



**HAL**  
open science

# Théorèmes limites pour les champs aléatoires et U-statistiques et quelques applications

Davide Giraud

► **To cite this version:**

Davide Giraud. Théorèmes limites pour les champs aléatoires et U-statistiques et quelques applications. Statistiques [math.ST]. Université de Strasbourg, 2024. tel-04811587v1

**HAL Id: tel-04811587**

**<https://theses.hal.science/tel-04811587v1>**

Submitted on 29 Nov 2024 (v1), last revised 29 Nov 2024 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Théorèmes limites et inégalités de déviation pour les  
champs aléatoires et  $U$ -statistiques et quelques  
applications

Davide Giraud

29 novembre 2024

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Théorèmes limites fonctionnels pour des suites</b>	<b>7</b>
1.1 Principe d'invariance dans certains espaces de Besov . . . . .	7
1.2 Détection d'un changement d'indice de queue . . . . .	10
<b>2 Théorèmes limites pour des champs aléatoires</b>	<b>19</b>
2.1 Vitesse de convergence dans le théorème limite central . . . . .	20
2.2 Inégalités de déviation pour des champs aléatoires . . . . .	25
2.2.1 Cas de queues à décroissance polynomiale . . . . .	26
2.2.2 Cas de queues à décroissance exponentielle . . . . .	31
2.3 Limites possibles dans le théorème limite central pour des champs de type accroissements d'ortho-martingale . . . . .	35
2.4 Principe d'invariance via une approximation par ortho-martingales . . . . .	37
2.5 Conditions suffisantes pour la loi des logarithmes itérés bornée . . . . .	40
2.5.1 Loi des logarithmes itérés pour des champs bernoulliens . . . . .	40
2.5.2 Loi des logarithmes itérés via une approximation par ortho-martingales . . . . .	43
2.6 Loi des grands nombres . . . . .	46
2.7 Perspectives . . . . .	50
<b>3 <math>U</math>-statistiques : inégalités de déviation et théorèmes limites</b>	<b>52</b>
3.1 Introduction aux $U$ -statistiques et lien avec les champs aléatoires . . . . .	52
3.2 Théorème ergodique pour des $U$ -statistiques . . . . .	55
3.3 Inégalités de déviation pour des $U$ -statistiques de données i.i.d. . . . .	59
3.3.1 Queues à décroissance polynomiale . . . . .	59
3.3.2 Queues à décroissance exponentielle . . . . .	64
3.3.3 Applications . . . . .	66
3.4 Théorèmes limites pour des $U$ -statistiques de données bernoulliennes . . . . .	70
3.5 $U$ -statistiques dont les données portent sur les moments empiriques . . . . .	73
3.6 Convergence d'une $U$ -statistique empirique à deux échantillons . . . . .	79
3.7 Théorèmes limites pour des $U$ -statistiques de données $\beta$ -mélangeantes . . . . .	83
3.8 Perspectives . . . . .	87

# Remerciements

C'est certainement la section qui sera la plus lue et l'une des plus délicates à écrire car sur le chemin de l'habilitation à diriger des recherches, nombreuses sont les personnes envers lesquels je souhaite manifester ma reconnaissance et il s'agit de n'oublier personne, dans la mesure du possible.

Tout d'abord, je tiens à remercier Armelle d'avoir accepté de s'être portée garante de mon habilitation. J'ai eu également la chance de t'avoir comme référente lors de mon année de stage mais aussi de travailler avec toi dans le cadre des enseignements. J'espère également avoir celle de travailler en recherche avec toi à l'avenir.

*Vielen Dank, Thomas, dass Du Gutachter sein angenommen hast. Ich errinere mich unser erst Treffen in 2014 in Marseille und Dein Aufenthalt in Bochum als ich dort Postdoc war. Ich habe ganz viel Bewunderung für deine Karriere.*

C'est un honneur pour moi que Jérôme Dedecker et Bernard Bercu aient accepté d'écrire un rapport. Vos travaux ont été, sont et seront une source d'inspiration. Merci également Florence d'avoir accepté de faire partie du jury.

J'ai apprécié l'ensemble des collaborations avec mes co-auteurs : Annika Betken, Herold Dehling, Rafal Kukil, Emmanuel Lesigne, Alfredas Račkauskas, Sara Schmidt, Olimjon Sharipov et Dalibor Volný, qui m'a notamment initié à la recherche. J'ai beaucoup appris et je l'espère compris à vos côtés.

Un environnement de travail agréable est une condition nécessaire au bien-être. J'apprécie les moments passés avec vous, dans l'ordre alphabétique, Armelle, Augustin, Christophe, Han-Ping, Jean-Luc, Laurent, Nicolas, Samuel, Ségolen, ainsi que mes collègues de l'IRMA. Le personnel administratif ainsi que technique est indispensable au bon fonctionnement du laboratoire et est naturellement remercié.

D'un point de vue plus personnel, je tiens à remercier mes parents pour les valeurs et les repères transmis. *Vorrei anche ringraziare la famiglia Girauo rimasta in Italia, siamo sempre stati accolti egregiamente.* Avec mes frères Carlo et Samuele, ma sœur Chiara ainsi que Camille et Tewfik, les conjoints respectifs des deux derniers, nous avons passé et passerons un nombre incalculable d'agréables moments. Raconter tous les bons souvenirs risquerait de prendre une place trop importante de ce manuscrit. L'année 2021 a marqué mon recrutement comme maître de conférence mais également la rencontre de ma moitié et le début du bonheur.

# Introduction

La compréhension du comportement asymptotique de variables aléatoires joue un rôle clé à la fois en statistiques et en probabilités. Plus précisément, nous nous concentrerons sur deux aspects : la vitesse de convergence de certains estimateurs et la convergence en loi de certaines fonctionnelles d'un processus indexé par un réel ou un  $d$ -uplet de réels dans un intervalle. En effet, la mise en œuvre de tests statistiques repose sur la convergence en loi d'une statistique de test lorsque l'hypothèse que nous cherchons à valider est vérifiée. Souvent, la statistique de test s'exprime comme une certaine fonctionnelle continue sur un certain espace. Il est également important de quantifier la convergence presque sûre, en probabilité ou dans  $\mathbb{L}^p$  de certains estimateurs. Pour cela, nous utilisons ou établissons des inégalités de moments ou de déviation.

Nous appliquons nos résultats dans différents contextes : systèmes dynamiques préservant la mesure, modèles de volatilité stochastique, champs aléatoires s'exprimant comme une fonction d'un champ indépendant identiquement distribué (en abrégé, i.i.d.),  $U$ -statistiques de données indépendantes, s'exprimant comme une fonction d'une suite de variables aléatoires i.i.d. ou encore mélangeante.

## Chapitre 1 : Théorèmes limites fonctionnels pour des suites de variables aléatoires stationnaires

Ce chapitre contient les résultats des articles [BGK23, GR17]. Nous donnons dans un premier temps des résultats obtenus avec Alfredas Račkauskas concernant le théorème limite central fonctionnel dans certains espaces de Besov pour des suites strictement stationnaires d'accroissements d'une martingale. Nous formulons des conditions dans l'esprit de celles qui sont nécessaires et suffisantes dans le cas i.i.d. et suffisantes dans le cas de martingales pour les espaces de Hölder (voir [145, 144, 75]). Nous montrons également que la condition suffisante pour les martingales est dans un sens optimale. Enfin, nous proposons une application aux statistiques « par balayage ».

Le second volet de ce chapitre concerne la détection d'un changement de paramètre de queue au sein d'une suite de variables aléatoires issues d'un modèle de volatilité stochastique, réalisé avec Annika Betken et Rafal Kulik. Nous utilisons l'estimateur de Hill, qui peut s'exprimer à l'aide d'un processus empirique. En cas d'absence de changement de paramètre de queue, nous établissons la convergence de ce processus empirique en le décomposant en une partie « martingale » et une partie « à mémoire longue », l'une étant négligeable par rapport à l'autre en fonction des

hypothèses sur le modèle de volatilité stochastique. Nous pouvons ensuite déterminer la loi limite des statistiques de test. Nos résultats sont appuyés par des simulations ainsi que sur des données réelles des indices de Standard & Poor's.

## Chapitre 2 : Théorèmes limites pour des champs aléatoires

Dans ce chapitre, nous passons en revue les différents résultats obtenus concernant les champs aléatoires, c'est-à-dire les processus indexés par  $\mathbb{Z}^d$ . Ils concernent les publications [Gir18, Gir19a, Gir19b, Gir21c, Gir22, Gir24b, Gir24e, GLV24]. Nous donnons tout d'abord une vitesse de convergence dans le théorème limite central pour des sommes pondérées de champs s'exprimant comme une fonction d'un champ i.i.d., en donnant des bornes de type Berry-Esséen, c'est-à-dire un contrôle de la norme uniforme entre la fonction de répartition des sommes pondérées et celle d'une loi normale. Nous établissons également une inégalité de moments pour de telles sommes, qui est dans l'esprit de l'inégalité de Rosenthal [155]. Nous appliquons ces résultats à des sommes sur des sous-ensembles de  $\mathbb{Z}^d$  vérifiant certaines conditions, ainsi qu'à un modèle de régression fonctionnelle.

Nous formulons également les inégalités établies pour des champs aléatoires de type accroissement d'ortho-martingale (voir la Définition 2.2.3), en considérant séparément le cas où les queues sont à décroissance polynomiale ou exponentielle. Des applications à la vitesse de convergence dans la loi des grands nombres ainsi qu'à des modèles de régressions sont ensuite données.

Nous poursuivons en résumant un article co-écrit avec Emmanuel Lesigne et Dalibor Volný. Nous discutons de la question qui consiste à caractériser les limites possibles dans le cas des champs de type accroissement d'ortho-martingale. Nous donnons une caractérisation lorsque le système est de type produit. Nous discutons des systèmes dynamiques pour lesquels les sommes partielles normalisées de tout champ stationnaire de type d'accroissement d'ortho-martingale sur le système dynamique en question aient nécessairement pour limite une loi normale. Ces systèmes dynamiques sont caractérisés par l'intermédiaire de conditions sur l'entropie des actions marginales.

La section suivante traite le théorème limite central fonctionnel pour des champs aléatoires strictement stationnaires. Nous donnons une condition suffisante pour qu'un champ stationnaire puisse être approximable par un champ de type accroissement d'ortho-martingale, avec une approximation qui convient au théorème limite central fonctionnel dans l'espace des fonctions continues. Nous retrouvons une condition projective existante de Volný et Wang, une condition dans l'esprit de celle de Maxwell et Woodroffe. De plus, nous fournissons une condition nécessaire et suffisante sur un champ stationnaire pour qu'il puisse se décomposer sous la forme de champs de type martingale ou cobord dans chaque direction.

Nous avons ensuite considéré la question de la loi des logarithmes itérés bornée pour des champs aléatoires strictement stationnaires. Nous avons tout d'abord traité le cas de champs s'exprimant sous la forme de fonctionnelles d'un champ i.i.d., avec la normalisation du cas i.i.d.. Nous contrôlons la fonction maximale d'un telle champ, ce qui permet ensuite de mettre en

œuvre une approximation par un champ  $m$ -dépendant. Les applications concernent des fonctions höldériennes de champs linéaires, des fonctions de champs gaussiens ainsi que des champs de Volterra. Nous avons également exploré l’approche d’approximation par ortho-martingales. Nous avons d’abord formulé un résultat pour les champs stationnaires de type accroissement ortho-martingale. La fonction maximale du cas i.i.d. ne peut pas être utilisée dans ce contexte. Puis nous formulons des résultats sous des conditions de type Hannan ainsi que Maxwell et Woodrooffe. Pour cette-dernière, nous avons établi un contrôle presque sûr du maximum de sommes partielles d’un champ stationnaire en terme de maxima de champs d’ortho-martingales, et cette inégalité pourra également être considérée dans d’autres contextes.

Finalement, nous considérons la loi des grands nombres pour des champs aléatoires stationnaires : convergence presque sûre sur des rectangles, sur des cubes ainsi que dans  $\mathbb{L}^p$ . Nous explorons l’approche par approximation par ortho-martingales ainsi que par des champs  $m$ -dépendants, qui peuvent prendre leurs valeurs dans un espace de Banach. Des conditions optimales sont fournies pour les ortho-martingales, puis des conditions projectives dans l’esprit de celle de Hannan sont formulées. Nous donnons des applications à des fonctions höldériennes de champs linéaires.

## Chapitre 3 : $U$ -statistiques : inégalités de déviation et théorie limite

Nous présentons ici tous les résultats obtenus pour les  $U$ -statistiques dans les publications [DGS21], [DGS23], [DGV23], [Gir21a], [Gir21b], [Gir24c], [Gir24a] et [Gir24d].

Nous commençons par une section d’introduction aux  $U$ -statistiques, puis nous évoquons le théorème ergodique pour les  $U$ -statistiques. Cela consiste à examiner la convergence d’une  $U$ -statistique à noyau fixe et données strictement stationnaires, normalisée par le nombre d’éléments. Avec Herold Dehling et Dalibr Volný, nous avons donné des conditions suffisantes pour la convergence dans  $\mathbb{L}^p$  ou presque sûre. Nous avons également fourni des exemples de  $U$ -statistiques soit déterministes, ou au contraire convergeant vers une loi normale, afin de montrer qu’une généralisation directe du théorème ergodique ne peut pas avoir lieu. Les résultats sont valables pour des  $U$ -statistiques d’ordre  $m$ , sans hypothèse d’ergodicité sur la suite.

Le second volet est dédié aux inégalités de déviation pour des  $U$ -statistiques dont les données sont i.i.d.. On considère le cas où les éléments sommés ont un moment d’ordre  $p$  fini et le noyau est autorisé à varier. Nous obtenons un contrôle de la queue à l’aide de celle de variables aléatoire positives, dont la queue est beaucoup plus facile à contrôler que celle de la  $U$ -statistique de départ. Cette inégalité se révèle utile pour vérifier un critère de tension dans des espaces de Hölder, pour donner des vitesses de convergence dans la loi des grands nombres, et également pour fournir des inégalités de moments. Nous pouvons également traiter le cas de  $U$ -statistiques dont les poids sont aléatoires. L’autre inégalité présente la contrainte d’avoir un noyau fixé, mais est plus adaptée au cas où les éléments sommés admettent des queues à décroissance exponentielle. Nous pouvons fournir des applications au théorème limite central fonctionnel dans des espaces de Hölder (avec l’exposant critique  $1/2$ , et le module de régularité de l’espace de Hölder est multiplié par une

puissance d'un log) et la vitesse de convergence dans la loi des grands nombres.

Nous avons également traité le cas de  $U$ -statistiques de données dépendantes. Nous nous sommes tout d'abord intéressés aux théorèmes limites (loi des grands nombres, théorème limite central, loi des logarithmes itérés bornée) pour des  $U$ -statistiques basée sur une suite s'exprimant comme une fonction d'une suite i.i.d.. Nous nous appuyons sur des résultats existants concernant le cas i.i.d.. Nous avons établi une décomposition dans l'esprit de celle de Hoeffding, qui, dans ce contexte, s'exprime sous la forme de sommes de variables aléatoires, plus une série de  $U$ -statistiques qui sont toutes dégénérées. Nous avons introduit des coefficients de dépendance pour fournir des conditions suffisantes pour les théorèmes limites mentionnés. Nous formulons également des applications concernant notamment le noyau de Grassberger-Procaccia et celui associé aux moyennes de Gini.

Toujours dans le cas de fonctionnelles d'une suite i.i.d., avec Herold Dehling et Sara Schmidt, nous avons établi un théorème limite central pour des  $U$ -statistiques dont les données sont basées sur une fonction dérivable des  $m$  premiers moments empiriques de blocs d'une suite de variables aléatoires. Cela permet de mettre en place un test pour détecter un éventuel changement de variance, de kurtosis ou bien de la mesure de dissymétrie. Avec des conditions supplémentaires sur la taille et la longueur des blocs, il est possible de centrer la  $U$ -statistique considérée par un terme plus simple que l'espérance de chaque terme.

Passons à présent aux  $U$ -statistiques basées sur des suites mélangeantes. Avec Herold Dehling et Olimjon Sharipov, nous avons considéré des  $U$ -statistiques empiriques à deux échantillons. Elles consistent à calculer, pour un échantillon à  $n$  observations, la loi empirique d'une fonction de deux variables où l'une appartient aux  $k$  premières variables aléatoires et la seconde aux  $(n - k)$  dernières, et ce pour chaque  $k$ . Sous certaines conditions portant sur la dépendance de la suite et la fonction  $g$  considérée, nous établissons la convergence de la  $U$ -statistique empirique à deux échantillons. Le centrage naturel par l'espérance peut être remplacé par un terme mettant en jeu une copie indépendante de  $X_1$ . Dans les deux cas, le processus limite est gaussien et sa fonction de covariance est explicite. Certaines fonctionnelles d'un tel processus à deux paramètres peuvent être utilisées pour mettre en place un test déterminant un potentiel changement de loi. Il y a cependant des obstacles pratiques en raison de la présence de paramètres inconnus ainsi que la difficulté à déterminer la loi limite des statistiques de test.

Un dernier volet des travaux présentés concerne le théorème limite central fonctionnel et la loi des grands nombres pour des  $U$ -statistiques basées sur une suite stationnaire mélangeante, et à valeurs dans un espace de Hilbert. En utilisant des couplages de vecteurs d'un certain nombre de variables aléatoires d'indices consécutifs, nous formulons une inégalité de déviation pour la partie dégénérée. Il est alors possible de montrer que la partie dégénérée joue un rôle négligeable dans les théorèmes limites considérés.



# Chapitre 1

## Théorèmes limites fonctionnels pour des suites de variables aléatoires stationnaires

### 1.1 Principe d'invariance dans certains espaces de Besov

Le théorème limite central fonctionnel garantit la convergence en loi dans un espace fonctionnel d'un processus sommes partielles. L'un des tous premiers résultats dans cette direction est dû à Donsker [54]. Il dit que si  $(X_i)_{i \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires i.i.d. vérifiant  $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$  et  $\mathbb{E}[X_1] = 0$ , alors

$$(W_n(t, (X_i)_{i \geq 1}), t \in [0, 1]) := \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i, t \in [0, 1] \right) \rightarrow (W_t, t \in [0, 1])$$

en loi dans  $D[0, 1]$ , l'espace des fonctions continues à droite et ayant une limite à gauche, et pour un réel  $x$ ,  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière inférieure de  $x$  (ainsi,  $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$  et  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ ). Il est également possible de considérer le théorème limite central fonctionnel dans l'espace des fonctions continues, en considérant une version polygonale par morceaux, définie par

$$W_n^{\text{pl}}(t, (X_i)_{i \geq 1}) = W_n(t, (X_i)_{i \geq 1}) + (nt - \lfloor nt \rfloor) X_{\lfloor nt \rfloor + 1}.$$

Ainsi, les trajectoires de  $W_n^{\text{pl}}(t, (X_i)_{i \geq 1})$  sont continues et  $W_n^{\text{pl}}(k/n, (X_i)_{i \geq 1}) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^k X_i =: n^{-1/2} S_k$ .

De nombreux travaux ont été consacrés à des extensions de ces résultats à un cadre plus large que celui d'une suite de variables aléatoires i.i.d., voir l'article [122].

Le théorème limite central fonctionnel donne la convergence en loi de  $G(W_n^{\text{pl}}(\cdot, (X_i)_{i \geq 1}))_{n \geq 1}$  vers  $G(W(\cdot))$  pour toute fonctionnelle  $g: C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  continue (pour la norme uniforme) et bornée. Par exemple,  $n^{-1/2} \max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \rightarrow \sup_{t \in [0, 1]} |W(t)|$  en loi. Lamperti eut l'idée dans [102] d'étendre la convergence en loi de  $G(W_n^{\text{pl}}(\cdot, (X_i)_{i \geq 1}))_{n \geq 1}$  vers  $G(W(\cdot))$  à une classe plus grande de fonctionnelles en considérant  $W_n^{\text{pl}}(\cdot, (X_i)_{i \geq 1})$  comme un processus à trajectoires höldériennes, ce qui est également le cas du processus limite lorsque l'exposant est strictement inférieur à 1/2.

On considère  $\mathcal{H}_\alpha$ , l'espace des fonctions höldériennes d'exposant  $\alpha$ , c'est-à-dire l'espace des fonctions  $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $|x(0)| + \sup_{0 \leq u < v \leq 1} |x(u) - x(v)| / (v - u)^\alpha =: \|x\|_{\mathcal{H}_\alpha} < \infty$ . Muni de la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\alpha}$ , l'espace  $\mathcal{H}_\alpha$  n'est pas séparable, ce qui est problématique vis à vis de la convergence en loi. Ceci amène à travailler avec le sous-espace

$$\mathcal{H}_\alpha^o = \left\{ x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{u, v, 0 < |u-v| < \delta} \frac{|x(u) - x(v)|}{|u-v|^\alpha} = 0 \right\}.$$

Le fait d'obtenir une convergence dans l'espace  $\mathcal{H}_\alpha$  plutôt que celui des fonctions continues permet de mettre en place des tests pour détecter un changement de moyenne sur une période courte, car la norme höldérienne est sensible à un tel changement (voir par exemple [146]).

Račkauskas et Suquet ont fourni dans [145] une condition nécessaire et suffisante pour le théorème limite central fonctionnel dans  $\mathcal{H}_\alpha^o$  pour une suite  $(X_i)_{i \geq 1}$  i.i.d. centrée et de variance 1. Pour  $\alpha \in ]0, 1/2[$ , la condition

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p(\alpha)} \mathbb{P}(|X_1| > t) = 0, \quad p(\alpha) = \frac{1}{1/2 - \alpha} \quad (1.1.1)$$

est nécessaire et suffisante pour la convergence de  $W_n^{\text{pl}}(\cdot, (X_i)_{i \geq 1})$  vers un mouvement brownien standard dans  $\mathcal{H}_\alpha$ . L'exposant  $p(\alpha)$  devient d'autant plus grand qu' $\alpha$  se rapproche de  $1/2$ , et  $p(\alpha)$  est toujours strictement supérieur à 2. Par conséquent, (1.1.1) est plus restrictive qu'avoir une variance finie, mais moins qu'avoir un moment d'ordre  $p(\alpha)$  fini. L'extension de ce théorème limite central fonctionnel à des suites d'accroissements d'une martingale a été considérée dans [75], via une approche par approximation par martingales [77], pour des suites  $\tau$ -dépendantes au sens de Dedecker et Prieur (voir [44, 43]) dans [76] et pour des suites  $\alpha$ -dépendantes par Dedecker et Merlevède dans [41].

Dans l'article [GR17] réalisé en collaboration avec Alfredas Račkauskas, nous avons étudié la convergence du processus sommes partielles ( $W_n^{\text{pl}}(\cdot, (X_i)_{i \geq 1})$ ) dans des espaces de Besov. Pour  $p \geq 1$ , notons  $\mathbb{L}_p([0, 1])$  l'espace des (classes d'équivalence pour l'égalité presque partout) fonctions  $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\int_0^1 |x(t)|^p dt < \infty$ . Pour  $x \in \mathbb{L}_p([0, 1])$ , le module de régularité est défini par

$$\omega_p(x, \delta) := \sup_{|h| \leq \delta} \left( \int_{I_h} |x(u+h) - x(u)|^p du \right)^{1/p},$$

où  $I_h = [0, 1] \cap [-h, 1-h]$ . Pour  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $p \geq 1$ , l'espace de Besov  $B_{p,\alpha}^o$  est défini par

$$B_{p,\alpha}^o = \left\{ x \in \mathbb{L}_p([0, 1]), \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{-\alpha} \omega_p(x, \delta) = 0 \right\}$$

et est muni de la norme

$$\|x\|_{B_{p,\alpha}^o} = |x|_p + \sup_{0 < \delta < 1} \delta^{-\alpha} \omega_p(x, \delta).$$

Ainsi,  $B_{p,\alpha}^o$  est un espace de Banach séparable. De plus, pour  $0 < \beta < \alpha$ , l'injection  $B_{p,\alpha}^o \hookrightarrow B_{p,\beta}^o$  est continue. Pour  $1 \leq q < p$ , l'injection  $B_{p,\alpha}^o \hookrightarrow B_{q,\alpha}^o$  est également continue. Il est à noter que les espaces de Besov usuels comportent trois paramètres. Nous renvoyons à la référence [24] pour plus d'informations concernant les espaces de Besov.

La suite  $(D_i)_{i \geq 1}$  est dite suite d'accroissements d'une martingale (en abrégé « suite AM ») s'il existe une filtration  $(\mathcal{F}_i)_{i \geq 0}$  telle  $D_i$  est  $\mathcal{F}_i$ -mesurable et  $\mathbb{E}[D_i | \mathcal{F}_{i-1}] = 0$ .

Nous avons tout d'abord obtenu une condition suffisante pour une suite AM strictement stationnaire : nous supposons que  $(D_i)_{i \geq 1}$  est strictement stationnaire, c'est-à-dire que pour tous  $n$  et  $h$ , les vecteurs  $(D_1, \dots, D_n)$  et  $(D_{1+h}, \dots, D_{n+h})$  ont la même loi, qu'il existe une collection croissante de tribus  $(\mathcal{F}_i)_{i \geq 0}$  pour laquelle  $D_i$  est  $\mathcal{F}_i$ -mesurable,  $\mathbb{E}[D_i | \mathcal{F}_{i-1}] = 0$  et la suite  $(\mathbb{E}[D_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}])_{i \geq 1}$  est identiquement distribuée. Pour  $1/p < \alpha < 1/2$ , posons

$$q(p, \alpha) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \alpha + \frac{1}{p}}.$$

Si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{q(p, \alpha)} \mathbb{P}(|D_1| > t) = 0 \text{ et} \quad (1.1.2)$$

$$\mathbb{E}[D_1^2 | \mathcal{F}_0] \in \mathbb{L}^{q(p, \alpha)/2}, \quad (1.1.3)$$

alors  $(W_n^{\text{pl}}(\cdot, (D_i)_{i \geq 1}))$  converge en loi dans  $B_{p, \alpha}^o$  vers  $\eta W(\cdot)$ , où  $(W(t))_{t \geq 1}$  est un mouvement brownien standard indépendant de la variable aléatoire  $\eta := \sqrt{\mathbb{E}[D_1^2 | \mathcal{I}]}$ , où  $\mathcal{I}$  est la tribu des ensembles invariants de la suite  $(D_i)_{i \geq 1}$ . La démonstration repose sur un critère de tension portant sur le maximum de sommes partielles (voir le Théorème 10 dans [GR17]).

Nous avons également construit un contre-exemple montrant que la condition (1.1.2) ne garantit pas à elle seule la convergence de  $(W_n^{\text{pl}}(\cdot, (D_i)_{i \geq 1}))$ . En effet, nous avons montré que dans tout système dynamique ergodique d'entropie positive, il existe une suite AM strictement stationnaire  $(D_i)_{i \geq 1}$  vérifiant (1.1.2) mais  $(W_n^{\text{pl}}(\cdot, (D_i)_{i \geq 1}))$  n'est pas équi-tendu dans  $B_{p, \alpha}$ . L'exemple est construit de sorte que  $D_1 \notin \mathbb{L}^{q(p, \alpha)}$  et  $\mathbb{E}[D_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}] = D_i^2$ .

Le cas où  $(D_i)_{i \geq 1}$  est i.i.d. centré est couvert par le résultat précédent. Comme (1.1.3) est automatiquement vérifiée, la condition (1.1.2) est suffisante pour le théorème limite central fonctionnel dans  $B_{p, \alpha}^o$ . Nous avons également montré le caractère nécessaire de cette condition. Un résultat dans le même esprit a été obtenu par Morel [126], mais avec des moments d'ordre strictement plus grands que  $q(p, \alpha)$ . Cependant, le cas de processus basé sur des variables aléatoires à indices multiples a été traité.

Dans le cas où  $p\alpha \leq 1$ , pour les suites AM, une variance finie est suffisante. La démonstration est très différente de celle du cas  $p\alpha > 1$  et repose sur des arguments de troncature.

Finalement, nous présentons une application de ce théorème limite central fonctionnel dans  $B_{p, \alpha}^o$ .

Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite telle que  $(W_n(\cdot, (X_i)_{i \geq 1}))$  converge en loi dans  $B_{p, \alpha}^o$  vers un mouvement brownien standard. Pour  $0 < a < b \leq 1$ , posons

$$Y_{n, a, b} := n^{-\frac{1}{q(p, \alpha)}} \max_{[an] < k \leq [bn] + 1} \frac{1}{k^\alpha} \left( \sum_{i=0}^{n-k} |S_{i+k} - S_i|^p \right)^{1/p}.$$

Alors la suite  $(Y_{n, a, b})_{n \geq 1}$  converge en loi vers  $Y_{a, b}$ , où

$$Y_{a, b} = \sup_{a < t \leq b} \frac{1}{t^\alpha} \left( \int_{I_t} |W(s+t) - W(s)|^p ds \right)^{1/p}.$$

Les statistiques « par balayage » peuvent être utilisées pour détecter un changement de moyenne sur une période courte. Plus précisément, nous considérons le modèle

$$X_i = \mu \mathbf{1}\{k^* < i \leq m^*\} + \varepsilon_i, 1 \leq i \leq n,$$

où  $(\varepsilon_i)_{i \geq 1}$  est strictement stationnaire,  $\mu \neq 0$  et  $k^*, m^*$  sont inconnus. Nous cherchons à tester l'hypothèse nulle  $(H_0) : \mu = 0$  contre l'alternative  $\mu \neq 0$ . Pour cela, nous utilisons la statistique de test  $T_n = Y_{n,0,1}$ . Sous  $(H_0)$ , si  $(\varepsilon_i)_{i \geq 1}$  est telle que  $(W_n(\cdot, (\varepsilon_i)_{i \geq 1}))$  converge en loi dans  $B_{p,\alpha}^o$  vers un mouvement brownien standard, alors  $(T_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers  $Y_{0,1}$ . Sous l'alternative, il est possible de voir que

$$T_n = \left(1 - \frac{h^*}{n}\right)^{1/p} \left(\frac{h^*}{n}\right)^{1-\alpha} n^{1/2} + O_{\mathbb{P}}(1)$$

lorsque  $n$  tend vers l'infini, où  $h^* := m^* - k^*$  est la durée de changement de moyenne.

## 1.2 Détection d'un changement d'indice de queue via un processus empirique

Il s'agit des résultats de l'article [BGK23], réalisé en collaboration avec Annika Betken et Rafal Kulik. On se donne une collection de variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  telles que  $\mathbb{P}(X_j > x) = x^{-\alpha} L(x)$ , où  $L$  est à variations lentes en l'infini, c'est-à-dire que  $L$  est à valeurs strictement positives et pour tout  $\lambda > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} L(\lambda x) / L(x) = 1$ . Nous cherchons à tester l'hypothèse

$$H : \alpha_1 = \dots = \alpha_n$$

contre l'alternative

$$A : \text{il existe } k \in \{1, \dots, n-1\} \text{ tel que } \alpha_1 = \dots = \alpha_k \neq \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n.$$

Afin de tester cette hypothèse, nous utilisons deux estimateurs de l'indice de queue, qui se basent sur l'observation suivante

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \log \left( \frac{X}{u} \right) \mid X > u \right] = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} [\log \left( \frac{X}{u} \right) \mathbf{1}\{X > u\}]}{\mathbb{P}(X > u)} = \frac{1}{\alpha} =: \gamma.$$

En remplaçant les espérances par des moyennes empiriques, nous obtenons l'estimateur

$$\hat{\gamma} := \frac{1}{\sum_{j=1}^n \mathbf{1}\{X_j > u_n\}} \sum_{j=1}^n \log \left( \frac{X_j}{u_n} \right) \mathbf{1}\{X_j > u_n\}, \quad (1.2.1)$$

où  $(u_n)_{n \geq 1}$  est une suite telle que  $u_n \rightarrow +\infty$  et  $n\mathbb{P}(X_1 > u_n) \rightarrow \infty$ .

Il est également possible de considérer l'estimateur de Hill, introduit dans [85] et défini par

$$\hat{\gamma}_{\text{Hill}} := \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \log \left( \frac{X_{n:n-i+1}}{X_{n:n-k_n}} \right),$$

où  $X_{n:n} \geq X_{n:n-1} \geq \dots \geq X_{n:1}$  sont les statistiques d'ordre de l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$  et  $(k_n)_{n \geq 1}$  est une suite d'entiers telle que  $k_n \rightarrow +\infty$  et  $k_n/n \rightarrow 0$ . Cela revient à remplacer les niveaux déterministes  $u_n$  dans (1.2.1) par  $X_{n:n-k_n}$ .

Nous considérons dans un premier temps le problème suivant. Étant donné  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ , nous effectuons le test de l'hypothèse  $H$  contre l'alternative  $A_k$  donnée par

$$A_k : \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_k \neq \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n.$$

Nous comparons un estimateur  $\hat{\gamma}_k$  de l'indice de queue basé sur les observations  $X_1, \dots, X_k$  avec un estimateur  $\hat{\gamma}_n$  de l'indice de queue basé sur l'échantillon entier  $X_1, \dots, X_n$ . Nous posons alors

$$\Gamma_{k,n} = \frac{k}{n} \left| \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_n} - 1 \right|,$$

où  $\hat{\gamma}_k$  est l'indice de queue basé sur l'échantillon  $X_1, \dots, X_k$ . Revenons au problème du test de l'hypothèse  $H$  contre  $A$ . Si nous supposons que l'emplacement du changement d'indice de queue est inconnu, il est alors naturel de considérer la statistique  $\Gamma_{k,n}$  pour toutes les valeurs possible de  $k$ . Une décision de test en faveur de l'alternative  $A$  sera prise si le maximum des  $\Gamma_{k,n}$  dépasse un certain seuil. Le maximum pour des valeurs de  $k$  proches de 1 peut poser problème, ce qui conduit à considérer la statistique de test

$$\Gamma_n = \sup_{t \in [t_0, 1]} t \left| \frac{\hat{\gamma}_{[nt]}}{\hat{\gamma}} - 1 \right|,$$

où  $t_0 \in ]0, 1[$  et

$$\hat{\gamma}_{[nt]} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{[nt]} \mathbf{1}\{X_j > u_n\}} \sum_{j=1}^{[nt]} \log \left( \frac{X_j}{u_n} \right) \mathbf{1}\{X_j > u_n\}.$$

De la même manière, il est possible de considérer une version similaire basée sur l'estimateur de Hill, avec

$$\tilde{\Gamma}_n := \sup_{t \in [t_0, 1]} t \left| \frac{\hat{\gamma}_{\text{Hill}}(t)}{\hat{\gamma}_{\text{Hill}}(1)} - 1 \right|,$$

et

$$\hat{\gamma}_{\text{Hill}}(t) = \frac{1}{[k_n t]} \sum_{j=1}^{[k_n t]} \log \left( \frac{X_{[nt]:[nt]-j+1}}{X_{[nt]:[nt]-[k_n t]}} \right).$$

On considère  $\hat{\gamma}_{[nt]}$  et  $\hat{\gamma}_{\text{Hill}}(t)$  comme des processus de variable  $t$ . Déterminer leur loi limite permettra de déterminer celle de  $\Gamma_n$  et  $\tilde{\Gamma}_n$ . Pour cela, remarquons que

$$\hat{\gamma}_{[nt]} = \frac{1}{\tilde{T}_n(1, t)} \int_1^\infty s^{-1} \tilde{T}_n(s, t) ds,$$

où

$$\tilde{T}_n(s, t) = \frac{1}{n \mathbb{P}(X_1 > u_n)} \sum_{j=1}^{[nt]} \mathbf{1}\{X_j > u_n s\}.$$

Par conséquent, le comportement asymptotique de  $\widehat{\gamma}_{[nt]}$  et  $\widehat{\gamma}_{\text{Hill}}(t)$  peut être déduit d'un théorème limite central fonctionnel pour le processus empirique de queue

$$e_n(s, t) := \widetilde{T}_n(s, t) - T(s, t), \quad s \geq 1, t \in [0, 1], \quad (1.2.2)$$

où  $T(s, t) = ts^{-\alpha}$ . Remarquons que  $T(s, t)$  n'est en général pas l'espérance de  $e_n(s, t)$ , mais plutôt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \widetilde{T}_n(s, t) \right]$ . Le processus empirique de queue à un paramètre, c'est-à-dire  $e_n(s, 1)$ ,  $s \geq 1$ , a été étudié par Mason dans [118], Einmahl dans [61, 62] dans le cas d'observations i.i.d., par Rootzén [152] dans le cas de suites  $\beta$ -mélangeantes et par Kulik et Soulier dans [100] pour des processus à mémoire longue à volatilité stochastique, que nous allons définir à présent.

On dit que  $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est une série temporelle à mémoire longue à volatilité stochastique si  $X_j$  s'exprime sous la forme

$$X_j = \sigma \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_k \eta_{j-k} \right) \varepsilon_j, \quad (1.2.3)$$

avec  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 1$ ,  $(\varepsilon_j, \eta_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une suite de vecteurs i.i.d.,  $\eta_j$  suit une loi normale centrée réduite et est indépendante de  $\varepsilon_j$ ,  $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est à valeurs positives et  $\varepsilon_j$  est centrée. Posons

$$Y_j = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \eta_{j-k}$$

L'énoncé des résultats concernant la convergence du processus empirique à deux paramètres défini par (1.2.2) nécessite l'introduction des notions suivantes.

On dit qu'une suite stationnaire  $(Y_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est dépendante à longue distance de paramètre  $D \in ]0, 1[$  s'il existe une fonction à variations lentes  $L_\gamma$  telle que

$$\gamma_Y(k) := \text{Cov}(Y_0, Y_k) \sim k^{-D} L_\gamma(k) \text{ lorsque } k \rightarrow \infty.$$

Dans le modèle de volatilité stochastique, la variable aléatoire  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \eta_{j-k}$  a une loi normale centrée réduite. Il s'avère que nous serons amenés à considérer des puissances de telles variables aléatoires, que l'on peut exprimer comme une série de polynômes d'une variable aléatoire normale centrée réduite  $Y$ . Soit  $\varphi$  la densité de  $Y$  et  $L^2(\mathbb{R}, \varphi(x) dx)$  l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure  $\varphi(x) dx$  muni du produit scalaire

$$\langle G_1, G_2 \rangle_{L^2} := \mathbb{E}[G_1(Y) G_2(Y)], \quad G_1, G_2 \in L^2(\mathbb{R}, \varphi(x) dx).$$

La suite  $(H_n(Y))_{n \geq 1}$ , où  $H_n$  est le polynôme d'Hermite d'ordre  $n$  défini par

$$H_n(x) = (-1)^n \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^n}{dx^n} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

est une base orthogonale de  $L^2(\mathbb{R}, \varphi(x) dx)$ . Ainsi, en posant  $J_n(G) = \langle G, H_n \rangle_{L^2}$ , le développement d'Hermite suivant a lieu :

$$G(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_n(G)}{n!} H_n(Y),$$

où la convergence de la série précédente a lieu dans  $L^2(\mathbb{R}, \varphi(x) dx)$ . Le rang d'Hermite de  $G \in L^2(\mathbb{R}, \varphi(x) dx)$  joue un rôle crucial dans la caractérisation du processus limite, et est défini comme étant le plus petit entier  $k$  tel que  $J_k(G) \neq 0$  et sera par la suite noté par  $r$  et appelé indice d'Hermite de  $G$ .

Nous ferons les hypothèses techniques suivantes afin de garantir la convergence du processus empirique défini par (1.2.2).

- (HT.1) La suite  $(X_j)_{j \geq 1}$  est définie par (1.2.3) et  $\varepsilon_0$  vérifie  $\mathbb{P}(\varepsilon_0 > x) = x^{-\alpha} L(x)$  pour un certain  $\alpha > 0$  et une certaine fonction  $L$  à variations lentes.
- (HT.2) La suite  $(Y_j)_{j \geq 1}$  est telle que  $\text{Cov}(Y_0, Y_k) = k^{-D} L_\gamma(k)$  où  $D \in ]0, 1/r[$ ,  $r$  étant l'indice d'Hermite de la fonction  $y \mapsto \sigma^\alpha(y)$ .
- (HT.3) Nous supposons que  $L$  admet la représentation

$$L(x) = c \exp\left(\int_1^x \frac{\eta(u)}{u} du,\right)$$

où  $c > 0$ ,  $\eta$  est telle qu'il existe  $\rho \geq 0$ , une constante  $C$  et une fonction à variations lentes décroissante  $L_{\eta^*}$  telle que pour tout  $u \geq 0$ ,

$$|\eta(u)| \leq C \eta^*(u) =: C u^{-\rho} L_{\eta^*}(u).$$

- (HT.4) La suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  tend vers l'infini, vérifie  $n \mathbb{P}(X_0 > u_n) \rightarrow +\infty$  et

$$\eta^*(u_n) = \left( \frac{d_{n,r}}{n} + \frac{1}{\sqrt{n \mathbb{P}(X_0 > u_n)}} \right) \delta_n,$$

où la suite  $(\delta_n)_{n \geq 1}$  tend vers 0 et

$$d_{n,r}^2 = \text{Var}\left(\sum_{j=1}^n H_r(Y_j)\right) \sim c_{r,D} n^{2-rD} (L_\gamma(n))^r$$

avec  $c_{r,D}$  ne dépendant que de  $r$  et de  $D$ .

- (HT.5) Il existe  $p > \alpha + \max\{\alpha, \rho\}$  tel que  $\mathbb{E}[\sigma^p(Y_1)] < \infty$ . De plus,  $1/\sigma(Y_1)$  est intégrable.

L'hypothèse (HT.3) se traduit par le fait que la queue de  $\varepsilon_0$  est à variations régulières du second ordre, au sens où la fonction  $\eta$  qui intervient dans la représentation de  $L(\cdot)$  est elle-même bornée par une fonction à variation régulière (voir [55]).

Il est possible de décomposer le processus empirique défini par (1.2.2) de la manière suivante :

$$e_n(s, t) = M_n(s, t) + L_n(s, t),$$

où

$$M_n(s, t) = \frac{1}{n \mathbb{P}(X_1 > u_n)} \sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor} (\mathbf{1}\{X_j > u_n s\} - \mathbb{E}[\mathbf{1}\{X_j > u_n s\} | \mathcal{F}_{j-1}]),$$

$$R_n(s, t) = \frac{1}{n\mathbb{P}(X_1 > u_n)} \sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{E}[\mathbf{1}\{X_j > u_n s\} \mid \mathcal{F}_{j-1}] - \tilde{T}_n(s, t)$$

et

$$\mathcal{F}_j = \sigma(\varepsilon_k, \eta_k, k \in \mathbb{Z}, k \leq j).$$

Le processus  $M_n(s, t)$  est basé sur une suite AM alors que, par construction, le processus à longue mémoire  $R_n(s, t)$  s'exprime comme une fonction de la suite  $(Y_j)_{j \geq 1}$ .

Sous les hypothèses techniques mentionnées précédemment, il est possible de montrer que

$$\sqrt{n\mathbb{P}(\varepsilon_0 > u_n)} M_n(s, t) \rightarrow \sqrt{\mathbb{E}[\sigma^\alpha(Y_1)]} W(s^{-\alpha}, t)$$

en loi dans  $D([1, R] \times [0, 1])$ , où  $(W(u, v), u \geq 1, v \in [0, 1])$  désigne un drap brownien standard. Pour la partie à longue mémoire, nous avons établi la convergence

$$\frac{n}{d_{n,r}} R_n(s, t) \rightarrow s^{-\alpha} \frac{J_r(\sigma^\alpha)}{r!} Z_{r,H}(t),$$

où  $Z_{r,H}(t)$  est un processus d'Hermite-Rosenblatt d'ordre  $r$  d'indice d'auto-similarité  $H$  (voir Beran *et al.* [13] pour une définition). Ainsi, suivant si  $\sqrt{n\mathbb{P}(\varepsilon_0 > u_n)} d_{n,r}/n$  tend vers 0 ou l'infini, l'un des deux termes est annihilé par la normalisation tandis que l'autre porte la convergence.

La convergence de  $e_n(s, t)$  dans  $D([1, R] \times [0, 1])$  combinée à un contrôle des intégrales sur  $[R, \infty[$  permet de déduire les convergences suivantes.

1. Si  $n/d_{n,r} = o(\sqrt{n\mathbb{P}(X_0 > u_n)})$ , alors pour tout  $t_0 \in ]0, 1[$ ,

$$\frac{n}{d_{n,r}} t (\hat{\gamma}_{\lfloor nt \rfloor} - \gamma) \rightarrow 0, \quad \frac{n}{d_{n,r}} t (\hat{\gamma}_{\text{Hill}}(t) - \gamma) \rightarrow 0$$

en loi dans  $D([t_0, 1])$ .

2. Si  $\sqrt{n\mathbb{P}(X_0 > u_n)} = o(n/d_{n,r})$ , alors pour tout  $t_0 \in ]0, 1[$ ,

$$\sqrt{n\mathbb{P}(X_0 > u_n)} t (\hat{\gamma}_{\lfloor nt \rfloor} - \gamma) \rightarrow \int_1^\infty s^{-1} W(s^{-\alpha, t}) ds - \frac{1}{\alpha} W(1, t),$$

$$\sqrt{k_n} t (\hat{\gamma}_{\text{Hill}}(t) - \gamma) \int_1^\infty s^{-1} W(s^{-\alpha, t}) ds - \frac{1}{\alpha} W(1, t),$$

en loi dans  $D([t_0, 1])$ .

Il est alors possible de déduire la convergence des statistiques de test proposées. Si  $\sqrt{n\mathbb{P}(X_0 > u_n)} = o(n/d_{n,r})$ , alors pour tout  $t_0 \in ]0, 1[$ ,

$$\sqrt{n\mathbb{P}(X_0 > u_n)} \sup_{t_0 \leq t \leq 1} t \left| \frac{\hat{\gamma}_{\lfloor nt \rfloor}}{\hat{\gamma}_n} - 1 \right| \rightarrow \sup_{t_0 \leq t \leq 1} |B(t) - tB(1)|$$

$$\sqrt{k_n} \sup_{t_0 \leq t \leq 1} t \left| \frac{\hat{\gamma}_{\text{Hill}}(t)}{\hat{\gamma}_{\text{Hill}}(1)} - 1 \right| \rightarrow \sup_{t_0 \leq t \leq 1} |B(t) - tB(1)|$$

Passons à présent à la partie pratique.



