



HAL
open science

Empreintes cosmologiques et gravitationnelles de la formes des halos de matière noire : Analyse statistique et apprentissage automatique

Rémy Koskas

► **To cite this version:**

Rémy Koskas. Empreintes cosmologiques et gravitationnelles de la formes des halos de matière noire : Analyse statistique et apprentissage automatique. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris sciences et lettres, 2024. Français. NNT : 2024UPSLO004 . tel-04790341

HAL Id: tel-04790341

<https://theses.hal.science/tel-04790341v1>

Submitted on 19 Nov 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PSL

Préparée à l'Observatoire de Paris

**Empreintes cosmologiques et gravitationnelles de la forme
des halos de matière noire :
Analyse statistique et apprentissage automatique**

Soutenue par

Rémy KOSKAS

Le 20 Février 2024

École doctorale n°127

**Astronomie et
Astrophysique d'Ile de
France**

Spécialité

**Astronomie et Astrophy-
sique**

Préparée au

Laboratoire Univers et Théories
(LUTH)

Composition du jury :

David VALLS-GABAUD Directeur de recherche, Observatoire de Paris	<i>Président du jury</i>
Alain BLANCHARD Professeur des universités, Université Toulouse III	<i>Rapporteur</i>
Philippe BRAX Directeur de recherche, Université Paris-Saclay	<i>Rapporteur</i>
Katarina KRALJIC Chargée de recherche, Université de Strasbourg	<i>Examineur</i>
Gary MAMON Astronome, Sorbonne Université	<i>Examineur</i>
Roya MOHAYAEI Directeur de recherche, Sorbonne Université	<i>Examineur</i>
Emmanuel NEZRI Chargé de recherche, Université Aix-Marseille	<i>Examineur</i>
Jean-Michel ALIM Directeur de recherche, Observatoire de Paris	<i>Directeur de thèse</i>

Résumé

Les halos de matière noire sont des structures fondamentales en cosmologie. La complexité de leur processus de formation est une conséquence directe du caractère fortement non-linéaire de la dynamique gravitationnelle dont ils sont le produit. Ainsi, les propriétés des halos ne dépendent pas seulement des détails de leur environnement immédiat ; elles sont également fortement imprégnées par la dynamique d'expansion de l'Univers d'arrière-plan. La complexité du processus d'effondrement des halos se manifeste aussi au travers de leur structure, et en particulier de leur forme. Si, en première approximation, les halos peuvent être décrits comme des sphères parfaites, la nécessité d'une description ellipsoïdale est maintenant bien établie. Dans cette thèse, nous mettons en évidence une relation, indépendante de la cosmologie, entre la forme des halos simulés de matière noire et la variance lissée des fluctuations non-linéaires de la densité du champ de matière cosmique. L'universalité de cette relation est indépendante du décalage vers le rouge, de l'état de relaxation des halos étudiés ou même de l'algorithme utilisé pour les détecter. Nous montrons que cette propriété de l'effondrement des halos conduit à une nouvelle méthode de mesure du spectre de puissance de la matière cosmique. Nous étendons ensuite le résultat aux modèles de gravité modifiée et nous expliquons comment les mécanismes d'écrantage altèrent la relation liant cosmologie et forme des halos. En ce sens, nous élaborons une nouvelle sonde de la gravité modifiée. Enfin, nous proposons d'utiliser les propriétés de masse et de forme d'ellipsoïdes confocaux décrivant la distribution de matière dans les halos simulés, pour détecter la cosmologie. À cet effet, nous recourons à des outils d'apprentissage automatique, des arbres de décision agrégés par descente de gradient. Nous insisterons dans cette partie sur les nombreuses embuches méthodologiques que cette approche génère, et notamment des effets de type *Clever Hans* qui découlent de la granularité des données. Nous montrerons que leur détection et leur élimination sont nécessaires à toute interprétation physique des résultats.

Remerciements

J'aimerais remercier sincèrement mon directeur de thèse Jean-Michel Alimi pour avoir encadré mon projet et m'avoir guidé pas à pas dans nos recherches. Nos discussions ont été très intéressantes, j'en conserverai un excellent souvenir. Je remercie également le président du jury David Valls-Gabaud et l'ensemble de ses membres : Gary Mamon, Roya Mohayaee, Emmanuel Nezri et Katarina Kraljic ainsi que les rapporteurs, Philippe Brax et Alain Blanchard. Leur lecture attentive du manuscrit et l'intérêt qu'ils ont manifesté pour les travaux que je présente ici m'honorent et m'obligent. Je leur suis également reconnaissant pour les questions, remarques et suggestions pendant et après la soutenance.

A vrai dire, j'ai eu grand plaisir à travailler au LUTH pendant ces années, que ce soit au contact des autres doctorants, des équipes scientifiques (un remerciement particulier à Yann Rasera pour nos discussions cosmologiques, numériques ainsi que pour ses suggestions inspirantes, et un autre remerciement spécial à Fabrice Roy pour les modifications de pFoF et l'aide apportée le jour de la soutenance) ou bien encore des équipes informatiques (un grand merci à Stéphane Méné pour l'assistance informatique). Enfin, Marie Marduel et Livia Corentin m'ont été d'un grand secours pour l'organisation de la soutenance, et l'ensemble des tâches administratives (contrats, missions ...) inhérentes à trois ans et demi de thèse.

Il me tient à coeur de signifier ma reconnaissance aux chercheurs Tony Lelièvre, Mohammed ElRhabi et Jonathan Freundlich pour leurs diverses recommandations et suggestions pendant mon parcours académique.

Sur un plan personnel, j'ai profité des conseils d'amis présentement thésards, ex-thésards ou futurs-thésards que j'aimerais citer en témoignage de mon affection : Joseph A, David K, Malkiel R, et, pour faire court, la Haboura.

A mes parents, mon frère et ma soeur, merci pour tout, et, en particulier, pour m'avoir soutenu pendant les moments de doute (qui sont, paraît-il, eux aussi inhérents à trois ans et demi de thèse). J'en profite pour remercier mes oncles, tantes et cousins qui m'ont fait l'honneur d'assister à ma soutenance.

Enfin, j'ai une pensée pour mon oncle William Nessim Smadja z"l et mon grand-père Daniel Edmond Guez z"l, qui s'en sont allés il y a quelques mois seulement. Ils ont eu une importance toute essentielle dans ma construction personnelle, et dans le développement de mon goût pour la connaissance et la recherche.

Paris, mai 2024.

Notations

On notera X les scalaires et \mathbf{X} les tenseurs d'ordre supérieur.

Les composantes covariantes de ces derniers seront notées $X_{\mu\nu\epsilon\dots}$.

Les indices latins désignent les coordonnées spatiales et les indices grecs désignent les coordonnées spatio-temporelles.

La métrique \mathbf{g} est choisie positive pour les coordonnées spatiales.

$\boldsymbol{\eta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ est la métrique de Minkowski.

La dérivée covariante sera notée ∇ .

On se placera, sauf mention contraire, dans un système d'unités tel que les valeurs numériques de la constante de gravitation et de la célérité de la lumière valent 1.

Les quantités affublées de l'indice 0 désignent leur valeur à $z = 0$.

On notera M_{\odot} la masse solaire et h le nombre tel que $H_0 = 100 \cdot h$ km/s/Mpc

L'ensemble des résultats présentés ci-dessous (et sauf mention contraire) a été obtenu à l'aide de codes C++ et Python rédigés par le candidat utilisant les bibliothèques : `numpy` (Harris et al., 2020), `scipy` (Virtanen et al., 2020), `matplotlib` (Hunter, 2007), `dask` (Rocklin, 2015), `pandas` (Wes McKinney, 2010 ; pandas development team, 2020), `pynverse`¹ - et exécutés avec GNU-Parallel (Tange, 2018).

1. Alvaro Sanchez-Gonzalez, (2016) sur <https://github.com/alvarosg/pynverse>

Table des matières

Résumé	i
Remerciements	ii
Notations	iv
1 Prolégomènes	1
1.1 Relativité générale et principe cosmologique	3
1.1.1 Équations d'Einstein	3
1.1.2 Principe cosmologique et FRLW	8
1.2 Contenu et équations d'état	13
1.2.1 Pression et densité	13
1.2.2 Champ de quintessence	19
1.3 Perturbations	22
1.3.1 Évolution linéaire des surdensités	22
1.3.2 Effondrement sphérique	26
1.3.3 Approximation de Zel'dovich et toile cosmique	28
1.4 Traitement non-linéaire	32
1.4.1 Simulations N -corps	32
1.4.2 Mesure de structuration	37
1.5 Halos de matière noire	42
1.5.1 Définitions et algorithmes de détection	42
1.5.2 Fonction de masse	44
1.5.3 Profils des halos : Succès et échecs des profils sphériques	46

2	La forme des halos de matière noire comme sonde cosmologique	50
2.1	Halos de matière noire dans les simulations Dark Energy Universe . . .	52
2.1.1	Simulations Dark Energy Universe	52
2.1.2	Extraction des halos	55
2.2	Triaxialité des halos de matière noire : aspects méthodologiques . . .	61
2.2.1	Indicateurs de forme	61
2.2.2	Effets de résolution et sous-structures	64
2.2.3	Effets de l'algorithme de détection et isodensités	68
2.2.4	Bilan et constitution du catalogue de halos	71
2.3	Empreinte cosmologique sur la forme des halos	73
2.3.1	Effets en termes de masse	73
2.3.2	Effets en termes de fluctuations linéaires	78
2.3.3	Effets en termes de fluctuations non-linéaires	80
2.3.4	Correspondance	87
2.3.5	Distribution des paramètres de forme et fluctuations non-linéaires	92
2.4	Reconstruction du spectre de puissance	97
2.4.1	Reconstruction de la variance non-linéaire	97
2.4.2	Estimation de σ_8	98
2.4.3	Reconstruction du spectre de puissance	103
2.5	Extensions	105
2.5.1	Projection plane	105
2.5.2	Redshifts Multiples	106
3	Extension aux modèles de gravité modifiée et de neutrinos massifs	108
3.1	Modèle de Hu-Sawicki et simulations	109
3.1.1	Gravité modifiée et énergie noire	109
3.1.2	Simulations DUSTGRAIN-pathfinder	112
3.1.3	Spectres de puissance	114
3.2	Empreinte du modèle de gravité sur la forme des halos	118

3.2.1	Effets en termes de masse	118
3.2.2	Fluctuations non-linéaires	121
3.2.3	Effets de l'écrantage	122
3.2.4	Bilan	126
3.3	Résultats Connexes	127
3.3.1	Correspondance en gravité modifiée	127
3.3.2	Le statut de δ_c	129
4	Profil de forme et cosmologie : l'intelligence artificielle à la rescousse de la physique... et vice et versa	132
4.1	Machine learning : Aspects techniques	136
4.1.1	Arbres de décision : Principe et Agrégation	136
4.1.2	Observables sur les halos de matière noire	141
4.2	Effets spurieux : détection et neutralisation de l'effet Clever Hans	143
4.2.1	Le cas Hans le malin : histoire et leçons	143
4.2.2	Clever Hans primaire	145
4.2.3	Clever Hans complémentaire	149
4.3	Résultats	151
4.3.1	Cadre	151
4.3.2	Résultats sur les attributs	153
4.3.3	Diagnostic statistique	159
4.3.4	L'importance de la mesure dans des ellipsoïdes	167
	Bibliographie	176

Chapitre 1

Prolégomènes

Sommaire

1.1	Relativité générale et principe cosmologique	3
1.1.1	Équations d'Einstein	3
1.1.1.1	Principe d'équivalence et variétés	3
1.1.1.2	Lagrangien d'Einstein-Hilbert et équations du mouvement	5
1.1.2	Principe cosmologique et FRLW	8
1.1.2.1	Principe cosmologique : rasoir d'Occam et observations	8
1.1.2.2	Univers maximalelement symétrique	9
1.2	Contenu et équations d'état	13
1.2.1	Pression et densité	13
1.2.1.1	Tenseur énergie-impulsion de l'observateur comobile d'un fluide parfait barotrope	13
1.2.1.2	Équation de Friedmann	15
1.2.1.3	Équations de Friedmann pour une équation d'état générale	16
1.2.1.4	Histoire thermique	18
1.2.2	Champ de quintessence	19
1.2.2.1	Principe	19
1.2.2.2	Tenseur énergie-impulsion	21
1.3	Perturbations	22
1.3.1	Évolution linéaire des surdensités	22
1.3.2	Effondrement sphérique	26
1.3.3	Approximation de Zel'dovich et toile cosmique	28

1.4	Traitement non-linéaire	32
1.4.1	Simulations N -corps	32
1.4.1.1	Équations de Vlasov - Poisson	32
1.4.1.2	Génération des Conditions initiales	34
1.4.1.3	Intégrateur spatial	35
1.4.1.4	Intégrateur temporel	36
1.4.2	Mesure de structuration	37
1.4.2.1	Statistiques d'ordre deux	37
1.4.2.2	Ordres supérieurs et non-gaussianités	40
1.5	Halos de matière noire	42
1.5.1	Définitions et algorithmes de détection	42
1.5.1.1	Objectif	42
1.5.1.2	Détection avec prior de forme	42
1.5.1.3	Friends of Friends et raffinements	43
1.5.2	Fonction de masse	44
1.5.2.1	Définition et approche de Press Schechter	44
1.5.2.2	Raffinements	45
1.5.3	Profils des halos : Succès et échecs des profils sphériques	46
1.5.3.1	Approche NFW	46
1.5.3.2	Alternatives	48

Nous visons dans ce chapitre à présenter les diverses notions techniques et conceptuelles, ainsi que les notations, dont nous ferons amplement usage dans la suite de notre travail. Nous commencerons par présenter les bases de la relativité générale en section 1.1 et leurs conséquences sur la dynamique d'un fluide cosmologique parfait dans un univers homogène et isotrope. Considérant les différentes équations d'état qui peuvent le caractériser, nous retracerons brièvement l'histoire thermique de l'Univers en section 1.2. Nous nous concentrerons ensuite sur l'époque dominée par la matière et la formation des structures de matière noire, sous l'angle perturbatif d'une part en section 1.3 et sous l'angle pleinement non-linéaire tel qu'accessible par les simulations cosmologiques d'autre part en section 1.4. Nous définirons enfin, dans la section 1.5, ce que nous entendrons par "halos de matière noire" et les différents outils à notre disposition pour en décrire le profil et la distribution. Une analyse détaillée de l'ensemble de ces aspects pourra être trouvée dans les articles de revues et ouvrages de référence (Misner et al., 2018; Mo et al., 2010; Angulo & Hahn, 2022).

1.1 Relativité générale et principe cosmologique

1.1.1 Équations d'Einstein

1.1.1.1 Principe d'équivalence et variétés

Considérons une masse ponctuelle en chute libre dans un champ de pesanteur constant \vec{g} . Isaac Newton, dans ses *Philosophiae naturalis principia mathematica*, établit que

$$m_i \vec{a} = m_g \vec{g}$$

où m_g et m_i désignent respectivement la masse grave et la masse inertielle de l'objet considéré. Newton supposera que ces deux masses coïncident, sur la base des expérimentations de pensée de Galilée, qu'importe la nature de l'objet considéré. C'est le principe d'équivalence faible. Bien que les fondements microscopiques qui justifient cette supposition ne sont pas connus, celle-ci est pourtant vérifiée expérimentalement avec un haut niveau de précision. Dès 1909, Eotvos montre, à l'aide d'un pendule de torsion, que la différence relative entre ces deux quantités ne dépasse pas 10^{-9} (Eötvös et al., 1922). Le satellite MICROSCOPE, lancé en 2016, placera cette contrainte en dessous de 10^{-15} (Touboul et al., 2017, 2022).

Le principe d'équivalence faible énonce que l'accélération subie par l'objet dans un référentiel galiléen est identique au champ de pesanteur qu'il subit. Cela signifie aussi qu'en choisissant un référentiel accéléré, en l'occurrence celui qui est attaché à l'objet en chute libre, l'accélération d'entraînement compense exactement la pesanteur. En d'autres termes, un accéléromètre placé sur l'objet en chute libre mesurera une accélération nulle.

Albert Einstein propose en 1907 de généraliser le principe d'équivalence faible. Le principe d'équivalence d'Einstein (EEP) affirme qu'il n'existe pas d'expérience locale de nature non-gravitationnelle dans un laboratoire en chute libre dont le résultat dépend de la vitesse ou de la position du laboratoire. Les équations du mouvement dans le référentiel attaché au laboratoire en chute libre sont donc identiques à celles de la relativité restreinte. Une généralisation de ce principe existe ; dans la formulation de

[Dicke \(1964\)](#), le principe d'équivalence forte (SEP) énonce que : *dans un laboratoire non-tournant en chute libre, la forme et le contenu numérique des lois locales de la physique*¹ *ne dépend pas de la position du laboratoire dans l'espace et le temps.* Autrement dit², il est toujours impossible de distinguer les effets de la gravitation, des effets d'un changement de référentiel. Il y a, par rapport au principe d'équivalence faible, deux sauts conceptuels intéressants. D'abord, le SEP et le EEP sont formulés en termes locaux : ils ne s'appliquent pas seulement en un point donné, mais dans un voisinage de celui-ci. Des formulations alternatives "ponctuelles" existent ([Ohanian, 1977](#) ; [Knox, 2013](#)). Ensuite, ces deux principes d'équivalence sont valides pour des champs de gravité quelconques, y compris non uniformes (il faudra alors que le gradient du champ gravitationnel soit négligeable à l'échelle du laboratoire, voir [Dicke \(1964\)](#)). Cela signifie que la gravitation est purement géométrique : il existe toujours, pour un objet en chute libre, un référentiel *local* dans lequel les équations du mouvement ne font pas intervenir le champ de gravitation ambiant. Ainsi, les équations du mouvement dans ce référentiel sont identiques à celles obtenues dans le cadre de relativité restreinte. En conséquence, et comme relevé par [Weinberg \(1972\)](#), pour un objet ponctuel en chute libre (en l'absence d'autres forces), en tout point de sa trajectoire, il doit exister un système de coordonnées (e^μ) tel que

$$\frac{d^2 e^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (1.1)$$

Ici, τ désigne le temps propre de la particule $d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} de^\mu de^\nu$, avec $\eta_{\mu\nu}$ la métrique de Minkowski. On peut alors en déduire les équations du mouvement dans un système de coordonnées quelconque, $x^\alpha = x^\alpha(e^\mu)$ (on considèrera que cette transformation est un C^2 difféomorphisme). Dans cet autre système de coordonnées, par application de la règle de dérivation en chaîne, il apparaît que $\frac{de^\mu}{d\tau} = \frac{\partial e^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ et

$$\frac{d^2 e^\mu}{d\tau^2} = \frac{\partial e^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 e^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$

1. C'est-à-dire le résultat de *toute* expérience locale, impliquant des particules massives ou non

2. On se reportera par exemple à [Will \(2014\)](#) pour une comparaison entre ces deux principes et une formulation précautionneuse de ceux-ci.

dont le membre gauche s'annule. Ensuite, en multipliant par $\frac{\partial x^\gamma}{\partial e^\mu}$, on a

$$\frac{d^2 x^\gamma}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 e^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{\partial x^\gamma}{\partial e^\mu} = 0 \quad (1.2)$$

Enfin, dans ce système de coordonnées, l'intervalle infinitésimal d'espace-temps prend la forme :

$$d\tau^2 = \left(\eta_{\mu\nu} \frac{\partial e^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial e^\nu}{\partial x^\beta} \right) dx^\alpha dx^\beta$$

Si l'on note $g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial e^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial e^\nu}{\partial x^\beta}$, on a

$$\frac{\partial^2 e^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial e^\mu} = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\delta} \right) \equiv \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$$

L'équation du mouvement est donc

$$\frac{d^2 x^\gamma}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (1.3)$$

C'est exactement l'équation des géodésiques sur une variété Lorentzienne de métrique \mathbf{g} , équipée de la connexion de Levi-Civita. Ceci nous conduit à considérer que les variétés métriques (suffisamment lisses) constituent la structure minimale adaptée à la vérification des principes d'équivalence (et de la relativité restreinte). L'espace-temps sera donc décrit globalement par une variété $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, canoniquement équipée de la connexion de Levi-Civita. L'objet en chute libre en suivra les géodésiques.

Réciproquement, toute variété métrique est, en tout point, localement isomorphe à \mathbb{R}^d . Donc, il existe un système de coordonnées tel que la métrique et la connexion se confondent en ce point avec celles de l'espace-temps de Minkowski³. Cela garantit que le principe d'équivalence d'Einstein est vérifié dans ces théories métriques.

1.1.1.2 Lagrangien d'Einstein-Hilbert et équations du mouvement

Dans toute la suite, on considère que l'espace-temps est une variété lisse \mathcal{M}_4 de dimension $d = 4$, de métrique \mathbf{g} et munie de la connexion de Levi-Civita. Il nous faut

3. Ce sont les coordonnées de Fermi

donc maintenant expliquer comment la matière et l'énergie (non gravitationnelle) déterminent la métrique. Nous suivrons l'approche variationnelle de Hilbert ([Hilbert, 1915](#); [Einstein, 1916](#)).

Le principe de *covariance généralisée* impose que les lois de la Nature puissent être exprimées indépendamment du système de coordonnées choisies. Il doit donc exister une formulation tensorielle des équations du mouvement, et le lagrangien dont elles dérivent doit être un scalaire. Soit \mathcal{L}_m la densité lagrangienne associée à la matière et aux forces non gravitationnelles qui en régissent les interactions. L'action correspondante sera $S_m = \int_{\mathcal{M}_4} dx^4 \sqrt{|\det \mathbf{g}|} \mathcal{L}_m$, où $dx^4 \sqrt{|\det \mathbf{g}|}$ est l'élément de volume (invariant par changement de coordonnées) de la variété. Supposons que la gravité est couplée minimalement à la matière : l'action totale est alors $S_{grav} + S_m$. La partie gravitationnelle S_{grav} prendra également la forme suivante

$$\int_{\mathcal{M}_4} dx^4 \sqrt{|\det \mathbf{g}|} \mathcal{L}_{EH}$$

où la densité lagrangienne \mathcal{L}_{EH} est un scalaire purement gravitationnel, donc géométrique : il ne peut dépendre que de la métrique et ses dérivées.

Par analogie avec les équations de Newton⁴, le Lagrangien ne peut dépendre que de la métrique, ses dérivées premières, et ses dérivées secondes. Ostrogradski a prouvé que l'Hamiltonien d'une théorie dont le Lagrangien présente des dérivées d'ordre deux en temps, n'admet pas de borne inférieure finie ; la théorie présenterait alors une instabilité (au niveau classique). Le fait est que si la dérivée seconde du Lagrangien peut être "éliminée" par intégration par parties, alors le théorème d'Ostrogradski n'est plus vérifié. Cela ne peut arriver que si la dépendance du Lagrangien dans les dérivées secondes est, au plus, linéaire.

Hermann Vermeil, assistant de Weyl, montre en 1917 ([Vermeil, 1917](#)) que les seuls scalaires qui dépendent de la métrique, de ses dérivées premières, et linéairement de ses dérivées secondes, sont la courbure scalaire de Ricci R , et les constantes. En notant κ^2 la constante de couplage, la densité lagrangienne associée à la relativité générale

4. voir aussi [Navarro \(2014\)](#)

doit donc prendre la forme :

$$\frac{1}{2\kappa^2} (R - 2\Lambda)$$

avec Λ une constante (qui sera plus tard qualifiée de "cosmologique").

En faisant varier l'action totale par rapport à la métrique $g_{\mu\nu}$, Hilbert obtient les équations du mouvement de la théorie

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (1.4)$$

Ici,

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (1.5)$$

est le tenseur énergie-impulsion, qui dépend directement du Lagrangien de matière. Il peut être vu comme le courant de Noether associé aux variations de l'espace-temps. D'ailleurs, la définition même de \mathbf{T} comme la variation d'un scalaire (i.e. une quantité invariante sous les difféomorphismes) implique l'équation de conservation $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Nous verrons dans la section 1.2 la forme que \mathbf{T} adopte pour un fluide parfait.

A ce stade, deux remarques s'imposent. D'abord, la variation du scalaire de Ricci R nécessite de supposer que la variation de la dérivée première de la métrique s'annule au bord de la variété, ∂M , tant que cette dernière n'est pas à la fois compacte et sans bord. Gibbons, Hawking et York, ([York, 1972](#) ; [Gibbons & Hawking, 1977](#)), ajoutent au Lagrangien gravitationnel un terme de bord (une intégrale sur ∂M) qui permet de se passer de cette hypothèse, et donc de disposer d'un principe variationnel bien défini ([Dyer & Hinterbichler, 2009](#)). Par ailleurs, la détermination de la constante de couplage provient de la nécessité de retrouver les équations de Newton dans l'approximation des champs faibles et lents⁵. Il apparaît alors (voir par exemple [Misner et al. \(2018\)](#)) que $\kappa^2 = 8\pi Gc^{-4}$.

Réciproquement, si l'on suppose que les équations du mouvement s'écrivent $\mathbf{G} = \kappa^2 \mathbf{T}$, avec \mathbf{G} un certain tenseur qui ne dépend que de la métrique alors \mathbf{G} doit être, lui

⁵. et en négligeant complètement Λ . Autrement, l'équation de Newton en r^{-2} ne pourrait pas être retrouvée.

aussi, à divergence nulle. David Lovelock⁶ montre (Lovelock, 1971, 1972) que le seul tenseur dépendant de la métrique et de ses dérivées jusqu'à l'ordre 2, à divergence nulle, dans une variété de dimension 4, est de la forme $\alpha R_{\mu\nu} + \beta g_{\mu\nu}$. Ceci peut être vu comme un *no-go theorem* : pour s'écarter de la relativité générale, il faudra donc raisonner dans des espaces de dimension supérieure, modifier la nature du couplage avec la matière ou encore ajouter des degrés de libertés (dérivées d'ordre supérieur) dans les équations du mouvement. C'est cette dernière possibilité qui sera explorée dans les théories $f(R)$ (voir section 2.1). Un grand nombre de ces théories alternatives, échappant aux hypothèses du théorème de Lovelock, peuvent être reformulées en tant que théories scalaire-tenseur à quatre dimensions (Horndeski, 1974; Clifton et al., 2012).

1.1.2 Principe cosmologique et FRLW

1.1.2.1 Principe cosmologique : rasoir d'Occam et observations

Le rasoir d'Occam enjoint, pour toute théorie scientifique, à choisir les options les plus simples, c'est-à-dire faisant intervenir le moins d'entités. S'il est appliqué à la cosmologie, nous n'occupons pas de place⁷ particulière dans l'Univers. Celui-ci est donc nécessairement homogène. Plus généralement, le principe cosmologique ajoute l'hypothèse d'isotropie. Bien entendu, le moindre coup d'œil au ciel étoilé confirme que ce n'est pas le cas : il est peuplé d'une multitude d'étoiles qui définissent autant de points et de directions privilégiés. Il nous faut donc formuler le principe cosmologique de manière plus précautionneuse, en disant qu'il existe une échelle de distance caractéristique au-delà de laquelle les structures ne sont que de *petites* fluctuations par rapport à un fond homogène et isotrope. Il va sans dire que cette affirmation ne peut être valable pour *tous* les observateurs. En effet, si l'un d'entre eux observe, depuis sa position dans le temps et l'espace, un champ statique homogène et isotrope, son alter-ego en translation rectiligne uniforme par rapport à lui constaterait néces-

6. voir aussi Navarro & Navarro (2011)

7. au sens de la position dans l'espace

sairement l'existence d'une direction privilégiée dans le mouvement de ce champ. De plus, il doit exister une foliation temporelle de l'espace-temps Σ_t , puisque, pour pouvoir parler d'homogénéité et d'isotropie *en un temps donné*, il faut pouvoir découper l'espace-temps en surfaces de genre espace (Weinberg, 1972). En somme, le principe cosmologique implique l'existence d'une *classe d'observateurs fondamentaux* en chute libre tels que :

- Par homogénéité, leurs lignes d'espace-temps u^μ sont, en chaque point, orthogonales à la surface Σ_t . En d'autres termes, en notant ∂_t la normale à Σ_t (à l'intersection avec la ligne d'espace-temps des observateurs fondamentaux), et ∂_{x^i} une base orthonormée de l'espace tangent à Σ_t (en ce point), les vecteurs u^μ sont orthogonaux aux ∂_{x^i} , et donc colinéaires à ∂_t . En choisissant, la 4-vitesse u^μ normée $u^\mu u_\mu = -1$, on a $u^\mu = \partial_t$.
- Par isotropie, il est impossible de construire un vecteur tangent préférentiel de Σ_t (orthogonal à u^μ) : pour deux vecteurs tangents de Σ_t donnés en un point P donné par lequel passe la ligne d'espace-temps d'un observateur fondamental, il existe une isométrie de l'espace-temps transformant le premier vecteur en le second, sans modifier u^μ ou P.

1.1.2.2 Univers maximalelement symétrique

Il nous faut maintenant déterminer la métrique d'un espace-temps respectant le principe cosmologique.

Grâce au système de coordonnées adapté à la foliation, (t, x^i) , on peut écrire la métrique sous la forme :

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{0i}dt dx^i + \gamma_{ij}dx^i dx^j \quad (1.6)$$

Pour commencer, on peut remplacer la coordonnée temporelle t par le temps propre des observateurs fondamentaux (c'est cette nouvelle coordonnée temporelle qui sera dorénavant nommée t). On a ainsi $g_{00} = -1$. En outre, par hypothèse d'homogénéité, les ∂_{x^i} sont orthogonaux à ∂_t et donc $g_{0i} = 0$. Enfin, par hypothèse d'isotropie, la

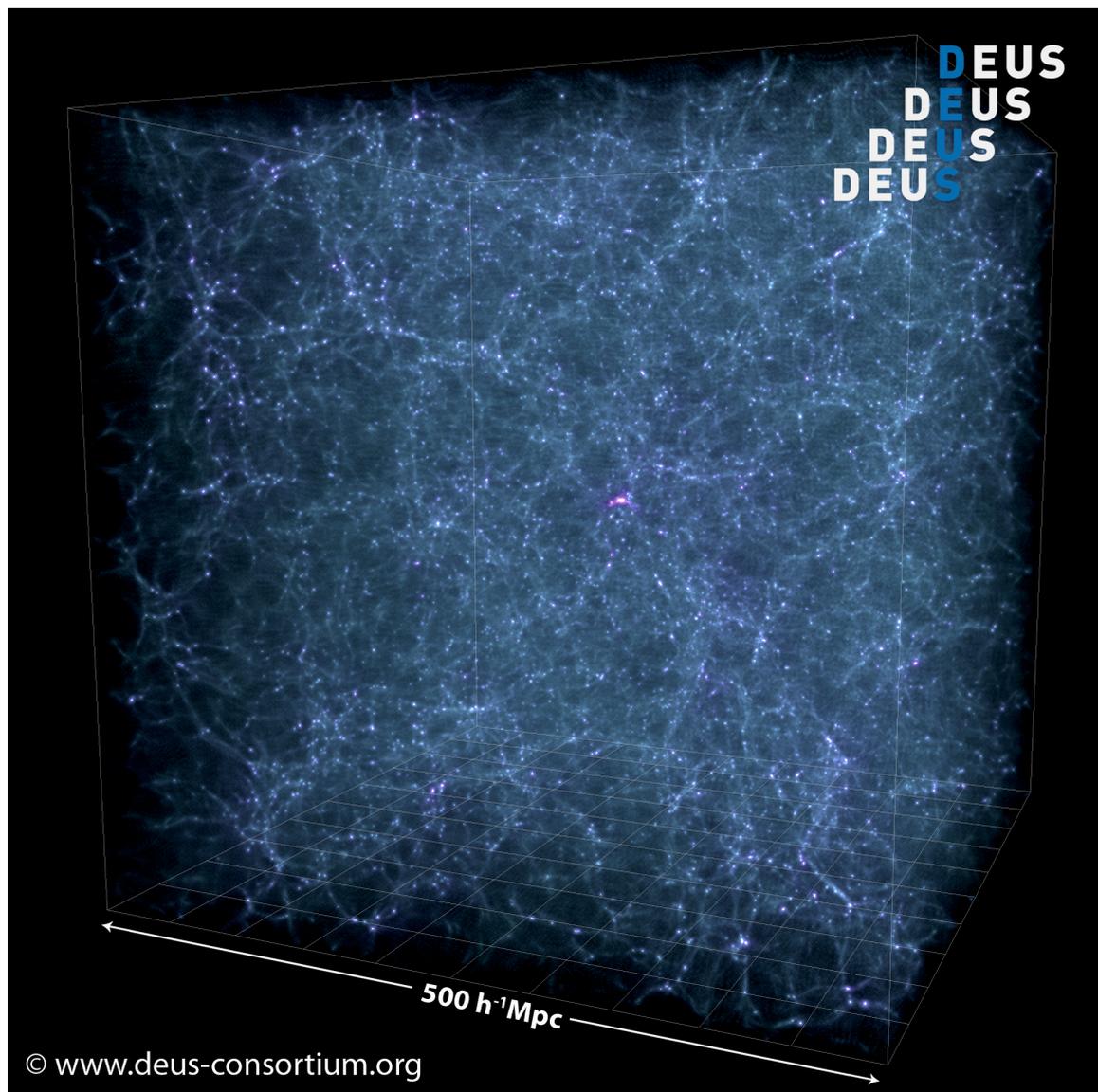


Figure 1.1 – Cube de $500 \text{ Mpc}/h$ à $z = 0$ issu des simulations Dark Energy Universe. Sur ces "grandes échelles", la distribution de matière semble très homogène (et isotrope), ce qui suggère une bonne vérification du principe cosmologique à ces échelles.

métrique γ_{ij} est proportionnelle (à t donné) à celle d'une sphère; il existe $a^2(t)$ et $\lambda^2(r)$ tels que

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = a^2(t) [\lambda^2(r) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

La sous variété décrite par la métrique $[\lambda^2(r) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$ est homogène et isotrope donc maximalelement symétrique. Cela contraint sévèrement sa forme (Misner et al., 2018; Weinberg, 1972) : il existe un réel K , que nous appellerons courbure spatiale, tel que

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (1.7)$$

Pour $K = 0$, la géométrie est dite plate (les sections t constant sont de simples plans). Pour $K > 0$, la géométrie est fermée et donc de type sphérique. Pour $K < 0$ elle est hyperbolique. Ce sont les espaces de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FRLW).

Le scalaire de Ricci des espaces FRLW est, par calcul direct,

$$R = -6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} \right) \quad (1.8)$$

Enfin, $a(t)$ est le facteur d'échelle, que l'on peut toujours normaliser pour qu'il soit unitaire au temps présent $a^2(t_0) = 1$. Il décrit l'expansion de l'Univers. En effet, la distance physique qui sépare deux objets infinitésimalement éloignés l'un de l'autre est

$$dl^2 = a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right)$$

Cela signifie, qu'en l'absence de toute force entre les deux objets, ceux-ci s'éloignent l'un de l'autre "emportés" par l'expansion de l'Univers. Ainsi, on peut définir χ , la distance comobile entre deux points, comme la distance "constante" qui sépare deux

objets⁸ en chute libre, et on a :

$$dl^2 = a^2(t)d\chi^2 \quad (1.9)$$

Pour deux objets dont la distance physique est la distance radiale r , on a alors $d\Omega^2 = 0$, d'où

$$\chi = \int_0^r \frac{dr'}{1 - Kr'^2} \quad (1.10)$$

ce qui vaut pour $K \in \mathbb{R}_+, \{0\}, \mathbb{R}_-$ respectivement :

$$\sqrt{|K|^{-1}}\arcsin \sqrt{|K|r}, r, \sqrt{|K|^{-1}}\operatorname{arcsinh} \sqrt{|K|r}$$

Ainsi, on peut intégrer l'équation 1.9 : $l = a\chi$.

Aussi, nos deux objets s'éloignent l'un de l'autre à la vitesse :

$$\dot{l} = \dot{a}\chi = \dot{a}l/a \quad (1.11)$$

Le flot de Hubble, $H = \dot{a}/a$, quantifie donc la vitesse acquise par les objets du fait de l'expansion de l'Univers. Ainsi, la vitesse d'un objet pourra toujours être décomposée en un terme radial $\mathbf{v}_{\text{flot}} = H\mathbf{r}$ et un terme de vitesse particulière (indépendante de l'expansion de l'Univers). Dans les cas où la seconde est négligeable devant la première, on aura une relation de proportionnalité entre la vitesse de récession de l'objet et sa distance par rapport à l'observateur. La constante de proportionnalité sera, en $t = t_0$, $H(t_0) \equiv H_0$. C'est la loi de Hubble.

Considérons un photon suivant les géodésiques de l'espace-temps FRLW. Si sa longueur d'onde est initialement $\lambda(t_i)$, l'expansion de l'Univers la dilatera de sorte que nous la mesurerons comme valant $\lambda(t_0)$. Nous pouvons écrire que :

$$\frac{a(t_0)}{a(t_i)} = \frac{\lambda(t_0)}{\lambda(t_i)} \quad (1.12)$$

8. infinitésimalement proches

où $a(t_0) = 1$. Le décalage vers le rouge subit par ce photon sera donc

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda(t_i)} = \frac{1}{a(t_i)} - 1 \quad (1.13)$$

1.2 Contenu et équations d'état

1.2.1 Pression et densité

1.2.1.1 Tenseur énergie-impulsion de l'observateur comobile d'un fluide parfait barotrope

Intéressons-nous à un fluide homogène, isotrope et parfait : il n'y a pas de conduction de chaleur ni de contrainte anisotrope. On appelle π sa masse volumique au repos, et ϵ l'énergie interne (élastique⁹) du fluide. L'énergie potentielle du fluide est donc $\rho = \pi(1 + \epsilon)$. Ainsi, pour ce fluide, $\mathcal{L}_m = -\pi(1 + \epsilon)$. On considère que ce fluide est isentrope : $\epsilon = \epsilon(\pi)$. La pression¹⁰ du fluide sera donnée par $P = \pi^2 d\epsilon/d\pi$. En appelant u^μ la quadri-vitesse normalisée ($u^\mu u_\mu = -1$) d'un élément de fluide, le courant de masse est $j^\mu = \pi u^\mu$.

Pour construire le tenseur énergie-impulsion de ce fluide, tel que défini dans l'équation 1.5, nous allons étudier les variations de \mathcal{L}_m sous l'effet d'une transformation infinitésimale $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$. Nous suivrons en cela [Hawking & Ellis \(1973\)](#).

L'équation de conservation de la masse indique que $\nabla_\mu(\pi u^\mu) = 0$. Il est classique de réécrire les divergences covariantes avec des dérivées partielles :

$$\nabla_\mu(\pi u^\mu) = (-g)^{-1/2} \partial_\mu(\sqrt{-g} \pi u^\mu)$$

où g est le déterminant de la métrique. Ainsi, la quantité $\sqrt{-g} \pi u^\mu$ est conservée le long des lignes de fluide et est donc invariante par transformation de la métrique.

9. Le fait que ce ne soit pas un tenseur ϵ_{ij} provient de l'isotropie.

10. Là encore un scalaire, pas un tenseur de contrainte, du fait de l'isotropie.

On peut alors écrire

$$\pi^2 = (\sqrt{-g}\pi u^\mu)(\sqrt{-g}\pi u^\nu)g^{-1}g_{\mu\nu}$$

Et donc :

$$2\pi\delta\pi = (\sqrt{-g}\pi u^\mu)(\sqrt{-g}\pi u^\nu) (\delta(g^{-1})g_{\mu\nu} + g^{-1}\delta g_{\mu\nu}) \quad (1.14)$$

En utilisant l'identité classique

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

il apparaît que

$$\delta(g^{-1}) = -\frac{\delta g}{g^2} = g^{-1}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

L'équation 1.14 devient donc :

$$2\delta\pi = \pi(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu)\delta g^{\mu\nu}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_m &= -(1 + \epsilon)\delta\pi - \pi\frac{d\epsilon}{d\pi}\delta\pi \\ &= -\frac{1}{2}(\rho + P)(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu)\delta g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Puisque

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} = -2\left(\delta\mathcal{L}_m + \frac{\rho}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right)$$

le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait dans un référentiel quelconque est donc :

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} \quad (1.15)$$

Dans toute la suite, on considèrera que l'Univers *de fond* est constitué d'une somme de fluides parfaits de pression et d'énergie au repos respectives ρ_i, P_i , n'interagissant pas ensemble. Nous allons voir comment les équations d'Einstein contraignent l'évolution temporelle de ces quantités.

1.2.1.2 Équation de Friedmann

Connaissant la métrique FRLW, il est bien sûr possible de calculer les composantes du tenseur d'Einstein associé $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$, que nous égaliserons aux composantes du tenseur énergie-impulsion d'une somme de fluides parfaits. Nous ignorerons provisoirement la constante cosmologique dans le membre de gauche de l'équation d'Einstein. Nous la réintroduirons ultérieurement, en tant que fluide cosmologique d'équation d'état négative.

Les éléments du tenseur d'Einstein associés à la métrique FRLW sont :

$$G_{tt} = 3 \left(H^2 + \frac{K}{a^2} \right) \quad G_{rr} = -a^2 \left(H^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{K}{a^2} \right) \frac{1}{1 - Kr^2}$$

$$G_{\theta\theta} = -a^2 \left(H^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{K}{a^2} \right) r^2 \quad G_{\phi\phi} = -a^2 \left(H^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{K}{a^2} \right) r^2 \sin^2 \theta$$

les autres composantes s'annulant.

La composante tt des équations d'Einstein $\mathbf{G} = \kappa^2 \mathbf{T}$, mène à la première équation de Friedmann :

$$H^2 = -\frac{K}{a^2} + \frac{\kappa^2}{3} \sum_i \rho_i \quad (1.16)$$

Les composantes spatiales mènent toutes à l'équation de Raychaudhuri :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6} \sum_i (\rho_i + 3P_i) \quad (1.17)$$

En dérivant l'équation de Friedmann et en la combinant avec l'équation de Raychaudhuri, on obtient :

$$\sum_i \dot{\rho}_i + 3H \sum_i (\rho_i + P_i) = 0 \quad (1.18)$$

Cette dernière équation aurait pu être obtenue à partir de l'équation de conservation de matière $\nabla_\mu T^\mu = 0$. C'est, en ce sens, une équation de continuité. Si les différents fluides n'interagissent pas ensemble, alors l'équation de conservation est vérifiée pour

chaque espèce $\nabla_\mu T_i^\mu = 0$ et il est donc possible de découpler l'équation 1.18 :

$$\dot{\rho}_i + 3H(\rho_i + P_i) = 0 \quad (1.19)$$

Plus précisément, nous dirons que deux espèces i et j sont découplées si leur taux d'interaction τ_{ij} est très faible devant H . Dans ce cas, l'espace se dilue trop vite pour que les collisions entre composants microscopiques de chaque espèce aient lieu suffisamment fréquemment. Le fluide i ne connaît donc pas d'apport de chaleur δQ et évolue sans variation d'entropie. Puisque ρ_i est l'énergie volumique au repos du fluide, et qu'un élément de fluide de volume unitaire à t_0 , occupera en t un volume $a^3(t)$, la dynamique d'expansion induit une variation de volume et donc un travail : $d(\rho_i a^3) = -P_i d(a^3)$. Ainsi,

$$a^3 \frac{d\rho_i}{dt} + 3a^2 \rho_i \frac{da}{dt} = -3P_i a^2 \frac{da}{dt}$$

ce qui est exactement l'équation 1.19. Cette application simple de la première loi de thermodynamique fournit donc une troisième interprétation de l'équation de continuité.

On a mentionné plus haut le fait que deux espèces sont nécessairement découplées si leur taux de collisions mutuelles est faible devant H . A l'inverse, pour garantir la validité du calcul précédent, il faut que l'évolution de l'espèce i soit adiabatique réversible, c'est-à-dire qu'elle se trouve en "tout temps". Plus précisément il faut que τ_{ii} soit très grand devant H . Retracer l'histoire thermique de l'Univers consiste (Piattella, 2018) à établir l'évolution de l'abondance d'une espèce cosmologique donnée, entre le moment où elle est couplée à un plasma primordial (dans lequel toutes les espèces sont à l'équilibre), jusqu'au moment où elle s'en découple $\tau_{ii} \sim H$.

1.2.1.3 Équations de Friedmann pour une équation d'état générale

Pour pouvoir résoudre l'équation de continuité (en temps) et connaître la loi d'évolution du facteur d'échelle, il est nécessaire de connaître une autre relation liant ρ_i et P_i . On appelle équation d'état du fluide i la quantité, éventuellement dépendante du

temps (mais homogène, comme le fluide lui-même) :

$$w_i = P_i/\rho_i \quad (1.20)$$

En notant ρ_{i0} l'énergie du fluide i au temps présent $t = t_0$, l'équation de continuité admet alors comme solution :

$$\rho_i = \rho_{i0} \exp \left(-3 \int_{t_0}^t H(t) (1 + w_i(t)) dt \right) \quad (1.21)$$

ce qui, après injection dans l'équation de Friedmann, renvoie :

$$H^2 = -\frac{K}{a^2} + \frac{\kappa^2}{3} \sum_i \rho_{i0} \exp \left(-3 \int_{t_0}^t H(t) (1 + w_i(t)) dt \right) \quad (1.22)$$

Il est d'usage d'introduire les paramètres de densité adimensionnée :

$$\Omega_i = \frac{\kappa^2 \rho_i}{3H^2}$$

Pour le terme de courbure spatiale, il vaudra

$$\Omega_K = \frac{-K^2}{a^2 H^2}$$

Ainsi, l'équation de Friedmann prend la forme compacte

$$1 = \Omega_K + \sum_i \Omega_i$$

ou, si l'on veut faire figurer explicitement la variation en temps :

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{K0} a^{-2} + \sum_i \Omega_{i0} \exp \left(-3 \int_{t_0}^t H(t) (1 + w_i(t)) dt \right) \quad (1.23)$$

Pour de la matière baryonique ou de la matière noire (froide), la pression est négligeable et on a $w_m = 0$. Ainsi, à partir de l'équation 1.21, $\rho_m = \rho_{m0} a^{-3}$.

Pour les photons (et la matière relativiste), un résultat classique de mécanique sta-

tistique¹¹ est $w_r = 1/3$. On a donc $\rho_r = \rho_{r0}a^{-4}$.

Le cas de la constante cosmologique peut également être traité dans le cadre de ce formalisme. En effet, si l'on veut voir celle-ci comme un fluide parfait, il faut chercher ρ_Λ et P_Λ tels que

$$-\Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 ((\rho_\Lambda + P_\Lambda)u_\mu u_\nu + P_\Lambda g_{\mu\nu})$$

En multipliant cette dernière équation par u^ν et par $g^{\mu\nu}$, on obtient que $\rho_\Lambda = \Lambda\kappa^{-2}$ et $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Ainsi, $w_\Lambda = -1$. Dans l'équation de Raychaudhuri, la constante cosmologique est à la source du seul terme positif $-\frac{\kappa^2}{6}(\rho_\Lambda + 3P_\Lambda)$; ce sont uniquement les fluides tels que $w_i < -1/3$ qui contribuent positivement à \ddot{a} . En ce sens, la constante cosmologique est responsable de l'accélération de l'expansion de l'Univers. Toute source d'énergie dont l'équation d'état vérifie, à un moment donné, cette condition sera nommée dans la suite "énergie noire".

Dans la suite, on considèrera, pour simplifier, que la courbure spatiale est négligeable ($H_0^2 \gg K$), ou encore, $K = 0$.

1.2.1.4 Histoire thermique

Les évolutions temporelles des ρ_i nous invitent à considérer trois ères différentes : une première ère, post Big-Bang, pendant laquelle c'est la radiation qui domine. On a donc à cette époque $(\dot{a})^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho_{r0}a^{-2}$, et donc¹² $a(t) = \sqrt{A + \frac{\kappa^2}{6}\rho_{r0}t}$. Lorsque l'Univers croît, il refroidit peu à peu, jusqu'à ce qu'aux alentours de $T \approx 3000$ K il soit suffisamment froid pour que les électrons se combinent aux noyaux, laissant libre champ aux photons pour se propager. C'est l'émission du fond diffus cosmologique (CMB), nous apparaissant aujourd'hui comme un corps noir de température 3 K, très homogène et isotrope¹³ (figure 1.2). La densité d'énergie associée à la radiation

11. Pour l'obtenir, il suffit de partir de la distribution de Bose-Einstein, en fonction de laquelle on exprime l'énergie et la pression du fluide de photons.

12. La constante A peut être ignorée si l'on impose que $a(0) = 0$.

13. A vrai dire, les mesures sur le CMB indiquent l'existence d'une direction privilégiée (un dipôle) classiquement attribuée au fait que le système solaire n'est pas tout à fait en chute libre par rapport au fond diffus cosmologique. La question de savoir si cette anisotropie manifeste ne doit pas plutôt conduire à la remise en cause du principe cosmologique est abondamment discutée : [Secrest et al. \(2021, 2022\)](#); [Kumar Aluri et al. \(2023\)](#)

décroissant très rapidement, cette ère du rayonnement est supplantée par une ère dominée par la matière, et donc, par un raisonnement similaire, $a(t) \propto t^{2/3}$. La densité de matière, décroissant en $1/a^3$, perdra de sa prédominance pour laisser place à une ère dominée par la constante cosmologique. Pendant celle-ci, H^2 est constant puisque seul le terme $\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0}$ survit dans l'équation de Friedmann. Ainsi, $a(t)$ croît exponentiellement pendant cette ère : $a(t) \propto e^{Ht}$. On parle d'espace De Sitter.

Le modèle standard de la cosmologie Λ CDM est décrit par six paramètres indépendants : la densité présente de matière noire Ω_{cdm0} , de baryons Ω_b , la profondeur optique de la réionisation τ , l'amplitude et la pente du spectre de puissance initial A_s et n_s , et enfin l'ouverture angulaire de l'horizon acoustique à l'époque du CMB θ_{MC} . De ces paramètres, il est possible d'extraire les autres paramètres d'intérêt comme la constante de Hubble H_0 , la densité de matière totale $\Omega_m = \Omega_{cdm} + \Omega_b$ ou encore la variance lissée à $R = 8 \text{ Mpc}/h$ du spectre de puissance linéaire à $z = 0$.

1.2.2 Champ de quintessence

1.2.2.1 Principe

L'existence de l'énergie noire en tant que constante cosmologique soulève de nombreux problèmes. Le premier d'entre eux est le statut physique à accorder à cette constante dimensionnée : ce n'est pas un couplage entre les termes du Lagrangien, ni un comportement limite de la gravité¹⁴. De plus, $\rho_{\Lambda 0}/\rho_{m0} = O(1)$ alors que ce n'était pas le cas aux redshifts élevés (où la matière dominait largement). La question de savoir pourquoi cela se produit justement à proximité de $z = 0$ est désignée sous le terme de problème de la coïncidence. Enfin, la valeur de Λ est très faible ($\rho_{\Lambda 0} = 2.5 \cdot 10^{-47} \text{ GeV}^4$) : non seulement la faiblesse de cette constante laisse supposer l'existence d'un mécanisme d'ajustement fin, mais elle entre de plus en totale contradiction avec les prédictions de la théorie quantique des champs pour l'énergie du vide (les *cutoffs* les plus stricts prévoient $\rho_{vac} = 10^8 \text{ GeV}^4$ (Martin, 2012)).

14. Nous reprenons ici là l'argument de Bouillot (2012)

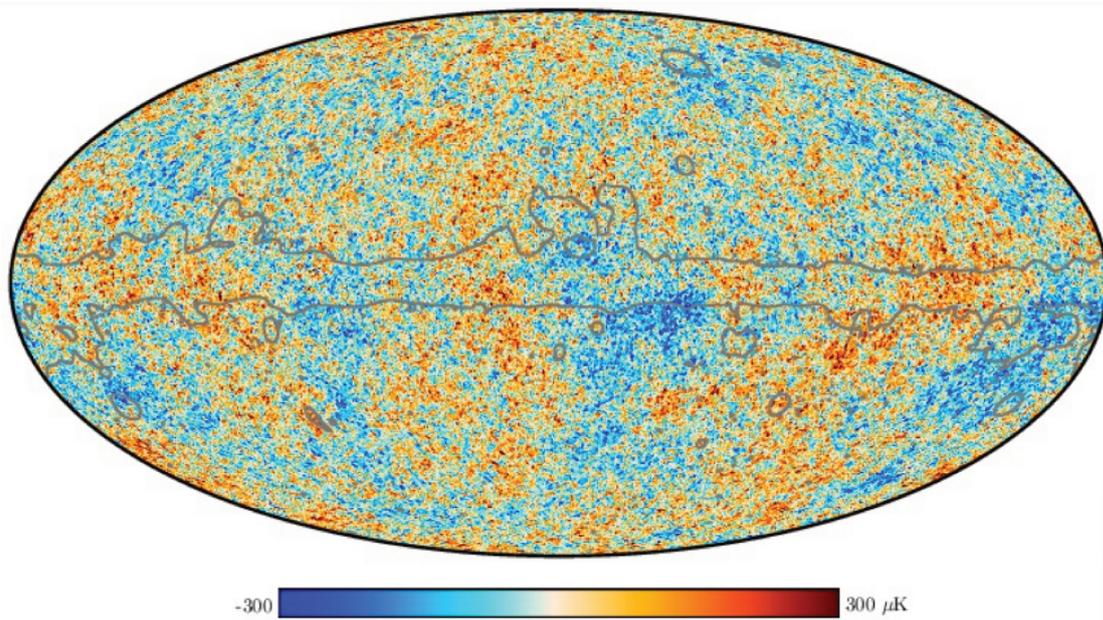


Figure 1.2 – Carte de température du fond diffus cosmologique obtenue par la mission Planck 2018 (Planck Collaboration et al., 2020). La température moyenne est d'environ $3K$ de sorte que les fluctuations de température $\Delta T/T$ sont de l'ordre de 10^{-5} . Ceci permet de montrer qu'aux temps reculés de la recombinaison, le principe cosmologique était vérifié de façon très satisfaisante. Il le sera donc à tout temps pour des échelles suffisamment grandes. (On notera que l'anisotropie liée au référentiel terrestre qui n'est pas parfaitement comobile, le dipôle solaro-orbital, a été corrigée.)

Avant de présenter le modèle alternatif de la quintessence, il semble important d'insister sur le fait que les difficultés soulevées par la constante cosmologique sont d'ordre *théorique* (recollement avec la physique microscopique, problème de coïncidence...) : les contraintes fortes sur la gravitation issues des mesures dans le système solaire, ne contredisent en rien l'existence (ou l'absence) d'une constante cosmologique. Il faudrait que cette dernière vaille 10^{15} fois sa valeur pour contrevvenir à la limite sur l'énergie du vide imposée par l'avance du périhélie de Mercure (Martin, 2012). Il s'agit donc de proposer des *mécanismes* d'ajustement de l'énergie du vide pour arriver à la faible valeur actuelle sans ajustement fin (*ad-hoc*) des variables et/ou pour expliquer le problème de la coïncidence.

L'une des possibilités évoquées consiste à remplacer la constante cosmologique par un champ ϕ , de lagrangien :

$$\mathcal{L}_\Lambda = \frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \phi - V(\phi)$$

Ce dernier est couplé minimalement au lagrangien de la relativité générale et ce champ de *quintessence* vérifie l'équation de Klein-Gordon :

$$\partial_{tt}\phi + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (1.24)$$

1.2.2.2 Tenseur énergie-impulsion

A partir du Lagrangien, il est possible de calculer la contribution du champ ϕ au tenseur énergie-impulsion, ce qui mène à

$$w_\phi = \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 + V(\phi)} \quad (1.25)$$

Le potentiel doit être tel que $\frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 \ll V(\phi)$ de sorte à retrouver, approximativement, le comportement de la constante cosmologique $w = -1$.

Il existe une classe de potentiels, appelés *traqueurs*, tels que l'évolution de ρ_ϕ se synchronise rapidement avec l'évolution de ρ_{rad} . À partir de l'époque d'égalité matière-

radiation, ρ_ϕ devient constant et on retrouve le comportement de la constante cosmologique. Autrement dit, la solution des équations d'évolution du champ de quintessence est un attracteur, de sorte que le comportement de ρ_ϕ devient indépendant des conditions initiales. Sous réserve de choisir un tel potentiel, il est alors possible de résoudre le problème de la coïncidence (Steinhardt, 2003) : le champ d'énergie noire domine non pas parce que ses valeurs initiales sont ajustées telles que $\rho_\Lambda(z=0)$ soit comparable à $\rho_{m,0}$, mais plutôt parce que son *comportement* est intrinsèquement contraint à être celui d'une constante cosmologique après l'égalité matière-radiation. Le potentiel de Ratra-Peebles (Ratra & Peebles, 1988 ; Peebles & Ratra, 1988) $V(\phi) = \lambda^{\alpha+4}\phi^{-\alpha}$, avec $\alpha \geq 0$, est un exemple de traqueur.

1.3 Perturbations

1.3.1 Évolution linéaire des surdensités

Le CMB présente de légères fluctuations en température (et donc en densité) de l'ordre de $\Delta T/T \sim 10^{-5}$. Ces surdensités sont le germe de la structuration de l'Univers : en s'effondrant sur elles-mêmes, les fluctuations vont croître et donner naissance, à terme, aux halos de matière noire ainsi qu'aux autres grandes structures de l'Univers (filaments, murs... etc.). Ceux-ci seront, à leur tour, le point d'ancrage de la croissance (gravitationnelle et radiative) des structures baryoniques telles que les galaxies et les amas.

La dynamique d'évolution des surdensités est, comme nous allons le voir, inaccessible avec des outils purement analytiques. Pour obtenir des prédictions quantitatives sur l'effondrement des structures, des approximations sont nécessaires : soit on considère ces fluctuations comme de petites perturbations par rapport à la métrique de fond, soit on fait l'hypothèse des symétries supplémentaires (comme la sphéricité de l'effondrement) au détriment de l'accord avec les données observationnelles ¹⁵.

