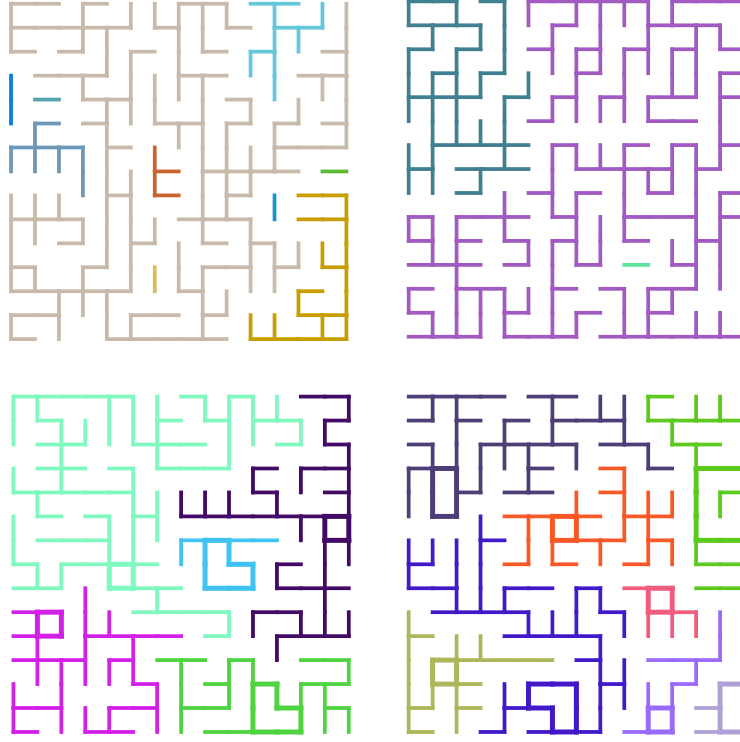


FIGURE 6.7. Ligne du haut : les marginales d'une forêt couvrante quantique associée à une connexion spéciale unitaire en rang  $N = 2$ . Ligne du bas : deux échantillons i.i.d. de la mesure Q-déterminantale, sur les forêts couvrantes d'unicycles, associée à cette même connexion.

Des inégalités plus précises décrivant la trace sont données par la proposition 3.9 (valable pour tout processus déterminantal linéaire). On peut voir que celles-ci correspondent alors au théorème de Hall–Rado ; voir aussi [Tan15].

**5.3. Limite lorsque la connexion devient triviale.** Nous avons étudié dans [KL23c] le cas où la connexion  $h$  est de la forme  $e^{tA}$  où  $A$  est une 1-forme à valeurs dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{u}(N)$  des matrices anti-hermitiennes, et  $t$  tend vers 0. On appelle  $A$  une connexion infinitésimale.

Nous trouvons un développement asymptotique de la fonction de partition et démontrons que la suite de mesures de probabilité déterminantales associée converge. Dans une base fixée, le processus déterminantal converge vers une généralisation de la mesure définie au paragraphe 4§2, que l'on va décrire maintenant.

Soit  $\mathcal{C}(\mathbf{G}, N)$  l'ensemble des  $N$ -uplets de sous-graphes couvrants connexes dont le premier nombre de Betti total vaut  $N$ . Autrement dit,

$$\mathcal{C}(\mathbf{G}, N) = \bigsqcup_{r_1 + \dots + r_N = N} \mathcal{C}_r(\mathbf{G}, N)$$

où  $\mathcal{C}_r(\mathbf{G}, N) = \mathcal{C}_{r_1}(\mathbf{G}) \times \dots \times \mathcal{C}_{r_N}(\mathbf{G})$  et  $\mathcal{C}_r(\mathbf{G})$  désigne l'ensemble des sous-graphes connexes de  $\mathbf{G}$  à  $r$  cycles indépendants (dont il a été question au chapitre 4).

Étant donné  $\underline{K} = (K_1, \dots, K_N) \in \mathcal{C}(\mathbf{G}, N)$ , on choisit pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ , une base intégrale  $(\gamma_1^{(i)}, \dots, \gamma_{b_1(K_i)}^{(i)})$  du groupe abélien libre  $Z_1(K_i, \mathbb{Z})$ . On définit alors la matrice  $N \times N$

suivante, en spécifiant ses colonnes :

$$(67) \quad M(A, \underline{\gamma}) = A_1 \left( \gamma_1^{(1)} \right) \cdots A_1 \left( \gamma_{b_1(K_1)}^{(1)} \right) \cdots A_N \left( \gamma_1^{(N)} \right) \cdots A_N \left( \gamma_{b_1(K_N)}^{(N)} \right).$$

Ici  $A_i(\gamma)$  désigne la  $i$ -ème colonne de la matrice  $A(\gamma) = \sum_{e \in \gamma} A_e$ .

Le module du déterminant de cette matrice ne dépend que de  $\underline{K}$  et on le notera  $|\det M(A, \underline{K})|$ . On définit alors la mesure de probabilité sur  $\mathcal{C}(\mathbf{G}, N)$  par la relation de proportionnalité

$$(68) \quad \mathbb{P}(\underline{K}) \propto |\det M(A, \underline{K})|^2 \underline{x}^{\underline{K}}.$$

**THÉORÈME 6.13.** *La mesure de probabilité sur  $\mathcal{C}(\mathbf{G}, N)$  définie par (68) est déterminantale, associée à la projection orthogonale sur le sous-espace  $\text{im } d \oplus \text{Vect}(A_1, \dots, A_N)$  de  $\Omega^1(\mathbf{F})$ . C'est la limite lorsque  $t$  tends vers 0 de la suite de mesures déterminantales associées à la projection orthogonale sur le sous-espace  $\text{im } d_{h_t}$  lorsque  $h_t = \exp(tA)$ .*

Lorsque  $N = 1$ , l'énoncé du théorème 6.13 devient l'énoncé du théorème 4.2 pour  $k = 1$ . En principe, on peut étendre cet énoncé au cas  $k \geq 2$  en suivant la même méthode de démonstration ; les formules deviennent plus compliquées néanmoins.

Notons que le théorème 6.13 peut s'interpréter comme une variante de généralisation du théorème « matrix-tree » (théorème 1.6). En général, nous disposons d'une formule intégrale (par rapport à la mesure de Haar  $d\nu(Q)$  sur la sous-grassmannienne  $\text{Gr}(\Omega^1(\mathbf{F}), \sigma_1)$ ) pour le déterminant  $\det \Delta_h$ , dont l'intégrande (le déterminant de  $(d_h d_h^*)_Q$ ) est a priori compliqué. Lorsque  $h$  tend vers l'identité le long de  $A$  comme ci-dessus, cette expression se simplifie drastiquement :

$$(69) \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{-2N} \det \Delta_{h_t} = \sum_{K \in \mathcal{C}(\mathbf{G}, N)} |\det M(A, \underline{K})|^2 \underline{x}^{\underline{K}}.$$

**5.4. Réseaux électriques avec champ magnétique.** La figure 6.8 illustre le problème suivant : étant donné un courant  $\alpha$  imposé à un réseau électrique, trouver le courant induit  $i$  de la forme  $i = du$  tel que la « loi des noeuds »  $d^*i = d^*\alpha$  soit vérifiée. Si l'on se place sur un graphe avec connexion, on peut voir ce problème comme un problème de même nature, mais en présence d'un champ de jauge (qui pourrait, dans le cas de rang 1, être un champ magnétique). On cherche à résoudre la même question mais avec  $d$  remplacé par la dérivée covariante discrète  $d_h$ .

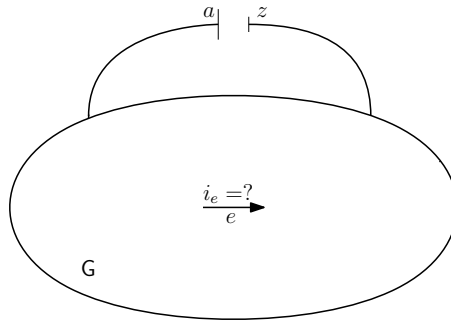


FIGURE 6.8. Le problème de Kirchhoff dans un réseau électrique avec champ de jauge.

Dans le cas classique, une solution probabiliste est donnée par l'espérance d'un estimateur du courant déterminé par une branche de l'arbre couvrant aléatoire (ce qui est la même chose qu'une marche aléatoire à boucles effacées, par un résultat célèbre de Pemantle). C'est le théorème de Kirchhoff, dans sa reformulation probabiliste moderne. La solution du problème de Kirchhoff généralisé s'obtient en moyennant un courant aléatoire associé à une forêt couvrante quantique.

**THÉORÈME 6.14.** *Pour tout  $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{F})$ , soit  $i$  l'unique élément de  $\text{im } d \subset \Omega^1(\mathbb{F})$  satisfaisant  $d_h^* i = d_h^* \alpha$ . Alors*

$$i = \mathbb{E}[P_Q^{\ker d_h^*} \alpha],$$

où  $Q$  est une forêt couvrante quantique.

Il ne s'agit que d'une réécriture du cas de degré 1 du théorème de projection moyenne (voir corollaire 3.5). On peut voir la projection aléatoire comme un estimateur non biaisé de la solution (dont on connaît de plus une formule pour sa variance, voir le théorème 3.7).

**5.5. Inégalités électriques.** On peut étudier l'effet d'une variation monotone des résistances du réseau.

**LEMME 6.15** (Loi de monotonie de Rayleigh). *Soit  $\underline{r} = (r_e)_{e \in \mathbb{E}^+}$  et  $\underline{r}' = (r'_e)_{e \in \mathbb{E}^+}$  deux familles de résistances, telles que pour toute arête  $e$ , on ait  $r_e \leq r'_e$ . Soient  $R_h$  et  $R'_h$  les sections de transfert d'impédance correspondantes. Pour tout  $e \in \mathbb{E}$ , on a*

$$(R_h)_{F_e}^{F_e} \leq (R'_h)_{F_e}^{F_e},$$

où l'inégalité est au sens des endomorphismes auto-adjoints de l'espace euclidien  $F_e$ . Ceci implique en particulier que pour tout  $e \in \mathbb{E}$ , on a

$$(70) \quad (R_h)_{F_e}^{F_e} \leq r_e \text{id}_{F_e}.$$

En d'autres termes, l'équation (70) montre que dans notre modèle de réseau électrique avec holonomie, la résistance effective diminue par rapport au cas classique, et donc que l'électricité conduit mieux en présence d'un champ de jauge.

Une autre inégalité de ce type est la suivante. D'après notre expression pour la section de Green en fonction des holonomies de marches aléatoires (voir (54) ou [KL21, Proposition 3.5]) et par unitarité des holonomies, on voit que cette dernière (qui peut aussi s'interpréter comme une résistance effective) décroît en présence d'un champ de jauge, par rapport au cas trivial.

Cette propriété est parfois appelée « inégalité diamagnétique » dans le cadre continu. Lorsque la connexion est dans  $U(1)$ , l'opérateur laplacien covariant s'appelle opérateur de Schrödinger magnétique et en effet par notre formule de Feynman–Kac (58), l'inégalité diamagnétique est équivalent à une inégalité de semi-groupes (reliée à une forme de l'inégalité de Kato) qui stipule :

$$|e^{-tL_h} f| \leq e^{-tL_1} |f|,$$

où  $L_1$  est le laplacien (probabiliste, c'est-à-dire, normalisé) classique (c'est-à-dire correspondant au cas  $N = 1$  et  $h = 1$ ).

Dans [KL23c, §8], nous donnons aussi une expression pour l'espérance de l'holonomie de fuite d'une marche aléatoire en fonction d'un opérateur de conductance effective, généralisant ainsi un résultat qui donne la probabilité de fuite d'une marche aléatoire en fonction de la conductance effective (voir [LP16, Eq. (2.5)]).

**5.6. Graphes infinis.** Sur un graphe infini, il existe deux mesures déterminantales naturelles qui sont les limites de forêts couvrantes quantiques sur une suite de graphes finis approchant le graphe infini, avec des conditions au bord libres ou fermées (ces conditions sont illustrées sur la figure 6.9). On les note WQSF et FQSF pour *wired* et *free*.

Considérons l'hypothèse technique suivante sur une connexion  $h$  sur un graphe infini, que nous appelons régularité géométrique. Rappelons que l'on note  $\text{hol}_h(c)$  l'holonomie d'un cycle  $c$ .



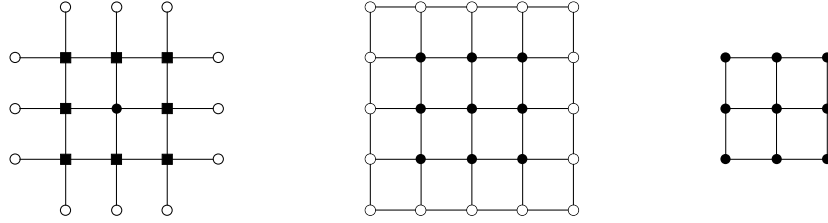


FIGURE 6.9. Une grille carrée avec ses conditions au bord fermées (à gauche) et libres (à droite).

**DEFINITION 6.16** (Régularité géométrique). *On dit que le graphe muni de la connexion  $h$  est géométriquement régulier si la propriété suivante est vérifiée : il existe un choix, pour tous sommets  $v \in \mathbf{V}$ , d'un cycle  $c_v$  basé en  $v$ , tel que :*

- toute arête soit contenue dans un nombre borné uniformément de ces cycles ;
- l'opérateur  $\text{Re}(\text{id} - \text{hol}_h(c_v))$  soit strictement positif pour tout  $v \in \mathbf{V}$  ;
- la norme de l'opérateur  $|c_v| \text{Re}(\text{id} - \text{hol}_h(c_v))^{-2}$  soit uniformément bornée supérieurement pour tout  $v \in \mathbf{V}$  ;
- une telle borne uniforme existe aussi pour  $\chi_e \lambda_v$  pour tout  $v$  et  $e \in c_v$ .

Cette hypothèse de régularité géométrique est notamment satisfaite dans le cas du réseau hypercubique  $\mathbb{Z}^d$  avec une connexion non triviale, périodique dans chaque direction [KL23c, Con23a].