Calculer la statistique de test nécessite de faire un choix de  $k_n$ , ce qui n'est pas aisé. En effet, il a été démontré par Hall dans [81] que le choix optimal de  $k_n$  dépend du comportement de la queue des données. Pour éviter cette circularité, [57] propose de choisir  $k_n$  proportionnel à la taille de l'échantillon. Comme cela fut remarqué dans [143], un tel choix de  $k_n$  a fait ses preuves dans les simulations et est utilisé par les praticiens. Par conséquent, nous choisirons  $k_n$  comme étant  $p$  pourcent de la taille d'échantillon  $n$ , où  $p = 10\%$  ou  $p = 20\%$ . Il s'agit d'un choix standard dans l'estimation de quantiles.

La puissance de la procédure de test est analysée en considérant différents choix pour la hauteur du changement d'indice, noté  $h$ , et l'emplacement du changement d'indice de queue, noté  $\tau$ . Dans les tableaux, les colonnes ayant  $h = 0$  sur la première ligne correspondent à la fréquence d'erreur de la première espèce, c'est-à-dire les taux de rejet sous l'hypothèse.

Au vu des simulations, il semble que le paramètre de Hurst ainsi que l'indice de queue aient un effet significatif sur les taux de rejet des tests de détection de changement. Plus la dépendance est grande, c'est-à-dire plus le paramètre de Hurst  $H$  est important, et plus le taux de rejet sera important.

Plus  $\alpha$  est proche de 0, meilleure est la performance de test. En effet, plus  $\alpha$  est proche de 0, plus nous disposons d'observations qui donnent une information sur la queue et par conséquent, un changement de queue est plus facile à détecter. De plus, le test a tendance à mieux détecter les changements avec hauteur négative.

En considérant de petites valeurs pour  $H = 1 - (rD)/2$  et  $\alpha$ , c'est-à-dire pour des séries temporelles à queue lourde avec une dépendance à longue mémoire peu incisive, les résultats sont en accord avec le comportement attendu concernant les tests de détection de rupture.

Lorsque la taille de l'échantillon augmente, les tailles empiriques approchent le niveau de significativité et la puissance empirique augmente. De plus, la puissance de test empirique augmente lorsque la hauteur du changement d'indice décroît. La puissance de test empirique est plus élevée lorsque le point de changement se situe au milieu de l'échantillon par rapport au cas où le changement est à des endroits plus excentrés.

Une comparaison des taux de rejet des Tables 1.1 et 1.3 montre que des changements tardifs (quand  $\tau = 0.75$ ) sont mieux détectés que des changements qui ont lieu tôt (quand  $\tau = 0.25$ ).

		$\alpha = 4$					$\alpha = 3$					$\alpha = 2$					
$p$	$n$	$h = -1$	$h = -0.5$	$h = 0$	$h = 0.5$	$h = 1$	$h = -1$	$h = -0.5$	$h = 0$	$h = 0.5$	$h = 1$	$h = -1$	$h = -0.5$	$h = 0$	$h = 0.5$	$h = 1$	
$H = 0.6$	0.1	300	10.1	9.4	9.2	8.9	8.8	11.8	9.2	9.1	9.0	8.8	14.5	10.5	9.7	9.9	9.2
		500	8.8	7.5	7.6	7.0	7.1	9.9	8.3	8.1	7.3	6.9	20.3	10.5	7.8	7.2	7.5
		1000	6.8	6.6	6.2	5.6	5.3	9.4	6.7	5.7	6.1	5.2	37.3	10.6	6.2	6.1	7.5
	0.2	300	7.0	6.5	6.7	6.1	7.1	7.5	7.6	7.3	6.4	6.9	15.6	8.9	7.2	7.4	7.3
		500	6.9	5.9	5.5	5.8	5.7	7.4	6.0	5.5	5.8	5.8	26.2	8.4	6.0	6.2	7.0
		1000	4.8	4.7	4.8	4.6	4.9	7.7	5.1	4.2	4.6	4.6	52.1	9.6	4.7	5.5	7.2
$H = 0.7$	0.1	300	11.4	11.3	10.5	10.2	11.3	12.2	12.1	10.6	9.8	10.5	16.8	12.5	11.4	10.2	10.4
		500	10.4	9.7	9.7	9.2	9.2	12.5	10.3	9.3	8.8	9.1	20.6	11.0	9.6	9.6	9.1
		1000	9.5	7.9	7.8	7.4	7.6	11.6	8.2	8.1	6.8	7.7	39.3	11.6	7.7	7.6	9.1
	0.2	300	9.1	9.2	9.1	8.9	8.4	10.0	8.9	8.2	8.3	8.6	18.5	10.0	8.0	8.5	9.7
		500	8.1	7.7	8.1	7.4	7.5	8.8	9.0	7.7	7.6	7.8	28.5	10.4	7.3	7.7	8.2
		1000	7.3	7.1	6.8	6.4	6.7	10.3	7.1	6.8	6.6	6.5	57.1	11.4	6.8	6.6	8.8
$H = 0.8$	0.1	300	15.0	14.6	14.7	14.6	14.2	15.8	14.1	14.3	14.1	12.5	18.6	13.4	13.0	14.1	12.6
		500	14.3	14.6	13.6	13.3	13.9	15.4	13.2	13.2	11.4	12.7	21.6	13.5	10.8	12.3	13.7
		1000	13.6	13.3	13.0	12.6	12.9	16.4	13.5	12.9	11.7	11.5	43.4	14.5	10.7	10.8	12.8
	0.2	300	13.9	13.9	13.7	13.2	13.3	13.4	12.5	12.6	12.7	13.0	20.3	12.5	10.7	11.9	10.9
		500	13.8	13.3	12.4	12.3	13.0	14.1	12.6	12.7	12.6	13.7	32.6	13.5	10.1	11.1	12.1
		1000	14.2	12.9	12.9	13.1	13.6	16.9	13.3	12.9	11.4	12.1	62.5	15.7	10.0	11.1	12.9
$H = 0.9$	0.1	300	19.9	19.3	19.0	19.6	19.3	18.8	17.6	18.9	18.9	18.9	19.2	16.8	16.6	16.5	17.7
		500	20.6	20.7	20.9	20.6	21.1	19.0	19.1	18.4	18.3	18.6	25.2	16.0	15.2	16.4	17.5
		1000	23.1	22.1	22.7	22.2	23.4	24.4	20.2	19.5	19.9	19.2	50.9	20.2	15.6	17.0	20.0
	0.2	300	21.0	21.7	20.8	20.0	20.7	19.5	17.7	18.7	18.7	19.3	26.1	16.3	14.0	15.5	17.9
		500	22.7	23.7	22.9	22.8	22.7	22.1	19.6	20.1	19.2	20.2	41.4	18.2	15.3	16.4	19.7
		1000	26.7	26.3	26.2	25.8	27.4	28.7	23.2	22.7	23.7	23.9	75.5	24.3	17.5	20.0	22.2

TABLE 1.1 – Taux de rejet en % du test de détection de changement basé sur la statistique  $\tilde{\Gamma}_n$ ,  $k_n = \lfloor np \rfloor$ , pour un modèle de volatilité stochastique (loi de Pareto  $\varepsilon_j$ ,  $j \geq 1$ ) de longueur  $n$  avec paramètre de Hurst  $H$ , indice de queue  $\alpha$ , un changement de hauteur  $h$  après  $\lfloor n\tau \rfloor$  avec  $\tau = 0.25$ . Les calculs sont basés sur 5 000 simulations.

		$\alpha = 4$					$\alpha = 3$					$\alpha = 2$					
$p$	$n$	$h = -1$	$h = -0.5$	$h = 0$	$h = 0.5$	$h = 1$	$h = -1$	$h = -0.5$	$h = 0$	$h = 0.5$	$h = 1$	$h = -1$	$h = -0.5$	$h = 0$	$h = 0.5$	$h = 1$	
$H = 0.6$	0.1	300	10.5	9.9	10.1	9.3	9.3	13.8	10.3	8.7	8.7	8.5	41.8	14.5	9.7	8.6	8.6
		500	9.5	8.4	7.5	7.6	7.7	13.5	8.9	7.5	6.7	6.7	60.2	14.8	7.8	8.3	6.9
		1000	8.2	6.4	5.8	5.9	4.9	15.8	8.6	6.6	5.0	5.5	85.3	19.5	6.2	7.2	7.3
	0.2	300	8.3	7.4	6.3	7.1	6.4	10.1	8.0	6.7	7.2	6.2	48.5	11.2	7.2	7.3	7.1
		500	6.8	5.7	6.4	5.4	5.1	10.8	6.6	5.7	5.8	5.5	68.7	12.3	6.0	6.1	7.1
		1000	6.6	4.7	4.6	4.4	4.2	14.3	5.8	4.4	4.6	4.8	91.1	18.5	4.7	5.3	7.5
$H = 0.7$	0.1	300	12.5	11.4	10.9	10.8	10.1	15.3	12.0	10.6	10.0	10.3	44.3	15.9	11.4	10.0	10.2
		500	11.9	10.5	9.2	9.2	8.5	16.1	11.2	9.4	8.9	8.0	62.6	16.6	9.6	8.2	9.1
		1000	10.5	8.8	7.4	7.7	7.0	19.1	10.1	7.4	7.3	7.0	86.6	21.3	7.7	7.7	8.6
	0.2	300	10.2	9.2	8.6	8.2	8.7	13.1	10.0	8.5	8.8	8.3	50.2	13.1	8.0	8.5	9.0
		500	10.0	8.6	7.1	8.6	7.6	13.7	7.9	7.4	6.8	7.3	70.2	14.7	7.3	7.3	8.1
		1000	9.2	6.7	7.1	7.2	7.1	17.2	7.4	6.2	6.4	6.4	91.9	21.1	6.8	7.7	9.0
$H = 0.8$	0.1	300	15.8	15.2	14.6	12.9	13.0	17.8	14.7	13.2	13.7	13.1	47.7	18.6	13.0	13.5	12.4
		500	16.3	13.7	13.6	13.4	12.6	20.7	15.0	13.0	12.2	11.0	66.2	19.7	10.8	11.9	11.2
		1000	16.5	14.6	13.2	12.1	11.4	25.2	14.5	13.3	11.1	10.9	88.1	25.4	10.7	11.3	11.5
	0.2	300	15.0	12.9	12.7	13.5	13.2	17.3	14.3	12.0	12.0	11.0	56.0	17.4	10.7	11.2	11.8
		500	15.1	13.6	12.5	12.7	12.0	19.7	14.4	12.4	10.5	12.3	74.3	19.2	10.1	10.9	11.8
		1000	16.8	14.0	13.5	12.7	12.0	25.4	15.2	11.9	11.2	11.5	93.5	26.9	10.0	11.7	14.2
$H = 0.9$	0.1	300	22.2	19.6	19.6	20.6	18.3	23.5	19.1	17.7	17.5	17.2	53.0	21.5	16.6	15.1	16.2
		500	22.4	21.0	20.1	20.3	18.2	26.4	20.3	17.7	17.3	16.7	71.5	24.4	15.2	15.1	15.9
		1000	26.3	22.9	22.8	21.1	21.3	36.0	23.5	19.8	18.4	18.5	92.4	32.2	15.6	16.6	18.5
	0.2	300	22.4	22.3	20.0	19.9	19.9	25.9	19.5	18.3	17.5	18.2	64.6	21.5	14.0	16.2	16.1
		500	24.3	23.4	21.9	22.0	21.6	29.7	23.0	20.4	20.2	19.8	82.1	27.5	15.3	15.8	18.0
		1000	30.8	28.0	27.1	25.5	26.5	39.7	27.1	22.7	23.2	22.7	96.6	37.2	17.5	19.2	23.0

TABLE 1.2 – Taux de rejet en % du test de détection de changement basé sur la statistique  $\tilde{\Gamma}_n$ ,  $k_n = \lfloor np \rfloor$ , pour un modèle de volatilité stochastique (loi de Pareto  $\varepsilon_j$ ,  $j \geq 1$ ) de longueur  $n$  avec paramètre de Hurst  $H$ , indice de queue  $\alpha$ , un changement de hauteur  $h$  après  $\lfloor n\tau \rfloor$  avec  $\tau = 0.5$ . Les calculs sont basés sur 5 000 simulations.

		$\alpha = 4$					$\alpha = 3$					$\alpha = 2$					
$p$	$n$	$h = -1$	$h = -0.5$	$h = 0$	$h = 0.5$	$h = 1$	$h = -1$	$h = -0.5$	$h = 0$	$h = 0.5$	$h = 1$	$h = -1$	$h = -0.5$	$h = 0$	$h = 0.5$	$h = 1$	
$H = 0.6$	0.1	300	10.7	9.4	9.1	9.0	8.8	13.5	9.8	8.4	8.6	8.3	45.8	13.4	9.4	7.7	8.0
		500	8.5	7.7	6.7	7.2	6.3	12.5	8.7	7.3	7.4	7.1	61.3	14.0	7.6	7.4	7.2
		1000	6.6	6.2	5.6	5.2	5.6	14.6	7.4	6.3	5.4	4.8	83.5	16.5	6.6	5.9	5.8
	0.2	300	7.3	7.3	6.2	7.3	6.2	9.6	7.1	6.1	6.0	6.3	45.2	10.6	6.5	6.2	5.9
		500	6.8	5.8	5.5	5.6	5.2	9.6	6.7	5.8	5.0	5.2	63.3	11.5	6.4	5.1	5.6
		1000	5.8	5.3	4.6	4.5	3.4	11.3	5.6	4.4	4.7	4.9	87.3	15.0	5.1	5.0	5.8
$H = 0.7$	0.1	300	12.7	11.0	12.2	11.4	10.6	15.7	11.5	10.2	10.3	9.9	47.2	15.5	10.0	9.8	9.8
		500	11.3	9.9	9.3	9.2	9.5	14.8	9.6	10.3	9.6	8.6	60.9	14.7	9.0	8.1	8.7
		1000	9.7	8.9	8.0	7.6	7.2	16.5	9.8	8.1	6.8	6.9	83.6	18.6	7.6	7.7	7.1
	0.2	300	10.1	10.5	8.3	8.3	8.4	12.0	9.9	9.1	8.6	8.6	47.2	11.9	8.1	7.9	7.6
		500	9.5	8.4	7.5	7.8	7.3	12.6	8.1	7.1	7.1	8.1	64.4	14.1	7.8	7.4	6.8
		1000	8.8	7.0	7.1	6.3	6.2	15.0	8.4	6.3	6.3	6.7	87.4	16.4	6.2	6.2	6.7
$H = 0.8$	0.1	300	16.1	14.5	14.9	12.9	14.9	17.9	15.4	13.5	14.0	13.4	49.7	17.4	13.5	12.1	11.7
		500	16.1	14.5	14.1	13.7	12.2	19.6	14.7	13.5	11.9	11.5	64.8	18.9	12.3	10.7	11.0
		1000	15.5	14.3	13.3	12.9	12.1	21.8	15.0	11.8	11.4	10.4	84.2	22.3	11.0	10.3	10.6
	0.2	300	15.9	12.8	13.6	13.3	12.9	16.0	13.0	13.0	12.8	11.3	50.3	16.0	10.8	9.9	10.0
		500	14.7	13.4	12.9	12.3	12.4	19.3	13.6	11.9	11.8	11.7	67.5	17.5	10.1	10.0	9.7
		1000	15.7	14.1	12.9	12.6	12.1	22.2	13.9	12.4	11.6	11.5	88.2	21.8	9.9	10.0	10.8
$H = 0.9$	0.1	300	21.6	20.4	18.6	19.3	19.1	24.4	20.1	17.4	17.4	17.8	55.8	21.5	15.7	14.9	14.5
		500	22.4	21.4	20.9	20.0	18.8	25.9	19.5	18.8	17.5	16.7	70.4	23.4	15.3	14.8	14.7
		1000	25.5	22.7	21.7	22.1	21.6	31.8	22.0	19.2	18.2	18.7	88.2	29.1	14.5	15.3	15.0
	0.2	300	22.6	21.0	19.1	19.8	20.6	24.0	19.5	18.2	17.8	17.7	61.2	21.7	14.6	13.5	14.2
		500	24.0	23.1	23.4	22.1	21.2	28.0	21.3	20.2	19.1	18.7	74.7	25.0	15.2	15.4	15.7
		1000	29.7	26.3	26.9	25.9	27.2	34.9	25.1	22.7	22.7	23.6	91.5	33.5	17.6	16.9	18.9

TABLE 1.3 – Taux de rejet en % du test de détection de changement basé sur la statistique  $\tilde{\Gamma}_n$ ,  $k_n = \lfloor np \rfloor$ , pour un modèle de volatilité stochastique (loi de Pareto  $\varepsilon_j$ ,  $j \geq 1$ ) de longueur  $n$  avec paramètre de Hurst  $H$ , indice de queue  $\alpha$ , un changement de hauteur  $h$  après  $\lfloor n\tau \rfloor$  avec  $\tau = 0.75$ . Les calculs sont basés sur 5 000 simulations.

# Chapitre 2

## Théorèmes limites pour des champs aléatoires

On entend par champ aléatoire une collection de variables aléatoires indexée par  $\mathbb{Z}^d$ , où  $d$  est un entier supérieur à 1. Les indices de sommation sont notés par  $\mathbf{i} = (i_\ell)_{\ell=1}^d$ .

Une thématique importante est l'étude du comportement asymptotique de sommes partielles de champs aléatoires strictement stationnaires, qui admettent la forme générale

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{n}, \mathbf{i}} X_{\mathbf{i}}, \tag{2.0.1}$$

où  $(c_{\mathbf{n}, \mathbf{i}})_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d, \mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$  est une collection de nombres réels. Ceci regroupe différents cas de figure intervenant en probabilités et statistiques, notamment dans le traitement de données spatiales.

Pour traiter la convergence de telles sommes partielles, il existe essentiellement deux approches. La première consiste à approximer les sommes partielles définies par (2.0.1) par celles associées à un champ s'exprimant comme une fonction de  $m$  variables aléatoires dépendantes. La seconde approche est l'approximation des sommes partielles par celles associée à une martingale multi-dimensionnelle.

Au premier abord, nous pourrions avoir l'impression que la seule difficulté dans l'étude des champs aléatoires réside dans la technicité et l'écriture des termes impliqués (multiples différences par exemple). Il s'avère que ce n'est pas le cas et de nombreuses difficultés fondamentales apparaissent. Tout d'abord, concernant les martingales, il existe plusieurs possibilités de définition. Lorsque l'on somme sur les rectangles, nous aimerions pouvoir utiliser une propriété de martingale quels que soient les indices que l'on considère. Cela induit, comme nous le verrons, des restrictions sur la filtration. De plus, l'utilisation de sur-martingale exponentielle ne semble pas se généraliser à des multi-indices, de même que le concept de temps d'arrêt et celui de transformée de martingales. Un autre problème qui apparaît en dimension supérieure est que les décompositions de type martingale-cobord contiennent des termes hybrides (martingale dans certaines coordonnées, cobords dans les autres), ce qui fait qu'une telle décomposition avec l'accroissement de martingale dans  $\mathbb{L}^2$  ne garantit pas nécessairement le théorème limite central (voir [109]). Des complications apparaissent également dans le cadre du théorème limite central pour

des martingales à indices multiples. Si l'une des transformations est ergodique, alors l'utilisation du théorème limite central pour des tableaux de martingales fonctionne car la somme des carrés des accroissements converge en probabilité (voir [167, 108]). En revanche, lorsqu'aucune des transformations n'est ergodique, la somme des carrés des accroissements converge seulement en loi ce qui nécessite une autre version du théorème limite central, voir [169].

## 2.1 Vitesse de convergence dans le théorème limite central

Considérons un champ aléatoire de la forme

$$X_i = f\left((\varepsilon_{i-k})_{k \in \mathbb{Z}^d}\right), \quad (2.1.1)$$

où  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  est un champ i.i.d. à valeurs réelles et  $f: \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction mesurable, avec  $\mathbb{R}$  muni de la tribu borélienne et  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$  du produit de la tribu borélienne. La représentation (2.1.1) couvre un certain nombre de champs aléatoires strictement stationnaires.

*Exemple 2.1.1* (Fonction höldérienne d'un champ linéaire). On considère des champs aléatoires de la forme

$$X_i = g\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \varepsilon_{i-k}\right), \quad (2.1.2)$$

où  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  est une famille de réels de carré sommable,  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  est un champ aléatoire i.i.d. ayant un moment fini d'ordre deux et  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lipschitzienne.

*Exemple 2.1.2* (Champ de Volterra). Soit  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  un champ aléatoire centré ayant un moment fini d'ordre 2 et soit  $(a_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}^d}$  une collection de réels telle que  $\sum_{j,k \in \mathbb{Z}^d} a_{j,k}^2 < \infty$  et pour tout  $j \in \mathbb{Z}^d$ ,  $a_{j,j} = 0$ . Nous posons alors

$$X_i = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}^d} a_{j,k} \varepsilon_{i-j} \varepsilon_{i-k}. \quad (2.1.3)$$

*Exemple 2.1.3* (Fonction d'un champ aléatoire gaussien). Soit  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  un champ aléatoire i.i.d., où  $\varepsilon_0$  a une loi normale centrée réduite. Soit

$$Y_j := \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} a_i \varepsilon_{j-i},$$

où  $a_i, i \in \mathbb{Z}^d$ , sont des nombres réels tels que  $\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} a_i^2 = 1$ . Alors  $Y_j = f\left((\varepsilon_{j-i})_{i \in \mathbb{Z}^d}\right)$  où  $f\left((x_u)_{u \in \mathbb{Z}^d}\right) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} a_u x_u$  si  $\sum_{u \in \mathbb{Z}^d} a_u x_u$  converge (au sens où  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{\|u\|_\infty \leq m} a_u x_u$  existe) et 0 sinon. Soient  $\varepsilon'_0$  une variable aléatoire ayant la même loi que  $\varepsilon_0$  et indépendante du champ aléatoire  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ , et  $Y_j^* = f\left((\varepsilon_{j-i}^*)_{i \in \mathbb{Z}^d}\right)$ , où  $\varepsilon_u^* = \varepsilon_u$  si  $u \neq 0$  et  $\varepsilon_0^* = \varepsilon'_0$ .

Soit  $\mathcal{H}_0 = \mathbb{R}$  et soit  $\mathcal{H}_1$  le premier chaos de Wiener défini comme étant le sous espace vectoriel fermé de  $\mathbb{L}^2$  engendré par les variables aléatoires  $Y_j$  et  $Y_j^*$ ,  $j \in \mathbb{Z}^d$ . Pour  $q \geq 2$ , soit  $\mathcal{H}_q$  le sous-espace fermé de  $\mathbb{L}^2$  engendré par les variables aléatoires  $H_q(Y_j)$  et  $H_q(Y_j^*)$ ,  $j \in \mathbb{Z}^d$ , où  $H_q$  est le  $q$ ème polynôme d'Hermite défini par

$$H_q(x) = (-1)^q \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^q}{dx^q} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Étant donnée une fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(Y_0) \in \mathbb{L}^2$  et  $\mathbb{E}[f(Y_0)] = 0$ , le développement d’Hermite suivant a lieu :

$$f(Y_j) = \sum_{q=1}^{+\infty} c_q(f) H_q(Y_j),$$

où

$$c_q(f) = \frac{1}{q!} \mathbb{E}[f(Y_0) H_q(Y_0)], \quad (2.1.4)$$

sous réserve que la série  $\sum_{q=1}^{+\infty} q! c_q(f)^2$  converge.

Sous certaines conditions sur la famille de poids  $(c_{n,i})_{i \in \mathbb{Z}^d}$  et la dépendance du champ  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ , la convergence de

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} c_{n,i} X_i \quad (2.1.5)$$

vers une loi normale centrée réduite a lieu.

La dépendance d’un champ de la forme (2.1.1) est mesurée par les coefficients  $\delta_{i,p}$  introduits dans [68], où

$$\delta_{i,p} = \|X_i - X_i^*\|_p,$$

où  $X_i^* = f\left(\left(\varepsilon_{i-k}^*\right)_{k \in \mathbb{Z}^d}\right)$ , avec  $\varepsilon_j^* = \varepsilon_j$  si  $j \neq \mathbf{0}$  et  $\varepsilon_{\mathbf{0}}^* = \varepsilon'_{\mathbf{0}}$ , où  $\varepsilon'_{\mathbf{0}}$  a la même loi que  $\varepsilon_{\mathbf{0}}$  et est indépendante du champ  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ . Pour des bornes de ces coefficients de dépendance dans les exemples précédents, nous renvoyons à l’article [19].

Dans l’article [Gir19a], nous donnons des conditions suffisantes sur la dépendance et les moments d’un champ aléatoire de la forme (2.1.1) afin de contrôler uniformément la différence entre la fonction de répartition des sommes pondérées (2.1.5) et celle d’une loi normale ayant une variance appropriée.

Dans toute cette section,  $(b_{n,i})_{i \in \mathbb{Z}^d}$  est une collection de réels telle que  $\|b_n\|_{\ell^2} := \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} b_{n,i}^2} > 0$  pour tout  $n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|b_n\|_{\ell^2} = \infty$ . Posons

$$S_n := \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} b_{n,i} X_i.$$

On s’intéresse à la vitesse de convergence dans le théorème limite central, qui est quantifiée par

$$\Delta_n := \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\|b_n\|_{\ell^2}} \leq t\right) - \mathbb{P}(\sigma \mathcal{N} \leq t) \right|,$$

où  $\mathcal{N}$  est de loi normale centrée réduite et

$$\sigma^2 := \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \text{Cov}(X_0, X_i) \quad (2.1.6)$$

(des conditions sur la dépendance de  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  sur lesquelles nous reviendrons garantissent la convergence absolue dans la série du membre de droite de (2.1.6)).

Le point de départ de notre approche consiste à approximer  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  par un champ  $m$ -dépendant. En notant

$$\Delta(Y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\mathbb{P}(Y \leq t) - \mathbb{P}(\sigma \mathcal{N} \leq t)|,$$

le Lemme 1 dans [66] donne que pour toutes variables aléatoires  $Y$  et  $Y'$  et tout  $p \geq 1$ ,

$$\Delta(Y + Y') \leq 2\Delta(Y) + \|Y'\|_p^{\frac{p}{p+1}}.$$

En définissant

$$S_n^{(m)} := \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} b_{n,i} X_i^{(m)}, \quad X_i^{(m)} := \mathbb{E}[X_i \mid \sigma(\varepsilon_{\mathbf{k}}, \|\mathbf{i} - \mathbf{k}\|_\infty \leq m)]$$

et en supposant que  $\sigma^2$  défini par (2.1.6) est strictement positif, nous obtenons

$$\begin{aligned} \Delta_n \leq 2\Delta \left( \frac{S_n^{(m)}}{\|b_n\|_{\ell^2} \|S_n^{(m)}\|_2} \right) \\ + \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left( \frac{\|S_n^{(m)}\|_2}{\|b_n\|_{\ell^2}} \mathcal{N} \leq t \right) - \mathbb{P}(\sigma \mathcal{N} \leq t) \right| + \frac{\|S_n - S_n^{(m)}\|_p^{\frac{p}{p+1}}}{\|b_n\|_{\ell^2}^{\frac{p}{p+1}}}. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

On contrôle le premier terme du membre de droite de (2.1.7) par le Théorème 2.6 dans [28], donnant une borne de Berry-Esseen pour des champs aléatoires  $m$ -dépendants. Pour le second, il s'agit de fournir une borne d'une quantité de la forme  $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\mathbb{P}(a\mathcal{N} \leq t) - \mathbb{P}(\mathcal{N} \leq t)|$  à l'aide de  $|a - 1|$ , ce qui est fait page 456 de [183] et page 272 de [64]. Enfin, le troisième terme est majoré par l'inégalité de moments suivante, valide pour  $p \geq 2$  :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} a_i X_i \right\|_p \leq \sqrt{2} \frac{14.5p}{\log p} \left( \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} a_i^2 \right)^{1/2} \sum_{j=0}^{+\infty} (4j+4)^{d/2} \left( \sum_{\|\mathbf{i}\|_\infty=j} \delta_{i,2}^2 \right)^{1/2} \\ + \sqrt{2} \frac{14.5p}{\log p} \sqrt{p-1} \left( \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} |a_i|^p \right)^{1/p} \sum_{j=0}^{+\infty} (4j+4)^{d(1-1/p)} \left( \sum_{\|\mathbf{i}\|_\infty=j} \delta_{i,p}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

(voir Corollaire 1 dans [Gir19a]). Notons qu'il aurait également été possible d'utiliser l'inégalité de moments obtenue dans [96], Lemme 2.2, qui dit que pour  $p \geq 2$ ,

$$\left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} a_i X_i \right\|_p \leq (p-1)^{d/2} \left( \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} a_i^2 \right)^{1/2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \|P_{\mathbf{0}}(X_{\mathbf{k}})\|_p,$$

où

$$P_i(Y) = \sum_{I \subset \llbracket 1, d \rrbracket} (-1)^{\text{card}(I)} \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_{i-\mathbf{1}_I}], \quad (2.1.8)$$

et  $\mathbf{1}_I$  est l'élément de  $\mathbb{Z}^d$  dont les coordonnées d'indice appartenant à  $I$  sont 1 et les autres 0. Pour  $\ell \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , nous noterons par  $\mathbf{e}_\ell$  l'élément de  $\mathbb{Z}^d$  dont la  $\ell$ -ième coordonnée est 1 et toutes les autres sont zéro.

Le résultat général obtenu pour des sommes pondérées générales s'énonce de la manière suivante.



**Theorème 2.1.4.** Soit  $p > 2$ ,  $p' = \min\{p, 3\}$ . Soit  $(X_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$  un champ aléatoire centré admettant la représentation (2.1.1) et un moment fini d'ordre  $p$ . Pour  $n \geq 1$ , soit  $b_n = (b_{n,\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$  une famille d'éléments de  $\ell^2$  telle que  $\{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d, b_{n,\mathbf{i}} \neq 0\}$  est fini et non vide, telle que  $\|b_n\|_{\ell^2} \rightarrow \infty$  et pour chaque  $q \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d} (b_{n,\mathbf{i}} - b_{n,\mathbf{i}-\mathbf{e}_q})^2}{\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d} b_{n,\mathbf{i}}^2} = 0.$$

Soient

$$C_p(\alpha) := \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1)^{d\frac{p-1}{p} + \alpha} \sqrt{\sum_{\mathbf{i}: \|\mathbf{i}\|_{\infty}=j} \delta_{\mathbf{i},p}^2}.$$

Supposons que pour certains  $\alpha, \beta > 0$ ,  $C_2(\alpha)$  et  $C_p(\beta)$  sont finies et que  $\sigma^2$ , défini par (2.1.6), est non nul. Pour tout  $\gamma > 0$ , il existe une constante  $\kappa$  et  $n_0 \geq 1$  tels que pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$\Delta_n \leq \kappa \left( \|b_n\|_{\ell^2}^{\gamma(p'-1)d-p'} \|b_n\|_{\ell^{p'}}^{p'} + |\varepsilon_n| + \|b_n\|_{\ell^2}^{-\gamma\alpha\frac{p}{p+1}} + \|b_n\|_{\ell^p}^{\frac{p}{p+1}} \|b_n\|_{\ell^2}^{-\frac{p}{p+1}(\gamma\beta+1)} \right),$$

où

$$\varepsilon_n := \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d} |\mathbb{E}[X_{\mathbf{0}} X_{\mathbf{j}}]| \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d} \left| \frac{b_{n,\mathbf{i}} b_{n,\mathbf{i}+\mathbf{j}}}{\|b_n\|_{\ell^2}^2} - 1 \right|.$$

Notons que la constante  $\kappa$  ainsi que l'entier  $n_0$  peuvent être rendus explicites en termes de  $\varepsilon_n$ ,  $\gamma$  et  $\|b_n\|_{\ell^2}$ . La constante  $\kappa$  ne dépend que de  $C_2(\alpha)$ ,  $C_p(\beta)$ ,  $\gamma$  et  $d$ .

Donnons à présent quelques applications. Il est possible de fournir une vitesse de convergence pour les sommes partielles sur des sous-ensembles de  $\mathbb{Z}^d$  de champs aléatoires de la forme (2.1.1). Nous avons obtenu la vitesse suivante :

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left( \frac{\sum_{\mathbf{i} \in \Lambda_n} X_{\mathbf{i}}}{\text{Card}(\Lambda_n)^{1/2}} \leq t \right) - \mathbb{P}(\sigma \mathcal{N} \leq t) \right| \\ \leq \kappa \left( |\Lambda_n|^q + \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d} |\mathbb{E}[X_{\mathbf{0}} X_{\mathbf{j}}]| \left| \frac{\text{Card}(\Lambda_n \cap (\Lambda_n - \mathbf{j}))}{\text{Card}(\Lambda_n)} - 1 \right| \right), \end{aligned}$$

où  $\Lambda_n - \mathbf{j} = \{\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{i} \in \Lambda_n\}$  et

$$q := \max \left\{ \frac{\gamma(p'-1)d - p'}{2} + 1; -\gamma\alpha \frac{p}{2(p+1)}; \frac{2-p-p\gamma\beta}{2(p+1)} \right\}.$$

Nous avons également comparé notre résultat dans le cas de sommes sur des carrés avec ceux de Mielkaitis et Paulauskas [124], valides pour des processus linéaires en dimension 2. Nous avons donné des exemples de familles de coefficients pour lesquels nos résultats sont meilleurs que ceux de Mielkaitis et Paulauskas et vice versa.

Il est également possible de fournir une vitesse de convergence pour la normalité asymptotique de l'estimateur d'une fonction inconnue dans le modèle de régression

$$Y_{\mathbf{i}} = g\left(\frac{\mathbf{i}}{n}\right) + X_{\mathbf{i}}, \quad \mathbf{i} \in \Lambda_n := \{1, \dots, n\}^d, \quad (2.1.9)$$

où  $g: [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction inconnue de classe  $C^\infty$ , et  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  est un champ aléatoire centré de la forme (2.1.1). Afin d'estimer  $g$ , nous considérons un noyau de probabilité  $K$  défini sur  $\mathbb{R}^d$  et une suite  $(h_n)_{n \geq 1}$  de réels strictement positifs qui tend vers 0 et vérifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nh_n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} nh_n^{d+1} = 0. \quad (2.1.10)$$

La fonction  $g$  est estimée  $g_n$  par

$$g_n(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i \in \Lambda_n} Y_i K\left(\frac{\mathbf{x} - i/n}{h_n}\right)}{\sum_{i \in \Lambda_n} K\left(\frac{\mathbf{x} - i/n}{h_n}\right)}, \quad \mathbf{x} \in [0, 1]^d. \quad (2.1.11)$$

On fera les hypothèses suivantes sur  $g$  et  $K$  :

- (A1) Le noyau  $K$  vérifie  $\int_{\mathbb{R}^d} K(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = 1$ , est symétrique, positif, et a pour support  $[-1, 1]^d$ .
- (A2) Il existe des constantes positives  $c$  et  $C$  telles que pour tous  $\mathbf{x} \in [-1, 1]^d$ ,  $c \leq K(\mathbf{x}) \leq C$  et  $|K(\mathbf{x}) - K(\mathbf{y})| \leq C \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$ .
- (A3) Il existe une constante  $C$  telle que la valeur absolue de toutes les dérivées du premier ordre de  $g$  sont bornées par  $C$  sur  $[0, 1]^d$ .

On mesure la vitesse de convergence de  $\left( (nh_n)^{d/2} (g_n(\mathbf{x}) - \mathbb{E}[g_n(\mathbf{x})]) \right)_{n \geq 1}$  vers une loi normale via la quantité

$$\widetilde{\Delta}_n := \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left( (nh_n)^{d/2} (g_n(\mathbf{x}) - \mathbb{E}[g_n(\mathbf{x})]) \leq t \right) - \mathbb{P}(\sigma \|K\|_2 \mathcal{N} \leq t) \right|.$$

Une borne sera exprimée en fonction des quantités suivantes :

$$A_n := (nh_n)^{d/2} \left( \sum_{i \in \Lambda_n} K^2 \left( \frac{\mathbf{x} - i/n}{h_n} \right) \right)^{1/2} \|K\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)}^{-1} \left( \sum_{i \in \Lambda_n} K \left( \frac{\mathbf{x} - i/n}{h_n} \right) \right)^{-1/2} \text{ et}$$

$$\varepsilon_n := \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |\mathbb{E}[X_0 X_j]| \left( \sum_{i \in \Lambda_n \cap (\Lambda_n - j)} \frac{K \left( \frac{\mathbf{x} - i/n}{h_n} \right) K \left( \frac{\mathbf{x} - (i-j)/n}{h_n} \right)}{\sum_{k \in \Lambda_n} K^2 \left( \frac{\mathbf{x} - k/n}{h_n} \right)} - 1 \right).$$

La présence de la quantité  $A_n$  est liée au fait que l'estimateur  $g_n(\cdot)$  n'est pas une somme pondérée au sens de (2.1.5) car la normalisation est  $\|b_n\|_{\ell^1}$  au lieu de  $\|b_n\|_{\ell^2}$ . Le rapport entre ces quantités converge vers une constante. Remarquons que  $A_n$  ne dépend que du noyau  $K$ . En revanche,  $\varepsilon_n$  dépend à la fois du noyau  $K$  et des covariances entre  $X_0$  et  $X_j$ . Nous avons obtenu la vitesse de convergence suivante :

$$\widetilde{\Delta}_n \leq \kappa |A_n - 1|^{\frac{p}{p+1}} + |\varepsilon_n| + \kappa (nh_n)^{\frac{d}{2}(\gamma(p'-1)d - p' + 2)} + (nh_n)^{-\frac{d}{2}\gamma\alpha\frac{p}{p+1}} + (nh_n)^{\frac{2d-p(\gamma\beta+1)}{2(p+1)}}.$$

Le Lemme 1 dans [67] montre que (2.1.10), implique que la suite  $(A_n)_{n \geq 1}$  converge vers 1. Puisque  $K$  est lipschitzien, il est possible de montrer que la convergence de  $\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} |\text{Cov}(X_0, X_i)|$  implique que  $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$  converge vers 0.

## 2.2 Inégalités de déviation pour des champs aléatoires de type accroissement d'ortho-martingale

Contrôler la probabilité que la valeur absolue ou la norme d'un champ aléatoire centré dépasse un certain  $x$  permet de récolter des informations sur la concentration autour de la moyenne. Cela permet de fournir des vitesses de convergence pour la loi des grands nombres mais aussi, comme nous le verrons, de vérifier certains critères de tension d'un processus sommes partielles dans un espace fonctionnel approprié.

Il convient tout d'abord de définir le type de champs aléatoire de type accroissements de martingales que nous allons considérer. Puisque nous traiterons des sommes partielles champs aléatoires sur des rectangles, il est convenable de pouvoir exploiter des propriétés de martingale en considérant la sommation dans chacune des directions.

Nous considérerons l'ordre coordonnée par coordonnée, au sens où

$$\mathbf{i} \preceq \mathbf{j} \Leftrightarrow \forall \ell \in \llbracket 1, d \rrbracket := \{1, \dots, d\}, i_\ell \leq j_\ell.$$

Il s'avère que les filtrations considérées devront être commutantes, au sens où les projections des éléments de la filtration commutent.

**Définition 2.2.1.** *On dit qu'une collection de tribus  $(\mathcal{F}_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$  est une filtration complètement commutante si*

1. pour tous  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$  tels que  $\mathbf{i} \preceq \mathbf{j}$ ,  $\mathcal{F}_{\mathbf{i}} \subset \mathcal{F}_{\mathbf{j}}$  et
2. pour tout  $Y \in \mathbb{L}^1$  et tous  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$ ,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_{\mathbf{i}}] \mid \mathcal{F}_{\mathbf{j}}] = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_{\min\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}}],$$

où  $\min\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  est l'élément de  $\mathbb{Z}^d$  défini comme étant le minimum coordonnée par coordonnée de  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{j}$ , c'est-à-dire  $\min\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\} = (\min\{i_\ell, j_\ell\})_{\ell=1}^d$ .

Notons qu'en dimension 1, toutes les filtrations sont complètement commutantes. Donnons deux exemples de filtration complètement commutantes.

**Proposition 2.2.2.**

1. Soit  $(\varepsilon_{\mathbf{u}})_{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d}$  un champ i.i.d.. Posons  $\mathcal{F}_{\mathbf{i}} = \sigma(\varepsilon_{\mathbf{u}}, \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d, \mathbf{u} \preceq \mathbf{i})$ . Alors la filtration  $(\mathcal{F}_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$  est complètement commutante.
2. Soient  $(\mathcal{F}_{\mathbf{i}^{(\ell)}}^{(\ell)})_{\mathbf{i}^{(\ell)} \in \mathbb{Z}^{d_\ell}}, 1 \leq \ell \leq L$ , des filtrations complètement commutantes sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Nous supposons que pour tous  $\mathbf{i}^{(1)} \in \mathbb{Z}^{d_1}, \dots, \mathbf{i}^{(L)} \in \mathbb{Z}^{d_L}$ , les tribus  $\mathcal{F}_{\mathbf{i}^{(\ell)}}^{(\ell)}, 1 \leq \ell \leq L$ , sont indépendantes. Soit  $d = \sum_{\ell=1}^L d_\ell$  et pour  $\mathbf{i} = (\mathbf{i}^{(\ell)})_{\ell=1}^L \in \mathbb{Z}^d$ , soit  $\mathcal{F}_{\mathbf{i}} = \bigvee_{\ell=1}^L \mathcal{F}_{\mathbf{i}^{(\ell)}}^{(\ell)}$ . Alors  $(\mathcal{F}_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$  est complètement commutante.

Ces deux exemples furent introduits dans la Section 1 de [25], mais sans démonstration. La validité du premier exemple est une conséquence directe de la Proposition 2 p. 1693 de [172].

Pour  $\ell \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , nous noterons par  $\mathbf{e}_\ell$  l'élément de  $\mathbb{Z}^d$  dont la  $\ell$ -ième coordonnée est 1 et toutes les autres sont zéro.

**Définition 2.2.3.** *Le champ  $(D_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  est de type accroissement d'ortho-martingale par rapport à une filtration commutante  $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  si pour tout  $i \in \mathbb{Z}^d$ ,  $D_i$  est  $\mathcal{F}_i$ -mesurable, intégrable et pour tout  $\ell \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $\mathbb{E}[D_i \mid \mathcal{F}_{i-e_\ell}] = 0$ .*

Dans tout le manuscrit, nous utiliserons l'abréviation AOM pour « accroissement d'ortho-martingale ». En dimension 2, cela se traduit par le fait que pour tous  $i, j \in \mathbb{Z}$ ,  $X_{i,j}$  est  $\mathcal{F}_{i,j}$ -mesurable et

$$\mathbb{E}[D_{i,j} \mid \mathcal{F}_{i-1,j}] = \mathbb{E}[D_{i,j} \mid \mathcal{F}_{i,j-1}] = 0.$$

Ainsi, pour chaque  $i$  fixé, la suite  $(D_{i,j})_{j \in \mathbb{Z}}$  est une suite AM par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_{i,j})_{j \in \mathbb{Z}}$  et pour chaque  $j$  fixé, la suite  $(D_{i,j})_{i \in \mathbb{Z}}$  est une suite AM par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_{i,j})_{i \in \mathbb{Z}}$ .

Des inégalités de moments peuvent être établies pour les ortho-martingales. En procédant comme dans la démonstration du Lemme 2.2 dans [96], il est possible de montrer qu'en combinant un argument de récurrence avec le Théorème 2.1 dans [151], l'inégalité suivante a lieu

$$\left\| \sum_{1 \preccurlyeq i \preccurlyeq \mathbf{N}} D_i \right\|_p \leq (p-1)^{d/2} \left( \sum_{1 \preccurlyeq i \preccurlyeq \mathbf{N}} \|D_i\|_p^2 \right)^{1/2}.$$

La somme des carrés des accroissements joue un rôle clé, car Fazekas a obtenu dans [72], pour  $p \geq 1$ , l'inégalité

$$c_1(p, d) \left\| \sum_{1 \preccurlyeq i \preccurlyeq \mathbf{N}} D_i^2 \right\|_{p/2}^{1/2} \leq \left\| \sum_{1 \preccurlyeq i \preccurlyeq \mathbf{N}} D_i \right\|_p \leq c_2(p, d) \left\| \sum_{1 \preccurlyeq i \preccurlyeq \mathbf{N}} D_i^2 \right\|_{p/2}^{1/2},$$

où les constantes  $c_1(p, d)$  et  $c_2(p, d)$  ne dépendent que de  $p$  et  $d$ , ce qui généralise le résultat obtenu en dimension 2 dans [123].

Il s'avère qu'il y a un lien établi par Weisz entre les ortho-martingales et les séries de Fourier multi-dimensionnelle, voir [174, 173].

Dans les articles [99, 101], des inégalités de déviation sont établies et utilisées pour établir la convergence complète (qui implique la convergence presque sûre) de sommes de champs de type AOM. Si les arguments de récurrence sur la dimension fonctionnent bien pour les inégalités de moments, ils sont plus difficiles à mettre en œuvre pour des inégalités de déviation.

### 2.2.1 Cas de queues à décroissance polynomiale

Cette partie résume les articles [Gir19b, Gir24b], où nous avons considéré la question suivante : étant donné un champ aléatoire  $(D_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  de type AOM et à valeurs dans un espace de Banach  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$ , nous cherchons à contrôler la probabilité pour que la norme des maxima des sommes partielles sur des rectangles dépasse un certain  $t$ . Nous avons pour but d'obtenir une inégalité de la forme

$$\mathbb{P} \left( \max_{1 \preccurlyeq n \preccurlyeq \mathbf{N}} \left\| \sum_{1 \preccurlyeq i \preccurlyeq n} D_i \right\|_{\mathbb{B}} > t \right) \leq g_{\mathbf{N}}(t),$$

où  $g_N: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction décroissante qui sera rendue explicite par la suite et qui s'exprime à l'aide de la queue de variables aléatoires en lien avec  $\|D_i\|_{\mathbb{B}}$ . En remplaçant  $t$  par  $tb_N$ , où  $b_N$  est un réel qui ne dépend que de  $N$ , il est ainsi possible d'établir la convergence de séries de la forme  $\sum_{N \in \mathbb{N}^d} c_N \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq n \leq N} \left\| \sum_{1 \leq i \leq n} D_i \right\|_{\mathbb{B}} > b_N \right)$  en imposant une condition sur les queues des variables aléatoires  $\|D_i\|_{\mathbb{B}}$ .

