



**HAL**  
open science

# Mode de Higgs dans les hétéro-jonctions supraconductrices

Pierre Vallet

► **To cite this version:**

Pierre Vallet. Mode de Higgs dans les hétéro-jonctions supraconductrices. Physique [physics]. Université de Bordeaux, 2024. Français. NNT : 2024BORD0200 . tel-04758521

**HAL Id: tel-04758521**

**<https://theses.hal.science/tel-04758521v1>**

Submitted on 29 Oct 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE  
POUR OBTENIR LE GRADE DE  
**DOCTEUR**  
**DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX**

ECOLE DOCTORALE SCIENCES PHYSIQUES ET DE  
L'INGÉNIEUR

LASERS, MATIÈRE, NANOSCIENCES

Par **Pierre VALLET**

**Mode de Higgs dans les hétéro-jonctions  
supraconductrices**

Sous la direction de : **Jérôme CAYSSOL (Professeur, Université de Bordeaux)**

Soutenue le 16 octobre 2024

Membres du jury :

<b>M. APRILI, Marco</b>	Directeur de Recherche	CNRS (LPS Orsay)	Rapporteur
<b>M. HOUZET, Manuel</b>	Directeur de Recherche	CEA (Grenoble)	Rapporteur
<b>Mme. BOUCHIAT, Hélène</b>	Directrice de recherche	CNRS (LPS Orsay)	Examinatrice
<b>Mme. TRIFUNOVIC, Luka</b>	Chargé de recherche	CNRS (LPT Toulouse)	Examineur
<b>M. TAMARAT, Philippe</b>	Professeur	Université de Bordeaux (LP2N)	Président
<b>M. CAYSSOL, Jérôme</b>	Professeur	Université de Bordeaux (LOMA)	Directeur de thèse

---

## Mode de Higgs dans les hétéro-jonctions supraconductrices

**Résumé :** Le développement des technologies THz durant les dix dernières années a permis la détection directe du mode de Higgs dans les supraconducteurs. Dans cette thèse nous proposons d'étudier théoriquement le transport électronique dans trois systèmes d'hétéro-jonctions supraconductrices présentant des signatures du mode de Higgs.

Nous avons étudié la possibilité d'exciter le mode de Higgs dans un supraconducteur propre (en l'absence d'impureté) à l'aide d'une irradiation THz. Ce problème est toujours discuté à l'heure actuelle, plusieurs résultats contradictoires prédisant la possibilité ou l'impossibilité d'exciter le mode. Nous avons démontré dans cette thèse que cette excitation était possible en présence d'un mécanisme de dépariement des paires de Cooper. En l'absence d'un tel mécanisme le mode de Higgs est identiquement nul dans un système propre. Ensuite, nous avons montré dans une approche quasi-classique qu'il existait une signature résonante du mode de Higgs dans le courant ac d'une jonction tunnel propre NIS, le mode de Higgs étant lui-même résonant à la fréquence égale au gap supraconducteur. Pour continuer notre étude des systèmes propres, nous nous sommes intéressés à une jonction balistique NSN dans le formalisme de Floquet. Aux interfaces NS il est connu qu'un électron peut être réfléchi en un trou par le mécanisme de réflexion d'Andreev. L'interaction de cet effet avec la présence du mode de Higgs produit une signature de ce dernier dans la conductance différentielle de la jonction sous la forme d'un plateau. Le dernier système que nous avons étudié est une jonction Josephson soumise à un champ THz. L'interaction entre le mode de Higgs et l'effet Josephson produit de nombreux effets détectables dus au mode de Higgs : un pic de courant dc, un courant ac en l'absence de différence de tension dans la jonction ou encore la présence de pics dans le courant ac, produit de l'interaction entre le mode de Higgs et le transport assisté par photon.

**Mots-clés :** Matière condensée, Supraconductivité, Mode de Higgs, Brisure de symétrie, Réponse non-linéaire, THz

---

## Higgs mode in superconducting heterojunctions

**Abstract:** The development of THz technologies over the last ten years has enabled the direct detection of the Higgs mode in superconductors. In this thesis, we propose to study theoretically the transport of three superconducting heterojunction systems exhibiting Higgs mode signatures.

We first investigated the possibility of exciting the Higgs mode in a clean superconductor (in the absence of impurities) using THz irradiation. This problem is still being debated today, with several contradictory results predicting the possibility and impossibility of exciting the mode. In this thesis, we have demonstrated that such excitation is possible in the presence of a Cooper pair depairing mechanism. In the absence of such a mechanism, the Higgs mode is identically zero in a clean system. Next, we showed in a quasi-classical approach that there is a resonant signature of the Higgs mode in the ac current of a NIS clean tunnel junction, the Higgs mode itself being resonant at the frequency equal to the superconducting gap. To continue our study of clean system, we turned our attention to an NSN ballistic junction in the Floquet formalism. At NS interfaces, it is known that an electron can be reflected into a hole by the Andreev reflection mechanism. The interaction of this effect with the presence of the Higgs mode produces a Higgs signature in the differential conductance of the junction in the form of a plateau. The last system we studied was a Josephson junction. The interaction between the Higgs mode and the Josephson effect produces a number of detectable effects due to the Higgs mode: a dc current peak, an ac current in the absence of a voltage difference in the junction, or the presence of peaks in the ac current, a product of the interaction between the Higgs mode and photon-assisted transport.

**Keywords:** Condensed matter, Superconductivity, Higgs mode, Symmetry breaking, Non-linear response, THz

---



# Remerciements

Je voudrais commencer par remercier particulièrement les membres du comité pour le temps et l'attention dédiés à ma thèse et sa soutenance.

Je remercie mon directeur de thèse, Jérôme Cayssol, pour la liberté qu'il m'a donnée dans mon travail et sa patience.

Merci à toute l'équipe du LOMA pour son accueil, et en particulier merci à Nicolas, Thomas et Vadim pour les formidables répétitions musicales et les concerts que nous avons faits ensemble.

Je remercie enfin mes parents pour m'avoir permis de faire de longues études en toute quiétude et pour leurs soutiens.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Brisure spontanée de symétrie et supraconductivité</b>	<b>5</b>
1.1 Brisure de symétrie globale	5
1.1.1 Symétries brisées et paramètres d'ordres	5
1.1.2 Symétrie globale	8
1.1.3 Théorème de Nambu-Goldstone	9
1.1.4 Aparté sur la théorie des groupes	10
1.2 Brisure de symétrie locale	12
1.2.1 Symétrie locale (ou de jauge)	12
1.2.2 Brisure de symétrie locale et Mécanisme d'Anderson-Higgs	15
1.3 Conclusion	18
<b>2 Théories phénoménologiques de la supraconductivité</b>	<b>19</b>
2.1 Approche phénoménologique "à la London"	19
2.1.1 Modèle de London (formulation historique)	20
2.1.2 Lagrangien effectif et invariance de jauge	20
2.1.3 Effet Meissner	21
2.1.4 Courant sans résistance	23
2.2 Modèle phénoménologique de Ginzburg-Landau	24
2.2.1 Fonctionnelle de Ginzburg-Landau	24
2.2.2 Mécanisme d'Anderson-Higgs	26
2.3 Effet Josephson	28
2.4 Conclusion	30
<b>3 Supraconductivité : théorie microscopique</b>	<b>31</b>
3.1 Théorie BCS	31
3.2 Fonctions de Green et théorie de Gor'kov	36
3.3 Équations de Bogoliubov-de Gennes	38
3.4 Restauration de l'invariance de jauge dans la théorie BCS	41
3.4.1 Réponse linéaire	41
3.4.2 Modes collectifs	45
3.5 Conclusion	50
<b>4 Théorie de la supraconductivité hors-équilibre</b>	<b>51</b>
4.1 Formalisme de Keldysh	51

## TABLE DES MATIÈRES

---

4.1.1	Le problème du hors-équilibre et choix du contour . . . . .	51
4.1.2	Fonctions de Green hors-équilibre . . . . .	53
4.1.3	Équations de Gor'kov hors-équilibre . . . . .	56
4.2	Approximation quasi-classique . . . . .	57
4.2.1	Fonctions de Green quasi-classique . . . . .	57
4.2.2	Équations quasiclassiques . . . . .	61
4.2.3	Conditions aux bords . . . . .	63
4.2.4	Application de la théorie quasi-classique à l'effet Josephson . . . . .	64
4.3	Conclusion . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Mode de Higgs dans une jonction tunnel NIS</b>	<b>71</b>
5.1	État de l'art . . . . .	71
5.2	Modèle de jonction irradiée . . . . .	72
5.2.1	Équation d'Eilenberger homogène dans la partie normale . . . . .	73
5.2.2	Équation d'Eilenberger homogène dans la partie supraconductrice . . . . .	74
5.3	Résonance de Higgs . . . . .	77
5.3.1	Amplitude du mode de Higgs . . . . .	77
5.3.2	Limite à température nulle . . . . .	80
5.4	Courant dans la jonction . . . . .	81
5.5	Conclusion . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Mode de Higgs dans une jonction balistique NSN</b>	<b>85</b>
6.1	Théorie de Floquet . . . . .	85
6.2	Problème de transport dans la jonction . . . . .	86
6.2.1	Modèle de la jonction . . . . .	86
6.2.2	Problème de transport . . . . .	87
6.2.3	Spectre de Floquet . . . . .	89
6.3	Signatures du mode de Higgs dans la conductance différentielle . . . . .	90
6.3.1	Conductance différentielle . . . . .	90
6.3.2	Approximation de la phase tournante . . . . .	93
6.4	Conclusion . . . . .	94
<b>7</b>	<b>Mode de Higgs dans une jonction Josephson</b>	<b>95</b>
7.1	État de l'art . . . . .	95
7.2	Modèle de jonction diffusive . . . . .	97
7.3	Jonction Josephson sans irradiation . . . . .	99
7.3.1	Fonction de Green à potentiel non-nul . . . . .	99
7.3.2	Courant dans la jonction SIS . . . . .	99
7.4	Signature du mode de Higgs dans la jonction . . . . .	100
7.4.1	Effet de la radiation sur la fonction de Green BCS . . . . .	101
7.4.2	Fonction de Green aux deuxième ordre . . . . .	103
7.4.3	Courant et signatures du Higgs . . . . .	104
7.5	Conclusion . . . . .	108
	<b>Conclusion</b>	<b>111</b>



<b>A Courants dans la jonction SIS</b>	<b>125</b>
A.1 Limite asymptotique des courants de la jonction SIS à température nulle . . .	125
A.2 Courants dans la jonction irradiée . . . . .	127

# Liste des symboles

$\mathcal{E}_H$ Espace d'Hilbert	$\Delta$ Gap supraconducteur
$ \Psi\rangle$ Vecteur en notation ket	$\chi$ Phase supraconductrice
$\langle\Psi $ Fonctionnelle linéaire en notation bra	$\Phi$ Vecteur de Nambu
$ \Psi_0\rangle$ État fondamental	$\omega_D$ Fréquence de Debye
$\Psi(x)$ Opérateur fermionique	$\mu$ ou $E_F$ Énergie de Fermi
$c_{\mathbf{k}}^\dagger, c_{\mathbf{k}}$ Opérateur de création/annihilation	$v_F$ Vitesse de Fermi
$\sigma_i$ Matrices de Pauli, $i = 1, 2, 3$	$N_0$ Densité d'état à la surface de Fermi
$\delta(x)$ Fonction delta de Dirac	$l$ Libre parcours moyen
$H, \mathcal{H}$ Hamiltonien, densité hamiltonienne	$\tau$ Temps de parcours moyen
$L, \mathcal{L}$ Lagrangien, densité lagrangienne	$D$ Constante de diffusion
$U_g$ Opérateur de symétrie	$G_T$ Conductance de jonction
$Q$ Charge de Noether	$\check{G}$ Fonction de Green dans l'espace de Keldysh
$\dagger$ Transposée complexe	$\hat{G}$ Fonction de Green dans l'espace de Nambu
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ Produit vectoriel	$G^{<, >}$ Fonction de Green "lesser", "greater"
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ Produit scalaire	$G^{R/A/K}$ Fonction de Green retardée/avancée/Keldysh
$\mathbf{x}$ Vecteur position	$g^{R/A/K}$ Fonction de Green quasi-classique retardée/avancée/Keldysh
$t$ Temps	$\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ Ensemble des nombres entiers relatifs, réels et complexes
$\mathbf{p}$ Vecteur d'impulsion	$[\cdot, \cdot]$ Commutateur
$\omega$ Pulsation	$\{\cdot, \cdot\}$ Anti-commutateur
$\partial_\mu$ Dérivée partielle, $\mu = \mathbf{x}, t$	$c$ Vitesse de la lumière
$D_\mu$ Dérivée covariante	$h, \hbar$ Constante de Planck, constante de Planck réduite
$\nabla = \partial_{\mathbf{x}}$ Gradient	$k_B$ Constante de Boltzmann
$\text{rot} = \nabla \times$ Rotationnel	$\mu_0$ Perméabilité magnétique du vide
$\text{div} = \nabla \cdot$ Divergence	$m_e$ Masse de l'électron
$\delta/\delta X$ Dérivée fonctionnelle par rapport à $X$	
$d^4x = dt d\mathbf{x}$ Différentielle d'espace-temps	
$A^\mu = (V, \mathbf{A})$ Champ électromagnétique	
$F_{\mu\nu}$ Tenseur électromagnétique	
$\mathbf{E}$ Champ électrique	
$\mathbf{B}$ Champ magnétique	



# Liste des abréviations

<b>BDG</b>	Bogoliubov-de Gennes
<b>DDL</b>	Degré de liberté
<b>DE</b>	Densité d'états
<b>FG, FGQ</b>	Fonction de Green, Fonction de Green quasi-classique
<b>MAH</b>	Mécanisme d'Anderson-Higgs
<b>NG</b>	Nambu-Goldstone
<b>RAM</b>	Réflexion d'Andreev multiple
<b>SC</b>	Supraconducteur
<b>TAP</b>	Transport assisté par photons
<b>VMV</b>	Valeur Moyenne dans le Vide



# Introduction

Le but de cette thèse est de trouver de nouveaux moyens de détection du mode de Higgs dans les supraconducteurs, en utilisant des modèles de jonctions hybrides de type NIS, NSN ou Josephson.

## Brisure de symétrie et mécanisme d'Anderson-Higgs

Le concept de *symétrie* est présent dans tous les domaines de la physique, du modèle standard des particules à la cosmologie, et est particulièrement fructueux en matière condensée. Bien que des considérations de symétrie et d'esthétisme aient toujours conditionné les modèles physiques (comme l'utilisation des solides de Platon chez Kepler), c'est à partir du XIX<sup>e</sup> siècle que la notion moderne de symétrie en physique commence à émerger. C'est le Français Pierre Curie qui met pour la première fois en avant l'importance des symétries en physique [1, 2] et propose la loi qui porte son nom : "*Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.*" Cette loi simple et puissante permet par exemple de contraindre la forme des champs électriques et magnétiques à partir des symétries de leurs sources. Ces considérations ont imprégné tout le XX<sup>e</sup> siècle, avec notamment la démonstration en 1915 du lien entre symétrie et quantité conservée par Emmy Noether [3]. Les symétries sont abondamment utilisées en mécanique quantique pour classer les états quantiques via les nombres quantiques et contraindre les transitions quantiques entre ceux-ci. Dans les années 60 le modèle standard des particules est compris comment étant une théorie de Yang-Mills basée sur une symétrie de jauge  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ .

Un concept lié à celui de symétrie et aussi important est celui de *brisure spontanée de symétrie* (voir Sec. 1). Bien que les lois physiques puissent posséder des symétries, on observe chaque jour des objets qui ne respectent pas ces symétries. Par exemple, une chaise isolée est décrite par un hamiltonien invariant par translation. Elle devrait donc avoir une quantité de mouvement précise et d'après l'inégalité d'Heisenberg être complètement délocalisée. Cependant, la chaise (et tout objet macroscopique) occupe évidemment une position précise; la symétrie d'invariance par translation est donc brisée. Un autre exemple se trouve dans les aimants sous la température de Curie. L'hamiltonien possède une symétrie  $SO(3)$  mais l'aimant a une aimantation dans une direction donnée, brisant ainsi la symétrie. Ce n'est qu'à haute température que la symétrie réapparaît dans le système. Ce phénomène général où un système ne possède pas toutes les symétries des lois le

décrivant est appelé *brisure spontanée de symétrie*. C'est Landau [4] qui a compris l'importance des symétries pour classer les différentes phases d'un système. Dans la théorie qui porte son nom, une transition de phase est associée à la brisure ou la réémergence d'une ou plusieurs symétries.

Encore dans les années 60, on comprend que la masse des bosons de l'interaction faible  $W^\pm, Z^0$  peut être simplement expliquée par une brisure de symétrie *locale*. Ce mécanisme, dit d'Anderson-Higgs [5, 6] (voir Sec. 1.2.2), contraint l'interaction faible à être à courte portée. À la suite de cette brisure de symétrie, un mode d'excitation massif apparaît qu'on appelle *mode de Higgs*. Ce mode est découvert expérimentalement dans le contexte de la physique des particules au LHC en 2012 [7].

### La supraconductivité comme mécanisme d'Anderson-Higgs

Après les théories phénoménologiques de London [8] et de Ginzburg-Landau [9], la première théorie microscopique de la supraconductivité, dite théorie BCS, est développée par Bardeen, Schrieffer et Cooper en 1957 [10] (voir Sec. 3.1). Cette dernière, basée sur une condensation macroscopique de paires électroniques (paires de Cooper), prédit toutes les propriétés des supraconducteurs conventionnels, telles que l'effet Meissner, la conductance infinie, ... Si le succès de la théorie était indéniable, elle était néanmoins non-invariante par transformation de jauge. C'est Anderson [5, 11, 12] et Nambu [13] qui sont les premiers à reconnaître l'importance du mode plasmonique dans l'invariance de jauge supraconductrice. Ce mode plasmonique, le plasmon, couplé au boson de jauge de l'électromagnétisme, c-à-d. le photon, implique l'invariance de jauge de la théorie. Or le plasmon, qui correspond à la composante longitudinale du photon dans les supraconducteurs, est une conséquence directe du mécanisme d'Anderson-Higgs. Le phénomène de supraconductivité peut donc être compris comme émergent d'un mécanisme d'Anderson-Higgs.

On peut montrer (nous le ferons Sec. 2.1), que toutes les propriétés supraconductrices peuvent être retrouvées en considérant une brisure de symétrie locale  $U(1) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  [14]. Par corollaire, on s'attend à trouver un mode collectif massif dans les supraconducteurs, un mode de Higgs, correspondant à l'oscillation du gap supraconducteur.

### Développement des technologies THz et détection du mode de Higgs

La masse du mode de Higgs dans les supraconducteurs est l'ordre du meV. Pour une excitation optique, il est donc nécessaire d'avoir des lasers puissants dans le THz. Situé entre les fréquences radios et les infrarouges lointains, le THz a longtemps été difficilement atteignable. Or, dans les années 2010, la technologie THz s'est développée de façon substantielle [15–25]. C'est ce qui explique que la première détection directe du mode de Higgs dans les supraconducteurs a eu lieu un an après celle du LHC, en 2013 [26]. Sa détection se base principalement sur la génération de troisième harmonique dans le courant dû au mode de Higgs. Ce dernier a été détecté dans différents types de supraconducteurs (s-wave, d-wave, cuprate, ...) [27–30]. Si ces techniques sont purement optiques, il a été proposé récemment [31] de détecter le mode de Higgs dans une expérience de transport avec une jonction NIS diffuse. Une des questions théoriques toujours débattue est la

possibilité ou non d'exciter le mode de Higgs dans un supraconducteur propre [32–36] (voir Sec. 5).

### Plan du manuscrit

Les quatre premiers chapitres seront une présentation pédagogique des différents concepts et formalismes importants dans cette thèse. Dans la Sec. 1, je présente en détail la notion de symétrie et brisure de symétrie, qu'elle soit globale ou locale. Je démontre le théorème de Goldstone dans le cas d'une brisure de symétrie globale et présente le mécanisme d'Anderson-Higgs dans le cas locale. J'introduis ensuite (Sec. 2) une théorie phénoménologique de la supraconductivité basée sur le mécanisme d'Anderson-Higgs Sec. 2.1 et la théorie de Ginzburg-Landau Sec. 2.2 pour enchaîner sur la théorie microscopique BCS Sec. 3. Je montrerai ensuite comment l'invariance de jauge est retrouvée et l'importance des modes collectifs pour cette dernière (Sec. 3.4). Enfin, Sec. 4, le formalisme de Keldysh décrivant la supraconductivité hors-équilibre est introduit. Je présente ensuite l'approximation quasi-classique.

Les trois derniers chapitres présentent les résultats originaux de cette thèse. J'étudie dans un premier temps (Sec. 5) la possibilité théorique d'exciter le mode de Higgs dans un supraconducteur propre en utilisant le formalisme quasi-classique. Je montre que la réponse est positive, à condition qu'une constante de Dynes décrivant un mécanisme de département soit présente. Dans ce même chapitre j'étudie le courant induit par le mode de Higgs dans une jonction NIS irradiée à potentiel fini, toujours dans l'approximation quasi-classique en résolvant l'équation d'Eilenberger. Dans un second temps Sec. 6, une jonction balistique NSN irradiée est étudiée. Je montre en utilisant le formalisme de Bogoliubov-de Gennes que le mode de Higgs ouvre des gaps dans les bandes de Floquet. Ces dernières sont visibles dans la conductance différentielle de la jonction. Dans le dernier chapitre Sec. 7, je présente une jonction irradiée SIS. L'interaction entre l'effet Josephson et le mode de Higgs entraîne l'apparition de pics de courant dans l'amplitude ac. De plus, un courant dc dû au mode de Higgs existe même en absence de tension entre les supraconducteurs. Enfin, un pic de Shapiro créé par le mode de Higgs est présent dans le courant dc de la jonction.





# Brisure spontanée de symétrie et supraconductivité

Bien que très diverses, les symétries peuvent être classées en deux catégories distinctes :

- discrète (ex. parité, renversement du temps...),
- continue (ex. rotation, symétrie de Lorentz...).

Je m'intéresserai exclusivement aux brisures de symétries continues, nécessaires à la compréhension du phénomène de supraconductivité. J'introduis dans la Sec. 1.1 les définitions formelles de symétrie et brisure de symétrie globale et je démontre le théorème de Nambu-Goldstone (NG). Dans la Sec. 1.2 je montre comment une théorie avec symétries de jauge échappe au théorème de NG et donne un exemple de mécanisme d'Anderson-Higgs.

## 1.1 Brisure de symétrie globale

### 1.1.1 Symétries brisées et paramètres d'ordres

Pour formuler la notion de brisure de symétrie, commençons par distinguer ce que signifient respectivement les phrases "le système obéit à telle symétrie" et "tel état quantique de ce système obéit à cette symétrie". Dans la théorie quantique, un état physique est défini modulo un facteur de phase globale. Un état physique est donc décrit par un rayon d'un espace de Hilbert  $\mathcal{E}_H$  qu'on notera  $e^{i\varphi} |\Psi\rangle$  avec  $\varphi \in \mathbb{R}$  une phase globale et  $|\Psi\rangle \in H$  un vecteur [37]. Si un état est invariant sous une symétrie  $g$  on s'attend à ce que l'action de cette symétrie sur cet état le transforme en un état du même rayon.

**Définition.** L'opérateur symétrie associé à  $g$  est défini comme un opérateur unitaire  $U_g$  qui agit sur un état symétrique  $|\Psi\rangle$  tel que

$$U_g |\Psi\rangle = e^{i\phi_g} |\Psi\rangle. \tag{1.1.1}$$

On peut également vouloir définir cet opérateur par rapport à l'hamiltonien du système  $H$ . Dans ce cas, l'opérateur symétrie doit laisser invariant  $H$ , c.-à-d.

$$H' = U_g H U_g^\dagger \stackrel{!}{=} H, \quad (1.1.2)$$

avec le symbole " $\dagger$ " représentant l'opération complexe conjuguée. De façon équivalente,

**Définition.**  $H$  est invariant sous l'action de  $g$  s'il existe un opérateur unitaire  $U_g$  tel que

$$[H, U_g] = 0. \quad (1.1.3)$$

Ici  $[\cdot, \cdot]$  désigne l'opérateur de commutation. Une conséquence immédiate de cette définition est que les états  $|\Psi\rangle$  et  $U_g |\Psi\rangle$  sont dégénérés. En effet, si  $H |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle$ ,

$$H U_g |\Psi\rangle \stackrel{(1.1.3)}{=} U_g H |\Psi\rangle \quad (1.1.4)$$

$$= E U_g |\Psi\rangle. \quad (1.1.5)$$

De fait, si un état  $|\Psi'\rangle$  n'est pas invariant suivant  $g$  alors  $U_g |\Psi'\rangle$  est physiquement inéquivalent mais dégénéré avec  $|\Psi'\rangle$ . Comme dit dans l'introduction ci-dessus, une brisure spontanée de symétrie (BSS) a lieu lorsque l'état fondamental du système ne respecte pas une symétrie  $g$  de l'hamiltonien. On peut donner une première définition de BSS :

**Définition.** On dit qu'une symétrie  $g$  est spontanément brisée lorsque l'état fondamental du système  $|\Psi_0\rangle$  n'est pas un état propre de l'opérateur  $U_g$ , lui-même symétrie de l'hamiltonien tel que  $[H, U_g] = 0$ . Autrement dit,

$$U_g |\Psi_0\rangle \neq e^{i\Phi_g} |\Psi_0\rangle. \quad (1.1.6)$$

Dans le cas d'une symétrie continue,  $U_g$  va engendrer une famille continue d'états fondamentaux possibles non équivalents. Le système choisit *spontanément* un de ces états dans le sens où une perturbation infinitésimale brisant *explicitement* la symétrie  $g$  permet au système de sélectionner et de se retrouver dans un état fondamental brisant  $g$ . Dans un système de taille  $N$ , la perturbation locale est proportionnelle à  $1/N$  et devient donc négligeable dans le cas d'objets macroscopiques.

Landau [4] a eu l'idée d'introduire un marqueur de l'ordre, appelé *paramètre d'ordre* (PO), servant par construction à caractériser l'état du système. La valeur moyenne dans le vide (ou dans l'état fondamental en matière condensée) notée  $VMV$  de ce dernier doit, par construction, indiquer dans quel état se trouve le système. Si la valeur moyenne dans le vide  $\mathfrak{S} \equiv \langle \mathcal{O} \rangle = 0$ , le système est dit dans l'état *symétrique* (l'état fondamental ne brise aucune symétrie). Au contraire, si  $\mathfrak{S} \neq 0$  alors le système a spontanément brisé une ou plusieurs symétries. Il n'est pas toujours évident de trouver le PO approprié pour un système donné. Cependant, il existe une procédure théorique générale pour construire un PO [38].

**Définition.** Une symétrie  $g$  est spontanément brisée s'il existe un opérateur  $\Phi$  tel que

$$\langle \Psi_0 | [Q, \Phi] | \Psi_0 \rangle \neq 0. \quad (1.1.7)$$

Considérons un système à  $N$  particules et notons  $J$  l'amplitude de la perturbation brisant explicitement la symétrie. Le commutateur  $\mathcal{O} = [Q, \Phi]$  à volume fini obéit aux limites singulières

$$\lim_{J \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \mathcal{O} \rangle_{J,N} \neq 0, \quad (1.1.8)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{J \rightarrow 0} \langle \mathcal{O} \rangle_{J,N} = 0. \quad (1.1.9)$$

La non-commutativité de ces limites est une signature de la BSS. Si la définition mathématique du PO est claire, sa compréhension physique n'est pas toujours évidente. Dans le cas d'un ferromagnétique, le PO est l'aimantation qui prend une direction privilégiée sous la température de Curie. Si ce dernier reste assez intuitif, le PO pour un supraconducteur est un nombre complexe décrivant la condensation de paires d'électrons dans l'état fondamental dont le sens physique n'est pas évident à première vue (voir Sec. 3.1).

Pour comprendre l'intérêt de cette définition par rapport à la première (Éq. (1.1.6)), il est utile de regarder ce qu'il se passe lorsqu'un générateur d'une symétrie brisée agit sur  $|\Psi_0\rangle$ . Considérons une symétrie  $g$  associée à l'opérateur  $U_g$ . Ce dernier étant unitaire, on peut l'écrire comme une exponentielle d'un opérateur hermitien

$$U_g = e^{i\alpha Q}, \quad (1.1.10)$$

avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . L'opérateur  $Q$  est appelé le *générateur infinitésimal des symétries*. On considérera seulement que la charge et l'état fondamental sont invariants par translation, c-à-d.  $P|\Psi_0\rangle = 0$  et  $[Q, P] = 0$ . La charge  $Q$  pouvant être écrite comme l'intégrale d'une fonction  $j_0(x)$  (Éq. 1.1.22), on a

$$\langle \Psi_0 | Q Q | \Psi_0 \rangle = \int d^3x \langle \Psi_0 | j_0(x) Q | \Psi_0 \rangle \quad (1.1.11)$$

$$= \int d^3x \langle \Psi_0 | e^{iPx} j_0(0) e^{-iPx} Q | \Psi_0 \rangle \quad (1.1.12)$$

$$= \int d^3x \langle \Psi_0 | e^{iPx} j_0(0) e^{-iPx} Q e^{iPx} e^{-iPx} | \Psi_0 \rangle \quad (1.1.13)$$

$$= \int d^3x \langle \Psi_0 | j_0(0) Q | \Psi_0 \rangle. \quad (1.1.14)$$

L'intégrande ci-dessus est donc indépendante de  $x$ . Dans le cas d'une brisure de symétrie  $Q|\Psi_0\rangle \neq 0$  et la VMV est donc infinie. L'état  $Q|\Psi_0\rangle$  est donc non-normé et n'est pas un état physique de l'espace de Hilbert (de même pour  $U_g|\Psi_0\rangle$ ). Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Fabri-Picasso* [39]. La deuxième définition basée sur le PO évite les conséquences du théorème de Fabri-Picasso en considérant l'action de  $Q$  sur un opérateur quelconque  $\Phi$ . En effet,

$$g : \Phi = U_g^\dagger \Phi U_g \quad (1.1.15)$$

$$= e^{-i\alpha Q} \Phi e^{i\alpha Q} \quad (1.1.16)$$

$$= (\mathbb{1} - i\alpha[Q, \cdot] + o(\alpha^2)) \Phi. \quad (1.1.17)$$

Au premier ordre en  $\alpha$ , le changement de  $\Phi$  dû à  $g$  est donc égal à  $[Q, \Phi]$ . La symétrie est bien brisée si la VMV de ce commutateur est différente de 0.

### 1.1.2 Symétrie globale

**Définition.** Une symétrie est dite globale si un système reste inchangé après une transformation uniforme dans tout l'espace.

Par exemple une fonction d'onde  $\psi(\mathbf{x}, t)$  reste physiquement identique si on la multiplie par  $e^{i\alpha}$ . La symétrie est globale car  $\alpha$  est indépendant de la position  $\mathbf{x}$ . Il est utile à ce stade de définir un lagrangien  $L = \int d^3x \mathcal{L}$  dépendant d'opérateurs locaux  $\phi(\mathbf{x})$  et de leurs dérivées  $\partial_\mu \phi = \partial\phi/\partial x^\mu$  avec  $x^\mu = (\mathbf{x}, t)^T$ . On définit  $x_\mu = \sum_\nu \eta_{\mu\nu} x^\nu$  avec la matrice diagonale  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . L'action associée est donnée par

$$S = \int dt L. \quad (1.1.18)$$

Après une transformation globale de l'opérateur  $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ , l'action se transforme elle-même en  $S + \delta S$ . Elle est dite symétrique sous cette transformation globale si  $\delta S = 0$ . De façon équivalente la nouvelle densité lagrangienne  $\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$  doit rester constante à une dérivée totale près, c-à-d.  $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu$ , où  $K^\mu$  est une fonction arbitraire (on utilise ici la convention d'Einstein sur les indices répétés). On a donc

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right) + \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \right] \delta\phi \quad (1.1.19)$$

$$= \partial_\mu K^\mu. \quad (1.1.20)$$

Le terme entre crochets est l'équation du mouvement (ÉdM) pour  $\phi$ . On considère que le champ  $\phi$  est "on-shell", c-à-d. que son ÉdM est fixée à zéro. On retrouve l'équation de conservation du courant de Noether

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi - K^\mu \right) = 0. \quad (1.1.21)$$

On définit la charge de Noether

$$Q = \int d^3x j^t. \quad (1.1.22)$$

Il est facile de démontrer en utilisant le théorème de Stokes que  $\partial_t Q = 0$  (tant que le courant est nul à l'infini). On a donc démontré le théorème de Noether :

À chaque symétrie *globale* et continue d'une action  $S$  est associé un courant  $j^\mu$  et une charge  $Q$  conservés avec

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi - K^\mu. \quad (1.1.23)$$

Comme exemple simple, prenons la symétrie dite  $U(1)$  (voir Sec. 1.1.4) de la fonction d'onde en mécanique quantique. Considérons une théorie invariante suivant une transformation  $U(1)$  décrite par le lagrangien

$$\mathcal{L} = \phi^\dagger \left( i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} \right) \phi. \quad (1.1.24)$$

L'équation du mouvement pour ce champ correspond à l'équation de Schrödinger. On peut montrer que

$$\mathbf{j} = \frac{1}{m} \text{Im} \phi^\dagger \nabla \phi, \quad (1.1.25)$$

$$Q = \int d^3x |\phi|^2, \quad (1.1.26)$$

ce qui correspond respectivement au courant de probabilité et à la probabilité totale, tous deux conservés en mécanique quantique.

### 1.1.3 Théorème de Nambu-Goldstone

Une des conséquences les plus importantes d'une BSS globale est l'apparition d'un mode sans masse appelé *mode de Nambu-Goldstone*. De façon générale,

Si une symétrie *globale* et continue est brisée, en l'absence d'interaction à longue portée et en conservant une symétrie (discrète ou continue) de translation, il existe au moins un mode sans masse appelé mode de Nambu-Goldstone.

Démontrons à présent ce théorème de la manière habituelle [37, 40, 41]. On considère une base orthogonale des vecteurs propres de l'hamiltonien que l'on note  $|n, \mathbf{k}\rangle$ , avec  $\mathbf{k}$  la quantité de mouvement et  $n$  d'autres nombres quantiques (on utilise ici l'hypothèse d'invariance par translation). On note leur énergie  $E_n(\mathbf{k})$ . L'identité est donné par

$$\mathbb{1} = \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |n, \mathbf{k}\rangle \langle n, \mathbf{k}|. \quad (1.1.27)$$

On s'intéresse à la VMV

$$\langle \Psi_0 | [j^0(\mathbf{x}), \Phi] | \Psi_0 \rangle = \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \langle \Psi_0 | j^0(0) | n, \mathbf{k} \rangle \langle n, \mathbf{k} | \Phi | \Psi_0 \rangle - \text{c.c} \quad (1.1.28)$$

avec  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = E_n(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$ . On intègre cette équation suivant  $\mathbf{x}$  pour avoir

$$\langle \Psi_0 | [Q(t), \Phi] | \Psi_0 \rangle = \sum_n \int d^3k e^{-iE_n(\mathbf{k})t} \delta_{\Omega}(\mathbf{k}) \langle \Psi_0 | j^0(0) | n, \mathbf{k} \rangle \langle n, \mathbf{k} | \Phi | \Psi_0 \rangle - \text{c.c} \quad (1.1.29)$$

avec  $\Omega$  le volume d'intégration et

$$(2\pi)^3 \delta_{\Omega}(\mathbf{k}) = \int_{\Omega} d^3x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (1.1.30)$$

Cette dernière fonction est très piquée en  $\mathbf{k} = 0$ . Si les interactions ne sont pas de longue portée, nous pouvons garder le volume  $\Omega$  fini et la charge  $Q$  est indépendante du temps dans ce volume. Enfin, étant dans un état de symétrie brisée, la quantité à gauche de l'Éq. (1.1.29) est non-nulle. On a donc  $E_n(\mathbf{k} \rightarrow 0) = 0$  : il existe au moins un état  $|n, \mathbf{k}\rangle$  décrivant une particule de masse nulle, la particule de Nambu-Goldstone.

Bien que nous ayons démontré qu'il devait exister *au moins* un mode de Nambu-Goldstone, nous ne connaissons pas leur nombre exact. Ce dernier dépend notamment de la symétrie de l'espace-temps. En physique des particules où la symétrie de Lorentz est exacte, le nombre de modes de Goldstone  $n_G$  est égal au nombre de générateurs  $Q$  brisés  $n_Q$ . En matière condensée (non-relativiste), il existe *au plus*  $n_Q$  modes de Goldstone. Les autres modes sont massifs et parfois appelés modes de Goldstone de type B [37, 38].

*Exemple :*

- Dans un cristal en dimension  $D$  la symétrie de translation est brisée. Il y a un mode de Nambu-Goldstone associé à chaque dimension qu'on appelle *phonon*.
- Il existe dans les superfluides un mode de Goldstone dû à la brisure de la symétrie  $U(1)$  responsable de la conservation du nombre de particules.
- Dans un aimant les spins prennent une direction privilégiée qui brise 2 générateurs de rotation. Cependant il n'existe qu'un seul mode de Goldstone, le magnon. L'autre mode généré est un mode de type B, massif.

### 1.1.4 Aparté sur la théorie des groupes

Les symétries  $g$  discutées dans ce chapitre encodent les transformations qui laissent le système invariant. De plus, les opérateurs associés  $U_g$  ont (Éq. (1.1.1)) la propriété

$$U_g U_{g'} = U_{g+g'}. \quad (1.1.31)$$

Tout ceci indique évident que  $g$  doit appartenir à un groupe et  $U_g$  est l'une de ses représentations. On dit que  $G$  est un groupe si

- $G$  est stable par multiplication,
- L'identité  $\mathbb{1} \in G$ ,
- $\forall g \in G, \exists g' \in G \text{ } gg' = \mathbb{1}$ .

Ceci est la définition d'un groupe *discret*. Les groupes décrivant les symétries continues sont en physique les groupes de Lie. Sans entrer dans les détails, le groupe  $G$  est maintenant une variété différentielle où les opérations du groupe (multiplication et inversion) deviennent des fonctions différentiables. Comme exemples nous pouvons citer le groupe

- $U(N)$  des matrices unitaires  $N \times N$ .  $U(1)$  est la symétrie globale responsable de la conservation de la charge électrique dans la théorie électrodynamique. C'est cette symétrie qui est brisée dans le cas d'un supraconducteur (Sec. 2.1). Le sous-groupe

de déterminant 1 est appelé  $SU(N)$ ;  $SU(3)$  est par exemple la symétrie de jauge de l'interaction forte.

- $O(N)$  des matrices orthogonales de rotations et réflexions  $N \times N$ . Le sous-groupe de déterminant 1  $SO(N)$  n'encode que les rotations.
- $\mathbb{R}^d$  des translations continues en dimension  $d$ .

Dans le cas d'un groupe continu, il est possible d'étudier les transformations infiniment proches de l'identité  $\mathbb{1}$ . On appelle l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  du groupe  $G$  le plan tangent  $T_1 G$  à l'identité. Une propriété intéressante est qu'il existe une application exponentielle

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G \tag{1.1.32}$$

qui relie les éléments de  $\mathfrak{g}$  au groupe de Lie. Le point important est que les éléments de cette algèbre correspondent aux générateurs infinitésimaux de symétrie  $Q$  définis Éq. (1.1.10).

Les  $g \in G$  sont des objets abstraits et ne sont pas utilisés en tant que telle en physique. En effet, les symétries  $g$  doivent en mécanique quantique s'appliquer sur des vecteurs. On définit une *représentation* d'un groupe  $G$  comme étant l'homomorphisme qui à chaque élément de  $G$  associe une matrice  $M \in GL(n; \mathbb{C})$ .

*Exemple :*  $SO(2)$  Une représentation de dimension 2 du groupe  $SO(2)$  est donnée par la matrice de rotation

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \tag{1.1.33}$$

On peut également construire de manière similaire une représentation de l'algèbre de Lie de  $SO(2)$  qu'on note  $J$ . Proche de l'identité  $\theta = 0$  on peut écrire

$$M_\theta \simeq \mathbb{1} + \theta J \tag{1.1.34}$$

avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1.35}$$

De manière générale,

$$M_\theta = e^{\theta J}. \tag{1.1.36}$$

Un dernier concept important est celui de *classe à gauche d'un sous-groupe*  $H$ . Cette classe est l'ensemble noté  $gH = \{gh|h \in H\}$  où  $g \in G$  et  $H$  est un sous-groupe de  $G$ . L'ensemble de ces classes est noté  $G/H$ . Pour comprendre l'intérêt de cet ensemble en physique, considérons un système d'abord invariant sous l'action d'un groupe  $G$ . Imaginons que le système subisse une BSS. La symétrie restante est alors décrite par un sous-groupe  $H$ , c-à-d.  $U_h |\Psi_0\rangle = e^{i\Phi_h} |\Psi_0\rangle$  pour tout  $h \in H$ . Il est clair que si  $gh = g'$  pour un  $h \in H$  alors  $g |\Psi_0\rangle$  et  $g' |\Psi_0\rangle$  sont physiquement équivalents; si cette condition est respectée alors  $g$  et  $g'$  appartiennent à la même classe et l'on écrit  $g \sim g'$ . Au contraire, si  $g \not\sim g'$  alors

$g|\Psi_0\rangle$  et  $g'|\Psi_0\rangle$  ne correspondent pas au même état physique. On arrive à la conclusion suivante :

Lorsqu'un système subit une brisure spontanée de symétrie  $G \rightarrow H$ , les états qui brisent la symétrie sont classifiés par l'ensemble des classes  $G/H$ .

À noter que l'ensemble  $G/H$  n'est pas en général un groupe. Par exemple, un aimant qui passe sous la température de Curie va subir une brisure spontanée de symétrie  $SO(3) \rightarrow SO(2)$  et  $SO(3)/SO(2) \simeq S^2$ . En effet la direction de l'aimantation correspond à un point sur une sphère  $S^2$  et cette sphère n'est pas un groupe. Nous verrons Sec. 2.1 que les états d'un supraconducteur sont classifiés (dans un sens que nous précisons Sec. 1.2 et 2.1) par  $U(1)/\mathbb{Z}_2 \simeq U(1)$  qui est ici un groupe.

## 1.2 Brisure de symétrie locale

### 1.2.1 Symétrie locale (ou de jauge)

Contrairement aux symétries globales discutées précédemment, les symétries locales (ou de façon équivalente de jauge) ne sont pas des symétries physiques du système. Elles proviennent d'une redondance dans la définition de certaines quantités physiques.

**Définition.** Une symétrie est dite locale si un système reste inchangé après une transformation quelconque dépendante des coordonnées de l'espace.

L'exemple historique est la théorie électromagnétique de Maxwell. Celle-ci est décrite dans le vide par une action

$$S = -\frac{1}{4\mu_0} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1.2.1)$$

où  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide et  $F_{\mu\nu}$  le tenseur électromagnétique. Ce tenseur est antisymétrique et peut s'écrire en fonction d'un champ  $A^\mu = (V, \mathbf{A})^T$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.2.2)$$

Ce champ appelé *potentiel vecteur* est relié classiquement aux champs électriques et magnétiques respectivement par

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \partial_t \mathbf{A} \quad (1.2.3)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A}). \quad (1.2.4)$$

L'action Éq. (1.2.1) et les champs Éqs. (1.2.3, 1.2.4) restent invariants après la transformation locale  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x)$  avec  $\Lambda$  une fonction quelconque. En calculant le courant donné par l'Éq. (1.1.21) on trouve



$$j_\mu = \partial^\nu (F_{\nu\mu} \Lambda(x)). \quad (1.2.5)$$

Ce courant est tautologiquement conservé du fait de l'antisymétrie de  $F_{\mu\nu}$ . De plus l'équation du mouvement du lagrangien est donné  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ . De fait, pour une transformation de jauge constante, c-à-d.  $\Lambda(x) = \Lambda$ , le courant  $j_\mu$  est trivialement nul. De façon générale, la charge associée

$$Q = \int d^3x \partial^\nu (F_{\nu 0} \Lambda(x)) \quad (1.2.6)$$

n'est pas définie pour tout  $\Lambda(x)$ ; même si c'est le cas, il existe une *infinité* de charges conservées [42]. De fait,  $Q$  n'est pas une quantité physique utile en ceci qu'elle ne correspond à aucune propriété mesurable du système. Tout ceci vient du fait que  $j_\mu$  n'est pas invariant sous une transformation de jauge, de fait elle ne peut pas correspondre à une quantité physique. Continuons en considérant la théorie électrodynamique scalaire. Le lagrangien est

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D_\mu \phi D^\mu \phi^* - m^2 |\phi|^2. \quad (1.2.7)$$

Le champ  $\phi$  décrit un champ de matière chargée. Nous avons défini la dérivée covariante  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$  qui conserve l'invariance de jauge pour le terme dérivé. En effet, après transformation de jauge,

$$D_\mu \phi D^\mu \phi^* \rightarrow e^{-ie\Lambda} e^{ie\Lambda} D_\mu \phi D^\mu \phi^* \quad (1.2.8)$$

$$= D_\mu \phi D^\mu \phi^*. \quad (1.2.9)$$

Ce couplage entre le champ massif  $\phi$  et le champ de couplage  $A_\mu$  est appelé couplage minimal. On a l'équation du mouvement

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (1.2.10)$$

$$J^\nu = ie[\phi^* D^\nu \phi - \phi D^\nu \phi^*]. \quad (1.2.11)$$

Pour un changement de jauge global, on trouve le courant de Noether

$$j_\mu = \Lambda J_\mu. \quad (1.2.12)$$

Contrairement au cas précédent, la charge de Noether associée est physique et vaut

$$Q = \int d^3x \partial^i F_{i0}. \quad (1.2.13)$$

Cette intégrale est cette fois unique et correspond, d'après la loi de Gauss, à la charge électrique enfermée dans le volume.

Pour trouver le courant précédent nous avons simplement appliqué le premier théorème de Noether sur un sous-groupe de la symétrie locale de jauge. Or, il est possible

de démontrer ce résultat sans appliquer implicitement les équations du mouvement du champ massif. En effet, dans une théorie de jauge couplée de façon minimale, les équations du mouvement des différents champs ne sont pas indépendantes. En substance, le deuxième théorème de Noether peut s'énoncer ainsi [43] :

Si une action possède une symétrie de jauge (*locale*), alors, de façon non triviale, il existe une relation différentielle entre les équations du mouvement des différents champs. Les lois de conservations sont alors triviales.

De façon plus formelle, si un champ  $\Psi_i$  se transforme de façon infinitésimale suivant

$$\delta\Psi_i = \alpha_i\Lambda + b_i^\mu\partial_\mu\Lambda, \quad (1.2.14)$$

avec  $\alpha_i$  et  $b_i^\mu$  des fonctions dépendantes de  $(\Psi_i, \partial_\mu\Psi_i, \dots)$ , on a la relation

$$\sum_i E[\Psi_i] \alpha_i = \sum_i \partial_\mu(E[\Psi_i] b_i^\mu), \quad (1.2.15)$$

avec

$$E[\Psi_i] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_i} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi_i)}. \quad (1.2.16)$$

En reprenant l'étude du lagrangien Éq. (1.2.7), on a après une transformation de jauge infinitésimale [43]

$$\begin{cases} \delta\phi &= -ie\Lambda\phi, \\ \delta\phi^* &= ie\Lambda\phi^*, \\ \delta\mathcal{A}_\mu &= \partial_\mu\Lambda, \end{cases} \quad (1.2.17)$$

et

$$\begin{cases} a_\phi &= (a_{\phi^*})^* = -ie\phi, \\ a_{\mathcal{A}_\mu} &= 0, \\ b_\phi^\mu &= (b_{\phi^*}^\mu)^* = 0, \\ b_{\mathcal{A}_\mu}^\nu &= \delta_\mu^\nu. \end{cases} \quad (1.2.18)$$

Le théorème Éq. (1.2.15) nous donne la relation entre les ÉdMs

$$-ie\phi E[\phi] + ie\phi^* E[\phi^*] = \partial_\mu E[\mathcal{A}_\mu]. \quad (1.2.19)$$

On arrive au résultat

$$\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0. \quad (1.2.20)$$

Évidemment cette relation est triviale, du fait de l'antisymétrie du tenseur électromagnétique. On peut cependant démontrer un résultat non-trivial en utilisant la même équation. Pour cela, on considère également l'ÉdM du vecteur potentiel, c-à-d.  $E[A_\mu] = 0$ . On a alors

$$-ie\phi E[\phi] + ie\phi^* E[\phi^*] = 0 \quad (1.2.21)$$

qu'on peut réécrire sous la forme  $\partial_\mu J^\mu$  avec  $J^\mu$  le courant de Noether Éq. (1.2.11). La conservation de ce courant est donc due à la symétrie de jauge du lagrangien (et donc du second théorème de Noether) associée à l'ÉdM du vecteur potentiel. Contrairement à la démonstration du courant conservé du premier théorème de Noether, nous n'avons à aucun moment eu besoin de satisfaire l'ÉdM du champ  $\phi$ .