**THÉORÈME 6.17.** *Lorsque la connexion est géométriquement régulière (au sens de la définition 6.16), les mesures WQSF et FQSF sont égales.*

La démonstration de ce théorème découle du fait que l'on a la décomposition

$$\Omega_{\ell^2}^1(\mathbf{F}) = \star_{\ell^2} \oplus d_h(\text{HD}) \oplus \diamond_{\ell^2},$$

où  $\text{HD} = \{f \in \Omega^0 : d_h f \in \Omega_{\ell^2}^1 \text{ et } d_h^*(d_h f) = 0\}$  est l'espace des sections harmoniques de Dirichlet. Les processus WQSF et FQSF sont respectivement associés aux sous-espaces fermés  $\star_{\ell^2}$  et  $\diamond_{\ell^2}^\perp$  de  $\Omega_{\ell^2}^1(\mathbf{F})$ . L'hypothèse 6.16 implique que l'espace des sections harmoniques dont la dérivée covariante est d'énergie de Dirichlet finie,  $\text{HD}$ , est nul, de sorte que les deux espaces plus hauts, et donc les processus déterminantaux associés, sont égaux.

Sous cette même hypothèse 6.16, on montre de plus que le laplacien covariant discret est strictement positif, et on en déduit aisément que les corrélations à grande distance des forêts couvrantes quantiques décroissent exponentiellement. Ceci contraste avec le cas de l'arbre couvrant uniforme dont les corrélations à grande distance décroissent polynomialement [BP93], ce qui est aussi le cas de certaines mesures déterminantales sur les forêts d'unicycles de graphes planaires infinis [Ken19].

Dans sa thèse de doctorat [Con23a, Con23b], Héloïse Constantin a obtenu des expressions intégrales (de type coefficients de Fourier) pour le noyau de cette mesure déterminantale dans le cas d'un graphe infini  $\mathbb{Z}^d$ -périodique, muni d'une connexion périodique. Elle avait déjà démontré par cette méthode explicite la décroissance exponentielle à grande distance des corrélations lorsque la connexion est non triviale. Ceci confirme des résultats de [Ba183].

## Perspectives de recherche

Nous présentons dans ce court chapitre quelques perspectives de recherche sur la base de pistes déjà entamées.

### 1. Au-delà des graphes discrets

**1.1. Complexes simpliciaux.** Soit  $X = (X_0, \dots, X_m)$  un complexe simplicial fini pondéré de dimension  $m \geq 1$  (voir la définition au paragraphe 1§2.8). Pour tout  $0 \leq k \leq m$ , soit  $\Omega^k(X, \mathbb{R})$  l'espace réel des  $k$ -formes, c'est-à-dire des fonctions réelles antisymétriques sur les  $k$ -faces orientées. Il y a une structure de complexe de cochaînes induite par les applications de cobord  $d : \Omega^{k-1}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^k(X, \mathbb{R})$  vérifiant<sup>1</sup>

$$d \circ d = 0.$$

Par dualité par rapport à des produits scalaires naturels sur ces espaces (similaires à ceux définis aux équations (6)), il y a une collection d'applications duales associées  $d^* : \Omega^k(X, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{k-1}(X, \mathbb{R})$ .

La structure de complexe permet de définir des sous-espaces particuliers de  $\Omega^k(X, \mathbb{R})$  :  $\star^k = \text{im}(d)$ , l'espace des formes exactes,  $\diamond^k = \ker(d^*)$ , l'espace des cycles (ou formes fermées); et aussi  $\star^{*k} = \text{im}(d^*)$  et  $\diamond^{*k} = \ker(d)$ . Puisque le complexe simplicial est fini, on trouve les décompositions orthogonales suivantes :  $\Omega^k(X, \mathbb{R}) = \star^k \oplus \diamond^k = \diamond^{*k} \oplus \star^{*k}$ .

On considère de plus le sous-espace (qui peut être trivial) des formes harmoniques  $H^k = \ker(d \circ d^* + d^* \circ d)$ , et en observant que  $\diamond^k = H^k \oplus \star^{*k}$ , on obtient un raffinement de la décomposition précédente

$$\Omega^k(X, \mathbb{R}) = \star^k \oplus H^k \oplus \star^{*k},$$

qui est une variante discrète de la décomposition de Hodge des formes différentielles en géométrie, telle que considérée en premier lieu par Beno Eckmann [Eck45].

Pour toute  $k$ -face non-orientée  $\tau$ , soit  $\omega_\tau$  la  $k$ -forme associée, définie au signe près, si  $\{\tau_1, \tau_2\}$  dénote l'ensemble des deux  $k$ -faces orientées correspondantes, par  $\mathbb{1}_{\tau_1} - \mathbb{1}_{\tau_2}$ . La droite  $L_\tau = \mathbb{R}\omega_\tau$  est indépendante de ce choix de signe, et il y a un scindement naturel  $\sigma$  donné par

$$\Omega^k(X, \mathbb{R}) = \bigoplus_{\tau \in X_k} L_\tau,$$

où  $X_k$  est la collection des  $k$ -faces non-orientées de  $X$ .

Comme dans le cas des graphes, il est naturel de généraliser la situation précédente en munissant le complexe simplicial d'une structure de fibré vectoriel de rang  $N \geq 1$  et en tordant le complexe par la donnée d'isomorphismes linéaires (dont la collection est appelée « connexion ») pour toute paire de faces incidentes (c'est-à-dire, un isomorphisme pour toute arête de la subdivision barycentrique du complexe simplicial, voir par exemple [RV15]). Les scindements et décompositions sont transformés en conséquence.

Dans le cas  $m = 1$ , on retrouve la notion de fibré sur un graphe avec connexion (voir 1§2.5).

---

1. Il y a une application différente pour chaque  $1 \leq k \leq m$ , mais on omet la dépendance de  $d$  en  $k$ .

**1.2. Forêts couvrantes.** Une définition des forêts couvrantes quantiques sur un complexe simplicial est donnée dans [KL22a, §2.5]. Rappelons-la ici.

Le processus déterminantal linéaire associé à  $H = \star^k$  (respectivement  $H = \star^{*k}$ ) et au scindement de  $\Omega^k(X, \mathbb{R})$  associé au fibré, est un sous-espace vectoriel aléatoire  $Q$  de  $\Omega^k(X, \mathbb{R})$  qui est un supplémentaire de  $H^\perp = H^k \oplus \star^{*k} = \diamond^k$  (respectivement de  $H^\perp = \star^k \oplus H^k = \diamond^{*k}$ ).

Ceci définit une notion générale de forêt couvrante quantique en dimension  $k$  et rang  $N$ . Dans le cas de rang  $N = 1$ , ces processus déterminantaux ont été introduits par Lyons [Lyo09] (ce sont les mesures matroïdales dites « hautes » et « basses », duales l'une de l'autre, définies pour tout complexe de chaînes).

**DEFINITION 7.1.** *Une forêt simpliciale quantique est le processus linéaire déterminantal associé aux formes exactes  $\star^k$  dans l'espace des  $d$ -chaînes  $\Omega^k(X, F)$  muni de son scindement déterminé par le fibré.*

**1.3. Polynômes.** La fonction de partition d'une forêt simpliciale quantique est donnée par un mineur principal du laplacien  $\Delta = d^*d$  sur  $\Omega^{k-1}(X, F)$ . Comme dans le cas des graphes, on peut chercher à donner des expressions combinatoires pour ce laplacien et à étudier ses propriétés.

1.3.1. *Développement en boucles de Wilson.* L'identité suivante est démontrée dans [KL20, Theorem 6.1]. On introduit le graphe d'adjacence  $G$  de  $X^{d-1}$ , où deux  $(d-1)$ -faces sont adjacentes si elles font partie de la même  $d$  face de  $X$ . On étend la connexion  $h$  à ce graphe. On suppose que les sommets de  $G$  sont ordonnés de sorte que  $\Delta_{[m]}$  est un mineur principal de  $\Delta$  comme au paragraphe 5§2.

**THÉORÈME 7.2.** *On a*

$$\det_\tau \Delta_{[m]} = \frac{1}{d^m} \sum_{F \in \mathcal{U}_m^-(G)} \underline{x}^F \prod_{c \in C(F)} (1 - d^{\ell(c)} \varepsilon_c \tau(h_c)),$$

où  $h_c$  est l'holonomie de  $c$  par rapport à la connexion  $h$ , et  $\varepsilon_c$  est un certain signe.

Cette expression fait penser à celle obtenue par [BK16], bien qu'elle soit différente. Comprendre l'équivalence combinatoire de ces deux expressions serait intéressant. Il existe aussi d'autres résultats sur ce type de formules [McD21]. Un lien est établi dans [RV15, CCK15] avec la torsion de Reidemeister. Un concept unificateur pour comprendre ces différentes formules pourrait être la théorie de Morse discrète de Forman [For98b].

1.3.2. *Revêtements.* L'énoncé suivant est dans [CK23].

**THÉORÈME 7.3.** *Étant donné un revêtement fini de complexes simpliciaux  $\tilde{X} \rightarrow X$ , la fonction de partition des forêts enracinées (pondérées) de  $X$  divise celle de  $\tilde{X}$  dans  $\mathbb{Z}[x]$ .*

Ce théorème s'obtient à partir du théorème 5.13 appliqué au graphe d'adjacence  $G$  associé au complexe simplicial comme plus haut.

**1.4. Bijections.** Nous posons deux questions concernant la généralisation au cas des complexes simpliciaux de propriétés intéressantes sur les graphes.

QUESTION 7.4. *Peut-on généraliser la formule (22) pour l'énumération de  $\mathcal{F}_k(\mathbb{G})$  au cadre des complexes simpliciaux ? Il s'agirait de compter certains types de forêts simpliciales, éventuellement pondérées par un poids de torsion « à la Kalai ».*

Dans le cas des graphes, la démonstration utilise le matrix-tree theorem et une bijection.

QUESTION 7.5. *Existe-t-il une bijection « à la Joyal » (voir §1§1.1) entre arbres couvrants et paires de sommets marqués et forêts d'unicycles dans le cadre des complexes simpliciaux ?*

Cette question est plus spéculative car la bijection de Joyal dans le cas des graphes nécessite de se placer sur le graphe complet avec poids égaux à 1. Elle ne semble pas pouvoir s'étendre facilement à une bijection entre configurations sur des graphes pondérés généraux (une telle généralisation serait par ailleurs intéressante).

**1.5. Versions métriques.** On pourrait aussi définir les forêts quantiques sur des versions métriques des graphes et complexes simpliciaux. O. Amini et N. Nicolussi [AN20, §5.1] étudient la mesure canonique de Zhang [Zha93] associée à un graphe métrique (c'est-à-dire que les arêtes  $e$  sont représentées par des segments  $I_e$  de longueur  $x_e^{-1}$ ) et la relie au processus déterminantal de l'arbre couvrant uniforme. Il s'agit d'une mesure sur le graphe, vu comme un espace topologique de dimension 1. Celle-ci prend alors la forme :

$$\mu_c = \sum_{e \in \mathbb{E}^+} \mathbb{P}(e \notin \mathbb{T}) x_e \lambda_e,$$

où  $\mathbb{T}$  est un arbre couvrant aléatoire tiré sous la loi  $\mathbb{P}(T) \propto \underline{x}^T$ , et  $\lambda_e$  est la mesure de Lebesgue sur l'arête  $e$ , vue comme le segment  $I_e$ .

Nous proposons une définition inspirée de la leur, au cas d'un graphe ou complexe simplicial muni d'un fibré et connexion, mettant à profit notre définition des forêts couvrantes quantiques (définition 6.10 et définition 7.1) qui généralisent l'arbre couvrant uniforme.

Dans le cas d'un graphe, nous associons à chaque arête  $e$ , un simplexe  $X^{(e)}$  de dimension  $N$ . De plus, toute face  $\sigma$  de ce simplexe est munie d'une mesure de Lebesgue  $\lambda_\sigma$ , et on lui attribue une aire totale  $x_\sigma > 0$ .

REMARQUE 7.6. *Nous pensons que la mesure suivante sur un graphe métrique avec fibré et connexion pourrait être un analogue intéressant de la mesure canonique de Zhang :*

$$(71) \quad \mu_c = \sum_{e \in \mathbb{E}^+} \sum_{\sigma \in X^{(e)}} \mathbb{P}(\dim \mathbb{Q}_e^\perp = \dim \sigma) x_\sigma \lambda_\sigma,$$

où  $\mathbb{Q}$  est une forêt couvrante quantique sur le graphe  $\mathbb{G}$  muni d'une connexion unitaire  $h$ .

Pour vérifier si cette mesure est pertinente, il s'agirait de trouver une mesure canonique sur une structure géométrique (fibrés de rang  $N$  sur une surface) dont elle serait la limite lorsque la surface dégénère vers le graphe.

Nous aimerions étudier les liens entre nos travaux et les travaux récents portant sur la géométrie et les processus aléatoires sur les graphes métriques [AN22, Lup22, DF22]. Dans [Lup22], T. Lupu étudie une version du champ de vecteurs gaussien tordu par une connexion réelle sur un fibré de rang 1, au-dessus d'un graphe métrique, et en utilisant l'équivalence avec un revêtement à deux feuillettes du graphe, détermine la loi de conditionnements sur des événements topologiques compliqués pour ce champ et la soupe de boucles associée.

## 2. Structures algébriques

### 2.1. Décomposition de chemins en boucles.

2.1.1. *Déterminants non commutatifs.* Un des sujets abordés dans ce mémoire est l'étude de matrices dont les coefficients sont des matrices, ou plus généralement des éléments d'un anneau non commutatif. Dans ce contexte, il existe d'autres approches au calcul déterminantal, et nous en avons vu un exemple, avec la définition du  $\tau$ -déterminant (voir la définition 5.7).

Certaines propriétés des mesures déterminantales sont valables pour les  $\tau$ -déterminants généraux : voir par exemple la note de bas de page numéro 12 de [KL22a]. Ce qui fait défaut pour donner un sens probabiliste à ces mesures, c'est la positivité, mais il est tout de même assez remarquable que des identités soient vraies dans une grande généralité.

Les déterminants non-commutatifs de Gelfand–Retakh [GGRW05] sont définis comme des produits de quasidéterminants qui sont des analogues de quotients de mineurs principaux. Cette décomposition nous amène à la question abordée dans le paragraphe suivant.

2.1.2. *Identités de Wilson.* Grâce à [Mar00, Law18], nous savons écrire l'inverse du déterminant du laplacien comme un produit télescopique de rapports de mineurs principaux de la fonction de Green (avec conditions au bord fermées) de tailles croissantes. Chacun de ces quasidéterminants a une interprétation en termes de marche aléatoire à boucles effacées, provenant du développement en série de  $(I - P)^{-1}$  où  $P$  est la matrice de transition de la marche aléatoire.

Il serait intéressant de vérifier si cette propriété est valable aussi pour une matrice de transition à poids non commutatifs. Par exemple dans [Kas15, §2.3], cette propriété est vérifiée pour les quaternions. Un point à vérifier serait de savoir si l'on a une identité de Jacobi pour pouvoir interpréter le quasi-déterminant d'une sous-matrice du laplacien comme une entrée d'une sous-matrice de la fonction de Green.

