



HAL
open science

Les absorbeurs dynamiques non linéaires multi-stables.

Islem Bouzid

► **To cite this version:**

Islem Bouzid. Les absorbeurs dynamiques non linéaires multi-stables.. Acoustique [physics.class-ph]. Ecole Centrale Marseille; École nationale d'ingénieurs de Sfax (Tunisie), 2023. Français. NNT : 2023ECDM0006 . tel-04805769

HAL Id: tel-04805769

<https://theses.hal.science/tel-04805769v1>

Submitted on 26 Nov 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE EN COTUTELLE

Entre l'École Centrale Méditerranée et l'École Nationale d'Ingénieurs de Sfax
Soutenue au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille
le 13 décembre 2023 par

Islem Bouzid

Les absorbeurs dynamiques non linéaires multi-stables

Discipline

Sciences pour l'Ingénieur

Spécialité

Diplôme français : acoustique

Diplôme tunisien : mécanique

École doctorale

ED 353 sciences pour l'ingénieur : mécanique,
physique, micro et nanélectronique

ED Sciences et Technologies

Laboratoires

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de
Marseille

Laboratoire de Mécanique, Modélisation et
Production de Sfax

Composition du jury

Émeline SADOULET-REBOUL	Rapporteuse
Maître de Conférence HDR, EMTOST/uFC, Besançon	
Mohamed Najib ICHCHOU	Rapporteur
Professeur, LTDS/ECL, Lyon	
Nabih FEKI	Examineur
Professeur associé, ISSAT, Sousse	
Olivier THOMAS	Président du jury
Professeur, LMSSC/AM, campus de Lille	
Pierre-Olivier MATTEI	Directeur de thèse français
Chercheur HDR, LMA/ECM, Marseille	
Taher FAKHFAKH	Directeur de thèse tuni- sien
Professeur, ENIS, Sfax	
Renaud CÔTE	Coencadrant de thèse français
Maître de Conférence, LMA/AMU/ECM, Marseille	
Mohamed HADDAR	Coencadrant de thèse tunisien
Professeur, ENIS, Sfax	

Affidavit

Je soussignée, Islem Bouzid, déclare par la présente que le travail présenté dans ce manuscrit est mon propre travail, réalisé sous la direction scientifique de Pierre-Olivier Mattei, Renaud Côte, Tahar Fakhfakh et Mohamed Haddar dans le respect des principes d'honnêteté, d'intégrité et de responsabilité inhérents à la mission de recherche. Les travaux de recherche et la rédaction de ce manuscrit ont été réalisés dans le respect à la fois de la charte nationale de déontologie des métiers de la recherche et de la charte d'Aix-Marseille Université relative à la lutte contre le plagiat.

Ce travail n'a pas été précédemment soumis en France ou à l'étranger dans une version identique ou similaire à un organisme examinateur.

Fait à Paris le 25/09/2023



Cette œuvre est mise à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International.

Liste de publications et participation aux conférences

Liste des publications et/ou brevets réalisées dans le cadre du projet de thèse:

1. Bouzid I., Côte R., Fakhfakh T., Haddar M. and Mattei P.-O. 2022. Identification of the parameters of a simplified 2 degree of freedom model of a nonlinear vibroacoustic absorber coupled to an acoustic system in linear and nonlinear forced regimes. *Acta Acustica*, 6, 60. DOI:10.1051/aacus/2022056.

Participation aux conférences et écoles d'été au cours de la période de thèse:

1. Bouzid I., Mattei P.-O., Côte R., Fakhfakh T. and Haddar M. "Numerical estimation of the NES damping coefficient in both linear and nonlinear domains", International Conference on Acoustics and Vibration 2020. 2020, March, Hammamet, Tunisia.
2. Bouzid I., Mattei P.-O., Côte R., Fakhfakh T. and Haddar M. "Identification of the damping coefficient of a NES in both linear and non-linear domains", Forum Acusticum 2020. 2020, Décembre, Lyon, France.
3. Bouzid I., Mattei P.-O., Côte R., Fakhfakh T. and Haddar M. "Identification of the parameters of a simplified 2dof model of vibroacoustic absorber coupled to an acoustic system in forced linear and nonlinear regimes", International Congress Design and Modelling of Mechanical Systems 2021. 2021, December, Hammamet, Tunisia.

Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse concerne une solution d'absorbeur non linéaire vibroacoustique à amortissement non linéaire constitué par une fine membrane circulaire, développée dans le but de contrôler le bruit dans un milieu acoustique constitué par le premier mode de vibration d'un tube ouvert à ces deux extrémités. L'objectif principal de cette thèse est double : d'une part, maîtriser la modélisation de ces absorbeurs, et d'autre part, élargir leur plage d'efficacité en introduisant une nouvelle solution d'absorbeur non linéaire vibroacoustique bistable.

Pour maîtriser la modélisation de ces absorbeurs, une méthode d'identification est développée en premier lieu, permettant ainsi d'estimer la variation des paramètres du modèle simplifié du système couplé tube membrane monostable en fonction de l'amplitude d'excitation. En raison de la forte variabilité de l'amortissement révélée par les résultats de l'identification et étant donné l'existence d'un terme d'amortissement non linéaire supplémentaire au terme de raideur cubique, une étude analytique est réalisée pour évaluer l'impact de l'amortissement non linéaire sur la dynamique du système.

Une démarche d'optimisation numérique est mise en place pour examiner et comparer l'efficacité de l'atténuation des membranes bistables et monostables. Les résultats de cette optimisation sont confirmés par une étude numérique approfondie de la dynamique du système couplé tube-membrane pour différentes valeurs de raideur linéaire. Ensuite, une étude analytique du système couplé tube-membrane bistable est présentée, visant à expliquer les principaux résultats de l'optimisation. Pour cela, une nouvelle technique de calcul est présentée. Elle permet de développer des modèles analytiques décrivant la dynamique permanente en régime forcé très riche de notre système bistable. Cette technique repose sur une transformation de coordonnées qui introduit une position d'équilibre variable appelée position d'équilibre dynamique.

Ces travaux sont clôturés par une étude expérimentale dédiée à la validation des principaux résultats de l'optimisation et à l'évaluation de la variabilité de la position d'équilibre dynamique.

Mots clés: non linéaire, multi-stable, pompage énergétique.

Abstract

This work focuses on a nonlinear vibroacoustic absorber system with nonlinear damping, consisting of a thin circular membrane. It was developed with the aim of controlling noise in an acoustic environment constituted by the first mode of vibration of a tube open at both ends. The main objective of this thesis is twofold: first, to master the modeling of these absorbers, and second, to extend their range of effectiveness by introducing a new solution for a nonlinear bistable vibroacoustic absorber.

In order to master the modeling of these absorbers, an identification method is first developed, that allows the estimation of parameter variations in the simplified model of the coupled tube-monostable membrane system as a function of excitation amplitude. Due to the significant damping variability revealed by the identification results and the presence of an additional nonlinear damping term beyond the cubic stiffness term, an analytical study is conducted to assess the impact of nonlinear damping on the system dynamics.

A numerical optimization approach is implemented to study and compare the damping effectiveness of bistable and monostable membranes. The optimization results are further validated by an in-depth numerical study of the coupled tube-membrane system dynamics for different linear stiffness values. Then, an analytical study of the coupled tube-bistable membrane system is presented, to explain the key findings of the optimization. To this end, a new calculation technique is introduced, which allows the development of analytical models describing the rich forced steady-state dynamics of our bistable system. This technique is based on a coordinate transformation that introduces a variable equilibrium position called the dynamic equilibrium position.

This work is concluded with an experimental study dedicated to validate the main results of the optimization and to assess the variability of the dynamic equilibrium position.

Keywords: non-linear, Multi-stable, energy pumping

Remerciements

Il m'est difficile de rendre hommage à chacun individuellement, car c'est grâce à la contribution de nombreuses personnes que j'ai pu achever cette thèse avec succès.

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers Émeline Sadoulet-Reboul et Mohamed Najib Ichchou d'avoir accepté d'assumer le rôle de rapporteurs de ma thèse, ainsi qu'à Olivier Thomas d'avoir accepté la présidence de mon jury. Je remercie également chaleureusement Nabih Feki pour sa participation au jury de thèse.

Un remerciement spécial va à mes encadrants de thèse, Pierre-Olivier Mattei, Renaud Côte, Tahar Fakhfakh et Mohahmed Haddar pour leur précieuse guidance et leur soutien constant. Travailler avec eux a été une expérience enrichissante, non seulement en termes de développement scientifique, mais aussi pour leurs conseils tout au long de l'élaboration de cette thèse.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance envers mes professeurs Tahar Fakhfakh et Mohamed Haddar pour m'avoir offert cette opportunité, résultant d'une collaboration fructueuse entre LA2MP et LMA.

Je souhaite également exprimer ma profonde gratitude envers mes encadrants du côté français, Pierre-Olivier Mattei et Renaud Côte, pour leur disponibilité, leurs discussions éclairées, leurs conseils précieux et leur encouragement qui ont accompagné l'ensemble de mon parcours académique. Leur soutien m'a permis de développer mes compétences et de repousser mes limites intellectuelles.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers ma famille, qui a été une source inépuisable de soutien, d'amour et d'encouragement tout au long de cette aventure académique. Mes parents Alifa et Mohamed Hadi, avec leur amour inconditionnel et leurs sacrifices, ont été mes piliers les plus solides, me permettant de poursuivre ce voyage avec confiance. Ma sœur Farah, mon frère Miras, ainsi que sa femme Imen et leurs filles Ousswa et Massara, ont toujours été là pour moi, me rappelant que la vie en dehors de mes recherches est tout aussi précieuse.

Je tiens également à remercier chaleureusement mon mari Kais, qui a été mon pilier de force et ma source d'inspiration. Son soutien indéfectible, sa patience et son amour m'ont donné la détermination nécessaire pour mener à bien cette thèse.

Introduction générale

La réduction du bruit constitue un des enjeux majeurs dans le domaine de l'Acoustique. Une étude réalisée en 2021 pour le compte de l'Agence de la Transition écologique (ADEME) en collaboration avec plusieurs organismes tels que le Conseil national du bruit (CNB) et le Centre d'information sur le Bruit (CIDB) [1], a estimé le coût social du bruit en France à 147,1 milliards d'euros par an. Ce coût est lié principalement au bruit des transports, de voisinage et du bruit dans le milieu du travail. Dans ce cadre, d'importants efforts de développement ont été menés, aussi bien dans l'industrie que dans les laboratoires de recherche, afin de trouver des solutions efficaces à ce problème.

Le contrôle du bruit repose sur l'utilisation de deux principales catégories de technologies, comme décrit dans [2] : le contrôle passif et le contrôle actif du bruit. Le contrôle actif implique la réduction en temps réel des nuisances sonores en émettant des ondes sonores en opposition de phase pour annuler les bruits indésirables. Cependant, cette approche peut entraîner des coûts élevés, principalement en raison de la nécessité d'installer des capteurs, des processeurs et des haut-parleurs spécialisés, ce qui demande une expertise technique avancée pour sa conception et sa mise en œuvre. Le contrôle passif, quant à lui, repose sur l'utilisation de dispositifs capables d'absorber l'énergie acoustique, tels que les matériaux absorbants et les résonateurs de Helmholtz. Les matériaux absorbants, grâce à leur nature poreuse, peuvent offrir une dissipation significative du son sur une large bande de fréquences, notamment dans les gammes aiguës et médianes. Cependant, leur efficacité diminue considérablement pour les basses fréquences, car elles nécessitent une épaisseur de matériau absorbant bien plus importante que ce qui est réalisable en pratique. Le résonateur de Helmholtz est l'équivalent acoustique du résonateur de Frahm et se compose d'une ouverture suivie d'une chambre d'air. Cet absorbeur offre une atténuation efficace à une fréquence spécifique déterminée par les dimensions de la chambre et de l'ouverture. Contrairement aux matériaux absorbants, le résonateur de Helmholtz peut être efficace pour atténuer les basses fréquences, mais il n'est pas adapté pour une atténuation sur un large spectre de fréquences.

Pour le contrôle passif des basses fréquences, les dispositifs les plus appropriés pour surmonter ces limitations sont les absorbeurs non linéaires, également connus sous le nom de Nonlinear Energy Sink (NES). Ces absorbeurs se caractérisent par le phénomène de Pompage Énergétique (PE), qui implique le transfert unidirectionnel et irréversible de l'énergie du Système Primaire ou Principal (SP) contrôlé vers le NES. Ils sont généralement caractérisés d'un terme de raideur non linéaire cubique et offrent une capacité d'atténuation efficace sur une large gamme de fréquences. Cependant, ces absorbeurs non linéaires présentent des seuils d'activation et de désactivation du PE, au-delà desquels aucun transfert d'énergie efficace n'est observé. Une limitation notable de ces absorbeurs est leur plage d'efficacité réduite, qui se limite aux niveaux d'excitation élevés.

Pour remédier à cette limitation, des solutions basées sur l'utilisation d'absorbeurs non linéaires bistables, également connus sous le nom de NES bistables, ont été utilisées. En raison de leur propriété de ramollissement à de faibles niveaux de vibrations et de raidissement à des niveaux élevés, ces absorbeurs ont le potentiel d'offrir des performances supérieures par rapport à un NES classique monostable.

Dans le domaine acoustique, le premier travail qui a montré expérimentalement la présence du phénomène de PE a été proposé en 2006 au Laboratoire de Mécanique et Acoustique [3]. Cette expérience a consisté à contrôler un champ acoustique présenté par le premier mode acoustique d'un tube ouvert à ces deux extrémités à travers un absorbeur non linéaire vibroacoustique qui était constitué par une fine membrane circulaire viscoélastique. Le couplage entre ces deux oscillateurs a été réalisé par une boîte de couplage. Le champ acoustique d'excitation a été fourni par un haut-parleur. Par la suite, la thèse de R. Bellet a été réalisée dans le but de poursuivre ce travail [4]. Une version améliorée de ce montage a été proposée. Le modèle théorique simplifié de ce système a été développé. Par rapport aux absorbeurs non linéaires classiques (NES cubique), cet absorbeur présente un terme d'amortissement non linéaire qui s'ajoute au terme de raideur cubique. Le phénomène de PE a été étudié expérimentalement et numériquement [5]. Afin d'élargir la zone du phénomène de PE, une solution qui consiste à l'utilisation de différentes membranes montées parallèlement sur la boîte de couplage a été proposée [6].

Cette thèse consiste à explorer une nouvelle solution à base d'absorbeur non linéaire vibroacoustique bistable afin d'étendre la zone de fonctionnement de cette membrane non linéaire à caractère monostable. L'objectif principal de cette thèse est double : d'une part, maîtriser la modélisation de ces absorbeurs, et d'autre part, explorer une nouvelle solution d'absorbeur non linéaire vibroacoustique bistable afin d'élargir la plage d'efficacité de cet absorbeur.

Cette thèse présente sept chapitres. Dans le premier chapitre, nous introduisons le contexte de ces travaux de thèse et nous présentons également en détail la démarche scientifique suivie dans ce manuscrit. Les deuxième et troisième chapitres visent à obtenir une maîtrise quantitative de la modélisation des membranes. Dans le deuxième chapitre, nous développons une démarche d'identification qui permet d'estimer la variation des paramètres du modèle simplifié du système couplé tube membrane monostable en fonction de l'amplitude d'excitation. Vu l'étude paramétrique réalisée dans la thèse de R. Bellet et qui montre l'impact de l'amortissement linéaire sur le comportement du système, nous consacrons le troisième chapitre à l'étude analytique de l'amortissement non linéaire de la membrane monostable. Dans le quatrième chapitre, une démarche d'optimisation numérique est développée pour étudier et comparer l'efficacité de l'atténuation des membranes bistables et monostables. Les résultats de cette optimisation sont vérifiés par une étude numérique approfondie de la dynamique de notre système couplé tube-membrane pour différentes valeurs de raideur linéaire. Dans le cinquième chapitre, on propose une étude analytique du système couplé tube-membrane bistable qui permet d'expliquer les principaux résultats du chapitre précédent. Pour cela, nous proposons une nouvelle technique de calcul qui permet de développer des modèles analytiques pour décrire la dynamique permanente en régime forcé très riche de notre système bistable. Cette technique est basée sur une transformation de coordonnées qui introduit une position d'équilibre variable dite position d'équilibre dynamique. Dans le sixième chapitre, un

modèle expérimental de membrane bistable est proposé pour valider à la fois le résultat de l'optimisation et la variabilité de la position d'équilibre dynamique. Enfin, nous clôturons ce manuscrit par une conclusion dans laquelle les principaux résultats et perspectives sont présentés.

Table des Matières

Affidavit	3
Liste de publications et participation aux conférences	5
Résumé	7
Abstract	9
Remerciements	11
1 Étude bibliographique et démarche scientifique	21
1.1 Contrôle passif de vibration	21
1.1.1 Absorbours à masse accordée	21
1.1.2 Absorbours non linéaires (NES)	22
1.2 Pompage énergétique	24
1.2.1 Pompage énergétique sous excitation transitoire	24
1.2.2 Pompage énergétique sous excitation harmonique	26
1.3 Différents types de NES	29
1.4 Oscillateur de Duffing	30
1.4.1 Dépendance énergie fréquence	32
1.4.2 Réponse chaotique	34
1.4.3 Méthodes analytiques pour la dynamique bistable	34
1.5 Absorbours non linéaires bistables	35
1.6 L'atténuation du bruit	37
1.7 Système étudié et démarche scientifique	40
1.8 Conclusion	43
2 Identification des paramètres d'un modèle de NES	45
2.1 Description du système utilisé dans l'étude	45
2.1.1 Description du dispositif expérimental	45
2.1.2 Essai expérimentaux	46
2.2 Méthode d'identification	47
2.2.1 Modèle simplifié du système	47
2.2.2 Détermination des paramètres du système en régime linéaire	49
2.2.3 Fonctionnelles décrivant le déplacement de la membrane et de l'air en bout du tube	49
2.2.4 Procédure d'inversion	54
2.3 Résultats	55
2.3.1 Réponses fréquentielles	55
2.3.2 Réponses temporelles	58

2.3.3	Variation estimée des paramètres	62
3	Étude analytique d'un système avec NES monostable	69
3.1	Les solutions périodiques	69
3.2	Étude asymptotique	72
3.2.1	Ordre γ^0 : variété invariante	73
3.2.2	Ordre γ^1 : la réponse fortement modulée	76
3.3	Bifurcation des solutions périodiques	81
3.3.1	Bifurcation de SN	82
3.3.2	Bifurcation d'Hopf	83
3.3.3	Détection la présence du régime fortement modulé	85
3.4	Effet de l'ajout de l'amortissement non linéaire	87
3.4.1	Effet sur le comportement fréquentiel	87
3.4.2	Effet sur les limites de bifurcation des solutions périodiques	88
3.4.3	Effet sur la variété invariante	89
4	Optimisation numérique du système couplé tube-membrane	93
4.1	Vers un système bistable	94
4.1.1	Énergie potentielle	94
4.1.2	Courbes caractéristiques	94
4.1.3	Fréquences propres couplées	95
4.2	Méthode d'optimisation	97
4.3	Variation de l'aire sous la courbe de crête en fonction de la raideur linéaire de la membrane	99
4.4	Courbes de crête	100
4.4.1	Système monostable	100
4.4.2	Système bistable	101
4.4.3	Comparaison entre les systèmes monostable et bistable	103
4.5	Réponse fréquentielle	105
4.5.1	Système monostable	105
4.5.2	Système bistable	107
4.6	Ratio d'efficacité de la membrane	114
4.6.1	Système monostable	117
4.6.2	Système bistable	118
4.7	Utilisation d'autres configurations de membrane	134
5	Étude analytique d'un système avec NES bistable	143
5.1	Les solutions périodiques	144
5.1.1	Méthode de complexification averaging	144
5.1.2	Méthode d'équilibrage harmonique	151
5.2	Bifurcation des solutions périodiques	159
5.2.1	Bifurcation à nœud en selle	159
5.2.2	Bifurcation d'Hopf	160
5.3	Explication des résultats de l'optimisation	165
5.4	Étude asymptotique : VI	169
5.4.1	Étude Analytique	169
5.4.2	Explication des résultats de l'optimisation	176
5.5	Position d'équilibre dynamique	178
5.6	Conclusion	179

6	Étude expérimentale d'un système avec NES bistable	183
6.1	Dispositif et essais expérimentaux	183
6.2	Réponse fréquentielle	186
6.3	La variation de l'aire sous la courbe de crête	189
6.4	Variabilité de la position d'équilibre dynamique	189
6.5	Conclusion	190

Chapitre 1

Étude bibliographique et démarche scientifique

Introduction

Ce chapitre introduit le contexte de cette thèse. Tout d'abord, les deux principales techniques du contrôle passif de vibration en dynamique linéaire et non linéaire sont exposées et comparées. Ensuite, les principaux résultats du PE (PE) ainsi que les différents types de NES sont présentés. L'équation de l'oscillateur de Duffing est par la suite étudiée dans ce chapitre afin de présenter les principales caractéristiques d'un oscillateur bistable. Les méthodes analytiques utilisées pour décrire la dynamique de cet oscillateur sont présentées. Puis, on s'intéresse aux précédentes études effectuées sur les NES bistables. On s'est ensuite focalisé sur les différents dispositifs utilisés dans la littérature pour le contrôle de bruit. La fin du chapitre sera consacrée à la présentation en détail de la démarche scientifique adoptée au sein de ce travail.

1.1 Contrôle passif de vibration

Le contrôle des vibrations dans les systèmes mécaniques nécessite généralement l'utilisation de diverses stratégies visant à réduire ces vibrations indésirables. Ces stratégies sont classées en deux types : contrôle actif ou contrôle passif. Dans cette partie, nous nous sommes intéressés au contrôle passif de vibration, à savoir les absorbeurs à masse accordée et les absorbeurs non linéaires de type NES.

1.1.1 Absorbeurs à masse accordée

L'absorbeur à masse accordée, couramment appelé Tuned Mass Damper (TMD), est constitué d'un oscillateur linéaire comprenant une masse reliée à la structure principale à l'aide d'un ressort et d'un amortisseur. Un tel absorbeur est présenté dans la Figure 1.1. La première solution de ce type d'absorbeur a été proposée par Frahm en 1909 [7].

Pour étudier l'efficacité de ce type d'absorbeur dans l'atténuation des vibrations, nous avons présenté la réponse fréquentielle d'un SP linéaire de pulsation propre $\omega_{PS} = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ dans la Figure Fig.1.2. Nous avons examiné quatre cas différents : le SP non couplé à un TMD, le SP couplé à un TMD accordé avec une pulsation propre $\omega_{TMD} = \omega_{PS}$, et le SP couplé à des TMD non accordés avec des pulsations propres de $\omega_{TMD} = 0.5 \text{ rad.s}^{-1}$ et

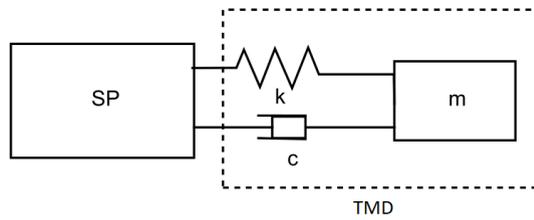


Figure 1.1: Schéma d'un SP couplé à un amortissement à masse accordée (TMD).

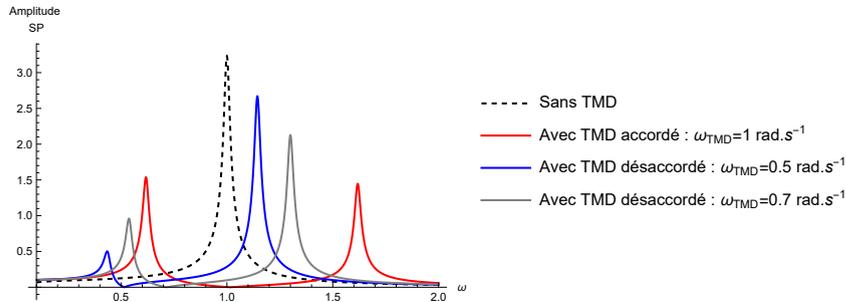


Figure 1.2: La superposition des réponses fréquentielles d'un SP couplé avec trois différents TMD.

$$\omega_{\text{TMD}} = 0.7 \text{ rad.s}^{-1}.$$

Comme le montre cette figure, l'efficacité maximale d'atténuation de cet absorbeur est observée à sa pulsation propre ω_{TMD} (effet de Frahm). Lorsque le SP est excité autour de sa fréquence de résonance ω_{PS} , le TMD doit être réglé à cette fréquence pour obtenir la meilleure atténuation, on dit alors que le TMD est accordé au SP. Cependant, pour une plage étendue d'excitation, cet absorbeur devient moins efficace en raison de l'apparition de deux nouveaux pics de résonance (correspondant aux fréquences propres couplées) présentant des amplitudes de vibration élevées.

Il est important de noter que des facteurs tels que les variations de la fréquence d'excitation ou le vieillissement des composants peuvent perturber l'efficacité de cet absorbeur, entraînant des amplitudes de vibration plus élevées.

1.1.2 Absorbeurs non linéaires (NES)

L'idée de l'absorbeur non linéaire réside dans la modification de l'absorbeur à masse accordée en remplaçant la caractéristique de raideur linéaire par une raideur non linéaire (voir Fig.1.3). Le premier absorbeur non linéaire a été proposé par Robertson en 1950 [8]. Cet absorbeur présente deux termes de raideur, l'un linéaire et l'autre non linéaire cubique. Robertson montre dans cet article que l'absorbeur en question présente un avantage considérable par rapport à l'absorbeur linéaire correspondant, en ce qui concerne l'atténuation sur une large bande de fréquences.

Après avoir exploré le phénomène du PE, défini comme le transfert unidirectionnel et irréversible de l'énergie vibratoire du SP vers l'oscillateur non linéaire [9], le terme "Nonlinear Energy Sink" (NES), ou "puits d'énergie non linéaire", a été largement utilisé pour désigner ces absorbeurs non linéaires. Dans [9], les auteurs ont montré que ce

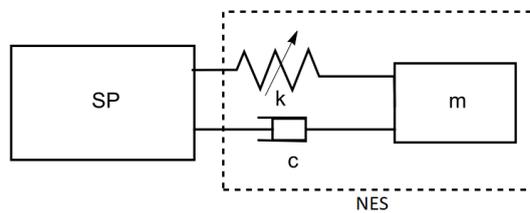


Figure 1.3: Schéma d'un SP couplé à un absorbeur non linéaire (NES).

phénomène apparaît lorsque l'énergie injectée dans le système est suffisante pour exciter les vibrations hautement non linéaires et disparaît lorsque l'énergie injectée croît pour dépasser un régime de résonance critique. Ceci reflète la principale limitation de l'utilisation des NES pour le contrôle passif des vibrations, car leur activation nécessite une quantité d'énergie suffisante, et en tant qu'absorbeur de vibrations, ils ont une capacité limitée d'absorption qu'ils ne peuvent pas dépasser.

Afin de présenter clairement les avantages et les limites des absorbeurs linéaires et non linéaires, nous avons choisi de présenter une étude menée dans [10] qui met en évidence la différence fondamentale entre un absorbeur non linéaire et son homologue linéaire. Les capacités d'atténuation de ces deux types d'absorbeurs sont comparées en calculant l'énergie normalisée dissipée par chaque absorbeur tout en faisant varier la pulsation propre du SP (ω_0) et l'amplitude (X) de l'impulsion appliquée au SP. Les sous-figures Fig.1.4(a) et Fig.1.4(b), tirées de [10], présentent les résultats de ce calcul.

Pour le TMD

- La dissipation d'énergie dans le TMD présente un maximum à une valeur bien spécifique de ω_0 . Cette fréquence présente la fréquence d'accord qui est égale dans ce cas à la fréquence propre du TMD.
- Lorsqu'on s'éloigne de cette fréquence, l'efficacité de TMD diminue.
- Grâce à sa linéarité, la dissipation normalisée dans le TMD ne présente aucune dépendance du niveau d'excitation.

Pour le NES

- La zone de forte efficacité du NES correspondant à la zone du PE.
- L'efficacité le NES est relativement indépendante de la fréquence du SP ω_0 . Cet absorbeur peut s'adapter au SP grâce à son caractère de dépendance énergie/fréquence. Il ne nécessite pas la condition d'accord. Il peut être efficace à n'importe quelle fréquence ω_0 mais à condition que l'amplitude d'impulsion X soit suffisante.
- La dissipation d'énergie dans le NES est fortement dépendante du niveau d'excitation. Pour une fréquence donnée ω_0 , la zone efficace du NES est bornée par deux amplitudes d'impulsion. Le NES est efficace lorsque l'amplitude d'impulsion X dépasse un certain seuil appelé dans les littératures le seuil d'activation ou apparition du PE. Alors que cette efficacité est diminuée lorsque l'amplitude d'impulsion X dépasse un autre seuil appelé le seuil de désactivation ou disparition du PE.

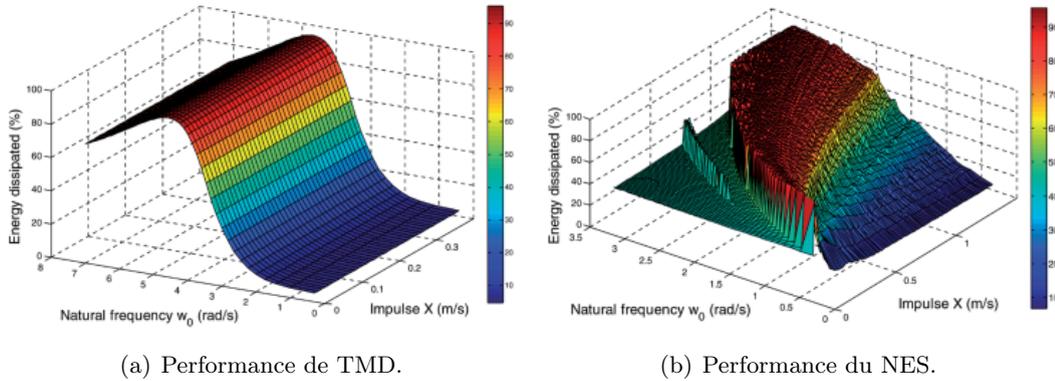


Figure 1.4: L'énergie normalisée dissipée par le TMD (gauche) et le NES (droite) en fonction de la fréquence propre ω_0 du SP et de l'amplitude X de l'impulsion appliquée au SP.

1.2 Pompage énergétique

Les principaux résultats liés au PE sont présentés dans cette partie en faisant appel à la revue la plus complète de Vakakis et Gendelman [10].

1.2.1 Pompage énergétique sous excitation transitoire

Après avoir exploré le mécanisme du PE dans [9], une étude plus approfondie de la dynamique transitoire du PE a été réalisée dans [11, 12]. La dynamique d'un système hamiltonien, dans lequel les termes d'amortissement ont été éliminés, a été analysée pour une meilleure compréhension du phénomène du PE. Il a été démontré que ce système hamiltonien présentait des orbites (ou solutions) périodiques de type 1:1 qui sont principalement responsables au phénomène de PE. Ces orbites 1:1 correspondaient à des solutions où les deux oscillateurs avaient la même pulsation de vibration, $\omega_{NES} = \omega_{SP}$. Ces solutions périodiques ont été calculées analytiquement dans [13] en utilisant la méthode de Complexification Averaging. Il a été montré aussi que ces orbites 1:1 existaient quel que soit le niveau d'énergie dans le système, mais elles ne pouvaient pas être activées lorsque le NES était initialement au repos. Il a été démontré que l'existence d'autres orbites, appelées orbites transitoires ou orbites-connecteurs, satisfait cette condition initiale. Ces orbites-connecteurs correspondent à des orbites sous-harmoniques où les deux oscillateurs vibrent à des pulsations différentes, $n\omega_{NES} = m\omega_{SP}$ avec $n \neq m$. Ces orbites-connecteurs caractérisent le phénomène de battement non linéaire qui se produit à la phase initiale du PE et qui permet de canaliser une grande quantité d'énergie du SP vers le NES pour déclencher le phénomène du PE. Cependant, ce phénomène de battement non linéaire n'est efficace que pour un niveau modéré d'énergie [14]. Ce qui définit les seuils d'activation et de désactivation du PE. Dans le deuxième article [12], il a été montré analytiquement en tenant compte de l'amortissement du système que le phénomène du PE est dû à une capture de résonance transitoire 1:1 du système. Il a été montré dans ces travaux qu'en absence de l'amortissement on n'a aucune trace du phénomène de PE et le système présente seulement des phénomènes de battement non linéaires où l'énergie est continuellement échangée entre les deux oscillateurs. Lors de ces premiers travaux [11, 12, 13, 14], la dynamique transitoire du PE a été étudiée pour un NES en configuration "I". Dans cette configuration, le NES est lié au bâti par une raideur non linéaire cubique et est faiblement couplé au SP par une raideur linéaire. Dans [15], une autre configuration, appelée dans la littérature

configuration "II", a été présentée, où le NES est couplé au SP à travers un terme non linéaire. La capacité de ce NES à produire le PE a été démontrée. Il a été montré dans [14], à partir d'un changement de variables, qu'un NES en configuration II qui a un faible rapport de masse, est équivalent à un NES en configuration I qui a un grand rapport de masse. Ce qui montre que la masse du NES affecte différemment la dynamique des deux configurations. Il a été montré après dans [10], que le NES en configuration II (lié au SP par une raideur non linéaire cubique) est plus efficace pour les masses relativement légères alors que le NES en configuration I (lié au bâti par une raideur non linéaire cubique) est efficace pour les masses relativement plus lourdes (dans cette thèse on va s'intéresser au NES en configuration I).

La dynamique transitoire du PE a été étudiée par l'utilisation de NES en configuration II. L'étude de la dynamique du système hamiltonien correspondant a été réalisée pour la première fois dans [16]. Les différentes orbites citées ci-dessus, ont été présentés d'une manière claire dans un diagramme fréquence-énergie [17] (voir Fig.1.5). Les branches principales $S11_+$ et $S11_-$ représentent les solutions où les deux oscillateurs vibrent à la même fréquence. Les signes + et - présentent respectivement le cas où les deux oscillateurs vibrent en phase et en opposition de phase. Les lignes horizontales représentent les orbites sous-harmoniques $n : m$. Par exemple une oscillation 1 : 2 indique que le NES vibre à une fréquence deux fois plus élevée que le SP. Les points noirs représentent les orbites connecteurs.

Il est important de souligner que les branches des orbites périodiques 1:1, également appelées modes normaux non linéaires (MNN) [18], sont une extension des modes normaux linéaires. À des niveaux d'énergie faibles, ces branches coïncident étroitement avec les modes normaux du système linéarisé. Cependant, à des niveaux d'énergie plus élevés, les MNN présentent des fréquences propres variables qui dépendent du niveau d'énergie. En tant que système non linéaire couplé, ce système se comporte de manière linéaire à faible excitation, où ses fréquences propres restent constantes. Cependant, à mesure que l'énergie injectée dans le système augmente, les effets de la non-linéarité deviennent significatifs, entraînant des variations non constantes des fréquences propres en fonction de l'énergie.

Après avoir étudié le système hamiltonien, la dynamique transitoire du système amorti a été analysée. L'échange d'énergie du système amorti a été interprété en fonction de la structure des orbites périodiques du système hamiltonien. La figure Fig.1.6 présente un résultat numérique extrait de [19] qui montre la dynamique transitoire du système amorti en présence du PE. La superposition de la transformée en ondelette de la dynamique amortie dans le diagramme énergie-fréquence hamiltonien permet de mettre en évidence clairement le comportement non linéaire de notre système, où la pulsation instantanée du NES présente une variation significative en fonction de l'énergie injectée dans le système. Le système, initialement au repos, a été soumis à une force impulsive. Cette force a activé une orbite connectrice, et cette activation s'est traduite par l'observation du phénomène de battement non linéaire. Cette orbite connectrice a permis le transfert d'une grande quantité d'énergie injectée dans le système vers l'orbite périodique 1:1, où survient la capture de résonance 1:1 entre les deux oscillateurs. L'énergie s'est ainsi déplacée du SP vers le NES, où elle a été dissipée par l'amortissement visqueux. La dynamique hamiltonienne fournit une information importante sur le comportement du système amorti, car elle offre une vue complète de toutes les solutions possibles. En même temps, la présence de l'amortissement joue un rôle important, puisqu'il permet au système de se déplacer le long des différentes

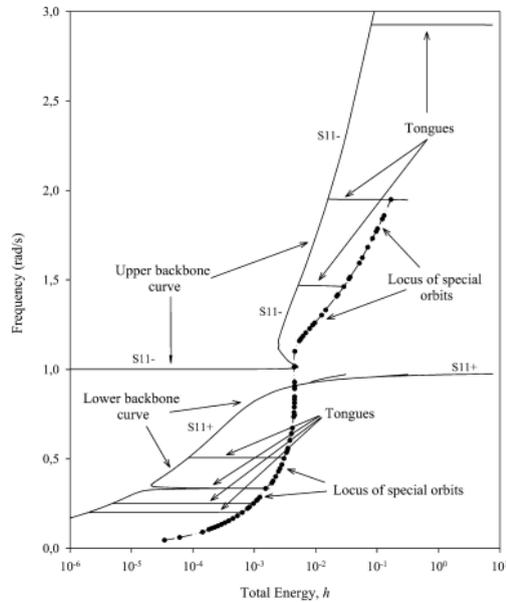


Figure 1.5: Le résultat tiré de [17] présente le diagramme fréquence-énergie d'un SP couplé à une NES.

branches hamiltoniennes en faisant diminuer l'énergie par dissipation.

1.2.2 Pompage énergétique sous excitation harmonique

À part l'excitation transitoire, la dynamique des systèmes non linéaires avec NES a été aussi étudiée sous d'autres différents types d'excitations. Le PE a été traité sous excitation harmonique, quasi périodique et aléatoire [20] et sous excitation paramétrique [21]. Dans cette partie, on présente les principaux résultats du PE sous excitation harmonique qui va nous servir dans la suite de cette thèse.

Le PE sous excitation périodique a été étudié pour la première fois dans [22]. Les points fixes correspondant aux solutions périodiques d'un SP linéaire couplé à un NES en configuration I ont été calculés dans cet article par l'utilisation de la méthode de complexification averaging. Dans [23] la méthode d'équilibrage harmonique a été appliquée pour déterminer les points fixes du même système. Dans [24] une étude plus détaillée de ce régime périodique a été réalisée où les bifurcations locales des solutions périodiques ont été analysées. Une bifurcation est définie par le changement qu'un système peut subir en variant un paramètre du système. Deux bifurcations locales dans la dynamique du système ont été étudiées. Une apparaît lorsque la solution périodique passe d'un état stable à un état instable où l'inverse (étude de stabilité) et l'autre avec la création ou la destruction des solutions périodiques (étude de multiplicité).

À part la réponse à amplitude constante périodique, un système couplé NES oscillateur linéaire peut présenter sous excitation harmonique un autre type de réponse qui a été appelée réponse fortement modulée. Cette réponse a été présentée dans [25] où les auteurs ont montré la forte efficacité d'atténuation des vibrations lors de ce régime. Sa présence a été lié au PE. La figure Fig.1.7 présente un résultat de simulation numérique tirée de [25] qui montre un exemple de réponse fortement modulée. La dynamique de cette réponse

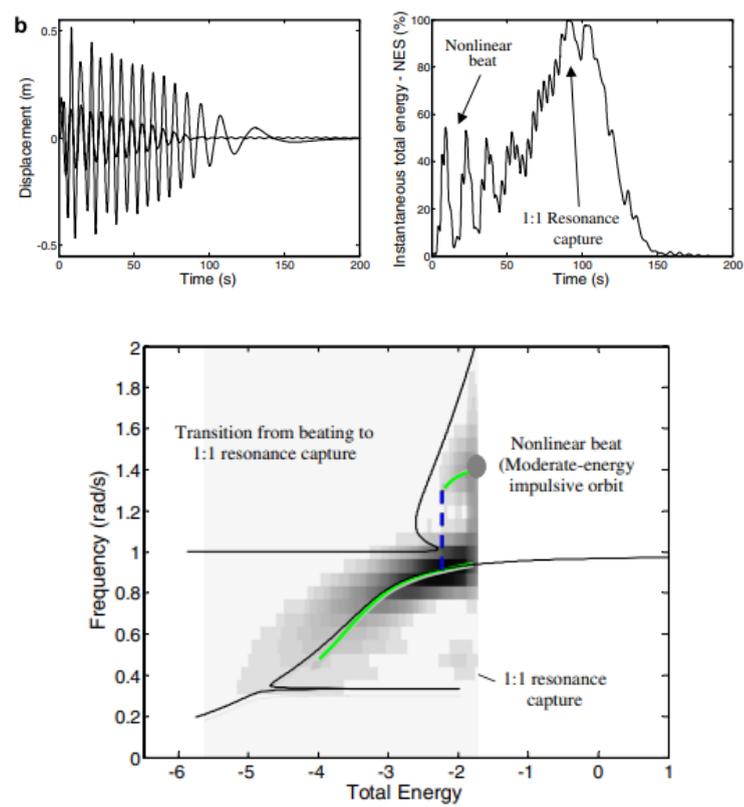


Figure 1.6: Résultat tiré de [19] qui montre la projection du résultat de simulation numérique sur le diagramme fréquence-énergie.

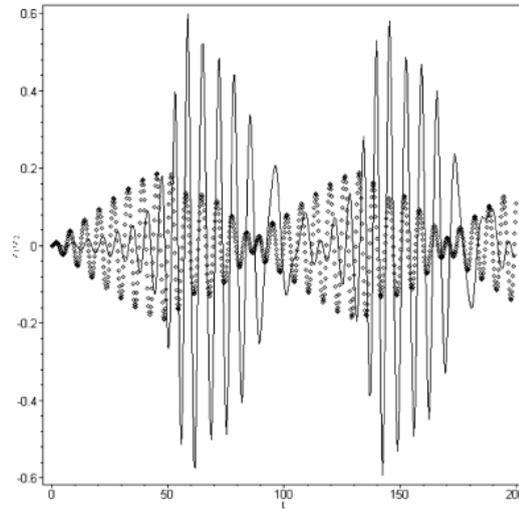
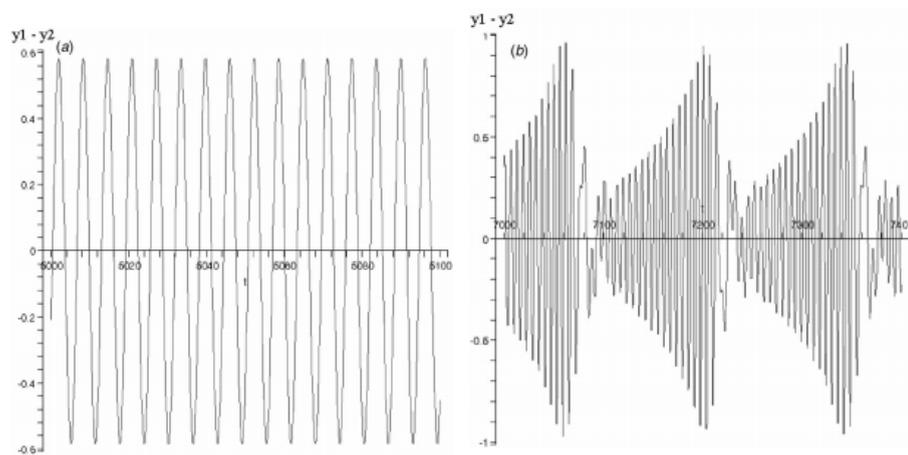


Figure 1.7: Le résultat numérique tiré de [25] présente le régime fortement modulé. La courbe pointillée correspond à l'oscillation du SP, et la courbe continue représente l'oscillation du NES.

est très similaire à la dynamique transitoire du PE observée ci-avant. En effet comme le montre la figure Fig.1.7 au début de chaque cycle les amplitudes de vibration des deux oscillateurs augmentent. Le SP montre ici une amplitude de vibration relativement plus importante ce qui montre que l'énergie est concentrée sur le SP. Lorsque l'amplitude de vibration du SP atteint un certain seuil, on observe une forte augmentation de l'amplitude de vibration du NES. Cette augmentation peut être liée à l'activation du NES où les deux oscillateurs rentrent en résonance et l'énergie se transfère vers le NES où elle sera dissipée. Ceci peut traduire la phase de diminution des amplitudes de vibrations où le NES présente des amplitudes de vibration plus importantes et les deux oscillateurs présentent la même fréquence de vibration. Lorsque l'amplitude de vibration devient très petite la résonance entre les deux oscillateurs se casse. Les amplitudes de déplacement augmentent de nouveau et le cycle recommence. Ce cycle est appelé cycle de relaxation.

Dans [24], les auteurs ont aussi montré que la réponse fortement modulée ne peut pas être détectée par l'analyse locale des points fixes. La vérification numérique du calcul des points fixes qui a été réalisée montre que pour les mêmes paramètres le système peut présenter simultanément différents régimes de réponses et ceci dépend de la condition initiale. La figure Fig.1.8 montre un résultat tiré de [26] qui montre la coexistence de deux différents régimes de réponses pour les mêmes paramètres de système. La sous figure Fig.1.8(a) présente une solution périodique qui correspond au calcul du point fixe et la sous figure Fig.1.8(b) montre une réponse fortement modulée qui correspond à une condition initiale en repos. La coexistence des solutions qualitativement différentes présente une des caractéristiques des systèmes dynamiques non linéaires. Dans [27], il a été montré que pour un ratio de masse (masse du NES sur masse du SP) relativement élevé, le système peut présenter un autre type de réponse appelée réponse faiblement modulée. De plus, il a été démontré que, pour des valeurs de masse suffisamment élevées, cette réponse peut remplacer complètement la réponse fortement modulée.

Comme il est discuté ci-dessus, puisque l'analyse locale des solutions périodiques



(a) Réponse périodique $y_1(0) = -0,052$, (b) Réponse fortement modulée $y_1(0) = y_1(0)' = 0,187$, $y_2(0) = -1$, $y_2'(0) = 0$. $y_1'(0) = y_2(0) = y_2'(0) = 0$.

Figure 1.8: Résultat numérique tiré de [26] montrant la coexistence de deux réponses distinctes pour les mêmes paramètres d'excitation et de construction, ainsi que pour deux conditions initiales différentes.

est insuffisante pour étudier les réponses fortement modulées, une analyse globale de la dynamique est nécessaire et fait l'objet de plusieurs études [26, 28, 29]. La méthode des échelles multiples a été appliquée à l'aide d'un petit paramètre pour effectuer une analyse de perturbation. Cette méthode permet d'introduire différentes échelles de temps. Une échelle rapide pour décrire les oscillations rapides où le NES oscille à la même fréquence du SP (par laquelle la variété invariante (VI) lente 1:1 a été déterminée). Et une autre échelle lente pour décrire l'évolution lente de la VI 1:1 (par laquelle la trajectoire de flux lent sur les branches stables de VI lente 1:1 a été déterminée). La bifurcation de la VI a été étudiée pour l'analyse des réponses fortement modulées. Les plans de phase qui montrent les trajectoires de flux lent ont été aussi étudiés [30] où la condition nécessaire pour avoir les réponses fortement modulées a été déterminée. Cette condition exprime l'amplitude d'excitation au-delà de laquelle le PE sera possible et l'amplitude d'excitation correspondant à la disparition du pompage. Ceci présente une des principales caractéristiques des absorbeurs non linéaires qui définissent les seuils d'activation et désactivation du PE. Cette notion des seuils définit la zone du PE où le NES présente une forte efficacité, mais qui se trouve, dans certains cas, à des niveaux énergétiques trop élevés. Ceci constitue la principale limitation observée dans les NES cubiques.

1.3 Différents types de NES

La plupart des travaux présentés ci-dessus correspondent à un NES qui montre une non-linéarité de raideur cubique. Mais les études ont montré que le PE ne se limite pas au NES avec une non-linéarité de raideur cubique. Dans [5] et [31] le NES cubique a été présenté avec des caractéristiques d'amortissements non linéaires. Un NES avec une non-linéarité non polynomiale a été décrit analytiquement dans [32]. Dans [33] le PE a été étudié par l'utilisation d'un NES avec une non linéarité par morceaux. Le NES à Vibro Impact fait l'objectif de plusieurs recherches (voir par exemple [34] et la thèse d'E. Grouc [35]).

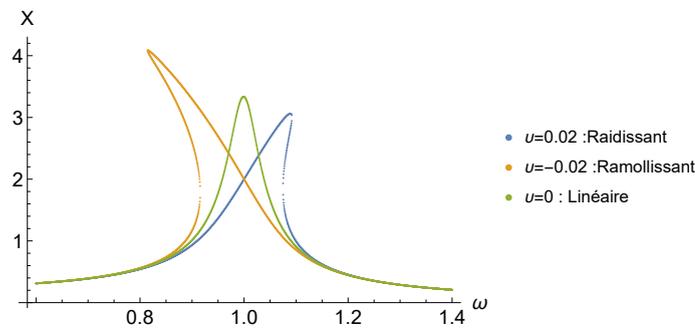


Figure 1.9: La variation de la courbe de résonance d'un oscillateur de Duffing en fonction de la valeur de terme cubique où $(\mu = 1, \kappa = 0,09, p = 0,2)$.

Dans [36] les auteurs ont étudié le PE sous excitation transitoire pour différents types de non-linéarités : non-linéarité lisse avec une raideur cubique, non-linéarité non lisse avec un système linéaire par morceaux et une non-linéarité cubique en combinant une raideur linéaire négative avec une raideur cubique. Il était montré pour ce dernier type de non-linéarité que le PE se produit avec une très bonne efficacité alors qu'avec une non-linéarité cubique sans une raideur négative, l'atténuation était moins nette. Ce dernier type de non-linéarité correspond au NES bistable qui est le cœur du travail de cette thèse.

1.4 Oscillateur de Duffing

Dans cette thèse, nous allons nous intéresser à deux types de NES cubiques : les monostables, dont la raideur linéaire est positive, et les bistables, qui correspondent à une raideur linéaire négative. Les modèles décrivant ces types de NES sont principalement présentés par l'équation de Duffing.

L'équation non dimensionnelle d'un oscillateur de Duffing sous excitation harmonique est écrite sous cette forme

$$x'' + \kappa x' + \mu x + \nu x^3 = p \cos(\tau\omega) \quad (1.1)$$

où $x(\tau)$ présente le déplacement adimensionnel de l'oscillateur qui est une fonction du temps adimensionnel τ , κ est le facteur d'amortissement, μ et ν sont les paramètres de rigidité linéaire et non linéaire, p et ω sont respectivement l'amplitude et la fréquence de la force d'excitation harmonique. Cet oscillateur présente de nombreuses dynamiques qualitativement différentes, en fonction des paramètres linéaires et non linéaires. Pour une raideur linéaire $\mu > 0$, le comportement du système est dit raidissant lorsque le terme cubique est positif $\nu > 0$ et ramollissant pour les valeurs négatives de ν . $\nu = 0$ correspondant à l'oscillateur linéaire homologue. Pour illustrer la différence entre ces deux types de comportement et le comportement linéaire, on a présenté dans la figure Fig.1.9 les courbes de résonance pour trois valeurs de raideur cubique ($\nu > 0, < 0, = 0$). Ces courbes sont déterminées analytiquement par l'utilisation de la méthode d'équilibrage harmonique. Contrairement au système linéaire, qui présente un pic de résonance droit, la courbe correspondant à $\nu > 0$ présente une inclinaison de la courbe de résonance vers les hautes fréquences, ce qui indique le comportement de durcissement de l'oscillateur. En revanche, l'oscillateur Duffing adoucissant présente une courbe de résonance qui se décale vers les basses fréquences.

Une autre configuration des paramètres caractérisée par une raideur linéaire négative $\mu < 0$ et une raideur non linéaire $v > 0$ conduit à un autre type de comportement dit bistable. Un oscillateur bistable est caractérisé par un profil particulier de l'énergie potentielle appelé le potentiel à double puits. L'énergie potentielle de l'oscillateur de Duffing est définie par $E_p = \frac{1}{2}\mu x^2 + \frac{1}{4}vx^4$. L'équilibre statique de ce système se produit lorsque cette énergie potentielle présente des minimums et des maximums locaux. Donc les positions d'équilibre sont déterminées en résolvant l'équation $\frac{dE_p}{dx} = 0$ et leurs stabilités sont liés au signe de $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x = x_{ei})$ (x_{ei} sont les positions d'équilibre statique, > 0 : stable, < 0 : instable). Pour $\mu < 0$ on a obtenu deux positions d'équilibre stables $x_{e1} = -\sqrt{\frac{-\mu}{v}}$ et $x_{e2} = \sqrt{\frac{-\mu}{v}}$ séparées par une position instable $x_{e0} = 0$. La présence de ces deux positions d'équilibre stable fait définir la bistabilité du système. Pour les oscillateurs raidissant et ramollissant présentés ci-dessus, on a une seule position d'équilibre stable défini par $x_e = 0$. Ces systèmes non linéaires sont alors monostables (la plupart des NES présentés précédemment correspondant à des systèmes monostables raidissant). La figure Fig.1.10 présente la différence entre l'énergie potentielle d'un oscillateur raidissant monostable qui présente une seule position d'équilibre et celle d'un oscillateur bistable à double puits. Les deux points rouges présentent les positions d'équilibre stable de l'oscillateur bistable auxquelles le système peut être au repos. Lorsque le système est perturbé de l'une de ces positions, il peut osciller périodiquement autour de l'équilibre stable. Ce comportement est appelé le régime intrapuits, car le système oscille à l'intérieur de l'un des deux puits de l'énergie potentielle. Cependant, si la perturbation est suffisamment forte, le système peut franchir la barrière d'énergie potentielle qui sépare les deux équilibres stables. Dans ce cas, le système se retrouve dans le régime interpuits, où il oscille périodiquement entre les deux équilibres instables, sans revenir à l'un des équilibres stables. Ce régime est appelé aussi le régime de saut, car le système passe d'un équilibre à l'autre par des sauts brusques.

Avec l'ajout de l'énergie cinétique, on peut définir l'énergie totale du système

$$E_t = \frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}\mu x^2 + \frac{1}{4}vx^4 \quad (1.2)$$

En éliminant le terme d'amortissement et de forçage, on obtient le système Hamiltonien correspondant à l'équation Eq.1.1 qui est défini par $x'' + \mu x + vx^3 = 0$ et $x_0 = x(t=0)$ et $x'_0 = x'(t=0)$ sont respectivement la position et la vitesse initiale. Dans ce cas, la dérivée de l'énergie totale par rapport au temps correspond à :

$$\frac{dE_t}{dt} = (x'' + \mu x + vx^3) x' = 0 \quad (1.3)$$

Le système présente ici une énergie totale constante durant chaque solution qui est définie par les conditions initiales (x_0 et x'_0). Donc pour chaque solution (ou orbites) l'énergie totale est spécifiée par $E_t = E_0 = \frac{1}{2}x_0'^2 + \frac{1}{2}\mu x_0^2 + \frac{1}{4}vx_0^4$. À partir de cette égalité, on peut déduire facilement l'expression de la vitesse x' en fonction du déplacement x :

$$x' = \pm \sqrt{2E_0 - \left(\mu x^2 + \frac{1}{2}vx^4 \right)} \quad (1.4)$$

qui nous permet de tracer facilement des différentes orbites dans le plan de phase (x, x') (voir figure Fig.1.11). Cette figure montre que les oscillations intrapuits correspondent à

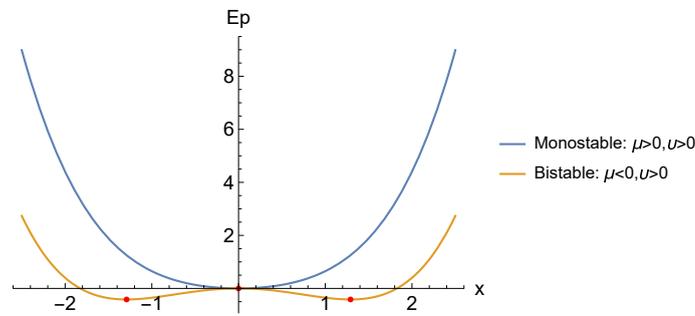


Figure 1.10: La superposition de l'énergie potentielle d'un oscillateur bistable à double puits avec celle d'un oscillateur raidissant monostable.

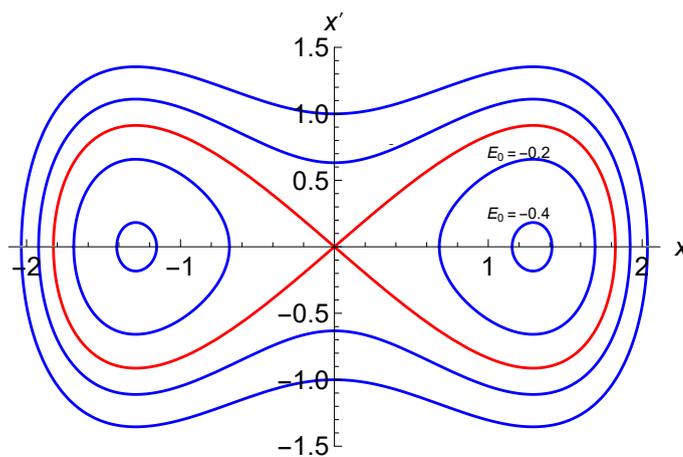


Figure 1.11: La projection du mouvement de l'oscillateur bistable dans le plan de phase pour différentes valeurs de l'énergie E_0 .

des valeurs négatives d'énergie totale E_0 alors que lorsque $E_0 > 0$ le comportement devient interpuits. L'orbite présentée en rouge correspond à $E_0 = 0$. Elle présente la solution séparatrice qui divise les deux types d'oscillations (intrapuits et interpuits) appelée aussi solution homoclinique.

1.4.1 Dépendance énergie fréquence

Kovacic and Brennan ont présenté un ouvrage qui se concentre sur l'étude de l'équation de Duffing [37]. Dans ce livre, les méthodes d'analyse pour les différentes formes de l'équation de Duffing ont été présentées. Une de ces techniques fait appel aux fonctions elliptiques jacobiniennes pour déterminer la solution exacte de l'équation de Duffing. Dans [38, 39], les fonctions elliptiques jacobiniennes ont été utilisées pour la prédiction de la dynamique des oscillateurs bistables de Duffing.

Les oscillations intrapuits

Pour les oscillations intrapuits la solution est écrite sous cette forme :

$$x_d(\tau) = Dd_n(\psi_d, k_d^2) \quad (1.5)$$

d_n est la fonction elliptique jacobienne delta, D présente son amplitude. ψ_d et k_d^2 sont respectivement l'argument et le module de la fonction elliptique jacobienne $d_n(\psi_d, k_d^2)$. L'argument de cette fonction est défini par $\psi_d = \omega_d \tau + \phi_d$. ω_d , ϕ_d présentent respectivement la pulsation et la phase de la fonction d_n . La période de la fonction $d_n(\psi_d, k_d^2)$ est définie par $T_d = \frac{2K(k_d^2)}{\omega_d}$, où $2K(k_d^2)$ est l'intégrale elliptique complète de premières espèces. Les paramètres D , k_d^2 , ω_d et ϕ_d sont des constantes indépendantes du temps. En introduisant l'expression Eq.1.5 dans l'équation Hamiltonienne de Duffing les expressions de k_d^2 , ω_d sont déterminées. Elles sont définies par :

$$\omega_d^2 = \frac{D^2 v}{2}, k_d^2 = \frac{2\mu}{D^2 v} + 2 \quad (1.6)$$

À partir des conditions initiales x_0 et x'_0 on a déduit que :

$$D = \sqrt{\frac{\sqrt{(\mu + vx_0^2)^2 + 2v(x'_0)^2} - \mu}{v}}, \text{dn}(\phi_d, k_d^2) = \frac{x_0}{D} \quad (1.7)$$

En remplaçant ω_d , k_d^2 et D par ces expressions, la période T_d de la fonction d_n peut être exprimée par :

$$T_d = \frac{2\sqrt{2}K\left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a-1}}\right)}{\sqrt{(\sqrt{a}-1)\mu}} \quad (1.8)$$

où a est défini par $a = \frac{|P_{Ep}| + E_0}{|P_{Ep}|}$. $P_{Ep} = -\frac{1}{4}\frac{\mu^2}{v}$ est l'énergie potentielle définie à l'une des positions d'équilibre stable x_{e1} ou x_{e2} . Elle présente la profondeur des puits d'énergie potentielle. Pour les oscillations intrapuits, on a $P_{Ep} < E_0 < 0$ donc ces oscillations sont définies lorsque $a < 1$. Aux positions d'équilibre x_{e1} et x_{e2} , on a $E_0 = E_{pe}$ donc l'énergie normalisée a est égale à zéro. Donc on peut déduire que la période des vibrations autour de la position d'équilibre $T_0 = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\mu}}$.

Les oscillations interpuits

Lorsque l'énergie injectée dans le système est suffisante pour produire les oscillations interpuits ($E_0 > 0$), la solution exacte de l'oscillateur libre non amorti de Duffing est définie par:

$$x_c(\tau) = C c_n(\psi_c, k_c^2) \quad (1.9)$$

ψ_c et k_c^2 sont respectivement l'argument et le module de la fonction elliptique jacobienne $c_n(\psi_c, k_c^2)$. C présente son amplitude. L'argument de cette fonction est défini par $\psi_c = \omega_c \tau + \phi_c$. ω_c , ϕ_c présentent respectivement la pulsation et la phase de la fonction c_n . La

période de la fonction $c_n(\psi_c, k_c^2)$ est défini par $T_c = \frac{4K(k_c^2)}{\omega_c}$. Les paramètres k_c^2 , ω_c , C et ϕ_c sont des constantes indépendantes du temps définies par:

$$\omega_c^2 = C^2 v + \mu, k_c^2 = \frac{C^2 v}{2(C^2 v + \mu)}$$

$$C = \sqrt{\frac{-\mu + \sqrt{(\mu + vx_0^2)^2 + 2vx_0'^2}}{v}}, c_n(\phi_c, k_c^2) = \frac{x_0}{C} \quad (1.10)$$

À partir de l'Eq.1.10, on déduit l'expression de la période T_c :

$$T_c = \frac{4K\left(\frac{\sqrt{a+1}}{2\sqrt{a}}\right)}{\sqrt{-\mu\sqrt{a}}} \quad (1.11)$$

Dans ce cas, on a $a > 1$ puisque $E_0 > 0$.

Pour un oscillateur purement cubique, on a $\omega_c^2 = C^2 v$ et $k_c^2 = \frac{1}{2}$. Donc la période T est définie par $T = \frac{2\sqrt{2}K(\frac{1}{2})T_0}{\pi\sqrt[4]{a}}$.

À partir de l'expression des périodes déterminées Eq.1.11 et Eq.1.8 la variation de l'énergie non dimensionnelle complète a en fonction de la fréquence non dimensionnelle $\frac{f}{f_0}$ ($f_0 = \frac{1}{T_0}$) est présenté dans la figure Fig.1.12. La courbe bleue correspond à un oscillateur bistable et celle en rouge correspond à un oscillateur purement cubique. Pour l'oscillateur bistable on a remarqué la présence de deux différents comportements. Pour le faible niveau d'énergie ($a < 1$ ou $E_0 < 0$), un comportement ramollissant où la fréquence se décale vers les basses fréquences est observé. Lorsque a sera supérieur à 1 l'oscillateur bistable suit le comportement raidissant présenté par l'oscillateur purement cubique où la fréquence augmente avec l'énergie. Ce qui montre que les oscillations intrapuits sont accompagnées par le comportement ramollissant alors que les interpuits présentent un effet de durcissement.

1.4.2 Réponse chaotique

Pour l'équation complète Eq.1.1 c-à-d sous excitation harmonique l'oscillateur bistable peut présenter aussi un régime chaotique qui montre des oscillations aperiodiques. Ce régime présente le régime transitoire pour le passage du régime intrapuits vers le régime interpuits. Il se produit dans la zone de la coexistence de ces deux régimes (voir Fig.1.12): à la fin du régime intrapuits et en début du régime interpuits où le système vibre autour de la fréquence nulle. Dans cette zone le système ne se stabilise pas sur un seul régime donc la réponse présente un caractère aléatoire (réponse chaotique).

1.4.3 Méthodes analytiques pour la dynamique bistable

Dans [40] les auteurs ont classé les méthodes disponibles pour calculer la réponse en régime permanent d'un système bistable décrit par l'équation de Duffing Eq.1.1 en deux classes : des méthodes de perturbation et des méthodes adaptées aux prédictions loin de

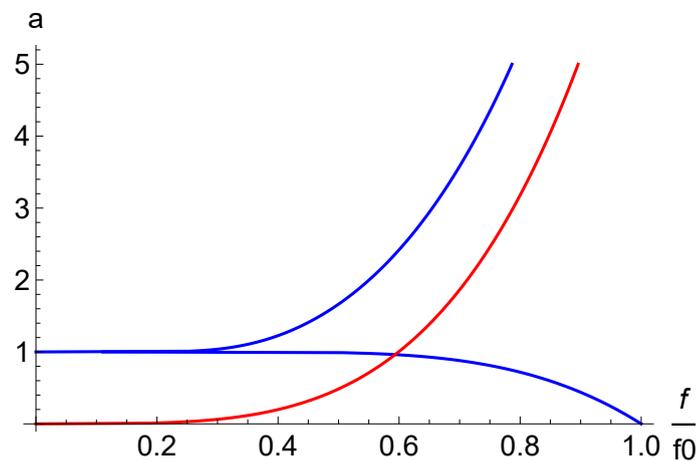


Figure 1.12: La variation de l'énergie non dimensionnelle complète en fonction de la fréquence non dimensionnelle de l'oscillateur Hamiltonien de Duffing. Bleu : oscillateur bistable, rouge : oscillateur purement cubique.

l'équilibre.

Pour la première classe, la méthode des échelles multiples a été utilisée. Pour cette classe de méthode, les auteurs ont démontré la nécessité d'appliquer une transformation de coordonnées qui consiste à étudier la dynamique autour de la position d'équilibre statique stable. Dans notre cas, cette transformation est écrite par:

$$y = x - x_{e2} \quad (1.12)$$

Les méthodes de perturbation permettent de prédire seulement la dynamique intrapuits des systèmes bistables alors qu'elles ne sont pas adaptées pour la dynamique interpuits.

Pour la deuxième classe, la méthode la plus utilisée pour analyser une variété de structures bistables dans toutes les disciplines de recherche, est la méthode d'équilibrage harmonique [41, 42, 43]. Cette méthode permet de prédire la gamme complète des réponses périodiques c-à-d prédire la dynamique permanente interpuits et intrapuits. Cette méthode consiste à développer la réponse du système en série de Fourier. Généralement cette série est limitée au premier ordre :

$$x(t) = c(t) + a(t) \sin \omega t + b(t) \cos \omega t \quad (1.13)$$

En introduisant cette expression dans l'équation de Duffing Eq.1.1, on peut déterminer une seule formulation qui permet de prédire simultanément les vibrations intra et interpuits de notre oscillateur bistable.

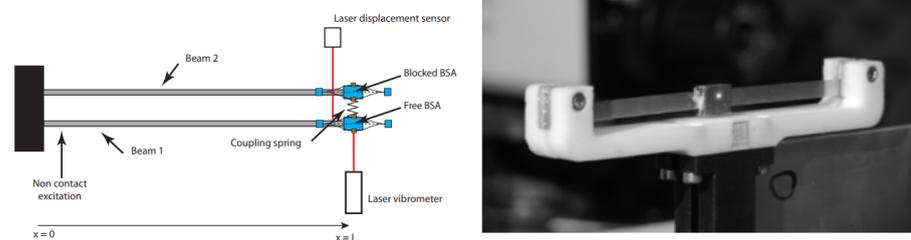
1.5 Absorbateurs non linéaires bistables

Les premiers travaux étudiant les absorbateurs bistables dans le contexte du transfert d'énergie [36, 44, 45] ont attirés l'attention en tant que candidats potentiels de NES. Dans

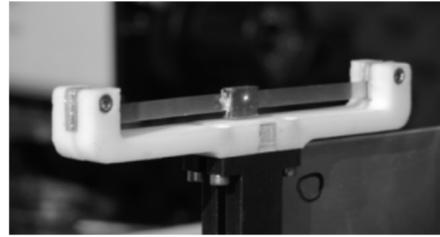
ces articles, la dynamique sous excitation transitoire a été étudiée. Dans [36] une simulation numérique a été réalisée pour donner une preuve du PE avec un absorbeur Bistable. La méthode de Melnikov a été appliquée pour déterminer la région du mouvement chaotique. Dans [44], l'absorbeur bistable correspondant à un snap through truss qui présente une structure du mode normal non linéaire adaptée au PE. Il a été montré que la zone de forte efficacité du PE correspond à des oscillations interpuits d'amplitudes élevées de vibration de l'absorbeur. Dans [45] les méthodes de complexification averaging et des échelles multiples ont été utilisées pour décrire le PE au voisinage de la capture de résonance 1:1.

Dans [46] la performance d'un NES cubique traditionnel a été améliorée en modifiant sa propriété monostable vers un bistable par l'introduction des composants de rigidité linéaire et non linéaires négatifs qui induisent cette bistabilité. Il a été vérifié sous excitation transitoire que ce NES bistable modifié absorbe mieux les vibrations que le NES cubique traditionnel. Les deux articles [47] et [48] présentent une étude numérique et analytique détaillée de la dynamique transitoire d'un oscillateur linéaire couplé à un NES bistable combinant des termes de rigidité linéaire négatifs et de rigidité cubique non linéaire positive. Ce travail montre des avantages significatifs par rapport aux autres types de NES du point de vue efficacité du PE et taux de dissipation d'énergie globale. Dans la partie analytique, la méthode des échelles multiples et le concept de Limiting phase Trajectories (LPT) ont été utilisés. Il a été montré la présence d'un régime de capture de résonance super-harmonique 1:3 en parallèle avec le régime principal de capture de résonance 1:1 qui entraîne un fort échange d'énergie entre le SP et le NES bistable. L'étude numérique approfondie de ce système [48] valide les prédictions analytiques. Vue la caractéristique unique du NES bistable qui peut présenter un transfert d'énergie ciblé même à basse énergie, dans [49] la dynamique transitoire à basse énergie d'un système linéaire couplé à un NES bistable a été analysée. L'analyse de Melnikov et les exposants caractéristiques de Lyapunov ont été appliqués pour identifier la région de la réponse chaotique. Et la méthode LPT a été appliquée pour décrire le régime d'atténuation lors des battements non linéaires intrapuits du NES. La dynamique hamiltonienne et amortie d'un NES bistable couplé à un oscillateur linéaire a été étudiée dans [50] à l'aide du diagramme fréquence-énergie obtenu analytiquement par la méthode de complexification averaging et numériquement par la technique de continuation numérique. La transformée en ondelettes a été superposée sur ce diagramme pour une comparaison entre le NES cubique et le NES bistable. Il a été montré que le NES bistable surpasse le NES cubique vu sa capacité de diffuser immédiate l'énergie d'entrée à travers plusieurs captures de résonance. Une méthode d'optimisation a été proposée dans [51], elle consiste à utiliser le NES bistable comme TMD pour les faibles amplitudes de vibrations (dynamique en puits) et comme NES pour les vibrations d'amplitude plus élevée du SP pour assurer une absorption efficace des vibrations dans une large gamme d'amplitudes d'impulsion.

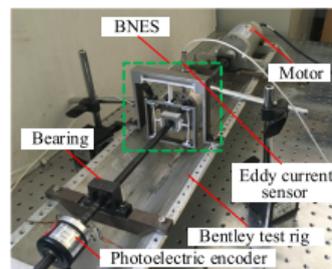
Dans [52], la dynamique sous excitation harmonique d'un oscillateur linéaire couplé à un NES bistable a été étudiée analytiquement et vérifiée numériquement. Les seuils de ces différents régimes de réponse ont été déterminés par l'étude asymptotique et la méthode de Melnikov. L'efficacité de différents régimes de réponse du NES bistable a été étudiée par le calcul des énergies dissipées et comparée à celle d'un NES cubique qui présente une efficacité moins importante. Une configuration optimale a été proposée en se basant sur le point optimal situé entre la réponse fortement modulée et la réponse périodique stable dans lequel le NES bistable présente la plus grande l'efficacité. Dans [53] les contraintes de base pour l'optimisation de la conception des NES cubiques et bistables ont été présentées.



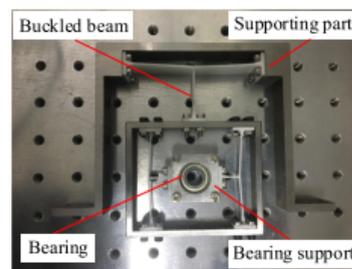
(a) Le diagramme schématique de l'installation expérimentale de [55].



(b) Dispositif expérimental utilisé dans [56].



(a) The rotor-BNES system



(b) The BNES

(c) Dispositif expérimental utilisé dans [58].

Figure 1.13: Différentes réalisations du NES bistable.

Au cours de ces dernières années, le NES bistable a été mis en œuvre dans divers secteurs d'activité. Dans [54], l'efficacité d'un dispositif bistable a été explorée analytiquement par la méthode d'équilibre harmonique puis expérimentalement dans le but de fournir une force opposée pour supprimer la vibration d'une structure hôte sous excitation harmonique. Dans [55], un système linéaire formé de deux poutres linéaires d'Euler couplé à un NES bistable a été étudié expérimentalement et numériquement. Il a été montré que ce NES bistable est capable de réduire fortement l'amplitude du SP multimodale. Dans [56], un NES bistable mécanique similaire basé sur une poutre déformée a été utilisé pour la récupération d'énergie électromécanique. Dans [57], les auteurs ont proposé une amélioration dans des structures finies à base de méta-matériaux localement résonants par l'utilisation de pièces bistables. Yao et al. [58] ont développé un NES bistable avec une poutre flambée pour supprimer les vibrations d'un système de rotor déséquilibré. Différents NES magnétiques bistables basés sur les forces d'attraction et de répulsion des aimants font l'objet de plusieurs travaux [59, 60, 61, 62]. Dans [61, 62] un NES de ce type a été proposé et testé pour le contrôle sismique structurel.

Dans le domaine vibroacoustique, à notre connaissance pour l'atténuation du bruit une seule solution de NES bistable a été proposée jusqu'à présent et qui va être présentée dans le paragraphe suivant.

1.6 L'atténuation du bruit

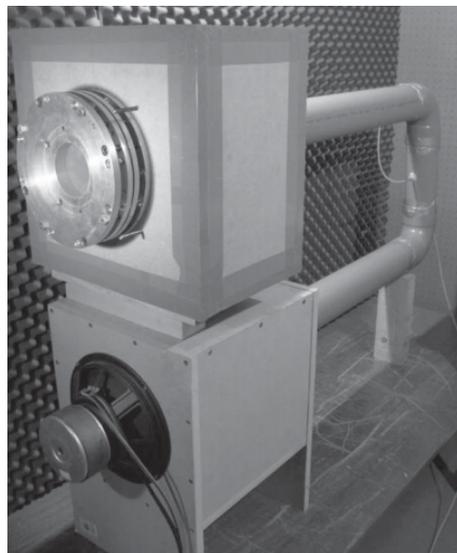
En acoustique les possibilités pour dissiper les très basses fréquences sont classées en trois familles. Soit par le contrôle actif qui est efficace mais très coûteux puisqu'il nécessite l'implantation des différents dispositifs pour le contrôle et la mesure. Ou par des

matériaux absorbants qui consistent simplement à augmenter l'amortissement de l'ensemble du système et qu'ils sont moins efficaces pour les basses fréquences. Ou par l'utilisation du contrôle passif. Dans le domaine linéaire, le résonateur d'Helmholtz qui présente la solution analogique de l'oscillateur de Frahm en acoustique a été utilisé. Ce résonateur nécessite l'accord avec la fréquence de résonance du système contrôlé, ce qui fait appel aux absorbeurs non linéaires (qui sont efficaces sur une large bande des basses fréquences) dans le domaine acoustique.

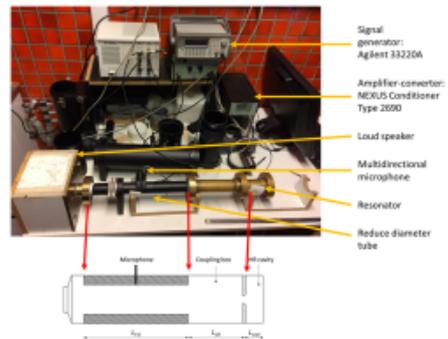
Dans le domaine acoustique, le premier travail qui a montré expérimentalement la présence du phénomène de PE a été proposé par B. Cochelin et al. [3]. Dans cet article, un absorbeur passif vibroacoustique non linéaire qui était constitué par une fine membrane circulaire viscoélastique a été développé. Le montage expérimental proposé a permis de contrôler un champ acoustique au voisinage du premier mode acoustique d'un tube ouvert à ces deux extrémités. Ce tube était couplé au NES à travers une boîte de couplage et était excité par un haut-parleur. Une version améliorée de ce montage expérimental a été développée dans la thèse de R. Bellet [4] où les transferts énergétiques de l'énergie sonore du milieu acoustique vers la membrane ont été étudiés expérimentalement et numériquement. Une explication détaillée des principaux phénomènes observés a été publiée dans [5]. Dans cet article, différents résultats expérimentaux ont été présentés : le comportement sous excitation harmonique, les oscillations libres et les réponses fréquentielles. Un modèle simplifié à 2ddl a été développé et validé par une comparaison entre le calcul numérique et les résultats expérimentaux. Il a été montré que l'utilisation de différentes membranes montées parallèlement sur la boîte de couplage a permis d'étendre la zone d'efficacité du phénomène de PE [6]. Un deuxième dispositif expérimental de PE à acoustique a été développé par R. Mariani et al. [63]. Ce dispositif était constitué par un diaphragme d'un haut-parleur dont la masse pouvait être ajustée avec précision et couplée avec le milieu acoustique primaire à contrôler (il s'agit encore ici du premier mode acoustique d'un tube ouvert) à travers une boîte de couplage. Dans ces articles [3, 5, 6, 63], le NES était lié au SP par une raideur linéaire dont la raideur pouvait être ajustée en contrôlant le volume de la boîte de couplage. Le NES dans ces travaux est en configuration I.

J. Shao et al [64] ont analysé le PE pour la configuration II où le NES est directement lié au SP. Dans cette configuration, le SP était une cavité acoustique parallélépipédique excitée sur un de ces modes et le NES était toujours une membrane montée sur une des surfaces de cette cavité. Pour généraliser les résultats trouvés dans [64], J. Shao a étudié ce système où plusieurs modes acoustiques de la cavité parallélépipédique sont modélisés [65]. Le montage expérimental décrit dans [66] a permis de présenter le PE entre cette cavité et la membrane. Dans les articles présentés ci-dessus [3, 5, 6, 63, 64, 65, 66], les absorbeurs non linéaires utilisés sont des absorbeurs vibroacoustiques appelés aussi VibroAcoustics Nonlinear Energy Sink (VA NES). Ils sont des dispositifs mécaniques qui sont utilisés pour le contrôle passif du bruit dans le domaine des faibles fréquences.

Récemment, un absorbeur non linéaire purement acoustique a pu être développé sur la base d'un résonateur d'Helmholtz. Il a été montré expérimentalement que sous certaines conditions ce dispositif pouvait présenter un comportement non linéaire [67, 68]. Le comportement non linéaire de cet absorbeur a été étudié analytiquement, numériquement et expérimentalement [69]. Le PE entre un milieu acoustique et le résonateur non linéaire d'Helmholtz ont été étudiés par E. Gourdon [70].

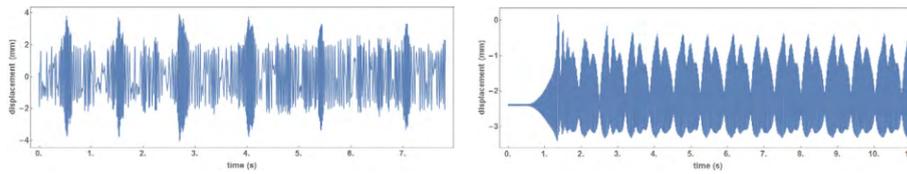


(a) Dispositif expérimental utilisé dans [4]. (b) deux membranes montées en parallèle [6].



(c) Diaphragme d'un haut-parleur utilisé comme un NES [63]. (d) Dispositif expérimental utilisé dans [70].

Figure 1.14: Les différentes réalisations expérimentales de NES dans le domaine acoustique.



(a) Réponse chaotique fortement modulée. (b) Réponse fortement modulée intrapuits.

Figure 1.15: Résultats expérimentaux tirés de [71] montrent le déplacement de deux différentes configurations de NES bistable.