Dans le cas des variables aléatoires à valeurs réelles et  $d = 1$ , une première approche consiste à utiliser l'inégalité de Doob et l'orthogonalité des accroissements pour déduire que

$$\mathbb{P} \left( \max_{1 \leq n \leq N} \left| \sum_{i=1}^n D_i \right| > x \right) \leq \frac{2}{x^2} \sum_{i=1}^N \mathbb{E} [D_i^2].$$

Pour les suites AM, c'est-à-dire dans le cas  $d = 1$ , les inégalités de déviation pour les martingales reposent sur des inégalités du type

$$\mathbb{P}(X > \beta\lambda, Y \leq \delta\lambda) \leq C\delta^p (\beta - \delta - 1)^{-p} \mathbb{P}(X > \lambda), \quad (2.2.1)$$

$$\text{où } X = \max_{1 \leq n \leq N} \left| \sum_{i=1}^n D_i \right| \text{ et } Y = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq N} |D_i|, \left( \sum_{i=1}^N \mathbb{E} [|D_i|^p | \mathcal{F}_{i-1}] \right)^{1/p} \right\}.$$

Ceci a permis de déduire des inégalités de moments dans [23, 95] dans le cas  $\mathbb{B} = \mathbb{R}$  et [53], [Gir19b] dans le cas vectoriel. Pour obtenir une inégalité du type (2.2.1), une transformée de martingale peut être utilisée en posant  $\widetilde{D}_i := \mathbf{1}_{A_i} D_i$ , où  $A_i \in \mathcal{F}_{i-1}$  est un événement permettant de contrôler les accroissements  $D_k$ ,  $k \leq i - 1$ , la somme des moments conditionnels  $\sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{E} [\|D_k\|_{\mathbb{B}}^p | \mathcal{F}_{k-1}]$  et  $\max_{1 \leq j \leq i-1} \left\| \sum_{k=1}^j D_k \right\|_{\mathbb{B}}$  doit se trouver dans  $]\lambda, \beta\lambda]$ . Il est également possible d'exprimer cette nouvelle martingale à l'aide de temps d'arrêt. Il s'avère que tout ce dont nous avons besoin pour démontrer (2.2.1) est une inégalité de la forme

$$\mathbb{E} \left[ \left\| \sum_{i=1}^N D_i \right\|_{\mathbb{B}}^p \right] \leq C_p \sum_{i=1}^N \mathbb{E} [\|D_i\|_{\mathbb{B}}^p], \quad (2.2.2)$$

où  $C_p$  est indépendante de  $N$ . Nous appliquons (2.2.2) à la transformée de martingale.

Notons que l'existence d'une constante  $C_p$  pour laquelle (2.2.2) a lieu n'est pas garantie pour tous les espaces de Banach séparables. Il faudra faire une hypothèse sur le caractère lisse de la norme, introduit par Pisier (voir [139, 138]).

**Définition 2.2.4** (Banach  $r$ -lisse). *Un espace de Banach séparable  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$  est  $r$ -lisse (avec  $1 < r \leq 2$ ) si*

$$\sup_{t>0} \sup_{x,y \in \mathbb{B}, \|x\|_{\mathbb{B}} = \|y\|_{\mathbb{B}} = 1} \frac{\|x + ty\|_{\mathbb{B}} + \|x - ty\|_{\mathbb{B}} - 2}{t^r} < \infty.$$

L'identité du parallélogramme montre qu'un espace de Hilbert séparable est 2-lisse. De plus,  $\mu$  est une mesure  $\sigma$ -finie sur la tribu borélienne de  $\mathbb{R}$ , alors l'espace de Banach  $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mu)$  est  $\min\{p, 2\}$ -lisse.

Il a été démontré par Assouad dans [11] que (2.2.2) a lieu avec  $p = r$  pour tout espace de Banach  $r$ -lisse. Par définition, un espace de Banach  $r$ -lisse est également  $p$ -lisse pour tout  $1 < p \leq r$ . Ainsi, il est possible de définir

$$C_{p,\mathbb{B}} := \sup_{n \geq 1} \sup_{(D_i)_{i=1}^n \in \Delta_n} \frac{\mathbb{E} \left[ \left\| \sum_{i=1}^n D_i \right\|_{\mathbb{B}}^p \right]}{\sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[ \|D_i\|_{\mathbb{B}}^p \right]}, \quad (2.2.3)$$

où  $\Delta_n$  désigne la collection des suites AM  $(D_i)_{i=1}^n$  telle que  $\sum_{i=1}^n \|D_i\|_{\mathbb{B}}^p$  n'est pas identiquement nulle.

En dimension 1, dans le cas de suites AM à valeurs réelles, Nagaev [127] a démontré que pour tout  $q > 0$ , il existe une constante  $C_q$  telle que si  $(D_i)_{i \geq 1}$  est une suite AM par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_i)_{i \geq 0}$  et  $t > 0$ , alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq n \leq N} \left| \sum_{i=1}^n D_i \right| > t \right) &\leq C_q \int_0^1 u^{q-1} \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq i \leq N} |D_i| > tu \right) du \\ &\quad + C_q \int_0^1 u^{q-1} \mathbb{P} \left( \left( \sum_{i=1}^N \mathbb{E} [D_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}] \right)^{1/2} > tu \right) du. \end{aligned}$$

Nous avons obtenu dans [Gir19b] une version pour les variables aléatoires à valeurs dans un espace de Banach  $p$ -lisse, qui se présente de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq n \leq N} \|S_n\|_{\mathbb{B}} > x \right) &\leq \frac{2^q}{2^q - 1} q 2^{-p} \int_0^1 \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \|D_i\|_{\mathbb{B}} > 2^{-1-q/p} C_{p,\mathbb{B}}^{-1/p} x u \right) u^{q-1} du \\ &\quad + \frac{2^q}{2^q - 1} q 2^{-p} \int_0^1 \mathbb{P} \left( \left( \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [\|D_i\|_{\mathbb{B}}^p | \mathcal{F}_{i-1}] \right)^{1/p} > 2^{-1-q/p} C_{p,\mathbb{B}}^{-1/p} x u \right) u^{q-1} du, \quad (2.2.4) \end{aligned}$$

où  $C_{p,\mathbb{B}}$  est donnée par (2.2.3). Nous avons obtenu l'inégalité suivante pour des champs de type AOM, qui, contrairement au résultat de l'article [Gir19b], ne fait pas d'hypothèse sur la loi des sommes partielles.

**Theorème 2.2.5.** *Soit  $1 < r \leq 2$  et  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$  un espace de Banach séparable  $r$ -lisse. Pour tous  $p \in ]1, r]$ ,  $q > p$  et  $d \geq 1$ , il existe une fonction  $f_{p,q,d} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que si  $(D_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  est un champ aléatoire de type AOM par rapport à une filtration complètement commutante  $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ , et prenant ces valeurs dans  $\mathbb{B}$ , alors pour tous  $1 < p \leq r$ ,  $q > p$  et  $t > 0$ , l'inégalité suivante a lieu :*

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq n \leq N} \left\| \sum_{1 \leq i \leq n} D_i \right\|_{\mathbb{B}} > t \right) &\leq f_{p,q,d}(C_{p,\mathbb{B}}) \int_0^1 u^{q-1} \mathbb{P} \left( \left( \sum_{1 \leq i \leq N} \|D_i\|_{\mathbb{B}}^p \right)^{\frac{1}{p}} > tu \right) du \\ &\quad + f_{p,q,d}(C_{p,\mathbb{B}}) \int_1^\infty u^{p-1} (1 + \log u)^{d-1} \mathbb{P} \left( \left( \sum_{1 \leq i \leq N} \|D_i\|_{\mathbb{B}}^p \right)^{\frac{1}{p}} > tu \right) du. \quad (2.2.5) \end{aligned}$$

En posant  $V_p := (\sum_{1 \leq i \leq N} \|D_i\|_{\mathbb{B}}^p)^{\frac{1}{p}}$ , le membre de droite de (2.2.5) peut être majoré par

$$a_{d,p,q} f_{p,q,d}(C_{p,\mathbb{B}}) \mathbb{E} \left[ \left( \frac{V_p}{t} \right)^q \right] + a_{d,p,q} f_{p,q,d}(C_{p,\mathbb{B}}) \mathbb{E} \left[ \left( \frac{V_p}{t} \right)^p \left( 1 + \log \left( \frac{V_p}{t} \right) \right)^{d-1} \mathbf{1}_{\{V_p > x\}} \right],$$

où  $a_{d,p,q}$  ne dépend que de  $d, p$  et  $q$ . Par conséquent, l'inégalité (2.2.5) n'a d'intérêt que si  $\mathbb{E} \left[ \|D_i\|_{\mathbb{B}}^p (1 + \log(1 + \|D_i\|_{\mathbb{B}}))^{d-1} \right]$  est finie.

En se basant sur des arguments d'ordre convexe, il est possible de déduire de l'inégalité (2.2.5) que si les accroissements ont la même loi, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq n \leq N} \left\| \sum_{1 \leq i \leq n} c_i X_i \right\|_{\mathbb{B}} > t \right) &\leq f_{p,q,d}(C_{p,\mathbb{B}}) \int_0^1 u^{q-1} \mathbb{P} \left( \left( \sum_{1 \leq i \leq N} |c_i|^p \right)^{1/p} \|D_0\|_{\mathbb{B}} > tu \right) du \\ &+ f_{p,q,d}(C_{p,\mathbb{B}}) \int_1^\infty u^{p-1} (1 + \log u)^d \mathbb{P} \left( \left( \sum_{1 \leq i \leq N} |c_i|^p \right)^{1/p} \|D_0\|_{\mathbb{B}} > tu \right) du. \end{aligned}$$

Une approche basée sur un équivalent de (2.2.1) ne semble pas s'étendre aux champs aléatoires, car il ne semble pas y avoir d'analogue aux transformées de martingales ni aux temps d'arrêt en dimension 2 ou supérieure. En revanche, il est possible de procéder par récurrence sur la dimension. On cherche à borner la queue du maximum des sommes partielles d'une suite AM à l'aide d'une quantité mettant en jeu la somme des puissances  $p$ -ièmes des normes des accroissements :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq n \leq N} \left\| \sum_{i=1}^n D_i \right\|_{\mathbb{B}} > x \right) \\ \leq f_{p,q}(C_{p,\mathbb{B}}) \int_0^\infty \min \{u^{q-1}, u^{p-1}\} \mathbb{P} \left( \left( \sum_{i=1}^N \mathbb{E} [\|D_i\|_{\mathbb{B}}^p | \mathcal{F}_{i-1}] \right)^{1/p} > xu \right) du. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Cela permet de traiter la dimension 1 et est le point de départ pour passer de la dimension  $d$  à la dimension  $d+1$ . Il est possible de déduire (2.2.6) de (2.2.4) grâce à un contrôle de la queue de la somme des moments conditionnels d'ordre  $p$  en fonction de celle de la somme de la puissance  $p$  des normes (voir [129], page 175). Un ingrédient clé pour passer de la dimension  $d$  à la dimension  $d+1$  est d'utiliser (2.2.6) combiné au fait de voir la somme des puissances  $p$  des normes des AOM en dimension  $d$  comme la norme dans un nouvel espace de Banach  $\tilde{\mathbb{B}} = \mathbb{B}^N$  avec  $N = N_{d+1}$  muni de la norme  $\left\| (x_i)_{i=1}^{N_{d+1}} \right\|_{\tilde{\mathbb{B}}} = \left( \sum_{i=1}^{N_{d+1}} \|x_i\|_{\mathbb{B}}^p \right)^{1/p}$ . Le point crucial est que la constante  $C_{p,\tilde{\mathbb{B}}}$  définie comme dans (2.2.3), pourrait a priori dépendre de  $N_{d+1}$  mais est en réalité la même que  $C_{p,\mathbb{B}}$ .

Mentionnons à présent quelques applications du Théorème 2.2.5. La première concerne le modèle de régression (2.1.9) et l'estimateur de la fonction inconnue donné par (2.1.11), sous les mêmes hypothèses portant sur  $g$  et  $K$  que dans la section 2.1. Nous supposons ici que les erreurs  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  forment un champ AM et nous contrôlons la norme  $\mathbb{L}^p$  de l'erreur entre  $g_n(\cdot)$  et son espérance. Nous avons obtenu les résultats suivants :

— pour  $1 < p \leq 2$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \|g_n(\cdot) - \mathbb{E}[g_n(\cdot)]\|_{\mathbb{L}^p([0,1]^d)} > t \right) &\leq \kappa_{p,q,d} \int_0^1 u^{q-1} \mathbb{P} \left( |X_{\mathbf{1}}| > t (nh_n)^{d(1-1/p)} u \right) du \\ &+ \kappa_{p,q,d} \int_1^\infty u^{p-1} (1 + \log u)^d \mathbb{P} \left( |X_{\mathbf{1}}| > t (nh_n)^{d(1-1/p)} u \right) du; \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

— pour  $p > 2$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \|g_n(\cdot) - \mathbb{E}[g_n(\cdot)]\|_{\mathbb{L}^p([0,1]^d)} > t \right) &\leq \kappa_{p,q,d} \int_0^1 u^{q-1} \mathbb{P} \left( |X_{\mathbf{1}}| > t (nh_n)^{d(p-1)/2} n^{d\frac{2-p}{2p}} u \right) du \\ &+ \kappa_{p,q,d} \int_1^\infty u (1 + \log u)^d \mathbb{P} \left( |X_{\mathbf{1}}| > t (nh_n)^{d(p-1)/2} n^{d\frac{2-p}{2p}} u \right) du. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Remarquons que dans le cas  $1 < p \leq 2$ , les hypothèses  $nh_n \rightarrow \infty$  et la finitude de

$$\mathbb{E} \left[ |X_{\mathbf{1}}|^p (1 + \log(|X_{\mathbf{1}}|) \mathbf{1}_{\{|X_{\mathbf{1}}| > 1\}})^{d-1} \right]$$

garantissent la convergence vers 0 du membre de droite de (2.2.7). Cependant, dans le cas  $p > 2$ , la présence du terme  $n^{d\frac{2-p}{2p}}$  impose une restriction sur le choix de la fenêtre. Par exemple, si  $h_n = n^{-\gamma}$ , alors  $\gamma$  doit vérifier  $1/(d+1) < \gamma < 1 - (p-2)/(p(p-1))$ .

Une seconde application concerne la vitesse de convergence dans la loi des grands nombres pour des sommes d'opérateurs linéaires de champs équi-distribués de type AOM.

**Théorème 2.2.6.** *Soit  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$  un espace de Banach  $r$ -lisse avec  $1 < r \leq 2$ . Pour  $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d$  et  $n \geq 1$ , soit  $A_{n,\mathbf{i}}: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$  un opérateur linéaire borné, de norme*

$$\|A_{n,\mathbf{i}}\|_{\mathcal{B}(\mathbb{B})} := \sup \left\{ \|A_{n,\mathbf{i}}(x)\|_{\mathbb{B}} / \|x\|_{\mathbb{B}}, x \in \mathbb{B} \setminus \{0\} \right\}.$$

Soit  $1 < p < r$  et  $C_{n,p} := \left( \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d} \|A_{n,\mathbf{i}}\|_{\mathcal{B}(\mathbb{B})}^p \right)^{1/p}$ . Soit  $(D_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$  un champ aléatoire équi-distribué de type AOM et à valeurs dans  $\mathbb{B}$  et supposons que  $\|D_{\mathbf{1}}\|_{\mathbb{B}} \in \mathbb{L}^q$  pour un certain  $q > p$ . Alors pour tout  $\varepsilon$  et toute suite strictement croissante de réels strictement positifs  $(R_n)_{n \geq 1}$  telle que  $R_n \rightarrow \infty$ ,

$$\sum_{n \geq 1} (R_n^q - R_{n-1}^q) \mathbb{P} \left( \left\| \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d} A_{n,\mathbf{i}}(D_{\mathbf{i}}) \right\|_{\mathbb{B}} > \varepsilon C_n^{1/p} R_n \right) < \infty. \quad (2.2.9)$$

Donnons un exemple où le Théorème 2.2.6 peut être utilisé. Soit  $(\Lambda_n)_{n \geq 1}$  une suite de sous-ensembles de  $\mathbb{Z}^d$  telle que la suite  $(\text{Card}(\Lambda_n))_{n \geq 1}$  soit strictement croissante (remarquons que l'on ne suppose pas la suite  $(\Lambda_n)_{n \geq 1}$  croissante pour l'inclusion). Soit  $A_{n,\mathbf{i}}$  défini comme l'opérateur identité si  $\mathbf{i} \in \Lambda_n$  et  $A_{n,\mathbf{i}} = 0$  sinon. Pour  $\gamma > 0$ , notons  $R_n = \text{Card}(\Lambda_n)^\gamma$ . Alors (2.2.9) donne

$$\sum_{n \geq 1} (\text{Card}(\Lambda_n)^{q\gamma} - \text{Card}(\Lambda_{n-1})^{q\gamma}) \mathbb{P} \left( \left\| \sum_{\mathbf{i} \in \Lambda_n} D_{\mathbf{i}} \right\|_{\mathbb{B}} > \varepsilon \text{Card}(\Lambda_n)^{\frac{1}{p} + \gamma} \right) < \infty.$$



D'autres vitesses de convergence pour les champs de AOM ont été obtenues dans l'article [Gir19b]. Nous considérons des champs à valeurs dans un espace de Banach séparable  $r$ -lisse  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$  vérifiant pour chaque  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{k}$ ,

$$S_{\mathbf{n}} := \sum_{\mathbf{1} \preccurlyeq \mathbf{i} \preccurlyeq \mathbf{n}} D_{\mathbf{i}} \text{ et } \sum_{\mathbf{1} \preccurlyeq \mathbf{i} \preccurlyeq \mathbf{n}} D_{\mathbf{i}+\mathbf{k}} \text{ ont la même loi.} \quad (2.2.10)$$

Nous supposons que  $\mathbb{E} \left[ \|D_{\mathbf{0}}\|_{\mathbb{B}}^r (1 + \|D_{\mathbf{0}}\|_{\mathbb{B}})^d \right]$  est finie. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $\alpha \in ]1/r, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{N} \in \mathbb{N}^d} |\mathbf{N}|^{r\alpha-2} \mathbb{P} \left( \max_{\mathbf{1} \preccurlyeq \mathbf{n} \preccurlyeq \mathbf{N}} \|S_{\mathbf{n}}\|_{\mathbb{B}} > \varepsilon |\mathbf{N}|^{\alpha} \right) \\ \leq K_{d,\mathbb{B}} \mathbb{E} \left[ \left( \frac{\|D_{\mathbf{1}}\|_{\mathbb{B}}}{\varepsilon} \right)^r \left( 1 + \log^+ \left( \frac{\|D_{\mathbf{1}}\|_{\mathbb{B}}}{\varepsilon} \right) \right)^d \right]. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Un résultat complémentaire peut être établi avec  $r$  dans (2.2.11) remplacé par  $1 < p < r$  en utilisant des arguments de troncature, comme dans [40]. Pour des moments d'ordre plus grand que 2 dans le cas 2-lisse, nous avons formulé le résultat suivant : si  $\mathbb{E} \left[ \|D_{\mathbf{0}}\|_{\mathbb{B}}^q (1 + \|D_{\mathbf{0}}\|_{\mathbb{B}})^{d-1} \right]$  est finie, avec  $q > 2$ , alors pour  $\varepsilon > 0$  et tout  $\alpha \in ]1/2, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{N} \in \mathbb{N}^d} |\mathbf{N}|^{q(\alpha-1/2)-1} \mathbb{P} \left( \max_{\mathbf{1} \preccurlyeq \mathbf{n} \preccurlyeq \mathbf{N}} \|S_{\mathbf{n}}\|_{\mathbb{B}} > \varepsilon |\mathbf{N}|^{\alpha} \right) \\ \leq K_{d,\mathbb{B}} \mathbb{E} \left[ \left( \frac{\|D_{\mathbf{1}}\|_{\mathbb{B}}}{\varepsilon} \right)^q \left( 1 + \log^+ \left( \frac{\|D_{\mathbf{1}}\|_{\mathbb{B}}}{\varepsilon} \right) \right)^{d-1} \right]. \end{aligned}$$

Notre résultat n'est pas directement comparable à celui de [101] car aucune hypothèse sur les moments conditionnels n'est faite dans notre article, contrairement au leur, mais ils ne supposent pas que  $(|D_{\mathbf{i}}|)_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$  est identiquement distribué.

## 2.2.2 Cas de queues à décroissance exponentielle

Les inégalités présentées dans la sous-section 2.2.1 donnent des résultats satisfaisants lorsque la queue de la norme des accroissements est à décroissance polynomiale. Lorsque les accroissements sont bornés, c'est-à-dire qu'il existe une constante  $M$  telle que pour tout  $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\|D_{\mathbf{i}}\|_{\mathbb{B}} \leq M$  presque sûrement, alors on obtient seulement une borne de l'ordre de  $t^{-q}$  pour  $\mathbb{P}(\|\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} D_{\mathbf{i}}\|_{\mathbb{B}} > t)$ . Dans [Gir23], nous avons obtenu l'inégalité exponentielle suivante pour des champs de type AOM.

**Theorème 2.2.7.** *Soit  $(D_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$  un champ aléatoire de type AOM à valeurs réelles tel que pour tous  $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$  et  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ , (2.2.10) est vérifiée. Alors l'inégalité suivante a lieu pour tous  $x, y > 0$  :*

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \max_{\mathbf{1} \preccurlyeq \mathbf{i} \preccurlyeq \mathbf{n}} |S_{\mathbf{i}}| > x |\mathbf{n}|^{1/2} \right) \leq A_d \exp \left( - \left( \frac{x}{y} \right)^{\frac{2}{d}} \right) \\ + B_d \int_1^{\infty} \mathbb{P}(|D_{\mathbf{1}}| > yu C_d) u (\log(1+u))^{2d} du, \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

où  $A_d$ ,  $B_d$  et  $C_d$  ne dépendent que de  $d$  et  $|\mathbf{n}| = \prod_{\ell=1}^d n_\ell$ .

Une première remarque est que le membre de droite de l'inégalité (2.2.12) est fini uniquement dans le cas où  $\mathbb{E} \left[ D_1^2 (\log(1 + |D_1|))^{2d} \right]$  est finie. Ce n'est pas restrictif dans la pratique, car l'intérêt de cette inégalité réside dans le fait d'obtenir des bornes exponentielles pour la queue des sommes partielles. Si  $D_1$  n'admet que des moments polynomiaux, les inégalités présentées dans la sous-section 2.2.1 sont plus efficaces.

Notons que l'exposant  $2/d$  dans le terme exponentiel du membre de droite de (2.2.12) est optimal. En effet, prenons  $D_i = \prod_{\ell=1}^d \varepsilon_{i_\ell}^{(\ell)}$ , où les suites de variables aléatoires  $(\varepsilon_{i_\ell}^{(\ell)})_{i_\ell \in \mathbb{Z}}$ ,  $\ell \in \llbracket 1, d \rrbracket$  sont indépendantes entre elles et toutes i.i.d., et telles que  $\varepsilon_{i_\ell}^{(\ell)}$  prend les valeurs  $-1$  et  $1$  avec probabilité  $1/2$ . Alors en prenant  $\mathbf{n} = (n, \dots, n)$ ,

$$\mathbb{P} \left( \max_{1 \leq i \leq \mathbf{n}} |S_i| > x |\mathbf{n}|^{1/2} \right) \geq \mathbb{P} \left( \prod_{\ell=1}^d \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{i_\ell=1}^n \varepsilon_{i_\ell}^{(\ell)} \right| \right) > x \right)$$

et comme le vecteur  $(n^{-1/2} \left| \sum_{i_\ell=1}^n \varepsilon_{i_\ell}^{(\ell)} \right|)_{\ell=1}^d$  converge en loi vers  $\prod_{\ell=1}^d \mathcal{N}_\ell$ , où  $(\mathcal{N}_\ell)_{\ell=1}^d$  est une collection de variables aléatoire indépendantes de loi normale centrée réduite, on ne peut pas obtenir une borne meilleure que

$$\mathbb{P} \left( \left| \prod_{\ell=1}^d \mathcal{N}_\ell \right| > x \right),$$

qui se comporte comme  $\exp(-Kx^{2/d})$ .

Remarquons que le membre de droite de (2.2.12) ne dépend pas de  $\mathbf{n}$ . De plus, l'inégalité est valide pour tout  $y > 0$ . Dans les applications de cette inégalité,  $x$  sera imposé. Nous aurons besoin de contrôler une série de queues (avec  $\mathbf{n}$  qui varie). On choisit ensuite  $y = y(\mathbf{n}, x)$  rendant le terme exponentiel ayant la valeur désirée pour rendre la série convergente. Ensuite, la série associée au second terme du membre de droite de (2.2.12) donne une condition suffisante sur la queue de  $|D_1|$  pour que la série en question converge.

Donnons à présent les grandes lignes de la démonstration. Nous nous sommes basés sur une inégalité exponentielle obtenue par Bercu et Touati [71] pour les suites AM :

$$\mathbb{P} \left( |S_n| > x, \sum_{j=1}^n (D_j^2 + \mathbb{E}[D_j^2 | \mathcal{F}_{j-1}]) \leq y^2 \right) \leq 2 \exp \left( -\frac{x^2}{2y} \right).$$

Par ailleurs, il est connu que si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires telles que  $Y \leq \mathbb{E}[X | Y]$ , alors pour toute fonction convexe croissante  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pour laquelle les espérances suivantes ont un sens,  $\mathbb{E}[\varphi(Y)] \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]$ . Une réciproque existe et dit que si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires réelles, définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , qui sont telles que pour toute fonction convexe croissante  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pour laquelle les espérances suivantes ont un sens,  $\mathbb{E}[\varphi(Y)] \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]$ , alors il existe un espace probabilisé  $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$  et des variables aléatoires réelles  $X', Y': \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}'(X' \in B)$  et  $\mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}'(Y' \in B)$  et  $Y' \leq \mathbb{E}[X' | Y']$  (voir [157]). Par exemple, si  $(X_i)_{i \geq 1}$  est une suite identiquement distribuée, alors en

appliquant ce résultat avec  $Y = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$  et  $X = X_1$ , une borne de la queue de  $n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$  en fonction de celle de  $X_1$  peut être donnée.

Cet argument s'applique à la somme des carrés et des variances conditionnelles, ce qui donne

$$\mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k D_i \right| > xn^{1/2} \right) \leq 2 \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{x}{y} \right)^2 \right) + 4 \int_1^{+\infty} w \mathbb{P} (|D_1| > yw/2) dw.$$

L'idée consiste à appliquer un argument de récurrence sur la dimension, que nous allons esquisser pour démontrer le résultat dans le cas  $d = 2$ . Nous disposons donc d'un champ aléatoire  $(D_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$  de AOM tel que pour tous  $m, n \geq 1$  et  $k, \ell \in \mathbb{Z}$ , les variables aléatoires  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n D_{i,j}$  et  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n D_{i+k,j+\ell}$  ont la même loi.

On utilise dans un premier temps l'inégalité de Doob pour se débarrasser du maximum en  $n$ . On est alors amené à contrôler la queue de  $\max_{1 \leq m \leq M} \left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N D_{i,j} \right|$ , ce qui peut se faire grâce au résultat sur les martingales à un indice, puisque par hypothèse, les accroissements  $\sum_{j=1}^N D_{i,j}$  ont la même loi. Le contrôle de la queue de ces accroissements se fait via une nouvelle application du cas de la dimension 1.

Donnons à présent deux applications de l'inégalité (2.2.12). Pour quantifier la vitesse de convergence dans la loi des grands nombres, nous cherchons à borner  $\mathbb{P} (|\sum_{i=1}^n X_i| > nx)$ . Dans le cas où  $(X_i)_{i \geq 1}$  est indépendante et centrée, les articles [69, 91, 162] contiennent des bornes satisfaisantes portant sur la norme  $\mathbb{L}^p$  des  $X_i$ . Le cas des suites AM a également été traité sous une hypothèse de moments d'ordre  $p$  finis, sous l'hypothèse de type Cramer  $\sup_{i \geq 1} \mathbb{E} [\exp (|X_i|)] < +\infty$  dans [105], une condition de Cramer conditionnelle dans [111] et avec des moments exponentiels finis dans [70].

Pour des champs aléatoires, nous cherchons à majorer la quantité

$$\mathbb{P} \left( \frac{1}{|\mathbf{N}|} \left| \sum_{1 \leq n \leq \mathbf{N}} X_i \right| > x \right), \mathbf{N} \geq 1, x > 0.$$

Ceci a été fait dans le cas de queue à décroissance polynomiale dans les articles [99, 101] et [Gir19b].

**Theorème 2.2.8.** *Soit  $(D_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  un champ aléatoire de type AOM vérifiant (2.2.10). Supposons qu'il existe  $\gamma > 0$ , tel que*

$$\sup_{s>0} \exp (s^\gamma) \mathbb{P} (|D_1| > s) \leq 2.$$

*Alors pour tout  $x > 0$ , l'inégalité suivante a lieu*

$$\mathbb{P} \left( \frac{1}{|\mathbf{N}|} \left| \sum_{1 \leq n \leq \mathbf{N}} D_i \right| > x \right) \leq C_{1,d,\gamma} \exp \left( -C_{2,d,\gamma} |\mathbf{N}|^{\frac{\gamma}{2+d\gamma}} x^{\frac{2\gamma}{2+d\gamma}} \right),$$

*où  $C_{1,d,\gamma}$  et  $C_{2,d,\gamma}$  ne dépendent que de  $d$  et  $\gamma$ .*

L'autre application de l'inégalité (2.2.12) concerne le théorème limite central fonctionnel dans des espaces de Hölder. On considère le processus sommes partielles

$$W_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d} \lambda \left( R_{\mathbf{i}} \cap \prod_{q=1}^d [0, n_q t_q] \right) X_{\mathbf{i}}, \mathbf{n} \succcurlyeq \mathbf{1}, \mathbf{t} \in [0, 1]^d,$$

où  $\lambda$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$  et  $R_{\mathbf{i}} = \prod_{\ell=1}^d [i_{\ell} - 1, i_{\ell}]$ . Remarquons que l'application  $\mathbf{t} \mapsto W_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$  est lipschitzienne et que  $W_{\mathbf{n}} \left( \left( \frac{k_{\ell}}{n_{\ell}} \right)_{\ell=1}^d \right) = S_{k_1, \dots, k_d} / \sqrt{|\mathbf{n}|}$  donc  $W_{\mathbf{n}}$  prend en compte toutes les valeurs des sommes partielles  $S_{\mathbf{k}}$  pour  $\mathbf{1} \preceq \mathbf{k} \preceq \mathbf{n}$ .

La convergence de  $W_{\mathbf{n}}$  lorsque  $\min \mathbf{n} \rightarrow \infty$  dans l'espace des fonctions continues (sur laquelle nous reviendrons dans les sections 2.3 et 2.4) a été étudiée dans [175] pour un champ aléatoire i.i.d. centré, dans [37] pour les martingales pour l'ordre lexicographique et dans [167, 169] pour les champs de type AOM. D'autres types d'accroissements de martingales sont considérés dans [12, 104, 140] et sont définis sous la forme  $\mathbb{E}[X_{\mathbf{i}} | \mathcal{G}_{\mathbf{i}}] = 0$ , où

$$\mathcal{G}_{\mathbf{i}} = \sigma(X_{\mathbf{j}}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d, \text{ l'inégalité } \mathbf{i} \preceq \mathbf{j} \text{ n'a pas lieu}).$$

Comme indiqué dans [175], dans le cas i.i.d. centré et de variance 1, les lois fini-dimensionnelles de  $W_{\mathbf{n}}$  convergent vers celles d'un drap brownien standard, c'est-à-dire un processus gaussien centré  $(W(\mathbf{t}))_{\mathbf{t} \in [0, 1]^d}$  dont la covariance est donnée par

$$\text{Cov}(W(\mathbf{t}), W(\mathbf{t}')) = \prod_{q=1}^d \min\{t_q, t'_q\}.$$

Les trajectoires d'un tel processus sont höldériennes, mais seulement dans certains espaces que nous allons définir.

**Définition 2.2.9.** Soit  $d \geq 1$  un entier. On dit que  $\rho: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  appartient à la classe  $\mathcal{R}_{1/2, d}$  s'il existe une fonction à variations lentes  $L$  telle que  $\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = \infty$  et une constante  $c$  telle que

$$\rho(h) = h^{1/2} \left( \log \left( \frac{c}{h} \right) \right)^{d/2} L \left( \frac{1}{h} \right), h \in [0, 1], \quad (2.2.13)$$

et  $\rho$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$ .

Pour  $\rho \in \mathcal{R}_{1/2, d}$ , on note

$$\mathcal{H}_{\rho}^{\circ}([0, 1]^d) := \left\{ x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{t, s: 0 < t-s < \delta} \frac{|x(t) - x(s)|}{\rho(t-s)} = 0 \right\}.$$

Il semble que l'exposant  $d/2$  soit le meilleur que l'on puisse obtenir en démontrant l'équi-tension grâce à l'inégalité (2.2.12). Dans le cas i.i.d., cela peut ne pas être optimal car nous obtiendrions une inégalité similaire à (2.2.12), avec l'exposant  $2/d$  remplacé par 2. Par conséquent, l'équi-tension dans  $\mathcal{H}_{\rho}^{\circ}$  peut être établie pour  $\rho \in \mathcal{R}_{1/2, 1}$ , une classe plus grande que  $\rho \in \mathcal{R}_{1/2, d}$ .

La proposition suivante donne une condition suffisante pour l'équi-tension dans  $\mathcal{H}_{\rho}$ .

**Proposition 2.2.10.** *Soit  $d \geq 1$  et  $\rho \in \mathcal{R}_{1/2,d}$ . Si  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  est un champ aléatoire strictement stationnaire tel que pour tout  $\ell \in \llbracket 1, d \rrbracket$  et tout  $\varepsilon > 0$ ,*

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \limsup_{\min m \rightarrow \infty} \sum_{j=J}^{m_\ell} 2^j \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq 2^{m-m_\ell} e_\ell} \left| \sum_{1 \leq i \leq k} X_i \right| > \varepsilon \rho (2^{-j}) \prod_{u=1}^d 2^{m_u/2} \right) = 0,$$

alors  $(W_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n} \succ 1}$  est asymptotiquement équi-tendu dans  $\mathcal{H}_\rho^o([0, 1]^d)$  quand  $\min \mathbf{n} = \min_{1 \leq q \leq d} n_q \rightarrow \infty$ .

La vérification de ce critère de tension donne lieu au théorème limite central fonctionnel suivant.

**Théorème 2.2.11.** *Soit  $d \geq 1$  et soit  $(D_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  un champ aléatoire stationnaire de type AOM. Soit  $\rho \in \mathcal{R}_{1/2,d}$  donné par (2.2.13), où  $L$  est à variations lentes. Supposons que*

$$\forall A > 0, \quad \sum_{j \geq 1} 2^j \mathbb{P} (|D_1| > L (2^j) A) < \infty. \quad (2.2.14)$$

Alors  $(W_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n} \succ 1}$  est asymptotiquement tendu dans  $\mathcal{H}_\rho^o([0, 1]^d)$  quand  $\min \mathbf{n} = \min_{1 \leq q \leq d} n_q \rightarrow \infty$ .

Supposons de plus que tout  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$  tel que  $\{(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d} \in A\} = \{(X_{i+e_d})_{i \in \mathbb{Z}^d} \in A\}$  vérifie  $\mathbb{P}((X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d} \in A) \in \{0, 1\}$ . Alors  $(W_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n} \succ 1}$  converge vers  $\|X_0\|_2 W$  dans  $\mathcal{H}_\rho^o([0, 1]^d)$  quand  $\min \mathbf{n} = \min_{1 \leq \ell \leq d} n_\ell \rightarrow \infty$ , où  $W$  est un drap brownien standard.

Lorsque  $L(t)$  est de la forme  $(\log t)^\gamma$ , (2.2.14) est vérifiée si  $\mathbb{E} \left[ \exp \left( A |D_1|^{1/\gamma} \right) \right] < \infty$  pour tout  $A > 0$ .

## 2.3 Limites possibles dans le théorème limite central pour des champs de type accroissements d'ortho-martingale

Cette section reprend les résultats obtenus dans l'article [GLV24], co-écrit avec Emmanuel Lesigne et Dalibor Volný.

Dalibor Volný a montré dans [169] que pour un champ stationnaire de type AOM de la forme  $(D_0 \circ T^i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ , où  $T$  préserve la mesure, la limite de  $S_{\mathbf{n}} / |\mathbf{n}| = |\mathbf{n}|^{-1/2} \sum_{1 \leq i \leq \mathbf{n}} D_0 \circ T^i$  est de la forme  $\eta \mathcal{N}$ , où  $\mathcal{N}$  est de loi normale centrée réduite et est indépendante de  $\eta$ . Il est connu que si l'une des transformations  $T^{e_\ell}$  est ergodique, alors  $\eta$  est constante (voir [167]).

Nous avons tout d'abord considéré le cas d'actions de  $\mathbb{Z}^3$  en exhibant un facteur  $\mathcal{I}$  pour lequel l'action de  $\mathbb{Z}^3$  est de type produit. En effet, soit  $T^{i,j,k} : \Omega \rightarrow \Omega$  une application bijective, mesurable et préservant la mesure. Nous désignons par  $\mathcal{I}_1$  la tribu des ensembles invariants par la transformation  $T^{1,0,0}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{I}_1 = \{A \in \mathcal{F}, T^{1,0,0} A = A\}$  et similairement,  $\mathcal{I}_2 = \{A \in \mathcal{F}, T^{0,1,0} A = A\}$  et  $\mathcal{I}_3 = \{A \in \mathcal{F}, T^{0,0,1} A = A\}$ . On pose

$$\bar{\mathcal{I}}_1 = \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3, \quad \bar{\mathcal{I}}_2 = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_3 \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{I}}_3 = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2,$$

puis

$$\mathcal{I} = \bar{\mathcal{I}}_1 \vee \bar{\mathcal{I}}_2 \vee \bar{\mathcal{I}}_3.$$

Notons que toutes les tribus précédentes sont invariantes par l'action  $T$  et définissent donc des facteurs du système dynamique  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T)$ . Nous avons démontré que les tribus  $\bar{\mathcal{I}}_1$ ,  $\bar{\mathcal{I}}_2$  et  $\bar{\mathcal{I}}_3$  sont indépendantes. Par conséquent, l'action de  $T$  sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{I}, \mathbb{P})$  est de type produit, ce qui signifie que cette action est isomorphe à une action de  $\mathbb{Z}^3$  définie sur le produit de trois espaces probabilisés  $(\Omega_t, \mathcal{A}_t, \mathbb{P}_t)$  ( $t = 1, 2, 3$ ) par une formule du type

$$T_{i,j,k}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (T_1^i \omega_1, T_2^j \omega_2, T_3^k \omega_3), \quad (2.3.1)$$

où chaque transformation  $T_t$  est inversible et préserve la mesure sur  $(\Omega_t, \mathcal{A}_t, \mathbb{P}_t)$ .

Nous avons ensuite démontré que si  $(D_{0,0,0} \circ T^{i,j,k})_{i,j,k \in \mathbb{Z}}$  est un champ aléatoire de type AOM par rapport à une filtration complètement commutante  $(T^{-i,-j,-k} \mathcal{F}_{0,0,0})_{i,j,k \in \mathbb{Z}}$ , alors le champ  $(\mathbb{E}[D_{\mathbf{0}} | \mathcal{I}] \circ T^{i,j,k})_{i,j,k \in \mathbb{Z}}$  est un champ aléatoire de type AOM pour la filtration  $(T^{-i,-j,-k} \mathcal{F}_{0,0,0})_{i,j,k \in \mathbb{Z}}$  ainsi que pour la filtration  $(\mathcal{I} \cap T^{-i,-j,-k} \mathcal{F}_{0,0,0})_{i,j,k \in \mathbb{Z}}$ .

Pour des actions de type produit de  $\mathbb{Z}^3$  (donc de la forme (2.3.1)), nous avons donné une caractérisation de la limite dans le théorème limite central. Soit  $D_{0,0,0}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $(D_{0,0,0} \circ T_{i,j,k})_{i,j,k \in \mathbb{Z}}$  est un champ aléatoire de type AOM sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , qui est de la forme  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$  et  $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3$ , où  $\mathcal{A}_1$  (respectivement  $\mathcal{A}_2$ ,  $\mathcal{A}_3$ ) est une tribu sur  $\Omega_1$  (respectivement  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$ ) et  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  sont des mesures de probabilité.

Il existe une famille de réels  $(\lambda_{a,b,c}(D_{0,0,0}))_{a,b,c \geq 1}$  tels que  $\sum_{a,b,c \geq 1} \lambda_{a,b,c}^2(D_{0,0,0}) < \infty$  et que si  $(\mathcal{N}_a^{(1)})_{a \geq 1}$ ,  $(\mathcal{N}_b^{(2)})_{b \geq 1}$  et  $(\mathcal{N}_c^{(3)})_{c \geq 1}$  sont trois suites mutuellement indépendantes et i.i.d. de loi normale centrée réduite, alors

$$\frac{1}{\sqrt{\ell mn}} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n D_{0,0,0} \circ T_{i,j,k} \rightarrow \sum_{a,b,c=1}^{\infty} \lambda_{a,b,c}(D_{0,0,0}) \mathcal{N}_a^{(1)} \mathcal{N}_b^{(2)} \mathcal{N}_c^{(3)} \quad (2.3.2)$$

en loi lorsque  $\min\{\ell, m, n\} \rightarrow \infty$ . Notons que le membre de droite de (2.3.2) peut s'exprimer sous la forme  $\eta \mathcal{N}$ , avec  $\eta$  indépendante de  $\mathcal{N}$ , qui est de loi normale centrée réduite et

$$\eta^2 = \sum_{c \geq 1} \left( \sum_{a,b \geq 1} \lambda_{a,b,c}(D_{0,0,0}) \mathcal{N}_1^{(a)} \mathcal{N}_2^{(b)} \right)^2.$$

Ceci s'étend de manière naturelle à des actions de  $\mathbb{Z}^d$ .

Enfin, en dimension 2, nous avons donné une condition sur l'entropie pour obtenir l'existence d'un champ de type AOM pour lequel la limite des sommes partielles normalisées n'est pas une loi normale. Plus précisément, pour une action  $(T^{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$  de  $\mathbb{Z}^2$ , nous avons établi l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

1. il existe un champ aléatoire de type AOM  $(D_{0,0} \circ T^{i,j})_{i,j \geq 1}$  tel que la limite en loi quand  $\min\{m, n\} \rightarrow \infty$  de  $(mn)^{-1/2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n D_{0,0} \circ T^{i,j}$  n'est pas normale.
2. la transformation  $T^{1,0}$  est d'entropie strictement positive pour  $\mathcal{I}_2$  et la transformation  $T^{0,1}$  est d'entropie strictement positive pour  $\mathcal{I}_1$ .

## 2.4 Principe d'invariance via une approximation par ortho-martingales

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $T: \Omega \rightarrow \Omega$  une application bi-mesurable et préservant la mesure. Soit  $\mathcal{F}_0$  une sous-tribu de  $\mathcal{F}$  telle que  $T\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_0$ . Une méthode initiée par [79] consiste à approximer les sommes partielles d'une suite de variables aléatoires stationnaire  $(f \circ T^i)_{i \geq 1}$  (où  $f$  est  $\mathcal{F}_0$ -mesurable), notées  $S_n(f) := \sum_{i=1}^n f \circ T^i$ , par celles d'une suite AM. Plus précisément, l'idée consiste à trouver une fonction  $d: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $\mathcal{F}_0$ -mesurable, vérifie  $\mathbb{E}[d \mid T\mathcal{F}_0] = 0$  et est telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k f \circ T^i - \sum_{i=1}^k d \circ T^i \right| \right\|_2 = 0. \quad (2.4.1)$$

Il est donc possible de déduire de (2.4.1) et du théorème limite central fonctionnel pour les suites AM que le processus sommes partielles associé à  $(f \circ T^i)_{i \in \mathbb{Z}}$  converge en loi vers  $\eta \cdot W$  dans  $D[0, 1]$ , où  $\eta$  est  $T$ -invariante et indépendante du mouvement brownien standard  $W$ .

Un des cas les plus simples où (2.4.1) a lieu est lorsque l'on peut écrire  $f$  sous la forme  $d + g - g \circ T$ , où  $(d \circ T^i)_{i \in \mathbb{Z}}$  est une suite AM et  $g$  est de carré intégrable. Une condition nécessaire et suffisante dans le cas où  $f$  est  $\mathcal{F}_0$ -mesurable est donnée par  $\sup_{n \geq 1} \|\mathbb{E}[S_n(f) \mid \mathcal{F}_0]\|_2 < \infty$  (voir [27]).

Cette condition peut s'avérer restrictive. Des conditions suffisantes pour l'approximation (2.4.1) ont été trouvées. La première est due à Maxwell et Woodroffe [120]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \|\mathbb{E}[S_n(f) \mid \mathcal{F}_0]\|_2 < \infty, \quad (2.4.2)$$

d'abord pour le théorème limite central, puis Peligrad et Utev pour sa version fonctionnelle dans [132] et enfin Volný [166] a traité le cas où  $f$  n'est pas nécessairement  $\mathcal{F}_0$ -mesurable. La seconde est due à Hannan [84] :

$$\mathbb{E} \left[ f \mid \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} T^i \mathcal{F}_0 \right] = 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{\infty} \|\mathbb{E}[f \circ T^i \mid \mathcal{F}_0] - \mathbb{E}[f \circ T^{i-1} \mid \mathcal{F}_0]\|_2 < \infty. \quad (2.4.3)$$

Le théorème limite central fonctionnel a été établi par Dedecker, Merlevède et Volný dans [42] sous une version plus générale de (2.4.3), qui couvre le cas où  $f$  n'est pas nécessairement  $\mathcal{F}_0$ -mesurable. Une autre condition projective, due à Dedecker et Rio [45], est, dans le cas où  $f$  est  $\mathcal{F}_0$ -mesurable, la convergence dans  $\mathbb{L}^1$  de la suite  $(f \cdot \mathbb{E}[S_n(f) \mid \mathcal{F}_0])_{n \geq 1}$ . Les travaux de Durieu [58] ainsi que Durieu et Volný [59] ont montré qu'il est possible de trouver des suites strictement stationnaires vérifiant l'une des conditions projectives mais pas les autres.

