



HAL
open science

Métriques conformément invariantes en géométrie pseudo-riemannienne

Adam Chalumeau

► **To cite this version:**

Adam Chalumeau. Métriques conformément invariantes en géométrie pseudo-riemannienne. Mathématiques [math]. Université de Strasbourg, 2024. Français. NNT : 2024STRAD025 . tel-04819767v2

HAL Id: tel-04819767

<https://theses.hal.science/tel-04819767v2>

Submitted on 22 Jan 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*ED 269 : Mathématiques, Sciences de l'information et de
l'Ingénieur* Institut de Recherche Mathématiques Avancée
UMR 7501

THÈSE présentée par

Adam CHALUMEAU

soutenue le **11 décembre 2024**

pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université de Strasbourg

Discipline/Spécialité : Mathématiques

**Métriques conformément invariantes
en géométrie pseudo-riemannienne**

THÈSE dirigée par :

FRANCES Charles, Université de Strasbourg

RAPPORTEURS :

SEPPI Andrea, Professeur, Université de Turin

THOLOZAN Nicolas, Chargé de Recherche, ENS Ulm

AUTRES MEMBRES DU JURY :

GAUSSIER Hervé, Professeur, Université Grenoble Alpes

GUICHARD Olivier, Professeur, Université de Strasbourg

KASSEL Fanny, Directrice de Recherche, IHES

Avertissement au lecteur / Warning to the reader

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition des membres de la communauté universitaire. Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Cela implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document. D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction ou représentation illicite encourt une poursuite pénale.

This document is the result of a long process approved by the jury and made available to members of the university community. It is subject to the intellectual property rights of its author. This implies an obligation to quote and reference when using this document. Furthermore, any infringement, plagiarism, unlawful reproduction or representation will be prosecuted.

[Code de la Propriété Intellectuelle](#)

[Article L122-4](#) :

Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite. Il en est de même pour la traduction, l'adaptation ou la transformation, l'arrangement ou la reproduction par un art ou un procédé quelconque.

Any representation or reproduction in whole or in part without the consent of the author or his successors in title or assigns is unlawful. The same applies to translation, adaptation or transformation, arrangement or reproduction by any art or process whatsoever.

[Articles L335-1 à L335-9](#) : Dispositions pénales / Penal provisions.

Licence attribuée par l'auteur / Licence attributed by the author

:



Thèse

INSTITUT DE
RECHERCHE
MATHÉMATIQUE
AVANCÉE

UMR 7501

Strasbourg

présentée pour obtenir le grade de docteur de
l'Université de Strasbourg
Spécialité MATHÉMATIQUES

Adam Chalumeau

**Métriques conformément invariantes
en géométrie pseudo-riemannienne**

Soutenue le 11 décembre 2024
devant la commission d'examen

Charles Frances, directeur de thèse
Hervé Gaussier, examinateur
Olivier Guichard, examinateur
Fanny Kassel, examinatrice
Andrea Seppi, rapporteur
Nicolas Tholozan, rapporteur

<https://irma.math.unistra.fr>



Université

de Strasbourg

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

*École doctorale 269
Mathématiques, Sciences de l'Information et de l'Ingénieur*

Thèse de Doctorat de l'Université de Strasbourg

Présentée par :
Adam CHALUMEAU

Métriques conformément invariantes en géométrie pseudo-riemannienne

Sous la direction de :
Charles FRANCES

Soutenue le 11 décembre 2024, devant le jury composé de :

Charles FRANCES – Directeur de thèse
Hervé GAUSSIER – Examineur
Olivier GUICHARD – Examineur
Fanny KASSEL – Examinatrice
Andrea SEPPI – Rapporteur
Nicolas THOLOZAN – Rapporteur



« ...et là tu fais un tour du monde, mais un tour du monde où tu gruges ! » Charles qui me raconte des maths sur les géodésiques de la sphère, en marchant vers le RA.

Remerciements

Mes premiers remerciements vont naturellement à mon directeur de thèse, Charles Frances. Il est difficile de traduire en quelques lignes l'immense soutien que tu m'as apporté. Tu as consacré tant d'heures à me transmettre la beauté de la dynamique d'Einstein et des géométries de Cartan. Tu m'as appris à aborder les mathématiques à travers des exemples concrets et tu m'as appris la rigueur dans les raisonnements. Aussi, ton soutien ne s'est pas limité aux maths. Dans les moments difficiles, tu as passé un temps précieux à m'encourager, à me redonner confiance et à m'accompagner avec bienveillance. En vérité, tu as fait bien plus pour moi que je n'aurais jamais pu espérer, et je t'en serai éternellement reconnaissant. Merci infiniment pour tout, c'était vraiment génial ! Je te souhaite de vivre de nombreuses belles aventures avec tes futurs doctorants. Merci !

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Andrea Seppi et Nicolas Tholozan, qui m'ont fait l'honneur de rapporter ma thèse. Je remercie particulièrement Andrea pour son invitation à Grenoble et pour les questions et suggestions enrichissantes qu'il m'a apportées. Je remercie également Nicolas pour ses nombreuses remarques sur le manuscrit. Je remercie Hervé Gaussier, Olivier Guichard et Fanny Kassel, qui ont eu la gentillesse d'accepter de faire partie de mon jury. Je tiens notamment à remercier Hervé et Olivier pour les échanges que nous avons eus au sujet de mes travaux de thèse.

Je souhaite exprimer toute ma gratitude envers le personnel de l'Université de Strasbourg, de l'École doctorale 269 et de l'IRMA, dont le soutien a été essentiel à la réalisation de cette thèse. Je remercie tout particulièrement Nathalie Kostmann, Delphine Schmitt, Delphine Karleskind et Jessica Maurer-Spoerk pour leur aide précieuse. Mes remerciements s'adressent également à Daniel Grosson pour sa grande disponibilité.

Durant ma scolarité, j'ai eu la chance et le privilège d'être guidé par des enseignants passionnés qui m'ont transmis le goût des mathématiques et des sciences. C'est en grande partie grâce à eux que j'ai pu arriver jusqu'au doctorat, et je tiens donc à les remercier : M. Laguel, M. Bougnoux, Mme Mahieux, M. Brunel, M. Gallic, Frédéric Pascal, Frédéric Bourgeois, Julien Duval, Ben McKay, ainsi que tous ceux que j'oublie. Je remercie également les chercheuses et chercheurs avec qui j'ai eu l'occasion de discuter et d'apprendre des mathématiques tout au long de ma thèse, notamment Pierre Py, Alexandru Oancea, Olivier Guichard, François Guéritaud, Élisha Falbel, Karin Melnick, Thierry Barbot, Vincent Pecastaing, Pierre Will, Fanny Kassel et Daniel Montclair.

Je remercie Blandine pour toutes les belles maths qu'ont s'est raconté pendant notre projet. Ça n'est pas tous les jours qu'on croise quelqu'un en conférence à la recherche d'un ouvert propre divisible de l'univers d'Einstein. Quel hasard, franchement ! Merci d'être venue me voir ce matin-là à la conférence de Heidelberg. Merci aussi pour l'invitation à l'IHES et pour toutes les belles discussions que nous avons pu avoir. J'espère que nous aurons l'occasion de renouveler l'expérience ! Je tiens également à remercier Fanny pour tout le soutien qu'elle nous a apporté pendant notre projet commun. Ce projet n'aurait pas pu aboutir sans son aide très précieuse.

Je remercie les jeunes géomètres Rym, Roméo, Nicolas et Clarence, avec qui j'ai partagé des discussions très enrichissantes et influentes pour ma thèse. Merci, Rym, pour toutes ces explications sur les espaces-temps maximaux, ainsi que pour toutes nos discussions sur les diamants et les photons complets. Grâce à toi, je me suis réconcilié avec le modèle du haut : merci pour cela aussi ! Merci, Roméo, pour cette découverte des diamants à l'envers. Merci de me rappeler que le futur ne va pas vers le haut, mais vers la droite. Merci, Nicolas, pour les histoires passionnantes sur les photons pointés. Et merci, Clarence, pour toutes nos discussions, ainsi que pour me rappeler qu'il est grand temps de diversifier mes TikZ.

Je tiens à exprimer ma gratitude aux différentes personnes qui m'ont invité à donner des séminaires et à partager mes travaux en mathématiques : Johanna, pour l'invitation à Heidelberg ; Thierry, pour l'invitation à Avignon ; Pierre, pour l'invitation à Copenhague ; et Martin, pour l'invitation à Leipzig. J'en profite pour remercier Martin pour les nombreux conseils qu'il m'a donné et pour son soutien durant la thèse.

Merci à Gabrielle qui m'a donné, sans vraiment le savoir, le nom courant de l'objet mathématique central de cette thèse : *le Diams* (d'ailleurs, je remercie à nouveau Charles qui a popularisé cette expression).

Avant de commencer ma thèse, je réalisais mon stage de M2 durant la deuxième vague de Covid. À ce moment-là, j'étais confiné à Houdan chez ma mamie et les fromagers : Nanou, Arnaud, Jules et Gaspoutche. Je les remercie pour leur accueil chaleureux, pour les dégustations de fromage, de vin sec et de bière artisanale. Vous me manquez, et je vous envoie tout mon soutien en cette période de Noël.

La vie à la fac de Strasbourg a été d'autant plus agréable qu'elle était animée par une armée de doctorants et doctorantes extrêmement sympathiques, que je tiens à remercier. Tout d'abord, il y a mes cobureaux : Lukas, Guillaume, Brieuc, Michele, Marianne, Rym, Ludovic, Thomas, Dinh Hung, et maintenant Nicolas. Merci à Ludovic pour m'avoir appris « qu'on n'est pas dans un hôpital », donc on garde la porte du bureau ouverte. Merci aussi Rym pour les entrées fracassantes dans le bureau. Ensuite, comme le veut la tradition, je vais (essayer de) citer toutes celles et ceux qui ont, à un moment ou un autre, fait partie de la grande famille des doctorants et post-doctorants de Strasbourg. Des plus anciens aux plus récents, je remercie : Martin, Valdo, Thibault, Archia, Yohann, Pierre-Alexandre, Florian, Marianne, Clément, Michael, Basile, Clarence, Suzanne, Romain, Antoine, Victoria, Raoul, Guillaume, Brieuc, Paul, Thomas, Tom, Raphaël, Rym, Ludovic, Léopold, Céline, Roméo, Alex, Nicolas, Robin, Victor, Jean-Pierre, Thomas, Vincent, Gustave, Florent, Colin, Jules, Roxana, Claire, Alexandre, Killian, Louise, Lauriane, Lucas, Pierre-Louis (oui, oui, je t'ai mis avec les jeunes !), ainsi que tous les 1A, à qui je souhaite de belles années de thèse. Merci à tous d'avoir rendu la vie à la fac plus agréable.

Merci également à mes collègues d'enseignement, Souhil, Sylvain et Rémy, pour leurs précieux conseils en pédagogie. Un grand merci aussi aux étudiants que j'ai rencontrés au cours de ces trois années, avec qui j'ai pris beaucoup de plaisir à enseigner. J'espère avoir réussi à leur transmettre le goût des mathématiques, qui me passionnent tant.

Au delà de la vie universitaire, je tiens à remercier les diverses personnes que j'ai pu rencontrer à Strasbourg pendant ces trois belles années de thèse.

Je remercie toutes les colloques qui ont supporté mes 40 vélos et mes pois chiche cramés dans la casserole. Merci Marianne, Carole, Héloïse (et Manu), Ismaëla, Émilie, Alex, Mila, Garance et plus récemment Manon. Merci pour les repas, les sorties et les soirées déguisées. Merci à Héloïse pour les séances de visualisation de pré-réunion de l'aquaplatacosi, et à Isma pour les conseils de lecture féministe, j'en avais besoin. Un grand merci à Mila pour tous les

conseils de psy, pour les bières à la Taverne et pour les blagues de très bon goût. Merci enfin Carole pour les soirées, pour ton sourire qui met toujours de bonne humeur, et pour toutes les fois où tu as sauvé mes plantes d'une mort certaine.

Pour ce qui est de la vie nocturne à Strasbourg, je me dois de remercier infiniment le dieu du karaoké, Rouchdi, qui a égaillé une grande partie de ma première année de thèse. Merci pour toutes ces fois où tu as chanté Kylie Minogue au Bunnys. Merci pour les bons moments qu'on a passé à se raconter notre vie. Je remercie aussi Simon pour les soirées et pour m'avoir fait découvrir quelques bars à Strasbourg. Merci aussi Balou pour les verres et pour le beau spectacle lors des matches du crig.

À Strasbourg, j'ai eu la chance de rencontrer une belle brochette de cyclistes passionnés et passionnants. Merci à Antoine et Félicie pour les sorties vélo, mais aussi pour les lasagnes au butternut. Je remercie sincèrement Léo, Henrik, Vincent et Célian pour tous les conseils vélo. Merci également aux rouleurs et rouleuses du TCC et à l'équipe de *La tête dans le guidon* pour leur accueil chaleureux.


L'arrivée à Strasbourg a aussi été synonyme pour moi de découverte du monde des échecs. Merci à Antoine pour avoir été un super coach, notamment avec cette prépa (15. . .g5) dans le gambit Marshall. Merci au président du CES Daniel Roos pour m'avoir donné de bons conseils d'échec et de pédagogie. Merci à Basile, Victoria et mes coéquipiers du CES 9 pour la belle 3ème place en D1. Un grand merci à Brice pour les blitz mémorables à la Taverne et pour les variantes théoriques dans le gambit Écossais, ainsi qu'à Philippe pour les soirées annuelles d'échecs.

Je me dois aussi de remercier toute la team *Click* (ce nom donné au groupe d'escalade vient du fait que, lorsqu'on valide un bloc sur l'appli, on clique, littéralement). Merci à Clarence qui m'a poussé à venir grimper et qui m'a beaucoup appris à mes débuts (je me souviens encore de cette première rouge dans Chu). Merci aussi à Tom, qui est toujours prêt à râler comme il se doit sur les ouvertures. Je te remercie sincèrement pour m'avoir permis d'assister à la première ascension de *Énorme porc 7A+*, un beau bloc. Merci à Thomas pour les séances au SUAPS (même si je suis parfois à deux doigts de mourir!). Merci à Mathilde et à Valentin pour les bons moments passés à Bleau, à Martha et Gaël pour les séances à Block'Out et en exté, et à Thomas pour les bonnes séances et pour m'avoir remis l'épaule en place. La relève est bien assurée avec les nouveaux cliqueurs Nico, Céline, Roxana, Colin et Jules. Force à vous!

Je remercie aussi mes amis de Cachan. Merci la Jean's pour être comme tu es. Merci Thomas pour les cocktails originaux (en vrai, ils sont très bon). Merci aussi Guillaume et Fayin pour l'année d'agrégation. 感谢帅，谢谢你从科克到论文期间给予我的所有帮助。你 是我生命中遇到的最感人的人之一。谢谢你教我和让我品尝许多美味的菜肴，希望以后还能有更多这样的机会!

Je voudrais sincèrement remercier Pierre, que je connais depuis nos débuts en prépa. C'est avec toi que j'ai appris l'immense partie des maths que je connais aujourd'hui. Ensemble, on a commencé avec les magmas associatifs, et on est allé jusqu'à la thèse. Je pense que les deux élèves de MPSI qu'on était à l'époque seraient fiers de nous. Merci pour tout ce chemin parcouru avec toi, ça restera l'un des meilleurs souvenirs de ma vie.

Merci aux très anciens : Léo, Gustave, Aymeric, Jeanne, Zion et Alexandre pour les belles années passées à vos côtés.

Merci Céline pour ton soutien démesuré, pour tous ces moments où tu as su comment me réconforter et m'encourager. Je n'aurai jamais pu arriver jusqu'ici sans ton aide. Maintenant, c'est à mon tour de te soutenir pendant la fin de ta thèse ! Je t'aime tellement, et j'espère qu'on ira loin ensemble, parce qu'on est capables de plein de belles choses à deux. Lovi ♡ 

Mes derniers remerciements s'adressent à famille, mon papi et ma mamie, mes tatas, mes tontons, mes cousins et mes cousines. Merci à mon frère Max qui me rend très, très fier de ce qu'il est devenu. Merci à ma sœur Zoé pour tous ses encouragements. Enfin merci à mon papa chéri et ma maman chérie. Je vous aime et je vous aimerai toujours, jusqu'à la lune, et retour.

Table des matières

Remerciements	v
Introduction	xiii
1 Géométrie conforme pseudo-riemannienne	1
1.1 Variétés conformes	1
1.1.1 Catégorie conforme	1
1.1.2 Invariance des géodésiques de lumière	2
1.2 Géométrie de l'univers d'Einstein	3
1.2.1 Modèle projectif de l'univers d'Einstein	3
1.2.2 Photons et cônes de lumière	4
1.2.3 Projection stéréographique pseudo-riemannienne	4
1.2.4 Groupe conforme de l'univers d'Einstein	5
1.2.5 Le revêtement double $\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}$	6
1.2.6 Le revêtement universel $\widetilde{\mathbf{Ein}}_{1,n-1}$	8
1.2.7 Photons de dimension supérieure	9
1.3 Sous-espaces de Möbius et ouverts homogènes	13
1.3.1 Modèle conforme des espaces à courbure constante	13
1.3.2 Sous-variétés de Möbius	14
1.4 Diamants de l'univers d'Einstein	15
1.4.1 Le diamant lorentzien	15
1.4.2 Diamants en signature supérieure	17
1.4.3 Diamant dual	17
1.4.4 Groupe conforme du diamant	18
1.4.5 Modèles affines des diamants	19
1.5 Variétés conformément plates	21
1.5.1 Structures géométriques sur les variétés	21
1.5.2 Variétés conformément plates	22
1.5.3 Voisinage canonique	23
2 Une distance invariante en géométrie conforme	25
2.1 Paramétrage projectif des géodésiques de lumière	26
2.1.1 Équation des paramétrages projectifs	27
2.1.2 Convergence des géodésiques de lumière	29
2.1.3 Structure projective sur les géodésiques de lumière	33
2.2 Hyperbolicité au sens de Markowitz	34
2.2.1 Pseudo-distance de Markowitz	35
2.2.2 Fonctionnelle infinitésimale de Markowitz	37
2.2.3 Les différentes notions d'hyperbolicité	39

2.2.4	Propriétés de longueur	41
2.2.5	Distance de Markowitz du diamant	43
2.3	Un théorème de Brody en géométrie conforme pseudo-riemannienne	46
2.3.1	Théorème de Brody pseudo-riemannien	46
2.3.2	Caractère ouvert de l’hyperbolicité de Markowitz	48
2.4	Hyperbolicité des variétés conformément plates	49
2.4.1	Longueur des photons	49
2.4.2	Lien avec la fonctionnelle de Markowitz	49
2.4.3	Caractérisation de l’hyperbolicité pour les variétés conformément plates	50
3	Propriétés des distances pour les ouverts de l’univers d’Einstein	53
3.1	Les différentes notions de convexité	54
3.1.1	Causalité	54
3.1.2	Convexité causale dans $\widehat{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$	57
3.1.3	Convexité duale	58
3.1.4	Convexité duale faible	60
3.2	Lien entre les notions de convexités	61
3.3	Distance de Carathéodory	63
3.3.1	Applications projectives	63
3.3.2	La distance de Carathéodory	64
3.3.3	Lien avec la pseudo-distance de Zimmer	65
3.3.4	Complétude de la pseudo-distance de Carathéodory	66
3.4	Propriétés métriques des ouverts faiblement dualement convexes	67
3.4.1	Caractérisation de type Brody	67
3.4.2	Complétude	68
3.4.3	Géodésiques de δ_M	70
4	Ouverts propres quasi-homogènes de l’univers d’Einstein	71
4.1	Dynamiques au bord du domaine	72
4.1.1	Points photon-extrémaux	72
4.2	Une preuve courte en signature lorentzienne	74
4.3	Preuve du théorème principal en signature supérieure	75
4.3.1	Un lemme projectif	75
4.3.2	Points extrémaux-espace et extrémaux-temps	76
4.3.3	Fin de la preuve du théorème 4.1	77
4.4	Variétés conformément plates à développante propre	79
5	Une métrique pseudo-riemannienne invariante en géométrie conforme	81
5.1	Métrique pseudo-riemannienne de Kobayashi–Royden	82
5.2	Variétés Kobayashi–Royden-hyperboliques	85
5.3	Métrique du diamant	87
5.3.1	Inversions de diamants	87
5.3.2	Distorsions conformes des similitudes en l’infini	88
5.3.3	Lemme de Schwarz pseudo-riemannien	89
5.4	Caractérisation par projection stéréographique	90
5.4.1	Cône-complétude	91
5.4.2	Calcul de la métrique par projection stéréographique	91
5.4.3	Espaces à courbure constante	94
5.4.4	Domaines dualement convexes	96

6	Caractérisations géométriques et dynamiques de l'hyperbolicité	99
6.1	Dynamique de $\text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ agissant sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$	100
6.1.1	Décomposition de Cartan de $\text{PO}(p+1, q+1)$.	100
6.1.2	Ensemble dynamique d'une suite de difféomorphismes	101
6.1.3	Description dynamique des suites de $\text{PO}(p+1, q+1)$	101
6.2	Caractérisation dynamique de l'hyperbolicité	105
6.2.1	Atlas standard de $\mathbf{Ein}^{p,q}$	106
6.2.2	Distorsion conforme des suites diagonales	107
6.2.3	Divergence de la distorsion conforme	108
6.2.4	Preuve de la caractérisation dynamique	109
6.2.5	Hyperbolicité pour les variétés conformément plates	110
6.3	Critère géométrique d'hyperbolicité	112
6.3.1	Photons en position générique	114
6.3.2	Variétés kleinienne dont l'holonomie est irréductible	117
6.4	Hyperbolicité des domaines bordés par une sous-variété	118
6.4.1	Sous-variétés lorentziennes	118
6.4.2	Sphères stablement acausales	122
6.4.3	Action sur les sphères acausales	128
7	Markowitz vs Kobayashi–Royden-hyperbolique	131
7.1	Hyperbolicité des exemples de Markowitz	132
7.1.1	Compacité pour les applications conformes	132
7.1.2	Markowitz-hyperbolique implique KR-hyperbolique	135
7.1.3	Un exemple de non continuité	137
7.2	Métrique pseudo-riemannienne de Carathéodory	140
7.2.1	Propriétés de la métrique de Carathéodory	140
7.2.2	Lien avec la métrique de Kobayashi–Royden	142
7.2.3	Une application pour les espace-temps Cauchy-compacts	143
7.3	Métrique de Kobayashi–Royden pour les domaines de Bonsante	144
7.3.1	Temps cosmologique	144
7.3.2	Domaines futur-complets	145
7.3.3	Domaines de Bonsante	147
7.3.4	Inégalité sur la courbure presque partout	148
7.3.5	Domaines de Misner réguliers	152
	Perspectives	153
	Bibliographie	157

Introduction

Nous nous intéressons aux variétés munies d'une classe conforme de métriques pseudo-riemanniennes, dites *variétés conformes*. Ces variétés apparaissent naturellement dans la théorie de la relativité pour l'étude de la structure causale des espace-temps et dans l'étude du bord des espaces à courbure constante. Contrairement aux variétés pseudo-riemanniennes, les variétés conformes admettent peu d'invariants locaux : seules les géodésiques isotropes, appelées *géodésiques de lumière*, ont un sens conforme. Leur groupe de symétries peut avoir une dynamique différente de celle d'un groupe d'isométries. Un des problèmes classiques de la géométrie conforme est de comprendre à quel point la dynamique du groupe de symétries d'une variété conforme s'éloigne de celle d'un groupe d'isométries : c'est le problème d'essentialité.

Pour les variétés conformes riemanniennes, Kulkarni–Pinkall et Apanasov ont apporté une forme de réponse constructive au problème d'essentialité en construisant, grâce à la théorie de Kobayashi–Royden, une métrique riemannienne conformément invariante à faible régularité. Motivé par leurs travaux, nous étudions deux constructions de Kobayashi–Royden en géométrie conforme pseudo-riemannienne. La première est une pseudo-distance conformément invariante introduite par Markowitz et la seconde est une métrique pseudo-riemannienne inspirée de la métrique canonique de Kulkarni–Pinkall et Apanasov.

Géométrie conforme et problème d'essentialité

La géométrie conforme est l'étude des variétés munies d'une structure géométrique qui permet de mesurer les angles. Cette structure consiste en la donnée d'une famille $[g]$ de métriques pseudo-riemanniennes qui définissent la même notion d'orthogonalité. On parle d'une classe conforme de métriques et on dit que $(M, [g])$ est une variété conforme.

Une question naturelle est celle de la classification des variétés pseudo-riemanniennes à difféomorphisme conforme près. Bien sûr, cette question est trop ambitieuse car un grand nombre de variétés admettent des métriques pseudo-riemanniennes. Par exemple, toute variété de caractéristique d'Euler nulle supporte une métrique lorentzienne. On peut raffiner la question de classification en cherchant à décrire les variétés admettant un grand nombre de symétries. Le problème devient alors intéressant et dépend grandement de ce qu'on entend par *un grand nombre de symétries*. Une possibilité naturelle est de demander que le groupe des symétries soit non-compact. Pour les variétés riemanniennes compactes, il est impossible de demander une telle condition car le groupe d'isométries d'une variété riemannienne compacte est toujours compact. Cependant, dans le cadre conforme, la sphère est un exemple de variété conforme compacte admettant un groupe de transformations non-compact. En effet, la sphère conforme \mathbf{S}^n peut être décrite comme le bord de l'espace hyperbolique réel \mathbf{H}^{n+1} et son groupe conforme correspond aux groupe isométries de ce dernier. On peut se demander si la sphère ronde est le seul exemple de variété admettant un groupe non-compact de transformations conformes. Un théorème célèbre dû à Lelong-Ferrand [Fer69] et Obata

[Oba71] affirme que c'est le seul exemple.

Théorème (Ferrand, Obata). *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. Si le groupe conforme de M est non-compact, alors $M \simeq (\mathbf{S}^n, [g_{\mathbf{S}^n}])$.*

Lorsque la variété M est non-compacte, la seule hypothèse de non-compactité du groupe conforme ne permet pas de conclure des propriétés géométriques sur M , même localement. En effet, les espaces symétriques riemanniens non-compacts sont des exemples de variétés admettant des groupes d'isométries non-compacts, mais ils ne sont pas localement conformément équivalents entre eux. La notion qui s'avère être pertinente est celle d'essentialité. Une variété conforme est dite *essentielle* si son groupe de transformations conformes ne préserve aucune métrique dans la classe conforme. On dit aussi que le groupe conforme est *essentiel*. Les variétés essentielles sont les variétés conformes qui s'éloignent le plus de la géométrie riemannienne : le groupe conforme de ces variétés n'est jamais contenu dans un groupe d'isométries riemanniennes. Avec cette terminologie, on peut reformuler le théorème de Ferrand-Obata comme suit : la sphère conforme est la seule variété riemannienne compacte essentielle. Vingt ans après la démonstration dans le cas compact, Lelong-Ferrand a montré un énoncé analogue pour les variétés non-compactes en démontrant que l'espace Euclidien est la seule variété riemannienne non-compacte essentielle [Fer96]. Ainsi, la sphère conforme et l'espace Euclidien sont les seules variétés conformes riemanniennes essentielles.

On peut formuler le théorème de Ferrand-Obata purement en termes de l'action du groupe de symétries : la sphère conforme et l'espace Euclidien sont les seules variétés riemanniennes pour lesquelles l'action de leur groupe conforme est non-propre. Pour la géométrie CR, un énoncé analogue persiste grâce aux travaux de Schoen [Sch95] et Webster [Web77] selon lesquels toute variété CR dont le groupe de transformations CR agit non proprement est équivalente au bord de l'espace hyperbolique complexe $\partial\mathbf{H}_{\mathbf{C}}^{n+1}$ ou à $\partial\mathbf{H}_{\mathbf{C}}^{n+1} \setminus \{o\}$. Une démonstration unifiée de ces énoncés a été donnée par Frances [Fra07] en utilisant des techniques dynamiques. Il démontre que toute variété modelée sur une géométrie parabolique $X = G/P$ de rang 1 dont le groupe de symétries agit non-proprement est équivalente au modèle X de cette géométrie, ou au modèle époiné $X \setminus \{o\}$.

Lorsqu'on passe en signature pseudo-riemannienne, la situation se complexifie. D'une part, pour une variété lorentzienne (ou pseudo-riemannienne) compacte, il n'est plus vrai que l'action du groupe d'isométries est propre. En effet, on peut construire beaucoup de variétés compactes dont le groupe d'isométries est non-compact. Par exemple, pour tout réseau cocompact $\Gamma < \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$, l'action à gauche de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ sur lui-même descend en une action fidèle sur $M = \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})/\Gamma$, isométrique pour la forme de Killing (qui est de signature $(2, 1)$). L'étude générale des variétés lorentziennes compactes ayant un groupe d'isométries non-compact a été menée par Zeghib qui donne une description de leur géométrie globale, voir [Zeg97] et [Zeg99b]. En dimension 3, on peut entièrement classifier les variétés lorentziennes compactes avec un groupe d'isométries non-compact, voir [Zeg99a] et [Fra18].

Au delà des variétés lorentziennes avec groupe d'isométries non-compact, on peut se demander quelles sont les variétés lorentziennes (ou même pseudo-riemanniennes) essentielles, dont le groupe conforme est en un sens plus gros qu'un groupe d'isométries. Une exemple typique de telle variété est l'espace modèle de la géométrie conforme pseudo-riemannienne, appelé *univers d'Einstein*, et noté $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Cet espace est l'analogue de la sphère conforme en signature supérieure. Il peut être décrit comme le bord de l'espace hyperbolique réel pseudo-riemannien $\mathbf{H}^{p,q+1}$. L'action du groupe d'isométries de $\mathbf{H}^{p,q+1}$ s'étend au bord en une action conforme essentielle. Contrairement à la situation de la géométrie riemannienne, il existe une infinité de variétés lorentziennes compactes dont le groupe conforme est essentiel, comme l'a montré Frances [Fra05]. Ainsi, le théorème de Ferrand et Obata n'admet pas

d’analogue pseudo-riemannien. Les exemples de Frances sont tous *conformément plats*, c’est-à-dire qu’ils sont localement équivalents à l’univers d’Einstein. Lorsque la signature n’est ni riemannienne, ni lorentzienne, il est possible de construire des exemples de variétés compactes essentielles analytiques qui ne sont pas localement équivalentes à l’univers d’Einstein, voir [Fra15]. Ceci laisse à penser que toute variété lorentzienne essentielle, même si elle n’est pas équivalente à l’univers d’Einstein, doit être localement équivalente à l’univers d’Einstein.

Conjecture (de Lichnerowicz lorentzienne). *Toute variété lorentzienne compacte admettant un groupe de transformations conformes essentiel est conformément plate.*

Notons que tous les exemples connus de variétés lorentziennes admettant un groupe conforme essentiel sont *fortement essentielles*, c’est-à-dire que leur groupe conforme ne préserve pas de mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, voir [Fra05]. On s’attend à ce que toute action essentielle soit fortement essentielle. Récemment, Frances et Melnick ont répondu par l’affirmative à la conjecture de Lichnerowicz dans le cadre des variétés analytiques réelles compactes de dimension 3, sous l’hypothèse que la composante neutre $\text{Conf}_0(M)$ du groupe conforme de M agisse essentiellement [FM23]. Dans une autre direction, Melnick et Pécastaing obtiennent la compacité (et en particulier la non-essentialité) du groupe conforme à l’aide d’une hypothèse topologique sur la variété [MV21].

Pour tenter de répondre au problème d’essentialité, il est naturel d’essayer de construire explicitement des métriques conformément invariantes sur les variétés pseudo-riemanniennes. Une approche connue pour trouver des métriques invariantes est celle de Kobayashi, qui a défini des distances invariantes sur les variétés complexes et dont la construction a été largement généralisée. Nous présentons maintenant cette approche dans différents contextes géométriques pour en donner ensuite des exemples en géométrie conforme.

Constructions de Kobayashi–Royden

Étant donnée une structure géométrique \mathcal{G} , une construction de Kobayashi–Royden associe à toute \mathcal{G} -variété M une pseudo-distance δ_M , c’est-à-dire que δ_M est symétrique et satisfait l’inégalité triangulaire, mais ne doit pas nécessairement séparer les points. Décrivons abstraitement ce procédé avant d’en donner les exemples classiques provenant de la géométrie complexe et projective. Pour construire la pseudo-distance δ_M , l’idée générale consiste à fixer un espace métrique riemannien de référence \mathbf{X} et une famille naturelle d’applications $\{\mathbf{X} \rightarrow M\}$, de sorte que l’action par post-composition des \mathcal{G} -transformations préserve ces familles d’applications. Pour définir la pseudo-distance entre deux points de M , on considère les *chaînes d’applications* $\mathbf{X} \rightarrow M$ entre ces points. Une chaîne entre deux points a et b est une suite finie d’applications $\varphi_1, \dots, \varphi_n : \mathbf{X} \rightarrow M$, qu’on appellera *maillons*, de sorte que les images de deux maillons consécutifs φ_k et φ_{k+1} s’intersectent et que les images du premier maillon et du dernier maillon contiennent les points a et b respectivement (voir Figure 1). Pour des choix de points d’intersections entre les images de deux maillons consécutifs et pour des choix d’antécédents de ces points le long des applications qui définissent la chaîne, on peut mesurer la longueur des maillons d’une chaîne grâce à la distance $d_{\mathbf{X}}$ sur l’espace métrique X (ceci correspond à la quantité $d_{\mathbf{X}}(x_k, y_k)$ sur la Figure 1). Ceci permet d’associer une longueur abstraite à une chaîne, comme la somme des longueurs de ses maillons. La pseudo-distance entre a et b est définie de la façon suivante : la quantité $\delta_M(a, b)$ est l’infimum de toutes les longueurs de chaînes entre a et b , pour toute chaîne entre a et b (où le nombre de maillon et le choix qu’on a fait pour les antécédents varient).

Pour que ce procédé fonctionne, il faut notamment pouvoir trouver au moins une chaîne entre tous points d’une \mathcal{G} -variété. Il faut donc qu’il y ait une certaine abondance d’applica-

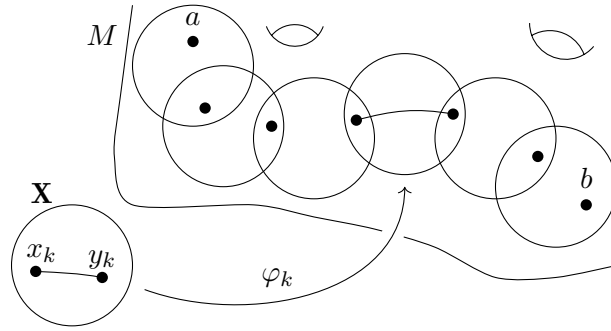


Figure 1 – Chaîne de a à b .

tions $\mathbf{X} \rightarrow M$ dans la famille choisie précédemment. Si cette condition est vérifiée, le procédé décrit précédemment définit une pseudo-distance sur toutes les \mathcal{G} -variétés. De plus, si les familles $\{\mathbf{X} \rightarrow M\}$ ont été choisies naturellement, l'image d'une chaîne de M par une transformation géométrique $M \rightarrow N$ donne une chaîne de N . Ceci permet de déduire que les transformations géométriques ne dilatent pas les longueurs (i.e. elles sont 1-Lipschitziennes). En particulier, les automorphismes de M sont des isométries de l'espace pseudo-métrique (M, δ_M) .

Les constructions de Kobayashi–Royden sont souvent accompagnées d'une version infinitésimale de la pseudo-distance δ_M . On peut construire sur une \mathcal{G} -variété M une fonctionnelle $F_M : TM \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ qui jouerait le même rôle qu'une métrique riemannienne intégrant δ_M si jamais la pseudo-distance δ_M était une distance riemannienne sur M (ce qui n'est pas le cas en général). La valeur de F_M dans une direction tangente v est définie comme

$$F_M(v) = \inf_{\varphi} |u|,$$

où l'infimum varie sur l'ensemble des vecteurs tangents $u \in T\mathbf{X}$ et des applications $\varphi : \mathbf{X} \rightarrow M$ telles que $\varphi_*u = v$, et où $|u|$ désigne la norme riemannienne de u .

Pour les constructions de Kobayashi–Royden, une question naturelle est de comprendre quelles sont les variétés M pour lesquelles la pseudo-distance δ_M définit une distance sur M , compatible à sa topologie. On dit alors que la variété est *Kobayashi-hyperbolique*. Une façon de vérifier que δ_M sépare les points est de montrer que la fonctionnelle infinitésimale F_M est localement minorée par une métrique riemannienne, ce qui est une condition plus forte a priori. On dit dans ce cas que la variété est *Royden-hyperbolique*. Dans le cas de la géométrie complexe, Royden a montré que ces deux conditions étaient équivalentes. C'est de cette équivalence que vient la terminologie “*construction de Kobayashi–Royden*”.

Cadre holomorphe

Un cadre célèbre d'applications des constructions de Kobayashi–Royden est celui de la géométrie complexe. Dans ce contexte, l'espace de référence est le disque unité \mathbf{D} du plan complexe muni de la métrique de Poincaré $\frac{4dzd\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$. Étant donnée une variété complexe M , la classe naturelle d'applications à considérer est celle des transformations holomorphes du disque unité \mathbf{D} vers M . Les chaînes de telles applications permettent de définir une pseudo-distance δ_M invariante par biholomorphismes sur M (voir [Kob05]).

En dimension complexe 1, c'est-à-dire pour les surfaces de Riemann, cette construction est complètement comprise. En effet, si une surface de Riemann Σ est uniformisée par le disque de Poincaré, alors Σ est Kobayashi-hyperbolique et la distance δ_Σ est l'unique distance sur Σ

qui se relève en la distance hyperbolique sur $\tilde{\Sigma} \simeq \mathbf{D}$. En revanche, si Σ est uniformisée par le plan complexe \mathbf{C} ou par la sphère de Riemann \mathbf{CP}^1 alors la pseudo-distance de Kobayashi est identiquement nulle sur M . Ainsi, la distance de Kobayashi permet de faire une dichotomie entre les surfaces de Riemann hyperboliques et les surfaces de Riemann paraboliques et elliptiques. C'est notamment de cette dichotomie que vient le nom *Kobayashi-hyperbolique*.

En dimension supérieure, il est beaucoup moins évident de déterminer si une variété complexe est hyperbolique ou non. Une condition nécessaire pour l'hyperbolicité est que toute application entière $\mathbf{C} \rightarrow M$ soit constante. En effet, si $f : \mathbf{C} \rightarrow M$ est une application holomorphe, alors f ne dilate pas les distances mesurées par la pseudo-distance de Kobayashi, donc tous les points dans l'image de f sont à pseudo-distance nulle les uns des autres. En général, cette condition n'est pas suffisante pour déduire l'hyperbolicité de M . Un résultat célèbre de Brody [Bro78] énonce qu'elle l'est si la variété M est compacte.

Théorème (Brody). *Toute variété complexe compacte ne supportant pas de fonction entière non constante est Kobayashi-hyperbolique.*

Une application surprenante est la suivante : si M est une variété complexe compacte telle que toute application entière $\mathbf{C} \rightarrow M$ est constante, alors le groupe de biholomorphismes $\text{Hol}(M)$ est compact. Ainsi, la distance de Kobayashi permet d'obtenir des restrictions sur le groupe de biholomorphismes de M en utilisant seulement des informations géométriques sur la variété. Les variétés complexes M qui n'admettent pas de fonction entière non-constante $\mathbf{C} \rightarrow M$ sont communément appelées *Brody-hyperboliques*. Avec cette terminologie, on peut reformuler le paragraphe précédent comme suit : tout variété Brody hyperbolique est Kobayashi-hyperbolique et la réciproque est vraie lorsque la variété est compacte. Il existe d'autres situations où cette réciproque est vérifiée. Par exemple, pour les ouverts convexes de \mathbf{C}^n , on sait que l'hyperbolicité de Kobayashi est équivalente à l'hyperbolicité de Brody, et, dans ce cas, la métrique de Kobayashi est complète (voir [Bar80]).

Pour conclure cette brève présentation dans le cadre complexe, énonçons une application des constructions de Kobayashi–Royden à la géométrie des ouverts de \mathbf{C}^n due à Wong [Won77] et Rosay [Ros79]. Ils obtiennent un résultat de rigidité pour les ouverts bornés strictement pseudo-convexes de \mathbf{C}^n : le groupe de biholomorphismes de ces derniers est compact sauf dans le cas particulier où le domaine est biholomorphe à la boule unité. Leur démonstration utilise le volume de Kobayashi définie de façon similaire à la fonctionnelle infinitésimale F_M . Une manière d'énoncer leur résultat est la suivante :

Théorème (Wong et Rosay). *Tout ouvert borné $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ dont le bord est de classe C^2 et dont le groupe de biholomorphismes agit cocompactement est biholomorphe à la boule \mathbf{B}^n .*

Notons que l'hypothèse du théorème n'est pas l'hypothèse optimale de Wong et Rosay. Il suffit de supposer que l'ensemble limite de $\text{Hol}(\Omega)$ contient un point de stricte pseudo-convexité. Depuis sa démonstration dans les années 70, ce théorème a reçu beaucoup d'attention et a été généralisé, voir par exemple [Gau97], [HGK02] et [Zim17]. Nous renvoyons à l'ouvrage récent [CCD⁺21] pour un panorama plus détaillé de l'hyperbolicité de Kobayashi en géométrie complexe.

Cadre projectif

La géométrie projective a aussi été un cadre d'applications célèbres des constructions de Kobayashi–Royden. Les variétés en questions sont munies d'une classe projective de connexion $[\nabla]$. L'espace de référence considéré est l'intervalle $I = (-1, 1)$ muni de la métrique hyperbolique $\frac{4dt^2}{(1-t^2)^2}$, et les familles d'applications $\{I \rightarrow (M, [\nabla])\}$ utilisées pour la

construction de Kobayashi–Royden sont les géodésiques projectives (c’est-à-dire des courbes dont le paramétrage satisfait une certaine équation différentielle qui fait intervenir la courbure de Ricci). Dans [Kob84], Kobayashi associe à toute variété projective $(M, [\nabla])$ une pseudo-distance δ_M en considérant les chaînes de géodésiques projectives $\gamma : I \rightarrow M$. Pour cette construction, il existe des caractérisations de l’hyperbolicité similaires à celles de Brody et Royden en géométrie complexe. Wu [Wu81] montre que si M est une variété projective compacte pour laquelle toute géodésique projective $\mathbf{R} \rightarrow M$ est constante, alors la pseudo-distance δ_M est une distance, c’est-à-dire que M est Kobayashi-hyperbolique. Ici, les géodésiques paramétrées projectivement sur la droite réelle jouent le même rôle que les fonctions entières en géométrie complexe. Wu montre aussi un analogue du critère de Royden pour les variétés projectives (remarquons que ces énoncés apparaissent aussi dans [Kob84] dans le cadre de la géométrie projective plate).

Pour les variétés projectives plates, i.e. les variétés projectives localement projectivement équivalente à \mathbf{RP}^n , l’hyperbolicité de Kobayashi est relativement bien comprise. Lorsqu’on considère un ouvert convexe borné de l’espace affine, la pseudo-distance de Kobayashi est une distance complète et les segments de droites sont géodésiques pour cette distance. Dans ce cas, la pseudo-distance de Kobayashi coïncide avec la distance de Hilbert. L’approche de Kobayashi permet d’ailleurs de montrer facilement que la distance de Hilbert satisfait l’inégalité triangulaire. Ces exemples permettent de construire des variétés projectives plates Kobayashi hyperboliques en quotientant un ouvert proprement convexe Ω de l’espace projectif par un groupe discret $\Gamma < \text{Proj}(\Omega)$ agissant cocompactement sur Ω . Ces exemples, appelés *convexes divisibles*, ont été largement étudiés et sont toujours un sujet actif de recherche. On renvoie au texte de Benoist [Ben08] pour une exposition de leurs propriétés. Une forme de réciproque à cette description est donnée par Kobayashi [Kob84] et Vey [Vey70] qui montrent que toute variété projectivement plate compacte Kobayashi-hyperbolique est équivalente au quotient d’un ouvert proprement convexe de l’espace projectif (voir aussi [Gol21]).

Distance invariante en géométrie pseudo-riemannienne : la construction de Markowitz

Dans le cadre de la géométrie conforme non-riemannienne, une construction de type Kobayashi–Royden a été introduite par Markowitz (voir [Mar81] et [Mar82]). Cette construction se rapproche de celle de Kobayashi en géométrie projective. Une classe conforme de métrique pseudo-riemanniennes ne définit pas naturellement de connexion affine ni même de classe projective de connexions. Ainsi, pour faire une construction de Kobayashi–Royden, l’idée naïve de fixer une métrique g de la classe conforme et d’utiliser des chaînes de géodésiques projectives ne peut pas fonctionner. Pour cela, il faut se restreindre à des familles de géodésiques particulières. Il est connu que, même si les géodésiques n’ont pas de sens conforme, la notion de géodésique de lumière à un sens en tant que courbe non-paramétrée. En général, le paramétrage affine d’une géodésique de lumière n’a pas de sens conforme. Il existe néanmoins une classe de paramétrages sur les géodésiques de lumière invariante par précomposition par une homographie et indépendante d’un choix de métrique dans la classe conforme. On parle de *géodésique de lumière paramétrée projectivement*. L’idée de Markowitz est de considérer des chaînes de géodésiques de lumière paramétrées projectivement sur $(-1, 1)$ pour construire une pseudo-distance δ_M de type Kobayashi–Royden sur toute variété conforme $(M, [g])$.

Une partie de ce manuscrit est consacrée à cette pseudo-distance, dont une étude systématique n’a pas encore été faite. Nous montrons que cette pseudo-distance est toujours continue et que lorsqu’elle définit une distance, c’est une distance de longueur équivalente

à une distance riemannienne. En particulier, elle définit la bonne topologie sur la variété conforme. On donne aussi une caractérisation similaire à celle de Royden en montrant que la pseudo-distance de Markowitz est une distance si et seulement si la fonctionnelle infinitésimale de Markowitz, définie sur le fibré $LM \subset TM$ des directions de lumière, est localement minorée par une norme riemannienne. Lorsque la variété M est compacte, on peut donner une caractérisation équivalente à celle de Brody dans le cas complexe et à Wu dans le cas projectif :

Théorème A. *Soit $(M, [g])$ une variété conforme pseudo-riemannienne compacte. Alors δ_M est une distance si et seulement si il n'existe pas de géodésique de lumière non-constante paramétrée projectivement $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow M$.*

Le théorème A montre par exemple que toute variété compacte M dont le groupe conforme est non-compact contient une géodésique de lumière non-constante paramétrée projectivement $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow M$. La preuve de ce théorème est basée sur un lemme de reparamétrage à la Brody et sur l'étude des limites uniformes de géodésiques de lumière paramétrées projectivement.

En signature lorentzienne, la pseudo-distance de Markowitz pourrait jouer un rôle important dans la compréhension des espaces-temps globalement hyperboliques maximaux. Un *espace-temps* est une variété lorentzienne munie d'une orientation en temps, c'est-à-dire un champ de vecteur de norme négative non nulle. Une orientation en temps permet d'employer le langage de la causalité : on peut parler de *futur* et de *passé* sur un espace-temps. En général, tous les espace-temps ne sont pas physiques et il est commun d'imposer des restrictions sur la structure causale de ces derniers. On renvoie à [MS08] pour un panorama des différentes hypothèses causales. Une hypothèse causale couramment employée est celle d'hyperbolicité globale : un espace-temps est *globalement hyperbolique* s'il admet une surface de Cauchy, c'est-à-dire une sous-variété topologique Σ rencontrée une et une seule fois par toute courbe causale inextensible. Cette condition contraint fortement la topologie de la variété car celles-ci doit être homéomorphe au produit $\mathbf{R} \times \Sigma$. Une variété globalement hyperbolique est *maximale* si elle ne se plonge pas conformement dans une variété globalement hyperbolique plus grande ayant une même surface de Cauchy.

L'étude des espace-temps conformement plats globalement hyperboliques maximaux a été initiée par Rossi, qui montre que $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ est la seule variété globalement hyperbolique maximale telle qu'il existe des géodésiques de lumière paramétrées projectivement sur un intervalle J de $\widetilde{\mathbf{RP}}^1$ contenant strictement \mathbf{R} , voir [Sal13]. Lorsqu'on suppose seulement que la variété contient des géodésiques de lumière paramétrées projectivement sur \mathbf{R} , il existe de nombreux exemples (voir [Sma23a]) et leur classification est un sujet complexe étudié par Barbot et Smaï. On renvoie à la thèse de Smaï pour l'étude de ces espace-temps [Sma22b]. Si on suppose qu'un espace-temps globalement hyperbolique maximal conformement plat ne contient pas de géodésique de lumière paramétrée sur \mathbf{R} , on s'attend à ce que la pseudo-distance de Markowitz ait de bonnes propriétés. C'est ce que nous montrons pour les ouverts de l'univers d'Einstein.

Théorème B. *Soit Ω un ouvert causalement convexe de $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$, globalement hyperbolique maximal. Alors δ_Ω est une distance si et seulement si il n'existe pas de géodésique de lumière non-constante paramétrée projectivement $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \Omega$. Dans ce cas, la distance δ_Ω est une distance de longueur complète conformement invariante sur Ω , dont les photons sont des géodésiques.*

Nous nous attendons à ce que le théorème B s'étende aux variétés conformement plates globalement hyperboliques maximales ne contenant pas de géodésique de lumière non constante

paramétrée projectivement sur \mathbf{R} . Dans l'énoncé précédent, le terme *causalement convexe* signifie que toute courbe causale entre deux points de Ω est contenue dans Ω . En tant qu'espaces-temps, ces ouverts sont toujours globalement hyperboliques. Lorsqu'ils sont maximaux, ces ouverts admettent une description géométrique explicite, voir [Sma23b]. Cette description de Smaï sera mise en lien avec une notion de convexité, appelée *convexité duale*, introduite par Zimmer [Zim18] dans un contexte différent.

Application de la distance de Markowitz à la géométrie des ouverts de l'univers d'Einstein

Un cadre naturel d'applications de la pseudo-distance de Markowitz est l'étude géométrique des ouverts *propres* de l'univers d'Einstein. Un ouvert de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ est propre s'il peut être identifié à un ouvert borné de l'espace de Minkowski $\mathbf{R}^{p,q}$ dans une certaine projection stéréographique. Pour ces ouverts, la pseudo-distance de Markowitz est toujours une distance. Une question qui peut être abordée grâce à cette distance est la suivante :

Question. Quels sont les ouverts propres de l'univers d'Einstein qui admettent des quotients compacts ?

Plus généralement, on cherche à déterminer les ouverts de l'univers d'Einstein dont le groupe conforme agit cocompactement, appelés *quasi-homogènes*. Avant de donner des éléments de réponse à cette question, expliquons les résultats analogues dans d'autres géométries. Dans le cadre holomorphe, le résultat de Wong [Won77] et Rosay [Ros79] mentionné précédemment montre qu'il existe, à biholomorphisme près, un unique ouvert borné de \mathbf{C}^n à bord C^2 admettant une action cocompacte par son groupe de biholomorphismes. Pour les ouverts de l'espace projectif, on sait par les travaux de Benzécri [Ben60] qu'un convexe borné de l'espace affine \mathbf{R}^n à bord C^2 admettant une action cocompacte pour un groupe discret de transformations projectives est un ellipsoïde. Cependant, il existe des déformations de ces ouverts qui admettent des actions cocompactes par des groupes de transformations projectives : ce sont les convexes divisibles que nous avons déjà mentionnés. Dans le cadre conforme riemannien, de telles déformations existent aussi : un réseau cocompact $\Gamma < \mathrm{O}(1, n)$ peut être déformé non trivialement dans $\mathrm{O}(1, n+1)$ et agir proprement discontinûment et cocompactement sur un ouvert de la sphère conforme \mathbf{S}^n bordé par une sphère topologique $\Sigma \simeq \mathbf{S}^{n-1}$ (voir par exemple [Apa92]). En dimension deux, ces exemples sont ceux des représentations quasi-fuchsienues.

En signature (p, q) , il existe un ouvert propre, appelé *diamant* et noté $\mathbf{D}^{p,q}$, qui s'identifie conformétement au produit $(-\mathbf{H}^p) \times \mathbf{H}^q$ et qui est donc homogène. À l'inverse des exemples décrits ci-dessus, on montre qu'en signature pseudo-riemannienne, cet exemple est le seul exemple d'ouvert propre quasi-homogène. Les deux théorèmes suivants sont issus d'un travail en collaboration avec B. Galiay, voir [CG24].

Théorème C (avec B. Galiay). *Tout ouvert propre quasi-homogène de l'univers d'Einstein est un diamant.*

Plus généralement, il est conjecturé qu'une telle forme de rigidité devrait avoir lieu dans la plupart des *variétés de drapeaux*, c'est-à-dire des espaces modèles de géométries paraboliques $\mathbf{X} = G/P$, où G est un groupe de Lie semi-simple et P un sous-groupe parabolique (voir [LZ19]). Ceci a déjà été montré par Zimmer [Zim18] lorsque P n'est pas maximal. Pour la grassmannienne des p -plans de \mathbf{R}^{2p} , un résultat de rigidité a été montré par Limbeek et Zimmer [LZ19]. Ils montrent que tout ouvert propre, divisible et convexe dans au moins une carte de $\mathrm{Gr}_p(\mathbf{R}^{2p})$ est équivalent à un ouvert modèle symétrique. En signature lorentzienne, le

théorème C admet une preuve alternative grâce à la causalité. Cette preuve a été généralisée par Galiay [Gal24] au cas des variétés de drapeaux admettant une structure causale.

Grâce au théorème C, on peut classifier les variétés compactes conformément plates dont l'image de l'application de développement est un ouvert propre, dites à *développante propre*.

Théorème D (avec B. Galiay). *Soit M une variété conformément plate compacte de signature (p, q) à développante propre, avec $p \neq q$. Alors, quitte à prendre un revêtement fini de M , on a l'identification conforme*

$$M \simeq -\Sigma^p \times \Sigma^q,$$

où Σ^p (resp. Σ^q) est une variété riemannienne compacte de courbure constante $K = -1$ si $p \neq 1$ (resp. $q \neq 1$) ou un cercle si $p = 1$ (resp. $q = 1$).

Nous ne savons pas si ce résultat s'étend aux variétés compactes conformément plates pour lesquelles la pseudo-distance de Markowitz est une distance.

Métrie pseudo-riemannienne de Kobayashi–Royden

Un défaut de la construction de Markowitz est qu'en général, il est impossible de trouver des distances invariantes par l'action d'un groupe conforme pseudo-riemannien. Par exemple, pour les variétés compactes conformément plates, on s'attend à ce que la construction de Markowitz ne donne pas une distance dans beaucoup de cas. Cependant, un grand nombre de variétés conformes compactes admettent une métrique pseudo-riemannienne conformément invariante. Ces remarques suscitent la question suivante :

Question. Est-il possible, en utilisant une construction de Kobayashi–Royden, de construire une *métrique pseudo-riemannienne invariante* pour les variétés conformes ?

Bien sûr, il n'est pas possible de construire une métrique pseudo-riemannienne invariante pour *toutes* les variétés conformes, car il existe des variétés pseudo-riemanniennes essentielles. Cependant, il est raisonnable de penser que l'on puisse construire une métrique pseudo-riemannienne invariante sur un grand nombre de variétés conformes. Ceci est d'autant plus raisonnable qu'une telle construction a déjà été réalisée en signature riemannienne. En effet, Kulkarni–Pinkall et Apanasov ont utilisé une construction de Kobayashi–Royden pour définir une métrique riemannienne canonique sur les variétés conformément plates inessentiels. Nous donnons maintenant une description de leur construction, puis nous en donnons une généralisation en signature supérieure.

Cadre conforme plat riemannien

En géométrie conforme riemannienne plate, Kulkarni–Pinkall [KP94] et Apanasov [Apa91] ont étudié une construction de type Kobayashi–Royden qui satisfait des propriétés de régularité remarquables. En dimension $n \geq 3$, ils considèrent des chaînes d'applications conformes $\mathbf{H}^n \rightarrow M$ de l'espace hyperbolique vers une variété conformément plate riemannienne M de dimension n , où \mathbf{H}^n est muni de la métrique hyperbolique. Ceci leur permet de définir une pseudo-distance conformément invariante qui est une distance dès que la variété n'est pas revêtue par l'espace Euclidien ou la sphère conforme. La fonctionnelle infinitésimale pour cette pseudo-distance est une métrique riemannienne de la classe conforme, appelée *métrique-canonique* et notée g_{can} . Une façon intuitive de définir la métrique canonique g_{can}^M d'une variété riemannienne conformément plate $(M, [g])$ est de dire que c'est la plus grande

métrique de la classe conforme de M qui rend les applications conformes $\mathbf{H}^n \rightarrow M$ contractantes, où \mathbf{H}^n est muni de la métrique hyperbolique. Donnons une autre description de g_{can} qui sera utile par la suite. Fixons une métrique g dans la classe conforme de M , et posons $\nu_g(x)$ le supremum des distorsions conformes en un point $a \in \mathbf{H}^n$ des applications conformes $\varphi : (\mathbf{H}^n, g_{\mathbf{H}^n}) \rightarrow (M, g)$ envoyant a sur x . Ceci définit une fonction ν_g sur M à valeurs positives et possiblement infinies. Avec ces notations, la métrique canonique de Kulkarni–Pinkall et Apanasov est exactement

$$g_{\text{can}}^M = \frac{1}{\nu_g^2} g. \quad (\star)$$

On vérifie que cette définition est indépendante du choix de métrique g dans la classe conforme de M et qu'elle définit un tenseur invariant par l'action du groupe conforme. Comme le facteur conforme ν_g^{-2} est défini ponctuellement, il n'est pas dérivable ou même continu a priori. De plus, ce facteur conforme pourrait s'annuler a priori. Par exemple, on vérifie que si M est la sphère ou l'espace Euclidien, la métrique canonique est le 2-tenseur identiquement nul. Ceci n'est pas surprenant car ces deux exemples sont des variétés fortement essentielles. Kulkarni–Pinkall et Apanasov montrent que l'espace Euclidien, la sphère conforme et leurs quotients sont les seules variétés conformément plates pour lesquelles la métrique canonique admet ce comportement pathologique.

Théorème (Kulkarni–Pinkall, Apanasov). *Soit M une variété conformément plate riemannienne telle qu'il n'existe pas d'application conforme $\mathbf{R}^n \rightarrow M$. Alors g_{can}^M est une métrique riemannienne conformément invariante de classe $C^{1,1}$ dont la courbure sectionnelle, définie presque partout, appartient à $[-1, 1]$.*

En d'autres termes, avec les notations précédentes, la fonction ν_g est de classe $C^{1,1}$. La régularité $C^{1,1}$ est un phénomène exceptionnel pour les constructions de Kobayashi–Royden. En général, la fonctionnelle infinitésimale d'une construction de Kobayashi–Royden est seulement semi-continue supérieurement. La non-existence d'application conforme $\mathbf{R}^n \rightarrow M$ correspond à la même hypothèse que Brody en géométrie complexe qui suppose qu'il n'existe pas d'application entière non constante $\mathbf{C} \rightarrow M$. Ainsi, pour les variétés conformément plates, la caractérisation de type Brody est équivalente à l'hyperbolicité de Kobayashi, sans même supposer la variété M compacte. Notons enfin que Kulkarni–Pinkall énoncent en plus que la métrique canonique est complète. À notre connaissance, cet énoncé n'admet pas de démonstration et est seulement connu pour les variétés dont la développante évite deux points de la sphère conforme.

Métrique pseudo-riemannienne de Kobayashi–Royden

Pour généraliser la construction de Kulkarni–Pinkall et Apanasov, on ne peut pas utiliser l'approche par les chaînes. En effet, cette approche ne permet que d'obtenir une pseudo-distance. Or, il n'existe pas de bonne manière d'associer une pseudo-distance à une métrique de signature non-riemannienne, car l'infimum des longueurs de chemin entre deux points sera toujours identiquement nul. Une possibilité pour généraliser la métrique canonique est d'étendre la fonctionnelle infinitésimale en définissant une version pseudo-riemannienne de l'équation (\star) . Pour se faire, il faut d'abord choisir un analogue de la famille d'applications conformes $\{\mathbf{H}^n \rightarrow M\}$ considérées pour la construction de la métrique canonique. Il faut donc choisir un analogue pseudo-riemannien du modèle conforme de l'espace hyperbolique. Un premier candidat naturel serait de choisir l'espace hyperbolique réel pseudo-riemannien $\mathbf{H}^{p,q}$. On pourrait donc mimer la formule (\star) , où cette fois le facteur conforme est l'inverse du carré du supremum des distorsions conformes d'applications pointées $\mathbf{H}^{p,q} \rightarrow M$. Cependant,

cette construction ne fonctionne pas pour une raison simple : pour une variété conformément plate M de signature (p, q) , l'ensemble des applications conformes $\{\mathbf{H}^{p,q} \rightarrow M\}$ est généralement vide. Par exemple, pour toute variété pseudo-riemannienne plate M , il n'existe pas d'application conforme de $\mathbf{H}^{p,q}$ vers M . L'espace hyperbolique pseudo-riemannien est donc trop *grand* pour s'immerger conformément dans toute variété pseudo-riemannienne. Il faut donc choisir un espace suffisamment petit pour qu'il se plonge conformément dans toute variété conformément plate.

En signature lorentzienne, un espace candidat est le produit $\mathbf{R} \times \mathbf{H}^{n-1}$ muni de la métrique $-dt^2 \oplus g_{\mathbf{H}^{n-1}}$. Cet espace admet une interprétation géométrique causale : il s'identifie conformément au diamant causal de deux points de l'espace de Minkowski $\mathbf{R}^{1,n-1}$. Ceci permet notamment de vérifier que cet espace se plonge toujours conformément au voisinage d'un point d'une variété conformément plate. De plus, cet espace admet beaucoup de symétries : il est conformément homogène et son groupe conforme agit par isométrie pour la métrique produit. Son analogue $(-\mathbf{H}^p) \times \mathbf{H}^q$, muni de la métrique $-g_{\mathbf{H}^p} \oplus g_{\mathbf{H}^q}$, définit un espace de signature (p, q) qui partage les mêmes propriétés. Ces espaces sont les diamants qui ont été mentionnés précédemment. Ils permettent de généraliser la métrique canonique en signature supérieure de la façon suivante :

Définition. Soit M une variété conformément plate de signature (p, q) . La *métrique pseudo-riemannienne de Kobayashi–Royden* de M est définie comme

$$g_{\text{KR}}^M = \frac{1}{\nu_g^2} g,$$

où g est une métrique quelconque dans la classe conforme de M et $\nu_g : M \rightarrow \mathbf{R}$ est la fonction définie en $x \in M$ comme le supremum des distorsions des applications conformes pointées $(\mathbf{D}^{p,q}, g_{\mathbf{D}^{p,q}}) \rightarrow (M, g)$ au point x .

Les propriétés classiques des constructions de Kobayashi–Royden restent valides pour g_{KR} . Notamment, le facteur conforme ν_g^{-2} devant la métrique g est toujours semi-continu supérieurement. De plus, les applications conformes vérifient une propriété de contraction du facteur conforme qui s'apparente à une version pseudo-riemannienne d'être 1-Lipschitzienne : elles ne dilatent pas les normes mesurées par g_{KR} (dans le contexte pseudo-riemannien, la norme d'un vecteur tangent v désigne la quantité $\sqrt{|g(v, v)|}$). En particulier, la métrique de Kobayashi–Royden est conformément invariante.

En toute généralité, la métrique de Kobayashi–Royden n'est pas une métrique lisse dans la classe conforme. Il existe des exemples explicites où cette métrique n'est pas continue. Lorsque la pseudo-distance de Markowitz est une distance, on peut montrer que g_{KR}^M est localement Lipschitzienne et cette régularité est optimale dans ce cas. Il existe des familles d'exemples, comme les domaines de Bonsante, où la métrique est de classe C^1 , mais ces exemples sont relativement spécifiques. La métrique de Kobayashi–Royden peut présenter deux pathologies : d'une part, il est possible que le facteur conforme ν_g^{-2} s'annule en certains points. De plus, même si le facteur conforme est non nul, il est a priori possible que ν_g^{-2} converge vers 0 le long d'une suite convergente. Pour éviter ces deux comportements pathologiques, nous nous intéresserons aux variétés satisfaisant la propriété suivante :

Définition. Une variété conformément plate M est *Kobayashi–Royden-hyperbolique* si le facteur conforme ν_g^{-2} est minoré par une constante positive non nulle au voisinage de tout point, pour une métrique g dans la classe conforme de M .

Dans le cadre riemannien de Kulkarni–Pinkall et Apanasov, les variétés Kobayashi–Royden-hyperboliques sont exactement les variétés qui ne sont pas des quotients de la sphère

conforme ou de l'espace Euclidien. Dans ce cas là, il suffit de vérifier que le facteur conforme ν_g^{-2} ne s'annule pas pour conclure qu'il est localement minoré par une constante, car c'est une fonction de classe C^1 . En signature pseudo-riemannienne, même si la métrique de Kobayashi–Royden n'est pas régulière, elle définit un volume conformément invariant fini sur les compacts et chargeant les ouverts. En particulier, la métrique de Kobayashi–Royden donne une obstruction à la forte essentialité : toute variété Kobayashi–Royden-hyperbolique n'est pas fortement essentielle. Il est donc intéressant de connaître des classes d'exemples de variétés Kobayashi–Royden-hyperboliques.

Contrairement à la signature riemannienne, il n'y a pas de critère simple qui permet de caractériser les variétés Kobayashi–Royden-hyperboliques. Par exemple, il n'est pas évident de déterminer si l'espace hyperbolique pseudo-riemannien $\mathbf{H}^{p,q}$ est Kobayashi–Royden-hyperbolique ou non, car l'espace des applications conformes $\mathbf{D}^{p,q} \rightarrow \mathbf{H}^{p,q}$ n'a aucune propriété de compacité. De façon générale, montrer qu'une variété M est Kobayashi–Royden-hyperbolique revient à étudier la dynamique des applications conformes $\mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$. L'étude de cette dynamique peut s'avérer difficile, même si on étudie seulement les ouverts de l'univers d'Einstein. Les trois théorèmes qui suivent servent à donner un grand nombre d'exemples d'ouverts du modèle et de variétés qui sont Kobayashi–Royden-hyperboliques.

Théorème E. *Soient $p \leq q$ et Ω un ouvert de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ satisfaisant l'une des conditions suivantes :*

- Ω évite une famille de p -photons en position générique.
- Ω évite une p -sphère de Möbius négative ou une q -sphère de Möbius positive.

Alors Ω est Kobayashi–Royden-hyperbolique.

Donnons la terminologie employée dans le théorème précédent. Un p -photon est une sous-variété totalement isotrope maximale. Ces espaces sont topologiquement des espaces projectifs de dimension p . Une q -sphère positive est une sous-variété riemannienne de dimension q dont la structure conforme est celle de la sphère ronde. De même, une p -sphère négative est une sous-variété totalement négative de dimension p dont la structure conforme est anti-isométrique à celle de la sphère ronde. Dans le modèle projectif de l'univers d'Einstein, ces espaces s'obtiennent comme projection d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$ d'une certaine signature. Une famille \mathcal{F} de p -photons est *en position générique* s'il n'existe pas de p -photon intersectant tous les p -photons de \mathcal{F} .

Les exemples précédents permettent notamment de montrer que l'espace hyperbolique pseudo-riemannien $\mathbf{H}^{p,q}$, et plus généralement toute variété pseudo-riemannienne à courbure constante non nulle, est Kobayashi–Royden-hyperbolique. Notons aussi que l'hyperbolicité des ouverts de la deuxième famille s'obtient avec des techniques géométriques qui ne nécessitent pas d'arguments dynamiques. En signature lorentzienne, on peut obtenir des versions perturbatives des exemples précédents.

Théorème F. *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ satisfaisant l'une des conditions suivantes :*

- Ω évite une sous-variété lorentzienne de classe C^1 et de dimension ≥ 2 .
- Ω évite une $(n-1)$ -sphère stablement acausale.

Alors Ω est Kobayashi–Royden-hyperbolique.

La première famille d'exemples implique que toute perturbation C^1 du bord conforme de l'espace Anti-de-Sitter donne encore un espace Kobayashi–Royden hyperbolique. Pour la deuxième famille d'exemples, le terme *stablement acausale* signifie que la $(n-1)$ -sphère est acausale, i.e. ses points ne sont pas localement causalement reliés, et elle reste acausale même si on élargit la structure de cône de l'univers d'Einstein. Ces exemples sont une forme

de perturbation continue de l'espace de de-Sitter, le modèle de la géométrie lorentzienne à courbure constante positive.

Au delà des ouverts du modèle, on peut donner des exemples de variétés conformément plates compactes Kobayashi–Royden-hyperboliques en signature lorentzienne. Nous nous concentrons sur les variétés kleinienne, i.e. les variétés $M = \Omega/\Gamma$, où Ω est un domaine de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ et $\Gamma < \mathrm{PO}(2, n)$ est le *groupe d'holonomie* de M . En un certain sens, les variétés kleinienne sont génériquement Kobayashi–Royden-hyperboliques :

Théorème G. *Soit M une variété conforme lorentzienne compacte kleinienne dont le groupe d'holonomie est irréductible. Alors M est Kobayashi–Royden-hyperbolique.*

En particulier, toute variété conforme lorentzienne compacte kleinienne dont le groupe d'holonomie est irréductible n'est pas fortement essentielle. Il est possible d'obtenir la même conclusion dans le théorème précédent en supposant seulement que l'holonomie est infinie et qu'elle ne préserve ni de point, ni de photon, ni de tore lorentzien. Avec des hypothèses opposées sur l'holonomie, Lee et Melnick ont récemment classifié les variétés lorentziennes compactes conformément plates dont l'holonomie est unipotente (voir [LM24]). L'holonomie de ces variétés fixe un point et un photon dans l'univers d'Einstein. Leur résultat est très général car il ne suppose pas l'injectivité de l'application de développement.

Organisation du manuscrit

Ce manuscrit est découpé en 7 chapitres dont les contenus peuvent être regroupés de la façon suivante :

Chapitre 1

Le Chapitre 1 concerne la géométrie de l'univers d'Einstein de signature (p, q) . On y présente ses différents modèles : modèle projectif, modèle du revêtement double, modèle du revêtement universel en signature lorentzienne. On y décrit ses sous-espaces remarquables : photons, sous-variétés de Möbius et sous-espaces isotropes de dimensions supérieures appelés *k*-photons, voir section 1.2. Les sous-variétés de Möbius permettent de scinder l'univers d'Einstein en différentes composantes homogènes isométriques au produit d'espaces à courbures constantes, voir section 1.3. Parmi elles, on trouve des composantes remarquables appelées *diamants* dont nous décrivons la géométrie en détail, voir section 1.4. Enfin, nous présentons le cadre de la géométrie conforme plate, géométrie décrite par une structure rigide au sens de Ehresmann–Thurston, voir section 1.5.

Chapitres 2 et 3

Le Chapitre 2 et le Chapitre 3 sont consacrés à l'étude de la pseudo-distance de Markowitz. Le Chapitre 2 donne une étude valable pour toutes variétés (pas nécessairement conformément plates). On y donne les caractérisations de Royden et de Brody pour l'hyperbolicité. La preuve du théorème A repose sur une étude des paramétrages projectifs des géodésiques de lumières, voir section 2.1.

Le Chapitre 3 est spécifique à la géométrie conforme plate. On y décrit d'abord les notions de convexité connues dans la littérature : convexité causale, convexité duale. Nous donnons le lien entre ces deux notions à la section 3.2. Enfin, nous étudions les propriétés de la distance de Markowitz pour des ouverts de l'univers d'Einstein que nous appelons *faiblement dualement convexes*. La preuve du théorème B est donnée à la section 3.4.

Chapitre 4

Le Chapitre 4 est consacré à la preuve du théorème C et du théorème D. Son contenu est issu de la pré-publication [CG24] issue d'un travail en collaboration avec B. Galiay. La preuve du théorème C consiste à étudier une classe de points privilégiés, appelés *points photons extrémaux*, qui sont l'équivalent pseudo-riemannien des points extrémaux d'un convexe en géométrie affine, voir section 4.1. L'étude de ces points extrémaux permet de donner une preuve rapide du théorème C en signature lorentzienne, voir section 4.2. Une preuve en toutes signatures est donnée en section 4.3. La preuve du théorème D se déduit directement du théorème C, voir section 4.4.