NES bistable vibroacoustique pour l'atténuation du bruit

Le dispositif mécanique (NES bistable) présenté dans [55] (Fig.1.13(a)) a été développé et appliqué en vibroacoustique dans le cadre de la thèse de V. Iurasov [71] afin d'améliorer l'isolation acoustique dans les doubles murs de cloisonnement. Avant d'implanter cette solution sur le mur de doubles parois, le comportement de l'absorbeur et les mécanismes du transfert d'énergie ont été explorés par la réalisation de quelques séries d'expériences et de simulations sur des cas plus simples (poutre en acier et plaque d'aluminium). L'étude expérimentale réalisée pour le contrôle des vibrations de la plaque d'aluminium montre deux différents régimes de forte atténuation : la réponse chaotique fortement modulée est apparue lorsque la fréquence de résonance du mode plaque est supérieure à la fréquence propre du NES (voir sous figure Fig.1.15(a)) dans le cas contraire, on a observé une réponse fortement modulée intrapuits liée à la non-linéarité adoucissante du NES(voir sous figure Fig.1.15(b)).

1.7 Système étudié et démarche scientifique

Dans cette thèse, on va explorer une nouvelle voie d'absorbeur bistable vibroacoustique pour un contrôle dynamique passif plus adaptatif dans laquelle la solution proposée dans [4, 5, 6] va être développée et améliorée.

L'absorbeur non linéaire vibroacoustique proposé dans ces références est constitué par une fine membrane circulaire viscoélastique. Cette membrane viscoélastique, lorsqu'elle vibrait sous très grande amplitude, présentait un comportement fortement non linéaire, qui pouvait être décrit comme un système dynamique masse/raideur non linéaire cubique/amortissement non linéaire. Cette membrane est fixée sur un support qui permet de changer le rayon et d'imposer une précontrainte indépendamment réglable sur la membrane. Cet absorbeur permet de contrôler le champ acoustique autour du premier mode acoustique d'un tube ouvert à ces deux extrémités.

Pour déterminer le modèle du système couplé tube/membrane une double réduction de Rayleigh-Ritz a été imposée : le déplacement de l'air dans le tube est supposé être décrit par le premier mode acoustique du tube et la déformation transversale de la membrane est supposée de forme parabolique. Les fonctions de forme adaptées pour la déformation transversale de la membrane w et le déplacement de l'air dans le tube, noté u_{air} , ont été

définies par :

$$\begin{aligned} w(r, t) &= \frac{R_m^2 - r^2}{R_m^2} q_m(t) \\ u_{\text{air}}(x, t) &= -\cos \frac{\pi x}{L_t} u_a(t), \end{aligned} \quad (1.14)$$

où u_a représente le déplacement de l'air en bout du tube, et q_m représente le déplacement transversal au centre de la membrane. L_t présente le longueur de tube et R_m le rayon de la membrane. Cette double réduction conduit au système d'équations adimensionnées suivantes :[5] :

$$\begin{aligned} u'' + u + \lambda u' + \beta(u - q) &= F \cos \left(\frac{\tau \Omega}{\omega_t} \right) \\ \gamma q'' + c_1 (\eta \omega_t q' + q(1 + \chi)) + c_{\text{nl}} (q^3 + 2\eta q^2 \omega_t q') + \beta(q - u) &= 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

où u et q sont les déplacements normalisés de l'air en bout du tube et au centre de la membrane, λ et $c_1 \eta \omega_t$ les coefficients d'amortissement linéaire, $2c_1 \eta \omega_t$ le coefficient d'amortissement non linéaire, ω_t la pulsation de résonance du tube, F l'amplitude de forçage, Ω la pulsation d'excitation, β le terme de couplage, γ la masse dynamique, η est un terme caractérisant l'amortissement du matériau constitutif de la membrane, $c_1(1 + \chi)$ et c_{nl} les raideurs linéaire et cubique de la membrane avec χ le coefficient de la précontrainte de la membrane. Il est défini par le rapport entre la précontrainte e_0 et la contrainte critique de flambage $\frac{h_m^2}{3R_m^2}$.

La comparaison entre les expérimentations et les calculs montre une correspondance qualitative, mais elle ne suffit pas à capturer de manière quantitative toutes les caractéristiques de la dynamique complexe de ce système non linéaire, notamment le niveau et la profondeur du plateau de pompage. Deux raisons principales peuvent expliquer cela : La première raison réside dans les difficultés rencontrées pour mesurer le coefficient d'amortissement de la membrane. En effet, pour chaque configuration de membrane, nous avons choisi la valeur du coefficient d'amortissement qui donnait les meilleurs résultats de simulation en réponse libre. La deuxième raison est liée aux simplifications imposées pour déterminer le modèle. Nous avons décrit la dépendance spatiale de la pression acoustique à l'intérieur du tube en utilisant le premier mode propre d'un tube ouvert à ses deux extrémités, et nous avons supposé que le déplacement imposé à la membrane suivait une forme parabolique. Pour un large éventail d'amplitudes et de fréquences, ces simplifications sont approximatives. En réalité, le modèle de pression n'est valable que dans les environs immédiats de la fréquence correspondante et la forme parabolique imposée au déplacement de la membrane n'est valable que lorsque cette dernière vibre avec une amplitude très élevée.

Ces considérations soulèvent des questions quant à la validité du modèle et à l'identification de ses paramètres. Par conséquent, avant d'explorer notre solution d'absorbeur non linéaire vibroacoustique bistable, il est essentiel de développer une compréhension approfondie et quantitative de la modélisation du système couplé tube-membrane monostable, ce qui sera présenté dans les chapitres deux et trois.

Dans le second chapitre, nous avons élaboré une approche pour identifier les paramètres du modèle simplifié du système couplé tube-membrane monostable, à la fois dans les domaines linéaire et non linéaire. Cette méthode permet d'estimer la variation de ces paramètres en fonction de l'amplitude d'excitation. Une description détaillée du dispositif expérimental par lequel les réponses fréquentielles du tube et de la membrane sont déterminées a été présentée. En utilisant la méthode de l'équilibrage harmonique et la technique de complexification averaging de Manevitch, nous avons obtenu deux expressions analytiques simples distinctes pour décrire la dynamique non linéaire du système. À travers une régression non linéaire, nous avons identifié les paramètres du modèle simplifié à partir des données expérimentales. Enfin, nous présentons les résultats de cette identification, notamment les réponses fréquentielles, les courbes de crêtes, et les réponses temporelles obtenues à partir des paramètres identifiés, que nous avons comparées aux données expérimentales. Nous avons également présenté et comparé la variation des paramètres identifiés par la méthode d'équilibrage harmonique et de complexification averaging.

Suite à cette méthode d'identification, nous avons observé une importante fluctuation de l'amortissement non linéaire. En outre, l'étude paramétrique effectuée dans la thèse de R. Bellet a mis en évidence l'influence majeure de l'amortissement sur la dynamique du système. Ces deux constatations nous ont conduit à entreprendre une analyse détaillée de l'impact de l'amortissement non linéaire sur la dynamique du système de couple tube-membrane monostable. Dans un premier temps, nous avons déterminé les solutions périodiques ainsi que leur stabilité. Ensuite, en utilisant la méthode des échelles multiples, nous avons identifié la VI. Nous avons également examiné les réponses fortement modulées et analysé les bifurcations locales des solutions périodiques. À la conclusion de ce chapitre, nous avons utilisé l'ensemble de ces outils pour évaluer l'influence de l'amortissement non linéaire sur la dynamique, en étudiant la variation de la courbe de résonance, des diagrammes de bifurcations et de la VI en fonction de l'amortissement non linéaire.

Les conclusions tirées des divers travaux exposés dans la cinquième section de ce chapitre, qui démontrent la capacité du NES bistable à surpasser un monostable en termes de performances, servent de motivation pour entreprendre une étude comparative de l'efficacité d'atténuation entre les membranes bistables et monostables. Dans le quatrième chapitre, nous examinons l'efficacité d'absorption des membranes monostables et bistables en utilisant une approche d'optimisation numérique. Après avoir exposé ces résultats, nous décrivons notre méthode d'optimisation numérique, qui implique l'analyse de la variation de l'aire sous la courbe de crête du tube en fonction de la raideur linéaire de la membrane, qui constitue le paramètre optimisé. Cette méthode nous permet donc de comparer l'efficacité d'atténuation de plusieurs membranes monostables et bistables, chacune ayant des valeurs différentes de rigidité linéaire. En conséquence, cette méthode ne se contente pas de comparer les performances des membranes bistables et monostables, mais elle permet également de comparer différentes membranes bistables entre elles, ainsi que différentes membranes monostables. Par la suite, pour valider les résultats obtenus grâce à la variation de l'aire de la courbe, nous présentons les courbes de crête, les réponses en fréquence, les rapports de dissipation de la membrane, ainsi que la dynamique du système pour diverses valeurs de raideur linéaire. De plus, nous avons appliqué cette méthodologie à d'autres configurations de la membrane, en variant les rayons et les épaisseurs. Avant de présenter la méthodologie de l'optimisation, nous avons défini le modèle décrivant la dynamique du système couplé tube-membrane bistable. De plus, nous avons réalisé des calculs préliminaires pour analyser les résultats de l'optimisation, notamment l'exploration

de l'énergie potentielle ainsi que la caractéristique de la courbe des membranes et les fréquences propres couplées.

Dans le cinquième chapitre, nous avons entrepris une étude analytique visant à expliquer les principaux résultats observés lors de l'optimisation numérique. En comparaison avec le système monostable, le système bistable présente une dynamique plus complexe qui dépasse les capacités des modèles analytiques conçus pour décrire la dynamique du système monostable. Par conséquent, nous avons tout d'abord introduit une nouvelle application de la méthode de la complexification averaging. Cette approche nous a permis de déterminer à la fois les solutions périodiques intrapuits et interpuits du système bistable. Cette technique novatrice repose sur une transformation des coordonnées qui introduit une position d'équilibre dynamique, caractérisant ainsi la dynamique intrapuits de notre système. Ensuite, nous avons validé cette nouvelle application en utilisant la technique présentée dans les références [41, 42, 43], qui se base sur la méthode d'équilibrage harmonique. Après cette validation, nous nous sommes penchés sur l'étude des bifurcations locales de ces solutions périodiques. Le comportement fréquentiel du système bistable, observé par intégration numérique (dans le chapitre quatre), a été expliqué à partir des résultats de cette étude analytique. Nous avons également examiné la variation de la position d'équilibre dynamique en fonction de l'amplitude et de la fréquence d'excitation, tant d'un point de vue numérique qu'analytique. Enfin, nous avons réalisé une étude asymptotique, au cours de laquelle la méthode des échelles multiples a été utilisée pour décrire, pour la première fois dans cette thèse, un modèle qui décrit simultanément la VI lente des oscillations intrapuits et interpuits du système. Ce modèle a ensuite été utilisé pour valider certains des résultats obtenus lors de l'optimisation.

Le sixième chapitre est dédié à la confirmation expérimentale des principaux résultats obtenus dans les deux chapitres précédents, à savoir les résultats d'optimisation et la position d'équilibre dynamique. Tout d'abord, nous avons élaboré une solution expérimentale pour un oscillateur vibroacoustique non linéaire bistable, au sein duquel plusieurs essais expérimentaux ont été menés. Ensuite, nous avons comparé le comportement fréquentiel expérimentalement déterminé pour différentes membranes bistables et monostables. Les courbes de crête distinctes obtenues expérimentalement pour diverses membranes bistables et monostables ont été superposées pour les confronter aux résultats de l'optimisation. Enfin, en conclusion de ce chapitre, nous exposons les résultats expérimentaux relatifs à la variation de la position d'équilibre dynamique en fonction de l'amplitude et de la fréquence d'excitation.

Enfin, nous avons conclu notre thèse par une courte synthèse et quelques perspectives.

1.8 Conclusion

Les travaux entrepris dans le cadre de cette thèse sont structurés en 5 chapitres :

2. Identification des paramètres d'un modèle de NES dans les domaines linéaire et non linéaire.
3. Étude analytique d'un absorbeur monostable à amortissement non linéaire.
4. Optimisation numérique du système couplé tube-membrane.

5. Étude analytique de la dynamique d'un système à 2 degrés de liberté comportant un NES bistable.
6. Vérifications expérimentales.

Chapitre 2

Identification des paramètres d'un modèle de NES

Introduction

Ce chapitre traite un système classique pour l'étude du PE : un système à 2 degrés de liberté dont un non linéaire. Il présente la démarche suivie pour l'identification des paramètres du modèle. Nous y décrivons en détail les essais expérimentaux réalisés. Nous établissons ensuite les deux expressions des fonctionnelles qui serviront à l'identification. Ces fonctionnelles décrivent la dynamique du système non linéaire et emploient les méthodes d'équilibrage harmonique et de complexification averaging. La méthode de régression non linéaire utilisée est présentée. Puis les résultats de l'identification sont présentés. Nous comparons les réponses fréquentielles déterminées expérimentalement avec celles données à partir de l'identification en utilisant les deux fonctionnelles. Nous comparons la courbe de crête donnée à partir de la mesure de la pression acoustique dans le tube avec les courbes de crête obtenues à partir des paramètres identifiés, celle déterminée par l'utilisation des moyennes de la variation des paramètres identifiés dans la zone de PE et celle obtenue par l'utilisation des paramètres déterminés expérimentalement à une faible amplitude d'excitation. Nous comparons les réponses temporelles du système déterminées numériquement à partir des paramètres identifiés par l'utilisation des méthodes d'équilibrage harmonique et de complexification averaging avec les données expérimentales. La variation estimée des paramètres de notre système en fonction de l'amplitude d'excitation dans les deux domaines (linéaire et non linéaire) est présentée et analysée. Afin de valider cette méthode d'identification, nous l'appliquons à d'autres configurations expérimentales.

2.1 Description du système utilisé dans l'étude

2.1.1 Description du dispositif expérimental

Le dispositif s'inspire des travaux de Cochelin et al. [3] et de Bellet et al. [5]. L'absorbeur non linéaire vibroacoustique est toujours constitué d'une fine membrane circulaire viscoélastique qui est soumise à un déplacement transversal axisymétrique de forte amplitude à l'origine de la non-linéarité. Cet absorbeur est couplé au premier mode de résonance d'un tube ouvert à travers une boîte de couplage. Le SP (le tube) est excité par un champ acoustique fourni par un haut-parleur (voir Fig.2.1). Dans ce travail, les dimensions du tube et de la boîte de couplage sont fixées. Le diamètre du tube

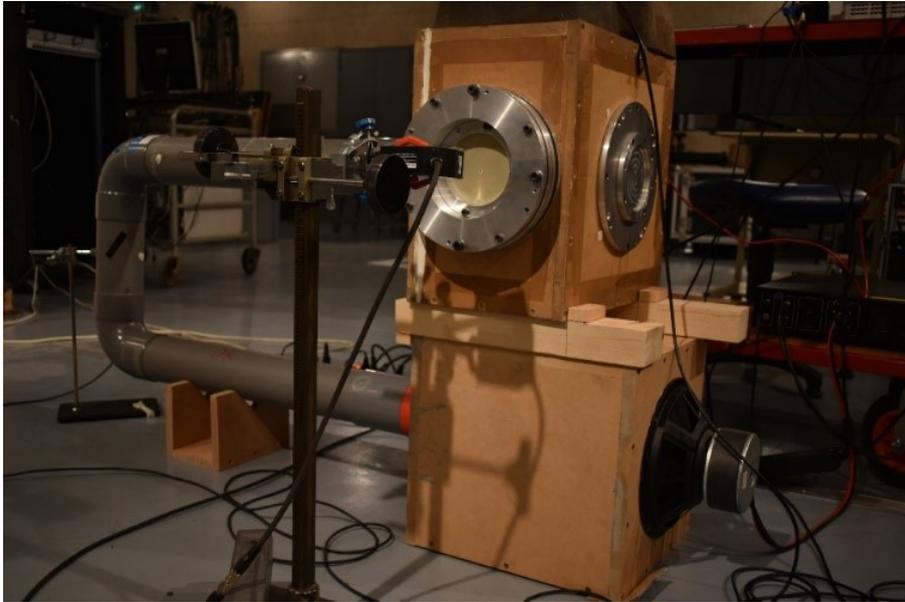


Figure 2.1: Dispositif expérimental

est $D_t = 0,045$ m, sa longueur est $L_t = 2,2$ m, sa première fréquence de résonance est $f_t = 79$ Hz. Le volume de la boîte de couplage est de $V_c = 29,3$ l. La membrane d'épaisseur variable h_m et de rayon variable R_m est fixée sur la boîte de couplage par l'intermédiaire d'un support qui permet le changement de son diamètre et de la précontrainte exercée dans le plan de la membrane. Nous avons utilisé trois différentes configurations de membrane et nous avons gardé le même tube. Les trois configurations sont :

Configuration 1: $h_{m1} = 0,23$ mm, $R_{m1} = 5$ cm, $f_{m1} = 45$ Hz

Configuration 2: $h_{m2} = 0,24$ mm, $R_{m2} = 4$ cm, $f_{m2} = 44$ Hz

Configuration 3: $h_{m3} = 0,62$ mm, $R_{m3} = 5$ cm, $f_{m3} = 45$ Hz

2.1.2 Essai expérimentaux

On a premièrement réalisé une série d'essais sur le dispositif montré ci-dessus. Cette série d'essais est contrôlée à travers un programme écrit sur Matlab qui permet de piloter directement le système d'acquisition NetdB via le mode de communication TCP/IP. Ce système d'acquisition présente douze voies d'acquisition synchrones et deux voies de génération de signaux avec une fréquence d'échantillonnage fixée pour toutes les expériences à 12,8 kHz. Le montage permet d'exciter le tube par un champ acoustique harmonique à travers un haut-parleur. Le haut-parleur est alimenté par l'intermédiaire d'un amplificateur TIRA 120BBA dont le signal d'entrée est fourni par le système d'acquisition NetdB. Un filtre passe-bas avec une bande passante de $[0,1000]$ Hz filtre le signal de sortie du NetdB afin d'éviter de polluer les signaux d'excitation par le bruit à faible amplitude d'excitation. On a défini une plage d'excitation amplitude-fréquence adaptée à chaque type de montage. Les pas de fréquences de 0,4 Hz et de tension de 0,01 v assurent un compromis entre la finesse d'analyse suffisante pour bien décrire toute la gamme de réponse du système et le temps de mesure ; il a été choisi de ne pas avoir de durée totale d'acquisition supérieure à trois jours pour assurer une relative stabilité des conditions expérimentales.

Un capteur de déplacement laser Keyence LK-G152, connecté au contrôleur LK-G3001, mesure le déplacement du centre de la membrane. La plage de mesure de ce capteur de déplacement est ± 40 mm. Le réglage de la sensibilité de ce capteur est fixé à 10^2 V/m.

Un microphone de type GRAS 46BF de sensibilité 3,6 mV/Pa mesure la pression acoustique au milieu du tube. A partir de cette mesure de pression, on déduit, par les équations de conservation, la valeur du déplacement en chaque point du milieu acoustique. Il est important de garder à l'esprit que, si la valeur obtenue n'est valable strictement que lorsque le ventre de pression du mode excité se situe à la position du microphone, la forme sinusoïdale du mode dans le guide d'onde rend la mesure peu sensible à un écart de position. Un écart est susceptible de conduire à une sous-estimation de l'amplitude.

Un microphone de type GRAS 46DP de sensibilité 0,9 mV/Pa mesure la pression acoustique dans la boîte de couplage du côté du haut-parleur. A partir de cette mesure, on peut avoir une idée sur le terme de forçage F correspondant à chaque tension d'excitation envoyée aux bornes du haut-parleur.

Trois voies d'entrée de NetdB permettent de mesurer la tension envoyée par le générateur de signaux NetdB à l'amplificateur TIRA, ainsi que la tension et l'intensité de sortie de l'amplificateur TIRA. Ces trois mesures sont des moyens de contrôler et de vérifier le bon déroulement de notre série d'essais. La fig.2.2 montre un schéma de ce dispositif expérimental.

La procédure consiste à mettre l'enregistrement en route à $t_0 = 0$ s. À $t_1 = 1,25$ s le signal est envoyé au haut-parleur pour une durée de 10 s. L'enregistrement s'arrête 1 s après la fin du signal d'excitation. Deux secondes d'attente supplémentaires sont allouées pour permettre le transfert des données de la chaîne d'acquisition au PC qui contrôle la mesure. Une moyenne quadratique (root mean square) est appliquée sur les trois dernières secondes du signal avant la coupure de la source afin d'estimer la valeur de l'amplitude efficace en régime établi. Cette amplitude est plus grande que celle qui serait obtenue par analyse de Fourier à la seule fréquence d'excitation, en raison de la génération d'harmoniques aux grandes amplitudes. La nature quadratique de ce calcul et la place prépondérante que prend la réponse à la fréquence d'excitation rendent toutefois l'amplitude peu sensible à la présence d'harmoniques. Ceci permet de déterminer les réponses amplitude-fréquence de déplacement de l'air dans le tube et de la membrane. Un exemple de surface de réponse amplitude-fréquence du déplacement de l'air aux extrémités du tube U_{Exp} et du déplacement de la membrane Q_{Exp} sont présentés dans la Fig. 2.3. Ces résultats correspondent à la première configuration de la membrane : $h_m = 0,23$ mm, $R_m = 5$ cm, $f_m = 45$ Hz.

2.2 Méthode d'identification

2.2.1 Modèle simplifié du système

Le modèle adimensionné de ce système couplé tube-membrane utilisé ici est issu des travaux de R. Bellet [5]. Il consiste en une double réduction de Rayleigh-Ritz des équations de conservation du système couplé tube/membrane : le champ de pression est supposé être décrit par le premier mode acoustique du tube, et la déformée de la membrane est approchée par une déformée axisymétrique parabolique (voir Eq.1.14). Cela conduit au

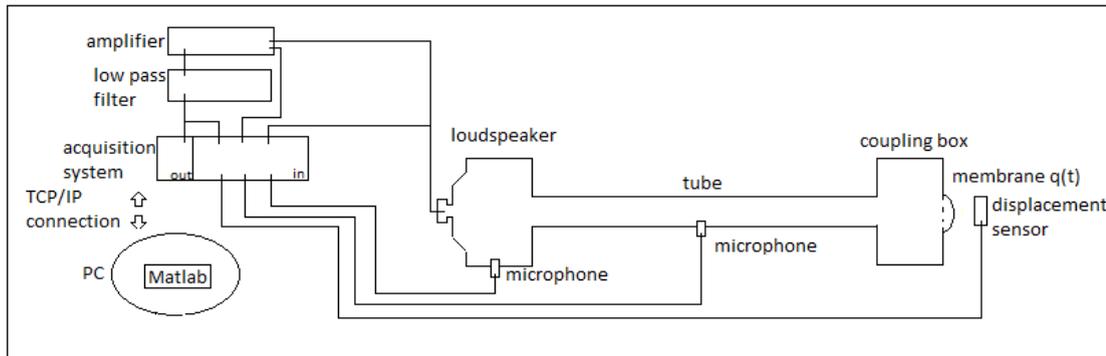


Figure 2.2: schéma de principe du montage expérimental.

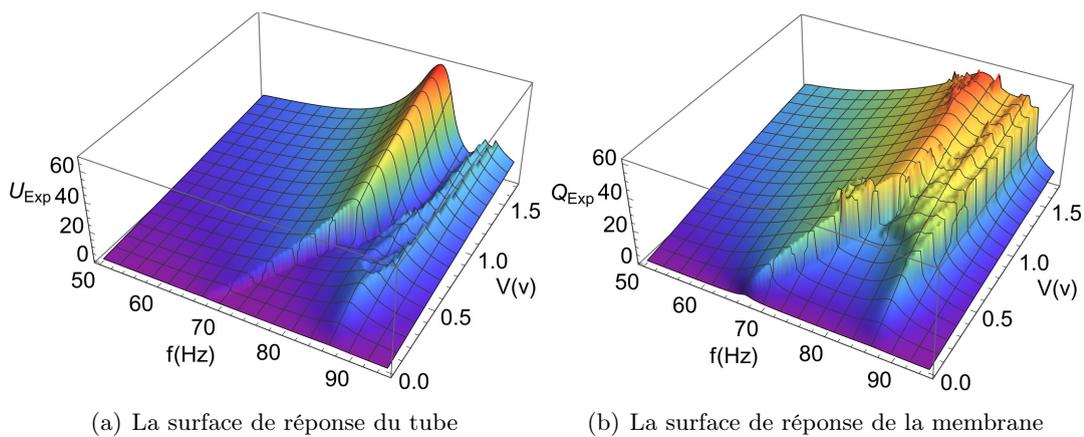


Figure 2.3: Surfaces des réponses amplitude-fréquence du tube et de la membrane déterminées expérimentalement pour la configuration 1: $h_m = 0,23$ mm, $R_m = 5$ cm, $f_m = 45$ Hz.

système d'équations adimensionnées suivant (Eq.1.15):

$$\begin{aligned} u'' + u + \lambda u' + \beta(u - q) &= F \cos\left(\frac{\tau\Omega}{\omega_t}\right) \\ \gamma q'' + c_1(\eta\omega_t q' + q(1 + \chi)) + c_{nl}(q^3 + 2\eta q^2\omega_t q') + \beta(q - u) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

où u et q sont les déplacements normalisés de l'air en bout du tube et au centre de la membrane, λ et $c_1\eta\omega_t$ les coefficients d'amortissement linéaire, $2c_1\eta\omega_t$ le coefficient d'amortissement non linéaire, ω_t la pulsation de résonance du tube, F l'amplitude de forçage, Ω la pulsation d'excitation, β le terme de couplage, γ la masse dynamique, $c_1(1 + \chi)$ et c_{nl} les raideurs linéaire et cubique de la membrane avec χ le coefficient de la précontrainte de la membrane. η est un terme caractérisant l'amortissement du matériau constitutif de la membrane.

Comme le montre la deuxième équation du système Eq.2.1, les paramètres sont reliés par des relations linéaires qui peuvent perturber leur identification. Afin de pallier cet inconvénient, il convient de réécrire ce système. On observe que les deux coefficients c_1 et c_{nl} sont donnés par $c_1 = \frac{2 \times 1,015^4 \pi}{9(1-\nu_m^2)} \frac{E_m h_m^3 L_t S_t}{c_0^2 \rho_a R m_m^6}$ et $c_{nl} = \frac{64}{3\pi^3(1-\nu_m^2)} \frac{E_m h_m^3 L_t S_t}{c_0^2 \rho_a R m_m^6}$ [5]. Il est évident de voir que $\frac{1,015^4 \pi}{3} = 1,1 \simeq 1,03 = \frac{32}{\pi^3}$ donc $c_1 \simeq c_{nl}$. Nous pouvons donc réécrire le système sous la forme suivante

$$\begin{aligned} u'' + u + \lambda u' + \beta(u - q) &= F \cos\left(\frac{\tau\Omega}{\omega_t}\right) \\ \gamma q'' + k_1 q + k_{nl} q^3 + c_\eta \omega_t (2q^2 + 1) q' + \beta(q - u) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

où $k_1 = c_1(1 - \chi)$ et $k_{nl} = c_1$ sont les raideurs linéaires et non linéaires de la membrane, $\omega_t c_\eta$ est le coefficient d'amortissement de la membrane avec $c_\eta = c_1 \eta$. Il est à noter qu'ici le même coefficient est utilisé pour décrire l'amortissement linéaire $\omega_t c_\eta$ et l'amortissement non linéaire $2\omega_t c_\eta$.

2.2.2 Détermination des paramètres du système en régime linéaire

Par une mesure statique nous avons déterminé les dimensions du tube, de la membrane et de la boîte de couplage. Cette mesure permet de calculer les termes de raideur et de masse. Les expressions analytiques des paramètres du modèle utilisées pour ce calcul sont définies dans [4]. Et par une mesure dynamique au moyen d'un générateur de tension et d'un oscilloscope, nous avons déterminé les fréquences à l'amplitude maximales de la pression dans le tube et celle du déplacement de la membrane ainsi que les bandes de fréquences à -3dB de ces amplitudes maximales. Par cette mesure dynamique, où le comportement du système est purement linéaire, on a déterminé les termes de dissipation du tube et de la membrane. Les valeurs de ces paramètres sont utilisées par la suite lors de la procédure d'inversion et comme un outil de vérification à faible amplitude d'excitation.

2.2.3 Fonctionnelles décrivant le déplacement de la membrane et de l'air en bout du tube

Afin de voir des expressions analytiques décrivant les coordonnées du système, il faut penser à écrire notre système non linéaire d'équations différentielles Eq.2.1 sous forme

algébrique. Pour cela, on va appliquer deux méthodes analytiques largement utilisées pour l'étude des systèmes dynamiques non linéaires, la méthode d'équilibrage harmonique et la méthode de complexification averaging. Ces méthodes analytiques permettent de mettre en évidence l'influence des différents paramètres du système.

Fonctionnelle obtenue par la méthode d'équilibrage harmonique

L'équilibrage harmonique est une méthode fréquentielle qui consiste à écrire les variables qui décrivent le mouvement du système en séries de Fourier. Dans notre cas, on va se limiter au premier harmonique. Les variables du problème sont exprimées sous la forme $u(\tau) = U \cos(\omega\tau - \phi_t)$ et $q(\tau) = Q \cos(\omega\tau - \phi_m)$. En remplaçant ces expressions dans le système Eq.2.2 et $\frac{\Omega}{\omega_t}$ par ω et en négligeant les harmoniques d'ordres supérieurs, on obtient le système d'équations algébriques

$$\begin{aligned}
(\beta - \omega^2 + 1) U \cos(\omega\tau - \phi_t) - \lambda\omega U \sin(\omega\tau - \phi_t) - \beta Q \cos(\omega\tau - \phi_m) &= \\
&F \cos(\omega\tau) \\
\left(Q (\beta - \gamma\omega^2 + k_l) + \frac{3k_{nl}Q^3}{4} \right) \cos(\omega\tau - \phi_m) - c_\eta\omega_t\omega Q \left(\frac{Q^2}{2} + 1 \right) \sin(\omega\tau - \phi_m) & \\
&= \beta U \cos(\omega\tau - \phi_t) \quad (2.3)
\end{aligned}$$

L'application de la méthode d'équilibrage harmonique sur le système d'équations Eq.2.3 conduit au système d'équations

$$\begin{aligned}
c_{BH}U \cos(\phi_t) - d_{BH}U \sin(\phi_t) - \beta Q \cos(\phi_m) &= F \\
c_{BH}U \sin(\phi_t) + d_{BH}U \cos(\phi_t) - \beta Q \sin(\phi_m) &= 0 \\
a_{BH} \cos(\phi_m) + b_{BH} \sin(\phi_m) &= \beta U \cos(\phi_t) \\
a_{BH} \sin(\phi_m) - b_{BH} \cos(\phi_m) &= \beta U \sin(\phi_t) \quad (2.4)
\end{aligned}$$

où $a_{BH} = Q (\beta - \gamma\omega^2 + k_l) + \frac{3k_{nl}Q^3}{4}$, $b_{BH} = c_\eta\omega_t\omega Q \left(\frac{Q^2}{2} + 1 \right)$, $c_{BH} = \beta - \omega^2 + 1$ et $d = \lambda\omega$.

En multipliant les deux premières équations du système Eq.2.4 par β et en remplaçant $\beta U \cos(\phi_t)$ et $\beta U \sin(\phi_t)$ par leur expression donnée par les deux dernières équations on obtient le système d'équations Eq.2.5

$$\begin{aligned}
(a_{BH}c_{BH} - b_{BH}d_{BH} - \beta^2Q) \cos(\phi_m) - (a_{BH}d_{BH} + b_{BH}c_{BH}) \sin(\phi_m) &= \beta F \\
(a_{BH}c_{BH} - b_{BH}d_{BH} - \beta^2Q) \sin(\phi_m) + (a_{BH}d_{BH} + b_{BH}c_{BH}) \cos(\phi_m) &= 0 \\
a_{BH} \cos(\phi_m) + b_{BH} \sin(\phi_m) &= \beta U \cos(\phi_t) \\
a_{BH} \sin(\phi_m) - b_{BH} \cos(\phi_m) &= \beta U \sin(\phi_t) \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Par un simple calcul et en remplaçant a_{BH} , b_{BH} , c_{BH} et d_{BH} par leur expression, on obtient les deux équations qui relient les amplitudes d'oscillation des déplacements aux paramètres du modèle

$$\begin{aligned} Q^6 \alpha_{BH3} + Q^4 \alpha_{BH2} + Q^2 \alpha_{BH1} &= \beta^2 F^2 \\ Q^6 \beta_{BH3} + Q^4 \beta_{BH2} + Q^2 \beta_{BH1} &= \beta^2 U^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

où les expressions des coefficients α_{BH_i} et β_{BH_i} (avec $i = 1, 2, 3$) sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha_{BH3} &= \frac{1}{4} c_\eta^2 \lambda^2 \omega^4 \omega_t^2 + \frac{9}{16} \lambda^2 k_{nl}^2 \omega^2 + (\beta - \omega^2 + 1)^2 \left(\frac{1}{4} c_\eta^2 \omega^2 \omega_t^2 + \frac{9k_{nl}^2}{16} \right) \\ \alpha_{BH2} &= c_\eta^2 \lambda^2 \omega^4 \omega_t^2 + (\beta - \omega^2 + 1)^2 \left(c_\eta^2 \omega^2 \omega_t^2 + \frac{3}{2} k_{nl} (\beta - \gamma \omega^2 + k_1) \right) + \beta^2 c_\eta \lambda \omega^2 \omega_t \\ &\quad + \frac{3}{2} \lambda^2 k_{nl} \omega^2 (\beta - \gamma \omega^2 + k_1) - \frac{3}{2} \beta^2 k_{nl} (\beta - \omega^2 + 1) \\ \alpha_{BH1} &= \beta^4 + c_\eta^2 \lambda^2 \omega^4 \omega_t^2 + (\beta - \omega^2 + 1)^2 \left(c_\eta^2 \omega^2 \omega_t^2 + (\beta - \gamma \omega^2 + k_1)^2 \right) \\ &\quad + 2\beta^2 c_\eta \lambda \omega^2 \omega_t - 2\beta^2 (\beta - \omega^2 + 1) (\beta - \gamma \omega^2 + k_1) + \lambda^2 \omega^2 (\beta - \gamma \omega^2 + k_1)^2 \\ \beta_{BH3} &= \frac{1}{4} c_\eta^2 \omega^2 \omega_t^2 + \frac{9k_{nl}^2}{16} \\ \beta_{BH2} &= c_\eta^2 \omega^2 \omega_t^2 + \frac{3}{2} k_{nl} (\beta - \gamma \omega^2 + k_1) \\ \beta_{BH1} &= c_\eta^2 \omega^2 \omega_t^2 + (\beta - \gamma \omega^2 + k_1)^2 \end{aligned}$$

Le système d'équation 2.6 présente deux polynômes du troisième degré en Q^2 . Les coefficients de la première équation ne dépendent que des paramètres du système et du forçage. La deuxième équation permet de calculer le déplacement de l'air dans le tube U en fonction du déplacement de la membrane Q . On commence donc par résoudre la première équation pour ensuite déterminer la solution de la deuxième.

Le premier polynôme du troisième degré en Q^2 possède trois solutions. Le type de ces racines dépend du signe du discriminant du polynôme Δ . Rappelons que le discriminant d'un polynôme de troisième degré $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ est donnée par $\Delta_P = b^2c^2 + 18abcd - 27a^2d^2 - 4ac^3 - 4b^3d$. Si $\Delta > 0$ on a trois racines réelles distinctes. Si $\Delta < 0$ on a une racine réelle et deux racines complexe conjuguées non réelles. Si $\Delta = 0$ on a une racine double ou triple. Dans notre cas on cherche à partir de ces trois racines Q_1 , Q_2 et Q_3 une fonction qui décrit le déplacement de la membrane en fonction des paramètres du système où on va trier pour chaque combinaison des paramètres la bonne racine qui décrit le comportement stable de la membrane.

Pour commencer, on construit une fonction appelée Sig qui permet de distinguer les racines réelles et complexes. Elle est définie par

$$\text{Sig} : Q \rightarrow \text{Sig}(Q)$$

$$Q \rightarrow 1 \text{ Si } Q \text{ est réel}$$

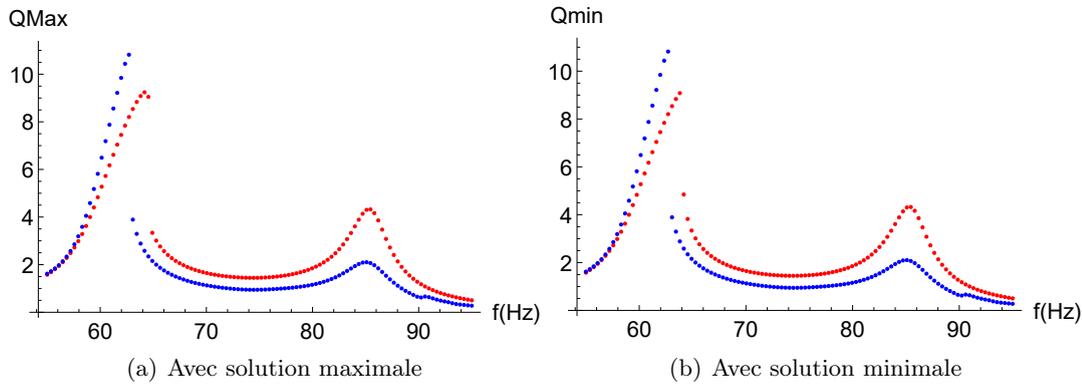


Figure 2.4: Les réponses fréquentielles de la membrane déterminée analytiquement (en rouge) et expérimentalement (en bleu). La courbe rouge à gauche correspond à la solution maximale et à droite à la solution minimale.

-1 Si Q possède une partie imaginaire non nulle.

Dans le cas où les trois racines sont réelles c.-à-d. $\{\text{Sig}(Q_1), \text{Sig}(Q_2), \text{Sig}(Q_3)\} = \{1, 1, 1\}$, la solution décrivant le déplacement de la membrane correspond à la solution minimale $Q = \min\{Q_1, Q_2, Q_3\}$. Ce choix est adopté pour correspondre aux données expérimentales. En effet, les expériences sont conduites en partant de situations initiales au repos. La première solution stable rencontrée par le système est celle de moindre amplitude. La figure 2.4 montre les réponses fréquentielles de la membrane déterminées analytiquement (en rouge) et expérimentalement (en bleu). La courbe rouge correspond à la solution maximale Fig.2.4(a). La courbe rouge correspond à la solution minimale Fig.2.4(b). La forme du pic de fréquence de la courbe calculée Fig.2.4(a) n'est pas observée expérimentalement, ce qui va dans le sens d'une confirmation du choix de la réponse de faible amplitude malgré un écart significatif.

Dans le cas où on a une racine réelle et deux racines complexes conjuguées non réelles, on choisit la solution réelle donc $Q = \max\{\text{Sig}(Q_1)|Q_1|, \text{Sig}(Q_2)|Q_2|, \text{Sig}(Q_3)|Q_3|\}$. Les expressions analytiques de Q_1 , Q_2 et Q_3 sont déterminées par la commande Solve de Mathematica.

Une fois la fonction Q déterminée, la fonction U est simplement déduite par l'utilisation de la deuxième équation du système Eq.2.6.

Fonctionnelle obtenue par la méthode de complexification averaging

Cette méthode consiste à introduire les variables complexes de Manevitch qui permettent de séparer les oscillations rapides du système à la pulsation ω et les modulations lentes

$$\begin{aligned}\phi_1(\tau) e^{i\tau\omega} &= u'(\tau) + iu(\tau)\omega \\ \phi_2(\tau) e^{i\tau\omega} &= q'(\tau) + iq(\tau)\omega\end{aligned}\tag{2.7}$$

où $u'(\tau)$ et $q'(\tau)$ sont les dérivées de u et q par rapport à la variable temporelle τ .

Les variables de Manevitch données par Eq.2.7 sont introduites dans le système d'équations 2.2. En moyennant ces équations sur la pulsation ω , on obtient le système d'équations qui régit les modulations lentes des amplitudes complexes

$$\begin{aligned} & -\frac{i\beta\phi_1}{2\omega} + \frac{i\beta\phi_2}{2\omega} + \frac{\lambda\phi_1}{2} + \phi_2' + \frac{i\omega\phi_1}{2} - \frac{i\phi_1}{2\omega} = \frac{F}{2} \\ \frac{i\beta\phi_1}{2\omega} - \frac{i\beta\phi_2}{2\omega} + \gamma\phi_2' + \frac{1}{2}i\gamma\omega\phi_2 + \frac{c_\eta\omega_t\phi_2^*\phi_2^2}{4\omega^2} + \frac{c_\eta\omega_t\phi_2}{2} - \frac{ik_l\phi_2}{2\omega} - \frac{3ik_{nl}\phi_2^*\phi_2^2}{8\omega^3} &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

On peut noter ici que la dissipation non linéaire se traduit par le terme $\frac{c_\eta\omega_t\phi_2^*\phi_2^2}{4\omega^2}$.

Les points fixes de ce système sont les solutions qui annulent les dérivées dans Eq.2.8. On obtient ainsi les équations qui correspondent aux solutions périodiques du système Eq.2.2

$$\begin{aligned} & \phi_{10} \left(-\frac{i\beta}{2\omega} + \frac{\lambda}{2} + \frac{i\omega}{2} - \frac{i}{2\omega} \right) + \frac{i\beta\phi_{20}}{2\omega} = \frac{F}{2} \\ \phi_{20} \left(\frac{c_\eta\omega_t|\phi_{20}|^2}{4\omega^2} - \frac{3ik_{nl}|\phi_{20}|^2}{8\omega^3} - \frac{i\beta}{2\omega} + \frac{i\gamma\omega}{2} + \frac{c_\eta\omega_t}{2} - \frac{ik_l}{2\omega} \right) + \frac{i\beta\phi_{10}}{2\omega} &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Par une simple manipulation, le système est réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} \phi_{10} &= \frac{\frac{F}{2} - \frac{i\beta\phi_{20}}{2\omega}}{-\frac{i\beta}{2\omega} + \frac{\lambda}{2} + \frac{i\omega}{2} - \frac{i}{2\omega}} \\ \phi_{20} \left(a_{CA} + b_{CA}|\phi_{20}|^2 \right) &= c_{CA} \end{aligned} \quad (2.10)$$

où les coefficients a_{CA} , b_{CA} et c_{CA} sont donnés par

$$\begin{aligned} a_{CA} &= \frac{\beta^2}{4\omega^2} + \left(-\frac{i\beta}{2\omega} + \frac{\lambda}{2} + \frac{i\omega}{2} - \frac{i}{2\omega} \right) \left(-\frac{i\beta}{2\omega} + \frac{i\gamma\omega}{2} + \frac{c_\eta\omega_t}{2} - \frac{ik_l}{2\omega} \right) \\ b_{CA} &= \left(-\frac{i\beta}{2\omega} + \frac{\lambda}{2} + \frac{i\omega}{2} - \frac{i}{2\omega} \right) \left(\frac{c_\eta\omega_t}{4\omega^2} - \frac{3ik_{nl}}{8\omega^3} \right) \\ c_{CA} &= -\frac{i\beta F}{4\omega}. \end{aligned}$$

La seconde équation du système 2.10 se transforme aisément en un polynôme de degré trois en $|\phi_{20}|^2$

$$|b_{CA}|^2 |\phi_{20}|^6 + \left(|a_{CA} + b_{CA}|^2 - |a_{CA}|^2 - |b_{CA}|^2 \right) |\phi_{20}|^4 + |a_{CA}|^2 |\phi_{20}|^2 = |c_{CA}|^2 \quad (2.11)$$

Par la même manière que celle présentée ci-dessus pour la méthode d'équilibrage harmonique, on définit la fonction Q_{CA} (le déplacement de la membrane par l'utilisation de

la méthode de CA) qui est reliée à ϕ_{20} par $Q_{CA} = \frac{|\phi_{20}|}{\omega}$. Pour la modulation lente $|\phi_{10}|$ qui correspond à l'amplitude du déplacement de l'air en bout du tube U_{CA} , un simple calcul en utilisant la première équation du système lentement modulé Eq.2.9 donne

$$|\phi_{10}| = \frac{\beta^2 - 2\beta\gamma\omega^2 + \gamma^2\omega^4 + c_\eta^2\omega^2\omega_t^2 + k_l^2 + 2\beta k_l - 2\gamma k_l\omega^2}{\beta^2} |\phi_{20}|^2 + \frac{2c_\eta^2\omega^2\omega_t^2 + 3k_l k_{nl} + 3\beta k_{nl} - 3\gamma k_{nl}\omega^2}{2\beta^2\omega^2} |\phi_{20}|^4 + \frac{4c_\eta^2\omega^2\omega_t^2 + 9k_{nl}^2}{16\beta^2\omega^4} |\phi_{20}|^6$$

La différence entre ces deux méthodes de calcul est la suivante : l'équilibrage harmonique néglige les harmoniques d'ordre supérieur à l'ordre de coupure (ici l'ordre 1), alors que la complexification averaging détermine une grandeur associée à une amplitude qui mélange les contributions de toutes les harmoniques, effet de la moyenne réalisée sur une période de la fondamentale. On s'attend à une différence entre ces méthodes lorsque les solutions ont des composantes significatives en harmoniques.

2.2.4 Procédure d'inversion

À ce stade, nous disposons des expressions analytiques du déplacement de l'air en bout du tube et au centre de la membrane (Q_{BH} et U_{BH} , Q_{CA} et U_{CA}) et des réponses fréquentielles (Q_{Exp} et U_{Exp}). Comme les expressions donnant Q et U partagent les mêmes paramètres, nous devons les identifier simultanément. Pour ce faire, la fonction `MultiNonlinearModelFit` de Mathematica est adoptée. Cette fonction nous permet d'ajuster deux ensembles de données avec deux expressions.

Pour chaque amplitude d'excitation, nous cherchons donc des valeurs numériques des paramètres de notre système pour lesquelles les expressions analytiques Q_{BH} et U_{BH} (où Q_{CA} et U_{CA}) s'adaptent le mieux aux données expérimentales Q_{Exp} et U_{Exp} . Cela permet d'estimer au mieux la variation des paramètres de notre système en fonction de l'amplitude d'excitation dans les domaines linéaire et non linéaire.

Pour cette étape d'inversion, deux ensembles de paramètres sont utilisés : Pour le premier, seul l'amortissement de la membrane est utilisé pour l'ajustement. Ce choix est fait pour vérifier si l'imprécision du modèle est uniquement due à l'amortissement de la membrane. Pour le deuxième ensemble, les paramètres ajustés sont la pulsation et la raideur linéaire du tube, les raideurs linéaire et non linéaire et la dissipation de la membrane, le terme de couplage et le terme de masse.

Pour que la fonction `MultiNonlinearModelFit` réussisse à identifier nos paramètres, il faudra indiquer les valeurs initiales des paramètres. Pour la première amplitude d'excitation où le système à un comportement linéaire, on a utilisé les paramètres déterminés expérimentalement à faible amplitude d'excitation. Par la suite, les paramètres identifiés pour l'amplitude F_n sont utilisés comme des valeurs initiales pour l'amplitude F_{n+1} avec n l'indice numérotant les amplitudes expérimentales.

L'optimisation pour déterminer la variation de l'amplitude de la force excitatrice et des sept paramètres du modèle est un calcul lourd, réalisé sur un serveur Dell Poweredge R640, équipé de processeur Intel Xeon 6154 à 3 GHz et de 512 Go de RAM . Pour 110 amplitudes

d'excitation, le calcul nécessite environ 12 h pour l'utilisation de la méthode d'équilibrage harmonique et 17 h de calcul pour l'utilisation de la méthode de complexification averaging.

Lorsqu'il s'agit d'identifier l'amortissement de la membrane seule, les résultats de l'identification ne sont pas satisfaisants. Les courbes expérimentales (Q_{Exp} et U_{Exp}) ne concordent pas bien avec les résultats de l'identification. Il est clair que la simple modification de ce terme n'est pas suffisante pour corriger le modèle.

2.3 Résultats

2.3.1 Réponses fréquentielles

Les courbes des figures Fig.2.5, Fig.2.6, Fig.2.7 et Fig.2.8 présentent les résultats de l'identification pour quatre amplitudes d'excitation différentes correspondant à un comportement caractéristique du système. Pour toutes ces figures, les courbes rouges sont les réponses fréquentielles déterminées expérimentalement, les courbes en bleu sont les résultats donnés à partir de l'identification par l'utilisation de la méthode d'équilibrage harmonique et les courbes en vert par la méthode de complexification averaging. Les réponses fréquentielles du tube sont exposées à droite et celles de la membrane à gauche. Ces résultats sont les résultats obtenus pour la première configuration expérimentale : $h_m = 0,23$ mm, $R_m = 5$ cm, $f_m = 45$ Hz. Ces quatre figures choisies parmi les cent dix amplitudes de l'expérience permettent de présenter les différents types de comportements observés dans un système classique non linéaire à deux ddl (voir [5]).

La première amplitude d'excitation correspond à une tension appliquée aux bornes du haut-parleur $V = 0,01$ v Fig.2.5. A cette amplitude, on obtient deux pics de résonance, l'un attribué au système linéaire et l'autre à l'absorbeur non linéaire. Un comportement linéaire est observé.

Un comportement non linéaire est observé pour l'amplitude 0,27 v Fig.2.6. A cette amplitude on observe une discontinuité de la réponse fréquentielle compatible avec plusieurs états stables pour une même excitation et susceptible de donner lieu à une bifurcation. De plus, le maximum du pic associé à l'absorbeur non linéaire se décale vers les hautes fréquences, ce qui peut être interprété comme un durcissement du système.

Le phénomène d'écrêtage du pic de résonance est présenté dans la Fig.2.7 ($V = 0,2$ v). Ce phénomène est caractéristique du PE.

Pour la forte amplitude d'excitation ($V = 1,12$ v), un nouveau pic de résonance légèrement décalé vers les basses fréquences apparaît Fig.2.8. Pour cette amplitude d'excitation, on assiste à une saturation de la membrane. Sur ces figures, il est clair que les réponses fréquentielles identifiées (bleu et vert) et déterminées expérimentalement (rouge) sont très proches. Notre méthode d'identification réussit à reproduire dans le domaine fréquentiel tous les phénomènes non linéaires usuels, à savoir le durcissement des modes, la bifurcation, le PE.

Concernant le choix de la méthode utilisée, la méthode d'équilibrage harmonique est une méthode fréquentielle qui consiste à écrire les coordonnées du système en séries de Fourier, ce qui implique que ces coordonnées sont supposées périodiques. Dans ce cas, l'analyse

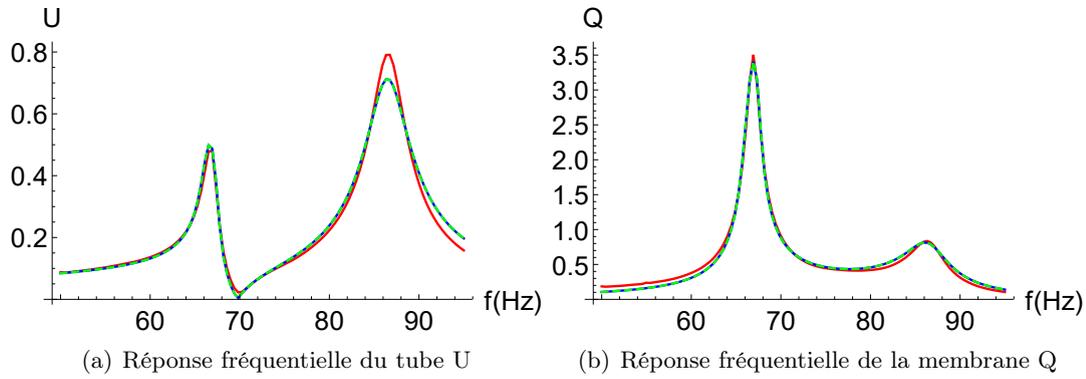


Figure 2.5: Résultats d'identification (excitation $V = 0,01$ v). Bleu : équilibrage harmonique ; vert : complexification averaging ; rouge : expériences. Configuration 1: $h_m = 0,23$ mm, $R_m = 5$ cm, $f_m = 45$ Hz.

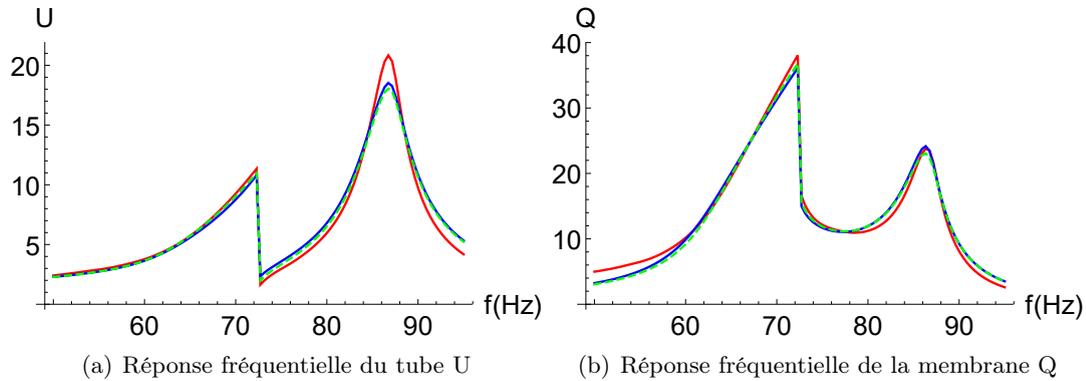


Figure 2.6: Résultats d'identification (excitation $V = 0,27$ v). Bleu : équilibrage harmonique ; vert : complexification averaging ; rouge : expériences. Configuration 1: $h_m = 0,23$ mm, $R_m = 5$ cm, $f_m = 45$ Hz.

consiste à déterminer les coefficients de Fourier qui sont les amplitudes de vibration des oscillateurs. La méthode de complexification averaging permet la représentation complexe des équations du mouvement en introduisant les variables complexes de Manevitch. Ces variables ont comme effet de séparer les oscillations rapides du système et les modulations lentes des amplitudes complexes ϕ_1 et ϕ_2 . Par un simple calcul, on peut déduire que le déplacement de la membrane $q(\tau)$ s'écrit sous la forme $q(\tau) = -\frac{i(\phi_2 e^{i\tau\omega} - \phi_2^* e^{-i\tau\omega})}{2\omega}$. En remplaçant ϕ_2 par sa forme polaire $\phi_2 = N_2 e^{-i\phi_{CAm}}$ on peut récrire $q(\tau)$ sous la forme sinusoïdale $\frac{N_2 \sin(\tau\omega - \phi_{CAm})}{\omega}$. La méthode de complexification et la méthode d'équilibrage harmonique sont globalement très proches. Elles cherchent à traduire d'une manière différente la même dépendance temporelle. Nous n'avons pas observé de différence notable dans les résultats fréquentiels donnés à partir de l'identification par l'utilisation de l'une ou l'autre de ces deux méthodes.

La figure Fig.2.9 présente cinq courbes de crête de la réponse fréquentielle du tube. Cette courbe présente l'amplitude maximale de la réponse fréquentielle du tube pour chaque amplitude d'excitation donnée. La courbe en rouge est la courbe de crête déterminée à partir de la réponse fréquentielle donnée par la mesure de la pression au milieu du tube. Les courbes en bleu et vert sont obtenues à partir des réponses identifiées en utilisant

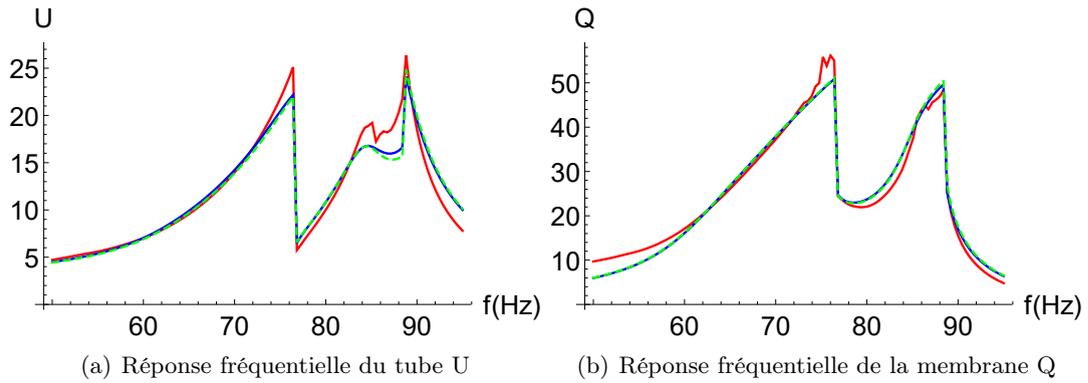


Figure 2.7: Résultats d'identification (excitation $V = 0,52$ v). Bleu : équilibrage harmonique ; vert : complexification averaging ; rouge : expériences. Configuration 1: $h_m = 0,23$ mm, $R_m = 5$ cm, $f_m = 45$ Hz.

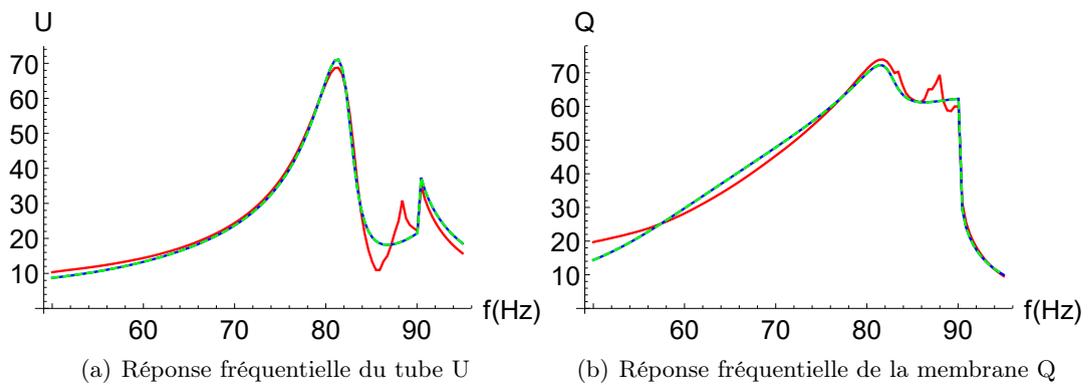


Figure 2.8: Résultats d'identification (excitation $V = 1,12$ v). Bleu : équilibrage harmonique ; vert : complexification averaging ; rouge : expériences. Configuration 1: $h_m = 0,23$ mm, $R_m = 5$ cm, $f_m = 45$ Hz.

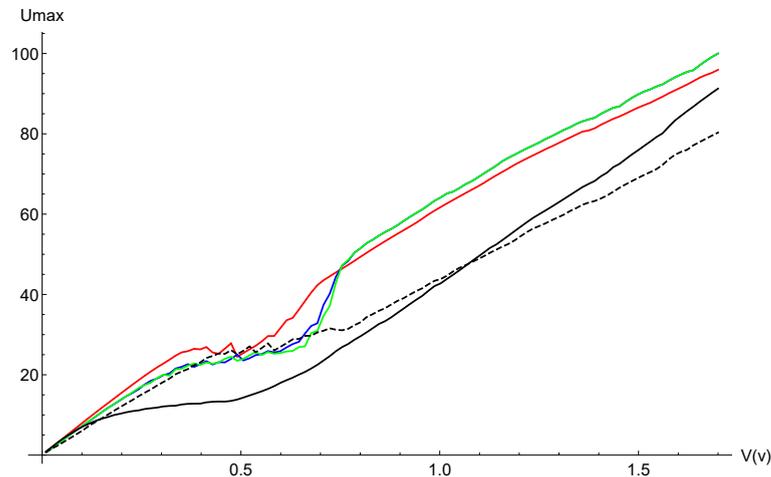


Figure 2.9: Courbes de crête. Rouge : expérience ; bleu : équilibrage harmonique ; vert : complexification averaging ; noir continue : avec paramètres identifiés à faible amplitude d'excitation ; noir discontinue : avec les moyennes des paramètres identifiés dans la zone de pompage. Configuration 1: $h_m = 0,23$ mm, $R_m = 5$ cm, $f_m = 45$ Hz.

respectivement la méthode d'équilibrage harmonique et la méthode de complexification averaging. La courbe noir continue est obtenue à partir de la réponse fréquentielle déterminée à partir d'une intégration temporelle en employant les paramètres déterminés expérimentalement à faible amplitude d'excitation (Les paramètres sont constants en fonction de l'amplitude d'excitation: voir section 3.2). La courbe noire discontinue est obtenue à partir de la réponse fréquentielle déterminée à partir d'une intégration temporelle en employant les moyennes de la variation des paramètres identifiés dans la zone du PE.

On observe que les deux méthodes d'identification proposées donnent un résultat proche des données expérimentales, pour le seuil d'activation comme pour le seuil d'extinction. En revanche, les réponses extrapolées à partir de l'identification à faible amplitude présentent un écart important par rapport à l'expérience. La courbe noire discontinue montre que par l'utilisation de la moyenne des paramètres identifiés dans la zone du PE on peut reproduire une courbe semblable à celle donnée expérimentalement mais seulement dans cette zone, ce qui valide que l'accord entre les données et le modèle nécessite des paramètres variables.

2.3.2 Réponses temporelles

Les figures 2.10 , 2.11 et 2.12 présentent le comportement du système dans le domaine temporel sous excitation sinusoïdale au voisinage de la fréquence de résonance du tube et pour différentes amplitudes d'excitation (Configuration 1). On y trouve les déplacements de l'air en bout du tube et de la membrane à son centre, mesurés expérimentalement (Fig.2.10(a), Fig.2.11(a) et Fig.2.12(a)). Les réponses temporelles du tube et celles de la membrane sont déterminées par simulation numérique avec deux jeux de paramètres différents : un obtenu par l'identification à partir de la méthode d'EH (Fig.2.10(b), Fig.2.11(b) et Fig.2.12(b)) et l'autre par CA (Fig.2.10(c), Fig.2.11(c) et Fig.2.12(c)). Les réponses temporelles du tube sont présentées en bleu et de la membrane en rouge. On a choisi de montrer les simulations pour trois amplitudes d'excitation où les différents régimes montrés dans le travail de R. Bellet[5] [4] sont présentés.

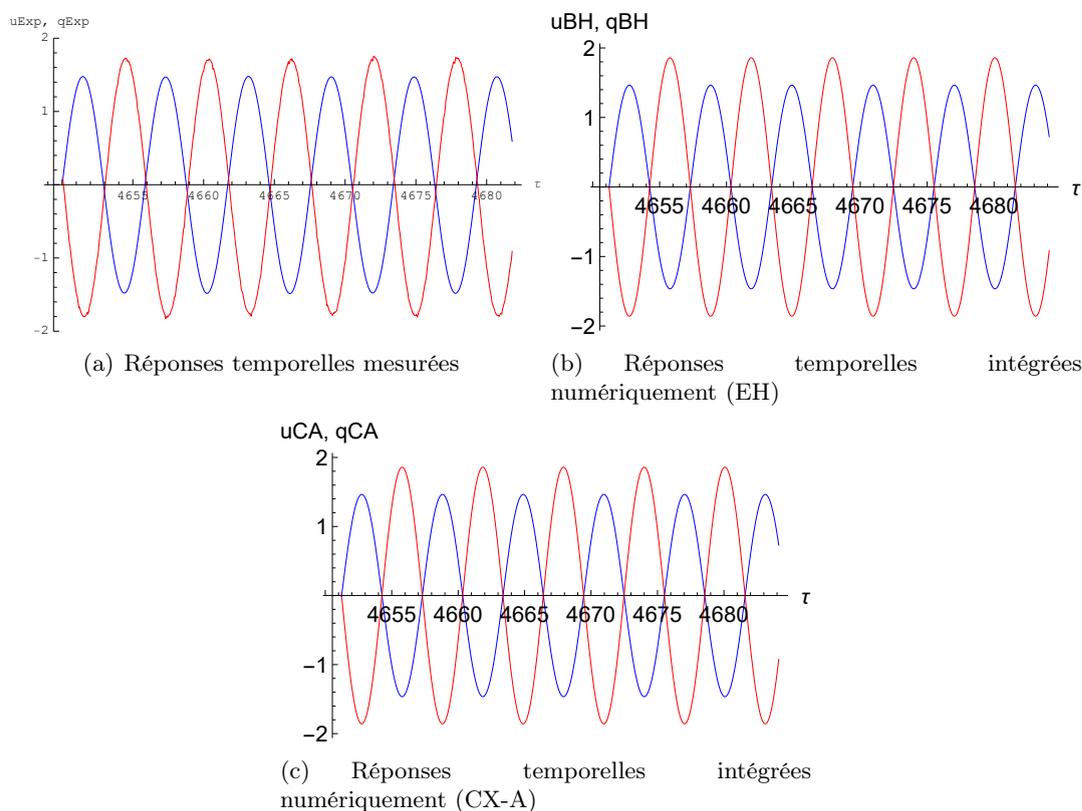


Figure 2.10: Déplacement adimensionné de l'air en bout du tube (bleu) déplacement adimensionné au centre de la membrane (rouge). Excitation : $f = 85$ Hz, $V = 0,025$ v. (a) mesures, (b) EH, (c) CA. Configuration 1: $h_m = 0,23$ mm, $R_m = 5$ cm, $f_m = 45$ Hz.

A faible amplitude d'excitation avec une tension $V = 0,025$ v aux bornes du haut-parleur Fig.2.10, on a observé expérimentalement un régime périodique, où le déplacement de l'air en bout du tube et de la membrane en son centre sont en opposition de phase. Numériquement, par l'utilisation des paramètres identifiés à partir de la méthode d'EH et la méthode de CA, on a obtenu des régimes périodiques qui sont en opposition de phase. Les amplitudes et les périodes de vibration données numériquement sont semblables à celles observées expérimentalement.

A forte amplitude d'excitation ($V = 0,61$ v), une réponse fortement modulée est observée expérimentalement Fig.2.11. Le calcul numérique reproduit l'essentiel de cette réponse qui caractérise le phénomène du PE (phénomène de bouffées périodiques).

A très forte amplitude d'excitation ($V = 1,3$ v : Fig.2.12), en régime de saturation de la membrane, les calculs sont proches des réponses expérimentales. À cette amplitude, le déplacement de l'air en bout du tube et de la membrane en son centre sont presque en phase.

Il est à noter que, bien que l'identification des paramètres ait été faite sur des solutions périodiques voire harmoniques, le régime de bouffées est bien reproduit. Cela valide a posteriori les hypothèses simplificatrices.

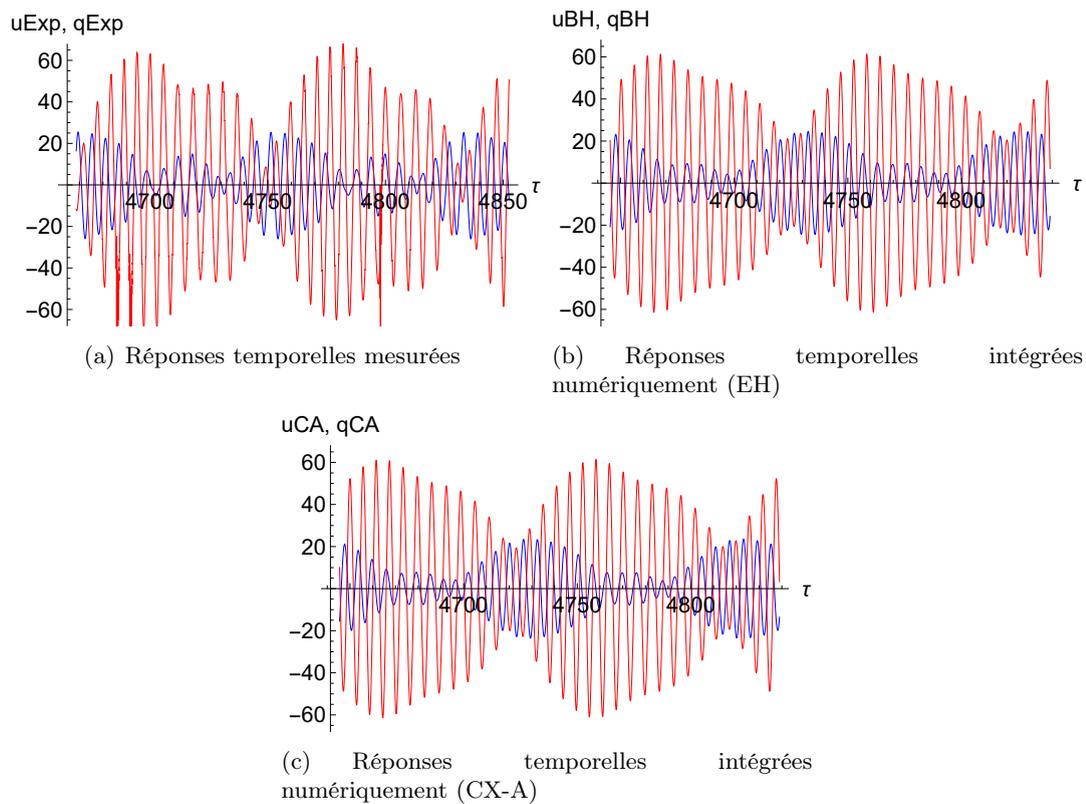


Figure 2.11: Déplacement adimensionné de l'air en bout du tube (bleu) déplacement adimensionné au centre de la membrane (rouge). Excitation : $f = 85$ Hz, $V = 0,61$ v. (a) mesures, (b) EH, (c) CA. Configuration 1: $h_m = 0,23$ mm, $R_m = 5$ cm, $f_m = 45$ Hz.

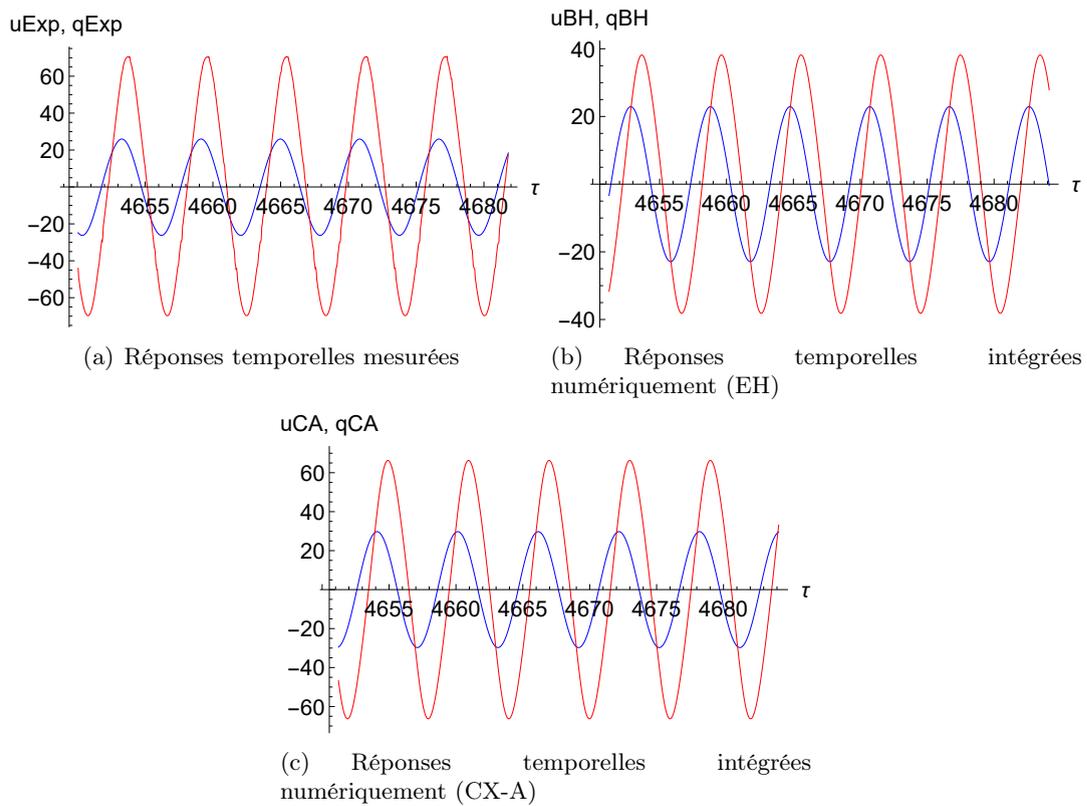


Figure 2.12: Déplacement adimensionné de l'air en bout du tube (bleu) déplacement adimensionné au centre de la membrane (rouge). Excitation : $f = 85$ Hz, $V = 1,3$ v. (a) mesures, (b) EH, (c) CA. Configuration 1: $h_m = 0,23$ mm, $R_m = 5$ cm, $f_m = 45$ Hz.

2.3.3 Variation estimée des paramètres

Pour bien analyser la variation des paramètres du modèle en fonction de l'amplitude d'excitation, on présente cette variation pour les trois différentes configurations de membrane. La tension envoyée aux bornes du haut parleur ne doit pas dépasser 1,75 v afin d'éviter son endommagement. Pour la première et la deuxième expériences, la tension maximale envoyée aux bornes du haut parleur est égale à 1,75 v et 0,75 v. Ces niveaux d'excitation nous permettent d'aller plus loin que le PE pour observer la saturation de la membrane. Pour la troisième expérience, on atteint le maximum de la tension qu'il est possible d'appliquer 1,75 v sans pouvoir visualiser ni la fin du PE ni la saturation de la membrane.

Les paramètres identifiés de notre système sont : La pulsation propre, la dissipation du tube, la dissipation de la membrane, les raideurs linéaire et non linéaire de la membrane, le coefficient de couplage et le terme de masse. Le terme de forçage est aussi identifié puisque la mesure de la pression coté haut parleur est perturbée par la dynamique du système. Les figures Fig.2.13, Fig.2.14 et Fig.2.15 présentent les variations des paramètres en fonction de la tension de commande, pour la première, la deuxième et la troisième configuration respectivement. Les carrés bleus correspondent au résultat donné par la méthode d'équilibrage harmonique et les triangles verts sont issus de la méthode de complexification averaging. Le début et la fin du PE sont indiqués par les deux bandes grises. La zone de pompage est déterminée à partir de l'observation empirique de fortes modulations sur l'amplitude des réponses expérimentales.

Pour la deuxième et la troisième configuration, dans la zone du pompage nous avons rencontré une difficulté d'identification à partir de la méthode de complexification averaging. Malgré le fait que l'identification pour l'amplitude $n+1$ ait pour valeurs initiales les paramètres identifiés pour l'amplitude n , les résultats se stabilisent avec des paramètres manifestement erronés.

Les figures Fig.2.13(a), Fig.2.14(a) et Fig.2.15(a) présentent l'évolution du terme de forçage en fonction de l'amplitude d'excitation. Une évolution linéaire est observée. La force adimensionnée est définie par : $\frac{2P\pi R_t^4}{h_m m_a R_m^2 \omega_t^2}$, où P est la pression mesurée à l'intérieur de la boîte de couplage côté haut-parleur (en Pascal), R_t et R_m sont les rayons du tube et de la membrane. Sur la même plage de tensions, la différence observée dans le terme de forçage pour les trois configurations est due à la présence du terme : $\frac{1}{h_m R_m^2}$. La figure 2.16 présente la force divisée par le terme $\frac{1}{h_m R_m^2}$ pour les trois configurations. La différence de pente entre les termes de forçage des trois configurations vient de l'adimensionnalisation pour trois dimensions différentes de membranes.

La variation de la pulsation propre du tube en fonction de la tension d'excitation est présentée dans les figures 2.13(b), 2.14(b) et 2.15(b). Ces figures montrent la présence de 3 paliers de niveaux décroissants. Le premier palier est observé pour les faibles amplitudes d'excitation. Le deuxième apparaît lors du PE et le dernier dans la zone de saturation de la membrane. Cette variation montre que la pulsation propre du degré de liberté majoritairement localisé dans le tube est influencé par le régime de fonctionnement. Cette faible variation peut être observée comme un effet de la capture de résonance 1:1. On remarque que la même variation est identifiée pour les trois configurations.

La variation de la dissipation dans le tube est la même pour les trois expériences (Fig.2.13(c), Fig.2.14(c) et Fig.2.15(c)). Avec l'augmentation de l'amplitude d'excitation, la dissipation de tube présente une augmentation. Elle varie de 0,07 pour la plus faible amplitude d'excitation à une valeur autour de 0,09 lors du PE (soit de 0,31 Kg.s⁻¹ à 0,4 Kg.s⁻¹). A la saturation, une nette diminution à la valeur à 0,04 est observée. Puis, lors de la saturation avec l'augmentation de l'amplitude d'excitation la dissipation λ augmente légèrement. Cette augmentation ne dépasse pas une valeur de 0,07 pour la première et la deuxième expériences dans lesquelles on observe la saturation de la membrane.

La pulsation ω_t et la dissipation λ du tube présentent les mêmes variations pour les trois configurations. Ceci montre que notre méthode d'identification a réussi à reproduire les mêmes résultats (liés au tube) pour les trois configurations qui utilisent toutes le même tube.

Les figures Fig.2.13(d), Fig.2.14(d) et Fig.2.15(d) présentent la variation du terme

d'amortissement identifié de la membrane. Aux faibles amplitudes d'excitation le terme d'amortissement de la membrane présente de grandes fluctuations. Elles sont très remarquables dans le résultat de la deuxième expérience. Cette fluctuation pourrait être due à une faible sensibilité du modèle à ce terme d'amortissement. Puisque ce terme est très petit, il pourrait aussi être sensible aux incertitudes de mesure. A faible amplitude d'excitation la dissipation de la membrane est faible. Lors de l'activation du PE, une augmentation de la dissipation est observée. A la saturation, contrairement à ce qu'on observe dans le tube, on constate une augmentation du terme de dissipation de la membrane.

Aux faibles amplitudes d'excitation une grande quantité d'énergie est dissipée dans le tube. Avec le PE, la dissipation introduite par la membrane devient dominante. À un certain niveau de saturation, la quantité d'énergie dissipée dans le tube diminue. Cette diminution est compensée par la membrane. Puis avec l'augmentation de l'amplitude d'excitation, la partie de l'énergie dissipée par le tube est faiblement augmentée. Ceci peut être dû à la saturation de la membrane, dont l'amplitude de vibration atteint un maximum et ne peut augmenter que très légèrement avec l'augmentation de l'amplitude d'excitation.

La variation de la raideur linéaire de la membrane est présentée dans les figures Fig.2.13(e), Fig.2.3.3 et Fig.2.3.3. En dehors de la zone de pompage, la raideur linéaire semble globalement constante. A l'activation du PE on observe une augmentation de ce terme. Lors du PE cette raideur diminue progressivement. La raideur linéaire de la membrane est égale à $k_l = c_1(1 + \chi) = \frac{2 \times 1,015^4 \pi}{9(1-\nu_m^2)} \frac{E_m h_m^3 L_t S_t}{c_0^2 \rho_a R m_m^6} \frac{f_m^2}{f_0^2}$, où $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1,015^4 \pi^4}{12} \frac{E_m h_m^2}{(1-\nu_m^2) \rho_m R_m^4}}$ est la fréquence propre de la membrane sans tenir compte la précontrainte appliquée sur la membrane. Cette expression explique la différence observée dans les valeurs de raideur k_l dans les trois configurations. En effet la raideur linéaire dépend de l'épaisseur, du rayon et de la fréquence propre de la membrane, qui ne sont pas les mêmes dans les 3 configurations.

La raideur non linéaire de la membrane présente une faible variabilité en fonction de l'amplitude d'excitation (voir Fig.2.13(f), Fig.2.14(f) et Fig.2.15(f)). La raideur non linéaire de la membrane est égale à $k_{nl} = c_{nl} = \frac{64}{3\pi^3(1-\nu_m^2)} \frac{E_m h_m^3 L_t S_t}{c_0^2 \rho_a R m_m^6}$.

La variation du terme de couplage est présenté dans les figures Fig.2.13(g), Fig.2.14(g)

et Fig.2.15(g). Une augmentation du terme de couplage est observée avec l'augmentation du niveau d'excitation. Cette augmentation peut être due à la forte amplitude de vibration de la membrane. En effet le volume effectif de la boîte de couplage entre la membrane et le tube pourrait être diminué à cause des effets d'inertie dus à cette considérable amplitude de vibration. L'expression du terme de couplage $\beta = \frac{2L_t S_t}{\pi^2 V_t}$ (voir [5]) montre que ce terme est inversement proportionnel au volume de la boîte de couplage. Pour cela on a une augmentation du terme de couplage avec l'augmentation de l'amplitude d'excitation. On remarque qu'on a le même ordre de grandeur pour les trois configurations.

Le terme de masse suit la variation du terme de couplage (voir Fig.2.13(f), Fig.2.14(f) et Fig.2.15(f)). Ce terme est présenté par cette expression $\gamma = \frac{8h_m \rho_m R_t^2}{3L_t \rho_a R_m^2}$. Comme pour le terme de couplage, la différence observée entre les configurations est due au changement de dimension de la membrane.