15. Nous verrons dans la section suivante que l'hypothèse sphérique est incompatible avec les résultats théoriques sur les forces de marées dans un champ gaussien, les simulations qui implémentent une

Dans cette partie, nous étudierons les équations régissant l'évolution des petites surdensités de matière à l'ordre linéaire dans le cadre du formalisme eulérien. Nous procéderons en tenant compte de la présence d'énergie noire, d'équation d'état générale $w(a)$ variant dans le temps. Nous spécialiserons ensuite les équations dans le cas d'une équation d'état constante w et dans celui d'un champ de quintessence. Notre approche suivra, dans les grandes lignes, celle proposée par [Amendola & Tsujikawa \(2010\)](#).

Dans toute la suite, nous ignorerons les termes de courbure spatiale, et poserons donc $K = 0$. L'équation de Friedmann garantit alors que $da/dt > 0$. De fait, $a(t)$ est bijective, ce qui permettra de choisir le facteur d'échelle lui-même comme variable temporelle. On notera $N = \ln a$ et $\mathcal{H} = aH(a)$. La métrique FRLW $g_{\mu\nu}^{(0)}$ prend donc la forme :

$$ds^2 = e^{2N} (-\mathcal{H}^{-2}dN^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j) \quad (1.26)$$

La métrique perturbée $g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}$ s'écrit dans la jauge newtonienne¹⁶ et en ne considérant que les perturbations scalaires :

$$ds^2 = e^{2N} (-(1 + 2\psi)\mathcal{H}^{-2}dN^2 + (1 + 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j) \quad (1.27)$$

avec ψ, Φ des fonctions dépendant de l'espace et du temps.

Considérons un élément du fluide total (somme des fluides de matière et d'énergie noire) perturbé. Sa quadri-vitesse $u^\alpha = dx^\alpha/ds$ est donnée au premier ordre par :

$$u^0 = (1 - \psi)H \quad u^i = \frac{v^i}{a}$$

dynamique pleinement non-linéaire et qui présentent pourtant des structures durablement triaxiales, et enfin les observations qui démontrent que, tant les halos de matière noire que les structures baryoniques, s'écartent notablement de la sphéricité.

16. L'existence d'une liberté de jauge peut être montrée de la façon suivante : la notion de "métrique perturbée" suppose qu'en chaque point p' de la variété perturbée, la métrique s'y décompose comme la somme de la métrique FRLW évaluée en le point correspondant de la métrique de fond p , et un terme de perturbation évalué en p' . Or, il n'existe pas de correspondance préférentielle entre les points de la variété de fond et ceux de la variété perturbée. Choisir une jauge revient donc à choisir une fonction liant variété de fond et variété perturbée. On pourra se reporter à [Clifton et al. \(2020\)](#) pour une revue des différentes jauges existantes.

où $v^i = a \frac{dx^i}{dt}$ est la vitesse particulière du fluide (la composante de sa vitesse totale qui n'est pas due au flot de Hubble).

Le tenseur d'énergie-impulsion $T_{\alpha\beta}^{(0)} = \sum_X T_{\alpha\beta}^{(0X)}$ est, lui aussi, perturbé en $T^{(0)} + \delta T$. Notons $\delta_X = \frac{\delta\rho_X}{\rho_X}$ la surdensité de l'espèce X , induite par la perturbation, $c_{sX}^2 = \dot{P}_X / \dot{\rho}_X$ la vitesse du son dans le fluide X et $\theta = i \frac{k_i v^i}{\mathcal{H}}$ la divergence des vitesses au mode ¹⁷ \mathbf{k} . La perturbation des vitesses u^μ dans l'expression de $T_{\alpha\beta}^{(0)}$ conduit à écrire, au premier ordre :

$$\begin{aligned}\delta T_0^0 &= - \sum_X \rho_X \delta_X \equiv -\rho_t \delta_t \\ \delta T_1^1 &= \delta T_2^2 = \delta T_3^3 = \sum_X c_{sX}^2 \rho_X \delta_X \equiv c_{st}^2 \rho_t \delta_t \\ ik_j \delta T_0^j &= - \sum_X (1 + w_X) \rho_X \theta_X \equiv -(1 + w_{eff}) \rho_t \theta_t\end{aligned}$$

Dans les équations ci-dessus, on a introduit les quantités effectives, relatives au fluide total (d'où l'indice t) :

$$\Omega_X \equiv \rho_X / \rho_t \quad w_{eff} \equiv \sum_X \Omega_X w_X \quad \delta_t \equiv \sum_X \Omega_X \delta_X \quad \theta_t \equiv \frac{1}{1 + w_{eff}} \sum_X (1 + w_X) \Omega_X \theta_X$$

On supposera dans la suite que l'évolution se fait sans contrainte anisotrope, c'est - à - dire que $\Phi = -\psi$. On supposera aussi que le fluide total est composé uniquement de matière et d'énergie noire. Alors, puisque $w_m = 0$, l'équation d'état effective est $w_{eff} = \Omega_m w_m + \Omega_{DE} w_{DE} = \Omega_{DE} w_{DE}$. Enfin, on s'intéresse au comportement aux petites échelles (en deçà de l'horizon d'Hubble) : $k \gg \mathcal{H}$. Puisque le fluide total vérifie l'équation de conservation de la masse $\nabla_\mu (T^{(0)} + \delta T)^{\mu\nu} = 0$, on montre ([Amendola et al., 2007](#)) que :

$$\delta_m'' + \frac{1 - 3\Omega_{DE} w_{DE}}{2} \delta_m' = \frac{3}{2} (\Omega_m \delta_m + \Omega_{DE} \delta_{DE}) \quad (1.28)$$

et ([Batista, 2021](#))

$$\delta_{DE}'' + (1 - 3w_{DE}) \delta_{DE}' + c_{s,DE}^2 \frac{k^2}{\mathcal{H}^2} \delta_{DE} = -(1 + w_{DE}) \frac{3}{2} (\Omega_m \delta_m + \Omega_{DE} \delta_{DE}) \quad (1.29)$$

17. Dans le régime linéaire, on peut en effet traiter chaque mode indépendamment des autres, ce qui revient à écrire $\Phi(x, a) = \Phi(a) e^{ik_i x^i}$ et identiquement pour ψ et toutes les autres quantités.

Dans ces deux équations, le signe ' désigne une dérivation par rapport à N .

Si $w_{DE} \sim -1$, alors le membre de droite de l'équation 1.29 s'annule, et cette dernière admet comme solution $\delta_{DE} = 0$. Autrement dit, la constante cosmologique (ou ce qui y ressemble) ne s'effondre pas.

Dans le cas contraire, il faut distinguer les cas selon la vitesse du son du champ d'énergie noire. Si $c_{s,DE}^2 \sim 1$, comme c'est généralement le cas des champs de quintessence, alors les fluctuations du champ d'énergie noire sont négligeables¹⁸ devant celles du champ de matière. En revanche, si $c_{s,DE}^2$ est négligeable, alors il faudra prendre en compte l'effondrement linéaire de l'énergie noire pour appréhender celui de la matière noire.

Lorsque l'on néglige les perturbations de l'énergie noire, les perturbations linéaires de la matière obéissent à :

$$\delta_m'' + \frac{1 - 3\Omega_{DE}w_{DE}}{2}\delta_m' = \frac{3}{2}\Omega_m\delta_m \quad (1.30)$$

ou encore :

$$\frac{d^2\delta_m}{da^2} + \frac{3 - 3\Omega_{DE}w_{DE}}{2a}\frac{d\delta_m}{da} = \frac{3}{2a^2}\Omega_m\delta_m \quad (1.31)$$

Cette équation admet deux solutions, respectivement croissante et décroissante :

$$D_+(a)\delta_m^+(x) \text{ et } D_-(a)\delta_m^-(x)$$

Nous prendrons les D unitaires en $a = 1$; le mode décroissant étant voué à devenir négligeable devant le mode croissant, nous pouvons écrire :

$$\delta_m(x, a) = \delta_m(x, a = 1)D_+(a)$$

18. On peut en effet montrer, qu'au moins pendant la durée de l'ère de la matière, le potentiel $\Phi = \frac{3}{2}\frac{H^2}{k^2}(\Omega_m\delta_m + \Omega_{DE}\delta_{DE})$ est constant. Si w_{DE} est constant, alors équation 1.29 admet une solution constante $\delta_{DE} = -\frac{1+w_{DE}}{c_{s,DE}^2}\Phi$, et donc $\delta_m \propto k^2\Phi$.

1.3.2 Effondrement sphérique

Si l'on suppose qu'une surdensité donnée respecte la symétrie sphérique, dans un fond homogène, alors les équations qui régissent son effondrement sont solubles analytiquement dans le cas d'un Univers sans constante cosmologique.

On appelle δ le contraste de densité de matière dans la fluctuation étudiée. Le contraste de densité vérifie les équations d'Euler sans pression :

$$\partial_t \delta + a^{-1} \nabla \cdot (1 + \delta) \mathbf{v} = 0 \quad (1.32)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + a^{-1} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + H \mathbf{v} = -a^{-1} \nabla \Phi \quad (1.33)$$

avec, dans la limite newtonienne, $\Delta \Phi = 4\pi G a^2 \rho_m(t) \delta$ et $\rho_m(t) = \rho_{m0} a^{-3}$ la densité de matière dans l'arrière-plan. Si la surdensité est isotrope, \mathbf{v} est proportionnelle à \mathbf{r} et les équations ci-dessus mènent à :

$$\ddot{\delta} - \frac{4}{3} \frac{(\dot{\delta})^2}{1 + \delta} + 2H\dot{\delta} = 4\pi G \rho_m(t) \delta(1 + \delta) \quad (1.34)$$

Disons que la masse totale de la surdensité est M (constante) et notons $R(t)$ son rayon. On s'intéresse au mouvement d'une particule située à la surface de la surdensité (c'est-à-dire que $\delta(r, t)$ sera évaluée en $r = R(t)$). Par conservation de la masse de la surdensité, on a :

$$1 + \delta = \frac{3M}{4\pi R^3 \rho_m(t)} = \frac{3M a^3}{4\pi R^3 \rho_{m0}} \quad (1.35)$$

Remarquons alors que $1 + \delta$ est exactement la surdensité sphérique moyenne Δ de la fluctuation.

En injectant l'équation 1.35 dans l'équation 1.34, on obtient une équation différentielle sur $R(t)$:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{4\pi G \rho_{m0}}{3a^3} - \frac{GM}{R^3} \quad (1.36)$$

Le terme $\frac{\ddot{a}}{a}$ invite à utiliser les équations de Friedmann :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho_{m0} a^{-3} + (3w_\Lambda + 1)\rho_\Lambda(t)) \quad (1.37)$$

Si w_Λ est constante, on a $\rho_\Lambda(t) = \rho_{\Lambda 0} a^{-3(1+3w_\Lambda)}$ et alors :

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} - \frac{4\pi G}{3}(3w_\Lambda + 1)\rho_{\Lambda 0} a^{-3(1+3w_\Lambda)} R \quad (1.38)$$

Dans le cas général, seule une étude numérique nous permettrait de progresser davantage. La solution est en revanche analytique dans le cas d'un Univers dominé par la matière puisque l'équation

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} \quad (1.39)$$

peut être obtenue par dérivation (temporelle) de l'équation des cycloïdes :

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{GM}{R} = E \quad (1.40)$$

La perturbation va donc grossir, jusqu'au temps de *turn-around* $t = t_a$ puis se contracter. On a : $E = -\frac{GM}{R(t=t_a)} < 0$. Classiquement, l'équation des cycloïdes admet une solution paramétrique de la forme

$$R(\theta) = A(1 - \cos \theta) \quad t(\theta) = B(\theta - \sin \theta) \quad (1.41)$$

En l'injectant dans l'équation 1.40, on voit que la condition $A^3 = GMB^2$ doit être vérifiée. Alors, la surdensité (équation 1.35) est :

$$\delta(\theta) = -1 + \frac{9(\theta - \sin \theta)^2}{2(1 - \cos \theta)^3} \quad (1.42)$$

où on a utilisé le fait que $a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$ pour une ère dominée par la matière. L'effondrement ($R = 0$) a lieu pour $\theta = \theta_c = 2\pi$. Le temps initial de l'effondrement est $t_i = B$ (ce qui correspond à $\theta = 0$) et $t_a = \pi B$ ($\theta = \pi$).

Il est possible de retrouver les prédictions de la théorie linéaire en développant l'équation 1.42 jusqu'au premier ordre non nul :

$$\delta_L(\theta) = \frac{3}{20}\theta^2$$

et $t = B\theta^3/6 = t_a \frac{\theta^3}{6\pi}$. Ainsi :

$$\delta_L(t) = \frac{3}{20}(6\pi)^{2/3} \left(\frac{t}{t_a} \right)^{2/3}$$

Au moment du *collapse*, $\theta = 2\pi$, soit (équation 1.41) $t = 2\pi B$ donc $t = 2t_a$ et le contraste *linéaire* de densité est donc :

$$\delta_c = \frac{3}{20}(12\pi)^{2/3} \approx 1.686 \quad (1.43)$$

Pour $w_\Lambda \neq -1$ et ρ_Λ non négligeable, une étude numérique est nécessaire. Des approximations ont été construites à partir de celles-ci (Weinberg & Kamionkowski, 2003) :

$$\delta_c = 1.686(1 + \alpha(w_\Lambda) \log_{10} \Omega_{m0})$$

avec $\alpha(w_\Lambda) = 0.353x^4 + 1.044x^3 + 1.128x^2 + 0.555x + 0.131$. Cette dernière fonction est extrêmement plate pour $w_\Lambda \in [-1.2, -0.8]$ où elle vaut environ 0.012. On peut donc affirmer que, pour des valeurs "raisonnables" de w , la densité δ_c ne dépend pas de w et seulement très faiblement de Ω_m . Rapportons une autre expression approximative de δ_c très utilisée (Mo et al., 2010) :

$$\delta_c = 1.686\Omega_{m0}^{-0.0055} \quad (1.44)$$

S'il est vrai que δ_c dépend faiblement des paramètres cosmologiques, comme nous l'avons vu, sa valeur (en $z = 0$) est, en revanche, extrêmement sensible au modèle de gravité choisi. Cette propriété sera exploitée dans le chapitre 3.

1.3.3 Approximation de Zel'dovich et toile cosmique

Iakov Zel'dovich (1970) a montré qu'il était possible de dégager des informations sur les perturbations de matière à l'ordre supérieur. Pour ce faire, il opte pour une approximation balistique, que nous allons détailler.

On considère une particule de coordonnées propres \mathbf{x} , et de coordonnées comobiles $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{x}/a$. Soit \mathbf{q} la coordonnée lagrangienne associée à cette particule. C'est la position comobile qu'avait la particule en un temps reculé t_i fixé : $\mathbf{q} = \boldsymbol{\chi}(t_i)$. L'approximation balistique consiste à supposer qu'à tout instant :

$$\boldsymbol{\chi}(t) = \mathbf{q} + D_+(t)\mathbf{s}(q)$$

pour un certain champ de déplacement $\mathbf{s}(q)$. L'équivalence entre les densités dans les espaces lagrangien et euclidien s'écrit :

$$\rho(\boldsymbol{\chi}, t)d^3\boldsymbol{\chi} = \rho(t_i)d^3\mathbf{q} \quad (1.45)$$

Si les trajectoires de différentes particules ne se croisent pas, il existe une relation bijective entre $\boldsymbol{\chi}$ et \mathbf{q} , d'où :

$$\rho(\boldsymbol{\chi}, t) = \rho(t_i) \det \left(\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-1} \quad (1.46)$$

ce qui mène, par l'approximation balistique, à :

$$\rho(\boldsymbol{\chi}, t) = \rho(t_i) \det \left(1 + D_+(t) \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-1} \quad (1.47)$$

Supposons maintenant que le champ de déplacement est à rotationnel nul. Alors, il existe φ tel que $\mathbf{s} = \nabla_{\mathbf{q}}\varphi$ et donc

$$\rho(\boldsymbol{\chi}, t) = \rho(t_i) \det (1 - D_+ \text{Hess}[-\varphi])^{-1} \quad (1.48)$$

avec

$$\text{Hess}[-\varphi]_{ij} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i \partial q_j}$$

La matrice $\text{Hess}[-\varphi]$ est symétrique réelle et donc diagonalisable. Appelons $\lambda_1(\mathbf{q}) \geq \lambda_2(\mathbf{q}) \geq \lambda_3(\mathbf{q})$ ses valeurs propres. Ainsi, il devient possible de déterminer les fluctuations de densité

à partir de ces seules valeurs propres :

$$\rho(\boldsymbol{\chi}, t) = \frac{\rho(t_i)}{(1 - D_+ \lambda_1(\mathbf{q})) (1 - D_+ \lambda_2(\mathbf{q})) (1 - D_+ \lambda_3(\mathbf{q}))} \quad (1.49)$$

En développant cette équation au premier ordre, on voit que

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{\chi}, t) &= \rho(t_i) (1 + D_+ \text{Tr}(\text{Hess}[-\varphi])) \\ &= \rho(t_i) (1 - D_+ \Delta_{\mathbf{q}} \varphi) \end{aligned}$$

et donc

$$\delta_m(\boldsymbol{\chi}, t) = -D_+ \Delta_{\mathbf{q}} \varphi$$

Le recollement avec le régime linéaire impose donc d'identifier φ avec l'opposé du potentiel linéairement perturbé. Considérons une région surdense donnée. Doroshkevich (1970) montra que, si l'on assimile la distribution de matière à l'intérieur de celle-ci à un champ aléatoire gaussien, alors la probabilité que deux valeurs propres de H soient égales, est rigoureusement nulle. Ainsi, pour une région surdense typique, on a $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, où les inégalités sont strictes. L'effondrement se déroulera donc d'abord le long du premier axe principal de la distribution (le vecteur propre associé à λ_1), jusqu'à ce que $1 = D_+ \lambda_1$. À ce stade la région surdense est aplatie le long de cet axe et adopte donc la structure d'un "pancake". Dans un second temps, la structure s'effondrera le long du second axe, donnant lieu à un filament, puis le long du troisième donnant naissance à un nœud. À grande échelle, l'approximation de Zel'dovich prévoit donc l'apparition d'une toile cosmique, formée de filaments, de murs et de nœuds. Il est remarquable de noter que l'approximation balistique, somme toute assez économique¹⁹, explique la formation de régions de densité formellement infinie le long d'un de leurs axes, et donc, plus généralement, de structures, ce que les perturbations linéaires, par définition "petites", ne peuvent évidemment traiter.

19. On peut montrer que c'est le terme de second ordre du développement perturbatif lagrangien ; le développement est même exact à une dimension.

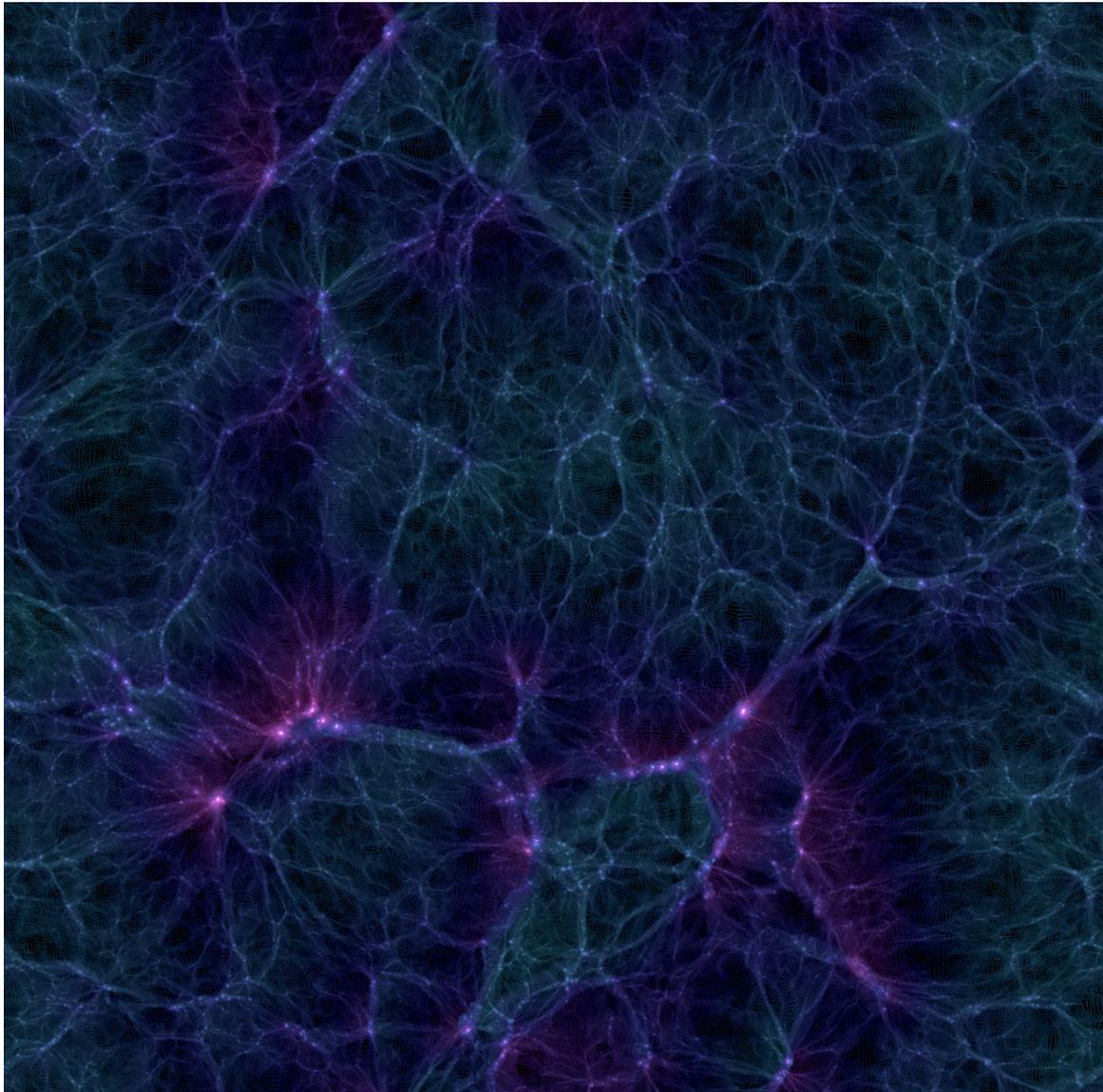


Figure 1.3 – Tranche d’Univers de taille 162 Mpc/h, telle qu’obtenue (en $z = 0$) par une simulation Dark Energy Universe. À cette échelle, l’homogénéité est clairement mise en défaut : cependant il est remarquable de constater que les structures sont organisées en vides, en filaments, en murs et en nœuds - conformément aux prévisions de l’approximation ballistique.

1.4 Traitement non-linéaire

1.4.1 Simulations N -corps

Les simulations N -corps sont devenues, au cours des dernières décennies, de plus en plus précises (Springel et al., 2005 ; Stadel et al., 2009 ; Boylan-Kolchin et al., 2009 ; Klypin et al., 2011 ; Gao et al., 2012 ; Prada et al., 2012 ; Guo et al., 2013 ; Garrison-Kimmel et al., 2014 ; Vogelsberger et al., 2014a,b ; Genel et al., 2014 ; Crain et al., 2015 ; Sijacki et al., 2015 ; Schaye et al., 2015 ; Klypin et al., 2016 ; Griffen et al., 2016 ; Vogelsberger et al., 2020 ; Villaescusa-Navarro et al., 2020, 2021 ; Angulo & Hahn, 2022) : leur résolution accrue et la grande taille des boîtes de simulation permet de sonder la structuration de l'Univers dans de larges domaines de masse. Les simulations N -corps constituent en ce sens un moyen de traiter l'effondrement des structures de manière complètement non-linéaire. Nous en présentons les grands principes ainsi que les hypothèses sous-jacentes.

1.4.1.1 Équations de Vlasov - Poisson

On s'intéresse à la dynamique de la matière noire, froide. C'est un fluide sans pression et sans collision. Nous allons travailler dans la jauge newtonienne, et, de nouveau, ne considérer que les perturbations scalaires de la métrique FRLW. Nous verrons sous quelles hypothèses, en s'intéressant aux variables comobiles (en espace et en temps), la matière vérifie les équations de Newton. Nous suivrons en cela largement Angulo & Hahn (2022).

On note η et χ les coordonnées comobiles de temps et d'espace. Ainsi, la métrique FRLW perturbée prend la forme :

$$ds^2 = a^2 \left(-(1 + 2\psi)d\eta^2 + (1 + 2\phi)d\chi^i d\chi^i \right)$$

En appelant $\rho_X(\eta)$ l'énergie du fluide X (matière ou énergie noire), et en écrivant les

équations d'Einstein, on arrive (au premier ordre) à

$$\Delta_{\mathbf{x}}\phi + 3\mathcal{H}\left(\frac{d\phi}{d\eta} - \mathcal{H}\psi\right) = 4\pi G a^2 (\rho_m \delta_m + \rho_{DE} \delta_{DE}) \quad (1.50)$$

L'hypothèse d'absence de pression du fluide implique que $\phi = -\psi$. De plus, on se concentre sur les petites échelles ($k \gg \mathcal{H}$) ce qui rend prédominant le terme $\Delta\phi$ par rapport à $\mathcal{H}^2\phi$. Ainsi, l'équation du potentiel se simplifie en :

$$\Delta_{\mathbf{x}}\phi = 4\pi G a^2 (\rho_m \delta_m + \rho_{DE} \delta_{DE}) \quad (1.51)$$

Pour les modèles d'énergie noire ne s'effondrant pas (aux petites échelles), on a en outre : $\delta_{DE} = 0$.

Une hypothèse supplémentaire importante peut s'ajouter à la liste des précédentes : on suppose que les fluctuations du fluide cosmologique ne présentent pas de *rétroaction* sur la dynamique d'expansion de l'Univers. Autrement dit, la première équation de Friedmann reste vérifiée et $3\mathcal{H}^2 = 8\pi G a^2 \rho_t$. Cela signifie qu'au long de la simulation, le facteur d'échelle $a(\tau)$ sera super-imposé comme étant la solution, calculée à part, de la première équation de Friedmann (homogène en espace). On arrive alors à :

$$\Delta_{\mathbf{x}}\phi = \frac{3}{2} H^2 a^2 \Omega_m \delta_m \quad (1.52)$$

et donc,

$$\Delta_{\mathbf{x}}\phi = \frac{3}{2} H_0^2 \Omega_{m,0} \frac{\delta_m}{a} \quad (1.53)$$

C'est l'équation de Poisson en coordonnées comobiles. Appelons m la masse des particules qui constituent le fluide de matière, et soit i l'une d'entre elles. Sa position propre est $\mathbf{x}^{(i)} = a\boldsymbol{\chi}^{(i)}$ et sa vitesse particulière propre est

$$\mathbf{v}^{(i)} = \frac{d\mathbf{x}^{(i)}}{dt} - \dot{a}(t)\boldsymbol{\chi}^{(i)} = a(t)\frac{d\boldsymbol{\chi}^{(i)}}{dt}$$

avec t le temps cosmique ($dt = a d\eta$). Pour établir les équations de Newton dans le contexte d'un fond en expansion, nous suivons [Peacock \(1999\)](#) ; pour commencer,

l'expression de la vitesse particulière propre nous invite à définir la vitesse particulière comobile

$$\mathbf{u}^{(i)} = \frac{d\boldsymbol{\chi}^{(i)}}{dt} \quad (1.54)$$

Ensuite, l'équation des géodésiques (dans la métrique perturbée) donne :

$$\frac{d\mathbf{u}^{(i)}}{dt} + 2H(t)\mathbf{u}^{(i)} = -\nabla_{\boldsymbol{\chi}}\phi(\boldsymbol{\chi}^{(i)}) \quad (1.55)$$

Les équations 1.53, 1.54 et 1.55, associées à l'équation de Friedmann 1.23 forment un système complet. Comme expliqué, on part du principe que $a(t)$ est super imposé comme étant solution de l'équation 1.23 qui devra être résolue et intégrée au préalable (c'est une simple équation différentielle du premier ordre). Le déroulé de la simulation consiste, à chaque pas de temps, à calculer le potentiel newtonien (intégration spatiale) pour en déduire la position et la vitesse des particules au pas de temps suivant. Comme les équations 1.53 et 1.55 sont en coordonnées comobiles, la boîte de simulation garde une taille fixe L pendant la simulation. Si N est le nombre de particules, leur masse m est fixée par la relation :

$$\frac{mN}{L^3} = \Omega_{m,0}\rho_c$$

où $\rho_c = 3H_0^2/(8\pi G)$ est la densité critique au temps présent. En pratique, les particules de la simulation sont des particules effectives qui échantillonnent les champs de densité et de vitesse du fluide de matière. La masse de ces macro-particules représente donc un compromis entre les limites computationnelles (en temps de calcul et en espace de stockage) et la masse des amas de matière à former dont on veut sonder la structure.

1.4.1.2 Génération des Conditions initiales

Pour générer des conditions initiales, on répartit les N particules selon un champ aléatoire gaussien que l'on fait évoluer autant que possible de manière analytique, sans recourir à la résolution numérique des équations non-linéaires. Le champ gaussien initial présente les propriétés statistiques attendues du champ de densité après la recombinaison. La distribution de tout champ gaussien étant entièrement déterminée

par les statistiques du premier (moyenne) et du second (corrélations) ordres, il possède donc le spectre de puissance de ce champ. Ce dernier est calculé très précisément à l'aide de codes de type CAMB (Lewis & Challinor, 2007, 2011) ou CLASS (Lesgourgues, 2011a; Blas et al., 2011; Lesgourgues & Tram, 2011; Lesgourgues, 2011b). Les particules sont ensuite mues selon la dynamique linéaire, puis selon l'approximation de Zel'dovich, jusqu'à $z \approx 100$. Certains codes utilisent des développements perturbatifs d'ordre plus élevé (voir par exemple Michaux et al. (2021)).

1.4.1.3 Intégrateur spatial

Les simulations N -corps se distinguent les unes des autres par la stratégie choisie pour intégrer l'équation de Poisson 1.53 à chaque pas de temps. Naturellement, la première possibilité est de calculer par force brute le potentiel en sommant sur toutes les particules de la simulation

$$\phi(\mathbf{x}) = -Gm \sum_j (|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j)}|^2 + \epsilon^2)^{-1/2}$$

Le paramètre ϵ désigne ici la longueur "d'adoucissement" de la force gravitationnelle : en effet, lorsque $\epsilon = 0$, la force gravitationnelle entre deux particules effectives diverge lorsqu'elles se trouvent à la même position. Or, dans la réalité, cette situation est impossible, car d'autres forces entreront nécessairement en jeu lors de l'approche d'un objet par un autre. Pour cette raison, ϵ est souvent choisi comme une fraction (faible) de la distance inter-particulaire moyenne $L/N^{1/3}$. Ainsi, à grande distance devant ϵ , l'estimation du potentiel "adouci" coïncide avec la valeur du potentiel gravitationnel réel. À faible distance en revanche, le potentiel adouci devient constant. Malheureusement, la méthode d'intégration par force brute est très gourmande en temps de calcul (la complexité associée est en $O(N^2)$) de sorte que d'autres méthodes sont privilégiées pour des simulations contenant un grand nombre de particules. En particulier, les algorithmes de type Tree Code divisent l'espace récursivement : l'espace est divisé en huit cellules ; puis chaque cellule est divisée en huit cellules plus petites si elle contient plus d'une particule. L'espace est ainsi naturellement associé à un arbre

décrivant son fractionnement en cellules. Chaque cellule, aussi grande soit elle, est dotée d'une masse (la masse des particules qu'elle contient) et d'une "position" (son centre). Pour calculer la force exercée sur une particule donnée, il suffit de parcourir l'arbre et de n'explorer les enfants d'un nœud donné que si son centre de masse est suffisamment proche de la particule d'intérêt. Dans le cas contraire, c'est la "position" du nœud et sa masse qui seront retenues pour le calcul de la force gravitationnelle sans s'intéresser plus en détail à la position des particules qu'il contient. La complexité de cet algorithme est en $O(N \log N)$. Une autre méthode basique consiste à diviser l'espace en N cellules de même taille. Par un schéma d'interpolation (CIC, NGP, TSC...) donné, on attribue une densité aux nœuds de ce maillage. On résout ensuite l'équation de Poisson dans l'espace de Fourier (ce qui nécessite une transformée de Fourier rapide, en $O(N_c \log N_c)$ avec N_c le nombre de cellules) et on connaît donc le potentiel appliqué en chaque point du maillage. Enfin, on en déduit la force exercée sur chaque particule (à nouveau par interpolation). De nombreuses méthodes hybrides ont été élaborées à partir des trois algorithmes canoniques que nous venons d'évoquer. Parmi elles, on compte la technique AMR²⁰. Partant d'un découpage en maillage régulier, les cellules de la grille dont la densité dépasse un certain seuil sont subdivisées. Le code RAMSES (Teyssier, 2002) en est un exemple. On pourra se reporter à Angulo & Hahn (2022) pour une revue des différentes méthodes existantes. Les simulations Dark Energy Universe, dont nous étudierons quelques aspects dans les chapitres 2 et 4 sont issues du code RAMSES, tandis que les simulations DUSTGRAIN-pathfinder du chapitre 3 proviennent du code TreePM (Bagla, 2002) GADGET (Springel et al., 2005), adapté pour prendre en compte les effets de la gravité modifiée (Puchwein et al., 2013).

1.4.1.4 Intégrateur temporel

Une fois que la force exercée sur chaque particule est calculée, il faut actualiser la position et la vitesse de cette dernière. Il s'agit de résoudre sur un pas de temps les équations 1.54 et 1.55. Cette étape peut être réalisée à l'aide d'un schéma d'intégration

20. Adaptive Mesh Refinement

temporelle. Le schéma Leapfrog est fréquemment utilisé (c'est le cas dans le code RAMSES) par exemple. C'est un schéma du second ordre, réversible et symplectique (conservant approximativement l'énergie du système). Il convient de noter que le choix du pas de temps n'est pas anodin. Il doit notamment être suffisamment faible pour que les particules ne puissent pas traverser plus d'une cellule du maillage pendant un pas de temps. Ainsi, $u \cdot \Delta t \leq \epsilon$. On parle de *condition de Courant-Friedrichs-Lewy* (CFL). De nombreux raffinements existent impliquant par exemple des pas de temps variables pour s'assurer que la condition CFL est vérifiée.

1.4.2 Mesure de structuration

Pour suivre l'évolution de la structuration du champ de matière, il est avantageux de considérer le champ de densité comme une certaine réalisation d'une variable aléatoire. À ce titre, il est d'usage de décrire la croissance des fluctuations à l'aide des corrélations à deux points. Nous allons en présenter différentes versions (fonction de corrélation, variance, spectre de puissance) et montrer leur équivalence. Nous mentionnerons ensuite quelques statistiques d'ordre supérieur ou multi-échelles.

1.4.2.1 Statistiques d'ordre deux

Dans toute la suite, on notera le contraste de densité de matière :

$$\delta(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\rho_m(t)} - 1$$

On notera aussi $\delta_{\mathbf{k}}(t)$ ses coefficients de Fourier.

Une première façon de quantifier la structuration de l'Univers est d'étudier la probabilité de trouver une fluctuation séparée de \mathbf{r} d'une fluctuation donnée. Une décroissance brutale de cette fonction témoignerait de l'existence d'une longueur caractéristique de corrélation, et donc d'une "échelle" privilégiée, une taille caractéristique des structures.

Cette probabilité est liée à la fonction de corrélation à deux points :

$$\xi(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \int d^3\mathbf{x} \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \quad (1.56)$$

L'intégrale est prise ici sur un volume V suffisamment grand. L'idée est de considérer qu'une moyenne sur différents échantillons d'Univers de même volume mime au mieux une moyenne d'ensemble sur un Univers entier (ce dont nous ne disposons pas, puisqu'un seul Univers est visible..).

Poursuivons le calcul :

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{V} \int \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) d^3\mathbf{x} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \delta_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}'} \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}) \frac{1}{V} \int d^3\mathbf{x} \exp(i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.57)$$

Pour un volume suffisamment large, $\frac{1}{V} \int d^3\mathbf{x} \exp(i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x})$ est simplement une masse de Dirac à 3 dimensions $\frac{(2\pi)^3}{V} \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$. Enfin, puisque δ est réel, $\delta_{\mathbf{k}}^* = \delta_{-\mathbf{k}}$ et donc :

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{V} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} P(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.58)$$

où $P(\mathbf{k}) = V^{-1} |\delta_{\mathbf{k}}|^2$ est le *spectre de puissance* de δ . Puisque l'Univers est statistiquement isotrope, on a $P(\mathbf{k}) = P(|\mathbf{k}|)$.

Une autre façon de quantifier le degré d'inhomogénéité de l'Univers est de mesurer les fluctuations de masse dans des régions de taille caractéristique R . Pour définir formellement ces régions, on introduit une fonction fenêtre $W(\mathbf{x})$ et on note

$V_W = \int W(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}$. Par suite²¹, la masse contenue dans cette région est

$$\begin{aligned}
M(\mathbf{x}, t) &= \int \rho(\mathbf{x}')W(\mathbf{x} - \mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' \\
&= \rho_m(t) \int (1 + \delta(\mathbf{x}'))W(\mathbf{x} - \mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' \\
&= \rho_m(t)V_W + \rho_m(t) \int \delta(\mathbf{x}')W(\mathbf{x} - \mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' \\
&= \rho_m(t)V_W + \rho_m(t) \int \delta_{\mathbf{k}}W_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \\
&= \bar{M}(t) + \delta M(\mathbf{x}, t)
\end{aligned} \tag{1.59}$$

La fluctuation est, en moyenne :

$$\begin{aligned}
\sigma^2[V_W] &\equiv \frac{1}{V} \int \left(\frac{\delta M(\mathbf{x}, t)}{\bar{M}(t)} \right)^2 d^3\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{V_W^2} \int V^{-1} |\delta_{\mathbf{k}}|^2 |W_{\mathbf{k}}|^2 \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \\
&= \frac{1}{V_W^2} \int P(k) |W_{\mathbf{k}}|^2 \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}
\end{aligned} \tag{1.60}$$

et s'exprime donc, à nouveau, en fonction du spectre de puissance.

Spécifions à présent la forme de W . On cherche une fonction invariante par rotation.

Deux possibilités sont évoquées dans la littérature :

- On peut choisir une fonction fenêtre W sphérique, une simple boule de rayon R dans l'espace réel (*top-hat*). Dans ce cas, $V_W^{Bessel} = \frac{4}{3}\pi R^3$ et

$$\frac{W_k^{Bessel}}{V_W^{Bessel}} = 3 \frac{\sin(kR) - (kR) \cos(kR)}{(kR)^3}$$

- On peut aussi choisir une fonction gaussienne d'ouverture proportionnelle à R : Dans ce cas, $V_W^{Gauss} = \frac{4}{3}\pi R^3 + O(R^5)$ et

$$\frac{W_k^{Gauss}}{V_W^{Gauss}} = \exp\left(-\frac{(kR)^2}{10}\right)$$

21. Nous nous inspirons ici du cours *Physical cosmology* de Tom Theuns à l'Université de Durham.

Le facteur de $1/10$ est choisi de sorte que W_k^{Gauss} coïncide avec W_k^{Bessel} au premier ordre.

L'approche gaussienne permet, comme le montre la figure 1.4, d'économiser les fluctuations résiduelles aux grands k , caractéristiques des fonctions de Bessel. Autrement dit, on garantit une décroissance régulière et rapide. Dans la suite, nous retiendrons les expressions suivantes pour la variance du spectre de puissance :

$$\sigma_{Bessel}^2[R] = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}_+} P(k) \left(3 \frac{\sin(kR) - (kR) \cos(kR)}{(kR)^3} \right)^2 dk \quad (1.61)$$

et

$$\sigma_{Gauss}^2[R] = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}_+} P(k) \exp\left(-\frac{(kR)^2}{5}\right) dk \quad (1.62)$$

qu'on exprimera souvent en fonction de la masse à l'aide de la relation :

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_m(t)$$

Egalement, nous noterons respectivement P_L et P_{NL} les spectres de puissance calculés sur les champs de densité évolués linéairement et non-linéairement, ainsi que σ_L^2 et σ_{NL}^2 les variances correspondantes.

1.4.2.2 Ordres supérieurs et non-gaussianités

La distribution des surdensités est entièrement décrite par ses moments. La variance (et la fonction de corrélation) ne dépendent que des moments d'ordre deux, $\langle \delta_W^2 \rangle$, avec $\delta_W = \delta \odot W$, où \odot désigne le produit de convolution. Une description complète de la distribution requiert le calcul des moments d'ordre supérieur. Si le champ de densité était un champ aléatoire gaussien, les moments d'ordre impair s'annuleraient et ceux d'ordre pair ne dépendraient que du moment d'ordre deux. Pourtant, même si le champ initial est un champ gaussien, le champ évolué (non linéairement) ne l'est pas. De surcroît, toute non-gaussianité du champ initial (due par exemple à un mécanisme d'inflation non standard) sera également présente dans le champ final. Il est donc d'usage de calculer l'asymétrie $\langle \delta_W^3 \rangle$ et l'aplatissement $\langle \delta_W^4 \rangle$ du champ final

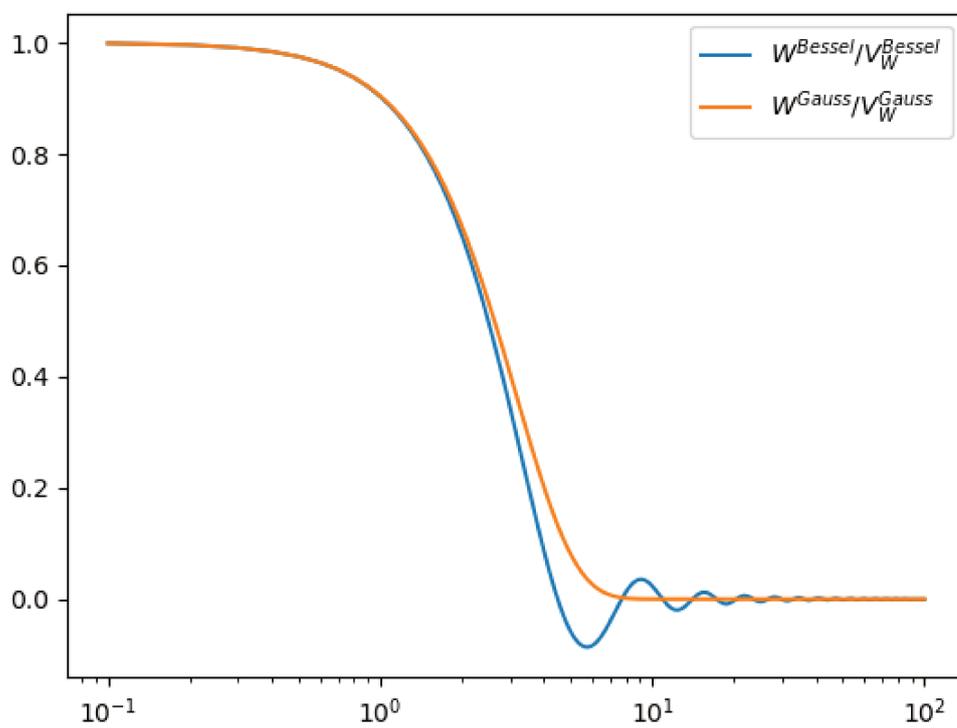


Figure 1.4 – Fonctions Fenêtres normalisées. Nous représentons ici leur évolution en fonction de $x = kR$. La fenêtre gaussienne (orange) a été choisie pour correspondre au premier ordre à la fonction *top-hat* (bleue), se reporter au texte principal.

(Coles & Frenk, 1991; Einasto et al., 2021). Des approches multiéchelles, à l'aide d'ondelettes, ont également été envisagées (Einasto et al., 2011). D'autres encore sont spécialisées dans l'extraction de motifs (filaments, pancakes) à partir de statistiques d'ordre élevé reposant sur la représentation de la distribution de matière en graphes : par exemple, l'arbre couvrant minimal permet d'estimer les paramètres cosmologiques (Naidoo et al., 2020).

1.5 Halos de matière noire

1.5.1 Définitions et algorithmes de détection

1.5.1.1 Objectif

Sous l'effet de l'attraction gravitationnelle, le champ de densité se structure et des pics de densité croissent et fusionnent, ce qui constitue le scénario de formation hiérarchique (Frenk et al., 1985; Quinn et al., 1986; Cole & Lacey, 1996). Nous introduisons dans cette section les *halos* de matière noire : ce sont les puits de potentiel (gravitationnel) dans lesquels seront formées les galaxies et amas de galaxies (White & Rees, 1978; White & Frenk, 1991; Kauffmann et al., 1993; Cole et al., 1994, 2000; Berlind & Weinberg, 2002; Schaye et al., 2010; Guo et al., 2010; Vogelsberger et al., 2013). La question de la définition précise à donner aux halos, c'est-à-dire l'algorithme qui permet de distinguer la matière qui appartient aux halos de celle qui constitue le champ de fond et les vides, est hautement non triviale. Pléthore de définitions existe. Nous allons en présenter les grandes familles. On pourra se reporter à Knebe et al. (2011) pour une revue plus complète.

1.5.1.2 Détection avec prior de forme

La première approche consiste à supposer que les halos sont globalement sphériques. L'algorithme *Spherical Overdensity* repère les pics de densité autour desquels il fait

croître des sphères. Le halo est *déecté* lorsque la surdensité moyenne sphérique de la sphère vaut 200 fois la densité moyenne :

$$M_{200m} = \frac{4}{3}\pi R_{200m}^3 \Delta \rho_m$$

avec $\Delta = 200$. Cette valeur de Δ provient du modèle d'effondrement sphérique et représente la surdensité à laquelle un halo sphérique est virialisé. Certains auteurs remplacent $200\rho_m$ par $200\rho_c$. L'algorithme SOD est à la base de nombreuses variantes, parallélisées et/ou hiérarchiques (Klypin et al., 1999 ; Planelles & Quilis, 2010 ; Sutter & Ricker, 2010). Le principal inconvénient de cette approche réside dans le fait que les isodensités du halos sont artificiellement tronquées par la sphère qui le définit ; l'approche SOD produit donc des halos statistiquement plus sphériques. Or, tant la théorie que l'analyse des simulations montrent que les structures sont plutôt ellipsoïdales (voir chapitre 2). Pour affiner cet algorithme, il est possible de partir des halos issus du catalogue SOD et de déformer itérativement les contours de la fenêtre de détection pour en faire un ellipsoïde "adapté" au halo. C'est l'*ellipsoidal finder* (Despali et al., 2013).

1.5.1.3 Friends of Friends et raffinements

L'approche Friends of Friends (FoF) (Springel et al., 2005) est un algorithme de percolation qui fonctionne sans prior de forme. Une particule i appartient à un halo donné si elle est séparée d'une particule de ce halo d'une distance inférieure à b , la longueur de percolation. Cette dernière est généralement exprimée comme une fraction de la distance inter-particulaire moyenne de la simulation L/N^3 . En général, on choisit $b = 0.2$ pour que les halos aient une masse environ égale à celle de leurs alter ego dans SOD (voir White (2001) pour une comparaison entre les masses des halos issus de ces différentes techniques).

FOF fonctionne sans connaissance préalable sur la forme attendue des halos. Le bord de ceux-ci est donc nécessairement une iso-densité (locale). Le principal inconvénient inhérent à FOF est le phénomène de pontage (*bridging*) : deux structures reliées par

un filament fin suffisamment dense sont détectées par FOF comme un seul halo. Différentes adaptations de FOF ont été conçues pour compenser cet effet. Ainsi, [Diemand et al. \(2006\)](#) applique FOF dans l'ensemble de l'espace des phases (à 6 dimensions) dans le but d'éviter les ligatures spatiales accidentelles. L'algorithme Rockstar ([Behroozi et al., 2013](#)) utilise une version hiérarchique de FOF qu'il complète par l'élimination des particules appartenant à un groupe FOF sans y être gravitationnellement liées.

1.5.2 Fonction de masse

1.5.2.1 Définition et approche de Press Schechter

Une propriété importante des halos de matière noire est leur abondance, et en particulier la dépendance de celle-ci en leur masse. Le modèle hiérarchique suppose que les halos les plus massifs sont formés par la fusion de halos de plus petite taille. Cela a deux conséquences. D'abord, les halos les plus massifs sont les plus rares. Ensuite, le nombre de halos massifs augmente avec le temps. Introduisons la *fonction de masse*, $f(M, z)$, telle que $f(M, z)dM$ constitue le nombre de halos par unité de volume comobile dont la masse est comprise entre M et $M + dM$. f est donc une fonction de M (brutalement) décroissante. À masse donnée, c'est aussi une fonction décroissante en z . Cette dernière remarque implique qu'il doit exister une dépendance forte de la fonction de masse en la cosmologie, et en particulier en σ_8 . En 1974, Press et Schechter proposent, dans un article séminal ([Press & Schechter, 1974](#)), d'identifier halos et pics de densité, c'est-à-dire de considérer que la probabilité qu'une particule appartienne à un halo de masse supérieure à M est la probabilité que le contraste de densité lissé (avec la fonction fenêtre *top-hat*) sur l'échelle M dépasse la valeur

critique δ_c . En supposant que le champ lissé est gaussien ²², on a ²³

$$P(\delta_M > \delta_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(M)}} \int_{\delta_c}^{+\infty} \exp\left(\frac{-\delta^2}{2\sigma^2(M)}\right) d\delta$$

Un premier problème avec l'expression précédente est sa limite en $\nu = \delta_c/\sigma \rightarrow 0$. Elle vaut 1/2, comme si seules les régions surdenses collapsaient. Or, les particules qui se trouvent dans les régions sous-denses finiront elles aussi par intégrer un halo. Press et Schechter introduisent un facteur correctif 2 ce qui mène à :

$$P(\delta_M > \delta_c) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2(M)}} \int_{\delta_c}^{+\infty} \exp\left(\frac{-\delta^2}{2\sigma^2(M)}\right) d\delta \equiv F(M) \quad (1.63)$$

La fraction de la masse totale contenue dans les halos de masse $[M, M + dM]$ est donc $\frac{\partial F}{\partial M} dM$ (par unité de volume), et le nombre de halos de cette masse (à dM près) est donc

$$f(M) dM = \frac{\rho_m}{M} \frac{\partial F}{\partial M} dM$$

ce qu'on peut réécrire :

$$f(M) = \frac{\rho_m}{M^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2(M)}\right) \frac{\delta_c}{\sigma(M)} \left| \frac{\partial \log \sigma}{\partial \log M} \right| \quad (1.64)$$

1.5.2.2 Raffinements

Il est possible d'expliquer l'apparition du facteur 2 dans l'équation 1.63 *via* un formalisme plus fin, la théorie des ensembles d'excursion (Bond et al., 1991). D'autres travaux remplacent le terme $\nu e^{-\nu^2/2}$ par un terme prenant en compte l'asphéricité des halos (Sheth et al., 2001) ou des fonctions directement ajustées sur les simulations

22. Si le champ de matière cosmique est gaussien dans les conditions initiales, il ne le reste pas sous l'effet de l'effondrement non-linéaire. Si on considère l'évolution linéaire de ce champ, alors le champ reste gaussien et l'on peut d'ailleurs calculer un grand nombre de propriétés de ses pics (Bardeen et al., 1986). Pour cette raison, les variances σ qui apparaissent dans les équations de cette section doivent être vues comme les variances du champ linéairement extrapolé jusqu'en $z = 0$, c'est-à-dire les quantités lissées notées σ_L introduites précédemment.

23. L'approche proposée ici, par *fonction de sélection*, est celle de Blanchard et al. (1992); Audit et al. (1998); Courtin et al. (2011)

(Jenkins et al., 2001 ; Warren et al., 2006 ; Courtin et al., 2011). Certaines d’entre elles, comme Jenkins et al. (2001), dépendent de la variance σ , mais pas de la hauteur du pic (Bardeen et al., 1986) $\nu = \delta_c/\sigma$. Comme nous l’avons mentionné précédemment, le paramètre δ_c dépend faiblement de la cosmologie mais très fortement du modèle de gravité. Ainsi, la distinction entre les modèles de fonctions de masse dépendant de ν et ceux dépendant de σ est accentuée dès qu’il s’agit de traiter des halos de simulation en gravité modifiée, voir Thomas & Contaldi (2011).

Notons $n(M)$ le nombre de halos par unité de volume comobile de masse comprise entre M et $M + dM$. On a donc, par définition, $\frac{dn}{dM} = f(M)$. L’équation 1.64 implique que la *fonction de multiplicité* $\rho_m M^{-1} \frac{dn}{d \log(\nu)}$ vaut :

$$\rho_m M^{-1} \frac{dn}{d \log(\nu)} = \sqrt{2/\pi} \cdot \nu \exp(\nu^2/2) \equiv f_{PS}(\nu) \quad (1.65)$$

La fonction de multiplicité est donc, dans le formalisme de Press-Schechter, une fonction de ν dont les paramètres ne dépendent pas de la cosmologie. Elle est, en ce sens, universelle. L’ensemble des travaux que nous venons de mentionner visent à remplacer f_{PS} par une autre fonction, mais ne remettent pas en cause l’universalité de la fonction de multiplicité. Nous montrerons en section 2.1.2, sur les halos des simulations Dark Energy Universe qu’une telle hypothèse peut être remise en question.

1.5.3 Profils des halos : Succès et échecs des profils sphériques

1.5.3.1 Approche NFW

Les auteurs de Navarro et al. (1997) remarquent, dans un article devenu célèbre, que les profils de densité des halos issus de simulation N -corps présentent, pour la plupart, une évolution en $1/r$ au centre, et en $1/r^3$ en périphérie. Cela les conduit à proposer un profil de densité universelle, que nous appellerons par la suite profil de

Navarro-Frank-White (NFW) :

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2} \quad (1.66)$$

avec ρ_0 et r_s des paramètres libres. En notant M_{200m} la masse de la sphère de sur-densité moyenne $\Delta = 200\rho_m$, on a :

$$\rho(r) = \frac{200\rho_m}{3 \left[\ln(1+c) - \frac{c}{1+c} \right] \frac{r}{R_{200m}} \left(c^{-1} + \frac{r}{R_{200m}} \right)^2} \quad (1.67)$$

$c = R_{200m}/r_s$ est le paramètre de concentration du halo. Il semble augmenter avec le temps et diminuer avec la masse, d'une manière qui dépend de la cosmologie : la relation c - M dépend de l'histoire de formation des halos ([Wechsler et al., 2002](#)), du modèle d'énergie noire ([Bhattacharya et al., 2013](#)), et, plus généralement, des paramètres cosmologiques ([López-Cano et al., 2022](#)).

Il faut noter que le choix de la méthode de détermination de la concentration pour un halo donné est délicat :

- D'abord, parce que l'adéquation χ^2 du profil véritable des halos N -corps avec le modèle NFW dépend elle-même de la cosmologie ([Balmès et al., 2014](#)).
- Ensuite, parce que la détermination de la concentration d'un halo donné est extrêmement sensible à l'écart entre ce halo et le modèle sphérique idéalisé NFW : le choix du centre, la présence de sous-structures, la résolution ([Prada et al., 2012](#)) et, bien entendu, l'asphéricité du halo. Différentes méthodes ont été proposées pour pallier ces défauts ; à titre d'exemple, [Lang et al. \(2015\)](#) introduisent un algorithme de détermination de la concentration, sur la base d'une triangulation de Delaunay sans paramètre, indépendante des déformations ellipsoïdales éventuelles ou des sous-structures.

1.5.3.2 Alternatives

Il n'existe pas de fondement théorique universellement accepté au profil NFW (Mo et al., 2010). De fait, d'autres profils sphériques semblent modéliser efficacement les halos issus des simulations N -corps. Nous citerons pour commencer une généralisation de NFW, mise au point par Zhao (1996) :

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{(r/r_s)^\gamma [1 + (r/r_s)^\alpha]^{(\beta-\gamma)/\alpha}} \quad (1.68)$$

Le fait est que cette généralisation contient un grand nombre de paramètres de sorte que les ajustements sont fréquemment dégénérés. En imposant que les profils décroissent en r^{-3} à grande distance (comme pour le profil NFW), il est possible de restreindre légèrement l'espace des paramètres puisqu'alors $\beta = 3$.

Le cas $\alpha = \gamma = 1.5$ a par exemple été étudié par Moore et al. (1999).

Il est aussi possible de privilégier des profils qui sont aptes à modéliser au centre tant les "cœurs" (compatibles avec les observations) que les "pics" (compatibles avec les simulations). C'est le cas du profil de Dekel-Zhao (Freundlich et al., 2020), pour lequel γ est laissé libre, mais $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{7}{2}$.

Enfin, Einasto (1965) envisage une variation continue en loi de puissance de la pente logarithmique en écrivant :

$$\rho(r) = \rho_{-2} \exp \left[\frac{-2}{\alpha} [(r/r_{-2})^\alpha - 1] \right] \quad (1.69)$$

ce qui donne donc trois paramètres à ajuster. An & Zhao (2013) introduisent quant à eux un profil encapsulant tant les modèles de type NFW ($s \neq 0$) que ceux de type profil d'Einasto ($s = 0$) :

$$\frac{d \log \rho}{d \log r} = - \frac{a + x^{1/\beta}}{1 + sx^{1/\beta}} \quad (1.70)$$

avec $x = r/r_s$.

De façon intéressante, l'ensemble de ces profils présente le défaut relevé plus haut pour NFW : la qualité du *fit* dépend elle-même de la cosmologie. Ainsi, les auteurs de Balmès et al. (2014) montrent qu'une mesure de sparcité, c'est-à-dire un ratio

des masses contenues dans des sphères de surdensité sphérique fixée, $s = M_{\Delta_1}/M_{\Delta_2}$ présente, à masse de halo fixée, une dispersion plus faible que la concentration, sans nécessiter de *fit* particulier. La sparcité constitue donc un indicateur cosmologique plus puissant que la concentration. Dans la même idée, nous décrivons dans le chapitre 4 le profil de masse par des mesures directes pour différents niveaux de surdensité locale, plutôt qu'en termes de paramètres ajustés à un profil fixé.