Au vu du lien entre marche aléatoire à boucles effacées et empilements de pièces de Viennot [Mar00], et vu que l'algorithme de Wilson est valable pour des poids assez généraux (voir le paragraphe 4§4.3), il serait intéressant d'étudier plus en détail les identités qui découlent de la propriété « magique » d'indépendance de l'ordre d'échantillonnage dans l'algorithme de Wilson.

2.1.3. *Marches non-rebroussantes.* Dans une autre direction, il serait intéressant de voir si la notion de  $\tau$ -déterminant permettrait d'obtenir des identités du type formule d'Ihara pour les marches non-rebroussantes. Celles-ci interviennent notamment dans l'étude de mots en des matrices qui ne commutent pas [BC23].

### 2.2. Séries génératrices...

2.2.1. *...de marches.* On a rencontré des marches confinées à un quart de plan au chapitre 2 dans le cadre de la bijection de Mullin. On sait, voir [CMMR17], que les séries génératrices associées à des chemins confinés ont des propriétés algébriques intéressantes, qui plus est lorsque ceux-ci sont pondérés. Dans ce mémoire on a aussi rencontré des chemins pondérés par des traces d'holonomies par rapport à une connexion (au chapitre 5 et au chapitre 6 notamment).

Peut-on étudier les séries génératrices de marches confinées pondérées par l'holonomie d'une connexion périodique sur un réseau ? Si oui, quels phénomènes nouveaux observe-t-on par rapport au cas classique ?

2.2.2. *...de nombres.* Comme déjà évoqué à la fin du paragraphe 4.3.2, il serait intéressant d'étudier les séries génératrices (simples ou exponentielles) de suites de nombres associées aux structures de ce mémoire, comme les unicycles ou forêts couvrantes d'unicycles, ou d'autres bases de matroïdes, dans l'esprit de [BJP20] qui étudie les propriétés algébriques de séries génératrices

associées à la suite  $(n^{n-1})_{n \geq 1}$  donnant le nombre d'arbres couvrants enracinés du graphe complet à  $n$  sommets.

**2.3. Processus déterminantaux.** Il serait intéressant de trouver d'autres exemples de processus déterminantaux linéaires (voir définition 3.2). Y a-t-il d'autres exemples venant de la théorie des représentations, en lien avec les processus de Schur [Oko05] ?

Peut-on en explorer plus les liens avec la théorie des polymatroïdes, et les grassmanniennes, dans l'esprit par exemple du calcul de Schubert probabiliste de [BL20] ? Quelles structures supplémentaires peut-on observer en étudiant la grassmannienne positive [Pos06] dans ce contexte ?

Comme mentionné au paragraphe 1§3.1, il y a une riche théorie des processus déterminantaux continus. Sachant que les processus déterminantaux continus peuvent être approchés par des processus déterminantaux discrets, y a-t-il une notion adaptée de processus linéaire continu, et des exemples intéressants ? Puisqu'un processus ponctuel est une mesure aléatoire, une façon d'envisager un tel processus serait sous la forme d'une mesure aléatoire à valeurs dans l'espace des sections du fibré grassmannien d'un fibré vectoriel donné.

**2.4. Limite grand  $N$ .** Avec Thierry Lévy, nous nous posons la question de la limite lorsque  $N \rightarrow \infty$  dans le cadre des processus aléatoires sur un fibré de rang  $N$ . Ceci pourrait être étudié au prisme de la théorie des grandes matrices aléatoires et des probabilités libres.

**2.5. Graphes hyperboliques et groupes de surfaces.** Nous aimerions étudier des modèles de dimères ou d'arbres sur des graphes hyperboliques planaires. Pour ce faire, il est naturel d'approcher le graphe par une tour de revêtements consistant en des graphes dont le genre tend vers l'infini. Avec David Cimasoni, nous avons un peu étudié cette question mais avons buté sur des difficultés analytiques liées à la théorie des représentations.

Au vu de la factorisation d'une représentation en facteurs irréductibles évoquée au paragraphe 5§3, notre question est la suivante : lorsqu'un groupe  $G$  est approché par des quotients successifs  $G_1 = G/N_1 \leq G_2 = G/N_2 \leq \dots \leq G$ , la mesure de probabilité de Plancherel sur l'ensemble  $G_i^\wedge$  des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles unitaires de  $G_i$  converge-t-elle vers une mesure raisonnable sur  $G^\wedge$  ?

Une situation bien comprise est celle où  $G = \mathbb{Z}^d$ , et où l'on a convergence vers la mesure de Lebesgue sur le tore  $\mathbb{T}^d$ . Ce fait est très couramment utilisé en physique statistique pour le calcul de l'énergie libre ou des corrélations de modèles intégrables comme les modèles d'arbres couvrants sur les réseaux  $\mathbb{Z}^d$ -périodiques, ou de dimères sur les réseaux  $\mathbb{Z}^2$ -périodiques.

Nous nous demandons si un phénomène analogue pourrait se produire dans d'autres cas, en particulier dans le cas où  $G$  est un groupe de surface, ce qui nous permettrait d'obtenir des expressions pour l'énergie libre des modèles de physique statistique comme le modèle de dimères sur le graphe d'un pavage du disque hyperbolique.

### 3. Géométrie aléatoire

#### 3.1. Polynôme de Tutte du matroïde bicirculaire et processus aléatoires associés.

On a vu apparaître au paragraphe 3§3.7 une fonction de partition sur des sous-graphes associée au matroïde bicirculaire.

La mesure de probabilité correspondante définit une « variante bicirculaire » du modèle de Fortuin–Kasteleyn. De la même manière, on peut aussi définir un modèle de forêts couvrantes d'unicycles « actives » aléatoires en utilisant (35) pour une bonne notion d'activité. Ces mesures de probabilité n'ont à notre connaissance pas été étudiées.

QUESTION 7.7. *Peut-on dire quelque chose sur la structure de ces modèles bicirculaires ? Que dire de leurs limites d'échelles potentielles dans le cas planaire ?*

Même si l'analogie avec le cas circulaire donne du crédit à une telle question, une remarque s'impose : il est facile de voir (par l'algorithme de Wilson généralisé évoqué au paragraphe 4§4.3) que les composantes connexes d'une forêt couvrante d'unicycles aléatoire, tirée sous la mesure uniforme, sont de taille bornée, même sur une suite de graphes très grands (par exemple si le degré maximal et la maille – c'est-à-dire la longueur minimale d'un cycle – sont bornés). Du point de vue de la physique statistique, les sous-graphes aléatoires ainsi obtenus seraient donc a priori loin de correspondre à un modèle critique comme peut l'être l'arbre couvrant uniforme, qui joue le rôle de mesure de référence pour le polynôme de Tutte du matroïde circulaire. Il s'agirait plutôt d'une phase surcritique.

**3.2. Polynômes de Tutte sur les surfaces.** Soit  $G$  un graphe fini connexe. On suppose qu'il est plongé dans une surface orientable, c'est-à-dire qu'il est dessiné sur la surface de telle sorte que ses arêtes ne se croisent pas et que le complémentaire du graphe dans la surface soit une union disjointe de composantes connexes homéomorphes à des disques. Un tel plongement détermine une orientation cyclique des demi-arêtes en chaque sommet et l'on appelle le graphe muni de cette structure un graphe ruban que l'on notera  $\mathbb{G}$ . Tout sous-graphe couvrant  $H$  de  $G$  hérite d'une structure de graphe ruban que l'on note  $\mathbb{H}$  ; on note  $k(H)$  son nombre de composantes connexes. Le genre d'un graphe ruban  $g(\mathbb{H})$  est défini par la formule d'Euler :

$$(72) \quad |V(H)| - |[E(H)]| + |[F(\mathbb{G})]| = 2k(H) - 2g(\mathbb{H}).$$

Le polynôme de Bollóbas–Riordan de  $\mathbb{G}$  est défini par l'expression suivante<sup>2</sup> :

$$\mathcal{Z}_{BR,\mathbb{G}}(x, y, z) = \sum_{H \leq \mathbb{G}} (x-1)^{k(H)-1} (y-1)^{|[E(H)]| - |V(H)| + k(H)} z^{g(\mathbb{H})},$$

où la somme porte sur les sous-graphes couvrants  $H$  de  $G$ . En prenant  $x-1 = y-1 = n$  et  $z = n^{-2}$ , et en utilisant la formule d'Euler (72) pour  $\mathbb{H}$ , on trouve

$$(73) \quad \mathcal{Z}_{BR,\mathbb{G}}(n+1, n+1, n^{-2}) = \sum_{H \leq \mathbb{G}} n^{|F(\mathbb{H})|-1}.$$

En voyant la collection des faces de  $\mathbb{H}$  comme traçant le « contour » de  $\mathbb{H}$  sur le graphe médial, on peut donc interpréter ce polynôme comme la fonction de partition d'un modèle de boucles  $O(n)$  (dans une configuration « dense »), comme au chapitre 2.

Il existe un développement de ce polynôme en quasi-arbres qui fait intervenir une notion d'activité [CKS11]<sup>3</sup> ce qui suggère, comme dans le cas planaire, de définir le contour du quasi-arbre, qui serait l'analogue de la courbe de Peano étudiée au chapitre 2.

REMARQUE 7.8. *Nous pensons que la mesure sur les courbes induites par la fonction de partition (73) pourrait avoir une limite d'échelle sur les surfaces, qui serait un analogue de l'évolution de Schramm–Loewner dans ce contexte.*

2. La paramétrisation de Bollóbas et Riordan est légèrement différente dans leur article original [BR02] mais nous préférons choisir la paramétrisation la plus proche de (5).

3. Notons qu'il y a aussi un point de vue matroïdal sur ce développement du polynôme en quasi-arbres, qui rappelle celui de Tutte–Crapo [MS18, GLV19, Gio22].

Notons que Zhan [Zha04] a donné une définition de SLE sur des surfaces non simplement connexes. Néanmoins la définition n'est pas canonique puisque sur une surface, des choix dans les paramétrisations conformes d'une potentielle équation de Loewner (voir (15)) sont nécessaires.

**3.3. Napperons de SLE et SLE dépendant d'une connexion.** Il existe une mesure canonique sur les boucles simples paramétrées du plan; elle a été construite par W. Werner [Wer08]. La masse des boucles qui font le tour d'un anneau donné est finie, et si l'on considère une boucle aléatoire sous la mesure normalisée correspondante, on trouve une boucle de SLE de paramètre  $\kappa = 8/3$ . S. Benoist et J. Dubédat [BD16] ont donné une construction similaire correspondant à  $\kappa = 2$ . La figure 4.2 nous suggère d'étendre cette construction à des graphes métriques planaires, si l'on voit une boucle comme un graphe métrique planaire à un sommet et une arête.

REMARQUE 7.9. *Nous pensons qu'il existe une mesure infinie sur les graphes finis connexes métriques planaires telle que si l'on conditionne les faces à entourer une famille de disques dans le plan, les arêtes sont des (variantes absolues continues de) segments de  $SLE_2$ .*

Nous pensons qu'un argument basé sur la méthode de [BD16] permettrait de construire de telles mesures. De manière beaucoup plus spéculative, nous aimerions bien mettre à profit les identités démontrées dans [Wan19], qui semblent pouvoir se généraliser au cas des fibrés vectoriels, afin de proposer un analogue de type SLE pour décrire une limite d'échelle des forêts couvrantes quantiques lorsque un fibré sur une surface serait approché par une suite de graphes finis munis d'un fibré et connexion unitaire.





## Bibliographie

- [AB13] Haim Avron and Christos Boutsidis, *Faster subset selection for matrices and applications*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **34** (2013), no. 4, 1464–1499. MR3121759
- [ABBGF16] O. Amini, S. Bloch, J. I. Burgos Gil, and J. Fresán, *Feynman amplitudes and limits of heights*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **80** (2016), no. 5, 5–40. MR3588803
- [AGZ10] Greg W. Anderson, Alice Guionnet, and Ofer Zeitouni, *An introduction to random matrices*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 118, Cambridge University Press, Cambridge, 2010. MR2760897
- [Ald90] David J. Aldous, *The random walk construction of uniform spanning trees and uniform labelled trees*, SIAM J. Discrete Math. **3** (1990), no. 4, 450–465. MR1069105
- [Ald91] David Aldous, *The continuum random tree. I*, Ann. Probab. **19** (1991), no. 1, 1–28. MR1085326
- [ALGV19] Nima Anari, Kuikui Liu, Shayan Oveis Gharan, and Cynthia Vinzant, *Log-concave polynomials II : High-dimensional walks and an FPRAS for counting bases of a matroid*, STOC’19—Proceedings of the 51st Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing, ACM, New York, 2019, pp. 1–12. MR4003314
- [Ami19] Omid Amini, *The exchange graph and variations of the ratio of the two Symanzik polynomials*, Ann. Inst. Henri Poincaré D **6** (2019), no. 2, 155–197. MR3950652
- [Ami80] S. A. Amitsur, *On the characteristic polynomial of a sum of matrices*, Linear and Multilinear Algebra **8** (1979/80), no. 3, 177–182. MR560557
- [AMP05] David Aldous, Grégory Miermont, and Jim Pitman, *Weak convergence of random  $p$ -mappings and the exploration process of inhomogeneous continuum random trees*, Probab. Theory Related Fields **133** (2005), no. 1, 1–17. MR2197134
- [AN20] Omid Amini and Noema Nicolussi, *Moduli of hybrid curves and variations of canonical measures*, arXiv:2007.07130.
- [AN22] ———, *Moduli of hybrid curves II : Tropical and hybrid Laplacians*, arXiv:2203.12785.
- [Ard18] Federico Ardila, *The geometry of matroids*, Notices Amer. Math. Soc. **65** (2018), no. 8, 902–908. MR3823027
- [Ard21] ———, *The geometry of geometries : matroid theory, old and new*, ICM 2022 proceedings (submitted) (2021), arXiv:2111.08726.
- [AT43] J. Ashkin and E. Teller, *Statistics of two-dimensional lattices with four components*, Phys. Rev. **64** (1943), 178–184.
- [AZ10] Martin Aigner and Günter M. Ziegler, *Proofs from The Book*, fourth ed., Springer-Verlag, Berlin, 2010. MR2569612
- [Bac22] Spencer Backman, *Tutte polynomial activities*, Handbook of the Tutte Polynomial and Related Topics, Chapman and Hall/CRC, 2022, pp. 86–99.
- [Bał83] Tadeusz Bałaban, *Regularity and decay of lattice Green’s functions*, Comm. Math. Phys. **89** (1983), no. 4, 571–597. MR713686
- [BBGJ07] J. Bouttier, M. Bowick, E. Guitter, and M. Jeng, *Vacancy localization in the square dimer model*, Phys. Rev. E **76** (2007), 041140.
- [BBL09] Julius Borcea, Petter Brändén, and Thomas M. Liggett, *Negative dependence and the geometry of polynomials*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), no. 2, 521–567. MR2476782
- [BC19] Charles Bordenave and Benoît Collins, *Eigenvalues of random lifts and polynomials of random permutation matrices*, Ann. of Math. (2) **190** (2019), no. 3, 811–875. MR4024563
- [BC21] Mikhail Basok and Dmitry Chelkak, *Tau-functions à la Dubédat and probabilities of cylindrical events for double-dimers and CLE(4)*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **23** (2021), no. 8, 2787–2832. MR4269427
- [BC23] Charles Bordenave and Benoit Collins, *Norm of matrix-valued polynomials in random unitaries and permutations*, arXiv:2304.05714.
- [BD16] Stéphane Benoist and Julien Dubédat, *An SLE<sub>2</sub> loop measure*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **52** (2016), no. 3, 1406–1436. MR3531714