Il est à noter que le modèle ne prend pas en compte le degré de liberté associé au haut-parleur, qui est susceptible d'affecter la réponse de notre système.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons élaboré une méthode d'identification qui peut reproduire les réponses fréquentielles pour tous les types de régimes et, mieux encore, reproduire les régimes temporels observés expérimentalement, y compris la réponse fortement modulée. Cette méthode implique la variation des paramètres de notre modèle simplifié en fonction de l'amplitude d'excitation, ce qui, d'une certaine manière, ajoute des degrés de liberté supplémentaires à notre système. Cette approche présente plusieurs avantages. Elle nous permet non seulement de rester fidèles à un modèle simple pour des calculs analytiques plus simples, mais elle nous aide également à mieux comprendre la physique sous-jacente aux phénomènes. En observant les variations des paramètres que nous avons identifiés, nous pouvons détecter les points à améliorer dans le modèle ou déterminer une plage de valeurs constantes pour ces paramètres, notamment en ce qui concerne la variation de l'amortissement de la membrane (qui présente une forte variabilité nécessitant une justification) et le choix de paramètres constants calculés comme étant la moyenne des paramètres identifiés dans la zone du PE qui permet un bon accord quantitatif sur la quasi-totalité de la gamme d'amplitudes d'excitations.

Il est important de souligner que tout au long de cette thèse, compte tenu de la forte variabilité de l'amortissement de la membrane, sa valeur est maintenue à la moyenne identifiée dans la région du PE.

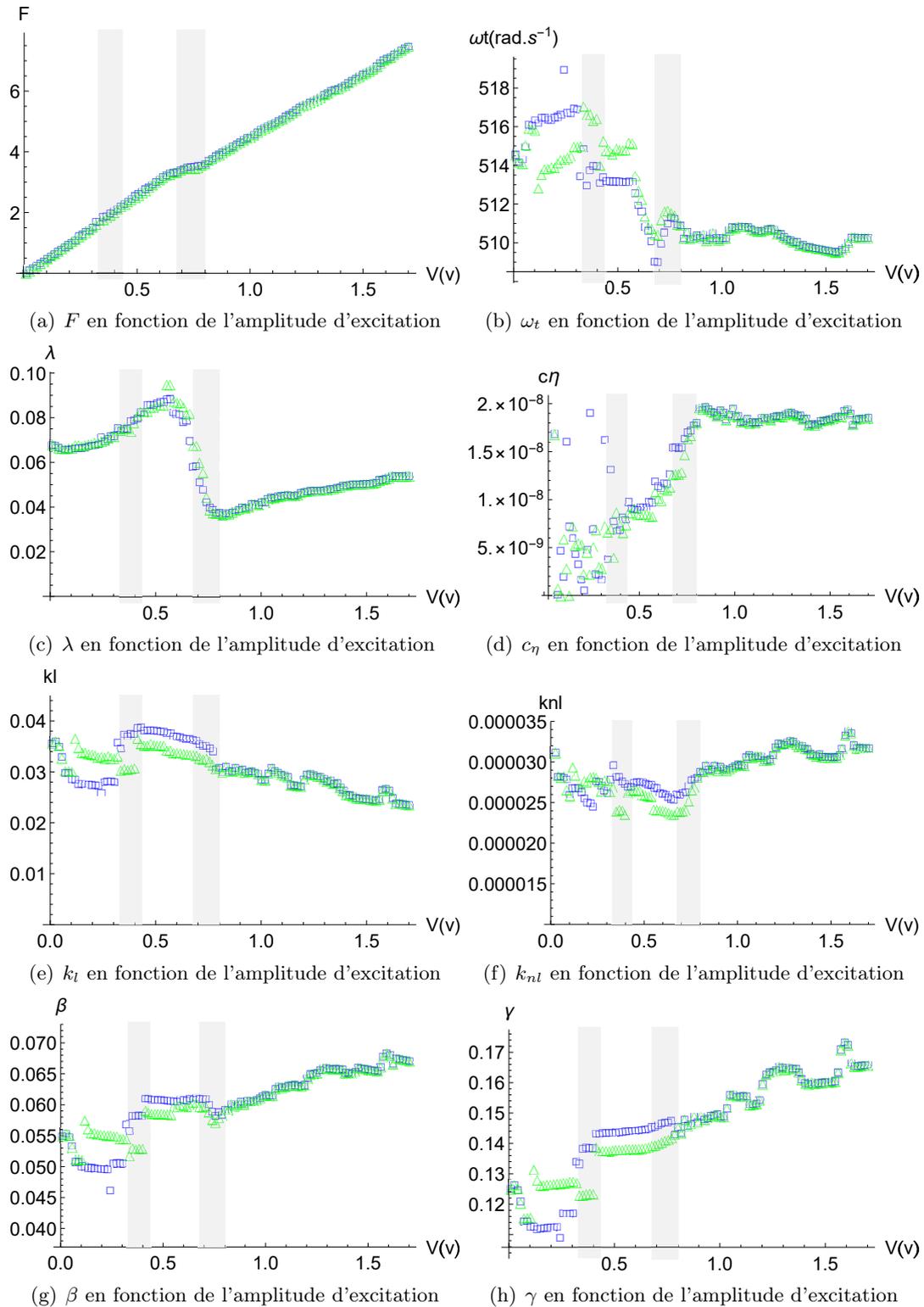


Figure 2.13: Paramètres identifiés en fonction de l'excitation. Première configuration : $h_{m1} = 0,23$ mm, $R_{m1} = 5$ cm, $f_{m1} = 45$ Hz. Carrés bleus : HB, triangles verts : complexification averaging. Le début et la fin du PE sont représentés par les deux bandes grises.

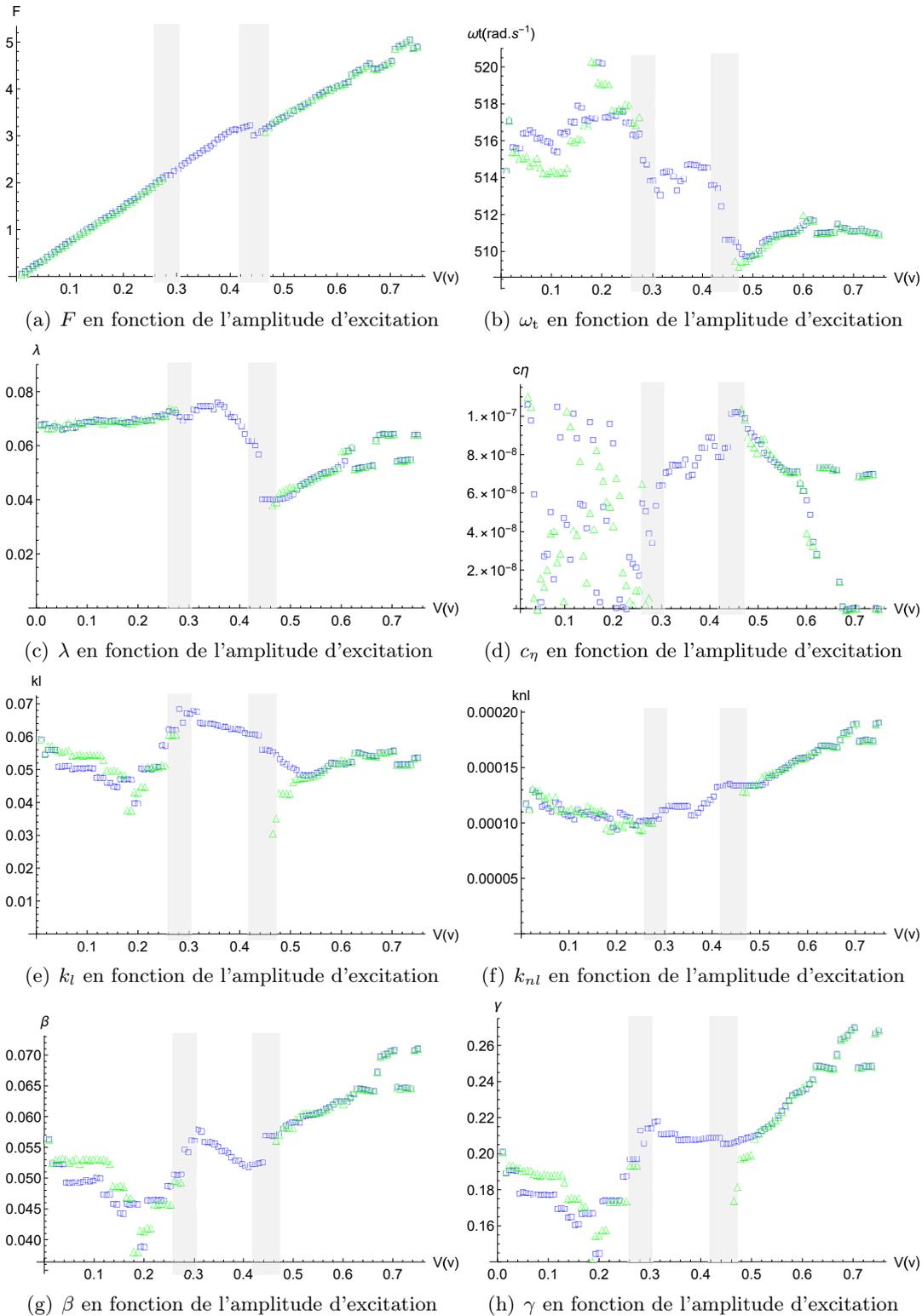


Figure 2.14: La variation des paramètres du système en fonction de la valeur de tension envoyée au borne du haut-parleur pour la deuxième configuration : $h_{m2} = 0,24$ mm, $R_{m2} = 4$ cm, $f_{m2} = 44$ Hz. Les carrés en bleu correspondant au résultat donné par la méthode de équilibrage harmonique et les triangles en vert par la méthode de complexification averaging. Le début et le fin du PE sont représentés par les deux bandes grises.

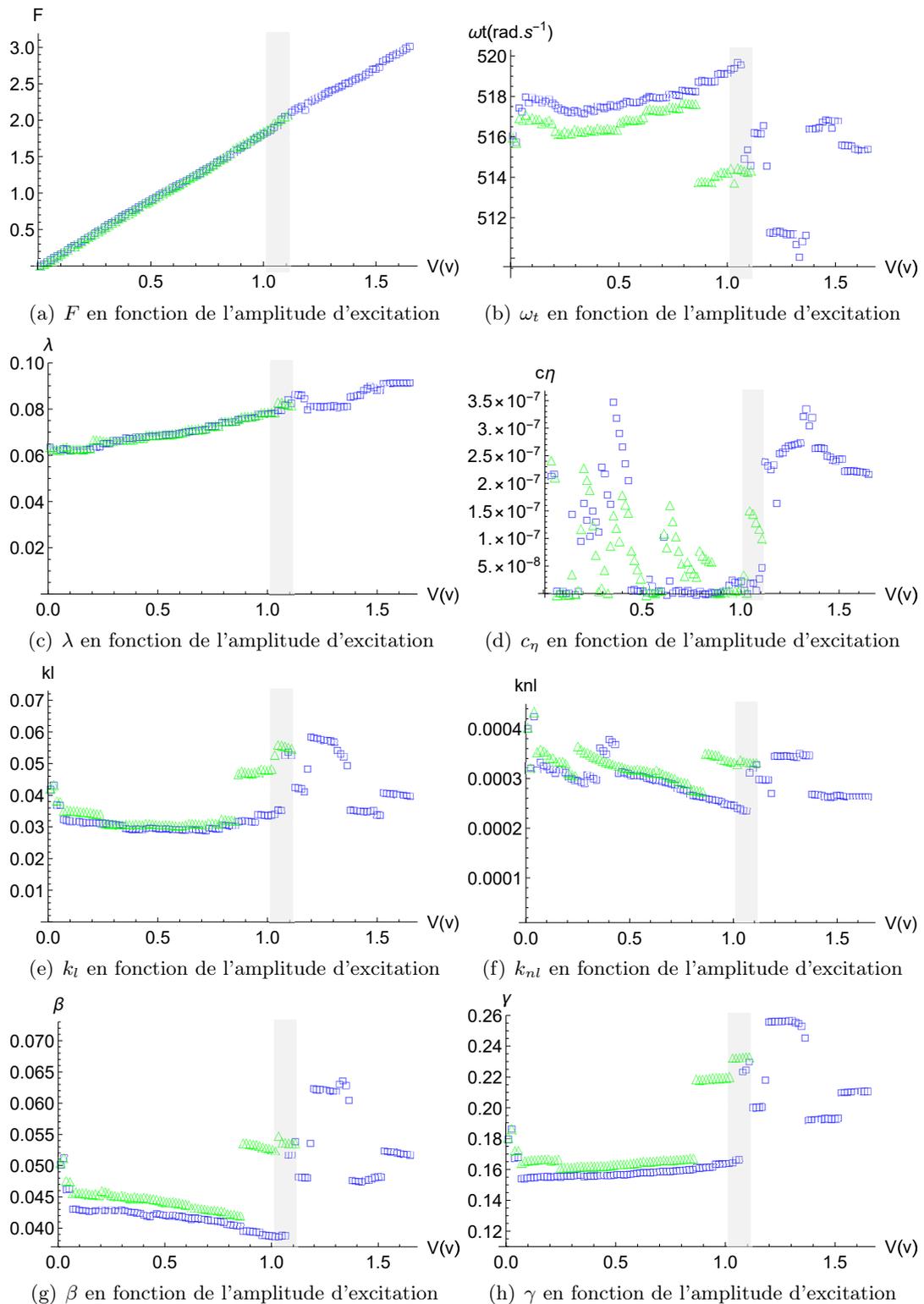


Figure 2.15: La variation des paramètres du système en fonction de la valeur de tension envoyée au borne du haut-parleur pour la troisième configuration : $h_{m3} = 0,62$ mm, $R_{m3} = 5$ cm, $f_{m3} = 45$ Hz. Les carrés en bleu correspondant au résultat donné par la méthode de équilibrage harmonique et les triangles en vert par la méthode de complexification averaging. Le début du PE est représenté par la bande grise.

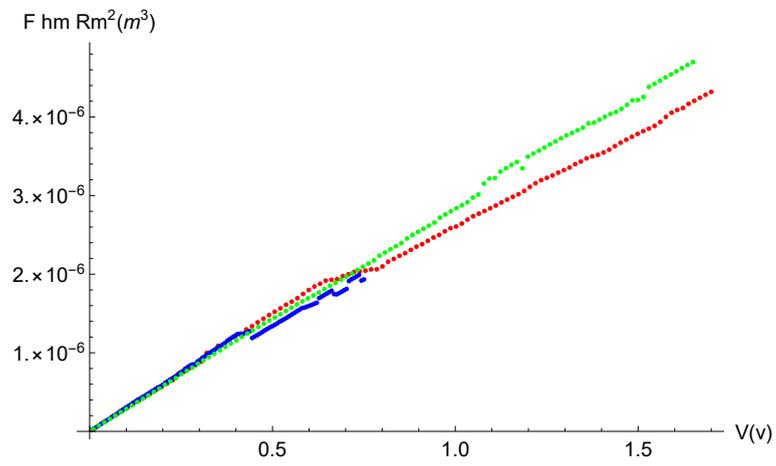


Figure 2.16: Terme de force identifié (par EH) divisé par le terme $\frac{1}{h_m R_m^2}$. Configuration 1 : Rouge. Configuration 2 : Bleu. Configuration 3 : Vert.

Chapitre 3

Étude analytique d'un système avec NES monostable

Introduction

Comparé aux absorbeurs non linéaires classiques, notre absorbeur non linéaire vibro-acoustique intègre un terme d'amortissement non linéaire en plus du terme de raideur cubique. Dans la thèse de R. Bellet, une observation significative a été faite concernant l'impact majeur de l'amortissement sur la dynamique. Étant donné la forte variabilité de l'amortissement mise en évidence par les résultats d'identification, nous avons pris la décision d'entreprendre une étude analytique de l'influence de l'amortissement non linéaire sur la dynamique du système.

Dans un premier temps, nous avons déterminé les solutions périodiques du système. Ensuite, nous avons utilisé la méthode des échelles multiples pour identifier la VI et analyser les réponses fortement modulées. Nous avons également examiné les bifurcations locales des solutions périodiques. Enfin, nous avons exploité ces résultats variés pour évaluer l'impact de l'amortissement non linéaire sur la dynamique. Cela nous a permis d'étudier la variation de la courbe de résonance, des diagrammes de bifurcation et de la VI en fonction de l'amortissement non linéaire.

3.1 Les solutions périodiques

Afin d'étudier la présence de l'amortissement non linéaire dans notre système, on a séparé les termes de l'amortissement linéaire et non linéaire où le système d'équations Eq.2.1 est réécrit sous cette forme :

$$\begin{aligned} u'' + u + \lambda u' + \beta(u - q) &= F \cos\left(\frac{\tau\Omega}{\omega_t}\right) \\ \gamma q'' + k_1 q + k_{nl} q^3 + c_{\eta l} q' + c_{\eta nl} q^2 q' + \beta(q - u) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

où $c_{\eta l} = \omega_t c_{\eta}$ et $c_{\eta nl} = 2\omega_t c_{\eta}$ correspondent aux termes d'amortissement linéaire et non linéaire respectivement. Suite à un changement de variables, ce système peut être

représenté par le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} u'' + u + \gamma\lambda_1 u' + \gamma\beta_1(u - q) &= \gamma F_1 \cos\left(\frac{\tau\Omega}{\omega_t}\right) \\ \gamma q'' + \gamma k_{l1}q + \gamma k_{nl1}q^3 + \gamma c_{\eta l1}q' + \gamma c_{\eta nl1}q^2q' + \gamma\beta_1(q - u) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

où $\gamma\lambda_1$ et $\gamma c_{\eta l1}$ sont les termes d'amortissements linéaires, $\gamma c_{\eta nl1}$ le terme d'amortissement non linéaire, γF_1 l'amplitude d'excitation, $\gamma\beta_1$ le terme de couplage et γk_{l1} et γk_{nl1} les raideurs linéaire et cubique de la membrane. Ce changement de variables permet d'introduire un petit paramètre de perturbation γ qui permet de fixer l'ordre de la grandeur de rigidité, d'amortissement, de couplage, de masse de NES et d'amplitude d'excitation.

Notre système est étudié autour de la résonance 1:1. Les deux oscillateurs vibrent à la même fréquence d'excitation. Les solutions périodiques du système Eq.3.2 sont déterminées en appliquant la méthode de complexification averaging. Cette méthode consiste à introduire les variables complexes de Malevitch qui s'expriment sous cette forme :

$$\begin{aligned} \phi_1 e^{i\tau\omega} &= u' + iu\omega \\ \phi_2 e^{i\tau\omega} &= q' + iq\omega \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ce changement de variable consiste à exprimer les coordonnées de notre système en fonction des amplitudes complexes ϕ_1 et ϕ_2 qui présentent les modulations lentes et en fonction d'oscillations rapides du système à la pulsation ω . Les variables de maneitch Eq.3.3, sont introduites dans le système Eq.3.2. En moyennant les équations sur la pulsation ω , on obtient les équations des modulations lentes des amplitudes complexes :

$$\begin{aligned} \phi_1' + \frac{i\beta_1\gamma\phi_2}{2\omega} - \frac{i\beta_1\gamma\phi_1}{2\omega} + \frac{\gamma\lambda_1\phi_1}{2} + \frac{i\omega\phi_1}{2} - \frac{i\phi_1}{2\omega} &= \frac{\gamma F_1}{2} \\ \gamma\phi_2' + \frac{i\beta_1\gamma\phi_1}{2\omega} - \frac{i\beta_1\gamma\phi_2}{2\omega} + \frac{1}{2}\gamma c_{\eta l1}\phi_2 + \frac{1}{2}i\gamma\omega\phi_2 - \frac{i\gamma k_{l1}\phi_2}{2\omega} \\ &\quad - \frac{3i\gamma k_{nl1}\phi_2^*\phi_2^2}{8\omega^3} + \frac{\gamma c_{\eta nl1}\phi_2^*\phi_2^2}{8\omega^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

En annulant les dérivées dans les équations Eq.3.4 on obtient les équations qui présentent les points fixes de ce système qui correspondent aux solutions périodiques ϕ_{10} et ϕ_{20} du système Eq.3.2:

$$\begin{aligned} \phi_{10} \left(-\frac{i\beta_1\gamma}{\omega} + \gamma\lambda_1 + i\omega - \frac{i}{\omega} \right) + \frac{i\beta_1\gamma\phi_{20}}{\omega} &= \gamma F \\ \frac{i\beta_1\gamma\phi_{10}}{\omega} + \phi_{20} \left(-\frac{i\beta_1\gamma}{\omega} + \gamma c_{\eta l1} + i\gamma\omega - \frac{i\gamma k_{l1}}{\omega} + \left(\frac{\gamma c_{\eta nl1}}{4\omega^2} - \frac{3i\gamma k_{nl1}}{4\omega^3} \right) |\phi_{20}|^2 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Par quelques manipulations, le système qui résout les solutions périodiques est réécrit sous cette forme :

$$\begin{aligned}\phi_{10} &= \frac{\beta_1 \gamma \phi_{20} + i \gamma F \omega}{\beta_1 \gamma + i \gamma \lambda_1 \omega - \omega^2 + 1} \\ |\phi_{20}|^2 \left| a + b |\phi_{20}|^2 \right|^2 &= c \\ a &= \frac{i \beta_1^2 \gamma}{\omega} + (\beta_1 \gamma + i \gamma \lambda_1 \omega - \omega^2 + 1) \left(c_{\eta 11} + i \omega - \frac{i \beta_1}{\omega} - \frac{i k_{11}}{\omega} \right) \\ b &= (\beta_1 \gamma + i \gamma \lambda_1 \omega - \omega^2 + 1) \left(\frac{c_{\eta n 11}}{4 \omega^2} - \frac{3 i k_{n 11}}{4 \omega^3} \right), c = \beta_1^2 \gamma^2 F^2\end{aligned}\quad (3.6)$$

La deuxième équation du système Eq.3.6 peut être écrite aussi sous cette forme:

$$\alpha_3 Z_{20}^3 + \alpha_2 Z_{20}^2 + \alpha_1 Z_{20} + \alpha_0 = 0, Z_{20} = |\phi_{20}|^2 \quad (3.7)$$

Les coefficients du polynôme cubique Eq.3.7 α_i (où $i = 1, 2, 3$) sont réels et dépendent des paramètres du système et de l'excitation.

La stabilité des solutions périodiques est étudiée en ajoutant des termes de perturbation ρ_1, ρ_2 autour des points fixes. La linéarisation du système Eq.3.4 autour des points stationnaires (ϕ_{10}, ϕ_{20}) s'écrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \rho_1 + \phi_{10} \\ \phi_2 &= \rho_2 + \phi_{20} \\ \rho_1 \left(-\frac{i \beta_1 \gamma}{2 \omega} + \frac{\gamma \lambda_1}{2} + \frac{i \omega}{2} - \frac{i}{2 \omega} \right) + \frac{i \beta_1 \gamma \rho_2}{2 \omega} + \rho_1' &= 0 \\ \frac{i \beta_1 \rho_1}{2 \omega} + \rho_2 \left(\frac{c_{\eta n 11} |\phi_{20}|^2}{4 \omega^2} - \frac{3 i k_{n 11} |\phi_{20}|^2}{4 \omega^3} - \frac{i \beta_1}{2 \omega} + \frac{c_{\eta 11}}{2} + \frac{i \omega}{2} - \frac{i k_{11}}{2 \omega} \right) \\ + \rho_2' \left(\frac{c_{\eta n 11} \phi_{20}^2}{8 \omega^2} - \frac{3 i k_{n 11} \phi_{20}^2}{8 \omega^3} \right) + \rho_2' &= 0\end{aligned}\quad (3.8)$$

Ce système est réécrit sous cette forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \rho_1' \\ \rho_2' \\ (\rho_1^*)' \\ (\rho_2^*)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & m_{24} \\ 0 & 0 & m_{11}^* & m_{12}^* \\ 0 & m_{24}^* & m_{21}^* & m_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_1^* \\ \rho_2^* \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Où les coefficients de la matrice M sont : $m_{11} = \frac{i \beta_1 \gamma}{2 \omega} - \frac{\gamma \lambda_1}{2} - \frac{i \omega}{2} + \frac{i}{2 \omega}$, $m_{12} = -\frac{i \beta_1 \gamma}{2 \omega}$, $m_{21} = -\frac{i \beta_1}{2 \omega}$, $m_{22} = -\frac{c_{\eta n 11} |\phi_{20}|^2}{4 \omega^2} + \frac{3 i k_{n 11} |\phi_{20}|^2}{4 \omega^3} + \frac{i \beta_1}{2 \omega} - \frac{c_{\eta 11}}{2} + \frac{i k_{11}}{2 \omega} - \frac{i \omega}{2}$ et $m_{24} = -\frac{c_{\eta n 11} \phi_{20}^2}{8 \omega^2} + \frac{3 i k_{n 11} \phi_{20}^2}{8 \omega^3}$.

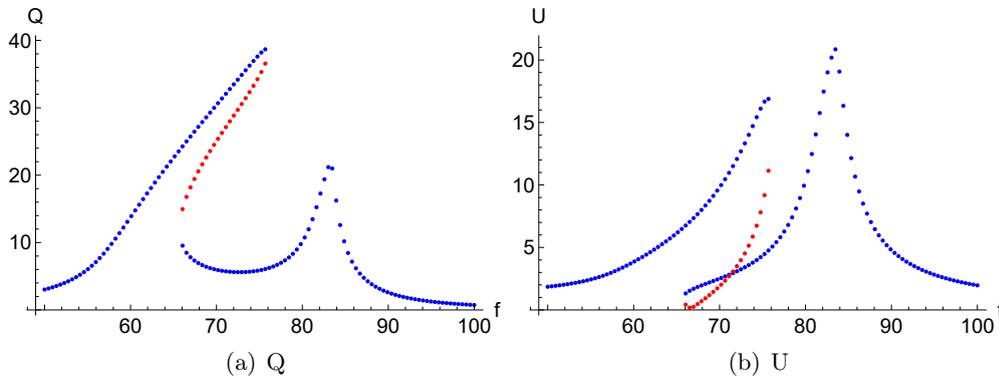


Figure 3.1: Courbes de résonance du système pour $F_1 = 6, 4$. En bleu : points fixes stables. En rouge : points fixes instables.

Afin de calculer la stabilité des points fixes, on a déterminé les valeurs propres de la matrice M . Si les valeurs propres ont toutes des parties réelles négatives, le point fixe est stable. Si la partie réelle d'une racine devient positive, le point fixe devient instable.

Les sous-figures Fig.3.1(a) et Fig.3.1(b) présentent les courbes de résonance de la membrane et de l'air en bout du tube déterminées analytiquement pour une force d'excitation adimensionnée $F_1 = 6, 4$. Les points bleus et rouges représentent respectivement les solutions périodiques stables et instables. Le calcul est réalisé pour une membrane d'épaisseur $h_{m1} = 0,22$ mm et de rayon $R_{m1} = 5$ cm. La valeur de l'amortissement de la membrane est maintenue à la moyenne identifiée dans la région du PE.

3.2 Étude asymptotique

L'analyse locale qui est réalisée dans la section précédente permet de souligner la réponse périodique de notre système. Dans cette partie, une étude asymptotique est réalisée en profondeur permettant d'étudier les réponses fortement modulées. La faible valeur du ratio des masses γ favorise l'utilisation de méthodes de perturbations. Pour étudier les réponses fortement modulées, on prend en compte le fait que plusieurs échelles de temps existent et on utilise la méthode des échelles multiples. Différentes échelles de temps sont introduites :

$$\phi_1 = \phi_1(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots), \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \gamma \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \dots, \quad \tau_k = t\gamma^k \quad (3.10)$$

La pulsation d'excitation adimensionnée est définie par $\omega = \frac{2\pi f}{\omega_t}$. Puisque le comportement du système est étudié au voisinage de la résonance 1:1, la pulsation d'excitation peut se réécrire de la manière suivante :

$$\omega = 1 + \sigma\gamma \quad (3.11)$$

Les équations Eq.3.10 et Eq.3.11 sont introduits dans le système lentement modulé Eq.3.4. Puis les termes de même puissance de γ sont collectés :

Ordre γ^0 :

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{d\tau_0} &= 0 \\ \frac{d\phi_2}{d\tau_0} &= \frac{1}{2}i\beta_1(\phi_2 - \phi_1) - \frac{i\phi_2}{2} - \frac{c_{\eta 11}\phi_2}{2} + \frac{ik_{11}\phi_2}{2} + \frac{3}{8}ik_{nl1}\phi_2^*\phi_2^2 - \frac{1}{8}c_{\eta ml1}\phi_2^*\phi_2^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ordre γ^1 :

$$\begin{aligned} -\frac{i\beta_1\phi_1}{2} + i\sigma\phi_1 + \frac{\lambda_1\phi_1}{2} + \frac{i\beta_1\phi_2}{2} + \frac{\sigma d\phi_1}{d\tau_0} + \frac{d\phi_1}{d\tau_1} &= \frac{F_1}{2} \\ i\beta_1\sigma(\phi_1 - \phi_2) + \frac{3}{2}c_{\eta l1}\sigma\phi_2 - ik_{11}\sigma\phi_2 + 2i\sigma\phi_2 + \frac{1}{8}c_{\eta ml1}\sigma\phi_2^*\phi_2^2 + \frac{3\sigma d\phi_2}{d\tau_0} + \frac{d\phi_2}{d\tau_1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.2.1 Ordre γ^0 : variété invariante

Les équations d'ordre zéro Eq.3.12 sont utilisées dans cette partie afin de déterminer la VI lente 1:1 de notre système.

La première équation du système Eq.3.12 montre que ϕ_1 est indépendante de τ_0

$$\phi_1 = \phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots) \quad (3.14)$$

Les points fixes donnés par la deuxième équation du système Eq.3.12 sont exprimés par la manière suivante :

$$\frac{1}{2}i\beta_1(\phi_{20} - \phi_{10}) - \frac{c_{\eta l1}\phi_{20}}{2} + \frac{ik_{11}\phi_{20}}{2} - \frac{i\phi_{20}}{2} - \frac{1}{8}c_{\eta ml1}\phi_{20}^*\phi_{20}^2 + \frac{3}{8}ik_{nl1}\phi_{20}^*\phi_{20}^2 = 0 \quad (3.15)$$

En tenant compte Eq.3.14, on peut déduire que les points fixes donnés par l'équation Eq.3.15 ne dépendent que de l'échelle de temps lente τ_1 .

Pour résoudre cette équation, les variables ϕ_{10} et ϕ_{20} sont exprimées sous forme polaire :

$$\phi_{10} = N_1 e^{i\theta_1}, \phi_{20} = N_2 e^{i\theta_2} \quad (3.16)$$

En introduisant Eq.3.16 dans l'équation Eq.3.15, et par un simple calcul on détermine cette équation :

$$\begin{aligned} z_1\beta_1^2 &= z_2^3 \left(\frac{c_{\eta ml1}^2}{16} + \frac{9k_{nl1}^2}{16} \right) + z_2^2 \left(\frac{c_{\eta l1}c_{\eta ml1}}{2} + \frac{3}{2}k_{nl1}(\beta_1 + k_{11} - 1) \right) \\ &\quad + z_2 (c_{\eta l1}^2 + (\beta_1 + k_{11} - 1)^2) \\ z_1 &= N_1^2, z_2 = N_2^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Cette équation présente la VI lente de notre système. Elle décrit le modèle approché qui caractérise l'évolution de l'amplitude de déplacement de l'air dans le tube en fonction de l'amplitude de déplacement de la membrane.

La courbe de la VI peut présenter des extremums comme elle peut être monotone. Pour distinguer ces deux cas, la dérivée du membre de droite de l'équation de la VI Eq.3.17 par rapport à z_2 est annulée :

$$3 \left(\frac{c_{\eta n1}^2}{16} + \frac{9k_{n1}^2}{16} \right) z_2^2 + (c_{\eta n1} c_{\eta l1} + 3k_{n1}(\beta_1 + k_{l1} - 1)) z_2 + 1 + \beta_1^2 - 2\beta_1 + c_{\eta l1}^2 + k_{l1}^2 + 2\beta_1 k_{l1} - 2k_{l1} = 0 \quad (3.18)$$

Les solutions de l'équation Eq.3.18 sont écrites comme suit :

$$z_{2i} = \frac{-(c_{\eta n1} c_{\eta l1} + 3k_{n1}(\beta_1 + k_{l1} - 1)) \pm \sqrt{\Delta_{VI}}}{3 \left(\frac{c_{\eta n1}^2}{8} + \frac{9k_{n1}^2}{8} \right)}$$

$$\Delta_{VI} = -3 \left(\frac{c_{\eta n1}^2}{4} + \frac{9k_{n1}^2}{4} \right) (1 + \beta_1^2 - 2\beta_1 + c_{\eta l1}^2 + k_{l1}^2 + 2\beta_1 k_{l1} - 2k_{l1}) + (c_{\eta n1} c_{\eta l1} + 3k_{n1}(\beta_1 + k_{l1} - 1))^2 \quad (3.19)$$

Ces deux racines correspondent au carré de N_2 dont $z_{21} = N_{21}^2$, $z_{22} = N_{22}^2$. Elles sont réelles (définies) lorsque la valeur $\Delta_{VI} > 0$. Dans ce cas, la courbe de la VI a des extremums. Ces extremums correspondent aux solutions z_{2i} définies par l'équation Eq.3.19. Dans le cas contraire ($\Delta_{VI} < 0$), ces solutions n'existent plus et la courbe de la VI est monotone. La forme de cette courbe dépend des paramètres du système ($c_{\eta n1}$, $c_{\eta l1}$, k_{n1} , k_{l1} et β_1).

La présence d'un maximum et un minimum implique la présence de trois branches dans la courbe de la VI. La stabilité de ces branches est étudiée. Premièrement, les coordonnées polaires $\phi_1 = N_1 e^{i\theta_1}$ et $\phi_2 = N_2 e^{i\theta_2}$ sont introduites dans le système d'équations d'ordre zéro Eq.3.12. Puis, les parties réelle et imaginaire sont séparées. Le système suivant est obtenu :

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{d\tau_0} &= 0 \\ N_1 \frac{d\theta_1}{d\tau_0} &= 0 \\ \frac{dN_2}{d\tau_0} &= -\frac{1}{8} c_{\eta n1} N_2^3 - \frac{c_{\eta l1} N_2}{2} - \frac{1}{2} \beta_1 N_1 \sin(\theta) \\ \frac{d\theta_2}{d\tau_0} &= \frac{k_{l1}}{2} + \frac{3k_{n1} N_2^2}{8} + \frac{\beta_1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \beta_1 N_1 \cos(\theta) \frac{N_1}{N_2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

En ajoutant des perturbations autour des points fixes $N_1 = \Delta N_1 + N_1$, $N_2 = \Delta N_2 + N_2$, $\theta = \Delta\theta + \theta_0$, le système d'équations suivant est obtenu :

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta N_1}{d\tau_0} &= 0 \\ \frac{d\Delta N_2}{d\tau_0} &= -\frac{1}{8}c_{\eta n1}(\Delta N_2 + N_2)^3 - \frac{1}{2}c_{\eta n1}(\Delta N_2 + N_2) - \frac{1}{2}\beta_1(\Delta N_1 + N_1)\sin(\Delta\theta + \theta_0) \\ \frac{d\Delta\theta}{d\tau_0} &= \frac{1}{2}k_{11} + \frac{3}{8}k_{n1}(\Delta N_2 + N_2)^2 + \frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta_1\frac{\Delta N_1 + N_1}{\Delta N_2 + N_2}\cos(\Delta\theta + \theta_0) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Par l'utilisation de quelques formules trigonométriques et après quelques manipulations de calcul, le système est linéarisé autour des points fixes. Il s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\Delta N_1}{d\tau_0} \\ \frac{d\Delta N_2}{d\tau_0} \\ \frac{d\Delta\theta}{d\tau_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta_1\sin(\theta_0) & -\frac{c_{\eta n1}}{2} - \frac{3}{8}c_{\eta n1}N_2^2 & -\frac{1}{2}\beta_1N_1\cos(\theta_0) \\ -\frac{\beta_1\cos(\theta_0)}{2N_2} & \frac{3K_{n1}N_2^3 + 2\beta_1N_1\cos(\theta_0)}{4N_2^2} & \frac{\beta_1N_1\sin(\theta_0)}{2N_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \Delta\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \cos(\theta_0) &= \frac{k_{11}N_2 + \beta_1N_2 - N_2 + \frac{3k_{n1}N_2^3}{4}}{\beta_1N_1}, \\ \sin(\theta_0) &= \frac{-c_{\eta n1}N_2 - \frac{1}{4}c_{\eta n1}N_2^3}{\beta_1N_1} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Pour déterminer la stabilité des branches de la VI, les valeurs propres du système Eq.3.23 sont calculées. La présence de la ligne nulle dans ce système montre qu'une des trois valeurs propres est toujours nulle. Si les deux autres ont une partie réelle négative, alors le point fixe est stable, sinon il est instable.

La courbe de la VI pour la membrane d'épaisseur $h_{m1} = 0,22$ mm et de rayon $R_{m1} = 5$ cm, est présentée dans la Fig.3.2. Cette courbe montre deux extremums présentés par les deux points noirs. Ces extremums correspondent aux solutions $N_{21} = \sqrt{Z_{21}}$ et $N_{22} = \sqrt{Z_{22}}$ définies par les expressions 3.19. Ces extremums sont appelés dans la littérature les lignes de pliage. Cette figure montre la présence de trois différentes branches : deux stables présentées en bleu et une branche instable (en rouge) située au milieu. Pour une valeur donnée de N_1 qui correspondant à l'amplitude de déplacement de l'air dans le tube, on a trois solutions possibles pour la membrane dont une est instable. On a donc un comportement hystérétique où le système passe d'un point à l'autre avec un échange énergétique. Les sauts entre les deux branches stables de la VI sont représentés par les deux flèches noires. N_s et N_i sont les points finaux de sauts sur la branche supérieure et inférieure de la VI. Cette courbe en S décrit le régime fortement modulé. Elle caractérise le phénomène de PE.

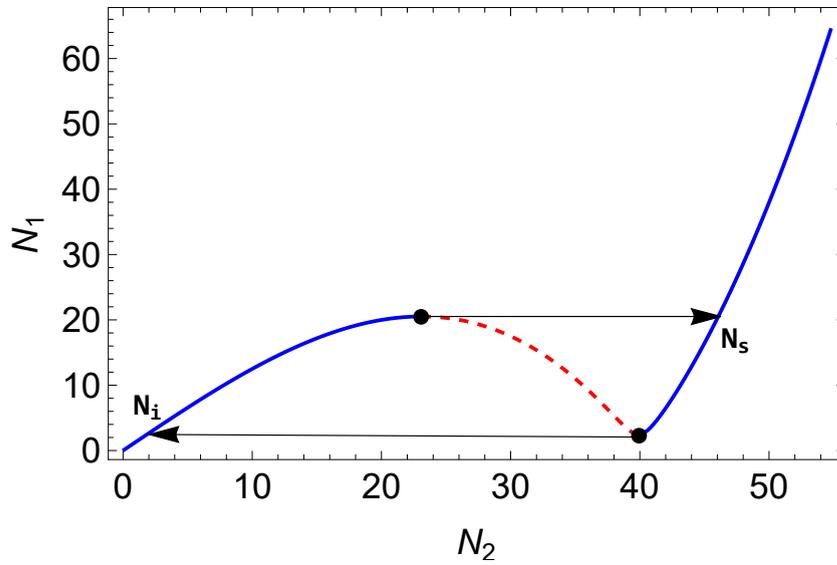


Figure 3.2: Exemple de courbe de VI en forme de S.

3.2.2 Ordre γ^1 : la réponse fortement modulée

Les réponses fortement modulées sont possibles seulement si le système atteint les lignes de pliage N_{21} et N_{22} . Avec l'augmentation du niveau d'excitation, les enveloppes lentement variable (ou externes) données par les déplacements de la membrane et de l'air en bout du tube sont augmentées. On suit ici la première branche stable de la VI. À un niveau d'excitation donné, le système atteint la ligne de pliage N_{21} . Le système saute vers la deuxième branche stable. Avec la présence de l'amortissement, les amplitudes données par les enveloppes de déplacements diminuent en suivant l'allure de la deuxième branche stable jusqu'à atteindre N_{22} pour sauter. Un cycle hystérique se produit. On se déplace sur la VI en décrivant les enveloppes lentement variables de déplacements où l'échelle de temps lent τ_1 est respectée, l'étude de la dynamique lente (les équations d'ordre γ^1) sur les branches stables de la VI est par conséquent nécessaire. C'est l'objectif de cette partie.

La première équation du système d'ordre γ^1 Eq.3.13 est utilisée :

$$-\frac{i\beta_1\phi_1}{2} + i\sigma\phi_1 + \frac{\lambda_1\phi_1}{2} + \frac{i\beta_1\phi_2}{2} + \frac{\sigma d\phi_1}{d\tau_0} + \frac{d\phi_1}{d\tau_1} = \frac{F_1}{2} \quad (3.23)$$

L'équation de la VI Eq.3.17 est obtenue en imposant la limite $\tau_0 \rightarrow \infty$. Les modulations lentes ϕ_{10} et ϕ_{20} correspondant aux solutions de l'équation Eq.3.17 sont définies par $\phi_{10}(\tau_1) = \lim_{\tau_0 \rightarrow \infty} \phi_1(\tau_0, \tau_1)$ et $\phi_{20}(\tau_1) = \lim_{\tau_0 \rightarrow \infty} \phi_2(\tau_0, \tau_1)$. Le régime fortement modulé décrit par la courbe de la VI lente est étudié dans cette partie. Premièrement, l'équation de la VI Eq.3.17 est introduite dans l'équation Eq.3.23. La limite $\tau_0 \rightarrow \infty$ est imposée. pour respecter l'échelle de temps lente τ_1 . L'équation ci-dessous est obtenue :

$$\left(-\frac{i\beta_1}{2} + \frac{\lambda_1}{2} + i\sigma\right) \left((\beta_1 + ic_{\eta 11} + k_{11} - 1)\phi_{20} + \left(\frac{3k_{n11}}{4} + \frac{ic_{\eta n11}}{4}\right)\phi_{20}^2\phi_{20}^*\right) + \frac{1}{2}i\beta_1^2\phi_{20} + \frac{d\left[(\beta_1 + ic_{\eta 11} + k_{11} - 1)\phi_{20} + \left(\frac{3k_{n11}}{4} + \frac{ic_{\eta n11}}{4}\right)\phi_{20}^2\phi_{20}^*\right]}{d\tau_1} = \frac{\beta_1 F_1}{2} \quad (3.24)$$

En écrivant la modulation lente ϕ_{20} sous forme polaire et en séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient le système suivant décrivant la variation de l'amplitude N_2 et la phase θ_2 de modulation lente ϕ_{20} par rapport à l'échelle lente du temps τ_1 :

$$\frac{dN_2}{d\tau_1} = \frac{f_1(N_2, \theta_2)}{g(N_2)}, \quad \frac{d\theta_2}{d\tau_1} = \frac{f_2(N_2, \theta_2)}{g(N_2)} \quad (3.25)$$

où

$$\begin{aligned} f_1(N_2, \theta_2) = & N_2^5 \left(-\frac{\lambda_1 c_{\eta n1}^2}{2} - \frac{9\lambda_1 k_{n1}^2}{2} \right) - 2N_2^3 c_{\eta n1} (\beta_1^2 + 2c_{\eta n1} \lambda_1) \\ & - 12N_2^3 \lambda_1 k_{n1} (\beta_1 + k_{11} - 1) - 8N_2 (c_{\eta n1}^2 \lambda_1 + \beta_1^2 c_{\eta n1} + \lambda_1 (\beta_1 + k_{11} - 1)^2) \\ & + \beta_1 F_1 (-2c_{\eta n1} N_2^2 - 8c_{\eta n1}) \sin(\theta_2) + \beta_1 F_1 (8\beta_1 - 8 + 8k_{11} + 6k_{n1} N_2^2) \cos(\theta_2) \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} f_2(N_2, \theta_2) = & \frac{3}{2} N_2^4 (\beta_1 - 2\sigma) (c_{\eta n1}^2 + 9k_{n1}^2) + 4N_2^2 c_{\eta n1} (2c_{\eta n1} \beta_1 - 2\sigma) - 3\lambda_1 k_{n1} \\ & + N_2^2 (4c_{\eta n1} \lambda_1 (\beta_1 + k_{11} - 1) + 6k_{n1} (\beta_1^2 + 4\beta_1 (k_{11} - 2\sigma - 1) - 8(k_{11} - 1)\sigma)) \\ & 8(\beta_1 (c_{\eta n1}^2 + (k_{11} - 1)(k_{11} - 4\sigma - 1)) + \beta_1^2 (k_{11} - 2\sigma - 1) - 2\sigma (c_{\eta n1}^2 + (k_{11} - 1)^2)) \\ & + \beta_1 F_1 \frac{-8\beta_1 + 8 - 8k_{11} - 18k_{n1} N_2^2}{N_2} \sin(\theta_2) + \beta_1 F_1 \frac{-8c_{\eta n1} - 6c_{\eta n1} N_2^2}{N_2} \cos(\theta_2) \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} g(N_2) = & N_2^4 (3c_{\eta n1}^2 + 27k_{n1}^2) + N_2^2 16(c_{\eta n1} c_{\eta n1} + 3k_{n1} (\beta_1 + k_{11} - 1)) \\ & 16(c_{\eta n1}^2 + (\beta_1 + k_{11} - 1)^2) \end{aligned} \quad (3.28)$$

La fonction $g(N_2)$ intervient en tant que dénominateur dans les équations $\frac{dN_2}{d\tau_1}$ et $\frac{d\theta_2}{d\tau_1}$. Cette fonction est également associée à un coefficient multiplicateur de l'équation Eq.3.18, qui détermine les lignes de pliage N_{21} et N_{22} . Ainsi, le système Eq.3.25 présente deux types de points fixes, comme indiqué dans [30]. Les points fixes ordinaires correspondent aux points réguliers de la VI, pour lesquels la fonction $g(N_2)$ est différente de zéro. En revanche, les singularités plis satisfont l'équation $g(N_{2i}) = 0$. Les points fixes ordinaires se définissent par l'ensemble des points d'équilibre $f_1(N_2, \theta_2) = 0$, $f_2(N_2, \theta_2) = 0$ avec $g(N_2) \neq 0$. Alors que les singularités plis à la différence se trouvent sur les lignes de pliage $g(N_2) = 0$.

Ce système d'équations décrit la dynamique sur les branches stables de la VI lente. Il permet de présenter la variation de la VI sur une carte unidimensionnelle (θ_2, N_2) 2π périodique. La figure Fig.3.3 montre le plan de phase (θ_2, N_2) du système pour une force d'excitation $F_1 = 3$ et une pulsation réduite $\sigma = 0$. Le flux lent est seulement présenté pour les branches stables de la VI. La zone vide séparée par les deux lignes de pliage rouges N_{21} et N_{22} présente la branche instable de la VI. Les points noirs observés dans la partie stable inférieure du plan correspondent au même point fixe ordinaire avec un décalage de 2π . Ce point coïncide avec le point fixe correspondant à la solution périodique définie par l'équation Eq.3.7. Ce qui valide que les points fixes ordinaires donnés par le système d'équations Eq.3.26 correspondent au régime périodique du système. Cette figure montre que tous les flux lents présentés dans la branche stable inférieure sont dirigés vers le point fixe noir. Dans ce cas, on n'a aucune possibilité de sauter vers la branche supérieure. La présence de singularités plis est nécessaire pour avoir ce saut. La possibilité d'avoir les singularités plis est étudiée maintenant.

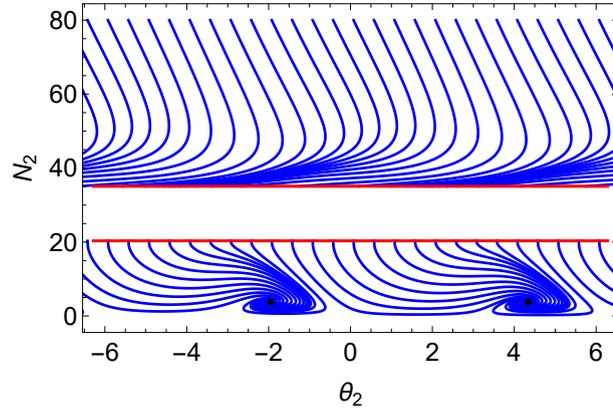


Figure 3.3: Un plan de phase du système pour une force d'excitation $F_1 = 3$ et une pulsation réduite $\sigma = 0$.

Comme expliqué ci-avant, la solution de l'équation $g(N_2) = 0$ correspond aux lignes de pliage N_{2i} . Donc les expressions des singularités plis θ_i sont déterminées par la résolution de l'équation $f_1(N_{2i}, \theta_i) = 0$:

$$\begin{aligned} \theta_{i1} &= \arcsin\left(\frac{s(N_{2i})}{\sqrt{c(N_{2i})^2 + s(N_{2i})^2}}\right) - \arccos\left(\frac{cc(N_{2i})}{\sqrt{c(N_{2i})^2 + s(N_{2i})^2}}\right) \\ \theta_{i2} &= \arcsin\left(\frac{s(N_{2i})}{\sqrt{c(N_{2i})^2 + s(N_{2i})^2}}\right) + \arccos\left(\frac{cc(N_{2i})}{\sqrt{c(N_{2i})^2 + s(N_{2i})^2}}\right) \end{aligned} \quad i = 1, 2 \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} c(N_{2i}) &= -\beta_1 F_1 (8\beta_1 - 8 + 8k_{11} + 6k_{n11} N_{2i}^2), \quad s(N_{2i}) = \beta_1 F_1 (2c_{\eta n11} N_{2i}^2 + 8c_{\eta 11}) \\ cc_1(N_{2i}) &= N_{2i}^5 \left(-\frac{\lambda_1 c_{\eta n11}^2}{2} - \frac{9\lambda_1 k_{n11}^2}{2} \right) - 2N_{2i}^3 c_{\eta n11} (\beta_1^2 + 2c_{\eta 11} \lambda_1) \\ &\quad - 12N_{2i}^3 \lambda_1 k_{n11} (\beta_1 + k_{11} - 1) - 8N_{2i} (c_{\eta 11}^2 \lambda_1 + \beta_1^2 c_{\eta 11} + \lambda_1 (\beta_1 + k_{11} - 1)^2). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Ces expressions construisent les points de coordonnées (N_{2i}, θ_{1i}) et (N_{2i}, θ_{2i}) qui définissent les singularités plis de la ligne de pliage N_{2i} . L'inéquation $C_{SP} : \left| \frac{cc}{\sqrt{c^2 + s^2}} \right| \leq 1$ nous conduit à déterminer la condition pour l'apparition des singularités plis sur la force d'excitation :

$$F_{1ci} \geq \frac{cc(N_{2i})}{\beta_1 \sqrt{(8\beta_1 - 8 + 8k_{11} + 6k_{n11} N_{2i}^2)^2 + (2c_{\eta n11} N_{2i}^2 + 8c_{\eta 11})^2}} \quad (3.31)$$

$F_{1ci}; i = 1, 2$ est la valeur critique de l'amplitude d'excitation au-delà de laquelle les singularités plis se présentent sur la ligne de pliage N_{2i} .

La figure Fig.3.4 présente deux plans de phase pour différentes valeurs de force d'excitation. Les points noirs présentent les points fixes stables. Pour la sous-figure de gauche, la force d'excitation est $F_1 = 7$. Elle dépasse le premier seuil critique F_{1c1} . Les deux singularités plis θ_{11} et θ_{21} sont présentées par les deux points rouges situés sur la ligne de pliage inférieure N_{21} . La présence de ces singularités permet le saut vers le bas. En

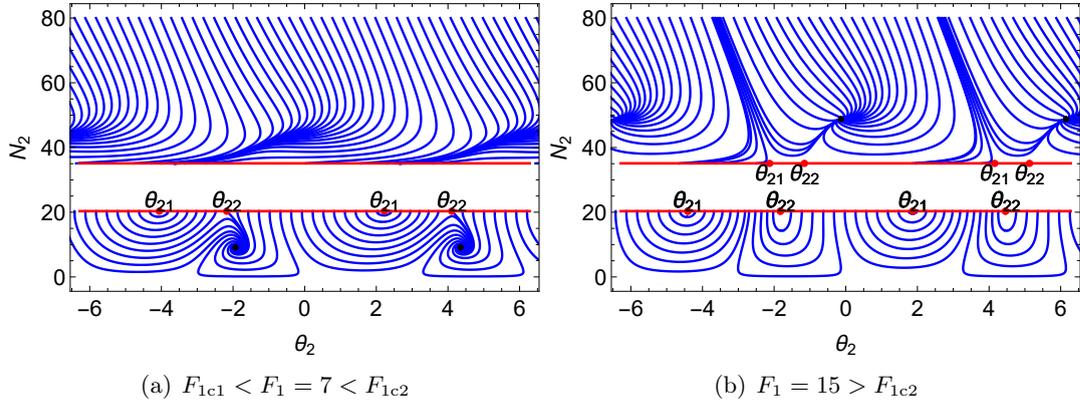


Figure 3.4: Les plans de phase pour deux différentes valeurs de force d'excitation.

effet, avec l'augmentation du niveau d'excitation, des bifurcations au voisinage de la ligne inférieure de pliage N_{21} se produisent. La dérivée $\frac{dN_2}{d\tau_1}$ subit un changement de signe du négatif au positif et le flux lent change leur direction et remonte vers la ligne inférieure, ce qui lui permet de sauter vers le haut. Pour la deuxième sous figure de droite, la force d'excitation dépasse le deuxième seuil critique F_{1c2} . Les singularités plis θ_{21} et θ_{22} sont présentées sur la ligne de pliage N_{22} . Sur l'intervalle $[\theta_{21}, \theta_{22}]$, la dérivée $\frac{dN_2}{d\tau_1}$ subit un changement de signe, ce qui force le flux lent à remonter vers le haut. Ces deux singularités construisent un intervalle qui interdit le saut vers le bas. Contrairement au premier cas où la présence des singularités plis sur N_{21} fait apparaître une zone de saut, la présence de ces singularités sur la ligne N_{22} fait sortir une zone inaccessible pour le saut. Donc, idéalement, les valeurs critiques F_{1c1} , F_{1c2} définissent les seuils d'activation et de désactivation du PE.

En réalité, l'apparition des singularités plis sur la ligne N_{21} ne garantit pas la stabilité du régime fortement modulé. En effet, après plusieurs transitions d'une branche stable à une autre, le flux lent peut être attiré par un point fixe stable, ce qui entraîne une réponse périodique (voir sous-figure Fig.3.4(a)). Ainsi, la condition $F_1 > F_{1c1}$ est nécessaire, mais non suffisante pour garantir l'apparition de réponses fortement modulées.

Une étude semi-analytique développée par Starosvetsky [24] permet de suivre l'évolution du flux lent au cours d'un cycle de relaxation pour différentes conditions initiales. Nous l'avons appliquée dans cette partie.

Pour une amplitude d'excitation donnée $F_1 > F_{1c1}$, on prend un point de départ qui a une amplitude correspondant à N_{21} et une phase nommée θ_{12} . Cette phase se trouve dans l'intervalle $[\theta_{11}, \theta_{12}]$. En effet, la trajectoire de flux lent dans cet intervalle est dirigée vers le haut, donc permet d'avoir le saut vers la branche supérieure. Le choix de cet intervalle favorise la possibilité d'avoir la réponse fortement modulée.

Un saut du point (θ_{12}, N_{21}) vers un point (θ_s, N_s) , qui appartient à la branche supérieure stable de la VI, aura lieu. Comme illustré dans la figure Fig.3.2, ce saut conserve la même amplitude N_1 . Ainsi, les coordonnées (θ_s, N_s) de ce point sont déterminées en utilisant l'invariance de la VI lente lors d'un saut. Le point de saut vers le haut est déterminé en

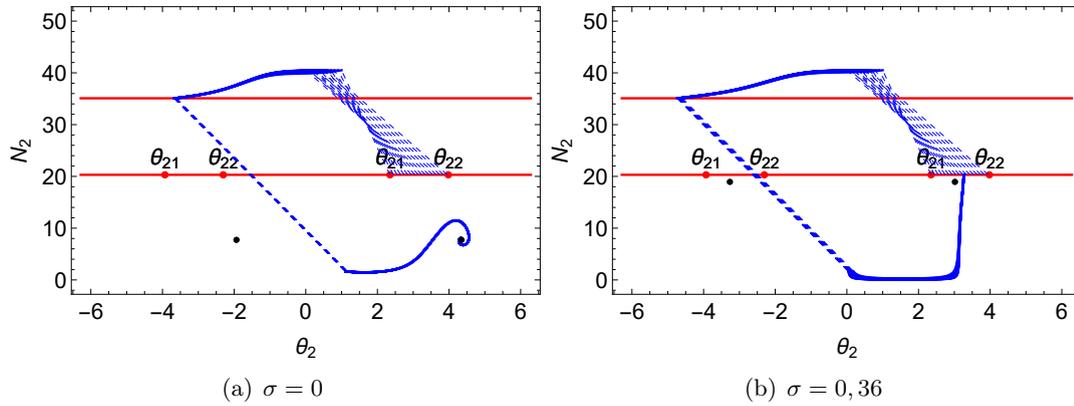


Figure 3.5: Procédure de suivi de la trajectoire de flux au cours d'un cycle de relaxation, pour une force d'excitation $F_1 = 6$ et deux valeurs différentes de pulsation réduite.

appliquant cette égalité :

$$\begin{aligned}
 & e^{i\theta_{21}} \left(ik_{11}N_{21} + \frac{3}{4}ik_{nl1}N_{21}^3 - \frac{1}{4}c_{\eta l1}N_{21}^3 + i\beta_1N_{21} - c_{\eta l1}N_{21} - iN_{21} \right) \\
 & = e^{i\theta_s} \left(ik_{11}N_s + \frac{3}{4}ik_{nl1}N_s^3 - \frac{1}{4}c_{\eta l1}N_s^3 + i\beta_1N_s - c_{\eta l1}N_s - iN_s \right). \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

Une fois que les coordonnées de point supérieur sont calculées, on les a fixées comme condition initiale pour suivre la trajectoire de flux lent sur la branche supérieure stable par l'intégration de l'équation Eq.3.26. Deux cas sont possibles. Dans le premier cas, le flux lent peut être attiré par un point fixe stable. Le cycle se termine à ce point. Dans le deuxième cas, le flux peut atteindre la ligne supérieure N_{22} . Donc un autre point de coordonnées (θ_{22}, N_{22}) est déterminé. Le calcul du mouvement rapide est de nouveau appliqué. Mais dans ce cas le saut est du point (θ_{22}, N_{22}) vers le point qu'on cherche (θ_i, N_i) . Puis l'équation Eq.3.26 est réutilisée pour le calcul de la partie lente de mouvement. Le flux peut atteindre la ligne N_{21} ou il peut se rediriger vers un point fixe stable. Dans ce dernier cas, le régime fortement modulé perd sa stabilisation.

Ces étapes sont répétées plusieurs fois pour différents points de départ dans l'intervalle $[\theta_{11}, \theta_{12}]$. Si tous les points de la dernière étape se retrouvent dans l'intervalle de départ, alors, la réponse fortement modulée est stable, sinon la réponse fortement modulée est instable.

Les sous-figures Fig.3.5(a) et Fig.3.5(b) présentent le résultat donné par cette procédure semi-analytique pour deux différentes valeurs de pulsation réduite ($\sigma = 0$ et $\sigma = 0,36$ respectivement). La force d'excitation choisie pour le calcul est égale à $F_1 = 6 > F_{c1}$. Les points noirs et gris présentent les points fixes stables et instables. Dans la sous-figure de gauche ($\sigma = 0$) la présence de point fixe stable perturbe la stabilité du régime fortement modulé. Le flux lent est attiré par ce point et la réponse devient périodique. La réponse fortement modulée est instable dans ce cas. Si on augmente, la pulsation réduite à $\sigma = 0,36$ la réponse fortement modulée devient stable malgré la présence du point fixe dans la branche inférieure stable.

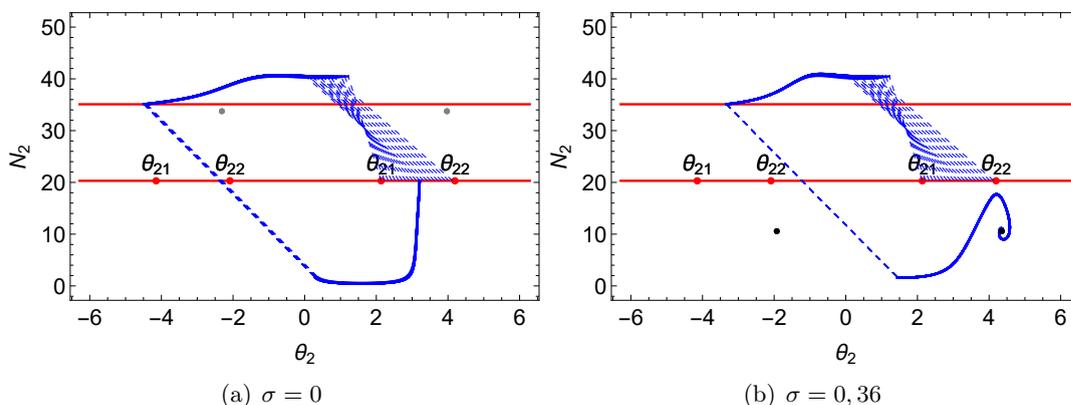


Figure 3.6: Procédure de suivi de la trajectoire de flux au cours d'un cycle de relaxation, pour une force d'excitation $F_1 = 8$ et deux valeurs différentes de pulsation réduite.

Si on prend une force d'excitation $F_1 = 8 > F_{1c1}$ (voir Fig.3.6). Pour le premier cas ($\sigma = 0$), on ne remarque aucun changement. La réponse fortement modulée perd sa stabilisation avec la présence du point fixe. Pour $\sigma = 0,36$, le point fixe se trouve dans la zone instable de la VI. Dans ce cas, on n'a aucune possibilité que le flux lent soit attiré par une solution périodique. Ce qui garantit la stabilité du régime quasi périodique.

On peut conclure que pour les forces d'excitation qui vérifient la condition de l'apparition des singularités plis (la condition nécessaire de la présence de la réponse fortement modulée), la présence de points fixes dans la zone des deux branches stable de la VI lente peut conduire dans certains cas à la perte de stabilité de régime quasi périodique. Si ce point quitte la zone stable et se localise dans la zone instable ($N_{20} \in [N_{21}, N_{22}]$ voir Fig.3.6(b)) on peut garantir la stabilité de réponse fortement modulée.

La figure Fig.3.7 montre la variation de point fixe N_{20} en fonction de la force d'excitation F_1 pour les deux différentes valeurs de pulsation réduite ($\sigma = 0$ et $\sigma = 0,36$). Les points présentés en bleu sont les points fixes stables et les points en rouge sont les points fixes instables. Les deux lignes vertes verticales correspondent aux seuils critiques F_{1c1} et F_{1c2} . Ces seuils limitent la zone idéale du régime quasi périodique. Pour $\sigma = 0$, tout au long de cette zone, des points fixes stables sont présentés dans les deux branches stables. Ce qui limite la possibilité d'avoir le régime fortement modulé. Par contre, pour $\sigma = 0,36$ à partir d'une force d'excitation donnée ($F_1 = 6,1$) le point fixe se déplace vers la zone instable de la VI. On garantit donc la stabilité de la réponse fortement modulée. Avec l'augmentation de l'amplitude d'excitation, le point fixe dépasse la ligne N_{22} . Il revient à la zone stable. Mais en raison de l'instabilité de ce point dans cette zone, le régime fortement modulé conserve sa stabilité.

3.3 Bifurcation des solutions périodiques

Dans ce paragraphe on va déterminer les bifurcations locales des solutions périodiques définies par l'équation Eq.3.7.

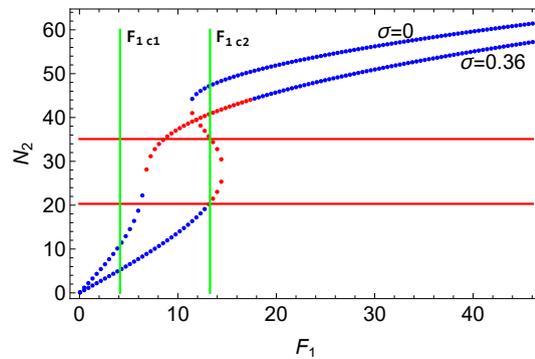
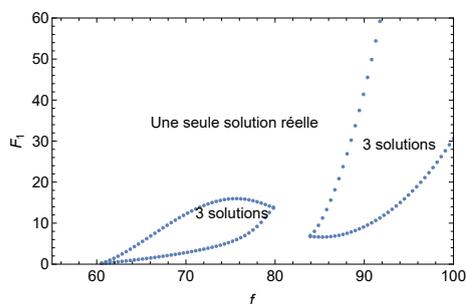


Figure 3.7: La variation de l'amplitude de point fixe N_{20} en fonction de la force d'excitation pour $\sigma = 0$ et $\sigma = 0,36$.

3.3.1 Bifurcation de SN

Dans cette partie, la limite qui sépare la zone d'une seule solution réelle de Eq.3.7 et trois solutions réelles est déterminée. Cette limite définit la bifurcation de SN. L'équation Eq.3.7 présente un polynôme de degré trois de $Z_{20} = N_{20}^2$. Le nombre de solutions de ce polynôme dépend du signe de discriminant $\Delta_{SN} = \alpha_1^2 \alpha_2^2 - 4\alpha_0 \alpha_2^3 - 4\alpha_1^3 \alpha_3 + 18\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - 27\alpha_0^2 \alpha_3^2$. Dans le cas où $\Delta_{SN} < 0$, une seule solution réelle est présentée et lorsque $\Delta_{SN} > 0$ l'équation Eq.3.7 possède trois solutions réelles. Donc, il est clair que l'équation $\Delta_{SN} = 0$ correspond à la limite de bifurcation de SN qui sépare la zone de trois solutions réelles à celle d'une seule solution réelle. Cette limite dépend des variables d'excitation (force et fréquence) et des paramètres du système.

La figure Fig.3.8 présente sur un diagramme fréquence-force d'excitation la limite de bifurcation de SN. L'intérieur de cette limite correspond aux zones de trois solutions réelles alors que l'extérieur indique la zone d'une seule solution. La limite de bifurcation montre deux zones de trois solutions réelles. Une zone de basses fréquences est observée autour de la fréquence de résonance de la membrane. La deuxième est observée autour de la fréquence de résonance du tube. Afin de bien analyser cette courbe, on a fait appel à la réponse fréquentielle du système. Les sous-figures Fig3.9(a), Fig3.9(b) et Fig3.9(c) présentent la courbe de résonance de la membrane pour les trois forces d'excitation $F_1 = 5,9$, $F_1 = 8$ et $F_1 = 14,8$. Pour la force d'excitation $F_1 = 5,9$, on a observé une déviation du pic de résonance de la membrane vers la droite (causée par la non-linéarité de la membrane). Ce qui induit la présence de la zone de trois solutions. Cette zone est limitée par les deux lignes verticales qui présentent les fréquences de passage d'une seule solution vers trois solutions ou l'inverse. Ces fréquences correspondent bien aux fréquences données par la limite de bifurcation de SN à la force d'excitation $F_1 = 5,9$. Avec l'augmentation de la force d'excitation, la non-linéarité de la membrane affecte le comportement de tube (le pic de résonance de tube se décale vers les fortes fréquences : voir Fig3.9(b)). Ce qui se traduit par l'apparition de la deuxième zone de trois solutions dans la figure Fig.3.8. En augmentant la force d'excitation, l'effet de la non-linéarité sur le comportement devient plus dominant. Ce qui explique l'élargissement de la plage de fréquences de trois solutions ainsi que leur décalage vers les hautes fréquences avec l'augmentation du niveau d'excitation. À partir de la force d'excitation où la limite de la première zone atteint sa fréquence maximale, la plage de fréquence de trois solutions dans cette zone se rétrécit jusqu'à la disparition. Ceci est expliqué par l'apparition d'une résonance détachée interne qui se rétrécit avec l'augmentation de l'excitation. La courbe de résonance Fig3.9(c) montre la présence de la

Figure 3.8: La limite de bifurcation de SN dans le plan (f, F_1) .

résonance détachée interne.

3.3.2 Bifurcation d'Hopf

La stabilité des solutions périodiques déterminées ci-dessus est utilisée pour étudier la bifurcation d'Hopf. Cette bifurcation indique la limite entre les zones stables et instables des solutions périodiques.

On commence par déterminer le polynôme caractéristique du système linéarisé Eq.3.9. Il s'écrit sous cette forme :

$$x^4 + \gamma_3 x^3 + \gamma_2 x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0 = 0 \quad (3.33)$$

Les coefficients de ce polynôme dépendent de l'amplitude de modulation lente $Z_{20} = N_{20}^2$ et des paramètres du système.

Pour déterminer la limite qui sépare entre les solutions stables et celles instables, les valeurs propres x doivent être purement imaginaires $x = \pm iX$. Cette expression est introduite dans l'équation Eq.3.33. En séparant les parties réelle et imaginaire, la condition de la bifurcation d'Hopf est déterminée :

$$\gamma_1^2 + \gamma_0 \gamma_3^2 - \gamma_1 \gamma_3 \gamma_2 = 0 \quad (3.34)$$

L'équation Eq.3.34 est développée puis les mêmes puissances de Z_{20} sont collectées. Un polynôme de degré cinq de Z_{20} est observé. Ce polynôme présente la condition de la bifurcation d'Hopf. Les solutions réelles de ce polynôme sont déterminées et introduites dans l'équation Eq.3.7. Ce qui donne la limite de stabilité des solutions périodiques. Ce calcul est réalisé numériquement puisque la condition de la bifurcation d'Hopf est définie par le polynôme de degré cinq de Z_{20} .

La figure Fig.3.10 montre la projection de la limite de stabilité d'Hopf sur le plan (f, F_1) en fixant les autres paramètres. L'intérieur de cette limite correspond aux solutions périodiques instables, alors que la zone externe est liée aux solutions stables.

Afin de bien analyser la limite de bifurcation d'Hopf, on a présenté dans la figure Fig.3.11 la superposition de la limite des deux bifurcations. La limite de la bifurcation SN est présentée en bleu et celle d'Hopf en rouge. Cette figure montre qu'une partie de la zone instable donnée par la bifurcation d'Hopf appartient aux zones de trois solutions périodiques de SN. Pour cela, la courbe de réponse fréquentielle est utilisée pour indiquer

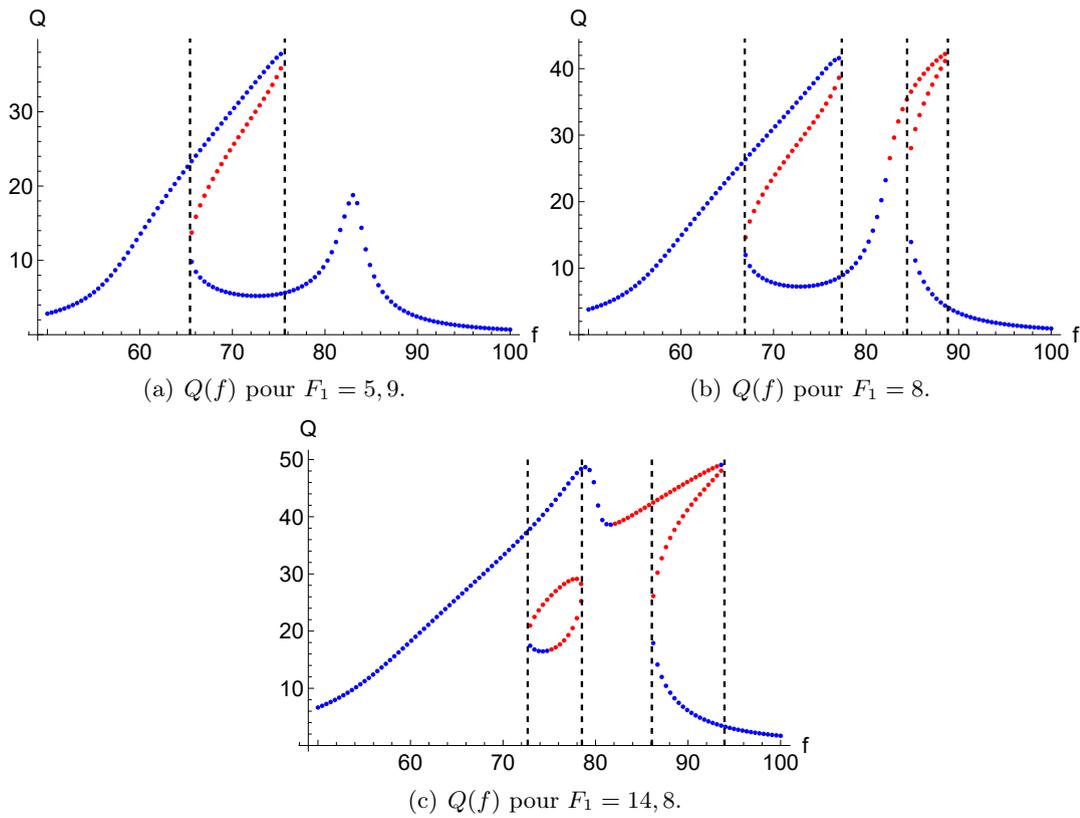


Figure 3.9: La réponse fréquentielle de la membrane pour trois différentes forces d'excitation. Les lignes verticales présentent les fréquences de passage d'une seule solution vers trois solutions ou l'inverse.

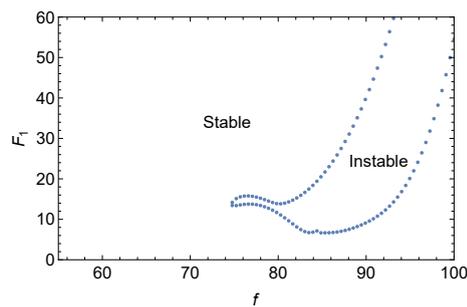


Figure 3.10: La limite de bifurcation d'Hopf dans le plan (f, F_1) .

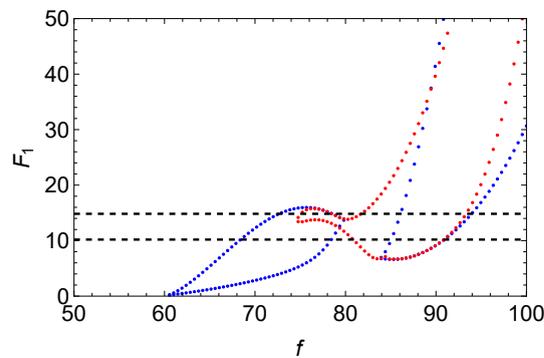


Figure 3.11: La superposition de la limite de bifurcation d'Hopf (rouge) avec celle de SN (bleu) dans le plan (f, F_1) . Les deux lignes horizontales indiquent les forces d'excitation $F_1 = 10, 18$ et $F_1 = 14, 8$.

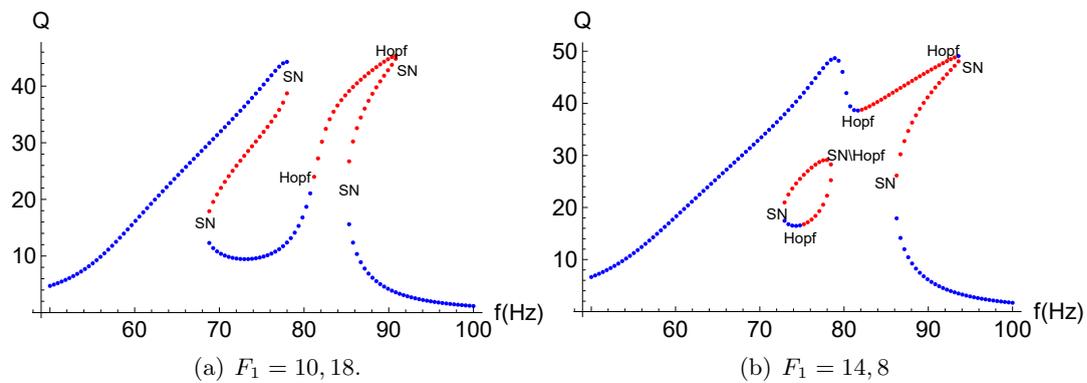


Figure 3.12: Les courbes de résonance de la membrane pour les forces d'excitation correspondent aux deux lignes horizontales présentées dans Fig.3.11. "Hopf" indique les points de bifurcation d'Hopf et "SN" de SN.

quelle solution parmi les trois subit la bifurcation d'Hopf. Les sous-figures Fig3.12(a) Fig3.12(b) présentent la courbe de résonance de la membrane pour les forces d'excitation $F_1 = 10, 18$ et $F_1 = 14, 8$. Les points de bifurcation et leurs types sont marqués sur ces courbes. La sous-figure Fig3.12(a) montre que les deux branches au milieu de cette courbe subissent une bifurcation de SN alors que la branche supérieure présente autour du deuxième pic de résonance est affectée par la bifurcation d'Hopf. Les régions instables de ces branches coïncident avec les parties internes de la limite de bifurcation de SN et de la limite de bifurcation d'Hopf (Fig.3.11). Comme le montre la figure Fig3.12(b), lorsque la force d'excitation augmente et la résonance détachée interne aura lieu, une deuxième branche subit la bifurcation d'Hopf. Cette branche correspond à la branche inférieure de la résonance détachée interne. La figure montre que la région instable de cette branche coïncide avec la partie interne de la limite de bifurcation d'Hopf.

3.3.3 Détection la présence du régime fortement modulé

Dans cette partie, l'étude des bifurcations locales des solutions périodiques (Hopf et SN) réalisée ci-dessus est utilisée pour détecter la présence du régime fortement modulé.

Dans la figure Fig.3.13 avec la superposition de la limite des deux bifurcations, on a

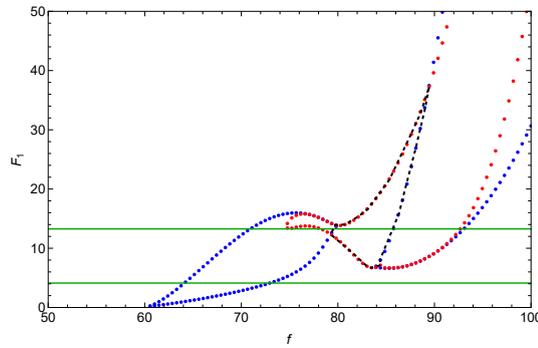


Figure 3.13: La superposition de la limite de bifurcation d'Hopf (en rouge) avec celle du nœud en selle (en bleu) dans le plan (f, F_1) . La courbe noire délimite la zone du régime quasi-périodique. Les deux lignes horizontales indiquent les valeurs critiques F_{1c1} et F_{1c2} .

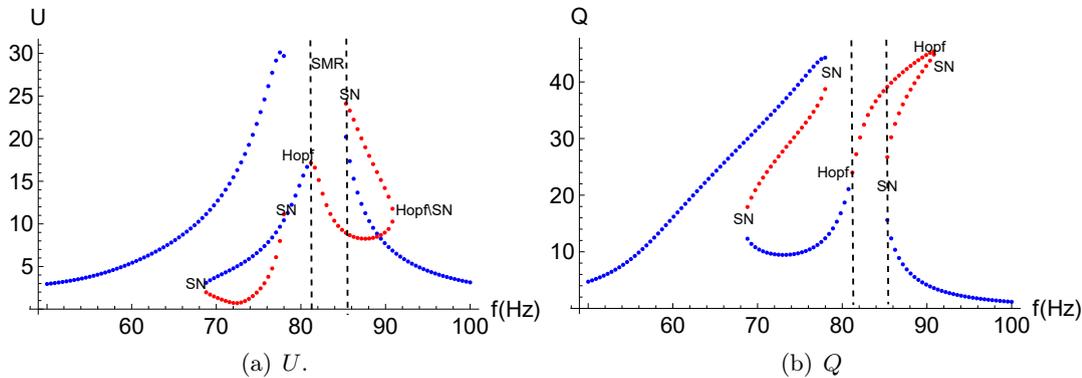


Figure 3.14: La courbe de résonance de la membrane et du tube pour la force d'excitation $F_1 = 10, 2$. Les deux lignes verticales discontinues délimitent la zone des réponses quasi-périodiques. "Hopf" indique les points de bifurcation d'Hopf et "SN" les points de nœud en selle.

présenté aussi les deux lignes horizontales vertes qui correspondent aux valeurs critiques F_{1c1} , F_{1c2} définies par l'équation Eq.3.28. Avec l'augmentation de la force d'excitation, on a remarqué que lorsqu'on atteint la limite de bifurcation d'Hopf, la réponse fréquentielle du système présente une zone des réponses fortement modulées. La figure Fig.3.14 présente la réponse fréquentielle de la membrane et du tube pour la force d'excitation $F_1 = 10, 2$. Ces deux courbes présentent la zone de la réponse fortement modulée limitée par les deux lignes verticales discontinues. Dans cette zone, on a remarqué la présence d'une seule solution périodique qui est instable. Ce qui explique que cette zone coïncide avec la région interne de la limite de bifurcation d'Hopf qui appartient à la zone d'une seule solution périodique donnée par l'étude de la bifurcation de Selle en Nœud. Pour la force d'excitation $F_1 = 14,8$ (voir Fig.3.15) on a aussi remarqué que la zone des réponses fortement modulées coïncide avec la région interne de la limite d'Hopf qui se trouve dans la zone d'une seule solution de SN. La zone du régime fortement modulé est définie par l'intersection entre la limite d'Hopf avec la zone d'une seule solution de SN. Cette zone est limitée par la courbe discontinue noire dans la figure Fig.3.13.

