



HAL
open science

Trajectographie passive par réseau de capteurs en acoustique sous-marine

Jérémy Payan

► **To cite this version:**

Jérémy Payan. Trajectographie passive par réseau de capteurs en acoustique sous-marine. Automatique / Robotique. Université de Toulon; Naval Group, 2022. Français. NNT : 2022TOUL0013 . tel-04783568

HAL Id: tel-04783568

<https://theses.hal.science/tel-04783568v1>

Submitted on 14 Nov 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE 548 – MER ET SCIENCES
IM2NP, UMR CNRS 7334, équipe Signal & Tracking

THÈSE

présentée par :

JÉRÉMY PAYAN

soutenue le : 7 décembre 2022

pour obtenir le grade de Docteur en Automatique, Signal, Productique, Robotique.

Trajectographie passive par réseau de capteurs en acoustique sous-marine

Thèse dirigée par :

M. CLAUDE JAUFFRET, Professeur à l'Université de Toulon

MME ANNIE-CLAUDE PÉREZ, Maître de conférences HDR à l'Université de Toulon

Jury :

M. ALFONSO FARINA (rapporteur)

Professeur (retraité), Université de Naples

MME MITRA FOULADIRAD (rapporteure)

Professeure, Ecole Centrale Marseille

M. PASCAL LARZABAL (examinateur)

Professeur, Université Paris-Saclay

MME SYLVIE MARCOS (examinatrice)

Directrice de recherche CNRS

M. DANN LANEUVILLE (invité)

Ingénieur expert, Naval Group

M. CLAUDE JAUFFRET (examinateur)

Professeur, Université de Toulon, directeur

MME ANNIE-CLAUDE PÉREZ (examinatrice) MCF-HDR, Université de Toulon, codirectrice

Remerciements

Je souhaite ici remercier toutes les personnes qui m'ont aidé, soutenu et encouragé au cours de ces trois dernières années.

Mes premières pensées sont adressées à mes directeurs de thèse, Annie-Claude Pérez et Claude Jauffret. Je tiens à leur exprimer toute ma reconnaissance et ma gratitude pour leur encadrement, leur patience, leur rigueur, pour m'avoir toujours soutenu, cru en moi et tiré vers le haut, quoiqu'il soit advenu pendant ces trois années (et même plus!). Cette aventure humaine et scientifique fût fantastique et enrichissante, un très grand merci.

Je tiens aussi à remercier l'entreprise Naval Group pour avoir accepté de financer cette thèse. Plus particulièrement, je remercie fortement Dann Laneuville pour ses conseils experts apportant un regard différent, ainsi que Laurent Pelissero pour les quelques discussions qui m'ont fait avancer. Je tiens aussi à remercier Grégory Bartoli et Adrien Negre pour leur bienveillance ainsi que leur efficacité.

Je souhaite remercier grandement Alfonso Farina et Mitra Fouladirad pour avoir accepté de rapporter cette thèse. Les remarques constructives et fort intéressantes, ainsi que les nombreuses questions m'ont permis d'améliorer les travaux présentés dans ce manuscrit. Je tiens aussi à remercier Pascal Larzabal pour avoir accepté d'être examinateur de cette thèse, ainsi que Sylvie Marcos pour son rôle d'examinatrice et de présidente de jury. Leurs questions nombreuses et détaillées m'ont là encore permis d'améliorer les travaux.

Je voudrais remercier aussi le laboratoire IM2NP, et plus particulièrement l'équipe StR (Signal & Tracking), pour son accueil fort chaleureux, et dont la bonne humeur irradiait de ses membres, à savoir : Jean Barrère, Bruno Borloz, Gilles Chabriel, Claude Jauffret, Annie-Claude Pérez, Bernard Xerri. Je tiens aussi à remercier chaleureusement Antoine Lebon pour ces trois superbes années d'entraide, de soutien mutuel, d'échanges constructifs, et de très bonne entente.

Je souhaite aussi remercier mes amis pour leur soutien indéfectible, pour les très bons moments passés avec eux, ainsi que pour leur positivisme sans faille. De façon non exhaustive, et sans classement aucun, ils se reconnaîtront : Lucas, Philippe, Ornella, Vincent, Olivia, Clément, Caroline, ...

En dernier lieu, je tiens à remercier très chaleureusement ma famille pour m'avoir toujours soutenu dans tout ce que j'ai entrepris et dans tous mes choix, pour leur patience durant ces nombreuses années, et pour avoir toujours été là quand c'était nécessaire.

Table des figures	vii
Nomenclature	ix
Préambule	xi
Contexte général	xi
Contexte et objectifs de la thèse	xii
Structure du manuscrit	xiii
Contributions	xv
I Introduction	1
1 Description de la chaîne de traitement de l'information en sonar passif	3
1.1 Acquisition	3
1.2 Traitement du signal	4
1.3 Détection	5
1.4 Extraction	6
1.5 Conclusion	6
2 Introduction à la trajectographie	9
2.1 Définitions	9
2.2 Contexte initial	10
2.3 Observabilité	11
2.4 Performances asymptotiques	12
2.5 Choix d'un estimateur	13
2.6 Simulation et confrontation des résultats	14
2.7 Conclusion	15
3 Introduction au modèle du Probabilistic Data Association (PDA)	17
3.1 Motivations et historique	17
3.2 Hypothèses statistiques	18
3.2.1 Cas général	18

3.2.2	Extension à l'utilisation de l'information d'énergie	19
3.3	Aspects numériques et optimisation	20
3.3.1	Méthode de quasi-Newton	20
3.3.2	Déflation	21
3.3.3	Fonction de coût	21
3.4	Matrice d'information de Fisher	21
3.5	Test d'acceptation de l'estimé	22
3.6	Conclusion	23
II	Trajectographie par réseau de capteurs	25
4	Introduction	27
4.1	Problématique et motivations	27
4.2	Structure de la partie	28
5	Trajectographie passive par réseau de bouées hydrophones	31
5.1	Introduction	31
5.2	Problématique et notations	32
5.3	Observabilité	32
5.3.1	Notations et lemmes	33
5.3.2	Analyse de l'observabilité	35
5.4	Critères	38
5.5	Performances asymptotiques	40
5.6	Test d'acceptation de l'estimé	40
5.7	Résultats numériques	40
5.8	Conclusion	42
6	Trajectographie passive par fusion de bouées hydrophones et d'antennes linéaires verticales	45
6.1	Introduction	45
6.2	Problématique et notations	46
6.3	Étude de l'observabilité	47
6.4	Justification de l'utilisation du réseau mixte	52
6.5	Critères	53
6.6	Performances asymptotiques	54
6.7	Test d'acceptation de l'estimé	54
6.8	Résultats numériques	55
6.8.1	Architecture TAD	55
6.8.2	Architecture TAD-AI	57
6.9	Conclusion	58
7	Trajectographie passive d'une cible manœuvrante dans le réseau mixte	59
7.1	Introduction	59
7.2	Problématique et notations	60
7.3	Conséquences sur l'utilisation du modèle du PDA	61
7.3.1	Critère	61

7.3.2	Performances asymptotiques	61
7.3.3	Test d'acceptation de l'estimé	62
7.4	Résultats numériques	62
7.4.1	Instant de manœuvre connu	62
7.4.2	Instant de manœuvre inconnu	62
7.5	Conclusion	63
8	Trajectographie passive par réseau mixte de capteurs en acoustique sous-marine sans distinction sur les types de rayons émis par la source	65
8.1	Introduction	65
8.2	Hypothèses statistiques du JMLPDA et adaptation	66
8.3	Quantité d'information et performances asymptotiques	67
8.4	Critère	69
8.5	Test d'acceptation de l'estimé	70
8.6	Résultats numériques	70
8.7	Conclusion	71
9	Trajectographie passive par réseau mixte de capteurs, en présence de fausses alarmes et en tenant compte du temps de propagation du signal	73
9.1	Introduction	73
9.2	Définition du problème	74
9.3	Expression du temps de propagation	74
9.4	Observabilité	76
9.5	Conséquences sur le ML-PDA/JMLPDA	76
9.6	Performances asymptotiques	76
9.7	Résultats numériques	77
9.7.1	L'algorithme tient compte du temps de propagation	77
9.7.2	L'algorithme ne tient pas compte du temps de propagation	78
9.8	Conclusion	81
10	Conclusion de la partie	83
III	Optimisation du seuil de détection	85
11	Introduction	87
11.1	Problématique et motivations	87
11.2	Structure de la partie	88
12	Optimisation du seuil de détection dans l'architecture TAD	89
12.1	Introduction	89
12.2	Optimisation de l'information de Fisher	89
12.2.1	Contexte	89
12.2.2	Loi de Poisson ou loi binomiale?	90
12.2.3	Quantité d'information dans les cas extrêmes : $m = 0$ et $m = N$	91
12.2.4	q_2 calculé à partir de la loi binomiale	92

12.3	Application au traitement de signal	92
12.3.1	Formulation du problème	92
12.3.2	Résultats numériques	93
12.4	Conclusion	94
13	Optimisation du seuil de détection dans l'architecture TAD-AI	97
13.1	Introduction	97
13.2	Vraisemblance avec loi binomiale	98
13.3	Facteur de réduction d'information en fonction du seuil de détection	98
13.4	La supériorité du q_3 sur le q_2	99
13.5	Exemple de q_3 en traitement du signal	101
13.6	Résultats numériques	102
13.7	Conclusion	102
14	Conclusion de la partie	105
IV	Conclusion générale et perspectives	107
	Annexes	113
A	Expression de la vraisemblance du ML-PDA en architecture TAD	115
B	Calcul de la matrice d'information de Fisher en architecture TAD	119
C	Calcul des moments du critère en architecture TAD	125
D	Calcul de la matrice d'information de Fisher en architecture TAD-AI	129
E	Calcul des moments du critère en architecture TAD-AI	133
F	Calcul de la matrice d'information de Fisher en tenant compte du temps de propagation	135
F.1	Mesures des hydrophones	135
F.2	Mesures des antennes	138
F.2.1	Trajet direct	138
F.2.2	Trajet réfléchi-fond	140
G	Calcul de la matrice d'information de Fisher avec la loi binomiale en architecture TAD	143
H	Calcul de la matrice d'information de Fisher avec la loi binomiale en architecture TAD-AI	145
	Bibliographie	149

Table des figures

1.1	Description schématique de la chaîne de traitement de l'information en sonar passif. . .	4
1.2	Mesures obtenues pour les différentes architectures	7
5.1	Répartition des cibles fantômes dans le cas où l'on dispose de deux hydrophones. . . .	39
5.2	Répartition des cibles fantômes dans le cas où l'on dispose de trois hydrophones non-alignés.	39
5.3	Scénario $N_S = 3$, $P_d = 0,6$ et $\lambda u = 8$ dans le réseau d'hydrophones.	43
5.4	Scénario $N_S = 15$, $P_d = 0,6$ et $\lambda u = 8$ dans le réseau d'hydrophones.	43
6.1	Angles d'élévation des trajets directs et réfléchis.	47
6.2	Exemple de réseau mixte.	48
6.3	Répartition des cibles fantômes dans le cas où l'on dispose de deux hydrophones et d'une antenne verticale. Antenne dans le même plan vertical que les hydrophones. . .	50
6.4	Répartition des cibles fantômes dans le cas où l'on dispose de deux hydrophones et d'une antenne verticale. Antenne dans le même plan vertical que les hydrophones. Vue du dessus.	50
6.5	Répartition des cibles fantômes dans le cas où l'on dispose de deux hydrophones et d'une antenne verticale, non alignée avec les hydrophones.	51
6.6	Répartition des cibles fantômes dans le cas où l'on dispose de deux hydrophones et d'une antenne verticale, non alignée avec les hydrophones. Vue du dessus.	51
6.7	Exemple de jeu de mesures obtenu en architecture TAD. $P_d = 0,6$ et $\lambda u = 8$	56
6.8	Résultats obtenus en architecture TAD pour cible lente dans le réseau mixte.	56
6.9	Exemple de jeu de mesures obtenu en architecture TAD-AI.	58
7.1	Exemple de trajet de la cible manœuvrante.	61
7.2	Résultats obtenus pour la cible manœuvrante dans le réseau mixte.	64
8.1	Exemple de jeu de mesures dans le cas du réseau mixte.	70
9.1	Nuage d'estimés de la position initiale dans le plan. Considération des temps de propagation dans l'algorithme.	78
9.2	Nuage d'estimés de la position initiale dans le plan. Pas de considération des temps de propagation dans l'algorithme.	79

9.3	Nuage d'estimés de la position initiale dans le plan. Pas de considération des temps de propagation dans l'algorithme. Réseau mixte double.	81
9.4	Nuage d'estimés de la position initiale dans le plan. Pas de considération des temps de propagation dans l'algorithme. Réseau provoquant un biais important.	82
12.1	Mesures obtenues pour différents seuils de détection en architecture TAD.	90
12.2	q_2 selon les lois binomiale et Poisson, $\gamma = 2$, $N = 5$	95
12.3	q_2 en fonction du seuil pour différentes valeurs de γ	95
12.4	Courbes COR pour différentes valeurs de γ	95
13.1	q_3 en fonction du seuil pour différentes valeurs de γ comparé au q_2 dans les mêmes situations.	103
13.2	Courbes COR pour différentes valeurs de γ	103

Notations mathématiques

Variables

<p>X : vecteur d'état Δt : pas temporel d'échantillonnage λ : densité de fausses alarmes q_2 : réduction d'information en TAD P_d : probabilité de détection F : FIM $\mathbf{0}_{d \times d}$: matrice carrée de zéros de dimension d $t_k = (k - 1)\Delta t$: instant temporel N_S : nombre d'hydrophones z_B : profondeur du fond marin $\vec{0}$: vecteur nul</p>	<p>K : nombre d'échantillons temporels σ^2 : puissance du bruit de mesure v_g : dimension de la gate q_3 : réduction d'information en TAD-AI P_{fa} : probabilité de fausses alarmes B : BCR k : échantillon temporel m_k : nombre de détections à l'échantillon k N_A : nombre d'antennes linéaires verticales u : dimension de l'espace de scrutation</p>
--	--

Opérateurs

<p>X^T : transposée de X $\frac{d}{dx}$: dérivée selon x ∇_X : gradient selon X $\log(\cdot)$: logarithme népérien $\text{Var}(\cdot)$: variance $\arg \max_X$: argument maximum en X $L(X \cdot)$: vraisemblance de l'état sachant les mesures \bar{X} : moyenne empirique de X $\cos(\cdot)$: cosinus $\lfloor x \rfloor$: partie entière de x</p>	<p>A^{-1} : inverse de A $\frac{\partial}{\partial x}$: dérivée partielle selon x $\exp(\cdot)$: exponentielle $E(\cdot)$: espérance $\text{COV}(\cdot)$: matrice de variance-covariance $\arg \min_X$: argument minimum en X $\mu_{fa}(\cdot)$: loi de probabilité des fausses alarmes \hat{X} : estimé de X $\sin(\cdot)$: sinus $\ X\$: norme de X</p>
---	--

Mesures

- $r_{i,k}(X)$: distance entre le capteur i et la source à l'instant t_k
- $\cos(\phi_{n,k}^D)$: cosinus de l'angle d'élévation du trajet direct parvenant à l'antenne n à l'instant t_k

— $\cos(\phi_{n,k}^B)$: cosinus de l'angle d'élévation du trajet réfléchi-fond parvenant à l'antenne n à l'instant t_k

Acronymes et abréviations

BCR : borne de Cramér-Rao

JMLPDA : JPDA *with maximum likelihood*

ML : *maximum likelihood*

MRU : mouvement rectiligne uniforme

PDA : *probabilistic data association*

RVG : rapport de vraisemblance généralisé

TAD : *track-after-detect*

TBD : *track-before-detect*

FIM : matrice d'information de Fisher

JPDA : *joint probabilistic data association*

ML-PDA : PDA *with maximum likelihood*

NEES : *normalized estimation error squared*

PDAF : *probabilistic data association filter*

SNR : rapport signal-sur-bruit

TAD-AI : TAD *with amplitude information*

TDOA : *time differences of arrival*

Contexte général

La volonté de prédiction est profondément ancrée dans l'Histoire humaine : prédictions de l'avenir, de la météo, des éclipses, du mouvement des astres, ... Autant de domaines dans lesquels on tente d'appliquer une méthode plus ou moins rationnelle, à partir d'observations préalables et/ou d'une éventuelle connaissance *a priori*, dans le but d'anticiper les événements et de prévoir le futur. Le mouvement des astres, en particulier, est le fruit de très nombreuses réflexions au cours du temps.

Au tout début du XIX^{ème} siècle, Carl Friedrich Gauss réalise l'exploit de prévoir la prochaine apparition de l'astéroïde Cérés, à l'aide d'observations d'angles entre la Terre et l'astéroïde en question [Pillon et Jauffret, 2005]. Les prédictions antérieures utilisant uniquement les lois de la cinématique se sont avérées extrêmement complexes à réaliser et relativement fausses. Avec cet exploit, Gauss permet une double création : le développement de la méthode des moindres carrés¹ [Sorenson, 1970], ainsi que la création d'un nouveau domaine d'étude, que l'on nomme la trajectographie [Bar-Shalom et Fortmann, 1988, Pillon et Jauffret, 2005, Jauffret et Pillon, 2008]. Cette discipline regroupe l'art et la manière de déterminer et prédire le mouvement d'un objet à l'aide d'observations acquises au cours du temps.

La volonté de trajectographier des objets ne s'arrête pas aux objets stellaires. L'engouement autour du monde sous-marin devient de plus en plus fort à mesure que la technologie avance, notamment au cours du XX^{ème} siècle. L'océan devient alors la source de multiples recherches et explorations. On cherche à aller plus profond [Pequeux, 2006], à cartographier les fonds marins [Augris et Gourmelon, 2002], à recenser le plus grand nombre possible d'espèces animales [Arnaud-Haond et Pradillon, 2017]. On cherche aussi à éviter les obstacles lors de la navigation. La catastrophe du Titanic engendre indirectement le développement de la technologie du sonar (*sound navigation and ranging*) actif [Pillon, 2017]. Un signal émis à forte puissance dans le milieu sous-marin est réfléchi par les obstacles présents. En comparant l'écart de temps entre l'émission et la réception des échos, il est possible de déduire la distance à laquelle se situe l'obstacle. On assiste par extension à l'apparition du sonar passif [Pillon, 2016], où l'on se contente d'écouter les bruits sous-marins : bruits d'origine animale, séismes sous-marins, ou encore bruits créés par l'humain par les diverses machines naviguant sur ou dans l'eau [Abraham, 2019]. Une discipline se crée : l'acoustique sous-marine [Urlick, 1975, Lurton, 1998, Etter, 2012], dans laquelle la propagation des sons dans l'eau est étudiée (pour des sons d'origine humaine

1. Indépendamment de Legendre, mais dans une période simultanée.

ou non), ainsi que leurs interactions avec les éléments présents dans l'eau.

Le mal-nommé "monde du silence"² devient alors un fort enjeu stratégique dans le domaine de la défense [Rogel, 2016]. En effet, on assiste depuis quelques années à un changement et un renforcement de la stratégie de défense maritime de pays qui sont des acteurs majeurs de la scène géopolitique internationale [Eudeline, 2016, Guillaume, 2017, Eudeline, 2018, Journoud et Thomas, 2018]. Nombreuses sont les menaces provenant de l'océan :

- Trafics (narcotrafic, armes, ...) [Bray, 2013]
- Insécurité et piraterie [Roger-Lacan, 2014]
- Espionnage des données Internet circulant dans les câbles sous-marins, menaces de coupures du réseau Internet, voire sabotage effectif [Boullier, 2014, Morel, 2015, Morel, 2019]
- Cyber-menaces affectant les services logistiques portuaires [Coustillière, 2016]
- Intrusions dans les zones économiques exclusives (ZEE) et tentatives d'invasions à long terme [Casabianca, 2019]
- Etc.

Ainsi, la surveillance maritime, et plus particulièrement sous-marine, est une problématique fondamentale pour la sécurité des nations et des acteurs économiques. Cette surveillance porte en général sur des domaines d'une étendue considérable. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser plusieurs capteurs passifs. Plusieurs capteurs nous permettent en effet de traiter une zone de dimension importante, en formant un réseau. La passivité des capteurs est utile dans une optique de discrétion. A partir des mesures acquises par les capteurs, l'objectif de la surveillance est double :

- Identification du type de bâtiment progressant dans l'environnement : quel est l'objet qui se déplace ? On procède à la **classification** de la source, où on lui attribue une étiquette correspondant à son type.
- Suivi du mouvement du bâtiment en question : comment progresse le bâtiment, où va-t-il ? On procède à la **trajectographie** de la source, où l'on cherche à connaître, par exemple, sa position, sa vitesse, son cap, dans le but de prévoir sa trajectoire à plus ou moins long terme.

L'interprétation des résultats issus de la classification et de la trajectographie nous mène aux interrogations suivantes : l'objet se déplaçant est-il une menace ? Quelle est la ligne de conduite à adopter vis-à-vis de cette source ? Les réponses à ces questions nous permettent de prendre une décision quant à la cible potentielle.

La trajectographie passive par réseau de capteurs est donc une étape primordiale dans la mise au point d'un système de surveillance maritime et sous-marine.

Contexte et objectifs de la thèse

Cette thèse traite donc de la trajectographie passive par réseau de capteurs en acoustique sous-marine. Avec toutes les considérations évoquées dans ce préambule, nous comprenons que l'enjeu d'un tel sujet de recherche est primordial dans un objectif de surveillance maritime. En fonction du type de capteurs utilisés, la trajectographie peut se réaliser à partir de différents types de données, correspondant à des étapes différentes de la chaîne de traitement sonar passif. Les capteurs utilisés et simulés dans cette thèse étant assez rustres dans leur fonctionnement, c'est pourquoi nous traiterons de la trajectographie en environnement encombré.

La grille des mesures brutes est composée de cellules de résolution, toutes remplies par une énergie

2. D'après le livre et le film du même nom de Jacques-Yves Cousteau, sortis en 1953 et 1956 respectivement.

associée. Il est possible de placer un seuil de détection sur l'énergie de ces mesures brutes. A l'issue de cette étape, on ne garde que les mesures dont l'énergie est supérieure au seuil, en conservant ou non (binarisation) l'information sur l'énergie. La nouvelle grille de mesure est donc composée d'une multitude de fausses alarmes (dues au bruit de fond) et de détections provoquées par la source acoustique. Le modèle statistique que nous choisissons dans cette thèse pour modéliser les mesures obtenues en environnement encombré est le modèle du *probabilistic data association* (PDA) [Bar-Shalom et Tse, 1975, Bar-Shalom et Fortmann, 1988, Jauffret et Bar-Shalom, 1990, Jauffret, 1993].

L'objectif de cette thèse est double. Il s'agit tout d'abord de réaliser un système de trajectographie passive d'une source acoustique sous-marine à l'aide d'un réseau de capteurs passifs. Les mesures acquises par chacun des capteurs sont supposées être encombrées de fausses alarmes. A partir d'un jeu de mesures obtenu après un certain temps d'acquisition, il s'agira de mettre au point des estimateurs des paramètres régissant le modèle cinématique de la source acoustique (position, vitesse, ...). La démarche classique de mise au point d'un estimateur en trajectographie sera donc appliquée à chaque nouvelle situation. Par des simulations, il sera possible de montrer le fonctionnement des estimateurs mis au point. Plusieurs capteurs, et, par extension, plusieurs types de réseaux seront étudiés.

Le deuxième objectif de cette thèse est davantage orienté vers un aspect théorique, mais tout en ayant des implications opérationnelles. Lors de l'étape de seuillage et de binarisation des données, la question du placement du seuil se pose. Trop haut, et l'on ne conserve plus qu'un très faible nombre de mesures. Trop bas, et la grille de mesures est complètement remplie de fausses alarmes. Il doit alors exister un seuil optimal entre ces deux extrêmes. L'optimalité étant définie au sens d'un critère, nous nous proposons de rechercher le seuil optimal au sens de l'information de Fisher. Le seuil optimal serait alors celui qui maximiserait cette information. L'implication opérationnelle est immédiate : les performances asymptotiques de l'estimateur en seraient considérablement améliorées.

Cette thèse est financée à l'aide d'un contrat CIFRE³ avec l'entreprise Naval Group⁴, dans le cadre du laboratoire commun LTISM⁵ formé avec l'IM2NP⁶ (CNRS UMR 7334), au sein de l'Université de Toulon⁷. La thématique du laboratoire commun LTISM étant centrée autour de l'information sous-marine, le sujet de cette thèse s'inscrit alors parfaitement dans ce domaine. Ce laboratoire a produit une autre thèse [Lebon, 2022] sur une période concomitante à celle réalisée dans le présent manuscrit. Les échanges récurrents et enrichissants avec ce doctorant d'alors nous ont permis de proposer des solutions conjointes à des problèmes présents sur chacun de nos sujets de doctorat.

Structure du manuscrit

La structure générique de ce manuscrit est la suivante : ce manuscrit est divisé en parties, elles-mêmes composées de différents chapitres. Les chapitres sont ensuite découpés en sections.

La première partie de cette thèse permet d'introduire les concepts de sonar passif, de trajectographie, et de trajectographie en présence de fausses alarmes. Il s'agira, dans un premier temps, de définir la chaîne de traitement de l'information en sonar passif, à travers les différentes étapes séparant l'acquisition des mesures jusqu'à l'information traitée par l'opérateur. A l'issue de ce premier chapitre, nous aurons décrit et déterminé à quels endroits (appelés "architectures" par la suite) de la chaîne de

3. Convention industrielle de formation par la recherche.

4. <https://www.naval-group.com/fr>

5. Laboratoire de traitement de l'information sous-marine. <https://www.im2np.fr/fr/node/919>

6. Institut Matériaux Microélectronique Nanosciences de Provence. <https://www.im2np.fr/fr>

7. <https://www.univ-tln.fr/>

traitement sonar nous nous situerons pour l'ensemble de cette thèse. Nous étudierons les architectures suivantes, de la plus proche des données brutes jusqu'à la plus éloignée :

- *track-before-detect* (TBD) : grille de mesures dont chaque cellule de résolution est remplie par une énergie.
- *track-after-detect* (TAD) : on ne conserve que les détections dont l'énergie est supérieure à un certain seuil. Si l'on ne binarise pas les données, on est en TAD-AI (TAD *with amplitude information*).
- piste extraite : on dispose d'une suite de plots dans le temps, composant la piste dans l'espace des mesures.

La trajectographie est possible dans chacune de ces architectures, la dernière étant la plus employée et étudiée.

Le deuxième chapitre consiste en une introduction générale de la trajectographie. Après une définition de la trajectographie, la démarche de la mise au point d'un estimateur, qui sera utilisée tout au long de la partie suivante, sera détaillée. On présentera et justifiera les différentes étapes composant cette démarche : étude de l'observabilité, étude des performances asymptotiques, choix de l'estimateur, confrontation des résultats par simulation.

Enfin, le dernier chapitre de cette première partie développe la trajectographie en environnement encombré, à travers le modèle statistique du PDA qui sera la clef de voûte de l'ensemble de cette thèse. Nous développons dans ce chapitre les aspects probabilistes et numériques associés à ce modèle, à partir des hypothèses statistiques proposées dans la littérature. A l'issue de ce chapitre, nous serons en mesure d'effectuer la trajectographie dans les architectures TAD et TAD-AI.

Les deuxième et troisième parties de cette thèse sont relativement indépendantes, mais reposent toutes deux sur la notion de trajectographie en présence de fausses alarmes. Chacune de ces parties disposera d'une introduction, présentant en détail les objectifs de la partie, les questionnements et la démarche, ainsi qu'une conclusion partielle faisant le point sur les travaux au cours de la partie.

Dans la deuxième partie de ce manuscrit, nous nous concentrons sur la trajectographie d'une source acoustique progressant dans un environnement sous-marin, à l'aide d'un réseau de capteurs. Les mesures acquises par ces derniers sont entachées de fausses alarmes. A travers plusieurs scénarios, différents types de capteurs et de réseaux, nous mettrons au point des estimateurs des paramètres cinématiques de la source en mouvement. Nous étudierons tout d'abord un réseau composé exclusivement de bouées hydrophones. Dans un deuxième temps, nous y ajouterons des antennes linéaires verticales. La démarche de la mise au point d'un estimateur sera utilisée tout au long de cette partie. Les résultats numériques présentés à la fin de chaque chapitre rendront compte du comportement de l'estimateur, comparativement aux performances asymptotiques attendues. L'étude de cette partie se veut progressive, par souci de clarté. Ainsi, des hypothèses simplificatrices seront supprimées au cours des chapitres, dans le but d'arriver à plus de réalisme dans les simulations.

La troisième partie de ce manuscrit exploite le modèle statistique du PDA dans le but de déterminer le seuil optimal de détection. Ce seuil optimal est celui qui maximiserait la quantité d'information. L'étude est menée en deux temps, en considérant à chaque fois une architecture différente de traitement de données. Dans un premier temps, nous résolvons le problème dans l'architecture TAD. L'existence du seuil optimal sera mis en évidence à l'aide de simulations numériques dans plusieurs scénarios. De la même façon, le problème sera étudié dans un deuxième temps dans l'architecture TAD-AI. Des procédures numériques et des théorèmes seront établis dans le but de déterminer le seuil optimal de détection. Il est à noter que cette partie est assez indépendante de la partie précédente, puisque ne

traitant pas spécifiquement de la trajectographie. Cependant, les résultats de cette étude pourront avoir un impact sur la trajectographie, puisque le but est d'améliorer les performances des estimateurs utilisés en trajectographie passive.

Une conclusion générale fera le bilan des travaux présentés tout au long de ce manuscrit. Des perspectives envisageables seront ensuite données, dans le but d'approfondir les recherches.

Viendront ensuite des annexes, qui présenteront certains calculs, dont le détail, s'il était présenté dans le corps du texte, nuirait à la compréhension globale des travaux.

Enfin, les références bibliographiques, sur lesquelles les travaux menés dans cette thèse se basent, seront exposées. Tout au long du manuscrit, lorsqu'il sera jugé nécessaire, des renvois vers les annexes et la bibliographie seront notifiés.

Contributions

Les travaux menés au cours de cette thèse ont donné lieu aux contributions scientifiques suivantes :

- [Payan *et al.*, 2021] PAYAN, J., LEBON, A., LANEUVILLE, D., PÉREZ, A.-C. et JAUFFRET, C. (2021). Passive target motion analysis by fusion of linear arrays and sonobuoys in a cluttered environment. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 57(6) :3941-3951.

Auparavant, un article a été présenté à la conférence CAMSAP en 2019 :

- [Payan *et al.*, 2019] PAYAN, J., JAUFFRET, C. et PÉREZ, A.-C. (2019). Maximization of the Fisher information in PDA. In *2019 IEEE 8th International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP)*, pages 11-15.

Première partie

Introduction

Description de la chaîne de traitement de l'information en sonar passif

Dans ce chapitre introductif, nous décrivons la chaîne de traitement de l'information en sonar passif. Il s'agit de l'ensemble des opérations effectuées à partir du moment où le signal est acquis, jusqu'aux informations et données envoyées à l'opérateur, ce dernier se situant à l'autre bout de la chaîne. Les objectifs à l'issue du traitement sont multiples : détection d'une source acoustique, identification et/ou classification de la source, trajectographie de la source.

Le but de ce chapitre est d'étudier les différentes étapes de cette chaîne de traitement de l'information : leur fonctionnement, les informations fournies en sortie, les traitements possibles à partir de ces données. La description schématique de cette chaîne est visible sur la figure 1.1. Pour la suite de ce chapitre, chaque section détaillera chaque étape importante de la chaîne, son fonctionnement, ainsi que les sorties possibles.

1.1 Acquisition

La source en mouvement (aussi appelée la cible ou le bruiteur en fonction du contexte) émet un son qui lui est propre. Ce son se propage dans le milieu, ici le milieu sous-marin. Il parvient ensuite aux capteurs, plongés dans le milieu. En sonar passif, on se contente d'écouter le son parvenant aux capteurs : il s'agit alors de notre seule source d'information.

Le capteur qui nous permet d'acquérir le son en provenance de la source est, de façon générale, un hydrophone. Il s'agit d'un microphone dont l'application principale est de capter les sons dans le milieu sous-marin. Plusieurs technologies existent [Lurton, 1998] : l'hydrophone peut être basé sur l'effet piézoélectrique (une variation de pression produite par l'onde acoustique génère un changement de répartition des charges électriques à la surface du matériau piézoélectrique, et donc une variation de tension), ou basé sur l'effet électromagnétique (de façon inverse à un haut-parleur : la pression sur la membrane exerce une force électromotrice, et induit un courant électrique dans la bobine). Les hydrophones utilisés couramment sont, de manière générale en sonar passif, basés sur l'effet piézoélectrique.

Les hydrophones peuvent être montés de diverses façons. La méthode la plus rudimentaire consiste à le monter sur une bouée en immergeant la partie réceptive de l'hydrophone. On peut aussi monter plusieurs hydrophones de façon régulière et linéaire : dans ce cas, la terminologie change et ce montage s'appellera une antenne linéaire. D'autres configurations peuvent exister, en fonction des besoins opé-

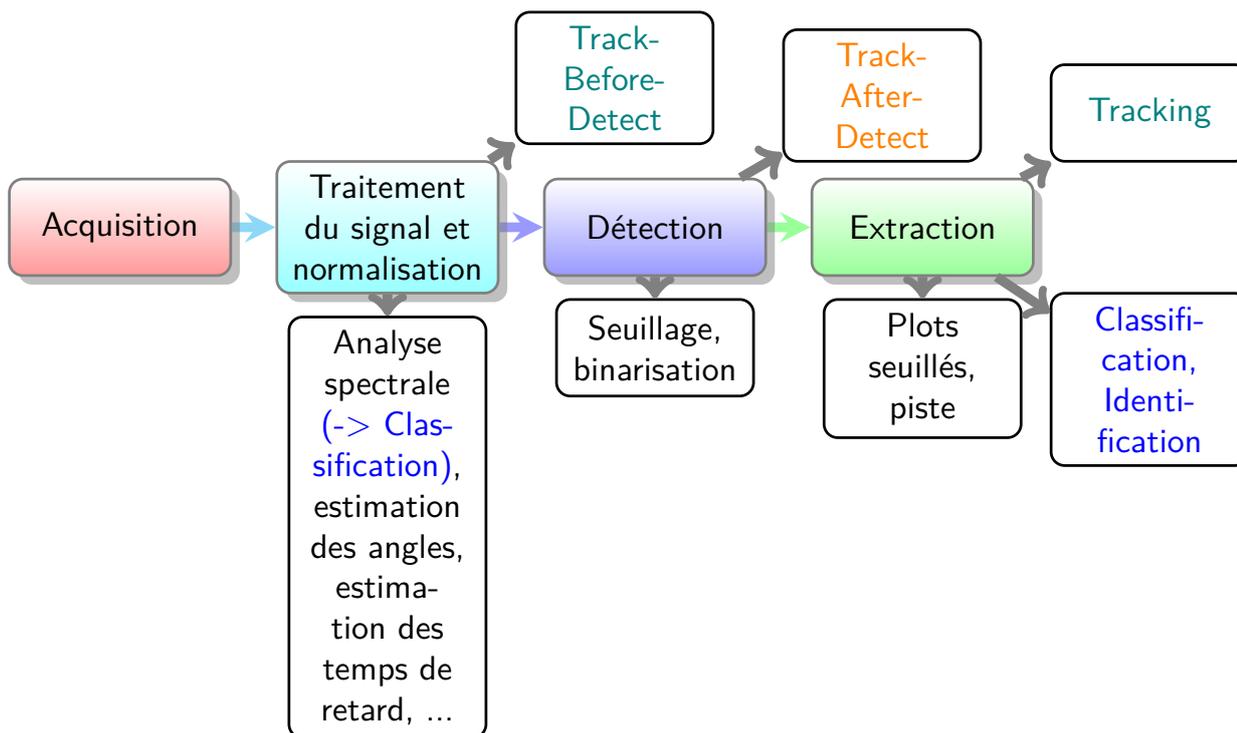


FIGURE 1.1 – Description schématique de la chaîne de traitement de l’information en sonar passif. La chaîne principale est constituée des rectangles de couleur au centre. Les rectangles supérieurs indiquent les sorties possibles pour les étapes considérées. Les rectangles inférieurs résument brièvement le fonctionnement de chaque étape.

rationnels et financiers. Pour plus d’informations concernant les hydrophones, antennes, ainsi que la terminologie utilisée, on se référera à [Urick, 1975, Lurton, 1998]. Concernant les technologies déployées et le comportement physique des capteurs, on se dirigera vers [Butler et Sherman, 2016].

1.2 Traitement du signal

Une fois le son acquis et transformé en grandeur électrique, il est numérisé pour être envoyé à une base de traitement des signaux. En fonction du type de capteurs, l’étape de traitement du signal pourra varier quelque peu.

Tout d’abord, il est possible de réaliser une analyse spectrale, dans un but de classification. La classification permet de reconnaître et d’attribuer une étiquette à la source acoustique parmi plusieurs choix [Peyvandi *et al.*, 2011, Abraham, 2019]. Il est alors possible de distinguer un bâtiment de commerce d’une frégate, par exemple, en comparant les densités spectrales de puissances qui sont propres à chaque source acoustique. Comme nous le verrons plus tard, la classification est aussi réalisable à la fin de la chaîne de traitement sonar. Dans ce manuscrit, la question de la classification et de l’identification ne nous importera pas. Pour plus de renseignements sur la classification de motifs de manière générale, on se référera notamment à [Duda *et al.*, 2000]. Concernant la classification en acoustique sous-marine en particulier, il sera utile de consulter les références données dans [Peyvandi *et al.*, 2011].

L’analyse spectrale est aussi nécessaire dans le but d’analyser le bruit de fond, aussi appelé bruit

de mer [Wenz, 1962]. Dans cet article, il est montré que la densité spectrale de puissance du bruit de mer est extrêmement dépendante des conditions météorologiques, à la fois à l’extérieur et à l’intérieur de l’eau. Le spectre est donc variable en fonction de l’endroit où est effectuée l’acquisition et est non-stationnaire dans le temps. On procède alors à la normalisation. Cette étape est décrite notamment dans [Knight *et al.*, 1981, Plumejeaud *et al.*, 1983, Ywanne et Martinerie, 1995]. La normalisation regroupe un ensemble d’opérations dont le but est de rendre le signal le plus stationnaire possible, à la fois temporellement et fréquentiellement, mais en altérant le moins possible le rapport signal-sur-bruit. Un signal d’intérêt sera alors plus facilement discernable, puisque le bruit de fond sera uniforme et stationnaire.

L’étape de traitement du signal en elle-même dépend du type de capteurs utilisé. Si l’on dispose de simples hydrophones, le traitement le plus classique consiste en l’estimation des différences de temps d’arrivée (*time differences of arrival* ou TDOA, ou estimation des temps de retard) relativement à un capteur de référence [Carter, 1981, Lacoume, 2007]. Comme les capteurs ne sont pas placés à des endroits identiques, le son émis par la source met alors des temps différents pour parvenir aux capteurs. A l’aide de l’intercorrélation (ou corrélation croisée) entre deux signaux, il est possible de quantifier leur similitude. L’intercorrélation sera effectuée sur les deux axes temps et fréquence. Le décalage en temps nous informe sur l’emplacement de la source. Le décalage en fréquence nous informe sur la vitesse radiale de la source, grâce à l’effet Doppler. Pour plus d’informations sur l’utilisation du Doppler lors de l’estimation des TDOA, on se référera à [Sauvet-Carof, 1989, Sauvet-Carof et Carof, 1994]. L’estimation des TDOA est évidemment soumise à une erreur. Des méthodes pour quantifier la précision sur cette estimation sont données dans [Hahn et Tretter, 1973, Hassab et Boucher, 1981].

Si l’on dispose d’antennes, le traitement le plus courant est la formation de voies [Van Trees, 2004b]. Pour chaque hydrophone composant l’antenne, on joue sur les amplitudes et sur les phases du signal reçu dans le but de trouver la direction d’arrivée de la source acoustique. Ainsi, nous obtenons une estimation des angles d’arrivée entre la source et le capteur.

A l’issue de l’étape de traitement de signal, on dispose d’une grille de mesures, dont toutes les cellules de résolution sont remplies d’une quantité d’énergie associée. Un exemple de grille de détections est donné à la figure 1.2b. Il est possible de réaliser la trajectographie de la source à partir de ces mesures. On dira alors que la trajectographie s’effectue dans l’architecture *Track-Before-Detect* (TBD) [Boers *et al.*, 2007, Davey *et al.*, 2007, Lepoutre *et al.*, 2016, Davey et Gaetjens, 2018]. La trajectographie s’effectue dans cette architecture souvent lorsque le rapport signal-sur-bruit est faible. Il n’y a pas d’étape de détection (voir section suivante) pour déterminer la présence ou non d’une source : le rapport signal-sur-bruit étant extrêmement faible, l’étape de détection ne serait pas performante.

1.3 Détection

L’étape de détection consiste dans le choix et placement d’un seuil, dans le but de ne garder que les données dont l’énergie est supérieure à ce seuil [Kay, 1998]. Cela a pour effet de supprimer une certaine quantité de données à traiter, et donc d’alléger le temps de calcul des algorithmes. En plaçant un seuil de détection de la sorte (voir la figure 1.2c), on se retrouve en présence d’une grille de mesures présentant des fausses alarmes (dues au bruit de fond) et des “vraies” détections (provoquées par la source acoustique). Le choix du seuil de détection est une question cruciale, comme on le verra dans la partie III. Plusieurs techniques existent alors. Il est par exemple fixé relativement à une probabilité de fausses alarmes donnée à un instant précis [Lehmann *et al.*, 2005]. Il peut aussi être imposé selon

la technique du *constant false alarms rate* (CFAR), dans laquelle le seuil varie dans le but de rendre la probabilité de fausses alarmes constante au cours du temps¹ [Singer et Sasaki, 1998].

A la suite du seuillage, deux techniques sont alors envisageables. On peut soit binariser les données, c'est-à-dire ignorer l'information de l'énergie associée à chaque détection retenue (voir figure 1.2e); ou alors on peut la conserver (voir 1.2d). La fonction trajectographie peut alors s'effectuer dans l'une ou l'autre de ces techniques. Si les données sont binarisées, on se situera en architecture *Track-After-Detect* (TAD) [Singer et Sasaki, 1998]. Sinon, on se situera en architecture *Track-After-Detect with Amplitude Information* (TAD-AI) [Blanding et al., 2007a, Blanding et al., 2007b].

1.4 Extraction

Une fois la grille de détection obtenue, il est possible d'effectuer l'extraction de la piste. Cette étape consiste à associer temporellement des détections issues et représentatives de la source acoustique, parmi l'ensemble des détections. Ainsi, on se trouve en présence d'une piste par source, représentée par une suite de plots seuillés à travers le temps. C'est à l'issue de l'étape d'extraction que les plots seuillés sont associés chacun à une piste labellisée (association plot-à-piste) [McIntyre et Roger, 1993]. Un exemple de mesures obtenues après extraction est représenté à la figure 1.2f.

Historiquement, ces méthodes ont été mises au point dans le but d'avoir moins de données à traiter par les centrales numériques, donc d'alléger les calculs et raccourcir le temps d'exécution [Bouvet, 1992]. Les méthodes réalisant l'extraction de la piste sont peu recensées, à notre connaissance, dans la littérature ouverte. Principalement, on trouvera des méthodes utilisant les chaînes de Markov cachées (*Hidden Markov Models*, ou HMM) [Bethel et Paras, 1994, Paris et Jauffret, 2003]. Une extension dans le cas multi-capteurs et multi-sources est présentée dans [Bethel et Paras, 1998]. Un résumé d'autres méthodes existantes, incluant notamment des techniques de traitement d'images et d'intelligence artificielle, sont recensées dans [Di Martino, 1995] et dans ses références. De manière générale, l'extracteur "performant" sera celui qui modifie le moins possible les données en entrée². Il se devra alors de pouvoir retrouver au mieux les vraies détections, celles issues de la source. Cette opération n'est pas une tâche aisée, justifiant donc la multiplicité des méthodes mises au point pour arriver à l'extraction.

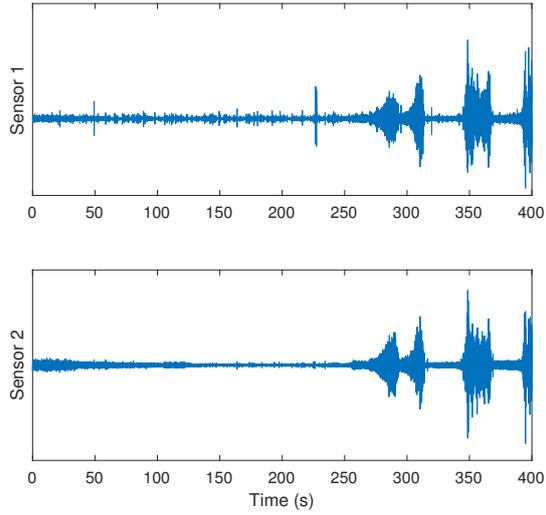
A l'issue de l'extraction, on se retrouve en environnement "propre", puisque les fausses alarmes ont majoritairement disparu. La trajectographie est possible dans cet environnement, c'est ce qui est fait classiquement dans la littérature, et sera présenté dans le chapitre suivant. Une partie de classification est de nouveau réalisable : en effet, on disposera, à l'issue de la trajectographie, d'informations concernant la position et la vitesse de la source, permettant d'en déduire des caractéristiques quant à son type.

1.5 Conclusion

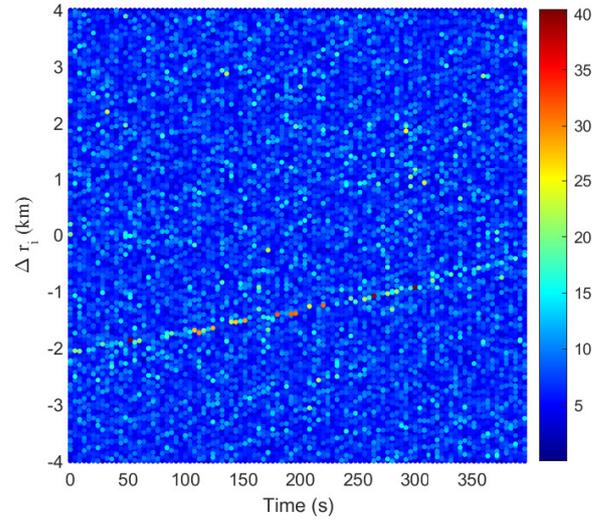
Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes étapes effectuées dans la chaîne de traitement de l'information en sonar passif. De l'acquisition des signaux par les capteurs à la fonction trajectographie, chaque étape a été décrite brièvement, à la fois dans son fonctionnement et dans son rôle pour le traitement de l'information.

1. L'étape de normalisation permet, en théorie, de garder un seuil de détection fixe au cours du temps, du fait du signal rendu stationnaire.

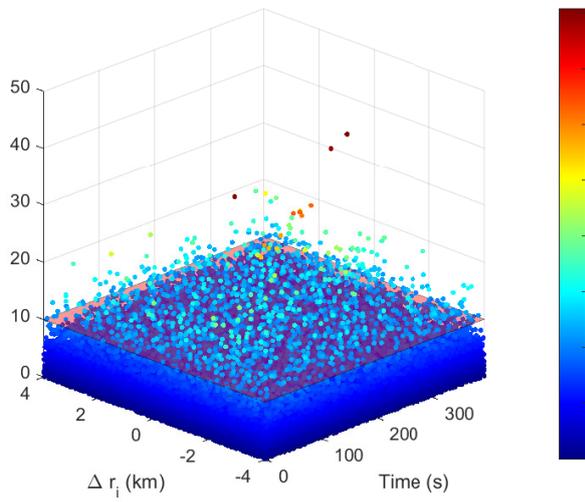
2. Certaines méthodes basées sur le traitement d'images sont réputées pour justement modifier les données d'entrée, à l'aide de filtres appliqués, comme les détections de contours.



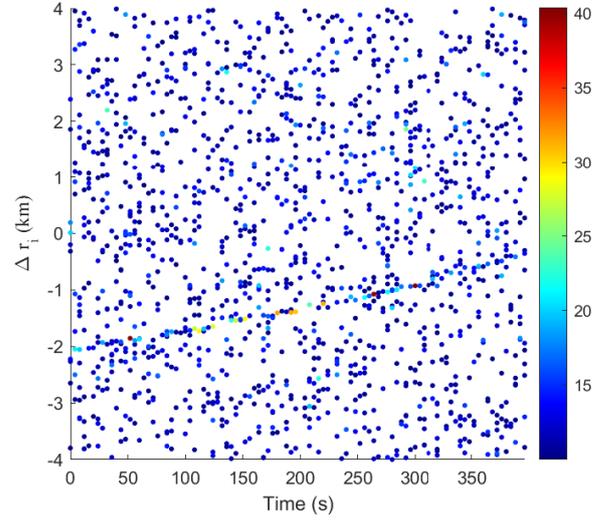
(a) Mesures brutes



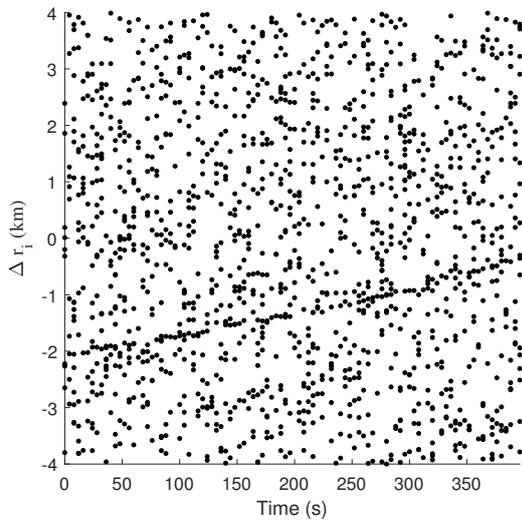
(b) Architecture TBD



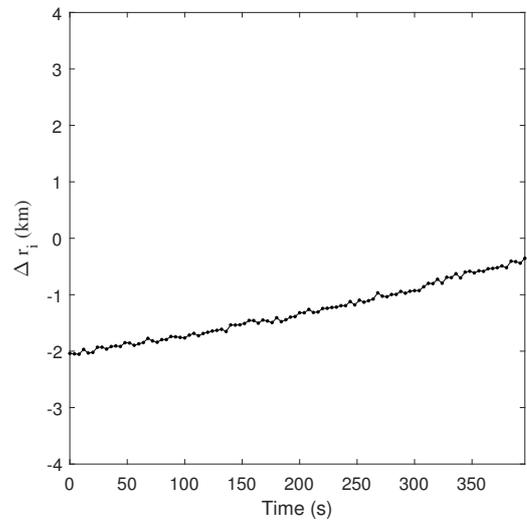
(c) TBD avec seuil de détection (plan rouge)



(d) Architecture TAD-AI



(e) Architecture TAD



(f) Piste extraite

FIGURE 1.2 – Mesures obtenues pour les différentes architectures

Plusieurs architectures ont été décrites lors de ce chapitre. L'architecture TBD traite des données brutes en sortie du traitement du signal. Dans l'architecture TAD-AI, un seuil de détection est placé sur les données brutes, et l'on conserve les détections dont l'énergie est supérieure au seuil, ainsi que cette même énergie. Dans l'architecture TAD, le seuil est utilisé de la même façon que précédemment, mais on ne conserve cette fois pas l'énergie associée. Enfin, en environnement propre, la piste correspondant à la source acoustique est extraite et est constituée d'une succession temporelle de plots seuillés et associés entre eux. La trajectographie est possible dans chacune des architectures établies. Pour la suite de ce manuscrit, nous nous concentrerons sur les architectures TAD et TAD-AI.

Introduction à la trajectographie

Dans ce chapitre, nous détaillons et expliquons le concept de la trajectographie. Après une définition initiale, nous verrons les différentes étapes successives pour mettre au point un système de trajectographie.

2.1 Définitions

Commençons par le début : qu'est ce que la trajectographie ? Pour répondre à cette question, une définition semble adéquate pour introduire ce chapitre. Cette définition est tirée de [Larousse, sd] :

Trajectographie : Ensemble des méthodes de calcul et des techniques permettant de prévoir et de déterminer la trajectoire d'un engin spatial, d'un missile.

Cette définition nous donne un premier aperçu du domaine vaste qu'est la trajectographie. Il s'agira donc de déterminer la trajectoire, donc le mouvement d'un objet qui se déplace. Cependant, nous nous plaçons dans cette thèse dans le domaine de l'acoustique sous-marine. Il n'est donc pas question d'engins spatiaux ici. De plus, un élément semble manquant dans cette définition : à partir de quoi sont effectués les calculs permettant de réaliser la trajectographie ? Comment sont acquises les mesures ?