Pour résumer, nous avons vu qu'un lagrangien d'un champ de matière couplé de façon minimale avec le champ électromagnétique présentait un courant conservé. Ce courant peut être vu comme provenant d'une sous-symétrie globale de la symétrie de jauge. Il est alors un résultat du premier théorème de Noether. Il peut aussi être vu comme résultat de l'invariance locale du groupe de symétrie de jauge associé à l'ÉdM du champ  $A_\mu$ . Ici c'est le second théorème de Noether qui, associant les différents ÉdMs des champs, nous permet de calculer le courant conservé.

## 1.2.2 Brisure de symétrie locale et Mécanisme d'Anderson-Higgs

Nous avons vu Sec. 1.1.3 qu'une brisure de symétrie *globale* entraînait l'apparition de modes sans masse, les modes de Nambu-Goldstone. Ces symétries globales sont des symétries physiques et encodent en un certain sens les différents états fondamentaux d'un système. Au contraire, les symétries de jauge définies dans la partie précédente ne sont que des marqueurs de redondance dans l'écriture des équations physiques. Elles ne peuvent donc en aucun cas correspondre à une symétrie physique du système. Et de fait, le théorème d'Elitzur nous dit [44] :

Dans une théorie de jauge locale, les seuls opérateurs locaux ayant une VMV non-nulle sont les opérateurs invariants de jauge. Une symétrie de jauge locale ne peut donc pas être spontanément brisée.

Il est prétendu habituellement que le mécanisme responsable de la supraconductivité découvert par Anderson en 1963 [5], appelé mécanisme d'Anderson-Higgs (MAH), est expliqué par une brisure spontanée de symétrie locale. Cependant ceci est en contradiction avec le théorème d'Elitzur. Ce mécanisme, redécouvert en 1964 dans le cadre de la physique des particules [6,45,46], explique la masse des particules élémentaires et des bosons de jauge  $W^\pm, Z^0$  de l'interaction faible. Il fait intervenir un champ scalaire, le champ de Higgs, qui se couple aux bosons de jauge. Au lieu de donner une démonstration générale nous regarderons un exemple de MAH. Prenons le lagrangien [47,48]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D_\mu \phi D^\mu \phi^* - V(\phi, \phi^*) \quad (1.2.22)$$

avec le potentiel

$$V(\phi, \phi^*) = \frac{\lambda}{2} \left( |\phi|^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2, \quad \lambda > 0. \quad (1.2.23)$$

À l'ordre classique, on a  $\langle |\phi|^2 \rangle = v^2/2$ , avec  $v = \sqrt{2\mu^2/\lambda}$ . À noter ici que le terme de la VMV est invariant de jauge, en accord avec le théorème d'Elitzur. En considérant la partie radiale fixe, nous pouvons écrire le champ

$$\phi_\theta = \frac{v}{\sqrt{2}} e^{i\theta(x)/v}. \quad (1.2.24)$$

Contrairement à ce qui est parfois énoncé, le  $\theta(x)$  n'encode par la direction angulaire de l'état fondamental. C'est un paramètre de jauge et tous les états  $\phi_\theta$  avec différents  $\theta(x)$  sont reliés par une transformation de jauge et représentent donc le même état physique. L'état fondamental est donc *unique*. En définissant le nouveau champ invariant de jauge  $W_\mu = A_\mu - m^{-1}\partial_\mu\theta$ , avec  $m = ev$ , on peut écrire le lagrangien sous une nouvelle forme

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu)^2 + \frac{1}{2} m^2 W_\mu W^\mu. \quad (1.2.25)$$

Ce lagrangien décrit la dynamique d'un boson de jauge *massif* : c'est le mécanisme d'Anderson-Higgs. Le potentiel vecteur  $A_\mu$  a pour ainsi dire absorbé le champ  $\theta$  et a ainsi acquis sa masse. Ce lagrangien possède une symétrie globale  $U(1)$  et le courant de Noether associé est  $J_\mu = -m^2 W_\mu$ . On vérifie facilement qu'aucune symétrie n'a été brisée. En effet, en notant  $Q$  la charge de Noether correspondante à la symétrie  $U(1)$  on a

$$\langle [Q, \phi_\theta] \rangle = e \langle \phi_\theta \rangle = 0. \quad (1.2.26)$$

Le mode de Higgs en tant que tel est simplement la composante radiale de  $\phi_\theta$ . En écrivant

$$\phi_\theta = \frac{v + \rho(x)}{\sqrt{2}} e^{i\theta(x)/v}, \quad (1.2.27)$$

le mode de Higgs est  $\rho(x)$ <sup>1</sup> (Fig. 1.1).

Pour voir comment ce mécanisme peut être confondu avec une BSS, on utilise la symétrie de jauge locale pour supprimer la dépendance en  $\theta(x)$ . Pour se faire on se place dans la jauge unitaire donnée par

$$\phi_\theta \rightarrow \phi' = e^{-i\theta(x)/v} \phi_\theta = \frac{v + \rho(x)}{\sqrt{2}}. \quad (1.2.28)$$

En sachant que  $\langle \rho \rangle = 0$ , on a  $\langle \phi' \rangle = v/\sqrt{2}$ . Cependant, du fait que nous ayons utilisé une partie du groupe local de symétrie pour supprimer  $\theta(x)$ , le théorème d'Elitzur est respecté. En effet, après le choix de jauge, c'est une symétrie globale restante  $U(1)$  qui est spontanément brisée. En considérant la composante radiale fixée ( $\rho(x) = 0$ ), le lagrangien devient

---

1. Il est important de ne pas confondre *le champ de Higgs*  $\phi_\theta(x)$  et *le mode de Higgs*  $\rho(x)$ .

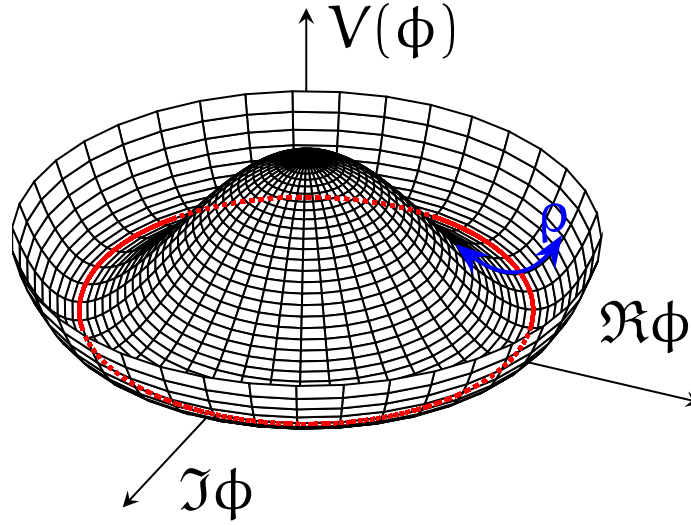


FIGURE 1.1 – Fonction  $V(|\phi|)$  défini Éq. (1.2.23). Ce potentiel est souvent appelé chapeau mexicain. Le cercle rouge représente le minimum du potentiel et doit être penser comme un état *unique*, tous les points du cercle étant reliés par transformation de jauge. Une excitation autour du minimum est indiquée en bleu et correspond au mode de Higgs  $\rho$ .

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu. \quad (1.2.29)$$

Ici le champ  $A_\mu$  et la symétrie de jauge  $U(1)$  semble brisée. Encore une fois, c'est le fait d'avoir fixé la jauge qui donne l'illusion d'avoir perdu ce choix de jauge. En rajoutant la composante  $\rho(x)$  on obtient, entre autres, les termes

$$\partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \frac{1}{2} \mu^2 \rho^2 \quad (1.2.30)$$

dans le lagrangien. Le mode de Higgs est donc un mode *massif*, de masse  $\mu$  dans ce modèle. Que ça soit dans le cas du lagrangien (1.2.25) ou (1.2.29), la symétrie de jauge  $U(1)$  se retrouve camouflée, soit par une redéfinition du champ de jauge  $A_\mu \rightarrow W_\mu$ , soit par un choix de jauge explicite (jauge unitaire dans l'exemple choisi). De fait, on dit habituellement que la symétrie de jauge a été brisée. Dans notre exemple, la symétrie restante est une symétrie discrète  $\mathbb{Z}_2$  car le lagrangien est invariant suivant la transformation  $W_\mu \rightarrow \pm W_\mu$ . On note cette "brisure de symétrie"  $U(1) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  (nous verrons Sec. 2.1 que c'est cette même brisure de symétrie qui explique les propriétés essentielles des supraconducteurs).

Le message à retenir de cette section est que le MAH, nécessaire pour expliquer la masse de certains bosons, *n'a pas de lien avec une brisure spontanée de symétrie*. Ceci pour plusieurs raisons équivalentes :

- Une symétrie de jauge n'est pas une symétrie physique mais émerge du fait de la redondance dans l'écriture de certaines équations physiques.

- Les différents états  $\phi_\theta$  représentent en réalité le même état fondamental, avec  $\theta$  un *paramètre de jauge*. L'état fondamental est unique.
- Un certain choix de jauge est nécessaire pour observer une brisure spontanée d'une symétrie globale. Néanmoins, ce choix de jauge représente une brisure de symétrie *explicite* de la symétrie de jauge locale.

Pour conclure, on dit habituellement, lorsqu'on choisit la jauge unitaire, que le "mode de Goldstone  $\theta$  est mangé par le champ  $A_\mu$  pour acquérir une masse". Bien entendu, aucun mode de Goldstone n'accompagne en réalité le MAH, car aucune symétrie n'est réellement spontanément brisée. Néanmoins cette image reste bonne dans le sens où le boson de jauge acquiert une composante longitudinale  $\partial_\mu\theta$  dans cette jauge, ce qui lui donne sa masse.

### 1.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vu la notion de symétrie continue et les lois de conservation associées. On dit qu'une symétrie est brisée lorsque l'état fondamental ne respecte pas les symétries de l'hamiltonien. Dans le cas d'une symétrie globale brisée, le théorème de Goldstone prédit l'existence d'au moins un état de masse nulle appelé mode de Goldstone. Si la symétrie est locale, le théorème de Goldstone ne s'applique plus. En présence de bosons de jauge, le mécanisme d'Anderson-Higgs donne une masse à ces derniers et il apparaît un mode massif appelé mode de Higgs.

# Théories phénoménologiques de la supraconductivité

La supraconductivité a été observée pour la première fois en 1911 par l'équipe de Kamerlingh Onnes à Leyde [49]. En dessous d'une certaine température (4.2 K) la résistance du mercure devient nulle, d'où le nom de *supraconductivité*. De nombreuses expériences ont suivi et mis en évidence ce phénomène dans bien d'autres métaux. Il a fallu attendre jusqu'en 1933 pour que Meissner et Ochsenfeld [50] découvrent l'autre propriété essentielle des supraconducteurs (SCs) : l'effet d'écrantage complet du champ magnétique à l'intérieur d'un SC. Cet effet Meissner-Ochsenfeld distingue un SC d'un "simple" conducteur parfait.

Dans ce chapitre, nous allons présenter deux théories phénoménologiques qui permettent de décrire le phénomène de supraconductivité, le chapitre suivant étant dédié aux approches plus microscopiques. Je présente en Sec. 2.1 un modèle phénoménologique effectif, inspiré du modèle historique des frères London [8], qui rend compte des caractéristiques essentielles des supraconducteurs. Les ingrédients fondamentaux de ce modèle sont l'invariance de jauge et la brisure de symétrie locale. Dans la Sec. 2.2, je décrirai le modèle de Ginzburg-Landau [9] qui donne une description plus quantitative de la transition de phase métal/supraconducteur. Le mécanisme de Anderson-Higgs peut déjà être parfaitement décrit dans le cadre de ces formalismes phénoménologiques, même si Anderson l'a découvert plus tard [5,6] et dans une approche plus microscopique. Dans la Sec. 4.2.4 l'effet Josephson est introduit en utilisant le cadre phénoménologique le plus simple possible.

## 2.1 Approche phénoménologique "à la London"

Dans le cadre d'une théorie effective des champs, nous suivons l'approche historique des frères London, où l'amplitude du PO est fixe. Nous verrons que la dynamique de la phase et son couplage au champ électromagnétique sont nécessaires pour retrouver les propriétés essentielles des supraconducteurs.

### 2.1.1 Modèle de London (formulation historique)

En 1935, les frères London [8] proposent une approche phénoménologique de l'électrodynamique des supraconducteurs basée sur le modèle à deux fluides de Gorter [51]. Le supraconducteur contient une composante suprafluide de densité électronique  $n_s$  et qui obéit aux 2 équations suivantes

$$\frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial t} = \frac{n_s e^2}{m} \mathbf{E} \quad (2.1.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{j}_s = -\frac{n_s e^2}{m} \mathbf{B}, \quad (2.1.2)$$

où  $m$  est la masse des électrons,  $\mathbf{j}_s$  la densité de courant supraconducteur,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  les champs électriques et magnétiques. Ces équations rendent bien compte de la résistance nulle et l'effet Meissner dans les SCs comme nous allons le montrer ci-dessous.

### 2.1.2 Lagrangien effectif et invariance de jauge

Nous présentons ici une version de type théorie des champs effective du modèle historique des frères London. Cette approche est basée essentiellement sur l'invariance de jauge et illustre bien le mécanisme d'Anderson-Higgs. Nous verrons que ce dernier explique qualitativement les deux propriétés essentielles des SCs [14, 40, 52, 53].

Le point de départ consiste à supposer que la supraconductivité provient d'une brisure spontanée de symétrie *locale*  $U(1) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ . On considère, comme dans la Sec. 1.2.2, qu'il existe un champ  $\Delta(x)$  à valeurs complexes, noté

$$\Delta(x) = |\Delta| e^{-2ie\theta(x)}, \quad (2.1.3)$$

avec  $|\Delta(x)| = 0$  dans un métal normal et  $|\Delta(x)| \neq 0$  dans un SC. Le champ de phase  $\theta(x)$  est un paramètre de jauge et ne peut pas avoir de conséquence physique directe. Il est nécessaire d'identifier  $\theta(x)$  et  $\theta(x) + \pi/e$  du fait de la compacité du groupe, le champ  $\theta$  paramétrisant le groupe quotient  $U(1)/\mathbb{Z}_2$  (voir Sec. 1.1.4). On souhaite construire un lagrangien invariant de jauge ne dépendant que du champ de matière  $\Delta(x)$  et du potentiel électromagnétique  $A_\mu(x)$ , ainsi que de leurs dérivées, c-à-d. de la forme

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[\Delta, \Delta^*, \partial_\mu \Delta, \partial_\mu \Delta^*, A_\mu, \partial_\mu A_\nu]. \quad (2.1.4)$$

En considérant le module du champ  $|\Delta|(x) = |\Delta|$  uniforme et constant, les gradients de  $\Delta(x)$  s'écrivent comme des gradients du champ de phase  $\partial_\mu \Delta = -2ie\Delta \partial_\mu \theta$ . Pour transformer cette dérivée en quantité invariante de jauge, il suffit de remplacer  $\partial_\mu$  par la dérivée covariante  $D_\mu = \partial_\mu + 2eiA_\mu$ . La charge est ici égale à  $2e$  du fait que  $|\Delta|$  est proportionnel à la densité de paires de Cooper, composées de 2 électrons (en anticipant la théorie BCS présentée plus en détails dans la Sec. 3). Il n'y a pas d'autres termes invariants de jauge et on a donc

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_m[\partial_\mu \theta - A_\mu] \quad (2.1.5)$$



où  $\mathcal{L}_m$  est un lagrangien décrivant la matière chargée couplée au champ électromagnétique et dont on ne connaît pas les détails exacts. De plus, en considérant que  $\mathcal{L}_m$  décrit un état stable en l'absence de champ, c-à-d. quand  $\partial_\mu\theta - A_\mu \sim 0$ , on peut postuler que ce lagrangien prend une forme quadratique au voisinage de son minimum

$$\mathcal{L}_m \sim \frac{1}{2}C|\Delta|^2(2e)^2(\partial_\mu\theta - A_\mu)^2 \quad (2.1.6)$$

où  $C$  une constante positive égale à l'inverse d'une masse. Nous verrons par la suite que la description microscopique de la supraconductivité permet de relier  $C$  à la masse des électrons :  $C = 1/2m_e$ .

À partir de cette forme générale de lagrangien effectif nous allons retrouver toutes les propriétés essentielles des SCs dans les sections suivantes.

### 2.1.3 Effet Meissner

À partir du lagrangien de la matière  $L_m$  on peut obtenir le courant et la densité de particules  $\mathbf{J}$  et  $\epsilon$  par les dérivées fonctionnelles suivantes :

$$\mathbf{J} = -\frac{\delta L_m}{\delta \mathbf{A}} = -\frac{\delta L_m}{\delta \nabla\theta} \quad (2.1.7)$$

$$\epsilon = \frac{\delta L_m}{\delta A_0} = -\frac{\delta L_m}{\delta \dot{\theta}} \quad (2.1.8)$$

En utilisant l'ÉdM du champ  $\theta$  on obtient l'équation de conservation de la charge

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L_m}{\delta \dot{\theta}} = \nabla \cdot \frac{\delta L_m}{\delta \nabla\theta} = -\nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (2.1.9)$$

d'où  $\partial_\mu J^\mu = 0$ , avec  $J^0 = \epsilon$ .

Au coeur d'un supraconducteur, dans le cas où les champs externes sont faibles et  $\dot{\theta} = A_0 = 0$ , on a

$$\mathbf{A} = -\nabla\theta, \quad (2.1.10)$$

c-à-d. que le potentiel vecteur est une pure jauge, ou autrement dit est purement longitudinal. C'est l'effet Meissner : il ne peut pas y avoir de champ magnétique à l'intérieur d'un SC. Autrement dit l'effet Meissner correspond à l'*expulsion* de tout champ magnétique externe au SC.

Considérons donc un champ magnétique  $\mathbf{B} = B(x, y, z)\mathbf{e}_x$  et un SC occupant le demi-espace  $y > 0$ . Comme démontré Sec. 1.2.2 et d'après Éqs. (2.1.6, 2.1.7), le courant est

$$\mathbf{J} = -C|\Delta|^2(2e)^2\bar{\mathbf{A}}, \quad (2.1.11)$$

avec ici  $\bar{A}_\mu = \partial_\mu\theta - A_\mu$ . De plus, l'équation de Maxwell-Ampère en régime cas quasi-statique,

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (2.1.12)$$

implique alors

$$\nabla^2 \mathbf{B} = C|\Delta|^2(2e)^2\mu_0 \text{rot } \mathbf{A} = C|\Delta|^2(2e)^2\mu_0 \mathbf{B} , \quad (2.1.13)$$

où on a utilisé  $\text{rot rot} = \nabla(\text{div}) - \nabla^2$  et l'équation de Maxwell-Thomson  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ .

Du fait des symétries du problème, le champ magnétique de dépend que de  $y$  et la solution de l'Éq. (2.1.13) est

$$\mathbf{B} = B_0 e^{-y/\lambda_L} \mathbf{e}_x \quad \text{avec} \quad \lambda_L = \frac{1}{2e|\Delta|\sqrt{C\mu_0}} . \quad (2.1.14)$$

Cette longueur  $\lambda_L$  est appelée longueur de pénétration de London. Sur une longueur  $y \gg \lambda_L$  le champ magnétique est complètement expulsé du SC. On remarque que l'Éq. (2.1.13) est exactement la deuxième loi de London (Éq. 2.1.2). Dans le modèle de London,  $\lambda_L^{-1} = e|\Delta|\sqrt{2\mu_0/m_e}$ , avec  $m_e$  la masse de l'électron. Pour retrouver ce résultat il nous suffit de prendre  $C = 1/2m_e$  dans l'Éq. (2.1.6). L'effet Meissner est donc purement la résultante d'un MAH qui donne une masse  $2e|\Delta|\sqrt{2m_e}$  au champ électromagnétique  $A_\mu$ .

Un argument énergétique simple nous permet de comprendre pourquoi le SC préfère expulser le champ magnétique. Proche de l'équilibre et nous plaçant dans la jauge unitaire  $\theta = 0$ , l'énergie dans le SC sera de l'ordre de  $\sim |\mathbf{A}|^2|\Delta|^2L^3$  avec  $L^3$  le volume du SC. Un champ magnétique donnerait  $|\mathbf{A}| \sim BL$  et l'énergie correspondante serait  $\sim B^2|\Delta|^2L^5$ . Le coût énergétique pour expulser ce champ sera  $\sim B^2L^3$ . Il sera donc préférable pour le SC d'expulser le champ si on a  $B^2|\Delta|^2L^5 \gg B^2L^3$ , soit  $L \gg |\Delta|^{-1} \sim \lambda_L$ . Bien sûr, le champ magnétique peut pénétrer dans un film si celui-ci est plus mince que  $\lambda_L$ . La longueur de London vaut typiquement entre 50 et 500 nm.

Le champ  $\theta(x)$  pouvant être éliminé par changement de jauge, il n'a pour l'instant joué aucun rôle physique. Ceci est valable dans un SC *simplement connexe*. Dans le cas où le SC est non-connexe, la phase peut varier d'un multiple de  $2\pi$ . Le champ  $\theta$  ne peut donc pas être entièrement mis à 0 dans tout le SC. C'est le cas par exemple si le SC présente un trou. En prenant une courbe  $\mathcal{C}$  autour de ce trou, à une distance  $l \gg \lambda_L$  des bords du SC (c-à-d. là où  $\bar{\mathbf{A}} = 0$ ), on a (Fig. 2.1)

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{dl} \cdot \nabla\theta = -\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{dl} \cdot \mathbf{A} = -\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = \frac{n2\pi\hbar}{-2e} , \quad (2.1.15)$$

avec  $\mathcal{S}$  la surface avec pour contour  $\mathcal{C}$ . Pour la dernière égalité nous avons utilisé la compacité de la phase  $\theta$  et rajouté la constante  $\hbar$ . Le flux du champ magnétique  $\Phi_{\mathbf{B}}$  dans un SC est donc quantifié suivant la loi

$$\Phi_{\mathbf{B}} = n\Phi_{0S} \quad \text{avec} \quad \Phi_{0S} = \frac{\hbar}{2e} . \quad (2.1.16)$$

où  $n$  est un entier et où apparaît le quantum de flux  $\Phi_{0S}$  associé à la supraconductivité. C'est cette loi qui a permis de valider que la fonction d'onde macroscopique de la supraconductivité correspond bien à un couplage à des charges  $2e$  et non  $e$  [54,55].

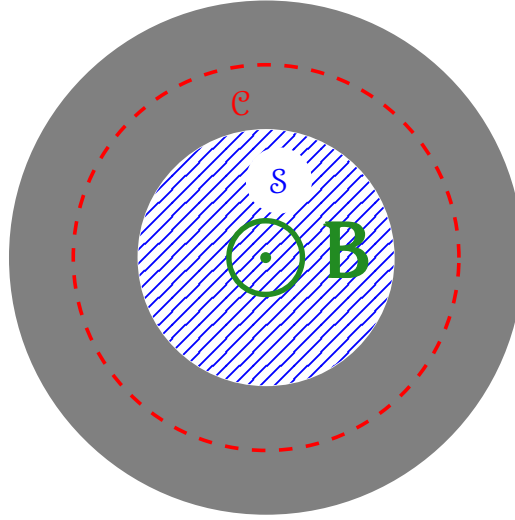


FIGURE 2.1 – Surface et contour des intégrales Éq. (2.1.15). On considère un anneau supraconducteur (anneau gris). Le courant est nul au niveau de la courbe  $\mathcal{C}$  (courbe en tirets rouges). Un champ magnétique externe crée un flux à travers la surface  $S$  (surface bleue).

### 2.1.4 Courant sans résistance

L'autre propriété essentielle des SCs est la conductance sans résistance. Les grandeurs  $-\epsilon$  et  $\dot{\theta}$  sont des variables conjuguées d'après Éq. (2.1.8). Dans le formalisme hamiltonien, ces 2 grandeurs sont donc reliées par l'équation

$$\dot{\theta} = -\frac{\delta H_m}{\delta \epsilon}, \quad (2.1.17)$$

avec  $H_m$  l'hamiltonien associé à  $L_m$ . Or, le potentiel électrique  $V$  est physiquement proportionnel à la variation d'énergie par variation de charge. On peut montrer que [52]

$$\dot{\theta} = V(\chi). \quad (2.1.18)$$

Dans le cas d'un courant  $\mathbf{J}$  constant, avec les champs indépendants du temps, c-à-d.  $\dot{\theta} = 0$ , on a  $V(\chi) = 0$ . On peut donc avoir un courant constant avec aucune différence de potentiel. En effet, en prenant le gradient de l'équation ci-dessus et en ajoutant  $2e\partial_t \mathbf{A}$ , on a

$$2e\partial_t(\nabla\theta + \mathbf{A}) = -\frac{m_e}{e|\Delta|^2}\partial_t \mathbf{J} = -2e\mathbf{E}, \quad (2.1.19)$$

avec pour rappel  $\mathbf{E} = -\nabla V - \partial_t \mathbf{A}$ . Dans le cadre de ce modèle de champ de phase très général, on retrouve donc exactement la première équation de London (Éq. 2.1.1). Un courant constant implique un champ électrique nul. Le SC conduit donc le courant sans résistance. Les frères London étaient partis de la constatation expérimentale qu'un courant électrique continu non nul pouvait exister dans le SC alors que le champ électrique était nul pour écrire une équation constitutive. On a vu ici que la structure simple du modèle de champ de phase conduit aux deux équations de London rendant compte respectivement de l'effet Meissner et de la conduction sans résistance.

## 2.2 Modèle phénoménologique de Ginzburg-Landau

En 1950, Ginzburg et Landau proposent un nouveau modèle phénoménologique [9] basé sur la théorie de Landau des transitions de phase [4, 56] et identifiant le paramètre d'ordre sous-jacent comme une fonction d'onde macroscopique à valeurs complexes. La théorie de Ginzburg-Landau (GL) permet de décrire la thermodynamique et l'électrodynamique (statique) des supraconducteurs près de la transition entre l'état normal et l'état supraconducteur. Nous allons présenter la fonctionnelle de GL dans la continuité du modèle de champ de phase de la section précédente, mais en permettant maintenant les variations possibles de l'amplitude du PO. Dans cette section, nous présentons la fonctionnelle d'énergie libre GL dont la minimisation conduit aux équations de GL (Sec. 2.2.1). Dans les supraconducteurs chargés, le couplage au champ électromagnétique conduit à une brisure de symétrie locale et au mécanisme d'Anderson-Higgs (Sec. 2.1). Nous verrons comment ce mécanisme se manifeste dans le modèle de GL (Sec. 2.2.2).

### 2.2.1 Fonctionnelle de Ginzburg-Landau

La théorie de Landau est une théorie générale permettant de modéliser les transitions de phase du second ordre. Le cœur de la théorie de Landau peut être résumé en 3 étapes :

- Choisir un paramètre d'ordre (PO) qui décrit les degrés de liberté du système à proximité de la température de transition. Le PO doit être non nul dans la phase ordonnée (faible symétrie) et nul dans la phase non ordonnée (forte symétrie).
- Construire une fonctionnelle d'énergie libre sous la forme d'un développement en puissances du PO (et éventuellement de ses gradients).
- Minimiser cette énergie libre par rapport au PO.

En 1950, Ginzburg et Landau ont identifié le PO pour la transition métal normal - supraconducteur comme un champ complexe :

$$\Delta(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})e^{-i2e\theta(\mathbf{x})}, \quad (2.2.1)$$

qui rappelle la fonction d'onde supraconductrice macroscopique de London introduite précédemment. Ce paramètre d'ordre s'annule dans la phase normale et devient non nul dans la phase supraconductrice. Nous pouvons interpréter son module au carré comme la densité d'électrons supraconducteurs. Près de la transition, la fonctionnelle d'énergie libre GL peut s'écrire comme <sup>1</sup> :

$$F\{\Delta, \Delta^*, \mathbf{A}\} = \int d^3x \left( \alpha|\Delta|^2 + \frac{\beta}{2}|\Delta|^4 + \frac{1}{2m^*} |(-i\nabla - 2e\mathbf{A})\Delta|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right), \quad (2.2.2)$$

où  $\mathbf{A}$  est le potentiel vecteur et  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  le champ magnétique correspondant. Le champ électromagnétique est couplé au PO par l'intermédiaire de la charge  $2e$  des paires de Cooper, où  $e$  est la charge d'un électron. Nous prenons également  $m^* = 2m$ , anticipant le

1. Nous ne considérons pas les termes impairs en  $|\Delta|$  parce qu'ils ne sont pas dérivables en 0.

fait que le PO est connecté aux des paires de Cooper. Les coefficients réels  $\alpha$  et  $\beta$  sont phénoménologiques. Pour que l'énergie soit bornée négativement, nous devons fixer  $\beta > 0$ . De plus,  $\alpha$  dépend de la température et change de signe à la transition supraconductrice :  $\alpha = \alpha(T - T_c)$  avec  $\alpha > 0$ .

La minimisation de  $F$  par rapport au PO et au potentiel vectoriel  $\mathbf{A}$  conduit aux équations d'Euler-Lagrange suivantes :

$$\frac{\delta F}{\delta \Delta^*} = 0 \implies \alpha \Delta + \beta |\Delta|^2 \Delta + \frac{1}{2m^*} (-i\nabla - 2e\mathbf{A})^2 \Delta = 0. \quad (2.2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{A}(\mathbf{x})} = 0 \implies & \frac{ie}{m^*} [(\nabla \Delta) \Delta^* - (\nabla \Delta^*) \Delta] + \frac{(2e)^2 n_s}{m^*} \mathbf{A} + \text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) / \mu_0 \\ & = -\mathbf{j}(\mathbf{x}) + \frac{\text{rot } \mathbf{B}}{\mu_0} = 0, \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

avec  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  le courant et  $n_s = |\Delta|^2$  la densité électronique supraconductrice. Ces deux équations sont appelées les équations de GL. Complétées par des conditions aux limites, elles sont très utiles pour résoudre des problèmes avec des paramètres d'ordre supraconducteur non homogènes/uniformes (vortex, interface NS,...). La deuxième équation peut être écrite sous la forme d'une équation de Maxwell-Ampère avec la définition suivante du courant supraconducteur

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = -\frac{ie}{m^*} [(\nabla \Delta) \Delta^* - (\nabla \Delta^*) \Delta] - \frac{(2e)^2 n_s}{m^*} \mathbf{A}, \quad (2.2.5)$$

qui comprend des termes en gradient du champ et un terme directement proportionnel au potentiel vecteur magnétique. Ce courant est exactement le même que celui trouvé dans la partie précédente Éq. (2.1.11), à ceci près que  $n_s$  dépend maintenant de la position  $\mathbf{x}$ . Nous notons que la fonctionnelle de GL Éq. (2.2.2) est invariante lorsque  $\Delta$  est modifié par une phase globale arbitraire :

$$\Delta(\mathbf{x}) \longrightarrow \Delta(\mathbf{x}) e^{-i2e\Lambda} \quad (2.2.6)$$

à condition que  $\Lambda$  soit spatialement uniforme. Cette transformation est une rotation qui mélange les parties réelles et imaginaires du PO, laissant les termes de la fonctionnelle d'énergie libre de GL invariants. L'équation de l'énergie libre (2.2.2) peut être ré-exprimée en représentant le PO par le champ de phase  $\theta(\mathbf{x})$  et le champ d'amplitude  $\rho(\mathbf{x})$  :

$$F\{\rho, \theta, \mathbf{A}\} = \int d^3x \left( V(\rho) + \frac{1}{2m^*} \left( (\nabla \rho)^2 + \rho^2 (2e)^2 (\nabla \theta + \mathbf{A})^2 \right) + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right), \quad (2.2.7)$$

qui contient un potentiel radial quartique (Fig. 2.2) :

$$V(\rho) = \alpha \rho^2 + \frac{\beta}{2} \rho^4, \quad (2.2.8)$$

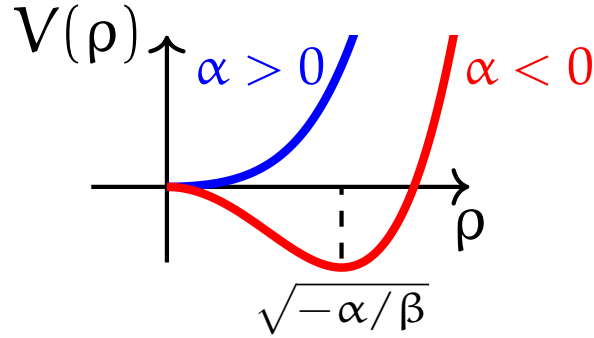


FIGURE 2.2 – Potentiel scalaire  $V(\rho)$  dans les phases normale et supraconductrice ( $\alpha > 0$  et  $\alpha < 0$  respectivement). En dessous de la température critique,  $T < T_c$ , le potentiel est minimal pour l’amplitude non nulle  $\rho_0 = \sqrt{-\alpha/\beta}$ .

divers gradients au carré de l’amplitude  $\rho$  et de la phase, le dernier terme ( $\propto \mathbf{B}^2$ ) étant l’énergie stockée dans le champ magnétique. La transformation  $U(1)$  Éq. (2.2.6) est équivalente à l’ajout d’un angle constant à la phase  $\theta(\mathbf{x}) \rightarrow \theta(\mathbf{x}) + \Lambda$  tout en gardant l’amplitude du PO inchangée :  $\rho(\mathbf{x}) \rightarrow \rho(\mathbf{x})$ .

Si l’on étend la transformation globale (uniforme)  $U(1)$  discutée jusqu’ici à des rotations de phase plus générales dépendant de la position (transformations locales), le terme de gradient de phase seul n’est plus invariant, mais le champ de jauge  $\mathbf{A}$  peut restaurer l’invariance de la fonction GL à condition que :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} - \nabla\Lambda(\mathbf{x}) \\ \theta &\rightarrow \theta + \Lambda(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

où  $\Lambda(\mathbf{x})$  est une fonction arbitraire.

## 2.2.2 Mécanisme d’Anderson-Higgs

Nous nous concentrons maintenant sur l’état supraconducteur ( $T < T_c$ ), et développons le paramètre d’ordre autour de l’état d’équilibre en écrivant :

$$\Delta(\mathbf{x}) = [\rho_0 + \rho(\mathbf{x})] e^{-i2e\theta(\mathbf{x})}. \quad (2.2.10)$$

Les fluctuations du champ électromagnétique sont libres de s’adapter afin de compenser les gradients de phase et de minimiser l’énergie libre. Il est donc utile de redéfinir le potentiel vecteur comme la combinaison invariante de jauge suivante :

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\theta, \quad (2.2.11)$$

car c’est précisément la quantité dont le carré doit être minimisé dans la fonction Éq. (2.2.7). Il est facile de vérifier que ce nouveau champ  $\bar{\mathbf{A}}$  est invariant de jauge, mais nous insistons sur le fait que cette redéfinition n’est pas une transformation de jauge. A partir de maintenant, nous changeons la notation en  $\bar{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{A}$ . Enfin, notons que ce champ a

maintenant trois composantes (deux transversales et une longitudinale) puisqu'il incorpore les gradients de phase longitudinaux. Nous écrivons l'énergie libre en fonction de ce nouveau champ, et l'expansion à l'ordre deux autour de l'équilibre, à savoir  $\rho = \rho_0$  et  $\mathbf{A} = 0$ , se lit comme suit :

$$F\{\rho, \mathbf{A}\} = \int d^3x \left( \frac{1}{2m^*} (\nabla\rho)^2 - 2\alpha\rho^2 + \frac{(2e)^2\rho_0^2}{2m^*} \mathbf{A}^2 + \frac{(2e)^2\rho_0}{m^*} \mathbf{A}^2\rho + \dots \right). \quad (2.2.12)$$

Nous avons toujours le mode massif d'amplitude radiale  $\rho$  avec une masse  $\propto 2\sqrt{-\alpha}$ . Ce mode est également associé à la longueur dite de cohérence  $\xi = \left(\sqrt{4m^*|\alpha|}\right)^{-1}$ . Elle correspond à la longueur typique de variation du gap supraconducteur. Le nouveau champ de jauge  $\mathbf{A}$  a acquis une masse finie

$$m_{\mathbf{A}} = \sqrt{\frac{(2e)^2\rho_0^2}{m^*}}, \quad (2.2.13)$$

tandis que le mode de phase  $\theta$  a disparu, absorbé dans la redéfinition du potentiel vecteur. On dit parfois familièrement que le mode de phase de Goldstone a été "mangé" par le photon, rendant ce dernier massif. *C'est le mécanisme d'Anderson-Higgs*. Si l'on minimise directement l'énergie libre de l'Éq. (2.2.12) par rapport au nouveau potentiel vectoriel, nous obtenons, au premier ordre,

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_s \quad \text{with} \quad \mathbf{j}_s = -\frac{(2e)^2 n_s}{m^*} \mathbf{A}, \quad (2.2.14)$$

qui est la fameuse première équation de London reliant le courant de charge au potentiel vecteur magnétique. Cela conduit à l'écran de Meissner des champs magnétiques sur la longueur de London  $\lambda_L$  définie par :

$$\lambda_L = \sqrt{m^*/\mu_0 n_s (2e)^2}. \quad (2.2.15)$$

Le cas  $\xi > \lambda_L$  décrit les SCs de type-I où le champ magnétique sera toujours expulsé du SC. Dans le cas opposé  $\xi < \lambda_L$  (SC de type-II), il sera énergétiquement favorable pour le SC d'avoir des vortex de flux  $h/2e$  traversant le SC (Fig. 2.3). Une façon simple de le comprendre est de voir que le SC est décrit par le champ *scalaire*  $\Delta$ . Or, l'interaction entre champs scalaires est toujours attractive [57]. Donc dans le cas  $\xi > \lambda_L$ , le champ magnétique ne pourra traverser le SC que de façon globale et se faisant détruira la supraconductivité. Inversement, l'interaction entre les vortex de flux est répulsive [58]. Si  $\lambda_L > \xi$ , les vortex seront donc stabilisés et formeront un réseau dit d'Abrikosov [58, 59].

En résumé, comptons et décrivons les degrés de liberté du supraconducteur avant et après la rupture de symétrie. Avant la brisure de symétrie, le PO  $\Delta$  avait 2 degrés de liberté (DDL) avec sa norme et sa phase. Le champ de jauge  $\mathbf{A}$  avait également 2 DDL en raison de la symétrie de jauge (les deux modes transverses du photon dans le vide). Nous avons donc 4 DDL au total. Après la brisure spontanée de symétrie, le paramètre d'ordre est caractérisé par 1 DDL (le champ  $\rho$ ); le potentiel vecteur acquiert une masse et donc un nouveau DDL longitudinal : 3 au total. On a donc toujours 4 DDL. Dans le cas des

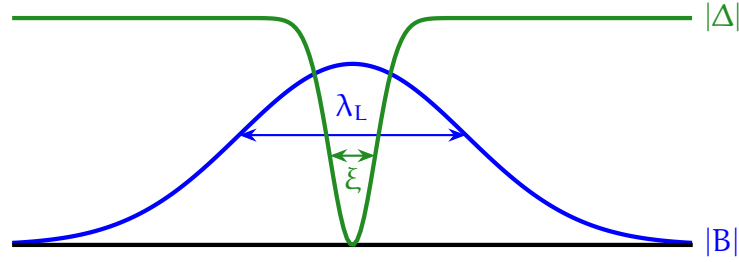


FIGURE 2.3 – Représentation de l'état d'un supraconducteur de type-II ( $\xi < \lambda_L$ ) traversé par un champ magnétique  $\mathbf{B}$ . Le gap s'éteint sur la longueur  $\xi$  et le métal redevient normal au niveau du vortex.

superfluides neutres, l'absence de boson de jauge ne permet pas au champ de Goldstone de disparaître, et ce dernier est alors un champ physique du système. Enfin, l'équation de l'énergie libre (2.2.12) nous indique également, via le terme  $\mathbf{A}^2\rho$ , que *le photon se couple de manière non-linéaire avec le mode d'amplitude (de Higgs)  $\rho$* . Ce couplage est très similaire à celui du boson de Higgs avec les bosons de jauge  $W^\pm, Z^0$  dans la théorie électrofaible du modèle standard. Cette interaction peut être représentée schématiquement par un diagramme de Feynman (Fig. 2.4).

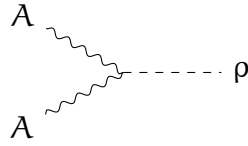


FIGURE 2.4 – Vertex d'interaction photon-Higgs

Nous notons que l'énergie libre n'est plus invariante sous la transformation

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} - \nabla\Lambda(\mathbf{x}) \\ \Delta &\rightarrow e^{-i2e\Lambda(\mathbf{x})}\Delta. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

C'est dans ce sens que l'on dit que la symétrie de jauge  $U(1)$  est brisée.<sup>2</sup> La symétrie restante est

$$\rho \rightarrow \pm\rho, \quad \rho_0 \rightarrow \pm\rho_0 \quad \iff \quad \Delta \rightarrow \pm\Delta. \quad (2.2.17)$$

On dit que le groupe de symétrie  $U(1)$  a été brisé vers le sous-groupe normal  $\mathbb{Z}_2$ ; on note cette brisure spontanée de symétrie  $U(1) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ .

## 2.3 Effet Josephson

Nous allons maintenant discuter d'un effet spectaculaire, prédit en 1962 par Josephson [60]. Lorsque 2 SCs sont rapprochés et séparés par un matériau isolant, un courant

2. Il est clair d'après (2.2.11) que la symétrie de jauge non physique n'est pas réellement brisée



continu se met à circuler dans la jonction, proportionnel à la différence de phase des SCs. Cet effet est très fondamental et indique qu'un gradient de phase supraconductrice peut être mesurable puisque directement relié à un courant physique. Il s'agit cependant d'un courant non-dissipatif pour l'effet Josephson dc à tension nulle. Cet effet peut-être compris dans le modèle très simple du champ de phase, ce qui sera notre point de vue dans ce chapitre. Nous verrons au cours des chapitres suivant que le courant Josephson peut être calculé dans des formalismes beaucoup plus microscopiques et quantitatifs en vue de décrire les expériences.

Considérons 2 SCs identiques, de même gap  $|\Delta|$  seulement séparés par une fine barrière isolante (I). Ce type de jonction est appelée SIS. On pourrait penser qu'il ne devrait rien se passer de particulier. Or cette jonction est non-connexe, donc la phase  $\theta$  ne peut pas être fixée dans toute la jonction à une valeur particulière. On note la différence de phase invariante de jauge entre les SCs (entre 2 points 1 et 2)

$$\Delta\theta = \theta(2) - \theta(1) + \int_1^2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.3.1)$$

L'énergie de la jonction due à la phase  $E(\Delta\theta)$  doit être minimale si  $\Delta\theta = 0$  ou tout multiple de  $\pi/e$ . On a donc la périodicité

$$E(\Delta\theta) = E(\Delta\theta + n\pi/e). \quad (2.3.2)$$

Le choix le plus évident est  $E(\Delta\theta) = -E_0 \cos 2e\Delta\theta$ . Le courant associé est donné par

$$\mathbf{J} = -\frac{\delta E}{\delta \mathbf{A}} = -E'(\Delta\theta)\hat{n} = -2eE_0 \sin(2e\Delta\theta)\hat{n}, \quad (2.3.3)$$

avec  $\hat{n}$  un vecteur normal à l'interface. C'est l'effet *Josephson dc*. On a donc un courant continu qui apparaît du fait de la différence de phase entre les SCs. Il s'agit d'un courant de nature thermodynamique et non dissipatif. Si la phase en elle-même est dans les SCs connexes un paramètre de jauge, la différence de phase entre 2 SCs est physique et provient d'une brisure spontanée de symétrie globale  $U(1)$  [61] (le théorème d'Elitzur est donc respecté). Cette symétrie garde la phase d'un SC constante tout en changeant celle de l'autre.

Que se passe-t-il si on applique une différence de potentiel non nulle à la jonction? D'après l'Éq. (2.1.18), une différence de potentiel se traduit par une variation temporelle de la différence de phase supraconductrice selon

$$\partial_t \Delta\theta = - \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\Delta V, \quad (2.3.4)$$

avec  $\Delta V$  la différence de potentiel électrique. Si  $\Delta V$  est constant,  $\Delta\theta = -\Delta V t$  et le courant Josephson devient un courant alternatif

$$\mathbf{J}(t) = 2eE_0 \sin(2e\Delta V t + 2e\Delta\theta_0), \quad (2.3.5)$$

où  $\Delta\theta_0$  est une phase quelconque. On voit que le courant oscille à la pulsation  $2e\Delta V$ , en fait  $2e\Delta V$  en restituant la constante de Planck réduite : c'est l'effet *Josephson ac*.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit les deux ingrédients essentiels de ce travail de thèse, à savoir le MAH et l'effet Josephson en utilisant des approches phénoménologiques des plus simples. En effet dans le chapitre final nous étudierons comment le mode de Higgs peut modifier l'effet Josephson. Cependant pour cela nous utiliserons des approches plus microscopiques qui vont être introduites progressivement aux Chapitres 3 et 4. Dans ce chapitre, nous avons donc vu que l'effet Meissner et l'absence de résistance dans les SCs sont dus au MAH. Un champ de Higgs  $\Delta$  acquiert une VMV non-nulle  $|\Delta|$  dans la phase supraconductrice. Cette VMV, par le mécanisme d'Anderson-Higgs, donne une masse au champ électromagnétique  $A_\mu$ . Cette masse rend la pénétration d'un champ magnétique dans le SC seulement possible sur une longueur appelée longueur de London  $\lambda_L$ . De plus, le MAH implique la première équation de London (Éq. 2.1.1) et donc une résistance nulle dans le SC. L'effet Josephson est plus subtil. La compacité du champ  $\theta$ , c-à-d. le fait que  $\theta$  et  $\theta + \pi$  doivent correspondre au même état, implique une différence d'énergie *périodique* dans une jonction SIS due à la différence de phase entre les SCs. Cette différence de phase provient d'une brisure spontanée de symétrie globale  $U(1)$ , la symétrie étant la possibilité de changer la différence de phase entre les 2 SCs. C'est pour toutes ces raisons qu'il est souvent dit que la supraconductivité est due à une brisure spontanée de symétrie locale  $U(1) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ .

Dans ce chapitre nous avons vu que toutes les propriétés qualitatives de la supraconductivité pouvaient être expliquées phénoménologiquement par le mécanisme d'Anderson-Higgs. Nous avons ensuite présenté le modèle plus quantitatif de Ginzburg-Landau et vu comment le mécanisme d'Anderson-Higgs apparaissait dans ce dernier.

# Supraconductivité : théorie microscopique

Malgré les succès de la théorie de GL (qui par ailleurs était très peu diffusée dans le bloc occidental), l'origine microscopique du PO complexe de GL restait mystérieuse. En 1950, la découverte expérimentale de l'effet isotopique [62] indique que les phonons doivent jouer un rôle important dans la supraconductivité. C'est en 1957 que Bardeen, Cooper et Schrieffer [10] proposent la première théorie microscopique de la supraconductivité, la théorie BCS.

La théorie BCS est présentée dans la Sec. 3.1. Les sections suivantes sont consacrées à des reformulations de la théorie BCS : le formalisme de Gor'kov (Sec. 3.2) et le formalisme de Bogoliubov-de Gennes (Sec.3.3). Enfin, Sec. 3.4, je montrerai comment les modes collectifs (Higgs et Goldstone) sont reliés à l'invariance de jauge dans la théorie microscopique et calculerai leurs relations de dispersions.