Chapitre 2

La forme des halos de matière noire comme sonde cosmologique

Sommaire

2.1 Halos de matière noire dans les simulations Dark Energy Universe	52
2.1.1 Simulations Dark Energy Universe	52
2.1.2 Extraction des halos	55
2.2 Triaxialité des halos de matière noire : aspects méthodologiques	61
2.2.1 Indicateurs de forme	61
2.2.2 Effets de résolution et sous-structures	64
2.2.3 Effets de l'algorithme de détection et isodensités	68
2.2.4 Bilan et constitution du catalogue de halos	71
2.3 Empreinte cosmologique sur la forme des halos	73
2.3.1 Effets en termes de masse	73
2.3.2 Effets en termes de fluctuations linéaires	78
2.3.3 Effets en termes de fluctuations non-linéaires	80
2.3.4 Correspondance	87
2.3.5 Distribution des paramètres de forme et fluctuations non-linéaires	92
2.4 Reconstruction du spectre de puissance	97
2.4.1 Reconstruction de la variance non-linéaire	97
2.4.2 Estimation de σ_8	98
2.4.3 Reconstruction du spectre de puissance	103

2.5 Extensions	105
2.5.1 Projection plane	105
2.5.2 Redshifts Multiples	106

Principe et objectif Nous avons présenté, dans le chapitre précédent, plusieurs propriétés structurelles des halos de matière noire (fonction de masse et profils sphériques). Ces dernières portent l’empreinte manifeste du modèle cosmologique de fond dans lequel les halos se sont formés.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à une autre propriété, la forme des halos. L’étude de celle-ci constitue en effet un vaste domaine de recherche et soulève de nombreuses questions théoriques et numériques relatives à son origine et ses aspects quantitatifs, ainsi que de profondes problématiques concernant les méthodes d’observations (par exemple, comment obtenir des informations tridimensionnelles sur un halo observé de manière bidimensionnelle) (Limousin et al., 2013). Or, la structure et la morphologie des halos dépendent directement de leur histoire de formation : un halo issu d’un *merger* récent sera plus elliptique qu’un halo isolé plus ancien. Il est donc naturel de se demander comment la forme des halos dépend du modèle cosmologique.

Dans la suite, on s’intéressera en particulier au caractère triaxial des halos de matière noire. Il est en effet bien établi que ces derniers présentent un écart substantiel à la sphéricité : outre les résultats théoriques sur la probabilité de l’effondrement sphérique d’un champ gaussien (Doroshkevich, 1970 ; Bardeen et al., 1986 ; Rossi, 2012), tant les simulations (Bailin & Steinmetz, 2005 ; Kasun & Evrard, 2005 ; Allgood et al., 2006 ; Hayashi et al., 2007 ; Despali et al., 2013 ; Butsky et al., 2016 ; Suto et al., 2016 ; Prada et al., 2019) que les observations (Oguri et al., 2010 ; Kawahara, 2010) tendent à montrer que les halos sont plutôt semblables à des ellipsoïdes. Nous montrerons que leurs caractéristiques (longueur des axes principaux) dépendent de la cosmologie et du redshift. Nous établirons aussi dans ce chapitre une loi universelle de leur dépendance en la cosmologie.

Après avoir extrait les halos des simulations Dark Energy Universe, nous montrerons que la mesure précise de la forme des halos doit prendre en compte divers biais, liés à la résolution de la simulation et à la présence de sous-structures. Nous développerons une méthode d'estimation de la forme d'un halo simulé visant à en minimiser les effets. Nous montrerons ensuite que la forme des halos de masse donnée dépend fortement de la cosmologie mais que cette dépendance est entièrement encapsulée dans le spectre de puissance non-linéaire du champ de densité : il existe une relation universelle (indépendante de la cosmologie) entre la forme des halos et la variance des fluctuations non-linéaires lissées sur l'échelle des halos. L'existence d'une telle relation est assurée que l'on s'intéresse à la variance du champ de densité totale, ou bien à la part de la variance du champ de densité expliquée par les particules appartenant à des halos (uniquement). Ce constat implique l'existence d'une correspondance, à nouveau indépendante de la cosmologie, entre ces deux mesures de variances. Nous démontrerons enfin que l'absence de dépendance cosmologique dans la forme des halos à niveau de fluctuations donné ouvre la voie à une nouvelle méthode de mesure du spectre puissance de la matière cosmique.

2.1 Halos de matière noire dans les simulations Dark Energy Universe

2.1.1 Simulations Dark Energy Universe

Les simulations Dark Energy Universe¹ (Alimi et al., 2010; Rasera et al., 2010; Alimi et al., 2012; Rasera et al., 2014; Reverdy et al., 2015; Bouillot et al., 2015) sont des simulations N -corps haute performance, issues du code RAMSES (Teyssier, 2002), de type AMR (voir le chapitre précédent). Elles visent à étudier la formation des structures cosmiques sous l'hypothèse de différents modèles d'énergie noire. Nous considérerons trois d'entre eux :

1. www.deus-consortium.org

1. Le modèle de concordance Λ CDM ($w(a) = -1$). Ses paramètres sont choisis pour être compatibles avec les contraintes $WMAP_7$ (Komatsu et al., 2011) : $n_s = 0.9630$, $h = 0.72$, $\Omega_b = 0.04356$, $\Omega_m = 0.2573$ et $\sigma_8^{Bessel} = 0.83$.
2. Le modèle de quintessence Ratra-Peebles RPCDM ($w_0 = -0.8$). Une des originalités des simulations Dark Energy Universe, réside dans le fait que les paramètres des modèles $w \neq 1$ sont, eux aussi, choisis pour être compatibles avec les paramètres $WMAP_7$. Ainsi, les Univers $z = 0$ obtenus sont *réalistes* (Alimi et al., 2010) en ceci qu'ils sont systématiquement proches de l'Univers Λ CDM (et de l'Univers observé). Dans le cas du modèle de Ratra-Peebles (Peebles & Ratra, 1988; Ratra & Peebles, 1988), et en supposant les mêmes valeurs de n_s, h, Ω_b , la contrainte de compatibilité est respectée si le paramètre σ_8 est 30% plus faible que pour Λ CDM, *i.e.* $\sigma_8^{Bessel} = 0.66$, et si $\Omega_m = 0.23$.
3. Enfin, on considérera un modèle fantôme w CDM ($w(a) = -1.2$). Là encore, l'exigence de similarité avec l'Univers observé impose un $\sigma_8^{Bessel} = 0.85$ plus élevé que dans le cas de la constante cosmologique, et $\Omega_m = 0.275$.

Dans tous ces cas, le spectre initial des fluctuations et leur croissance linéaire est calculée par une version modifiée (Alimi et al., 2010) du code CAMB (Lewis & Challinor, 2007) qui prend en compte un éventuel effondrement du champ de quintessence. En revanche, au cours de la simulation (non-linéaire, par construction), celui-ci est négligé. On notera P_L le spectre linéaire à $z = 0$, et, P_{NL} le spectre non-linéaire obtenu sur le champ de densité CIC de la simulation à $z = 0$, par l'algorithme PowerGrid (Springel et al., 2005). Les simulations que nous étudions ici ont été menées dans une boîte périodique de côté $L = 648 \text{ Mpc}/h$ avec $N = 2048^3$ particules, soit une masse particulaire de l'ordre de $2 \cdot 10^9 M_\odot/h$. Nous traçons $P_L(k)$ et $P_{NL}(k)$ dans le panneau interne de la figure 2.1. Comme attendu, le spectre linéaire de chacun des modèles cosmologiques est confondu avec le spectre non-linéaire correspondant aux grandes échelles ($k < 0.2h/\text{Mpc}$) et différent aux échelles plus petites.

On peut similairement tracer la variance des fluctuations linéaires (voir section 1.3) calculée à partir des spectres de puissance P_L et d'une fenêtre gaussienne de lissage (se reporter, dans le chapitre précédent, à la section 1.4.2.1) et dont nous rappelons

l'expression :

$$\sigma_L^2(M) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} k^2 P_L(k) \exp \left[-\frac{k}{5} \cdot \left(\frac{3M}{4\pi\Omega_m\rho_c} \right)^{1/3} \right] dk \quad (2.1)$$

et pareillement pour $P_{NL}(k)$ et $\sigma_{NL}^2(M)$. Les variances lissées σ_L et σ_{NL} sont tracées dans le panneau principal de la figure 2.1. Là encore, la variance linéaire d'un modèle donné est confondue avec la variance non-linéaire correspondante pour des masses typiques élevées $M > 10^{15} M_\odot/h$ et diffère notablement pour des échelles de masse inférieures ou égales à $10^{15} M_\odot/h$. Les courbes, linéaires ou non, sont ordonnées (à masse donnée) comme les σ_8 correspondants.

Pour évaluer l'empreinte cosmologique laissée sur les échelles situées à la frontière entre les régimes linéaire et non-linéaire, Alimi et al. (2010) définissent le spectre de puissance *purement* non-linéaire pour un modèle cosmologique donné X :

$$\mathcal{P}^X(k) = \frac{P_{NL}^X(k)}{P_L^X(k)} \quad (2.2)$$

Il quantifie le gain de puissance apporté par la prise en compte du couplage de modes au cours de l'effondrement. Il est possible de définir aussi, dans le même ordre d'idée, la variance purement non linéaire des fluctuations de densité :

$$\mathcal{S}^X(k) = \frac{\sigma_{NL}^X(k)}{\sigma_L^X(k)} \quad (2.3)$$

En normalisant ces quantités par leur équivalent pour le modèle de concordance, on obtient la figure 2.2 : les comportements de $\mathcal{P}^{RPCDM} / \mathcal{P}^{\Lambda CDM}$ et de $\mathcal{P}^{wCDM} / \mathcal{P}^{\Lambda CDM}$ sont manifestement très différents. Notons k_c^X le mode pour lequel le spectre purement non linéaire dévie de plus de cinq pourcents de celui du modèle Λ CDM. Alors, on a : $k_c^{RPCDM} = 0.3h/\text{Mpc}$ et $k_c^{wCDM} = 2h/\text{Mpc}$. Cela confirme qu'aux échelles situées à la frontière entre régimes linéaire et non linéaire, la structuration de l'Univers dépend encore fortement du modèle cosmologique sous-jacent. Pour connaître la masse typique des structures affectées par les effets purement non-linéaires de la cosmologie d'arrière-plan, on peut tracer (figure 2.2) les ratios $\mathcal{S}^{RPCDM} / \mathcal{S}^{\Lambda CDM}$ et

Model	Λ CDM	<i>R</i> PCDM	<i>w</i> CDM
Ω_m	0.2573	0.23	0.275
Particle mass (M_\odot/h)	$2.3 \cdot 10^9$	$2.0 \cdot 10^9$	$2.4 \cdot 10^9$
σ_8^{Gauss}	0.83	0.68	0.88
σ_8^{Bessel}	0.8	0.66	0.85
w	-1.0	-0.8	-1.2
Number of selected halos	354 1262	273 409	384 332
δ_c	1.673	1.672	1.674

Table 2.1 – Paramètres des simulations Dark Energy Universe. Pour toutes celles que nous avons utilisées, $\Omega_K = 0$, $n_s = 0.9630$, $h = 0.72$, $L = 648$ Mpc/h et $N = 2048^3$ particules. Pour la détermination du spectre initial, $\Omega_b = 0.04356$ (les baryons sont ensuite supposés suivre la dynamique de la matière noire). Les σ_8 sont calculés sur le spectre linéaire à $z = 0$ en usant d’une fenêtre gaussienne ou bien de type *top-hat*.

$\mathcal{P}^{wCDM} / \mathcal{P}^{\Lambda CDM}$: si, là encore, les comportements sont très différents d’une cosmologie à l’autre, il apparaît que les variances purement non-linéaires des modèles cosmologiques *R*PCDM et *w*CDM se distinguent nettement de celle de Λ CDM pour des masses inférieures à $10^{14} M_\odot/h$. Il paraît donc pertinent d’étudier les propriétés des halos de matière noire de masse inférieure à $10^{14} M_\odot/h$ pour y détecter une empreinte du spectre de puissance non-linéaire et du modèle cosmologique.

2.1.2 Extraction des halos

Les halos de matière noire ont été détectés par l’algorithme Parallel Friends of Friends (Roy et al. (2014)) avec un paramètre de percolation $b = 0.2$. Nous travaillerons avec les halos bien résolus en tant qu’ils contiennent plus de 1000 particules. Avec les valeurs Ω_m des simulations Dark Energy Universe utilisées, cela revient à sélectionner des halos de la taille d’un groupe de galaxies, de masse comprise entre $2.4 \cdot 10^{12}$ et $1.0 \cdot 10^{14} M_\odot/h$. Nous disposons ainsi de plus de 300 000 halos pour chaque cosmologie. Dans le tableau 2.1, nous présentons certaines caractéristiques du catalogue de halos obtenu dans chaque simulation. Les halos de ces catalogues sont particulièrement adaptés à l’étude de la dépendance cosmologique de la dynamique non linéaire, comme nous l’avons vu dans la section précédente à partir des spectres de puissance du champ de matière cosmique. En figures 2.3 et 2.4, on représente, pour chaque

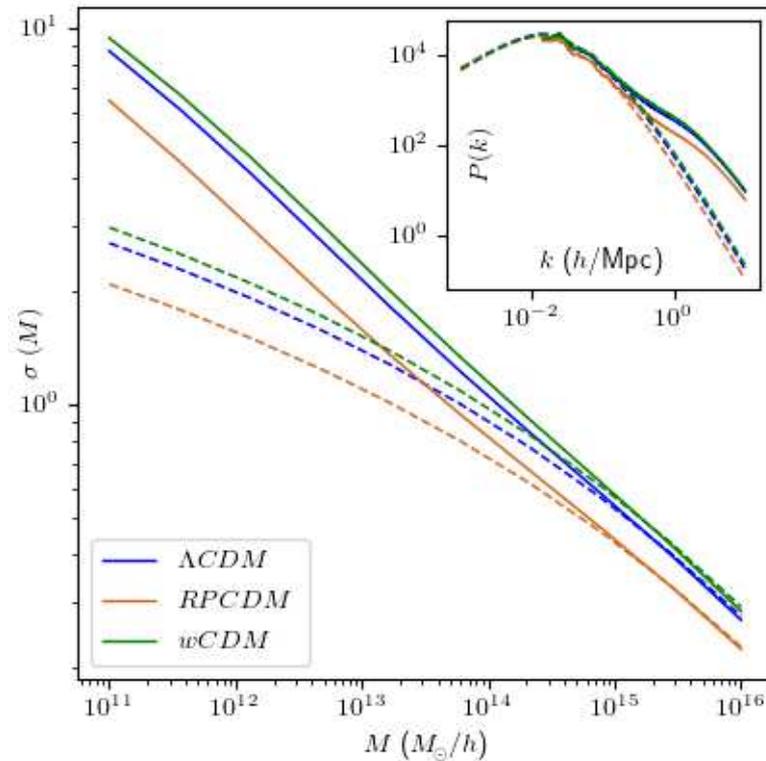


Figure 2.1 – Variance du spectre de Puissance en fonction de la masse de lissage. La variance linéaire (calculée par CAMB) est représentée en traits discontinus. La variance non-linéaire (calculée à partir des résultats à $z = 0$ des simulations Dark Energy Universe) est représentée en traits continus. Le comportement de cette dernière est essentiellement celui d’une loi de puissance. Le panneau intérieur contient les spectres de puissance, linéaire et non-linéaire, correspondants.

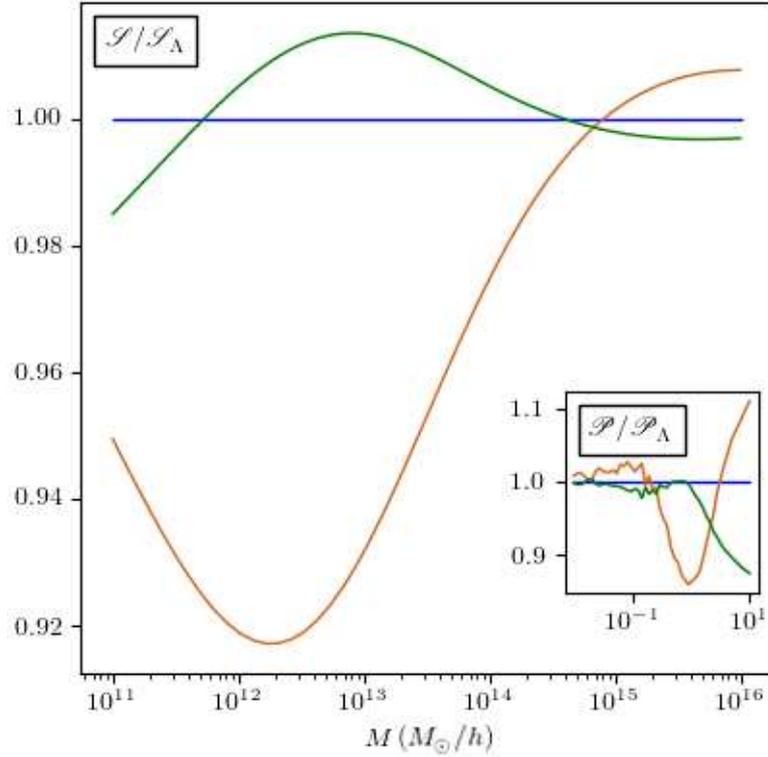


Figure 2.2 – Rapport des variances purement non linéaires $\mathcal{S} = \sigma_{NL}/\sigma_L$ pour les modèles RPCDM (orange) et w CDM (vert) au modèle Λ CDM (bleu) en fonction de la masse de lissage M . Dans le panneau interne, nous traçons, de la même manière, le rapport au modèle Λ CDM du spectre de puissance purement non linéaire $\mathcal{P} = P_{NL}/P_L$ de chaque modèle. Nous remarquons que \mathcal{P}_{RPCDM} (orange) suit de près $\mathcal{P}_{\Lambda CDM}$ (bleu) jusqu'à $k_C = 0,4 h/\text{Mpc}$, après quoi il s'en écarte de manière significative. Pour le modèle w CDM (vert), les spectres purement non linéaires sont très distincts au-dessus de $k_C = 1 h/\text{Mpc}$. Sur les rapports de variances purement non linéaires, la différence est forte sur les échelles de masse 10^{12} - $10^{14} M_\odot/h$. C'est précisément cette gamme de masse que nous étudierons à partir des halos de matière noire

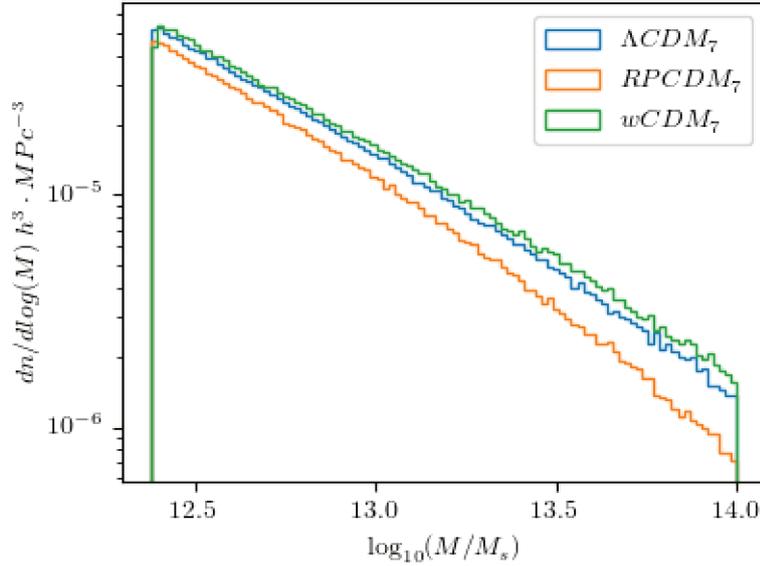


Figure 2.3 – Fonction de masse pour chaque modèle cosmologique (dont les paramètres cosmologiques sont calibrés sur les résultats de la sonde WMAP7).

modèle cosmologique, la fonction de masse $dn/d\log M$ et la fonction de multiplicité $\rho_m M^{-1} dn/d\log \sigma_L^{-1}$. Si la fonction de multiplicité semble bien moins dépendante du modèle cosmologique que la fonction de masse proprement dite, son comportement n'est pas tout à fait universel. Ainsi, en traçant (figure 2.5) le quotient entre la fonction de masse de chaque cosmologie et la fonction de masse de Λ CDM des différences de l'ordre de 4-8 pourcents apparaissent pour le modèle de quintessence et de 2-4 pourcents pour le modèle fantôme. Ces erreurs sont bien au-delà de l'amplitude des fluctuations gaussiennes² (figure 2.6) et ne peuvent être dues à un simple effet de découpage en *bins*. Ceci suggère que, pour cette gamme de masse, des considérations purement linéaires ne permettent pas d'expliquer finement la dépendance cosmologique des propriétés des halos dans cette gamme de masse. Nous y reviendrons ultérieurement.

En ce qui concerne la forme des halos des simulations Dark Energy Universe, observons, à titre d'illustration, des halos FOF typiques des simulations Dark Energy Universe. Nous représentons dans la figure 2.7 trois halos simulés dans le modèle

2. Quotient entre l'écart-type et la racine du nombre d'éléments dans chaque *bin*.

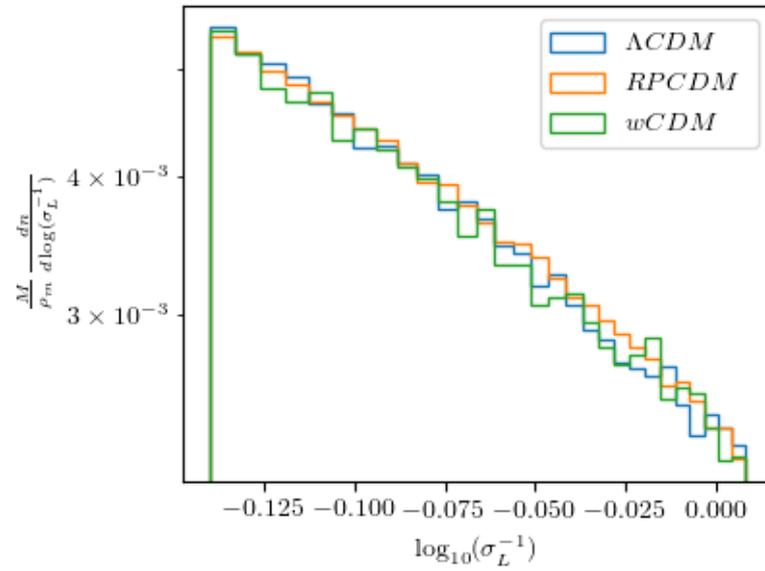


Figure 2.4 – Fonction de multiplicité pour chaque modèle cosmologique

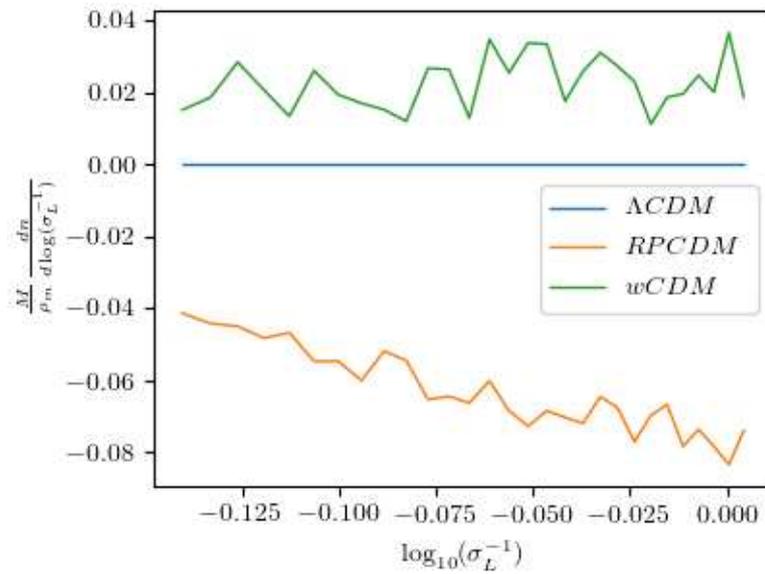


Figure 2.5 – Écart relatif entre la fonction de multiplicité de chaque modèle cosmologique et celle de Λ CDM

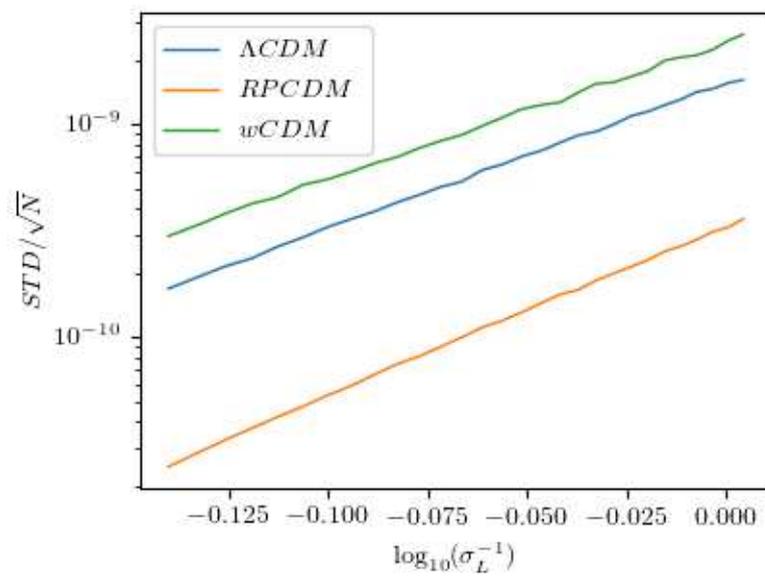


Figure 2.6 – Hauteur des barres d’erreur (fluctuations gaussiennes) dans chaque *bin* de $\log(\sigma_L^{-1})$ sur les fonctions de multiplicité.

cosmologique Λ CDM, avec des masses respectives

$$M_{FOF} = 6.1 \cdot 10^{12} M_{\odot}/h \quad M_{FOF} = 1.8 \cdot 10^{13} M_{\odot}/h \quad M_{FOF} = 3.65 \cdot 10^{13} M_{\odot}/h$$

Le premier est plutôt sphérique, et les autres, outre les nombreuses sous-structures périphériques, sont plus comprimés le long d'un axe. Nous l'avons rendu plus visible dans la deuxième ligne de cette figure dans laquelle les halos sont projetés sur le plan $y - z$ de la simulation. Le second halo, en position centrale, présente un sous-halo très excentré et apparemment de masse non négligeable. Cette situation peut être interprétée comme la fusion du halo principal (le plus massif) avec un halo plus léger. Enfin, dans la troisième ligne de la figure 2.7, nous traçons le nuage de points dans lequel chaque point est une particule du halo considéré : l'abscisse est sa distance au point le plus dense du halo, et l'ordonnée est la surdensité locale (δ , en bleu) à la position de la particule ou bien la surdensité de la coquille sphérique (parmi 64 autres, espacées logarithmiquement) à laquelle appartient cette particule (\mathcal{D} , en orange). Le fait que le nuage soit "épais", signifie qu'il n'y a pas de correspondance biunivoque entre le rayon et la surdensité locale. Ceci constitue une autre manifestation de la triaxialité du halo, de sorte qu'une description sphérique ne serait pas pertinente.

Dans la suite, nous nous intéresserons donc à la forme ellipsoïdale des halos de $2.4 \cdot 10^{12} - 10^{14} M_{\odot}/h$. Nous verrons comment la présence manifeste de sous-structures impacte son estimation précise.

2.2 Triaxialité des halos de matière noire : aspects méthodologiques

2.2.1 Indicateurs de forme

La détermination des paramètres (c'est-à-dire la taille et l'orientation des axes principaux) de l'ellipsoïde *qui approxime le mieux* un halo donné doit être effectuée avec précaution. La plupart des méthodes disponibles nécessitent le calcul du tenseur d'inertie

du halo considéré :

$$\mathcal{M}_{sample}^{ij} = \langle x_i x_j \rangle_{sample} - \langle x_i \rangle_{sample} \langle x_j \rangle_{sample} \quad 1 \leq i, j \leq 3 \quad (2.4)$$

où les moyennes sont prises sur un certain échantillon de particules. Le choix de celui-ci, dans chaque halo, est cependant très délicat. En effet, la prise en compte de toutes les particules d'un halo donné pour extraire l'ellipsoïde principal est, comme nous le montrerons plus loin, à la fois sensible à l'algorithme utilisé pour détecter ce halo, et à la résolution dans laquelle le halo a été simulé. Une méthode fiable pour capturer sa forme devrait donc atténuer ces effets parasites.

Notons $a^2 \geq b^2 \geq c^2$ les valeurs propres de \mathcal{M}_{sample} . On peut former les quantités sans dimension suivantes :

— l'ellipticité

$$E = \frac{a - c}{2(a + b + c)}$$

— la prolaticité

$$p = \frac{a - 2b + c}{2(a + b + c)}$$

— la triaxialité

$$T = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$$

L'ellipticité quantifie l'écart à la sphéricité tandis que les deux autres indicateurs sont des mesures de l'aplatissement du halo : un ellipsoïde oblate ($p \rightarrow -\infty, T \rightarrow 0$) ressemble à une crêpe tandis que la forme d'un ellipsoïde prolatae ($p \rightarrow +\infty, T \rightarrow 1$) est proche d'un filament. Pour une sphère parfaite, p s'annule et T n'est pas défini. En pratique, le calcul de ces indicateurs de forme pour chaque halo consistera à déterminer l'échantillon de particules qui sera pris en compte pour calculer le tenseur d'inertie, parmi toutes les particules du halo. On appellera prolaticité FOF (p_{FOF}) d'un halo, la prolaticité calculée en utilisant toutes les particules qui appartiennent au halo, tel que détecté par l'algorithme Friends of Friends.

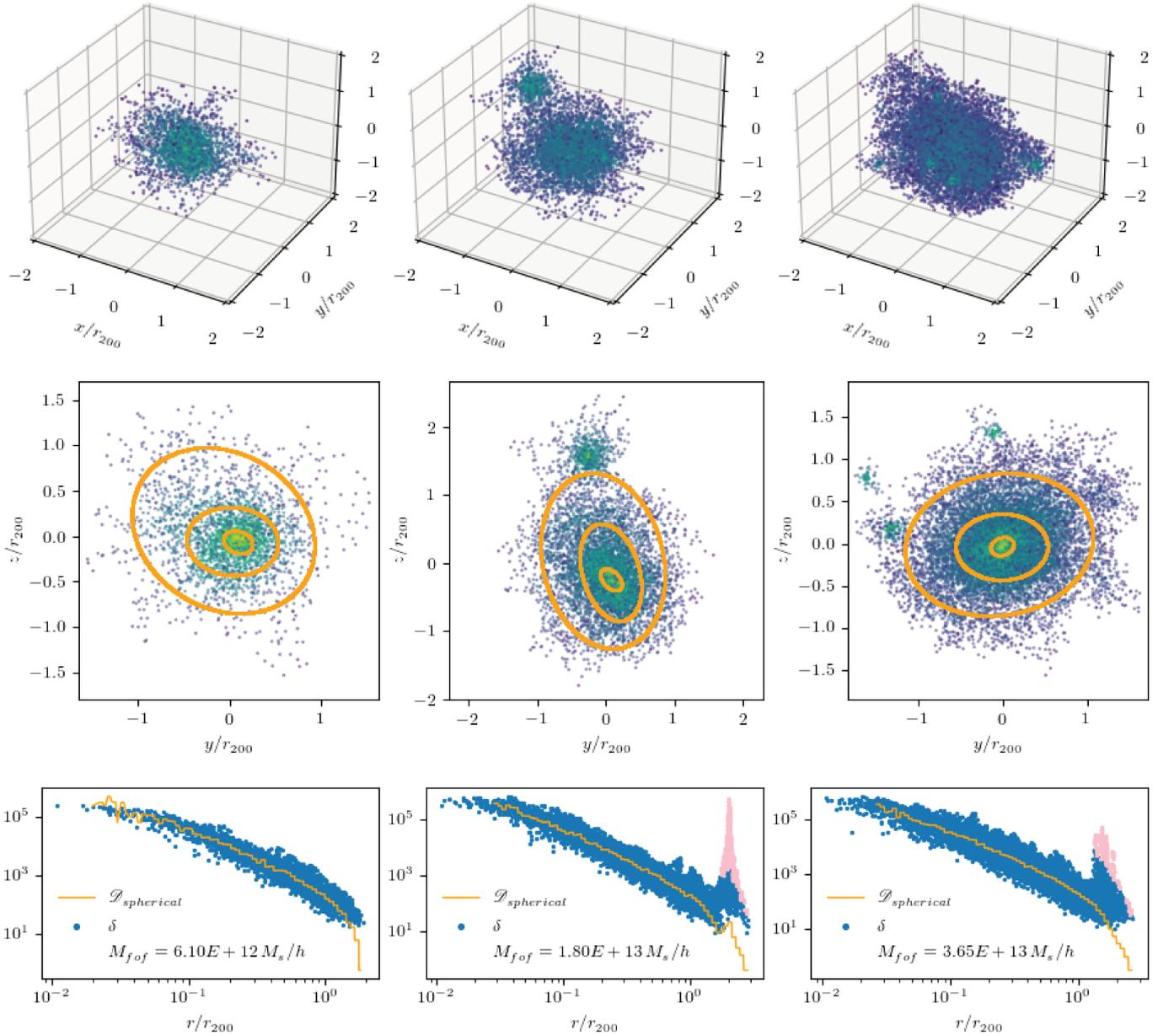


Figure 2.7 – Trois halos de matière noire avec trois nombres différents de particules (la masse des particules est égale à $2.1 \cdot 10^9 M_\odot/h$) dans les simulations d'énergie noire CDM Λ . Leur masse est respectivement, de gauche à droite, de $6.1 \cdot 10^{12}$, $1.8 \cdot 10^{13}$, $3.65 \cdot 10^{13} M_\odot/h$. La première ligne de cette figure montre les représentations tridimensionnelles des halos : chaque halo contient de nombreuses sous-structures, principalement situées à la périphérie ; leur nombre augmente avec la masse du halo. La deuxième ligne montre les ellipsoïdes correspondant au mieux aux isodensités $\delta = 200$, $\delta = 2000$ et $\delta = 20000$, superposés aux particules dans le plan (y, z) . Les graphiques de la troisième ligne montrent les nuages de points dans le plan (r, δ) , où chaque point représente une particule située à la distance r du centre de masse du halo et δ est la surdensité locale au point où la particule est située. Les points roses correspondent à des particules appartenant à des sous-structures (voir le texte principal). En orange, nous traçons la surdensité moyenne de la coquille sphérique au rayon r . La densité locale n'est pas une fonction bi-univoque de la distance au centre de masse. Ceci illustre à nouveau l'asphéricité du halo. Les sous-structures apparaissent dans cette représentation comme un ensemble de particules regroupées sous la forme de pics de densité locale qui sont superposés aux profils de densité sphériques.

2.2.2 Effets de résolution et sous-structures

Le choix de l'échantillon de particules à partir duquel nous estimerons les indicateurs de forme du halo considéré soulève la question cruciale du traitement des sous-structures. Cette question est spécialement pertinente si l'on compare des halos issus de simulations de résolutions différentes. En effet, nous allons montrer que les sous-structures d'un même halo simulé à deux résolutions distinctes sont susceptibles de contribuer très différemment à sa masse et à sa forme. En conséquence, si l'on calcule le tenseur d'inertie sur l'ensemble du halo FOF, ses valeurs propres dépendront fortement de la résolution.

Dans la figure 2.8, nous avons extrait les halos FOF du même modèle cosmologique Λ CDM³ simulés dans des boîtes de différentes tailles L et de différents nombres de particules N . Nous avons ensuite calculé la prolaticité FOF de chaque halo et les avons rassemblées dans des *bins* de M_{FOF} . Pour chaque simulation, nous avons calculé la prolaticité médiane des halos appartenant à chaque *bin* de masse. Les p médians sont les points de figure 2.8. Plusieurs domaines de masse, déterminés par la résolution N/L^3 (cette dernière étant proportionnelle à la masse de la particule, m_p) sont ainsi sondés. Nous pouvons faire l'observation suivante : la prolaticité médiane à masse donnée sondée dans deux simulations distinctes sont différentes si *et seulement si* la résolution en masse de ces simulations est différente. Ainsi, des simulations qui n'ont ni la même longueur de boîte ni le même nombre total de particules, mais qui ont la même résolution en masse produisent des halos de même forme (*i.e.* qui présentent le même p_{FOF} médian à masse de halo donnée). C'est par exemple le cas pour les couples $(L, N) = (2592, 1024^3)$ et $(5184, 2048^3)$.

On peut attribuer ce comportement à la présence de sous-structures. En effet, le tenseur d'inertie est principalement sensible aux particules situées au bord du halo, puisque leur contribution est égale au carré de leur distance au centre du halo. D'autre part, les sous-structures sont, par nature, des objets qui ne sont pas bien mélangés avec le reste du halo ; beaucoup d'entre elles sont encore en phase d'accrétion et se

3. provenant des simulations Dark Energy Universe dont les paramètres sont calés sur WMAP5 : $\Omega_m = 0.25$, $h = 0.72$ et $\sigma_8^{Bessel} = 0.81$

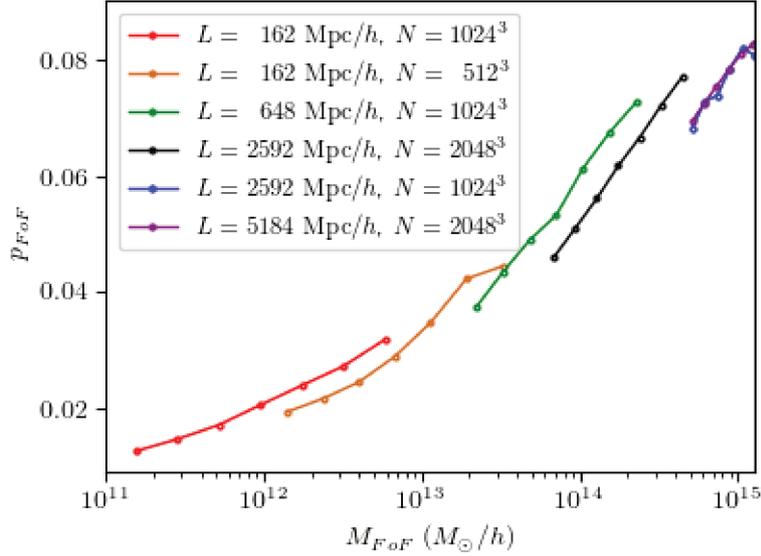


Figure 2.8 – Dépendance de la forme des halos FOF en fonction de la résolution numérique des simulations dans lesquelles ils ont été formés. Toutes les simulations correspondent au même modèle Λ CDM. Chaque simulation a été réalisée avec une taille de boîte de calcul spécifique L , et contient un nombre spécifique N de particules. Par conséquent, les masses des particules m_p sont spécifiques à chaque simulation. Nous avons détecté les halos FOF dans chacune des simulations. Nous avons calculé leur masse FOF, et (sans autre traitement) leurs paramètres de forme. Nous avons tracé la prolatité médiane des halos dans chaque gamme de masse. Nous remarquons tout d’abord que la forme des halos FOF dépend effectivement de la résolution numérique. Les halos de $10^{12} - 10^{13} M_{\odot}/h$ sont plus prolates dans la simulation $L = 162 \text{ Mpc}/h$ avec $N = 1024^3$ particules que dans la simulation moins résolue $L = 162 \text{ Mpc}/h$ avec $N = 512^3$ particules. Nous notons également que cet effet ne dépend que du rapport N/L^3 (*i.e.* m_p). Les halos correspondant aux courbes bleues et violettes développées dans des boîtes avec différents L et N , mais avec la même masse de particules, n’ont pas une prolatité médiane notablement distincte.

trouvent donc plutôt au bord du halo. En somme, la forme (FOF) d'un halo est dictée par les sous-structures. Lorsque la résolution est plus faible, moins de sous-structures se forment, et celles qui se forment contiennent un plus petit nombre de particules. Cela modifie le bord du halo et donc sa forme. Le halo résultant est nécessairement plus isotrope et a donc une prolaticité plus faible.

Pour le prouver, nous allons effacer les sous-structures dans les halos et observer comment cela affecte leur forme en fonction de la résolution. Les sous-structures sont principalement des régions anormalement denses dans un halo donné. Pour les localiser (et donc pouvoir les effacer), on pourrait appliquer une seconde fois l'algorithme FOF mais avec un paramètre de percolation plus faible; c'est la voie empruntée par [Jing & Suto \(2002\)](#). Cependant, ces auteurs utilisent des halos extrêmement bien résolus pour leur analyse (plus de 10^6 particules par halo), les nôtres ne contiennent "que" quelques milliers de particules (au profit d'une bien meilleure statistique). Par conséquent, nous présentons ici une autre procédure dans laquelle nous comparons la densité en tout point où se trouve une particule avec la densité de la coquille sphérique à laquelle elle appartient. La procédure se déroule en quatre étapes :

1. Nous calculons la densité δ pour toutes les positions des particules. Pour cela, nous utilisons un noyau SPH ([Gingold & Monaghan, 1977](#); [Lucy, 1977](#)) comprenant 32 voisins. Ceux-ci sont contenus dans une sphère de rayon r_{32} . Le rayon de lissage est alors $h = r_{32}/2$. δ est calculé en unités de $0,25\rho_c$ (et non pas $\Omega_m\rho_c$) afin d'adopter un point de vue agnostique sur la valeur exacte de Ω_m .
2. Nous définissons le centre du halo comme la position de la particule ayant le plus grand δ . Ce centre peut généralement être différent du centre de masse du halo. À partir de maintenant, il sera l'origine des coordonnées.
3. Le halo est ensuite divisé en 64 coquilles sphériques concentriques; ainsi, pour une particule en position $\mathbf{r}^{(i)}$, nous notons $\mathcal{D}(r_i)$, la surdensité (relativement à $0.25\rho_c$) de la coquille à laquelle cette particule appartient.
4. Enfin, dans le nuage de points $(r^{(i)}, \delta^{(i)})$ (troisième ligne de la figure 2.7 par exemple), les sous-structures correspondent aux pics. Cela conduit à la définition suivante des sous-structures : ce sont les particules telles que $\delta^{(i)} > \eta \cdot \mathcal{D}(r^{(i)})$.

En effet, la surdensité d'une coquille sphérique est moyennée sur les angles et est donc beaucoup moins sensible à la présence de sous-structures. Le paramètre η , qui quantifie la "sévérité" de l'élimination des sous-structures, reste à déterminer. Il existe une variante dans laquelle la densité locale est comparée à la densité locale moyenne et à l'écart type dans la coquille, présentée dans [Stapelberg et al. \(2022\)](#).

Nous avons alors calculé puis diagonalisé le tenseur de masse en ne considérant que les particules qui n'appartiennent pas à des sous-structures, c'est-à-dire toutes les particules telles que $\delta \leq \eta \mathcal{D}$, avec respectivement $\eta = 1000, 100, 10$. La prolaticité médiane des halos (avec ou sans sous-structures) est tracée en fonction de la masse totale FOF de chaque halo. Les résultats sont présentés dans la figure 2.9 : si l'effet de résolution susmentionné semble être tempéré avec une élimination modérée ($\eta = 100$) ou stricte ($\eta = 10$) des sous-structures, il survit lorsque l'on élimine seulement quelques particules (avec $\eta = 1000$), confirmant ainsi que c'est bien la présence de sous-structures (en périphérie) qui est responsable de la dépendance de la forme du halo en la résolution.

En outre, il est important de noter qu'une suppression trop agressive des sous-structures avec $\eta = 10$, tend à modifier la caractéristique triaxiale du halo lui-même, avec de nombreuses particules satisfaisant $\delta^{(i)}/\mathcal{D}(r^{(i)}) \geq 10$, sans appartenir à des sous-structures. La présence de telles particules, et plus généralement l'épaisseur du nuage de points (r, δ) , est alors simplement une manifestation de la non-sphéricité du halo, comme mentionné ci-dessus. Dans la figure 2.10, nous représentons la prolaticité médiane pour différents η , dans des simulations contenant 1024^3 particules évoluées dans une boîte de simulation de côté $648 \text{ Mpc}/h$. La prolaticité des halos avec $\eta = 100$ est seulement 10% différente de la prolaticité calculée sur le halo FOF complet, alors qu'elle est réduite de moitié lorsque $\eta = 10$: une définition raisonnable des sous-structures ne devrait pas conduire à une sphéricisation aussi drastique du halo lorsqu'elles sont supprimées. En conclusion, nous considérerons les halos sans les sous-structures dites " $\eta = 100$ ", c'est-à-dire sans les particules telles que $\delta^{(i)}/\mathcal{D}(r^{(i)}) \geq 100$. Il s'agit d'un bon compromis entre la nécessité d'atténuer les

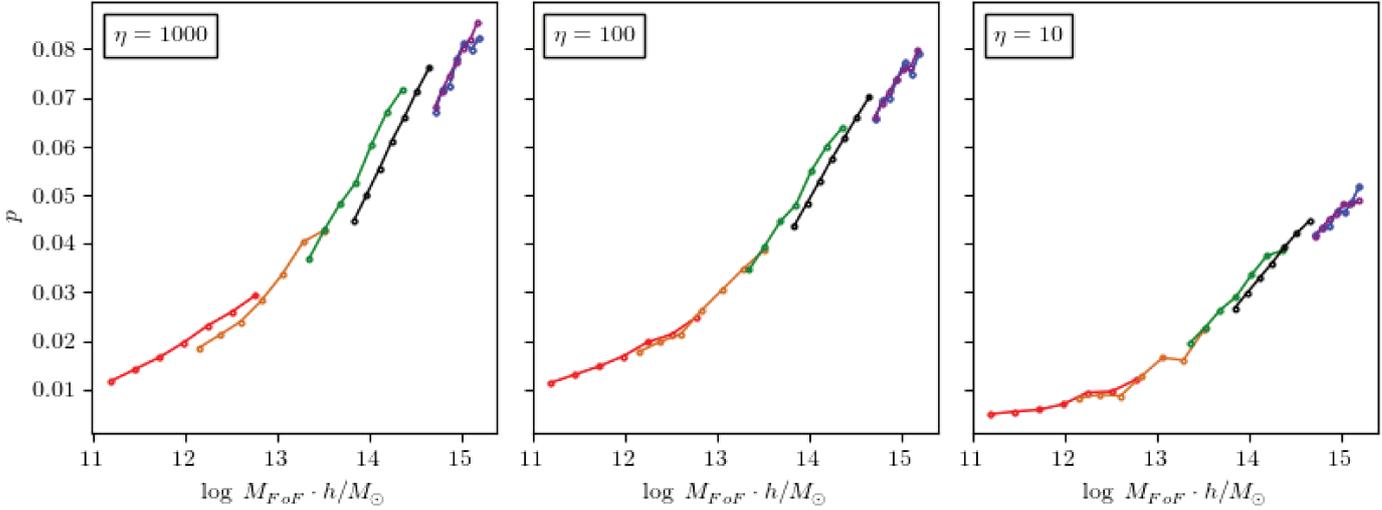


Figure 2.9 – Suppression des sous-structures et effet de résolution. Pour le modèle Λ CDM, nous considérons plusieurs simulations avec différentes tailles de boîtes et différents nombres de particules. Dans chaque halo FOF, nous supprimons les sous-structures à un certain niveau de η (plus le η est grand, plus le nombre de particules désignées comme appartenant aux sous-structures est faible - voir le texte principal). La prolaticité est ensuite calculée sur les halos traités par suppression des sous-structures. Elle est tracée en fonction de la masse du halo. Pour $\eta = 1000$ (à gauche), l’effet de résolution est toujours présent : dans un intervalle de masse donné, l’augmentation de la résolution en masse augmente la prolaticité médiane des halos traités. Cet effet est fortement atténué lorsque nous choisissons $\eta \leq 100$ (milieu) : les courbes masse-prolaticité correspondant aux différentes résolutions sont superposées dans les domaines communs de masse des halos. Ceci nous permet d’attribuer la dépendance de la résolution numérique de la forme des halos FOF à la présence de sous-structures. Cependant, à $\eta = 10$ (à droite), la prolaticité globale s’effondre : une fraction trop importante des particules du halo a été considérée comme appartenant à des sous-structures et a été supprimée. La nature ellipsoïdale des halos résultants est alors fortement altérée, et ils sont environ deux fois moins prolates qu’ils ne l’étaient avant l’élimination des sous-structures. Un niveau fiable, indépendant de la résolution numérique de la suppression des sous-structures, peut être fixé à $\eta = 100$.

effets de résolution d’une part et de préserver la forme du halo d’autre part.

2.2.3 Effets de l’algorithme de détection et isodensités

Comme nous l’avons mentionné, le tenseur d’inertie est dominé par les particules situées près du bord du halo. Or, c’est précisément le bord du halo qui est sensible à

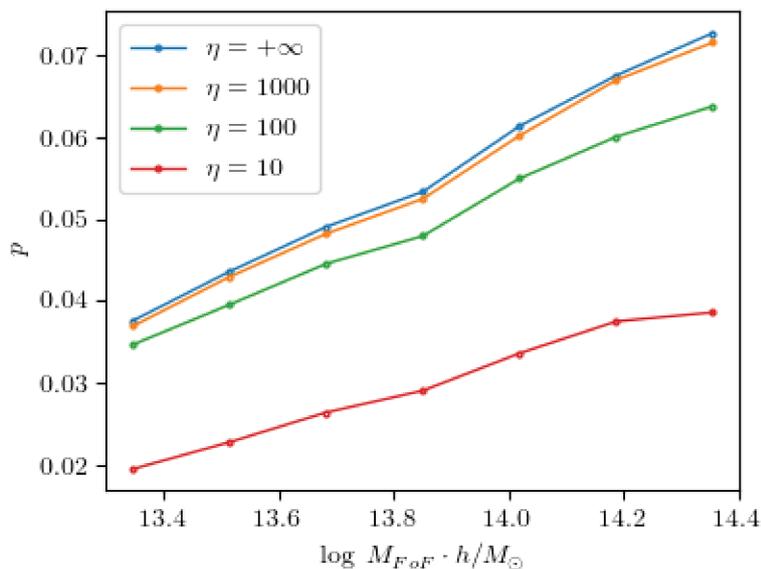


Figure 2.10 – Effet de la sévérité de l’élimination de la sous-structure (paramètre η) sur la prolaticité globale des halos. Dans la simulation $L = 648\text{Mpc}/h$, $N = 1024^3$, nous traçons les courbes médianes masse-prolaticité pour les halos traités avec différents paramètres d’élimination des sous-structures η . En choisissant $\eta = +\infty$, aucune sous-structure n’est supprimée. La courbe correspondante n’est qu’environ 10% plus grande que celle des formes de halos à $\eta = 100$, alors qu’elle est deux fois plus grande que la prolaticité du halo traité avec $\eta = 10$. Le traitement des halos avec $\eta = 100$ semble donc être le plus raisonnable et ne biaise pas artificiellement leurs mesures de forme vers la sphère.

la méthode de détection. Par conséquent, pour obtenir une estimation de la forme du halo qui soit indépendante du choix de l'algorithme de détection, il faut atténuer la contribution des particules très proches du bord du halo. Dans l'hypothèse contraire, le fait de privilégier une méthode de détection par rapport à une autre pourrait finalement fausser la mesure de la forme : par exemple, alors que FOF procède sans a priori sur la forme des halos, ceux détectés par SOD sont artificiellement plus sphériques.

Pour cette raison, certains auteurs normalisent la contribution des particules au tenseur d'inertie par le carré de leur distance au centre (Bailin & Steinmetz, 2005). Nous ne favorisons pas cette solution, car le tenseur d'inertie normalisé n'a plus la dimension physique d'un tenseur d'inertie classique. D'autres auteurs (Allgood et al., 2006 ; Despali et al., 2013) ont développé des méthodes de calcul de forme avec de multiples itérations lors de la diagonalisation du tenseur d'inertie jusqu'à ce qu'il converge. Il semble (Zemp et al., 2011) que cette méthode favorise la contribution des particules très internes au halo, ce qui peut biaiser le calcul de la forme globale du halo. Finalement, nous avons opté pour une troisième méthode, adaptée de celle qui est utilisée notamment par Jing & Suto (2002), dont la contrepartie observationnelle semble en quelque sorte plus évidente : elle consiste à calculer tout d'abord une première estimation du tenseur d'inertie à partir des particules incluses dans la "coquille" d'isodensité locale choisie $\delta = \delta_0$ du halo, c'est-à-dire l'ensemble des particules pour lesquelles $0.8\delta_0 \leq \delta \leq 1.2\delta_0$. La connexité des surfaces de densité constante est garantie par la suppression des sous-structures. Toutes les particules appartenant à cette coquille épaisse contribuent au tenseur de masse correspondant, \mathcal{M}_{S_0} .

En le diagonalisant, on obtient les paramètres d'un *fit* ellipsoïdal pour cette coquille. La longueur de ses demis axes est

$$a_{\delta_0} = \sqrt{3\lambda_1}, b_{\delta_0} = \sqrt{3\lambda_2}, c_{\delta_0} = \sqrt{3\lambda_3}$$

où $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ sont les valeurs propres de \mathcal{M}_{S_0} . Ensuite, pour atténuer le bruit éventuel, nous ajoutons une étape d'intégration : considérons toutes les particules du halo

qui se trouvent à l'intérieur du volume délimité par la coquille ellipsoïdale (définie par $a_{\delta_0}, b_{\delta_0}, c_{\delta_0}$). Toutes ces particules remplissent un ellipsoïde (et plus seulement une coquille ellipsoïdale). Pour en obtenir les paramètres les plus adaptés, nous calculons le tenseur de masse $\mathcal{M}_{\mathcal{E}_0}$ à partir des positions de ces particules. En diagonalisant $\mathcal{M}_{\mathcal{E}_0}$, on obtient la nouvelle (et dernière) mesure de la longueur des demi-axes du halo :

$$a_{\delta_0} = \sqrt{5\mu_1}, b_{\delta_0} = \sqrt{5\mu_2}, c_{\delta_0} = \sqrt{5\mu_3}$$

où $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \mu_2$ sont les valeurs propres de $\mathcal{M}_{\mathcal{E}_0}$.

Ces dernières valeurs de a, b, c ne sont pas très différentes des précédentes (qui ont été calculées en utilisant les valeurs propres de $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_0}$), comme indiqué dans Zemp et al. (2011). Toutefois, en procédant de cette manière, nous sommes assurés que l'estimation des longueurs du demi-axe du halo sera moins sensible aux détails de la forme très extérieure du halo et, en particulier, aux particules qui appartiennent à l'isodensité (épaisse) $\delta = \delta_0$, mais qui sont situées loin du *fit* ellipsoïdal correspondant. En outre, l'utilisation d'une isodensité comme base de l'estimation permet de rendre les résultats sur les mesures de forme des halos compatibles avec les résultats qui auraient été obtenus pour des halos détectés par n'importe quel autre algorithme (SOD par exemple); il suffira alors de choisir une valeur de δ_0 telle que l'isodensité correspondante n'intersecte pas le bord du halo (qui est déterminé par l'algorithme de détection).

2.2.4 Bilan et constitution du catalogue de halos

Dans la figure 2.11, nous représentons la prolaticité médiane des halos Λ CDM, calculée de trois manières différentes :

1. La courbe bleue est obtenue à partir de toutes les particules du halo FOF.
2. À partir de toutes les particules du halo FOF, nous calculons le tenseur de masse, en ne gardant que les particules appartenant à la boule de *densité sphérique moyenne* $\Delta = 200$ (relativement à $0.25\rho_c \approx \rho_m$). La prolaticité résultante correspond à la courbe verte et est environ 100 fois plus faible que l'estimation

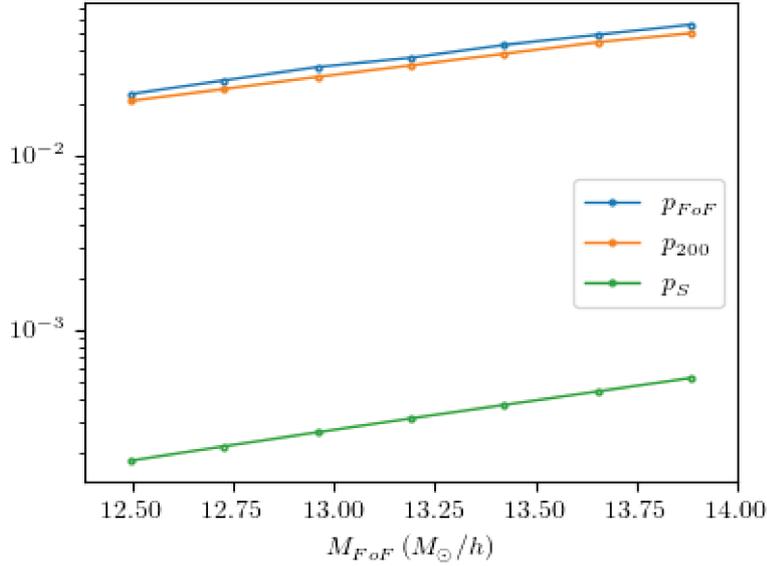


Figure 2.11 – Effet du prior sphérique sur les mesures de forme. Nous considérons les halos FOF de l’Univers Λ CDM simulés dans un cube $L = 648 \text{ Mpc}/h$, $N = 2048^3$. Leur prolativité est calculée en diagonalisant le tenseur de masse des halos traités de trois manières : (i) par la procédure décrite ci-dessus (suppression des sous-structures et sélection des isodensités) - c’est la courbe p_{200} (orange) ; (ii) en ignorant simplement les particules hors de la sphère dont la surdensité sphérique est $\Delta = 200$. Cela revient à introduire un a priori sphérique, et la courbe correspondante est notée p_S (vert) ; (iii) ou sans traitement des halos FOF - p_{FOF} (bleu). Il s’avère que le calcul des formes des halos tronqués par des sphères biaise considérablement la mesure de la prolativité (et des autres paramètres de forme), en la rapprochant artificiellement de $p = 0$.

précédente (courbe bleue). En d’autres termes, contraindre le bord du halo en l’identifiant à une sphère, même si les particules n’y sont pas uniformément distribuées, induit un biais sphérique dans la mesure de la forme, qui approche artificiellement p de 0. Ceci invalide (de facto) une telle approche.

3. Parmi toutes les particules du halo FOF, nous sélectionnons les particules restantes après suppression des sous-structures ($\eta = 100$) et selon l’isodensité $\delta = 200$, comme expliqué supra. Nous obtenons alors la courbe orange, qui fournit une très bonne mesure de la forme du halo global, finalement proche de l’estimation de la forme déduite de l’ensemble des particules du halo FOF tout en étant insensible à la résolution.