Il y a deux façons principales d'effectuer la trajectographie. La trajectographie est dite soit "active" [Pillon, 2017], soit "passive" [Pillon et Jauffret, 2005, Jauffret et Pillon, 2008]. Dans la trajectographie active, le capteur acquérant les mesures émet un signal. Ce signal se propage dans le milieu et est réfléchi par l'objet en mouvement, dont une partie parvient de nouveau à ce même capteur. C'est cette réflexion qui va générer les mesures permettant d'effectuer la trajectographie. Dans la trajectographie passive, les capteurs n'émettent aucun signal et se contentent "d'écouter" l'environnement (voir le chapitre précédent). C'est le résultat de cette écoute qui sert de mesure pour réaliser la trajectographie¹. Dans cette thèse, nous nous plaçons exclusivement dans le contexte de la trajectographie passive. La définition initiale peut alors être complétée et précisée en ajoutant les notions de passivité des capteurs, ainsi que de la notion de mesures par [Pillon et Jauffret, 2005, Jauffret et Pillon, 2008] :

1. Il est à noter qu'un troisième type composite de trajectographie existe : le multi-statisme. Dans cette situation, un capteur est actif et émet un signal, et un ou plusieurs autres capteurs sont passifs et écoutent les réflexions de ce signal sur la source en mouvement. A ce sujet, voir [Yang *et al.*, 2018, Schoenecker *et al.*, 2014].

Trajectographie passive : *Méthode utilisant les mesures d'un ou de plusieurs senseurs passifs permettant d'estimer la position géographique d'une source en mouvement.*

On trouve dans cette définition la notion “d'estimation”, c'est-à-dire la détermination au plus proche de la vérité, de la vraie position de la cible. Une autre définition se trouve dans [Bouvet, 1992], en donnant des exemples de paramètres à estimer :

Les méthodes de trajectographie passive ont pour but l'estimation de la position (azimut, distance, immersion) et de la cinématique (vitesse, cap) de la cible à partir de l'accumulation de mesures au cours du temps.

2.2 Contexte initial

Détaillons désormais la symbolique mathématique associée à un tel problème. Le formalisme est très inspiré de ce que l'on peut trouver dans le domaine de l'automatique notamment. On appellera dans la suite de ce manuscrit “composantes cinématiques de la source” l'ensemble des paramètres définissant la trajectoire et le mouvement de cette source. Il peut s'agir alors de sa position initiale, sa profondeur (aussi appelée immersion), sa vitesse, sa vitesse radiale, son cap, ... Tous les paramètres utiles et représentatifs de la trajectoire de la source sont regroupés ensemble dans un vecteur (dit “vecteur d'état”), que l'on nomme X .

La situation est la suivante : le temps est échantillonné à un pas d'échantillonnage Δt . A chaque instant $t_k = (k-1)\Delta t$, $k \in \mathbb{N}$, on définit le vecteur d'état X_k comme étant le vecteur d'état représentant la source à cet instant précis. Pour faire le lien entre X et X_k , on utilise le “modèle d'état”, représenté sous une fonction g_k . Cette fonction est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} g_k : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ X &\rightarrow X_k \triangleq g_k(X, \nu_k) \end{aligned} \tag{2.1}$$

en appelant d la dimension du vecteur d'état et ν_k le bruit d'état. Cette fonction représente donc la façon dont se comporte la source, l'objet en mouvement à chaque instant t_k . On peut alors caractériser son mouvement, qu'il soit un mouvement rectiligne uniforme (MRU : se déplaçant en ligne droite à vitesse constante en norme et direction), en mouvement uniformément accéléré (MUA), en mouvement circulaire uniforme (MCU), ... Cette fonction dépend alors du comportement *a priori* de la source en mouvement. L'état est bruité par un bruit d'état aléatoire ν_k .

La mesure s_k est l'observation bruitée d'une fonction connue h_k du vecteur d'état X_k . Donc $s_k = h_k(X_k, \varepsilon_k)$. La fonction h_k , appelée aussi “modèle de mesure”, est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} h_k : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R} \\ X_k &\rightarrow s_k \triangleq h_k(X_k, \varepsilon_k) \end{aligned} \tag{2.2}$$

en appelant ε_k le bruit aléatoire de mesure. Autrement dit, on observe la manifestation du vecteur d'état à travers une fonction connue, et cette observation est bruitée de façon aléatoire et inconnue, rendant impossible, lors de la trajectographie, l'accès au vecteur d'état véritable. On comprend donc l'intérêt de la notion d'estimation.

La fonction h_k représentant l'observation des paramètres, elle est alors intrinsèquement liée aux types de capteurs utilisés dans le système de surveillance. En effet, les capteurs utilisés en trajectographie peuvent acquérir plusieurs types de mesures [Pillon et Jauffret, 2005, Jauffret et Pillon, 2008] : des angles ou cosinus d'angle, des différences de temps d'arrivée relativement à un capteur de référence, des fréquences, ... En fonction du système de surveillance mis à l'étude, la fonction h_k dépendra totalement de ce système, et sera toujours supposée déterministe et connue.

Quelles sont les propriétés du bruit ν_k ? Le bruit d'état est lié à l'imprécision commise par la source à maintenir sa propre trajectoire. En effet, de façon réaliste, la source se déplace dans un milieu, souvent propulsée par un moteur. Il est alors impossible de maintenir avec exactitude et certitude un cap, une vitesse, ... Ce bruit modélise donc cette erreur due à la physique de la source. Dans la suite de ce manuscrit, nous négligerons le bruit d'état. Le comportement de la source est alors purement déterministe.

Quelles sont les propriétés du bruit ε_k ? Le bruit de mesure est en partie lié aux capteurs utilisés, à leurs propriétés matérielles. De façon usuelle, il est courant de supposer que ε_k suit une loi Gaussienne centrée, de variance σ_k^2 . De plus, le bruit est additif, et les réalisations sont indépendantes au cours du temps. Ces hypothèses seront supposées appliquées dans ce manuscrit. Sous ces conditions :

$$s_k = h_k(X_k) + \varepsilon_k \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_k \sim \mathcal{G}(0, \sigma_k^2) \quad (2.4)$$

Comment sont gérées ces mesures au cours du temps par un opérateur ? Il existe plusieurs façons de gérer les mesures. La première est une accumulation en amont de la trajectographie. Rappelons que la définition de [Bouvet, 1992] fait référence à *l'accumulation de mesures au cours du temps*. Après un temps d'acquisition, l'opérateur a collecté K mesures et forme un vecteur de mesures $s = (s_1, \dots, s_K)$. C'est l'ensemble de ce vecteur de mesures qui sert à effectuer la fonction trajectographie. On possède donc un jeu de données, aussi appelé *batch*. Une autre solution consiste à effectuer une trajectographie en temps réel. Dans cette méthode, chaque échantillon s_k , une fois acquis, sert à actualiser la fonction trajectographie, sachant les mesures passées (s_1, \dots, s_{k-1}) . Si l'on dispose du système suivant :

$$\begin{cases} X_k = l_k(X_{k-1}) + \nu_k \\ s_k = h_k(X_k) + \varepsilon_k \end{cases} \quad (2.5)$$

il est alors possible de procéder à l'estimation paramétrique à l'aide du filtre récursif de Kalman étendu (car l_k et/ou h_k sont des fonctions non-linéaires la plupart du temps). Pour la suite de ce manuscrit, nous supposons être en possession d'un jeu de données acquis sur une certaine durée, donc un *batch*.

Avec toutes ces considérations, nous pouvons conclure sur le but de la trajectographie passive à partir d'un jeu de mesures. Uniquement à partir des observations bruitées (s_1, \dots, s_K) , il s'agira d'obtenir un estimé \hat{X} du vecteur d'état vrai X . Mais avant de réaliser la trajectographie de la source, plusieurs questions doivent être posées. C'est tout l'objectif des sections suivantes, qui détailleront la mise au point d'un système de trajectographie.

2.3 Observabilité

La première étape lors de la mise au point d'un système de trajectographie est l'étude de l'observabilité du système [Jauffret, 2007, Pillon et Jauffret, 2005]. L'observabilité du système permet de

garantir l’unicité de la solution issue de l’estimation. La question est la suivante : en supposant un système sans aucun bruit, les mesures obtenues permettent-elles de retrouver le vecteur d’état vrai X de façon unique ? Si la réponse est oui, alors le système est observable. Mathématiquement, cela se traduit de la façon suivante :

$$\forall X' \in \mathbb{R}^d, \{h_k(X') = h_k(X)\} \Rightarrow \{X' = X\} \quad (2.6)$$

Si le système est inobservable, alors il y a des ambiguïtés, c’est-à-dire des sources représentées par des vecteurs d’état différents de X qui peuvent générer les mêmes mesures. On est en présence de ce que l’on appelle des “sources fantômes” [Pillon et Jauffret, 2005, Jauffret et Pillon, 2008]. Il devient alors impossible de retrouver la vraie source. Dans ce cas, il convient d’étudier au mieux les ambiguïtés, et leur lien avec la source et/ou les capteurs.

L’étude de l’observabilité n’est pas toujours aisée, du fait de la non-linéarité très courante des modèles de mesure utilisés. De plus, l’observabilité étant directement dépendante du vecteur d’état et du type de mesures acquises, l’étude devient spécifique à chaque système². Cela donne alors une littérature assez conséquente sur ce sujet. On citera, à titre non exhaustif, les quelques références suivantes.

L’étude menée dans [Nardone et Aidala, 1981] conclut à la nécessité d’une manœuvre de l’observateur dans le but d’être observable, dans le cas où l’on dispose de l’angle séparant la source de l’observateur et où la source se déplace en MRU. Les travaux sont étendus dans [Hammel et Aidala, 1985] à une situation tridimensionnelle. Toujours dans la situation de mesures d’angles seuls, [Payne, 1989] fournit des types d’accélération de l’observateur rendant inobservable le problème. L’observabilité dans le cas de mesures d’angles seuls est un sujet très prolifique et toujours d’actualité, comme peut en attester [Jauffret et Pillon, 1996], ainsi que ses nombreuses références. L’observabilité inspire aussi aux auteurs un traitement plus théorique, comme on peut le voir dans [Rothenberg, 1971, Jauffret, 2007]. Dans [Clavard, 2012], l’auteur résout le problème d’observabilité dans le cas où la source est en mouvement circulaire uniforme. Les travaux menés dans [Pérez et Jauffret, 2020] montrent les conditions d’observabilité dans le cas où l’on dispose de différences de temps d’arrivée relativement à un capteur de référence, et où la cible se déplace en MRU. Dans [Lebon, 2022], l’auteur étudie des problèmes d’observabilité dans le cas où les capteurs collectent des mesures générées par les différents trajets (trajets direct et réfléchi) entre la source et les capteurs.

2.4 Performances asymptotiques

Une fois l’observabilité du système démontrée, il convient de travailler sur les performances asymptotiques de ce système. Les performances asymptotiques évaluent la matrice de covariance minimale, en dessous de laquelle la matrice de covariance de n’importe quel estimateur non-biaisé ne pourra descendre. L’outil utilisé pour calculer cette matrice minorante est la Borne de Cramér-Rao (BCR) [Kay, 1993, Van Trees, 2004a, Van Trees et Bell, 2007]. L’existence de la BCR est liée à l’existence d’une autre matrice : la matrice d’information de Fisher (FIM) [Van Trees, 2004a, Kay, 1993].

La FIM est définie de la façon suivante, pour un instant t_k précis :

$$F_k = \text{E} \left[\nabla_X \log(L(X_k|s_k)) \nabla_X^T \log(L(X_k|s_k)) \right] \quad (2.7)$$

2. On entend par “système” le regroupement du comportement de la cible et du type de mesures.

où $L(X_k|s_k)$ est la vraisemblance^{3 4} de l'état sachant la mesure à l'instant t_k . Si l'on dispose d'un jeu de K mesures, et que celles-ci sont indépendantes, alors :

$$F = \sum_{k=1}^K F_k \quad (2.8)$$

La BCR des estimateurs sans biais B est ensuite donnée simplement par :

$$B = F^{-1} \quad (2.9)$$

dans la mesure où F est inversible. Sur cette matrice B , il est possible de connaître les écarts-types asymptotiques associés à chacune des composantes. Pour cela, il suffit de prendre la racine carrée des éléments diagonaux de B . Ainsi, on sait quel sera l'écart-type minimal après estimation pour chaque composante du vecteur d'état. Si une composante présente un écart-type extrêmement élevé, qui pourrait sembler absurde au regard de la physique et de la réalité de la situation, on dira que cette composante n'est pas estimable.

2.5 Choix d'un estimateur

Il est désormais temps de choisir un estimateur. Le rôle de l'estimateur est de fournir un état estimé \hat{X} (évaluation de l'état inconnu) à partir des mesures fournies en entrée. Plusieurs estimateurs ont été mis au point dans la littérature :

- Le maximum de vraisemblance : comme son nom l'indique, cet estimateur fournit l'estimé qui maximise la vraisemblance de l'état à partir des mesures :

$$\hat{X} = \arg \max_X L(X|s_1, \dots, s_K) \quad (2.10)$$

Si les mesures sont indépendantes, on a alors :

$$\hat{X} = \arg \max_X \prod_{k=1}^K L(X|s_k) \quad (2.11)$$

Dans certains cas, cet estimateur a une forme analytique, mais bien souvent cela n'est pas le cas. L'estimation est alors effectuée par une procédure numérique itérative, de type Gauss-Newton, Newton-Raphson [Dennis, 1984], ou des méthodes dérivées de celles-ci⁵.

- Les moindres carrés [Sorenson, 1970] : il s'agit ici de trouver \hat{X} qui réduit au plus l'écart quadratique entre les mesures et le modèle de mesure, soit :

$$\hat{X} = \arg \min_X \sum_{k=1}^K (s_k - h_k(X_k))^2 \quad (2.12)$$

si l'on dispose de mesures indépendantes au cours du temps. Si l'on dispose d'une information a priori sur le bruit (par exemple, sa variance), il est possible d'effectuer des moindres carrés pondérés, pour tenir compte de l'influence de chacune des mesures. Il est à noter que cette méthode est un cas particulier du maximum de vraisemblance, dans le cas où le bruit est

3. Le symbole "log" désigne dans ce manuscrit le logarithme népérien.

4. Nous utilisons la notation introduite dans [Mendel, 1995].

5. Certaines de ces méthodes dérivées seront détaillées dans le chapitre suivant.

additif, gaussien et centré.

- Méthode des moments : il s’agit ici d’égaliser les moments théoriques avec les moments empiriques. Ainsi, on obtient un système d’équations, dont il sera possible d’extraire un estimé \hat{X} .

D’autres méthodes plus particulières existent mais ne seront pas détaillées ici. Dans la suite de ce manuscrit, nous utiliserons l’estimateur du maximum de vraisemblance.

2.6 Simulation et confrontation des résultats

Dans la démarche de conception d’un estimateur en trajectographie, il est nécessaire, à la fin, de tester le bon fonctionnement de l’estimateur mis en œuvre. Pour cela, nous procédons à l’estimation sur des données simulées numériquement. Cela nous permet de comparer les résultats obtenus à la vérité terrain. Dans le but d’éprouver les caractéristiques principales de l’estimateur (le biais et la covariance), il est nécessaire de procéder à un grand nombre d’estimations dans les lots de mesures simulées : c’est la méthode de Monte Carlo.

Un jeu de mesures $s = (s_1, \dots, s_K)$, réalisation du vecteur aléatoire $S = (S_1, \dots, S_K)$ nous donne un estimé \hat{X} . En itérant ce processus N fois, c’est-à-dire en estimant le vecteur d’état à partir de nouvelles réalisations du vecteur aléatoire S , nous obtenons N vecteurs d’état estimés $\hat{X}_i, i = 1, \dots, N$. Pour peu que N soit suffisamment grand, il est alors possible de calculer de façon réaliste les deux premiers moments de l’estimateur :

- Sa moyenne est donnée par :

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{X}_i \quad (2.13)$$

- Sa matrice de variance-covariance est donnée par :

$$R = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [\hat{X}_i - \bar{X}] [\hat{X}_i - \bar{X}]^T \quad (2.14)$$

On dit qu’un estimateur est “efficace” s’il est sans biais ($E(X) = X$) et que sa matrice de variance-covariance atteint la borne de Cramér-Rao ($COV(X) = B$). Dans les systèmes non-linéaires, l’espérance mathématique et la matrice de variance-covariance de l’estimateur ne sont pas atteignables par le calcul. On se contente alors des moyennes (\bar{X}) et de la matrice de variance-covariance empirique (R). Dans le but de vérifier empiriquement l’efficacité de l’estimateur, on utilisera le test du NEES⁶ [Bar-Shalom et Fortmann, 1988]. Ce test se base sur la remarque suivante : la variable aléatoire $Y_i = [\hat{X}_i - X]^T B^{-1} [\hat{X}_i - X]$ suit une loi du χ_d^2 (chi-deux à d degrés de liberté, d étant la dimension du vecteur d’état). On appellera Y_i le NEES. Par définition de la loi du χ_d^2 , on a que $E(Y_i) = d$ et $\text{Var}(Y_i) = 2d$. Or, on dispose de N réalisations de Y_i . Par application du théorème central limite⁷, il nous est possible de donner un intervalle de confiance à 95%, centré sur d , de la valeur moyenne empirique du NEES $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$. Si la valeur moyenne du NEES appartient à l’intervalle $\left[d - 2\sqrt{\frac{2d}{N}}; d + 2\sqrt{\frac{2d}{N}} \right]$, alors on en déduit que l’estimateur est efficace. Sinon, cela signifiera que l’estimateur est biaisé et/ou que sa matrice de covariance est supérieure à la BCR.

6. *Normalized Estimation Error Squared.*

7. Pour N très grand, par exemple $N = 200, N = 500, \dots$

Il est à noter que si un estimateur est efficace, alors il s'agit d'un estimateur au maximum de vraisemblance [De Raully, 1966]. Cependant, l'inverse n'est pas toujours vrai.

2.7 Conclusion

La trajectographie passive regroupe l'art et la manière d'estimer de façon paramétrique la position d'une source ainsi que sa cinématique, à partir de mesures acquises au cours du temps par un ou plusieurs capteurs passifs. L'estimation consiste à évaluer le vecteur d'état à partir des mesures bruitées. Dans le but de réaliser l'étude d'un système de trajectographie, plusieurs étapes doivent être respectées. Ce sont ces étapes qui constituent notre démarche pour la suite de ce manuscrit, et plus particulièrement pour la deuxième partie :

- Premièrement, il est nécessaire d'étudier l'observabilité de la source dans le système. L'observabilité permet de garantir l'unicité du vecteur d'état obtenu après estimation. Si le système est inobservable, il est important de savoir dans quelle mesure il l'est, et donc il faut connaître les ambiguïtés (sources fantômes) qui existent et pourront fausser l'estimation.
- On étudiera ensuite les performances asymptotiques, c'est-à-dire la matrice de covariance minimale en dessous de laquelle la matrice de covariance d'un estimateur non biaisé quelconque ne pourra descendre. L'outil utilisé pour mener cette étude est la matrice d'information de Fisher, ainsi que son inverse, la borne de Cramér-Rao. C'est cette dernière qui nous donnera les performances asymptotiques.
- Il faut ensuite procéder au choix de l'estimateur. Pour le reste de ce manuscrit, nous utiliserons l'estimateur au maximum de vraisemblance.
- Enfin, il faut confronter l'estimateur aux données, et donc éprouver son comportement à l'aide de simulations de Monte Carlo. De cette façon, il sera possible d'observer le comportement asymptotique de l'estimateur à travers un grand nombre de réalisations. Cela nous permettra de conclure quant à l'efficacité ou non de l'estimateur, à travers l'étude du biais, ainsi que de sa matrice de variance-covariance. Le test du NEES nous permet d'évaluer simplement l'efficacité de l'estimateur.

Introduction au modèle du Probabilistic Data Association (PDA)

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle statistique du *probabilistic data association* (PDA), qui est la clef de voûte de notre étude. Tout d’abord, les arguments motivant le choix et l’utilisation de ce modèle seront présentés. Ensuite, nous aborderons les hypothèses statistiques liées à ce modèle. Nous verrons les aspects numériques et algorithmiques utilisés pour réaliser l’estimation des paramètres d’intérêt. La FIM dans le modèle du PDA sera ensuite détaillée, ainsi que le test d’acceptation de l’estimé.

3.1 Motivations et historique

Dans une situation idéale, les données disponibles sont toutes la manifestation de la cible. On est alors en environnement dit “propre”. D’un point de vue de la chaîne de traitement de l’information sonar, on se situe donc après l’étape d’extraction de la piste, cette dernière étape étant supposée parfaite, la grille de mesures ne comportant que des “bonnes” détections.

Dans une situation réaliste, une étape de détection est appliquée aux mesures brutes après traitement du signal (voir le premier chapitre). Cette étape est classiquement liée à un seuillage sur l’énergie des mesures, et peut-être suivie ou non d’une binarisation. Du fait du bruit de fond présent lors de la trajectographie (bruit de mer, ...), on se situe en environnement dit “encombré”. En effet, des fausses alarmes sont désormais présentes et constituent l’encombrement, ou clutter. La trajectographie est alors réalisée en utilisant le modèle statistique du PDA [Bar-Shalom et Tse, 1975, Bar-Shalom et Fortmann, 1988, Jauffret et Bar-Shalom, 1990]. En effet, le modèle prend en compte la présence de fausses alarmes, ainsi qu’une probabilité de détection de la cible non-unitaire. Il est alors possible d’estimer les paramètres d’intérêt de la cible lorsque les vraies détections sont noyées dans les fausses alarmes et n’apparaissent pas sûrement à chaque instant. Comme on le verra plus en détail dans la section suivante, ce modèle se base sur le théorème des probabilités totales pour établir la vraisemblance de l’état connaissant les mesures. Une détection est donc soit une fausse alarme, soit une détection provoquée par la cible, mais ne peut pas être les deux à la fois. Ces événements sont mutuellement exclusifs. De plus, la cible ne peut déclencher au plus qu’une seule détection à un instant donné.

Historiquement, la première méthode du PDA mise au point était une méthode récursive basée sur le filtre de Kalman, appelée *probabilistic data association filter* (PDAF) [Bar-Shalom et Tse, 1975, Bar-

[Shalom et Fortmann, 1988]. Cette méthode permettait donc l'estimation des paramètres en temps réel. Cependant, le PDAF était très sensible à l'initialisation et pouvait diverger très vite. L'idée de traiter les données en lot (batch) est apparue par la suite dans [Jauffret et Bar-Shalom, 1990]. L'estimation est alors réalisée selon la méthode du maximum de vraisemblance. Cette méthode porte le nom de ML-PDA (PDA *with Maximum Likelihood*) [Jauffret et Bar-Shalom, 1990, Jauffret, 1993, Ciunzio *et al.*, 2014]. Le ML-PDA permet la construction d'estimateurs efficaces, c'est-à-dire sans biais et dont la matrice de variance-covariance atteint la BCR [Jauffret et Bar-Shalom, 1990, Jauffret, 1993]. Une variante du modèle du ML-PDA dans le cas où l'on dispose possiblement de points aberrants est développée dans [Jauffret et Bar-Shalom, 1993].

Plus tard, une extension du ML-PDA utilisant l'information de l'énergie associée à chaque détection a été mise au point [Kirubarajan et Bar-Shalom, 1996, Kirubarajan *et al.*, 2001]. L'information apportée par l'énergie permet de réaliser l'estimation des paramètres dans des cas où le rapport signal-sur-bruit est extrêmement faible. Il est montré dans [Kirubarajan et Bar-Shalom, 1996, Kirubarajan *et al.*, 2001] que l'estimation ne serait pas efficace si l'on ne considérait pas les énergies associées, toutes choses étant égales par ailleurs. La considération des détections associées à leur énergie est utile dans les cas où le seuil de détection permet de fixer une probabilité de fausses alarmes relativement faible (inférieure à 0.1), et quand le SNR est faible lui aussi.

Il est à noter que d'autres modèles statistiques et méthodes existent dans la littérature pour traiter la trajectographie en présence de fausses alarmes. C'est notamment le cas du *probabilistic multi-hypothesis tracking* (PMHT) [Streit et Luginbuhl, 1995]. La formulation du problème dans le PMHT diffère quelque peu de celle du PDA. En effet, là où le PDA suppose une exclusivité des événements (une détection est soit une fausse alarme, soit une détection issue de la cible), le PMHT ne s'encombre pas de telles considérations, et une détection peut avoir une double appartenance. De plus, plusieurs détections peuvent être attribuées à la même cible, chose impossible dans le PDA. Cela peut simplifier l'établissement de la vraisemblance (surtout dans un cas multi-pistes), mais rend complexe l'association. En effet, là où dans le PDA l'association est déclarée explicitement par les probabilités totales, dans le PMHT cette association est désormais implicite, et constitue donc une variable cachée. Les méthodes numériques de résolution sont donc différentes. Dans [Streit et Luginbuhl, 1995], l'algorithme proposé est un algorithme récursif utilisant la technique de l'*Expectation-Maximization* (EM). On retrouve un développement similaire dans [Gauvrit *et al.*, 1997]. Une forme *batch* est mise au point dans [Streit et Luginbuhl, 1994]. Un *tracker* multi-pistes est développé dans [Blackman, 2004]. Une comparaison des modèles du PDA et du PMHT est effectuée dans [Schoenecker *et al.*, 2012, Schoenecker *et al.*, 2014], et conclut à un comportement quasi-identique des deux méthodes proposées, à données identiques appliquées en entrée des méthodes.

Pour la suite de notre étude, nous utiliserons les techniques du ML-PDA, avec ou sans les énergies associées. Dans la suite de ce chapitre, nous détaillerons ces deux situations.

3.2 Hypothèses statistiques

3.2.1 Cas général

Le scénario classique est le suivant : un capteur acquiert à l'échantillon k une collection de mesures $s_k = (s_{1,k}, \dots, s_{m_k,k})^T$. Quelques hypothèses statistiques sont nécessaires pour établir le modèle du ML-PDA, à partir de [Bar-Shalom et Fortmann, 1988, Jauffret et Bar-Shalom, 1990] :

- Les vecteurs s_k sont indépendants conditionnellement au vecteur d'état X , pour $k = 1 : K$.

- Les détections dues à la cible sont corrompues par un bruit blanc additif Gaussien centré. Le bruit est de puissance σ^2 . Ces détections sont appelées “vraies détections”.
- Le clutter est composé de fausses alarmes et est distribué uniformément sur l’espace de scrutation \mathbb{U} de volume u .
- Le nombre de fausses alarmes à l’échantillon spécifique k suit une loi de Poisson μ_{fa} de paramètre λu . Le nombre moyen de fausses alarmes est alors λu .
- Les vraies détections apparaissent au plus une fois par scan temporel, avec une probabilité P_d .

Avec ces hypothèses, il est désormais possible d’exprimer la vraisemblance de X connaissant les mesures s_k en architecture TAD, à l’aide du théorème des probabilités totales :

$$L(X|s) = \prod_{k=1}^K \left\{ \frac{1 - P_d}{u^{m_k}} \mu_{fa}(m_k) + \frac{P_d}{u^{m_k-1}} \frac{\mu_{fa}(m_k - 1)}{m_k} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_{i,k} - h_k(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.1)$$

avec h_k le modèle de mesure à l’instant k . On définit le critère comme étant le logarithme¹ de la fonction de vraisemblance, après avoir retiré les termes constants selon X :

$$C(X|s) = \sum_{k=1}^K \log \left\{ 1 - P_d + \frac{P_d}{\lambda} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_{i,k} - h_k(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.2)$$

La démonstration menant à la vraisemblance est détaillée dans l’annexe A. Un exemple de jeu de mesures obtenu dans l’architecture TAD est donné à la figure 1.2e.

3.2.2 Extension à l’utilisation de l’information d’énergie

Toutes les hypothèses précédentes restent valides. En utilisant [Kirubarajan et Bar-Shalom, 1996, Kirubarajan *et al.*, 2001], nous établissons désormais le modèle du ML-PDA avec l’information de l’énergie (donc en architecture TAD-AI).

En notant $R_{i,k}$ l’énergie associée à la détection i à l’instant k , τ le seuil de détection et

$$p_0^\tau(R_{i,k}) = \frac{1}{P_{fa}} p_0(R_{i,k}) \quad (3.3)$$

$$p_1^\tau(R_{i,k}) = \frac{1}{P_d} p_1(R_{i,k}) \quad (3.4)$$

$$\rho_{i,k} = \frac{p_1^\tau(R_{i,k})}{p_0^\tau(R_{i,k})} \quad (3.5)$$

où p_0 et p_1 sont les fonctions de densité de probabilité associées aux énergies sous les deux hypothèses (il n’y a que du bruit, ou il y a du bruit et du signal, respectivement), et où P_{fa} est la probabilité de fausse alarme, on peut établir la vraisemblance :

$$L(X|s, R) = \prod_{k=1}^K \left\{ \frac{1 - P_d}{u^{m_k}} \mu_{fa}(m_k) \prod_{i=1}^{m_k} p_0^\tau(R_{i,k}) + \frac{P_d}{u^{m_k-1}} \frac{\mu_{fa}(m_k - 1)}{m_k} \left(\prod_{i=1}^{m_k} p_0^\tau(R_{i,k}) \right) \sum_{i=1}^{m_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \rho_{i,k} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_{i,k} - h_k(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.6)$$

1. Le symbole “log” désigne dans ce manuscrit le logarithme népérien.

Le critère à maximiser est toujours le logarithme de la vraisemblance :

$$C(X|s, R) = \sum_{k=1}^K \log \left\{ 1 - P_d + \frac{P_d}{\lambda} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{\rho_{i,k}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_{i,k} - h_k(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.7)$$

Un exemple de mesures obtenues en architecture TAD-AI est montré dans la figure 1.2d.

3.3 Aspects numériques et optimisation

Toutes les méthodes présentées par la suite s'appliquent à chaque modèle, que l'on considère ou non l'information de l'énergie.

3.3.1 Méthode de quasi-Newton

A chaque itération de l'algorithme, le vecteur d'état est actualisé selon une méthode classique de Newton-Raphson :

$$\hat{X}_i = \hat{X}_{i-1} - p_i H_i^{-1} \nabla_X C(\hat{X}_i) \quad (3.8)$$

où H_i^{-1} est l'inverse de la matrice hessienne à l'étape i et p_i est le pas optimal. Cependant, du fait de la difficulté calculatoire pour obtenir la matrice hessienne, et de la complexité algorithmique qui peut apparaître lors du calcul de son inverse (ainsi que tous les problèmes de conditionnement), nous utilisons une méthode dite "quasi-Newton". Le but est de calculer numériquement une approximation de l'inverse de la matrice hessienne. Cette approximation est calculée à chaque itération par une méthode précise. Détaillons à présent deux de ces méthodes : la méthode de Davidon-Fletcher-Powell (DFP) [Fletcher et Powell, 1963, Lenard, 1975, Davidon, 1991], et la méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) [Broyden, 1970, Fletcher, 1970, Goldfarb, 1970, Shanno, 1970]. Dans les deux cas, le but de ces méthodes est de construire une approximation de l'inverse de la matrice hessienne, sans avoir à passer par une opération d'inversion de matrice. Ces deux méthodes garantissent que la matrice ainsi construite soit toujours symétrique et définie positive, et converge vers sa vraie valeur.

Détaillons les deux méthodes DFP et BFGS ci-dessous :

— Posons $\delta_i = \hat{X}_i - \hat{X}_{i-1}$, $\gamma_i = \nabla_X C(\hat{X}_i) - \nabla_X C(\hat{X}_{i-1})$, H_i^{-1} la matrice approchant l'inverse de la hessienne à l'étape i , et $\mathbf{I}_{d \times d}$ la matrice identité de dimension d .

— DFP :

$$H_{i+1}^{-1} = H_i^{-1} + \frac{\delta_i \delta_i^T}{\delta_i^T \gamma_i} - \frac{H_i^{-1} \gamma_i \gamma_i^T H_i^{-1}}{\gamma_i^T H_i^{-1} \gamma_i} \quad (3.9)$$

— BFGS :

$$H_{i+1}^{-1} = \left(\mathbf{I}_{d \times d} - \frac{\delta_i \gamma_i^T}{\gamma_i^T \delta_i} \right) H_i^{-1} \left(\mathbf{I}_{d \times d} - \frac{\gamma_i \delta_i^T}{\gamma_i^T \delta_i} \right) + \frac{\delta_i \delta_i^T}{\delta_i^T \gamma_i} \quad (3.10)$$

Dans les deux cas, l'itération démarre avec une valeur initiale $H_0^{-1} = \mathbf{I}_{d \times d}$. A chaque étape de l'algorithme, H_i^{-1} est mis à jour et devient de plus en plus proche de sa vraie valeur. Ainsi, l'algorithme se comporte comme une descente de gradient initialement, et tend à se comporter comme un algorithme de type Newton-Raphson petit à petit. Ces deux méthodes ont chacune leur avantage concernant la convergence sur le vecteur d'état. On utilisera plutôt la méthode BFGS qui semble faire converger l'algorithme un peu plus rapidement que DFP (ce que nous avons constaté dans nos simulations).

Le pas optimal p_i est déterminé à chaque étape selon une méthode de *backtracking line search*. C’est une méthode de recherche linéaire du pas optimal, satisfaisant à chaque itération la condition d’Armijo-Goldstein [Armijo, 1966].

3.3.2 Déflation

Le critère étant une fonction fortement non-convexe et multi-modale [Jaufret et Bar-Shalom, 1990, Kirubarajan et Bar-Shalom, 1996], plusieurs techniques sont utilisées conjointement pour réaliser la maximisation du critère. En effet, du fait de la multi-modalité de la fonction, l’algorithme pourrait converger vers des maxima locaux. Pour éviter cela, une approche multi-passe appelée “déflation” est initiée dans [Jaufret et Bar-Shalom, 1990] et présentée ici.

Cette technique réalise la maximisation en M étapes au lieu d’une seule. L’algorithme est d’abord initialisé par une recherche dans une grille de l’espace d’état. A l’étape m , au lieu de maximiser $C(X)$, la maximisation est appliquée à $C^{(m)}(X)$, qui est égal à $C(X)$, mais où les écarts-types σ des bruits sont multipliés par a_m . La maximisation à chaque étape se fait avec la méthode de quasi-Newton décrite précédemment. La suite numérique a_m est une suite décroissante telle que $a_1 = M$, $a_2 = M - 1$, ..., $a_M = 1$. L’état maximisant le critère à l’étape m est utilisé comme état initial à l’étape $m + 1$. Cette méthode permet à l’algorithme de “voir” plus de vraies détections, et assure la convergence vers le maximum global.

3.3.3 Fonction de coût

De plus, pour éviter la convergence vers un état irréaliste, une contrainte sous la forme d’une fonction de coût $\phi(X)$ est ajoutée à $C(X)$. Cette contrainte s’effectue sur la norme de la vitesse de la cible et est définie de la manière suivante :

$$\phi(X) = -\frac{1}{2} \left[\frac{v(X) - \bar{v}}{\sigma_v} \right]^2 \quad (3.11)$$

où $v(X)$ est la norme du vecteur vitesse, \bar{v} est une valeur moyenne typique de la vitesse de la cible et σ_v est l’écart-type autour de \bar{v} . A l’étape $m = M$, la fonction de coût est relâchée. Cela revient donc à une régularisation de Tikhonov [Colonius et Kunisch, 1986, Colonius et Kunisch, 1989] appliquée sur le vecteur vitesse.

3.4 Matrice d’information de Fisher

On donne l’expression de la FIM en environnement propre suivant l’hypothèse gaussienne, additive, centrée et indépendante du bruit de mesure :

$$F = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^K \nabla_X h_k(X) \nabla_X^T h_k(X) \quad (3.12)$$

En présence de clutter, le calcul de la FIM va utiliser les hypothèses statistiques du modèle du ML-PDA décrites précédemment. Tout d’abord, l’espace des mesures est restreint à une “gate” autour des vraies mesures [Bar-Shalom et Fortmann, 1988, Jauffret et Bar-Shalom, 1990, Jauffret, 1993]. La dimension de cette gate² est notée par

2. Pour des mesures mono-dimensionnelles uniquement.

$$v_g = 2g\sigma \quad (3.13)$$

La restriction dans la gate autour des vraies mesures permet la prise en compte uniquement des mesures les plus informatives. En effet, avec $g = 5$, plus de 99% de la population d'une loi Gaussienne est comprise autour de la valeur moyenne dans un espace de plus ou moins 5 fois l'écart-type. Les mesures situées en dehors de la gate n'apportent pas d'information supplémentaire sur le vecteur d'état X . En utilisant ces hypothèses ainsi que la vraisemblance calculée en ne tenant compte que des mesures situées dans la gate, il est alors possible de calculer la FIM en présence de clutter. Cette dernière s'avère être la FIM en environnement propre multipliée par un facteur scalaire : le facteur de réduction d'information.

Ce facteur, appelé dans la littérature q_2 pour le modèle du ML-PDA et q_3 si l'on considère les énergies, prend ses valeurs entre 0 et 1 et représente la perte d'information due à la présence de clutter et à la probabilité de détection non-unitaire [Bar-Shalom et Fortmann, 1988, Jauffret et Bar-Shalom, 1990, Jauffret, 1993]. Ce facteur ne dépend que de P_d et de λv_g , le nombre moyen de fausses alarmes dans la gate de taille v_g . Il ne dépend pas de l'état X . Il est alors clair que la perte d'information va diminuer la FIM, et donc engendrer une hausse de la BCR. Les expressions des facteurs q_2 et q_3 sont les suivantes :

$$q_2(\lambda v_g, P_d) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2P_d}{\sqrt{2\pi}g^{m-1}} \mu_{fa}(m-1) \int_0^g \cdots \int_0^g \frac{\exp(-\xi_1^2) \xi_1^2}{\frac{(1-P_d)\sqrt{2\pi}\lambda v_g}{2gP_d} + \sum_{i=1}^m \exp(-\frac{1}{2}\xi_i^2)} d\xi_1 \cdots d\xi_m \quad (3.14)$$

$$q_3(\lambda v_g, P_d) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2P_d}{\sqrt{2\pi}g^{m-1}} \mu_{fa}(m-1) \times \int_0^g \cdots \int_0^g \int_{\tau}^{\infty} \cdots \int_{\tau}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^m p_0^{\tau}(R_j) \rho_1^2 \exp(-\xi_1^2) \xi_1^2}{\frac{(1-P_d)\sqrt{2\pi}\lambda v_g}{2gP_d} + \sum_{j=1}^m \rho_j \exp(-\frac{1}{2}\xi_j^2)} dR_1 \cdots dR_m d\xi_1 \cdots d\xi_m \quad (3.15)$$

Le détail du calcul du q_2 est présenté dans l'annexe B et est donné dans [Jauffret et Bar-Shalom, 1990] ainsi que dans [Jauffret, 1993], dans lequel il est généralisé à des mesures multi-dimensionnelles. Le calcul menant au q_3 est présenté dans l'annexe D, et est basé sur [Kirubarajan *et al.*, 2001, Kirubarajan et Bar-Shalom, 1996]. Les coefficients q_2 et q_3 sont calculés numériquement à l'aide des intégrales de Monte Carlo [Robert, 1992].

Remarque 1. Dans l'équation (3.15), le facteur ρ est défini avec un seul indice, alors qu'il y en a deux dans l'équation (3.5). Cela s'explique par le fait que le calcul des q_2 et q_3 s'effectue à un échantillon k fixé, comme on le verra dans les annexes B et D. Il n'est donc pas nécessaire de faire apparaître l'indice temporel ici.

3.5 Test d'acceptation de l'estimé

Une fois que l'algorithme a retourné un estimé, il est nécessaire de décider si l'état estimé est correct ou non. En effet, qu'il y ait une piste ou non, l'algorithme retourne toujours un estimé. S'il n'y a pas de détection correcte ou si l'algorithme a convergé vers un maximum local, l'estimé doit être

rejeté. Donc, nous devons choisir entre deux hypothèses³ :

- H_0 : il y a une piste et \hat{X} est le maximum global de la vraisemblance.
- H_1 : il n'y a pas de piste, ou \hat{X} est un maximum local.

Le réflexe naturel est alors de construire le rapport de vraisemblance généralisé (RVG) pour construire un test permettant de discriminer les deux hypothèses. Cela suppose la connaissance des distributions statistiques du RVG⁴ pour chaque hypothèse. Déterminer ces distributions est une tâche sans espoir. En utilisant [Jauffret et Bar-Shalom, 1990], nous proposons le palliatif suivant pour éluder ceci. Nous donnons les détails dans le cas où l'information d'énergie n'est pas disponible. Nous considérons la statistique suivante :

$$T_{0,1}(\hat{X}) = \frac{T}{\sqrt{V}} \quad (3.16)$$

où⁵ :

$$T = \sum_{k=1}^K \left\{ C(\hat{X}|s_{i,k}^*) - E[C(\hat{X}|s_{i,k}^*) | H_0] \right\} \quad (3.17)$$

$$V = \sum_{k=1}^K \text{Var} [C(\hat{X}|s_{i,k}^*) | H_0] \quad (3.18)$$

Puisque \hat{X} est supposé être le maximum global, nous obtenons les approximations suivantes :

$$E[C(\hat{X}|s_{i,k}^*) | H_0] \simeq E[C(X|s_{i,k}^*) | H_0] = \mu_0 \quad (3.19)$$

$$\text{Var} [C(\hat{X}|s_{i,k}^*) | H_0] \simeq \text{Var} [C(X|s_{i,k}^*) | H_0] = \sigma_0^2 \quad (3.20)$$

La statistique 3.16 peut-être reconsidérée de la manière suivante :

$$T_{0,1} = \frac{C(\hat{X}) - K\mu_0}{\sqrt{K\sigma_0^2}} \quad (3.21)$$

Il a été remarqué empiriquement que $T_{0,1}$ suivait une loi Gaussienne centrée réduite, par application du théorème central limite [Jauffret et Bar-Shalom, 1990]. Avec toutes ces considérations, le test est finalement le suivant : si $T_{0,1} > c_\alpha$, H_0 est acceptée. Sinon, H_1 est acceptée. c_α est donc le seuil avec un niveau d'acceptation α . Souvent, c_α est donné tel que $\alpha = 95\%$.

Quand l'information de l'énergie est disponible, seules les expressions et valeurs de μ_0 et σ_0 changent. Les expressions de μ_0 et σ_0 ainsi que le détail des calculs menant à leurs valeurs sont développés dans les annexes C et E pour chacune des architectures (TAD et TAD-AI).

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle du ML-PDA dans les architectures TAD et TAD-AI. Les motivations menant à la construction de ce modèle ont été expliquées, ainsi qu'un historique des

3. Le choix des notations des hypothèses est inversé par rapport à ce que l'on trouve dans la littérature, par exemple [Kay, 1998]. En effet, en traitement du signal, on nomme l'hypothèse H_0 comme étant celle du bruit seul et H_1 comme étant celle du signal avec le bruit. Cependant, en trajectographie, on considère que l'erreur la plus grave est celle d'affirmer qu'il n'y a pas de piste alors qu'il y en a une en réalité. Cela motive le choix inversé des hypothèses.

4. Ou d'une fonction monotone du RVG.

5. * est utilisé pour désigner les mesures dans la gate.

modèles précédents et une brève présentation d'autres modèles existants. Les hypothèses statistiques ont été détaillées. Les aspects numériques dus à la maximisation du critère ont été expliqués. Nous avons ensuite montré qu'en présence de fausses alarmes, une perte d'information sur la FIM pouvait se quantifier à l'aide d'un coefficient scalaire de réduction d'information. Enfin, un test d'acceptation de l'estimé a été présenté, basé sur l'approximation gaussienne.

Deuxième partie

Trajectographie par réseau de capteurs

Ce chapitre introduit la partie de cette thèse traitant de la trajectographie passive par réseau de capteurs. Nous expliciterons tout d’abord la problématique qui sera étudiée tout au long de cette partie, ainsi que les motivations, à la fois techniques et opérationnelles. Dans un deuxième temps, nous verrons comment cette partie sera abordée, chapitre par chapitre.

4.1 Problématique et motivations

Cette partie sera consacrée à l’étude de la trajectographie passive d’une cible sous-marine à l’aide d’un réseau de capteurs. La situation est la suivante : on suppose qu’une source acoustique¹ évolue dans un environnement sous-marin, et suit une trajectoire que l’on cherche à connaître. Les paramètres d’intérêt sont la position et la vitesse de cette source, ce que nous appelons les “paramètres cinématiques de la source”. Dans le but de réaliser la trajectographie de cette source, un réseau de capteurs est déployé dans une zone dite “de scrutation”. Cette zone contient potentiellement la source sous-marine. Comme précisé dans le préambule et dans la première partie, la trajectographie est effectuée de façon passive. Un opérateur collecte les mesures issues de chacun des capteurs pendant un temps fixé (durée du scénario). Ainsi, il se retrouve en présence d’un lot (ou *batch*) de données à exploiter *a posteriori*. C’est à partir de ce *batch* que sera réalisée la trajectographie.

Quel est l’intérêt d’un réseau de capteurs pour réaliser la trajectographie de la cible ? Un réseau de capteurs permet de couvrir une plus grande zone de scrutation, et peut, en fonction de sa structure propre, apporter une plus grande précision lors de l’estimation des paramètres cinématiques.

Quel est le type de capteurs mis à notre disposition ? Nous utiliserons tout d’abord des bouées hydrophones [Arnold *et al.*, 1983]. Ces bouées flottent à la surface de la mer, et envoient les données collectées ainsi que leur position à l’opérateur². Dans un deuxième temps, nous utiliserons aussi des antennes linéaires verticales [Hinich, 1973]. Dans les deux cas, ces deux types de capteurs sont relativement rustres, et ne comportent pas en leur sein une partie élaborée de traitement du signal et d’information³. Ainsi, la trajectographie devra s’effectuer en présence de fausses alarmes, à l’aide des

1. Ou “cible”, pour employer un vocabulaire issu de la stratégie militaire.

2. Qui peut être un centre à terre, ou installé sur un bâtiment de surface coopérant.

3. Donc pas d’extraction.

méthodes du PDA exposées dans le chapitre 3.

Quel est le comportement de la cible? Dans notre étude, nous ferons l’hypothèse que la source en mouvement suit une trajectoire déterministe. Sauf cas contraire, nous supposons que notre cible progresse en mouvement rectiligne uniforme (MRU), à profondeur constante durant la période d’observation. Ceci est un cas standard pour un objet sous-marin. Ainsi, les composantes d’intérêt de la cible sont :

- Sa position tridimensionnelle à l’instant initial, représentée par le vecteur $(x; y; z)^T$ dans un repère cartésien tridimensionnel orthonormé.
- Sa vitesse (dont on suppose qu’elle est constante au cours du scénario) dans le plan horizontal $(\dot{x}; \dot{y})^T$

Ainsi, le vecteur d’état X représentant les composantes cinématiques de la cible que l’on cherche à connaître est le suivant :

$$X^T = (x; y; z; \dot{x}; \dot{y}) \quad (4.1)$$

Le signal traité par l’opérateur est supposé échantillonné à un pas d’échantillonnage Δt . La position véritable de la cible pour chaque échantillon $k = 1, \dots, K$, où K est le nombre total d’échantillons traités par l’opérateur, est alors donnée pour chaque composante par :

$$x_k = x + (k - 1)\Delta t\dot{x} \quad (4.2)$$

$$y_k = y + (k - 1)\Delta t\dot{y} \quad (4.3)$$

$$z_k = z, \forall k = 1, \dots, K \quad (4.4)$$

Avec toutes ces informations, le cadre de notre problème est désormais posé. La démarche de mise au point et d’étude d’un estimateur présentée au chapitre 2 sera utilisée tout au long de cette partie, tout en utilisant la modélisation du ML-PDA exposée au chapitre 3.

4.2 Structure de la partie

Désormais, donnons la structure de cette partie. Cette dernière se veut développée de façon progressive, “pas-à-pas”, dans le but d’améliorer la clarté et la compréhension du problème ainsi que des solutions apportées. La structure de cette partie est donc la suivante :

Tout d’abord, dans le chapitre 5, nous étudions la trajectographie de la cible à l’aide d’un réseau de capteurs composé exclusivement de bouées hydrophones. Les avantages et limitations de ce réseau nous mèneront directement au chapitre 6. Dans ce chapitre, nous utilisons conjointement les hydrophones avec les antennes linéaires verticales, dans le but de pallier certaines limitations remarquées dans le réseau précédent. Le comportement de ce réseau, dit “mixte” puisque composé de plusieurs types de capteurs, sera ensuite utilisé pour toute la suite de cette partie.

Dans le chapitre 7, nous étudions la trajectographie d’une cible effectuant une manœuvre, à l’aide du réseau mixte. Toutes les considérations sur la manœuvre et les changements apportés d’un point de vue de la cinématique de la cible seront développées à ce moment-là.

Ensuite, au chapitre 8, nous reprenons l’étude menée au chapitre 6 (donc avec une cible en MRU), mais en supprimant cette fois une hypothèse qui était fort contraignante du point de vue de la chaîne de traitement sonar.

Enfin, le chapitre 9 conserve les avancées développées au chapitre précédent, et rajoute encore une considération négligée jusqu'à présent : le temps de propagation du signal émis par la source pour parvenir aux capteurs est désormais pris en compte.

Une conclusion fera ensuite le point sur toute l'étude menée dans cette partie.

Il est à noter qu'au cours des chapitres, des renvois vers les annexes et la bibliographie seront indiqués dans le but de compléter cette étude.

Trajectographie passive par réseau de bouées hydrophones

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à la trajectographie passive d'une cible unique en MRU à l'aide d'un réseau de capteurs fixes, composé de bouées hydrophones. Les bouées sont supposées flotter à la surface et nous permettrons d'effectuer la trajectographie de la cible dans un environnement tridimensionnel. Après traitement du signal et l'étape de détection, nous sommes en possession des différences de temps d'arrivée (TDOA) de chacune des bouées relativement à une bouée de référence, en présence de fausses alarmes. Ce chapitre généralise le travail effectué dans [Arnold *et al.*, 1983] à un nombre quelconque de capteurs, à la trajectographie tridimensionnelle, ainsi qu'à la présence d'un environnement encombré de fausses alarmes, grâce au modèle du ML-PDA. Un soin particulier sera donc apporté à l'étude de l'influence du nombre de capteurs dans le réseau, d'un point de vue des performances lors de l'estimation.

Il est à noter que par hypothèse de travail les hydrophones flottent à la surface de la mer, et ne sont pas contrôlables en immersion. Les bouées sont supposées avoir été lancées par avion ou hélicoptère. Leur position constitue donc un vecteur aléatoire, mais de réalisation connue de l'opérateur, puisque ces bouées sont en capacité de transmettre leur position. Les données reçues sont ensuite traitées par l'opérateur dans le but d'effectuer la trajectographie de la source acoustique sous-marine. Notons qu'un certain nombre de phénomènes physiques provoqués par le milieu marin, et agissant sur le déplacement des capteurs au cours du temps (la dérive) seront négligés dans cette étude, car complexes à prendre en compte et à mettre en œuvre. Ils seront donc supposés fixes durant la totalité de l'acquisition des mesures.

Après l'introduction du problème ainsi que des notations utilisées, nous étudierons l'observabilité de ce système. La résolution du problème dans l'architecture TAD à l'aide du modèle du ML-PDA sera ensuite abordée. Nous verrons ensuite les résultats numériques issus des simulations. Enfin, une conclusion partielle fera le point sur ce chapitre.

5.2 Problématique et notations

Introduisons le problème qui nous intéresse. Le réseau est composé de N_S capteurs mesurant à chaque échantillon k des différences de temps d'arrivée du signal émis par la source ou de façon équivalente des différences de distances relativement à un capteur de référence [Arnold *et al.*, 1983] (le trajet emprunté par l'onde est le trajet direct). On dispose de K mesures dans le temps. Les capteurs sont posés à la surface de la mer, et la cible est sous-marine. Les positions des capteurs dans le plan horizontal sont réparties uniformément dans un carré, mais sont connues avec exactitude, et les capteurs sont immobiles durant toute la durée de l'acquisition. La cible est en MRU dans un plan $(x; y)$ à une profondeur constante. Le comportement de la cible à chaque instant est donc régi par les équations (4.2) à (4.4). On cherche à estimer la position initiale ainsi que la vitesse de la cible. Le vecteur d'état est celui donné par (4.1).

Spécifions désormais les mesures collectées par chaque capteur. Chaque hydrophone i est situé aux coordonnées $(x_i^S, y_i^S, 0)$. On note par $r_{i,k}$ la distance du trajet direct séparant la cible de l'hydrophone i à l'instant k :

$$r_{i,k}(X) = \sqrt{(x_k - x_i^S)^2 + (y_k - y_i^S)^2 + z^2} \quad (5.1)$$

A partir de ces hypothèses, nous obtenons à chaque échantillon k pour le capteur i , un vecteur de détections $\Delta r_{i,j,k}, j = 1, \dots, m_{i,k}$. Ce vecteur est défini de la façon suivante :

— si j est l'indice associé à la bonne détection, alors :

$$\Delta r_{i,j,k} = r_{i,k}(X) - r_{i_0,k}(X) + \varepsilon_{i,k} \quad (5.2)$$

avec i_0 l'indice associé à l'hydrophone de référence¹, et $\varepsilon_{i,k}$ est un bruit blanc Gaussien centré additif de variance σ^2 .