## 3.1 Théorie BCS

Dans cette partie nous présenterons de façon succincte la théorie microscopique BCS des SCs [10]. Considérons l'hamiltonien d'un gaz d'électrons libres

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}, \sigma} \quad (3.1.1)$$

$$\xi_{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}^2}{2m} - \mu, \quad (3.1.2)$$

où l'opérateur de création (d'annihilation) des électrons  $c_{\mathbf{k}, \sigma}$  ( $c_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger$ ) obéit à la relation d'anticommutation,  $\{c_{\mathbf{k}, \sigma}, c_{\mathbf{k}', \sigma'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\sigma, \sigma'}$ ,  $m$  est maintenant la masse de l'électron,  $\mu$  l'énergie de Fermi et  $\sigma$  l'indice de spin. Nous définissons le champ fermionique

$$\Psi_\sigma(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} c_{\mathbf{k}, \sigma}. \quad (3.1.3)$$

On peut écrire  $H_0$  en fonction de  $\Psi(\mathbf{x})$

$$H_0 = \sum_{\sigma} \int d^3\mathbf{x} \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{x}) \left[ \frac{(-i\nabla)^2}{2m} - \mu \right] \Psi_{\sigma}(\mathbf{x}). \quad (3.1.4)$$

Nous avons vu dans la section précédente 2.1 qu'il existait un effet de masse isotopique dans les SCs. Quantitativement, il a été observé expérimentalement que la température critique  $T_c$  de plusieurs isotopes différents obéissait à la loi  $T_c \propto 1/\sqrt{M}$ , avec la  $M$  la masse isotopique. Ceci indique que les ions du réseau, et donc les phonons, doivent jouer un rôle important dans la supraconductivité. En effet, les électrons interagissent à travers le champ de phonons pour créer des états liés (paire de Cooper). L'interaction électron-phonon renormalise l'interaction électron-électron (la répulsion coulombienne) et induit une interaction attractive. De façon schématique [59], lorsqu'un électron se déplace dans le réseau cristallin, il va polariser le milieu environnant et déplacer les ions positifs. L'excès de charge positive résultant va pouvoir attirer un second électron si l'interaction est suffisamment forte pour contrecarrer la force de Coulomb. Cette interaction étant créée par une déformation du réseau, ce sont les phonons qui doivent transmettre l'attraction. De plus, cette interaction n'est médiée que par des phonons de haute énergie (acoustiques ou optiques). L'interaction effective résultante peut-être décrite par un Hamiltonien de contact de type [63]

$$H_{\text{int}} = -\eta \int d^3\mathbf{x} \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{x}) \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{x}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{x}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{x}), \quad (3.1.5)$$

où  $\eta$  est la constante de couplage électron-électron effective. La densité du hamiltonien BCS est alors

$$\mathcal{H}_{\text{BCS}} = \sum_{\sigma} \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{x}) \left[ \frac{(-i\nabla)^2}{2m} - \mu \right] \Psi_{\sigma}(\mathbf{x}) - \eta \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{x}) \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{x}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{x}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{x}). \quad (3.1.6)$$

On définit le conjugué du champ fermionique comme étant  $\pi_{\sigma}(\mathbf{x}) = i\Psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{x})$ . On obtient la densité lagrangienne par transformation de Legendre de l'hamiltonien :

$$\mathcal{L}_{\text{BCS}} = \sum_{\sigma} \pi_{\sigma}(\mathbf{x}) \dot{\Psi}_{\sigma}(\mathbf{x}) - \mathcal{H}_{\text{BCS}} \quad (3.1.7)$$

$$= \sum_{\sigma} \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{x}) \left[ i\partial_t - \frac{(-i\nabla)^2}{2m} + \mu \right] \Psi_{\sigma}(\mathbf{x}) + \eta \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{x}) \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{x}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{x}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{x}). \quad (3.1.8)$$

Si l'on adopte le formalisme de l'intégrale des chemins (voir par exemple [63, 64]), la fonction de partition de cette théorie est donnée par la formule suivante

$$Z = \frac{1}{Z_{\Psi}} \int \prod_{\sigma} \mathcal{D}\Psi_{\sigma}^{\dagger} \mathcal{D}\Psi_{\sigma} e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{BCS}}}, \quad (3.1.9)$$

avec  $Z_{\Psi}$  la fonction de partition pour la théorie libre. Il est utile à ce stade de faire une transformation de Hubbard-Stratonovich. Pour cela, on multiplie  $Z$  par

$$1 = \frac{1}{Z_\Delta} \int \mathcal{D}\Delta^* \mathcal{D}\Delta e^{i \int d^4x (-\frac{1}{\eta} \Delta^* \Delta)}, \quad (3.1.10)$$

où  $\Delta$  est un champ complexe bosonique. On a

$$Z = \frac{1}{Z_\Delta Z_\Psi} \int \Pi_\sigma \mathcal{D}\Psi_\sigma^\dagger \mathcal{D}\Psi_\sigma e^{i \int d^4x \mathcal{L}_\Delta}, \quad (3.1.11)$$

avec

$$\mathcal{L}_\Delta = \mathcal{L}_{\text{BCS}} - \frac{1}{\eta} \Delta^* \Delta. \quad (3.1.12)$$

Un décalage  $\Delta$  laissera  $Z$  invariant

$$\begin{cases} \Delta & \longrightarrow \Delta - \eta \Psi_\downarrow \Psi_\uparrow \\ \Delta^* & \longrightarrow \Delta^* - \eta \Psi_\uparrow^\dagger \Psi_\downarrow^\dagger. \end{cases} \quad (3.1.13)$$

Nous définissons maintenant le spineur de Nambu [13]  $\Phi = (\Psi_\uparrow, \Psi_\downarrow^\dagger)^\top$ . La densité du lagrangien peut être réécrite sous la forme diagonale simple

$$\mathcal{L}_\Delta = \Phi^\dagger \hat{G}^{-1}(\Delta) \Phi - \frac{1}{\eta} \Delta^* \Delta, \quad (3.1.14)$$

$$\hat{G}^{-1}(\Delta) = \begin{pmatrix} i\partial_t - \frac{(-i\nabla)^2}{2m} + \mu & \Delta \\ \Delta^* & i\partial_t + \frac{(-i\nabla)^2}{2m} - \mu \end{pmatrix}, \quad (3.1.15)$$

où  $\mu$  est le niveau de Fermi. Nous pouvons maintenant intégrer le champ  $\Phi$  pour obtenir l'action effective

$$S_{\text{eff}}[\Delta] = \int d^4x \left( -\frac{1}{\eta} |\Delta|^2 \right) - i \text{Tr} \ln \hat{G}^{-1}(\Delta) \quad (3.1.16)$$

où nous avons utilisé la propriété  $\ln \det = \text{Tr} \ln$ .

La transformation de Hubbard-Stratonovich que nous venons d'effectuer est équivalente à l'approximation du champ moyen si nous extrémissons notre action effective, c-à-d. si nous voulons fixer  $\Delta$  de telle sorte que

$$\frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \Delta^*} = 0 \quad (3.1.17)$$

$$\iff -\frac{1}{\eta} \Delta - i \frac{\delta}{\delta \Delta^*} \text{Tr} \ln \hat{G}^{-1}(\Delta) = 0 \quad (3.1.18)$$

$$\iff -\frac{1}{\eta} \Delta - i \text{Tr} \left[ \hat{G}(\Delta; x_1, x_2) \frac{\delta}{\delta \Delta^*} \hat{G}^{-1}(\Delta) \right] = 0 \quad (3.1.19)$$

avec  $x_i = (t_i, \mathbf{x}_i)$ . La dérivée fonctionnelle est

$$\frac{\delta}{\delta \Delta^*} \hat{G}^{-1}(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.20)$$

Pour obtenir  $\hat{G}(\Delta; x_1, x_2)$ , nous passons dans l'espace des impulsions et inversons simplement  $\hat{G}^{-1}(\Delta)$ . Cela nous donne

$$\hat{G}(\Delta; x_1, x_2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{\mathbf{k}} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\omega^2 - E_{\mathbf{k}}^2 + i\varepsilon} \begin{pmatrix} \omega + \xi_{\mathbf{k}} & -\Delta \\ -\Delta^* & \omega - \xi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} e^{-ik(x_1 - x_2)} \quad (3.1.21)$$

avec  $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta|^2}$  et  $kx = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{x}$ . La trace est simplement donnée par

$$\text{Tr} \left[ \hat{G}(\Delta; x_1, x_2) \frac{\delta}{\delta \Delta^*} \hat{G}^{-1}(\Delta) \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta x \rightarrow 0^+} \sum_{\mathbf{k}} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{-\Delta}{\omega^2 - E_{\mathbf{k}}^2 + i\varepsilon} e^{-ik\delta x}, \quad (3.1.22)$$

où  $\delta x = x_1 - x_2$ .

Pour résoudre l'intégration par rapport à  $\omega$  nous allons dans le plan complexe où nous fermons le contour d'intégration dans le demi-plan inférieur [65]. Dans ce secteur, l'intégrande a le pôle  $E_{\mathbf{k}} - i\varepsilon$ . Le terme  $e^{-ik\delta x}$  assure que le demi-cercle ne donne aucune contribution lorsque le rayon tend vers l'infini. On obtient simplement le résultat

$$-i \text{Tr} \left[ \hat{G}(\Delta; x_1, x_2) \frac{\delta}{\delta \Delta^*} \hat{G}^{-1}(\Delta) \right] = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta}{2E_{\mathbf{k}}}. \quad (3.1.23)$$

En notant la densité d'état  $\nu(\xi) \simeq \text{cte} = \nu$  et  $\omega_D$  la fréquence de Debye, nous obtenons la relation d'auto-cohérence du gap BCS

$$\frac{\Delta}{\eta} = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \nu(\xi) \frac{\Delta}{2\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta|^2}} \quad (3.1.24)$$

$$= \int_0^{\omega_D} d\xi \nu(\xi) \frac{\Delta}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta|^2}} \quad (3.1.25)$$

$$= \Delta \nu \text{arcsinh}(\omega_D/\Delta), \quad (3.1.26)$$

c-à-d.

$$\Delta = \frac{\omega_D}{\sinh(1/\eta\nu)} \stackrel{\eta\nu \ll 1}{\simeq} 2\omega_D e^{-1/\eta\nu}. \quad (3.1.27)$$

C'est exactement le résultat donné par la méthode du champ moyen [59]. Il est habituel d'écrire l'hamiltonien BCS directement dans l'espace des impulsions

$$H_{\text{BCS}} = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}, \sigma} - \eta \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}, \downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}'+\mathbf{q}, \downarrow} c_{\mathbf{k}', \uparrow} \quad (3.1.28)$$

où nous avons fait le remplacement  $\eta \rightarrow \eta V$  avec  $V$  le volume du SC. En considérant que seuls les paires d'électrons à l'opposé sur la surface de Fermi, c-à-d. d'impulsion  $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ , on fixe  $\mathbf{q} = 0$ . Dans le SC le nombre de paires de Cooper doit être non-nul. On définit

$$\Delta = \eta \sum_{\mathbf{k}} \langle \Psi_{\text{BCS}} | c_{-\mathbf{k},\downarrow} c_{\mathbf{k},\uparrow} | \Psi_{\text{BCS}} \rangle, \quad (3.1.29)$$

avec  $|\Psi_{\text{BCS}}\rangle$  l'état fondamental BCS. Cette quantité est exactement celle définie par l'Éq. (3.1.17) et obéit à la même équation d'auto-consistance. On réécrit l'hamiltonien en fonction de  $\Delta$

$$H_{\text{BCS}} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} c_{\mathbf{k},\sigma} - \sum_{\mathbf{k}} \left( \Delta c_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k},\downarrow}^{\dagger} + \Delta^* c_{-\mathbf{k},\downarrow} c_{\mathbf{k},\uparrow} \right) + \frac{|\Delta|^2}{\eta} + \eta |\delta\Delta|^2, \quad (3.1.30)$$

avec

$$\delta\Delta = \sum_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k},\downarrow} c_{\mathbf{k},\uparrow} - \frac{\Delta}{\eta}. \quad (3.1.31)$$

Dans l'approximation de champ moyen on prend  $\delta\Delta = 0$  et  $H_{\text{BCS}} \rightarrow H_{\text{BCS}}^{\text{cm}}$ . En faisant cela, l'hamiltonien n'apparaît plus invariant suivant la symétrie globale  $U(1)$  où  $c_{\mathbf{k},\sigma} \rightarrow e^{i\alpha} c_{\mathbf{k},\sigma}$ . De façon équivalente, en notant  $N = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^{\dagger} c_{\mathbf{k}}$  l'opérateur nombre de particules, on a  $[N, H_{\text{BCS}}^{\text{cm}}] \neq 0$ . La conservation du nombre de particules est alors violée et des paires de Cooper peuvent être créées ou détruites à partir du vide. On note que

$$c_{-\mathbf{k},\downarrow} c_{\mathbf{k},\uparrow} = -\frac{1}{2} [N, c_{-\mathbf{k},\downarrow} c_{\mathbf{k},\uparrow}], \quad (3.1.32)$$

le gap prend donc la forme d'un paramètre d'ordre (Éq. 1.1.7). Enfin, l'état fondamental de l'hamiltonien de champ moyen est donné par l'état cohérent

$$|\Psi_{\text{BCS}}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \left( u_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k},\downarrow}^{\dagger} | \Psi_0 \rangle \right), \quad (3.1.33)$$

avec  $|\Psi_0\rangle$  l'état annihilé par les opérateurs fermioniques  $c_{\mathbf{k},\sigma}$  et

$$u_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right)}, \quad (3.1.34)$$

$$v_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right)}. \quad (3.1.35)$$

Ici  $|v_{\mathbf{k}}|^2$  représente la probabilité que la paire  $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$  soit occupée.

### Paramètre d'ordre

On peut remarquer que le gap défini Éq. (3.1.29) n'est pas invariant de jauge; il se transforme suivant la loi

$$\Delta \rightarrow e^{-2ie\Lambda(\mathbf{x})}\Delta. \quad (3.1.36)$$

D'après le théorème d'Elitzur on doit donc avoir  $\langle \Delta \rangle = 0$ . On a déjà vu dans la Sec. 1.2.2 le cas où le champ de Higgs acquiert une VMV après un choix de jauge. La BSS provenait de la brisure d'une symétrie *globale*, sous-groupe des transformations locales. On veut donc un PO invariant sous transformations locales (et locales seulement). C'est Dirac [66, 67] qui apporte une première réponse, avec le PO *non-local*  $\psi_D$

$$\psi_D(\mathbf{x}) = e^{i \int d^3x' \mathbf{E}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}')} \psi(\mathbf{x}), \quad (3.1.37)$$

avec  $\psi(\mathbf{x}) \propto \sum_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k},\downarrow} c_{\mathbf{k},\uparrow}$  et  $\mathbf{E}$  le champ électrique émis par une charge à l'origine, c-à-d.  $\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$ . On prouve que ce PO est invariant de jauge :

$$\psi_D \longrightarrow e^{-2ie \int d^3x' \mathbf{E}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) \cdot \nabla \Lambda(\mathbf{x}')} e^{-2ie\Lambda(\mathbf{x})} \times e^{i \int d^3x' \mathbf{E}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}')} \psi(\mathbf{x}) \quad (3.1.38)$$

$$\stackrel{\text{IPP}}{=} e^{2ie \int d^3x' \overbrace{\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{x}'-\mathbf{x})}^{\delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} \Lambda(\mathbf{x}')} e^{-2ie\Lambda(\mathbf{x})} \times e^{i \int d^3x' \mathbf{E}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}')} \psi(\mathbf{x}) \quad (3.1.39)$$

$$= e^{i \int d^3x' \mathbf{E}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}')} \psi(\mathbf{x}). \quad (3.1.40)$$

Le champ  $\psi_D$  peut donc avoir une VMV non-nulle. Cependant,  $\psi_D$  n'est pas invariant suivant une transformation *globale* car on a alors

$$\psi_D \longrightarrow e^{-2ie\Lambda} e^{i \int d^3x' \mathbf{E}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}')} \psi(\mathbf{x}). \quad (3.1.41)$$

C'est cette symétrie qui peut être spontanément brisé. De façon générale [68], un PO tel que  $\psi_D$  peut être écrit

$$\psi_D(\mathbf{x}) = G[\mathbf{x}; \mathbf{A}] \psi(\mathbf{x}), \quad (3.1.42)$$

avec  $G[\mathbf{x}; \mathbf{A}]$  un opérateur transformant  $\psi$  dans une nouvelle jauge. Dans le cas du paramètre d'ordre (3.1.37),  $G[\mathbf{x}; \mathbf{A}]$  transforme  $\psi(\mathbf{x})$  dans la jauge de Coulomb. En effet, dans cette jauge,  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  et le vecteur potentiel est égal à sa composante transverse. On a donc  $\psi_D(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})$ . C'est typiquement le cas dans la théorie BCS où le PO semble local, du fait de ce choix de jauge implicite.

## 3.2 Fonctions de Green et théorie de Gor'kov

On définit le spineur de Nambu dans l'espace des impulsions

$$\Phi_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}} \\ c_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (3.2.1)$$



Nous noterons dans la suite  $k = (\uparrow, \mathbf{k})$  et  $-k = (\downarrow, -\mathbf{k})$ . À temps égaux ils obéissent à la relation d'anti-commutation

$$\{\Phi_{k\alpha}, \Phi_{k'\beta}^\dagger\} = \delta_{k,k'} \delta_{\alpha\beta}. \quad (3.2.2)$$

On peut réécrire l'hamiltonien (3.1.30) en fonction des spineurs

$$H_{\text{BCS}} = \sum_{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{k}}^\dagger (\xi_{\mathbf{k}} \sigma_3 - \Delta \sigma_1) \Phi_{\mathbf{k}}, \quad (3.2.3)$$

où  $\sigma_i$  sont les matrices de Pauli. À noter que nous n'avons pas écrit les termes constants qui n'ajoutent qu'un décalage à l'énergie.

On définit la *fonction de Green* (FG)

$$\hat{G}_{\alpha\beta}(k, t) = -i \langle T\{\Phi_{k\alpha}(t) \Phi_{k\beta}^\dagger(0)\} \rangle \quad (3.2.4)$$

avec  $T\{\dots\}$  l'opérateur d'ordonnance temporelle.

Pour calculer cette fonction, dérivons-la par rapport au temps

$$i\partial_t \hat{G}_{\alpha\beta}(k, t) = \langle \Phi_{k\alpha}(t) \Phi_{k\beta}^\dagger(0) \rangle \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) - \frac{\partial}{\partial t} \theta(-t) \langle \Phi_{k\beta}^\dagger(0) \Phi_{k\alpha}(t) \rangle + \langle T\{\partial_t \Phi_{k\alpha}(t) \Phi_{k\beta}^\dagger(0)\} \rangle, \quad (3.2.5)$$

ou de façon plus compacte

$$i\partial_t \hat{G}_{\alpha\beta}(k, t) = \delta_{\alpha\beta} \delta(t) + \langle T\{\partial_t \Phi_{k\alpha}(t) \Phi_{k\beta}^\dagger(0)\} \rangle. \quad (3.2.6)$$

Le terme source  $\delta(t) \delta_{\alpha\beta}$  provient de  $\partial_t \theta(t) = \delta(t)$  et des règles (3.2.2). L'équation d'Heisenberg nous donne

$$i\partial_t \Phi_{k\alpha}(t) = [\Phi_{k\alpha}, H_{\text{BCS}}] = (\xi_{\mathbf{k}} \sigma_3 - \Delta \sigma_1)_{\alpha\gamma} \Phi_{k\gamma}(t). \quad (3.2.7)$$

Dans l'espace de Fourier on obtient

$$\omega \hat{G}_{\alpha\beta}(k, \omega) = \delta_{\alpha\beta} + (\xi_{\mathbf{k}} \sigma_3 - \Delta \sigma_1)_{\alpha\gamma} \hat{G}_{\gamma\beta}(k, \omega) \quad (3.2.8)$$

$$\iff (\omega - \xi_{\mathbf{k}} \sigma_3 + \Delta \sigma_1) \hat{G}(k, \omega) = \mathbb{1}. \quad (3.2.9)$$

En inversant cette équation on obtient

$$\hat{G}(k, \omega) = \frac{\omega + \xi_{\mathbf{k}} \sigma_3 - \Delta \sigma_1}{\omega^2 - E_{\mathbf{k}}^2 + i\epsilon} \quad (3.2.10)$$

avec  $E_{\mathbf{k}}^2 = \xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2$  et  $\epsilon$  un nombre positif infinitésimal. Dans la limite  $\Delta \rightarrow 0$ , on retrouve la fonction de Green d'un électron libre dans un métal normal.<sup>1</sup> On remarque

1. Nous aurions pu deviner ce résultat en écrivant le lagrangien  $\mathcal{L} = \Phi^\dagger \partial \Phi / \partial t - H_{\text{BCS}}$ . Ce serait assez similaire au lagrangien de l'électrodynamique quantique avec des matrices de Pauli au lieu de celles de Dirac.

que la fonction de Green est simplement la fonction (3.1.21) dans l'espace des impulsions et

$$\hat{G}^{-1}(\Delta)\hat{G}(\Delta; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \quad (3.2.11)$$

d'où le terme de fonction de Green. On définit les fonctions de Green *anormales* (également appelées *fonctions de Gor'kov*)

$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -i\langle T[\Psi_{\downarrow}(\mathbf{x}_1)\Psi_{\uparrow}(\mathbf{x}_2)] \rangle, \quad (3.2.12)$$

$$F^{\dagger}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -i\langle T[\Psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{x}_1)\Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{x}_2)] \rangle, \quad (3.2.13)$$

ainsi que

$$G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -i\langle T[\Psi_{\uparrow}(\mathbf{x}_1)\Psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{x}_2)] \rangle, \quad (3.2.14)$$

$$\bar{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -i\langle T[\Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{x}_1)\Psi_{\downarrow}(\mathbf{x}_2)] \rangle. \quad (3.2.15)$$

On réécrit la FG des spineurs de Nambu dans cette base

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G & -F \\ -F^{\dagger} & \bar{G} \end{pmatrix}. \quad (3.2.16)$$

En développant l'Éq. (3.2.11) on obtient *les équations de Gor'kov* [69]

$$i\partial_t G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - \left( \frac{(-i\nabla)^2}{2m} - \mu \right) G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \Delta F^{\dagger}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \quad (3.2.17)$$

$$i\partial_t F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \left( \frac{(-i\nabla)^2}{2m} - \mu \right) F^{\dagger}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \Delta^* G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0, \quad (3.2.18)$$

où tous les opérateurs s'appliquent sur la première coordonnée  $\mathbf{x}_1$ .

L'équation d'auto-consistance est donné par l'Éq. (3.1.19) et s'écrit en fonction des fonctions anormales

$$\Delta(\mathbf{x}_1) = i\eta F(\mathbf{x}_1, t^+; \mathbf{x}_1, t), \quad (3.2.19)$$

avec  $t^+ - t = \epsilon$  un infinitésimal positif.

### 3.3 Équations de Bogoliubov-de Gennes

Un autre formalisme de la théorie BCS est celui développé par Bogoliubov et de Gennes [70–72]. On cherche à diagonaliser l'hamiltonien de champ moyen BCS

$$H_{\text{BCS}}^{\text{cm}} = \sum_{\sigma} \int d^3\mathbf{x} \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{x}) \left[ \frac{(-i\nabla)^2}{2m} - \mu \right] \Psi_{\sigma}(\mathbf{x}) - \left( \Delta(\mathbf{x}) \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{x}) \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{x}) + \Delta^*(\mathbf{x}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{x}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{x}) \right) \quad (3.3.1)$$

Pour se faire, on réalise *une transformation de Bogoliubov*

$$\Psi_{\uparrow}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}} u_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \gamma_{\mathbf{n}\uparrow} + v_{\mathbf{n}}^*(\mathbf{x}) \gamma_{\mathbf{n}\downarrow}^{\dagger} \quad (3.3.2)$$

$$\Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}} u_{\mathbf{n}}^*(\mathbf{x}) \gamma_{\mathbf{n}\downarrow}^{\dagger} - v_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \gamma_{\mathbf{n}\uparrow}. \quad (3.3.3)$$

Ici  $\gamma_{\mathbf{n}}$  est opérateur fermionique et obéit à la relation d'anti-commutation

$$[\gamma_{\mathbf{n}\sigma}, \gamma_{\mathbf{m}\sigma'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{n},\mathbf{m}} \delta_{\sigma,\sigma'}. \quad (3.3.4)$$

L'objectif est d'écrire l'hamiltonien dans cette nouvelle base

$$H_{\text{BCS}}^{\text{cm}} = \sum_{\mathbf{n}} E_{\mathbf{n}} \gamma_{\mathbf{n}}^{\dagger} \gamma_{\mathbf{n}}. \quad (3.3.5)$$

Les équation d'Heisenberg associées aux champs  $\Psi$  sont

$$i\partial_t \Psi_{\uparrow}(\mathbf{x}) = \left[ \frac{(-i\nabla)^2}{2m} - \mu \right] \Psi_{\uparrow}(\mathbf{x}) - \Delta(\mathbf{x}) \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{x}), \quad (3.3.6)$$

$$i\partial_t \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{x}) = - \left[ \frac{(-i\nabla)^2}{2m} - \mu \right] \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{x}) - \Delta^*(\mathbf{x}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{x}). \quad (3.3.7)$$

En combinant ces équations et Éqs. (3.3.2, 3.3.3) on obtient les équations de Bogoliubov-de Gennes (BdG)

$$\begin{pmatrix} \frac{(-i\nabla)^2}{2m} - \mu & \Delta \\ \Delta^* & -\frac{(-i\nabla)^2}{2m} + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\mathbf{n}} \\ v_{\mathbf{n}} \end{pmatrix} = E_{\mathbf{n}} \begin{pmatrix} u_{\mathbf{n}} \\ v_{\mathbf{n}} \end{pmatrix}. \quad (3.3.8)$$

La matrice à gauche de la dernière équation est appelée hamiltonien de BdG noté  $H_{\text{BdG}}$ . La relation d'auto-consistance devient

$$\Delta(\mathbf{x}) = \eta \sum_{\mathbf{n}} v_{\mathbf{n}}^*(\mathbf{x}) u_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \text{sign } E_{\mathbf{n}}. \quad (3.3.9)$$

On voit que les deux fonctions  $u_{\mathbf{n}}$  et  $v_{\mathbf{n}}$  forment ensemble un spineur  $(u_{\mathbf{n}}, v_{\mathbf{n}})^{\text{T}}$ . La fonction  $u_{\mathbf{n}}$  ( $v_{\mathbf{n}}$ ) représente la fonction d'onde d'une quasi-particule "électron" ("trou"). À température finie, il faut remplacer  $\text{sign } E_{\mathbf{n}} \rightarrow \tanh(\beta E_{\mathbf{n}}/2)$ .

Prenons un exemple. Dans un SC homogène 1D, le gap est constant. On cherche les solutions sous la forme d'ondes planes

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} e^{ikx}. \quad (3.3.10)$$

En considérant le gap réel, on a d'après Éq. (3.3.8)

$$\left( \frac{k^2}{2m} - \mu \right) \bar{u} + \Delta \bar{v} = E \bar{u} \quad (3.3.11)$$

$$-\left( \frac{k^2}{2m} - \mu \right) \bar{v} + \Delta^* \bar{u} = E \bar{v}. \quad (3.3.12)$$

La solution d'énergie positive est sans surprise  $E = \sqrt{\left(\frac{k^2}{2m} - \mu\right)^2 + \Delta^2}$  et les fonctions spinorielles  $\bar{u}_0$  et  $\bar{v}_0$  sont données par les Éqs. (3.1.34, 3.1.35). On définit

$$k^\pm = \sqrt{2m} \sqrt{\mu \pm \sqrt{E^2 - \Delta^2}}. \quad (3.3.13)$$

On a alors les fonctions propres de type électron

$$\Psi_{\pm e} = \begin{pmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{v}_0 \end{pmatrix} e^{\pm ik^+ x} \quad (3.3.14)$$

et de type trou

$$\Psi_{\pm t} = \begin{pmatrix} \bar{v}_0 \\ \bar{u}_0 \end{pmatrix} e^{\pm ik^- x}. \quad (3.3.15)$$

Enfin, dans le cas  $\Delta \ll \mu$ , la longueur de cohérence du SC est bien supérieur à la longueur de Fermi  $\xi \gg \lambda_F$ . On peut donc développer l'impulsion proche de celle de Fermi  $k = k_F + \delta k$ . On peut approximer le laplacien  $\partial_x^2$  par  $k_F \partial_x$ . En effet,  $|\partial_x^2 u| \sim u/\xi^2$  et  $|k_F \partial_x u| \sim u/\lambda_F \xi$ . On a alors l'approximation quasi-classique (ou d'Andreev) des équations de BdG

$$\begin{pmatrix} -iv_F \nabla & \Delta \\ \Delta^* & iv_F \nabla \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}. \quad (3.3.16)$$

Dans un SC homogène on a dans ce cas les solutions

$$\Psi_e = \begin{pmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{v}_0 \end{pmatrix} e^{iq^+ x}, \quad (3.3.17)$$

$$\Psi_t = \begin{pmatrix} \bar{v}_0 \\ \bar{u}_0 \end{pmatrix} e^{iq^- x}, \quad (3.3.18)$$

avec  $q^\pm = \pm \sqrt{E^2 - \Delta^2}/v_F$  et  $E = \sqrt{v_F^2 k^2 + \Delta^2}$ .

	Gor'kov	BdG
Équation fondamentale	$\hat{G}^{-1}\hat{G}(x_1, x_2) = \delta(x_1 - x_2)$	$i\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = H_{\text{BdG}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
Auto-consistance $\Delta(\mathbf{x}) =$	$i\eta F(\mathbf{x}, t^+; \mathbf{x}, t)$	$\eta \sum_n v_n^*(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{x}) \tanh\left(\frac{\beta E_n}{2}\right)$

TABLE 3.1 – Relations entre les formalismes de Gor'kov et Bogoliubov-de Gennes.

## 3.4 Restauration de l'invariance de jauge dans la théorie BCS

Dans la théorie BCS, l'une des approximations essentielles est que les corrélations entre les paires de Cooper sont uniquement dues au principe de Pauli [73]. Comme ces corrélations sont majoritaires, BCS donne de très bonnes prédictions. Cependant il existe également des modes collectifs, comme le mode de Higgs, qui sont négligés par cette approximation. C'est ce qui explique également le caractère non-invariant de jauge de la théorie. En effet, la théorie BCS ne prédit pas la bonne réponse d'un SC soumis à des champs longitudinaux.<sup>2</sup> Nous verrons comment, de façon complémentaire, l'invariance de jauge implique l'existence de ces modes collectifs en partant de la théorie microscopique et comment le MAH émerge dans ce formalisme.

### 3.4.1 Réponse linéaire

Dans cette section, nous nous intéressons à la réponse d'un supraconducteur soumis à un champ externe faible. Nous reprendrons l'approche prise par Nambu [13] (voir également Schrieffer [73]).

#### Noyau

En présence d'un champ électromagnétique  $A_\mu$ , l'hamiltonien de couplage  $H'$  est donné par

$$H' = - \int d^3x j_\mu(x) A^\mu(x). \quad (3.4.1)$$

$j_\mu(x) = j_\mu^p(x) + j_\mu^d(x)$  est l'opérateur courant défini avec la partie paramagnétique

$$j_\mu^p(x) = \begin{cases} -e \sum_\sigma \{\Psi_\sigma^\dagger \Psi_\sigma\}(x) = -e\rho(x) & (\mu = 0) \\ -e/2mi \sum_\sigma \{\Psi_\sigma^\dagger \nabla \Psi_\sigma - (\nabla \Psi_\sigma^\dagger) \Psi_\sigma\}(x) & (\mu = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (3.4.2)$$

et diamagnétique

<sup>2</sup>. Dans le jauge de Coulomb (jauge de l'article BCS [10]), le potentiel vecteur est entièrement transverse et il n'y a pas de problème.

$$\mathbf{j}_\mu^d(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 \\ \frac{e^2}{m} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Dans la représentation d'interaction l'état fondamental sera

$$|\Phi(t)\rangle = T \exp \left[ -i \int_{-\infty}^t H'(t') dt' \right] |\Psi_0\rangle \quad (3.4.4)$$

et on définit la valeur moyenne  $J_\mu(\mathbf{x}) = \langle \Phi(t) | j_\mu(\mathbf{x}) | \Phi(t) \rangle$ . Au premier ordre en  $A_\mu$  on trouve

$$J_\mu(\mathbf{x}) = - \int K_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') A^\nu(\mathbf{r}', t') d^4 r' \quad (3.4.5)$$

avec le noyau

$$K_{\mu\nu}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = -i \langle \Psi_0 | [j_\mu^p(\mathbf{x}), j_\nu^p(\mathbf{x}')] | \Psi_0 \rangle \theta(t - t') - \frac{e^2}{m} \langle \Psi_0 | \rho(\mathbf{x}) | \Psi_0 \rangle \delta^4(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{\mu,\nu} [1 - \delta_{\mu,0}]. \quad (3.4.6)$$

Dans l'espace des impulsions le noyau devient

$$K_{\mu\nu}(\mathbf{q}) = R_{\mu\nu}(\mathbf{q}) + \frac{1}{\lambda_L^2} \delta_{\mu,\nu} [1 - \delta_{\mu,0}] \quad (3.4.7)$$

où  $R_{\mu\nu}(\mathbf{q}, \tau) = -i \langle \Psi_0 | [j_\mu^p(\mathbf{q}, \tau), j_\nu^p(-\mathbf{q}, 0)] | \Psi_0 \rangle \theta(\tau)$  et  $\lambda_L$  est la longueur de London. Il est utile définir

$$P_{\mu\nu}(\mathbf{q}, \tau) = -i \langle \Psi_0 | T \{ j_\mu^p(\mathbf{q}, \tau) j_\nu^p(-\mathbf{q}, 0) \} | \Psi_0 \rangle \quad (3.4.8)$$

ainsi que le quadrivecteur  $q^\mu = (q_0, \mathbf{q})$  où  $q_0$  est l'énergie et  $\mathbf{q}$  le vecteur d'onde.  $P_{\mu\nu}$  et  $R_{\mu\nu}$  sont reliés par les relations

$$\text{Re } P_{\mu\nu}(\mathbf{q}, q_0) = \text{Re } R_{\mu\nu}(\mathbf{q}, q_0) \quad (3.4.9)$$

$$\text{Im } P_{\mu\nu}(\mathbf{q}, q_0) = \text{sgn}(q_0) \text{Im } R_{\mu\nu}(\mathbf{q}, q_0). \quad (3.4.10)$$

Pour calculer  $P_{ij}$  on utilisera le formalisme de Nambu. Comme la partie diamagnétique du noyau est connue exactement, nous nous intéresserons à la partie paramagnétique. En laissant tomber l'exposant  $p$  de  $j_\mu^p$  on écrit

$$\mathbf{j}(\mathbf{q}) = \frac{-e}{m} \sum_{\mathbf{k}} \left( \mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \Phi_{\mathbf{k}}^\dagger \Phi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}. \quad (3.4.11)$$

En réinjectant (3.4.11) dans (3.4.8) on trouve, en utilisant la factorisation d'Hartree de la VMV,

$$P_{ij}(\mathbf{q}) = \frac{-ie^2}{m^2} \int \left( \mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2} \right)_i \left( \mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2} \right)_j \times \text{Tr}[\hat{G}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \hat{G}(\mathbf{k})] \frac{d^4 \mathbf{k}}{(2\pi)^4}. \quad (3.4.12)$$

### 3.4. Restauration de l'invariance de jauge dans la théorie BCS

Dans la suite pour simplifier l'écriture nous remplacerons  $\hat{G} \rightarrow G$ . Dans le cas statique,  $q_0 = 0$  et  $P_{ij}$  devient

$$P_{ij}(\mathbf{q}, 0) = \frac{-2e^2}{m^2} \int \left( \mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2} \right)_i \left( \mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2} \right)_j L(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \quad (3.4.13)$$

où

$$L(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{i}{2} \int \frac{dk_0}{2\pi} \text{Tr}[G(\mathbf{k} + \mathbf{q})G(\mathbf{k})] \quad (3.4.14)$$

$$= \frac{p^2(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q})}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k} + \mathbf{q}}}. \quad (3.4.15)$$

Le terme  $p(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}'} - v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}'}$  est appelé le facteur de cohérence. On a la limite  $\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} L(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = 0$ . D'après l'Éq. (3.4.9),  $\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} R_{ij}(\mathbf{q}, 0) = 0$ . On a donc dans cette limite

$$K_{ij} = \frac{1}{\lambda_L^2} \delta_{ij}. \quad (3.4.16)$$

C'est le *noyau de London*. Ce noyau prédit l'effet Meissner. Le problème est qu'un potentiel longitudinal engendrera une réponse en courant : l'invariance de jauge est donc brisée. Dans la suite nous verrons comment la retrouver.

#### Invariance de jauge

Le potentiel vecteur se transforme sous une symétrie locale  $U(1)$  dans l'espace des impulsions

$$A_{\mu}(q) \Rightarrow A_{\mu}(q) + q_{\mu}\alpha(q). \quad (3.4.17)$$

L'opérateur de l'Éq. (3.4.5) donnant des résultats mesurables, l'invariance de jauge implique que

$$K_{\mu\nu}q^{\nu} = 0. \quad (3.4.18)$$

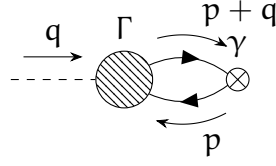
L'invariance de jauge assure qu'un courant  $j_{\mu}$  couplé à  $A_{\mu}$  doit être conservé  $\partial_{\mu}j^{\mu} = 0$  (voir Sec. 1.2.1). On peut écrire  $j^{\mu}(q) = -e \sum_{\mathbf{p}} \Phi_{\mathbf{p}}^{\dagger} \gamma^{\mu}(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \Phi_{\mathbf{p} + \mathbf{q}}$  où  $\gamma^{\mu}$  est l'opérateur vertex. D'après (3.4.2) on a

$$\gamma^{\mu}(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) = \begin{cases} \sigma_3 \\ \frac{1}{m}(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) \end{cases} \quad (3.4.19)$$

On introduit un nouveau corrélateur

$$\zeta_{\mu}(x, y, z) = \langle \Psi_0 | T \{ j_{\mu}(z) \Phi(x) \Phi^{\dagger}(y) \} | \Psi_0 \rangle. \quad (3.4.20)$$

On définit l'opérateur vertex  $\Gamma_{\mu}$  d'après


 FIGURE 3.1 – Diagramme de Feynman de  $P_{\mu\nu}$ .

$$\zeta_{\mu}(x, y, z) = \int G(x, x') \Gamma_{\mu}(x', y', z) G(y, y') d^4x' d^4y'. \quad (3.4.21)$$

On peut écrire l'Éq. (3.4.20) en utilisant la fonction d'Heaviside  $\theta$ . Après avoir pris la divergence on obtient

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} \zeta^{\mu}(x, y, z) = & \langle \Psi_0 | T \{ \partial_{\mu} j^{\mu}(z) \Phi^{\dagger}(x) \Phi(y) \} | \Psi_0 \rangle + \langle \Psi_0 | T \{ [j_0(z), \Phi(x)] \Phi^{\dagger}(y) \} | \Psi_0 \rangle \delta(z_0 - x_0) \\ & + \langle \Psi_0 | T \{ \Phi(x) [j_0(z), \Phi^{\dagger}(y)] \} | \Psi_0 \rangle \delta(z_0 - y_0), \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

la dérivée partielle  $\partial_{\mu}$  agissant sur la composante  $z$ . Le premier terme est nul en raison de la conservation du courant. Les spineurs de Nambu obéissent à la relation d'anticommuation du champ fermionique  $\{ \Phi(x), \Phi^{\dagger}(y) \} = \delta(x - y)$  et nous en déduisons

$$[j_0(z), \Phi(x)] \delta(z_0 - x_0) = e \sigma_3 \Phi(z) \delta(x - z) \quad (3.4.23)$$

$$[j_0(z), \Phi^{\dagger}(y)] \delta(z_0 - y_0) = -e \Phi^{\dagger}(y) \sigma_3 \delta(z - y). \quad (3.4.24)$$

D'après l'Éq. (3.4.21) et en utilisant le dernier résultat on a

$$iG(x - z) \sigma_3 \delta(z - y) - \sigma_3 G(z - y) \delta(z - x) = - \int d^4x' d^4y' G(x - x') \partial_{\mu} \Gamma^{\mu}(x', y', z) G(y - y'). \quad (3.4.25)$$

En passant dans l'espace de Fourier on trouve l'identité de Ward

$$q_{\mu} \Gamma^{\mu}(p + q, p) = \sigma_3 G^{-1}(p) - G^{-1}(p + q) \sigma_3, \quad (3.4.26)$$

où l'on a supposé l'invariance par translation du système avec

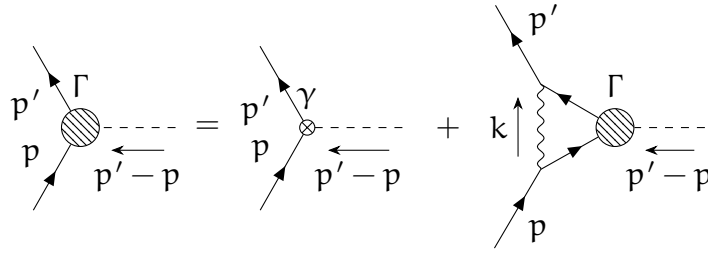
$$\Gamma^{\mu}(x', y', z) = \int \Gamma^{\mu}(p + q, p) e^{ip(x'-y')} e^{iq(x'-z)} \frac{d^4p d^4q}{(2\pi)^8}. \quad (3.4.27)$$

À partir de l'Éq. (3.4.8) et (3.4.20) on peut voir que  $P_{\mu\nu}$  est donné par le diagramme de Feynman 3.1.

On a donc

$$P_{\mu\nu}(q) = -ie^2 \int \text{Tr} \left[ \gamma(p, p + q)_{\mu} G(p + q) \Gamma_{\nu}(p + q, p) G(p) \right] \frac{d^4p}{(2\pi)^4}. \quad (3.4.28)$$




 FIGURE 3.2 – Diagrammes de Feynman pour le vertex  $\Gamma$ .

Nous comprenons pourquoi nous n'avons pas obtenu de résultat invariant de jauge auparavant ; en effet, si nous remplaçons  $\Gamma_\nu$  par  $\gamma_\nu$  dans la dernière équation, nous retrouvons l'Éq. (3.4.13). Mais cette équation ne respecte pas l'identité de Ward. Notre erreur a été de mélanger propagateur "habillé"  $\Gamma_\mu$  et "nu"  $\gamma_\mu$  dans  $P_{\mu\nu}$ . En utilisant l'identité de Ward, nous obtenons

$$P_{\mu\nu}(q)q^\nu = ie^2 \int \text{Tr} \left[ \gamma(p, p+q)_\mu G(p+q) \right. \\ \left. \times [\sigma_3 G^{-1}(p+q) - G^{-1}(p)\sigma_3] G(p) \right] \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \quad (3.4.29)$$

$$= ie^2 \int \text{Tr} \{ \gamma_\mu(p+q, p) - \gamma_\mu(p, p-q) \} \sigma_3 G(p) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}. \quad (3.4.30)$$

D'après la forme de  $\gamma_\mu$

$$\gamma_\mu(p+q, p) - \gamma_\mu(p, p-q) = \frac{q_\mu}{m} (1 - \delta_\mu), \quad (3.4.31)$$

$P_{\mu\nu}(q)q^\nu = -ne^2/mq_\mu (1 - \delta_\mu) = R_{\mu\nu}(q)q^\nu$ . Ce terme nous donne exactement  $K_{\mu\nu}q^\nu = 0$  d'après l'Éq. (3.4.7). Nous avons donc retrouvé l'invariance de jauge. Nous voulons maintenant comprendre comment cette invariance de jauge réapparaît et pourquoi elle est liée aux excitations collectives.

### 3.4.2 Modes collectifs

Les pôles du vertex  $\Gamma_\mu$  étant liés aux modes collectifs, nous utilisons une approximation [13] consistant à trouver une équation pour le vertex "habillé" respectant l'identité de Ward et ainsi obtenir les fluctuations par rapport à l'hamiltonien de champ moyen BCS de façon consistante avec l'invariance de jauge. En termes de propagateur nu, nous devons trouver tous les diagrammes sans croisement de lignes (Fig. 3.2). Ensuite, nous plaçons un opérateur vertex  $\gamma_\mu$  à chaque sommet et nous obtenons l'approximation pour  $\Gamma_\mu$  sous forme d'une équation intégrale

$$\Gamma_\mu(p', p) = \gamma_\mu(p', p) - \int \sigma_3 G(p' - k) \Gamma_\mu(p' - k, p - k) G(p - k) \sigma_3 g(k)^2 D(k) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}, \quad (3.4.32)$$

avec  $g(k)^2D(k)$  représenté par la ligne oscillante Fig. 3.2. Ce terme correspond pour l'instant aux propagateurs des phonons et nous négligeons (momentanément) l'interaction de Coulomb. Il existe une solution simple pour cette équation

$$\begin{aligned}\Gamma(p', p) &= G^{-1}(p')\sigma_3 - \sigma_3G^{-1}(p) \\ \gamma(p', p) &= G_0^{-1}(p')\sigma_3 - \sigma_3G_0^{-1}(p).\end{aligned}\quad (3.4.33)$$

où  $\Gamma(p', p) = \Gamma_\mu(p', p)(p' - p)^\mu$  (de même pour  $\gamma(p', p)$ ). C'est exactement l'identité de Ward précédente.

La différence essentielle entre les potentiels vectoriels transversaux et longitudinaux dans l'induction d'un courant est due au fait que ces derniers peuvent exciter des mouvements collectifs de paires de quasi-particules. De telles excitations collectives dérivent directement de notre solution du vertex (3.4.33). On peut prouver que dans le cas  $p = p'$ ,  $\Gamma(p, p) = 2i\sigma_2\Delta \equiv 2i\Phi_0$  et  $\gamma(p, p) = 0$ .

On a alors l'équation

$$\Phi_0(p) = - \int \sigma_3 G(p') \Phi_0(p') G(p') \sigma_3 g(p - p')^2 D(p - p') \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4}. \quad (3.4.34)$$

C'est une équation de type Bethe-Salpeter [74]; elle décrit un état lié de quasi-particules d'impulsion nulle. On définit

$$\begin{aligned}F(p, -p) &= -G(p)\Phi_0(p)G(p), \\ L(p) &= iG^{-1}(p).\end{aligned}\quad (3.4.35)$$

On s'intéresse aux paires d'impulsion  $q$ . On a l'équation homogène

$$\begin{aligned}\Phi_q(p) &\equiv L(q/2 + p)F(q/2 + p, q/2 - p)L(p - q/2) \\ &= - \int \sigma_3 F(q/2 + p', q/2 - p') \sigma_3 g(p - p')^2 D(p - p') \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4}.\end{aligned}\quad (3.4.36)$$

Pour un  $q$  petit, on réalise un calcul perturbatif en écrivant

$$\begin{aligned}F(q/2 + p, q/2 - p) &= F^{(0)}(p) + F^{(1)}(p, q/2) + \dots, \\ L(p \pm q/2) &= L(p) + \Delta L(p, \pm q/2).\end{aligned}\quad (3.4.37)$$

Au premier ordre,

$$L(p)F(p, q/2)^{(1)}L(p) + U^{(1)}(p, q/2) = - \int \sigma_3 F(p', q/2)^{(1)} \sigma_3 g(p - p')^2 D(p - p') \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4}, \quad (3.4.38)$$

$$\longleftrightarrow U^{(1)}(p, q/2) = \Delta L(p, q/2)F^{(0)}(p) + L(p)F^{(0)}(p)\Delta L(p, -q/2). \quad (3.4.39)$$

Il s'agit d'une équation inhomogène pour  $F^{(1)}$ . Pour avoir une solution,  $U^{(1)}$  doit être orthogonal à  $\Phi_0(\mathbf{p})$ . En effet, en multipliant la dernière équation par  $F^{(0)}(\mathbf{p})$  et après intégration, on obtient

$$\begin{aligned} & \int \text{Tr}[F^{(0)}(\mathbf{p})L(\mathbf{p})F(\mathbf{p}, \mathbf{q}/2)^{(1)}L(\mathbf{p})]d^4\mathbf{p} + \int \text{Tr}[F^{(0)}(\mathbf{p})U^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}/2)]d^4\mathbf{p} \\ & = - \iint \text{Tr}[F^{(0)}(\mathbf{p})\sigma_3F(\mathbf{p}', \mathbf{q}/2)^{(1)}\sigma_3g(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2D(\mathbf{p} - \mathbf{p}')] \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} d^4\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (3.4.40)$$

D'après l'Éq. (3.4.2), la partie droite de la dernière équation devient

$$= \int \text{Tr}L(\mathbf{p}')F^{(0)}(\mathbf{p}')L(\mathbf{p}')F^{(1)}(\mathbf{p}', \mathbf{q}/2)d^4\mathbf{p}', \quad (3.4.41)$$

et de fait

$$\langle F^{(0)}, U^{(1)} \rangle = \int \text{Tr}[F^{(0)}(\mathbf{p})U^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}/2)]d^4\mathbf{p} = 0. \quad (3.4.42)$$

Après d'autres calculs directs [13] on obtient

$$\langle F^{(0)}, U^{(1)} \rangle = 2\pi i \int \frac{\Delta^2}{E_p^3} \left[ \left( \frac{q_0}{2} \right)^2 - \left( \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}}{2m} \right)^2 - \frac{\epsilon_p}{m^2} \left( \frac{q}{2} \right)^2 \right] d^3\mathbf{p} = 0, \quad (3.4.43)$$

ou de façon équivalente

$$\left( \frac{q_0}{2} \right)^2 - \left( \frac{q}{2} \right)^2 \left[ \frac{1}{3} \frac{\bar{p}^2}{m^2} - \frac{\xi_p}{m} \right] = 0, \quad (3.4.44)$$

où on définit la moyenne

$$\bar{f} = \int f(\mathbf{p}) \frac{\Delta^2}{E_p^3} d^3\mathbf{p} / \int \frac{\Delta^2}{E_p^3} d^3\mathbf{p}. \quad (3.4.45)$$

Le terme  $\Delta^2/E_p^3$  est piquée autour de  $\mu$  l'énergie de Fermi et donc  $\epsilon_p \sim 0$ . On trouve donc la relation de dispersion pour le mode collectif

$$q_0^2 \approx \frac{p_F^2}{3m^2} q^2. \quad (3.4.46)$$

On voit que ce mode est de gap nul : c'est un mode de Goldstone (Sec. 1.1.3). Ce mode apparaît car nous avons négligé l'interaction de Coulomb et correspond au mode de phase dans un superfluide neutre.

### Oscillations de plasma

Jusqu'à présent, nous avons ignoré le processus de polarisation du vide. Mais ce processus domine à grande longueur d'onde (parce que l'interaction de Coulomb est à

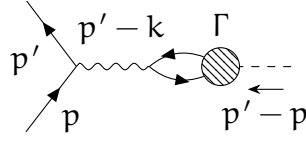


FIGURE 3.3 – Diagramme dû à la polarisation du vide.

longue portée). Nous devons donc l'inclure dans  $\Gamma$ . Nous devons ajouter un nouveau diagramme à 3.2 donné Fig. 3.3.