Dans les sections suivantes, c’est cette dernière mesure de prolativité (et des autres

paramètres de forme) que nous adopterons.

Nous nous intéressons aux halos pour lesquels la modélisation ellipsoïdale semble pertinente et pour lesquels la procédure de mesure de forme que nous avons présentée peut donc être menée : pour commencer, les quelques halos qui "traversent" la limite de la boîte de simulation périodique sont ignorés ; nous éliminons également les objets détectés par l'algorithme FOF qui ne sont que la combinaison de deux amas de masse comparable, reliés par un mince filament. Ce biais de pontage (cf. section 1.5.1.3) est une caractéristique très spécifique de la méthode de détection FOF, nous choisissons donc d'exclure ces objets de notre analyse. En pratique, nous excluons les objets FOF dont la masse de surdensité sphérique M_{200} est plus de 20% différente de la masse totale M_{FOF} ou dont les sous-structures dépassent 10% de la masse totale (car de telles sous-structures volumineuses sont probablement des halos voisins s'inféodant au halo principal). Toute structure semblable à un halo qui présente au moins l'une de ces deux caractéristiques sera simplement écartée de l'échantillon de halos utilisé dans notre analyse. L'échantillon subsistant représente environ 80 pourcents du nombre initial de halos de plus de 1000 particules.

2.3 Empreinte cosmologique sur la forme des halos

2.3.1 Effets en termes de masse

Nous représentons dans les figures 2.12 et 2.13 la valeur médiane dans chaque gamme de masse des indicateurs de forme adimensionnés (p , T , E et ratios d'axes) en fonction de la masse des halos, pour les trois modèles cosmologiques. Ces indicateurs ont été calculés en utilisant les prescriptions présentées ci-dessus. Ils sont représentés en fonction de la masse *totale* (FOF) du halo⁴.

4. Nous avons vérifié que la masse contenue dans la région délimitée par la coquille $\delta_0 = 200$ est très proche de la masse totale FOF du halo. Ceci est particulièrement vrai pour les halos dont la masse de surdensité sphérique est supérieure à 80% de la masse FOF. Par conséquent, choisir d'étudier la dépendance des attributs de forme en fonction de la masse FOF ou bien de cette masse $\delta_0 = 200$ n'aurait pas d'impact notable sur nos conclusions.

Tout d’abord, plus les halos sont massifs, moins ils sont sphériques, $p(M)$ et $E(M)$ augmentent avec la masse, tandis que b/a et c/a diminuent. De plus, les courbes obtenues dépendent clairement de la cosmologie : pour les halos considérés, la médiane p varie de 0,024 (halos de faible masse) à 0,053 (halos de forte masse) pour le modèle RPCDM, et elle s’étend de 0,017 à 0,044 pour le modèle Λ CDM et de 0,016 à 0,043 pour le modèle w CDM. En moyenne, la médiane de p_{200} pour Λ CDM est 26% plus basse que celle de RPCDM et 6% plus haute que celle de w CDM. Une observation similaire est faite pour les courbes de triaxialité T et b/a (figure 2.13).

D’un point de vue cosmologique, les courbes semblent être disposées dans un ordre croissant de σ_8 . En particulier, nous remarquons que les courbes correspondant au modèle RPCDM sont éloignées des autres courbes, alors que les courbes associées aux modèles w CDM et Λ CDM sont très proches, ce qui correspond aux différences numériques sur leurs valeurs respectives de σ_8 (voir tableau 2.1). Cela peut être interprété comme suit : plus les σ_8 sont petits, plus les fluctuations à grand *redshift* sont faibles. Cependant, les halos ont tendance à se sphériciser avec le temps (en raison du processus de relaxation, lorsque le processus d’accrétion de masse est plus ou moins stoppé) (Lau et al., 2021). En d’autres termes, plus les halos sont jeunes, moins ils sont sphériques. Ainsi, plus σ_8 est faible, plus l’ellipticité, la prolaticité et la triaxialité des halos sont élevées, et plus les rapports de leurs axes b/a et c/a sont faibles. C’est pourquoi dans les figures 2.12 et 2.13, les courbes E , p et T correspondant au modèle RPCDM sont systématiquement au-dessus des courbes correspondant à Λ CDM, qui sont elles-mêmes au-dessus des courbes correspondant à w CDM.

Nous observons également que les courbes $T(M)$ sont presque parallèles. Les remarques sur σ_8 ne nous permettent pas de dire quoi que ce soit à ce sujet. Dans la section suivante, nous lierons plutôt les courbes masse-forme au spectre de puissance non-linéaire et nous montrerons comment les mesures des propriétés de forme des halos de matière noire nous permettent de reconstituer le modèle cosmologique dans lequel ils se sont formés.

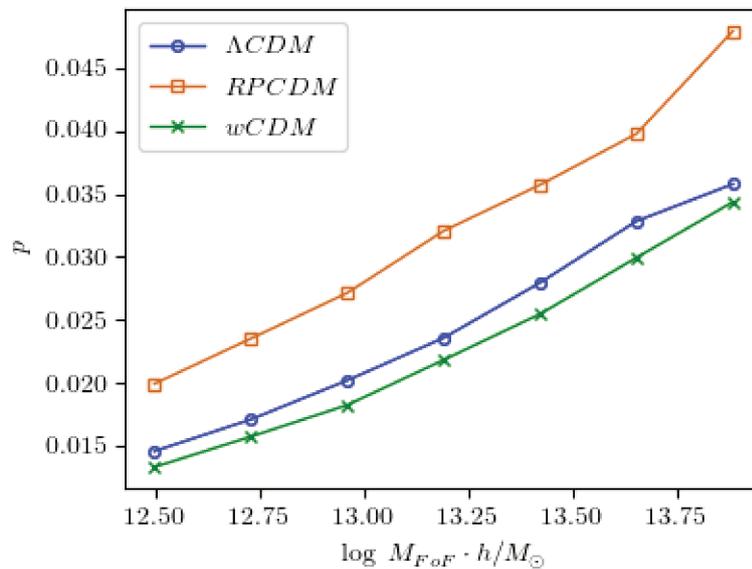
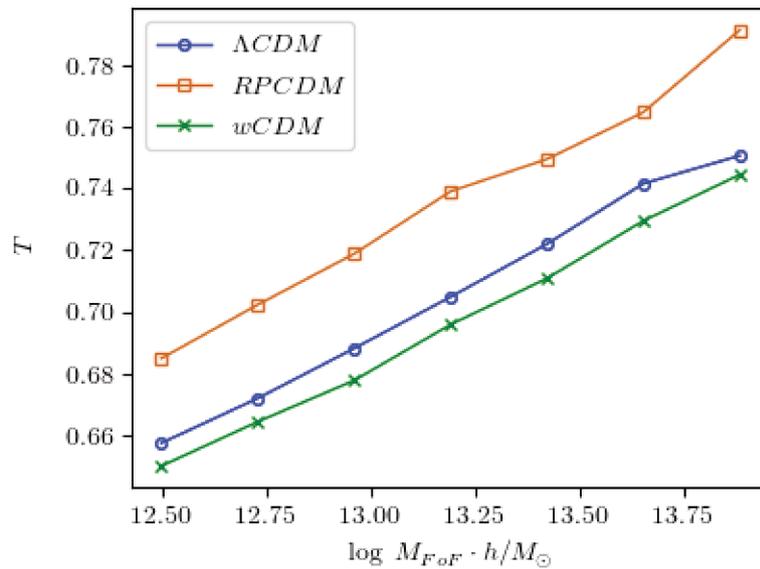
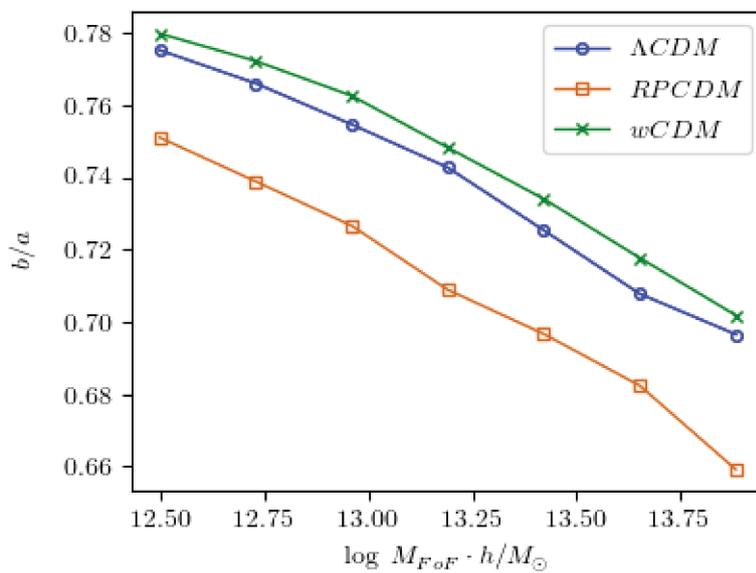
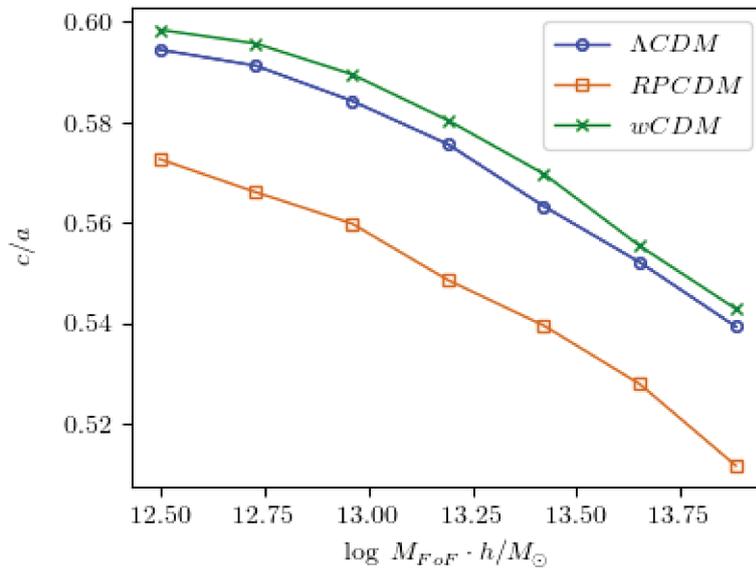
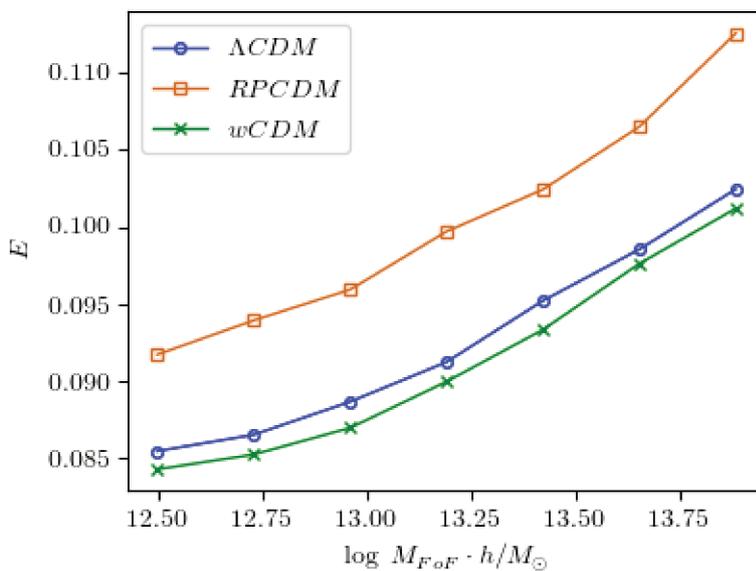


Figure 2.12 – Prolaticité médiane en fonction de la masse du halo pour chaque modèle cosmologique testé. Plus les halos sont massifs, plus leur prolaticité est élevée. On remarque que la pente et l'ordonnée à l'origine des courbes dépendent du modèle cosmologique : les halos RPCDM sont davantage prolates que les halos Λ CDM. Cela vient du fait que σ_8 est plus faible dans la cosmologie de Ratra-Peebles choisie que dans celle de Λ CDM ; les halos de la première se sont donc effondrés plus récemment et sont donc moins sphériques



(a) Triaxialité médiane en fonction de la masse des halos

(b) b/a médian en fonction de la masse des halos

(c) c/a médian en fonction de la masse des halos

(d) Ellipticité médiane en fonction de la masse des halos

Figure 2.13 – Dépendance des autres paramètres de forme des halos en la cosmologie et en la masse des halos

2.3.2 Effets en termes de fluctuations linéaires

Dans cette section, nous examinons maintenant comment, d'un point de vue quantitatif, la cosmologie affecte les relations entre la masse et la forme. Pour ce faire, nous cherchons à "rapprocher les courbes" des figures 2.12 et 2.13 et donc à construire une fonction \mathfrak{F}_{cosmo} dépendante de la cosmologie, telle que le changement biunivoque de la variable $M \mapsto \mathfrak{F}_{cosmo}(M)$ absorbe toute dépendance cosmologique pour les relations masse-forme précédemment établies. Cela signifie que si la prolativité et la triaxialité, en tant que fonctions de la masse du halo, dépendent de la cosmologie, elles devraient être indépendantes de la cosmologie lorsqu'elles sont vues comme des fonctions de \mathfrak{F}_{cosmo} . Concrètement, chaque halo est associé à une prolativité, à une masse M et à une valeur de \mathfrak{F}_{cosmo} (qui est $\mathfrak{F}_{cosmo}(M)$). En regroupant les halos en *bins* de \mathfrak{F}_{cosmo} , la valeur médiane de la prolativité dans chaque *bin* ne devrait plus dépendre d'aucune autre information sur les paramètres cosmologiques. Les courbes médianes $\mathfrak{F}_{cosmo} - p$ dans les trois modèles d'énergie noire doivent donc se superposer (ce qui n'était pas le cas des courbes $M - p$). La discussion sera menée pour la prolativité des halos, mais nous montrerons qu'elle reste valable pour les autres paramètres de forme.

Comme, en moyenne, les halos les plus massifs sont les plus prolates et que, plus σ_8 est grand, plus p est petit, nous sommes amenés à tester la transformation

$$\mathfrak{F}_{cosmo}(M) := \sigma_L(M)$$

L'idée d'exprimer la forme médiane d'un ensemble de halos en fonction de l'amplitude des fluctuations linéaires sur l'échelle de masse de ces halos a été explorée par [Despali et al. \(2014\)](#); [Bonamigo et al. \(2015\)](#); [Vega-Ferrero et al. \(2017\)](#). Ces auteurs ont observé que les courbes masse-forme (pour des halos Λ CDM à plusieurs *redshifts* z) se superposent effectivement lorsque M est remplacée par

$$\nu_L(M, z) = \frac{\delta_c(z)}{\sigma_L(M)}$$

où la surdensité sphérique critique dépendant du *redshift* est définie comme suit :

$$\delta_c(z) = \frac{\delta_c(z=0)}{D_+(z)}$$

Une telle définition de $\delta_c(z)$ implique en fait que

$$\nu_L(M, z) = \frac{\delta_c(z=0)}{\sigma_L(M, z)}$$

Pour tous les modèles de cette section⁵, les coefficients $\delta_c(z=0)$ sont très proches (voir le tableau 2.1). On peut utiliser l’ajustement habituel $\delta_c(z=0) = 1.686\Omega_m^{0.0055}$ pour le vérifier. Il suffira donc de considérer σ_L plutôt que ν_L . L’effet de la dégénérescence des résultats en δ_c sera étudié dans le chapitre suivant, où différents modèles de gravité avec des $\delta_c(z=0)$ très différents seront testés.

Néanmoins, deux différences importantes entre notre analyse et celle des auteurs précédents subsistent et doivent être soulignées. Premièrement, nous analysons tous les halos détectés dans la simulation par l’algorithme FOF, qu’ils soient relaxés ou non. Nous n’imposons pas de conditions de virialisation sur les halos dont on étudie la forme. Deuxièmement, les halos de l’étude de [Despali et al. \(2014\)](#) ; [Bonamigo et al. \(2015\)](#) ont été détectés à l’aide de l’algorithme *ellipsoïdal overdensity* présenté dans [Despali et al. \(2013\)](#). Pour les raisons mentionnées dans la section précédente, nous avons préféré utiliser une procédure différente pour estimer la forme des halos à partir des isodensités. En fait, les résultats présentés dans cette sous-section peuvent aussi être considérés comme un test de robustesse de la proposition de [Despali et al. \(2014\)](#) ; [Bonamigo et al. \(2015\)](#) par rapport à ces modifications majeures.

Par conséquent, dans la figure 2.14, nous traçons la prolaticité médiane en fonction de $\sigma_L(M)$. Nous attribuons à chaque halo la masse M_{FOF} donnée par l’algorithme FOF, et la mesure de prolaticité p est déterminée pour le halo comme décrit dans la section 2.2. Ensuite, nous attribuons également à chaque halo une mesure de fluctuation linéaire, $\sigma_L(M_{FOF})$. Enfin, nous classons les halos dans les *bins* de σ_L et prenons la médiane de la prolaticité dans chaque *bin*.

5. et de la plupart des simulations cosmologiques haute-performance

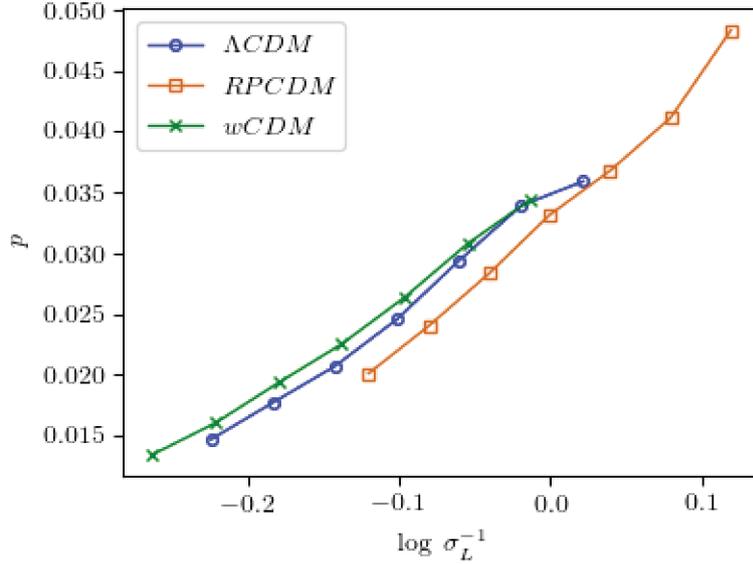


Figure 2.14 – Prolaticité médiane en fonction de $\log \sigma_L(M)^{-1}$. Les courbes correspondant aux différents modèles d’énergie noire sont plus proches les unes des autres, comparativement à la figure 2.12 dans laquelle la prolaticité médiane a été tracée en fonction de la masse du halo. Cela prouve que le spectre de puissance linéaire n’explique que partiellement la dépendance cosmologique de la relation entre la masse du halo et la prolaticité.

Même si les modèles que nous étudions font largement varier le modèle d’énergie noire ainsi que σ_8 , nous observons que les courbes médianes dans le plan (σ_L, p) sont plus proches que dans le plan (M, p) . Cependant, la variance linéaire $\sigma_L(M)$ n’est pas suffisante pour encoder *toute* la dépendance cosmologique des mesures de forme. Il reste un écart visible entre les courbes $p(\sigma_L)$.

2.3.3 Effets en termes de fluctuations non-linéaires

Le fait que le changement de variable $M \rightarrow \mathfrak{F}_{cosmo}(M) \equiv \sigma_L(M)$ absorbe certaines disparités entre les différents modèles cosmologiques concernant les paramètres de forme de leurs halos, suggère l’existence d’une relation entre la forme des halos et les propriétés de structuration du champ de densité.

Cependant, puisque les propriétés de forme des halos sont calculées sur le champ de densité non linéaire tracé par toutes les particules appartenant à ces halos, nous de-

vons aller au-delà des fluctuations du champ de matière cosmique évolué linéairement, et prendre explicitement en compte l’effondrement non linéaire de ce champ initial. De plus, comme les propriétés de forme des halos sont estimées à partir des seules particules du halo, nous évaluerons ces fluctuations non linéaires à partir du *spectre de puissance de la matière contenue dans les halos*, tel qu’introduit par [van Daalen & Schaye \(2015\)](#) et [Pace et al. \(2015\)](#). Ce spectre de puissance $P_{NL,IH}$ a été calculé⁶ sur une grille CIC de 3500^3 cellules et ne contenant que les particules appartenant à un groupe FOF. Après avoir lissé $P_{NL,IH}$ avec un noyau gaussien à l’échelle de masse considérée, nous en déduisons les fluctuations non linéaires $\sigma_{NL,IH}$.

σ_{NL} et $\sigma_{NL,IH}$ (respectivement P_{NL} et $P_{NL,IH}$) sont représentées en fonction des masses M_{FOF} des halos FOF (respectivement des nombres d’ondes k) en figure 2.15 et figure 2.16. Il est clair que σ_{NL} domine sur $\sigma_{NL,IH}$ sur les échelles correspondant à des halos de masse supérieure à $10^{12} M_{\odot}/h$, et les fluctuations associées à la matière cosmique à l’intérieur des halos ne représentent que quatre-vingts pour cent des fluctuations totales. Ce rapport varie avec la masse et la cosmologie et ne se réduit pas à un facteur constant de proportionnalité. Nous traçons, dans la figure 2.17, la prolaticité médiane en termes de $\sigma_{NL,IH}$ pour les modèles cosmologiques Λ CDM, R Λ CDM et w CDM. Les courbes correspondant aux différents modèles cosmologiques se superposent précisément à trois pourcents près. La relation entre $\sigma_{NL,IH}^{-1}$ et la médiane p est alors universelle ; elle ne dépend plus du modèle cosmologique. Ainsi, on peut affirmer que le spectre de puissance de la matière dans les halos encapsule toute l’information cosmologique contenue dans la forme des halos.

La figure 2.18 montre que cette conclusion est maintenue pour T et b/a . Pour E et c/a , une légère déviation apparaît aux faibles masses ; cette déviation est la conséquence du faible nombre de particules le long du plus petit axe (par rapport aux autres axes) du tenseur d’inertie, ce qui biaise artificiellement le *fit* vers une plus grande ellipticité.

6. avec les fonctions implémentées dans Pylans ([Villaescusa-Navarro, 2018](#))

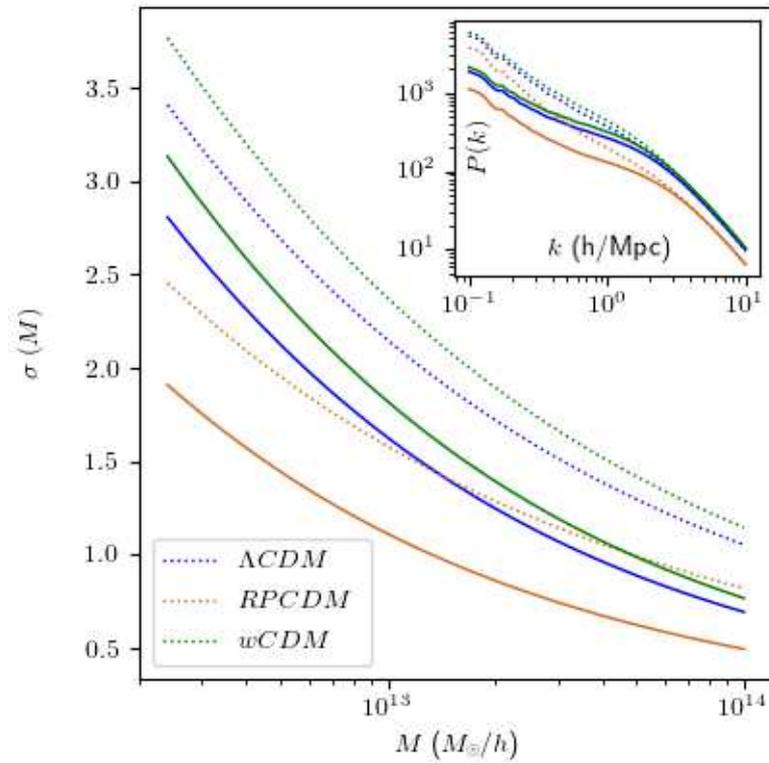


Figure 2.15 – Variance des spectres de puissance non linéaires calculés en utilisant toutes les particules $z = 0$ (lignes pointillées) ou seulement celles appartenant aux halos FOF dont la masse dépasse $2.3 \cdot 10^{12} M_{\odot}/h$ (lignes pleines). Dans le panneau intérieur, sont tracés les spectres de puissance non-linéaires correspondants.

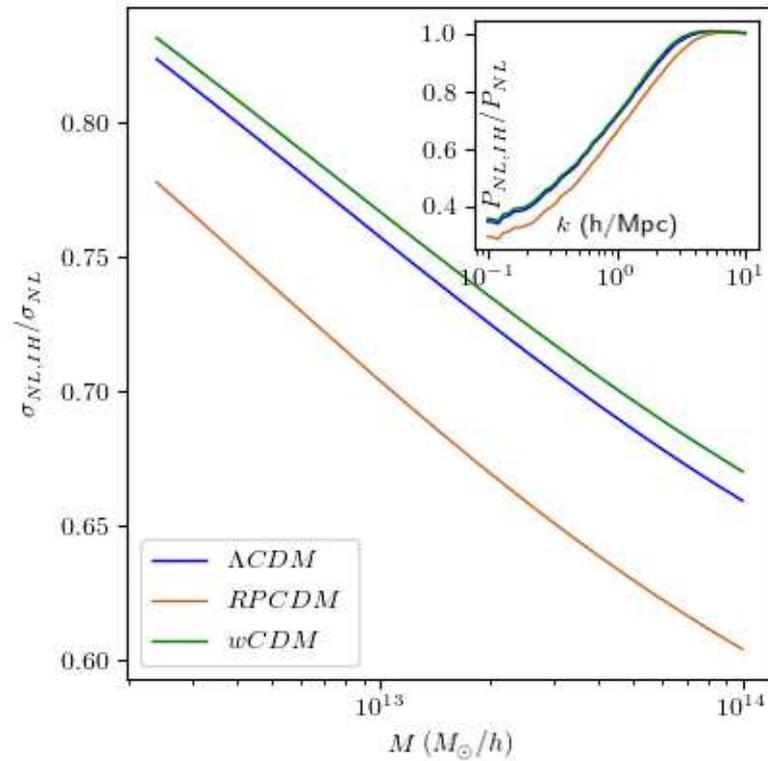


Figure 2.16 – Contribution de la matière à l’intérieur des halos à la variance du spectre de puissance non linéaire total, $\sigma_{NL,IH}/\sigma_{NL}$. Manifestement, ce rapport dépend fortement de la cosmologie. Il est intéressant de noter que même pour les halos de faible masse, la matière à l’intérieur des halos n’explique que 80 % de la variance. Dans le panneau intérieur, figure le rapport correspondant pour les spectres de puissance.

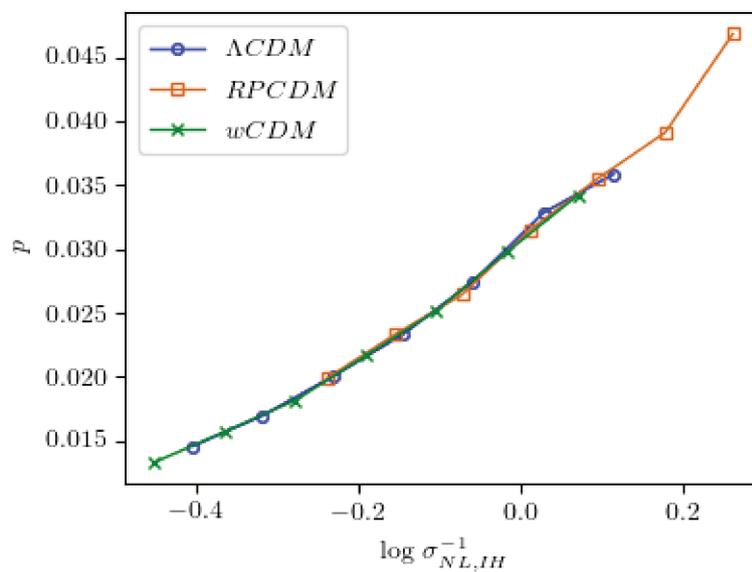
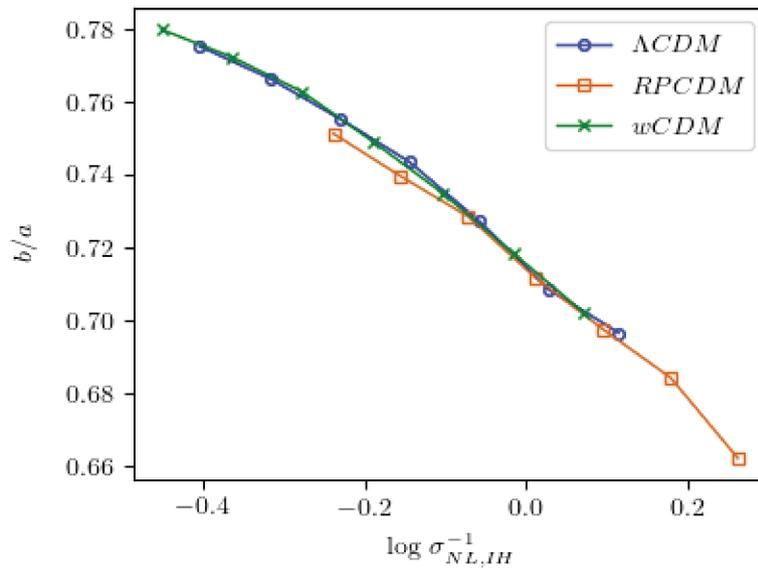
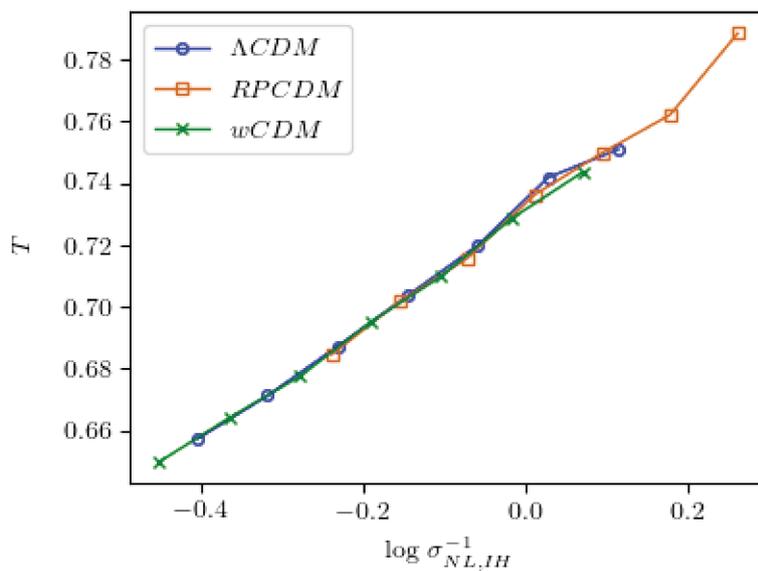
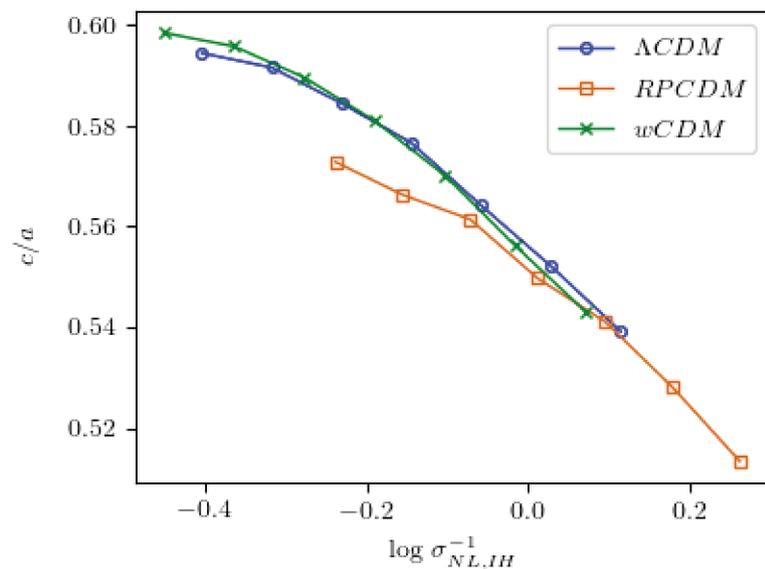
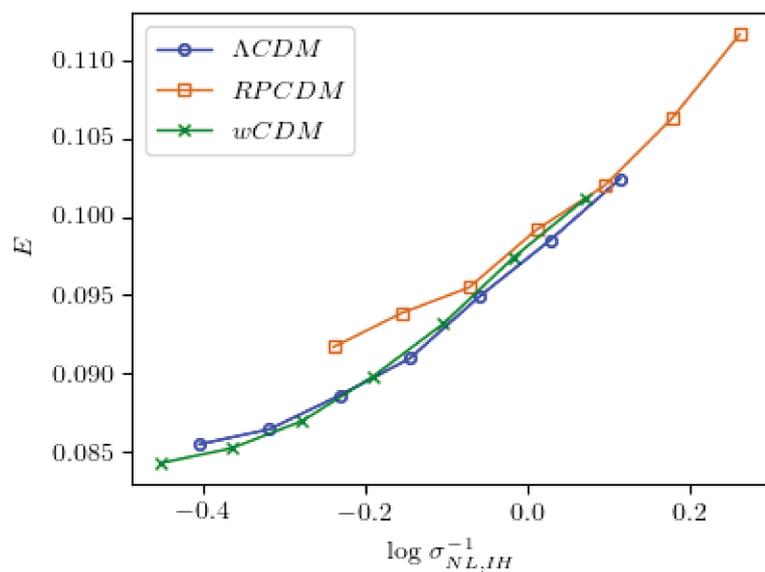


Figure 2.17 – Prolaticité médiane en fonction de $\log \sigma_{NL,IH}(M)^{-1}$. Les courbes correspondant aux différents modèles d'énergie noire se superposent, ce qui signifie que toute l'information cosmologique contenue dans la forme (médiane) du halo correspond exactement à celle portée par le spectre de puissance non linéaire $P_{NL,IH}$

(a) Median middle-to-major axis ratio versus $\log \sigma_{NL,IH}(M)^{-1}$ (b) Median triaxiality versus $\log \sigma_{NL,IH}(M)^{-1}$

(c) Median minor-to-major axis ratio versus $\log \sigma_{NL,IH}(M)^{-1}$ (d) Median ellipticity versus $\log \sigma_{NL,IH}(M)^{-1}$ **Figure 2.18** – Dépendance des autres paramètres de forme en $\log \sigma_{NL,IH}^{-1}$

2.3.4 Correspondance

Nous avons montré dans la section précédente que les dépendances cosmologiques des propriétés de la forme du halo disparaissent lorsque ces propriétés sont ré-exprimées en termes de $\sigma_{NL,IH}$. En particulier, la prolaticité médiane ne dépend de la cosmologie qu'à travers le spectre de puissance⁷. Nous aimerions maintenant tester si cette invariance subsiste si nous remplaçons $\sigma_{NL,IH}$ par σ_{NL} , c'est-à-dire les fluctuations non linéaires de la matière à l'intérieur des halos par les fluctuations non linéaires du champ cosmique dans son ensemble (évidemment lissé sur l'échelle des halos de matière noire). La figure 2.19 montre ce que nous obtenons pour les modèles cosmologiques Λ CDM, RPCDM, et w CDM. Les courbes correspondant aux différents modèles d'Univers sont superposées de nouveau. De fait, puisque les fonctions $p[\sigma_{NL,IH}]$ et $p[\sigma_{NL}]$ sont simultanément indépendantes de la cosmologie, il existe nécessairement une correspondance, également indépendante de la cosmologie, entre $\sigma_{NL,IH}$ et σ_{NL} .

Pour expliciter celle-ci, nous traçons dans la figure 2.20 les courbes paramétriques suivantes (en échelle log-log)

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sigma_{NL,IH}^{\Lambda CDM}(M)}, \frac{1}{\sigma_{NL}^{\Lambda CDM}(M)} \right), \quad \forall M \in [2 \cdot 10^{12}, 10^{14}] \right\} \text{ (bleu)}$$

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sigma_{NL,IH}^{RPCDM}(M)}, \frac{1}{\sigma_{NL}^{RPCDM}(M)} \right), \quad \forall M \in [2 \cdot 10^{12}, 10^{14}] \right\} \text{ (orange)}$$

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sigma_{NL,IH}^{wCDM}(M)}, \frac{1}{\sigma_{NL}^{wCDM}(M)} \right), \quad \forall M \in [2 \cdot 10^{12}, 10^{14}] \right\} \text{ (vert)}$$

Nous constatons que les trois courbes coïncident, ce qui confirme l'existence d'une relation indépendante du modèle cosmologique entre $\sigma_{NL,IH}$ et σ_{NL} . Cela signifie également que, dans les domaines de masse considérés, σ_{NL} domine $\sigma_{NL,IH}$, indépendamment du modèle cosmologique. Enfin, il est intéressant de noter que la relation entre les deux variances prend la forme simple d'une loi de puissance.

7. Il existe également une dépendance explicite en Ω_m dans la fenêtre de lissage utilisée pour la variance

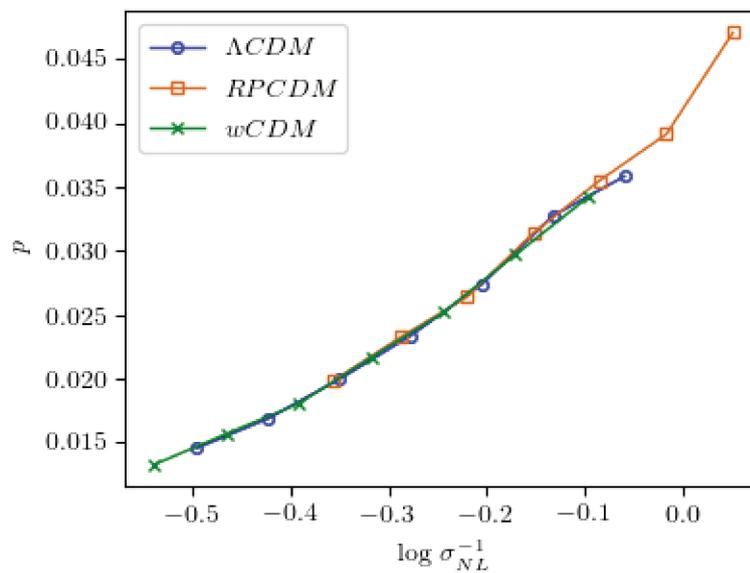


Figure 2.19 – Prolaticité médiane en fonction de $\log \sigma_{NL}^{-1}$. Les courbes correspondant aux différents modèles DE se superposent, comme c’était le cas lors de la classification en $\log \sigma_{NL,IH}^{-1}$. Ceci suggère l’existence d’une correspondance indépendante de la cosmologie entre les variances des spectres de puissance non linéaires totaux et intra-halos.

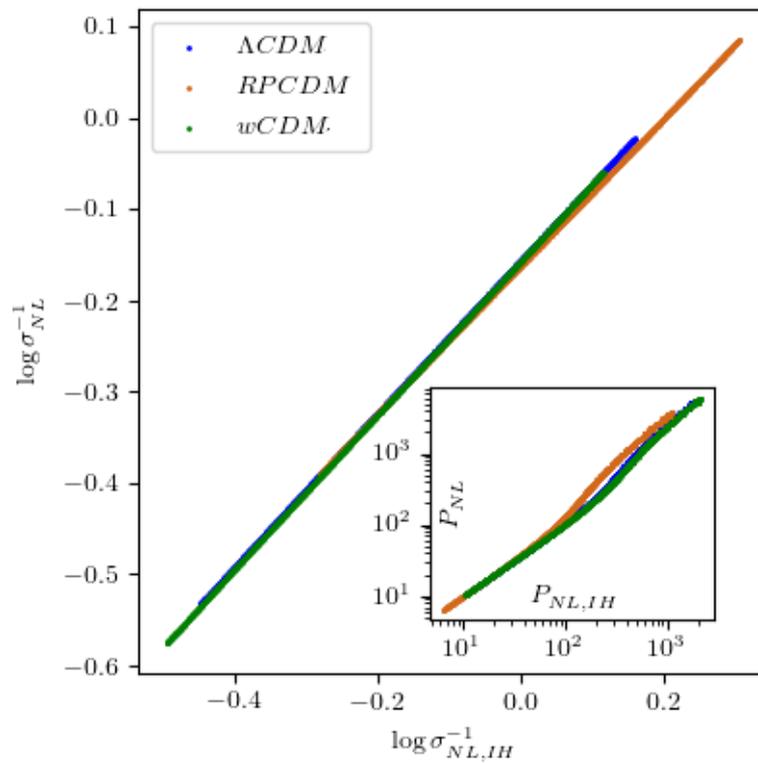
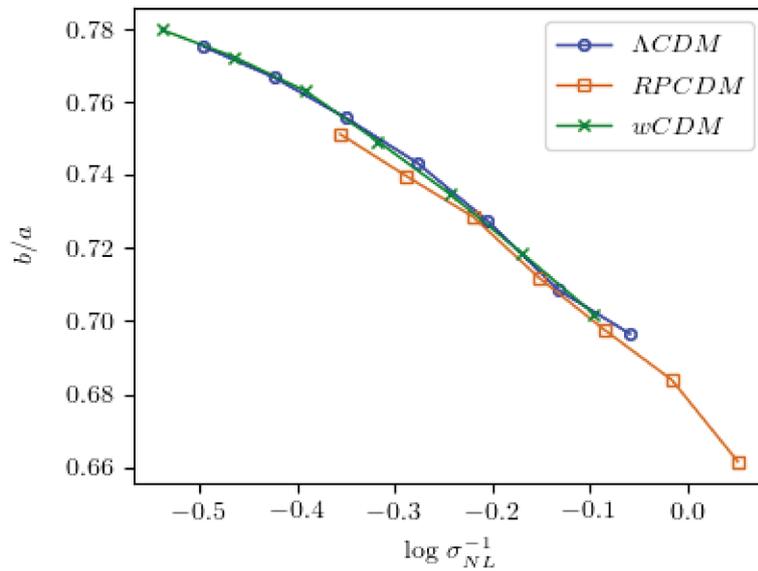
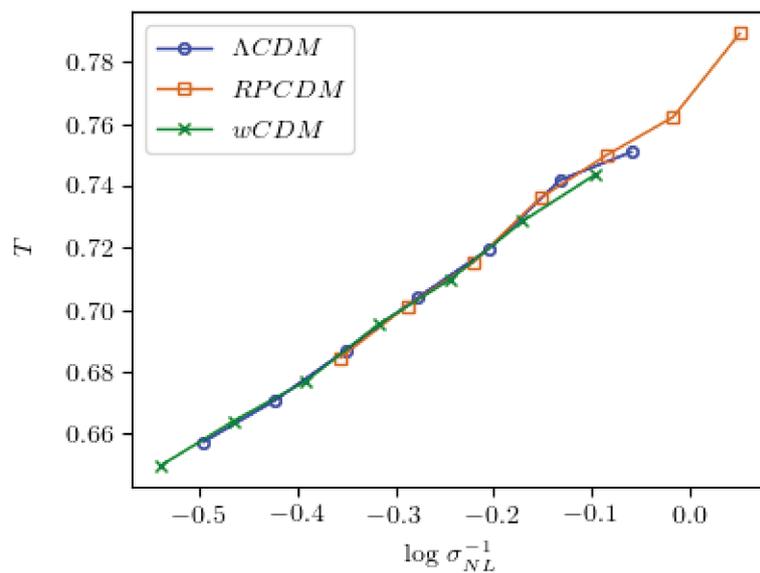
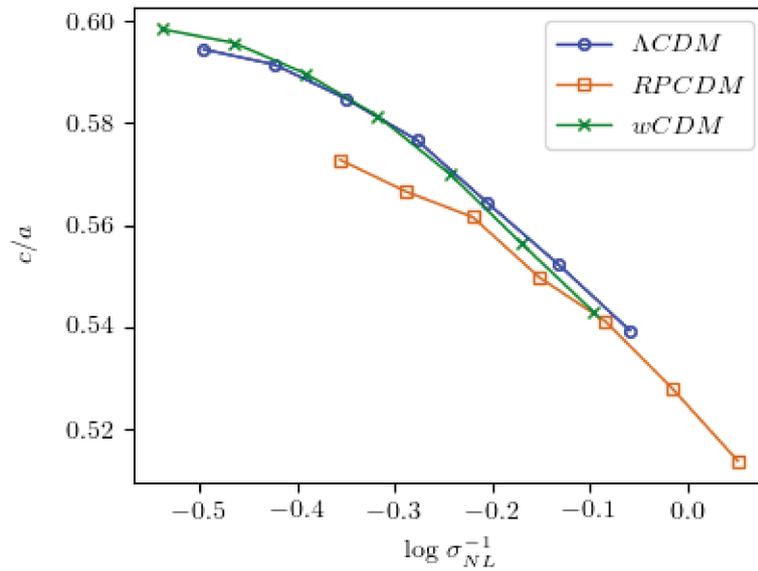
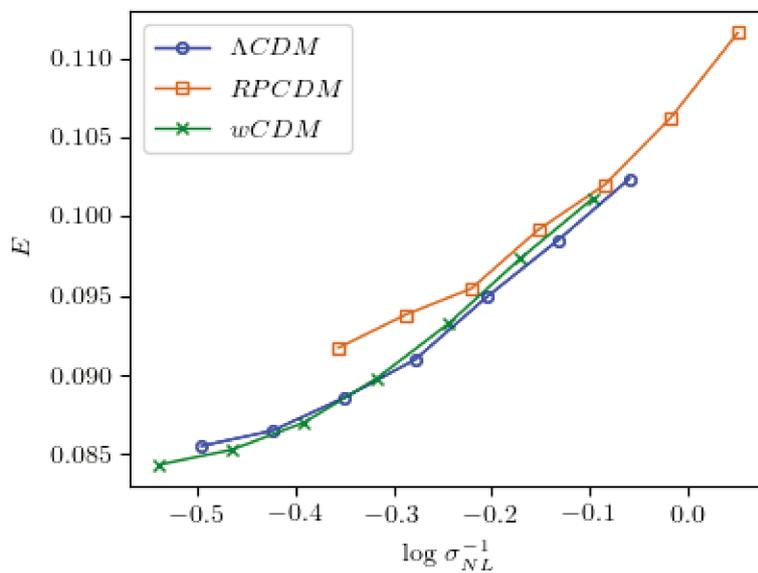


Figure 2.20 – Correspondance entre les variances des spectres de puissance non linéaires totaux et intra-halos. Pour les échelles de masse étudiées par la simulation où $M \in [2.3 \cdot 10^{12}, 10^{14}] M_{\odot}/h$, nous représentons les nuages $(\log \sigma_{NL,IH}^{-1}(M), \log \sigma_{NL}^{-1}(M))$ pour chaque cosmologie. Ceux-ci se superposent, ce qui signifie que σ_{NL} est une fonction universelle (univaluée) de $\sigma_{NL,IH}$. Cette fonction est manifestement une loi de puissance.

(a) Median middle-to-major axis ratio versus $\log \sigma_{NL}(M)^{-1}$ (b) Median triaxiality versus $\log \sigma_{NL}(M)^{-1}$

(c) Median minor-to-major axis ratio versus $\log \sigma_{NL}(M)^{-1}$ (d) Median ellipticity versus $\log \sigma_{NL}(M)^{-1}$ **Figure 2.21** – Dépendance des autres paramètres de forme en $\log \sigma_{NL}^{-1}$

$$\log \sigma_{NL} = A + B \log \sigma_{NL,IH}$$

avec $A \approx 0.38$ et $B \approx 0.28$.

Une comparaison similaire est présentée dans le panneau interne de figure 2.20 pour $P_{NL,IH}$ et P_{NL} . Là encore, on observe une relation universelle entre ces deux quantités tant que $P_{NL,IH} < 10^2 h/\text{Mpc}$, ce qui correspond à $k \geq 2 h/\text{Mpc}$. Les modes inférieurs correspondent à une distance supérieure à 6 Mpc/h et décrivent donc des corrélations *entre* les halos et non à l'intérieur de ceux-ci.

2.3.5 Distribution des paramètres de forme et fluctuations non-linéaires

À ce stade, nous pouvons soulever une remarque importante éclairant la relation entre forme et variance non-linéaire. Il est bien connu que les halos en formation deviennent de plus en plus sphériques au fur et à mesure de l'effondrement. Ceci est dû au fait que, pour toute distribution ellipsoïdale de matière dans le halo en formation, les isopotentiellelles gravitationnelles sont systématiquement plus sphériques que les isodensités de la distribution (Lau et al., 2011; Llinares & Mota, 2013; Stapelberg et al., 2022). Pour le démontrer, il est possible d'y voir un corollaire du théorème étendu de Laplace sur les homéoïdes (Binney & Tremaine, 2008) : considérons un homéoïde (une surface ellipsoïdale) de demi-longueurs d'axe $a \geq b \geq c$ et soient (x, y, z) les coordonnées cartésiennes liées à ses axes principaux. Le rayon ellipsoïdal associé au point (x, y, z) est

$$r_e^2 = a^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)$$

Celui-ci est identique pour tous les points de l'homéoïde. Alors, les isopotentiellelles sont les surfaces sur lesquelles

$$a^2 \left(\frac{x^2}{a^2 + \tau} + \frac{y^2}{b^2 + \tau} + \frac{z^2}{c^2 + \tau} \right)$$

est constant. Le paramètre $\tau \geq 0$ labellise les isopotentielles. Ainsi, les isopotentielles sont de plus en plus sphériques à mesure que l'on s'éloigne de l'homéoïde. Considérons maintenant une distribution tridimensionnelle⁸ triaxiale, dont les isodensités sont des ellipsoïdes confocaux de mêmes paramètres b/a et c/a . Soit un point quelconque *dans* l'ellipsoïde, et r_e le rayon ellipsoïdal de l'isodensité qui passe par ce point. L'isopotentielle à laquelle ce point appartient résulte de la contribution de tous les homéoïdes (infinitésimaux) de rayons ellipsoïdaux inférieurs à r_e . D'une part, plus ces homéoïdes sont éloignés de ce point, plus leur contribution au potentiel en ce point est sphérique (τ élevé). D'autre part, les isodensités proches de r_e apportent, quant à elles, une contribution potentielle qui n'est pas plus triaxiale qu'elles-mêmes ($\tau = 0$). En somme, l'isopotentielle à laquelle ce point appartient est plus sphérique que l'isodensité en r_e . Ainsi, les halos deviennent de plus en plus sphériques au fur et à mesure de leur effondrement. Or, plus les halos (en général) sont effondrés, plus le niveau de fluctuations lissé (sur l'échelle des halos) de toute la matière cosmique (σ_{NL}) dans l'Univers est élevé. Cela motive l'existence d'une relation indépendante de la cosmologie entre la forme des halos et la variance non linéaire, conformément à ce que nous avons constaté précédemment.

Dans le chapitre suivant, nous analyserons ces mêmes questions pour les modèles cosmologiques dérivés des théories de gravité modifiée. Puisque le processus d'effondrement est différent dans ces cas, d'importantes conséquences pour la relation universelle entre les propriétés de forme et σ_{NL} apparaîtront.

Jusqu'à présent, nous avons testé l'universalité cosmologique des formes médianes lorsqu'elles sont exprimées en tant que fonctions de la variance non linéaire σ_{NL} . La question qui se pose alors concerne le reste de la distribution de prolaticité : le résultat ne s'applique-t-il qu'à la prolaticité *médiane*? ou bien pourrait-on affirmer que la variance non linéaire du champ lissé détermine l'ensemble de la distribution de la prolaticité (sans qu'il ne soit nécessaire de disposer d'informations supplémentaires sur le modèle cosmologique⁹)?

8. et plus seulement une surface

9. à modèle de gravité fixé

Pour répondre à cette question, nous choisissons cinq *bins* de σ_{NL} , suffisamment larges pour garantir des statistiques fiables en leur sein. Nous considérons ensuite les halos appartenant à chaque *bin* et calculons la fonction de distribution cumulative (CDF) de leur prolaticité. La figure 2.22 montre que, dans chaque *bin*, la CDF de tous les modèles cosmologiques coïncide. En d'autres termes, pour une variance non linéaire donnée, l'ensemble de la fonction de distribution cumulative de p est indépendante de la cosmologie.

Par conséquent, si nous avons choisi de représenter dans la figure 2.19, disons, le septième décile plutôt que la médiane (de la prolaticité), en fonction de σ_{NL} , les courbes $\sigma_{NL} - f_7(p)$ associées à chaque cosmologie se superposeraient toujours ; c'est ce qu'illustre la figure 2.23.

Nous avons donc montré que tout le contenu cosmologique de la forme des amas est *encapsulé* dans le spectre de puissance (non linéaire).

De plus, comme l'effondrement linéaire n'est qu'une approximation au premier ordre de l'effondrement non linéaire, le spectre de puissance linéaire ne peut pas être vu comme la seule origine de la dépendance cosmologique de la relation entre la masse et la prolaticité. Cette dernière s'explique plutôt par la variance des fluctuations lissées dans le champ *entièrement effondré*.

Notons une fois encore que les résultats sont valables sans sélection dynamique des halos, les halos ne sont pas nécessairement relaxés.

Despali et al. (2014) a remarqué qu'il existe une relation indépendante de z entre E et p . Nous obtenons en effet un résultat similaire entre prolaticité et triaxialité : la figure 2.24 indique la médiane de T (resp. p) dans chaque *bin* de p (resp. E) et démontre que ces relations ne dépendent pas du modèle cosmologique. Nous sommes en mesure de justifier ce constat à partir des résultats de la sous-section précédente : le fait que la triaxialité médiane et la prolaticité médiane soient des fonctions cosmologiquement invariantes de σ_{NL} , et le fait que ces fonctions soient strictement monotones et donc bijectives, implique qu'il existe une relation universelle entre la prolaticité et la triaxialité. La preuve est immédiate : il suffit d'écrire que $T(p) = g(f^{-1}(p))$ où f et

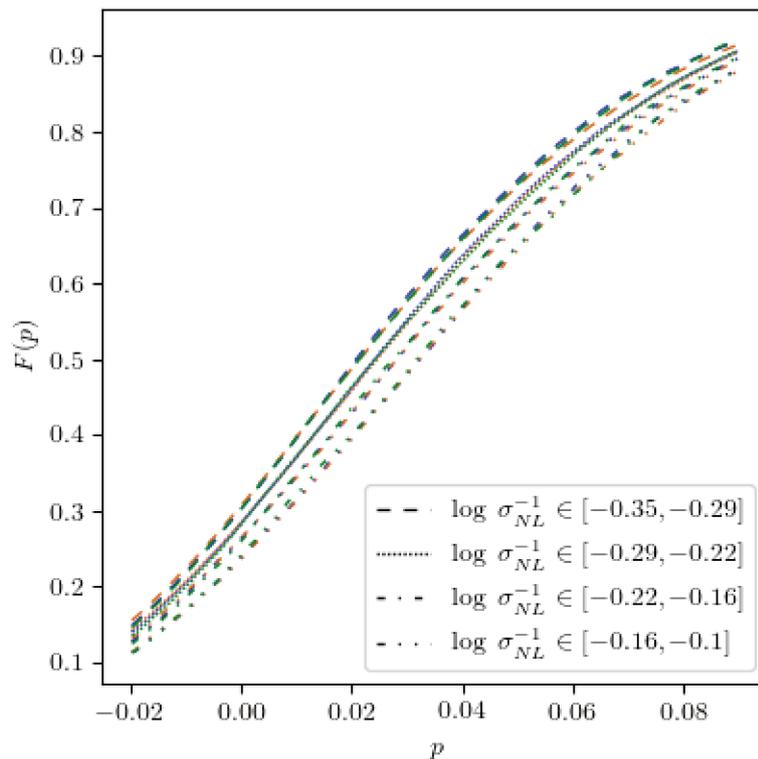


Figure 2.22 – Dépendance de la distribution de la prolaticité en la cosmologie et en σ_{NL}^{-1} . Nous définissons quatre *bins* de $\log \sigma_{NL}^{-1}$ et calculons ensuite la fonction de distribution cumulative de la prolaticité, dans chaque *bin*. Les courbes correspondant aux différents modèles cosmologiques se superposent, non seulement pour $F = 0.5$ (prolaticité médiane), mais tout au long de la distribution (entre le premier et le neuvième décile). On peut donc dire que l'ensemble de la distribution de la prolaticité est liée aux fluctuations non linéaires d'une manière qui ne dépend pas de la cosmologie.

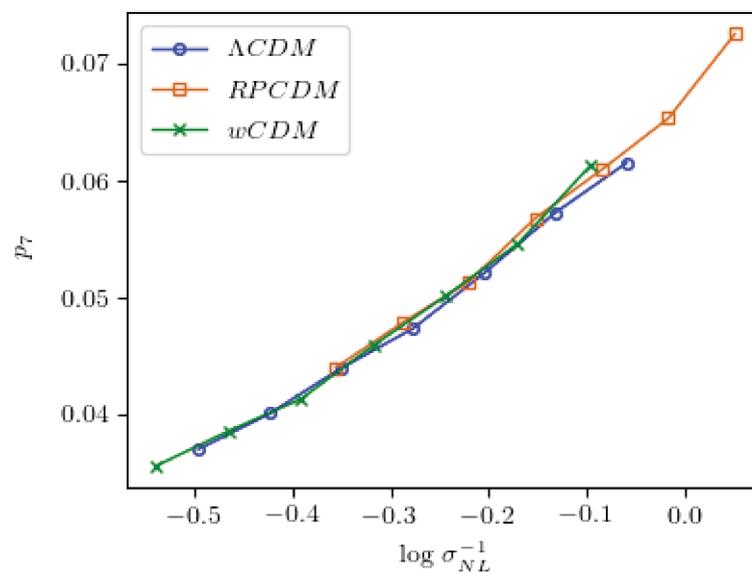


Figure 2.23 – Prolaticité du septième décile dans chaque *bin* de $\log \sigma_{NL}(M)^{-1}$. Les courbes correspondant aux différents modèles d'énergie noire se superposent, ce qui signifie que l'universalité n'est pas seulement vérifiée pour la prolaticité médiane mais pour l'ensemble de la distribution de la prolaticité.