Dans l'article [Gir18], nous avons cherché à étendre l'approche unificatrice présentée dans [78] à des champs aléatoires. En dimension 1, l'idée est la suivante. Considérons une tribu  $\mathcal{F}_0$  telle que  $T\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_0$  et une fonction  $f$  qui est  $\mathcal{F}_0$ -mesurable et de carré intégrable. Posons  $f_m = m^{-1} \sum_{k=1}^m \mathbb{E}[f \circ T^k \mid \mathcal{F}_0]$ . Alors  $f - f_m$  admet une décomposition martingale-cobord, c'est-à-dire

$$f - f_m = d_m + g_m - g_m \circ T,$$

où  $d_m$  est  $\mathcal{F}_0$ -mesurable et  $\mathbb{E}[d_m | T\mathcal{F}_0] = 0$ . Sous l'hypothèse

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \max_{1 \leq j \leq n} |S_j(f_m)| \right\|_2 = 0, \quad (2.4.4)$$

Gordin et Peligrad ont montré que la suite  $(d_m)_{m \geq 1}$  est de Cauchy dans  $\mathbb{L}^2$  et converge vers  $d$  (qui est donc telle que  $(d \circ T^i)_{i \geq 1}$  est une suite AM). De plus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \max_{1 \leq j \leq n} |S_j(f) - S_j(d)| \right\|_2 = 0,$$

ce qui permet de déduire du principe d'invariance pour les suites AM celui pour des suites strictement stationnaires vérifiant (2.4.4). Pour vérifier (2.4.4), une inégalité de moments générale pour une fonction  $g$  mettant en jeu une série de normes impliquant les variables aléatoires  $\mathbb{E}[g \circ T^k | \mathcal{F}_0]$  a été établie. Puis cette inégalité a été appliquée à  $f_m$ . Ainsi  $\frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \max_{1 \leq j \leq n} |S_j(f_m)| \right\|_2$  est majoré par une quantité indépendante de  $n$  et qui tend vers 0 quand  $m$  tend vers l'infini. L'inégalité

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \max_{1 \leq j \leq n} |S_j(f_m)| \right\|_2 \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \|\mathbb{E}[S_n(f_m) | \mathcal{F}_0]\|_2,$$

garantit que la condition (2.4.2) est suffisante pour le théorème limite central fonctionnel. De façon similaire, les auteurs montrent que grâce à l'inégalité

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \max_{1 \leq j \leq n} |S_j(f_m)| \right\|_2 \leq \sqrt{2} \sum_{i=0}^{\infty} \|\mathbb{E}[f_m \circ T^i | \mathcal{F}_0] - \mathbb{E}[f_m \circ T^{i-1} | \mathcal{F}_0]\|_2,$$

la condition (2.4.3) garantit également le théorème limite central fonctionnel.

Il est donc naturel de chercher à étendre les inégalités de moments précédentes à la dimension  $d$ , puis de les appliquer à une fonction jouant le même rôle que  $f_m$ . Pour  $\ell_0 \in \llbracket 1, d \rrbracket$  et  $i_1, \dots, i_{d-1}, j \in \mathbb{Z}$ , définissons un élément de  $\mathbb{Z}^d$  par  $\mathbf{k}_{\ell_0, i_1, \dots, i_{d-1}, j} = \sum_{\ell=1}^{\ell_0-1} i_\ell \mathbf{e}_\ell + j \mathbf{e}_{\ell_0} + \sum_{\ell=\ell_0+1}^d i_\ell \mathbf{e}_\ell$ . Puis posons  $\mathcal{F}_{-\infty, i_1, \dots, i_{d-1}}^{(\ell_0)} := \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_{\mathbf{k}_{\ell_0, i_1, \dots, i_{d-1}, j}}$ . En observant que  $\mathbb{E}[f | \mathcal{F}_{-\infty, i_1, \dots, i_{d-1}}^{(\ell_0)}] = 0$  pour chaque  $\ell_0 \in \llbracket 1, d \rrbracket$  implique que

$$f = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{-M\mathbf{1} \preccurlyeq \mathbf{i} \preccurlyeq M\mathbf{1}} P_{\mathbf{i}}(f) \quad (2.4.5)$$

(voir (2.1.8) pour une définition de  $P_{\mathbf{i}}$ ) et que  $(P_{\mathbf{i}}(f) \circ T^{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$  est un champ de type AOM pour la filtration  $(T^{-\mathbf{i}-\mathbf{k}} \mathcal{F}_0)_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$ , Volný et Wang ont montré dans [170] l'inégalité

$$\left\| \max_{1 \preccurlyeq \mathbf{n} \preccurlyeq N} \left| \sum_{1 \preccurlyeq \mathbf{i} \preccurlyeq \mathbf{n}} f \circ T^{\mathbf{i}} \right| \right\|_p \leq \left( \frac{p}{\sqrt{p-1}} \right)^d |\mathbf{N}|^{1/2} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d} \|P_{\mathbf{i}}(f)\|_p. \quad (2.4.6)$$

Nous avons établi une autre inégalité, mettant en jeu les variables aléatoires  $\mathbb{E}[f \circ T^{\mathbf{i}} | \mathcal{F}_0]$ , qui s'exprime comme suit. Pour tout  $d \geq 1$ , il existe une constante  $C(d)$  telle que pour toute fonction  $\mathcal{F}_0$ -mesurable centrée  $f$ ,

$$\left\| \max_{1 \preccurlyeq \mathbf{n} \preccurlyeq N} \left| \sum_{1 \preccurlyeq \mathbf{i} \preccurlyeq \mathbf{n}} f \circ T^{\mathbf{i}} \right| \right\|_2 \leq C(d) |\mathbf{N}|^{1/2} \sum_{\mathbf{n} \neq \mathbf{1}} \frac{1}{|\mathbf{n}|^{3/2}} \|\mathbb{E}[S_{\mathbf{n}}(f) | \mathcal{F}_0]\|_2. \quad (2.4.7)$$



La démonstration de (2.4.7) est inspirée des travaux [121, 132, 133, 182] et repose sur un double argument de récurrence portant sur la dimension  $d$  et sur  $N_{d+1}$ . Une inégalité dans le même esprit a été obtenue par Wang et Woodroffe dans [172] mais sans les maxima.

Il reste à trouver la fonction qui jouera le rôle de  $f_m$ . L'idée est de retrancher des moyennes de  $\mathbb{E}[U^i f \mid \mathcal{F}_0]$  pour garantir le fait que la fonction obtenue admet une décomposition ortho-martingale/cobord.

Dans l'article [Gir18], Théorème 2.1, nous avons également fourni une condition nécessaire et suffisante pour une telle décomposition. Dans le cas où  $f$  est  $\mathcal{F}_0$ -mesurable, elle s'exprime sous la forme  $\sup_{n \geq 1} \|\mathbb{E}[S_n(f) \mid \mathcal{F}_0]\|_2 < \infty$ . Ceci améliore le résultat de [65] qui impose la sommabilité de  $\sum_{i \geq 0} \|\mathbb{E}[U^i f \mid \mathcal{F}_0]\|_2$ , et donne une condition plus aisément vérifiable que celle de [168]. Des décompositions de ce type s'exprimant à l'aide d'opérateur de Perron-Frobenius ont été explorées dans [80].

En dimension 2 et dans le cas où  $f$  est  $\mathcal{F}_{0,0}$ -mesurable, la fonction qui joue le rôle que  $f_m$  joue en dimension 1 est

$$f_M = f - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{E}[U^{i,0} f \mid \mathcal{F}_{0,0}] - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mathbb{E}[U^{0,j} f \mid \mathcal{F}_{0,0}] + \frac{1}{M^2} \sum_{i,j=1}^M \mathbb{E}[U^{i,j} f \mid \mathcal{F}_{0,0}].$$

Ainsi,  $f_M$  admet la décomposition

$$f_M = D_M + (\text{Id} - U^{1,0}) D_M^{\{1\}} + (\text{Id} - U^{0,1}) D_M^{\{2\}} + (\text{Id} - U^{1,0}) (\text{Id} - U^{0,1}) g_M.$$

Puis nous avons montré que que si

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{\min\{m,n\} \geq k} \frac{1}{\sqrt{mn}} \left\| \max_{1 \leq m' \leq m} \max_{1 \leq n' \leq n} \left| \sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n'} (f - f_M) \circ T^{i,j} \right| \right\|_2 = 0, \quad (2.4.8)$$

alors la suite  $(D_M)_{M \geq 1}$  est de Cauchy dans  $\mathbb{L}^2$  et converge vers un certain  $D_{0,0}$  dans  $\mathbb{L}^2$ . De plus,  $(D_{0,0} \circ T^{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$  est un champ de type AOM et

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{\min\{m,n\} \geq k} \frac{1}{\sqrt{mn}} \left\| \max_{1 \leq m' \leq m} \max_{1 \leq n' \leq n} \left| \sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n'} (f - D_{0,0}) \circ T^{i,j} \right| \right\|_2 = 0.$$

La convergence (2.4.8) se vérifie en appliquant l'une des inégalités (2.4.6) ou (2.4.7) avec  $f$  remplacée par  $f - f_M$  et en utilisant la convergence des séries mises en jeu dans (2.4.6) ou (2.4.7). Ainsi, la version multi-dimensionnelle de (2.4.3) est la combinaison de (2.4.5) avec

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \|P_0(f \circ T^j)\|_2 < \infty$$

et celle de (2.4.2) est

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|\mathbf{n}|^{3/2}} \|\mathbb{E}[S_n(f)]\|_2 < \infty. \quad (2.4.9)$$

Cette approche a permis de retrouver le résultat de Volný et Wang [170]. Nous avons également fourni des applications aux processus linéaires (voir (2.1.2) avec  $g(x) = x$ ) ainsi qu'aux champs de Volterra (voir (2.1.3)). Notons que dans l'article [Gir18], les résultats établis concernent les champs aléatoires qui ne sont pas nécessairement  $\mathcal{F}_0$ -mesurables. La formulation de ceux-ci est plus complexe et nécessite l'introduction d'opérateurs définis à la page 5 de [Gir18], que nous ne ferons pas ici afin de ne pas alourdir le manuscrit. D'autres développements récents concernant l'approximation par ortho-martingales ont été effectués : un théorème limite central sous la condition (2.4.9) a été établi par Peligrad et Zhang [136] et les mêmes auteurs ont formulé une condition nécessaire et suffisante pour une approximation par ortho-martingales des sommes partielles (sans les maxima) dans [135]. Signalons également les travaux récents sur le principe d'invariance dit quenched (en remplaçant l'espérance dans la convergence en loi par une convergence presque sûre de l'espérance conditionnelle sachant  $\mathcal{F}_0$ ) par Peligrad et Volný dans [134] pour les processus admettant une décomposition ortho-martingale cobord, Zhang, Reding et Peligrad [187] ainsi que Reding et Zhang pour des critères projectifs [148].

## 2.5 Conditions suffisantes pour la loi des logarithmes itérés bornée pour des champs aléatoires stationnaires

Dans cette section, nous considérons la question suivante : étant donné un champ aléatoire strictement stationnaire  $(f \circ T^i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ , nous cherchons une collection de nombres réels positifs  $(a_n)_{n \geq 1}$  telle que

$$\sup_{n \geq 1} \frac{1}{a_n} \left| \sum_{1 \leq i \leq n} f \circ T^i \right| < \infty,$$

où  $a_n$  croît vers l'infini aussi lentement que possible. Lorsque  $(f \circ T^i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  est i.i.d. et centré, il a été démontré dans [176] que pour  $d > 1$ , l'équivalence suivante a lieu :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ f^2 (L(|f|))^{d-1} / LL(|f|) \right] < +\infty \\ \Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{|n|} LL(|n|)} S_n(f) = \|f\|_2 \sqrt{d} = - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{|n|} LL(|n|)} S_n(f), \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

où  $S_n(f) = \sum_{1 \leq i \leq n} f \circ T^i$ ,  $L: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est définie par  $L(x) = \max\{\log x, 1\}$  et  $LL: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  par  $LL(x) = L \circ L(x)$ , et pour une collection de réels  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n := \lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq m} x_n$  et de même pour la lim inf. Notons que la condition sur les moments de  $f$  ainsi que la lim sup/lim inf dépendent de la dimension  $d$ . De plus, la normalisation  $\sqrt{|n|} LL(|n|)$  est la meilleure possible parmi celles qui rendent la lim sup/lim inf non triviale dans (2.5.1).

### 2.5.1 Loi des logarithmes itérés pour des champs bernoulliens

Dans l'article [Gir22], nous nous sommes intéressés à la loi des logarithmes itérés pour des champs aléatoires de la forme (2.1.1). Plus précisément, nous avons cherché des conditions suffi-

santes sur la dépendance de  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  garantissant la finitude de

$$\sup_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}| LL(|\mathbf{n}|)}} \left| \sum_{1 \leq i \leq \mathbf{n}} X_i \right|. \quad (2.5.2)$$

Caractériser la limite supérieure et inférieure des sommes partielles adéquatement normalisées s'avère être une tâche difficile.

Comme on peut s'y attendre, nous procédons via une approximation par un champ qui s'exprime comme une fonction des  $\varepsilon_{\mathbf{k}}$  qui sont à une distance au plus de  $m$  de  $\mathbf{i}$ . Pour ceux-ci, il est possible de décomposer leurs sommes partielles par celles d'un certain nombre de champs dépendant de  $m$ . Pour assurer le fonctionnement d'une telle approximation, il convient de fournir, dans le cas i.i.d., un contrôle de la norme  $\mathbb{L}^p$  de la variable aléatoire définie par (2.5.2) à l'aide de la norme de  $X_0$  dans un espace approprié.

Il se trouve que la norme qui convient est définie de la manière suivante : pour  $p > 1$  et  $q \geq 0$ , nous définissons  $\varphi_{p,q} : [0, +\infty[$  par  $\varphi_{p,q}(x) := x^p (1 + \log(1+x))^q$  et nous désignons par  $\mathbb{L}_{p,q}$  l'espace d'Orlicz associé à cette fonction. Soit  $\|\cdot\|_{p,q}$  la norme d'un élément  $X$  de  $\mathbb{L}_{p,q}$ , définie par

$$\|X\|_{p,q} := \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \mathbb{E} \left[ \varphi_{p,q} \left( \frac{X}{\lambda} \right) \right] \leq 1 \right\}. \quad (2.5.3)$$

Nous avons obtenu le résultat suivant.

**Théorème 2.5.1.** *Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  une champ aléatoire centré de la forme (2.1.1). Pour tout  $1 < p < 2$ , l'inégalité suivante a lieu,*

$$\left\| \sup_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}| LL(|\mathbf{n}|)}} \left| \sum_{1 \leq i \leq \mathbf{n}} X_i \right| \right\|_p \leq c_{p,d} \sum_{j \geq 0} (j+1)^{d/2} \|X_{\mathbf{0},j}\|_{2,d-1},$$

où  $c_{p,d}$  ne dépend que de  $p$  et  $d$  et

$$X_{\mathbf{0},j} = \mathbb{E}[X_0 \mid \sigma\{\varepsilon_{\mathbf{u}}, \|\mathbf{u}\|_{\infty} \leq j\}] - \mathbb{E}[X_0 \mid \sigma\{\varepsilon_{\mathbf{u}}, \|\mathbf{u}\|_{\infty} \leq j-1\}], \quad j \geq 1; \quad (2.5.4)$$

$$X_{\mathbf{0},0} := \mathbb{E}[X_0 \mid \sigma\{\varepsilon_0\}]. \quad (2.5.5)$$

Donnons les grandes lignes de la démonstration. Tout d'abord, de manière analogue à (2.5.4) et (2.5.5), nous définissons

$$X_{\mathbf{i},j} = \mathbb{E}[X_{\mathbf{i}} \mid \sigma\{\varepsilon_{\mathbf{u}}, \|\mathbf{i} - \mathbf{u}\|_{\infty} \leq j\}] - \mathbb{E}[X_{\mathbf{i}} \mid \sigma\{\varepsilon_{\mathbf{u}}, \|\mathbf{i} - \mathbf{u}\|_{\infty} \leq j-1\}], \quad j \geq 1;$$

$$X_{\mathbf{i},0} := \mathbb{E}[X_{\mathbf{i}} \mid \sigma\{\varepsilon_{\mathbf{i}}\}].$$

Ceci permet, grâce au théorème de convergence des martingales, de montrer que  $X_{\mathbf{i}} = X_{\mathbf{i},0} + \sum_{j=1}^{\infty} X_{\mathbf{i},j}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} & \left\| \sup_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}| LL(|\mathbf{n}|)}} \left| \sum_{1 \leq i \leq \mathbf{n}} X_i \right| \right\|_p \\ & \leq \left\| \sup_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}| LL(|\mathbf{n}|)}} \left| \sum_{1 \leq i \leq \mathbf{n}} X_{i,0} \right| \right\|_p + \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sup_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}| LL(|\mathbf{n}|)}} \left| \sum_{1 \leq i \leq \mathbf{n}} X_{i,j} \right| \right\|_p \end{aligned}$$

et tout se ramène à montrer que pour tout  $j \geq 0$ ,

$$\left\| \sup_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}| LL(|\mathbf{n}|)}} \left| \sum_{1 \leq i \leq \mathbf{n}} X_{i,j} \right| \right\|_p \leq c_{p,d} (j+1)^{d/2} \|X_{\mathbf{0},j}\|_{2,d-1}.$$

L'idée consiste à décomposer les sommes sur des rectangles de la forme  $[\mathbf{1}, \mathbf{n}] = \prod_{\ell=1}^d [1n_\ell]$  du champ aléatoire  $(X_{i,j})_{i \in \mathbb{Z}^d}$  comme une somme de  $(4m+2)^d$  sommes de champs aléatoires indépendants sur  $[\mathbf{1}, \mathbf{n}/(4m+2)]$ . Ainsi, si nous parvenons à démontrer que pour tout champ i.i.d. centré  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ ,

$$\left\| \sup_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}| LL(|\mathbf{n}|)}} \left| \sum_{1 \leq i \leq \mathbf{n}} \varepsilon_i \right| \right\|_p \leq c_{p,d} \|\varepsilon_{\mathbf{0}}\|_{2,d-1}, \quad (2.5.6)$$

alors nous aurons démontré le Théorème 2.5.1. Pour cela, nous utilisons des arguments similaires à ceux donnant l'inégalité de Doob pour voir qu'il suffit d'établir (2.5.6) avec le supremum dans (2.5.6) remplacé par celui sur les  $d$ -uplets d'entiers s'exprimant comme une puissance de 2. Nous utilisons alors l'inégalité suivante, valide pour une suite indépendante centrée :

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \left| \sum_{j=1}^n \xi_j \right| > x \right\} \cap \left\{ \sum_{j=1}^n \xi_j^2 \leq y \right\} \right) \leq 2 \exp \left( -\frac{x^2}{2(y+V^2)} \right),$$

où  $V^2 = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[\xi_j^2]$ , qui est une conséquence du Théorème 2.1 dans [15], qui établit que pour une suite  $(d_j)_{j=1}^n$  AM par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_j)_{j \geq 0}$ ,

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \left| \sum_{j=1}^n d_j \right| > x \right\} \cap \left\{ \sum_{j=1}^n (d_j^2 + \mathbb{E}[d_j^2 | \mathcal{F}_{j-1}]) \leq y \right\} \right) \leq 2 \exp \left( -\frac{x^2}{2y} \right). \quad (2.5.7)$$

En écrivant la somme des  $\varepsilon_i$  sur les rectangles dyadiques comme une somme de variables aléatoires indépendantes, nous sommes alors amenés à borner la queue de la variable aléatoire  $\sup_{m \geq 0} \frac{1}{2^m} \sum_{1 \leq i \leq 2^m} \varepsilon_i^2$ , ce qui peut se faire via le théorème ergodique.

Le Théorème 2.5.1 s'applique aux exemples de champs aléatoires bernoulliens mentionnés au début de la Section 2.1.

1. Soit  $(Y_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  un champ aléatoire linéaire de la forme  $Y_i = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{k}} \varepsilon_{i-\mathbf{k}}$ , où  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  est i.i.d.. Soit  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\gamma$ -Hölder continue avec  $0 < \gamma \leq 1$ . Supposons que  $\varepsilon_{\mathbf{0}} \in \mathbb{L}_{2/\gamma, d-1}$  et  $\mathbb{E}[g(X_{\mathbf{0}})] = 0$ . Alors pour tout  $1 < p < 2$ ,

$$\begin{aligned} & \left\| \sup_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}| LL(|\mathbf{n}|)}} \left| \sum_{1 \leq i \leq \mathbf{n}} g(X_i) \right| \right\|_p \\ & \leq c_{p,d,\gamma}(g) \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1)^{d/2} \left( \sum_{i \in \mathbb{Z}^d, \|i\|_\infty = j} |a_i|^{2\gamma} \right)^{1/2} \|\varepsilon_{\mathbf{0}}\|_{2\gamma, d-1}, \end{aligned}$$

où  $c_{p,d,\gamma}(g)$  ne dépend que de  $p$ ,  $d$  et  $\gamma$ .

2. Soit  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  un champ aléatoire i.i.d. où  $\varepsilon_i$  suit une loi normale centrée réduite et

$$Y_j := \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} a_i \varepsilon_{j-i},$$

où  $a_i, i \in \mathbb{Z}^d$ , sont des réels tels que  $\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} a_i^2 = 1$ . Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $\mathbb{E}[f(Y_0)] = 0$  et

$$C(f) := \sum_{q=1}^{+\infty} \sqrt{q!} q^{d-\frac{1}{2}} |c_q(f)| < +\infty,$$

où  $c_q(f)$  est donnée par (2.1.4). Alors pour tout  $1 < p < 2$ ,

$$\left\| \sup_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}| LL(|\mathbf{n}|)}} \left\| \sum_{1 \leq i \leq \mathbf{n}} f(Y_i) \right\| \right\|_p \leq c_{p,d} \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1)^{d/2} \left( \sum_{i \in \mathbb{Z}^d, \|i\|_\infty = j} a_i^2 \right)^{1/2} C(f),$$

où  $c_{p,d}$  ne dépend que de  $p$  et  $d$ .

3. Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  un champ aléatoire de Volterra défini par (2.1.3), où  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  est i.i.d. et  $\varepsilon_0 \in \mathbb{L}_{2,d-1}$ . Alors l'inégalité suivante a lieu pour tout  $1 < p < 2$  :

$$\left\| \sup_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}| LL(|\mathbf{n}|)}} \left\| \sum_{1 \leq i \leq \mathbf{n}} X_i \right\| \right\|_p \leq c_{p,d} \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1)^d L(j)^{1/p} \left( \sum_{\|s_1\|_\infty = j} \sum_{\|s_2\|_\infty \leq j} (a_{s_1, s_2}^2 + a_{s_2, s_1}^2) \right)^{1/2} \|\varepsilon_0\|_{2,d-1}^2,$$

où  $c_{p,d}$  ne dépend que de  $p$  et  $d$ .

Dans l'article [Gir22], nous avons également obtenu des résultats dans le même esprit que ceux présentés précédemment, où la sommation sur des rectangles de la forme  $[\mathbf{1}, \mathbf{n}]$  est remplacée par une somme sur une réunion finie de rectangles de  $\mathbb{Z}^d$ , où le nombre de rectangles et leurs sommets dépendent de  $n$ . Afin de conserver un aspect synthétique, nous ne reporterons pas ces résultats dans ce manuscrit.

## 2.5.2 Loi des logarithmes itérés via une approximation par ortho-martingales

Dans l'article [Gir21c], nous nous sommes intéressés à la question suivante : trouver une normalisation  $(a_n)_{n \geq 1}$  telle que pour une classe de champs aléatoires strictement stationnaires vérifiant certaines conditions de dépendance,  $\sup_{n \geq 1} a_n^{-1} |\sum_{1 \leq i \leq n} f \circ T^i| < \infty$ . Nous avons envisagé d'effectuer une approximation par ortho-martingale. Bien sûr, il faut tout d'abord trouver une normalisation qui fonctionne dans le cas des ortho-martingales ainsi qu'une condition sur les moments satisfaisantes. Il est naturel d'essayer la même normalisation que dans le cas i.i.d.. Testons là sur l'un des exemples les plus simples d'ortho-martingale en dimension 2.

Soit  $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$ , où  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1, T_1)$  et  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2, T_2)$  sont des systèmes dynamiques,  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  sont engendrées respectivement par  $e_1 \circ T_1^{i_1}$ ,  $i_1 \in \mathbb{Z}$  et  $e_2 \circ T_2^{i_2}$ ,  $i_2 \in \mathbb{Z}$  et  $e_1, e_2$  sont telles

que  $\mathbb{P}(e_1 = 1) = \mathbb{P}(e_2 = 1) = \mathbb{P}(e_1 = -1) = \mathbb{P}(e_2 = -1) = 1/2$ , et les suites  $(e_1 \circ T_1^{i_1})_{i_1 \in \mathbb{Z}}$  et  $(e_2 \circ T_2^{i_2})_{i_2 \in \mathbb{Z}}$  sont toutes les deux i.i.d.. On pose  $D_{(i_1, i_2)} := e_1 \circ T_1^{i_1} \cdot e_2 \circ T_2^{i_2}$  et soient  $\mathcal{F}_{(i_1, i_2)} := \sigma \{X_{(j_1, j_2)}, j_1 \leq i_1 \text{ et } j_2 \leq i_2\}$ . Alors  $\mathcal{F}_{(i_1, i_2)} = T_1^{-i_1} T_2^{-i_2} \mathcal{F}_{0,0}$  et  $(\mathcal{F}_{(i_1, i_2)})_{i_1, i_2 \in \mathbb{Z}}$  est une filtration commutante. De plus,  $(D_{0,0} \circ T^{(i_1, i_2)})_{i_1, i_2 \in \mathbb{Z}}$  est un champ aléatoire de type AOM et  $D_{0,0}$  est borné. Pour  $n_1, n_2 \geq 1$ , l'égalité suivante a lieu

$$\frac{1}{\sqrt{n_1 n_2 LL(n_1 n_2)}} |S_{(n_1, n_2)}| = \frac{1}{\sqrt{n_1 LL(n_1 n_2)}} \left| \sum_{i_1=0}^{n_1-1} e_1 \circ T_1^{e_1} \right| \frac{1}{\sqrt{n_2}} \left| \sum_{i_2=0}^{n_2-1} e_2 \circ T_2^{e_2} \right|,$$

qui se réécrit sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{n_1 n_2 LL(n_1 n_2)}} |S_{(n_1, n_2)}| = \frac{1}{\sqrt{n_1 LL(n_1)}} \left| \sum_{i_1=0}^{n_1-1} e_1 \circ T_1^{e_1} \right| \frac{\sqrt{LL(n_1)}}{\sqrt{LL(n_1 n_2)}} \frac{1}{\sqrt{n_2}} \left| \sum_{i_2=0}^{n_2-1} e_2 \circ T_2^{e_2} \right|.$$

Par conséquent, pour tout  $n_2 \geq 1$  fixé, par la loi des logarithmes itérés et le fait que

$$\frac{\sqrt{LL(n_1)}}{\sqrt{LL(n_1 n_2)}} \rightarrow 1,$$

on déduit que

$$\sup_{n_1 \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2 LL(n_1 n_2)}} |S_{(n_1, n_2)}| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \|e_1\|_2 \frac{1}{\sqrt{n_2}} \left| \sum_{i_2=0}^{n_2-1} e_2 \circ T_2^{e_2} \right|.$$

Ainsi, la même fonction maximale que dans le cas i.i.d. serait presque sûrement infinie, même dans le cas favorable où les AOM sont bornés. Il faut donc prendre une normalisation qui tienne compte de la potentielle structure produit d'un champ d'AOM. Ceci mène à la définition

$$M(f) := \sup_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} \frac{|S_{\mathbf{n}}(f)|}{|\mathbf{n}|^{1/2} \left( \prod_{\ell=1}^d LL(n_\ell) \right)^{1/2}}. \quad (2.5.8)$$

Dans l'exemple précédent, la finitude de la fonction maximale associée a bien lieu.

Le premier résultat présenté concerne les champs aléatoires de type AOM. Rappelons la définition de  $\|\cdot\|_{2,q}$  donnée par (2.5.3).

**Theorème 2.5.2.** *Soit  $d$  un entier supérieur à 1. Pour tout  $1 \leq p < 2$ , il existe une constante  $C_{p,d}$  dépendant uniquement de  $p$  et  $d$  telle que pour tout champ aléatoire strictement stationnaire de type AOM  $(D_{\mathbf{0}} \circ T^{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ , l'inégalité suivante a lieu :*

$$\|M(D_{\mathbf{0}})\|_p \leq C_{p,d} \|D_{\mathbf{0}}\|_{2,2(d-1)}.$$

De plus, pour tout  $r \geq 0$ ,

$$\|M(D_{\mathbf{0}})\|_{2,r} \leq C_{p,d,r} \|D_{\mathbf{0}}\|_{2,r+2d},$$

où  $C_{p,d,r}$  ne dépend que de  $p$ ,  $d$  et  $r$ .

Nous pouvons en particulier garantir la finitude presque sûre de  $M(D_0)$  sous l'hypothèse que  $\mathbb{E} \left[ D_0^2 (\log(1 + |D_0|))^{2(d-1)} \right]$  soit finie. Nous n'avons pas déterminé si l'exposant portant sur le log est optimal.

La démonstration du Théorème 2.5.2 repose sur un argument de récurrence sur la dimension  $d$ . En dimension 1, il s'agit du Théorème 2.3 de [32]. Pour passer de la dimension  $d$  à la dimension  $d+1$ , nous nous ramenons d'abord au cas où le supremum dans la définition de  $M(D_0)$  est réduit à celui sur les  $d$ -uplets d'entiers s'écrivant comme une puissance de 2. Puis nous appliquons l'inégalité (2.5.7). Le contrôle de la somme des carrés et des variances conditionnelles se fait grâce au théorème ergodique maximal.

Une fois que nous avons obtenu une condition suffisante raisonnable pour les ortho-martingales, nous pouvons étendre ce résultat à une classe plus étendue de champs aléatoires strictement stationnaires.

**Théorème 2.5.3.** *Soit  $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{Z}^d} := (T^{-i} \mathcal{F}_0)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  une filtration commutante. Soit  $f$  une fonction telle que pour tout  $\ell \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $\mathbb{E} [f | T^{\ell e_d} \mathcal{F}_0] \rightarrow 0$  quand  $\ell \rightarrow +\infty$  et mesurable par rapport à la tribu engendrée par  $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}^d} T^i \mathcal{F}_0$ . Alors pour tout  $1 < p < 2$ ,*

$$\|M(f)\|_p \leq C_{p,d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \|P_0(U^j f)\|_{2,2(d-1)},$$

où  $C_{p,d}$  ne dépend que de  $p$  et  $d$ .

Nous avons également considéré une condition dans l'esprit de celle de Maxwell et Woodroffe [120]. Dans la section 2.4, nous avons obtenu une inégalité de moments pour les maxima de sommes partielles d'un champ aléatoire stationnaire qui s'exprime à l'aide de la norme 2 de  $\mathbb{E}[S_n(f) | \mathcal{F}_0]$ . Une telle inégalité de moments n'est pas suffisante pour contrôler  $M(f)$  définie par (2.5.8). Il faut une inégalité permettant de contrôler presque sûrement les maxima de sommes partielles d'un champ aléatoire stationnaire à l'aide de celles de champs de type AOM. En dimension 1, le résultat suivant a été obtenu dans [33], Proposition 4.1.

**Proposition 2.5.4.** *Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$  un système dynamique et soit  $\mathcal{F}_0$  une sous-tribu de  $\mathcal{F}$  telle que  $T\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_0$ . Soit  $\mathcal{F}_j = T^{-j} \mathcal{F}_0$ . Pour tout entier  $n \geq 0$  et toute fonction  $\mathcal{F}_0$ -mesurable  $f$ , l'inégalité suivante a lieu presque sûrement :*

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq 2^n} \left| \sum_{j=0}^{i-1} f \circ T^j \right| &\leq \max_{1 \leq i \leq 2^n} \left| \sum_{\ell=0}^{i-1} (f - \mathbb{E}[f | \mathcal{F}_{-1}]) \circ T^\ell \right| + \sum_{k=0}^{n-1} \max_{1 \leq i \leq 2^{n-k-1}} \left| \sum_{\ell=0}^{i-1} d_k \circ T^{2^{k+1}\ell} \right| \\ &\quad + |u_n| + \sum_{k=0}^{n-1} \max_{1 \leq \ell \leq 2^{n-k-1}-1} |u_k| \circ T^{2^{k+1}\ell}, \end{aligned}$$

où

$$u_k = \mathbb{E} \left[ \sum_{j=0}^{2^k-1} f \circ T^j \mid \mathcal{F}_{-2^k} \right],$$

$$d_k = u_k + u_k \circ T^{2^k} - u_{k+1}.$$

En dimension 2, nous avons obtenu l'inégalité

$$\max_{\substack{1 \leq i_1 \leq 2^{n_1} \\ 1 \leq i_2 \leq 2^{n_2}}} |S_{i_1, i_2}(f)| \leq \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \max_{\substack{1 \leq i_1 \leq 2^{n_1-k_1} \\ 1 \leq i_2 \leq 2^{n_2-k_2}}} \left| S_{i_1, i_2} \left( T^{2^{k_1}, 2^{k_2}}, d_{k_1, k_2, \{1, 2\}} \right) \right| \quad (2.5.9)$$

$$+ \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \max_{\substack{1 \leq i_1 \leq 2^{n_1-k_1} \\ 0 \leq i_2 \leq 2^{n_2-k_2}}} \left| S_{i_1, 1} \left( T^{2^{k_1}, 0}, d_{k_1, k_2, \{1\}} \right) \circ T^{0, 2^{k_2} i_2} \right| \quad (2.5.10)$$

$$+ \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \max_{\substack{0 \leq i_1 \leq 2^{n_1-k_1} \\ 1 \leq i_2 \leq 2^{n_2-k_2}}} \left| S_{1, i_2} \left( T^{0, 2^{k_1}}, d_{k_1, k_2, \{2\}} \right) \circ T^{2^{k_1} i_1, 0} \right| \quad (2.5.11)$$

$$+ \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \max_{\substack{0 \leq i_1 \leq 2^{n_1-k_1} \\ 0 \leq i_2 \leq 2^{n_2-k_2}}} |d_{k_1, k_2, \emptyset}| \circ T^{2^{k_1} i_1, 2^{k_2} i_2}, \quad (2.5.12)$$

où les champs  $(d_{k_1, k_2}, I)$  sont des champs de type AOM dans les coordonnées d'indice  $I$ . Ainsi, le premier terme du membre de droite de (2.5.9) est une somme de maxima d'AOM stationnaires, le deuxième terme une somme de maxima de martingale dans la direction de  $T^{1,0}$  et d'itérées de  $T^{0,1}$ , le troisième est similaire et le dernier est une somme de maxima d'itérées de  $T^{i,j}$ . Une version en dimension quelconque est disponible dans l'article [Gir21c], Proposition 3.3. Afin de garder un aspect synthétique, nous ne la reproduisons pas dans ce manuscrit.

La version de la loi des logarithmes itérés sous une condition dans l'esprit de la condition de Maxwell et Woodrooffe s'exprime sous la forme suivante. Pour tous  $1 < p < 2$  et tout  $d \geq 1$ , il existe une constante  $c_{p,d}$  telle que pour toute filtration complètement commutante  $(T^{-i} \mathcal{F}_0)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  et toute fonction  $\mathcal{F}_0$ -mesurable  $f$ ,

$$\|M(f)\|_p \leq c_{p,d} \sum_{n \neq 1} \frac{1}{|n|^{3/2}} \|\mathbb{E}[S_n(f) \mid \mathcal{F}_0]\|_{2, 2(d-1)}.$$

Des applications pour les champs aléatoires s'exprimant comme une somme de processus linéaires dont les innovations sont des AOM ont été fournies.

## 2.6 Loi des grands nombres

Cette partie est issue des articles [Gir24b, Gir24e]. Pour  $1 \leq p < 2$  et une suite i.i.d. à valeurs réelles  $(X_i)_{i \geq 1}$  telle que  $\mathbb{E}[|X_1|^p] < \infty$ , la loi des grands nombres de Marcinkiewicz fournit la convergence presque sûre de la suite  $(n^{-1/p} (\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_1])))_{n \geq 1}$  vers 0. Dans le cas où  $(X_i)_{i \geq 1}$  est une suite AM identiquement distribuée, un résultat similaire a été obtenu : si  $\mathbb{E}[|X_1|^p] < \infty$ , alors  $n^{-1/p} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0$  presque sûrement.

Afin de formuler les résultats obtenus, nous aurons besoin des notations suivantes. Pour une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans un espace de Banach séparable  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$  et  $p \geq 1, q \geq 0$ , nous posons

$$\|X\|_{\mathbb{B}, p} := (\mathbb{E}[\|X\|_{\mathbb{B}}^p])^{1/p} \text{ et}$$

$$\|X\|_{\mathbb{B}, p, q} := \|\|X\|_{\mathbb{B}}\|_{p, q},$$



où, pour une variable aléatoire réelle  $Y$ ,

$$\|Y\|_{p,q} = \inf \left\{ \lambda > 0, \varphi_{p,q} \left( \frac{|Y|}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}, \varphi_{p,q}(t) = t^p (1 + \mathbf{1}\{t \geq 1\} \log t)^q.$$

Notons que  $\|X\|_{\mathbb{B},p,0} = \|X\|_{\mathbb{B},p}$ . Posons également

$$\|X\|_{\mathbb{B},p,w} := \sup_{A: \mathbb{P}(A) > 0} \mathbb{P}(A)^{-1+1/p} \mathbb{E} [\|X\|_{\mathbb{B}} \mathbf{1}\{A\}].$$

Notons que pour  $p > 1$ , il existe des constantes  $c_{1,p}$  et  $c_{2,p}$  telle que pour toute variable aléatoire  $X$ ,

$$c_{1,p} \|X\|_{\mathbb{B},p,w} \leq \left( \sup_{t>0} t^p \mathbb{P}(\|X\|_{\mathbb{B}} > t) \right)^{1/p} \leq c_{2,p} \|X\|_{\mathbb{B},p,w}.$$

Pour les ortho-martingales, le résultat suivant a été obtenu dans [Gir24b].

**Theorème 2.6.1** (Convergence presque sûre sur des rectangles). *Soit  $r \in ]1, 2]$ . Soit  $(D_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  un champ aléatoire identiquement distribué de type AOM à valeurs dans un espace de Banach séparable et  $r$ -lisse  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$ . Soit  $1 < p < r$ . Supposons que  $\mathbb{E}[\|D_{\mathbf{0}}\|_{\mathbb{B}}^p] < \infty$ . Posons  $S_{\mathbf{n}} := \sum_{\mathbf{1} \preceq i \preceq \mathbf{n}} D_i$ . Alors*

$$\left\| \sup_{\mathbf{n} \succ \mathbf{1}} \frac{\|S_{\mathbf{n}}\|_{\mathbb{B}}}{|\mathbf{n}|^{1/p}} \right\|_{\mathbb{B},p,w} \leq C_{\mathbb{B},d,p} \|D_{\mathbf{0}}\|_{\mathbb{R},p,d-1},$$

où la constante  $C_{\mathbb{B},d,p}$  ne dépend que de l'espace de Banach  $\mathbb{B}$ , de la dimension  $d$  et de  $p$ . De plus, la convergence suivante a lieu

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\mathbf{n} \succ \mathbf{1}, \max \mathbf{n} \geq N} \frac{\|S_{\mathbf{n}}\|_{\mathbb{B}}}{|\mathbf{n}|^{1/p}} = 0 \text{ presque sûrement.} \quad (2.6.1)$$

Remarquons que la convergence (2.6.1) implique que  $\|S_{\mathbf{n}}\|_{\mathbb{B}} / |\mathbf{n}|^{1/p}$  converge vers 0 quand seulement l'une des coordonnées de  $\mathbf{n}$  tend vers l'infini, et ce, uniformément par rapport aux autres.

Il est également possible de considérer seulement les sommes sur les cubes de  $\mathbb{N}^d$  (donc les indices sont de la forme  $n\mathbf{1} = (n, \dots, n)$ ), ce qui donne lieu au résultat suivant.

**Theorème 2.6.2** (Convergence presque sûre sur des cubes). *Soit  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$  un espace de Banach séparable  $r$ -lisse avec  $r \in ]1, 2]$ , soit  $1 < p < r$  et  $d \in \mathbb{N}^*$ . Il existe une constante  $C_{\mathbb{B},d,p}$  telle que si  $(D_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  est un champ aléatoire identiquement distribué de type AOM et tel que  $\|D_{\mathbf{0}}\|_{\mathbb{B}} \in \mathbb{L}_p$ , alors*

$$\left\| \sup_{n \geq 1} \frac{\|S_{n\mathbf{1}}\|_{\mathbb{B}}}{n^{d/p}} \right\|_{\mathbb{R},p,w} \leq C_{\mathbb{B},d,p} \|D_{\mathbf{0}}\|_{\mathbb{B},p}.$$

De plus, la convergence suivante a lieu :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|S_{n\mathbf{1}}\|_{\mathbb{B}}}{n^{d/p}} = 0 \text{ presque sûrement.} \quad (2.6.2)$$

Les sommes sur les cubes peuvent être vues comme des sommes de tableaux de martingales, ce qui explique le fait que la condition sur les moments de  $\|D_{\mathbf{0}}\|_{\mathbb{B}}$  ne dépend pas de la dimension  $d$ .

On s'intéresse également à la convergence dans  $\mathbb{L}^p$  des sommes partielles sur des rectangles.

**Theorème 2.6.3** (Convergence dans  $\mathbb{L}^p$ ). *Soit  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$  un espace de Banach séparable  $r$ -lisse pour un certain  $r \in ]1, 2]$ , soit  $1 < p < r$  et  $d \in \mathbb{N}^*$ . Si  $(D_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$  est un champ aléatoire identiquement distribué de type AOM et tel que  $\|D_{\mathbf{0}}\|_{\mathbb{B}} \in \mathbb{L}^p$ , alors*

$$\lim_{\max N \rightarrow \infty} \frac{1}{|\mathbf{N}|^{1/p}} \left\| \max_{\mathbf{1} \preccurlyeq \mathbf{n} \preccurlyeq \mathbf{N}} \|S_{\mathbf{n}}\|_{\mathbb{B}} \right\|_p = 0. \quad (2.6.3)$$

Notons que ces résultats ne requièrent pas la stricte stationnarité du champ aléatoire  $(D_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ . Cependant, il sera commode de considérer des champs aléatoires strictement stationnaires pour effectuer une approximation par ortho-martingales.

En reprenant les notations de la Section 2.4, nous sommes amenés à considérer des conditions de la forme

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|X_{\mathbf{0}} - \mathbb{E}[X_{\mathbf{0}} \mid \mathcal{F}_{m\mathbf{1}}]\|_{B,p,q} = 0, \quad (2.6.4)$$

$$\forall \ell_0 \in \llbracket 1, d \rrbracket, \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \mathbb{E} \left[ X_{\mathbf{0}} \mid \mathcal{F}_m^{\sum_{\ell \in \llbracket 1, d \rrbracket \setminus \{\ell_0\}} \mathbf{e}_{\ell} - m\mathbf{e}_{\ell_0}} \right] \right\|_{\mathbb{B},p,q} = 0, \quad (2.6.5)$$

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \|P_{\mathbf{0}}(X_{\mathbf{k}})\|_{\mathbb{B},p,q} < \infty. \quad (2.6.6)$$

Les conditions (2.6.4) et (2.6.5) permettent de décomposer  $X_{\mathbf{0}}$  sous la forme  $\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d} P_{\mathbf{i}}(X_{\mathbf{0}})$ .

Si nous supposons que (2.6.4), (2.6.5) et (2.6.6) sont vérifiées avec  $1 < p < r$  et

- $q = d - 1$ , alors (2.6.1) a lieu,
- $q = 0$ , alors (2.6.2) et (2.6.3) ont lieu.

Il est possible d'appliquer les résultats précédents lorsque  $X_{\mathbf{i}}$  s'exprime comme une fonction de  $d$  décalages de Bernoulli indépendants. Cependant, il est possible que la condition (2.6.5) ne soit pas vérifiée, même dans le cas simple  $X_{\mathbf{i}} = \sum_{\ell=1}^d \varepsilon_{i_{\ell}}^{(\ell)}$ , où les suites  $(\varepsilon_{i_{\ell}}^{(\ell)})_{i_{\ell} \in \mathbb{Z}}$  sont mutuellement indépendantes et chacune est i.i.d. centrée. Nous pallions ce problème en retranchant l'espérance de  $X_{\mathbf{i}}$  sachant certaines suites  $(\varepsilon_{i_{\ell}}^{(\ell)})_{i_{\ell} \in \mathbb{Z}}$ . Les termes retranchés sont des fonctions de certaines des suites de variables aléatoires  $(\varepsilon_{i_{\ell}}^{(\ell)})_{i_{\ell} \in \mathbb{Z}}$  et  $X_{\mathbf{i}}$  s'exprime comme une somme de champs vérifiant (2.6.5). La normalisation doit également être changée.