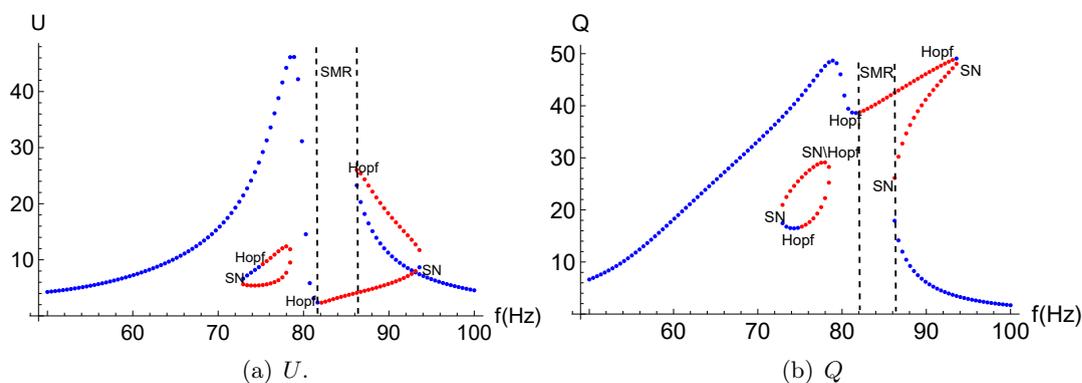


Figure 3.15: La courbe de résonance de la membrane et du tube pour la force d'excitation $F_1 = 14.8$. Les deux lignes verticales discontinues délimitent la zone des réponses quasi-périodiques. "Hopf" indique les points de bifurcation d'Hopf et "SN" les points de nœud en selle.

3.4 Effet de l'ajout de l'amortissement non linéaire

Par rapport aux absorbeurs non linéaires classiques, notre absorbeur non linéaire vibro acoustique possède un terme d'amortissement non linéaire qui s'ajoute au terme de raideur cubique. Dans ce paragraphe, le calcul analytique réalisé tout au long de ce chapitre est utilisé pour examiner la présence de ce terme d'amortissement non linéaire.

3.4.1 Effet sur le comportement fréquentiel

Afin d'observer l'effet de l'amortissement non linéaire sur le comportement fréquentiel du système, les courbes de résonance du tube et de la membrane correspondant à trois différentes valeurs d'amortissement non linéaire sont superposées ($c_{\eta_{ml1}} = 0$, $c_{\eta_{ml1}} = 0,00028$ et $c_{\eta_{ml1}} = 0,00056$). Les figures Fig.3.16, Fig.3.17 et Fig.3.18 présentent la superposition des réponses fréquentielles pour ces trois différentes valeurs d'amortissement non linéaire, avec trois forces d'excitation différentes ($F_1 = 2, 17$, $F_1 = 7, 2$ et $F_1 = 10, 2$).

La figure Fig.3.16 montre que, pour les trois valeurs d'amortissement non linéaire, les courbes de réponse fréquentielle présentent l'effet de la non-linéarité d'adoucissement autour de la fréquence de résonance de la membrane, mais avec différents degrés de non-linéarité. Les courbes de réponse fréquentielle montrent que l'amplitude de crête et le degré de la non-linéarité d'adoucissement sont plus importants lorsque le terme d'amortissement non linéaire est négligé ($c_{\eta_{ml1}} = 0$). Avec l'augmentation de la valeur d'amortissement non linéaire, l'effet de la non-linéarité d'adoucissement diminue.

À la force d'excitation de $F_1 = 7, 2$, la courbe de résonance, pour un amortissement non linéaire nul, montre une déviation du pic de résonance du tube vers des fréquences plus élevées. À cette amplitude d'excitation, l'effet d'adoucissement non linéaire sur le comportement du tube n'est observé que pour un amortissement nul. Avec l'augmentation de l'amplitude d'excitation (voir Fig.3.18), cet effet devient visible dans les courbes pour $c_{\eta_{ml1}} = 0,00028$. Cette valeur d'amortissement non linéaire présente un effet d'adoucissement moins important que celui observé en éliminant le terme d'amortissement. Pour la valeur $c_{\eta_{ml1}} = 0,00056$, les réponses fréquentielles présentent des amplitudes de déplacement moins importantes, ce qui est dû au grand amortissement imposé par la

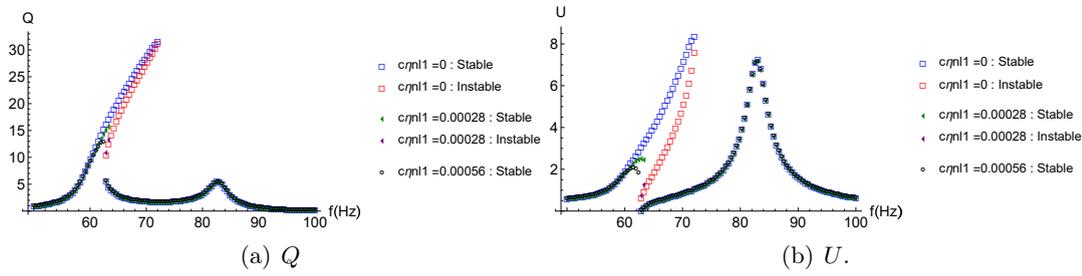


Figure 3.16: La courbe de résonance de la membrane et de tube pour trois différentes valeurs d'amortissement non linéaire à la force d'excitation $F_1 = 2, 17$.

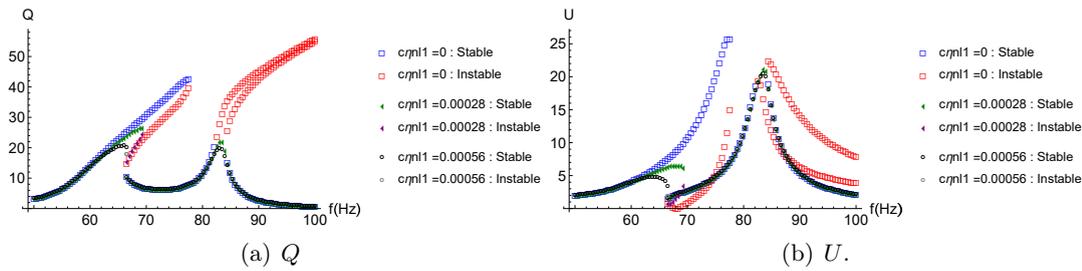


Figure 3.17: La courbe de résonance de la membrane et de tube pour trois différentes valeurs d'amortissement non linéaire à la force d'excitation $F_1 = 7, 2$.

membrane. Pour cette valeur d'amortissement non linéaire, on n'observe pas un effet d'adoucissement remarquable.

L'ajout de l'amortissement non-linéaire permet de contrôler les effets de la non-linéarité d'adoucissement. Avec la présence de l'amortissement non linéaire, on peut réduire l'amplitude de crête et atténuer le degré de la non-linéarité. Cependant, avec une valeur d'amortissement non linéaire relativement élevée, tous les effets d'adoucissement non linéaire sont supprimés, ce qui élimine les phénomènes non linéaires promoteurs tels que le PE et les bifurcations locales.

3.4.2 Effet sur les limites de bifurcation des solutions périodiques

Pour ces trois différentes valeurs d'amortissement non linéaire, on a présenté dans les sous-figures Fig.3.19(a) ($c_{\eta nl1} = 0$), Fig.3.19(b) ($c_{\eta nl1} = 0,00028$) et Fig.3.19(c) ($c_{\eta nl1} = 0,00056$) la superposition de la limite des deux bifurcations dans le plan fréquence-force

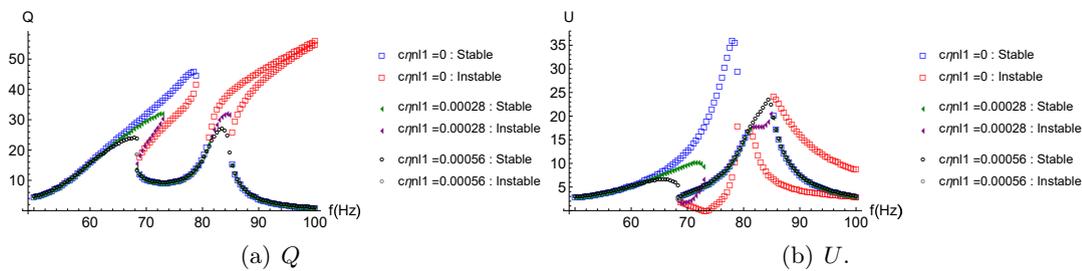


Figure 3.18: La courbe de résonance de la membrane et de tube pour trois différentes valeurs d'amortissement non linéaire à la force d'excitation $F_1 = 10, 2$.

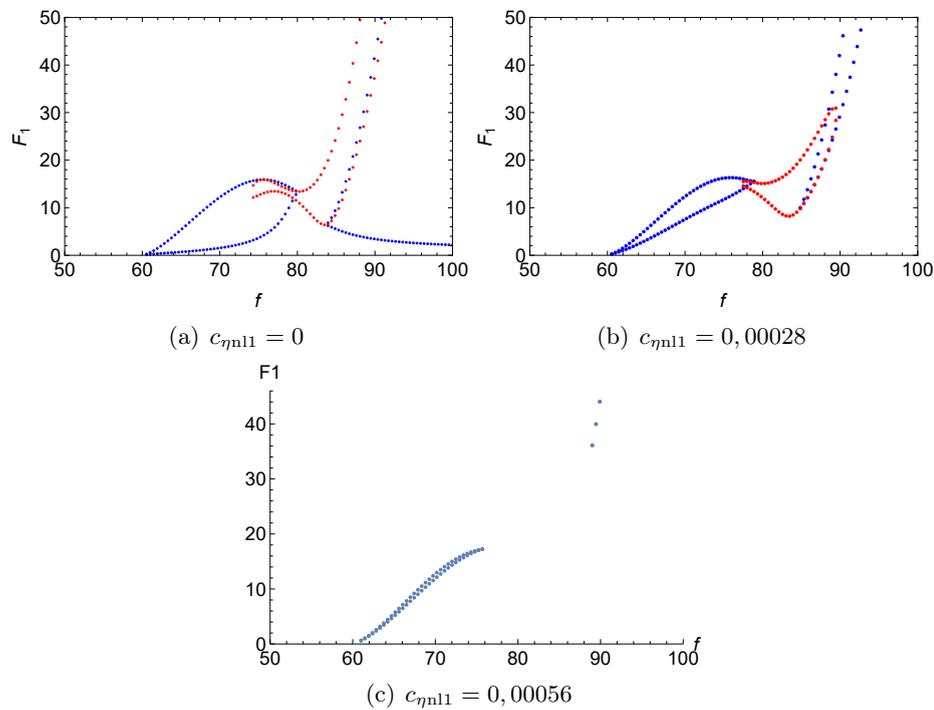


Figure 3.19: La superposition des limites des deux bifurcations dans le plan (f, F_1) .

d'excitation. La limite de la bifurcation SN est présentée en bleu et celle d'Hopf en rouge. Pour une valeur d'amortissement non linéaire $c_{\eta_{nl1}} = 0$, la limite de bifurcation de SN présente des larges zones de trois solutions. De plus, la zone de trois solutions présentée au voisinage de la fréquence de résonance de tube apparaît à faible amplitude d'excitation. Avec l'augmentation de l'amortissement non linéaire, la limite de la bifurcation de SN se rétrécit et la zone de trois solutions présentée au voisinage de la fréquence de résonance de tube apparaît à des amplitudes d'excitation de plus en plus élevées. La comparaison entre les limites de bifurcation de SN des trois valeurs d'amortissement non-linéaire est en accord avec l'explication donnée par la présentation des courbes de réponse fréquentielle (l'ajout de l'amortissement non linéaire abaisse l'effet de la non-linéarité d'adoucissement). Aussi, la limite de bifurcation d'Hopf est plus large pour $c_{\eta_{nl1}} = 0$. Avec l'augmentation de l'amortissement non linéaire, cette limite devient plus étroite et le seuil de leur apparition devient plus important. Avec une valeur d'amortissement non linéaire relativement grande, la bifurcation d'Hopf n'aura pas lieu ($c_{\eta_{nl1}} = 0,00056$). Donc le régime fortement modulé défini par la limite de bifurcation d'Hopf qui se trouve dans la zone d'une seule solution de SN n'aura pas lieu. Pour les deux autres cas, avec un amortissement non linéaire nul la zone de régime fortement modulé est apparu à une amplitude d'excitation plus faible et s'élargit sur une plage de force d'excitation plus large.

3.4.3 Effet sur la variété invariante

L'influence de l'amortissement non linéaire sur la variation de la courbe de la VI est étudiée dans ce paragraphe. La figure Fig.3.20 expose la superposition des courbes de VI pour différentes valeurs d'amortissement non linéaire. Les branches instables des VI sont présentées par les courbes discontinues rouges. Votre phrase est grammaticalement correcte. La courbe verte présente l'effet de l'amortissement non linéaire sur la position des deux extrêmes de la VI. Pour les courbes de VI en forme de S on a remarqué que

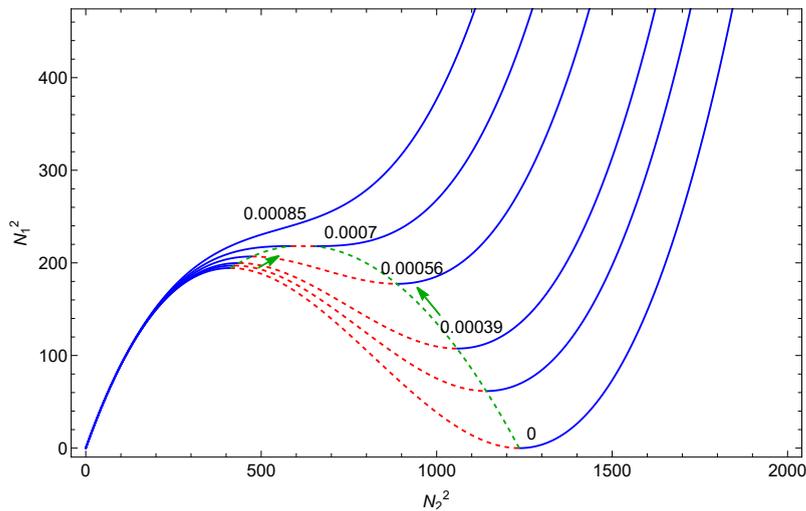


Figure 3.20: L'évolution de la courbe de la VI en fonction de l'amortissement non linéaire. En bleu : VI stable, en rouge : VI instable. La courbe discontinue verte présente la variation des deux extrêmes locaux de la VI en fonction de l'amortissement non linéaire.

la zone instable de la VI est limitée par cette courbe (par les points deux extremums). Pour $c_{\eta_{n11}} > 0,0007$, la VI ne présente pas d'extremum. Elle devient monotone. Cela peut être davantage expliqué en examinant la figure Fig.3.21 qui montre la variation de Δ_{VI} (Eq.3.19) en fonction de l'amortissement non linéaire. Cette figure présente la plage d'amortissement non linéaire où la VI présente des extrémums, c.-à-d. lorsque $\Delta_{VI} > 0$.

Avec l'élimination du terme d'amortissement non linéaire, la courbe de VI présente ces deux extrémums. Dans ce cas, le minimum local se trouve à zéro et le maximum local correspond aux amplitudes les plus faibles possibles de N_{11} et N_{21} . Avec l'augmentation de l'amortissement non linéaire, les extrémums locaux de la VI décalent vers le haut, mais de manière inégale. En effet, la sensibilité de la position du maximum à l'amortissement non linéaire est moins importante que la sensibilité du minimum. Ce qui induit la diminution de la distance qui sépare ces deux extrémums quand l'amortissement non linéaire augmente. La figure Fig.3.22 présente la réponse temporelle de déplacement de l'air en bout du tube à l'amplitude d'excitation $F_1 = 13$ et à la fréquence $f = 82,5$ Hz pour trois valeurs d'amortissement non linéaire. La réponse temporelle pour $c_{\eta_{n11}} = 0$, montre une profondeur de modulation significative, tandis que pour l'amortissement non linéaire $c_{\eta_{n11}} = 0,00039$, elle présente une profondeur moins importante. Si on augmente encore l'amortissement non linéaire, la profondeur de modulation devient trop petite et la réponse devient faiblement modulée (voir la sous figure Fig.3.22(c)). Ceci peut s'expliquer par la diminution de la distance qui sépare les deux extrémums de VI, induite par l'augmentation de l'amortissement non linéaire.

Conclusion

Ce chapitre a traité l'influence de l'amortissement non linéaire sur la dynamique du système couplé tube-membrane monostable, avec une approche analytique. Les résultats de cette analyse ont pu mettre en évidence que l'introduction de l'amortissement non linéaire engendre une nette amélioration du comportement du système. En effet, une réduction de 28% de l'amplitude de crête est observée lorsque la valeur de l'amortissement

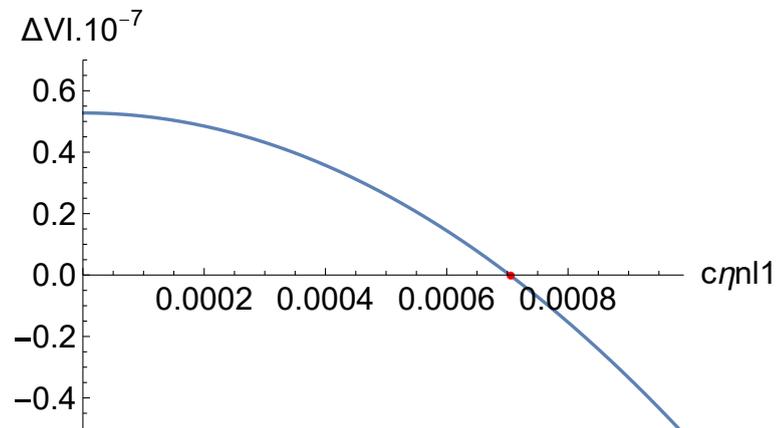


Figure 3.21: La variation de Δ_{VI} en fonction de l'amortissement non linéaire.

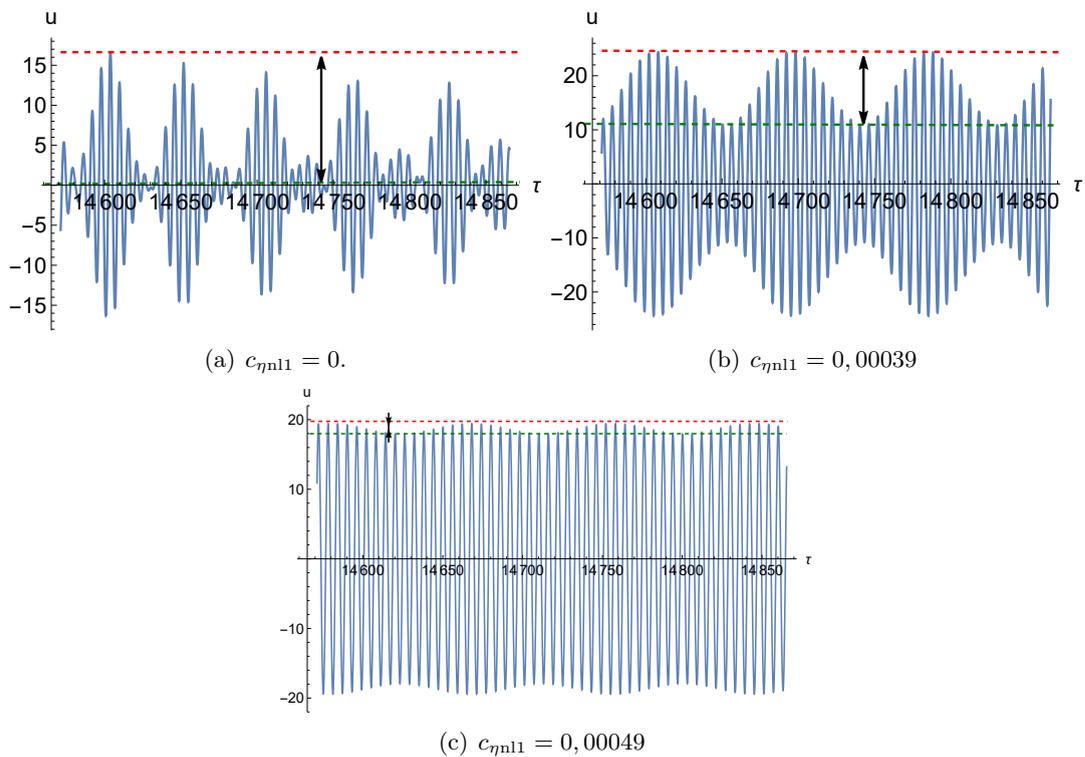


Figure 3.22: La réponse temporelle de déplacement de l'air en bout du tube à l'amplitude et fréquence d'excitation $F_1 = 13$ et $f = 82,5$ Hz pour trois valeurs d'amortissement non linéaire.

non linéaire est fixée à $c_{\eta n11} = 0,00028$ par rapport à une situation sans amortissement non linéaire ($c_{\eta n11} = 0$). Pour des valeurs plus élevées, l'effet non linéaire de l'amortissement devient dominant dans la dynamique du système, induisant ainsi une réponse similaire à celle d'oscillateurs fortement amortis.

Chapitre 4

Optimisation numérique du système couplé tube-membrane

Introduction

Au cours de l'examen des différents articles présentés dans la cinquième section du premier chapitre, il a été démontré, à la fois dans les régimes transitoires [46, 47, 48, 50] et harmoniques [52], que les absorbeurs bistables surpassent les absorbeurs monostables en termes de performance. Dans l'article [52], en considérant une fréquence d'excitation particulière, l'évaluation comparative entre le ratio d'énergie dissipée par un NES bistable et celui d'un NES monostable révèle que le NES bistable a démontré son efficacité sur une plage étendue d'amplitudes d'excitation. À de faibles niveaux d'excitation, ce rapport peut atteindre 70% pour le NES bistable, tandis qu'il est limité à 10% pour le NES monostable. Lorsqu'il s'agit de PE, le NES bistable dépasse les 60%, tandis que le monostable atteint seulement 50%.

Dans ce chapitre, nous examinerons l'efficacité de l'absorption des membranes monostables et bistables en utilisant une approche d'optimisation numérique. Cette approche repose sur la variation de l'aire sous la courbe de crête de la réponse en fréquence du tube en fonction du paramètre optimisé, à savoir la raideur linéaire de la membrane. Cette méthodologie nous permettra ainsi de comparer le degré d'atténuation fourni par plusieurs membranes présentant différentes valeurs de rigidité linéaire. Par conséquent, cette approche nous permettra de comparer l'efficacité des membranes bistables et monostables, ainsi que de comparer différentes membranes bistables et différentes membranes monostables entre elles. Afin de valider les conclusions obtenues par cette méthode, nous présentons les courbes de crête, les réponses en fréquence, les rapports de dissipation de la membrane ainsi que la dynamique du système pour différentes valeurs de raideurs linéaires. De plus, nous appliquons cette méthode à d'autres configurations de la membrane, en variant les rayons et les épaisseurs.

Avant d'exposer la méthodologie d'optimisation de notre système couplé tube-membrane, nous commencerons par présenter le modèle décrivant le comportement bistable de notre système, suivi par des calculs préliminaires qui serviront pour l'analyse des résultats de l'optimisation.

4.1 Vers un système bistable

L'idée pour avoir une membrane bistable est simple. Cela consiste à flamber la membrane, c.-à-d. imposer une précontrainte de flambement pour avoir une raideur linéaire négative. En effet, la bistabilité est observée en combinant la raideur cubique avec une raideur linéaire négative. Le modèle décrit le système bistable est le même système d'équations qui décrit le système monostable dont la raideur linéaire équivalent de la membrane doit être inférieure à zéro :

$$\begin{aligned} u'' + u + \lambda u' + \beta(u - q) &= F \cos\left(\frac{\tau\Omega}{\omega_t}\right) \\ \gamma q'' + k_1 q + k_{nl} q^3 + c_\eta \omega_t (2q^2 + 1) q' + \beta(q - u) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pour que ce système couplé présente un comportement bistable, la raideur linéaire k_1 doit être inférieure à une valeur critique $k_{1c} = -\frac{\beta}{\beta+1}$.

4.1.1 Énergie potentielle

L'énergie potentielle du système couplé est écrite sous cette forme $E_p = \frac{1}{2}k_1 q^2 + \frac{1}{4}k_{nl} q^4 + \frac{1}{2}\beta(u - q)^2 + \frac{1}{2}u^2$. La figure 3D Fig.4.1, montre la variation de l'énergie potentielle en fonction du déplacement des deux oscillateurs (u et q). Les trois points présentés en rouge montrent les positions d'équilibre statique de ce système couplé. Ces positions sont déterminées en supposant que les dérivées de l'énergie potentielle par rapport u et q sont égales à zéro. Ils sont définis par : $p_0 = (0, 0)$, $p_{1,2} = (\pm u_e, \pm q_e)$ où $q_e = \sqrt{\frac{-\frac{\beta}{\beta+1} - k_1}{k_{nl}}}$ et $u_e = \frac{\beta}{\beta+1} q_e$. Puis à partir de la dérivée seconde de l'énergie potentielle, on peut déduire que les deux positions d'équilibre p_1 et p_2 sont stables et la position d'équilibre p_0 est instable.

Il faut noter que la condition nécessaire sur la raideur linéaire pour avoir la bistabilité du système est déterminée à partir de l'expression q_e ($\frac{-\frac{\beta}{\beta+1} - k_1}{k_{nl}} > 0$).

4.1.2 Courbes caractéristiques

Si on définit le terme de raideur $\frac{\beta}{\beta+1}$ comme une raideur linéaire qui s'ajoute à la raideur k_1 , l'équation régissant le mouvement de vibration libre de la membrane est $\gamma q'' + \left(k_1 + \frac{\beta}{\beta+1}\right) q + k_{nl} q^3 = 0$. L'expression $q(\tau) = A \cos \omega \tau$ est introduite dans cette équation où A présente l'amplitude de vibration de la membrane. La méthode d'équilibrage harmonique est appliquée et les harmoniques d'ordre supérieur sont supprimées. L'équation suivante est obtenue $-\gamma \omega^2 + k_1 + \frac{\beta}{\beta+1} + 3/4 k_{nl} A^2 = 0$. La pulsation adimensionnée définie par $\omega^2 = \frac{|k_1 + \frac{\beta}{\beta+1} + 3/4 k_{nl} A^2|}{\gamma}$. Puisque $k_1 < 0$ le terme $k_1 + \frac{\beta}{\beta+1} + 3/4 k_{nl} A^2$ peut prendre des valeurs négatives, tandis que la pulsation dépend de l'amplitude de vibration A . Elle est égale à $\omega = \sqrt{\frac{-k_1 - \frac{\beta}{\beta+1} - 3/4 k_{nl} A^2}{\gamma}}$ si $A < \sqrt{\frac{-k_1 - \frac{\beta}{\beta+1}}{3/4 k_{nl}}}$ et à $\omega = \sqrt{\frac{k_1 + \frac{\beta}{\beta+1} + 3/4 k_{nl} A^2}{\gamma}}$ si $A > \sqrt{\frac{-k_1 - \frac{\beta}{\beta+1}}{3/4 k_{nl}}}$.

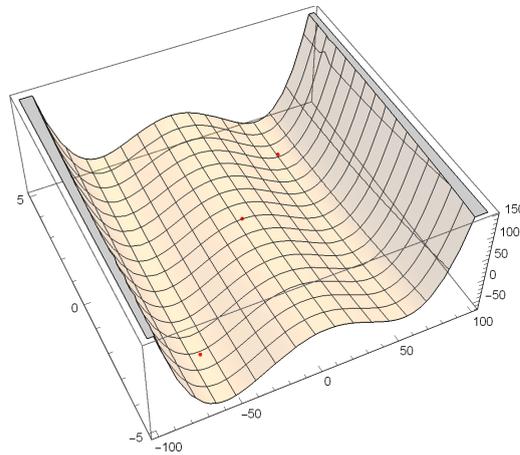


Figure 4.1: L'énergie potentielle E_p du système couplé tube membrane bistable en fonction des déplacements u et q . Les trois points rouges indiquent les positions d'équilibre statiques.

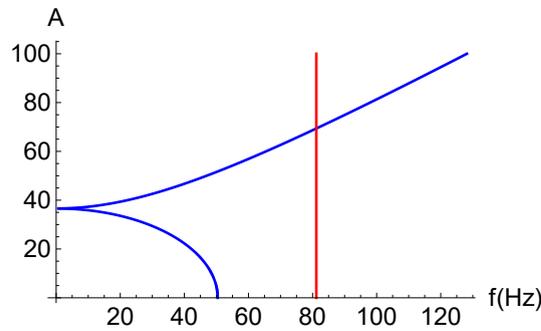


Figure 4.2: La superposition de la courbe caractéristique d'une membrane bistable (bleu) avec celle de tube (rouge).

De même, pour le tube, en introduisant l'expression $u(\tau) = A \cos \omega \tau$ dans l'équation décrivant son comportement $u'' + u + \beta u = 0$ et en appliquant la méthode d'équilibrage harmonique, l'expression de la pulsation adimensionnée est déterminée. la pulsation est égale à $\sqrt{1 + \beta}$ quelle que soit la valeur de l'amplitude A . Dans le diagramme amplitude fréquence de la figure Fig.4.2 on a superposé la courbe caractéristique d'une membrane bistable avec celle du tube.

4.1.3 Fréquences propres couplées

Pour le système couplé, la position p_0 correspond au point d'un équilibre instable. Pour saisir la dynamique du système à faible amplitude, il est plus pratique de réécrire les équations en termes $x = u - u_e$ et $y = q - q_e$ de sorte que $(x, y) = (0, 0)$ corresponde à une position d'équilibre stable. Le système Eq.4.1 est réécrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 x'' + x + \lambda x' + \beta(x - y) &= F \cos\left(\frac{\tau \Omega}{\omega_t}\right) \\
 \gamma y'' + c_\eta \omega_t (2q_e^2 + 4q_e y + 2y^2 + 1) y' + y (k_1 + 3k_{nl} q_e^2) + 3k_{nl} q_e y^2 + k_{nl} y^3 \\
 &\quad + \beta(y - x) = 0
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Pour déterminer les expressions des fréquences propres de ce système bistable, il faudra le ramener à un système linéaire libre non amorti. En éliminant les termes non linéaires,

de forçage et d'amortissement le système d'équations obtenu est réécrit sous cette forme matricielle :

$$MX'' + KX = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} \beta + 1 & -\beta \\ -\beta & \frac{3\beta^2}{\beta+1} - 2\beta + k_1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

M et K sont les matrices de masse et de raideur linéaire. Les fréquences propres couplées sont déterminées par le calcul des valeurs propres du système linéaire Eq.4.3. Ils ont les expressions suivantes :

$$f_1 = \frac{\omega_t}{2\pi} \sqrt{\frac{f_\alpha - \sqrt{f_\alpha^2 + 8\gamma(\beta + \beta k_1 + k_1)}}{2\gamma}}$$

$$f_2 = \frac{\omega_t}{2\pi} \sqrt{\frac{f_\alpha + \sqrt{f_\alpha^2 + 8\gamma(\beta + \beta k_1 + k_1)}}{2\gamma}} \quad (4.4)$$

où $f_\alpha = \frac{3\beta^2}{\beta+1} + \beta(\gamma - 2) + \gamma - 2k_1$. Ces fréquences sont valables pour le système bistable lorsque k_1 est inférieure à la valeur critique k_{1c} . Lorsque k_1 devient supérieur à k_{1c} , le comportement devient monostable. Les mêmes étapes de calcul réalisées précédemment sont appliquées sur le modèle de système monostable pour déterminer ces fréquences propres :

$$f_1 = \frac{\omega_t}{2\pi} \sqrt{\frac{\beta\gamma + \beta + \gamma + k_1 - \sqrt{(\beta\gamma + \beta + \gamma + k_1)^2 - 4\gamma(\beta + \beta k_1 + k_1)}}{2\gamma}}$$

$$f_2 = \frac{\omega_t}{2\pi} \sqrt{\frac{\beta\gamma + \beta + \gamma + k_1 + \sqrt{(\beta\gamma + \beta + \gamma + k_1)^2 - 4\gamma(\beta + \beta k_1 + k_1)}}{2\gamma}} \quad (4.5)$$

La figure Fig.4.3 montre la variation de ces deux fréquences en fonction de la raideur linéaire pour une membrane de configuration $h_m = 0,22$ mm et $R_m = 50$ cm. L'intervalle de raideur linéaire adimensionnée choisi varie entre $-0,45$ et $0,45$. Il nous permet de présenter la variation des fréquences propres du système couplé tube-membrane en mode monostable et bistable sur la même figure. La ligne rouge discontinue présente la valeur de raideur linéaire $k_{1c} = -\frac{\beta}{1+\beta}$ qui sépare la zone monostable de la zone bistable.

Chacune des fréquences propres f_1 et f_2 correspond à un des deux degrés de liberté de ce système. Par exemple, pour le comportement monostable à la valeur k_{1c} , la fréquence f_1 est égale à zéro. Elle correspond à la fréquence propre de la membrane et f_2 correspond à la fréquence propre du tube. Avec l'augmentation de la valeur de raideur linéaire, la fréquence propre de la membrane augmente alors que celle du tube suit l'asymptote horizontale $f = 82$ Hz. À une valeur de raideur linéaire donnée k_{11} , la fréquence propre de la membrane devient supérieure que celle de tube. La fréquence f_2 se rattachera à la membrane et f_1 au tube. Cet échange fréquentiel est observé aussi lors du comportement bistable lorsque la raideur linéaire atteint une certaine valeur k_{12} . Cet échange fréquentiel est observé à partir de la valeur de raideur linéaire telle que les droites normales aux courbes représentatives des fonctions f_1 et f_2 sont parallèles. L'équation de

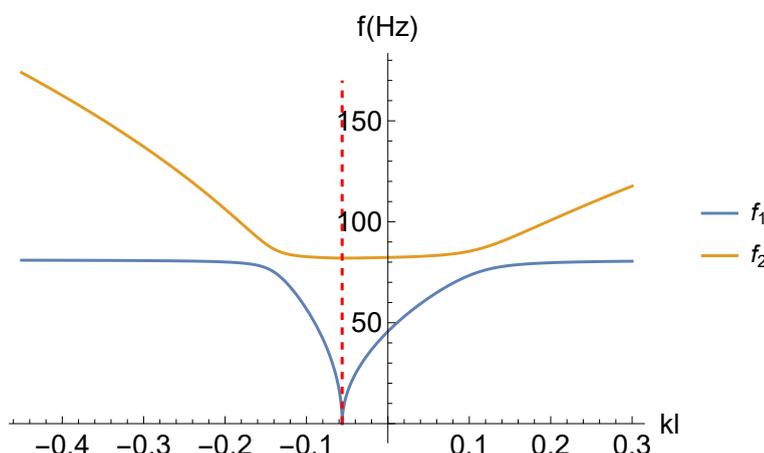


Figure 4.3: La variation des fréquences propres couplées f_1 et f_2 en fonction de la raideur linéaire de la membrane. La ligne rouge discontinue correspondant à la valeur de raideur linéaire critique k_{1c} qui sépare les zones monostable et bistable.

la droite normale à la courbe représentative de f_i au point d'abscisse k_1 est définie par : $N_i(K_L, k_1) = \frac{-1}{f_i'(k_1)} (K_L - k_1) + f_i(k_1)$ ($i = 1; 2$). La raideur linéaire K_L représente l'axe d'abscisse qui définit le domaine de définition de la fonction N_i , tandis que la raideur k_1 correspondante est le point à partir duquel nous déterminons l'équation de la droite normale. Pour que les deux droites normales soient parallèles, il faut que la distance qui les sépare soit la même. Ainsi, pour déterminer les valeurs de raideur linéaire k_{11} et k_{12} pour lesquelles la fréquence propre de la membrane devient supérieure à celle du tube, il est nécessaire de résoudre les équations $N_1(0, k_{11}) - N_2(0, k_{11}) = N_1(0, 1, k_{11}) - N_2(0, 1, k_{11})$ et $N_1(0, k_{12}) - N_2(0, k_{12}) = N_1(0, 1, k_{12}) - N_2(0, 1, k_{12})$. Le choix des valeurs $K_L = 0$ et $K_L = 0, 1$ utilisées pour la résolution est aléatoire, on peut choisir n'importe quelles valeurs.

La figure Fig.4.4 présente en bleu la variation de la fréquence propre du tube et en rouge celle de la membrane en fonction de la raideur linéaire. Les points de discontinuité de ces deux courbes présentent les raideurs linéaires k_{11} et k_{12} . Les normales aux courbes représentatives des fonctions f_1 et f_2 aux points d'abscisses k_{11} et k_{12} sont présentées par les droites parallèles en vert. La ligne rouge discontinue correspond à la valeur de raideur linéaire $k_{1c} = -\frac{\beta}{1+\beta}$ qui sépare la zone monostable et bistable.

4.2 Méthode d'optimisation

La courbe de crête d'un système mécanique est définie par la variation de l'amplitude maximale de la réponse fréquentielle en fonction de l'amplitude d'excitation. Elle représente un outil clé pour comprendre le comportement et la performance de notre système. Elle explore le comportement sur une plage de fréquences relativement large définie autour de la résonance du tube. Cette courbe donne une bonne indication sur l'efficacité d'amortissement de notre absorbeur non linéaire. À partir de la variation de cette courbe de crête en fonction de la raideur linéaire de la membrane, on va construire une méthode d'optimisation de notre NES.

La figure Fig.4.5 présente la superposition de deux courbes de crête du tube qui correspondent à différentes valeurs de raideur linéaire k_1 (bleu) et k_2 (orange). Cette

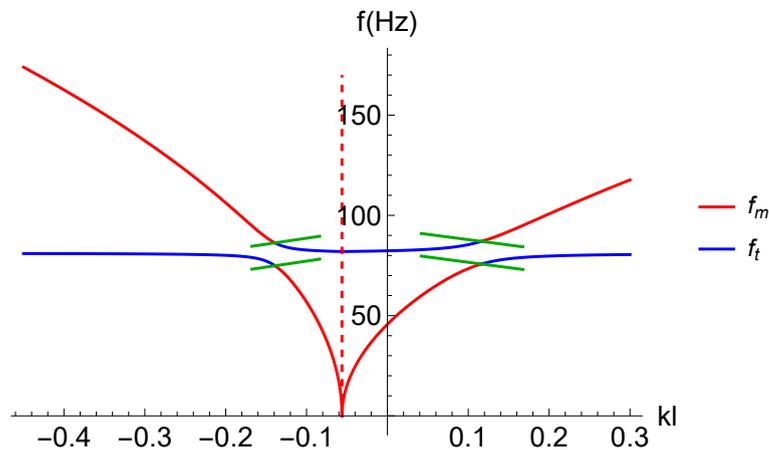


Figure 4.4: La variation des fréquences propres couplées du tube f_t (bleu) et de la membrane f_m (rouge) en fonction de la raideur linéaire de la membrane. La ligne rouge discontinue correspondant à la valeur de raideur linéaire critique k_{lc} qui sépare les zones monostable et bistable. Les droites parallèles vert, présentent les normales aux courbes représentatives des fonctions f_1 et f_2 , à partir de laquelle la fréquence propre de la membrane devient supérieure à celle du tube.

figure montre que l'efficacité d'amortissement de la membrane de raideur linéaire k_1 est plus importante. Ceci clairement traduit le fait que l'aire de courbe de crête de k_1 est plus petite que celle de k_2 . Avec plusieurs valeurs de raideur linéaire qui correspondent au comportement monostable et bistable on peut comparer l'efficacité d'amortissement des deux absorbeurs monostable et bistable.

La méthode d'optimisation consiste à minimiser l'aire donnée par la courbe de crête, en variant la valeur de raideur linéaire de la membrane. La plage de la raideur linéaire choisit $k_1 \in [-0,45; 0,3]$ (soit de -383 N.m^{-1} à 255 N.m^{-1}) comporte des valeurs positives et négatives qui permettent de présenter l'efficacité d'atténuation donnée par les deux types de NES (monostable et bistable) sur la même figure, donc de les comparer facilement.

Pour chaque valeur de raideur linéaire de la membrane, la courbe de crête est déterminée numériquement. Une plage d'amplitude et de fréquence d'excitation est choisie pour le calcul. La force adimensionnée d'excitation F varie de 0,01 à 7,5 avec 110 pas. La fréquence d'excitation varie autour de la fréquence de résonance de tube de 70 Hz à 92 Hz avec 110 pas de fréquence. Pour chaque couple amplitude-fréquence d'excitation, la réponse temporelle de déplacement de l'air en bout du tube est déterminée par l'utilisation de la fonction de résolution numérique d'équation différentielle "NDSolve" définie sur Mathematica. La réponse en fréquence a été ensuite calculée à l'aide de la valeur quadratique moyenne sur les deux dernières secondes du signal temporel. Pour chaque force d'excitation, l'amplitude de crête (maximale) est déterminée. Pour chaque valeur de raideur linéaire, la courbe de crête est construite et l'aire sous la courbe de crête est calculée. Lors du calcul de l'aire, on a normalisé la courbe de crête par l'amplitude d'excitation ($\frac{U_{\max}}{F}$ où U_{\max} présente l'amplitude de vibration maximale de tube) afin d'égaliser les effets donnés par l'augmentation de l'amplitude d'excitation. Dans la suite, nous allons présenter les courbes de crête non normalisées pour faciliter l'analyse.

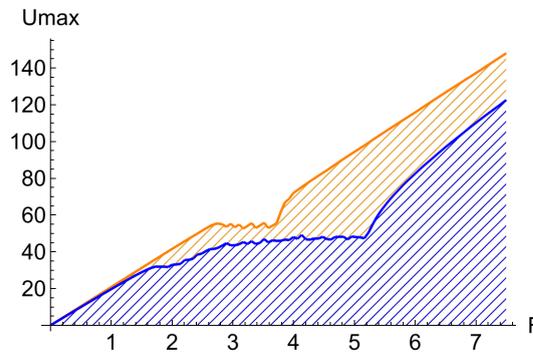


Figure 4.5: L'aire donnée par la courbe de crête pour deux différentes valeurs de raideur linéaire de membrane. Bleu : k_{11} , orange : k_{12} .

4.3 Variation de l'aire sous la courbe de crête en fonction de la raideur linéaire de la membrane

La figure Fig.4.6 montre la variation de l'aire sous la courbe de crête en fonction de la raideur linéaire de la membrane pour une membrane d'épaisseur $h_m = 0,22 * 10^{-3} m$ et de rayon $R_m = 5 * 10^{-2} m$. Les points bleus correspondent au comportement monostable et ceux en rouge sont liés au système bistable. La ligne rouge discontinue correspond à la valeur critique de raideur linéaire $k_{1c} = -\frac{\beta}{\beta+1}$ qui sépare ces deux différents types de comportement. Les deux lignes discontinues vertes délimitent la zone dans laquelle la fréquence de résonance de tube couplé est supérieure à celle de la membrane.

La variation de l'aire en fonction de k_1 montre clairement que l'atténuation est significativement plus importante par l'utilisation d'une membrane bistable. Soit dans la zone de comportement stable ou bistable, la courbe présente un plateau minimum étendu sur une large gamme de raideur linéaire. La robustesse de cet absorbeur non linéaire (bistable ou monostable) est apparue dans le fait qu'on n'a pas un minimum très marqué. La minimisation est observée sur une large gamme de raideur linéaire. Cette gamme présente le même ordre de grandeur pour les deux systèmes monostable et bistable, donc on a une même zone de stabilité. Le plateau minimum observé dans la zone monostable se trouve dans la zone où la fréquence propre du tube est supérieure à celle de la membrane. Alors que le plateau minimum bistable est observé lorsque la fréquence propre de la membrane est supérieure à celle du tube. Les sous-figures Fig.4.7(a) et Fig.4.7(b) présentent dans un digramme fréquence amplitude la superposition de la courbe caractéristique d'une membrane avec celle de tube (système linéaire) dans les différents cas. La sous figure de gauche correspond à une membrane monostable et de droite à une membrane bistable. Les courbes bleues continues présentent la courbe caractéristique de la membrane lorsque la fréquence propre du tube est supérieure à celle de la membrane et les courbes discontinues correspondent à une fréquence propre de membrane plus grande. Pour la membrane monostable, dans le cas où la fréquence propre de la membrane est supérieure à celle du tube, notre absorbeur reste toujours inactif. Dans ce cas, on n'a aucun point de fonctionnement. Pour cela, la courbe d'optimisation montre dans ce cas les valeurs d'aires les plus importantes, donc l'efficacité d'amortissement la moins importante. Pour la membrane bistable, l'intersection entre la courbe caractéristique de la membrane et du tube est toujours possible même lorsque la fréquence propre de la membrane est plus grande. Dans ce cas, deux points de fonctionnement sont présentés. Ceci peut expliquer

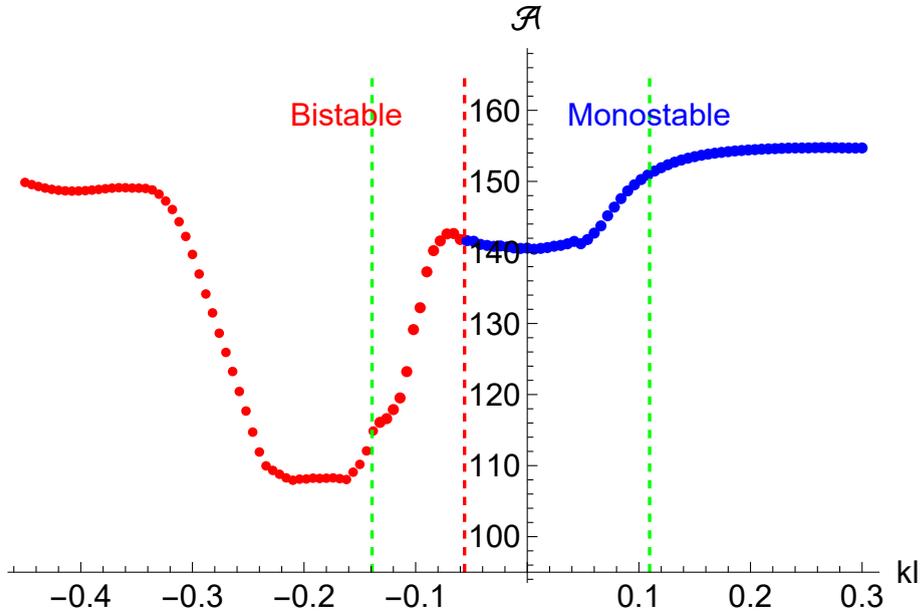


Figure 4.6: La variation de l'aire donnée par la courbe de crête en fonction de la raideur linéaire de la membrane pour une membrane d'épaisseur $h_m = 0,22 * 10^{-3}$ et de rayon $R_m = 5 * 10^{-2}$.

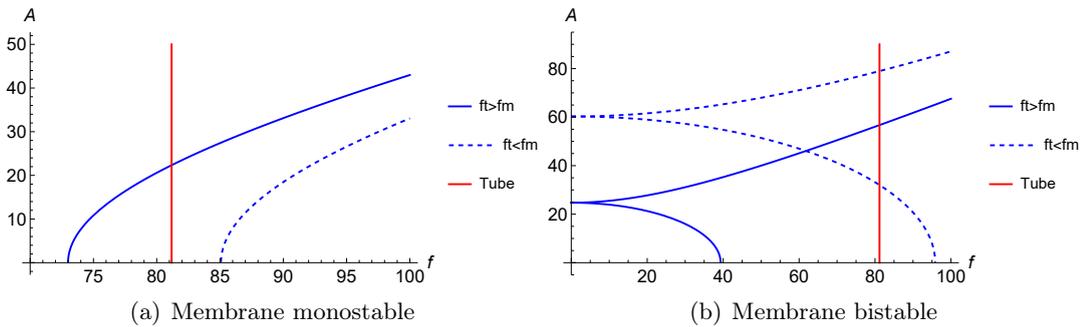


Figure 4.7: La superposition de la courbe caractéristique de la membrane avec celle du tube.

la présence du plateau minimum bistable dans cette zone.

4.4 Courbes de crête

4.4.1 Système monostable

La figure Fig.4.8 présente la superposition des courbes de crête pour différentes valeurs de raideur linéaire situées dans la zone de comportement monostable $k_1 > k_{1c} = -0,0561$. Avec l'augmentation de la valeur de raideur linéaire ou plus précisément la précontrainte appliquée sur la membrane, le plateau du PE devient plus bas et moins profond. Les courbes de crête correspondant aux cinq plus faibles raideurs linéaires présentent cinq différents points qui appartiennent au plateau minimum monostable. Ils ont le même niveau de minimisation même si le seuil d'activation et la largeur du plateau de PE ne sont pas similaires pour ses différentes valeurs de rigidité linéaire. En effet, dans cette zone, on a un compromis entre le niveau d'apparition et la profondeur du plateau de PE. Donc

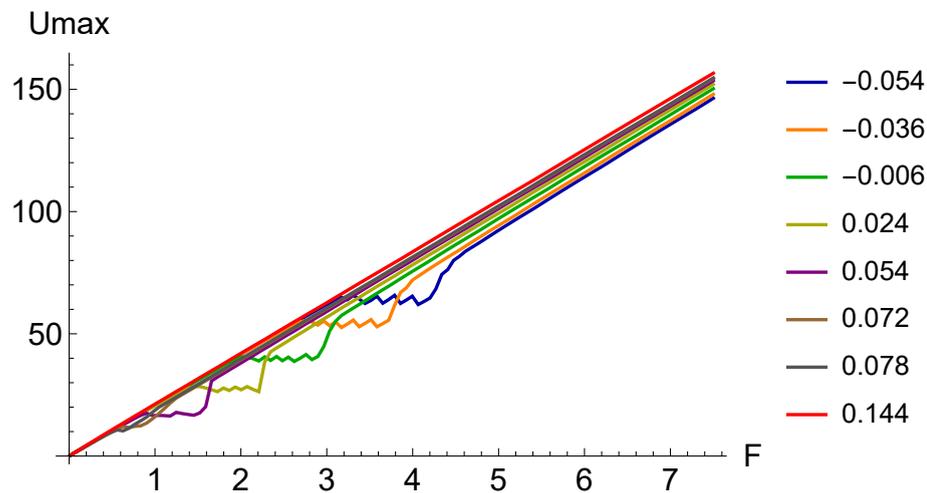


Figure 4.8: La superposition des courbes de crête pour différentes valeurs de raideur linéaire dans la zone de comportement monostable.

le choix de la précontrainte appliquée sur la membrane dépend du cas d'application. Une faible valeur de raideur linéaire est utilisée pour une application de forte amplitude sonores et l'inverse. Lorsqu'on augmente plus la valeur de raideur linéaire et on dépasse le plateau minimum monostable, la profondeur du plateau de pompage devient très étroite. Malgré le faible niveau d'activation de PE, on observe pour ces valeurs de raideur linéaire une efficacité moins importante. Le faible niveau d'activation de PE ne peut pas compenser le petit plateau de pompage observé dans ce cas. Si on augmente plus la précontrainte, la fréquence de la membrane couplée devient supérieure au tube. Dans ce cas, la membrane devient inactive, on supprime le PE et on observe une courbe de crête linéaire. Pour cela, la variation de l'aire devient constante dans cette plage.

4.4.2 Système bistable

Pour les raideurs linéaires inférieures à la valeur critique k_{lc} , la raideur linéaire apparente devient négative et le comportement du système devient bistable. La figure Fig.4.9 présente la superposition de plusieurs courbes de crête pour différentes valeurs de raideur linéaire qui varie de $[-0,03, -0,12]$. Les trois courbes de crête bleues correspondent à des valeurs de raideur linéaire supérieures à k_{lc} . Pour ces valeurs, le système présente un comportement monostable. Les six autres courbes de crête correspondent à une raideur linéaire apparente inférieure à zéro (ou bien $k_1 < k_{lc}$). Pour les deux premières valeurs de raideur linéaire qui sont inférieures à la valeur critique k_{lc} , les courbes de crête orange et verte montrent une continuité du comportement. Le plateau de pompage observé pour le système bistable suit la variation du plateau monostable. Avec la diminution de la raideur linéaire, on a remarqué que les courbes de crête présentent deux plateaux d'atténuation. Le plus haut suit la variation du plateau monostable et le plus bas correspondant au nouveau plateau lié au comportement bistable du système. Pour la raideur linéaire $k_1 = -0,12$, seulement le plateau bas lié au comportement bistable est observé. Le système se stabilise sur le comportement bistable. Pour qu'on passe d'un comportement monostable (les courbes bleues) et un comportement bistable (la courbe moutarde) on passe par une zone transitoire où les courbes de crête présentent deux plateaux d'atténuation. On a ici un passage graduel.

La figure Fig.4.10 présente la superposition de trois différentes courbes caractéristiques

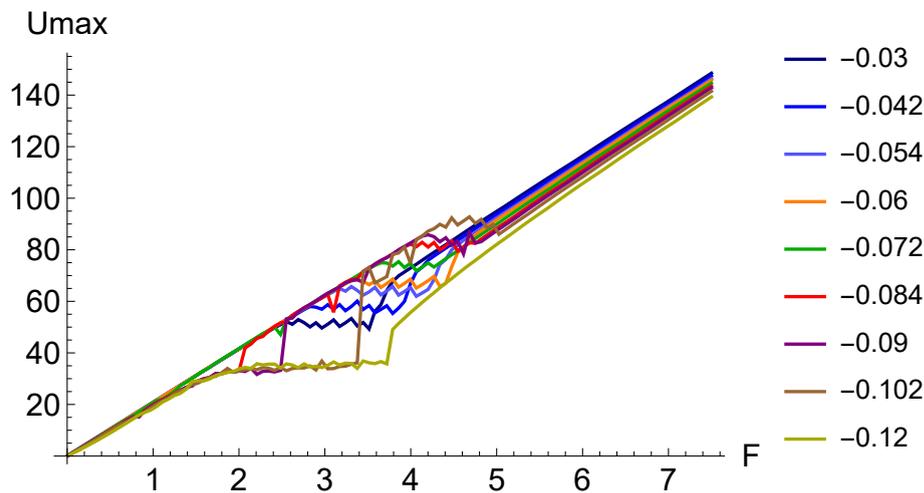


Figure 4.9: La superposition de plusieurs courbes de crête pour différentes valeurs de raideur linéaire qui varie de $[-0,03, -0,12]$

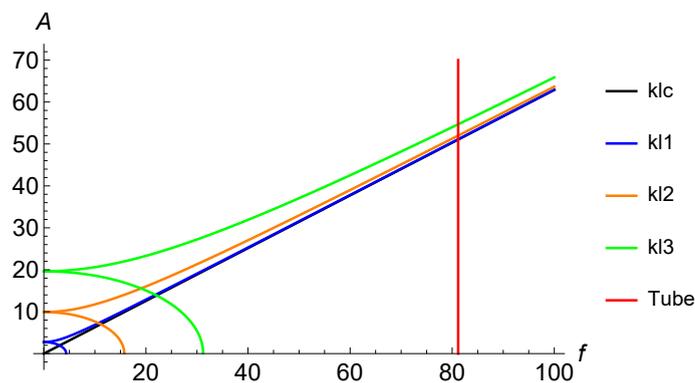


Figure 4.10: La superposition de la courbe caractéristique d'une membrane bistable pour trois différentes raideurs linéaires, avec la courbe caractéristique de tube et la courbe caractéristique d'une membrane purement cubique.

de membrane bistable (bleue, orange et verte) avec la courbe caractéristique de tube (rouge) et la courbe caractéristique d'une membrane purement cubique (noire) où la valeur de raideur linéaire apparente est égale à zéro. Pour la courbe bleue, la raideur linéaire k_{11} est très proche de la valeur k_{1c} . L'effet de ramollissement de la membrane bistable est négligé dans ce cas. La courbe caractéristique se superpose avec la courbe noire de la membrane purement cubique. Ce qui explique que le système suit le comportement monostable pour les deux premières valeurs de raideur linéaire qui sont inférieures à la valeur critique k_{1c} (courbe orange et verte de la Fig.4.9). Avec la diminution de la valeur de raideur linéaire, on s'éloigne de la valeur critique k_{1c} . La courbe caractéristique de la membrane bistable (pour k_{12}) s'éloigne de la courbe noire. Le système est influencé par les deux types de comportement bistable et monostable. Ce qui donne lieu à deux différents plateaux d'atténuation. Lorsque la raideur diminue plus (k_{13}) le système se stabilise sur le comportement bistable.

Dans ce paragraphe, le système bistable est étudié après la stabilisation de son

comportement. Dans la figure Fig.4.11 on a présenté la superposition des différentes courbes de crête qui appartiennent à la zone bistable sans tenir compte de la zone transitoire décrite ci-dessus. La lecture première de cette figure montre qu'avec la diminution de la raideur linéaire (ou l'augmentation de flambement de la membrane), le plateau de PE devient de plus en plus élevé. Les courbes de crêtes présentées dans cette figure correspondent à des valeurs de raideur linéaire régulièrement espacées alors que la variation du niveau de plateau du PE n'est pas uniforme. Cette variation est plus sensible pour les faibles valeurs de raideur linéaire. Pour les courbes de crête orange, verte et mauve, le plateau de PE se trouve presque à la même amplitude de déplacement. Ces courbes correspondent aux raideurs linéaires $-0,156$, $-0,186$ et $-0,216$ qui appartiennent au plateau minimal bistable. Ces trois valeurs de raideur linéaire présentent le même degré d'atténuation même si les plateaux du PE se trouvent presque à la même amplitude de déplacement avec des profondeurs différentes. Ces trois valeurs de raideurs linéaires correspondent à une fréquence propre de membrane qui est supérieure à celle du tube. La figure Fig.4.12 présente la superposition des trois courbes caractéristiques de membrane avec celle du tube, correspondantes à ces raideurs. Dans la figure Fig.4.13 on a présenté clairement ces courbes crêtes. Lorsque la fréquence propre de la membrane devient plus grande que celle du tube, la courbe caractéristique de la membrane présente deux points d'intersection avec celle du tube. Le premier point de fonctionnement est introduit par le phénomène ramollissant de la membrane. Ce point présente une amplitude de déplacement de la membrane relativement faible (si on la compare avec le deuxième point d'intersection) donc correspondant à des amplitudes d'excitations plus faibles. Les courbes de crêtes présentées dans la Fig.4.13 montrent la présence d'une zone d'atténuation (où un autre plateau d'atténuation) observée à faibles amplitudes d'excitation à part le plateau du PE. La présence de deux points de fonctionnement induit l'observation de deux différents plateaux d'atténuation. Le plateau observé à faible amplitude d'excitation est liée au premier point d'intersection. Avec la diminution de la raideur linéaire, l'amplitude de déplacement correspondant au premier point de fonctionnement devient plus importante. La zone d'atténuation apparaît donc à une amplitude d'excitation plus importante. La présence de cette nouvelle zone d'atténuation équilibre le degré d'atténuation observé dans le plateau minimum.

Lorsqu'on diminue encore la valeur de raideur linéaire, la courbe de crête montre seulement le plateau du PE alors que la zone d'atténuation de ramollissement décrite ci-dessus n'aura pas lieu (voir par exemple la courbe de crête pour $k_1 = -0,245$ de la Fig.4.11). Donc le système quitte le plateau minimum bistable.

4.4.3 Comparaison entre les systèmes monostable et bistable

La figure Fig.4.14 montre la superposition d'une courbe de crête pour une membrane bistable (présentée en rouge) avec plusieurs courbes de crête qui appartiennent au plateau minimum monostable. Cette figure montre qu'une membrane bistable peut améliorer significativement le comportement du système. L'atténuation offerte par une membrane bistable est plus importante que celle donnée par les différentes membranes monostables optimales.

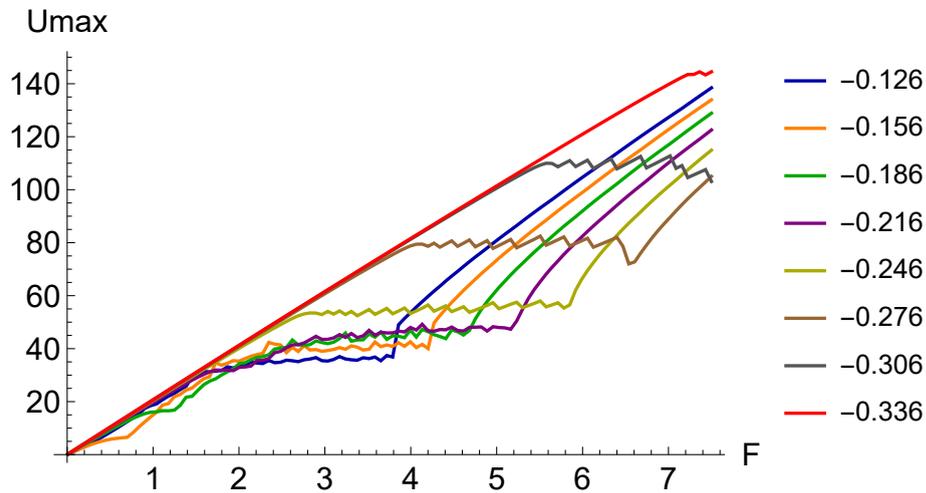


Figure 4.11: La superposition des différentes courbes de crête qui appartiennent à la zone bistable sans tenir compte de la présence de la zone transitoire.

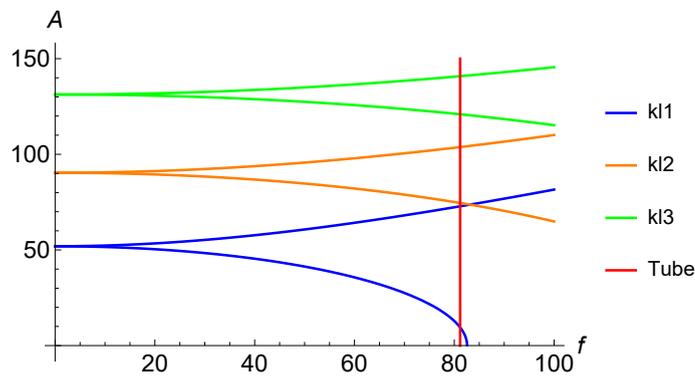


Figure 4.12: La superposition de la courbe caractéristique d'une membrane bistable pour trois différentes raideurs linéaires, avec la courbe caractéristique de tube dans le cas où la fréquence propre de la membrane est supérieure à celle du tube.

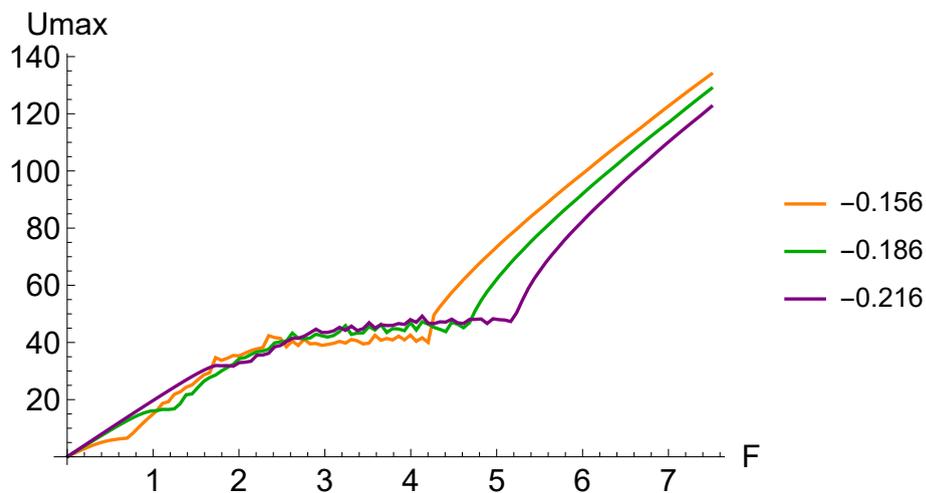


Figure 4.13: La superposition des différentes courbes de crête qui appartiennent au plateau minimal bistable.

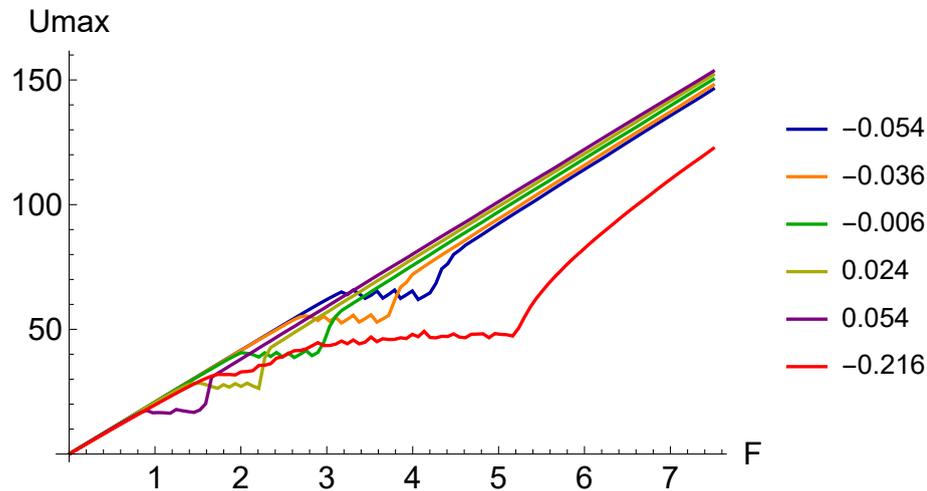


Figure 4.14: La superposition d'une courbe de crête pour une membrane bistable (présentée en rouge) avec plusieurs courbes de crête qui appartiennent au plateau minimum monostable.

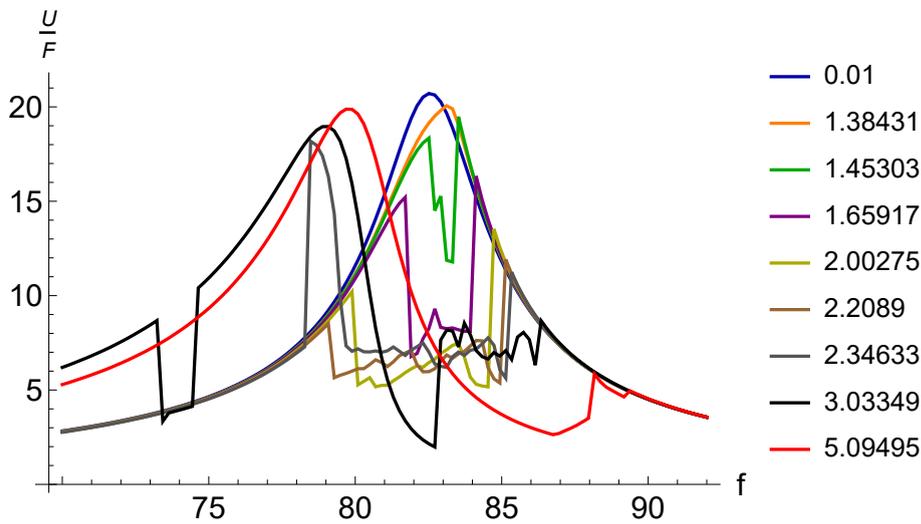
4.5 Réponse fréquentielle

Dans cette partie, on va présenter les résultats du calcul fréquentiel pour différentes valeurs de raideurs linéaires. Les figures Fig.4.15 Fig.4.17 Fig.4.19 Fig.4.20 Fig.4.21 Fig.4.23 et Fig.4.24 présentent les résultats de ce calcul pour les valeurs de raideurs linéaires suivantes : $k_1 = 0,024$, $k_1 = -0,216$, $k_1 = -0,156$, $k_1 = -0,168$, $k_1 = -0,186$, $k_1 = -0,246$ et $k_1 = -0,276$. Chacune des figures présente trois sous-figures.

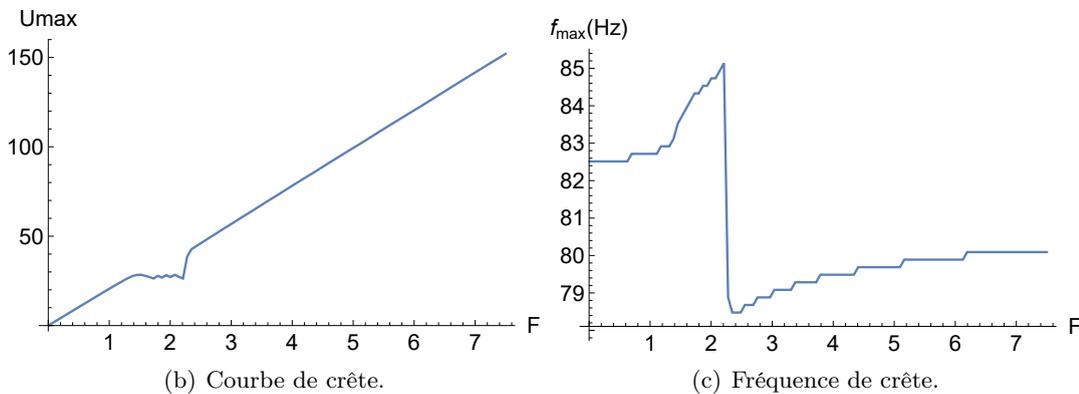
- En haut les réponses fréquentielles du système sont présentées pour différentes amplitudes d'excitation. La réponse de déplacement adimensionné de l'air en bout du tube est divisée par la force d'excitation correspondante F pour pouvoir superposer les différentes courbes.
- En bas, à gauche, la courbe de crête qui montre la variation de l'amplitude de crête en fonction de la force d'excitation est présentée.
- En bas, à droite, la variation de la fréquence de crête f_{\max} en fonction de l'amplitude d'excitation est présentée. La fréquence de crête est définie par la fréquence correspondant à l'amplitude de crête qui présente l'amplitude maximale de déplacement de l'air en bout du tube.

4.5.1 Système monostable

Pour la valeur de raideur linéaire $k_1 = 0,024$, le comportement du système est monostable. Les quatre principaux types de réponses fréquentielles observés dans les systèmes non linéaires usuels sont présentés dans la figure Fig.4.15(a). À faible niveau d'excitation, la réponse fréquentielle présente un comportement linéaire de forme typiquement lorentzienne. Avec l'augmentation du niveau d'excitation, l'effet de la non-linéarité de raidissement de la membrane est présenté. On a remarqué la présence d'une petite déviation du pic de résonance vers la droite. Lorsque l'amplitude d'excitation atteint le seuil d'activation de PE, le phénomène d'écrêtage de pic de résonance est observé. À une amplitude d'excitation plus élevée, un nouveau pic de résonance décalé vers les



(a) Superposition des réponses fréquentielles pour différentes amplitudes d'excitation.



(b) Courbe de crête.

(c) Fréquence de crête.

Figure 4.15: Le résultat du calcul fréquentiel pour la raideur linéaire $k_1 = 0,024$ (monostable).

basces fréquences est présenté, ce qui montre la désactivation du PE. La variation de la fréquence de crête en fonction de la force d'excitation présentée dans la figure Fig.4.15(c) indique clairement la limite de chaque type de comportement. Pour les faibles forces d'excitation où le comportement est linéaire, la fréquence de crête présente une variation constante. Autour de la force d'excitation $F = 0,62$, la fréquence de crête présente une petite augmentation induite par l'effet de la non-linéarité de raidissement de la membrane. Cette zone de faible variation correspond à la zone du comportement non linéaire observé avant le PE. Dans la troisième zone, la variation de la fréquence de crête présente une grande augmentation. Cette zone se superpose bien avec le plateau de PE présenté dans la figure de la courbe de crête Fig.4.15(b). Ici, on peut noter que le phénomène du PE est accompagné par le comportement de raidissement de la membrane. La présence du soudain saut de la fréquence de crête vers le bas montre l'apparition du nouveau pic de résonance qui est décalé vers les basses fréquences.

Pour la valeur de raideur linéaire $k_1 = 0,144$, la fréquence propre de la membrane devient supérieure à celle du tube. Dans ce cas, la surface de réponse fréquentielle de déplacement de l'air en bout du tube en fonction de la force et la fréquence d'excitation (Fig.4.16) présente seulement le comportement linéaire. Cela s'explique par l'absence d'un

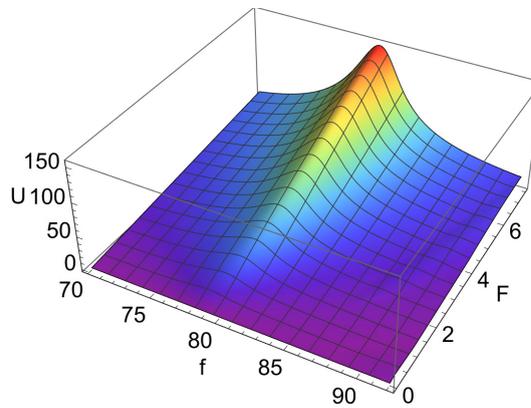


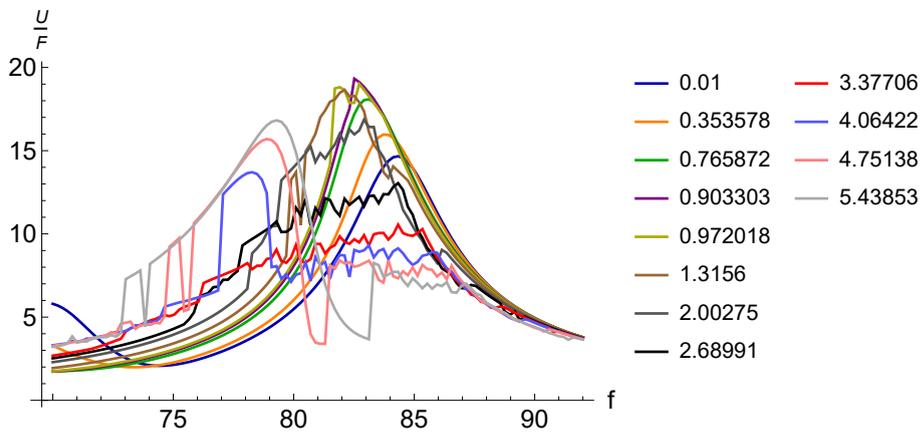
Figure 4.16: La surface de réponse fréquentielle de déplacement de l'air en bout du tube en fonction de la force et la fréquence d'excitation pour la raideur linéaire $k_1 = 0,144$.

point d'intersection entre la courbe caractéristique de la membrane monostable et le tube quand la fréquence de la membrane est supérieure à celle du tube. (voir Fig.4.7(a)). La membrane reste inactive. Le comportement purement linéaire observé dans ce cas explique la présence de la courbe de crête linéaire dans la figure Fig.4.8.

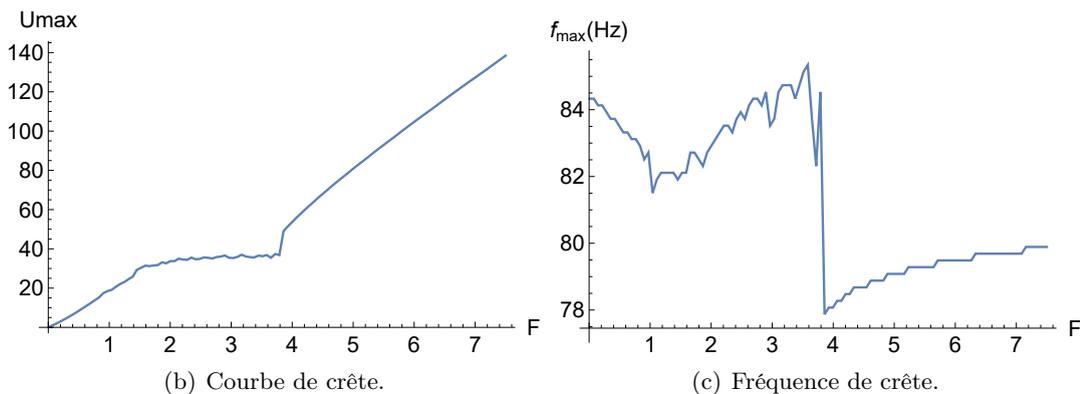
4.5.2 Système bistable

Dans ce paragraphe, nous étudions le comportement fréquentiel du système bistable après avoir atteint sa stabilité. Les réponses fréquentielles du système bistable observées dans la zone transitoire ne sont pas étudiées.

Pour la raideur linéaire $k_1 = -0,126$, le système présente un comportement bistable dont la fréquence propre couplée de tube est supérieure à celle de la membrane. Dans ce cas, la figure des réponses fréquentielles Fig.4.17(a) présente les quatre principaux types de réponse fréquentielle présentés précédemment pour le système monostable. On observe un comportement linéaire à faible amplitude d'excitation puis un comportement non linéaire défini par la déviation du pic de résonance. Ensuite, on observe le phénomène d'écristage du pic de résonance. Et, à des amplitudes d'excitation plus élevées, on a le nouveau pic de résonance qui se décale vers les basses fréquences. Par rapport au système monostable, on remarque que le comportement linéaire observé à faible niveau d'excitation est influencé par le caractère ramollissant de la membrane bistable. On a des réponses fréquentielles linéaires typiques d'un système à un degré de liberté et donc de forme lorentzienne, dont la fréquence du pic de résonance se décale vers les basses fréquences. Lors du régime linéaire, avec l'augmentation de la force d'excitation, la fréquence du pic de résonance se décale vers les basses fréquences en gardant la même forme lorentzienne de la réponse fréquentielle. Contrairement au système monostable, le comportement non linéaire observé avant le PE présente une déviation du pic de résonance vers les basses fréquences. La figure Fig.4.17(c) traduit clairement ce comportement. Pour un faible niveau d'excitation, la variation de la fréquence de crête présente une décroissance. Au contraire de ce qu'il est montré dans la figure Fig.4.15(c) du système monostable, la fréquence de crête montre une variation constante (liée au comportement linéaire) suivie par une petite augmentation (induite par la présence de la non-linéarité). Pour le système bistable, les comportements linéaire et non linéaire (observés avant le pompage) sont accompagnés par la diminution de la fréquence de crête. Et comme il est observé dans le cas monostable, le phénomène du PE est accompagné



(a) Superposition des réponses fréquentielles pour différentes amplitudes d'excitation.



(b) Courbe de crête.

(c) Fréquence de crête.

Figure 4.17: Le résultat du calcul fréquentiel pour la raideur linéaire $k_1 = -0,126$ (bistable).

par une augmentation de fréquence de crête (l'effet de la non-linéarité de durcissement). Le soudain saut vers le bas montre la présence du nouveau pic de résonance qui se trouve décalé vers les basses fréquences.

Aussi, il faut noter qu'à partir des courbes de réponse fréquentielle, on a remarqué que la bande fréquentielle du PE est plus large pour ce système bistable ($k_1 = -0,126$). Ceci est simplement observé par la présentation de la surface de réponse fréquentielle pour ces deux valeurs de raideur linéaire ($k_1 = 0,024$: Fig.4.18(a) et $k_1 = -0,126$: Fig.4.18(b)).