Chapitre 5 et 6

Le Chapitre 5 et le Chapitre 6 visent à introduire et étudier la métrique pseudo-riemannienne de Kobayashi–Royden. Le Chapitre 5, plus introductif, contient les propriétés standards de cette métrique : aspect fonctoriel, semi-continuité, voir section 5.1. Le calcul de la métrique de Kobayashi–Royden du diamant est donné grâce à un analogue pseudo-riemannien du lemme de Schwarz, voir section 5.3. Dans la section 5.4, on donne une construction basée sur un argument de projection stéréographique qui permet de calculer théoriquement la métrique de Kobayashi–Royden de certains ouverts. Ceci permet de démontrer la deuxième partie du théorème E.

Le Chapitre 6 regroupe les preuves des théorèmes E, F et G. On présente une description qualitative de la dynamique des suites de transformations conformes de l'univers d'Einstein à la section 6.1. Ceci permet de donner une caractérisation complète de l'hyperbolicité de Kobayashi–Royden d'un ouvert $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ en termes de la dynamique des applications conformes $\mathbf{D}^{p,q} \rightarrow \Omega$, voir section 6.2. Cette caractérisation étant difficilement vérifiable, nous donnons un critère géométrique, suffisant pour l'hyperbolicité des ouverts de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ et vérifiable dans la pratique, voir section 6.3. En signature lorentzienne, ce critère peut s'énoncer ainsi : si la trace des cônes de lumière de points de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ dans le complémentaire de Ω sont suffisamment grands, alors Ω est Kobayashi–Royden-hyperbolique, voir section 6.3 pour un énoncé précis. Ce critère permet de démontrer le premier point du théorème E, le premier point du théorème F et le théorème G, voir section 6.3 et section 6.4. Le deuxième point du théorème F admet une démonstration indépendante basée sur l'étude de l'action des suites de $\mathrm{PO}(2, n)$ sur l'espace de sphères acausales, voir section 6.4.2.

Chapitre 7

Le Chapitre 7 est consacré à l'étude de la métrique de Kobayashi–Royden pour les exemples de Markowitz. Dans un premier temps, on compare l'hyperbolicité de Markowitz et l'hyperbolicité de Kobayashi–Royden en montrant que toute variété Markowitz hyperbolique est Kobayashi–Royden hyperbolique, voir section 7.1. À cette occasion, on donne un exemple d'ouvert pour lequel la métrique de Kobayashi–Royden n'est pas continue, voir section 7.1.3. On étudie la métrique de Kobayashi–Royden de deux familles de variétés Markowitz-hyperboliques. La première famille est celle des variétés à développante propre pour lesquelles il existe une métrique pseudo-riemannienne invariante similaire à la métrique de Carathéodory. Une comparaison entre cette métrique et la métrique de Kobayashi–Royden permet d'obtenir une caractérisation du diamant au sein des variétés à développante propre, similaire à celle de Wong et Rosay en géométrie complexe, voir section 7.2. Enfin, nous décrivons la métrique de Kobayashi–Royden de certains domaines de l'espace de Minkowski introduits par Bonsante. La géométrie particulière de ces domaines permet d'obtenir une ré-

gularité C^1 et des dérivées secondes presque partout pour la métrique de Kobayashi–Royden, voir section 7.3.

Chapitre 1

Géométrie conforme pseudo-riemannienne

Ce chapitre est consacré à l'étude des variétés conformes pseudo-riemanniennes en signature quelconque. Notre attention résidera principalement sur l'étude géométrique de l'espace modèle de la géométrie conforme : l'univers d'Einstein. Nous présentons différents modèles pour cet espace et nous décrivons des sous-variétés privilégiées qu'il contient : photons, sous-espaces isotropes, sous-espaces de Möbius. Nous mettons aussi en évidence certains des espaces homogènes qui se plongent dans l'univers d'Einstein. Parmi ces derniers, nous étudions en détail une classe d'ouverts appelés *diamants* qui se révéleront être essentiels dans des constructions ultérieures. Enfin, nous présentons le cadre de la géométrie des variétés *localement conformément plates*. Ces variétés sont décrites par une structure géométrique rigide au sens de Ehresmann–Thurston–Goldman.

1.1 Variétés conformes

1.1.1 Catégorie conforme

Soient $p, q \geq 0$ entiers. Une *variété conforme de signature* (p, q) est la donnée d'une paire $(M, [g])$, où

- M est une variété lisse connexe de dimension $n := p + q$;
- g est une métrique pseudo-riemannienne de signature (p, q) sur M , c'est-à-dire que g est un 2-tenseur symétrique non dégénéré lisse sur M et que pour tout $x \in M$, il existe une base de $T_x M$ dans laquelle la métrique s'écrit

$$g_x(v, v) = -v_1^2 - \dots - v_p^2 + v_{p+1}^2 + \dots + v_{p+q}^2;$$

- $[g]$ est la *classe conforme* de M , c'est-à-dire $[g] = \{e^f \cdot g \mid f \in C^\infty(M)\}$.

On dira que M est de signature *riemannienne* si $p = 0$ et de signature *lorentzienne* si $p = 1$. On notera alors $(1, n - 1)$ pour la signature $(1, q)$. Soit $(M, [g])$ une variété conforme de signature (p, q) . Un vecteur tangent $v \in TM$ est *de type temps* (resp. *de type espace*, resp. *de lumière*, resp. *causal*) si $g(v, v) < 0$ (resp. $g(v, v) > 0$, resp. $g(v, v) = 0$, resp. $g(v, v) \leq 0$). Cette définition a du sens car le signe de $g(v, v)$ ne dépend pas de la métrique choisie dans la classe conforme. Voir Figure 1.1. Ce langage s'étend au niveau des courbes différentiables : on dira par exemple qu'une courbe γ est causale si $\dot{\gamma}(t)$ est un vecteur causal pour tout t . Plus généralement, étant donné une sous-variété $N \subset (M, [g])$, on dit que N est de signature (p', q', r') si $(T_x N, g|_N)$ est un espace quadratique de signature (p', q', r') pour tout $x \in N$.

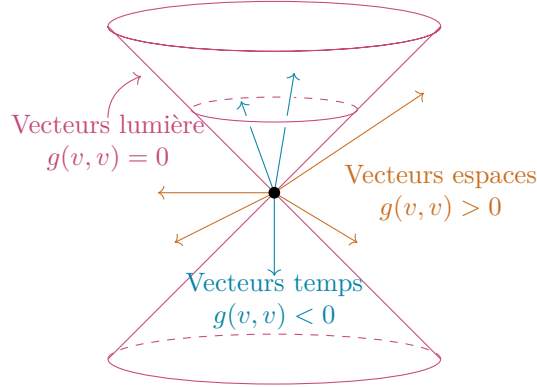


FIGURE 1.1 – Signe d’une métrique de signature $(1, 2)$ en chaque espace tangent.

Une application $f : (M_1, [g_1]) \rightarrow (M_2, [g_2])$ entre deux variétés de même signature est une application *conforme* si elle est de classe C^∞ et qu’elle préserve le type des vecteurs, c’est-à-dire que $Tf(v)$ est de type temps (resp. espace, lumière) si v est de type temps (resp. espace, lumière). En particulier, si f est une application conforme, alors $T_x f$ est un isomorphisme pour tout $x \in M$, donc f est un difféomorphisme local. Fixons g_1, g_2 des métriques dans les classes conformes de M_1, M_2 , respectivement. Pour tout $x \in M_1$, il existe un unique $\lambda > 0$ tel que l’application tangente

$$T_x f : (T_x M_1, g_1) \rightarrow (T_{f(x)} M_2, g_2)$$

s’écrive $T_x f = \lambda h$, où $h : (T_x M_1, g_1) \rightarrow (T_{f(x)} M_2, g_2)$ est une isométrie linéaire. Ce nombre s’appelle la *distorsion conforme* de f en x relativement à g_1 et g_2 , et on le notera $dc(f, g_1, g_2, x)$. Cette quantité mesure le défaut d’isométrie de f au voisinage de x , pour le choix des métriques g_1 et g_2 sur M_1 et M_2 . Elle dépend du choix des métriques g_1 et g_2 . Pour un autre choix $g'_1 = \alpha_1^2 \cdot g_1$ et $g'_2 = \alpha_2^2 \cdot g_2$ dans la classe conforme, où $\alpha_i : M_i \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ est de classe C^∞ , on a la relation

$$dc(f, g'_1, g'_2, x) = \frac{\alpha_2(f(x))}{\alpha_1(x)} dc(f, g_1, g_2, x). \quad (1.1)$$

Dans le cas particulier où $M_1 = M_2$ et où f a un point fixe x , la distorsion conforme $dc(f, g, g, x)$ ne dépend pas du choix de la métrique g dans la classe conforme.

1.1.2 Invariance des géodésiques de lumière

Soit $(M, [g])$ une variété conforme pseudo-riemannienne. On se donne g_1 et g_2 deux métriques dans la classe conforme $[g]$. En général, les invariants pseudo-riemanniens de g_1 et g_2 ne sont pas reliés par une formule simple. Par exemple, les connexions de Levi-Civita de g_1 et g_2 n’ont pas les mêmes géodésiques a priori. Cependant, il est vrai que les géodésiques de lumière de g_1 et g_2 coïncident, modulo un reparamétrage. Plus précisément, soit v un vecteur de lumière non nul et soient ξ_1 et ξ_2 des géodésiques affines pour g_1 et g_2 , respectivement, telles que $\xi'_1(0) = \xi'_2(0) = v$.

Théorème 1.1. *Il existe un difféomorphisme local s au voisinage de l’origine tel que $\xi_1 = \xi_2 \circ s$.* ■

Grâce à ce théorème, nous pourrions parler de géodésique de lumière paramétrée sur M . On dit qu’une courbe paramétrée $\gamma(t)$ est une *géodésique de lumière paramétrée* si au voisinage de tout temps t où γ est définie, il existe un paramétrage local $s(t)$ tel que la courbe

$\gamma(s)$ est une géodésique de lumière paramétrée affinement (pour le choix d'une métrique dans la classe conforme). Par le théorème 1.1, cette notion ne dépend pas du choix d'une métrique dans la classe conforme de M . Par convention, une géodésique de lumière paramétrée est toujours une immersion. Nous allons vérifier qu'une géodésique de lumière paramétrée peut toujours être reparamétrée globalement en une géodésique affine, pour tout choix de métrique dans la classe conforme :

Proposition 1.2. *Soit $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ une géodésique de lumière paramétrée. Alors pour toute métrique g dans la classe conforme, il existe un difféomorphisme local $s : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ tel que $\gamma \circ s^{-1}$ est paramétrée affinement pour g .*

Démonstration. Soit g une métrique dans la classe conforme. Comme γ peut être localement paramétrée affinement, on peut trouver une suite d'intervalles $\{(a_k, b_k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ recouvrant (a, b) et une suite de difféomorphismes locaux $s_k : (a_k, b_k) \rightarrow \mathbf{R}$ telles que $a_k < b_{k-1} < b_k < a_{k+1}$ pour tout k , la courbe $\gamma \circ s_k^{-1}$ est paramétrée affinement. En particulier, pour tout k , la composée $s_{k+1} \circ s_k^{-1}$ est affine, donc il existe $h_k \in \text{Aff}(1)$ tel que $s_{k+1} = h_k \circ s_k$. On peut alors modifier successivement les s_k et se ramener au cas où $h_k = \text{id}$ pour tout k . Les applications $\{s_k\}$ se recollent donc pour donner un difféomorphisme local $s : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ qui satisfait bien que $\gamma \circ s^{-1}$ est affine. ■

En particulier, si $\xi_1 : J_1 \rightarrow M$ et $\xi_2 : J_2 \rightarrow M$ sont les géodésiques affines maximales pour les métriques g_1 et g_2 dans la classe conforme de M respectivement, telles que $\xi_1'(0) = \xi_2'(0) = v$, alors il existe un difféomorphisme global $s : J_1 \rightarrow J_2$ tel que $\xi_1 = \xi_2 \circ s$. En effet, la proposition précédente donne l'existence d'un difféomorphisme local $s : J_1 \rightarrow J_2$ qui n'est a priori pas surjectif. Écrivons $J_i = (a_i, b_i)$ et supposons par exemple que $s(J_1) = (x, y)$ avec $y < b_2$. Pour toute suite (t_k) convergeant vers b_1 par valeurs inférieures, la suite $s(t_k)$ converge vers y , donc $\xi_1(t_k) = \xi_2(s(t_k)) \rightarrow \xi_2(y)$. Donc $\xi_1(t)$ admet une limite quand $t \rightarrow b_1$. Ceci contredit la maximalité de ξ_1 . Ainsi, la notion de *géodésique de lumière paramétrée maximale* a un sens conforme qui ne dépend pas du choix d'une métrique dans la classe conforme.

Remarque 1.3. La preuve de la proposition 1.2 montre que pour toute géodésique de lumière paramétrée $\gamma : (a, b) \rightarrow M$, une métrique dans la classe conforme induit une structure affine sur (a, b) . En général, cette structure affine dépend du choix de la métrique dans la classe conforme. Nous verrons à la section 2.1.1 qu'il existe sur les géodésiques de lumière une classe de paramétrages privilégiés qui ne dépend pas du choix d'une métrique dans la classe conforme.

1.2 Géométrie de l'univers d'Einstein

1.2.1 Modèle projectif de l'univers d'Einstein

On note $\mathbf{R}^{p+1, q+1}$ l'espace vectoriel \mathbf{R}^{p+q+2} muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée \mathbf{b} de signature $(p+1, q+1)$. L'univers d'Einstein de signature (p, q) , noté $\mathbf{Ein}^{p, q}$, est la collection des droites de lumière de $\mathbf{R}^{p+1, q+1}$, c'est-à-dire

$$\mathbf{Ein}^{p, q} = \{ \mathbf{R}v \in \mathbf{P}(\mathbf{R}^{p+1, q+1}) \mid \mathbf{b}(v, v) = 0 \}.$$

Ainsi défini, l'univers d'Einstein est une hypersurface compacte de l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathbf{R}^{p+1, q+1})$. Le *cône de lumière* de $\mathbf{R}^{p+1, q+1}$, noté $C^{p+1, q+1}$, est l'ensemble des vecteurs de lumière non nuls de $\mathbf{R}^{p+1, q+1}$. On désignera par $\pi : \mathbf{R}^{p+1, q+1} \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{R}^{p+1, q+1})$ la projection canonique, de sorte que $\mathbf{Ein}^{p, q} = \pi(C^{p+1, q+1})$. Cette variété est naturellement munie d'une classe conforme

de métriques pseudo-riemanniennes de signature (p, q) . Plus précisément, la classe conforme dégénérée $[\mathbf{b}|_{C^{p+1, q+1}}]$ peut être poussée en avant par $\pi : C^{p+1, q+1} \rightarrow \mathbf{Ein}^{p, q}$ pour donner une classe conforme de métriques de signature (p, q) sur $\mathbf{Ein}^{p, q}$. En effet, en fixant un vecteur de lumière $v \in C^{p+1, q+1}$ dans la fibre de $x = \pi(v) \in \mathbf{Ein}^{p, q}$, l'application tangente $T_v\pi : T_v C^{p+1, q+1} \rightarrow T_x \mathbf{Ein}^{p, q}$ induit une identification

$$T_x \mathbf{Ein}^{p, q} \simeq T_v C^{p+1, q+1} / \mathbf{R}v.$$

La forme \mathbf{b} se restreint à $T_v C^{p+1, q+1} = v^\perp$ en une métrique dégénérée de signature $(1, p, q)$, dont le noyau est précisément $\mathbf{R}v$. En passant au quotient, l'espace quadratique $(v^\perp / \mathbf{R}v, \mathbf{b})$ est non dégénéré de signature (p, q) . Par l'identification ci-dessus, la forme $(T_v\pi)_*\mathbf{b}$ définit une métrique de signature (p, q) sur $T_x \mathbf{Ein}^{p, q}$. Pour un autre choix de vecteur $u = \lambda v$ dans la fibre de x , l'application tangente $T_u\pi$ satisfait $T_u\pi(\lambda h) = T_v\pi(h)$, pour tout $h \in u^\perp = v^\perp$. On obtient donc la relation $(T_u\pi)_*\mathbf{b} = \lambda^2 (T_v\pi)_*\mathbf{b}$, donc la classe conforme $[(T\pi)_*\mathbf{b}]$ est bien définie sur $\mathbf{Ein}^{p, q}$. On notera abusivement $[\pi_*\mathbf{b}]$ pour cette classe conforme. La classe conforme $[\pi_*\mathbf{b}]$ est caractérisée par le fait que c'est l'unique classe conforme de métrique $[g]$ sur $\mathbf{Ein}^{p, q}$ telle que

$$\pi^*[g] = [\mathbf{b}|_{C^{p+1, q+1}}]. \quad (1.2)$$

Ceci implique en particulier que $[\pi_*\mathbf{b}]$ est une classe conforme de métriques lisses.

1.2.2 Photons et cônes de lumière

Un *photon* de $\mathbf{Ein}^{p, q}$ est défini comme la projection $\Delta = \pi(\Pi)$ d'un plan totalement isotrope $\Pi \subset \mathbf{R}^{p+1, q+1}$. Les photons sont les uniques droites projectives de $\mathbf{P}(\mathbf{R}^{p+1, q+1})$ qui sont entièrement contenues dans $\mathbf{Ein}^{p, q}$. En tant que courbes paramétrées, les photons sont des géodésiques de lumière de $\mathbf{Ein}^{p, q}$. Réciproquement, toute géodésique de lumière est localement égale à un photon. Étant donné un point $x \in \mathbf{Ein}^{p, q}$, on peut considérer la réunion de tous les photons contenant x , appelée *cône de lumière* de x , et notée $C(x)$. On dira que x est le *sommet* de $C(x)$. Si $x = \pi(v)$ pour un vecteur $v \in \mathbf{R}^{p+1, q+1}$, on peut écrire explicitement $C(x) = \pi(v^\perp) \cap \mathbf{Ein}^{p, q}$. De façon équivalente

$$C(x) = \{y \in \mathbf{Ein}^{p, q} \mid \mathbf{b}(x, y) = 0\}.$$

Dans l'égalité précédente, la quantité $\mathbf{b}(x, y)$ est définie comme la valeur de $\mathbf{b}(u, v)$ pour deux vecteurs $u, v \in \mathbf{R}^{p+1, q+1}$ tels que $\pi(u) = x$ et $\pi(v) = y$. Cette valeur n'a pas de sens en général car elle dépend du choix des représentants des droites x et y . Cependant, l'équation $\mathbf{b}(x, y) = 0$ est indépendante du choix de u et v et elle est donc bien définie.

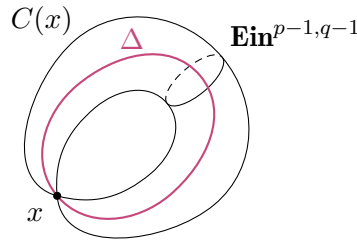
D'un point de vue topologique, un cône de lumière s'obtient à partir du produit $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{Ein}^{p-1, q-1}$ en écrasant $\{1\} \times \mathbf{Ein}^{p-1, q-1}$ sur un point. Le cône de lumière d'un point n'est donc pas une variété au voisinage de son sommet. En dehors de son sommet, un cône de lumière est une sous-variété lisse qui s'identifie conformément à

$$C(x) \setminus x \simeq (\mathbf{R} \times \mathbf{Ein}^{p-1, q-1}, [0 \oplus g_{\mathbf{Ein}}]),$$

où $g_{\mathbf{Ein}}$ est une métrique quelconque dans la classe conforme de $\mathbf{Ein}^{p-1, q-1}$.

1.2.3 Projection stéréographique pseudo-riemannienne

Il est classique que la projection stéréographique donne une identification conforme entre la sphère conforme privée d'un point $\mathbf{S}^n \setminus \{N\}$ et l'espace Euclidien \mathbf{R}^n . Un énoncé analogue persiste pour l'univers d'Einstein et l'espace de Minkowski :

FIGURE 1.2 – Cône de lumière d'un point de $\mathbf{Ein}^{p,q}$

Proposition 1.4 (Compactification de $\mathbf{R}^{p,q}$). *Soit $x \in \mathbf{Ein}^{p,q}$. Alors il existe une identification conforme $\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(x) \simeq \mathbf{R}^{p,q}$.*

Démonstration. On écrit $x = \pi(v)$ pour un certain $v \in \mathbf{R}^{p+1,q+1}$. Soit $w \in \mathbf{R}^{p+1,q+1}$ isotrope tel que $\mathbf{b}(v, w) = 1/2$. Le plan $P = \langle v, w \rangle$ est de signature $(1, 1)$, de sorte que son orthogonal $V = P^\perp$ est isométrique à $\mathbf{R}^{p,q}$. Soit $f : V \rightarrow \mathbf{R}^{p+1,q+1}$ l'application définie par $f(y) = w + y - \mathbf{b}(y, y)v$. Par construction, l'application f est à valeurs dans $C^{p+1,q+1}$. Pour $h \in V$ on a

$$\mathbf{b}(df(y)h, df(y)h) = \mathbf{b}(h - 2\mathbf{b}(y, h)v, h - 2\mathbf{b}(y, h)v) = \mathbf{b}(h, h),$$

donc f est isométrique. La composée $\varphi = \pi \circ f$, dont l'expression est donnée par

$$\varphi(y) = \pi(w + y - \mathbf{b}(y, y)v), \quad (1.3)$$

est donc une application conforme de V vers $\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(x)$. On vérifie directement que φ est bijective, c'est donc un difféomorphisme conforme. ■

Une identification conforme $\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(x) \simeq \mathbf{R}^{p,q}$ s'appelle une *projection stéréographique* par rapport au point x . On dira que x est le *sommet à l'infini* et que $C(x)$ est le *cône de lumière à l'infini*.

1.2.4 Groupe conforme de l'univers d'Einstein

On notera $O(p+1, q+1) = O(\mathbf{b})$ pour le sous-groupe de $GL(p+q+2, \mathbf{R})$ préservant \mathbf{b} , et on notera

$$PO(p+1, q+1) = O(p+1, q+1) / \{\pm \text{id}\}.$$

Le groupe $O(p+1, q+1)$ préserve $C^{p+1,q+1}$, et cette action descend en une action sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Pour $h \in O(p+1, q+1)$, l'équation 1.2 implique qu'on a

$$\pi^*(h^*[\pi_*\mathbf{b}]) = h^*\pi^*[\pi_*\mathbf{b}] = h^*[\mathbf{b}|_{C^{p+1,q+1}}] = [\mathbf{b}|_{C^{p+1,q+1}}],$$

donc $h^*[\pi_*\mathbf{b}] = [\pi_*\mathbf{b}]$. Ainsi $O(p+1, q+1)$ agit conformément sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Cette action induit une action fidèle, homogène et conforme de $PO(p+1, q+1)$ sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$. On peut montrer que réciproquement, tout élément de $\text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ est un élément de $PO(p+1, q+1)$, ce qui donne

$$\text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q}) = PO(p+1, q+1).$$

En fait, de façon plus surprenante, toute application conforme locale sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$ provient d'un élément de $PO(p+1, q+1)$ dès que $p+q \geq 3$ (voir [Fra03]).

Théorème 1.5 (Liouville pseudo-riemannien). *Soit $\varphi : U \rightarrow V$ une application conforme entre deux ouverts connexes de $\mathbf{Ein}^{p,q}$, avec $p+q \geq 3$. Alors il existe un unique élément $h \in PO(p+1, q+1)$ tel que $h|_U = \varphi$.*

Exemple 1.6. On peut déduire du théorème de Liouville que le groupe conforme de $\mathbf{R}^{p,q}$ coïncide avec le groupe des similitudes de $\mathbf{R}^{p,q}$. Par *similitude de $\mathbf{R}^{p,q}$* , nous entendons toute application qui est la composée d'une isométrie affine et d'une dilatation. Soit $x = \pi(v) \in \mathbf{Ein}^{p,q}$ et $w \in \mathbf{R}^{p+1,q+1}$ tel que $\mathbf{b}(v, w) = 1/2$. On fixe une identification $f : H \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(x)$ définie par $f(y) = \pi(w + y - \mathbf{b}(y, y)v)$, où $H = \langle v, w \rangle^\perp$. Par le théorème de Liouville, le groupe conforme de $\mathbf{R}^{p,q} \simeq V$ est conjugué par f au stabilisateur de x dans $\text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q}) = \text{PO}(p+1, q+1)$. Dans une base adaptée à la décomposition $\mathbf{R}^{p+1,q+1} = \mathbf{R}v \oplus H \oplus \mathbf{R}w$, les matrices $g \in \text{PO}(p+1, q+1)$ stabilisant v s'écrivent sous forme d'un produit

$$\begin{pmatrix} 1 & -2u & -\mathbf{b}(u, u) \\ 0 & 1 & u^* \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & A & \\ & & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

avec $\lambda > 0$, $A \in O(H)$, $u \in H$ et u^* tel que ${}^t u^* x = \mathbf{b}(u, x)$ pour tout $x \in H$. On vérifie alors que l'action d'une telle matrice est conjuguée par f à l'action de la similitude $x \mapsto \lambda Ax + u$. En particulier, on a l'isomorphisme de groupe suivant

$$\text{Conf}(\mathbf{R}^{p,q}) \simeq (\mathbf{R} \times O(p, q)) \ltimes \mathbf{R}^{p,q}.$$

1.2.5 Le revêtement double $\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}$

La sphère des rayons de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$, que l'on notera $\mathbf{S}(\mathbf{R}^{p+1,q+1})$, est définie comme l'ensemble des demi-droites de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$. D'un point de vue topologique, la variété $\mathbf{S}(\mathbf{R}^{p+1,q+1})$ est une sphère de dimension $p+q+1$. On notera $\hat{\pi}$ l'application qui à un vecteur non nul $v \in \mathbf{R}^{p+1,q+1}$ associe la demi-droite qu'il engendre. On peut définir un revêtement double naturel $\mathbf{S}(\mathbf{R}^{p+1,q+1}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{R}^{p+1,q+1})$ qui envoie une demi-droite $\mathbf{R}_{>0}v$ sur la droite qui la contient $\mathbf{R}v$. On définit

$$\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q} = \{\mathbf{R}_{>0}v \in \mathbf{S}(\mathbf{R}^{p+1,q+1}) \mid \mathbf{b}(v, v) = 0\}.$$

Le revêtement $\mathbf{S}(\mathbf{R}^{p+1,q+1}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{R}^{p+1,q+1})$ induit un revêtement double

$$\text{rev} : \widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q} \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$$

qui est non-trivial et qui s'avère être le revêtement universel de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ dès que $p, q \geq 2$. Comme pour $\mathbf{Ein}^{p,q}$, on vérifie que la forme bilinéaire \mathbf{b} définit une classe conforme de métriques pseudo-riemanniennes de signature (p, q) sur $\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}$ et que rev est un revêtement conforme.

Proposition 1.7. *Toute décomposition orthogonale $\mathbf{R}^{p+1,q+1} = E \oplus F$ en sous-espaces définis induit une identification conforme $\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q} \simeq (-\mathbf{S}^p) \times \mathbf{S}^q$. Réciproquement, une telle identification induit une décomposition orthogonale de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$ en deux sous-espaces définis, négatif et positif respectivement.*

Démonstration. Soit $\mathbf{R}^{p+1,q+1} = E \oplus F$ une décomposition orthogonale de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$ en sous-espaces définis, avec E négatif et F positif. On choisit (e_0, \dots, e_p) et $(f_{p+1}, \dots, f_{p+q+2})$ des bases orthonormées de E et F , respectivement. On peut alors écrire

$$\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q} = \{\mathbf{R}_{>0}(u+v) \in \mathbf{S}(E \oplus F) \mid u_0^2 + \dots + u_p^2 = v_{p+1}^2 + \dots + v_{p+q+2}^2 = 1\},$$

où les coordonnées correspondent à celles de la base $(e_0, \dots, e_p, f_{p+1}, \dots, f_{p+q+2})$ de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$. On écrit $-\mathbf{S}^p = \{u \in E \mid \mathbf{b}(u, u) = 1\}$ et $\mathbf{S}^q = \{v \in F \mid \mathbf{b}(v, v) = 1\}$ et on munit ces sphères de la métrique induite \mathbf{b} . L'application $\varphi : (-\mathbf{S}^p) \times \mathbf{S}^q \rightarrow \widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}$ définie par $\varphi(u, v) = \mathbf{R}_{>0}(u+v)$

est un difféomorphisme conforme. Soit $\psi : (-\mathbf{S}^p) \times \mathbf{S}^q \rightarrow \widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}$ un autre difféomorphisme conforme. Par le théorème de Liouville, il existe $g \in O(p+1, q+1)$ tel que $\psi = g \circ \varphi$. Pour $x \in \mathbf{S}^p$ et $y \in \mathbf{S}^q$ on note

$$G_x = \text{Vect}\{v \in \mathbf{R}^{p+1,q+1} \mid \mathbf{R}_{>0}v \in \psi(\{x\} \times \mathbf{S}^q)\} \text{ et } H_y = \text{Vect}\{u \in \mathbf{R}^{p+1,q+1} \mid \mathbf{R}_{>0}u \in \psi(\mathbf{S}^p \times \{y\})\}.$$

Soient $E' = \bigcap_{y \in \mathbf{S}^q} H_y$ et $F' = \bigcap_{x \in \mathbf{S}^p} G_x$. Alors

$$\begin{aligned} g^{-1}(E') &= \bigcap_{y \in \mathbf{S}^q} \text{Vect}\{u \in \mathbf{R}^{p+1,q+1} \mid \mathbf{R}_{>0}u \in \varphi(\mathbf{S}^p \times \{y\})\} \\ &= \bigcap_{v \in F} E \oplus \mathbf{R}v = E. \end{aligned}$$

Ainsi $E' = g(E)$ et de même $F' = g(F)$. Comme $g \in O(p+1, q+1)$, on a

$$\mathbf{R}^{p+1,q+1} = g(\mathbf{R}^{p+1,q+1}) = g(E) \oplus g(F) = E' \oplus F'.$$

Ainsi $\mathbf{R}^{p+1,q+1} = E' \oplus F'$ est une décomposition orthogonale en sous-espaces définis. \blacksquare

Corollaire 1.8 (Modèle géométrique de $\mathbf{Ein}^{p,q}$). *L'univers d'Einstein $\mathbf{Ein}^{p,q}$ est conformément équivalent à $(-\mathbf{S}^p) \times \mathbf{S}^q / \{\pm id\}$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que l'automorphisme de revêtement de $\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q} \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ agit comme $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ dans l'identification $\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q} \simeq (-\mathbf{S}^p) \times \mathbf{S}^q$. Cet automorphisme de revêtement est la restriction à $\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}$ de l'automorphisme du revêtement $\mathbf{S}(\mathbf{R}^{p+1,q+1}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{R}^{p+1,q+1})$ qui consiste à envoyer une demi-droite sur la demi-droite opposée. En choisissant une décomposition $\mathbf{R}^{p+1,q+1} = E \oplus F$ et en utilisant les notations de la démonstration 1.7, on a pour tout $(u, v) \in (-\mathbf{S}^p) \times \mathbf{S}^q$, la demi-droite $\varphi(-u, -v) = -\mathbf{R}_{>0}(u+v)$ est opposée à la demi-droite $\varphi(u, v) = \mathbf{R}_{>0}(u+v)$, d'où le résultat. \blacksquare

On décrit désormais les cônes de lumière ainsi que les cartes affines dans $\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}$. Soient $x, y \in \widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}$. Le signe de $\mathbf{b}(x, y)$ est défini comme le signe de $\mathbf{b}(u, v)$, où $u, v \in \mathbf{R}^{p+1,q+1}$ engendrent les demi-droite x, y , respectivement. Ce signe est bien défini et ne dépend pas des représentants choisis dans les demi-droites x et y . Pour $x \in \widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}$, on définit le cône de lumière de x comme

$$C(x) = \left\{ y \in \widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q} \mid \mathbf{b}(x, y) = 0 \right\}.$$

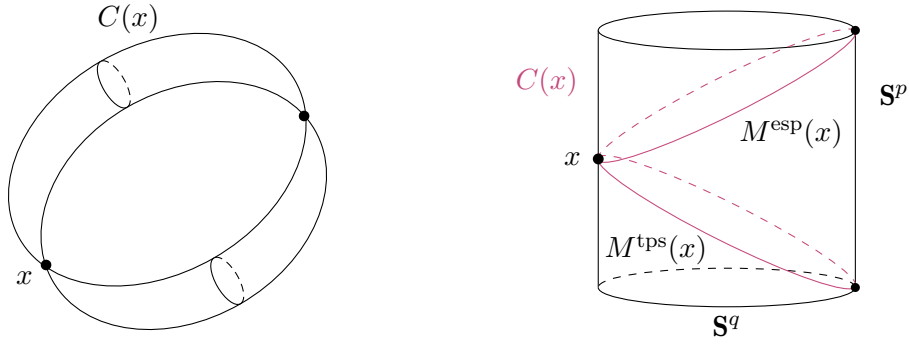
On vérifie que $C(x)$ est la réunion de toutes les géodésiques de lumière de $\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}$ passant par x et que $\text{rev}(C(x)) = C(\text{rev}(x))$ pour tout x . Un corollaire de la proposition 1.4 est que l'ouvert $\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q} \setminus C(x)$ admet exactement deux composantes connexes, chacune conformément équivalente à l'espace de Minkowski $\mathbf{R}^{p,q}$. On peut écrire explicitement

$$\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q} \setminus C(x) = M^{\text{esp}}(x) \cup M^{\text{tps}}(x),$$

avec $M^{\text{esp}}(x) := \left\{ y \in \widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q} \mid \mathbf{b}(x, y) < 0 \right\}$ et $M^{\text{tps}}(x) := \left\{ y \in \widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q} \mid \mathbf{b}(x, y) > 0 \right\}$. Voir Figure 1.3.

Proposition 1.9. *Soit U un voisinage de x et $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^{p,q}$ une application conforme. Soit $y \in U$ et $v = \varphi(y) - \varphi(x) \in \mathbf{R}^{p,q}$. Alors on a les équivalences suivantes :*

- $y \in M^{\text{esp}}(x)$ si et seulement si v est un vecteur espace.
- $y \in M^{\text{tps}}(x)$ si et seulement si v est un vecteur temps.
- $y \in C(x)$ si et seulement si v est un vecteur lumière.

FIGURE 1.3 – Cône de lumière d'un point de $\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}$

Démonstration. Soient $u, v \in C^{p+1, q+1}$ tels que $x = \hat{\pi}(u)$ et $\mathbf{b}(u, v) = 1$. On note $H = \langle u, v \rangle^\perp \subset \mathbf{R}^{p+1, q+1}$ et $\psi : H \rightarrow \widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}$ l'application définie pour tout $h \in H$ par $\psi(h) = \hat{\pi}(u + h - \mathbf{b}(h, h)v)$. Comme dans la preuve de la proposition 1.4, on montre que ψ est une application conforme. Alors pour $h \in H$ on a $\mathbf{b}(u + h - \mathbf{b}(h, h)v, u) = -\mathbf{b}(h, h)$ donc

$$\text{signe}(\mathbf{b}(\psi(h), \psi(0))) = -\text{signe}(\mathbf{b}(h, h)).$$

On identifie H et $\mathbf{R}^{p,q}$ isométriquement de sorte que $\varphi(x) = 0 \in H$. L'application $\psi \circ \varphi : U \rightarrow \widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}$ est conforme, donc elle s'étend en un élément $g \in \mathbf{O}(p+1, q+1)$. Comme l'automorphisme g laisse x stable, il stabilise $M^{\text{esp}}(x)$, $M^{\text{tps}}(x)$ et $C(x)$. Par l'égalité précédente, on a donc

$$y \in M^{\text{esp}}(x) \iff g(y) \in M^{\text{esp}}(x) \iff \psi(\varphi(y)) \in M^{\text{esp}}(x) \iff v = \varphi(y) \text{ est espace.}$$

Les autres équivalences sont similaires. ■

1.2.6 Le revêtement universel $\widehat{\mathbf{Ein}}^{1, n-1}$

Lorsqu'on se place en signature lorentzienne, le revêtement $\widehat{\mathbf{Ein}}^{1, n-1}$ n'est pas simplement connexe. En dimension 2, le revêtement universel de $\mathbf{Ein}^{1,1}$ est conformément équivalent à $\mathbf{R}^{1,1}$. Nous décrivons ici le revêtement universel $\widehat{\mathbf{Ein}}^{1, n-1}$ de $\mathbf{Ein}^{1, n-1}$ lorsque $n \geq 3$. Nous utiliserons la notation $\widetilde{\text{rev}}$ pour désigner le revêtement universel $\widetilde{\text{rev}} : \widehat{\mathbf{Ein}}^{1, n-1} \rightarrow \mathbf{Ein}^{1, n-1}$. Pour $n \geq 3$, une identification conforme $\mathbf{Ein}^{1, n-1} \simeq \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1} / \{\pm id\}$, dont l'existence est toujours garantie par la proposition 1.8, permet d'identifier $\widehat{\mathbf{Ein}}^{1, n-1}$ conformément à $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1}$. Sous cette identification, on voit que le groupe fondamental est engendré par un unique élément

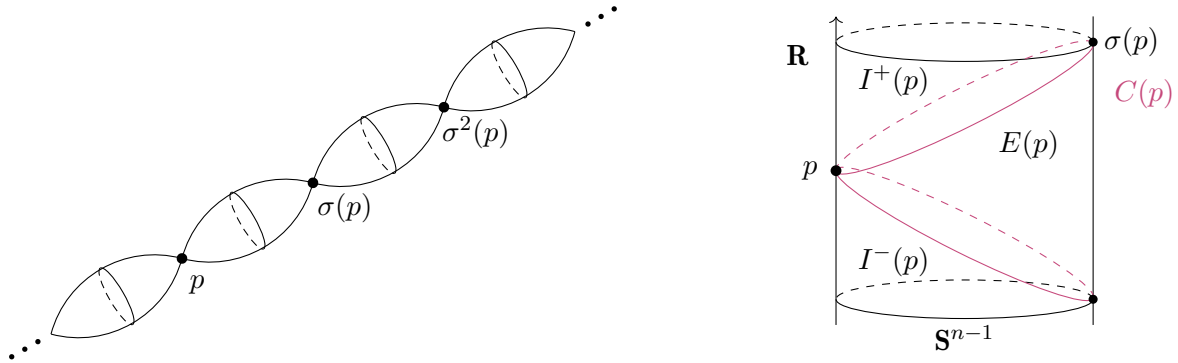
$$\sigma : (s, x) \mapsto (s + \pi, -x).$$

Soit $p = (s, x) \in \widehat{\mathbf{Ein}}^{1, n-1}$. Le *cône de lumière* de p est la réunion de toutes les géodésiques de lumière passant par p . Comme toute géodésique de lumière de $\mathbf{Ein}^{1, n-1}$ passant par $\widetilde{\text{rev}}(p)$ se relève en une géodésique de lumière de $\widehat{\mathbf{Ein}}^{1, n-1}$ passant par p , on a $C(p) = \pi^{-1}(C(\widetilde{\text{rev}}(p)))$. Explicitement, on peut écrire

$$C(p) = \{(t, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1} \mid |s - t| = d(x, y) \pmod{\pi \mathbf{Z}}\}$$

La *partie espace* de p est définie comme le sous-ensemble

$$E(p) = \{(t, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1} \mid |s - t| < d(x, y)\}.$$

FIGURE 1.4 – Cône de lumière d'un point de $\widetilde{\mathbf{Ein}}$

On peut vérifier que $E(p)$ ne dépend pas de l'identification conforme $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1} \simeq \mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1}$ qu'on a choisie et que l'ouvert $E(p)$ est conformément équivalent à l'espace de Minkowski $\mathbf{R}^{1,n-1}$. On vérifie aussi que $\widetilde{\text{rev}}$ est injective en restriction à $E(p)$ et que $\widetilde{\text{rev}}(E(p)) = \mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus C(\widetilde{\text{rev}}(p))$. Ainsi, comme

$$\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1} \setminus C(p) = \bigsqcup_{k \in \mathbf{Z}} E(\sigma^k(p))$$

le complémentaire d'un cône de lumière de $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ est une réunion infinie dénombrable d'ouverts conformément équivalents à $\mathbf{R}^{1,n-1}$.

1.2.7 Photons de dimension supérieure

On a vu précédemment que les géodésiques de lumière de l'univers d'Einstein sont exactement les droites projectives totalement isotropes de $\mathbf{P}(\mathbf{R}^{p+1,q+1})$. Par analogie, on définit un k -photon comme un sous-espace projectif totalement isotrope de dimension k . Ainsi $\mathcal{L} \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ est un k -photon s'il existe un sous-espace totalement isotrope $L \subset \mathbf{R}^{p+1,q+1}$ de dimension $(k+1)$ tel que

$$\mathcal{L} = \pi(L).$$

Nous prendrons comme convention d'appeler *photon* (sans préfixe) les 1-photons de $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Les 0-photons sont exactement les points de $\mathbf{Ein}^{p,q}$. On dira qu'un k -photon est *maximal* (resp. *sous-maximal*) si $k = \min(p, q)$ (resp. $k = \min(p, q) - 1$). Tout k -photon est difféomorphe à \mathbf{RP}^k et hérite d'une structure projective canonique.

Soit \mathcal{L} un k -photon de $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Le *cône de lumière* de \mathcal{L} , noté $C(\mathcal{L})$, est l'intersection de tous les cônes de lumière des points de \mathcal{L} , c'est-à-dire $C(\mathcal{L}) = \bigcap_{x \in \mathcal{L}} C(x)$. Dans le modèle projectif de l'univers d'Einstein, si $\mathcal{L} = \pi(L)$, alors

$$C(\mathcal{L}) = \pi(L^\perp) \cap \mathbf{Ein}^{p,q}.$$

Le cône de lumière d'un photon maximal est le photon maximal lui-même. Cependant, pour $k \neq p$, le cône de lumière d'un k -photon est une sous-variété algébrique non lisse contenant strictement \mathcal{L} . Plus précisément, on a la proposition suivante :

Proposition 1.10. *Soit $k < \min(p, q)$ et \mathcal{L} un k -photon. Alors $C(\mathcal{L}) \setminus \mathcal{L}$ est un \mathbf{R}^{k+1} -fibré au dessus $\mathbf{Ein}^{p-k-1, q-k-1}$. La structure conforme locale au dessus d'un ouvert $U \subset \mathbf{Ein}^{p-k-1, q-k-1}$ est celle de $(\mathbf{R}^{k+1} \times U, [0 \oplus (-g_{\mathbf{S}^{p-k-1}}) \oplus g_{\mathbf{S}^{q-k-1}}])$. De plus, les $(k+1)$ -photons contenant \mathcal{L} sont exactement l'adhérence des fibres $\mathcal{F}_x \simeq \mathbf{R}^{k+1}$ au dessus d'un point $x \in \mathbf{Ein}^{p-k-1, q-k-1}$. En particulier, l'ensemble des $(k+1)$ -photons contenant \mathcal{L} est naturellement identifié à $\mathbf{Ein}^{p-k-1, q-k-1}$.*

Démonstration. On peut toujours écrire $\mathbf{R}^{p+1,q+1} = L \oplus H \oplus L'$, où L est un $(k+1)$ -sous-espace totalement isotrope tel que $\pi(L) = \mathcal{L}$ et H est un sous-espace de signature $(p-k, q-k)$ tel que $L^\perp = L \oplus H$. On a alors

$$C(\mathcal{L}) \setminus \mathcal{L} = \{\mathbf{R}(\ell + h) \mid \ell \in L, h \in H \setminus \{0\}, \mathbf{b}(h, h) = 0\}.$$

L'application $\mathbf{R}(\ell + h) \rightarrow \mathbf{R}h$ définit un fibré

$$C(\mathcal{L}) \setminus \mathcal{L} \rightarrow \pi(\{h \in H \mid \mathbf{b}(h, h) = 0\}) \simeq \mathbf{Ein}^{p-k-1, q-k-1}$$

avec les propriétés désirées. Les $(k+1)$ -photons contenus dans \mathcal{L} sont les projetés $\pi(\hat{L})$ de $(k+2)$ -sous-espaces totalement isotropes $\hat{L} \subset \mathbf{R}^{p+1, q+1}$ tels que $L \subset \hat{L}$. Pour ces sous-espaces, l'intersection $\hat{L} \cap H$ est une droite isotrope et $\hat{L} = L \oplus (\hat{L} \cap H)$, donc $\pi(\hat{L})$ est la fibre au dessus de $\pi(\hat{L} \cap H)$. Ceci montre le deuxième point. \blacksquare

Exemple 1.11. Dans le cas où $p \leq q$ et \mathcal{L} est un photon sous-maximal, alors on a une identification globale $C(\mathcal{L}) \setminus \mathcal{L} \simeq \mathbf{R}^p \times \mathbf{S}^{q-p}$.

Configurations de photons et projection canonique

Nous détaillons maintenant les positions relatives que peuvent avoir un point et un k -photon dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$. En signature lorentzienne ou anti-lorentzienne, il y a deux cas possibles : soit un photon passe par le sommet d'un cône de lumière, auquel cas il est contenu dans ce cône, soit il est transverse au cône de lumière. En signature supérieure, il existe une situation intermédiaire : un photon peut être contenu dans le cône de lumière d'un point sans pour autant passer par ce point.

Proposition 1.12. Soient $x \in \mathbf{Ein}^{p,q}$ et $\mathcal{L} \in \text{Pho}_k(\mathbf{Ein}^{p,q})$ avec $1 \leq k < \min(p, q)$. À transformation conforme près, il existe trois configurations possibles pour la paire (\mathcal{L}, x) :

- (1) $x \in \mathcal{L}$. Dans ce cas $\mathcal{L} \subset C(x)$.
- (2) $x \notin \mathcal{L}$ et $\mathcal{L} \subset C(x)$.
- (3) (Cas générique) $\mathcal{L} \not\subset C(x)$. Dans ce cas $\mathcal{L} \cap C(x)$ est un $(k-1)$ -photon.

Démonstration. L'énoncé revient à montrer que l'action de $\text{PO}(p+1, q+1)$ sur les paires (x, L) , où x est une droite isotrope et L est un $(k+1)$ espace totalement isotrope de $\mathbf{R}^{p+1, q+1}$, admet trois orbites qui correspondent aux situations

$$(1) x \subset L, \quad (2) x \not\subset L \text{ et } L \subset x^\perp, \quad (3) L \oplus x^\perp = \mathbf{R}^{p+1, q+1}.$$

Soient x_1, x_2, L_1, L_2 tels que x_i est une droite isotrope et L_i un $(k+1)$ espace totalement isotrope.

- Si $x_i \subset L_i$ pour $i = 1, 2$, on peut trouver un isomorphisme linéaire $f : L_1 \rightarrow L_2$ qui envoie x_1 sur x_2 et l'étendre en une isométrie de $\mathbf{R}^{p+1, q+1}$ par le théorème de Witt.
- Si maintenant $x_i \not\subset L_i \subset x_i^\perp$ pour $i = 1, 2$, on pose $\hat{L}_i = x_i \oplus L_i$ qui est un sous-espace totalement isotrope de $\mathbf{R}^{p+1, q+1}$ de dimension $k+2$. On peut trouver un isomorphisme linéaire $f : \hat{L}_1 \rightarrow \hat{L}_2$ qui envoie x_1 sur x_2 et L_1 sur L_2 . Par le théorème de Witt, l'application f s'étend en une isométrie $\mathbf{R}^{p+1, q+1}$.
- Supposons finalement que $L_i + x_i^\perp = \mathbf{R}^{p+1, q+1}$ pour $i = 1, 2$, et posons $\hat{L}_i = x_i \oplus L_i$. Soit $y_i \in L_i$ une droite supplémentaire à $x_i^\perp \cap L_i$ dans L_i . Le plan $\Pi_i = x_i \oplus y_i$ est non dégénéré de signature $(1, 1)$, donc $\hat{L}_i = \Pi_i \oplus (L_i \cap x_i^\perp)$ est dégénéré de signature $(1, 1, k)$. En particulier, comme les deux espaces ont la même signature, il existe une isométrie $f \in \text{PO}(p+1, q+1)$ qui envoie \hat{L}_1 sur \hat{L}_2 . On peut toujours choisir f telle que $f(x_1) = x_2$ et $f(L_1) = L_2$.

■

Corollaire 1.13 (Triangles de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$). *Si Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont trois photons distincts qui s'intersectent deux à deux, alors ils s'intersectent en un point commun.*

Démonstration. Soit x le point d'intersection de Δ_1 et Δ_2 , de sorte que $\Delta_1, \Delta_2 \subset C(x)$. Si par l'absurde $x \notin \Delta_3$, alors $\Delta_3 \cap C(x)$ est réduit à un point, contredisant le fait que Δ_3 intersecte Δ_1 et Δ_2 . Donc x est un point d'intersection commun aux trois photons. ■

Soit \mathcal{L} un k -photon de $\mathbf{Ein}^{p,q}$, avec $k \geq 1$. On définit \mathcal{L}^* l'ensemble des $(k-1)$ -photons contenus dans \mathcal{L} . Cet espace n'est autre que l'espace projectif dual de \mathcal{L} . Le dual \mathcal{L}^* hérite donc d'une structure projective et s'identifie projectivement à \mathcal{L} . Nous allons montrer qu'il existe une projection canonique sur \mathcal{L}^* définie sur un ouvert de $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Soit $x \in \mathbf{Ein}^{p,q}$. Si $x \notin C(\mathcal{L})$, alors $\mathcal{L} \not\subset C(x)$, donc l'intersection $C(x) \cap \mathcal{L}$ est un $(k-1)$ photon contenu dans \mathcal{L} par la proposition 1.12. Ceci permet de définir la *projection canonique de \mathcal{L}* :

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{L}} : \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(\mathcal{L}) &\longrightarrow \mathcal{L}^* \\ x &\longmapsto \mathcal{L} \cap C(x). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Étant donné un $(k-1)$ -photon $\Delta \in \mathcal{L}^*$, la préimage de Δ par $\pi_{\mathcal{L}}$ est $C(\Delta) \setminus C(\mathcal{L})$. La fibre typique de $\pi_{\mathcal{L}}$ est donc difféomorphe à \mathbf{R}^{p+q-k} et s'identifie conformément à $(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{p-k, q-k}, [0 \oplus g_{\text{plat}}])$.

Exemple 1.14. Décrivons l'application de projection en signature lorentzienne (voir aussi [Fra04, Sect. 2.4]). Soit Δ un photon de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$. Le dual Δ^* consiste en l'ensemble des points de Δ , c'est-à-dire $\Delta^* = \Delta$. Comme Δ est maximal, le cône de lumière de Δ est simplement $C(\Delta) = \Delta$. Étant donné un point $x \notin \Delta$, le cône de x intersecte Δ en un unique point. Ce point d'intersection est exactement $\pi_{\Delta}(x)$.

Proposition 1.15. *L'application $\pi_{\mathcal{L}}$ est un fibré lisse.*

Démonstration. Soit $\Delta_0 \in \mathcal{L}^*$. On peut trouver un voisinage ouvert $B \subset \mathcal{L}^*$ de Δ_0 et un sous-groupe $H \simeq \mathbf{R}^k$ dans $\text{Stab}(\mathcal{L})$ agissant simplement transitivement sur B . En effet, on peut par exemple choisir B comme étant un modèle projectif de l'espace hyperbolique \mathbf{H}^k . Pour ce choix, on peut prendre H le groupe des isométries laissant stable un point $x \in \partial \mathbf{H}^k$ agissant comme $[x \mapsto \lambda x + v]$ dans le modèle $\overline{\mathbf{H}}^k = \{x \in \mathbf{R}^k \mid x_k > 0\} \cup \{\infty\}$ où on a mis x à l'infini. Pour un point $\Delta \in B$, on note g_{Δ} l'unique élément tel que $g_{\Delta}(\Delta_0) = \Delta$. Soit $F = \pi_{\mathcal{L}}^{-1}(\Delta_0)$. L'application

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{L}}^{-1}(B) &\longrightarrow B \times F \\ x &\longmapsto (\pi_{\mathcal{L}}(x), g_{\pi_{\mathcal{L}}(x)}^{-1}(x)). \end{aligned}$$

est une trivialisatation explicite d'inverse $(\Delta, x) \mapsto g_{\Delta}(x)$. ■

Espaces de photons

On définit $\text{Pho}_k(\mathbf{Ein}^{p,q})$ l'ensemble des k -photons de $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Par le théorème de Witt, cet espace est homogène sous l'action de $\text{PO}(p+1, q+1)$ donc il s'identifie à

$$\text{Pho}_k(\mathbf{Ein}^{p,q}) = \text{PO}(p+1, q+1)/P_k,$$

où P_k est le stabilisateur d'un k -photon dans $\text{PO}(p+1, q+1)$. L'espace $\text{Pho}_k(\mathbf{Ein}^{p,q})$ est donc muni d'une topologie qui en fait une variété compacte lisse de dimension

$$\dim \text{Pho}_k(\mathbf{Ein}^{p,q}) = \dim \text{PO}(p+1, q+1) - \dim P_k = (k+1)(p+q-3k/2)$$

Comme dans le modèle projectif, on peut définir la notion de k -photon dans $\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}$. Un k -photon de $\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}$ est un sous-ensemble $\mathcal{L} \subset \widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}$ pour lequel il existe un sous-espace totalement isotrope $L \subset \mathbf{R}^{p+1,q+1}$ de dimension $(k+1)$ tel que $\mathcal{L} = \widehat{\pi}(L)$. Un k -photon est donc une sous-variété totalement isotrope de dimension k de $\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}$. On note $\text{Pho}_k(\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q})$ l'espace des k -photons de $\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}$. C'est un espace homogène sous l'action de $\text{Conf}(\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q})$, donc $\text{Pho}_k(\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q})$ hérite naturellement d'une structure de variété lisse. On peut alors vérifier que la projection canonique $\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q} \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ induit un difféomorphisme $\text{Conf}(\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q})$ -équivariant

$$\text{Pho}_k(\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}) \rightarrow \text{Pho}_k(\mathbf{Ein}^{p,q}),$$

dès que $k \geq 1$. Cette identification permet de donner une description géométrique des k -photons dans le modèle $\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q} \simeq (-\mathbf{S}^p) \times \mathbf{S}^q$.

Modèle géométrique des k -photons

Avant d'énoncer la proposition suivante, rappelons que les sous-variétés totalement géodésiques compactes (connexes) de dimension k dans la sphère ronde \mathbf{S}^n sont exactement k -sphères rondes, c'est-à-dire l'intersection de \mathbf{S}^n avec un $(k+1)$ sous-espace affine passant par le barycentre de \mathbf{S}^n .

Proposition 1.16. *On fixe une identification $\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q} \simeq (-\mathbf{S}^p) \times \mathbf{S}^q$ et $k \geq 1$. Pour $\mathcal{L} \subset \widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) \mathcal{L} est un k -photon ;
- (2) $\mathcal{L} = \text{Gr}(f)$ avec $f : \mathbf{S}^k \rightarrow \mathbf{S}^p$ un plongement anti-isométrique d'image totalement géodésique défini sur une k -sphère totalement géodésique $\mathbf{S}^k \subset \mathbf{S}^q$;
- (3) $\mathcal{L} = \text{Gr}(f)$ avec $f : \mathbf{S}^k \rightarrow \mathbf{S}^q$ un plongement anti-isométrique d'image totalement géodésique défini sur une k -sphère totalement géodésique $\mathbf{S}^k \subset \mathbf{S}^p$.

En particulier, pour $p \leq q$, on a

$$\text{Pho}_p(\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}) = \{\text{Gr}(f) \mid f : \mathbf{S}^p \rightarrow \mathbf{S}^q \text{ isométrique d'image totalement géodésique}\}.$$

Démonstration. On décompose $\mathbf{R}^{p+1,q+1} = E \oplus F$ grâce à l'identification $\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q} \simeq (-\mathbf{S}^p) \times \mathbf{S}^q$ (proposition 1.7), avec donc (E, \mathbf{b}) défini négatif et (F, \mathbf{b}) défini positif. On note p_E et p_F les projections orthogonales sur E et F , respectivement. Montrons (1) \Leftrightarrow (2). Supposons dans un premier temps que $\mathcal{L} = \widehat{\pi}(L)$ pour un certain $(k+1)$ -sous-espace totalement isotrope $L \subset \mathbf{R}^{p+1,q+1}$. La restriction de p_F à L induit un isomorphisme $p_F : L \rightarrow p_F(L)$. Soit $f : p_F(L) \rightarrow E$ définie par $f(v) = p_E(p_F^{-1}(v))$ pour tout $v \in p_F(L)$. Montrons que l'application f est une anti-isométrie. Soit $v \in L$ qu'on décompose $v = p_E(v) + p_F(v)$. Alors

$$0 = \mathbf{b}(v, v) = \mathbf{b}(p_E(v), p_E(v)) + \mathbf{b}(p_F(v), p_F(v)) = \mathbf{b}(u, u) + \mathbf{b}(f(u), f(u)),$$

où $u = p_E(v)$. Donc f est bien une anti-isométrie, c'est-à-dire que $f : (E, -\mathbf{b}) \rightarrow (F, \mathbf{b})$ est une isométrie. Le sous-ensemble $\mathbf{S}^k = \mathbf{S}^q \cap p_F(L)$ définit une k -sphère ronde dans \mathbf{S}^q , et l'application f induit une isométrie $f : \mathbf{S}^k \rightarrow \mathbf{S}^p$ dont l'image $\mathbf{S}^q \cap p_E(L)$ est une sphère totalement géodésique de \mathbf{S}^p . Réciproquement, supposons que $\mathcal{L} = \text{Gr}(f)$ pour une certaine anti-isométrie $f : \mathbf{S}^k \rightarrow \mathbf{S}^p$ d'image totalement géodésique, avec $\mathbf{S}^k \subset \mathbf{S}^q$ totalement géodésique. On peut écrire $\mathbf{S}^k = \mathbf{S}^q \cap H_F$, où $H_F \subset F$ est un sous-espace vectoriel de dimension $(k+1)$. L'application f s'étend alors en une anti-isométrie linéaire $f : H_F \rightarrow E$ et $\mathcal{L} = \widehat{\pi}(L)$ où $L = \{x + f(x) \mid x \in H_F\}$. Pour $x \in H_F$ on a

$$\mathbf{b}(x + f(x), x + f(x)) = \mathbf{b}(x, x) + \mathbf{b}(f(x), f(x)) = 0,$$

car f est anti-isométrique. Donc L est totalement isotrope et \mathcal{L} est un k -photon. La démonstration de (1) \Leftrightarrow (3) est analogue. \blacksquare

1.3 Sous-espaces de Möbius et ouverts homogènes

1.3.1 Modèle conforme des espaces à courbure constante

Dans cette section, nous introduisons les espaces pseudo-riemanniens à courbure constante et nous montrons qu'ils se plongent conformément dans l'univers d'Einstein.

Modèle conforme de l'espace de Minkowski

Il existe une unique variété pseudo-riemannienne de signature (p, q) qui est complète, simplement connexe et à courbure nulle : c'est l'espace de Minkowski $\mathbf{R}^{p,q}$ muni d'une métrique pseudo-riemannienne plate \mathbf{b} . On a vu précédemment que $(\mathbf{R}^{p,q}, \mathbf{b})$ se plonge conformément dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Plus précisément, le complémentaire du cône de lumière de tout point de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ est conformément équivalent à $(\mathbf{R}^{p,q}, \mathbf{b})$, voir la proposition 1.4.

Modèle conforme de l'espace hyperbolique pseudo-riemannien

L'espace hyperbolique pseudo-riemannien de signature (p, q) , noté $\mathbf{H}^{p,q}$, est une variété pseudo-riemannienne complète à courbure sectionnelle constante négative, définie comme

$$\mathbf{H}^{p,q} = \{v \in \mathbf{R}^{p+1,q} \mid \mathbf{b}(v, v) = -1\}.$$

On peut vérifier que la restriction de \mathbf{b} à $\mathbf{H}^{p,q}$ définit bien une métrique de signature (p, q) . En écrivant $\mathbf{b}(v, v) = -v_0^2 + \dots - v_p^2 + v_{p+1}^2 + \dots + v_{p+q}^2$ dans une base orthonormée, on a

$$v \in \mathbf{H}^{p,q} \iff v_0^2 + \dots + v_p^2 = v_{p+1}^2 + \dots + v_{p+q}^2 + 1.$$

Ainsi $\mathbf{H}^{p,q}$ est difféomorphe à $\mathbf{S}^p \times \mathbf{R}^q$. Lorsque $p = 0$, la variété $\mathbf{H}^{0,q}$ a deux composantes connexes isométriques à l'espace hyperbolique réel. On notera \mathbf{H}^q pour l'une des composantes connexes de $\mathbf{H}^{0,q}$. Lorsque $p = 1$, l'espace $\mathbf{H}^{1,q}$ est connu comme l'espace *Anti de Sitter*.

L'espace hyperbolique pseudo-riemannien admet un modèle conforme, c'est-à-dire qu'il existe un plongement conforme $\mathbf{H}^{p,q} \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$:

Proposition 1.17. *L'ouvert $\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus \mathbf{Ein}^{p,q-1}$ s'identifie conformément à $\mathbf{H}^{p,q}$.*

Démonstration. Soit $u \in \mathbf{R}^{p+1,q+1}$ tel que $\mathbf{b}(u, u) = 1$ et $\mathbf{Ein}^{p,q-1} = \pi(u^\perp) \cap \mathbf{Ein}^{p,q}$. On pose $\Omega = \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus \mathbf{Ein}^{p,q-1}$. On peut écrire

$$\Omega = \{\mathbf{R}(v + u) \in \mathbf{Ein}^{p,q} \mid v \in u^\perp, \mathbf{b}(v, v) = -1\}.$$

En identifiant isométriquement $\mathbf{H}^{p,q}$ avec $\{v \in u^\perp \mid \mathbf{b}(v, v) = -1\}$, on vérifie que l'application $\varphi : \mathbf{H}^{p,q} \rightarrow \Omega$ définie par $\varphi(v) = \mathbf{R}(v + u)$ est un difféomorphisme conforme. ■

Modèle conforme de l'espace de-Sitter pseudo-riemannien

L'espace de de-Sitter pseudo-riemannien de signature (p, q) , noté $\mathbf{dS}^{p,q}$, est une variété pseudo-riemannienne complète à courbure sectionnelle constante positive, définie comme

$$\mathbf{dS}^{p,q} = \{v \in \mathbf{R}^{p,q+1} \mid \mathbf{b}(v, v) = 1\}.$$

On vérifie comme précédemment que $\mathbf{dS}^{p,q}$ est difféomorphe à $\mathbf{R}^p \times \mathbf{S}^q$. Lorsque $q = 0$, la variété $\mathbf{dS}^{p,0}$ a deux composantes connexes anti-isométriques à l'espace hyperbolique. On notera $-\mathbf{H}^p$ pour l'une des composantes connexes de $\mathbf{dS}^{p,0}$. Lorsque $p = 0$, la variété $\mathbf{dS}^{0,q}$ est une sphère Riemannienne. Lorsque $p = 1$, l'espace $\mathbf{dS}^{1,q}$ est connu comme l'espace *de Sitter*.

Comme l'espace hyperbolique pseudo-riemannien, l'espace de de-Sitter pseudo-riemannien admet un modèle conforme :

Proposition 1.18. *L'ouvert $\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus \mathbf{Ein}^{p-1,q}$ s'identifie conformément à $\mathbf{dS}^{p,q}$.*

Démonstration. La démonstration est similaire au cas de l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^{p,q}$. Soit $u \in \mathbf{R}^{p+1,q+1}$ tel que $\mathbf{b}(u, u) = -1$ et $\mathbf{Ein}^{p,q-1} = \pi(u^\perp) \cap \mathbf{Ein}^{p,q}$. On pose $\Omega = \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus \mathbf{Ein}^{p,q-1}$. On peut écrire

$$\Omega = \{\mathbf{R}(v + u) \in \mathbf{Ein}^{p,q} \mid v \in u^\perp, \mathbf{b}(v, v) = 1\}.$$

En identifiant isométriquement $\mathbf{dS}^{p,q}$ avec $\{v \in u^\perp \mid \mathbf{b}(v, v) = 1\}$, on vérifie que l'application $\varphi : \mathbf{dS}^{p,q} \rightarrow \Omega$ définie par $\varphi(v) = \mathbf{R}(v + u)$ est un difféomorphisme conforme. \blacksquare

1.3.2 Sous-variétés de Möbius

Une *sous-variété de Möbius* de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ est un sous-ensemble de la forme

$$\mathcal{M}(V) = \mathbf{P}(V) \cap \mathbf{Ein}^{p,q},$$

où $V \subset \mathbf{R}^{p+1,q+1}$ est un sous-espace vectoriel. Une sous-variété de Möbius est donc l'intersection entre un sous-espace projectif de \mathbf{RP}^{p+q+1} et $\mathbf{Ein}^{p,q}$, c'est donc une sous-variété algébrique compacte de l'espace projectif. En général, ce n'est pas une sous-variété lisse en tout point : les cônes de lumière sont des exemples de sous-variétés de Möbius singulières. Lorsque $V \subset \mathbf{R}^{p+1,q+1}$ est non dégénéré, le sous-espace projectif $\mathbf{P}(V)$ est transverse à $\mathbf{Ein}^{p,q}$ et $\mathcal{M}(V)$ est une sous-variété lisse de $\mathbf{Ein}^{p,q}$. En notant $(p_1 + 1, p_2 + 1)$ la signature de V , la sous-variété de Möbius $\mathcal{M}(V)$ s'identifie conformément à \mathbf{Ein}^{p_1, q_1} . Si $p_1 = 0$ (resp. $q_1 = 0$), on parlera de q_1 -sphère de Möbius positive (resp. p_1 -sphère de Möbius négative).

Avec ce langage, on peut reformuler les identifications faites à la section 1.3.1 en termes d'hypersurface de Möbius : *le complémentaire d'une hypersurface de Möbius dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$ s'identifie conformément à un des espaces modèles à courbure constante de signature (p, q) .*

Si \mathcal{M} est une sous-variété de Möbius de dimension quelconque, le complémentaire de \mathcal{M} dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$ n'est pas homogène en général. Ceci peut se voir directement sur certains exemples : soit $V \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ tel que $\mathcal{M} = \mathcal{M}(V)$. Par le théorème de Liouville, une transformation conforme de $\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus \mathcal{M}(V)$ s'étend en un élément de $\mathrm{PO}(p+1, q+1)$, donc $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus \mathcal{M}(V)) = \mathrm{Stab}(V)$. En particulier, le groupe conforme de $\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus \mathcal{M}(V)$ préserve $\mathcal{M}(V^\perp)$ (qui est non vide pour certaines signatures de V). Ainsi, pour une sous-variété de Möbius $\mathcal{M} = \mathcal{M}(V)$, on définit *l'orthogonale* de \mathcal{M} comme la sous-variété de Möbius $\mathcal{M}^\perp = \mathcal{M}(V^\perp)$. Le *joint* de \mathcal{M} et \mathcal{M}^\perp , noté $J(\mathcal{M})$, est la réunion de tous les photons rencontrant \mathcal{M} et \mathcal{M}^\perp . Lorsque $\mathcal{M}^\perp = \emptyset$, on adopte la convention de $J(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$.

Proposition 1.19. *Soit $\mathcal{M} \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ une sous-variété de Möbius de signature non dégénérée $(r, s) \neq (p, q)$ et soit $\Omega = \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus J(\mathcal{M})$. Alors les composantes connexes de Ω sont homogènes et admettent un revêtement double par un produit de deux espaces pseudo-riemanniens à courbure constante non nulle dont les signes de courbures sont opposés. Explicitement, on a :*

- (1) *Si $r = p$ ou $s = q$, alors $\mathcal{M}^\perp = \emptyset$ et Ω est connexe. On a les identifications suivantes :*
 - *Si $r = p$, alors $\Omega \simeq \mathbf{H}^{p,s+1} \times \mathbf{S}^{q-s-1} / \{\pm \mathrm{id}\}$.*
 - *Si $s = q$, alors $\Omega \simeq \mathbf{dS}^{r+1,q} \times \mathbf{H}^{p-r-1}$.*
- (2) *Si $r < p$ et $s < q$, alors \mathcal{M}^\perp est non vide, $\dim(\mathcal{M}^\perp) + \dim(\mathcal{M}) = p + q - 2$.*
 - *Si $(r > 0$ et $s > 0)$ ou si $(r < p - 1$ et $s < q - 1)$, alors Ω a 2 composantes connexes, chacune conformément équivalente à*

$$\mathbf{dS}^{r+1,s} \times \mathbf{H}^{p-r-1,q-s} / \{\pm \mathrm{id}\} \text{ et } \mathbf{H}^{r,s+1} \times \mathbf{dS}^{p-r,q-s-1} / \{\pm \mathrm{id}\}.$$

- Si $(r = p - 1 \text{ et } s = 0)$ ou $(r = 0 \text{ et } s = q - 1)$, avec $(p, q) \neq (1, 1)$, alors Ω a 3 composantes connexes, dont deux sont conformément équivalentes à $(-\mathbf{H}^p) \times \mathbf{H}^q$ et une est conformément équivalente à $\mathbf{H}^{p-1,1} \times \mathbf{dS}^{1,q-1}/\{\pm \text{id}\}$.
- Si $p = q = 1$ et $r = s = 0$, alors Ω a 4 composantes connexes conformément équivalentes à $(-\mathbf{H}^1) \times \mathbf{H}^1$

Démonstration. On traite le cas $r = p - 1$ et $s = 0$, avec $(p, q) \neq (1, 1)$. Les autres cas sont similaires. Soit $V \subset \mathbf{R}^{p+1,q+1}$ de signature $(p, 1)$ tel que $\mathcal{M} = \mathcal{M}(V)$ (par exemple, si $p = 1$, alors \mathcal{M} consiste en deux points qui ne sont pas sur un même photon). On décompose $\mathbf{R}^{p+1,q+1} = V \oplus V^\perp$ et on écrit $u = v + v_\perp$ pour les éléments de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$ relativement à cette décomposition. La sous-variété de Möbius \mathcal{M} est une sphère négative de dimension $p - 1$ et s'écrit

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{R}(v) \in \mathbf{Ein}^{p,q} \mid v \in V \text{ et } \mathbf{b}(v, v) = 0\},$$

De même la sous-variété de Möbius \mathcal{M}^\perp est une sphère riemannienne de dimension $q - 1$ et s'écrit

$$\mathcal{M}^\perp = \{\mathbf{R}(v_\perp) \in \mathbf{Ein}^{p,q} \mid v_\perp \in V^\perp \text{ et } \mathbf{b}(v_\perp, v_\perp) = 0\},$$

Le joint de \mathcal{M} et \mathcal{M}^\perp est

$$J(\mathcal{M}) = \{\mathbf{R}(v + v_\perp) \in \mathbf{Ein}^{p,q} \mid \mathbf{b}(v, v) = \mathbf{b}(v_\perp, v_\perp) = 0\}.$$

L'ouvert $\Omega = \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus J(\mathcal{M})$ s'écrit donc naturellement comme la réunion $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$, où

$$\Omega_1 = \{\mathbf{R}(v + v_\perp) \in \mathbf{Ein}^{p,q} \mid \mathbf{b}(v, v) = -\mathbf{b}(v_\perp, v_\perp) = 1\},$$

et

$$\Omega_2 = \{\mathbf{R}(v + v_\perp) \in \mathbf{Ein}^{p,q} \mid \mathbf{b}(v, v) = -\mathbf{b}(v_\perp, v_\perp) = -1\}.$$

Comme $pq \geq 2$, l'ouvert Ω_2 est connexe et il s'identifie conformément à

$$\Omega_2 \simeq \mathbf{H}^{p-1,1} \times \mathbf{dS}^{1,q-1}/\{\pm \text{id}\},$$

via l'application $\mathbf{R}(v + v_\perp) \mapsto (v, v_\perp)$. Fixons un vecteur $u \in V$ tel que $\mathbf{b}(u, u) = 1$ et un vecteur $u_\perp \in V^\perp$ tel que $\mathbf{b}(u_\perp, u_\perp) = -1$. On peut alors écrire $\Omega_1 = D_1 \sqcup D_2$ où

$$D_1 = \{\mathbf{R}(v + v_\perp) \in \mathbf{Ein}^{p,q} \mid \mathbf{b}(v, v) = -\mathbf{b}(v_\perp, v_\perp) = 1 \text{ et } \mathbf{b}(v, u)\mathbf{b}(v_\perp, u_\perp) > 0\},$$

et

$$D_2 = \{\mathbf{R}(v + v_\perp) \in \mathbf{Ein}^{p,q} \mid \mathbf{b}(v, v) = -\mathbf{b}(v_\perp, v_\perp) = 1 \text{ et } \mathbf{b}(v, u)\mathbf{b}(v_\perp, u_\perp) < 0\},$$

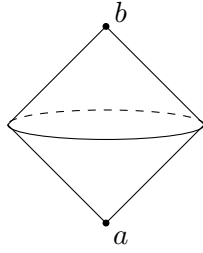
Les deux composantes D_1 et D_2 sont conformément équivalentes à $(-\mathbf{H}^p) \times \mathbf{H}^q$. Un difféomorphisme explicite est donné par $\mathbf{R}(v + v_\perp) \mapsto (v, v_\perp)$. ■

1.4 Diamants de l'univers d'Einstein

1.4.1 Le diamant lorentzien

On se place dans l'espace-temps de Minkowski $(\mathbf{R}^{1,n-1}, \mathbf{b})$, qu'on munit d'une orientation temporelle (voir section 3.1.1). Pour deux points $a, b \in \mathbf{R}^{1,n-1}$ tels que $b \in I^+(a)$ (i.e. $b - a$ est un vecteur de type temps futur), le diamant défini par a et b est l'ouvert

$$I(a, b) = I^+(a) \cap I^-(b).$$

FIGURE 1.5 – Un diamant de $\mathbf{R}^{1,2}$

Proposition 1.20. *Il existe un difféomorphisme conforme entre le diamant $I(a, b)$ et le futur $I^+(a) \subset \mathbf{R}^{1,n-1}$. En particulier, tout diamant est conformément équivalent à*

$$(\mathbf{R} \times \mathbf{H}^{n-1}, [-dt^2 \oplus g_{\mathbf{H}^{n-1}}]).$$

Démonstration. Fixons une origine $0 \in \mathbf{R}^{1,n-1}$. Quitte à appliquer une similitude, on peut supposer que $a = 0$ et $\mathbf{b}(b, b) = -1$. Soit φ l'application définie pour $x \in I(0, b)$ par

$$\varphi(x) = \frac{x}{-\mathbf{b}(x, x)} - b.$$

On vérifie que φ est une application conforme (voir la proposition 5.15 pour une étude complète de φ) et que c'est un difféomorphisme de $I(0, b)$ sur $I^+(0)$. Ceci montre le premier point.