Nous avons également obtenu des résultats concernant les champs bernoulliens (de la forme (2.1.1)). Nous mesurons la dépendance en posant

$$\delta_{\mathbb{B},p,q}(\mathbf{i}) := \left\| f \left( (\varepsilon_{\mathbf{i}-\mathbf{k}}^*)_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \right) - f \left( (\varepsilon_{\mathbf{i}-\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \right) \right\|_{\mathbb{B},p,q}, \quad \mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d,$$

où  $\varepsilon_{\mathbf{u}}^* = \varepsilon_{\mathbf{u}}$  si  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  et  $\varepsilon_{\mathbf{0}}^* = \varepsilon'_{\mathbf{0}}$ , où  $\varepsilon'_{\mathbf{0}}$  est indépendante de  $(\varepsilon_{\mathbf{u}})_{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d}$  et a la même loi que  $\varepsilon_{\mathbf{0}}$ . Les résultats généraux suivants ont été obtenus.

**Theorème 2.6.4** (Loi forte des grands nombres sur les rectangles). Soit  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$  un espace de Banach séparable  $r$ -lisse et  $1 < p < r$ . Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  un champ aléatoire centré admettant la représentation (2.1.1). Supposons que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{d(1-1/p)} \left( \sum_{i: \|i\|_{\infty}=k} (\delta_{\mathbb{B}, p, d-1}(i))^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1, \max n \geq N} \frac{1}{|n|^{1/p}} \left\| \sum_{1 \leq i \leq n} X_i \right\|_{\mathbb{B}} = 0 \text{ p.s..}$$

**Theorème 2.6.5** (Loi forte des grands nombres sur des carrés). Soit  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$  un espace de Banach séparable  $r$ -lisse et  $1 < p < r$ . Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  un champ aléatoire centré admettant la représentation (2.1.1). Supposons que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{d(1-1/p)} \left( \sum_{i: \|i\|_{\infty}=k} (\delta_{\mathbb{B}, p}(i))^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{d/p}} \left\| \sum_{1 \leq i \leq n \mathbf{1}} X_i \right\|_{\mathbb{B}} = 0 \text{ p.s..}$$

**Theorème 2.6.6** (Convergence dans  $\mathbb{L}^p$ ). Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  un champ aléatoire centré admettant la représentation (2.1.1). Supposons que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{d(1-1/p)} \left( \sum_{i: \|i\|_{\infty}=k} (\delta_{\mathbb{B}, p}(i))^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1, \max n \geq N} \frac{1}{|n|^{1/p}} \left\| \sum_{1 \leq i \leq n} X_i \right\|_{\mathbb{B}, p} = 0.$$

Les résultats précédents s'appliquent aux fonctionnelles de processus linéaires, de la forme (2.1.2) avec  $g$   $\alpha$ -höldérienne. On suppose que  $p\alpha \geq 1$  et que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{d(1-1/p)} \left( \sum_{i: \|i\|_{\infty}=k} \|a_i\|_{\mathcal{B}(\mathbb{B})}^{p\alpha} \right)^{1/p} < \infty.$$

— Si  $\|\varepsilon_0\|_{\mathbb{B}, p\alpha} < \infty$ , alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1, \max n \geq N} \frac{1}{|n|^{1/p}} \left\| \sum_{1 \leq i \leq n} (X_i - \mathbb{E}[X_i]) \right\|_{\mathbb{B}, p} = 0,$$

et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \geq N} \frac{1}{n^{d/p}} \left\| \sum_{1 \leq i \leq n \mathbf{1}} (X_i - \mathbb{E}[X_i]) \right\|_{\mathbb{B}} = 0 \text{ p.s..}$$

— Si  $\|\varepsilon_0\|_{\mathbb{B}, p\alpha, d-1} < \infty$ , alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1, \max n \geq N} \frac{1}{|n|^{1/p}} \left\| \sum_{1 \leq i \leq n} (X_i - \mathbb{E}[X_i]) \right\|_{\mathbb{B}} = 0 \text{ p.s..}$$

## 2.7 Perspectives

Les travaux présentés dans ce chapitre ont ouvert les perspectives suivantes.

Commençons par la loi des logarithmes itérés. Les résultats que nous avons obtenus fournissent une loi des logarithmes itérés bornée. Il serait bien d’avoir une caractérisation de la limite supérieure et inférieure des sommes partielles, au moins dans le cas des ortho-martingales et lorsque les opérateurs de décalage sont tous ergodiques, ou bien dans le cas de champs bernoulliens.

Le passage de la dimension 1 à la dimension  $d$  permet de considérer une variété plus grande de critères projectifs. En effet, nous pourrions considérer une condition dans l’esprit de la condition de Hannan dans certaines coordonnées et celui de Maxwell et Woodroffe dans les autres. Il est raisonnable de conjecturer que les critères ainsi obtenus seraient mutuellement indépendants. L’enjeu serait également de fournir des applications plus larges que les champs linéaires ou de Volterra.

Concernant le modèle de régression (2.1.9) considéré dans les sections 2.1 et 2.2, sous certaines conditions portant sur la dépendance (mesurée via des coefficients de mélange) du champ aléatoire  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ , la consistance de l’estimateur  $g_n(x)$  et sa normalité asymptotique sont établies dans l’article [63]. Sous d’autres conditions de dépendance, la normalité asymptotique a été traitée dans [67]. En revanche, il semble que le cas des champs de la forme (2.1.1) n’ait pas été traité dans la littérature. Un objectif serait d’établir la consistance ainsi que la normalité asymptotique sous des conditions aussi faibles que possible sur les coefficients  $(\delta(i, p))_{i \in \mathbb{Z}^d}$ .

Une autre question serait d’établir une inégalité exponentielle générale pour les champs aléatoires de type AOM, où le majorant s’exprimerait à l’aide de la queue de  $\sum_{1 \leq i \leq N} \|D_i\|_{\mathbb{B}}^p$ . Nous envisageons également de compléter les résultats concernant les inégalités de moment et de déviation en fournissant des inégalités dans l’esprit de l’inégalité de Burkholder ou Nagaev, en mettant en jeu des maxima et des variables aléatoires jouant le rôle de variances conditionnelles.

Pour conclure, mentionnons la question du contrôle de la norme  $\mathbb{L}^p$  de la différence entre un estimateur de densité à noyau et la densité que l’on cherche à estimer. On considère un champ aléatoire  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  de la forme (2.1.1). Nous supposons que  $X_0$  admet une densité  $f$  par rapport à la mesure de Lebesgue. Cependant, cette densité est inconnue. Nous cherchons à estimer  $f$  via des observations de réalisations de  $X_i$  sur un sous-ensemble  $\Lambda_n$  de  $\mathbb{Z}^d$ . L’estimateur de densité à noyau le plus classique est celui de Parzen-Rosenblatt [131, 153], défini par

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{b_n |\Lambda_n|} \sum_{i \in \Lambda_n} K\left(\frac{x - X_i}{b_n}\right),$$

où  $K: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est un noyau,  $|\Lambda_n|$  désigne le nombre d’éléments de  $\Lambda_n$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  est une suite de réels positifs tels que  $b_n \rightarrow 0$  et  $|\Lambda_n| b_n \rightarrow \infty$ . Sous certaines conditions sur le noyau, la densité

$f$  et les suites  $(b_n)_{n \geq 1}$  et  $(\text{Card}(\Lambda_n))_{n \geq 1}$ , la convergence de la suite  $(\widehat{f}_n(x))_{n \geq 1}$  vers  $f(x)$  a lieu pour chaque réel  $x$ . Certains travaux ont également traité la question de la vitesse de convergence en norme  $\mathbb{L}^p$  en fournissant un majorant de

$$\mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}_n(x) - f(x)|^p dx \right] \quad (2.7.1)$$

en termes de  $b_n$ ,  $|\Lambda_n|$  et  $p$ , voir par exemple [17, 26].

On se propose d'utiliser l'approche suivante pour fournir des résultats pouvant améliorer dans certaines situations les résultats existants. On suppose tout d'abord que  $\int_{\mathbb{R}} K^p(x) dx < \infty$ . On peut voir l'application  $x \mapsto \widehat{f}_n(x)$  comme une variable aléatoire à valeurs dans l'espace de Banach  $\mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ . Cet espace de Banach possède une propriété géométrique intéressante, puisqu'il est  $\min\{2, p\}$ -lisse. Cela permet de formuler des inégalités de moments de type Burkholder pour des suites AM (voir [10]). L'utilisation d'une telle inégalité a permis, dans le cas de variables aléatoires à valeurs réelles, l'obtention d'inégalités de moments pour les champs aléatoires de la forme (2.1.1), voir la Proposition 1 de [68]. L'inégalité de moments obtenue pour des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{L}^p$  permettrait alors de borner le terme (2.7.1). Le fait qu'une telle approche puisse donner des résultats est vraisemblable. Il faudra ensuite comparer avec les résultats obtenus dans [64].

Par ailleurs, le cas de fonctions de plusieurs décalages bernoulliens indépendants pourrait être considéré. Plus précisément, nous supposons que le champ aléatoire  $(X_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$  est de la forme

$$X_{\mathbf{i}} = g \left( f_1 \left( \left( \varepsilon_{i_1 - k_1}^{(1)} \right) \right), \dots, f_d \left( \left( \varepsilon_{i_d - k_d}^{(d)} \right) \right) \right), \mathbf{i} = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{Z}^d,$$

où  $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est höldérienne, les fonctions  $f_1, \dots, f_d: \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$  sont mesurables, pour chaque  $\ell$ ,  $(\varepsilon_k^{(\ell)})_{k \in \mathbb{Z}}$  est i.i.d. et les suites  $(\varepsilon_k^{(\ell)})_{k \in \mathbb{Z}}$ ,  $\ell \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , sont indépendantes entre elles. Dans ce cas de figure, un enjeu serait d'établir une inégalité de moments satisfaisante pour des sommes pondérées de champs aléatoires de ce type. Cela nécessite probablement des techniques de martingales à indices multiples.

# Chapitre 3

## $U$ -statistiques : inégalités de déviation et théorèmes limites

### 3.1 Introduction aux $U$ -statistiques et lien avec les champs aléatoires

Les  $U$ -statistiques ont été introduites par Halmos dans [82] et Hoeffding dans [87], et sont définies de la manière suivante. On se donne une suite de variables aléatoires  $(X_i)_{i \geq 0}$  à valeurs dans un espace mesuré  $(S, \mathcal{S})$ , un entier  $m \geq 1$  et une collection de fonctions mesurables  $h_{i_1, \dots, i_m} : S^m \rightarrow \mathbb{B}$ , où  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$  est un espace de Banach séparable et  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m$ . On définit alors

$$U_{m,n} \left( (h_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m} \right) = \sum_{(i_\ell)_{\ell=1}^m \in \text{Inc}_n^m} h_{i_1, \dots, i_m} (X_{i_1}, \dots, X_{i_m}), \quad (3.1.1)$$

avec

$$\text{Inc}_n^m = \{(i_\ell)_{\ell=1}^m, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n\}.$$

Lorsque le noyau ne dépend pas du  $m$ -uplet  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m)$ , nous noterons simplement

$$U_{m,n}(h) = \sum_{\mathbf{i} \in \text{Inc}_n^m} h(X_{\mathbf{i}}), \quad (3.1.2)$$

avec la notation  $X_{\mathbf{i}} = (X_{i_1}, \dots, X_{i_m})$ .

Lorsque la suite  $(X_i)_{i \geq 0}$  est i.i.d., elle sera notée  $(\xi_i)_{i \geq 0}$ . Si  $h(\xi_1, \dots, \xi_m)$  est intégrable, Hoeffding a démontré que la suite  $(U_{m,n}(h)/C_n^m)_{n \geq m}$  converge presque sûrement vers  $\mathbb{E}[h(\xi_1, \dots, \xi_m)]$ . Ici, comme dans la suite,  $C_n^m = n! / (m!(n-m)!)$ . Ainsi, il est possible de se servir de  $U_{m,n}(h)/C_n^m$  comme estimateur sans biais d'un paramètre  $\theta$  pouvant s'exprimer comme  $\mathbb{E}[h(\xi_1, \dots, \xi_m)]$  pour une certaine fonction  $h$ .

Restons pour le moment sur le cas indépendant. L'une des difficultés principales du traitement des  $U$ -statistiques est le fait que les variables aléatoires sommées ne sont en général pas indépendantes. Par exemple, pour  $m = 2$ ,  $\xi_1$  apparaît dans les termes d'indices  $(1, 2), \dots, (1, n)$ .

Cependant, il semble possible d'utiliser des propriétés de martingales. Pour en obtenir une pour la sommation par rapport à l'indice  $i_m$ , il faut que

$$\mathbb{E} [h_{\mathbf{i}}(\xi_{\mathbf{i}}) \mid \xi_j, j \leq i_m - 1] = \mathbb{E} [h_{\mathbf{i}}(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_{m-1}}, \xi_0) \mid \xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_{m-1}}] = 0.$$

Ainsi, si pour tout  $\mathbf{i} \in \text{Inc}^m := \{(i_\ell)_{\ell=1}^m, 1 \leq i_1 < \dots < i_m\}$  et  $j_0 \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,

$$\mathbb{E} [h_{\mathbf{i}}(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket}) \mid \sigma(\xi_j, j \in \llbracket 1, m \rrbracket \setminus \{j_0\})] = 0 \text{ p.s.}, \quad (3.1.3)$$

il est possible d'utiliser des propriétés de martingale lorsque l'on somme suivant l'indice  $i_1$ , et de même suivant l'indice  $i_2$  et pour tous les autres.

Une  $U$ -statistique peut être vue comme la somme d'un champ aléatoire défini par  $X_{\mathbf{i}} = h_{\mathbf{i}}(\xi_{\mathbf{i}})$ , qui même lorsque  $h_{\mathbf{i}}$  ne dépend pas de  $\mathbf{i}$ , n'est pas stationnaire. Cependant, il est possible de borner la queue d'une  $U$ -statistique à l'aide de celle d'une  $U$ -statistique dite découplée, notée  $U_{m,n}^{\text{dec}}(h_{\mathbf{i}})$  pour laquelle la fonction  $h_{\mathbf{i}}$  est évaluée à différents termes de copies indépendantes de  $(\xi_i)_{i \geq 1}$ . Plus précisément, nous posons

$$U_{m,n}^{\text{dec}}(h_{\mathbf{i}}) := \sum_{\mathbf{i} \in \text{Inc}_n^m} h_{\mathbf{i}}(\xi_{\mathbf{i}}^{\text{dec}}), \quad (3.1.4)$$

où  $\xi_{\mathbf{i}}^{\text{dec}} = (\xi_{i_1}^{(1)}, \dots, \xi_{i_m}^{(m)})$  et les suites  $(\xi_i^{(1)})_{i \geq 1}, \dots, (\xi_i^{(m)})_{i \geq 1}$  sont des copies indépendantes de  $(\xi_i)_{i \geq 1}$ .

Il est possible de contrôler la queue d'une  $U$ -statistique via celle de sa version découplée. Il s'agit d'un résultat dû à de la Peña et Montgomery-Smith.

**Proposition 3.1.1** ([35]). *Pour tout  $m \geq 1$ , il existe une constante  $K_m$  qui ne dépend que de  $m$  telle que si  $(\xi_i)_{i \geq 1}$  est une suite i.i.d. à valeurs dans un espace mesurable  $(S, \mathcal{S})$ ,  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$  un espace de Banach séparable,  $h_{\mathbf{i}}: S^m \rightarrow \mathbb{B}$  et  $U_{m,n}(h_{\mathbf{i}})$  et  $U_{m,n}^{\text{dec}}(h_{\mathbf{i}})$  sont définies respectivement comme dans (3.1.1) et (3.1.4), alors l'inégalité suivante a lieu pour tout  $x > 0$  :*

$$\mathbb{P}(\|U_{m,n}(h_{\mathbf{i}})\|_{\mathbb{B}} > x) \leq K_m \mathbb{P}(K_m \|U_{m,n}^{\text{dec}}(h_{\mathbf{i}})\|_{\mathbb{B}} > x). \quad (3.1.5)$$

Ainsi, obtenir une inégalité sur la queue de la  $U$ -statistique découplée permet d'en déduire une pour la  $U$ -statistique de départ. Notons que la Proposition 3.1.1 est valide pour tout espace de Banach séparable, sans hypothèse sur sa géométrie. Ainsi, il est possible d'obtenir une inégalité analogue à (3.1.5) avec des maxima.

Pour  $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}$ , posons

$$D_{\mathbf{i}} = \begin{cases} h_{\mathbf{i}}(\xi_{\mathbf{i}}^{\text{dec}}) & \text{si } \mathbf{i} \in \text{Inc}^m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si (3.1.3) est vérifiée, alors  $(D_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$  est un champ aléatoire de type AOM par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^m}$ , où  $\mathcal{F}_{\mathbf{i}} = \sigma(\xi_{k_1}^{(1)}, k_1 \leq i_1, \dots, \xi_{k_m}^{(m)}, k_m \leq i_m)$ . Ainsi, des arguments de récurrence sur l'ordre de la  $U$ -statistique peuvent être utilisés. Ceci explique en particulier la ressemblance entre les résultats des sous-sections 2.2.2 et 3.3.2.

Il est possible de se ramener à des  $U$ -statistiques vérifiant (3.1.3) de la manière suivante. Pour  $I \subset \llbracket 1, m \rrbracket$ , nous posons  $|I| = \text{Card}(I)$  et on définit  $h_i^I : S^{|I|} \rightarrow \mathbb{B}$  par

$$h_i^I((x_{i_u})_{u \in I}) = \sum_{J: J \subseteq I} (-1)^{|I|-|J|} \mathbb{E} [h_i(V^{I,J}((x_{i_u})_{u \in I}))],$$

où le vecteur  $V^{I,J}((x_{i_u})_{u \in I})$  appartient à  $S^m$ , la  $k$ -ième coordonnée est  $x_{i_u}$  si  $k = i_u$  pour un unique  $u \in J$  et  $\xi_k$  si  $k$  n'est pas de cette forme. Ainsi, en posant  $\mathbf{i}_J = (i_\ell)_{\ell \in J}$ , l'égalité

$$h_i^I((\xi_{i_u})_{u \in I}) = (-1)^{|I|} \mathbb{E} [h_i(\xi_{\mathbf{i}})] + \sum_{J: \emptyset \subsetneq J \subseteq I} (-1)^{|I|-|J|} \mathbb{E} [h_i(\xi_{\mathbf{i}}) \mid \xi_{\mathbf{i}_J}]$$

a lieu presque sûrement. De plus,

$$\sum_{I \subset \llbracket 1, m \rrbracket} h_i^I(\xi_{\mathbf{i}_I}) = h_i(\xi_{\mathbf{i}})$$

(car  $\sum_{I: J \subseteq I} (-1)^{|I|-|J|} = 0$  si  $J \neq \llbracket 1, m \rrbracket$  et 1 sinon). Par conséquent, la  $U$ -statistique  $U_n$  définie par (3.1.1) peut se décomposer sous la forme

$$U_n = \sum_{I \subset \llbracket 1, m \rrbracket} U_n^I,$$

où  $U_n^\emptyset = \sum_{\mathbf{i} \in \text{Inc}_n^m} \mathbb{E} [h_i(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket})]$  et pour  $I \subset \llbracket 1, m \rrbracket$  non vide,

$$U_n^I = \sum_{\mathbf{j}_I \in \text{Inc}_n^{|I|}} H_{\mathbf{j}_I}^I(\xi_{\mathbf{j}_I}),$$

$$H_{\mathbf{j}_I}^I(\xi_{\mathbf{j}_I}) = \sum_{\mathbf{i}_{\llbracket 1, m \rrbracket \setminus I}} h_{\sum_{\ell \in I} j_\ell \mathbf{e}_\ell + \sum_{\ell' \in \llbracket 1, m \rrbracket \setminus I} i_{\ell'} \mathbf{e}_{\ell'}}(\xi_{\mathbf{j}_I}),$$

où la somme porte sur les  $\mathbf{i}_{\llbracket 1, m \rrbracket \setminus I}$  tels que

$$\sum_{\ell \in I} j_\ell \mathbf{e}_\ell + \sum_{\ell' \in \llbracket 1, m \rrbracket \setminus I} i_{\ell'} \mathbf{e}_{\ell'} \in \text{Inc}_n^{|I|}.$$

Ainsi, la  $U$ -statistique  $U_n^I$  est d'ordre  $|I|$  et est dégénérée. Si  $h_i$  ne dépend pas de  $\mathbf{i}$ , cela a été fait dans le Théorème 9.1 dans [116].

Pour  $m = 2$ , la décomposition s'écrit

$$U_n = U_n^\emptyset + U_n^{\{1\}} + U_n^{\{2\}} + U_n^{\{1,2\}},$$

où

$$U_n^\emptyset = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \mathbb{E} [h_{i_1, i_2}(\xi_1, \xi_2)],$$

$$U_n^{\{1\}} = \sum_{i_1=1}^{n-1} \sum_{j_2=i_1+1}^n \mathbb{E} [h_{i_1, j_2}(\xi_{i_1}, \xi_{j_2}) \mid \xi_{i_1}],$$



$$U_n^{\{2\}} = \sum_{i_2=2}^n \sum_{j_1=1}^{i_2-1} \mathbb{E} [h_{j_1, i_2} (\xi_{j_1}, \xi_{i_2}) \mid \xi_{i_2}],$$

$$U_n^{\{1,2\}} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} (h_{i_1, i_2} (\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) - \mathbb{E} [h_{i_1, i_2} (\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) \mid \xi_{i_1}] + \\ - \mathbb{E} [h_{i_1, i_2} (\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) \mid \xi_{i_1}] + \mathbb{E} [h_{i_1, i_2} (\xi_{i_1}, \xi_{i_2})]).$$

## 3.2 Théorème ergodique pour des $U$ -statistiques

Dans cette section, nous considérons la question suivante : étant donnée une suite strictement stationnaire  $(X_i)$ , à valeurs dans un espace métrique  $(S, d)$  et un noyau mesurable  $h: S^m \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\mathbb{E} [|h(X_i)|] < \infty$  pour tous  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m)$  tel que  $1 \leq i_1 < \dots < i_m$ , nous cherchons à déterminer si

$$\frac{1}{C_n^m} U_{m,n}(h) = \frac{1}{C_n^m} \sum_{\mathbf{i} \in \text{InC}_n^m} h(X_{\mathbf{i}})$$

converge, presque sûrement ou dans  $\mathbb{L}^1$ . Lorsque  $m = 1$ , cette question est complètement résolue par le théorème ergodique. En effet,

$$U_{1,n}(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i) \rightarrow \mathbb{E}[X_0 \mid \mathcal{I}] \text{ p.s. et dans } \mathbb{L}^1,$$

où, après avoir représenté la suite  $(X_i)_{i \geq 0}$  via  $(X_0 \circ T^i)_{i \geq 1}$ , où  $T: \Omega \rightarrow \Omega$  préserve la mesure,  $\mathcal{I}$  est la tribu des ensembles  $T$ -invariants, c'est-à-dire les ensembles  $A$  tels que  $T^{-1}A = A$ .

Pour  $m \geq 2$ , la situation est plus complexe. Il est connu que si  $(X_i)_{i \geq 1}$  est i.i.d. et la variable aléatoire  $|h(X_1, \dots, X_m)|$  a une espérance finie, alors  $U_{m,n}(h)/C_n^m$  converge presque sûrement vers  $\mathbb{E}[h(X_1, \dots, X_m)]$ . L'exemple 4.1 de l'article [1] fournit un noyau  $h$  et une suite strictement stationnaire ergodique  $(X_i)_{i \geq 1}$  telle que  $U_{2,n}(h) = 1$  mais  $\mathbb{E}[h(X_1, X'_1)] = 0$  (où  $X_1$  est une copie indépendante de  $X_1$ ). Ceci montre qu'en général, la limite d'une  $U$ -statistique basée sur une suite stationnaire ergodique ne peut pas s'exprimer en général sous la forme  $\mathbb{E}[h(X_1, X'_1)]$ .

Dans l'article [DGV23], en collaboration avec Herold Dehling et Dalibor Volný, nous avons fourni de nouveaux contre-exemples ainsi que des conditions suffisantes pour le théorème ergodique pour des  $U$ -statistiques d'ordre 2, dans le cas où la suite  $(X_0 \circ T^i)_{i \geq 1}$  est ergodique. Nous avons ensuite étendu ces conditions suffisantes à des  $U$ -statistiques d'ordre supérieur et à des suites non-nécessairement ergodiques dans l'article [Gir24d].

Commençons par énoncer les contre-exemples. Nous avons tout d'abord donné un exemple de noyau  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et de suite strictement stationnaire ergodique  $(X_0 \circ T^i)_{i \geq 0}$  telles que

- la fonction  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est bornée et symétrique,
- $h(X_0 \circ T^i, X_0 \circ T^j)$  est déterministe,
- il existe deux suites croissantes d'entiers  $(m_k)_{k \geq 1}$  et  $(n_k)_{k \geq 1}$  telles que  $U_{2, m_k}(h)/C_{m_k}^2$  (respectivement  $U_{2, n_k}(h)/C_{n_k}^2$ ) tende vers 1 (respectivement 0) presque sûrement.

Ceci montre qu'en général, et même sous l'hypothèse favorable d'un noyau borné, la  $U$ -statistique normalisée ne converge pas. Nous pouvons nous demander ce qu'il en est si nous retranchons un terme de centrage. Nous avons apporté une réponse partielle, c'est-à-dire sans supposer le noyau borné. Nous avons donné un exemple de suite strictement stationnaire  $(X_0 \circ T^i)_{i \geq 1}$  et de noyau  $h$  tel que pour tout  $j \geq 2$ ,  $h(X_1, X_j)$  est intégrable et  $(U_{2,n}(h) - \mathbb{E}[U_{2,n}(h)]) / C_n^2$  converge en loi vers une loi normale non dégénérée. Notons que dans cet exemple,  $\sup_{j \geq 2} \mathbb{E}[|h(X_1, X_j)|]$  est infini.

Ces deux exemples ont la structure commune suivante : la transformation  $T$  est définie sur l'intervalle unité muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue, par  $Tx = 2x \bmod 1$ . On note  $G_k$  le graphe de  $T^k$ , c'est-à-dire  $G_k = \{(x, y) \in [0, 1]^2, y = T^k x\}$ . Ensuite, nous définissons  $h$  par  $h(x, y) = \tilde{h}(x, y) + \tilde{h}(y, x)$ , où, dans le premier exemple,  $\tilde{h}(x, y) = 1$  si  $(x, y) \in \bigcup_{k \in I} G_k$ , où  $I \subset \mathbb{N}$  est un ensemble bien choisi. Dans le second exemple, la fonction est de la forme  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathbf{1}_{\{G_k\}}$  où les réels  $a_k$  sont adéquatement choisis. En revanche, aucun de ces exemples ne permet d'infirmer la conjecture suivant laquelle pour toute suite stationnaire ergodique  $(X_0 \circ T^i)_{i \geq 1}$  et toute fonction  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\sup_{j \geq 2} \mathbb{E}[|h(X_1, X_j)|]$  soit finie,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{C_n^2} (U_{2,n}(h) - \mathbb{E}[U_{2,n}(h)]) = 0 \text{ p.s..}$$

En effet, dans le premier exemple,  $h(X_i, X_j)$  est déterministe donc  $U_{2,n}(h) - \mathbb{E}[U_{2,n}(h)] = 0$  presque sûrement. Quant au second exemple, la condition  $\sup_{j \geq 2} \mathbb{E}[|h(X_1, X_j)|] < \infty$  n'est pas vérifiée.

Passons à présent aux résultats positifs. Nous traitons le cas de suites qui ne sont pas nécessairement ergodiques. Afin d'exprimer la limite de la  $U$ -statistique normalisée, nous aurons besoin de la définition suivante

$$\mu_\omega(A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X_0 \in A\}} | \mathcal{I}](\omega), A \in \mathcal{B}(S), \quad (3.2.1)$$

où  $\mathcal{I}$  désigne la tribu des invariants, c'est-à-dire, la tribu des ensembles  $E$  tels que  $T^{-1}E = E$ . Pour  $\omega \in \Omega$ , nous posons

$$I_m(S, h, \omega) := \int_{S^m} h(x_1, \dots, x_m) d\mu_\omega(x_1) \dots d\mu_\omega(x_m). \quad (3.2.2)$$

On définira également par  $I_m(S, h, \cdot)$  la variable aléatoire

$$I_m(S, h, \cdot) : \omega \mapsto I_m(S, h, \omega). \quad (3.2.3)$$

Notons que si  $T$  est ergodique, alors pour tout  $\omega$ ,  $\mu_\omega$  est la loi de  $X_0$  et pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $I_m(S, h, \omega) = \mathbb{E}\left[h\left(X_0^{(1)}, \dots, X_0^{(m)}\right)\right]$ , où  $X_0^{(1)}, \dots, X_0^{(m)}$  sont des variables aléatoires indépendantes ayant la même loi que  $X_0$ .

Le premier résultat présenté concerne la convergence presque sûre.

**Theorème 3.2.1.** *Soit  $(S, d)$  un espace métrique séparable, soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}} = (X_0 \circ T^i)_{i \in \mathbb{Z}}$  une suite strictement stationnaire à valeurs dans  $S$ . Supposons que  $h: S^m \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie les hypothèses suivantes :*

(C.1.1)  $h$  est symétrique, c'est-à-dire,  $h(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = h(x_1, \dots, x_m)$  pour tous  $x_1, \dots, x_m \in S$  et toute bijection  $\sigma: \llbracket 1, m \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$ ,

(C.1.2)  $h$  est bornée et

(C.1.3) pour presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $I_m(S, \mathbf{1}\{D(h)\}, \omega) = 0$ , où  $D(h)$  désigne l'ensemble des points de discontinuité de  $h$ .

Alors pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , la convergence suivante a lieu :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{C_n^m} U_{m,n}(h)(\omega) = I_m(S, h, \omega), \quad (3.2.4)$$

où  $I_m(S, h, \omega)$  est défini par (3.2.2).

L'idée de la démonstration consiste à utiliser la symétrie et le caractère borné de  $h$  afin de se ramener au cas où l'on somme  $h(X_i)$  sur le rectangle  $\llbracket 1, n \rrbracket^m$ . La convergence (3.2.4) (à  $\omega$  fixé) est vue comme une convergence en loi du produit de  $m$  fois la mesure empirique  $n^{-1} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i(\omega)}$ .

On peut déduire du Théorème 3.2.1 la convergence dans  $\mathbb{L}^p$ .

**Corollaire 3.2.2.** Soit  $(S, d)$  un espace métrique séparable, soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}} = (X_0 \circ T^i)_{i \in \mathbb{Z}}$  une suite strictement stationnaire à valeurs dans  $S$  et soit  $p \geq 1$ . Supposons que  $h: S^m \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie les hypothèses suivantes :

(C.2.1)  $h$  est symétrique,

(C.2.2) la famille  $\{|h(X_i)|^p, i \in \text{Inc}^m\}$  est uniformément intégrable.

(C.2.3) l'intégrale suivante est finie

$$\int_{\Omega} \int_{S^m} |h(x_1, \dots, x_m)|^p d\mu_{\omega}(x_1) \dots d\mu_{\omega}(x_m) d\mathbb{P}(\omega).$$

(C.2.4) pour presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $I_m(S, \mathbf{1}\{D(h)\}, \omega) = 0$ , où  $D(h)$  désigne l'ensemble des points de discontinuité de  $h$ .

Alors la convergence suivante a lieu :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{C_n^m} U_{m,n}(h) - I_m(S, h, \cdot) \right\|_p = 0,$$

où  $I_m(S, h, \cdot)$  est définie comme dans (3.2.3).

Nous formulons à présent un résultat ne faisant pas d'hypothèse sur les points de discontinuité du noyau  $h$ .

**Théorème 3.2.3.** Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}} = (X_0 \circ T^i)_{i \in \mathbb{Z}}$  une suite strictement stationnaire à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et soit  $p \geq 1$ . On suppose que  $h: (\mathbb{R}^d)^m \rightarrow \mathbb{R}$  et  $(X_0 \circ T^i)_{i \in \mathbb{Z}}$  vérifient les hypothèses suivantes :

(C.3.1) la famille  $\{|h(X_i)|^p, i \in \text{Inc}^m\}$  est uniformément intégrable.

(C.3.2) pour tout  $\mathbf{i} \in \text{Inc}^m$ , le vecteur  $(X_{\mathbf{i}})$  admet pour densité  $f_{\mathbf{i}}$  et il existe  $q_0 > 1$  tel que

$$M_1 := \sup_{\mathbf{i} \in \text{Inc}^m} \int_{(\mathbb{R}^d)^m} f_{\mathbf{i}}(t_1, \dots, t_m)^{q_0} dt_1 \dots dt_m < \infty.$$

(C.3.3) Pour presque tout  $\omega$ , la mesure  $\mu_{\omega}$  définie par (3.2.1) admet pour densité  $f_{\omega}$  par rapport à la mesure de Lebesgue et il existe un ensemble  $\Omega'$  de probabilité 1 et  $q_1 > 1$  pour lesquels

$$M_2 := \sup_{\omega \in \Omega'} \int_{\mathbb{R}^d} f_{\omega}(t)^{q_1} dt < \infty.$$

(C.3.4) l'intégrale suivante est finie

$$\int_{\Omega} \int_{(\mathbb{R}^d)^m} |h(x_1, \dots, x_m)|^p d\mu_{\omega}(x_1) \dots d\mu_{\omega}(x_m) d\mathbb{P}(\omega).$$

Alors la convergence suivante a lieu :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{C_n^m} U_{m,n}(h) - I_m(\mathbb{R}^d, h, \cdot) \right\|_p = 0, \quad (3.2.5)$$

où  $I_m(\mathbb{R}^d, h, \cdot)$  est définie comme dans (3.2.3).

L'idée consiste à approximer (dans  $\mathbb{L}^p$  pour la mesure de Lebesgue) une version tronquée et à support compact du noyau  $h$  par une combinaison linéaire de produits d'indicatrices de boréliens. Grâce à l'hypothèse sur les densités, cette approximation se transmet à la loi de  $X_{\mathbf{i}}$ . La démonstration lorsque  $h(x_1, \dots, x_m) = \prod_{\ell=1}^m \mathbf{1}\{x_{\ell} \in A_{\ell}\}$  est une conséquence d'itérations du théorème ergodique.

Mentionnons à présent quelques exemples où les résultats précédents peuvent être appliqués.

1. Soit  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  le noyau défini par

$$h(x_1, x_2, x_3) = \text{sgn}(2x_1 - x_2 - x_3) + \text{sgn}(2x_2 - x_1 - x_3) + \text{sgn}(2x_3 - x_1 - x_2),$$

où  $\text{sgn}(x)$  vaut 1 si  $x > 0$ ,  $-1$  si  $x < 0$  et  $\text{sgn}(0) = 0$ .

Le noyau  $h$  est utilisé afin de tester la symétrie d'une loi. Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}} = (X_0 \circ T^i)_{i \in \mathbb{Z}}$  une suite strictement stationnaire de variables aléatoires réelles telle que pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{P}(X_0 = x_0) = 0$ . Alors pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , la convergence

$$U_{3,n,h}(\omega) \rightarrow I_3(\mathbb{R}, h, \omega)$$

a lieu, où  $I_3(\mathbb{R}, h, \omega)$  est définie comme dans (3.2.2).

2. Étant donné un espace métrique séparable  $(S, d)$  et  $p \geq 1$ , nous définissons  $f: S^4 \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$f(z_1, z_2, z_3, z_4) = d(z_1, z_2) - d(z_1, z_3) - d(z_2, z_4) + d(z_3, z_4),$$

le noyau  $g: (S^2)^6 \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$g((x_1, y_1), \dots, (x_6, y_6)) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) f(y_1, y_2, y_5, y_6)$$

et sa version symétrisée

$$h((x_1, y_1), \dots, (x_6, y_6)) = \frac{1}{6!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_6} g((x_{\sigma(1)}, y_{\sigma(1)}), \dots, (x_{\sigma(6)}, y_{\sigma(6)})).$$

Ce noyau intervient lors du calcul de la distance de covariance, basé sur la norme dans un espace  $\mathbb{L}^2$  pondéré de la différence entre la fonction caractéristique empirique d'un couple de variables aléatoires et le produit des fonction caractéristiques empiriques marginales (voir les articles [47, 98, 114, 119, 163, 164]).

Soit  $((X_i, X'_i))_{i \in \mathbb{Z}} = ((X_0, X'_0) \circ T^i)_{i \in \mathbb{Z}}$  une suite strictement stationnaire à valeurs dans  $S^2$ , où la suite  $(X_0 \circ T^i)_{i \in \mathbb{Z}}$  est indépendante de  $(X'_0 \circ T^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ . Si  $\mathbb{E}[d(X_0, x_0)^p] + \mathbb{E}[d(X'_0, x_0)^p]$  est finie pour un certain (et donc pour tout)  $x_0 \in S$ , alors la convergence suivante a lieu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_{6,n,h} - I_6(S^2, h, \cdot)\|_p = 0,$$

où  $I_6(S^2, h, \cdot)$  est définie par

$$I_6(S^2, h, \omega) = \int_{S^6} h((x_1, y_1), \dots, (x_6, y_6)) d\mu_\omega(x_1, y_1) \dots d\mu_\omega(x_6, y_6)$$

et pour  $A \in \mathcal{B}(S^2)$ ,

$$\mu_\omega(A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}\{(X_0, X'_0) \in A\} | \mathcal{I}](\omega).$$

3. Donnons pour conclure un exemple où le Théorème 3.2.3 s'applique. Soit  $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable, soit  $p \geq 1$  et soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  une suite strictement stationnaire et gaussienne. On note  $\Sigma(i_1, \dots, i_m)$  la matrice de covariance du vecteur  $(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})$ . Si

$$\inf_{1 \leq i_1 < \dots < i_m} \det(\Sigma(i_1, \dots, i_m)) > 0,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\text{Cov}(X_0, X_i)| = 0 \text{ et}$$

$$\mathbb{E} \left[ \left| h(X_0^{(1)}, \dots, X_0^{(m)}) \right|^p \right] < \infty,$$

où  $X_0^{(1)}, \dots, X_0^{(m)}$  sont des copies indépendantes de  $X_0$  et que (C.3.1) soit vérifiée, alors la convergence (3.2.5) a lieu.

## 3.3 Inégalités de déviation pour des $U$ -statistiques de données i.i.d.

### 3.3.1 Queues à décroissance polynomiale

Dans l'article [Gir24a], nous nous sommes intéressés à des inégalités de déviation pour des  $U$ -statistiques de la forme (3.1.1).

**Théorème 3.3.1.** Soit  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$  un espace de Banach séparable  $r$ -lisse pour un certain  $r \in ]1, 2]$ . Soit  $(\xi_i)_{i \geq 1}$  une suite i.i.d. à valeurs dans l'espace mesurable  $(S, \mathcal{S})$ , soient  $h_i: S^m \rightarrow \mathbb{B}$  des applications dégénérées par rapport à  $(\xi_i)_{i \geq 1}$ , c'est-à-dire telles que pour tout  $\ell_0 \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,

$$\mathbb{E} [h_i (\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket}) \mid \xi_{\llbracket 1, m \rrbracket \setminus \{\ell_0\}}] = 0.$$

Alors l'inégalité suivante a lieu pour tout  $p \in \llbracket 1, r \rrbracket$  et tous  $t$  et  $q$  strictement positifs :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( \max_{m \leq n \leq N} \left\| \sum_{\mathbf{i} \in \text{Inc}_N^m} h_{\mathbf{i}} (\xi_{\mathbf{i}}) \right\|_{\mathbb{B}} > t \right) \leq K(m, p, q, \mathbb{B}) \sum_{\mathbf{i} \in \text{Inc}_N^m} \int_0^1 u^{q-1} \mathbb{P} (\|h_{\mathbf{i}} (\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket})\|_{\mathbb{B}} > tu) du \\ & + K(m, p, q, \mathbb{B}) \sum_{\emptyset \subsetneq J \subsetneq \llbracket 1, m \rrbracket} \sum_{\mathbf{i}_J \in \mathbb{N}^{J, m}} \int_0^1 u^{q-1} \mathbb{P} \left( \left( \sum_{\mathbf{i}_{J^c}: \mathbf{i}_J + \mathbf{i}_{J^c} \in \text{Inc}_N^m} \mathbb{E} [\|h_{\mathbf{i}_J + \mathbf{i}_{J^c}} (\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket})\|_{\mathbb{B}}^p \mid \xi_J] \right)^{1/p} > tu \right) du \\ & + K(m, p, q, \mathbb{B}) t^{-q} \left( \sum_{\mathbf{i} \in \text{Inc}_N^m} \mathbb{E} [\|h_{\mathbf{i}} (\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket})\|_{\mathbb{B}}^p] \right)^{q/p}, \quad (3.3.1) \end{aligned}$$

où  $K(m, p, q, \mathbb{B})$  ne dépend que de  $m, p, q$  et  $\mathbb{B}$ ,  $\mathbb{N}^{J, m} = \left\{ \sum_{j \in J} i_j \mathbf{e}_j \right\}$  et  $\mathbf{e}_j$  est le vecteur de  $\mathbb{R}^m$  où la seule composante non nulle est en position  $j$ .

Lorsque  $m = 2$ , le Théorème 3.3.1 s'exprime plus simplement sous la forme suivante. Si  $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  est une suite i.i.d. à valeurs dans l'espace mesurable  $(S, \mathcal{S})$  et  $h_{i_1, i_2}: S^2 \rightarrow \mathbb{B}$  est telle que pour tous  $i_1 < i_2$ ,

$$\mathbb{E} [h_{i_1, i_2} (\xi_1, \xi_2) \mid \xi_1] = \mathbb{E} [h_{i_1, i_2} (\xi_1, \xi_2) \mid \xi_2] = 0,$$

alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( \max_{2 \leq n \leq N} \left\| \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} h_{i_1, i_2} (\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) \right\|_{\mathbb{B}} > t \right) \\ & \leq K(2, p, q, \mathbb{B}) \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq N} \int_0^1 u^{q-1} \mathbb{P} (\|h_{i_1, i_2} (\xi_1, \xi_2)\|_{\mathbb{B}} > tu) du \\ & + K(2, p, q, \mathbb{B}) \sum_{i_1=1}^{N-1} \int_0^1 u^{q-1} \mathbb{P} \left( \left( \sum_{i_2=i_1+1}^N \mathbb{E} [\|h_{i_1, i_2} (\xi_1, \xi_2)\|_{\mathbb{B}}^p \mid \xi_1] \right)^{1/p} > tu \right) du \\ & + K(2, p, q, \mathbb{B}) \sum_{i_2=2}^N \int_0^1 u^{q-1} \mathbb{P} \left( \left( \sum_{i_1=1}^{i_2-1} \mathbb{E} [\|h_{i_1, i_2} (\xi_1, \xi_2)\|_{\mathbb{B}}^p \mid \xi_2] \right)^{1/p} > tu \right) du \\ & + K(2, p, q, \mathbb{B}) t^{-q} \left( \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq N} \mathbb{E} [\|h_{i_1, i_2} (\xi_1, \xi_2)\|_{\mathbb{B}}^p] \right)^{q/p}. \end{aligned}$$

Lorsque les noyaux  $h_{\mathbf{i}}$  ne dépendent pas de  $\mathbf{i}$ , le résultat du Théorème 3.3.1 s'écrit sous la forme plus simple suivante.

**Corollaire 3.3.2.** Soit  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$  un espace de Banach séparable  $r$ -lisse pour un certain  $r \in ]1, 2]$ . Soit  $(\xi_i)_{i \geq 1}$  une suite i.i.d. à valeurs dans l'espace mesurable  $(S, \mathcal{S})$ , soit  $h: S^m \rightarrow \mathbb{B}$  une application dégénérée par rapport à  $(\xi_i)_{i \geq 1}$ , c'est-à-dire, pour tout  $\ell_0 \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,

$$\mathbb{E} [h(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket}) \mid \xi_{\llbracket 1, m \rrbracket \setminus \{\ell_0\}}] = 0. \quad (3.3.2)$$

L'inégalité suivante a lieu pour tout  $p \in ]1, r]$  et tous  $t$  et  $q$  positifs :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \max_{m \leq n \leq N} \left\| \sum_{i \in \text{Inc}_n^m} h(\xi_i) \right\|_{\mathbb{B}} > t \right) \\ \leq K(m, p, q, \mathbb{B}) N^m \int_0^1 u^{q-1} \mathbb{P} (\|h(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket})\|_{\mathbb{B}} > tu) du \\ + K(m, p, q, \mathbb{B}) \sum_{\emptyset \subsetneq J \subsetneq \llbracket 1, m \rrbracket} N^{|J|} \int_0^1 u^{q-1} \mathbb{P} \left( N^{\frac{m-|J|}{p}} (\mathbb{E} [\|h(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket})\|_{\mathbb{B}}^p \mid \xi_{\ell}, \ell \in J])^{1/p} > tu \right) du \\ + K(m, p, q, \mathbb{B}) t^{-q} N^{mq/p} (\mathbb{E} [\|h(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket})\|_{\mathbb{B}}^p])^{q/p}, \end{aligned}$$

où  $K(m, p, q, \mathbb{B})$  ne dépend que de  $m, p, q$  et  $\mathbb{B}$ .

Afin de traiter le cas non-nécessairement dégénéré, nous allons introduire les notions suivantes.