On se propose d'étudier dans ce qui suit le comportement fréquentiel du système bistable optimal. Les réponses fréquentielles pour les trois valeurs de raideur linéaire $k_1 = -0,156, k_1 = -0,168$ et $k_1 = -0,186$ sont calculées. Ces valeurs appartiennent au plateau minimum bistable. Les résultats du calcul sont présentés respectivement dans les figures Fig.4.19, Fig.4.20 et Fig.4.21. Pour ces valeurs de raideur linéaire, la fréquence propre de la membrane est supérieure à celle de tube. Contrairement au système monostable qui présente un comportement purement linéaire lorsque la fréquence propre de la membrane est supérieure à celle du tube (voir Fig.4.16) la première lecture des réponses fréquentielles du système bistable (Fig.4.19(a), Fig.4.20(a) et Fig.4.21(a)) montre la présence des principaux types de comportement observé dans les systèmes non linéaires usuels (comportement non linéaire avant pompage, PE puis comportement linéaire avec un nouveau pic de résonance). Ce qui montre que la membrane est activée dans ce cas. La Fig.4.7(b) montre que l'intersection entre la courbe caractéristique d'une membrane

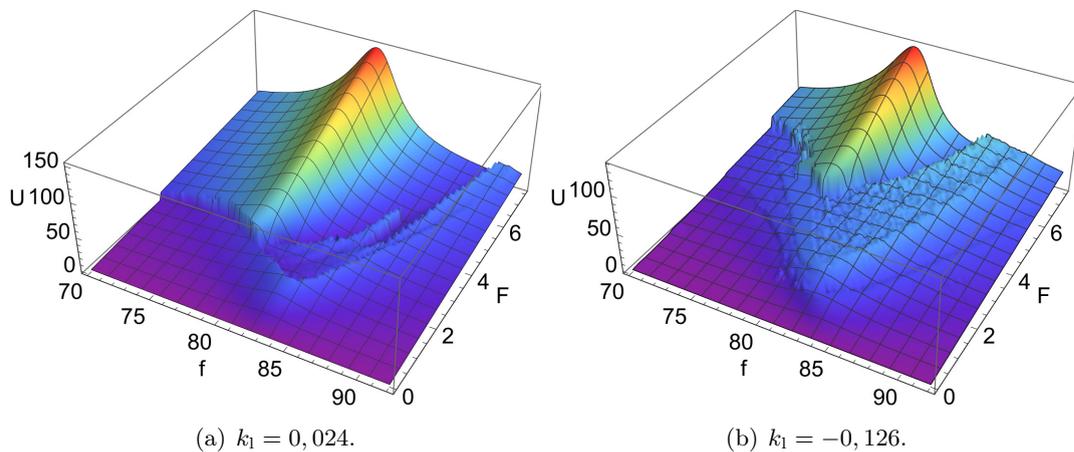


Figure 4.18: La surface de réponse fréquentielle de déplacement de l'air en bout du tube en fonction de la force et la fréquence d'excitation pour les deux valeurs de raideur linéaire $k_1 = 0,024$ et $k_1 = -0,126$.

bistable et du tube est toujours possible quelle que soit la valeur de la fréquence propre de la membrane.

Comme il est montré sur la figure Fig.4.7(b), lorsque la fréquence propre de la membrane est supérieure à celle du tube, on observe deux points de fonctionnement. En effet, avec l'injection de l'énergie dans le système, la membrane suivait le comportement adoucissant jusqu'à ce qu'elle atteigne le premier point de fonctionnement. En ce point, les deux oscillateurs entrent en résonance et le transfert d'énergie entre les deux sera possible. En ce point d'intersection, le niveau d'énergie injecté dans le système permet à la membrane de continuer à se déplacer sur la première branche adoucissante jusqu'à un instant où la fréquence correspondant au mouvement devienne nulle. À cet instant, la membrane se déplace sur son deuxième mode de fonctionnement. L'augmentation de l'amplitude de vibration de la membrane est accompagnée ici par l'augmentation de la fréquence. La membrane suit le comportement raidissant qui se rapproche asymptotiquement à celui de la membrane purement cubique. Lorsqu'elle atteint le deuxième point de fonctionnement, elle rentre de nouveau en résonance avec le tube.

Cette explication traduit ce qu'on a observé dans la Fig.4.19(a). Pour la force d'excitation $F = 0,01$, le pic de résonance du tube se trouve autour de la fréquence $f = 78$ Hz. Avec l'augmentation de la force d'excitation, ce pic décale vers les basses fréquences. La figure Fig.4.19(c) montre une décroissance dans la variation de la fréquence de crête. Le système est influencé par le comportement ramollissant de la membrane bistable. À la force d'excitation $F = 0,766$, la fréquence de crête présente une soudaine augmentation à la fréquence $f = 85$ Hz. Pour cette force d'excitation, la localisation du pic de résonance du tube subit des modifications significatives. La membrane atteint ici son premier point de fonctionnement où les deux oscillateurs entrent en résonance. Après avoir dépassé le premier point de fonctionnement, le système suivait encore le comportement ramollissant. La variation de la fréquence de crête (Fig.4.19(c)) présente une autre diminution à partir de la fréquence $f = 85$ Hz. En augmentant encore l'amplitude d'excitation, la membrane se déplace sur le deuxième mode de fonctionnement. Le phénomène d'écrtage du pic de résonance est observé. La variation de la fréquence de

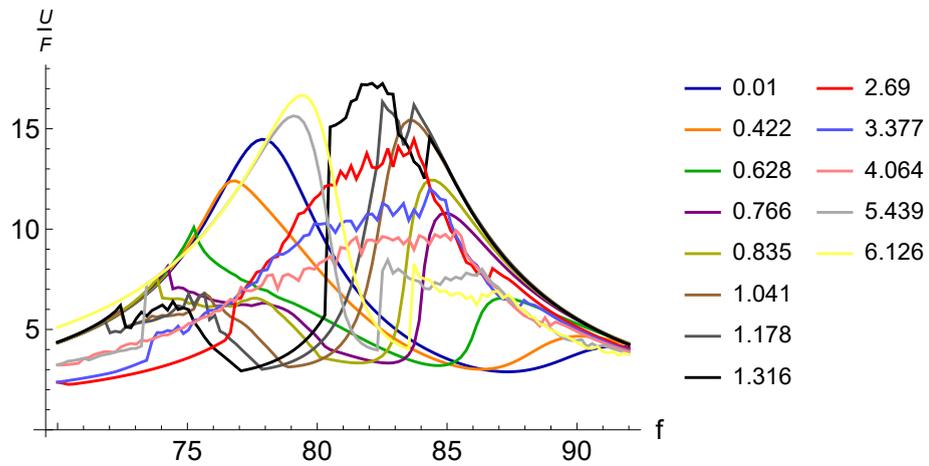
crête montre que ce phénomène est accompagné par le comportement raidissant. À des amplitudes d'excitation plus élevées, le nouveau pic décalé vers les basses fréquences est observé.

D'après la figure Fig.4.12 représentative des courbes caractéristiques d'une membrane bistable de fréquence propre supérieure à celle du tube tracées pour trois différentes raideurs linéaires, on remarque qu'en diminuant la valeur de la raideur linéaire, la fréquence propre de la membrane augmente. Le premier point d'intersection avec la caractéristique du tube est obtenu dans ce cas pour des amplitudes de vibration plus grandes. Par conséquent, pour l'atteindre, il nous faut injecter dans le système une quantité d'énergie plus importante, nécessitant des forces d'excitation plus élevées. Les courbes de variation de la fréquence de crête présentées dans les figures Fig.4.19(c), Fig.4.20(c) et Fig.4.21(b) valident ce raisonnement. On a remarqué que la force d'excitation correspondant au soudain saut vers le haut devient de plus en plus importante en diminuant la valeur de la raideur linéaire. Par le décalage du premier point d'intersection vers les amplitudes de vibration les plus importantes, l'effet de la non-linéarité de ramollissement de la membrane sur le comportement de tube devient moins important. Le tube suit simplement sa propre caractéristique verticale. Ceci explique la présence d'une variation constante de la fréquence de crête au plus faible niveau d'excitation dans les figures Fig.4.20(c) et Fig.4.21(b). Puisque le point de fonctionnement se décale vers les fortes amplitudes, la zone de variation constante devient plus large.

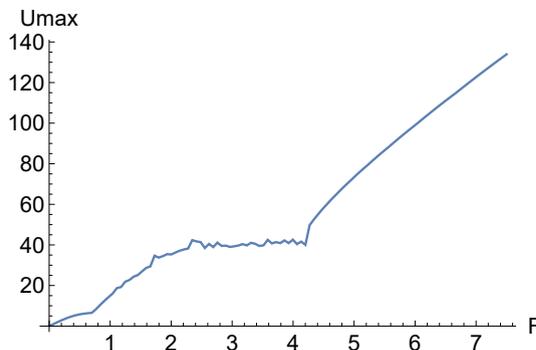
On remarque aussi, sur cette figure (Fig.4.12), qu'avec la diminution de la valeur de la raideur linéaire, la distance qui sépare les deux points de fonctionnement devient plus petite. Donc le passage du premier mode vers le deuxième mode de fonctionnement devient plus rapide. Pour cela, les figures de la variation de la fréquence de crête montrent que la zone du comportement ramollissant observé après l'arrivée au premier point de fonctionnement devient plus étroite. Pour la raideur linéaire $k_1 = -0,186$, la figure Fig.4.21(b) montre la disparition de cette zone du comportement ramollissant. Puisque la distance qui sépare les deux points de fonctionnement devient plus petite, le passage devient plus rapide. Dès qu'on atteint le premier point de fonctionnement, on se trouve directement sur le deuxième point. Donc, après le soudain saut de la fréquence de crête, le comportement devient raidissant.

À cause de la présence du premier point de fonctionnement qui est lié à la caractéristique ramollissante de la membrane bistable, à part le phénomène d'écrêtage observé au fort niveau d'excitation, on a remarqué la présence de ce phénomène au faible niveau d'excitation. Par exemple, pour la raideur linéaire $k_1 = -0,156$ aux forces d'excitation $F = 1,041$, $F = 1,178$ et $F = 1,316$ on observe un petit plateau d'atténuation autour de la fréquence d'excitation $f = 73$ Hz. La réponse temporelle du système dans cette zone est présentée dans la figure Fig.4.22. Pour les deux différentes forces d'excitation, le système présente le régime fortement modulé avec l'effet de la non-linéarité de ramollissement dont les oscillateurs vibrent par rapport à la position d'équilibre stable. La présence de cette zone d'atténuation explique l'apparition du petit plateau d'atténuation observé à faible amplitude d'excitation dans la courbe de crête Fig.4.19(a).

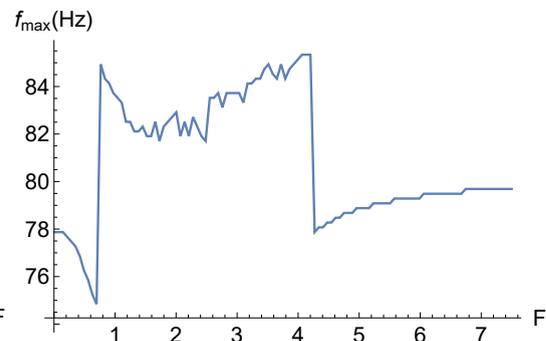
Lorsqu'on diminue plus la valeur de raideur linéaire, on quitte la zone optimale du système bistable. Les résultats des calculs pour les deux valeurs de raideur linéaire $k_1 = -0,246$ et $k_1 = -0,276$ sont présentés respectivement dans les figures Fig.4.23 et Fig.4.24.



(a) Superposition des réponses fréquentielles pour différentes amplitudes d'excitation.

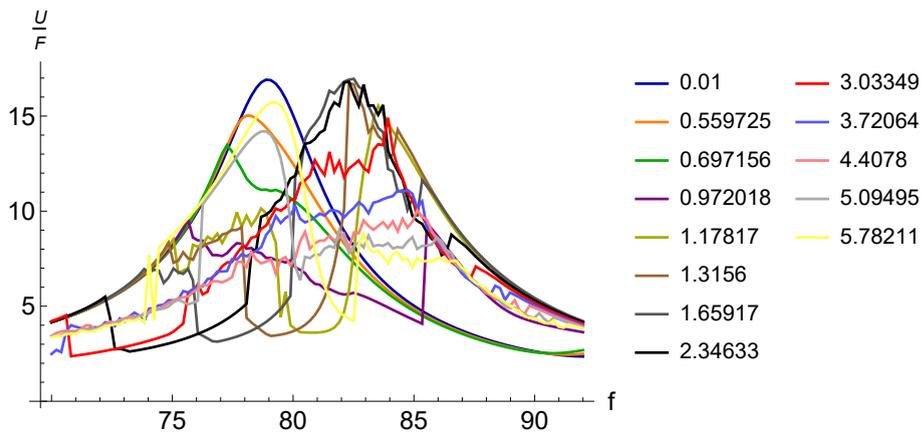


(b) Courbe de crête.

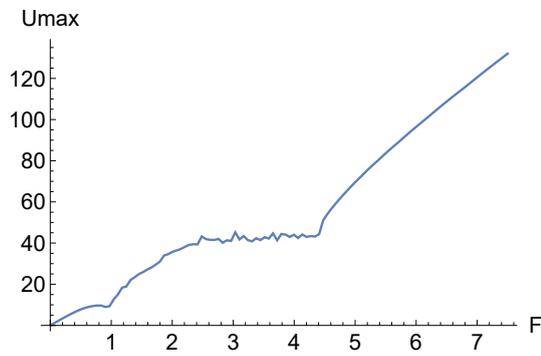


(c) Fréquence de crête.

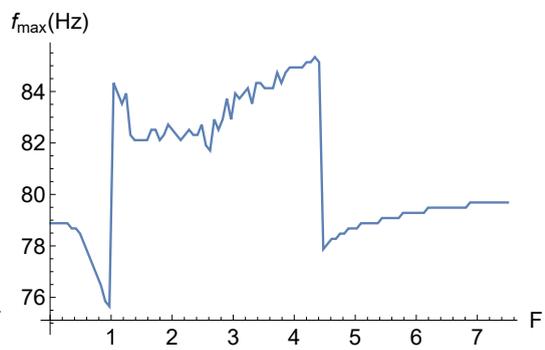
Figure 4.19: Le résultat du calcul fréquentiel pour la raideur linéaire $k_1 = -0,156$.



(a) Superposition des réponses fréquentielles pour différentes amplitudes d'excitation.

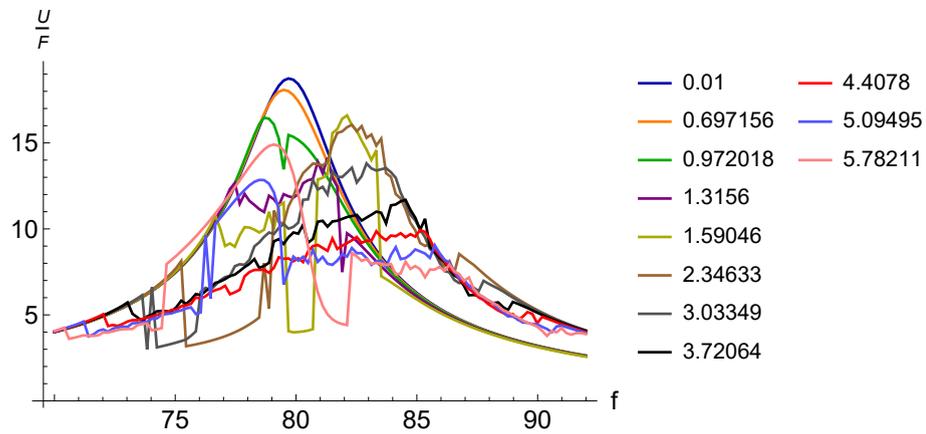


(b) Courbe de crête.

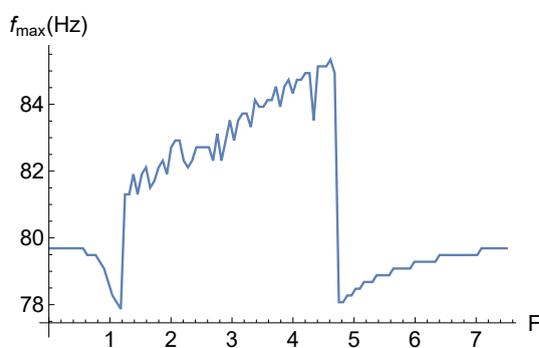


(c) Fréquence de crête.

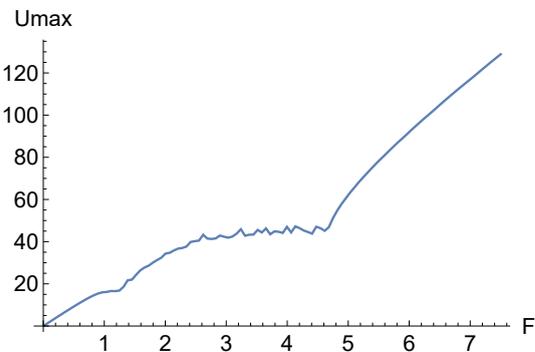
Figure 4.20: Le résultat du calcul fréquentiel pour la raideur linéaire $k_1 = -0,168$.



(a) Superposition des réponses fréquentielles pour différentes amplitudes d'excitation.



(b) Variation de la fréquence de crête en fonction de l'amplitude d'excitation.



(c) Courbe de crête.

Figure 4.21: Le résultat du calcul fréquentiel pour la raideur linéaire $k_1 = -0,186$.

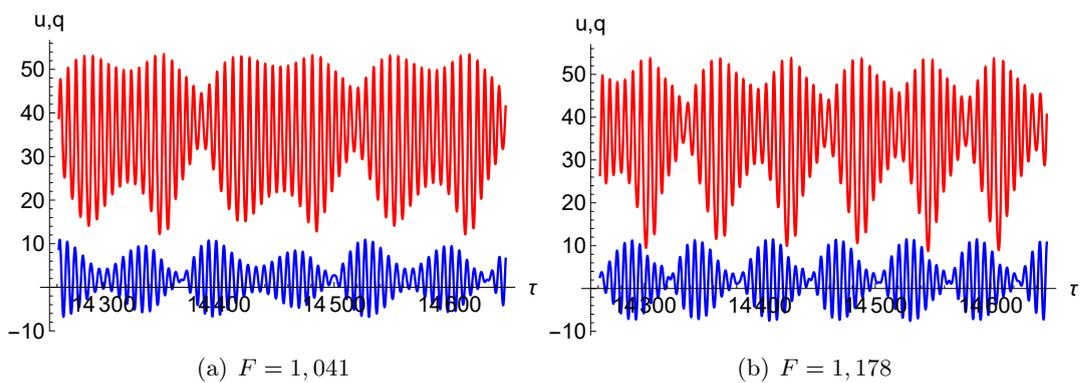


Figure 4.22: La réponse temporelle du système pour $k_1 = -0,156$ à la fréquence d'excitation $f = 73$ Hz pour les deux forces d'excitation $F = 1,041$ et $F = 1,178$. Bleu : déplacement de l'air en bout du tube, rouge : déplacement au centre de la membrane.

Pour ces valeurs de raideurs linéaires, les courbes de la variation de la fréquence de crête présentent une large zone de valeur constante à faible niveau d'excitation. Cette zone est plus large pour la raideur linéaire la plus petite $k_1 = -0,276$. On remarque l'absence de l'effet de la non-linéarité de ramollissement observée pour les valeurs de raideurs linéaires les plus importantes (voir Fig.4.19(c), Fig.4.20(c) et Fig.4.21(b)). Ceci est expliqué par la très forte amplitude de déplacement correspondant au premier point d'intersection entre les courbes caractéristiques de tube et de la membrane bistable. Pour ces valeurs de raideurs linéaires, le phénomène du PE n'est pas dû à l'effet de la non-linéarité de durcissement mais plutôt à l'effet de la non-linéarité de ramollissement. En effet, avec la forte diminution de la valeur de raideur linéaire, la distance qui sépare les deux points de fonctionnement devient très petite. A la limite, les deux points de fonctionnement et l'effet de la non-linéarité de ramollissement devient prédominante. Dans la figure Fig.4.25 on a présenté la réponse temporelle du système pour $k_1 = -0,276$ à la fréquence et la force d'excitation $f = 80, 2$ Hz et $F = 4.4$. Cette réponse présente un exemple de réponse temporelle qui appartient à la zone du PE pour la raideur linéaire $k_1 = -0,276$. À gauche on a le déplacement de l'air en bout du tube et à droite on a le déplacement au centre de la membrane. Ces sous-figures montrent la combinaison de trois différents régimes de fonctionnement.

- Les oscillations chaotiques entre les deux positions d'équilibre (chaotic interwell oscillations [71])
- La réponse fortement modulée avec la capture de résonance 1:1
- Les oscillations autour d'une des positions d'équilibre

Le dernier mécanisme explique l'effet de ramollissement observé lors du PE.

Pour ces faibles valeurs de raideur linéaire, la zone d'atténuation observée à faible amplitude d'excitation n'apparaît pas dans les courbes de réponse fréquentielle Fig.4.23(a) et Fig.4.24(a), comme c'est le cas pour les trois valeurs de raideur linéaire $k_1 = -0,156, k_1 = -0,168$ et $k_1 = -0,186$ (Fig.4.19(a), Fig.4.20(a) et Fig.4.21(a)). Ce qui induit l'absence du petit plateau d'atténuation observé à faible amplitude d'excitation dans la courbe de crête. Avec l'absence de cette zone d'atténuation et par l'obtention des plateaux de pompage plus élevés, l'aire donnée par la courbe de crête augmente.

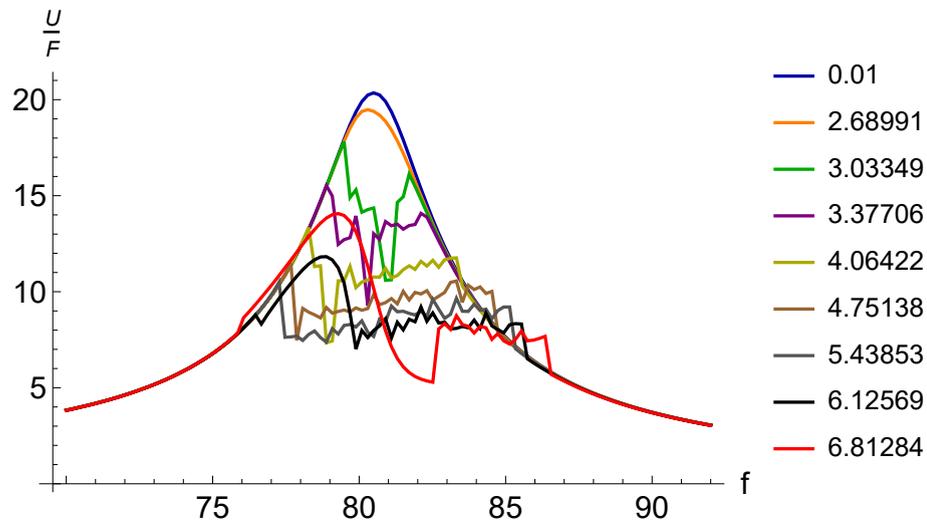
4.6 Ratio d'efficacité de la membrane

Dans [52], le ratio de l'énergie dissipée par un NES était calculé pour une comparaison entre le comportement d'un NES cubique et un NES bistable. Dans cette partie, on va utiliser ce ratio pour comparer la performance de la membrane pour différentes valeurs de raideurs linéaires. L'énergie dissipée par le tube et par la membrane sur l'intervalle de temps (τ_0, τ) est définie par les expressions suivantes :

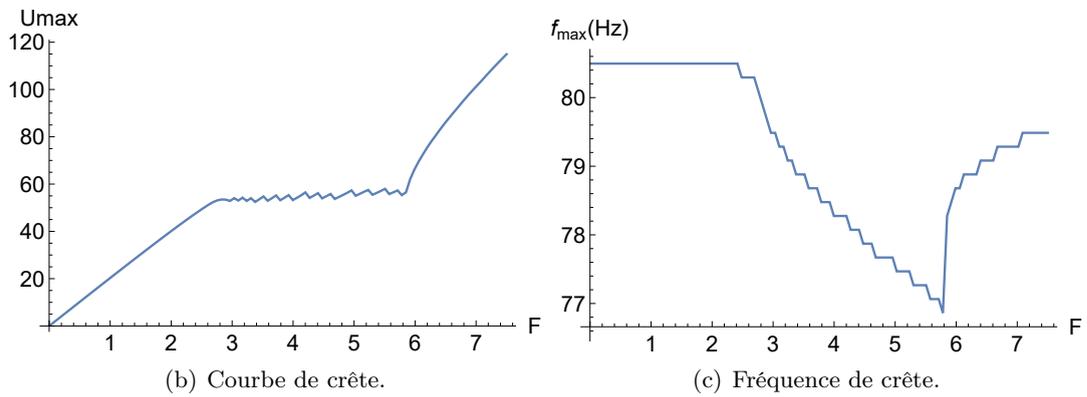
$$\begin{aligned} E_{Dt} &= \lambda \int_{\tau_0}^{\tau} u'^2 d\tau \\ E_{Dm} &= \omega_t c_\eta \int_{\tau_0}^{\tau} (2q^2 + 1) q'^2 d\tau \end{aligned} \quad (4.6)$$

L'efficacité de la membrane est définie par le ratio de l'énergie dissipée par la membrane et l'énergie totale dissipée (la somme des énergies dissipées):

$$r_m = \frac{E_{Dm}}{E_{Dm} + E_{Dt}} * 100\% \quad (4.7)$$



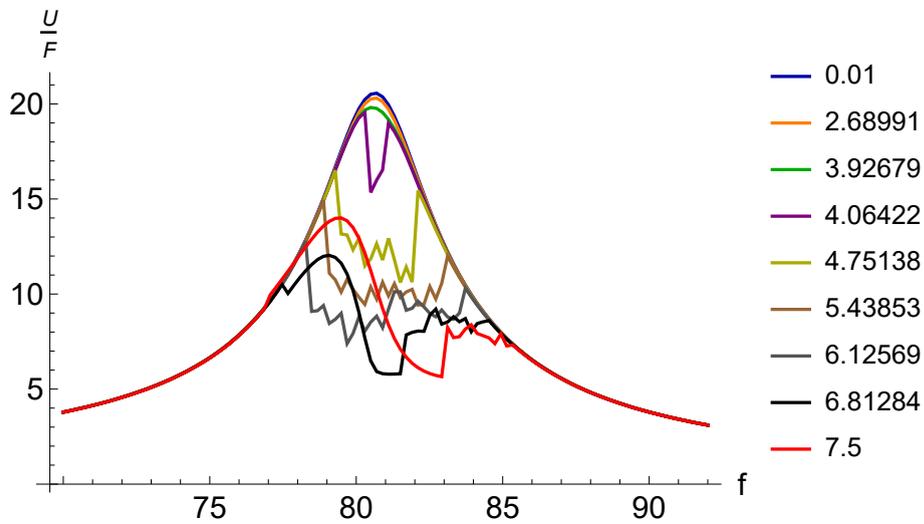
(a) Superposition des réponses fréquentielles pour différentes amplitudes d'excitation.



(b) Courbe de crête.

(c) Fréquence de crête.

Figure 4.23: Le résultat du calcul fréquentiel pour la raideur linéaire $k_1 = -0,246$.



(a) Superposition des réponses fréquentielles pour différentes amplitudes d'excitation.

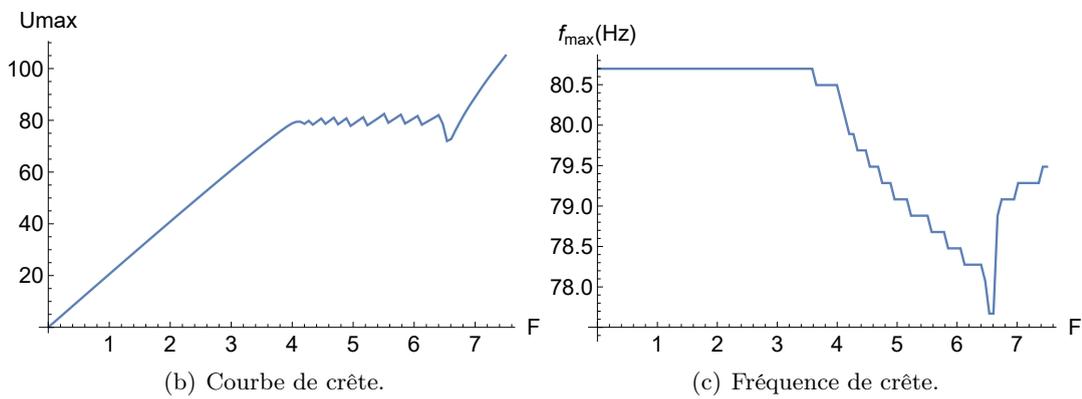


Figure 4.24: Le résultat du calcul fréquentiel pour la raideur linéaire $k_1 = -0,276$.

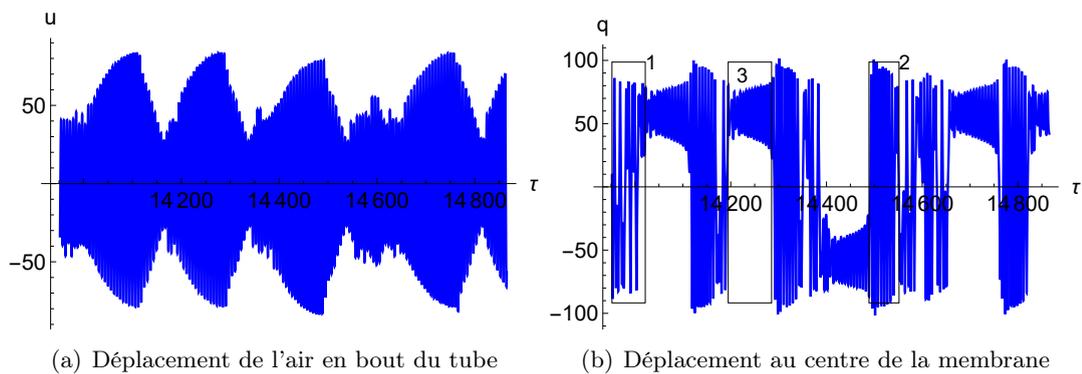


Figure 4.25: La réponse temporelle du système pour $k_1 = -0,276$ à la fréquence et force d'excitation $f = 80,2$ Hz et $F = 4.4$.

Dans l'article [52] les auteurs ont choisi de présenter la variation de l'efficacité des NES en fonction de l'amplitude d'excitation et à une fréquence d'excitation donnée. Ce travail s'intéresse au comportement du système autour de cette fréquence choisie. Dans la section précédente, nous avons observé une forte dépendance du comportement du système par rapport à la fréquence d'excitation. Étant donné que notre méthode d'optimisation repose sur le comportement global du système, en prenant en compte une plage étendue d'amplitudes et de fréquences d'excitation, nous avons choisi de calculer le ratio d'efficacité de la membrane sur une large plage de fréquences et d'amplitudes d'excitation (f varie de 70 Hz à 92 Hz avec 110 pas et F varie de 0,01 à 7,5 avec 110 pas).

4.6.1 Système monostable

Pour le comportement monostable, on a choisi de présenter les résultats de calcul du ratio pour la raideur linéaire $k_1 = 0,024$ (appartiennent à la zone monostable optimale). Les résultats du calcul fréquentiel pour cette valeur de raideur linéaire ont été présentés dans la figure Fig.4.15 de la partie précédente. La figure Fig.4.26 présente en 3D, à gauche, le pourcentage de l'énergie dissipée par la membrane en fonction de la force et la fréquence d'excitation et à droite, la surface de réponse fréquentielle de déplacement de l'air en bout du tube. Ce même pourcentage est tracé dans la figure 2D Fig.4.27. Avec ce tracé du contour du pourcentage, on a superposé la variation de la fréquence de crête en fonction de la force d'excitation présentée dans la figure Fig.4.15(c). Cette variation est présentée par la courbe rouge. Pour cette valeur de raideur linéaire, les fréquences propres couplées de système (du tube et de la membrane) sont égales à $f_t = 82,6$ Hz et $f_m = 54,4$ Hz. Donc, à titre d'exception, on a élargi la bande fréquentielle d'excitation de 52 Hz vers 92 Hz pour pouvoir analyser l'efficacité de la membrane autour de sa fréquence propre couplée.

La première lecture de ces figures montre clairement que l'efficacité de la membrane est fortement dépendante des paramètres d'excitation. À faible amplitude d'excitation, on a remarqué la présence d'un important pic d'efficacité (99%) autour de la fréquence $f = 56,5$ Hz et une efficacité très faible sur tout le reste de la bande fréquentielle. La fréquence du pic d'efficacité correspond à la fréquence propre de la membrane qui est définie par $f = \sqrt{\frac{k_1 + \beta}{\gamma}} \frac{\omega_t}{2\pi}$. À ce niveau d'excitation, aucun effet de non-linéarité est observé. Le système présente un comportement linéaire qui montre deux pics de résonance autour des fréquences propres couplées. À ce niveau d'excitation, la vibration de l'air dans le tube est faible, toute l'énergie est concentrée sur la membrane, ce qui explique la présence du pic de forte efficacité à la fréquence propre de la membrane. Avec l'augmentation de la force d'excitation, cet effet ne sera plus possible. On observe un pic d'efficacité moins important (35% seulement) qui se décale vers les basses fréquences, ce qui caractérise l'effet de la non-linéarité de raidissement. Une forte augmentation de l'efficacité de la membrane (du violet vers le vert) est observée dans ce cas autour de la fréquence de résonance du tube, une forte augmentation de l'efficacité de la membrane (du violet vers le vert). Cette augmentation est accompagnée par l'augmentation de la fréquence de crête présentée par la courbe rouge qui indique la zone du PE. Ici, il est important de souligner que l'efficacité de la membrane observée à cette zone est moins importante que celle observée à faible niveau d'excitation autour de la fréquence propre de la membrane, tandis que l'efficacité dans cette zone est répartie sur une plage beaucoup plus large de fréquences. Ceci est en cohérence avec le résultat bien connu dans le domaine d'atténuation de vibration qui compare entre la performance d'un absorbeur linéaire et celle d'un NES cubique. À des amplitudes d'excitation plus élevées, la soudaine diminution de la fréquence de crête montre

l'apparition d'un nouveau pic de résonance décalé vers les basses fréquences. À ce pic de résonance, l'air en bout du tube présente des fortes amplitudes de vibration, ce qui explique la faible efficacité observée à cet endroit. Avec l'apparition de nouveau pic de résonance, une autre zone de forte efficacité est observée (atteint 94,3%). Cette zone est située à la limite qui sépare le régime fortement modulé et le régime périodique lié au nouveau pic de résonance.

Après avoir présenté l'évolution générale du ratio d'efficacité en fonction de la fréquence et la force d'excitation, on va la présenter à une fréquence d'excitation donnée et analyser les régimes temporels observés à chaque niveau d'efficacité. Dans la figure Fig.4.28 on présente la variation de l'efficacité à la fréquence $f = 81$ Hz. Les points rouges de cette figure présentent les forces d'excitation qui correspondent aux réponses temporelles de la figure Fig.4.29. La figure Fig.4.28 montre que pour les faibles amplitudes d'excitation, la membrane n'intervient pas dans la dissipation de l'énergie. La figure Fig.4.29(a) correspond à la force d'excitation $F = 1,72$ dans toute la plage de la zone d'efficacité nulle, et le régime observé est périodique. À l'amplitude $F = 1,79$, on observe une augmentation soudaine de l'efficacité (de 1% à 52%). Pour ce niveau de forçage, le système présente une réponse fortement modulée. La transformée en ondelettes de la dynamique de la membrane est présentée dans la figure Fig.4.30(a). Elle montre que cette réponse est due à la capture de la résonance 1:1. Tout au long de ce régime quasi-périodique, l'efficacité diminue jusqu'à atteindre 38% à la force $F = 2,55$. Cette diminution peut être expliquée par l'augmentation de l'amplitude de vibration de l'air en bout du tube lors de ce régime (voir Fig.4.29(c) et Fig.4.29(d)). À la force d'excitation $F = 2,62$, l'efficacité de la membrane montre une forte augmentation qui atteint 94,3%. À cette force d'excitation Fig.4.29(e) le système présente une réponse périodique dont l'amplitude de vibration de tube est très faible par rapport à celle observée par la membrane. La figure Fig.4.30(a) montre que la membrane reste en résonance avec le tube. La membrane reste active lors de ce régime, et la totalité d'énergie est concentrée sur elle. Ce qui explique la forte efficacité observée. Lorsque la force d'excitation augmente, l'amplitude de vibration de la membrane ne peut pas augmenter davantage. Elle atteint une certaine amplitude puis le tube suit cette augmentation pour compenser l'augmentation d'excitation (voir Fig.4.29(f)). L'énergie injectée dans le système est donc localisée sur le tube. Ce qui explique la diminution de l'efficacité de la membrane.

4.6.2 Système bistable

Système bistable, avec fréquence propre couplée du tube supérieure à celle de la membrane

On a choisi dans cette partie de présenter les résultats du calcul de l'efficacité pour la valeur de raideur linéaire $k_1 = -0,126$. La figure Fig.4.17 présente les résultats du calcul fréquentiel pour cette valeur de raideur linéaire. Les figures Fig.4.31 et Fig.4.32 présentent respectivement dans une figure 3D et 2D la variation de l'efficacité de la membrane en fonction de la fréquence et la force d'excitation. La courbe rouge montre la variation de la fréquence de crête. Les fréquences propres du système couplé sont égales à $f_t = 84,3$ Hz et $f_m = 70,3$ Hz. À partir de l'équation Eq.4.2, en éliminant les termes non linéaires, on peut définir la fréquence propre de la membrane par $f = \sqrt{\frac{k_1 + \beta + 3k_{n1}q_e^2}{\gamma} \frac{\omega_t}{2\pi}}$. Pour cette valeur de raideur linéaire, elle est égale à $f_t = 73,9$ Hz.

Par rapport aux figures Fig.4.26 et Fig.4.27 du système monostable, la nuance de

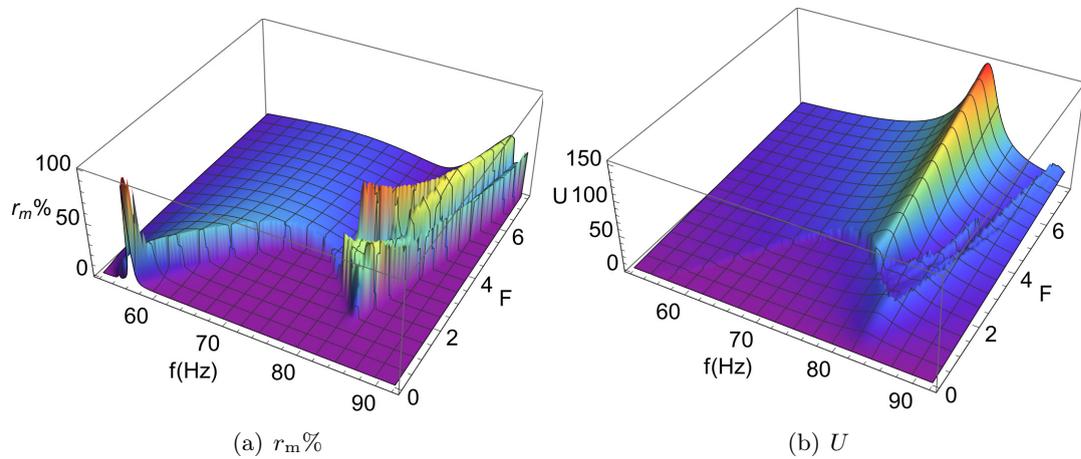


Figure 4.26: Le pourcentage de l'énergie dissipée par la membrane (gauche) et le déplacement de l'air en bout du tube (droite) en fonction de l'amplitude et de la fréquence d'excitation pour la valeur de raideur linéaire $k_1 = 0,024$ (membrane monostable).

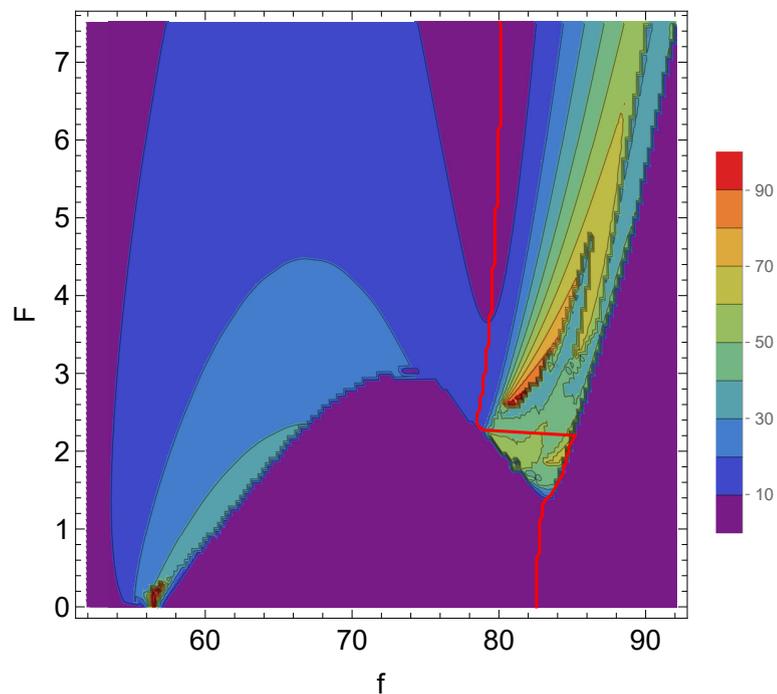


Figure 4.27: Le tracé de contour du pourcentage de l'énergie dissipée par la membrane en fonction de l'amplitude et de la fréquence d'excitation pour la valeur de raideur linéaire $k_1 = 0,024$. La courbe rouge représente la variation de la fréquence de crête.

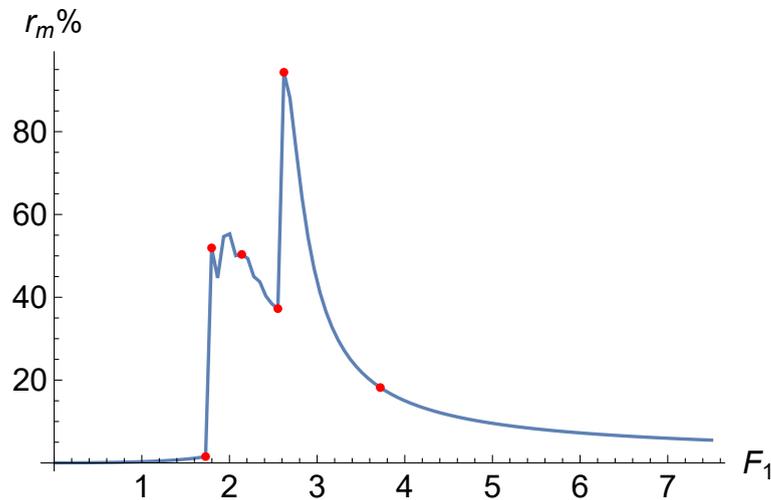


Figure 4.28: La variation du pourcentage de l'énergie dissipée par la membrane en fonction de l'amplitude d'excitation à la fréquence $f = 81$ Hz pour $k_1 = 0,024$.

couleurs des figures Fig.4.31 et Fig.4.32 montre clairement qu'avec la bistabilité l'efficacité de notre NES est grandement améliorée. Quelle que soit la zone, aux faibles niveaux d'excitation, lors du PE ou après celui-ci, la lecture globale montre que la membrane bistable présente une meilleure efficacité. À faible amplitude d'excitation, comme il est observé pour le système monostable, la membrane présente autour de sa fréquence propre ($f_t = 73,9$ Hz) un pic de très forte efficacité (90%). Mais par rapport au système monostable, ce pic est réparti sur une plage plus large de fréquences d'excitation. En s'éloignant de la fréquence propre de la membrane (en se déplaçant vers les basses ou hautes fréquences) l'efficacité de la membrane est diminuée de manière progressive et ralentie. Ceci explique la présence d'une efficacité relativement forte autour de la résonance du tube (zone bleue dont r_m varie entre 20% et 30%) si on compare par rapport au système monostable (zone violette qui ne dépasse pas 10%). Pour cette valeur de raideur linéaire, les deux fréquences propres du système sont relativement proches pour pouvoir avoir l'effet de la membrane bistable sur le tube. Donc, on peut conclure la présence d'une combinaison d'effet : l'effet de Frahm qui permet une forte atténuation à la fréquence propre de la membrane et l'effet de ramollissement qui permet de ramollir l'effet de Frahm dont la forte efficacité observée à la fréquence propre de la membrane diminue progressivement. Avec l'augmentation de la force d'excitation, le pic de haute efficacité est déplacé vers les basses fréquences, ce qui attire la totalité du flux d'efficacité vers ces fréquences. Cela montre l'effet énorme de la non-linéarité du ramollissement sur l'efficacité de la membrane.

La zone d'efficacité liée au PE est marquée par l'augmentation de la fréquence de crête. Elle est plus large que celle observée dans le système monostable. Ceci est en cohérence avec le résultat fréquentiel de la figure Fig.4.18 qui montre que la zone du PE observé pour $k_1 = -0,126$ est plus large que celle-ci observé pour $k_1 = 0,024$. Avec l'apparition de ce phénomène, on observe des étages d'efficacité relativement faible (présentés en bleu) dont le ratio varie entre 10% et 30%. Ces étages d'efficacité moins importante sont liés à la présence du chaos. Pour les forces d'excitation les plus élevées, le nouveau pic décalé vers les basses fréquences est observé. Autour de ce pic, on a une efficacité plus importante que celle observée dans le système monostable. Lors du passage du régime quasi-périodique vers le régime périodique, on observe aussi la zone de forte efficacité présentée en rouge.

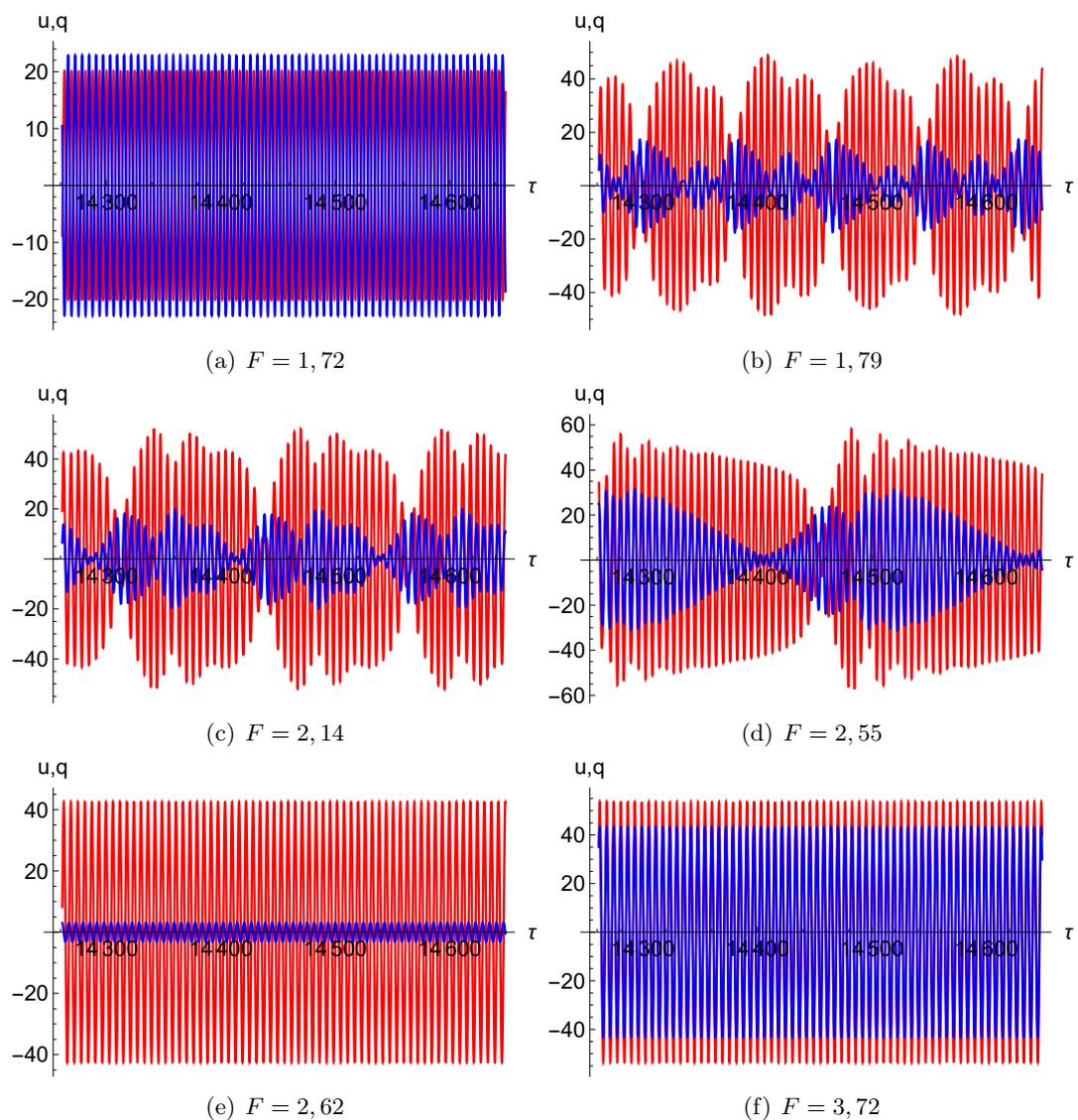


Figure 4.29: Les réponses temporelles du système correspondent aux points rouges indiqués sur la figure Fig.4.28. Le déplacement de l'air en bout du tube est représenté en bleu, tandis que le déplacement au centre de la membrane est en rouge.

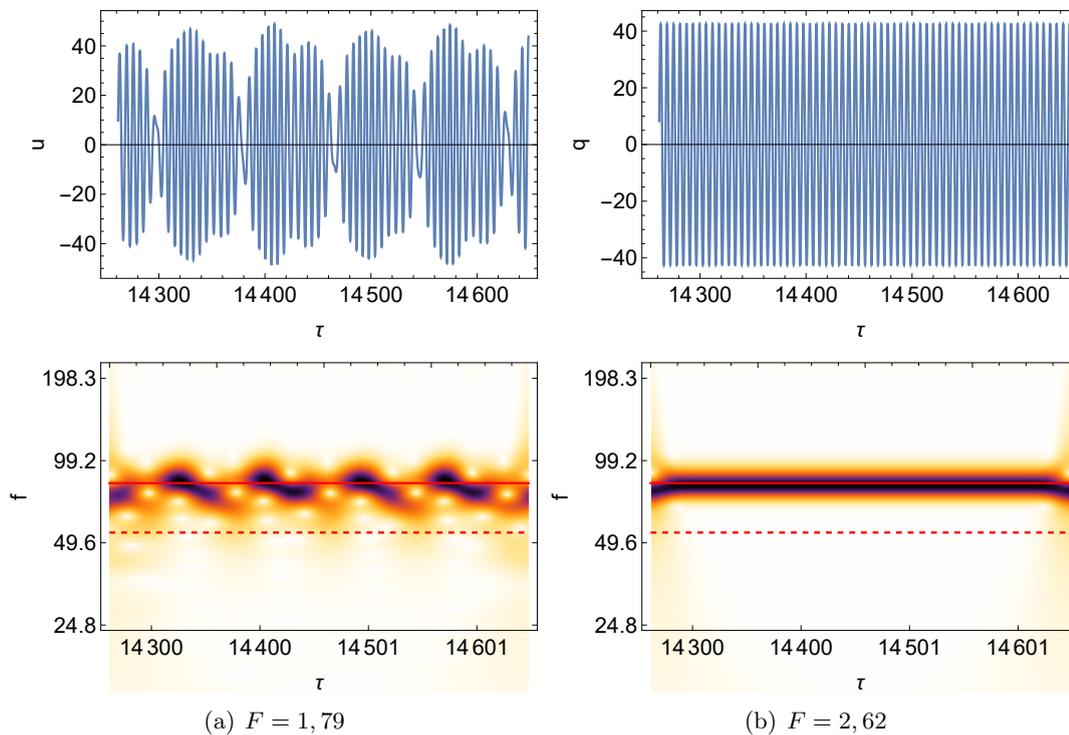


Figure 4.30: La transformée en ondelettes de déplacement de la membrane pour deux différentes forces d'excitation (Fig.4.29(b) et Fig.4.29(e)). Les lignes continue et discontinue indiquent la fréquence de résonance du tube et de la membrane respectivement.

Dans ce paragraphe, on va choisir la même fréquence d'excitation utilisée dans la partie précédente du système monostable pour l'analyse en régime temporel-efficacité. La figure Fig.4.33 présente la variation du pourcentage d'efficacité en fonction de la force d'excitation à la fréquence $f = 81$ Hz. Dans la figure Fig.4.34 on a présenté la réponse temporelle du système pour différentes forces d'excitation qui sont indiquées par les points rouges dans la figure Fig.4.33. Ces forces d'excitation sont aussi marquées dans la figure Fig.4.32 par les points rouges. La ligne bleue verticale correspond à la fréquence $f = 81$ Hz. À très faible force d'excitation, la membrane présente une efficacité importante 45%. Pour la force d'excitation $F = 0,01$, la réponse temporelle du système présente les oscillations intrapuits avec de faibles amplitudes de vibration. Avec l'augmentation de la force d'excitation, l'efficacité de la membrane diminue. Cette diminution s'accompagne de l'augmentation de l'amplitude de vibration de l'air en bout du tube (voir Fig.4.34(b)). À la force d'excitation $F = 1,3$, on observe la présence du régime chaotique dont l'efficacité de la membrane est autour de 11%. Après une petite zone du régime chaotique, le régime devient périodique. Lors de ce régime, la membrane présente le plus faible niveau d'efficacité autour de 4,5%. La figure Fig.4.34(d) présente cette réponse périodique. Cette réponse de l'efficacité la plus faible qui s'observe après le régime chaotique est observée aussi dans l'article [52]. Les auteurs ont montré à travers une transformation en ondelettes que cette réponse présente une capture de résonance avec la fréquence de sous-harmonique 1:3. La transformée en ondelette de ces réponses temporelles (Fig.4.36) présente un résultat comparable à celui obtenu dans [52].

Avec l'augmentation de la force d'excitation, le régime périodique disparaît et la réponse

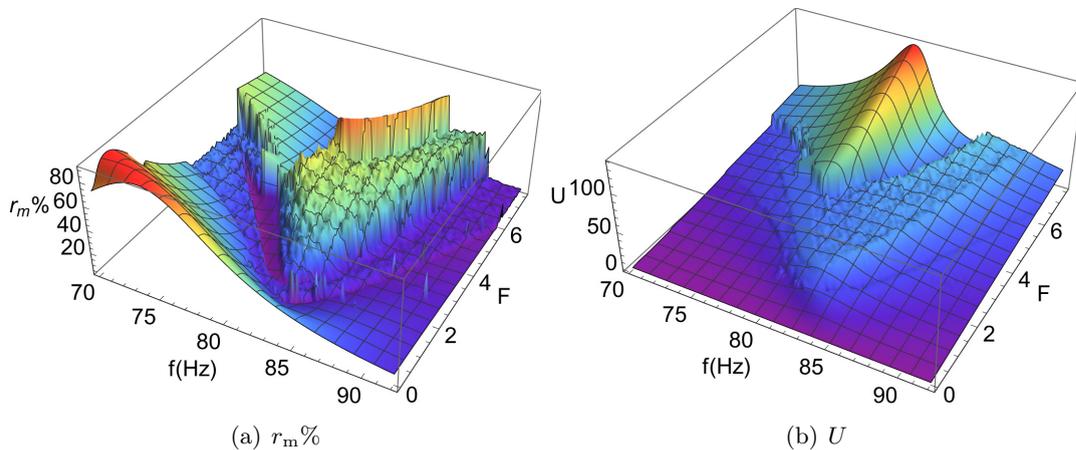


Figure 4.31: Le pourcentage de l'énergie dissipée par la membrane (gauche) et le déplacement de l'air en bout du tube (droite) en fonction de l'amplitude et de la fréquence d'excitation pour la valeur de raideur linéaire $k_1 = -0,126$.

temporelle indique la présence du chaos (voir Fig.4.34(e)). En parallèle, l'efficacité de la membrane présente une augmentation. La transformée en ondelettes des signaux temporels du système à la force d'excitation $F = 2,2$ est présentée dans la figure Fig.4.36. Cette figure montre la présence d'intervalles de temps auxquels la membrane vibre à la fréquence de tube ou à ses sous-harmoniques. On a ici quelques traces de la réponse fortement modulée qui s'ajoute à la réponse chaotique. À la force d'excitation $F = 2,4$, le système présente clairement la réponse chaotique fortement modulée dans laquelle on a une combinaison entre le chaos et la réponse fortement modulée. Avec l'augmentation de l'amplitude d'excitation, les intervalles de temps correspondant au comportement quasi périodique deviennent plus larges. Le régime quasi périodique devient de plus en plus dominant et l'efficacité de la membrane augmente. À la force d'excitation $F = 4,75$, l'efficacité de la membrane présente une forte augmentation de 51% vers 84%. Telle qu'observé pour le système monostable à cette efficacité élevée, la réponse temporelle possède un régime périodique qui oscille autour de la position d'équilibre instable (zéro).

Système bistable, avec fréquence propre couplée du tube inférieure à celle de la membrane et plateau minimum

Dans cette partie, le calcul de l'efficacité est présenté pour la raideur linéaire $k_1 = -0,156$. Les résultats fréquentiels correspondants à cette valeur ont été présentés dans la figure Fig.4.19. La variation de l'efficacité en fonction de la force et la fréquence d'excitation est représentée dans les figures 3D et 2D Fig.4.37 et Fig.4.38. Pour cette valeur de raideur, la fréquence propre couplée de la membrane $f_m = 90,8$ Hz est supérieure à celle du tube $f_t = 78$ Hz. La fréquence propre de la membrane est définie par $f = \sqrt{\frac{k_1 + \beta + 3k_{n1}q_e^2}{\gamma} \frac{\omega_t}{2\pi}}$. Elle est égale à $f_t = 88,06$ Hz.

Comme il est observé dans le cas précédent, à faible amplitude d'excitation, la membrane présente à sa fréquence propre un pic de très forte efficacité qui se répartit sur une large plage de fréquences d'excitation. La différence par rapport au cas précédent est montrée par l'emplacement de ce pic qui est dans la gamme des hautes fréquences d'excitation. Ceci est observé puisque la fréquence propre de la membrane est plus grande et qu'elle est supérieure à celle du tube. Avec l'augmentation de la force d'excitation,

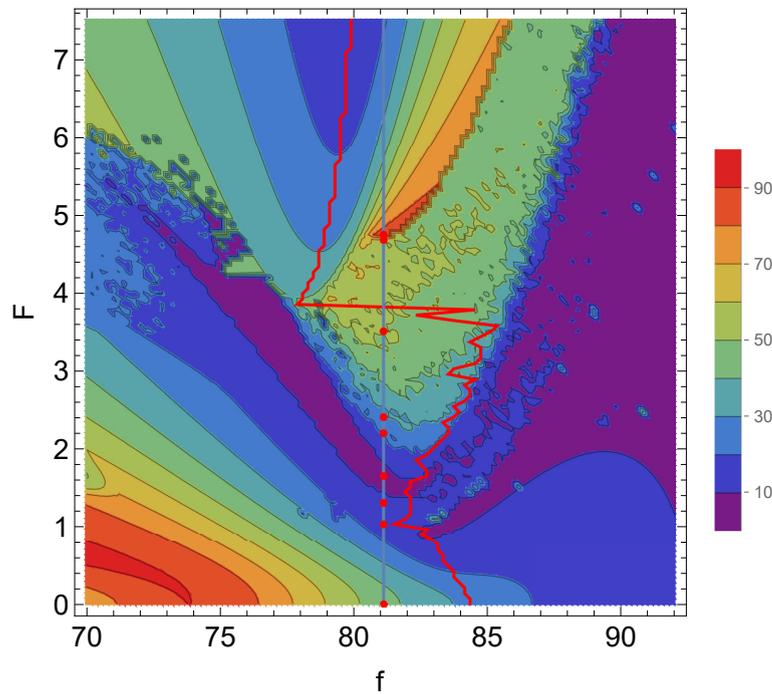


Figure 4.32: Le tracé de contour du pourcentage de l'énergie dissipée par la membrane en fonction de l'amplitude et de la fréquence d'excitation pour la valeur de raideur linéaire $k_1 = -0.126$. La courbe rouge représente la variation de la fréquence de crête. La ligne verticale bleue correspond à la fréquence $f = 81$ Hz.

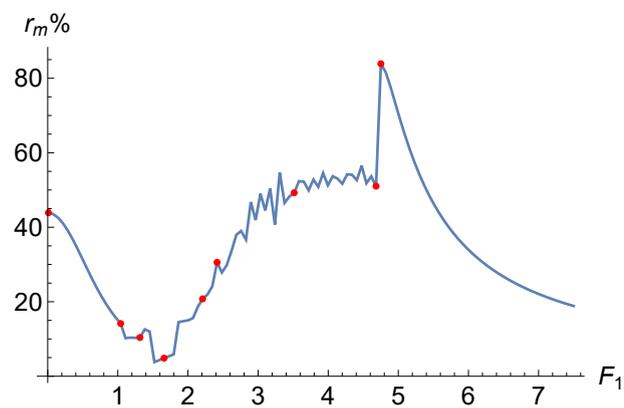


Figure 4.33: La variation du pourcentage de l'énergie dissipée par la membrane en fonction de l'amplitude d'excitation à la fréquence $f = 81$ Hz pour $k_1 = -0,126$.

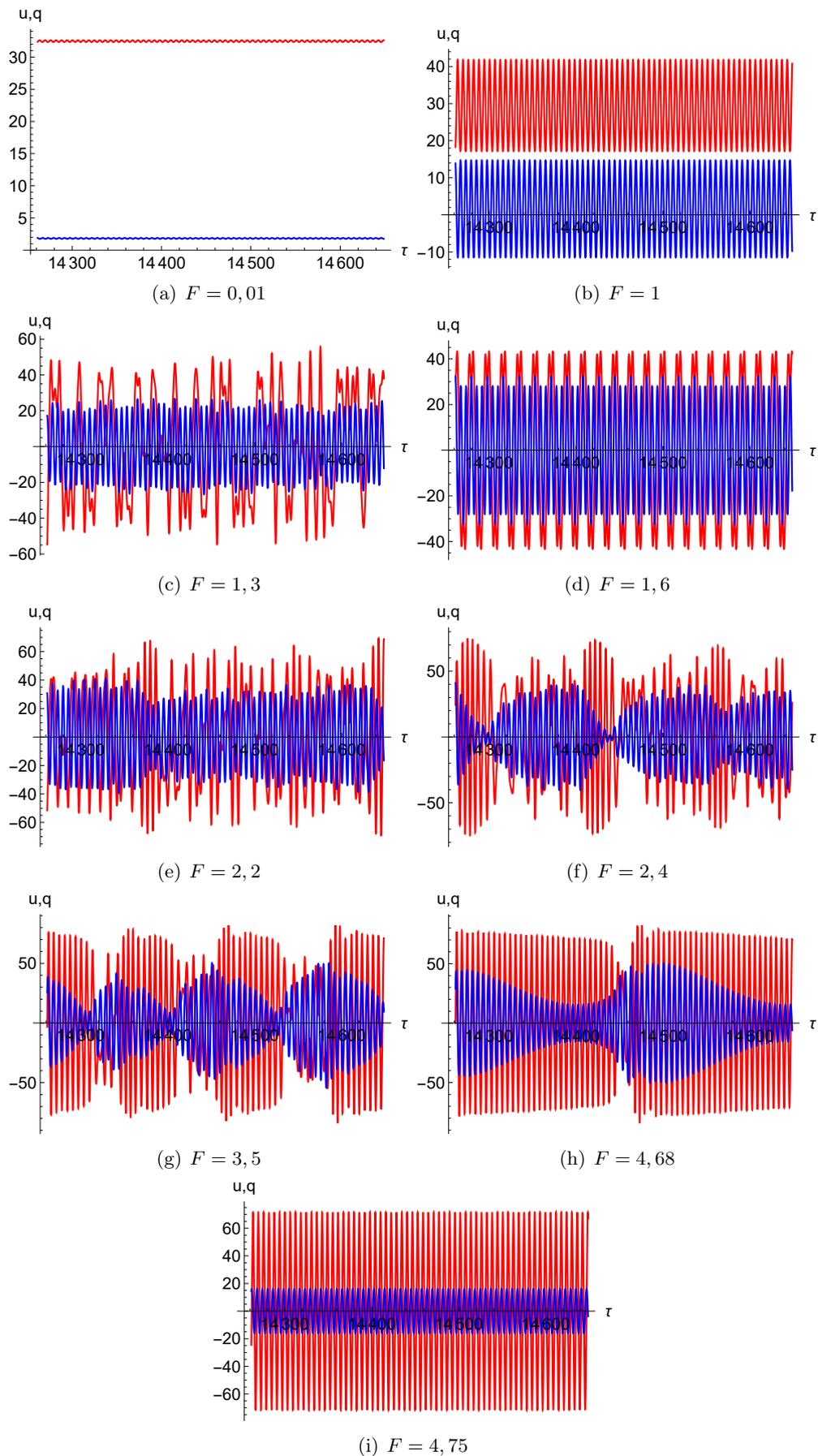
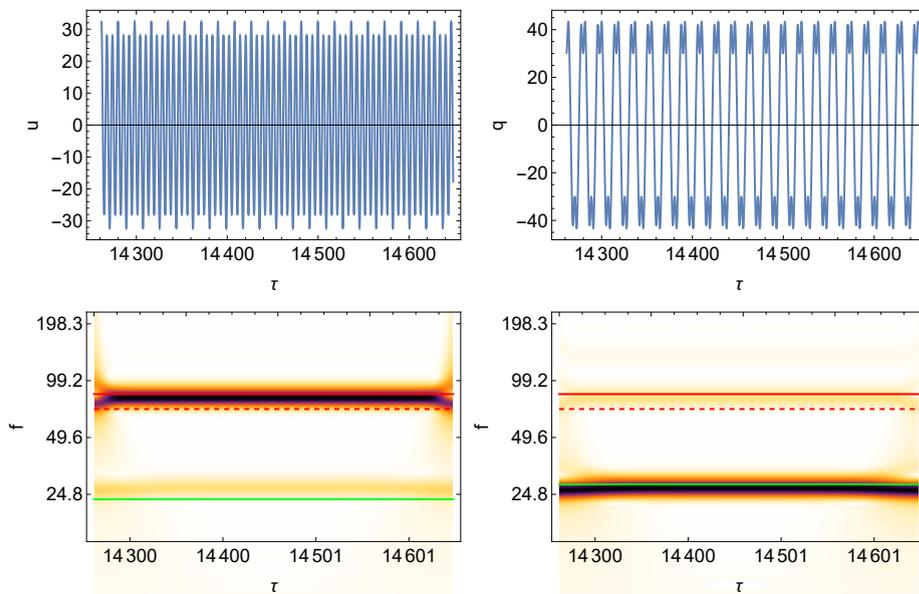


Figure 4.34: Les réponses temporelles du système correspondent aux points rouges indiqués sur la figure Fig.4.33. Le déplacement de l'air en bout du tube est représenté en bleu, tandis que le déplacement au centre de la membrane est en rouge.



(a) La transformée en ondelettes de $u(\tau)$. (b) La transformée en ondelettes de $q(\tau)$.

Figure 4.35: La transformée en ondelettes de la réponse temporelle du système à la force d'excitation et à la fréquence $F = 1,6$ et $f = 81$ Hz. Les lignes continues et discontinues rouges indiquent respectivement la fréquence de résonance du tube et de la membrane. La ligne verte continue correspond à la fréquence $\frac{1}{3}f_t$.

la non-linéarité de ramollissement permet à ce pic de forte efficacité de se décaler vers les basses fréquences. Lorsqu'on s'approche de la fréquence propre du tube, une zone d'efficacité relativement importante (40% à 70%) apparaît. En effet, à partir de la variation du pic de forte efficacité présentée en rouge peut indiquer la variation de la fréquence propre de la membrane. Lorsque cette fréquence atteint la fréquence propre du tube, le système présente son premier point de fonctionnement dans lequel la courbe caractéristique de la membrane coupe celle du tube. La membrane s'active et rentre en résonance avec le tube et le phénomène de PE aura lieu. Ceci explique la présence de cette zone de forte efficacité qui correspond à la zone de PE. L'apparition de cette zone explique la soudaine augmentation de la fréquence de crête observée à faible niveau d'excitation. Aussi, la forte efficacité observée dans cette zone peut expliquer l'apparition du petit plateau d'atténuation observé à faible niveau d'excitation dans la figure Fig.4.19(b). Il faut noter ici que cette zone de forte efficacité, liée au PE, n'est pas observée dans le cas précédent où la fréquence propre de la membrane est supérieure à celle du tube, en raison de l'absence du premier point de fonctionnement qui correspond à de faibles amplitudes de vibration.

Pour les forces d'excitation les plus fortes, la variation de l'efficacité de la membrane présente les principales zones observées dans le cas précédent. On observe une efficacité relativement forte liée à l'apparition du PE, suivie par une efficacité plus forte à la limite qui sépare le régime périodique et quasi-périodique. La présence de cette zone de PE est liée au deuxième point de fonctionnement qui correspond à l'intersection entre la courbe de caractère raidissant de la membrane bistable et la courbe linéaire de tube. Cette zone du PE est indiquée par la deuxième augmentation présentée par la courbe de la fréquence de crête. Il faut noter ici que dans cette zone, la nuance de couleur montre une amélioration globale de l'efficacité de la membrane. On remarque autour de la zone du PE l'absence de

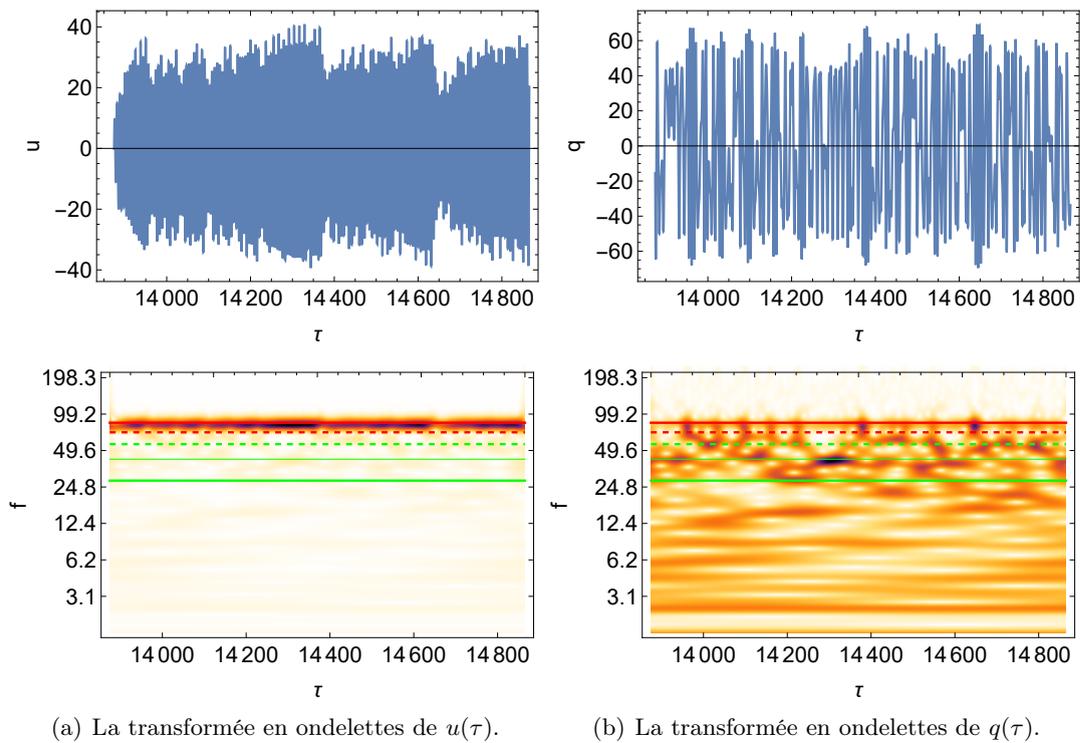


Figure 4.36: La transformée en ondelettes de la réponse temporelle du système à la force et à la fréquence d'excitation $F = 2,2$ et $f = 81$ Hz. Les lignes continues et discontinues rouges indiquent respectivement la fréquence de résonance du tube et de la membrane. Les lignes vertes continues épaisses, fines et discontinues correspondent respectivement aux fréquences d'excitation $\frac{1}{3}f_t$, $\frac{1}{2}f_t$ et $\frac{2}{3}f_t$.

la zone violette de faible efficacité observée dans la figure Fig.4.32 pour $k_1 = -0,126$.

Pour cette valeur de raideur linéaire, le système présente deux différentes zones de PE. La première zone correspond à des amplitudes et fréquences d'excitation relativement faibles, tandis que la deuxième zone correspond à des amplitudes et fréquences d'excitation plus fortes. Donc, pour l'analyse du régime temporel-efficacité, on a choisi de présenter la variation de l'efficacité pour deux valeurs de fréquences d'excitation appartenant à ces deux différentes zones de PE : $f = 81$ Hz et $f = 73,4$ Hz. La première correspond à la même fréquence utilisée dans les cas précédents. Elle permet d'analyser le comportement du système dans lequel le PE à fortes amplitudes d'excitation apparaît. La deuxième fréquence appartient à la zone du PE qui apparaît à faible niveau d'excitation. Les sous-figures Fig.4.39(a) et Fig.4.39(b) présentent la variation de l'efficacité en fonction de la force d'excitation pour ces deux fréquences. Dans les figures Fig.4.40 et Fig.4.41 on a présenté pour ces deux fréquences les réponses temporelles du système pour différentes forces d'excitation. Les valeurs de forces d'excitation correspondent aux points rouges présentés dans les figures Fig.4.39(a) et Fig.4.39(b). Ces valeurs de forces d'excitation sont également marquées sur la carte 2D de la variation de l'efficacité par les points rouges. Les fréquences $f = 81$ Hz et $f = 73,4$ Hz sont présentées par les lignes bleues.

Dans ce paragraphe, on va analyser le comportement du système à la fréquence d'excitation $f = 81$ Hz. À cette fréquence, la performance de la membrane bistable optimale de raideur linéaire $k_1 = -0,156$ est comparée avec celle de la membrane bistable présentée dans la partie précédente ($k_1 = -0,126$). Pour la variation de l'efficacité de la membrane, la figure Fig.4.39(a) présente une seule différence par rapport au cas précédent observée à faible niveau d'excitation. Contrairement à ce qu'on a observé pour la raideur linéaire $k_1 = -0,126$, lorsque la force d'excitation augmente, l'efficacité de la membrane croît. Elle atteint un maximum de 84% à la force d'excitation $F = 0,83$. Comme les figures Fig.4.40(a) et Fig.4.40(b) montrent tout au long de cette augmentation, le système présente les réponses intrapuits. Ce type de réponse s'observe aussi dans le cas précédent à faible niveau d'excitation alors que l'efficacité ne présente pas la même allure. À partir des cartes 2D Fig.4.38 et Fig.4.38 on peut remarquer que l'augmentation de l'efficacité observée dans ce cas ou la diminution observée dans le cas précédent est liée à l'emplacement de la fréquence d'excitation $f = 81$ Hz par rapport à la fréquence propre de la membrane. Le maximum d'efficacité (84%) observé à la force d'excitation $F = 0,83$ indique la présence de la fréquence propre de la membrane à cet endroit. En effet, avec le comportement de ramollissement, l'augmentation de la force d'excitation est accompagné par le décalage de la fréquence propre de la membrane vers les basses fréquences. À la force d'excitation $F = 0,83$, la fréquence propre de la membrane coïncide avec notre fréquence d'excitation $f = 81$ Hz, ce qui explique cette forte efficacité. Avec l'augmentation de la force d'excitation, l'efficacité de la membrane décroît jusqu'à ce qu'elle se trouve dans la zone de l'efficacité la plus faible. À partir de cette zone, la variation de l'efficacité de la membrane sera très semblable à celle observée dans le cas précédent. À la force d'excitation $F = 1,45$, la réponse temporelle du système présente un régime chaotique (voir Fig.4.40(c)). Si on augmente l'excitation, le système présente le même régime périodique que celui observé dans la figure Fig.4.34(d). À des amplitudes d'excitations plus fortes, les réponses temporelles présentent une combinaison entre le régime chaotique et le régime fortement modulé avec des proportions variables. Avec l'augmentation de l'excitation, les intervalles de temps correspondant au régime quasi-périodique sont plus larges. Lorsque la membrane présente sa forte efficacité, la réponse devient périodique. Il faut noter qu'à cette

fréquence d'excitation, les zones de pompage observées dans les deux cas ($k_1 = -0,156$ et $k_1 = -0,126$) sont liées au point de fonctionnement qui correspond à l'intersection entre la courbe de caractère raidissant de la membrane bistable et la courbe linéaire du tube. Ce qui explique le même mode de fonctionnement observé pour les deux cas.

Pour la fréquence $f = 73,4$ Hz, la dynamique du système présentée dans la figure Fig.4.41 montre un différent mode de fonctionnement de cette membrane qui est lié au point de fonctionnement qui correspond à l'intersection entre la courbe de caractère ramollissant de la membrane bistable et la courbe linéaire de tube. Ceci reflète la différente variation de l'efficacité observée dans la figure Fig.4.39(b). À faible niveau d'excitation, la membrane présente une efficacité relativement faible si on la compare à celle observée pour la fréquence $f = 81$ Hz. Comme il est observé dans la figure Fig.4.38 lorsqu'on s'éloigne de la fréquence propre de la membrane $f = 88$ Hz, l'efficacité de la membrane diminue. À ce niveau d'excitation, le système présente les oscillations intrapuits (voir Fig.4.41(a)). À la force d'excitation $F = 0,9$, l'efficacité de la membrane présente une forte augmentation. Elle atteint 68%. À cette force d'excitation, le système montre une réponse fortement modulée intrapuits présentée dans la figure Fig.4.41(b). La transformée en ondelettes de ces réponses temporelles présentée dans la figure Fig.4.42 montre que ce régime est dû à la capture de résonance 1:1. La présence de cette réponse indique l'apparition du PE. Avec l'augmentation de la force d'excitation, le système suit le même régime de vibration. Le déplacement de la membrane présente clairement une profondeur de modulation asymétrique. L'amplitude minimale de modulation du déplacement de la membrane devient plus petite. Le système cherche à sauter vers l'autre position d'équilibre. Avec ce comportement, l'efficacité de la membrane diminue. En augmentant plus l'excitation, la réponse fortement modulée intrapuits se mélange avec les sauts chaotiques entre les positions d'équilibre (Fig.4.41(d) et Fig.4.41(e)). La transformée en ondelettes d'une réponse temporelle du système lors de ce régime est présentée dans la figure Fig.4.43. Cette figure montre des captures de résonance 1:3 et 1:2 lors de ces sauts chaotiques. Lors de ce régime, l'efficacité de la membrane présente un minimum local autour de 47%. À la force d'excitation $F = 1,89$, l'efficacité de la membrane augmente de nouveau. Le système présente une réponse faiblement modulée intrapuits. À l'efficacité maximale 77%, le régime revient périodique intrapuits. Comme le montre la figure Fig.4.38, cette forte efficacité est liée à l'effet de vibration du système autour de la fréquence propre de la membrane. Avec l'augmentation de l'amplitude d'excitation, l'efficacité de la membrane diminue jusqu'elle atteint le minimum. Dans cette zone, le système présente un régime chaotique. À la force l'excitation $F = 5,4$, l'efficacité augmente de nouveau vers 54% et le système présente une réponse périodique liée au nouveau pic qui apparaît à forte amplitude d'excitation.

Système bistable, avec fréquence propre couplée du tube inférieure à celle de la membrane : au-delà du plateau minimum

Dans cette partie, on va présenter les résultats du calcul d'efficacité pour la valeur de raideur linéaire $k_1 = -0,276$. Les figures Fig.4.44 et Fig.4.45 présentent respectivement dans des figures 2D et 3D la variation de l'efficacité de la membrane en fonction de la force et la fréquence d'excitation. La courbe rouge observée dans la figure Fig.4.45 présente la variation de la fréquence de crête. Cette variation indique la zone du PE. Ces deux figures présentent une zone de très faible efficacité entourée par la zone du PE. Pour cette valeur de raideur linéaire, la fréquence propre couplée de la membrane est égale à $f_m = 130$ Hz, ce qui la place bien au-dessus de la fréquence propre du tube, qui est de $f_t = 80,67$ Hz. Ceci

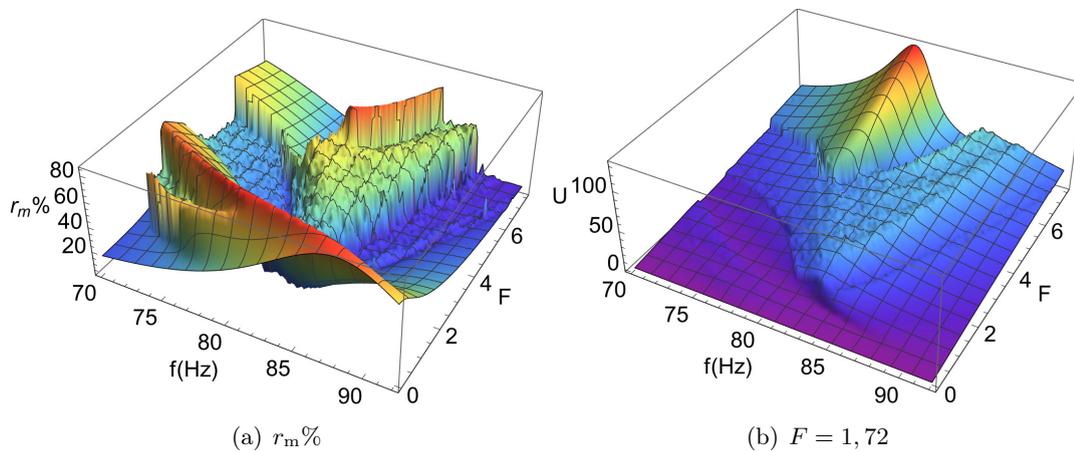


Figure 4.37: Le pourcentage de l'énergie dissipée par la membrane (gauche) et le déplacement de l'air en bout du tube (droite) en fonction de l'amplitude et de la fréquence d'excitation pour la valeur de raideur linéaire $k_1 = -0,156$.