— si j est l'indice associé à une fausse alarme, alors $\Delta r_{i,j,k}$ est la réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'espace de scrutation \mathbb{U} de dimension u .

Notons que le temps de propagation est négligé dans ce chapitre, conformément à [Arnold *et al.*, 1983, Lo et Ferguson, 2000].

5.3 Observabilité

L'observabilité d'une cible en MRU dans le plan à l'aide de mesures de TDOA a été étudiée dans [Pérez et Jauffret, 2020]. Les auteurs arrivent à la conclusion que la trajectoire de n'importe quelle cible en MRU est observable à partir de trois capteurs (section III-B). Qu'en est-il dans le cas où l'on doit aussi estimer la profondeur de la cible? Du fait de la symétrie des mesures issues des capteurs, il y a ambiguïté sur la profondeur de la cible. En effet, cette dernière peut très bien se situer sous l'eau ($z < 0$), ou alors au-dessus de la surface ($z > 0$). Si l'on remplace z par $-z$ dans l'équation de mesure² (5.2), les mesures obtenues dans les deux cas sont identiques. Cependant, cette ambiguïté est aisée à résoudre, puisque nous supposons a priori que notre cible est sous-marine. Existe-t-il d'autres ambiguïtés à lever? C'est ce que nous allons voir dans cette section.

1. Nous choisissons arbitrairement l'hydrophone le plus proche du centre du réseau comme étant la référence.

2. Que l'on suppose ici sans bruit ($\varepsilon_{i,k} = 0$) dans le but d'étudier l'observabilité.

5.3.1 Notations et lemmes

Une cible T et deux observateurs S_1 et S_2 sont dans le même espace cartésien. La cible est en MRU durant l'intégralité du scénario, et les deux observateurs sont stationnaires. Le scénario commence à l'instant $t = 0$ et se termine à $t = T_f$. Les observateurs sont localisés de la façon suivante :

- S_1 se situe en $[-a; 0; 0]^T$.
- S_2 se situe en $[a; 0; 0]^T$.

La position de la cible est donnée par $P_T(t) = [x_T(t); y_T(t); z_T(t)]^T$ à l'instant t . Sa vitesse est $V_T = \frac{dP_T(t)}{dt} = [\dot{x}_T; \dot{y}_T; 0]^T$. Les distances relativement à chacun des observateurs sont $r_1 = \|S_1 P_T(t)\|$ et $r_2(t) = \|S_2 P_T(t)\|$, respectivement.

Exposons désormais quelques lemmes nécessaires à l'étude de l'observabilité.

Lemme 1. $r_1(t)r_2(t)$ est une fonction constante ou une fonction polynômiale de degré 2 si et seulement si $(r_1(t) + \epsilon r_2(t))^2$ avec $\epsilon = \pm 1$ est un polynôme.

Preuve.

$$\begin{aligned} (r_1(t) + \epsilon r_2(t))^2 &= r_1^2(t) + r_2^2(t) + 2\epsilon r_1(t)r_2(t) \\ &= (x_T(t) + a)^2 + (x_T(t) - a)^2 + 2y_T^2(t) + 2z_T^2 \\ &\quad + 2\epsilon \sqrt{\left[(x_T(t) + a)^2 + y_T^2(t) + z_T^2 \right] \left[(x_T(t) - a)^2 + y_T^2(t) + z_T^2 \right]} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Si $(r_1(t) + \epsilon r_2(t))^2$ est un polynôme, alors $(r_1(t) + \epsilon r_2(t))^2 - r_1^2(t) - r_2^2(t) = 2\epsilon r_1(t)r_2(t)$ est aussi un polynôme. Calculons son degré :

Puisque $r_1^2(t)r_2^2(t) = \left[(x_T(t) + a)^2 + y_T^2(t) + z_T^2 \right] \left[(x_T(t) - a)^2 + y_T^2(t) + z_T^2 \right]$, le degré le plus haut est 4. Le coefficient de t^4 est $(\dot{x}_T^2 + \dot{y}_T^2)^2$. Si $\dot{x}_T^2 + \dot{y}_T^2 \neq 0$, alors $r_1^2(t)r_2^2(t)$ est un polynôme de degré 4, le degré de $r_1(t)r_2(t)$ est alors 2. Sinon, $\dot{x}_T = \dot{y}_T = 0$, $r_1^2(t)r_2^2(t)$ est une fonction constante, et c'est aussi le cas de $r_1(t)r_2(t)$. La réciproque est évidente. \square

Dans cette étude, nous distinguerons trois cas :

- $r_1(t)r_2(t)$ est constant.
- $r_1(t)r_2(t)$ est une fonction polynômiale.
- $r_1(t)r_2(t)$ n'est ni constant, ni un polynôme.

Lemme 2. $r_1(t)r_2(t)$ est une fonction constante si et seulement si la cible est stationnaire.

Preuve. Si $r_1(t)r_2(t)$ est une fonction constante, alors $(r_1(t)r_2(t))^2$ est de la même façon une fonction constante. Puisque $(r_1(t)r_2(t))^2 = \left[(x_T(t) + a)^2 + y_T^2(t) + z_T^2 \right] \left[(x_T(t) - a)^2 + y_T^2(t) + z_T^2 \right]$, tous les coefficients des puissances non-nulles de t sont nuls, en particulier le coefficient de t^4 , qui est $(\dot{x}_T^2 + \dot{y}_T^2)^2$. Ainsi, la cible est stationnaire. La réciproque est évidente. \square

Remarque 2. Dans les preuves des lemmes et propositions à venir, nous utiliserons les propriétés suivantes :

Si la cible est en mouvement sur l'axe (Ox) , alors $r_1(t) = |x_T(t) + a|$ et $r_2(t) = |x_T(t) - a|$. Trois situations peuvent apparaître :

- La cible est située entre les deux capteurs : $r_1(t) = x_T(t) + a$ et $r_2(t) = -x_T(t) + a$. Par conséquent, $r_1(t) - r_2(t) = 2x_T(t)$ et $r_1(t) + r_2(t) = 2a$.

- La cible est en mouvement sur $]a; \infty[$, alors $r_1(t) = x_T(t) + a$ et $r_2(t) = x_T(t) - a$. On en déduit que $r_1(t) - r_2(t) = 2a$ et $r_1(t) + r_2(t) = 2x_T(t)$.
- La cible est en mouvement sur $] -\infty; -a[$, et de façon similaire, nous obtenons que $r_1(t) - r_2(t) = -2a$, et $r_1(t) + r_2(t) = -2x_T(t)$.

Lemme 3. $r_1(t)r_2(t)$ est un polynôme de degré 2 si et seulement si la cible est en mouvement sur la droite (S_1, S_2) , ou dans le plan médiateur du segment $[S_1, S_2]$. La trajectoire de la cible est parallèle à l'axe (Oy) .

Preuve. Si $r_1(t)r_2(t)$ est un polynôme de degré 2, alors trois nombres α, β, γ existent tels que $r_1(t)r_2(t) = (t - \alpha)(t - \beta)\gamma$. Les nombres α et β peuvent être réels ou non, tandis que γ est réel.

- Si α et β sont deux nombres réels, alors :

$$\left[(x_T(t) + a)^2 + y_T^2(t) + z_T^2 \right] \left[(x_T(t) - a)^2 + y_T^2(t) + z_T^2 \right] = (t - \alpha)^2(t - \beta)^2\gamma^2 \quad (5.4)$$

Par conséquent :

$$\left[(x_T(\alpha) + a)^2 + y_T^2(\alpha) + z_T^2 \right] \left[(x_T(\alpha) - a)^2 + y_T^2(\alpha) + z_T^2 \right] = 0 \quad (5.5)$$

Il vient que $y_T^2(\alpha) = 0$, $z_T^2 = 0$, et soit $(x_T(\alpha) + a)^2 = 0$ ou $(x_T(\alpha) - a)^2 = 0$. Pour des raisons similaires, $y_T^2(\beta) = 0$. Ainsi, $y_T(\alpha) = y_T(\beta) = 0$. Si $\alpha = \beta$, alors :

$$\left[(x_T(t) + a)^2 + y_T^2(t) + z_T^2 \right] \left[(x_T(t) - a)^2 + y_T^2(t) + z_T^2 \right] = (t - \alpha)^4\gamma^2 \quad (5.6)$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} (x_T(t) + a)^2 + y_T^2(t) + z_T^2 = (t - \alpha)^2\gamma_1 \\ (x_T(t) - a)^2 + y_T^2(t) + z_T^2 = (t - \alpha)^2\gamma_2 \end{cases} \quad (5.7)$$

avec $\gamma_1\gamma_2 = \gamma^2$. On en déduit que $x_T(\alpha) = a$ et $x_T(\alpha) = -a$, ce qui est incompatible.

Donc, $\alpha \neq \beta$. La fonction polynomiale $y_T(t)$, de degré 0 ou 1, est nulle pour deux valeurs différentes. Il s'agit alors nécessairement du polynôme nul. La cible est alors en mouvement sur l'axe (Ox) .

- α et β ne sont pas deux nombres réels. Puisque $r_1(t)r_2(t)$ est réel, alors $\beta = \alpha^*$, et $r_1(t)r_2(t) = (t - \alpha)(t - \alpha^*)\gamma$. On a alors :

$$\begin{cases} (x_T(\alpha) + a)^2 + y_T^2(\alpha) + z_T^2 = \gamma_1(t - \alpha)(t - \alpha^*) \\ (x_T(\alpha) - a)^2 + y_T^2(\alpha) + z_T^2 = \gamma_2(t - \alpha)(t - \alpha^*) \end{cases} \quad (5.8)$$

avec $\gamma = \gamma_1\gamma_2$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} (x_T(\alpha) + a)^2 + y_T^2(\alpha) + z_T^2 = 0 \\ (x_T(\alpha) - a)^2 + y_T^2(\alpha) + z_T^2 = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

On en déduit que $(x_T(\alpha) + a)^2 = (x_T(\alpha) - a)^2$, soit $4ax_T(\alpha) = 0$. Mais $x_T(t)$ est un polynôme de degré 0 ou 1. Nous concluons que $x_T(t) = 0, \forall t$. La cible est donc en mouvement dans le plan portant la médiatrice du segment $[S_1, S_2]$.

Si la cible est en mouvement sur la droite (S_1, S_2) , alors

$$r_1(t)r_2(t) = \sqrt{(x_T(\alpha) + a)^2 (x_T(\alpha) - a)^2} = \epsilon (x_T(\alpha) + a) (x_T(\alpha) - a) \quad (5.10)$$

avec $\epsilon = \pm 1$.

Si la cible est en mouvement dans le plan médiateur du segment $[S_1, S_2]$, alors $r_1(t)r_2(t) = \sqrt{(a^2 + y_T^2(t) + z_T^2)^2} = a^2 + y_T^2(t) + z_T^2$. La trajectoire de la cible est parallèle à l'axe (Oy) . \square

5.3.2 Analyse de l'observabilité

Désormais, nous supposons que la mesure disponible est la différence des distance entre l'observateur et la cible. L'analyse de l'observabilité sera menée sur $(r_1(t) - r_2(t))^2$.

Proposition 1. *La différence de distance est nulle si et seulement si la cible est dans le plan médiateur du segment $[S_1, S_2]$. Dans ce cas, la trajectoire de la cible n'est pas observable.*

Preuve. Supposons que la différence des distances soit nulle :

$$r_1(t) = r_2(t) \Leftrightarrow r_1^2(t) = r_2^2(t) \quad (5.11)$$

soit

$$(x_T(t) + a)^2 + y_T^2(t) + z_T^2 = (x_T(t) - a)^2 + y_T^2(t) + z_T^2 \quad (5.12)$$

Ainsi, $4ax_T(t) = 0$, soit $x_T(t) = 0$. La cible est donc en mouvement dans le plan médiateur contenant l'axe (Oy) . Réciproquement, si la cible est en mouvement dans ce plan, alors les distances sont égales. \square

Proposition 2. *La différence de distance est une constante non-nulle si et seulement si la cible est stationnaire en dehors du plan médiateur du segment $[S_1, S_2]$, ou si la cible se déplace sur la droite (S_1, S_2) privée du segment $[S_1, S_2]$. Dans les deux cas, la trajectoire de la cible n'est pas observable. Cependant, nous sommes capables de savoir si la cible est sur la droite ou la gauche du segment $[S_1, S_2]$.*

Preuve. Si la différence de distance est une constante non-nulle, son carré l'est aussi : $r_1^2(t) + r_2^2(t) - 2r_1(t)r_2(t) = \text{cste}$. Puisque $r_1^2(t) + r_2^2(t)$ est un polynôme, $r_1(t)r_2(t)$ est soit une constante soit un polynôme de degré 2.

A partir du lemme 2, si $r_1(t)r_2(t)$ est constante, alors la cible est stationnaire. A partir du lemme 3, si $r_1(t)r_2(t)$ est un polynôme de degré 2, alors la cible est en mouvement sur la droite (S_1, S_2) ou sur l'axe (Oy) . Ce dernier cas doit être rejeté puisque la différence de distances est non nulle. Alors, la cible est en mouvement sur l'axe (Ox) . La remarque 2 nous aide à conclure.

La réciproque est évidente. \square

Proposition 3. *La différence de distance est un polynôme de degré 1 si et seulement si la cible est en mouvement entre les deux capteurs. Dans ce cas, la trajectoire de la cible est observable.*

Preuve. Si la différence de distance est un polynôme de degré 1, alors nécessairement $r_1(t)r_2(t)$ est un polynôme de degré 2. Alors la cible est en mouvement sur la ligne (S_1, S_2) , ou dans le plan médiateur du segment $[S_1, S_2]$ (voir lemme 3). Puisque la différence de distance est non nulle, la cible est dans la ligne (S_1, S_2) . A partir de la remarque 1, la cible est en mouvement entre les deux capteurs. La réciproque est évidente.

L'observabilité de la source découle de la remarque 2. En effet, on a vu dans cette remarque que si la source se déplace entre les deux capteurs, alors $x_T(t) = \frac{r_1(t)-r_2(t)}{2}$. On peut donc calculer sa trajectoire sans ambiguïté. \square

Proposition 4. *Le carré de la différence de distance n'est ni un polynôme ni une fonction constante si et seulement si la cible est en MRU en dehors de la ligne (S_1, S_2) et du plan médiateur du segment $[S_1, S_2]$. Dans ce cas, la trajectoire de la cible est observable à une rotation près autour de la ligne (S_1, S_2) , et à la symétrie près sur le plan médiateur du segment $[S_1, S_2]$.*

Preuve. Pour la suite de la démonstration, on appellera $P_n(t)$ le polynôme P de degré n pris à l'instant t .

Soit une cible fantôme G détectée par les mêmes mesures :

$$\begin{aligned} r_{G_1}(t) - r_{G_2}(t) &= r_1(t) - r_2(t), \forall t \in [0, T_f] \\ \Rightarrow (r_{G_1}(t) - r_{G_2}(t))^2 &= (r_1(t) - r_2(t))^2, \forall t \in [0, T_f] \\ \Leftrightarrow r_1^2(t) + r_2^2(t) - r_{G_1}^2(t) - r_{G_2}^2(t) &= 2r_1(t)r_2(t) - 2r_{G_1}(t)r_{G_2}(t) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Alors, $r_1(t)r_2(t) - r_{G_1}(t)r_{G_2}(t)$ est un polynôme de degré 2. Mais, par hypothèse, $r_1(t)r_2(t)$ n'est pas un polynôme, donc $r_{G_1}(t)r_{G_2}(t)$ non plus. Par conséquent, il existe deux polynômes de degré 2, disons $P_2(t)$ et $Q_2(t)$, et une fonction non-polynômiale $g(t)$ tels que :

$$r_1(t)r_2(t) = P_2(t) + g(t) \quad (5.14)$$

$$r_{G_1}(t)r_{G_2}(t) = Q_2(t) + g(t) \quad (5.15)$$

Puisque $r_1^2(t)r_2^2(t)$ et $r_{G_1}^2(t)r_{G_2}^2(t)$ sont des polynômes de degré 4, les fonctions $2P_2(t)g(t) + g^2(t)$ et $2Q_2(t)g(t) + g^2(t)$ sont aussi des polynômes de degré 4. On en déduit que :

$$r_1^2(t)r_2^2(t) - r_{G_1}^2(t)r_{G_2}^2(t) = P_2^2(t) - Q_2^2(t) + 2(P_2(t) - Q_2(t))g(t) \quad (5.16)$$

Désormais, nous devons discuter de la nature de $P_2(t) - Q_2(t)$:

— Premier cas : $P_2 \neq Q_2$

$g(t) = \frac{r_1^2(t)r_2^2(t) - r_{G_1}^2(t)r_{G_2}^2(t) - P_2^2(t) + Q_2^2(t)}{2(P_2(t) - Q_2(t))}$ est une fraction rationnelle, soit :

$$g(t) = \frac{R_4(t)}{S_2(t)} \quad (5.17)$$

(fraction irréductible). Désormais, l'équation (5.13) implique que :

$$\begin{aligned} (r_1^2(t) + r_2^2(t) - r_{G_1}^2(t) - r_{G_2}^2(t))^2 &= 4(r_1^2(t)r_2^2(t) - r_{G_1}^2(t)r_{G_2}^2(t))^2 \\ \Leftrightarrow 8r_1(t)r_2(t)r_{G_1}(t)r_{G_2}(t) &= 4(r_1^2(t)r_2^2(t) - r_{G_1}^2(t)r_{G_2}^2(t))^2 - (r_1^2(t) + r_2^2(t) - r_{G_1}^2(t) - r_{G_2}^2(t))^2 \end{aligned} \quad (5.18)$$

ce qui signifie que $r_1(t)r_2(t)r_{G_1}(t)r_{G_2}(t)$ est un polynôme de degré 4.

A partir de (5.14) et (5.15), on a :

$$\begin{aligned}
r_1(t)r_2(t)r_{G_1}(t)r_{G_2}(t) &= P_2(t)Q_2(t) + g(t) [P_2(t) + Q_2(t) + g(t)] \\
\Leftrightarrow r_1(t)r_2(t)r_{G_1}(t)r_{G_2}(t) - P_2(t)Q_2(t) &= \frac{R_4(t)}{S_2(t)} [P_2(t) + Q_2(t) + g(t)] \\
\Leftrightarrow R_4(t)g(t) &= S_2(t) [r_1(t)r_2(t)r_{G_1}(t)r_{G_2}(t) - P_2(t)Q_2(t)] - R_4(t) [P_2(t) + Q_2(t)]
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Ainsi, $R_4(t)g(t)$ est un polynôme égal à $\frac{R_4^2(t)}{S_2(t)}$ (voir (5.17)). Par conséquent, $S_2(t)$ divise $R_4^2(t)$, ce qui signifie que $S_2(t)$ et $R_4(t)$ ont des racines communes. Ce n'est pas l'hypothèse de (5.17) : ce cas doit être rejeté.

— Deuxième cas : $P_2 = Q_2$

A partir de (5.14) et (5.15), on obtient que :

$$r_1(t)r_2(t) = r_{G_1}(t)r_{G_2}(t) \tag{5.20}$$

En reportant cette dernière équation dans (5.13), nous avons

$$r_1^2(t) + r_2^2(t) = r_{G_1}^2(t) + r_{G_2}^2(t) \tag{5.21}$$

Développons les termes de (5.21) :

$$\begin{aligned}
r_1^2(t) + r_2^2(t) &= 2a^2 + 2x_T^2(t) + 2y_T^2(t) + 2z_T^2 \\
r_{G_1}^2(t) + r_{G_2}^2(t) &= 2a^2 + 2x_G^2(t) + 2y_G^2(t) + 2z_G^2
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Par conséquent, (5.21) est équivalent à

$$x_T^2(t) + y_T^2(t) + z_T^2 = x_G^2(t) + y_G^2(t) + z_G^2, \forall t \in [0, T_f] \tag{5.23}$$

ce qui signifie que les deux cibles sont dans la même sphère dont le centre est le point médian de $[S_1, S_2]$. Désormais, nous calculons les carrés des termes de (5.20) :

$$r_1^2(t)r_2^2(t) = r_{G_1}^2(t)r_{G_2}^2(t) \tag{5.24}$$

ou, de façon équivalente

$$\begin{aligned}
&\left[(x_T(t) + a)^2 + y_T^2(t) + z_T^2 \right] \left[(x_T(t) - a)^2 + y_T^2(t) + z_T^2 \right] \\
&= \left[(x_G(t) + a)^2 + y_G^2(t) + z_G^2 \right] \left[(x_G(t) - a)^2 + y_G^2(t) + z_G^2 \right]
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Développons le terme de gauche :

$$\begin{aligned}
&\left[(x_T(t) + a)^2 + y_T^2(t) + z_T^2 \right] \left[(x_T(t) - a)^2 + y_T^2(t) + z_T^2 \right] \\
&= \left[x_T^2(t) + y_T^2(t) + z_T^2 + a^2 + 2ax_T(t) \right] \left[x_T^2(t) + y_T^2(t) + z_T^2 + a^2 - 2ax_T(t) \right]
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Soit :

$$r_1^2(t)r_2^2(t) = [x_T^2(t) + y_T^2(t) + z_T^2 + a^2]^2 - 4a^2x_T^2(t) \quad (5.27)$$

Des calculs similaires pour le terme de droite nous donnent :

$$r_{G1}^2(t)r_{G2}^2(t) = [x_G^2(t) + y_G^2(t) + z_G^2 + a^2]^2 - 4a^2x_G^2(t) \quad (5.28)$$

En réinjectant (5.27) et (5.28) dans (5.25), on obtient :

$$[x_T^2(t) + y_T^2(t) + z_T^2 + a^2]^2 - 4a^2x_T^2(t) = [x_G^2(t) + y_G^2(t) + z_G^2 + a^2]^2 - 4a^2x_G^2(t) \quad (5.29)$$

En utilisant (5.23) :

$$-4a^2x_T^2(t) = -4a^2x_G^2(t) \quad (5.30)$$

soit

$$x_T(t) = \pm x_G(t) \quad (5.31)$$

qui nous permet de conclure que

$$y_G^2(t) + z_G^2 = y_T^2(t) + z_T^2 \quad (5.32)$$

□

La connaissance du signe de la différence de distances supprime la symétrie relative au plan médiateur du segment $[S_1, S_2]$, et permet d'établir la propriété suivante :

Proposition 5. *La différence de distances n'est ni une constante ni un polynôme de degré 1 si et seulement si la cible est en dehors de la droite (S_1, S_2) et en dehors du plan médiateur du segment $[S_1, S_2]$. Dans ce cas, la trajectoire de la cible est observable à une symétrie près autour de la droite (S_1, S_2) .*

Les propositions 3 et 5 nous donnent directement les conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité si nous possédons deux capteurs. Notre étude se fera donc à l'aide de réseaux comportant au moins trois capteurs non alignés. L'influence du nombre de capteurs sera étudiée, notamment concernant l'estimation de la profondeur de la cible. Les figures 5.1 et 5.2 illustrent la répartition des cibles fantômes dans les cas où l'on dispose de deux et trois capteurs non-alignés, respectivement.

Notre étude se fera donc à l'aide de réseaux comportant au moins trois capteurs. L'influence du nombre de capteurs sera étudiée, notamment concernant l'estimation de la profondeur de la cible.

5.4 Critères

Quelques hypothèses sont établies pour donner le critère :

- La probabilité de détection de la cible P_d est la même pour tous les capteurs.
- La densité de fausses alarmes λ est la même pour tous les capteurs.
- Les corrélations entre les mesures de différence de temps d'arrivée sont négligées, suivant [Lo et Ferguson, 2000].

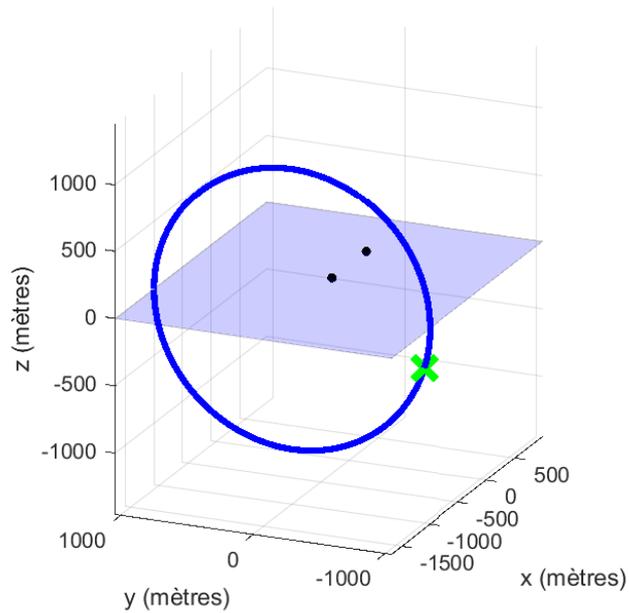


FIGURE 5.1 – Répartition des cibles fantômes dans le cas où l'on dispose de deux hydrophones. Points : hydrophones. Croix verte : cible vraie. Les cibles fantômes se répartissent sur le cercle bleu.

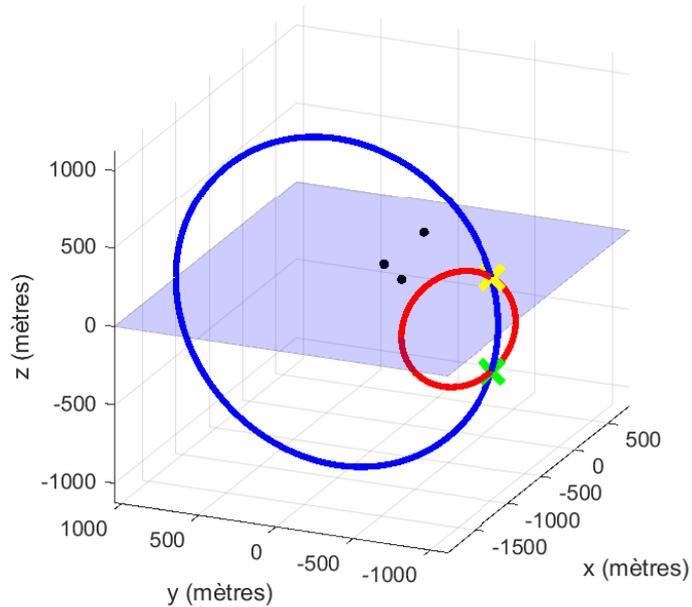


FIGURE 5.2 – Répartition des cibles fantômes dans le cas où l'on dispose de trois hydrophones non-alignés. Points : hydrophones. Croix verte : cible vraie. L'intersection des cercles bleu et rouge donne la cible fantôme au-dessus de la mer (croix jaune).

A l'aide des hypothèses statistiques détaillées dans le chapitre 3, nous en déduisons le critère suivant dans notre cas du réseau d'hydrophones en architecture TAD :

$$C(X|\Delta r_{i,k}) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{N_S} \sum_{k=1}^K \log \left[1 - P_d + \frac{P_d}{\lambda} \sum_{j=1}^{m_{i,k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta r_{i,j,k} - r_{i,k} + r_{i_0,k}}{\sigma} \right)^2 \right) \right] \quad (5.33)$$

La somme sur les capteurs ne s'effectue que sur $N_S - 1$ capteurs, puisque le capteur de référence seul n'apporte pas d'information sur l'état de la cible. Le TDOA ne peut par définition pas s'appliquer à un seul et même capteur. Ce critère sera maximisé à l'aide des procédures numériques présentées dans le chapitre 3.

Il est à noter que les valeurs de P_d et λ peuvent tout à fait être différentes pour chacun des capteurs. Cela ne change pas les procédures de maximisation, à partir du moment où chacune des valeurs est connue. Cela ne complexifie que l'écriture. Il faut de plus, pour satisfaire les hypothèses du ML-PDA, garantir la connaissance de ces paramètres pour chacun des capteurs.

5.5 Performances asymptotiques

La FIM F en environnement propre est la suivante pour le réseau d'hydrophones :

$$F = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{N_S} \sum_{k=1}^K \frac{1}{\sigma^2} [\nabla_X r_{i,k} - \nabla_X r_{i_0,k}] [\nabla_X r_{i,k} - \nabla_X r_{i_0,k}]^T |_{X_{\text{true}}} \quad (5.34)$$

En tenant compte du clutter et de la probabilité de détection, on obtient la FIM J suivante :

$$J = q_2(\lambda v_g, P_d) F \quad (5.35)$$

Concernant les valeurs différentes de P_d et λ pour chaque capteur, la remarque est la même que précédemment.

5.6 Test d'acceptation de l'estimé

Le test d'acceptation de l'estimé est basé sur celui expliqué dans le chapitre 3, en étendant ce cas au réseau de capteurs. La statistique $T_{0,1}$ est désormais la suivante :

$$T_{0,1}(\hat{X}) = \frac{C(\hat{X}) - (N_S - 1)K\mu_0}{\sqrt{(N_S - 1)K}\sigma_0} \quad (5.36)$$

puisque l'on dispose de K échantillons temporels et de $N_S - 1$ mesures utiles issues des capteurs.

5.7 Résultats numériques

Désormais, nous allons présenter quelques résultats numériques issus des simulations. Nous présentons diverses situations, dans lesquelles le nombre de capteurs N_S , la probabilité de détection de la cible P_d , et le nombre moyen de fausses alarmes λu varieront. Cela permettra d'éprouver le fonctionnement de l'estimateur dans différentes conditions. Pour chaque scénario, 200 simulations de Monte

Carlo sont effectuées. Les données de simulation sont les suivantes :

$$X^T = (-1000; 1000; -300; 3; 4) \quad (5.37)$$

$$\sigma = 30 \text{ m} \quad (5.38)$$

$$K = 100 \quad (5.39)$$

$$\Delta t = 4 \text{ s} \quad (5.40)$$

Il est à noter que la valeur de σ correspond à un compromis entre un cas pessimiste donné dans [Arnold *et al.*, 1983] (dans lequel $\sigma = 150 \text{ m}$), et un cas optimiste donné dans [Moose et Dailey, 1985] (dans lequel $\sigma = 4.5 \text{ m}$). Pour chaque scénario (et donc jeu de 200 simulations), les positions des capteurs dans le plan sont tirées aléatoirement selon une loi uniforme sur un carré de 5 km de côté. Ces positions sont ensuite fixes et connues pour l'ensemble des simulations du scénario. Les résultats sont désormais présentés dans le tableau 5.1.

TABLE 5.1 – Résultats de 200 simulations de Monte Carlo en architecture TAD

N_S	P_d	λu	\bar{X}	$\overline{\text{NEES}}$	Taux d'acceptation
3	0,6	8	(-1007,53; 1000,93; -233,98; 3,025; 3,994)	7,81	94,5 %
5	0,6	8	(-1005,52; 996,37; -285,95; 3,013; 4,010)	6,22	95,5 %
10	0,6	8	(-999,83; 1000,32; -299,08; 2,991; 3,997)	5,71	93,5 %
15	0,6	8	(-1000,48; 1000,41; -299,48; 3,002; 3,998)	5,08	97 %
3	0,8	4	(-1009,89; 995,02; -296,68; 3,029; 4,015)	5,26	95 %
5	0,8	4	(-1000,28; 1000,67; -296,59; 2,998; 3,998)	5,22	93,5 %
15	0,8	4	(-1001,72; 999,47; -299,99; 3,004; 4,002)	5,01	93 %

TABLE 5.2 – Écarts-types asymptotiques pour chaque composante en fonction du nombre de capteurs dans le réseau ($P_d = 0.6$, $\lambda u = 8$)

Composante	$N_S = 3$	$N_S = 15$
$x \text{ (m)}$	326,65	20,37
$y \text{ (m)}$	33,02	10,24
$z \text{ (m)}$	196,80	14,27
$\dot{x} \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$	0,569	0,066
$\dot{y} \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$	0,416	0,033

Pour 200 simulations, l'encadrement du NEES à 95 % est [4,55; 5,44]. Nous remarquons tout d'abord que les taux d'acceptation des estimés sont très bons (supérieurs à 90 %). Nous remarquons ensuite que l'estimateur ne semble que très peu biaisé, sauf sur la composante de la profondeur, où le biais est plus important. La réduction du biais sur la composante de la profondeur semble possible soit en ayant un rapport signal-sur-bruit plus favorable, ce qui n'est malheureusement pas maîtrisable dans la vie réelle, soit en augmentant le nombre de capteurs.

De plus, comme les capteurs sont tous placés à la surface de l'eau, il est finalement compliqué d'estimer avec une précision acceptable la profondeur de la cible. Cela avait été conclu dans [Lo et

Ferguson, 2000], et nous effectuons la même constatation. Une très grande variance asymptotique est attendue sur l'estimation de cette composante. Cela est montré dans le tableau 5.2, où l'on peut obtenir un écart-type asymptotique sur la profondeur d'environ 200 mètres. Pour simplifier, cela revient dans notre situation à dire que la cible est sous l'eau, sans apporter plus d'informations. Le tableau 5.2 montre aussi que l'augmentation du nombre de capteurs diminue aussi la variance asymptotique sur la profondeur.

Les valeurs moyennes du NEES sont proches de l'intervalle si le biais est très faible, et dépassent de l'intervalle si le biais devient plus important. Ces valeurs restent acceptables d'un point de vue opérationnel. Mais il est impossible de conclure quant à l'efficacité de l'estimateur de façon absolue, et encore moins dans le cas où le rapport signal-sur-bruit est faible. L'estimateur semble cependant efficace si le nombre de capteurs est important (suffisant pour supprimer le biais).

Les figures 5.3 et 5.4 représentent les résultats de simulation pour deux cas particuliers. Dans 5.3, on remarque notamment la très grande variance des estimés sur la profondeur, ainsi que le biais commis lors de l'estimation, du fait du faible nombre de capteurs.

5.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité et résolu le problème de la trajectographie passive d'une cible sous-marine en MRU par un réseau de bouées hydrophones flottant à la surface de la mer. Du fait de la simplicité des capteurs du point de vue du traitement de signal, les données acquises par les hydrophones après traitement du signal sont entachées de fausses alarmes. Le modèle régissant ces fausses alarmes est le modèle du PDA, et nous nous sommes placés dans l'architecture TAD.

A l'issue des simulations et de l'étude des résultats numériques, il convient de conclure que l'estimateur mis au point peut être biaisé sur la composante de la profondeur de la cible. Ce biais se manifeste surtout si le nombre de capteurs est assez faible, et/ou si le rapport signal-sur-bruit est faible. De plus, si le nombre de capteurs est assez faible, alors la variance asymptotique minimale sur la profondeur de la cible est très importante. Dans cette situation, il est quasiment impossible d'estimer cette composante. L'efficacité de l'estimateur au sens du NEES n'est donc pas une certitude absolue, et dépend énormément du contexte.

Le palliatif que nous remarquons à l'issue de ces résultats numériques est la nécessité de rajouter un grand nombre de capteurs, dans le but de réduire le biais sur la profondeur et d'avoir une précision suffisante sur celle-ci. Cependant, rajouter des capteurs est une opération coûteuse, à la fois d'un point de vue logistique (plus de capteurs à positionner, à gérer), d'un point de vue coût financier, mais aussi au niveau du temps de calcul. Plus de capteurs nécessite plus de temps de calcul, et/ou plus de puissance de calcul. Une autre solution serait de se passer de l'estimation de la profondeur de la cible, par exemple en la supposant *a priori*. Cependant, l'estimateur mis au point de cette façon serait un estimateur sous contrainte. Or, d'après [Somekh-Baruch *et al.*, 2018], un estimateur sous contrainte est forcément biaisé. En voulant résoudre le problème d'estimabilité sur une composante, on pourrait se retrouver à générer un biais sur toutes les autres. Cette solution ne sera donc pas retenue.

C'est pourquoi dans le prochain chapitre, nous proposons une solution qui permet de pallier le problème du biais sur la profondeur, tout en rajoutant un nombre de capteurs très limité, donc en limitant tous les coûts, mais sans impacter l'estimation des autres composantes de la cible.

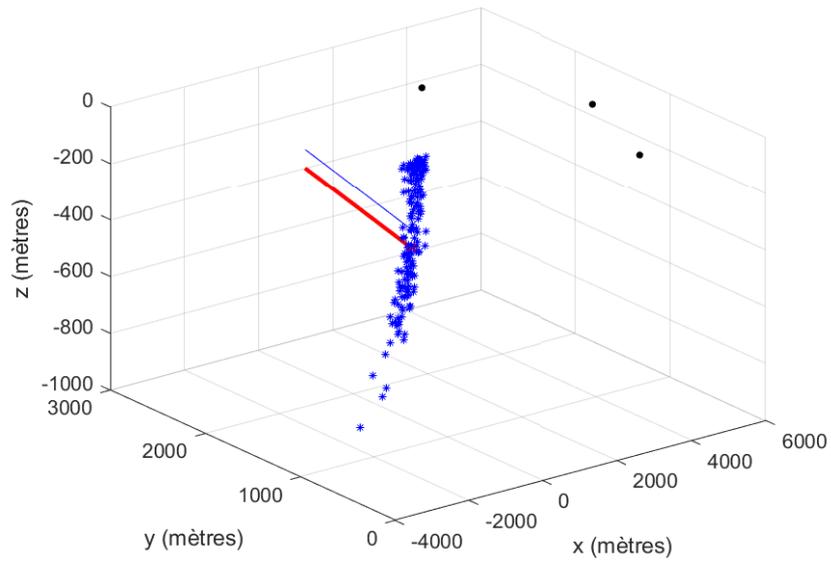


FIGURE 5.3 – Scénario $N_S = 3$, $P_d = 0,6$ et $\lambda u = 8$. Points : hydrophones. Rouge : trajet vrai. Bleu : trajet estimé et nuage d'estimés de la position initiale.

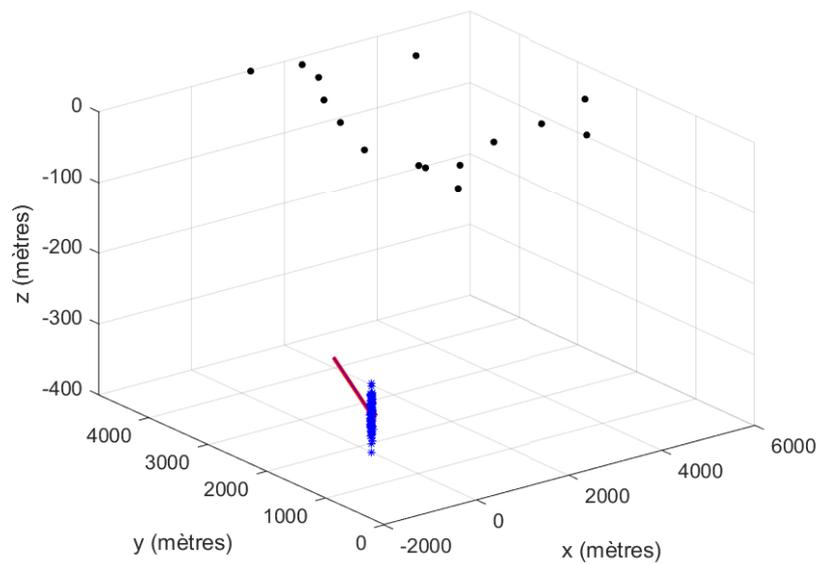


FIGURE 5.4 – Scénario $N_S = 15$, $P_d = 0,6$ et $\lambda u = 8$. Points : hydrophones. Rouge : trajet vrai. Bleu : trajet estimé et nuage d'estimés de la position initiale.

Trajectographie passive par fusion de bouées hydrophones et d'antennes linéaires verticales

6.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons conclu que la trajectographie d'une cible sous-marine en MRU à l'aide d'un réseau de bouées hydrophones flottantes était réalisable, mais ne permettait pas une bonne estimation sur la composante de la profondeur. Les autres composantes sont cependant estimées de façon correcte et adéquate. L'idée qui nous vient alors est de rajouter un autre type de capteur à notre réseau, ce qui nous permettrait d'améliorer la précision sur la profondeur. Ce nouveau réseau combinant plusieurs types de capteurs est appelé "réseau mixte". Nous choisissons pour cela d'intégrer des antennes linéaires verticales [Hinich, 1973]. Ces antennes, mesurant des cosinus d'angle d'élévation, sont par construction plus aptes à estimer la profondeur avec une plus grande précision, mais ont une faible précision sur la position dans le plan. C'est donc un comportement "inverse" de celui des hydrophones. Ainsi, en combinant ces deux types de capteurs, nous pourrions désormais obtenir le "meilleur des deux mondes", c'est-à-dire une précision suffisante sur chacune des composantes de la position initiale.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la trajectographie passive d'une cible unique en MRU à l'aide du "réseau mixte". Cette étude se décompose de la façon suivante : tout d'abord, nous verrons les notations utilisées pour la suite de ce chapitre. Nous étudierons ultérieurement l'observabilité de la trajectoire de la cible dans ce système nouvellement créé. Ensuite, à l'aide de la FIM, nous justifierons le choix de ce réseau. Viendront ensuite la présentation du critère à optimiser, des performances asymptotiques, ainsi que du test d'acceptation de l'estimé.

Les résultats numériques, permettant d'apprécier le fonctionnement de l'estimateur ainsi mis au point, seront présentés en deux temps. Nous nous placerons tout d'abord dans un contexte d'architecture de type TAD. Enfin, nous aborderons le cas où après l'étape de détection, les données sont couplées à leur énergie, soit une architecture TAD-AI. Une conclusion fera ensuite le point sur l'étude.

6.2 Problématique et notations

Le réseau est composé de N_S bouées hydrophones mesurant à chaque échantillon $k = 1 : K$ des différences de temps d'arrivée du signal ou de façon équivalente des différences de distances relativement à un capteur de référence (le trajet emprunté par l'onde est le trajet direct). A ces bouées, on ajoute N_A antennes linéaires verticales mesurant à chaque échantillon $k = 1 : K$ des cosinus d'angle d'élévation. Les antennes linéaires collectent deux types d'angles : les angles issus des trajets directs et réfléchis de la cible vers l'antenne. Nous supposons que les ondes se propagent en ligne droite, et ne sont réfléchies qu'une seule fois [Blanc-Benon et Jauffret, 1997, Gong, 1982]. Le trajet réfléchi correspond à la réflexion provenant du fond de la mer. Les antennes verticales sont supposées détecter systématiquement le trajet direct et le réfléchi-fond, et peuvent discriminer ces trajets entre eux.

Les positions des capteurs du réseau sont uniformément réparties dans un carré. Chaque position est connue avec exactitude et les capteurs sont immobiles durant toute la durée de l'acquisition.

De façon similaire au chapitre précédent, la cible est supposée en MRU dans un plan horizontal à une profondeur constante. En prenant les mêmes notations que dans le chapitre précédent, le vecteur d'état est donc le suivant :

$$X^T = (x; y; z; \dot{x}; \dot{y}) \quad (6.1)$$

La position de la cible à un instant k est donc définie de façon identique que dans les équations (4.2) à (4.4).

Désormais nous pouvons caractériser les mesures obtenues. Chaque hydrophone est situé aux coordonnées (x_i^S, y_i^S, z_i^S) , avec $z_i^S = 0, \forall i$. $r_{i,k}$ est la distance entre la cible à l'échantillon k et l'hydrophone i :

$$r_{i,k}(X) = \sqrt{(x_k - x_i^S)^2 + (y_k - y_i^S)^2 + z^2} \quad (6.2)$$

Ainsi, nous obtenons à chaque échantillon k pour le capteur i , un vecteur de détections $\Delta r_{i,j,k}$, $j = 1, \dots, m_{i,k}$. Ce vecteur est défini de la façon suivante :

— si j est l'indice associé à la bonne détection, alors :

$$\Delta r_{i,j,k} = r_{i,k}(X) - r_{i_0,k}(X) + \varepsilon_{i,k}^S \quad (6.3)$$

avec i_0 l'indice associé à l'hydrophone de référence¹, et $\varepsilon_{i,k}^S$ est un bruit blanc Gaussien centré additif de variance σ_Δ^2 .

— si j est l'indice associé à une fausse alarme, alors $\Delta r_{i,j,k}$ est la réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'espace de scrutation \mathbb{U}_Δ de dimension u_Δ .

De façon similaire, on obtient deux vecteurs de mesure pour chaque antenne linéaire verticale : $c_{n,j,k}^D$ et $c_{n,j,k}^B$. Si l'indice j se réfère pour ces deux vecteurs à la bonne détection, on a alors :

$$c_{n,j,k}^D = \cos(\phi_{n,k}^D(X)) + \varepsilon_{n,k}^D = \frac{z - z_n^A}{\sqrt{(x_k - x_n^A)^2 + (y_k - y_n^A)^2 + (z - z_n^A)^2}} + \varepsilon_{n,k}^D \quad (6.4)$$

$$c_{n,j,k}^B = \cos(\phi_{n,k}^B(X)) + \varepsilon_{n,k}^B = \frac{2z_B - (z_n^A + z)}{\sqrt{(x_k - x_n^A)^2 + (y_k - y_n^A)^2 + (z + z_n^A - 2z_B)^2}} + \varepsilon_{n,k}^B \quad (6.5)$$

1. Défini de la même façon que dans le chapitre précédent

Sinon, $c_{n,j,k}^D$ et $c_{n,j,k}^B$ sont deux réalisations indépendantes d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur \mathbb{U}_A de dimension u_A (par définition $\mathbb{U}_A = [-1; 1]$ et donc $u_A = 2$). L'équation (6.4) définit la mesure provenant du trajet direct, tandis que l'équation (6.5) se réfère au trajet réfléchi. Toutes deux sont relatives à l'antenne n et à l'échantillon k . Chaque antenne est située aux coordonnées (x_n^A, y_n^A, z_n^A) , z_n^A étant le centre acoustique de l'antenne, et z_B la profondeur du fond marin. $\varepsilon_{n,k}^D$ et $\varepsilon_{n,k}^B$ sont des bruits blancs Gaussiens additifs centrés de puissance σ_A^2 . La figure 6.1 illustre les angles d'élévation de la cible.

Il est à noter que $\cos(\phi_{n,k}^D(X))$ et $\cos(\phi_{n,k}^B(X))$ ne seront jamais égaux à -1 ou 1.

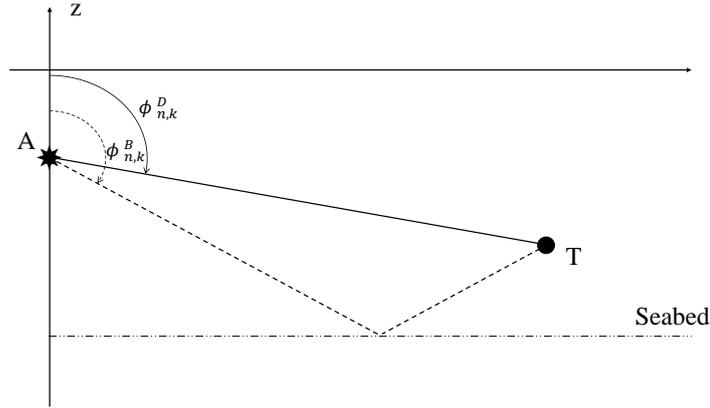


FIGURE 6.1 – Angles d'élévation des trajets directs et réfléchis.

De façon similaire au chapitre précédent, le retard de propagation a été négligé dans ce chapitre.

Dans la suite de ce chapitre, nous considérerons un réseau mixte composé de $N_S = 3$ hydrophones et $N_A = 2$ antennes linéaires verticales. Les positions des capteurs sont réparties uniformément dans un carré de 20 kilomètres de côté. On impose $K = 100$ et $\Delta t = 4$ s. Deux types de vitesse de cible sont étudiés : une cible lente liée à l'état vrai X_L , et une cible rapide liée à l'état vrai X_H . Les états vrais sont les suivants :

$$X_L^T = (-5000; 3000; -300; 4; 3) \quad (6.6)$$

$$X_H^T = (-5000; 3000; -300; 25; 12) \quad (6.7)$$

Les écarts-types des bruits sont ² $\sigma_\Delta = 30$ m, et $\sigma_A = 0,017$ (impliquant un écart-type sur l'angle plus grand que 1°)³. Les centres acoustiques des antennes z_n^A sont supposés être à 50 mètres de profondeur. On fait l'hypothèse que le fond marin se situe à une profondeur de 2000 mètres.

La figure 6.2 représente un exemple de réseau mixte ainsi que la trajectoire de la cible, pour la cible rapide définie plus haut.

6.3 Étude de l'observabilité

Nous devons désormais étudier l'observabilité d'une source en MRU captée par le réseau mixte.

Soit une source dont la trajectoire démarre au point $P \triangleq (x, y, z)^T$.

1. Considérons deux bouées S_1 et S_2 permettant de mesurer un temps de retard. Nous avons démontré au chapitre précédent que :

2. De façon analogue au chapitre précédent, et avec les mêmes justifications.

3. Pour une mesure $m = \cos(\alpha) + \varepsilon$, l'écart-type correspondant à l'angle α est approximativement $\sigma(\alpha) = \frac{\sigma(m)}{|\sin(\alpha)|}$.

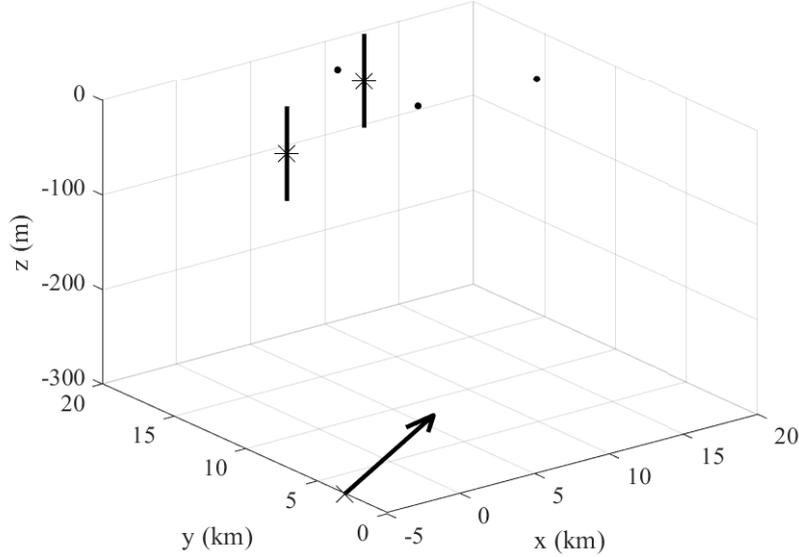


FIGURE 6.2 – Exemple de réseau mixte. Points : hydrophones. Lignes verticales : antennes. Étoiles : centres acoustiques des antennes. Flèche : cible.

- Si la source se déplace sur le segment $[S_1, S_2]$, alors la trajectoire est observable.
 - Si la source se déplace sur la droite (S_1, S_2) , privée du segment $[S_1, S_2]$, la trajectoire n'est pas observable et l'ensemble des sources fantômes se déplace sur cet axe privé de $[S_1, S_2]$ du même côté que la source.
 - Si la source se déplace dans le plan médiateur \mathcal{P}_v du segment $[S_1, S_2]$, alors sa trajectoire n'est pas observable et l'ensemble des sources fantômes se déplace dans \mathcal{P}_v .
 - Hormis ces trois cas particuliers, la source n'est pas observable et toutes les sources fantômes débutent leurs trajectoires sur un point du cercle vertical \mathcal{C}_v de centre $(x, 0, 0)^T$ et contenant le point $(x, y, z)^T$.
2. Considérons maintenant une antenne verticale dont le centre acoustique est positionné en $A = (x^A, y^A, z^A)^T$. Soient ϕ^D l'angle d'élévation du trajet direct et ϕ^B celui du trajet réfléchi-fond. Remarquons que ϕ^D et ϕ^B sont dans $[0, \pi]$, et que $\phi^B > \phi^D$. Les mesures sans bruit sont :

$$\cos(\phi^D) = \frac{z - z^A}{d^D(A, P)} \quad (6.8)$$

$$\cos(\phi^B) = \frac{2z_B - (z + z^A)}{d^B(A, P)} \quad (6.9)$$

avec $d^D(A, P)$ la distance parcourue par le trajet direct entre l'antenne et la source, et $d^B(A, P)$ la distance parcourue par le trajet réfléchi-fond. Nous avons :

$$\tan(\phi^D) = \frac{\sqrt{(x^A - x)^2 + (y^A - y)^2}}{z - z^A} \quad (6.10)$$

$$\tan(\phi^B) = \frac{\sqrt{(x^A - x)^2 + (y^A - y)^2}}{2z_B - (z + z^A)} \quad (6.11)$$

Posons $R_{xy} = \sqrt{(x^A - x)^2 + (y^A - y)^2}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
(6.10) \text{ et } (6.11) &\Leftrightarrow \begin{cases} (z - z^A) \sin(\phi^D) = R_{xy} \cos(\phi^D) \\ [2z_B - (z^A + z)] \sin(\phi^B) = R_{xy} \cos(\phi^B) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} R_{xy} \cos(\phi^D) - z \sin(\phi^D) = -z^A \sin(\phi^D) \\ R_{xy} \cos(\phi^B) + z \sin(\phi^B) = (2z_B - z^A) \sin(\phi^B) \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Ce dernier système peut se mettre sous une forme matricielle, après avoir posé

$$M \triangleq \begin{pmatrix} \cos(\phi^D) & -\sin(\phi^D) \\ \cos(\phi^B) & \sin(\phi^B) \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

on a donc :

$$(6.12) \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} R_{xy} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z^A \sin(\phi^D) \\ (2z_B - z^A) \sin(\phi^B) \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

Or, $\det(M) = \sin(\phi^D + \phi^B)$, et donc $\det(M) = 0 \Leftrightarrow \phi^D + \phi^B = k\pi$, avec $k = 0$ ou 1 .