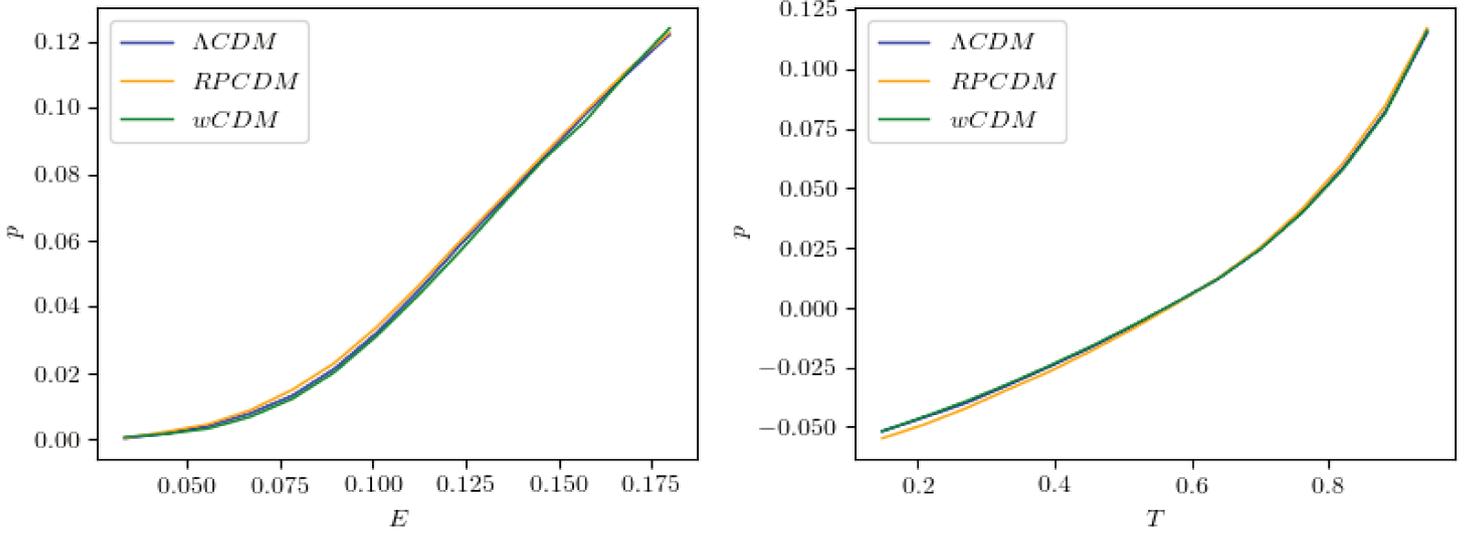


Figure 2.24 – Prolaticité médiane en fonction de l’ellipticité (à gauche) ou de la triaxialité (à droite). Les relations entre les différents paramètres de forme ne dépendent pas du modèle cosmologique. C’est une conséquence directe du fait qu’il existe une variable ($\log \sigma_{NL}^{-1}$) à laquelle les paramètres de forme médiane sont universellement liés (voir le texte principal).

g sont les fonctions (indépendantes du modèle cosmologique) telles que la prolaticité médiane d’un *bin* centré sur σ_{NL} vaille $f(\sigma_{NL})$ et la triaxialité médiane pour ce *bin* vaille $g(\sigma_{NL})$.

2.4 Reconstruction du spectre de puissance

2.4.1 Reconstruction de la variance non-linéaire

Dans la section précédente, nous avons montré qu’il suffisait de substituer la variance non linéaire à la masse des halos pour supprimer toute dépendance cosmologique dans la distribution de leurs propriétés de forme. C’est la source d’une nouvelle méthode de mesure du spectre de puissance sans *a priori* sur la cosmologie de l’Univers considéré.

Considérons un champ de matière cosmique évolué dans lequel des halos de matière noire se sont formés ; la nature de l’énergie noire ou les valeurs des paramètres cosmologiques Ω_m et σ_8 ne sont pas connues. En procédant comme suit, nous pouvons

déterminer la variance des fluctuations non linéaires $\sigma_{NL}(M)$ de ce champ cosmique. Tout d'abord, nous mesurons les masses et les prolaticités d'un ensemble de halos, et nous obtenons une relation entre masse et prolaticité (médiane), $\mathfrak{H}_{cosmo}(M)$, pour cet Univers. Comme nous le savons grâce à l'analyse présentée dans la section précédente, on *connaît* d'autre part une relation indépendante de la cosmologie entre la prolaticité médiane et la variance non linéaire du spectre de puissance $f(\sigma_{NL})$ (que nous aurons obtenue par des simulations dans n'importe quel modèle cosmologique). Nous pouvons alors déduire la fonction $\sigma_{NL}(M)$ par la relation $\sigma_{NL}(M) = f^{-1}(\mathfrak{H}_{cosmo}(M))$.

À titre d'illustration, nous avons appliqué ce protocole à nos halos de matière noire. La courbe universelle $p(\sigma_{NL})$ est donnée par l'une des courbes dans la figure 2.19 - cette courbe ne dépend pas de la cosmologie. Nous imaginons que nous vivons dans l'un des trois Univers que nous avons étudiés jusqu'à présent et nous voulons en connaître le spectre de puissance non-linéaire. Alors, nous traçons pour lui la courbe $\sigma_{NL}(M)$ que nous obtenons à partir des *mesures* de prolaticité et de masse des halos. Nous procédons ainsi successivement pour chaque univers - les résultats sont rassemblés dans la figure 2.25. Les lignes pointillées correspondent au $\sigma_{NL}(M)$ attendu en utilisant le spectre de puissance non linéaire exact du champ de densité complet CIC à $z = 0$. L'adéquation entre la dépendance attendue (par mesure directe du spectre de puissance) de la variance en la masse et celle mesurée en utilisant les formes de halos (lignes contiguës) est extrêmement satisfaisante : les pentes et les ordonnées à l'origine de $\sigma_{NL}(M)$ semblent être correctement inférées par les mesures de forme de halos.

2.4.2 Estimation de σ_8

La possibilité de reconstruire la variance *non-linéaire* permet aussi de fournir une estimation du paramètre σ_8 , qui est pourtant une quantité linéaire. Pour cela, il suffit de se référer à la figure 2.1, qui montre bien que $\sigma_L(M) = \sigma_{NL}(M)$ pour les amas de $M > 10^{15}$ masses solaires, et donc, en particulier, pour les échelles $R > 15$ Mpc/h.

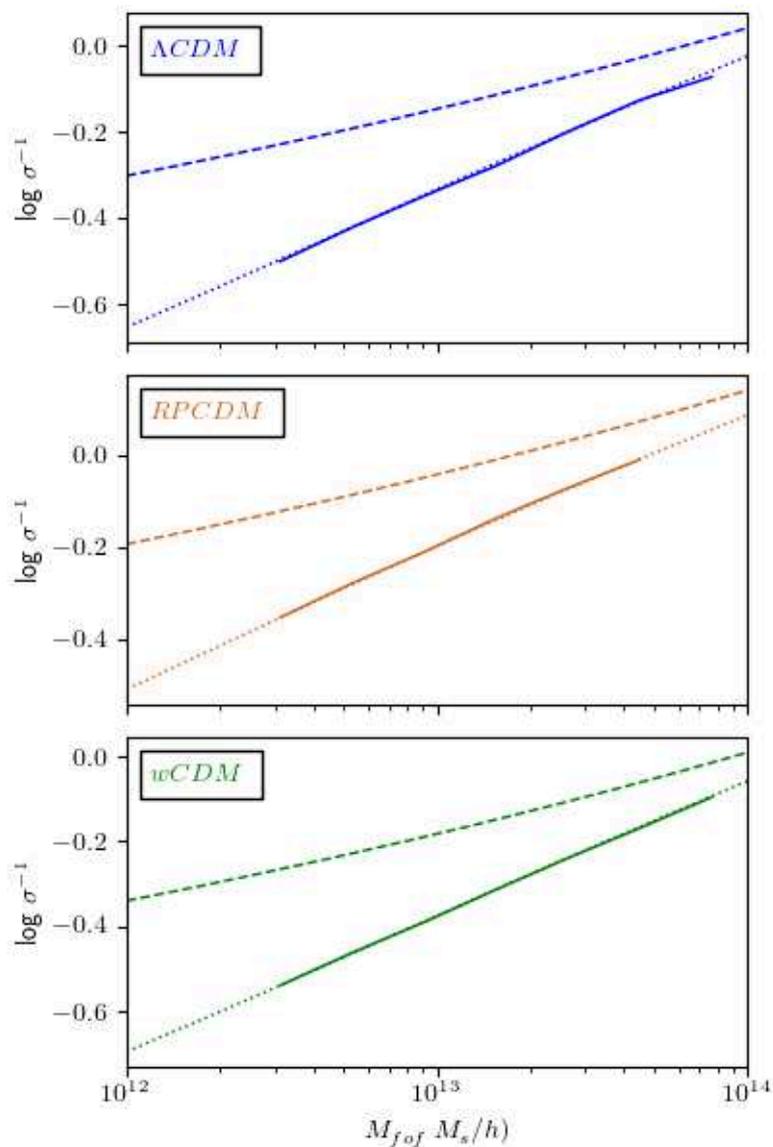


Figure 2.25 – Reconstruction de la variance non linéaire. Les courbes pleines représentent $\log \sigma_{NL}^{-1}$ en fonction de M et sont reconstruites à partir des mesures de prolaticité médiane (en fonction de la masse du halo) et des relations universelles entre la prolaticité médiane et $\log \sigma_{NL}^{-1}$. L'accord avec la variance non-linéaire attendue (lignes pointillées), calculée avec Powergrid sur l'Univers $z = 0$, est excellent. Nous avons également tracé (courbes en pointillés) $\log \sigma_L^{-1}(M)$ à titre de comparaison : les mesures de forme fournissent en effet des informations sur la variance non linéaire mais pas sur la variance linéaire (sauf lorsque la dernière est une bonne approximation de la première).

Nous pourrions donc écrire que :

$$\sigma_L(M_{15}) = \sigma_{NL}(M_{15}) \quad (2.5)$$

où $M_R = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_m$. De plus, il existe une relation simple entre $\sigma_L(M_8)$ et $\sigma_L(M_{15})$. En effet, en comparant les spectres de puissance linéaires obtenus par CAMB (Lewis & Challinor, 2007) pour différents modèles cosmologiques¹⁰, on observe que :

$$\sigma_L(M_8) = \sigma_L(M_{15})(-0.74086\Omega_m^2 + 1.17774\Omega_m + 1.28147) \quad (2.6)$$

Ce *fit*, tracé en figure 2.26, est une fonction de Ω_m car $\sigma(M_8)/\sigma(M_{15})$ est le quotient de deux intégrales de la fonction de transfert, qui est elle-même une fonctionnelle de Ω_m . Cette relation est valable avec une précision inférieure à 1%, indépendamment de la valeur de $w_0 \in [-1.5, -0.175]$. En injectant l'équation 2.5 dans l'équation 2.6, on obtient :

$$\sigma_8[\Omega_m] = \sigma_{NL}(R = 15\text{Mpc}/h) \cdot (-0.74086\Omega_m^2 + 1.17774\Omega_m + 1.28147) \quad (2.7)$$

Ensuite, $\sigma_{NL}(R = 15\text{Mpc}/h)$ est estimé en approximant la variance non-linéaire par une fonction affine (en échelle logarithmique) : $\sigma_{NL}(M) = 10^\alpha M^\beta$. Ainsi, par la mesure des paramètres de forme, on reconstruit $\sigma_{NL}(M)$ sur le domaine $M \in [2.4, 100] \cdot 10^{12}$ (comme décrit dans la sous-section précédente), ce qui permet d'estimer α, β et de prolonger σ_{NL} jusqu'en $M = M_{15}$. En d'autres termes :

$$\sigma_{NL}(M_{15}) \approx 10^\alpha M_{15}^\beta \quad (2.8)$$

10. $w_0 \in [-1.5, -0.75]$, $w_a \in [0, 0.5]$, $1 - \Omega_\Lambda \in [0.2, 0.3]$ tandis qu'on ne fait pas varier les paramètres communs aux modèles Dark Energy WMAP7 : $\Omega_b h^2 = 0.02258$, $n_s = 0.96$ and $H_0 = 72$ km/s/Mpc. Par ailleurs, les simulations Dark Energy supposant que les baryons suivent la même dynamique que la matière noire durant l'ère de la matière, $\Omega_m := 1 - \Omega_\Lambda$ désigne bien la densité totale de matière dans l'Univers, baryons inclus.

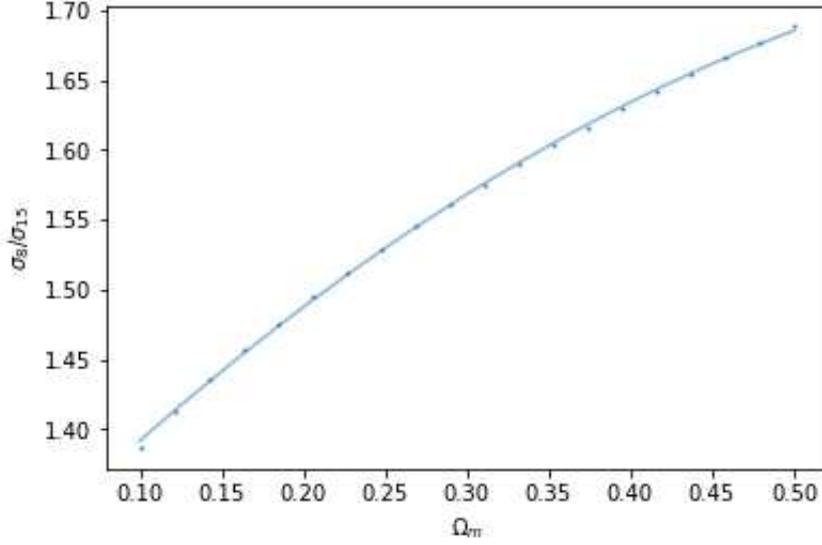


Figure 2.26 – $\sigma_L(R = 8\text{Mpc}/h)/\sigma_L(R = 15\text{Mpc}/h)$ pour différents Ω_m . Le calcul a été mené avec CAMB. Seul Ω_m a varié, les autres paramètres cosmologiques n_s, Ω_b, \dots sont pris identiques aux contraintes WMAP7, voir le tableau 2.1. Le résultat est presque insensible aux paramètres d'énergie noire (w_0, w_a)

i.e.

$$\sigma_{NL}(M_{15}) \approx 10^\alpha \left(\frac{4}{3} \pi 15^3 \rho_c \Omega_m \right)^\beta \quad (2.9)$$

Enfin, l'équation 2.7 devient

$$\sigma_8[\Omega_m] = 10^\alpha \left(\frac{4}{3} \pi 15^3 \rho_c \Omega_m \right)^\beta (-0.74086 \Omega_m^2 + 1.17774 \Omega_m + 1.28147) \quad (2.10)$$

$\sigma_8[\Omega_m]$ dépend très faiblement de Ω_m dans l'intervalle (0.2, 0.3), de sorte que l'on puisse affirmer que les mesures de forme de halo sondent essentiellement σ_8 mais pas Ω_m . Dans la figure 2.27, $\sigma_8[\Omega_m]$ est estimé par les courbes médianes $p[M]$ (et la connaissance de la fonction universelle $p = f[\sigma_{NL}]$), tout comme, après régression linéaire, les paramètres α et β correspondants. En supposant un prior homogène pour Ω_m dans l'intervalle [0.2, 0.3], nous obtenons par l'équation 2.10 une estimation de σ_8 : $\bar{\sigma}_8 = 10 \int_{0.2}^{0.3} \sigma_8[\Omega_m] d\Omega_m$. En le comparant au σ_8 "exact" (calculé à partir du spectre de puissance linéaire), le résultat est extrêmement satisfaisant, cf. table 2.2.

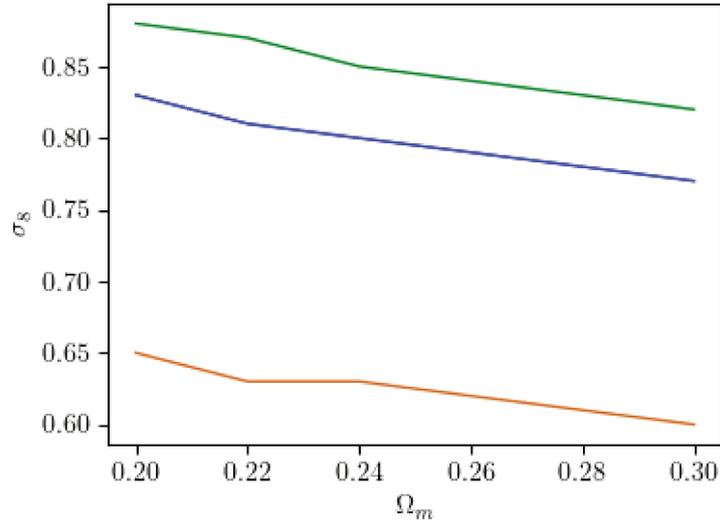


Figure 2.27 – Estimation du paramètre cosmologique linéaire σ_8 à partir des mesures de prolaticité, en supposant différentes valeurs de $\Omega_m \in [0.2, 0.3]$.

Model	Λ CDM	R PCDM	w CDM
Exact σ_8^{Gauss}	0.83	0.68	0.88
Estimated σ_8^{Gauss}	0.79	0.62	0.85

Table 2.2 – Estimation du paramètre σ_8 à partir des mesures de masse et de forme dans les simulations d'énergie noire (voir texte principal). La valeur exacte, obtenue par intégration directe du spectre de puissance linéaire, est également indiquée à titre de comparaison. L'accord est excellent.

2.4.3 Reconstruction du spectre de puissance

Partant de l'approximation $\sigma_{NL}(M) = 10^\alpha M^\beta$, et sachant que σ_{NL} est une mesure de variance du spectre P_{NL} lissé par une fenêtre gaussienne, l'estimation de $\sigma_{NL}(M)$ par les mesures de forme fournit aussi une estimation de P_{NL} . Nous allons montrer comment.

Comme $\sigma_{NL}(R) = \sigma_{NL}(M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_c \Omega_m)$, il vient $\sigma_{NL}(R) = 10^v R^{-u}$ avec $u = -3\beta > 0$, $v = \alpha + \beta \log_{10}(\text{vol})$ et $\text{vol} = \frac{4}{3}\pi \rho_c \Omega_m$.

D'autre part, rappelons la relation qui lie σ_{NL} et P_{NL} :

$$2\pi^2 \sigma_{NL}^2(R) = \int_0^{+\infty} k^2 P_{NL}(k) \exp(-R^2 k^2 / 5) dk$$

Effectuons les changements de variable

$$f(x) = 2\pi^2 \sigma_{NL}^2(\sqrt{5x}), \quad y = k^2 \quad \text{and} \quad g(y) = \frac{\sqrt{y}}{2} P_{NL}(\sqrt{y})$$

nous obtenons :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} g(y) \exp(-xy) dy \tag{2.11}$$

Ainsi, f est la transformée de Laplace de g . Puisque

$$f(x) = 2\pi^2 \sigma_{NL}^2(\sqrt{5x}) = 2\pi^2 \cdot 10^{2v} 5^{-u} x^{-u}$$

on peut inverser la relation 2.11 :

$$\begin{aligned} g(y) &= \mathcal{L}^{-1}[f](y) \\ &= 2\pi^2 \cdot 10^{2v} 5^{-u} \mathcal{L}^{-1}[x \mapsto x^{-u}](y) \\ &= 2\pi^2 \cdot 10^{2v} 5^{-u} \cdot \frac{y^{-1+u}}{\Gamma(u)} \end{aligned}$$

Enfin,

$$P_{NL}(\sqrt{y}) = 4\pi^2 10^{2v} 5^{-u} \frac{y^{u-3/2}}{\Gamma(u)}$$

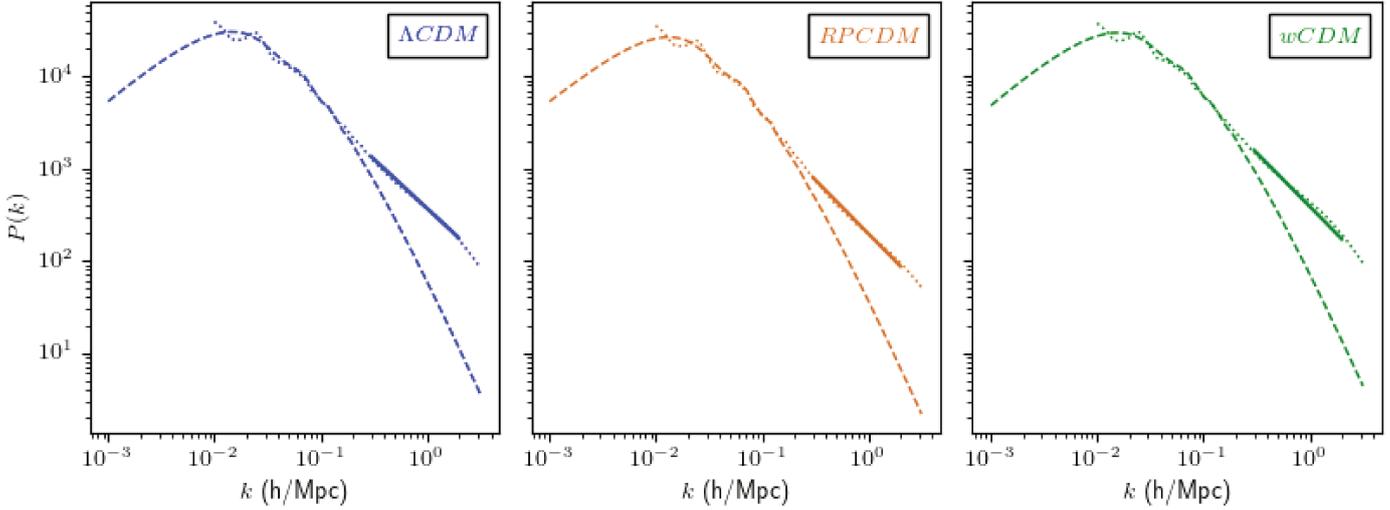


Figure 2.28 – Reconstruction du spectre de puissance non linéaire. Pour chaque modèle, nous reconstituons $P_{NL}(k)$ (lignes pleines) à partir de l’estimation de $\log \sigma_{NL}^{-1}(M)$ fournie par les mesures de forme. La connaissance de Ω_m est nécessaire pour la correspondance entre $\sigma_{NL}(M)$ et $P_{NL}(k)$. Nous considérons donc que nous connaissons déjà Ω_m par d’autres sondes à 5% près, ce qui donne l’épaisseur des courbes estimées $P_{NL}(k)$. Elles peuvent être comparées aux spectres de puissance non-linéaire attendus, calculés avec PowerGrid, et tracés en pointillés. L’accord est excellent. Nous reportons également sur la figure les spectres de puissance linéaires $z = 0$ (traits discontinus) pour comparaison.

ou encore

$$P_{NL}(k) = \frac{(2\pi \cdot 10^v)^2}{5^u \Gamma(u)} k^{2u-3} \equiv b_n k^n \quad (2.12)$$

On trace en figure 2.28 les spectres obtenus par cette méthode¹¹, que nous comparons aux spectres calculés directement par PowerGrid. La concordance est très satisfaisante.

11. c’est-à-dire que $\sigma_{NL}(M)$ est obtenue par mesure de la masse et de la forme des halos ; $P_{NL}(k)$ est ensuite estimé à partir de $\sigma_{NL}(M)$ selon la procédure que nous venons de décrire.

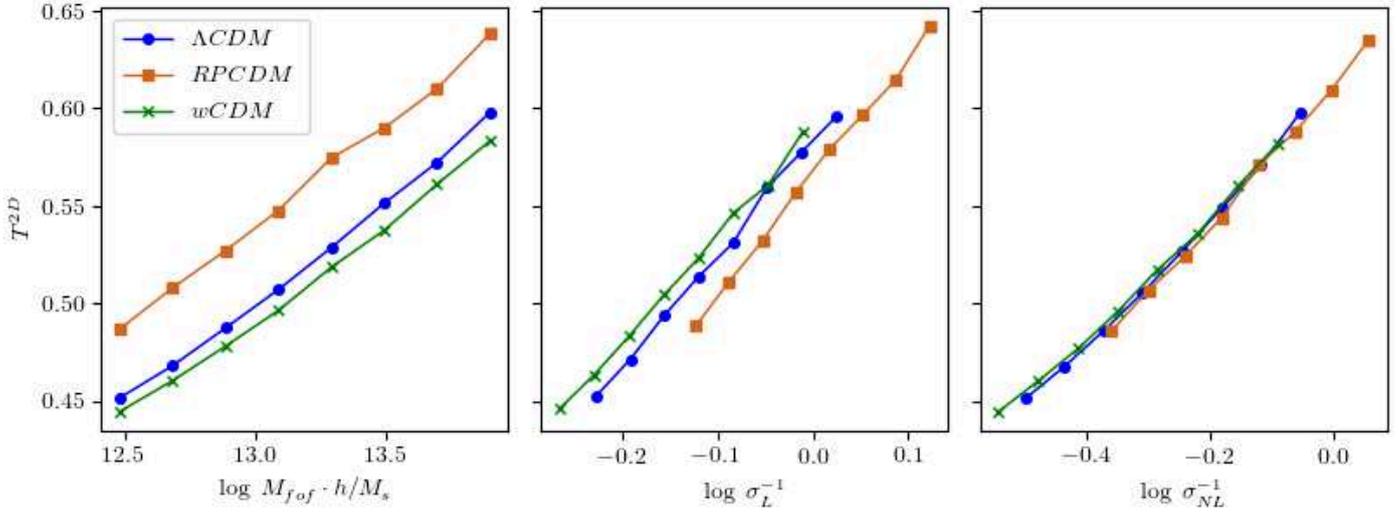


Figure 2.29 – Excentricité (carrée) médiane en fonction de la masse (à gauche), de la variance linéaire (au milieu) et de la variance non linéaire (à droite). Après avoir projeté tous les halos sur le plan global (x, y) de la simulation, nous diagonalisons le tenseur de masse bidimensionnel de chaque halo projeté. L'excentricité médiane reste invariante d'un point de vue cosmologique lorsqu'elle est calculée dans des *bins* de $\log \sigma_{NL}^{-1}$.

2.5 Extensions

2.5.1 Projection plane

Nous voulons tester la robustesse des résultats d'universalité lorsque les halos sont "perçus" bidimensionnellement. Nous considérons les halos FOF des simulations et les projetons sur le plan (x, y) de celles-ci. En raison de l'impossibilité de réinterpréter notre procédure (section 2.2) pour des données bidimensionnelles, nous utiliserons tous les halos FOF (indépendamment de la proportion de sous-structures) des simulations et obtiendrons leur forme "2D" en formant et en diagonalisant le tenseur d'inertie bidimensionnel (avec toutes les particules du halo FOF). Notons $a \geq b$ la longueur des demi-axes et considérons le carré de l'excentricité $T^{2D} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$. La figure 2.29 présente la médiane T^{2D} dans des *bins* de masse et de variance non linéaire. Il apparaît que la relation entre la triaxialité médiane T^{2D} et la variance non-linéaire σ_{NL}^{-1} est toujours indépendante du choix des paramètres cosmologiques.

Table 2.3 – Statistiques sur les halos à différents *redshifts*

Cosmology	Redshift	halos ≥ 100 particles	halos ≥ 1000 particles
Λ CDM	$z = 1.0$	2,888,709	309,507
Λ CDM	$z = 0.4$	3,056,944	399,708
Λ CDM	$z = 0.0$	3,045,305	441,934
RPCDM	$z = 1.0$	2,518,366	223,845
RPCDM	$z = 0.4$	2,926,349	338,873
RPCDM	$z = 0.0$	3,066,884	405,050
w CDM	$z = 1.0$	2,980,683	329,397
w CDM	$z = 0.4$	3,075,878	413,170
w CDM	$z = 0.0$	3,015,407	446,818

Table 2.4 – Code couleur pour les figures à de multiples *redshifts*.

	$z = 1$	$z = 0.4$	$z = 0$
Λ CDM	—●—	—■—	—×—
RPCDM	—●—	—■—	—×—
w CDM	—●—	—■—	—×—

2.5.2 Redshifts Multiples

Nous étendons notre analyse pour différents *redshifts*. Nous considérons les halos dans les trois modèles cosmologiques à des *redshifts* $z = 1, 0.4, 0$ (voir tableau 2.3). Nous traçons en figure 2.30 la prolaticité médiane dans des *bins* de masse ou de $\sigma_{NL}(M, z)$. La variance dépendante de z est simplement le spectre de puissance non linéaire $P_{NL}(k, z)$ (calculé avec PowerGrid dans les *snapshots* concernés) lissé sur la masse. Notons que Ω_m reste invariant en z car les coordonnées de la simulation sont comobiles. Enfin, la prolaticité est calculée ici sur le halo FOF complet (pas de suppression des sous-structures et de sélection d'isodensité). En effet, compte tenu du faible nombre de halos à des *redshifts* relativement élevés, les statistiques seraient facilement dégradées par la suppression de particules qui résulterait de l'effacement des sous-structures.

On constate, là encore, que les courbes, pour tout *redshift* et pour tout modèle cosmologique, se confondent à variance non-linéaire donnée.

On en conclut que σ_{NL} dépendante du *redshift*, contient toute la variabilité en cosmologie *et* en *redshift* de la prolaticité des halos.

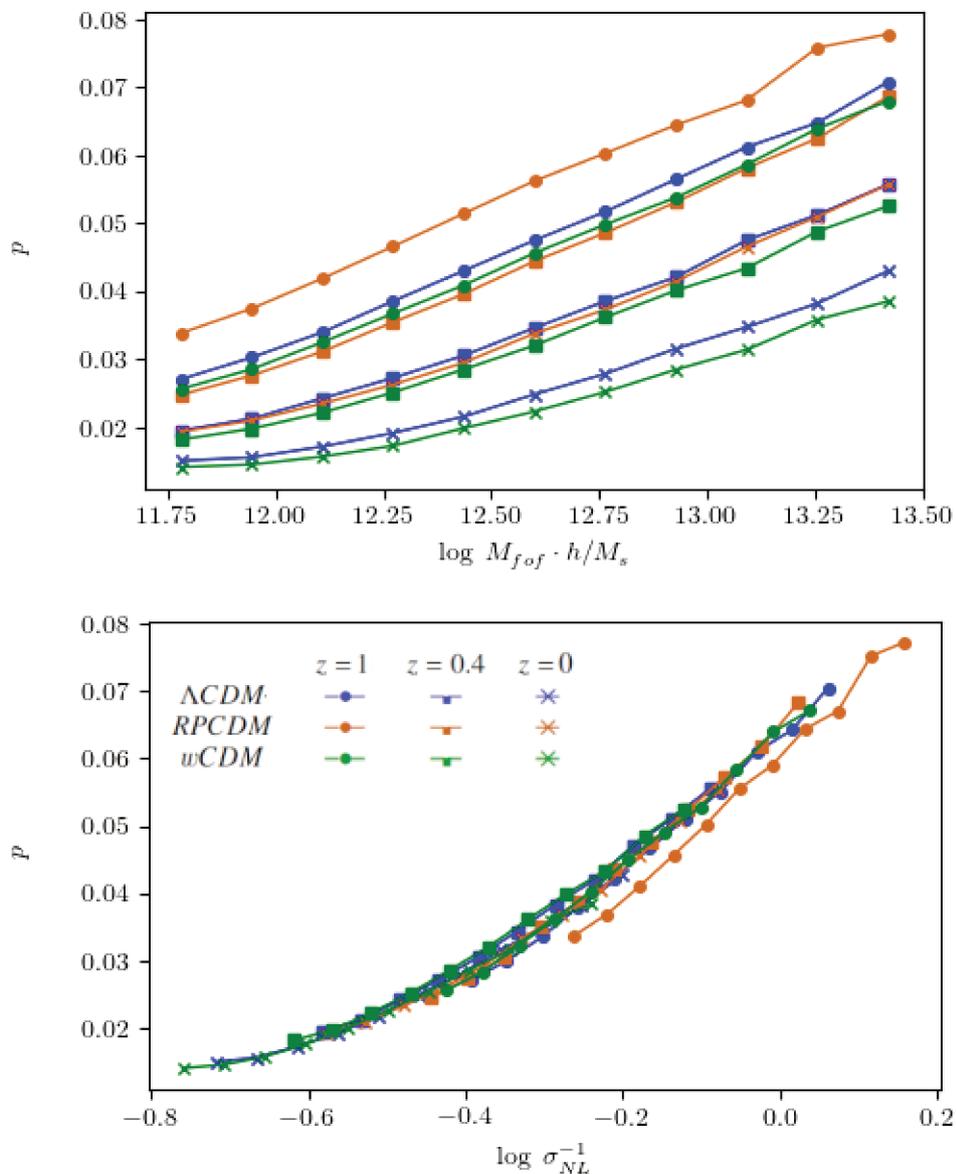


Figure 2.30 – Prolaticité médiane pour les différentes cosmologies et les différents *redshifts*, en fonction de la masse du halo (en haut) et de la variance non linéaire (en bas). La légende des couleurs et des marqueurs est en tableau 2.4. Le changement de variable $M \rightarrow \log \sigma_{NL}^{-1}$ compense la dépendance cosmologique et du décalage vers le rouge, et toutes les courbes coïncident. En fait, l’universalité en cosmologie implique l’universalité en *redshift*.

Chapitre 3

Extension aux modèles de gravité modifiée et de neutrinos massifs

Sommaire

3.1	Modèle de Hu-Sawicki et simulations	109
3.1.1	Gravité modifiée et énergie noire	109
3.1.1.1	Lagrangien et équations du mouvement	109
3.1.1.2	Mécanisme d'écrantage	111
3.1.1.3	Modèle de Hu-Sawicki	112
3.1.2	Simulations DUSTGRAIN-pathfinder	112
3.1.2.1	Considérations générales sur les simulations en gravité modifiée	112
3.1.2.2	Suite DUSTGRAIN-pathfinder	113
3.1.3	Spectres de puissance	114
3.2	Empreinte du modèle de gravité sur la forme des halos	118
3.2.1	Effets en termes de masse	118
3.2.2	Fluctuations non-linéaires	121
3.2.3	Effets de l'écrantage	122
3.2.4	Bilan	126
3.3	Résultats Connexes	127
3.3.1	Correspondance en gravité modifiée	127
3.3.2	Le statut de δ_c	129

Principe et objectif L'invariance cosmologique des mesures de forme peut être comprise comme la conséquence de la capacité de la force gravitationnelle à sphériciser

les structures. En effet, au fur et à mesure que l'Univers évolue sous l'effet des forces gravitationnelles, il se structure, des amas se forment et les fluctuations non linéaires de densité croissent. Dans le même temps, un amas donné devient de plus en plus sphérique au fur et à mesure de son effondrement. Il existe donc une correspondance biunivoque entre la hauteur des pics de densité dans l'Univers et la sphéricité des halos. De plus, cette correspondance ne dépend que de la théorie de gravité¹ et non du modèle d'énergie noire (et d'autres paramètres cosmologiques). Cela soulève immédiatement la question du sort de cette invariance cosmologique lorsque nous choisissons un modèle de gravité qui modifie le regroupement cosmique (à l'échelle des halos) d'une manière différente de celle qui modifie la sphéricité des halos. En particulier, si nous avons choisi un modèle de gravité qui structure le champ de matière cosmique, mais n'isotropise pas les structures d'effondrement, cette relation entre la variance des fluctuations non linéaires et la forme des halos pourrait être remise en cause. Nous montrerons que c'est précisément ce qu'il se passe pour les halos dans lesquels la gravité modifiée est écrantée le long d'un axe, mais pas le long des autres.

3.1 Modèle de Hu-Sawicki et simulations

3.1.1 Gravité modifiée et énergie noire

3.1.1.1 Lagrangien et équations du mouvement

Pour résoudre la difficulté évoquée en section 1.2.2.1 liée au statut de la constante cosmologique, en tant que constante additive, il est possible de modifier le lagrangien de la relativité générale pour que la constante cosmologique ne devienne qu'une limite de la théorie de la gravité : on peut écrire par exemple que

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2}(R + f(R))$$

1. modifiée ou non

avec f une certaine fonction valant -2Λ pour les courbures élevées². Cette dernière situation correspond aux *redshifts* élevés, et en particulier au CMB, dont les données semblent imposer que $\Lambda \neq 0$ (Komatsu et al., 2011). Pour les courbures faibles, en revanche, on s'attend à retrouver la relativité générale ($f(0) = 0$).

L'approche variationnelle donne alors :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{1}{1+f'(R)} \left\{ \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R) + g_{\mu\nu} \frac{[f(R) - f'(R)R]}{2} \right\} + \frac{1}{1+f'(R)} \kappa^2 T_{\mu\nu}^m \quad (3.1)$$

Ces équations d'Einstein modifiées présentent deux caractéristiques intéressantes : d'abord, c'est le quotient $\frac{1}{1+f'(R)} T_{\mu\nu}^m$ qui apparait dans le membre de droite. Ensuite, la courbure elle-même génère un terme d'énergie du vide (le premier terme du membre de droite) qui s'ajoute au tenseur de matière. L'ajout d'un degré de liberté supplémentaire, le champ $f'(R)$, permet de simuler la présence d'énergie noire, sans ajout *ad-hoc* d'une constante cosmologique dans le Lagrangien. En prenant la trace de l'équation 3.1 (et en ignorant toute composante autre que les matières baryonique et noire), on obtient :

$$-R + f'(R)R = -3\square f'(R) + 2f(R) - \kappa^2 \rho_m \quad (3.2)$$

Cela constitue l'équation de propagation du champ $f_R \equiv f'(R)$. On notera $f_{R0} = f'(R_0)$ sa valeur au temps présent, où R_0 est la courbure à $z = 0$ d'un Univers Λ CDM. Considérons une perturbation de densité, $\rho_m + \delta\rho$. Celle-ci entraîne la perturbation de la courbure $R_0 + \delta R$ et du champ de modification de la gravité $f_{R0} + \delta f_R$. Le tout vérifie donc :

$$-(1 + f_{R0})\delta R + R_0\delta f_R = -3\square\delta f_R - \kappa^2\delta\rho \quad (3.3)$$

On se place dans l'approximation des champs faibles et lents de sorte que l'on puisse supposer que $|f_{R0}| \ll 1$ et que l'on puisse négliger les dérivées temporelles de f_R . Aussi, on se place aux petites échelles (on s'intéresse aux modes qui ne sont pas entrés dans l'horizon de Hubble) ce qui permet de négliger le terme $R_0\delta f_R$ devant le

2. de sorte à retrouver dans cette limite le lagrangien de la relativité générale $\frac{1}{2\kappa^2}(R - 2\Lambda)$

terme $\Delta\delta f_R$. Donc,

$$-\frac{a^2}{3}(\kappa^2\delta\rho - \delta R) = \Delta\delta f_R \quad (3.4)$$

où $\Delta = \nabla^2$ est le laplacien en coordonnées physiques (d'où le facteur en a^2). La perturbation du potentiel générée par $\delta\rho$, comme en section 1.4, vérifie l'équation de Poisson modifiée :

$$\Delta\Phi = \frac{16\pi G a^2}{3}\delta\rho - \frac{a^2}{6}\delta R \quad (3.5)$$

En appelant Φ_N le potentiel newtonien associé à la perturbation, i.e. $\Delta\Phi_N = 4\pi G a^2\delta\rho$, l'équation de Poisson modifiée s'écrit :

$$\Delta\Phi = \frac{4}{3}\Delta\Phi_N - \frac{a^2}{6}\delta R \quad (3.6)$$

et l'équation de la dynamique du champ f_R devient :

$$\Delta\delta f_R = \frac{a^2}{3}\delta R - \frac{2}{3}\Delta\Phi_N \quad (3.7)$$

3.1.1.2 Mécanisme d'écrantage

L'équation précédente se réécrit

$$\Delta\left(f_R + \frac{2}{3}\Phi_N\right) = \frac{a^2}{3}\delta R$$

où on a utilisé $\Delta(f_R) = \Delta(\delta f_R)$ (En effet, $f'(R_0)$, tout comme R_0 , ne dépend pas de la position spatiale).

Distinguons deux régimes :

Si $|f_R| \ll \frac{2}{3}|\Phi_N|$, alors, $\Delta\Phi_N \approx \frac{a^2}{2}\delta R$. L'équation de Poisson modifiée 3.6 devient : $\Delta\Phi_N = \Delta\Phi$. Tout se passe comme si les effets de la gravité modifiée disparaissaient : on dit que le champ caméléon f_R est *écranté* (Khouri & Weltman, 2004a,b; Brax et al., 2004).

Le cas $|f_R| \gg \frac{2}{3}|\Phi_N|$, se produit lorsque la courbure est faible (Schmidt, 2010),

$\delta R \ll 8\pi G\delta\rho$. Alors

$$\Delta\Phi = \frac{4}{3}\Delta\Phi_N$$

Cette fois, la gravité est augmentée d'un tiers de sa norme, c'est-à-dire que la constante newtonienne de gravitation G_N est remplacée par la constante effective $G_{eff} = \frac{4}{3}G_N$. La gravité modifiée accentue l'effondrement des structures dont le potentiel newtonien est trop faible.

3.1.1.3 Modèle de Hu-Sawicki

Il reste à spécifier la forme de f . De nombreux modèles ont été élaborés (Tsujikawa, 2010; De Felice & Tsujikawa, 2010; Clifton et al., 2012), nous nous concentrerons dans la suite sur le modèle de Hu-Sawicki (HS) (Hu & Sawicki, 2007) :

$$f(R) = -m^2 \frac{c_1 \left(\frac{R}{m^2}\right)^n}{c_2 \left(\frac{R}{m^2}\right)^n + 1} \quad (3.8)$$

avec $m^2 \equiv \Omega_m H_0^2$ et n , c_1 et c_2 des paramètres libres. On choisit $n = 1$. Le fait que $f(R)$ doive tendre vers -2Λ contraint le rapport c_1/c_2 . Il ne reste donc qu'un seul paramètre dans la théorie, que nous fixons à l'aide de la valeur de la dérivée de f évaluée en R_0 :

$$f(R) = -6(1 - \Omega_m) \cdot R \cdot \left(\frac{R}{H_0^2} + \frac{|f_{R0}| (12 - 9\Omega_m)^2}{6(1 - \Omega_m)} \right)^{-1} \quad (3.9)$$

Le modèle de concordance est retrouvé lorsque $|f_{R0}|$ tend vers 0.

3.1.2 Simulations DUSTGRAIN-pathfinder

3.1.2.1 Considérations générales sur les simulations en gravité modifiée

Il est possible d'étendre les codes N -corps usuels pour y intégrer les effets de la gravité modifiée. La résolution de l'équation de Poisson est remplacée par celle, à chaque pas

de temps, du système constitué des équations 3.6 et 3.7. Le caractère non-linéaire de ces équations (en particulier l'expression de δR en fonction de δf_R , obtenue par inversion de la fonction f) empêche l'utilisation simple de la transformée de Fourier rapide. Elle est supplantée par la méthode de Newton-Gauss-Seigel (Winther et al., 2015). Nous pouvons citer comme extensions les codes MG-GADGET (Puchwein et al., 2013) et ISIS (Llinares et al., 2014) respectivement implémentées pour les codes N -corps GADGET et RAMSES.

3.1.2.2 Suite DUSTGRAIN-pathfinder

La suite de simulations N -corps DUSTGRAIN-pathfinder (Giocoli et al., 2018; Hagstotz et al., 2019a,b; Lee et al., 2023) vise à comparer l'évolution d'Univers w CDM en relativité générale et en gravité modifiée. Cette dernière correspond au modèle de Hu-Sawicki avec un paramètre $|f_{R0}|$ prenant comme valeurs 10^{-4} (fR4), 10^{-5} (fR5), et 10^{-6} (fR6). De façon intéressante, cette suite inclut également la dynamique de neutrinos massifs (pour différents M_ν); l'idée sous-jacente est que le fluide de neutrinos, encore relativiste ($w = 1/3$) après l'époque du CMB (Lesgourgues & Pastor, 2006), retarde l'effondrement des structures de matière noire, y compris sur les échelles non-linéaires (Marulli et al., 2011). Ainsi, la présence de neutrinos massifs peut compenser certains effets de l'accentuation de la gravité caractéristique des modèles $f(R)$. C'est pour étudier cette dégénérescence que les simulations de Giocoli et al. (2018) ont été conçues. S'appuyant sur le code MG-GADGET (Puchwein et al., 2013), elles couvrent un volume de $(750 \text{ Mpc}/h)^3$ avec $N = 768^3$ particules, menant à une résolution en masse de $m_p \approx 8 \cdot 10^{10} M/h$. Les paramètres cosmologiques standards respectent les contraintes de la mission Planck 2015 (Planck Collaboration et al., 2016) : $\Omega_m = 0.31345$, $\Omega_b = 0.0481$, $H_0 = 67.31 \text{ km/s/Mpc}$ et $n_s = 0.9658$. Nous avons extrait les halos par l'algorithme FOF, tel qu'implémenté par la bibliothèque Pygad (Röttgers, 2018). Le tableau 3.1 contient l'ensemble des paramètres des simulations que nous étudierons dans ce chapitre.

3.1.3 Spectres de puissance

Pour comprendre comment l'écart à la relativité générale impacte la formation des structures cosmiques, il est utile de considérer les deux quantités suivantes :

D'une part, le spectre linéaire des fluctuations à $z = 0$, noté P_L , a été calculé à partir de MGCAMB (Lewis & Challinor, 2011; Zhao et al., 2009; Hojjati et al., 2011; Zucca et al., 2019; Wang et al., 2023). Le spectre linéaire est tracé pour chaque cosmologie en traits discontinus dans le panneau intérieur de figure 3.1. Notons tout d'abord que le spectre initial étant le même pour toutes les simulations, le quotient $P_L/P_L^{\Lambda\text{CDM}}$ est en fait le rapport des taux de croissance. Ces derniers dépendent de l'échelle dans le cas de la gravité modifiée. Celle-ci contribue essentiellement en augmentant la constante de gravitation ($G_{eff} = 4G/3$) pour les modes spatiaux élevés. Ainsi, les petits objets, pour lesquels l'amplitude du champ scalaire contrebalance et dépasse largement celle du potentiel newtonien, voient leur effondrement s'accélérer. L'élévation de $P_L(k)$ qui en résulte est d'autant plus importante que f_{R0} est choisi large. En revanche, la présence de neutrinos a l'effet inverse : leur présence tend à homogénéiser la distribution de particules et donc à atténuer l'accentuation de l'interaction gravitationnelle provoquée par le champ scalaire. À titre d'exemple, le spectre linéaire de fR4 est 60 pourcents plus élevé que pour le modèle standard mais fR4-0.3eV l'est de seulement 30 pourcents (à $k = 1h/\text{Mpc}$). Il sera pratique dans la suite de raisonner en termes de masses plutôt qu'en termes de fréquence spatiale. Considérons donc la variance des spectres de puissance par la relation :

$$\sigma_L^2(M) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} k^2 P_L(k) \exp \left[-\frac{1}{5} \cdot \left(k \cdot \left(\frac{3M}{4\pi\Omega_m\rho_c} \right)^{1/3} \right)^2 \right] dk \quad (3.10)$$

et de même pour $P_{NL}(k)$. Les courbes $\sigma_L(M)$, en traits discontinus dans le panneau principal de 3.1, montrent que l'élévation de $|f_{R0}|$ augmente la variance et donc le niveau d'agrégation des structures de l'Univers. Ceci est d'autant plus vrai que la masse est faible, ce qui relève là encore du phénomène linéaire d'accentuation de la gravité caractéristique des modèles de gravité modifiée.

D'autre part, le spectre non-linéaire P_{NL} est estimé par la position des particules dans le dernier snapshot de la simulation. Ce dernier provient de l'application d'un schéma d'interpolation CIC sur une grille de 3500^3 voxels, réalisé là encore avec l'outil `Pylians Villaescusa-Navarro (2018)`. Les spectres non-linéaires sont tracés en lignes continues en figure 3.1. L'examen de celles-ci laisse apparaître que, globalement, l'effondrement non-linéaire engendre une structuration bien plus efficace que l'effondrement linéaire. Ainsi, $P_{NL}^{\Lambda CDM}(k = 1)$ est quatre fois plus élevé que $P_L^{\Lambda CDM}(k = 1)$, et, similairement, $\sigma_{NL}^{\Lambda CDM}(M = 10^{14}) \approx 1.2\sigma_L^{\Lambda CDM}(M = 10^{14})$. Pour les grandes masses ($M > 10^{15} M_\odot/h$) et les faibles k ($k < 0.2 h/\text{Mpc}$) les régimes linéaires et non-linéaires se confondent (comme attendu). En outre, la modification de la gravité induit également une élévation du spectre de puissance : le spectre non linéaire de `fr4` est, par exemple, 40 pourcents plus élevé en $k = 1 h/\text{Mpc}$ que celui du modèle standard. Ce *boost* non-linéaire, quantifié par le rapport $P_{NL}/P_{NL}^{\Lambda CDM}$, est le produit de l'accentuation de la gravité aux grands k , comme nous le constatons déjà en comparant les spectres linéaires. Pour distinguer la part des contributions linéaire et purement non-linéaire à l'accentuation de la structuration provoquée par la modification de la gravité, nous choisissons de calculer pour chaque modèle le spectre *purement non-linéaire* $\mathcal{P} = \frac{P_{NL}}{P_L}$, et nous traçons en figure 3.2 pour chaque cosmologie le rapport $\mathcal{P}/\mathcal{P}^{\Lambda CDM}$. Celui-ci quantifie dans chaque modèle de gravité le gain de puissance apporté par la non-linéarité, et le compare à celui apporté dans le modèle standard. Il peut aussi être vu comme le rapport entre le *boost* non-linéaire apporté par la gravité modifiée et le *boost* linéaire. Étonnamment, pour les modèles de gravité modifiée, le spectre purement non-linéaire diminue très rapidement et est 20 pourcents plus faible que celui de ΛCDM dès $k = 1 h/\text{Mpc}$. Tout se passe comme si le couplage de modes était atténué dans les modèles de gravité modifiée. Pour l'expliquer, il faut voir que la matière, assez regroupée aux petites échelles, y donne naissance à des environnements de densité élevée. Alors, $\delta R \approx 8\pi G\delta\rho$ et donc l'équation 3.6 devient : $\Delta\Phi = \Delta\Phi_N$. Cela implique qu'en leur sein, la masse du champ scalaire dynamique est très élevée, ce qui conduit celui-ci à atteindre le minimum du potentiel dans lequel il évolue. Le champ caméléon est alors écranté et la gravité se confond avec la gravitation newtonienne ($G_{eff} = G$). Dans ces conditions, le spectre de puissance non-linéaire ne

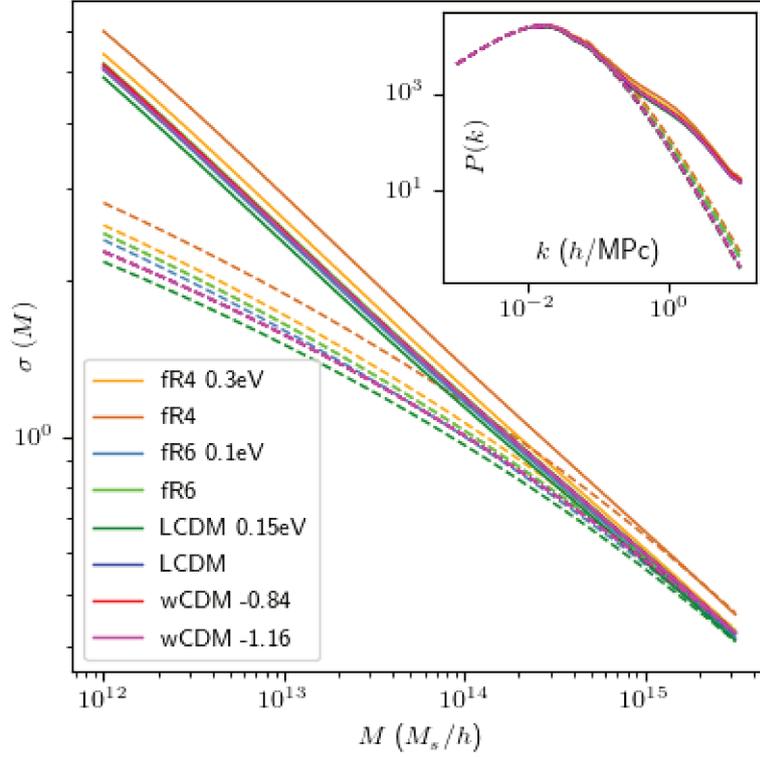


Figure 3.1 – Variance du spectre de puissance en fonction de la masse de lissage. Pour les courbes discontinues, nous avons pris la variance σ_L du spectre de puissance linéaire (calculé par MGCAMB), tandis que les courbes pleines correspondent à la variance σ_{NL} du spectre de puissance non linéaire (calculé à partir des instantanés $z = 0$ des simulations DUSTGRAIN-pathfinder). Le panneau interne contient les spectres de puissance linéaires et non linéaires correspondants.

porte plus d’effet de gravité accentuée alors, qu’à la même échelle, le spectre linéaire continue de le faire. L’écrantage, fortement non linéaire, mitige donc le *boost* non linéaire aux k élevés. Cela explique que le *boost* non linéaire diminue fortement aux grands k et que cette diminution est amorcée en une échelle qui dépend du f_{R0} choisi. Nous ne pourrions donc pas ignorer les effets d’écrantage, fortement non-linéaires, dans l’analyse des halos de masse $10^{15} M_{\odot}/h$ et nous devons nous attendre à ces effets se répercutent aussi sur leur forme.

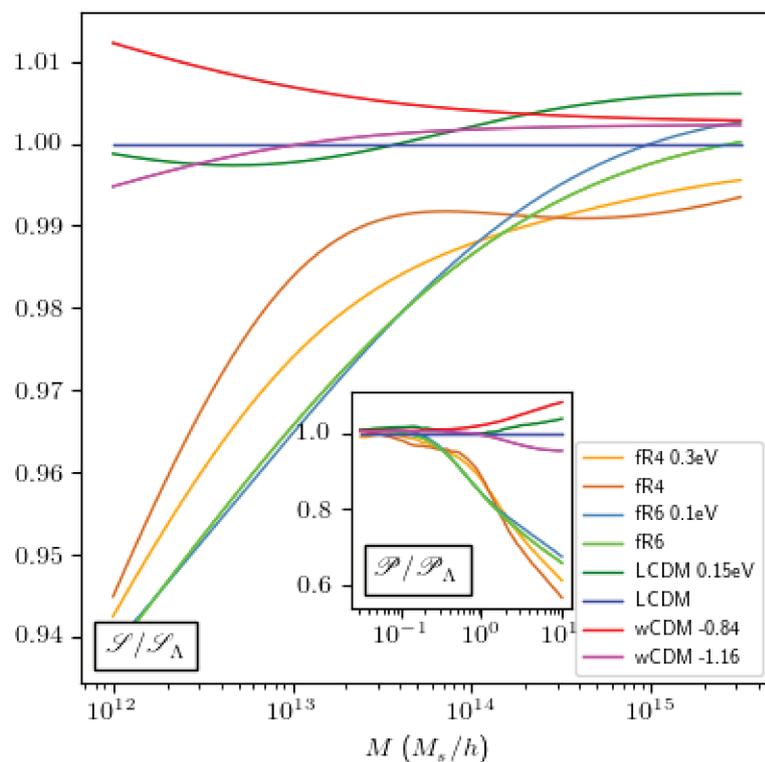


Figure 3.2 – Variance purement non linéaire relativement à celle de Λ_{CDM} en fonction de la masse de lissage M . Pour un modèle de gravité donné, la variance purement non linéaire est définie comme $\mathcal{S} = \sigma_{NL}/\sigma_L$. Dans le panneau interne, nous traçons de la même manière pour chaque modèle cosmologique le spectre de puissance purement non linéaire $\mathcal{P} = P_{NL}/P_L$ par rapport à celui de Λ_{CDM} .

Name	$ f_{R0} $	σ_8^{Gauss}	m_ν	Ω_m	w_0	FOF halos
LCDM	0	0.88	0	0.31345	-1	270, 256
LCDM 0.15eV	0	0.85	0.15 eV	0.30987	-1	266, 159
wCDM -0.84	0	0.88	0	0.31345	-0.84	273, 209
wCDM -1.16	0	0.88	0	0.31345	-1.16	268, 307
fR6	10^{-6}	0.89	0	0.31345	-	299, 555
fR6 0.1eV	10^{-6}	0.87	0.1 eV	0.31107	-	296, 127
fR4	10^{-4}	1.0	0	0.31345	-	289, 815
fR4 0.3eV	10^{-4}	0.93	0.3 eV	0.3063	-	285, 912

Table 3.1 – Paramètres des simulations DUSTGRAIN-pathfinder (Giocoli et al., 2018).

3.2 Empreinte du modèle de gravité sur la forme des halos

3.2.1 Effets en termes de masse

Nous nous proposons donc d'étudier la forme des halos dans les modèles de gravité modifiée, dans le prolongement de ce que nous avons réalisé dans le chapitre précédent. Pour commencer, concernant la forme des halos obtenus, la procédure élaborée dans le chapitre 2, qui en fournit une estimation indépendante de la résolution de la simulation et de la procédure de détection des halos, se simplifie dans le présent chapitre puisque toutes les simulations ont la même résolution et le même nombre de particules; il suffira donc de prendre les paramètres de forme FOF, extraits du tenseur d'inertie calculé à partir de l'ensemble des particules du halo FOF.