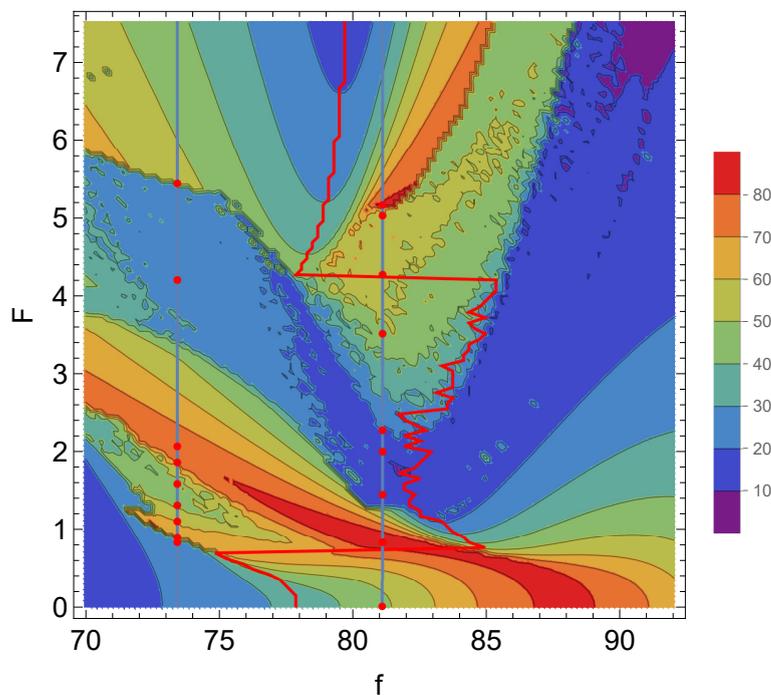


Figure 4.38: Le tracé de contour du pourcentage de l'énergie dissipée par la membrane en fonction de l'amplitude et de la fréquence d'excitation pour la valeur de raideur linéaire $k_1 = -0.156$. La courbe rouge représente la variation de la fréquence de crête. Les deux lignes verticales bleues correspondent respectivement aux fréquences $f = 73,4$ Hz et $f = 81$ Hz.

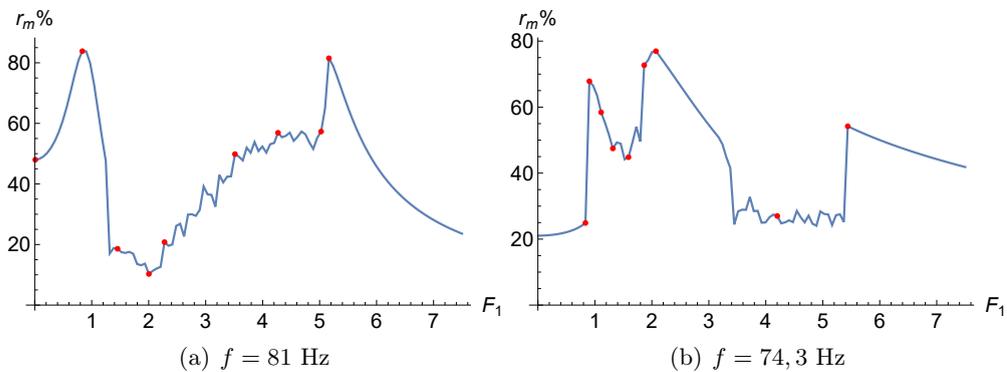


Figure 4.39: La variation du pourcentage de l'énergie dissipée par la membrane en fonction de l'amplitude d'excitation pour deux fréquences d'excitation différentes et pour $k_1 = -0,156$.

explique l'absence de la zone de forte efficacité liée à la variation de la fréquence propre de la membrane et observée à faible niveau d'excitation dans les deux cas précédents. Bien que la fréquence propre de la membrane soit supérieure à celle du tube, la zone de forte efficacité observée dans le cas précédent, qui est liée au premier point de fonctionnement (correspondant à l'intersection entre la courbe de caractère ramollissant de la membrane bistable et la droite caractéristique du tube), n'est pas observée dans ces figures. Dans ce cas, puisque la fréquence propre de la membrane est très élevée, ce point de fonctionnement se trouve à une forte amplitude de vibration et la distance qui le sépare du deuxième point devient très faible. Comme on a noté lors de l'analyse fréquentielle, on a ici une sorte de fusion de ces deux points de fonctionnement. Pour cela, les figures Fig.4.44 et Fig.4.45 présentent une seule zone de forte efficacité. Contrairement aux cas précédents, la figure Fig.4.45 montre que la zone de forte efficacité liée au phénomène de PE est indiquée par la diminution de la fréquence de crête.

Dans la figure Fig.4.46 on a présenté la variation de l'efficacité en fonction de la force d'excitation à la fréquence $f = 81$ Hz. Les réponses temporelles du système à cette fréquence sont présentées dans la figure Fig.4.47. Les forces d'excitation correspondant à ces réponses sont indiquées par les points rouges dans les figures Fig.4.46 et Fig.4.45. Sur toute la plage de force d'excitation $[0, 01, 4, 06]$, la membrane présente une faible efficacité avec des réponses intrapuits (voir Fig.4.47(a)). À la force d'excitation $F = 4, 13$, l'efficacité présente une augmentation importante. La réponse temporelle du système présentée dans la figure Fig.4.47(b) montre la même réponse que celle présentée dans la figure Fig.4.25. Comme cela a déjà été expliqué dans la partie du calcul fréquentiel, cette réponse montre la combinaison de trois différents régimes : chaotique, fortement modulée avec la capture de résonance 1:1 et intrapuits. La transformée en ondelettes de cette réponse temporelle montre les intervalles de temps correspondant à la capture de résonance 1:1 (voir Fig.4.48). Avec l'augmentation de la force d'excitation, la durée de capture de la résonance 1:1 devient plus importante. Alors que les portions liées au régime chaotique et intrapuits deviennent de moins en moins importantes. Ceci explique l'augmentation de l'efficacité de la membrane. À la force d'excitation $F = 6, 8$, l'efficacité de la membrane présente son maximum 73% et le régime devient périodique.

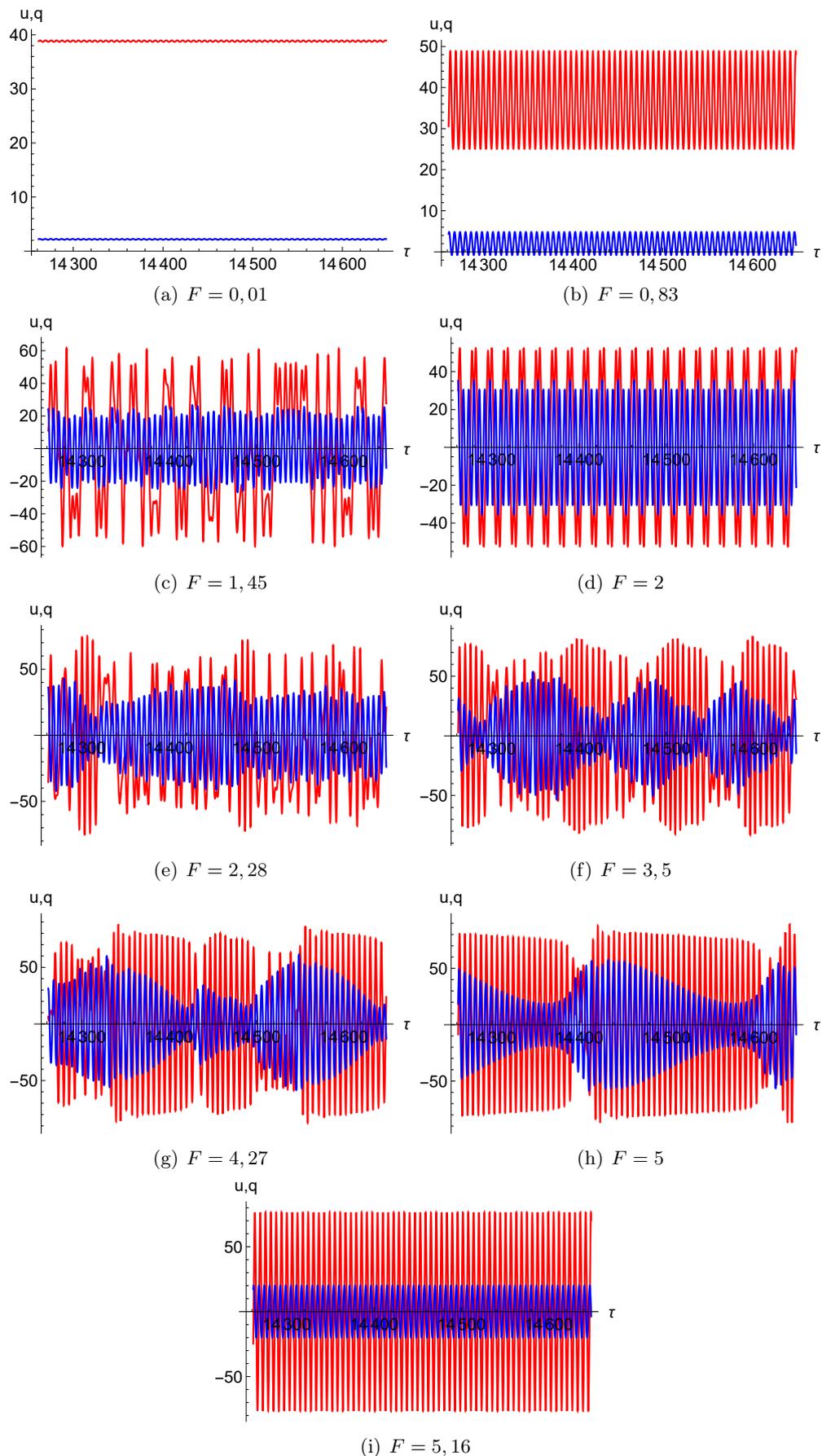


Figure 4.40: Les réponses temporelles du système correspondent aux points rouges indiqués sur la figure Fig.4.39(a) ($k_1 = -0,156$ et $f = 81$ Hz). Le déplacement de l'air en bout du tube est représenté en bleu, tandis que le déplacement au centre de la membrane est en rouge.

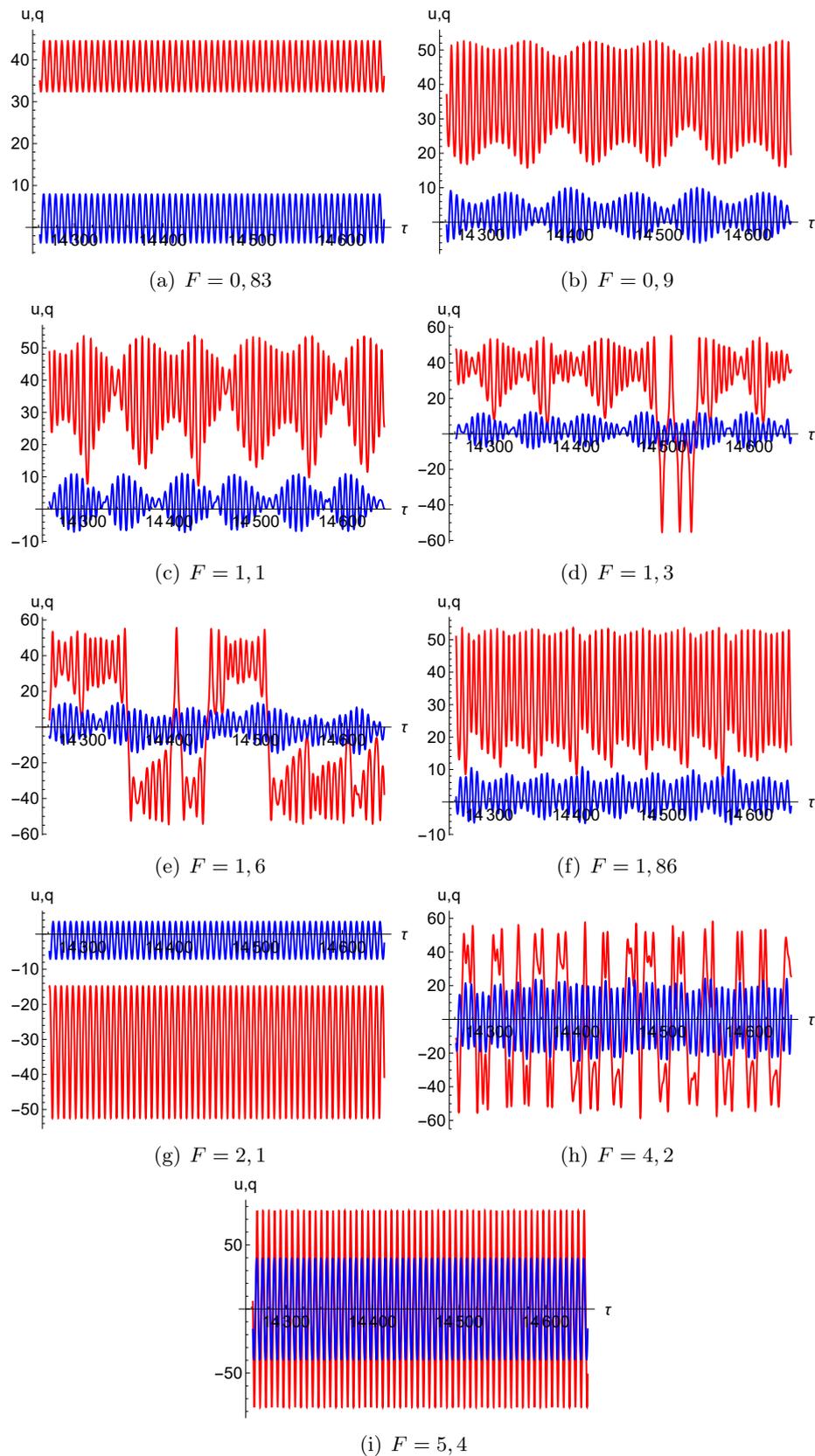


Figure 4.41: Les réponses temporelles du système correspondent aux points rouges indiqués sur la figure Fig.4.39(b) ($k_1 = -0,156$ et $f = 73.4$ Hz). Le déplacement de l'air en bout du tube est représenté en bleu, tandis que le déplacement au centre de la membrane est en rouge.

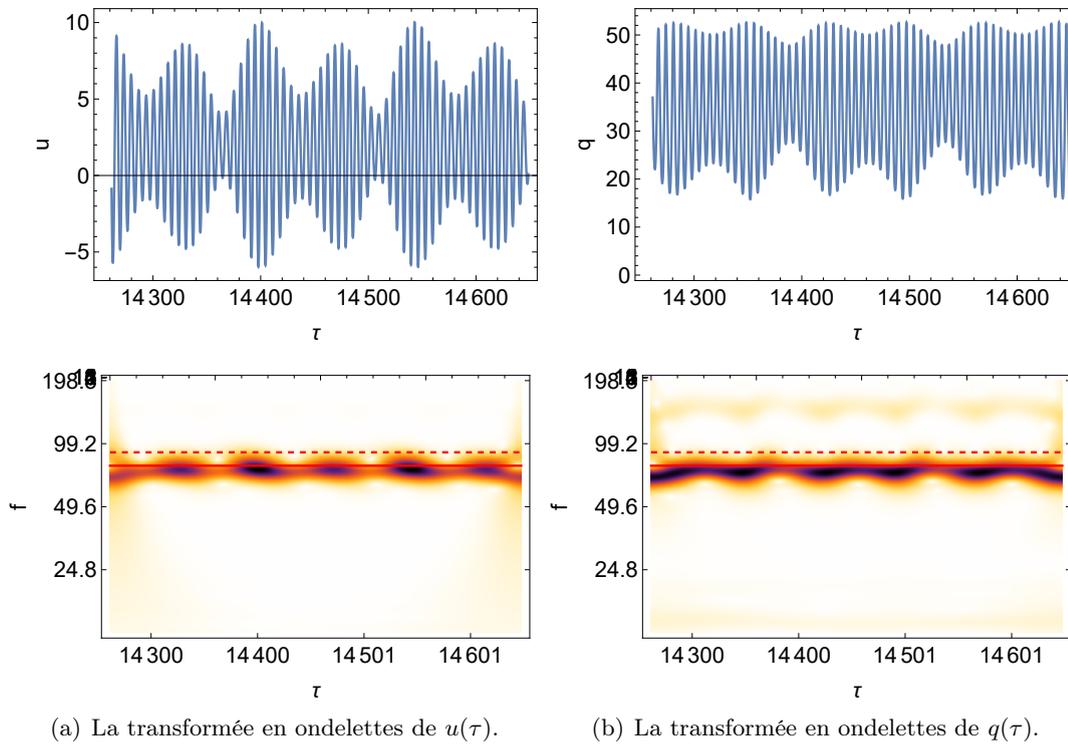


Figure 4.42: La transformée en ondelettes de la réponse temporelle du système à la force et à la fréquence d'excitation $F = 0,9$ et $f = 74,3$ Hz. Les lignes continues et discontinues rouges indiquent respectivement la fréquence de résonance du tube et de la membrane.

4.7 Utilisation d'autres configurations de membrane

Dans cette partie, on présentera le résultat de notre méthode d'optimisation pour d'autres configurations de membranes et on examinera leurs effets sur ces zones d'optimisation. Les figures Fig.4.49 et Fig.4.50 présentent la superposition de plusieurs courbes représentant la variation de l'aire donnée par la courbe de crête en fonction de la raideur linéaire de la membrane pour différentes configurations de membranes. Dans la figure Fig.4.49, les membranes ont la même épaisseur $h_m = 0,22 \cdot 10^{-3} m$ et trois différents rayons $R_m = 4 \cdot 10^{-2} m$, $R_m = 5 \cdot 10^{-2} m$ et $R_m = 6 \cdot 10^{-2} m$. Alors que dans la figure Fig.4.50 les membranes ont le même rayon $R_m = 5 \cdot 10^{-2} m$ et différentes épaisseurs $h_m = 0,22 \cdot 10^{-3} m$, $h_m = 0,3 \cdot 10^{-3} m$ et $h_m = 0,3 \cdot 10^{-3} m$. La ligne rouge discontinue présente la limite qui sépare entre la zone monostable et bistable.

Les résultats de l'étude paramétrique qui a été menée sur la variation des rayons et de l'épaisseur des membranes bistables, présentés Fig.4.49 et Fig.4.50, conduisent à des résultats comparables à ceux obtenus par R. Bellet dans sa thèse sur la membrane monostable et dont les principaux résultats sont présentés Fig.4.51 et Fig.4.52, celles-ci présentent respectivement l'influence du rayon et de l'épaisseur de la membrane sur la courbe de crête pour différentes configurations de membranes monostables. Les résultats présentés dans Fig.4.49 montrent qu'avec la diminution du rayon de la membrane bistable, la zone limitée par les deux plateaux minimums locaux se décale vers le haut (présente une aire plus grande). Dans cette zone, avec la diminution du rayon de la membrane, l'atténuation sera moins importante. La figure Fig.4.51 montre clairement qu'avec la diminution du rayon de la membrane, l'aire donnée par la courbe de crête sera plus

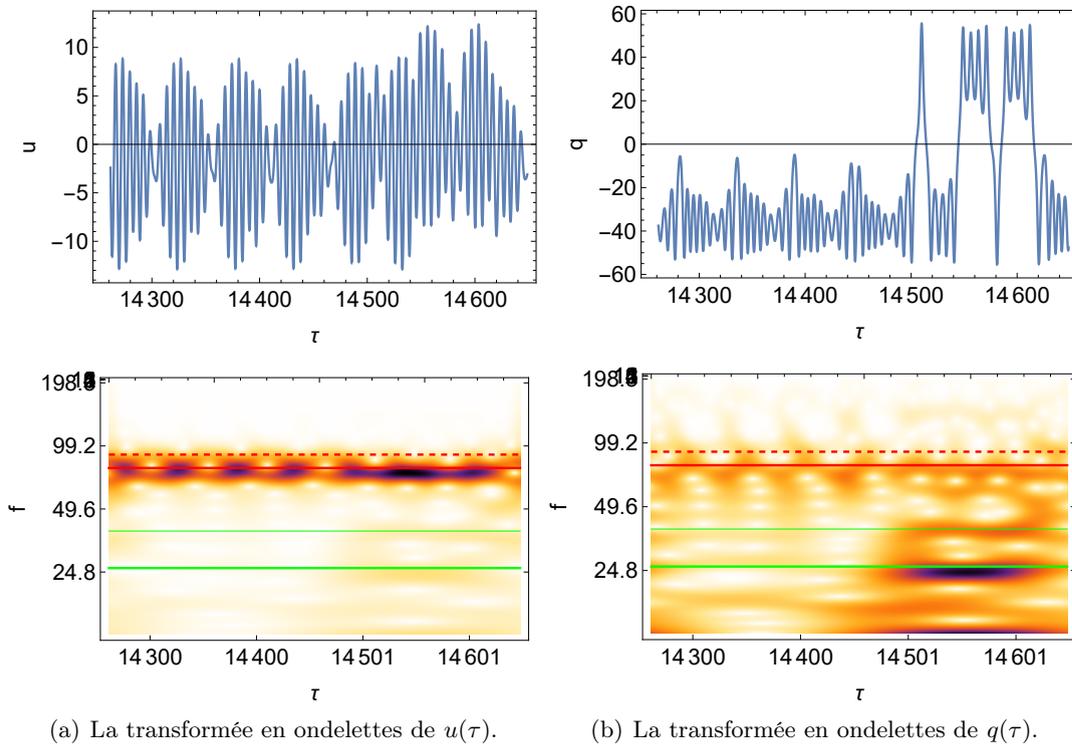


Figure 4.43: La transformée en ondelettes de la réponse temporelle du système à la force et à la fréquence d'excitation $F = 1, 4$ et $f = 74, 3$ Hz. Les lignes continues et discontinues rouges indiquent respectivement la fréquence de résonance du tube et de la membrane. Les lignes vertes continues épaisses et fines correspondent respectivement aux fréquences d'excitation $\frac{1}{3}f_t$ et $\frac{1}{2}f_t$.

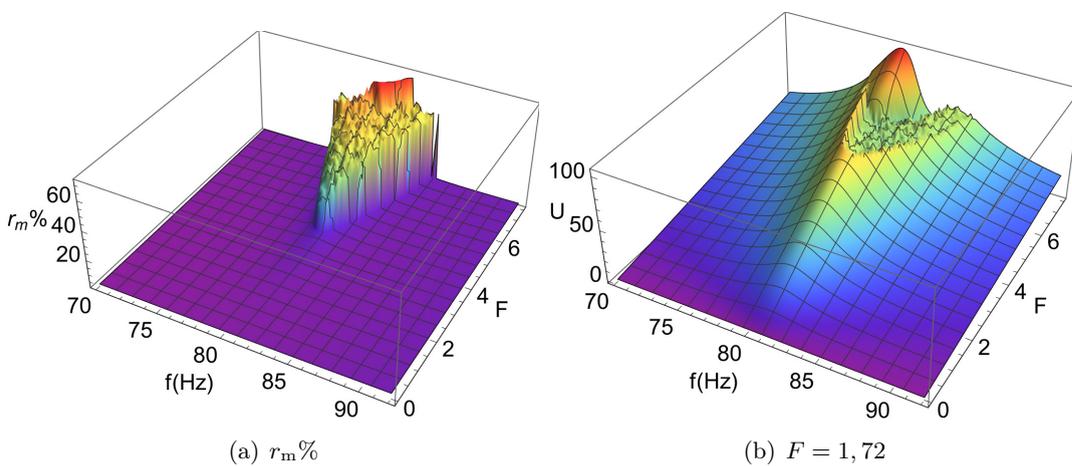


Figure 4.44: Le pourcentage de l'énergie dissipée par la membrane (gauche) et le déplacement de l'air en bout du tube (droite) en fonction de l'amplitude et de la fréquence d'excitation pour la valeur de raideur linéaire $k_1 = -0, 276$.

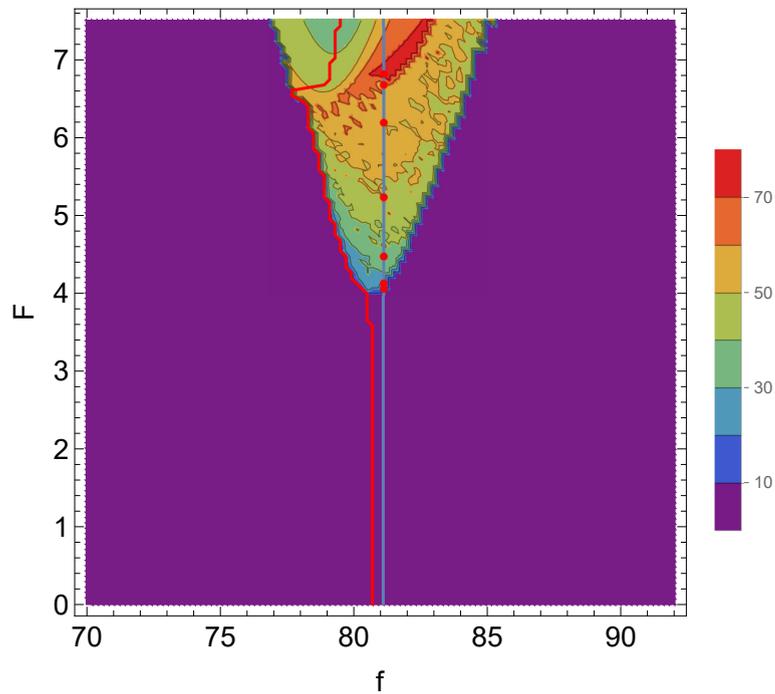


Figure 4.45: Le tracé de contour du pourcentage de l'énergie dissipée par la membrane en fonction de l'amplitude et de la fréquence d'excitation pour la valeur de raideur linéaire $k_1 = -0,276$. La courbe rouge représente la variation de la fréquence de crête. La ligne verticale bleue correspond à la fréquence $f = 81$ Hz.

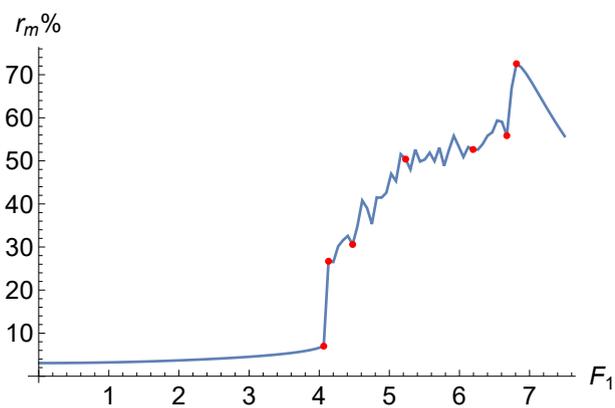


Figure 4.46: La variation du pourcentage de l'énergie dissipée par la membrane en fonction de l'amplitude d'excitation à la fréquence $f = 81$ Hz pour $k_1 = -0,276$.

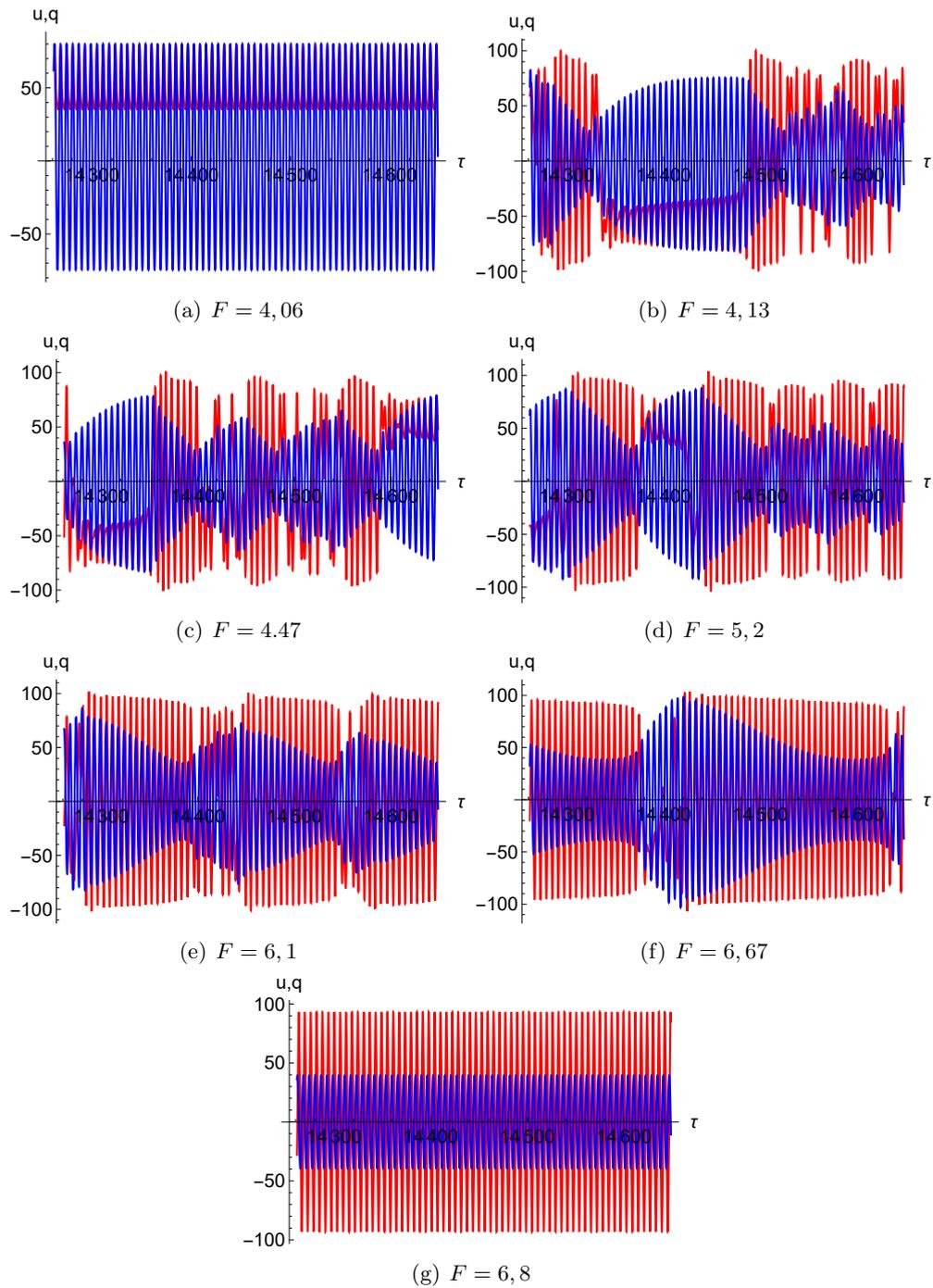


Figure 4.47: Les réponses temporelles du système correspondent aux points rouges indiqués sur la figure Fig.4.46. Le déplacement de l'air en bout du tube est représenté en bleu, tandis que le déplacement au centre de la membrane est en rouge. $k_1 = -0,276$

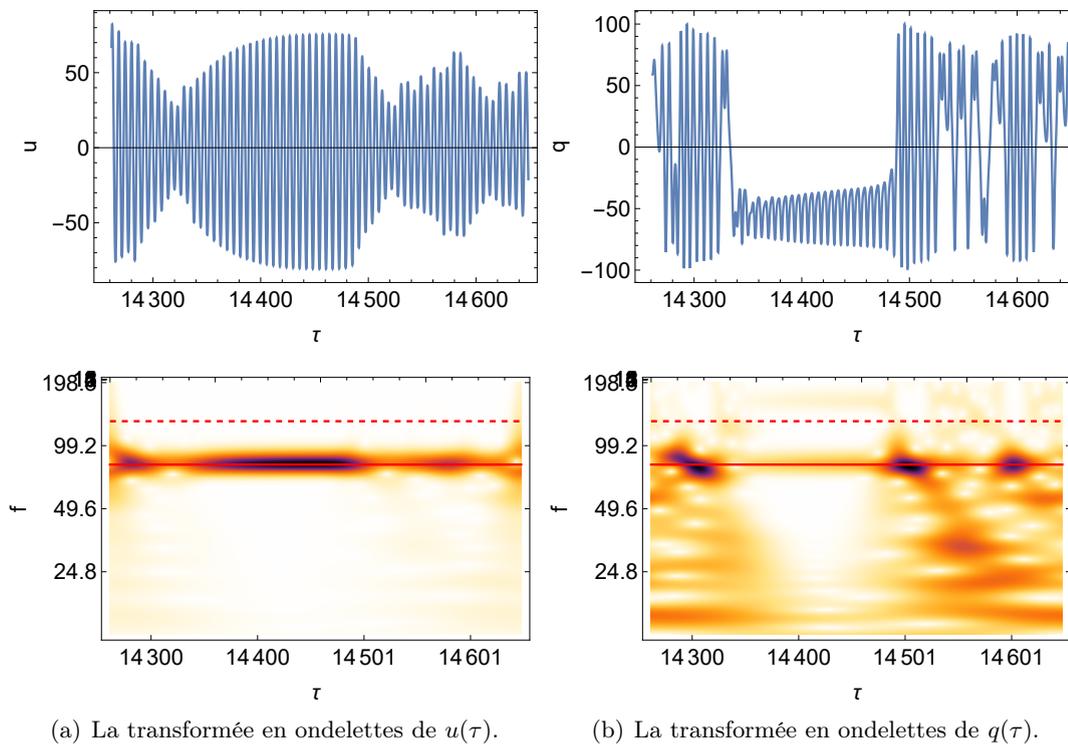


Figure 4.48: La transformée en ondelettes de la réponse temporelle du système à la force et à la fréquence d'excitation $F = 4, 13$ et $f = 81$ Hz. Les lignes continues et discontinues rouges indiquent respectivement la fréquence de résonance du tube et de la membrane.

important. À partir de cette figure, on a remarqué aussi qu'avec l'augmentation du rayon de la membrane, le PE est apparu à un niveau sonore plus haut. Malgré ceci, la zone limitée par les deux plateaux minimums locaux de la courbe d'optimisation présente une atténuation plus importante. Ceci est dû au large plateau du PE observé lorsque le rayon augmente. Dans cette zone, le faible niveau d'apparition du PE ne peut pas être promoteur à cause du petit plateau du PE qui correspond à une aire relativement grande. En dehors de cette zone, c.-à-d. pour les plus fortes et faibles valeurs de raideur linéaire, la figure de l'optimisation Fig.4.49 montre que le tri des courbes selon les rayons change. Dans cette zone, le rayon le plus petit correspond à l'aire la plus petite. En effet, avec l'augmentation de la valeur de raideur linéaire, le plateau du pompage devient plus étroit et plus bas. Ce point nous intéresse pour expliquer ce changement dans ces zones d'extrémité, où le faible niveau sonore du plateau du pompage observé avec la diminution de la valeur de raideur linéaire sera dominant. Donc pour les raideurs linéaires fortes et faibles, la diminution du rayon de la membrane améliore l'atténuation du système.

Dans la figure Fig.4.49, chaque courbe d'optimisation est associée à deux lignes verticales de la même couleur, représentant les valeurs de raideur linéaire pour lesquelles la fréquence propre couplée de la membrane devient supérieure à celle du tube. Pour le comportement bistable, lorsque le rayon de la membrane diminue, la valeur de raideur linéaire à laquelle la fréquence propre de la membrane devient supérieure à celle du tube sera plus faible. Il est clair ici que la zone des raideurs linéaires optimales suit la variation de cette valeur de raideur linéaire, à partir de laquelle on observe un changement des fréquences. Ceci confirme que le plateau minimum bistable est observé peu après que

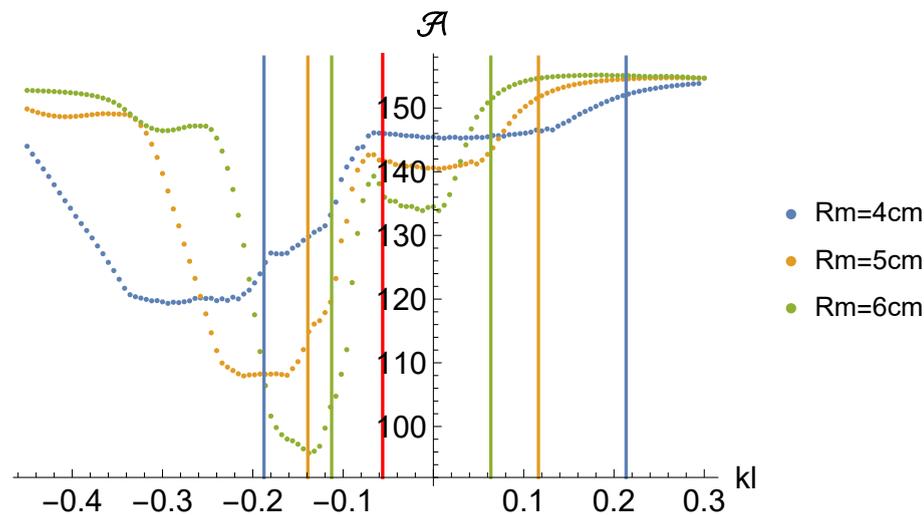


Figure 4.49: L'influence du rayon de la membrane sur la variation de l'aire donnée par la courbe de crête en fonction de la raideur linéaire pour une membrane d'épaisseur $h_m = 0,22 \times 10^{-3}$ m.

la fréquence propre couplée de la membrane devient supérieure à celle du tube. En ce qui concerne le comportement monostable, la diminution du rayon de la membrane est accompagnée par une augmentation de la valeur de raideur linéaire pour laquelle la fréquence propre de la membrane devient supérieure. Avec cela, la zone des raideurs linéaires optimales devient plus large. À partir de cette figure, on peut noter que la zone du plateau minimum monostable est limitée entre la valeur critique de raideur linéaire $k_{lc} = -\frac{\beta}{\beta+1}$ qui sépare les deux différents types de comportements (monostable et bistable) et la valeur de raideur linéaire pour laquelle la fréquence propre de la membrane devient plus grande.

La figure Fig.4.50 montre qu'avec la diminution de l'épaisseur de la membrane, la zone limitée par les deux plateaux minimums locaux présente une aire plus petite, donc une atténuation plus importante. Comme le montre la figure Fig.4.52 avec la diminution de l'épaisseur de la membrane, l'aire donnée par la courbe de crête devient plus petite. En effet, avec la diminution de l'épaisseur, le phénomène du PE est apparu à un niveau sonneur plus bas en gardant la même profondeur du plateau. Dans les extrémités, pour les fortes et faibles valeurs de raideurs linéaires, avec la diminution de l'épaisseur de la membrane, l'aire devient plus grande, donc l'atténuation sera moins importante.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une méthode d'optimisation qui compare la performance de la membrane en variant la valeur de raideur linéaire. Cette méthode ne permet pas seulement de comparer entre la performance d'une membrane bistable et monostable, mais aussi pour chaque type de présenter la raideur linéaire optimale. En général, cette méthode montre qu'une solution à base d'une membrane bistable permet d'améliorer efficacement la performance de notre système. Et pour chaque type de comportement monostable et bistable, on a une plage de raideur linéaire qui varie en fonction des autres paramètres de membrane, correspondant à l'atténuation maximale. Dans cette plage de raideurs linéaires optimales, on a un compromis entre les deux

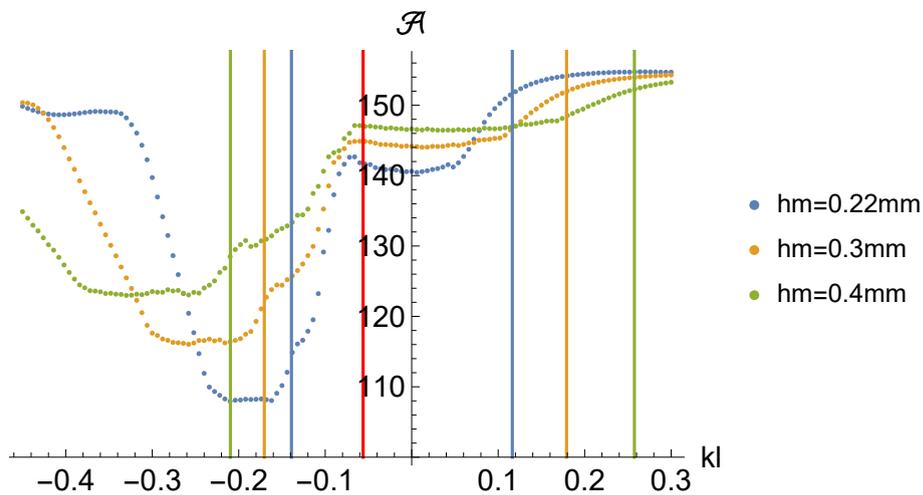
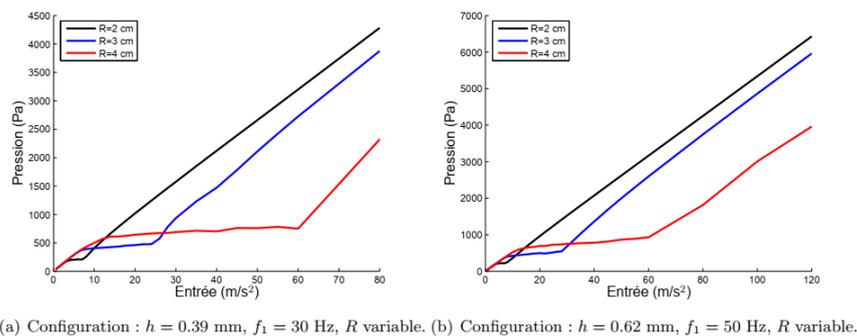
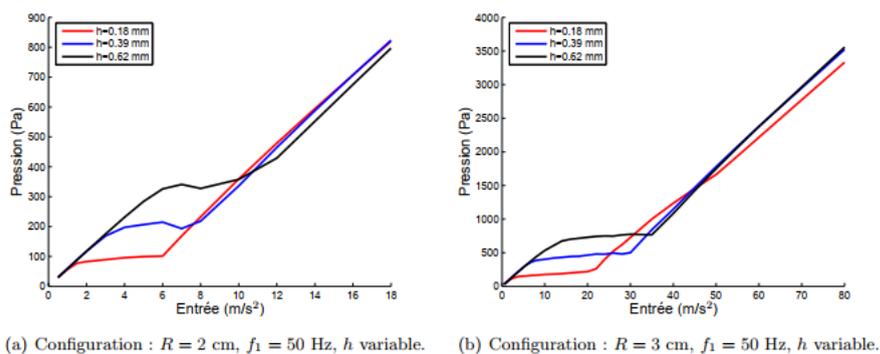


Figure 4.50: L'influence de l'épaisseur de la membrane sur la variation de l'aire donnée par la courbe de crête en fonction de la raideur linéaire pour une membrane de rayon $R_m = 5 * 10^{-2}$ m.



(a) Configuration : $h = 0.39$ mm, $f_1 = 30$ Hz, R variable. (b) Configuration : $h = 0.62$ mm, $f_1 = 50$ Hz, R variable.

Figure 4.51: Résultat tiré de la thèse de R. Bellet [5] qui montre l'influence du rayon de la membrane sur la courbe de crête.



(a) Configuration : $R = 2$ cm, $f_1 = 50$ Hz, h variable. (b) Configuration : $R = 3$ cm, $f_1 = 50$ Hz, h variable.

Figure 4.52: Résultat tiré de la thèse de R. Bellet [5] qui montre l'influence de l'épaisseur de la membrane sur la courbe de crête.

principaux facteurs de notre méthode d'optimisation : le niveau sonore de l'apparition du PE et la profondeur de son plateau. Ceci explique la présence de cette plage de même degré d'optimisation. En utilisant diverses configurations de membranes, nous avons confirmé que le champ optimal de raideurs linéaires se situent lorsque la fréquence propre de la membrane dépasse celle du tube, et que ces deux fréquences sont relativement proches. Cela se traduit par l'existence de deux zones distinctes de PE, l'une liée au caractère ramollissant et l'autre liée au caractère raidissant de la membrane bistable. Les meilleures performances d'atténuation sont dues fondamentalement à la bistabilité et n'apparaissent pas pour des systèmes monostables, même optimisés. En effet, une membrane bistable avec une raideur linéaire optimale permet de réduire l'aire sous la courbe de crête de 23% par rapport à une membrane monostable avec une raideur linéaire optimale, ce qui se traduit par une meilleure atténuation. Ce résultat, qui était une hypothèse au début de ce travail, est maintenant démontré.

Chapitre 5

Étude analytique d'un système avec NES bistable

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté une approche d'optimisation numérique visant à évaluer l'efficacité d'atténuation de différentes membranes, qu'elles soient monostables ou bistables. Les résultats de cette optimisation numérique ont révélé que les systèmes bistables présentent les meilleures performances en termes d'atténuation. Dans ce chapitre, nous proposons une étude analytique du système bistable forcé afin d'expliquer les principaux résultats obtenus lors de l'optimisation numérique.

En comparaison avec le système monostable, le système bistable présente une dynamique plus complexe qui dépasse la capacité des modèles analytiques établis précédemment dans le troisième chapitre, mis au point pour les systèmes monostables. Par conséquent, dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle application de la méthode de complexification de Manevitch, permettant de déterminer à la fois les solutions périodiques intrapuits et interpuits du système bistable. Cette évolution a été inspirée par les travaux en référence [41, 42, 43]. Cette nouvelle technique repose sur une transformation de coordonnées qui introduit une position d'équilibre variable, caractérisant ainsi la dynamique intrapuits de notre système.

Afin de confirmer la validité de ces solutions, nous avons utilisé une technique basée sur la méthode d'équilibrage harmonique, qui, jusqu'à cette étude, était la seule méthode capable de décrire la dynamique périodique des systèmes bistables [41, 42, 43].

Après la validation de cette nouvelle application de la méthode de complexification averaging, les bifurcations locales de ces solutions périodiques sont étudiées. Le comportement fréquentiel du système bistable observé par intégration numérique est expliqué à travers les résultats de cette étude analytique.

Ensuite, la partie suivante est consacrée à l'analyse asymptotique du système, mettant en œuvre la méthode des échelles multiples pour concevoir, pour la première fois dans ce travail, le modèle décrivant la VI lente des oscillations intrapuits et interpuits du système. Ce modèle est ensuite utilisé pour valider les raideurs linéaires optimales des membranes bistables.

Dans la dernière section de cette étude, nous présentons et comparons la variation de la position d'équilibre dynamique en fonction de l'amplitude et de la fréquence d'excitation, en utilisant à la fois des méthodes numériques et analytiques.

Étant donné que l'étude analytique des systèmes bistables forcés n'est pas explorée jusqu'à ce travail, et que les techniques de calcul ne sont pas très développées dans ce domaine, la technique d'analyse utilisée dans ce chapitre a été proposée par nous-mêmes. Ainsi, les différentes parties de ce chapitre ne se limitent pas à l'explication des résultats de l'optimisation, mais visent également à valider cette nouvelle technique. Elles s'éloignent même de l'objectif principal du chapitre (expliquer les résultats de l'optimisation) pour approfondir le calcul, étant donné l'enrichissement potentiel qu'il apporte.

5.1 Les solutions périodiques

Dans ce paragraphe, nous présentons d'abord la nouvelle démarche proposée qui utilise la méthode de complexification averaging pour déterminer simultanément les solutions périodiques intrapuits et interpuits. Ensuite, nous confirmons la validité de cette approche en appliquant la méthode d'équilibrage harmonique décrite dans les références [41, 42, 43]. Le modèle utilisé pour calculer les solutions périodiques du système monostable (Eq.3.2) est employé à nouveau :

$$\begin{aligned} u'' + u + \gamma\lambda_1 u' + \gamma\beta_1(u - q) &= \gamma F_1 \cos\left(\frac{\tau\Omega}{\omega_t}\right) \\ \gamma q'' + \gamma k_{11}q + \gamma k_{n11}q^3 + \gamma c_{\eta 11}q' + \gamma c_{\eta m 11}q^2 q' + \gamma\beta_1(q - u) &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

5.1.1 Méthode de complexification averaging

En raison de l'existence de solutions intrapuits qui oscillent autour de l'une des deux positions d'équilibre stables, avec un décalage par rapport à l'amplitude zéro de leur axe d'oscillation, nous proposons la transformation de coordonnées suivante :

$$u = x - u_1, q = y - q_1, \quad (5.2)$$

où u_1 et q_1 représentent les valeurs moyennes ou les amplitudes de décalage des déplacements de l'air u et de la membrane q . Cette transformation a pour effet de centrer l'axe des oscillations intrapuits autour de zéro. Ensuite, nous faisons l'hypothèse que les deux variables u_1 et q_1 varient lentement.

Les variables de Menevitch sont définies en fonction de nouvelles coordonnées x et y :

$$\begin{aligned} \phi_1 e^{i\tau\omega} &= x' + ix\omega \\ \phi_2 e^{i\tau\omega} &= y' + iy\omega \end{aligned} \quad (5.3)$$

Les équations Eq.5.2 et Eq.5.3 sont incorporées dans le système d'équations Eq.5.1. Les termes correspondant à l'harmonique d'ordre 0 et 1 (c'est-à-dire les termes constants et ceux proportionnels à $e^{i\tau\omega}$) sont séparés. Cette opération conduit à l'obtention des deux systèmes d'équations suivants :

Les termes constants :

$$\begin{aligned} \gamma\lambda_1 u'_1 + u_1(\beta_1\gamma + 1) - \beta_1\gamma q_1 &= 0 \\ c_{\eta 11} q'_1 + k_{nl1} q_1^3 + q_1 \left(\beta_1 + k_{l1} + \frac{3k_{nl1}\phi_2\phi_2^*}{2\omega^2} \right) - \beta_1 u_1 &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Les termes proportionnels à $e^{i\tau\omega}$ (ordre 1) :

$$\begin{aligned} \phi'_1 + \phi_1 \left(-\frac{i\beta_1\gamma}{2\omega} + \frac{\gamma\lambda_1}{2} + \frac{i\omega}{2} - \frac{i}{2\omega} \right) + \frac{i\beta_1\gamma\phi_2}{2\omega} &= \frac{\gamma F_1}{2} \\ \phi'_2 + \phi_2 \left(-\frac{i\beta_1}{2\omega} + \frac{c_{\eta 11}}{2} + q_1^2 \left(\frac{c_{\eta nl1}}{2} - \frac{3ik_{nl1}}{2\omega} \right) - \frac{ik_{l1}}{2\omega} + \frac{i\omega}{2} \right) + \frac{i\beta_1\phi_1}{2\omega} \\ + \left(\frac{c_{\eta nl1}}{8\omega^2} - \frac{3ik_{nl1}}{8\omega^3} \right) \phi_2^* \phi_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Outre le système d'équations Eq.5.5, qui contient les équations complexes de modulation lente, nous avons identifié deux autres équations définies par le système Eq.5.4. Ces deux équations d'ordre 0 ne sont pas présentes dans le calcul des solutions périodiques du système monostable. En effet, suite à la transformation de coordonnées imposée précédemment Eq.5.2, des termes d'harmonique 0 ont fait leur apparition. Ces termes découlent de la nature bistable de notre système, qui possède des solutions intrapuits ayant une valeur moyenne différente de zéro. Ces termes introduisent une modification dans l'application de la méthode d'averaging par rapport aux cas habituels. La méthode d'averaging est ici appliquée non seulement sur l'harmonique 1 (en fonction de la pulsation ω), mais aussi sur l'harmonique 0. Cela se traduit par l'apparition des deux équations supplémentaires Eq.5.4. De plus, par rapport aux équations de modulation du système monostable (voir Eq.3.4 au chapitre 3), nous avons observé la présence d'un terme additionnel $q_1^2 \left(\frac{c_{\eta nl1}}{2} - \frac{3ik_{nl1}}{2\omega} \right)$, directement lié à la valeur moyenne q_1 .

Les points d'équilibre sont déterminés en mettant les dérivées des systèmes d'équations Eq.5.4 et Eq.5.5 à zéro :

$$u'_1 = q'_1 = \phi'_1 = \phi'_2 = 0, u_1 = u_{10}, q_1 = q_{10}, \phi_1 = \phi_{10}, \phi_2 = \phi_{20}. \quad (5.6)$$

En introduisant Eq.5.6 dans les équations Eq.5.4 et Eq.5.5 on obtient les équations :

$$\begin{aligned} u_{10}(\beta_1\gamma + 1) - \beta_1\gamma q_{10} &= 0 \\ k_{nl1} q_{10}^3 + q_{10} \left(\beta_1 + k_{l1} + \frac{3k_{nl1}|\phi_{20}|^2}{2\omega^2} \right) - \beta_1 u_{10} &= 0 \\ \phi_{10} \left(-\frac{i\beta_1\gamma}{2\omega} + \frac{\gamma\lambda_1}{2} + \frac{i\omega}{2} - \frac{i}{2\omega} \right) + \frac{i\beta_1\gamma\phi_{20}}{2\omega} &= \frac{\gamma F_1}{2} \\ \phi_{20} \left(-\frac{i\beta_1}{2\omega} + \frac{c_{\eta 11}}{2} - \frac{ik_{l1}}{2\omega} + \frac{i\omega}{2} + \left(\frac{c_{\eta nl1}}{8\omega^2} - \frac{3ik_{nl1}}{8\omega^3} \right) |\phi_{20}|^2 \right) + \frac{i\beta_1\phi_{10}}{2\omega} \\ + \phi_{20} q_{10}^2 \left(\frac{c_{\eta nl1}}{2} - \frac{3ik_{nl1}}{2\omega} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

À partir des deux premières équations du système Eq.5.7, il est possible de trouver l'expression des moyennes u_{10} et q_{10} en termes de l'amplitude de modulation ϕ_{20} :

$$q_{10} = \begin{cases} \pm \sqrt{-\frac{\beta_1 + k_{n1}(\beta_1\gamma + 1)}{k_{n1}(\beta_1\gamma + 1)} - \frac{3|\phi_{20}|^2}{2\omega^2}} \\ 0 \end{cases}, u_{10} = \frac{\beta_1\gamma}{\beta_1\gamma + 1} q_{10}. \quad (5.8)$$

La valeur moyenne $q_{10} = 0$ correspond aux oscillations intrapuits du système bistable, tandis que l'expression $q_{10} \neq 0$ est associée aux oscillations intrapuits.

Il est à noter que les moyennes u_{10} et q_{10} des oscillations intrapuits dépendent de la modulation lente ϕ_{20} . De plus, ces moyennes q_{10} et u_{10} satisfont la condition d'équilibre statique lorsque l'amplitude de la modulation lente $|\phi_{20}|$ tend vers 0 (lorsque $|\phi_{20}| = 0$, ces moyennes vérifient $q_{10} = q_e$ et $u_{10} = u_e$). Dans les articles [41, 42, 43], où la méthode de l'équilibrage harmonique est employée, les équivalents de ces moyennes sont appelés "positions d'équilibre stables". Toutefois, dans cette étude, afin d'éviter toute confusion avec la position d'équilibre statique, qui est constante, nous les nommerons "positions d'équilibre dynamique".

En utilisant la troisième équation du système Eq.5.7, nous avons déterminé l'expression de ϕ_{10} :

$$\phi_{10} = \frac{\beta_1\gamma\phi_{20} + i\gamma F_1\omega}{\beta_1\gamma + i\gamma\lambda_1\omega - \omega^2 + 1}. \quad (5.9)$$

En substituant cette expression dans la quatrième équation du système Eq.5.7, nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} Z_{20}^3|c|^2 + Z_{20}^2(|b+c|^2 - |b|^2 - |c|^2) + Z_{20}|b|^2 - |a|^2 &= 0 \\ Z_{20} &= |\phi_{20}|^2, a = -\frac{1}{2}\beta_1\gamma F_1 \\ b &= (\beta_1\gamma + i\gamma\lambda_1\omega - \omega^2 + 1) \left(-\frac{i\beta_1}{2\omega} + \frac{i\omega}{2} + \frac{c_{\eta n1}}{2} - \frac{ik_{n1}}{2\omega} + q_{10}^2 \left(\frac{c_{\eta n1}}{2} - \frac{3ik_{n1}}{2\omega} \right) \right) \\ &+ \frac{i\beta_1^2\gamma^2}{2\omega}, c = (\beta_1\gamma + i\gamma\lambda_1\omega - \omega^2 + 1) \left(\frac{c_{\eta n1}}{8\omega^2} - \frac{3ik_{n1}}{8\omega^3} \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

En remplaçant q_{10} par ces expressions (Eq.5.8), nous pouvons résoudre les solutions Z_{20} de l'équation Eq.5.10. Ensuite, les déplacements de l'air à l'extrémité du tube et de la membrane sont calculés à l'aide de ces deux expressions : $X = \frac{|\phi_{10}|}{\omega}$ et $Y = \frac{|\phi_{20}|}{\omega}$.

Nous allons maintenant examiner la stabilité de ces solutions. À cette étape, des termes de perturbation sont introduits autour des points d'équilibre :

$$u_1 = u_{10} + \rho_u, q_1 = q_{10} + \rho_q, \phi_1 = \phi_{10} + \rho_1, \phi_2 = \phi_{20} + \rho_2. \quad (5.11)$$

En introduisant le changement de variables Eq.5.11 dans les équations Eq.5.4 et Eq.5.5, tout en conservant les termes proportionnels à ρ_u, ρ_q, ρ_1 et ρ_2 , nous obtenons le système linéarisé suivant :

$$\begin{aligned}
\rho'_u &= \rho_u \left(-\frac{\beta_1}{\lambda_1} - \frac{1}{\gamma\lambda_1} \right) + \frac{\beta_1\rho_q}{\lambda_1} \\
\rho'_q &= \frac{\beta_1\rho_u}{c_{\eta 11}} - \rho_q \left(\frac{\beta_1}{c_{\eta 11}} + \frac{kl_1}{c_{\eta 11}} + \frac{3k_{nl1}q_{10}^2}{c_{\eta 11}} + \frac{3k_{nl1}\phi_{20}\phi_{20}^*}{2c_{\eta 11}\omega^2} \right) \\
&\quad - \frac{3k_{nl1}q_{10}\rho_2^*\phi_{20}}{2c_{\eta 11}\omega^2} - \frac{3k_{nl1}q_{10}\rho_2\phi_{20}^*}{2c_{\eta 11}\omega^2} \\
\rho'_1 &= -\rho_1 \left(-\frac{i\beta_1\gamma}{2\omega} + \frac{\gamma\lambda_1}{2} + \frac{i\omega}{2} - \frac{i}{2\omega} \right) - \frac{i\beta_1\gamma\rho_2}{2\omega} \\
\rho'_2 &= -q_{10}\rho_q\phi_{20} \left(c_{\eta 11} - \frac{i\beta_1\rho_1}{2\omega} - \frac{3ik_{nl1}}{\omega} \right) - \rho_2^* \left(\frac{c_{\eta 11}}{8\omega^2} - \frac{3ik_{nl1}}{8\omega^3} \right) \phi_{20}^2 \\
&\quad - \rho_2 \left(-\frac{i\beta_1}{2\omega} + \frac{c_{\eta 11}}{2} + \frac{i\omega}{2} - \frac{ik_{11}}{2\omega} + \left(\frac{c_{\eta 11}}{4\omega^2} - \frac{3ik_{nl1}}{4\omega^3} \right) |\phi_{20}|^2 + q_{10}^2 \left(\frac{c_{\eta 11}}{2} - \frac{3ik_{nl1}}{2\omega} \right) \right). \quad (5.12)
\end{aligned}$$

Nous pouvons réexprimer ce système sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \rho'_u \\ \rho'_q \\ \rho'_1 \\ \rho'_2 \\ (\rho_u^*)' \\ (\rho_q^*)' \\ (\rho_1^*)' \\ (\rho_2^*)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 & M_{24} & 0 & 0 & 0 & M_{28} \\ 0 & 0 & M_{33} & M_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{42} & M_{43} & M_{44} & 0 & 0 & 0 & M_{48} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{11}^* & M_{12}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{28}^* & M_{21}^* & M_{22}^* & 0 & M_{24}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{33}^* & M_{34}^* \\ 0 & 0 & 0 & M_{48}^* & 0 & M_{42}^* & M_{43}^* & M_{44}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_u \\ \rho_q \\ \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_u^* \\ \rho_q^* \\ \rho_1^* \\ \rho_2^* \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

En raison de l'introduction des deux autres variables, u_1 et q_1 , la matrice de stabilité M est de dimension de 8, alors qu'elle était de dimension 4 pour le système monostable. Une fois que l'amplitude Z_{20} est obtenue, nous pouvons calculer l'amplitude complexe ϕ_{20} , ce qui nous permet de déterminer les coefficients de la matrice M ($M_{i,j}$). En analysant les signes de la partie réelle des valeurs propres de la matrice M , nous pouvons étudier la stabilité des points d'équilibre. Un point d'équilibre est considéré comme stable lorsque toutes les parties réelles des valeurs propres sont négatives. Dans le cas contraire, il est instable.

Dans ce chapitre, nous avons utilisé la même configuration de membrane que celle employée dans le chapitre précédent, à savoir une membrane d'épaisseur $h_m = 0,22 * 10^{-3}$ m et de rayon $R_m = 5 * 10^{-2}$ m.

Dans la figure Fig.5.1, nous avons exposé les solutions périodiques de notre système bistable pour différentes amplitudes d'excitation, avec une valeur de raideur linéaire $k_1 = -0,11$. Il est à noter que cette valeur se situe dans la zone optimale d'atténuation

de la membrane (comme indiqué dans la Fig.4.6). De manière exceptionnelle, la plage de fréquence sélectionnée a été étendue sur l'intervalle $[0, 1; 90]$ Hz. Ce choix nous permet d'explorer les divers régimes de réponse, dont certains se situent à très basses fréquences. Dans la Fig.5.1, les solutions intrapuits stables et instables sont représentées respectivement par des triangles verts et gris, tandis que les solutions interpuits stables et instables sont symbolisées respectivement par des carrés bleus et gris.

À faible amplitude d'excitation, les solutions intrapuits présentent une courbe de résonance avec deux pics de résonance. Les fréquences de ces deux pics correspondent aux fréquences propres du système bistable, telles que définies par les expressions Eq.4.4. À des fréquences d'excitation très basses, nous avons observé l'apparition d'une branche instable des solutions intrapuits, qui n'est pas physiquement réalisable. En ce qui concerne les solutions interpuits, elles présentent une branche inférieure instable et une autre branche supérieure qui apparaît à basses fréquences d'excitation. La branche des solutions interpuits à basses fréquences présente l'une des caractéristiques typiques des systèmes bistables. Cette particularité a été explorée à plusieurs reprises dans le livre [40], où il a été affirmé que les solutions interpuits présentent une dynamique non résonante car elles ne montrent aucune dépendance aux caractéristiques de type résonance.

Il convient de noter que, malgré son instabilité, cette branche inférieure des solutions interpuits présente un pic de résonance à la fréquence $f = 81,8$ Hz. Si l'on se réfère aux expressions des fréquences propres du système monostable (Eq.4.5), pour la valeur de raideur linéaire $k_1 = -0,11$ (bistable), le calcul montre que $f_{1\text{Mon}}$ présente une valeur imaginaire pure et que $f_{2\text{Mon}} = 81,8$ Hz correspond à la fréquence de ce pic instable. Par conséquent, on peut supposer que cette branche inférieure instable est liée au comportement monostable.

À mesure que l'amplitude d'excitation augmente, la courbe de résonance des solutions intrapuits est affectée par l'effet non linéaire de ramollissement de la membrane. Le pic de résonance autour de la fréquence propre de la membrane se décale vers les basses fréquences. En ce qui concerne les solutions interpuits, la branche supérieure s'élargit vers les hautes fréquences. Si l'amplitude d'excitation continue d'augmenter, le pic de résonance de la membrane fusionne avec la branche supérieure instable. À une amplitude d'excitation de $F_1 = 15,6$ Hz, les solutions intrapuits présentent une zone d'instabilité autour du pic de résonance du tube.

À une amplitude de $F_1 = 16,9$, on observe que des solutions interpuits présentant une résonance détachée externe distincte à environ 70 Hz. En augmentant l'amplitude d'excitation, cette résonance détachée fusionne avec la branche supérieure des solutions interpuits, et une autre résonance externe instable à des fréquences plus élevées apparaît.

À une amplitude de $F_1 = 16,9$, on observe que des solutions interpuits présentant une résonance détachée externe distincte à environ 70 Hz. En augmentant l'amplitude d'excitation, cette résonance détachée fusionne avec la branche supérieure des solutions interpuits, et une autre résonance externe instable à des fréquences plus élevées apparaît. À l'amplitude d'excitation $F_1 = 29$ Hz, cette résonance externe instable fusionne avec la branche supérieure des solutions interpuits. De plus, à cette amplitude d'excitation, on a observé que autour du pic de résonance du tube, les solutions de la branche inférieure des solutions interpuits deviennent stables, tandis que les solutions intrapuits disparaissent. En

fait, dans cette zone, l'expression de q_{10} (conformément à l'Eq.5.7) n'est pas définie, car $-\frac{\beta_1+k_{11}(\beta_1\gamma+1)}{k_{n11}(\beta_1\gamma+1)} - \frac{3|\phi_{20}|^2}{2\omega^2}$ devient négatif. Dans cette situation, la seule solution possible pour le système est que $q_{10} = 0$. En se basant sur l'explication fournie ci-dessus, qui montre que le pic de résonance de la branche inférieure instable interpuits correspond à la fréquence propre $f_{2\text{Mon}}$ de la version monostable du système, on peut supposer que l'indéfinissabilité de l'expression de $q_{10} \neq 0$ dans cette plage contraigne le système à adopter un caractère monostable caractérisé par $f_{2\text{Mon}}$.

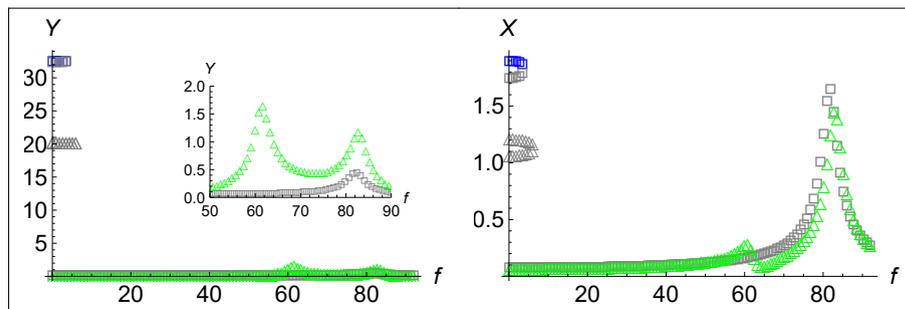
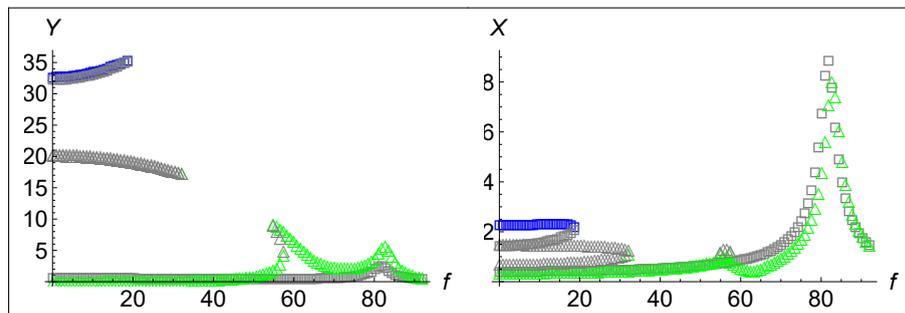
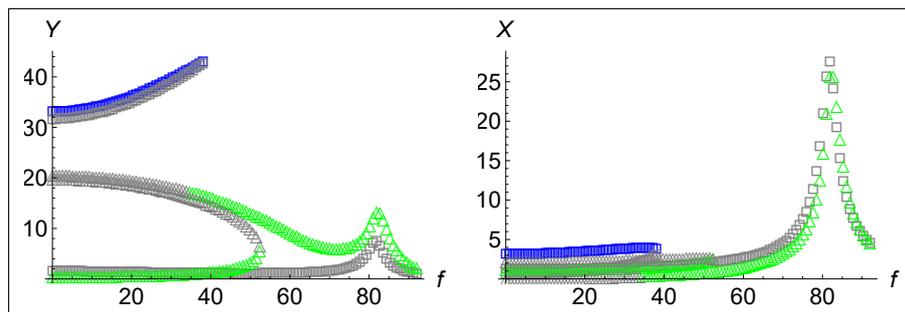
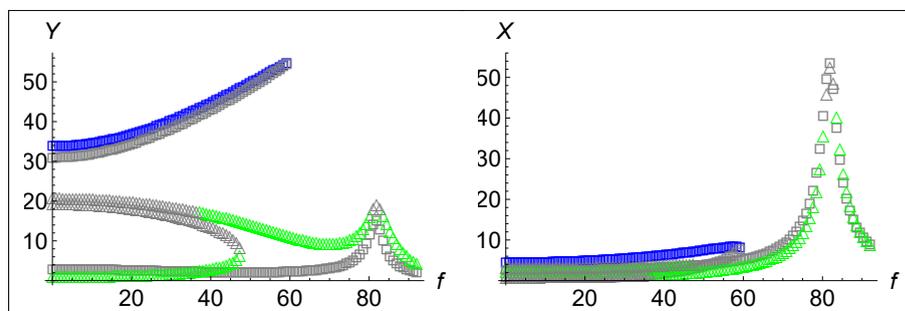
(a) $F_1 = 0,5$ (b) $F_1 = 2,6$ (c) $F_1 = 8$ (d) $F_1 = 15,6$

Figure 5.1: Les solutions périodiques du système bistable calculées analytiquement en utilisant la méthode de CX-A, pour différentes amplitudes d'excitation avec une raideur linéaire de membrane $k_1 = -0,11$. A gauche : le déplacement de la membrane. A droite : le déplacement de l'air à l'extrémité du tube. Les carrés bleus et gris représentent respectivement les solutions interpuits stables et instables, tandis que les triangles verts représentent respectivement les solutions intrapuits stables et instables (suite).

5.1.2 Méthode d'équilibrage harmonique

La méthode implique l'expression des réponses du système sous la forme suivante, comme décrit dans les références bibliographiques [41, 42, 43] :

$$\begin{aligned} u(\tau) &= c_1(\tau) + a_1(\tau) \sin \omega\tau + b_1(\tau) \cos \omega\tau \\ q(\tau) &= c_2(\tau) + a_2(\tau) \sin \omega\tau + b_2(\tau) \cos \omega\tau, \end{aligned} \quad (5.14)$$

en supposant que les coefficients c_1, a_1, b_1, c_2, a_2 et b_2 sont lentement variés.

Ces coordonnées peuvent également s'écrire aussi sous cette forme :

$$\begin{aligned} u(\tau) &= c_1(\tau) + r_1(\tau) \cos(\omega\tau - \psi_1(\tau)) \\ q(\tau) &= c_2(\tau) + r_2(\tau) \cos(\omega\tau - \psi_2(\tau)), \end{aligned} \quad (5.15)$$

où $c_i, i = 1, 2$ présentent respectivement l'amplitude de décalage par rapport à l'axe zéro de déplacement de l'air en bout du tube et de la membrane, $r_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}, i = 1, 2$ les amplitudes de vibration et $\psi_i = \arctan \frac{a_i}{b_i}, i = 1, 2$ sont les déphasages par rapport à la force d'excitation.

En utilisant les variables définies dans l'Eq.5.14 et leurs dérivées dans l'Eq.5.1, puis en éliminant les termes d'ordre supérieur et en regroupant les termes constants, proportionnels à $\sin \omega\tau$ et à $\cos \omega\tau$ on parvient au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} c_1(\beta_1\gamma + 1) - \beta_1\gamma c_2 + \gamma\lambda_1 c_1' &= 0 \\ a_1\Sigma - a_2\beta_1\gamma - b_1\gamma\lambda_1\omega - 2\omega b_1' + \gamma\lambda_1 a_1' &= 0 \\ a_1\gamma\lambda_1\omega + b_1\Sigma - \beta_1 b_2\gamma - \gamma F_1 + \gamma\lambda_1 b_1' + 2\omega a_1' &= 0 \\ -\beta_1 c_1 + c_2\Lambda_{1c} + c_{\eta 11} c_2' &= 0 \\ -a_1\beta_1 + c_{\eta 11} a_2' + a_2\Lambda_1 - 2\omega b_2' - b_2\Lambda_2 &= 0 \\ 2\omega a_2' + a_2\Lambda_2 - b_1\beta_1 + c_{\eta 11} b_2' + b_2\Lambda_1 &= 0, \end{aligned} \quad (5.16)$$

où les paramètres $\Sigma, \Lambda_2, \Lambda_1$ et Λ_{1c} sont définis par

$$\begin{aligned} \Sigma &= 1 + \beta_1\gamma - \omega^2, \Lambda_2 = c_{\eta 11}\omega + c_{\eta n 11}\omega c_2^2 + \frac{1}{4}c_{\eta m 11}\omega r_2^2 \\ \Lambda_1 &= \beta_1 + k_{11} - \omega^2 + 3k_{nl 1}c_2^2 + \frac{3}{4}k_{nl 1}r_2^2, \Lambda_{1c} = \beta_1 + k_{11} + k_{nl 1}c_2^2 + \frac{3}{2}k_{nl 1}r_2^2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Les solutions périodiques du système Eq.5.1 correspondent aux points fixes du système Eq.5.16, qui sont déterminés lorsque les dérivées $c_1', a_1', b_1', c_2', a_2'b_2'$ s'annulent.

Premièrement on a déterminé l'expression de a_1 et b_1 en fonction de a_2 et b_2 :

$$a_1 = \frac{a_2\Lambda_1 - b_2\Lambda_2}{\beta_1}, b_1 = \frac{a_2\Lambda_2 + b_2\Lambda_1}{\beta_1}. \quad (5.18)$$

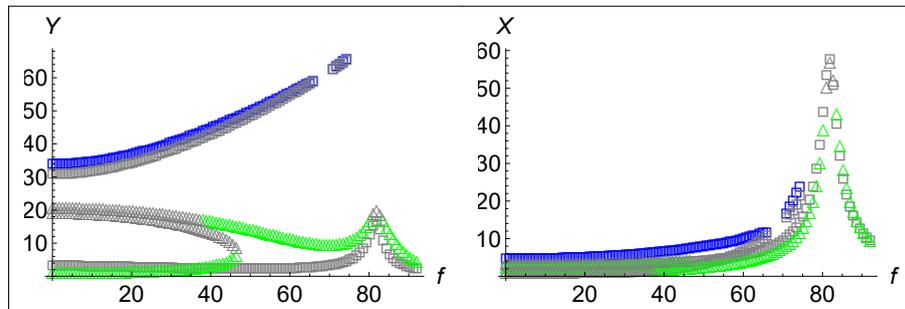
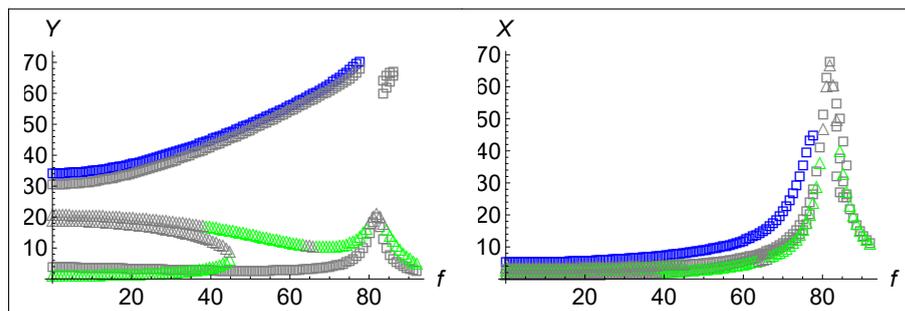
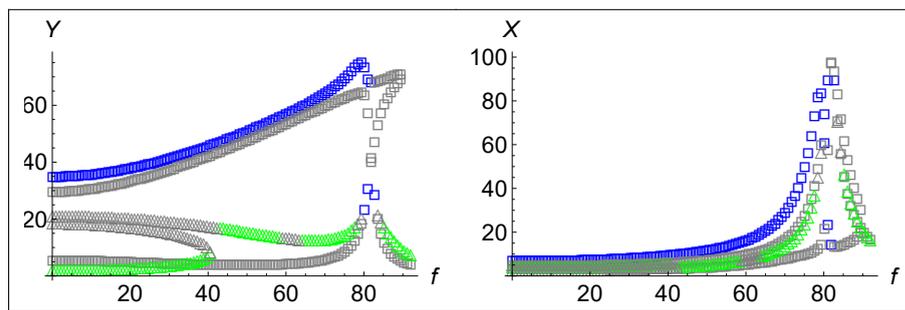
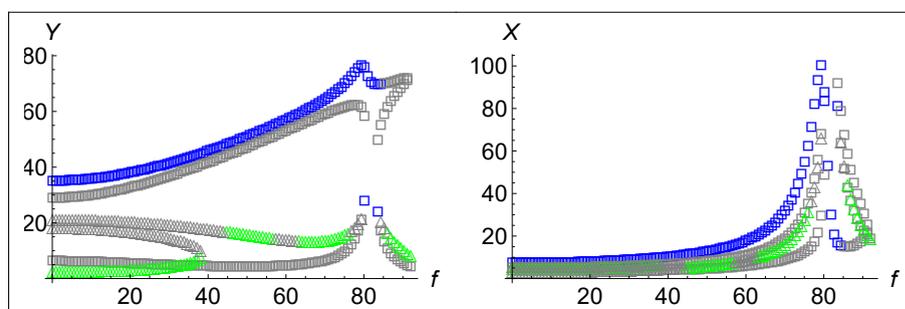
(e) $F_1 = 16,9$ (f) $F_1 = 20$ (g) $F_1 = 29$ (h) $F_1 = 33,4$

Figure 5.1: Les solutions périodiques du système bistable calculées analytiquement en utilisant la méthode de CX-A, pour différentes amplitudes d'excitation avec une raideur linéaire de membrane $k_1 = -0,11$. A gauche : le déplacement de la membrane. A droite : le déplacement de l'air à l'extrémité du tube. Les carrés bleus et gris représentent respectivement les solutions interpuits stables et instables, tandis que les triangles verts représentent respectivement les solutions intrapuits stables et instables.

En remplaçant ces expressions dans la deuxième et troisième équations du système des points fixes, et par quelques manipulations on obtient l'équation suivante :

$$r_2^2 (\beta_1^2(-\gamma) - \gamma\Lambda_1\Lambda_2\omega + \Lambda_1\Sigma)^2 + r_2^2(\gamma\lambda_1\Lambda_1\omega + \Lambda_2\Sigma)^2 = \beta_1^2\gamma^2 F_1^2. \quad (5.19)$$

L'équation Eq.5.19 est dépendante de deux paramètres r_2 et c_2 . À partir de la première et la quatrième équations du système des points fixes on peut déterminer l'expression de c_2 :

$$c_2 = \begin{cases} \sqrt{\frac{-\beta_1 + k_{n1}(\beta_1\gamma + 1)}{k_{n1}(\beta_1\gamma + 1)} + \frac{3}{2}r_2^2} \\ 0 \end{cases}, c_1 = \frac{\beta_1\gamma c_2}{\beta_1\gamma + 1} \quad (5.20)$$

L'amplitude de décalage $c_2 \neq 0$ est associée aux oscillations intrapuits, tandis que lorsque $c_2 = 0$, cela est lié aux oscillations interpuits. Il est important de noter que l'amplitude de décalage c_2 correspond à la position d'équilibre dynamique q_{10} définie dans le paragraphe précédent. De plus, dans l'expression de q_{10} (Eq.5.8), si l'on remplace $|\phi_{20}|$ par $\frac{Y^2}{\omega}$ et Y par r_2 , on obtient la même expression de c_2 .

À partir de ces équations, il est possible d'établir une condition nécessaire à la présence des oscillations intrapuits :

$$-\frac{\beta_1 + k_{n1}(\beta_1\gamma + 1)}{k_{n1}(\beta_1\gamma + 1)} + \frac{3}{2}r_2^2 > 0. \quad (5.21)$$

En remplaçant le terme c_2 par l'expression Eq.5.20 on peut résoudre facilement l'équation Eq.5.19 pour déterminer les valeurs positives et réelles de r_2^2 qui vérifient la condition Eq.5.21. Une fois qu'on a on déterminé r_2 , on peut calculer les valeurs de c_2 et c_1 , puis Λ_2, Λ_1 et Λ_{1c} ce qui nous permet de trouver les valeurs de a_1, b_1, a_2 et b_2 .