- $k = 0$: $\phi^B = -\phi^D$. Or les deux angles sont positifs. La seule possibilité mathématique serait que $\phi^D = \phi^B = 0$, ce qui est impossible physiquement.
- $k = \pi$: $\phi^B = -\phi^D + \pi$. Du fait de la périodicité et de l'imparité de la fonction tan, cette égalité entraîne que $\tan(\phi^B) = -\tan(\phi^D)$, soit encore que $2z_B - (z^A + z) = -z + z^A \Leftrightarrow z_B = z^A$, ce qui est physiquement impossible, puisque le centre acoustique de l'antenne ne peut se situer au fond de l'océan.

En conclusion, le déterminant de M n'est jamais nul. Par conséquent, z et R_{xy} sont observables. Ce qui implique que l'ensemble des sources fantômes ont leurs trajectoires qui démarrent sur le cercle horizontal \mathcal{C}_h de rayon R_{xy} et de centre $(x^A, y^A, z)^T$.

3. La fusion des deux bouées et de l'antenne a pour conséquences sur l'observabilité :

- Si la source se déplace sur la droite (S_1, S_2) privée du segment $[S_1, S_2]$, alors il n'y a qu'une source fantôme au plus.
- Si la source se déplace dans le plan \mathcal{P}_v , il y a une source fantôme au plus dont la trajectoire est un point d'intersection de ce plan avec le cercle \mathcal{C}_h (l'autre point d'intersection est le point de départ de la trajectoire de la source).
- Si la source ne se déplace pas dans le plan \mathcal{P}_v , ni sur l'axe (S_1, S_2) privé de $[S_1, S_2]$, alors deux cas sont à envisager :
 - L'antenne est dans le même plan vertical contenant (S_1, S_2) . Dans ce cas la trajectoire de la source est observable à la symétrie orthogonale par rapport à ce plan, près. Cette situation est illustrée sur les figures 6.3 et 6.4.
 - L'antenne n'est pas dans le plan vertical contenant (S_1, S_2) . Dans ce cas, la trajectoire de la source est observable. Cette situation est illustrée sur les figures 6.5 et 6.6.

Ainsi, pour lever les ambiguïtés dues aux hydrophones, nous rajouterons par la suite un troisième hydrophone non aligné avec les deux premiers. Dans le but d'améliorer les performances, nous rajouterons une deuxième antenne linéaire verticale.

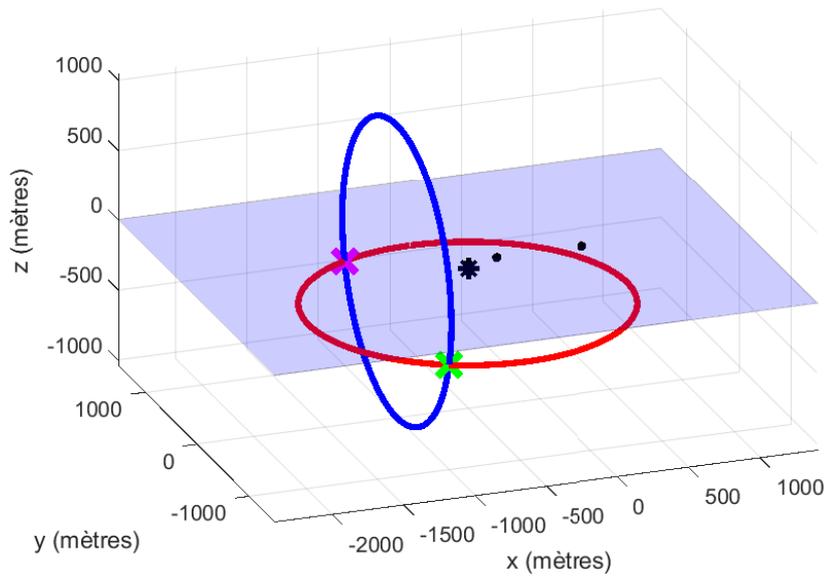


FIGURE 6.3 – Répartition des cibles fantômes dans le cas où l'on dispose de deux hydrophones et d'une antenne verticale. Antenne dans le même plan vertical que les hydrophones. Points : hydrophones. Etoile : antenne. Croix verte : cible vraie. Croix magenta : cible fantôme. Les cibles fantômes se répartissent sur le cercle bleu (hydrophones) et rouge (antenne).

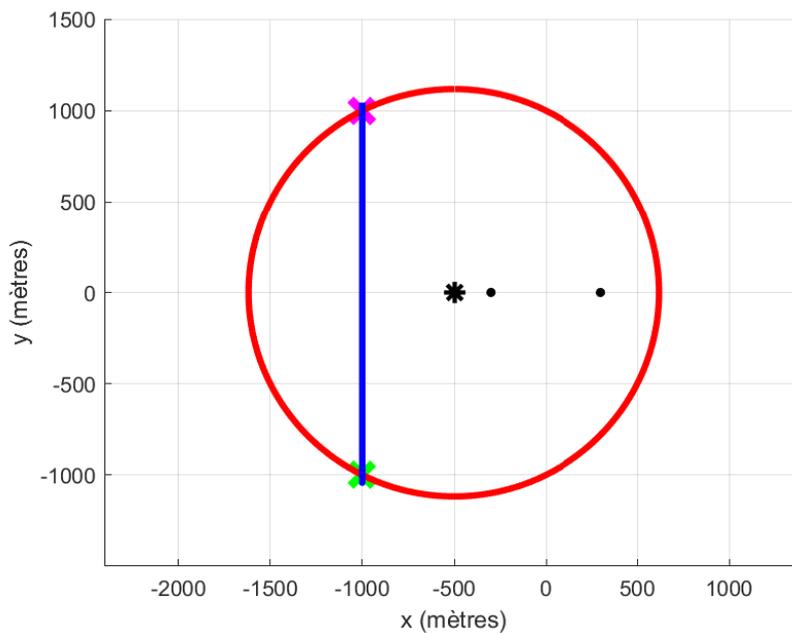


FIGURE 6.4 – Répartition des cibles fantômes dans le cas où l'on dispose de deux hydrophones et d'une antenne verticale. Antenne dans le même plan vertical que les hydrophones. Vue du dessus. Légende identique à la figure précédente.

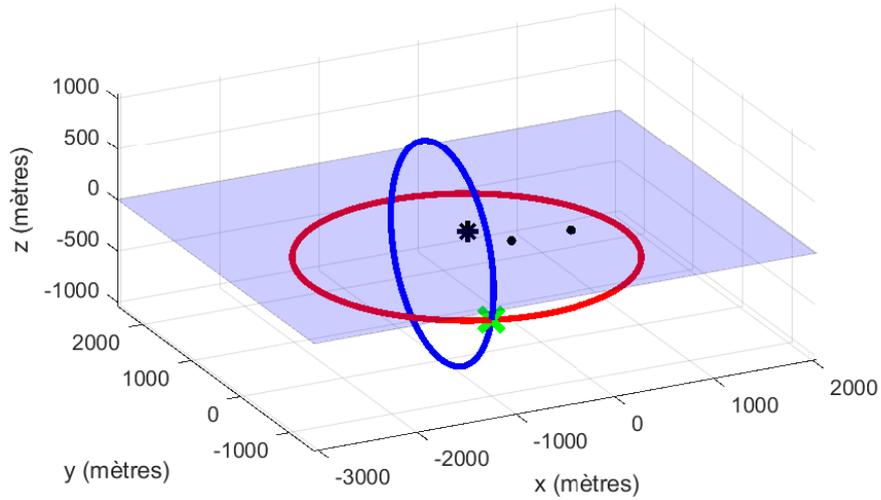


FIGURE 6.5 – Répartition des cibles fantômes dans le cas où l'on dispose de deux hydrophones et d'une antenne verticale, non alignée avec les hydrophones. Points : hydrophones. Etoile : antenne. Croix verte : cible vraie. Les cibles fantômes se répartissent sur le cercle bleu (hydrophones) et rouge (antenne). L'intersection est unique, à l'emplacement de la cible vraie.

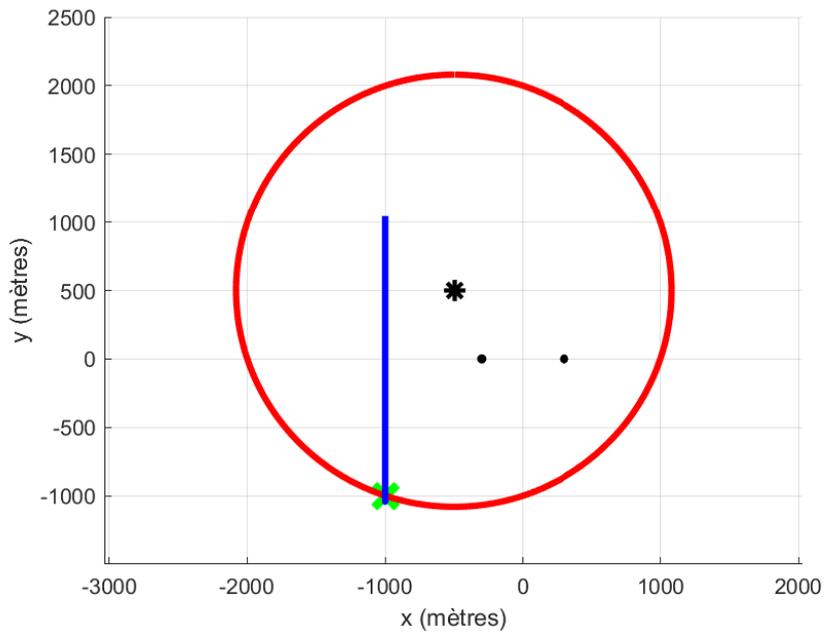


FIGURE 6.6 – Répartition des cibles fantômes dans le cas où l'on dispose de deux hydrophones et d'une antenne verticale, non alignée avec les hydrophones. Vue du dessus. Légende identique à la figure précédente.

6.4 Justification de l'utilisation du réseau mixte

Dans cette partie nous présentons le principal intérêt de l'utilisation du réseau mixte. Cet intérêt se quantifie à l'aide de la FIM. Tout d'abord, nous donnons les expressions des FIM en environnement propre pour chaque type de capteur :

$$F_{\Delta} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{N_S} \sum_{k=1}^K \frac{1}{\sigma_{\Delta}^2} [\nabla_X r_{i,k} - \nabla_X r_{i_0,k}] [\nabla_X r_{i,k} - \nabla_X r_{i_0,k}]^T |_{X_{\text{true}}} \quad (6.15)$$

$$F_A = \sum_{j=1}^{N_A} \sum_{k=1}^K \frac{1}{\sigma_A^2} [\nabla_X \cos(\phi_{j,k}^D) \nabla_X^T \cos(\phi_{j,k}^D) + \nabla_X \cos(\phi_{j,k}^B) \nabla_X^T \cos(\phi_{j,k}^B)] |_{X_{\text{true}}} \quad (6.16)$$

F_{Δ} et F_A sont respectivement les FIM pour les hydrophones et pour les antennes verticales. La FIM F après la fusion des capteurs est donc la suivante :

$$F = F_{\Delta} + F_A \quad (6.17)$$

Pour illustrer le bénéfice issu de la fusion des capteurs, la procédure suivante est appliquée. Pour la cible lente et les valeurs numériques définies précédemment, 5000 réseaux mixtes aléatoires sont créés. En effet, on rappelle que les positions des capteurs sont uniformément répartis sur un carré. Pour chaque réseau, F_{Δ} , F_A et F sont calculées numériquement. Ensuite, la valeur moyenne des éléments diagonaux de chaque FIM est extraite pour permettre la comparaison. Le résultat est présenté dans le tableau 6.1.

TABLE 6.1 – Valeurs moyennes des éléments diagonaux des FIM

Composante	Unité	Hydrophones	Antennes	Réseau mixte
x	m^{-2}	0,0111	$2,88 \times 10^{-4}$	0,0114
y	m^{-2}	0,0457	$7,92 \times 10^{-5}$	0,0457
z	m^{-2}	$3,778 \times 10^{-5}$	$6,8 \times 10^{-3}$	$6,9 \times 10^{-3}$
\dot{x}	$\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2$	614,48	17,16	631,63
\dot{y}	$\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2$	2583,5	4,97	2588,4

On remarque que la quantité d'information venant des hydrophones sur la profondeur de la cible est très faible, confirmant ce que nous avons remarqué dans le chapitre précédent. Mais les autres composantes sont estimés de façon acceptable. D'autre part, les antennes verticales n'apportent pas beaucoup d'information sur la position dans le plan, ni sur la vitesse de la cible, comparativement aux hydrophones. Cependant, la quantité d'information sur la profondeur est plutôt importante. Ainsi, le réseau mixte bénéficie du meilleur de chaque type de capteurs, et permet ainsi une estimation précise de l'ensemble du vecteur d'état.

Notons cependant que dans certains cas où les antennes linéaires sont trop distantes, le gain d'information sur la profondeur de la cible s'avère négligeable.

6.5 Critères

Plusieurs hypothèses préliminaires sont données avant d'établir les critères :

- L'indice Δ se réfère aux hydrophones, tandis que l'indice A se réfère aux antennes linéaires verticales.
- La probabilité de détection $P_{d\Delta}$ est identique pour chaque hydrophone. Il en est de même pour P_{dA} concernant les antennes.
- La densité de fausses alarmes λ_Δ est identique pour chaque hydrophone. Il en est de même pour λ_A concernant les antennes.
- La corrélation entre les mesures de différence de temps d'arrivée est négligée, de façon similaire à l'étude menée dans le chapitre précédent.

En utilisant les hypothèses statistiques du PDA, on en déduit tout d'abord le critère en architecture TAD. Tout d'abord, on définit les notations suivantes :

$$C_1(X|\Delta r_{i,k}) = \log \left[1 - P_{d\Delta} + \frac{P_{d\Delta}}{\lambda_\Delta} \sum_{j=1}^{m_{i,k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Delta} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta r_{i,j,k} - r_{i,k} + r_{i_0,k}}{\sigma_\Delta} \right)^2 \right) \right] \quad (6.18)$$

$$C_2(X|c_{l,k}^D) = \log \left[1 - P_{dA} + \frac{P_{dA}}{\lambda_A} \sum_{j=1}^{m_{l,k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{c_{l,j,k}^D - \cos(\phi_{l,k}^D)}{\sigma_A} \right)^2 \right) \right] \quad (6.19)$$

$$C_3(X|c_{n,k}^B) = \log \left[1 - P_{dA} + \frac{P_{dA}}{\lambda_A} \sum_{j=1}^{m_{n,k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{c_{n,j,k}^B - \cos(\phi_{n,k}^B)}{\sigma_A} \right)^2 \right) \right] \quad (6.20)$$

Le critère à optimiser est donc le suivant en architecture TAD :

$$C(X) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{N_S} \sum_{k=1}^K C_1(X|\Delta r_{i,k}) + \sum_{l=1}^{N_A} \sum_{k=1}^K C_2(X|c_{l,k}^D) + \sum_{n=1}^{N_A} \sum_{k=1}^K C_3(X|c_{n,k}^B) \quad (6.21)$$

Lorsque les informations d'énergie sont disponibles, il vient :

$$C_1(X|\Delta r_{i,k}, R_{i,k}) = \log \left[1 - P_{d\Delta} + \frac{P_{d\Delta}}{\lambda_\Delta} \sum_{j=1}^{m_{i,k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Delta} \rho_{i,j,k} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta r_{i,j,k} - r_{i,k} + r_{i_0,k}}{\sigma_\Delta} \right)^2 \right) \right] \quad (6.22)$$

$$C_2(X|c_{l,k}^D, R_{l,k}^D) = \log \left[1 - P_{dA} + \frac{P_{dA}}{\lambda_A} \sum_{j=1}^{m_{l,k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A} \rho_{l,j,k} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{c_{l,j,k}^D - \cos(\phi_{l,k}^D)}{\sigma_A} \right)^2 \right) \right] \quad (6.23)$$

$$C_3(X|c_{n,k}^B, R_{n,k}^B) = \log \left[1 - P_{dA} + \frac{P_{dA}}{\lambda_A} \sum_{j=1}^{m_{n,k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A} \rho_{n,j,k} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{c_{n,j,k}^B - \cos(\phi_{n,k}^B)}{\sigma_A} \right)^2 \right) \right] \quad (6.24)$$

Le critère à optimiser dans l'architecture TAD-AI est donc le suivant :

$$C(X) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{N_S} \sum_{k=1}^K C_1(X|\Delta r_{i,k}, R_{i,k}) + \sum_{l=1}^{N_A} \sum_{k=1}^K C_2(X|c_{l,k}^D, R_{l,k}^D) + \sum_{n=1}^{N_A} \sum_{k=1}^K C_3(X|c_{n,k}^B, R_{n,k}^B) \quad (6.25)$$

6.6 Performances asymptotiques

Il est désormais possible d'exprimer les FIM dans les deux architectures traitées, avec les FIM en environnement propre décrites dans les équations (6.15) et (6.16) :

$$F_1 = q_2(\lambda_\Delta 2g\sigma_\Delta, P_{d\Delta})F_\Delta + q_2(\lambda_A 2g\sigma_A, P_{dA})F_A \quad (6.26)$$

$$F_2 = q_3(\lambda_\Delta 2g\sigma_\Delta, P_{d\Delta})F_\Delta + q_3(\lambda_A 2g\sigma_A, P_{dA})F_A \quad (6.27)$$

où F_1 et F_2 sont les FIM dans les architectures TAD et TAD-AI respectivement.

6.7 Test d'acceptation de l'estimé

Du fait de la diversité des mesures traitées, il est nécessaire d'adapter le test d'acceptation à notre réseau mixte. Nous considérons la statistique suivante :

$$T_{0,1}(\hat{X}) = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{\sqrt{V_1 + V_2 + V_3}} \quad (6.28)$$

avec :

$$T_1 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{N_S} \sum_{k=1}^K \left\{ C_1(\hat{X}|\Delta r_{i,k}^*) - \mathbb{E} \left[C_1(\hat{X}|\Delta r_{i,k}^*) | H_0 \right] \right\} \quad (6.29)$$

$$T_2 = \sum_{l=1}^{N_A} \sum_{k=1}^K \left\{ C_2(\hat{X}|c_{l,k}^{D,*}) - \mathbb{E} \left[C_2(\hat{X}|c_{l,k}^{D,*}) | H_0 \right] \right\} \quad (6.30)$$

$$T_3 = \sum_{n=1}^{N_A} \sum_{k=1}^K \left\{ C_3(\hat{X}|c_{l,k}^{B,*}) - \mathbb{E} \left[C_3(\hat{X}|c_{l,k}^{B,*}) | H_0 \right] \right\} \quad (6.31)$$

$$V_1 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{N_S} \sum_{k=1}^K \text{Var} \left[C_1(\hat{X}|\Delta r_{i,k}^*) | H_0 \right] \quad (6.32)$$

$$V_2 = \sum_{l=1}^{N_A} \sum_{k=1}^K \text{Var} \left[C_2(\hat{X}|c_{l,k}^{D,*}) | H_0 \right] \quad (6.33)$$

$$V_3 = \sum_{l=1}^{N_A} \sum_{k=1}^K \text{Var} \left[C_3 \left(\hat{X} | c_{l,k}^{B,*} \right) | H_0 \right] \quad (6.34)$$

Puisque \hat{X} est considéré comme le maximum global (voir chapitre introductif au PDA), on obtient les approximations suivantes :

$$\text{E} \left[C_1 \left(\hat{X} | \Delta r_{i,k}^* \right) | H_0 \right] \simeq \text{E} \left[C_1 \left(X | \Delta r_{i,k}^* \right) | H_0 \right] = \mu_{0,1} \quad (6.35)$$

$$\text{E} \left[C_2 \left(\hat{X} | c_{l,k}^{D,*} \right) | H_0 \right] \simeq \text{E} \left[C_2 \left(X | c_{l,k}^{D,*} \right) | H_0 \right] = \mu_{0,2} \quad (6.36)$$

$$\text{E} \left[C_3 \left(\hat{X} | c_{l,k}^{B,*} \right) | H_0 \right] \simeq \text{E} \left[C_3 \left(X | c_{l,k}^{B,*} \right) | H_0 \right] = \mu_{0,3} \quad (6.37)$$

$$\text{Var} \left[C_1 \left(\hat{X} | \Delta r_{i,k}^* \right) | H_0 \right] \simeq \text{Var} \left[C_1 \left(X | \Delta r_{i,k}^* \right) | H_0 \right] = \sigma_{0,1}^2 \quad (6.38)$$

$$\text{Var} \left[C_2 \left(\hat{X} | c_{l,k}^{D,*} \right) | H_0 \right] \simeq \text{Var} \left[C_2 \left(X | c_{l,k}^{D,*} \right) | H_0 \right] = \sigma_{0,2}^2 \quad (6.39)$$

$$\text{Var} \left[C_3 \left(\hat{X} | c_{l,k}^{B,*} \right) | H_0 \right] \simeq \text{Var} \left[C_3 \left(X | c_{l,k}^{B,*} \right) | H_0 \right] = \sigma_{0,3}^2 \quad (6.40)$$

Finalement, la statistique $T_{0,1}$ peut se réécrire de la façon suivante :

$$T_{0,1}(\hat{X}) = \frac{C(\hat{X}) - (N_S - 1)K\mu_{0,1} - N_A K(\mu_{0,2} + \mu_{0,3})}{\sqrt{(N_S - 1)K\sigma_{0,1}^2 + N_A K(\sigma_{0,2}^2 + \sigma_{0,3}^2)}} \quad (6.41)$$

Là encore, ce test est valable quelle que soit l'architecture envisagée. Seules les expressions et valeurs des $\mu_{0,i}$ et $\sigma_{0,i}$ changeront en fonction de l'architecture.

6.8 Résultats numériques

Dans cette partie, nous présentons les résultats numériques obtenus en simulation dans les deux architectures considérées.

6.8.1 Architecture TAD

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- $P_{d_\Delta} = P_{d_A} = P_d$
- λ_Δ et λ_A sont fixées telles que le nombre moyen de fausses alarmes λu soit le même quel que soit le capteur.

Chaque configuration est définie par un couple spécifique $(P_d; \lambda u)$ et par des positions spécifiques des capteurs. On rappelle en effet que les positions des capteurs sont réparties uniformément. Ensuite, 200 tirages de Monte Carlo sont effectués pour chaque configuration. Le résultat de ces tirages est présenté dans les tableaux 6.2 et 6.3. \bar{X} est la moyenne des estimés. La valeur moyenne du NEES est calculée. Pour 200 simulations et un vecteur d'état de dimension 5, l'intervalle de confiance à 95% du NEES est $[4, 55; 5, 45]$. Dans chaque configuration, le NEES est proche de la valeur théorique de 5 et est dans son intervalle de confiance. Cela indique que notre estimateur est efficace, c'est-à-dire sans biais et dont la matrice de variance-covariance atteint la BCR. Un exemple de jeu de mesures à traiter est illustré sur la figure 6.7. Un résultat visuel à l'issue de l'estimation se trouve sur la figure 6.8.

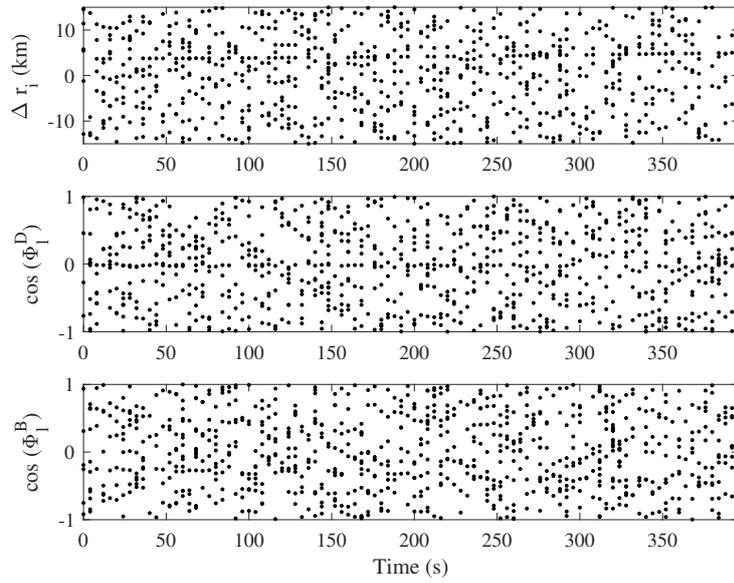


FIGURE 6.7 – Exemple de jeu de mesures obtenu en architecture TAD. $P_d = 0,6$ et $\lambda u = 8$.

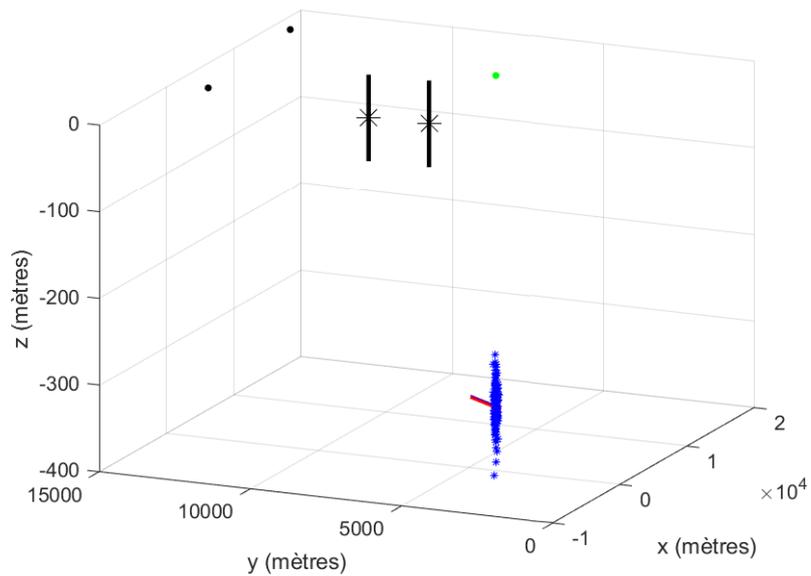


FIGURE 6.8 – Résultats obtenus en architecture TAD pour cible lente. Points noirs : Hydrophones. Traits et étoiles : antennes linéaires. Étoiles bleues : nuages d'estimés. Traits rouges et bleus : trajectoire réelle et estimée.

TABLE 6.2 – Résultats de 200 tirages de Monte Carlo en architecture TAD pour la cible lente ($X = X_L$)

$(P_d; \lambda u)$	\bar{X}	$\overline{\text{NEES}}$	Taux d'acceptation
(0, 8; 2)	(-5004; 2998,9; -298,09; 4,036; 3,015)	5,39	94,5%
(0, 6; 8)	(-5005,5; 2995,6; -298,55; 4,013; 3,010)	5,37	84%

TABLE 6.3 – Résultats de 200 tirages de Monte Carlo en architecture TAD pour la cible rapide ($X = X_H$)

$(P_d; \lambda u)$	\bar{X}	$\overline{\text{NEES}}$	Taux d'acceptation
(0, 9; 2)	(-5001,7; 2999,1; -299,77; 24,993; 11,999)	5,18	96,5%
(0, 8; 6)	(-5004,4; 2999,3; -300,69; 25,011; 12,002)	5,13	94%
(0, 6; 8)	(-4918,9; 3013,8; -298,03; 24,936; 11,958)	5,36	93%

6.8.2 Architecture TAD-AI

Pour l'étude en architecture TAD-AI, toutes les grilles de mesures sont discrétisées en résolution avec $N_c = 2048$ cases. Nous définissons tout d'abord les densités de probabilité de l'énergie sous les deux hypothèses. L'hypothèse est faite que l'énergie du bruit de fond suit une loi du χ_2^2 centrée, et que l'énergie du signal originaire de la cible suit une loi du χ_2^2 décentrée d'un paramètre γ . Ce paramètre vaut pour notre étude 8,2 et d'une manière générale, dépend directement du rapport signal-sur-bruit. Plus précisément :

$$\text{SNR} = \frac{\gamma}{N_c} \quad (6.42)$$

Ainsi, le SNR vaut -23,98 dB dans notre cas, ce que l'on considère comme un SNR faible. Le seuil de détection τ est placé tel que $P_d = 0,6$ et $P_{fa} = 0,02$ (soit ici, $\lambda u = 40,96$). Il est à noter qu'un nombre de fausses alarmes similaire, mais en architecture TAD, ferait échouer l'algorithme. Les performances ainsi que le taux d'acceptation seraient négativement impactés, comme montré dans [Kirubarajan et Bar-Shalom, 1996, Kirubarajan et al., 2001]. Un exemple de jeu de mesures obtenu dans cette architecture est représenté à la figure 6.9. 100 tirages de Monte Carlo sont effectués. Les résultats sont présentés dans les tableaux 6.4 et 6.5. Pour 100 simulations, l'intervalle de confiance du NEES est [4, 37; 5, 63]. L'estimateur mis au point est efficace aussi dans l'architecture TAD-AI.

TABLE 6.4 – Résultat de 100 tirages de Monte Carlo en architecture TAD-AI pour la cible lente ($X = X_L$)

\bar{X}	$\overline{\text{NEES}}$	Taux d'acceptation
(-5005,9; 2995,5; -303,39; 4,069; 3,043)	5,48	99%

TABLE 6.5 – Résultat de 100 tirages de Monte Carlo en architecture TAD-AI pour la cible rapide ($X = X_H$)

\bar{X}	$\overline{\text{NEES}}$	Taux d'acceptation
(-4999,2; 3002,7; -300,19; 24,997; 11,990)	5,01	99%

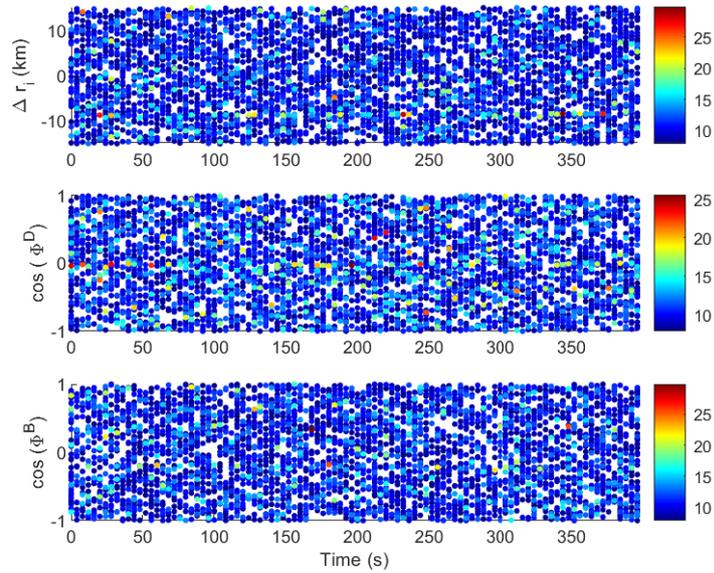


FIGURE 6.9 – Exemple de jeu de mesures obtenu en architecture TAD-AI.

6.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de la trajectographie d'une cible sous-marine en mouvement rectiligne uniforme quand les données disponibles étaient un jeu de différences de temps d'arrivée fournies par des hydrophones, fusionnées avec des mesures de cosinus d'angle d'élévation délivrées par des antennes linéaires verticales. Un tel réseau fusionnant ces capteurs a été nommé réseau mixte. Le modèle du PDA a été utilisé, du fait de la simplicité de fonctions de traitement du signal embarquées dans les capteurs. L'estimateur s'est avéré efficace dans chacune des architectures traitées. Le réseau mixte permet donc bien d'estimer correctement toutes les composantes du vecteur d'état, du fait de la fusion de capteurs de types différents.

Trajectographie passive d'une cible manœuvrante dans le réseau mixte

7.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, la cible suivait une trajectoire en MRU. Désormais, nous nous intéressons au cas où notre cible manœuvre, c'est-à-dire qu'elle change de direction à un moment donné. La cible n'est donc plus en MRU sur l'ensemble des mesures, mais seulement localement. Le but de ce chapitre est donc de réaliser la trajectographie de la cible, en sachant qu'elle effectue une manœuvre.

Dans la littérature, plusieurs procédures ont été envisagées dans le but de détecter et de trajectographier les cibles manœuvrantes. Dans des systèmes temps réel, des méthodes de trajectographie ont été mises au point. Ces méthodes sont souvent basées sur l'algorithme de l'*interacting multiple model* (IMM) [Blom et Bar-Shalom, 1988, Watson et Blair, 1993, Mazor *et al.*, 1998]. Dans cet algorithme, plusieurs possibilités de manœuvre sont envisagées en même temps, et une probabilité est associée à chacune. Cela permet de détecter et suivre une cible manœuvrante. Des méthodes de "simple" détection de la manœuvre ont été mises au point [Blanc-Benon et Passerieux, 1989, Vanpeperstraete et Le Cadre, 2006, Ru *et al.*, 2009]. Dans ces références, plusieurs méthodes de détection sont explicitées, notamment des méthodes basées sur l'analyse des résidus, ou encore par l'utilisation de la somme cumulative (CUSUM). Dans cette situation où la manœuvre semble rompre avec la stationnarité du modèle de la cible, il est légitime de se demander ce qu'il adviendrait d'un jeu de données *batch* dans lequel une cible effectuerait une manœuvre. Serait-il possible de réaliser la trajectographie de la cible dans cette problématique ? De plus, les méthodes de détection sont efficaces pour des données en piste extraite. A notre connaissance, il n'est pas traité dans la littérature de méthodes de détection de cible manœuvrante en présence de fausses alarmes. En effet, le problème d'association d'une piste à une détection devient très complexe et peut empêcher la détection. On trouve cependant dans la littérature une combinaison de l'algorithme IMM et de la méthode PDA [Musicki et Suvorova, 2008], appliquée donc à des données temps réel.

Il est démontré dans [Jauffret *et al.*, 2010] que la trajectographie de la cible manœuvrante est possible avec un lot de données, sous certaines conditions et hypothèses que nous détaillerons. Dans [Jauffret *et al.*, 2010], un cas classique de *Bearings-Only Target Motion Analysis* (BOTMA) est considéré. Dans ce chapitre, nous souhaitons adapter et étendre le travail effectué dans [Jauffret *et al.*, 2010] à un

réseau de capteurs et à des mesures entachées de fausses alarmes en architecture TAD. Le réseau mixte ayant fait ses preuves d'un point de vue des performances asymptotiques sur toutes les composantes du vecteur d'état, c'est ce même réseau qui sera utilisé pour l'étude de ce chapitre.

Nous verrons tout d'abord la problématique de la cible manœuvrante, puis les conséquences sur le modèle du ML-PDA. Quelques résultats numériques montreront la fiabilité de l'estimateur mis au point. Une conclusion fera le point sur l'étude effectuée.

7.2 Problématique et notations

Définissons tout d'abord le comportement de la cible manœuvrante. La trajectoire de la cible est composée de plusieurs "legs". Un leg est une portion de trajectoire, donc de temps durant lequel la cible est en MRU. A la fin de chaque leg, il y a une manœuvre, c'est-à-dire un changement de cap de la cible, menant à un autre leg. L'hypothèse émise dans [Jauffret *et al.*, 2010] est que la norme du vecteur vitesse est identique pour chaque leg. Pour la suite de notre étude, nous considérerons deux legs, et nous nous plaçons dans le cadre défini dans [Jauffret *et al.*, 2010].

Dans le but de réaliser la trajectographie de la cible, nous devons définir les paramètres à estimer. Pour des raisons de simplification d'écriture, nous cherchons désormais à estimer la position $(x; y; z)$ de la cible à l'instant de manœuvre t_m . L'hypothèse de la vitesse constante entre deux legs nous amène de plus à ajouter les composantes $(v; \alpha_1; \alpha_2)$ au vecteur d'état, v étant la norme de la vitesse en m.s^{-1} , et α_1 et α_2 étant les caps de la cible en radians pour chacun des legs. Les angles sont référencés par rapport à l'Est et dans le sens trigonométrique. Le vecteur d'état est donc le suivant si t_m est connu :

$$X^T = (x; y; z; v; \alpha_1; \alpha_2) \quad (7.1)$$

Si t_m est inconnu, ce dernier sera rajouté au vecteur d'état. Comme nos données sont échantillonnées dans le temps, l'échantillon de manœuvre k_m a donc l'expression suivante :

$$k_m = \left\lfloor \frac{t_m}{\Delta t} \right\rfloor + 1 \quad (7.2)$$

Il est désormais possible d'écrire les équations menant à la position de la cible à chaque instant :

$$x_k = \begin{cases} x + (k - k_m)\Delta t (v \cos \alpha_1), & 1 < k < k_m \\ x + (k - k_m)\Delta t (v \cos \alpha_2), & k_m \leq k \leq K \end{cases} \quad (7.3)$$

$$y_k = \begin{cases} y + (k - k_m)\Delta t (v \sin \alpha_1), & 1 < k < k_m \\ y + (k - k_m)\Delta t (v \sin \alpha_2), & k_m \leq k \leq K \end{cases} \quad (7.4)$$

$$z_k = z, \forall k \in [1 : K] \quad (7.5)$$

Il est à noter que l'on peut revenir simplement à la position initiale ou finale de la cible par la simple utilisation d'une matrice de passage.

La piste vraie que suivra la cible manœuvrante décrite dans cette partie est illustrée dans la figure 7.1. L'étude est effectuée à l'aide du réseau mixte défini dans le chapitre précédent. Les mesures acquises par chaque capteur sont donc identiques à celles définies dans le chapitre précédent.

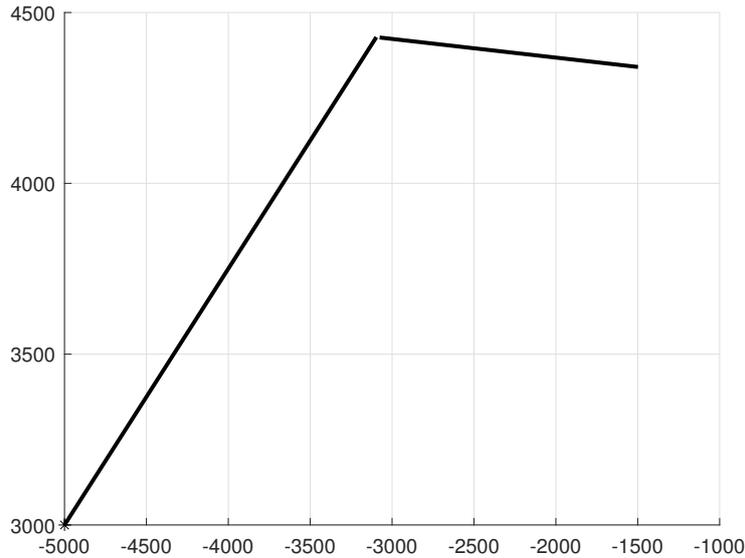


FIGURE 7.1 – Exemple de trajet de la cible manoeuvrante.

7.3 Conséquences sur l'utilisation du modèle du PDA

Dans cette partie nous étudions les conséquences d'une cible manoeuvrante sur l'utilisation du modèle du PDA, à travers le critère, les performances asymptotiques et le test d'acceptation de l'estimé.

7.3.1 Critère

Du fait des équations (7.3) et (7.4), le modèle d'état est directement dépendant de k_m . Il y a quelque part deux modèles d'état, en fonction de la valeur de k relativement à k_m . C'est la seule différence remarquable, et qui ne change conceptuellement rien à la mise en place du critère ni à sa maximisation. Le critère est donc analogue à celui exprimé dans les équations (6.18) à (6.21), à la séparation induite par l'instant de manoeuvre près.

7.3.2 Performances asymptotiques

Dans le cas où t_m est connu, l'expression de la FIM reste inchangée par rapport à celle donnée dans l'équation (6.26) du chapitre précédent, au changement de paramétrisation du vecteur d'état près.

Dans le cas où t_m est inconnu, ce dernier étant une valeur intervenant dans une fonction non dérivable d'après l'équation (7.2), il n'est pas possible de calculer la FIM immédiatement. Un palliatif est cependant proposé dans [Jaufret et Pérez-Pignol, 2014], consistant à approcher la fonction du log-vraisemblance par une fonction qui sera dérivable en t_m . Cette approximation passe par une interpolation dans le but de rendre la fonction approchée continue. Une fois cette fonction continue obtenue, l'utilisation de la formule de dérivation de Leibniz des intégrales permet de dériver selon t_m , et donc de construire une FIM. Ainsi, t_m devient partie intégrante du vecteur d'état. De plus, comme nous sommes en présence d'un environnement encombré, la considération du facteur de réduction d'information q_2 est toujours de mise. En effet, on rappelle que ce facteur est complètement indépendant du vecteur d'état.

Pour résumer, dans le cas où t_m est inconnu, l'expression de la FIM est celle donnée dans l'équation (6.26). Mais, la considération de t_m dans le vecteur d'état oblige à effectuer quelques modifications

au niveau du calcul des gradients des modèles d'état. Ces calculs spécifiques à t_m sont détaillés dans [Jauffret et Pérez-Pignol, 2014].

7.3.3 Test d'acceptation de l'estimé

Le test d'acceptation ne dépendant pas de l'état, il est alors strictement identique à celui donné dans le chapitre précédent.

7.4 Résultats numériques

Dans cette partie, nous donnons les résultats numériques obtenus après simulations, dans deux cas précis : t_m connu ou non. Les hypothèses considérées sur le réseau sont les suivantes :

- $P_{d_\Delta} = P_{d_A} = P_d$
- λ_Δ et λ_A sont fixées telles que le nombre moyen de fausses alarmes λu soit le même quel que soit le capteur.

Les paramètres vrais de simulation pour la suite de notre étude sont les suivants (pour une question d'aisance de lecture, les angles sont donnés ici en degrés) :

$$X^T = (-3096; 4428; -300; 5; 36,87; 356,87) \quad (7.6)$$

$$K = 200 \quad (7.7)$$

$$k_m = 120 \Leftrightarrow t_m = 480 \text{ s} \quad (7.8)$$

Les autres paramètres restent inchangés par rapport au chapitre précédent. Pour la suite de notre étude, on fixe $P_d = 0,6$ et $\lambda u = 8$.

7.4.1 Instant de manœuvre connu

Dans le cas où t_m est connu, les résultats pour 500 tirages de Monte Carlo sont donnés dans le tableau 7.1.

TABLE 7.1 – Résultats de 500 tirages de Monte Carlo si la cible manœuvre. Instant de manœuvre connu.

\bar{X}	$\overline{\text{NEES}}$	Taux d'acceptation
$(-3097,94; 4427,60; -299,89; 4,99; 36,87; 356,85)$	6,21	92,2%

On remarque que l'estimateur n'est que très peu biaisé. L'intervalle de confiance pour le NEES pour un vecteur d'état de dimension 6 et pour 500 simulations est $[5,69; 6,30]$. Le NEES moyen est compris dans l'intervalle. L'estimateur mis au point est donc efficace.

7.4.2 Instant de manœuvre inconnu

Dans le cas où t_m est inconnu, il nous faut tout d'abord expliquer une procédure d'initialisation sur k_m . En effet, dans [Jauffret *et al.*, 2010], la procédure est de calculer le critère pour toutes les valeurs de $k_m \in [3; K - 2]$. La valeur \hat{k}_m retenue est celle pour laquelle le critère a une valeur optimale¹. Cette

1. Dans [Jauffret *et al.*, 2010], le critère est un critère des moindres carrés, donc l'optimisation est en réalité une minimisation. Dans notre cas, on rappelle que nous cherchons à maximiser le critère, mais cela ne change pas le concept.

procédure est cependant longue et coûteuse, puisque cela revient à exécuter l’algorithme du ML-PDA pour chaque instant temporel (ou presque). La complexité de cet algorithme est donc bien plus élevée que celle de l’algorithme mis au point précédemment. Aussi, le nombre de simulations de Monte Carlo effectué sera un peu moins important.

Désormais, nous pouvons présenter les résultats obtenus après 100 tirages de Monte Carlo. Ces résultats sont montrés dans les tableaux 7.2 et 7.3.

TABLE 7.2 – Résultats de 100 tirages de Monte Carlo si la cible manœuvre. Instant de manœuvre inconnu.

\bar{X}	$\overline{\text{NEES}}$	Taux d’acceptation
(-3095,2 ; 4427,7 ; -300,89 ; 5,00 ; 36,81 ; 356,84 ; 480,31)	9,3	91%

TABLE 7.3 – Résultats de 100 tirages de Monte Carlo si la cible manœuvre. Instant de manœuvre inconnu. Comparaison des écarts-types.

Composante	$\bar{\sigma}$	σ_{BCR}
x (m)	39,16	27,56
y (m)	12,46	8,24
z (m)	22,72	19,21
v (m.s ⁻¹)	0,096	0,11
α_1 (°)	0,54	0,49
α_2 (°)	0,72	0,51
t_m (s)	5,28	3,08

Le taux d’acceptation lors de ces simulations a été de 91%. Nous avons désormais un vecteur d’état de dimension 7. L’intervalle de confiance du NEES est donc de [6,3 ; 7,7]. Nous avons un NEES moyen de 9,3, un peu au-dessus de la borne supérieure. Les résultats du tableau 7.2 nous indiquent cependant que notre estimateur n’est que très peu biaisé, ce qui est une bonne chose. En revanche, la covariance empirique ne rencontre pas la BCR pour plusieurs composantes (voir le tableau 7.3), notamment la position initiale dans le plan et l’instant de manœuvre. Notre estimateur n’est donc pas efficace au sens du NEES, il est dit sub-optimal. Cependant, il est fonctionnel opérationnellement, les écarts-types empiriques n’étant pas complètement aberrants. Cette variance un peu plus importante que prévue pourrait s’expliquer par les caractéristiques du réseau. En effet, les hydrophones sont ici très écartés. Les résultats sont illustrés sur la figure 7.2.

7.5 Conclusion

La trajectographie d’une cible manœuvrante dans le réseau mixte a été étudiée. L’environnement encombré a été pris en compte sur les mesures, rendant indispensable l’utilisation du modèle du PDA. L’étude s’est faite en deux temps, tout d’abord en considérant l’instant de manœuvre connu, puis inconnu par la suite. Les résultats ont montré que l’estimateur était efficace dans le cas où l’instant de manœuvre est connu. L’estimateur est cependant sub-optimal si cet instant n’est pas connu : il est sans biais mais n’atteint pas la BCR. Cependant cet estimateur reste fonctionnel opérationnellement.

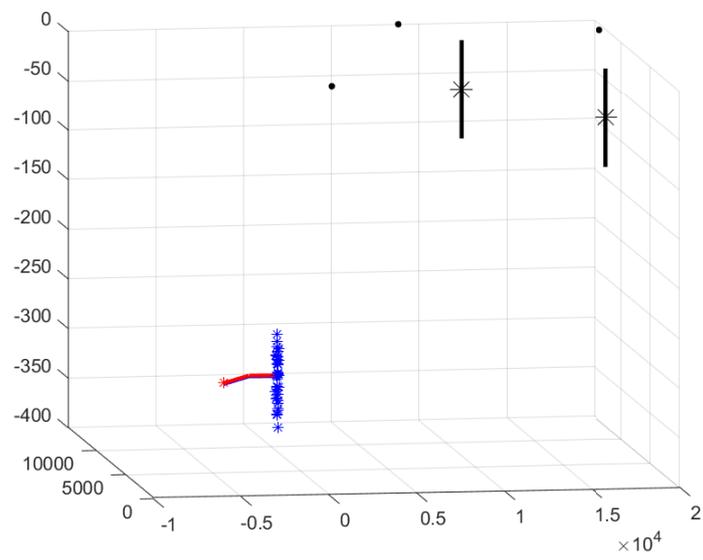


FIGURE 7.2 – Résultats obtenus pour la cible manœuvrante. Le nuage d'estimés est placé à la position finale.

Trajectographie passive par réseau mixte de capteurs en acoustique sous-marine sans distinction sur les types de rayons émis par la source

8.1 Introduction

Dans les deux chapitres précédents, l'intérêt d'un réseau mixte composé d'hydrophones et d'antennes linéaires verticales a été démontré, à la fois pour une cible en mouvement rectiligne uniforme, et pour une cible effectuant une manœuvre.

Jusqu'à présent, l'hypothèse a été faite que les rayons arrivant sur les antennes verticales étaient identifiés. Ainsi, on traitait au total trois jeux de mesures : les mesures issues des hydrophones, les mesures associées au trajet direct reçu par les antennes, et les mesures correspondant au trajet réfléchi parvenant aux antennes. Désormais, nous faisons dans ce chapitre l'hypothèse qu'il nous est impossible de discerner le trajet direct du trajet réfléchi sur les antennes verticales. Cette hypothèse est bien plus réaliste d'un point de vue de la chaîne de traitement du sonar passif. Nous ne traitons plus que deux jeux de mesures : les mesures issues des hydrophones et celles issues des antennes. Sur les mesures issues des antennes, nous aurons donc les deux trajets directs et réfléchis-fond noyés dans des fausses alarmes, sans connaître leur association a priori. La question qui se pose est la suivante : comment réaliser la trajectographie en présence de fausses alarmes à partir de cette nouvelle hypothèse ? Nous allons utiliser le modèle du *joint probabilistic data association with maximum likelihood* (JMLPDA) [Blanding *et al.*, 2007a, Jauffret, 1993]. Ce modèle permet de réaliser la trajectographie multi-sources en environnement encombré. Cependant, il est utilisé traditionnellement dans le cas où deux (voire plus) sources indépendantes sont captées, ce qui n'est par définition pas le cas ici, puisque les mesures sont associées à la même source, mais à modèles de génération de mesures différents. Quelques modifications seront effectuées sur ce modèle pour l'adapter à la problématique.

Ainsi, nous nous intéressons à la trajectographie de la cible en MRU à l'aide du réseau mixte, dans le cas où les types de rayons arrivant sur les antennes ne sont plus distinguables a priori. Ce chapitre se déroule de la manière suivante. Tout d'abord, à l'aide des hypothèses statistiques du ML-PDA et du JMLPDA, nous décrivons le modèle du JMLPDA mono-source. Le critère à maximiser, propre au réseau mixte et au modèle statistique choisi, sera par la suite détaillé. L'étude des performances asymptotiques ainsi que du test d'acceptation des estimés est ensuite présentée. Enfin, quelques résultats numériques

viendront mettre en évidence le bon fonctionnement de l'estimateur mis au point. Une conclusion partielle fera le point sur ce chapitre.

8.2 Hypothèses statistiques du JMLPDA et adaptation

Dans la section précédente, nous avons précisé que les hydrophones ne captent que le trajet direct du rayon provenant de la cible, alors que les antennes linéaires verticales captent les trajets direct et réfléchi-fond. Une fois l'étape de détection appliquée à chaque capteur, la grille de détection se compose de fausses alarmes et des mesures originaires de la cible. Le modèle statistique que nous choisissons d'utiliser nous permet de réaliser la trajectographie de la cible en environnement encombré.

Dans ce chapitre, nous faisons l'hypothèse que les trajets directs et réfléchis ne sont désormais plus identifiés a priori dans la grille de détection des antennes. Nous développons donc un modèle mono-piste du *joint probabilistic data association with maximum likelihood* (JMLPDA), à partir des hypothèses statistiques de ce dernier modèle.

Aux hypothèses statistiques du modèle du ML-PDA détaillées et expliquées en introduction de cette thèse, viennent s'ajouter les hypothèses statistiques suivantes [Blanding *et al.*, 2007a] dans le but d'établir le modèle du JMLPDA "classique" :

- Le nombre de pistes confirmées (sources acoustiques) est connu et vaut N_T .
- Au plus une détection par scan temporel correspond à une cible.
- Une détection ne peut pas être associée à plus d'une source en même temps.
- Les détections issues de différentes sources sont indépendantes.

Ceci constitue donc l'ensemble des hypothèses nécessaires pour établir le modèle du JMLPDA. Nous avons cependant quelques modifications à effectuer pour les faire correspondre à notre problématique. En effet, rappelons qu'il n'y a qu'une seule source, mais que cette source pourra générer plusieurs types de mesures (ici, deux, suivant les trajets directs et réfléchis). Il n'y a donc pas plusieurs sources, chacune associée à son modèle de mesure : il n'y a qu'une seule source et plusieurs modèles de mesures associés à cette source. Les hypothèses se modifient donc de la sorte :

- Le nombre de **modèles de mesures associés à la source** confirmés est connu et vaut N_T .
- Au plus une détection par scan temporel correspond à un **modèle de mesure**.
- Une détection ne peut pas être associée à plus **d'un modèle** en même temps.
- Les détections issues de **différents modèles** sont indépendantes.