On remplace le terme  $g(p)^2 D(p)$  par  $V(p) = g(p)^2 D(p) + \frac{e^2}{\epsilon_0} \frac{1}{q^2}$  et nous définissons une nouvelle quantité qui satisfait cette nouvelle équation

$$\begin{aligned} \Lambda(p', p) = & \gamma(p', p) - i \int \sigma_3 G(p' - k) \times \Lambda(p' - k, p - k) G(p - k) \sigma_3 V(k) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \\ & + iV(p' - p) \sigma_3 \int \text{Tr}[\sigma_3 G(p' - k) \times \Lambda(p' - k, p - k) G(p - k)] \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}, \end{aligned} \quad (3.4.47)$$

$$\bar{X}(p' - p) = i \int \text{Tr}[\sigma_3 G(p' - k) \Lambda(p' - k, p - k) \times G(p - k)] \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}. \quad (3.4.48)$$

On peut réécrire l'Éq. (3.4.47) dans la forme

$$\Lambda = \Gamma + \Gamma_0 V \bar{X}. \quad (3.4.49)$$

où l'on prouve que

$$\begin{aligned} \Gamma_0(p + q/2, p - q/2) = & \sigma_3 [Z(p + q/2) + Z(p - q/2)]/2 \\ & + 2i\sigma_2 [\Delta(p + q/2) + \Delta(p - q/2)]/2 \times q_0 / (q_0^2 - \alpha^2 q^2), \end{aligned} \quad (3.4.50)$$

avec  $Z$  un coefficient de normalisation de l'énergie défini à partir de l'auto-énergie  $\Sigma$  tel que  $Z = 1 - \partial_E \Sigma$ .

En réinjectant ce résultat dans l'Éq. (3.4.48) on trouve

$$\begin{aligned} \bar{X}(p' - p) = & i \int \text{Tr}[\sigma_3 G(p' - k) \times \Gamma(p' - k, p - k) G(p - k)] d^4 k \\ & \times \left[ 1 - iV(p' - p) \int \text{Tr}[\sigma_3 G(p' - k) \times \Gamma_0(p' - k, p - k) G(p - k)] d^4 k \right]^{-1} \\ \equiv & X(p' - p) / [1 - V(p' - p) X_0(p' - p)]. \end{aligned} \quad (3.4.51)$$

On peut montrer la relation  $1 = V(q) X_0(q)$  et dans la limite  $\mathbf{q} \rightarrow 0$  que

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} q_0^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}. \quad (3.4.52)$$

L'état collectif de Goldstone a été déplacé en énergie vers la fréquence plasma grâce aux interactions de Coulomb. Si on les néglige, on peut prouver qu'on retrouve la limite  $\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} q_0^2 = 0$ . C'est le MAH qui explique ce déplacement du mode aux hautes énergies, le mode devenant alors la composante longitudinale du champ électromagnétique  $A_\mu$ .

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à la caractérisation du champ massif (mode d'amplitude ou de Higgs).

### Mode de Higgs

Nous repartons de l'Éq. (3.4.32). Nous nous intéressons à l'équation homogène, donc  $\gamma = 0$ . Il existe une autre identité de Ward qui peut être écrite pour  $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$

$$\Gamma = G^{-1}(\mathbf{p})\sigma_1 + \sigma_1 G^{-1}(\mathbf{p}) \quad (3.4.53)$$

Le côté droit de l'équation est défini comme égal à  $\Phi(\mathbf{q})\sigma_1$ . En utilisant un terme d'interaction  $\langle \mathbf{p}', \mathbf{p} | V | \mathbf{p}, \mathbf{p}' \rangle = -V$ , nous obtenons pour  $qv_F \ll \Delta$  et pour un système avec symétrie trou-particule

$$1 + \frac{1}{2}V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{E + E'}{EE'} \frac{EE' + \epsilon\epsilon' - \Delta^2}{v^2 - (E + E')^2 + i\delta} = 0 \quad (3.4.54)$$

après intégration par rapport à  $k_0$ . On utilise la notation  $E = E_{\mathbf{k}}$ ,  $E' = E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}$ ,  $v = q_0$ . En utilisant l'équation du gap on obtient

$$\frac{1}{4}V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{E + E'}{EE'} \frac{v^2 - (\epsilon' - \epsilon)^2 - 4\Delta^2}{v^2 - (E + E')^2 + i\delta} = 0. \quad (3.4.55)$$

Dans la limite  $\mathbf{q} \rightarrow 0$

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{v^2 - (\epsilon' - \epsilon)^2 - 4\Delta^2}{E(v^2 - 4E^2)} = 0, \quad (3.4.56)$$

$$(v^2 - 4\Delta^2 - \frac{1}{3}v_F^2 q^2)J = 0, \quad (3.4.57)$$

où

$$J = N(0)V \int_0^{\omega_D} d\epsilon \frac{1}{E(v^2 - 4E^2)}, \quad (3.4.58)$$

avec  $N(0)$  la densité électronique et  $\omega_D$  la fréquence de Debye. En résolvant l'intégrale précédente on trouve  $J \approx N(0)V/4\Delta^2$ .

La relation de dispersion pour le mode de Higgs, découverte par Varma et Littlewood [75], devient

$$v_q^2 = 4\Delta^2 + \frac{1}{3}v_F^2 q^2. \quad (3.4.59)$$

Il s'agit d'un mode de masse  $2\Delta$ , qui correspond au gap d'énergie. Comme pour le mode de phase, on peut se demander quels seront les effets de l'interaction de Coulomb (et donc de la polarisation du vide) sur le mode d'amplitude. En fait, il n'y en a pas. D'après l'Éq. (3.4.47), en prenant  $\Lambda = \Phi\sigma_1$ , la dernière intégrale est nulle si la symétrie particule-trou est respectée. Le mode d'amplitude n'est donc pas renormalisé par l'interaction de Coulomb.

Nous pouvons également comprendre ce mode de Higgs comme provenant de la conservation d'un courant. En effet, comme pour le mode de phase qui provenait de la symétrie de jauge, l'identité de Ward (3.4.53) provient d'une symétrie de l'hamiltonien; elle est donnée par

$$\begin{aligned}\Phi &\rightarrow e^{\alpha\sigma_1}\Phi, \quad \Phi^\dagger \rightarrow \Phi^\dagger e^{\alpha\sigma_1}, \\ \nabla &\rightarrow \nabla + \alpha\sigma_1.\end{aligned}\tag{3.4.60}$$

Nous pouvons calculer le courant de Noether associé à cette symétrie et nous obtenons l'équation de continuité suivante

$$i\Phi^\dagger\sigma_1\left[\frac{\vec{\partial}}{\partial t} - \overleftarrow{\frac{\partial}}{\partial t}\right]\Phi + \nabla\cdot\Phi^\dagger\sigma_2\left[\frac{\vec{\mathbf{p}}}{m} + \overleftarrow{\frac{\mathbf{p}}{m}}\right]\Phi = 0.\tag{3.4.61}$$

L'opérateur de courant devient

$$j_\mu(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{k}}^\dagger \gamma_\mu(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k}) \Phi_{\mathbf{k} + \mathbf{q}}\tag{3.4.62}$$

où

$$\gamma^\mu(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k}) = \begin{cases} \frac{-i}{2m}\mathbf{q}\sigma_2 \\ \sigma_1. \end{cases}\tag{3.4.63}$$

Ceci peut être interprété comme une équation de continuité pour la densité de paires de Cooper. Nous remarquons que la transformation (3.4.60) laisse invariante la densité de charge  $\Phi^\dagger\sigma_3\Phi$  et qu'il n'y a pas de couplage entre cette charge et les fluctuations de l'amplitude du gap. Il n'est donc pas surprenant que l'interaction de Coulomb ne renormalise pas le mode de Higgs.

### 3.5 Conclusion

Pour comprendre la physique au niveau microscopique, la théorie BCS a été présentée. Nous avons abordé le formalisme des fonctions de Green de Gor'kov. Un autre formalisme équivalent, celui de Bogoliubov-de Gennes, a été discuté avec son approximation quasiclassique. La théorie BCS est non-invariante de jauge et nous avons montré comment, grâce aux modes collectifs, cette invariance peut être retrouvée. Enfin notons que la supraconductivité reste aujourd'hui encore un sujet actif de recherche, depuis notamment la découverte en 1986 [76] des SCs à haute température critique, qui n'obéissent pas à la théorie BCS et pour lesquels aucun modèle théorique satisfaisant n'a encore été établi.

# Théorie de la supraconductivité hors-équilibre

Durant cette thèse, nous avons étudié comment un champ électromagnétique variable peut exciter le mode de Higgs et influencer l'effet de proximité et l'effet Josephson. Il est donc nécessaire de disposer d'une théorie de la supraconductivité hors-équilibre en présence de champs variables dans le temps. Dans le chapitre précédent nous avons étudié la théorie BCS de la supraconductivité et sa reformulation en termes de fonctions de Green de Gorkov à température nulle. À température finie il est habituel d'utiliser la théorie à temps imaginaires, c-à-d. le formalisme de Matsubara [77], qui n'est cependant valable qu'à l'équilibre thermodynamique. Pour traiter la physique hors-équilibre, il est nécessaire de passer à une théorie en temps réels. Le formalisme le plus utilisé est dû à Keldysh [78–81]. Celui-ci, conduisant à des équations relativement complexes pour les fonctions de Green supraconductrices, il s'avère utile d'exploiter l'approximation quasi-classique qui est basée sur la séparation entre l'énergie de Fermi et le gap supraconducteur. Dans cette thèse nous étudierons le rôle du désordre et distinguerons les deux cas limites balistiques et diffusifs. Nous présenterons donc l'équation d'Eilenberger (pour le cas propre) et celle d'Usadel (cas sale).

Je présenterai pour commencer le formalisme de Keldysh dans un cadre général (Sec. 4.1). J'introduirai le choix du contour et les fonctions de Green hors-équilibre supraconductrices. Dans la deuxième partie 4.2 j'étudierai l'approximation quasi-classique, simplifiant considérablement les calculs hors-équilibres.

## 4.1 Formalisme de Keldysh

### 4.1.1 Le problème du hors-équilibre et choix du contour

À température finie, l'état d'un système est décrit de façon générale par une matrice densité générale  $\rho(t)$ . La VMV d'un opérateur  $\mathcal{O}$  devient une valeur moyenne statistique qu'on note [80]

$$\langle \mathcal{O} \rangle(t) = \frac{\text{Tr}[\mathcal{O}\rho(t)]}{\text{Tr}\rho(t)}. \quad (4.1.1)$$

Si  $H(t)$  est l'hamiltonien du système, la matrice densité évolue suivant l'équation  $\rho(t') = U_{t',t}\rho(t)U_{t,t'}$  avec

$$U_{t',t} = T \exp \left[ -i \int_t^{t'} d\tau H(\tau) \right]. \quad (4.1.2)$$

En utilisant la cyclicité de la trace, on peut réécrire l'Éq. (4.1.1) en fonction de l'opérateur d'évolution temporelle

$$\langle \mathcal{O} \rangle(t) = \frac{\text{Tr}[U_{-\infty,t}\mathcal{O}U_{t,-\infty}\rho(-\infty)]}{\text{Tr}\rho(t)}. \quad (4.1.3)$$

On doit donc faire évoluer le système de  $-\infty$  jusqu'au temps  $t$  où l'opérateur est calculé, puis de  $t$  jusqu'à  $-\infty$ . À température nulle, cet aller-retour est inutile. En notant l'état du vide sans interactions  $|\Psi_0\rangle$  et avec interaction  $|\Omega\rangle$ , on a  $\langle \mathcal{O} \rangle(t) = \langle \Omega | \mathcal{O} | \Omega \rangle = \langle \Psi_0 | U_{-\infty,t} \mathcal{O} U_{t,-\infty} | \Psi_0 \rangle$ , la relation entre les deux états du vide étant  $|\Omega\rangle = U_{t,-\infty} |\Psi_0\rangle$ . Dans le cas où l'interaction est activée de façon adiabatique, c-à-d. avec l'hamiltonien d'interaction de la forme  $e^{-\epsilon|t|}H'(t)$  où  $\epsilon > 0$ , on a d'après le théorème de Gell-Mann et Low [79, 82]

$$U_{\infty,-\infty} |\Psi_0\rangle = e^{i\alpha} |\Psi_0\rangle, \quad (4.1.4)$$

avec  $\alpha$  une phase quelconque. L'état fondamental reste donc le même après activation puis désactivation de l'interaction. En multipliant la VMV précédente par  $e^{-i\alpha}e^{i\alpha}$  on a donc

$$\langle \mathcal{O} \rangle(t) = \frac{\langle \Psi_0 | U_{\infty,t} \mathcal{O} U_{t,-\infty} | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | U_{\infty,-\infty} | \Psi_0 \rangle}. \quad (4.1.5)$$

L'évolution se fait de  $-\infty$  jusqu'à  $\infty$ . À l'équilibre, un résultat similaire existe [77], avec la matrice densité  $\rho_0 = e^{-\beta H} / \text{Tr} e^{-\beta H}$  interprétée comme un opérateur d'évolution où  $\beta^{-1} = k_B T$  et  $k_B$  est la constante de Boltzmann,  $T$  la température. Cela équivaut à considérer un temps imaginaire  $t \rightarrow i\tau$  avec  $0 \leq \tau \leq \beta$ . Le système restant à l'équilibre, un aller simple dans le temps complexe suffit.

Les choses se compliquent dans le cas hors-équilibre. En effet, le théorème de Gell-Mann et Low se s'applique plus. Rien n'oblige le système hors-équilibre à retourner dans son état fondamental même après désactivation de l'interaction et le côté gauche de l'Éq. (4.1.4) donne en général un résultat non-trivial. Il est quand même utile de continuer le contour temporel jusqu'à l'infini en multipliant l'Éq. (4.1.1) par  $U_{t,\infty}U_{\infty,t}$  et l'on a alors

$$\langle \mathcal{O} \rangle(t) = \frac{\text{Tr}[U_{-\infty,\infty}U_{\infty,t}\mathcal{O}U_{t,-\infty}\rho(-\infty)]}{\text{Tr}\rho(-\infty)}. \quad (4.1.6)$$

On a donc ici un contour temporel fermé  $C$  : c'est le contour de Keldysh [78] (Fig. 4.1). Par conservation de la probabilité,  $\text{Tr}\rho = 1$  et le dénominateur de cette valeur moyenne



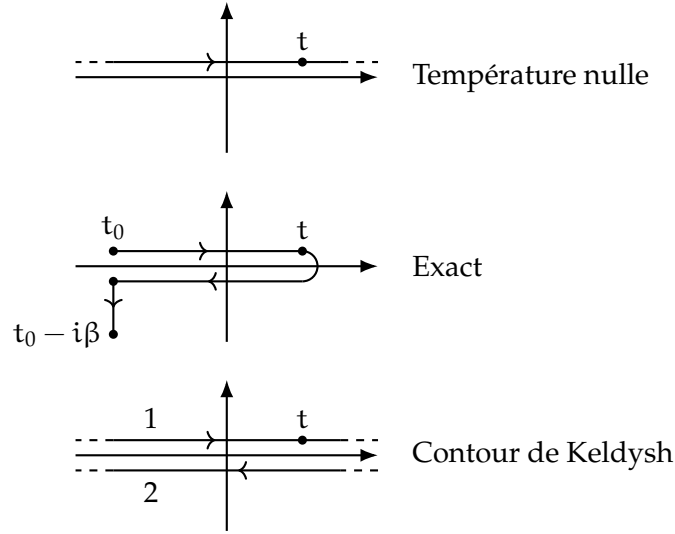


FIGURE 4.1 – Contour ordonné du temps dans différents cas. *Haut* : Température nulle, le théorème de Gell-Mann et Low nous permet de ne conserver qu’une branche. *Milieu* : Cas exact, avec  $t_0$  le temps à l’origine. La température finie fait apparaître une branche verticale dans le plan complexe. *Bas* : Contour de Keldysh, où l’approximation adiabatique nous permet de supprimer la branche verticale. Les indices 1 & 2 représentent les branches aller & retour.

est triviale. Ayant deux branches temporelles comparé au cas à température nulle, nous aurons un doublement des degrés de liberté, et donc le double de fonctions de Green. D’autres contours sont possibles, comme celui proposé par Konstantinov et Perel’ [83]. Ce dernier comprend un contour fermé associé à un contour vertical dans le temps complexe. L’astuce de Keldysh permet de ne garder que la partie horizontale du contour et c’est ce dernier qu’on utilisera dans la suite.

On définit l’opérateur d’ordonnance sur le contour  $T_C$  tel que

$$\langle T_C A(t) B(t') \rangle = \begin{cases} A(t) B(t'), & t >_c t', \\ (\pm) B(t') A(t), & t' >_c t, \end{cases} \quad (4.1.7)$$

avec  $A$  et  $B$  des opérateurs bosoniques (fermioniques). L’écriture  $t >_c t'$  indique que  $t$  est placé plus loin sur le contour  $C$  que  $t'$ , sans tenir compte de leurs valeurs numériques.

### 4.1.2 Fonctions de Green hors-équilibre

**Définition.** La fonction de Green hors-équilibre sur le contour  $C$  est définie par

$$G_C(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -i \langle T_C \Psi(\mathbf{x}, t) \Psi^\dagger(\mathbf{x}', t') \rangle. \quad (4.1.8)$$

On notera pour la suite  $1 \equiv (\mathbf{x}, t)$  et  $1' \equiv (\mathbf{x}', t')$ . S’il est possible de construire les équations de Dyson de cette FG, la physique devient plus transparente si nous passons du temps défini sur le contour au temps réel. Pour ce faire, on commence par définir la FG sur l’espace de Keldysh, c-à-d.

$$\hat{G}(1, 1') = \begin{pmatrix} G_{11}(1, 1') & G_{12}(1, 1') \\ G_{21}(1, 1') & G_{22}(1, 1') \end{pmatrix}. \quad (4.1.9)$$

Les indices représentent ici la partie du contour dans le sens "aller" (1) ou "retour" (2). De fait,

$$G_{11}(1, 1') = -i \langle T \Psi(1) \Psi^\dagger(1') \rangle \quad (4.1.10)$$

avec  $T$  l'opérateur d'ordonnance dans le temps habituel.

On définit respectivement les FGs "lesser" et "greater"

$$G_{12}(1, 1') \equiv G^<(1, 1') = \mp i \langle \Psi^\dagger(1') \Psi(1) \rangle, \quad (4.1.11)$$

$$G_{21}(1, 1') \equiv G^>(1, 1') = -i \langle \Psi(1) \Psi^\dagger(1') \rangle. \quad (4.1.12)$$

Le signe est  $- (+)$  pour la fonction "lesser" si les champs sont bosoniques (fermioniques). En notant  $\bar{T}$  l'opérateur d'anti-ordonnance dans le temps, c-à-d. l'opérateur qui range les opérateurs dans l'ordre chronologique de gauche à droite, la dernière composante

$$G_{22} = -i \langle \bar{T} \Psi(1) \Psi^\dagger(1') \rangle. \quad (4.1.13)$$

On remarque qu'il est possible d'exprimer les composantes diagonales de  $\hat{G}$  en fonction des FGs "lesser" et "greater". En effet,

$$G_{11}(1, 1') = \theta(t - t') G^>(1, 1') + \theta(t' - t) G^<(1, 1'), \quad (4.1.14)$$

$$G_{22}(1, 1') = \theta(t' - t) G^>(1, 1') + \theta(t - t') G^<(1, 1'). \quad (4.1.15)$$

Pour des raisons de symétrie, il est pratique de considérer la matrice  $\check{G}(1, 1') = \sigma_3 \hat{G}(1, 1')$ . De plus, nous venons de voir que seulement 2 composantes étaient indépendantes. Il est donc utile de faire une rotation dans le plan de Keldysh de la fonction  $\check{G}$ . La convention la plus utilisée est une rotation de  $\pi/4$  telle que  $\check{G} \rightarrow L \check{G} L^\dagger$  avec

$$L = e^{-i \frac{\pi}{4} \sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.16)$$

On a

$$\check{G} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} G_{11} - G_{12} + G_{21} - G_{22} & G_{11} + G_{22} + G_{12} + G_{21} \\ G_{11} + G_{22} - G_{12} - G_{21} & G_{11} - G_{21} + G_{12} - G_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.1.17)$$

$$\equiv \begin{pmatrix} G^R & G^K \\ 0 & G^A \end{pmatrix}, \quad (4.1.18)$$

avec  $R$ ,  $A$  et  $K$  représentant respectivement la FG retardée, avancée, et de Keldysh. On appelle parfois cette écriture la représentation RAK. Ces nouvelles FGs sont définies de la sorte

$$G^R(1, 1') = -i\theta(t - t') \left\langle [\Psi(1), \Psi(1')^\dagger]_{\mp} \right\rangle = \theta(t - t') (G^>(1, 1') - G^<(1, 1')), \quad (4.1.19)$$

$$G^A(1, 1') = i\theta(t' - t) \left\langle [\Psi(1), \Psi(1')^\dagger]_{\mp} \right\rangle = -\theta(t' - t) (G^>(1, 1') - G^<(1, 1')), \quad (4.1.20)$$

$$G^K(1, 1') = -i \left\langle [\Psi(1), \Psi(1')^\dagger]_{\pm} \right\rangle = G^>(1, 1') + G^<(1, 1'), \quad (4.1.21)$$

avec  $[\cdot, \cdot]_{\mp}$  l'opérateur de commutation/anti-commutation dans le cas bosonique/fermionique. En reprenant l'Éq. (4.1.14) on a les relations

$$G^R(1, 1') = G_{11} - G_{12} = G_{21} - G_{22}, \quad (4.1.22)$$

$$G^A(1, 1') = G_{11} - G_{21} = G_{12} - G_{22}, \quad (4.1.23)$$

$$G^K(1, 1') = G_{11} + G_{22} = G_{12} + G_{21}, \quad (4.1.24)$$

$$0 = G_{11} + G_{22} - G_{12} - G_{21}, \quad (4.1.25)$$

d'où l'Éq. (4.1.17). Les fonctions retardée et avancée sont reliées simplement par la symétrie

$$G^A(1, 1') = G^R(1', 1)^\dagger. \quad (4.1.26)$$

Le contenu physique des fonctions retardées et de Keldysh sont complètement différentes. La fonction  $G^R$  encode la densité spectrale et donc les informations sur les états du système, tandis que la fonction  $G^K$  encode l'aspect hors-équilibre d'occupation de ces états. À l'équilibre la relation entre les deux devient triviale. En effet, on peut montrer dans ce cas, grâce à la relation de Kubo-Martin-Schwinger (KMS) [84, 85]

$$G^<(\mathbf{x}, t + i\beta, \mathbf{x}', t') = \pm G^>(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t'), \quad (4.1.27)$$

dans le cas bosonique/fermionique. À l'équilibre, les FGs ne dépendent que de la différence des temps  $t - t'$ . Si l'on rajoute l'hypothèse d'invariance par translation,  $G(\mathbf{x}, t + i\beta, \mathbf{x}', t') = G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')$ . La relation KMS devient alors pour les composantes de Fourier [81]

$$G^<(\mathbf{p}, \omega) = \pm e^{-\beta\omega} G^>(\mathbf{p}, \omega). \quad (4.1.28)$$

Or, on a la relation d'après les définitions (4.1.19)

$$G^R(\mathbf{p}, \omega) - G^A(\mathbf{p}, \omega) = G^>(\mathbf{p}, \omega) - G^<(\mathbf{p}, \omega). \quad (4.1.29)$$

Nous arrivons aux équations

$$G^<(\mathbf{p}, \omega) = \pm f(\beta, \omega) [G^R(\mathbf{p}, \omega) - G^A(\mathbf{p}, \omega)], \quad (4.1.30)$$

$$G^>(\mathbf{p}, \omega) = \bar{f}(\beta, \omega) [G^R(\mathbf{p}, \omega) - G^A(\mathbf{p}, \omega)], \quad (4.1.31)$$

avec  $f(\beta, \omega)$  la fonction de Bose-Einstein/Fermi-Dirac et  $\bar{f} = 1 \pm f$ . On a alors la relation de *fluctuation-dissipation*

$$G^K(\mathbf{p}, \omega) = [G^R(\mathbf{p}, \omega) - G^A(\mathbf{p}, \omega)] \tanh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right). \quad (4.1.32)$$

### 4.1.3 Équations de Gor'kov hors-équilibre

La fonction de Green BCS sur le contour  $C$  est donnée par

$$G_C(1, 1') = -i\sigma_3 \langle T_C \Phi(1) \Phi^\dagger(1') \rangle, \quad (4.1.33)$$

avec  $\Phi$  à nouveau le spineur de Nambu. Après rotation dans le plan de Keldysh on obtient la fonction  $\check{G}$ . On note l'auto-interaction

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \Delta(1) \\ -\Delta(1)^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1.34)$$

En définissant l'opérateur différentiel

$$\check{G}_0^{-1} = i\partial_t \check{\sigma}_3 - \left( \frac{(-i\nabla)^2}{2m} - \mu \right), \quad (4.1.35)$$

la FG obéit à l'équation

$$\check{G}_0^{-1} \check{G}(1, 1') = \delta(1 - 1') + \check{\Sigma} \check{G}(1, 1'). \quad (4.1.36)$$

Ici  $\check{\sigma}_3 = \mathbb{1} \otimes \sigma_3$ . Cette équation admet comme solution formelle

$$\check{G}(1, 1') = \frac{1}{\check{G}_0^{-1} - \check{\Sigma}}, \quad (4.1.37)$$

$$\check{G}^{-1} = \check{G}_0^{-1} - \check{\Sigma}. \quad (4.1.38)$$

L'équation de Gor'kov précédemment trouvée dans le chapitre précédent (3.2.11) est donc équivalente à l'Éq. (4.1.35). Une conséquence non-triviale de notre choix de rotation dans le plan de Keldysh est que l'auto-énergie a la même forme que  $\check{G}$  [79, 80], c-à-d.

$$\check{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma^R & \Sigma^K \\ 0 & \Sigma^A \end{pmatrix}. \quad (4.1.39)$$

On a donc les équations de Gor'kov pour les composantes RAK

$$\begin{aligned} G_0^{-1} G^{R(A)}(1, 1') &= \delta(1 - 1') + \Sigma^{R(A)} G^{R(A)}(1, 1') \\ G_0^{-1} G^K(1, 1') &= \Sigma^R G^K(1, 1') + \Sigma^K G^A(1, 1') \end{aligned}. \quad (4.1.40)$$

En présence d'un champ électromagnétique, on a la relation de couplage minimale  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ie\check{\sigma}_3 A_\mu$ . Après une transformation de jauge paramétrée par  $\Lambda(\mathbf{x}, t)$ , la FG devient

$$\check{G}(1, 1') \rightarrow e^{ie\Lambda(1)\check{\sigma}_3} \check{G}(1, 1') e^{-ie\Lambda(1')\check{\sigma}_3}. \quad (4.1.41)$$

Nous pourrions à partir de là construire la théorie perturbative et les règles de Feynman correspondantes. Cependant, résoudre l'équation de Gor'kov dans le cas général est souvent analytiquement impossible. À la place, dans la section suivante 4.2, nous verrons qu'il est possible de faire dans le cas des SCs une approximation valide dans un grand nombre de cas et simplifiant énormément les calculs, l'approximation quasi-classique.

## 4.2 Approximation quasi-classique

### 4.2.1 Fonctions de Green quasi-classique

Nous avons déjà abordé l'approximation quasi-classique dans le cadre du formalisme de BdG (Sec. 3.3). Nous allons encore une fois utiliser le fait que le gap est bien inférieur au niveau de Fermi  $\Delta \ll \mu$  pour simplifier les équations de Gor'kov. En effet, l'auto-énergie due à l'interaction électron-phonon est, du fait que l'énergie phononique soit faible devant celle Fermi, faiblement dépendante de l'impulsion [79, 86, 87]. D'après l'Éq. (4.1.37) la FG doit donc être fortement piquée autour de l'impulsion de Fermi  $\mathbf{p}_F$ . Une façon équivalente de comprendre cela est de voir que la FG oscille suivant la coordonnée relative  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  sur une échelle  $\lambda_F$ , la longueur de Fermi [88, 89]. Or,  $\lambda_F \ll \xi$ , avec  $\xi$  la longueur de cohérence. Les phénomènes liés à la supraconductivité ayant lieu sur une distance typique  $\xi$ , il semble raisonnable de négliger la physique aux petites distances ou, de façon équivalente, aux grandes impulsions. On veut donc pour cela fixer l'impulsion sur la surface de Fermi. Pour se faire, on paramétrise l'élément d'intégration sur les impulsions :

$$\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = d\xi_{\mathbf{p}} \frac{dS_F}{(2\pi)^3 v_F}, \quad (4.2.1)$$

avec  $dS_F$  l'élément de la surface de Fermi. Dans le cas d'une surface sphérique,  $dS_F = p_F^2 d\Omega_F$  où  $d\Omega_F = \sin\theta d\theta d\varphi$  la différentielle de l'angle solide. Comme la FG est piquée autour de  $\mathbf{p}_F$ , intégrer suivant  $\xi_{\mathbf{p}}$  permettrait de fixer l'amplitude de l'impulsion. Il est alors utile de définir la *fonction de Green quasi-classique* (FGQ), d'abord définie par Eilenberger [90]

$$g(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{p}}, t, t') = \frac{1}{i\pi} \int d\xi_{\mathbf{p}} G(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t, t'), \quad (4.2.2)$$

avec  $\hat{\mathbf{p}}$  la direction de l'impulsion. Cette fonction est lissée et ne dépend plus que de  $\mathbf{R}$  et de la direction de l'impulsion  $\hat{\mathbf{p}}$ . Ici  $G(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t, t')$  est la transformée de Wigner

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t, t') = \int d^3\mathbf{r} G(1, 1') e^{-i\mathbf{r}\mathbf{p}}, \quad (4.2.3)$$

avec  $\mathbf{R} = (\mathbf{x} + \mathbf{x}')/2$  la coordonnée du centre de masse et  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ . On note immédiatement que l'intégrale (4.2.2) comprise dans le sens d'intégrale simple n'est pas toujours convergente. On définit l'intégrale sur  $\xi_{\mathbf{p}}$  par les contours Fig. 4.2 et on néglige le contour aux hautes énergies, indépendant de la physique hors-équilibre [79, 89].

### Fonctions de Green quasi-classiques BCS

Calculons explicitement la FGQ de la théorie BCS. En notant  $\tau = t - t'$  et  $\omega$  sa variable de Fourier conjuguée, on a (d'après Éq. 3.1.21)

$$\hat{G}^{R/A}(\mathbf{p}, \omega) = \frac{\omega\sigma_3 + \xi_{\mathbf{p}} + \Delta\sigma_+ - \Delta^*\sigma_-}{(\omega \pm i\epsilon)^2 - E_{\mathbf{p}}^2}, \quad (4.2.4)$$

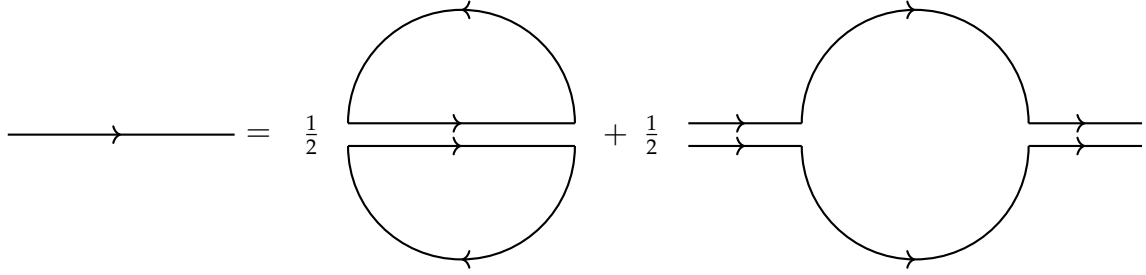


FIGURE 4.2 – L'intégrale sur  $\xi_{\mathbf{p}}$  est séparée en 2 contours, le premier (deuxième) intégrant les basses (hautes) énergies. Dans l'approximation quasi-classique, seul le premier contour est important, le deuxième étant indépendant de la physique hors-équilibre et ne donnant qu'une constante à l'équation de Gor'kov [79].

où nous avons rajouté une phase arbitraire  $\pi$  au gap et défini  $\sigma_{\pm} = \sigma_1 \pm i\sigma_2$ . Les FGs retardée et avancée étant reliées par la relation (4.1.26), il nous suffit de calculer seulement une seule des deux FGs, par exemple  $\hat{G}^R$ . Dans le plan complexe de  $\xi_{\mathbf{p}}$ , la FG retardée a deux pôles  $\xi_{\mathbf{p}}^{\pm} = \pm \sqrt{(\omega + i\epsilon)^2 - |\Delta|^2}$  (Fig. 4.3). On a simplement

$$\begin{aligned} \hat{g}^R(\omega) &= \frac{1}{i\pi} \int d\xi_{\mathbf{p}} \frac{\omega\sigma_3 + \xi_{\mathbf{p}} + \Delta\sigma_+ - \Delta^*\sigma_-}{(\xi_{\mathbf{p}} - \xi_{\mathbf{p}}^+)(\xi_{\mathbf{p}} - \xi_{\mathbf{p}}^-)} \\ &= \frac{2i\pi}{i\pi} \frac{\omega\sigma_3 + \Delta\sigma_+ - \Delta^*\sigma_-}{2\xi_{\mathbf{p}}^+} \text{sign } \omega \\ &= \text{sign } \omega \frac{\omega\sigma_3 + \Delta\sigma_+ - \Delta^*\sigma_-}{\sqrt{\omega^2 - |\Delta|^2}}. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

D'après l'Éq. (4.1.26), la relation de symétrie entre  $\hat{g}^R$  et  $\hat{g}^A$  devient dans le cas quasi-classique

$$\hat{g}^R(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{p}}, t, t') = -\sigma_3 \hat{g}^A(\mathbf{R}, -\hat{\mathbf{p}}, t', t)^\dagger \sigma_3. \quad (4.2.6)$$

On a donc

$$\hat{g}^A(\omega) = \text{sign } \omega \frac{-\omega\sigma_3 - \Delta\sigma_+ + \Delta^*\sigma_-}{\sqrt{\omega^2 - |\Delta|^2}}. \quad (4.2.7)$$

Pour écrire ces fonctions de façon symétrique on définit  $s^{R/A}(\omega) = i\sqrt{|\Delta|^2 - (\omega \pm i\gamma)^2}$  avec la ligne de coupure de la racine sur l'axe  $\mathbb{R}^-$ . Ici  $\gamma$  est un infinitésimal. On a alors la forme simple pour les FGQs

$$\hat{g}^{R/A}(\omega) = \frac{\omega\sigma_3 + \Delta\sigma_+ - \Delta^*\sigma_-}{s^{R/A}(\omega)}. \quad (4.2.8)$$

À l'équilibre, la fonction de Keldysh quasi-classique est donnée par la relation de fluctuation-dissipation

$$\hat{g}^K(\omega) = [\hat{g}^R(\omega) - \hat{g}^A(\omega)] \tanh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right). \quad (4.2.9)$$

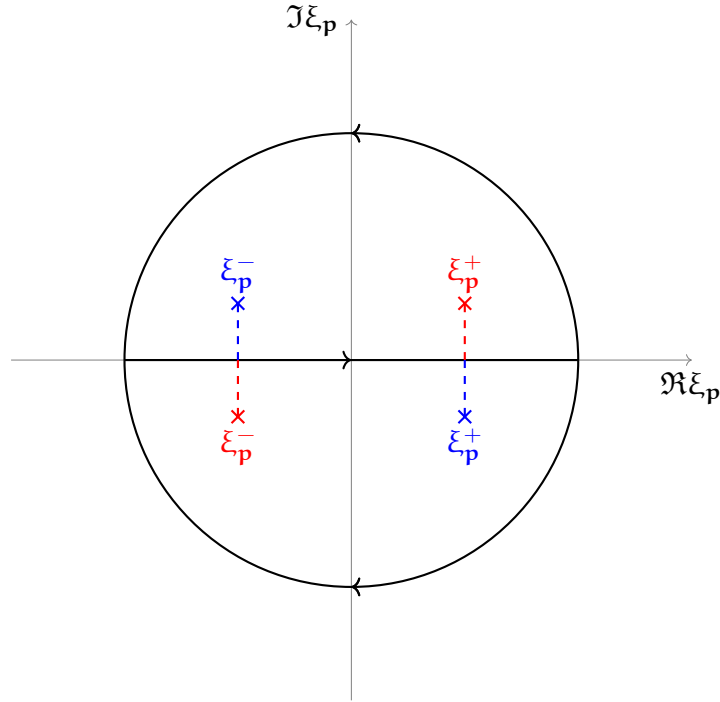


FIGURE 4.3 – Contour de l’intégrale (4.2.5). La position des pôles est indiquée par une croix avec en rouge (bleu) le cas  $\omega > 0$  ( $\omega < 0$ ).

Dans le cas général, la densité de courant est donnée par [79]

$$\mathbf{j}(\mathbf{R}, t) = \frac{-eN_0v_F}{4} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{p}}}{4\pi} \int d\omega \text{Tr} [\sigma_3 \hat{g}^K(\omega, \hat{\mathbf{p}}, t, t)] \quad (4.2.10)$$

avec  $N_0$  la densité d’états à la surface de Fermi.

### Fonction de Green sur trajectoire

Il existe une autre façon, plus physique, de présenter l’approche quasi-classique développée par Shelankov [91]. La première étape est de réécrire la fonction de Green sous la forme

$$G(1, 1') = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} G(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t, t') e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}. \quad (4.2.11)$$

Toujours d’après l’approximation quasi-classique,  $p_{F\mathbf{r}} \gg 1$ . Le terme exponentiel oscille donc très rapidement et on peut utiliser la méthode de la phase stationnaire qu’on exprime par

$$e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \approx \frac{2\pi}{i\mathbf{p}\mathbf{r}} [e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \delta(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{r}}) - e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} \delta(\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{r}})], \quad (4.2.12)$$

puis on intègre Éq. (4.2.11) par rapport à  $\hat{\mathbf{p}}$  pour obtenir

$$G(1, 1') = -\frac{m}{2\pi} \frac{e^{ip_{F\mathbf{r}}}}{r} g_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \frac{m}{2\pi} \frac{e^{-ip_{F\mathbf{r}}}}{r} g_-(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (4.2.13)$$

où les coordonnées temporelles sont implicites et

$$g_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{i}{2\pi} \int v_F d(p - p_F) e^{\pm i(p - p_F)} G(\pm p \hat{\mathbf{r}}, \mathbf{R}) \quad (4.2.14)$$

dans l'approximation où la FG est piquée autour de l'impulsion de Fermi. Du fait que  $rp_F \gg 1$ , l'enveloppe de  $g_{\pm}$  évolue lentement et la dérivée seconde dans l'équation de Dyson correspondante sera donc négligeable. En conséquence, seules les valeurs  $g_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  avec  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  sur la même ligne sont connectées. On considère la trajectoire classique  $\mathbf{r}$  reliant deux points  $y$  et  $y'$  avec  $\mathbf{r} = \mathbf{R} + y\hat{\mathbf{n}}$  avec  $\hat{\mathbf{n}}$  un vecteur unitaire, on a la FG sur la trajectoire

$$g_{\pm}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{R}, y, y') = g_{\pm}(\mathbf{R} + y\hat{\mathbf{n}}, y'). \quad (4.2.15)$$

Dans la région  $|y - y'|p_F \gg 1$ ,

$$g(\mathbf{R} + y\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{R} + y'\hat{\mathbf{n}}) = \frac{i}{2\pi} \int v_F d(p - p_F) e^{i(p - p_F)(y - y')} G(\pm p \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{R} + \frac{y + y'}{2}\hat{\mathbf{n}}), \quad (4.2.16)$$

avec  $g = g_+$  ( $g_-$ ) si  $y > y'$  ( $y' > y$ ). Cette FG encode l'information d'une particule à l'impulsion parallèle à  $\hat{\mathbf{n}}$ . Il nous faut encore trouver la valeur de  $g$  lorsque  $y = y'$ . Pour se faire on considère le paramètre  $\delta$  où  $(p - p_F)\delta \ll 1$  mais avec  $p_F\delta \gg 1$ . On a alors

$$g(y + \delta, y) - g(y - \delta, y) = \frac{-v_F}{\pi} \int d(p - p_F) G(\pm p \hat{\mathbf{n}}) \sin [(p - p_F)\delta]. \quad (4.2.17)$$

Dans la limite  $\delta \rightarrow 0$ , seules les impulsions loin de la surface de Fermi contribuent à l'intégrale et la FG peut donc être remplacée par celle du métal normal. On peut alors prouver

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} g(y + \delta, y) - g(y - \delta, y) = \delta(t_1 - t_2). \quad (4.2.18)$$

On définit les nouvelles FGs

$$g^{\pm}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} g(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{R}, y \pm \delta, y), \quad (4.2.19)$$

$$g(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}) = g^+(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}) + g^-(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}). \quad (4.2.20)$$

On montre [91] que cette dernière obéit aux équations quasi-classiques

$$iv_F \nabla_{\mathbf{r}} g + H \circ g - g \circ H = 0, \quad (4.2.21)$$

$$g \circ g = \delta(t - t'), \quad (4.2.22)$$

en notant  $\circ$  l'opérateur de convolution temporelle. La FGQ est donc donnée explicitement par l'intégrale convergente

$$g(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}) = \frac{iv_F}{\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int d(p - p_F) G(\pm p \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}) \cos [(p - p_F)\delta] \quad (4.2.23)$$

et est donc parfaitement équivalente à celle obtenue par intégration sur  $\xi_p$ . La régularisation avec le terme  $\cos [(p - p_F)\delta]$  apparaît ici naturellement.



## 4.2.2 Équations quasiclassiques

### Équation d'Eilenberger (cas propre)

On cherche maintenant à construire une théorie basée uniquement sur ces FGQs. C'est Eilenberger qui a pour la première fois utilisé le formalisme quasi-classique dans le cadre de la supraconductivité et démontré les équations qui portent son nom [90] (suivi par Larkin et Ovchinnikov [92]). Pour les trouver on part de l'équation de Gor'kov (4.1.36) et de sa conjuguée

$$\check{G}_0^{-1}(1, 1') = \delta(1 - 1') + \check{G}\check{\Sigma}(1, 1'). \quad (4.2.24)$$

En passant par la transformée de Wigner l'Éq. (4.1.36) et sa conjuguée s'écrivent

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[ i\check{\sigma}_3\partial_t - \xi_{\mathbf{p}} + \frac{i\mathbf{p} \cdot \nabla_1}{2m} + \frac{\nabla_1^2}{2m} \right] \check{G}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t, t') = \delta(1 - 1') + \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \check{\Sigma}(1)\check{G}, \quad (4.2.25)$$

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[ -i\check{\sigma}_3\partial_{t'} - \xi_{\mathbf{p}} - \frac{i\mathbf{p} \cdot \nabla_{1'}}{2m} + \frac{\nabla_{1'}^2}{2m} \right] \check{G}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t, t') = \delta(1 - 1') + \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \check{G}\check{\Sigma}(1'). \quad (4.2.26)$$

En soustrayant la première expression à la deuxième on obtient

$$i\mathbf{v}_F \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \check{G} + \{i\check{\sigma}_3\partial_t, \check{G}\} - [\check{\Sigma}, \check{G}] = 0. \quad (4.2.27)$$

On voit que cette dernière est indépendante de  $\xi_{\mathbf{p}}$ . On peut donc intégrer l'équation par  $\xi_{\mathbf{p}}$  pour obtenir l'équation d'Eilenberger

$$i\mathbf{v}_F \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \check{g} + \{i\check{\sigma}_3\partial_t, \check{g}\} - [\check{\Sigma}, \check{g}] = 0, \quad (4.2.28)$$

avec  $\{\partial_t, \check{g}\} = \partial_t \check{g}(t, t') + \partial_{t'} \check{g}(t, t')$ . Dans le cas où un champ électromagnétique externe est présent, le couplage minimal donne

$$i\mathbf{v}_F \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \check{g} + e[\check{\sigma}_3 \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_F, \check{g}] + \{i\check{\sigma}_3\partial_t, \check{g}\} - e[V, \check{g}] + [\Delta(t)i\check{\sigma}_2, \check{g}] = [\check{g}, \check{\Sigma}'], \quad (4.2.29)$$

où nous avons choisi la phase du gap telle que ce dernier soit réel et  $\check{\Sigma}'$  est l'auto-énergie autre que le gap. De plus, nous avons négligé le terme diamagnétique car

$$e^2 \mathbf{A}^2 / m \sim ev_F |\mathbf{A}| \lambda_F / \xi \longrightarrow e^2 |\mathbf{A}|^2 / m \Big/ ev_F |\mathbf{A}| \sim \lambda_F / \xi \ll 1. \quad (4.2.30)$$

Cette équation homogène seule ne permet pas de trouver  $\check{g}$ . Il existe une condition de normalisation associée

$$\check{g} \circ \check{g}(1, 1') = \delta(1 - 1'). \quad (4.2.31)$$

Cette relation est, comme nous l'avons vu, respectée dans le cas des équations BCS à l'équilibre. Pour se convaincre que cette relation est valable dans le cadre général, on

multiplie par  $\check{g}$  à gauche et droite l'Éq. (4.2.29) puis on additionne les deux équations pour obtenir exactement l'équation d'Eilenberger mais pour la fonction  $\check{g} \circ \check{g}$ . Cette équation admet pour solution  $A\delta(1 - 1') + B\check{g}$ . À grande distance, la FGQ est égale à celle à l'équilibre et on a  $A = 1$ . Il est à noter que nous avons déjà obtenu ces équations dans le cadre plus rigoureux des FGs sur trajectoire (Éqs. 4.2.21 et 4.2.22).

À l'équilibre et dans le cas d'un système homogène, l'équation d'Eilenberger pour la transformée de Fourier de fonction retardée devient simplement

$$[\omega\sigma_3 + i\Delta\sigma_2, \hat{g}^R(\omega)] = 0, \quad (4.2.32)$$

$$\hat{g}^R \hat{g}^R = \mathbb{1}. \quad (4.2.33)$$

La solution est celle déjà trouvée dans la Sec. 4.2.1 après intégration explicite de la FG de Gor'kov, à savoir la solution BCS (4.2.5). Pour finir, la condition d'auto-consistance devient dans la théorie quasi-classique

$$\Delta(\mathbf{R}, t) = \frac{-i\eta}{8} \int \frac{d\hat{\mathbf{p}}}{4\pi} \int d\omega \text{Tr} [i\hat{\sigma}_2 \hat{g}^K(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{p}}, \omega)]. \quad (4.2.34)$$

### Équation d'Usadel (cas sale)

Un supraconducteur est dit "sale" (ou diffusif) lorsque le libre parcours moyen est inférieur à la longueur de cohérence  $l \ll \xi$ . Dans ce cas, les impuretés du SC vont avoir pour effet de moyennner sur toutes les directions de l'impulsion et on peut écrire la FGQ sous la forme quasi-isotropique

$$\check{g}(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{p}}, t, t') = \check{g}_s(\mathbf{R}, t, t') + \hat{\mathbf{p}} \cdot \check{\mathbf{g}}_p(\mathbf{R}, t, t'), \quad (4.2.35)$$

avec  $|\check{g}_s(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{p}}, t, t')| \gg |\hat{\mathbf{p}} \cdot \check{\mathbf{g}}_p(\mathbf{R}, t, t')|$ . En notant  $\langle \rangle_{\Omega}$  la moyenne sur la direction de  $\hat{\mathbf{p}}$ , on a  $\langle \check{g} \rangle_{\Omega} = \check{g}_s$ . De plus, la condition de normalisation nous donne

$$\check{g}_s \circ \check{g}_s(t, t') = \delta(t - t'), \left\{ \check{g}_s, \check{\mathbf{g}}_p \right\} = 0. \quad (4.2.36)$$

En présence d'impuretés, l'auto-énergie acquiert également un terme  $\check{\Sigma}_{\text{imp}}$ . Dans le cas d'impuretés isotropes [89]

$$\check{\Sigma}_{\text{imp}} = \frac{i}{2\tau} \langle \check{g} \rangle_{\Omega}, \quad (4.2.37)$$

avec  $\tau = l/v_F$  le temps de parcours moyen. On injecte (4.2.35) dans (4.2.28) en moyennant sur l'angle solide  $\Omega_p$  pour obtenir

$$i\frac{v_F}{3} \text{div} \check{\mathbf{g}}_p + \{i\check{\sigma}_3 \partial_t, \check{g}_s\} + [\Delta(t)i\check{\sigma}_2, \check{g}_s] = 0. \quad (4.2.38)$$

En multipliant d'abord (4.2.28) par  $\hat{\mathbf{v}}_F$  avant de moyennner on a la seconde équation

$$iv_F \nabla \check{g}_s + \left\{ i\check{\sigma}_3 \partial_t, \check{\mathbf{g}}_p \right\} + \frac{i}{2\tau} [\check{g}_s, \check{\mathbf{g}}_p] = 0. \quad (4.2.39)$$

Dans la limite sale on néglige le terme  $\{i\check{\sigma}_3\partial_t, \check{g}_p\}$  pour obtenir

$$\check{g}_p = -l\check{g}_s\nabla\check{g}_s. \quad (4.2.40)$$

En réinjectant ce résultat dans (4.2.38) on obtient l'équation d'Usadel [93]

$$-iD \operatorname{div}(\check{g}_s\nabla\check{g}_s) + \{i\check{\sigma}_3\partial_t, \check{g}_s\} + [\Delta(t)i\check{\sigma}_2, \check{g}_s] = 0, \quad (4.2.41)$$

avec  $D = \frac{lv_F}{3}$  le coefficient de diffusion.