Montrons maintenant que $I^+(0)$ est conformément équivalent au produit $\mathbf{R} \times \mathbf{H}^{n-1}$. On identifie \mathbf{H}^{n-1} isométriquement avec l'hypersurface $\{x \in \mathbf{R}^{1,n-1} \mid \mathbf{b}(x, x) = -1\}$ et on pose

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{H}^{n-1} &\longrightarrow I^+(0) \\ (t, x) &\longmapsto tx. \end{aligned}$$

Cette application est un difféomorphisme. Montrons que c'est une isométrie pour les métriques $-t^{-2}dt^2 \oplus g_{\mathbf{H}^{n-1}}$ et $g_0 = \frac{1}{\|x\|^2}\mathbf{b}|_x$ sur $(\mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{H}^{n-1})$ et $I^+(0)$, respectivement. Soit V un champ de vecteurs sur \mathbf{H}^{n-1} . Alors, pour tout $(t, x) \in \mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{H}^{n-1}$, on a :

- $g_0(\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right))|_{\varphi(t,x)} = \frac{1}{t^2}\mathbf{b}(x, x) = \frac{-1}{t^2} = \frac{-1}{t^2}\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \rangle|_t$.
- $g_0(\varphi_*V, \varphi_*V)|_{\varphi(t,x)} = \frac{1}{t^2}\mathbf{b}(tV_x, tV_x) = g_{\mathbf{H}^{n-1}}(V, V)|_x$.
- $g_0(\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \varphi_*V)|_{\varphi(t,x)} = \frac{1}{t^2}\mathbf{b}(x, tV_x) = 0$ car $V_x \in T_x\mathbf{H}^{n-1} = x^\perp$.

Donc φ est bien isométrique. Ainsi, avec le changement de variable $t = e^u$, on obtient une isométrie $(\mathbf{R} \times \mathbf{H}^{n-1}, -du^2 \oplus g_{\mathbf{H}^{n-1}}) \rightarrow (I^+(a), g)$. ■

Ainsi, tous les diamants causaux de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ ont la même structure conforme, qui est celle de $(-\mathbf{R}) \times \mathbf{H}^{n-1}$.

Remarque 1.21. Dans le modèle $I^+(a)$, la métrique $-dt^2 \oplus g_{\mathbf{H}^{n-1}}$ s'écrit

$$g_{\mathbf{D}^{1,n-1}}|_x = \frac{\mathbf{b}|_x}{\|x - a\|^2},$$

où $\|v\|^2 = |\mathbf{b}(v, v)|$. Dans le modèle $I(a, b)$, la métrique $-dt^2 \oplus g_{\mathbf{H}^{n-1}}$ s'écrit

$$\frac{\|b - a\|^2}{\|x - a\|^2\|x - b\|^2}\mathbf{b}|_x.$$

1.4.2 Diamants en signature supérieure

En signature supérieure, il n'existe pas de notion de causalité donc la notion de diamant introduite à la section précédente n'admet pas d'analogue évident. Dans ce manuscrit, le terme diamant fera référence à une généralisation des diamants de l'espace de Minkowski en signature supérieure. Les diamants que nous utiliserons jouent le même rôle que l'espace hyperbolique en géométrie conforme riemannienne. Pour généraliser la notion de diamant, nous prenons une définition qui généralise la proposition 1.20 :

Définition 1.22. Un *diamant* est ouvert de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ conformément équivalent à $(-\mathbf{H}^p) \times \mathbf{H}^q$.

Par la proposition 1.20, les diamants en signature lorentzienne coïncident avec les ouverts ayant la structure conforme d'un diamant (causal) de l'espace de Minkowski. En signature supérieure, il est possible de donner une définition *causale* des diamants, voir [Tro24].

La proposition 1.19 garantit l'existence de diamants, et le théorème de Liouville assure que si D et D' sont deux diamants, alors il existe un élément $g \in \text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ tel que $g(D) = D'$. On utilisera le symbole D pour désigner un diamant de $\mathbf{Ein}^{p,q}$, et on notera $\mathbf{D}^{p,q}$ pour la variété conforme $(-\mathbf{H}^p) \times \mathbf{H}^q$. Comme tout diamant est conformément équivalent à $\mathbf{D}^{p,q}$, on écrira parfois abusivement $\mathbf{D}^{p,q} \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$.

Soit $D \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ un diamant. Par la proposition 1.19, il existe une $(p-1)$ -sphère de Möbius négative $\mathcal{M} \simeq -\mathbf{S}^{p-1}$ telle que D est une des composantes connexes de $\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus J(\mathcal{M})$. On dira que \mathcal{M} est le *bord temps* de D . De même, on parlera du *bord espace* de D pour désigner la $(q-1)$ -sphère de Möbius positive $\mathcal{M}^\perp \simeq \mathbf{S}^{q-1}$. On notera $\partial_t D$ et $\partial_e D$ pour le bord temps et le bord espace de D , respectivement. On vérifie que ces deux sphères de Möbius sont contenues dans le bord topologique de D . On notera $\partial_l D$ le complémentaire de $\partial_t D$ et $\partial_e D$ dans ∂D , de sorte que

$$\partial D = \partial_t D \sqcup \partial_e D \sqcup \partial_l D.$$

On dira que $\partial_l D$ est le bord *lumière* de D . Voir Figure 1.6.

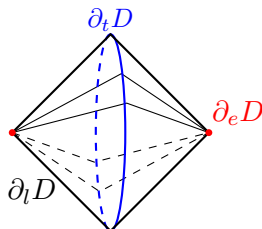


FIGURE 1.6 – Un diamant de $\mathbf{Ein}^{p,q}$.

1.4.3 Diamant dual

Soit \mathcal{M} une $(p-1)$ -sphère de Möbius négative. Par la preuve de la proposition 1.19, il existe exactement deux diamants D_1 et D_2 tels que $\partial_t D_1 = \partial_t D_2 = \mathcal{M}$. Ces deux diamants sont les ouverts notés D_1 et D_2 dans la preuve de la proposition 1.19. On dira que les diamants D_1 et D_2 sont duaux l'un de l'autre, on notera D^* pour le *diamant dual* à un diamant D .

Lemme 1.23. Soit D un diamant et $x \in \mathbf{Ein}^{p,q}$. Alors $C(x)$ évite D si et seulement si $x \in \overline{D^*}$.

Démonstration. On reprend les notations de la preuve de la proposition 1.19. Soit $V \subset \mathbf{R}^{p+1,q+1}$ de signature $(p, 1)$ tel que $\mathcal{M}(V) = \partial_t D$. On décompose $\mathbf{R}^{p+1,q+1} = V \oplus V^\perp$ et on

écrit $u = v + v_\perp$ pour les éléments de $\mathbf{R}^{p+1, q+1}$ relativement à cette décomposition. Fixons un vecteur $u \in V$ tel que $\mathbf{b}(u, u) = 1$ et un vecteur $u_\perp \in V^\perp$ tel que $\mathbf{b}(u_\perp, u_\perp) = -1$ de sorte que

$$D = \{\mathbf{R}(v + v_\perp) \in \mathbf{Ein}^{p, q} \mid \mathbf{b}(v, v) = -\mathbf{b}(v_\perp, v_\perp) > 0 \text{ et } \mathbf{b}(v, u)\mathbf{b}(v_\perp, u_\perp) > 0\}.$$

Le diamant dual de D est donc

$$D^* = \{\mathbf{R}(v + v_\perp) \in \mathbf{Ein}^{p, q} \mid \mathbf{b}(v, v) = -\mathbf{b}(v_\perp, v_\perp) > 0 \text{ et } \mathbf{b}(v, u)\mathbf{b}(v_\perp, u_\perp) < 0\},$$

et son adhérence dans $\mathbf{Ein}^{p, q}$ est

$$\overline{D^*} = \{\mathbf{R}(v + v_\perp) \in \mathbf{Ein}^{p, q} \mid \mathbf{b}(v, v) = -\mathbf{b}(v_\perp, v_\perp) \geq 0 \text{ et } \mathbf{b}(v, u)\mathbf{b}(v_\perp, u_\perp) < 0\}.$$

Écrivons $x = \boldsymbol{\pi}(w + w_\perp)$. On suppose que $C(x)$ évite D . Si jamais on avait $\mathbf{b}(w, w) < 0$, alors on pourrait trouver $v \in V$ tel que $\mathbf{b}(v, w) = 0$ et $\mathbf{b}(v, v) = 1$. De même, comme $\mathbf{b}(w_\perp, w_\perp) > 0$, on pourrait trouver $v_\perp \in V^\perp$ tel que $\mathbf{b}(v_\perp, w_\perp) = 0$ et $\mathbf{b}(v_\perp, v_\perp) = -1$. Quitte à modifier v_\perp en $-v_\perp$, on peut supposer que $\boldsymbol{\pi}(v + v_\perp) \in D$. Or

$$\mathbf{b}(v + v_\perp, w + w_\perp) = \mathbf{b}(v, w) + \mathbf{b}(v_\perp, w_\perp) = 0,$$

donc $\boldsymbol{\pi}(v + v_\perp) \in C(x)$, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi $\mathbf{b}(w, w) \geq 0$ et $\mathbf{b}(w_\perp, w_\perp) \leq 0$. Supposons par l'absurde que $\mathbf{b}(w, u)\mathbf{b}(w_\perp, u_\perp) > 0$. On peut toujours supposer que $\mathbf{b}(w, u) > 0$ et $\mathbf{b}(w_\perp, u_\perp) > 0$. Les vecteurs w et w_\perp sont isotropes, sinon $x \in D$ ce qui contredirait que $C(x) \cap D$ est vide. On peut donc trouver $v \in V$ et $v_\perp \in V^\perp$ tels que $\mathbf{b}(v, u), \mathbf{b}(v_\perp, u_\perp) < 0$ et

$$\mathbf{b}(v, w) = -\mathbf{b}(v_\perp, w_\perp) = 1.$$

Donc x est sur le cône de lumière de $\boldsymbol{\pi}(v + v_\perp) \in D$, une contradiction. Ainsi la seule possibilité est que $x \in \overline{D^*}$. Réciproquement, si $x \in \overline{D^*}$, alors pour $y = \boldsymbol{\pi}(w + w_\perp) \in D$ on a $\mathbf{b}(v, w)\mathbf{b}(v_\perp, w_\perp) > 0$, donc

$$\mathbf{b}(x, y) = \mathbf{b}(v + v_\perp, w + w_\perp) = \mathbf{b}(v, w) + \mathbf{b}(v_\perp, w_\perp) \neq 0.$$

Ainsi x et y ne sont pas sur un même photon, donc $C(x)$ évite D . ■

Ainsi, pour trouver le diamant dual d'un diamant $D \subset \mathbf{Ein}^{p, q}$, il suffit de retirer tous les cônes de lumière de points de D . On obtient alors un compact dont l'intérieur est D^* . Soit D un diamant et $J = J(\partial_t D)$ le joint de $\partial_t D$ et $\partial_e D = (\partial_t D)^\perp$. Alors J est la réunion des bords de D et D^* et

$$\partial D \cap \partial D^* = \partial_t D \cup \partial_e D$$

On en déduit la décomposition

$$J = \partial_t D \sqcup \partial_e D \sqcup \partial_l D \sqcup \partial_l D^*. \quad (1.5)$$

1.4.4 Groupe conforme du diamant

Soit $D \subset \mathbf{Ein}^{p, q}$ un diamant, avec $p + q \geq 3$. On note $V \subset \mathbf{R}^{p+1, q+1}$ le sous-espace de signature $(p, 1)$ tel que $\mathcal{M}(V) = \partial_t D$. Soit G_V le sous-groupe de $PO(p+1, q+1)$ qui préserve la décomposition

$$\mathbf{R}^{p+1, q+1} = V \oplus V^\perp.$$

Le groupe G_V est exactement le stabilisateur de $\partial_t D$. Il préserve donc le joint $J(\partial_t D)$ et il agit sur les 3 composantes connexes de $\mathbf{Ein}^{p, q} \setminus J(\partial_t D)$. Le groupe G_V stabilise la composante

qui n'est pas un diamant, mais un élément $g \in G_V$ peut échanger D et D^* . Si $g = (g_V, g_{V^\perp}) \in O(V) \times O(V^\perp)$, alors g stabilise D si et seulement si g_V et g_{V^\perp} préservent les orientations temporelles de V et V^\perp ou les renversent simultanément. Le groupe conforme de D est donc un sous-groupe d'indice 2 de G_V qui s'identifie à

$$\text{Conf}(D) \simeq \text{Isom}(\mathbf{H}^p) \times \text{Isom}(\mathbf{H}^q).$$

Proposition 1.24. *Soit $D \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ un diamant, avec $p + q \geq 3$. Alors l'action de $\text{Conf}(D)$ sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$ admet 7 orbites : D , $\partial_t D$, $\partial_e D$, $\partial_l D$, D^* , $\partial_l D^*$, et la 3ème composante connexe de $\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus J(\partial_t D)$. En particulier, l'action de $\text{Conf}(D)$ sur \overline{D} admet 4 orbites : D , $\partial_t D$, $\partial_e D$ et $\partial_l D$.*

Démonstration. On sait déjà que les 3 composantes connexes de $\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus J(\partial_t D)$ sont des orbites de $\text{Conf}(D)$. Comme $\text{Conf}(D)$ laisse stable D^* , chacune des composantes de $J(\partial_t D)$ dans la décomposition de l'équation 1.5 sont stables par $\text{Conf}(D)$. On vérifie par le théorème de Witt que ces sous-ensembles invariants sont en fait des orbites. ■

1.4.5 Modèles affines des diamants

Pour mieux comprendre la géométrie des diamants dans l'univers d'Einstein, nous allons décrire tous les ouverts de Minkowski qui sont l'image d'un diamant de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ par une projection stéréographique. On fixe une écriture $\mathbf{Ein}^{p,q} = \mathbf{R}^{p,q} \cup C(\infty)$. Soit D un diamant de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ contenu dans $\mathbf{R}^{p,q}$. Alors, à similitude près, il existe 4 modèles distincts pour D qui sont tous convexes :

- (1) (*Modèle propre*) D est un ouvert borné de $\mathbf{R}^{p,q}$. De façon équivalente, cela revient à dire que l'adhérence de D dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$ ne rencontre pas $C(\infty)$. La sphère de Möbius $\partial_t D$ est contenue dans un unique sous-espace affine $H_p \subset \mathbf{R}^{p,q}$ de direction négative. De même la sphère de Möbius $\partial_e D$ est contenue dans un unique sous-espace affine $H_q \subset \mathbf{R}^{p,q}$ de direction positive. Les directions de H_p et H_q sont orthogonales. On note $c = H_p \cap H_q$. Soit \mathbf{b} une métrique plate dans la classe conforme de $\mathbf{R}^{p,q}$. On peut trouver une constante $r > 0$ telle que

$$\partial_t D = \{x \in H_p \mid \mathbf{b}(x - c, x - c) = -r^2\} \text{ et } \partial_e D = \{y \in H_q \mid \mathbf{b}(y - c, y - c) = +r^2\}.$$

Grâce à la décomposition $\mathbf{R}^{p,q} = \vec{H}_p \oplus \vec{H}_q$, on peut définir une norme sur $\mathbf{R}^{p,q}$ comme suit :

$$\|x\|_{p,q} = \sqrt{-\mathbf{b}(x_p, x_p)} + \sqrt{\mathbf{b}(x_q, x_q)},$$

où $x = x_p + x_q \in \vec{H}_p \oplus \vec{H}_q$. Avec ces notations on a

$$D = \{x \in \mathbf{R}^{p,q} \mid \|x - c\|_{p,q} < r\}.$$

En particulier, le diamant D est un sous-ensemble convexe de $\mathbf{R}^{p,q}$. Voir Figure 1.7.

- (2) $\partial_t D$ contient ∞ . Dans ce cas, le bord espace $\partial_e D$ est contenu dans $C(\infty)$ et le bord temps $\partial_t D$ intersecte le cône à l'infini $C(\infty)$ uniquement en ∞ . La trace de $\partial_t D$ dans $\mathbf{R}^{p,q}$ est un sous-espace affine négatif F_{p-1} de dimension $(p-1)$. La direction orthogonale $L = F_{p-1}^\perp$ est de signature lorentzienne et on a une identification conforme $\mathbf{R}^{p,q} = F_{p-1} \oplus L$. On peut orienter temporellement L de sorte que

$$D = F_{p-1} \oplus I^+(0).$$

Dans ce cas, le diamant dual est $D^* = F_{p-1} \oplus I^-(0)$.

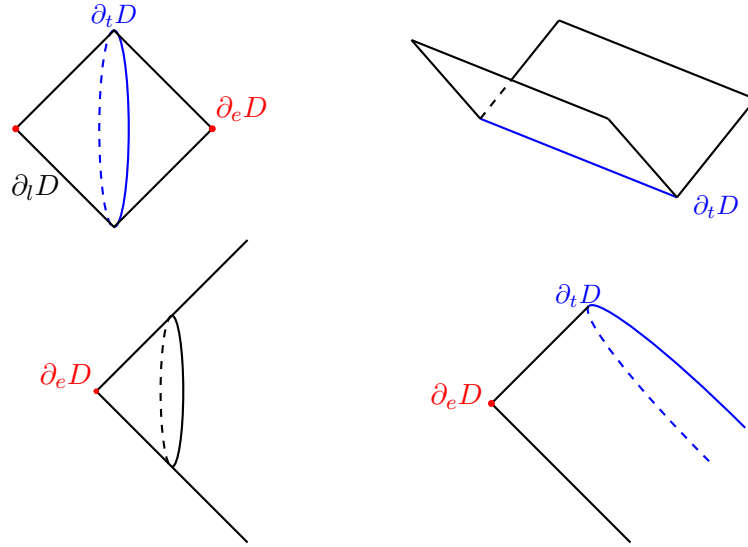


FIGURE 1.7 – Les 4 modèles affines du diamant. De gauche à droite et de haut en bas, les figures représentent un modèle affine du diamant D quand le sommet à l'infini est : dans l'intérieur du diamant dual D^* , sur le bord espace de D^* , sur le bord temps de D^* et sur le bord lumière de D^* , respectivement.

- (3) $\partial_t D \cap C(\infty) = \{x\}$ avec $x \neq \infty$. Le bord temps $\partial_t D$ est tangent à $C(\infty)$ en x . Dans ce cas, l'intersection de $\partial_t D$ avec $C(\infty)$ est réduite à x , et le bord espace $\partial_e D$ est aussi tangent à $C(\infty)$ en un unique point $y \in C(\infty) \setminus \{\infty\}$. Les points x et y sont sur un même photon passant par ∞ .
- (4) $\partial_t D$ est contenu dans $C(\infty)$. Alors $\partial_e D$ contient ∞ et on obtient une situation similaire au point (2) : la trace de $\partial_e D$ dans $\mathbf{R}^{p,q}$ est un sous-espace affine positif F_{q-1} de dimension $(q-1)$. La direction orthogonale $L = F_{q-1}^\perp$ est de signature anti-lorentzienne, i.e. $-L := (L, -\mathbf{b})$ est de signature lorentzienne. On peut donc orienter temporellement $-L$ de sorte que

$$D = F_{q-1} \oplus I^+(0).$$

Dans ce cas, le diamant dual est $D^* = F_{q-1} \oplus I^-(0)$.

Proposition 1.25. *Les 4 modèles décrits précédemment sont les seuls modèles affines du diamant.*

Démonstration. Soient D_1 un diamant et $x \in \mathbf{Ein}^{p,q}$ tels que D_1 est contenu dans $\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(x)$, de sorte qu'on peut projeter stéréographiquement D_1 par rapport à x . Par le lemme 1.23, le diamant dual D_1^* contient x dans son adhérence. Si D_2 est un autre diamant contenu dans $\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(x)$, il existe $g \in \text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ tel que $g(D_1) = D_2$. Ainsi $x \in \overline{D_2^*}$ et $g(x) \in \overline{D_1^*} = \overline{D_2^*}$. Si x et $g(x)$ sont dans la même orbite de $\text{Conf}(D_2)$, alors il existe $h \in \text{Conf}(D_2)$ tel que $h(g(x)) = x$. Donc $f = h \circ g$ définit une similitude de D_1 vers D_2 dans la carte définie par x . Réciproquement si f stabilise x et envoie D_1 sur D_2 , alors $h = f \circ g^{-1}$ préserve D_2 et envoie x sur $g(x)$. Donc x et $g(x)$ sont dans la même $\text{Conf}(D_2)$ -orbite. Par la proposition 1.24, il existe 4 orbites pour l'action de $\text{Conf}(D_2) = \text{Conf}(D_2^*)$ sur $\overline{D_2^*}$, donc il y a exactement 4 modèles affines de diamant à similitude près. ■

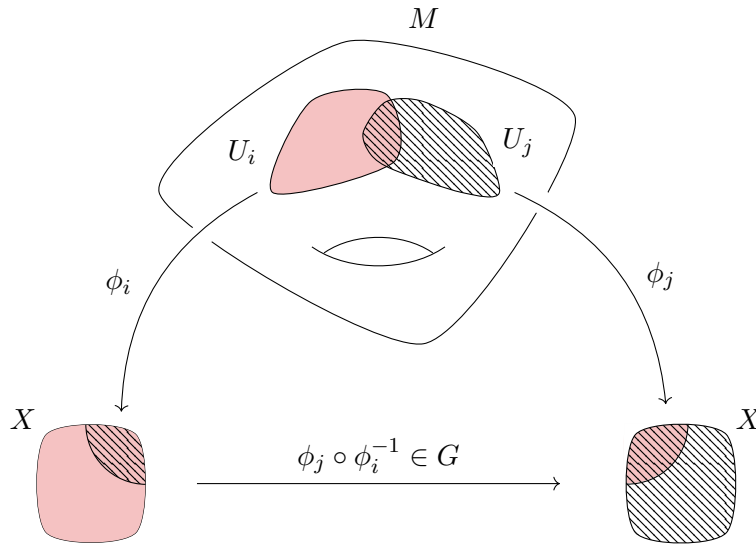


Figure 1.8 – Fonctions de transitions d’une (G, X) -variété.

1.5 Variétés conformément plates

Cette section est consacrée à l’étude des variétés localement modélées sur l’espace pseudo-riemannien plat $\mathbf{R}^{p,q}$, dites *conformément plates*.

1.5.1 Structures géométriques sur les variétés

Nous rappelons quelques notions portant sur les (G, X) -structures. Dans cette section, X est une variété lisse et G est un groupe de Lie agissant transitivement et fidèlement sur X , de sorte que si g_1 et g_2 sont deux éléments de G qui coïncident sur un ouvert connexe non vide de X , alors $g_1 = g_2$. Les éléments de G sont appelés *symétries* de X . Pour une étude plus complète des (G, X) -structures, on fait référence à [Thu97] et [Gol21].

Soit M une variété lisse. Un (G, X) -atlas sur M est la donnée d’un atlas de cartes à valeurs dans X dont les fonctions de transition sont la restriction d’éléments de G . Plus précisément c’est la donnée d’un recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$ de M par des ouverts connexes et de plongements ouverts $\phi_i : U_i \rightarrow X$ appelés *cartes* tels que les applications de transition

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

soient localement des restrictions d’éléments de G , voir Figure 1.8. Une (G, X) -structure sur M est un (G, X) -atlas maximal sur M . On dit alors que M est une (G, X) -variété. Si M et N sont deux (G, X) -variétés, une (G, X) -application est une application $f : M \rightarrow N$ qui est localement la restriction d’un élément de G dans des cartes de M et N .

Soit M une (G, X) -variété. Choisissons un point x_0 de M et une carte $\phi_0 : U \rightarrow X$ au voisinage de x_0 . Soit $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow M$ un chemin partant de x_0 . Alors on peut *étendre analytiquement* ϕ_0 le long de γ_0 de la façon suivante. On peut recouvrir $[0, 1]$ par un nombre fini d’intervalles ouverts J_i tels que $\gamma(J_i)$ est contenu dans le domaine U_i d’une carte $\phi_i : U_i \rightarrow X$. Soit g_{i+1} l’unique élément de G qui coïncide avec $\phi_i \circ \phi_{i+1}^{-1}$ sur $\phi_{i+1}(U_i \cap U_{i+1})$. Alors, si on note $y = \gamma(1)$ on étend ϕ_0 en y par la formule

$$\widetilde{\phi}_0(y) = g_1 \circ \cdots \circ g_n \circ \phi_n(y).$$

Le résultat est indépendant du recouvrement J_i et des cartes ϕ_i choisies. De plus, il ne dépend que de la classe d'homotopie de γ . Ainsi, dès que M est simplement connexe, on peut étendre toute carte ϕ_0 en une (G, X) -application $\widetilde{\varphi}_0 : M \rightarrow X$. Plus généralement, on obtient le résultat suivant :

Théorème 1.26. *Soit M une (G, X) -variété et soit \widetilde{M} son revêtement universel muni de sa (G, X) -structure induite. Alors il existe une paire (dev, hol) qui consiste en une (G, X) -application $\text{dev} : \widetilde{M} \rightarrow X$ et en un morphisme de groupes $\text{hol} : \pi_1(\widetilde{M}) \rightarrow G$ qui rend l'application dev équivariante :*

$$\text{dev}(\gamma \cdot x) = \text{hol}(\gamma)(\text{dev}(x)) \text{ pour tout } \gamma \in \pi_1(\widetilde{M}).$$

■

La paire (dev, hol) s'appelle une *paire de développement* pour M . L'application dev est l'*application de développement* et le morphisme hol est appelé *morphisme d'holonomie*. L'image $\text{hol}(\pi_1(M)) \subset G$ est appelé *groupe d'holonomie* de M et est noté $\text{Hol}(M)$. Si $(\text{dev}', \text{hol}')$ est une autre paire de développement alors il existe un élément g de G tel que

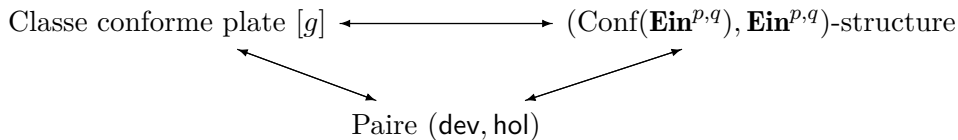
$$\begin{cases} \text{dev}' = g \circ \text{dev}, \\ \text{hol}' = \text{Inn}(g) \circ \text{hol}. \end{cases}$$

1.5.2 Variétés conformément plates

On se replace dans le cadre des variétés conformes. On dit qu'une variété conforme $(M, [g])$ est *conformément plate* si elle est localement conformément équivalente au modèle plat, c'est-à-dire : pour tout point $x \in M$, il existe un voisinage U de x , un ouvert $V \subset \mathbf{R}^{p,q}$ et un difféomorphisme conforme $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbf{R}^{p,q}$.

Exemple 1.27. Grâce à la projection stéréographique, l'univers d'Einstein ainsi que tous ses ouverts sont conformément plats. En particulier, les variétés pseudo-riemanniennes à courbure constante sont conformément plates.

Comme $\mathbf{Ein}^{p,q}$ compactifie l'espace de Minkowski, toute variété conformément plate est munie d'un atlas à valeurs dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$ dont les transitions sont conformes. Quand $p + q \geq 3$, le théorème de Liouville implique que ces applications de transitions sont des restrictions d'éléments de $\text{PO}(p + 1, q + 1)$. Ainsi, une variété conformément plate de dimension ≥ 3 est naturellement munie d'une $(\text{PO}(p + 1, q + 1), \mathbf{Ein}^{p,q})$ -structure. Réciproquement, une $(\text{PO}(p + 1, q + 1), \mathbf{Ein}^{p,q})$ -structure définit toujours une classe conforme plate : il suffit de demander que les cartes du $(\text{PO}(p + 1, q + 1), \mathbf{Ein}^{p,q})$ -atlas soient des applications conformes. En résumé, pour $p + q \geq 3$, il y a équivalence entre la donnée des 3 structures géométriques suivantes :



Remarque 1.28. Toute $(\text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q}), \mathbf{Ein}^{p,q})$ -structure peut être relevée en une $(\text{Conf}(\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}), \widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q})$ -structure et réciproquement toute $(\text{Conf}(\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}), \widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q})$ -structure se projette en une $(\text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q}), \mathbf{Ein}^{p,q})$ -structure. Suivant le contexte, on utilisera le symbole $\widehat{\text{dev}}$ pour signifier qu'on utilise une application de développement à valeurs dans $\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}$. De même, en signature lorentzienne, on utilisera le symbole $\widehat{\text{dev}}$ pour désigner une application de développement à valeurs dans $\widehat{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$.

Soit M une variété conformément plate et dev une application de développement. Si $\Gamma < \pi_1(M)$ est un sous-groupe dont l'holonomie est triviale, l'application de développement est invariante par Γ et se factorise en une application

$$\text{dev} : \widetilde{M}/\Gamma \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}.$$

Une variété M est *développable* si son holonomie est triviale, ce qui revient à dire que l'application de développement se factorise en $\text{dev} : M \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$. De façon équivalente, une variété M est développable si et seulement s'il existe une application conforme $f : M \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$.

1.5.3 Voisinage canonique

Soit M une variété conformément plate. Nous voulons introduire un ouvert de M , appelé voisinage canonique de M , qui généralise le voisinage canonique de Kulkarni–Pinkall [KP94]. Pour cela, nous généralisons la notion de diamant aux variétés conformément plates. Ces diamants jouent le même rôle que les boules de Kulkarni–Pinkall. Un *diamant* de M est l'image de $\mathbf{D}^{p,q} \simeq (-\mathbf{H}^p) \times \mathbf{H}^q$ par une application conforme $\mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ (pas nécessairement injective). En général, la structure conforme induite par M sur un diamant n'est pas celle de $\mathbf{D}^{p,q}$, mais c'est le cas dès que M est développable.

Proposition 1.29. *Soit M une variété conformément plate développable. Alors toute application conforme $\mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ est un plongement et la restriction de dev à un diamant est injective.*

Démonstration. Soit $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ une application conforme. Par le théorème de Liouville, l'application conforme $\text{dev} \circ \varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ s'étend en un élément de $\text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$. En particulier $\text{dev} \circ \varphi$ est injective, donc φ est injective et dev est injective en restriction à $\varphi(\mathbf{D}^{p,q})$. ■

On retiendra que les diamants s'injectent dans les variétés développables et que leur structure induite est celle de $\mathbf{D}^{p,q}$. En fait, la démonstration précédente montre que si M est développable, l'image d'une application conforme $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ détermine exactement l'application φ , modulo une précomposition par une isométrie de $\mathbf{D}^{p,q}$.

On se donne maintenant un point $x \in M$. Le *voisinage canonique* de x , noté U_x , est la réunion de tous les diamants de M contenant x . De façon générale, si M est développable, il n'est pas vrai que l'application de développement reste injective en restriction au voisinage canonique. En contraignant l'image de l'application de développement, le voisinage canonique peut former un domaine d'injectivité pour la développante.

Proposition 1.30. *Soit M une variété conformément plate développable. On suppose que l'image de dev évite un cône de lumière. Alors pour tout $x \in M$, la restriction de dev à U_x est injective.*

La preuve nécessite l'usage des deux lemmes suivants.

Lemme 1.31. *L'intersection de deux diamants de $\mathbf{R}^{p,q}$ est connexe.*

Démonstration. En effet, un diamant de $\mathbf{R}^{p,q}$ est toujours convexe par la description de la section 1.4. L'intersection de deux diamants de $\mathbf{R}^{p,q}$ est donc convexe et en particulier connexe. ■

Lemme 1.32. *Soient X et Y deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ continue. On suppose qu'il existe deux ouverts U et V recouvrant X , d'intersection non vide, tels que les restrictions de f à U et V sont des homéomorphismes sur leurs images respectives et $f(U) \cap f(V)$ est connexe. Alors f est injective.*

Démonstration. L'injectivité de f revient à l'égalité ensembliste $f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$. On a déjà l'inclusion $f(U \cap V) \subset f(U) \cap f(V)$. De plus $f(U \cap V)$ est un ouvert non vide de $f(U) \cap f(V)$. Par connexité, il suffit donc de montrer que $f(U \cap V)$ est fermé dans $f(U) \cap f(V)$. Soit $(x_k) \in (U \cap V)^{\mathbb{N}}$ telle que la suite des $f(x_k)$ converge vers $y \in f(U) \cap f(V)$. Soient $a \in U$ et $b \in V$ tels que $y = f(a) = f(b)$. Alors en inversant f en restriction à U et en restriction à V on obtient $x_k \rightarrow a$ dans U et $x_k \rightarrow b$ dans V . Donc $a = b$ et $y \in f(U \cap V)$, d'où le résultat. ■

Démonstration de la proposition 1.30. Soient $x \in M$ et D_1, D_2 deux diamants de M contenant x . Comme l'application de développement évite un cône de lumière C , elle prend ses valeurs dans $\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C \simeq \mathbf{R}^{p,q}$. Ainsi $\text{dev}(D_1)$ et $\text{dev}(D_2)$ sont deux diamants de $\mathbf{R}^{p,q}$, donc $\text{dev}(D_1) \cap \text{dev}(D_2)$ est connexe par le lemme 1.31. Le lemme 1.32 implique que la restriction de dev à $D_1 \cup D_2$ est injective. Ainsi la restriction de dev à U_p est injective. ■

Remarque 1.33. En général, si l'image de l'application de développement n'évite pas un cône de lumière, il n'est pas vrai que l'application de développement est injective en restriction au voisinage canonique. Ceci vient du fait que l'intersection de deux diamants de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ n'est pas toujours connexe. Même dans $\widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q}$ ou $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$, l'intersection de deux diamants n'est pas toujours connexe.

Chapitre 2

Une distance invariante en géométrie conforme

En géométrie différentielle, les constructions de Kobayashi–Royden sont une façon d’associer à certaines variétés une pseudo-distance qui rend les transformations géométriques contractantes. Un cadre célèbre pour ces constructions est celui de la géométrie complexe. En considérant les applications holomorphes du disque unité $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$ vers une variété complexe M , on peut construire une pseudo-distance δ_M invariante par biholomorphismes sur M (voir [Kob05]). Un des problèmes classiques pour cette construction est alors de trouver des critères géométriques pour dire que cette pseudo-distance est une distance sur M . Une condition nécessaire est la non-existence de fonctions entières non-constantes $\mathbf{C} \rightarrow M$. Un résultat célèbre de Brody [Bro78] énonce que ce critère est aussi suffisant lorsque la variété M est compacte. Un autre critère est donné par [Roy71] en termes d’une fonctionnelle infinitésimale $F : TM \rightarrow \mathbf{R}$ qui joue le rôle d’une métrique riemannienne intégrant δ_M .

La géométrie projective a aussi été un cadre d’applications des constructions de Kobayashi–Royden. Dans son article [Kob84], Kobayashi associe à toute variété projective $(M, [\nabla])$ une pseudo-distance δ_M en considérant les géodésiques projectives $\gamma : (-1, 1) \rightarrow M$. Wu [Wu81] montre alors qu’un analogue des critères donnés par Brody et Royden est possible dans le cadre projectif. Il montre notamment que pour toute variété projective compacte M ne contenant pas de géodésique projective $\mathbf{R} \rightarrow M$ non-constante, la pseudo-distance δ_M est une distance.

Dans le cadre de la géométrie conforme pseudo-riemannienne, une construction a été introduite par Markowitz (voir [Mar81] et [Mar82]). Cette construction est basée sur une classe de géodésiques de lumière paramétrées dont le paramétrage est invariant par homographies : on parle de paramétrage projectif des géodésiques de lumière. Ce chapitre est consacré à l’étude de cette construction de Markowitz. Nous commençons par introduire les paramétrages projectifs des géodésiques de lumière à la section 2.1, et nous montrons que la notion de paramétrage projectif est stable par limite uniforme. Nous redéfinissons ensuite la pseudo-distance de Markowitz δ_M ainsi que la fonctionnelle infinitésimale de Markowitz F_M à la section 2.2. La fonctionnelle infinitésimale joue le rôle d’une norme qui intègre δ_M . Nous montrons des propriétés standards pour les constructions de Kobayashi–Royden qu’il est possible de résumer comme suit :

Théorème 2.1 (Voir Thm. 2.24 et Thm. 2.46). *Soit $(M, [g])$ une variété conforme pseudo-riemannienne. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) *M est Markowitz-hyperbolique, i.e. δ_M est une distance.*
- (2) *M est Royden-hyperbolique, i.e. pour tout compact $K \subset M$ et pour toute norme rie-*

mannienne $\|\cdot\|$ sur M , il existe une constante $c > 0$ telle que $F_M \geq c\|\cdot\|$ sur $LM|_K$.

Si l'une de ces conditions est réunie, alors δ_M est localement équivalente à une distance riemannienne et l'espace métrique (M, δ_M) est un espace métrique de longueur. Si de plus M est conformétement plate, alors on a les deux équivalences supplémentaires suivantes :

- (3) Pour tout compact $K \subset M$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout segment de lumière $\gamma \subset M$ passant par K , on a $L(\gamma) \leq \pi - \varepsilon$.
- (4) Il existe une distance sur M telle que $\text{Conf}(\mathbf{D}^{p,q}, M)$ est équicontinue.

Dans le point (3) du théorème précédent, la quantité $L(\gamma)$ fait référence à une notion spécifique de longueur des photons, voir section 2.4.1. Lorsque la variété M est compacte, on peut améliorer ce résultat et caractériser complètement les variétés Markowitz-hyperboliques en termes des géodésiques de lumière :

Théorème 2.2 (Voir Thm. 2.36). *Soit $(M, [g])$ une variété conforme pseudo-riemannienne compacte. Alors δ_M est une distance si et seulement s'il n'existe pas de géodésique de lumière non-constante paramétrée projectivement $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow M$.*

La preuve de ce théorème est basée sur un lemme de reparamétrage à la Brody et sur l'étude des limites uniformes de géodésiques de lumière de la section 2.1. On obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2.3 (Voir Cor. 2.40). *Soit M une variété conforme pseudo-riemannienne compacte telle que $\text{Conf}(M)$ est non-compact. Alors il existe une géodésique de lumière non-constante paramétrée projectivement $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow M$.*

2.1 Paramétrage projectif des géodésiques de lumière

Pour introduire les paramétrages projectifs des géodésiques de lumière, nous devons faire usage de la dérivée Schwarzienne des fonctions réelles. Rappelons brièvement sa définition et les propriétés qui la caractérisent. Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de la variable réelle de classe C^3 dont la dérivée ne s'annule pas. La *dérivée Schwarzienne* de f , notée Sf est la fonction définie par

$$Sf = \left(\frac{f''}{f'} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \quad (2.1)$$

Rappelons les quelques propriétés fondamentales de la dérivée Schwarzienne :

- (*Interprétation analytique*) Si x_1, x_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation de Sturm-Liouville

$$x'' + Qx = 0,$$

alors $f = x_1/x_2$ est solution de $Sf = Q$.

- $Sf = 0$ si et seulement si f est une homographie, c'est-à-dire $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.
- (*Composition*) $S(f \circ g) = (Sf \circ g) \times (g')^2 + Sg$.
- Si h est une homographie, alors $S(h \circ f) = Sf$.
- Si $Sf = Sg$, alors il existe une homographie h telle que $g = h \circ f$.

Pour une étude détaillée sur la dérivée Schwarzienne, nous renvoyons à [OT04].

2.1.1 Équation des paramétrages projectifs

Soit $(M, [g])$ une variété conforme pseudo-riemannienne de dimension $n \geq 3$. On fixe une métrique g dans la classe conforme de M . Soit $\xi : I \rightarrow M$ une géodésique de lumière pour g définie sur un intervalle I . On dit que $u : J \subset I \rightarrow \mathbf{R}$ est un *paramétrage projectif* pour ξ si

$$Su(t) = \frac{2}{n-2} \text{Ric} \left(\dot{\xi}(t), \dot{\xi}(t) \right), \quad (2.2)$$

où Su désigne la dérivée Schwarzienne de u . Soit γ une courbe paramétrée. On dit que γ est une *géodésique de lumière paramétrée projectivement* si on peut écrire localement $\gamma = \xi \circ u^{-1}$, où ξ est une géodésique de lumière pour g et u est un paramétrage projectif pour ξ .

Proposition 2.4 ([Mar81]). *La notion de géodésique de lumière paramétrée projectivement est indépendante du choix de la métrique g dans la classe conforme de M .*

Remarque 2.5. Dans [Mar81], le signe de l'équation 2.2 est renversé. Ceci est lié à une erreur de signe dans la formule reliant les courbures de Ricci de deux métriques dans la classe conforme.

Démonstration. Soient γ une pré-géodésique de lumière, g une métrique dans la classe conforme et $\tilde{g} = e^{2f}g$. Soient a et \tilde{a} des paramétrages affines de γ pour g et \tilde{g} , respectivement, et soient $\xi_a = \gamma \circ a^{-1}$ et $\xi_{\tilde{a}} = \gamma \circ \tilde{a}^{-1}$ les géodésiques affines associées. On note $v = a \circ \tilde{a}^{-1}$ de sorte que

$$\xi_{\tilde{a}} = \xi_a \circ v \text{ et } \dot{\xi}_{\tilde{a}} = \dot{v} \cdot \dot{\xi}_a \circ v.$$

Soient u et \tilde{u} des paramétrages projectifs pour ξ_a et $\xi_{\tilde{a}}$, respectivement, c'est-à-dire

$$Su = \frac{2}{n-2} \text{Ric} \left(\dot{\xi}_a, \dot{\xi}_a \right) \text{ et } S\tilde{u} = \frac{2}{n-2} \widetilde{\text{Ric}} \left(\dot{\xi}_{\tilde{a}}, \dot{\xi}_{\tilde{a}} \right).$$

Nous allons calculer $S\tilde{u}$ à l'aide des formules suivantes qui relient les connexions de g et \tilde{g} ainsi que leurs courbures de Ricci (voir [Bes07, Thm. 1.159]). On a

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + df(X)Y + df(Y)X - g(X, Y)\nabla f, \quad (2.3)$$

et

$$\widetilde{\text{Ric}} = \text{Ric} - (n-2)(\text{Hess}(f) - df \otimes df) - (\Delta f + (n-2)|df|^2)g. \quad (2.4)$$

On obtient avec l'équation 2.4 :

$$\begin{aligned} S\tilde{u} &= \frac{2}{n-2} \widetilde{\text{Ric}} \left(\dot{\xi}_{\tilde{a}}, \dot{\xi}_{\tilde{a}} \right) \\ &= \frac{2}{n-2} \text{Ric} \left(\dot{\xi}_a, \dot{\xi}_a \right) - 2 \left(\text{Hess}(f)(\dot{\xi}_a, \dot{\xi}_a) - df \otimes df(\dot{\xi}_a, \dot{\xi}_a) \right) \\ &= (\dot{v})^2 \frac{2}{n-2} \text{Ric} \left(\dot{\xi}_a, \dot{\xi}_a \right) \circ v - 2 \text{Hess}(f)(\dot{\xi}_a, \dot{\xi}_a) + 2df(\dot{\xi}_a)^2 \\ &= (\dot{v})^2 \cdot (Su) \circ v - 2 \text{Hess}(f)(\dot{\xi}_a, \dot{\xi}_a) + 2df(\dot{\xi}_a)^2 \\ &= S(u \circ v) - Sv - 2 \text{Hess}(f)(\dot{\xi}_a, \dot{\xi}_a) + 2df(\dot{\xi}_a)^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Montrons que $Sv = -2 \text{Hess}(f)(\dot{\xi}_a, \dot{\xi}_a) + 2df(\dot{\xi}_a)^2$. Grâce à l'équation 2.3, on a :

$$0 = \widetilde{\nabla}_{\dot{\xi}_a} \dot{\xi}_a = \nabla_{\dot{\xi}_a} \dot{\xi}_a + 2df(\dot{\xi}_a)\dot{\xi}_a = (\ddot{v}/\dot{v})\dot{\xi}_a + 2df(\dot{\xi}_a)\dot{\xi}_a. \quad (2.6)$$

Donc $\ddot{v}/\dot{v} = -2df(\dot{\xi}_{\tilde{a}})$ et

$$Sv = \left(\frac{\ddot{v}}{\dot{v}}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{v}}{\dot{v}}\right)^2 = -2(df(\dot{\xi}_{\tilde{a}}))' - 2(df(\dot{\xi}_{\tilde{a}}))^2.$$

Or par définition on a $\text{Hess}(f)(X, Y) = X \cdot Y \cdot f - (\nabla_X Y) \cdot f$, donc par l'équation 2.6 on a :

$$\begin{aligned} \text{Hess}(f)(\dot{\xi}_{\tilde{a}}, \dot{\xi}_{\tilde{a}}) &= df(\dot{\xi}_{\tilde{a}})' - \nabla_{\dot{\xi}_{\tilde{a}}} \dot{\xi}_{\tilde{a}} \cdot f \\ &= df(\dot{\xi}_{\tilde{a}})' - df(-2df(\dot{\xi}_{\tilde{a}})\dot{\xi}_{\tilde{a}}) \\ &= df(\dot{\xi}_{\tilde{a}})' + 2df(\dot{\xi}_{\tilde{a}})^2. \end{aligned}$$

On obtient bien

$$\begin{aligned} -2\text{Hess}(f)(\dot{\xi}_{\tilde{a}}, \dot{\xi}_{\tilde{a}}) + 2df(\dot{\xi}_{\tilde{a}})^2 &= -2df(\dot{\xi}_{\tilde{a}})' - 4df(\dot{\xi}_{\tilde{a}})^2 + 2df(\dot{\xi}_{\tilde{a}})^2 \\ &= -2(df(\dot{\xi}_{\tilde{a}}))' - 2(df(\dot{\xi}_{\tilde{a}}))^2 \\ &= Sv. \end{aligned}$$

Par l'équation 2.5, on a donc $S\tilde{u} = S(u \circ v)$. Ainsi il existe une homographie h telle que $h \circ u \circ v = \tilde{u}$. Donc $h \circ u \circ a = \tilde{u} \circ \tilde{a}$, ce qui implique

$$\xi_a \circ u^{-1} = \xi_{\tilde{a}} \circ \tilde{u}^{-1} \circ h.$$

Les géodésiques paramétrées projectivement pour g et g' différent donc d'une précomposition par une homographie. ■

Grâce aux propriétés de la dérivée Schwarziennne, on vérifie que si γ est paramétrée projectivement, alors $\gamma \circ h$ est aussi paramétrée projectivement pour toute homographie h . C'est cette propriété qui est à l'origine du nom "paramétrage *projectif*".

Exemple 2.6. Si (M, g) est une variété pseudo-riemannienne qui vérifie la condition

$$\text{Ric}_g(v, v) = 0, \text{ pour tout vecteur lumière } v \in TM,$$

alors toute géodésique de lumière paramétrée affinement pour la connexion ∇_g est une géodésique de lumière paramétrée projectivement de $(M, [g])$. C'est par exemple le cas des variétés à courbure constante pseudo-riemanniennes $\mathbf{R}^{p,q}$, $\mathbf{dS}^{p,q}$ et $\mathbf{H}^{p,q}$, et plus généralement c'est le cas des métriques d'Einstein, pour lesquelles $\text{Ric}_g = \lambda g$ pour une certaine constante $\lambda \in \mathbf{R}$.

Pour l'univers d'Einstein, on vérifie qu'une géodésique de lumière $\gamma : I \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ est paramétrée projectivement si et seulement si $\gamma : I \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{R}^{p+1,q+1})$ est une application projective. Ceci a un sens car on peut munir I d'un structure projective naturelle grâce à l'inclusion $I \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{RP}^1$. En dimension 2, cette analogie permet de donner un sens aux géodésiques de lumière paramétrées projectivement pour les variétés conformément plates. Cette classe de courbes paramétrées n'est pas invariante par transformations conformes, mais elle reste invariante par $(\mathbf{Ein}^{1,1}, \text{PO}(2,2))$ -applications. Puisqu'en dimension 2, toute variété lorentzienne est localement conformément plate, cette notion de paramétrage projectif est générale.

Remarque 2.7. Comme les géodésiques de lumière paramétrées projectivement s'obtiennent comme reparamétrage local de géodésiques de lumière affines, toute géodésique de lumière paramétrée (au sens de la section 1.1.2) admet des reparamétrages projectifs localement.

2.1.2 Convergence des géodésiques de lumière

Cette section est consacrée à l'étude du comportement limite des géodésiques de lumière dans une variété conforme. Nous allons montrer que la propriété d'être paramétrée projectivement est stable par passage à la limite pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Proposition 2.8. *Soit $(M, [g])$ une variété conforme et soit $\gamma_k : (a, b) \rightarrow M$ une suite de géodésiques de lumière paramétrées projectivement qui converge uniformément sur les compacts vers une courbe $\gamma : (a, b) \rightarrow M$. Alors γ est une géodésique de lumière paramétrée projectivement et la convergence est C^∞ .*

Ce résultat est l'analogue conforme du résultat classique qu'une limite uniforme d'applications holomorphes est holomorphe. Ce dernier résultat est un argument essentiel à la preuve du théorème de Brody [Bro78]. Ainsi, la proposition 2.8 sera utilisée de façon analogue dans la preuve du théorème 2.36.

Lemme 2.9. *Soit $\gamma_k : I_k \rightarrow M$ une suite de géodésiques paramétrées projectivement définies sur des intervalles I_k contenant 0 dans leur intérieur, avec*

$$J^2\gamma_k(0) \text{ convergente et } \lim_k \gamma'_k(0) \neq 0.$$

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que γ_k est définie sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ (après extension) et $\gamma_k|_{[-\varepsilon, \varepsilon]}$ converge C^∞ vers une géodésique de lumière paramétrée projectivement $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$.

Démonstration. On fixe ∇ une connexion affine obtenue comme connexion de Levi-Civita d'une certaine métrique $g_0 \in [g]$. On note $x_k = \gamma_k(0)$ et $v_k = \gamma'_k(0)$. Soit ξ_k la géodésique affine maximale dont le 1-jet en 0 est donné par (x_k, v_k) et soit ξ la géodésique affine maximale engendrée par $(x, v) := \lim_k(x_k, v_k)$. Il existe un $r > 0$ tel que ξ est définie sur le segment $[-r, r]$. Par le lemme 2.10, les ξ_k sont définies (à partir d'un certain rang) sur $[-r, r]$ et

$$\xi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{C^\infty} \xi \text{ sur } [-r, r].$$

Par hypothèse il existe une suite de paramétrages projectifs $u_k : V_k \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} Su_k(t) = \frac{2}{n-2} \text{Ric}(\dot{\xi}_k(t), \dot{\xi}_k(t)) \text{ pour } t \in V_k, \\ u_k(0) = 0, \\ u'_k(0) = 1, \\ \theta_k = \xi_k \circ u_k^{-1}. \end{cases}$$

En dérivant deux fois en 0 l'égalité $\theta_k \circ u_k = \xi_k$, on obtient :

$$\theta''_k(0) = u''_k(0)v_k + \xi''_k(0),$$

donc le 2-jet de u_k en 0 converge. Soit u l'unique paramétrage projectif de ξ tel que $J^2u(0) = \lim_k J^2u_k(0)$. Montrons qu'on est dans le cadre du lemme 2.10 et que u_k converge vers u au voisinage de 0. En posant

$$F(t, (x, y, z), p, v) = \left(y, z, Q(t, p, v)y + \frac{3z^2}{2y} \right),$$

avec

$$Q(t, p, v) = \frac{2}{n-2} \text{Ric} \left(\exp'_{(p,v)}(t), \exp'_{(p,v)}(t) \right),$$

on peut réécrire l'équation différentielle vérifiée par u_k comme

$$\begin{cases} U'_k(t) = F(t, U_k(t), x_k, v_k) \text{ pour } t \in [0, \delta], \\ U_k(0) = (0, 1, u''_k(0)) \end{cases}$$

avec $U(t) = (u(t), u'(t), u''(t))$. Les théorèmes de dépendance de solutions d'équations différentielles aux conditions initiales et aux paramètres permettent de dire qu'il existe des voisinages de (x, v) et $a := u''_k(0)$ et il existe un $\delta' > 0$ tel que la solution u de

$$\begin{cases} U'(t) = F(t, U(t), \tilde{x}, \tilde{v}) \\ U(0) = (0, 1, \tilde{a}), \end{cases}$$

est définie pour $t \in [0, \delta]$ et s'écrit

$$u = u(t, \tilde{a}, \tilde{x}, \tilde{v})$$

avec u lisse. Pour $k \geq 0$ suffisamment grand, on a donc $u_k = u(\cdot, u''_k(0), x_k, v_k)$ et ainsi $u_k|_{[0, \delta']}$ converge C^∞ vers $u|_{[0, \delta']}$ (sur $[0, \delta']$). Soit l_k l'unique application affine (en fait linéaire) telle que

$$l_k(u_k([0, \delta'])) = u([0, \delta']).$$

Alors $l_k \rightarrow id$ au sens de la convergence C^∞ ou de la convergence dans $\text{Aff}(1)$. Par composition, $v_k := l_k \circ u_k$ converge C^∞ vers u dans $\text{Diff}([0, \delta'], u([0, \delta']))$. On a donc convergence C^∞ de $v_k^{-1} = u_k^{-1} \circ l_k^{-1}$ vers u^{-1} sur $u([0, \delta'])$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $l_k([0, \varepsilon]) \subset u([0, \delta'])$. Alors $u_k^{-1}|_{[0, \varepsilon]} = v_k^{-1} \circ l_k|_{[0, \varepsilon]} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u_k^{-1}|_{[0, \varepsilon]}$ donc $\theta_k = \xi_k \circ u_k^{-1}$ converge C^∞ vers θ . ■

Énonçons le lemme dont nous avons fait usage pour la preuve du lemme 2.9.

Lemme 2.10 (voir [Lee12, App. D]). *Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ ouvert, I un intervalle ouvert contenant 0, $V \subset \mathbf{R}^N$ ouvert et soit $F : \Omega \times I \times V \rightarrow \mathbf{R}^d$ une fonction C^∞ (resp. C^k , $k \geq 2$) et soit $(\lambda_k) \in V$ convergent vers $\lambda \in V$. Soit $(v_k) \in \Omega$ une suite convergent dans Ω et soit $X = \lim_k v_k$. Pour tout $k \geq 0$, on note $u_k : I_k^{\max} \rightarrow \Omega$ la solution maximale du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} v'(t) = F(v(t), t, \lambda_k) \\ v(0) = v_k. \end{cases}$$

De même on note $u : I^{\max} \rightarrow \Omega$ la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} v'(t) = F(v(t), t, \lambda) \\ v(0) = X. \end{cases}$$

Alors pour tout compact $J \subset I^{\max}$, les u_k sont définis sur J à partir d'un certain rang et

$$u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{C^\infty} u \text{ sur } J.$$

Lemme 2.11. *Soit $\gamma_k : (a, b) \rightarrow M$ une suite de géodésiques paramétrées projectivement qui converge uniformément vers $\gamma : (a, b) \rightarrow M$. Alors, pour tout $x \in (a, b)$, il existe une sous-suite $(\gamma_{m(k)})$ et un voisinage V de x dans (a, b) tels que $\gamma_{m(k)}|_V$ converge C^∞ vers une géodésique de lumière paramétrée projectivement (possiblement dégénérée).*

L'idée est la suivante : partant d'une suite de géodésiques de lumière paramétrées projectivement (γ_k) , on va reparamétriser (γ_k) à l'aide d'une suite d'homographies (h_k) de sorte que $\gamma_k \circ h_k^{-1}$ ait un 2-jet convergent en 0. Par le lemme 2.9, la suite reparamétrisée converge

localement vers une géodésique de lumière non dégénérée. Une analyse sur la suite dynamique de (h_k) permet de conclure sur la convergence de (γ_k) . Avant de détailler cette preuve, nous rappelons brièvement la dynamique Nord-Sud de l'action $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \curvearrowright \mathbf{RP}^1$. Soit $(h_k) \in \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ une suite d'homographie. Si (h_k) ne converge pas dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$, alors quitte à prendre une sous-suite de (h_k) , il existe deux points $p^-(h_k)$ et $p^+(h_k)$ dits *attracteur* et *répulsor* respectivement, tels que la restriction de (h_k) à $\mathbf{RP}^1 \setminus \{p^-(h_k)\}$ converge uniformément sur tout compact vers $p^+(h_k)$.

Démonstration du lemme 2.11. Pour simplifier les notations, on traite le cas $x = 0$. On fixe une identification projective $\mathbf{RP}^1 \simeq \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ et on se donne une norme riemannienne $\|\cdot\|$ sur M . Montrons qu'on peut trouver une suite d'homographies $(h_k) \in \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ telle que, quitte à extraire, la suite $\theta_k := \gamma_k \circ h_k^{-1}$ vérifie

$$(J^2\theta_k(0)) \text{ converge et } \lim_{k \rightarrow \infty} \theta'_k(0) \neq 0.$$

Pour tout $k \geq 0$, on peut trouver une carte exponentielle $f_k : B_k \subset M \rightarrow \mathbf{R}^{p,q}$ centrée en $\gamma_k(0)$ dans laquelle γ_k apparaît comme un segment de droite (prendre une carte exponentielle donnée par une métrique g dans la classe conforme). Dans cette carte, les vecteurs $\gamma'_k(0)$ et $\gamma''_k(0)$ sont colinéaires. On peut alors choisir h_k tel que

$$\begin{cases} h_k(0) = 0, \\ |h'_k(0)| = \|\gamma'_k(0)\|^{-1}, \\ (\gamma_k \circ h_k^{-1})''(0) = ((h_k^{-1})'(0))^2 \gamma''_k(0) + (h_k^{-1})''(0) \gamma'_k(0) = 0. \end{cases}$$

En posant $\theta_k = \gamma_k \circ h_k^{-1}$, les équations précédentes se traduisent en

$$\begin{cases} \theta_k(0) = \gamma_k(0), \\ \|\theta'_k(0)\| = 1, \\ \theta''_k(0) = 0 \text{ dans la carte } f_k. \end{cases}$$

On peut donc extraire une sous-suite de (θ_k) telle que $(J^2\theta_k(0))$ converge. On a alors $\|\lim_k \theta'_k(0)\| = \lim_k \|\theta'_k(0)\| = 1$ donc $\lim_k \theta'_k(0) \neq 0$. Par le lemme 2.9, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que θ_k est défini sur un intervalle $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ et converge C^∞ vers une géodésique de lumière paramétrée projectivement $\theta : [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow M$, avec $\theta'(0) \neq 0$. Si la suite (h_k) converge dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ vers un élément h tel que $h(0) = 0$. On peut trouver V voisinage compact de 0 tel que $h(V) \subset \mathbf{R}$, et alors $h_k \xrightarrow{C^\infty} h$ sur V au sens de la convergence des fonctions de V dans \mathbf{R} . Quitte à réduire V , on peut supposer que $h_k(V) \subset [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ pour tout $k \geq 0$. Par composition, (γ_k) converge C^∞ vers $\theta \circ h$ sur V . Supposons maintenant que (h_k) diverge dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. On note $p^+(h_k)$ et $p^-(h_k)$ ses points attracteurs et répulseurs (qui existent quitte à extraire une sous-suite de (h_k)). Quitte à modifier l'identification $\mathbf{RP}^1 \simeq \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, on peut supposer que les h_k ne fixent pas le point à l'infini, donc ils s'écrivent explicitement $h_k(t) = \frac{\alpha_k t}{t - \beta_k}$ pour $\alpha_k, \beta_k \neq 0$. On peut toujours supposer que $\beta_k < 0 < \alpha_k$.

— Cas 1 : $p^-(h_k) \neq 0$. Comme $0 = h_k(0) = \lim_k h_k(0)$, on a nécessairement $p^+(h_k) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $p^-(h_k) \notin [-\varepsilon, \varepsilon]$ de telle sorte que $\lim_k h_k([-\varepsilon, \varepsilon]) = \{0\}$. Pour $n \geq 1$ on a

$$h_k^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n \alpha_k \beta_k n!}{(t - \beta_k)^{n+1}},$$

donc pour tout $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ on a

$$|h_k^{(n)}(t)| \leq \frac{|\alpha_k \beta_k n!|}{|\varepsilon - \beta_k|^{n+1}} = |h_k(\varepsilon)| \frac{n!}{\varepsilon |\beta_k|^n}.$$

On sait déjà que $h_k(\varepsilon) \rightarrow p^+(h_k) = 0$. Comme $h_k(\beta_k) = \infty$, la suite (β_k) ne converge pas vers 0 (sinon on aurait $\beta_k \not\rightarrow p^-(h_k)$ donc $h_k(\beta_k) \rightarrow p^+(h_k) = 0$). Ainsi pour tout $n \geq 1$ on a

$$\sup_{t \in [-\varepsilon, \varepsilon]} |h_k^{(n)}(t)| \rightarrow 0,$$

donc $h_k \rightarrow 0$ pour la convergence C^∞ sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Ainsi γ_k converge C^∞ dans un voisinage de 0 vers une courbe constante égale à $\theta(0)$.

— Cas 2 : $p^-(h_k) = 0$. On a donc $h_k(\infty) = \alpha_k \rightarrow p^+(h_k)$ car $\infty \neq p^-(h_k)$. On suppose d'abord que $p^+(h_k) \neq 0$. On peut toujours réduire ε_0 et supposer que $p^+(h_k) \notin [0, \varepsilon_0]$. Soit $t \in [0, \varepsilon_0)$. On peut trouver une suite (s_k) qui converge vers $p^-(h_k)$ telle que $h_k(s_k) \rightarrow t$. On a alors $s_k > 0$, donc s_k est dans la composante connexe contenant 0 de $h_k^{-1}([-\varepsilon_0, \varepsilon_0]) \cap (a, b)$. Pour $k \geq 0$, on a donc $\theta_k(h_k(s_k)) = \gamma_k(s_k) \rightarrow \gamma(0)$. Ainsi $\theta(t) = \gamma(0)$ pour tout $t \in [0, \varepsilon_0)$, ce qui contredit $\theta'(0) \neq 0$.

Si $p^+(h_k) = 0$, alors $\beta_k \rightarrow 0$. Pour tout $t \in (-\varepsilon_0, 0]$ on peut trouver une suite (s_k) telle que $h_k(s_k) \rightarrow t$. On a nécessairement $\beta_k < \alpha_k < 0$, donc s_k est dans la composante connexe contenant 0 de $h_k^{-1}([-\varepsilon_0, \varepsilon_0]) \cap [a, b]$. Pour $k \geq 0$ on a donc $\theta_k(h_k(s_k)) = \gamma_k(s_k) \rightarrow \gamma(0)$. Donc $\theta(t) = \gamma(0)$ pour tout $t \in (-\varepsilon_0, 0]$, ce qui contredit encore une fois $\theta'(0) \neq 0$. ■

Remarque 2.12. La conclusion du lemme 2.11 n'est plus valide si on considère que la courbe est définie sur un segment. En effet si $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ est une géodésique de lumière paramétrée projectivement et si $\gamma_k : [0, 1] \rightarrow M$ est définie par

$$\gamma_k(s) = \gamma\left(\frac{s/k}{s + 1/k^2}\right).$$

alors (γ_k) est une suite de géodésiques paramétrées projectivement qui converge uniformément vers $\gamma(0)$. Cependant le 1-jet de γ_k en 0 diverge, car $\gamma'_k(0) = k\gamma'(0)$.

Lemme 2.13 (Recollement des géodésiques de lumière). *Soient $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ une courbe lisse et $a < m < b$ tels que γ est paramétrée projectivement en restriction aux intervalles $[a, m]$ et $[m, b]$. Alors γ est paramétrée projectivement.*

Démonstration. On fixe ∇ une connexion affine obtenue comme connexion de Levi-Civita d'une certaine métrique $g_0 \in [g]$. Par hypothèse, on peut trouver une géodésique affine $\xi_1 : [0, r_1] \rightarrow M$ (resp. $\xi_2 : [r_2, 0] \rightarrow M$) et un paramétrage projectif $u_1 : [0, r_1] \rightarrow \mathbf{R}$ (resp. $\xi_2 : [r_2, 0] \rightarrow \mathbf{R}$) tels que $u_1([0, r_1]) = [m, b]$ et $\gamma \circ u_1 = \xi_1$ sur $[0, r_1]$ (resp. $u_2([r_2, 0]) = [a, m]$ et $\gamma \circ u_2 = \xi_2$ sur $[r_2, 0]$). On peut de plus toujours demander que $J^1\gamma(m) = J^1\xi_1(0) = J^1\xi_2(0)$, donc il existe une géodésique affine $\xi : [r_2, r_1] \rightarrow M$ qui prolonge ξ_1 et ξ_2 (et en particulier $J^2\xi_1(0) = J^2\xi_2(0)$ et $J^2u_1(0) = J^2u_2(0)$). La fonction $u : [r_2, r_1] \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{pour } t \in [0, r_1], \\ u_2(t) & \text{pour } t \in [r_2, 0] \end{cases}$$

est de classe C^2 et est un paramétrage projectif pour ξ . Puisque $u([r_2, r_1]) = [a, b]$, la courbe $\gamma = \xi \circ u^{-1}$ est une géodésique de lumière paramétrée projectivement. ■

Nous pouvons maintenant conclure avec la preuve de la proposition 2.8. On pose

$$I = \left\{ t \in (a, b) \mid \begin{array}{l} \exists \text{ sous-suite } (\gamma_{m(k)}), \\ \exists \text{ un voisinage } V \text{ de } t \text{ dans } (a, b), \quad h_{m(k)}|_V \xrightarrow{C^0} \text{ cst.} \end{array} \right\}$$

et

$$J = \left\{ t \in (a, b) \mid \exists \text{ sous-suite } (\gamma_{m(k)}), J^2 \gamma_{m(k)}(t) \text{ converge et } \lim_k \gamma'_{m(k)}(t) \neq 0. \right\}.$$

Par le lemme 2.11, les sous-ensembles I et J sont ouverts, disjoints et recouvrent (a, b) . Si $(a, b) = I$, alors γ est localement constante donc est constante, d'où le résultat. Si $(a, b) = J$, alors pour tout $x \in (a, b)$, il existe un ouvert V de (a, b) tel que $\gamma|_{(a,b)}$ est une géodésique de lumière paramétrée projectivement non dégénérée. Donc γ est lisse et par le lemme 2.13, la courbe γ est une géodésique de lumière paramétrée projectivement. Par le lemme 2.11, toute sous-suite de (γ_k) a une sous-suite qui converge (localement) vers γ pour la topologie C^∞ . Donc (γ_k) converge vers γ pour la topologie de la convergence C^∞ sur tous compacts.

2.1.3 Structure projective sur les géodésiques de lumière

On peut étendre la notion de géodésique de lumière paramétrée projectivement aux courbes

$$\gamma : P \rightarrow M,$$

où P est une variété projective de dimension 1, i.e. une $(\mathbf{RP}^1, \text{PSL}(2, \mathbf{R}))$ -variété. En effet, on dira que $\gamma : P \rightarrow M$ est paramétrée projectivement si pour toute carte locale projective $f : U \subset P \rightarrow \mathbf{R}$, la courbe paramétrée

$$\gamma \circ f^{-1} : f(U) \subset \mathbf{R} \rightarrow M$$

est une géodésique de lumière paramétrée projectivement au sens défini précédemment. Comme les paramétrages projectifs sont invariants par composition par une homographie, on vérifie que cette notion ne dépend que de la structure projective de P .

Proposition 2.14. *Soit $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ une géodésique de lumière paramétrée. Alors il existe un ouvert $J \subset \mathbf{RP}^1$ et un difféomorphisme $u : (a, b) \rightarrow J$ tel que $\gamma \circ u^{-1}$ est paramétrée projectivement. De plus, pour tout ouvert $J' \subset \mathbf{RP}^1$ et pour tout difféomorphisme $v : (a, b) \rightarrow J'$ tel que $\gamma \circ v^{-1}$ est projectif, il existe $h \in \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbf{R})$ tel que $v = h \circ u$. En particulier, la structure projective de J est uniquement déterminée par γ et ne dépend pas du paramétrage choisi pour γ .*

Démonstration. Construisons un $(\mathbf{RP}^1, \text{PSL}(2, \mathbf{R}))$ atlas sur (a, b) . Soit $x \in (a, b)$. Par la remarque 2.7, il existe un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ et un difféomorphisme $s_x : I \rightarrow (a, b)$ contenant x dans son image tel que $\gamma \circ s_x$ soit une géodésique de lumière paramétrée projectivement. Alors la collection $\mathcal{A} = \{s_x^{-1}\}_x$ définit un atlas sur (a, b) dont les transitions sont projectives par le théorème 2.4. Soit $\text{dev} : (a, b) \rightarrow \mathbf{RP}^1$ une application de développement pour cette structure projective. On note $J = \text{dev}((a, b))$ son image. L'application $\gamma \circ \text{dev}^{-1} : J \rightarrow M$ est paramétrée projectivement, donc $u = \text{dev}$ satisfait les propriétés souhaitées. Supposons que $v : (a, b) \rightarrow J'$ est un difféomorphisme tel que $\gamma \circ v^{-1}$ est paramétrée projectivement. Par le théorème 2.4, la fonction $v \circ u^{-1}$ est localement projective. On en déduit qu'il existe $h \in \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbf{R})$ tel que $h|_J = v \circ u^{-1}$, donc $v = h \circ u$. ■

Exemple 2.15. Le tore de Hopf de paramètre $\lambda > 1$ est la variété compacte qu'on obtient en quotientant $\mathbf{R}^{p,q} \setminus \{0\}$ par le groupe engendré par la dilatation de rapport λ :

$$\text{Hopf}_\lambda = (\mathbf{R}^{p,q} \setminus \{0\}) /_{x \sim \lambda x}.$$

Toutes les géodésiques de lumière de Hopf_λ qui ne traversent pas l'origine ont un paramétrage projectif par \mathbf{R} . Les géodésiques de lumière émanant de l'origine ont la structure projective de $\mathbf{R}_{>0}$.

Étant donné un vecteur de lumière $v \in TM$, on peut associer une géodésique de lumière paramétrée projectivement *maximale* $\gamma_v : J_v \rightarrow M$, où J_v est un intervalle de $\widetilde{\mathbf{RP}}^1$ dont la structure projective est uniquement déterminée par la direction de v . Ici, le terme *maximale* signifie que si $\alpha : J \rightarrow M$ est une autre géodésique de lumière paramétrée tangente à v , alors il existe un difféomorphisme local $s : J \rightarrow J_v$ tel que $\alpha = \gamma_v \circ s$. Fixons une métrique g dans la classe conforme. Soit $\xi : (a, b) \rightarrow M$ la géodésique affine maximale pour g telle que $\xi'(0) = v$. Comme ξ est une géodésique de lumière paramétrée, la proposition 2.14 implique qu'il existe un ouvert $J_v \subset \widetilde{\mathbf{RP}}^1$ et un difféomorphisme $u : (a, b) \rightarrow J_v$ tels que $\gamma_v = \xi \circ u^{-1}$ est paramétrée projectivement. Soit $\alpha : J \rightarrow M$ une géodésique de lumière paramétrée tangente à v . Par la proposition 1.2, on peut trouver un difféomorphisme local $h : J \rightarrow (a, b)$ tel que $\alpha = \xi \circ h$. Soit $s = u \circ h : J \rightarrow J_v$. Alors s est un difféomorphisme local et on a bien

$$\alpha = \xi \circ h = \gamma_v \circ u \circ h = \gamma_v \circ s.$$

Ainsi γ_v est bien maximale.