A l'aide des hypothèses établies, nous pouvons exprimer la vraisemblance du vecteur d'état dans un cas généraliste. Pour $N_T = 2$, définissons les quantités suivantes :

$$L_k^0 = p(s_k|X, \text{pas de vraie détection}) \quad (8.1)$$

$$L_k^1 = p(s_k|X, \text{seul le modèle 1 est détecté}) \quad (8.2)$$

$$L_k^2 = p(s_k|X, \text{seul le modèle 2 est détecté}) \quad (8.3)$$

$$L_k^{1,2} = p(s_k|X, \text{les deux modèles sont détectés}) \quad (8.4)$$

Soit :

$$L_k^0 = \frac{\mu_{fa}(m_k)}{u^{m_k}} \quad (8.5)$$

$$L_k^1 = \frac{\mu_{fa}(m_k - 1)}{u^{m_k - 1} m_k} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{s_{j,k} - h_{1,k}(X)}{\sigma_1}\right)^2\right) \quad (8.6)$$

$$L_k^2 = \frac{\mu_{fa}(m_k - 1)}{u^{m_k - 1} m_k} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{s_{j,k} - h_{2,k}(X)}{\sigma_2}\right)^2\right) \quad (8.7)$$

$$L_k^{1,2} = \frac{\mu_{fa}(m_k - 2)}{u^{m_k - 2} m_k (m_k - 1)} \cdot \sum_{j=1}^{m_k} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{m_k} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{s_{j,k} - h_{1,k}(X)}{\sigma_1}\right)^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{s_{l,k} - h_{2,k}(X)}{\sigma_2}\right)^2\right) \quad (8.8)$$

où h_i est le modèle d'état numéro i , et σ_i est l'écart-type de l'erreur associée aux vraies détections issues du modèle d'état h_i .

Par le théorème des probabilités totales, on a que :

$$L(X|s_k) = (1 - P_1)(1 - P_2)L_k^0 + P_1(1 - P_2)L_k^1 + P_2(1 - P_1)L_k^2 + P_1P_2L_k^{1,2} \quad (8.9)$$

où P_i est la probabilité de détection associée au modèle i .

La vraisemblance globale du lot de données de l'ensemble du scénario est

$$L(X|s) = \prod_{k=1}^K L(X|s_k) \quad (8.10)$$

du fait de l'indépendance au cours du temps. Ainsi, nous pouvons en déduire le critère à maximiser, à savoir le logarithme de la vraisemblance¹ :

$$C(X|s) = \sum_{k=1}^K \log \left\{ (1 - P_1)(1 - P_2) + \frac{P_1(1 - P_2)}{\lambda} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{s_{j,k} - h_{1,k}(X)}{\sigma_1}\right)^2\right) \right. \\ \left. + \frac{P_2(1 - P_1)}{\lambda} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{s_{j,k} - h_{2,k}(X)}{\sigma_2}\right)^2\right) \right. \\ \left. + \frac{P_1P_2}{\lambda^2} \sum_{j=1}^{m_k} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{m_k} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{s_{j,k} - h_{1,k}(X)}{\sigma_1}\right)^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{s_{l,k} - h_{2,k}(X)}{\sigma_2}\right)^2\right) \right\} \quad (8.11)$$

8.3 Quantité d'information et performances asymptotiques

Du fait du changement de modélisation statistique et algorithmique de notre problème (du point de vue des antennes), il nous est nécessaire d'étudier à nouveau la quantité d'information. En effet, il n'est pas aisé d'extraire une quantité d'information exacte dans le modèle du JMLPDA².

Dans cette section, nous allons montrer que dans notre situation, la quantité d'information est identique à celle exposée dans le chapitre 6. En effet, nous avons remarqué au cours de nos simulations

1. La fonction $C(X|s)$ n'est pas exactement le logarithme de la vraisemblance. En effet, des termes constants selon X ont été supprimés et des simplifications ont été effectuées.

2. Pour plus d'informations, dans un cas particulier cependant, on se référera à [Jiang *et al.*, 2014].

que les pistes des “vraies” détections arrivant par les trajets directs et réfléchis-fond sur les antennes ne se croisent pas dans la grille de détection. Ce phénomène est notamment illustré dans la figure 8.1. Ainsi, du point de vue de la quantité d’information, cette dernière est composée de la somme de chaque quantité d’information issue de chacun des modèles de mesures.

Soit s le vecteur de détections à un instant donné. On abandonne dans ce paragraphe l’indice temporel. Supposons que ce vecteur est ordonné de la façon suivante :

- Les détections s_1, \dots, s_l sont comprises dans la gate autour de la valeur vraie $h_1(X)$.
- Les détections s_{l+1}, \dots, s_m sont comprises dans la gate autour de la valeur vraie $h_2(X)$.

Nous faisons l’hypothèse que la gate centrée sur $h_1(X)$ et celle centrée sur $h_2(X)$ ont une intersection vide. Cela nous permet de justifier l’indépendance des deux jeux de détection :

$$L(X|s) = L(X|s_{1:l})L(X|s_{l+1:m}) \quad (8.12)$$

Soit :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [\nabla_X \log(L(X|s)) \nabla_X^T \log(L(X|s))] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{\nabla_X L(X|s_{1:l})}{L(X|s_{1:l})} + \frac{\nabla_X L(X|s_{l+1:m})}{L(X|s_{l+1:m})} \right) \left(\frac{\nabla_X L(X|s_{1:l})}{L(X|s_{1:l})} + \frac{\nabla_X L(X|s_{l+1:m})}{L(X|s_{l+1:m})} \right)^T \right] \end{aligned} \quad (8.13)$$

Après développement, on obtient :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [\nabla_X \log(L(X|s)) \nabla_X^T \log(L(X|s))] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{\nabla_X L(X|s_{1:l})}{L(X|s_{1:l})} \frac{\nabla_X^T L(X|s_{1:l})}{L(X|s_{1:l})} \right] + \mathbb{E} \left[\frac{\nabla_X L(X|s_{l+1:m})}{L(X|s_{l+1:m})} \frac{\nabla_X^T L(X|s_{l+1:m})}{L(X|s_{l+1:m})} \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\frac{\nabla_X L(X|s_{1:l})}{L(X|s_{1:l})} \frac{\nabla_X^T L(X|s_{l+1:m})}{L(X|s_{l+1:m})} \right] + \mathbb{E} \left[\frac{\nabla_X L(X|s_{l+1:m})}{L(X|s_{l+1:m})} \frac{\nabla_X^T L(X|s_{1:l})}{L(X|s_{1:l})} \right] \end{aligned} \quad (8.14)$$

Puisque les deux jeux de mesures $s_{1:l}$ et $s_{l+1:m}$ sont supposés indépendants, nous avons :

$$\mathbb{E} \left[\frac{\nabla_X L(X|s_{1:l})}{L(X|s_{1:l})} \frac{\nabla_X^T L(X|s_{l+1:m})}{L(X|s_{l+1:m})} \right] = \mathbb{E} [\nabla_X \log(L(X|s_{1:l}))] \mathbb{E} [\nabla_X^T \log(L(X|s_{l+1:m}))] \triangleq \mathbf{0}_{d \times d} \quad (8.15)$$

$$\mathbb{E} \left[\frac{\nabla_X L(X|s_{l+1:m})}{L(X|s_{l+1:m})} \frac{\nabla_X^T L(X|s_{1:l})}{L(X|s_{1:l})} \right] = \mathbb{E} [\nabla_X \log(L(X|s_{l+1:m}))] \mathbb{E} [\nabla_X^T \log(L(X|s_{1:l}))] \triangleq \mathbf{0}_{d \times d} \quad (8.16)$$

par définition de la fonction de score. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\nabla_X \log(L(X|s)) \nabla_X^T \log(L(X|s))] &= \mathbb{E} [\nabla_X \log(L(X|s_{1:l})) \nabla_X^T \log(L(X|s_{1:l}))] \\ &+ \mathbb{E} [\nabla_X \log(L(X|s_{l+1:m})) \nabla_X^T \log(L(X|s_{l+1:m}))] \end{aligned} \quad (8.17)$$

Sous les conditions que les probabilités de détection et les densités de fausses alarmes soient les mêmes pour chacune des pistes, on en déduit alors que l’expression de la FIM issue des mesures des antennes est identique à celle donnée dans le chapitre 6, soit $q_2(\lambda_A 2g\sigma_A, P_{dA})F_A$ (de manière générale). Comme

l'expression de la FIM issue des hydrophones reste inchangée, alors l'expression de la FIM dans le réseau mixte est toujours celle donnée par l'équation (6.26) (car la source est toujours en MRU) :

$$F = q_2(\lambda_\Delta 2g\sigma_\Delta, P_{d_\Delta})F_\Delta + q_2(\lambda_A 2g\sigma_A, P_{d_A})F_A \quad (8.18)$$

8.4 Critère

Désormais, nous pouvons présenter le critère à maximiser dans le cas particulier de la trajectographie de la cible en MRU dans le réseau mixte. Puisqu'un seul type de rayon arrive sur les hydrophones et deux types de rayon sont détectés par les antennes, ce critère sera un mélange de ML-PDA et de JMLPDA. Définissons les quantités suivantes, à l'aide des notations exprimées dans le chapitre 6 :

$$C_1(X|\Delta r_{i,k}) = \log \left[1 - P_{d_\Delta} + \frac{P_{d_\Delta}}{\lambda_\Delta} \sum_{j=1}^{m_{i,k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Delta} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta r_{i,j,k} - r_{i,k} + r_{i_0,k}}{\sigma_\Delta} \right)^2 \right) \right] \quad (8.19)$$

$$\begin{aligned} C_2(X|c_{n,k}^D, c_{n,k}^B) = & \log \left\{ (1 - P_{d_A})^2 + \frac{P_{d_A}(1 - P_{d_A})}{\lambda_A} \sum_{j=1}^{m_{n,k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{c_{n,j,k}^D - \cos(\phi_{n,k}^D)}{\sigma_A} \right)^2 \right) \right. \\ & + \frac{P_{d_A}(1 - P_{d_A})}{\lambda_A} \sum_{j=1}^{m_{n,k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{c_{n,j,k}^B - \cos(\phi_{n,k}^B)}{\sigma_A} \right)^2 \right) \\ & \left. + \frac{P_{d_A}^2}{\lambda_A^2} \sum_{j=1}^{m_{n,k}} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{m_{n,k}} \frac{1}{2\pi\sigma_A^2} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{c_{n,j,k}^D - \cos(\phi_{n,k}^D)}{\sigma_A} \right)^2 \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{c_{n,l,k}^B - \cos(\phi_{n,k}^B)}{\sigma_A} \right)^2 \right) \right\} \quad (8.20) \end{aligned}$$

Le critère à maximiser est donc le suivant :

$$C(X) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{N_S} \sum_{k=1}^K C_1(X|\Delta r_{i,k}) + \sum_{n=1}^{N_A} \sum_{k=1}^K C_2(X|c_{n,k}^D, c_{n,k}^B) \quad (8.21)$$

P_{d_Δ} et P_{d_A} sont les probabilités de détection, respectivement pour les hydrophones et les antennes. On fait l'hypothèse que les trajets direct et réfléchi apparaissent avec la même probabilité. λ_Δ et λ_A sont les densités de fausses alarmes associées. On suppose implicitement que toutes les mesures sont temporellement indépendantes, et que les mesures acquises par chaque capteur sont indépendantes des autres.

La maximisation de ce critère se fera comme pour le ML-PDA standard, à l'aide des méthodes initiées dans [Jauffret et Bar-Shalom, 1990, Jauffret, 1993, Blanding *et al.*, 2007a, Blanding *et al.*, 2007b, Kirubarajan et Bar-Shalom, 1996] et détaillées dans le chapitre 3. Ainsi, le modèle que nous proposons offre une différence d'un point de vue algorithmique avec ce qui a été proposé dans les chapitres précédents, pour rendre compte au mieux de la réalité de la chaîne de traitement sonar. Cependant, comme nous l'avons vu dans la section précédente, il est identique au niveau des performances asymptotiques.

La figure 8.1 montre un exemple de jeu de mesures à traiter dans cette problématique.

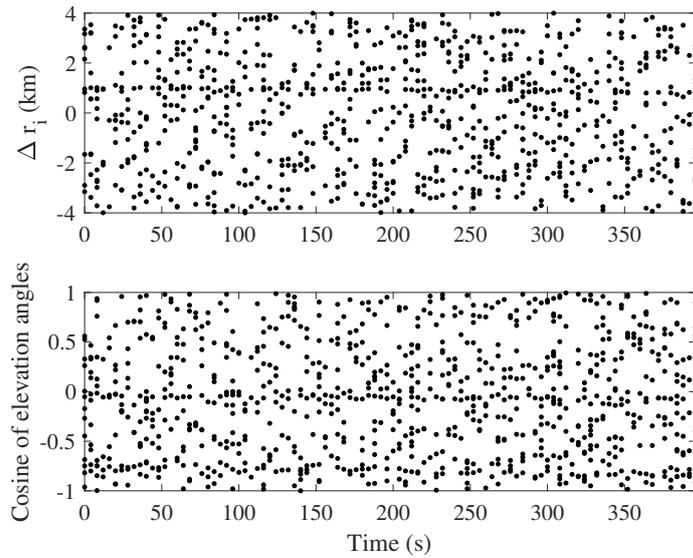


FIGURE 8.1 – Exemple de jeu de mesures dans le cas du réseau mixte. Haut : hydrophones. Bas : Antennes linéaires verticales.

8.5 Test d’acceptation de l’estimé

Après l’étape d’estimation, l’algorithme renvoie toujours un vecteur d’état estimé. Cet estimé pourrait correspondre soit au maximum global de la vraisemblance, soit à un maximum local. Le test d’acceptation de l’estimé a donc pour rôle de distinguer ces deux hypothèses. Pour le modèle du ML-PDA, on rappelle que le test est basé sur l’espérance de la fonction à maximiser, à savoir le logarithme de la vraisemblance [Jauffret, 1993, Jauffret et Bar-Shalom, 1990]. Ceci est détaillé dans le chapitre 3.

La procédure d’acceptation de la piste dans le modèle du JMLPDA est détaillée dans [Blanding et al., 2007a] et est résumée ici-même. Tout d’abord, chaque piste est associée à une unique mesure : à chaque échantillon k , la mesure qui donne la plus grande vraisemblance pour une piste est associée à cette piste. Si deux pistes partagent la même mesure, cette mesure est associée à la piste qui lui offre la plus grande valeur entre ces deux. La procédure est appliquée pour toutes les mesures et pistes restantes. A la fin de cette procédure, une vraisemblance postérieure est obtenue pour chaque piste. Le test d’acceptation du ML-PDA est ensuite appliqué à chacune des pistes.

Dans notre cas, nous mixons les deux test d’acceptation pour arriver à nos fins. Ainsi, les deux tests d’acceptations seront utilisés conjointement à l’issue de l’estimation.

8.6 Résultats numériques

Dans cette partie, nous présentons quelques résultats numériques à travers des simulations de Monte Carlo. Tout d’abord, définissons que :

- $N_S = 3$
- $N_A = 2$
- $z_B = -3000\text{m}$
- $P_{d_\Delta} = P_{d_A} = P_d$

— λ_Δ et λ_A sont définies de telles que le nombre moyen de fausses alarmes λu soit identique pour chaque capteur.

On considère $K = 100$, $\Delta t = 4\text{s}$, $\sigma_\Delta = 30\text{m}$, $\sigma_A = 0.017$ et

$$X = (-1000; 1000; -300; 3; 4)^T \quad (8.22)$$

On fixe $P_d = 0.6$ et $\lambda u = 8$. Le résultat de 500 simulations de Monte Carlo est présenté dans les tableaux 8.1 et 8.2.

TABLE 8.1 – Résultat de 500 simulations de Monte Carlo sans identification a priori des trajets

\bar{X}	$\overline{\text{NEES}}$	Taux d'acceptation
$(-996,89; 1000,41; -299,52; 2,99; 4,00)$	4,92	94,6 %

TABLE 8.2 – Résultats de 500 tirages de Monte Carlo sans identification a priori des trajets : comparaison des écarts-types

Composante	$\bar{\sigma}$	σ_{BCR}
x (m)	58,38	59,47
y (m)	29,37	29,49
z (m)	9,02	9,86
\dot{x} (m.s ⁻¹)	0,247	0,248
\dot{y} (m.s ⁻¹)	0,119	0,116

Nous remarquons que notre estimateur est très peu biaisé et que son NEES [Bar-Shalom et Fortmann, 1988] est dans l'intervalle de confiance à 95 % [4,71;5,28]³. Cela indique donc qu'il est efficace au sens du NEES. L'estimateur est donc sans biais et sa matrice de variance-covariance atteint la BCR. Ce résultat confirme que nous avons la même quantité d'information que dans le cas décrit dans le chapitre 6, où nous faisons l'hypothèse d'une séparation des mesures sur les antennes. Notons cependant que la complexité algorithmique associée à un algorithme lié au JMLPDA devient rapidement importante [Blanding *et al.*, 2007a].

8.7 Conclusion

Cette étude peut être considérée comme une extension de celle menée au chapitre 6. Cette fois, nous supprimons une hypothèse qui était relativement importante et contraignante (dans le sens où elle simplifiait les calculs, et n'était pas très réaliste du point de vue de la chaîne de traitement sonar), à savoir la possibilité de distinguer la provenance des rayons sur les antennes linéaires verticales, et d'en distinguer les jeux de mesures. En supprimant cette hypothèse, nous avons dû faire appel au modèle du JMLPDA pour résoudre notre problème d'association, en l'adaptant pour tenir compte du fait qu'une seule source acoustique était présente dans l'environnement, mais que cette source pouvait générer des mesures suivant des modèles différents simultanément. Les simulations de Monte Carlo ont confirmé l'efficacité de l'estimateur au sens du NEES.

3. Intervalle donné pour 500 simulations.

Trajectographie passive par réseau mixte de capteurs, en présence de fausses alarmes et en tenant compte du temps de propagation du signal

9.1 Introduction

Tout au long des chapitres précédents, nous avons négligé un aspect important pour le réalisme de nos simulations, à savoir le temps de propagation du signal acoustique. En effet, l'onde sonore produite par la source met un certain temps à parvenir jusqu'aux capteurs. Or, pendant ce temps, la cible s'est elle-même déplacée. Il devient aisé de comprendre que si l'on ne considère pas ce temps de propagation, une erreur sur l'estimation de la position de la cible pourra être commise : au moment où la mesure est acquise, la cible n'est déjà plus à l'endroit que l'on cherche à estimer. Ainsi, le réalisme des simulations et la précision des estimations pourraient être impactées par la non prise en compte de ce phénomène, à la fois primordial et compliqué à tracter. En effet, ce temps de propagation dépend directement de l'emplacement de la cible, c'est-à-dire, précisément ce que l'on cherche à estimer.

La formulation quasi-réursive de ce problème a vu moult solutions pour le résoudre. Des solutions temps réel pour réduire le biais au fur et à mesure de l'estimation sont proposées dans [Orguner et Gustafsson, 2008, Orguner et Gustafsson, 2009, Orguner et Gustafsson, 2011, Bi et Ren, 2008, Guo *et al.*, 2008, Cheung *et al.*, 2010]. Le temps de propagation à chaque instant est alors considéré comme un paramètre à part entière dans le vecteur d'état. Il est estimé par conséquent à chaque instant, pour améliorer la précision de l'estimateur. Une autre solution temps réel se trouve aussi dans [Yang *et al.*, 2014], qui propose un filtre traitant spécifiquement de ce problème. Dans [Jauffret et Pérez-Pignol, 2015, Amirach *et al.*, 2016], les auteurs proposent une solution au problème dans le cas où l'on dispose d'un jeu de données (batch). Les estimateurs sont prouvés comme étant efficaces, et la non considération du temps de propagation provoque un biais qui peut parfois être assez important [Jauffret *et al.*, 2016].

Dans ce chapitre, nous allons appliquer l'approche proposée dans [Jauffret et Pérez-Pignol, 2015, Amirach *et al.*, 2016] à notre problématique. Dans un premier temps nous allons redéfinir le problème en tenant compte du temps de propagation du signal. Nous verrons l'impact de cette considération sur les performances asymptotiques. Quelques résultats numériques viendront confirmer le bon fonctionnement de l'estimateur ainsi créé. On montrera notamment l'impact de cette méthode sur le biais

d'estimation, lorsque les mesures sont générées de façon réaliste en tenant compte du temps de propagation, mais que l'algorithme n'en tient pas compte. Enfin, une conclusion fera le point sur ce chapitre.

9.2 Définition du problème

Le problème de la trajectographie dans le réseau mixte et en présence de fausses alarmes est identique à celui qui est décrit dans le chapitre précédent. On cherche donc toujours à faire la trajectographie de la cible en MRU à l'aide du réseau mixte. Avec les mêmes notations que précédemment et en notant $\tau_{i,k}$ le temps de propagation entre la cible et le capteur i à l'échantillon k (donc à l'instant $t_k = (k - 1)\Delta t$), nous pouvons donner l'expression des mesures obtenues sur chacun des capteurs :

- Le TDOA pour les hydrophones s'exprime (au facteur $\frac{1}{c}$ près) :

$$\Delta r_{i,k} = r_i(X; t_k - \tau_{i,k}) - r_{i_0}(X; t_k - \tau_{i_0,k}) + \varepsilon_{i,k}^\Delta \quad (9.1)$$

(avec $r_i(X; t_k - \tau_{i,k})$ la distance séparant la source caractérisée par X du capteur i à l'instant t_k , en tenant compte du temps de propagation).

- Les mesures acquises par les antennes sont les suivantes :

$$\begin{aligned} c_{n,k}^D &= \cos(\phi_n^D(X; t_k - \tau_{n,k})) + \varepsilon_{n,k}^D \\ &= \frac{z - z_n^A}{\sqrt{(x(t_k - \tau_{n,k}) - x_n^A)^2 + (y(t_k - \tau_{n,k}) - y_n^A)^2 + (z - z_n^A)^2}} + \varepsilon_{n,k}^D \end{aligned} \quad (9.2)$$

$$\begin{aligned} c_{n,k}^B &= \cos(\phi_n^B(X; t_k - \tau_{n,k}^B)) + \varepsilon_{n,k}^B \\ &= \frac{2z_B - (z_n^A + z)}{\sqrt{(x(t_k - \tau_{n,k}^B) - x_n^A)^2 + (y(t_k - \tau_{n,k}^B) - y_n^A)^2 + (z + z_n^A - 2z_B)^2}} + \varepsilon_{n,k}^B \end{aligned} \quad (9.3)$$

Notons que $\tau_{n,k}^B$ est le temps de propagation pour le trajet réfléchi, et sera détaillé dans la section suivante.

9.3 Expression du temps de propagation

Désormais, nous devons donner l'expression de ce temps de propagation dans le cas particulier où la cible se déplace en MRU. La démonstration qui suit est adaptée de [Jauffret et Pérez-Pignol, 2015, Amirach *et al.*, 2016]. La démonstration est similaire pour chaque capteur, indépendamment de sa mesure, et est adaptée à la trajectographie en dimension 3. La seule différence réside dans l'étude du trajet réfléchi, qui sera abordé à la fin de cette section.

On note :

$$P_i^S = \begin{pmatrix} x_i^S \\ y_i^S \\ z_i^S \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

$$P_T(t - \tau_i(t)) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} - \tau_i(t) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

P_i^S est la position du capteur i , et $P_T(t - \tau_i(t))$ est la position de la cible à l'instant t en tenant compte du temps de propagation $\tau_i(t)$. Par définition du temps de propagation, on a :

$$\tau_i(t) = \frac{\|P_T(t - \tau_i(t)) - P_i^S\|}{c} \quad (9.6)$$

où c est la célérité du son dans l'eau. Le temps de propagation est donc lié à la distance séparant la source du capteur, à l'instant où l'onde acoustique est émise. L'équation (9.6) met en évidence le caractère récursif dans sa définition.

De (9.6), on déduit que :

$$c^2 \tau_i(t)^2 = \|P_T(t - \tau_i(t)) - P_i^S\|^2 \quad (9.7)$$

Or :

$$\begin{aligned} P_T(t - \tau_i(t)) - P_i^S &= P_T(0) + tV_T - \tau_i(t)V_T - P_i^S \\ &= P_T(t) - \tau_i(t)V_T - P_i^S \end{aligned} \quad (9.8)$$

où V_T est le vecteur vitesse : $V_T = (\dot{x}, \dot{y}, 0)^T$. En notant $P_{iT}(t) = P_T(t) - P_i^S$, on obtient que :

$$\begin{aligned} c^2 \tau_i(t)^2 &= \|P_{iT}(t) - \tau_i(t)V_T\|^2 \\ &= \|P_{iT}(t)\|^2 + \tau_i(t)^2 \|V_T\|^2 - 2\tau_i(t)V_T^T P_{iT}(t) \end{aligned} \quad (9.9)$$

On obtient l'équation du second degré suivante :

$$\tau_i(t)^2 [c^2 - \|V_T\|^2] + \tau_i(t) [2V_T^T P_{iT}(t)] - \|P_{iT}(t)\|^2 = 0 \quad (9.10)$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = 4 [(V_T^T P_{iT}(t))^2 + (c^2 - \|V_T\|^2) \|P_{iT}(t)\|^2] \quad (9.11)$$

Or, comme $c^2 > \|V_T\|^2$ par hypothèse (la cible se déplace moins vite que la célérité du milieu), alors $\Delta > 0$. Cette équation admet donc deux solutions réelles :

$$\tau_i(t) = \frac{\pm \sqrt{(V_T^T P_{iT}(t))^2 + (c^2 - \|V_T\|^2) \|P_{iT}(t)\|^2} - V_T^T P_{iT}(t)}{c^2 - \|V_T\|^2} \quad (9.12)$$

Comme $\tau_i(t)$ est un temps de retard, il est nécessairement positif. On conserve donc la racine positive, soit :

$$\tau_i(t) = \frac{\sqrt{(V_T^T P_{iT}(t))^2 + (c^2 - \|V_T\|^2) \|P_{iT}(t)\|^2} - V_T^T P_{iT}(t)}{c^2 - \|V_T\|^2} \quad (9.13)$$

Ainsi, nous avons démontré l'expression du temps de propagation dans le cas où la cible se déplace en

MRU dans un espace tridimensionnel. Cette expression, on le remarque, est indépendante de la nature de la mesure acquise par le capteur. Elle est donc applicable pour n'importe quel capteur.

Cependant, un point crucial doit être levé quant à la considération du trajet réfléchi-fond qui parvient aux antennes. En effet, du fait de la réflexion, le trajet parcouru par l'onde est plus grand. Nécessairement, son retard sera plus important aussi. En réalité, tout se passe comme si le trajet était direct, mais issu d'une source "image", qui se situerait donc sous le fond marin, et dont son trajet pour parvenir à l'antenne serait direct. En prenant en compte cette nouvelle profondeur, on se retrouve avec une nouvelle distance séparant la source "image" du capteur, qui correspond à la distance réellement parcourue en tenant compte de la réflexion, et on peut appliquer la même technique. Ce nouveau temps de retard sera nommé $\tau_i^B(t)$.

9.4 Observabilité

L'observabilité de la trajectoire de la cible dans le réseau mixte lorsque les temps de propagation sont pris en compte semble être une tâche extrêmement ardue. Pour ces raisons, l'observabilité n'a pas été étudiée ici. On la supposera acquise pour le reste de l'étude, sous les mêmes conditions que celles données dans la section 6.3. Cependant, pour une étude complète, il faudrait effectivement s'atteler à cette tâche.

9.5 Conséquences sur le ML-PDA/JMLPDA

Il est temps de faire une remarque quant à la considération des temps de propagation dans l'algorithme du ML-PDA/JMLPDA. On a montré dans la section précédente que le temps de propagation ne dépend que de l'état de la source à l'instant échantillonné, ainsi que de la position des capteurs. D'un point de vue algorithmique, il n'y a que cet aspect-là à prendre en compte, à la fois lors de la génération des mesures, et lors de la maximisation du critère. De façon similaire au chapitre précédent, les trajets parvenant aux antennes ne sont pas identifiés *a priori*. Ainsi, le critère à maximiser est identique (au temps de propagation près) à celui donné dans le chapitre précédent. Les procédures utilisées pour la maximisation sont aussi inchangées. Ne dépendant pas de l'état, le test d'acceptation reste inchangé. Les performances asymptotiques seront détaillées dans la section suivante. Quelques modifications sont en effet à prévoir, du point de vue de la FIM en environnement propre.

9.6 Performances asymptotiques

La considération des temps de propagation entraîne une modification de l'expression de la FIM, et par extension, de la BCR. Les FIM en environnement propre s'expriment désormais de cette façon :

$$F_{\Delta} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{N_S} \sum_{k=1}^K \frac{1}{\sigma_{\Delta}^2} [\nabla_X r_i(X; t_k - \tau_{i,k}) - \nabla_X r_{i_0}(X; t_k - \tau_{i_0,k})] \cdot [\nabla_X r_i(X; t_k - \tau_{i,k}) - \nabla_X r_{i_0}(X; t_k - \tau_{i_0,k})]^T \Big|_{X_{\text{true}}} \quad (9.14)$$

$$F_A = \sum_{n=1}^{N_A} \sum_{k=1}^K \frac{1}{\sigma_A^2} \left[\nabla_X \cos(\phi_n^D(X; t_k - \tau_{n,k})) \nabla_X^T \cos(\phi_n^D(X; t_k - \tau_{n,k})) \right. \\ \left. + \nabla_X \cos(\phi_n^B(X; t_k - \tau_{n,k}^B)) \nabla_X^T \cos(\phi_n^B(X; t_k - \tau_{n,k}^B)) \right] |_{X_{\text{true}}} \quad (9.15)$$

On obtient finalement la FIM en environnement encombré :

$$F = q_2(\lambda_A 2g\sigma_A, P_{d_A})F_A + q_2(\lambda_\Delta 2g\sigma_\Delta, P_{d_\Delta})F_\Delta \quad (9.16)$$

Le détail des calculs menant aux gradients élémentaires pour chaque type de mesure est donné dans l'annexe F.

9.7 Résultats numériques

Dans cette section, nous donnons quelques résultats numériques prouvant le bon fonctionnement de l'estimateur mis en œuvre. On choisit les valeurs numériques suivantes :

- $N_S = 3$
- $N_A = 2$
- $z_B = -3000\text{m}$
- $P_{d_\Delta} = P_{d_A} = P_d$
- λ_Δ et λ_A sont définies de telle sorte que le nombre moyen de fausses alarmes λu soit identique pour chaque capteur.

On considère de plus $K = 100$, $\Delta t = 4\text{s}$, $\sigma_\Delta = 30\text{m}$, $\sigma_A = 0.017$ et

$$X = (-1000; 1000; -300; 3; 4)^T \quad (9.17)$$

Fixons désormais $P_d = 0,6$ et $\lambda u = 8$. Dans l'étude qui suit, les mesures sont générées avec prise en compte du "temps de vol" des ondes acoustiques. L'étude se déroulera en quatre temps :

- Premièrement, l'algorithme d'estimation tiendra compte de l'existence de ce temps de vol. Cela permettra d'apprécier le comportement de l'algorithme total.
- Dans un deuxième temps, l'algorithme d'estimation négligera ce temps de vol. Ainsi, nous pourrons voir l'impact de la non-considération du temps de propagation dans l'algorithme de maximisation. Concrètement, cela revient à utiliser l'algorithme détaillé dans le chapitre précédent, mais en prenant des données en entrée générées de façon "réaliste".
- Nous étudierons ensuite l'influence du nombre de capteurs (bouées et antennes) sur l'estimation quand celle-ci néglige le temps de vol.
- Enfin, toujours dans la même situation, nous verrons l'influence drastique que peut avoir la configuration du réseau sur le comportement de l'estimateur.

9.7.1 L'algorithme tient compte du temps de propagation

Premièrement, étudions le résultat de 500 simulations de Monte Carlo lorsque le temps de propagation est considéré dans les mesures et dans l'algorithme. Les positions des capteurs sont tirés selon une loi uniforme dans un carré de 5 km de côté. Les résultats sont visibles dans les tableaux 9.1 et 9.2.

L'estimateur semble peu biaisé, et le NEES est dans l'intervalle de confiance à 95 % [4,71;5,28]

TABLE 9.1 – Résultat de 500 simulations de Monte Carlo. Mesures générées avec le temps de propagation, algorithme considérant le temps de propagation.

\bar{X}	\overline{NEES}	Taux d'acceptation
$(-1002,90 ; 998,78 ; -299,92 ; 3,01 ; 4,00)$	5,25	94,8 %

TABLE 9.2 – Comparaison des performances asymptotiques attendues (BCR) et obtenues après estimation.

Composante	$\bar{\sigma}$	σ_{BCR}
x (m)	47,49	42,72
y (m)	18,70	17,53
z (m)	6,32	6,40
\dot{x} (m.s ⁻¹)	0,152	0,137
\dot{y} (m.s ⁻¹)	0,060	0,056

(donné pour 500 simulations). On en déduit que notre estimateur est efficace, qui plus est, avec un très bon taux d'acceptation. La figure 9.1 illustre le nuage d'estimés de la position initiale dans le plan, ainsi que l'ellipse de confiance à 95 %.

Au cours de nos expérimentations, nous avons de plus remarqué que l'impact du temps de propagation sur les performances asymptotiques pouvait être considéré comme négligeable dans la plupart des situations. Cela dépend bien entendu des scénarios envisagés.

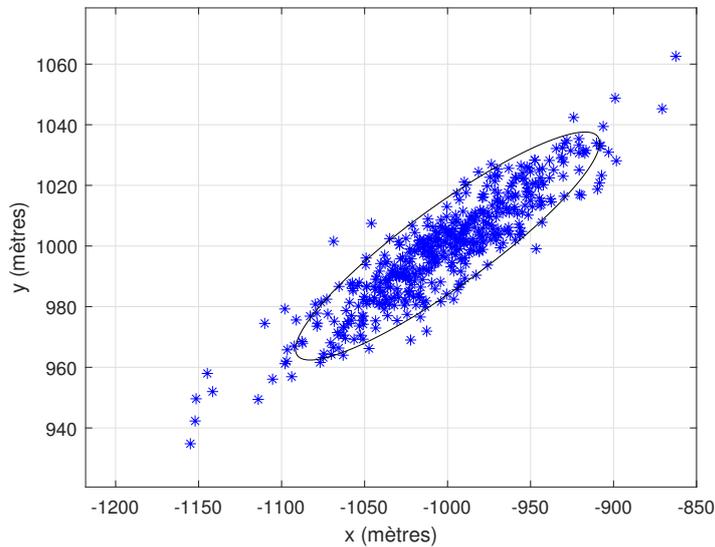


FIGURE 9.1 – Nuage d'estimés de la position initiale dans le plan. Considération des temps de propagation dans l'algorithme.

9.7.2 L'algorithme ne tient pas compte du temps de propagation

Désormais, seules les mesures sont générées en tenant compte du temps de propagation. L'algorithme utilisé est le même que celui du chapitre précédent, et ne tient donc pas compte de la propagation. Le réseau est le même que celui de la section précédente, dans le but de faciliter la comparaison. Les résultats sont visibles sur les tableaux 9.3 et 9.4.

TABLE 9.3 – Résultat de 500 simulations de Monte Carlo. Mesures générées avec le temps de propagation, algorithme négligeant le temps de propagation.

\bar{X}	$\overline{\text{NEES}}$	Taux d'acceptation
(-1005,00 ; 990,28 ; -299,42 ; 3,01 ; 4,01)	9,11	92,2 %

TABLE 9.4 – Comparaison des performances asymptotiques attendues (BCR) et obtenues après estimation.

Composante	$\bar{\sigma}$	σ_{BCR}
x (m)	48,50	42,72
y (m)	19,90	17,53
z (m)	6,22	6,40
\dot{x} (m.s ⁻¹)	0,154	0,137
\dot{y} (m.s ⁻¹)	0,063	0,056

On remarque que l'estimateur est légèrement plus biaisé, notamment sur la composante y . Le NEES moyen est hors de l'intervalle de confiance à 95 %, du fait du biais. Le taux d'acceptation reste bon, mais est un peu en deçà du résultat précédent. L'estimateur n'est pas efficace, mais les résultats sont assez cohérents pour une utilisation opérationnelle. Nous pouvons émettre l'hypothèse que le biais puisse être plus important en fonction de la configuration étudiée (si par exemple la cible passe très près d'un capteur, tandis qu'un autre capteur du réseau est très éloigné). Cela sera étudié plus tard dans cette section. La figure 9.2 montre le nuage d'estimés de la position initiale dans le plan, ainsi que l'ellipse de confiance à 95 % (identique à celle du cas précédent). Le biais est bien visible sur le nuage d'estimés.

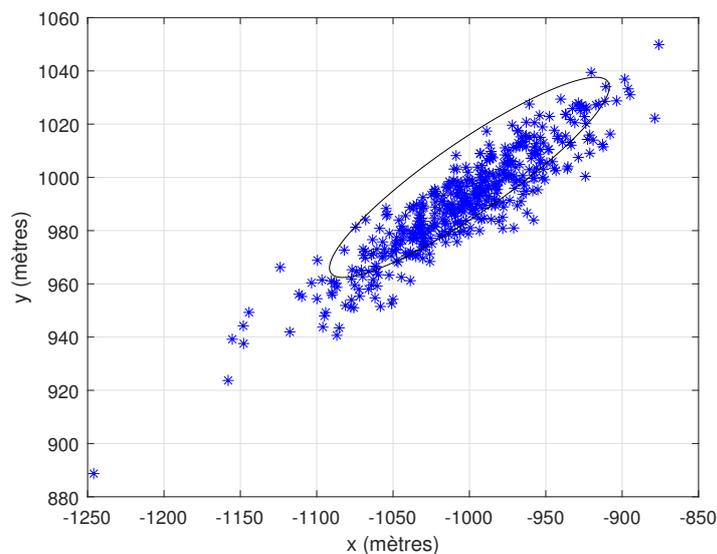


FIGURE 9.2 – Nuage d'estimés de la position initiale dans le plan. Pas de considération des temps de propagation dans l'algorithme.

Influence du nombre de capteurs sur le biais

Nous nous situons toujours dans le cas où le temps de propagation est considéré sur les mesures mais est négligé dans l’algorithme. Nous allons désormais montrer que le nombre de capteurs dans le réseau a une influence sur le biais d’estimation. Dans le résultat précédent, nous avons utilisé un réseau mixte “classique”, composé de $N_S = 3$ hydrophones et $N_A = 2$ antennes. Utilisons à présent un réseau mixte “doublé”, avec $N_S = 6$ hydrophones et $N_A = 4$ antennes, et étudions l’influence du nombre de capteurs sur le biais d’estimation. Encore une fois, les positions des capteurs sont tirées aléatoirement selon une loi uniforme sur un carré de 5 km de côté. Les résultats sont présentés dans les tableaux 9.5 et 9.6.

TABLE 9.5 – Résultat de 500 simulations de Monte Carlo. Mesures générées avec le temps de propagation, algorithme négligeant le temps de propagation. Réseau mixte double.

\bar{X}	$\overline{\text{NEES}}$	Taux d’acceptation
(-1003,42 ; 1005,41 ; -297,26 ; 3,01 ; 3,99)	6,12	94,8 %

TABLE 9.6 – Comparaison des performances asymptotiques attendues (BCR) et obtenues après estimation.

Composante	$\hat{\sigma}$	σ_{BCR}
x (m)	27,33	24,91
y (m)	22,94	20,51
z (m)	4,71	4,85
\dot{x} (m.s ⁻¹)	0,104	0,094
\dot{y} (m.s ⁻¹)	0,089	0,081

Nous remarquons que le biais est diminué par rapport à la simulation précédente. La preuve en est aussi donnée dans le NEES qui se rapproche de la valeur moyenne attendue de 5. Le taux d’acceptation est lui aussi légèrement plus élevé. L’estimateur se rapproche donc d’un estimateur efficace. Ainsi, si l’on augmente suffisamment le nombre de capteurs dans une situation réaliste (i.e. les mesures tiennent compte du temps de propagation), il devient possible, de façon opérationnelle, de négliger le temps de propagation dans l’algorithme d’optimisation. La figure 9.3 montre le nuage d’estimés de la position initiale obtenu à l’issue de cette simulation, ainsi que l’ellipse de confiance à 95 %. On remarque que, comparativement à la figure 9.2, le biais est un peu moins présent.

Influence de la position des capteurs sur le biais

Revenons maintenant à un réseau mixte “classique” ($N_S = 3$ et $N_A = 2$). Nous sommes toujours dans la situation où les mesures sont générées avec la prise en compte du temps de propagation, mais l’algorithme le néglige. Nous essayons désormais de voir l’influence du positionnement des capteurs sur le biais d’estimation. En effet, il se pourrait a priori que certaines configurations puissent augmenter le biais, voire empêchent l’estimation de se réaliser dans de bonnes conditions (les estimés pourraient être rejetés à l’issue de l’estimation). La situation typique est celle où un capteur est positionné très près de la cible, tandis que d’autres capteurs sont placés beaucoup plus loin. La distance parcourue par l’onde acoustique émise par la cible jusqu’à chaque capteur devient donc très différente en fonction

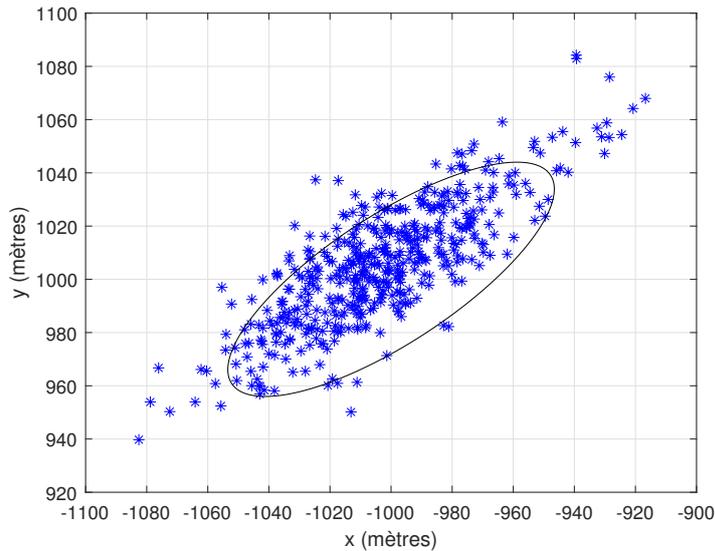


FIGURE 9.3 – Nuage d’estimés de la position initiale dans le plan. Pas de considération des temps de propagation dans l’algorithme. Réseau mixte double.

du capteur considéré. Le temps de propagation sur chaque capteur n’est plus négligeable, alors le biais apparaît et devient important.

Les résultats donnés dans le tableau 9.7 montrent une configuration où le biais est augmenté par rapport aux résultats donnés dans le tableau 9.3. Le taux d’acceptation s’en trouve diminué par ailleurs. Ces résultats sont par ailleurs illustrés dans la figure 9.4, représentant le nuage d’estimés de la position initiale et l’ellipse de confiance à 95 %. Le biais est immédiatement visible, ainsi que l’étalement des estimés.

TABLE 9.7 – Résultat de 500 simulations de Monte Carlo. Mesures générées avec le temps de propagation, algorithme négligeant le temps de propagation.

\bar{X}	$\overline{\text{NEES}}$	Taux d’acceptation
(-1045,57 ; 978,61 ; -301,46 ; 3,08 ; 4,03)	19,64	79,8 %

Ainsi, il y a bien une influence de la part de la configuration du réseau sur le biais à l’issue de l’estimation. En fonction de la répartition des capteurs, le biais sera plus ou moins important (à nombre de capteurs identique). Le taux d’acceptation des estimés sera lui aussi impacté.

9.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié un aspect de la trajectographie souvent négligé dans la littérature, à savoir la considération des temps de propagation. Nous avons appliqué cette considération à notre réseau mixte et à la présence de fausses alarmes, dans le but de rajouter encore un peu de réalisme aux simulations que nous effectuons. A travers une expression de ce temps de propagation, il nous a été possible de mettre au point un estimateur efficace. Si l’on dispose de mesures réelles (générées par un phénomène de propagation), et que l’on néglige cet aspect dans l’estimation, l’estimateur se retrouvera biaisé. Ce biais varie en fonction de la configuration et du scénario étudié. Le biais peut être beaucoup plus important dans certains cas. Il est parfois tellement important que l’algorithme ne converge pas, certains estimés ne passent pas le test d’acceptation, et alors le taux d’acceptation

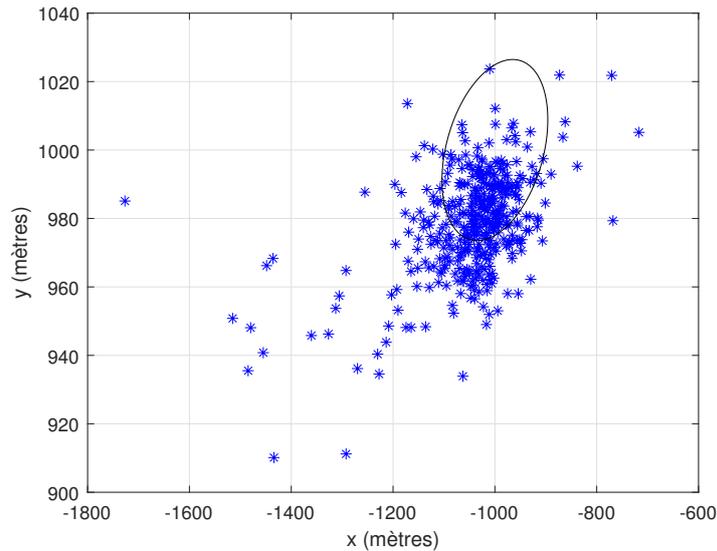


FIGURE 9.4 – Nuage d’estimés de la position initiale dans le plan. Pas de considération des temps de propagation dans l’algorithme. Réseau provoquant un biais important.

devient plus faible. De plus, il est montré que l’augmentation du nombre de capteurs présent dans la zone de scrutation permet de réduire quelque peu ce biais : plus le nombre de capteurs est important, plus ce biais sera réduit. Cela a aussi été constaté dans [Jauffret *et al.*, 2016]. Ainsi, ce chapitre nous permet une double conclusion :

- La considération des temps de propagation dans les mesures et dans l’algorithme nous permet d’avoir un estimateur efficace.
- L’intérêt d’un réseau de capteurs est montré, même si l’on néglige le temps de propagation dans l’algorithme, pour peu que l’on dispose de suffisamment de capteurs.

En effet, la prise en compte du temps de propagation s’avère assez compliquée d’un point de vue algorithmique, notamment du point de vue de la matrice d’information de Fisher et des gradients élémentaires. Il y a donc un compromis à trouver entre la complexité du développement du logiciel et la précision de l’estimateur mis en œuvre. Cela dépendra donc du cahier des charges.

Conclusion de la partie

Dans cette partie, nous avons été amené à traiter et à résoudre le problème de la trajectographie passive d'une cible sous-marine à l'aide d'un réseau de capteurs. Le contexte était le suivant : une source acoustique sous-marine progresse (en MRU ou en effectuant une manœuvre) dans un environnement scruté par des capteurs flottant à la surface de la mer. A l'aide des mesures collectées par les capteurs, il s'agit d'estimer les paramètres cinématiques de la source : sa position dans l'espace sous-marin et sa vitesse dans le plan horizontal. Du fait de la sobriété des capteurs soumis à notre étude, les mesures étaient corrompues par des fausses alarmes, et il était alors nécessaire de traiter la trajectographie en présence de ces fausses alarmes. Nous avons donc utilisé le modèle statistique du PDA. Le but était de mettre au point des estimateurs, et de confronter les performances de ces estimateurs aux performances asymptotiques attendues, issues de la BCR. Pour cela, nous procédions à l'aide de données simulées numériquement.

Le premier réseau que nous avons étudié dans le chapitre 5 était exclusivement composé de bouées hydrophones. Ces bouées mesurent la différence de temps d'arrivée relativement à une bouée de référence. Après avoir démontré l'observabilité du système et effectué des simulations, les résultats ont montré que ce type de réseau posait problème pour l'estimation de la profondeur de la cible. En effet, une trop grande variance asymptotique était attendue si le nombre de capteurs était faible. De plus, un biais sur l'estimation de cette composante apparaissait souvent. Une méthode était alors d'augmenter considérablement le nombre de capteurs. Mais cette méthode est coûteuse par tous les aspects : logistiques, financiers, et ressources de calcul.

C'est pourquoi nous nous sommes dirigés vers une solution mixte, en intégrant un autre type de capteurs dans notre réseau. Cette étude a été développée dans le chapitre 6. Les nouveaux capteurs que nous ajoutons sont des antennes linéaires verticales. Par construction, ces antennes apportent bien plus d'information sur la profondeur de la cible que tous les hydrophones réunis. En effet, elles mesurent le cosinus d'élévation de l'angle entre le capteur et la cible, et ce, pour les trajets direct et réfléchi-fond. Mais, leur comportement vis-à-vis des autres composantes cinématiques de la cible laissait quelque peu à désirer. L'idée était alors de combiner ces deux types de capteurs, dans le but d'obtenir le "meilleur des deux mondes". Chaque type de capteur compensait ainsi les faiblesses de l'autre. Après avoir étudié l'observabilité et mis au point notre démarche, les résultats numériques ont montré un estimateur efficace, et ce, pour un réseau "minimal" (trois hydrophones et deux antennes), et

quel que soit le rapport signal-sur-bruit ou le type d'architecture (TAD et TAD-AI). Les performances sur l'intégralité du vecteur d'état de la cible sont extrêmement satisfaisantes. C'est tout naturellement que ce réseau a été choisi pour le reste de cette partie, du fait de son fonctionnement adéquat.

Dans le chapitre 7, nous étendions l'étude effectuée dans le chapitre précédent au cas où la cible effectuait une manœuvre. Après avoir expliqué la modélisation choisie pour ce problème, les résultats numériques ont montré un estimateur efficace si l'instant de manœuvre était connu, et un estimateur légèrement sous-optimal si l'instant de manœuvre était inconnu, et donc à estimer. Cependant, même si l'estimateur n'est pas efficace, il n'en reste pas moins que les résultats sont tout à fait acceptables d'un point de vue opérationnel.

Pour le chapitre 8, nous reprenions l'étude faite au chapitre 6, mais en supprimant une hypothèse qui était assez contraignante et peu réaliste au niveau de la chaîne de traitement sonar. En effet, nous supposions au préalable que les rayons arrivant sur les antennes étaient distinguables. Or, après l'étape de détection, il s'avère que cette hypothèse est quelque peu simplificatrice et peu réaliste. Nous avons alors dû changer la modélisation statistique de notre modèle pour pouvoir intégrer cette nouvelle considération. A l'aide d'une adaptation du modèle du JMLPDA (utilisé traditionnellement dans les problèmes de trajectographie multi-sources), nous avons été capables de réaliser la trajectographie de la source, sans effectuer de distinction au niveau des rayons arrivant aux antennes. L'estimateur s'est montré efficace à l'issue des simulations numériques.

Cette partie se termine avec le chapitre 9. Jusqu'à présent, nous avons négligé un phénomène physique important. La source acoustique émet un son, et ce son est acquis par les capteurs. Le son se propageant dans un milieu à une certaine vitesse, l'onde met alors du temps à parvenir aux capteurs. C'est précisément ce temps, que l'on appelle temps de propagation, qui était négligé jusque-là, et qui est souvent négligé dans la littérature en trajectographie. Ce dernier chapitre est donc l'extension du chapitre précédent, au cas où nous tenons compte du temps que met le signal émis par la source pour arriver aux capteurs. Ce nouveau problème nécessitait une modélisation différente, physiquement, avec le retard des mesures, mais aussi d'un point de vue statistique. La matrice d'information de Fisher devait être modifiée. Les simulations ont été nombreuses pour tester des cas différents. Tout d'abord, si le temps de propagation est pris en compte dans les données et dans l'algorithme, alors l'estimateur est efficace. Si le temps de propagation est pris en compte dans les données, mais pas dans l'algorithme (les mesures sont générées de façon réaliste, mais l'algorithme est alors identique à celui du chapitre 8), un biais sur l'estimation apparaît. Ce biais peut diminuer si le nombre de capteurs augmente. Mais il peut aussi être très important, voire provoquer un dysfonctionnement de l'estimateur en fonction de la structure intrinsèque du réseau.

Tout au long de cette partie, nous avons donc traité le problème de la trajectographie passive d'une cible sous-marine à l'aide d'un réseau de capteurs. La démarche s'est voulue progressive par souci de clarté. Ainsi se clôt cette deuxième partie.

Troisième partie

Optimisation du seuil de détection

Ce chapitre sert d'introduction à la partie traitant de l'optimisation du seuil de détection. Nous détaillerons dans un premier temps la problématique ainsi que les motivations associées. Enfin, nous verrons l'organisation structurelle de cette partie.