### 4.2.3 Conditions aux bords

Dans les prochains chapitres nous nous intéresserons à des jonctions du types NIS ou SIS. La théorie quasi-classique n'étant valide qu'à des échelles de longueurs supérieures à celle de Fermi, elle ne permet pas de comprendre directement ce qu'il se passe aux interfaces. Il faut associer aux équations d'Eilenberger ou d'Usadel des conditions aux bords (CBs). C'est Zaitsev [94] qui les démontre en 1984. Pour se faire, il a résolu les équations de Gor'kov à l'interface pour trouver les conditions non triviales et non linéaires [88,95]

$$\check{g}_a^1 = \check{g}_a^2, \quad (4.2.42)$$

$$\check{g}_a[\mathcal{R}(\check{g}_s^+)^2 + (\check{g}_s^-)^2] = T\check{g}_s^-\check{g}_s^+, \quad (4.2.43)$$

où 1 et 2 symbolisent le côté gauche et droit de la jonction et R/T sont les coefficients de réflexion/transmission de la jonction. On note  $\check{g}_\pm^i$  la composante avec l'impulsion dirigée vers la droite (gauche) et (voir Fig. 4.4)

$$\check{g}_{s/a}^i = \frac{1}{2}(\check{g}_+^i \pm \check{g}_-^i), \quad (4.2.44)$$

$$\check{g}_s^\pm = \frac{1}{2}(\check{g}_s^1 \pm \check{g}_s^2). \quad (4.2.45)$$

Dans la limite  $T \ll 1$  [94],

$$\check{g}_s^i \approx \check{g}^i, \quad (4.2.46)$$

$$\check{g}_a \approx \frac{T}{4R}[\check{g}^1, \check{g}^2]. \quad (4.2.47)$$

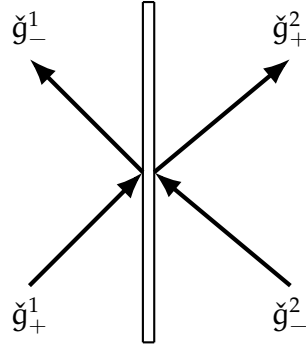
Le courant dans la jonction est alors donné par l'Éq. (4.2.10) et vaut

$$\mathbf{j}(\mathbf{R}, t) = -\frac{G_T}{16e} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{p}}}{4\pi} \int d\omega \operatorname{Tr}(\sigma_3[\check{g}_1, \check{g}_2]^K(t, t)), \quad (4.2.48)$$

avec  $G_T = e^2 N_0 v_F T/R$  la conductance de la jonction. De façon explicite,

$$[\check{g}_1, \check{g}_2]^K = \hat{g}_1^R \hat{g}_2^K + \hat{g}_1^K \hat{g}_2^A - \hat{g}_2^R \hat{g}_1^K - \hat{g}_2^K \hat{g}_1^A. \quad (4.2.49)$$

Inversement, pour une jonction transparente  $T = 1$ , on a  $\check{g}_s^- = 0$  qui, associé avec (4.2.42), implique la continuité des FGQs à l'interface.



$$\begin{aligned} \check{g}_{s/a}^i &= \frac{1}{2}(\check{g}_+^i \pm \check{g}_-^i) \\ \check{g}_s^\pm &= \frac{1}{2}(\check{g}_s^1 \pm \check{g}_s^2) \end{aligned}$$

FIGURE 4.4 – Représentation schématique des différentes fonctions de Green de part et d'autre de la jonction. La composante parallèle de l'impulsion est conservée, contrairement à celle perpendiculaire.

#### 4.2.4 Application de la théorie quasi-classique à l'effet Josephson

Dans cette section nous retrouverons des résultats bien connus des jonctions Josephson (JJ) en utilisant la théorie quasi-classique de Keldysh.

Nous calculerons pour commencer le courant dans une jonction 1D SC-Normal-SC (SNS) transparente, c-à-d.  $T = 1$ . On note la phase<sup>1</sup> du SC à gauche (droite)  $-\chi/2$  ( $\chi/2$ ). La partie normale est de taille  $L$ . On résout l'équation d'Eilenberger (4.2.28) en 1D

$$-iv_x \partial_x \check{g} - \{\check{\sigma}_3 i \partial_t, \check{g}\} - \Delta_0 e^{\pm i\chi/2 \check{\sigma}_3} [i\check{\sigma}_2, \check{g}] = 0 \quad (4.2.50)$$

avec  $v_x = \mathbf{v}_F \cdot \mathbf{e}_x$ ,  $\tau_i$  et les FGQs de Keldysh

$$\check{g} = \begin{pmatrix} \hat{g}^r & \hat{g}^k \\ 0 & \hat{g}^a \end{pmatrix}. \quad (4.2.51)$$

En passant en coordonnées de Fourier avec

$$\check{g}(t, t') = \int d\omega e^{-i\omega(t-t')} \check{g}(\omega); \quad (4.2.52)$$

l'équation devient

$$-iv_F \partial_x \check{g} - [\omega \sigma_3, \check{g}] - \Delta_0 [e^{\pm i\chi/2 \sigma_3} i \sigma_2, \check{g}] = 0. \quad (4.2.53)$$

On peut paramétriser la FG retardée sous la forme

$$\hat{g}^r = \begin{pmatrix} g_{11}^r & g_{12}^r \\ g_{21}^r & -g_{11}^r \end{pmatrix}. \quad (4.2.54)$$

On écrira les solutions sous la forme vectorielle

1. Nous avons absorbé la charge électrique dans la définition de la phase.

$$g^r = \begin{pmatrix} g_{11}^r \\ g_{12}^r \\ g_{21}^r \end{pmatrix}. \quad (4.2.55)$$

La solution indépendante de la position est donnée par la fonction BCS (4.2.5)

$$g^r(\omega) = \frac{1}{s^r} \begin{pmatrix} \omega \\ \Delta \\ -\Delta^* \end{pmatrix} \quad (4.2.56)$$

avec pour rappel  $s^r = i\sqrt{|\Delta|^2 - (\omega + i\epsilon)^2}$ .

Les autres solutions sont

$$g^r(\omega) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\Delta}{s^r + \omega} \\ \frac{\Delta^*}{s^r - \omega} \end{pmatrix} e^{-2is^r x/v_x} \quad (4.2.57)$$

et

$$g^r(\omega) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\Delta}{-s^r + \omega} \\ \frac{-\Delta^*}{s^r + \omega} \end{pmatrix} e^{2is^r x/v_x}. \quad (4.2.58)$$

Dans le métal normal les FGQs prennent la forme

$$g_N^r = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2i\omega x/v_x} + \beta_- \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2i\omega x/v_x} \quad (4.2.59)$$

avec  $\alpha, \beta_{\pm}$  des constantes. La jonction étant transparente, les FGQs doivent être continues à l'interface. Pour  $v_x > 0$  on a dans le SC gauche

$$g_L^r = C_L \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{|\Delta|e^{-ix/2}}{s^r + \omega} \\ \frac{|\Delta|e^{ix/2}}{s^r - \omega} \end{pmatrix} e^{-2is^r x/v_x} + \frac{1}{s^r} \begin{pmatrix} \omega \\ |\Delta|e^{-ix/2} \\ -|\Delta|e^{ix/2} \end{pmatrix}; \quad (4.2.60)$$

et dans celui à droite

$$g_R^r = C_R \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{|\Delta|e^{ix/2}}{-s^r + \omega} \\ \frac{-|\Delta|e^{ix/2}}{s^r + \omega} \end{pmatrix} e^{2is^r x/v_x} + \frac{1}{s^r} \begin{pmatrix} \omega \\ |\Delta|e^{ix/2} \\ -|\Delta|e^{-ix/2} \end{pmatrix}. \quad (4.2.61)$$

Le courant dans la partie normale est alors donnée par

$$I = -\frac{1}{8} S e N_0 v_F \int d\omega \tanh(\beta\omega/2) \int_0^1 d[\cos(\theta)] \cos(\theta) \text{Tr}[\sigma_3(\delta g_N^r(\omega) - \delta g_N^a(\omega))] \quad (4.2.62)$$

avec  $N_0 = m^2 v_F / 2\pi^2$  la densité d'états,  $S$  la section transverse et  $\delta g_N^i(\omega) = g_N^i(\omega, v_x) - g_N^i(\omega, -v_x)$ . L'angle  $\theta$  est défini par  $v_F \cos(\theta) = v_x$ . En résolvant le système précédant on trouve

$$g_{N,11}^r(\omega, v_x) = \frac{\omega}{s^r} - \frac{\Delta^2}{s^r} \frac{e^{i(\chi/2 - \omega L/v_x)} - e^{-i(\chi/2 - \omega L/v_x)}}{(\omega + \text{sign}(v_x) s^r) e^{i(\chi/2 - \omega L/v_x)} - (\omega - \text{sign}(v_x) s^r) e^{-i(\chi/2 - \omega L/v_x)}} \quad (4.2.63)$$

et

$$\delta g_N^r(\omega) = \frac{2i\Delta_0^2 \sin(\chi) \sigma_3}{[-2(\omega + i\epsilon)^2 + \Delta_0^2] \cos(2\omega L/v_x) + 2i\omega s^r \sin(2\omega L/v_x) + \Delta_0^2 \cos(\chi)}. \quad (4.2.64)$$

### Limite de jonction courte

Regardons la limite  $L \rightarrow 0$ . Dans ce cas

$$\delta g_N^r(\omega) = \frac{i\Delta_0^2 \sin(\chi)}{-(\omega + i\epsilon)^2 + \Delta_0^2 \cos^2(\chi/2)}. \quad (4.2.65)$$

L'énergie des états liés est donnée par les pôles de la FGQ. Ici on voit que l'énergie doit être

$$E = \pm \Delta_0 \cos(\chi/2). \quad (4.2.66)$$

Le courant est obtenu par la relation

$$I = \frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{\partial E}{\partial \chi} \quad (4.2.67)$$

avec  $\Phi_0 = 2e/h$  le quantum de flux. On a

$$I = \frac{e}{\hbar} \Delta \sin(\chi/2), \quad (4.2.68)$$

où nous avons rajouté explicitement la constante  $\hbar$ . Ce résultat n'est valable qu'à  $T = 0$  K. Pour trouver le courant à température arbitraire, on définit  $\bar{\omega} = \omega/\Delta_0 \cos(\chi/2)$  et on résout

$$I = -\frac{iS e N_0 v_F \Delta_0 \sin(\chi/2)}{4} \int d\bar{\omega} \tanh\left(\frac{\beta \bar{\omega} \Delta_0 \cos(\chi/2)}{2}\right) \times \left[ \frac{1}{-(\bar{\omega} + i\epsilon)^2 + 1} - \frac{1}{-(\bar{\omega} - i\epsilon)^2 + 1} \right]. \quad (4.2.69)$$

La solution est simplement

$$I = \frac{1}{2} S e N_0 v_F \pi \Delta_0 \sin(\chi/2) \tanh\left(\frac{\beta \Delta_0 \cos(\chi/2)}{2}\right) \quad (4.2.70)$$

$$= \frac{\pi \Delta_0}{e R_N} \sin(\chi/2) \tanh\left(\frac{\beta \Delta_0 \cos(\chi/2)}{2}\right) \quad (4.2.71)$$

avec  $R_N^{-1} = e^2 k_F^2 S / 4\pi^2 \hbar$  la résistance de Sharvin. On retrouve donc le fameux résultat de Kulik et Omelyanchuk [96]. À  $T = 0\text{K}$  et pour un unique canal de conduction, c-à-d.  $k_F^2 S / 4\pi = 1$ , on obtient (4.2.67), comme prévu.

### Jonction longue à $T = 0\text{K}$

On peut écrire (4.2.64) d'une manière légèrement différente

$$\delta g_N^r(\omega) = \frac{2i \sin(\chi)}{\cos\left[2(\omega + i\epsilon)L + 2 \arcsin\left(\frac{\omega + i\epsilon}{\Delta_0}\right)\right] + \cos(\chi)} \quad (4.2.72)$$

en utilisant la propriété  $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ .<sup>2</sup> L'énergie des états liés est donnée par la célèbre équation pour les états d'Andreev [97]

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2L} \left[ \pm\chi + 2\pi n + 2 \arccos\left(\frac{\omega}{\Delta_0}\right) \right]. \quad (4.2.73)$$

À basse énergie,  $2 \arccos\left(\frac{\omega}{\Delta_0}\right) = \pi/2 - 2\omega/\Delta_0$  et les énergies proches de 0 sont données par

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2L} [\pm\chi + \pi(2n+1)] \frac{1}{1 + \frac{1}{\Delta_0 L}} \stackrel{\Delta_0 L \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2L} [\pm\chi + \pi(2n+1)]. \quad (4.2.74)$$

Pour  $|\omega/\Delta_0| \sim 1$ ,  $2 \arccos\left(\frac{\omega}{\Delta_0}\right) \sim 2\sqrt{2}\sqrt{1-\omega^2/\Delta_0^2}$  et  $\omega_{\pm} \stackrel{\Delta_0 L \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2L} [\pm\chi + 2n\pi]$ . La limite à  $T = 0\text{K}$  est obtenue par

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \lim_{\beta \rightarrow \infty} \tanh(\beta\omega/2) [\delta g_N^r(\omega) - \delta g_N^a(\omega)] = 2 \int_{-i\infty}^{i\infty} d\omega \delta g_N(\omega) \quad (4.2.75)$$

$$= 4\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \delta g_N(i\omega) \quad (4.2.76)$$

avec  $\delta g_N(\omega)$  obtenue en remplaçant  $\omega + i\epsilon$  par  $\omega$  dans  $\delta g_N^r(\omega)$ . On voit que  $\delta g_N(i\omega)$  est la fonction de Matsubara [63, 77]. Ceci est dû au fait que

2. Comme  $\arcsin x = -\arccos x + \pi/2$  une forme équivalente pour le cosinus au dénominateur est  $-\cos\left[2\omega L - 2 \arccos\left(\frac{\omega + i\epsilon}{\Delta_0}\right)\right]$ .

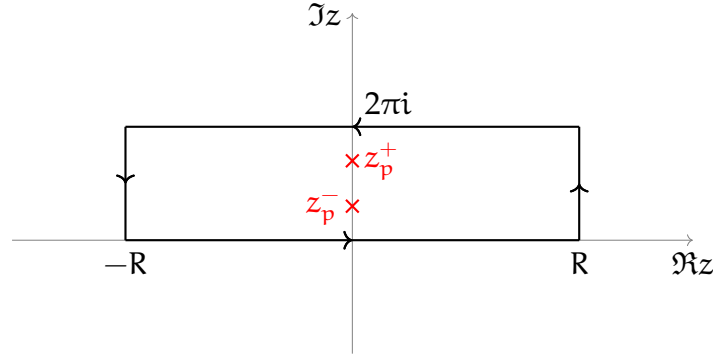


FIGURE 4.5 – Contour utilisé pour l'intégrale (4.2.80).

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tanh(\beta\omega/2) [\delta g_N^r(\omega) - \delta g_N^a(\omega)] = \frac{4\pi i}{\beta} \sum_{\omega_n} \delta g_N(i\omega_n) \quad (4.2.77)$$

avec les fréquences de Matsubara  $\omega_n = (2n + 1)\pi/\beta$ .

Ici

$$\delta g_N(i\omega) = \frac{2i \sin(\chi)}{\cosh \left[ 2eL + 2 \operatorname{arcsinh} \left( \frac{\omega}{\Delta_0} \right) \right] + \cos(\chi)} \quad (4.2.78)$$

$$\simeq \frac{2i \sin(\chi)}{\cosh(2eL) + \cos(\chi)} \quad (4.2.79)$$

dans la limite  $L\Delta \gg 1$ . Définissons

$$K_\alpha = \frac{4\pi}{L} \oint_\gamma \frac{dz}{2\pi} \frac{\sin(\chi) e^{\alpha z}}{\cosh(z) + \cos(\chi)}. \quad (4.2.80)$$

avec  $\gamma = [-R, R] \cup [R, R + 2\pi i] \cup [R + 2\pi i, -R + 2\pi i] \cup [-R + 2\pi i, -R]$  et  $\alpha < 1$ . Du fait que  $-\pi < \chi < \pi$ , il y a 2 pôles à considérer :  $z_p^\pm = \{i|\chi| + i\pi; -i|\chi| + i\pi\}$  (Fig. 4.2.80). En sachant que les intégrales sur les parties verticales tendent vers 0 lorsque  $R \rightarrow \infty$

$$K_\alpha(1 - e^{2\pi i \alpha}) = 4\pi i \sum_{z_p^\pm} \operatorname{Res} \left[ \frac{1}{L} \frac{\sin(\chi) e^{\alpha z}}{\cosh(z) + \cos(\chi)}; z_p \right]. \quad (4.2.81)$$

On prouve

$$\operatorname{Res} \left[ \frac{1}{L} \frac{\sin(\chi)}{\cosh(z) + \cos(\chi)}; \pm i|\chi| + i\pi \right] = \frac{\pm i}{L}, \quad (4.2.82)$$

pour obtenir

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} K_\alpha = -4\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \delta g_N(i\omega) = \frac{4\chi}{L}. \quad (4.2.83)$$



On a alors

$$I = SeN_0v_F \frac{\chi}{L} \int_0^1 d(\cos \theta) v_F \cos^2 \theta \quad (4.2.84)$$

$$= SeN_0v_F \frac{\chi v_F}{L} \frac{2}{3} \quad (4.2.85)$$

$$= \frac{2}{3} \frac{\chi v_F}{eR_N L}. \quad (4.2.86)$$

C'est le résultat classique obtenu par Ishii [98].

### Limite diffusive dans une jonction tunnel

On étudie maintenant une jonction SC - Isolant - SC (SIS) dans la limite tunnel  $T \ll 1$ . Les SCs sont considérés sales et sont décrits par l'équation d'Usadel (4.2.41)

$$-iD\nabla(\check{g}\nabla\check{g}) + \{\sigma_3 i\partial_t, \check{g}\} + \Delta_0 e^{\pm i\chi/2\sigma_3} [i\sigma_2, \check{g}] = 0. \quad (4.2.87)$$

Dans le cas homogène,  $\check{g}(\omega, x) = \check{g}(\omega)$  et la solution est simplement

$$g_{\chi/2}^r(\epsilon) = \frac{\epsilon\sigma_3 + iM_{\chi/2}\Delta_0}{s^r(\epsilon)}, \quad (4.2.88)$$

où l'on définit  $iM_\chi = i\sigma_2 \cos \chi + i\sigma_1 \sin \chi$ . Le courant est donné par l'Éq. (4.2.48)

$$I = \frac{G_T}{16e} \int d\epsilon \text{Tr} \left[ \sigma_3 [\check{g}_{-\chi/2}, \check{g}_{\chi/2}]^k \right]. \quad (4.2.89)$$

En sachant que

$$[iM_{-\chi/2}, iM_{\chi/2}] = 2i\sigma_3 \sin \chi, \quad (4.2.90)$$

on trouve

$$[\check{g}_{-\chi/2}, \check{g}_{\chi/2}]^k = 2i\Delta_0^2 \sin \chi \left( \frac{1}{(s^r)^2} - \frac{1}{(s^a)^2} \right), \quad (4.2.91)$$

et le résultat bien connu d'Ambegaokar et Baratoff [99]

$$I = \frac{G_T}{2e} \pi \Delta_0 \sin \chi \tanh \left( \frac{\beta \Delta_0}{2} \right). \quad (4.2.92)$$

## 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, le formalisme de Keldysh a été présenté, utile pour étudier la supraconductivité hors-équilibre. Les équations de Gor'kov étant difficiles à résoudre, l'approximation quasiclassique est discutée et les équations fondamentales d'Eilenberger et d'Usadel pour le cas propre et diffusifs ont été démontrées. Enfin, une application de la théorie quasiclassique à l'effet Josephson est faite à la fin du chapitre.



# Mode de Higgs dans une jonction tunnel NIS

Dans ce chapitre, nous étudions la jonction hybride NIS entre un métal normal (N) et un supraconducteur (S) séparés par une mince barrière isolante (I), dans le régime balistique [100]. La partie S est soumise à une excitation électromagnétique monochromatique, et une tension dc peut être appliquée à la jonction. Le but de ce chapitre est d'étudier la possibilité de génération du mode de Higgs en régime balistique, et de prédire des effets observables sur le transport de quasiparticules à travers cette jonction. Pour la jonction NIS sous tension dc, la signature du mode de Higgs est visible dans la deuxième harmonique du courant alternatif, comme dans le cas diffusif [31]. Nous discutons de l'importance d'un mécanisme de dépariement pour exciter le mode de Higgs dans le cas propre.

Après un état de l'art (Sec. 5.1), je présente le modèle de jonction irradiée dans le cadre du formalisme d'Eilenberger (Sec. 5.2). La section 5.3 est consacrée à la réponse du mode de Higgs dans le régime balistique. Le courant tunnel à travers la jonction est calculé dans la section 5.4.

## 5.1 État de l'art

Nous avons vu Sec. 3.4.2 que dans les SCs, le mode de Higgs se situe à l'énergie  $2\Delta$ , ce qui correspond à quelques meV. Expérimentalement il n'a été observé qu'en 2013 [26]. La raison de cette preuve expérimentale tardive est que le mode de Higgs (ou mode d'amplitude) est un mode scalaire sans charge, et donc sans couplage linéaire direct avec les sondes électromagnétiques. La détection du mode de Higgs dans les SCs nécessite un couplage non linéaire entre la lumière et la matière, qui n'est possible qu'avec des champs laser puissants. La découverte du mode de Higgs dans la matière condensée a été réalisée grâce au développement de sources laser THz intenses [16, 21, 24, 25]. Si l'on met de côté les mesures indirectes dans les systèmes avec onde de densité de charge [101] en utilisant la spectroscopie Raman, plusieurs expériences pompe-sonde ont rapporté un signal de Higgs via la génération de troisième harmonique [26–29].

De nombreux efforts ont été déployés pour comprendre le rôle des impuretés dans

l'excitation du mode de Higgs. On pense généralement que, dans un système propre, le mode de Higgs a un effet négligeable sur la réponse optique par rapport à l'excitation des quasiparticules (QPs) [102]. En utilisant le formalisme de l'intégrale de chemin, Cea *et al.* [32] ont découvert que la lumière THz ne peut pas exciter le mode de Higgs en raison de la symétrie particule-trou et que la génération de troisième harmonique provient uniquement des fluctuations de la densité de charge (FDC). Cependant, la mesure de cette troisième harmonique dans un cristal supraconducteur de NbN [103] a montré une réponse fortement isotrope comme attendu pour le mode de Higgs et contredisant l'hypothèse de la FDC, cette dernière étant anisotrope. Pour expliquer cette expérience, plusieurs scénarios ont été avancés. Des interactions médiées par des phonons ont été proposées pour expliquer la forte réponse due au mode de Higgs [104]. Il a été montré que les impuretés peuvent modifier radicalement l'excitation du mode de Higgs [105]. Silaev, en utilisant le formalisme d'Eilenberger, a trouvé que les impuretés sont nécessaires pour exciter le mode de Higgs avec de la lumière [106]. Néanmoins, Yang *et al.*, en utilisant un formalisme invariant de jauge, sont arrivés à la conclusion opposée, à savoir qu'un mode de Higgs fini pouvait être généré même dans le cas idéalement propre, conformément aux équations de Ginzburg-Landau [34, 35]. La disparition de la FDC a également été démontrée [34, 35], en accord avec l'expérience [103].

La majorité de ces études expérimentales et théoriques étaient concentrées sur un moyen optique de détecter le mode d'amplitude de Higgs dans les SCs, typiquement via la génération de troisième harmonique [26]. Récemment, une voie complètement différente a été proposée pour détecter le mode d'amplitude de Higgs, qui consiste à utiliser des mesures de transport électronique dans des dispositifs supraconducteurs hybrides. Par exemple, une interface tunnel (jonction NIS) entre un métal normal et un SC a été étudiée à l'aide des équations quasiclassiques d'Usadel [31]. Dans une telle jonction NIS polarisée par une différence de potentiel dc, la présence du mode de Higgs est révélée sous la forme d'une seconde harmonique dans le courant alternatif circulant à travers l'interface tunnel. Grâce aux progrès des processus de nanofabrication, les dispositifs NIS peuvent également être construits avec des parties normales balistiques et des supraconducteurs propres séparés par des interfaces allant du régime tunnel aux interfaces transparentes.

## 5.2 Modèle de jonction irradiée

Nous présentons ici le modèle théorique de la jonction représentée sur la Fig. 5.1. Un métal normal est porté à une tension dc  $V$  et séparé d'un SC par une partie isolante. Le SC est soumis à un rayonnement THz monochromatique modélisé par un potentiel vecteur  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t}$  et le champ électrique associé  $\mathbf{E}(t) = -\partial_t \mathbf{A}(t)$ . Les métaux sont considérés propres et la jonction NIS est alors balistique. On se placera dans l'approximation quasi-classique  $\Delta/\mu \ll 1$  où  $\mu$  est l'énergie de Fermi. On utilisera donc l'équation d'Eilenberger (4.2.29) pour calculer le courant circulant à travers la jonction. Pour décrire correctement la physique hors-équilibre produite par l'irradiation on utilisera le formalisme de Keldysh tel que présenté dans la Sec. 4.1.

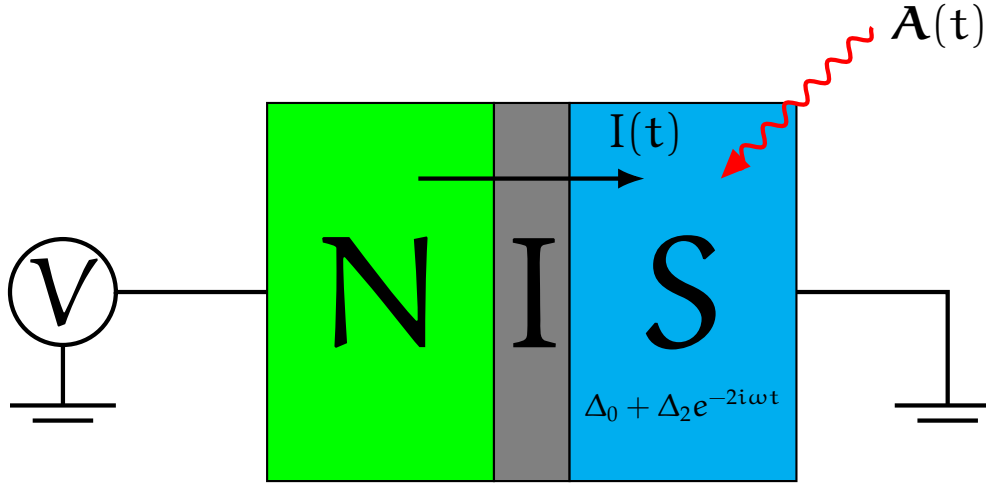


FIGURE 5.1 – Schéma du dispositif théorique de la jonction NIS. Le métal normal est porté à une tension dc  $V$  et le SC est irradié par une source THz d'impulsion  $\omega$  considérée harmonique.

### 5.2.1 Équation d'Eilenberger homogène dans la partie normale

Nous supposons que le SC a une longueur inférieure à la longueur de cohérence  $\xi$ , ce qui permet de considérer que le gap est indépendant de la position. On se restreint donc à étudier le problème uniforme, c-à-d. le cas où  $\nabla\check{g} = 0$ . Commençons par considérer que la différence de potentiel est nulle :  $V = 0$ . Dans la partie normale, l'équation d'Eilenberger est simplement

$$\{i\check{\sigma}_3\partial_t, \check{g}\} = 0. \quad (5.2.1)$$

À ce stade il est utile de définir la transformation de Fourier-Wigner

$$\check{g}(t, t') = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int \frac{d\epsilon}{2\pi} e^{it'\epsilon} e^{-it\epsilon_n} \check{g}_n(\epsilon), \quad (5.2.2)$$

avec  $\epsilon_n = \epsilon + n\omega$ . La fonction  $\check{g}_n(\epsilon)$  correspond à la composante de la série de Fourier suivant la variable  $t$  et de la transformée de Fourier suivant  $\tau = t - t'$ , c-à-d.

$$\check{g}_n(\epsilon) = \int_{-2\pi/\omega}^{2\pi/\omega} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\tau\epsilon} e^{itn\omega} \check{g}(t, t'). \quad (5.2.3)$$

La partie N étant non-irradiée, on a  $\check{g}_n(\epsilon) = \delta_{n0}\check{g}(\epsilon)$ . L'Éq. (5.2.1) devient alors pour la composante retardée

$$[\sigma_3\epsilon, \hat{g}^R(\epsilon)] = 0. \quad (5.2.4)$$

La solution s'écrit simplement  $\hat{g}^R(\epsilon) = C(\epsilon)\sigma_3$  avec  $C$  une fonction. La condition de normalisation donnée par (4.2.31) devient  $\hat{g}^R(\epsilon)^2 = 1$  et  $C(\epsilon)^2 = 1$ . De plus, la symétrie (4.2.6) nous permet d'écrire

$$\hat{g}^R(\epsilon) = \sigma_3 \quad \text{et} \quad \hat{g}^A(\epsilon) = -\sigma_3. \quad (5.2.5)$$

La fonction de Keldysh est donnée par le théorème de fluctuation-dissipation (4.1.32)

$$\hat{g}^K(\epsilon) = [\hat{g}^R - \hat{g}^A] \tanh(\beta\epsilon/2) = 2\sigma_3 \tanh(\beta\epsilon/2). \quad (5.2.6)$$

Pour inclure l'effet du potentiel  $V$  sur la FGQ, on applique la transformation de jauge (4.1.41)

$$\check{g}(t, t') \rightarrow e^{iVt\check{\sigma}_3} \check{g}(t, t') e^{-iVt'\check{\sigma}_3}. \quad (5.2.7)$$

On obtient alors pour la partie Keldysh

$$\hat{g}^K(\epsilon) = 2\sigma_3 \tanh\left(\beta \frac{\epsilon + V\sigma_3}{2}\right) \quad (5.2.8)$$

$$= 2\sigma_3 \begin{pmatrix} \tanh\left(\beta \frac{\epsilon + V}{2}\right) & 0 \\ 0 & \tanh\left(\beta \frac{\epsilon - V}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (5.2.9)$$

$$= \left[ \tanh\left(\beta \frac{\epsilon + V}{2}\right) + \tanh\left(\beta \frac{\epsilon - V}{2}\right) \right] \sigma_3 + \left[ \tanh\left(\beta \frac{\epsilon + V}{2}\right) - \tanh\left(\beta \frac{\epsilon - V}{2}\right) \right] \mathbb{1}. \quad (5.2.10)$$

## 5.2.2 Équation d'Eilenberger homogène dans la partie supraconductrice

Dans le SC, l'équation d'Eilenberger s'écrit

$$e[\check{\sigma}_3 \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_F, \check{g}] + \{i\check{\sigma}_3 \partial_t, \check{g}\} + [\Delta(t) i\check{\sigma}_2, \check{g}] = 0. \quad (5.2.11)$$

On note le paramètre  $A_F = e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_F$  qui a la dimension d'une énergie et qui caractérise le couplage au champ électromagnétique. Dans une interprétation quasi-classique, cette énergie de couplage  $|A_F|$  correspond à l'énergie gagnée par un électron à la vitesse  $v_F$  dans un champ électrique  $\omega A_0$  pendant un temps  $1/\omega$ . On considérera la limite de couplage faible par rapport au gap supraconducteur, c'est à dire  $\alpha_F \equiv |A_F|/\Delta_0 \ll 1$ , où  $\Delta_0$  est le gap à l'équilibre à la température  $T$ .

On va résoudre l'équation d'Eilenberger jusqu'à l'ordre 2 en  $\alpha_F$ . Le gap supraconducteur dépend du temps et va être représenté par son développement de Fourier

$$\Delta(t) = \Delta_0 + \sum_{n>0} \Delta_n e^{-in\omega t}, \quad (5.2.12)$$

où  $\Delta_n$  sont les amplitudes des harmoniques du gap. Or le mode de Higgs est électriquement neutre. En effet, ce dernier est transformé comme un singulet par une transformation de jauge  $U(1)$ . Le mode de Higgs devrait donc interagir avec la lumière à l'ordre 2 au minimum, c-à-d.  $|\Delta(t) - \Delta_0| \propto O(A_F^2)$ . On prendra donc la forme

$$\Delta(t) = \Delta_0 + \Delta_2 e^{-i2\omega t}. \quad (5.2.13)$$

Cette expression devient exacte dans la limite de couplage  $\alpha_F$  très petit [30]. L'amplitude du mode de Higgs  $\Delta_2$  est obtenue par la relation d'auto-cohérence (4.2.34). Notons que nous avons choisi la phase du SC nulle de telle sorte à ce que le gap à l'équilibre soit réel. Avant de résoudre ordre par ordre l'Éq. (5.2.11), nous paramétrisons la FGQ de Keldysh sous la forme

$$\hat{g}_n^K(\epsilon) = \hat{g}_n^{\text{reg}}(\epsilon) + g_n^{\text{an}}(\epsilon), \quad (5.2.14)$$

$$\hat{g}_n^{\text{reg}}(\epsilon) = \hat{g}_n^R(\epsilon) \tanh(\beta\epsilon/2) - \tanh(\beta\epsilon_n/2) \hat{g}_n^A(\epsilon). \quad (5.2.15)$$

Ici reg (an) correspond à "régulier" ("anomale"). La condition de normalisation est alors

$$\hat{g}^R \hat{g}^K + \hat{g}^K \hat{g}^A = 0. \quad (5.2.16)$$

La stratégie est alors la suivante : on résout d'abord l'équation d'Eilenberger pour la fonction retardée. On réinjecte ensuite ce résultat dans l'équation pour la fonction de Keldysh pour obtenir celle sur  $\hat{g}^{\text{an}}$ .

Ordre  $O(\alpha_F^0)$  :

À l'ordre 0, (5.2.11) devient simplement celle de la FGQ BCS, c-à-d.

$$[\epsilon, \hat{g}_0^R] + [\Delta_0 i\sigma_2, \hat{g}_0^R] = 0, \quad (5.2.17)$$

avec pour solution

$$\hat{g}^{R/A}(\epsilon) = \frac{\epsilon\sigma_3 + \Delta_0 i\sigma_2}{s^{R/A}(\epsilon)}. \quad (5.2.18)$$

Ici  $s^{R/A}(\epsilon) = i\sqrt{\Delta_0^2 - (\epsilon \pm i\gamma)^2}$ . La constante  $\gamma$  est maintenant interprétée comme un paramètre de Dynes [107], c-à-d. une petite constante phénoménologique qui décrit les effets de désappariement dans le SC qui induit un élargissement des fonctions de réponse optique, empêchant ainsi une résonance infinie du mode de Higgs. Ce paramètre est considéré comme provenant exclusivement de la diffusion électron-phonon [108]. Nous reviendrons en détail dans la prochaine section 5.3 sur l'importance cruciale de ce paramètre dans l'excitation du mode de Higgs dans un système propre.

Pour la fonction de Keldysh, la composante anomale  $\hat{g}^{\text{an}}$  est ici nulle et  $\hat{g}^K$  est donnée par la relation de fluctuation-dissipation (4.1.32)

$$\hat{g}^K(\epsilon) = [\hat{g}^R - \hat{g}^A] \tanh(\beta\epsilon/2) \quad (5.2.19)$$

$$= \begin{cases} 2 \operatorname{sign} \epsilon \frac{\epsilon\sigma_3 + \Delta_0 i\sigma_2}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}} \tanh(\beta\epsilon/2), & |\epsilon| > \Delta_0 \\ 0, & |\epsilon| < \Delta_0. \end{cases} \quad (5.2.20)$$

Ordre  $O(\alpha_F^1)$  :

Nous utiliserons pour la suite les relations

$$i\{\sigma_3\partial_t, \hat{g}_i(t, t')\} = \int \frac{d\epsilon}{2\pi} e^{-i\epsilon_i t} e^{i\epsilon t'} [\epsilon_i \sigma_3 \hat{g}_i(\epsilon) - \epsilon \hat{g}_i(\epsilon) \sigma_3], \quad (5.2.21a)$$

$$i[\Delta_2 e^{-i2\omega t} \sigma_2, \hat{g}_i(t, t')] = i\Delta_2 \int \frac{d\epsilon}{2\pi} e^{-i\epsilon_{i+2} t} e^{i\epsilon t'} [\sigma_2 \hat{g}_i(\epsilon) - \hat{g}_i(\epsilon_2) \sigma_2], \quad (5.2.21b)$$

$$[e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_F \sigma_3, \hat{g}_i(t, t')] = A_F \int \frac{d\epsilon}{2\pi} e^{-i\epsilon_{i+1} t} e^{i\epsilon t'} [\sigma_3 \hat{g}_i(\epsilon) - \hat{g}_i(\epsilon_1) \sigma_3]. \quad (5.2.21c)$$

On a l'équation pour la composante retardée à l'ordre 1

$$A_F [\sigma_3 \hat{g}_0^R(\epsilon) - \hat{g}_0^R(\epsilon_1) \sigma_3] + \epsilon_1 \sigma_3 \hat{g}_1^R - \hat{g}_1^R \epsilon \sigma_3 + [\Delta_0 i \sigma_2, \hat{g}_1^R] = 0, \quad (5.2.22)$$

$$\iff \xi_1 \hat{g}_1^R - \hat{g}_1^R \xi = A_F [\hat{g}_0^R(\epsilon_1) \sigma_3 - \sigma_3 \hat{g}_0^R(\epsilon)], \quad (5.2.23)$$

avec  $\xi_n \equiv \epsilon_n \sigma_3 + \Delta_0 i \sigma_2$ . Pour trouver  $\hat{g}_1^R$ , on multiplie l'équation ci-dessus par  $\xi_1$  à gauche et  $\xi$  à droite pour ensuite additionner les 2 équations ainsi obtenues. On obtient

$$\hat{g}_1^R(\hat{\mathbf{p}}, \epsilon) = \frac{A_F}{s^R(\epsilon_1) + s^R(\epsilon)} [\sigma_3 - \hat{g}_0^R(\epsilon_1) \sigma_3 \hat{g}_0^R(\epsilon)]. \quad (5.2.24)$$

La solution pour la composante anormale est

$$\hat{g}_1^{\text{an}}(\hat{\mathbf{p}}, \epsilon) = A_F \frac{\tanh(\beta \epsilon_1/2) - \tanh(\beta \epsilon/2)}{s^R(\epsilon_1) + s^A(\epsilon)} [\sigma_3 - \hat{g}_0^R(\epsilon_1) \sigma_3 \hat{g}_0^A(\epsilon)].$$

On vérifie facilement que cette dernière obéit à la condition de normalisation  $\hat{g}^R \hat{g}^{\text{an}} + \hat{g}^{\text{an}} \hat{g}^A = 0$ .

**Calcul à l'ordre  $O(\alpha_F^2)$  :** C'est à cet ordre que l'effet du mode Higgs va apparaître. Dans les fonctions de Green, il faudra séparer des termes provenant directement du couplage à l'ordre 2 au champ électromagnétique (termes en  $A_F^2$ ) et des termes lié directement au mode de Higgs en  $\Delta_2$ . En effet, on a l'équation

$$\xi_2 \hat{g}_2^R - \hat{g}_2^R \xi = A_F [\hat{g}_1^R(\epsilon_1) \sigma_3 - \sigma_3 \hat{g}_1^R(\epsilon)] + i\Delta_2 [\hat{g}_0^R(\epsilon_2) \sigma_2 - \sigma_2 \hat{g}_0^R(\epsilon)]. \quad (5.2.25)$$

On sépare donc la FGQ en deux contributions  $\hat{g}_2^R = \hat{g}_\Lambda^R + \hat{g}_\Delta^R$ , proportionnelles respectivement à  $A_F^2$  et  $\Delta_2$ . La fonction de Green retardée proportionnelle à  $A_F^2$  s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{g}_\Lambda^R(\hat{\mathbf{p}}, \epsilon) &= \frac{A_F^2}{[s^R(\epsilon_2) + s^R(\epsilon_1)][s^R(\epsilon_2) + s^R(\epsilon)][s^R(\epsilon_1) + s^R(\epsilon)]} \\ &\times [(s^R(\epsilon) + s^R(\epsilon_1) + s^R(\epsilon_2)) \hat{g}_0^R(\epsilon_2) \bar{\hat{g}}_0^R(\epsilon_1) \hat{g}_0^R(\epsilon) - \xi_2 - \bar{\xi}_1 - \xi], \end{aligned} \quad (5.2.26)$$

tandis que la fonction de Green retardée proportionnelle au Higgs s'écrit

$$\hat{g}_\Delta^R(\epsilon) = \frac{i\Delta_2}{s^R(\epsilon_2) + s^R(\epsilon)} [\sigma_2 - \hat{g}_0^R(\epsilon_2) \sigma_2 \hat{g}_0^R(\epsilon)], \quad (5.2.27)$$



avec  $\bar{0} = \sigma_3 0 \sigma_3$ .

La fonction anomale proportionnelle à  $A_F^2$  est

$$\begin{aligned} \hat{g}_\Lambda^{\text{an}}(\hat{\mathbf{p}}, \epsilon) &= \frac{A_F^2 [\tanh(\beta \epsilon_2/2) - \tanh(\beta \epsilon_1/2)]}{[s^R(\epsilon_2) + s^A(\epsilon_1)][s^R(\epsilon_2) + s^A(\epsilon)][s^A(\epsilon_1) + s^A(\epsilon)]} \\ &\times [(s^A(\epsilon) + s^A(\epsilon_1) + s^R(\epsilon_2))\hat{g}_0^R(\epsilon_2)\hat{g}_0^A(\epsilon_1)\hat{g}_0^A(\epsilon) - \bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_1 - \xi] \\ &+ \frac{A_F^2 [\tanh(\beta \epsilon_1/2) - \tanh(\beta \epsilon/2)]}{[s^R(\epsilon_2) + s^R(\epsilon_1)][s^R(\epsilon_2) + s^A(\epsilon)][s^R(\epsilon_1) + s^A(\epsilon)]} \\ &\times [(s^A(\epsilon) + s^R(\epsilon_1) + s^R(\epsilon_2))\hat{g}_0^R(\epsilon_2)\hat{g}_0^R(\epsilon_1)\hat{g}_0^A(\epsilon) - \bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_1 - \xi], \end{aligned} \quad (5.2.28)$$

et on trouve celle dépendante du mode de Higgs égale à

$$\hat{g}_\Delta^{\text{an}}(\epsilon) = \frac{i\Delta_2 [\tanh(\beta \epsilon_2/2) - \tanh(\beta \epsilon/2)]}{s^R(\epsilon_2) + s^A(\epsilon)} [\sigma_2 - \hat{g}_0^R(\epsilon_2)\sigma_2\hat{g}_0^A(\epsilon)]. \quad (5.2.29)$$

Nous avons à présent tous les éléments pour calculer le mode de Higgs et le courant dans jonction.

## 5.3 Résonance de Higgs

Dans cette partie nous étudierons l'amplitude du mode de Higgs  $\Delta_2$  en utilisant les résultats précédents et nous répondrons à la question sur la possibilité d'exciter le mode de Higgs dans un système propre.

### 5.3.1 Amplitude du mode de Higgs

La relation d'auto-consistance pour le gap SC,

$$\Delta_i = \frac{-i\eta}{8} \int \frac{d\hat{\mathbf{p}}}{4\pi} \int d\epsilon \text{Tr} [i\hat{\sigma}_2 \hat{g}_i^K(\hat{\mathbf{p}}, \epsilon)], \quad (5.3.1)$$

peut se réécrire de façon équivalente sous la forme

$$\Delta_2 = \Delta_0 \frac{\int d\epsilon \text{Tr} [\langle \sigma_2 \hat{g}_2^K(\hat{\mathbf{p}}, \epsilon) \rangle_{\hat{\mathbf{p}}}]}{\int d\epsilon \text{Tr} [\langle \sigma_2 \hat{g}_0^K(\epsilon) \rangle_{\hat{\mathbf{p}}}]}. \quad (5.3.2)$$

La moyenne sur la surface de Fermi est notée  $\langle \dots \rangle_{\hat{\mathbf{p}}} = \int d\Omega_F / 4\pi (\dots)$ . Le seul terme dépendant de  $\hat{\mathbf{p}}$  est  $A_F$ . On calcule donc

$$\langle A_F^2 \rangle_{\hat{\mathbf{p}}} = A_F^2 2\pi \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{4\pi} \cos^2 \theta \quad (5.3.3)$$

$$\stackrel{2\text{IPP}}{=} 4 \langle A_F^2 \rangle_{\hat{\mathbf{p}}} + A_F^2 [\cos \theta \cos 2\theta]_0^{\pi/2} \quad (5.3.4)$$

$$\iff \langle A_F^2 \rangle_{\hat{\mathbf{p}}} = \frac{A_F^2}{3}. \quad (5.3.5)$$

avec  $A_F^c = e|\mathbf{A}||\mathbf{v}_F|$  et  $\theta$  l'angle entre  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{v}_F$ . On exprime alors le mode de Higgs sous la forme

$$\Delta_2 = -\frac{A_F^c \Delta_0}{3} \frac{B^R - B^A + B^{\text{an}}}{C^R - C^A + C^{\text{an}}}, \quad (5.3.6)$$

avec

$$B^\alpha = \int d\epsilon b^\alpha(\epsilon) \tanh(\beta\epsilon_{(2)}/2), \quad (5.3.7)$$

$$B^{\text{an}} = \int d\epsilon b_2^{\text{an}}(\epsilon) [\tanh(\beta\epsilon_2/2) - \tanh(\beta\epsilon_1/2)] + b_0^{\text{an}}(\epsilon) [\tanh(\beta\epsilon_1/2) - \tanh(\beta\epsilon/2)], \quad (5.3.8)$$

$$C^\alpha = \int d\epsilon c^\alpha(\epsilon) \tanh(\beta\epsilon_{(2)}/2) - \tanh(\beta\epsilon/2)/s^\alpha(\epsilon), \quad (5.3.9)$$

$$C^{\text{an}} = \int d\epsilon c^{\text{an}}(\epsilon) [\tanh(\beta\epsilon_2/2) - \tanh(\beta\epsilon/2)], \quad (5.3.10)$$

où

$$b^\alpha(\epsilon) = \left[ \frac{1}{[s(\epsilon_2) + s(\epsilon_1)][s(\epsilon_2) + s(\epsilon)][s(\epsilon_1) + s(\epsilon)]} \times \left[ (s(\epsilon) + s(\epsilon_1) + s(\epsilon_2)) \frac{\epsilon_1\epsilon + \epsilon_2\epsilon + \epsilon_1\epsilon_2 + \Delta_0^2}{s(\epsilon)s(\epsilon_1)s(\epsilon_2)} - 1 \right] \right]^\alpha, \quad (5.3.11)$$

$$b_2^{\text{an}} = \frac{1}{[s^R(\epsilon_2) + s^A(\epsilon_1)][s^R(\epsilon_2) + s^A(\epsilon)][s^A(\epsilon_1) + s^A(\epsilon)]} \times \left[ (s^R(\epsilon_2) + s^A(\epsilon_1) + s^A(\epsilon)) \frac{\epsilon_1\epsilon + \epsilon_2\epsilon + \epsilon_1\epsilon_2 + \Delta_0^2}{s^A(\epsilon)s^A(\epsilon_1)s^R(\epsilon_2)} - 1 \right], \quad (5.3.12)$$

$$b_0^{\text{an}} = \frac{1}{[s^R(\epsilon_2) + s^R(\epsilon_1)][s^R(\epsilon_2) + s^A(\epsilon)][s^R(\epsilon_1) + s^A(\epsilon)]} \times \left[ (s^R(\epsilon_2) + s^R(\epsilon_1) + s^A(\epsilon)) \frac{\epsilon_1\epsilon + \epsilon_2\epsilon + \epsilon_1\epsilon_2 + \Delta_0^2}{s^A(\epsilon)s^R(\epsilon_1)s^R(\epsilon_2)} - 1 \right], \quad (5.3.13)$$

$$c^\alpha(\epsilon) = \left[ \frac{\epsilon\epsilon_2 + \Delta_0^2 + s(\epsilon_2)s(\epsilon)}{[s(\epsilon_2) + s(\epsilon)]s(\epsilon_2)s(\epsilon)} \right]^\alpha, \quad (5.3.14)$$

$$c^{\text{an}}(\epsilon) = \frac{\epsilon\epsilon_2 + \Delta_0^2 + s^R(\epsilon_2)s^A(\epsilon)}{[s^R(\epsilon_2) + s^A(\epsilon)]s^R(\epsilon_2)s^A(\epsilon)}. \quad (5.3.15)$$

On trace le mode de Higgs Fig. 5.2. Il existe actuellement un débat théorique portant sur la possibilité d'exciter le mode de Higgs dans un supraconducteur BCS idéalement propre. En utilisant différents formalismes dans le régime propre, certains travaux ont affirmé que le mode de Higgs ne peut pas être excité en utilisant des techniques optiques [32, 33, 106] tandis que d'autres ont obtenu une réponse finie du mode de Higgs [34, 35]. En utilisant le formalisme en temps réel de Keldysh pour résoudre les équations d'Eilenberger correspondantes, nous obtenons un mode de Higgs non nul pour toutes les fréquences  $\omega$  et observons une résonance à  $\omega = \Delta$  (Fig. 5.2), comme prévu par

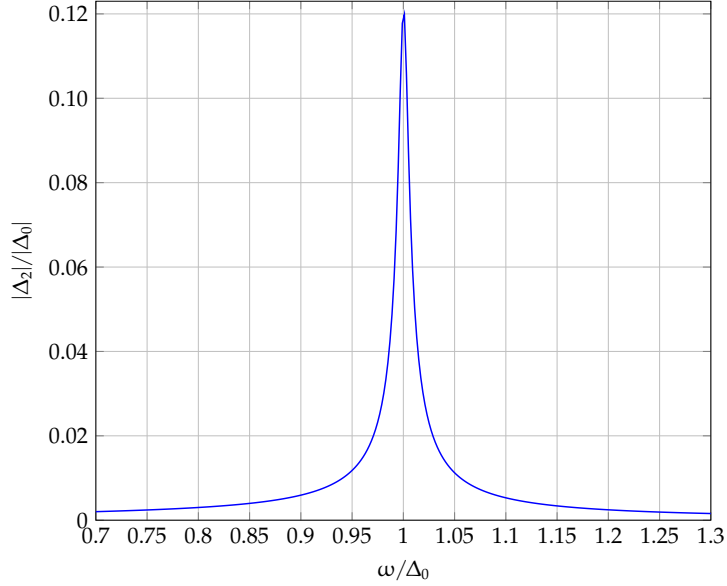


FIGURE 5.2 – Amplitude du mode de Higgs  $|\Delta_2|/\Delta_0$  en fonction de la pulsation de champ  $\omega$ . On observe une résonance à la fréquence  $\omega = \Delta_0$ , soit une énergie  $2\Delta_0$  pour le mode de Higgs. Paramètre :  $A_F^c = 0.36\Delta_0$ ,  $\gamma = 0.01\Delta_0$ ,  $T = 0.05T_c$ .

les résultats théoriques antérieurs [30]. Néanmoins, nous voyons également que l'amplitude du mode de Higgs est en principe plus petite (mais non nulle) dans les SC propres que dans les SC sales.