**Définition 3.3.3.** On dit que le noyau  $h: S^m \rightarrow \mathbb{B}$  est symétrique si pour toute bijection  $\sigma: \llbracket 1, m \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$  et tous  $x_1, \dots, x_m \in S$ ,

$$h(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = h(x_1, \dots, x_m).$$

**Définition 3.3.4.** Soit  $d \in \llbracket 1, m \rrbracket$  et soit  $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  une suite i.i.d. à valeurs dans  $S$ . Le noyau symétrique  $h: S^m \rightarrow \mathbb{B}$  est dit dégénéré d'ordre  $d$  par rapport à  $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  si

$$\mathbb{E} [h(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket}) \mid \xi_{\llbracket 1, d-1 \rrbracket}] = 0 \text{ p.s. et } \mathbb{E} [\|\mathbb{E} [h(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket}) \mid \xi_{\llbracket 1, d \rrbracket}]\|_{\mathbb{B}}] \neq 0.$$

Par exemple,  $h(x_1, \dots, x_m) = \sum_{I \subset \llbracket 1, m \rrbracket, \text{Card}(I)=d} \prod_{i \in I} x_i$  est dégénéré d'ordre  $d$  par rapport à toute suite i.i.d. centrée  $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ . Si  $h$  est dégénéré d'ordre  $d$  par rapport à  $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , il est possible d'écrire

$$\sum_{i \in \text{Inc}_n^m} h(\xi_i) = C_n^m \sum_{c=d}^m \frac{C_m^c}{C_n^c} \sum_{i \in \text{Inc}_n^c} h^{(c)}(\xi_i),$$

où

$$h^{(c)}(x_1, \dots, x_c) = \sum_{k=0}^c (-1)^{c-k} \sum_{i \in \text{Inc}_c^k} \mathbb{E} [h(x_i, \xi_{\llbracket 1, m-k \rrbracket})].$$

En d'autres termes, la  $U$ -statistique de noyau  $h$  peut s'écrire comme une somme pondérée de  $(m-d+1)$   $U$ -statistiques d'ordre inférieur ou égal, et chacune d'entre elle est dégénérée. Il est alors possible de déduire du cas dégénéré l'inégalité suivante dans le cas symétrique.

**Corollaire 3.3.5.** Soit  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$  un espace de Banach séparable  $r$ -lisse pour un certain  $r \in ]1, 2]$ . Soit  $(\xi_i)_{i \geq 1}$  une suite i.i.d. à valeurs dans un espace mesurable  $(S, \mathcal{S})$ , soit  $h: S^m \rightarrow \mathbb{B}$  un noyau symétrique qui est dégénéré d'ordre  $d$  par rapport à  $(\xi_i)_{i \geq 1}$ . Posons

$$H_p := \max_{k \in \llbracket 0, m \rrbracket} \left( \mathbb{E} \left[ \|h(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket})\|_{\mathbb{B}}^p \mid \xi_{\llbracket 1, k \rrbracket} \right] \right)^{1/p}.$$

L'inégalité suivante a lieu pour tout  $p \in ]1, r]$  et tous  $t$  et  $q$  positifs :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \max_{m \leq n \leq N} \left\| \sum_{i \in \text{Inc}_n^m} h(\xi_i) \right\|_{\mathbb{B}} > t N^{m-d+\frac{d}{p}} \right) \\ \leq K(m, p, q, \mathbb{B}) \sum_{j=0}^m N^j \int_0^1 u^{q-1} \mathbb{P} \left( H_p > t N^{(\max\{d, j\}-d)\frac{p-1}{p} + \frac{j}{p}} u \right) du. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Remarquons que le terme d'indice  $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$  dans le membre de droite de (3.3.3) est de la forme  $N^j \int_0^1 u^{q-1} \mathbb{P} \left( H_p > t N^{\frac{j}{p}} u \right) du$ , qui est indépendant de  $N$  pour  $j = 0$  et pour  $j \in \llbracket d+1, m \rrbracket$ , le terme correspondant est  $N^j \int_0^1 u^{q-1} \mathbb{P} \left( H_p > t N^{j-d+d/p} u \right) du$ . Tous ces termes apportent une contribution différente et non aisément comparable.

Il est également possible de déduire du Théorème 3.3.1 une inégalité de moments.

**Corollaire 3.3.6.** Soit  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$  un espace de Banach séparable  $r$ -lisse pour un certain  $r \in ]1, 2]$ . Soit  $(\xi_i)_{i \geq 1}$  une suite i.i.d. à valeurs dans un espace mesurable  $(S, \mathcal{S})$ , soit  $h_i: S^m \rightarrow \mathbb{B}$  des noyaux dégénérés par rapport à  $(\xi_i)_{i \geq 1}$ . Pour tout  $q \geq p$ , l'inégalité suivante a lieu :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \max_{m \leq n \leq N} \left\| \sum_{i \in \text{Inc}_n^m} h_i(\xi_i) \right\|_{\mathbb{B}}^q \right] &\leq K(m, p, q, \mathbb{B}) \sum_{i \in \text{Inc}_N^m} \mathbb{E} \left[ \|h_i(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket})\|_{\mathbb{B}}^q \right] \\ &+ K(m, p, q, \mathbb{B}) \sum_{\emptyset \subsetneq J \subsetneq \llbracket 1, m \rrbracket} \sum_{i_J \in \mathbb{N}^J} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i_{J^c}: i_J + i_{J^c} \in \text{Inc}_N^m} \mathbb{E} \left[ \|h_{i_J + i_{J^c}}(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket})\|_{\mathbb{B}}^p \mid \xi_{\ell}, \ell \in J \right] \right)^{q/p} \right] \\ &+ K(m, p, q, \mathbb{B}) \left( \sum_{i \in \text{Inc}_N^m} \mathbb{E} \left[ \|h_i(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket})\|_{\mathbb{B}}^p \right] \right)^{q/p}. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$



Si  $m = 2$ , (3.3.4) s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \max_{2 \leq n \leq N} \left\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} h_{i,j}(\xi_i, \xi_j) \right\|_{\mathbb{B}}^q \right] &\leq K(2, p, q, \mathbb{B}) \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbb{E} [\|h_{i,j}(\xi_1, \xi_2)\|_{\mathbb{B}}^q] \\
&+ K(2, p, q, \mathbb{B}) \sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=i+1}^N \mathbb{E} [\|h_{i,j}(\xi_1, \xi_2)\|_{\mathbb{B}}^p \mid \xi_1] \right)^{q/p} \right] \\
&+ K(2, p, q, \mathbb{B}) \sum_{j=2}^N \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{E} [\|h_{i,j}(\xi_1, \xi_2)\|_{\mathbb{B}}^p \mid \xi_2] \right)^{q/p} \right] \\
&+ K(2, p, q, \mathbb{B}) \left( \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbb{E} [\|h_{i,j}(\xi_1, \xi_2)\|_{\mathbb{B}}^p] \right)^{q/p}. \quad (3.3.5)
\end{aligned}$$

En particulier, pour  $q = p$ , (3.3.4) se réécrit : pour  $1 < p \leq r$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \max_{m \leq n \leq N} \left\| \sum_{i \in \text{Inc}_n^m} h_i(\xi_i) \right\|_{\mathbb{B}}^p \right] \leq K(m, p, \mathbb{B}) \sum_{i \in \text{Inc}_N^m} \mathbb{E} [\|h_i(\xi_{[1,m]})\|_{\mathbb{B}}^p].$$

Enfin, si  $h_i = h$  et (3.3.2) a lieu, alors

$$\mathbb{E} \left[ \max_{m \leq n \leq N} \left\| \sum_{i \in \text{Inc}_n^m} h(\xi_i) \right\|_{\mathbb{B}}^p \right] \leq K(m, p, \mathbb{B}) N^m \mathbb{E} [\|h(\xi_{[1,m]})\|_{\mathbb{B}}^p].$$

L'inégalité (3.3.1) permet de déduire une inégalité dans l'esprit de celle de Rosenthal pour des moments faibles d'ordre  $q$ . Pour une variable aléatoire  $Y$  à valeurs dans un espace de Banach  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$  et  $q > 1$ , nous posons

$$\|Y\|_{\mathbb{B}, q, w} := \left( \sup_{t > 0} t^q \mathbb{P}(\|Y\|_{\mathbb{B}} > t) \right)^{1/q}.$$

En appliquant (3.3.1) avec  $q$  remplacé par  $q+1$ , on obtient, sous les hypothèses du Théorème 3.3.1,

$$\begin{aligned}
\left\| \max_{m \leq n \leq N} \left\| \sum_{i \in \text{Inc}_n^m} h_i(\xi_i) \right\|_{\mathbb{B}} \right\|_{\mathbb{R}, q, w}^q &\leq K(m, p, q, \mathbb{B}) \sum_{i \in \text{Inc}_N^m} \|h_i(\xi_{[1,m]})\|_{\mathbb{B}, q, w}^q \\
&+ K(m, p, q, \mathbb{B}) \sum_{\emptyset \subsetneq J \subsetneq [1,m]} \sum_{i_J \in \mathbb{N}^J} \left\| \left( \sum_{i_{J^c}: i_J + i_{J^c} \in \text{Inc}_N^m} \mathbb{E} [\|h_{i_J + i_{J^c}}(\xi_{[1,m]})\|_{\mathbb{B}}^p \mid \xi_\ell, \ell \in J] \right)^{1/p} \right\|_{\mathbb{R}, q, w}^q \\
&+ K(m, p, q, \mathbb{B}) \left( \sum_{i \in \text{Inc}_N^m} \mathbb{E} [\|h_i(\xi_{[1,m]})\|_{\mathbb{B}}^p] \right)^{q/p}.
\end{aligned}$$

Dans tous les résultats précédents, la dépendance des constantes du type  $K(m, p, q, \mathbb{B})$  par rapport à  $\mathbb{B}$  se fait en réalité au travers de la constante  $C_{p, \mathbb{B}}$  définie comme dans (2.2.3).

Établissons à présent un lien entre les résultats précédents et d'autres existants dans la littérature.

- Dans [125], une inégalité de type Rosenthal pour des  $U$ -statistiques à valeurs dans l'espace des matrices hermitiennes a été obtenue. Le majorant obtenu pour de telles  $U$ -statistiques a des constantes explicites et les termes dans l'esprit du membre de droite de (3.3.5) mettent en jeu les moments d'ordre  $q$  du maximum sur  $i$  au lieu de la somme des moments. Cependant, notre résultat est valable pour des variables aléatoires à valeurs vectorielles ainsi que des  $U$ -statistiques de tout ordre.
- Dans [2], une inégalité de moments pour des  $U$ -statistiques à valeurs dans un espace de Banach séparable est fournie. D'une part, les hypothèses sur l'espace de Banach (aucune dans leur Théorème 1, de type 2 dans le Théorème 2) sont moins restrictives que les nôtres et les constantes sont explicites. Les bornes sont formulées en termes de moments de variables aléatoires dont l'expression est moins explicite que celle mise en jeu dans le membre de droite de (3.3.4). De plus, nous discutons le cas où la variable aléatoire  $\|h_i(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket})\|_{\mathbb{B}}$  n'admet pas nécessairement un moment d'ordre 2 fini. Par conséquent, nos résultats complètent ceux de [2]. Une inégalité de moments dans le même esprit a été obtenue dans [73].
- Dans [36], une inégalité de moments pour des  $U$ -statistiques de noyaux positifs est établie. Comme mentionné par les auteurs dans leur Remarque 6, page 982, une inégalité de type Rosenthal peut être obtenue mais ne semble pas comparable à la nôtre.
- Des inégalités de type Rosenthal ont également été obtenues dans [92] pour des  $U$ -statistiques d'ordre 2 à valeurs réelles, alors que la nôtre traite le cas vectoriel et des  $U$ -statistiques de tout ordre. Cependant, ils ne supposent pas que les variables aléatoires  $(\xi_i)_{i \geq 1}$  aient la même loi.

### 3.3.2 Queues à décroissance exponentielle

On considère une  $U$ -statistique de la forme (3.1.2), où  $h$  est à valeurs réelles et  $(\xi_i)_{i \geq 1}$  est i.i.d.. Une question importante consiste à formuler une inégalité de déviation, c'est-à-dire à contrôler la probabilité

$$\mathbb{P} \left( \max_{m \leq n \leq N} |U_{m, n}(h)| > x \right)$$

pour un certain  $x > 0$  fixé, à l'aide d'un terme exponentiel et un autre mettant en jeu la queue de  $|h(\xi_1, \dots, \xi_m)|$ . On cherche à utiliser des propriétés de martingales. Celles-ci peuvent ne pas avoir lieu en général. L'hypothèse suivante est faite : pour tout  $\ell_0 \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,

$$\mathbb{E} [h(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket}) \mid \xi_{\llbracket 1, m \rrbracket \setminus \{\ell_0\}}] = 0. \tag{3.3.6}$$

Le résultat principal de [Gir21a] est le suivant.

**Theorème 3.3.7.** Soient  $m \geq 1$  un entier,  $(S, \mathcal{S})$  un espace mesurable,  $h: S^m \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable (où  $S^r$  est muni de la tribu produit) et  $(\xi_i)_{i \geq 1}$  une suite i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans  $S$ . Supposons que (3.3.6) a lieu pour tout  $\ell_0 \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . Alors l'inégalité suivante a lieu pour tous  $x$  et  $y$  tels que  $x/y > 3^m$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \max_{m \leq n \leq N} |U_{m,n}(h)| > N^{m/2} x \right) &\leq A_m \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{x}{y} \right)^{\frac{2}{m}} \right) \\ &+ B_m \int_1^{+\infty} \mathbb{P} (|h(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket})| > y u^{1/2} C_m) (1 + \log(u))^{q_m} du, \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

où

$$\begin{aligned} A_m &:= 4(1 - 2^{-m}) \\ B_m &:= 2 \prod_{i=1}^m \frac{2^{i-1}}{\kappa_{i-1}} \left( 1 + \log \frac{\kappa_{2(i-1)}}{\kappa_{i-1}} \right)^{i-1}, \end{aligned}$$

la constante  $\kappa_q$  est définie pour  $q > 0$  par

$$\kappa_q := \begin{cases} 1 & \text{si } q \leq 1, \\ e^{q-1}/q^q & \text{si } q > 1; \end{cases}$$

$$C_m := 4^{-m/2} \prod_{i=1}^m \kappa_{i-1}^{1/2}$$

et

$$q_m := \frac{(m-1)m}{2}.$$

Le résultat ainsi que la démonstration de (3.3.7) ressemblent en de nombreux points à ceux de l'inégalité (2.2.12). Ceci est dû au fait qu'une  $U$ -statistique découplée et dégénérée forme un champ de type AOM. Lorsque la  $U$ -statistique n'est pas nécessairement dégénérée, la décomposition d'Hoeffding permet de déduire l'inégalité suivante.

**Corollaire 3.3.8.** Soient  $m \geq 1$  un entier,  $(S, \mathcal{S})$  un espace mesuré,  $h: S^m \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable (où  $S^m$  est muni de la tribu produit) et soit  $(\xi_i)_{i \geq 1}$  une suite i.i.d. à valeurs dans  $S$ . Si  $h$  est dégénérée d'ordre  $d \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , alors pour tous  $x, y > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \max_{r \leq n \leq N} |U_{m,n}(h)| > N^{m-\frac{d}{2}} x \right) &\leq A_m \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{x}{y} \right)^{\frac{2}{i}} \right) \\ &+ B_m \sum_{k=d}^m \int_1^{+\infty} \mathbb{P} \left( |\mathbb{E} [h(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket}) \mid \xi_{\llbracket 1, k \rrbracket}]| > y N^{\frac{k-d}{2}} u^{1/2} C_m \right) (1 + \log(u))^{q_k} du, \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

où  $q_k = \frac{(k-1)k}{2}$  et les constantes  $A_m$ ,  $B_m$  et  $C_m$  ne dépendent que de  $m$ .

Voici quelques commentaires sur cette inégalité exponentielle. Tout d'abord, le membre de droite de (3.3.7) se comporte comme  $\mathbb{E}[Y^2 \log(1+Y)^{q_m} \mathbf{1}\{Y > 1\}]$ , où  $Y = |h(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket})|/y$ . En particulier, l'inégalité (3.3.7) n'est utile que si  $\mathbb{E}[Y^2 \log(1+Y)^{q_m}]$  est finie, ce qui doit de toute façon être le cas pour espérer une borne exponentielle. Deuxièmement, la Proposition 2.3 dans [3] donne aussi une inégalité exponentielle lorsque  $h$  est bornée. Dans ce cas, le Théorème 3.3.7 donne un résultat similaire aux constantes près.

Plus  $y$  est grand, plus le premier terme du membre de droite de (3.3.7) est grand et plus le second est petit. Dans les applications,  $x$  sera imposé et il faudra choisir  $y$  de manière appropriée.

De plus, le membre de droite de (3.3.7) est indépendant de  $N$ . Par conséquent, appliquer le Théorème 3.3.7 en remplaçant la normalisation  $N^{m/2}$  par une plus forte permet d'obtenir une vitesse de convergence en  $N$ .

Cependant, notre inégalité n'est pas suffisante pour déduire une loi des logarithmes itérés bornée. En effet, il faudrait montrer la convergence de  $\sum_{N \geq m} \mathbb{P}(\max_{m \leq n \leq 2^N} |U_n| > 2^{N^{m/2}} a \sqrt{\log N})$ , ce qui impose le choix  $x = a \sqrt{\log N}$  pour chaque  $N$  puis le choix de  $y$  imposerait la finitude de moments exponentiels de  $|h(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket})|$ , qui serait sous-optimale.

L'article [171] donne une borne pour des moments exponentiels, avec des hypothèses de la forme  $\mathbb{E}[\exp(|h(\xi_i)|^\gamma)] < \infty$ , mais avec la restriction  $0 < \gamma < 2$ , qui n'est pas présente dans notre cas. Mentionnons également quelques références donnant des inégalités exponentielles pour les  $U$ -statistiques dont le noyau est borné [6, 18, 30] et lorsque le noyau varie avec l'indice  $i$  [73, 89, 115], avec des noyaux uniformément bornés. Le cas dépendant a été traité dans [21, 56, 83, 161].

### 3.3.3 Applications

Mentionnons tout d'abord une conséquence de l'inégalité de moments (3.3.4) aux  $U$ -statistiques dites incomplètes. Leur raison d'être vient du fait que le calcul d'une  $U$ -statistique d'ordre  $m$  basée sur un échantillon de  $m$  éléments nécessite  $C_n^m$  termes, ce qui peut être contraignant dans la pratique. C'est pour cette raison que Blom a introduit dans [20] le concept de  $U$ -statistique incomplète. L'idée est de mettre devant  $h(\xi_i)$  un poids aléatoire prenant la valeur 0 ou 1, qui peut être défini de la manière suivante :

- échantillonnage sans remplacement :  $N$   $m$ -uplets de la forme  $\mathbf{i} = (i_\ell)_{\ell \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  où  $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$  sont choisis sans remplacement.
- échantillonnage avec remplacement :  $N$   $m$ -uplets de la forme  $\mathbf{i} = (i_\ell)_{\ell \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  où  $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$  sont choisis avec remplacement.
- échantillonnage de Bernoulli : pour chaque  $\mathbf{i} = (i_\ell)_{\ell \in \llbracket 1, m \rrbracket} \in \text{Inc}_n^m$ , soit  $Z_{n; \mathbf{i}}$  une variable aléatoire prenant la valeur 1 avec probabilité  $p_n$  et 0 avec probabilité  $1 - p_n$ . De plus, la suite  $(Z_{n; \mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \text{Inc}_n^m}$  est indépendante et également indépendante de la suite  $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ .

La convergence en loi de  $U$ -statistiques incomplètes a été établie dans [93]. Des vitesses de convergence dans la loi des grands nombres ont été obtenues dans [128]. Mentionnons également quelques contributions récentes aux  $U$ -statistiques incomplètes dans le cadre de la grande dimension dans [29] et basée sur un tableau de variables aléatoires dans [113].

Il s'avère que notre inégalité s'applique plus aisément dans le cadre de l'échantillonnage de Bernoulli. En effet, après avoir appliqué le Théorème 3.3.1, nous serons amenés à contrôler les moments de variables aléatoires de la forme  $\sum Z_{n;i}^p$ , où la somme porte sur des indices  $i_k, k \in K$  et  $K \subset \llbracket 1, m \rrbracket$ . Ceci peut se faire grâce à des inégalités de moments pour des variables aléatoires positives, voir le Corollaire 3 dans [103]. Posons

$$U_{m,n}^{\text{inc}}(h) = \sum_{i \in \text{Inc}_n^m} Z_{n;i} h(\xi_i), \quad (3.3.9)$$

où la famille  $(Z_{n;i})_{i \in \text{Inc}_n^m}$  est i.i.d., indépendante de  $(\xi_i)_{i \geq 1}$ , et  $Z_{n;i}$  prend la valeur 1 (respectivement 0) avec probabilité  $p_n$  (respectivement  $1 - p_n$ ).

**Théorème 3.3.9.** *Soient  $m \geq 2$  un entier,  $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  une suite i.i.d. à valeurs dans un espace mesurable  $(S, \mathcal{S})$ , soit  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$  un espace de Banach séparable  $r$ -lisse et soit  $h: S^m \rightarrow \mathbb{B}$  une fonction symétrique qui est dégénérée d'ordre  $d$  par rapport à  $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ . Soit  $(Z_{n;i})_{i \in \text{Inc}_n^m}$  une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi de Bernoulli de paramètre  $p_n$ , qui est indépendante de  $(\xi_i)_{i \geq 1}$ . Soit  $U_{m,n}^{\text{inc}}(h)$  définie comme dans (3.3.9). L'inégalité suivante a lieu :*

$$\mathbb{E} [\|U_n^{\text{inc}}\|_{\mathbb{B}}^q] \leq C_{\mathbb{B},m,p,q} (n^{q(m-d)+dq/p} p_n^q + n^{mq/p} p_n^{q/p} + n^m p_n) \mathbb{E} [\|h(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket})\|_{\mathbb{B}}^q], \quad (3.3.10)$$

où la constante  $C_{\mathbb{B},m,p,q}$  ne dépend que de  $\mathbb{B}$ ,  $m$ ,  $p$  et  $q$ .

Notons que  $d$  n'apparaît que dans le premier terme du membre de droite de (3.3.10). Si  $d = m$ , le second terme du membre de droite de (3.3.10) domine le premier. Si  $n^m p_n \leq 1$ , alors  $n^{mq/p} p_n^{q/p} \leq n^m p_n$ , car  $q \geq p$ .

Dans [60], une inégalité de moments pour des  $U$ -statistiques incomplètes à valeurs réelles a été établie. Elles ne sont pas supposées dégénérées, seulement centrées ce qui correspond à  $d = 1$ . La norme  $\mathbb{L}^1$  de la  $U$ -statistique est contrôlée.

### Vitesse de convergence dans la loi forte des grands nombres

Depuis l'article fondateur d'Hoeffding, nous savons que si  $(\xi_i)_{i \geq 1}$  est i.i.d. et que  $\mathbb{E} [\|h(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket})\|] < \infty$ , alors  $U_{m,n}(h) \rightarrow \mathbb{E} [h(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket})]$  presque sûrement. Giné et Zinn ont montré dans [74] que pour une  $U$ -statistique dégénérée d'ordre  $m$  à valeurs réelles, la condition  $h(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket}) \in \mathbb{L}^p$ ,  $1 \leq p < 2$  est suffisante pour la convergence presque sûre de  $n^{-m/p} U_{m,n}(h)$  vers 0. Les auteurs ont également traité le cas non-nécessairement dégénéré ainsi que la convergence des moments (qui a été discutée dans [185, 186]).

Des vitesses de convergence dans la loi des grands nombres ont été obtenues dans [97, 110].

**Théorème 3.3.10.** *Soit  $m \geq 2$  un entier, soit  $(\xi_i)_{i \geq 1}$  une suite i.i.d. à valeurs dans un espace mesurable  $(S, \mathcal{S})$ , et soit  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$  un espace de Banach séparable  $r$ -lisse pour un certain  $r \in ]1, 2]$ . Soit  $h: S^m \rightarrow \mathbb{B}$  une fonction symétrique mesurable et dégénérée d'ordre  $d$ . Pour  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , nous définissons la variable aléatoire*

$$H_{j,r} := \left( \mathbb{E} [\|h(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket})\|_{\mathbb{B}}^r | \xi_{\llbracket 1, j \rrbracket}] \right)^{1/r}.$$

Soit  $0 < \alpha < (r - 1) d/r$ . Si pour chaque  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,

$$H_{j,r} \in \mathbb{L}^{q(d,j,\gamma,r)}, \text{ où } q(d,j,\gamma,r) := \frac{\gamma + j + 1}{\max\{d,j\} \frac{r-1}{r} - \alpha + j/r},$$

alors pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\sum_{N=1}^{\infty} N^\gamma \mathbb{P} \left( \sup_{n \geq N} n^\alpha \frac{1}{C_n^m} \|U_{m,n}(h)\|_{\mathbb{B}} > \varepsilon \right) < \infty.$$

Pour les moments exponentiels, nous avons obtenu le résultat suivant.

**Theorème 3.3.11.** Soient  $(S, \mathcal{S})$  un espace mesurable,  $h: S^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $m \geq 2$  une fonction symétrique et soit  $(\xi_i)_{i \geq 1}$  une suite i.i.d. à valeurs dans  $S$ . On suppose que  $h$  est dégénérée d'ordre  $d \in \llbracket 2, r \rrbracket$ . S'il existe  $\gamma > 0$  telle que  $M := \sup_{t > 0} \exp(t^\gamma) \mathbb{P}(|h(\xi_{\llbracket 1, m \rrbracket})| > t)$  est finie, alors pour tout  $x > 0$ ,

$$\mathbb{P} \left( \max_{m \leq n \leq N} |U_{m,n}(h)| > N^m x \right) \leq K_1 \exp \left( -K_2 N^{\frac{d\gamma}{2+d\gamma}} x^{\frac{2\gamma}{2+d\gamma}} \right),$$

où  $K_1$  et  $K_2$  ne dépendent que de  $\gamma$  et  $M$ .

### Theorème limite central fonctionnel dans des espaces de Hölder

Étant donnée une  $U$ -statistique avec noyau fixé  $h: S^m \rightarrow \mathbb{R}$ , nous lui associons un processus sommes partielles par

$$\mathcal{U}_{n,h}(t) = \sum_{i \in \text{Inc}_{[nt]}^m} h(\xi_i), \quad t \in [0, 1].$$

Dans [117], la convergence en loi dans l'espace de Skorohod  $D[0, 1]$  du processus  $(n^{-m/2} \mathcal{U}_{n,h})_{n \geq m}$  est étudiée. Dans le Corollaire 1, il est montré que si  $U_{m,n}$  est dégénérée d'ordre  $d$ ,  $d \in \llbracket 2, m \rrbracket$ , alors  $(n^{-d/2} \mathcal{U}_{n,h})_{n \geq r}$  converge en loi vers un processus  $I_d(h_d)$  défini par

$$I_d(h_d)(t) = \int \cdots \int h_d(x_1, \dots, x_d) \mathbf{1}_{[0,t]}(u_1) \cdots \mathbf{1}_{[0,t]}(u_d) W(dx_1, du_1) \cdots W(dx_d, du_d), \quad (3.3.11)$$

où  $W$  est une mesure gaussienne (voir les appendices A.1 et A.2 de l'article [117]). Pour  $d = 2$ , le processus limite a pour expression  $\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j (B_j^2(t) - t)$ , où  $(B_j(\cdot))_{j \geq 1}$  est une suite de mouvements browniens standards indépendants et  $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2$  est finie. Les trajectoires de  $I_d(h_d)(\cdot)$  sont höldériennes, mais celles de  $t \mapsto \mathcal{U}_{n,h}(t)$  ne le sont pas. Pour cette raison, nous considérons l'interpolation linéaire, notée  $\mathcal{U}_{n,h}^{\text{pl}}$  et définie par

$$\mathcal{U}_{m,n,h}^{\text{pl}}(t) = \begin{cases} \sum_{i \in \text{Inc}_k^m} h(\xi_i) & \text{si } t = \frac{k}{n} \text{ pour un certain } k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \\ \text{interpolation linéaire} & \text{sur } ]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[ , k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket. \end{cases} \quad (3.3.12)$$

On peut alors étudier la convergence en loi de  $(\mathcal{U}_{m,n,h}^{\text{pl}}(t))_{n \geq m}$  dans des espaces de Hölder. Nous donnerons des résultats pour des espaces de Hölder associés à des modules de régularité de la

forme  $\rho_{\alpha,\beta}: t \mapsto t^\alpha (\log(c/t))^\beta$ , où  $c$  est une constante telle que  $\rho_{\alpha,\beta}$  soit croissante. Soit  $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$  l'espace des fonctions höldériennes sur  $[0, 1]$ , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions  $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\|x\|_{\alpha,\beta} := |x(0)| + \sup_{s,t \in [0,1], s < t} \frac{|x(s) - x(t)|}{\rho_{\alpha,\beta}(s-t)} < \infty.$$

Comme  $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$  muni de la norme  $\|x\|_{\alpha,\beta}$  n'est pas séparable, il sera préférable de travailler sur le sous-espace séparable

$$\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^o := \left\{ x \in \mathcal{H}_{\alpha,\beta}, \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{s,t \in [0,1], 0 < s-t < \delta} \frac{|x(s) - x(t)|}{\rho_{\alpha,\beta}(s-t)} = 0 \right\}.$$

Comme pour les champs aléatoires, nous avons à disposition un critère de tension pour des processus de la forme (3.3.12), qui peut se vérifier grâce aux inégalités de déviation obtenues, et qui s'exprime sous la forme suivante.

**Proposition 3.3.12.** *Soit  $(Y_j)_{j \geq 1}$  une suite de variables aléatoires. Soit  $W_n$  le processus sommes partielles défini par*

$$W_n(t) := \frac{1}{a_n} \left( \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} Y_i + (nt - \lfloor nt \rfloor) Y_{\lfloor nt \rfloor + 1} \right). \quad (3.3.13)$$

On suppose que pour tout  $\varepsilon > 0$ , la convergence suivante a lieu

$$\lim_{J \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=J}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \sum_{k=0}^{2^j - 1} \mathbb{P}(|S_{\lfloor n(k+1)2^{-j} \rfloor} - S_{\lfloor nk2^{-j} \rfloor}| > a_n \varepsilon \rho(2^{-j})) = 0,$$

où  $S_N := \sum_{i=1}^N Y_i$  et  $(a_n)_{n \geq 1}$  est une suite strictement croissante qui tend vers l'infini et telle que  $\sup_{n \geq 1} a_{2n}/a_n$  est fini. Alors la suite  $(W_n(\cdot))_{n \geq 1}$  définie par (3.3.13) est équi-tendue dans  $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^o$ .

Dans l'article [Gir24a], nous avons montré que si  $h$  est dégénérée d'ordre  $d$  et que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p(\alpha)} \mathbb{P}(|h(\xi_{[1,m]})| > t) = 0,$$

avec  $p(\alpha) = (1/2 - \alpha)^{-1}$  et  $0 < \alpha < 1/2$ , alors la suite  $(\mathcal{U}_{m,n,h}^{\text{pl}}(t), t \in [0, 1])$  converge en loi dans  $\mathcal{H}_{\alpha,0}^o$  vers  $I_d(h_d)$  défini par (3.3.11). Dans l'article [Gir21a], nous avons montré que si  $h$  est dégénérée d'ordre  $d$ ,  $\beta > m/2$ , et

$$\forall A > 0, \mathbb{E} \left[ \exp \left( AY^{\frac{1}{\beta - m/2}} \right) \right] < +\infty,$$

alors la suite  $(\mathcal{U}_{m,n,h}^{\text{pl}}(t), t \in [0, 1])$  converge en loi dans  $\mathcal{H}_{1/2,\beta}^o$  vers  $I_d(h_d)$  défini par (3.3.11).

### 3.4 Théorèmes limites pour des $U$ -statistiques de données bernoulliennes

Une question naturelle consiste à trouver des conditions suffisantes sur une suite strictement stationnaire de variables aléatoires  $(X_i)_{i \geq 1}$  et un noyau  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  garantissant les théorèmes limites les plus classiques (loi forte des grands nombres, théorème limite central et loi des logarithmes itérés). Bien entendu, des hypothèses sur le type de suites considérées doivent être faites. Nous supposons ici que la suite  $(X_i)_{i \geq 1}$  s'exprime comme une fonctionnelle d'une suite i.i.d., autrement dit, qu'il existe une suite i.i.d.  $(\varepsilon_u)_{u \in \mathbb{Z}}$  et une fonction mesurable  $f: \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$X_i = f((\varepsilon_{i-u})_{u \in \mathbb{Z}}). \quad (3.4.1)$$

Dans l'article [Gir21b], nous nous sommes intéressés aux questions suivantes. Étant donné une suite de variables aléatoires de la forme (3.4.1) et un noyau  $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , quelles conditions sur la dépendance de la suite ainsi que sur  $h$  garantissent les théorèmes limites suivants ?

- La loi des grands nombres de Marcinkiewicz : pour un  $p \in ]1, 2[$ ,  $n^{-1-1/p} (U_{2,n}(h) - \mathbb{E}[U_{2,n}(h)]) \rightarrow 0$  presque sûrement. Elle fut traitée par Giné et Zinn dans [74] dans le cas indépendant et [8, 9, 48, 142] dans le cas dépendant.
- La loi des logarithmes itérés bornée : la variable aléatoire

$$\sup_{n \geq 3} \frac{1}{n^{3/2} \sqrt{\log \log n}} |U_n - \mathbb{E}[U_n]|$$

est presque sûrement finie. Cette question ainsi que d'autres formes de la loi des logarithmes itérés ont été traitée par Arcones et Giné dans [4] et dans le cas dépendant dans [51].

- Le théorème limite central : la suite  $(n^{-3/2} (U_{2,n}(h) - \mathbb{E}[U_{2,n}(h)]))_{n \geq 2}$  converge en loi vers une loi normale. Dans le cas indépendant, cela fut traité par Hoeffding [88], et dans le cas dépendant dans [7, 16, 50, 52, 90, 149].

La dépendance de la  $U$ -statistique est quantifiée de la manière suivante. Soient  $(\varepsilon_u)_{u \in \mathbb{Z}}$  la suite i.i.d. et  $f: \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction mises en jeu dans (3.4.1), et  $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le noyau. Considérons les vecteurs aléatoires

$$V_{j,\ell} := (\varepsilon_u)_{u=j-\ell}^{j+\ell}, \quad j \in \mathbb{Z}, \ell \geq 0.$$

La variable aléatoire  $\mathbb{E}[X_j | V_{j,\ell}]$  peut s'exprimer comme une fonction du vecteur  $V_{j,\ell}$ , qui, par stationnarité, ne dépend pas de  $j$ , ce qui donne

$$\mathbb{E}[X_j | V_{j,\ell}] = f_\ell(V_{j,\ell}).$$

Nous définissons ensuite pour  $p \geq 1$  et  $\ell \geq 1$  le coefficient de dépendance

$$\theta_{\ell,p} := \sup_{j \geq 0} \|h(f_\ell(V_{0,\ell}), f_\ell(V_{j,\ell})) - h(f_{\ell-1}(V_{0,\ell-1}), f_{\ell-1}(V_{j,\ell-1}))\|_p$$

et pour  $\ell = 0$ ,  $\theta_{0,p} = \sup_{j \geq 0} \|h(f_0(V_{j,\ell}), f_0(V_{0,\ell}))\|_p$ .



En particulier, la finitude de  $\sum_{\ell \geq 1} \theta_{\ell,p}$  permet d'écrire

$$U_n(h, f, (\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} h(f_0(V_{i,0}), f_0(V_{j,0})) \\ + \sum_{\ell \geq 1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} h(f_\ell(V_{i,\ell}), f_\ell(V_{j,\ell})) - h(f_{\ell-1}(V_{i,\ell-1}), f_{\ell-1}(V_{j,\ell-1})),$$

où la convergence a lieu dans  $\mathbb{L}^p$  ainsi que presque sûrement. On peut ainsi décomposer la  $U$ -statistique de départ comme une série de  $U$ -statistiques portant sur des variables aléatoires qui s'expriment comme une fonction de  $2\ell + 1$  variables aléatoires i.i.d..

Donnons quelques exemples où il est possible de borner  $\theta_{\ell,p}$  par une expression plus simple.

Tout d'abord, regardons le cas où  $h(x, y) = x + y$ , Par l'inégalité triangulaire et par stationnarité,

$$\theta_{\ell,p} \leq 2 \|f_\ell(V_{0,\ell}) - f_{\ell-1}(V_{0,\ell-1})\|_p$$

que l'on peut, par le Théorème 1 dans [178], borner par  $2\delta_{\ell,p} + 2\delta_{-\ell,p}$ , où, pour  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\delta_{k,p} = \|X_k - X_k^*\|_p,$$

$X_k^* = f\left((\varepsilon_{k-u}^*)_{u \in \mathbb{Z}}\right)$ ,  $\varepsilon_u^* = \varepsilon_u$  si  $u \neq 0$  et  $\varepsilon_0^* = \varepsilon'_0$ , où  $\varepsilon'_0$  a la même loi que  $\varepsilon_0$  et est indépendante de la suite  $(\varepsilon_u)_{u \in \mathbb{Z}}$ .

Plus généralement, pour les noyaux  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant une propriété de régularité de la forme

$$|h(x, y) - h(x', y')| \leq \omega(|x - x'|) + \omega(|y - y'|),$$

où  $\omega: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est croissante et vérifie  $\omega(0) = 0$ , on obtient la borne

$$\theta_{\ell,p} \leq 2 \|\omega(|f_\ell(V_{0,\ell}) - f_{\ell-1}(V_{0,\ell-1})|)\|_p. \quad (3.4.2)$$

En particulier, si  $h$  est höldérienne d'exposant  $\alpha \in ]0, 1]$ , (3.4.2) s'exprime sous la forme

$$\theta_{\ell,p} \leq C_h \|\mathbb{E}[X_0 | V_{0,\ell}] - \mathbb{E}[X_0 | V_{0,\ell-1}]\|_{p\alpha}^\alpha,$$

où  $C_h$  ne dépend que de  $h$ . À première vue, il semblerait que l'on ne puisse contrôler  $\theta_{\ell,p}$  que dans le cas où  $h$  est continue. Nous donnons un exemple de noyau pour lequel une borne peut être fournie.

Pour  $t > 0$  fixé, nous posons  $h: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbf{1}\{|x - y| \leq t\}$ . Ce noyau fut considéré dans [22, 160, 177] On suppose que pour tous  $j, \ell \geq 1$ , la variable aléatoire  $\mathbb{E}[X_0 | \sigma(\varepsilon_u, -\ell \leq u \leq \ell)] - \mathbb{E}[X_j | \sigma(\varepsilon_u, j - \ell \leq u \leq j + \ell)]$  a pour densité  $g_{\ell,j}$  et que pour un certain  $r > 1$ ,  $\sup_{\ell, j \geq 1} \|g_{\ell,j}\|_{L^r(\mathbb{R})}$

est finie. Soit  $\pi_\ell := \mathbb{E}[X_0 | V_{0,\ell}] - \mathbb{E}[X_0 | V_{0,\ell-1}]$ , où  $V_{0,k} = (\varepsilon_u)_{u=-k}^k$ . Alors pour chaque  $q \geq 1$ ,

$$\theta_{\ell,p} \leq C \|\pi_\ell\|_q^{\frac{q}{p} \frac{r}{q(r-1)+r}},$$

où  $C$  ne dépend pas de  $\ell$ .

L'outil principal pour établir les théorèmes limites mentionnés est une généralisation de la décomposition d'Hoeffding suivante.

**Proposition 3.4.1.** Soient  $(\varepsilon_u)_{u \in \mathbb{Z}}$  une suite i.i.d.,  $(\varepsilon'_u)_{u \in \mathbb{Z}}$  une copie indépendante de  $(\varepsilon_u)_{u \in \mathbb{Z}}$  et  $f: \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable. Soit  $V_{k,\ell} := (\varepsilon_u)_{u=k-\ell}^{k+\ell}$  et  $V'_{k,\ell} := (\varepsilon'_u)_{u=k-\ell}^{k+\ell}$ . Soit  $f_\ell: \mathbb{R}^{2\ell+1} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$f_\ell(V_{k,\ell}) = \mathbb{E} [f((\varepsilon_{k-u})_{u \in \mathbb{Z}}) \mid V_{k,\ell}] \text{ p.s.}$$

Soit  $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction symétrique mesurable. On suppose que pour tous  $1 \leq i < j$ , la convergence presque sûre suivante a lieu :

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} h(f_\ell(V_{i,\ell}), f_\ell(V_{j,\ell})) = h(f((\varepsilon_{i-u})_{u \in \mathbb{Z}}), f((\varepsilon_{j-u})_{u \in \mathbb{Z}})).$$

Alors l'égalité suivante a lieu :

$$\begin{aligned} U_n(h, f, (\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}) - \mathbb{E} [U_n(h, f, (\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}})] &= n \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [h(f_0(V_{k,0}), f_0(V'_{k,0})) \mid V_{k,0}] \\ &+ n \sum_{\ell \geq 1} \sum_{k=1}^n Y_k^{(\ell)} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} h^{(0)}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \\ &+ \sum_{\ell \geq 1} \sum_{a,b \in \llbracket 1, 4\ell+2 \rrbracket} \sum_{1 \leq i < j \leq \lfloor \frac{n}{2\ell} \rfloor} h_{a,b}^{(\ell)}(\varepsilon_i^{a,b}, \varepsilon_j^{a,b}) + R_n, \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

où pour chaque  $\ell \geq 1$  et tous  $a, b \in \llbracket 1, 4\ell+2 \rrbracket$ , la suite  $(\varepsilon_i^{a,b})_{i \in \mathbb{Z}}$  est i.i.d., à valeurs dans  $\mathbb{R}^{4\ell+2}$  et  $h_{a,b}: \mathbb{R}^{4\ell+2} \times \mathbb{R}^{4\ell+2} \rightarrow \mathbb{R}$  est telle que la  $U$ -statistique associée est dégénérée et la variable aléatoire  $Y_k^{(\ell)}$  est définie par

$$Y_k^{(\ell)} = \mathbb{E} [h(f_\ell(V_{k,\ell}), f_\ell(V'_{0,\ell})) \mid V_{k,\ell}] - \mathbb{E} [h(f_{\ell-1}(V_{k,\ell-1}), f_{\ell-1}(V'_{0,\ell-1})) \mid V_{k,\ell-1}].$$

On a ainsi décomposé la  $U$ -statistique de départ en plusieurs termes. Le premier, c'est-à-dire les premier et deuxième terme du membre de droite de (3.4.3), consiste en des sommes partielles de suites de variables aléatoires s'exprimant comme une fonction de variables aléatoires i.i.d., pour laquelle la dépendance peut se contrôler à l'aide des coefficients  $\theta_{i,p}$ . Le second, c'est-à-dire les troisième et quatrième terme du membre de droite de (3.4.3), est une série de  $U$ -statistiques dégénérées, pour lesquelles il est possible de contrôler  $\left\| h_{a,b}^{(\ell)}(\varepsilon_1^{a,b}, \varepsilon_2^{a,b}) \right\|_p$  à l'aide des coefficients  $\theta_{\ell,p}$ . Le troisième est un terme qui jouera un rôle négligeable dans le cadre des théorèmes limites considérés : dans la loi des grands nombres de Marcinkiewicz,  $n^{-1-1/p} R_n \rightarrow 0$  presque sûrement, dans le cadre de la loi des logarithmes itérés bornée,  $(n^{3/2} \sqrt{\log \log n})^{-1} R_n \rightarrow 0$  presque sûrement et dans le cadre du théorème limite central,  $n^{-3/2} R_n \rightarrow 0$  en probabilité.

L'expression explicite de  $R_n$  se trouve dans la Proposition 1.1 de l'article [Gir21b].

Cette décomposition a permis, grâce aux résultats existants sur les suites stationnaires ainsi qu'un contrôle des  $U$ -statistiques dégénérées, d'établir les résultats suivants.

- Loi des grands nombres de Marcinkiewicz : soit  $1 < p < 2$ . Si  $\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^{1-1/p} \theta_{\ell,p} < \infty$ , alors  $n^{-1-1/p} (U_{2,n}(h) - \mathbb{E} [U_{2,n}(h)]) \rightarrow 0$  presque sûrement.

— La loi des logarithmes itérés bornée : pour  $1 \leq p < 2$ , l'inégalité suivante a lieu

$$\left\| \sup_{n \geq 3} \frac{1}{n^{3/2} \sqrt{\log \log n}} |U_{2,n}(h) - \mathbb{E}[U_{2,n}(h)]| \right\|_p \leq c_p \left( \theta_{0,2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \theta_{\ell,p} \right),$$

où la constante  $c_p$  ne dépend que de  $p$ .

— Le théorème limite central : nous supposons que  $\sum_{\ell=0}^{\infty} \ell^{1/2} \theta_{\ell,2} < \infty$ ,  $\sum_{\ell=0}^{\infty} \ell^2 \theta_{\ell,1} < \infty$  et que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\text{Cov}(Y_0, Y_k)| < +\infty, \quad (3.4.4)$$

où la variable aléatoire  $Y_k$  est définie par la convergence dans  $\mathbb{L}^2$  suivante

$$Y_k = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \mathbb{E} [h(f_\ell(V_{k,\ell}), f_\ell(V'_{0,\ell})) | V_{k,\ell}] - \mathbb{E} [h(f_\ell(V_{k,\ell}), f_\ell(V'_{0,\ell}))],$$

$V_{k,\ell} = (\varepsilon_u)_{u=k-\ell}^{k+\ell}$ ,  $V'_{k,\ell} = (\varepsilon'_u)_{u=k-\ell}^{k+\ell}$ , où  $(\varepsilon'_u)_{u \in \mathbb{Z}}$  est une copie indépendante de  $(\varepsilon_u)_{u \in \mathbb{Z}}$ . Alors

$$\frac{1}{n^{3/2}} (U_n - \mathbb{E}[U_n]) \rightarrow \sigma \mathcal{N},$$

où  $\mathcal{N}$  est de loi normale centrée réduite et

$$\sigma^2 := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(Y_0, Y_k).$$

On ne sait pas si les conditions imposées sur  $\theta_{\ell,1}$  et  $\theta_{\ell,2}$  garantissent (3.4.4). C'est cependant le cas de la condition

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\mathbb{E}[Y_k | \sigma(\varepsilon_u, u \leq 0)] - \mathbb{E}[Y_k | \sigma(\varepsilon_u, u \leq -1)]\|_2 < \infty,$$

qui est vérifiable dans le cadre des exemples présentés.

### 3.5 $U$ -statistiques dont les données portent sur les moments empiriques

Cette partie se base sur les résultats de l'article [DGS23], réalisé en collaboration avec Herold Dehling et Sara Schmidt.