11.1 Problématique et motivations

Cette partie est consacrée à l'étude de l'optimisation du seuil de détection dans les architectures TAD et TAD-AI. La situation est la suivante : lors de l'étape de détection dans la chaîne de traitement sonar, on garde les mesures dont l'énergie est supérieure au seuil de détection. Si l'on se situe en architecture TAD, les données sont ensuite binarisées (on ne conserve pas l'information de l'énergie dans chaque cellule de résolution). A contrario, en architecture TAD-AI, on conserve cette information. Le choix du seuil de détection est primordial : trop bas et le détecteur risque de déclencher un trop grand nombre de fausses alarmes, donc d'alertes inutiles pour un opérateur ; trop haut et les événements importants risquent d'être manqués, ce qui est grave d'un point de vue opérationnel. Ainsi, la question du choix adéquat du seuil de détection est une question primordiale. Dans cette partie, nous allons étudier un seuil dit "optimal".

Quand on parle d'optimalité, il est nécessaire de préciser le critère qui remplit cette condition. Pour notre étude, nous souhaitons trouver le seuil optimal au sens de la quantité d'information de Fisher. Il s'agit donc du seuil qui maximise l'information de Fisher. Pourquoi un tel choix de critère ? En maximisant la quantité d'information, on minimise alors la borne de Cramér-Rao. Cette dernière étant directement liée aux performances asymptotiques attendues d'un estimateur, alors nous pourrions obtenir un estimateur dont la variance asymptotique est la plus faible possible, à supposer que l'estimateur soit efficace. L'idée est donc de trouver un seuil de détection maximisant la quantité d'information, et donc rendant un estimateur efficace bien plus performant, toutes choses étant égales par ailleurs.

Il est à noter que la question d'un seuil optimal de détection a été abordée précédemment dans la littérature, l'optimalité se référant alors à des critères différents du nôtre. Dans [Fortmann *et al.*, 1985], c'est l'erreur commise sur la position de la cible qui doit être minimisée. Dans [Li et Bar-Shalom, 1991], c'est la durée de vie de la piste (les auteurs se placent dans un système temps réel), conjointement à

la perte de la piste qui est optimisée. De façon usuelle, notamment dans le domaine du radar, c'est l'opérateur qui fixe le seuil de détection lui-même, de telle sorte que le nombre de fausses alarmes soit constant au cours du temps.

Cette partie abordera donc la question du seuil optimal de détection au sens de l'information de Fisher, et ce, pour les architectures TAD et TAD-AI. Le modèle statistique choisi pour développer notre étude est celui du PDA, comme détaillé dans le chapitre 3. Il s'agira d'utiliser les particularités de ce modèle pour résoudre notre problème.

Il est à noter que cette partie est relativement indépendante de la précédente, puisque ne traitant pas directement d'un problème de trajectographie. Cependant, les travaux menés dans cette partie peuvent avoir des applications opérationnelles lors de la trajectographie d'une source acoustique.

11.2 Structure de la partie

Cette partie se structure en deux chapitres principaux. Tout d'abord, dans le chapitre 12, nous étudions l'optimisation du seuil de détection dans l'architecture TAD. A travers des modifications conceptuelles du modèle du PDA, nous arriverons à montrer l'existence d'un seuil optimal de détection, à l'aide d'un exemple simple utilisé en traitement du signal.

Le chapitre 13 se place dans la continuité du travail mené dans le chapitre précédent, mais cette fois-ci, dans l'architecture TAD-AI. Dans cette partie, il sera démontré un théorème justifiant de l'utilité de cette architecture. L'existence d'un seuil optimal dans une situation particulière de traitement de signal sera mise en évidence.

Une conclusion viendra enfin clore cette partie.

Notons que tout au long de cette partie, certains détails calculatoires sont ramenés en annexe, et seront signalés au moment souhaité. Des références à la bibliographie seront aussi explicitées.

Optimisation du seuil de détection dans l'architecture TAD

12.1 Introduction

L'étude développée dans ce chapitre se situe dans l'architecture TAD, où après détection, les données sont binarisées. Nous nous intéressons ici à la détermination d'un seuil "optimal" lors de l'étape de détection. En effet, un mauvais choix de ce seuil peut soit mener à un trop grand nombre de fausses alarmes (seuil trop bas), ou à une très faible probabilité de détection (seuil trop haut). Ce phénomène est visible sur la figure 12.1. On peut alors comprendre qu'aucune information ne pourra être tirée des données dans ces deux situations extrêmes. Alors, l'information doit être maximale à un seuil intermédiaire donné. Comment quantifier l'information ? Nous emploierons l'outil suivant, déjà grandement utilisé au cours de cette thèse : la FIM. De plus, le modèle statistique retenu en architecture TAD est le modèle du ML-PDA, développé dans le chapitre 3.

Nous avons montré dans ce même chapitre que la FIM en environnement encombré était égale à la FIM en environnement propre, multipliée par un facteur scalaire, appelé q_2 dans la littérature. Ce facteur concentre la perte d'information due à la probabilité de détection non-unitaire et à la présence de fausses alarmes, et prend ses valeurs entre 0 et 1. Il ne dépend que de la probabilité de détection et du nombre moyen de fausses alarmes dans la gate. Pour un scénario donné, maximiser la FIM revient alors à maximiser q_2 . Avec toutes ces considérations, l'existence d'un seuil de détection qui maximiserait q_2 est une question importante, et sera traitée dans ce chapitre.

Après une exposition du contexte et un très bref rappel du PDA, nous verrons comment optimiser le facteur q_2 , et quelles modifications devront être effectuées. Un exemple applicatif en traitement du signal viendra illustrer notre démarche, à travers quelques résultats numériques. Une conclusion fera finalement le point sur ce chapitre.

12.2 Optimisation de l'information de Fisher

12.2.1 Contexte

Détaillons tout d'abord le contexte de ce chapitre. De façon analogue aux chapitres précédents, les mesures sont monodimensionnelles. L'ensemble où elles sont définies est un segment $\mathbb{U} = [u_{min}; u_{max}]$

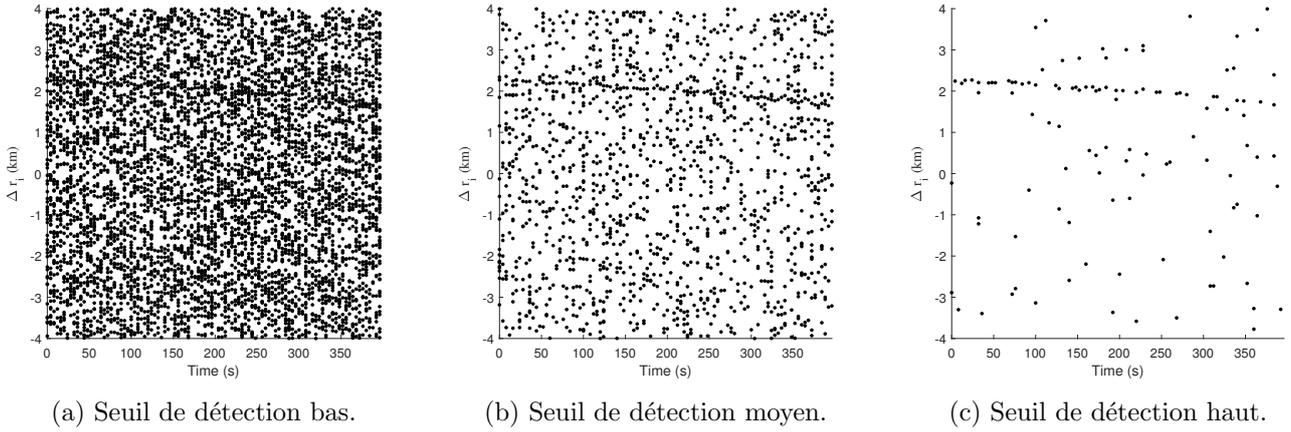


FIGURE 12.1 – Mesures obtenues pour différents seuils de détection en architecture TAD.

découpé en N sous segments (aussi appelés cellules de résolution) de longueur égale Δu :

$$\mathbb{U} = \bigcup_{k=1}^N [u_{min} + (k-1)\Delta u, u_{min} + k\Delta u] \quad (12.1)$$

avec $u_{min} + N\Delta u = u_{max}$, la dimension de \mathbb{U} (appelée $u \triangleq u_{max} - u_{min}$) formant alors l'espace de scrutation.

Bien que les mesures soient fondamentalement des réalisations de variables aléatoires discrètes, la taille Δu des sous-segments est suffisamment petite pour considérer ces mesures comme des réalisations de variables aléatoires continues, pour lesquelles le modèle du ML-PDA est adapté. En résumé, les mesures sont discrétisées par les cellules de résolution. Mais la taille d'une cellule est suffisamment petite pour qu'on puisse considérer ces détections comme des variables aléatoires continues. Par la suite, nous "jonglerons" avec la nature ambivalente des mesures.

12.2.2 Loi de Poisson ou loi binomiale ?

Rappelons la vraisemblance de l'état dans le modèle du ML-PDA (voir chapitre 3) :

$$L(X|s_k) = \frac{1 - P_d}{u^{m_k}} \mu_{fa}(m_k) + \frac{P_d}{u^{m_k-1}} \frac{\mu_{fa}(m_k-1)}{m_k} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_{i,k} - h_k(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (12.2)$$

Le choix de la loi de Poisson comme modélisation du nombre de fausses alarmes dans le modèle du PDA est justifié par le fait que l'on considère ces fausses alarmes comme des événements "rares" [Sittler, 1964]. Rappelons que la loi de Poisson est une convergence de la loi binomiale dans le cas où la probabilité d'apparition de l'évènement est considérée comme faible. Or, dans notre cas, la probabilité de cet évènement est ce que l'on appelle P_{fa} , la probabilité de fausses alarmes. Ainsi, dans le modèle classique du PDA, on suppose une probabilité de fausses alarmes faible.

Il est de plus possible de lier le nombre moyen de fausses alarmes à P_{fa} . En effet, si M est le nombre de cellules d'analyse sur lesquelles le test est effectué, alors on a $\lambda u \simeq MP_{fa}$, en supposant que P_{fa} soit suffisamment petit. Par conséquent, on obtient que $\lambda v \simeq NP_{fa}$, où N est le nombre de cellules de résolution situées dans la gate¹ de dimension $v = 2g\sigma$. Ainsi, on remarque que q_2 est une

1. Rappelons que pour le calcul du facteur q_2 , on exprime la vraisemblance en se restreignant à la gate autour des

fonction du couple $(P_d; P_{fa})$. A l'aide des propriétés du détecteur données par les courbes COR, on arrive à montrer simplement que P_d et P_{fa} sont toutes deux fonction du seuil de détection t . Ainsi, on en déduit que le facteur q_2 peut s'exprimer uniquement en fonction du seuil de détection t . On utilise par la suite cette fonction $q_2(t)$.

La recherche du seuil optimal de détection n'est alors rien d'autre que la recherche du maximum de $q_2(t)$. Cependant, ce seuil optimal pourrait définir une probabilité de fausse alarme grande, si t est petit. Dans ce cas, l'utilisation d'une loi de Poisson pour μ_{fa} n'est plus justifiée : les fausses alarmes ne peuvent plus être considérées comme des événements rares. Il nous faut alors revenir à la répartition naturelle des fausses alarmes dans (12.2), qui est la loi binomiale.

Il faut désormais être vigilant quant à la caractérisation de la loi binomiale. En effet, on rappelle que la vraisemblance est établie à partir du théorème des probabilités totales, sous deux hypothèses principales : soit il n'y a que des fausses alarmes, soit il y a une vraie détection et le reste des mesures n'est que fausses alarmes. Dans le premier cas, les fausses alarmes se répartissent sur les N cases de la gate. Dans le second cas, une case étant occupée par une vraie détection, il ne reste plus que $N - 1$ cases pour les fausses alarmes. Dans les deux cas, la probabilité d'apparition des fausses alarmes est toujours P_{fa} . On en déduit donc la "nouvelle" vraisemblance à partir de ces hypothèses en utilisant la loi binomiale :

$$L(X|s_k) = \frac{1 - P_d(t)}{v^{m_k}} \mu_{fa,1}(m_k) + \frac{P_d(t)}{v^{m_k-1}} \frac{\mu_{fa,2}(m_k - 1)}{m_k} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_{i,k} - h_k(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (12.3)$$

avec $\mu_{fa,1}$ est la loi binomiale de paramètres $(N, P_{fa}(t))$, et $\mu_{fa,2}$ est la loi binomiale de paramètres $(N - 1, P_{fa}(t))$. Dans (12.3), la vraisemblance est alors calculée pour les mesures appartenant à la gate.

12.2.3 Quantité d'information dans les cas extrêmes : $m = 0$ et $m = N$

Étudions désormais les configurations extrêmes que l'on peut trouver dans les grilles de détection. Notre étude se porte sur deux cas : soit l'on ne dispose d'aucune détection dans la gate, soit toutes les cases de la gate sont remplies.

Tout d'abord, si $m = 0$, la vraisemblance est alors :

$$L(X|s, M = 0) = (1 - P_d(t))(1 - P_{fa}(t))^N \quad (12.4)$$

Dans ce cas particulier, la vraisemblance est constante selon l'état X , donc n'apporte pas d'information sur l'état. Deuxièmement, lorsque $m = N$, toutes les cases contiennent une mesure :

$$\begin{aligned} L(X|s, M = N) &= \frac{1 - P_d(t)}{v^N} + \frac{P_d(t)}{v^{N-1}N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_i - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \\ \Leftrightarrow L(X|s, M = N) &= \frac{1 - P_d(t)}{v^N} + \frac{P_d(t)}{v^{N-1}N\Delta u} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_i - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \Delta u \end{aligned} \quad (12.5)$$

Or, puisque $\Delta u \ll \sigma$ et par conséquent $N \gg 1$, on peut raisonnablement écrire que :

vraies mesures (voir annexe B).

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_i - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \Delta u \simeq \int_v \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] ds \quad (12.6)$$

De plus :

$$\int_v \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] ds \simeq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] ds \simeq 1 \quad (12.7)$$

et $N\Delta u = v$

$$L(X|s, M = N) \simeq \frac{1}{v^N} \quad (12.8)$$

Ainsi, la vraisemblance ne dépend pas de l'état si $m = N$ et si $m = 0$. Autrement dit, s'il n'y a aucune détection, ou si toutes les cases sont remplies, aucune information sur l'état n'est disponible.

12.2.4 q_2 calculé à partir de la loi binomiale

Nous pouvons calculer le facteur q_2 à partir de la vraisemblance de l'équation (12.3) (le détail du calcul est donné dans l'annexe G) :

$$q_2(t) = \sum_{m=1}^{N-1} \frac{2P_d(t)\mu_{fa,2}(m-1)}{\sqrt{2\pi}g^{m-1}} \int_0^g \dots \int_0^g \frac{\exp(-\xi_1^2) \xi_1^2}{\frac{\alpha(t)}{\beta(t)} + \sum_{i=1}^m \exp(-\frac{1}{2}\xi_i^2)} d\xi_1 \dots d\xi_m \quad (12.9)$$

q_2 est donc une somme d'intégrales multiples de dimension m . $\mu_{fa,2}$ est la loi binomiale de paramètres $(N-1, P_{fa}(t))$, t est le seuil de détection, et :

$$\alpha(t) = 1 - P_d(t) \quad (12.10)$$

$$\beta(t) = \frac{2gP_d(t)}{\sqrt{2\pi}NP_{fa}(t)} \quad (12.11)$$

$$g = 5 \quad (12.12)$$

Les bornes de la sommation discrète (entre 1 et $N-1$) se justifient par le raisonnement mené précédemment : les cas extrêmes n'apportent pas d'information sur l'état X .

De plus, notons que dans les conditions de convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson, le facteur q_2 exprimé selon les deux lois possède les mêmes valeurs. La figure 12.2 nous donne un exemple des deux q_2 , à partir d'un contexte de traitement de signal qui sera détaillé par la suite. Dans cette figure, on remarque bien la convergence des deux q_2 lorsque le seuil de détection augmente, i.e. lorsque les conditions de convergence s'appliquent. Nous avons donc généralisé le concept de facteur de réduction d'information en l'étendant aux cas où P_{fa} est grande.

12.3 Application au traitement de signal

12.3.1 Formulation du problème

Dans cette section, nous décrivons un problème simple, dont le contexte nous sert à illustrer la recherche du seuil optimal. Le contexte est le suivant : nous disposons d'un signal sinusoïdal, avec une

amplitude, fréquence et phase inconnues [Rife et Boorstyn, 1974]. Ceci est notre signal d'intérêt. Cette sinusoïde est corrompue par un bruit blanc additif centré gaussien. Nous avons donc deux hypothèses de détection :

- $H_0 \triangleq$ il n'y a que du bruit
- $H_1 \triangleq$ il y a du bruit et du signal d'intérêt

Il est montré dans [Kay, 1998] que le test optimal de Neyman-Pearson dans ce problème est équivalent à comparer le périodogramme à un seuil. La loi de probabilité du périodogramme sous chacune des hypothèses est :

- $H_0 : \chi_2^2$ centré
- $H_1 : \chi_2^2$ décentré

Le paramètre de décentrement γ , nécessaire pour l'hypothèse H_1 , dépend directement du SNR :

$$\gamma = \frac{N_e A^2}{2\sigma^2} \quad (12.13)$$

avec N_e le nombre d'échantillons utilisés pour l'analyse fréquentielle, A l'amplitude du signal, et σ^2 la puissance du bruit gaussien. Donc, en notant le périodogramme R et le seuil t , on a par définition :

$$P_d(t) \triangleq P(R > t | H_1) \quad (12.14)$$

$$P_{fa}(t) \triangleq P(R > t | H_0) \quad (12.15)$$

Dans cette application, le signal temporel est segmenté en K scans sans chevauchement. Le périodogramme de chaque scan est comparé au seuil. Les cellules fréquentielles du scan $k = 1, \dots, K$ dont l'énergie est supérieure au seuil composent le vecteur de mesure $s_k = (s_{1,k}, \dots, s_{m_k,k})$. De plus, de façon analogue à ce qui a été détaillé précédemment, N est le nombre de cellules fréquentielles localisées dans la gate.

Avec la connaissance des lois de probabilités, on en déduit que :

$$P_{fa}(t) = \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \quad (12.16)$$

$P_d(t)$ est une série numérique, dont l'expression est détaillée dans [Kay, 1998]. Dans cette même référence, un algorithme permettant de calculer numériquement $P_d(t)$ est présenté. Ainsi, nous sommes capables d'exprimer P_d et P_{fa} en fonction du seuil.

12.3.2 Résultats numériques

Avec les connaissances établies précédemment sur les lois de probabilité sous les deux hypothèses de détection, ainsi que la nouvelle expression du q_2 , il nous est désormais possible de calculer le q_2 en fonction du seuil de détection. Les intégrales sont calculées numériquement par simulations de Monte Carlo [Robert, 1992], avec 10^6 simulations. Nous fixons empiriquement N à 40. Le seuil optimal est déterminé en trouvant la valeur maximale du q_2 selon une simple méthode de recherche sur une grille (*grid-search method*). Le seuil optimal au sens du q_2 peut ensuite être placé sur une courbe COR, pour trouver le point opérationnel optimal, et ce, pour différentes valeurs du décentrement γ .

La figure 12.2 montre l'importance du choix de la loi binomiale contre la loi de Poisson lors de la recherche du seuil optimal. En effet, dans certains cas où le SNR est suffisamment faible, l'utilisation de la loi de Poisson peut empêcher la recherche du seuil optimal, comme nous l'avons vu précédemment. La plupart du temps, la recherche du maximum est faisable si le seuil optimal n'est pas trop bas.

La figure 12.3 montre q_2 en fonction du seuil de détection pour différentes valeurs du paramètre γ , ainsi que le seuil optimal dans chacun des cas. Plus γ est grand, plus le seuil optimal est haut, et plus le maximum de q_2 est élevé. Cela s'explique bien entendu par la différence entre les lois de probabilités sous chacune des deux hypothèses. Il est donc possible de trouver simplement le seuil optimal pour n'importe quelle valeur de γ , avec un algorithme standard de recherche de maximum. On remarque aussi que $q_2(0) = 0$ (pas d'information si toutes les cases sont remplies), et que la fonction tend vers 0 quand t tend vers l'infini (pas d'information quand aucune case n'est remplie).

La figure 12.4 représente les courbes COR associées à chacun des cas de la figure précédente, ainsi que le point opérationnel déduit à partir du seuil optimal, soulignant ainsi la performance du test, même dans les cas d'un γ relativement faible.

12.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons posé et résolu le problème de la recherche du seuil optimal de détection dans l'architecture TAD. Le critère choisi est la quantité d'information relative au paramètre d'intérêt et contenu dans les mesures binarisées retenues. La quantité d'information est calculée au sens de Fisher.

Le modèle du PDA, dans lequel nous nous situons depuis le début de cette thèse, nous permet d'affirmer qu'une perte d'information est provoquée par la présence de fausses alarmes et par la probabilité d'apparition de la source, et que cette perte s'exprime sous la forme d'un facteur q_2 . Ce facteur peut être lié directement au seuil de détection. Dans cette situation, le seuil optimal tel que nous le définissons est simplement celui pour lequel le facteur q_2 est le plus grand.

Cependant, la recherche du seuil optimal pouvait mettre en évidence des seuils pour lesquels la probabilité de fausses alarmes était grande, contredisant l'utilisation d'une loi de Poisson pour modéliser le nombre de fausses alarmes. Cette loi est en effet utilisée pour les événements rares. Il a alors été nécessaire de revenir à la répartition "naturelle" des fausses alarmes, en utilisant la loi binomiale. L'expression d'une nouvelle vraisemblance, ainsi que d'un nouveau facteur q_2 à partir de la loi binomiale a été développée. C'est ce nouveau facteur, exprimé avec la loi binomiale qui nous permet d'effectuer la recherche du seuil optimal de détection.

Enfin, un exemple provenant du traitement du signal a permis d'illustrer notre approche. Dans cet exemple classique, il a été mis en évidence l'existence du seuil optimal de détection dans l'architecture TAD. Les points opérationnels de chaque scénario ayant été reporté sur les courbes COR associées, nous avons pu constater les bonnes performances des détecteurs.

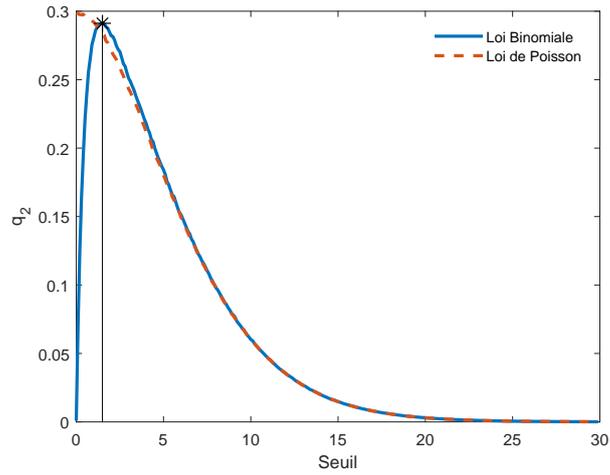


FIGURE 12.2 – q_2 selon les lois binomiale et Poisson, $\gamma = 2$, $N = 5$.

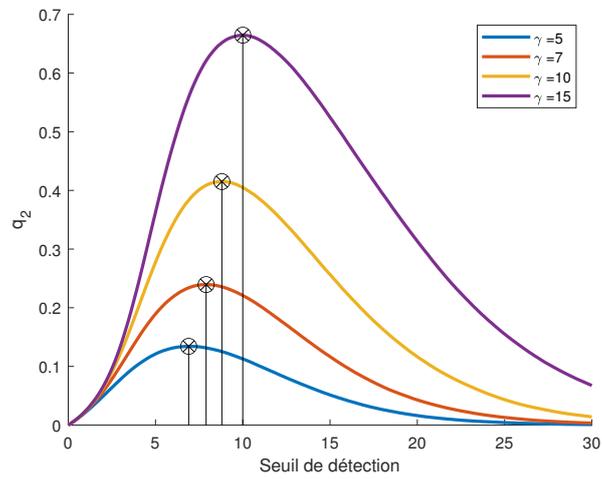


FIGURE 12.3 – q_2 en fonction du seuil pour différentes valeurs de γ .

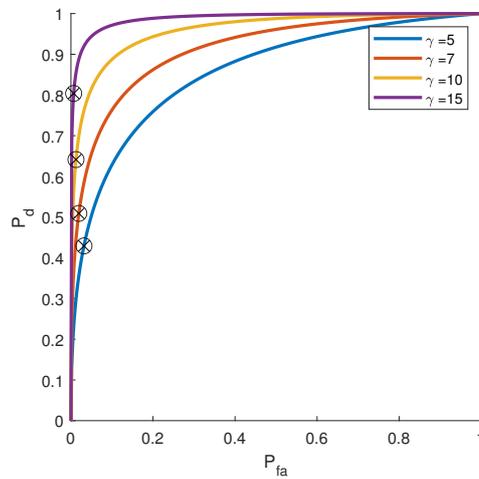


FIGURE 12.4 – Courbes COR pour différentes valeurs de γ .

Optimisation du seuil de détection dans l'architecture TAD-AI

13.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'optimisation du seuil de détection, lorsque les mesures sont seuillées et l'information de l'énergie associée à chaque cellule de résolution est conservée. On se situe donc en architecture TAD-AI. Si le seuil de détection est au plus bas (toutes les cellules de résolution sont remplies de l'énergie associée), alors on se situe en architecture TBD. On peut voir l'architecture TBD comme une extension de l'architecture TAD-AI dans un cas limite de valeur de seuil. Nous cherchons le seuil optimal au sens de la quantité d'information de Fisher : il est celui qui maximise la quantité d'information.

Comme dans le chapitre précédent, l'étude se réalisera dans le modèle du ML-PDA, mais cette fois-ci, en architecture TAD-AI. De façon strictement analogue à ce qui a été réalisé précédemment, la maximisation de la FIM revient finalement à maximiser, cette fois-ci, le facteur q_3 . Il s'agira donc de trouver la valeur du seuil t qui maximise q_3 .

Nous avons montré dans le chapitre précédent qu'une modification sur la modélisation de la vraisemblance était obligatoire dans le but d'étudier de manière appropriée ce problème d'optimisation. En effet, notre recherche du seuil optimal peut nous amener à devoir chercher un seuil assez bas, donc avec une probabilité de fausses alarmes assez élevée. Or, selon la modélisation du ML-PDA introduite dans [Bar-Shalom et Tse, 1975, Jauffret et Bar-Shalom, 1990, Jauffret, 1993] et présentée au chapitre 3, les fausses alarmes sont considérées comme un événement "rare", et leur nombre est à ce titre modélisé suivant une loi de Poisson. Or, dans le cas où le seuil de détection est très bas, on ne peut plus se permettre d'effectuer cette considération, qui est en réalité une approximation. Il sera donc nécessaire de revenir à la loi naturelle de répartition, qui est la loi binomiale.

Ce chapitre détaille donc l'étude qui a été menée pour trouver le seuil optimal de détection dans le modèle du ML-PDA, lorsque les énergies associées à chaque cellule de résolution sont conservées. Tout d'abord, nous considérons la vraisemblance de ce modèle probabiliste en utilisant la loi binomiale, conformément aux hypothèses évoquées en introduction. Deuxièmement, nous exprimons le facteur q_3 en fonction du seuil de détection dans ce modèle particulier. Viendra ensuite une démonstration, prouvant que $q_3 \geq q_2$, q_2 étant le facteur de réduction d'information dans le modèle du ML-PDA. Cette section nous permettra de mettre en évidence l'intérêt de la conservation des énergies associées

à chacune des cellules. Ensuite, nous montrerons à l'aide de simulations numériques comment se caractérise le seuil maximisant le facteur q_3 , sous certaines hypothèses déjà utilisées dans le chapitre précédent.

13.2 Vraisemblance avec loi binomiale

Tout d'abord, exprimons la vraisemblance dans le modèle du ML-PDA avec conservation des énergies, dans le cas où le nombre de fausses alarmes à chaque instant suit une loi binomiale. Les hypothèses statistiques restantes pour établir le modèle sont identiques à celles détaillées dans [Kirubarajan *et al.*, 2001, Kirubarajan et Bar-Shalom, 1996, Jauffret, 1993, Jauffret et Bar-Shalom, 1990, Blanding *et al.*, 2007a].

En notant $R_{i,k}$ l'énergie associée à la détection i à l'instant k , $t \geq 0$ le seuil de détection et

$$p_0^t(R_{i,k}) = \frac{1}{P_{fa}(t)} p_0(R_{i,k}) \quad (13.1)$$

$$p_1^t(R_{i,k}) = \frac{1}{P_d(t)} p_1(R_{i,k}) \quad (13.2)$$

$$\rho_{i,k} = \frac{p_1^t(R_{i,k})}{p_0^t(R_{i,k})} \quad (13.3)$$

où p_0 et p_1 sont les densités de probabilité associées aux énergies sous les deux hypothèses (il n'y a que du bruit, ou il y a du bruit et du signal, respectivement), et où $P_{fa}(t)$ est la probabilité de fausse alarme, $P_d(t)$ est la probabilité de détection, pour le seuil de détection t . On peut alors établir la vraisemblance par le théorème des probabilités totales :

$$L(X|s, R) = \prod_{k=1}^K \left\{ \frac{1 - P_d(t)}{u^{m_k}} \mu_{fa,1}(m_k) \prod_{i=1}^{m_k} p_0^t(R_{i,k}) + \frac{P_d(t)}{u^{m_k-1}} \frac{\mu_{fa,2}(m_k - 1)}{m_k} \prod_{i=1}^{m_k} p_0^t(R_{i,k}) \sum_{i=1}^{m_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \rho_{i,k} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_{i,k} - h_k(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \right\} \quad (13.4)$$

avec $s_{i,k}$ la mesure i à l'échantillon k , et $h_k(X)$ le modèle de mesure associé à l'état X . $\mu_{fa,1}$ est la loi binomiale de paramètres $(N, P_{fa}(t))$, et $\mu_{fa,2}$ est la loi binomiale de paramètres $(N - 1, P_{fa}(t))$, en notant N le nombre de cellules de résolution comprises dans la gate.

13.3 Facteur de réduction d'information en fonction du seuil de détection

A l'aide des techniques calculatoires énoncées dans [Kirubarajan *et al.*, 2001, Kirubarajan et Bar-Shalom, 1996, Jauffret, 1993, Jauffret et Bar-Shalom, 1990], il est désormais possible d'exprimer le facteur q_3 dans le modèle du ML-PDA avec conservation des énergies, avec les fausses alarmes réparties suivant une loi binomiale, et en fonction du seuil de détection t :

$$\begin{aligned}
q_3(t) &= \sum_{m=1}^N \frac{2P_d(t)}{\sqrt{2\pi}g^{m-1}} \mu_{fa,2}(m-1) \\
&\times \int_0^g \cdots \int_0^g \int_t^\infty \cdots \int_t^\infty \frac{\left[\prod_{j=1}^m p_0^t(R_j) \right] \rho_1^2 \exp(-\xi_1^2) \xi_1^2}{\frac{(1-P_d(t))\sqrt{2\pi}NP_{fa}(t)}{2gP_d(t)} + \sum_{j=1}^m \rho_j \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_j^2\right)} dR_1 \cdots dR_m d\xi_1 \cdots d\xi_m
\end{aligned} \tag{13.5}$$

Après quelques manipulations, on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
q_3(t) &= \sum_{m=1}^N \frac{2(N-1)!(1-P_{fa}(t))^{N-m}}{\sqrt{2\pi}g^{m-1}(m-1)!(N-m)!} \\
&\times \int_0^g \cdots \int_0^g \int_t^\infty \cdots \int_t^\infty \frac{\left[\prod_{j=1}^m p_0(R_j) \right] \left(\frac{p_1(R_1)}{p_0(R_1)} \right)^2 \exp(-\xi_1^2) \xi_1^2}{\frac{(1-P_d(t))\sqrt{2\pi}N}{2g} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{p_1(R_j)}{p_0(R_j)} \right) \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_j^2\right)} dR_1 \cdots dR_m d\xi_1 \cdots d\xi_m
\end{aligned} \tag{13.6}$$

Les détails calculatoires menant à ces expressions sont donnés dans l'annexe H.

13.4 La supériorité du q_3 sur le q_2

Théorème 1. $q_3(t) \geq q_2(t), \forall t \geq 0,$

Preuve. Cette démonstration s'avère utile pour justifier l'apport de l'énergie du point de vue de la quantité d'information. On montrera donc que l'architecture TAD-AI a un avantage considérable sur l'architecture TAD, sur la quantité d'information au sens de Fisher.

Notons $f_{S,R}(s, r|X)$ la densité de probabilité des mesures s , associées aux énergies r , sachant l'état X . D'après la loi de Bayes, on obtient :

$$f_{S,R}(s, r|X) = f_{R|S}(r|s, X) f_S(s|X) \tag{13.7}$$

Appliquons la fonction logarithme :

$$\log(f_{S,R}(s, r|X)) = \log(f_{R|S}(r|s, X)) + \log(f_S(s|X)) \tag{13.8}$$

Passons au gradient selon l'état X :

$$\nabla_X \log(f_{S,R}(s, r|X)) = \nabla_X \log(f_{R|S}(r|s, X)) + \nabla_X \log(f_S(s|X)) \tag{13.9}$$

Identifions (13.9) à :

$$U = V + W \tag{13.10}$$

Appliquons désormais l'opérateur de covariance à cette dernière équation :

$$\begin{aligned}
\text{COV}(U) &= \text{COV}(V + W) \\
\Leftrightarrow \text{E}(UU^T) &= \text{E}(VV^T) + \text{E}(WW^T) + \text{E}(VW^T) + \text{E}(WV^T)
\end{aligned} \tag{13.11}$$

Intéressons-nous maintenant aux termes croisés $E(VW^T)$ et $E(WV^T)$. Faisons la suite de la démonstration pour $E(VW^T)$, qui s'appliquera sans perte de généralité à $E(WV^T)$:

$$E(VW^T) = E[\nabla_X \log(f_{R|S}(r|s, X)) \nabla_X^T \log(f_S(s|X))] \quad (13.12)$$

Soit :

$$\begin{aligned} E(VW^T) &\triangleq \int \int \nabla_X \log(f_{R|S}(r|s, X)) \nabla_X^T \log(f_S(s|X)) f_{S,R}(s, r|X) ds dr \\ \Leftrightarrow E(VW^T) &= \int \int \frac{\nabla_X f_{R|S}(r|s, X)}{f_{R|S}(r|s, X)} \frac{\nabla_X^T f_S(s|X)}{f_S(s|X)} f_{S,R}(s, r|X) ds dr \end{aligned} \quad (13.13)$$

En utilisant (13.7), on obtient finalement que :

$$E(VW^T) = \int \int \nabla_X f_{R|S}(r|s, X) \nabla_X^T f_S(s|X) ds dr \quad (13.14)$$

Réarrangeons désormais l'intégrale multiple :

$$E(VW^T) = \int \left[\int \nabla_X f_{R|S}(r|s, X) dr \right] \nabla_X^T f_S(s|X) ds \quad (13.15)$$

Sous certaines conditions respectées et applicables dans notre cas, inversons le gradient et l'intégration :

$$E(VW^T) = \int \nabla_X \left[\int f_{R|S}(r|s, X) dr \right] \nabla_X^T f_S(s|X) ds \quad (13.16)$$

Or,

$$\int f_{R|S}(r|s, X) dr \triangleq 1 \quad (13.17)$$

(intégration sur le domaine complet), donc :

$$\nabla_X \left[\int f_{R|S}(r|s, X) dr \right] = \vec{0} \quad (13.18)$$

et par conséquent,

$$E(VW^T) = \mathbf{0}_{d \times d} \quad (13.19)$$

où $\mathbf{0}_{d \times d}$ est la matrice carrée de 0 et de dimension d (nombre de composantes du vecteur d'état). En procédant de la même façon, on montre également que $E(WV^T) = \mathbf{0}_{d \times d}$. Finalement, on a que :

$$E(UU^T) = E(VV^T) + E(WW^T) \quad (13.20)$$

Par définition, on a que :

$$E(UU^T) \triangleq F_{\text{TAD-AI}} \quad (13.21)$$

$$E(WW^T) \triangleq F_{\text{TAD}} \quad (13.22)$$

où $F_{\text{TAD-AI}}$ et F_{TAD} sont les FIM en fonction des architectures considérées. Ces matrices sont par définition symétriques et définies positives, on a donc que :

$$F_{\text{TAD-AI}} \succeq F_{\text{TAD}} \quad (13.23)$$

Or :

$$F_{\text{TAD-AI}} = q_3 F_{\text{clean}} \quad (13.24)$$

$$F_{\text{TAD}} = q_2 F_{\text{clean}} \quad (13.25)$$

on en déduit finalement que $q_3 \geq q_2$. □

La conclusion partielle est la suivante : l'architecture TAD-AI offre un gain d'information au sens de Fisher par rapport à l'architecture TAD. Les performances asymptotiques, toutes choses étant égales par ailleurs, en seront donc améliorées.

13.5 Exemple de q_3 en traitement du signal

Dans cette section, nous réutilisons le problème de traitement de signal décrit dans la section 12.3.1 du chapitre précédent. Nous disposons donc toujours d'un signal sinusoïdal, d'amplitude, phase et fréquence inconnues, et corrompu par un bruit blanc additif centré gaussien. Les hypothèses de détection sont alors strictement identiques à celles décrites dans la section 12.3.1, ainsi que les probabilités de détection et de fausses alarmes.

Il est désormais possible de calculer le facteur q_3 en fonction du seuil de détection. Ni une évaluation analytique, ni le calcul des intégrales par simulations de Monte Carlo¹ n'ont permis d'obtenir une valeur de $q_3(t)$ (dont l'expression est donnée à l'équation (13.6)). Ainsi, nous employons ici une autre méthode dans le but d'évaluer ce facteur.

Rappelons l'expression de la FIM :

$$F = \text{E} \left[\frac{\nabla_X L(X|s, R) \nabla_X^T L(X|s, R)}{L^2(X|s, R)} \right] \quad (13.26)$$

L'idée est alors d'évaluer par simulations de Monte Carlo cette espérance, et non pas les intégrales comme dans le chapitre précédent. Pour cela, nous utilisons un vecteur d'état "virtuel" X , monodimensionnel². L'équation précédente devient alors :

$$F = \text{E} \left[\left(\frac{\partial L(X|s, R)}{\partial X} \right)^2 \frac{1}{L^2(X|s, R)} \right] \quad (13.27)$$

Nous considérons, sans perte de généralité, le cas où $h_k(X) = X$, et $K = 1$. A chaque tirage de Monte Carlo, nous sommes en possession d'une mesure bruitée de X par un bruit blanc centré additif gaussien d'écart-type $\sigma = 1$. Cette valeur est discrétisée dans une case comprise dans la gate. On lui associe ensuite une énergie, suivant une loi du chi-deux à deux degrés de liberté, décentrée de γ (vraie détection). Les autres cases sont ensuite remplies, leur énergie suivant une loi du chi-deux à deux degrés de liberté (fausses alarmes). Il est à noter que nous nous intéressons uniquement à q_3 , et non pas à la FIM totale. Cependant, avec la technique choisie, la FIM en environnement propre est égale à 1. Donc évaluer (13.27) revient à évaluer directement q_3 .

1. En effet, les bornes d'intégration pour les intégrandes R_i sont sur un support semi-infini.

2. Rappelons que le calcul du facteur de réduction d'information est strictement indépendant du vecteur d'état.

Ensuite, pour chaque valeur du seuil, on évalue (13.27) par la moyenne arithmétique des valeurs de $\left(\frac{\partial L(X|s,R)}{\partial X}\right)^2 \frac{1}{L^2(X|s,R)}$ obtenues à chaque simulation de Monte Carlo. Nous procédons avec 10^6 simulations. Le nombre de cellules de résolution sous la gate est fixé empiriquement à $N = 40$. Le seuil optimal est alors déterminé à l'aide d'une méthode de recherche de maximum sur une grille. Ce seuil est ensuite placé sur une courbe COR pour déterminer le point opérationnel de fonctionnement du détecteur.

13.6 Résultats numériques

La figure 13.1 représente le facteur q_3 en fonction du seuil pour différentes valeurs de décentrement données. La courbe représentant le q_3 est en trait plein, et celle représentant le q_2 associé à la même situation est en pointillé. Cette figure confirme premièrement que $q_3 > q_2$ pour une situation donnée et un seuil fixé. Lorsque le seuil augmente, les valeurs de q_3 et q_2 deviennent très similaires : l'influence de l'énergie sur la quantité d'information diminue lorsque le seuil augmente.

Ensuite, cette figure confirme l'existence d'un seuil optimal de détection en architecture TAD-AI. Ce seuil est plus bas que le seuil optimal en architecture TAD. On accepte donc une P_{fa} plus grande qu'en architecture TAD. Cela est confirmé par les courbes COR données dans la figure 13.2.

Il est intéressant de remarquer sur la figure 13.1 que le seuil optimal en architecture TAD-AI n'est pas très loin de 0, c'est-à-dire de l'architecture TBD. Nous pouvons alors comparer les quantités d'information pour chacune des architectures (TBD et TAD-AI au seuil optimal), et en déduire le gain apporté par l'architecture TAD-AI. Les résultats sont affichés dans le tableau 13.1. On remarque que le gain d'information est plus important dans le cas où le décentrement est faible. Cependant, ce gain reste assez faible (inférieur à 10 %).

13.7 Conclusion

Il est temps désormais d'apporter une conclusion à ce chapitre pour faire le point sur cette étude.

Tout d'abord, nous avons démontré que l'architecture TAD-AI offrait un gain d'information au sens de Fisher par rapport à l'architecture TAD. Les performances asymptotiques, toutes choses étant égales par ailleurs, en seront donc améliorées. Par conséquent, $q_3(t) \geq q_2(t), \forall t \geq 0$.

Ensuite, en se plaçant dans une situation classique de traitement de signal, il nous a été possible de mettre en évidence le seuil optimal maximisant le facteur q_3 . Ce seuil semble inférieur à celui qui maximise le q_2 . Ainsi, la probabilité de fausses alarmes sera plus élevée. Mais il est normal de pouvoir accepter une telle probabilité plus grande, puisque nous disposons de l'information de l'énergie associée à chaque détection.

De plus, nous avons montré que, par rapport à l'architecture TBD, le gain d'information apporté par le seuil optimal était assez faible (moins de 10 % dans les scénarios testés). Hormis le gain d'information, quel serait l'intérêt de seuiller les données ? Dans ce cas, toutes les cellules de résolution ne sont pas remplies. Il y a donc potentiellement moins de données à traiter qu'en architecture TBD. Cela permet un gain de temps lors du traitement, ainsi qu'un gain de place lors du stockage de l'information. L'algorithme de trajectographie sera potentiellement plus simple à mettre en œuvre. Cependant, pour connaître la valeur du seuil optimal, il est nécessaire de connaître beaucoup de paramètres du système (lois de probabilités, rapport signal-sur-bruit, ...). De façon opérationnelle, cela peut être compliqué. Or, comme nous l'avons vu, le seuil optimal n'offre que très peu de gain d'information par rapport à

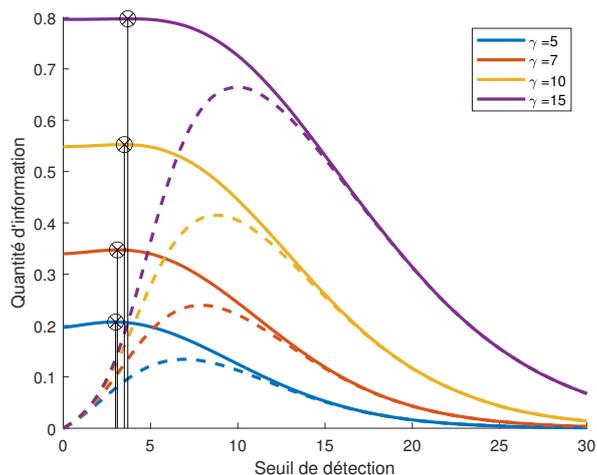


FIGURE 13.1 – q_3 en fonction du seuil pour différentes valeurs de γ (trait plein), comparé au q_2 dans les mêmes situations (pointillés).

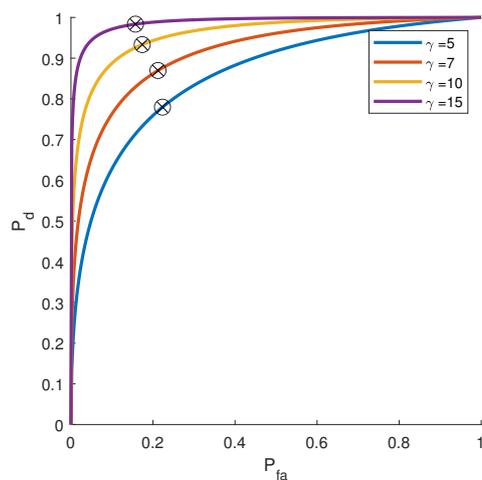


FIGURE 13.2 – Courbes COR pour différentes valeurs de γ .

TABLE 13.1 – Comparaison des quantités d'information en architecture TBD et TAD-AI

Décentrement γ	q_3 optimal	Quantité d'information en $t = 0$	Gain
5	0,207	0,196	5,45 %
7	0,345	0,339	1,53 %
10	0,553	0,549	0,82 %
15	0,798	0,796	0,25 %

l'architecture TBD. Ainsi, il pourrait être intéressant, de façon opérationnelle, de jongler entre l'une ou l'autre des architectures, en fonction du type de données à traiter, ainsi que de la complexité de la chaîne de traitement de signal mise en œuvre dans le système.

Conclusion de la partie

Dans cette partie, nous avons traité et résolu le problème de l'optimisation du seuil de détection. Lors de l'étape de détection au sein d'un système de surveillance, le but était de choisir le seuil qui maximisait la quantité d'information de Fisher. Le choix préalable de ce critère se justifie de cette façon : en maximisant cette quantité d'information, il est alors possible d'envisager des estimateurs possédant de meilleures performances asymptotiques. La variance de l'estimation est réduite sur les composantes du vecteur d'état. Pour résoudre ce problème, nous avons utilisé les caractéristiques du modèle statistique du ML-PDA. Trouver le seuil optimal revenait dans ce modèle à maximiser le facteur q_2 (architecture TAD) ou q_3 (architecture TAD-AI). Ainsi, cette partie était tout naturellement composée de deux chapitres principaux, pour chaque architecture.

Tout d'abord, dans le chapitre 12, nous avons étudié l'optimisation du seuil de détection dans l'architecture TAD. Notre recherche du seuil pouvait nous mener à des probabilités de fausses alarmes grandes (seuil de détection bas), contredisant ainsi l'hypothèse d'un évènement rare, établie préalablement à l'aide de la loi de Poisson dans le modèle du ML-PDA. Il a alors été nécessaire de revenir à une répartition naturelle, selon la loi binomiale, et cette modification s'est bien évidemment répercutée sur le modèle. Ainsi, il était possible d'exprimer q_2 en fonction du seuil de détection, pour toutes les valeurs possibles du seuil. A travers un exemple simple de traitement du signal, il a été possible de mettre en évidence ce seuil optimal dans différents scénarios. Nous avons aussi mis en évidence l'importance de considérer la loi binomiale, dans le cas particulier où l'on peut s'intéresser à des probabilités de fausses alarmes élevées.

Le chapitre 13 est la continuité du travail mené au chapitre précédent, mais en se plaçant cette fois dans l'architecture TAD-AI. Cette fois-ci, il s'agissait d'exprimer le facteur q_3 en fonction du seuil de détection, et de rechercher le seuil de détection pour lequel ce facteur est maximal. La considération de la loi binomiale effectuée au chapitre précédent tient toujours. Dans ce chapitre, un théorème a été énoncé : nous avons démontré la supériorité de l'architecture TAD-AI sur l'architecture TAD du point de vue de la quantité d'information. L'énergie associée à chaque détection apporte donc un gain d'information. Ensuite, à l'aide de simulations numériques, nous avons été capables de mettre en évidence le seuil optimal en architecture TAD-AI. Ce seuil est inférieur à celui trouvé en architecture TAD, augmentant donc le nombre de fausses alarmes. A travers ces simulations, nous avons aussi montré que l'architecture TBD n'était pas optimale au sens de l'information de Fisher. De plus, nous

avons comparé les quantités d'informations données par le seuil optimal et par l'architecture TBD (seuil de détection placé au plus bas). Nous avons aussi remarqué que le seuil optimal offrait un gain d'information finalement assez faible par rapport à l'information obtenue en architecture TBD. Établir le seuil optimal peut être une étape difficile, du fait du nombre d'hypothèses à connaître. Ainsi, l'architecture TBD pourrait avoir son utilité de façon opérationnelle, sachant que la quantité d'information ne sera pas si pénalisée, comparativement à celle donnée par le seuil optimal de manière théorique. Cependant, l'utilisation de l'architecture TAD-AI permet un gain en terme de traitement qui pourrait s'avérer non négligeable (gain de temps, gain de stockage, algorithmes plus simples à mettre en œuvre...).

Ainsi se clôt cette troisième partie.

Quatrième partie

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale

A travers cette thèse, nous avons étudié plusieurs aspects liés à la trajectographie passive en présence de fausses alarmes. Il est temps d'apporter une conclusion générale aux travaux fournis dans ce manuscrit.

La première partie de ce manuscrit était consacrée à une introduction progressive du sujet à traiter. Nous avons tout d'abord introduit la chaîne de traitement de l'information en sonar passif, en présentant les différentes opérations effectuées depuis l'acquisition des mesures par le capteur, jusqu'à la fonction trajectographie. Cela nous a permis d'avoir une vision globale du sonar passif. Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence l'existence de différentes architectures de traitement des données (TBD, TAD, TAD-AI, environnement propre), dans lesquelles la fonction trajectographie pouvait être effectuée. Le deuxième chapitre était consacré à une introduction à la trajectographie. Ce chapitre nous a permis d'expliquer ce concept, ainsi que la mise en œuvre d'un estimateur des paramètres cinématiques de la source à travers différentes étapes : étude de l'observabilité, étude des performances asymptotiques, choix d'un estimateur, confrontation des résultats de l'estimateur aux performances asymptotiques. Du fait de la simplicité de traitement à l'intérieur d'un hydrophone, nous avons considéré que les mesures à traiter étaient encombrées de fausses alarmes. Dans le but de réaliser la trajectographie dans cet environnement encombré, le troisième chapitre se consacre à la présentation du modèle statistique du PDA. C'est ce modèle qui permet de modéliser les fausses alarmes et la probabilité de détection de la cible non certaine, et, par extension, sert de fil conducteur pour la totalité de cette thèse. Après un exposé des motivations menant à ce modèle, nous avons présenté les hypothèses statistiques du PDA. Les aspects numériques liés à l'estimation dans le modèle du PDA ont ensuite été explicités, ainsi que la FIM et le test d'acceptation de l'estimé. A l'issue de ce chapitre, il nous était donc possible de modéliser les jeux de mesures obtenus dans les architectures TAD et TAD-AI.

La deuxième partie de ce manuscrit était dédiée à l'établissement d'estimateurs dans le but de réaliser la trajectographie d'une source acoustique unique en MRU à l'aide d'un réseau de capteurs, en considérant des mesures entachées de fausses alarmes. Le premier réseau mis au point, composé exclusivement de bouées hydrophones flottant à la surface de l'eau, ne permettait pas l'estimation de la profondeur de la source avec une précision suffisante. C'est pourquoi nous avons mis au point le réseau mixte, composé de bouées hydrophones et d'antennes linéaires verticales. Ce réseau, montrant

de très bonnes performances et des estimateurs efficaces, a alors été utilisé pour la suite de cette partie. Nous avons donc étendu l'étude à une cible effectuant une manœuvre au cours du scénario, où les résultats se sont avérés assez concluants. Puis nous avons utilisé une extension du modèle du PDA pour modéliser avec plus de réalisme les pistes arrivant sur les antennes, supprimant ainsi une hypothèse contraignante effectuée jusqu'alors (distinction des trajets direct et réfléchi de l'onde acoustique émise par la source arrivant sur les antennes). Le dernier chapitre de cette partie rajoute une considération relativement peu étudiée dans la littérature sur la trajectographie : la considération du temps de propagation (temps que met l'onde émise par la source pour parvenir aux capteurs). Là encore, les résultats se sont montrés fort concluants. Nous avons aussi pu conclure quant à l'utilité de la considération des temps de propagation dans la trajectographie, à travers différentes configurations. Si le temps de propagation est considéré dans les mesures, mais négligé dans l'algorithme d'estimation, l'estimateur devient biaisé. Un moyen de réduire ce biais est d'augmenter le nombre de capteurs. Certaines configurations du réseau rendent l'estimateur très biaisé, voire non fonctionnel.