Nous discutons maintenant des différences entre les cas propres et sales, en soulignant le rôle crucial des contributions anormales. Tout d'abord, il existe une différence majeure entre l'énergie typique impliquée dans les excitations induites par l'irradiation :  $A_F^c = e|\mathbf{A}_0||\mathbf{v}_F|$  dans le cas propre et  $A_F^d = D\hbar(e\mathbf{A}_0/\hbar)^2$  dans le cas sale, avec  $D$  la constante de diffusion d'Usadel mesurant la quantité de désordre. Nous pouvons écrire l'amplitude en termes de fonctions régulières et anormales  $B^{\text{reg}} = B^R - B^A$  et  $B^{\text{an}}$ . Une différence de comportement intéressante apparaît à ce niveau. Dans le cas sale, les termes réguliers et anormaux partagent le même signe et contribuent tous deux de manière constructive à l'amplitude du mode de Higgs. Au contraire, dans un SC propre, ces deux termes ont des signes différents et, étant du même ordre, se compensent presque l'un l'autre. Cette différence de signe explique qualitativement pourquoi le cas sale peut en principe induire une réponse de Higgs plus forte à partir d'une excitation optique. Néanmoins, un mode de Higgs non nul est excité dans les SC propres. Typiquement, le coefficient de diffusion  $D \sim 1\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ . Pour un mode de Higgs de même amplitude dans le cas propre et sale, nous constatons que le rapport d'amplitude des potentiel vecteurs  $|\mathbf{A}_0^d|/|\mathbf{A}_0^c| \sim 0.1$ , de sorte qu'une impulsion moins intense dans le cas sale peut créer une réponse de même intensité que dans le cas propre avec une impulsion plus forte. Il convient de noter que dans un préprint, Yang et Wu [36] ont résolu partiellement les équations d'Eilenberger dans le cas propre. Cependant, ils ont négligé les contributions anormales des FGs au mode de Higgs, prédisant ainsi une réponse trop importante par rapport à la réalité.

### 5.3.2 Limite à température nulle

Commençons par écrire le mode de Higgs en fonctions des paramètres d'amplitude  $F_\omega$  et de polarisation  $\Pi_\omega$  [106]

$$\Delta_2 = \frac{F_\omega}{1 - \Pi_\omega}. \quad (5.3.16)$$

On montrera plus tard que  $\Pi_\omega$  est identique dans le cas sale (Sec. 6). On s'intéressera donc en priorité à l'amplitude  $F_\omega \propto B^R - B^A + B^{\text{an}}$ . Les intégrales (5.3.7 - 5.3.10) sont dans le cas général impossible à résoudre analytiquement. On s'intéressera à la limite  $T = 0$  où  $\tanh \beta\epsilon/2 \rightarrow \text{sign } \epsilon$ . En utilisant la relation

$$\begin{aligned} & \frac{[s^R(\epsilon) + s^R(\epsilon_1) + s^R(\epsilon_2)] [s^R(\epsilon) - s^R(\epsilon_1)] [s^R(\epsilon_1) - s^R(\epsilon_2)] [s^R(\epsilon) - s^R(\epsilon_2)]}{s^R(\epsilon)s^R(\epsilon_1)s^R(\epsilon_2)} \\ &= \frac{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}{s^R(\epsilon)} + \frac{\epsilon_2^2 - \epsilon^2}{s^R(\epsilon_1)} + \frac{\epsilon^2 - \epsilon_1^2}{s^R(\epsilon_2)}, \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

on obtient

$$B^R - B^A = \frac{1}{\omega^2} \int d\epsilon \text{sign}(\epsilon) \left[ \frac{1}{s^R(\epsilon)} + \frac{1}{s^R(\epsilon_2)} - \frac{2}{s^R(\epsilon_1)} \right], \quad (5.3.18)$$

$$\begin{aligned} B^{\text{an}} &= \frac{1}{\omega^2} \int_{-2\omega}^{-\omega} d\epsilon \left[ \frac{1}{s^A(\epsilon)} + \frac{1}{s^R(\epsilon_2)} - \frac{2}{s^A(\epsilon_1)} \right] \\ &+ \frac{1}{\omega^2} \int_{-\omega}^0 d\epsilon \left[ \frac{1}{s^A(\epsilon)} + \frac{1}{s^R(\epsilon_2)} - \frac{2}{s^R(\epsilon_1)} \right]. \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

Le maximum de l'amplitude étant atteint pour  $\omega = \Delta_0$ , nous nous placerons dans ce régime résonant. On trouve sans difficulté, dans la limite  $\gamma$  infinitésimal,

$$\Re(B^R - B^A) = -\frac{1}{\Delta_0^2} 2 \int_{\Delta_0}^{2\Delta_0} d\epsilon \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}} = -\frac{2}{\Delta_0^2} \cosh^{-1} 2, \quad (5.3.20)$$

$$\Im(B^R - B^A) = \frac{1}{\Delta_0^2} \int_{-\Delta_0}^{\Delta_0} d\epsilon \frac{1}{i\sqrt{\Delta_0^2 - \epsilon^2}} = -\frac{i\pi}{\Delta_0^2}, \quad (5.3.21)$$

$$\Re(B^{\text{an}}) = \frac{2}{\Delta_0^2} \cosh^{-1} 2, \quad (5.3.22)$$

$$\Im(B^{\text{an}}) = \frac{i\pi}{\Delta_0^2}. \quad (5.3.23)$$

L'amplitude  $F_\omega$  est donc strictement nulle dans la limite  $\gamma = 0^+$  et il n'y a pas de mode de Higgs. Dans limite  $\gamma/\Delta_0 \ll 1$ , on a

$$B^R - B^A + B^{\text{an}} \simeq -\frac{3}{\Delta_0^2} \cosh^{-1} \left[ 1 - \frac{i\gamma}{\Delta_0} \right] \simeq -\frac{3}{\Delta_0^{5/2}} \sqrt{\gamma} (1 - i). \quad (5.3.24)$$

On trouve donc que l'amplitude  $F_\omega \sim \sqrt{\gamma}$ , contrairement au cas sale (voir Sec. 7) où  $F_\omega \sim \gamma^0$ . La résonance du mode de Higgs reste donc finie dans la limite  $\gamma \rightarrow 0$  et le paramètre de Dynes est essentiel à l'excitation du mode de Higgs. Sans mécanisme de désappariement, le mode de Higgs est protégé par la symétrie électron-trou et  $\Delta_2 = 0$ . Cependant, même avec un petit  $\gamma = 0.01\Delta_0$ , on trouve une excitation du mode de Higgs non-négligeable (Fig. 5.2) et ce dernier doit donc avoir un effet mesurable même dans les systèmes propres.

## 5.4 Courant dans la jonction

Nous avons dans la partie précédente montré que le mode de Higgs peut être excité dans les systèmes propres. On s'intéresse maintenant à des signatures observables du mode, ici le courant ac dans la jonction NIS.

Dans une jonction tunnel, le courant est donné par la formule Eq.4.2.48

$$I = \frac{G_T}{16e} \int d\epsilon \langle \text{Tr} [\sigma_3 [\check{g}_n, \check{g}_s]^K] \rangle_{\mathbf{p}}, \quad (5.4.1)$$

avec  $G_T$  la conductance de la jonction et n/s indiquant la partie normale/supraconductrice. Parce que  $\langle \check{g}_1 \rangle_{\mathbf{p}} = 0$ , on considère seulement

$$[\check{g}_n, \check{g}_s]_0^K = \hat{g}_n^R \hat{g}_0^K(\epsilon) + \hat{g}_n^K(\epsilon) \hat{g}_0^A(\epsilon) - \hat{g}_0^R(\epsilon) \hat{g}_n^K(\epsilon) - \hat{g}_0^K(\epsilon) \hat{g}_n^A, \quad (5.4.2)$$

$$[\check{g}_n, \check{g}_s]_2^K = \hat{g}_n^R \hat{g}_2^K(\epsilon) + \hat{g}_n^K(\epsilon_2) \hat{g}_2^A(\epsilon) - \hat{g}_2^R(\epsilon) \hat{g}_n^K(\epsilon) - \hat{g}_2^K(\epsilon) \hat{g}_n^A. \quad (5.4.3)$$

Nous nous concentrons maintenant sur la contribution du second ordre. Du fait que  $\hat{g}_2^K$  est de trace nulle on a  $[\check{g}_n, \check{g}_s]_2^K = \hat{g}_n^K(\epsilon_2) \hat{g}_2^A(\epsilon) - \hat{g}_2^R(\epsilon) \hat{g}_n^K(\epsilon)$ . On doit trouver les termes proportionnels à  $\sigma_3$  dans  $\hat{g}_2^\alpha$  (en effet,  $\sigma_3 \hat{g}_n^K \propto \mathbb{1} + \sigma_3$ ). En notant  $\hat{g} \equiv g_3 \sigma_3 + g_2 i \sigma_2$  On trouve

$$g_{\Delta,3}^\alpha(\epsilon) = \left[ \frac{A_F^2}{[s(\epsilon_2) + s(\epsilon_1)][s(\epsilon_2) + s(\epsilon)][s(\epsilon_1) + s(\epsilon)]} \times \frac{\Sigma \epsilon \epsilon_1 \epsilon_2 + (\epsilon + \epsilon_1 + \epsilon_2) [\Sigma \Delta_0^2 - s(\epsilon) s(\epsilon_1) s(\epsilon_2)]}{s(\epsilon) s(\epsilon_1) s(\epsilon_2)} \right]^\alpha, \quad (5.4.4)$$

$$g_{\Delta,3}^\alpha(\epsilon) = \left[ \frac{2\Delta_0 \Delta_2 (\epsilon + \omega)}{s(\epsilon) s(\epsilon_2) [s(\epsilon) + s(\epsilon_2)]} \right]^\alpha, \quad (5.4.5)$$

où  $\Sigma^\alpha = s^\alpha(\epsilon) + s^\alpha(\epsilon_1) + s^\alpha(\epsilon_2)$ . Il y a deux contributions au courant : i) un courant  $I_\Lambda$  directement induit par le couplage non linéaire avec le champ électromagnétique et ii) un courant de Higgs  $I_\Delta$  directement proportionnel à l'amplitude de Higgs  $\Delta_2$ . On écrit donc le courant  $I_2 = I_\Lambda + I_\Delta$  (Fig. 5.3)

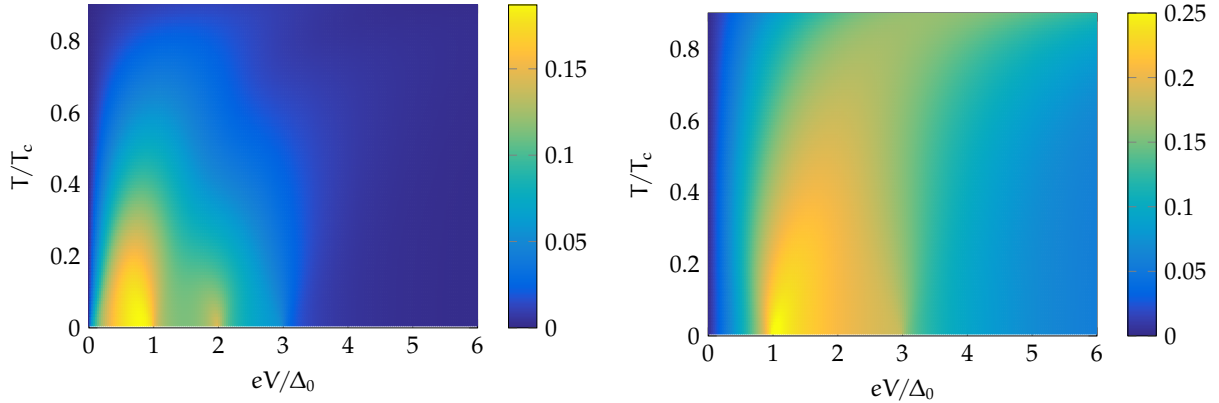


FIGURE 5.3 – *Gauche & Droite* : Courants alternatifs  $I_A$  &  $I_D$  à différentes températures  $T/T_c$  et potentiels  $V$  pour le couplage  $A_F^c = 0.36\Delta_0$ ,  $\gamma = 0.01\Delta_0$  (ici la constante de Dynes est considérée indépendante de la température). La pulsation du laser est considérée comme étant  $\omega = \Delta_0(T)$ . Les courants sont exprimés en unités de  $G_T/8e$ .

$$I_{A(\Delta)} = \frac{G_T}{8e} \int d\epsilon [\tanh(\beta(\epsilon_+ + eV)/2) - \tanh(\beta(\epsilon_- - eV)/2)] \langle \hat{g}_{A(\Delta),3}^A \rangle_{\mathbf{p}} \quad (5.4.6)$$

$$- \int d\epsilon [\tanh(\beta\epsilon_+/2) - \tanh(\beta\epsilon_-/2)] \langle \hat{g}_{A(\Delta),3}^R \rangle_{\mathbf{p}}. \quad (5.4.7)$$

Comme l'amplitude de Higgs  $\Delta_2$  est résonante à  $\omega = \Delta_0(T)$ , le courant de Higgs hérite de ce comportement résonant, alors que  $I_A$  n'est pas résonant. Qualitativement, les résultats sont assez similaires à ceux du système sale de [31]. Néanmoins, des différences intéressantes entre le système propre et le système sale peuvent être observées en étudiant ce courant alternatif du second ordre. Dans le cas sale, le courant  $I_A$  est beaucoup plus fort que le courant de Higgs  $I_D$  à la résonance. Nous voyons sur la Fig. 5.4 que dans le cas propre, les deux sont du même ordre,  $I_D$  étant encore plus fort que  $I_A$ . En dehors de la résonance,  $I_A$  prend rapidement le dessus sur la contribution de Higgs. Qualitativement, les deux cas sont encore très similaires. Comme dans le cas sale, le courant est résonant à  $\omega = \Delta_0$  et c'est une signature claire du mode de Higgs. Plus quantitativement à même  $\gamma$ , dans le cas sale, le courant du mode de Higgs est de l'ordre de  $\sim 30G_t A_F^d/e$  à la résonance, contre  $\sim 0.08G_t A_F^c/e$  dans le cas propre. Sachant que pour une même amplitude de Higgs  $A_F^d$  sera environ dix fois plus petit que  $A_F^c$  nous obtenons une estimation que, pour un mode d'amplitude de Higgs égale, le courant dans le cas sale  $I_H^d \sim 10I_H^c$  avec  $I_H^c$  le courant dans le système propre.

À la résonance, le courant croît de façon quasi-linéaire jusqu'au biais  $eV = \Delta_0$ . À ce stade, le courant commence à diminuer avec l'augmentation de  $V$ . Ceci est dû au fait que le mode de Higgs est un appariement/dépariement cohérent de paires de Cooper de fréquence  $2\Delta_0$ , de sorte que le courant alternatif est maximal pour un biais dc au bord de la bande supraconductrice, c-à-d. pour  $eV = \Delta_0$  [31]. Comme dans le cas sale,  $I_A$  présente différents pics à la fréquence  $\Delta_0 + n\omega$ , qui sont des signes de transport assisté par photons.

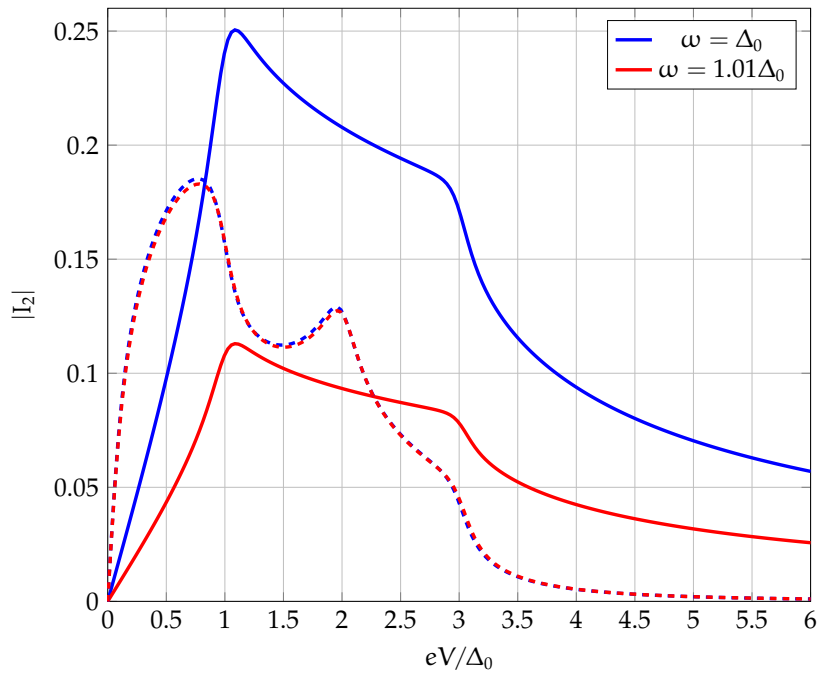


FIGURE 5.4 – Amplitude des courants de seconde harmonique  $I_A$  (ligne pointillée) et  $I_\Delta$  (ligne continue) en fonction du potentiel  $V$  pour des pulsations  $\omega$  légèrement différentes et près de la résonance. Le courant de Higgs  $I_\Delta$  dépend fortement de la pulsation, contrairement à  $I_A$ . Ces amplitudes ne sont pas monotones lorsque la tension de polarisation en courant continu augmente et diminuent comme  $1/V$  lorsque la polarisation est élevée. Ici  $T = 0.05T_c$ .

## 5.5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié comment générer et détecter le mode d'amplitude de Higgs dans un dispositif hybride supraconducteur propre. Le mode de Higgs est généré en irradiant le SC, et des mesures de courant électronique, ac ou dc, permettent de le mettre en évidence. Tout d'abord, nous avons montré que le mode de Higgs peut être généré même dans un circuit supraconducteur idéalement propre. Un mécanisme de dépariement illustré par un paramètre de Dynes non-nul est toutefois nécessaire à l'excitation du mode de Higgs, contrairement au cas diffusif. Nous avons calculé le courant dans une jonction tunnel NIS et nous avons trouvé une signature typique du mode de Higgs dans le courant alternatif de seconde harmonique, comme dans le cas sale. L'intensité de la réponse est néanmoins plus faible dans le cas propre.



# Mode de Higgs dans une jonction balistique NSN

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il était possible d'exciter le mode de Higgs dans un SC propre et nous avons calculé le courant dans un jonction tunnel NIS. Nous nous intéressons à une jonction transistor de type NSN. Pour continuer notre exploration des systèmes propres, nous considérons la jonction comme étant balistique. Nous verrons que la conductance différentielle en courant continu permet de sonder les gaps générés dynamiquement par le mode de Higgs dans le spectre de Floquet. Je commencerai par présenter rapidement la théorie de Floquet des systèmes périodiques dans le temps Sec. 6.1. J'étudierai ensuite Sec. 6.2 le problème de transport dans la jonction puis je calculerai Sec. 6.3 la conductance différentielle de la jonction et montrerai qu'elle contient des signatures du mode de Higgs [100].

## 6.1 Théorie de Floquet

Notre système est une jonction NSN périodique dans le temps, de période  $T = 2\pi/\omega$ . Au lieu de résoudre le problème directement, il est utile d'utiliser le théorème de Floquet [109–111]. Ce dernier est très similaire à celui de Bloch, qui pour rappel nous dit que la fonction d'onde d'un système périodique dans l'espace peut s'écrire sous la forme

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}u(\mathbf{x}), \quad (6.1.1)$$

avec  $\mathbf{k}$  un nombre quantique vecteur d'onde et  $u(\mathbf{x})$  une fonction périodique dans l'espace. Le théorème de Floquet généralise ce résultat à un hamiltonien invariant dans le temps. Pour tout hamiltonien  $H(t + T) = H(t)$ , on peut écrire ses solutions sous la forme

$$\Psi_{\epsilon}(k, t) = e^{-i\epsilon t}\Phi(k, t), \quad (6.1.2)$$

où  $\epsilon$  est appelé la quasi-énergie. La fonction  $\Phi$  est périodique dans le temps  $\Phi(k, t) = \Phi(k, t + T)$ . L'astuce est ensuite de définir l'hamiltonien de Floquet  $H_F = H - i\partial/\partial t$ . On obtient

$$H_F \Phi(k, t) = e^{i\epsilon t} H \Psi_\epsilon - e^{i\epsilon t} i \partial_t \Psi_\epsilon + \epsilon \Phi(k, t) \quad (6.1.3)$$

$$= \epsilon \Phi(k, t). \quad (6.1.4)$$

La fonction  $\Phi(k, t)$  obéit donc à une pseudo-équation aux valeurs propres de Schrödinger avec pour énergie  $\epsilon$ . On écrit les composantes de Fourier

$$H(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_n e^{-in\omega t}, \quad (6.1.5)$$

$$\Phi(k, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Phi_n(k) e^{-in\omega t}. \quad (6.1.6)$$

Ceci nous permet de passer d'une équation dépendante du temps à une infinité d'équation indépendante du temps

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} [H_{n-m} - m\omega \delta_{m,n}] \Phi_m = \epsilon \Phi_n. \quad (6.1.7)$$

## 6.2 Problème de transport dans la jonction

Nous étudions ici une géométrie consistant en une jonction *balistique* NSN (Fig. 6.1). Dans ce système, les réflexions d'Andreev jouent un rôle essentiel dans la conductance de la jonction et nous cherchons une signature du mode de Higgs dans le courant dc (ou de façon équivalente dans la conductance différentielle).

### 6.2.1 Modèle de la jonction

Le SC a une longueur finie  $L$ . La lumière THz est caractérisée par le potentiel vectoriel réel  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}]$ . La jonction est considérée comme étant purement balistique et nous utilisons l'équation de Bogoliubov-de Gennes (BdG)

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = H_{\text{BdG}}(t) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (6.2.1)$$

avec pour rappel

$$H_{\text{BdG}} = \begin{pmatrix} H_0 - \mu & \Delta(t) \\ \Delta^*(t) & \mu - \mathbb{T} H_0 \mathbb{T}^{-1} \end{pmatrix} \quad (6.2.2)$$

où  $\Delta(t) = \Delta_0 + \Delta_2 e^{-2i\omega t} + \Delta_2^* e^{2i\omega t}$  dans le SC et  $\Delta(t) = 0$  dans les électrodes normales,  $H_0 = (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}(t))^2/2m$ , et  $\mathbb{T}$  est l'opérateur d'inversion temporelle. Du fait que  $\Delta_0/E_F \ll 1$ , on peut utiliser la limite quasi-classique (voir Sec. 3.3)

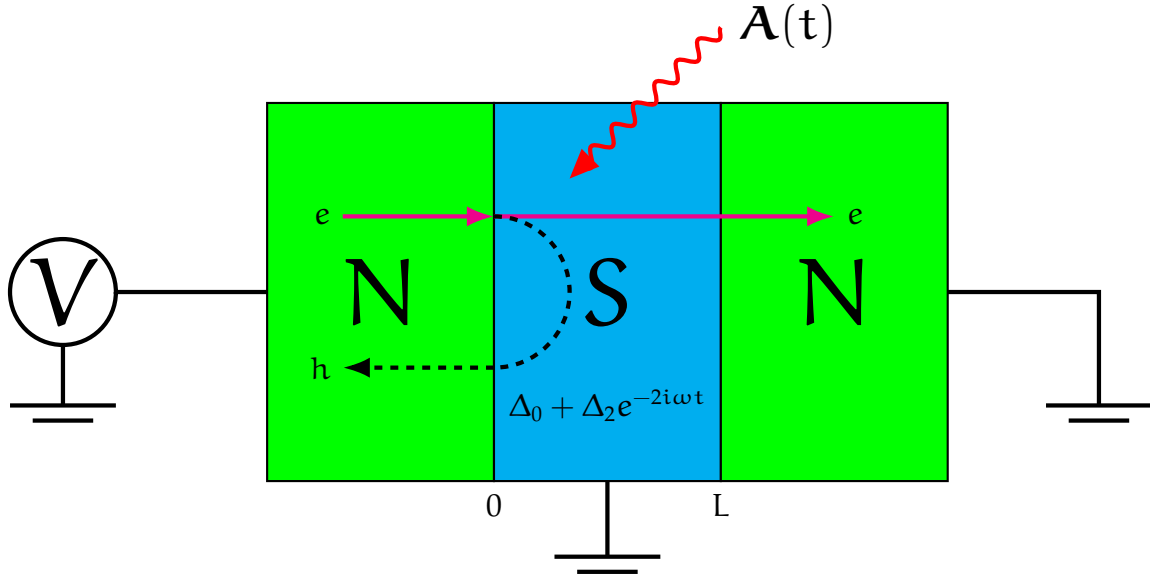


FIGURE 6.1 – Jonction NSN. Le SC central est irradié par un champ THz monochromatique  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}]$  et le métal normal à gauche est porté à une tension continue  $V$  par rapport à l'électrode SC et à l'électrode N de droite. Le problème de diffusion consiste en un électron incident qui peut être soit transmis comme un électron, soit réfléchi par une réflexion d'Andreev comme un trou.

$$i \frac{du}{dt} = \mathbf{v}_F \cdot (-i\nabla + e\mathbf{A}(t)) u - \mu u + \Delta(t)v, \quad (6.2.3)$$

$$i \frac{dv}{dt} = -\mathbf{v}_F \cdot (-i\nabla + -e\mathbf{A}(t)) v + \mu v + \Delta^*(t)u. \quad (6.2.4)$$

Dans cette approximation, nous négligeons complètement les effets des électrons réfléchis et des réflexions croisées d'Andreev, qui est une très bonne approximation dans le cas de jonctions totalement transparentes [112]. Dans le formalisme de Floquet, l'hamiltonien devient

$$H_n = [(v_F k - \mu)\sigma_3 + \Delta_0 \sigma_1] \delta_{n,0} + A_F \mathbb{1} [\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}] + \Delta_2^* \sigma_1 \delta_{n,2} + \Delta_2 \sigma_1 \delta_{n,-2}. \quad (6.2.5)$$

En pratique, pour résoudre les équations, on choisit un nombre de bandes limite  $N_c$  appelé le nombre de répliques de Floquet. L'amplitude du mode de Higgs est ici calculée de façon auto-cohérente en utilisant les résultats de la section précédente (Sec. 5).

## 6.2.2 Problème de transport

Nous considérons le problème de diffusion 1D suivant : un électron vient de la gauche et peut être réfléchi comme un trou ou transmis comme un électron sur la droite (Fig. 6.1). L'approximation quasi-classique empêche l'existence d'une réflexion d'Andreev croisée

dans la jonction ou d'électron réfléchi. Dans la région N gauche ( $x < 0$ ), nous avons les ondes incidentes de type électron et les ondes réfléchies de type trou suivantes

$$\Psi_{\text{in}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sum_n e^{ik_n^+ x} e^{-i\epsilon t} e^{-in\omega t}, \quad (6.2.6)$$

$$\Psi_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sum_n r_n e^{ik_n^- x} e^{-i\epsilon t} e^{-in\omega t}, \quad (6.2.7)$$

avec  $v_F k_n^\pm = \mu \pm (\epsilon + n\omega)$ . Dans la région N droite ( $x > L$ ), l'onde transmise est de type électronique et se lit comme suit

$$\Psi_{\text{trans}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sum_n t_n e^{ik_n^+ x} e^{-i\epsilon t} e^{-in\omega t}, \quad (6.2.8)$$

où  $r_n$  (resp.  $t_n$ ) est le coefficient de réflexion (resp. transmission) pour le  $n$ -ième niveau de Floquet.

Dans le SC, la solution de l'équation de Floquet-BdG s'écrit

$$\Psi_{\text{SC}} = \sum_m \sum_n a_m e^{ik_m x} \Phi_n^m e^{-i\epsilon t} e^{-in\omega t}, \quad (6.2.9)$$

où  $\Phi_n^m$  (resp.  $k_m$ ) sont les vecteurs propres de Floquet (resp. valeurs propres) dans le SC. Ces excitations sont des superpositions cohérentes de type électron et trou, et les spineurs  $\Phi_n^m$  sont obtenus en résolvant les problèmes à vecteurs propres suivant

$$\begin{aligned} (v_F k - \mu) \Phi_n &= (\epsilon + n\omega) \sigma_3 \Phi_n - i\Delta_0 \sigma_2 \Phi_n \\ &+ A_F \sigma_3 (\Phi_{n-1} + \Phi_{n+1}) \\ &+ \Delta_2^* \sigma_1 \Phi_{n-2} + \Delta_2 \sigma_1 \Phi_{n+2}. \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

La nouvelle matrice sur la droite de l'Éq. (6.2.10) n'est pas hermitienne, donc rien n'empêche  $k$  d'avoir une partie imaginaire non nulle (si c'est le cas, le mode est évanescent). L'hamiltonien est une matrice de taille  $2(2N_c + 1) \times 2(2N_c + 1)$ ; le nombre de  $k_m$  est donc  $2(2N_c + 1)$ . La solution complète est obtenue en utilisant la condition aux limites à chaque interface, c-à-d. la continuité des spineurs. On obtient alors la matrice  $\mathcal{S}$  pour ce problème de diffusion. L'unitarité de  $\mathcal{S}$  nous permet d'obtenir la loi de conservation

$$\mathcal{R} + \mathcal{T} = \sum_n |r_n|^2 + |t_n|^2 = 1, \quad (6.2.11)$$

avec  $\mathcal{R}$  ( $\mathcal{T}$ ) le coefficient total de réflexion (transmission). Calculons à présent la matrice  $\mathcal{S}$ . On définit les vecteurs  $\mathbf{r} = [r_{-N_c} \dots r_{N_c}]^T$ ,  $\mathbf{t} = [t_{-N_c} \dots t_{N_c}]^T$ ,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , les deux derniers étant les amplitudes pour un électron incident à gauche et un trou incident de la droite de la jonction. La matrice  $\mathcal{S}$  est définie par les relations

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \mathcal{S} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (6.2.12)$$

Les conditions aux bords, c-à-d. la continuité des spineurs nous donne les équations

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} A_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r_n = \sum_m a_m \Phi_n^m, \quad (6.2.13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_n^+ L} t_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_n^- L} B_n = \sum_m e^{ik_m L} a_m \Phi_n^m. \quad (6.2.14)$$

À partir de ce résultat nous obtenons

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} e^{ik^- L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 e^{ikL} \end{pmatrix} \mathbf{a} \quad (6.2.15)$$

où  $(\mathbf{B} e^{ik^- L})_n = B_n e^{ik_n^- L}$ ,  $\mathbf{a}_n = a_n$ ,  $(\Phi_i)_{mn} = \Phi_{n,i}^m$  et  $(\Phi_i e^{ikL})_{mn} = \Phi_{n,i}^m e^{ik_m L}$  avec  $i$  indiquant la coordonnée du spineur. La matrice  $\mathcal{S}$  est alors obtenue comme

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \Phi_1 e^{ikL} \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 e^{ikL} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (6.2.16)$$

On peut réécrire

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{R}' \\ \mathbf{T} & \mathbf{T}' \end{pmatrix} \quad (6.2.17)$$

avec  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{T}$  les coefficients de matrice pour l'électron incident de la gauche. Pour un électron incident depuis la bande de Floquet  $n = 0$  on aura les coefficients corrects dans la colonne du milieu de  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{T}$ .

### 6.2.3 Spectre de Floquet

Le spectre énergétique de Floquet de la région SC présente plusieurs bandes croisées (Fig. 6.2). Ces bandes présentent des gaps à différentes énergies. Il y a le gap supraconducteur à  $\epsilon = 0$ , un autre à  $\epsilon = \Delta_0$ . Ce type de gap induit par l'excitation THz a déjà été discuté dans le contexte du graphène irradié [113–115]. Les gaps présentent une structure riche en fonction de l'intensité du champ électromagnétique. Ici, nous avons trouvé des résultats similaires avec l'équation BdG dans la limite quasi-classique. Une observation importante est qu'un gap ne s'ouvre qu'en présence du mode de Higgs pour  $\epsilon = \Delta_0$ . Nous avons découvert que la taille du gap  $\Gamma$  à  $k_F$  est, dans une très bonne approximation, donnée par l'amplitude du mode de Higgs  $\Gamma \simeq \Delta_2$ <sup>1</sup>. Bien sûr, ces écarts sont du second ordre par rapport au vecteur potentiel, comme  $\Delta_2 \sim A_F^2$ . Dans la Fig. 6.2, nous comparons le cas avec et sans mode de Higgs dans le SC. Pour ce faire, nous avons fixé artificiellement  $\Delta_2 = 0$  dans la figure de gauche. Dans ce cas, les gaps se referment, ce qui montre la nécessité du mode de Higgs pour ouvrir un gap à  $\epsilon = \Delta_0$ .

1. Il existe également des gaps d'ordre supérieur à la même énergie, mais beaucoup plus petites (par exemple, nous avons aussi un autre gap d'ordre supérieur  $\propto \Delta_2^2/2$ ); le mode de Higgs étant ici petit comparé aux autres échelles d'énergie de notre problème, ces gaps d'ordre supérieur sont négligeables

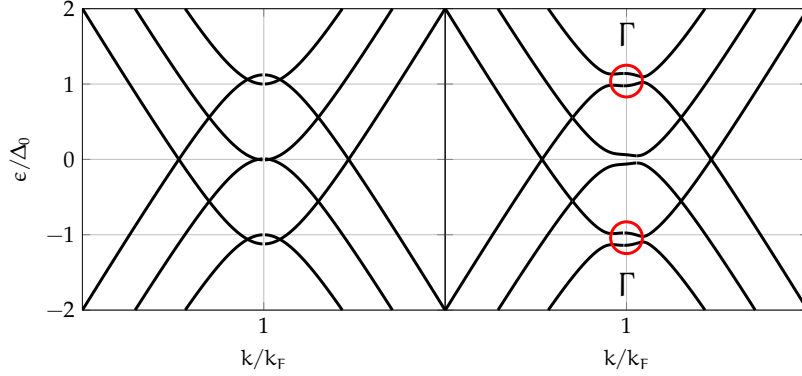


FIGURE 6.2 – Spectre de Floquet dans le cas où  $A_F^c = 0.36\Delta_0(T = 0)$  et (a)  $\Delta_2$  est arbitrairement fixé à 0, (b)  $\Delta_2 = 0.12\Delta_0(T = 0)$ . Nous considérons la limite de température  $T = 0$ . Les gaps n'apparaissent qu'en présence d'un mode de Higgs fini  $\Delta_2$ .

## 6.3 Signatures du mode de Higgs dans la conductance différentielle

Nous montrons ici que la conductance différentielle de la jonction NSN est un moyen simple de sonder et de réaliser une spectroscopie électronique/de transport des gaps de BdG-Floquet évoqués dans Sec. 6.2.3 (Fig. 6.2).

### 6.3.1 Conductance différentielle

À partir de  $S$ , le courant dc  $I_{dc}$  est obtenu en utilisant le formalisme généralisé de Landauer-Büttiker [116, 117]. Le courant dans la jonction

$$I_{dc} = \frac{2e}{h} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_n \int d\epsilon |\mathcal{S}_{\alpha 1}(\epsilon_n, \epsilon)|^2 \times (f_1^{\text{in}}(\epsilon - eV) - f_{\alpha}^{\text{out}}(\epsilon_n)) \quad (6.3.1)$$

peut être écrit en fonction des coefficients de réflexion et transmission

$$I_{dc} = \frac{2e}{h} \int d\epsilon (f_1^{\text{in}}(\epsilon - eV) - f_2^{\text{out}}(\epsilon_n)) \mathcal{T}(\epsilon) + (f_1^{\text{in}}(\epsilon - eV) - f_1^{\text{out}}(\epsilon - eV)) \mathcal{R}(\epsilon). \quad (6.3.2)$$

Ici  $\epsilon$  est l'énergie incidente,  $f_{\alpha}$  la fonction de distribution dans la partie  $\alpha$ ,  $V$  le potentiel. La partie  $\alpha = 1$  (resp.  $\alpha = 2$ ) est le métal normal à gauche (resp. droite) de la jonction. Dans le cas d'une réflexion d'Andreev, l'électron est réfléchi en un trou et de fait

$$f_1^{\text{out}}(\epsilon - eV) = 1 - f_1^{\text{in}}(\epsilon - eV). \quad (6.3.3)$$

Seuls les termes proportionnels à  $eV$  nous intéressent et on obtient

$$I_{\text{dc}} \propto \frac{2e}{h} \int d\epsilon f_1^{\text{in}}(\epsilon - eV) [\mathcal{T}(\epsilon) + 2\mathcal{R}(\epsilon)]. \quad (6.3.4)$$

Finalement, à partir de la relation de conservation  $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$ , on arrive à

$$G_{\text{dc}} = \frac{\partial I_{\text{dc}}}{\partial V} = \frac{2e}{h} \int d\epsilon \frac{\partial f_1^{\text{in}}(\epsilon - eV)}{\partial V} [1 + \mathcal{R}(\epsilon)]. \quad (6.3.5)$$

Dans la limite à basse température,  $\partial f_1^{\text{in}}(\epsilon - eV)/\partial V = \delta(\epsilon - eV)$  et [118–120]

$$G_{\text{dc}} = \frac{2e^2}{h} [1 + \mathcal{R}(eV)]. \quad (6.3.6)$$

En appliquant une tension continue  $V$  dans le métal normal gauche, nous attendons une conductance différentielle locale donnée par l'équation (6.3.6). Les résultats sont donnés dans la Fig. 6.4. Les oscillations proviennent du mode résonnant à l'intérieur de la partie supraconductrice. Le mode de Higgs apparaît lorsque  $eV \sim \Delta_0$ . En effet, nous observons l'apparition d'un plateau dans la conductance différentielle centré autour de  $\Delta_0$  et de largeur  $\sim \Delta_2$ . Ce plateau provient du gap  $\Gamma$ . En effet, le coefficient de réflexion pour cette gamme d'énergie sera proche de 1, car la probabilité de transmission élastique sera très faible. Pour  $A_{\text{F}}^{\text{c}} = 0.36\Delta_0$ ,  $\Delta_2 = 0.12\Delta_0$ , le coefficient de transmission inélastique du premier ordre devient dominant de telle sorte que  $|t_{-1}| \gtrsim 10|t_0|$ ; la diffusion élastique étant privilégiée on a  $|r_0|^2 \gg |t_{-1}|^2$ . Ainsi,  $G_{\text{dc}} \simeq 2e^2/h$  dans cet intervalle, ce qui donne le plateau. Pour confirmer cette interprétation, nous examinons la conductance différentielle dans le cas où nous plaçons artificiellement  $\Delta_2 = 0$ . Nous avons vu précédemment que les gaps disparaissent, et nous ne voyons plus de plateau.

En regardant la Fig. 6.3, nous voyons que l'effet n'est visible que pour une longueur de jonction suffisamment grande  $L$ . En effet, pour une jonction trop petite, les électrons injectés, même à l'intérieur du gap, peuvent simplement traverser la jonction par effet tunnel, ce qui donne ce  $G_{\text{dc}} \simeq e^2/h$  à tous les biais. Pour  $\Delta_2 = 0$ , les minimum des oscillations sont obtenues pour des biais d'énergie  $eV_{\text{n}}^{\text{res}}$  qui obéissent à la condition de résonance

$$eV_{\text{n}}^{\text{res}} = \sqrt{\Delta_0^2 + \left(\frac{n\pi}{L}v_{\text{F}}\right)^2}. \quad (6.3.7)$$

Dans ce cas, l'électron peut traverser le SC par effet tunnel et la conductance différentielle diminue.

Les résonances observées aux potentiels sous le gap sont considérées comme provenant de la diffusion assistée par photons (DAP). Dans ce cas, toujours pour  $\Delta_2 = 0$ ,

$$eV_{\text{n,N}}^{\text{res}} = \sqrt{\Delta_0^2 + \left(\frac{n\pi}{L}v_{\text{F}}\right)^2} - N\omega, \quad (6.3.8)$$

pour  $n, N$  tel que  $eV_{\text{n,N}}^{\text{res}} > 0$ . Dans notre cas, seuls les DAP du premier ordre sont visible, c-à-d. les biais résonants sont correctement prédits en prenant  $N = 1$ .

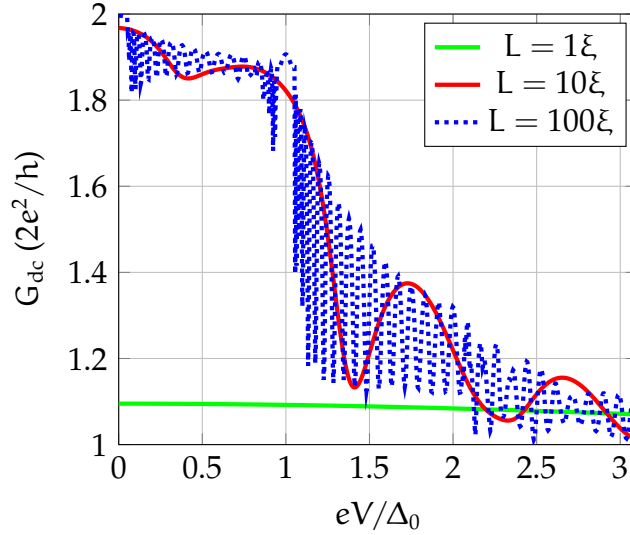


FIGURE 6.3 – Conductance différentielle en fonction du potentiel  $V$  pour différentes longueurs  $L$  du SC. La longueur de cohérence  $v_F/\pi\Delta_0$  est noté  $\xi$ . Paramètres :  $A_F^c = 0.36\Delta_0$ ,  $\Delta_2 = 0.12\Delta_0$ ,  $N_c = 10$ .

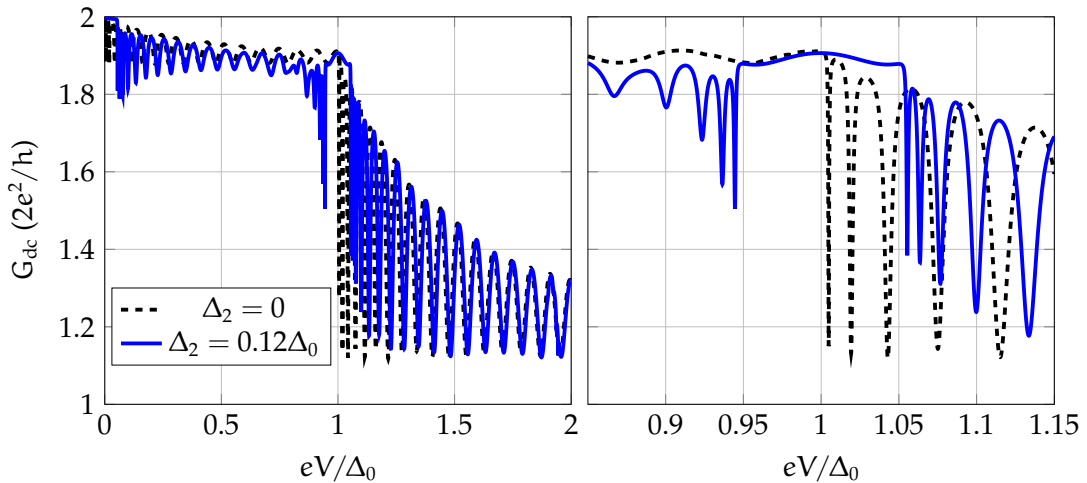


FIGURE 6.4 – À gauche : Conductances différentielles en fonction du potentiel  $V$  avec  $L = 100 \xi$ ,  $A_F^c = 0.36\Delta_0$ ,  $\Delta_2 = 0.12\Delta_0$  (ligne bleue solide),  $\Delta_2 = 0$  (ligne noire pointillée), nombre de réplique de Floquet  $N_c = 10$ . À droite : Zoom du tracé gauche autour de  $eV = \Delta_0$ .



### 6.3.2 Approximation de la phase tournante

Si le mode de Higgs est présent, les minimum de conductance sont légèrement décalés par rapport au cas sans mode de Higgs, ce qui peut s'expliquer par la modulation du gap du SC. Malheureusement, les équations complètes de BdG (6.2.3) sont analytiquement difficiles à résoudre. Par conséquent, afin d'obtenir une solution analytique, nous considérons ici un modèle plus simple où  $\Delta_0 = 0$  tandis que  $\Delta_2 \neq 0$ . L'hamiltonien (6.2.2) se réduit alors à

$$\tilde{H} = (v_F p - \mu) \sigma_z + v_F e A(t) \mathbb{1} + \Delta_2 e^{-2i\omega t} \sigma_+ + \Delta_2 e^{2i\omega t} \sigma_- \quad (6.3.9)$$

Pour éliminer la dépendance temporelle, nous appliquons la "méthode de la phase tournante" en appliquant la transformation unitaire suivante

$$U = e^{it\omega\sigma_z} e^{iev_F \int A dt} \quad (6.3.10)$$

à l'hamiltonien. Le nouvel hamiltonien indépendant du temps est donné par

$$\tilde{H}' = U \tilde{H} U^\dagger + i \frac{dU}{dt} U^\dagger \quad (6.3.11)$$

$$= (v_F p - \mu - \omega) \sigma_z + \Delta_2 \sigma_x, \quad (6.3.12)$$

dont les valeurs propres positives sont

$$\epsilon = \sqrt{\Delta_2^2 + (v_F p - \mu - \omega)^2}. \quad (6.3.13)$$

Ce résultat est en réalité formellement similaire à ce que l'on peut trouver dans les semi-conducteurs irradiés, et dans ce contexte, le  $\Delta_2$  est appelé un gap dynamique, induit par le champ électromagnétique [121, 122]. Pour ce système, les minimum de résonance se trouvent aux potentiels

$$e\tilde{V}_n^{\text{res}} = \sqrt{\Delta_2^2 + \left(\frac{n\pi}{L} v_F - \omega\right)^2}. \quad (6.3.14)$$

Le décalage

$$\frac{n\pi}{L} v_F \longrightarrow \frac{n\pi}{L} v_F - \omega \quad (6.3.15)$$

dans les biais de résonance explique qualitativement le déphasage entre les minimum de résonance avec et sans mode de Higgs de la Fig. 6.4. Nous notons également qu'à la résonance de Higgs ( $\omega = \Delta_0$ ), un gap de taille  $2\Delta_2$  apparaît lorsque  $k \simeq k_F$ . Comme nous l'avons vu, le gap se réduit à  $\Gamma = \Delta_2$  lorsque nous ajoutons un gap supraconducteur  $\Delta_0$  dans le modèle. Le modèle complet avec  $\Delta_0 \neq 0$  n'est pas résoluble analytiquement. Néanmoins, on s'attend à ce que les idées générales restent vraies. En effet, de petites oscillations peuvent être observées sur la Fig. 6.4, autour de  $eV \sim 0.92\Delta_0$ . Ces résonances n'apparaissent qu'en présence du mode de Higgs et peuvent être expliquées par le même type de décalage de l'équation (6.3.15).

## 6.4 Conclusion

Nous avons étudié une jonction NSN balistique irradiée dans le cadre du formalisme de Bogoliubov-de Gennes. Nous avons découvert que le mode de Higgs ouvre des gaps dans la bande d'énergie de Floquet. Ces gaps peuvent être observés en mesurant la conductance différentielle locale de la jonction autour de l'énergie du gap,  $eV \simeq \Delta_0$  et leurs largeurs sont égales à l'amplitude du mode de Higgs. Les mesures de conductance différentielle agissent comme une spectroscopie électronique révélant les gaps de Floquet générées dynamiquement par la présence d'un mode de Higgs d'amplitude finie.