À partir des valeurs médianes dans quatre *bins* de masse logarithmiquement répartis entre 10^{13} et $10^{14.4} M_\odot/h$, nous obtenons des relations dépendantes de la cosmologie (et du modèle de gravité) entre la masse des halos et leur forme médiane, telles que représentées dans les figures 3.3 à 3.5. Nous aimerions soulever deux remarques : d'une part, la triaxialité, la prolaticité et l'ellipticité augmentent avec la masse. Cela s'explique par le fait que plus un halo est effondré, plus il est sphéricisé et aplati. D'une extrémité à l'autre du domaine de masse testé, la prolaticité double (passant environ de 0.030 à 0.060), la triaxialité augmente d'environ 14 pourcents (passant de 0.73 à 0.82) et l'ellipticité de 26 pourcents. C'est un effet de l'effondrement, radial par

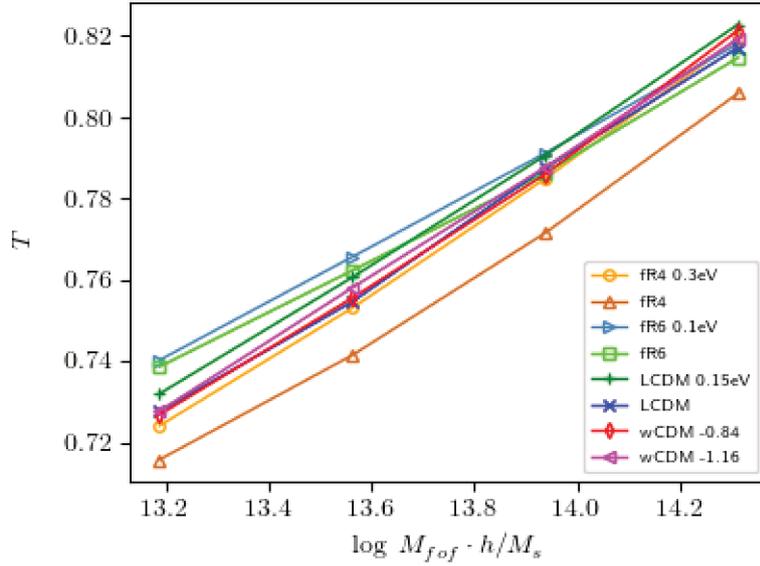


Figure 3.3 – Triaxialité médiane des halos en fonction de leur masse FOF. Chaque courbe correspond à un modèle de gravité et cosmologique donné, avec des neutrinos potentiellement massifs. Les halos les plus massifs sont les plus prolates. De même, plus σ_8 est élevé, plus les halos sont aplatis.

nature, du moins dans sa partie newtonienne, comme nous l’avons déjà obtenu dans le chapitre 2. La présence du champ scalaire supplémentaire (f_R) amoindrit l’efficacité de ce procédé de sphéricisation mais ne le compense évidemment pas (Burrage et al., 2015). Cela provient du fait que les isopotentielles du champ supplémentaire f_R se confondent avec les isodensités de la distribution (Llinares et al., 2014), au contraire des isopotentielles du champ de gravité newtonien. Nous étudierons plus finement dans la section suivante l’effet de l’activation de l’écrantage sur la forme des halos. D’autre part, à masse fixée, prolaticité et triaxialité médianes des halos décroissent (à masse donnée) lorsque le paramètre σ_8 augmente. Là encore, plus σ_8 est élevé, plus les structures sont effondrées (à *redshift* donné) et donc moins elles sont prolates.

Ces considérations nous conduisent à vouloir évaluer dans ce contexte, ce qui, dans les relations masse-forme envisagées, peut être expliqué par le spectre de puissance.

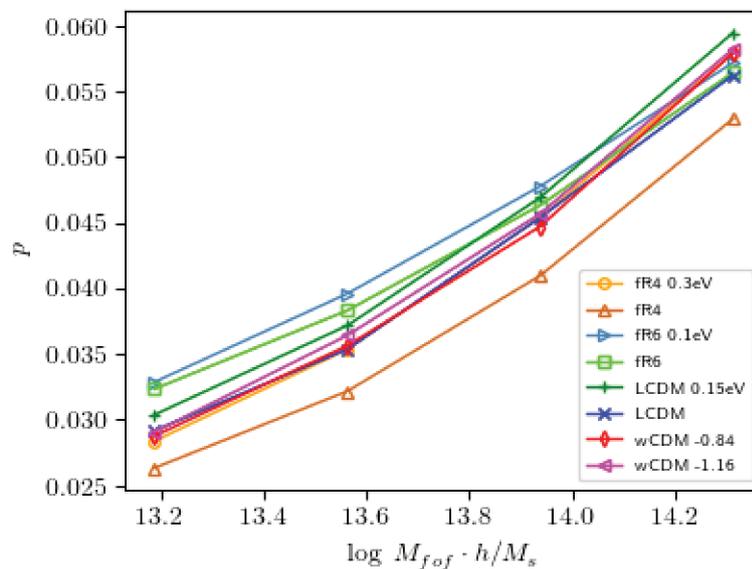


Figure 3.4 – Prolaticité médiane des halos en fonction de leur masse FOF.

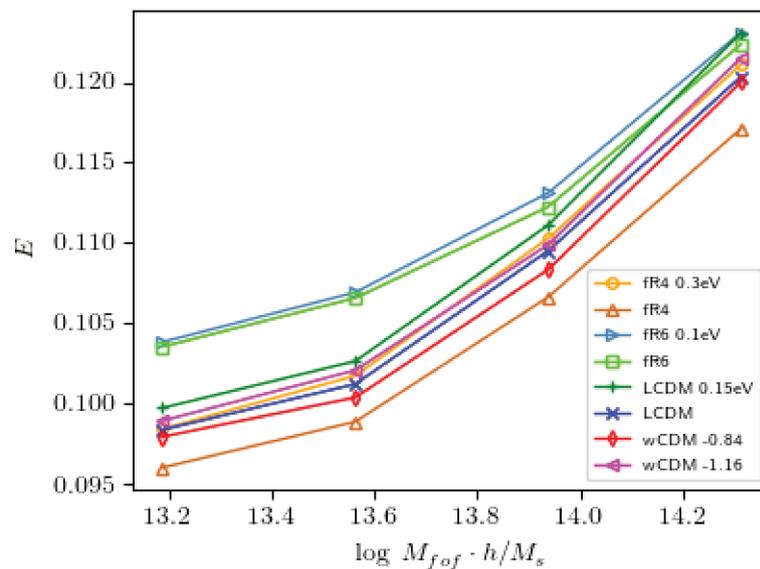


Figure 3.5 – Ellipticité médiane des halos en fonction de leur masse FOF. L'ellipticité des halos augmente avec la masse et diminue avec σ_8 . Ceci est dû au fait que les halos deviennent de plus en plus sphériques au fur et à mesure qu'ils s'effondrent.

3.2.2 Fluctuations non-linéaires

Dans les modèles w CDM (de la relativité générale), nous avons montré que, si les courbes médianes $M - T$ présentaient des différences manifestes d'une cosmologie à l'autre, tant en ce qui concerne leur amplitude que leur coefficient directeur, les courbes médianes $\sigma_{NL}(M) - T$ étaient en revanche "parfaitement" confondues. En d'autres termes, opérer le changement de variables $M \rightarrow \sigma_{NL}(M)$ permettait d'expliquer complètement la dépendance cosmologique des courbes liant masse et mesures de forme. Nous avons aussi montré que cette capacité du spectre de puissance non linéaire à encapsuler l'information cosmologique relative à la forme des halos était encore de mise même lorsque cette dernière est estimée, comme dans notre cas, à partir de la matière des halos complets issus de Friends of Friends. Puisque nous considérons maintenant des modèles qui font varier également le modèle de gravité (f_{R0}) ainsi que la masse des neutrinos (M_ν), il semble naturel de chercher à savoir si, dans ces cas également, il est possible d'effacer les disparités cosmologiques (constatées dans la section précédente) grâce à la prise en compte du spectre de puissance à $z = 0$, via le changement de variable $M \rightarrow \sigma_{NL}(M)$.

Pour chaque halo, on calcule $\sigma_{NL}(M_{FOF})$ (où M_{FOF} est la masse totale FOF du halo). Dans chaque modèle, on regroupe les halos dans des *bins* de σ_{NL} , et on estime dans chacun d'entre eux le T médian. Il apparait dans la figure 3.6 que le remplacement de M par $\sigma_{NL}(M)$ permet de compenser la dépendance cosmologique de la triaxialité des halos. En effet, dans cette figure, l'ensemble des courbes se confondent, quels que soient les paramètres cosmologiques et de gravité. Une exception notable doit cependant être relevée : si les courbes de **fR6**, avec ou sans neutrinos massifs, sont, elles aussi, superposées aux autres courbes aux grandes masses (i.e. aux larges $\log \sigma_{NL}^{-1}$), elles s'en détachent pour $\log \sigma_{NL}^{-1} < -0.15$ (ce qui correspond pour ces deux modèles à une masse typique de $10^{14} M_\odot/h$). Ainsi, le T médian pour $\log \sigma_{NL}^{-1} = -0.2$ vaut 0.74 pour ces modèles **fR6** mais seulement 0.73 pour les autres. Les mesures de prolaticité en figure 3.7 et d'ellipticité présentent des caractéristiques similaires.

Dans la section suivante, nous nous proposons d'expliquer pourquoi.

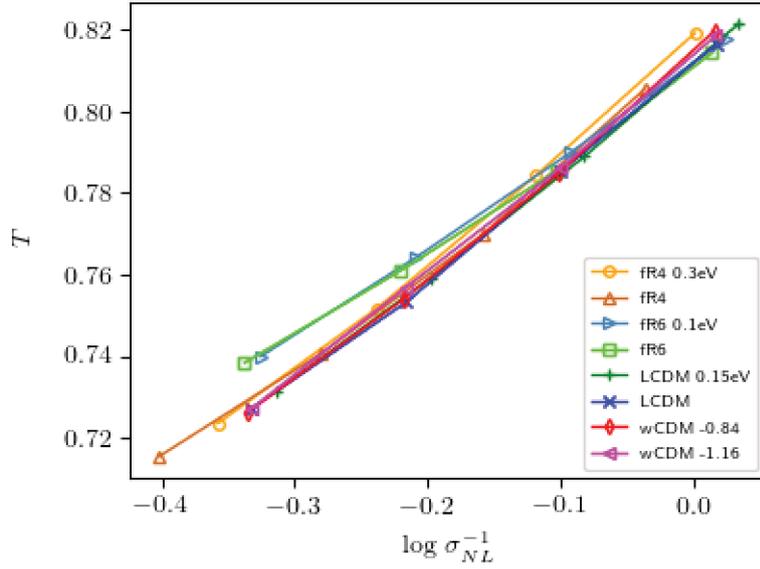


Figure 3.6 – Triaxialité médiane des halos en fonction de la variance des fluctuations non linéaires. Toutes les courbes se superposent, ce qui signifie que la dépendance cosmologique des relations masse-triaxialité est complètement encapsulée dans le spectre de puissance non linéaire. Cependant, lorsque $|f_{R0}| = 10^{-6}$, indépendamment de la masse des neutrinos, la relation médiane entre la variance et la triaxialité ne s’identifie pas à la relation obtenue pour les autres modèles. Cela se produit spécifiquement pour $\sigma_{NL} \approx -0.1$, correspondant pour le modèle **fR6** à une masse de $10^{14} h/M_{\odot}$, qui est, pour ce modèle, la masse caractéristique où l’écrantage se déclenche. En effet, la façon dont les halos s’effondrent en sphères dépend du modèle de gravité. À la limite du domaine d’écrantage, ce processus est modifié d’une manière qui ne peut être traduite dans le spectre de puissance (voir le texte principal). Cette divergence dans les relations médianes $\sigma_{NL} - T$ est un marqueur distinctif d’un changement dans le modèle de gravité, mais elle est indépendante de la masse des neutrinos.

3.2.3 Effets de l’écrantage

A cet effet, rappelons l’interprétation des résultats que nous avons proposée, dans le cas de modèles d’énergie noire associés à la gravitation classique. Les isopotentielles gravitationnelles d’une distribution ellipsoïdale donnée possèdent la remarquable propriété d’être systématiquement plus sphériques que les isodensités qui leur donnent naissance. En conséquence, lorsque l’effondrement des halos progresse, ceux-ci sont de plus en plus sphériques. Dans le même temps, plus les halos sont effondrés, plus l’Univers est structuré. Il existe donc une relation indépendante de la cosmologie,

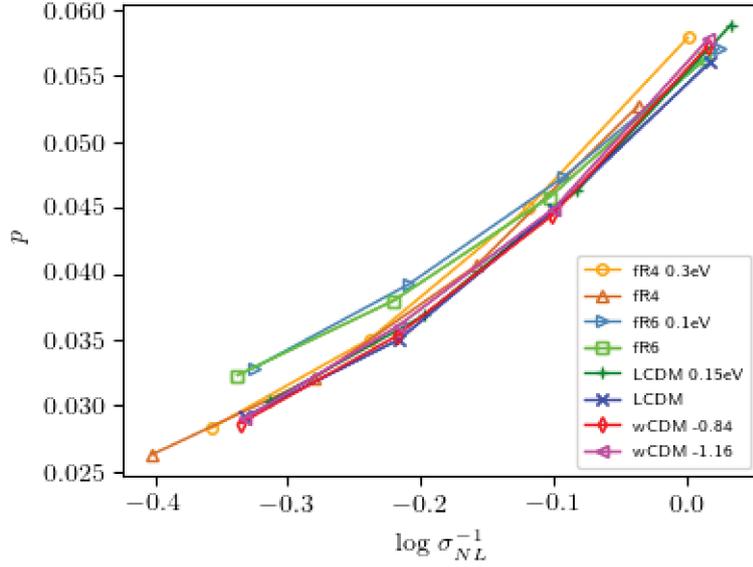


Figure 3.7 – Prolaticité médiane des halos en fonction de la variance des fluctuations non linéaires.

liant la forme des halos (leur prolaticité ou leur triaxialité par exemple) de masse M et la variance du champ de densité non-linéaire $\sigma_{NL}(M)$.

Or, si cette relation absorbe toute dépendance cosmologique, elle est susceptible d'évoluer lorsque l'on modifie le modèle de gravité sous-jacent. En particulier, lorsque celui-ci anisotropise les structures (ou ne les isotropise pas aussi efficacement que la gravité newtonienne), le spectre de puissance (et les informations sur la structuration de l'Univers qu'il contient) n'est plus suffisant pour expliquer la forme des halos. C'est précisément ce qui se produit lorsque le modèle de gravité incorpore des mécanismes d'écrantage, comme nous allons le voir.

Dans le cadre du modèle Hu-Sawicki, nous pouvons distinguer trois régimes :

Les halos de grande masse, dont le potentiel newtonien est très grand par rapport à f_{R0} sont entièrement écrantés. La gravité y est indistinguable de la gravitation newtonienne, et il en ira ainsi du processus de sphéricisation. Il n'y aura pas de différence constatable, dans la relation médiane entre σ_{NL} et T obtenue pour ces halos, et celle observée pour les halos du modèle standard.

A contrario, les halos très peu massifs, dont le potentiel est faible devant f_{R0} ne sont pas écrantés. Dans ceux-ci, la gravité s'y comporte comme la gravitation newtonienne assortie d'une constante effective de gravitation $G_{eff} = \frac{4}{3}G$. Si le processus de sphéricisation est plus rapide (puisque la gravité est plus intense), il faut noter qu'il en sera exactement de même pour le *clustering* global : cette modification de la gravité est parfaitement isotrope de sorte que ses effets sont entièrement incorporés par le spectre de puissance. Autrement dit, pour ces halos légers, la relation liant σ_{NL} et T reste identique à celle que l'on observe dans le modèle Λ CDM.

Il est en revanche plus délicat d'appréhender l'effet de la modification de la gravité sur la forme des halos dont le potentiel (newtonien) est comparable, en valeur absolue, à f_{R0} . En effet, de tels halos sont situés à la limite du domaine de potentiel des objets écrantés. Or, comme le soulignent [Llinares & Mota \(2013\)](#), de tels halos peuvent être écrantés le long d'un axe principal et pas le long d'un autre. Ainsi, des halos ellipsoïdaux peuvent s'ellipticiser davantage sous l'effet de la gravité modifiée. En d'autres termes, le champ caméléon étant généralement autant elliptique que les isodensités, sa présence tend à altérer l'efficacité de la sphéricisation sous l'effet du champ de gravité classique. Une distribution ellipsoïdale donnée est donc moins sphérique après un pas de temps, qu'elle ne le serait devenue sous l'effet de la gravité newtonienne seule. Puisque ce potentiel critique peut, comme nous allons le voir, être traduit (pour des halos de densité moyenne donnée) en termes de masse critique (M_c), il en résulte que la triaxialité et la prolaticité des halos dont le σ_{NL} est proche de $\sigma_{NL}(M_c)$ sont plus élevées que pour les halos de même σ_{NL} en provenance de Λ CDM.

Il nous reste donc à estimer la masse critique de chaque modèle, aux alentours de laquelle l'écrantage s'enclenche. Il s'agit de la masse de halos telle que le potentiel newtonien est du même ordre de grandeur que f_{R0} . Plus précisément, un halo est écranté dès que (voir la section [3.1.1.2](#)) :

$$\frac{GM}{Rc^2} = \frac{3}{2}|f_{R0}| \quad (3.11)$$

où nous avons fait explicitement figurer la vitesse de la lumière dans le vide c . La

densité sphérique moyenne des halos FOF (avec $b = 0.2$) est généralement $200\rho_m$, de sorte que

$$\frac{M}{R} = M \left(\frac{3\pi M}{200 \cdot 4\rho_m} \right)^{-1/3}$$

transformant l'équation 3.11 en :

$$GM^{2/3} = \frac{3c^2}{2} |f_{R0}| \left(\frac{3\pi}{800\rho_m} \right)^{1/3} \quad (3.12)$$

En conséquence, la masse typique d'écrantage d'un halo est :

$$M_c = \left(\frac{3c^2}{2G} \right)^{3/2} \left(\frac{3\pi}{800\rho_m} \right)^{1/2} \cdot |f_{R0}|^{3/2} \quad (3.13)$$

Lorsque $\Omega_m = 0.31$, on obtient :

$$M_c = (2.1 \cdot 10^{22} M_\odot/h) \cdot |f_{R0}|^{3/2} \quad (3.14)$$

Ce calcul fournit une estimation de la masse critique au-delà de laquelle un halo, de densité moyenne donnée, génère un puits de potentiel suffisamment profond pour pouvoir s'auto-écranter et donc ignorer les effets de la gravité modifiée³.

A présent, pour le modèle **fR4**, $M_c = 2.1 \cdot 10^{16} M_\odot/h$ - cela signifie que l'ensemble des halos de ce modèle fournis par la simulation sont en deçà de la masse critique d'écrantage et appartiennent à la seconde catégorie (halos peu massifs) du développement précédent. Cela explique que la courbe médiane $\sigma_{NL} - T$ de **fR4** soit confondue avec celle de Λ CDM.

En revanche, pour le modèle **fR6**, $M_c = 2.1 \cdot 10^{13} M_\odot/h$ - les halos de ce modèle produits dans la simulation appartiennent majoritairement à la troisième catégorie,

3. Cette estimation pourrait être affinée en tenant du compte du fait qu'il existe une certaine dispersion autour de la valeur $200\rho_m$ choisie pour décrire les halos FOF (White, 2001). Ainsi, les auteurs de More et al. (2011) montrent par exemple que la densité moyenne sphérique des halos dépend de leur concentration NFW. Cela implique que la masse critique devrait être remplacée par un domaine critique de masse qui tienne compte de la diversité des surdensités moyennes des halos FOF. Malgré tout, M_c demeure un bon indicateur de l'auto-écranage qui nous permet d'en évaluer la dépendance en f_{R0} .

et sont donc susceptibles d'être écartés selon certains de leurs axes principaux seulement. Ces halos peuvent donc devenir plus elliptiques pendant leur effondrement, sans que cet effet d'axes différenciés (non-isotrope) ne soit marqué dans le spectre de puissance (qui est isotrope) ou la variance, non-linéaires. Ceci permet de comprendre la séparation observée des courbes médianes $\sigma_{NL} - T$ de **fR6** et Λ CDM aux alentours de $10^{14}M_{\odot}/h$. Au-delà de cette masse, ces deux courbes se confondent, car les halos correspondants de **fR6** sont entièrement écartés et appartiennent alors au premier régime ("halos massifs"). Les halos très en deçà de cette masse (non résolus dans les simulations considérées) appartient donc au second régime ("halos légers") et les deux courbes s'y confondront de nouveau. C'est véritablement autour de la masse critique, à la limite du domaine d'écrantage, que les effets de ce dernier sont visibles sur la forme des halos.

3.2.4 Bilan

Résumons : le degré d'effondrement du champ cosmique, dépendant de la cosmologie, est mesuré par la variance du spectre de puissance lissé sur l'échelle de masse des halos considérés. À degré d'effondrement fixé, la forme des halos ne dépend pas (autrement) de la cosmologie et n'est plus que fonction du modèle de gravité (qui a tendance ou non à sphériciser les structures à chaque pas de temps de l'effondrement). Cela signifie qu'à modèle de gravité fixé, les courbes σ_{NL} /formes sont universelles (ne dépendent pas de la cosmologie). Ces courbes universelles se distinguent d'un modèle de gravité à un autre, au niveau des $\sigma_{NL}(M_c)$ caractéristiques des mécanismes d'écrantage propres à ces modèles. En effet, les mécanismes d'écrantage réagissent à l'anisotropie du champ de matière différemment d'un champ de gravité classique, altérant par là même le degré de sphéricisation des halos à niveau de fluctuations donnée.

Il est intéressant de remarquer que la présence de neutrinos massifs ne change rien aux conclusions précédentes : les courbes $\sigma_{NL} - T$ des mêmes modèles de gravité, avec ou sans neutrinos massifs, sont systématiquement confondues. Ainsi, on peut affirmer que les courbes médianes σ_{NL} -forme peuvent être vues comme une sonde de la gravitation modifiée, à la limite du domaine de masse où celle-ci est écartée. Si

l'on mesure le spectre de puissance non-linéaire d'un champ cosmique donné, d'une part, et la forme des halos qu'il contient d'autre part, il est possible d'interpréter tout décollement brutal de la courbe attendue pour les modèles à gravité classique comme la manifestation d'une modification de la gravité. La variance non-linéaire caractéristique de décollement fournit alors une estimation de f_{R0} .

3.3 Résultats Connexes

3.3.1 Correspondance en gravité modifiée

Nous avons mis en évidence une relation entre la variance du champ de densité et la forme des halos et fourni une explication en termes de sphéricisation des halos au fur et à mesure de la structuration de l'Univers. Or, si la forme des halos est calculée par définition sur les halos eux-mêmes, indépendamment de leur environnement, il devrait en être de même pour le champ de densité : en toute rigueur, c'est plutôt la contribution de la matière des halos à la variance du champ de densité qu'il faudrait comparer à leur forme. Dans le chapitre 2, nous avons, fort de cette question, mis en évidence l'existence d'une correspondance indépendante du modèle d'énergie noire, entre la variance du champ de densité total et celle provenant de la matière dans les halos. De sorte que si la forme des halos est en relation universelle avec la dernière, il n'est pas étonnant qu'elle le soit aussi avec la première. Nous voulons montrer que cette correspondance existe encore lorsque f_{R0} varie.

La contribution de la matière dans les halos à la variance du champ de densité est donnée par

$$\sigma_{NL,IH}^2(M) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} k^2 P_{NL,IH}(k) W^2 \left[k \cdot \left(\frac{3M}{4\pi\Omega_m\rho_c} \right)^{1/3} \right] dk \quad (3.15)$$

Dans l'expression précédente, $P_{NL,IH}(k)$ est le spectre de puissance calculé en ne prenant en compte que les particules appartenant aux halos (FOF). En évaluant la triaxialité médiane des halos dans des bins de $\log \sigma_{NL,IH}^{-1}$, nous obtenons la figure 3.8.

Les résultats qui apparaissent sont tout à fait similaires à ceux obtenus en $\log \sigma_{NL}^{-1}$: les courbes sont confondues à l'exception de **fr6** aux faibles masses. Le fait qu'aux hautes masses, il existe une relation universelle entre T et σ_{NL} d'une part, et entre T et $\sigma_{NL,IH}$ d'autre part, prouve l'existence d'un mapping (relation indépendante de la cosmologie et du modèle de la gravité) entre σ_{NL} et $\sigma_{NL,IH}$ dans les domaines correspondant aux hautes masses. Pour le vérifier, et pour savoir ce qui advient aux masses plus faibles, on trace dans la figure 3.9 pour chaque simulation, le nuage de points $\{\sigma_{NL,IH}(M), \sigma_{NL}(M)\}$ lorsque M parcourt *l'ensemble* du domaine de masse couvert par les halos de la simulation, $[10^{13}, 10^{14.5}] M_{\odot}/h$. On s'aperçoit que ces nuages se confondent dans l'intégralité de ce domaine, ce qui confirme l'existence d'une relation logarithmique universelle, indépendante du modèle de gravité *et* du modèle d'énergie noire, entre σ_{NL} et $\sigma_{NL,IH}$.

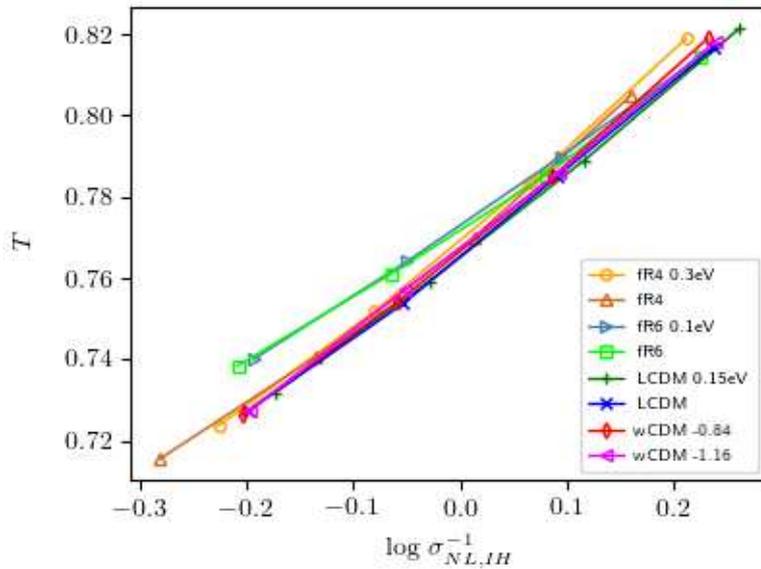


Figure 3.8 – Triaxialité médiane des halos en fonction de la variance des fluctuations non linéaires intra-halos. Le fait que la courbe obtenue soit identique à celle que l'on obtient en traçant la triaxialité en fonction de σ_{NL} suggère l'existence d'une correspondance simple et universelle entre ces deux mesures de variance.

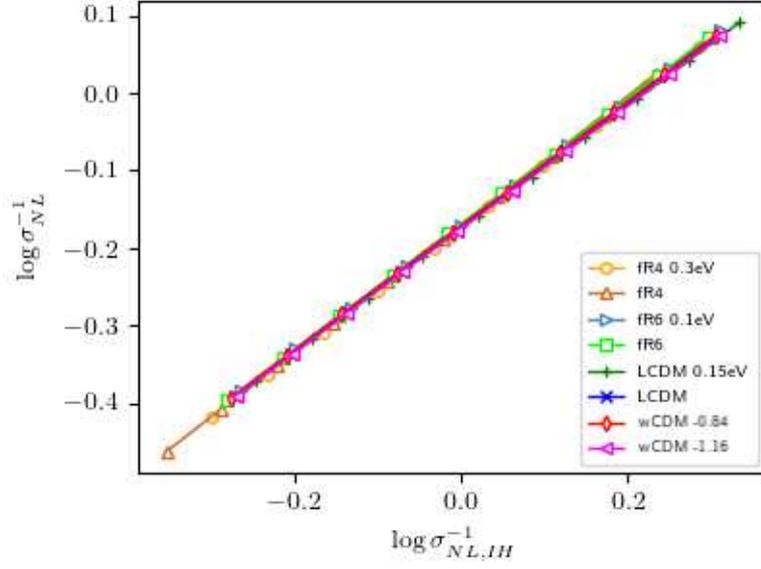


Figure 3.9 – Correspondance entre les variances non-linéaires totale et intra-halos. Les courbes se confondant, cette correspondance ne dépend ni de la cosmologie ni du modèle de gravité ; son comportement correspond en outre à celui d’une loi de puissance.

3.3.2 Le statut de δ_c

Dans le chapitre 2, nous avons souligné le fait que δ_c dépendait très faiblement de Ω_m et de w . En conséquence, il subsiste une ambiguïté sur la quantité liée au spectre de puissance à utiliser pour obtenir l’invariance cosmologique pour les paramètres de forme : doit-on utiliser $\nu = \delta_c/\sigma$ ou bien σ ? Nous allons exploiter la forte dépendance de δ_c en $|f_{R0}|$ pour répondre à cette question.

En effet, les auteurs de [Kopp et al. \(2013\)](#) ; [Hagstotz et al. \(2019a\)](#) montrent que, dans le cadre de la gravité modifiée, on a approximativement :

$$\frac{\delta_c(M, |f_{R0}|)}{\delta_c(|f_{R0}| = 0)} = 1 + 0.0166 \left(m_b - \sqrt{m_b^2 - 1} \right) + 2.7 \cdot 10^{-3} (2.41 - \log_{10} |f_{R0}|) \cdot (\tanh(m_b) - 1) \quad (3.16)$$

avec m_b une quantité dépendant explicitement de la masse (ce qui n’était pas le cas dans le contexte de la relativité générale) :

$$m_b = \log_{10} M - 1.99 \log_{10} |f_{R0}| - 26.21 \quad (3.17)$$

On reporte dans le tableau 3.2, les valeurs de δ_c pour $M = 10^{14} M_\odot/h$. Il est 15 pourcents plus important dans **fr6** que dans **fr4**. Partant, nous représentons en

Name	$\delta_c(M = 10^{14} M_\odot/h)$
LCDM	1.68
wCDM -0.84	1.68
wCDM -1.16	1.68
fr6	1.59
fr4	1.38

Table 3.2 – Densité critique linéaire d'effondrement sphérique pour divers $|f_{R0}|$

figures 3.10 et 3.11 la triaxialité des halos en fonction de ν_L et ν_{NL} respectivement. La présence de δ_c dans ν_{NL} empêche manifestement l'invariance. Elle n'est pas non plus présente pour ν_L . L'étude en gravité modifiée aura donc montré que c'est bien la variance σ (non linéaire) qu'il faut considérer dans la reconstitution de l'invariance et non pas la hauteur des pics (linéaires ou non) ν .

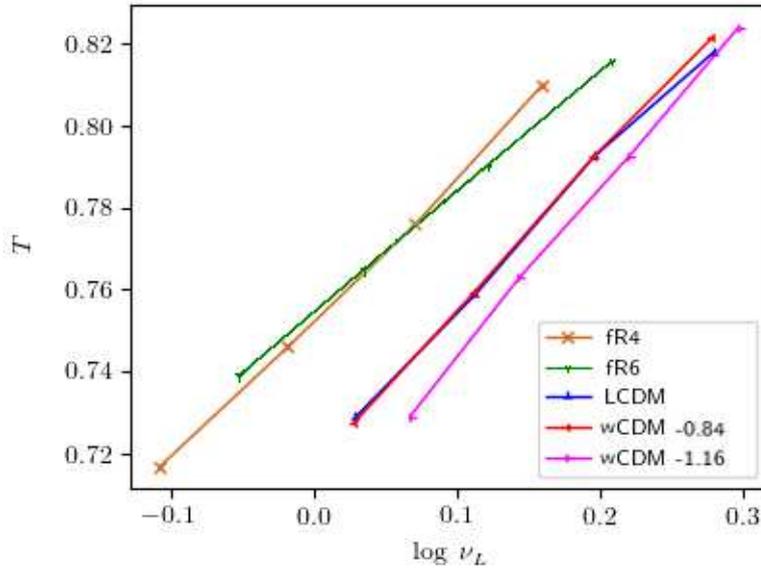


Figure 3.10 – Triaxialité des halos en fonction de la hauteur du pic linéaire $\nu_L = \delta_c/\sigma_L$.

La prise en compte des variations de δ_c , fortement dépendantes de f_{R0} et de M , détruit l'invariance que l'on observe en σ_{NL} (et la variance approximative que l'on observe en σ_L).

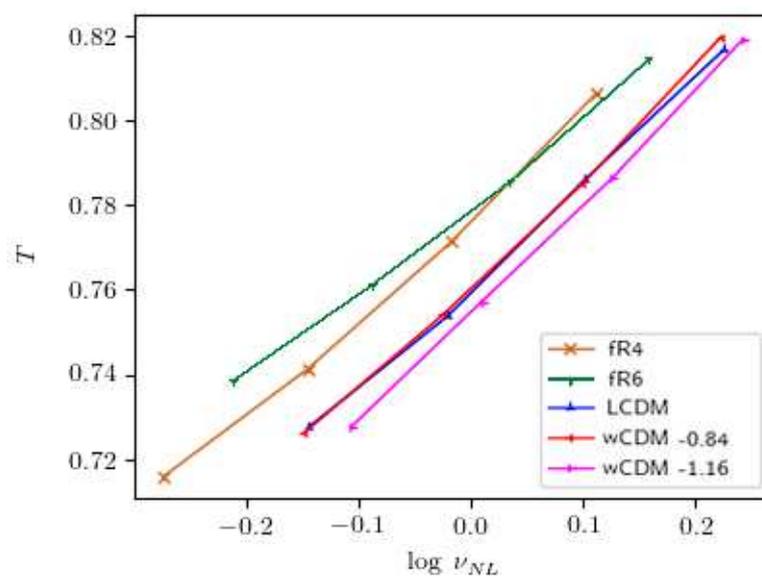


Figure 3.11 – Triaxialité des halos en fonction de la hauteur du pic non-linéaire $\nu_{NL} = \delta_c/\sigma_{NL}$. La prise en compte des variations de δ_c , fortement dépendantes de f_{R0} et de M , détruit là encore l'invariance que l'on observe en σ_{NL}

Chapitre 4

Profil de forme et cosmologie : l'intelligence artificielle à la rescousse de la physique... et vice et versa

Sommaire

4.1	Machine learning : Aspects techniques	136
4.1.1	Arbres de décision : Principe et Agrégation	136
4.1.1.1	Partitionnement spatial	136
4.1.1.2	Boosting	138
4.1.1.3	Boost de gradient comme descente de gradient	138
4.1.1.4	Algorithme	140
4.1.2	Observables sur les halos de matière noire	141
4.2	Effets spurieux : détection et neutralisation de l'effet Clever Hans	143
4.2.1	Le cas Hans le malin : histoire et leçons	143
4.2.1.1	Repères historiques	143
4.2.1.2	Intelligence artificielle : précautions	144
4.2.2	Clever Hans primaire	145
4.2.2.1	Description	145
4.2.2.2	Correction	146
4.2.3	Clever Hans complémentaire	149
4.2.3.1	Description	149
4.2.3.2	Correction	149

4.3 Résultats	151
4.3.1 Cadre	151
4.3.1.1 Ensemble d'entraînement modifié	151
4.3.1.2 Hyperparamètres	152
4.3.2 Résultats sur les attributs	153
4.3.2.1 Résultats sur tous les attributs	153
4.3.2.2 Familles d'attributs	154
4.3.2.3 Un effet de masse ?	157
4.3.3 Diagnostic statistique	159
4.3.3.1 Robustesse au bruit	159
4.3.3.2 Calibration	163
4.3.3.3 Extension à trois cosmologies	166
4.3.4 L'importance de la mesure dans des ellipsoïdes	167

Principe et objectif Les techniques d'apprentissage automatique supervisées, généralement regroupées sous le nom de *machine learning*, ont connu ces dernières années un essor spectaculaire. Elles consistent à segmenter finement l'espace des attributs d'un ensemble de données dans le but d'apprendre la relation qui les lie à leur étiquette respective.

Si de nombreux champs de recherche ont bénéficié des avancées dans ce domaine, la physique en général ne fait pas exception à la règle (Carleo et al., 2019; Workman et al., 2022). C'est en particulier le cas en cosmologie (Ball & Brunner, 2010; Dvorkin et al., 2022), où les usages de l'apprentissage profond sont variés. En premier lieu, le *machine learning* fait partie des outils privilégiés pour analyser les données observationnelles, en particulier pour la détection d'objets dans les images, et pour l'inférence de leurs propriétés (Huertas-Company et al., 2008; Gerdes et al., 2010; Banerji et al., 2010; Bloom et al., 2012; Carrasco Kind & Brunner, 2013; Mandelbaum et al., 2014; Hoyle, 2016; Lochner et al., 2016; Bonnett et al., 2016; Sadeh et al., 2016; Kim & Brunner, 2017; Charnock & Moss, 2017; Lanusse et al., 2018; Salvato et al., 2019). De façon surprenante, le *machine learning* a également enrichi le champ des simulations cosmologiques. Par exemple, en apprenant à associer à des conditions initiales et des paramètres cosmologiques la carte de densité à $z = 0$, certains dispositifs de *deep learning* permettent de contourner le processus de simulation traditionnel, bien plus

lourd en termes de temps de calcul (Kern et al., 2017; He et al., 2019). Dans la même lignée, Kaushal et al. (2022) conçoivent un réseau de neurones capable de corriger le résultat des simulations COLA, reposant sur diverses approximations de la dynamique non-linéaire des particules de matière noire. D'autres applications originales existent, permettant de superposer la distribution des baryons aux halos provenant de simulations purement N -corps (Lovell et al., 2022) ou de reconstruire une fraction manquante des cartes de champ issues de simulations hydrodynamiques (Mohammad et al., 2022). Enfin, l'apprentissage supervisé ouvre une nouvelle voie d'interprétation des résultats de simulations cosmologiques en permettant d'extraire du champ de matière noire à $z = 0$, ou des structures qui s'y sont formées, des informations sur le modèle cosmologique que ces simulations reproduisent (Auld et al., 2007; Ravanbakhsh et al., 2017; Ribli et al., 2019; Lazanu, 2021; Villaescusa-Navarro et al., 2021; Avila et al., 2022; Wang et al., 2023).

Il convient pourtant de noter que la complexité de tels outils en fait rapidement des boîtes noires, ce qui soulève d'importantes questions quant à leur caractère interprétable (on trouvera une revue sur le sens précis à donner à cette notion dans Kamath & Liu (2021)). En particulier, si on vise une application de nature physique (comme l'inférence des paramètres cosmologiques), il est important de distinguer ce qui, dans le résultat, provient de la capacité du dispositif à capturer effectivement la physique sous-jacente (liant les paramètres cosmologiques au champ de densité à $z = 0$), et ce qui relève d'artéfacts numériques, propres aux simulations considérées, sur lesquels le processus d'apprentissage aurait capitalisé. La granularité des données (le fait que la masse des halos soit nécessairement un multiple entier de la masse particulière, directement dépendant de Ω_m) constitue, comme nous allons le voir, un de ces écueils et favorisera artificiellement la reconnaissance des paramètres cosmologiques de l'Univers sous-jacent. Cela constitue un exemple flagrant d'effet Clever Hans : le système apprend à associer une proportion très satisfaisante de données d'entrée à la bonne étiquette-cible en exploitant des caractéristiques "accidentelles" des données, c'est-à-dire contingentes à la méthode de simulation, mais indépendantes de la phy-

sique d'arrière-plan. Cela signifie qu'il est possible d'extraire une connaissance sur la nature physique des phénomènes étudiés en utilisant des techniques de *machine learning*, à la condition expresse que celles-ci s'accompagnent d'une analyse fine des données permettant de désamorcer d'éventuels biais numériques. C'est à ce titre que le croisement entre les résultats du *machine learning* et ceux fournis par des études statistiques plus traditionnelles s'avère nécessaire pour avoir une idée du niveau de *faisabilité* de la tâche d'apprentissage : un taux de discrimination par le dispositif de *machine learning* qui serait très élevé alors que des considérations statistiques classiques prévoient des distributions proches et très étalées, suggérerait clairement l'existence d'un Clever Hans. Nous présenterons dans ce chapitre certains aspects de ce travail de nature plus méthodologique sur l'exemple du problème d'inférence des paramètres cosmologiques à partir des propriétés des halos de matière noire à $z = 0$, issus des simulations Dark Energy Universe (dans les boîtes 648 Mpc/h contenant 2048^3 particules).

Par ailleurs, il a été montré que le profil (sphérique) des halos dépendait de la cosmologie : la distribution de leur sparcité (Balmès et al., 2014 ; Corasaniti et al., 2022) ou de leur concentration (Wechsler et al., 2002 ; Bhattacharya et al., 2013) à masse donnée, est sensible au modèle d'énergie noire sous-jacent et plus généralement à l'histoire de formation des halos (cf. section 1.5).

Puisque la *forme ellipsoïdale globale* du halo d'une part, et son *profil sphérique* (concentration, sparcité) d'autre part, sont porteurs d'information cosmologique, il est naturel de s'interroger sur l'empreinte laissée par la cosmologie sur les *profils* de masse et de forme *ellipsoïdaux*. En particulier, nous nous demanderons si la prise en compte d'un *profil* plutôt que d'un seul indicateur de forme globale, permet d'extraire des informations sur la cosmologie sous-jacente à partir *d'un halo donné* et non pas de la médiane d'une population de halos. Or, puisque l'information cosmologique portée par les halos pris individuellement est nécessairement subtile, elle constitue un signal faible ; en ce sens, le *machine learning* s'avère être l'outil adapté à sa détection. En outre, décrire un halo par son profil de masse et de forme ellipsoïdale entraîne la mul-

tiplication du nombre d'attributs par halo, et donc un espace des attributs de grande dimension ; là encore, l'apprentissage supervisé est plus adapté que les analyses statistiques classiques (telles celles proposées dans les chapitres 2 et 3) à la classification d'objets appartenant à un espace de dimensionnalité élevée.

4.1 Machine learning : Aspects techniques

4.1.1 Arbres de décision : Principe et Agrégation

4.1.1.1 Partitionnement spatial

Les arbres de décision ont été proposés par [Breiman et al. \(1984\)](#) et sont actuellement l'une des techniques d'apprentissage automatique les plus utilisées (voir [Kotsiantis \(2011\)](#)). Nous présentons ici la version CART de cet algorithme, pour les tâches de classification.

Supposons que nous disposions de n halos d'entraînement, chacun étant représenté par un vecteur de d attributs : $\mathbf{x}_i \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$. Les données d'apprentissage sont fournies avec des variables cibles connues : $y_i \in \mathcal{C}$, pour $i \in [1, n]$. Dans notre cas, les attributs sont des propriétés des halos bien choisies (profils de masse, de forme...) et les variables cibles sont les modèles cosmologiques.

Les arbres de décision partitionnent l'espace \mathcal{D} en régions R_j et associent à chacune d'elles une classe prédite \hat{y}_j . En d'autres termes, la classe prédite associée au halo \mathbf{x}_i est :

$$\hat{f}(\mathbf{x}_i) = \sum_j \hat{y}_j \mathbb{I}_{\mathbf{x}_i \in R_j}$$

Dans la plupart des cas, \hat{y}_j est fixé pour être la classe majoritaire des données d'entrée appartenant à R_j . Évidemment, pour que le partitionnement soit efficace, chaque région doit être aussi homogène que possible en ce qui concerne la classe réelle des données qui lui appartiennent. Ceci est mesuré par l'impureté de Gini, qui se comporte

comme une entropie¹ :

$$i(R_j) = 1 - \sum_{c \in \mathcal{C}} \left(\frac{\sum_i \mathbb{I}_{\mathbf{x}_i \in R_j} \mathbb{I}_{y_i = c}}{\sum_i \mathbb{I}_{\mathbf{x}_i \in R_j}} \right)^2 \quad (4.1)$$

Ainsi, le partitionnement peut se faire de manière récursive : pour diviser la région non parfaitement homogène R_j , on choisit un attribut $k \in [1, d]$ et un seuil ℓ , et on crée deux nouvelles régions : $R_j^<(k, \ell)$ contenant tous les éléments de R_j pour lesquels $x^k < \ell$ et $R_j^>(k, \ell)$ son complémentaire. Le critère (k, ℓ) , également appelé nœud, est choisi pour minimiser l'impureté totale résultante :

$$k, \ell = \operatorname{argmin} i [R_j^<(k, \ell)] + i [R_j^>(k, \ell)]$$

L'algorithme se termine lorsque toutes les régions sont homogènes.

Un tel algorithme est capable de partitionner chaque espace avec une précision arbitraire - il n'y a pas de biais d'apprentissage. Néanmoins, cela en fait une parfaite "machine à surajuster"² : l'algorithme apprend très finement l'association entre données d'entrée et variables cibles dans l'ensemble d'entraînement mais perd en capacité de généralisation à des données inconnues (les données de l'ensemble test). C'est pourquoi nous forçons généralement le processus de construction de l'arbre à s'arrêter plus tôt en fixant un nombre maximal de feuilles ou une profondeur maximale de l'arbre final. Un autre problème est l'extrême sensibilité des arbres binaires aux petites modifications de l'ensemble d'entraînement (voir [Hastie et al. \(2009\)](#)). Ce problème peut être résolu en calculant la moyenne de plusieurs arbres, construits sur différents échantillons de l'ensemble d'entraînement (la procédure d'agrégation exacte sera décrite plus loin). Toutefois, ces inconvénients sont largement contrebalancés par les performances exceptionnelles des algorithmes d'arbres de décision et leur facilité d'interprétation.

1. Pour être précis, il s'agit de l'entropie de Tsallis avec $q = 2$

2. *Overfitting*

4.1.1.2 Boosting

Comme nous l'avons vu, il est intéressant d'agréger de nombreux arbres, et plus généralement de nombreux apprenants³, même lorsqu'ils sont faibles (Schapire, 1990). Pour ce faire, nous utiliserons la méthode du boost de gradient.

Pour les tâches de classification avec $k \in [1, K]$ classes, l'algorithme crée à chaque étape $m \in [1, M]$ un arbre de régression par classe, de paramètres $\mathbf{a}_m^{(k)}$. Ils seront ajustés sur un sous-ensemble de l'ensemble d'entraînement, \tilde{n} halos choisis au hasard à chaque étape parmi les n halos d'apprentissage. Cette randomisation de la procédure, appelée étape de *bagging*, augmente la précision du boost de gradient (Friedman, 2001). En outre, nous considérons que la fonction de perte est la déviance multinomiale :

$$\mathcal{L}(y_i, f^{(1)}(\mathbf{x}_i), \dots, f^{(K)}(\mathbf{x}_i)) = \log \left(\frac{\sum_{k'=1}^K e^{f^{(k')}(\mathbf{x}_i)}}{e^{f^{(y_i)}(\mathbf{x}_i)}} \right)$$

dont le gradient est :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(y_i, f^{(1)}(\mathbf{x}_i), \dots, f^{(K)}(\mathbf{x}_i))}{\partial f^{(k)}(\mathbf{x}_i)} = -\mathbb{I}_{y_i=k} + \frac{e^{f^{(k)}(\mathbf{x}_i)}}{\sum_{k'=1}^K e^{f^{(k')}(\mathbf{x}_i)}}$$

4.1.1.3 Boost de gradient comme descente de gradient

Soient \mathbf{x}_i le vecteur des attributs du i^{eme} halo de l'ensemble d'entraînement, et y_i la variable cible (le modèle cosmologique correspondant). Classiquement, le meilleur estimateur a la forme :

$$f^* = \underset{f}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}_{y, \mathbf{x}} [\mathcal{L}(y, f(\mathbf{x}))] \quad (4.2)$$

Boosting : On cherche f^* en tant que somme de M apprenants (faibles) du même type h (par exemple, des arbres).

3. Nous appellerons "apprenant" tout dispositif de *machine learning*, associant à des données d'entrée une étiquette cible (arbre, réseau de neurones, régresseur linéaire, support vecteur-machine...). Un apprenant est dit *faible* lorsque ses performances excèdent légèrement celles du hasard, du fait de sa structure excessivement simple : c'est le cas d'un arbre de très faible profondeur, ou d'un réseau constitué d'un petit nombre de neurones... etc.

$$f^*(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^M \beta_m h[\mathbf{a}_m](\mathbf{x}) \quad (4.3)$$

où les β_m sont des scalaires et \mathbf{a}_m les paramètres des apprenants de type h . Si h désigne un arbre de décision de profondeur maximale fixée, \mathbf{a}_m est le nombre de nœuds et les critères (attributs et seuil) associés.

Descente de gradient On note :

$$f_{m-1}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j h[\mathbf{a}_j](\mathbf{x}) \quad (4.4)$$

de sorte que :

$$f_m(\mathbf{x}) = f_{m-1}(\mathbf{x}) + \beta_m h[\mathbf{a}_m](\mathbf{x}) \quad (4.5)$$

Les \mathbf{a}_m et β_m seront ajustés à chaque pas de l'algorithme sur le sous-ensemble d'entraînement qui contient \bar{n} halos.

Supposons que l'on connaît β_{m-1} et \mathbf{a}_{m-1} . L'équation 4.5 suggère l'adoption d'une stratégie de type "descente de gradient" : on ajoute un nouvel apprenant (faible) ($\beta_m h[\mathbf{a}_m](\mathbf{x})$) à l'agrégat d'arbres existant (f_{m-1}), dans le but de le mouvoir dans la direction du gradient de la fonction de perte. Ainsi, idéalement, on devrait avoir :

$$h[\mathbf{a}_m](\mathbf{x}_i) \approx - \frac{\partial \mathcal{L}[y_i, f(\mathbf{x}_i)]}{\partial f(\mathbf{x}_i)} \Bigg|_{f(\mathbf{x}_i)=f_{m-1}(\mathbf{x}_i)} \equiv -g_{im}$$

Idéalement encore, \mathbf{a}_m ne doit pas dépendre de i ; en effet, l'agrégat résultant doit être utilisé pour classer toutes les données, y compris les données de test. En d'autres termes, les \mathbf{a}_m sont les paramètres d'arbre ajusté au mieux sur *tous* les g_{im} :

$$\mathbf{a}_m = \operatorname{argmin}_{\mathbf{a}} \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \mathcal{L}[-g_{im}, h[\mathbf{a}](\mathbf{x}_i)] \quad (4.6)$$

Recherche linéaire Enfin, β_m est choisi par une simple recherche de minimum d'une fonction à une variable :

$$\beta_m = \nu \cdot \operatorname{argmin}_{\beta} \sum_{i=1}^n \mathcal{L}[y_i, f_{m-1}(\mathbf{x}_i) + \beta \cdot h[\mathbf{a}_m](\mathbf{x}_i)] \quad (4.7)$$

où $\nu \in (0, 1]$ est le taux d'apprentissage, super imposé. Ce dernier résulte d'un compromis entre la rapidité souhaitée de convergence vers le (un) minimum de la fonction de perte et la finesse de la recherche (qui doit être suffisamment progressive pour ne pas "manquer" un minimum).

4.1.1.4 Algorithme

En résumé, l'algorithme d'agrégation par boost de gradient est ([Hastie et al., 2009](#)) :

1. Initialiser les fonctions $f_0^{(k)}$, $k \in [1, K]$
2. Pour $m \in [1, M]$
 - (a) Pour chaque k , on calcule⁴

$$g_{ikm} \equiv -\mathbb{I}_{y_i=k} + \frac{e^{f_{m-1}^{(k)}(\mathbf{x}_i)}}{\sum_{k'=1}^K e^{f_{m-1}^{(k')}(\mathbf{x}_i)}}$$

- (b) Choisir une permutation $\pi_m \in \mathfrak{S}_n$
- (c) Pour chaque k , ajuster un arbre h (de profondeur fixée) qui associe les $(\mathbf{x}_i)_i$ aux $(-g_{ikm})_i$. Les paramètres ajustés de h sont appelés $\mathbf{a}_m^{(k)}$.
- (d) Pour chaque k , trouver :

$$\beta_m^{(k)} = \nu \cdot \operatorname{argmin}_{\beta} \sum_{i \in \pi_m([1, \tilde{n}])} \mathcal{L}[y_i, f_{m-1}^{(k)}(\mathbf{x}_i) + \beta \cdot h[\mathbf{a}_m^{(k)}](\mathbf{x}_i)]$$

4. Le dénominateur introduit un couplage entre les différentes classes k

(e) Pour chaque k , l'agrégat contenant m arbres est : $f_m^{(k)} \equiv f_{m-1}^{(k)} + \beta_m^{(k)} h[\mathbf{a}_m^{(k)}]$

En somme, l'agrégat f_m associe à un halo de l'ensemble test \mathbf{x} la classe :

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \operatorname{argmax}_k p_k(\mathbf{x})$$

où $p_k(\mathbf{x})$ est la "probabilité" estimée d'appartenance de \mathbf{x} à la classe k :

$$p_k(\mathbf{x}) = \frac{\exp^{f_M^{(k)}(\mathbf{x})}}{\sum_{k'=1}^K \exp^{f_M^{(k')}(\mathbf{x})}} \quad (4.8)$$

Si p_k appartient certainement au segment $[0, 1]$, il n'est pas garanti qu'il puisse effectivement être interprété comme une *probabilité* d'appartenance au sens physique, c'est-à-dire comme une incertitude sur l'attribution à la classe k . Nous reviendrons sur ce point en section 4.3.3.2.

4.1.2 Observables sur les halos de matière noire

Chaque halo sera représenté par les valeurs d'un certain ensemble d'attributs destinés à décrire la forme du halo à de multiples distances de son centre. Nous proposons le protocole suivant pour les calculer. Pour l'essentiel, les halos seront divisés en 25 ellipsoïdes confocaux délimités par des isodensités locales, ce qui peut être vu comme une adaptation de l'algorithme présenté en section 2.2. Les valeurs de ces isodensités sont choisies avec un espacement logarithmique, $\delta_0 = 50 \cdot (0.25\rho_c)$, $\delta_1 = 125 \cdot (0.25\rho_c)$ et pour $2 \leq d \leq 24$, $\delta_d = 10^{0.1d+2.2} \cdot (0.25\rho_c)$. Les densités locales sont calculées par rapport à $0.25\rho_c$ et non par rapport à la valeur exacte de ρ_m afin d'adopter un point de vue agnostique comme si nous ne connaissions pas *a priori* la valeur de ρ_m . En effet, dans notre travail, cette information se résumerait à connaître le modèle cosmologique, l'exigence de modèles réalistes forçant ρ_m à varier entre les modèles (cf. tableau 4.1).

Pour chaque halo et pour chaque densité δ_d , nous considérons la coquille d'isodensité δ_d .

$$\mathcal{S}_d = \{k \mid \left| \frac{\delta(\mathbf{x}^k)}{\delta_d} - 1 \right| \leq 0.1\} \quad (4.9)$$

et nous observons (Jing & Suto, 2002) qu'il s'agit approximativement d'un ellipsoïde, clairement non sphérique.

Pour obtenir les paramètres de l'ellipsoïde qui s'adapte le mieux à la coquille d'isodensité \mathcal{S}_d , nous calculons et diagonalisons le tenseur de masse des particules formant la coquille \mathcal{S}_d :

$$(\mathcal{M}_{ij}^{\mathcal{S}_d})_{1 \leq i, j \leq 3} = \langle x_i x_j \rangle_{\mathcal{S}_d} - \langle x_i \rangle_{\mathcal{S}_d} \langle x_j \rangle_{\mathcal{S}_d} \quad (4.10)$$

Soit \mathcal{E}_d l'ellipsoïde obtenu. La longueur des axes de \mathcal{E}_d , notés $a^{\mathcal{E}_d}$, $b^{\mathcal{E}_d}$ et $c^{\mathcal{E}_d}$ est $\sqrt{3\lambda_1}$, $\sqrt{3\lambda_2}$ et $\sqrt{3\lambda_3}$ où λ_i sont les valeurs propres de $\mathcal{M}^{\mathcal{S}_d}$. Pour réduire le bruit, nous itérons une fois et diagonalisons un nouveau tenseur de masse en utilisant les particules appartenant à l'intérieur de \mathcal{E}_d :

$$(\mathcal{M}_{ij}^{\mathcal{E}_d})_{1 \leq i, j \leq 3} = \langle x_i x_j \rangle_{\mathcal{E}_d} - \langle x_i \rangle_{\mathcal{E}_d} \langle x_j \rangle_{\mathcal{E}_d} \quad (4.11)$$

Enfin, en utilisant les particules appartenant à l'intérieur de \mathcal{E}_d , on peut calculer l'ensemble des attributs qui décriront la structure et la dynamique du halo

- la masse M_d (nombre de particules contenues à l'intérieur de \mathcal{E}_d) - la longueur des axes de l'ellipsoïde a_d, b_d, c_d : ce sont les racines carrées des valeurs propres de équation 4.11 auxquelles contribuent toutes les particules à l'intérieur de \mathcal{E}_d .
- la dispersion des vitesses I_d^V à l'intérieur de \mathcal{E}_d
- les directions principales de la vitesse a_d^V, b_d^V, c_d^V à l'intérieur de \mathcal{E}_d : ce sont les valeurs propres du tenseur des vitesses.

$$(I_{ij}^{\mathcal{E}_d})_{1 \leq i, j \leq 3} = \langle v_i v_j \rangle_{\mathcal{E}_d} - \langle v_i \rangle_{\mathcal{E}_d} \langle v_j \rangle_{\mathcal{E}_d} \quad (4.12)$$

Il s'agit d'un équivalent en vitesse du tenseur de forme, dont la trace donne la dispersion des vitesses : I_d^V est nécessairement proportionnel à $(a_d^V)^2 + (b_d^V)^2 + (c_d^V)^2$.

En conclusion, un halo sera représenté par la liste des valeurs :

$$(M_0, a_0, b_0, c_0, a_0^V, b_0^V, c_0^V, M_1, a_1, b_1, c_1, a_1^V, b_1^V, c_1^V, \dots)$$

Notre objectif est maintenant d'entraîner une IA à trouver, pour tout halo ainsi représenté, le modèle d'énergie noire (standard ou quintessence) de l'Univers dans lequel il s'est formé.