Nous considérons des  $U$ -statistiques dont les données sont constituées des moments empiriques de blocs d'une suite de variables aléatoires  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  s'exprimant comme une fonctionnelle d'une suite i.i.d.. Pour  $n$  fixé, nous considérons  $b_n$  blocs

$$B_{n,j} := \llbracket (j-1)\ell_n + 1, j\ell_n \rrbracket, \quad j \in \llbracket 1, b_n \rrbracket$$

de taille  $\ell_n$ , que l'on suppose tendre vers l'infini. Un facteur d'échelle  $\sqrt{\ell_n}$  et certaines hypothèses sur la régularité de  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  permettent d'établir la normalité asymptotique de

$$W_{n,j} := \sqrt{\ell_n} g \left( \frac{1}{\ell_n} \sum_{i \in B_{n,j}} X_i, \frac{1}{\ell_n} \sum_{i \in B_{n,j}} X_i^2, \dots, \frac{1}{\ell_n} \sum_{i \in B_{n,j}} X_i^m \right). \quad (3.5.1)$$

On s'intéresse alors à des  $U$ -statistiques du type

$$U_n := \frac{1}{b_n(b_n - 1)} \sum_{1 \leq j \neq k \leq b_n} h(W_{n,j}, W_{n,k}), \quad (3.5.2)$$

qui apparaissent naturellement dans des tests non-paramétriques de la constance d'un paramètre au sein de la suite  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ . Schmidt, Wornowizki, Fried et Dehling [158] ont testé la constance de la variance en considérant les moyennes de Gini des différences des logarithmes des variances sur chaque bloc, *i.e.*, ils ont pris  $h(x, y) = |x - y|$  et  $W_{n,j} = \sqrt{\ell_n} \log(\frac{1}{\ell_n} \sum_{t=(j-1)\ell_n+1}^{j\ell_n} (X_t - \frac{1}{\ell_n} \sum_{r=(j-1)\ell_n+1}^{j\ell_n} X_r)^2)$ . Schmidt [159] a testé le changement de moyenne à l'aide des moyennes de Gini des moyennes empiriques des blocs  $W_{n,j} = \frac{1}{\sqrt{\ell_n}} \sum_{t \in B_{n,j}} X_t$ . Dans ces travaux, le comportement asymptotique de la statistique de test est déterminé grâce à un théorème limite central pour  $U_n$ . Dans l'article [DGS23], nous considérons des moments empiriques d'ordre supérieur, ce qui permet de tester la constance des caractéristiques d'ordre supérieur de la loi de  $X_i$ , comme la dissymétrie ou le kurtosis. Nous nous intéressons à des  $U$ -statistiques de la forme (3.5.2), où  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction symétrique pour laquelle il existe une constante  $C$  telle que pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$|h(x, y)| \leq C(1 + |x| + |y|). \quad (3.5.3)$$

Nous présentons tout d'abord un résultat général pour  $U_n$ , sous l'hypothèse que le tableau de variables aléatoires  $(W_{n,j})_{1 \leq j \leq b_n, n \geq 1}$  est tel que pour chaque  $n \geq 1$ ,  $(W_{n,j})_{1 \leq j \leq b_n}$  est i.i.d. avec des hypothèses relativement simples sur  $W_{n,j}$ .

**Théorème 3.5.1.** *Soit  $(W_{n,j})_{1 \leq j \leq b_n, n \geq 1}$  un tableau de variables aléatoires tel que pour chaque  $n \geq 1$ ,  $(W_{n,j})_{1 \leq j \leq b_n}$  est i.i.d. et  $b_n \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ . On suppose que (3.5.3) est vérifiée, que  $\gamma_n^2 := \text{Cov}(h(W_{n,1}, W_{n,2}), h(W_{n,2}, W_{n,3})) > 0$ , et que la suite  $(W_{n,1}^2 / \gamma_n^2)_{n \geq 1}$  est uniformément intégrable. Alors la convergence en loi suivante a lieu*

$$\frac{\sqrt{b_n}}{\gamma_n} \left( \frac{1}{b_n(b_n - 1)} \sum_{1 \leq j \neq k \leq b_n} h(W_{n,j}, W_{n,k}) - \mathbb{E}[h(W_{n,1}, W_{n,2})] \right) \rightarrow 2\mathcal{N},$$

où  $\mathcal{N}$  est de loi normale centrée réduite.

Un résultat similaire a été obtenu dans [113] pour des  $U$ -statistiques incomplètes dont les données sont indépendantes.

Contrairement aux tableaux triangulaires de variables aléatoires du Théorème 3.5.1, les tableaux triangulaires concernés  $(W_{n,j})_{1 \leq j \leq b_n, n \geq 1}$  ne sont pas indépendants car les variables aléatoires  $W_{n,j}$  se basent sur des variables aléatoires issues d'une suite  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  qui est dépendante. Plus précisément, nous supposons que la suite strictement stationnaire  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  peut s'exprimer comme fonction d'une suite i.i.d., *i.e.*,  $X_i := f((\varepsilon_{i-u})_{u \in \mathbb{Z}})$ , où  $f: \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$  est mesurable et  $(\varepsilon_u)_{u \in \mathbb{Z}}$  est i.i.d.. Afin de quantifier la dépendance, nous considérons une suite  $(\varepsilon'_u)_{u \in \mathbb{Z}}$ , qui est une copie indépendante de  $(\varepsilon_u)_{u \in \mathbb{Z}}$  et nous définissons

$$\delta_i \left( (X_j)_{j \in \mathbb{Z}} \right) := \|X_0 - X_0^{*,i}\|_2,$$

où  $X_0^{*,i} = f\left(\left(\varepsilon_{-u}^{*,i}\right)_{u \in \mathbb{Z}}\right)$  et  $\varepsilon_v^{*,i} = \varepsilon'_i$  si  $v = i$  et  $\varepsilon_v^{*,i} = \varepsilon_v$  sinon. Nous mesurons donc la contribution de  $\varepsilon_i$  dans l'expression de  $X_0$  en calculant la norme de la différence entre  $X_0$  et sa version couplée  $X_0^{*,i}$  pour laquelle la variable aléatoire  $\varepsilon_i$  est remplacée par  $\varepsilon'_i$ . Cette mesure de dépendance fut introduite par Wu dans [178] sous le terme de *physical dependence measure* et est de nos jours utilisée dans de nombreuses applications statistiques (voir par exemple [64, 112, 180, 181]).

Dans la suite, le tableau triangulaire  $(W_{n,j})_{1 \leq j \leq b_n, n \geq 1}$  sera de la forme (3.5.1).

Donnons des exemples de quantités mettant en jeu les moments d'une loi qui peuvent être traités par notre approche.

*Exemple 3.5.2.* Schmidt, Wornowizk, Fried et Dehling ont proposé dans [158] un test de constance de variance basé sur la statistique de test

$$U_n = \frac{1}{b_n(b_n - 1)} \sum_{1 \leq j, k \leq b_n} \sqrt{\ell_n} |\log s_{n,j}^2 - \log s_{n,k}^2|,$$

où  $s_{n,j}^2 := \sum_{i \in B_{n,j}} \left(X_i - \frac{1}{\ell_n} \sum_{r \in B_{n,j}} X_r\right)^2$ . Dans notre cadre, cela correspond à  $m = 2$ ,  $g(x_1, x_2) = \log(x_2 - x_1^2)$  et  $h(x, y) = |x - y|$ .

*Exemple 3.5.3.* En considérant les moments d'ordre supérieur il est possible de mettre en place un test de dissymétrie ou de changement de kurtosis en considérant les moyennes de Gini (donc  $h(x, y) = |x - y|$ ) d'estimateurs des blocs  $\hat{\gamma}_{n,j}$ ,  $j = 1, \dots, b_n$ , ou  $\hat{\kappa}_{n,j}$ ,  $j = 1, \dots, b_n$ , respectivement. Une version empirique de la dissymétrie est

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{n,j} &= \frac{\frac{1}{\ell_n} \sum_{t \in B_{n,j}} (X_t - \frac{1}{\ell_n} \sum_{r \in B_{n,j}} X_r)^3}{\left(\frac{1}{\ell_n} \sum_{t \in B_{n,j}} (X_t - \frac{1}{\ell_n} \sum_{r \in B_{n,j}} X_r)^2\right)^{3/2}} \\ &= \frac{\frac{1}{\ell_n} \sum_{t \in B_{n,j}} X_t^3 - 3\left(\frac{1}{\ell_n} \sum_{t \in B_{n,j}} X_t^2\right)\left(\frac{1}{\ell_n} \sum_{t \in B_{n,j}} X_t\right) + 2\left(\frac{1}{\ell_n} \sum_{t \in B_{n,j}} X_t\right)^3}{\left(\frac{1}{\ell_n} \sum_{t \in B_{n,j}} X_t^2 - \left(\frac{1}{\ell_n} \sum_{t \in B_{n,j}} X_t\right)^2\right)^{3/2}}, \end{aligned}$$

qui est traitée dans notre cadre par

$$g(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3 - 3x_1x_2 + 2x_1^3}{(x_2 - x_1^2)^{3/2}}.$$

Une version empirique du kurtosis est donnée par

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_{n,j} &= \frac{\frac{1}{\ell_n} \sum_{t \in B_{n,j}} (X_t - \frac{1}{\ell_n} \sum_{r \in B_{n,j}} X_r)^4}{\left(\frac{1}{\ell_n} \sum_{t \in B_{n,j}} (X_t - \frac{1}{\ell_n} \sum_{r \in B_{n,j}} X_r)^2\right)^2} \\ &= \left(\frac{1}{\ell_n} \sum_{t \in B_{n,j}} X_t^2 - \left(\frac{1}{\ell_n} \sum_{t \in B_{n,j}} X_t\right)^2\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{\ell_n} \sum_{t \in B_{n,j}} X_t^4 - 4\left(\frac{1}{\ell_n} \sum_{t \in B_{n,j}} X_t\right)\left(\frac{1}{\ell_n} \sum_{t \in B_{n,j}} X_t^3\right) \right. \\ &\quad \left. + 6\left(\frac{1}{\ell_n} \sum_{t \in B_{n,j}} X_t\right)^2\left(\frac{1}{\ell_n} \sum_{t \in B_{n,j}} X_t^2\right) - 3\left(\frac{1}{\ell_n} \sum_{t \in B_{n,j}} X_t\right)^4\right), \end{aligned}$$

qui correspond à la fonction

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_4 - 4x_1x_3 + 6x_1^2x_2 - 3x_1^4}{(x_2 - x_1^2)^2}.$$

**Theorème 3.5.4.** *On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées.*

1. La fonction  $h$  est lipschitzienne.

2.  $\mathbb{E}[X_1^{2m}] < \infty$  et

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k=1}^m i^2 \delta_i \left( (X_j^k)_{j \in \mathbb{Z}} \right) < \infty. \quad (3.5.4)$$

3. La fonction  $g$  vérifie  $g(v_0) = 0$ , où  $v_0 = (\mathbb{E}[X_1^k])_{k=1}^m \in \mathbb{R}^m$ . Il existe  $a > 0$  tel que  $g$  est dérivable en tout point de  $\prod_{k=1}^m (\mathbb{E}[X_1^k] - 2a, \mathbb{E}[X_1^k] + 2a)$  et le gradient de  $g$  est borné sur  $\prod_{k=1}^m (\mathbb{E}[X_1^k] - 2a, \mathbb{E}[X_1^k] + 2a)$ .

4. Les suites  $(b_n)_{n \geq 1}$  et  $(\ell_n)_{n \geq 1}$  tendent vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini. De plus, la suite  $(b_n/\ell_n)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

Soit  $\eta: \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$  une fonction de classe  $C^\infty$  telle que  $\eta(x) = 1$  si  $\|x - v_0\|_2 \leq a$  et  $\eta(x) = 0$  si  $\|x - v_0\|_2 > 2a$ , et posons

$$W_{n,j}^{(\eta)} := \sqrt{\ell_n} (g \cdot \eta) \left( \left( \frac{1}{\ell_n} \sum_{i \in B_{n,j}} X_i^k \right)_{k=1}^m \right).$$

Si

$$\sigma^2 := \sum_{t \in \mathbb{Z}} \text{Cov} \left( \sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_k} (v_0) X_0^k, \sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_k} (v_0) X_t^k \right) > 0,$$

alors la convergence en loi suivante a lieu

$$\sqrt{b_n} \left( U_n - \frac{1}{b_n(b_n - 1)} \sum_{1 \leq j \neq k \leq b_n} \mathbb{E} \left[ h \left( W_{n,j}^{(\eta)}, W_{n,k}^{(\eta)} \right) \right] \right) \rightarrow 2\gamma \mathcal{N}, \quad (3.5.5)$$

où

$$\gamma^2 := \text{Cov} (h(\sigma \mathcal{N}, \sigma \mathcal{N}'), h(\sigma \mathcal{N}, \sigma \mathcal{N}''))$$

et  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{N}'$  et  $\mathcal{N}''$  sont des variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite.

Remarquons que par symétrie de  $h$ ,  $\gamma^2$  admet l'expression

$$\gamma^2 = \text{Cov} (h(\sigma \mathcal{N}, \sigma \mathcal{N}'), h(\sigma \mathcal{N}', \sigma \mathcal{N}'')).$$

Le centrage de  $U_n$  dans (3.5.5) par  $\sum_{1 \leq j \neq k \leq b_n} \mathbb{E} [h(W_{n,j}, W_{n,k})]$  plutôt que sa version tronquée  $\sum_{1 \leq j \neq k \leq b_n} \mathbb{E} [h(W_{n,j}^{(\eta)}, W_{n,k}^{(\eta)})]$  semble plus naturel. Cependant, les conditions du Théorème 3.5.4 ne garantissent pas la finitude de  $\mathbb{E} [|h(W_{n,j}, W_{n,k})|]$ , comme le montre l'exemple suivant.

Considérons le cas  $m = 2$ ,  $g(x_1, x_2) = \log x_2 \mathbf{1}\{x_2 > 0\}$  et  $h(x, y) = |x - y|$  avec des observations i.i.d.  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ . Puisque  $W_{n,1}$  et  $W_{n,2}$  sont indépendantes et de même loi, la finitude

de  $\mathbb{E}[|W_{n,1} - W_{n,2}|]$  est équivalente à celle de  $\mathbb{E}[|W_{n,1}|]$ . Il suffit donc de trouver une suite i.i.d.  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  telle que  $\mathbb{E}[X_1^4] < \infty$  et

$$\mathbb{E} \left[ \left| \log \left( \frac{1}{\ell_n} \sum_{i=1}^{\ell_n} X_i^2 \right) \right| \right] = \infty.$$

Nous choisissons alors  $X_1$  telle que

$$\mathbb{P}(X_1^2 = \exp(-\exp(\exp(k)))) = 2^{-k}, \quad k \geq 1.$$

Donnons à présent des exemples de suites de variables aléatoires  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  vérifiant la condition (3.5.4)

*Exemple 3.5.5.* Nous supposons que  $X_i$  s'exprime comme une fonction höldérienne d'un processus linéaire comme dans [86] et [179] :

$$X_i := \varphi \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \varepsilon_{i-j} \right),$$

où  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\gamma$ -höldérienne pour un certain  $\gamma \in ]0, 1]$ ,  $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est une suite de réels telle que  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} j^2 |a_j|^\gamma < \infty$  et  $(\varepsilon_u)_{u \in \mathbb{Z}}$  est une suite i.i.d. telle que  $\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^{2m\gamma}] < \infty$ . Alors  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  vérifie la condition (3.5.4).

*Exemple 3.5.6.* Nous supposons que  $X_i$  s'exprime comme une fonction d'un processus linéaire gaussien : soit  $X_i = \varphi(Y_i)$  avec

$$Y_i := \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \varepsilon_{i-j},$$

où  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\varepsilon_u)_{u \in \mathbb{Z}}$  est une suite i.i.d.,  $\varepsilon_0$  a une loi normale centrée réduite et  $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est une suite de réels telle que  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |a_j| < \infty$  et  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j^2 = 1$ . Ces processus ont été considérés par exemple dans [130]. Si  $\varphi(Y_0) \in \mathbb{L}^2$  et  $\mathbb{E}[\varphi(Y_0)] = 0$ , alors le développement suivant a lieu :

$$\varphi(Y_i) = \sum_{q=1}^{\infty} c_q(\varphi) H_q(Y_i),$$

où  $H_q$  désigne le  $q$ -ième polynôme d'Hermite, défini par

$$H_q(x) := (-1)^q \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^q}{dx^q} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

et

$$c_q(\varphi) := \frac{1}{q!} \mathbb{E}[\varphi(Y_0) H_q(Y_0)].$$

Puisque  $\varphi(Y_0) \in \mathbb{L}^2$ , la série  $\sum_{q=1}^{\infty} q! (c_q(\varphi))^2$  converge. La condition (3.5.4) est vérifiée si  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} j^2 |a_j| < \infty$  et

$$\sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^{\infty} \sqrt{q \cdot q!} |c_q(\varphi^k - \mathbb{E}[\varphi^k(Y_0)])| < \infty.$$

*Exemple 3.5.7.* Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un processus de Volterra, défini par

$$X_i := \sum_{j, j' \in \mathbb{Z}, j \neq j'} a_{j, j'} \varepsilon_{i-j} \varepsilon_{i-j'},$$

où  $(\varepsilon_u)_{u \in \mathbb{Z}}$  est i.i.d. et centrée,  $\mathbb{E}[\varepsilon_0^2] < \infty$  et  $\sum_{j, j' \in \mathbb{Z}, j \neq j'} a_{j, j'}^2 < \infty$ . De tels processus et leurs généralisations à des séries de Volterra ont été considérés dans [141] et [156]. Si  $\mathbb{E}[\varepsilon_0^{2m}] < \infty$  et

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} j^2 \sqrt{\sum_{j' \in \mathbb{Z}, j' \neq j} (a_{j, j'}^2 + a_{j', j}^2)} < \infty,$$

alors  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  vérifie la condition (3.5.4).

La démonstration du Théorème 3.5.4 repose sur une approximation de la  $U$ -statistique de départ par celle dont les tableaux  $W_{n, j}$  sont remplacés par une fonction des moments empiriques de blocs de la suite de variables aléatoires  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  approximée par des suites  $m$ -dépendantes.

En imposant des conditions supplémentaires sur la fonction  $g$ , les coefficients de dépendance de la suite  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , et les suites  $(b_n)_{n \geq 1}$  et  $(\ell_n)_{n \geq 1}$ , il est possible de remplacer le terme de centrage dans (3.5.5) s'exprimant à l'aide des  $W_{n, j}^{(n)}$  par une expression qui ne nécessite pas de troncature.

**Proposition 3.5.8.** *On suppose que les conditions du Théorème 3.5.4 sont vérifiées. Nous supposons de plus que toutes les dérivées partielles du second ordre de  $g$  en  $v_0$  existent et qu'il existe  $\kappa \in ]0, 1[$  tel que  $b_n / \ell_n^{1-\kappa} \rightarrow 0$  et  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k=1}^m |i|^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\kappa}} \delta_i \left( (X_t^k)_{t \in \mathbb{Z}} \right) < \infty$ . Alors la convergence en loi suivante a lieu :*

$$\sqrt{b_n} (U_n - \mathbb{E}[h(Z_n, Z'_n)]) \rightarrow 2\gamma\mathcal{N},$$

où

$$Z_n := \frac{1}{\sqrt{\ell_n}} \sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_k} (v_0) \sum_{t=1}^{\ell_n} (X_t^k - \mathbb{E}[X_1^k])$$

et  $Z'_n$  est une copie indépendante de  $Z_n$ .

Le terme de centrage est plus simple à traiter que celui mis en jeu dans le Théorème 3.5.4. Cependant, si nous souhaitons utiliser  $U_n$  comme statistique de test pour tester la constance du paramètre  $g(\mathbb{E}[X_t], \mathbb{E}[X_t^2], \dots, \mathbb{E}[X_t^m])$ , il faut une quantité calculable. Sous certaines conditions supplémentaires sur les moments, la taille et le nombre de blocs ainsi que la dépendance, il est possible de remplacer  $\mathbb{E}[|Z_n - Z'_n|]$  par  $\sigma \mathbb{E}[|N - N'|] = 2\sigma/\sqrt{\pi}$ . Le paramètre restant  $\sigma$  peut être estimé à l'aide des procédures habituelles.

**Corollaire 3.5.9.** *On suppose que la suite  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  peut s'exprimer comme un décalage de Bernoulli unilatéral, c'est-à-dire,  $X_i = f((\varepsilon_{i-u})_{u \geq 0})$ . Nous supposons de plus qu'il existe  $2 < p \leq 3$  tel que*

1.  $\mathbb{E}[|X_1|^{p-m}] < \infty$  et

$$\sum_{i \geq 0} \sum_{k=1}^m (i^2 \delta_{i,p}((X_t^k)_{t \in \mathbb{Z}}) + i^{5/2} \delta_{i,2}((X_t^k)_{t \in \mathbb{Z}})) < \infty,$$

où  $\delta_{i,p}((X_t)_{t \in \mathbb{Z}}) := \|X_0 - X_0^{*,i}\|_p$ , et



$$2. \sqrt{b_n} \ell_n^{1-p/2} (\log \ell_n)^{p/2} + \sqrt{b_n/\ell_n} \rightarrow 0.$$

En notant

$$U_n := \frac{1}{b_n(b_n - 1)} \sum_{1 \leq j \neq k \leq b_n} |W_{n,j} - W_{n,k}|,$$

où  $W_{n,j}$  est définie comme dans (3.5.1), la convergence en loi suivante a lieu :

$$\sqrt{b_n} \left( U_n - \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} \right) \rightarrow 2\gamma \mathcal{N},$$

où  $\sigma$  et  $\gamma^2$  sont définies comme dans le Théorème 3.5.4.

La démonstration de ce corollaire nécessite la convergence de  $\sqrt{b_n} \left( \mathbb{E} [|Z_n, Z'_n|] - \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} \right)$  vers 0, qui elle-même s'appuie sur une vitesse de convergence dans le théorème limite central pour les décalages bernoulliens donné dans le Corollaire 2.6 dans [94].

### 3.6 Convergence d'une $U$ -statistique empirique à deux échantillons de données $\beta$ -mélangeantes

Dans un travail commun avec Herold Dehling et Olimjon Sharipov, nous avons considéré la question suivante : étant donné un échantillon  $X_1, \dots, X_n$ , comment déterminer la présence d'un potentiel changement de loi ? Pour cela, nous nous basons sur une  $U$ -statistique empirique à deux échantillons, dont l'idée est la suivante. On dispose d'un échantillon  $X_1, \dots, X_n$ . Pour chaque  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , nous partageons cet échantillon en deux parties, l'une étant  $X_1, \dots, X_k$  et l'autre  $X_{k+1}, \dots, X_n$ . On cherche ensuite à déterminer la loi empirique de  $g(X, Y)$ , où  $X$  et  $Y$  appartiennent respectivement au premier et second échantillon et  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Cela nous conduit à la définition suivante :

$$e_n(s, t) := \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \sum_{j=\lfloor nt \rfloor+1}^n (\mathbf{1}_{\{g(X_i, X_j) \leq s\}} - \mathbb{P}(g(X_i, X_j) \leq s)). \quad (3.6.1)$$

Par exemple, le test de Hodges–Lehmann est basé sur la médiane de  $X_i - X_j$ , voir [46]. Des  $U$ -statistiques de la forme  $n^{-3/2} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \sum_{j=\lfloor nt \rfloor+1}^n h(X_i, X_j)$  sont également utilisées pour la détection de changement de paramètre, voir par exemple [31].

Les hypothèses sur la dépendance de la suite  $(X_i)_{i \geq 1}$  seront formulées à l'aide de conditions de mélange, définies de la manière suivante. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. Les coefficients d' $\alpha$ -mélange et de  $\beta$ -mélange entre deux sous-tribus  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{F}$  sont définis respectivement par

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup \{ |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \};$$

$$\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{2} \sup \left\{ \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |\mathbb{P}(A_i \cap B_j) - \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B_j)| \right\},$$

où le supremum est pris sur les partitions finies  $(A_i)_{i=1}^I$  et  $(B_j)_{j=1}^J$  de  $\Omega$  constituées respectivement d'éléments de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , et introduits respectivement par Rosenblatt [154] et Volkonski et Rozanov dans [165]. On associe à une suite strictement stationnaire  $(X_i)_{i \geq 1}$  ces coefficients d' $\alpha$  et de  $\beta$ -mélange en posant

$$\begin{aligned}\alpha(k) &:= \sup_{\ell \geq 1} \alpha(\mathcal{F}_1^\ell, \mathcal{F}_{\ell+k}^\infty), \\ \beta(k) &:= \sup_{\ell \geq 1} \beta(\mathcal{F}_1^\ell, \mathcal{F}_{\ell+k}^\infty),\end{aligned}\tag{3.6.2}$$

où  $\mathcal{F}_u^v$ ,  $1 \leq u \leq v \leq +\infty$  est la tribu engendrée par les variables aléatoires  $X_i$ ,  $u \leq i \leq v$  ( $u \leq i$  pour  $v = \infty$ ). Une suite  $(X_i)_{i \geq 1}$  est dite  $\beta$ -mélangeante si  $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta(k) = 0$ .

Afin de garantir la convergence de la suite de processus  $(e_n(s, t), s \in \mathbb{R}, t \in [0, 1])_{n \geq 1}$ , nous ferons les hypothèses suivantes.

(C.1) Pour tout  $u \in \mathbb{R}$ , la variable aléatoire  $g(u, X_1)$  a une densité  $f_{1,u}$  et  $\sup_{x, u \in \mathbb{R}} f_{1,u}(x) < +\infty$ .

(C.2) Pour tout  $v \in \mathbb{R}$ , la variable aléatoire  $g(X_1, v)$  a une densité  $f_{2,v}$  et  $\sup_{x, v \in \mathbb{R}} f_{2,v}(x) < +\infty$ .

(C.3) Il existe  $p > 2$  tel que  $\sum_{k \geq 1} k^p \alpha(k)$  converge.

(C.4) La série  $\sum_{k \geq 1} k \beta(k)$  converge.

Donnons quelques explications concernant ces hypothèses. Pour  $s$  fixé, nous considérons le noyau  $h_s(x, y) := \mathbf{1}\{g(x, y) \leq s\}$  et nous effectuons la décomposition de Hoeffding : nous posons  $\theta_s := \mathbb{P}(g(X_1, X'_1) \leq s)$ , où  $X'_1$  est une copie indépendante de  $X_1$ ,

$$h_{1,s}(u) = \mathbb{P}(g(u, X_1) \leq s) - \theta_s, \quad h_{2,s}(v) = \mathbb{P}(g(X_1, v) \leq s) - \theta_s,\tag{3.6.3}$$

et

$$h_{3,s}(u, v) = h_s(u, v) - h_{1,s}(u) - h_{2,s}(v) - \theta_s.$$

Ainsi, la décomposition suivante a lieu :

$$e_n(s, t) = R_n(s, t) + W_n(s, t),$$

où

$$\begin{aligned}R_n(s, t) &= \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \sum_{j=\lfloor nt \rfloor+1}^n (h_{3,s}(X_i, X_j) - \mathbb{E}[h_{3,s}(X_i, X_j)]), \\ W_n(s, t) &= \frac{n - \lfloor nt \rfloor}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} (h_{1,s}(X_i) - \mathbb{E}[h_{1,s}(X_i)]) + \frac{\lfloor nt \rfloor}{n^{3/2}} \sum_{j=\lfloor nt \rfloor+1}^n (h_{2,s}(X_j) - \mathbb{E}[h_{2,s}(X_j)]).\end{aligned}$$

Les hypothèses (C.1) et (C.2) se reflètent via l'inégalité

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{s < s'} \frac{|h_{i,s'}(x) - h_{i,s}(x)|}{s' - s} \leq M, \quad i \in \{1, 2\},$$

et jouent un rôle décisif dans la démonstration de l'équi-tension. Celle-ci est traitée via le critère donné par le Corollaire 1 de l'article [34], qui est très pratique car le processus à deux variables que

l'on cherche à traiter s'exprime comme la différence de deux processus croissants pour l'ordre coordonnée par coordonnée. Dans ce cas de figure, seule une convergence en probabilité d'un certain maximum des accroissements est requise et un contrôle des moments des accroissements. Pour ce dernier, nous utilisons une inégalité de moments pour les suites  $\alpha$ -mélangeantes énoncée dans le Théorème 2.5 dans [150]. Enfin, l'hypothèse (C.4) est utilisée pour montrer la convergence de  $\sup_{s \in [-R, R]} \sup_{t \in [0, 1]} |R_n(s, t)|$  en probabilité vers 0, grâce à l'inégalité donnée par le Lemme 2.4 dans [48].

Énonçons à présent le résultat principal de l'article [DGS21].

**Théorème 3.6.1.** *Sous les hypothèses (C.1), (C.2), (C.3) et (C.4), la convergence*

$$(e_n(s, t))_{s \in [-R, R], t \in [0, 1]} \rightarrow (W(s, t))_{s \in [-R, R], t \in [0, 1]}$$

a lieu en loi dans  $D([-R, R] \times [0, 1])$  pour chaque  $R > 0$ , où  $(W(s, t))_{s \in [-R, R], t \in [0, 1]}$  est un processus gaussien centré dont la fonction de covariance est donnée pour  $s, s' \in \mathbb{R}$  et  $0 \leq t \leq t' \leq 1$  par la formule

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W(s, t), W(s', t')) &= t(1-t)(1-t')C_{1,1}(s, s') \\ &\quad + t(1-t')(t-t)C_{2,1}(s, s') + tt'(1-t')C_{2,2}(s, s'), \end{aligned}$$

où, pour  $i, j = 1, 2$  et  $s, s' \in \mathbb{R}$ ,

$$C_{i,j}(s, s') = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(h_{i,s}(X_0), h_{j,s'}(X_k)),$$

et les fonctions  $h_{1,s}$  et  $h_{2,s}$  sont définies comme dans (3.6.3).

Dans la pratique, la probabilité  $\mathbb{P}(g(X_i, X_j) \leq s)$  est inconnue, et l'on dispose seulement des valeurs de  $\mathbf{1}\{g(X_i, X_j) \leq s\}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ . Ceci nous incite à considérer un résultat analogue au Théorème 3.6.1, où l'on a remplacé  $\mathbb{P}(g(X_i, X_j) \leq s)$  par son estimateur empirique  $(C_n^2)^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{1}\{g(X_i, X_j) \leq s\}$ .

**Théorème 3.6.2.** *Soit  $e'_n$  la  $U$ -statistique empirique à deux échantillons, définie pour  $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ ,  $s \in \mathbb{R}$  et  $0 \leq t \leq 1$  par*

$$e'_n(s, t) := \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \sum_{j=\lfloor nt \rfloor+1}^n \left( \mathbf{1}\{g(X_i, X_j) \leq s\} - \frac{1}{C_n^2} \sum_{1 \leq i' < j' \leq n} \mathbf{1}\{g(X_{i'}, X_{j'}) \leq s\} \right).$$

Sous les hypothèses (C.1), (C.2), (C.3) et (C.4), la convergence

$$e'_n(s, t) \rightarrow W(s, t) \text{ en loi dans } D([-R, R] \times [0, 1]),$$

a lieu pour chaque  $R > 0$ , où  $(W(s, t))_{s \in [-R, R], t \in [0, 1]}$  est un processus gaussien centré dont la

fonction de covariance est donnée pour  $s, s' \in \mathbb{R}$  et  $0 \leq t \leq t' \leq 1$  par la formule

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W(s, t), W(s', t')) &= t(1-t)(1-t')C_{1,1}(s, s') + (t'-t)t(1-t')C_{2,1}(s, s') \\ &\quad + (1-t')tt'C_{2,2}(s, s') - 2tt'(1-t^2)(1-t')C_1^a(s, s') \\ &\quad - 2t(1-t)t'(1-t')(s', s)C_1^a(s', s) - 2tt'(1-t')(2+t'-2t-t^2)C_2^a(s, s') \\ &\quad - 2t(1-t)t'(1-t')C_2^a(s', s) + 4t(1-t)t'(1-t')\left(t^2+t+\frac{10}{3}\right)C^a(s, s'), \end{aligned}$$

où  $h_1$  et  $h_2$  sont définies comme dans (3.6.3),  $a_s = h_{1,s} - h_{2,s}$  et pour  $i, j = 1; 2$ ,

$$C_{i,j}(s, s') = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(h_{i,s}(X_0), h_{j,s'}(X_k)),$$

$$C_i^a(s, s') = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(h_{i,s}(X_0), a_{s'}(X_k))$$

$$C^a(s, s') = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(a_s(X_0), a_{s'}(X_k)).$$

Les résultats suivants sont une conséquence directe des Théorèmes 3.6.1 et 3.6.2.

**Corollaire 3.6.3.** *Sous les conditions des Théorèmes 3.6.1 et 3.6.2, les convergences en loi suivantes ont lieu pour tout  $R > 0$  :*

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \sup_{-R \leq s \leq R} |e_n(s, t)| \rightarrow \sup_{0 \leq t \leq 1} \sup_{-R \leq s \leq R} |W(s, t)|;$$

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \sup_{-R \leq s \leq R} |e'_n(s, t)| \rightarrow \sup_{0 \leq t \leq 1} \sup_{-R \leq s \leq R} |W'(s, t)|.$$

**Corollaire 3.6.4.** *Soit  $\mu$  une mesure finie sur les boréliens de  $\mathbb{R}$ . Sous les conditions des Théorèmes 3.6.1 et 3.6.2, les convergences en loi suivantes ont lieu pour tout  $R > 0$  :*

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \int_{\mathbb{R}} e_n(s, t)^2 d\mu(s) \rightarrow \sup_{0 \leq t \leq 1} \int_{\mathbb{R}} W(s, t)^2 d\mu(s) \quad (3.6.4)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \int_{\mathbb{R}} [e'_n(s, t)]^2 d\mu(s) \rightarrow \sup_{0 \leq t \leq 1} \int_{\mathbb{R}} [W'(s, t)]^2 d\mu(s). \quad (3.6.5)$$

Une procédure de test basée sur l'une des statistiques

$$T_n := \sup_{0 \leq t \leq 1} \sup_{-R \leq s \leq R} |e'_n(s, t)|, \quad T_n(\mu) := \sup_{0 \leq t \leq 1} \int_{\mathbb{R}} [e'_n(s, t)]^2 d\mu(s)$$

se heurte à l'obstacle de déterminer ou bien d'approximer la loi de la limite. Nous proposons des pistes dans la section 3.8.

### 3.7 Théorèmes limites pour des $U$ -statistiques de données $\beta$ -mélangeantes

Dans cette section, nous considérons des  $U$ -statistiques d'ordre 2 à valeurs dans un espace de Hilbert  $\mathbb{H}$ , dont le produit scalaire et la norme seront notés respectivement par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}}$  et  $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ . On se donne un noyau mesurable  $h: S \times S \rightarrow \mathbb{H}$ , où  $(S, d)$  est un espace métrique séparable et les tribus sur l'ensemble de départ et d'arrivée sont les tribus boréliennes et on pose

$$U_{2,n}(h) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} h(X_i, X_j).$$

On peut définir un processus sommes partielles à partir du noyau  $h$  et de la suite  $(X_i)_{i \geq 1}$  par

$$\mathcal{U}_{n,h}(t) = \sum_{1 \leq i < j \leq \lfloor nt \rfloor} h(X_i, X_j) + (nt - \lfloor nt \rfloor) \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} h(X_i, X_{\lfloor nt \rfloor + 1}).$$

Ainsi, si  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , alors  $\mathcal{U}_{n,h}(k/n) = U_k(h)$  et l'application  $t \mapsto \mathcal{U}_{n,h}(t)$  est affine par morceaux. En particulier,  $t \mapsto \mathcal{U}_{n,h}(t)$  est un élément de  $C_{\mathbb{H}}([0, 1])$ , l'espace des fonctions continues définies sur  $[0, 1]$  et à valeurs dans  $\mathbb{H}$ .

Dans l'article [Gir24c], nous avons étudié les questions suivantes. Nous cherchons des conditions suffisantes sur les coefficients de  $\beta$ -mélange définis par (3.6.2) et les moments de  $h(X_1, X_j)$  et de  $h(X_1, X'_1)$ , où  $X'_1$  est une copie indépendante de  $X_1$ , garantissant

- un théorème limite central fonctionnel, c'est-à-dire la convergence de la suite  $(\mathcal{U}_{n,h}(t), t \in [0, 1])_{n \geq 1}$  dans  $C_{\mathbb{H}}([0, 1])$ ,
- la loi forte des grands nombres de Marcinkiewicz, c'est-à-dire la convergence presque sûre de la suite  $(n^{-1-1/p}(U_n(h) - \mathbb{E}[U_n(h)]))_{n \geq 1}$  vers 0, avec  $1 < p < 2$ . Sous certaines hypothèses supplémentaires concernant le noyau  $h$  et la loi de  $X_1$ , il est possible de remplacer la normalisation  $n^{1+1/p}$  par  $n^{2/p}$ .

Notre approche est la suivante. Nous partons de la décomposition d'Hoeffding : nous nous donnons une copie indépendante  $X'_1$  de  $X_1$  et on pose

$$h_{1,0}(x) = \mathbb{E}[h(x, X'_1)] - \mathbb{E}[h(X_1, X'_1)], \quad x \in S,$$

$$h_{0,1}(y) = \mathbb{E}[h(X_1, y)] - \mathbb{E}[h(X_1, X'_1)], \quad y \in S$$

et

$$h_2(x, y) = h(x, y) - h_{1,0}(x) - h_{0,1}(y) - \mathbb{E}[h(X_1, X'_1)], \quad x, y \in S.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} U_{2,n}(h) &= \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) (h_{1,0}(X_i) - \mathbb{E}[h_{1,0}(X_i)]) + \sum_{j=2}^n (j-1) (h_{0,1}(X_j) - \mathbb{E}[h_{0,1}(X_j)]) \\ &\quad + U_{2,n}(h_2) \end{aligned} \tag{3.7.1}$$

et lorsque  $(X_i)_{i \geq 1}$  est i.i.d.,

$$\mathbb{E}[h_2(X_i, X_j) \mid \sigma(X_k, k \leq j-1)] = 0 = \mathbb{E}[h_2(X_i, X_j) \mid \sigma(X_k, k \geq i+1)],$$

ce qui permet d'utiliser des propriétés de martingale dans la sommation en  $i$  et également pour celle en  $j$ . Nous utilisons les résultats existants dans la littérature pour des sommes partielles de variables aléatoires mélangeantes : [38] pour le théorème limite central fonctionnel et [39] pour la loi des grands nombres. Il reste donc à montrer que la contribution de  $U_{2,n}(h_2)$  est négligeable. Nous ne pouvons pas utiliser directement des propriétés de martingale, car elles n'ont pas lieu lorsque  $(X_i)_{i \geq 1}$  n'est pas indépendante.

Il est cependant possible de s'appuyer sur le cas indépendant en utilisant des arguments de couplage. En effet, pour  $N$  et  $0 < q < N/2$  fixés, posons

$$V_{k,u} = (X_{2qu+k}, \dots, X_{2qu+k+q-1}).$$

Par le Lemme de couplage de Berbee (voir [14]), il est possible de trouver, pour chaque entier  $k$  tel que  $|k| \leq q$ , une collection de variables aléatoires  $(V_{k,u}^*)_{u \in [0, N]}$  telles que

- pour tout  $u \in [0, N]$ , les vecteurs  $V_{k,u}$  et  $V_{k,u}^*$  ont la même loi,
- la famille  $(V_{k,u}^*)_{u \in [0, N]}$  est indépendante et
- pour tous  $k \in [-q, q]$  et  $u \in [0, N]$ ,  $\mathbb{P}(V_{k,u} \neq V_{k,u}^*) \leq \beta(q)$ .

On décompose ensuite  $U_{2,n}(h_2)$  de la manière suivante : si les restes de la division euclidienne de  $i$  et  $j$  par  $2q$  sont à une distance plus petite que  $q$ , nous pouvons exprimer  $h_2(X_i, X_j)$  à l'aide des vecteurs  $V_{k,u}$  pour un  $k$  fixé. Dans le cas contraire, nous introduisons un terme télescopique dans l'une des coordonnées  $i$  ou  $j$ , terme qui jouera un rôle négligeable. Pour les termes exprimables à l'aide des vecteurs  $V_{k,u}$ , nous introduisons les vecteurs couplés  $V_{k,u}^*$ . Ceci donne lieu à  $(2q)^2$   $U$ -statistiques dégénérées de données i.i.d., pour lesquelles une inégalité de martingales à valeurs dans un espace de Hilbert (Théorème 4.1 dans [137]) peut s'appliquer. Nous déduisons alors l'inégalité de déviation suivante : pour tous  $r \geq 2$ ,  $x, R > 0$  et  $N, q$  tels que  $0 \leq 2q \leq N$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \max_{2 \leq n \leq N} \left\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} h_2(X_i, X_j) \right\|_{\mathbb{H}} > x \right) &\leq C_r x^{-r} q^r N^r \mathbb{E}[H^r \mathbf{1}\{H \leq R\}] \\ &+ C_r x^{-1} N^2 \mathbb{E}[H \mathbf{1}\{H > R\}] + C_r x^{-1} q N \sup_{j \geq 2} \mathbb{E}[\|h(X_1, X_j)\|_{\mathbb{H}}] + 4N\beta(q), \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

où  $H = \|h(X_1, X'_1)\|_{\mathbb{H}}$ ,  $X'_1$  est une copie indépendante de  $X_1$  et  $C_r$  ne dépend que de  $r$ . Le terme  $x$  sera imposé par le contexte d'application de cette inégalité (théorème limite central fonctionnel ou bien loi forte des grands nombres). En revanche, il est possible de choisir les paramètres  $r$ ,  $q$  et  $R$  afin de rendre le membre de droite de l'inégalité (3.7.2) aussi petit que nécessaire. Le terme  $N\beta(q)$  décroît avec  $q$  mais les autres termes croissent en  $q$ , donc il faut choisir ce paramètre de manière judicieuse. Lorsque  $\mathbb{E}[H^r]$  est finie, faire tendre  $R$  vers l'infini élimine le second terme

du membre de droite de (3.7.2) et permet ainsi obtenir l'inégalité plus simple

$$\mathbb{P} \left( \max_{2 \leq n \leq N} \left\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} h(X_i, X_j) \right\|_{\mathbb{H}} > x \right) \leq C_r x^{-r} q^r N^r \mathbb{E}[H^r] \\ + C_r x^{-1} q N \sup_{j \geq 2} \mathbb{E} [\|h(X_1, X_j)\|_{\mathbb{H}}] + 4N\beta(q).$$

Mentionnons à présent les résultats obtenus. Concernant le théorème limite central fonctionnel, nous considérons les hypothèses suivantes

(C.1) en notant  $h_1(x) = \mathbb{E}[h(x, X_1)] - \mathbb{E}[h(X_1, X_1)]$ , où  $X_1$  est une copie indépendante de  $X_1$  et par  $Q_Y(u)$  la quantité  $\inf\{t > 0, \mathbb{P}(Y > t) \leq u\}$ ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\alpha(\sigma(X_i, i \leq 0), \sigma(X_k))} Q_{\|h_1(X_0)\|_{\mathbb{H}}}^2(u) du < \infty,$$

(C.2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \beta(n) = 0$  et

(C.3)  $\sup_{j \geq 2} \mathbb{E} [\|h(X_1, X_j)\|_{\mathbb{H}}] < \infty$ .

Pour décrire le processus limite, nous définissons un processus  $W_{\Gamma}$  de la manière suivante.

**Définition 3.7.1.** Soit  $\pi_t: C_{\mathbb{H}}[0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  l'application « évaluation en  $t$  », c'est-à-dire  $\pi_t(x) = x(t)$ . Pour  $\Gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{H})$ , soit  $W_{\Gamma}$  le processus vérifiant

1.  $W_{\Gamma}(0) = 0$ ,
2. les trajectoires sont continues et
3. pour tous  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_N \leq 1$ , les accroissements  $(W_{\Gamma}(t_i) - W_{\Gamma}(t_{i-1}))_{i=0}^N$  sont indépendants et  $W_{\Gamma}(t_i) - W_{\Gamma}(t_{i-1})$  a une loi gaussienne sur  $\mathbb{H}$ , centrée et d'opérateur de covariance  $(t_i - t_{i-1})\Gamma$ .

Nous avons obtenu le résultat suivant.

**Théorème 3.7.2.** Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  une suite strictement stationnaire de variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique séparable  $(S, d)$  et soit  $h: S \times S \rightarrow \mathbb{H}$  une fonction symétrique mesurable, où  $S \times S$  est muni de la tribu produit et l'espace de Hilbert  $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}})$  de la tribu engendrée par la norme. Supposons que les hypothèses (C.1), (C.2) et (C.3) soient vérifiées. Alors la convergence en loi dans  $C_{\mathbb{H}}([0, 1])$  suivante a lieu dans  $C_{\mathbb{H}}[0, 1]$  :

$$\frac{1}{n^{3/2}} (\mathcal{U}_{n,h}(t) - \mathbb{E}[\mathcal{U}_{n,h}(t)]) \rightarrow W_{\Gamma},$$

où l'opérateur  $\Gamma$  est défini par

$$\langle \Gamma u, v \rangle_{\mathbb{H}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} [\langle h_1(X_0), u \rangle_{\mathbb{H}} \langle h_1(X_k), v \rangle_{\mathbb{H}}], \quad u, v \in \mathbb{H}. \quad (3.7.3)$$

L'hypothèse (C.1) permet de montrer que la partie linéaire dans (3.7.1) converge en loi vers le processus annoncé, tandis que les hypothèses (C.2) et (C.3) permettent de montrer le rôle négligeable de la  $U$ -statistique associée à  $h_2$ .

Notons que dans le cas dégénéré, l'opérateur  $\Gamma$  défini par (3.7.3) est nul. Il est possible de montrer la convergence en loi avec la normalisation en  $n$ , mais avec des techniques complètement différentes, voir [106, 107]. Dans le cas où  $\|h(X_1, X_j)\|_{\mathbb{H}}$  a des moments d'ordre inférieur à 4, notre résultat améliore celui de Dehling et Wendler [50]. Le cas de fonctionnelles de processus  $\beta$ -mélangeants a été traité par Borovkova, Burton et Dehling dans [22], mais lorsque l'on se restreint au cas  $\beta$ -mélangeant, leurs résultats ne sont pas meilleurs. Il en va de même de ceux de l'article [49]. Enfin, notons que notre résultat s'applique également lorsque  $\mathbb{E}[h_1(X_0)^2 (\log(1 + |h_1(X_0)|))^{\gamma}]$  est finie pour un certain  $\gamma > 0$ , au prix d'une décroissance exponentielle de  $\alpha(\sigma(X_i, i \leq 0), \sigma(X_k))$ .