2.2 Hyperbolicité au sens de Markowitz

On pose I l'intervalle $(-1, 1)$ que l'on munit de sa métrique de Poincaré $g_I = \frac{4dx^2}{(1-x^2)^2}$. On note ρ_I la distance riemannienne associée à cette métrique. Explicitement, on a

$$\rho_I(s, t) = \left| \ln \left(\frac{(1+t)(1-s)}{(1+s)(1-t)} \right) \right|.$$

Le groupe des isométries de (I, g_I) coïncide avec le groupe des homographies qui préservent I et on a l'égalité

$$\text{Isom}(I, g_I) = \left\{ x \mapsto \varepsilon \frac{t+x}{1+tx} \mid \varepsilon \in \{\pm 1\}, t \in (-1, 1) \right\} \simeq \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{R}.$$

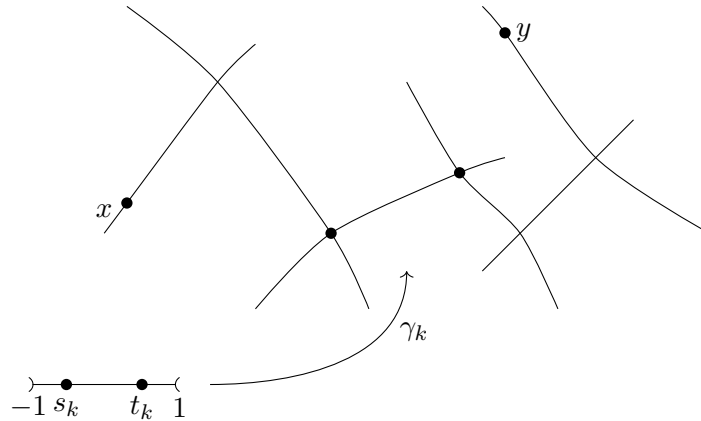
Lemme 2.16 (de Schwarz projectif). *Soit $f : I \rightarrow I$ une application projective. Alors f contracte la métrique hyperbolique :*

$$f^* g_I \leq g_I.$$

De plus, si l'égalité tient en un point, alors $f \in \text{Isom}(I, g_I)$.

Il sera parfois plus simple d'utiliser d'autres modèles pour I . Rappelons les deux autres modèles standards pour I :

- **Modèle de Poincaré.** L'application projective $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ définit un difféomorphisme projectif de I sur $\mathbf{R}_{>0}$. À travers cet isomorphisme, la métrique g_I s'écrit $f_* g_I = dx^2/x^2$. Le groupe projectif de $\mathbf{R}_{>0}$ est le groupe engendré par les dilatations $x \mapsto \lambda x$ pour $\lambda > 0$ et l'inversion $x \mapsto 1/x$.
- **Modèle projectif.** Soit (V, \mathbf{b}) un plan quadratique de signature $(1, 1)$. Dans la droite projective $\mathbf{P}(V)$, on définit l'ouvert $J = \{\mathbf{R}v \in \mathbf{P}(V) \mid \mathbf{b}(v, v) < 0\}$ qu'on munit de l'unique métrique riemannienne qui rend l'application $(\{v \in V \mid \mathbf{b}(v, v) = -1\}, \mathbf{b}) \rightarrow J$ isométrique sur son image. Soient x, y deux vecteurs isotropes transverses dans V tels que $\mathbf{b}(x, y) > 0$. Alors l'application $f : J \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ définie par $f(\mathbf{R}v) = \mathbf{b}(v, x)/\mathbf{b}(v, y)$ est un isomorphisme projectif isométrique. La distance riemannienne sur J s'écrit donc
$$\rho_J(\mathbf{R}u, \mathbf{R}v) = \left| \ln \left(\frac{\mathbf{b}(x, u)\mathbf{b}(y, v)}{\mathbf{b}(x, v)\mathbf{b}(y, u)} \right) \right|.$$

FIGURE 2.1 – Une chaîne de lumière de x à y .

2.2.1 Pseudo-distance de Markowitz

Soit $(M, [g])$ une variété conforme pseudo-riemannienne et soient $x, y \in M$. On appelle *chaîne de lumière* de x à y la donnée de (voir Figure 2.1) :

- Un entier $N \geq 1$, le nombre de *maillons* de la chaîne.
- Une suite finie $\gamma_1, \dots, \gamma_N : I \rightarrow M$ de géodésiques de lumière paramétrées projectivement, appelées *maillons* de la chaîne.
- Deux suites finies $s_1, \dots, s_N \in I$ et $t_1, \dots, t_N \in I$ telles que $\gamma_1(s_1) = x$, $\gamma_l(t_l) = y$ et pour tout $1 \leq k < N$:

$$\gamma_k(t_k) = \gamma_{k+1}(s_{k+1}).$$

On notera $\mathcal{C} = \{N, (\gamma_k), (s_k), (t_k)\}$ la donnée d'une chaîne de lumière. Soit \mathcal{C} une chaîne de lumière. La *longueur* de \mathcal{C} est par définition $L(\mathcal{C}) := \sum_i \rho_I(x_i, y_i)$. Cette longueur abstraite permet de définir la (pseudo)distance de Markowitz de x à y comme

$$\delta_M(x, y) = \inf_{\mathcal{C}} L(\mathcal{C}),$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des chaînes de lumière de x à y . A priori, il se pourrait que l'ensemble des chaînes de lumière de x à y soit vide, auquel cas on obtiendrait $\delta_M(x, y) = +\infty$. On vérifie que cela n'arrive pas dès que M est connexe.

Proposition 2.17. *Si M est connexe, alors deux points de M peuvent être reliés par une chaîne de lumière.*

La démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme 2.18. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne et $\|\cdot\|$ une norme riemannienne quelconque sur M . Alors pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x et il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $y \in U$ et pour tout vecteur lumière $v \in T_y M$ avec $\|v\| \leq 1$, le segment $\xi_{(x,v)}([- \varepsilon, \varepsilon])$ est contenu dans l'image d'une géodésique de lumière paramétrée projectivement sur $(-1, 1)$.*

Démonstration. Soient $x \in M$ et $v \in T_x M$ un vecteur de lumière tel que $\|v\| = 1$. Soit $\xi_{(x,v)} = [t \mapsto \exp_x(tv)]$ la géodésique de lumière pour ∇_g , qui est définie sur un voisinage $[-\tau, \tau]$ de l'origine pour un certain $\tau > 0$. Soit $u_{(x,v)}$ le paramétrage projectif pour la géodésique $\xi_{(x,v)}$ avec condition initiale $u_{(x,v)}(0) = u''_{(x,v)}(0) = 0$ et $u'_{(x,v)}(0) = 1$. On peut trouver $\alpha > 0$ tel

que u soit défini sur $[-\alpha, \alpha]$ et on peut toujours réduire α et supposer que $\alpha < \tau$. On écrit $u([-\alpha, \alpha]) = [a, b]$, pour $a < 0 < b$. Il existe un voisinage W de (x, v) dans TM tel que pour tout $(y, w) \in W$ avec w lumière, la géodésique $\xi_{(y,w)}$ est définie sur $[-\tau, \tau]$ et le paramétrage projectif $u_{(y,w)}$ pour la géodésique $\xi_{(y,w)}$ avec condition initiale $u_{(y,w)}(0) = u''_{(y,w)}(0) = 0$ et $u'_{(y,w)}(0) = 1$ est défini sur $[-\alpha, \alpha]$ et vérifie

$$u_{(y,w)}([-\alpha, \alpha]) \subset [2a, 2b].$$

Donc pour $(y, w) \in W$, la géodésique de lumière paramétrée projectivement $\gamma_{(x,v)} := \xi_{(x,v)} \circ u_{(x,v)}^{-1}$ satisfait

$$\xi_{(y,w)}([-\alpha, \alpha]) \subset \gamma_{(y,w)}([2a, 2b]).$$

On peut toujours paramétrer $\gamma_{(y,w)}$ par une homographie pour qu'elle soit définie sur $(-1, 1)$. Nous avons donc montré l'assertion sur un voisinage de (x, v) dans le fibré tangent lumière. Par compacité de $\{w \in T_x M \mid \|w\| \leq 1 \text{ et } g(w, w) = 0\}$, on peut toujours trouver $0 < \varepsilon < \alpha$ tel que $\xi_{(x,v)}([-\varepsilon, \varepsilon])$ est contenu dans l'image d'une géodésique de lumière paramétrée projectivement sur $(-1, 1)$ dans un voisinage de x . ■

L'analogie globale de ce résultat est faux : l'image d'une géodésique de lumière affine n'est pas toujours contenue dans l'image d'une géodésique de lumière paramétrée projectivement sur $(-1, 1)$. Prenons l'exemple de l'univers d'Einstein $M = \mathbf{R} \times \mathbf{S}^2$ muni de la métrique $g = -dt^2 \oplus d\sigma^2$. Une géodésique de lumière $\xi : \mathbf{R} \rightarrow M$ s'écrit $\xi(t) = (t, s(t))$ où $s : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}^2$ est une géodésique paramétrée à vitesse constante égale à 1. L'équation des paramétrages projectifs s'écrit alors

$$Su(t) = \frac{2}{n-2} \text{Ric}(\dot{\xi}(t), \dot{\xi}(t)) = 2.$$

On a donc une solution fondamentale $u(t) = \tan(\sqrt{2}t)$, d'où $\gamma(t) = \left(\frac{\tan^{-1}(t)}{\sqrt{2}}, s\left(\frac{\tan^{-1}(t)}{\sqrt{2}}\right) \right)$ est une géodésique paramétrée projectivement. Cependant $\gamma(\mathbf{R}) = \xi((-\pi/4, \pi/4)) \subsetneq \xi(\mathbf{R})$.

Démonstration de la proposition 2.17. Il suffit de montrer que la relation d'équivalence "x et y peuvent être reliés par une chaîne" est ouverte, c'est-à-dire que tout point x admet un voisinage $V \subset M$ tel que tout point de V peut être relié à x par une chaîne de lumière. Fixons une métrique g dans la classe conforme de M . Soit $x \in M$ et soit (X_1, \dots, X_n) un champ de repère lumière au voisinage de x . Pour un champ de vecteurs X , on pose ϕ_X^t l'application définie par $\phi_X^t(z) = \exp_z(tX(z))$. Soit θ l'application définie sur un voisinage de 0 dans \mathbf{R}^n par

$$\theta(t_1, \dots, t_n) = \phi_{X_1}^{t_1} \circ \dots \circ \phi_{X_n}^{t_n}(x)$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $\theta(0, \dots, t_i, \dots, 0) = \phi_{X_i}^{t_i}(x)$, donc $\frac{\partial \theta}{\partial t_i}(0) = X_i$. Le théorème d'inversion locale implique que l'application θ est un difféomorphisme local au voisinage de 0. Dans un voisinage V de x , on peut donc relier tout point à x par une suite d'au plus n -géodésiques de lumière de (M, g) . On peut toujours réduire V et choisir une norme riemannienne $\|\cdot\|$ sur V telle que θ soit contractante pour cette norme. Par le lemme 2.18, on peut encore réduire V de sorte que tout point de V soit relié à x par une chaîne de lumière contenant au plus n -maillons. ■

Donnons maintenant les propriétés qui font l'intérêt de cette construction. Justifions d'abord le nom de pseudo-distance : la longueur d'une chaîne ne dépend pas de l'ordre dans lequel on suit ses maillons. Ainsi δ_M est symétrique, c'est-à-dire

$$\delta_M(x, y) = \delta_M(y, x) \text{ pour tout } x, y \in M.$$

De plus, pour tous $x, y, z \in M$ la concaténation d'une chaîne de x à y avec une chaîne de y à z donne une chaîne de lumière de x à z . Cela implique que δ_M vérifie l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire

$$\delta_M(x, z) \leq \delta_M(x, y) + \delta_M(y, z) \text{ pour tout } x, y, z \in M.$$

Ainsi δ_M est bien une pseudo-distance. La propriété fondamentale de la pseudo-distance de Markowitz est qu'elle transforme les applications conformes en applications 1-Lipschitziennes :

Proposition 2.19. *Soit $\varphi : M \rightarrow N$ une application conforme. Alors pour tous $x, y \in M$, on a*

$$\delta_N(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \delta_M(x, y).$$

En particulier, pour tout $\varphi \in \text{Conf}(M)$, on a $\delta_M(\varphi(x), \varphi(y)) = \delta_M(x, y)$.

2.2.2 Fonctionnelle infinitésimale de Markowitz

Pour un vecteur $u \in TI$, on note $|u|$ la norme de Poincaré de u . Étant donné un point $x \in M$ ainsi qu'un vecteur de lumière $v \in T_x M$, on pose

$$F_M(v) := \inf_{\gamma} |u|,$$

où l'infimum est pris sur toutes les géodésiques paramétrées projectivement $\gamma : I \rightarrow M$ et tous les vecteurs $u \in TI$ tels que $\gamma_* u = v$. En notant $LM \subset TM$ le sous fibré formé des vecteurs de lumière de M , ceci définit une fonction $F_M : LM \rightarrow \mathbf{R}$. On vérifie que F_M est homogène, c'est-à-dire que pour tout vecteur de lumière $v \in LM$ et pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$F_M(\lambda v) = |\lambda| F_M(v).$$

On appellera cette fonctionnelle la *fonctionnelle infinitésimale de Markowitz*. Cette définition a été introduite par Markowitz dans [Mar81] et est inspirée des constructions classiques de type Kobayashi (voir par exemple [Kob84]). L'intérêt de cette fonctionnelle est que les applications conformes contractent les "longueurs" mesurées par cette fonctionnelle :

Proposition 2.20. *Soit $\varphi : M \rightarrow N$ une application conforme. Alors pour tout $v \in LM$, on a*

$$F_N(T\varphi \cdot v) \leq F_M(v).$$

Dans son article, Markowitz donne deux propriétés pour F_M qui sont classiques pour les constructions de Kobayashi.

Proposition 2.21 ([Mar81]). *$F_M : LM \rightarrow \mathbf{R}^+$ est semi-continue supérieurement.*

En particulier, la fonctionnelle F_M est mesurable et finie sur les compacts. Cela permet d'intégrer F_M sur des courbes définies sur un segment. Ainsi, le terme de droite dans le théorème suivant a un sens.

Théorème 2.22 ([Mar81]). *Soient $x, y \in M$. Alors*

$$\delta_M(x, y) = \inf_{\gamma: x \rightsquigarrow y} \int F_M(\gamma'(t)) dt,$$

où l'infimum est pris sur toutes les géodésiques de lumière lisses par morceaux de x à y .

Certaines propriétés de δ_M et F_M ne sont pas détaillées dans [Mar81]. Dans la suite de ce chapitre, nous détaillerons certaines propriétés de δ_M et F_M qui n'apparaissent pas dans la littérature à notre connaissance. Commençons par la propriété suivante.

Proposition 2.23. δ_M est continue.

Démonstration. Comme F_M est finie sur les compacts de LM , on peut trouver une métrique riemannienne g sur M telle que $F_M \leq \|\cdot\|_g$ sur LM , où $\|\cdot\|_g$ désigne la norme riemannienne associée à g . On note d_g pour la distance riemannienne associée à g . Pour tous $x, y \in M$, on définit

$$\tilde{\delta}(x, y) = \inf_{\gamma: x \rightsquigarrow y} \int \|\gamma'(t)\|_g dt$$

où l'infimum est pris sur toutes les géodésiques de lumière lisses par morceaux de x à y . La proposition 2.17 implique que $\tilde{\delta}(x, y) < +\infty$ pour tous $x, y \in M$. Par définition de la distance riemannienne, on a $d_g \leq \tilde{\delta}$. On vérifie que la fonction $\tilde{\delta}$ est symétrique et satisfait l'inégalité triangulaire, donc elle définit une distance sur M . Par le théorème 2.22, on a immédiatement $\delta_M \leq \tilde{\delta}$. Comme δ_M vérifie l'inégalité triangulaire, on a pour tout $x_1, y_1, x_2, y_2 \in M$:

$$|\delta_M(x_1, y_1) - \delta_M(x_2, y_2)| \leq \tilde{\delta}(x_1, x_2) + \tilde{\delta}(y_1, y_2).$$

Pour montrer la continuité de δ_M , il suffit donc de montrer que $\tilde{\delta}(x, x_k) \rightarrow 0$ pour toute suite (x_k) convergeant vers un point $x \in M$. Pour cela, nous allons montrer une propriété légèrement plus forte pour $\tilde{\delta}$ qui sera réutilisée à la section suivante. Nous allons montrer que $\tilde{\delta}$ est localement équivalente à d_g en montrant que pour tout $x \in M$, il existe un voisinage de x et une constante $\alpha > 0$ tels que $\tilde{\delta} \leq \alpha d_g$ sur ce voisinage. Ceci conclura la preuve.

Soit $x \in M$ et soit (X_1, \dots, X_n) un champ de repère lumière au voisinage de x . Soit θ l'application définie sur un voisinage de 0 dans \mathbf{R}^n par $\theta_y(t_1, \dots, t_n) = \phi_{X_1}^{t_1} \circ \dots \circ \phi_{X_n}^{t_n}(y)$, avec les mêmes notations que celles de la preuve de la proposition 2.17. On peut trouver $\varepsilon > 0$ et V un voisinage compact de x tels que pour tout $y \in V$, l'application θ_y est définie sur $\bar{B} = [-\varepsilon, \varepsilon]^n$ et est un difféomorphisme sur son image, avec $V \subset \theta_y(\bar{B})$. Par compacité de $\bar{B} \times V$, il existe deux constantes $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ telles que

$$(\alpha_1)^{-1}g \leq (\theta_x)_*g_{eucl} \leq \alpha_2 g, \text{ pour tout } x \in V \quad (2.7)$$

On fixe $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ et on note $B' = (-\varepsilon', \varepsilon')^n$. Quitte à choisir ε' suffisamment petit et quitte à réduire V , on peut supposer qu'il existe un voisinage W de x , convexe pour la métrique g , tel que $\theta_y(B') \subset W \subset \theta_y(B)$ pour tout $y \in V$. On peut alors réduire V à nouveau et supposer $V \subset \theta_y(B')$ pour tout $y \in V$. Soient $y, z \in V$ et soient $u \in B'$ tels que $z = \theta_y(u)$. On note c_1 la courbe paramétrant le segment $[0, u] \subset B'$ et c_2 une courbe de 0 à u formée de n segments de droites, dont les directions sont parallèles aux cotés du cube B' , et dont la longueur riemannienne est

$$L(c_1, g_{eucl}) = |u_1| + \dots + |u_n| \leq \sqrt{n} L(c_2, g_{eucl}).$$

Par construction, la courbe $\gamma_1 = \theta_y \circ c_1$ est une chaîne de lumière de y à z , donc par l'équation 2.7 :

$$\tilde{\delta}(y, z) \leq L(\gamma_1, g) \leq \alpha_1 L(\gamma_1, (\theta_y)_*g_{eucl}) = \alpha_1 L(c_1, g_{eucl}) \leq \sqrt{n} \alpha_1 L(c_2, g_{eucl}).$$

Comme W est un voisinage convexe pour g , on a par l'équation 2.7 :

$$\begin{aligned} d(y, z) &= \inf_{\gamma \subset W} L(\gamma, g) \\ &\geq \alpha_2^{-1} \inf_{\gamma \subset \theta_y(\bar{B})} L(\gamma, (\theta_y)_*g_{eucl}) \\ &= \alpha_2^{-1} L(\theta_y(c_2), (\theta_y)_*g_{eucl}) \\ &= \alpha_2^{-1} L(c_2, g_{eucl}). \end{aligned}$$

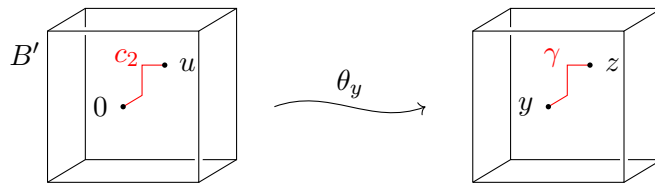


FIGURE 2.2

où les infimums sont pris sur l'ensemble des courbes lisses de y à z . Finalement on obtient donc

$$\tilde{\delta}(y, z) \leq \sqrt{n} \alpha_1 \alpha_2 d(y, z).$$

Il suffit donc de prendre $\alpha = \sqrt{n} \alpha_1 \alpha_2$. ■

En général, il n'est pas vrai que F_M est continue. Voir par exemple l'ouvert de la Figure 2.3.

2.2.3 Les différentes notions d'hyperbolicité

Jusqu'alors, nous n'avons pas cherché à savoir si δ_M définissait une distance sur M . En général, il n'est pas vrai que δ_M sépare les points. Par exemple, pour $M = \mathbf{R}^{p,q}$, la pseudo-distance $\delta_{\mathbf{R}^{p,q}}$ est identiquement nulle car elle est $\text{Sim}(\mathbf{R}^{p,q})$ -invariante et continue (proposition 2.23). On se propose de montrer le théorème suivant qui permet de caractériser les variétés pour lesquelles δ_M est une distance.

Théorème 2.24. *Soit M une variété conforme. Alors on a équivalence entre les deux propriétés suivantes :*

- (1) M est Markowitz-hyperbolique, i.e. δ_M est une distance sur M .
- (2) M est Royden-hyperbolique, i.e. pour tout compact $K \subset M$ et pour toute norme riemannienne $\|\cdot\|$ sur M , il existe une constante $c > 0$ telle que $F_M \geq c\|\cdot\|$ sur $LM|_K$.

Si l'une de ces conditions est réunie, alors δ_M est localement équivalente à une distance riemannienne. En particulier, la topologie induite par δ_M est la topologie standard de M . De plus, l'espace métrique (M, δ_M) est un espace métrique de longueur.

Nous aurons besoin du résultat intermédiaire suivant qui permet de contrôler la fonctionnelle de Markowitz le long d'une géodésique de lumière paramétrée projectivement.

Lemme 2.25. *Soit $\gamma : (-a, a) \rightarrow M$ une géodésique de lumière paramétrée projectivement et soit $t \in (-1, 1)$. Alors*

$$F_M(\gamma'(ta)) \leq \frac{1}{a(1-t^2)}.$$

Démonstration. La géodésique de lumière $\hat{\gamma}(x) = \gamma(ax)$ est définie sur $(-1, 1)$ et est paramétrée projectivement. En conséquence, on a

$$F_M(\hat{\gamma}'(t)) = F_M(a\gamma'(ta)) \leq g_I(\partial_t, \partial_t) = (1-t^2)^{-1}.$$

d'où le résultat. ■

Démonstration du théorème 2.24. On suppose que pour tout compact $K \subset M$ et pour toute norme riemannienne $\|\cdot\|$, il existe une constante $c > 0$ telle que $F_M \geq c\|\cdot\|$ sur $LM|_K$. On peut construire, à l'aide d'une exhaustion de compacts, une norme riemannienne $\|\cdot\|$ telle que $F_M(v) \geq \|v\|_g$ pour tout vecteur lumière $v \in LM$. Alors, en notant d_g la distance riemannienne associée à g , le théorème 2.22 implique que $\delta_M \geq d_g$. Ainsi M est Markowitz-hyperbolique. De plus, la preuve de la proposition 2.23 implique que δ_M est localement majorée par une distance riemannienne. Ainsi δ_M est localement équivalente à une distance riemannienne.

On suppose maintenant qu'il existe une suite (x_k) convergeant vers un point $x \in M$ et une suite de vecteur lumière $(v_k) \in L_{x_k}M$ convergeant vers $v \neq 0$, telles que

$$F_M(v_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

On va montrer qu'il existe deux points distincts x et y sur la géodésique engendrée par v tels que $\delta_M(x, y) = 0$. Par hypothèse, on peut trouver une suite de géodésiques paramétrées projectivement $\gamma_k : (-a_k, a_k) \rightarrow M$ avec :

$$\begin{cases} \gamma_k(0) = x_k, \\ \gamma_k'(0) = v_k, \\ a_k \rightarrow \infty, \text{ quand } k \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Par le lemme 2.25, on a l'inégalité $F_M(\gamma_k'(t)) \leq \frac{1}{2a_k}$ pour tout $t \in (-a_k/\sqrt{2}, a_k/\sqrt{2})$. En argumentant comme dans la preuve du lemme 2.11, on peut trouver une suite d'homographies $(h_k) \in \text{PSL}(2, \mathbf{R})$ telle que

$$\begin{cases} h_k(0) = 0, \\ h_k'(0) = 1, \\ (\gamma_k \circ h_k)''(0) \text{ converge quand } k \rightarrow \infty. \end{cases}$$

L'homographie h_k s'écrit explicitement sous la forme $h_k(s) = \frac{s}{t_k s + 1}$ pour un certain $t_k \in \mathbf{R}$. On peut toujours supposer que $t_k \geq 0$. Soit $\theta_k : [0, \delta] \rightarrow M$ la composée $\theta_k = \gamma_k \circ h_k$. Par construction, θ_k est une géodésique de lumière paramétrée projectivement dont le 1-jet en 0 vaut (x_k, v_k) et dont le 2-jet en 0 converge. De plus, pour k suffisamment grand, on a $h_k(\delta) = \delta/(t_k \delta + 1) \leq a_k/\sqrt{2}$. Cela implique que pour tout $0 \leq s \leq \delta$, $h_k(s) \in (-a_k/\sqrt{2}, a_k/\sqrt{2})$, d'où

$$F_M(\theta_k'(s)) = \frac{1}{(t_k s + 1)^2} F_M(\gamma_k'(h_k(s))) \leq \frac{1}{2a_k}.$$

Par le théorème 2.22, on en déduit que pour tous $s, t \in [0, \delta]$, on a

$$\delta_M(\theta_k(s), \theta_k(t)) \leq \frac{|t - s|}{2a_k}.$$

Par le lemme 2.9, on peut trouver ε tel que $\theta_k|_{[0, \varepsilon]}$ converge uniformément vers une courbe plongée $\theta : [0, \varepsilon] \rightarrow M$. Par continuité de δ_M on a donc $\delta_M(\theta(s), \theta(t)) = 0$, donc M n'est pas hyperbolique. La propriété de longueur sera montrée à la section 2.2.4 ■

En général, il est difficile de vérifier ces critères concrètement. À la section 2.2.5, nous étudierons un exemple explicitement. D'autres familles d'exemples seront données au Chapitre 3. Pour le moment, nous montrons la proposition suivante qui permet de créer (abstraitement) de nouveaux exemples de variétés Markowitz-hyperboliques à partir d'anciennes.

Proposition 2.26. *Si $\varphi : M \rightarrow N$ est une application conforme et si N est Markowitz-hyperbolique, alors M est Markowitz-hyperbolique. En particulier, tout ouvert d'une variété Markowitz-hyperbolique est Markowitz-hyperbolique.*

Démonstration. On vérifie le critère de Royden. Soit K un compact de M et $\|\cdot\|$ une norme riemannienne sur N . Comme N est Royden-hyperbolique par le théorème 2.24, il existe une constante $c > 0$ telle que $F_N \geq c\|\cdot\|$ sur le compact $\varphi(K)$. Par la proposition 2.20, on a

$$F_M \geq \varphi^* F_N \geq c\varphi^*\|\cdot\| \text{ sur } K.$$

Comme φ est un difféomorphisme local, $\varphi^*\|\cdot\|$ est une norme riemannienne sur M , donc F_M est minorée par une norme riemannienne sur tout compact. Ainsi M est Royden-hyperbolique, donc M est Markowitz-hyperbolique par le théorème 2.24. Comme l'application d'inclusion $U \hookrightarrow M$ d'un ouvert U dans une variété conforme M est une application conforme, tout ouvert d'une variété Markowitz-hyperbolique est Markowitz-hyperbolique. ■

Introduisons une troisième notion d'hyperbolicité. On dit qu'une variété conforme M est *Brody-hyperbolique* s'il n'existe pas de géodésique de lumière non-constante paramétrée projectivement

$$\gamma : \mathbf{R} \rightarrow M.$$

Du point de vue des paramétrages projectifs, une variété est Brody-hyperbolique si et seulement si la structure projective de toute géodésique de lumière est celle de $I = \mathbf{H}^1$.

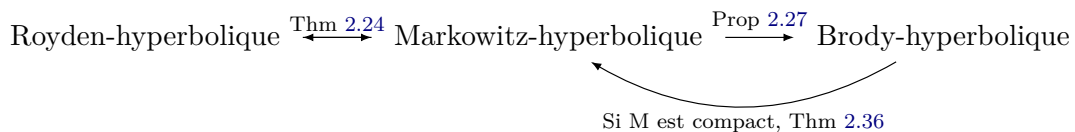
Proposition 2.27. *Toute variété Markowitz-hyperbolique est Brody-hyperbolique.*

Démonstration. Montrons la contraposée. Soit M une variété conforme telle qu'il existe une géodésique de lumière non-constante paramétrée projectivement $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow M$. Soient $x = \gamma(-1)$ et $y = \gamma(1)$. Pour tout $k \geq 2$, on définit la chaîne $\mathcal{C}_k = \{\gamma_k, s_k, t_k\}$ de x à y contenant un seul maillon $\gamma_k : I \rightarrow M$ défini par $\gamma_k(t) = \gamma(kt)$ pour tout $t \in (-1, 1)$, et avec $s_k = -t_k = 1/k$. Alors

$$\delta_M(x, y) \leq L(\mathcal{C}_k) = \rho_I(s_k, t_k) = 2 \ln \left(\frac{1 + 1/k}{1 - 1/k} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Donc $\delta_M(x, y) = 0$ et M n'est pas Markowitz-hyperbolique. ■

La réciproque de la proposition précédente est fautive en général. Par exemple, le domaine Ω donné à la Figure 2.3 est Brody-hyperbolique mais pas Markowitz-hyperbolique. Cependant, nous allons montrer que la réciproque est possible lorsque M est compact (théorème 2.36). Nous obtiendrons donc le schéma suivant :



2.2.4 Propriétés de longueur

Soit $(M, [g])$ une variété conforme. Notre but est de montrer que la distance de Markowitz est une distance de longueur sur M . Ceci peut sembler modeste, mais c'est un point non trivial. En effet, étant donné une chaîne $\mathcal{C} = \{N, (\gamma_k), (s_k), (t_k)\}$ entre deux points $a, b \in M$, on peut associer deux longueurs *a priori* distinctes à \mathcal{C} . D'une part, on a déjà défini la longueur abstraite de \mathcal{C} comme

$$L(\mathcal{C}) = \sum_i \rho_I(x_i, y_i).$$

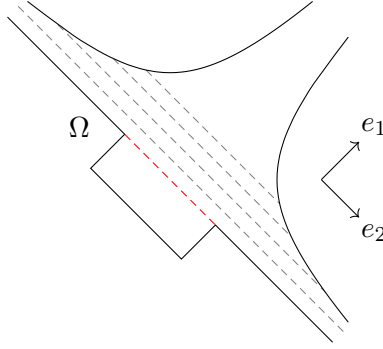


FIGURE 2.3 – Un domaine de $(\mathbf{R}^{1,1}, [dx_1 dx_2])$ Brody-hyperbolique qui n'est pas Markowitz-hyperbolique. La valeur de la fonctionnelle F_Ω dans la direction e_2 tend vers 0 à mesure qu'on se rapproche de l'intervalle rouge. Cependant, $F_\Omega > 0$ donc Ω ne contient pas de droite de lumière.

De plus, la chaîne de lumière \mathcal{C} de a à b définit naturellement une courbe paramétrée $\alpha_{\mathcal{C}} : [0, 1] \rightarrow M$ de a à b de la façon suivante : la courbe $\alpha_{\mathcal{C}}$ est la concaténation des courbes $\gamma_k|_{[s_k, t_k]}$, avec un paramétrage affine strictement croissant. La courbe paramétrée $\alpha_{\mathcal{C}}$ est donc bien définie et unique modulo un paramétrage par une fonction strictement croissante et affine par morceaux $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. On peut alors définir la distance de longueur de \mathcal{C} comme la distance de longueur de $\alpha_{\mathcal{C}}$ dans l'espace métrique (M, δ_M) , ce qui donne

$$L_\delta(\mathcal{C}) = L(\alpha_{\mathcal{C}}, \delta_M) = \sup_{0 \leq t_1 < \dots < t_m \leq 1} \delta(\alpha_{\mathcal{C}}(t_1), \alpha_{\mathcal{C}}(t_2)) + \dots + \delta(\alpha_{\mathcal{C}}(t_{m-1}), \alpha_{\mathcal{C}}(t_m)),$$

où l'infimum parcourt l'ensemble des subdivisions $0 \leq t_1 < \dots < t_m \leq 1$ de $[0, 1]$. Cette quantité est bien définie car la longueur de $\alpha_{\mathcal{C}}$ ne dépend pas du choix de paramétrage affine par morceaux qu'on a pris.

Lemme 2.28. Soient $(M, [g])$ une variété conforme et $a, b \in M$. Alors, pour toute chaîne de lumière \mathcal{C} de a à b , on a

$$L_\delta(\mathcal{C}) \leq L(\mathcal{C}).$$

Démonstration. On écrit $\mathcal{C} = \{N, (\gamma_k), (s_k), (t_k)\}$. Pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, on note $\mathcal{C}_k = \{1, \gamma_k, x_k, x_{k+1}\}$ la chaîne de $x_k = \gamma_k(s_k)$ à $x_{k+1} = \gamma_k(t_k)$ formée du k -ième maillon de \mathcal{C} . Par définition, on a

$$L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{C}_1) + \dots + L(\mathcal{C}_N).$$

Toujours pour $k \in \{1, \dots, N\}$, on note $\alpha_k = \alpha_{\mathcal{C}_k}$ la courbe paramétrée de x_k à x_{k+1} associée à \mathcal{C}_k . Par construction et par additivité de la longueur des courbes dans les espaces métriques, on a $L(\alpha_{\mathcal{C}}, \delta) = L(\alpha_1, \delta) + \dots + L(\alpha_N, \delta)$, ce qui revient à dire

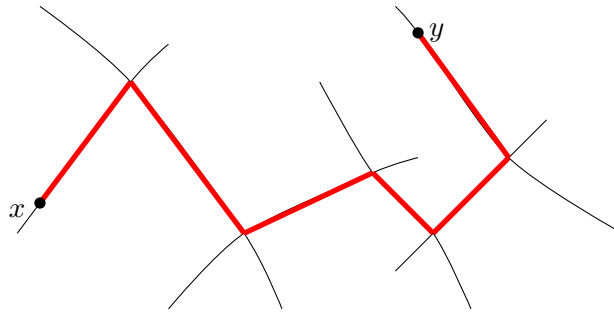
$$L_\delta(\mathcal{C}) = L_\delta(\mathcal{C}_1) + \dots + L_\delta(\mathcal{C}_N).$$

Ainsi, il suffit de vérifier $L_\delta(\mathcal{C}_k) \leq L(\mathcal{C}_k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$. On peut donc se ramener au cas où $N = 1$, avec une chaîne de lumière à un maillon $\mathcal{C} = \{\gamma, s, t\}$ et une courbe paramétrée $\alpha_{\mathcal{C}} = \gamma|_{[s, t]}$. Soit $t_1 = s < t_2 < \dots < t_m = t$ une subdivision de $[s, t]$. Pour $i \in \{0, \dots, m-1\}$, la chaîne de lumière à un maillon $\mathcal{C}_i = \{\gamma, t_i, t_{i+1}\}$ est une chaîne de $\gamma(t_i)$ à $\gamma(t_{i+1})$, donc on a

$$\delta_M(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq L(\mathcal{C}_i) = \rho_I(t_i, t_{i+1}).$$

Ainsi

$$\delta(\alpha_{\mathcal{C}}(t_1), \alpha_{\mathcal{C}}(t_2)) + \dots + \delta(\alpha_{\mathcal{C}}(t_{m-1}), \alpha_{\mathcal{C}}(t_m)) \leq \rho_I(t_1, t_2) + \dots + \rho_I(t_{m-1}, t_m) = \rho_I(s, t) = L(\mathcal{C}).$$

FIGURE 2.4 – Courbe paramétrée associée à une chaîne \mathcal{C} .

Par passage à la borne supérieure, on a donc bien

$$L_\delta(\mathcal{C}) = L(\alpha_{\mathcal{C}}, \delta_M) \leq L(\mathcal{C}).$$

■

Corollaire 2.29. *Soit $(M, [g])$ une variété Markowitz-hyperbolique. Alors (M, δ_M) est un espace métrique de longueur qui définit la topologie standard pour M .*

Rappelons qu'un *espace métrique de longueur* est un espace métrique (X, d) satisfaisant la propriété suivante : pour tous $a, b \in M$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une courbe continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ de a à b telle que

$$L(\gamma, d) \leq d(a, b) + \varepsilon.$$

Démonstration. On sait déjà par le théorème 2.24 que δ_M est une distance sur M qui définit la topologie standard de M . Soient $a, b \in M$ et $\varepsilon > 0$. Par définition de δ_M , il existe une chaîne \mathcal{C} de a à b telle que

$$L(\mathcal{C}) \leq \delta(a, b) + \varepsilon.$$

Soit $\alpha_{\mathcal{C}}$ la courbe associée à la chaîne \mathcal{C} . Par la proposition 2.28, on a $L(\alpha_{\mathcal{C}}, \delta_M) \leq L(\mathcal{C}) \leq \delta_M(a, b) + \varepsilon$, d'où le résultat. ■

2.2.5 Distance de Markowitz du diamant

Dans cette section, nous calculons explicitement la fonctionnelle infinitésimale de Markowitz ainsi que la pseudo-distance de Markowitz du diamant. En général, il est très dur de calculer entièrement la distance de Markowitz d'une variété conforme. Les symétries de $\mathbf{D}^{p,q}$ vont nous permettre de déterminer la fonctionnelle infinitésimale. Cela nous permettra de montrer que $\mathbf{D}^{p,q}$ est Markowitz-hyperbolique et de calculer entièrement sa distance de Markowitz.

Proposition 2.30. *En identifiant $\mathbf{D}^{p,q}$ avec $-\mathbf{H}^p \times \mathbf{H}^q$, la fonctionnelle de Markowitz de $\mathbf{D}^{p,q}$ vaut :*

$$F_{\mathbf{D}^{p,q}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{g_{\mathbf{H}^p} \oplus g_{\mathbf{H}^q}}.$$

Démonstration. On utilise la décomposition du fibré tangent $T\mathbf{D}^{p,q} = T\mathbf{H}^p \oplus T\mathbf{H}^q$ et on écrit les vecteurs tangents $v = (v_p, v_q)$ relativement à cette décomposition. Appelons \hat{F} la fonction qui à un vecteur tangent lumière $v \in L\mathbf{D}^{p,q}$ associe

$$\hat{F}(v) := \sqrt{g_{\mathbf{H}^p}(v_p, v_p) \oplus g_{\mathbf{H}^q}(v_q, v_q)}.$$

Cette fonction est positive ou nulle, invariante sous l'action de $\text{Conf}(\mathbf{D}^{p,q})$ par précomposition et est homogène, c'est-à-dire $\hat{F}(\lambda v) = \lambda \hat{F}(v)$ pour tout $v \in L\mathbf{D}^{p,q}$ et tout $\lambda \geq 0$. Soit $v_0 \in L\mathbf{D}^{p,q}$ non nul et soit $\alpha = F_{\mathbf{D}^{p,q}}(v_0)/\hat{F}(v_0)$ de sorte que $F_{\mathbf{D}^{p,q}}(v_0) = \alpha \hat{F}(v_0)$. Soit $v \in L\mathbf{D}^{p,q}$. Comme l'action de $\text{Conf}(\mathbf{D}^{p,q})$ sur les directions tangentées de lumière de $\mathbf{D}^{p,q}$ est transitive, il existe $\varphi \in \text{Conf}(\mathbf{D}^{p,q})$ et $\lambda \geq 0$ tel que $v = \lambda \varphi_* v_0$. Ainsi

$$F_{\mathbf{D}^{p,q}}(v) = \lambda F_{\mathbf{D}^{p,q}}(\varphi_* v_0) = \lambda F_{\mathbf{D}^{p,q}}(v_0) = \lambda \alpha \hat{F}(v_0) = \alpha \lambda \hat{F}(\varphi_* v_0) = \alpha \hat{F}(v).$$

Donc $F_{\mathbf{D}^{p,q}} = \alpha \hat{F}$. Il ne reste plus qu'à calculer α . Pour cela, on utilise un modèle propre du diamant. On fixe une origine $0 \in \mathbf{R}^{p,q}$ et on se donne une décomposition orthogonale $\mathbf{R}^{p,q} = \mathbf{R}^p \oplus \mathbf{R}^q$ en deux sous-espaces définis. On identifie $\mathbf{D}^{p,q}$ avec l'ouvert

$$\mathbf{D}^{p,q} = \left\{ x \in \mathbf{R}^{p,q} \mid \sqrt{-\mathbf{b}(x_p, x_p)} + \sqrt{\mathbf{b}(x_q, x_q)} < 1 \right\},$$

où on a écrit $x = x_p + x_q \in \mathbf{R}^p \oplus \mathbf{R}^q$. Soit $v = v_p + v_q$ tel que $\mathbf{b}(v_q, v_q) = -\mathbf{b}(v_p, v_p) = 1$. Alors la courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbf{D}^{p,q}$ définie par $\gamma(t) = \frac{1}{2}tv$ est une géodésique de lumière maximale telle que $\gamma(0) = 0$ et $\gamma'(0) = v/2$. De plus γ est paramétrée affinement dans $\mathbf{R}^{p,q}$, donc elle est paramétrée projectivement car $\mathbf{R}^{p,q}$ est Ricci plat. Ainsi

$$F_{\mathbf{D}^{p,q}}(v/2) = 1 = \alpha \hat{F}(v/2) = \sqrt{-4\mathbf{b}\left(\frac{v_p}{2}, \frac{v_p}{2}\right) + 4\mathbf{b}\left(\frac{v_q}{2}, \frac{v_q}{2}\right)} = \sqrt{2}.$$

On a donc bien $\alpha = 1/\sqrt{2}$, d'où le résultat. ■

Ainsi, la caractérisation du théorème 2.24 permet de conclure que $\mathbf{D}^{p,q}$ est Markowitz-hyperbolique. Grâce au théorème 2.22, on sait que pour tous $x, y \in \mathbf{D}^{p,q}$, on a

$$\delta_{\mathbf{D}^{p,q}}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \inf_{\gamma} L(\gamma, g),$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des courbes $\gamma = (\gamma_p, \gamma_q)$ de $\mathbf{H}^p \times \mathbf{H}^q$ entre x et y telles que γ_p et γ_q sont des géodésiques par morceaux paramétrées par la longueur d'arc, et où $g = g_{\mathbf{H}^p} \oplus g_{\mathbf{H}^q}$. On en déduit (voir le lemme 2.34) :

Proposition 2.31. *En identifiant $\mathbf{D}^{p,q}$ avec $-\mathbf{H}^p \times \mathbf{H}^q$, la pseudo-distance de Markowitz de $\mathbf{D}^{p,q}$ vaut :*

$$\delta_{\mathbf{D}^{p,q}}(x, y) = \max\{d(x_p, y_p), d(x_q, y_q)\}.$$

En particulier $\mathbf{D}^{p,q}$ est Markowitz-hyperbolique. ■

L'hyperbolicité du diamant $\mathbf{D}^{p,q}$ implique l'hyperbolicité de tous ses ouverts. Ces derniers forment une classe d'ouverts dits *propres* qui sera étudiée par la suite. Plus généralement, on parlera d'ensemble propre dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$:

Définition 2.32. On dit qu'un sous-ensemble $\Lambda \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ est *propre* s'il existe une projection stéréographique dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$ qui envoie Λ sur un sous-ensemble borné de $\mathbf{R}^{p,q}$.

De façon équivalente, un sous-ensemble de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ est propre s'il est contenu dans un diamant (voir aussi le lemme 1.23). Comme un ouvert d'une variété Markowitz-hyperbolique est encore Markowitz-hyperbolique, on obtient le corollaire suivant pour la proposition 2.31.

Corollaire 2.33. *Tout ouvert propre de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ est Markowitz-hyperbolique.* ■

Pour finir la preuve de la proposition 2.31, il suffit de montrer le lemme suivant.

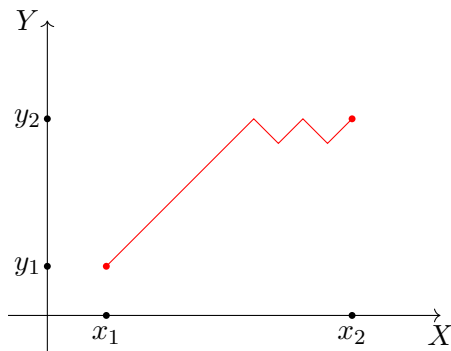


FIGURE 2.5

Lemme 2.34. Soient (X, g_X) et (Y, g_Y) deux variétés riemanniennes et soit $M = X \times Y$. On fixe $p_1 = (x_1, y_1)$ et $p_2 = (x_2, y_2)$ deux points de M et on note Γ la collection de toutes les courbes $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ de p_1 à p_2 telles que $x(t)$ et $y(t)$ sont des géodésiques par morceaux paramétrées à vitesse 1. Alors

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} L(\gamma, g_X \oplus g_Y) = \sqrt{2} \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}.$$

Démonstration. Supposons par exemple que $d_X(x_1, x_2) \geq d_Y(y_1, y_2)$. On procède par double inégalité. Soit $\gamma \in \Gamma$, qu'on écrit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Comme x est une courbe paramétrée par longueur d'arc de x_1 à x_2 , elle est définie sur un segment $[a, b]$ de longueur $|b - a| \geq d_X(x_1, x_2)$. Ainsi

$$L(\gamma, g_X \oplus g_Y) = \sqrt{2}|b - a| \geq \sqrt{2}d_X(x_1, x_2).$$

Donc

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} L(\gamma, g_X \oplus g_Y) \geq \sqrt{2} \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit α une courbe lisse de x_1 à x_2 de longueur $L(\alpha, g_X) \leq d_X(x_1, x_2) + \varepsilon$. Comme l'image de α est compacte, on peut toujours la recouvrir par un nombre fini de voisinages convexes. On peut donc trouver une courbe $x(t)$ entre x_1 et x_2 qui est la concaténation d'un nombre fini de morceaux de géodésiques de (X, g_X) paramétrées à vitesse 1, avec $L(x, g_X) \leq d_X(x_1, x_2) + \varepsilon$. Quitte à rallonger x très légèrement, on peut aussi demander que $d_X(x_1, x_2) < L(x, g_X)$. De la même manière, on peut trouver une courbe $y(t)$ entre y_1 et y_2 , géodésique par morceaux, telle que $L(y, g_Y) \leq L(x, g_X)$. On peut toujours rallonger y et supposer que $L(y, g_Y) = L(x, g_X)$ (voir Figure 2.5). Soit $\gamma \in \Gamma$ la courbe définie par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Alors

$$L(\gamma, g_X \oplus g_Y) = \sqrt{2}L(x, g_X) \leq \sqrt{2}d(x_1, x_2) + \sqrt{2}\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout ε , on obtient bien

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} L(\gamma, g_X \oplus g_Y) \leq \sqrt{2} \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}.$$

■

Par la proposition 2.31, la distance de Markowitz du diamant est une distance complète. On peut aussi vérifier que cette distance est géodésique, c'est-à-dire que deux points $x, y \in \mathbf{D}^{p,q}$ sont toujours reliés par une courbe continue dont la longueur vaut $\delta_{\mathbf{D}^{p,q}}(x, y)$. On peut même décrire entièrement les géodésiques de $(\mathbf{D}^{p,q}, \delta_{\mathbf{D}^{p,q}})$. Soient $x, y \in \mathbf{D}^{p,q}$ qu'on note $x = (x_p, x_q)$ et $y = (y_p, y_q)$, où les coordonnées font référence à une identification $\mathbf{D}^{p,q} \simeq$

$(-\mathbf{H}^p) \times \mathbf{H}^q$. On note $r = \delta(x, y)$, où $\delta = \delta_{\mathbf{D}^{p,q}}$. On suppose par exemple que $\delta(x, y) = d(x_p, y_p)$. Soit $\gamma(t) = (\gamma_p(t), \gamma_q(t))$ une géodésique de x à y définie sur $[0, r]$, ce qui revient à

$$\delta(\gamma(s), \gamma(t)) = |t - s|, \text{ pour tous } s, t \in [0, r].$$

Alors la courbe $\gamma_p : [0, r] \rightarrow \mathbf{H}^p$ satisfait

$$d(\gamma_p(s), \gamma_p(t)) \leq \delta(\gamma(s), \gamma(t)) = |t - s| \text{ et } d(\gamma_p(0), \gamma_p(r)) = r,$$

donc la courbe γ_p est la géodésique de \mathbf{H}^p entre x_p et y_p paramétrée par longueur d'arc. De plus, la courbe γ_q satisfait $d(\gamma_q(s), \gamma_q(t)) \leq |t - s|$. Réciproquement, toute courbe $\gamma = (\gamma_p, \gamma_q)$, où γ_p est la géodésique de x_p à y_p paramétrée à vitesse 1, et où γ_q est une courbe 1-Lipschitzienne de x_q à y_q , est une géodésique de x à y . Nous pouvons tirer deux conclusions de cette description des géodésiques :

- $(\mathbf{D}^{p,q}, \delta_{\mathbf{D}^{p,q}})$ n'est pas uniquement géodésique.
- Deux points sur un même photon sont reliés par une unique géodésique de $(\mathbf{D}^{p,q}, \delta_{\mathbf{D}^{p,q}})$, qui est exactement le segment de géodésique de lumière reliant ces deux points dans $\mathbf{D}^{p,q}$.

Exemple 2.35. Les courbes causales du diamant lorentzien $\mathbf{D}^{1,n-1}$ sont des géodésiques de l'espace métrique $(\mathbf{D}^{1,n-1}, \delta_{\mathbf{D}^{1,n-1}})$. Réciproquement, toute géodésique de l'espace métrique $(\mathbf{D}^{1,n-1}, \delta_{\mathbf{D}^{1,n-1}})$ contenant deux points causalement reliés est une courbe causale. Ceci est une conséquence du fait que deux points (s, x) et (t, y) de $\mathbf{R} \times \mathbf{H}^{n-1}$ sont causalement reliés (resp. chronologiquement reliés) si et seulement si

$$d(x, y) \leq |t - s|, \text{ (resp. } d(x, y) < |t - s| \text{)}.$$

Voir section 3.1.1 pour le langage de la causalité.

2.3 Un théorème de Brody en géométrie conforme pseudo-riemannienne

2.3.1 Théorème de Brody pseudo-riemannien

Théorème 2.36. *Soit $(M, [g])$ une variété conforme pseudo-riemannienne compacte. Alors M est Markowitz-hyperbolique, i.e. δ_M est une distance, si et seulement si M est Brody-hyperbolique, i.e. il n'existe pas de géodésique de lumière non-constante paramétrée projectivement $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow M$.*

La preuve repose sur deux étapes. Dans un premier temps, on montre, à l'aide du lemme de paramétrage qui suit, que si M n'est pas Markowitz-hyperbolique, alors il existe une suite de géodésiques de lumière paramétrées projectivement $\gamma_k : (-k, k) \rightarrow M$ qui converge uniformément sur tout compact vers une courbe $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow M$ avec $\lim_k \gamma'(0) \neq 0$. Dans un deuxième temps, on montre que la limite uniforme d'une suite de géodésiques de lumière paramétrées projectivement est toujours une géodésique de lumière paramétrée projectivement et que la convergence est C^∞ . Cela permet de conclure que $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow M$ est une géodésique de lumière non-constante sur M .

Lemme 2.37. *On munit M d'une norme riemannienne $\|\cdot\|$. Soit $\gamma : I \rightarrow M$ une géodésique de lumière paramétrée projectivement telle que $\|\gamma'(0)\| > c$. Alors il existe une homographie $h : I \rightarrow I$ telle que, en posant $\theta := \gamma \circ h$, on ait*

$$\begin{cases} \|\theta'(0)\| = c \\ \|\theta'(x)\| \leq \frac{c}{(1-x^2)}, \text{ pour tout } x \in I. \end{cases}$$

Démonstration. On peut toujours supposer que γ est définie sur \bar{I} , quitte à remplacer γ par $[x \mapsto \gamma(\alpha x)]$ pour un $\alpha \in (0, 1)$ suffisamment proche de 1. On pose alors $\gamma_t(x) = \gamma(tx)$ pour $x \in I$ et

$$f(t) := \sup_{x \in I} \|\gamma'_t(x)\|(1-x^2) = t \sup_{x \in I} \|\gamma'(tx)\|(1-x^2), \text{ pour } t \in [0, 1].$$

La fonction f est bien définie, continue sur $[0, 1]$, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = \sup_{x \in I} \|\gamma'(x)\| \geq \|\gamma'(0)\| > c$. On peut donc trouver $0 \leq t_0 \leq 1$ et $x_0 \in I$ tels que $f(t_0) = c = \|\gamma'_{t_0}(x_0)\|(1-x_0^2)$. Soit g l'unique élément de $\text{Isom}_0(I)$ envoyant 0 sur x_0 , c'est-à-dire $g(x) = \frac{x+x_0}{1+x_0x}$. On pose $\theta := \gamma \circ h$ où $h(x) = t_0 g(x)$ de telle sorte que $\theta = \gamma_{t_0} \circ g$. On a alors

$$\|\theta'(0)\| = \|\gamma'_{t_0}(x_0)\| \cdot \|g'(0)\| = \|\gamma'_{t_0}(x_0)\|(1-x_0^2) = c$$

et

$$\|\theta'(x)\|(1-x^2) = \|\gamma'_{t_0}(g(x))\| \cdot \|g'(x)\|(1-x^2) = \|\gamma'_{t_0}(g(x))\|(1-g(x)^2) \leq c.$$

■

Démonstration du théorème 2.36. On a vu à la proposition 2.27 que si M est Markowitz-hyperbolique alors M est Brody-hyperbolique, même sans l'hypothèse de compacité sur M .

Montrons le sens réciproque. On suppose que M est non Markowitz-hyperbolique. Fixons une norme riemannienne $\|\cdot\|$ sur M . Par le théorème 2.24, M est non Royden-hyperbolique. Ainsi il existe une suite de vecteurs de lumière $(v_k) \in LM$ convergeant vers $v \neq 0$ telle que

$$F_M(v_k) \rightarrow 0.$$

Le lemme de reparamétrisation permet de trouver une suite de géodésiques de lumière paramétrées projectivement $\gamma_k : (-1, 1) \rightarrow M$ telle que

$$\begin{cases} \|\gamma'_k(0)\| = k \\ \|\gamma'_k(x)\| \leq \frac{k}{(1-x^2)}, \text{ pour tout } x \in I. \end{cases}$$

En changeant (γ_k) avec $[x \mapsto \gamma_k(x/k)]$ on obtient une suite de géodésiques paramétrées projectivement $\gamma_k : (-k, k) \rightarrow M$ telle que

$$\begin{cases} \|\gamma'_k(0)\| = 1 \\ \|\gamma'_k(x)\| \leq \frac{1}{(1-(x/k)^2)}, \text{ pour tout } x \in (-k, k). \end{cases}$$

La suite (γ_k) est donc équi-Lipschitzienne sur tout compact de \mathbf{R} . Par le théorème d'Ascoli, la suite (γ_k) converge uniformément sur tout compact vers une application $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow M$ (après extraction). Par la proposition 2.8, la courbe γ est une géodésique de lumière paramétrée projectivement et $\gamma'(0) = \lim \gamma'_k(0) \neq 0$ donc γ est non-constante. ■

Remarque 2.38. Il n'est pas vrai que si (v_k) est une suite de vecteurs de lumière convergeant vers $v \in LM$ telle que $F_M(v_k) \rightarrow 0$, alors $F_M(v) = 0$. Par exemple, pour le tore de Hopf, la fonctionnelle F_{Hopf_λ} s'annule sur un ouvert dense de $L\text{Hopf}_\lambda$, mais $F_{\text{Hopf}_\lambda}(v) > 0$ pour tout vecteur de lumière radial.

Remarque 2.39. La preuve de [Wu81] dans le cadre projectif fait usage d'une connexion complète dans la classe projective de M (dont l'existence n'est pas toujours garantie, même si M est compacte). La preuve du théorème 2.36 ne fait pas usage de la complétude d'une métrique dans la classe conforme de M . Notre résultat n'est donc pas une conséquence de l'énoncé de Wu, et notre preuve s'applique de façon identique au cadre projectif et permet de retirer l'hypothèse de complétude d'une connexion dans la classe projective.

Corollaire 2.40. *Soit M une variété conforme pseudo-riemannienne compacte telle que $\text{Conf}(M)$ est non-compact. Alors il existe une géodésique de lumière non-constante paramétrée projectivement $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow M$.*

Démonstration. Si M est Brody-hyperbolique, alors M est Markowitz-hyperbolique par le théorème 2.36. En particulier, l'espace métrique (M, δ_M) est compact, donc $\text{Isom}(M, \delta_M)$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme. Or $\text{Conf}(M) \subset \text{Isom}(M, \delta_M) \subset \text{Homeo}(M)$ et $\text{Conf}(M)$ est fermé dans $\text{Homeo}(M)$ pour la topologie de la convergence uniforme. Ceci est par exemple une conséquence du Théorème 1.2 de [Fra12] (l'énoncé de ce Théorème est donné au Chapitre 7, voir théorème 7.2). On en déduit que $\text{Conf}(M)$ est fermé dans $\text{Isom}(M, \delta_M)$ et que $\text{Conf}(M)$ est compact. ■

2.3.2 Caractère ouvert de l'hyperbolicité de Markowitz

On se donne une variété M . Une variation C^2 de métriques sur M est une application

$$g : M \times P \rightarrow S^2T^*M,$$

de classe C^2 , où P est une variété de dimension finie et $g(\cdot, p)$ est une métrique pseudo-riemannienne sur M pour tout $p \in P$.

Théorème 2.41. *Soit M une variété compacte. La propriété "être Markowitz-hyperbolique" est une propriété ouverte sur l'espace des classes conformes de métriques sur M pour la topologie C^2 .*

La preuve est similaire à celle du théorème 2.36. On montre que si $g_k = g(\cdot, p_k)$ est une suite de métriques convergeant vers $g_\infty = g(\cdot, p_\infty)$, et si (v_k) est une suite de vecteurs convergeant vers $v \neq 0$, telle que v_k est un vecteur lumière pour $g(\cdot, p_k)$ et

$$F_M(v_k, g_k) \rightarrow 0,$$

alors il existe une géodésique de lumière paramétrée projectivement non-constante $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow (M, g_\infty)$. En effet, par le lemme 2.37, il existe une suite de géodésiques paramétrées projectivement

$$\gamma_k : (-k, k) \rightarrow (M, g_k)$$

telle que

$$\begin{cases} |\gamma_k'(0)| = 1 \\ |\gamma_k'(x)| \leq \frac{1}{(1-(x/k)^2)}, \text{ pour tout } x \in (-k, k). \end{cases}$$

Avec le théorème d'Ascoli, on obtient comme précédemment qu'une sous-suite de (γ_k) converge uniformément sur tout compact vers $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow M$. On conclut par le résultat général suivant.

Proposition 2.42. *Soit $\gamma_k : [a, b] \rightarrow M$ une suite de géodésiques paramétrées projectivement pour une variation C^2 de métriques g_k , convergeant uniformément vers $\gamma : [a, b] \rightarrow M$. Alors γ est soit une courbe dégénérée, soit une géodésique de lumière paramétrée projectivement pour $g := \lim_k g_k$.*

Le résultat persiste car on a les généralisations du lemme 2.9 et du lemme 2.11 suivantes

Proposition 2.43. *Soit $\gamma_k : I_k \rightarrow M$ une suite de géodésiques paramétrées projectivement pour (g_k) définies sur des intervalles I_k contenant 0 dans leur intérieur, avec*

$$J^2\gamma_k(0) \text{ convergente et } \lim_k \gamma_k'(0) \neq 0.$$

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que γ_k est définie sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ (après extension) et $\gamma_k|_{[-\varepsilon, \varepsilon]}$ converge C^2 vers une géodésique de lumière paramétrée projectivement $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow (M, \lim_k g_k)$. ■

Lemme 2.44. Soit $\gamma_k : [a, b] \rightarrow M$ une suite de géodésiques paramétrées projectivement pour (g_k) qui converge uniformément vers $\gamma : [a, b] \rightarrow M$. Alors, pour tout $x \in (a, b)$, il existe une sous-suite de (γ_k) et un voisinage V de x dans $[a, b]$ tel que $\gamma_k|_V$ converge C^2 vers une géodésique de lumière paramétrée projectivement pour $\lim_k g_k$ (possiblement dégénérée). ■

2.4 Hyperbolicité des variétés conformément plates

2.4.1 Longueur des photons

Soit $\varphi : \widehat{\mathbf{Ein}}^{p,q} \rightarrow (-\mathbf{S}^p) \times \mathbf{S}^q$ une identification conforme du revêtement double de l'univers d'Einstein, dont l'existence est donnée par la proposition 1.7. On note $g_\varphi = \varphi^*(g_{\mathbf{S}^p} \oplus g_{\mathbf{S}^q})$ la métrique riemannienne au quotient sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Soit $\gamma \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ un segment de photon, c'est-à-dire que γ est un sous-ensemble connexe contenu dans un photon $\Delta \in \text{Pho}(\mathbf{Ein}^{p,q})$. La longueur de γ relativement à φ est définie comme

$$L_\varphi(\gamma) = \frac{L(\gamma, g_\varphi)}{\sqrt{2}}.$$

La longueur $L_\varphi(\gamma)$ est donc $\leq \pi$. Sa valeur dépend du choix de l'identification conforme φ . Cependant, certaines propriétés des longueurs ne dépendent pas de φ . Soit $\gamma \in \mathbf{Ein}^{p,q}$ un segment de photon. Alors :

- $L_\varphi(\gamma) = 0$ si et seulement si γ est réduit à un point.
- $L_\varphi(\gamma) < \pi$ si et seulement si γ est strictement contenu dans le photon qui le contient.
- $L_\varphi(\gamma) = \pi$ si et seulement si γ est un photon.

En particulier, si $g \in \text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ alors $L_\varphi(\gamma) < \pi$ si et seulement si $L_\varphi(g(\gamma)) < \pi$. Ainsi, on notera $L(\gamma) = L_\varphi(\gamma)$ et il y aura un sens à dire $L(\gamma) < \pi$ ou $L(\gamma) = \pi$ même si $L(\gamma)$ n'a pas de sens si on ne précise pas l'identification φ . Cette longueur abstraite des segments de photon s'étend naturellement au cadre des géodésiques de lumière des variétés conformément plates. En effet, soit M une variété conformément plate et soit $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ une géodésique de lumière paramétrée (on ne fait pas d'hypothèse sur le paramétrage de γ). La courbe γ se relève en une géodésique de lumière $\tilde{\gamma} : (a, b) \rightarrow \widetilde{M}$. On définit alors

$$L(\gamma) = L(\text{dev}(\tilde{\gamma})),$$

où $\text{dev} : \widetilde{M} \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ est une application de développement. Encore une fois, la valeur de cette longueur n'est pas définie, mais nous allons vérifier que les propriétés $L(\gamma) < \pi$ et $L(\gamma) = \pi$ sont indépendantes du choix de relevé pour γ et du choix de l'application de développement. En effet, supposons qu'on prenne un autre relevé $\tilde{\gamma}_0$ pour γ et une autre application de développement dev_0 . On peut trouver $\alpha \in \pi_1(M)$ et un élément $g \in \text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ tels que $\tilde{\gamma}_0 = \alpha \circ \tilde{\gamma}$ et $\text{dev}_0 = g \circ \text{dev}$. On a alors

$$\text{dev}_0(\tilde{\gamma}_0) = g(\text{dev}(\alpha \circ \tilde{\gamma})) = g \circ \text{hol}(\alpha)(\text{dev}(\tilde{\gamma})).$$

Ainsi les propriétés $L(\gamma) < \pi$ et $L(\gamma) = \pi$ ne dépendent que de la structure conforme de M .

2.4.2 Lien avec la fonctionnelle de Markowitz

Soit M une variété conformément plate développable et soit $v \in LM$ non nul. Soit $\gamma_v : J_v \rightarrow M$ la géodésique de lumière paramétrée projectivement maximale tangente à v . On a le lien suivant entre la longueur de γ_v et la fonctionnelle de Markowitz :

$$L(\gamma_v) < \pi \iff F_M(v) > 0.$$

Supposons que $L(\gamma_v) < \pi$. Soit $\gamma : I \rightarrow M$ une géodésique de lumière paramétrée projectivement et $u \in TI$ telle que $\gamma_*u = v$. Fixons un relevé \tilde{v} pour v . On relève en conséquence γ_v et γ en des courbes $\tilde{\gamma}_v : I \rightarrow \tilde{M}$ et $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \tilde{M}$ et on note $\alpha_v = \text{dev}(\tilde{\gamma}_v)$ et $\alpha = \text{dev}(\tilde{\gamma})$ les développements de ces courbes. Comme $L(\gamma_v) < \pi$, l'image de α_v est strictement contenue dans un photon. En particulier, l'image de α_v est propre dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$, donc on peut trouver un diamant $\mathbf{D}^{p,q}$ contenant cette image. La courbe $\alpha : I \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ est paramétrée projectivement et à valeurs dans $\mathbf{D}^{p,q}$. De plus $\alpha_*u = \text{dev}_*\tilde{v}$, donc

$$|u| \geq F_{\mathbf{D}^{p,q}}(\text{dev}_*\tilde{v}).$$

Ainsi on obtient $F_M(v) \geq F_{\mathbf{D}^{p,q}}(\text{dev}_*\tilde{v}) > 0$.

Supposons maintenant que $L(\gamma_v) = \pi$. En utilisant les mêmes notations qu'avant pour $\tilde{\gamma}_v$ et α_v , on sait que l'adhérence de l'image de α_v est un photon $\Delta \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$. On a donc une surjection projective $\alpha : J_v \rightarrow \Delta \simeq \mathbf{RP}^1$. On en déduit qu'il existe un ouvert $J \subset J_v$ projectivement équivalent à \mathbf{R} tel que $\gamma_v|_J : J$ est tangente à v . Ainsi $\gamma_v|_J : J \simeq \mathbf{R} \rightarrow M$ est une géodésique de lumière paramétrée projectivement, donc $F_M(v) = 0$.

Corollaire 2.45. *Soit M une variété conformément plate. Alors M est Brody-hyperbolique si et seulement si pour toute géodésique de lumière paramétrée $\gamma \subset M$, on a $L(\gamma) < \pi$.*

2.4.3 Caractérisation de l'hyperbolicité pour les variétés conformément plates

Dans le cadre des variétés conformément plates, il est possible d'étendre le théorème 2.24 et de donner de nouvelles caractérisations des variétés Markowitz-hyperboliques. Nous allons montrer le théorème suivant, qui donne de telles caractérisations en termes de la longueur de géodésiques de lumière de M ainsi qu'en termes de l'équicontinuité de la famille d'applications conformes

$$\text{Conf}(\mathbf{D}^{p,q}, M) = \{\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M \text{ conforme}\}.$$

Théorème 2.46. *Soit M une variété conformément plate. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) M est Markowitz-hyperbolique, i.e. δ_M est une distance.
- (2) M est Royden-hyperbolique, i.e. pour tout compact $K \subset M$ et pour toute norme riemannienne $\|\cdot\|$ sur M , il existe une constante $c > 0$ telle que $F_M \geq c\|\cdot\|$ sur $LM|_K$.
- (3) Pour tout compact $K \subset M$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout segment de lumière $\gamma \subset M$ passant par K , on a $L(\gamma) \leq \pi - \varepsilon$.
- (4) Il existe une distance sur M telle que $\text{Conf}(\mathbf{D}^{p,q}, M)$ est équicontinue.

Démonstration. L'équivalence entre les propriétés (1) et (2) a déjà été montrée dans le cadre général des variétés conformes, voir théorème 2.24. L'équivalence (2) \Leftrightarrow (3) est similaire à la preuve du Corollaire 2.45. L'implication (1) \Rightarrow (4) découle du fait que si M est Markowitz-hyperbolique, les applications conformes $\mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ sont 1-Lipschitziennes. En effet si M est hyperbolique, toute application conforme $\mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ est 1-Lipschitzienne.

Montrons (4) \Rightarrow (3). Pour cela nous allons montrer la contraposée. Supposons qu'il existe une suite $v_k \in L_{x_k}M$ convergeant vers $v \in L_xM$ non nul et suite de géodésiques de lumière γ_k tangentes à v_k telles que

$$L(\gamma_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \pi.$$

On peut toujours réduire les γ_k et supposer que $L(\gamma_k) < \pi$ pour tout $k \geq 0$. On relève les suites (x_k) et (v_k) en des suites convergentes (\tilde{x}_k) et (\tilde{v}_k) avec $\tilde{v}_k \in L_{\tilde{x}_k} \widetilde{M}$. Soit $\text{dev} : \widetilde{M} \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ une application de développement. On note $(\tilde{\gamma}_k)$ une suite de relevé de (γ_k) et $\alpha_k = \text{dev} \circ \tilde{\gamma}_k$. Pour tout k , l'image de α_k est contenue dans un photon $\Delta_k \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$. Notons $V_k \subset \Delta_k$ pour l'image de α_k . Soit $\mathcal{C}_k \subset V_k$ une suite de compacts connexes contenant x_k telle que $L(\mathcal{C}_k) \rightarrow \pi$.

Lemme 2.47. *Soit $V \subset \Delta$ un intervalle ouvert contenu dans un photon. Alors pour tout compact connexe $\mathcal{C} \subset V$, il existe une base de voisinage de \mathcal{C} formée de diamants.*

Démonstration du lemme 2.47. Comme l'action de $\text{PO}(p+1, q+1)$ est transitive sur l'espace des photons $\text{Pho}(\mathbf{Ein}^{p,q})$, on peut toujours faire un choix spécifique pour Δ . De plus, l'action de $\text{PGL}(2, \mathbf{R})$ sur les compacts connexes d'intérieur non vide strictement inclus dans \mathbf{RP}^1 est transitive, donc l'action de $\text{Stab}(\Delta)$ sur les compacts connexes d'intérieur non vide strictement inclus dans Δ est transitive. On peut donc se ramener au cas où \mathcal{C} est un segment de lumière borné dans $\mathbf{R}^{p,q}$. Soit $\mathbf{R}^{p,q} = H_p \oplus H_q$ une décomposition orthogonale, et soit $u = u_p + u_q \in \mathbf{R}^{p,q}$ isotrope tel que $\mathcal{C} = \{tu \mid t \in [-1, 1]\}$. On peut toujours supposer que $\mathbf{b}(u_p, u_p) = -\mathbf{b}(u_q, u_q) = -1/2$. Pour $\varepsilon > 0$, on note \mathbf{D}_ε le diamant défini comme

$$\mathbf{D}_\varepsilon = \left\{ v_p + v_q \in \mathbf{R}^{p,q} \mid \sqrt{-\mathbf{b}(v_p, v_p)} + \sqrt{\mathbf{b}(v_q, v_q)} < \sqrt{2} + \varepsilon \right\}.$$

Par construction, le diamant \mathbf{D}_ε contient \mathcal{C} . Soit $v = -u_p + u_q$ et φ_λ la similitude de $\mathbf{R}^{p,q}$ définie par

$$\varphi_\lambda(u) = u, \quad \varphi_\lambda(v) = v/\lambda^2 \quad \text{et} \quad \varphi_\lambda = \lambda^{-1} \text{Id sur } u^\perp \cap v^\perp,$$

pour $\lambda \geq 1$. Montrons que la famille $\{\varphi_\lambda(\mathbf{D}_\varepsilon)\}_{\varepsilon, \lambda}$ forme une base de voisinage de \mathcal{C} . Comme φ_λ agit trivialement sur la droite engendrée par u , tous les $\varphi_\lambda(\mathbf{D}_\varepsilon)$ contiennent \mathcal{C} . Soit $f : \mathbf{R}^{p,q} \rightarrow \mathbf{R}u$ la projection sur u parallèlement à v^\perp . Pour $\varepsilon > 0$, un calcul direct montre que

$$f(\mathbf{D}_\varepsilon) = \{tu \mid t \in (-\sqrt{2} - \varepsilon/2, \sqrt{2} + \varepsilon/2)\}.$$

Soit V un voisinage de \mathcal{C} . On peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $f(\mathbf{D}_\varepsilon) \subset V$. Comme la famille φ_λ converge uniformément sur tout compact vers la projection f , on peut trouver $\lambda > 1$ suffisamment grand tel que $\varphi_\lambda(\mathbf{D}_\varepsilon) \subset V$, d'où le résultat. \blacksquare

Par le lemme 2.47, on peut trouver pour tout $k \geq 0$ une application conforme $\psi_k : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ telle que $\psi_k(\mathbf{D}^{p,q})$ est un voisinage arbitrairement petit de \mathcal{C}_k dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Par homogénéité, on peut toujours supposer que $\psi_k(0) = \text{dev}(\tilde{x}_k)$.