- [BDC12] Vincent Beffara and Hugo Duminil-Copin, *The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for  $q \geq 1$* , Probab. Theory Related Fields **153** (2012), no. 3-4, 511–542. MR2948685
- [BDJ99] Jinho Baik, Percy Deift, and Kurt Johansson, *On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), no. 4, 1119–1178. MR1682248
- [BdTR17] Cédric Boutillier, Béatrice de Tilière, and Kilian Raschel, *The  $Z$ -invariant massive Laplacian on isoradial graphs*, Invent. Math. **208** (2017), no. 1, 109–189. MR3621833
- [BE91] Dave Bayer and David Eisenbud, *Graph curves*, Adv. Math. **86** (1991), no. 1, 1–40, With an appendix by Sung Won Park. MR1097026
- [Bef08] Vincent Beffara, *The dimension of the SLE curves*, Ann. Probab. **36** (2008), no. 4, 1421–1452. MR2435854
- [Ber86a] Lothar Berg, *Three results in connection with inverse matrices*, Proceedings of the symposium on operator theory (Athens, 1985), vol. 84, 1986, pp. 63–77. MR872276
- [Ber86b] Kenneth A. Berman, *Bicycles and spanning trees*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods **7** (1986), no. 1, 1–12. MR819700
- [Ber07] Olivier Bernardi, *Bijective counting of tree-rooted maps and shuffles of parenthesis systems*, Electron. J. Combin. **14** (2007), no. 1, Research Paper 9, 36. MR2285813
- [Ber08] ———, *Tutte polynomial, subgraphs, orientations and sandpile model : new connections via embeddings*, Electron. J. Combin. **15** (2008), no. 1, Paper 109. MR2438581
- [BFS79] David Brydges, Jürg Fröhlich, and Erhard Seiler, *On the construction of quantized gauge fields. I. General results*, Ann. Physics **121** (1979), no. 1-2, 227–284. MR548176
- [BGG17] Alexei Borodin, Vadim Gorin, and Alice Guionnet, *Gaussian asymptotics of discrete  $\beta$ -ensembles*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **125** (2017), 1–78. MR3668648
- [BH18] Petter Brändén and June Huh, *Hodge-Riemann relations for Potts model partition functions*, arXiv:1811.01696.
- [BH20] Petter Brändén and June Huh, *Lorentzian polynomials*, Ann. of Math. (2) **192** (2020), no. 3, 821–891. MR4172622
- [BHS21] Roland Bauerschmidt, Tyler Helmuth, and Andrew Swan, *The geometry of random walk isomorphism theorems*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **57** (2021), no. 1, 408–454. MR4255180
- [Big99] N. L. Biggs, *Chip-firing and the critical group of a graph*, J. Algebraic Combin. **9** (1999), no. 1, 25–45. MR1676732
- [BIPZ78] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi, and J. B. Zuber, *Planar diagrams*, Comm. Math. Phys. **59** (1978), no. 1, 35–51. MR471676
- [BJP20] Alin Bostan and Antonio Jiménez-Pastor, *On the exponential generating function of labelled trees*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **358** (2020), no. 9-10, 1005–1009. MR4196772
- [BK16] Olivier Bernardi and Caroline J. Klivans, *Directed rooted forests in higher dimension*, Electron. J. Combin. **23** (2016), no. 4, Paper 4.35, 20. MR3604793
- [BKW76] R J Baxter, S B Kelland, and F Y Wu, *Equivalence of the Potts model or Whitney polynomial with an ice-type model*, Journal of Physics A : Mathematical and General **9** (1976), no. 3, 397.
- [BL16] Benjamin Bond and Lionel Levine, *Abelian networks I. Foundations and examples*, SIAM J. Discrete Math. **30** (2016), no. 2, 856–874. MR3493110
- [BL20] Peter Bürgisser and Antonio Lerario, *Probabilistic Schubert calculus*, J. Reine Angew. Math. **760** (2020), 1–58. MR4069883
- [BLPS01] Itai Benjamini, Russell Lyons, Yuval Peres, and Oded Schramm, *Uniform spanning forests*, Ann. Probab. **29** (2001), no. 1, 1–65. MR1825141
- [BLR20] Nathanaël Berestycki, Benoît Laslier, and Gourab Ray, *Dimers and imaginary geometry*, Ann. Probab. **48** (2020), no. 1, 1–52. MR4079430
- [BM22] Jérémie Bettinelli and Grégory Miermont, *Compact Brownian surfaces II. Orientable surfaces*, arXiv:2212.12511.
- [Bor11] Alexei Borodin, *Determinantal point processes*, The Oxford handbook of random matrix theory, Oxford Univ. Press, Oxford, 2011, pp. 231–249. MR2932631

- [Bor20] Charles Bordenave, *A new proof of Friedman's second eigenvalue theorem and its extension to random lifts*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **53** (2020), no. 6, 1393–1439. MR4203039
- [BP93] Robert Burton and Robin Pemantle, *Local characteristics, entropy and limit theorems for spanning trees and domino tilings via transfer-impedances*, Ann. Probab. **21** (1993), no. 3, 1329–1371. MR1235419
- [BPZ84a] Alexander A. Belavin, Alexander M. Polyakov, and Alexander B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nuclear Physics B **241** (1984), no. 2, 333–380.
- [BPZ84b] ———, *Infinite conformal symmetry of critical fluctuations in two dimensions*, Journal of Statistical Physics **34** (1984), 763–774.
- [BQ22] Alexander I. Bufetov and Yanqi Qiu, *The Patterson-Sullivan reconstruction of pluriharmonic functions for determinantal point processes on complex hyperbolic spaces*, Geom. Funct. Anal. **32** (2022), no. 2, 135–192. MR4408430
- [BR02] Béla Bollobás and Oliver Riordan, *A polynomial of graphs on surfaces*, Math. Ann. **323** (2002), no. 1, 81–96. MR1906909
- [Brä15] Petter Brändén, *Unimodality, log-concavity, real-rootedness and beyond*, Handbook of enumerative combinatorics, Discrete Math. Appl. (Boca Raton), CRC Press, Boca Raton, FL, 2015, pp. 437–483. MR3409348
- [Bri12] Michel Brion, *Representations of quivers*, Geometric methods in representation theory. I, Sémin. Congr., vol. 24, Soc. Math. France, Paris, 2012, pp. 103–144. MR3202702
- [BSS13] Afonso S. Bandeira, Amit Singer, and Daniel A. Spielman, *A Cheeger inequality for the graph connection Laplacian*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **34** (2013), no. 4, 1611–1630. MR3138103
- [BTT90] Aharon Ben-Tal and Marc Teboulle, *A geometric property of the least squares solution of linear equations*, Linear Algebra Appl. **139** (1990), 165–170. MR1071706
- [BTW87] Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld, *Self-organized criticality : An explanation of the 1/f noise*, Phys. Rev. Lett. **59** (1987), 381–384.
- [BW10] Christian Bogner and Stefan Weinzierl, *Feynman graph polynomials*, International Journal of Modern Physics A **25** (2010), no. 13, 2585–2618.
- [Car05] John Cardy, *SLE for theoretical physicists*, Ann. Physics **318** (2005), no. 1, 81–118. MR2148644
- [Cay88] A. Cayley, *A theorem on trees.*, Quart. J. **23** (1888), 376–378.
- [CC22] Ajay Chandra and Ilya Chevyrev, *Gauge field marginal of an Abelian Higgs model*, arXiv:2207.05443.
- [CCK13] Michael J. Catanzaro, Vladimir Y. Chernyak, and John R. Klein, *On Kirchhoff's theorems with coefficients in a line bundle*, Homology Homotopy Appl. **15** (2013), no. 2, 267–280. MR3138380
- [CCK15] ———, *Kirchhoff's theorems in higher dimensions and Reidemeister torsion*, Homology Homotopy Appl. **17** (2015), no. 1, 165–189. MR3338546
- [CCK17] Dmitry Chelkak, David Cimasoni, and Adrien Kassel, *Revisiting the combinatorics of the 2D Ising model*, Ann. Inst. Henri Poincaré D **4** (2017), no. 3, 309–385, Zbl 1380.82017. MR3713019
- [CDCH<sup>+</sup>14] Dmitry Chelkak, Hugo Duminil-Copin, Clément Hongler, Antti Kemppainen, and Stanislav Smirnov, *Convergence of Ising interfaces to Schramm's SLE curves*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **352** (2014), no. 2, 157–161. MR3151886
- [CDG17] Guillaume Cébron, Antoine Dahlqvist, and Franck Gabriel, *The generalized master fields*, J. Geom. Phys. **119** (2017), 34–53. MR3661522
- [CDH<sup>+</sup>22] Sunita Chepuri, CJ Dowd, Andrew Hardt, Gregory Michel, Sylvester W. Zhang, and Valerie Zhang, *Arborescences of covering graphs*, Algebr. Comb. **5** (2022), no. 2, 319–346. MR4426442
- [Cha82] Seth Chaiken, *A combinatorial proof of the all minors matrix tree theorem*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods **3** (1982), no. 3, 319–329. MR666857
- [Cha19] Sourav Chatterjee, *Yang-Mills for probabilists*, Probability and analysis in interacting physical systems, Springer Proc. Math. Stat., vol. 283, Springer, Cham, 2019, pp. 1–16. MR3968506
- [Cha21] Melody Chan, *Moduli Spaces of Curves : Classical and Tropical*, Notices of the American Mathematical Society (2021).
- [Che19] Ilya Chevyrev, *Yang-Mills measure on the two-dimensional torus as a random distribution*, Comm. Math. Phys. **372** (2019), no. 3, 1027–1058. MR4034782

- [Che20] Dmitry Chelkak, *Ising model and  $s$ -embeddings of planar graphs*, arXiv:2006.14559.
- [CHI15] Dmitry Chelkak, Clément Hongler, and Konstantin Iznyurov, *Conformal invariance of spin correlations in the planar Ising model*, *Ann. of Math. (2)* **181** (2015), no. 3, 1087–1138. MR3296821
- [Cho92] Y. Chow, *On enumeration of spanning subgraphs with a preassigned cyclomatic number in a graph*, *Acta Math. Hungar.* **60** (1992), no. 1-2, 81–91. MR1177246
- [Cim22] David Cimasoni, *The dimer and Ising models on Klein bottles*, *Ann. Instit. Henri Poincaré D* (2022), arXiv:2010.11047.
- [CK23] David Cimasoni and Adrien Kassel, *Graph coverings and twisted operators*, *Algebr. Comb.* **6** (2023), no. 1, 75–94. MR4552709
- [CKL<sup>+</sup>15] Julien Clancy, Nathan Kaplan, Timothy Leake, Sam Payne, and Melanie Matchett Wood, *On a Cohen-Lenstra heuristic for Jacobians of random graphs*, *J. Algebraic Combin.* **42** (2015), no. 3, 701–723. MR3403177
- [CKS11] Abhijit Champanerkar, Ilya Kofman, and Neal Stoltzfus, *Quasi-tree expansion for the Bollobás-Riordan-Tutte polynomial*, *Bull. Lond. Math. Soc.* **43** (2011), no. 5, 972–984. MR2854567
- [CLB03] Robert Cori and Yvan Le Borgne, *The sand-pile model and Tutte polynomials*, vol. 30, 2003, *Formal power series and algebraic combinatorics* (Scottsdale, AZ, 2001), pp. 44–52. MR1979782
- [CMMR17] J. Courtiel, S. Melczer, M. Mishna, and K. Raschel, *Weighted lattice walks and universality classes*, *J. Combin. Theory Ser. A* **152** (2017), 255–302. MR3682734
- [Con23a] Héloïse Constantin, *Forêts couvrantes et transition de phase*, École Normale Supérieure de Lyon (2023), Thèse de doctorat.
- [Con23b] ———, *Random cycle-rooted spanning forests of infinite graphs*, en cours de rédaction.
- [Cor12] Ivan Corwin, *The Kardar-Parisi-Zhang equation and universality class*, *Random Matrices Theory Appl.* **1** (2012), no. 1, 1130001, 76. MR2930377
- [Cou14] Julien Courtiel, *A general notion of activity for the Tutte polynomial*, arXiv:1412.2081.
- [CP18] Scott Corry and David Perkinson, *Divisors and sandpiles*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2018, An introduction to chip-firing. MR3793659
- [Cra69] Henry H. Crapo, *The Tutte polynomial*, *Aequationes Math.* **3** (1969), 211–229. MR262095
- [CS12a] Sergio Caracciolo and Andrea Sportiello, *Exact integration of height probabilities in the Abelian Sand-pile model*, *J. Stat. Mech. Theory Exp.* (2012), no. 9, P09013, 14. MR2994907
- [CS12b] Dmitry Chelkak and Stanislav Smirnov, *Universality in the 2D Ising model and conformal invariance of fermionic observables*, *Invent. Math.* **189** (2012), no. 3, 515–580. MR2957303
- [Cun12] William H. Cunningham, *The coming of the matroids*, *Doc. Math.* (2012), no. Extra vol. : Optimization stories, 143–153. MR2991478
- [DC22] Hugo Duminil-Copin, *100 years of the (critical) Ising model on the hypercubic lattice*, *ICM 2022 proceedings* (submitted) (2022), arXiv:2208.00864.
- [DF22] Julien Dubédat and Hugo Falconet, *Random clusters in the Villain and XY models*, arXiv:2210.03620.
- [DGLR01] Bernard Diu, Claudine Guthmann, Danielle Lederer, and Bernard Roulet, *Physique statistique, volume 37 of collection enseignement des sciences*, 2001.
- [Dha90] Deepak Dhar, *Self-organized critical state of sandpile automaton models*, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990), no. 14, 1613–1616.
- [Dia05] Persi Diaconis, *What is ... a random matrix?*, *Notices Amer. Math. Soc.* **52** (2005), no. 11, 1348–1349. MR2183871
- [DKM09] Art M. Duval, Caroline J. Klivans, and Jeremy L. Martin, *Simplicial matrix-tree theorems*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **361** (2009), no. 11, 6073–6114. MR2529925
- [DLM20] Michal Dereziński, Feynman T Liang, and Michael W Mahoney, *Exact expressions for double descent and implicit regularization via surrogate random design*, *Advances in Neural Information Processing Systems* (H. Larochelle, M. Ranzato, R. Hadsell, M.F. Balcan, and H. Lin, eds.), vol. 33, Curran Associates, Inc., 2020, pp. 5152–5164.
- [DM21] Michal Dereziński and Michael W. Mahoney, *Determinantal point processes in randomized numerical linear algebra*, *Notices Amer. Math. Soc.* **68** (2021), no. 1, 34–45. MR4202314