4.2 Effets spurieux : détection et neutralisation de l'effet Clever Hans

4.2.1 Le cas Hans le malin : histoire et leçons

4.2.1.1 Repères historiques

À l'aube du XXe siècle, William von Hosten acquit une certaine célébrité en exhibant son cheval, Hans, et ses prétendues capacités de calcul : il suffisait d'écrire une opération élémentaire sur le tableau noir pour que le cheval fournisse la solution sous forme de battements de sabots. Plusieurs scientifiques de l'époque, dont Oskar Pfungst, ont tenté de lever le voile sur l'intelligence de Hans. Si le soupçon de manœuvres frauduleuses de la part de von Hosten est rapidement écarté (son absence n'empêche pas le cheval de résoudre correctement les opérations qui lui sont proposées), Pfungst s'aperçoit que la capacité du cheval à fournir les réponses attendues ne découle pas d'une quelconque aptitude calculatoire de l'équidé : en réalité, chaque fois que le questionneur interroge le cheval, celui-ci frappe le sol jusqu'à ce qu'il détecte dans la posture ou le visage du questionneur que le nombre de coups attendu a été atteint (Pfungst, 1911). En d'autres termes, Hans avait développé une stratégie de contournement qui lui permettait de fournir des réponses correctes en utilisant des éléments contextuels autres que le calcul lui-même. Ce phénomène, connu sous le nom d'effet Clever Hans, a ensuite été étendu à de nombreux domaines scientifiques.

4.2.1.2 Intelligence artificielle : précautions

En particulier, dans le contexte de l'apprentissage automatique, ce type d'effet parasite a été observé (Zhu et al., 2017; Beery et al., 2018; Kavumba et al., 2019; Dawson et al., 2019; Geirhos et al., 2020; Kauffmann et al., 2020; Raimondi et al., 2021; Anders et al., 2022; Wallis & Buvat, 2022; Koeppe et al., 2022) : un dispositif d'apprentissage automatique donné peut atteindre des scores remarquablement élevés en se concentrant sur des caractéristiques subtiles qui n'étaient pas censées être utilisées. Comme illustration, considérons un dispositif qui apprend à discriminer les renards des chiens domestiques. Si toutes les images étiquetées des ensembles d'entraînement et de test sont prises lorsque les animaux évoluent dans leur environnement naturel, le dispositif peut décider si un animal donné est un renard ou un chien simplement en examinant la couleur du fond (vert forestier pour les renards, tons urbains pour les chiens). La caractéristique "couleur de fond" n'est évidemment pas le point d'ancrage attendu pour orienter la décision, car elle ne permettrait pas d'identifier un renard déambulant en ville ou un chien courant dans les bois. Il s'agit plutôt d'un biais dans la constitution des ensembles d'entraînement. Plus généralement, le fait est qu'un dispositif affecté d'un tel Clever Hans donnerait d'excellents résultats, au sens du score sur l'ensemble de test, à condition que les ensembles de test et d'entraînement proviennent du même jeu de données. Cela implique que le score seul ne peut pas être un bon outil de détection de l'effet Clever Hans.

En outre, les auteurs de [Lapuschkin et al. \(2019\)](#) notent que de nombreuses tâches couramment traitées par les systèmes d'apprentissage automatique sont susceptibles d'être contaminées par des Clever Hans. Il convient de souligner que la présence d'un Clever Hans non détecté (et par la suite non supprimé) invalide toute interprétation des résultats. Par conséquent, si nous voulons parvenir à des observations pertinentes sur la physique des objets considérés, comme c'est le cas dans notre travail, nous devons méticuleusement traquer et compenser ces effets parasites. Dans cette section, nous examinerons le problème des Clever Hans dans les données de simulation et la manière de le pallier.

4.2.2 Clever Hans primaire

4.2.2.1 Description

Dans notre travail, ces effets doivent être soigneusement pris en compte. Par exemple, lors de l'entraînement des arbres sur des données brutes, sans sélection ni modification, il semble que l'on puisse classer correctement 95% des halos de test. Ce résultat est en fait trompeur. En effet, si l'on décide de ne s'entraîner que sur l'attribut $M_{\delta=125}$, on obtiendra à nouveau 95%. Cela signifie que la plupart des M_{125} ne sont accessibles qu'à l'un des modèles cosmologiques. Le fait est qu'il n'y a absolument aucune raison physique à cela : les fonctions de masse des modèles cosmologiques se superposent pratiquement. Aucune plage de M_{125} n'est statistiquement plus favorisée par un modèle cosmologique que par un autre - à l'exception de quelques masses extrêmement élevées qui représentent une proportion négligeable des halos (et ne peuvent donc pas expliquer le taux de réussite de 95%). Par conséquent, le résultat écrasant obtenu lors de l'entraînement sur M_{125} uniquement, ne peut pas être d'origine physique et doit être expliqué exclusivement par des considérations sur la méthode de simulation, comme suit ⁵.

Chaque simulation est associée à une masse de particule m_p . A nombre total de particules et longueurs de boîte fixés, les m_p associées aux différentes cosmologies sont proches mais pas égales (cf. tableau 4.1). D'autre part, un attribut de type masse (disons M_{125}) est nécessairement de la forme $N \cdot m_p$, avec $N \in \mathbb{N}$ - de sorte que les masses accessibles dans la i -ème cosmologie sont un sous-ensemble de $m_p^i \mathbb{N}_{<10^5}$. (Le $< 10^5$ vient du fait que nous n'avons pas de halo de plus de 10^5 particules). Et, pour nos modèles cosmologiques, nous observons que :

$$m_p^\Lambda \mathbb{N}_{<10^5} \cap m_p^{RP} \mathbb{N}_{<10^5} = \emptyset \quad (4.13)$$

5. Pour rendre les notations plus pratiques, nous ne considérerons dans cette section que deux cosmologies (disons Λ CDM et RP CDM), mais la procédure et les conclusions peuvent facilement être étendues à d'autres modèles cosmologiques

Ainsi, si le dispositif est capable de détecter dans l'ensemble de données que toutes les masses des halos de la première cosmologie sont des multiples de la même masse de base, et de la même manière pour la deuxième cosmologie, alors le dispositif sera également capable de classer les halos de l'ensemble de données de test. Il s'agit là d'un Clever Hans typique : les données contiennent des indices concernant les variables cibles de nature purement arithmétique, et qui ne sont donc pas reproductibles en dehors de cet ensemble de simulations - sur des observations réelles, par exemple. Notons enfin qu'un tel effet n'est évidemment pas observé pour les variables continues, comme les paramètres de forme.

4.2.2.2 Correction

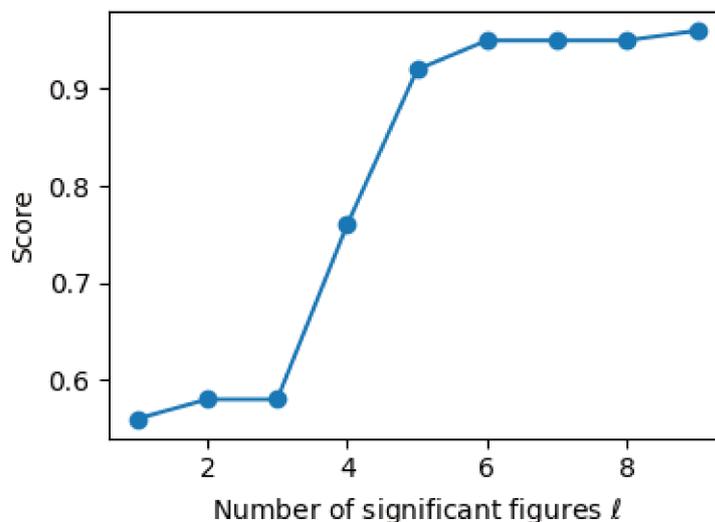


Figure 4.1 – Variation du score d'apprentissage avec le nombre de chiffres significatifs de M_{125} . L'apprentissage utilisant uniquement l'attribut M_{125} des halos suffit à classer correctement 95% d'entre eux, ce qui ne peut découler d'une raison physique - c'est donc le symptôme d'un effet Clever Hans (voir texte principal). L'arrondissement de l'attribut M_{125} à 5 chiffres significatifs ne dégrade pas ce fait. Lorsque seuls 3 chiffres significatifs (ou moins) sont retenus, le score de classification utilisant ce M_{125} arrondi est plus proche du hasard, atteignant 55 pourcents, ce qui semble plus plausible d'un point de vue physique.

Pour contrecarrer l'effet Clever Hans et forcer le dispositif à construire une méthode "réelle" de détection de la cosmologie, il faut remettre en question l'équation 4.13. Le moyen le plus simple est de "brouiller" les données d'*entraînement*, en diminuant leur précision. En effet, l'équation 4.13 signifie que certaines masses sont accessibles à une cosmologie et pas à une autre - uniquement pour des raisons arithmétiques. Ces masses forment l'ensemble \mathcal{F} des *masses drapeaux* : il contient tous les nombres décimaux appartenant à $m_p^\Lambda \mathbb{N}_{<10^5}$, mais pas à $m_p^{RP} \mathbb{N}_{<10^5}$ et inversement.

$$\mathcal{F} = (m_p^\Lambda \mathbb{N}_{<10^5} \setminus m_p^{RP} \mathbb{N}_{<10^5}) \cup (m_p^{RP} \mathbb{N}_{<10^5} \setminus m_p^\Lambda \mathbb{N}_{<10^5}) \quad (4.14)$$

Nous appellerons *masses transparentes* les éléments de $\overline{\mathcal{F}}$:

$$\mathcal{T} = m_p^\Lambda \mathbb{N}_{<10^5} \cap m_p^{RP} \mathbb{N}_{<10^5} \quad (4.15)$$

L'effet Clever Hans repose sur le fait que \mathcal{F} n'est pas vide. En conséquence, si l'on diminue la précision sur les masses M_d de l'ensemble d'entraînement, en n'en retenant que les ℓ premiers chiffres significatifs, des masses proches deviendront indistinguées. Par cette voie, de nombreuses masses drapeaux seront confondues les unes avec les autres (devenant donc des masses transparentes) ou avec la masse transparente la plus proche. Ceci compensera partiellement l'effet Clever Hans. Formellement, si l'on note \mathfrak{R}_ℓ l'opération d'arrondi au ℓ -ème chiffre significatif, on a :

$$\mathfrak{R}_{\ell+1}(x) = 10^{n-\ell} \left\lfloor x \cdot 10^{\ell-n} + \frac{1}{2} \right\rfloor \text{ avec } n = \lfloor \log_{10} x \rfloor$$

Si toutes les masses des halos d'entraînement sont arrondies de la sorte, l'ensemble des masses transparentes doit être redéfini comme étant :

$$\mathcal{T} = \mathfrak{R}_\ell(m_p^\Lambda \mathbb{N}_{<10^5}) \cap \mathfrak{R}_\ell(m_p^{RP} \mathbb{N}_{<10^5}) \quad (4.16)$$

et \mathfrak{F} son complémentaire dans $\mathfrak{R}_\ell(m_p^\Lambda \mathbb{N}_{<10^5}) \cap \mathfrak{R}_\ell(m_p^{RP} \mathbb{N}_{<10^5})$. La généralisation de ces définitions pour trois cosmologies ne présente pas de difficulté particulière :

$$\mathcal{T} = \mathfrak{R}_\ell(m_p^\Lambda \mathbb{N}_{<10^5}) \cap \mathfrak{R}_\ell(m_p^{RP} \mathbb{N}_{<10^5}) \cap \mathfrak{R}_\ell(m_p^w \mathbb{N}_{<10^5}) \quad (4.17)$$

et \mathcal{F} est son complémentaire dans $\mathfrak{R}_\ell(m_p^\Lambda \mathbb{N}_{<10^5}) \cup \mathfrak{R}_\ell(m_p^{RP} \mathbb{N}_{<10^5}) \cup \mathfrak{R}_\ell(m_p^w \mathbb{N}_{<10^5})$.

Il va sans dire que plus ℓ est petit, plus l'arrondi est efficace, et plus \mathcal{T} est grand. Néanmoins, abaisser trop drastiquement ℓ effacera les signaux faibles dans les profils de halo et supprimera la plupart des informations cosmologiques qu'ils pourraient contenir. Le choix de ℓ résulte donc d'un compromis entre l'annulation du Clever Hans et un lissage excessif du signal. Reprenons l'exemple que nous avons utilisé dans la section 4.2.2.1 pour détecter le Clever Hans : nous entraînons le classificateur uniquement sur l'attribut M_{125} . Sans arrondi de l'ensemble d'entraînement, la classification est efficace à 95% sur le test. Dans la figure 4.1, nous traçons le score (test) en fonction de ℓ . Le décrochage par rapport au score de 95% se produit à $\ell = 3$. Pour cette valeur, le score de test sur M_{125} est d'environ 59%. Ainsi, lorsque $\ell \leq 3$, une grande partie de l'effet Clever Hans disparaît⁶. Comme nous l'avons déjà dit, nous voulons préserver les signaux faibles et nous devons donc prendre ℓ aussi grand que possible. À partir de maintenant, nous prendrons donc $\ell = 3$: toutes les masses de l'ensemble d'entraînement seront arrondies à trois chiffres significatifs. Nous faisons de même pour tous les autres attributs (comme les attributs de forme) afin de les rendre plus compatibles avec des "observations" potentielles⁷.

6. pour un entraînement et un test sur un seul M_d . Nous verrons que prendre tous les M_d comme attributs, même arrondis à 3 chiffres significatifs, conduit toujours à un effet Clever Hans.

7. Nous ne sommes pas vraiment intéressés par la détection d'empreintes cosmologiques dans la 14ème décimale de $a_{600\dots}$

4.2.3 Clever Hans complémentaire

4.2.3.1 Description

Après cette réduction de précision, on peut vérifier combien il reste de masses drapeaux dans l'ensemble d'entraînement. Nous constatons que pour n'importe quel attribut de masse (n'importe quelle colonne de type masse dans les \mathbf{x}_i 's) M_d , il y a au plus 32% des halos d'entraînement dont la masse M_δ est une masse drapeau. Cela est cohérent avec la faible capacité de classification lors de l'entraînement avec un seul attribut de masse arrondi. Par conséquent, la liste des M_d associés à n'importe quel halo contient toujours des informations arithmétiques sur la cosmologie.

4.2.3.2 Correction

Il est donc nécessaire de modifier à nouveau les données d'apprentissage : toute masse drapeau restante est remplacée par la masse transparente la plus proche. Pour vérifier qu'une telle opération n'introduit pas une quantité trop importante de bruit dans les données, nous représentons dans la figure 4.2 l'erreur d'approximation en fonction de la masse d'origine. En d'autres termes, pour tout $X \in [100 .. 999]$, pour tout $Y \in [9 .. 13]$, nous calculons la distance relative entre $m = \frac{X}{100} \cdot 10^Y$ et la masse transparente la plus proche (compte tenu des valeurs de $m_p^\Lambda, m_p^{RP}, m_p^w$). Il est intéressant de noter qu'il n'y a pas de masse drapeau supérieure à 10^{12} masses solaires (soit plus de 500 particules). De même, si nous avons utilisé des simulations dix fois plus résolues (m_p dix fois plus faible), toute la courbe d'erreur d'approximation serait décalée vers la gauche (courbe orange en figure 4.2) et inversement pour une masse de particules dix fois plus grande (courbe verte en figure 4.2).

Pour nos valeurs de $m_p^\Lambda, m_p^{RP}, m_p^w$, si nous voulons que l'erreur d'approximation soit inférieure à 1%, il faut considérer uniquement les masses telles que $m \geq 2.3 \cdot 10^{11} M_\odot$. Cela revient à restreindre l'ensemble d'entraînement aux halos dont l'ellipsoïde le plus interne contient plus de 100 particules ($M_{d_{max}} \geq 2.3 \cdot 10^{11} M_\odot$) - les autres ellipsoïdes étant par suite plus massifs. Cette dernière sélection garantit également que les halos étudiés sont bien résolus. Nécessairement, les halos tests ne peuvent pas

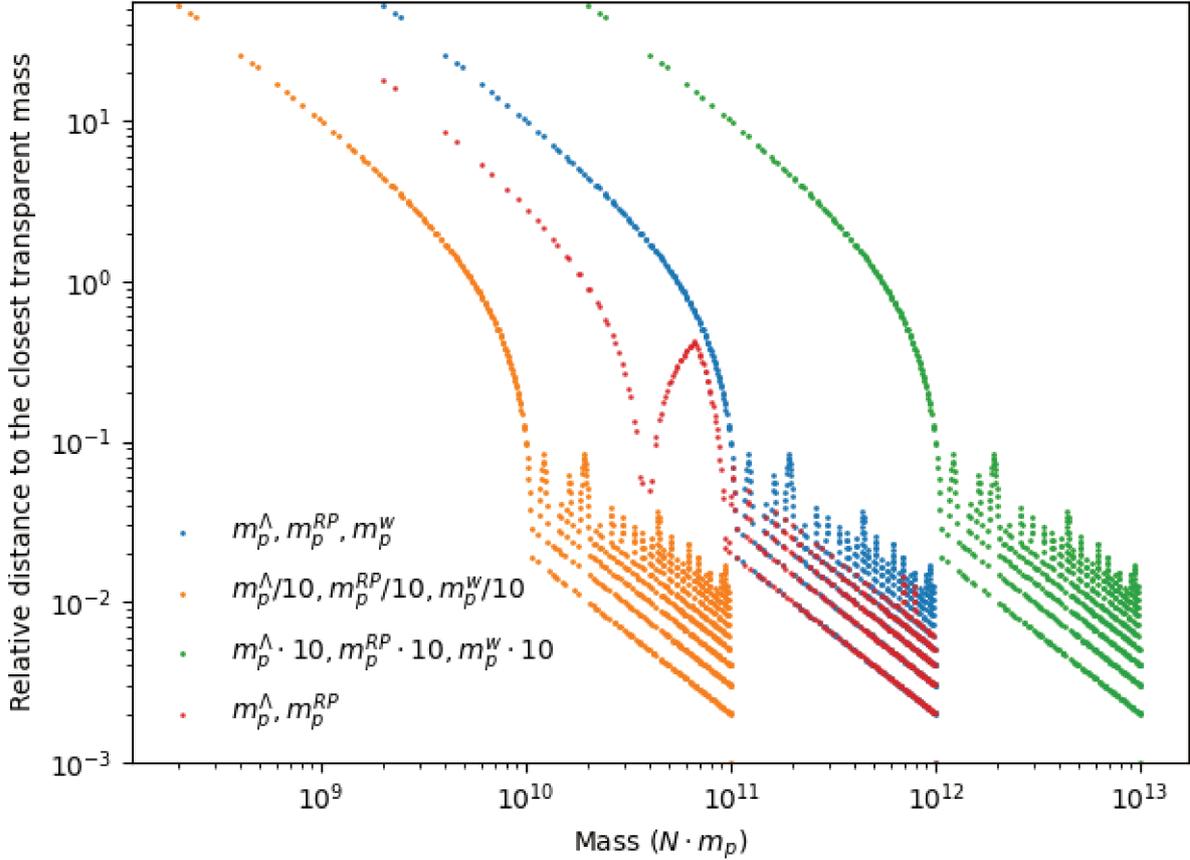


Figure 4.2 – Effet de la suppression du Clever Hans. Pour chaque simulation (masse particulaire m_p), et pour chaque entier N , on calcule l'écart relatif entre Nm_p avec la masse transparente la plus proche. L'expérience est menée pour les masses particulières des trois simulations que nous étudions (courbe bleue), en ne prenant en compte que les simulations Λ CDM et RPCDM (courbe rouge), puis en considérant trois simulations 10 fois plus résolues en masse (courbe orange) et dix fois moins résolues (courbe verte).

être moins résolus. C'est pourquoi les halos de l'ensemble test doivent aussi vérifier $M_{d_{max}} \geq 2.3 \cdot 10^{11} M_\odot$ mais leurs masses *ne sont pas* altérées par arrondi/remplacement par la masse transparente la plus proche. Ces modifications ne concernent que l'ensemble d'entraînement.

4.3 Résultats

4.3.1 Cadre

4.3.1.1 Ensemble d'entraînement modifié

Nous avons construit des catalogues de halos de matière noire FOF ($b = 0.2$) à partir des simulations du champ cosmique des trois modèles cosmologiques Λ CDM, $RPCDM$ et w CDM présentées précédemment. Les paramètres des simulations utilisées sont rappelés dans tableau 4.1.

Model	Λ CDM	$RPCDM$	w CDM
Ω_m	0.2573	0.23	0.275
Particle mass (M_\odot/h)	$2.3 \cdot 10^9$	$2.0 \cdot 10^9$	$2.4 \cdot 10^9$
σ_8	0.8	0.66	0.85
w	-1.0	-0.8	-1.2
Selected halos	197 919	197 919	197 919

Table 4.1 – Paramètres des simulations. Pour toutes ces simulations, nous avons utilisé $\Omega_K = 0$, $n_s = 0.9630$, $h = 0.72$, $L = 648$ Mpc/h et $N = 2048^3$ particules. En outre, pour le calcul du spectre de puissance initial, $\Omega_b = 0.04356$ (et les baryons sont alors supposés suivre la dynamique de la matière noire). Les paramètres σ_8 respectifs sont les fluctuations lissées à 8 Mpc/h, calculées sur le spectre de puissance *linéairement* extrapolé à $z = 0$, et en utilisant une fonction fenêtre *top-hat*. On fait également figurer le nombre de halos retenus dans chaque simulation (après sélection et équilibrage des classes - voir texte principal).

L'ensemble des halos est constitué de tous les halos contenant plus de 500 particules, et vérifiant, pour tout d , $M_d > 100m_p$. Pour chaque cosmologie, nous choisissons le même nombre de halos (voir tableau 4.1). En effet, si une classe contient plus de halos d'entraînement que l'autre, elle sera artificiellement favorisée lors de l'apprentissage. Pour s'en convaincre, considérons le cas extrême où 90% des halos sont des Λ CDM et 10% des autres halos sont des $RPCDM$. Si le dispositif répond aveuglément que n'importe quel halo est Λ CDM, il lui est garanti d'obtenir un score minimal de 90%. La littérature est riche en stratégies pour pallier ce problème. Elles peuvent consister

à modifier le score (et la fonction de perte) en pondérant les éléments de l'ensemble d'entraînement de manière que chaque classe corresponde au même poids total. On peut également suréchantillonner la classe sous-représentée (en ajoutant à l'ensemble d'entraînement des copies des halos d'entraînement appartenant à cette cosmologie) ou sous-échantillonner la classe surreprésentée (en retirant de l'ensemble d'entraînement des halos choisis au hasard appartenant à cette cosmologie), de sorte que la taille globale de chaque classe soit la même. Pour des raisons de simplicité, c'est la dernière approche que nous utilisons ici : le score est maintenu à la proportion de halos bien reconnus et nous retirons autant de halos Λ CDM que nécessaire pour égaler le nombre de halos RPCDM.

L'ensemble des halos est réparti aléatoirement entre les ensembles d'entraînement (90%) et de test (10%). Les attributs des halos d'entraînement subiront les modifications que nous avons justifiées dans la section précédente

4.3.1.2 Hyperparamètres

La structure d'apprentissage automatique que nous utiliserons pour notre tâche de classification est un ensemble de N arbres de décision, d'une profondeur maximale de 5, agrégés par boost de gradient. Le taux d'apprentissage ν vaut 0.1 et $\tilde{n} = 0.9n$.

En outre, le nombre d'estimateurs M n'est pas fixé *a priori* : l'apprentissage cesse lorsqu'un certain critère d'arrêt précoce est rempli. Pour ce faire, un sous-ensemble de validation de l'ensemble d'entraînement est mis de côté avant tout apprentissage ; ensuite, le score du classificateur global sur ce sous-ensemble est calculé à chaque étape m (f_m). Sa convergence (pas de variation supérieure à 0,01 au cours des 1000 dernières itérations) arrête l'apprentissage. Nous utilisons l'implémentation par défaut de la bibliothèque Python `scikit-learn` (Pedregosa et al., 2011).

4.3.2 Résultats sur les attributs

4.3.2.1 Résultats sur tous les attributs

Après avoir entraîné l'agrégat d'arbres de décision sur l'ensemble d'entraînement modifié, nous sommes en mesure de classer correctement 73% des halos de l'ensemble de test. Cela signifie que, malgré la dispersion de la distribution respective de chaque attribut et leur forte similarité d'une cosmologie à l'autre, l'information conjointe portée par tous les attributs permet d'associer un halo donné au modèle cosmologique qui lui a donné naissance, avec un haut degré de fiabilité.

À chaque ajout d'un nouvel estimateur à l'ensemble, nous avons calculé en parallèle le score de l'agrégat d'arbres sur l'ensemble de test - ce qui donne la courbe d'apprentissage de la figure 4.3. L'apprentissage s'est arrêté avant que l'ensemble n'atteigne 4000 estimateurs. Si le critère d'arrêt précoce choisi est la stabilisation du score sur un échantillon de l'ensemble d'entraînement sur lequel le classificateur n'apprend pas (voir section 4.3.1.2), la figure 4.3 montre que ce critère arrête également de facto l'apprentissage lorsque le score sur l'ensemble de test a convergé ; la courbe d'apprentissage cesse de progresser lorsqu'elle atteint un plateau. Cela est dû à la grande taille de l'ensemble d'entraînement : le sous-ensemble utilisé par le dispositif pour tester le critère d'arrêt précoce représente un nombre substantiel de halos, ce qui n'entraîne que des fluctuations poissonniennes minimales. Un sous-ensemble choisi au hasard est donc suffisamment représentatif et son score correspond, à chaque étape, à celui de l'ensemble de test. Plus généralement, l'entraînement sur de grands ensembles de données garantit la reproductibilité statistique de nos travaux, dans le sens où les halos d'une autre simulation avec des paramètres identiques seraient identifiés avec le même niveau de succès que ceux utilisés dans cette étude.

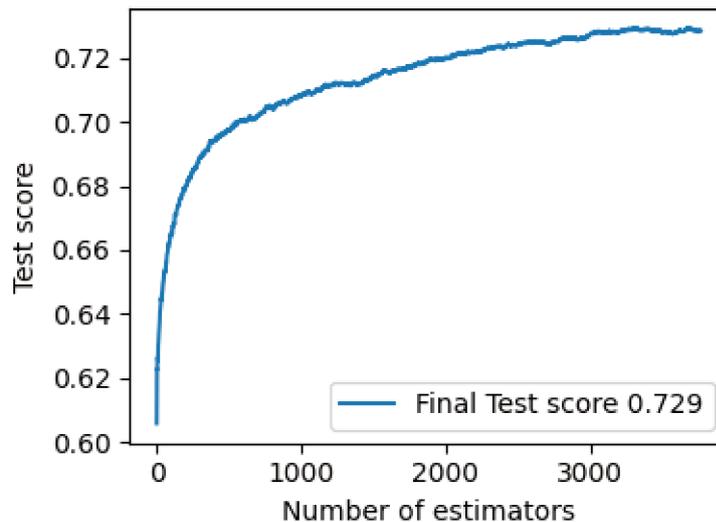


Figure 4.3 – Variation du score de classification (sur l'ensemble de test) en fonction du nombre d'estimateurs dans l'agrégat d'arbres. Les attributs des halos dans l'ensemble de test sont la masse, la forme et les profils de vitesse $(M_d, a_d, b_d, c_d, a_d^V, b_d^V, c_d^V)_{d \in [0,24]}$. Le critère d'arrêt précoce (voir le texte principal) marque la fin de l'apprentissage lorsque le score sur un échantillon d'apprentissage donné de l'ensemble d'apprentissage atteint un plateau. Si cet échantillon hors sac et l'ensemble de test sont suffisamment grands, cette convergence devrait être concomitante avec la convergence du score sur l'ensemble de test. Ceci apparaît également comme un plateau donnant un score de test de 73 pourcents (environ 3600 estimateurs).

4.3.2.2 Familles d'attributs

Il est intéressant d'évaluer la contribution de chaque famille de propriétés physiques du halo, parmi les profils de masse, de forme et de vitesse, à la discrimination cosmologique. Une façon simple de procéder consiste à apprendre sur l'ensemble d'entraînement en ne considérant que certains sous-ensembles d'attributs et leurs diverses combinaisons. Le tableau 4.2 regroupe les résultats. La présence d'un profil de masse est cruciale pour se rapprocher du score "tout attribut" (73), mais n'est pas suffisante lorsqu'il est "seul" (69). C'est pourquoi l'apprentissage qui implique des profils de masse semble nécessiter systématiquement plus d'estimateurs que l'apprentissage sans utilisation de la masse : une grande partie de l'empreinte cosmologique sur les halos est contenue dans leur profil de masse ellipsoïdal et l'extraction d'information

des attributs correspondants nécessite donc un nombre élevé d'apprenants faibles. Notons que le profil de masse est la masse à l'intérieur d'ellipsoïdes confocaux, de sorte que même les attributs de masse ont été définis à l'aide de profils de forme. En d'autres termes, les attributs de masse s'appuient sur les propriétés de forme. On peut donc dire que l'excellent résultat de l'apprentissage avec tous les attributs provient de l'*interaction* entre les profils de masse et de forme.

Il existe une autre conséquence au fait que tous les attributs sont calculés à l'intérieur d'ellipsoïdes et contiennent donc des informations sur la forme : on peut remplacer les longueurs des axes du tenseur des vitesses par leur somme (la dispersion des vitesses à l'intérieur de l'ellipsoïde) et il en va de même pour l'axe du tenseur des formes. Par exemple, l'entraînement avec les profils de masse et de dispersion des vitesses $a_v^2 + b_v^2 + c_v^2$ permet d'obtenir un score de 70% sur l'ensemble de test, tandis que l'entraînement avec la masse et les longueurs des axes du tenseur des vitesses a_v, b_v, c_v permet de reconnaître 71% des halos de l'ensemble de test.

Le fait que le profil de dispersion des vitesses seul ne puisse pas remplacer le profil de masse, malgré la relation (du viriel) attendue entre eux, sera expliqué plus loin dans cette section.

	Mass	Position (a, b, c)	Vitesse (a_V, b_V, c_V)
Mass	69%	71%	71%
	3547	4775	3611
Position (a, b, c)		62%	66%
		1054	1375
Vitesse (a_V, b_V, c_V)			59%
			1074

Table 4.2 – Résultats de la classification entre les halos Λ CDM et RPCDM, en utilisant différentes combinaisons de caractéristiques parmi la masse (la séquence de $(M_d)_d$), la longueur du demi-axe (valeurs propres des tenseurs de forme) et les valeurs propres du tenseur de vitesse. La présence des attributs de masse est cruciale pour obtenir un score proche de celui obtenu en utilisant tous les attributs (73%). Pour chaque "paire" d'attributs (profil de masse + profil de forme par exemple), on indique le score sur l'ensemble de test (en pourcentage) ainsi que le nombre d'estimateurs.

	Mass	Position I	Vitesse I^V
Mass	69%	71%	70%
	3547	4234	3892
Position I		59%	64%
		1018	1252
Vitesse I^V			58%
			1050

Table 4.3 – Résultats de la classification entre les halos Λ CDM et RPCDM, en utilisant différentes combinaisons de caractéristiques parmi la masse (la séquence de $(M_d)_\delta$), la dispersion de la longueur du demi-axe ($I^2 = a^2 + b^2 + c^2$) et la dispersion de la vitesse. La présence des attributs de masse est, une fois de plus, nécessaire pour obtenir un score proche de celui obtenu en utilisant tous les attributs (73%). Il est remarquable que les scores obtenus en utilisant les dispersions de position ou de vitesse comme attributs ne soient que légèrement inférieurs aux scores obtenus lorsque la longueur du demi-axe (respectivement la vitesse) *triplets* sont les attributs.

4.3.2.3 Un effet de masse ?

Une question naturelle est de savoir si le modèle cosmologique est mieux reconnu pour les halos massifs, toujours en cours d’effondrement. Pour y répondre, nous considérons le classificateur déjà entraîné, utilisant les attributs de masse et de forme, et nous divisons la plage de masse totale (M_{125}), $[2 \cdot 10^{12}, 2 \cdot 10^{14}] M_{\odot}/h$, en 14 *bins* logarithmiques. Ensuite, nous classons (par le dispositif de *machine learning* entraîné à reconnaître la cosmologie à partir des attributs de masse et de forme) les halos tests de chaque *bin*. Notons que les halos les plus massifs sont les plus grands, de sorte que la division en *bins* de masse revient approximativement à diviser en *bins* de a , b ou c . La proportion de halos tests bien classés dans chaque *bin* est appelée le *score du bin* et est tracée (points circulaires) en fonction de la masse en figure 4.4. La barre de couleur indique le nombre de halos *d’entraînement* dans chaque *bin*. À partir de cette figure, la classification semble être favorisée pour les halos de faible masse (76% des halos de test dans les premiers *bins* sont bien classés). Cependant, du fait de la décroissance rapide de la fonction de masse, le classificateur est beaucoup plus entraîné sur les halos de faible masse : il y a environ 10^5 halos d’entraînement dans le *bin* de masse $3 \cdot 10^{13}$ et cinquante fois moins dans celui centré sur $10^{14} M_{\odot}/h$. On ne peut donc pas exclure que la sur-performance du classificateur sur les halos de faible masse ne soit pas un effet physique, mais trouve plutôt son origine dans la plus grande richesse de l’ensemble d’entraînement (donc de meilleures statistiques) dans cette gamme de masse.

Pour dissiper cette ambiguïté, nous construisons un sous-ensemble d’entraînement contenant le même nombre de halos d’entraînement dans chaque *bin* de masse. En entraînant un second dispositif ML classificateur⁸ sur ces halos, nous calculons les scores dans chaque gamme de masse (marqueurs carrés sur la figure). Comme on pouvait le redouter, le score global est réduit en raison du nombre plus faible de halos par *bin* entraîné par l’équilibrage des *bins*. Il apparaît cependant que le score de tous les *bins* est identique : l’équilibrage en masse a absorbé l’effet de masse.

8. de même nature (arbres agrégés par boost de gradient)

Deux conclusions peuvent être tirées : premièrement, il n’y a pas de sur-imprégnation cosmologique *physique* pour les halos de faible masse. Le fait que l’efficacité de la discrimination cosmologique diminue avec la masse du halo n’est qu’une conséquence du faible nombre de halos massifs qui empêche un bon entraînement sur ceux-ci. Deuxièmement, s’il est vrai qu’il n’y a pas de biais de masse physique sur le score de classification, on peut s’attendre à ce qu’un catalogue d’entraînement plus riche en halos simulés conduise à une performance *globale* d’au moins 76% : si les halos massifs étaient aussi nombreux que les halos légers le sont déjà dans notre collection de halos, le score de classification sur les premiers égalerait celui obtenu sur les derniers.

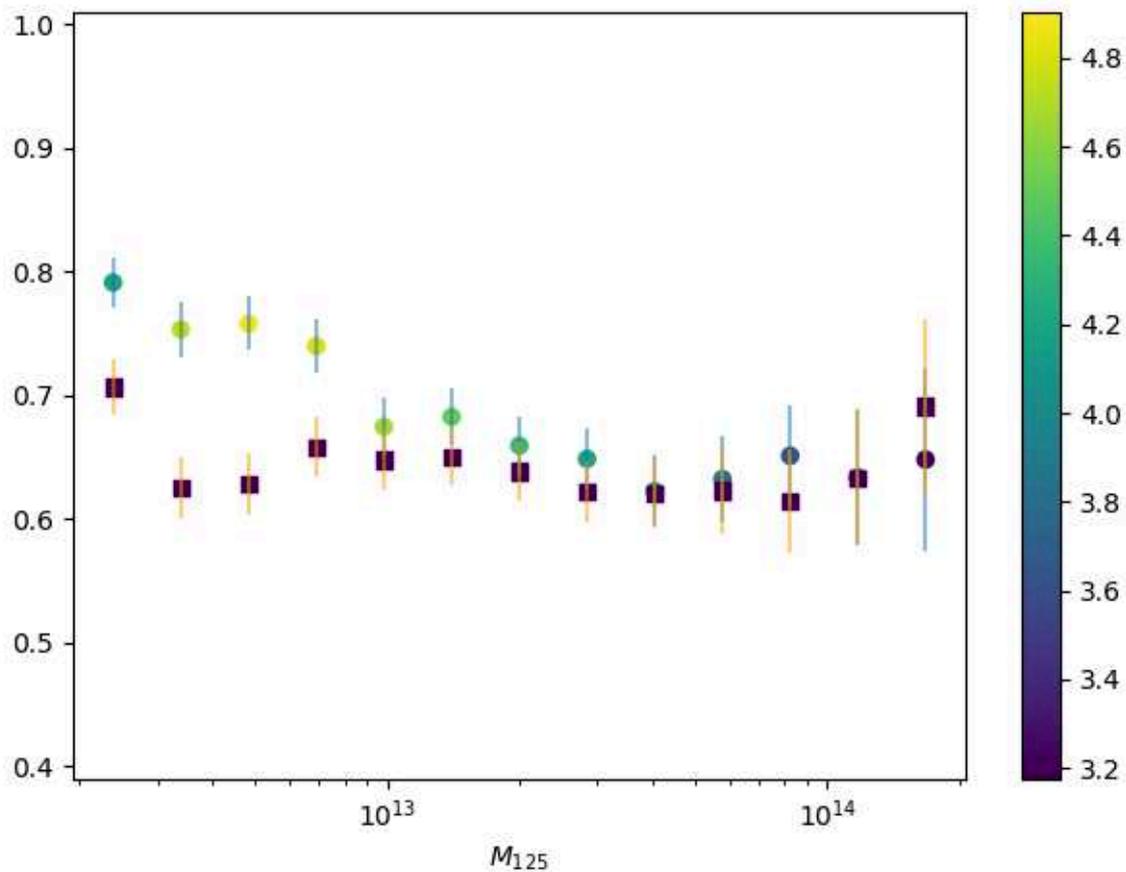


Figure 4.4 – Proportion de halos bien classés en fonction de leur masse. Les couleurs indiquent le nombre logarithmique de halos d’entraînement dans chaque *bin* de masse. Lorsque l’agrégat d’arbres a appris en utilisant un ensemble d’entraînement non équilibré (le nombre de halos d’entraînement est différent dans chaque tranche de masse), le moteur reconnaît mieux les halos de faible masse que les halos de masse élevée. Cela correspond aux points circulaires de la figure. Cependant, lorsque l’apprentissage est mené sur un ensemble d’entraînement équilibré (points carrés), avec le même nombre de halos d’entraînement dans chaque *bin* de masse, la performance de la classification ne dépend plus de la masse des halos de l’ensemble de test.

4.3.3 Diagnostic statistique

4.3.3.1 Robustesse au bruit

Il a été noté, dans un contexte d’apprentissage différent (Hosseini et al., 2017), que la performance d’un classificateur donné peut diminuer lorsque les attributs des éléments

de l'ensemble de test sont légèrement perturbés par l'ajout d'un bruit aléatoire. Si nous visons une quelconque application physique de notre classificateur, celui-ci doit être le plus robuste possible à l'ajout de bruit dans les halos de test. Dans cette sous-section, nous étudierons l'évolution du score global lorsque les données de test sont perturbées par un bruit gaussien d'une variance donnée σ^2 . Cela signifie que le j -ième attribut du i -ième halo devient :

$$x_i^j \rightarrow x_i^j(1 + \sigma W_{ij})$$

où

$$W_{ij} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Dans la figure 4.5, nous traçons le score global sur l'ensemble de test en fonction de σ . Une transition de phase est observée et le score est maintenu au-dessus de 70% pour un bruit tel que $\sigma \leq 3 \cdot 10^{-4}$. Cette robustesse découle du fait que les valeurs des attributs des halos de l'ensemble d'entraînement ont dû être arrondies à trois chiffres significatifs et perturbées si nécessaire pour une élimination des Clever Hans (voir la section précédente). Cela explique également pourquoi le profil de vitesse ne peut pas remplacer le profil de masse : le score après entraînement avec les profils de forme et de vitesse est bien inférieur au score que nous obtenons avec les profils de forme et de masse. En effet, la relation du viriel entre M et $I^V = a_v^2 + b_v^2 + c_v^2$ n'est pas bien vérifiée - le nuage de points pour ces deux quantités (avec $\delta = 125$), dans la figure 4.6 est extrêmement dispersé. Pour quantifier la dispersion, on divise l'intervalle $M_{125} \in [10^{12}, 10^{14}]$ masses solaires, et on calcule dans chaque *bin* l'écart-type $\tilde{\sigma}$ et la moyenne μ , de I_{125}^V . On représente ainsi en figure 4.7 $\sigma = \tilde{\sigma}/\mu$ en fonction de M_{125} . On s'aperçoit donc que la dispersion relative avoisine 10^{-1} , ce qui implique, d'après la figure 4.5, que la valeur de M_{125} ne peut être retrouvée à partir de I_{125}^V avec une précision suffisante.

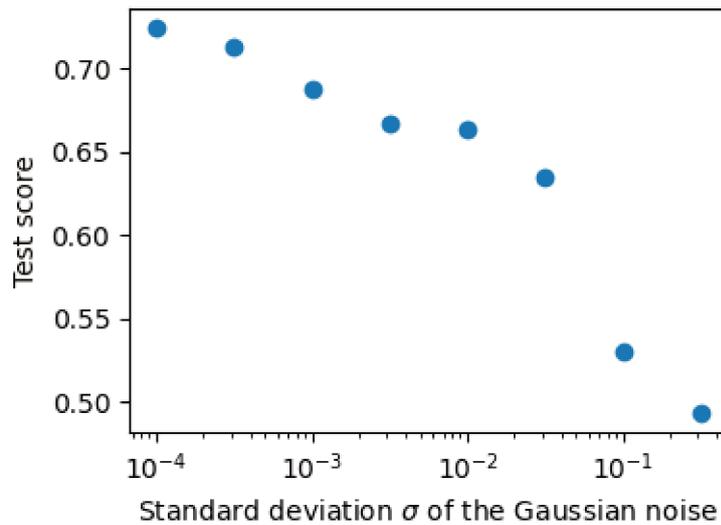


Figure 4.5 – Sensibilité du score de test à l’ajout d’un bruit gaussien de variance σ^2 aux attributs des halos de l’ensemble de test. L’apprentissage a été mené à l’aide des profils de masse, de forme et de vitesse $(m_d, a_d, b_d, c_d, a_d^V, b_d^V, c_d^V)_{d \in [0,24]}$. Le score se maintient au-dessus de 65% à condition que $\sigma \geq 8 \cdot 10^{-2}$, ce qui montre que le moteur d’apprentissage est robuste face aux attaques de bruit aléatoire.

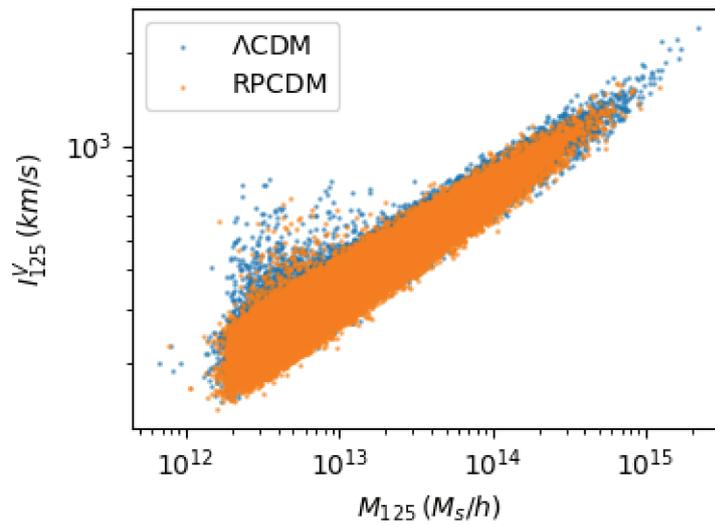


Figure 4.6 – Dispersion des vitesses dans l’ellipsoïde $\delta = 125$ en fonction de la masse de l’ellipsoïde $\delta = 125$, pour chaque halo des ensembles d’entraînement et de test. La dispersion autour de la correspondance virale attendue $\log I^V \propto \log M_{125}$ est importante, conduisant à l’impossibilité d’obtenir une estimation précise de la masse en utilisant la dispersion de la vitesse pour un halo donné. Cela explique pourquoi le remplacement des attributs de masse par des attributs de I^V altère l’efficacité de la classification.

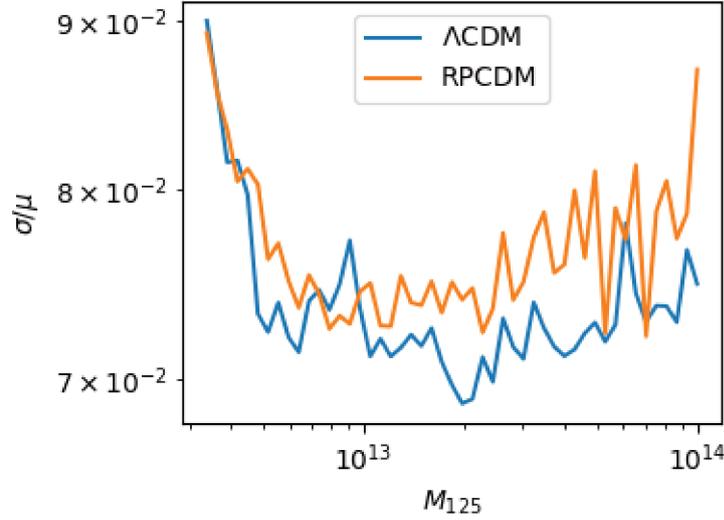


Figure 4.7 – Rapport entre l'écart type et la moyenne de I_{125}^V dans chaque *bin* de M_{125} (en utilisant les halos d'entraînement). La valeur élevée de ce bruit relatif indique qu'il ne semble plus possible de retrouver M_{125} à partir de I_{125}^V avec une précision suffisamment élevée pour ne pas gommer l'éventuelle empreinte cosmologique dans le profil de masse.

4.3.3.2 Calibration

Une autre observation intéressante repose sur le fait que l'agrégat ne renvoie pas seulement une classe prédite pour chaque halo \mathbf{x} , mais aussi une "probabilité d'appartenance" $p_k(\mathbf{x})$ - comme mentionné précédemment. Pour vérifier que les p_k peuvent effectivement être interprétés comme une incertitude de prédiction, nous traçons un diagramme d'étalonnage (Winkler et al., 1996 ; Niculescu-Mizil & Caruana, 2005) : pour une classe k , on répartit les p_k obtenus pour les halos de l'ensemble test en *bins*. Ensuite, on calcule, pour chaque *bin* la proportion de halos de test qui appartiennent effectivement à la classe k parmi tous ceux dont le p_k appartient au *bin* considéré. C'est le *score du bin*. Si ces quantités coïncident, c'est-à-dire si la valeur centrale d'un *bin* est égale à son score, on peut dire que le système est calibré et que la probabilité que le système attribue à une prédiction est bien une mesure de l'incertitude. S'il n'y a que deux classes, comme dans notre travail, connaître la "probabilité d'appartenance" à une classe donne automatiquement la probabilité d'appartenance à l'autre

$p_k = 1 - p_{1-k}$. Il suffit donc de montrer que les probabilités d'appartenance à la première classe sont calibrées, pour s'assurer que ce sera également le cas pour les probabilités d'appartenance à la seconde classe.

Pour le classificateur entraîné sur les attributs de masse et de forme ellipsoïdale, il apparaît que la courbe d'étalonnage (figure 4.8) se superpose à la droite $y = x$, ce qui signifie que le classificateur est calibré.

Remarquons que la calibration nécessite que le système n'ait pas continué à ajouter des estimateurs malgré la convergence du score global de l'ensemble test. Si l'apprentissage n'avait pas été interrompu au début de la convergence des résultats du test, mais avait plutôt été poursuivi pendant une longue période après le plateau, la calibration aurait été détruite. Cette courbe d'étalonnage aurait adopté une forme sigmoïde caractéristique ; par exemple, la courbe orange dans la figure 4.8 a été calculée après avoir poursuivi l'apprentissage jusqu'à 10^4 estimateurs et s'écarte clairement de la ligne $y = x$. On peut y voir une sorte de surajustement : si l'agrégat est constitué d'un trop grand nombre d'estimateurs, il apprend des caractéristiques très spécifiques de l'ensemble d'entraînement et à (schématiquement) surestimer la fiabilité de ses prédictions. Mais ces caractéristiques ne sont plus généralisables en dehors de l'ensemble d'entraînement et, en particulier, ne sont pas applicables aux halos de test à venir. Cela conduit à des prédictions sur l'ensemble de test où les probabilités d'appartenance sont artificiellement proches de 0 ou de 1 sans aucune amélioration du résultat global du test (comparativement au cas de l'apprentissage arrêté précocement, sans surajustement). Le système devient alors nécessairement non calibré.

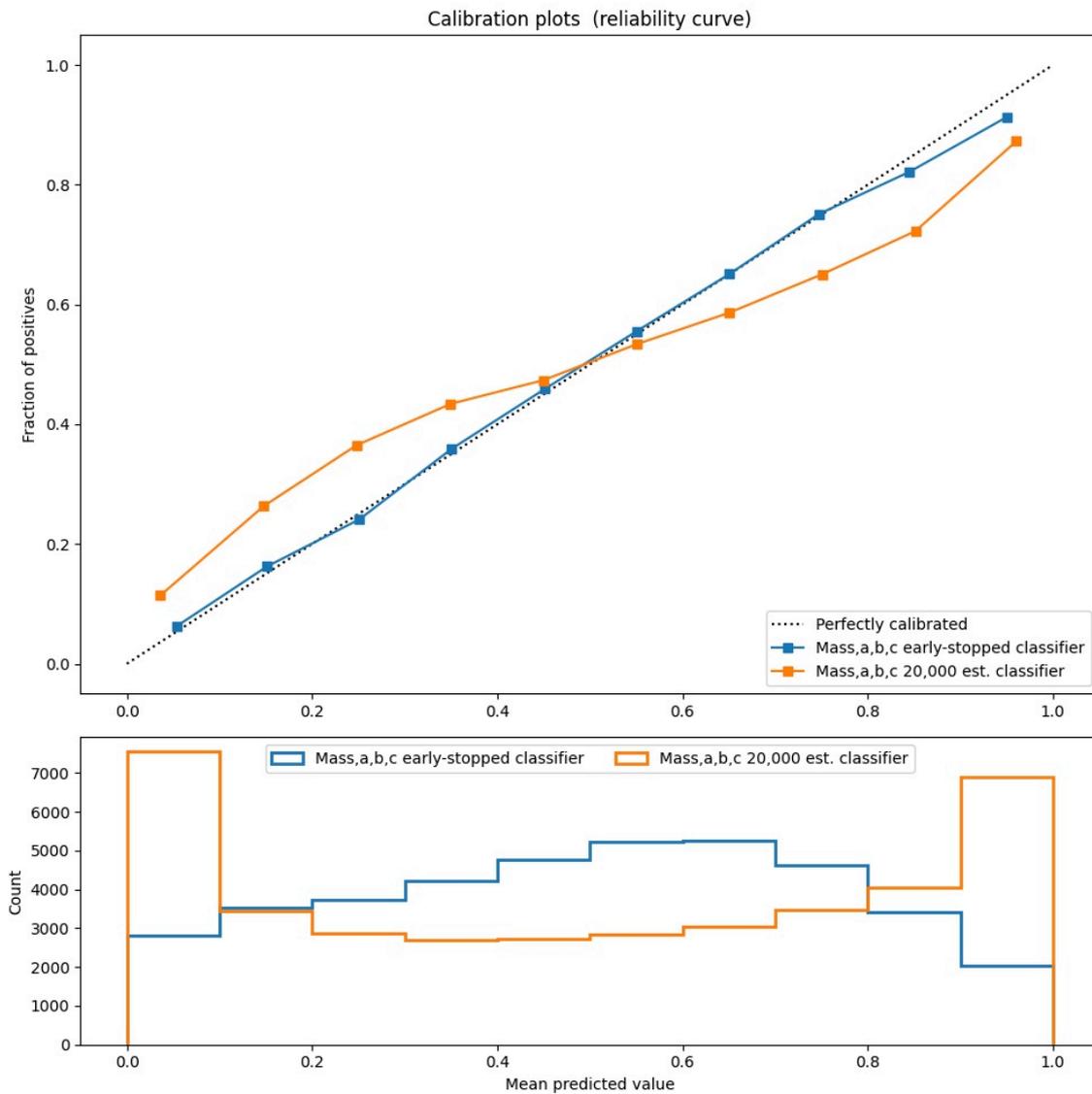


Figure 4.8 – Graphique de calibration de l’agrégat d’arbres de boost de gradient, entraîné en utilisant les attributs de masse et de forme des halos. Lorsque l’apprentissage s’arrête lorsqu’un critère d’arrêt précoce est vérifié (courbe bleue), l’ensemble est calibré et les probabilités qu’il donne pour toute prédiction peuvent être interprétées comme des incertitudes. Lorsque l’apprentissage se poursuit trop longtemps, atteignant ici 20 000 estimateurs (courbe orange), l’ensemble n’est pas calibré et la courbe de fiabilité s’écarte fortement de la droite $y = x$.

4.3.3.3 Extension à trois cosmologies

Comme expliqué dans le chapitre 2, les statistiques sur la forme du halo et leur dépendance en la masse du halo peuvent être expliquées par la variance du spectre de puissance non linéaire lissé. L'amplitude du spectre de puissance contrôle donc la forme des halos. De plus, comme le spectre de puissance non linéaire peut être approximé, au premier ordre, par le spectre de puissance linéaire (au moins sur les grandes échelles), son amplitude est en quelque sorte estimée par σ_8 . Par conséquent, plus σ_8 est élevé, plus les halos sont sphériques. Cela implique également que les profils de forme typiques des halos formés selon deux modèles cosmologiques varieront considérablement s'il existe une disparité importante entre les σ_8 des modèles. En particulier, selon le tableau 4.1, on s'attend à ce que la discrimination entre les halos Λ CDM et RPCDM (18% de différence en σ_8) soit beaucoup plus efficace que la discrimination entre Λ CDM et w CDM (seulement 6% de différence) et légèrement moins efficace qu'entre RPCDM et w CDM (22%).

Pour évaluer l'exactitude de cette supposition, nous avons constitué trois ensembles d'entraînement (et les ensembles de test correspondants, comme précédemment) : le premier contenait des halos de Λ CDM et de RPCDM, le deuxième des halos de w CDM et de RPCDM et le troisième des halos de Λ CDM et de w CDM. Nous avons conservé le même nombre de halos de types Λ CDM et w CDM que de halos RPCDM. En toute rigueur, il n'est pas nécessaire que cette élimination soit aussi stricte pour la discrimination entre les halos Λ et w . Au lieu de cela, les halos w CDM peuvent être retirés aléatoirement pour qu'il en reste le même nombre dans l'ensemble d'entraînement que de halos Λ . Cependant, notre objectif est de comparer les performances de classification pour chaque paire de modèles cosmologiques parmi les trois modèles d'énergie noire simulés. Les résultats des tests étant très sensibles à la taille de l'ensemble d'entraînement, une comparaison entre Λ CDM et w CDM et les autres paires ne peut être réalisée que si l'ensemble d'entraînement correspondant est de taille égale aux deux autres. Cela explique pourquoi chaque classe dans tous les ensembles d'entraînement comprend le même nombre de halos.

Évidemment, les attributs de masse des halos d’entraînement sont modifiés comme dans la section 4.3.1.1 pour éviter, une fois de plus, tout effet Clever Hans. Pour chaque paire de modèles, nous entraînons un agrégat d’arbres de décision en ne considérant que les attributs de masse et de longueur d’axe $(M_d, a_d, b_d, c_d)_d$. Les résultats sont rassemblés dans le tableau 4.4. Comme prévu ci-dessus, les halos de la simulation Λ CDM sont beaucoup plus proches de ceux du modèle w CDM que de ceux du modèle RPCDM. Le score du test est donc plus élevé dans la classification Λ CDM/RPCDM (71%) que dans celle de Λ CDM/ w CDM (65%). Le même raisonnement explique la performance (encore meilleure) dans la classification des halos w CDM et RPCDM (75%).

Λ CDM	RPCDM	w CDM	Score
✓	✓	✗	71
✓	✗	✓	65
✗	✓	✓	75

Table 4.4 – Scores pour d’autres paires de modèles cosmologiques, en utilisant les attributs de masse et de forme (a, b, c) . L’efficacité de la classification semble augmenter avec la différence entre les σ_8 respectifs de chaque membre de la paire considérée. Ainsi, la distinction entre les modèles RPCDM et w CDM est favorisée par rapport à la discrimination entre les modèles RPCDM et Λ CDM, par exemple.

4.3.4 L’importance de la mesure dans des ellipsoïdes

Le dernier point à clarifier concerne le gain apporté par la prise en compte de la non-sphéricité des halos dans la description de leur profil. En effet, la comparaison des performances d’apprentissage sur le profil de masse d’une part, et sur les données conjointes de profil de masse et de profil de forme d’autre part, révèle que la connaissance explicite des attributs de forme $(a_\delta, b_\delta, c_\delta)$ améliore le score sur l’ensemble de test. Cela signifie que ces attributs, comparés à la masse contenue dans chaque ellipsoïde, contiennent une information cosmologique majeure. Néanmoins, même en ne considérant que les attributs de masse, la triaxialité du halo est prise directement en compte dans la mesure où les masses en question sont calculées à l’intérieur d’el-

lipsoïdes. Les attributs de masse, même pris isolément, bénéficient donc déjà de la description ellipsoïdale du profil des halos, et l'apprentissage à partir des attributs de masse (exclusivement) ne repose pas que sur des informations de nature isotrope. Pour évaluer avec précision ce que la prise en compte du caractère ellipsoïdal apporte à la classification, nous devons donc calculer, pour chaque halo, la masse M_{Δ_d} contenue dans des sphères concentriques de surdensité moyenne $(\Delta_d)_d$ ⁹.