Lemme 2.48. *Soit $\gamma : J \rightarrow M$ une géodésique de lumière paramétrée projectivement et $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \widetilde{M}$ un relevé de γ . Si $L(\gamma) < \pi$, alors dev est injective en restriction à l'image de $\tilde{\gamma}$. De plus, pour tout compact $\mathcal{C} \subset J$, il existe un voisinage V de $\tilde{\gamma}(\mathcal{C})$ dans \widetilde{M} tel que $\text{dev}|_V$ est injective.*

Démonstration du lemme 2.48. Soit Δ un photon contenant l'image de la courbe $\alpha = \text{dev} \circ \tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$. Comme $L(\alpha) < \pi$, l'immersion $\alpha : J \simeq \mathbf{R} \rightarrow \Delta \simeq \mathbf{S}^1$ n'est pas surjective, donc elle est injective. Ainsi dev est injective en restriction à l'image de $\tilde{\gamma}$. En particulier, pour tout compact $\mathcal{C} \subset J$ la restriction de dev au compact $\tilde{\gamma}(\mathcal{C})$ est injective. Comme dev est un difféomorphisme local, on en déduit que dev est injective en restriction à un voisinage de $\tilde{\gamma}(\mathcal{C})$. \blacksquare

Par le lemme 2.47, on peut toujours réduire l'image de ψ_k et inverser localement dev sur un voisinage de $\psi_k(\mathbf{D}^{p,q})$. On peut donc trouver une suite d'application $\tilde{\varphi}_k : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow \widetilde{M}$ telle que $\text{dev} \circ \tilde{\varphi}_k = \psi_k$ et $\tilde{\varphi}_k(0) = \tilde{x}_k$. Soit $\varphi_k : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ la projection de $\tilde{\varphi}_k$ à M . Supposons par l'absurde que φ_k soit équicontinue sur un voisinage de 0. Comme $\varphi_k(0) = x_k \rightarrow x$ et que M est localement compacte, la suite (φ_k) converge uniformément au voisinage de l'origine. On en déduit que (ψ_k) converge uniformément dans un voisinage de l'origine. Ceci contredit la construction de (ψ_k) . ■

Remarque 2.49. Dans la condition (3), on ne peut pas relâcher le fait que les photons doivent rester dans un compact. En effet, il existe des domaines de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ qui sont Markowitz-hyperboliques et qui contiennent des segments de photons dont la taille est arbitrairement proche de π . Les conditions (3) et (4) ne peuvent être énoncées que dans le cadre conformément plat (notamment pour que $\text{Conf}(\mathbf{D}^{p,q}, M)$ soit non vide).

Chapitre 3

Propriétés des distances pour les ouverts de l'univers d'Einstein

Pour les domaines de l'univers d'Einstein, il existe différentes notions de convexité dans la littérature. En signature lorentzienne, une notion classique de convexité est celle de *convexité causale*. Les ouverts causalement convexes de $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ sont une classe intéressante de domaines car ils fournissent des exemples de variétés globalement hyperboliques. Au sein de ces ouverts, il existe une classe de domaines appelés globalement hyperboliques *maximaux* qui a été étudiée en détail par Rossi [Sal13, Sect. 3] et Smaï [Sma23b].

Dans l'univers d'Einstein lorentzien $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$, une autre notion de convexité, appelée *convexité duale*, a été introduite par Zimmer [Zim18]. La convexité duale se rapproche fortement de la notion de convexité classique pour les ouverts de l'espace affine, où les hyperplans d'appui du convexe sont remplacés par des cônes de lumière d'appui (voir section 3.1.3 pour une définition précise).

Après avoir rappelé ces deux notions de convexité, nous verrons que le revêtement universel $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1} \rightarrow \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ donne une correspondance biunivoque entre les ouverts dualement convexes de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ et les ouverts causalement convexes globalement hyperboliques de $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$. Nous obtenons les relations suivantes au sein des ouverts connexes (voir proposition 3.18).

$$\begin{array}{ccc} \text{Dualement convexe dans } \mathbf{Ein} & \longleftrightarrow & \text{Causalement convexe GH maximal } \widetilde{\mathbf{Ein}} \\ & & \Downarrow \\ & & \text{Causalement convexe dans } \widetilde{\mathbf{Ein}} \end{array}$$

Nous introduisons une autre notion de convexité qui étend la convexité duale de Zimmer : la *faible dualité convexe*. L'intérêt des ouverts faiblement dualement convexes est que la pseudo-distance de Markowitz de ces ouverts jouit de propriétés remarquables :

Proposition 3.1. *Soit $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ un ouvert faiblement dualement convexe Brody-hyperbolique. Alors Ω est Markowitz-hyperbolique et (Ω, δ_Ω) est un espace métrique de longueur, dont les photons sont des géodésiques. Si de plus Ω est propre, alors δ_Ω est complète.*

La preuve de cette proposition est en partie basée sur l'étude d'une pseudo-distance introduite par Markowitz dans [Mar82] (voir section 3.3). La complétude de la distance de Markowitz pour les ouverts propres dualement convexes était déjà connue par les travaux de Zimmer (voir [Zim18, Thm. 9.1]) et le calcul de géodésiques de δ_Ω est réalisé dans le cas des ouverts propres dualement convexes de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ dans un travail en collaboration avec B. Galiay

[CG24]. La proposition 3.1 montre en particulier qu'il est possible d'étendre ces preuves à la situation plus générale des ouverts faiblement dualement convexes.

Nous pensons qu'il est possible de retirer l'hypothèse de propriété de l'ouvert Ω pour obtenir la complétude de δ_Ω . Pour les ouverts dualement convexes en signature lorentzienne, nous obtenons cette amélioration.

Théorème 3.2. *Soit Ω un ouvert causalement convexe de $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$, globalement hyperbolique maximal, qui ne contient pas de géodésique de lumière non-constante $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \Omega$ paramétrée projectivement. Alors δ_Ω définit une distance de longueur complète conformément invariante sur Ω , dont les photons sont des géodésiques.*

Ce résultat peut être comparé à son analogue en géométrie projective plate : pour tout ouvert convexe $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ne contenant pas de droite, la distance de Hilbert est une distance complète sur Ω . Des résultats similaires existent aussi pour les ouverts de la Grassmannienne (voir [LZ19, Thm. 4.6]). En géométrie complexe, on sait aussi que pour les ouverts convexes de \mathbf{C}^n qui ne contiennent pas de droite complexe, la métrique de Kobayashi est complète (voir [Bar80]).

Le théorème 3.2 s'inscrit dans l'étude des variétés globalement hyperboliques conformément plates maximales. Cette étude a d'abord été menée par Rossi, qui montre [Sal13, Thm. 4.4] que $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ est la seule variété globalement hyperbolique maximale telle qu'il existe une géodésique de lumière paramétrée projectivement sur un intervalle $\mathbf{R} \subsetneq J \subset \widetilde{\mathbf{RP}}^1$. L'étude du cas plus général des variétés globalement hyperboliques maximales admettant une géodésique de lumière paramétrée projectivement sur \mathbf{R} est un sujet de recherche actif étudié par Barbot et Smaï. On renvoie à la thèse de Smaï pour l'étude de ces variétés [Sma22b] ainsi qu'à [Sma23a].

3.1 Les différentes notions de convexité

Cette section est consacrée à des rappels sur les différentes notions de convexité que nous avons mentionnées précédemment. Nous commençons par introduire des notions classiques de causalité en géométrie lorentzienne. Cela nous permettra de présenter les ouverts *causalement convexes maximaux* et d'énoncer la caractérisation qu'en donne Smaï. Nous définissons ensuite la *convexité duale* de Zimmer. Enfin, nous proposons une nouvelle notion de convexité en termes d'hypersurfaces de Möbius d'appui, dite *convexité duale faible*, qui étend la convexité duale de Zimmer.

3.1.1 Causalité

Nous présentons quelques notions de causalité classiques en géométrie lorentzienne. Pour une étude plus large, nous renvoyons à [MS08]. On se place en signature lorentzienne.

Orientation et structure causale

Soit $(M, [g])$ une variété conforme lorentzienne. En chaque point $x \in M$, l'ensemble des vecteurs de type temps de $T_x M$ a deux composantes connexes. On dit que M est *orientable en temps* s'il existe sur M un choix continu de telles composantes connexes. Comme chacune de ces composantes connexes est convexe pour la structure affine sur chaque espace tangent, une variété est orientable en temps si et seulement s'il existe un champ de vecteurs lisse X de type temps. Le choix d'un tel champ de vecteurs s'appelle une orientation temporelle. On dira qu'un vecteur temps $v \in TM$ est *futur* s'il est dans la même composante que X , ce qui revient à l'inégalité $g(v, X) < 0$. Sinon, on dira que v est *passé*.

Définition 3.3. Un *espace-temps conforme* est une variété conforme lorentzienne orientable en temps.

Soit M un espace-temps conforme qu'on munit d'une orientation en temps. On dira qu'une courbe causale γ est orientée vers le futur si son vecteur vitesse $\dot{\gamma}(t)$ est futur pour tout t . Ceci nous permet de définir deux relations binaires sur M , appelées *relations de causalité*, définies comme suit. Soient $x, y \in M$. On dit que x est *causalement relié* à y , et on note $x \leq y$, s'il existe une courbe causale future de x à y . Le *futur causal* et le *passé causal* de x , notés $J^+(x)$ et $J^-(x)$, sont définis respectivement comme

$$J^+(x) = \{z \in M \mid x \leq z\} \text{ et } J^-(x) = \{z \in M \mid z \leq x\}.$$

De même on dit que x est *chronologiquement relié* à y , et on note $x \ll y$, s'il existe une courbe temps future de x à y . Le *futur chronologique* et le *passé chronologique* d'un point x , notés $I^+(x)$ et $I^-(x)$, sont définis respectivement comme

$$I^+(x) = \{z \in M \mid x \ll z\} \text{ et } I^-(x) = \{z \in M \mid z \ll x\}.$$

Pour deux points $x, y \in M$ avec $x \leq y$, il sera aussi intéressant de considérer le *diamant causal* et le *diamant chronologique* engendré par x et y , notés $J(x, y)$ et $I(x, y)$ et définis respectivement comme

$$J(x, y) = J^+(x) \cap J^-(y) \text{ et } I(x, y) = I^+(x) \cap I^-(y).$$

Les relations \ll et \leq sont toujours transitives mais ne définissent pas toujours des relations d'ordre sur M . Les courbes temps étant des courbes causales, on a immédiatement

$$x \ll y \Rightarrow x \leq y. \quad (3.1)$$

Un ensemble X muni de deux relations d'ordre \ll et \leq vérifiant la relation de compatibilité 3.1 est appelé ensemble causal [MS08]. Ainsi, tout espace-temps conforme $(M, [g])$ est naturellement un espace causal (M, \leq, \ll) .

Donnons des exemples de structure causale :

- *Structure causale de l'espace de Minkowski* : On munit $\mathbf{R}^{1,n-1}$ de son produit standard \mathbf{b} et on choisit un vecteur temps v . Le vecteur v détermine une orientation temporelle sur $\mathbf{R}^{1,n-1}$: un vecteur v est de type futur si et seulement si $\mathbf{b}(v, v) < 0$ et $\mathbf{b}(u, v) < 0$. On peut alors vérifier que pour tous $x, y \in \mathbf{R}^{1,n-1}$, on a

$$x \ll y \iff y - x \text{ est futur} \iff \mathbf{b}(y - x, y - x) < 0 \text{ et } \mathbf{b}(y - x, v) < 0.$$

Remarque 3.4. Pour deux points $x, y \in \mathbf{R}^{1,n-1}$ causalement reliés, le diamant chronologique $I(x, y)$ est un diamant au sens de la section 1.4. La paire $\{x, y\}$ est une sphère de Möbius négative de dimension 0, c'est exactement le bord temps de $I(x, y)$.

- *Structure causale sur $\widehat{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$* : On identifie $\widehat{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ avec le produit $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1}$ muni de la métrique $-dt^2 \oplus d\sigma^2$. On fixe l'orientation temporelle en décrétant que le champ de vecteurs ∂_t est futur. Si d désigne la distance ronde de la métrique ronde sur $d\sigma^2$, alors deux points (s, x) et (t, y) de $\widehat{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ satisfont $(s, x) \ll (t, y)$ si et seulement si

$$d(x, y) < t - s.$$

En particulier $I^\pm((s, x)) = \{(t, y) \mid d(x, y) < \pm(t - s)\}$. De même on vérifie $J^\pm((s, x)) = \{(t, y) \mid d(x, y) \leq \pm(t - s)\}$. Pour un point $p \in \widehat{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$, la partie espace de p est la réunion des points qui ne sont pas causalement reliés à p :

$$E(p) = \widehat{\mathbf{Ein}}^{1,n-1} \setminus (J^+(p) \cup J^-(p)).$$

- Plus généralement, si $(X, d\sigma^2)$ est une variété riemannienne et si $M = \mathbf{R} \times X$ est muni de la métrique produit $-dt^2 \oplus d\sigma^2$, le champ de vecteurs temps ∂_t définit une orientation temporelle sur M . On peut alors vérifier qu'une courbe lisse $\gamma = (\gamma_{\mathbf{R}}, \gamma_X)$ est future si $\gamma_{\mathbf{R}}$ est strictement croissante et $\|\gamma'_X\| \leq |\gamma'_{\mathbf{R}}|$. Ainsi, pour deux points (s, x) et (t, y) , on a

$$(s, x) \ll (t, y) \iff d_X(x, y) < t - s.$$

En toute généralité, la seule connaissance de la structure causale peut s'avérer inintéressante, comme on le voit à l'aide de la proposition suivante.

Proposition 3.5 ([MS08, page 19]). *Soit $(M, [g])$ un espace-temps conforme compact. Alors M est totalement vicieux, c'est-à-dire $x \ll y$ pour tous $x, y \in M$.*

Par exemple, les structures causales sur $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ et son revêtement double $\widehat{\mathbf{Ein}}$ sont triviales. Ainsi, pour l'étude des structures causales, on est amené à ajouter des hypothèses de causalité. Par exemple, une hypothèse possible est que l'espace-temps M soit *causal*, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de lacet causal dans M , ou encore $(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$. Nous renvoyons à [MS08] pour une vue d'ensemble des différentes hypothèses causales.

Globale hyperbolicité

Nous introduisons maintenant l'une des hypothèses causales les plus contraignantes, qui est source de beaucoup d'exemples : la globale hyperbolicité. Pour cela, nous devons réintroduire la notion d'hypersurface de Cauchy. Soit $(M, [g])$ un espace-temps conforme. Une *hypersurface de Cauchy* de M est une hypersurface topologique Σ telle que toute courbe causale inextensible $\gamma \subset M$ intersecte Σ en exactement un point. On vérifie alors que Σ est un sous-ensemble *acausal* de M , i.e. $x \notin J^+(y)$ pour tous $x, y \in \Sigma$. On dit que M est *globalement hyperbolique* si M admet au moins une hypersurface de Cauchy.

Théorème 3.6 ([BS05],[MS08]). *Soit $(M, [g])$ un espace-temps conforme. On a l'équivalence :*

- M est globalement hyperbolique.
- Il existe une fonction temps de Cauchy $t : M \rightarrow \mathbf{R}$, c'est-à-dire que le gradient ∇t est un champ de vecteurs temps passé et les niveaux de t sont des hypersurfaces de Cauchy.
- M est causal et pour tous $x, y \in M$ avec $x \leq y$, le diamant causal $J(x, y)$ est compact.

Si l'une de ces conditions est satisfaite, alors M admet des hypersurfaces de Cauchy lisses. De plus toutes les hypersurfaces de Cauchy lisses sont difféomorphes entre elles. Enfin, si $\Sigma \subset M$ est une hypersurface de Cauchy lisse, il existe un difféomorphisme $M \simeq \mathbf{R} \times \Sigma$ tel que chacun des facteurs $\mathbf{R} \times \{x\}$ et $\{t\} \times \Sigma$ sont orthogonaux.

Exemple 3.7. L'univers d'Einstein, l'espace de Minkowski et le diamant lorentzien sont des espace-temps globalement hyperboliques. On peut les identifier conformément à un produit $\mathbf{R} \times \Sigma$ où Σ est à courbure constante. La projection sur \mathbf{R} est une fonction temps de Cauchy. Plus généralement, le produit $(\mathbf{R} \times X, -dt^2 \oplus g)$ est globalement hyperbolique si et seulement si (X, g) est une variété riemannienne complète.

A partir d'un espace-temps globalement hyperbolique, il est possible de créer beaucoup de sous-domaines dont la structure induite est globalement hyperbolique. Rappelons qu'un domaine $\Omega \subset M$ est *causalement convexe* si pour tous $x, y \in \Omega$, on a

$$x \leq y \Rightarrow J(x, y) \subset \Omega.$$

Proposition 3.8 ([Sma23b, Prop. 1]). *Un ouvert causalement convexe d'un espace-temps globalement hyperbolique est globalement hyperbolique.*

Démonstration. Soit Ω un domaine d'une variété globalement hyperbolique M et soient $x, y \in M$ avec $x \leq y$. Par le théorème 3.6, le diamant $J_M(x, y)$ est compact. Or, comme Ω est causalement convexe, on a que $J_\Omega(x, y) = J_M(x, y)$ est compact, donc Ω est globalement hyperbolique par le théorème 3.6. ■

Maximalité pour les variétés globalement hyperboliques

Soient M et N deux espace-temps conformes globalement hyperboliques. Un *plongement de Cauchy* est une application conforme injective $f : M \rightarrow N$ qui envoie une surface de Cauchy sur une surface de Cauchy. La relation *il existe un plongement de Cauchy de M vers N* définit une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des variétés globalement hyperboliques. Un espace-temps M est *globalement hyperbolique maximal*, abrégé *GH maximal*, si M est globalement hyperbolique et maximal pour cette relation d'ordre. La notion de maximalité a été introduite par Rossi [Sal13, Sect. 3] et étudiée par Smaï [Sma23b] dans le cadre des espace-temps conformément plats. Dans [Sal13], Rossi montre que tout espace-temps globalement hyperbolique conformément plat admet une unique extension conformément plate maximale. Smaï en donne une construction explicite dans [Sma23b].

Exemple 3.9. L'univers d'Einstein, l'espace de Minkowski et le diamant lorentzien sont des espace-temps globalement hyperboliques maximaux en ce sens.

3.1.2 Convexité causale dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$

Description par les graphes de fonctions Lipschitziennes

Dans cette section, nous rappelons une description explicite des ouverts causalement convexes de $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$. Cette description est détaillée dans [Sma23b]. On se donne une identification conforme

$$\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1} \simeq \mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1}.$$

Soit $\Omega \subset \mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1}$ un ouvert causalement convexe et soit U la projection de Ω sur le facteur \mathbf{S}^{n-1} . Pour tout $x \in U$, la courbe temps $\mathbf{R} \times \{x\}$ rencontre Ω le long d'un intervalle ouvert, car Ω est causalement convexe. On choisit $f_-(x) < f_+(x) \in \overline{\mathbf{R}}$ tels que

$$\Omega \cap (\mathbf{R} \times \{x\}) = (f_-(x), f_+(x)) \times \{x\}.$$

L'ouvert Ω s'écrit alors

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbf{R} \times U \mid f_-(x) < t < f_+(x)\}.$$

On peut alors montrer que les fonctions $f_+, f_- : U \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ sont 1-Lipschitziennes, qu'elles s'étendent continûment à \overline{U} et qu'elles coïncident sur ∂U . Réciproquement, on montre que si U est un ouvert de \mathbf{S}^{n-1} et si $f_+, f_- : \overline{U} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ sont deux fonctions 1-Lipschitziennes qui coïncident sur ∂U avec $f_- < f_+$ sur U , alors le domaine

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbf{R} \times U \mid f_-(x) < t < f_+(x)\}$$

est un ouvert causalement convexe de $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1}$. Ainsi, les ouverts causalement convexes de $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ sont exactement déterminés par la donnée de deux fonctions 1-Lipschitziennes, définies sur un ouvert de \mathbf{S}^{n-1} , qui coïncident sur le bord de leur ensemble de définition.

Exemple 3.10. Si $U = B(c, r)$ est une boule sphérique de centre c et de rayon $r < 2\pi$, alors en posant $f_{\pm} : U \rightarrow \mathbf{R}$ avec $f_{\pm}(x) = \pm(r - d(c, x))$, les fonctions f_+ et f_- sont 1-Lipschitziennes, satisfont $f_- < f_+$ et l'ouvert

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(t, x) \in \mathbf{R} \times U \mid f_-(x) < t < f_+(x)\} \\ &= \{(t, x) \in \mathbf{R} \times U \mid d(c, x) < r - t \text{ et } d(c, x) < -r - t\} \\ &= I((c, r), (c, -r))\end{aligned}$$

est le diamant causal de $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1, n-1}$ défini par les points (c, r) et $(c, -r)$.

Ouverts maximaux

Soit Ω un ouvert causalement convexe de $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1, n-1}$. Comme $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1, n-1}$ est globalement hyperbolique, on sait que Ω est un espace-temps globalement hyperbolique par la proposition 3.8. Ceci peut être vérifié explicitement grâce à la description précédente. En effet, si on écrit

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbf{R} \times U \mid f_-(x) < t < f_+(x)\},$$

avec les mêmes notations que précédemment, alors pour toute fonction contractante $h : U \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f_- < h < f_+$, le graphe de h est une hypersurface de Cauchy pour Ω .

Au sein des ouverts causalement convexes de $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1, n-1}$, on peut se demander quels sont les ouverts GH maximaux. Ces derniers sont entièrement caractérisés par la géométrie de leur bord :

Proposition 3.11 ([Sma23b, Section 7]). *Soit Ω un ouvert causalement convexe de $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1, n-1}$ décrit par le graphe de deux fonctions 1-Lipschitziennes f_- et f_+ définies sur un ouvert $U \subset \mathbf{S}^{n-1}$, avec une valeur commune $f : \partial U \rightarrow \mathbf{R}$ sur le bord de U . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- Ω est globalement hyperbolique maximal.
- Ω est une composante connexe de $\widetilde{\mathbf{Ein}} \setminus C(\Lambda)$, où Λ est le graphe de f et $C(\Lambda) = \cup_{\lambda \in \Lambda} C(\lambda)$.
- la fonction f_+ (resp. f_-) est eikonale future (resp. eikonale passée), c'est-à-dire

$$f_+(x) = \inf_{a \in \partial U} (f(a) + d(x, a)), \quad (\text{resp. } f_-(x) = \sup_{a \in \partial U} (f(a) - d(x, a))).$$

De façon équivalente, on a

$$f_+ = \sup\{g : U \rightarrow \mathbf{R} \text{ 1-Lip} \mid g|_{\partial U} = f\} \text{ et } f_- = \inf\{g : U \rightarrow \mathbf{R} \text{ 1-Lip} \mid g|_{\partial U} = f\}.$$

■

3.1.3 Convexité duale

On se replace en signature quelconque. Nous allons introduire la notion de convexité duale de Zimmer dans le cadre de l'univers d'Einstein $\mathbf{Ein}^{p, q}$. Cette notion est un cas particulier d'un concept plus général qui fait sens dans toute variété de drapeaux $X = G/P$. Pour une définition générale, voir [Zim18, Def. 1.11]. Avant d'introduire ce concept, nous donnons la notion préliminaire de dual.

Dualité dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$

Soit $\Lambda \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ un sous-ensemble. On définit le *dual* de Λ comme

$$\Lambda^* = \{x \in \mathbf{Ein}^{p,q} \mid C(x) \cap \Lambda = \emptyset\}.$$

De manière équivalente $\Lambda^* = \{x \in \mathbf{Ein}^{p,q} \mid x \notin C(y), \text{ pour tout } y \in \Lambda\}$. Comme la relation “ $x \in C(y)$ ” est symétrique et réflexive en x et y , on vérifie directement les propriétés suivantes pour tous sous-ensembles $A, B \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$:

- $A \subset B \Rightarrow B^* \subset A^*$.
- $A \subset B^* \iff B \subset A^*$.
- $A \subset A^{**}$.
- $A^* = A^{***}$.

Pour fixer les idées, calculons explicitement le dual d’un diamant $D \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$. Par le lemme 1.23, le complémentaire de tous les cônes de lumière d’éléments de D est l’adhérence du diamant dual. Ainsi

$$D^* = \overline{D^*}.$$

Afin d’éviter toute confusion, nous insistons sur le fait que $D^* \neq \overline{D^*}$:

\triangleleft Le dual d’un diamant n’est pas un diamant, c’est l’adhérence du diamant dual. \triangleleft

Le dual satisfait les propriétés suivantes, qui permettent notamment de caractériser le propriété d’un ensemble en termes de son dual (voir aussi la définition 2.32) :

Proposition 3.12. *Soit $\Lambda \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$.*

- (1) Λ^* est non vide si et seulement si Λ est contenu dans le domaine d’une projection stéréographique.
- (2) Si Λ est fermé, alors Λ^* est ouvert.
- (3) Si Λ est ouvert, alors Λ^* est fermé.
- (4) Λ est propre si et seulement si Λ^* est d’intérieur non vide.

Démonstration. (1) Λ^* est non vide si et seulement s’il existe $x \in \mathbf{Ein}^{p,q}$ tel que $\Lambda \subset \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(x)$, ce qui revient à dire que Λ est contenu dans le domaine d’une projection stéréographique.

(2) Ce point est un corollaire immédiat de l’égalité générale :

$$(\overline{\Lambda})^* = \text{Int}(\Lambda^*). \tag{3.2}$$

Montrons donc cette égalité. Soit $x \in \text{Int}(\Lambda^*)$. On peut trouver un diamant $D \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ tel que $x \in D \subset \Lambda^*$. On a donc $\Lambda \subset D^*$. Or nous venons de voir que le dual de D est compact, donc $\overline{\Lambda} \subset D^*$ ce qui revient à $x \in D \subset (\overline{\Lambda})^*$. Ainsi $\text{Int}(\Lambda^*) \subset (\overline{\Lambda})^*$. Supposons maintenant $x \notin \text{Int}(\Lambda^*)$. On peut trouver une suite (x_k) convergeant vers x ainsi qu’une suite $(y_k) \in \Lambda^{\mathbf{N}}$ telle que $x_k \in C(y_k)$ pour tout $k \geq 0$. Quitte à extraire, on peut supposer que (y_k) converge vers un élément $y \in \overline{\Lambda}$. Par passage à la limite, on obtient $x \in C(y)$, donc $x \notin (\overline{\Lambda})^*$. Ceci montre $(\overline{\Lambda})^* \subset \text{Int}(\Lambda^*)$.

(3) En général, on a seulement une inclusion $\overline{\Lambda^*} \subset (\text{Int}(\Lambda))^*$, donc on ne peut pas montrer l’implication avec un résultat plus précis. Soit (x_k) une suite de points de Λ^* convergeant vers $x \in \mathbf{Ein}^{p,q}$. Si jamais on avait $x \notin \Lambda^*$, on pourrait trouver $y \in \Lambda$ tel que $x \in C(y)$. Comme Λ est ouvert, on peut trouver un diamant $D \subset \Lambda$ contenant y . Or pour tout $k \geq 0$,

on a $x_k \in \Lambda^* \subset D^*$, donc $x \in D^*$ car D^* est fermé. Ainsi $y \in D \subset \{x\}^*$, ce qui contredit $x \in C(y)$. Ainsi $x \in \Lambda^*$ et Λ est fermé.

(4) Si Λ est propre alors il existe un diamant D contenant Λ , donc $D^* \subset \Lambda^*$. Comme D^* est d'intérieur non vide, le dual Λ^* l'est aussi. Réciproquement, si Λ est d'intérieur non vide, alors Λ^* contient un diamant D , donc $\Lambda \subset \Lambda^{**} \subset D^*$. Comme D^* est propre, le sous-ensemble Λ l'est aussi. ■

Convexité duale de Zimmer

Définition 3.13 ([Zim18]). Un ouvert $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ est *dualement convexe* si pour tout point $x \in \partial\Omega$, il existe $y \in \mathbf{Ein}^{p,q}$ tel que $x \in C(y)$ et $C(y) \cap \Omega = \emptyset$. On dit alors que $C(y)$ est un *cône de lumière d'appui* à Ω en x .

De façon équivalente, un ouvert Ω est dualement convexe si pour tout point $x \in \partial\Omega$, il existe $y \in \Omega^*$ tel que $x \in C(y)$.

Exemple 3.14. Les diamants sont dualement convexes. En effet, soient D un diamant de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ et $x \in \partial D$. Si $x \in \partial_t D$, alors $x \in \partial_t D^* \subset \overline{D^*}$, donc $C(x) \cap D = \emptyset$ (voir section 1.4.2 pour la définition de $\partial_t D$). De même si $x \in \partial_e D$, alors $C(x) \cap D = \emptyset$. Si $x \in \partial_l D$, il existe $y \in \partial_t D$ tel que $x \in C(y)$. Donc $C(y)$ est un cône de lumière d'appui en x .

Proposition 3.15. *Un domaine $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ est dualement convexe si et seulement si Ω est une union de composantes connexes de Ω^{**} .*

Démonstration. Supposons que Ω soit dualement convexe. Montrons que Ω est fermé dans Ω^{**} . Soit $x \in \partial\Omega$. Par convexité duale, il existe $y \in \Omega^*$ tel que $x \in C(y)$. Donc $x \notin \Omega^{**}$. Ainsi $x \in \partial(\Omega^{**})$, donc Ω est fermé dans Ω^{**} ; c'est donc une union de composantes connexes de Ω^{**} . Réciproquement, supposons Ω fermé dans Ω^{**} . Soit $x \in \partial\Omega$. Alors $x \in \partial(\Omega^{**})$ donc il existe $y \in (\Omega^{**})^*$ tel que $x \in C(y)$. Or $\Omega^{***} = \Omega^*$, donc $C(y)$ évite Ω et Ω est bien dualement convexe. ■

En particulier, si $\Lambda \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ est compact, alors l'ouvert $\Omega = \Lambda^*$ est toujours dualement convexe (le sous-ensemble Λ^* est bien ouvert par la proposition 3.12). En effet, l'ouvert Ω est égal à son bidual, donc est bien dualement convexe par la proposition 3.15. En général, on n'a pas d'égalité entre Ω et Ω^{**} .

3.1.4 Convexité duale faible

On dit qu'un ouvert $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ est *faiblement dualement convexe* si pour tout point $x \in \partial\Omega$ il existe une hypersurface de Möbius $\Sigma \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ telle que

$$x \in \Sigma \text{ et } \Sigma \cap \Omega = \emptyset.$$

On dira alors que Σ est une *hypersurface de Möbius d'appui* de Ω en x .

Donnons immédiatement quelques familles d'exemples :

- tout ouvert dualement convexe est faiblement dualement convexe ;
- tout ouvert de $\mathbf{R}^{p,q}$ qui est convexe pour la structure affine standard est faiblement dualement convexe, car tout hyperplan affine de $\mathbf{R}^{p,q}$ est la trace d'une hypersurface de Möbius dans une projection stéréographique ;
- l'intersection de tout convexe de $\mathbf{P}(\mathbf{R}^{p+1,q+1})$ avec $\mathbf{Ein}^{p,q}$ est faiblement dualement convexe (rappelons qu'un ouvert $\Omega \subset \mathbf{RP}^n$ est convexe si pour tout point $x \in \partial\Omega$, il existe un hyperplan projectif $H \subset \mathbf{RP}^n$ disjoint de Ω et contenant x).

Par exemple, le demi-diamant est faiblement dualement convexe (voir Figure 3.2), mais pas dualement convexe.

3.2 Lien entre les notions de convexités

Nous pouvons maintenant faire le lien entre la convexité duale et la convexité causale. Précisément, nous allons montrer que le revêtement universel $\widetilde{\text{rev}} : \widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1} \rightarrow \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ donne une correspondance biunivoque entre les ouverts causalement convexes GH maximaux et les ouverts dualement convexes de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$, au sein des ouverts connexes.

On se replace donc en signature lorentzienne. On peut calquer la définition de convexité duale au revêtement universel :

Définition 3.16. On dit qu'un ouvert $\Omega \subset \widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ est *dualement convexe* si pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe $y \in \widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ tel que $x \in C(y)$ et $C(y) \cap \Omega = \emptyset$.

Cette définition n'est pas plus générale que la définition de Zimmer dans $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ comme le souligne la proposition suivante :

Proposition 3.17. Soit $\tilde{\Omega} \subsetneq \widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ un ouvert connexe dualement convexe. Alors la restriction de $\widetilde{\text{rev}}$ à $\tilde{\Omega}$ est injective et $\widetilde{\text{rev}}(\tilde{\Omega})$ est un ouvert dualement convexe de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$. Réciproquement, si $\Omega \subsetneq \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ est un ouvert connexe dualement convexe, alors il existe un ouvert connexe dualement convexe $\tilde{\Omega}$ tel que $\widetilde{\text{rev}}(\tilde{\Omega}) = \Omega$.

Démonstration. Soit $\tilde{\Omega} \subset \widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ un ouvert connexe dualement convexe. Si $\tilde{\Omega} \neq \widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$, le bord de $\tilde{\Omega}$ est non vide, donc on peut trouver un point $y \in \widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ tel que $\tilde{\Omega} \cap C(y) = \emptyset$. Comme $\tilde{\Omega}$ est connexe, on peut trouver une composante M_0 de $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1} \setminus C(y)$ contenant $\tilde{\Omega}$. La restriction de $\widetilde{\text{rev}}$ à M_0 est injective, donc la restriction de $\widetilde{\text{rev}}$ à $\tilde{\Omega}$ est injective. Montrons que $\Omega = \widetilde{\text{rev}}(\tilde{\Omega})$ est dualement convexe. Soit $x \in \partial\Omega$. Si $x \in C(\widetilde{\text{rev}}(y))$, alors $C(y)$ est un cône de lumière d'appui à $\tilde{\Omega}$ en x . Sinon, on peut relever x en un point $\tilde{x} \in M_0$. Soit $z \in \widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ tel que $C(z)$ est un cône de lumière d'appui en z pour $\tilde{\Omega}$. Alors $\widetilde{\text{rev}}(C(z)) = C(\widetilde{\text{rev}}(z))$ est un cône de lumière d'appui en x pour Ω . Donc Ω est dualement convexe. Réciproquement, soit $\Omega \subsetneq \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ et soient $x \in \Omega^*$ et $\tilde{x} \in \widetilde{\text{rev}}^{-1}(\{x\})$. On choisit une composante connexe M_0 de $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1} \setminus C(\tilde{x})$ et on pose $\tilde{\Omega} = \widetilde{\text{rev}}^{-1}(\Omega) \cap M_0$. Comme la restriction de $\widetilde{\text{rev}}$ à M_0 est injective, l'ouvert $\tilde{\Omega}$ est connexe. La relation $\widetilde{\text{rev}}(C(a)) = C(\widetilde{\text{rev}}(a))$ montre comme précédemment que $\tilde{\Omega}$ est dualement convexe. ■

Proposition 3.18. Soit $\Omega \subset \widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ un ouvert connexe. Alors Ω est dualement convexe si et seulement si Ω est causalement convexe et globalement hyperbolique maximal.

Lemme 3.19. Tout ouvert connexe dualement convexe $\Omega \subset \widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ est causalement convexe.

Démonstration. Soit $\Omega \subset \widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ un ouvert connexe dualement convexe. On identifie $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ à $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1}$. Soient $a, b \in \Omega$ avec $a \in I^+(b)$ et soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ une courbe temps futur de a à b . Montrons que l'image de γ est contenue dans Ω . Supposons l'inverse, de sorte qu'il existe un temps $u \in (0, 1)$ tel que $(s, x) = \gamma(u) \in \partial\Omega$. Par convexité duale, il existe un point $z = (t, y) \in \widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ tel que $C(z)$ évite Ω et contient $\gamma(u)$.

— Cas 1 : $|t - s| \neq 0 \pmod{\pi\mathbf{Z}}$, i.e. $\gamma(u)$ est sur la partie lisse de $C(z)$. On peut toujours modifier z et supposer que $0 < s - t < \pi$. Alors $\gamma(u) \in J^+(z) \cap J^-(\sigma(z))$,

où $\sigma(z) = (t + \pi, -y)$. On en déduit que $a = \gamma(0) \in I^-(\gamma(u)) \subset I^-(\sigma(z))$ et $b = \gamma(1) \in I^+(\gamma(u)) \subset I^+(z)$. Donc Ω intersecte $I^-(\sigma(z)) \setminus C(z) = \sqcup_{k \leq 0} E(\sigma^k(z))$ et $I^+(z) \setminus C(z) = \sqcup_{k > 0} E(\sigma^k(z))$, une contradiction avec la connexité de Ω .

- Cas 2 : $|t - s| = 0 \pmod{\pi\mathbf{Z}}$, i.e. il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\sigma^k(z) = \gamma(u)$, ce qui revient à $C(\gamma(u)) = C(z)$. On peut toujours modifier z et supposer que $\gamma(u) = z$. Alors $a = \gamma(0) \in I^-(\gamma(u)) = I^-(z)$ et $b = \gamma(1) \in I^+(\gamma(u)) = I^+(z)$. Donc Ω rencontre au moins deux composantes connexes de $\mathbf{Ein} \setminus C(z)$, une contradiction. ■

Démonstration de la proposition 3.18. La preuve est basée sur l'équivalence de la proposition 3.11 due à Smaï. On identifie $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ avec $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1}$. Soit Ω un ouvert causalement convexe, qu'on écrit

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbf{R} \times U \mid f_-(x) < t < f_+(x)\},$$

où $f_-, f_+ : U \rightarrow \mathbf{R}$ sont deux fonctions 1-Lipschitziennes qui coïncident sur le bord de U , avec $f_- < f_+$. On note $f : \partial U \rightarrow \mathbf{R}$ la valeur commune de f_+ et f_- sur ∂U , et on note Λ le graphe de f . Soit $\Omega' = \widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1} \setminus C(\Lambda)$, avec $C(\Lambda) = \cup_{\lambda \in \Lambda} C(\lambda)$. Si Ω est globalement hyperbolique maximal alors par la proposition 3.11, l'ouvert Ω est une composante connexe de Ω' . Or par construction, l'ouvert Ω' est dualement convexe, donc Ω est dualement convexe.

Supposons maintenant que Ω est dualement convexe. Par le lemme 3.19, l'ouvert Ω est causalement convexe. On peut donc écrire

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbf{R} \times U \mid f_-(x) < t < f_+(x)\},$$

avec les mêmes notations que le paragraphe précédent. Comme Ω est causalement convexe, on a $\Omega \subset \Omega'$. Montrons que $\partial\Omega \subset \partial\Omega'$. Soit $x \in \partial\Omega$. Si $x \in \Lambda$, alors en particulier $x \in C(\Lambda)$, donc $x \in \partial\Omega'$. Supposons maintenant que $x \notin \Lambda$, donc x est sur le graphe de f_+ ou sur le graphe de f_- . Supposons par exemple que $x = (f_+(u), u)$ pour un certain point $u \in U$. Comme Ω est dualement convexe, on peut trouver $y \in \widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ tel que $x \in C(y)$. Par connexité de Ω , on peut toujours choisir y tel que $\Omega \subset E(y)$. Soit Δ une géodésique de lumière passant par x et y (en général Δ est uniquement déterminée par x et y). Comme Ω est causalement convexe, l'intersection $\Delta \cap \overline{\Omega}$ est un segment de lumière contenant y . On peut donc trouver une géodésique sphérique $\alpha : [t_0, t_0 + r] \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ paramétrée par longueur d'arc telle que

$$\Delta \cap \overline{\Omega} = \{(t, \alpha(t)) \mid t \in [t_0, t_0 + r]\}.$$

Soit t_1 tel que $x = (t_1, \alpha(t_1))$. Montrons que le segment $\alpha([t_0, t_1])$ sort de U . Si par l'absurde $\alpha([t_0, t_1])$ était entièrement contenu dans U alors on pourrait trouver $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que

$$\alpha([t_0 - \varepsilon, t_1]) \subset V.$$

Alors $f_-(\alpha(t_0 - \varepsilon)) < f_+(\alpha(t_0)) - \varepsilon \leq f_+(\alpha(t_0 - \varepsilon))$ donc $\{(t, \alpha(t)) \mid t \in [t_0 - \varepsilon, t_0]\} \subset \overline{\Omega}$, ce qui contredit la définition de α . Ainsi il existe un temps $t_2 \in [t_0, t_0 + r]$ pour lequel $\alpha(t_2)$ passe par $\partial\Omega$. Ceci implique qu'il existe une géodésique de lumière reliant x et $(t_2, \alpha(t_2)) \in \Lambda$, ce qui revient à $x \in C(\Lambda)$. On a montré que $\partial\Omega \subset \partial\Omega'$, donc Ω est une composante connexe de Ω' , d'où Ω est globalement hyperbolique maximal par la proposition 3.11. ■

Remarque 3.20. On obtient par exemple comme corollaire de cette correspondance que pour un ouvert de $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$, la propriété « être causalement convexe globalement hyperbolique maximal » est stable par intersection connexe.

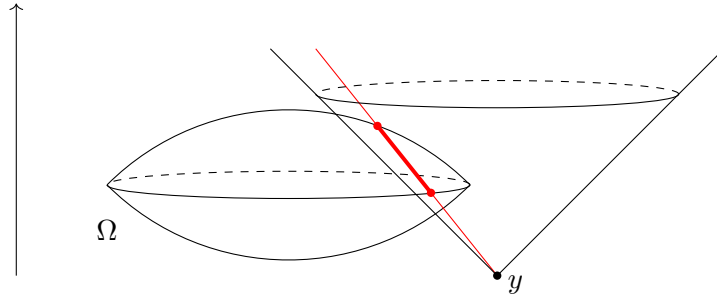


FIGURE 3.1 – Preuve de la proposition 3.18

3.3 Distance de Carathéodory

Nous introduisons maintenant une pseudo-distance à la *Carathéodory*. Cette pseudo-distance a été définie par Markowitz [Mar82] dans le contexte des variétés pseudo-riemanniennes conformes. Nous comparerons cette pseudo-distance avec une autre pseudo-distance définie par Zimmer [Zim18] dans le contexte des variété de drapeaux, et qui fait donc sens pour les ouverts de l'univers d'Einstein.

3.3.1 Applications projectives

Soit $(M, [g])$ une variété conforme pseudo-riemannienne et P une variété projectivement plate.

Définition 3.21. On dit qu'une application $f : M \rightarrow P$ est *projective* si pour toute géodésique de lumière paramétrée projectivement $\gamma : I \rightarrow M$, l'application $f \circ \gamma : I \rightarrow P$ est projective au sens classique.

Cette définition a été introduite par Markowitz dans [Mar82], mais peu d'exemples sont donnés. Dans le reste de cette section, nous donnons des familles d'exemples d'applications projectives.

Exemple 3.22. Soit $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ ouvert et soit $f : \Omega \rightarrow P$ une application. S'il existe un ouvert $\hat{\Omega} \subset \mathbf{P}(\mathbf{R}^{p+1, q+1})$ contenant Ω tel que f s'étend en une application projective $\hat{f} : \hat{\Omega} \rightarrow P$ au sens classique, alors f est projective. En effet, si $\gamma : I \rightarrow \Omega$ est une géodésique de lumière paramétrée projectivement, alors $\gamma : I \rightarrow \hat{\Omega}$ est une application projective au sens classique (voir section 2.1.1). En particulier, l'application $f \circ \gamma = \hat{f} \circ \gamma$ est projective comme composée de deux applications projectives.

On peut trouver une liste d'exemples d'applications qui rentrent dans la famille des applications de l'Exemple 3.22 :

- L'application $f : \mathbf{R}^{p,q} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \mathbf{b}(x, x)$ est projective.
- L'application $f : \mathbf{R}^{p,q} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \mathbf{b}(u, x)$ est projective.
- Soit \mathcal{M} une sous-variété de Möbius et Ω l'une des composantes connexes de $\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus J(\mathcal{M})$ (voir proposition 1.19). L'ouvert U s'identifie conformément à un produit

$$U \simeq \mathbf{dS}^{s_1} \times \mathbf{H}^{s_2} / \{\pm \text{id}\},$$

où s_1 et s_2 sont les signatures données explicitement par la proposition 1.19. Les variétés $\mathbf{dS}^{s_1} / \{\pm \text{id}\}$ et $\mathbf{H}^{s_2} / \{\pm \text{id}\}$ s'identifient à des ouverts de l'espace projectif et héritent d'une structure projective plate. Les applications

$$U \rightarrow \mathbf{dS}^{s_1} / \{\pm \text{id}\} \text{ et } U \rightarrow \mathbf{H}^{s_2} / \{\pm \text{id}\},$$

qui consistent à projeter sur un facteur, sont projectives.

— Si \mathcal{L} est un m -photon, la projection canonique $\pi_{\mathcal{L}} : \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{L}^*$ est projective.

Montrons par exemple pourquoi $f(x) = \mathbf{b}(x, x)$ s'étend en une application projective sur un ouvert de \mathbf{RP}^{p+q+1} . On peut choisir une base $\{e_0, \dots, e_{n+1}\}$ de $\mathbf{R}^{p+1, q+1}$ telle que l'application $\mathbf{st}(x) = \pi(e_0 + x - \mathbf{b}(x, x)e_{n+1})$ soit une projection stéréographique (voir l'équation 1.3). La composition de \mathbf{st} avec l'application $[x_0 : \dots : x_{n+1}] \mapsto -x_{n+1}/x_0$ est exactement f . Ainsi, on peut étendre f à l'ouvert de \mathbf{RP}^{p+q+1} défini par la carte $x_0 \neq 0$.

Remarque 3.23. Toute application projective $f : \Omega \rightarrow P$ définie sur un ouvert de $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ ne s'étend pas en une application projective $\hat{f} : \hat{\Omega} \rightarrow P$, où $\hat{\Omega}$ est un ouvert de $\mathbf{P}(\mathbf{R}^{p+1, q+1})$ contenant Ω . En effet, on peut prendre $\Omega = \mathbf{R}^{1,2}$ et $f : \mathbf{R}^{1,2} \rightarrow \mathbf{R}$ la projection orthogonale sur une droite temps. On vérifie immédiatement que f est projective au sens de la Définition 3.21. Cependant f ne s'étend pas en une application projective définie sur un ouvert de \mathbf{RP}^4 , car sinon l'image $f(\mathbf{R})$ serait contenue dans une droite projective de \mathbf{RP}^4 .

3.3.2 La distance de Carathéodory

Définition 3.24 ([Mar82]). Soit M une variété conforme pseudo-riemannienne et soient $x, y \in M$. La pseudo-distance de Carathéodory de x à y est

$$c_M(x, y) = \sup_f \rho_I(f(x), f(y)),$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des applications projectives $f : M \rightarrow I$, où I est l'intervalle $(-1, 1)$ muni de la distance hyperbolique ρ_I . Lorsqu'il n'existe pas d'applications conformes $f : M \rightarrow I$, on adopte la convention $c_M(x, y) = 0$.

On vérifie directement que c_M est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire, mais il n'est pas vrai en général que c_M sépare les points. Soit $f : M \rightarrow I$ une application projective et $\mathcal{C} = \{N, (\gamma_k), (s_k), (t_k)\}$ une chaîne entre deux points $x, y \in M$. Pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, la composition $f \circ \gamma_k : I \rightarrow I$ est projective au sens de la Définition 3.21. On en déduit, par le lemme de Schwarz projectif (lemme 2.16), que

$$\rho_I(f(x), f(y)) \leq \sum_k \rho_I(f(\gamma_k(s_k)), f(\gamma_k(t_k))) \leq \sum_k \rho_I(s_k, t_k) = L(\mathcal{C}).$$

En passant aux bornes supérieures et inférieures, on obtient pour tous $x, y \in M$:

$$c_M(x, y) \leq \delta_M(x, y). \quad (3.3)$$

En particulier, la pseudo-distance de Carathéodory est finie. De plus, si elle sépare les points, alors M est Markowitz-hyperbolique.

La pseudo-distance de Carathéodory satisfait les mêmes propriétés de naturalité que celles de la pseudo-distance de Markowitz vues en section 2.2.1. En effet, si $\varphi : M \rightarrow N$ est une application conforme et si $f : N \rightarrow I$ est une application projective, on vérifie que $f \circ \varphi : M \rightarrow I$ est une application projective. Ainsi, pour toute application conforme et pour tous $x, y \in M$ on a

$$c_N(\varphi(x), \varphi(y)) \leq c_M(x, y).$$

En particulier c_M est invariante par le groupe conforme de M .

Distance de Carathéodory du diamant

Calculons la pseudo-distance de Carathéodory d'un diamant. Nous allons montrer que la pseudo-distance de Carathéodory de $\mathbf{D}^{p,q}$ coïncide avec la distance de Markowitz. On se donne une identification $\mathbf{D}^{p,q} = (-\mathbf{H}^p) \times \mathbf{H}^q$. Soient $x, y \in \mathbf{D}^{p,q}$, qu'on note $x = (x_p, x_q)$ et $y = (y_p, y_q)$. Grâce à l'inégalité 3.3 et à la proposition 2.31, on sait déjà que

$$c_{\mathbf{D}^{p,q}}(x, y) \leq \delta_{\mathbf{D}^{p,q}}(x, y) = \max\{d(x_p, y_p), d(x_q, y_q)\}.$$

Montrons l'inégalité inverse. On a déjà vu (voir section 3.3.1) que la projection $\mathbf{D}^{p,q} \rightarrow \mathbf{H}^q$ est une application projective. Soit γ la géodésique de \mathbf{H}^q passant par x_q et y_q et soit $p_\gamma : \mathbf{H}^q \rightarrow \gamma$ la projection orthogonale sur γ , qui est une application projective. On choisit une identification projective $\alpha : I \rightarrow \gamma$ qui paramétrise γ et on note $s, t \in I$ tels que $\gamma(s) = x_p$ et $\gamma(t) = y_p$. Soit maintenant $f : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow I$ la composition

$$f : \mathbf{D}^{p,q} \longrightarrow \mathbf{H}^q \xrightarrow{p_\gamma} \gamma \xrightarrow{\alpha^{-1}} I.$$

L'application ainsi définie est projective, donc

$$\rho_I(f(x), f(y)) = \rho_I(s, t) = d(x_q, y_q) \leq c_{\mathbf{D}^{p,q}}(x, y).$$

Un argument identique à l'argument précédent implique que $d(x_p, y_p) \leq c_{\mathbf{D}^{p,q}}(x, y)$. Ainsi on obtient bien

$$c_{\mathbf{D}^{p,q}}(x, y) = \delta_{\mathbf{D}^{p,q}}(x, y) = \max\{d(x_p, y_p), d(x_q, y_q)\}. \quad (3.4)$$

Corollaire 3.25. *Soit $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ un ouvert propre. Alors c_Ω est une distance qui définit la topologie standard de Ω .*

Démonstration. Comme Ω est propre, on peut trouver un diamant D_1 contenant Ω . De plus, pour tout $x \in \Omega$, il existe un diamant D_2 contenant x et contenu dans Ω . Ainsi, pour tous $y, z \in D_2$, on a

$$c_{D_1}(y, z) \leq c_\Omega(y, z) \leq c_{D_2}(y, z).$$

Comme δ_{D_1} et δ_{D_2} sont des distances qui définissent la topologie standard sur D_2 par la formule 3.4, la pseudo-distance δ_Ω est une distance qui définit la bonne topologie sur Ω . ■

3.3.3 Lien avec la pseudo-distance de Zimmer

Dans le contexte des variétés de drapeaux, Zimmer introduit une pseudo-distance de type Carathéodory pour les ouverts propres (pour une notion de propreté qui étend la définition 2.32 aux variétés de drapeaux).

Définition 3.26 ([Zim18]). Soit $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ un ouvert propre et soient $x, y \in \Omega$. La pseudo-distance de Zimmer de x à y est

$$\tilde{c}_\Omega(x, y) = \sup_{\xi, \eta} \log \left| \frac{\mathbf{b}(\xi, x)\mathbf{b}(\eta, y)}{\mathbf{b}(\xi, y)\mathbf{b}(\eta, x)} \right|,$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des points $\xi, \eta \in \Omega^*$ tels que ξ et η sont transverses (i.e. ne sont pas sur un même photon).

Cette pseudo-distance permet de caractériser entièrement les ouverts propres dualement convexes :

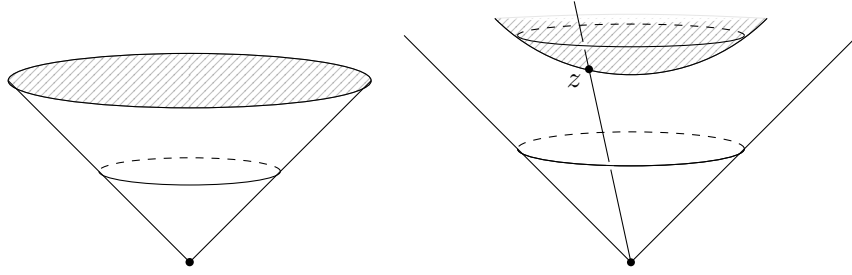


FIGURE 3.2 – Le demi-diamant

Théorème 3.27 ([Zim18]). *Soit $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ un ouvert propre. Alors \tilde{c}_Ω est une distance qui définit la topologie standard de Ω . De plus, l'ouvert Ω est dualement convexe si et seulement si \tilde{c}_Ω est complète.*

Les pseudo-distances de Markowitz et de Zimmer sont reliées par l'inégalité suivante :

Proposition 3.28. *Soit Ω un ouvert connexe propre de $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Alors $\tilde{c}_\Omega \leq c_\Omega$.*

Démonstration. Soient $\xi, \eta \in \Omega^*$ transverses, qu'on relève à $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$ en deux vecteurs, toujours notés ξ, η , tels que $\mathbf{b}(\xi, \eta) > 1$. Soit $V \subset \mathbf{R}^{p+1,q+1}$ le plan engendré par u et v , et soit $f : \mathbf{R}^{p+1,q+1} \rightarrow V$ la projection orthogonale sur V . Comme $\xi, \eta \in \Omega^*$, la connexité de Ω implique que l'image de Ω par l'application projectivée $f : \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus \mathbf{P}(V^\perp) \rightarrow \mathbf{P}(V)$ évite les droites engendrées par ξ et η . On peut supposer par exemple que $f(\Omega)$ est inclus dans $J = \{\mathbf{R}v \in \mathbf{P}(V) \mid \mathbf{b}(v, v) < 0\}$. Ainsi pour $x, y \in \mathbf{Ein}^{p,q}$ on a

$$\rho_J(f(x), f(y)) = \left| \ln \left(\frac{\mathbf{b}(\xi, f(x))\mathbf{b}(\eta, f(y))}{\mathbf{b}(\eta, f(x))\mathbf{b}(\xi, f(y))} \right) \right| = \left| \ln \left(\frac{\mathbf{b}(\xi, x)\mathbf{b}(\eta, y)}{\mathbf{b}(\eta, x)\mathbf{b}(\xi, y)} \right) \right| \leq c_\Omega(x, y).$$

■

Donnons un exemple où l'inégalité de la proposition précédente est stricte. Soit Ω le demi-diamant, i.e. Ω est un ouvert de $\mathbf{D}^{1,2} \simeq (-\mathbf{H}^1) \times \mathbf{H}^2 = (\mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{H}^2, -dt^2/t^2 \oplus g_{\mathbf{H}^2})$ qui s'identifie à $\mathbf{R}_{>1} \times \mathbf{H}^2$ (voir Figure 3.2). Les projections $\Omega \rightarrow \mathbf{R}_{>1}$ et $\Omega \rightarrow \mathbf{H}^2$ sont toujours des applications projectives, donc pour tous $(s, x), (t, y) \in \Omega$, on a

$$c_\Omega((s, x), (t, y)) \geq \max\{|\ln((t-1)/(s-1))|, d(x, y)\}.$$

En particulier, la distance c_Ω est complète. Comme Ω n'est pas dualement convexe, le théorème 3.27 implique que \tilde{c}_Ω est incomplète, donc $\tilde{c}_\Omega \neq c_\Omega$. En fait, on peut même montrer que

$$\tilde{c}_\Omega((s, x), (t, y)) = c_{\mathbf{D}^{1,2}}((s, x), (t, y)) = \max\{|\ln(t/s)|, d(x, y)\}.$$

est la restriction de $c_{\mathbf{D}^{1,2}}$ à Ω , ce qui implique aussi que $\tilde{c}_\Omega < c_\Omega$.

3.3.4 Complétude de la pseudo-distance de Carathéodory

La proposition suivante montre l'importance des ouverts faiblement dualement convexes vis-à-vis de la pseudo-distance de Carathéodory.

Proposition 3.29. *Soit $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ un ouvert propre faiblement dualement convexe, alors c_Ω est une distance complète.*

Démonstration. On sait déjà que c_Ω définit une distance sur Ω dont la topologie est la topologie standard, voir Corollaire 3.25. Supposons Ω faiblement dualement convexe. Soit (x_k) une suite de Cauchy pour c_Ω . Quitte à extraire, on peut supposer que la suite (x_k) converge vers un point $x \in \bar{\Omega}$. Supposons par l'absurde que $x \in \partial\Omega$. Comme Ω est faiblement dualement convexe, il existe une hypersurface de Möbius d'appui \mathcal{H} à Ω en x . Soit $y \in \mathbf{Ein}^{p,q}$ tel que $C(y)$ ne rencontre ni \mathcal{H} ni l'adhérence de Ω . On se place dans la carte de Minkowski $\mathbf{R}^{p,q} \simeq \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(y)$ dans laquelle l'ouvert Ω est borné. On peut toujours fixer une origine $0 \in \mathbf{R}^{p,q}$ telle que

$$\mathcal{H} \cap \mathbf{R}^{p,q} = \{z \in \mathbf{R}^{p,q} \mid \mathbf{b}(z, z) = \lambda\}$$

pour un certain $\lambda \in \mathbf{R}$. On peut par exemple supposer que Ω est compris dans la composante

$$U = \{z \in \mathbf{R}^{p,q} \mid \mathbf{b}(z, z) > \lambda\}.$$

Soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ l'application définie par $f(z) = \mathbf{b}(z, z) - \lambda$. Alors f est projective, donc pour tout $k, \ell \geq 0$, on a :

$$\rho(f(x_k), f(x_{k+\ell})) \leq c_U(x_k, x_{k+\ell}) \leq c_\Omega(x_k, x_{k+\ell}),$$

où ρ est la distance hyperbolique sur $\mathbf{R}_{>0}$. Comme ρ est complète, la suite $f(x_k)$ converge dans $\mathbf{R}_{>0}$. Ceci contredit que $\lim_k f(x_k) = \lim_k \mathbf{b}(x_k, x_k) - \lambda = \mathbf{b}(x, x) - \lambda = 0$. ■

3.4 Propriétés métriques des ouverts faiblement dualement convexes

Cette section regroupe les éléments de preuves de la proposition 3.1 et du théorème 3.2.

3.4.1 Caractérisation de type Brody

Proposition 3.30. *Soit Ω un ouvert faiblement dualement convexe. Alors Ω est Markowitz-hyperbolique si et seulement si Ω est Brody-hyperbolique.*

Démonstration. Supposons que Ω n'est pas Markowitz-hyperbolique. Par le théorème 2.46, il existe une suite de points (x_k) convergeant vers un point $x \in \Omega$, il existe une suite de photons (Δ_k) et il existe une suite de segments $[a_k, b_k] \subset \Delta_k \cap \Omega$ telle que $x_k \in [a_k, b_k]$ pour tout $k \geq 0$ et

$$L([a_k, b_k]) \rightarrow \pi.$$

Si jamais l'un des photons Δ_k est contenu dans Ω , alors Ω n'est pas Brody hyperbolique. Sinon, on peut trouver une suite de points (e_k) telle que $e_k \in \Delta_k \setminus \Omega$ pour tout k . Quitte à extraire, on peut supposer que $\Delta_k \rightarrow \Delta \in \text{Pho}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ et que les suites (a_k) , (b_k) et (e_k) convergent dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$. L'hypothèse $L([a_k, b_k]) \rightarrow \pi$ force les suites à avoir une limite commune $y \in \Delta$. Montrons que $\Delta \setminus \{y\} \subset \Omega$. Supposons par l'absurde qu'il existe un point $z \neq y$ dans $\partial\Omega \cap \Delta$. Comme Ω est faiblement dualement convexe, il existe une hypersurface de Möbius \mathcal{H} d'appui à Ω en z .

Lemme 3.31. *Soit \mathcal{H} une hypersurface de Möbius et Δ un photon. Alors $\Delta \subset \mathcal{H}$ ou $\Delta \cap \mathcal{H}$ est réduit à un point.*

Démonstration du lemme 3.31. Ceci est une conséquence directe du fait que l'intersection d'un 2-plan de $\mathbf{R}^{p+1, q+1}$ avec un hyperplan de $\mathbf{R}^{p+1, q+1}$ est soit égale au 2-plan lui-même, soit à une droite. ■

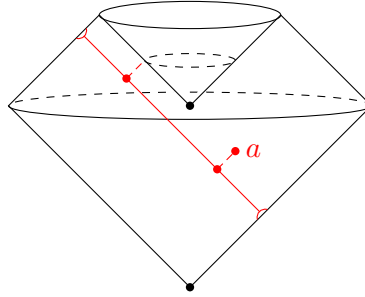


FIGURE 3.3 – Un ouvert propre causalement convexe dont la distance de Markowitz est incomplète. L’ouvert en question s’obtient en retirant le futur d’un point dans un diamant. La chaîne de lumière représentée montre que le bord de Ω est à distance de Markowitz finie du point a . Comme δ_Ω est une distance de longueur, cela implique qu’elle n’est pas complète (les boules fermées de toute distance de longueur complète sont compactes).

Par le lemme 3.31, le photon Δ_k doit intersecter \mathcal{H} en un unique point z_k (car $\Delta_k \not\subset \mathcal{H}$ puisque Δ_k intersecte Ω). Montrons que $z_k \rightarrow z$. Si par l’absurde il existe une suite $z_{m(k)}$ convergeant vers un point distinct de z , on aurait $\lim_k z_{m(k)} \in (\lim_k \Delta_{m(k)}) \cap \mathcal{H} = \Delta \cap \mathcal{H}$, donc Δ et \mathcal{H} auraient 2 points d’intersection, une contradiction. Ainsi $z_k \rightarrow z$. Ceci contredit le fait que $z_k \in \Delta_k \setminus [a_k, b_k] \rightarrow \{y\}$. ■

Remarque 3.32. Dans la preuve qui précède, la seule hypothèse nécessaire sur Ω est la suivante : pour tout point $x \in \Omega$, il existe une hypersurface de Möbius \mathcal{H} contenant x et il existe un voisinage V de x tel que $\Omega \cap \mathcal{H} \cap V = \emptyset$. Cette hypothèse revient à dire que tout point du bord admet une hypersurface de Möbius d’appui évitant localement Ω . En géométrie affine on sait qu’un ouvert de \mathbf{R}^n admettant en tout point un hyperplan d’appui l’évitant localement est convexe. Dans le cadre conforme, nous ne savons pas si les deux hypothèses sont équivalentes.

3.4.2 Complétude

Donnons un premier résultat de complétude pour la distance de Markowitz.

Proposition 3.33. *Soit Ω un ouvert propre faiblement dualement convexe. Alors δ_Ω est une distance complète.*

Démonstration. En effet si Ω est un ouvert propre faiblement dualement convexe, alors c_Ω est une distance complète par la proposition 3.29. Or $c_\Omega \leq \delta_\Omega$ par l’équation 3.3, donc δ_Ω est complète. ■

Exemple 3.34. On peut construire beaucoup d’exemples d’ouverts pour lesquels la distance de Markowitz est incomplète, par exemple en retirant à n’importe quel ouvert Markowitz-hyperbolique un nombre fini de points. Dans le cadre lorentzien, on peut même construire des exemples d’ouverts causalement convexes pour lesquels δ n’est pas complète (voir Figure 3.3).

Nous allons améliorer l’énoncé de la proposition 3.33 en signature lorentzienne, en retirant l’hypothèse de propriété de l’ouvert, mais en supposant toutefois que l’ouvert est dualement convexe.

Proposition 3.35. *Soit $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ un ouvert dualement convexe ne contenant pas de géodésique de lumière non-constante paramétrée projectivement sur \mathbf{R} . Alors δ_Ω définit une distance complète.*

Démonstration. Par la proposition 3.30, on sait déjà que Ω est Markowitz-hyperbolique. Soit (x_k) une suite de Cauchy. Montrons que (x_k) converge dans Ω . Par compacité de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$, il suffit de montrer que (x_k) n'admet pas de sous-suite convergeant vers un point du bord de Ω . Supposons par l'absurde qu'il existe une sous-suite, qu'on note encore (x_k) , convergeant vers un point $x \in \partial\Omega$.

- Cas 1 : il existe un point $y \in \Omega^*$ tel que $y \notin C(x)$. On identifie $\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus C(y)$ avec $\mathbf{R}^{1,n-1}$. Le point x appartient alors à $\mathbf{R}^{1,n-1}$. Comme Ω est dualement convexe, il existe $z \in \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ tel que $x \in C(z)$ et $C(z)$ est disjoint de Ω . Si $z \in \mathbf{R}^{1,n-1}$, on pose $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ l'application projective définie par $f(a) = \mathbf{b}(a - z, a - z)$. Comme Ω évite $C(z)$, l'application f ne s'annule pas. Supposons par exemple que f est positive. Alors pour tout $k, \ell \geq 0$, on a

$$\rho(f(x_k), f(x_{k+\ell})) \leq c_\Omega(x_k, x_{k+\ell}) \leq \delta_\Omega(x_k, x_{k+\ell}),$$

où ρ est la distance hyperbolique sur $\mathbf{R}_{>0}$. Ainsi $(f(x_k))$ est de Cauchy pour ρ . Par complétude, la suite $f(x_k)$ converge vers un nombre non nul, ce qui contredit $\lim_k f(x_k) \rightarrow \mathbf{b}(x - z, x - z) = 0$. Dans la situation où $z \notin \mathbf{R}^{1,n-1}$, alors la trace de $C(z)$ dans $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ est un hyperplan de direction u^\perp , pour un certain vecteur de lumière u . Le même argument fonctionne en posant cette fois $f(a) = \mathbf{b}(a, u)$.

- Cas 2 : le dual Ω^* est contenu dans $C(x)$. Montrons dans ce cas que $x \in \Omega^*$. Supposons par l'absurde qu'il existe un point $y \in \Omega \cap C(x)$. Le point y est nécessairement distinct de x car $x \in \partial\Omega$. Soit Δ le photon passant par x et y . Comme Ω ne contient pas de droite de lumière, il existe un point $z \in \Delta \cap \partial\Omega$ différent de x . Comme Ω est dualement convexe, on peut trouver un point $w \in \Omega^*$ tel que $z \in C(w)$ et $\Omega \cap C(w) = \emptyset$. Or, comme $\Omega^* \subset C(x)$ par hypothèse, le point w appartient à Δ (car sinon le triangle xzw formerait un triangle de photons non trivial dans $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$, une contradiction avec le Corollaire 1.13). Ceci contredit le fait que le point $y \in \Delta \subset C(w)$ appartient à Ω . Ainsi $\Omega \cap C(x) = \emptyset$, donc $x \in \Omega^*$. Montrons qu'il existe au moins deux points de Ω^* qui ne sont pas sur un même photon. Supposons par l'absurde qu'il existe un photon $\Delta \subset C(x)$ contenant Ω^* . Soit $y \in \Delta \setminus \Omega^*$ (un tel point existe car Ω est non vide). Soit $\Delta' \neq \Delta$ un photon passant par y . Si Δ' intersectait Ω en un point z , le triplet xyz formerait un triangle de photons. Ainsi $\Delta' \cap \Omega = \Delta' \setminus \{y\}$, une contradiction. Ainsi, on peut trouver deux points $a, b \in \Omega^*$ tels que a et b ne sont pas sur un même photon.

Lemme 3.36. *Soient $a, b, x \in \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ trois points tels que $a, b \in C(x)$ et $a \notin C(b)$. Alors la pseudo-distance de Markowitz de chacune des 4 composantes connexes de*

$$\Omega_{a,b,x} = \mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus C(a) \cup C(b) \cup C(x)$$

est une distance complète.

Démonstration du lemme 3.36. On commence par vérifier que $\Omega_{a,b,x}$ est Brody hyperbolique. En effet, si jamais il existait un photon Δ et un point $y \in \Delta$ tels que $\Delta \setminus \{y\} \subset \Omega_{a,b,x}$, alors on aurait $\Delta \cap C(a) \subset \{y\}$ donc $y \in C(a)$. De même $y \in C(b)$ et $y \in C(x)$. Donc $y \in C(a) \cap C(b) \cap C(x) = \{x\}$, donc $\Delta \subset C(x)$, contradiction. Ainsi l'ouvert $\Omega_{a,b,x}$ est dualement convexe et ne contient pas de droite, donc par la proposition 3.30, les composantes connexes de $\Omega_{a,b,x}$ sont Markowitz-hyperboliques.

On réalise une projection stéréographique selon x . Les traces de $C(a)$ et $C(b)$ dans $\mathbf{R}^{1,n-1} = \mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus C(x)$ sont deux hyperplans dégénérés transverses qui s'intersectent en un sous-espace riemannien $F \subset \mathbf{R}^{1,n-1}$ de codimension 2. L'orthogonal de F est un

plan lorentzien, et les 4 composantes connexes de $\Omega_{a,b,x}$ sont les ouverts $F + A$, où A est l'une des 4 composantes connexes de $F^\perp \setminus C(0_{F^\perp})$. Le groupe des similitudes laissant stables ces composantes connexes agit transitivement sur chacune d'entre elles, donc le groupe d'isométries de $(\Omega_{a,b,x}, \delta_{\Omega_{a,b,x}})$ agit transitivement sur ces composantes. On en déduit que $\delta_{\Omega_{a,b,x}}$ est complète. ■

Avec les notations du lemme 3.36, on a $\Omega \subset \Omega_{a,b,x}$, donc $\delta_{\Omega_{a,b,x}} \leq \delta_\Omega$. On en déduit que (x_k) est une suite de Cauchy pour $\delta_{\Omega_{a,b,x}}$, donc par le lemme 3.36, la suite (x_k) converge dans $\Omega_{a,b,x}$. Ceci contredit le fait que (x_k) converge vers x . ■

3.4.3 Géodésiques de δ_M

Proposition 3.37. *Soit Ω un ouvert faiblement dualement convexe Brody-hyperbolique et soit $\gamma : I \rightarrow \Omega$ une géodésique de lumière paramétrée projectivement, maximale dans Ω . Alors*

$$\delta_\Omega(\gamma(s), \gamma(t)) = \rho_I(s, t), \text{ pour tout } s, t \in I.$$

En particulier, les géodésiques de lumière sont géodésiques pour δ_Ω (néanmoins, leurs paramétrages projectifs ne sont pas géodésiques pour δ_Ω).

Démonstration. Par construction de la distance de Markowitz, on sait déjà que $\delta_\Omega(\gamma(s), \gamma(t)) \leq \rho_I(s, t)$ pour tout $s, t \in I$. Comme γ est maximale, on peut trouver deux hypersurfaces de Möbius \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_{-1} évitant Ω telles que $\gamma(\pm 1) \in \mathcal{H}_{\pm 1}$.