- [DMS21] Bertrand Duplantier, Jason Miller, and Scott Sheffield, *Liouville quantum gravity as a mating of trees*, Astérisque (2021), no. 427, viii+257, arXiv:1409.7055. MR4340069
- [DN20] Antoine Dahlqvist and James R. Norris, *Yang-Mills measure and the master field on the sphere*, Comm. Math. Phys. **377** (2020), no. 2, 1163–1226. MR4115016
- [dSG10] Henri Paul de Saint-Gervais, *Uniformisation des surfaces de Riemann*, ENS Éditions, Lyon, 2010, Retour sur un théorème centenaire. [A look back at a 100-year-old theorem], The name of Henri Paul de Saint-Gervais covers a group composed of fifteen mathematicians : Aurélien Alvarez, Christophe Bavard, François Béguin, Nicolas Bergeron, Maxime Bourrigan, Bertrand Deroin, Sorin Dumitrescu, Charles Frances, Étienne Ghys, Antonin Guilloux, Frank Loray, Patrick Popescu-Pampu, Pierre Py, Bruno Sévenec, and Jean-Claude Sikorav. MR2768303
- [Dub19] Julien Dubédat, *Double dimers, conformal loop ensembles and isomonodromic deformations*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **21** (2019), no. 1, 1–54. MR3880204
- [DW18] Michał Dereziński and Manfred K. Warmuth, *Reverse iterative volume sampling for linear regression*, J. Mach. Learn. Res. **19** (2018), Paper No. 23, 39. MR3862430
- [DWH22] Michał Dereziński, Manfred K. Warmuth, and Daniel Hsu, *Unbiased estimators for random design regression*, Journal of Machine Learning Research **23** (2022), no. 167, 1–46.
- [Dyn80] E. B. Dynkin, *Markov processes and random fields*, Bulletin of the American Mathematical Society **3** (1980), no. 3, 975–999.
- [DZM<sup>+</sup>99] Nikolai P. Dolbilin, Yu. M. Zinov’ev, Alexander S. Mishchenko, Mikhail A. Shtan’ko, and Mikhail I. Shtogrin, *The two-dimensional Ising model and the Kac-Ward determinant*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **63** (1999), no. 4, 79–100. MR1717680
- [Eck45] Beno Eckmann, *Harmonische Funktionen und Randwertaufgaben in einem Komplex*, Comment. Math. Helv. **17** (1945), 240–255. MR13318
- [EF65] Jack Edmonds and D. R. Fulkerson, *Transversals and matroid partition*, J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B **69B** (1965), 147–153. MR188090
- [EZ60] S. M. Ermakov and V. G. Zolotukhin, *Polynomial approximations and the Monte-Carlo method*, Theory of Probability & Its Applications **5** (1960), no. 4, 428–431, doi.org/10.1137/1105046.
- [FGZJ95] P. Di Francesco, P. Ginsparg, and J. Zinn-Justin, *2d gravity and random matrices*, Physics Reports **254** (1995), no. 1, 1–133.
- [Fis66] Michael E. Fisher, *On the Dimer Solution of Planar Ising Models*, Journal of Mathematical Physics **7** (1966), no. 10, 1776–1781.
- [FM92] Tomás Feder and Milena Mihail, *Balanced matroids*, Proc. 24th ACM Symp. Theory of Computing, 1992, pp. 26–38.
- [For93] Robin Forman, *Determinants of Laplacians on graphs*, Topology **32** (1993), no. 1, 35–46. MR1204404
- [For98a] ———, *Combinatorial vector fields and dynamical systems*, Math. Z. **228** (1998), no. 4, 629–681. MR1644432
- [For98b] ———, *Witten-Morse theory for cell complexes*, Topology **37** (1998), no. 5, 945–979. MR1650414
- [Gab93] Andrei Gabrielov, *Avalanches, sandpiles and Tutte decomposition*, The Gel’fand Mathematical Seminars, 1990–1992, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993, pp. 19–26. MR1247281
- [Gar13] Christophe Garban, *Quantum gravity and the KPZ formula [after Duplantier-Sheffield]*, no. 352, 2013, Séminaire Bourbaki. Vol. 2011/2012. Exposés 1043–1058, pp. Exp. No. 1052, ix, 315–354. MR3087350
- [GBV19] Guillaume Gautier, Rémi Bardenet, and Michal Valko, *On two ways to use determinantal point processes for Monte Carlo integration*, Advances in Neural Information Processing Systems, vol. 32, Curran Associates, Inc., 2019.
- [GGMS87] I. M. Gel’fand, R. M. Goresky, R. D. MacPherson, and V. V. Serganova, *Combinatorial geometries, convex polyhedra, and Schubert cells*, Adv. in Math. **63** (1987), no. 3, 301–316. MR877789
- [GGRW05] Israel Gelfand, Sergei Gelfand, Vladimir Retakh, and Robert Lee Wilson, *Quasideterminants*, Adv. Math. **193** (2005), no. 1, 56–141. MR2132761
- [Gio22] Emeric Gioan, *On Tutte polynomial expansion formulas in perspectives of matroids and oriented matroids*, Discrete Math. **345** (2022), no. 7, Paper No. 112796, 13. MR4388970

- [GJ21] Heng Guo and Mark Jerrum, *Approximately counting bases of bicircular matroids*, *Combin. Probab. Comput.* **30** (2021), no. 1, 124–135. MR4205662
- [GKMW18] Ewain Gwynne, Adrien Kassel, Jason Miller, and David B. Wilson, *Active spanning trees with bending energy on planar maps and SLE-decorated Liouville quantum gravity for  $\kappa > 8$* , *Comm. Math. Phys.* **358** (2018), no. 3, 1065–1115, Zbl 1393.60090,. MR3778352
- [GLV05] Emeric Gioan and Michel Las Vergnas, *Activity preserving bijections between spanning trees and orientations in graphs*, *Discrete Math.* **298** (2005), no. 1-3, 169–188. MR2163447
- [GLV19] ———, *The active bijection for graphs*, *Adv. in Appl. Math.* **104** (2019), 165–236. MR3895683
- [GN06] Omer Giménez and Marc Noy, *On the complexity of computing the Tutte polynomial of bicircular matroids*, *Combin. Probab. Comput.* **15** (2006), no. 3, 385–395. MR2216475
- [GP14] Igor Gorodezky and Igor Pak, *Generalized loop-erased random walks and approximate reachability*, *Random Structures & Algorithms* **44** (2014), no. 2, 201–223.
- [GP19] Pavel Galashin and Pavlo Pylyavskyy, *R-systems*, *Selecta Math. (N.S.)* **25** (2019), no. 2, Paper No. 22, 63. MR3922919
- [Gri06] Geoffrey Grimmett, *The random-cluster model*, Springer-Verlag, 2006. MR2243761
- [GS15] Ewain Gwynne and Xin Sun, *Scaling limits for the critical fortuin-kastelyn model on a random planar map iii : finite volume case*, arXiv:1510.06346.
- [GT77] Jonathan L. Gross and Thomas W. Tucker, *Generating all graph coverings by permutation voltage assignments*, *Discrete Math.* **18** (1977), no. 3, 273–283. MR465917
- [GW04] G. R. Grimmett and S. N. Winkler, *Negative association in uniform forests and connected graphs*, *Random Structures Algorithms* **24** (2004), no. 4, 444–460. MR2060630
- [Hel14] Tyler Helmuth, *Ising model observables and non-backtracking walks*, *J. Math. Phys.* **55** (2014), no. 8, 083304.
- [HKPV09] J. Ben Hough, Manjunath Krishnapur, Yuval Peres, and Bálint Virág, *Zeros of Gaussian analytic functions and determinantal point processes*, *University Lecture Series*, vol. 51, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. MR2552864
- [HLM<sup>+</sup>08] Alexander E. Holroyd, Lionel Levine, Karola Mészáros, Yuval Peres, James Propp, and David B. Wilson, *Chip-firing and rotor-routing on directed graphs*, In and out of equilibrium. 2, *Progr. Probab.*, vol. 60, Birkhäuser, Basel, 2008, pp. 331–364. MR2477390
- [HPS18] Chris Hall, Doron Puder, and William F. Sawin, *Ramanujan coverings of graphs*, *Adv. Math.* **323** (2018), 367–410. MR3725881
- [HW04] Brian Hopkins and Robin J. Wilson, *The truth about Königsberg*, *College Math. J.* **35** (2004), no. 3, 198–207. MR2053120
- [Jer03] Mark Jerrum, *Counting, sampling and integrating : algorithms and complexity*, *Lectures in Mathematics ETH Zürich*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003. MR1960003
- [Jer21] ———, *Fundamentals of Partial Rejection Sampling*, arXiv:2106.07744.
- [Joy81] André Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, *Adv. in Math.* **42** (1981), no. 1, 1–82. MR633783
- [JW14] Antal A. Járai and Nicolás Werning, *Minimal configurations and sandpile measures*, *J. Theoret. Probab.* **27** (2014), no. 1, 153–167. MR3174221
- [Kal83] Gil Kalai, *Enumeration of  $\mathbf{Q}$ -acyclic simplicial complexes*, *Israel J. Math.* **45** (1983), no. 4, 337–351. MR720308
- [Kal17] Olav Kallenberg, *Random measures, theory and applications*, *Probability Theory and Stochastic Modelling*, vol. 77, Springer, Cham, 2017. MR3642325
- [Kar14] V. Kargin, *On Pfaffian random point fields*, *J. Stat. Phys.* **154** (2014), no. 3, 681–704. MR3163545
- [Kas67] P. W. Kasteleyn, *Graph theory and crystal physics*, *Graph Theory and Theoretical Physics*, Academic Press, London, 1967, pp. 43–110. MR0253689
- [Kas13] Adrien Kassel, *Laplacians on graphs on surfaces and applications to statistical physics*, Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud (2013).

- [Kas15] ———, *Learning about critical phenomena from scribbles and sandpiles*, Modélisation Aléatoire et Statistique—Journées MAS 2014, ESAIM Proc. Surveys, vol. 51, EDP Sci., Les Ulis, 2015, Zbl 1336.60190, pp. 60–73. MR3440791
- [Kas16] ———, *Le modèle de dimères*, Images des Mathématiques (2016), CNRS, images.math.cnrs.fr/Le-modele-de-dimeres.
- [Ken97] Richard Kenyon, *Local statistics of lattice dimers*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **33** (1997), no. 5, 591–618. MR1473567
- [Ken11] ———, *Spanning forests and the vector bundle Laplacian*, Ann. Probab. **39** (2011), no. 5, 1983–2017. MR2884879
- [Ken14] ———, *Conformal invariance of loops in the double-dimer model*, Comm. Math. Phys. **326** (2014), no. 2, 477–497. MR3165463
- [Ken19] ———, *Determinantal spanning forests on planar graphs*, Ann. Probab. **47** (2019), no. 2, 952–988. MR3916939
- [Kir47] G. Kirchhoff, *Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird*, Ann. Phys. und Chem. **72** (1847), no. 12, 497–508.
- [KK17] Adrien Kassel and Richard Kenyon, *Random curves on surfaces induced from the Laplacian determinant*, Ann. Probab. **45** (2017), no. 2, 932–964, Zbl 1377.82037. MR3630290
- [KKW15] Adrien Kassel, Richard Kenyon, and Wei Wu, *Random two-component spanning forests*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **51** (2015), no. 4, 1457–1464. MR3414453
- [KL20] Adrien Kassel and Thierry Lévy, *A colourful path to matrix-tree theorems*, Algebr. Comb. **3** (2020), no. 2, 471–482, Zbl 1436.05049. MR4099004
- [KL21] ———, *Covariant Symanzik identities*, Probab. Math. Phys. **2** (2021), no. 3, 419–475, Zbl 1483.60112. MR4408017
- [KL22a] Adrien Kassel and Thierry Lévy, *Determinantal probability measures on Grassmannians*, Ann. Inst. Henri Poincaré D **9** (2022), no. 4, 659–732. MR4525143
- [KL22b] Adrien Kassel and Thierry Lévy, *Determinantal random subgraphs*, arXiv:2212.06819, hal-03899489.
- [KL23a] ———, *On the mean projection theorem for determinantal point processes*, ALEA – Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics (to appear) (2023), arXiv:2203.04628, hal-03609991.
- [KL23b] ———, *Determinant of block matrices and Laplacians of quiver representations*, version préliminaire (15 pp.).
- [KL23c] ———, *Quantum spanning forests*, version préliminaire (70 pp.).
- [Kli19] Caroline J. Klivans, *The mathematics of chip-firing*, Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton), CRC Press, Boca Raton, FL, 2019. MR3889995
- [KLM13] Wouter Kager, Marcin Lis, and Ronald Meester, *The signed loop approach to the Ising model : foundations and critical point*, J. Stat. Phys. **152** (2013), no. 2, 353–387. MR3082653
- [KMSW19] Richard Kenyon, Jason Miller, Scott Sheffield, and David B. Wilson, *Bipolar orientations on planar maps and SLE<sub>12</sub>*, Ann. Probab. **47** (2019), no. 3, 1240–1269. MR3945746
- [KN04] Wouter Kager and Bernard Nienhuis, *A guide to stochastic Löwner evolution and its applications*, J. Statist. Phys. **115** (2004), no. 5-6, 1149–1229. MR2065722
- [Knu76] Donald E. Knuth, *Mathematics and computer science : coping with finiteness*, Science **194** (1976), no. 4271, 1235–1242. MR534161
- [KRTW10] Thomas Krajewski, Vincent Rivasseau, Adrian Tanasă, and Zhituo Wang, *Topological graph polynomials and quantum field theory. I. Heat kernel theories*, J. Noncommut. Geom. **4** (2010), no. 1, 29–82. MR2575389
- [KS19] Antti Kemppainen and Stanislav Smirnov, *Conformal invariance of boundary touching loops of FK Ising model*, Comm. Math. Phys. **369** (2019), no. 1, 49–98. MR3959554
- [KT<sup>+</sup>12] Alex Kulesza, Ben Taskar, et al., *Determinantal point processes for machine learning*, Foundations and Trends® in Machine Learning **5** (2012), no. 2–3, 123–286.
- [KW52] Mark Kac and John C. Ward, *A combinatorial solution of the two-dimensional Ising model*, Phys. Rev. **88** (1952), 1332–1337.