Pour l'étude de la stabilité de ces solutions, le système d'équations Eq.5.16 est tout d'abord réécrit sous la forme matricielle $Pz' = h(z)$ dont:

$$z = \begin{pmatrix} c_1 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_2 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -\gamma\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma\lambda_1 & 2\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega & -\gamma\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{\eta 11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{\eta 11} & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma\omega & -c_{\eta 11} \end{pmatrix}$$

$$h(z) = \begin{pmatrix} c_1(\beta_1\gamma + 1) - \beta_1\gamma c_2 \\ a_1\Sigma - a_2\beta_1\gamma - b_1\gamma\lambda_1\omega \\ a_1\gamma\lambda_1\omega + b_1\Sigma - \beta_1 b_2\gamma - \gamma F_1 \\ c_2\Lambda_{1c} - \beta_1 c_1 \\ -a_1\beta_1 + a_2\Lambda_1 - b_2\Lambda_2 \\ a_2\Lambda_2 - b_1\beta_1 + b_2\Lambda_1 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

La stabilité des solutions périodiques est étudiée par la détermination des valeurs propres de la matrice jacobienne $J = \frac{dP^{-1}h(z)}{dz}|_{z=z_0}$ où z_0 est le vecteur des points fixes déterminés précédemment.

Dans la Figure Fig.5.2, les solutions périodiques obtenues par la méthode d'équilibrage harmonique pour les mêmes amplitudes d'excitation et la même valeur de raideur linéaire que celles utilisées pour tracer la Figure Fig.5.1 (qui représente les solutions périodiques déterminées par la méthode CX-A) sont tracées. On peut observer que cette figure présente les mêmes courbes que celles observées dans la Figure Fig.5.1, ce qui confirme la validité des résultats obtenus par notre nouvelle application de la méthode CX-A.

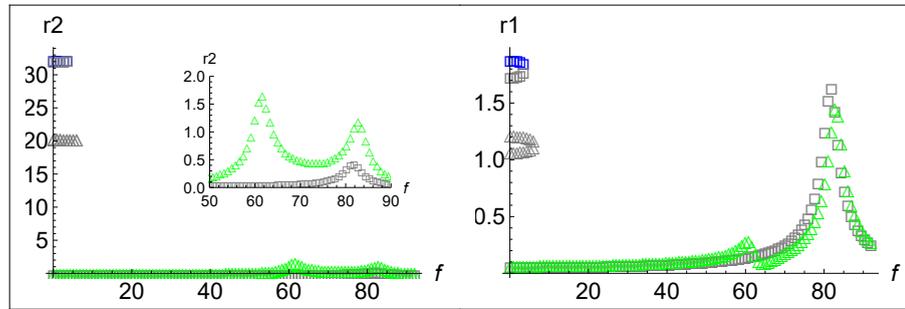
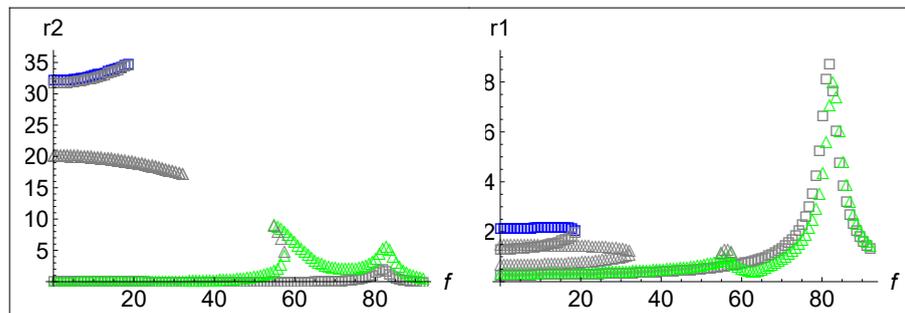
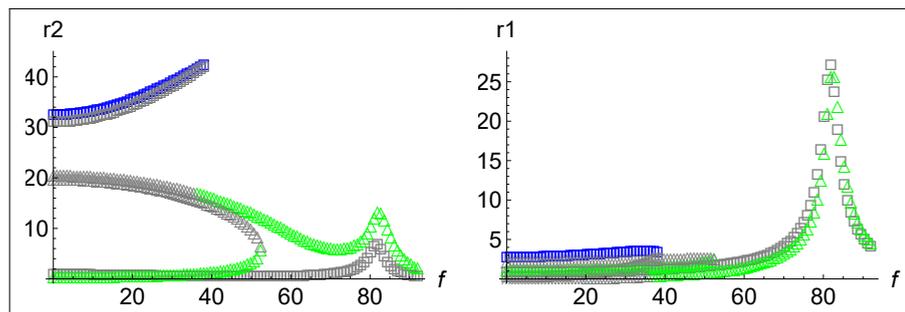
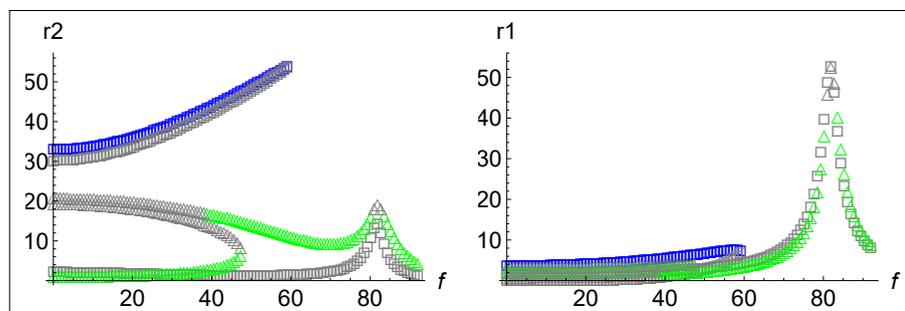
(a) $F_1 = 0,5$ (b) $F_1 = 2,6$ (c) $F_1 = 8$ (d) $F_1 = 15,6$

Figure 5.2: Les solutions périodiques du système bistable calculées analytiquement en utilisant la méthode d'équilibrage harmonique, pour différentes amplitudes d'excitation avec une raideur linéaire de membrane $k_1 = -0,11$. A gauche : le déplacement de la membrane. A droite : le déplacement de l'air à l'extrémité du tube. Les carrés bleus et gris représentent respectivement les solutions interpuits stables et instables, tandis que les triangles verts représentent respectivement les solutions intrapuits stables et instables (suite).

Dans l'article [52], la méthode de CX-A a été employée pour examiner le régime interpuits d'un système linéaire couplé à un NES bistable avec une raideur linéaire négative. Dans cette publication, les mêmes modèles, qui avaient été déterminés analytiquement par la méthode de CX-A pour la version monostable du système (avec une raideur linéaire positive), ont été utilisés pour décrire la dynamique bistable du système. Nous allons maintenant comparer cette étude avec notre propre travail.

Pour le calcul des points fixes, si l'on prend $q_{10} = u_{10} = 0$, les équations d'ordre 0 du système Eq.5.7 disparaissent (les deux premières équations de Eq.5.7), laissant uniquement les équations d'ordre 1 qui correspondent aux points fixes du système monostable (Eq.3.4). Cela démontre que le modèle qui décrit les solutions interpuits du système bistable correspond bien au modèle qui décrit les solutions périodiques du système monostable. Cependant, les modèles qui décrivent la stabilité de ces solutions diffèrent selon les deux manières d'application de la méthode de CX-A. Notre nouvelle modèle prend en compte la variabilité des amplitudes de décalage (u_1, q_1), tandis que le modèle de stabilité des solutions périodiques du système monostable ne le fait pas. En tenant compte de la variabilité des amplitudes de décalage, ce qui la fait passer d'une dimension de 4×4 à 8×8 . Même si nous prenons $q_{10} = 0$, ces termes ne disparaissent pas et ils ont un impact sur la stabilité.

D'un point de vue mathématique, si nous retirons de la matrice de stabilité du système bistable (Eq.5.13) les lignes et les colonnes correspondant aux termes ρ_u et ρ_q , et si nous supposons que $q_{10} = 0$, nous obtenons la même matrice de stabilité que celle du système monostable. Dans les sous-figures Fig.5.3(a) et Fig.5.3(b), nous avons exposé les solutions interpuits obtenues à l'aide des deux différentes manières d'application de la méthode CX-A pour des valeurs de $F_1 = 20,7$ et $k_1 = -0,11$. Ces deux sous-figures montrent les mêmes solutions, mais elles diffèrent en termes de stabilité.

Pour vérifier ce raisonnement, nous avons fait appel aux calculs réalisés en utilisant la méthode d'équilibrage harmonique. Lors du calcul de la stabilité des solutions périodiques interpuits, en supprimant du système linéarisé Eq.5.22 les lignes et les colonnes correspondant aux termes c_1 et c_2 , nous obtenons un système de 4 dimensions. Grâce à cette simplification, la stabilité de ces solutions périodiques interpuits est assurée. Dans les sous-figures Fig.5.3(c) et Fig.5.3(d), nous avons présenté les solutions interpuits déterminées à l'aide de la méthode d'équilibrage harmonique, en tenant compte et non la variabilité des amplitudes de décalage. Ces deux sous-figures sont en accord avec les résultats présentés dans les Fig.5.3(a) et Fig.5.3(b).

Même si les termes u_1 et q_1 (ou c_1 et c_2) s'annulent dans le régime interpuits, la variabilité de ces termes a une influence sur la stabilité du système pendant ce régime. La caractéristique statique de notre système bistable, qui se manifeste par la présence de deux positions d'équilibre statique stables et une instable qui est égale à zéro, a un impact sur la stabilité du régime interpuits.

Après avoir confirmé la validité de notre nouvelle application de la méthode de CX-A, qui permet de déterminer simultanément les solutions périodiques interpuits et intrapuits, nous avons réalisé une étude des bifurcations locales de ces solutions pour une analyse approfondie.

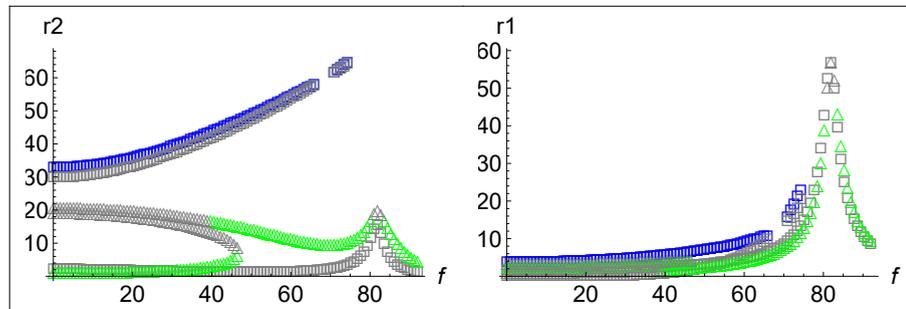
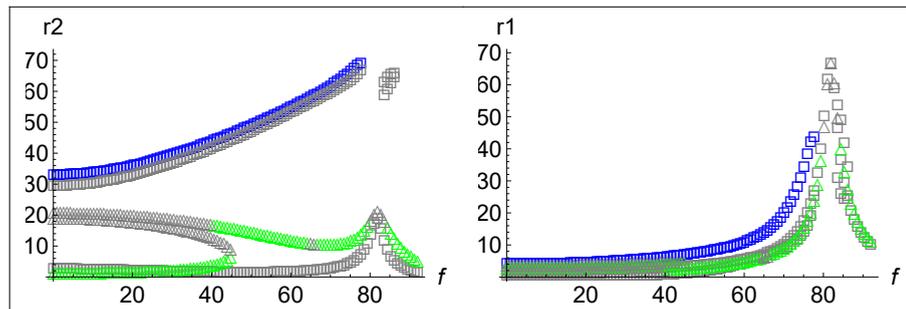
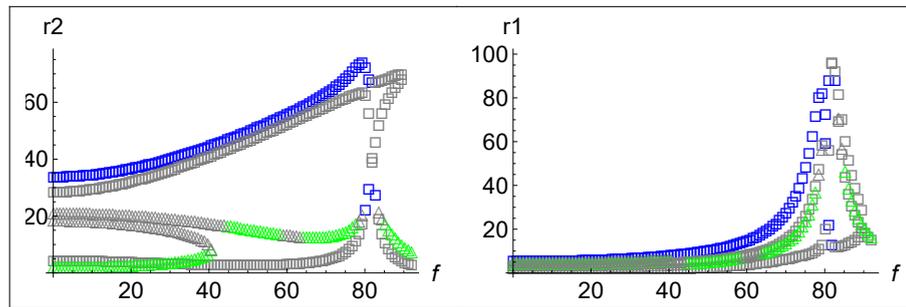
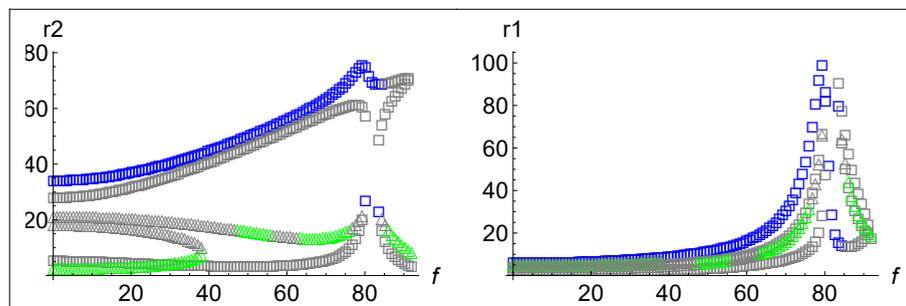
(e) $F_1 = 16,9$ (f) $F_1 = 20$ (g) $F_1 = 29$ (h) $F_1 = 33,4$

Figure 5.2: Les solutions périodiques du système bistable calculées analytiquement en utilisant la méthode d'équilibrage harmonique, pour différentes amplitudes d'excitation avec une raideur linéaire de membrane $k_1 = -0,11$. A gauche : le déplacement de la membrane. A droite : le déplacement de l'air à l'extrémité du tube. Les carrés bleus et gris représentent respectivement les solutions interpuits stables et instables, tandis que les triangles verts représentent respectivement les solutions intrapuits stables et instables.

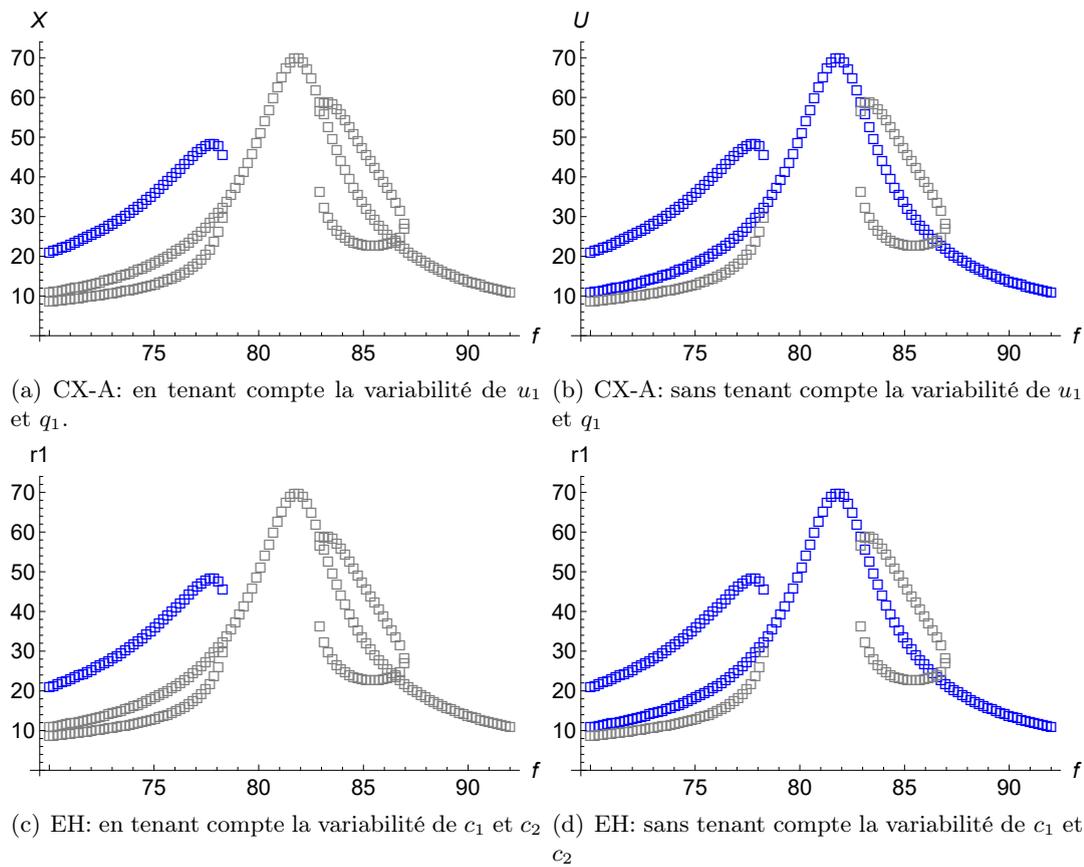


Figure 5.3: Les solutions interpuits déterminées analytiquement par les méthodes de CX-A et d'équilibrage harmonique en tenant compte et sans tenant compte la variabilité des amplitudes de décalage, pour $k_1 = -0,11$ et $F_1 = 20,7$. Stable : bleu. Instable : gris.

5.2 Bifurcation des solutions périodiques

5.2.1 Bifurcation à nœud en selle

L'équation qui caractérise la multiplicité des solutions périodiques du système bistable est l'Eq.5.10. Cette équation dépend de l'expression de la position d'équilibre dynamique q_{10} , qui à son tour dépend du type de régime permanent sélectionné.

Pour le régime interpuits, où q_{10} est nul, l'équation Eq.5.10 peut être exprimée sous la forme d'un polynôme de degré 3 en fonction de Z_{20} , défini par : $P_{\text{inter}} : \alpha_{3_{\text{inter}}} Z_{20}^3 + \alpha_{2_{\text{inter}}} Z_{20}^2 + \alpha_{1_{\text{inter}}} Z_{20} + \alpha_{0_{\text{inter}}} = 0$.

Dans le cas du régime intrapuits, où l'expression de la valeur moyenne $q_{10} \neq 0$ est incorporée dans l'équation Eq.5.10, un autre polynôme de degré 3 en Z_{20} est obtenu. $P_{\text{intra}} : \alpha_{3_{\text{intra}}} Z_{20}^3 + \alpha_{2_{\text{intra}}} Z_{20}^2 + \alpha_{1_{\text{intra}}} Z_{20} + \alpha_{0_{\text{intra}}} = 0$.

Nous avons deux polynômes distincts de degré trois en Z_{20} dont la multiplicité de la racine Z_{20} de chaque polynôme doit être calculée séparément en suivant la même méthodologie.

Comme nous l'avons expliqué dans le troisième chapitre de cette thèse, le nombre de solutions réelles d'un tel polynôme dépend du signe de son discriminant. Lorsqu'il est négatif, le système admet une unique solution réelle, tandis que lorsqu'il est positif, trois solutions réelles sont obtenues. Soit

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{SN}}^{\text{inter}} &= \alpha_{1_{\text{inter}}}^2 \alpha_{2_{\text{inter}}}^2 - 4\alpha_{0_{\text{inter}}} \alpha_{2_{\text{inter}}}^3 - 4\alpha_{1_{\text{inter}}}^3 \alpha_{3_{\text{inter}}} + 18\alpha_{0_{\text{inter}}} \alpha_{1_{\text{inter}}} \alpha_{2_{\text{inter}}} \alpha_{3_{\text{inter}}} \\ &\quad - 27\alpha_{0_{\text{inter}}}^2 \alpha_{3_{\text{inter}}}^2 \\ \Delta_{\text{SN}}^{\text{intra}} &= \alpha_{1_{\text{intra}}}^2 \alpha_{2_{\text{intra}}}^2 - 4\alpha_{0_{\text{intra}}} \alpha_{2_{\text{intra}}}^3 - 4\alpha_{1_{\text{intra}}}^3 \alpha_{3_{\text{intra}}} + 18\alpha_{0_{\text{intra}}} \alpha_{1_{\text{intra}}} \alpha_{2_{\text{intra}}} \alpha_{3_{\text{intra}}} \\ &\quad - 27\alpha_{0_{\text{intra}}}^2 \alpha_{3_{\text{intra}}}^2 \end{aligned} \quad (5.23)$$

définissent respectivement les discriminants des polynômes P_{inter} et P_{intra} . Les points de bifurcation de SN des solutions interpuits et intrapuits sont déterminés respectivement en résolvant les équations $\Delta_{\text{SN}}^{\text{inter}} = 0$ et $\Delta_{\text{SN}}^{\text{intra}} = 0$. Ces points de bifurcation dépendent des coefficients $\alpha_{i_{\text{inter}}}$ et $\alpha_{i_{\text{intra}}}$ ($i = 0; 3$), qui, à leur tour, dépendent des paramètres du système ainsi que de la force et de la fréquence d'excitation.

Dans les figures Fig.5.4(a) et Fig.5.4(b) nous avons présentés respectivement la limite de bifurcation de SN des solutions interpuits et intrapuits pour la valeur de raideur linéaire $k_1 = -0,11$. Pour les solutions interpuits, on observe une zone de trois solutions réelles élargie sur tout la bande fréquentielle séparée par deux zones d'une seule solution réelle. Cette limite présente une différence par rapport à celle observée pour le système monostable qui montre deux zones séparées de trois solutions réelles observées autour des fréquences de résonance du tube et de la membrane. Cette différence est due à la particularité des solutions interpuits qui présentent une dynamique non résonante. Pour les solutions intrapuits, on observe une seule zone de trois solutions qui se trouve autour de la fréquence de résonance de la membrane. Les solutions intrapuits présentent autour de la fréquence de propre de tube un comportement linéaire dont le pic de résonance ne montre aucune déviation. Dans la sous-figure Fig.5.4(b) on a mis un point d'interrogation qui consiste à poser un question concernant la zone où les solutions intrapuits ne sont pas définies (voir Fig.5.1(g) et Fig.5.1(h) autour de la résonance de tube).

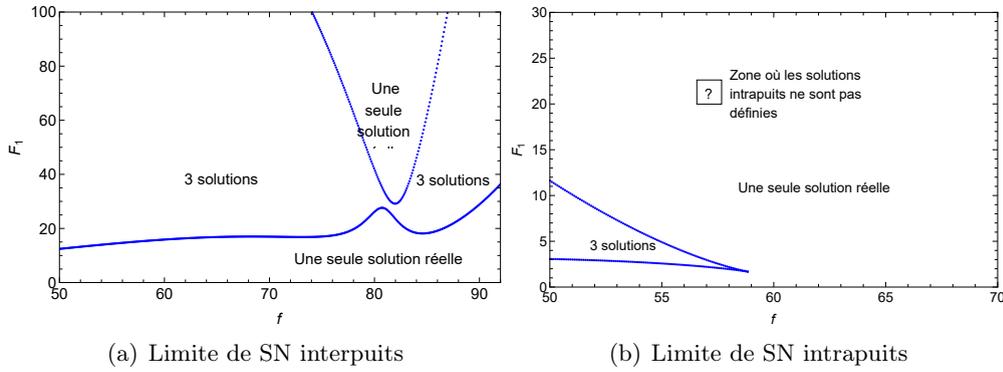


Figure 5.4: Les diagrammes de bifurcation de SN des solutions intrapuits et interpuits du système bistable avec $k_1 = -0, 11$.

5.2.2 Bifurcation d'Hopf

Pour déterminer la limite de bifurcation d'Hopf, nous avons commencé par calculer le polynôme caractéristique de la matrice de stabilité M (Eq.5.13):

$$x_H^8 + \gamma_7 x_H^7 + \gamma_6 x_H^6 + \gamma_5 x_H^5 + \gamma_4 x_H^4 + \gamma_3 x_H^3 + \gamma_2 x_H^2 + \gamma_1 x_H + \gamma_0 = 0. \quad (5.24)$$

Les racines de ce polynôme, notées x_H , correspondent aux valeurs propres de la matrice M et sont responsables de la stabilité des solutions périodiques. La limite qui distingue la zone de stabilité (où toutes les valeurs propres ont une partie réelle négative) et celle instable (lorsqu'au moins une valeur propre a une partie réelle positive) est définie lorsque les valeurs propres de la matrice M ont une partie réelle nulle (c'est-à-dire qu'elles sont purement imaginaires). En remplaçant x_H par $\pm iX_H$ dans l'équation Eq.5.24 et en séparant les termes réels et imaginaires, nous obtenons les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} Z^4 - \gamma_6 Z^3 + \gamma_4 Z^2 - \gamma_2 Z + \gamma_0 &= 0 \\ -\gamma_7 Z^3 + \gamma_5 Z^2 - \gamma_3 Z + \gamma_1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

où $Z = X_H^2$. Par quelques manipulations la condition de bifurcation d'Hopf est déterminée :

$$\begin{aligned} \frac{3a_0 a_1 \gamma_7}{2a_2^2} - \frac{a_0 \gamma_5}{a_2} + \frac{a_1^3 \gamma_7}{2a_2^3} + \frac{a_1^2 \gamma_5}{2a_2^2} + \frac{a_1 \gamma_3}{2a_2} + \gamma_1 &= -\sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2} \\ \left(\frac{a_0 \gamma_7}{2a_2^2} - \frac{a_1^2 \gamma_7}{2a_2^3} - \frac{a_1 \gamma_5}{2a_2^2} - \frac{\gamma_3}{2a_2} \right) & \end{aligned} \quad (5.26)$$

où $a_0 = \gamma_0 + \frac{\gamma_1 \gamma_5}{\gamma_7^2} - \frac{\gamma_1 \gamma_6}{\gamma_7}$, $a_1 = -\gamma_2 - \frac{\gamma_3 \gamma_5}{\gamma_7^2} + \frac{\gamma_1}{\gamma_7} + \frac{\gamma_3 \gamma_6}{\gamma_7}$ et $a_2 = \gamma_4 + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_7^2} - \frac{\gamma_3}{\gamma_7} - \frac{\gamma_5 \gamma_6}{\gamma_7}$. L'expression de l'équation Eq.5.26 présente quelles conditions doivent être vérifiées pour déterminer la limite de bifurcation d'Hopf: $a_2 \neq 0$, $\gamma_7 \neq 0$ et $a_1^2 - 4a_0 a_2 \geq 0$.

Les termes γ_i dépendent des paramètres du système, de la fréquence d'excitation, de Z_{20} et de la valeur de q_{10} . Donc pour chaque type de régime ($q_{10} = 0$ ou $q_{10} \neq 0$) les solutions réelles et positives de Z_{20} sont déterminées en résolvant l'équation Eq.5.26. Ces solutions sont par la suite introduites dans l'équation Eq.5.10 décrivant Z_{20} en fonction des paramètres du système et d'excitation. En fixant les paramètres de système, on peut déterminer la force d'excitation F_1 pour chaque fréquence d'excitation f , et ainsi construire

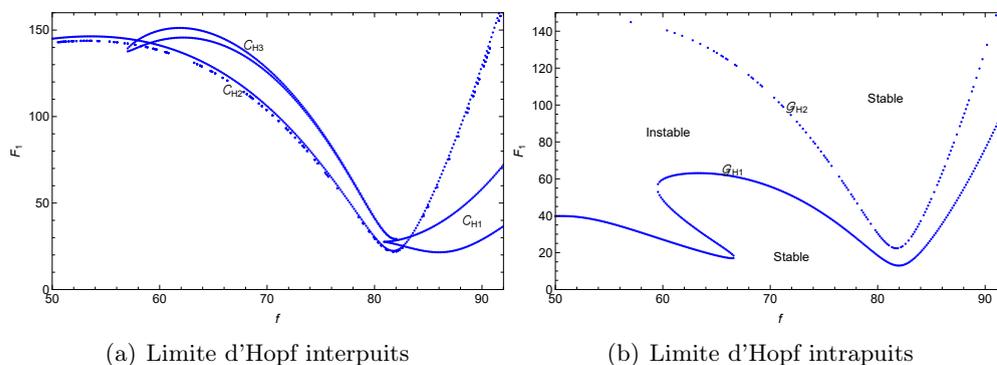


Figure 5.5: Les diagrammes de bifurcation d'Hopf des solutions intrapuits et interpuits du système bistable avec $k_1 = -0, 11$.

la limite de stabilité des solutions interpuits et intrapuits sur le plan (f, F_1) .

Dans les figure Fig.5.5(a) et Fig.5.5(b) nous présentons respectivement la limite de bifurcation d'Hopf des solutions interpuits et intrapuits pour la valeur de raideur linéaire $k_1 = -0, 11$. Pour les solutions intrapuits, la limite de bifurcation d'Hopf présente une zone des solutions instables séparée par les deux courbes \mathcal{G}_{H1} et \mathcal{G}_{H2} . A l'extérieur, on observe une zone stable. Pour les solutions interpuits, la limite d'Hopf présente trois différentes courbes \mathcal{C}_{Hi} $i = 1; 3$. Vu la dynamique inhabituelle des solutions interpuits, qui présente deux différentes branches des solutions (branche inférieure instable et branche basse fréquence), il est difficile de distinguer par simple visualisation les zones stables des zones instables de chaque branche.

Pour l'analyse de ces courbes, on a présenté dans la figure Fig.5.6 la réponse fréquentielle de déplacement de la membrane pour différentes valeurs de force d'excitation, avec une valeur de raideur linéaire $k_1 = -0, 11$. Les sous figures Fig.5.7(a) et Fig.5.7(b) présentent la superposition de la limite de bifurcation d'Hopf avec celle de SN pour les solutions interpuits et intrapuits respectivement. Les courbes en rouge représentent la bifurcation d'Hopf, tandis que celles en bleu délimitent la bifurcation de SN.

À très faible amplitude d'excitation, la figure Fig.5.6(a) ne présente aucune bifurcation. Sur l'intervalle fréquentielle $[50; 92]$ Hz, le système présente une seule solution intrapuits stable et une unique solution interpuits instable.

Pour l'amplitude d'excitation $F_1 = 2, 59$, la courbe de résonance intrapuits montre une déviation du pic de résonance de la membrane vers les basses fréquences. Ce caractère non linéaire fait apparaître une zone de trois solutions. Le système atteint ici la limite de SN des solutions intrapuits. Les fréquences limitant cette zone de trois solutions correspondent bien aux fréquences données par la limite de bifurcation de SN à la force d'excitation $F_1 = 2, 59$. Avec l'augmentation de l'amplitude d'excitation, ce pic se décale de plus en plus vers les basses fréquences. Ceci explique le déplacement de la limite de bifurcation de SN des solutions intrapuits vers les basses fréquences.

A l'amplitude d'excitation $F_1 = 14, 8$, ce pic se déplace au-delà de notre intervalle de fréquence $[50; 92]$ Hz. Il ne sera plus observable. Le système dépasse la limite de bifurcation de SN intrapuits pour entrer dans une zone où une seule solution réelle est

présente. De plus, à cette force d'excitation, on observe que les solutions intrapuits deviennent instables autour de la fréquence de résonance du tube. Le système atteint alors la limite de bifurcation d'Hopf intrapuits. Les fréquences limitant cette zone d'instabilité correspondent aux fréquences données par la limite d'Hopf pour la force $F_1 = 14,8$. En ce qui concerne les solutions interpuits, à cette force d'excitation, on remarque que la branche supérieure, qui provient de basses fréquences, atteint la fréquence d'excitation de 50 Hz. Avec la présence de la branche inférieure instable, on observe trois solutions réelles interpuits. Le système atteint alors la limite de bifurcation de SN des solutions interpuits.

À l'amplitude d'excitation $F_1 = 16,9$, les solutions interpuits présentent une résonance détachée autour de la fréquence 73 Hz (voir Fig.5.6(d)). Cette résonance est observée lorsque le système atteint le minimum local m_1 de la limite de bifurcation de SN des solutions interpuits.

En augmentant l'amplitude d'excitation à la valeur $F_1 = 18,6$, on constate que cette résonance détachée se fond avec la branche supérieure interpuits (voir Fig.5.6(e)). Ce phénomène de fusion est observé lorsque le système atteint le maximum local M_1 . Au même niveau de forçage, on note que les solutions interpuits présentent une autre résonance détachée de nature instable. Cette résonance est observée lorsque le système atteint le minimum local m_2 de la limite de bifurcation de SN des solutions interpuits. En ce qui concerne les solutions intrapuits, on remarque la présence d'une zone d'instabilité autour de la fréquence de 65 Hz.

À la force d'excitation $F_1 = 25$, les solutions intrapuits présentes autour de la fréquence propre du tube disparaissent, tandis que simultanément, les solutions interpuits de la branche inférieure instable deviennent stables (voir Fig.5.6(f)). Les fréquences délimitant cette transition peuvent être identifiées soit par la limite de bifurcation d'Hopf $\mathcal{GH}2$ des solutions intrapuits, soit par la limite de bifurcation d'Hopf $\mathcal{CH}2$ des solutions interpuits. Comme illustré dans la Figure Fig.5.8, qui présente la superposition des limites de bifurcation d'Hopf pour les solutions interpuits et intrapuits, il est clair que la limite d'Hopf du régime intrapuits $\mathcal{GH}2$ coïncide parfaitement avec celle du régime interpuits $\mathcal{CH}2$.

Il convient de noter que la courbe de bifurcation $\mathcal{GH}2$ des solutions intrapuits nous permet de faire la distinction entre la zone où une seule solution réelle intrapuits existe et la zone où ces solutions ont disparu. De plus, la superposition de $\mathcal{GH}2$ et $\mathcal{CH}2$ confirme que la stabilité des solutions interpuits de la branche inférieure instable résulte de la disparition des solutions intrapuits.

À l'amplitude d'excitation $F_1 = 28,3$, la branche supérieure à basse fréquence et la résonance détachée instable des solutions interpuits fusionnent (voir Fig.5.6(g)). À ce niveau de forçage, le système dépasse le maximum M_2 de la limite de bifurcation de SN des solutions interpuits. Les deux zones de trois solutions interpuits se rejoignent en une seule zone. La partie des solutions uniques qui séparait les deux zones de trois solutions disparaît. La limite de SN des solutions interpuits présente une continuité dans la zone des trois solutions. Dans cette situation, les solutions interpuits se décomposent en deux branches distinctes : la branche inférieure instable et une nouvelle branche supérieure qui s'étend sur presque toute la gamme de fréquences. La limite de cette nouvelle branche correspond à la fréquence fournie par la limite de SN des solutions interpuits à $F_1 = 28,3$. La courbe supérieure de cette nouvelle branche subit une bifurcation d'Hopf induite par la

courbe \mathcal{C}_{H1} , ce qui transforme les solutions interpuits stables en solutions instables.

Noter que la branche inférieure de la courbe \mathcal{C}_{H1} ne présente aucun effet sur notre système. Cette limite de bifurcation d'Hopf correspond à une valeur propre de partie réelle nulle, mais elle se trouve entre deux zones instables qui présentent une valeur propre de partie réelle positive. Pour clarifier davantage, dans la plage de fréquences définissant la courbe \mathcal{C}_{H1} : à faible niveau d'excitation, le système présente une seule solution interpuits instable. En augmentant l'amplitude d'excitation, le système atteint la limite de SN de solutions interpuits. La résonance détachée instable est observée. Dans ce cas, le système présente trois solutions interpuits instables. L'effet de la limite \mathcal{C}_{H1} est observé lorsque le système atteint le maximum M_2 .

A l'amplitude d'excitation $F_1 = 28.3$, la courbe inférieure de la nouvelle branche supérieure et la branche inférieure des solutions interpuits se séparent pour se fusionner l'une avec l'autre (voir Fig.5.6(h)). Dans ce cas, les solutions interpuits présentent une résonance détachée interne distincte de la branche principale. Le système atteint ici le minimum m_3 de la limite de bifurcation de SN des solutions interpuits. Cette limite présente à nouveau une zone de solutions uniques séparée par deux autres zones de trois solutions.

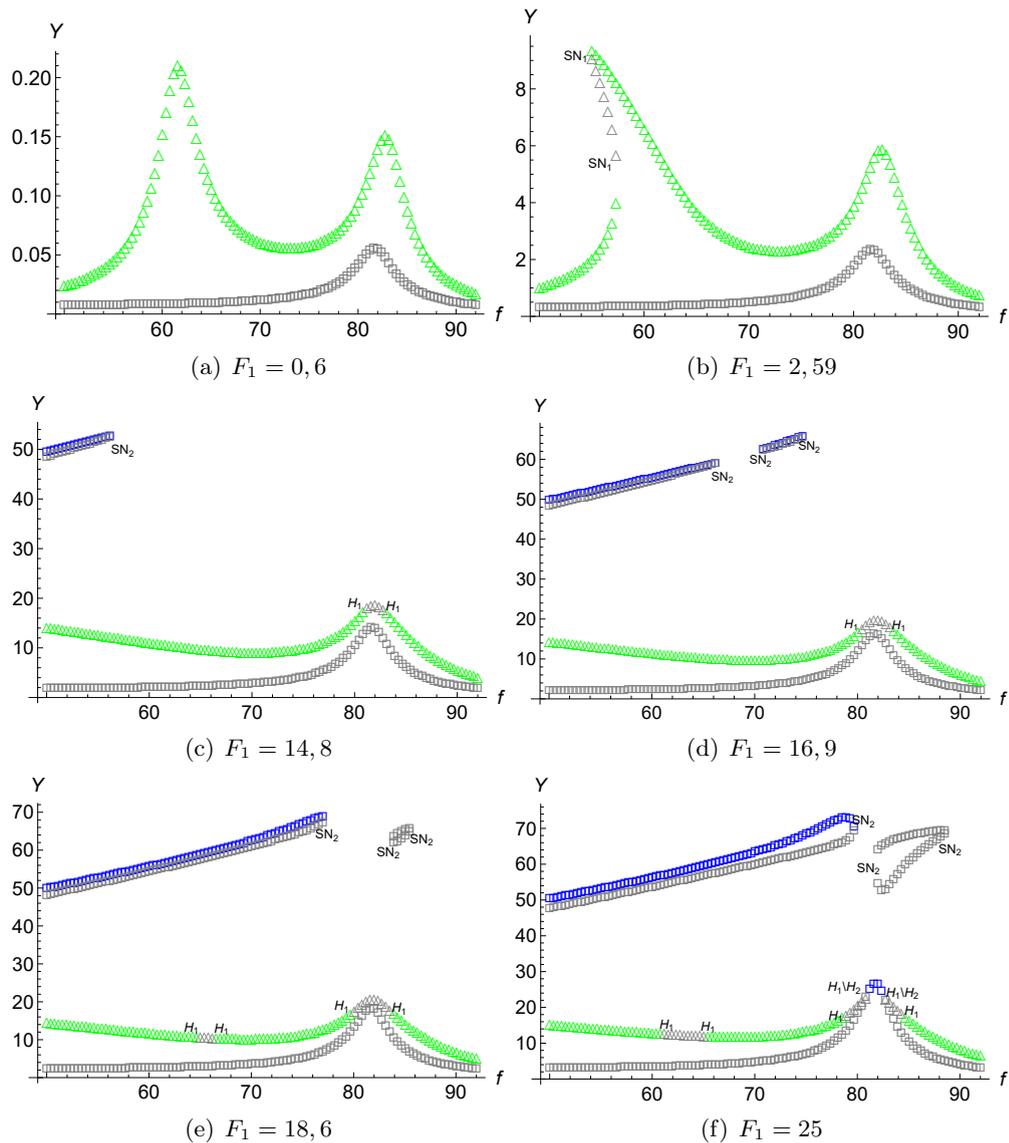


Figure 5.6: Les solutions périodiques du déplacement de la membrane bistable ainsi que ses bifurcations locales, pour différentes amplitudes d'excitation avec une raideur de membrane $k_1 = -0,11$. Les carrés bleus et gris représentent respectivement les solutions interpuits stables et instables, tandis que les triangles verts représentent respectivement les solutions intrapuits stables et instables. H_1 et SN_1 présentent les bifurcations d'Hopf et de SN des solutions intrapuits. H_2 et SN_2 présentent les bifurcations d'Hopf et de SN des solutions interpuits (suite).

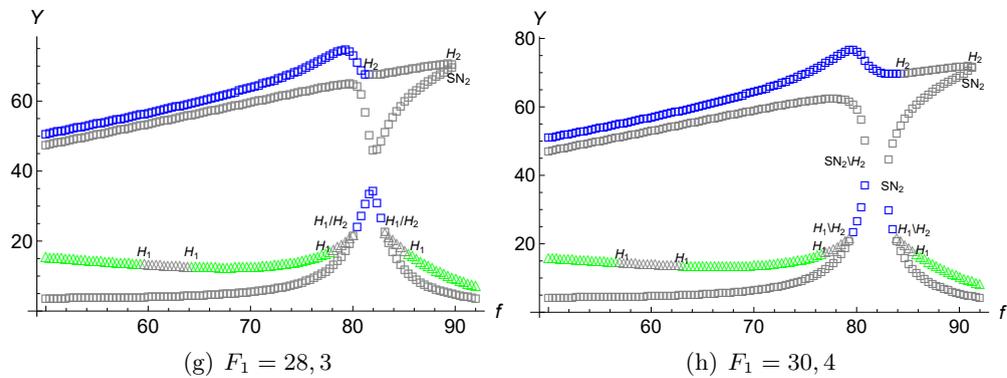


Figure 5.6: Les solutions périodiques du déplacement de la membrane bistable ainsi que ses bifurcations locales, pour différentes amplitudes d'excitation avec une raideur linéaire de membrane $k_1 = -0,11$. Les carrés bleus et gris représentent respectivement les solutions interpuits stables et instables, tandis que les triangles verts représentent respectivement les solutions intrapuits stables et instables. H_1 et SN_1 présentent les bifurcations d'Hopf et de SN des solutions intrapuits. H_2 et SN_2 présentent les bifurcations d'Hopf et de SN des solutions interpuits.

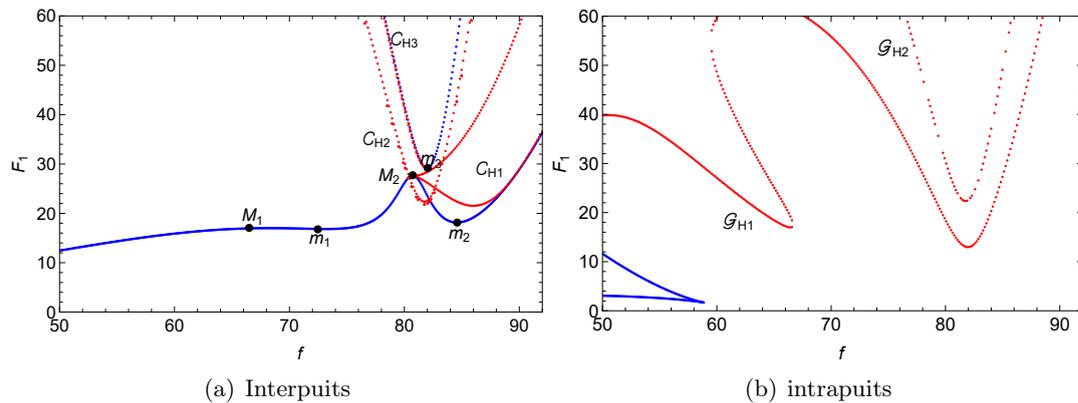


Figure 5.7: La superposition de la limite de bifurcation d'Hopf (rouge) avec celle de SN (bleu) pour $k_1 = -0,11$. Les points M_i et m_i présentent les maximums et les minimums locaux de la limite de bifurcation de SN des solutions interpuits.

5.3 Explication des résultats de l'optimisation

L'objectif de cette section vise à expliquer le comportement fréquentiel bistable observé numériquement dans le chapitre précédent.

La Figure Fig.5.9 présente les réponses en fréquence analytiques et numériques de notre système bistable pour différentes amplitudes d'excitation, avec une valeur de raideur linéaire $k_1 = -0,096$. Cette valeur de raideur linéaire se situe dans la zone de transition observée avant la stabilisation du comportement bistable (voir Fig.4.6). La plage de fréquences choisie pour le calcul est centrée autour de la résonance du tube, correspondant à la même plage utilisée lors du calcul numérique de l'optimisation, c'est-à-dire $f \in [75;92]$ Hz. Les triangles verts et gris correspondent respectivement aux solutions périodiques intrapuits stables et instables, déterminées analytiquement. Les carrés bleus et gris correspondent respectivement aux solutions périodiques interpuits

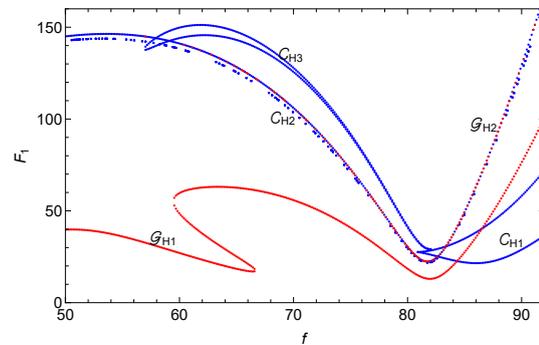


Figure 5.8: La superposition de la limite de bifurcation d'Hopf des solutions intrapuits avec celles des solutions interpuits du système bistable avec $k_1 = -0,11$.

stables et instables. Les résultats de l'intégration numérique sont représentés par les points rouges. Les différents régimes observés lors de la simulation numérique sont indiqués sur ces graphiques : intrapuits, interpuits, chaotique, réponse fortement modulée chaotique (CSMR) et réponse fortement modulée (SMR). Les différents points de bifurcation de SN et d'Hopf des solutions périodiques sont également marqués par SN_i et H_i .

À faible amplitude d'excitation, les points de la simulation numérique se superposent bien avec les solutions intrapuits analytiques (Fig.5.9(a)).

En augmentant l'amplitude d'excitation à $F_1 = 3,8$ (Fig.5.9(b)), on observe la présence de certains points de la simulation numérique qui ne correspondent ni aux solutions intrapuits ni aux solutions interpuits. Le système présente un régime chaotique en ces points. Pour mettre en évidence la présence du chaos dans cette zone, nous avons présenté dans les sous-figures Fig.5.10(a) et Fig.5.10(b), respectivement, la réponse temporelle du système à cette amplitude d'excitation et à la fréquence $f = 81,5$ Hz, et la transformée de Fourier du signal de déplacement de la membrane.

L'analyse proposée dans ce chapitre se limite au calcul des solutions périodiques en régime permanent. Les solutions chaotiques, qui sont souvent observées dans des régimes de transition [40], ne sont pas examinées théoriquement dans cette étude.

Pour $F_1 = 16,5$, le système présente la réponse fortement modulée chaotique. Cette réponse est due à la bifurcation d'Hopf des solutions intrapuits. En général, lorsqu'une solution périodique subit une bifurcation d'Hopf, les systèmes non linéaires peuvent présenter une réponse fortement modulée [10]. Dans notre système bistable, lorsqu'une solution périodique subit une bifurcation d'Hopf en présence du régime chaotique, le système présente une réponse fortement modulée chaotique. Dans la Figure Fig.5.11, nous présentons la réponse temporelle du système à cette amplitude d'excitation et à la fréquence $f = 81,5$ Hz, qui montre la présence de la réponse fortement modulée chaotique.

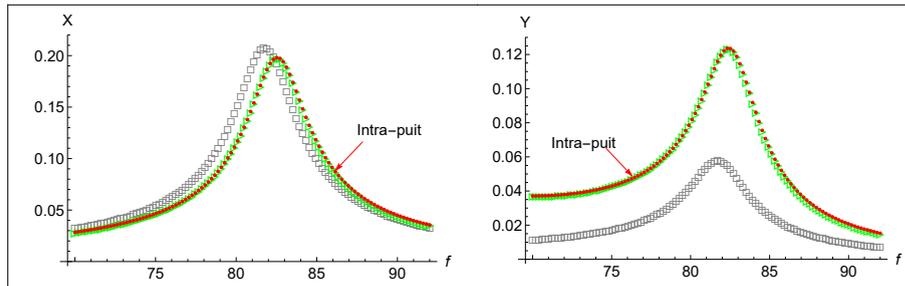
Pour l'amplitude d'excitation $F_1 = 25$, la Figure Fig.5.9(d) montre que sur la bande de fréquences $f \in [76; 80]$ Hz, les points de la simulation numérique se superposent aux solutions périodiques interpuits. Il est à noter que dans cette plage de fréquences, les solutions intrapuits subissent une bifurcation d'Hopf. Il y a donc une possibilité d'obtenir une réponse modulée. Avec les conditions initiales utilisées pour le calcul numérique, le

système est attiré vers les solutions périodiques intrapuits. En dépassant cette plage de fréquences, le système présente différents types de réponses : la réponse fortement modulée (voir Fig.5.12), la réponse périodique (voir Fig.5.14), et la réponse fortement modulée chaotique (voir Fig.5.12). La réponse fortement modulée est observée en raison de la bifurcation d'Hopf des solutions intrapuits. La réponse périodique est due à la bifurcation d'Hopf des solutions interpuits de la branche inférieure instable. Avec cette bifurcation, les solutions interpuits de la branche inférieure instable deviennent stables, ce qui permet au système de présenter une réponse périodique. Pour les fréquences d'excitation les plus élevées, le système entre dans un régime chaotique. Cela explique la présence de la réponse fortement modulée chaotique, qui est due à la bifurcation d'Hopf et influencée par le chaos.

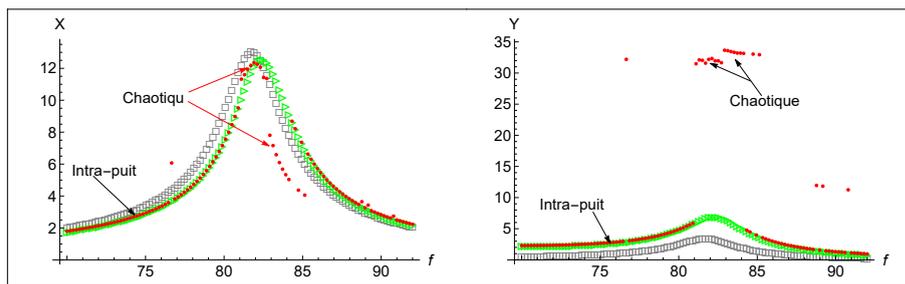
Il convient de noter ici que la zone qui devient stable dans la branche inférieure des solutions interpuits correspond à une amplitude de vibration élevée du SP. La présence de ce phénomène explique la zone de transition décrite dans le chapitre précédent, où la courbe de crête présente deux plateaux d'atténuation (voir Fig.4.9). Le plateau le plus bas est associé au phénomène de PE, lié à la présence des réponses fortement modulées. Le plateau supérieur (qui suit la tendance du plateau de pompage du système monostable) est lié à l'apparition de ces solutions interpuits stables. Dans la Figure Fig.5.15, nous présentons la surface de réponse du déplacement en bout du tube et la courbe de crête, déterminées numériquement pour $k_1 = -0,096$. La courbe de crête montre une augmentation de l'amplitude maximale dans la plage de force d'excitation $F_1 \in [19; 30, 5]$. Cette augmentation est associée à la présence de ces solutions interpuits stables.

Pour l'amplitude d'excitation $F_1 = 37, 6$, la Figure Fig.5.9(e) montre que les points de la simulation numérique correspondent aux solutions interpuits de la branche supérieure. En observant la surface de réponse (Fig.5.15(a)), on peut facilement comprendre que la branche supérieure des solutions interpuits correspond à l'apparition du nouveau pic de résonance qui est décalé vers les basses fréquences. Il est à noter qu'à ce niveau de forçage, les solutions interpuits de la branche inférieure qui deviennent stables sont également présentes. Cependant, avec les conditions initiales utilisées pour le calcul numérique, le système est attiré vers d'autres solutions.

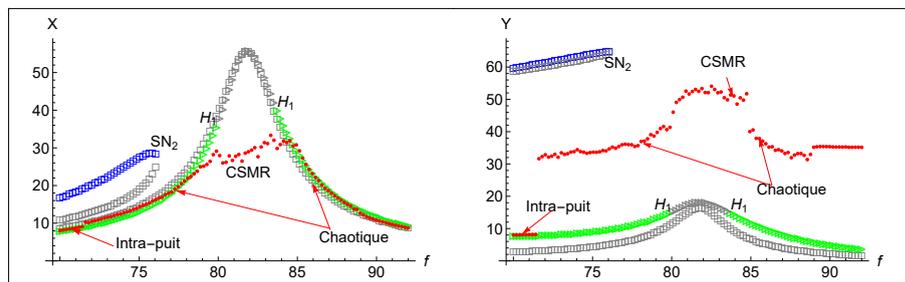
Dans la Figure Fig.5.16, nous avons présenté la variation de la limite de bifurcation d'Hopf des solutions intrapuits en fonction de la valeur de la raideur linéaire. Dans cette figure, nous nous concentrons uniquement sur la courbe \mathcal{G}_{H2} , qui indique la présence de la zone où les solutions intrapuits disparaissent et où les solutions interpuits de la branche inférieure instable deviennent stables. Cette figure montre que lorsque la valeur de la raideur linéaire diminue, la zone indésirable des solutions interpuits stables, dans laquelle le SP présente de fortes amplitudes de vibrations, se déplace vers des amplitudes d'excitation plus élevées. En revanche, la courbe \mathcal{G}_{H1} , qui correspond à l'apparition du régime fortement modulé, ne varie pas beaucoup. Cette courbe est observée presque au même niveau d'excitation qui est modéré. Ce raisonnement peut nous aider à expliquer la stabilisation du comportement bistable et la disparition de la zone de comportement transitoire lorsque la valeur de la raideur linéaire de la membrane est diminuée.



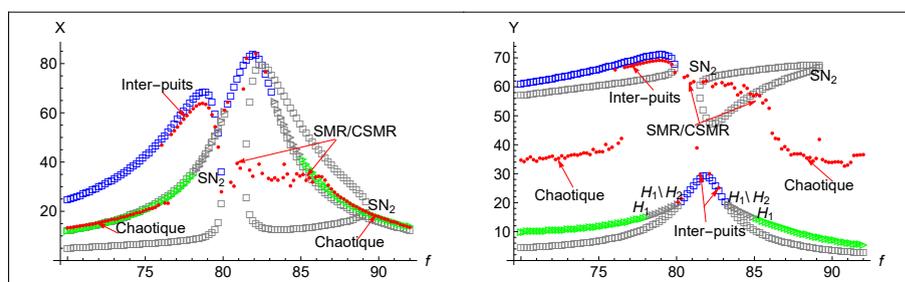
(a) $F_1 = 0,06$



(b) $F_1 = 3,8$

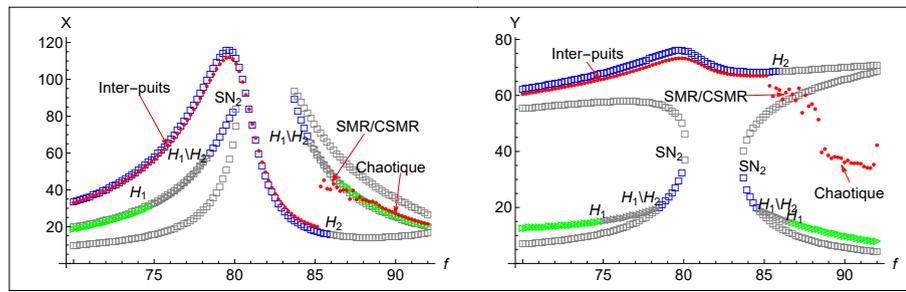


(c) $F_1 = 16,5$



(d) $F_1 = 25$

Figure 5.9: Les courbes de résonance pour différentes amplitudes d'excitation déterminées analytiquement par l'utilisation de la méthode de CX-A ($k_1 = -0,096$). Les carrés bleus et gris présentent respectivement les solutions interpuits stable et instable. Les triangles verts présentent respectivement les solutions intrapuits stable et instable (cont.)



(e) $F_1 = 37,6$

Figure 5.9: Les courbes de résonance pour différentes amplitudes d'excitation déterminées analytiquement par l'utilisation de la méthode de CX-A ($k_1 = -0,096$). Les carrés bleus et gris présentent respectivement les solutions interpuits stable et instable. Les triangles verts présentent respectivement les solutions intrapuits stable et instable

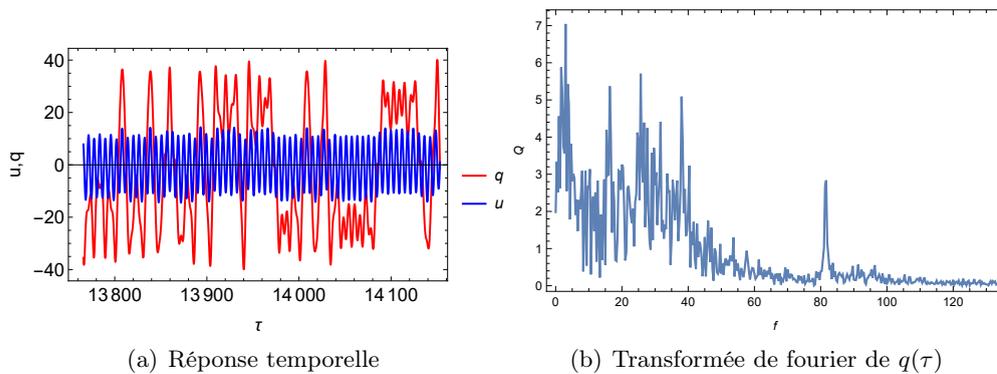


Figure 5.10: (a) La dynamique du système à la force et à la fréquence d'excitation $F_1 = 3,8$ et $f = 81,5$ Hz. En rouge, on montre le déplacement de la membrane et en bleu le déplacement de l'air en bout du tube. (b) La réponse spectrale de l'amplitude de déplacement de la membrane est calculée à partir des données chronologique tracées dans (a).

5.4 Étude asymptotique : VI

5.4.1 Étude Analytique

Notre nouvelle utilisation de la méthode de CX-A pour déterminer simultanément les solutions interpuits et intrapuits de notre système bistable ouvre de nouvelles perspectives pour l'application de la méthode des échelles multiples, permettant ainsi une étude asymptotique plus approfondie de l'analyse de la VI lente qui constitue le centre d'intérêt de cette section.

La méthode des échelles multiples est utilisée. Les échelles de temps lente τ_0 et rapide τ_1 sont introduites :

$$\begin{aligned}
 u_1 = u_1(\tau_0, \tau_1), q_1 = q_1(\tau_0, \tau_1), \phi_1 = \phi_1(\tau_0, \tau_1), \phi_2 = \phi_2(\tau_0, \tau_1) \\
 \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \gamma \frac{\partial}{\partial \tau_1} \\
 \tau_k = t\gamma^k
 \end{aligned}
 \tag{5.27}$$

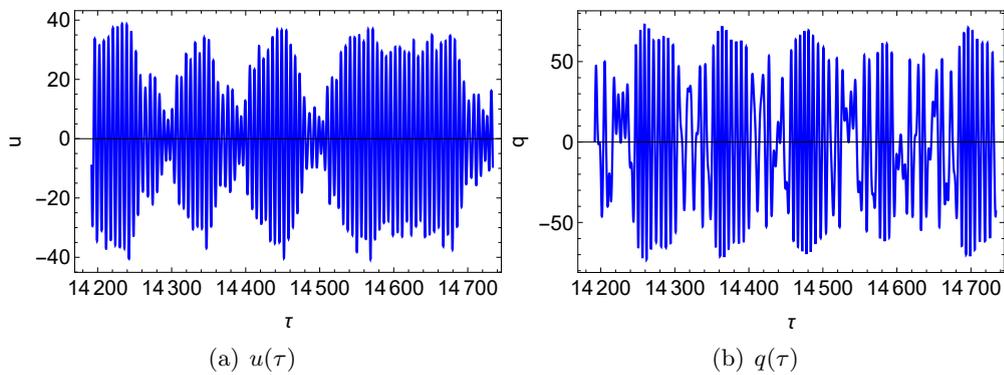


Figure 5.11: La dynamique du système à la force et la fréquence d'excitation $F_1 = 16,5$ et $f = 80,5$ Hz. Gauche : déplacement de l'air en bout du tube. Droite : déplacement au centre de la membrane.

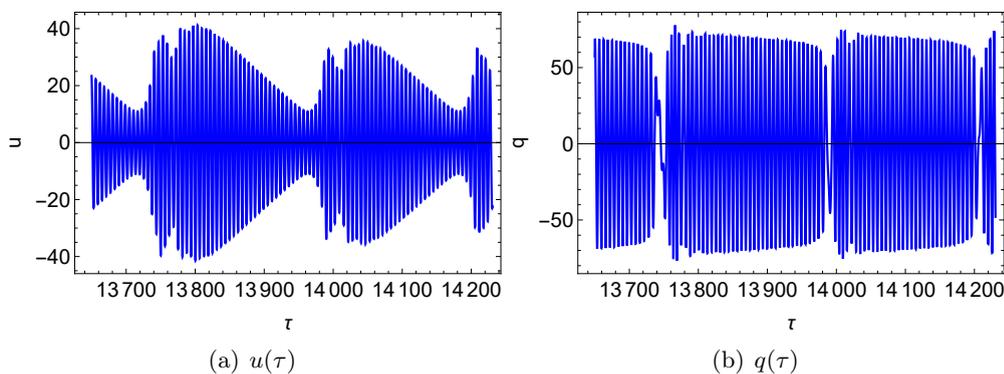


Figure 5.12: La dynamique du système à la force et la fréquence d'excitation $F_1 = 25$ et $f = 80,5$ Hz. Gauche : déplacement de l'air en bout du tube. Droite : déplacement au centre de la membrane.

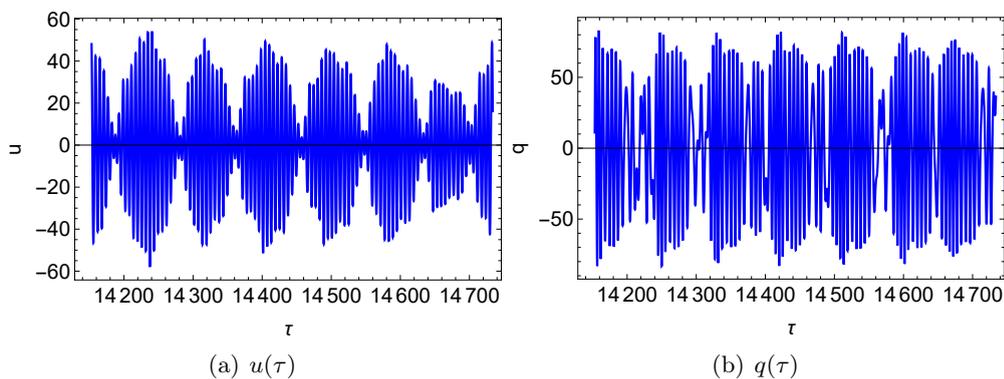


Figure 5.13: La dynamique du système à la force et la fréquence d'excitation $F_1 = 25$ et $f = 84,5$ Hz. Gauche : déplacement de l'air en bout du tube. Droite : déplacement au centre de la membrane.

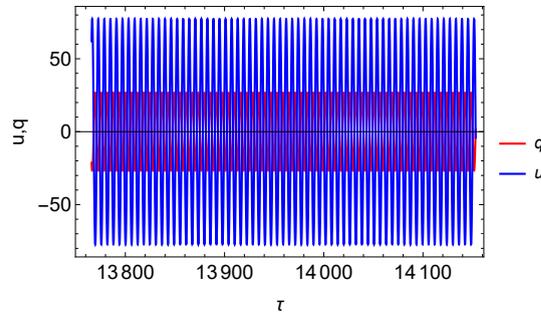


Figure 5.14: La dynamique du système à la force et la fréquence d'excitation $F_1 = 25$ et $f = 81,1$ Hz.

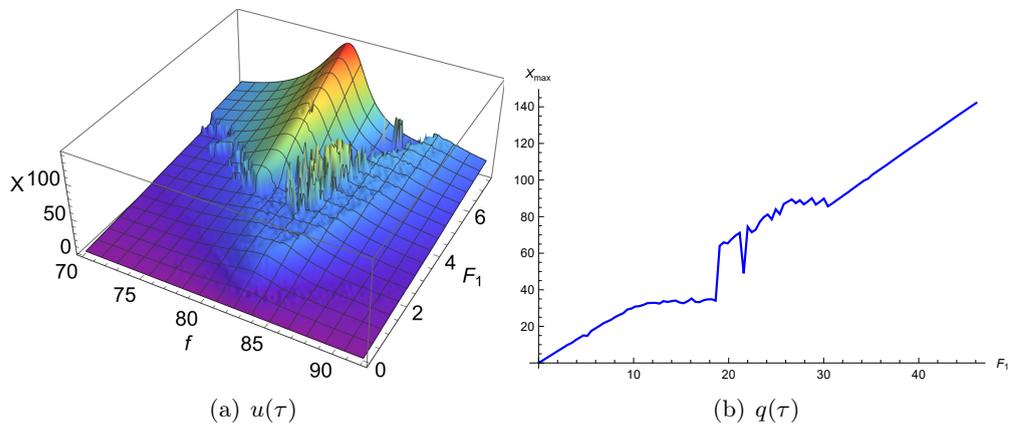


Figure 5.15: La surface de réponse fréquentielle de déplacement de l'air en bout du tube et la courbe de crête, déterminées numériquement pour la valeur de raideur linéaire $k_l = -0,096$.

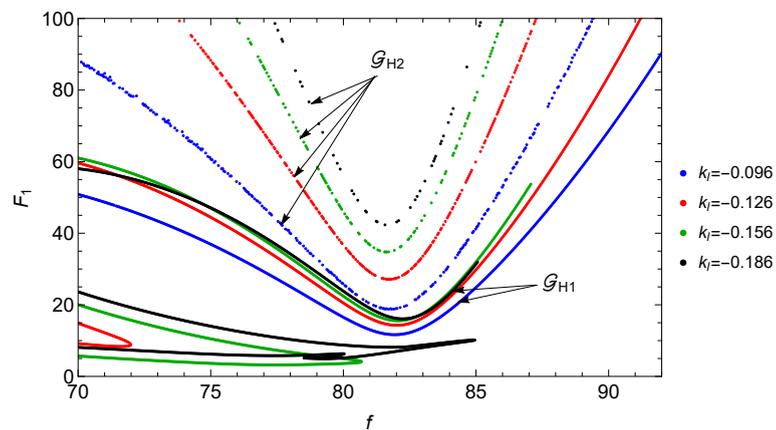


Figure 5.16: La variation de la limite de bifurcation d'Hopf des solutions intrapuits en fonction de la raideur linéaire de la membrane.

À la résonance 1:1, la pulsation d'excitation ω est réécrite de la manière suivante :

$$\omega = 1 + \sigma\gamma \quad (5.28)$$

Les équations Eq.5.27 et Eq.5.28 sont introduites dans le système des variables lentes obtenu dans la première section de ce chapitre (Eq.5.4 et Eq.5.5). Les termes de même puissance de γ sont regroupés et séparés. Seules les équations d'ordre zéro en γ vont être utilisées, et elles s'expriment par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\tau_0} &= \frac{\beta_1 q_1}{\lambda_1} + u_1 \left(-\frac{\beta_1}{\lambda_1} - \frac{1}{\gamma\lambda_1} \right) \\ \frac{dq_1}{d\tau_0} &= q_1 \left(-\frac{\beta_1}{c_{\eta 11}} - \frac{k_{11}}{c_{\eta 11}} - \frac{3k_{nl1}\phi_2\phi_2^*}{2c_{\eta 11}} \right) - \frac{k_{nl1}q_1^3}{c_{\eta 11}} + \frac{\beta_1 u_1}{c_{\eta 11}} \\ \frac{d\phi_1}{d\tau_0} &= 0 \\ \frac{d\phi_2}{d\tau_0} &= -\frac{1}{2}i\beta_1\phi_1 + \phi_2 \left(\frac{i\beta_1}{2} - \frac{c_{\eta 11}}{2} + q_1^2 \left(-\frac{c_{\eta nl1}}{2} + \frac{3ik_{nl1}}{2} \right) + \frac{ik_{11}}{2} - \frac{i}{2} \right) \\ &\quad + \phi_2^*\phi_2^2 \left(-\frac{c_{\eta nl1}}{8} + \frac{3ik_{nl1}}{8} \right) \end{aligned} \quad (5.29)$$

En éliminant la dérivée dans la deuxième équation on peut déterminer les points fixes du système Eq.5.29 :

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1 q_{10}}{\lambda_1} + u_{10} \left(-\frac{\beta_1}{\lambda_1} - \frac{1}{\gamma\lambda_1} \right) &= 0 \\ q_{10} \left(-\frac{\beta_1}{c_{\eta 11}} - \frac{k_{11}}{c_{\eta 11}} - \frac{3k_{nl1}\phi_{20}\phi_{20}^*}{2c_{\eta 11}} \right) - \frac{k_{nl1}q_{10}^3}{c_{\eta 11}} + \frac{\beta_1 u_{10}}{c_{\eta 11}} &= 0 \\ -\frac{1}{2}i\beta_1\phi_{10} + \phi_{20} \left(\frac{i\beta_1}{2} - \frac{c_{\eta 11}}{2} + q_{10}^2 \left(-\frac{c_{\eta nl1}}{2} + \frac{3ik_{nl1}}{2} \right) + \frac{ik_{11}}{2} - \frac{i}{2} \right) \\ + \phi_{20}^*\phi_{20}^2 \left(-\frac{c_{\eta nl1}}{8} + \frac{3ik_{nl1}}{8} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

En écrivant les variables lentes complexes sous forme polaire ($\phi_{10} = N_1 e^{i\theta_1}$ et $\phi_{20} = N_2 e^{i\theta_2}$) et en effectuant un calcul simple, l'équation de la VI est déterminée :

$$\begin{aligned} z_1\beta_1^2 &= z_2^3 \left(\frac{c_{\eta nl1}^2}{16} + \frac{9k_{nl1}^2}{16} \right) + z_2^2 \left(\frac{c_{\eta 11}c_{\eta nl1}}{2} + \frac{3}{2}k_{nl1}(\beta_1 + k_{11} - 1) \right) \\ &\quad + z_2 (c_{\eta 11}^2 + (\beta_1 + k_{11} - 1)^2) + z_2^2 q_{10}^2 \left(\frac{c_{\eta nl1}^2}{2} + \frac{9k_{nl1}^2}{2} \right) \\ &\quad + z_2 q_{10}^2 (2c_{\eta 11}c_{\eta nl1} + 6k_{nl1}(\beta_1 + k_{11} - 1)) + z_2 q_{10}^4 (c_{\eta nl1}^2 + 9k_{nl1}^2) \\ &\quad z_1 = N_1^2, z_2 = N_2^2 \\ q_{10} &= \begin{cases} \pm \sqrt{-\frac{\beta_1 + k_{11}(\beta_1\gamma + 1)}{k_{nl1}(\beta_1\gamma + 1)} - \frac{3z_2}{2}} \\ 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Cette équation permet de décrire simultanément la VI lente du régime intrapuits et interpuits de notre système bistable. Lorsque $q_{10} = 0$, l'équation Eq.5.31 décrit la VI du régime interpuits. Dans ce cas, on observe la même équation qui décrit la VI du système monostable Eq.3.17. En revanche, lorsque $q_{10} \neq 0$, cela correspond à la VI lente du régime intrapuits. Pour les deux cas, l'équation de la VI présente un polynôme de degré trois en z_2 mais avec des coefficients différents. La courbe de la VI interpuits et intrapuits peut présenter des extrêmes ou peut être monotone. Afin d'étudier ces possibilités, la dérivée de la membre droite de l'équation Eq.5.31 par rapport à z_2 est calculée. Pour le régime interpuits, la même équation que celle observée pour le système monostable est obtenue (Eq.3.18). Les solutions de cette équation sont définies par Eq.3.19. Comme nous l'avons expliqué dans le troisième chapitre, la forme de la VI dépend du signe de Δ_{VI} . Si $\Delta_{VI} > 0$, la VI interpuits prend la forme d'un "S", tandis que si elle est négative, la courbe de la VI sera monotone.

Pour le régime intrapuits, la dérivée du membre de droite de l'équation Eq.5.31 par rapport à z_2 est définie par :

$$\begin{aligned} \nu_2 z_2^2 + \nu_1 z_2 + \nu_0 &= 0 \\ \nu_2 &= \frac{75}{16} (c_{\eta n1}^2 + 9k_{n1}^2) (\beta_1 \gamma k_{n1} + k_{n1})^2 \\ \nu_1 &= 5k_{n1} (\beta_1 \gamma + 1) (-c_{\eta n1} c_{\eta n1} k_{n1} (\beta_1 \gamma + 1) + c_{\eta n1}^2 (\beta_1 + \beta_1 \gamma k_{11} + k_{11})) \\ &\quad + 15k_{n1}^3 (\beta_1 \gamma + 1) (1 + \beta_1 (2 + \gamma - \beta_1 \gamma) + 2k_{11} (\beta_1 \gamma + 1)) \\ \nu_0 &= k_{n1}^2 (\beta_1 \gamma + 1)^2 (c_{\eta n1}^2 + (-1 + \beta_1 + k_{11})^2) + (c_{\eta n1}^2 + 9k_{n1}^2) (\beta_1 + \beta_1 \gamma k_{11} + k_{11})^2 \\ &\quad - k_{n1} (\beta_1 \gamma + 1) (2c_{\eta n1} c_{\eta n1} + 6k_{n1} (\beta_1 + k_{11} - 1)) (\beta_1 + \beta_1 \gamma k_{11} + k_{11}). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Les racines de ce polynôme, $z_{2i_{\text{Intra}}}$, qui correspondent aux lignes de plis intrapuits $N_{2i_{\text{Intra}}}$, sont déterminées :

$$\begin{aligned} z_{2i_{\text{Intra}}} &= \frac{-\nu_1 \pm \sqrt{\Delta_{VI_{\text{Intra}}}}}{2\nu_2} = N_{2i_{\text{Intra}}}^2, i = 1; 2 \\ \Delta_{VI_{\text{Intra}}} &= \nu_1^2 - 4\nu_2\nu_0. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Ces lignes de plis sont physiquement réalisables lorsque $\Delta_{VI_{\text{Intra}}}$ et les racines $z_{2i_{\text{Intra}}}$ sont supérieurs à zéro. Dans ce cas, ces lignes de pli présentent les extrema de la courbe de VI intrapuits. Si l'une de ces conditions n'est pas vérifiée, la VI devient monotone.

Pour le calcul de la stabilité de la VI, les coordonnées polaires $\phi_1 = N_1 e^{i\theta_1}$ et $\phi_2 = N_2 e^{i\theta_2}$ sont introduites dans le système d'équations Eq.5.29. En séparant les parties réelles

et imaginaires, le système suivant est obtenu:

$$\begin{aligned}
\frac{du_1}{d\tau_0} &= \frac{\beta_1 q_1}{\lambda_1} + u_1 \left(-\frac{\beta_1}{\lambda_1} - \frac{1}{\gamma \lambda_1} \right) \\
\frac{dq_1}{d\tau_0} &= q_1 \left(-\frac{\beta_1}{c_{\eta 11}} - \frac{k_{11}}{c_{\eta 11}} - \frac{3k_{nl1} N_2}{2c_{\eta 11}} \right) - \frac{k_{nl1} q_1^3}{c_{\eta 11}} + \frac{\beta_1 u_1}{c_{\eta 11}} \\
\frac{dN_1}{d\tau_0} &= 0 \\
\frac{d\theta_1}{d\tau_0} &= 0 \\
\frac{dN_2}{d\tau_0} &= -\frac{c_{\eta nl1} N_2^3}{8} - \frac{c_{\eta 11} N_2}{2} - \frac{1}{2} c_{\eta nl1} N_2 q_1^2 - \frac{1}{2} \beta_1 N_1 \sin(\theta) \\
\frac{d\theta_2}{d\tau_0} &= \frac{3k_{nl1} N_2^3}{8} + \frac{k_{11} N_2}{2} + \frac{\beta_1 N_2}{2} - \frac{N_2}{2} + \frac{3}{2} k_{nl1} N_2 q_1^2 - \frac{1}{2} \beta_1 N_1 \cos(\theta)
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Après l'ajout des perturbations autour des points fixes ($u_1 = \Delta_u + u_{10}$, $q_1 = \Delta_q + q_{10}$, $N_1 = \Delta N_1 + N_1$, $N_2 = \Delta N_2 + N_2$, $\theta = \Delta\theta + \theta_0$) et en utilisant les formules trigonométriques, nous avons obtenu le système linéarisé autour des points fixes, qui peut être écrit sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\Delta_u}{d\tau_0} \\ \frac{d\Delta_q}{d\tau_0} \\ \frac{d\Delta N_1}{d\tau_0} \\ \frac{d\Delta N_2}{d\tau_0} \\ \frac{d\Delta\theta}{d\tau_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\beta_1}{\lambda_1} - \frac{1}{\gamma\lambda_1} & \frac{\beta_1}{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_1}{c_{\eta 11}} & -\frac{2\beta_1 + 2k_{11} + 3k_{nl1}N_2^2 + 6k_{nl1}q_{10}^2}{2c_{\eta 11}} & 0 & -\frac{3k_{nl1}N_2q_{10}}{c_{\eta 11}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{\eta nl1}N_2q_{10} & -\frac{1}{2}\beta_1 \sin(\theta_0) & -\frac{c_{\eta 11}}{2} - \frac{3c_{\eta nl1}N_2^2}{8} - \frac{c_{\eta nl1}q_{10}^2}{2} & -\frac{1}{2}\beta_1 N_1 \cos(\theta_0) \\ 0 & 3k_{nl1}q_{10} & -\frac{\beta_1 \cos(\theta_0)}{2N_2} & \frac{3k_{nl1}N_2^3 + 2\beta_1 N_1 \cos(\theta_0)}{4N_2^2} & \frac{\beta_1 N_1 \sin(\theta_0)}{2N_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_u \\ \Delta_q \\ \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \Delta\theta \end{pmatrix}$$

$$\cos(\theta_0) = \frac{N_2 (4(\beta_1 - 1) + 4k_{11} + 3k_{nl1} (N_2^2 + 4q_{10}^2))}{4\beta_1 N_1}$$

$$\sin(\theta_0) = -\frac{N_2 (4c_{\eta 11} + c_{\eta nl1} (N_2^2 + 4q_{10}^2))}{4\beta_1 N_1} \quad (5.35)$$

5.4.2 Explication des résultats de l'optimisation

Dans cette partie, nous allons présenter les courbes des VI du système bistable pour deux valeurs différentes de raideur linéaire : l'une se situant dans la plage avant le plateau minimum avec $k_1 = -0,11$, et l'autre appartenant à la plage optimale de raideur linéaire avec $k_1 = -0,168$.

Avant le plateau minimum

Les sous-figures Fig.5.17(a) et Fig.5.17(b) présentent respectivement les courbes des variétés invariantes des oscillations intrapuits et interpuits pour la valeur de raideur linéaire $k_1 = -0,11$. Les courbes en bleu correspondent aux parties stables, tandis que celles en rouge indiquent les parties instables.

Pour cette valeur de raideur linéaire, la VI interpuits présente une courbe en forme de "S" avec deux extrémités. Pour les faibles amplitudes de vibration, on observe une zone instable dans la branche inférieure de la VI. Cette instabilité s'explique par l'absence de solutions interpuits stables pour les faibles amplitudes d'excitation. Comme le montrent les sous-figures Fig.5.1(a) et Fig.5.9(a), les solutions interpuits à faible amplitude de vibration et autour de la résonance du tube ne sont qu'instables. Ceci explique la présence de cette zone instable à faibles amplitudes. Avec l'augmentation de l'amplitude de déplacement, la branche inférieure devient stable. Entre les deux extrémités, la branche instable est observée. Après cette branche instable, la courbe de VI redevient stable.

Pour le régime intrapuits, VI présente une courbe strictement monotone. Cette courbe reste stable pour des amplitudes de vibration relativement faibles, mais elle devient instable à mesure que l'amplitude de vibration augmente. Cette instabilité peut expliquer la disparition des oscillations intrapuits pour de fortes amplitudes d'excitation.

Pour cette valeur de raideur linéaire, la superposition de la courbe caractéristique de la membrane bistable avec celle du tube présente un seul point de fonctionnement, ce qui est lié au caractère raidissant de la membrane (voir Fig.5.18). Dans ce cas, la VI interpuits présente une courbe en S, ce qui prouve la présence du PE lié à la capture de résonance du caractère raidissant. Par contre, la courbe de VI intrapuits montre une allure strictement croissante. Dans ce cas, le système présente seulement des réponses intrapuits périodiques, c'est-à-dire l'absence des réponses fortement modulées intrapuits.