Lemme 3.38. *Il existe une application projective $f : \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus (\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_{-1}) \rightarrow \mathbf{RP}^1$ dont $\mathcal{H}_1 \setminus \mathcal{H}_{-1}$ et $\mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H}_1$ sont des fibres.*

Démonstration du lemme 3.38. En effet soient H_1 et H_{-1} les deux hyperplans de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$ qui définissent \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_{-1} , respectivement. Comme \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_{-1} sont distincts, les hyperplans H_1 et H_{-1} sont aussi distincts. On note $F = H_1 \cap H_{-1}$ et $V_{\pm 1} = \mathbf{R}e_{\pm 1}$ un supplémentaire de F dans $H_{\pm 1}$. Soit $U = V_1 \oplus V_{-1}$ et soit $f : \mathbf{P}(\mathbf{R}^{p+1,q+1}) \setminus \mathbf{P}(F) \rightarrow \mathbf{P}(U)$ la projectivisation de la projection sur U parallèlement à F . Alors $f^{-1}(\mathbf{R}e_{\pm 1}) = \mathbf{P}(H_{-1})$, donc la restriction de f à $\mathbf{Ein}^{p,q}$ a les propriétés désirées. ■

On note $a, b \in \mathbf{RP}^1$ les images de $\mathcal{H}_1 \setminus \mathcal{H}_{-1}$ et $\mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H}_1$ par f . Comme Ω évite \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_{-1} , son image par f est contenue dans une des deux composantes connexes de $\mathbf{RP}^1 \setminus \{a, b\}$. Choisissons cette composante et identifions la projectivement à $I = (-1, 1)$. Comme γ intersecte $\mathcal{H}_{\pm 1}$ en $\gamma(\pm 1)$, la composée $f \circ \gamma : I \rightarrow I$ est une surjection projective. On en déduit que $f \circ \gamma$ est une isométrie de I . Ainsi pour tous $s, t \in I$ on a

$$\rho_I(s, t) = \rho_I(f \circ \gamma(s), f \circ \gamma(t)) \leq c_\Omega(\gamma(s), \gamma(t)) \leq \delta_\Omega(\gamma(s), \gamma(t)).$$

■

Chapitre 4

Ouverts propres quasi-homogènes de l'univers d'Einstein

Ce chapitre a pour but de présenter un travail en collaboration avec B. Galiay. Dans [CG24], nous nous intéressons aux ouverts Ω de l'univers d'Einstein qui sont *propres*, c'est-à-dire que Ω est borné dans au moins une projection stéréographique, et *quasi-homogènes*, c'est-à-dire que le groupe conforme $\text{Conf}(\Omega)$ agit cocompactement sur Ω . Le diamant $\mathbf{D}^{p,q}$ en est un exemple car c'est un ouvert propre et homogène de l'univers d'Einstein (voir section 1.4). Nous montrons que le diamant est le seul exemple d'ouvert propre quasi-homogène.

Théorème 4.1 (avec B. Galiay). *Tout ouvert propre quasi-homogène de l'univers d'Einstein est un diamant.*

Nous obtenons le corollaire suivant pour les variétés conformément plates dont l'image de l'application de développement est propre, dites à *développante propre*.

Corollaire 4.2 (avec B. Galiay). *Soit M une variété compacte conformément plate de signature (p, q) à développante propre, avec $p \neq q$. Alors, quitte à prendre un revêtement fini de M , on a l'identification conforme*

$$M \simeq -\Sigma^p \times \Sigma^q$$

où Σ^p et Σ^q sont des variétés riemanniennes compactes de courbure constante $K = -1$.

Grâce à un isomorphisme exceptionnel $\mathfrak{o}(3,3) \simeq \mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$, l'univers d'Einstein $\mathbf{Ein}^{3,3}$ s'identifie à l'espace $\text{Gr}_2(\mathbf{R}^4)$ des 2-plans de \mathbf{R}^4 , en tant que $\text{PO}(3,3)$ espace homogène. Ceci permet d'obtenir le corollaire suivant :

Corollaire 4.3 (avec B. Galiay). *Soit $\Omega \subset \text{Gr}_2(\mathbf{R}^4)$ un ouvert propre quasi-homogène. Alors $\text{Aut}(\Omega)$ est conjugué à $\text{PO}(2,2)$ dans $\text{PSL}(4, \mathbf{R})$ et Ω est équivalent à $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{H}^2$. ■*

Ici, l'hypothèse “ Ω est un ouvert propre de $\text{Gr}_2(\mathbf{R}^4)$ ” signifie qu'il existe un 2-plan $P \subset \mathbf{R}^4$ transverse à tout plan de $\bar{\Omega}$. Comme la thématique de ce résultat s'écarte de l'esprit de ce manuscrit, nous renvoyons à [CG24] pour une preuve détaillée de l'isomorphisme $\mathbf{Ein}^{3,3} \simeq \text{Gr}_2(\mathbf{R}^4)$ et du Corollaire 4.3.

La preuve du théorème 4.1 consiste à étudier une classe de points privilégiés, appelés *points photons extrémaux*, qui sont l'équivalent pseudo-riemannien des points extrémaux d'un convexe en géométrie affine (voir section 4.1 pour une définition précise). Pour montrer qu'un ouvert propre quasi-homogène Ω est un diamant, on distingue deux grandes étapes :

- (1) Dans un premier temps, on utilise la distance de Markowitz pour montrer que le cône de lumière d'un point photon-extrémal x ne peut pas rencontrer l'ouvert Ω . Ceci permet de scinder les points photon-extrémaux en deux familles $\text{Conf}(\Omega)$ -invariantes, constituée des points photon-extrémaux *espaces* et des points photon-extrémaux *temps*.
- (2) On utilise ensuite le modèle projectif de l'univers d'Einstein pour montrer que les points photon-extrémaux espaces et les points photon-extrémaux temps fournissent une décomposition orthogonale $\text{Conf}(\Omega)$ -invariante $\mathbf{R}^{p+1,q+1} = V \oplus V^\perp$, avec $\text{sign}(V) = (p, 1)$. Ceci permet de conclure que Ω est un diamant.

Les énoncés qui figurent dans ce chapitre paraphrasent les énoncés des sections 5, 6, 7, et 8 de [CG24].

Remarque 4.4. Lors de la rédaction de ce manuscrit, nous avons obtenu une légère amélioration du théorème 4.1 qui permet d'obtenir la même conclusion avec une l'hypothèse plus faible sur l'ouvert Ω . Il suffit de supposer que tout point $a \in \partial\Omega$, il existe une suite (x_k) convergeant dans Ω et une suite $(g_k) \in \text{Conf}(\Omega)$ telles que $g_k(x_k) \rightarrow a$ quand $k \rightarrow \infty$. La démonstration de cette amélioration est presque identique à celle présentée ici et paraîtra dans une prochaine version de [CG24].

4.1 Dynamiques au bord du domaine

Lorsque le groupe conforme d'un ouvert propre de l'univers d'Einstein agit de manière cocompacte, cela fournit des informations sur la structure du domaine et de son bord. Dans cette section, en suivant la stratégie décrite dans [LZ19], nous utilisons la fonction de distance de Markowitz pour examiner la structure du bord d'un ouvert propre quasi-homogène.

4.1.1 Points photon-extrémaux

Soit $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ un ouvert propre, et soit $a \in \partial\Omega$. On dit que a est un *point photon-extrémal* si, pour tout photon Δ passant par a , le point a n'est pas contenu dans $\text{int}_\Delta(\Delta \cap \overline{\Omega})$, où $\text{int}_\Delta(S)$ désigne l'intérieur d'un sous-ensemble S relativement à la topologie induite sur Δ . Nous noterons $\text{Extr}(\Omega)$ l'ensemble des points photon-extrémaux de Ω . Notre objectif est de démontrer la proposition suivante.

Proposition 4.5. *Soit Ω un ouvert propre quasi-homogène. Si $a \in \partial\Omega$ est un point photon-extrémal, alors $C(a)$ est disjoint de Ω .*

L'idée de la démonstration est de relier la propriété géométrique des points photon-extrémaux à la distance de Markowitz. Cette idée est formulée explicitement dans le lemme suivant.

Lemme 4.6. *Soit Ω un ouvert propre quasi-homogène, et soit $a \in \partial\Omega$ un point photon-extrémal. Alors, pour toutes suites $(x_k), (y_k) \in \Omega^{\mathbf{N}}$ telles que $x_k \rightarrow a$, si la suite $(\delta_\Omega(x_k, y_k))$ est bornée, alors $y_k \rightarrow a$ lorsque $k \rightarrow +\infty$.*

Avant de démontrer le lemme 4.6, nous prouvons la proposition 4.5, en supposant que la conclusion du lemme 4.6 est vérifiée.

Preuve de la proposition 4.5. Soit $a \in \partial\Omega$ un point photon-extrémal. Puisque Ω est quasi-homogène, il existe un point $x \in \Omega$, une suite $(x_k) \in \Omega^{\mathbf{N}}$ convergeant vers x , et une suite $(g_k) \in \text{Conf}(\Omega)^{\mathbf{N}}$ telle que $g_k \cdot x_k \rightarrow a$. D'après le lemme 4.6, nous avons

$$\lim_k g_k \cdot B(x_k, 2) = \lim_k B(g_k \cdot x_k, 2) = \{a\} \quad \text{lorsque } k \rightarrow +\infty,$$

où $B(x, r) = \{y \in \Omega \mid \delta_\Omega(x, y) \leq r\}$. Par conséquent, nous avons aussi $\lim_k g_k \cdot B(x, 1) = \{a\}$. D'après la section 6.1, il existe un point $b \in \mathbf{Ein}^{p,q}$ tel que (g_k) soit (a, b) -contractant, c'est-à-dire que $g_k|_{\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(b)} \rightarrow a$, uniformément sur les sous-ensembles compacts de $\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(b)$. Puisque Ω est un sous-ensemble ouvert propre et invariant sous l'action de $\text{Conf}(\Omega)$ de $\mathbf{Ein}^{p,q}$, le dual Ω^* est un sous-ensemble fermé invariant sous l'action de $\text{Conf}(\Omega)$ de $\mathbf{Ein}^{p,q}$, d'intérieur non vide (voir proposition 3.12). En particulier, il existe un point $x \in \Omega^* \setminus C(b)$ tel que $g_k \cdot x \rightarrow a \in \Omega^*$. Cela implique que $C(a) \cap \Omega = \emptyset$, par la définition de Ω^* . ■

Le reste de la section est consacré à la démonstration du lemme 4.6. Nous devons introduire de nouvelles fonctions sur $\Omega \times \Omega$, liées à la fonction de distance δ_Ω . Pour $x, y \in \Omega$ et $N \in \mathbf{N}^*$, définissons

$$\delta_\Omega^N(x, y) := \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_{x,y}^N} L(\gamma).$$

où $\mathcal{C}_{x,y}^N$ désigne l'ensemble des chaînes de lumière composée d'au plus N géodésiques de lumière. Notons que $\delta_\Omega^N(x, y)$ peut être infinie si $\mathcal{C}_{x,y}^N = \emptyset$. Pour chaque $x, y \in \Omega$, la suite $(\delta_\Omega^N(x, y))_{N \in \mathbf{N}^*}$ est non croissante, éventuellement finie, et on a $\delta_\Omega(x, y) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \delta_\Omega^N(x, y)$.

Lemme 4.7. *Soit $\mathcal{K} \subset \Omega$ un sous-ensemble compact. Alors, il existe un entier $N \in \mathbf{N}^*$ et une constante $M > 0$ tels que, pour tous $x, y \in \mathcal{K}$, on ait $\delta_\Omega^N(x, y) \leq M$.*

Preuve. Puisque δ_Ω est continue, on peut définir le *diamètre* d'un sous-ensemble compact \mathcal{C} de Ω comme

$$\text{diam}(\mathcal{C}) := \max_{x,y \in \mathcal{C}} \delta_\Omega(x, y).$$

Fait 4.8. *Tout couple de points $x, y \in \mathbf{D}^{p,q}$ peut être relié par une suite de deux segments de photons contenus dans $\mathbf{D}^{p,q}$.*

Preuve du fait 4.8. Soit $x = (x_p, x_q)$ et $y = (y_p, y_q)$ dans le modèle $\mathbf{H}^p \times \mathbf{H}^q$. Don désigne par d la fonction de distance hyperbolique. Supposons, par exemple, que $d(x_p, y_p) < d(x_q, y_q)$. Soit $z_p \in \mathbf{H}^p$ tel que $d(x_p, z_p) + d(x_p, y_p) = d(z_p, y_p)$, et soit $z_q \in [x_q, y_q] \subset \mathbf{H}^q$ tel que $d(x_q, z_q) = d(x_p, z_p)$. Alors, le cône de lumière de $z = (z_p, z_q)$ contient à la fois x et y . ■

Alors, pour tout diamant D tel que $\overline{D} \subset \Omega$, d'après le fait 4.8 et la proposition 3.1, on a

$$\forall x, y \in D \quad \delta_\Omega^2(x, y) \leq 2 \text{diam}(\overline{D}). \quad (4.1)$$

Puisque δ_Ω génère la topologie standard sur Ω et que les diamants forment une base de voisinages de $\mathbf{Ein}^{p,q}$, pour tout $x \in \Omega$, il existe un diamant D_x contenant x tel que $\overline{D}_x \subset \Omega$ et $\text{diam}(\overline{D}_x) \leq 1$. Fixons un tel diamant D_x pour tout $x \in \mathcal{K}$. Il existe alors un sous-ensemble fini $F \subset \mathcal{K}$ tel que $\mathcal{K} \subset \bigcup_{x \in F} D_x$. Pour tous $x, y \in F$, il existe un entier $N(x, y) \in \mathbf{N}_{>0}$ minimal tel que

$$M(x, y) := \delta_\Omega^{N(x,y)}(x, y) < +\infty.$$

Alors, pour tous $(z, z') \in D_x \times D_y$, d'après le fait 4.8, on sait que $N(z, z') \leq N(x, y) + 4$, et d'après l'équation (4.1), on a

$$\delta_\Omega^{N(z,z')} \leq \delta_\Omega^{N(x,y)+4}(z, z') \leq M(x, y) + 2 \text{diam}(\overline{D}_x) + 2 \text{diam}(\overline{D}_y) \leq M(x, y) + 4.$$

Soit $N := \max_{x,y \in F} N(x, y) + 4$ et $M := \max_{x,y \in F} M(x, y) + 4$. Alors, pour tous $z, z' \in \mathcal{K}$, on a $\delta_\Omega^N(z, z') \leq M$. ■

Lemme 4.9. *Soit $x_\infty \in \partial\Omega$ un point photon-extrémal et soit $N \in \mathbf{N}^*$. Pour toute suite $(x_k) \in \Omega^N$ convergeant vers x_∞ et pour toute suite $(y_k) \in \Omega^N$ telle que $\delta_\Omega^N(x_k, y_k)$ soit bornée par une constante $M > 0$, on a $y_k \rightarrow x_\infty$ lorsque $k \rightarrow +\infty$.*

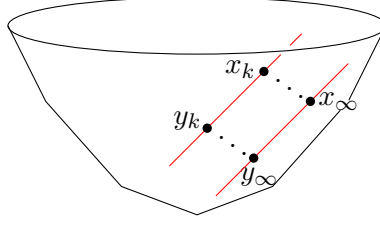


FIGURE 4.1

Preuve. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, soit \mathcal{C}_k une chaîne de lumière de x_k à y_k composée de N géodésiques de lumière, dont les points d'intersection consécutifs sont notés x_0^k, \dots, x_N^k , telle que

$$\sum_{i=0}^{N-1} \delta_{\Omega}^1(x_i^k, x_{i+1}^k) = L(\mathcal{C}_k) \leq \delta_{\Omega}^N(x_k, y_k) + 1 \leq M + 1.$$

Alors, en particulier, pour tout $i \in \{0, \dots, N-1\}$, on a $\delta_{\Omega}(x_i^k, x_{i+1}^k) \leq M + 1$. On peut donc supposer que $N = 1$ et déduire le résultat par récurrence. Supposons alors que $N = 1$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe une géodésique maximale isotrope $\alpha_k : I \rightarrow \Omega$ et $s_k, t_k \in I$ avec $s_k < t_k$, tels que $\alpha_k(s_k) = x_k$ et $\alpha_k(t_k) = y_k$. Par la proposition 3.1, on a $\delta_{\Omega}(x_k, y_k) = \delta_{\Omega}^1(x_k, y_k) = d_{\text{hyp}}(s_k, t_k)$, ce qui implique que la suite $(d_{\text{hyp}}(s_k, t_k))$ est bornée. L'image de α_k est contenue dans un unique photon Δ_k . Soit a_k, b_k les points d'extrémité de $\Delta_k \cap \bar{\Omega}$, tels que a_k, x_k, y_k, b_k sont alignés dans cet ordre. En extrayant une sous-suite, on peut supposer que $y_k \rightarrow y_{\infty} \in \bar{\Omega}$, $a_k \rightarrow a_{\infty} \in \partial\Omega$ et $b_k \rightarrow b_{\infty} \in \partial\Omega$ lorsque $k \rightarrow +\infty$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, les points a_k, x_k, y_k, b_k sont situés sur le même photon Δ_k , donc $a_{\infty}, x_{\infty}, y_{\infty}, b_{\infty}$ sont situés sur le même photon Δ , dans cet ordre. Comme x_{∞} est photon-extremal, on a $x_{\infty} = a_{\infty}$. Cela implique que $t_k \rightarrow -1$. De plus, puisque la suite $(d_{\text{hyp}}(s_k, t_k))$ est bornée, on a également $s_k \rightarrow -1$. Ainsi, $y_{\infty} = x_{\infty}$. Voir également la figure 4.1. ■

Preuve du lemme 4.6. Soit $\mathcal{K} \subset \Omega$ un sous-ensemble compact tel que $\Omega = \text{Conf}(\Omega) \cdot \mathcal{K}$. Soit $(x_k) \in \Omega^{\mathbf{N}}$ une suite convergeant vers $a \in \partial\Omega$ et soit $(y_k) \in \Omega^{\mathbf{N}}$ une autre suite telle qu'il existe $M > 0$ avec $\delta_{\Omega}(x_k, y_k) \leq M$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Il existe une suite $(g_k) \in \text{Conf}(\Omega)^{\mathbf{N}}$ telle que $g_k^{-1} \cdot x_k \in \mathcal{K}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Définissons maintenant le sous-ensemble compact $\mathcal{K}' := \{x \in \Omega \mid \delta_{\Omega}(x, \mathcal{K}) \leq M\}$ de Ω . Par le lemme 4.7, il existe un $N \in \mathbf{N}$ et un $M' > 0$ tels que pour tous $x, y \in \mathcal{K}'$, on ait $\delta_{\Omega}^N(x, y) \leq M'$. Pour chaque $k \in \mathbf{N}$, on a $g_k^{-1} \cdot x_k$ et $g_k^{-1} \cdot y_k \in \mathcal{K}'$. Par conséquent, on obtient :

$$\delta_{\Omega}^N(x_k, y_k) = \delta_{\Omega}^N(g_k^{-1} \cdot x_k, g_k^{-1} \cdot y_k) \leq M'.$$

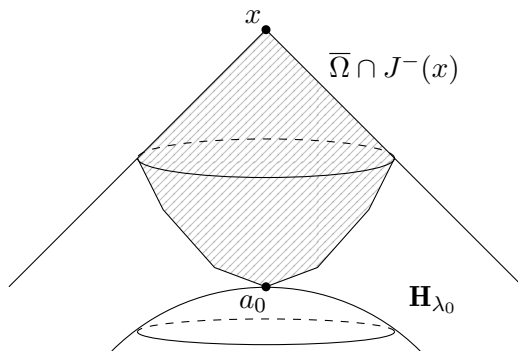
Enfin, en appliquant le lemme 4.9, on conclut que la suite (y_k) converge vers a . ■

4.2 Une preuve courte en signature lorentzienne

Nous considérons le cas $p = 1$ et $n := q + 1$. Le point clé ici est d'utiliser la structure causale de $\mathbf{R}^{1, n-1}$. Nous combinons le théorème 3.27 et la proposition 3.19 pour conclure que les domaines quasi-homogènes propres de $\mathbf{Ein}^{1, n-1}$ sont causalement convexes.

Lemme 4.10. *Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^{1, n-1}$ un domaine borné. Alors, pour tout $x \in \Omega$, le passé $I^-(x)$ et le futur $I^+(x)$ contiennent tous les deux au moins un point photon-extremal de Ω .*

Preuve. Soit $x \in \Omega$ et notons \mathbf{H}_{λ} la feuille hyperbolique passée :

FIGURE 4.2 – Existence de points extrémaux dans le passé de x .

$$\mathbf{H}_\lambda = \{z \in \mathbf{R}^{1,n-1} \mid \mathbf{b}(z-x, z-x) = -\lambda^2\} \cap I^-(x).$$

Puisque Ω est un ouvert propre, la feuille \mathbf{H}_λ est disjointe de Ω pour des valeurs suffisamment grandes de λ . Soit $\lambda_0 > 0$ le plus petit λ avec cette propriété. Alors \mathbf{H}_{λ_0} doit intersecter $\overline{\Omega}$. Soit $a_0 \in \partial\Omega \cap \mathbf{H}_{\lambda_0}$. Le passé causal $J^-(a_0)$ est contenu dans le passé de \mathbf{H}_{λ_0} , donc il n'intersecte $\overline{\Omega}$ qu'en $\{a_0\}$. En particulier, a_0 est un point extrémal de Ω . Une preuve analogue montre qu'il existe un point extrémal $b_0 \in I^+(x) \cap \partial\Omega$. ■

Soit Ω un ouvert propre quasi-homogène de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$, et fixons une fois pour toutes une carte de Minkowski $\mathbf{R}^{1,n-1}$ contenant $\overline{\Omega}$. Soit $x \in \Omega$ et soit a_0 (resp. b_0) un point extrémal de Ω dans le passé de x (resp. dans le futur), fournis par le lemme 4.10. On a alors $b_0 \in I^+(a_0)$ et on peut considérer le diamant $I(a_0, b_0) \subset \mathbf{R}^{1,n-1}$, qui contient x . Par la proposition 4.5, on a $C(a_0) \cap \Omega = C(b_0) \cap \Omega = \emptyset$. Puisque $x \in I(a_0, b_0)$, le domaine Ω est contenu dans $I(a_0, b_0)$ par connexité. Inversement, puisque Ω est causalement convexe par le théorème 3.27 et la proposition 3.19, on a $I(a_0, b_0) \subset \Omega$. Ainsi, $\Omega = I(a_0, b_0)$.

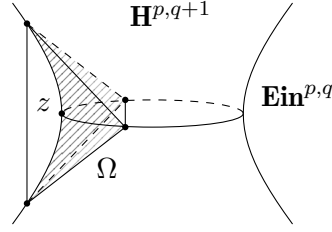
4.3 Preuve du théorème principal en signature supérieure

Dans cette section, nous donnons une preuve du théorème 4.1 dans toute signature. Pour cela, nous utilisons le modèle projectif de l'univers d'Einstein.

4.3.1 Un lemme projectif

Dans cette section, nous prouvons le lemme 4.11. C'est une étape nécessaire pour établir le lien entre la géométrie pseudo-riemannienne de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ et la géométrie convexe à l'intérieur de $\mathbf{P}(\mathbf{R}^{p+1,q+1})$.

Tout d'abord, fixons quelques notations. Soit $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ un ouvert propre : il existe $\xi_0 \in \mathbf{Ein}^{p,q}$ tel que $C(\xi_0) \cap \overline{\Omega} = \emptyset$. Alors $\overline{\Omega} \cap \xi_0^\perp = \emptyset$, ce qui signifie que Ω est propre dans $\mathbf{P}(\mathbf{R}^{p+1,q+1})$. Puisqu'il est connexe, on peut le relever dans un cône propre $\tilde{\Omega} \subset \mathbf{R}^{p+1,q+1}$. On définit alors $\tilde{\mathcal{O}}_\Omega := \text{Conv}(\tilde{\Omega})$, son enveloppe convexe dans \mathbf{R}^{p+q+2} , qui est un cône convexe propre de \mathbf{R}^{p+q+2} , a priori pas nécessairement ouvert. On définit $\mathcal{O}_\Omega := \mathbf{P}(\tilde{\mathcal{O}}_\Omega)$. C'est un sous-ensemble proprement convexe de $\mathbf{P}(\mathbf{R}^{p+1,q+1})$, et il ne dépend pas du choix de la carte contenant $\overline{\Omega}$. En particulier, \mathcal{O}_Ω est invariant sous l'action de $\text{Conf}(\Omega)$. Plus précisément, pour tout $g \in \text{Conf}(\Omega)$, il existe un unique relevé $\tilde{g} \in O(p+1, q+1)$ qui préserve $\tilde{\Omega}$ et donc $\tilde{\mathcal{O}}_\Omega$. À chaque fois que nous écrirons \tilde{g} pour $g \in \text{Conf}(\Omega)$ ou $\tilde{\mathcal{O}}_\Omega$, ce sera au moyen d'un relevé choisi $\tilde{\Omega}$ de Ω .

FIGURE 4.3 – L’enveloppe convexe de Ω contient z dans son intérieur.

Lemme 4.11. *Soit $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ un ouvert propre. Si $p \geq 1$, alors \mathcal{O}_Ω est un ouvert propre de $\mathbf{P}(\mathbf{R}^{p+1,q+1})$.*

Remarque 4.12. Si $p = 0$, alors l’enveloppe convexe de Ω n’est pas nécessairement ouverte.

Preuve. Nous savons déjà que \mathcal{O}_Ω est propre. Pour montrer que \mathcal{O}_Ω est ouvert, nous allons montrer que c’est un voisinage de Ω dans $\mathbf{P}(\mathbf{R}^{p+1,q+1})$: cela impliquera qu’il existe un ensemble ouvert $\Omega \subset U \subset \mathcal{O}_\Omega$, donc en particulier $\mathcal{O}_\Omega = \text{Conv}(U)$ est ouvert dans $\mathbf{P}(\mathbf{R}^{p+1,q+1})$. Étant donné $z \in \Omega$, nous voulons trouver un voisinage de z contenu dans \mathcal{O}_Ω . Nous pouvons toujours rendre Ω plus petit et supposer que $\Omega = \mathbf{D}^{p,q}$. Puisque les diamants sont homogènes, nous pouvons faire un choix spécifique pour z . Nous décomposons $\mathbf{R}^{p+1,q+1} = \mathbf{R}^{p,1} \oplus \mathbf{R}^{1,q}$ de manière telle que

$$\Omega = \left\{ \mathbf{P}(v + w) \mid \begin{array}{l} v \in \mathbf{R}^{p,1}, \quad \mathbf{b}(v, v) = +1, \quad v_{p+1} > 0 \\ w \in \mathbf{R}^{1,q}, \quad \mathbf{b}(w, w) = -1, \quad w_{q+1} > 0 \end{array} \right\}.$$

Ici, v_{p+1} (resp. w_{q+1}) désigne les coordonnées de v (resp. w) dans la décomposition $\mathbf{R}^{p,1} = \langle e_1, \dots, e_{p+1} \rangle$ (resp. $\mathbf{R}^{1,q} = \langle f_1, \dots, f_{q+1} \rangle$) pour laquelle la forme bilinéaire \mathbf{b} s’écrit $\mathbf{b}(v, v) = -(v_1)^2 - \dots - (v_p)^2 + (v_{p+1})^2$ (resp. $\mathbf{b}(w, w) = (w_1)^2 + \dots + (w_p)^2 - (w_{q+1})^2$). Nous posons $u = e_{p+1} + f_{q+1} \in \Omega$ et

$$\begin{cases} a_i^\pm &= f_{q+1} + \sqrt{2}e_{p+1} \pm e_i \in \tilde{\Omega}, \quad (i = 1, \dots, p), \\ b_j^\pm &= e_{p+1} + \sqrt{2}f_{q+1} \pm f_j \in \tilde{\Omega}, \quad (j = 1, \dots, q). \end{cases}$$

On peut vérifier que $\mathcal{S} = \{a_i^\pm, b_j^\pm\}_{i,j}$ engendre $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$ et que $u = \frac{1}{(1+\sqrt{2})2p} \sum_i a_i^\pm + \frac{1}{(1+\sqrt{2})2q} \sum_j b_j^\pm$. Puisque u est un barycentre non trivial de \mathcal{S} , il appartient à l’intérieur de $\text{Conv}(\mathcal{S})$. Ainsi, le point $z := \mathbf{P}(u)$ est dans l’intérieur de $\mathbf{P}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{O}_\Omega$. ■

4.3.2 Points extrémaux-espace et extrémaux-temps

Les points photon-extremaux d’un ouvert propre de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ ont été définis dans la section 4.1.1. Nous verrons dans cette section que la quasi-homogénéité permet de séparer l’ensemble des points photon-extremaux en deux familles $\text{Conf}(\Omega)$ -invariantes, à savoir, les points *extrémaux-espace* et les points *extrémaux-temps*.

Nous vérifions d’abord que $\text{Extr}(\Omega)$ est générique, dans le sens où les droites de \mathbf{R}^{p+q+2} correspondant aux points photon-extremaux d’un ouvert propre Ω de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ engendrent \mathbf{R}^{p+q+2} en tant qu’espace vectoriel :

Lemme 4.13. *Les points extrémaux (au sens projectif) de \mathcal{O}_Ω sont tous des points photon-extremaux de Ω . En particulier, il existe $x_1, \dots, x_{p+q+2} \in \text{Extr}(\Omega)$ tels que $\mathbf{P}(\mathbf{R}^{p+1,q+1}) = x_1 \oplus \dots \oplus x_{p+q+2}$.*

Preuve. Soit $a \in \partial\mathcal{O}_\Omega$ un point extrémal. Par définition de l'enveloppe convexe, le point a doit appartenir à $\overline{\Omega}$. S'il est dans Ω , alors pour tout photon Δ passant par a , le point a se trouve dans l'intérieur d'une composante connexe de $\overline{\Omega} \cap \Delta$, qui est un intervalle ouvert de la droite projective vue dans $\mathbf{P}(\mathbf{R}^{p+1, q+1})$, contenue dans $\overline{\mathcal{O}_\Omega}$. Cela contredit l'extrémalité de a dans \mathcal{O}_Ω . Ainsi que $a \in \partial\Omega$. De façon similaire, si Δ est un photon, le point a ne peut pas appartenir à une composante connexe non triviale de $\text{int}_\Delta(\overline{\Omega} \cap \Delta)$, sinon il se trouverait dans l'intervalle non trivial de $\text{int}_\Delta(\overline{\mathcal{O}_\Omega} \cap \Delta)$. Ainsi, le point $a \in \partial\Omega$ est photon-extremal. ■

À partir de maintenant, nous supposons que Ω est un ouvert propre quasi-homogène de $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Nous fixons une carte de Minkowski $\mathbf{R}^{p,q}$ contenant $\overline{\Omega}$. Pour tout point $x \in \mathbf{R}^{p,q}$, nous écrivons

$$I(x) = \{y \in \mathbf{R}^{p,q} \mid y - x \text{ est un vecteur de type temps}\},$$

et $J(x) = \overline{I(x)} \subset \mathbf{R}^{p,q}$. Soit $a \in \text{Extr}(\Omega)$ un point photon-extremal de Ω . D'après la proposition 4.5, on a $C(a) \cap \Omega = \emptyset$. Puisque Ω est connexe, on a $\Omega \subset I(a)$, auquel cas on dit que a est un *point extrémal-temps*, ou $\Omega \subset \mathbf{R}^{p,q} \setminus J(a)$, auquel cas on dit que a est un *point extrémal-espace*. Nous notons $E^+(\Omega)$ (resp. $E^-(\Omega)$) l'ensemble des points extrémaux-espace (resp. extrémaux-temps) de Ω .

Lemme 4.14. *Les ensembles $E^+(\Omega)$ et $E^-(\Omega)$ satisfont les propriétés suivantes :*

1. *Ils sont invariants sous l'action de $\text{Conf}(\Omega)$.*
2. *Ils sont tous les deux non vides.*
3. *Si $a \in E^+(\Omega)$ et $b \in E^-(\Omega)$, alors $a \in C(b)$.*

Preuve. Puisque la définition des points extrémaux-temps (resp. extrémaux-espace) dépend de la carte, il n'est pas évident que ces derniers forment un sous-ensemble invariant sous l'action de $\text{Conf}(\Omega)$, puisque la carte de Minkowski $\mathbf{R}^{p,q}$ n'est pas nécessairement invariante sous l'action de $\text{Conf}(\Omega)$. Cependant, on peut écrire

$$E^+(\Omega) = \{a \in \text{Extr}(\Omega) \mid \forall U \subset \mathbf{Ein}^{p,q} \text{ voisinage de } a, I(a) \cap U \cap \Omega \neq \emptyset\},$$

qui est une expression indépendante de la carte, invariante sous l'action du groupe conforme de Ω . De même, l'ensemble $E^-(\Omega)$ est invariant. Cela démontre le point 1.

Montrons l'assertion 2. Supposons, par exemple, que $E^+(\Omega) = \emptyset$. Alors, pour tous $a, b \in \partial\tilde{\mathcal{O}}_\Omega \setminus \{0\}$ tels que $\mathbf{P}(a), \mathbf{P}(b)$ sont des points extrémaux dans \mathcal{O}_Ω , on a $\mathbf{b}(a, b) \leq 0$, par définition de $E^-(\Omega)$. Par bilinéarité de \mathbf{b} et par définition de $\tilde{\mathcal{O}}_\Omega$, on a $\mathbf{b}(v, w) \leq 0$ pour tous $v, w \in \overline{\tilde{\mathcal{O}}_\Omega}$. Par le lemme 4.11, cela est vrai pour tous $v, w \in \tilde{\Omega}$, ce qui signifie que pour tout $x \in \Omega$, on a $\Omega \subset I(x)$. Cela est impossible car Ω est ouvert dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Ainsi, $E^+(\Omega) \neq \emptyset$, et de même $E^-(\Omega) \neq \emptyset$.

Pour prouver 3, supposons $a \in E^+(\Omega)$ et $b \in E^-(\Omega)$. Puisque $a \in \partial\Omega$ et $\Omega \subset I(b)$, on obtient $a \in J(b)$. De même, $a \in \partial\Omega$ et $\Omega \subset \mathbf{R}^{p,q} \setminus J(a)$, donc $b \in \mathbf{R}^{p,q} \setminus I(a)$ ou de manière équivalente $a \in \mathbf{R}^{p,q} \setminus I(b)$. Par conséquent, $a \in C(b)$. ■

4.3.3 Fin de la preuve du théorème 4.1

Nous pouvons maintenant terminer la preuve du théorème 4.1 en signature quelconque. Nous utiliserons le lemme suivant, qui a déjà été prouvé dans [DGK17, Lem. 3.3] (et énoncé avec une hypothèse de discrétitude qui n'est pas nécessaire). Nous en donnons la démonstration pour la commodité du lecteur.

Lemme 4.15. *Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur V . Soit $U \subset V$ un cône ouvert proprement convexe, et soit $H \leq \text{SL}(V)$ un sous-groupe préservant U . Soit $v \in U$ et $(h_k) \in H^{\mathbf{N}}$ tel qu'il existe $a \in \partial\mathbf{P}(U)$ satisfaisant $\mathbf{P}(h_k \cdot v) \rightarrow a$. Alors $\|h_k \cdot v\| \rightarrow +\infty$.*

Preuve. Nous désignons par $\|\cdot\|$ la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|$. Montrons d'abord que $\|h_k\| \rightarrow +\infty$. Supposons par l'absurde que (h_k) admette une sous-suite de norme bornée. Notons encore cette sous-suite par (h_k) . Alors (h_k) converge dans $\text{End}(V)$ vers un certain h . La limite h appartient à $\text{SL}(V)$ et préserve U . En notant $\mathbf{P}(g)$ la projection d'un élément $g \in \text{End}(V)$ dans $\mathbf{P}(\text{End}(V))$, on a $\mathbf{P}(h_k) \rightarrow \mathbf{P}(h)$ dans $\text{PGL}(V)$. Puisque $\mathbf{P}(h_k \cdot v) \rightarrow \mathbf{P}(h \cdot v)$, on a $a = \mathbf{P}(h \cdot v) \in \mathbf{P}(U)$, une contradiction. Ainsi $\|h_k\| \rightarrow +\infty$.

Soit φ une forme linéaire sur V telle que $\bar{U} \subset \{\varphi > 0\}$. On peut supposer que $\varphi(v) = 1$. L'ensemble $U \cap \{\varphi = 1\}$ est borné. Notons \mathcal{K} son bord. Puisque \mathcal{K} est compact, il existe $0 < \varepsilon < 1$ tel que pour tout $w \in \mathcal{K}$, la droite passant par v et w intersecte \mathcal{K} en un $w' \neq w$ tel que $v = tw + (1-t)w'$ pour un certain $t \geq \varepsilon$. Alors, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a

$$\varphi(h_k \cdot v) \geq \varepsilon \max_{\mathcal{K}}(\varphi \circ h_k).$$

Ainsi, il suffit de montrer que le maximum de $\varphi \circ h_k$ sur \mathcal{K} tend vers l'infini avec k . Or, puisque $U \cap \{\varphi = 1\}$ est l'enveloppe convexe de \mathcal{K} , il suffit de montrer que le maximum de $\varphi \circ h_k$ sur $U \cap \{\varphi = 1\}$ tend vers l'infini avec k . De plus, puisque U est un cône, il suffit de montrer que le supremum de $\varphi \circ h_k$ sur $U \cap \{\varphi < 1\}$ tend vers l'infini avec k . Comme $\bar{U} \subset \{\varphi > 0\}$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\varphi(u) > \alpha\|u\|$ pour tout $u \in \bar{U}$. Il existe $\beta > 0$, tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe $u_k \in U \cap \{\varphi < 1\}$ tel que $\|h_k \cdot u_k\| > \beta\|h_k\|$. Alors, on a

$$\max_{U \cap \{\varphi < 1\}} (\varphi \circ h_k) \geq \varphi(h_k \cdot u_k) > \alpha\|h_k \cdot u_k\| \geq \alpha\beta\|h_k\| \rightarrow +\infty.$$

■

Soient $V_0 := \text{Span}(E^+(\Omega)) \subset \mathbf{R}^{p+1, q+1}$ et $V_1 := \text{Span}(E^-(\Omega)) \subset \mathbf{R}^{p+1, q+1}$. D'après le lemme 4.13, on a $\mathbf{R}^{p+1, q+1} = V_0 + V_1$. De plus, d'après le lemme 4.14.(3), les deux espaces V_0 et V_1 sont orthogonaux. Il s'ensuit que $V_0 \cap V_1 = \{0\}$, donc $\mathbf{R}^{p+1, q+1} = V_0 \oplus V_1$. Pour la même raison, les espaces V_0 et V_1 sont non-dégénérés, ce qui signifie que la restriction de \mathbf{b} à V_i pour $i \in \{0, 1\}$ n'a pas de noyau et est de signature (p_i, q_i) , avec $p_0 + p_1 = p + 1$ et $q_0 + q_1 = q + 1$. De plus, d'après le lemme 4.14.(1), le sous-espace V_i est $\text{Conf}(\Omega)$ -invariant. Par conséquent, on obtient une décomposition orthogonale $\text{Conf}(\Omega)$ -invariante

$$\mathbf{R}^{p+1, q+1} = V_0 \oplus V_1.$$

Rappelons les notations de la section 1.3 et de la démonstration de la proposition 1.19; nous écrivons

$$J = \mathbf{P} \{v_0 + v_1 \in V_0 \oplus V_1 \mid \mathbf{b}(v_i, v_i) = 0 \text{ pour } i \in \{0, 1\}\}$$

et

$$U_i = \mathbf{P} \{v_0 + v_1 \in V_0 \oplus V_1 \mid -\mathbf{b}(v_0, v_0) = \mathbf{b}(v_1, v_1) = (-1)^i\},$$

pour $i \in \{0, 1\}$. Soit $\Omega_0 := \Omega \cap U_0$, $\Omega_1 := \Omega \cap U_1$, et $\Omega_J := \Omega \cap J$. Ces ensembles sont invariants sous l'action de $\text{Conf}(\Omega)$. On a soit $\Omega_0 \neq \emptyset$, soit $\Omega_1 \neq \emptyset$, car Ω_J est d'intérieur vide dans $\mathbf{Ein}^{p, q}$. Supposons par exemple que $\Omega_0 \neq \emptyset$. Soit $a \in \partial\Omega_0$ et soit $(a_k) \in \Omega_0^{\mathbf{N}}$ tel que $a_k \rightarrow a$. Par quasi-homogénéité de Ω , il existe une suite $(x_k) \in \Omega^{\mathbf{N}}$ qui est bornée pour la fonction de distance δ_Ω et il existe une suite $(g_k) \in \text{Conf}(\Omega)^{\mathbf{N}}$ telle que $g_k \cdot x_k = a_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Puisque Ω_0 est invariant sous l'action de $\text{Conf}(\Omega)$, on a $x_k \in \Omega_0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. En

extrayant, on peut toujours supposer que (x_k) converge vers un point $x \in \Omega \cap \overline{\Omega_0}$. Puisque $\delta_\Omega(g_k \cdot x_k, g_k \cdot x) = \delta_\Omega(x_k, x) \rightarrow 0$, on a donc $g_k \cdot x \rightarrow a$, car Ω est un lieu d'équicontinuité de (g_k) agissant sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$ (voir aussi la section 6.1).

Puisque $x \in \Omega \subset \mathcal{O}_\Omega$, il existe $(v_0, v_1) \in V_0 \times V_1$ tel que $v_0 + v_1 \in \tilde{\mathcal{O}}_\Omega$ et $x = \mathbf{P}(v_0 + v_1)$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, soit \tilde{g}_k l'unique relevé de g_k défini dans la sous-section 4.3.1. Puisque \tilde{g}_k préserve $\tilde{\mathcal{O}}_\Omega$, d'après le lemme 4.15, on a $\|\tilde{g}_k(v_0 + v_1)\| \rightarrow +\infty$ pour une norme $\|\cdot\|$ sur V . D'autre part, en extrayant, il existe $w_0 \in V_0$ et $w_1 \in V_1$ tels que $\|w_0 + w_1\| = 1$ et $\frac{\tilde{g}_k(v_0 + v_1)}{\|\tilde{g}_k(v_0 + v_1)\|} \rightarrow w_0 + w_1$. Cela implique que $a = \mathbf{P}(w_0 + w_1)$. Mais

$$\mathbf{b}(w_0, w_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{b}\left(\frac{\tilde{g}_k v_0}{\|\tilde{g}_k(v_0 + v_1)\|}, \frac{\tilde{g}_k v_0}{\|\tilde{g}_k(v_0 + v_1)\|}\right) = 0,$$

et le même calcul s'applique pour w_1 , ce qui signifie que $a \in \partial U_1$.

Ainsi, on a $\Omega_0 \subset U_0$ et $\partial\Omega_0 \subset \partial U_0$. Cela implique que Ω_0 est fermé dans U_0 . Comme il est aussi ouvert, il est une union de composantes connexes de U_0 . Mais dès que $q_0 \geq 2$ ou $p_1 \geq 2$, d'après la proposition 1.19, l'ensemble ouvert U_0 n'a pas de composantes connexes propres. Puisque $\Omega_0 \subset \Omega$ est propre, cela implique que $(p_0, q_0) = (p, 1)$ et $(p_1, q_1) = (1, q)$. Ainsi, encore une fois, d'après la proposition 1.19, l'ensemble Ω_0 est un diamant.

Si $\Omega_1 \neq \emptyset$, alors, d'après la proposition 1.19, il doit être le diamant dual de Ω_0 . Mais alors $\Omega_0 \cup \Omega_1 \subset \Omega$ n'est pas propre. Par conséquent, nécessairement $\Omega_1 = \emptyset$. Comme Ω est ouvert, on a $\Omega_J = \emptyset$, et par conséquent $\Omega = \Omega_0$ est un diamant. Cela conclut la preuve du théorème 4.1.

4.4 Variétés conformément plates à développante propre

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème 4.2.

Preuve du théorème 4.2. Soit $\text{dev} : \tilde{M} \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ une application de développement pour M et soit $\Omega = \text{dev}(\tilde{M})$. Puisque M est compacte, il existe un domaine fondamental compact $\mathcal{K} \subset \tilde{M}$ pour l'action de $\pi_1(M)$. Comme l'application de développement est équivariante, l'ensemble compact $\text{dev}(\mathcal{K}) \subset \Omega$ intersecte chaque orbite de $\text{hol}(\pi_1(M))$, c'est-à-dire que Ω est quasi-homogène. Le théorème 4.1 implique que Ω est un diamant et est conformément équivalent à $-\mathbf{H}^p \times \mathbf{H}^q$. Soit g_Ω la métrique riemannienne conformément invariante de Ω , égale à $g_{\mathbf{H}^p} \oplus g_{\mathbf{H}^q}$ sous cette identification, et soit $g = \text{dev}^* g_\Omega$. La métrique g est invariante sous $\pi_1(M)$, donc elle définit une métrique riemannienne sur M . Cette métrique doit être complète puisque M est compacte, donc g est également complète. L'application dev est une isométrie locale entre des variétés riemanniennes complètes, c'est donc un revêtement sur son image. Puisque Ω est simplement connexe, le revêtement est un difféomorphisme sur son image et M est un quotient compact de $\mathbf{H}^p \times \mathbf{H}^q$. Lorsque $p, q \geq 1$ sont distincts, il est un fait général que les réseaux cocompacts de $\text{PO}(p, 1) \times \text{PO}(1, q)$ sont virtuellement des produits (voir par exemple [Mor15, Thm 5.6.2] pour une démonstration utilisant l'arithméticité de Margulis lorsque $p, q \geq 2$). Ce fait complète la preuve du théorème. ■

Lorsque $p = q$, l'argument dans la première partie de la démonstration du théorème 4.2 est valide, de sorte que toute variété conforme plate fermée de signature (p, p) à développante propre est conforme à un quotient de la forme $(-\mathbf{H}^p) \times \mathbf{H}^p / \Gamma$, où $\Gamma < \text{PO}(p, 1) \times \text{PO}(1, p)$ est un réseau cocompact. Cependant, on peut construire des réseaux irréductibles cocompacts de $\text{PO}(p, 1) \times \text{PO}(1, p)$ (voir [Mor15, Prop. 15.25]). Par le théorème d'arithméticité de Margulis, ces réseaux sont arithmétiques. Lorsque $p = q = 2$, les réseaux arithmétiques de $\text{PO}(1, 2) \times \text{PO}(1, 2)$ sont complètement décrits, voir par exemple [Vig80]. Un exemple explicite peut être trouvé dans [Mor15, Exemple 5.5.3].

Chapitre 5

Une métrique pseudo-riemannienne invariante en géométrie conforme

En géométrie conforme riemannienne plate, Kulkarni–Pinkall [KP94] et Apanasov [Apa91] ont introduit une métrique canonique en utilisant une construction de type Kobayashi–Royden. Leur idée est basée sur l'étude des applications conformes $\mathbf{H}^n \rightarrow M$ de l'espace hyperbolique vers une variété riemannienne conformément plate M . La métrique canonique g_{can}^M d'une variété riemannienne conformément plate (M, g) peut être vue comme la plus grande métrique de la classe conforme qui rend les applications conformes $\mathbf{H}^n \rightarrow M$ contractantes. On peut alors montrer que la distance riemannienne associée à g_{can}^M est la distance de Kobayashi de M obtenue en minimisant les longueurs de chaînes d'applications conformes $\mathbf{H}^n \rightarrow M$.

Théorème ([KP94],[Apa91]). *Soit M une variété conformément plate riemannienne telle qu'il n'existe pas d'application conforme $\mathbf{R}^n \rightarrow M$. Alors g_{can}^M est une métrique riemannienne conformément invariante de classe $C^{1,1}$ dont la courbure sectionnelle, définie presque partout, appartient à $[-1, 1]$.*

La régularité $C^{1,1}$ pour g_{can}^M est un phénomène exceptionnel pour les constructions de type Kobayashi–Royden. En général, la fonctionnelle infinitésimale d'une telle construction est seulement semi-continue supérieurement (c'est le cas de la fonctionnelle de Markowitz, voir section 2.2.2). Cette régularité est due à l'unicité, pour tout point $x \in M$, d'une application conforme pointée $\varphi : (\mathbf{H}^n, 0) \rightarrow (M, x)$ dont la distorsion conforme en 0 est maximale. L'image de cette application est appelée *boule canonique* en x . Lorsque $M = \Omega$ est un ouvert de la sphère conforme, cette boule canonique est entièrement caractérisée par l'image du complémentaire de Ω dans une projection stéréographique selon le point x (voir par exemple [KP94, Thm. 4.4]).

En signature mixte, on a déjà vu aux chapitres précédents une construction de type Kobayashi–Royden : dans [Mar81], Markowitz associe à toute variété conforme pseudo-riemannienne une pseudo-distance conformément invariante (voir les chapitres 2 et 3). Dans beaucoup d'exemples intéressants (comme par exemples pour les variétés complètes à courbure constante) la pseudo-distance de Markowitz est identiquement nulle. Ceci n'est pas surprenant : le groupe conforme d'une variété pseudo-riemannienne compacte n'est pas toujours compact, donc il ne préserve pas a priori de distance compatible à la topologie de la variété. Cependant, dans certains cas, le groupe conforme d'une variété pseudo-riemannienne peut préserver une métrique pseudoriemannienne, sans pour autant préserver de distance (l'espace de de-Sitter illustre ce point). Ces observations ont motivé la question suivante : est-il possible de réaliser une construction de Kobayashi–Royden qui associe à une large classe

de variétés conformément plates pseudo-riemanniennes une métrique pseudo-riemannienne dans la classe conforme ?

Dans ce chapitre, nous proposons une version pseudo-riemannienne de la métrique de Kulkarni–Pinkall et Apanasov en construisant une *métrique pseudo-riemannienne canonique* dans la classe conforme d’une variété conformément plate. Nous appellerons cette métrique la *métrique de Kobayashi–Royden* de M , et nous la noterons g_{KR}^M . Au lieu de regarder des applications conformes de l’espace hyperbolique \mathbf{H}^n vers M comme le font Kulkarni–Pinkall et Apanasov, on construit la métrique de Kobayashi–Royden en considérant des applications conformes du diamant $\mathbf{D}^{p,q}$ vers M . L’avantage de cette construction est qu’elle fait sens pour toute variété conformément plate et qu’elle est conformément invariante (cette construction est même *fonctorielle* en un sens précis, voir la proposition 5.4). L’inconvénient majeur de cette construction est qu’elle est peu régulière. En toute généralité, la métrique de Kobayashi–Royden peut s’écrire

$$g_{\text{KR}}^M = \frac{1}{\nu_g^2} \cdot g,$$

où g est une métrique C^∞ quelconque de la classe conforme et ν_g est une fonction positive, semi-continue inférieurement et prenant possiblement des valeurs infinies. Lorsque la fonction ν_g est localement majorée par une constante positive, la métrique g_{KR}^M est une métrique pseudo-riemannienne conformément invariante semi-continue supérieurement dans la classe conforme. On dira alors que M est *Kobayashi–Royden-hyperbolique*. En général, il n’est pas évident de montrer qu’une variété conformément plate est Kobayashi–Royden-hyperbolique. À l’aide d’une considération par projection stéréographique similaire à celle de Kulkarni–Pinkall et Apanasov, nous donnons des exemples de variétés Kobayashi–Royden-hyperboliques qui incluent notamment les espaces pseudo-riemanniens à courbure constante non nulle (voir section 5.4). D’autres exemples, moins élémentaires, seront donnés aux chapitres 6 et 7.

5.1 Métrique pseudo-riemannienne de Kobayashi–Royden

Soit M une variété pseudo-riemannienne conformément plate de signature (p, q) . On se donne une métrique g dans la classe conforme de M . Pour $x \in M$, on définit

$$\nu_g(x) = \sup_{\varphi, a} \text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a). \quad (5.1)$$

où le supremum est pris sur l’ensemble des applications conformes $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ et des points $a \in \mathbf{D}^{p,q}$ tels que $\varphi(a) = x$. Rappelons que $\text{dc}(\varphi, g, g', a)$ désigne la distorsion conforme de φ en x relativement aux métriques g et g' , voir la section 1.1.1. L’équation 5.1 définit une fonction

$$\nu_g : M \rightarrow (0, +\infty]$$

qui peut a priori prendre des valeurs infinies. Si jamais on choisit une autre métrique $g' = \alpha^2 g$ dans la classe conforme, alors ν_g et $\nu_{g'}$ sont reliées par la relation

$$\nu_{g'} = \alpha \nu_g. \quad (5.2)$$

Définition 5.1. La *métrique de Kobayashi–Royden* de M est la métrique singulière de la classe conforme définie par

$$g_{\text{KR}}^M = \frac{1}{\nu_g^2} g.$$

En signature riemannienne, cette définition coïncide avec la métrique canonique de Kulkarni–Pinkall, voir [KP94, Prop. 5.3]. Dans l'égalité précédente, on prend la convention que $\frac{1}{+\infty} = 0$. On vérifie que cette définition est indépendante du choix de métrique dans la classe conforme. En effet, si $g' = \alpha^2 g$ alors par l'équation 5.2, on a

$$\frac{1}{\nu_{g'}^2} g' = \frac{1}{\alpha^2 \nu_g^2} \alpha^2 g = \frac{1}{\nu_g^2} g.$$

Ainsi g_{KR}^M est bien définie. Lorsque le contexte est clair, on utilisera aussi la notation g_{KR} pour désigner g_{KR}^M . Notons tout de suite que g_{KR} n'est pas une métrique pseudo-riemannienne à proprement parler. En effet, d'une part elle n'est pas régulière en général. D'autre part, le facteur conforme $1/\nu_g^2$ peut s'annuler a priori. Nous appellerons tout de même (abusivement) g_{KR} la *métrique* de Kobayashi–Royden, bien que cet objet n'ait pas les qualités classiques d'une métrique pseudo-riemannienne. Le reste de ce chapitre est consacré à l'étude des propriétés de la métrique de Kobayashi–Royden. Donnons tout de suite un élément de réponse par rapport à la régularité de g_{KR} .

Proposition 5.2. *La fonction ν_g est semi-continue inférieurement.*

Démonstration. Soit $x \in M$ tel que $\nu_g(x) < +\infty$ et soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ et $a \in \mathbf{D}^{p,q}$ tel que

$$\nu_g(x) \leq \text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a) + \varepsilon.$$

Comme φ est lisse, la fonction $[y \mapsto \text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, y)]$ est lisse, donc il existe un voisinage U de a dans $\mathbf{D}^{p,q}$ tel que

$$\text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, y) \leq \text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a) + \varepsilon \text{ pour tout } y \in U.$$

Comme φ est ouverte, l'image $V = \varphi(U)$ est un voisinage de x dans M . Soit $y \in V$ et $z \in U$ tel que $\varphi(z) = y$. Alors

$$\begin{aligned} \nu_g(y) &\geq \text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, z) \\ &\geq \text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a) - \varepsilon \\ &\geq \nu_g(x) - 2\varepsilon, \end{aligned}$$

donc ν_g est semi-continue inférieurement en x . Lorsque $\nu_g(x) = +\infty$, on raisonne identiquement. ■

Donnons une autre définition de g_{KR} qui sera utile dans la suite. Pour cela, nous introduisons un ordre sur la classe conforme d'une métrique pseudo-riemannienne. Soit $x \in M$ et soient g et $g' = \alpha^2 g$ deux métriques dans la classe conforme de M . On dit que g est *plus petite* que g' en x , et on note $g \leq_x g'$, si $\alpha^2(x) \geq 1$. On dit que g est *plus petite* que g' , et on note $g \leq g'$, si $g \leq_x g'$ pour tout $x \in M$, ce qui revient à $\alpha^2 \geq 1$. L'ordre \leq est un ordre partiel sur $[g]$, mais pour tout $x \in M$, l'ordre \leq_x induit un ordre total sur

$$[g]_x := \{g_x \mid g \text{ dans la classe conforme}\}$$

qui rend cet ensemble ordonné isomorphe à $\mathbf{R}_{>0}$. En particulier, la notion de borne inférieure ou supérieure fait sens pour toute partie de $[g]_x$.

Soient $x \in M$ et $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ une application conforme telle que $\varphi(a) = x$ pour un certain point $a \in \mathbf{D}^{p,q}$. On peut pousser en avant $g_{\mathbf{D}^{p,q}}|_a$ en une forme bilinéaire symétrique $\varphi_* g_{\mathbf{D}^{p,q}}|_x \in [g]_x$. Pour toute métrique g dans la classe conforme, on a explicitement :

$$\varphi_* g_{\mathbf{D}^{p,q}}|_x = \frac{1}{\text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a)^2} g.$$

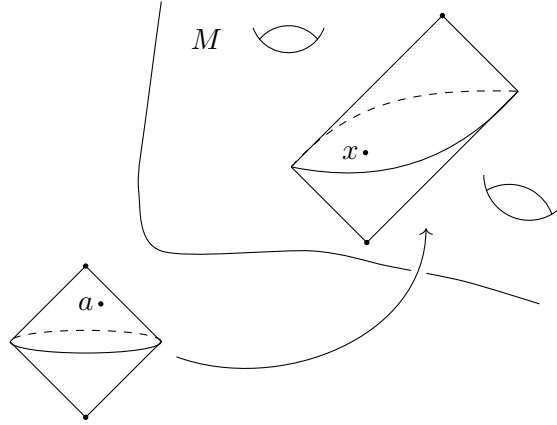


FIGURE 5.1 – Construction de la métrique de Kobayashi–Royden.

Ainsi par la définition 5.1, on a

$$g_{\text{KR}}|_x = \inf_{\varphi} \varphi_* g_{\mathbf{D}^{p,q}}|_x, \quad (5.3)$$

où $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ varie parmi toutes les applications conformes contenant x dans leur image, et où l'infimum fait référence à l'ordre \leq_x sur $[g]_x$. Enfin, on a une troisième façon équivalente de définir g_{KR} . Pour tout $v \in TM$, on a

$$|g_{\text{KR}}(v, v)| = \inf\{|g_{\mathbf{D}^{p,q}}(u, u)| \mid \varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M \text{ conforme, } \varphi_* u = v\}. \quad (5.4)$$

Cette définition se rapproche plus des définitions classiques des fonctionnelles de Kobayashi–Royden comme celle de la fonctionnelle infinitésimale de Markowitz (voir section 2.2.2).

Remarque 5.3. Dans l'équation 5.1 qui définit $\nu_g(x)$, et donc $g_{\text{KR}}^M|_x$, on maximise une quantité sur l'ensemble des applications conformes pointées $\varphi : (\mathbf{D}^{p,q}, a) \rightarrow (M, x)$ et des points $a \in \mathbf{D}^{p,q}$. En réalité, comme $\mathbf{D}^{p,q}$ est homogène et que son groupe conforme préserve $g_{\mathbf{D}^{p,q}}$ (voir section 1.4.4), il n'est pas utile de faire varier le point a dans la définition.

Donnons maintenant la propriété de naturalité qui fait l'intérêt de la métrique de Kobayashi–Royden.

Proposition 5.4. *Soit $f : M \rightarrow N$ une application conforme. Alors*

$$f^* g_{\text{KR}}^N \leq g_{\text{KR}}^M.$$

Si de plus f est un revêtement, alors $f^ g_{\text{KR}}^N = g_{\text{KR}}^M$.*

Démonstration. Soient $x \in M$ et $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ une application conforme telle que $\varphi(a) = x$ pour un certain point $a \in \mathbf{D}^{p,q}$. L'application $h = f \circ \varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow N$ est conforme et $h(a) = f(x)$, donc

$$g_{\text{KR}}^N|_{f(x)} \leq h_* g_{\mathbf{D}^{p,q}}|_{f(x)}.$$

On en déduit

$$f^* g_{\text{KR}}^N|_x \leq f^* h_* g_{\mathbf{D}^{p,q}}|_x = \varphi_* g_{\mathbf{D}^{p,q}}|_x.$$

Par passage à l'infimum, on a donc bien

$$f^* g_{\text{KR}}^N|_x \leq g_{\text{KR}}^M|_x.$$

Supposons maintenant que f est un revêtement. Soient $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow N$ une application conforme et $a \in \mathbf{D}^{p,q}$ un point tels que $\varphi(a) = f(x)$. Comme $\mathbf{D}^{p,q}$ est simplement connexe, on peut relever φ en une application $\tilde{\varphi} : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ telle que $\tilde{\varphi}(a) = x$. Alors

$$g_{\text{KR}}^M|_x \leq \tilde{\varphi}_* g_{\mathbf{D}^{p,q}}|_x = f^* \varphi_* g_{\mathbf{D}^{p,q}}|_x.$$

Par passage à l'infimum, on a bien $g_{\text{KR}}^M|_x \leq f^* \varphi_* g_{\text{KR}}^N|_x$. ■

Corollaire 5.5. *Pour toute variété conformément plate M , la métrique de Kobayashi–Royden est invariante sous l'action de $\text{Conf}(M)$.* ■

De la même manière, on obtient la caractérisation suivante de g_{KR} qui dit essentiellement que la métrique de Kobayashi–Royden est la plus grande métrique de la classe conforme pour laquelle les applications conformes $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ diminuent le facteur conforme.

Proposition 5.6. *Pour tout application conforme $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$, on a $\varphi^* g_{\text{KR}} \leq g_{\mathbf{D}^{p,q}}$. Si g est une métrique sur M telle que toute application conforme $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ satisfait $\varphi^* g \leq g_{\mathbf{D}^{p,q}}$, alors $g \leq g_{\text{KR}}$.* ■

5.2 Variétés Kobayashi–Royden-hyperboliques

Soit M une variété pseudo-riemannienne conformément plate de signature (p, q) . Soit g une métrique dans la classe conforme de M .

Définition 5.7. On dit que M est *Kobayashi–Royden-hyperbolique* en $x \in M$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\nu_g \leq C$$

au voisinage de x , pour une certaine métrique g dans la classe conforme de M . On dit que la variété M est *Kobayashi–Royden-hyperbolique* si elle l'est en chacun de ses points.

Nous introduirons aussi une notion plus faible d'hyperbolicité qui demande seulement que ν soit partout finie.

Définition 5.8. On dit que M est *faiblement hyperbolique au sens de Kobayashi–Royden* en $x \in M$ si $\nu_g(x) < +\infty$, pour une certaine métrique g dans la classe conforme de M . On dit que la variété M est *faiblement hyperbolique au sens de Kobayashi–Royden* si elle l'est en tout point.

On utilisera l'abréviation KR-hyperbolique pour désigner les variétés Kobayashi–Royden-hyperboliques. Remarquons que grâce à l'équation 5.2, les deux notions d'hyperbolicité précédentes ne dépendent pas d'un choix de métrique dans la classe conforme. En toute généralité, on sait seulement que

$$(\text{KR-hyperbolique}) \longrightarrow (\text{faiblement KR-hyperbolique})$$

Dans le contexte riemannien, on sait par [KP94] que ces deux notions coïncident car, lorsqu'elle est finie en un point, la fonction ν est continue (elle est même de classe $C^{1,1}$). En signature pseudo-riemannienne arbitraire, on ne sait pas si ces deux définitions coïncident. Dans les exemples qui seront donnés, les variétés seront KR-hyperboliques. Nous verrons aussi des exemples où ν_g n'est pas continue (voir section 7.1.3).

Proposition 5.9. *Soit M une variété KR-hyperbolique. Alors g_{KR}^M définit une mesure Borélienne finie sur les compacts, chargeant les ouverts et conformément invariante sur M .*

Démonstration. Soit g une métrique de la classe conforme. Comme M est KR-hyperbolique, la fonction ν_g est localement finie. De plus cette fonction est localement minorée par une constante positive. En effet si $x \in M$, on peut toujours trouver $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ conforme et $a \in \mathbf{D}^{p,q}$ tel que $\varphi(a) = x$. Ainsi pour tout $z \in \mathbf{D}^{p,q}$ on a :

$$\nu_g(\varphi(z)) \geq \text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, z) > 0.$$

Comme $z \mapsto \text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, z)$ est lisse, il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $\text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, z) \geq \lambda$ dans un voisinage U de a . Ainsi $\nu_g \geq \lambda$ sur le voisinage $V = \varphi(U)$ de x . Le volume de $g_{\text{KR}} = \nu_g^{-2}g$ est donné par l'expression (voir [Bes07, Thm. 1.159]) :

$$\text{Vol}_{\text{KR}} = \nu_g^{-(p+q)} \text{Vol}_g.$$

Au voisinage de chaque point, on peut trouver des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$c_1 < \nu_g < c_2.$$

En particulier $c_2^{-(p+q)} \text{Vol}_g < \text{Vol}_{\text{KR}} < c_1^{-(p+q)} \text{Vol}_g$, d'où le résultat. ■

La proposition 5.9 donne donc une première obstruction à être KR-hyperbolique :

Corollaire 5.10. *Si M est une variété conformément plate telle que $\text{Conf}(M)$ ne préserve pas de densité finie sur les compacts et chargeant les ouverts, alors M n'est pas Kobayashi-Royden-hyperbolique.* ■

Ceci montre par exemple que l'univers d'Einstein et l'espace de Minkowski ne sont pas KR-hyperboliques. Pour ces exemples, on a même une obstruction plus forte :

Proposition 5.11. *Soit $M = \mathbf{Ein}^{p,q}$ ou $\mathbf{R}^{p,q}$ ou un demi-espace délimité par un hyperplan lumière dans $\mathbf{R}^{p,q}$. Pour toute métrique g dans la classe conforme de M , la seule fonction f telle que $f \cdot g$ est un tenseur $\text{Conf}(M)$ -invariant est la fonction nulle.*

Démonstration. Montrons cette assertion pour $M = \mathbf{R}^{p,q}$. Soit f une fonction sur $\mathbf{R}^{p,q}$ telle que $f \cdot g_{\mathbf{R}^{p,q}}$ est $\text{Conf}(\mathbf{R}^{p,q})$ -invariante. Comme $g_{\mathbf{R}^{p,q}}$ est invariante par translation, la fonction f est constante sur $\mathbf{R}^{p,q}$. Comme $f \cdot g_{\mathbf{R}^{p,q}}$ est invariante par homothétie, on déduit que $\lambda^2 f(\lambda x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^{p,q}$, donc $f = 0$. La démonstration est similaire pour $M = \mathbf{Ein}^{p,q}$. Soit $H \subset \mathbf{R}^{p,q}$ un hyperplan dégénéré et M une des deux composantes connexes de $\mathbf{R}^{p,q} \setminus H$. On se donne f une fonction sur M telle que $f \cdot g_{\mathbf{R}^{p,q}}$ est $\text{Conf}(M)$ -invariant. Montrons que le sous-groupe $G = \text{Conf}(M) \cap \text{Isom}(\mathbf{R}^{p,q})$ agit transitivement sur M . L'action de H par translation montre que G agit transitivement sur les hyperplans affines parallèles à H . On fixe une origine $0 \in H$ et on se donne v un vecteur lumière transverse à H . On note u un vecteur de lumière tel que $H = u^\perp$ et P le plan engendré par u et v . La composante neutre $SO_0(P) \simeq \mathbf{R}$ agit sur M et ses orbites non dégénérées sont transverses à la direction de H et rencontrent tous les plans parallèles à H contenus dans M . Ainsi M est G -homogène. On en déduit que f est une fonction constante sur M . Comme $f \cdot g_{\mathbf{R}^{p,q}}$ est invariante par homothétie, on déduit comme précédemment que $f = 0$. ■

Remarque 5.12. Le complémentaire d'un hyperplan dégénéré dans $\mathbf{R}^{p,q}$ est conformément équivalent au complémentaire dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$ des cônes de lumière de deux points $x, y \in \mathbf{Ein}^{p,q}$ sur un même photon Δ . Si $H \subset \mathbf{R}^{p,q}$ est le cône de lumière d'un point $a \in C(\infty)$, alors $\mathbf{R}^{p,q} \setminus H = \pi_\Delta^{-1}(\Delta \setminus \{\infty, a\})$, où Δ est le photon contenant a et ∞ et où π_Δ est la projection canonique sur Δ (voir 1.4). Donc les deux composantes de $\mathbf{R}^{p,q} \setminus H$ sont exactement les préimages des deux composantes de $\Delta \setminus \{\infty, a\}$.

Avant de donner un premier exemple de variété Kobayashi–Royden-hyperbolique (à la section 5.3), nous donnons des propriétés générales qui permettent de trouver de nouvelles variétés KR-hyperboliques à partir d’anciennes :

Proposition 5.13. *Soit $f : M \rightarrow N$ une application conforme. Si N est KR-hyperbolique, alors M est KR-hyperbolique. En particulier, tout ouvert d’une variété KR-hyperbolique est KR-hyperbolique.*

Démonstration. Le premier point est une conséquence directe de la proposition 5.4. Le deuxième point se déduit du premier car l’application d’inclusion $U \hookrightarrow M$ d’un ouvert U dans M est conforme. ■

Remarque 5.14. La proposition 5.13 permet aussi de construire des variétés non-KR-hyperboliques à partir d’anciennes : si M contient un ouvert non KR-hyperbolique, alors M n’est pas KR-hyperbolique. Par exemple, si $\mathcal{K} \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ est un compact propre (i.e. \mathcal{K} est contenu dans une projection stéréographique), alors $\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus \mathcal{K}$ n’est pas KR-hyperbolique car cet ouvert contient au moins une copie d’un demi-espace de $\mathbf{R}^{p,q}$ délimité par un hyperplan lumière.

5.3 Métrique du diamant

Le but de cette section est de calculer la métrique de Kobayashi–Royden du diamant. Le calcul de cette métrique est une conséquence d’un équivalent du lemme de Schwarz en géométrie pseudo-riemannienne. Avant d’énoncer ce lemme, nous rappelons quelques faits géométriques utiles sur les inversions et les similitudes.

5.3.1 Inversions de diamants

On fixe un point $a \in \mathbf{R}^{p,q}$ et une constante $r > 0$. L’inversion de centre a et de rapport r est l’application $\text{Inv} : \mathbf{R}^{p,q} \setminus C(a) \rightarrow \mathbf{R}^{p,q} \setminus C(a)$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $x \in \mathbf{R}^{p,q} \setminus C(a)$, l’image de x par Inv est l’unique point y sur la droite affine passant par a et x tel que

$$\mathbf{b}(y - a, x - a) = r^2.$$

En particulier, l’application Inv satisfait l’équation

$$\|\text{Inv}(x) - a\|^2 = \frac{r^2}{\|x - a\|^2},$$

où on a noté $\|v\|^2 = \mathbf{b}(v, v)$. Explicitement, on peut écrire pour tout vecteur x de type espace ou de type temps :

$$\text{Inv}(x + a) = r^2 \frac{x}{\mathbf{b}(x, x)} + a.$$

Proposition 5.15. *Toute inversion s’étend en un difféomorphisme conforme de $\mathbf{Ein}^{p,q} = \mathbf{R}^{p,q} \cup C(\infty)$ qui échange ∞ avec le centre de l’inversion.*

Démonstration. Soient $v, w \in C^{p+1, q+1}$ tels que $\pi(v) = \infty$ et $\mathbf{b}(v, w) = 1$. On note $H = \langle v, w \rangle^\perp$ et $\mathbf{st} : H \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ l’application réciproque de la projection stéréographique. Soit Inv l’inversion de centre a et de rapport r . On peut identifier conformément H avec $\mathbf{R}^{p,q}$ de sorte que $0 \in H$ s’identifie à $a \in \mathbf{R}^{p,q}$ et que l’action de l’inversion Inv sur $H \setminus C(0)$ s’écrive

$$\text{Inv}(x) = x/\mathbf{b}(x, x),$$

pour tout $x \in H \setminus C(0)$. Soit $h \in \text{PO}(p+1, q+1)$ l'unique isométrie telle que

$$h(v) = w, h(w) = v \text{ et } h|_H = \text{id}_H.$$

Alors pour $x \in H$ tel que $\mathbf{b}(x, x) \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} h(\mathbf{st}(x)) &= h(\boldsymbol{\pi}(w + x - \mathbf{b}(x, x)v)) \\ &= \boldsymbol{\pi}(v + x - \mathbf{b}(x, x)w) \\ &= \boldsymbol{\pi}(w - x/\mathbf{b}(x, x) - \mathbf{b}(x/\mathbf{b}(x, x), x/\mathbf{b}(x, x))v) \\ &= \mathbf{st}(\text{Inv}(x)). \end{aligned}$$

Donc h est une extension conforme de Inv à $\mathbf{Ein}^{p,q}$. De plus $h(\mathbf{st}(0)) = h(\boldsymbol{\pi}(w)) = \boldsymbol{\pi}(v) = \infty$ et $h(\infty) = \mathbf{st}(0)$, donc h échange bien ∞ et le centre de l'inversion Inv . \blacksquare

Remarque 5.16. Le terme *inversion* fait référence aux inversions de sphères en géométrie conforme riemannienne (voir [Aud03]). En signature pseudo-riemannienne, une inversion de centre a et de rapport r envoie le diamant $D = \{x \in \mathbf{R}^{p,q} \mid \|x - a\|_{p,q} < r\}$ sur son diamant dual D^* (ici $\|\cdot\|_{p,q}$ désigne la norme sur $\mathbf{R}^{p,q}$ issue d'une décomposition orthogonale $\mathbf{R}^{p,q} = H_p \oplus H_q$, voir section 1.4.5). Ainsi, une inversion *inverse* les diamants. La Figure 5.4 illustre notamment l'image d'un tel diamant par une inversion.

5.3.2 Distorsions conformes des similitudes en l'infini

Soit $\varphi \in \text{Conf}(\mathbf{R}^{p,q})$ une similitude. On compactifie $\mathbf{R}^{p,q}$ en $\mathbf{Ein}^{p,q} = \mathbf{R}^{p,q} \cup C(\infty)$. Alors φ s'étend en un difféomorphisme conforme de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ (voir l'Exemple 1.6) et stabilise le cône de lumière à l'infini. En particulier $\varphi(\infty) = \infty$. Par la formule 1.1, il fait sens de parler de la distorsion conforme de φ en ∞ , indépendamment d'un choix de métrique dans la classe conforme. La proposition suivante permet de calculer $\text{dc}(\varphi, \infty)$ entièrement en termes de l'action de φ sur $\mathbf{R}^{p,q}$.