- [KW15a] Adrien Kassel and Wei Wu, *Transfer current and pattern fields in spanning trees*, Probab. Theory Related Fields **163** (2015), no. 1-2, 89–121. MR3405614
- [KW15b] Richard W. Kenyon and David B. Wilson, *Spanning trees of graphs on surfaces and the intensity of loop-erased random walk on planar graphs*, J. Amer. Math. Soc. **28** (2015), no. 4, 985–1030. MR3369907
- [KW16a] Adrien Kassel and David B Wilson, *Active spanning trees and Schramm–Loewner evolution*, Physical Review E **93** (2016), no. 6, 062121.
- [KW16b] Adrien Kassel and David B. Wilson, *The looping rate and sandpile density of planar graphs*, Amer. Math. Monthly **123** (2016), no. 1, 19–39, Zbl 1342.82035. MR3453533
- [Law80] Gregory F. Lawler, *A self-avoiding random walk*, Duke Math. J. **47** (1980), no. 3, 655–693. MR587173
- [Law18] ———, *Topics in loop measures and the loop-erased walk*, Probab. Surv. **15** (2018), 28–101. MR3770886
- [LC81] C. J. Liu and Yutze Chow, *Enumeration of forests in a graph*, Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), no. 3, 659–662. MR627715
- [Lév10] Thierry Lévy, *Two-dimensional Markovian holonomy fields*, Astérisque (2010), no. 329, 172. MR2667871
- [Lév20] ———, *Two-dimensional quantum Yang-Mills theory and the Makeenko-Migdal equations*, Frontiers in analysis and probability—in the spirit of the Strasbourg–Zürich meetings, Springer, Cham, 2020, pp. 275–325. MR4264598
- [LG13] Jean-François Le Gall, *Uniqueness and universality of the Brownian map*, Ann. Probab. **41** (2013), no. 4, 2880–2960. MR3112934
- [LGD20] Claire Launay, Bruno Galerne, and Agnès Desolneux, *Exact sampling of determinantal point processes without eigendecomposition*, J. Appl. Probab. **57** (2020), no. 4, 1198–1221. MR4179605
- [Lis16] Marcin Lis, *A short proof of the Kac-Ward formula*, Ann. Inst. Henri Poincaré D **3** (2016), no. 1, 45–53. MR3462629
- [LJ11] Yves Le Jan, *Markov paths, loops and fields*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2026, Springer, Heidelberg, 2011, Lectures from the 38th Probability Summer School held in Saint-Flour, 2008. MR2815763
- [LP14] Lionel Levine and Yuval Peres, *The looping constant of  $\mathbb{Z}^d$* , Random Structures Algorithms **45** (2014), no. 1, 1–13. MR3231081
- [LP16] Russell Lyons and Yuval Peres, *Probability on trees and networks*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, vol. 42, Cambridge University Press, New York, 2016. MR3616205
- [LPS16] Lionel Levine, Wesley Pegden, and Charles K. Smart, *Apollonian structure in the Abelian sandpile*, Geom. Funct. Anal. **26** (2016), no. 1, 306–336. MR3494492
- [LSW04] Gregory F. Lawler, Oded Schramm, and Wendelin Werner, *Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees*, Ann. Probab. **32** (2004), no. 1B, 939–995. MR2044671
- [Lup19a] Titus Lupu, *Convergence of the two-dimensional random walk loop-soup clusters to CLE*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **21** (2019), no. 4, 1201–1227. MR3941462
- [Lup19b] ———, *Topological expansion in Dynkin type isomorphisms for matrix valued fields*, arXiv:1908.06732.
- [Lup22] ———, *An equivalence between gauge-twisted and topologically conditioned scalar Gaussian free fields*, arXiv:2209.07901.
- [LW04] Gregory F. Lawler and Wendelin Werner, *The Brownian loop soup*, Probab. Theory Related Fields **128** (2004), no. 4, 565–588. MR2045953
- [Lyo03] Russell Lyons, *Determinantal probability measures*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2003), no. 98, 167–212. MR2031202
- [Lyo09] ———, *Random complexes and  $\ell^2$ -Betti numbers*, J. Topol. Anal. **1** (2009), no. 2, 153–175. MR2541759
- [Lyo14] ———, *Determinantal probability : basic properties and conjectures*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. IV, Kyung Moon Sa, Seoul, 2014, pp. 137–161. MR3727606

- [Mac75] Odile Macchi, *The coincidence approach to stochastic point processes*, Advances in Appl. Probability **7** (1975), 83–122. MR0380979
- [Mar00] Philippe Marchal, *Loop-erased random walks, spanning trees and Hamiltonian cycles*, Electron. Comm. Probab. **5** (2000), 39–50. MR1736723
- [Mau76] Stephen B. Maurer, *Matrix generalizations of some theorems on trees, cycles and cocycles in graphs*, SIAM J. Appl. Math. **30** (1976), no. 1, 143–148. MR392635
- [McD21] Alex McDonough, *A family of matrix-tree multijections*, Algebraic Combinatorics **4** (2021), no. 5, 795–822.
- [MD92] Satya N Majumdar and Deepak Dhar, *Equivalence between the abelian sandpile model and the  $q \rightarrow 0$  limit of the potts model*, Physica A : Statistical Mechanics and its Applications **185** (1992), no. 1-4, 129–145.
- [Meh04] Madan Lal Mehta, *Random matrices*, third ed., Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), vol. 142, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2004. MR2129906
- [Mie13] Grégory Miermont, *The Brownian map is the scaling limit of uniform random plane quadrangulations*, Acta Math. **210** (2013), no. 2, 319–401. MR3070569
- [ML97] Criel Merino López, *Chip firing and the Tutte polynomial*, Ann. Comb. **1** (1997), no. 3, 253–259. MR1630779
- [MP10] Peter Mörters and Yuval Peres, *Brownian motion*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, vol. 30, Cambridge University Press, Cambridge, 2010, With an appendix by Oded Schramm and Wendelin Werner. MR2604525
- [MS14] Satya N. Majumdar and Grégory Schehr, *Top eigenvalue of a random matrix : large deviations and third order phase transition*, J. Stat. Mech. Theory Exp. (2014), no. 1, P01012, 31. MR3172178
- [MS17a] Zelda Mariet and Suvrit Sra, *Elementary symmetric polynomials for optimal experimental design*, Proceedings of the 31st International Conference on Neural Information Processing Systems (Red Hook, NY, USA), NIPS’17, Curran Associates Inc., 2017, p. 2136–2145.
- [MS17b] Jason Miller and Scott Sheffield, *Imaginary geometry IV : interior rays, whole-plane reversibility, and space-filling trees*, Probab. Theory Related Fields **169** (2017), no. 3-4, 729–869. MR3719057
- [MS18] Iain Moffatt and Ben Smith, *Matroidal frameworks for topological Tutte polynomials*, J. Combin. Theory Ser. B **133** (2018), 1–31. MR3856702
- [MS20] Jason Miller and Scott Sheffield, *Liouville quantum gravity and the Brownian map I : the QLE(8/3, 0) metric*, Invent. Math. **219** (2020), no. 1, 75–152. MR4050102
- [Mul67] R. C. Mullin, *On the enumeration of tree-rooted maps*, Canadian J. Math. **19** (1967), 174–183. MR205882
- [Mul03] Ron Mullin, *William T. Tutte (May 14th, 1917–May 2nd, 2002)*, Aequationes Math. **66** (2003), no. 3, 201–203. MR2028558
- [MW23] Robert Moerman and Lauren K. Williams, *Grass(mannian) trees and forests : variations of the exponential formula, with applications to the momentum amplituhedron*, Comb. Theory **3** (2023), no. 1, Paper No. 10, 28. MR4565297
- [Myr92] Wendy Myrvold, *Counting  $k$ -component forests of a graph*, Networks **22** (1992), no. 7, 647–652. MR1189292
- [Nel18] Peter Nelson, *Almost all matroids are nonrepresentable*, Bull. Lond. Math. Soc. **50** (2018), no. 2, 245–248. MR3830117
- [Nie82] Bernard Nienhuis, *Exact critical point and critical exponents of  $O(n)$  models in two dimensions*, Phys. Rev. Lett. **49** (1982), no. 15, 1062–1065. MR675241
- [NK09] Hirokazu Nishimura and Susumu Kuroda (eds.), *A lost mathematician, Takeo Nakasawa*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009, The forgotten father of matroid theory. MR2516551
- [Oko05] Andrei Okounkov, *The uses of random partitions*, XIVth International Congress on Mathematical Physics, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005, pp. 379–403. MR2227852
- [Oxl11] James Oxley, *Matroid theory*, second ed., Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 21, Oxford University Press, Oxford, 2011. MR2849819
- [Pak22] Igor Pak, *What is a combinatorial interpretation ?*, arXiv:2209.06142.

- [PB83] J. Scott Provan and Michael O. Ball, *The complexity of counting cuts and of computing the probability that a graph is connected*, SIAM J. Comput. **12** (1983), no. 4, 777–788. MR721012
- [Pem00] Robin Pemantle, *Towards a theory of negative dependence*, J. Math. Phys. **41** (2000), no. 3, 1371–1390, Probabilistic techniques in equilibrium and nonequilibrium statistical physics. MR1757964
- [Pem12] ———, *Hyperbolicity and stable polynomials in combinatorics and probability*, Current developments in mathematics, 2011, Int. Press, Somerville, MA, 2012, pp. 57–123. MR3098077
- [Piq19] Matthieu Piquerez, *A multidimensional generalization of Symanzik polynomials*, arXiv:1901.09797.
- [Pit99] Jim Pitman, *Coalescent random forests*, J. Combin. Theory Ser. A **85** (1999), no. 2, 165–193. MR1673928
- [Pit06] J. Pitman, *Combinatorial stochastic processes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1875, Springer-Verlag, Berlin, 2006, Lectures from the 32nd Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 7–24, 2002, With a foreword by Jean Picard. MR2245368
- [Pol81a] A. M. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic strings*, Phys. Lett. B **103** (1981), no. 3, 207–210. MR623209
- [Pol81b] ———, *Quantum geometry of fermionic strings*, Phys. Lett. B **103** (1981), no. 3, 211–213. MR623210
- [Pos06] Alexander Postnikov, *Total positivity, Grassmannians, and networks*, arXiv:math/0609764.
- [PPR11] Vahagn S. Poghosyan, Vyatcheslav B. Priezzhev, and Philippe Ruelle, *Return probability for the loop-erased random walk and mean height in the abelian sandpile model : a proof*, J. Stat. Mech. Theory Exp. **2011** (2011), no. 10, P10004.
- [PT18] Jim Pitman and Wenpin Tang, *Tree formulas, mean first passage times and Kemeny’s constant of a Markov chain*, Bernoulli **24** (2018), no. 3, 1942–1972. MR3757519
- [PV05] Yuval Peres and Bálint Virág, *Zeros of the i.i.d. Gaussian power series : a conformally invariant determinantal process*, Acta Math. **194** (2005), no. 1, 1–35. MR2231337
- [PW70] M. J. Piff and D. J. A. Welsh, *On the vector representation of matroids*, J. London Math. Soc. (2) **2** (1970), 284–288. MR258662
- [RS87] Christophe Reutenauer and Marcel-Paul Schützenberger, *A formula for the determinant of a sum of matrices*, Lett. Math. Phys. **13** (1987), no. 4, 299–302. MR895292
- [RS05] Steffen Rohde and Oded Schramm, *Basic properties of SLE*, Ann. of Math. (2) **161** (2005), no. 2, 883–924. MR2153402
- [RV15] Nicolai Reshetikhin and Boris Vertman, *Combinatorial quantum field theory and gluing formula for determinants*, Lett. Math. Phys. **105** (2015), no. 3, 309–340. MR3312509
- [Sch00] Oded Schramm, *Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees*, Israel J. Math. **118** (2000), 221–288. MR1776084
- [Sen97] Ambar Sengupta, *Gauge theory on compact surfaces*, vol. 600, American Mathematical Soc., 1997.
- [Sey80] P. D. Seymour, *Decomposition of regular matroids*, J. Combin. Theory Ser. B **28** (1980), no. 3, 305–359. MR579077
- [She60] Seymour Sherman, *Combinatorial aspects of the Ising model for ferromagnetism. I. A conjecture of Feynman on paths and graphs*, J. Math. Phys. **1** (1960), 202–217. MR0119512
- [She16] Scott Sheffield, *Quantum gravity and inventory accumulation*, Ann. Probab. **44** (2016), no. 6, 3804–3848. MR3572324
- [She22] ———, *What is a random surface ?*, ICM 2022 proceedings (submitted) **2203** (2022), arXiv:2203.02470.
- [Shr88] Robert E. Shrock, *Lattice Higgs models*, Nuclear Physics B - Proceedings Supplements **4** (1988), 373–389.
- [Smi01] Stanislav Smirnov, *Critical percolation in the plane : conformal invariance, Cardy’s formula, scaling limits*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **333** (2001), no. 3, 239–244. MR1851632
- [Smi10a] ———, *Conformal invariance in random cluster models. I. Holomorphic fermions in the Ising model*, Ann. of Math. (2) **172** (2010), no. 2, 1435–1467. MR2680496
- [Smi10b] ———, *Discrete complex analysis and probability*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume I, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010, pp. 595–621. MR2827906