Dans la zone optimale

Pour la valeur de raideur linéaire $k_1 = -0,168$, les courbes des VI des oscillations intrapuits et interpuits sont présentées respectivement dans les sous-figures Fig.5.19(a) et Fig.5.19(b).

Dans la sous-figure Fig.5.20(a), nous avons présenté la réponse temporelle du déplacement de l'air en bout du tube $x(\tau) = u - u_1$ et du déplacement de la membrane $y(\tau) = q - q_1$, dont l'axe des oscillations est ramené à zéro. Cette réponse montre la dynamique du système pour la valeur de raideur linéaire $k_1 = -0,168$, avec une amplitude d'excitation $F_1 = 5$ et une fréquence $f = 77$ Hz. Elle présente une réponse fortement modulée intrapuits. La projection de cette réponse temporelle sur la courbe de la VI des solutions intrapuits (voir Fig.5.20(b)) démontre la capacité de notre modèle à décrire la dynamique du régime

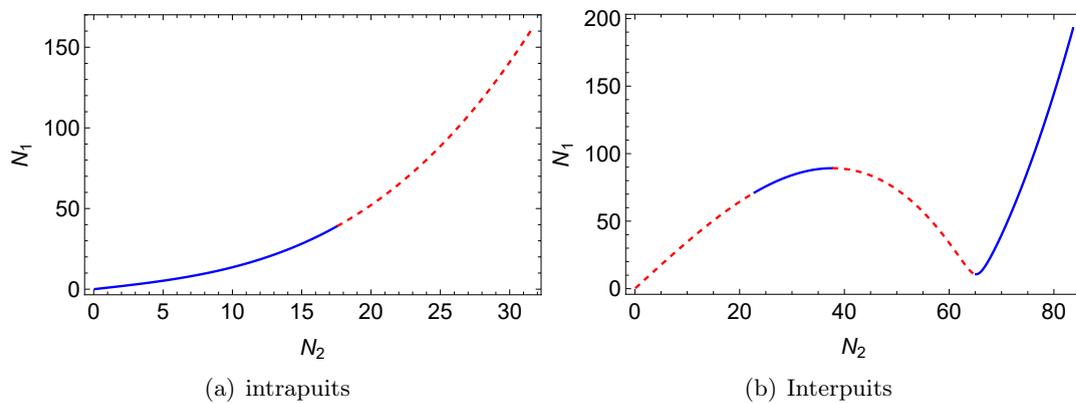


Figure 5.17: Les courbes de VI des oscillations intrapuits et interpuits pour la valeur de raideur linéaire $k_1 = -0,11$.

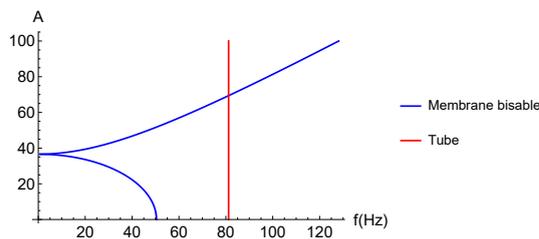


Figure 5.18: La superposition de la courbe caractéristique de la membrane bistable avec celle du tube, lorsque la fréquence propre de la membrane est inférieure à celle du tube.

fortement modulé intrapuits.

Pour cette valeur, les deux courbes de la VI présentent des extrémités. Cela confirme la possibilité d'obtenir des réponses fortement modulées intrapuits et interpuits. La superposition de la courbe caractéristique de la membrane bistable avec celle du tube montre deux points d'intersection où les deux oscillateurs entrent en capture de résonance : l'un de caractère ramollissant observé à faible amplitude de vibration, caractérisé par la présence de la réponse fortement modulée intrapuits, et l'autre de caractère raidissant observé à forte amplitude d'excitation, caractérisé par la réponse fortement modulée interpuits.

Dans ce cas, non seulement la VI interpuits présente une courbe en S, mais aussi la forme de la VI intrapuits devient en S. Cela prouve la présence du PE lié au caractère ramollissant de la membrane bistable.

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que la zone de comportement optimal de la membrane bistable est observée lorsque le système présente deux plateaux de PE (PE), l'un à faible niveau d'excitation caractérisé par la réponse fortement modulée intrapuits, et l'autre à un niveau plus élevé caractérisé par la réponse fortement modulée inter-puit. En présentant les courbes des variétés invariantes (VI) interpuits et intrapuits pour deux valeurs de raideur linéaire choisies, nous obtenons un accord avec ce résultat. La valeur de raideur linéaire $k_1 = -0,11$ se situe dans la zone précédant la zone optimale qui présente une seule zone de PE liée au caractère raidissant. Ceci peut s'expliquer par les courbes de VI à cette valeur de raideur linéaire, qui montrent que le système ne présente que des réponses

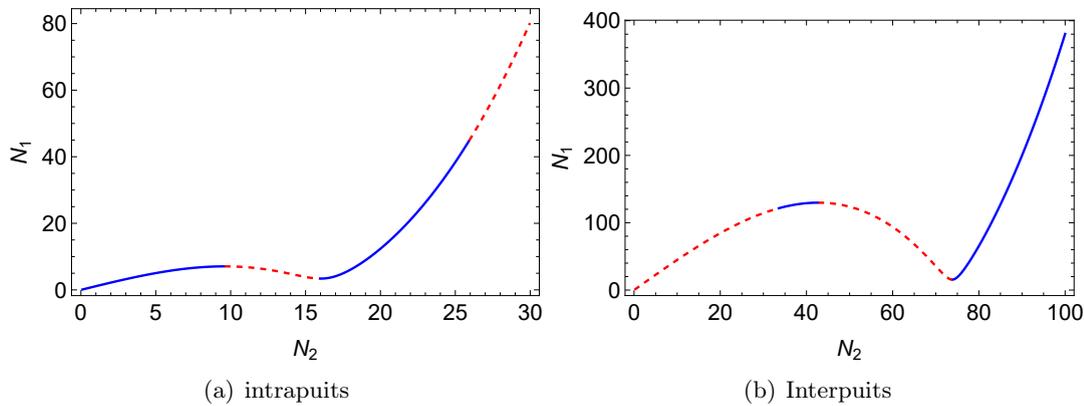


Figure 5.19: Les courbes de VI des oscillations intrapuits et interpuits pour la valeur de raideur linéaire $k_1 = -0,168$.

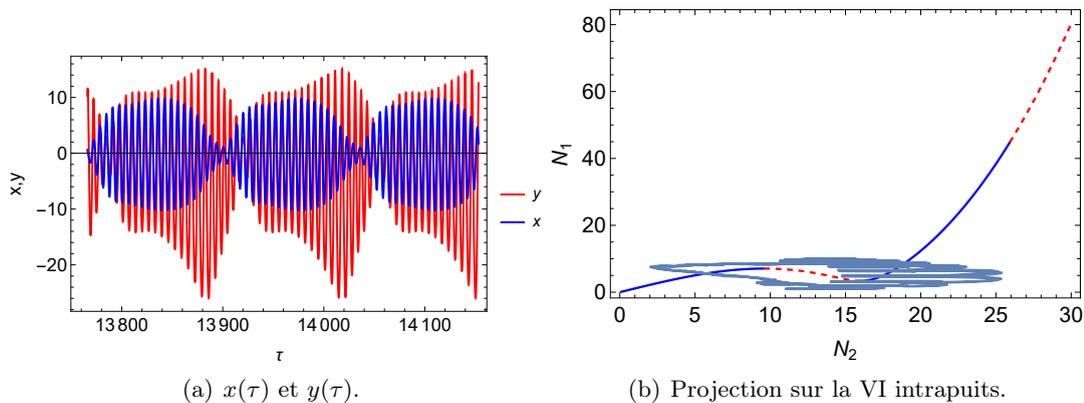


Figure 5.20: La réponse fortement modulée intrapuits ramenée à l'axe de l'oscillation zéro et sa projection sur la courbe de la VI intrapuits pour la valeur de raideur linéaire $k_1 = -0,168$ à l'amplitude et la fréquence d'excitation $F_1 = 5$ et $f = 77$ Hz.

fortement modulées interpuits. La valeur de raideur linéaire $k_1 = -0,168$ appartient à la zone du comportement optimal qui correspond à deux zones de PE. À cette valeur, les courbes de VI montrent que le système peut présenter les deux réponses fortement modulées interpuits et intrapuits, ce qui confirme la possibilité d'avoir les deux plateaux de pompage.

Il faut noter que par rapport à la courbe de VI interpuits, celle des solutions intrapuits présente une amplitude de vibration clairement moins importante. Ceci reflète la faible amplitude de vibration des solutions intrapuits.

5.5 Position d'équilibre dynamique

Lors du calcul réalisé dans ce chapitre, on a démontré analytiquement l'existence d'une position d'équilibre dynamique qui est variable en fonction de l'amplitude de vibration de la membrane bistable qui est dépendante des paramètres d'excitation. Cette position d'équilibre dynamique (u_{10}, q_{10}) correspond aux amplitudes de décalage de déplacements du SP et du NES bistable par rapport à la position zéro. Dans le régime interpuits les amplitudes de décalage sont égales à $(0, 0)$ tandis que dans le régime intrapuits, la position d'équilibre dynamique présente des valeurs différentes de zéro Eq.5.8.

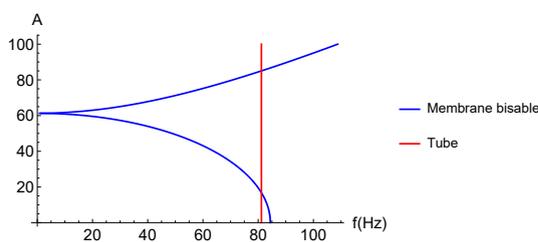


Figure 5.21: La superposition de la courbe caractéristique de la membrane bistable avec celle du tube, lorsque la fréquence propre de la membrane est supérieure à celle du tube.

Dans cette section, nous allons comparer analytiquement et numériquement la variation de la position d'équilibre dynamique. Les résultats sont présentés pour trois valeurs différentes de raideur linéaire : $k_1 = -0,096$, $k_1 = -0,126$ et $k_1 = -0,276$. Les figures Fig.5.22, Fig.5.23 et Fig.5.24 présentent respectivement, pour ces trois valeurs de raideur linéaire, la variation de la position d'équilibre dynamique de la membrane en fonction de l'amplitude et de la fréquence d'excitation. La sous-figure de gauche correspond au calcul analytique, et celle de droite indique le résultat numérique.

Pour la variation analytique, nous utilisons l'expression q_{10} de l'équation Eq.5.8. Dans le régime intrapuits ($q_{10} \neq 0$), nous ne traçons que les solutions stables. Pour les autres points de la surface 3D q_{Theo} , nous avons forcé cette position à zéro. En dehors du régime intrapuits, le système peut présenter un régime chaotique, interpuits, fortement modulé ou fortement modulé chaotique. Pour ces différents régimes, le signal de déplacement présente une valeur moyenne nulle ou très proche de zéro. Pour la variation numérique, nous avons déterminé, par intégration numérique, la réponse temporelle de la membrane pour chaque amplitude et fréquence d'excitation. En appliquant la moyenne sur les trois dernières secondes du signal, nous pouvons déterminer la position d'équilibre dynamique de la membrane, puis construire la surface 3D q_{Num} .

Pour $k_1 = -0,096$, la figure Fig.5.22 montre un accord entre la variation analytique et numérique à un niveau d'excitation relativement faible. Avec l'augmentation de l'amplitude d'excitation, un régime chaotique apparaît. Par conséquent, la valeur moyenne du déplacement de la membrane s'écarte de la valeur analytique. Comme le calcul analytique réalisé dans ce chapitre est limité aux solutions périodiques de ce système et n'étudie pas les solutions chaotiques, seules les zones qui présentent les solutions intrapuits et interpuits peuvent être bien superposées.

Avec la diminution de la valeur de raideur linéaire (voir Fig.5.23 et Fig.5.24), le régime chaotique devient de moins en moins observé, ce qui rapproche les résultats numériques et théoriques.

5.6 Conclusion

Pour conclure, nous avons atteint les objectifs de ce chapitre. D'une part, nous avons réussi à développer des méthodes analytiques adaptées aux spécificités du NES bistable pour décrire son comportement de manière appropriée, et d'autre part, nous avons expliqué les principaux résultats de l'optimisation.

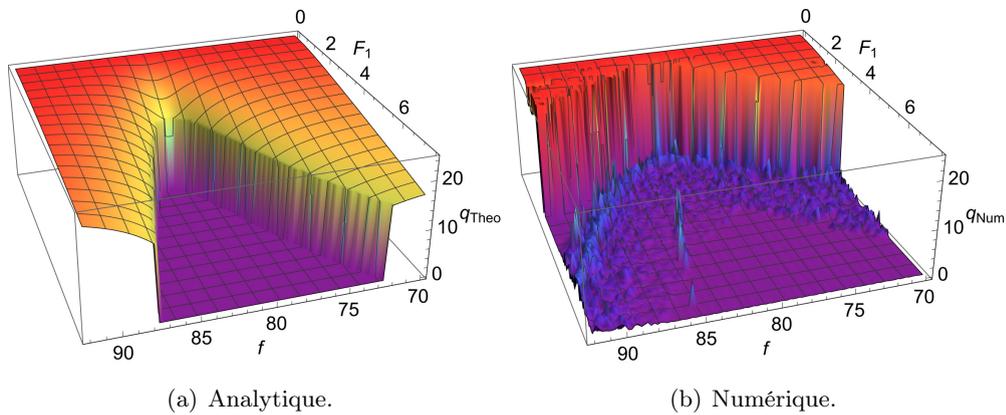


Figure 5.22: La variation de la position d'équilibre dynamique de la membrane en fonction de l'amplitude et la fréquence d'excitation pour $k_1 = -0,096$.

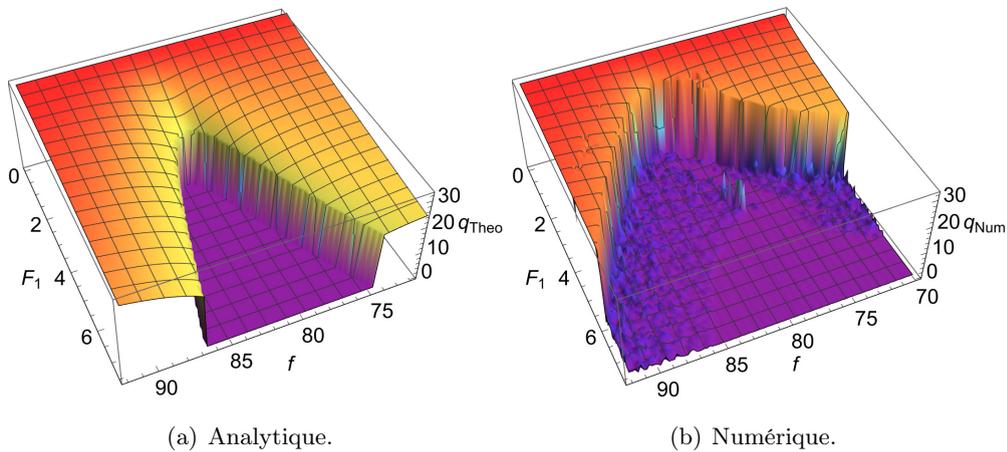


Figure 5.23: La variation de la position d'équilibre dynamique de la membrane en fonction de l'amplitude et la fréquence d'excitation pour $k_1 = -0,126$.

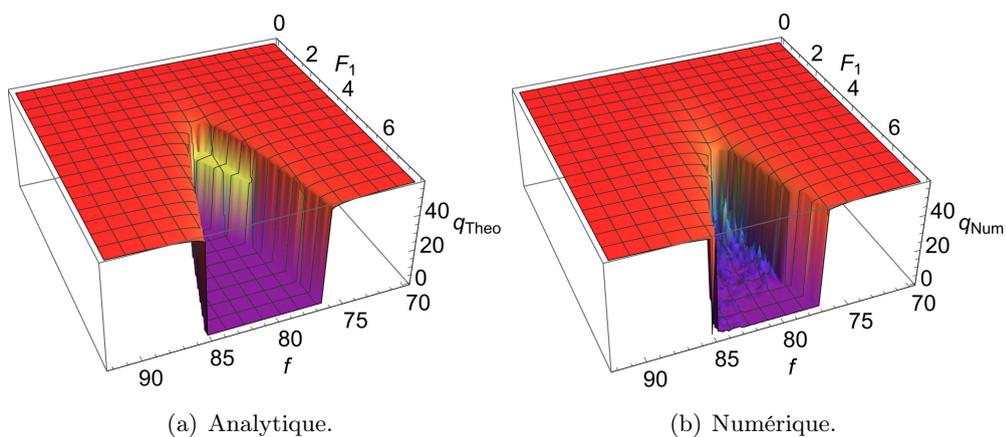


Figure 5.24: La variation de la position d'équilibre dynamique de la membrane en fonction de l'amplitude et la fréquence d'excitation pour $k_1 = -0,276$.

En premier lieu, nous avons développé une nouvelle technique basée sur l'application de la méthode de complexification de Manevitch. Cette méthode repose sur une transformation de coordonnées qui introduit une position d'équilibre variable. En utilisant cette technique, nous avons déterminé les solutions périodiques du système bistable (interpuits et intrapuits), ainsi que ses diagrammes de bifurcation. Ces outils sont ensuite utilisés pour expliquer le comportement fréquentiel bistable observé numériquement dans le chapitre précédent. Nous avons pu montrer que le système bistable présente parfois des solutions périodiques interpuits de fortes amplitudes de vibration, qui sont liées à la présence de la zone transitoire où les valeurs d'aire sont relativement importantes (moins efficaces).

Ensuite, par l'utilisation de la méthode des échelles multiples, nous avons pour la première fois déterminé un modèle qui décrit simultanément les VI interpuits et intrapuits du système bistable. En étudiant les VI, nous avons montré que dans la zone de comportement optimal, non seulement la VI interpuits présente une courbe en S, mais aussi la VI intrapuits prend la forme d'un S. Cela prouve la présence de deux zones de PE, l'une liée au caractère raidissant de la membrane bistable, caractérisée par une réponse fortement modulée interpuits, et l'autre liée au caractère ramollissant de la membrane bistable, caractérisée par une réponse fortement modulée intrapuits.

À la fin de ce chapitre, nous avons vérifié numériquement la variabilité de la position d'équilibre dynamique sur laquelle repose notre nouvelle technique de calcul analytique.

Chapitre 6

Étude expérimentale d'un système avec NES bistable

Introduction

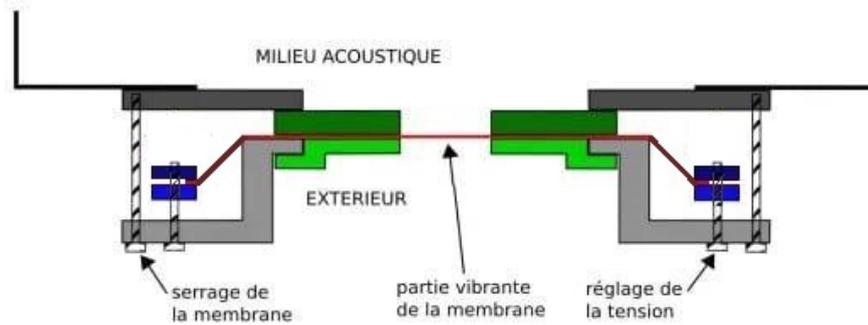
Ce chapitre est consacré à la validation expérimentale des principaux résultats obtenus dans les deux chapitres précédents, à savoir les résultats d'optimisation et la position d'équilibre dynamique. Dans la première section de ce chapitre, nous présentons la solution proposée pour l'absorbeur vibroacoustique non linéaire bistable, à travers laquelle nous avons réalisé divers essais expérimentaux. La deuxième section consiste à explorer expérimentalement le comportement fréquentiel des membranes bistables et à le comparer à celui des membranes monostables. Dans la troisième section, nous présentons la variation expérimentale de l'aire en fonction de la raideur linéaire de la membrane. Enfin, nous exposons à la fin de ce chapitre les résultats expérimentaux de la variation de la position d'équilibre dynamique en fonction de l'amplitude et de la fréquence d'excitation.

6.1 Dispositif et essais expérimentaux

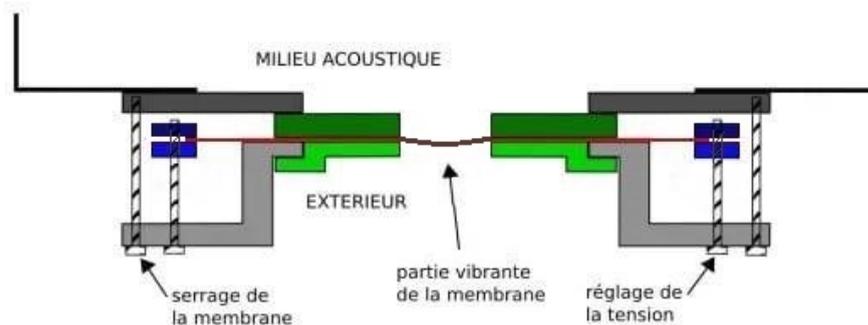
Dans cette partie, le même dispositif expérimental décrit dans le deuxième chapitre de cette thèse est utilisé, en remplaçant l'absorbeur non linéaire vibroacoustique monostable par un bistable. Pour construire ce NES bistable, nous avons utilisé la même membrane circulaire viscoélastique que celle utilisée pour construire le NES monostable, mais nous l'avons montée de manière différente sur son support.

Dans les sous-figures Fig.6.1(a) et Fig.6.1(b), nous avons présenté respectivement le schéma de principe du montage de la membrane monostable et celui de la membrane bistable sur le support. Pour obtenir le NES monostable, la membrane était montée entre les deux bagues inférieure et supérieure. Ensuite, en serrant les vis de réglage de la précontrainte, l'ensemble des deux bagues se déplaçait par rapport au support inférieur pour étirer la membrane, appliquant ainsi une précontrainte de traction sur celle-ci. Dans cette configuration, l'allongement de la membrane assurait qu'il existe une unique position d'équilibre stable, par rapport à laquelle la membrane vibre ($q_e = 0$).

Pour créer une membrane bistable, l'idée consiste à flamber la membrane au lieu de l'étirer. Pour cela, on commence par desserrer les vis de réglage de la précontrainte jusqu'à ce que la bague inférieure soit au même niveau que le mors inférieur. Ensuite, on dépose



(a) Membrane monostable (Schéma tiré de [4]).



(b) Membrane bistable.

Figure 6.1: Schéma de principe du montage de la membrane monostable et bistable sur leur support. Gris foncé : support supérieur. Gris clair : support inférieur. Vert foncé : mors supérieur. Vert clair : mors inférieur. Bleu foncé : bague supérieure. Bleu clair : bague inférieure.

la membrane entre les deux bagues et on place une petite masse au centre de la membrane pour obtenir une légère flèche de flambement. Ensuite, on fixe la membrane entre les deux bagues à l'aide de vis de fixation. Lors de cette étape, il est important de faire attention lors du serrage de ces vis afin d'assurer le flambement de la membrane tout en évitant la formation de plis. En maintenant la masse au centre de la membrane pour garantir la présence du flambement, on assemble l'ensemble inférieur avec l'ensemble supérieur. Enfin, on retire la masse, obtenant ainsi une membrane flambée avec une flèche δ_m qui constitue notre absorbeur non linéaire vibroacoustique bistable.

Mathématiquement (voir l'équation Eq.2.1), la précontrainte appliquée sur la membrane fait apparaître le coefficient χ , défini comme le rapport entre la précontrainte e_0 et la contrainte critique de flambement $\frac{h^2}{3R^2}$ ($\chi = \frac{3R^2 e_0}{h^2}$). Lorsque la précontrainte appliquée sur la membrane e_0 est égale à $-\frac{h^2}{3R^2}$, la raideur linéaire $k_1 = c_1(1 + \chi)$ s'annule. Ce cas critique sépare la possibilité d'avoir une membrane flambée bistable ($k_1 < 0 : e_0 < -\frac{h^2}{3R^2}$) de celle d'avoir une membrane non flambée monostable ($k_1 > 0 : e_0 > -\frac{h^2}{3R^2}$). En tenant compte de la présence des boîtes de couplage, la raideur apparente de la membrane est affectée, et le comportement bistable sera observé lorsque $k_1 < -\frac{\beta}{\beta+1}$.

Après avoir décrit les étapes du montage de la membrane bistable, nous passons à la

réalisation des séries d'essais expérimentaux. Le même système automatisé décrit dans le deuxième chapitre de cette thèse est utilisé dans cette partie. La différence apparaît lors de la mise en place du capteur de déplacement. Le même capteur de déplacement laser Keyence LK-G152 est utilisé, caractérisé par une plage de mesure de $\pm 40m$ mm et d'une distance de référence de 150 mm.

Pour la membrane monostable, le capteur est placé devant la membrane. La ligne du faisceau laser est dirigée vers le milieu de la membrane, respectant ainsi la distance de référence. En remettant à zéro le capteur de déplacement, nous fixons la position de zéro, correspondant à la position d'équilibre statique de la membrane autour de laquelle elle vibre symétriquement.

Pour la membrane bistable, la présence de deux positions d'équilibre stables peut compliquer l'analyse de la mesure de déplacement. Pour garantir d'avoir la position zéro comme position de référence, la remise à zéro du capteur est réalisée en pointant la ligne du faisceau laser à l'extrémité de la partie vibrante de la membrane. Cette position correspond à la position d'équilibre instable de la membrane où $q = 0$, et la membrane peut être considérée comme étant encastree au support. Après ce réglage, on déplace le capteur à travers une crémaillère pour pointer la ligne du faisceau laser au centre de la membrane.

Dans ce travail, le comportement global du système est exploré. La plage d'excitation en amplitude-fréquence est fixée à $V \in [0,01; 1,5]$ v et $f \in [70; 100]$ Hz. Des pas de fréquence de 0,5 Hz et de tension de 0,023V ont été choisis pour permettre à la fois de décrire l'ensemble de la réponse du système autour de la fréquence propre du tube et de minimiser le temps de mesure pour réaliser le nombre maximal d'expériences.

Afin d'étudier l'effet de la variation de la raideur linéaire sur le comportement de notre système couplé tube-membrane, nous avons choisi, dans cette partie, de varier uniquement la précontrainte (de flambement ou de traction) appliquée sur la membrane, tout en maintenant le diamètre et l'épaisseur de la membrane constants ($h_m = 0,24$ mm et $R_m = 4$ cm). Sept configurations différentes de membranes bistables ont été réalisées, avec des flèches de flambement variant entre 1,9 mm et 7,2 mm. Pour la comparaison, deux autres configurations de membranes monostables ont été réalisées, avec des fréquences propres couplées de $f_{m,coupl} = 64,8$ Hz et $f_{m,coupl} = 17,5$ Hz.

Pour les membranes bistables, la valeur de la raideur linéaire k_l est déterminée à partir de l'égalité entre la flèche de flambement mesurée δ_m et l'expression de la position d'équilibre statique q_e : $k_l = -\delta_m^2 k_{nl} - \frac{\beta}{\beta+1}$. Pour les membranes monostables, la valeur de la fréquence propre couplée de la membrane f_{mc} doit être mesurée à très faible amplitude d'excitation. La valeur de la raideur linéaire k_l est identifiée en résolvant l'équation $f_{1Mon} = f_{mc}$ (l'expression de la fréquence propre couplée f_{1Mon} est définie dans l'équation Eq.4.5).

Le tableau suivant présente, pour les différentes configurations de membrane bistable, la flèche de flambement, la raideur linéaire adimensionnée et celle dimensionnée :

δ_m (m)	0,0019	0,004	0,0045	0,0046	0,0059	0,0075	0,0082
k_l	-0,077	-0,15	-0,17	-0,18	-0,25	-0,38	-0,44
c_l (N.m ⁻¹)	-26,8	-52,2	-59,2	-62,7	-87,1	-132,4	-153,3

Table 6.1: Les différentes configurations de membranes bistables.

$f_m(\text{Hz})$	64,8	17,5
k_1	0,14	-0,042
$c_1(\text{N.m}^{-1})$	48,8	-14,6

Table 6.2: Les différentes configurations de membranes monostables.

Il convient de noter que lors du montage de notre membrane bistable, il existe une limite qui empêche d'obtenir un flambage plus important en raison de l'apparition de plis.

Dans le tableau Tab.6.2, nous avons présenté, pour les différentes configurations de membrane monostable, la fréquence propre couplée de la membrane (puisque $\delta_m(\text{m}) = 0$), la raideur linéaire adimensionnée et celle dimensionnée. La deuxième configuration de la membrane monostable du tableau Tab.6.2 présente une raideur linéaire négative de $k_1 = -0,042$. Cette valeur de raideur est supérieure à la valeur critique de flambement, qui est de $-0,056$.

6.2 Réponse fréquentielle

Dans cette partie, nous avons présenté les résultats expérimentaux pour trois configurations différentes : deux configurations de membrane bistable avec des flèches de flambement de $\delta_m = 0,0019 \text{ m}$ et $\delta_m = 0,0059 \text{ m}$, et une troisième configuration avec une membrane monostable ayant une fréquence propre de membrane $f_m = 64,8 \text{ Hz}$. Les figures Fig.6.2, Fig.6.3 et Fig.6.4 présentent respectivement les surfaces de réponse fréquentielle de la pression acoustique de l'air au milieu du tube P_{exp} et du déplacement au centre de la membrane Q_{exp} pour ces trois configurations de membrane. Ces surfaces expérimentales sont obtenues par une moyenne quadratique des déplacements. Pour tenir compte des réponses intrapuits, avant d'appliquer cette moyenne quadratique, nous avons soustrait la valeur moyenne de la demi-dernière seconde de l'enregistrement.

Ces résultats démontrent tout d'abord la capacité de notre solution de membrane bistable à produire le phénomène d'effet de PE et à présenter un comportement global similaire à ce que nous avons observé numériquement. Dans la figure Fig.6.5, un exemple de mesure temporelle pour ces trois configurations de membrane est présenté. Contrairement à la figure Fig.6.5(c), qui présente une réponse fortement modulée, les figures Fig.6.5(a) et Fig.6.5(b) montrent la présence de la réponse fortement modulée chaotique qui caractérise le phénomène d'effet de PE en bistable.

La figure Fig.6.6 montre la variation de la fréquence de crête en fonction de l'amplitude d'excitation pour ces trois configurations différentes de la membrane. Ces sous-figures présentent des courbes similaires aux variations observées numériquement dans le quatrième chapitre pour $k_1 = -0,126$ et $k_1 = 0,024$ (voir Fig.4.15(c) et Fig.4.19(c)). À faible niveau d'excitation, la membrane monostable présente une augmentation de la fréquence de crête qui est liée à l'effet de raidissement de cette membrane. En revanche, les membranes bistables présentent une diminution de la fréquence de crête, ce qui indique l'effet de la non-linéarité de ramollissement de notre membrane bistable.

Ces premiers résultats peuvent valider notre modèle expérimental de membrane bistable.

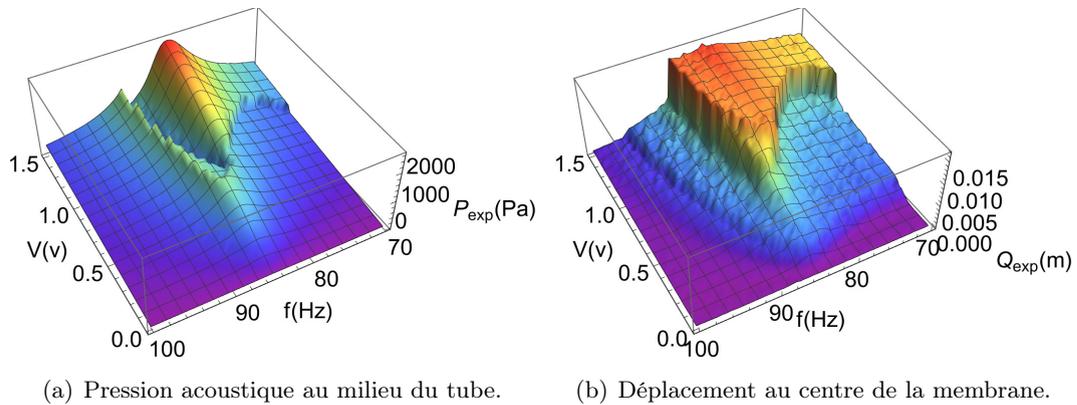


Figure 6.2: Surfaces des réponses fréquentielles du tube et de la membrane déterminées expérimentalement pour une membrane bistable de configuration : $h_m = 0,24$ mm, $R_m = 4$ cm et $\delta_m = 0,0019$ m.

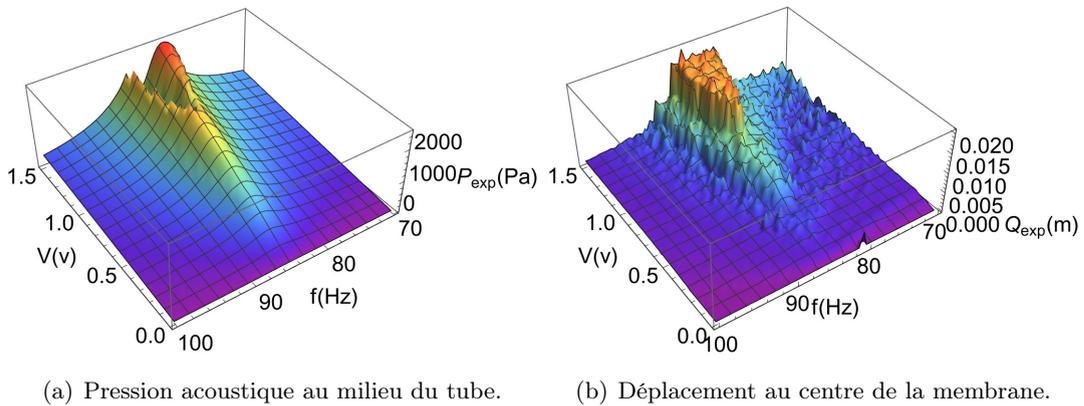


Figure 6.3: Surfaces des réponses fréquentielles du tube et de la membrane déterminées expérimentalement pour une membrane bistable de configuration : $\delta_m = 0,24$ mm, $R_m = 4$ cm et $\delta_m = 0,0059$ m.

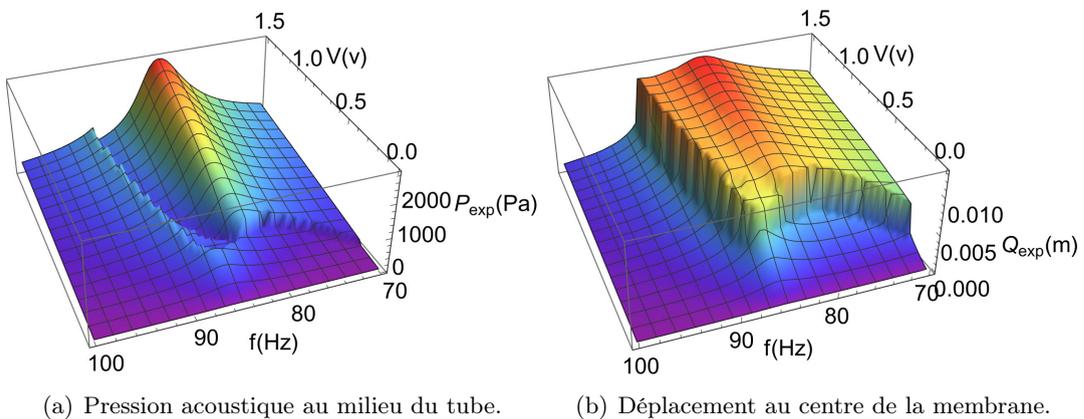


Figure 6.4: Surfaces des réponses fréquentielles du tube et de la membrane déterminées expérimentalement pour une membrane monostable de configuration : $h_m = 0,24$ mm, $R_m = 4$ cm et $f_m = 64,8$ Hz.

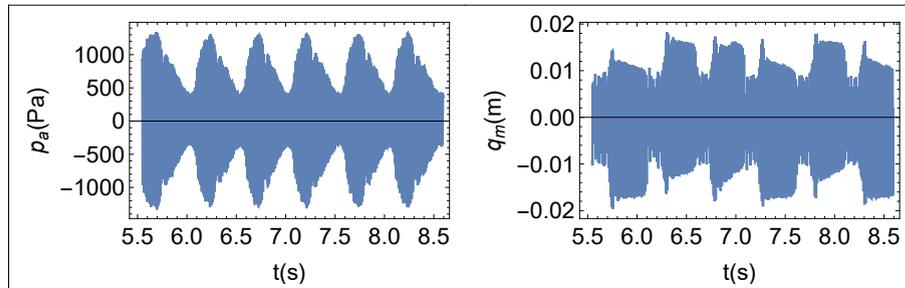
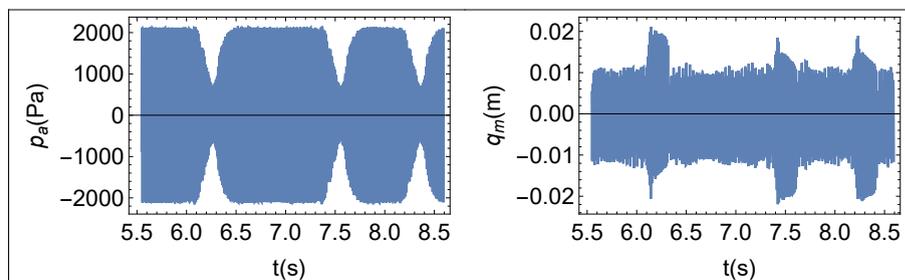
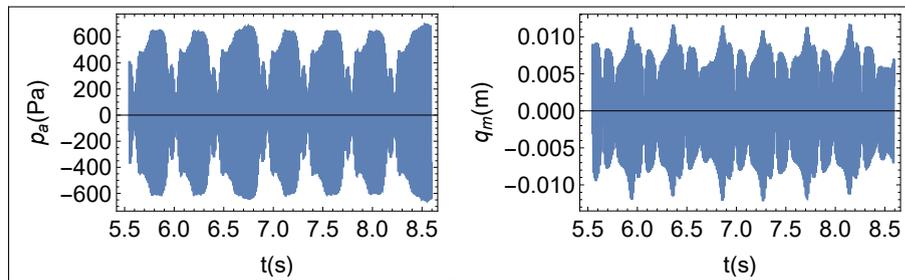
(a) $\delta_m = 0,0019$ m, $V = 0,68$ v et $f = 83,7$ Hz(b) $\delta_m = 0,0059$ m, $V = 1,03$ v et $f = 85,7$ Hz(c) $f_m = 64,8$ Hz, $V = 0,31$ v et $f = 85$ Hz

Figure 6.5: La réponse temporelle du système mesurée expérimentalement à une amplitude et une fréquence d'excitation données pour les trois différentes configurations de membrane : $\delta_m = 0,0019$ m, $\delta_m = 0,0059$ m et $f_m = 64,8$ Hz. À gauche : pression acoustique au milieu du tube. À droite : déplacement au centre de la membrane.

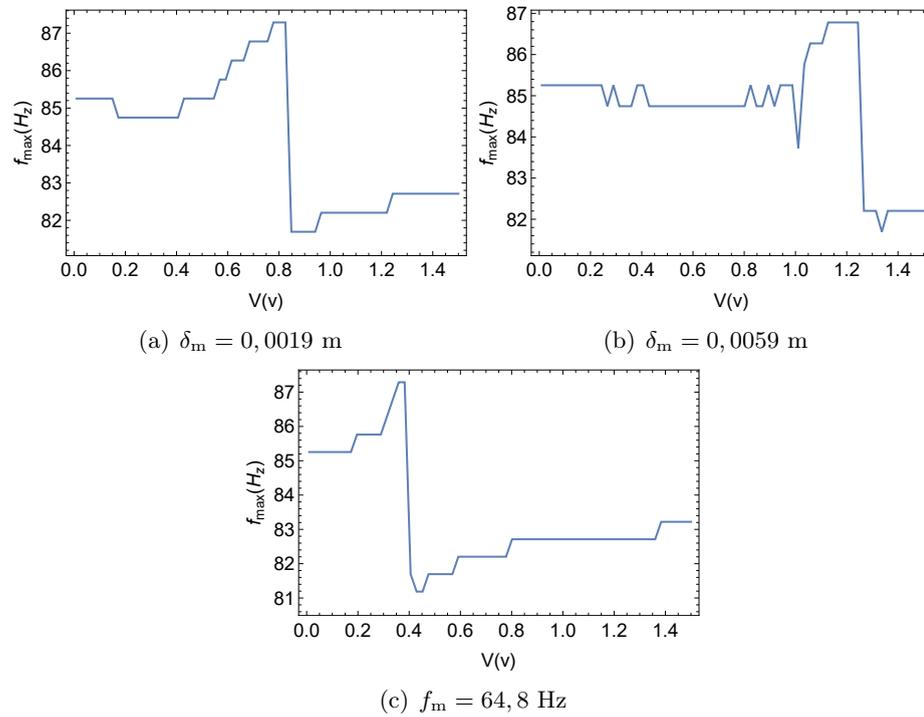


Figure 6.6: Variation de la fréquence de crête en fonction de l'amplitude d'excitation pour trois différentes configurations de membrane.

6.3 La variation de l'aire sous la courbe de crête

Après avoir déterminé expérimentalement la réponse fréquentielle du tube pour les différentes configurations de membrane, nous avons tracé les courbes de crête correspondantes, ainsi que la variation de l'aire en fonction de la raideur linéaire. Dans cette partie, nous avons présenté les résultats en examinant le déplacement adimensionné de l'air à l'extrémité du tube afin de les comparer aux résultats de la simulation numérique. La figure Fig.6.7 montre la superposition des courbes de crête pour les neuf configurations de membrane réalisées. Les deux courbes présentées en bleu correspondent au comportement monostable où $k_1 > k_{1c}$. Les sous-figures Fig.6.8(a) et Fig.6.8(b) présentent respectivement la variation de l'aire déterminée numériquement et celle trouvée expérimentalement. La comparaison entre ces deux courbes montre que malgré les difficultés rencontrées lors de la réalisation expérimentale des membranes bistables et le fait que seulement neuf configurations de membrane différentes aient été réalisées, nous avons pu observer une allure similaire à celle déterminée numériquement. La variation de l'aire obtenue expérimentalement montre que les membranes bistables présentent des valeurs d'aire moins importantes, ce qui confirme qu'une solution basée sur une membrane bistable offre une efficacité d'atténuation plus élevée. Par conséquent, elle permet d'améliorer la performance de notre système.

6.4 Variabilité de la position d'équilibre dynamique

Dans cette partie, nous avons vérifié expérimentalement la variabilité de la position d'équilibre dynamique, ce qui avait été démontré dans le chapitre précédent. Deux méthodes ont été proposées pour vérifier la variabilité de cette position.

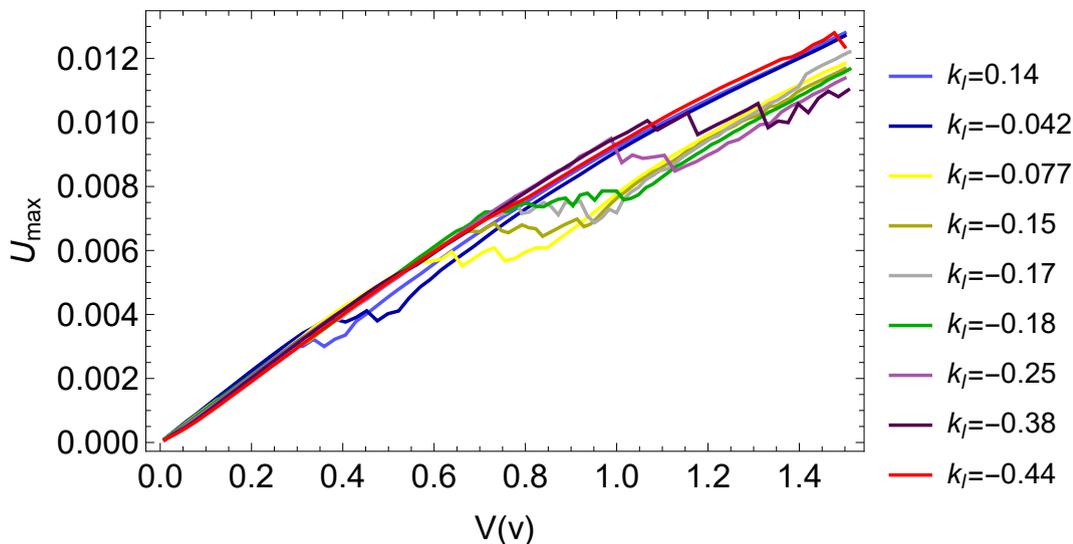


Figure 6.7: La superposition des courbes de crête pour les neuf différentes configurations de membranes réalisées expérimentalement.

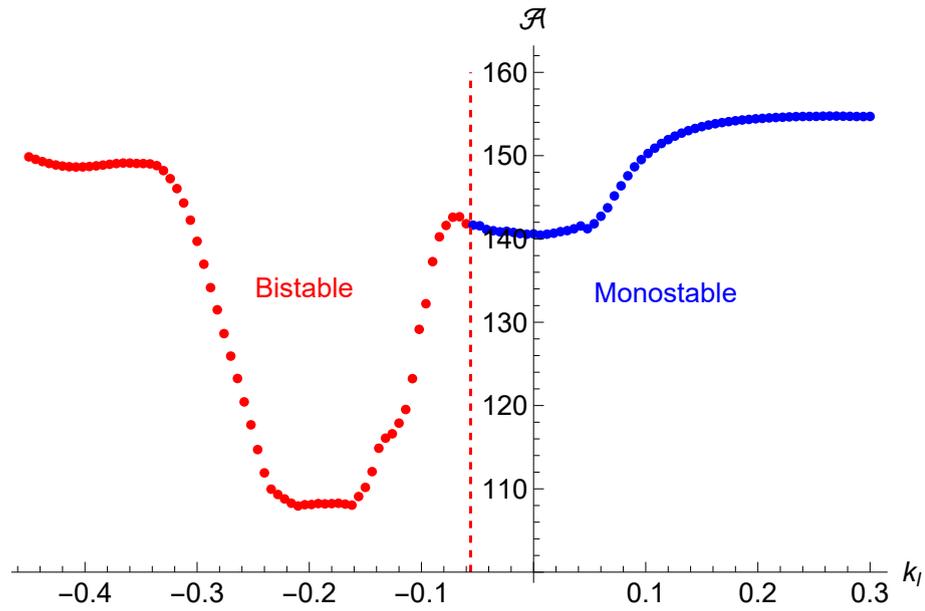
La première méthode consiste à calculer la moyenne du signal de déplacement de la membrane sur les trois dernières secondes précédant l'arrêt de la source d'excitation. Cette moyenne est déterminée pour chaque combinaison de fréquence et d'amplitude d'excitation.

La deuxième méthode consiste à utiliser la surface de réponse fréquentielle du déplacement de la membrane déterminée expérimentalement Q_{exp} , pour calculer la variation de q_{10} à l'aide de son expression analytique (Eq.5.8) ($q_{10}(Q_{\text{Exp}})$). Dans ce cas, lorsque le terme $-\frac{\beta_1 + k_{11}(\beta_1\gamma + 1)}{k_{n11}(\beta_1\gamma + 1)} - \frac{3Q_{\text{exp}}}{2}$ est négatif, la valeur de q_{10} est nulle.

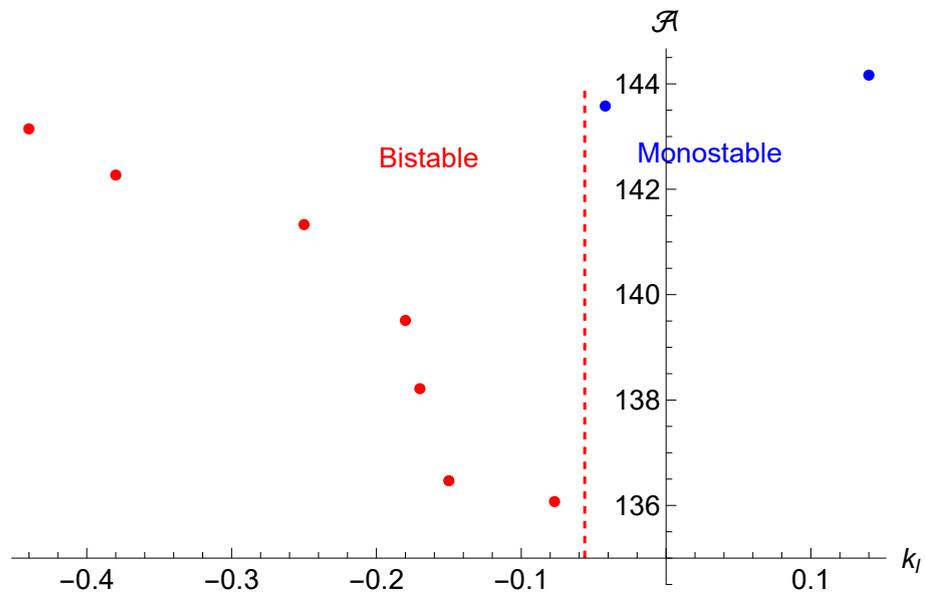
Dans les figures Fig.6.9 et Fig.6.10, nous présentons la variation de la position d'équilibre dynamique en fonction de l'amplitude et de la fréquence d'excitation pour deux configurations de membrane différentes ($\delta_m = 0,0019$ m et $\delta_m = 0,0059$ m). Ces figures montrent en général un comportement similaire à ce que nous avons observé dans le chapitre précédent. Pour les variations déterminées par la moyenne du déplacement mesuré, les figures Fig.6.9(a) et Fig.6.10(a) montrent qu'à forte amplitude d'excitation, il y a des points qui présentent une augmentation de la valeur de la moyenne mesurée (au lieu de zéro). En ces points, la mesure du déplacement de la membrane présente un signal asymétrique (voir Fig.6.11) qui peut être dû à l'imperfection de la construction de notre membrane bistable ou à des problèmes de mesure.

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons validé expérimentalement les résultats de l'optimisation numérique et du calcul analytique présentés dans les deux chapitres précédents. Tout d'abord, nous avons réussi à construire une membrane bistable capable de produire le phénomène de PE. De plus, en déterminant la variation de l'aire sous la courbe de crête, nous avons pu valider expérimentalement qu'une solution basée sur une membrane bistable permet d'améliorer la performance de notre système. Enfin, nous avons réussi à valider la variabilité de la position d'équilibre dynamique.



(a) Résultat numérique.



(b) Résultat expérimental.

Figure 6.8: La variation de l'aire sous la courbe de crête en fonction de la raideur linéaire de la membrane.

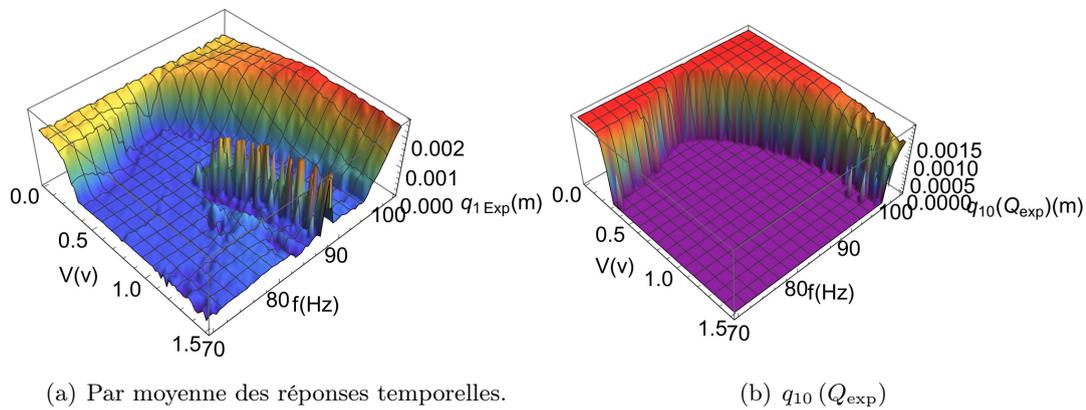


Figure 6.9: La variation de la position d'équilibre dynamique en fonction de la fréquence et de l'amplitude d'excitation pour $\delta_m = 0,0019$ m.

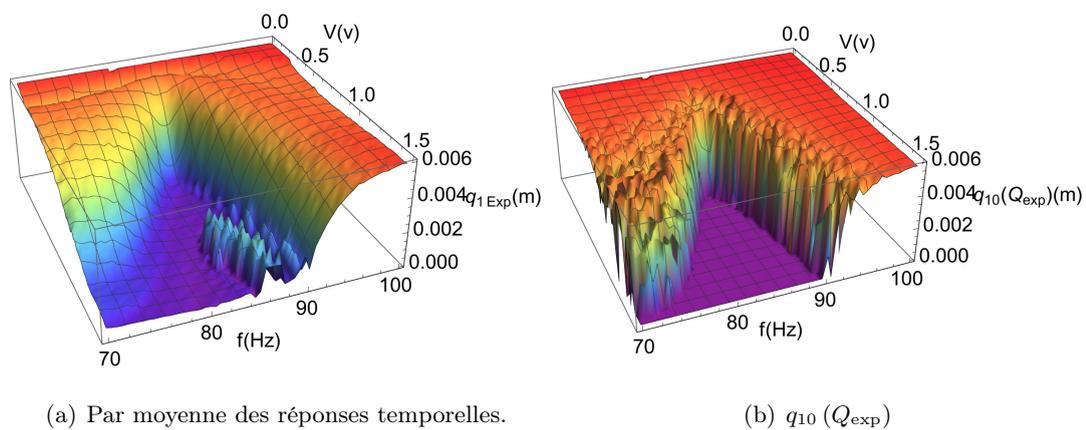


Figure 6.10: La variation de la position d'équilibre dynamique en fonction de la fréquence et de l'amplitude d'excitation pour $\delta_m = 0,0059$ m.

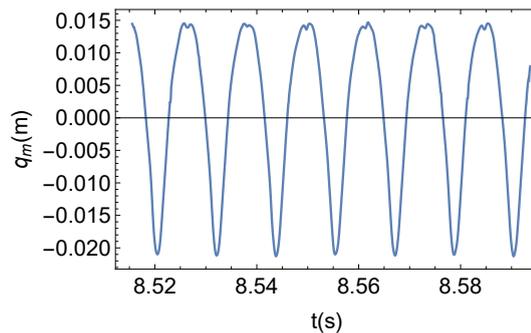


Figure 6.11: Le déplacement au centre de la membrane mesuré par le capteur de déplacement pour l'amplitude et la fréquence d'excitation $V = 1,43$ V et $f = 85,7$ Hz avec $\delta_m = 0,0059$ m.

Dans ce chapitre, nous observons un accord entre les résultats numériques, analytiques et expérimentaux, bien que le modèle décrivant la membrane soit extrêmement simplifié.

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse part d'une solution d'absorbeur non linéaire vibroacoustique à amortissement non linéaire constitué par une fine membrane circulaire, développée dans le but de contrôler le bruit dans un milieu acoustique : un tube ouvert à ces deux extrémités, excité dans la bande de fréquence couvrant son premier mode propre. L'objectif principal de cette thèse est double : d'une part, maîtriser la modélisation de ces absorbeurs, et d'autre part, élargir leur plage d'efficacité en introduisant une nouvelle solution d'absorbeur non linéaire vibroacoustique bistable.

Pour maîtriser la modélisation de ces absorbeurs, une méthode d'identification a tout d'abord été développée permettant de reproduire les réponses fréquentielles pour tous les types de régimes, y inclus les régimes temporels observés expérimentalement, notamment la réponse fortement modulée. La variation des paramètres identifiés en fonction de l'amplitude d'excitation, a permis de valider en premier lieu l'idée d'utiliser un ensemble de paramètres constants pour le calcul analytique et en second lieu de se poser la question concernant la possibilité d'introduction d'un terme d'amortissement de la membrane.

Pour répondre à cette question, étant donné l'existence d'un terme d'amortissement non linéaire supplémentaire au terme de raideur cubique, nous avons entrepris une étude analytique pour évaluer l'impact de ce terme sur la dynamique du système couplé tube-membrane monostable. Par l'utilisation de la méthode de Complexification de Manevitch et de la méthode des échelles multiples, nous avons développé des modèles analytiques qui permettent de décrire les solutions périodiques, les bifurcations locales de ces solutions, la VI et la possibilité d'avoir les réponses fortement modulées. Ces modèles ont été par la suite utilisés pour étudier la variation de la courbe de résonance, des diagrammes de bifurcations et de la VI en fonction de l'amortissement non linéaire. Les résultats de cette étude indiquent qu'en introduisant un amortissement non linéaire, une réduction de 28% de l'amplitude de crête est observée pour une valeur d'amortissement non linéaire de $c_{\eta m1} = 0,00028$, par rapport à la situation où il n'y a pas d'amortissement non linéaire ($c_{\eta m1} = 0$).

Après avoir exposé ces deux chapitres, dédiés à la maîtrise de la modélisation des membranes monostables, nous avons focalisé nos travaux sur l'étude de la nouvelle solution de l'absorbeur bistable. En premier lieu, nous avons présenté le modèle du système couplé tube-membrane bistable, en mettant en évidence ses principales caractéristiques, notamment l'énergie potentielle, les positions d'équilibre statique, la dépendance amplitude fréquence ainsi que la variation de ses fréquences propres couplées en fonction de la raideur linéaire de la membrane. Ensuite, nous avons élaboré une méthode d'optimisation numérique qui consiste à comparer le niveau d'atténuation entre les membranes monostables et bistables en examinant la variation de l'aire de la courbe

de crête du tube en fonction du paramètre optimisé, à savoir la raideur linéaire de la membrane. En général, cette méthode démontre que l'utilisation d'une membrane bistable améliore efficacement les performances de notre système. Pour chaque comportement, monostable et bistable, il existe toute une plage de raideur linéaire correspondant à une atténuation maximale. À l'intérieur de cette plage de raideurs linéaires optimales, un compromis se dessine entre les deux principaux facteurs de notre méthode d'optimisation : le niveau sonore associé à l'apparition du PE et la profondeur de son plateau. C'est ce compromis qui explique la présence de cette plage d'optimisation similaire. En utilisant diverses configurations de membranes, nous avons validé que le champ des raideurs linéaires optimales pour les systèmes bistables se situe lorsque la fréquence propre de la membrane dépasse celle du tube. Cela conduit à l'apparition de deux zones distinctes de PE, l'une présentant un caractère ramollissant et l'autre un caractère raidissant. Cette étude montre que les meilleures performances d'atténuation sont principalement attribuées à la bistabilité et ne se manifestent pas dans le cas de systèmes monostables, même après optimisation. En utilisant une membrane bistable optimale, nous observons une réduction de près de 25% de l'aire sous la courbe de crête par rapport à une membrane monostable optimale.

Afin d'expliquer les résultats de cette optimisation numérique, nous avons développé des modèles analytiques pour décrire la dynamique du système bistable. Étant donné la complexité de la dynamique bistable de notre système, les modèles analytiques établis précédemment pour le système monostable ne peuvent pas décrire la dynamique bistable de manière satisfaisante. Une nouvelle application de la méthode de complexification averaging qui repose sur une transformation de coordonnées qui introduit une position d'équilibre, caractérisant ainsi la dynamique intrapuits de notre système a été proposé puis validé par l'utilisation de la méthode d'équilibrage harmonique qui, jusqu'à cette étude, était la seule méthode capable de décrire la dynamique périodique complète des systèmes bistables. Les modèles qui décrivent les solutions périodiques intrapuits et interpuits, les bifurcations de ces solutions et la VI lente du régime intrapuits et interpuits ont été déterminés. Le comportement fréquentiel du système bistable observé par intégration numérique a été expliqué à travers les modèles des solutions périodiques et de leurs bifurcations. Nous avons pu montrer que le système bistable présente parfois des solutions périodiques interpuits de fortes amplitudes de vibration, qui sont liées à la présence de la zone transitoire où les valeurs d'aire sont relativement importantes. Le fait d'avoir la solution bistable optimale par l'utilisation d'une membrane de fréquence propre supérieure à celle du tube a été expliqué par les modèles de VI lente intrapuits et interpuits. Nous avons aussi vérifié numériquement la variabilité de la position d'équilibre dynamique sur laquelle repose notre nouvelle technique de calcul analytique.

À la fin, nous avons conclu cette étude par une validation expérimentale des principaux résultats obtenus dans l'optimisation et dans l'étude théorique. Pour cela, le montage expérimental de la membrane bistable a été conçu et mis en œuvre pour réaliser divers essais expérimentaux. Nous avons réussi à observer le phénomène de PE à l'aide de cette membrane. En mesurant la variation de l'aire sous la courbe de crête en fonction de la raideur linéaire de la membrane, nous avons pu obtenir des résultats expérimentaux en accord avec ceux de l'optimisation numérique. Ces résultats confirment expérimentalement que l'utilisation d'une membrane bistable permet d'améliorer les performances de notre système. De plus, en étudiant expérimentalement la variation de la position d'équilibre dynamique en fonction de l'amplitude et de la fréquence d'excitation pour trois différentes membranes bistables, nous avons pu valider notre hypothèse théorique.

Dans ce chapitre, nous observons un accord entre les résultats numériques, analytiques et expérimentaux, bien que le modèle décrivant la membrane soit extrêmement simplifié.

En conclusion, cette recherche doctorale a abouti à plusieurs contributions significatives :

- Une meilleure compréhension des systèmes à membranes monostables et bistables.
- Une étude de l'influence de la raideur linéaire sur le comportement du système tube-membrane.
- La démonstration de l'amélioration des performances d'atténuation du bruit des systèmes à membranes bistables par rapport aux systèmes monostables : l'utilisation d'une membrane bistable permet d'améliorer la performance du système.
- La mise en évidence de la robustesse des NES à membranes : une plage optimale large.
- L'identification du comportement optimal du système couplé tube-membrane bistable, lorsque la fréquence propre de la membrane est supérieure à celle du tube : deux zones de PE.
- Le développement d'un modèle expérimental de NES membrane bistable.
- La création d'outils et de méthodes d'analyse validés à la fois numériquement et expérimentalement pour l'étude des systèmes à membranes monostables et bistables.
- L'élaboration d'une nouvelle technique adaptée aux spécificités du NES bistable pour décrire de manière adéquate son comportement.
- La détection des solutions périodiques interpuits gênantes de fortes amplitudes de vibration.
- L'accord des résultats numériques, analytiques et expérimentaux malgré un modèle de membrane très simplifié.

De plus, ce travail ouvre de nouvelles perspectives, notamment :

- Utiliser notre démarche d'optimisation pour optimiser d'autres paramètres du système.
- Étudier l'effet du changement de la plage d'excitation sur les résultats d'optimisation.
- Étudier analytiquement la sensibilité de la dynamique des systèmes à membranes bistables à chacun de leurs paramètres.
- Développer une méthode d'optimisation analytique basée sur l'étude de la variété invariante.
- Développer un modèle analytique de membrane bistable avec plusieurs degrés de liberté.
- Réaliser une étude analytique plus approfondie afin de prévenir la présence des solutions périodiques interpuits de forte amplitude de vibration.
- Développer des outils pour l'analyse du régime chaotique dans ces systèmes.

- Étudier le système bistable en régime transitoire pour mieux comprendre son comportement dynamique.
- Explorer la possibilité d'améliorer la performance en utilisant des membranes bistables montées en parallèle.
- Améliorer les expériences.
- Appliquer la démarche d'optimisation basée sur la courbe de crête dans d'autres domaines d'ingénierie ou de physique.
- Utiliser la nouvelle application de la méthode de Complexification Averaging pour analyser d'autres systèmes bistables dans divers domaines d'application.

Bibliographie

- [1] F. Mietlicki, E. Thibier, Coût social du bruit en France et déclinaison du chiffrage pour la région Île-de-France, in: 16ème Congrès Français d'Acoustique, CFA2022, 2022.
- [2] A. Benouhiba, P. Rougeot, N. Andreff, K. Rabenorosoa, M. Ouisse, Origami-based auxetic tunable helmholtz resonator for noise control, *Smart Materials and Structures* (2021). doi:10.1088/1361-665x/abe180.
- [3] B. Cochelin, P. Herzog, P.-O. Mattei, Experimental evidence of energy pumping in acoustics, *Comptes Rendus Mécanique* 334 (11) (2006) 639–644. doi:10.1016/j.crme.2006.08.005.
- [4] R. Bellet, Vers une nouvelle technique de contrôle passif du bruit: absorbeur dynamique non linéaire et pompage énergétique, Ph.D. thesis, Université de Provence-Aix-Marseille I (2010).
- [5] R. Bellet, B. Cochelin, P. Herzog, P.-O. Mattei, Experimental study of targeted energy transfer from an acoustic system to a nonlinear membrane absorber, *Journal of Sound and Vibration* 329 (14) (2010) 2768–2791. doi:10.1016/j.jsv.2010.01.029.
- [6] R. Bellet, B. Cochelin, R. Côte, P.-O. Mattei, Enhancing the dynamic range of targeted energy transfer in acoustics using several nonlinear membrane absorbers, *Journal of Sound and Vibration* 331 (26) (2012) 5657–5668. doi:10.1016/j.jsv.2012.07.013.
- [7] H. Frahm, Device for damping vibrations of bodies., uS Patent 989,958 (1911).
- [8] R. E. Roberson, Synthesis of a nonlinear dynamic vibration absorber, *Journal of the Franklin Institute* 254 (3) (1952) 205–220. doi:10.1016/0016-0032(52)90457-2.
- [9] O. V. Gendelman, Transition of energy to a nonlinear localized mode in a highly asymmetric system of two oscillators, *Nonlinear Dynamics* 25 (1/3) (2001) 237–253. doi:10.1023/a:1012967003477.
- [10] A. F. Vakakis, O. V. Gendelman, L. A. Bergman, D. M. McFarland, G. Kerschen, Y. S. Lee, *Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems*, Vol. 156, Springer Science & Business Media, 2008.
- [11] O. Gendelman, L. I. Manevitch, A. F. Vakakis, R. M'Closkey, Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: Part I—dynamics of the underlying hamiltonian systems, *Journal of Applied Mechanics* 68 (1) (2000) 34–41. doi:10.1115/1.1345524.
- [12] A. F. Vakakis, O. Gendelman, Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: Part II—resonance capture, *Journal of Applied Mechanics* 68 (1) (2000) 42–48. doi:10.1115/1.1345525.

- [13] L. I. Manevitch, The description of localized normal modes in a chain of nonlinear coupled oscillators using complex variables, *Nonlinear Dynamics* 25 (1/3) (2001) 95–109. doi:10.1023/a:1012994430793.
- [14] G. Kerschen, A. F. Vakakis, Y. S. Lee, D. M. McFarland, J. J. Kowtko, L. A. Bergman, Energy transfers in a system of two coupled oscillators with essential nonlinearity: 1:1 resonance manifold and transient bridging orbits, *Nonlinear Dynamics* 42 (3) (2005) 283–303. doi:10.1007/s11071-005-4475-3.
- [15] O. Gendelman, D. Gorlov, L. Manevitch, A. Musienko, Dynamics of coupled linear and essentially nonlinear oscillators with substantially different masses, *Journal of Sound and Vibration* 286 (1-2) (2005) 1–19. doi:10.1016/j.jsv.2004.09.021.
- [16] Y. S. Lee, G. Kerschen, A. F. Vakakis, P. Panagopoulos, L. Bergman, D. M. McFarland, Complicated dynamics of a linear oscillator with a light, essentially nonlinear attachment, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 204 (1-2) (2005) 41–69. doi:10.1016/j.physd.2005.03.014.
- [17] G. Kerschen, J. J. Kowtko, D. M. McFarland, L. A. Bergman, A. F. Vakakis, Theoretical and experimental study of multimodal targeted energy transfer in a system of coupled oscillators, *Nonlinear Dynamics* 47 (1-3) (2006) 285–309. doi:10.1007/s11071-006-9073-5.
- [18] A. F. Vakakis, L. I. Manevitch, Y. V. Mikhlin, V. N. Pilipchuk, A. A. Zevin, *Normal modes and localization in nonlinear systems*, Springer, 2001.
- [19] G. Kerschen, O. Gendelman, A. F. Vakakis, L. A. Bergman, D. M. McFarland, Impulsive periodic and quasi-periodic orbits of coupled oscillators with essential stiffness nonlinearity, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 13 (5) (2008) 959–978. doi:10.1016/j.cnsns.2006.08.001.
- [20] Y. Starosvetsky, O. V. Gendelman, Response regimes in forced system with non-linear energy sink: quasi-periodic and random forcing, *Nonlinear Dynamics* 64 (1-2) (2010) 177–195. doi:10.1007/s11071-010-9856-6.
- [21] I. Shiroky, O. Gendelman, Essentially nonlinear vibration absorber in a parametrically excited system, *ZAMM* 88 (7) (2008) 573–596. doi:10.1002/zamm.200800009.
- [22] X. Jiang, D. M. McFarland, L. A. Bergman, A. F. Vakakis, Steady state passive nonlinear energy pumping in coupled oscillators: Theoretical and experimental results, *Nonlinear Dynamics* 33 (1) (2003) 87–102. doi:10.1023/a:1025599211712.
- [23] P. Malatkar, A. H. Nayfeh, Steady-state dynamics of a linear structure weakly coupled to an essentially nonlinear oscillator, *Nonlinear Dynamics* 47 (1-3) (2006) 167–179. doi:10.1007/s11071-006-9066-4.
- [24] Y. Starosvetsky, O. Gendelman, Response regimes of linear oscillator coupled to nonlinear energy sink with harmonic forcing and frequency detuning, *Journal of Sound and Vibration* 315 (3) (2008) 746–765. doi:10.1016/j.jsv.2007.12.023.
- [25] O. Gendelman, E. Gourdon, C. Lamarque, Quasiperiodic energy pumping in coupled oscillators under periodic forcing, *Journal of Sound and Vibration* 294 (4-5) (2006) 651–662. doi:10.1016/j.jsv.2005.11.031.

- [26] O. V. Gendelman, Y. Starosvetsky, Quasi-periodic response regimes of linear oscillator coupled to nonlinear energy sink under periodic forcing, *Journal of Applied Mechanics* 74 (2) (2006) 325–331. doi:10.1115/1.2198546.
- [27] Y. Starosvetsky, O. V. Gendelman, Bifurcations of attractors in forced system with nonlinear energy sink: the effect of mass asymmetry, *Nonlinear Dynamics* 59 (4) (2009) 711–731. doi:10.1007/s11071-009-9572-2.
- [28] O. V. Gendelman, Y. Starosvetsky, M. Feldman, Attractors of harmonically forced linear oscillator with attached nonlinear energy sink i: Description of response regimes, *Nonlinear Dynamics* 51 (1-2) (2007) 31–46. doi:10.1007/s11071-006-9167-0.
- [29] Y. Starosvetsky, O. V. Gendelman, Attractors of harmonically forced linear oscillator with attached nonlinear energy sink. II: Optimization of a nonlinear vibration absorber, *Nonlinear Dynamics* 51 (1-2) (2007) 47–57. doi:10.1007/s11071-006-9168-z.
- [30] Y. Starosvetsky, O. Gendelman, Strongly modulated response in forced 2dof oscillatory system with essential mass and potential asymmetry, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 237 (13) (2008) 1719–1733. doi:10.1016/j.physd.2008.01.019.
- [31] Y. Starosvetsky, O. Gendelman, Vibration absorption in systems with a nonlinear energy sink: Nonlinear damping, *Journal of Sound and Vibration* 324 (3-5) (2009) 916–939. doi:10.1016/j.jsv.2009.02.052.
- [32] O. V. Gendelman, Targeted energy transfer in systems with non-polynomial nonlinearity, *Journal of Sound and Vibration* 315 (3) (2008) 732–745. doi:10.1016/j.jsv.2007.12.024.
- [33] C.-H. Lamarque, O. V. Gendelman, A. T. Savadkoochi, E. Etcheverria, Targeted energy transfer in mechanical systems by means of non-smooth nonlinear energy sink, *Acta Mechanica* 221 (1-2) (2011) 175–200. doi:10.1007/s00707-011-0492-0.
- [34] O. Gendelman, Analytic treatment of a system with a vibro-impact nonlinear energy sink, *Journal of Sound and Vibration* 331 (21) (2012) 4599–4608. doi:10.1016/j.jsv.2012.05.021.
- [35] E. Gourc, Etude du contrôle passif par pompage énergétique sous sollicitation harmonique: Analyses théoriques et expérimentales, Ph.D. thesis, Toulouse, INSA (2013).
- [36] E. Gourdon, C. H. Lamarque, Energy pumping with various nonlinear structures: Numerical evidences, *Nonlinear Dynamics* 40 (3) (2005) 281–307. doi:10.1007/s11071-005-6610-6.
- [37] I. Kovacic, M. J. Brennan, *The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour*, John Wiley & Sons, 2011.
- [38] T. Okabe, T. Kondou, J. Ohnishi, Elliptic averaging methods using the sum of jacobian elliptic delta and zeta functions as the generating solution, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 46 (1) (2011) 159–169. doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2010.08.004.
- [39] C. Zhang, R. Harne, B. Li, K. Wang, Reconstructing the transient, dissipative dynamics of a bistable duffing oscillator with an enhanced averaging method and jacobian elliptic functions, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 79 (2016) 26–37. doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2015.11.002.

- [40] R. L. Harne, K.-W. Wang, *Harnessing bistable structural dynamics: for vibration control, energy harvesting and sensing*, John Wiley & Sons, 2017.
- [41] Z. Wu, R. Harne, K. Wang, Energy harvester synthesis via coupled linear-bistable system with multistable dynamics, *Journal of Applied Mechanics* 81 (6) (2014) 061005.
- [42] K. Yang, R. Harne, K. Wang, H. Huang, Dynamic stabilization of a bistable suspension system attached to a flexible host structure for operational safety enhancement, *Journal of Sound and Vibration* 333 (24) (2014) 6651–6661. doi:10.1016/j.jsv.2014.07.033.
- [43] K. Yang, R. L. Harne, K. W. Wang, H. Huang, Investigation of a bistable dual-stage vibration isolator under harmonic excitation, *Smart Materials and Structures* 23 (4) (2014) 045033. doi:10.1088/0964-1726/23/4/045033.
- [44] K. V. Avramov, Y. V. Mikhlin, Snap-through truss as a vibration absorber, *Journal of Vibration and Control* 10 (2) (2004) 291–308. doi:10.1177/1077546304035604.
- [45] O. Gendelman, C. Lamarque, Dynamics of linear oscillator coupled to strongly nonlinear attachment with multiple states of equilibrium, *Chaos, Solitons & Fractals* 24 (2) (2005) 501–509. doi:10.1016/j.chaos.2004.09.088.
- [46] M. A. AL-Shudeifat, Highly efficient nonlinear energy sink, *Nonlinear Dynamics* 76 (4) (2014) 1905–1920. doi:10.1007/s11071-014-1256-x.
- [47] L. I. Manevitch, G. Sigalov, F. Romeo, L. A. Bergman, A. Vakakis, Dynamics of a linear oscillator coupled to a bistable light attachment: Analytical study, *Journal of Applied Mechanics* 81 (4) (2013). doi:10.1115/1.4025150.
- [48] F. Romeo, G. Sigalov, L. A. Bergman, A. F. Vakakis, Dynamics of a linear oscillator coupled to a bistable light attachment: Numerical study, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 10 (1) (2014). doi:10.1115/1.4027224.
- [49] F. Romeo, L. I. Manevitch, L. A. Bergman, A. Vakakis, Transient and chaotic low-energy transfers in a system with bistable nonlinearity, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 25 (5) (2015). doi:10.1063/1.4921193.
- [50] M. A. AL-Shudeifat, A. S. Saeed, Frequency–energy plot and targeted energy transfer analysis of coupled bistable nonlinear energy sink with linear oscillator, *Nonlinear Dynamics* 105 (4) (2021) 2877–2898. doi:10.1007/s11071-021-06802-8.
- [51] G. Habib, F. Romeo, The tuned bistable nonlinear energy sink, *Nonlinear Dynamics* 89 (1) (2017) 179–196. doi:10.1007/s11071-017-3444-y.
- [52] D. Qiu, T. Li, S. Seguy, M. Paredes, Efficient targeted energy transfer of bistable nonlinear energy sink: application to optimal design, *Nonlinear Dynamics* 92 (2) (2018) 443–461. doi:10.1007/s11071-018-4067-7.
- [53] Z. Wu, S. Seguy, M. Paredes, Basic constraints for design optimization of cubic and bistable nonlinear energy sink, *Journal of Vibration and Acoustics* 144 (2) (2021). doi:10.1115/1.4051548.
- [54] D. R. Johnson, R. L. Harne, K. W. Wang, A disturbance cancellation perspective on vibration control using a bistable snap-through attachment, *Journal of Vibration and Acoustics* 136 (3) (2014). doi:10.1115/1.4026673.

- [55] P.-O. Mattei, R. Ponçot, M. Pachebat, R. Côte, Nonlinear targeted energy transfer of two coupled cantilever beams coupled to a bistable light attachment, *Journal of Sound and Vibration* 373 (2016) 29–51. doi:10.1016/j.jsv.2016.03.008.
- [56] S. Chiacchiari, F. Romeo, D. M. McFarland, L. A. Bergman, A. F. Vakakis, Vibration-based energy harvesting via a bistable system: experimental study.
- [57] Y. Xia, M. Ruzzene, A. Erturk, Dramatic bandwidth enhancement in nonlinear metastructures via bistable attachments, *Applied Physics Letters* 114 (9) (2019). doi:10.1063/1.5066329.
- [58] H. Yao, Y. Wang, L. Xie, B. Wen, Bi-stable buckled beam nonlinear energy sink applied to rotor system, *Mechanical Systems and Signal Processing* 138 (2020) 106546. doi:10.1016/j.ymsp.2019.106546.
- [59] S. Benacchio, A. Malher, J. Boisson, C. Touzé, Design of a magnetic vibration absorber with tunable stiffnesses, *Nonlinear Dynamics* 85 (2) (2016) 893–911. doi:10.1007/s11071-016-2731-3.
- [60] G. Pennisi, B. Mann, C. Stephan, G. Michon, Magnetic-strung nes with energy harvesting: Theoretical and experimental study of a new concept of nonlinear vibrations absorber, in: *ECCOMAS Congress 2016*, 2016.
- [61] Y.-Y. Chen, Z.-C. Qian, W. Zhao, C.-M. Chang, A magnetic bi-stable nonlinear energy sink for structural seismic control, *Journal of Sound and Vibration* 473 (2020) 115233. doi:10.1016/j.jsv.2020.115233.
- [62] Y. Chen, W. Su, S. Tesfamariam, Z. Qian, W. Zhao, Z. Yang, F. Zhou, Experimental study of magnetic bistable nonlinear energy sink for structural seismic control, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 164 (2023) 107572. doi:10.1016/j.soildyn.2022.107572.
- [63] R. Mariani, S. Bellizzi, B. Cochelin, P. Herzog, P. Mattei, Toward an adjustable nonlinear low frequency acoustic absorber, *Journal of Sound and Vibration* 330 (22) (2011) 5245–5258. doi:10.1016/j.jsv.2011.03.034.
- [64] J. Shao, B. Cochelin, Theoretical and numerical study of targeted energy transfer inside an acoustic cavity by a non-linear membrane absorber, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 64 (2014) 85–92. doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2014.04.008.
- [65] J. Shao, T. Zeng, X. Wu, Study of a nonlinear membrane absorber applied to 3d acoustic cavity for low frequency broadband noise control, *Materials* 12 (7) (2019) 1138. doi:10.3390/ma12071138.
- [66] J. Shao, Q. Luo, G. Deng, T. Zeng, J. Yang, X. Wu, C. Jin, Experimental study on influence of wall acoustic materials of 3d cavity for targeted energy transfer of a nonlinear membrane absorber, *Applied Acoustics* 184 (2021) 108342. doi:10.1016/j.apacoust.2021.108342.
- [67] L. J. Sivian, Acoustic impedance of small orifices, *The Journal of the Acoustical Society of America* 7 (2) (1935) 94–101. doi:10.1121/1.1915795.
- [68] R. H. Bolt, S. Labate, U. Ingård, The acoustic reactance of small circular orifices, *The Journal of the Acoustical Society of America* 21 (2) (1949) 94–97. doi:10.1121/1.1906488.

- [69] V. A. Vargas, E. Gourdon, A. T. Savadkoohi, Nonlinear softening and hardening behavior in helmholtz resonators for nonlinear regimes, *Nonlinear Dynamics* 91 (1) (2017) 217–231. doi:10.1007/s11071-017-3864-8.
- [70] E. Gourdon, A. T. Savadkoohi, V. A. Vargas, Targeted energy transfer from one acoustical mode to an helmholtz resonator with nonlinear behavior, *Journal of Vibration and Acoustics* 140 (6) (2018). doi:10.1115/1.4039960.
- [71] V. Iurasov, Contrôle passif en vibroacoustique avec absorbeur dynamique bistable, Ph.D. thesis, Aix-Marseille (2018).