Pour chaque surdensité Δ_d (dans une séquence de Δ_d s logarithmiquement espacés), nous déterminons le rayon R_{Δ_d} pour que la sphère, centrée sur le centre de masse du halo, contienne une masse de $M_{\Delta_d} = \Delta_d \cdot \frac{4}{3} \pi R_{\Delta_d}^3 (0, 25\rho_c)$. Le halo est alors décrit par la séquence de ses attributs de masse sphériques $(M_{\Delta_d})_d$. La séquence des Δ_d doit obéir à deux contraintes afin de garantir que toute perte de score au test (par rapport au score obtenu avec le profil de masse "ellipsoïdal") puisse être attribuée à l'utilisation d'un profil de masse sphérique et non à un mauvais choix des Δ_d . Premièrement, il doit y avoir autant d'attributs de masse sphérique (Δ_d) que d'attributs ellipsoïdaux (δ_d) , c'est-à-dire 25 attributs, car la suppression d'attributs abaisse mécaniquement le score. Deuxièmement, les mesures de masse sphériques doivent couvrir l'ensemble du halo, de l'intérieur à l'extérieur, comme c'était le cas pour les ellipsoïdes. Nous avons vérifié (visuellement) sur de nombreux halos, qu'il suffisait d'avoir $\Delta_0 = 50$, $\Delta_1 = 125$ et pour $2 \leq d \leq 24$, $\Delta_d = 10^{0.05d+2.3}$ pour une couverture identique du halo en utilisant les masses sphériques. De plus, il est nécessaire que Δ_{24} soit suffisamment *faible* pour que $M_{\Delta_{24}}$ soit défini pour un grand nombre de halos. L'ensemble d'entraînement est donc constitué des attributs sphériques de 250 000 halos Λ CDM et du même nombre de halos RPCDM. Ils sont tous modifiés comme en section 4.1.2. Les résultats de la classification entre les halos Λ et les halos RP, en utilisant des masses sphériques, sont rassemblés dans le tableau 4.5. La même expérience a été menée en utilisant les deux autres paires de modèles. En comparaison avec les résultats obtenus avec les attributs de masse ellipsoïdale, la capacité de discrimination est sensiblement affaiblie lorsque le profil de masse du halo est décrit à l'aide de sphères. Pour la classification

9. La surdensité moyenne d'une boule de masse M et de rayon R est $\Delta = \frac{3M}{4\pi R^3 (0.25\rho_c)}$. Nous choisissons $0.25\rho_c$ et non la valeur exacte de ρ_m comme densité de référence pour la même raison que celle évoquée dans section 4.1.2

entre les halos Λ CDM et w CDM, les "scores sphériques" chutent même en dessous de 59% (ils étaient de 63% avec les ellipsoïdes), ce qui rend le score du test proche de la classification purement aléatoire (50%).

ACDM	RPCDM	w CDM	Score (spheres)	Score (ellipsoïdes)
✓	✓	✗	66	69
✓	✗	✓	59	65
✗	✓	✓	70	72

Table 4.5 – Scores de classification pour les différentes paires de modèles cosmologiques utilisant des profils de masse sphériques ou ellipsoïdaux comme attributs. Le profil de masse sphérique ne prend pas en compte la forme du halo DM et conduit à une classification moins performante.

Nous avons donc montré que l'on pouvait détecter la cosmologie *dans un halo donné* avec une précision satisfaisante (73%) à l'aide d'un agrégat d'arbres de décision. La performance de la classification repose majoritairement sur la masse contenue dans des ellipsoïdes confocaux déterminés par les isodensités du halo. La robustesse de ce résultat et la possibilité d'en tirer des conclusions quant à l'importance de la triaxialité des halos dans leur description *physique*, a nécessité la recherche minutieuse de tout Clever Hans, c'est-à-dire de toute trace cosmologique laissée dans les propriétés des halos par des contingences non-physiques. Dans notre travail, ces dernières étaient liées à la granularité des données de simulation N -corps. La détection des biais statistiques de ce type a nécessité des connaissances physiques préalables sur la nature des objets traités (dominance des faibles masses dans la fonction de masse par exemple) et sur la faisabilité de la tâche de discrimination envisagée (impossibilité physique de déterminer la cosmologie à partir de la donnée de la seule masse totale du halo mais existence d'une empreinte cosmologique dans les *profils* de densité).

Synthèse des résultats

Nous avons commencé par définir précisément ce qui est entendu par la forme ellipsoïdale d'un halo donné, en proposant une méthode de détermination des axes principaux d'un halo, qui minimise la dépendance de la mesure en la résolution de la simulation et en la méthode de détection du halo. Puis, nous montrons que la prolaticité et la triaxialité des halos $10^{12} - 10^{14} M_{\odot}$ issus des simulations Dark Energy Universe ([Alimi et al., 2012](#); [Bouillot et al., 2015](#)) dépend fortement du modèle cosmologique sous-jacent : à masse donnée, les halos sont en moyenne plus oblates et sphériques dans les modèles à σ_8 élevé. Or, s'il est vrai que le spectre de puissance linéaire, au travers de σ_8 , contrôle au premier ordre l'asphéricité des halos, nous avons montré qu'il était possible d'expliquer complètement la dépendance cosmologique de la forme des halos en tenant compte de la dynamique non-linéaire qui a mené à leur formation. En effet, nous avons prouvé que la *distribution* de la prolaticité des halos à *niveau de fluctuations non-linéaires* donné est parfaitement indépendant de la cosmologie. Ainsi, si la prolaticité est dépendante de la cosmologie lorsqu'elle est vue comme une fonction de la masse, elle est universelle lorsqu'elle est vue comme une fonction de la variance du spectre de puissance lissé à l'échelle des halos. Nous en avons proposé l'explication suivante : plus la variance non-linéaire est élevée, plus l'Univers correspondant est structuré et ses halos sont effondrés. Or, les isopotentielles newtoniennes étant systématiquement plus sphériques que les isodensités d'une structure ellipsoïdale donnée, les halos se sphéricisent à mesure qu'ils s'effondrent. Ceci justifie l'existence d'une relation bi-univoque liant forme des halos et variance du spectre de puissance non-linéaire. Cette relation n'est pas soumise à la sélection de halos relaxés. En outre,

nous avons prouvé que ce résultat d’universalité était maintenu si l’on remplaçait la variance du champ total par la variance de la matière contenue dans les halos uniquement. Nous avons ainsi mis en évidence l’existence d’une correspondance entre ces deux mesures de variances, indépendante de la cosmologie. Enfin, nous avons relevé que l’existence (et la connaissance) de la relation universelle entre variance lissée et prolaticité implique que la mesure simultanée de la masse et de la prolaticité des halos d’un Univers donné suffit à reconstruire le spectre de puissance non-linéaire associé à celui-ci. Cela ouvre donc la voie à une nouvelle méthode de mesure du spectre de puissance.

Dans la mesure où la relation universelle entre variance et triaxialité des halos repose sur le fait que les halos effondrés se sphéricisent sous l’effet de la gravité, elle est remise en question si l’on en vient à comparer des modèles de gravité (et donc des processus de sphéricisation) différents. En d’autres termes, la relation d’universalité liant fluctuations non linéaires et forme doit être comprise à *modèle de gravité fixé*. Pour tester cette affirmation, nous avons extrait les halos (Friends-of-Friends) des simulations DUSTGRAIN-pathfinder (Giocoli et al., 2018; Hagstotz et al., 2019b) qui implémentent l’effet d’une modification de la gravité de type Hu-Sawicki (Hu & Sawicki, 2007), pour différentes valeurs de $|f_{R0}|$ et différentes masses de neutrinos. Ces modèles se caractérisent par l’existence d’un mécanisme d’écrantage caméléon permettant de retrouver la relativité générale dans les régions de haute densité. Dans ce cadre, nous avons introduit une masse critique d’écrantage dépendante de ρ_m et $|f_{R0}|$ et avons distingué trois régimes de masse : dans les halos dont la masse dépasse cette masse critique, les effets de la gravité modifiée sont entièrement écrantés et la gravité y est indistinguishable de la gravité newtonienne. Pour ces halos massifs, la relation liant forme et fluctuations non-linéaires est identique à celle obtenue pour des modèles w CDM (de type Dark Energy Universe). À l’opposé, les halos de masse faible devant la masse critique subissent maximalelement les effets de la gravité modifiée ; ces derniers se traduisent surtout par une force gravitationnelle accentuée d’un facteur $4/3$ par rapport au cas newtonien. Cette modification de la gravité est donc isotrope. Ainsi, le spectre de puissance et l’efficacité du processus de sphéricisation

sont affectés dans la même mesure par cet écart au modèle Λ CDM. Cela implique que, pour ces halos peu massifs, la relation liant forme et variance non-linéaire est encore indistinguable de la relation mise en évidence pour les modèles w CDM. Enfin, les halos dont la masse est proche de la masse critique se trouvent dans une configuration plus subtile : ils sont en effet susceptibles d’être écrantés selon un de leurs axes seulement, de sorte que le champ de gravité total est beaucoup plus elliptique que les isopotentiels newtoniennes (Llinares & Mota, 2013; Burrage et al., 2015). En ce sens, le processus de sphéricisation est altéré, tandis que le spectre de puissance (et donc la variance), qui est moyenné sur les angles, ne peut encapsuler l’information liée à des anisotropies de ce type.

Ainsi, pour un $|f_{R0}|$ donné, il existe encore une relation entre la variance et la prolativité des halos qui ne dépend pas des autres paramètres cosmologiques (masse des neutrinos, σ_8 , w_0 ...); Cependant, cette relation diffère de celle qui a été relevée dans les modèles purement w CDM, au voisinage de la masse critique correspondant au $|f_{R0}|$ considéré. La mesure *simultanée* du spectre de puissance et de la forme des halos est donc une sonde forte de la gravité modifiée, à la limite du domaine d’écrantage. Nous avons réalisé deux constats supplémentaires : d’une part, la correspondance indépendante de la cosmologie, liant variance totale et variance de la matière dans les halos, est également indépendante du modèle de gravité. D’autre part, le fait que la densité critique sphérique δ_c des modèles w CDM des simulations Dark Energy Universe soient identiques jusqu’à la troisième décimale, nous empêchait de savoir si les paramètres de forme devaient être vus comme des fonctions de la variance non linéaire (σ_{NL}) ou bien de la hauteur du pic (δ_c/σ_{NL}) pour en dégager une relation universelle. L’usage de modèles de gravité modifiée, dont les δ_c sont très différents, permet de montrer que c’est bien la variance qui contrôle la forme globale des halos et non la hauteur des pics associés.

Par ailleurs, des études précédentes ont montré que leur profil (sphérique) dépendait de la cosmologie : la distribution de leur sparcité (Balmès et al., 2014; Corasaniti et al., 2022) ou de leur concentration (Wechsler et al., 2002; Bhattacharya et al., 2013) à masse donnée, est par exemple sensible au modèle d’énergie noire sous-jacent et plus généralement à l’histoire de formation des halos.

Ainsi, nous avons proposé de raisonner de la façon suivante : puisque la *forme ellipsoïdale globale* du halo d'une part, et son *profil sphérique* (concentration, sparcité) d'autre part, sont porteurs d'information cosmologique, il est naturel de s'interroger sur l'empreinte laissée par la cosmologie sur les *profils* de masse et de forme *ellipsoïdaux*. En particulier, nous nous sommes demandés si la prise en compte d'un *profil* plutôt que d'un seul indicateur de forme globale, permet d'extraire des informations sur la cosmologie sous-jacente à partir *d'un halo donné* et non pas de la médiane d'une population de halos, comme nous l'avions fait jusqu'à alors. Or, puisque l'information cosmologique portée par les halos pris individuellement est nécessairement subtile, elle constitue un signal faible ; en ce sens, le machine learning s'avère être l'outil adapté à sa détection. En outre, décrire un halo par son profil ellipsoïdal de masse et de forme entraîne la multiplication du nombre d'attributs par halo, et donc un espace des attributs de grande dimension ; là encore, l'apprentissage supervisé est plus adapté que les analyses statistiques classiques (telles celles proposées dans les premières sections de cette thèse) à la classification d'objets appartenant à un espace de dimensionnalité élevée. Pourtant, nous avons noté que la complexité des outils de *machine learning* pouvait rapidement en faire des boîtes noires, ce qui soulève d'importantes questions quant à leur caractère interprétable. En particulier, la granularité des données a constitué la base d'un *Clever Hans* caractérisé : le système apprenait à associer une proportion très satisfaisante de données d'entrée à la bonne étiquette-cible en exploitant des caractéristiques "accidentelles" de celles-ci, c'est-à-dire contingentes à la méthode de simulation, mais indépendantes de la physique d'arrière-plan. Nous avons expliqué comment traiter cette classe d'effets fallacieux. Un agrégat d'arbres de décision a ensuite permis de différencier 73% des halos de matière, pris dans les simulations Λ CDM ou RPCDM, à partir de leurs profils ellipsoïdaux de masse, de forme et de vitesse. Nous avons enfin établi que l'information en masse est primordiale pourvue que le profil en masse soit calculé dans les ellipsoïdes adaptés aux isodensités du halo, et non pas dans des sphères concentriques.

Perspectives

De nombreuses pistes, dans la directe ligne de nos travaux, restent à explorer.

Pour commencer, il paraît intéressant d'étendre les résultats en apprentissage automatique sur les structures de l'espace des *redshifts*. Il est possible, également, d'étudier la forme des halos lorsque la physique sous-grille, et donc la structuration baryonique, a été prise en compte dans la simulation. Cette dernière peut changer la forme des halos (Cataldi et al., 2021) mais également le spectre de puissance (Schneider & Teyssier, 2015).

En outre, la dépendance cosmologique de la forme de halos issus d'autres modèles de matière noire exotiques (Warm Dark Matter, Fuzzy Dark Matter) pourrait être testée puisque les processus de formation des grandes structures dans ces modèles sont très différents des processus à l'œuvre dans les modèles de matière noire froide. Ainsi, dans le cas de la Hot Dark Matter, la structuration est monolithique en ceci qu'elle ne repose pas sur la présence de *mergers* (Wang & White, 2009). Au vu de l'importance (réelle ou supposée, voir Allgood et al. (2006)) des phénomènes violents de relaxation (comme les *mergers*) dans la triaxialité des halos, il serait intéressant de vérifier si, dans ces simulations également, la distribution des indicateurs de forme est encapsulée par le spectre de puissance.

Enfin, le raisonnement très général que nous avons proposé pour mettre en lien certaines propriétés de forme des grandes structures et variance du spectre de puissance, peut s'appliquer aux objets formés à plus grande échelle. Il pourrait permettre, par exemple, de lier la connectivité de la toile cosmique (Codis et al., 2018) au spectre de

puissance des halos et donc au modèle cosmologique.

Bibliographie

- Alimi, J.-M., Bouillot, V., Rasera, Y., et al., *First-ever full observable universe simulation*. 2012, in 2012 International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis (IEEE)
- Alimi, J. M., Füzfa, A., Boucher, V., et al., *Imprints of dark energy on cosmic structure formation - I. Realistic quintessence models and the non-linear matter power spectrum*. 2010, [MNRAS](#), **401**, 775
- Allgood, B., Flores, R. A., Primack, J. R., et al., *The shape of dark matter haloes : dependence on mass, redshift, radius and formation*. 2006, [MNRAS](#), **367**, 1781
- Amendola, L., Polarski, D., & Tsujikawa, S., *Are $f(R)$ Dark Energy Models Cosmologically Viable ?* 2007, [Phys. Rev. Lett.](#), **98**, 131302
- Amendola, L. & Tsujikawa, S. 2010, *Dark Energy : Theory and Observations*
- An, J. & Zhao, H., *Fitting functions for dark matter density profiles*. 2013, [MNRAS](#), **428**, 2805
- Anders, C. J., Weber, L., Neumann, D., et al., *Finding and removing Clever Hans : Using explanation methods to debug and improve deep models*. 2022, [Information Fusion](#), **77**, 261
- Angulo, R. E. & Hahn, O., *Large-scale dark matter simulations*. 2022, [Living Reviews in Computational Astrophysics](#), **8**, 1
- Audit, E., Teyssier, R., & Alimi, J.-M., *Non-linear dynamics and mass function of cosmic structures. II. Numerical results*. 1998, [A&A](#), **333**, 779
- Auld, T., Bridges, M., Hobson, M. P., & Gull, S. F., *Fast cosmological parameter estimation using neural networks*. 2007, [MNRAS](#), **376**, L11
- Avila, F., Bernui, A., Bonilla, A., & Nunes, R. C., *Inferring $S_8(z)$ and $\gamma(z)$ with cosmic growth rate measurements using machine learning*. 2022, [European Physical Journal C](#), **82**, 594

- Bagla, J. S., *TreePM : A Code for Cosmological N-Body Simulations*. 2002, [Journal of Astrophysics and Astronomy](#), **23**, 185
- Bailin, J. & Steinmetz, M., *Internal and External Alignment of the Shapes and Angular Momenta of Λ CDM Halos*. 2005, [ApJ](#), **627**, 647
- Ball, N. M. & Brunner, R. J., *Data Mining and Machine Learning in Astronomy*. 2010, [International Journal of Modern Physics D](#), **19**, 1049
- Balmès, I., Rasera, Y., Corasaniti, P. S., & Alimi, J. M., *Imprints of dark energy on cosmic structure formation - III. Sparsity of dark matter halo profiles*. 2014, [MNRAS](#), **437**, 2328
- Banerji, M., Lahav, O., Lintott, C. J., et al., *Galaxy Zoo : reproducing galaxy morphologies via machine learning*. 2010, [MNRAS](#), **406**, 342
- Bardeen, J. M., Bond, J. R., Kaiser, N., & Szalay, A. S., *The Statistics of Peaks of Gaussian Random Fields*. 1986, [ApJ](#), **304**, 15
- Batista, R. C., *A Short Review on Clustering Dark Energy*. 2021, [Universe](#), **8**, 22
- Beery, S., Horn, G. V., & Perona, P., *Recognition in Terra Incognita*. 2018, in *Computer Vision – ECCV 2018* (Springer International Publishing), 472–489
- Behroozi, P. S., Wechsler, R. H., & Conroy, C., *The Average Star Formation Histories of Galaxies in Dark Matter Halos from $z = 0-8$* . 2013, [ApJ](#), **770**, 57
- Berlind, A. A. & Weinberg, D. H., *The Halo Occupation Distribution : Toward an Empirical Determination of the Relation between Galaxies and Mass*. 2002, [ApJ](#), **575**, 587
- Bhattacharya, S., Habib, S., Heitmann, K., & Vikhlinin, A., *Dark Matter Halo Profiles of Massive Clusters : Theory versus Observations*. 2013, [ApJ](#), **766**, 32
- Binney, J. & Tremaine, S. 2008, *Galactic Dynamics : Second Edition*
- Blanchard, A., Valls-Gabaud, D., & Mamon, G. A., *The origin of the galaxy luminosity function and the thermal evolution of the intergalactic medium*. 1992, [A&A](#), **264**, 365
- Blas, D., Lesgourgues, J., & Tram, T., *The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS). Part II : Approximation schemes*. 2011, [J. Cosmology Astropart. Phys.](#), **2011**, 034
- Bloom, J. S., Richards, J. W., Nugent, P. E., et al., *Automating Discovery and Classification of Transients and Variable Stars in the Synoptic Survey Era*. 2012, [PASP](#), **124**, 1175

- Bonamigo, M., Despali, G., Limousin, M., et al., *Universality of dark matter haloes shape over six decades in mass : insights from the Millennium XXL and SBARBINE simulations*. 2015, *MNRAS*, **449**, 3171
- Bond, J. R., Cole, S., Efstathiou, G., & Kaiser, N., *Excursion Set Mass Functions for Hierarchical Gaussian Fluctuations*. 1991, *ApJ*, **379**, 440
- Bonnett, C., Troxel, M. A., Hartley, W., et al., *Redshift distributions of galaxies in the Dark Energy Survey Science Verification shear catalogue and implications for weak lensing*. 2016, *Phys. Rev. D*, **94**, 042005
- Bouillot, V. 2012, *Empreintes de l'Énergie Noire sur la structuration de l'Univers*, Theses, Observatoire de Paris
- Bouillot, V. R., Alimi, J.-M., Corasaniti, P.-S., & Rasera, Y., *Probing dark energy models with extreme pairwise velocities of galaxy clusters from the DEUS-FUR simulations*. 2015, *MNRAS*, **450**, 145
- Boylan-Kolchin, M., Springel, V., White, S. D. M., Jenkins, A., & Lemson, G., *Resolving cosmic structure formation with the Millennium-II Simulation*. 2009, *MNRAS*, **398**, 1150
- Brax, P., van de Bruck, C., Davis, A.-C., Khoury, J., & Weltman, A., *Detecting dark energy in orbit : The cosmological chameleon*. 2004, *Phys. Rev. D*, **70**, 123518
- Breiman, L., Friedman, J. H., Olshen, R. A., & Stone, C. J. 1984, *Classification And Regression Trees* (Routledge)
- Burrage, C., Copeland, E. J., & Stevenson, J. A., *Ellipticity weakens chameleon screening*. 2015, *Phys. Rev. D*, **91**, 065030
- Butsky, I., Macciò, A. V., Dutton, A. A., et al., *NIHAO project II : halo shape, phase-space density and velocity distribution of dark matter in galaxy formation simulations*. 2016, *MNRAS*, **462**, 663
- Carleo, G., Cirac, I., Cranmer, K., et al., *Machine learning and the physical sciences**. 2019, *Reviews of Modern Physics*, **91**, 045002
- Carrasco Kind, M. & Brunner, R. J., *TPZ : photometric redshift PDFs and ancillary information by using prediction trees and random forests*. 2013, *MNRAS*, **432**, 1483
- Cataldi, P., Pedrosa, S. E., Tissera, P. B., & Artale, M. C., *Baryons shaping dark matter haloes*. 2021, *MNRAS*, **501**, 5679
- Charnock, T. & Moss, A., *Deep Recurrent Neural Networks for Supernovae Classification*. 2017, *ApJ*, **837**, L28

- Clifton, T., Ferreira, P. G., Padilla, A., & Skordis, C., *Modified gravity and cosmology*. 2012, [Phys. Rep.](#), **513**, 1
- Clifton, T., Gallagher, C. S., Goldberg, S., & Malik, K. A., *Viable gauge choices in cosmologies with nonlinear structures*. 2020, [Phys. Rev. D](#), **101**, 063530
- Codis, S., Pogosyan, D., & Pichon, C., *On the connectivity of the cosmic web : theory and implications for cosmology and galaxy formation*. 2018, [MNRAS](#), **479**, 973
- Cole, S., Aragon-Salamanca, A., Frenk, C. S., Navarro, J. F., & Zepf, S. E., *A recipe for galaxy formation*. 1994, [MNRAS](#), **271**, 781
- Cole, S. & Lacey, C., *The structure of dark matter haloes in hierarchical clustering models*. 1996, [MNRAS](#), **281**, 716
- Cole, S., Lacey, C. G., Baugh, C. M., & Frenk, C. S., *Hierarchical galaxy formation*. 2000, [MNRAS](#), **319**, 168
- Coles, P. & Frenk, C. S., *Skewness and large-scale structure*. 1991, [MNRAS](#), **253**, 727
- Corasaniti, P. S., Le Brun, A. M. C., Richardson, T. R. G., et al., *Forecasting cosmological parameter constraints using multiple sparsity measurements as tracers of the mass profiles of dark matter haloes*. 2022, [MNRAS](#), **516**, 437
- Courtin, J., Rasera, Y., Alimi, J. M., et al., *Imprints of dark energy on cosmic structure formation - II. Non-universality of the halo mass function*. 2011, [MNRAS](#), **410**, 1911
- Crain, R. A., Schaye, J., Bower, R. G., et al., *The EAGLE simulations of galaxy formation : calibration of subgrid physics and model variations*. 2015, [MNRAS](#), **450**, 1937
- Dawson, M., Zisserman, A., & Nellåker, C., *From Same Photo : Cheating on Visual Kinship Challenges*. 2019, in *Computer Vision – ACCV 2018* (Springer International Publishing), 654–668
- De Felice, A. & Tsujikawa, S., *$f(R)$ Theories*. 2010, [Living Reviews in Relativity](#), **13**, 3
- Despali, G., Giocoli, C., & Tormen, G., *Some like it triaxial : the universality of dark matter halo shapes and their evolution along the cosmic time*. 2014, [MNRAS](#), **443**, 3208
- Despali, G., Tormen, G., & Sheth, R. K., *Ellipsoidal halo finders and implications for models of triaxial halo formation*. 2013, [MNRAS](#), **431**, 1143
- Dicke, R. 1964, *The Theoretical Significance of Experimental Relativity, Documents on modern physics* (Gordon and Breach)

- Diemand, J., Kuhlen, M., & Madau, P., *Early Supersymmetric Cold Dark Matter Substructure*. 2006, [ApJ](#), **649**, 1
- Doroshkevich, A. G., *Spatial structure of perturbations and origin of galactic rotation in fluctuation theory*. 1970, [Astrophysics](#), **6**, 320
- Dvorkin, C., Mishra-Sharma, S., Nord, B., et al., *Machine Learning and Cosmology*. 2022, [arXiv e-prints](#), [arXiv:2203.08056](#)
- Dyer, E. & Hinterbichler, K., *Boundary terms, variational principles, and higher derivative modified gravity*. 2009, [Phys. Rev. D](#), **79**, 024028
- Einasto, J., *On the Construction of a Composite Model for the Galaxy and on the Determination of the System of Galactic Parameters*. 1965, Trudy Astrofizicheskogo Instituta Alma-Ata, **5**, 87
- Einasto, J., Hütsi, G., Saar, E., et al., *Wavelet analysis of the cosmic web formation*. 2011, [A&A](#), **531**, A75
- Einasto, J., Klypin, A., Hütsi, G., Liivamägi, L.-J., & Einasto, M., *Evolution of skewness and kurtosis of cosmic density fields*. 2021, [A&A](#), **652**, A94
- Einstein, A., *HAMILTONsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie*. 1916, [Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften](#), 1111
- Eötvös, R. V., Pekár, D., & Fekete, E., *Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität*. 1922, [Annalen der Physik](#), **373**, 11
- Frenk, C. S., White, S. D. M., Efstathiou, G., & Davis, M., *Cold dark matter, the structure of galactic haloes and the origin of the Hubble sequence*. 1985, [Nature](#), **317**, 595
- Freundlich, J., Jiang, F., Dekel, A., et al., *The Dekel-Zhao profile : a mass-dependent dark-matter density profile with flexible inner slope and analytic potential, velocity dispersion, and lensing properties*. 2020, [MNRAS](#), **499**, 2912
- Friedman, J. H., *Greedy function approximation : A gradient boosting machine*. 2001, [The Annals of Statistics](#), 29
- Gao, L., Navarro, J. F., Frenk, C. S., et al., *The Phoenix Project : the dark side of rich Galaxy clusters*. 2012, [MNRAS](#), **425**, 2169
- Garrison-Kimmel, S., Boylan-Kolchin, M., Bullock, J. S., & Lee, K., *ELVIS : Exploring the Local Volume in Simulations*. 2014, [MNRAS](#), **438**, 2578
- Geirhos, R., Jacobsen, J.-H., Michaelis, C., et al., *Shortcut learning in deep neural networks*. 2020, [Nature Machine Intelligence](#), **2**, 665

- Genel, S., Vogelsberger, M., Springel, V., et al., *Introducing the Illustris project : the evolution of galaxy populations across cosmic time*. 2014, [MNRAS](#), **445**, 175
- Gerdes, D. W., Sypniewski, A. J., McKay, T. A., et al., *ArborZ : Photometric Redshifts Using Boosted Decision Trees*. 2010, [ApJ](#), **715**, 823
- Gibbons, G. W. & Hawking, S. W., *Action integrals and partition functions in quantum gravity*. 1977, [Phys. Rev. D](#), **15**, 2752
- Gingold, R. A. & Monaghan, J. J., *Smoothed particle hydrodynamics : theory and application to non-spherical stars*. 1977, [MNRAS](#), **181**, 375
- Giocoli, C., Baldi, M., & Moscardini, L., *Weak lensing light-cones in modified gravity simulations with and without massive neutrinos*. 2018, [MNRAS](#), **481**, 2813
- Griffen, B. F., Ji, A. P., Dooley, G. A., et al., *The Caterpillar Project : A Large Suite of Milky Way Sized Halos*. 2016, [ApJ](#), **818**, 10
- Guo, Q., White, S., Angulo, R. E., et al., *Galaxy formation in WMAP1 and WMAP7 cosmologies*. 2013, [MNRAS](#), **428**, 1351
- Guo, Q., White, S., Li, C., & Boylan-Kolchin, M., *How do galaxies populate dark matter haloes ?* 2010, [MNRAS](#), **404**, 1111
- Hagstotz, S., Costanzi, M., Baldi, M., & Weller, J., *Joint halo-mass function for modified gravity and massive neutrinos - I. Simulations and cosmological forecasts*. 2019a, [MNRAS](#), **486**, 3927
- Hagstotz, S., Gronke, M., Mota, D. F., & Baldi, M., *Breaking cosmic degeneracies : Disentangling neutrinos and modified gravity with kinematic information*. 2019b, [A&A](#), **629**, A46
- Harris, C. R., Millman, K. J., van der Walt, S. J., et al., *Array programming with NumPy*. 2020, [Nature](#), **585**, 357
- Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. 2009, *The Elements of Statistical Learning* (Springer New York)
- Hawking, S. W. & Ellis, G. F. R. 1973, *The large-scale structure of space-time*
- Hayashi, E., Navarro, J. F., & Springel, V., *The shape of the gravitational potential in cold dark matter haloes*. 2007, [MNRAS](#), **377**, 50
- He, S., Li, Y., Feng, Y., et al., *Learning to predict the cosmological structure formation*. 2019, [Proceedings of the National Academy of Science](#), **116**, 13825

- Hilbert, D., *Die Grundlagen der Physik . (Erste Mitteilung.)*. 1915, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1915, 395
- Hojjati, A., Pogosian, L., & Zhao, G.-B., *Testing gravity with CAMB and CosmoMC*. 2011, [J. Cosmology Astropart. Phys.](#), **2011**, 005
- Horndeski, G. W., *Second-Order Scalar-Tensor Field Equations in a Four-Dimensional Space*. 1974, [International Journal of Theoretical Physics](#), **10**, 363
- Hosseini, H., Xiao, B., & Poovendran, R., *Google's Cloud Vision API is Not Robust to Noise*. 2017, in 2017 16th IEEE International Conference on Machine Learning and Applications (ICMLA) (IEEE)
- Hoyle, B., *Measuring photometric redshifts using galaxy images and Deep Neural Networks*. 2016, [Astronomy and Computing](#), **16**, 34
- Hu, W. & Sawicki, I., *Models of $f(R)$ cosmic acceleration that evade solar system tests*. 2007, [Phys. Rev. D](#), **76**, 064004
- Huertas-Company, M., Rouan, D., Tasca, L., Soucail, G., & Le Fèvre, O., *A robust morphological classification of high-redshift galaxies using support vector machines on seeing limited images. I. Method description*. 2008, [A&A](#), **478**, 971
- Hunter, J. D., *Matplotlib : A 2D Graphics Environment*. 2007, [Computing in Science and Engineering](#), **9**, 90
- Jenkins, A., Frenk, C. S., White, S. D. M., et al., *The mass function of dark matter haloes*. 2001, [MNRAS](#), **321**, 372
- Jing, Y. P. & Suto, Y., *Triaxial Modeling of Halo Density Profiles with High-Resolution N-Body Simulations*. 2002, [ApJ](#), **574**, 538
- Kamath, U. & Liu, J. 2021, *Explainable Artificial Intelligence : An Introduction to Interpretable Machine Learning* (Springer International Publishing)
- Kasun, S. F. & Evrard, A. E., *Shapes and Alignments of Galaxy Cluster Halos*. 2005, [ApJ](#), **629**, 781
- Kauffmann, G., White, S. D. M., & Guiderdoni, B., *The formation and evolution of galaxies within merging dark matter haloes*. 1993, [MNRAS](#), **264**, 201
- Kauffmann, J., Ruff, L., Montavon, G., & Müller, K.-R., *The Clever Hans Effect in Anomaly Detection*. 2020, [arXiv e-prints](#), [arXiv:2006.10609](#)
- Kaushal, N., Villaescusa-Navarro, F., Giusarma, E., et al., *NECOLA : Toward a Universal Field-level Cosmological Emulator*. 2022, [ApJ](#), **930**, 115

- Kavumba, P., Inoue, N., Heinzerling, B., et al., *When Choosing Plausible Alternatives, Clever Hans can be Clever*. 2019, [arXiv e-prints](#), [arXiv:1911.00225](#)
- Kawahara, H., *The Axis Ratio Distribution of X-ray Clusters Observed by XMM-Newton*. 2010, [ApJ](#), **719**, 1926
- Kern, N. S., Liu, A., Parsons, A. R., Mesinger, A., & Greig, B., *Emulating Simulations of Cosmic Dawn for 21 cm Power Spectrum Constraints on Cosmology, Reionization, and X-Ray Heating*. 2017, [ApJ](#), **848**, 23
- Khoury, J. & Weltman, A., *Chameleon cosmology*. 2004a, [Phys. Rev. D](#), **69**, 044026
- Khoury, J. & Weltman, A., *Chameleon Fields : Awaiting Surprises for Tests of Gravity in Space*. 2004b, [Phys. Rev. Lett.](#), **93**, 171104
- Kim, E. J. & Brunner, R. J., *Star-galaxy classification using deep convolutional neural networks*. 2017, [MNRAS](#), **464**, 4463
- Klypin, A., Gottlöber, S., Kravtsov, A. V., & Khokhlov, A. M., *Galaxies in N-Body Simulations : Overcoming the Overmerging Problem*. 1999, [ApJ](#), **516**, 530
- Klypin, A., Yepes, G., Gottlöber, S., Prada, F., & Heß, S., *MultiDark simulations : the story of dark matter halo concentrations and density profiles*. 2016, [MNRAS](#), **457**, 4340
- Klypin, A. A., Trujillo-Gomez, S., & Primack, J., *Dark Matter Halos in the Standard Cosmological Model : Results from the Bolshoi Simulation*. 2011, [ApJ](#), **740**, 102
- Knebe, A., Knollmann, S. R., Muldrew, S. I., et al., *Halo es gone MAD : The Halo-Finder Comparison Project*. 2011, [MNRAS](#), **415**, 2293
- Knox, E., *Effective spacetime geometry*. 2013, [Studies in the History and Philosophy of Modern Physics](#), **44**, 346
- Koeppe, A., Bamer, F., Selzer, M., Nestler, B., & Markert, B., *Explainable artificial intelligence for mechanics : physics-explaining neural networks for constitutive models*. 2022, [Frontiers in Materials](#), **8**, 636
- Komatsu, E., Smith, K. M., Dunkley, J., et al., *Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Cosmological Interpretation*. 2011, [ApJS](#), **192**, 18
- Kopp, M., Appleby, S. A., Achitouv, I., & Weller, J., *Spherical collapse and halo mass function in $f(R)$ theories*. 2013, [Phys. Rev. D](#), **88**, 084015
- Kotsiantis, S. B., *Decision trees : a recent overview*. 2011, [Artificial Intelligence Review](#), **39**, 261

- Kumar Aluri, P., Cea, P., Chingangbam, P., et al., *Is the observable Universe consistent with the cosmological principle?* 2023, *Classical and Quantum Gravity*, **40**, 094001
- Lang, M., Holley-Bockelmann, K., & Sinha, M., *Voronoi Tessellation and Non-parametric Halo Concentration*. 2015, *ApJ*, **811**, 152
- Lanusse, F., Ma, Q., Li, N., et al., *CMU DeepLens : deep learning for automatic image-based galaxy-galaxy strong lens finding*. 2018, *MNRAS*, **473**, 3895
- Lapuschkin, S., Wäldchen, S., Binder, A., et al., *Unmasking Clever Hans predictors and assessing what machines really learn*. 2019, *Nature Communications*, **10**, 1096
- Lau, E. T., Hearin, A. P., Nagai, D., & Cappelluti, N., *Correlations between triaxial shapes and formation history of dark matter haloes*. 2021, *MNRAS*, **500**, 1029
- Lau, E. T., Nagai, D., Kravtsov, A. V., & Zentner, A. R., *Shapes of Gas, Gravitational Potential, and Dark Matter in Λ CDM Clusters*. 2011, *ApJ*, **734**, 93
- Lazanu, A., *Extracting cosmological parameters from N-body simulations using machine learning techniques*. 2021, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, **2021**, 039
- Lee, J., Ryu, S., & Baldi, M., *Disentangling Modified Gravity and Massive Neutrinos with Intrinsic Shape Alignments of Massive Halos*. 2023, *ApJ*, **945**, 15
- Lesgourgues, J., *The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) I : Overview*. 2011a, *arXiv e-prints*, [arXiv:1104.2932](https://arxiv.org/abs/1104.2932)
- Lesgourgues, J., *The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) III : Comparison with CAMB for LambdaCDM*. 2011b, *arXiv e-prints*, [arXiv:1104.2934](https://arxiv.org/abs/1104.2934)
- Lesgourgues, J. & Pastor, S., *Massive neutrinos and cosmology*. 2006, *Phys. Rep.*, **429**, 307
- Lesgourgues, J. & Tram, T., *The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) IV : efficient implementation of non-cold relics*. 2011, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, **2011**, 032
- Lewis, A. & Challinor, A., *21cm angular-power spectrum from the dark ages*. 2007, *Phys. Rev. D*, **76**, 083005
- Lewis, A. & Challinor, A., *CAMB : Code for Anisotropies in the Microwave Background*. 2011, [ascl:1102.026](https://arxiv.org/abs/1102.026)
- Limousin, M., Morandi, A., Sereno, M., et al., *The Three-Dimensional Shapes of Galaxy Clusters*. 2013, *Space Sci. Rev.*, **177**, 155

- Llinares, C. & Mota, D. F., *Shape of Clusters of Galaxies as a Probe of Screening Mechanisms in Modified Gravity*. 2013, *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 151104
- Llinares, C., Mota, D. F., & Winther, H. A., *ISIS : a new N-body cosmological code with scalar fields based on RAMSES. Code presentation and application to the shapes of clusters*. 2014, *A&A*, **562**, A78
- Lochner, M., McEwen, J. D., Peiris, H. V., Lahav, O., & Winter, M. K., *Photometric Supernova Classification with Machine Learning*. 2016, *ApJS*, **225**, 31
- López-Cano, D., Angulo, R. E., Ludlow, A. D., et al., *The cosmology dependence of the concentration-mass-redshift relation*. 2022, *MNRAS*, **517**, 2000
- Lovell, C. C., Wilkins, S. M., Thomas, P. A., et al., *A machine learning approach to mapping baryons on to dark matter haloes using the EAGLE and C-EAGLE simulations*. 2022, *MNRAS*, **509**, 5046
- Lovelock, D., *The Einstein Tensor and Its Generalizations*. 1971, *Journal of Mathematical Physics*, **12**, 498
- Lovelock, D., *The Four-Dimensionality of Space and the Einstein Tensor*. 1972, *Journal of Mathematical Physics*, **13**, 874
- Lucy, L. B., *A numerical approach to the testing of the fission hypothesis*. 1977, *AJ*, **82**, 1013
- Mandelbaum, R., Rowe, B., Bosch, J., et al., *The Third Gravitational Lensing Accuracy Testing (GREAT3) Challenge Handbook*. 2014, *ApJS*, **212**, 5
- Martin, J., *Everything you always wanted to know about the cosmological constant problem (but were afraid to ask)*. 2012, *Comptes Rendus Physique*, **13**, 566
- Marulli, F., Carbone, C., Viel, M., Moscardini, L., & Cimatti, A., *Effects of massive neutrinos on the large-scale structure of the Universe*. 2011, *MNRAS*, **418**, 346
- Michaux, M., Hahn, O., Rampf, C., & Angulo, R. E., *Accurate initial conditions for cosmological N-body simulations : minimizing truncation and discreteness errors*. 2021, *MNRAS*, **500**, 663
- Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A., & Kaiser, D. I. 2018, *Gravitation*
- Mo, H., van den Bosch, F. C., & White, S. 2010, *Galaxy Formation and Evolution*
- Mohammad, F. G., Villaescusa-Navarro, F., Genel, S., Anglés-Alcázar, D., & Vogelsberger, M., *Inpainting Hydrodynamical Maps with Deep Learning*. 2022, *ApJ*, **941**, 132

- Moore, B., Quinn, T., Governato, F., Stadel, J., & Lake, G., *Cold collapse and the core catastrophe*. 1999, [MNRAS](#), **310**, 1147
- More, S., Kravtsov, A. V., Dalal, N., & Gottlöber, S., *The Overdensity and Masses of the Friends-of-friends Halos and Universality of Halo Mass Function*. 2011, [ApJS](#), **195**, 4
- Naidoo, K., Whiteway, L., Massara, E., et al., *Beyond two-point statistics : using the minimum spanning tree as a tool for cosmology*. 2020, [MNRAS](#), **491**, 1709
- Navarro, A. & Navarro, J., *Lovelock's theorem revisited*. 2011, [Journal of Geometry and Physics](#), **61**, 1950
- Navarro, J., *On second-order, divergence-free tensors*. 2014, [Journal of Mathematical Physics](#), **55**, 062501
- Navarro, J. F., Frenk, C. S., & White, S. D. M., *A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering*. 1997, [ApJ](#), **490**, 493
- Niculescu-Mizil, A. & Caruana, R., *Predicting good probabilities with supervised learning*. 2005, in Proceedings of the 22nd international conference on Machine learning - ICML '05 (ACM Press)
- Oguri, M., Takada, M., Okabe, N., & Smith, G. P., *Direct measurement of dark matter halo ellipticity from two-dimensional lensing shear maps of 25 massive clusters*. 2010, [MNRAS](#), **405**, 2215
- Ohanian, H. C., *What is the principle of equivalence ?* 1977, [American Journal of Physics](#), **45**, 903
- Pace, F., Manera, M., Bacon, D. J., Crittenden, R., & Percival, W. J., *The importance of the cosmic web and halo substructure for power spectra*. 2015, [MNRAS](#), **454**, 708
- pandas development team, T. 2020, pandas-dev/pandas : Pandas
- Peacock, J. A. 1999, *Cosmological Physics*
- Pedregosa, F., Varoquaux, G., Gramfort, A., et al., *Scikit-learn : Machine Learning in Python*. 2011, Journal of Machine Learning Research, **12**, 2825
- Peebles, P. J. E. & Ratra, B., *Cosmology with a Time-Variable Cosmological "Constant"*. 1988, [ApJ](#), **325**, L17
- Pfungst, O. 1911, *Clever Hans:(the horse of Mr. Von Osten.) a contribution to experimental animal and human psychology* (Holt, Rinehart and Winston)
- Piattella, O. F., *Lecture Notes in Cosmology*. 2018, [arXiv e-prints](#), [arXiv:1803.00070](#)

- Planck Collaboration, Ade, P. A. R., Aghanim, N., et al., *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*. 2016, *A&A*, **594**, A13
- Planck Collaboration, Aghanim, N., Akrami, Y., et al., *Planck 2018 results. I. Overview and the cosmological legacy of Planck*. 2020, *A&A*, **641**, A1
- Planelles, S. & Quilis, V., *ASOBF : a new adaptive spherical overdensity halo finder*. 2010, *A&A*, **519**, A94
- Prada, F., Klypin, A. A., Cuesta, A. J., Betancort-Rijo, J. E., & Primack, J., *Halo concentrations in the standard Λ cold dark matter cosmology*. 2012, *MNRAS*, **423**, 3018
- Prada, J., Forero-Romero, J. E., Grand, R. J. J., Pakmor, R., & Springel, V., *Dark matter halo shapes in the Auriga simulations*. 2019, *MNRAS*, **490**, 4877
- Press, W. H. & Schechter, P., *Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation*. 1974, *ApJ*, **187**, 425
- Puchwein, E., Baldi, M., & Springel, V., *Modified-Gravity-GADGET : a new code for cosmological hydrodynamical simulations of modified gravity models*. 2013, *MNRAS*, **436**, 348
- Quinn, P. J., Salmon, J. K., & Zurek, W. H., *Primordial density fluctuations and the structure of galactic haloes*. 1986, *Nature*, **322**, 329
- Raimondi, D., Passemiers, A., Fariselli, P., & Moreau, Y., *Current cancer driver variant predictors learn to recognize driver genes instead of functional variants*. 2021, *BMC Biology*, 19
- Rasera, Y., Alimi, J. M., Courtin, J., et al., *Introducing the Dark Energy Universe Simulation Series (DEUSS)*. 2010, in American Institute of Physics Conference Series, Vol. 1241, Invisible Universe, ed. J.-M. Alimi & A. Fuözfa, 1134–1139
- Rasera, Y., Corasaniti, P. S., Alimi, J. M., et al., *Cosmic-variance limited Baryon Acoustic Oscillations from the DEUS-FUR Λ CDM simulation*. 2014, *MNRAS*, **440**, 1420
- Ratra, B. & Peebles, P. J. E., *Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field*. 1988, *Phys. Rev. D*, **37**, 3406
- Ravanbakhsh, S., Oliva, J., Fromenteau, S., et al., *Estimating Cosmological Parameters from the Dark Matter Distribution*. 2017, *arXiv e-prints*, [arXiv:1711.02033](https://arxiv.org/abs/1711.02033)
- Reverdy, V., Alimi, J.-M., Bouillot, V., et al., *DEUS full observable universe simulations : Numerical challenge and outlooks*. 2015, *The International Journal of High Performance Computing Applications*, **29**, 249

- Ribli, D., Pataki, B. Á., & Csabai, I., *An improved cosmological parameter inference scheme motivated by deep learning*. 2019, [Nature Astronomy](#), **3**, 93
- Rocklin, M., *Dask : Parallel computation with blocked algorithms and task scheduling*. 2015, in Proceedings of the 14th python in science conference No. 130-136, Citeseer
- Rossi, G., *On the initial shear field of the cosmic web*. 2012, [MNRAS](#), **421**, 296
- Röttgers, B., *pygad : Analyzing Gadget Simulations with Python*. 2018, [ascl:1811.014](#)
- Roy, F., Bouillot, V. R., & Rasera, Y., *pFoF : a highly scalable halo-finder for large cosmological data sets*. 2014, [A&A](#), **564**, A13
- Sadeh, I., Abdalla, F. B., & Lahav, O., *ANNz2 : Photometric Redshift and Probability Distribution Function Estimation using Machine Learning*. 2016, [PASP](#), **128**, 104502
- Salvato, M., Ilbert, O., & Hoyle, B., *The many flavours of photometric redshifts*. 2019, [Nature Astronomy](#), **3**, 212
- Schapire, R. E., *The strength of weak learnability*. 1990, [Machine Learning](#), **5**, 197
- Schaye, J., Crain, R. A., Bower, R. G., et al., *The EAGLE project : simulating the evolution and assembly of galaxies and their environments*. 2015, [MNRAS](#), **446**, 521
- Schaye, J., Dalla Vecchia, C., Booth, C. M., et al., *The physics driving the cosmic star formation history*. 2010, [MNRAS](#), **402**, 1536
- Schmidt, F., *Dynamical masses in modified gravity*. 2010, [Phys. Rev. D](#), **81**, 103002
- Schneider, A. & Teyssier, R., *A new method to quantify the effects of baryons on the matter power spectrum*. 2015, [J. Cosmology Astropart. Phys.](#), **2015**, 049
- Secrest, N. J., von Hausegger, S., Rameez, M., Mohayaee, R., & Sarkar, S., *A Challenge to the Standard Cosmological Model*. 2022, [ApJ](#), **937**, L31
- Secrest, N. J., von Hausegger, S., Rameez, M., et al., *A Test of the Cosmological Principle with Quasars*. 2021, [ApJ](#), **908**, L51
- Sheth, R. K., Mo, H. J., & Tormen, G., *Ellipsoidal collapse and an improved model for the number and spatial distribution of dark matter haloes*. 2001, [MNRAS](#), **323**, 1
- Sijacki, D., Vogelsberger, M., Genel, S., et al., *The Illustris simulation : the evolving population of black holes across cosmic time*. 2015, [MNRAS](#), **452**, 575

- Springel, V., White, S. D. M., Jenkins, A., et al., *Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars*. 2005, [Nature](#), **435**, 629
- Stadel, J., Potter, D., Moore, B., et al., *Quantifying the heart of darkness with GHALO - a multibillion particle simulation of a galactic halo*. 2009, [MNRAS](#), **398**, L21
- Stapelberg, S., Tchernin, C., Hug, D., Lau, E. T., & Bartelmann, M., *Triaxiality in galaxy clusters : Mass versus potential reconstructions*. 2022, [A&A](#), **663**, A17
- Steinhardt, P. J., *A quintessential introduction to dark energy*. 2003, [Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A](#), **361**, 2497
- Suto, D., Kitayama, T., Nishimichi, T., Sasaki, S., & Suto, Y., *Evolution and statistics of non-sphericity of dark matter halos from cosmological N-body simulation*. 2016, [PASJ](#), **68**, 97
- Sutter, P. M. & Ricker, P. M., *Examining Subgrid Models of Supermassive Black Holes in Cosmological Simulation*. 2010, [ApJ](#), **723**, 1308
- Tange, O. 2018, *Gnu Parallel 2018* (Zenodo)
- Teyssier, R., *Cosmological hydrodynamics with adaptive mesh refinement. A new high resolution code called RAMSES*. 2002, [A&A](#), **385**, 337
- Thomas, D. B. & Contaldi, C. R., *Viability of the cluster mass function formalism in parametrised modified gravity*. 2011, [arXiv e-prints](#), [arXiv:1112.6378](#)
- Touboul, P., Métris, G., Rodrigues, M., et al., *MICROSCOPE Mission : First Results of a Space Test of the Equivalence Principle*. 2017, [Phys. Rev. Lett.](#), **119**, 231101
- Touboul, P., Métris, G., Rodrigues, M., et al., *M I C R O S C O P E Mission : Final Results of the Test of the Equivalence Principle*. 2022, [Phys. Rev. Lett.](#), **129**, 121102
- Tsujikawa, S., *Modified Gravity Models of Dark Energy*. 2010, in *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, ed. G. Wolschin, Vol. 800, 99–145
- van Daalen, M. P. & Schaye, J., *The contributions of matter inside and outside of haloes to the matter power spectrum*. 2015, [MNRAS](#), **452**, 2247
- Vega-Ferrero, J., Yepes, G., & Gottlöber, S., *On the shape of dark matter haloes from MultiDark Planck simulations*. 2017, [MNRAS](#), **467**, 3226
- Vermeil, H., *Notiz über das mittlere KrümmungsmaSS einer n-fach ausgedehnten Riemann'schen Mannigfaltigkeit*. 1917, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1917, 334

- Villaescusa-Navarro, F., *Pylians : Python libraries for the analysis of numerical simulations*. 2018, [ascl:1811.008](#)
- Villaescusa-Navarro, F., Anglés-Alcázar, D., Genel, S., et al., *The CAMELS Project : Cosmology and Astrophysics with Machine-learning Simulations*. 2021, [ApJ](#), **915**, 71
- Villaescusa-Navarro, F., Hahn, C., Massara, E., et al., *The Quijote Simulations*. 2020, [ApJS](#), **250**, 2
- Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., et al., *SciPy 1.0 : Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python*. 2020, [Nature Methods](#), **17**, 261
- Vogelsberger, M., Genel, S., Sijacki, D., et al., *A model for cosmological simulations of galaxy formation physics*. 2013, [MNRAS](#), **436**, 3031
- Vogelsberger, M., Genel, S., Springel, V., et al., *Properties of galaxies reproduced by a hydrodynamic simulation*. 2014a, [Nature](#), **509**, 177
- Vogelsberger, M., Genel, S., Springel, V., et al., *Introducing the Illustris Project : simulating the coevolution of dark and visible matter in the Universe*. 2014b, [MNRAS](#), **444**, 1518
- Vogelsberger, M., Marinacci, F., Torrey, P., & Puchwein, E., *Cosmological simulations of galaxy formation*. 2020, [Nature Reviews Physics](#), **2**, 42
- Wallis, D. & Buvat, I., *Clever Hans effect found in a widely used brain tumour MRI dataset*. 2022, [Medical Image Analysis](#), **77**, 102368
- Wang, J. & White, S. D. M., *Are mergers responsible for universal halo properties ?* 2009, [MNRAS](#), **396**, 709
- Wang, Z., Mirpoorian, S. H., Pogosian, L., Silvestri, A., & Zhao, G.-B., *New MGCAMB tests of gravity with CosmoMC and Cobaya*. 2023, [J. Cosmology Astropart. Phys.](#), **2023**, 038
- Warren, M. S., Abazajian, K., Holz, D. E., & Teodoro, L., *Precision Determination of the Mass Function of Dark Matter Halos*. 2006, [ApJ](#), **646**, 881
- Wechsler, R. H., Bullock, J. S., Primack, J. R., Kravtsov, A. V., & Dekel, A., *Concentrations of Dark Halos from Their Assembly Histories*. 2002, [ApJ](#), **568**, 52
- Weinberg, N. N. & Kamionkowski, M., *Constraining dark energy from the abundance of weak gravitational lenses*. 2003, [MNRAS](#), **341**, 251
- Weinberg, S. 1972, *Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity*

- Wes McKinney, *Data Structures for Statistical Computing in Python*. 2010, in Proceedings of the 9th Python in Science Conference, ed. Stéfan van der Walt & Jarrod Millman, 56 – 61
- White, M., *The mass of a halo*. 2001, *A&A*, **367**, 27
- White, S. D. M. & Frenk, C. S., *Galaxy Formation through Hierarchical Clustering*. 1991, *ApJ*, **379**, 52
- White, S. D. M. & Rees, M. J., *Core condensation in heavy halos : a two-stage theory for galaxy formation and clustering*. 1978, *MNRAS*, **183**, 341
- Will, C. M., *The Confrontation between General Relativity and Experiment*. 2014, *Living Reviews in Relativity*, **17**, 4
- Winkler, R. L., Muñoz, J., Cervera, J. L., et al., *Scoring rules and the evaluation of probabilities*. 1996, *Test*, 5, 1
- Winther, H. A., Schmidt, F., Barreira, A., et al., *Modified gravity N-body code comparison project*. 2015, *MNRAS*, **454**, 4208
- Workman, R. L., Burkert, V. D., Crede, V., et al., *Review of Particle Physics*. 2022, *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, **2022**, 083C01
- York, J. W., *Role of Conformal Three-Geometry in the Dynamics of Gravitation*. 1972, *Phys. Rev. Lett.*, **28**, 1082
- Zel'dovich, Y. B., *Gravitational instability : An approximate theory for large density perturbations*. 1970, *A&A*, **5**, 84
- Zemp, M., Gnedin, O. Y., Gnedin, N. Y., & Kravtsov, A. V., *On Determining the Shape of Matter Distributions*. 2011, *ApJS*, **197**, 30
- Zhao, G.-B., Pogosian, L., Silvestri, A., & Zylberberg, J., *Searching for modified growth patterns with tomographic surveys*. 2009, *Phys. Rev. D*, **79**, 083513
- Zhao, H., *Analytical models for galactic nuclei*. 1996, *MNRAS*, **278**, 488
- Zhu, Z., Xie, L., & Yuille, A., *Object Recognition with and without Objects*. 2017, in Proceedings of the Twenty-Sixth International Joint Conference on Artificial Intelligence (International Joint Conferences on Artificial Intelligence Organization)
- Zucca, A., Pogosian, L., Silvestri, A., & Zhao, G. B., *MGCAMB with massive neutrinos and dynamical dark energy*. 2019, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, **2019**, 001

RÉSUMÉ

Les halos de matière noire sont des structures fondamentales en cosmologie. La complexité de leur processus de formation est une conséquence directe du caractère fortement non-linéaire de la dynamique gravitationnelle dont ils sont le produit. Ainsi, les propriétés des halos ne dépendent pas seulement des détails de leur environnement immédiat ; elles sont également fortement imprégnées par la dynamique d'expansion de l'Univers d'arrière-plan. La complexité du processus d'effondrement des halos se manifeste aussi au travers de leur structure, et en particulier de leur forme. Si, en première approximation, les halos peuvent être décrits comme des sphères parfaites, la nécessité d'une description ellipsoïdale est maintenant bien établie. Dans cette thèse, nous mettons en évidence une relation, indépendante de la cosmologie, entre la forme des halos simulés de matière noire et la variance lissée des fluctuations non-linéaires de la densité du champ de matière cosmique. L'universalité de cette relation est indépendante du décalage vers le rouge, de l'état de relaxation des halos étudiés ou même de l'algorithme utilisé pour les détecter. Nous montrons que cette propriété de l'effondrement des halos conduit à une nouvelle méthode de mesure du spectre de puissance de la matière cosmique. Nous étendons ensuite le résultat aux modèles de gravité modifiée et nous expliquons comment les mécanismes d'écrantage altèrent la relation liant cosmologie et forme des halos. En ce sens, nous élaborons une nouvelle sonde de la gravité modifiée. Enfin, nous proposons d'utiliser les propriétés de masse et de forme d'ellipsoïdes confocaux décrivant la distribution de matière dans les halos simulés, pour détecter la cosmologie. À cet effet, nous recourons à des outils d'apprentissage automatique, des arbres de décision agrégés par descente de gradient. Nous insisterons dans cette partie sur les nombreuses embuches méthodologiques que cette approche génère, et notamment des effets de type *Clever Hans* qui découlent de la granularité des données. Nous montrerons que leur détection et leur élimination sont nécessaires à toute interprétation physique des résultats.

MOTS CLÉS

Cosmologie, structuration de l'Univers, gravité modifiée, apprentissage automatique, énergie noire

ABSTRACT

Dark matter halos are fundamental structures in cosmology. The complexity of their formation process is a direct consequence of the highly non-linear nature of the gravitational dynamics of which they are the product. Thus, the properties of halos depend not only on the details of their immediate environment, but are also strongly influenced by the expansion dynamics of the background Universe. The complexity of the collapsing halos is also apparent in their structure, and in particular in their shape. While, to a first approximation, halos can be described as perfect spheres, the need for an ellipsoidal description is now well established. In this thesis, we demonstrate a cosmology-independent relationship between the shape of simulated dark matter halos and the smoothed variance of nonlinear power spectrum. The universality of this relationship is independent of the redshift, the relaxation state of the halos or even the algorithm used to detect them. We show that this property of halo collapse leads to a new method to measure the power spectrum of cosmic matter. We then extend the result to modified-gravity models, and explain how screening mechanisms alter the relationship linking cosmology and halo shape. In this way, we develop a new probe of modified gravity. Finally, we propose to use the mass and shape properties of confocal ellipsoids, which describe the distribution of matter in simulated halos, to detect cosmology. To this end, we use machine learning tools, decision trees aggregated by gradient boosting. We will focus on the many methodological pitfalls this approach generates, and in particular the so-called *Clever Hans* effects which arise from the granularity of the data. We will show that their detection and elimination are necessary for any physical interpretation of the results.

KEYWORDS

Cosmology, large scale structure, modified gravity, machine learning, dark energy