Proposition 5.17. *Il existe une identification $T_\infty \mathbf{Ein}^{p,q} \simeq \mathbf{R}^{p,q}$ telle que, pour toute similitude $\varphi \in \text{Conf}(\mathbf{R}^{p,q})$, on ait $T_\infty \varphi = \lambda^{-1}A$, où $\lambda > 0$ est le facteur de dilatation de φ et A la partie linéaire isométrique de φ . En particulier $\text{dc}(\varphi, \infty) = 1/\lambda$.*

Démonstration. Soit Inv l'inversion de centre 0 et de rapport 1, i.e. $\text{Inv}(x) = x/\mathbf{b}(x, x)$. Par la proposition 5.15, cette inversion s'étend en un difféomorphisme conforme de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ tel que $\text{Inv}(0) = \infty$. La différentielle de cette application donne donc une identification

$$T_0 \text{Inv} : \mathbf{R}^{p,q} = T_0 \mathbf{R}^{p,q} \xrightarrow{\sim} T_\infty \mathbf{Ein}^{p,q}.$$

Soit $\varphi \in \text{Conf}(\mathbf{R}^{p,q})$ et $\psi = \text{Inv} \circ \varphi \circ \text{Inv}$, de sorte que

$$T_0 \psi = (T_0 \text{Inv})^{-1} \circ T_\infty \varphi \circ T_0 \text{Inv}.$$

Pour calculer $T_\infty \varphi$ à travers l'identification $T_0 \text{Inv} : \mathbf{R}^{p,q} \xrightarrow{\sim} T_\infty \mathbf{Ein}^{p,q}$, il suffit de calculer la différentielle de ψ en 0. Pour simplifier les calculs, on distingue deux cas :

- (1) φ est la composée d'une isométrie linéaire $A \in O(p, q)$ et d'une homothétie de rapport $\lambda > 0$. On a alors, pour $x \notin C(0)$:

$$\text{Inv} \circ \varphi(x) = \frac{\lambda Ax}{\mathbf{b}(\lambda Ax, \lambda Ax)} = \frac{1}{\lambda} A \text{Inv}(x).$$

Donc $\psi(x) = \frac{1}{\lambda} A \text{Inv}(\text{Inv}(x)) = \frac{1}{\lambda} Ax$. Ainsi $T_0 \psi = \frac{1}{\lambda} A$.

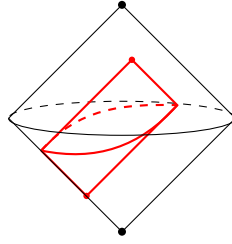


FIGURE 5.2 – Lemme de Schwarz pseudo-riemannien

(2) φ est une translation de vecteur $u \in \mathbf{R}^{p,q}$. Pour $x \notin C(0)$ on a

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{\frac{x}{\mathbf{b}(x,x)} + u}{\mathbf{b}\left(\frac{x}{\mathbf{b}(x,x)} + u, \frac{x}{\mathbf{b}(x,x)} + u\right)} \\ &= \frac{x + \mathbf{b}(x,x)u}{1 + 2\mathbf{b}(x,u) + \mathbf{b}(x,x)\mathbf{b}(u,u)} \\ &= x + o(x). \end{aligned}$$

Ainsi $T_0\psi = id$.

Comme toute similitude est la composée d'une isométrie, une homothétie et une translation, on obtient le résultat général par composition. ■

5.3.3 Lemme de Schwarz pseudo-riemannien

Classiquement, le lemme de Schwarz énonce que toute application holomorphe $\varphi : \mathbf{H}^2 \rightarrow \mathbf{H}^2$ contracte la métrique hyperbolique (voir [Kob05]). Ce résultat reste aussi vrai pour les applications conformes, qui sont soit holomorphes, soit anti-holomorphes. En signature lorentzienne et en dimension 2, un tel résultat n'est plus vrai. On peut construire des applications conformes non surjectives $\varphi : \mathbf{D}^{1,1} \rightarrow \mathbf{D}^{1,1}$ telles que $\varphi^*g_{\mathbf{D}^{1,1}} > g_{\mathbf{D}^{1,1}}$. Une façon de faire est de composer l'inclusion $\mathbf{D}^{1,1} \rightarrow \mathbf{R}^{1,1}$ avec une homothétie de rapport > 1 et d'identifier isométriquement $\mathbf{R}^{1,1}$ avec $\mathbf{D}^{1,1}$. En dimension supérieure cependant, on a un analogue du lemme de Schwarz, où le plan hyperbolique est remplacé par un diamant.

Lemme 5.18 (de Schwarz pseudo-riemannien). *Soient $p + q \geq 3$ et $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow \mathbf{D}^{p,q}$ une application conforme. Alors*

$$\varphi^*g_{\mathbf{D}^{p,q}} \leq g_{\mathbf{D}^{p,q}}.$$

De plus, si l'égalité tient en un point, alors $\varphi \in \text{Conf}(\mathbf{D}^{p,q})$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbf{D}^{p,q}$. Quitte à précomposer φ par une isométrie de $\mathbf{D}^{p,q}$, on peut supposer que $\varphi(x) = x$. On identifie $\mathbf{D}^{p,q}$ avec un diamant $D \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ et on étend φ à un élément de $\text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ grâce au théorème de Liouville. On se donne une identification $\mathbf{R}^{p,q} \simeq \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(x)$. Comme x est un point fixe de φ , l'application φ agit comme une similitude de $\mathbf{R}^{p,q}$. On note λ le facteur homothétique de cette similitude.

Soit $D_0 = \varphi(D)$. Comme $D_0 \subset D$ on a $D^* \subset D_0^* = \varphi(D^*)$. Ainsi

$$\text{Vol}(D^*) \leq \text{Vol}(D_0^*) = \text{Vol}(\varphi(D^*)) = \lambda^{p+q} \text{Vol}(D^*),$$

où Vol est le volume de la métrique plate sur $\mathbf{R}^{p,q}$. Comme D^* est un compact de $\mathbf{R}^{p,q}$ d'intérieur non vide, son volume est fini et non nul, donc $\lambda \geq 1$. Par la proposition 5.17, on a donc

$$\text{dc}(\varphi, \infty) = 1/\lambda \leq 1.$$

Supposons qu'il y ait égalité dans l'inégalité précédente. Cela revient à $\lambda = 1$, donc

$$D^* \subset D_0^* \text{ et } \text{Vol}(D^*) = \text{Vol}(D_0^*) > 0.$$

Lemme 5.19. *Soient $C, C' \subset \mathbf{R}^n$ deux convexes compacts de même volume non nul, avec $C \subset C'$. Alors $C = C'$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in \partial C$ tel que $x \in \text{Int}(C')$. Par convexité de C , on peut trouver un hyperplan d'appui H à C et x . Si $B = B(x, \varepsilon)$ est une boule euclidienne contenue dans C' et centrée en x , alors $B \setminus H$ est la réunion de deux demi-boules $B_1 \sqcup B_2$ dont l'une (disons B_2) est disjointe de A . Donc

$$\text{Vol}(C') \geq \text{Vol}(C \sqcup B_2) = \text{Vol}(C) + \text{Vol}(B)/2 > \text{Vol}(C).$$

Une contradiction. Ainsi $\partial C \subset \partial C'$, ce qui implique que $\text{Int}(C)$ est fermé dans $\text{Int}(C')$. Par connexité, on a $\text{Int}(C) = \text{Int}(C')$, donc $C = \overline{\text{Int}(C)} = \overline{\text{Int}(C')} = C'$. ■

Comme D^* et D_0^* sont des convexes compacts de $\mathbf{R}^{p,q}$, on déduit par le lemme 5.19 que $D^* = D_0^*$, donc

$$\varphi(D) = D_0 = D_0^{**} = D^{**} = D.$$

Ainsi φ est un difféomorphisme de D dans D , donc $\varphi \in \text{Isom}(\mathbf{D}^{p,q})$. ■

Corollaire 5.20. *Le diamant $\mathbf{D}^{p,q}$ est KR-hyperbolique et $g_{\text{KR}}^{\mathbf{D}^{p,q}} = g_{\mathbf{D}^{p,q}}$.*

Démonstration. Par définition, on a $g_{\text{KR}}^{\mathbf{D}^{p,q}} \leq g_{\mathbf{D}^{p,q}}$. Soit $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow \mathbf{D}^{p,q}$ une application conforme. Par le lemme de Schwarz pseudo-riemannien on a $\varphi_* g_{\mathbf{D}^{p,q}} \geq g_{\mathbf{D}^{p,q}}$. Par passage à l'infimum, on a donc $g_{\text{KR}}^{\mathbf{D}^{p,q}} \geq g_{\mathbf{D}^{p,q}}$, d'où l'égalité. ■

Comme tout ouvert propre de l'univers d'Einstein est contenu dans un diamant, on obtient le corollaire suivant grâce à la proposition 5.13 :

Corollaire 5.21. *Tout ouvert propre de l'univers d'Einstein est KR-hyperbolique.* ■

On a déjà vu que les ouverts propres sont Markowitz-hyperboliques (voir Corollaire 2.33). On verra au Chapitre 7 que le corollaire précédent s'étend au cas des variétés Markowitz-hyperboliques.

Remarque 5.22. Pour conclure cette section, expliquons pourquoi le lemme de Schwarz mets en lumière le choix de $\mathbf{D}^{p,q}$ dans la définition de g_{KR} . A priori, pour définir la fonction ν_g sur une variété conforme $(M, [g])$ en un point x , il suffit de prendre une variété conformément plate (X, g_X) et un point $a \in X$ et de considérer le supremum des $\text{dc}(\varphi, g_X, g, a)$ sur toutes les applications conformes $\varphi : (X, g_X) \rightarrow (M, g)$ telles que $\varphi(a) = x$ (voir l'équation 5.1). Pour qu'il existe toujours des applications conformes $\varphi : (X, g_X) \rightarrow (M, g)$, il faut nécessairement que X soit conformément équivalent à un ouvert propre de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ (et c'est même une condition suffisante). De plus, si on veut que (X, g_X) vérifie le lemme de Schwarz avec cas d'égalité, il faut demander que pour tout $b \in X$ il existe une isométrie $\varphi \in \text{Isom}(X, g_X)$ telle que $\varphi(a) = b$. Ainsi $(X, [g_X])$ s'identifierait à un ouvert propre homogène de $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Le théorème 4.1 impose que X est un diamant.

5.4 Caractérisation par projection stéréographique

Dans cette section, on décrit une façon géométrique qui permet de calculer la métrique de Kobayashi–Royden de certains ouverts de l'univers d'Einstein. Nous aurons besoin de nous restreindre à une classe d'ouverts dits *cône-complets* que nous décrivons ci-dessous.

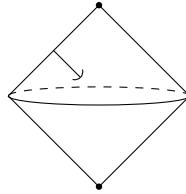


FIGURE 5.3 – L'ouvert obtenu en retirant une demi-droite de lumière à un diamant n'est pas cône-complet.

5.4.1 Cône-complétude

Définition 5.23. On dit qu'un domaine $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ est *cône-complet* si pour tout ouvert U et pour tout point $x \in \Omega$, on a : $U \setminus C(x) \subset \Omega \Rightarrow U \subset \Omega$.

Soit Ω un ouvert cône-complet et $D \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ un diamant contenant un point $x \in \Omega$. Alors par définition, on a

$$D \subset \Omega \iff D \setminus C(x) \subset \Omega. \quad (5.5)$$

Ainsi, pour savoir si D est contenu dans Ω , il suffit de vérifier que la trace de D dans une projection stéréographique selon x est contenue dans la trace de Ω dans cette même projection stéréographique. C'est cette propriété qui va permettre de calculer la métrique de Kobayashi–Royden d'un ouvert cône-complet. Donnons une classe d'ouverts cône-complets (voir section 3.1.4 pour la notion de convexité duale faible).

Proposition 5.24. *Tout ouvert faiblement dualement convexe est cône-complet.*

Démonstration. Soient Ω un domaine faiblement dualement convexe et x un point de Ω et soit $y \in C(x)$. Supposons qu'il existe un voisinage V de y tel que $V \setminus C(x) \subset \Omega$. Comme $C(x)$ est d'intérieur vide, le point y appartient à $\bar{\Omega}$. Supposons par l'absurde que $y \in \partial\Omega$. Comme Ω est faiblement dualement convexe, on peut trouver une hypersurface de Möbius \mathcal{H} qui évite Ω et qui passe par y . Comme $x \notin \mathcal{H}$, le photon Δ passant par x et y n'est pas contenu dans \mathcal{H} , donc Δ est transverse à \mathcal{H} (voir le lemme 3.31). En particulier, l'hypersurface \mathcal{H} est transverse à $C(x)$ en y , donc \mathcal{H} intersecte $V \setminus C(x)$. En particulier \mathcal{H} intersecte Ω , une contradiction. ■

5.4.2 Calcul de la métrique par projection stéréographique

On munit une fois pour toutes $\mathbf{R}^{p,q}$ d'un produit \mathbf{b} de signature (p, q) . Soit $D \subset \mathbf{R}^{p,q}$ un diamant relativement compact. On note $\mathbf{r}(D)$ le *rayon* de D , i.e.

$$\mathbf{r}(D) = \sup_{x,y \in D} \frac{\sqrt{|\mathbf{b}(x-y, x-y)|}}{2}. \quad (5.6)$$

Par la description donnée à la section 1.4.5, on peut trouver une décomposition $\mathbf{R}^{p,q} = H_p \oplus H_q$ en sous-espaces définis, un point $c \in \mathbf{R}^{p,q}$ et un réel $r > 0$ tel que

$$D = \{x \in \mathbf{R}^{p,q} \mid \|x - c\|_{p,q} < r\},$$

où $x = x_p + x_q \in \vec{H}_p \oplus \vec{H}_q$ est la décomposition de x et où $\|x\|_{p,q}$ est la norme définie par

$$\|x\|_{p,q} = \sqrt{-\mathbf{b}(x_p, x_p)} + \sqrt{\mathbf{b}(x_q, x_q)}.$$

On vérifie alors que le nombre r donné par la section 1.4.5 est bien le rayon $\mathbf{r}(D)$ donné par l'équation 5.6. De plus, la borne supérieure dans l'équation 5.6 est atteinte et toute paire de points diamétralement opposés (i.e ayant c pour milieu), contenue dans le bord espace ou le bord temps de D , réalise le maximum. On a donc une autre façon de calculer le rayon d'un diamant relativement compact :

$$\mathbf{r}(D) = \sup_{x,y \in \partial_e D} \frac{\sqrt{|\mathbf{b}(x-y, x-y)|}}{2} = \sup_{x,y \in \partial_t D} \frac{\sqrt{|\mathbf{b}(x-y, x-y)|}}{2}. \quad (5.7)$$

Exemple 5.25. Dans $\mathbf{R}^{1,n-1}$, le diamant $D = I^-(x) \cap I^+(y)$, défini par deux points x, y causalement reliés, a pour rayon $r(D) = \sqrt{-\mathbf{b}(y-x, y-x)}/2$.

Le calcul de la distorsion conforme des similitudes en l'infini (voir section 5.3.2) permet de donner le lien suivant entre la distorsion conforme d'un diamant et le rayon de son diamant dual.

Proposition 5.26. *Soit $x \in \mathbf{Ein}^{p,q}$ et $\mathbf{st} : \mathbf{R}^{p,q} \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ une projection stéréographique selon x . Alors, pour toute métrique g_x dans la classe conforme infinitésimale de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ en x , il existe une constante $\alpha_{g_x, \mathbf{st}} > 0$ telle que, pour tout diamant $D \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ contenant x , on a*

$$\mathbf{dc}(D, x, g_x, g_{\mathbf{D}^{p,q}}) = \frac{\alpha_{g_x, \mathbf{st}}}{\mathbf{r}(D^*)}$$

où $\mathbf{r}(D^*)$ est le rayon du diamant dual de D calculé dans la carte \mathbf{st} .

Dans l'énoncé précédent, la notation $\mathbf{dc}(D, x, g_x, g_{\mathbf{D}^{p,q}})$ désigne la valeur de la distorsion conforme $\mathbf{dc}(\varphi, a, g_x, g_{\mathbf{D}^{p,q}})$ de n'importe quelle identification conforme $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow D$ telle que $\varphi(a) = x$. On vérifie, grâce à la proposition 1.29, que de telles identifications diffèrent d'une précomposition par une isométrie de $\mathbf{D}^{p,q}$, donc la quantité $\mathbf{dc}(D, x, g_x, g_{\mathbf{D}^{p,q}})$ est bien définie et est indépendante du choix d'identification $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow D$.

Démonstration. Soit D_0 un diamant de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ contenant x . On peut toujours trouver une constante $\alpha > 0$ telle que $\mathbf{dc}(D_0, x, g_x, g_{\mathbf{D}^{p,q}}) = \frac{\alpha}{\mathbf{r}(D_0^*)}$. L'action de $\text{Stab}(x)$ par similitude sur $\mathbf{R}^{p,q}$ est transitive sur les diamants relativement compacts de $\mathbf{R}^{p,q}$ (voir section 1.4.5). Pour un diamant D contenant x , on peut trouver une similitude h telle que $h(\mathbf{st}^{-1}(D_0^*)) = \mathbf{st}^{-1}(D^*)$. En écrivant $h = [y \mapsto \lambda Ay + b]$, la proposition 5.17 donne

$$\begin{aligned} \mathbf{dc}(D, x, g_x, g_{\mathbf{D}^{p,q}}) \mathbf{r}(D^*) &= \mathbf{dc}(h(D_0), x, g_x, g_{\mathbf{D}^{p,q}}) \mathbf{r}(h(D_0^*)) \\ &= \frac{1}{\lambda} \mathbf{dc}(D_0, x, g_x, g_{\mathbf{D}^{p,q}}) \lambda \mathbf{r}(D_0^*) \\ &= \alpha, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Décrivons, à partir de la proposition 5.26, un procédé qui permet (théoriquement) de calculer la métrique de Kobayashi–Royden d'un ouvert cône-complet grâce à la trace de son complémentaire dans une projection stéréographique. Fixons un domaine cône-complet Ω , un point $x \in \Omega$, une projection stéréographique $\mathbf{st} : \mathbf{R}^{p,q} \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ selon x et un diamant

de référence $D_0 \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ contenant x . On note \mathcal{K} le complémentaire de Ω dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$ et on note g_0 la métrique poussée en avant $\varphi_*g_{\mathbf{D}^{p,q}}$ donnée par une identification conforme $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow D_0$. On peut toujours supposer, quitte à précomposer \mathbf{st} par une homothétie, que

$$\alpha_{g_0|_x, \mathbf{st}} = 1.$$

Soit $\psi : D_0 \times \mathbf{Ein}^{p,q} \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ une application lisse telle que, en notant $\psi_y(z) = \psi(y, z)$ pour tout $y, z \in D_0 \times \mathbf{Ein}^{p,q}$, on ait

$$\begin{cases} \psi_y \in \text{Conf}(D_0) & \text{pour tout } y \in D_0, \\ \psi_y(x) = y & \text{pour tout } y \in D_0. \end{cases}$$

Une telle application peut toujours être construite en sélectionnant un groupe à $(p+q)$ -paramètres d'isométries de $\mathbf{D}^{p,q} \simeq (-\mathbf{H}^p) \times \mathbf{H}^q$ agissant simplement transitivement sur $\mathbf{D}^{p,q}$ (on peut toujours trouver un tel groupe, car $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ agit isométriquement et simplement transitivement sur l'espace hyperbolique réel de dimension n). On note $\mathbf{st}_y = \psi_y \circ \mathbf{st}$ et

$$\mathcal{K}_y = \mathbf{st}_y^{-1}(\mathcal{K}) = \mathbf{st}^{-1}(\psi_y^{-1}(\mathcal{K})),$$

qui est la trace de $\psi_y^{-1}(\mathcal{K})$ dans la carte \mathbf{st} . Soit $y \in D_0$ et D un diamant de $\mathbf{R}^{p,q}$. Alors, comme Ω est cône-complet, le lemme 1.23 et l'identité 5.5, on a

$$\begin{aligned} y \in \mathbf{st}_y(D)^* \subset \Omega &\iff x \in \mathbf{st}(D)^* \subset \psi_y^{-1}(\Omega) \\ &\iff \psi_y^{-1}(\mathcal{K}) \subset \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus \mathbf{st}(D)^* = \cup_{z \in \mathbf{st}(D)} C(z) \subset \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus \{x\} \\ &\iff \mathcal{K}_y \subset \cup_{z \in D} C(z) \text{ et } D \subset \mathbf{R}^{p,q} \text{ est rel. compact.} \end{aligned}$$

Ainsi, l'application

$$D \subset \mathbf{R}^{p,q} \longmapsto \mathbf{st}_y(D)^* \subset \mathbf{Ein}^{p,q},$$

donne une correspondance biunivoque entre les deux collections suivantes de diamants :

- les diamants D relativement compact dans $\mathbf{R}^{p,q}$ tels que le cône de lumière de tout point de \mathcal{K}_y intersecte D ;
- les diamants de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ contenant y et contenu dans Ω .

Soit maintenant $D \subset \mathbf{R}^{p,q}$ relativement compact dans $\mathbf{R}^{p,q}$. Alors, par la proposition 5.26, on a

$$\mathbf{r}(D) = \frac{1}{\text{dc}(\mathbf{st}(D)^*, x, g_0|_x, g_{\mathbf{D}^{p,q}})} = \frac{1}{\text{dc}(\mathbf{st}_y(D)^*, y, g_0|_y, g_{\mathbf{D}^{p,q}})},$$

car ψ_y est une isométrie de D_0 pour la métrique g_0 . Par la définition 5.1 et la discussion précédente, on obtient donc le corollaire suivant :

Corollaire 5.27. *La métrique de Kobayashi–Royden en y vaut*

$$g_{\text{KR}}|_y = \inf_{\mathcal{K}_y \subset C(D)} \mathbf{r}(D)^2 \cdot g_0|_y, \quad (5.8)$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des diamants relativement compacts de $\mathbf{R}^{p,q}$ tels \mathcal{K}_y est contenu dans $C(D) = \cup_{z \in C} C(x)$.

Pour terminer ce chapitre, nous donnons quelques applications de l'équation 5.8.

5.4.3 Espaces à courbure constante

Proposition 5.28. *Soit \mathcal{H} une sous-variété de Möbius de signature (r, s) . Alors l'ouvert $\Omega = \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus \mathcal{H}$ est KR-hyperbolique si et seulement si $r = p$ ou $s = q$. Dans ce cas, la métrique g_{KR}^Ω est lisse.*

Nous aurons besoin du fait suivant qui permet de décrire les sous-variétés de Möbius dans des projections stéréographiques adaptées.

Lemme 5.29. *Soit \mathcal{H} une sous-variété de Möbius de signature (r, s) , avec $r = p$ (resp. $s = q$), et soit $x \in \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus \mathcal{H}$. Alors, pour toute projection stéréographique $\mathbf{st} : \mathbf{R}^{p,q} \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ selon x , il existe un sous-espace affine $F \simeq \mathbf{R}^{p,s+1}$ (resp. $F \simeq \mathbf{R}^{r+1,q}$), un point $c \in F$ et un réel $r > 0$ tel que*

$$\begin{aligned} \mathbf{st}^{-1}(\mathcal{H} \setminus C(x)) &= \{v \in F \mid \mathbf{b}(v - c, v - c) = r^2\} \\ (\text{resp. } \mathbf{st}^{-1}(\mathcal{H} \setminus C(x))) &= \{v \in F \mid \mathbf{b}(v - c, v - c) = -r^2\}. \end{aligned}$$

Démonstration. L'espace des sous-variétés de Möbius d'une signature donnée étant homogène, on peut toujours choisir \mathcal{H} comme on le souhaite. De plus, par la proposition 1.19, on sait que $\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus \mathcal{H}$ est homogène, donc on peut aussi choisir x comme on le souhaite. Traitons par exemple le cas $r = p$ et $s = q - 1$. On se donne $\mathbf{B} = \{e_0, \dots, e_{n+1}\}$ une base de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$ dans laquelle la métrique standard s'écrit

$$\mathbf{b}(x, x) = x_0x_{n+1} + x_1x_n + \dots + x_px_{q+1} + (x_{p+1})^2 + \dots + (x_q)^2.$$

Soit $H = \text{Vect}(e_0 - e_{n+1}, e_1, \dots, e_n) = (e_0 + e_{n+1})^\perp$ et $\mathcal{H} = \pi(H) \cap \mathbf{Ein}^{p,q}$. Comme $e_0 + e_{n+1}$ est un vecteur temps, l'hypersurface \mathcal{H} est de signature $(p, q - 1)$. Soit $\mathbf{st} : \mathbf{R}^{p,q} \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ la projection stéréographique donnée par $\mathbf{st}(x) = \pi(e_0 + x - \mathbf{b}(x, x)e_{n+1})$, où $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ (cette projection envoie le point $\pi(e_{n+1})$ à l'infini). Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}^{p,q}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{st}(x) \in \mathcal{H} &\iff e_0 + x - \mathbf{b}(x, x)e_{n+1} \in H \\ &\iff \mathbf{b}(e_0 + x - \mathbf{b}(x, x)e_{n+1}, e_0 + e_{n+1}) = 0 \\ &\iff \mathbf{b}(x, x) = 1. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient bien la description désirée. ■

Démonstration de la proposition 5.28. On traite le cas $r = p$ (le cas $s = q$ est identique). On se donne un point $x \in \Omega$, une projection stéréographique $\mathbf{st} : \mathbf{R}^{p,q} \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ selon x et un sous-espace $F \subset \mathbf{R}^{p,q}$ de signature $(p, s + 1)$ tel que

$$\mathbf{st}^{-1}(\mathcal{H} \setminus C(x)) = \{v \in F \mid \mathbf{b}(v - c, v - c) = r^2\},$$

avec c un point de F et $r > 0$ une constante. Soit E un sous-espace riemannien de dimension q . L'intersection $J = E \cap F$ est un sous-espace riemannien de dimension $s + 1$, donc F se décompose orthogonalement $F = J \oplus J^{\perp_F}$, avec J^{\perp_F} totalement négatif de dimension p . Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{st}^{-1}(\mathcal{H} \setminus C(x)) \cap E &= \{v \in J \mid \mathbf{b}(v - c, v - c) = r^2\} \\ &= \{v \in J \mid \mathbf{b}(v - c_J, v - c_J) = r^2 - \mathbf{b}(c_{J^{\perp_F}}, c_{J^{\perp_F}})\}. \end{aligned}$$

Ainsi, si D est un diamant relativement compact tel que $\partial_e D \subset E$ et $\mathbf{st}^{-1}(\mathcal{H} \setminus C(x)) \subset \cup_{y \in D} C(y)$, alors

$$\mathbf{st}^{-1}(\mathcal{H} \setminus C(x)) \cap E \subset D \cap E,$$

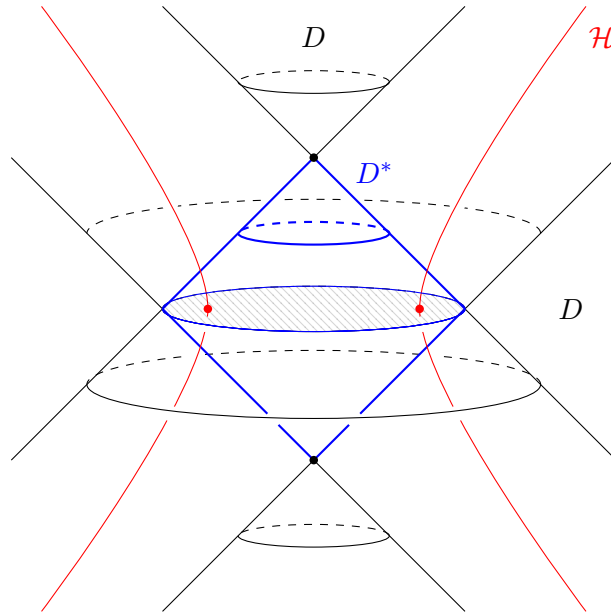


FIGURE 5.4 – En noir est représentée la trace dans une projection stéréographique d’un diamant D contenant le sommet à l’infini dans son intérieur. Le diamant dual D^* est représenté en bleu. En rouge, on a représenté la trace d’un cercle de Möbius temps qui évite D .

donc par la formule 5.7 on a :

$$\sqrt{r^2 - \mathbf{b}(c_{J^\perp F}, c_{J^\perp F})} \leq \mathbf{r}(D).$$

En particulier, on a $r \leq \mathbf{r}(D)$, avec égalité si et seulement si c est le barycentre de D . Par l’équation 5.8, on déduit que $g_{\text{KR}}|_x \neq 0$. Comme Ω est homogène, la métrique de Kobayashi–Royden est non singulière en tout point et elle est lisse.

Maintenant, dans le cas où $r < p$ et $s < q$, la sous-variété de Möbius \mathcal{H} est toujours contenue dans un $\mathbf{Ein}^{p-1, q-1}$. Or un cône de lumière privé de son sommet s’identifie à $\mathbf{R} \times \mathbf{Ein}^{p-1, q-1}$ (voir section 1.2.2), donc \mathcal{H} est toujours contenue dans un cône de lumière. En particulier, l’ouvert $\mathbf{Ein}^{p, q} \setminus \mathcal{H}$ contient au moins un ouvert conformément équivalent à $\mathbf{R}^{p, q}$, donc g_{KR}^Ω s’annule sur un ouvert non-vide. ■

Corollaire 5.30. *Toute variété pseudo-riemannienne à courbure constante non nulle est Kobayashi–Royden-hyperbolique.*

Démonstration. En effet, soit M une variété pseudo-riemannienne à courbure constante non nulle. Supposons par exemple que M est à courbure $K = -1$. Quitte à considérer \widetilde{M} (ce qui ne change pas le caractère KR-hyperbolique, voir proposition 5.4), on peut supposer que M est simplement connexe. Il existe alors une application de développement $\text{dev} : M \rightarrow \mathbf{H}^{p, q}$ qui est une isométrie pseudo-riemannienne. L’espace hyperbolique $\mathbf{H}^{p, q}$ s’identifie conformément au complémentaire d’une hypersurface de Möbius de signature $(p, q-1)$ dans $\mathbf{Ein}^{p, q}$ (voir proposition 1.17). Donc par la proposition 5.28, l’espace hyperbolique $\mathbf{H}^{p, q}$ est KR-hyperbolique. Comme $\text{dev} : M \rightarrow \mathbf{H}^{p, q}$ est une application conforme, la proposition 5.4 implique que M est hyperbolique. ■

Remarque 5.31. La proposition 5.28 permet de montrer que la propriété “être Kobayashi–Royden-hyperbolique” n’est pas stable par perturbation Hausdorff du bord. Soit $F \subset \mathbf{Ein}^{1, 2}$ un cercle de Möbius temps. Par la proposition 5.28, l’ouvert $\Omega = \mathbf{Ein}^{1, 2} \setminus F$ est KR-hyperbolique.

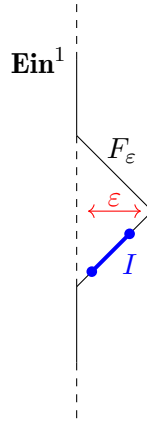


FIGURE 5.5 – Perturbation Hausdorff d’un cercle de Möbius temps périodique dans $\mathbf{Ein}^{1,2}$. Le complémentaire de F_ε contient l’ouvert $\pi_\Delta^{-1}(I)$, où Δ est l’unique photon contenant I .

Cependant, on peut construire une perturbation locale F_ε de F qui est Hausdorff proche de F et telle que $\Omega = \mathbf{Ein}^{1,2} \setminus F_\varepsilon$ n’est pas KR-hyperbolique. Voir Figure 5.5.

5.4.4 Domaines dualement convexes

Dans le cas des ouverts dualement convexes, le problème d’optimisation donné par l’équation 5.8 admet une formulation simplifiée. Fixons un ouvert connexe dualement convexe Ω et un point $x \in \Omega$. Alors, pour tout diamant $D \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$, on a

$$x \in D \subset \Omega \iff \Omega^* \subset D^* \subset \{x\}^* = \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(x). \quad (5.9)$$

En effet, l’implication directe est toujours vraie. Supposons que $\Omega^* \subset D^* \subset \{x\}^*$. Alors, en passant au dual, on a

$$\{x\} = \{x\}^{**} \subset D = D^{**} \subset \Omega^{**}.$$

Or, par la proposition 3.15, l’ouvert Ω est la composante connexe de Ω^{**} contenant x car Ω est dualement convexe et connexe. Comme $D \subset \Omega^{**}$ est connexe, le diamant D est contenu dans la composante connexe de Ω^{**} contenant x , donc $x \in D \subset \Omega$.

Reprenons les notations de la section 5.4.2. On fixe :

- un point $x \in \Omega$;
- une projection stéréographique $\mathbf{st} : \mathbf{R}^{p,q} \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ selon x ;
- un diamant de référence $D_0 \subset \Omega$ contenant x muni de la métrique g_0 invariante par $\text{Conf}(D_0)$ et telle que $\alpha_{g_0|x,\mathbf{st}} = 1$;
- une application lisse $\psi : D_0 \times \mathbf{Ein}^{p,q} \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ telle que $\psi_y \in \text{Conf}(D_0)$ et $\psi_y(x) = y$ pour tout $y \in D_0$;
- on note $\Omega_y^* = \mathbf{st}^{-1}(\psi_y^{-1}(\Omega^*))$ la projection de $\psi_y^{-1}(\Omega^*)$ dans la carte \mathbf{st} .

Par l’équation 5.8 et l’équation 5.9, la métrique de Kobayashi–Royden en $y \in D_0$ vaut

$$g_{\text{KR}}|_y = \inf_{\Omega_y^* \subset D} \mathbf{r}(D)^2 \cdot g_0|_y, \quad (5.10)$$

où l’infimum est pris sur l’ensemble des diamants relativement compacts de $\mathbf{R}^{p,q}$ contenant Ω_y^* . Ceci permet d’obtenir la proposition suivante :

Proposition 5.32. *Soit $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ un ouvert dualement convexe. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- Ω est Kobayashi–Royden-hyperbolique ;
- Ω^* contient deux points transverses (i.e. qui ne sont pas sur un même photon).

Démonstration. Supposons que Ω^* contienne deux points $x_1, x_2 \in \mathbf{Ein}^{p,q}$ transverses. Pour tout $y \in D_0$, les projetés de $\psi_y^{-1}(x_1)$ et $\psi_y^{-1}(x_2)$ dans la carte \mathbf{st} sont des points $x_1(y)$ et $x_2(y)$ tels que

$$\mathbf{b}(x_2(y) - x_1(y), x_2(y) - x_1(y)) \neq 0 \text{ pour tout } y \in D_0.$$

De plus, comme ψ a été choisie lisse, les applications $y \mapsto x_1(y)$ et $y \mapsto x_2(y)$ sont lisses, donc on peut trouver une constante $r > 0$ et un voisinage V de x tels que

$$\mathbf{b}(x_2(y) - x_1(y), x_2(y) - x_1(y)) \geq r^2 \text{ pour tout } y \in V.$$

Par construction, tout diamant relativement compacts $D \subset \mathbf{R}^{p,q}$ contenant Ω_y^* contient $x_2(y)$ et $x_1(y)$, donc est de rayon $\mathbf{r}(D) \geq r$. Ainsi, par l'équation 5.10, on a $g_{\mathbf{KR}}|_y \geq r^2 g_0|_y$ pour tout $y \in V$, donc Ω est KR-hyperbolique.

Supposons maintenant que les points de Ω^* soient deux à deux non-transverses. On peut trouver un p -photon \mathcal{L} tel que $\Omega^* \subset \mathcal{L}$. Soit $x \in \Omega \setminus \mathcal{L}$. La projection canonique $\pi_{\mathcal{L}}$ (voir équation 1.4) envoie x sur un $(p-1)$ -photon $\pi_{\mathcal{L}}(x)$ disjoint de Ω^* . Soit $U \subset \mathcal{L}^*$ un voisinage ouvert de $\pi_{\mathcal{L}}(x)$ tel que $\Delta \cap \Omega^* = \emptyset$ pour tout $\Delta \in U$. Alors $\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(U) \subset \Omega^{**}$ et $x \in \pi_{\mathcal{L}}^{-1}(U)$. Par connexité de $\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(U)$ et par la proposition 3.15, on a $\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(U) \subset \Omega$. Or $\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(U)$ n'est pas KR-hyperbolique, donc Ω n'est pas KR-hyperbolique. ■

Les propositions 5.28 et 5.32 permettent d'obtenir la caractérisation suivante des ouverts faiblement dualement convexes KR-hyperboliques (voir section 3.1.4 pour la définition de faible duale convexité).

Corollaire 5.33. *Soit $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ un ouvert faiblement dualement convexe. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- Ω est Kobayashi–Royden-hyperbolique ;
- Ω n'est pas de la forme $\mathcal{K}^* = \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus \cup_{x \in \mathcal{K}} C(x)$, où \mathcal{K} est un compact propre contenu dans un photon maximal.

Démonstration. Par la proposition 5.28, on sait que si Ω admet une hypersurface de Möbius d'appui non dégénérée, alors Ω est KR-hyperbolique. Si Ω n'admet que des cônes de lumière d'appui, alors Ω est dualement convexe et on peut se ramener à la proposition 5.32 ■

Exemple 5.34. En signature lorentzienne, pour un ouvert $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ connexe faiblement dualement convexe, les conditions suivantes sont équivalentes :

- Ω est Kobayashi–Royden-hyperbolique ;
- $\Omega \neq \mathbf{Ein}^{1,n-1}, \mathbf{R}^{1,n-1}, \pi_{\Delta}^{-1}(I)$.

En particulier, tout convexe de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ qui n'est ni $\mathbf{R}^{1,n-1}$, ni un ouvert délimité par un espace dégénéré, ni un ouvert délimité par deux espaces dégénérés parallèles, est KR-hyperbolique. De plus, tout ouvert causalement convexe de $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$, globalement hyperbolique maximal qui n'est ni $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$, ni l'espace de Minkowski, ni le complémentaire d'un hyperplan dégénéré dans l'espace de Minkowski est KR-hyperbolique (voir aussi la section 3.2).

Chapitre 6

Caractérisations géométriques et dynamiques de l'hyperbolicité

Dans ce chapitre, on développe des techniques qui permettent de déterminer si un ouvert de l'univers d'Einstein est Kobayashi–Royden-hyperbolique au sens du Chapitre 5. Étant donné un ouvert $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$, l'espace $\text{Conf}(\mathbf{D}^{p,q}, \Omega)$ des applications conformes de $\mathbf{D}^{p,q}$ vers Ω n'est pas relativement compact dans $C^0(\mathbf{D}^{p,q}, \Omega)$ en général. Ainsi, il existe a priori beaucoup d'ouverts Ω et de points $x \in \Omega$ pour lesquels on a (avec des notations simplifiées) :

$$\sup_{\varphi} \text{dc}(\varphi, a) = +\infty,$$

où le supremum est pris sur les applications $\varphi \in \text{Conf}(\mathbf{D}^{p,q}, \Omega)$ telles que $\varphi(a) = x$. Pour comprendre quelles sont les suites (φ_k) pour lesquelles $\text{dc}(\varphi_k, a) \rightarrow +\infty$, on introduit une description dynamique des suites de $\text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ à la section 6.1. Ceci nous permet de caractériser entièrement les suites de $\text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ dont la distorsion conforme explose le long d'une suite convergente. On obtient alors une caractérisation des ouverts Kobayashi–Royden-hyperboliques Ω en termes de la dynamique des suites de $\text{Conf}(\mathbf{D}^{p,q}, \Omega)$, voir section 6.2. Ceci nous permet de donner une condition géométrique suffisante pour qu'un ouvert de l'univers d'Einstein soit Kobayashi–Royden-hyperbolique. Cette condition s'énonce en toute signature, mais l'énoncé est quelques peu technique. En signature lorentzienne, on peut énoncer cette condition comme suit (voir le théorème 6.12 pour l'énoncé général) :

Théorème. *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ et \mathcal{K} son complémentaire. Si les traces dans \mathcal{K} des cônes de lumière de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ ne s'accumulent pas sur un morceau de photon, alors Ω est Kobayashi–Royden-hyperbolique.*

Par “les traces dans \mathcal{K} des cônes de lumière de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ ne s'accumulent pas sur un morceau de photon”, on entend qu'il n'est pas possible, pour une suite (x_k) de point de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$, que la suite de compacts $(\mathcal{K} \cap C(x_k))$ converge au sens de Hausdorff vers un compact contenu dans un photon. Moralement, ce critère dit que si le complémentaire de Ω est suffisamment grand, alors les traces dans \mathcal{K} des cônes de lumière de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ seront trop grandes pour s'accumuler sur un morceau de photon, donc Ω est Kobayashi–Royden-hyperbolique. Ce critère peut être vérifié, par exemple, sur des ouverts obtenus à partir de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ en retirant suffisamment de photons maximaux :

Théorème (Voir Thm. 6.16). *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Si Ω évite une famille de photons maximaux en position générique, alors Ω est Kobayashi–Royden-hyperbolique.*

Ici, le terme *en position générique* signifie, pour une famille \mathcal{F} de photons maximaux, qu'il n'existe pas de photon maximal \mathcal{L} qui rencontre tous les éléments de \mathcal{F} . En signature lorentzienne, on obtient aussi l'hyperbolicité du complémentaire de certaines sous-variétés compactes.

Théorème (Voir Thm. 6.28 et Thm. 6.40). *Un ouvert $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ est Kobayashi–Royden-hyperbolique dans les cas suivants :*

- Ω évite une sous-variété lorentzienne de classe C^1 et de dimension ≥ 2 .
- Ω évite une $(n-1)$ -sphère stablement acausale.

Ces exemples sont des versions *perturbatives* des exemples déjà obtenus à la proposition 5.28. La preuve du premier point nécessite d'utiliser le critère géométrique énoncé ci-dessus. Cependant, le complémentaire d'une $(n-1)$ -sphère stablement acausale de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ ne satisfait jamais ce critère géométrique. Pour montrer l'hyperbolicité de ces exemples, on étudie la dynamique de $\mathrm{PO}(2, n)$ sur l'espace des $(n-1)$ -sphères stablement acausales, voir section 6.4.2.

Enfin, au delà des ouverts du modèle, on s'intéresse à des exemples de variétés conformément plates Kobayashi–Royden-hyperboliques en signature lorentzienne. Nous nous concentrons sur les variétés kleinienne, i.e. les variétés $M = \Omega/\Gamma$, où Ω est un domaine de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ et $\Gamma < \mathrm{PO}(2, n)$ est le *groupe d'holonomie* de M . En un certain sens, les variétés kleinienne sont génériquement Kobayashi–Royden-hyperboliques :

Théorème (Voir Cor. 6.25). *Soit M une variété conforme lorentzienne compacte kleinienne dont le groupe d'holonomie est irréductible. Alors M est Kobayashi–Royden-hyperbolique.*

Notons que les hypothèses du théorème précédent peuvent être améliorées : il suffit de supposer que le groupe d'holonomie est non-compact et qu'il ne préserve ni de point, ni de photon, ni de surface de Möbius de signature $(1, 1)$ (voir la proposition 6.24).

6.1 Dynamique de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ agissant sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$

Le but de cette section est de donner une description qualitative de l'action de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Nous décrirons dans un premier temps les propriétés algébriques de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ à l'aide de la décomposition de Cartan. Nous introduirons ensuite les ensembles dynamiques de points, ce qui nous permettra de décrire les lieux de non-équicontinuité des suites de $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ agissant sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Cette description est une extension de la dynamique *Nord-Sud* sur la sphère conforme et des 3 types dynamiques sur l'univers d'Einstein lorentzien comme décrit dans [Fra04].

6.1.1 Décomposition de Cartan de $\mathrm{PO}(p+1, q+1)$.

Comme précédemment on choisit deux entiers $p \leq q$ et on munit $\mathbf{R}^{p+1, q+1}$ d'une base $\mathbf{B} = \{e_0, e_1, \dots, e_{p+q+1}\}$ dans laquelle la forme quadratique \mathbf{b} s'écrit

$$\mathbf{b}(v, v) = v_0 v_{p+q+1} + v_1 v_{p+q} + \dots + v_p v_q + (v_{p+1})^2 + \dots + (v_{q-1})^2.$$

On note $G = \mathrm{PO}(p+1, q+1)$. Le groupe de Lie G admet une décomposition $G = KAK$, appelée *décomposition de Cartan*, où A est le sous-groupe abélien des matrices qui agissent diagonalement dans la base \mathbf{B} et où K est un sous-groupe compact maximal de G . Tout élément $g \in G$ peut donc s'écrire $g = \kappa a \kappa'$ avec $\kappa, \kappa' \in K$ et

$$a = \mathrm{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_p, 1, \dots, 1, \lambda_p^{-1}, \dots, \lambda_0^{-1}),$$

où l'écriture matricielle se fait dans la base \mathbf{B} . Les valeurs propres de la matrice a sont uniquement déterminées par g , modulo un réarrangement. On note A^+ le sous-ensemble de A formé des matrices diagonales a donc les coefficients vérifient $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 1$. Tout élément $g \in G$ s'écrit $g = \kappa a \kappa'$ avec $\kappa, \kappa' \in K$ et $a \in A^+$. La matrice a est alors uniquement déterminée par g .

6.1.2 Ensemble dynamique d'une suite de difféomorphismes

Soit (g_k) une suite de $\text{PO}(p+1, q+1)$ et x un point de $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Pour comprendre la dynamique qualitative des suites (g_k) au voisinage de x , nous allons introduire *l'ensemble dynamique de la suite (g_k) au point x* , noté $D_{(g_k)}(x)$ et défini par (voir [Fra04, Sect. 3]) :

$$D_{(g_k)}(x) = \{\text{points d'accumulations de } (g_k \cdot x_k) \mid x_k \rightarrow x \text{ quand } k \rightarrow \infty\}.$$

Exemple 6.1. Si (g_k) converge uniformément sur un voisinage compact $U \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ vers une application $f : U \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$, l'ensemble dynamiquement associé à x est réduit à un point. Explicitement, on a $D_{(g_k)}(x) = \{f(x)\}$. En ce sens, l'ensemble dynamique $D_{(g_k)}(x)$ traduit la non-équicontinuité de la suite (g_k) .

L'avantage de considérer des ensembles dynamiques est que ces derniers satisfont une propriété d'équivariance qui les rend calculables. Soient (a_k) et (b_k) deux suites de $\text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ convergeant vers $a, b \in \text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$, respectivement. On définit la suite $\bar{g}_k = a_k g_k b_k^{-1}$, pour $k \geq 0$. Alors les ensembles dynamiquement associés à (g_k) et (\bar{g}_k) sont reliés par la relation suivante :

$$D_{(\bar{g}_k)}(b(x)) = a(D_{(g_k)}(x)). \quad (6.1)$$

Cette propriété s'avèrera essentielle pour l'étude dynamique des suite de $\text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ car elle permettra de se ramener à l'étude plus simple des suites diagonales grâce à la décomposition de Cartan.

6.1.3 Description dynamique des suites de $\text{PO}(p+1, q+1)$

Soit (g_k) une suite de $\text{PO}(p+1, q+1)$. Pour tout $k \geq 0$, on peut faire la décomposition de Cartan de l'élément $g_k = a_k d_k b_k^{-1}$. On obtient (a_k) et (b_k) des suites d'éléments de K et (d_k) une suite d'éléments de A^+ qu'on peut écrire

$$d_k = \text{diag}(\lambda_0(k), \dots, \lambda_p(k), 1, \dots, 1, \lambda_p^{-1}(k), \dots, \lambda_0^{-1}(k)),$$

avec $\lambda_0(k) \geq \lambda_1(k) \geq \dots \geq \lambda_p(k) \geq 1$. On dit que la suite (g_k) est *élémentaire* si pour tous $0 \leq i < j \leq p$, la suite $(\lambda_j(k)/\lambda_i(k))$ admet une limite dans $[0, 1]$ et si (a_k) et (b_k) convergent. Par un procédé d'extractions successives, on voit que toute suite de $\text{PO}(p+1, q+1)$ admet une sous-suite élémentaire.

Fixons maintenant une suite élémentaire (g_k) . On dit que (g_k) est *m -divergente* si $m \geq 0$ est le plus grand entier tel que la limite de $(\lambda_i(k)/\lambda_0(k))$ est non nulle.

Exemple 6.2. En prenant les notations de [Fra04], les suites de type mixte et borné sont 0-divergentes et les suites de type équilibrées sont 1-divergentes.

Soit (g_k) une suite m -divergente. Quitte à extraire, on peut associer à (g_k) les données suivantes :

1. Nous utiliserons les lettres a, b et d pour décomposer un élément $g = adb$ dans la décomposition KAK car nous utilisons la lettre k comme variable d'une suite.

- un m -photon dit *répulseur* \mathcal{L}^- ainsi qu'un m -photon dit *attracteur* \mathcal{L}^+ ;
- deux drapeaux de photons $\mathcal{L}^- = \mathcal{L}_1^- \subset \mathcal{L}_2^- \subset \dots \subset \mathcal{L}_s^-$ et $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}_1^+ \subset \mathcal{L}_2^+ \subset \dots \subset \mathcal{L}_s^+$, appelés *drapeau répulseur* et *drapeau attracteur*, respectivement, avec $\dim \mathcal{L}_i^- = \dim \mathcal{L}_i^+ =: m_i$;
- deux difféomorphismes $\theta^+ : (\mathcal{L}^-)^* \rightarrow \mathcal{L}^+$ et $\theta^- : \mathcal{L}^- \rightarrow (\mathcal{L}^+)^*$ préservant les structures projectives ;
- pour tout $2 \leq i \leq s-1$, une application lisse $\theta_i^+ : C(\mathcal{L}_i^-) \setminus C(\mathcal{L}_{i+1}^-) \rightarrow \mathcal{L}_{i+1}^+ \setminus \mathcal{L}_i^+$ et une application lisse $\theta_i^- : \mathcal{L}_i^- \setminus \mathcal{L}_{i-1}^- \rightarrow (\mathcal{L}_i^+)^*$ telle que $\mathcal{L}_{i-1}^- \subset \theta_i^-(x)$ pour tout $x \in \mathcal{L}_i^- \setminus \mathcal{L}_{i-1}^-$.
- une identification conforme θ_s entre l'espace des $(m_s + 1)$ -photons contenant \mathcal{L}_s^- et l'espace des $(m_s + 1)$ -photons contenant \mathcal{L}_s^+ . (*Remarque* : il fait sens de parler de la structure conforme de l'espace des $(\dim(\mathcal{L}) + 1)$ -photons, voir proposition 1.10.)

La dynamique de la suite (g_k) sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$ est caractérisée par la donnée de ces objets de la façon suivante :

- (1) La restriction de (g_k) à $\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(\mathcal{L}^-)$ converge uniformément (même C^∞) sur tout compact de $\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(\mathcal{L}^-)$ vers

$$\theta^+ \circ \pi_{\mathcal{L}^-} : \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(\mathcal{L}^-) \rightarrow \mathcal{L}^+.$$

- (2) Si $x \in C(\mathcal{L}_i^-) \setminus C(\mathcal{L}_{i+1}^-)$, alors $D_{(g_k)}(x)$ est le $(m_i + 1)$ -photon contenant \mathcal{L}_i^+ et $\theta_i^+(x)$.
- (3) Si $x \in C(\mathcal{L}_s^-) \setminus \mathcal{L}_s^-$ et si \mathcal{L} est le $(m_s + 1)$ photon contenant x et \mathcal{L}_s^- , alors $D_{(g_k)}(x) = \theta_s(\mathcal{L})$.
- (4) Si $x \in \mathcal{L}_i^- \setminus \mathcal{L}_{i-1}^-$, alors $D_{(g_k)}(x) = C(\theta_i^-(x))$.
- (5) Si $x \in \mathcal{L}^-$, alors $D_{(g_k)}(x) = C(\theta^-(x))$.

Remarque 6.3. Les assertions ci-dessus décrivent l'ensemble dynamique de tous les points de $\mathbf{Ein}^{p,q}$, car on a la suite d'inclusions suivante :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1^- \subset \mathcal{L}_2^- \subset \dots \subset \mathcal{L}_s^- \subset C(\mathcal{L}_s^-) \subset C(\mathcal{L}_{s-1}^-) \subset \dots \subset C(\mathcal{L}_1^-) = C(\mathcal{L}) \subset \mathbf{Ein}^{p,q}.$$

Démonstration. Supposons dans un premier temps que (g_k) est une suite diagonale d'éléments de A^+ , que l'on écrit

$$g_k = \text{diag}(\lambda_0(k), \lambda_1(k), \dots, \lambda_p(k), 1, \dots, 1, \lambda_p(k)^{-1}, \dots, \lambda_0(k)^{-1}),$$

avec $\lambda_0(k) \geq \lambda_1(k) \geq \dots \geq \lambda_p(k) \geq 1$. On peut trouver des indices $m_1 \leq \dots \leq m_s$ tels que pour tout $l \in \{1, \dots, s-1\}$ et pour tous $m_l < i < j \leq m_{l+1}$, on a

$$\lim_k \lambda_i(k)/\lambda_j(k) < +\infty \text{ et } \lim_k \lambda_{m_l}(k)/\lambda_{m_{l+1}}(k) = +\infty.$$

On peut toujours supposer que pour tout $l \in \{1, \dots, s-1\}$, on a $\lambda_{m_{l+1}}(k) = \dots = \lambda_{m_l+1}(k)$ pour tout $k \geq 0$. On pose $L_i^+ = \langle e_0, \dots, e_{m_i} \rangle$, $H_i = \langle e_{m_i+1}, \dots, e_{p+q-m_i} \rangle$ et $L_i^- = \langle e_{p+q+1-m_i}, \dots, e_{p+q+1} \rangle$ pour tout $i \in \{1, \dots, s-1\}$, de sorte qu'on obtienne la décomposition non-orthogonale suivante

$$\mathbf{R}^{p+1,q+1} = L_i^+ \oplus H_i \oplus L_i^-.$$

En accord avec cette décomposition, on écrira $v = v_{L_i^+} + v_{H_i} + v_{L_i^-}$ pour un élément de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$. Soient $\mathcal{L}_i^+ = \mathbf{P}(L_i^+)$ et $\mathcal{L}_i^- = \mathbf{P}(L_i^-)$. On obtient deux drapeaux de photons

$(\mathcal{L}_i^+)_{i=1,\dots,s}$ et $(\mathcal{L}_i^-)_{i=1,\dots,s}$ avec $\dim(\mathcal{L}_i^+) = \dim(\mathcal{L}_i^-) = m_i$. Avec ces notations, les cônes de lumière de \mathcal{L}_i^+ et \mathcal{L}_i^- sont

$$C(\mathcal{L}_i^+) = \pi(L_i^+ \oplus H_i) \cap \mathbf{Ein}^{p,q} \text{ et } C(\mathcal{L}_i^-) = \pi(H_i \oplus L_i^-) \cap \mathbf{Ein}^{p,q}.$$

(1) Soit $v \in C^{p+1,q+1}$ tel que $v_{L_1^+} \neq 0$, ce qui revient à dire que $x := \pi(v) \in \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(\mathcal{L}^-)$. Alors

$$g_k(x) = \pi\left(v_{L_1^+} + \underbrace{\lambda_0(k)^{-1} g_k(v_{H_1^+} + v_{L_1^-})}_{=o(1)}\right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \pi\left(v_{L_1^+}\right).$$

Ainsi la suite (g_k) converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(\mathcal{L}^-)$ vers l'application $\tau : \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(\mathcal{L}^-) \rightarrow \mathcal{L}^+$ définie par

$$\tau(\pi(v)) = \pi\left(v_{L_1^+}\right).$$

L'application τ est reliée à $\pi_{\mathcal{L}^-}$ de la façon suivante. Soit $f : \mathcal{L}^+ \rightarrow (\mathcal{L}^-)^*$ la restriction de $\pi_{\mathcal{L}^-}$ à \mathcal{L}^+ et soit $v \in C^{p+1,q+1}$. Comme L^- est orthogonal à $H \oplus L^-$, on a $\mathbf{b}(v, w) = \mathbf{b}(v_{L^+}, w)$ pour tout $w \in L^-$. En particulier $v^\perp \cap L^- = v_{L^+}^\perp \cap L^-$. Cela implique que pour un élément $x = \pi(v) \in \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(\mathcal{L}^-)$ avec $v \in \mathbf{R}^{p+1,q+1} \setminus \{0\}$, on a

$$C(x) \cap \mathcal{L}^- = C(\pi(v_{L^-})) \cap \mathcal{L}^-,$$

donc $f \circ \tau(x) = f(\pi(v_{L^-})) = \pi_{\mathcal{L}^-}(x)$. En définissant $\theta^+ := f^{-1} : (\mathcal{L}^-)^* \rightarrow \mathcal{L}^+$, on obtient bien que la suite (g_k) converge uniformément sur tout compact vers $\tau = \theta^+ \circ \pi_{\mathcal{L}^-}$.

On fixe désormais $x = \pi(v) \in C(\mathcal{L}^-)$ et on cherche à déterminer $D_{(g_k)}(x)$.

(2) On suppose $x \in C(\mathcal{L}_i^-) \setminus C(\mathcal{L}_{i+1}^-)$ pour un certain $i \in \{1, \dots, s-1\}$, c'est-à-dire $v_{L_i^+} = 0$ et $v_{L_{i+1}^+} \neq 0$. Montrons que $D_{(g_k)}(x) = \pi\left(L_i^+ \oplus \mathbf{R}v_{L_{i+1}^+}\right)$. Soient $w \in L_i^+$ et $t \neq 0$. La suite $(x(k))$ définie pour tout $k \geq 0$ par

$$x(k) = \pi(\lambda_{m_{i+1}}(k)g_k^{-1}w + tv)$$

converge vers $\pi(tv) = x$. Or $g_k(x(k)) = \pi(\lambda_{m_{i+1}}(k)w + tg_kv) = \pi(w + tv_{L_{i+1}^+} + o(1)) \rightarrow \pi(w + tv_{L_{i+1}^+})$. On en déduit $\pi\left(L_i^+ \oplus \mathbf{R}v_{L_{i+1}^+}\right) \subset D_{(g_k)}(x)$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x(k)$ une suite convergeant vers x . On choisit une suite de représentants $(v(k)) \in (C^{p+1,q+1})^{\mathbf{N}}$ telle que $\pi(v(k)) = x(k)$ et $v(k) \rightarrow v$. Alors

$$g_kv_k = \underbrace{g_kv_{L_i^+}(k)}_{\in L_i^+} + \underbrace{g_kv_{L_{i+1}^+}(k)}_{\sim \lambda_{i+1}(k)} + \underbrace{g_k\left(v_{L_{i+1}^+}(k) - v_{L_i^+}(k) - v_{L_{i+1}^+}(k)\right)}_{=o(\lambda_{i+1}(k))} + \underbrace{g_k\left(v_{H_{i+1}^+}(k) + v_{L_{i+1}^-}(k)\right)}_{=O(\lambda_{i+2}(k))}.$$

Donc $\lim_k g_k(x(k)) = \lim \pi(g_kv_{L_i^+}(k) + g_kv_{L_{i+1}^+}(k)) \in \pi\left(L_i^+ \oplus \mathbf{R}v_{L_{i+1}^+}\right)$. On obtient donc la description souhaitée en posant $\theta_i^+(x) = \pi(v_{L_{i+1}^+})$.

(3) Si $x \in C(\mathcal{L}_{m_s}^-) \setminus \mathcal{L}_{m_s}^-$, ce qui se traduit par $v_{L_{m_s}^+} = 0$ et $v_{H_{m_s}} \neq 0$, une démonstration analogue à la précédente montre alors que $D_{(g_k)}(x) = \pi\left(L_{m_s}^+ \oplus \mathbf{R}v_{H_{m_s}^+}\right)$. Soit θ_s le difféomorphisme qui associe au (m_s+1) -photon $\pi\left(\mathbf{R}v'_{H_{m_s}^+ \oplus L_{m_s}^-}\right)$ le (m_s+1) -photon $\pi\left(L_{m_s}^+ \oplus \mathbf{R}v'_{H_{m_s}^+}\right)$. On a bien $D_{(g_k)}(x) = \theta_s(\mathcal{L})$.

(4) Si $x \in \mathcal{L}_{i+1}^- \setminus \mathcal{L}_i^-$ pour un certain $i \in \{1, \dots, s-1\}$, c'est-à-dire $v_{L_i^+} = v_{H_i} = 0$, on montre de même $D_{(g_k)}(x) = \pi \left(L_i^+ \oplus H_i \oplus \mathbf{R}v_{L_{i+1}^-} \right)$. On obtient donc $D_{(g_k)} = C(\theta_i^-(x))$ en posant $\theta_i^-(x) = \pi \left(v_{L_{i+1}^-}^\perp \cap L_i^+ \right)$.

(5) Si $x \in \mathcal{L}_1^-$, c'est-à-dire $v_{L_1^-} \neq 0$, on montre de même $D_{(g_k)}(x) = \pi \left(L_1^+ \oplus H_1 \oplus \mathbf{R}v_{L_1^-} \right)$, donc $D_{(g_k)} = C(\theta^-(x))$ en posant $\theta_i^-(x) = \pi \left(v_{L_1^-}^\perp \cap L_1^+ \right)$.

Pour une suite m -divergente quelconque (g_k) , on peut toujours trouver des suites (a_k) et (b_k) convergeant dans $\text{PO}(p+1, q+1)$ telles que $g_k = a_k d_k b_k$, pour une suite diagonale (d_k) comme précédemment. Par ce qui précède, on peut écrire $\mathcal{L}^\pm(d_k)$ pour les m -photons introduits ci-dessus pour (d_k) . On définit alors $\mathcal{L}^+(g_k) = a(\mathcal{L}^+(d_k))$ et $\mathcal{L}^-(g_k) = b^{-1}(\mathcal{L}^-(d_k))$ où a et b sont les limites de (a_k) et (b_k) , respectivement. Par la relation 6.1, on obtient le résultat voulu. \blacksquare

Définition 6.4. Le *type dynamique* d'une suite élémentaire m -divergente (g_k) est la suite des dimensions

$$m_1 = m < \dots < m_s$$

des photons qui constituent ses drapeaux de photons attracteurs et répulseurs.

En signature riemannienne, il n'y a qu'un seul type dynamique et les suites divergentes ont une dynamique Nord-Sud. Plus précisément, les drapeaux attracteurs et répulseurs sont réduits à des singletons $\{x^+\}$ et $\{x^-\}$. En signature lorentzienne, il existe trois types dynamiques introduits par [Fra04].

— La dynamique *bornée*, où les drapeaux attracteurs et répulseurs sont réduits à des points x^+ et x^- . Une suite (g_k) ayant cette dynamique est caractérisée par les propriétés suivantes.

- (1) La suite (g_k) converge uniformément sur les compacts de $\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus C(x^-)$ vers x^+ .
- (2) L'ensemble dynamique de x^- est $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$.
- (3) Il existe un difféomorphisme conforme $\theta : C(x^-) \rightarrow C(x^+)$ de sorte que pour un point $x \in C(x^-) \setminus x^-$, l'ensemble dynamique $D_{(g_k)}(x)$ est le photon contenu dans $C(x^+)$ passant par $\theta(x)$.

— La dynamique *équilibrée*, où les drapeaux attracteurs et répulseurs sont réduits à des photons Δ^+ et Δ^- . Une suite (g_k) ayant cette dynamique est caractérisée par des difféomorphismes projectifs $\theta^+ : \Delta^- \rightarrow \Delta^+$ et $\theta^- : \Delta^- \rightarrow \Delta^+$ avec les propriétés suivantes.

- (1) La suite (g_k) converge uniformément sur les compacts de $\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus \Delta^-$ vers la composée $\theta^+ \circ \pi_{\Delta^-}$.
- (2) L'ensemble dynamique d'un point $x \in \Delta^-$ est $C(\theta^-(x))$.

— La dynamique *mixte*, où les drapeaux attracteurs et répulseurs sont formés de drapeaux *complets* $\{x^+\} \subset \Delta^+$ et $\{x^-\} \subset \Delta^-$. Une suite (g_k) ayant cette dynamique est caractérisée par les propriétés suivantes.

- (1) La suite (g_k) converge uniformément sur les compacts de $\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus C(x^-)$ vers x^+ .
- (2) L'ensemble dynamique d'un point $x \in C(x^-) \setminus \Delta^-$ est Δ^+ .
- (3) L'ensemble dynamique d'un point $x \in \Delta^- \setminus x^-$ est C^+ .
- (4) L'ensemble dynamique de x^- est $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$.

En signature (p, q) , il existe $N_{p,q} = (2^{\min(p,q)+1} - 1)$ types dynamiques différents.

6.2 Caractérisation dynamique de l'hyperbolicité

Dans cette section, nous allons rendre plus explicite la définition d'hyperbolicité de Kobayashi–Royden (Définition 5.7) dans le cadre des ouverts de $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Rappelons qu'un ouvert $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ est Kobayashi–Royden-hyperbolique en x si, pour une métrique fixée g dans la classe conforme de Ω , la fonction $\nu_g = \sup_{\varphi} \text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, \cdot)$ est majorée par une constante positive dans un voisinage de x . Ainsi, si Ω n'est pas KR-hyperbolique en x , alors il existe une métrique g dans la classe conforme de Ω , il existe une suite $(a_k) \in \mathbf{D}^{p,q}$, il une suite d'applications conformes $\varphi_k : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow \Omega$ telles que $x_k := \varphi_k(a_k)$ tend vers x et

$$\text{dc}(\varphi_k, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a_k) \rightarrow +\infty.$$

Par homogénéité de $\mathbf{D}^{p,q}$, on peut toujours supposer que (a_k) est une suite constante égale à un point $a \in \mathbf{D}^{p,q}$ (voir la remarque 5.3).

Notation. Si $f_k : M \rightarrow N$ est une suite d'applications conformes entre deux variétés conformes pseudo-riemanniennes, et si $(x_k) \in M$ est une suite convergeant vers $x \in M$ telle que $f_k(x_k)$ converge vers un point $y \in N$, on dira que *la distorsion conforme de f_k diverge le long de x_k* , et on notera

$$\text{dc}(f_k, x_k) \rightarrow +\infty,$$

s'il existe des métriques g et g' dans les classes conformes de M et N respectivement telles que

$$\text{dc}(f_k, g, g', x_k) \rightarrow +\infty.$$

On vérifie que cette définition est indépendante du choix des métriques g et g' .

Avec la notation introduite ci-dessus, la distorsion conforme de la suite (φ_k) diverge le long de (a_k) . Par le théorème de Liouville, une telle suite s'étend à $\text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$. Ainsi, on est ramené à la proposition suivante :

Proposition 6.5. *Soit (φ_k) une suite élémentaire de $\text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ dont on note $\mathcal{L}_1^{\pm} \subset \mathcal{L}_2^{\pm} \subset \dots \subset \mathcal{L}_s^{\pm}$ les drapeaux de photons attracteurs et répulseurs associés. Soit $(x_k) \in \mathbf{Ein}^{p,q}$ une suite convergeant vers $x \in \mathbf{Ein}^{p,q}$ telle que $y_k = \varphi_k(x_k)$ converge vers un point $y \in \mathbf{Ein}^{p,q}$. Alors*

$$\text{dc}(\varphi_k, x_k) \rightarrow +\infty \iff y \notin C(\mathcal{L}_s^+).$$

Dans ce cas, on a $x \in \mathcal{L}_s^-$.

Remarque 6.6. Si $x \in \mathcal{L}_s^-$, il n'est pas vrai que pour toutes suites (x_k) convergeant vers x , la distorsion conforme de (φ_k) diverge le long de x_k .

On déduit de la proposition 6.5 la caractérisation suivante pour l'hyperbolicité :

Théorème 6.7. *Soit Ω un domaine de $\mathbf{Ein}^{p,q}$. Alors Ω est KR-hyperbolique si et seulement s'il n'existe pas de diamant $D \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$, de point $a \in D$ et de suite élémentaire (φ_k) telle que $\varphi_k(D) \subset \Omega$, $\varphi_k(a) \rightarrow x \in \Omega$ et $a \in \mathcal{L}_{\max}^-(\varphi_k)$, où $\mathcal{L}_{\max}^-(\varphi_k)$ est le plus grand photon du drapeau répulseur de (φ_k) .*

En théorie, ce critère permet donc de caractériser entièrement l'hyperbolicité de Kobayashi–Royden en termes de la dynamique des applications de $\text{Conf}(\mathbf{D}^{p,q}, \Omega)$. Cependant, en général, il est impossible de vérifier qu'un ouvert satisfait la deuxième condition du théorème 6.7. C'est pour cela que nous développerons, à partir du théorème 6.7, un critère géométrique

vérifiable dans beaucoup de situations qui donne une condition suffisante pour l'hyperbolicité (voir section 6.3).

Un des défauts du critère donné par le théorème 6.7 est qu'il y a beaucoup de types dynamiques à considérer pour vérifier la deuxième condition de l'énoncé. Néanmoins, en signature lorentzienne, on peut entièrement caractériser l'hyperbolicité de Kobayashi–Royden d'un ouvert en termes d'un seul type dynamique : celui des suites mixtes (voir section 6.1).

Théorème 6.8. *Soit Ω un domaine de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$. Alors Ω est KR-hyperbolique si et seulement s'il n'existe pas de diamant $D \subset \mathbf{Ein}^{1,n-1}$, de point $a \in D$ et de suite mixte (φ_k) telle que $\varphi_k(D) \subset \Omega$, $\varphi_k(a) \rightarrow x \in \Omega$ et $a \in \Delta^-(\varphi_k) \setminus \{x^-(\varphi_k)\}$.*

En signature quelconque, il n'est pas possible, à notre connaissance, de se ramener à un unique type dynamique. Les preuves des énoncés précédents figurent à la section 6.2.4.

6.2.1 Atlas standard de $\mathbf{Ein}^{p,q}$

Rappelons quelques notations de la section 6.1. On note $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$ l'espace vectoriel \mathbf{R}^{n+2} muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée \mathbf{b} de signature $(p+1, q+1)$. On fixe une base $\mathbf{B} = \{e_0, \dots, e_{n+1}\}$ dans laquelle \mathbf{b} s'écrit

$$\mathbf{b}(x, x) = x_0x_{n+1} + x_1x_n + \dots + x_px_{q+1} + (x_{p+1})^2 + \dots + (x_q)^2.$$

À la base \mathbf{B} , nous allons associer une atlas $\mathcal{A}_{\mathbf{B}}$ appelé *atlas standard de l'univers d'Einstein*. On note $C^{p+1,q+1}$ le cône isotrope de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$ et $\pi : C^{p+1,q+1} \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ la projection canonique. Pour $i \in \{0, \dots, n+1\}$, on note $\bar{i} = n+1-i$. Si $i \in \{0, \dots, p\}$, on pose

$$M_i = \text{Vect}(e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, \widehat{e_{\bar{i}}}, \dots, e_{n+1})^2$$

le sous-espace de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$ de codimension 2. Ce sous-espace est non dégénéré de signature (p, q) . Il se plonge naturellement de deux manières dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$, via les deux applications conformes suivantes (voir aussi la proposition 1.4) :

$$\mathbf{st}_i : x \mapsto \pi(e_i + x - \mathbf{b}(x, x)e_{\bar{i}}) \quad \text{et} \quad \mathbf{st}_{\bar{i}} : x \mapsto \pi(e_{\bar{i}} + x - \mathbf{b}(x, x)e_i).$$

Les images de ces deux domaines sont notées Ω_i et $\Omega_{\bar{i}}$. L'ouvert Ω_i (resp. $\Omega_{\bar{i}}$) est le complémentaire dans $\mathbf{Ein}^{p,q}$ du cône de lumière de $[e_{\bar{i}}]$. On peut ainsi écrire pour $i \in \{0, \dots, p, q+1, \dots, n+1\}$:

$$\Omega_i = \{\pi(x) \in \mathbf{Ein}^{p,q} \mid \mathbf{b}(x, e_{\bar{i}}) \neq 0\}.$$

On vérifie que la collection $\mathcal{A}_{\mathbf{B}} = \{(\Omega_i, \mathbf{st}_i)\}_{i \in \{0, \dots, p, q+1, \dots, n+1\}}$ est un atlas de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ dont les $2(p+1)$ cartes sont des ouverts conformément équivalents à l'espace de Minkowski. Écrivons les changements de carte pour l'atlas $\mathcal{A}_{\mathbf{B}}$. Soient $i, j \in \{0, \dots, p, q+1, \dots, n+1\}$ distincts ; on cherche à calculer explicitement le changement de carte $\tau_{ij} = \mathbf{st}_j^{-1} \circ \mathbf{st}_i$. Soit $x = \sum_{l \neq i, \bar{i}} x_l e_l \in M_i$ tel que $\mathbf{st}_i(x) \in \Omega_j$, de sorte que $\mathbf{st}_j^{-1} \circ \mathbf{st}_i(x)$ ait du sens.