# Mode de Higgs dans une jonction Josephson

Dans ce chapitre nous étudions les signatures du mode de Higgs dans une jonction Josephson SIS diffusive pompée par une lumière dans la gamme des THz. Cette perturbation externe active de manière résonnante le mode de Higgs via un couplage non-linéaire avec le champ électromagnétique. Nous constatons une forte augmentation du courant Josephson lorsque la fréquence d'excitation correspond au gap supraconducteur  $\omega = \Delta(T)$  à la température d'équilibre  $T$ . De plus les caractéristiques courant-tension  $I(V)$  présentent une distribution distinctive de pics causés par la transmission assistée par photon (TAP), ainsi qu'un pic de Shapiro à la tension  $eV = \omega$ .

Après un état de l'art non-exhaustif sur l'effet Josephson (Sec. 7.1), je présente le modèle particulier de jonction Josephson étudié dans ce chapitre (Sec. 7.2). Les équations de Keldysh-Usadel sont résolues pour la jonction tunnel SIS non irradiée dans la Sec. 7.3, ce qui permet d'écrire les éléments de base d'ordre zéro pour les calculs perturbatifs dans le cas irradié. La Sec. 7.4 expose les résultats sur le courant tunnel Josephson à travers la jonction irradiée.

## 7.1 État de l'art

Comme nous l'avons vu Sec. 4.2.4, la phase supraconductrice  $\theta$  n'est pas mesurable en elle-même, mais un gradient de phase est observable car il conduit à un supercourant qui peut être mesuré. En particulier, lorsque deux supraconducteurs, avec des phases respectives  $\theta_L$  et  $\theta_R$ , sont séparés par une couche non-supraconductrice, un courant d'équilibre  $I(\chi)$  circule sans dissipation dans la jonction [60], et sa valeur est contrôlée par la différence de phase  $\chi = \theta_R - \theta_L$ . Cet effet Josephson a une longue histoire qui a donné lieu à une variété d'effets fondamentaux et d'applications en nanotechnologie, y compris des capteurs et des qubits [123]. La couche séparant les deux électrodes supraconductrices, le "lien faible" (weak-link), peut être de nature très variée. En effet il peut s'agir d'une fine couche isolante [60], d'un contact atomique [124], d'un métal, d'un ferromagnétique [125, 126], d'un nanotube de carbone [127, 128], d'une couche unique de gra-

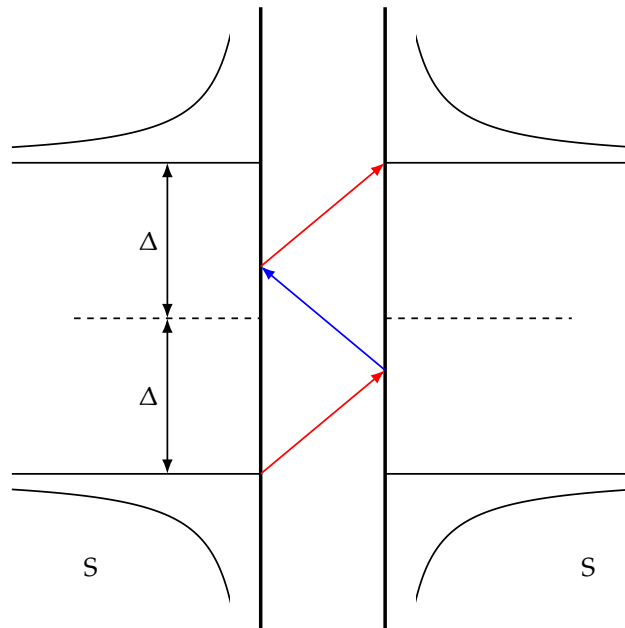


FIGURE 7.1 – Représentation schématique d'une réflexion multiple d'Andreev d'ordre 3. Une flèche rouge/bleue symbolise la transmission ou réflexion d'un électron/trou.

phène [124, 129, 130] ou même un isolant topologique [131]. En fait, l'effet Josephson permet de sonder les propriétés quantiques spécifiques du "lien faible" utilisé, notamment à travers la relation courant-Josephson  $I(\chi)$  de la jonction.

La version originale et la plus simple d'une jonction Josephson est la jonction SIS où les deux SCs sont séparés par une fine couche isolante (Fig. 7.2). En appliquant une différence de potentiel  $V$  entre les 2 SCs, la différence de phase précesse à la fréquence angulaire  $\omega_J = 2eV$ , dite fréquence de Josephson. À tension de biais finie, une jonction Josephson transparente présente un effet Josephson ac avec une riche structure sous le gap constituée de pics de conductance différentielle  $dI/dV$  localisés à des tensions  $eV = 2\Delta/n$  [132–134], avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ces structures proviennent de réflexions d'Andreev multiples (RAM, voir Fig. 7.1) et ne nécessitent pas d'irradiation. Si, en outre, la jonction est irradiée à la fréquence  $\omega$ , des pics satellites supplémentaires apparaissent à des biais  $eV = 2\Delta/n \pm m\omega/n$  [135–137],  $m$  étant un autre nombre entier associé à la RAM assistée par photons [138]. Dans une jonction tunnel, seule la simple réflexion d'Andreev (RA) correspondant à  $n = 1$  a un effet visible sur la conductance différentielle. Dans ce cas, les jonctions SIS irradiées ne présentent des structures de transmission assistée par photons (TAP) qu'à des potentiels  $eV = 2\Delta \pm m\omega$ . Lorsqu'une jonction est simultanément irradiée et soumise à un potentiel, une résonance due à la synchronisation du changement de phase des SCs avec l'excitation externe se produit lorsque la fréquence Josephson  $\omega_J$  est un multiple de la fréquence d'excitation externe  $\omega$ , ce qui entraîne des pics de Shapiro dans le courant continu [139]. Tous ces effets ont été principalement étudiés dans la gamme électromagnétique des micro-ondes  $\omega \sim \text{GHz}$ .

Nous avons montré dans les chapitres précédents (Sec. 5 et 6) que le mode de Higgs est détectable dans des systèmes hybrides [100, 140] ou dans des supraconducteurs simples

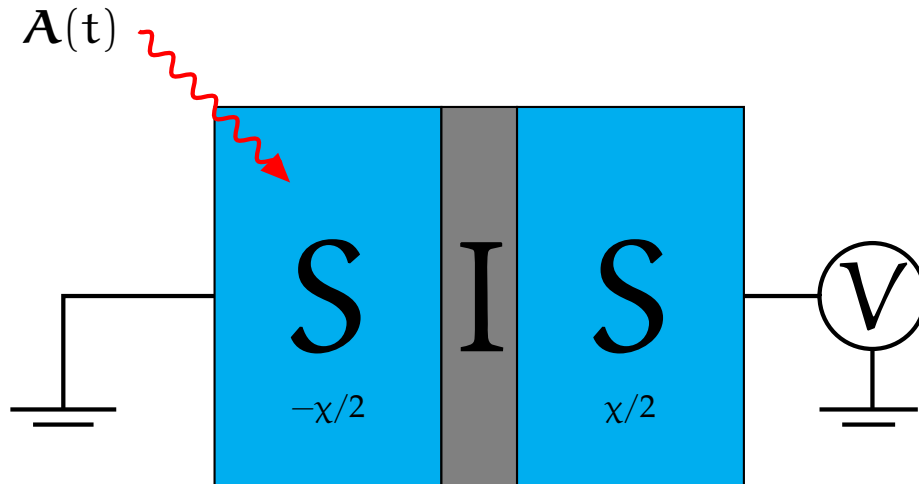


FIGURE 7.2 – Jonction Josephson entre deux SCs diffusifs avec une différence de phase  $\chi = \theta_R - \theta_L$ . Le SC gauche est irradié par une lumière THz monochromatique pour exciter le mode de Higgs. Le potentiel dc entre les SCs de droite et de gauche est noté  $V$ .

irradiés [141,142]. L'interaction entre l'effet Josephson et le mécanisme d'Anderson-Higgs n'a pas encore été examinée, sauf dans un récent preprint [143] prédisant que le mode de Higgs peut être excité en l'absence de toute irradiation, par la précession de Josephson à  $\omega_J$  de la phase dans une jonction Josephson transparente. Une autre publication récente [144] propose, également en l'absence d'irradiation, d'utiliser la conductance différentielle SIS pour détecter les modes collectifs de supraconducteurs non conventionnels, en particulier dans la géométrie de la jonction planaire où le(s) pic(s) du mode collectif est (sont) plus intense(s) que les pics RAM [144]. En revanche, l'interaction entre i) le pompage externe THz, ii) la précession Josephson et iii) l'oscillation du mode de Higgs n'a pas été prise en compte, même dans la version la plus simple d'un élément Josephson, à savoir dans une jonction tunnel SIS. En outre, comme nous l'avons montré, la réponse de Higgs est plus forte dans les supraconducteurs diffusifs que dans les supraconducteurs propres [31, 100].

## 7.2 Modèle de jonction diffusive

Nous considérons une jonction Josephson (JJ) SIS constituée de deux SCs de type s conventionnels séparés par une barrière tunnel isolante (Fig. 7.2). Dans les années 70, Scalapino et Ferrell avaient étudié un système SIS' où S est dans la phase supraconductrice et S' dans la phase normale avec des fluctuations supraconductrices [145,146]. Dans notre modèle, les deux supraconducteurs sont dans le régime diffusif et une tension continue est également appliquée à travers la jonction. Pour exciter le mode de Higgs, l'un des SCs est pompé par un champ électrique THz  $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$  où  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$  est un potentiel vecteur harmonique uniforme d'amplitude  $\mathbf{A}_0$ . Dans un SC diffusif sale, un

vecteur potentiel uniforme d'amplitude  $|\mathbf{A}_0|$  introduit une échelle d'énergie typique

$$A_D = \frac{De^2|\mathbf{A}_0|^2}{\hbar}. \quad (7.2.1)$$

Dans ce qui suit, l'intensité de l'irradiation est caractérisée par le rapport sans dimension des échelles d'énergie  $\alpha = A_D/\Delta_0$ . Outre la pulsation électromagnétique à la fréquence angulaire  $\omega$ , la dynamique du système est également caractérisée par la fréquence Josephson  $\omega_J = 2eV$ . Jusqu'à présent, les jonctions Josephson irradiées ont été largement étudiées dans le régime  $\omega \ll 2\Delta_0$ , correspondant aux fréquences micro-ondes  $\sim$  GHz [135, 137, 139, 147–153]. Dans ce cas, aucune quasiparticule (QP) ni aucun mode de Higgs ne peut être excité par la pulsation électromagnétique. L'irradiation produit des pics de Shapiro à la tension dc  $V = n\omega/2e$  et un effet tunnel assisté par photons (TAP) [139, 150]. Il induit également une reconstruction de l'état fondamental SC [154].

Nous considérons ici une gamme de fréquence plus élevée permettant d'exciter le mode de Higgs, typiquement  $\omega \sim \Delta_0$  qui correspond à la gamme électromagnétique THz [30]. De plus, les calculs seront effectués encore une fois de manière perturbative par rapport à l'intensité de l'irradiation  $\alpha$ , à savoir dans le régime

$$A_D \ll \omega \sim \Delta_0. \quad (7.2.2)$$

Dans ce régime, les énergies des photons  $\omega$  sont encore inférieures au seuil de  $2\Delta_0$  obligatoire pour briser la paire de Cooper. Néanmoins, ces photons peuvent exciter le mode de Higgs via un processus non linéaire du second ordre. Nous avons vu Sec. 4.2.2 qu'un SC diffusif est décrit par l'équation d'Usadel (4.2.41)

$$-iD\nabla(\check{g} \circ \nabla\check{g}) + \{\check{\sigma}_3 i\partial_t, \check{g}\} + [\Delta(t)e^{i\theta\check{\sigma}_3} i\check{\sigma}_2, \check{g}] = 0. \quad (7.2.3)$$

On considérera le problème uniforme où les FGQs sont indépendantes de la position. Après couplage minimal, l'équation à résoudre devient

$$iDe^2[\mathbf{A}\check{\sigma}_3 \circ \check{g} \circ \mathbf{A}\check{\sigma}_3 \circ \check{g} - \check{g} \circ \mathbf{A}\check{\sigma}_3 \circ \check{g} \circ \mathbf{A}\check{\sigma}_3] + \{\check{\sigma}_3 i\partial_t, \check{g}\} + [\Delta(t)e^{i\theta\check{\sigma}_3} i\check{\sigma}_2, \check{g}] = 0, \quad (7.2.4)$$

où pour rappel " $\circ$ " est l'opérateur de convolution temporel tel que  $(\check{g} \circ \check{g})(t, t') = \int dt'' \check{g}(t, t'')\check{g}(t'', t')$  et  $\mathbf{A}(t) \circ \check{g}(t, t') = \mathbf{A}(t)\check{g}(t, t')$ . Pour les raisons développées dans la Sec. 5, le gap supraconducteur prend la forme

$$\Delta(t) = \Delta_0 + \Delta_2 e^{-2i\omega t} + \Delta_2^* e^{2i\omega t}, \quad (7.2.5)$$

du fait de l'interaction non linéaire entre la lumière THz et le mode Higgs. La condition de normalisation sur les FGQs dans l'espace de Wigner-Fourier est

$$(\check{g} \circ \check{g})_k(\epsilon) = \sum_{l+l'=k} \check{g}_l(\epsilon_{l'})\check{g}_{l'}(\epsilon) = \delta_{k,0}. \quad (7.2.6)$$

Nous voulons maintenant résoudre, ordre par ordre, l'Éq. (7.2.4) en fonction du paramètre  $\alpha = A_D/\Delta_0 \ll 1$ , avec  $A_D = De^2|\mathbf{A}_0|^2/\hbar$ . Nous voyons dans l'équation (7.2.4) que

toutes les harmoniques  $\check{g}_n$  avec  $n$  impair deviennent nulles, car  $\mathbf{A}$  apparaît toujours en puissances paires. Dans ce qui suit, nous nous concentrons sur la deuxième harmonique  $\check{g}_{\pm 2}$  qui est d'ordre  $O(\alpha)$ . Les harmoniques supérieures  $\check{g}_{\pm 2n}$  sont plus petites et d'ordre  $O(\alpha^n)$ . En nous limitant au premier ordre en  $\alpha$ , la FGQ peut être développée comme suit

$$\check{g}(t, t') = \int \frac{d\epsilon}{2\pi} e^{it'\epsilon} e^{-it\epsilon} [\check{g}_0(\epsilon) + \check{g}_2(\epsilon)e^{-2i\omega t} + \check{g}_{-2}(\epsilon)e^{2i\omega t}]. \quad (7.2.7)$$

## 7.3 Jonction Josephson sans irradiation

Dans cette section, nous introduisons les fonctions de Green quasi-classiques moyennées dans le temps dans le système diffusif qui servent d'éléments de base pour les résultats obtenus en présence d'irradiation (Sec. 7.4). En l'absence d'irradiation, nous retrouvons des résultats bien connus pour la relation courant-tension  $I(V)$  des jonctions tunnel Josephson [99, 155].

### 7.3.1 Fonction de Green à potentiel non-nul

On commence par définir la matrice  $iM_\theta \equiv e^{i\theta\sigma_3}i\sigma_2$ . La fonction de Green dans le cas  $V = 0$  est alors

$$\hat{g}_{0,\theta}^R(\epsilon) = \frac{\epsilon\sigma_3 + \Delta_0 iM_\theta}{s^R(\epsilon)} \quad (7.3.1)$$

$$\equiv \hat{g}_{0,3}^R\sigma_3 + \hat{g}_{0,\theta}^R iM_\theta. \quad (7.3.2)$$

En reprenant la transformation de jauge Éq. (5.2.7), on obtient à potentiel fini

$$\hat{g}_V^R(\epsilon, \frac{t+t'}{2}) = \frac{(\epsilon + V\sigma_3)\sigma_3}{s^R(\epsilon + V\sigma_3)} + \frac{e^{iV(t+t')\sigma_3}iM_\theta\Delta_0}{s^R(\epsilon)}. \quad (7.3.3)$$

On voit que le potentiel  $V$  rajoute une oscillation  $V(t+t')$  à la phase  $\theta$  : c'est l'effet Josephson ac. On prendra pour phase dans la partie gauche et droite de la jonction  $\theta = \pm\chi$ , ainsi que le potentiel  $V_L = 0$ ,  $V_R = V$ . Nous définirons pour la suite

$$1/s^R(\epsilon + V\sigma_3) = s_1^R(\epsilon, V)^{-1}\mathbb{1} + s_3^R(\epsilon, V)^{-1}\sigma_3, \quad (7.3.4)$$

$$\tanh(\beta(\epsilon + V\sigma_3)/2) = f_0(\epsilon, V)\mathbb{1} + f_3(\epsilon, V)\sigma_3. \quad (7.3.5)$$

### 7.3.2 Courant dans la jonction SIS

Nous avons étudié la limite  $V = 0$  dans la Sec. 4.2.4 où le courant est donné par la formule d'Ambegaokar [99]

$$I(\chi) = \frac{G_T}{2e}\pi\Delta_0 \sin\chi \tanh\frac{\beta\Delta_0}{2}. \quad (7.3.6)$$

À tension finie, le courant à travers la jonction acquière des composantes ac à la pulsation Josephson  $\omega_J = 2eV$  et se lit :

$$I(t) = I_{dc} + I_0 \sin(\omega_J t + \chi) + I'_0 \cos(\omega_J t + \chi) \quad (7.3.7)$$

$$= I_{dc} + I_{ac} \sin(\omega_J t + \chi + \phi), \quad (7.3.8)$$

avec  $I_{ac} = \sqrt{I_0^2 + I_0'^2}$  et  $\cos \phi = I_0/|I_{ac}|$ . Les différentes amplitudes du courant dépendent de la tension  $V$  avec explicitement

$$I_{dc}(V) = \frac{G_t}{8e} \int d\epsilon \epsilon \left( \frac{1}{s^R} - \frac{1}{s^A} \right) [f_3(g_{V,3}^R - g_{V,3}^A) + (g_{V,1}^R - g_{V,1}^A)(f_0 - \tanh \beta\epsilon/2)], \quad (7.3.9)$$

$$\begin{aligned} I_0(V) = & -\frac{i\Delta_0^2 G_t}{8e} \int d\epsilon \left[ \tanh(\beta\epsilon/2) \left( \frac{1}{s^R} - \frac{1}{s^A} \right) \left( \frac{1}{s_1^R(\epsilon, -V)} + \frac{1}{s_1^A(\epsilon, -V)} \right) \right. \\ & + f_0(\epsilon, -V) \left( \frac{1}{s^R} + \frac{1}{s^A} \right) \left( \frac{1}{s_1^R(\epsilon, -V)} - \frac{1}{s_1^A(\epsilon, -V)} \right) \\ & \left. + f_3(\epsilon, -V) \left( \frac{1}{s^R} + \frac{1}{s^A} \right) \left( \frac{1}{s_3^R(\epsilon, -V)} - \frac{1}{s_3^A(\epsilon, -V)} \right) \right], \end{aligned} \quad (7.3.10)$$

$$\begin{aligned} I'_0(V) = & -\frac{\Delta_0^2 G_t}{8e} \int d\epsilon \left[ \tanh(\beta\epsilon/2) \left( \frac{1}{s^R} - \frac{1}{s^A} \right) \left( \frac{1}{s_3^R(\epsilon, -V)} - \frac{1}{s_3^A(\epsilon, -V)} \right) \right. \\ & - f_0(\epsilon, -V) \left( \frac{1}{s^R} - \frac{1}{s^A} \right) \left( \frac{1}{s_3^R(\epsilon, -V)} - \frac{1}{s_3^A(\epsilon, -V)} \right) \\ & \left. - f_3(\epsilon, -V) \left( \frac{1}{s^R} - \frac{1}{s^A} \right) \left( \frac{1}{s_1^R(\epsilon, -V)} - \frac{1}{s_1^A(\epsilon, -V)} \right) \right], \end{aligned} \quad (7.3.11)$$

Ce résultat a déjà été obtenu par Larkin et Ochinnikov [155]. L'amplitude du courant de Josephson  $I_0 = I_0(V)$  correspond à l'effet tunnel des paires de Cooper à travers la jonction, et devient identique à l'Éq. (7.3.6) à tension nulle ( $V = 0$ ) comme prévu. Le courant  $I_{dc}$  est indépendant de  $\chi$  et provient de l'effet tunnel des quasiparticules à travers la jonction, tandis que  $I'_0$  est la partie du courant des quasiparticules qui dépend de la phase [60, 156, 157]. Les termes proportionnels à  $I_0$  et  $I'_0$  contribuent tous deux à la composante alternative d'amplitude  $I_{ac}$ . Comme prévu, pour  $eV = 0$ , seul  $I_0$  est non nul. Nous ne pouvons pas évaluer ces intégrales analytiquement, sauf dans certains régimes (voir Annexe A.1). Le courant continu est presque nul tant que  $eV < 2\Delta_0$  (Fig. 7.3), car le potentiel n'est pas assez fort pour briser une paire de Cooper. Le courant alternatif présente un pic à  $eV = 2\Delta_0$ , connu sous le nom de pic de Riedel [157, 158], qui devient une singularité logarithmique à  $eV = 2\Delta_0$  dans la limite  $\gamma \rightarrow 0$ . Elle provient de la singularité de la densité d'état au niveau du gap supraconducteur.

## 7.4 Signature du mode de Higgs dans la jonction

Dans cette section, nous présentons nos résultats décrivant l'effet de l'irradiation sur la jonction dans les régimes où le mode de Higgs peut être excité.



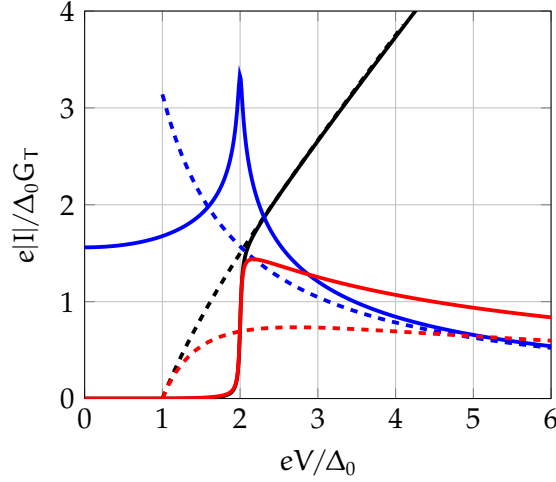


FIGURE 7.3 – Courants  $I_{dc}$  (courbe noire continue),  $I_0$  (courbe bleue continue) et  $I'_0$  (courbe rouge continue) en fonction de la tension  $V$ . Les courbes en pointillés correspondent aux limites asymptotiques valables pour  $V \gg 2\Delta_0$ . Paramètres :  $T = 0.05T_c$ ,  $\gamma = 0.01\Delta_{0,0}$ .

### 7.4.1 Effet de la radiation sur la fonction de Green BCS

Le couplage minimal dans l'Éq. (4.2.41) fait intervenir dans notre cas dans termes  $\propto \mathbf{A}(t)^2 \sim \mathbf{A}_0^2(2 + e^{2i\omega t} + e^{-2i\omega t})$ . La fonction de Green  $\hat{g}_0^R(\epsilon)$  va donc être renormalisée par l'irradiation THz. En effet, l'équation d'Usadel associée devient

$$[\epsilon\sigma_3 + \Delta_0 iM_{\pm\chi/2}, \hat{g}_0^R] + i\Delta_0\alpha [\bar{\hat{g}}_0^R(\epsilon_{-1}) + \bar{\hat{g}}_0^R(\epsilon_1), \hat{g}_0^R] = 0. \quad (7.4.1)$$

Cette équation ne peut être résolue analytiquement. Pour gagner en intuition, commençons par résoudre l'équation dans la limite  $\omega = 0$ , c-à-d. dans la limite d'un biais dc en courant. On obtient

$$[\epsilon\sigma_3 + \Delta_0 iM_{\pm\chi/2}, \hat{g}_0^R] + i\Delta_0\alpha [\bar{\hat{g}}_0^R, \hat{g}_0^R] = 0 \quad (7.4.2)$$

où l'on redéfinit  $2\alpha \rightarrow \alpha$ . Dans le cas  $\chi = 0$  on peut toujours écrire

$$\hat{g}_0^R(\epsilon) = G_0(\epsilon)\sigma_3 + F_0(\epsilon)i\sigma_2, \quad (7.4.3)$$

avec  $G_0$  et  $F_0$  des fonctions. La condition de normalisation peut s'écrire  $G_0^2 - F_0^2 = 1$ . On peut réécrire Éq. (7.4.2) sous la forme d'une équation algébrique pour, par exemple, la fonction  $F_0$

$$-4\Delta_0^2\alpha^2 F_0^4 + 4i\alpha\Delta_0^2(F_0^3 + F_0) + F_0^2(\Delta_0^2 - 4\Delta_0^2\alpha^2 - \epsilon^2) + \Delta_0^2 = 0. \quad (7.4.4)$$

On néglige les termes au second ordre en  $\alpha^2$  et on utilise l'approximation  $F_0^3 + F_0 \simeq F_0^3\epsilon^2/\Delta_0^2$  pour obtenir

$$4i\alpha\epsilon^2 F_0^3 - (\epsilon^2 - \Delta_0^2)F_0^2 + \Delta_0^2 = 0. \quad (7.4.5)$$

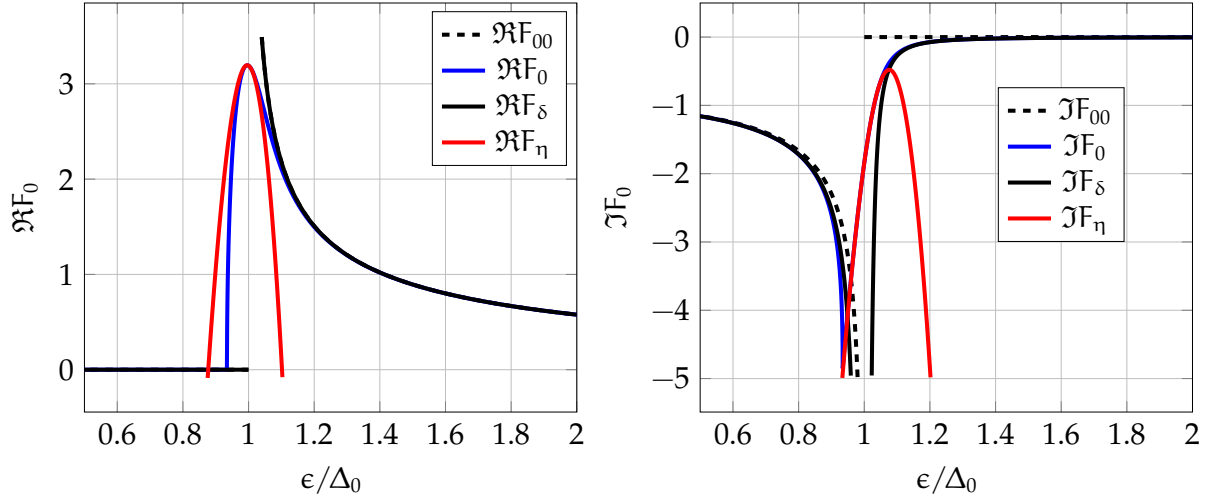


FIGURE 7.4 – Partie réelle/imaginaire de la fonction de Green  $F_0(\epsilon)$  pour  $2\alpha = 0.01$ ,  $\omega = 0$ . La fonction  $F_{00}$  est définie comme  $F_0(\alpha = 0)$ . La courbe bleue correspond au calcul numérique exact. Les courbes rouges (noires) sont des approximations correctes à faible  $\eta(\alpha)$ .

Quand  $|\epsilon/\Delta_0| \ll 1$  on peut utiliser une approximation perturbative en  $\alpha$  pour trouver les racines de l'équation ci-dessus. En définissant  $F_\alpha(\epsilon) = F_{0,\alpha} + \alpha F_{1,\alpha}$ , on trouve

$$F_{0,\alpha} = \frac{\Delta_0}{s^R(\epsilon)} \quad (7.4.6)$$

$$F_{1,\alpha} = -2i \frac{\epsilon^2 \Delta_0^2}{s^R(\epsilon)^4}. \quad (7.4.7)$$

Autour de  $|\epsilon/\Delta_0| \approx 1$ , on doit utiliser la nouvelle variable  $\eta = (\epsilon^2 - \Delta_0^2)/\Delta_0^2$  comme paramètre perturbatif. En effet, dans ce régime, les fonctions  $F_\alpha$  se mettent à diverger et le calcul perturbatif s'écroule. En écrivant  $F_\eta(\epsilon) = F_{0,\eta} + \eta F_{1,\eta} + \eta^2 F_{2,\eta}$ , on obtient

$$F_{0,\eta} = e^{-i\pi/6} \left( \frac{1}{4\alpha} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (7.4.8)$$

$$F_{1,\eta} = \frac{i}{12\alpha} - e^{-i\pi/6} \frac{1}{3} \left( \frac{1}{4\alpha} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (7.4.9)$$

$$F_{2,\eta} = \frac{-1}{36} \left[ \frac{e^{i\pi/6}}{4^{2/3} \alpha^{5/3}} + 3i \frac{1}{\alpha} - 2 \left[ \frac{e^{-i\pi/6}}{\alpha^{1/3}} \right] 4^{2/3} \right]. \quad (7.4.10)$$

On voit immédiatement que ces solutions sont *non-perturbatives* en  $\alpha$ , comme prévu. On a tracé ces résultats pour la fonction  $F_0$  et ses approximations (Fig. 7.4). Quand le paramètre

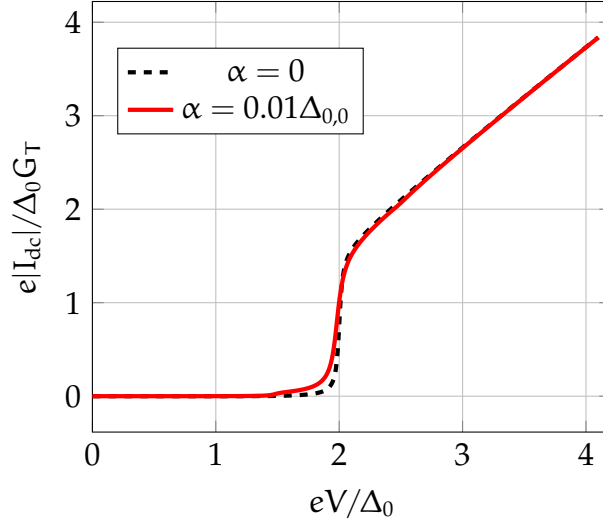


FIGURE 7.5 – Courant  $I_{dc}$  avec et sans irradiation. La correction est relativement faible pour  $\alpha = 0.01$ . Ici  $\gamma = 0.01\Delta_{0,0}$  and  $\omega = \Delta_0$

de Dynes  $\gamma \gg \alpha\Delta_0$  l'approximation au premier ordre en  $\alpha$  devient bonne, même pour  $\epsilon \sim \Delta_0$ . Des résultats analytiques ont été obtenus pour  $\omega > 0$  dans le régime  $\gamma \gg \alpha\Delta_0$  [159]. On trouve dans ce cas

$$iF_{1,\alpha} = \frac{\Delta_0^2 \epsilon}{s^R(\epsilon_1)s^R(\epsilon)^3}(\epsilon_1 + \epsilon) + \frac{\Delta_0^2 \epsilon}{s^R(\epsilon_{-1})s^R(\epsilon)^3}(\epsilon_{-1} + \epsilon). \quad (7.4.11)$$

Dans le cas  $\gamma \sim \alpha\Delta_0$  on doit résoudre numérique Éq. (7.4.1). On a utilisé l'algorithme donné par [154]. La correction dans le courant dc  $I_{dc}(\alpha)$  est donnée Fig. 7.5. On obtient en remplaçant  $\epsilon/s^R(\epsilon) - \epsilon/s^A(\epsilon)$  dans Éq. (7.3.9) par  $2\Re\epsilon(G_0^R(\epsilon))$ . En sachant que la densité d'état (DE)  $N(\epsilon) = N_0\Re\epsilon(G_0^R(\epsilon))$  [89,154], avec  $N_0$  la DE normale, on voit que la correction en  $\alpha$  provient d'une modulation de la DE. On retrouve, au moins qualitativement, les résultats de [138] dans la limite à transmission faible. Les corrections restent faibles et dans la suite nous les négligerons, c-à-d. que la fonction  $\hat{g}_0^R(\epsilon)$  sera celle BCS.

## 7.4.2 Fonction de Green aux deuxième ordre

Nous venons de voir que la renormalisation du courant dc par l'irradiation était négligeable dans notre modèle. De plus, dans l'expression perturbative des secondes harmoniques  $\check{g}_{\pm 2}$ , seule la FGQ  $\check{g}_0$  à  $\alpha = 0$  doit être prise pour rester au premier ordre en  $\alpha$ . La correction en  $\alpha$  est donc de toute façon automatiquement négligée dans les calculs qui suivent. En reprenant les notations de la Sec. 5, on obtient l'équation d'Usadel pour  $\hat{g}_2^R$

$$\xi_2 \hat{g}_2^R - \hat{g}_2^R \xi = iA_D [\hat{g}_0^R(\epsilon_2) \bar{\hat{g}}_0^R(\epsilon_1) - \bar{\hat{g}}_0^R(\epsilon_1) \hat{g}_0^R(\epsilon)] + \Delta_2 [\hat{g}_2^R(\epsilon_2) iM_{-\chi/2} - iM_{-\chi/2} \hat{g}_2^R(\epsilon)]. \quad (7.4.12)$$

L'équation pour  $\hat{g}_{-2}^R$  est obtenue en remplaçant dans la dernière expression  $\omega \rightarrow -\omega$  et  $\Delta_2 \rightarrow \Delta_2^*$ . Afin de séparer la physique directement liée à l'irradiation des effets du mode

de Higgs, nous décomposons les deuxièmes harmoniques de la FGQ retardée comme suit

$$\hat{g}_2^R(\epsilon) = \hat{g}_{2,A}^R(\epsilon) + \hat{g}_{2,\Delta}^R(\epsilon), \quad (7.4.13)$$

où  $\hat{g}_{2,A}^R(\epsilon)$  est directement proportionnelle à l'amplitude du champ et indépendant du mode de Higgs  $\Delta_2$ , et  $\hat{g}_{2,\Delta}^R(\epsilon)$  est la contribution due exclusivement au mode de Higgs. On trouve

$$\hat{g}_{2,A}^R(\epsilon) = \frac{i\Delta_0\alpha}{s^R(\epsilon_2) + s^R(\epsilon)} [\bar{g}_0^R(\epsilon_1) - \hat{g}_0^R(\epsilon_2)\bar{g}_0^R(\epsilon_1)\hat{g}_0^R(\epsilon)], \quad (7.4.14)$$

$$\hat{g}_{2,\Delta}^R(\epsilon) = \frac{\Delta_2}{s^R(\epsilon_2) + s^R(\epsilon)} [iM_{-\chi/2} - \hat{g}_0^R(\epsilon_2)iM_{-\chi/2}\hat{g}_0^R(\epsilon)]. \quad (7.4.15)$$

Pour trouver la fonction de Keldysh nous décomposons à nouveau cette dernière en deux termes, régulier et anormal,

$$\hat{g}_i^K(\epsilon) = \hat{g}_i^{\text{reg}}(\epsilon) + \hat{g}_i^{\text{an}}(\epsilon) \quad (7.4.16)$$

avec  $\hat{g}_i^{\text{reg}}(\epsilon) = \hat{g}_i^R(\epsilon)h_0(\epsilon) - h_0(\epsilon_i)\hat{g}_i^A(\epsilon)$  où la fonction de distribution  $h_0(\epsilon) = \tanh(\beta\epsilon/2)$ . En résolvant l'équation d'Usadel pour  $\hat{g}_2^{\text{an}}$  on trouve

$$\begin{aligned} \hat{g}_{2,A}^{\text{an}}(\epsilon) &= \frac{i\Delta_0\alpha [\bar{g}_0^R(\epsilon_1) - \hat{g}_0^R(\epsilon_2)\bar{g}_0^A(\epsilon_1)\hat{g}_0^A(\epsilon)]}{s^R(\epsilon_2) + s^A(\epsilon)} [\tanh \beta\epsilon_2/2 - \tanh \beta\epsilon_1/2] \\ &+ \frac{i\Delta_0\alpha [\bar{g}_0^R(\epsilon_1) - \hat{g}_0^R(\epsilon_2)\bar{g}_0^R(\epsilon_1)\hat{g}_0^A(\epsilon)]}{s^R(\epsilon_2) + s^A(\epsilon)} [\tanh \beta\epsilon_1/2 - \tanh \beta\epsilon/2], \end{aligned} \quad (7.4.17)$$

$$\hat{g}_{2,\Delta}^R(\epsilon) = \frac{\Delta_2}{s^R(\epsilon_2) + s^A(\epsilon)} [iM_{-\chi/2} - \hat{g}_0^R(\epsilon_2)iM_{-\chi/2}\hat{g}_0^A(\epsilon)] [\tanh \beta\epsilon_2/2 - \tanh \beta\epsilon/2]. \quad (7.4.18)$$

Finalemnt, ces matrices  $2 \times 2$  sont écrites dans la base de Nambu à partir des matrices de Pauli

$$\hat{g}_{2,i}(\epsilon) = \sigma_3 g_{23,i}(\epsilon) + i\sigma_2 g_{22,i}(\epsilon). \quad (7.4.19)$$

De plus, après le changement de variable  $\epsilon \rightarrow \epsilon - V\sigma_3$ , la fonction  $g_{22,i}(\epsilon)$  devient une matrice  $2 \times 2$  :

$$g_{22,i}(\epsilon - V\sigma_3) = g_{22,1,i}(\epsilon, V)\mathbb{1} + g_{22,3,i}(\epsilon, V)\sigma_3 \quad (7.4.20)$$

avec  $i = A, \Delta$ . Ces fonctions  $g_{22,1,i}(\epsilon, V)$  et  $g_{22,3,i}(\epsilon, V)$  apparaîtront dans les formules des courants de la section suivante.

### 7.4.3 Courant et signatures du Higgs

En présence d'une impulsion électromagnétique  $\omega$  et d'une tension  $V$ , le courant tunnel total a plusieurs harmoniques résultantes de l'interaction de la pulsation Josephson  $\omega_J$  et de la pulsation THz  $\omega$  :

$$\begin{aligned} I(t) &= I_{\text{dc}} + I_{\text{ac}} \sin(\omega_J t + \chi + \phi) + 2 \sum_{i=A,\Delta} |I'_{2,i}| \cos(2\omega t - \theta'_i) \cos(\omega_J t + \chi) \\ &+ 2 \sum_{i=A,\Delta} |I_{2,i}| \cos(2\omega t - \theta_i) \sin(\omega_J t + \chi) + 2 \sum_{i=A,\Delta} |I_{3,i}| \cos(2\omega t - \theta_{3,i}). \end{aligned} \quad (7.4.21)$$

où nous avons introduit l'indice  $i = A, \Delta$  pour distinguer les contributions proportionnelles à  $\alpha$  ou  $\Delta_2$ . Pour mieux caractériser le contenu spectral du courant dépendant du temps, Éq. (7.4.21), il est utile de linéariser les produits cosinus/sinus. Le terme proportionnel à  $\cos(2\omega t - \theta'_i) \cos(\omega_J t + \chi)$  et celui proportionnel à  $\cos(2\omega t - \theta'_i) \sin(\omega_J t + \chi)$  contribuent aux pulsations  $\omega_I = \pm(2\omega \pm \omega_J)$ . La phase  $\theta_i^{(')}$  est définie par la relation  $\cos \theta_i^{(')} = \Re(I_{2,i}^{(')})/|I_{2,i}^{(')}|$ .

Par conséquent, le spectre du courant alternatif présente les pulsations suivantes :  $\omega_I = \pm(2\omega \pm \omega_J), \pm 2\omega$ . En particulier, cela conduit à une contribution de la composante continue lorsque  $2\omega = \pm\omega_J$  ou  $eV = \pm\omega$  provenant du courant du second ordre dans  $|A_0|$ , dont l'amplitude est notée  $I_2$ . Il en résulte des pics de Shapiro [139] dans le courant  $I_{dc}(V)$ . Les différentes amplitudes du courant dépendent à la fois de la tension  $V$  et de la pulsation  $\omega$  (Fig. 7.6). Les expressions étant assez lourdes, nous les écrivons explicitement dans l'Annexe A.2.

Dans ce système, le courant alternatif provoqué par l'irradiation consiste en deux contributions : l'une explicitement proportionnelle à  $\alpha$  et directement provoquée par l'irradiation ( $I_A$ ) et l'autre induite par le mode de Higgs et proportionnelle à  $|\Delta_2|$  ( $I_\Delta$ ).

### Résonance et spectroscopie

Les amplitudes des différentes contributions au courant sont représentées sur la Fig. 7.6 en fonction de la tension  $V$  pour différentes pulsations  $\omega$ . Comme résultat principal, on voit qu'à la condition de résonance  $\omega = \Delta_0$ , le courant généré par le mode de Higgs domine toujours les autres contributions. Ceci est dû au fait que  $\Delta_2$  est résonant à cette fréquence [31].

De plus, nous avons obtenu la "structure fine" de ce courant résonant en fonction de la tension de biais. Pour les courants  $I_{2,A}$  et  $I'_{2,A}$ , nous nous attendons à obtenir des pics à la tension de polarisation  $eV = 2\Delta_0 + m\omega$  en raison de TAP [138,153], avec  $m \in \mathbb{Z}$ . Sur la Fig. 7.6, nous observons en effet des pics aux biais  $eV = 2\Delta_0 - 2\omega, 2\Delta_0 - \omega, 2\Delta_0, 2\Delta_0 + \omega, 2\Delta_0 + 2\omega$  pour  $\omega \leq \Delta_0$ . Dans le cas de  $I_{2,A}$ , nous avons des pics supplémentaires à  $eV = \omega, 2\omega$ . Cela peut être compris comme une TAP tunnel de paires de Cooper. Lorsque  $\omega > \Delta_0$ , nous avons un pic supplémentaire à  $eV = \Delta_0 + \omega$  (et aussi  $eV = \omega - \Delta_0$  pour  $I_{2,A}$ ). Ces pics importants signalent des résonances dans les courants tunnel des QPs, dues à la singularité de la DE BCS déplacée par la TAP.

Le courant  $I_{3,\Delta}$  peut être comparé au courant de Higgs calculé dans le système NIS dans [31]. Si nous fixons  $\Delta_0 = 0$  dans le SC de droite, le courant  $I_{3,\Delta}$  se réduit au courant de Higgs obtenu dans [31]. Dans notre cas, un pic apparaît à  $eV = 2\Delta_0$ , ce qui correspond à la masse du mode d'amplitude (Fig. 7.6). Puisque le mode de Higgs peut être interprété comme l'appariement et le désappariement des électrons et des trous autour du gap à la fréquence  $2\Delta_0$ , le courant sera maximal si les bandes des 2 supraconducteurs sont polarisées par un potentiel continu  $eV = 2\Delta_0$ , expliquant ainsi ce pic fixe à toutes les fréquences. À  $eV = 4\omega$  un coude apparaît dû à l'effet de bandes latérales. Contrairement aux autres contributions des courants, le pic à  $eV = 2\Delta_0$  est toujours le courant maximum pour tout  $\omega$ , signe que ce courant provient uniquement du mode de Higgs.

Il est intéressant de comparer cette structure de pics  $I(V)$  des amplitudes de courant

dues au Higgs (Fig. 7.6 Panneau du bas) avec les pics apparaissant dans le courant dû à A (Fig. 7.6 Panneau du haut). En regardant les courants Josephson  $I_{2,\Delta}^{(i)}$  dans la Fig. 7.6, on remarque que la moitié des pics sont absents par rapport aux courants A. Les biais de résonance sont maintenant à  $eV = 2\Delta_0 \pm 2\omega$  pour  $\omega \leq \Delta_0$  plus  $eV = 2\omega$  dans le cas de  $I_{2,\Delta}$ . Ceci est cohérent avec le fait que le mode de Higgs ne peut interagir avec la lumière qu'au second ordre, de sorte qu'il ne peut participer qu'à la moitié du transport assisté par les photons par rapport au courant A. Cela permet de séparer la contribution due à la simple irradiation du SC et la contribution spécifiquement due à la génération du mode de Higgs. À partir de l'équation (7.4.21), nous pouvons extraire les composantes de Fourier du courant. Par exemple, le courant alternatif total de fréquence  $2\omega \pm \omega_J$  sera donné par

$$\sum_{i=A,\Delta} |I'_{2,i}| e^{-i\theta'_i} \pm |I_{2,i}| e^{-i\theta_i}. \quad (7.4.22)$$

Sur la figure 7.7, les composantes de Fourier sont représentées pour les fréquences  $2\omega \pm \omega_J$  et  $2\omega$ . Dans le cas résonnant  $\omega = \Delta_0$ , les courbes  $I(V)$  sont caractérisées par la dominance des deux pics pairs  $\Delta_0$  et  $2\Delta_0$ . Cette dominance indique qu'à cette fréquence, les courants dus au mode de Higgs obéissent à  $I_\Delta \gg I_A$ . En dehors de la résonance, les pics  $2\Delta_0$  et  $2\Delta_0 + 2\omega$  sont réduits et deviennent du même ordre de grandeur que tous les pics du courant d'irradiation (Fig. 7.6 Panneau supérieur, courbes bleues et vertes).

Il convient de noter que les effets représentés sur la figure 7.6 sont obtenus pour la valeur particulière de l'intensité d'irradiation sans dimension  $\alpha = 0.01$ , et sont proportionnels à l'intensité lumineuse  $I$ . Pour  $\alpha = 0.01$ ,  $\Delta_0 = 1$  meV,  $D = 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\omega = 1.5$  THz (qui correspond à 1 meV), on obtient une intensité  $I \sim 1 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ . Cela correspond à un champ électrique compris entre 1 et 10  $\text{kV} \cdot \text{m}^{-1}$  alors que les champs typiques sont de l'ordre de 300  $\text{kV} \cdot \text{m}^{-1}$  dans [27]. Notons que l'observation de ces effets ne devrait pas être affectée par la présence de la résonance du plasma Josephson qui dépend de la capacité de la jonction et apparaît à des fréquences de l'ordre du GHz [161, 162].

### Limite à tension nulle

Examinons le cas particulier du JJ irradié sans biais. Même pour  $V = 0$ , une amplitude finie de  $I_{2,\Delta}$  est prédite (Fig. 7.6). Cela contraste avec les résultats précédents obtenus dans le système NIS [31] où une tension était nécessaire pour produire le courant du mode de Higgs. Ce nouveau courant peut être compris comme une correction ac du courant Josephson due à la modulation du module du gap. En fait, le courant dans un JJ de 2 SCs avec deux gaps constants différents mais proches est donné par  $I_0 \propto \pi\Delta_0\Delta'_0/2(\Delta_0 + \Delta'_0)$ . Si l'on considère que l'un des gaps dépend du temps, comme  $\Delta'_0 = \Delta_0 + 2\Delta_2 \cos 2\omega t$ , on obtient un courant  $\propto \pi\Delta_0/2 + \pi\Delta_2 \cos(2\omega t)$ , ce qui correspond à ce que l'on observe. En effet à  $V = 0$  le courant (7.4.21) se réduit à

$$I(t) = \left[ I_0 + \sum_{i=A,\Delta} |I_{2,i}| \cos(2\omega t - \theta_i) \right] \sin \chi. \quad (7.4.23)$$

1. Une constante de diffusion  $D \sim 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  est obtenue pour un libre parcours moyen  $l \sim 1 \text{ nm}$  et une vitesse de Fermi  $v_F = 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Ces ordres de grandeur sont attendus pour des SCs très sales [160].