Dans la troisième et dernière partie de ce manuscrit, nous nous sommes intéressés au placement d'un seuil de détection optimal, qui maximiserait la quantité d'information au sens de Fisher. Conformément à ce qui a été annoncé dans la première partie, le modèle du PDA est largement utilisé pour résoudre ce problème. L'étude s'est décomposée en deux temps. Tout d'abord, nous avons résolu ce problème dans l'architecture TAD. Le seuil maximisant l'information a été mis en évidence dans plusieurs scénarios. Une procédure numérique permettant de trouver ce maximum a été détaillée. Dans le chapitre suivant, l'étude a été étendue à l'architecture TAD-AI. Un théorème a été démontré, prouvant la supériorité de l'architecture TAD-AI sur l'architecture TAD. Ensuite, à l'aide de simulations numériques, il a été possible de mettre en évidence le seuil optimal de détection en architecture TAD-AI, dans différents scénarios. Il s'est avéré, à travers ces simulations, que l'architecture TBD n'était pas optimale au sens de Fisher. L'architecture TAD-AI permet donc un gain de temps lors du traitement, de stockage des données, ainsi qu'une simplification des algorithmes à mettre en œuvre par la suite. L'intérêt de l'architecture TBD a aussi été questionné, puisque la quantité d'information apportée par le seuil optimal s'avère très proche de celle donnée dans l'architecture TBD. Il pourrait alors être intéressant, de façon opérationnelle, d'étudier plus en détail cette dernière architecture.

Perspectives

A l'issue de cette thèse, plusieurs perspectives semblent envisageables dans le but de poursuivre et de compléter l'étude menée jusqu'à présent.

Tout d'abord, il serait intéressant d'étendre les travaux à une situation d'acquisition des mesures en temps réel. Cela peut être fait à l'aide du *probabilistic data association filtering* (PDAF) [Bar-Shalom et Fortmann, 1988, Bar-Shalom et Tse, 1975], variante temps réel du PDA. Dans ce contexte temps réel, les performances asymptotiques de l'estimateur sont modifiées [Tichavsky *et al.*, 1998, Hernandez *et al.*, 2006]. Pour traiter les cibles manœuvrantes, il serait intéressant de comparer les résultats obtenus dans cette thèse aux résultats que l'on obtiendrait avec la méthode IMM en temps réel [Blom et Bar-Shalom, 1988, Watson et Blair, 1993, Mazor *et al.*, 1998, Musicki et Suvorova, 2008]. Dans cette situation, il serait possible de traiter des manœuvres qui seraient bien plus réalistes, comme par exemple une trajectoire en arc de cercle, avec ou sans changement du module du vecteur vitesse à l'issue de la manœuvre.

On peut aussi imaginer utiliser les méthodes plus récentes de filtrage particulière [Del Moral, 1997, Arulampalam *et al.*, 2002], dans le but de tester l'utilité et la robustesse de cette méthode dans

une situation multi-capteurs et en présence de fausses alarmes. Il pourrait être aussi intéressant de traiter des situations où l'on est en présence de plusieurs sources progressant dans l'environnement. Cela pourrait alors se traiter avec le modèle du JPDA [Blanding *et al.*, 2007a, Blanding *et al.*, 2007b]. Une extension du travail fourni dans cette thèse au PMHT est envisageable [Streit et Luginbuhl, 1994, Streit et Luginbuhl, 1995].

D'un point de vue de la modélisation de notre problème de trajectographie, plusieurs éléments seraient à améliorer pour une étude future, à la fois d'un point de vue physique et d'un point de vue traitement du signal. Tout d'abord, nous avons négligé tout au long de la thèse la corrélation entre les mesures de TDOA sur les hydrophones [Hahn et Tretter, 1973, Hassab et Boucher, 1981, Kaune *et al.*, 2011]. Il serait alors intéressant de prendre en compte cette corrélation, et de voir l'impact que cela aurait sur les estimateurs mis au point. Cette étude permettrait d'introduire plus de réalisme sur les simulations. Le résultat serait alors plus proche de ce qui pourrait être trouvé en situation opérationnelle. L'impact d'un bruit d'état modélisant l'incertitude sur la commande de la source acoustique serait intéressant à étudier, dans le but d'ajouter encore un peu de réalisme aux simulations [Tichavsky *et al.*, 1998, Van Trees et Bell, 2007]. De plus, nous avons considéré dans ce manuscrit que la célérité du son était constante. En réalité, la vitesse du son dans l'eau dépend de la température, de la salinité et de la profondeur, entre autres paramètres [Urlick, 1975, Abraham, 2019]. On obtient donc un profil bathycélérimétrique, donnant la célérité du milieu en fonction de la profondeur. Il serait alors intéressant de pouvoir tenir compte de ce profil lors de la réalisation de la fonction trajectographie.

Toujours dans le but d'améliorer le réalisme des simulations, il serait intéressant d'étudier la situation où les capteurs ne sont plus immobiles durant l'intégralité du scénario. En effet, du fait des courants marins, les capteurs sont mobiles et peuvent dériver sur des distances assez importantes. Bien entendu, cela aura un impact sur les performances de l'estimateur. Quantifier un tel impact serait très intéressant et important pour se placer dans une situation bien plus réaliste. La difficulté réside alors dans la modélisation du mouvement des capteurs au cours du temps [Hammond, 2005], ainsi que dans l'incertitude sur leurs positions [Guo *et al.*, 2016].

A la suite de la troisième partie de ce manuscrit, il pourrait être intéressant d'étudier d'autres procédures numériques dans le but de déterminer le seuil optimal de détection. En effet, les méthodes basées sur la recherche dans une grille peuvent parfois s'avérer assez longues à exécuter. A l'issue de la conclusion établie dans le dernier chapitre de cette partie, il semble intéressant de mettre au point un modèle statistique du PDA dans l'architecture TBD. De plus, l'étude complète de cette partie pourrait être étendue à d'autres lois de probabilités utilisées en traitement sonar.

Annexes

 Expression de la vraisemblance du ML-PDA en architecture TAD

Nous allons dans cette partie établir l'expression de la vraisemblance en présence de fausses alarmes.

A l'échantillon $k = 1, \dots, K$, nous disposons de m_k détections (retenues après seuillage dans le détecteur mis en amont de notre fonction trajectographie). Elles sont désignées par $s_{1,k}, s_{2,k}, \dots, s_{m_k,k}$. Dans le but de simplifier l'écriture, nous abandonnerons dans un premier temps l'indexation par k , compte-tenu du fait que la description du comportement statistique des mesures disponibles est la même quel que soit k .

L'ensemble des mesures (ou détections) à l'échantillon k , est composée des réalisations de deux types de variables aléatoires :

- les variables aléatoire S_n dont les s_n sont réalisations. Elles sont considérées à réalisations continues.
- la variable M à réalisations discrètes, le nombre $m \geq 1$ de mesures disponibles à l'échantillon k étant une réalisation de M .

Ainsi, nous considérons à chaque échantillon k avoir affaire au vecteur :

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_m & m \end{pmatrix}^T \quad (\text{A.1})$$

réalisation de :

$$W = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \cdots & S_M & M \end{pmatrix}^T \quad (\text{A.2})$$

On pose de plus :

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \cdots & S_M \end{pmatrix}^T \quad (\text{A.3})$$

Donc :

$$W = \begin{pmatrix} S^T & M \end{pmatrix}^T \quad (\text{A.4})$$

Nous allons maintenant établir la loi de W , c'est-à-dire $p(W = \binom{s}{m})$

Ce qui suit est basé sur le théorème des probabilités totales. Il est donc nécessaire de préciser les événements exclusifs et exhaustifs à chaque étape.

- Soient les évènements :

— D = “il y a une bonne détection dans W ”

— \bar{D} = “il n’y a que des fausses alarmes dans W ”

Par la loi des probabilités totales, on a :

$$p(W = (s^T, m)^T) = p(W = (s^T, m)^T | \bar{D}) P(\bar{D}) + p(W = (s^T, m)^T | D) P(D) \quad (\text{A.5})$$

On pose $P_d = P(D)$

- Quel que soit l’évènement $E = D$ ou $E = \bar{D}$, la formule de Bayes nous donne :

$$p(W = (s^T, m)^T | E) = p(S = s | M = m, E) p(M = m | E) \quad (\text{A.6})$$

Détaillons maintenant chaque élément, étant entendu que toutes les mesures (fausses alarmes ou bonne détection) sont réparties sur un ensemble \mathbb{U} de mesure u .

- On a donc :

$$P(M = m | \bar{D}) = \mu_{fa}(m) \quad (\text{A.7})$$

où μ_{fa} est la loi de Poisson de paramètre λu prise en m .

- De plus :

$$P(M = m | D) = \mu_{fa}(m - 1) \quad (\text{A.8})$$

car on a au plus une détection, donc $m - 1$ fausses alarmes,

$$p(S = s | M = m, \bar{D}) = \frac{1}{u^m} \quad (\text{A.9})$$

Cette dernière équation traduit le fait que les fausses alarmes sont distribuées uniformément sur \mathbb{U} et sont indépendantes.

- L’expression de $p(S = s | M = m, D)$ nécessite d’introduire un ensemble d’éléments exhaustifs et exclusifs qui sont d_n : “la mesure s_n est la bonne détection”. On en déduit que :

$$p(S = s | M = m, D) = \sum_{n=1}^m p(S = s | D, M = m, d_n) p(d_n | D, M = m) \quad (\text{A.10})$$

avec :

$$p(d_n | D, M = m) = \frac{1}{m} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} p(S = s | D, M = m, d_n) &= \prod_{l=1}^m p(S_l = s_l | D, M = m, d_n) \\ &= \frac{1}{u^{m-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_n - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Les équations (A.11) et (A.12) traduisent le fait que les événements d_n sont équiprobables, que les fausses alarmes et la bonne détection sont indépendantes les unes des autres et que la vraie détection est modélisée par $s_n = h(X) + \varepsilon$, où ε est un bruit additif gaussien centré de variance σ^2 .

Nous sommes maintenant en mesure de donner l’expression de la vraisemblance de X lorsque l’on

dispose de $W = (s^T, m)^T$:

$$\begin{aligned} L(X|W = (s^T, m)^T) &= p(W = (s^T, m)^T) \\ &= \frac{1 - P_d}{u^m} \mu_{fa}(m) + \frac{P_d}{m} \mu_{fa}(m-1) \frac{1}{u^{m-1}} \sum_{n=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_n - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Réintroduisons maintenant l'indice temporel k :

$$\begin{aligned} L(X|W_k = (s^T, m_k)^T) &= \frac{1 - P_d}{u^{m_k}} \mu_{fa}(m_k) \\ &+ \frac{P_d}{m_k} \mu_{fa}(m_k - 1) \frac{1}{u^{m_k-1}} \sum_{n=1}^{m_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_{n,k} - h_k(X)}{\sigma_k} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

La vraisemblance totale est alors :

$$L(X|W) = \prod_{k=1}^K L(X|W_k) \quad (\text{A.15})$$

ce qui donne encore :

$$\log [L(X|W)] = \sum_{k=1}^K \log [L(X|W_k)] \quad (\text{A.16})$$

Notre estimateur \hat{X} sera donc celui qui maximise cette vraisemblance. Or, cela revient à maximiser le logarithme de la vraisemblance car la fonction logarithme est strictement monotone. On a donc, après factorisation :

$$\hat{X} = \arg \max_X \sum_{k=1}^K \log \left\{ \frac{1 - P_d}{u} + \frac{\mu_{fa}(m_k - 1)}{\mu_{fa}(m_k)} \frac{P_d}{m_k} \sum_{n=1}^{m_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_{n,k} - h_k(X)}{\sigma_k} \right)^2 \right] \right\} \quad (\text{A.17})$$

Désormais, nous pouvons, à l'aide des propriétés de la loi de Poisson, simplifier notre expression précédente. On rappelle que la loi de Poisson est de paramètre λu , donc :

$$\mu_{fa}(r) = \frac{(\lambda u)^r}{r!} \exp(-\lambda u) \quad (\text{A.18})$$

Donc :

$$\frac{\mu_{fa}(m_k - 1)}{\mu_{fa}(m_k)} = \frac{(\lambda u)^{m_k-1}}{(m_k - 1)!} \exp(-\lambda u) \frac{m_k!}{(\lambda u)^{m_k}} \exp(\lambda u) = \frac{m_k}{\lambda u} \quad (\text{A.19})$$

Ainsi, en réinjectant dans (A.17), on obtient l'expression du critère à maximiser :

$$\hat{X} = \arg \max_X \sum_{k=1}^K \log \left\{ 1 - P_d + \frac{P_d}{\lambda} \sum_{n=1}^{m_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_{n,k} - h_k(X)}{\sigma_k} \right)^2 \right] \right\} \quad (\text{A.20})$$

Ainsi, nous avons démontré l'expression de la vraisemblance en présence de fausses alarmes, ainsi que le critère à maximiser. Cette démonstration se basait sur un cas général d'équation de mesure

mono-dimensionnelle et gaussienne.

Calcul de la matrice d'information de Fisher en architecture TAD

Dans cette annexe, nous allons détailler le calcul menant à la matrice d'information de Fisher en présence de fausses alarmes. Ces calculs nous permettront de déterminer l'expression d'un coefficient de perte, appelé q_2 . Nous nous baserons dans le cas d'une mesure mono-dimensionnelle. Les calculs sont dérivés de [Jauffret, 1993], dans lequel l'expression est envisagée pour une dimension quelconque.

On rappelle tout d'abord l'expression de la matrice de Fisher dans le cas général :

$$F = \sum_{k=1}^K \mathbf{E} \left[\nabla_X \log(L(X|s_k)) \nabla_X^T \log(L(X|s_k)) \right] \quad (\text{B.1})$$

On rappelle de plus l'expression de la vraisemblance à un instant k donné, dans un cas général

$$L(X|s_k) = \frac{1 - P_d}{u^{m_k}} \mu_{fa}(m_k) + \frac{P_d}{u^{m_k-1}} \frac{\mu_{fa}(m_k - 1)}{m_k} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_{i,k} - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (\text{B.2})$$

Le calcul de la matrice de Fisher en tenant compte de toutes les fausses alarmes sur l'ensemble de l'espace de scrutation s'avère très compliqué. Pour cela, on se limite à un espace précis, appelé "gate". Cet espace se situe autour de la valeur vraie $h(X)$. D'après les propriétés de la loi normale, on sait que l'aire comprise dans un espace de dix fois l'écart-type autour de la valeur moyenne¹ est très proche de 1. On considère donc ici que cet intervalle nous donne toutes les possibilités dues au bruit de mesure. De plus, on suppose que les fausses alarmes sont réparties uniformément sur l'espace de mesure et que leur nombre suit une loi de Poisson. On montre que dans ce sous-espace restreint qu'est la gate, il en est de même. Seul le paramètre de la loi de Poisson change et devient λv , v étant le nouveau volume considéré. Notre nouvel intervalle d'étude est donc $[h(X) - g\sigma; h(X) + g\sigma]$, avec $g = 5$. La mesure de cet espace est donc $v = 2g\sigma$. C'est donc sur cet espace restreint que nous allons effectuer nos calculs. On ne considère donc que les détections dans cet intervalle précis. Nous pouvons donc exprimer la vraisemblance sur cet intervalle, en développant la loi de Poisson, et par factorisation² :

1. Cinq fois l'écart-type de chaque côté.
 2. Pour plus de clarté, on supprime l'indexation par k .

$$L(X|s) = \frac{(\lambda v)^m \exp(-\lambda v)}{m! v^m} \Phi(X|s) = \frac{\mu_{fa}(m)}{v^m} \Phi(X|s) \quad (\text{B.3})$$

avec :

$$\Phi(X|s) = 1 - P_d + \frac{P_d}{\lambda} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_i - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (\text{B.4})$$

On passe au logarithme et on pose $c = \log \left(\frac{\mu_{fa}(m)}{v^m} \right)$

$$\log(L(X|s)) = c + \log \left[1 - P_d + \frac{P_d}{\lambda} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_i - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \right] \quad (\text{B.5})$$

On applique l'opérateur de dérivation :

$$\nabla_X \log(L(X|s)) = \frac{1}{\Phi(X|s)} \frac{P_d}{\lambda} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_i - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \frac{s_i - h(X)}{\sigma^2} \nabla_X h(X) \quad (\text{B.6})$$

Ainsi, en utilisant (B.1), on obtient que :

$$F_k = \text{E} (\alpha^2) \nabla_X h(X) \nabla_X^T h(X) \quad (\text{B.7})$$

où :

$$\alpha = \frac{1}{\Phi(X|s)} \frac{P_d}{\lambda} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_i - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \frac{s_i - h(X)}{\sigma^2} \quad (\text{B.8})$$

On reconnaît l'expression de la matrice de Fisher sans clutter à un instant k :

$$F_{k,0} = \frac{1}{\sigma^2} \nabla_X h(X) \nabla_X^T h(X) \quad (\text{B.9})$$

Donc :

$$F_k = \sigma^2 \text{E} (\alpha^2) F_{k,0} \quad (\text{B.10})$$

Il nous reste désormais à calculer $\text{E} (\sigma^2 \alpha^2)$. Il s'agit de l'espérance d'une fonction d'une variable aléatoire. Nous l'exprimons donc de la façon suivante :

$$\text{E} (\sigma^2 \alpha^2) = \int \sigma^2 \alpha^2 L(X|s) ds \quad (\text{B.11})$$

L'intégrale reste encore à définir. En effet, on est ici en présence d'une mixture de loi aléatoires, certaines discrètes et d'autres continues. Nous développons donc cette intégrale avec cette connaissance :

$$\begin{aligned}
E(\sigma^2 \alpha^2) &= \sigma^2 \sum_{m=1}^{\infty} \int_{b_1}^{b_2} \cdots \int_{b_1}^{b_2} \left\{ \left(\frac{P_d}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{\Phi(X|s)^2} \right. \\
&\quad \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^2 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_i - h(X)}{\sigma} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{s_j - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \frac{s_i - h(X)}{\sigma^2} \frac{s_j - h(X)}{\sigma^2} \\
&\quad \cdot \left. \frac{\mu_{fa}(m)}{v^m} \Phi(X|s) ds_1 \cdots ds_m \right\}
\end{aligned} \tag{B.12}$$

avec :

$$b_1 = h(X) - g\sigma \tag{B.13}$$

$$b_2 = h(X) + g\sigma \tag{B.14}$$

Quelques explications s'imposent sur cette équation. L'apparition d'une somme discrète s'explique par la présence d'une loi de probabilité discrète, la loi de Poisson. Le choix de l'espace de sommation de $m = 1$ à ∞ s'explique aussi. En effet, nous devons prendre en compte tous les cas possibles de détection dans le volume restreint. C'est pourquoi nous devons étudier le cas d'une, deux, ou d'une infinité de détections dans cet espace. Il est à noter que l'on ne commence pas à 0, car aucune détection signifie qu'il n'y a pas d'information. Du fait de cette somme, nous serons obligés d'étudier la convergence de cette série dans la partie suivante. Nous avons donc ensuite m intégrales multiples, correspondant à l'indice m de la somme discrète. Le choix des bornes d'intégration est cohérent avec ce que l'on a expliqué sur le choix d'un espace restreint. Nous pouvons commencer à simplifier l'expression de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
E(\sigma^2 \alpha^2) &= \sigma^2 \left(\frac{P_d}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{2\pi\sigma^2} \frac{1}{\sigma^2} \\
&\quad \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \int_{b_1}^{b_2} \cdots \int_{b_1}^{b_2} \frac{1}{\Phi(X|s)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_i - h(X)}{\sigma} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{s_j - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \\
&\quad \cdot \frac{s_i - h(X)}{\sigma} \frac{s_j - h(X)}{\sigma} \frac{\mu_{fa}(m)}{v^m} ds_1 \cdots ds_m
\end{aligned} \tag{B.15}$$

On fait sortir $\frac{1}{\sigma^2}$ de l'intérieur de l'intégrale. La constante multiplicative hors de l'intégrale est donc égale à $\left(\frac{P_d}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{2\pi\sigma^2}$.

Désormais, nous allons effectuer un changement de variable. Nous allons poser :

$$\xi_i = \frac{s_i - h(X)}{\sigma} \tag{B.16}$$

Ce changement de variable correspond à une normalisation. On change par la même occasion les bornes d'intégration de $-g$ à $+g$. Les intégrandes deviennent :

$$d\xi_i = \frac{1}{\sigma} ds_i \tag{B.17}$$

Ainsi, on obtient l'expression suivante, en développant aussi $\Phi(X|s)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sigma^2 \alpha^2) &= \left(\frac{P_d}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{2\pi\sigma^2} \\
&\cdot \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-g}^g \cdots \int_{-g}^g \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_i^2 - \frac{1}{2}\xi_j^2\right) \xi_i \xi_j}{1 - P_d + \frac{P_d}{\lambda} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_i^2\right)} \\
&\cdot \frac{\mu_{fa}(m)}{v^m} \sigma^m d\xi_1 \cdots d\xi_m
\end{aligned} \tag{B.18}$$

On rappelle que $v = 2g\sigma$, donc des simplifications peuvent s'effectuer. De plus, pour des raisons d'aisance, nous posons :

$$a = 1 - P_d \tag{B.19}$$

$$b = \frac{P_d}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \tag{B.20}$$

Donc on obtient :

$$\mathbb{E}(\sigma^2 \alpha^2) = b^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2g)^m} \int_{-g}^g \cdots \int_{-g}^g \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_i^2 - \frac{1}{2}\xi_j^2\right) \xi_i \xi_j}{a + b \sum_{i=1}^m \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_i^2\right)} \mu_{fa}(m) d\xi_1 \cdots d\xi_m \tag{B.21}$$

Désormais, nous allons utiliser les propriétés de la fonction à intégrer dans le but de simplifier l'expression. Tout d'abord, on remarque que notre fonction est impaire pour un indice i fixé. D'après la symétrie du domaine d'intégration, on en déduit que seuls les termes non croisés ($i \neq j$) sont non nuls. De plus, on en profite pour factoriser par b . Donc :

$$\mathbb{E}(\sigma^2 \alpha^2) = b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2g)^m} \int_{-g}^g \cdots \int_{-g}^g \frac{\sum_{i=1}^m \exp(-\xi_i^2) \xi_i^2}{\frac{a}{b} + \sum_{i=1}^m \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_i^2\right)} \mu_{fa}(m) d\xi_1 \cdots d\xi_m \tag{B.22}$$

On remarque désormais que notre fonction est paire. On peut donc diviser par deux le domaine d'intégration, tout en multipliant par deux l'aire de chaque intégrale :

$$\mathbb{E}(\sigma^2 \alpha^2) = b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{g^m} \int_0^g \cdots \int_0^g \frac{\sum_{i=1}^m \exp(-\xi_i^2) \xi_i^2}{\frac{a}{b} + \sum_{i=1}^m \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_i^2\right)} \mu_{fa}(m) d\xi_1 \cdots d\xi_m \tag{B.23}$$

Nous remarquons désormais que l'intégrale de l'expression $\sum_{i=1}^m \exp(-\xi_i^2) \xi_i^2$ est la même quel que soit l'indice considéré. On peut donc considérer uniquement un seul indice, par exemple le premier, et faire apparaître la multiplicité de la somme :

$$\mathbb{E}(\sigma^2 \alpha^2) = b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{g^m} \int_0^g \cdots \int_0^g \frac{\exp(-\xi_1^2) \xi_1^2}{\frac{a}{b} + \sum_{i=1}^m \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_i^2\right)} \mu_{fa}(m) d\xi_1 \cdots d\xi_m \tag{B.24}$$

Intéressons nous désormais aux constantes multiplicatives :

$$\frac{bm}{g^m} \mu_{fa}(m) = \frac{P_d}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{m}{g^m} \frac{(\lambda v)^m}{m!} \exp(-\lambda v) \tag{B.25}$$

En factorisant par λv , on a :

$$\begin{aligned} \frac{bm}{g^m} \mu_{fa}(m) &= \frac{P_d}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{m\lambda v}{g^m} \frac{(\lambda v)^{m-1}}{m!} \exp(-\lambda v) \\ &= \frac{P_d}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{\lambda v}{g^m} \mu_{fa}(m-1) \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

En simplifiant par λ et en rappelant que $v = 2g\sigma$, on obtient finalement :

$$\frac{bm}{g^m} \mu_{fa}(m) = \frac{2P_d}{g^{m-1}\sqrt{2\pi}} \mu_{fa}(m-1) \quad (\text{B.27})$$

Ainsi, on trouve l'expression du q_2 , le facteur de réduction d'information :

$$q_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2P_d}{g^{m-1}\sqrt{2\pi}} \mu_{fa}(m-1) \int_0^g \cdots \int_0^g \frac{\exp(-\xi_1^2) \xi_1^2}{\frac{a}{b} + \sum_{i=1}^m \exp(-\frac{1}{2}\xi_i^2)} d\xi_1 \cdots d\xi_m \quad (\text{B.28})$$

Ce facteur ne dépend que de λv , de P_d et de g . Nous pouvons en déduire l'expression de la matrice de Fisher en présence de fausses alarmes :

$$F = q_2(\lambda v, P_d, g) \sum_{k=1}^N F_{k,0} \quad (\text{B.29})$$

Ce coefficient représente la perte d'information due à la fois aux fausses alarmes et aussi du fait de la probabilité de détection non certaine.

Calcul des moments du critère en architecture TAD

Dans cette annexe, nous présentons les calculs menant aux valeurs μ_0 , σ_0 . Ces valeurs nous sont utiles dans la construction du test d'acceptation de la piste. Ces calculs sont dérivés de [Jauffret, 1993], dans lequel ils sont généralisés à une dimension de mesure quelconque.

On rappelle que l'on se place dans un espace restreint, la "gate", au lieu de considérer l'ensemble des détections sur l'espace de scrutation. On se place à l'instant k , et on retire l'indice pour plus de clarté. On rappelle dans ce cas que le critère est :

$$C(X|s) = \log \left\{ 1 - P_d + \frac{P_d}{\lambda} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_i - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \right\} \quad (\text{C.1})$$

et la vraisemblance est :

$$L(X|s) = \frac{1 - P_d}{v^m} \mu_{fa}(m) + \frac{P_d}{v^{m-1}} \frac{\mu_{fa}(m-1)}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_i - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (\text{C.2})$$

On cherche $\mu_0^{(n)}$, le moment d'ordre n . L'expression générale est donc :

$$\mu_0^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} \int_V \cdots \int_V C^n(X|s) L(X|s) ds_1 \cdots ds_m \quad (\text{C.3})$$

Dans cette écriture, V représente la gate de volume v .

Le cas $m = 0$ est problématique. Nous devons le traiter à part, c'est ce que nous effectuons premièrement. En effet, si $m = 0$, la loi de Poisson en $m - 1$ n'est pas définie. La loi de Poisson en m vaut $\exp(-\lambda v)$. La somme d'exponentielle est aussi nulle. Avec toutes ces constatations, on obtient donc l'expression du premier terme de $\mu_0^{(n)}$, noté $\mu_0^{(n)}(0)$:

$$\mu_0^{(n)}(0) = (1 - P_d) \exp(-\lambda v) \log^n(1 - P_d) \quad (\text{C.4})$$

Désormais, nous nous intéressons au reste de la somme, l'indexation commençant donc à 1. La somme discrète et les intégrales arrivent pour les mêmes raisons que celles exposées dans l'annexe précédente. On développe l'expression :

$$\begin{aligned} \mu_0^{(n)} = \mu_0^{(n)}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_V \cdots \int_V \log^n \left(a + b \sum_{i=1}^m \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_i - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \right) \\ \left[a' + b' \sum_{i=1}^m \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_i - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \right] ds_1 \cdots ds_m \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

avec :

$$a = 1 - P_d \quad (\text{C.6})$$

$$b = \frac{P_d}{\lambda\sqrt{2\pi}\sigma} \quad (\text{C.7})$$

$$a' = \frac{(1 - P_d)\mu_{fa}(m)}{v^m} \quad (\text{C.8})$$

$$b' = \frac{P_d\mu_{fa}(m-1)}{v^{m-1}m\sqrt{2\pi}\sigma} \quad (\text{C.9})$$

La démarche adoptée dans la simplification du calcul sera très similaire à celle évoquée dans l'annexe précédente. On effectue le changement de variable suivant :

$$\xi_i = \frac{s_i - h(X)}{\sigma} \quad (\text{C.10})$$

Donc :

$$d\xi_i = \frac{1}{\sigma} ds_i \quad (\text{C.11})$$

et les bornes des intégrales varient désormais de $-g$ à g . On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mu_0^{(n)} = \mu_0^{(n)}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \sigma^m \int_{-g}^g \cdots \int_{-g}^g \log^n \left(a + b \sum_{i=1}^m \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_i^2 \right] \right) \\ \left[a' + b' \sum_{i=1}^m \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_i^2 \right] \right] d\xi_1 \cdots d\xi_m \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Désormais, on exploite la parité de notre fonction à intégrer :

$$\begin{aligned} \mu_0^{(n)} = \mu_0^{(n)}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} (2\sigma)^m \int_0^g \cdots \int_0^g \log^n \left(a + b \sum_{i=1}^m \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_i^2 \right] \right) \\ \left[a' + b' \sum_{i=1}^m \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_i^2 \right] \right] d\xi_1 \cdots d\xi_m \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Nous remarquons désormais que l'intégrale de l'expression $\sum_{i=1}^m \exp(-\frac{1}{2}\xi_i^2)$ est la même quel que soit l'indice considéré. On peut donc considérer uniquement un seul indice, par exemple le premier, et faire apparaître la multiplicité de la somme :

$$\begin{aligned} \mu_0^{(n)} = \mu_0^{(n)}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} (2\sigma)^m \int_0^g \cdots \int_0^g \log^n \left(a + b \sum_{i=1}^m \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_i^2 \right] \right) \\ \left[a' + mb' \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_1^2 \right] \right] d\xi_1 \cdots d\xi_m \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Nous remplaçons par les vraies valeurs :

$$\begin{aligned} \mu_0^{(n)} = \mu_0^{(n)}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} (2\sigma)^m \int_0^g \cdots \int_0^g \log^n \left(1 - P_d + \frac{P_d}{\lambda\sqrt{2\pi\sigma}} \sum_{i=1}^m \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_i^2 \right] \right) \\ \left[\frac{(1 - P_d)\mu_{fa}(m)}{v^m} + \frac{mP_d\mu_{fa}(m-1)}{v^{m-1}m\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_1^2 \right] \right] d\xi_1 \cdots d\xi_m \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Nous factorisons notre expression par $\frac{1}{m}$:

$$\begin{aligned} \mu_0^{(n)} = \mu_0^{(n)}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (2\sigma)^m \int_0^g \cdots \int_0^g \log^n \left(1 - P_d + \frac{P_d}{\lambda\sqrt{2\pi\sigma}} \sum_{i=1}^m \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_i^2 \right] \right) \\ \left[\frac{(1 - P_d)\mu_{fa}(m)m}{v^m} + \frac{mP_d\mu_{fa}(m-1)}{v^{m-1}\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_1^2 \right] \right] d\xi_1 \cdots d\xi_m \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

On factorise désormais par $\frac{1}{v^m}$, et on rappelle que $v = 2g\sigma$:

$$\begin{aligned} \mu_0^{(n)} = \mu_0^{(n)}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mg^m} \int_0^g \cdots \int_0^g \log^n \left(1 - P_d + \frac{P_d}{\lambda\sqrt{2\pi\sigma}} \sum_{i=1}^m \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_i^2 \right] \right) \\ \left[(1 - P_d)\mu_{fa}(m)m + \frac{mP_d\mu_{fa}(m-1)v}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_1^2 \right] \right] d\xi_1 \cdots d\xi_m \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

En factorisant on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_0^{(n)} = \mu_0^{(n)}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{vP_d}{\sqrt{2\pi\sigma}mg^m} \mu_{fa}(m-1) \int_0^g \cdots \int_0^g \log^n \left(1 - P_d + \frac{P_d}{\lambda\sqrt{2\pi\sigma}} \sum_{i=1}^m \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_i^2 \right] \right) \\ \left[\frac{(1 - P_d)\mu_{fa}(m)m\sqrt{2\pi\sigma}}{P_d v \mu_{fa}(m-1)} + m \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_1^2 \right] \right] d\xi_1 \cdots d\xi_m \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Le but est d'isoler d'une certaine manière $m \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_1^2 \right]$. Développons maintenant les constantes multiplicatives :

$$\frac{vP_d}{\sqrt{2\pi\sigma}mg^m} \mu_{fa}(m-1) = \frac{2P_d}{\sqrt{2\pi}mg^{-1}} \mu_{fa}(m-1) \quad (\text{C.19})$$

et :

$$\frac{\mu_{fa}(m)m\sqrt{2\pi\sigma}}{v\mu_{fa}(m-1)} = \sqrt{2\pi} \frac{(\lambda v)^m}{m!} \exp(-\lambda v) \frac{\sigma}{v} \exp(\lambda v) \frac{(m-1)!}{(\lambda v)^{m-1}} \quad (\text{C.20})$$

soit :

$$\frac{\mu_{fa}(m)m\sqrt{2\pi}\sigma}{v\mu_{fa}(m-1)} = \sqrt{2\pi}\lambda\sigma \quad (\text{C.21})$$

Désormais, en utilisant l'expression de $\mu_0^{(n)}(0)$, on obtient alors l'expression finale de $\mu_0^{(n)}$:

$$\begin{aligned} \mu_0^{(n)} &= (1 - P_d) \exp(-\lambda v) \log^n(1 - P_d) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2P_d\mu_{fa}(m-1)}{\sqrt{2\pi}mg^{m-1}} \int_0^g \cdots \int_0^g \log^n \left(1 - P_d + \frac{P_d}{\lambda\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{i=1}^m \exp \left[-\frac{1}{2}\xi_i^2 \right] \right) \\ &\quad \left[\frac{1 - P_d}{P_d} \sqrt{2\pi}\lambda\sigma + m \exp \left(-\frac{1}{2}\xi_1^2 \right) \right] d\xi_1 \cdots d\xi_m \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Calcul de la matrice d'information de Fisher en architecture TAD-AI

Dans cette annexe, nous présentons le détail des calculs menant au coefficient q_3 , le coefficient de perte d'information dans le cas où les mesures sont couplées avec leur propre énergie. La démonstration sera fortement basée sur celle de l'annexe B.

Tout d'abord, nous partons de la vraisemblance autour de la gate de volume $v = 2g\sigma$, à un instant donné (nous abandonnons pour un souci de clarté l'indice temporel k) :

$$L(X|s) = \frac{(1 - P_d)\mu_{fa}(m)}{v^m} \left(\prod_{j=1}^m p_0^\tau(R_j) \right) + \frac{P_d\mu_{fa}(m-1)}{mv^{m-1}} \left(\prod_{j=1}^m p_0^\tau(R_j) \right) \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \rho_j \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_j - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (D.1)$$

où μ_{fa} est la loi de Poisson de paramètre λv , ρ_j le rapport de vraisemblance normalisé de l'amplitude R_j associé à la mesure s_j , et $h(X)$ et le modèle d'état.

Rappelons de plus que :

$$F = E \left[(\nabla_X \log(L(X|s))) (\nabla_X \log(L(X|s)))^T \right] \quad (D.2)$$

Or, $\nabla_X \log(L(X|s)) = \frac{\nabla_X L(X|s)}{L(X|s)}$, donc :

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} \int_v \cdots \int_v \int_\tau \cdots \int_\tau \frac{\nabla_X L(X|s) \nabla_X^T L(X|s)}{L(X)} dR_1 \cdots dR_m ds_1 \cdots ds_m \quad (D.3)$$

En posant :

$$\alpha = \frac{(1 - P_d)\mu_{fa}(m)}{v^m} \quad \beta = \frac{P_d\mu_{fa}(m-1)}{mv^{m-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \quad (D.4)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
F &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2} \nabla_X h(X) \nabla_X^T h(X) \int_v \cdots \int_v \int_{\tau}^{\infty} \cdots \int_{\tau}^{\infty} \\
&\frac{\beta^2 \left(\prod_{j=1}^m p_0^{\tau}(R_j) \right) \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \rho_i \rho_j \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_j - h(X)}{\sigma} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{s_i - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \frac{s_j - h(X)}{\sigma} \frac{s_i - h(X)}{\sigma}}{\alpha + \beta \sum_{j=1}^m \rho_j \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_j - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right]} \\
&.dR_1 \cdots dR_m ds_1 \cdots ds_m
\end{aligned} \tag{D.5}$$

On reconnaît donc l'expression de la matrice d'information de Fisher sans clutter, qui est multipliée par un facteur scalaire. Appelons ce facteur q_3 , et posons le changement de variable suivant :

$$\xi_i = \frac{s_i - h(X)}{\sigma} \tag{D.6}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
q_3 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sigma^m \int_{-g}^g \cdots \int_{-g}^g \int_{\tau}^{\infty} \cdots \int_{\tau}^{\infty} \\
&\frac{\beta^2 \prod_{j=1}^m p_0^{\tau}(R_j) \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \rho_i \rho_j \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_i^2 - \frac{1}{2} \xi_j^2 \right] \xi_i \xi_j}{\alpha + \beta \sum_{j=1}^m \rho_j \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_j^2 \right]} dR_1 \cdots dR_m d\xi_1 \cdots d\xi_m
\end{aligned} \tag{D.7}$$

Les termes croisés disparaissent de l'intégrale :

$$q_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma^m \int_{-g}^g \cdots \int_{-g}^g \int_{\tau}^{\infty} \cdots \int_{\tau}^{\infty} \frac{\beta^2 \prod_{j=1}^m p_0^{\tau}(R_j) \sum_{i=1}^m \rho_i^2 \exp \left[-\xi_i^2 \right] \xi_i^2}{\alpha + \beta \sum_{j=1}^m \rho_j \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_j^2 \right]} dR_1 \cdots dR_m d\xi_1 \cdots d\xi_m \tag{D.8}$$

La fonction est désormais paire selon ξ_i . On peut donc réduire le domaine d'intégration :

$$q_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma^m 2^m \int_0^g \cdots \int_0^g \int_{\tau}^{\infty} \cdots \int_{\tau}^{\infty} \frac{\beta \prod_{j=1}^m p_0^{\tau}(R_j) \sum_{i=1}^m \rho_i^2 \exp \left[-\xi_i^2 \right] \xi_i^2}{\frac{\alpha}{\beta} + \sum_{j=1}^m \rho_j \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_j^2 \right]} dR_1 \cdots dR_m d\xi_1 \cdots d\xi_m \tag{D.9}$$

L'intégrale est la même quel que soit l'indice considéré, donc :

$$q_3 = \sum_{m=1}^{\infty} m \sigma^m 2^m \int_0^g \cdots \int_0^g \int_{\tau}^{\infty} \cdots \int_{\tau}^{\infty} \frac{\beta \prod_{j=1}^m p_0^{\tau}(R_j) \rho_1^2 \exp \left[-\xi_1^2 \right] \xi_1^2}{\frac{\alpha}{\beta} + \sum_{j=1}^m \rho_j \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_j^2 \right]} dR_1 \cdots dR_m d\xi_1 \cdots d\xi_m \tag{D.10}$$

De plus, on a que :

$$\begin{aligned}
m2^m \sigma^m \beta &= \frac{2P_d}{\sqrt{2\pi}g^{m-1}} \mu_{fa}(m-1) \\
\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{(1-P_d)\sqrt{2\pi}\lambda v}{2gP_d}
\end{aligned} \tag{D.11}$$

Donc, on obtient finalement l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
q_3 &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^g \cdots \int_0^g \int_{\tau}^{\infty} \cdots \int_{\tau}^{\infty} \frac{2P_d}{\sqrt{2\pi}g^{m-1}} \mu_{fa}(m-1) \\
&\times \frac{\prod_{j=1}^m \rho_0^{\tau}(R_j) \rho_1^2 \exp(-\xi_1^2) \xi_1^2}{\frac{(1-P_d)\sqrt{2\pi}\lambda v}{2gP_d} + \sum_{j=1}^m \rho_j \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_j^2\right)} dR_1 \cdots dR_m d\xi_1 \cdots d\xi_m
\end{aligned} \tag{D.12}$$

Calcul des moments du critère en architecture TAD-AI

Dans cette annexe, nous présentons les détails des calculs menant aux valeurs μ_0 et σ_0 dans le cas où l'on dispose des énergies associées aux détections. Ces valeurs sont utiles lors de la réalisation du test d'acceptation de l'estimé. La démonstration sera très fortement basée sur l'annexe C.

On rappelle tout d'abord l'expression de la vraisemblance et du critère, à un instant donné :

$$L(X|s) = \frac{(1 - P_d)\mu_{fa}(m)}{u^m} \left(\prod_{j=1}^m p_0^\tau(R_j) \right) + \frac{P_d\mu_{fa}(m-1)}{mu^{m-1}} \left(\prod_{j=1}^m p_0^\tau(R_j) \right) \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \rho_j \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_j - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (\text{E.1})$$

$$C(X|s) = \log \left[1 - P_d + \frac{P_d}{\lambda} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \rho_j \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{s_j - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right) \right] \quad (\text{E.2})$$

De la même façon que dans l'annexe C, on cherche à calculer :

$$\mu_0^{(n)} = \mu_0^{(n)}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_v \cdots \int_v \int_\tau^\infty \cdots \int_\tau^\infty C^n(X)L(X)dR_1 \cdots dR_m ds_1 \cdots ds_m \quad (\text{E.3})$$

où :

$$\mu_0^{(n)}(0) = (1 - P_d) \exp(-\lambda v) \log^n(1 - P_d) \quad (\text{E.4})$$

Intéressons nous maintenant à la somme d'intégrales multiples. Après le changement de variable $\xi_i = \frac{s_i - h(X)}{\sigma}$, on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\mu_0^{(n)} &= \mu_0^{(n)}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-g}^g \cdots \int_{-g}^g \int_{\tau}^{\infty} \cdots \int_{\tau}^{\infty} \sigma^m \frac{\mu_{fa}(m)}{v^m} \log^n \left[1 - P_d + \frac{P_d}{\lambda} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \rho_j \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_j^2\right) \right] \\
&\quad \prod_{j=1}^m p_0^{\tau}(R_j) \left[1 - P_d + \frac{P_d}{\lambda} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \rho_j \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_j^2\right) \right] dR_1 \cdots dR_m d\xi_1 \cdots d\xi_m
\end{aligned} \tag{E.5}$$

On exploite la parité de la fonction selon ξ_i :

$$\begin{aligned}
\mu_0^{(n)} &= \mu_0^{(n)}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^g \cdots \int_0^g \int_{\tau}^{\infty} \cdots \int_{\tau}^{\infty} 2^m \sigma^m \frac{\mu_{fa}(m)}{v^m} \\
&\quad \times \log^n \left[1 - P_d + \frac{P_d}{\lambda} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \rho_j \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_j^2\right) \right] \\
&\quad \times \prod_{j=1}^m p_0^{\tau}(R_j) \left[1 - P_d + \frac{P_d}{\lambda} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \rho_j \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_j^2\right) \right] dR_1 \cdots dR_m d\xi_1 \cdots d\xi_m
\end{aligned} \tag{E.6}$$

On remarque que l'intégrale est la même quel que soit l'indice considéré. On obtient donc après quelques modifications :

$$\begin{aligned}
\mu_0^{(n)} &= \mu_0^{(n)}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^g \cdots \int_0^g \int_{\tau}^{\infty} \cdots \int_{\tau}^{\infty} 2^m \sigma^m \frac{\mu_{fa}(m)}{v^m} \frac{P_d}{\lambda \sqrt{2\pi}\sigma} \\
&\quad \times \log^n \left[1 - P_d + \frac{P_d}{\lambda} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \rho_j \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_j^2\right) \right] \\
&\quad \times \prod_{j=1}^m p_0^{\tau}(R_j) \left[\frac{(1 - P_d)\sqrt{2\pi}\lambda\sigma}{P_d} + m\rho_1 \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_1^2\right) \right] dR_1 \cdots dR_m d\xi_1 \cdots d\xi_m
\end{aligned} \tag{E.7}$$

Ce coefficient s'utilise donc de la même façon que dans le cas où les énergies ne sont pas considérées, et permet de construire le test d'acceptation de l'estimé.

Calcul de la matrice d'information de Fisher en tenant compte du temps de propagation

Dans cette annexe, nous développons les calculs menant aux gradients élémentaires des mesures, lorsque l'on prend en compte les temps de propagation. On sépare l'étude en deux, selon le type de capteurs considéré.

F.1 Mesures des hydrophones

Les hydrophones mesurant des TDOA, il est nécessaire de connaître le gradient élémentaire de la distance. La distance entre le capteur et la source est :

$$r_i(t_k - \tau_{i,k}) = \sqrt{(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S)^2 + (y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)^2 + z^2} \quad (\text{F.1})$$

On appelle pour la suite $e_j, j = 1 : 5$ la composante j du vecteur d'état X . Pour des questions d'aisance de lecture, nous supprimons la dépendance en X dans l'écriture des mesures. On a que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(r_i(t_k - \tau_{i,k}))}{\partial e_j} &= \frac{1}{r_i(t_k - \tau_{i,k})} \left[(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S) \frac{\partial}{\partial e_j} (x(t_k - \tau_{i,k})) \right. \\ &\quad \left. + (y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S) \frac{\partial}{\partial e_j} (y(t_k - \tau_{i,k})) + z \frac{\partial}{\partial e_j} z \right] \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Détaillons les dérivées qui viennent d'apparaître, indépendantes de l'équation de mesure :

$$\frac{\partial}{\partial x} x(t_k - \tau_{i,k}) = 1 - \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} \tau_{i,k} \quad (\text{F.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} x(t_k - \tau_{i,k}) = -\dot{x} \frac{\partial}{\partial y} \tau_{i,k} \quad (\text{F.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} x(t_k - \tau_{i,k}) = -\dot{x} \frac{\partial}{\partial z} \tau_{i,k} \quad (\text{F.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} x(t_k - \tau_{i,k}) = t_k - \tau_{i,k} - \dot{x} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \tau_{i,k} \quad (\text{F.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{y}} x(t_k - \tau_{i,k}) = -\dot{x} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \tau_{i,k} \quad (\text{F.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} y(t_k - \tau_{i,k}) = -\dot{y} \frac{\partial}{\partial x} \tau_{i,k} \quad (\text{F.8})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} y(t_k - \tau_{i,k}) = 1 - \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} \tau_{i,k} \quad (\text{F.9})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} y(t_k - \tau_{i,k}) = -\dot{y} \frac{\partial}{\partial z} \tau_{i,k} \quad (\text{F.10})$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} y(t_k - \tau_{i,k}) = -\dot{y} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \tau_{i,k} \quad (\text{F.11})$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{y}} y(t_k - \tau_{i,k}) = t_k - \tau_{i,k} - \dot{y} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \tau_{i,k} \quad (\text{F.12})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} z = 0 \quad (\text{F.13})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} z = 0 \quad (\text{F.14})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} z = 1 \quad (\text{F.15})$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} z = 0 \quad (\text{F.16})$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{y}} z = 0 \quad (\text{F.17})$$

Exprimons maintenant les dérivées de $\tau_{i,k}$ pour chaque composante. On utilise pour cela que :

$$\begin{aligned} c^2 \tau_{i,k}^2 &= r_i^2(t_k - \tau_{i,k}) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial e_j} [c^2 \tau_{i,k}^2] &= \frac{\partial}{\partial e_j} [r_i^2(t_k - \tau_{i,k})] \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

Or :

$$\frac{\partial}{\partial e_j} [c^2 \tau_{i,k}^2] = 2c^2 \tau_{i,k} \frac{\partial}{\partial e_j} \tau_{i,k} \quad (\text{F.19})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial e_j} [r_i^2(t_k - \tau_{i,k})] &= 2 \left[(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S) \frac{\partial}{\partial e_j} (x(t_k - \tau_{i,k})) \right. \\ &\quad \left. + (y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S) \frac{\partial}{\partial e_j} (y(t_k - \tau_{i,k})) + z \frac{\partial}{\partial e_j} z \right] \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

Donc :

$$\begin{aligned} c^2 \tau_{i,k} \frac{\partial}{\partial e_j} \tau_{i,k} &= \left[(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S) \frac{\partial}{\partial e_j} (x(t_k - \tau_{i,k})) \right. \\ &\quad \left. + (y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S) \frac{\partial}{\partial e_j} (y(t_k - \tau_{i,k})) + z \frac{\partial}{\partial e_j} z \right] \end{aligned} \quad (\text{F.21})$$

De plus, on utilise que :

$$\begin{aligned}\tau_{i,k} &= \frac{r_i(t_k - \tau_{i,k})}{c} \\ \Leftrightarrow c^2 \tau_{i,k} &= cr_i(t_k - \tau_{i,k})\end{aligned}\tag{F.22}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{i,k}}{\partial e_j} &= \frac{1}{cr_i(t_k - \tau_{i,k})} \left[(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S) \frac{\partial}{\partial e_j} (x(t_k - \tau_{i,k})) \right. \\ &\quad \left. + (y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S) \frac{\partial}{\partial e_j} (y(t_k - \tau_{i,k})) + z \frac{\partial}{\partial e_j} z \right]\end{aligned}\tag{F.23}$$

Nous utilisons désormais les résultats obtenus dans les équations (F.3) à (F.17) en les réinjectant dans (F.23) dans le but d'isoler $\frac{\partial}{\partial e_j} \tau_{i,k}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \tau_{i,k} = \frac{x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S}{cr_i(t_k - \tau_{i,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)}\tag{F.24}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \tau_{i,k} = \frac{y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S}{cr_i(t_k - \tau_{i,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)}\tag{F.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \tau_{i,k} = \frac{z}{cr_i(t_k - \tau_{i,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)}\tag{F.26}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \tau_{i,k} = (t_k - \tau_{i,k}) \frac{\partial}{\partial x} \tau_{i,k}\tag{F.27}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{y}} \tau_{i,k} = (t_k - \tau_{i,k}) \frac{\partial}{\partial y} \tau_{i,k}\tag{F.28}$$

On réinjecte ensuite les équations (F.24) à (F.28) dans (F.3) à (F.17) :

$$\frac{\partial}{\partial x} x(t_k - \tau_{i,k}) = \frac{cr_i(t_k - \tau_{i,k}) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)}{cr_i(t_k - \tau_{i,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)}\tag{F.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} x(t_k - \tau_{i,k}) = \frac{-\dot{x}y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S}{cr_i(t_k - \tau_{i,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)}\tag{F.30}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} x(t_k - \tau_{i,k}) = \frac{-\dot{x}z}{cr_i(t_k - \tau_{i,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)}\tag{F.31}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} x(t_k - \tau_{i,k}) = (t_k - \tau_{i,k}) \frac{\partial}{\partial x} x(t_k - \tau_{i,k})\tag{F.32}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{y}} x(t_k - \tau_{i,k}) = (t_k - \tau_{i,k}) \frac{\partial}{\partial y} x(t_k - \tau_{i,k})\tag{F.33}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} y(t_k - \tau_{i,k}) = \frac{-\dot{y}x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S}{cr_i(t_k - \tau_{i,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)}\tag{F.34}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} y(t_k - \tau_{i,k}) = \frac{cr_i(t_k - \tau_{i,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S)}{cr_i(t_k - \tau_{i,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)}\tag{F.35}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} y(t_k - \tau_{i,k}) = \frac{-\dot{y}z}{cr_i(t_k - \tau_{i,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)}\tag{F.36}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} y(t_k - \tau_{i,k}) = (t_k - \tau_{i,k}) \frac{\partial}{\partial x} y(t_k - \tau_{i,k}) \quad (\text{F.37})$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{y}} y(t_k - \tau_{i,k}) = (t_k - \tau_{i,k}) \frac{\partial}{\partial y} y(t_k - \tau_{i,k}) \quad (\text{F.38})$$

Il est à noter que les équations (F.13) à (F.17) ne dépendent pas de $\tau_{i,k}$, les expressions restent donc inchangées.

Il nous est désormais possible d'exprimer le gradient de la distance en tenant compte du temps de propagation, pour chacune des composantes du vecteur d'état, en réinjectant les dernières équations dans (F.2) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} r_i(t_k - \tau_{i,k}) &= \frac{1}{r_i(t_k - \tau_{i,k}) [cr_i(t_k - \tau_{i,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)]} \\ &\cdot [(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S)(cr_i(t_k - \tau_{i,k}) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)) \\ &- \dot{y}(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S)(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)] \\ &= \frac{c(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S)}{cr_i(t_k - \tau_{i,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)} \end{aligned} \quad (\text{F.39})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} r_i(t_k - \tau_{i,k}) &= \frac{1}{r_i(t_k - \tau_{i,k}) [cr_i(t_k - \tau_{i,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)]} \\ &\cdot [(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)(cr_i(t_k - \tau_{i,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S)) \\ &- \dot{x}(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S)(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)] \\ &= \frac{c(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)}{cr_i(t_k - \tau_{i,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)} \end{aligned} \quad (\text{F.40})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} r_i(t_k - \tau_{i,k}) &= \frac{1}{r_i(t_k - \tau_{i,k}) [cr_i(t_k - \tau_{i,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)]} \\ &\cdot [-\dot{x}z(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S) - \dot{y}z(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)] + \frac{z}{r_i(t_k - \tau_{i,k})} \\ &= \frac{cz}{cr_i(t_k - \tau_{i,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_i^S) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_i^S)} \end{aligned} \quad (\text{F.41})$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} r_i(t_k - \tau_{i,k}) = (t_k - \tau_{i,k}) \frac{\partial}{\partial x} r_i(t_k - \tau_{i,k}) \quad (\text{F.42})$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{y}} r_i(t_k - \tau_{i,k}) = (t_k - \tau_{i,k}) \frac{\partial}{\partial y} r_i(t_k - \tau_{i,k}) \quad (\text{F.43})$$

Ainsi, nous avons les gradients élémentaires nécessaires au calcul de la matrice d'information de Fisher des mesures issues des hydrophones.