- [Sok05] Alan D. Sokal, *The multivariate Tutte polynomial (alias Potts model) for graphs and matroids*, Surveys in combinatorics 2005, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 327, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005, pp. 173–226. MR2187739
- [Sos00] A. Soshnikov, *Determinantal random point fields*, Uspekhi Mat. Nauk **55** (2000), no. 5(335), 107–160. MR1799012
- [SP72] J. M. S. Simoes-Pereira, *On subgraphs as matroid cells*, Math. Z. **127** (1972), 315–322. MR317973
- [SS14] Alexander D. Scott and Alan D. Sokal, *Complete monotonicity for inverse powers of some combinatorially defined polynomials*, Acta Math. **213** (2014), no. 2, 323–392. MR3286037
- [ST03] Tomoyuki Shirai and Yoichiro Takahashi, *Random point fields associated with certain Fredholm determinants I : fermion, Poisson and boson point processes*, Journal of Functional Analysis **205** (2003), no. 2, 414 – 463.
- [Sta89] Richard P. Stanley, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry*, Graph theory and its applications : East and West (Jinan, 1986), Ann. New York Acad. Sci., vol. 576, New York Acad. Sci., New York, 1989, pp. 500–535. MR1110850
- [Sta99] ———, *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 62, Cambridge University Press, Cambridge, 1999, With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin. MR1676282
- [Sta15] ———, *Catalan numbers*, Cambridge University Press, New York, 2015. MR3467982
- [SW12a] Scott Sheffield and Wendelin Werner, *Conformal loop ensembles : the Markovian characterization and the loop-soup construction*, Ann. of Math. (2) **176** (2012), no. 3, 1827–1917. MR2979861
- [SW12b] Amit Singer and H-T Wu, *Vector diffusion maps and the connection laplacian*, Communications on pure and applied mathematics **65** (2012), no. 8, 1067–1144.
- [SW16] Xin Sun and David B. Wilson, *Sandpiles and unicycles on random planar maps*, Electron. Commun. Probab. **21** (2016), Paper No. 57, 12. MR3548769
- [Sym69] Kurt Symanzik, *Euclidean quantum field theory*, Scuola internazionale di Fisica “Enrico Fermi”, XLV Corso, Academic Press, 1969, pp. 152–223.
- [Szn12] Alain-Sol Sznitman, *Topics in occupation times and Gaussian free fields*, Zurich Lectures in Advanced Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2012. MR2932978
- [Tan15] Shin-Ichi Tanigawa, *Matroids of gain graphs in applied discrete geometry*, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), no. 12, 8597–8641. MR3403067
- [Tan21] Adrian Tanasa, *Combinatorial physics—combinatorics, quantum field theory, and quantum gravity models*, Oxford University Press, Oxford, 2021. MR4516827
- [tH74] G. 't Hooft, *A planar diagram theory for strong interactions*, Nuclear Physics B **72** (1974), no. 3, 461–473.
- [Tut54] W. T. Tutte, *A contribution to the theory of chromatic polynomials*, Canad. J. Math. **6** (1954), 80–91. MR61366
- [Tut63] ———, *A census of planar maps*, Canadian J. Math. **15** (1963), 249–271. MR146823
- [Tut04] ———, *Graph-polynomials*, vol. 32, 2004, Special issue on the Tutte polynomial, pp. 5–9. MR2037140
- [TW96] Craig A. Tracy and Harold Widom, *On orthogonal and symplectic matrix ensembles*, Comm. Math. Phys. **177** (1996), no. 3, 727–754. MR1385083
- [Val79] L. G. Valiant, *The complexity of computing the permanent*, Theoret. Comput. Sci. **8** (1979), no. 2, 189–201. MR526203
- [Vaz01] Vijay V. Vazirani, *Approximation algorithms*, Springer-Verlag, Berlin, 2001. MR1851303
- [Vdo65] Natalya V. Vdovichenko, *A calculation of the partition function for a plane dipole lattice*, Soviet Physics JETP **20** (1965), 477–488. MR0181393
- [Ver21] Kaustubh Verma, *Double Covers of Flower Graphs and Tutte Polynomials*, Minnesota Journal of Undergraduate Mathematics **6** (2021), no. 1.
- [Wan19] Yilin Wang, *Equivalent descriptions of the Loewner energy*, Invent. Math. **218** (2019), no. 2, 573–621. MR4011706
- [Wel69] D. J. A. Welsh, *Transversal theory and matroids*, Canadian J. Math. **21** (1969), 1323–1330. MR252249

- [Wel93] ———, *Complexity : knots, colourings and counting*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 186, Cambridge University Press, Cambridge, 1993. MR1245272
- [Wer08] Wendelin Werner, *The conformally invariant measure on self-avoiding loops*, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), no. 1, 137–169. MR2350053
- [WF72] Kenneth G. Wilson and Michael E. Fisher, *Critical exponents in 3.99 dimensions*, Phys. Rev. Lett. **28** (1972), 240–243.
- [Whi32] Hassler Whitney, *A logical expansion in mathematics*, Bull. Amer. Math. Soc. **38** (1932), no. 8, 572–579. MR1562461
- [Whi35] ———, *On the Abstract Properties of Linear Dependence*, Amer. J. Math. **57** (1935), no. 3, 509–533. MR1507091
- [Whi87] Neil White (ed.), *Combinatorial geometries*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1987. MR921064
- [Wil74] Kenneth G. Wilson, *Confinement of quarks*, Phys. Rev. D **10** (1974), 2445–2459.
- [Wil96] David Bruce Wilson, *Generating random spanning trees more quickly than the cover time*, Proceedings of the Twenty-eighth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (Philadelphia, PA, 1996), ACM, New York, 1996, pp. 296–303. MR1427525
- [Wil11] David B. Wilson, *XOR-Ising loops and the Gaussian free field*, arXiv:1102.3782.
- [Wit82] Edward Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, J. Differential Geometry **17** (1982), no. 4, 661–692 (1983). MR683171
- [Woo17] Melanie Matchett Wood, *The distribution of sandpile groups of random graphs*, J. Amer. Math. Soc. **30** (2017), no. 4, 915–958. MR3671933
- [WP21] Wendelin Werner and Ellen Powell, *Lecture notes on the Gaussian free field*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 28, Société Mathématique de France, Paris, 2021. MR4466634
- [Yan14] Chen Ning Yang, *The conceptual origins of Maxwell’s equations and gauge theory*, Physics Today **67** (2014), no. 11, 45–51.
- [YM54] C. N. Yang and R. L. Mills, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Phys. Rev. **96** (1954), 191–195.
- [Zas82] Thomas Zaslavsky, *Signed graphs*, Discrete Appl. Math. **4** (1982), no. 1, 47–74. MR676405
- [Zei85] Doron Zeilberger, *A combinatorial approach to matrix algebra*, Discrete Math. **56** (1985), 61–72. MR808086
- [Zha93] Shouwu Zhang, *Admissible pairing on a curve*, Invent. Math. **112** (1993), no. 1, 171–193. MR1207481
- [Zha04] Dapeng Zhan, *Stochastic Loewner evolution in doubly connected domains*, Probab. Theory Related Fields **129** (2004), no. 3, 340–380. MR2128237

# Notations

## Alphabet grec

- $\alpha$  dimension du corps  $\mathbb{K}$  sur  $\mathbb{R}$  :  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})$
- $\beta$  température inverse
- $\beta'$  inverse d'une température auxiliaire
- $\gamma$  paramètre de Liouville d'une métrique aléatoire sur la sphère
- $\Delta$  laplacien discret classique
- $\Delta_h$  laplacien discret covariant
- $\delta$  opérateur de cobord
- $\partial$  opérateur de bord
- $\Lambda$  opérateur de multiplication par  $\lambda_v$
- $\lambda_v$  somme des poids  $x_e$  des arêtes incidentes au sommet  $v$  : mesure de référence sur les sommets
- $\lambda_e$  mesure de Lebesgue sur le segment  $I_e$  associé à l'arête  $e$  d'un graphe métrique
- $\kappa$  paramètre diffusif de l'évolution de Schramm–Loewner
- $\mu, \mu_h$  mesures infinie sur les boucles
- $\mu_c$  mesure canonique sur un graphe métrique
- $\mu_{\sigma, k}^E$  mesure déterminantale associée à  $(E, \sigma, k)$
- $\nu_n^E$  mesure invariante de référence sur la grassmannienne  $\text{Gr}_n(E)$
- $\nu_{\underline{n}, \sigma}^{E, \sigma}$  mesure invariante de référence sur la grassmannienne  $\text{Gr}_{\underline{n}}(E, \sigma)$
- $\nu^{E, \sigma}$  mesure invariante de référence sur la grassmannienne  $\text{Gr}(E, \sigma)$
- $\nu_{u, v}$  mesure sur les chemins entre les sommets  $u$  et  $v$
- $\pi_1(\mathbb{G}, v)$  groupe fondamental du graphe  $\mathbb{G}$  basé au sommet  $v$
- $\Pi(\mathbb{G}, N)$  configurations d'entiers sur les arêtes de  $\mathbb{G}$  qui s'écrivent comme le nombre d'occupation de  $N$  forêts couvrantes d'unicycles
- $\Pi^H$  projection orthogonale sur le sous-espace  $H$
- $\rho$  représentation linéaire d'un groupe
- $\rho^\#$  représentation induite
- $\sigma$  configuration de spins ou de hauteur
- $\bar{\sigma}$  densité du tas de sable  $\sigma$
- $\sigma$  scindement d'un espace euclidien  $E$
- $\Phi$  champ de vecteurs libre gaussien
- $\Psi_{\mathbb{G}}^{(1)}(\underline{x})$  premier polynôme de Symanzik
- $\Psi_{\mathbb{G}, \vec{q}}^{(2)}(\underline{x})$  second polynôme de Symanzik
- $\Psi_{\mathbb{G}, \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_k}^{(k+1)}(\underline{x})$   $k$ -ième polynôme de Symanzik
- $\Omega^0(\mathbb{G})$  espace vectoriel des 0-formes du graphe  $\mathbb{G}$
- $\Omega^1(\mathbb{G})$  espace vectoriel des 1-formes du graphe  $\mathbb{G}$
- $\Omega^0(\mathbb{F})$  espace des 0-formes du fibré  $\mathbb{F}$
- $\Omega^1(\mathbb{F})$  espace des 1-formes du fibré  $\mathbb{F}$

## Alphabet latin

- $a(T)$  activité de l'arbre couvrant  $T$
- $a_i(T)$  activité interne de l'arbre couvrant  $T$
- $a_e(T)$  activité externe de l'arbre couvrant  $T$
- $A$  connexion infinitésimale
- $A_{\mathbb{G}}^c$  opérateur d'adjacence tordu par une représentation

- $A_{\mathbb{G}}(\underline{x})$  polynôme d'énumération uniforme de  $\mathcal{F}(\mathbb{G})$
- $A_{\mathbb{G}}^{(k)}(\varphi, \underline{x})$  polynômes d'énumération des sous-graphes acycliques de  $\mathbb{G}$  à  $k \geq 2$  composantes
- $\mathcal{A}(\mathbb{F})$  espace des connexions unitaires du fibré  $\mathbb{F}$
- $\mathcal{A}_n$  ensemble des arbres à  $n$  sommets étiquetés, dits arbres de Cayley
- $\mathcal{A}_n^{(k)}$  ensemble des arbres simpliciaux sur  $n$  sommets étiquetés, dits arbres de Kalai
- $\text{Aut}(p)$  groupe d'automorphismes d'un revêtement  $p : \tilde{\mathbb{G}} \rightarrow \mathbb{G}$
- $\mathcal{B}$  collection des bases d'un matroïde
- $B^1(\mathbb{G}, \mathbb{Z})$  groupe abélien libre des coupures du graphe  $\mathbb{G}$
- $C_0(\mathbb{G}, \mathbb{Z})$  groupe abélien des 0-chaînes
- $C_1(\mathbb{G}, \mathbb{Z})$  groupe abélien des 1-chaînes
- $C_n$  nombre de Catalan d'ordre  $n$
- $\mathcal{C}(\mathbb{G})$  sous-graphes connexes couvrants du graphe  $\mathbb{G}$
- $\mathcal{C}_r(\mathbb{G})$  sous-graphes connexes couvrants du graphe  $\mathbb{G}$  à  $r$  cycles
- $\mathcal{C}_r(\mathbb{G}, N)$  ensemble des  $N$ -uplets de sous-graphes couvrants connexes de premier nombre de Betti égaux à  $\underline{r} = (r_1, \dots, r_N)$
- $\mathcal{C}(\mathbb{G}, N)$  ensemble des  $N$ -uplets de sous-graphes couvrants connexes de premier nombre de Betti total égal à  $N$
- $C_{\mathbb{G}}^{(k)}(\vartheta, \underline{x})$  polynômes générateurs d'énumération des sous-graphes connexes de  $\mathbb{G}$  à  $k \geq 1$  cycles
- $C_{\mathbb{G}}(\underline{x})$  polynôme d'énumération uniforme de  $\mathcal{C}(\mathbb{G})$
- $\mathcal{C}(F)$  ensemble des cycles de  $F$ ;  $\mathcal{C}(U)$  ensemble des cycles de  $U$
- $\mathcal{C}(\mathbb{G}, N)$  ensemble des multi-ensembles de cycles de  $\mathbb{G}$  dont le nombre total de visites en chaque sommet n'excède pas  $N$
- $\text{Conf}_n(S)$  ensemble des configurations de  $n$  points distincts dans un espace métrique  $S$
- $\mathcal{C}(S; X)$  ensemble des fonctions continues sur  $S$  qui s'annulent sur  $X$
- $d_h$  dérivée covariante discrète
- $D$  dimension de l'espace des moments externes  $\vec{q}_v$
- $\text{deg}_i(F)$  nombre d'antécédents du sommet  $i$  dans la forêt enracinée  $F$
- $\det_\tau$  le  $\tau$ -déterminant associé à une fonction tracielle  $\tau$
- $e$  une arête orientée
- $e^{-1}$  l'inverse d'une arête orientée
- $\underline{e} = s(e)$  le sommet source d'une arête
- $\bar{e} = t(e)$  le sommet but d'une arête
- $[e] = \{e, e^{-1}\}$  une arête géométrique
- $E$  espace euclidien
- $\mathbb{E}$  espérance
- $\mathbf{E}$  espérance auxiliaire
- $\mathbf{E}$  ensemble des arêtes orientées d'un graphe  $\mathbb{G}$
- $\mathbf{E}^+$  ensemble d'arêtes du graphe qui représente chaque arête géométrique par l'une de ses orientations
- $[\mathbf{E}]$  ensemble des arêtes géométriques
- $\mathcal{E}_h(f)$  énergie de Dirichlet d'une section  $f$