Concernant la loi forte des grands nombres, nous considérons les hypothèses suivantes :

$$\mathbb{E}[\|h(X_1, X'_1)\|_{\mathbb{H}}^r] < \infty, \quad (3.7.4)$$

$$\sup_{j \geq 2} \mathbb{E}[\|h(X_1, X_j)\|_{\mathbb{H}}] < \infty. \quad (3.7.5)$$

Nous ferons ensuite des hypothèses sur la suite des coefficients de  $\beta$ -mélange, qui dépendront de la présence de moments d'ordre supérieur à 2 ou non de  $\|h(X_1, X'_1)\|_{\mathbb{H}}$  et du caractère dégénéré ou non du noyau  $h$ .

Dans les résultats suivants,  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  est une suite strictement stationnaire de variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique séparable  $(S, d)$ ,  $h: S \times S \rightarrow \mathbb{H}$  une fonction mesurable, où  $S \times S$  est muni de la tribu produit et l'espace de Hilbert  $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}})$  de la tribu engendrée par la norme. Soit  $1 < p < 2$ .

- Nous supposons que (3.7.4) est vérifiée avec  $r$  remplacé par  $p + \delta$ , avec  $p + \delta \geq 2$ , ainsi que (3.7.5). Nous supposons de plus qu'il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\gamma(p, \delta, \eta)} \beta(k) < \infty,$$

où

$$\gamma(p, \delta, \eta) = \max \left\{ p - 1 + \eta, p - 2 + \frac{p(p-1)}{\delta} \right\}.$$

Alors la convergence suivante a lieu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+1/p}} \|U_n(h)\|_{\mathbb{H}} = 0 \text{ p.s..} \quad (3.7.6)$$

- Nous supposons que (3.7.4) est vérifiée avec  $r$  remplacé par  $p + \delta$ , avec  $p + \delta < 2$ , ainsi que (3.7.5). Nous supposons de plus que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\gamma(p, \delta)} \beta(k) < \infty,$$



où

$$\gamma(p, \delta) = \max \left\{ p - 2 + \frac{p(p-1)}{\delta}, \frac{p(p-1) + (p-1)\delta}{p(p-1) + (p+1)\delta} \right\}.$$

Alors la convergence (3.7.6) a lieu.

Dans le cas dégénéré, c'est-à-dire

$$\mathbb{E}[h(X_1, X'_1) | X_1] = \mathbb{E}[h(X_1, X'_1) | X'_1] = 0,$$

la normalisation peut être remplacée par  $n^{2/p}$ . Nous avons obtenu les résultats suivants.

- Nous supposons que (3.7.4) est vérifiée avec  $r$  remplacé par  $p + \delta$ , avec  $p + \delta = 2$ , ainsi que (3.7.5), et qu'il existe  $\eta$  tel que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{2(p-1)}{2-p} + \eta} \beta(k) < \infty.$$

Alors la convergence suivante a lieu :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2/p}} \|U_n(h)\|_{\mathbb{H}} = 0 \text{ p.s..} \quad (3.7.7)$$

- Nous supposons que (3.7.4) est vérifiée avec  $r$  remplacé par  $p + \delta$ , avec  $p + \delta < 2$ , ainsi que (3.7.5), et que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-1 + \frac{p(p-1)}{\delta}} \beta(k) < \infty.$$

Alors la convergence (3.7.7) a lieu.

Ces deux derniers résultats améliorent et complètent ceux obtenus par Dehling et Sharipov dans [48]. En effet, leur résultats pour des noyaux dégénérés ne concernent que le cas borné et à valeurs réelles.

## 3.8 Perspectives

Les travaux présentés sur les  $U$ -statistiques ont ouvert les perspectives suivantes.

Tout d'abord, l'inégalité exponentielle présentée dans la sous-section 3.3.2 n'est valable que dans le cas de  $U$ -statistiques à valeurs réelles et ayant un noyau qui ne dépend pas de l'indice  $i$ . Afin d'obtenir des applications aux  $U$ -statistiques pondérées ou ayant des poids aléatoires, il faudrait obtenir une inégalité où l'on autoriserait les noyaux à dépendre de l'indice  $i$ . Nous pourrions ainsi fournir des vitesses de convergence dans la loi des grands nombres.

Concernant les  $U$ -statistiques de données dépendantes, il faudrait mettre au point une procédure statistique qui se baserait sur des résultats dans l'esprit de ceux obtenus dans (3.6). Un des problèmes est que l'on ne peut pas déterminer les valeurs critiques dans le cadre d'un test se

basant sur les statistiques de test données dans (3.6.4) et (3.6.5). Nous pourrions considérer des  $U$ -statistiques empiriques comme dans (3.6.1) où la fonction  $g$  est remplacée par  $g_n$ , c'est-à-dire

$$e_n(s, t) := \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \sum_{j=\lfloor nt \rfloor+1}^n (\mathbf{1}\{g_n(X_i, X_j) \leq s\} - \mathbb{P}(g_n(X_i, X_j) \leq s)).$$

On pourrait prendre par exemple pour  $g_n(x, y) = g_{n,1}(x) - g_{n,1}(y)$ , où  $g_{n,1}$  serait un estimateur lissé de la fonction empirique de  $X_1$ .

Il est également possible d'envisager de détecter la présence de plusieurs changements dans un échantillon, en se basant sur une  $U$ -statistique à plusieurs échantillons, en considérant tous les découpages possibles de l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$  en  $m$  sous-échantillons d'indices consécutifs. Ceci nous amène à poser

$$U_n^{\text{m ech}}(t_1, \dots, t_{m-1}) = \sum_{i_1=1}^{\lfloor nt_1 \rfloor} \sum_{i_2=\lfloor nt_1 \rfloor+1}^{\lfloor nt_2 \rfloor} \cdots \sum_{i_m=\lfloor nt_{m-1} \rfloor+1}^n h(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}). \quad (3.8.1)$$

On peut alors utiliser une statistique de test mettant en jeu  $U_n^{\text{m ech}}$  qui, sous l'hypothèse de présence de strictement moins de  $m - 1$  changements, converge grâce à un terme de centrage approprié, et qui tend vers l'infini en probabilité sous l'alternative, qui indique la présence de  $m$  changements du paramètre considéré.

De plus, la topologie höldérienne permet de traiter le cas d'un changement de paramètre sur une période courte par rapport à la taille de l'échantillon observé. Ceci a été illustré dans l'article [147], où le cas de la  $U$ -statistique à deux échantillons a été traité. Une version lissée de la  $U$ -statistique à  $m$  échantillons définie par (3.8.1) peut alors être étudiée dans les espaces de Hölder afin de déterminer la présence de  $m$  changements de paramètres sur des périodes courtes.

Enfin, une autre perspective concerne le théorème limite central pour des  $U$ -statistiques de données stationnaires de la forme (3.1.1). Certains résultats ont traité le cas mélangeant, voir [5, 184]. Dans le cas où  $(X_i)_{i \geq 1}$  est telle que  $X_i = f((\varepsilon_{i-k})_{k \in \mathbb{Z}})$ , seul le cas  $m = 2$  a été traité (voir [Gir21b] et [90] dans le cas plus général de  $U$ -statistiques pondérées). Cependant, de nombreuses  $U$ -statistiques sont d'ordre supérieur à 2, comme celles intervenant dans la distance de covariance introduite dans [114]. Une approche possible, basée sur une adaptation de la décomposition de Hoeffding, serait la suivante : nous posons  $h_1(x) = \mathbb{E}[h(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}, x)]$ , où  $(\xi_\ell)_{\ell=1}^{m-1}$  est i.i.d. et  $\xi_1$  a la même loi que  $X_1$ , puis  $\tilde{h}(x_1, \dots, x_m) = h(x_1, \dots, x_m) - \sum_{k=1}^m h_1(x_k)$ . Par conséquent,  $U_{m,n}(h)$  se décompose comme une somme de variables aléatoires formant une suite strictement stationnaire plus une  $U$ -statistique dont le noyau  $h$  est remplacé par  $\tilde{h}$ . Une inégalité de moments satisfaisante sur  $\left\| U_{m,n}(\tilde{h}) \right\|_2$  permettrait alors de montrer que  $U_{m,n}(h)$ , adéquatement centrée et normalisée, converge vers une loi normale. Les conditions porteraient sur les normes de termes de la forme  $\mathbb{E}[h(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}) \mid \sigma(X_\ell, \ell \leq 0)]$ , dans le même esprit que pour les théorèmes limites pour les suites strictement stationnaires (voir par exemple [78]). Un cas où ces conditions peuvent se vérifier serait celui de suites ayant la forme  $X_i = f((\varepsilon_{i-k})_{k \in \mathbb{N}}) = f(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-1}, \dots)$ , ou bien de suites vérifiant une condition de mélange et dont le noyau est défini sur  $\mathbb{R}^m$ , continu, intégrable

et sa transformée de Fourier vérifie certaines conditions d'intégrabilité, comme dans [161]. Dans ce dernier cas, le noyau peut s'approximer sur un cube par des sommes de fonctions s'exprimant comme un produit de fonction de chaque coordonnée, ce qui permettrait de formuler une condition simple sur les coefficients de mélange pour garantir un théorème limite central.

# Publications depuis le doctorat

- [PBGK23] Annika Betken, Davide Giraudo, and Rafał Kulik, *Change-point tests for the tail parameter of long memory stochastic volatility time series*, *Statist. Sinica* **33** (2023), no. 3, 2017–2039. MR 4607198
- [PDGS21] Herold Dehling, Davide Giraudo, and Olimjon Sharipov, *Convergence of the empirical two-sample  $U$ -statistics with  $\beta$ -mixing data*, *Acta Math. Hungar.* **164** (2021), no. 2, 377–412. MR 4279342
- [PDGS23] Herold Dehling, Davide Giraudo, and Sara K. Schmidt,  *$U$ -statistics of local sample moments under weak dependence*, *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* **20** (2023), no. 2, 1511–1535. MR 4683384
- [PDGV23] Herold Dehling, Davide Giraudo, and Dalibor Volný, *Some remarks on the ergodic theorem for  $U$ -statistics*, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **361** (2023), 1511–1519. MR 4683328
- [PGir18] Davide Giraudo, *Invariance principle via orthomartingale approximation*, *Stoch. Dyn.* **18** (2018), no. 6, 1850043, 29. MR 3869881
- [PGir19a] ———, *Convergence rates in the central limit theorem for weighted sums of Bernoulli random fields*, *Mod. Stoch. Theory Appl.* **6** (2019), no. 2, 251–267. MR 3963881
- [PGir19b] ———, *Deviation inequalities for Banach space valued martingales differences sequences and random fields*, *ESAIM Probab. Stat.* **23** (2019), 922–946. MR 4046858
- [PGir21a] ———, *An exponential inequality for  $U$ -statistics of I.I.D. data*, *Theory Probab. Appl.* **66** (2021), no. 3, 408–429, Translation of *Teor. Veroyatn. Primen.* **66** (2021), 508–533. MR 4466386
- [PGir21b] ———, *Limit theorems for  $U$ -statistics of Bernoulli data*, *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* **18** (2021), no. 1, 793–828. MR 4243516
- [PGir21c] ———, *Maximal function associated to the bounded law of the iterated logarithms via orthomartingale approximation*, *J. Math. Anal. Appl.* **496** (2021), no. 1, Paper No. 124792, 25. MR 4186670
- [PGir22] ———, *Bound on the maximal function associated to the law of the iterated logarithms for Bernoulli random fields*, *Stochastics* **94** (2022), no. 2, 248–276. MR 4372657
- [PGir23] ———, *An exponential inequality for orthomartingale difference random fields and some applications*, *Ann. H. Lebesgue* **6** (2023), 575–594. MR 4648091

- [PGir24a] ———, *Deviation and moment inequalities for Banach-valued  $U$ -statistics*, submitted (2024), working paper or preprint, <https://hal.science/hal-04566956>.
- [PGir24b] ———, *Deviation inequality for Banach-valued orthomartingales*, *Stochastic Process. Appl.* **175** (2024), Paper No. 104391, 20. MR 4754186
- [PGir24c] Davide Giraud, *Functional central limit theorem and marciniewicz strong law of large numbers for hilbert-valued  $u$ -statistics of absolutely regular data*, *Brazilian Journal of Probability and Statistics* **38** (2024), no. 2, 321 – 338.
- [PGir24d] Davide Giraud, *Some notes on ergodic theorem for  $U$ -statistics of order  $m$  for stationary and not necessarily ergodic sequences*, *Statist. Probab. Lett.* **210** (2024), Paper No. 110117. MR 4723472
- [PGir24e] Davide Giraud, *Weak and strong law of large numbers for strictly stationary Banach-valued random fields*.
- [PGLV24] Davide Giraud, Emmanuel Lesigne, and Dalibor Volny, *What can be the limit in the CLT for a field of martingale differences ?*, May 2024, working paper or preprint.
- [PGR17] Davide Giraud and Alfredas Račkauskas, *Weak invariance principle in some Besov spaces for stationary martingale differences*, *Lith. Math. J.* **57** (2017), no. 4, 441–467. MR 3736194

# Bibliographie

- [1] John Aaronson, Robert Burton, Herold Dehling, David Gilat, Theodore Preston Hill, et Benjamin Weiss, *Strong laws for  $L$ - and  $U$ -statistics*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), no. 7, 2845–2866.
- [2] Radosław Adamczak, *Moment inequalities for  $U$ -statistics*, Ann. Probab. **34** (2006), no. 6, 2288–2314.
- [3] Miguel Arcones et Evarist Giné, *Limit theorems for  $U$ -processes*, Ann. Probab. **21** (1993), no. 3, 1494–1542.
- [4] ———, *On the law of the iterated logarithm for canonical  $U$ -statistics and processes*, Stochastic Process. Appl. **58** (1995), no. 2, 217–245.
- [5] Miguel Arcones et Bin Yu, *Central limit theorems for empirical and  $U$ -processes of stationary mixing sequences*, J. Theoret. Probab. **7** (1994), no. 1, 47–71.
- [6] Miguel Arcones, *A Bernstein-type inequality for  $U$ -statistics and  $U$ -processes*, Statist. Probab. Lett. **22** (1995), no. 3, 239–247.
- [7] ———, *On the central limit theorem for  $U$ -statistics under absolute regularity*, Statist. Probab. Lett. **24** (1995), no. 3, 245–249.
- [8] ———, *The law of large numbers for  $U$ -statistics under absolute regularity*, Electron. Comm. Probab. **3** (1998), 13–19.
- [9] ———, *The law of the large numbers for  $U$ -statistics for  $2m$ -wise independent random variables*, Statist. Probab. Lett. **40** (1998), no. 1, 75–81.
- [10] Patrice Assouad, *Burgess Davis inequalities in Banach spaces*, Proceedings of the Seminar on Random Series, Convex Sets and Geometry of Banach Spaces (Mat. Inst., Aarhus Univ., Aarhus, 1974; dedicated to the memory of E. Asplund), Various Publications Series, vol. No. 24, Aarhus Univ., Aarhus, 1975, pp. 1–20.
- [11] ———, *Espaces  $p$ -lisses et  $q$ -convexes, inégalités de Burkholder*, Séminaire Maurey-Schwartz 1974–1975 : Espaces  $L^p$ , applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach, École Polytech., Paris, 1975, pp. Exp. No. XV, 8.
- [12] Adhir Kumar Basu et Chang Chung Yu Dorea, *On functional central limit theorem for stationary martingale random fields*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **33** (1979), no. 3-4, 307–316.

- [13] Jan Beran, Yuanhua Feng, Sucharita Ghosh et Rafal Kulik, *Long-memory processes*, Springer, Heidelberg, 2013, Probabilistic properties and statistical methods.
- [14] Henry C. P. Berbee, *Random walks with stationary increments and renewal theory*, Mathematical Centre Tracts, vol. 112, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1979.
- [15] Bernard Bercu et Abderrahmen Touati, *Exponential inequalities for self-normalized martingales with applications*, Ann. Appl. Probab. **18** (2008), no. 5, 1848–1869.
- [16] Eric Beutner et Henryk Zähle, *Deriving the asymptotic distribution of  $U$ - and  $V$ -statistics of dependent data using weighted empirical processes*, Bernoulli **18** (2012), no. 3, 803–822.
- [17] Gérard Biau, *Optimal asymptotic quadratic errors of density estimators on random fields*, Statist. Probab. Lett. **60** (2002), no. 3, 297–307.
- [18] Peter J. Bickel et Ya’acov Ritov, *An exponential inequality for  $U$ -statistics with applications to testing*, Probab. Engrg. Inform. Sci. **9** (1995), no. 1, 39–52.
- [19] Hermine Biermé et Olivier Durieu, *Invariance principles for self-similar set-indexed random fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), no. 11, 5963–5989.
- [20] Gunnar Blom, *Some properties of incomplete  $U$ -statistics*, Biometrika **63** (1976), no. 3, 573–580.
- [21] Igor S. Borisov et Nadezhda V. Volodko, *Limit theorems and exponential inequalities for canonical  $U$ - and  $V$ -statistics of dependent trials*, High dimensional probability V : the Luminy volume, Inst. Math. Stat. (IMS) Collect., vol. 5, Inst. Math. Statist., Beachwood, OH, 2009, pp. 108–130.
- [22] Svetlana Borovkova, Robert Burton, et Herold Dehling, *Limit theorems for functionals of mixing processes with applications to  $U$ -statistics and dimension estimation*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 11, 4261–4318.
- [23] Donald L. Burkholder, *Distribution function inequalities for martingales*, Ann. Probab. **1** (1973), 19–42.
- [24] António M. Caetano, Sofia Lopes, et Hans Triebel, *A homogeneity property for Besov spaces*, J. Funct. Spaces Appl. **5** (2007), no. 2, 123–132.
- [25] Renzo Cairoli et John B. Walsh, *Stochastic integrals in the plane*, Acta Math. **134** (1975), 111–183.
- [26] Michel Carbon, Marc Hallin, et Lanh Tat Tran, *Kernel density estimation for random fields : the  $L_1$  theory*, J. Nonparametr. Statist. **6** (1996), no. 2-3, 157–170.
- [27] Jean-René Chazottes, Christophe Cuny, Jérôme Dedecker, Xiequan Fan, et Sarah Lemler, *Limit theorems and inequalities via martingale methods*, Journées MAS 2012, ESAIM Proc., vol. 44, EDP Sci., Les Ulis, 2014, pp. 177–196.
- [28] Louis H. Y. Chen et Qi-Man Shao, *Normal approximation under local dependence*, Ann. Probab. **32** (2004), no. 3A, 1985–2028.
- [29] Xiaohui Chen et Kengo Kato, *Randomized incomplete  $U$ -statistics in high dimensions*, Ann. Statist. **47** (2019), no. 6, 3127–3156.

- [30] Tasos C. Christofides, *Probability inequalities with exponential bounds for  $U$ -statistics*, *Statist. Probab. Lett.* **12** (1991), no. 3, 257–261.
- [31] Miklós Csörgő et Lajos Horváth, *Invariance principles for changepoint problems*, *J. Multivariate Anal.* **27** (1988), no. 1, 151–168.
- [32] Christophe Cuny, *A compact LIL for martingales in 2-smooth Banach spaces with applications*, *Bernoulli* **21** (2015), no. 1, 374–400.
- [33] ———, *Invariance principles under the Maxwell-Woodroffe condition in Banach spaces*, *Ann. Probab.* **45** (2017), no. 3, 1578–1611.
- [34] Youri Davydov et Ričardas Zitikis, *On weak convergence of random fields*, *Ann. Inst. Statist. Math.* **60** (2008), no. 2, 345–365.
- [35] Victor H. de la Peña et Stephen Montgomery-Smith, *Decoupling inequalities for the tail probabilities of multivariate  $U$ -statistics*, *Ann. Probab.* **23** (1995), no. 2, 806–816.
- [36] Victor H. de la Peña, Rustam Ibragimov et Shaturgun Sharakhmetov, *On sharp Burkholder-Rosenthal-type inequalities for infinite-degree  $U$ -statistics*, vol. 38, 2002, En l’honneur de J. Bretagnolle, D. Dacunha-Castelle, I. Ibragimov, pp. 973–990.
- [37] Jérôme Dedecker, *Exponential inequalities and functional central limit theorems for a random fields*, *ESAIM Probab. Statist.* **5** (2001), 77–104.
- [38] Jérôme Dedecker et Florence Merlevède, *The conditional central limit theorem in Hilbert spaces*, *Stochastic Process. Appl.* **108** (2003), no. 2, 229–262.
- [39] ———, *Inequalities for partial sums of Hilbert-valued dependent sequences and applications*, *Math. Methods Statist.* **15** (2006), no. 2, 176–206.
- [40] ———, *Convergence rates in the law of large numbers for Banach-valued dependent variables*, *Teor. Veroyatn. Primen.* **52** (2007), no. 3, 562–587.
- [41] ———, *A deviation bound for  $\alpha$ -dependent sequences with applications to intermittent maps*, *Stoch. Dyn.* **17** (2017), no. 1, 1750005, 27.
- [42] Jérôme Dedecker, Florence Merlevède, et Dalibor Volný, *On the weak invariance principle for non-adapted sequences under projective criteria*, *J. Theoret. Probab.* **20** (2007), no. 4, 971–1004.
- [43] Jérôme Dedecker et Clémentine Prieur, *Coupling for  $\tau$ -dependent sequences and applications*, *J. Theoret. Probab.* **17** (2004), no. 4, 861–885.
- [44] ———, *New dependence coefficients. Examples and applications to statistics*, *Probab. Theory Related Fields* **132** (2005), no. 2, 203–236.
- [45] Jérôme Dedecker et Emmanuel Rio, *On the functional central limit theorem for stationary processes*, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **36** (2000), no. 1, 1–34.
- [46] Herold Dehling, Roland Fried, et Martin Wendler, *A robust method for shift detection in time series*, *Biometrika* **107** (2020), no. 3, 647–660.



- [47] Herold Dehling, Muneya Matsui, Thomas Mikosch, Gennady Samorodnitsky et Laleh Tafakori, *Distance covariance for discretized stochastic processes*, Bernoulli **26** (2020), no. 4, 2758–2789.
- [48] Herold Dehling et Olimjon Sh. Sharipov, *Marcinkiewicz-Zygmund strong laws for  $U$ -statistics of weakly dependent observations*, Statist. Probab. Lett. **79** (2009), no. 19, 2028–2036.
- [49] Herold Dehling, Olimjon Sh. Sharipov et Martin Wendler, *Bootstrap for dependent Hilbert space-valued random variables with application to von Mises statistics*, J. Multivariate Anal. **133** (2015), 200–215.
- [50] Herold Dehling et Martin Wendler, *Central limit theorem and the bootstrap for  $U$ -statistics of strongly mixing data*, J. Multivariate Anal. **101** (2010), no. 1, 126–137.
- [51] ———, *Law of the iterated logarithm for  $U$ -statistics of weakly dependent observations*, Dependence in probability, analysis and number theory, Kendrick Press, Heber City, UT, 2010, pp. 177–194.
- [52] Isha Dewan et Bhagavatula Prakasa Rao, *Central limit theorem for  $U$ -statistics of associated random variables*, Statist. Probab. Lett. **57** (2002), no. 1, 9–15.
- [53] Jian Ding, James R. Lee et Yuval Peres, *Markov type and threshold embeddings*, Geom. Funct. Anal. **23** (2013), no. 4, 1207–1229.
- [54] Monroe D. Donsker, *An invariance principle for certain probability limit theorems*, Mem. Amer. Math. Soc. **6** (1951), 12.
- [55] Holger Drees, *Optimal rates of convergence for estimates of the extreme value index*, Ann. Statist. **26** (1998), no. 1, 434–448.
- [56] Quentin Duchemin, Yohann De Castro et Claire Lacour, *Concentration inequality for  $U$ -statistics of order two for uniformly ergodic Markov chains*, Bernoulli **29** (2023), no. 2, 929–956.
- [57] William H. DuMouchel, *Estimating the stable index  $\alpha$  in order to measure tail thickness : a critique*, Ann. Statist. **11** (1983), no. 4, 1019–1031.
- [58] Olivier Durieu, *Independence of four projective criteria for the weak invariance principle*, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. **5** (2009), 21–26.
- [59] Olivier Durieu et Dalibor Volný, *Comparison between criteria leading to the weak invariance principle*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **44** (2008), no. 2, 324–340.
- [60] Alexander Dürre et Davy Paindaveine, *On the consistency of incomplete  $U$ -statistics under infinite second-order moments*, Statist. Probab. Lett. **193** (2023), Paper No. 109714, 8.
- [61] John H. J. Einmahl, *The empirical distribution function as a tail estimator*, Statist. Neerlandica **44** (1990), no. 2, 79–82.
- [62] ———, *Limit theorems for tail processes with application to intermediate quantile estimation*, J. Statist. Plann. Inference **32** (1992), no. 1, 137–145.
- [63] Mohamed El Machkouri, *Nonparametric regression estimation for random fields in a fixed-design*, Stat. Inference Stoch. Process. **10** (2007), no. 1, 29–47.

- [64] ———, *Kernel density estimation for stationary random fields*, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. **11** (2014), no. 1, 259–279.
- [65] Mohamed El Machkouri et Davide Giraudo, *Orthomartingale-coboundary decomposition for stationary random fields*, Stoch. Dyn. **16** (2016), no. 5, 1650017, 28.
- [66] Mohamed El Machkouri et Lahcen Ouchti, *Exact convergence rates in the central limit theorem for a class of martingales*, Bernoulli **13** (2007), no. 4, 981–999.
- [67] Mohamed El Machkouri et Radu Stoica, *Asymptotic normality of kernel estimates in a regression model for random fields*, J. Nonparametr. Stat. **22** (2010), no. 8, 955–971.
- [68] Mohamed El Machkouri, Dalibor Volný et Wei Biao Wu, *A central limit theorem for stationary random fields*, Stochastic Process. Appl. **123** (2013), no. 1, 1–14.
- [69] Paul Erdős, *On a theorem of Hsu and Robbins*, Ann. Math. Statistics **20** (1949), 286–291.
- [70] Xiequan Fan, Ion Grama et Quansheng Liu, *Large deviation exponential inequalities for supermartingales*, Electron. Commun. Probab. **17** (2012), no. 59, 8.
- [71] ———, *Exponential inequalities for martingales with applications*, Electron. J. Probab. **20** (2015), no. 1, 22.
- [72] István Fazekas, *Burkholder’s inequality for multiindex martingales*, Ann. Math. Inform. **32** (2005), 45–51.
- [73] Evarist Giné, Rafał Latała et Joel Zinn, *Exponential and moment inequalities for  $U$ -statistics*, High dimensional probability, II (Seattle, WA, 1999), Progr. Probab., vol. 47, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000, pp. 13–38.
- [74] Evarist Giné et Joel Zinn, *Marcinkiewicz type laws of large numbers and convergence of moments for  $U$ -statistics*, Probability in Banach spaces, 8 (Brunswick, ME, 1991), Progr. Probab., vol. 30, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1992, pp. 273–291.
- [75] Davide Giraudo, *Holderian weak invariance principle under a Hannan type condition*, Stochastic Process. Appl. **126** (2016), no. 1, 290–311.
- [76] ———, *Holderian weak invariance principle for stationary mixing sequences*, J. Theoret. Probab. **30** (2017), no. 1, 196–211.
- [77] ———, *Hölderian weak invariance principle under the Maxwell and Woodroffe condition*, Braz. J. Probab. Stat. **32** (2018), no. 1, 172–187.
- [78] Mikhail Gordin et Magda Peligrad, *On the functional central limit theorem via martingale approximation*, Bernoulli **17** (2011), no. 1, 424–440.
- [79] Mikhail I. Gordin, *The central limit theorem for stationary processes*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **188** (1969), 739–741.
- [80] ———, *Martingale-co-boundary representation for a class of stationary random fields*, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **364** (2009), 88–108, 236.
- [81] Peter Hall, *On some simple estimates of an exponent of regular variation*, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B **44** (1982), no. 1, 37–42.

- [82] Paul R. Halmos, *The theory of unbiased estimation*, Ann. Math. Statistics **17** (1946), 34–43.
- [83] Fang Han, *An exponential inequality for  $U$ -statistics under mixing conditions*, J. Theoret. Probab. **31** (2018), no. 1, 556–578.
- [84] Edward James Hannan, *The central limit theorem for time series regression*, Stochastic Process. Appl. **9** (1979), no. 3, 281–289.
- [85] Bruce M. Hill, *A simple general approach to inference about the tail of a distribution*, Ann. Statist. **3** (1975), no. 5, 1163–1174.
- [86] Hwai-Chung Ho et Tailen Hsing, *Limit theorems for functionals of moving averages*, Ann. Probab. **25** (1997), no. 4, 1636–1669.
- [87] Wassily Hoeffding, *A class of statistics with asymptotically normal distribution*, Ann. Math. Statistics **19** (1948), 293–325.
- [88] ———, *A class of statistics with asymptotically normal distribution*, Ann. Math. Statistics **19** (1948), 293–325.
- [89] Christian Houdré et Patricia Reynaud-Bouret, *Exponential inequalities, with constants, for  $U$ -statistics of order two*, Stochastic inequalities and applications, Progr. Probab., vol. 56, Birkhäuser, Basel, 2003, pp. 55–69.
- [90] Tailen Hsing et Wei Biao Wu, *On weighted  $U$ -statistics for stationary processes*, Ann. Probab. **32** (2004), no. 2, 1600–1631.
- [91] Pao Lu Hsu et Herbert Robbins, *Complete convergence and the law of large numbers*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **33** (1947), 25–31.
- [92] Rustam Ibragimov et Shaturgun Sharakhmetov, *Analogues of Khintchine, Marcinkiewicz-Zygmund and Rosenthal inequalities for symmetric statistics*, Scand. J. Statist. **26** (1999), no. 4, 621–633.
- [93] Svante Janson, *The asymptotic distributions of incomplete  $U$ -statistics*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **66** (1984), no. 4, 495–505.
- [94] Moritz Jirak, *Berry-Esseen theorems under weak dependence*, Ann. Probab. **44** (2016), no. 3, 2024–2063.
- [95] William B. Johnson et Gideon Schechtman, *Martingale inequalities in rearrangement invariant function spaces*, Israel J. Math. **64** (1988), no. 3, 267–275.
- [96] Jana Klicnarová, Dalibor Volný et Yizao Wang, *Limit theorems for weighted Bernoulli random fields under Hannan’s condition*, Stochastic Process. Appl. **126** (2016), no. 6, 1819–1838.
- [97] Philip N. Kokic, *Rates of convergence in the strong law of large numbers for degenerate  $U$ -statistics*, Statist. Probab. Lett. **5** (1987), no. 5, 371–374.
- [98] Marius Kroll, *Asymptotic behaviour of the empirical distance covariance for dependent data*, J. Theoret. Probab. **35** (2022), no. 2, 1226–1246.
- [99] Anna Kuczmaszewska et Zbigniew A. Lagodowski, *Convergence rates in the SLLN for some classes of dependent random fields*, J. Math. Anal. Appl. **380** (2011), no. 2, 571–584.

- [100] Rafał Kulik et Philippe Soulier, *The tail empirical process for long memory stochastic volatility sequences*, Stochastic Process. Appl. **121** (2011), no. 1, 109–134.
- [101] Zbigniew A. Lagodowski, *An approach to complete convergence theorems for dependent random fields via application of Fuk-Nagaev inequality*, J. Math. Anal. Appl. **437** (2016), no. 1, 380–395.
- [102] John Lamperti, *On convergence of stochastic processes*, Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962), 430–435.
- [103] Rafał Latała, *Estimation of moments of sums of independent real random variables*, Ann. Probab. **25** (1997), no. 3, 1502–1513.
- [104] Nikolai N. Leonenko, *A central limit theorem for a class of random fields*, Teor. Veroyatnost. i Mat. Statist. (1977), no. 17, 87–93, 165.
- [105] Emmanuel Lesigne et Dalibor Volný, *Large deviations for martingales*, Stochastic Process. Appl. **96** (2001), no. 1, 143–159.
- [106] Anne Leucht et Michael H. Neumann, *Consistency of general bootstrap methods for degenerate  $U$ -type and  $V$ -type statistics*, J. Multivariate Anal. **100** (2009), no. 8, 1622–1633.
- [107] ———, *Degenerate  $U$ - and  $V$ -statistics under ergodicity : asymptotics, bootstrap and applications in statistics*, Ann. Inst. Statist. Math. **65** (2013), no. 2, 349–386.
- [108] Han-Mai Lin et Florence Merlevède, *On the weak invariance principle for ortho-martingale in Banach spaces. Application to stationary random fields*, Stochastic Process. Appl. **153** (2022), 198–220.
- [109] Han-Mai Lin, Florence Merlevède et Dalibor Volný, *On the central limit theorem for stationary random fields under  $\mathbb{L}^1$ -projective condition*, Electron. Commun. Probab. **27** (2022), Paper No. 43, 12.
- [110] Kuang Hsien Lin, *Convergence rate and the first exit time for  $U$ -statistics*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **9** (1981), no. 1, 129–143.
- [111] Quansheng Liu et Frédérique Watbled, *Exponential inequalities for martingales and asymptotic properties of the free energy of directed polymers in a random environment*, Stochastic Process. Appl. **119** (2009), no. 10, 3101–3132.
- [112] Weidong Liu, Han Xiao et Wei Biao Wu, *Probability and moment inequalities under dependence*, Statist. Sinica **23** (2013), no. 3, 1257–1272.
- [113] Matthias Löwe et Sara Terveer, *A central limit theorem for incomplete  $U$ -statistics over triangular arrays*, Braz. J. Probab. Stat. **35** (2021), no. 3, 499–522.
- [114] Russell Lyons, *Distance covariance in metric spaces*, Ann. Probab. **41** (2013), no. 5, 3284–3305.
- [115] Péter Major, *On a multivariate version of Bernstein’s inequality*, Electron. J. Probab. **12** (2007), 966–988.
- [116] ———, *On the estimation of multiple random integrals and  $U$ -statistics*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2079, Springer, Heidelberg, 2013.

- [117] Avi Mandelbaum et Murad S. Taqqu, *Invariance principle for symmetric statistics*, Ann. Statist. **12** (1984), no. 2, 483–496.
- [118] David M. Mason, *A strong invariance theorem for the tail empirical process*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **24** (1988), no. 4, 491–506.
- [119] Muneya Matsui, Thomas Mikosch et Gennady Samorodnitsky, *Distance covariance for stochastic processes*, Probab. Math. Statist. **37** (2017), no. 2, 355–372.
- [120] Michael Maxwell et Michael Woodroffe, *Central limit theorems for additive functionals of Markov chains*, Ann. Probab. **28** (2000), no. 2, 713–724.
- [121] Florence Merlevède et Magda Peligrad, *Rosenthal-type inequalities for the maximum of partial sums of stationary processes and examples*, Ann. Probab. **41** (2013), no. 2, 914–960.
- [122] Florence Merlevède, Magda Peligrad et Sergey Utev, *Recent advances in invariance principles for stationary sequences*, Probab. Surv. **3** (2006), 1–36.
- [123] C. Métraux, *Quelques inégalités pour martingales à paramètre bidimensionnel*, Séminaire de Probabilités, XII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1976/1977), Lecture Notes in Math., vol. 649, Springer, Berlin, 1978, pp. 170–179.
- [124] Edgaras Mielkaitis et Vygantas Paulauskas, *Rates of convergence in the CLT for linear random fields*, Lith. Math. J. **51** (2011), no. 2, 233–250.
- [125] Stanislav Minsker et Xiaohan Wei, *Moment inequalities for matrix-valued  $U$ -statistics of order 2*, Electron. J. Probab. **24** (2019), Paper No. 133, 32.
- [126] Bruno Morel, *Weak convergence of summation processes in Besov spaces*, Studia Math. **165** (2004), no. 1, 19–37.
- [127] Sergey Viktorovich Nagaev, *On probability and moment inequalities for supermartingales and martingales*, Proceedings of the Eighth Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, Part II (2002), vol. 79, 2003, pp. 35–46.
- [128] Masoud M. Nasari, *Strong law of large numbers for weighted  $U$ -statistics : application to incomplete  $U$ -statistics*, Statist. Probab. Lett. **82** (2012), no. 6, 1208–1217.
- [129] Jacques Neveu, *Discrete-parameter martingales*. Translated by T. P. Speed, North-Holland Math. Libr., vol. 10, Elsevier (North-Holland), Amsterdam, 1975 (English).
- [130] David Nualart, *Malliavin calculus and its applications*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 110, Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC ; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
- [131] Emanuel Parzen, *On estimation of a probability density function and mode*, Ann. Math. Statist. **33** (1962), 1065–1076.
- [132] Magda Peligrad et Sergey Utev, *A new maximal inequality and invariance principle for stationary sequences*, Ann. Probab. **33** (2005), no. 2, 798–815.
- [133] Magda Peligrad, Sergey Utev et Wei Biao Wu, *A maximal  $L_p$ -inequality for stationary sequences and its applications*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), no. 2, 541–550.

- [134] Magda Peligrad et Dalibor Volný, *Quenched invariance principles for orthomartingale-like sequences*, J. Theoret. Probab. **33** (2020), no. 3, 1238–1265.
- [135] Magda Peligrad et Na Zhang, *Martingale approximations for random fields*, Electron. Commun. Probab. **23** (2018), Paper No. 28, 9.
- [136] ———, *On the normal approximation for random fields via martingale methods*, Stochastic Process. Appl. **128** (2018), no. 4, 1333–1346.
- [137] Iosif Pinelis, *Optimum bounds for the distributions of martingales in Banach spaces*, Ann. Probab. **22** (1994), no. 4, 1679–1706.
- [138] Gilles Pisier, *Martingales with values in uniformly convex spaces*, Israel J. Math. **20** (1975), no. 3-4, 326–350.
- [139] ———, *Martingales in Banach spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 155, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [140] Suren Poghosyan et Sylvie Roelly, *Invariance principle for martingale-difference random fields*, Statist. Probab. Lett. **38** (1998), no. 3, 235–245.
- [141] Maurice Bertram Priestley, *Nonlinear and nonstationary time series analysis*, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London, 1988.
- [142] Wang Qiying, *The strong law of  $U$ -statistics with  $\phi^*$ -mixing samples*, Statist. Probab. Lett. **23** (1995), no. 2, 151–155.
- [143] Carmela Quintos, Zhenhong Fan et Peter C. B. Phillips, *Structural change tests in tail behaviour and the Asian crisis*, Rev. Econom. Stud. **68** (2001), no. 3, 633–663.
- [144] Alfredas Račkauskas et Charles Suquet, *Necessary and sufficient condition for the Lamperti invariance principle*, Teor. Īmovīr. Mat. Stat. (2003), no. 68, 115–124.
- [145] ———, *Necessary and sufficient condition for the functional central limit theorem in Hölder spaces*, J. Theoret. Probab. **17** (2004), no. 1, 221–243.
- [146] ———, *Hölderian invariance principles and some applications for testing epidemic changes*, Long memory in economics, Springer, Berlin, 2007, pp. 109–128.
- [147] Alfredas Račkauskas et Martin Wendler, *Convergence of  $U$ -processes in Hölder spaces with application to robust detection of a changed segment*, Statist. Papers **61** (2020), no. 4, 1409–1435.
- [148] Lucas Reding et Na Zhang, *On the Quenched Functional Central Limit Theorem for Stationary Random Fields under Projective Criteria*, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. **21** (2024), no. 2, 1215–1247.
- [149] Matthias Reitzner et Matthias Schulte, *Central limit theorems for  $U$ -statistics of Poisson point processes*, Ann. Probab. **41** (2013), no. 6, 3879–3909.
- [150] Emmanuel Rio, *Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants*, Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], vol. 31, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

- [151] ———, *Moment inequalities for sums of dependent random variables under projective conditions*, J. Theoret. Probab. **22** (2009), no. 1, 146–163.
- [152] Holger Rootzén, *Weak convergence of the tail empirical process for dependent sequences*, Stochastic Process. Appl. **119** (2009), no. 2, 468–490.
- [153] Murray Rosenblatt, *A central limit theorem and a strong mixing condition*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **42** (1956), 43–47.
- [154] ———, *A central limit theorem and a strong mixing condition*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **42** (1956), 43–47.
- [155] Haskell P. Rosenthal, *On the subspaces of  $L^p$  ( $p > 2$ ) spanned by sequences of independent random variables*, Israel J. Math. **8** (1970), 273–303.
- [156] Wilson J. Rugh, *Nonlinear system theory*, Johns Hopkins Series in Information Sciences and Systems, Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1981, The Volterra-Wiener approach.
- [157] Ludger Rüschendorf, *Ordering of distributions and rearrangement of functions*, Ann. Probab. **9** (1981), no. 2, 276–283.
- [158] Sara Kristin Schmidt, Max Wornowizki, Roland Fried et Herold Dehling, *An asymptotic test for constancy of the variance under short-range dependence*, Ann. Statist. **49** (2021), no. 6, 3460–3481.
- [159] Sara Kristin Schmidt, *Detecting changes in the trend function of heteroscedastic time series*, Bernoulli **30** (2024), no. 4, 2598–2622.
- [160] Regis J. Serinko, *A consistent approach to least squares estimation of correlation dimension in weak Bernoulli dynamical systems*, Ann. Appl. Probab. **4** (1994), no. 4, 1234–1254.
- [161] Yandi Shen, Fang Han et Daniela Witten, *Exponential inequalities for dependent  $V$ -statistics via random Fourier features*, Electron. J. Probab. **25** (2020), Paper No. 7, 18.
- [162] Frank Spitzer, *A combinatorial lemma and its application to probability theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **82** (1956), 323–339.
- [163] Gábor J. Székely et Maria L. Rizzo, *Brownian distance covariance*, Ann. Appl. Stat. **3** (2009), no. 4, 1236–1265.
- [164] Gábor J. Székely, Maria L. Rizzo et Nail K. Bakirov, *Measuring and testing dependence by correlation of distances*, Ann. Statist. **35** (2007), no. 6, 2769–2794.
- [165] V. A. Volkonskii et Yuri A. Rozanov, *Some limit theorems for random functions. I*, Teor. Veroyatnost. i Primenen. **4** (1959), 186–207.
- [166] Dalibor Volný, *A nonadapted version of the invariance principle of Peligrad and Utev*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **345** (2007), no. 3, 167–169.
- [167] ———, *A central limit theorem for fields of martingale differences*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **353** (2015), no. 12, 1159–1163.

- [168] ———, *Martingale-coboundary representation for stationary random fields*, Stoch. Dyn. **18** (2018), no. 2, 1850011, 18.
- [169] ———, *On limit theorems for fields of martingale differences*, Stochastic Process. Appl. **129** (2019), no. 3, 841–859.
- [170] Dalibor Volný et Yizao Wang, *An invariance principle for stationary random fields under Hannan’s condition*, Stochastic Process. Appl. **124** (2014), no. 12, 4012–4029.
- [171] Qiying Wang, *Bernstein type inequalities for degenerate  $U$ -statistics with applications*, Chinese Ann. Math. Ser. B **19** (1998), no. 2, 157–166, A Chinese summary appears in Chinese Ann. Math. Ser. A **19** (1998), no. 2, 283.
- [172] Yizao Wang et Michael Woodroffe, *A new condition for the invariance principle for stationary random fields*, Statist. Sinica **23** (2013), no. 4, 1673–1696.
- [173] Ferenc Weisz, *An application of two-parameter martingales in harmonic analysis*, Studia Math. **107** (1993), no. 2, 115–126.
- [174] ———, *Applications of multi-parameter martingales in Fourier analysis*, Stoch. Dyn. **11** (2011), no. 2-3, 551–568.
- [175] Michael J. Wichura, *Inequalities with applications to the weak convergence of random processes with multi-dimensional time parameters*, Ann. Math. Statist. **40** (1969), 681–687.
- [176] ———, *Some Strassen-type laws of the iterated logarithm for multiparameter stochastic processes with independent increments*, Ann. Probability **1** (1973), 272–296.
- [177] Rodney C. L. Wolff, *A note on the behaviour of the correlation integral in the presence of a time series*, Biometrika **77** (1990), no. 4, 689–697.
- [178] Wei Biao Wu, *Nonlinear system theory : another look at dependence*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **102** (2005), no. 40, 14150–14154.
- [179] ———, *Unit root testing for functionals of linear processes*, Econometric Theory **22** (2006), no. 1, 1–14.
- [180] ———, *Empirical processes of stationary sequences*, Statist. Sinica **18** (2008), no. 1, 313–333.
- [181] ———, *Asymptotic theory for stationary processes*, Stat. Interface **4** (2011), no. 2, 207–226.
- [182] Wei Biao Wu et Zhibiao Zhao, *Moderate deviations for stationary processes*, Statist. Sinica **18** (2008), no. 2, 769–782.
- [183] Wenzhi Yang, Xuejun Wang, Xiaoqin Li, et Shuhe Hu, *Berry-Esséen bound of sample quantiles for  $\phi$ -mixing random variables*, J. Math. Anal. Appl. **388** (2012), no. 1, 451–462.
- [184] Ken-ichi Yoshihara, *Limiting behavior of  $U$ -statistics for strongly mixing sequences*, Yokohama Math. J. **39** (1992), no. 2, 107–113.
- [185] Cun-Hui Zhang, *Strong law of large numbers for sums of products*, Ann. Probab. **24** (1996), no. 3, 1589–1615.



- [186] ———, *Sub-Bernoulli functions, moment inequalities and strong laws for nonnegative and symmetrized  $U$ -statistics*, *Ann. Probab.* **27** (1999), no. 1, 432–453.
- [187] Na Zhang, Lucas Reding et Magda Peligrad, *On the quenched central limit theorem for stationary random fields under projective criteria*, *J. Theoret. Probab.* **33** (2020), no. 4, 2351–2379.