## 7.4. Signature du mode de Higgs dans la jonction

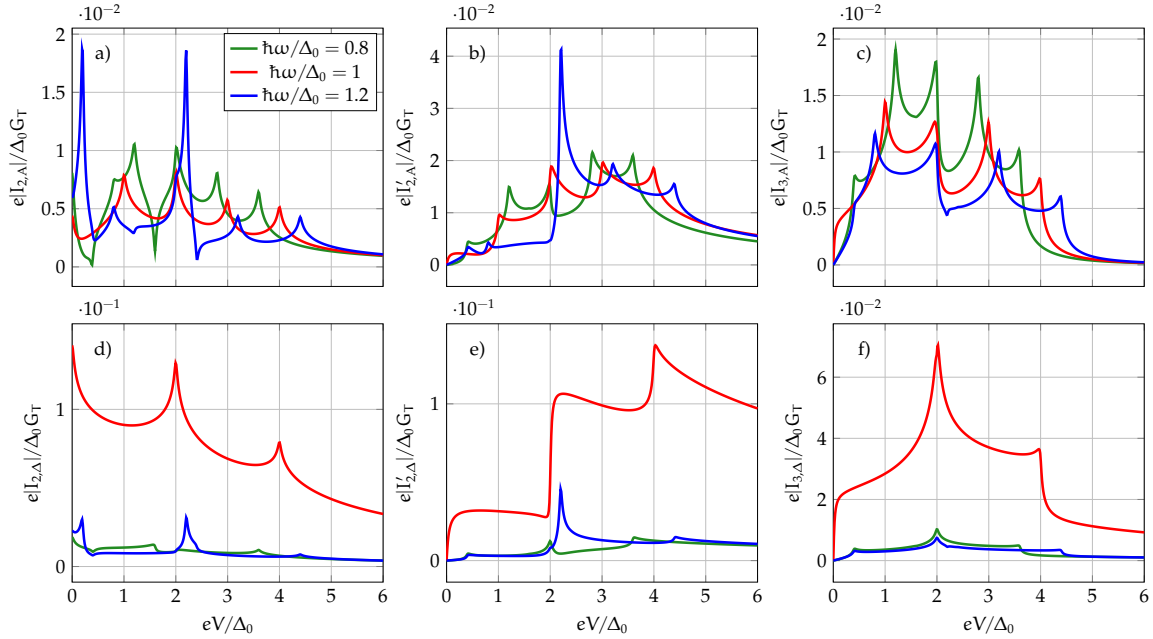


FIGURE 7.6 – Amplitudes du courant données par l'équation (A.2.1) en fonction de la tension  $V$  pour différentes fréquences d'irradiation  $\omega$ . *Panneau supérieur* : Courants directement proportionnels à l'irradiation  $I_{2,A}$  (a),  $I'_{2,A}$  (b),  $I_{3,A}$  (c). *Panneau inférieur* Courants dus au mode de Higgs  $I_{2,\Delta}$  (d),  $I'_{2,\Delta}$  (e),  $I_{3,\Delta}$  (f), qui sont clairement résonnants à  $\omega = \Delta_0$ . Différents pics de résonance apparaissent à des tensions spécifiques  $V$  en raison du PAT. Notez les différentes échelles sur les axes verticaux du courant. Les paramètres sont les suivants :  $T = 0.05T_c$ ,  $\gamma = 0.01\Delta_{0,0}$ ,  $\alpha = 0.01$ .

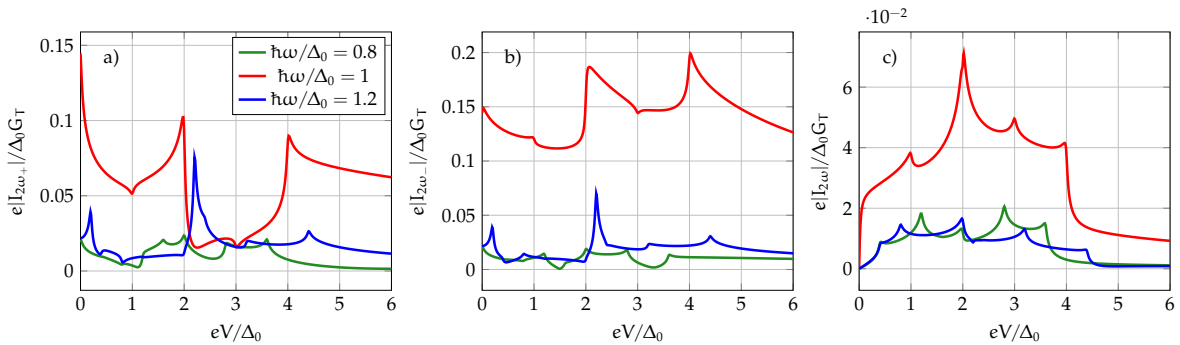


FIGURE 7.7 – Composantes de Fourier du courant total Éq. (7.4.21) à la fréquence  $2\omega + \omega_J$  (gauche),  $2\omega - \omega_J$  (milieu), et  $2\omega$  (droite). On voit clairement, à la fréquence de résonance, la dominance des pics  $eV = 2\Delta_0$  et  $eV = 4\Delta_0$  due au fait que les courants de Higgs écrasent les autres contributions :  $I_\Delta \gg I_A$ . Les paramètres sont les suivants :  $T = 0.05T_c$ ,  $\gamma = 0.01\Delta_{0,0}$ ,  $\alpha = 0.01$ .

Près de la résonance,  $|I_{2,\Delta}| \gg |I_{2,\Lambda}|$  et numériquement nous trouvons  $e|I_{2,\Delta}|/G_t\Delta_0 \sim \pi \times |\Delta_2|/\Delta_0$ , comme prévu.

Afin de tester expérimentalement la résonance d'Anderson-Higgs à biais nul, il serait pratique de balayer la température autour de la température  $T_\omega$  définie par  $\Delta(T_\omega) = \omega$ . La fréquence du mode de Higgs étant  $2\Delta(T)$ , le courant présentera un comportement résonant autour de  $T_\omega$ . Cette méthode serait plus simple que de faire varier la fréquence du laser.

## 7.5 Conclusion

Nous avons étudié l'interaction entre la physique du mode de Higgs et l'effet Josephson dans les jonctions SIS à effet tunnel entre des supraconducteurs conventionnels soumis à une irradiation électromagnétique. En utilisant le formalisme de Keldysh-Usadel, nous avons évalué la contribution au courant qui est directement généré par le mode de Higgs. Diverses signatures de l'excitation du mode de Higgs sont trouvées dans les caractéristiques  $I(V)$ . Ces courants sont très sensibles à la fréquence d'irradiation et atteignent un maximum à la condition de résonance  $\omega = \Delta_0(T)$ , correspondant à l'excitation du mode de Higgs. Cette résonance peut être obtenue en accordant la fréquence ou la température. Même à tension nulle, nous prévoyons un courant alternatif non nul dû à l'irradiation et dont l'amplitude est principalement due à l'excitation du mode de Higgs à la résonance  $\omega = \Delta_0(T)$ . En outre, un pic de Shapiro proportionnel au mode de Higgs se développe à la polarisation  $eV = \omega$  et devrait être directement mesurable dans le courant continu. D'autres pics de courant résonant, provenant du transport assisté de photons, apparaissent à des biais  $eV = 2\Delta_0(T) + m\omega$  dans les courbes  $I(V)$ , avec  $m$  entier. Étant sélectivement renforcés par la résonance du mode de Higgs, les pics  $m$  pairs devraient être beaucoup plus forts que les pics  $m$  impairs. Une perspective intéressante serait de généraliser ce travail aux supraconducteurs non conventionnels, comme étudié dans [144].







# Conclusion

Durant cette thèse, nous avons exploré la possibilité d'exciter le mode d'Anderson-Higgs supraconducteur dans des diverses géométries de jonctions entre un métal normal (N) et un ou plusieurs supraconducteurs (S). Pour chaque type d'hétérojonction, nous avons cherché les signatures expérimentales de la présence du mode de Higgs dans le courant de quasiparticules (géométries NIS et NSN) et dans le courant Josephson (géométrie SIS).

Les quatre premiers chapitres nous ont permis d'introduire les différentes notions essentielles à la compréhension des résultats obtenus. Dans le chapitre 1, les concepts de symétrie et brisure de symétrie ont été présentés. Dans les chapitres 2 & 3, nous avons abordé la théorie des supraconducteurs, d'abord d'un point de vue phénoménologique (théories de London et de Ginzburg-Landau) puis microscopique (théorie BCS et ses reformulations dues à Gor'kov et Bogoliubov-de Gennes). Enfin dans le chapitre 4, nous avons introduit la théorie de Keldysh, essentielle au traitement de la physique hors-équilibre, ainsi que l'approximation quasiclassique nécessaire pour nos calculs.

Nos résultats originaux ont été discutés dans les trois derniers chapitres. Dans le chapitre 5, nous avons montré que le mode de Higgs pouvait être excité dans un supraconducteur propre. Dans ce même chapitre, nous avons calculé le courant ac engendré par le mode de Higgs et avons montré qu'il pouvait être une signature expérimentale de ce mode. Ensuite, chapitre 6, une jonction balistique NSN a été présentée. Nous avons trouvé que le mode de Higgs était observable dans la conductance différentielle, du fait qu'il ouvrait un gap dans le spectre de Floquet. Enfin, au chapitre 7, nous avons étudié l'effet du mode de Higgs dans une jonction Josephson soumise à une excitation THz. Dans ce système, le mode de Higgs crée des pics de courant à des tensions de biais spécifiques, signatures de ce mode collectif. De plus, un courant de Higgs est présent dans la jonction même à biais nul, ce qui diffère du cas NIS. Enfin, un pic de Shapiro dû au Higgs est visible dans le courant dc au potentiel égal au gap supraconducteur.

Dans le futur, il serait intéressant d'étudier l'effet de la transparence dans les jonctions NIS et SIS. Dans la jonction Josephson, une plus haute transparence permettrait par exemple d'observer des signaux TAP d'ordres supérieurs. L'influence des symétries du gap (d-wave, p-wave, ...) n'a pas encore été étudiée dans ces systèmes et serait une généralisation naturelle du travail présenté ici.



# Bibliographie

- [1] P. Curie, "Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique," *J. Phys. Théor. Appl.*, vol. 3, no. 1, pp. 393–415, 1894.
- [2] S. Katzir, "The emergence of the principle of symmetry in physics," *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences*, vol. 35, pp. 35–65, Jan. 2004.
- [3] E. Noether, "Invariante Variationsprobleme," *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, vol. 1918, pp. 235–257, 1918.
- [4] L. D. Landau, "On the theory of phase transitions," *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, vol. 7, pp. 19–32, 1937.
- [5] P. W. Anderson, "Plasmons, Gauge Invariance, and Mass," *Phys. Rev.*, vol. 130, pp. 439–442, Apr. 1963.
- [6] P. W. Higgs, "Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 13, pp. 508–509, Oct. 1964.
- [7] G. Aad *et al.*, "Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC," *Phys. Lett. B*, vol. 716, pp. 1–29, Sept. 2012.
- [8] F. London and H. London, "The electromagnetic equations of the supraconductor," *Proc. R. Soc. London A - Math. Phys. Sci.*, vol. 149, pp. 71–88, Mar. 1935.
- [9] V. L. Ginzburg and L. D. Landau, "On the Theory of superconductivity," *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, vol. 20, pp. 1064–1082, 1950.
- [10] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, "Theory of Superconductivity," *Phys. Rev.*, vol. 108, pp. 1175–1204, Dec. 1957.
- [11] P. W. Anderson, "Coherent Excited States in the Theory of Superconductivity : Gauge Invariance and the Meissner Effect," *Phys. Rev.*, vol. 110, pp. 827–835, May 1958.
- [12] P. W. Anderson, "Random-Phase Approximation in the Theory of Superconductivity," *Phys. Rev.*, vol. 112, pp. 1900–1916, Dec. 1958.

- [13] Y. Nambu, "Quasi-Particles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity," *Phys. Rev.*, vol. 117, pp. 648–663, Feb. 1960.
- [14] S. Weinberg, "Superconductivity for Particular Theorists," *Prog. Theor. Phys.*, vol. 86, pp. 43–53, Jan. 1986.
- [15] M. Hangyo, "Development and future prospects of terahertz technology\*," *Jpn. J. Appl. Phys.*, vol. 54, p. 120101, Nov. 2015.
- [16] J. Hebling, G. Almási, I. Z. Kozma, and J. Kuhl, "Velocity matching by pulse front tilting for large-area THz-pulse generation," *Opt. Express*, vol. 10, pp. 1161–1166, Oct. 2002.
- [17] H.-W. Hübers, S. G. Pavlov, and V. N. Shastin, "Terahertz lasers based on germanium and silicon," *Semicond. Sci. Technol.*, vol. 20, p. S211, June 2005.
- [18] B. S. Williams, "Terahertz quantum-cascade lasers," *Nat. Photonics*, vol. 1, pp. 517–525, Sept. 2007.
- [19] L. Ozyuzer, A. E. Koshelev, C. Kurter, N. Gopalsami, Q. Li, M. Tachiki, K. Kadowaki, T. Yamamoto, H. Minami, H. Yamaguchi, T. Tachiki, K. E. Gray, W.-K. Kwok, and U. Welp, "Emission of Coherent THz Radiation from Superconductors," *Science*, vol. 318, pp. 1291–1293, Nov. 2007.
- [20] Y. Chen, M. Yamaguchi, M. Wang, and X.-C. Zhang, "Terahertz pulse generation from noble gases," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 91, Dec. 2007.
- [21] J. Hebling, K.-L. Yeh, M. C. Hoffmann, B. Bartal, and K. A. Nelson, "Generation of high-power terahertz pulses by tilted-pulse-front excitation and their application possibilities," *J. Opt. Soc. Am. B, JOSAB*, vol. 25, pp. B6–B19, July 2008.
- [22] Y. Chassagneux, R. Colombelli, W. Maineult, S. Barbieri, H. E. Beere, D. A. Ritchie, S. P. Khanna, E. H. Linfield, and A. G. Davies, "Electrically pumped photonic-crystal terahertz lasers controlled by boundary conditions," *Nature*, vol. 457, pp. 174–178, Jan. 2009.
- [23] A. El Fatimy, N. Dyakonova, Y. Meziani, T. Otsuji, W. Knap, S. Vandenbrouk, K. Madjour, D. Théron, C. Gaquiere, M. A. Poisson, S. Delage, P. Prystawko, and C. Skierbiszewski, "AlGa<sub>N</sub>/Ga<sub>N</sub> high electron mobility transistors as a voltage-tunable room temperature terahertz sources," *J. Appl. Phys.*, vol. 107, Jan. 2010.
- [24] H. Hirori, A. Doi, F. Blanchard, and K. Tanaka, "Single-cycle terahertz pulses with amplitudes exceeding 1 MV/cm generated by optical rectification in LiNbO<sub>3</sub>," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 98, Feb. 2011.
- [25] J. A. Fülöp, L. Pálfalvi, S. Klingebiel, G. Almási, F. Krausz, S. Karsch, and J. Hebling, "Generation of sub-mJ terahertz pulses by optical rectification," *Opt. Lett.*, vol. 37, pp. 557–559, Feb. 2012.
- [26] R. Matsunaga, Y. I. Hamada, K. Makise, Y. Uzawa, H. Terai, Z. Wang, and R. Shimano, "Higgs Amplitude Mode in the BCS Superconductors Nb<sub>1-x</sub>Ti<sub>x</sub>N Induced by Terahertz Pulse Excitation," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 111, p. 057002, July 2013.

- [27] R. Matsunaga, N. Tsuji, H. Fujita, A. Sugioka, K. Makise, Y. Uzawa, H. Terai, Z. Wang, H. Aoki, and R. Shimano, "Light-induced collective pseudospin precession resonating with Higgs mode in a superconductor," *Science*, vol. 345, pp. 1145–1149, Sept. 2014.
- [28] K. Katsumi, N. Tsuji, Y. I. Hamada, R. Matsunaga, J. Schneeloch, R. D. Zhong, G. D. Gu, H. Aoki, Y. Gallais, and R. Shimano, "Higgs Mode in the d-Wave Superconductor  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$  Driven by an Intense Terahertz Pulse," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 120, p. 117001, Mar. 2018.
- [29] H. Chu, M.-J. Kim, K. Katsumi, S. Kovalev, R. D. Dawson, L. Schwarz, N. Yoshikawa, G. Kim, D. Putzky, Z. Z. Li, H. Raffy, S. Germanskiy, J.-C. Deinert, N. Awari, I. Ilyakov, B. Green, M. Chen, M. Bawatna, G. Cristiani, G. Logvenov, Y. Gallais, A. V. Boris, B. Keimer, A. P. Schnyder, D. Manske, M. Gensch, Z. Wang, R. Shimano, and S. Kaiser, "Phase-resolved Higgs response in superconducting cuprates," *Nat. Commun.*, vol. 11, pp. 1–6, Apr. 2020.
- [30] N. Tsuji and H. Aoki, "Theory of Anderson pseudospin resonance with Higgs mode in superconductors," *Phys. Rev. B*, vol. 92, p. 064508, Aug. 2015.
- [31] G. Tang, W. Belzig, U. Zülicke, and C. Bruder, "Signatures of the Higgs mode in transport through a normal-metal–superconductor junction," *Phys. Rev. Res.*, vol. 2, p. 022068, June 2020.
- [32] T. Cea, C. Castellani, and L. Benfatto, "Nonlinear optical effects and third-harmonic generation in superconductors : Cooper pairs versus Higgs mode contribution," *Phys. Rev. B*, vol. 93, p. 180507, May 2016.
- [33] T. Cea, P. Barone, C. Castellani, and L. Benfatto, "Polarization dependence of the third-harmonic generation in multiband superconductors," *Phys. Rev. B*, vol. 97, p. 094516, Mar. 2018.
- [34] F. Yang and M. W. Wu, "Gauge-invariant microscopic kinetic theory of superconductivity in response to electromagnetic fields," *Phys. Rev. B*, vol. 98, p. 094507, Sept. 2018.
- [35] F. Yang and M. W. Wu, "Gauge-invariant microscopic kinetic theory of superconductivity : Application to the optical response of Nambu-Goldstone and Higgs modes," *Phys. Rev. B*, vol. 100, p. 104513, Sept. 2019.
- [36] F. Yang and M. W. Wu, "Optical response of Higgs mode in superconductors at clean limit : formulation through Eilenberger equation and Ginzburg-Landau Lagrangian," *arXiv*, Jan. 2023.
- [37] A. Beekman, L. Rademaker, and J. van Wezel, "An introduction to spontaneous symmetry breaking," *SciPost Phys. Lect. Notes*, p. 011, Dec. 2019.
- [38] I. Low and A. V. Manohar, "Spontaneously Broken Spacetime Symmetries and Goldstone's Theorem," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, p. 101602, Feb. 2002.
- [39] E. Fabri and L. E. Picasso, "Quantum Field Theory and Approximate Symmetries," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 16, pp. 408–410, Mar. 1966.

- [40] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge, England, UK : Cambridge University Press, Aug. 1996.
- [41] T. Brauner, "Spontaneous Symmetry Breaking and Nambu–Goldstone Bosons in Quantum Many-Body Systems," *Symmetry*, vol. 2, pp. 609–657, Apr. 2010.
- [42] D. L. Karatas and K. L. Kowalski, "Noether's theorem for local gauge transformations," *Am. J. Phys.*, vol. 58, pp. 123–131, Feb. 1990.
- [43] K. Brading and H. R. Brown, "Noether's Theorems and Gauge Symmetries," *arXiv*, Sept. 2000.
- [44] S. Elitzur, "Impossibility of spontaneously breaking local symmetries," *Phys. Rev. D*, vol. 12, pp. 3978–3982, Dec. 1975.
- [45] F. Englert and R. Brout, "Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 13, pp. 321–323, Aug. 1964.
- [46] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble, "Global Conservation Laws and Massless Particles," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 13, pp. 585–587, Nov. 1964.
- [47] K.-I. Kondo, "Gauge-invariant description of Higgs phenomenon and quark confinement," *Phys. Lett. B*, vol. 762, pp. 219–224, Nov. 2016.
- [48] K.-I. Kondo, "Gauge-independent Brout–Englert–Higgs mechanism and Yang–Mills theory with a gauge-invariant gluon mass term," *Eur. Phys. J. C*, vol. 78, pp. 1–24, July 2018.
- [49] H. Kamerlingh Onnes, "The superconductivity of mercury," *Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden*, vol. 122, pp. 122–124, 1911.
- [50] W. Meissner and R. Ochsenfeld, "Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit," *Naturwissenschaften*, vol. 21, pp. 787–788, Nov. 1933.
- [51] C. Gorter and H. Casimir, "On supraconductivity I," *Physica D*, 1934.
- [52] M. Greiter, "Is electromagnetic gauge invariance spontaneously violated in superconductors?," *Ann. Phys.*, vol. 319, pp. 217–249, Sept. 2005.
- [53] N. R. Poniatowski, "Superconductivity, broken gauge symmetry, and the Higgs mechanism," *Am. J. Phys.*, vol. 87, pp. 436–443, June 2019.
- [54] B. S. Deaver and W. M. Fairbank, "Experimental Evidence for Quantized Flux in Superconducting Cylinders," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 7, pp. 43–46, July 1961.
- [55] R. Feynman, "The schrödinger equation in a classical context : a seminar on superconductivity," 2003. [Online; accessed 5. Jul. 2024].
- [56] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics : Volume 5, Volume 5*. Oxford, England, UK : Elsevier Science, Oct. 2013.
- [57] H. Yukawa, "On the Interaction of Elementary Particles. I," *Prog. Theor. Phys.*, vol. 1, pp. 1–10, Jan. 1955.
- [58] A. A. Abrikosov, "The magnetic properties of superconducting alloys," *J. Phys. Chem. Solids*, vol. 2, pp. 199–208, Jan. 1957.
- [59] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*. Mineola, NY, USA : Dover Publications, 2004.



- [60] B. D. Josephson, "Possible new effects in superconductive tunnelling," *Physics Letters*, vol. 1, pp. 251–253, July 1962.
- [61] J. van Wezel and J. van den Brink, "Spontaneous symmetry breaking and decoherence in superconductors," *Phys. Rev. B*, vol. 77, p. 064523, Feb. 2008.
- [62] E. Maxwell, "Isotope Effect in the Superconductivity of Mercury," *Phys. Rev.*, vol. 78, p. 477, May 1950.
- [63] A. Altland and B. D. Simons, *Condensed Matter Field Theory*. Cambridge, England, UK : Cambridge University Press, Mar. 2010.
- [64] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge, England, UK : Cambridge University Press, Dec. 2013.
- [65] J. Brown and R. Churchill, *Complex Variables and Applications*. New York, NY, USA : McGraw-Hill Education, 2009.
- [66] P. A. M. Dirac, "Gauge invariant formulation of quantum electrodynamics," *Can. J. Phys.*, vol. 33, p. 650, 1955.
- [67] T. H. Hansson, V. Oganesyan, and S. L. Sondhi, "Superconductors are topologically ordered," *Ann. Phys.*, vol. 313, pp. 497–538, Oct. 2004.
- [68] K. Matsuyama and J. Greensite, "Nature of symmetry breaking in the superconducting ground state," *Phys. Rev. B*, vol. 100, p. 184513, Nov. 2019.
- [69] L. P. Gor'kov, "Microscopic derivation of the Ginzburg–Landau equations in the theory of superconductivity," *Sov. Phys. - JETP (Engl. Transl.); (United States)*, vol. 9 :6, Jan. 1959.
- [70] N. N. Bogoljubov, "On a new method in the theory of superconductivity," *Nuovo Cim.*, vol. 7, pp. 794–805, Mar. 1958.
- [71] P.-G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*. W.A. Benjamin, 1966.
- [72] J.-X. Zhu, *Bogoliubov-de Gennes Method and Its Applications*. Cham, Switzerland : Springer International Publishing, 2016.
- [73] J. R. Schrieffer, *Theory Of Superconductivity*. New York, NY, USA : Avalon Publishing, 1999.
- [74] E. E. Salpeter and H. A. Bethe, "A Relativistic Equation for Bound-State Problems," *Phys. Rev.*, vol. 84, pp. 1232–1242, Dec. 1951.
- [75] P. B. Littlewood and C. M. Varma, "Amplitude collective modes in superconductors and their coupling to charge-density waves," *Phys. Rev. B*, vol. 26, pp. 4883–4893, Nov. 1982.
- [76] J. G. Bednorz and K. A. Müller, "Possible highT<sub>c</sub> superconductivity in the Ba-La-Cu-O system," *Z. Phys. B : Condens. Matter*, vol. 64, pp. 189–193, June 1986.
- [77] T. Matsubara, "A New Approach to Quantum-Statistical Mechanics," *Prog. Theor. Phys.*, vol. 14, pp. 351–378, Oct. 1955.
- [78] L. V. Keldysh, "Diagram technique for nonequilibrium processes," *Zh.Eksp.Teor.Fiz*, vol. 47, pp. 1515–1527, 1964.

- [79] J. Rammer, *Quantum Field Theory of Non-equilibrium States*. Cambridge, England, UK : Cambridge University Press, July 2007.
- [80] A. Kamenev, *Field Theory of Non-Equilibrium Systems*. Cambridge, England, UK : Cambridge University Press, Sept. 2011.
- [81] G. Stefanucci and R. van Leeuwen, *Nonequilibrium Many-Body Theory of Quantum Systems : A Modern Introduction*. Cambridge, England, UK : Cambridge University Press, Mar. 2013.
- [82] M. Gell-Mann and F. Low, "Bound States in Quantum Field Theory," *Phys. Rev.*, vol. 84, pp. 350–354, Oct. 1951.
- [83] O. V. Konstantinov and V. I. Perel, "A graphical technique for computation of kinetic quantities," *Zhur. Eksptl'. i Teoret. Fiz*, vol. Vol : 39, July 1960.
- [84] R. Kubo, "Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. I. General Theory and Simple Applications to Magnetic and Conduction Problems," *J. Phys. Soc. Jpn.*, vol. 12, pp. 570–586, June 1957.
- [85] P. C. Martin and J. Schwinger, "Theory of Many-Particle Systems. I," *Phys. Rev.*, vol. 115, pp. 1342–1373, Sept. 1959.
- [86] A. B. Migdal, "Interaction between electrons and the lattice vibrations in a normal metal," *Zhur. Eksptl'. i Teoret. Fiz*, vol. Vol : 34, June 1958.
- [87] R. E. Prange and L. P. Kadanoff, "Transport Theory for Electron-Phonon Interactions in Metals," *Phys. Rev.*, vol. 134, pp. A566–A580, May 1964.
- [88] W. Belzig, F. K. Wilhelm, C. Bruder, G. Schön, and A. D. Zaikin, "Quasiclassical Green's function approach to mesoscopic superconductivity," *Superlattices Microstruct.*, vol. 25, pp. 1251–1288, May 1999.
- [89] N. Kopnin and N. Kopnin, *Theory of Nonequilibrium Superconductivity*. Oxford, England, UK : Oxford University Press, May 2001.
- [90] G. Eilenberger, "Transformation of Gorkov's equation for type II superconductors into transport-like equations," *Z. Phys. A : Hadrons Nucl.*, vol. 214, pp. 195–213, Apr. 1968.
- [91] A. L. Shelankov, "On the derivation of quasiclassical equations for superconductors," *J. Low Temp. Phys.*, vol. 60, pp. 29–44, July 1985.
- [92] A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov, "Quasiclassical Method in the Theory of Superconductivity," *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol. 28, p. 1200, June 1969.
- [93] K. D. Usadel, "Generalized Diffusion Equation for Superconducting Alloys," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 25, pp. 507–509, Aug. 1970.
- [94] A. V. Zaitsev, "Quasiclassical equations of the theory of superconductivity for contiguous metals and the properties of constricted microcontacts," *Soviet Physics - JETP*, vol. 59, no. 5, pp. 1015–1024, 1984.
- [95] C. J. Lambert and R. Raimondi, "Phase-coherent transport in hybrid superconducting nanostructures," *J. Phys. : Condens. Matter*, vol. 10, p. 901, Feb. 1998.

- [96] I. O. Kulik and A. N. Omel'yanchuk, "Properties of superconducting microbridges in the pure limit," *Sov. J. Low Temp. Phys. (Engl. Transl.); (United States)*, vol. 3 :7, July 1977.
- [97] I. O. Kulik, "Macroscopic Quantization and the Proximity Effect in S-N-S Junctions," *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol. 30, p. 944, 1969.
- [98] C. Ishii, "Josephson Currents through Junctions with Normal Metal Barriers," *Prog. Theor. Phys.*, vol. 44, pp. 1525–1547, Dec. 1970.
- [99] V. Ambegaokar and A. Baratoff, "Tunneling Between Superconductors," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 10, pp. 486–489, June 1963.
- [100] P. Vallet and J. Cayssol, "Higgs amplitude mode in ballistic superconducting hybrid junctions," *Phys. Rev. B*, vol. 108, p. 094515, Sept. 2023.
- [101] R. Sooryakumar and M. V. Klein, "Raman Scattering by Superconducting-Gap Excitations and Their Coupling to Charge-Density Waves," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 45, pp. 660–662, Aug. 1980.
- [102] R. Shimano and N. Tsuji, "Higgs Mode in Superconductors," *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, pp. 103–124, Mar. 2020.
- [103] R. Matsunaga, N. Tsuji, K. Makise, H. Terai, H. Aoki, and R. Shimano, "Polarization-resolved terahertz third-harmonic generation in a single-crystal superconductor NbN : Dominance of the Higgs mode beyond the BCS approximation," *Phys. Rev. B*, vol. 96, p. 020505, July 2017.
- [104] N. Tsuji, Y. Murakami, and H. Aoki, "Nonlinear light-Higgs coupling in superconductors beyond BCS : Effects of the retarded phonon-mediated interaction," *Phys. Rev. B*, vol. 94, p. 224519, Dec. 2016.
- [105] Y. Murotani and R. Shimano, "Nonlinear optical response of collective modes in multiband superconductors assisted by nonmagnetic impurities," *Phys. Rev. B*, vol. 99, p. 224510, June 2019.
- [106] M. Silaev, "Nonlinear electromagnetic response and Higgs-mode excitation in BCS superconductors with impurities," *Phys. Rev. B*, vol. 99, p. 224511, June 2019.
- [107] R. C. Dynes, V. Narayanamurti, and J. P. Garno, "Direct Measurement of Quasiparticle-Lifetime Broadening in a Strong-Coupled Superconductor," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 41, pp. 1509–1512, Nov. 1978.
- [108] A. A. Mikhailovsky, S. V. Shulga, A. E. Karakozov, O. V. Dolgov, and E. G. Maksimov, "Thermal pair-breaking in superconductors with strong electron-phonon interaction," *Solid State Commun.*, vol. 80, pp. 511–515, Nov. 1991.
- [109] G. Floquet, "Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques," *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, vol. 12, pp. 47–88, 1883.
- [110] J. H. Shirley, "Solution of the Schrödinger Equation with a Hamiltonian Periodic in Time," *Phys. Rev.*, vol. 138, pp. B979–B987, May 1965.
- [111] H. Sambe, "Steady States and Quasienergies of a Quantum-Mechanical System in an Oscillating Field," *Phys. Rev. A*, vol. 7, pp. 2203–2213, June 1973.

- [112] G. E. Blonder, M. Tinkham, and T. M. Klapwijk, "Transition from metallic to tunneling regimes in superconducting microconstrictions : Excess current, charge imbalance, and supercurrent conversion," *Phys. Rev. B*, vol. 25, pp. 4515–4532, Apr. 1982.
- [113] Y. Zhou and M. W. Wu, "Optical response of graphene under intense terahertz fields," *Phys. Rev. B*, vol. 83, p. 245436, June 2011.
- [114] P. M. Perez-Piskunow, L. E. F. Foa Torres, and G. Usaj, "Hierarchy of Floquet gaps and edge states for driven honeycomb lattices," *Phys. Rev. A*, vol. 91, p. 043625, Apr. 2015.
- [115] J. Atteia, J. H. Bardarson, and J. Cayssol, "Ballistic transport through irradiated graphene," *Phys. Rev. B*, vol. 96, p. 245404, Dec. 2017.
- [116] M. Moskalets and M. Büttiker, "Floquet scattering theory of quantum pumps," *Phys. Rev. B*, vol. 66, p. 205320, Nov. 2002.
- [117] M. V. Moskalets, *Scattering Matrix Approach to Non-Stationary Quantum Transport*. London, England, UK : World Scientific Publishing Company, Sept. 2011.
- [118] Y. Takane and H. Ebisawa, "Conductance Formula for Mesoscopic Systems with a Superconducting Segment," *J. Phys. Soc. Jpn.*, vol. 61, pp. 1685–1690, May 1992.
- [119] M. P. Anantram and S. Datta, "Current fluctuations in mesoscopic systems with Andreev scattering," *Phys. Rev. B*, vol. 53, pp. 16390–16402, June 1996.
- [120] A. M. Lobos and S. D. Sarma, "Tunneling transport in NSN Majorana junctions across the topological quantum phase transition," *New J. Phys.*, vol. 17, p. 065010, June 2015.
- [121] Galitskii, V. M. and Goreslavskii, S. P. and Elesin, V. F., "Effect of radiation on transport in graphene," *JETP*, vol. 30, p. 117, Jan. 1970.
- [122] S. V. Syzranov, M. V. Fistul, and K. B. Efetov, "Effect of radiation on transport in graphene," *Phys. Rev. B*, vol. 78, p. 045407, July 2008.
- [123] M. H. Devoret, A. Wallraff, and J. M. Martinis, "Superconducting Qubits : A Short Review," *arXiv e-prints*, pp. cond-mat/0411174, Nov. 2004.
- [124] L. Bretheau, J. I.-J. Wang, R. Pisoni, K. Watanabe, T. Taniguchi, and P. Jarillo-Herrero, "Tunnelling spectroscopy of Andreev states in graphene," *Nat. Phys.*, vol. 13, pp. 756–760, Aug. 2017.
- [125] T. Kontos, M. Aprili, J. Lesueur, F. Genêt, B. Stephanidis, and R. Boursier, "Josephson Junction through a Thin Ferromagnetic Layer : Negative Coupling," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, p. 137007, Sept. 2002.
- [126] A. I. Buzdin, "Proximity effects in superconductor-ferromagnet heterostructures," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 77, pp. 935–976, Sept. 2005.
- [127] A. Yu. Kasumov, R. Deblock, M. Kociak, B. Reulet, H. Bouchiat, I. I. Khodos, Yu. B. Gorbatov, V. T. Volkov, C. Journet, and M. Burghard, "Supercurrents Through Single-Walled Carbon Nanotubes," *Science*, vol. 284, pp. 1508–1511, May 1999.

- [128] J.-D. Pillet, C. H. L. Quay, P. Morfin, C. Bena, A. L. Yeyati, and P. Joyez, "Andreev bound states in supercurrent-carrying carbon nanotubes revealed," *Nat. Phys.*, vol. 6, pp. 965–969, Dec. 2010.
- [129] H. B. Heersche, P. Jarillo-Herrero, J. B. Oostinga, L. M. K. Vandersypen, and A. F. Morpurgo, "Bipolar supercurrent in graphene," *Nature*, vol. 446, pp. 56–59, Mar. 2007.
- [130] M. Ben Shalom, M. J. Zhu, V. I. Fal'ko, A. Mishchenko, A. V. Kretinin, K. S. Novoselov, C. R. Woods, K. Watanabe, T. Taniguchi, A. K. Geim, and J. R. Prance, "Quantum oscillations of the critical current and high-field superconducting proximity in ballistic graphene," *Nat. Phys.*, vol. 12, pp. 318–322, Apr. 2016.
- [131] E. Bocquillon, R. S. Deacon, J. Wiedenmann, P. Leubner, T. M. Klapwijk, C. Brüne, K. Ishibashi, H. Buhmann, and L. W. Molenkamp, "Gapless Andreev bound states in the quantum spin Hall insulator HgTe," *Nat. Nanotechnol.*, vol. 12, pp. 137–143, Feb. 2017.
- [132] G. B. Arnold, "Superconducting tunneling without the tunneling Hamiltonian. II. Subgap harmonic structure," *J. Low Temp. Phys.*, vol. 68, pp. 1–27, July 1987.
- [133] A. W. Kleinsasser, R. E. Miller, W. H. Mallison, and G. B. Arnold, "Observation of multiple Andreev reflections in superconducting tunnel junctions," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 72, pp. 1738–1741, Mar. 1994.
- [134] D. Averin and A. Bardas, "ac Josephson Effect in a Single Quantum Channel," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 75, pp. 1831–1834, Aug. 1995.
- [135] P. E. Gregers-Hansen, E. Hendricks, M. T. Levinsen, and G. R. Pickett, "Subharmonic Energy-Gap Structure and a Josephson-Radiation-Enhanced Gap in Dayem Bridges," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 31, pp. 524–527, Aug. 1973.
- [136] L.-E. Hasselberg, M. T. Levinsen, and M. R. Samuelsen, "Theories of subharmonic gap structures in superconducting junctions," *Phys. Rev. B*, vol. 9, pp. 3757–3765, May 1974.
- [137] J. B. Hansen, M. T. Levinsen, P. E. Lindelof, B. Dueholm, J. Mygind, N. F. Pedersen, and O. H. Soerensen, "Subharmonic energy gap structure in the Josephson radiation at 35 GHz from a superconducting thin-film microbridge," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 35, pp. 28–30, July 1979.
- [138] J. C. Cuevas, J. Heurich, A. Martín-Rodero, A. Levy Yeyati, and G. Schön, "Subharmonic Shapiro Steps and Assisted Tunneling in Superconducting Point Contacts," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, p. 157001, Mar. 2002.
- [139] S. Shapiro, A. R. Janus, and S. Holly, "Effect of Microwaves on Josephson Currents in Superconducting Tunneling," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 36, pp. 223–225, Jan. 1964.
- [140] M. A. Silaev, R. Ojajärvi, and T. T. Heikkilä, "Spin and charge currents driven by the Higgs mode in high-field superconductors," *Phys. Rev. Res.*, vol. 2, p. 033416, Sept. 2020.
- [141] V. Plastovets, A. S. Mel'nikov, and A. I. Buzdin, "Collisionless dynamics of the superconducting gap excited by a spin-splitting field," *Phys. Rev. B*, vol. 108, p. 104507, Sept. 2023.

- [142] P. Derendorf, A. F. Volkov, and I. M. Eremin, "Nonlinear response of diffusive superconductors to ac electromagnetic fields," *Phys. Rev. B*, vol. 109, p. 024510, Jan. 2024.
- [143] A. Lahiri, S.-J. Choi, and B. Trauzettel, "Josephson Signatures of the Superconducting Higgs/Amplitude Mode," *arXiv*, Feb. 2024.
- [144] P. A. Lee and J. F. Steiner, "Detection of collective modes in unconventional superconductors using tunneling spectroscopy," *Phys. Rev. B*, vol. 108, p. 174503, Nov. 2023.
- [145] R. A. Ferrell, "Fluctuations and the superconducting phase transition : II. Onset of Josephson tunneling and paraconductivity of a junction," *J. Low Temp. Phys.*, vol. 1, pp. 423–442, Oct. 1969.
- [146] D. J. Scalapino, "Pair Tunneling as a Probe of Fluctuations in Superconductors," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 24, pp. 1052–1055, May 1970.
- [147] A. H. Dayem and R. J. Martin, "Quantum Interaction of Microwave Radiation with Tunneling Between Superconductors," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 8, pp. 246–248, Mar. 1962.
- [148] P. K. Tien and J. P. Gordon, "Multiphoton Process Observed in the Interaction of Microwave Fields with the Tunneling between Superconductor Films," *Phys. Rev.*, vol. 129, pp. 647–651, Jan. 1963.
- [149] D. N. Langenberg, D. J. Scalapino, B. N. Taylor, and R. E. Eck, "Microwave-induced D.C. voltages across Josephson junctions," *Physics Letters*, vol. 20, pp. 563–565, Apr. 1966.
- [150] A. Roychowdhury, M. Dreyer, J. R. Anderson, C. J. Lobb, and F. C. Wellstood, "Microwave Photon-Assisted Incoherent Cooper-Pair Tunneling in a Josephson STM," *Phys. Rev. Appl.*, vol. 4, p. 034011, Sept. 2015.
- [151] S. A. González, L. Melischek, O. Peters, K. Flensberg, K. J. Franke, and F. von Oppen, "Photon-assisted resonant Andreev reflections : Yu-Shiba-Rusinov and Majorana states," *Phys. Rev. B*, vol. 102, p. 045413, July 2020.
- [152] D. J. Carrad, L. Stampfer, D. Olsteins, C. E. N. Petersen, S. A. Khan, P. Krostrup, and T. S. Jespersen, "Photon-Assisted Tunneling of High-Order Multiple Andreev Reflections in Epitaxial Nanowire Josephson Junctions," *Nano Lett.*, vol. 22, pp. 6262–6267, Aug. 2022.
- [153] D. Z. Haxell, M. Coraiola, D. Sabonis, M. Hinderling, S. C. Ten Kate, E. Cheah, F. Krizek, R. Schott, W. Wegscheider, W. Belzig, J. C. Cuevas, and F. Nichele, "Microwave-induced conductance replicas in hybrid Josephson junctions without Floquet—Andreev states," *Nat. Commun.*, vol. 14, pp. 1–8, Oct. 2023.
- [154] A. V. Semenov, I. A. Devyatov, P. J. de Visser, and T. M. Klapwijk, "Coherent Excited States in Superconductors due to a Microwave Field," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 117, p. 047002, July 2016.
- [155] A. I. Larkin and Y. N. Ovchinnikov, "Tunnel effect between superconductors in an alternating field," *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, vol. 51, Nov. 1966.

- 
- [156] D. N. Langenberg, "Physical interpretation of the  $\cos \phi$  term and implications for detectors," *Rev. Phys. Appl. (Paris)*, vol. 9, pp. 35–40, Jan. 1974.
- [157] R. E. Harris, "Cosine and other terms in the Josephson tunneling current," *Phys. Rev. B*, vol. 10, pp. 84–94, July 1974.
- [158] C. A. Hamilton and S. Shapiro, "Experimental Demonstration of the Riedel Peak," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 26, pp. 426–428, Feb. 1971.
- [159] A. V. Semenov, I. A. Devyatov, M. P. Westig, and T. M. Klapwijk, "Effect of Microwaves on Superconductors for Kinetic Inductance Detection and Parametric Amplification," *Phys. Rev. Appl.*, vol. 13, p. 024079, Feb. 2020.
- [160] J. Clarke, "The proximity effect between superconducting and normal thin films in zero field," *J. Phys. Colloques*, vol. 29, pp. C2–3–C2–16, Feb. 1968.
- [161] A. J. Dahm, A. Denenstien, T. F. Finnegan, D. N. Langenberg, and D. J. Scalapino, "Study of the Josephson Plasma Resonance," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 20, pp. 859–863, Apr. 1968.
- [162] I. Siddiqi, R. Vijay, F. Pierre, C. M. Wilson, L. Frunzio, M. Metcalfe, C. Rigetti, R. J. Schoelkopf, M. H. Devoret, D. Vion, and D. Esteve, "Direct Observation of Dynamical Bifurcation between Two Driven Oscillation States of a Josephson Junction," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 94, p. 027005, Jan. 2005.





## Courants dans la jonction SIS

### A.1 Limite asymptotique des courants de la jonction SIS à température nulle

Retrouvons les limites à basse température des courants dans la jonction SIS. À  $T = 0$  et pour  $V < 2\Delta_0$ , on peut réécrire  $I_0$  comme

$$\frac{8eI_0}{G_t\Delta_0^2} = 8 \int_{\Delta_0}^{V+\Delta_0} d\epsilon \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}} \frac{1}{\sqrt{\Delta_0^2 - (\epsilon - V)^2}} \quad (\text{A.1.1})$$

$$= \frac{8}{V} \int_0^1 d\epsilon \frac{1}{\sqrt{(\epsilon + \Delta_0/V)^2 - (\Delta_0/V)^2}} \frac{1}{\sqrt{(\Delta_0/V)^2 - (\epsilon - 1 + \Delta_0/V)^2}} \quad (\text{A.1.2})$$

$$= \frac{8}{V} \int_0^1 d\epsilon \frac{1}{\sqrt{-\epsilon(\epsilon + 2\Delta_0/V)}} \frac{1}{\sqrt{(\epsilon - 1 + 2\Delta_0/V)(\epsilon - 1)}}. \quad (\text{A.1.3})$$

Pour résoudre ces intégrales, on fait le changement de variable

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2\Delta_0/V\epsilon}{\epsilon - 1 + 2\Delta_0/V}} \quad (\text{A.1.4})$$

en sachant que

$$d\bar{\epsilon} = d\epsilon \frac{2\Delta_0/V(2\Delta_0/V - 1)}{2(\epsilon - 1 + 2\Delta_0/V)^{3/2} \sqrt{2\Delta_0/V\epsilon}}. \quad (\text{A.1.5})$$

On trouve

$$\frac{8eI_0}{G_t\Delta_0^2} = \frac{8\sqrt{2\Delta_0/V}}{\Delta_0(2\Delta_0/V - 1)} \int_0^1 d\bar{\epsilon} \frac{\epsilon - 1 + 2\Delta_0/V}{\sqrt{(\epsilon + 2\Delta_0/V)(1 - \epsilon)}} \quad (\text{A.1.6})$$

$$= \frac{8}{\Delta_0} \int_0^1 d\bar{\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{\epsilon}^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{4\Delta_0^2} \bar{\epsilon}^2}} \quad (\text{A.1.7})$$

$$= \frac{8}{\Delta_0} K\left(\frac{V^2}{4\Delta_0^2}\right), \quad (\text{A.1.8})$$

avec  $K(x)$  l'intégrale complète elliptique de première espèce définie comme

$$K(x) = \int_0^1 dt \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{\sqrt{1-xt^2}}. \quad (\text{A.1.9})$$

Quand  $V > 2\Delta_0$  on a

$$\frac{8eI_0}{G_t \Delta_0^2} = 8 \int_{V-\Delta_0}^{V+\Delta_0} d\epsilon \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}} \frac{1}{\sqrt{\Delta_0^2 - (\epsilon - V)^2}} \quad (\text{A.1.10})$$

$$= \frac{16}{V} K\left(\frac{4\Delta_0^2}{V^2}\right). \quad (\text{A.1.11})$$

D'après l'Éq. (A.1.9) on voit que  $K(0) = \frac{\pi}{2}$ . On trouve la bonne limite dans le cas  $V = 0$ . À biais large  $V \gg \Delta_0$  on trouve

$$I_0 = \frac{G_t}{e} \pi \frac{\Delta_0^2}{V}. \quad (\text{A.1.12})$$

Regardons la limite à basse température pour  $I_V$  et  $I'_0$ . On les réécrit comme

$$\frac{8eI_V}{G_t} = -2 \left( \int_{\Delta_0}^{V-\Delta_0} + 2 \int_{V+\Delta_0}^{\infty} \right) d\epsilon \frac{|\epsilon|}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}} \frac{|\epsilon - V|}{\sqrt{(\epsilon - V)^2 - \Delta_0^2}} [\tanh(\beta(\epsilon - V)/2) - \tanh(\beta\epsilon/2)] \quad (\text{A.1.13})$$

$$\frac{8eI'_0}{G_t \Delta_0^2} = -2 \left( \int_{\Delta_0}^{V-\Delta_0} + 2 \int_{V+\Delta_0}^{\infty} \right) d\epsilon \frac{\text{sign } \epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}} \frac{\text{sign}(\epsilon - V)}{\sqrt{(\epsilon - V)^2 - \Delta_0^2}} [\tanh(\beta(\epsilon - V)/2) - \tanh(\beta\epsilon/2)]. \quad (\text{A.1.14})$$

Quand  $V \gg \Delta_0$ , T on trouve (Fig. 7.3)

$$\frac{8eI_V}{G_t} \simeq 4 \int_{\Delta_0}^{V-\Delta_0} d\epsilon \frac{|\epsilon|}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}} \frac{|\epsilon - V|}{\sqrt{(\epsilon - V)^2 - \Delta_0^2}} \quad (\text{A.1.15})$$

$$= 8V \int_{\Delta_0/V}^{1/2} dx \frac{x}{\sqrt{x^2 - \frac{\Delta_0^2}{V^2}}} \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 - \frac{\Delta_0^2}{V^2}}} \quad (\text{A.1.16})$$

$$\sim 8V \left( 1 - \frac{\Delta_0^2}{V^2} \right), \quad (\text{A.1.17})$$

$$\frac{8eI'_0}{G_t \Delta_0^2} \simeq -4 \int_{\Delta_0}^{V-\Delta_0} d\epsilon \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}} \frac{1}{\sqrt{(\epsilon - V)^2 - \Delta_0^2}} \quad (\text{A.1.18})$$

$$= -\frac{8}{V} \int_{\Delta_0/V}^{1/2} dx \frac{1}{\sqrt{x^2 - \frac{\Delta_0^2}{V^2}}} \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2 - \frac{\Delta_0^2}{V^2}}} \quad (\text{A.1.19})$$

$$\sim -\frac{16}{V} \ln(V/\Delta_0). \quad (\text{A.1.20})$$

## A.2 Courants dans la jonction irradiée

Les expressions des composantes du courant dans la jonction irradiée sont données par

$$I_{2,i}(V) = -\frac{i\Delta_0 G_t}{4e} \int d\epsilon \left[ \tanh(\beta\epsilon/2) \left( \frac{1}{s^R} - \frac{1}{s^A} \right) g_{22,1,i}^R + \left( \frac{1}{s^R(\epsilon_2)} + \frac{1}{s^A} \right) (f_0(\epsilon, -V) g_{22,1,i}^R + f_3(\epsilon, -V) g_{22,3,i}^R + g_{22,1,i}^{\text{an}}) \right] \quad (\text{A.2.1})$$

$$I'_{2,i}(V) = -\frac{\Delta_0 G_t}{4e} \int d\epsilon \left[ \tanh(\beta\epsilon/2) \left( \frac{1}{s^R} - \frac{1}{s^A} \right) g_{22,3,i}^R - \left( \frac{1}{s^R(\epsilon_2)} - \frac{1}{s^A} \right) (f_0(\epsilon, -V) g_{22,3,i}^R + f_3(\epsilon, -V) g_{22,1,i}^R + g_{22,3,i}^{\text{an}}) \right] \quad (\text{A.2.2})$$

$$I_{3,i}(V) = -\frac{G_t}{8e} \int d\epsilon g_{2,3,i}^k (g_{V,1,i}^R - g_{V,1,i}^A) + g_{V,1,i}^k(\epsilon_2) g_{2,3,i}^A - g_{2,3,i}^R g_{V,1,i}^k. \quad (\text{A.2.3})$$