- $\mathcal{E}(\mathbf{G})$  ensemble des sous-graphes dont chaque sommet est de degré pair
- $\mathbf{F}$  fibré vectoriel
- $\mathbf{FP}$  classe de complexité de comptage (Function Polynomial-time)
- $\mathbf{F}(\mathbf{G})$  ensemble des faces orientées d'un graphe ruban orienté
- $\mathbf{F}^+(\mathbf{G})$  ensemble des faces d'un graphe ruban orienté avec choix d'orientation
- $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$  corps finis à 2 et 3 éléments
- $\mathcal{F}(\mathbf{G})$  ensemble des forêts couvrantes de  $\mathbf{G}$
- $\mathcal{F}_k(\mathbf{G})$  ensemble des forêts couvrantes du graphe  $\mathbf{G}$  à  $k$  composantes
- $\mathcal{F}_k^\bullet(\mathbf{G})$  ensemble des forêts couvrantes du graphe  $\mathbf{G}$  à  $k$  composantes, dont chacune est enracinée
- $\mathbf{G}$  un graphe fini connexe
- $\mathbf{G}^*$  dual planaire d'un graphe planaire plongé  $\mathbf{G}$
- $\tilde{\mathbf{G}}$  revêtement fini du graphe  $\mathbf{G}$
- $\mathbf{G}^{\times N}$  graphe papillon associé au graphe  $\mathbf{G}$
- $\mathbb{G}$  graphe ruban
- $\mathfrak{G}$  fonction de Green
- $\text{Gr}(E)$  grassmannienne de  $E$
- $\text{Gr}_n(E)$  sous-grassmannienne de  $E$  des sous-espaces de dimension  $n$
- $\text{Gr}(E, \sigma)$  grassmannienne de l'espace scindé  $(E, \sigma)$
- $\text{Gr}_n(E, \sigma)$  grassmannienne des sous-espaces adaptés de dimensions  $\underline{n}$
- $h$  connexion
- $g$  connexion auxiliaire
- $H(\sigma)$  énergie d'une configuration de spins  $\sigma$
- $\mathbb{H}$  algèbre des quaternions (réels)
- $\mathbb{H}$  sous-graphe ruban de  $\mathbf{G}$
- $\mathbf{H}$  sous-graphe couvrant de  $\mathbf{G}$
- $H$  sous-espace vectoriel d'un espace euclidien  $E$
- $H$  potentiel
- $\mathcal{H}(\mathbf{F})$  espace des potentiels sur le fibré  $\mathbf{F}$
- $\mathcal{H}(F)$  ensemble des cycles horizontaux de  $F$
- $I_{\mathbf{G}}(\vec{q})$  intégrale de Feynman
- $I_e$  segment représentant l'arête  $e$  d'un graphe métrique
- $(i, j, \mathfrak{k})$  base réelle des quaternions imaginaires
- $\mathcal{I}$  collection des sous-parties indépendantes d'un matroïde
- $\underline{J} = (J_e)_{e \in E}$  constantes d'interaction du modèle d'Ising
- $\mathbb{K}$  corps de base
- $k$  opérateur auto-adjoint
- $k_0(\mathbf{G})$  nombre de composantes connexes acycliques du graphe  $\mathbf{G}$
- $k(\mathbf{G})$  nombre de composantes connexes de  $\mathbf{G}$
- $\mathcal{KW}$  matrice de Kac–Ward
- $K$  potentiel auxiliaire
- $L_h$  laplacien covariant discret normalisé
- $L_{h,H}$  opérateur laplacien covariant discret normalisé avec un potentiel :  $L_{h,H} = L_h + H$
- $\mathcal{M}$  matroïde
- $\mathcal{M}^*$  matroïde dual
- $\mathcal{M}_K$  matroïde restreint à  $K \subset S$
- $n$  paramètre du modèle de boucles  $O(n)$
- $N$  rang du fibré  $\mathbf{F}$
- $\mathbf{p}$  paramètre du modèle de Fortuin–Kasteleyn (FK)
- $\mathbb{P}$  mesure de probabilité
- $\mathbf{P}$  mesure de probabilité auxiliaire
- $\mathbf{P}$  projection non nécessairement orthogonale
- $\mathbf{P}(\mathbf{G})$  ensemble des chemins du graphe  $\mathbf{G}$
- $\#\mathbf{P}$  classe de complexité de comptage
- $\mathcal{P}(\mathbf{G})$  ensemble des cycles primitifs de  $\mathbf{G}$
- $\text{Pf}$  pfaffien
- $\mathbf{q}$  paramètre du modèle de Fortuin–Kasteleyn
- $\vec{q} = (\vec{q}_v)_{v \in V}$  collection de moments extérieurs
- $\bar{\mathbf{Q}}$  forêt couvrante quantique
- $r_{\mathcal{M}}$  fonction de rang du matroïde  $\mathcal{M}$
- $S$  ensemble de base d'un matroïde
- $\mathcal{S}$  l'ensemble des parties couvrantes/génératrices d'un matroïde
- $\mathcal{S}(F)$  ensemble des cycles penchés de  $F$
- $s(e) = \underline{e}$  le sommet source d'une arête
- $t(e) = \bar{e}$  le sommet but d'une arête
- $\mathcal{T}(\mathbf{G})$  ensemble des arbres couvrants de  $\mathbf{G}$
- $\mathbf{T}_{\mathbf{G}}(\underline{x})$  polynôme de Kirchhoff d'énumération des arbres couvrants de  $\mathbf{G}$
- $\mathbf{U}$  ensemble des sommets internes
- $\mathcal{U}(\mathbf{G})$  ensemble des forêts couvrantes d'unicycles de  $\mathbf{G}$
- $\mathcal{U}_W(\mathbf{G})$  ensemble des forêts couvrantes mixtes, d'arbres enracinés en  $W$  et d'unicycles de  $\mathbf{G} \setminus W$
- $\mathcal{U}^{\rightarrow}(\mathbf{G})$  ensemble des forêts couvrantes d'unicycles orientées
- $\mathcal{U}_m^{\rightarrow}(\mathbf{G})$  ensemble des forêts couvrantes enracinées sur le puits ou les cycles (orientés) de  $\mathbf{G}$
- $\mathcal{U}_{m,N}^{\rightarrow}(\mathbf{G})$  ensemble des forêts couvrantes enracinées sur le puits ou les cycles (orientés) de  $\mathbf{G}^{\times N}$
- $\mathcal{HU}^{\rightarrow}(\mathbf{G})$  sous-ensemble de  $\mathcal{U}_{m,N}^{\rightarrow}(\mathbf{G})$  dont les branches sont « horizontales »
- $\mathbf{V}$  ensemble des sommets d'un graphe  $\mathbf{G}$
- $\text{val}(c)$  valuation d'un cycle  $c$
- $\mathbf{W}$  ensemble des sommets du puits
- $\underline{x} = (x_e)_{e \in E}$  variables sur les arêtes
- $\mathbf{X}$  sous-ensemble aléatoire de  $S$
- $x$  variable du polynôme de Tutte
- $y$  paramètre d'activité des arbres couvrants
- $z$  paramètre d'énergie de pliage de la courbe de contour des arbres couvrants
- $z$  variable du polynôme de Bollóbas–Riordan
- $\mathcal{Z}_{\text{pair}}(\mathbf{G}, \underline{x})$  polynôme générateur des sous-graphes de degré pairs aux sommets
- $\mathcal{Z}_{\text{Ising}}(\mathbf{G}, \underline{J}, \beta)$  fonction de partition du modèle d'Ising
- $\mathcal{Z}_{\text{dbl-I}}(\mathbf{G}, \underline{x})$  fonction de partition du modèle XOR-Ising
- $\mathcal{Z}_{\text{FK}}(\mathbf{G}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$  fonction de partition du modèle de Fortuin–Kasteleyn (FK)
- $\mathcal{Z}_{\text{FK}}(\mathbf{G}, \underline{x}, \mathbf{q})$  variante multivariée de la fonction de partition du modèle FK
- $\mathcal{Z}_{\mathbf{G}}(x, y)$  polynôme de Tutte de  $\mathbf{G}$
- $\mathcal{Z}_{\mathbf{G}}(\underline{x})$  polynôme de Tutte multivarié de  $\mathbf{G}$
- $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(x, y)$  polynôme de Tutte du matroïde  $\mathcal{M}$
- $\mathcal{Z}_{\text{BR}, \mathbf{G}}(x, y, z)$  polynôme de Bollóbas–Riordan d'un graphe ruban  $\mathbb{G}$
- $Z_1(\mathbf{G}, \mathbb{Z})$  groupe abélien libre des cycles du graphe  $\mathbf{G}$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_v, \langle \cdot, \cdot \rangle_e$  produits scalaires des fibres  $F_v, F_e$
- $(\cdot, \cdot)$  produits scalaires sur  $\Omega^0(\mathbf{F})$  et  $\Omega^1(\mathbf{F})$

# Index

- accouplement de hauteur, 14
- activité
  - d'un arbre couvrant, 30
  - des bases d'un matroïde, 45
- algèbre extérieure, 40, 53
- algorithme
  - d'échantillonnage déterminantal, 39, 47
  - de Wilson, 17, 55
- application moment, 44
- arbre
  - couvrant, 3
  - de Cayley, 2
  - de Kalai, 12
- arbre couvrant, 9
  - actif, 30
  - avec énergie de pliage, 34
  - uniforme, 16, 49
- association
  - négative, 17
  - positive, 17
- bijection
  - de Bernardi–Mullin–Sheffield, 35
  - de Dhar–Majumdar, 5
  - de Joyal, 2
- boucle, 10
  - d'un matroïde, 44
  - de Wilson, 61
- bout, 17
- cône quantique, 34
- carte
  - boisée, 4, 33
  - brownienne, 6
- carte planaire
  - aléatoire, 33
  - décorée, 34
- chaîne de Markov, 26, 28, 33
- champ de Higgs, 74
- champ de vecteurs libre gaussien, 73
- complément de Schur, 59
- complexe simplicial, 12
  - chaînes et cochaînes d'un, 85
- complexité
  - #P-difficile, 54
  - FP, 54
  - d'un graphe, 3
  - d'un problème de comptage, 54
- conjecture
  - de Belavin–Polyakov–Zamolodchikov, 6
  - de Nienhuis, 32
- connexion, 11
  - infinitésimale, 81
- couplage parfait, 3
- coupure, 9
  - fondamentale, 9, 31
- criticité (d'un modèle), 30, 33
  - auto-organisée, 26
- cycle, 9
  - eulérien, 3, 31, 90
  - fondamental, 9, 31
  - primitif, 66
- dérivée discrète, 9
  - covariante, 11, 79
- déterminant, 37
  - $\tau$ -, 62
- Dirichlet
  - sections harmoniques de, 84
- ensemble d'unicité, 41
- équivariance, 71
- espace métrique aléatoire de Liouville, 21, 33
- évolution de Schramm–Loewner (SLE), 19, 32, 90, 91
  - qui remplit l'espace, 34
- excursion brownienne, 36
- fibré vectoriel, 10
- fonction de partition, 23
- forêt couvrante
  - d'arbres, 51
  - d'arbres et d'unicycles, 63
  - d'unicycles, 49
  - quantique, 79
  - trace d'une, 80
- formule
  - d'Euler, 90
  - de Cayley, 2
  - de Feynman–Kac, 75
  - de Kac–Ward, 24
  - de Kalai, 12
- FPRAS (Fully Polynomial Randomized Approximation Scheme), 55
- géométrie
  - aléatoire, 20
  - combinatoire, 8
- graphe, 8
  - chaînes et cochaînes d'un, 9
  - d'échange des bases d'un matroïde, 33, 60
  - dirigé, 8, 70
  - fonctionnel, 2, 63
  - infini, 83
  - médial, 31
  - non dirigé, 8
  - papillon, 64
  - planaire, 23



- ruban, 90
- grassmannienne, 38
  - stratification matroïdale, 43
- Green
  - fonction de, 14
  - noyau potentiel de, 28
  - section de, 74
- groupe
  - abélien, 27, 69
    - libre, 9, 50
  - de Galois, 67
  - de jauge, 21
  - fondamental, 67
  - orthogonal, 77
  - symplectique, 47
  - unitaire, 38
- holonomie, 11
  - de fuite, 83
  - tordue par un potentiel, 74
- inégalité
  - de Kato, 73, 83
  - de Rayleigh, 83
  - FKG, 17
- intégrale de Feynman, 14
- invariance
  - conforme, 6
  - de jauge, 65, 70, 71
- isthme, 10
  - d'un matroïde, 44
- laplacien discret, 28
  - covariant, 11
  - matrice du, 62
- lemme
  - de construction routinier, 37
  - de Schur, 59
- loi
  - de Tracy–Widom, 7
  - gaussienne, 7
- marche aléatoire, 36
  - à boucles effacées, 17, 19, 29
- matroïde, 13, 42, 55, 80
  - $h$ -bicirculaire, 43, 45
  - bicirculaire, 13, 55
  - circulaire, 13, 55
  - poly-, 45
  - polytope de, 44
  - représentable, 43
  - transverse, 80
- mesure
  - canonique, 87
  - de Haar, 38
  - de Yang–Mills, 80
  - sur les boucles, 19
- modèle
  - d'Ashkin–Teller, 26
  - d'Ising, 23
  - de boucles  $O(n)$ , 29, 90
  - de dimères, 16
  - de Fortuin–Kasteleyn (FK), 29
  - de Potts, 29
  - des arbres couvrants actifs, 30
  - du tas de sable abélien, 26
- mot de Dyck, 2, 36
- mouvement brownien, 6, 34
- Peanosphère, 34
- Plücker
  - coordonnées de, 42
  - plongement de, 37
- polynôme
  - de Bollóbas–Riordan, 90
  - de Kirchhoff, 57
  - de Tutte, 10, 30
    - d'un matroïde, 44
    - du matroïde bicirculaire, 45
  - de Whitney, 10
  - stable, 14
- polynômes multivariés
  - d'énumération acyclique, 58
  - d'énumération connexe, 58
  - de Kirchhoff, 57
  - de Symanzik, 14, 60
  - de Tutte, 9
  - stables, 57
- potentiel, 77
- POVM (Positive Operator Valued Measure), 46
- processus déterminantal, 37
  - linéaire, 39
  - quaternion, 47
- propriété de Rayleigh forte, 17
- pseudo-forêt, 2, 63
- représentation linéaire, 68
  - unitaire, 71
- revêtement de graphes, 67
  - normal, 68
- scindement, 38
- simplifié d'un chemin, 28
- SLE, 6
  - dualité pour, 18
- soupe de boucles, 75
  - écrémée, 19
- sous-fibré
  - $h$ -acyclique, 80
- sous-graphe
  - acyclique, 51, 58
  - connexe, 50, 58
  - couvrant, 8, 10
- spin,  $i$ , 25
- symétrie de jauge, 71
- tas de sable abélien, 26
  - densité du, 27
- taux d'effacement de boucles, 29
- temps local, 75
- théorème
  - de Kirchhoff, 82
  - de projection moyenne, 40
  - de Pythagore, 37, 42
- théorème d'appariement
  - de Hall–Rado, 46, 81
- théorème d'isomorphisme
  - de Dynkin–Eisenbaum, 72
  - de Le Jan–Sznitman, 75
- théorème matrix-tree
  - de Kenyon, 64
  - de Kirchhoff, 64
  - de Zaslavsky–Chaiken–Forman, 64
- universalité, 6