F.2 Mesures des antennes

Dans cette section, nous abordons désormais les mesures issues des antennes linéaires verticales, toujours dans le but de calculer le gradient élémentaire pour ensuite pouvoir exprimer la matrice de Fisher. Nous distinguons les deux types de trajets : direct et réfléchi-fond.

F.2.1 Trajet direct

La mesure est la suivante :

$$\cos(\phi_n^D(t_k - \tau_{n,k})) = \frac{z - z_n^A}{\sqrt{(x(t_k - \tau_{n,k}) - x_n^A)^2 + (y(t_k - \tau_{n,k}) - y_n^A)^2 + (z - z_n^A)^2}} \quad (\text{F.44})$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial e_j} \cos(\phi_n^D(t_k - \tau_{n,k})) = \frac{\frac{\partial}{\partial e_j}(z) r_n(t_k - \tau_{n,k}) - (z - z_n^A) \frac{\partial}{\partial e_j} r_n(t_k - \tau_{n,k})}{r_n^2(t_k - \tau_{n,k})} \quad (\text{F.45})$$

avec :

$$r_n(t_k - \tau_{n,k}) = \sqrt{(x(t_k - \tau_{n,k}) - x_n^A)^2 + (y(t_k - \tau_{n,k}) - y_n^A)^2 + (z - z_n^A)^2} \quad (\text{F.46})$$

On obtient les dérivées suivantes pour chaque composante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \cos(\phi_n^D(t_k - \tau_{n,k})) = \frac{-(z - z_n^A) \frac{\partial}{\partial x}(r_n(t_k - \tau_{n,k}))}{r_n^2(t_k - \tau_{n,k})} \quad (\text{F.47})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \cos(\phi_n^D(t_k - \tau_{n,k})) = \frac{-(z - z_n^A) \frac{\partial}{\partial y}(r_n(t_k - \tau_{n,k}))}{r_n^2(t_k - \tau_{n,k})} \quad (\text{F.48})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \cos(\phi_n^D(t_k - \tau_{n,k})) = \frac{r_n(t_k - \tau_{n,k}) - (z - z_n^A) \frac{\partial}{\partial z}(r_n(t_k - \tau_{n,k}))}{r_n^2(t_k - \tau_{n,k})} \quad (\text{F.49})$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \cos(\phi_n^D(t_k - \tau_{n,k})) = (t_k - \tau_{n,k}) \frac{\partial}{\partial x} \cos(\phi_n^D(t_k - \tau_{n,k})) \quad (\text{F.50})$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{y}} \cos(\phi_n^D(t_k - \tau_{n,k})) = (t_k - \tau_{n,k}) \frac{\partial}{\partial y} \cos(\phi_n^D(t_k - \tau_{n,k})) \quad (\text{F.51})$$

En appliquant la même méthode que la section précédente, on en déduit les dérivées suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} r_n(t_k - \tau_{i,k}) &= \frac{1}{r_n(t_k - \tau_{i,k}) [c r_n(t_k - \tau_{n,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{n,k}) - x_n^A) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{n,k}) - y_n^A)]} \\ &\cdot [(x(t_k - \tau_{n,k}) - x_n^A) (c r_n(t_k - \tau_{n,k}) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{n,k}) - y_n^A)) \\ &- \dot{y}(x(t_k - \tau_{n,k}) - x_n^A)(y(t_k - \tau_{n,k}) - y_n^A)] \\ &= \frac{c(x(t_k - \tau_{i,k}) - x_n^A)}{c r_n(t_k - \tau_{n,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{n,k}) - x_n^A) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{n,k}) - y_n^A)} \end{aligned} \quad (\text{F.52})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} r_n(t_k - \tau_{n,k}) &= \frac{1}{r_n(t_k - \tau_{n,k}) [c r_n(t_k - \tau_{n,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{n,k}) - x_n^A) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{n,k}) - y_n^A)]} \\ &\cdot [(y(t_k - \tau_{n,k}) - y_n^A) (c r_n(t_k - \tau_{n,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{n,k}) - x_n^A)) \\ &- \dot{x}(x(t_k - \tau_{n,k}) - x_n^A)(y(t_k - \tau_{n,k}) - y_n^A)] \\ &= \frac{c(y(t_k - \tau_{i,k}) - y_n^A)}{c r_n(t_k - \tau_{n,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{n,k}) - x_n^A) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{n,k}) - y_n^A)} \end{aligned} \quad (\text{F.53})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} r_n(t_k - \tau_{n,k}) &= \frac{1}{r_n(t_k - \tau_{n,k}) [cr_n(t_k - \tau_{n,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{n,k}) - x_n^A) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{n,k}) - y_n^A)]} \\
&\cdot [-\dot{x}(z - z_n^A)(x(t_k - \tau_{n,k}) - x_n^A) - \dot{y}(z - z_n^A)(y(t_k - \tau_{n,k}) - y_n^A)] + \frac{z - z_n^A}{r_n(t_k - \tau_{n,k})} \\
&= \frac{cz}{cr_n(t_k - \tau_{n,k}) + \dot{x}(x(t_k - \tau_{n,k}) - x_n^A) + \dot{y}(y(t_k - \tau_{n,k}) - y_n^A)}
\end{aligned} \tag{F.54}$$

F.2.2 Trajet réfléchi-fond

La mesure est la suivante :

$$\cos(\phi_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B)) = \frac{2z_B - (z + z_n^A)}{\sqrt{(x(t_k - \tau_{n,k}^B) - x_n^A)^2 + (y(t_k - \tau_{n,k}^B) - y_n^A)^2 + (z + z_n^A - 2z_B)^2}} \tag{F.55}$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial e_j} \cos(\phi_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B)) = \frac{\frac{\partial}{\partial e_j}(z) r_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B) - (2z_B - (z + z_n^A)) \frac{\partial}{\partial e_j} r_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B)}{(r_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B))^2} \tag{F.56}$$

avec :

$$r_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B) = \sqrt{(x(t_k - \tau_{n,k}^B) - x_n^A)^2 + (y(t_k - \tau_{n,k}^B) - y_n^A)^2 + (z + z_n^A - 2z_B)^2} \tag{F.57}$$

On obtient les dérivées suivantes pour chaque composante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \cos(\phi_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B)) = \frac{-(2z_B - (z + z_n^A)) \frac{\partial}{\partial x} (r_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B))}{(r_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B))^2} \tag{F.58}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \cos(\phi_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B)) = \frac{-(2z_B - (z + z_n^A)) \frac{\partial}{\partial y} (r_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B))}{(r_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B))^2} \tag{F.59}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \cos(\phi_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B)) = \frac{-r_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B) - (2z_B - (z + z_n^A)) \frac{\partial}{\partial z} (r_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B))}{(r_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B))^2} \tag{F.60}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \cos(\phi_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B)) = (t_k - \tau_{n,k}^B) \frac{\partial}{\partial x} \cos(\phi_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B)) \tag{F.61}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{y}} \cos(\phi_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B)) = (t_k - \tau_{n,k}^B) \frac{\partial}{\partial y} \cos(\phi_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B)) \tag{F.62}$$

Les expressions de $\frac{\partial}{\partial x} r_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B)$ et $\frac{\partial}{\partial y} r_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B)$ sont identiques à celles données en (F.52) et (F.53) respectivement, en remplaçant cependant $\tau_{n,k}$ par $\tau_{n,k}^B$ et $r_n(t_k - \tau_{n,k})$ par $r_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B)$. L'expression de $\frac{\partial}{\partial z} r_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B)$ diffère un peu :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} r_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B) &= \frac{1}{r_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B) \left[cr_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B) + \dot{x} \left(x(t_k - \tau_{n,k}^B) - x_n^A \right) + \dot{y} \left(y(t_k - \tau_{n,k}^B) - y_n^A \right) \right]} \\
&\cdot \left[-\dot{x}(z + z_n^A - 2z_B)(x(t_k - \tau_{n,k}^B) - x_n^A) - \dot{y}(z + z_n^A - 2z_B)(y(t_k - \tau_{n,k}^B) - y_n^A) \right] \\
&+ \frac{z + z_n^A - 2z_B}{r_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B)} \\
&= \frac{c(z + z_n^A - 2z_B)}{cr_n^B(t_k - \tau_{n,k}^B) + \dot{x} \left(x(t_k - \tau_{n,k}^B) - x_n^A \right) + \dot{y} \left(y(t_k - \tau_{n,k}^B) - y_n^A \right)}
\end{aligned} \tag{F.63}$$

Calcul de la matrice d'information de Fisher avec la loi binomiale en architecture
TAD

Dans cette annexe, nous développons le calcul menant au q_2 utilisant la loi binomiale. On rappelle qu'on se restreint autour de la gate pour effectuer ce calcul. On rappelle l'expression de la vraisemblance dans ce cas, en omettant l'indice k pour plus de clarté :

$$L(X|s) = \frac{1 - P_d(t)}{v^m} \mu_{fa,1}(m) + \frac{P_d(t)}{v^{m-1}} \frac{\mu_{fa,2}(m-1)}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_i - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (\text{G.1})$$

avec $\mu_{fa,1}$ qui suit une loi binomiale de paramètres $(N, P_{fa}(t))$, et $\mu_{fa,2}$ qui suit une loi binomiale de paramètres $(N-1, P_{fa}(t))$, N étant le nombre de cellules de résolution disponibles sous la gate.

On rappelle de plus que :

$$\begin{aligned} F &= \text{E} \left[\nabla_X (\log(L(X|s))) \nabla_X^T (\log(L(X|s))) \right] = \text{E} \left[\frac{\nabla_X(L(X|s)) \nabla_X^T(L(X|s))}{L^2(X|s)} \right] \\ &= \sum_{m=0}^N \int_{v^m} \frac{\nabla_X(L(X|s)) \nabla_X^T(L(X|s))}{L(X|s)} ds_1 \cdots ds_m \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

Attardons-nous un instant sur les bornes de la somme discrète, notamment aux cas particuliers extrêmes : $m = 0$ et $m = N$. Nous avons montré dans le chapitre 12 que dans ces deux cas extrêmes, aucune information n'était apporté quant à l'état X . Ainsi, la somme discrète se réduit alors de 1 à $N-1$.

Ainsi, on obtient l'égalité suivante, en repartant de (G.2) :

$$\begin{aligned}
q_2(t) &= \sum_{m=1}^{N-1} \int_{v^m} \left[\frac{P_d(t) \mu_{fa,2}(m-1)}{m v^{m-1}} \right]^2 \frac{1}{2\pi\sigma^2} \\
&\times \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{s_i - h(X)}{\sigma} \frac{s_j - h(X)}{\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\left(\frac{s_i - h(X)}{\sigma} \right)^2 + \left(\frac{s_j - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right) \right]}{\frac{1 - P_d(t)}{v^m} \mu_{fa,1}(m) + \frac{P_d(t) \mu_{fa,2}(m-1)}{v^{m-1} m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_i - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right]} ds_1 \cdots ds_m
\end{aligned} \tag{G.3}$$

On pose le changement de variable suivant :

$$\xi_i = \frac{s_i - h(X)}{\sigma} \tag{G.4}$$

La démonstration est ensuite extrêmement similaire à celle proposée dans l'annexe B. Pour ξ_j fixé, $q_2(t)$ est une fonction impaire selon ξ_i . Donc, les termes croisés disparaissent du fait de la symétrie du domaine d'intégration. On remarque ensuite que la fonction à intégrer est paire selon ξ_i , donc, en exploitant la symétrie du domaine d'intégration, des simplifications s'opèrent. L'intégrale est ensuite identique quel que soit l'indice i considéré. On obtient donc :

$$q_2(t) = \sum_{m=1}^{N-1} 2^m \sigma^m \int_0^g \cdots \int_0^g \frac{\left[\frac{P_d(t) \mu_{fa,2}(m-1)}{m v^{m-1}} \right]^2 \frac{1}{2\pi\sigma^2} m \xi_1^2 \exp(-\xi_1^2)}{\frac{1 - P_d(t)}{v^m} \mu_{fa,1}(m) + \frac{P_d(t) \mu_{fa,2}(m-1)}{v^{m-1} m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_i^2 \right]} d\xi_1 \cdots d\xi_m \tag{G.5}$$

Désormais, nous pouvons effectuer quelques simplifications, tout d'abord en divisant le numérateur et le dénominateur par $\frac{P_d(t) \mu_{fa,2}(m-1)}{m v^{m-1} \sqrt{2\pi}\sigma}$, et ensuite en notant que :

$$\frac{2^m \sigma^m}{v^{m-1} \sigma} = \frac{2}{g^{m-1}} \tag{G.6}$$

$$\frac{\mu_{fa,1}(m)}{\mu_{fa,2}(m-1)} = \frac{N}{m} P_{fa}(t) \tag{G.7}$$

Donc :

$$\frac{(1 - P_d(t)) v^{m-1} m \sqrt{2\pi}\sigma}{v^m P_d(t)} \frac{\mu_{fa,1}(m)}{\mu_{fa,2}(m-1)} = \frac{(1 - P_d(t)) \sqrt{2\pi} N P_{fa}(t)}{2g P_d(t)} \tag{G.8}$$

Finalement, on obtient bien l'expression donnée dans l'équation (3.14).

Calcul de la matrice d'information de Fisher avec la loi binomiale en architecture
TAD-AI

Dans cette annexe, nous présentons le détail des calculs menant au coefficient q_3 , le coefficient de perte d'information dans le cas où les mesures sont couplées avec leur propre énergie, et où le nombre de fausses alarmes est réparti selon une loi binomiale. Les démonstrations seront fortement basées sur celles effectuées en annexe D.

Tout d'abord, nous partons de la vraisemblance autour de la gate de volume $v = 2g\sigma$, à un instant donné (nous abandonnons pour un souci de clarté l'indice temporel k) :

$$L(X|s) = \frac{(1 - P_d(t))\mu_{fa,1}(m)}{v^m} \left(\prod_{j=1}^m p_0^t(R_j) \right) + \frac{P_d(t)\mu_{fa,2}(m-1)}{mv^{m-1}} \left(\prod_{j=1}^m p_0^t(R_j) \right) \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \rho_j \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_j - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (\text{H.1})$$

où $\mu_{fa,1}$ est la loi binomiale de paramètres $(N, P_{fa}(t))$, $\mu_{fa,2}$ est la loi binomiale de paramètres $(N-1, P_{fa}(t))$, ρ_j le rapport de vraisemblance normalisé de l'énergie R_j associé à la mesure s_j , et $h(X)$ est le modèle de mesure.

Rappelons de plus que :

$$F \triangleq \text{E} \left[(\nabla_X \log(L(X|s))) (\nabla_X \log(L(X|s)))^T \right] \quad (\text{H.2})$$

Or, $\nabla_X \log(L(X|s)) = \frac{\nabla_X L(X|s)}{L(X|s)}$, donc :

$$F = \sum_{m=1}^N \int_v \dots \int_v \int_t^\infty \dots \int_t^\infty \frac{\nabla_X L(X|s) \nabla_X^T L(X|s)}{L(X)} dR_1 \dots dR_m ds_1 \dots ds_m \quad (\text{H.3})$$

En posant :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{(1 - P_d(t))\mu_{fa,1}(m)}{v^m} \\ \beta &= \frac{P_d(t)\mu_{fa,2}(m-1)}{mv^{m-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\end{aligned}\tag{H.4}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}F &= \sum_{m=1}^N \frac{1}{\sigma^2} \nabla_X h(X) \nabla_X^T h(X) \int_v \cdots \int_v \int_t^\infty \cdots \int_t^\infty \\ &\frac{\beta^2 \left(\prod_{j=1}^m p_0^t(R_j) \right) \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \rho_i \rho_j \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_j - h(X)}{\sigma} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{s_i - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right] \frac{s_j - h(X)}{\sigma} \frac{s_i - h(X)}{\sigma}}{\alpha + \beta \sum_{j=1}^m \rho_j \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s_j - h(X)}{\sigma} \right)^2 \right]} \\ &.dR_1 \cdots dR_m ds_1 \cdots ds_m\end{aligned}\tag{H.5}$$

On reconnaît donc l'expression de la matrice d'information de Fisher sans clutter, qui est multipliée par un facteur scalaire. Appelons ce facteur q_3 , et posons le changement de variable suivant :

$$\xi_i = \frac{s_i - h(X)}{\sigma}\tag{H.6}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}q_3(t) &= \sum_{m=1}^N \sigma^m \int_{-g}^g \cdots \int_{-g}^g \int_t^\infty \cdots \int_t^\infty \\ &\frac{\beta^2 \prod_{j=1}^m p_0^t(R_j) \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \rho_i \rho_j \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_i^2 - \frac{1}{2} \xi_j^2 \right] \xi_i \xi_j}{\alpha + \beta \sum_{j=1}^m \rho_j \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_j^2 \right]} dR_1 \cdots dR_m d\xi_1 \cdots d\xi_m\end{aligned}\tag{H.7}$$

Les termes croisés disparaissent de l'intégrale :

$$q_3(t) = \sum_{m=1}^N \sigma^m \int_{-g}^g \cdots \int_{-g}^g \int_t^\infty \cdots \int_t^\infty \frac{\beta \prod_{j=1}^m p_0^t(R_j) \sum_{i=1}^m \rho_i^2 \exp \left[-\xi_i^2 \right] \xi_i^2}{\alpha + \beta \sum_{j=1}^m \rho_j \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_j^2 \right]} dR_1 \cdots dR_m d\xi_1 \cdots d\xi_m\tag{H.8}$$

La fonction est désormais paire selon ξ_i . On peut donc réduire le domaine d'intégration :

$$q_3(t) = \sum_{m=1}^N \sigma^m 2^m \int_0^g \cdots \int_0^g \int_t^\infty \cdots \int_t^\infty \frac{\beta \prod_{j=1}^m p_0^t(R_j) \sum_{i=1}^m \rho_i^2 \exp \left[-\xi_i^2 \right] \xi_i^2}{\frac{\alpha}{\beta} + \sum_{j=1}^m \rho_j \exp \left[-\frac{1}{2} \xi_j^2 \right]} dR_1 \cdots dR_m d\xi_1 \cdots d\xi_m\tag{H.9}$$

L'intégrale est la même quelque soit l'indice considéré, donc :

$$q_3(t) = \sum_{m=1}^N m \sigma^m 2^m \int_0^g \cdots \int_0^g \int_t^\infty \cdots \int_t^\infty \frac{\beta \prod_{j=1}^m p_0^t(R_j) \rho_1^2 \exp[-\xi_1^2] \xi_1^2}{\frac{\alpha}{\beta} + \sum_{j=1}^m \rho_j \exp\left[-\frac{1}{2}\xi_j^2\right]} dR_1 \cdots dR_m d\xi_1 \cdots d\xi_m \quad (\text{H.10})$$

De plus, on a que :

$$\begin{aligned} m 2^m \sigma^m \beta &= \frac{2P_d}{\sqrt{2\pi}g^{m-1}} \mu_{fa}(m-1) \\ \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{(1-P_d(t))\sqrt{2\pi}N P_{fa}(t)}{2gP_d(t)} \end{aligned} \quad (\text{H.11})$$

Donc, on obtient finalement l'expression suivante :

$$\begin{aligned} q_3(t) &= \sum_{m=1}^N \frac{2P_d(t)}{\sqrt{2\pi}g^{m-1}} \mu_{fa,2}(m-1) \\ &\times \int_0^g \cdots \int_0^g \int_t^\infty \cdots \int_t^\infty \frac{\left[\prod_{j=1}^m p_0^t(R_j)\right] \rho_1^2 \exp(-\xi_1^2) \xi_1^2}{\frac{(1-P_d(t))\sqrt{2\pi}N P_{fa}(t)}{2gP_d(t)} + \sum_{j=1}^m \rho_j \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_j^2\right)} dR_1 \cdots dR_m d\xi_1 \cdots d\xi_m \end{aligned} \quad (\text{H.12})$$

soit l'équation (13.5). Étudions maintenant les simplifications à mener pour obtenir l'expression donnée en (13.6). Tout d'abord, exprimons les termes ρ_j , p_0^t et p_1^t de façon détaillée :

$$\begin{aligned} q_3(t) &= \sum_{m=1}^N \frac{2P_d(t)}{\sqrt{2\pi}g^{m-1}} \mu_{fa,2}(m-1) \\ &\times \int_0^g \cdots \int_0^g \int_t^\infty \cdots \int_t^\infty \frac{\frac{1}{P_{fa}^m(t)} \left[\prod_{j=1}^m p_0(R_j)\right] \left(\frac{P_{fa}(t)}{P_d(t)}\right)^2 \left(\frac{p_1(R_1)}{p_0(R_1)}\right)^2 \exp(-\xi_1^2) \xi_1^2}{\left(\frac{P_{fa}(t)}{P_d(t)}\right) \left[\frac{(1-P_d(t))\sqrt{2\pi}N}{2g} + \sum_{j=1}^m \frac{p_1(R_j)}{p_0(R_j)} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_j^2\right)\right]} dR_1 \cdots dR_m d\xi_1 \cdots d\xi_m \end{aligned} \quad (\text{H.13})$$

En simplifiant par $\frac{P_{fa}(t)}{P_d(t)}$ sur la fraction :

$$\begin{aligned} q_3(t) &= \sum_{m=1}^N \frac{2}{\sqrt{2\pi}g^{m-1}} \mu_{fa,2}(m-1) \\ &\times \int_0^g \cdots \int_0^g \int_t^\infty \cdots \int_t^\infty \frac{\frac{1}{P_{fa}^{m-1}(t)} \left[\prod_{j=1}^m p_0(R_j)\right] \left(\frac{p_1(R_1)}{p_0(R_1)}\right)^2 \exp(-\xi_1^2) \xi_1^2}{\frac{(1-P_d(t))\sqrt{2\pi}N}{2g} + \sum_{j=1}^m \frac{p_1(R_j)}{p_0(R_j)} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_j^2\right)} dR_1 \cdots dR_m d\xi_1 \cdots d\xi_m \end{aligned} \quad (\text{H.14})$$

En détaillant l'expression de la loi binomiale $\mu_{fa,2}(m-1)$, et après simplifications, on obtient l'expression donnée au préalable dans (13.6) :

$$\begin{aligned}
q_3(t) &= \sum_{m=1}^N \frac{2(N-1)!(1-P_{fa}(t))^{N-m}}{\sqrt{2\pi}g^{m-1}(m-1)!(N-m)!} \\
&\times \int_0^g \cdots \int_0^g \int_t^\infty \cdots \int_t^\infty \frac{\left[\prod_{j=1}^m p_0(R_j)\right] \left(\frac{p_1(R_1)}{p_0(R_1)}\right)^2 \exp(-\xi_1^2) \xi_1^2}{\frac{(1-P_d(t))\sqrt{2\pi}N}{2g} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{p_1(R_j)}{p_0(R_j)}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_j^2\right)} dR_1 \cdots dR_m d\xi_1 \cdots d\xi_m
\end{aligned} \tag{H.15}$$

- [Abraham, 2019] ABRAHAM, D. A. (2019). *Underwater Acoustic Signal Processing : Modeling, Detection, and Estimation*. Springer.
- [Amirach et al., 2016] AMIRACH, N., JAUFFRET, C., PÉREZ, A.-C. et LANEUVILLE, D. (2016). Bearings-only TMA from electromagnetic and acoustic waves. *In 2016 19th International Conference on Information Fusion (FUSION)*, pages 1901–1908.
- [Armijo, 1966] ARMIJO, L. (1966). Minimization of functions having lipschitz continuous first partial derivatives. *Pacific Journal of mathematics*, 16(1):1–3.
- [Arnaud-Haond et Pradillon, 2017] ARNAUD-HAOND, S. et PRADILLON, F. (2017). “Pourquoi pas les abysses ?” Le projet de recherche de l’Ifremer pour mieux connaître la biodiversité des fonds marins. *In Annales des Mines-Responsabilite et environnement*, numéro 85, pages 40–42. FFE.
- [Arnold et al., 1983] ARNOLD, J., BAR-SHALOM, Y., ESTRADA, R. et MUCCI, R. (1983). Target parameter estimation using measurements acquired with a small number of sensors. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 8(3):163–172.
- [Arulampalam et al., 2002] ARULAMPALAM, M. S., MASKELL, S., GORDON, N. et CLAPP, T. (2002). A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking. *IEEE Transactions on signal processing*, 50(2):174–188.
- [Augris et Gourmelon, 2002] AUGRIS, C. et GOURMELON, F. (2002). La cartographie des fonds marins côtiers. *Mappemonde*, 65:39–43.
- [Bar-Shalom et Fortmann, 1988] BAR-SHALOM, Y. et FORTMANN, T. (1988). *Tracking and Data Association*. Academic Press.
- [Bar-Shalom et Tse, 1975] BAR-SHALOM, Y. et TSE, E. (1975). Tracking in a cluttered environment with probabilistic data association. *Automatica*, 11(5):451–460.
- [Bethel et Paras, 1994] BETHEL, R. E. et PARAS, G. J. (1994). A PDF multitarget tracker. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 30(2):386–403.
- [Bethel et Paras, 1998] BETHEL, R. E. et PARAS, G. J. (1998). A PDF multisensor multitarget tracker. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 34(1):153–168.
- [Bi et Ren, 2008] BI, S. et REN, X. Y. (2008). Maneuvering target doppler-bearing tracking with signal time delay using interacting multiple model algorithms. *Progress in Electromagnetics Research-pier*, 87:15–41.

- [Blackman, 2004] BLACKMAN, S. (2004). Multiple hypothesis tracking for multiple target tracking. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 19(1):5–18.
- [Blanc-Benon et Jauffret, 1997] BLANC-BENON, P. et JAUFFRET, C. (1997). TMA from bearings and multipath time delays. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 33(3):813–824.
- [Blanc-Benon et Passerieux, 1989] BLANC-BENON, P. et PASSERIEUX, J. (1989). Trajectographie passive en présence d’erreurs de modèle : Utilisation des résidus. In *12^e Colloque sur le traitement du signal et des images*, numéro 007-0010, pages p. 419–422. GRETSI, Groupe d’Etudes du Traitement du Signal et des Images.
- [Blanding *et al.*, 2007a] BLANDING, W., WILLETT, P. et BAR-SHALOM, Y. (2007a). ML-PDA : Advances and a new multitarget approach. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2008:1–13.
- [Blanding *et al.*, 2007b] BLANDING, W., WILLETT, P. et BAR-SHALOM, Y. (2007b). Multiple target tracking using maximum likelihood probabilistic data association. In *2007 IEEE Aerospace Conference*, pages 1–12.
- [Blom et Bar-Shalom, 1988] BLOM, H. et BAR-SHALOM, Y. (1988). The interacting multiple model algorithm for systems with markovian switching coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(8):780–783.
- [Boers *et al.*, 2007] BOERS, Y., EHLERS, F., KOCH, W., LUGINBUHL, T., STONE, L. D. et STREIT, R. L. (2007). Track Before Detect algorithms. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2008:1–2.
- [Boullier, 2014] BOULLIER, D. (2014). Internet est maritime : les enjeux des câbles sous-marins. *Revue internationale et stratégique*, 95:149–158.
- [Bouvet, 1992] BOUVET, M. (1992). *Traitements des signaux pour les systèmes sonar*. Masson Paris.
- [Bray, 2013] BRAY, R. (2013). *La lutte contre le narcotrafic en mer des Caraïbes*. Centre d’études supérieures de la Marine, Case 08, 1 place Joffre - 75700 Paris.
- [Broyden, 1970] BROYDEN, C. G. (1970). The convergence of a class of double-rank minimization algorithms 2. the new algorithm. *Ima Journal of Applied Mathematics*, 6:222–231.
- [Butler et Sherman, 2016] BUTLER, J. L. et SHERMAN, C. H. (2016). *Transducers and arrays for underwater sound*. Modern Acoustics and Signal Processing. Springer.
- [Carter, 1981] CARTER, G. (1981). Time delay estimation for passive sonar signal processing. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 29(3):463–470.
- [Casabianca, 2019] CASABIANCA, J. (2019). Préambule - Approche maritime des nouveaux espaces de conflictualité. *Revue Défense Nationale*, 824:11–21.
- [Cheung *et al.*, 2010] CHEUNG, B., DAVEY, S. et GRAY, D. (2010). PMHT for tracking with timing uncertainty. In *2010 13th International Conference on Information Fusion*, pages 1–6.
- [Ciunozzo *et al.*, 2014] CIUNOZZO, D., WILLETT, P. K. et BAR-SHALOM, Y. (2014). Tracking the tracker from its passive sonar ML-PDA estimates. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 50(1):573–590.
- [Clavard, 2012] CLAVARD, J. (2012). *Trajectographie passive sans manœuvre de l’observateur*. Thèse de doctorat, Université de Toulon.

- [Colonus et Kunisch, 1986] COLONIUS, F. et KUNISCH, K. (1986). Stability for parameter estimation in two point boundary value problems. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1986:1 – 29.
- [Colonus et Kunisch, 1989] COLONIUS, F. et KUNISCH, K. (1989). Output least squares stability in elliptic systems. *Appl. Math. Optim.*, 19(1):33–63.
- [Coustillière, 2016] COUSTILLIÈRE, A. (2016). Le combat numérique au cœur des opérations : quels enjeux pour le monde maritime? *Revue Défense Nationale*, 789:44–48.
- [Davey et Gaetjens, 2018] DAVEY, S. J. et GAETJENS, H. X. (2018). *Track-Before-Detect Using Expectation-Maximisation*, volume 3 de *Signal and Communication Technology*. Springer.
- [Davey et al., 2007] DAVEY, S. J., RUTTEN, M. G. et CHEUNG, B. (2007). A comparison of detection performance for several track-before-detect algorithms. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2008:1–10.
- [Davidon, 1991] DAVIDON, W. C. (1991). Variable metric method for minimization. *SIAM Journal on Optimization*, 1(1):1–17.
- [De Rauly, 1966] DE RAULY, D. (1966). *L'Estimation statistique*. Gauthier-Villars.
- [Del Moral, 1997] DEL MORAL, P. (1997). Nonlinear filtering : Interacting particle resolution. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 325(6):653–658.
- [Dennis, 1984] DENNIS, J. (1984). A user's guide to nonlinear optimization algorithms. *Proceedings of the IEEE*, 72(12):1765–1776.
- [Di Martino, 1995] DI MARTINO, J.-C. (1995). *Intégration de connaissances dans des systèmes distribués pour l'extraction de raies spectrales dans des images sonar*. Thèse de doctorat, Université de Nancy 1.
- [Duda et al., 2000] DUDA, R. O., HART, P. E. et STORK, D. G. (2000). *Pattern Classification (2nd Edition)*. Wiley-Interscience, USA.
- [Etter, 2012] ETTER, P. C. (2012). Advanced applications for underwater acoustic modeling. *Advances in Acoustics and Vibration*, 2012.
- [Eudeline, 2016] EUDELIN, H. (2016). Stratégie maritime : évolutions et nouveaux acteurs. *Revue Défense Nationale*, 789:37–43.
- [Eudeline, 2018] EUDELIN, H. (2018). L'extraordinaire essor de la puissance navale chinoise. *Revue Défense Nationale*, 807:85–94.
- [Fletcher, 1970] FLETCHER, R. (1970). A new approach to variable metric algorithms. *The computer journal*, 13(3):317–322.
- [Fletcher et Powell, 1963] FLETCHER, R. et POWELL, M. J. (1963). A rapidly convergent descent method for minimization. *The Computer Journal*, 6(2):163–168.
- [Fortmann et al., 1985] FORTMANN, T., BAR-SHALOM, Y., SCHEFFE, M. et GELFAND, S. (1985). Detection thresholds for tracking in clutter—A connection between estimation and signal processing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(3):221–229.
- [Gauvrit et al., 1997] GAUVRIT, H., LE CADRE, J.-P. et JAUFFRET, C. (1997). A formulation of multitarget tracking as an incomplete data problem. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 33(4):1242–1257.

- [Goldfarb, 1970] GOLDFARB, D. (1970). A family of variable metric updates derived by variational means. *mathematics of computing*. *Mathematics of computation*, 24(111):23–26.
- [Gong, 1982] GONG, K. F. (1982). Multipath target motion analysis : Properties and implication of the multipath process. Rapport technique, 6687, NUSC, Newport, RI.
- [Guillaume, 2017] GUILLAUME, L.-M. (2017). Espace sous-marin et stratégie maritime (l'exemple russe). *Revue Défense Nationale*, 801:113–121.
- [Guo *et al.*, 2016] GUO, Y., THARMARASA, R., RAJAN, S., SONG, T. L. et KIRUBARAJAN, T. (2016). Passive tracking in heavy clutter with sensor location uncertainty. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 52(4):1536–1554.
- [Guo *et al.*, 2008] GUO, Y., XUE, A. et PENG, D. (2008). A recursive algorithm for bearings-only tracking with signal time delay. *Signal Processing*, 88(6):1539–1552.
- [Hahn et Tretter, 1973] HAHN, W. et TRETTER, S. (1973). Optimum processing for delay-vector estimation in passive signal arrays. *IEEE Transactions on Information Theory*, 19(5):608–614.
- [Hammel et Aidala, 1985] HAMMEL, S. E. et AIDALA, V. J. (1985). Observability requirements for three-dimensional tracking via angle measurements. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, (2):200–207.
- [Hammond, 2005] HAMMOND, D. S. (2005). Sonobuoy field drift prediction. Rapport technique, Naval Air Warfare Center Aircraft Division, Patuxent River, MD.
- [Hassab et Boucher, 1981] HASSAB, J. et BOUCHER, R. (1981). Performance of the generalized cross correlator in the presence of a strong spectral peak in the signal. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 29(3):549–555.
- [Hernandez *et al.*, 2006] HERNANDEZ, M. L., FARINA, A. et RISTIC, B. (2006). Pcrbl for tracking in cluttered environments : Measurement sequence conditioning approach. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic systems*, 42(2):680–704.
- [Hinich, 1973] HINICH, M. J. (1973). Maximum-likelihood signal processing for a vertical array. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 54(2):499–503.
- [Jauffret, 1993] JAUFFRET, C. (1993). *Trajectographie passive, observabilité et prise en compte des fausses alarmes*. Thèse de doctorat, Toulon.
- [Jauffret, 2007] JAUFFRET, C. (2007). Observability and Fisher information matrix in nonlinear regression. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 43:756–759.
- [Jauffret et Bar-Shalom, 1990] JAUFFRET, C. et BAR-SHALOM, Y. (1990). Track formation with bearing and frequency measurements in clutter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 26(6):999–1010.
- [Jauffret et Bar-Shalom, 1993] JAUFFRET, C. et BAR-SHALOM, Y. (1993). Target motion analysis in the presence of false alarms. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 94(3):1372–1375.
- [Jauffret et Pérez-Pignol, 2014] JAUFFRET, C. et PÉREZ-PIGNOL, A.-C. (2014). Cramér-Rao-type lower bound for a time of abrupt change. In *17th International Conference on Information Fusion (FUSION)*, pages 1–7. IEEE.
- [Jauffret et Pillon, 1996] JAUFFRET, C. et PILLON, D. (1996). Observability in passive target motion analysis. *IEEE transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 32(4):1290–1300.

- [Jauffret et Pillon, 2008] JAUFFRET, C. et PILLON, D. (2008). Trajectographie passive à partir d'angles et d'autres mesures. *Techniques de l'ingénieur : Le traitement du signal et ses applications*, base documentaire : TIP383WEB.(ref. article : te6707).
- [Jauffret et al., 2010] JAUFFRET, C., PILLON, D. et PIGNOL, A.-C. (2010). Bearings-only maneuvering target motion analysis from a nonmaneuvering platform. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 46(4):1934–1949.
- [Jauffret et al., 2016] JAUFFRET, C., PÉREZ, A.-C., BLANC-BENON, P. et TANGUY, H. (2016). Doppler-only target motion analysis in a high duty cycle sonar system. In *2016 19th International Conference on Information Fusion (FUSION)*, pages 2163–2170.
- [Jauffret et Pérez-Pignol, 2015] JAUFFRET, C. et PÉREZ-PIGNOL, A.-C. (2015). Target motion analysis by inverse triangulation. In *2015 18th International Conference on Information Fusion (Fusion)*, pages 507–514.
- [Jiang et al., 2014] JIANG, X., HARISHAN, K., THARMARASA, R., KIRUBARAJAN, T. et THAYAPARAN, T. (2014). Integrated track initialization and maintenance in heavy clutter using probabilistic data association. *Signal Processing*, 94:241–250.
- [Journoud et Thomas, 2018] JOURNOUD, P. et THOMAS, S. (2018). Les enjeux de l'arme sous-marine en Asie du Sud-Est à l'épreuve de la montée en puissance chinoise et des tensions frontalières en mer. *Stratégique*, 118:93–106.
- [Kaune et al., 2011] KAUNE, R., HÖRST, J. et KOCH, W. (2011). Accuracy analysis for TDOA localization in sensor networks. In *14th International Conference on Information Fusion*, pages 1647–1654. IEEE.
- [Kay, 1993] KAY, S. M. (1993). *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation Theory*. Prentice-Hall.
- [Kay, 1998] KAY, S. M. (1998). *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Detection Theory*. Prentice-Hall.
- [Kirubarajan et Bar-Shalom, 1996] KIRUBARAJAN, T. et BAR-SHALOM, Y. (1996). Low observable target motion analysis using amplitude information. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 32(4):1367–1384.
- [Kirubarajan et al., 2001] KIRUBARAJAN, T., BAR-SHALOM, Y. et WANG, Y. (2001). Passive ranging of a low observable ballistic missile in a gravitational field. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 37(2):481–494.
- [Knight et al., 1981] KNIGHT, W. C., PRIDHAM, R. G. et KAY, S. M. (1981). Digital signal processing for sonar. *Proceedings of the IEEE*, 69(11):1451–1506.
- [Lacoume, 2007] LACOUME, J.-L. (2007). Mesure de retard. De l'acoustique sous-marine à la tomographie acoustique océanique. *Traitement Du Signal*, 24(4):247–257.
- [Larousse, sd] LAROUSSE (s.d.). Trajectographie. <https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/trajectographie/78989>. (consulté le 16/03/2022).
- [Lebon, 2022] LEBON, A. (2022). *Trajectographie passive par fusion de capteurs acoustiques sous-marins, avec prise en compte de la propagation*. Thèse de doctorat, Université de Toulon.
- [Lehmann et al., 2005] LEHMANN, E. L., ROMANO, J. P. et CASELLA, G. (2005). *Testing statistical hypotheses*, volume 3. Springer.

- [Lenard, 1975] LENARD, M. L. (1975). Practical convergence conditions for the Davidon–Fletcher–Powell method. *Mathematical Programming*, 9(1):69–86.
- [Lepoutre *et al.*, 2016] LEPOUTRE, A., RABASTE, O. et LE GLAND, F. (2016). Multitarget likelihood computation for track-before-detect applications with amplitude fluctuations of type swerling 0, 1, and 3. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 52(3):1089–1107.
- [Li et Bar-Shalom, 1991] LI, X. et BAR-SHALOM, Y. (1991). Stability evaluation and track life of the pdaf for tracking in clutter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(5):588–602.
- [Lo et Ferguson, 2000] LO, K. W. et FERGUSON, B. G. (2000). Broadband passive acoustic technique for target motion parameter estimation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 36(1):163–175.
- [Lurton, 1998] LURTON, X. (1998). *Acoustique sous-marine : présentation et applications*. Editions Quae.
- [Mazor *et al.*, 1998] MAZOR, E., AVERBUCH, A., BAR-SHALOM, Y. et DAYAN, J. (1998). Interacting multiple model methods in target tracking : a survey. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 34(1):103–123.
- [McIntyre et Roger, 1993] MCINTYRE, C. M. et ROGER, W. A. (1993). Data association in passive acoustic tracking. In *Signal and Data Processing of Small Targets 1993*, volume 1954, pages 376–385. SPIE.
- [Mendel, 1995] MENDEL, J. M. (1995). *Lessons in estimation theory for signal processing, communications, and control*. Pearson Education.
- [Moose et Dailey, 1985] MOOSE, R. et DAILEY, T. (1985). Adaptive underwater target tracking using passive multipath time-delay measurements. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 33(4):778–787.
- [Morel, 2015] MOREL, C. (2015). Stratégie maritime – le réseau mondial de câbles sous-marins : une toile dans la toile. *Revue Défense Nationale*, 784:117–120.
- [Morel, 2019] MOREL, C. (2019). La mise en péril du réseau sous-marin international de communication. *Flux*, 118:34–45.
- [Musicki et Suvorova, 2008] MUSICKI, D. et SUVOROVA, S. (2008). Tracking in clutter using IMM-IPDA-based algorithms. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 44(1):111–126.
- [Nardone et Aidala, 1981] NARDONE, S. C. et AIDALA, V. J. (1981). Observability criteria for bearings-only target motion analysis. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic systems*, (2):162–166.
- [Orguner et Gustafsson, 2008] ORGUNER, U. et GUSTAFSSON, F. (2008). Target tracking using delayed measurements with implicit constraints. In *2008 11th International Conference on Information Fusion*, pages 1–8.
- [Orguner et Gustafsson, 2009] ORGUNER, U. et GUSTAFSSON, F. (2009). Distributed target tracking with propagation delayed measurements. *2009 12th International Conference on Information Fusion*, pages 802–809.
- [Orguner et Gustafsson, 2011] ORGUNER, U. et GUSTAFSSON, F. (2011). Target tracking with particle filters under signal propagation delays. *Trans. Sig. Proc.*, 59(6):2485–2495.
- [Paris et Jauffret, 2003] PARIS, S. et JAUFFRET, C. (2003). Frequency line tracking using HMM-based schemes. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 39(2):439–449.

- [Payne, 1989] PAYNE, A. N. (1989). Observability problem for bearings-only tracking. *International Journal of Control*, 49(3):761–768.
- [Pequeux, 2006] PEQUEUX, A. (2006). La vie dans les abysses océaniques (colloques de la SRSI, le 8 décembre 2006). *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 75:119–141.
- [Peyvandi et al., 2011] PEYVANDI, H., FARROKHROOZ, M., ROUFARSHBAF, H. et PARK, S.-J. (2011). SONAR systems and underwater signal processing : classic and modern approaches. *SONAR systems*, pages 173–206.
- [Pillon, 2016] PILLON, D. (2016). Introduction à la détection sous-marine passive. *Techniques de l'ingénieur : Bruit et vibrations*, base documentaire : TIP680WEB.(ref. article : rad6712).
- [Pillon, 2017] PILLON, D. (2017). Introduction à la détection en sonar actif : Notions de base. *Techniques de l'ingénieur : Technologies radars et applications*, base documentaire : TIP385WEB.(ref. article : rad6714).
- [Pillon et Jauffret, 2005] PILLON, D. et JAUFFRET, C. (2005). Trajectographie passive par mesure d'angle. *Techniques de l'ingénieur : Le traitement du signal et ses applications*, base documentaire : TIP383WEB.(ref. article : te6705).
- [Plumejeaud et al., 1983] PLUMEJEAUD, C., RAFINE, B. et LUCAS, B. (1983). Un algorithme de normalisation. In *9^e Colloque sur le traitement du signal et des images*, numéro 002-0006, pages p. 111–114, Nice. GRETSI, Groupe d'Etudes du Traitement du Signal et des Images.
- [Pérez et Jauffret, 2020] PÉREZ, A.-C. et JAUFFRET, C. (2020). Observability in target motion analysis from the sum or the difference of ranges with two stationary sensors. In *2020 IEEE 23rd International Conference on Information Fusion (FUSION)*, pages 1–8.
- [Rife et Boorstyn, 1974] RIFE, D. et BOORSTYN, R. (1974). Single tone parameter estimation from discrete-time observations. *IEEE Transactions on Information Theory*, 20(5):591–598.
- [Robert, 1992] ROBERT, C. (1992). *L'analyse statistique bayésienne*. Economica.
- [Rogel, 2016] ROGEL, B. (2016). Enjeux et défis stratégiques de la Marine nationale. *Revue Défense Nationale*, 789:11–16.
- [Roger-Lacan, 2014] ROGER-LACAN, V. (2014). Faire face aux trafics et à la piraterie maritimes. *Revue internationale et stratégique*, 95:101–109.
- [Rothenberg, 1971] ROTHENBERG, T. J. (1971). Identification in parametric models. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 577–591.
- [Ru et al., 2009] RU, J., JILKOV, V., LI, X. et BASHI, A. (2009). Detection of target maneuver onset. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 45:536 – 554.
- [Sauvet-Carof, 1989] SAUVET-CAROF, M.-T. (1989). Résultats expérimentaux de l'intercorrélateur compensé en doppler différentiel. *Revue Traitement du Signal*, 7(3):221–232.
- [Sauvet-Carof et Carof, 1994] SAUVET-CAROF, M.-T. et CAROF, A. (1994). Système de mesure du doppler différentiel sur raies fluctuantes. *Le Journal de Physique IV*, 4(C5):1335–1338.
- [Schoenecker et al., 2012] SCHOENECKER, S., WILLETT, P. et BAR-SHALOM, Y. (2012). Maximum likelihood probabilistic data association (ML-PDA) tracker implemented in delay/bearing space applied to multistatic sonar data sets. In *Signal and Data Processing of Small Targets 2012*, volume 8393, pages 178 – 191. International Society for Optics and Photonics, SPIE.

- [Schoenecker *et al.*, 2014] SCHOENECKER, S., WILLETT, P. et BAR-SHALOM, Y. (2014). ML-PDA and ML-PMHT : Comparing multistatic sonar trackers for VLO targets using a new multitarget implementation. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 39(2):303–317.
- [Shanno, 1970] SHANNO, D. F. (1970). Conditioning of quasi-newton methods for function minimization. *Mathematics of computation*, 24(111):647–656.
- [Singer et Sasaki, 1998] SINGER, P. F. et SASAKI, D. M. (1998). Analysis of the cascade of track-before-detect and track-after-detect tracking algorithms. In DRUMMOND, O. E., éditeur : *Signal and Data Processing of Small Targets 1998*, volume 3373, pages 156 – 165. International Society for Optics and Photonics, SPIE.
- [Sittler, 1964] SITTLER, R. W. (1964). An optimal data association problem in surveillance theory. *IEEE Transactions on Military Electronics*, 8(2):125–139.
- [Somekh-Baruch *et al.*, 2018] SOMEKH-BARUCH, A., LESHEM, A. et SALIGRAMA, V. (2018). On the non-existence of unbiased estimators in constrained estimation problems. *IEEE Transactions on Information Theory*, 64(8):5549–5554.
- [Sorenson, 1970] SORENSON, H. W. (1970). Least-squares estimation : from Gauss to Kalman. *IEEE spectrum*, 7(7):63–68.
- [Streit et Luginbuhl, 1994] STREIT, R. L. et LUGINBUHL, T. E. (1994). Maximum likelihood method for probabilistic multihypothesis tracking. In *Signal and Data Processing of Small Targets 1994*, volume 2235, pages 394–405. International Society for Optics and Photonics, SPIE.
- [Streit et Luginbuhl, 1995] STREIT, R. L. et LUGINBUHL, T. E. (1995). Probabilistic multi-hypothesis tracking. Rapport technique, Naval Underwater Systems Center, Newport, RI.
- [Tichavsky *et al.*, 1998] TICHAVSKY, P., MURAVCHIK, C. et NEHORAI, A. (1998). Posterior Cramer-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(5):1386–1396.
- [Urlick, 1975] URICK, R. J. (1975). *Principles of Underwater Sound*. McGraw-Hill, New York.
- [Van Trees, 2004a] VAN TREES, H. L. (2004a). *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I*. Wiley.
- [Van Trees, 2004b] VAN TREES, H. L. (2004b). *Optimum array processing : Part IV of Detection, Estimation, and Modulation Theory*. John Wiley & Sons.
- [Van Trees et Bell, 2007] VAN TREES, H. L. et BELL, K. L. (2007). Bayesian bounds for parameter estimation and nonlinear filtering/tracking. *AMC*, 10(12):10–1109.
- [Vanpeperstraete et Le Cadre, 2006] VANPEPERSTRAETE, J.-M. et LE CADRE, J.-P. (2006). Robust detection of target maneuvers. In *2006 9th International Conference on Information Fusion*, pages 1–8.
- [Watson et Blair, 1993] WATSON, G. A. et BLAIR, W. D. (1993). Tracking maneuvering targets with multiple sensors using the interacting multiple model algorithm. In DRUMMOND, O. E., éditeur : *Signal and Data Processing of Small Targets 1993*, volume 1954, pages 438 – 449. International Society for Optics and Photonics, SPIE.
- [Wenz, 1962] WENZ, G. M. (1962). Acoustic ambient noise in the ocean : Spectra and sources. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 34(12):1936–1956.

- [Yang *et al.*, 2018] YANG, R., BAR-SHALOM, Y., JAUFFRET, C., PÉREZ, A.-C. et NG, G. W. (2018). Maneuvering target tracking using continuous wave bistatic sonar with propagation delay. *J. Adv. Inf. Fusion*, 13:36–49.
- [Yang *et al.*, 2014] YANG, R., HUANG, J. H., NG, G. W. et BAR-SHALOM, Y. (2014). Interacting multiple model unscented Gauss-Helmert filter for bearings-only tracking with state-dependent propagation delay. *In 17th International Conference on Information Fusion (FUSION)*, pages 1–8.
- [Ywanne et Martinerie, 1995] YWANNE, F. et MARTINERIE, F. (1995). Lutte anti-réverbération en sonar actif : Mise en oeuvre et comparaison de techniques de normalisation. *In 15° Colloque sur le traitement du signal et des images*, numéro 021-0009, pages p. 1181–1184. GRETSI, Groupe d’Etudes du Traitement du Signal et des Images.

JÉRÉMY PAYAN

IM2NP, UMR CNRS 7334, Université de Toulon

Trajectographie passive par réseau de capteurs en acoustique sous-marine

L'objectif de cette thèse est de proposer des techniques innovantes de trajectographie passive sous-marine à partir de mesures délivrées par un réseau de sonars "frustes", du fait de leur chaîne de traitement de signal assez simple. On entend par là que l'ensemble des mesures disponibles est composé de vraies détections (dues à la présence d'une source d'intérêt) et de fausses alarmes d'origines diverses. Deux architectures ont été considérées : l'énergie de chaque détection est conservée ou non (binarisation). La modélisation probabiliste des mesures est celle du "Probabilistic Data Association" (PDA) et de ses différentes extensions. Cette thèse est découpée en deux parties. La première est consacrée à la trajectographie d'une source en mouvement rectiligne uniforme dans deux configurations (réseau de bouées seul délivrant des mesures de différences de temps d'arrivée d'une même onde acoustique, et fusion de ce même réseau avec des antennes linéaires verticales délivrant des cosinus d'élévation du trajet de cette onde). L'étude de l'observabilité y est menée ainsi que l'évaluation des performances théoriques et empiriques sur des scénarios réalistes. Dans le contexte du réseau mixte, l'étude de la trajectographie est étendue aux cas de cibles "manœuvrantes" et à la prise en compte du temps de vol des ondes acoustiques. La seconde partie est consacrée à la recherche du seuil optimal de détection. Ce seuil est celui qui maximise l'information au sens de Fisher, permettant ainsi de meilleures performances asymptotiques. Nous mettons en évidence, à l'aide de simulations, l'existence de ce seuil optimal à travers différents scénarios, et lorsque les mesures sont binarisées ou non.

Mots-clefs : Trajectographie, Observabilité, Estimation, Borne de Cramér-Rao, Maximum de Vraisemblance, Sonar, Time Difference of Arrival, Probabilistic Data Association.

Submarine passive target motion analysis by network of sensors

The aim of this dissertation is to propose some innovative methods of passive submarine target motion analysis (TMA), from measurements delivered by a network of "rough" sonars, due to their rather straight embedded signal processing. That is, the set of the available measurements is composed of true detections (due to the presence of a source of interest) and of false alarms from various origins. Two architectures have been considered : the energy of each detection is available or not (binarization). The measurements are modeled according to the "probabilistic data association" model, and its various extensions. This thesis is segmented in two parts. The first one is devoted to the TMA of a source in constant velocity in two configurations (network of sonobuoys providing the time differences of arrival of an acoustic wave, and a fusion of the latter network with vertical linear arrays providing the cosine of elevation angles of the path followed by this wave). Observability is studied. The theoretical and empirical performance are evaluated in realistic scenarios. In the background of the mixed sensor network, the TMA is extended to the maneuvering targets, and to the consideration of the propagation delays of the acoustic waves. The second part is devoted to the study of the optimal detection threshold, that maximizes the Fisher information, allowing better asymptotic performance. The existence of such a threshold is highlighted through different scenarios, thanks to simulations, whether the measurements are binarized or not.

Keywords : Target Motion Analysis, Observability, Estimation, Cramér-Rao Lower Bound, Maximum Likelihood, Sonar, Time Difference of Arrival, Probabilistic Data Association.