— Premier cas : $j = \bar{i}$. La condition $\mathbf{st}_i(x) \in \Omega_j$ est équivalente à $\mathbf{b}(x, x) \neq 0$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(x) &= \mathbf{st}_{\bar{i}}^{-1} \circ \mathbf{st}_i(x) = \mathbf{st}_{\bar{i}}^{-1}([e_i + x - \mathbf{b}(x, x)e_{\bar{i}}]) \\ &= \mathbf{st}_{\bar{i}}^{-1}\left(\left[e_{\bar{i}} - \frac{x}{\mathbf{b}(x, x)} - \frac{1}{\mathbf{b}(x, x)}e_i\right]\right) \\ &= -\frac{x}{\mathbf{b}(x, x)}. \end{aligned}$$

2. Le symbole $\widehat{e_i}$ signifie que le i -ème élément n'est pas pris en compte.

— Second cas : $j \neq \bar{i}$. La condition $\mathbf{st}_i(x) \in \Omega_j$ est équivalente à $x_j \neq 0$. On obtient

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(x) &= \mathbf{st}_j^{-1} \circ \mathbf{st}_i(x) = \mathbf{st}_j^{-1} ([e_i + x - \mathbf{b}(x, x)e_{\bar{i}}]) \\ &= \mathbf{st}_j^{-1} \left(\left[x_j e_j + e_i + \sum_{l \neq i, \bar{i}, j, \bar{j}} x_l e_l - \mathbf{b}(x, x)e_{\bar{i}} + x_{\bar{j}} e_{\bar{j}} \right] \right) \\ &= \frac{1}{x_j} \left(e_i + \sum_{l \neq i, \bar{i}, j, \bar{j}} x_l e_l - \mathbf{b}(x, x)e_{\bar{i}} \right). \end{aligned}$$

L'avantage de cet atlas est qu'il est invariant sous l'action d'une sous-groupe abélien de rang maximal de $\text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$, comme nous allons le voir tout de suite.

6.2.2 Distorsion conforme des suites diagonales

En accord avec la section 6.1, on note A le sous-groupe de $\text{PO}(p+1, q+1)$ formé des matrices positives agissant diagonalement dans la base \mathbf{B} , c'est-à-dire

$$A = \{\text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}) \in \text{PO}(p+1, q+1) \mid \lambda_0, \dots, \lambda_{n+1} > 0\}.$$

Pour qu'une matrice diagonale $\varphi = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1})$ appartienne à $\text{PO}(p+1, q+1)$, il faut et il suffit que

$$\lambda_i \lambda_{\bar{i}} = 1 \text{ pour tout } i \in \{0, \dots, p\} \text{ et } \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_{q-1} = 1.$$

Comme chaque élément de la base \mathbf{B} est laissé fixe par A , le groupe A préserve chaque cône de lumière $C([e_i])$ pour $i \in \{0, \dots, p, q+1, \dots, n+1\}$. Ainsi A préserve chacune des cartes de l'atlas $\mathcal{A}_{\mathbf{B}}$.

Soit $\varphi = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}) \in A$ et soient $i, j \in \{0, \dots, p, q+1, \dots, n+1\}$. En composant φ à la source par \mathbf{st}_i et au but par \mathbf{st}_j^{-1} , on peut voir la transformation φ comme une application conforme définie sur un ouvert de (M_i, \mathbf{b}) et à valeurs dans (M_j, \mathbf{b}) . Notre but est de calculer la distorsion conforme de cette application, qu'on note $\text{dc}(\varphi, M_i, M_j, x)$.

Le cas où i est j sont égaux est le plus simple, il revient à lire l'action de φ dans la carte \mathbf{st}_i . L'action de φ dans cette carte est linéaire et est donnée par la matrice

$$\mathbf{st}_i \circ \varphi \circ \mathbf{st}_i^{-1} = \frac{1}{\lambda_i} \text{diag}(\lambda_0, \dots, \hat{\lambda}_i, \dots, \hat{\lambda}_{\bar{i}}, \dots, \lambda_{n+1})$$

dans la base canonique de M_i . L'action de la matrice diagonale dans l'expression ci-dessus est isométrique sur (M_i, \mathbf{b}) , donc

$$\text{dc}(\varphi, M_i, M_i, x) = (\lambda_i)^{-1}.$$

Lorsque $i \neq j$, on peut se ramener au calcul précédent en remarquant que

$$\mathbf{st}_j \circ \varphi \circ \mathbf{st}_i^{-1} = \mathbf{st}_j \circ \varphi \circ \mathbf{st}_j^{-1} \circ \tau_{ij}.$$

Ceci implique que $\text{dc}(\varphi, M_i, M_j, x) = \text{dc}(\varphi, M_j, M_j, \tau_{ij}(x)) \text{dc}(\tau_{ij}, x) = (1/\lambda_i) \text{dc}(\tau_{ij}, x)$. Il ne reste donc plus qu'à calculer $\text{dc}(\tau_{ij}, x) = \text{dc}(\tau_{ij}, M_i, M_j, x)$. Supposons dans un premier temps que $j = \bar{i}$, de sorte que $\tau_{ij}(x) = -x/\mathbf{b}(x, x)$ pour tout $x \in M_i$ tel que $\mathbf{b}(x, x) \neq 0$. Soit $\gamma : I \rightarrow M_i$ la courbe définie au voisinage de 0 par $\gamma(t) = x + tx$. Alors $i(\gamma(t)) = i(x)/(1+t)$ donc

$$d\tau_{ij}(x) \cdot x = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} i(\gamma(t)) = -\tau_{ij}(x).$$

Ainsi

$$\mathbf{b}(d\tau_{ij}(x) \cdot x, d\tau_{ij}(x) \cdot x) = \mathbf{b}(-\tau_{ij}(x), -\tau_{ij}(x)) = \frac{1}{\mathbf{b}(x, x)} = \mathrm{dc}(\tau_{ij}, x)^2 \mathbf{b}(x, x),$$

ce qui nous donne $\mathrm{dc}(\tau_{ij}, x) = 1/|\mathbf{b}(x, x)|$ et

$$\mathrm{dc}(\varphi, M_i, M_{\bar{i}}, x) = (|\mathbf{b}(x, x)|\lambda_i)^{-1}.$$

Enfin lorsque $j \neq i, \bar{i}$, on a $\tau_{ij}(x) = \frac{1}{x_j} \left(e_i + \sum_{l \neq i, \bar{i}, j, \bar{j}} x_l e_l - \mathbf{b}(x, x) e_{\bar{i}} \right)$, donc

$$\begin{aligned} \mathrm{dc}(\tau_{ij}, x)^2 &= \mathrm{dc}(\tau_{ij}, x)^2 \mathbf{b} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_{\bar{j}}} \right) \\ &= \mathbf{b} \left(\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}(x), \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_{\bar{j}}}(x) \right) \\ &= \mathbf{b} \left(\frac{-1}{x_j^2} \left(e_i + \sum_{l \neq i, \bar{i}, j, \bar{j}} x_l e_l - \mathbf{b}(x, x) e_{\bar{i}} \right) - \frac{x_{\bar{j}}}{x_j} e_{\bar{i}}, -e_{\bar{i}} \right) \\ &= \frac{1}{2x_j^2}, \end{aligned}$$

ce qui implique que $\mathrm{dc}(\tau_{ij}, x) = \frac{1}{\sqrt{2}|x_j|}$ et

$$\mathrm{dc}(\varphi, M_i, M_j, x) = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda_j|x_j|}.$$

6.2.3 Divergence de la distorsion conforme

On fixe désormais une suite $(\varphi_k) = (\mathrm{diag}(\lambda_0(k), \dots, \lambda_{n+1}(k)))$ d'éléments de A . On suppose que $\lambda_0(k) \geq \dots \geq \lambda_p(k) \geq 1$ et qu'il existe un indice $0 \leq s \leq p$ tel que $(\lambda_s(k))$ est non bornée et $\lambda_{s+1}(k) = \dots = \lambda_p(k) = 1$ pour tout $k \geq 0$. On suppose de plus que pour tous $i \leq j \leq p$, la suite $(\lambda_i(k)/\lambda_j(k))$ admet une limite dans $[1, +\infty]$.

Lemme 6.9. *Soit $(x(k))$ une suite $\mathbf{Ein}^{p,q}$ convergeant vers un point $x \in \mathbf{Ein}^{p,q}$, telle que $y(k) = \varphi_k(x(k))$ converge vers $y \in \mathbf{Ein}^{p,q}$. Alors*

$$\mathrm{dc}(\varphi_k, x(k)) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty \iff y \notin \mathbf{P}\langle e_{n-s+1}, \dots, e_{n+1} \rangle.$$

Démonstration. On fait un choix de coordonnées projectives $x = [x_0 : \dots : x_{n+1}]$ et $x(k) = [x_0(k) : \dots : x_{n+1}(k)]$ de telle sorte que $\lim_k x_i(k) = x_i$ pour tout $i \geq 0$. Soit $i_0 \in \{0, \dots, n+1\}$ minimal tel que $x_{i_0} \neq 0$. On fait un choix de coordonnées projectives $y = [y_0 : \dots : y_{n+1}]$ et on fixe $j_0 \in \{0, \dots, n+1\}$ minimal tel que $y_{j_0} \neq 0$. Comme $x_{i_0} \neq 0$ la suite $(x(k))$ converge dans Ω_{i_0} . De même la suite $(y(k))$ converge dans Ω_{j_0} car $y_{j_0} \neq 0$. Par les calculs de la section 6.2.2, on a

$$\mathrm{dc}(\varphi_k, M_{i_0}, M_{j_0}, \mathbf{st}_{i_0}^{-1}(x(k))) = \begin{cases} (\lambda_{j_0}(k))^{-1} & \text{si } j_0 = i_0, \\ \left(\lambda_{j_0}(k) \left| \frac{x_{j_0}(k)}{x_{i_0}(k)} \right| \right)^{-1} & \text{si } j_0 = \bar{i}_0, \\ \left(\sqrt{2}\lambda_{j_0}(k) \left| \frac{x_{j_0}(k)}{x_{i_0}(k)} \right| \right)^{-1} & \text{si } j_0 \neq i_0, \bar{i}_0. \end{cases}$$

En particulier

$$\begin{aligned} \mathrm{dc}(\varphi_k, M_{i_0}, M_{j_0}, \mathrm{st}_{i_0}^{-1}(x(k))) \rightarrow +\infty &\iff \lambda_{j_0}(k) \rightarrow 0 \\ &\iff j_0 \geq n - s \\ &\iff y \notin \mathbf{P}\langle e_{n-s+1}, \dots, e_{n+1} \rangle. \end{aligned}$$

■

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 6.5.

Démonstration de la proposition 6.5. Comme φ_k est une suite élémentaire, on peut décomposer $\varphi_k = a_k d_k b_k$, avec a_k et b_k qui convergent dans $\mathrm{PO}(p+1, q+1)$ vers des éléments a et b , respectivement, et où (d_k) est une suite de A^+ dont les rapports des valeurs propres admettent des limites dans $[0, +\infty]$ (voir section 6.1). Comme

$$\mathrm{dc}(\varphi_k, x_k) = \mathrm{dc}(a_k, d_k b_k(x_k)) \mathrm{dc}(\varphi_k, b_k(x_k)) \mathrm{dc}(b_k, x_k) \rightarrow +\infty,$$

on a

$$\begin{aligned} \mathrm{dc}(\varphi_k, x_k) \rightarrow +\infty &\iff \mathrm{dc}(d_k, b_k(x_k)) \rightarrow +\infty \\ &\iff \lim_k d_k(b_k(x_k)) \notin \mathcal{L}_s^+(d_k) \quad (\text{lemme 6.9}) \\ &\iff \lim_k \varphi_k(x_k) \notin a(\mathcal{L}_s^+(d_k)) = \mathcal{L}_s^+(\varphi_k). \end{aligned}$$

■

6.2.4 Preuve de la caractérisation dynamique

Montrons comment déduire les théorèmes 6.7 et 6.8 de la proposition 6.5.

Démonstration du théorème 6.7. Si Ω n'est pas KR-hyperbolique en $x \in \Omega$, on peut trouver un diamant $D \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$, un point $a \in D$ et une suite (φ_k) telle que $\varphi_k(D) \subset \Omega$, $\varphi_k(a) \rightarrow x \in \Omega$ et $\mathrm{dc}(\varphi_k, a) \rightarrow \infty$. Quitte à extraire, on peut supposer que (φ_k) est une suite élémentaire. Par la proposition 6.5, le point a appartient à $\mathcal{L}_{max}^-(\varphi_k)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe un diamant $D \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$, un point $a \in D$ et une suite élémentaire (φ_k) telle que $\varphi_k(D) \subset \Omega$, $\varphi_k(a) \rightarrow x \in \Omega$ et $a \in \mathcal{L}_{max}^-(\varphi_k)$, où $\mathcal{L}_1^\pm \subset \mathcal{L}_2^\pm \subset \dots \subset \mathcal{L}_{max}^\pm$ sont les drapeaux de photons attracteurs et répulseurs associés à la suite (φ_k) . Si jamais $x \in C(\mathcal{L}_{max}^+)$, on peut trouver x' suffisamment proche de x et (a_k) une suite convergeant vers a tels que $\varphi_k(a_k) \rightarrow x'$ et $x' \in \Omega \setminus C(\mathcal{L}_{max}^+)$ car l'ensemble dynamiquement associé au point a contient strictement $C(\mathcal{L}_{max}^+)$. Par la proposition 6.5, la distorsion conforme de (φ_k) explose le long de (a_k) . Ainsi Ω n'est pas Kobayashi–Royden-hyperbolique en x' . ■

Démonstration du théorème 6.8. Si jamais il existe un diamant $D \subset \mathbf{Ein}^{1,n-1}$, un point $a \in D$ et une suite mixte (φ_k) telle que $\varphi_k(D) \subset \Omega$, $\varphi_k(a) \rightarrow x \in \Omega$ et $a \in \Delta^-(\varphi_k)$, alors Ω n'est pas KR-hyperbolique par le théorème 6.7.

Supposons maintenant que Ω n'est pas KR-hyperbolique. On note $\mathcal{K} = \mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus \Omega$. Soit $\varphi_k : \mathbf{D}^{1,n-1} \rightarrow \Omega$ une suite d'applications conformes et $a \in \mathbf{D}^{1,n-1}$ un point tels que $\varphi_k(a)$ converge vers un point $x \in \Omega$ et $\mathrm{dc}(\varphi_k, a) \rightarrow +\infty$. On peut fixer un diamant $D \subset \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ et une identification conforme $D \simeq \mathbf{D}^{1,n-1}$ et voir (φ_k) comme une suite de $\mathrm{PO}(2, n)$ telle que $\varphi_k(D) \subset \Omega$. Quitte à extraire, on peut toujours supposer que φ_k est une suite élémentaire. On distingue trois cas suivant le type dynamique de (φ_k) (voir aussi la section 6.1).

- La suite (φ_k) est à dynamique équilibrée. On note Δ^+ et Δ^- les photons attracteurs et répulseurs, respectivement, et on note $\theta^- : \Delta^- \rightarrow \Delta^+$ le difféomorphisme projectif qui caractérise la dynamique de (φ_k) , voir section 6.1. La proposition 6.5 implique que $a \in \Delta^-$. Soit $J = D \cap \Delta^-$. Comme $\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus D$ est un voisinage de $\text{Int}(\Delta^- \setminus J)$ dans $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$, et comme $\mathcal{K} \subset \varphi_k(\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus D)$ pour tout $k \geq 0$, on a

$$\mathcal{K} \subset D_{(\varphi_k)}(\Delta^- \setminus J) = \cup_{x \in \Delta^- \setminus J} C(\theta^-(x)).$$

Ainsi $\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus \cup_{x \in J} C(\theta^-(x)) \subset \mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus \mathcal{K} = \Omega$. Donc Ω contient un ouvert V conformément équivalent au complémentaire d'un hyperplan dégénéré dans Minkowski. On peut alors construire explicitement une suite mixte (ψ_k) avec les propriétés désirées. On se place dans $\mathbf{R}^{1,n-1}$ muni de la métrique $\mathbf{b}(x, x) = x_1 x_n + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2$ et on peut toujours supposer que $V = \{x \mid x_n > -1\}$. Soit D le diamant défini par les points $p = e_1 - e_n$ et $q = e_n - e_1$. Le diamant D est contenu dans V par construction. Soit

$$\psi_k = \mu_k \begin{pmatrix} \lambda_k & & \\ & I_{n-2} & \\ & & \lambda_k^{-1} \end{pmatrix}$$

où $\lambda_k, \mu_k, \lambda_k/\mu_k \rightarrow +\infty$. Alors (ψ_k) est une suite mixte d'éléments de $\text{PO}(2, n)$ et $0 \in \Delta^-(\psi_k) \setminus x^-(\psi_k) = \mathbf{R}e_1$. De plus $\psi_k(0) = 0$ donc $\psi_k(0)$ converge dans Ω et $\psi_k(D) \subset V \subset \Omega$.

- La suite (φ_k) est à dynamique bornée. On note x^+ et x^- ses points attracteurs et répulseurs, respectivement. La proposition 6.5 implique que $a = x^-$. Comme D est un voisinage de a dans $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$, et comme $\mathcal{K} \subset \varphi_k(\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus D)$ pour tout $k \geq 0$, on a

$$\mathcal{K} \subset D_{(\varphi_k)}(\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus D) = C(x^+).$$

Ainsi $\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus C(x^+) \subset \Omega = \mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus \mathcal{K}$. Donc Ω contient un ouvert conformément équivalent à l'espace de Minkowski. Comme précédemment, on peut construire explicitement une suite mixte (ψ_k) avec les propriétés désirées.

- La suite (φ_k) est à dynamique mixte. On note $x^+ \in \Delta^+$ et $x^- \in \Delta^-$ les drapeaux attracteurs et répulseurs, respectivement. La proposition 6.5 implique que $a \in \Delta^-$. Si $a \neq x^-$, alors (φ_k) a les propriétés désirées. Si $a = x^-$, alors comme dans le cas de la dynamique bornée, l'ouvert Ω contient un ouvert conformément équivalent à l'espace de Minkowski. On peut alors raisonner comme précédemment.

■

6.2.5 Hyperbolicité pour les variétés conformément plates

Nous discutons ici de l'hyperbolicité de Kobayashi–Royden des variétés conformément plates. Soit M une variété conformément plate. On se donne une suite d'applications conformes $\varphi_k : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ et un point $a \in \mathbf{D}^{p,q}$. On suppose que la suite $x_k = \varphi_k(a)$ converge vers un point x de M . Dans ce cas, on peut donner un sens au type dynamique de (φ_k) . Fixons un relevé $\tilde{x} \in \tilde{M}$ pour x . On choisit une suite de relevés \tilde{x}_k pour x_k de sorte que $\tilde{x}_k \rightarrow \tilde{x}$. On peut donc relever la suite (φ_k) en une suite

$$\tilde{\varphi}_k : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow \tilde{M}$$

telle que $\tilde{\varphi}_k(a) = \tilde{x}_k$. Le *développement* de la suite d'applications pointées $\varphi_k : (\mathbf{D}^{p,q}, a) \rightarrow (M, x_k)$ est par définition la suite d'applications pointées définies par

$$g_k = \text{dev} \circ \tilde{\varphi}_k : (\mathbf{D}^{p,q}, a) \rightarrow (\mathbf{Ein}^{p,q}, \text{dev}(\tilde{x}_k)).$$

Par le théorème de Liouville, cette suite est une suite de $\text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ (quitte à fixer une identification conforme de $\mathbf{D}^{p,q}$ avec un ouvert de $\mathbf{Ein}^{p,q}$). A priori, cette suite dépend du choix de relevé qu'on a fait pour la suite (x_k) et de l'application de développement. Supposons qu'on ait pris une autre suite de relevés (y_k) convergeant vers $y \in \widetilde{M}$, et supposons qu'on choisisse une autre application de développement dev' . On note $\widetilde{\psi}_k : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow \widetilde{M}$ la suite de relevés tels que $\widetilde{\psi}_k(a) = y_k$ pour tout $k \geq 0$, et on note $g'_k = \text{dev}' \circ \widetilde{\psi}_k$. On peut trouver un élément $h \in \text{PO}(p+1, q+1)$ et un automorphisme de revêtement $\gamma \in \pi_1(M)$ tels que

$$\text{dev}' = h \circ \text{dev} \text{ et } \gamma(x) = y.$$

À partir d'un certain rang $k \geq 0$, on a $\gamma(x_k) = y_k$, donc $\widetilde{\psi}_k = \gamma \circ \widetilde{\varphi}_k$. On en déduit que

$$g'_k = \text{dev}' \circ \widetilde{\psi}_k = h \circ \text{dev} \circ \gamma \circ \widetilde{\varphi}_k = h \cdot \text{hol}(\gamma) \circ g_k.$$

Ainsi, le développement de la suite (φ_k) est bien défini modulo une post-composition par un élément de $\text{PO}(p+1, q+1)$ qui ne dépend pas de k . Ainsi, toutes les notions sur la suite (g_k) invariantes par post composition font sens pour (φ_k) . En particulier, il fait sens de parler du type dynamique de la suite (φ_k) , et la notion de drapeau répulseurs et les assertions du type “ $a \in \mathcal{L}^-(\varphi_k)$ ” ont aussi du sens pour (φ_k) . Par le théorème 6.7, on obtient la

Proposition 6.10. *Soit M une variété conformément plate. Si M n'est pas KR-hyperbolique en x , alors il existe une suite divergente $\varphi_k : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ et un point $a \in \mathbf{D}^{p,q}$ tel que $\varphi_k(a) \rightarrow x \in M$ et $a \in \mathcal{L}_{\max}^-$, où \mathcal{L}_{\max}^- est l'élément maximal du drapeau répulseur de (φ_k) .*

■

Pour les variétés conformément plates (voir section 1.5), on peut aussi obtenir une caractérisation de la faible hyperbolicité en termes du voisinage canonique U_x . Rappelons que pour un point $x \in M$, le voisinage canonique U_x est défini comme la réunion $U_x = \cup_{\varphi} \varphi(\mathbf{D}^{p,q})$, où φ parcourt toutes les applications conformes $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ contenant x dans leur image.

Proposition 6.11. *Soit M une variété conformément plate. Alors pour tout $x \in M$, on a*

$$g_{\text{KR}}^M|_x = g_{\text{KR}}^{U_x}|_x.$$

En particulier, M est faiblement KR-hyperbolique si et seulement si U_x est faiblement KR-hyperbolique pour tout $x \in M$.

Démonstration. Soient $x \in M$ et $a \in \mathbf{D}^{p,q}$. Par construction de U_x , toute application conforme $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ telle que $\varphi(a) = x$ est à valeurs dans U_x . Donc, par l'équation 5.3, on a :

$$g_{\text{KR}}^M|_x = \inf_{\varphi: \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M} \varphi_* g_{\mathbf{D}^{p,q}}|_x = \inf_{\varphi: \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow U_x} \varphi_* g_{\mathbf{D}^{p,q}}|_x = g_{\text{KR}}^{U_x}|_x.$$

■

Par la proposition 1.30, si on suppose que M est une variété développable telle que $\text{dev}(\widetilde{M})$ évite un cône de lumière, alors

$$\begin{aligned} M \text{ est faiblement KR-hyperbolique} &\iff U_x \text{ est faiblement KR-hyperbolique pour tout } x \in M \\ &\iff \text{dev}(U_x) \text{ est faiblement KR-hyperbolique pour tout } x \in M \end{aligned}$$

Ainsi, l'équivalence précédente permet (théoriquement) de ramener l'étude de l'hyperbolicité de Kobayashi–Royden à celle des ouverts de l'univers d'Einstein. Nous ne savons pas s'il est possible d'avoir l'équivalent ci-dessus en remplaçant “faiblement KR-hyperbolique” par “KR-hyperbolique”.

6.3 Critère géométrique d'hyperbolicité

Dans cette section, nous donnons un critère géométrique suffisant sur les ouverts de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ pour qu'ils soient Kobayashi–Royden-hyperboliques. Pour un espace métrique compact (X, d) , on notera $\mathcal{C}(X)$ l'ensemble des compacts de X . Cet ensemble est muni de la *distance de Hausdorff* définie, pour $A, B \in \mathcal{C}(X)$, par

$$d_{\text{Haus}}(A, B) = \max_{a \in A} d(a, B) + \max_{b \in B} d(A, b).$$

On peut montrer que $(\mathcal{C}(X), d_{\text{Haus}})$ est un espace métrique compact car la transformation $X \mapsto \mathcal{C}(X)$ préserve les propriétés de complétude et de ε -séparation (voir par exemple [Hen99]). De plus, la topologie de l'espace métrique $(\mathcal{C}(X), d_{\text{Haus}})$ ne dépend pas du choix de la distance d qu'on a fait pour X .

Soit $\mathcal{K} \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ un compact. On prend $p \leq q$ pour alléger les notations. Par l'ensemble des *traces dans \mathcal{K} des cônes de lumière de photons sous-maximaux*, nous entendrons la collection des intersections des cônes de lumière des $(p-1)$ -photons avec \mathcal{K} , c'est-à-dire :

$$\{C(\mathcal{L}) \cap \mathcal{K} \mid \mathcal{L} \in \text{Pho}_{p-1}(\mathbf{Ein}^{p,q})\} \subset \mathcal{C}(\mathbf{Ein}^{p,q}).$$

On dira que *l'ensemble des traces dans \mathcal{K} des cônes de lumière de photons sous-maximaux s'accroissent sur un morceau de photon maximal* si

$$\overline{\{C(\mathcal{L}) \cap \mathcal{K} \mid \mathcal{L} \in \text{Pho}_{p-1}(\mathbf{Ein}^{p,q})\}} \subset \mathcal{C}(\mathbf{Ein}^{p,q}),$$

rencontre le compact

$$\{F \in \mathcal{C}(\mathbf{Ein}^{p,q}) \mid \text{il existe } \mathcal{L} \in \text{Pho}_p(\mathbf{Ein}^{p,q}) \text{ tel que } F \subset \mathcal{L}\}.$$

En d'autres termes, l'ensemble des traces dans \mathcal{K} des cônes de lumière de photons sous-maximaux s'accroissent sur un morceau de photon maximal s'il existe une suite $(\mathcal{L}_k) \in \text{Pho}_{p-1}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ et un fermé F contenu dans un p -photon $\hat{\mathcal{L}}$ tel que

$$C(\mathcal{L}_k) \cap \mathcal{K} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{Haus}} F \subset \hat{\mathcal{L}}.$$

S'il existe un photon sous-maximal \mathcal{L} tel que $C(\mathcal{L}) \cap \mathcal{K} = \emptyset$, on adopte la convention que les traces dans \mathcal{K} des cônes de lumière de photons sous-maximaux s'accroissent sur un morceau de photon maximal (ce morceau est vide). En général, pour un compact quelconque \mathcal{K} , l'application

$$\begin{array}{ccc} \text{Pho}_{p-1}(\mathbf{Ein}^{p,q}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathbf{Ein}^{p,q}) \\ \mathcal{L} & \longmapsto & C(\mathcal{L}) \cap \mathcal{K}, \end{array}$$

n'est pas continue pour la topologie de Hausdorff. Ainsi, même si l'ensemble des traces dans \mathcal{K} des cônes de lumière de photons sous-maximaux est adhérente à un photon maximal, il n'est pas vrai en général qu'il existe un photon sous maximal \mathcal{L} tel que $C(\mathcal{L}) \cap \mathcal{K}$ est contenu dans un photon maximal.

Théorème 6.12. *Soit $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ un ouvert et $\mathcal{K} = \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus \Omega$. On suppose que les traces dans \mathcal{K} des cônes de lumière de photons sous-maximaux ne s'accroissent pas sur un morceau de photon maximal. Alors Ω est Kobayashi–Royden-hyperbolique.*

Démonstration du théorème 6.12. Par contraposition, supposons que Ω n'est pas Kobayashi–Royden-hyperbolique. Montrons qu'il existe une suite (\mathcal{L}_k) de $(p-1)$ -photons et un p -photon $\hat{\mathcal{L}}$ tels que

$$C(\mathcal{L}_k) \cap \mathcal{K} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{Haus}} F \subset \hat{\mathcal{L}},$$

où F est un fermé de $\hat{\mathcal{L}}$. Par le théorème 6.7, il existe une suite élémentaire (φ_k) et un diamant $D \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ telle que $\varphi_k(D) \subset \Omega$ pour tout $k \geq 0$ et $\mathcal{L}_{max}^-(\varphi_k) \cap D \neq \emptyset$. On fixe une base $\mathbf{B} = \{e_0, \dots, e_{n+1}\}$ de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$ dans laquelle \mathbf{b} s'écrit

$$\mathbf{b}(x, x) = x_0x_{n+1} + x_1x_n + \dots + x_px_{q+1} + (x_{p+1})^2 + \dots + (x_q)^2.$$

Soit $\mathcal{A}_{\mathbf{B}} = \{(\Omega_i, \mathbf{st}_i)\}_{i \in \{0, \dots, p, q+1, \dots, n+1\}}$ l'atlas standard de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ associé à \mathbf{B} (voir section 6.2.1). Par hypothèse, la suite (φ_k) est élémentaire, donc on peut écrire $\varphi_k = a_k d_k b_k$ pour tout $k \geq 0$, où (a_k) et (b_k) sont des suites convergentes de $\text{PO}(p+1, q+1)$ et où (d_k) est une suite agissant diagonalement dans la base \mathbf{B} :

$$d_k = \text{diag}(\lambda_0(k), \dots, \lambda_p(k), 1, \dots, 1, \lambda_p(k)^{-1}, \dots, \lambda_0(k)^{-1}),$$

de telle sorte que les rapports des valeurs propres $\lambda_0(k) \geq \dots \geq \lambda_p(k) \geq 1$ admettent des limites dans $\overline{\mathbf{R}}$. On note $a = \lim_k a_k$ et $b = \lim_k b_k$. Comme $\mathcal{L}_{max}^-(\varphi_k) \cap D \neq \emptyset$, on peut trouver un point $x \in \mathcal{L}_{max}^-(b_k) = b^{-1}(\mathcal{L}_{max}^-(\varphi_k))$ contenu dans $b(D)$. Comme (b_k) converge vers b , on peut trouver un voisinage V de x tel que $V \subset b_k(D)$ à partir d'un certain rang. Soit $i \in \{0, \dots, p\}$ maximal tel que $x \in \Omega_{\bar{i}}$. Par la section 6.2.2, la suite (d_k) s'écrit

$$\mathbf{st}_{\bar{i}}^{-1} \circ d_k \circ \mathbf{st}_{\bar{i}} = \lambda_i(k) \text{diag}(\lambda_0(k), \dots, \hat{\lambda}_i, \dots, \hat{\lambda}_{\bar{i}}, \dots, \lambda_0(k)^{-1}) \quad (6.2)$$

dans la carte $\mathbf{st}_{\bar{i}} : M_{\bar{i}} \rightarrow \Omega_{\bar{i}}$, où $M_{\bar{i}} = \text{Vect}(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, \hat{e}_{\bar{i}}, \dots, e_{n+1})$. Comme $x \in \mathcal{L}_{max}^-(b_k)$, on a $\mathbf{st}_{\bar{i}}^{-1}(x) \in \text{Vect}(e_{q+1}, \dots, \hat{e}_{\bar{i}}, \dots, e_{n+1})$. De plus, comme i a été choisi maximal, la suite $y_k = \mathbf{st}_{\bar{i}}^{-1}(d_k(x))$ admet une limite $y \in \text{Vect}(e_{q+1}, \dots, \hat{e}_{\bar{i}}, \dots, e_{n+1})$.

Fait 6.13. Soit $F \subset \mathbf{R}^{p,q}$ un sous-espace affine dégénéré de signature $(p, q-p, 0)$, avec $p < q$. Alors l'adhérence de F dans $\mathbf{Ein}^{p,q} = \mathbf{R}^{p,q} \cup C(\infty)$ est le cône de lumière d'un $(p-1)$ -photon contenu dans $C(\infty)$. De plus, la trace de \overline{F} dans $C(\infty)$ est un p -photon.

Démonstration. Comme l'action de $\text{Conf}(\mathbf{R}^{p,q})$ sur les sous-espaces affines de signature fixée est transitive, on peut toujours choisir F comme on le souhaite. Soit $\mathbf{B} = \{e_0, \dots, e_{n+1}\}$ une base de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$ dans laquelle \mathbf{b} s'écrit

$$\mathbf{b}(x, x) = x_0x_{n+1} + x_1x_n + \dots + x_px_{q+1} + (x_{p+1})^2 + \dots + (x_q)^2.$$

On identifie $\mathbf{R}^{p,q}$ avec $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ et on note $\mathbf{st} : \mathbf{R}^{p,q} \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ la projection stéréographique donnée par $\mathbf{st}(x) = \pi(e_0 + x - \mathbf{b}(x, x)e_{n+1})$, de sorte que le sommet du cône de lumière à l'infini est $\pi(e_{n+1})$. Par la remarque précédente, on peut toujours supposer que $F = \langle e_1, \dots, e_q \rangle$. Soit $L = \langle e_1, \dots, e_p \rangle \subset \mathbf{R}^{p+1,q+1}$ et soit \mathcal{L} le $(p-1)$ -photon défini par $\mathcal{L} = \pi(L) \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$. Le $(p-1)$ -photon \mathcal{L} est contenu dans le cône à l'infini de la carte $\mathbf{st} : \mathbf{R}^{p,q} \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$. Montrons par un calcul explicite que $\overline{\mathbf{st}(F)} = C(\mathcal{L})$. On sait par la section 1.2.7 que $C(\mathcal{L}) = \pi(L^\perp) \cap \mathbf{Ein}^{p,q}$, avec dans notre cas $L^\perp = \langle e_0, \dots, e_q, e_{n+1} \rangle$. Ainsi

$$\mathbf{st}(F) = \{\pi(e_0 + x - \mathbf{b}(x, x)e_{n+1}) \mid x \in \langle e_1, \dots, e_p \rangle\} \subset C(\mathcal{L}),$$

donc $\overline{\mathbf{st}(F)} \subset C(\mathcal{L})$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in C(\mathcal{L})$ qu'on écrit $x = \pi(v)$ avec $v \in L^\perp$ isotrope. Si $v_0 \neq 0$, alors $x \in \mathbf{st}(F)$. Si $v_0 = 0$, alors $v_{p+1} = \dots = v_q = 0$ car $\mathbf{b}(v, v) = (v_{p+1})^2 + \dots + (v_q)^2 = 0$. Supposons dans un premier temps que $v_{n+1} \neq 0$, de sorte qu'on puisse modifier v et supposer $v_{n+1} = 1$. On pose, pour $k \geq 1$,

$$v(k) = -4^{-k}e_0 + 2^{-k}e_q + v \in L.$$

On a $\mathbf{b}(v(k), v(k)) = -4^{-k} + (2^{-k})^2 = 0$, donc $x_k := \pi(v(k)) \in \mathbf{Ein}^{p,q}$. De plus $v_0(k) \neq 0$ donc par ce qui précède $x_k \in \mathbf{st}(F)$ pour tout $k \geq 0$. Par construction, la suite (x_k) converge

vers x , d'où $x \in \overline{\mathbf{st}(F)}$. Enfin dans le cas où $v_{n+1} = 0$, on peut appliquer le même argument à la suite $v(k) = 2^{-k}e_0 + v \in L$, de sorte que $x = \lim \pi(v(k)) \in \mathbf{st}(F)$. Donc $C(\mathcal{L}) \subset \overline{\mathbf{st}(F)}$, d'où $C(\mathcal{L}) = \mathbf{st}(F)$. Enfin, on vérifie que

$$\overline{\mathbf{st}(F)} \cap C(\pi(e_{n+1})) = \pi(\langle e_1, \dots, e_p, e_{n+1} \rangle).$$

donc la trace de $\overline{\mathbf{st}(F)}$ dans le cône de lumière à l'infini est bien un p -photon. \blacksquare

Pour $k \geq 0$, on pose F_k (resp. F) le sous-espace affine de direction $\text{Vect}(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_q)$ passant par y_k (resp. y) et \mathcal{L}_k (resp. \mathcal{L}) le $(p-1)$ -photon de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ tel que $C(\mathcal{L}_k) = a_k(\overline{\mathbf{st}_i(F_k)})$ (resp. $C(\mathcal{L}) = a(\overline{\mathbf{st}_i(F)})$), dont l'existence est donné par le Fait 6.13. Soit (z_k) une suite telle que $z_k \in C(\mathcal{L}_k) \cap \mathcal{K}$ pour tout $k \geq 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $[-\varepsilon, \varepsilon]^q \times \{0\}^p + \mathbf{st}_i^{-1}(x)$ est contenu dans $\mathbf{st}_i^{-1}(V)$ et soit $r > 0$. Pour $k \geq 0$ suffisamment grand, on a $r \leq \lambda_i(k)\varepsilon$ donc

$$[-r, r]^q \times \{0\}^p + y_k \subset A_i^{-1}(k) \cdot ([-\varepsilon, \varepsilon]^q \times \{0\}^p + \mathbf{st}_i^{-1}(x)) \subset a_k^{-1}(\Omega),$$

où $A_i(k)$ est la matrice donnée par l'équation 6.2. Donc, pour tout $r > 0$, on a

$$\mathbf{st}_i^{-1}(a_k^{-1}(z_k)) \notin [-r, r]^q \times \{0\}^p + y_k$$

à partir d'un certain rang. Donc toute valeur d'adhérence de (z_k) appartient au p -photon $\hat{\mathcal{L}} = C(\mathcal{L}) \setminus \mathbf{st}_i(F)$. Ainsi, quitte à extraire, la suite $(C(\mathcal{L}_k) \cap \mathcal{K})$ converge Hausdorff vers un fermé contenu dans $\hat{\mathcal{L}}$, d'où le résultat. \blacksquare

Remarque 6.14. La réciproque du théorème 6.12 n'est pas vrai. Par exemple, soit $\Sigma \simeq \mathbf{S}^{n-1}$ une hypersurface de Möbius riemannienne de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$. Si $x \in \Sigma$, alors la trace du cône de lumière de $C(x)$ dans Σ est réduite à x , donc elle est contenue dans un photon. En particulier, l'ouvert $\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus \Sigma \simeq \mathbf{dS}^{1,n-1}$ (voir section 1.3.1) ne satisfait pas les hypothèses du théorème 6.12. Cependant, on verra que l'espace de de-Sitter est KR-hyperbolique.

6.3.1 Photons en position générique

Donnons un exemple d'application du théorème 6.12. On dit qu'une famille $\{\mathcal{L}_i\}_{i \in I} \subset \text{Pho}_p(\mathbf{Ein}^{p,q})$ de p -photons est *en position générique* s'il n'existe pas de p -photon $\hat{\mathcal{L}}$ tel que $\mathcal{L}_i \cap \hat{\mathcal{L}} \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$.

Exemple 6.15. Soient $a, b \in \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ deux points tels que $a \notin C(b)$, et soient $\Delta_a, \Delta'_a, \Delta_b, \Delta'_b$ des photons deux à deux distincts tels que

$$\Delta_a \cap \Delta'_a = \{a\} \text{ et } \Delta_b \cap \Delta'_b = \{b\}.$$

Alors $\Delta_a, \Delta'_a, \Delta_b, \Delta'_b$ sont en position générique. En effet, supposons qu'il existe $\hat{\Delta}$ un photon qui intersecte $\Delta_a, \Delta'_a, \Delta_b$ et Δ'_b . Comme Δ_a, Δ'_a et $\hat{\Delta}$ s'intersectent deux à deux, ils forment un triangle de photons. Par le Corollaire 1.13, ces photons s'intersectent en un point commun, donc $a \in \hat{\Delta}$. De même, le point b appartient à $\hat{\Delta}$. Ceci contredit l'hypothèse $a \notin C(b)$. Voir Figure 6.1.

Théorème 6.16. Soit $\{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}$ une famille de p -photons en position générique. Alors $\Omega = \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus \overline{\cup_i \mathcal{L}_i}$ est KR-hyperbolique.

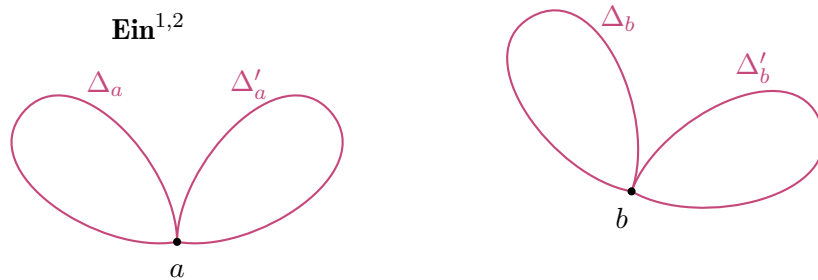


FIGURE 6.1 – Une famille de 4 photons en position générique. Les traces dans $\Delta_a \cup \dots \cup \Delta_{b'}$ de cônes de lumière ne s'accroissent pas sur un morceau de photon. Le complémentaire de ces deux bouquets de photons est un domaine KR-hyperbolique.

Démonstration. Soit $\mathcal{K} = \overline{\cup_{i \in I} \mathcal{L}_i}$. Montrons que les traces dans \mathcal{K} des cônes de lumière de photons sous-maximaux ne s'accroissent pas sur un morceau de photon maximal. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite (\mathcal{L}_k) de $(p-1)$ -photons convergeant vers un $(p-1)$ -photon \mathcal{L} et qu'il existe un p -photon $\hat{\mathcal{L}}$ contenant \mathcal{L} tel que

$$C(\mathcal{L}_k) \cap \mathcal{K} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{Haus}} F \subset \hat{\mathcal{L}},$$

où F est un fermé de $\hat{\mathcal{L}}$.

Lemme 6.17. *Un photon maximal intersecte toujours le cône de lumière d'un photon sous-maximal.*

Démonstration. En effet, soient \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 des photons maximaux et sous-maximaux de $\mathbf{Ein}^{p,q}$, respectivement. On écrit $\mathcal{L}_1 = \pi(L_1)$ et $\mathcal{L}_2 = \pi(L_2)$, où L_1 et L_2 sont des sous-espaces totalement isotropes de dimension $p+1$ et p de $\mathbf{R}^{p+1,q+1}$, respectivement. Alors $\dim(L_1) + \dim(L_2^\perp) = (p+1) + (q+2) = p+q+3$, donc $L_1 \cap L_2^\perp \neq \emptyset$. Comme \mathcal{L}_1 est totalement isotrope, l'intersection $L_1 \cap L_2^\perp$ contient un vecteur isotrope $v \in \mathbf{R}^{p+1,q+1} \setminus \{0\}$. Par définition, le point $x = \pi(v)$ appartient à $\mathcal{L}_1 \cap C(\mathcal{L}_2)$. ■

Soient $i \in I$ et $k \geq 0$. Par le lemme 6.17, le cône de \mathcal{L}_k intersecte \mathcal{L}_i en au moins un point

$$x_i(k) \in C(\mathcal{L}_k) \cap \mathcal{L}_i \subset C(\mathcal{L}_k) \cap \mathcal{K}.$$

Comme $C(\mathcal{L}_k) \cap \mathcal{K}$ converge Hausdorff vers un fermé de $\hat{\mathcal{L}}$ quand $k \rightarrow \infty$, on peut trouver une valeur d'adhérence $x_i \in \hat{\mathcal{L}}$ pour la suite $(x_i(k))$. Or $x_i(k) \in \Delta_i$ pour tout k donc $x_i \in \Delta_i$. Ceci implique que $\hat{\mathcal{L}}$ intersecte chaque Δ_i , ce qui signifie que la famille $\{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}$ n'est pas en position générique, une contradiction. ■

Ainsi, l'exemple 6.15 combiné avec le théorème 6.16 montre que le complémentaire de deux bouquets de photons est hyperbolique si les sommets des bouquets sont transverses dans $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$, voir Figure 6.1. Donnons un autre exemple à partir du théorème 6.16.

Corollaire 6.18. *Soient d_1 et d_2 deux droites de lumière non parallèles dans $\mathbf{R}^{1,n-1}$. L'ouvert $\mathbf{R}^{1,n-1} \setminus (d_1 \cup d_2)$ est KR-hyperbolique.*

Démonstration. On utilise le modèle $\mathbf{Ein}^{1,n-1} = \mathbf{R}^{1,n-1} \cup C(\infty)$. Soit \mathcal{F} la famille de photons constituée des photons passant par le sommet à l'infini ainsi que les deux photons $\Delta_1 = \overline{d_1}$ et $\Delta_2 = \overline{d_2}$, et soit $\mathcal{K} = \cup_{\Delta \in \mathcal{F}} \Delta$. Comme

$$\mathbf{R}^{1,n-1} \setminus (d_1 \cup d_2) = \mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus \mathcal{K},$$

il suffit de montrer que \mathcal{F} est une famille de photons en position générique et d'appliquer le théorème 6.16. Supposons par l'absurde qu'il existe un photon $\hat{\Delta}$ intersectant tous les photons de \mathcal{F} . Comme $\hat{\Delta}$ intersecte tous les photons passant pas ∞ , on a nécessairement $\infty \in \hat{\Delta}$. Donc les droites d_1 et d_2 rencontrent le même photon $\hat{\Delta}$ à l'infini, ce qui contredit l'hypothèse qu'elles aient des directions distinctes. ■

Avant de passer à d'autres classes d'exemples, montrons que la condition "être en position générique" est bien générique, en signature lorentzienne.

Proposition 6.19. *Soit $N \geq 1$. La condition " $\Delta_1, \dots, \Delta_N$ sont en position générique" est ouverte dans $\text{Pho}_1(\mathbf{Ein}^{1,n-1})^N$. Si $n \geq 4$ et $N \geq 3$ ou si $n = 3$ et $N \geq 4$, alors cette condition est dense.*

Démonstration. Par compacité, la condition "il existe un photon intersectant Δ_i pour tout $i = 1, \dots, N$ " est fermée, donc la condition est bien ouverte. Supposons que $n \geq 4$ et $N \geq 3$. On peut toujours modifier Δ_1 et Δ_2 légèrement pour qu'ils ne s'intersectent pas.

Fait 6.20. *Soient Δ, Δ' deux photons disjoints de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$. Il existe une unique surface de Möbius $\Sigma \simeq \mathbf{Ein}^{1,1}$ contenant Δ et Δ' .*

Démonstration. Soient $P, P' \subset \mathbf{R}^{2,n}$ des 2-plans totalement isotropes tels que $\Delta = \pi(P)$ et $\Delta' = \pi(P')$. Comme Δ et Δ' sont disjoints, les plans P et P' sont transverses, donc $\Sigma = \pi(P \oplus P') \cap \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ est une surface de Möbius conformément équivalente à $\mathbf{Ein}^{1,1}$. De plus, tout sous-espace $V \subset \mathbf{R}^{2,n}$ de dimension 4 contenant P et P' est égal à $P \oplus P'$, donc Σ est unique. ■

Soit Σ l'unique surface de Möbius lorentzienne passant par Δ_1 et Δ_2 . Si $\hat{\Delta}$ est un photon passant par Δ_1 et Δ_2 , alors on vérifie que $\hat{\Delta} \subset \Sigma$.

- si $n \geq 4$, alors on peut toujours modifier légèrement Δ_3 de sorte que $\Delta_3 \cap \Sigma = \emptyset$. La famille $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$ est en position générique, donc les photons $\Delta_1, \dots, \Delta_N$ sont en position générique.
- si $n = 3$, alors tout photon Δ disjoint de Σ intersecte Σ en un unique point x_Δ . Ainsi, on peut modifier légèrement Δ_3 et Δ_4 de sorte que Δ_3 et Δ_4 ne soient pas inclus dans Σ et que x_{Δ_3} et x_{Δ_4} ne soient pas sur un même photon. La famille $\{\Delta_1, \dots, \Delta_4\}$ est en position générique, donc les photons $\Delta_1, \dots, \Delta_N$ sont en position générique. ■

Proposition 6.21. *Soit $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_N$ une famille finie de m -photons, avec $m \leq p - 1$. Alors $\Omega = \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus \overline{\cup_i \mathcal{L}_i}$ n'est pas KR-hyperbolique.*

Remarque 6.22. En signature lorentzienne, la proposition précédente est immédiate car un ensemble fini de points de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ est toujours propre (i.e. contenu dans une projection stéréographique), voir remarque 5.14.

Démonstration. Soit \mathcal{L} un p -photon évitant chacun des \mathcal{L}_i , pour $i = 1, \dots, N$. Comme $m \leq p - 1$, l'image de $K = \mathcal{L}_1 \cup \dots \cup \mathcal{L}_N$ par la projection canonique $\pi_{\mathcal{L}} : \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^*$ (voir l'équation 1.4) est d'intérieur vide dans \mathcal{L}^* . On peut donc trouver un ouvert $U \subset \mathcal{L}^*$ tel que $\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(U) \subset \Omega$. Par la lemme 6.23 ci-dessous, l'ouvert $\pi_{\mathcal{L}}^{-1}(U)$ n'est pas KR-hyperbolique, donc Ω n'est pas KR-hyperbolique (proposition 5.13). ■

Lemme 6.23. *Soit \mathcal{L} un p -photon, $\pi_{\mathcal{L}}$ la projection canonique, $U \subset \mathcal{L}^*$ un ouvert non vide et $\Omega_U = \pi_{\mathcal{L}}^{-1}(U)$. Alors $g_{\text{KR}}^{\Omega_U}$ est identiquement nulle.*

Démonstration. Par la proposition 5.13, on peut toujours réduire U et supposer qu'il existe un point $x \in \mathcal{L}$ tel que $x \notin \Delta$ pour tout $\Delta \in U$. Soit \mathcal{L}' un p -photon disjoint de \mathcal{L} . La restriction de π_L à \mathcal{L}' définit un difféomorphisme projectif $\theta : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}^*$ (ceci a déjà été vu à la preuve de la section 6.1.3). En réalisant une projection stéréographique par rapport à x , le p -photon \mathcal{L}' s'identifie à un sous-espace L' de $\mathbf{R}^{p,q}$. De plus on a la décomposition

$$\mathbf{R}^{p,q} = L \oplus H \oplus L'$$

avec L et L' des sous-espaces de dimension p totalement isotropes orthogonaux, et où les facteurs $L \oplus H \oplus \{x\}$ sont les traces des cônes de lumière des $\Delta \in \mathcal{L}^*$ ne contenant pas x . Ainsi, le domaine Ω_U s'identifie à

$$\Omega = L \oplus H \oplus \theta^{-1}(U).$$

Maintenant, pour tout $x \in \Omega$, on peut trouver un diamant relativement compact $D \subset \mathbf{R}^{p,q}$ contenant l'origine et des suites λ_k, μ_k avec $\lambda_k, \mu_k, \lambda_k/\mu_k \rightarrow +\infty$ tels que la suite de similitudes

$$\varphi_k(y) = \mu_k \begin{pmatrix} \lambda_k I_L & & \\ & I_H & \\ & & \lambda_k^{-1} I_{L'} \end{pmatrix} y + x_0$$

envoie D dans Ω . Comme $\text{dc}(\varphi_k, 0) = \mu_k \rightarrow \infty$, on a $g_{\text{KR}}^\Omega|_x = 0$. ■

6.3.2 Variétés kleinienues dont l'holonomie est irréductible

Le théorème 6.16 implique que tout ouvert de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ qui évite une famille de photons en position générique est KR-hyperbolique. Ceci va nous permettre de montrer la proposition suivante.

Proposition 6.24. *Soit $\Omega \subset \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ ouvert et $\Gamma \subset \text{PO}(2, n)$ un sous-groupe agissant proprement sur Ω , d'adhérence non-compacte dans $\text{PO}(2, n)$. On suppose que $\text{Conf}(\Omega) \subset \text{PO}(2, n)$ n'a pas de point fixe et ne stabilise ni de photon, ni de surface de Möbius lorentzienne $\Sigma \simeq \mathbf{Ein}^{1,1}$. Alors Ω est KR-hyperbolique.*

On déduit de la proposition 6.24 le corollaire suivant pour les variétés kleinienues, i.e. les variétés $M = \Omega/\Gamma$ où Ω est un ouvert de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ et où $\Gamma < \text{PO}(2, n)$ est un groupe discret agissant proprement sur Ω .

Corollaire 6.25. *Soit M une variété conforme lorentzienne compacte kleinienne dont l'holonomie est irréductible. Alors M est Kobayashi–Royden-hyperbolique.* ■

Lemme 6.26. *Soit $\Gamma \subset \text{PO}(2, n)$ un groupe ne fixant ni de point, ni de photon, ni de surface de Möbius lorentzienne $\Sigma \simeq \mathbf{Ein}^{1,1}$. Alors l'orbite de tout photon est en position générique.*

Démonstration. Soit Δ un photon. Supposons par l'absurde que $\Gamma \cdot \Delta$ n'est pas en position générique, de sorte que

$$\mathcal{A} = \{\hat{\Delta} \in \text{Pho}_1(\mathbf{Ein}^{1,n-1}) \mid \hat{\Delta} \cap \gamma(\Delta) \neq \emptyset \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma\}$$

est non vide. Comme \mathcal{A} est stable par Γ , il contient au moins deux photons. On distingue deux cas :

- Tous les photons de \mathcal{A} s'intersectent deux à deux. Dans ce cas, comme il n'existe pas de triangle de photons (voir le Corollaire 1.13), on peut trouver un point x intersectant tous les photons de \mathcal{A} . Ce point est laissé fixe par Γ , une contradiction.

- Il existe deux photons disjoints $\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2 \in \mathcal{A}$. Soit Σ l'unique surface de Möbius lorentzienne contenant $\hat{\Delta}_1$ et $\hat{\Delta}_2$ (dont l'existence est donnée par le Fait 6.20). Alors tout photon de $\Gamma \cdot \Delta$ est contenu dans Σ . En raisonnant comme précédemment, l'orbite $\Gamma \cdot \Delta$ contient deux photons disjoints. Ainsi Σ est l'unique surface de Möbius contenant les photons de $\Gamma \cdot \Delta$, donc Σ est préservée par Γ , une contradiction avec l'hypothèse. ■

Nous aurons aussi besoin du lemme connu suivant (voir [Fra04, Lem. 2]).

Lemme 6.27. *Soit $\Gamma \subset \text{PO}(2, n)$ un groupe agissant proprement sur un ouvert Ω de $\mathbf{Ein}^{1, n-1}$ dont l'adhérence dans $\text{PO}(2, n)$ est non-compacte. Alors le complémentaire de Ω contient un photon.*

Démonstration. Par hypothèse, on peut trouver une suite (γ_k) préservant Ω et agissant proprement sur Ω . Quitte à extraire, on peut supposer que (γ_k) est élémentaire. On distingue trois cas suivant le type dynamique de (γ_k) (voir section 6.1 pour la description des 3 types dynamiques).

- (g_k) est de type *mixte*. Si jamais $C^-(\gamma_k)$ rencontre Ω en un point $x \notin \Delta^-(\gamma_k)$, alors Ω évite $\Delta^+(\varphi_k) = D_{(\gamma_k)}(x)$ par propriété de l'action de Γ . Sinon tout photon contenu dans $C^-(\gamma_k)$ et distinct de Δ^- évite Ω .
- (g_k) est de type *bornée*. Si jamais $C^-(\gamma_k)$ rencontre Ω en un point $x \neq x^-(\gamma_k)$, alors Ω évite le photon $\theta_0(\Delta_x) = D_{(\gamma_k)}(x)$, où Δ_x est le photon passant par $x^-(\gamma_k)$ et x et où θ_0 est le difféomorphisme conforme qui caractérise la dynamique de (γ_k) .
- (g_k) est de type *équilibré*. Si jamais $\Delta^-(\gamma_k)$ rencontre Ω en un point x , alors $D_{(\gamma_k)}(x)$ est un cône de lumière qui évite Ω .

Dans tous les cas, l'ouvert Ω évite un photon. ■

Les deux lemmes précédents permettent de montrer la proposition 6.24. En effet, la première hypothèse implique que Ω évite un photon Δ . Par le lemme 6.26, l'orbite de Δ est en position générique. Ainsi Ω évite une famille de photons en position générique, donc Ω est KR-hyperbolique par le théorème 6.16.

6.4 Hyperbolicité des domaines bordés par une sous-variété

Dans cette section, nous montrons que les complémentaires de certaines sous-variétés de $\mathbf{Ein}^{1, n-1}$ sont KR-hyperboliques.

6.4.1 Sous-variétés lorentziennes

On a déjà vu (voir proposition 5.28) que le complémentaire d'une sous-variété de Möbius lorentzienne $\Sigma \subset \mathbf{Ein}^{1, n-1}$ est Kobayashi–Royden-hyperbolique. Le théorème suivant montre qu'on peut déformer le bord de ces ouverts tout en préservant la propriété d'hyperbolicité.

Théorème 6.28. *Soit Σ sous-variété compacte (sans bord) de classe C^1 de signature lorentzienne et de dimension au moins 2. Alors $\Omega = \mathbf{Ein}^{1, n-1} \setminus \Sigma$ est KR-hyperbolique.*

Nous allons montrer que les traces dans \mathcal{H} des cônes de lumière ne s'accumulent pas sur un morceau de photon. Pour cela, commençons par montrer que les traces dans \mathcal{H} des cônes de lumière ne sont pas contenues dans des photons.

Proposition 6.29. *Soit \mathcal{H} une sous-variété lorentzienne compacte C^1 de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ de dimension $d \geq 2$. Alors, pour tout $x \in \mathbf{Ein}^{1,n-1}$, l'intersection $\mathcal{H} \cap C(x)$ n'est jamais contenue dans un photon.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbf{Ein}^{1,n-1}$. Montrons que le cône de lumière de x intersecte \mathcal{H} . Si ce n'était pas le cas, alors \mathcal{H} serait un sous-variété compacte de $\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus C(x) \simeq \mathbf{R}^{1,n-1}$.

Lemme 6.30. *Toute sous-variété compacte C^1 de l'espace de Minkowski a des espaces tangents de signature riemannienne.*

Démonstration du lemme 6.30. En effet, soit $\Sigma \subset \mathbf{R}^{1,n-1}$ est une sous-variété compacte. Soit ℓ une droite temps et $p_\ell : \mathbf{R}^{1,n-1} \rightarrow \ell$ la projection orthogonale sur ℓ . Par compacité, la sous-variété Σ se projette sur un segment $p_\ell(\Sigma) = [a, b] \subset \ell$. Si $x \in p_\ell^{-1}(\{a\}) \cap \Sigma$, alors $T_x \Sigma \subset \ell^\perp$, car x est un point critique de $p_\ell|_\Sigma$. Ainsi $T_x \Sigma$ est riemannien. ■

Ainsi le cône de lumière de x intersecte \mathcal{H} . On distingue deux cas :

- $x \notin \mathcal{H}$. Comme $C(x) \setminus \{x\}$ est une sous-variété lisse conforme à $(\mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1}, [0 \oplus g_{\mathbf{S}^{n-1}}])$ (voir section 1.2.2), la sous-variété \mathcal{H} est transverse à $C(x)$ et l'intersection $\mathcal{H} \cap C(x)$ est une sous-variété compacte de dimension $d - 1 \geq 1$ de $(\mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1}, [0 \oplus g_{\mathbf{S}^{n-1}}])$. En utilisant le même argument que dans le lemme 6.30 avec la projection

$$(\mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1}, [0 \oplus g_{\mathbf{S}^{n-1}}]) \rightarrow \mathbf{R},$$

on déduit que $\mathcal{H} \cap C(x)$ contient au moins un espace tangent riemannien, donc $\mathcal{H} \cap C(x)$ n'est pas contenu dans un photon.

- $x \in \mathcal{H}$. On se place dans une carte $\mathbf{R}^{1,n-1}$ contenant x qu'on munit d'une orientation temporelle. Soit Δ un photon passant par x . Le passé de Δ , i.e. la réunion des passés des points de Δ , est le demi-espace délimité par l'hyperplan P de direction Δ^\perp passant par x . En d'autres termes, on a

$$\mathbf{R}^{1,n-1} = I^+(\Delta) \sqcup P \sqcup I^-(\Delta),$$

et $I^+(\Delta)$ et $I^-(\Delta)$ sont les demi-espaces délimités par P . Écrivons localement \mathcal{H} comme un graphe

$$\mathcal{H} = \{x + f(v) \mid v \in T_x \mathcal{H}\}$$

où $f : T_x \mathcal{H} \rightarrow T_x \mathcal{H}^\perp$ est une certaine application de classe C^1 , avec $f(0) = 0$ et $T_0 f = 0$. Comme $T_x \mathcal{H}$ est de signature lorentzienne, ce sous-espace est transverse à P , donc $P \cap T_x \mathcal{H}$ est de codimension 1 dans $T_x \mathcal{H}$. Ainsi, on peut trouver un vecteur $v \in T_x \mathcal{H}$ de type temps futur et un vecteur $u \in T_x \mathcal{H} \cap v^\perp$ non nul tel que $u \notin P$. Quitte à changer u en $-u$ et à réduire la taille de u , on peut toujours supposer $u \in I^+(\Delta)$ et que $\alpha(t) := (1-t)u + tv$ est une courbe temps, où t varie sur $[0, 1]$. Soit V un voisinage de 0 dans $T_x \mathcal{H}$ tel que

$$\mathbf{b}(T_y f(v-u), T_y f(v-u)) \leq |\mathbf{b}(v-u, v-u)|/2, \text{ pour tout } y \in V,$$

et soit $r > 0$ suffisamment petit tel que $[t \mapsto r\alpha(t)]$ est à valeurs dans V . Alors par construction, la courbe $\gamma(t) = r\alpha(t) + f(r\alpha(t))$ vérifie $\mathbf{b}(\gamma'(t), \gamma'(t)) < 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, donc $\gamma(t)$ est une courbe temps futur. Quitte à réduire r à nouveau, on peut supposer

$$\gamma(0) = x + ru + f(ru) = x + ru + o(r)$$

n'est pas causalement relié à x et appartient à $I^+(\Delta)$, et que $\gamma(1) = x + rv + o(r)$ est dans le futur de x . Ceci montre qu'il existe une courbe causale γ dans $\mathcal{H} \cap I^+(\Delta)$ entre

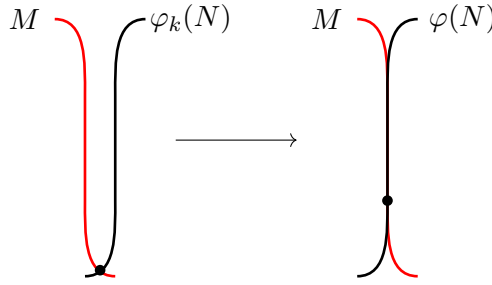


FIGURE 6.2

un point $b = \gamma(0) \in I^+(\Delta)$ non causalement relié à x et un point $a = \gamma(1) \in I^+(x)$. Cette courbe intersecte $C(x)$ en un point $y \in I^+(b) \subset I^+(\Delta)$, donc $y \notin \Delta$. Comme $y \in \mathcal{H}$, on en déduit que $\mathcal{H} \cap C(x)$ n'est pas contenu dans Δ . Donc $\mathcal{H} \cap C(x)$ n'est pas contenu dans un photon. ■

Nous aurons besoin du lemme utile suivant :

Lemme 6.31. *Soit X une variété différentielle compacte et soient M et N deux sous-variétés de X , fermées, sans bord et de classe C^1 . Soit (φ_k) une suite de difféomorphismes de X qui converge vers un difféomorphisme φ pour la topologie de la convergence C^1 . Si $\dim(X) \leq \dim(M) + \dim(N)$ et si $M \pitchfork \varphi(N)$, alors*

$$M \cap \varphi_k(N) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{Haus}} M \cap \varphi(N).$$

Remarquons que sans l'hypothèse de transversalité, la limite de Hausdorff de $M \cap \varphi_k(N)$ est a priori seulement contenue dans $M \cap \varphi(N)$. Voir Figure 6.2.

Démonstration. On sait déjà que les valeurs d'adhérence de toute suite (x_k) telle que $x_k \in M \cap \varphi_k(N)$ sont dans $M \cap N$. Montrons que tout point $x \in M \cap \varphi(N)$ est limite d'une telle suite de points. Quitte à changer N avec $\varphi(N)$, on peut toujours supposer pour simplifier que $\varphi = \text{id}_X$. On note m, n et d les dimensions de M, N et X , respectivement. Soit $x \in M \cap N$. On peut redresser M et N simultanément au voisinage de x , de sorte que dans une carte $f : U \subset X \rightarrow V \subset \mathbf{R}^d$, le point x soit identifié à 0 et

$$M \cap V = \{0\}^{d-n} \times \mathbf{R}^n \cap V \text{ et } N \cap V = \mathbf{R}^m \times \{0\}^{d-m} \cap V.$$

On note π la projection sur $\mathbf{R}^m \times \{0\}^{d-m}$. Comme la suite (φ_k) converge vers l'identité, la composition

$$f_k : N \xrightarrow{\varphi_k} \varphi_k(N) \xrightarrow{\pi} N$$

converge vers l'identité pour la convergence C^∞ sur tout compact.

Lemme 6.32. *Soit U un voisinage de l'origine dans \mathbf{R}^n et soit $f_k : U \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ une suite d'applications qui converge C^1 vers l'identité. Alors il existe une suite de points (x_k) convergeant vers 0 telle que $f_k(x_k) = 0$ pour tout $k \geq 0$.*

Démonstration. Soit V un voisinage compact de 0 et $S = S(0, \varepsilon) \subset V$ une sphère de rayon $\varepsilon > 0$. Si jamais il existait une infinité de valeurs k pour lesquelles la suite (f_k) ne s'annule pas sur $B(0, \varepsilon)$, alors on pourrait trouver une sous-suite $(f_{m(k)})$ telle que $f_{m(k)}(x) \neq 0$ pour tout $x \in \bar{B}(0, \varepsilon)$. La suite $h_k : S \rightarrow S$ définie par $h_k(x) = \varepsilon \frac{f_{m(k)}(x)}{\|f_{m(k)}(x)\|}$ converge C^1 vers l'identité.

Par compacité de S , il existe un rang $k_0 \geq 0$ tel que $T_x h_{m(k)}$ est inversible pour tout $x \in S$ et $k \geq k_0$. Soit $m_0 = m(k_0)$. Le théorème d'inversion locale implique que $h_{m_0} : S \rightarrow S$ est un difféomorphisme local, donc h_{m_0} est un revêtement fini (si $n \geq 3$, c'est donc un difféomorphisme). Donc le degré de h_{m_0} est non nul. Ceci contredit le fait que l'application h_{m_0} s'étend est une application $H : \bar{B}(0, \varepsilon) \rightarrow S$ de classe C^1 . Ainsi on peut trouver une suite (x_k) de points de $\bar{B}(0, \varepsilon)$ telle que $f_k(x_k) = 0$ pour tout k . Comme $f_k \rightarrow id$, on vérifie que 0 est l'unique valeur d'adhérence de la suite (x_k) , donc par compacité $x_k \rightarrow 0$. ■

Par le lemme 6.32, on peut trouver une suite (x_k) de points de N convergeant vers 0 telle que $f_k(x_k) = \pi(\varphi_k(x_k)) = 0$. Ainsi, les m premières coordonnées de $\varphi_k(x_k)$ sont nulles. Comme par hypothèse $d \leq n + m$, on a $d - n \leq m$ et donc les $d - n$ premières coordonnées de $\varphi_k(x_k)$ sont nulles, c'est-à-dire $\varphi_k(x_k) \in M$. Ainsi $y_k = \varphi_k(x_k)$ définit une suite de points telle que $y_k \in M \cap \varphi_k(N)$ pour tout $k \geq 0$, avec $y_k \rightarrow x$. On conclut que la suite de compacts $(M \cap \varphi_k(N))$ converge Hausdorff vers $M \cap N$ à l'aide du fait utile suivant. ■

Fait 6.33. Soit (X, d) un espace métrique compact et soit (A_k) une suite de compact de X et $A \in \mathcal{C}(X)$. Alors $A_k \rightarrow A$ si et seulement si :

- les valeurs d'adhérence de toute suite $(x_k) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $x_k \in A_k$ pour tout $k \geq 0$ appartiennent à A ;
- pour tout $x \in A$, il existe une suite $(x_k) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $x_k \in A_k$ pour tout $k \geq 0$ et (x_k) converge vers x .

Démonstration du Fait 6.33. L'implication directe est immédiate. Montrons l'implication réciproque. Le premier point implique que toutes valeurs d'adhérence de (A_k) est contenue dans A . Le deuxième point implique que toutes valeurs d'adhérence de (A_k) contient A . Ainsi A est l'unique valeur d'adhérence de (A_k) , donc $A_k \rightarrow A$ par compacité de $\mathcal{C}(X)$. ■

Démonstration du théorème 6.28. Montrons que les traces dans \mathcal{H} des cônes de lumière ne s'accablent pas sur un morceau de photon. Soit (x_k) une suite de points convergeant vers un point x . Montrons que la suite de compacts $(\mathcal{H} \cap C(x_k))$ converge Hausdorff vers le compact $\mathcal{H} \cap C(x)$. On peut choisir une suite de transformations conformes $(\varphi_k) \in \text{PO}(2, n)$ convergeant vers l'identité telle que $\varphi_k(x) = x_k$ pour tout $k \geq 0$. Comme les applications (φ_k) sont conformes, on a $C(x_k) = C(\varphi_k(x)) = \varphi_k(C(x))$. Si $x \notin \mathcal{H}$, alors \mathcal{H} intersecte $C(x)$ transversalement en son lieu lisse, donc on peut appliquer le lemme 6.31 et on a bien

$$\mathcal{H} \cap C(x_k) = \mathcal{H} \cap \varphi_k(C(x)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{Haus}} \mathcal{H} \cap C(x).$$

Supposons maintenant que $x \in \mathcal{H}$. Soit $y \in \mathcal{H} \cap C(x)$ différent de x . Comme \mathcal{H} et $C(x)$ sont lisses et transverses au voisinage de y , la preuve du lemme 6.31 montre qu'il existe une suite (y_k) convergeant vers y telle que $y_k \in \mathcal{H} \cap \varphi_k(C(x))$ pour tout $k \geq 0$. Maintenant la preuve de proposition 6.29 montre qu'il existe une suite (y_k) de points de $\mathcal{H} \cap C(x) \setminus \{x\}$ convergeant vers x . Par un procédé d'extraction diagonale, on peut donc trouver une suite (y_k) convergeant vers x telle que $y_k \in \mathcal{H} \cap C(x_k)$ pour tout $k \geq 0$. Ainsi, pour tout $y \in \mathcal{H} \cap C(x)$, il existe une suite (y_k) telle que $y_k \in \mathcal{H} \cap C(x_k)$ pour tout $k \geq 0$. Le Fait 6.33 implique qu'on a bien

$$\mathcal{H} \cap C(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{Haus}} \mathcal{H} \cap C(x).$$

Par la proposition 6.29, l'intersection $\mathcal{H} \cap C(x)$ n'est pas contenue dans un photon, donc les traces de cônes de lumière dans \mathcal{H} ne s'accablent pas sur un morceau de photon. Par le théorème 6.12, l'ouvert $\mathbf{Ein}^{1, n-1} \setminus \Sigma$ est KR-hyperbolique. ■

6.4.2 Sphères stablement acausales

Nous étudions maintenant les complémentaires de certaines sous-variétés dites *stablement acausales*, qui sont une version perturbative des sphères de Möbius riemanniennes $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbf{Ein}^{1,n-1}$.

Définition 6.34. On dit qu'un sous-ensemble $\Lambda \subset \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ est *localement acausal* si, pour tout point $x \in \Lambda$, il existe un voisinage U de x dans $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ et une carte $\mathbf{st} : V \subset \mathbf{R}^{1,n-1} \rightarrow U$ tels que pour tous $y, z \in \Lambda$, les points $\mathbf{st}^{-1}(y)$ et $\mathbf{st}^{-1}(z)$ ne sont pas reliés par une courbe causale dans $\mathbf{R}^{1,n-1}$, c'est-à-dire $\mathbf{st}^{-1}(y) - \mathbf{st}^{-1}(z)$ est un vecteur espace de $\mathbf{R}^{1,n-1}$.

En général, un sous-ensemble $\Lambda \subset \mathbf{R}^{1,n-1}$ qui est localement acausal n'est pas acausal. En effet, il est par exemple possible de construire des courbes espaces reliant deux points chronologiquement reliés dans $\mathbf{R}^{1,n-1}$. Cependant, pour les hypersurfaces topologiques compactes, la propriété d'être localement acausal s'étend globalement. Plus précisément, on a la proposition classique suivante (voir par exemple [Bar05] ou [BK23]) :

Proposition 6.35. Soit $\Sigma \subset \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ une hypersurface topologique compacte. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- Σ est localement acausal ;
- pour tout $x \in \Sigma$, on a $C(x) \cap \Sigma = \{x\}$;
- pour toute identification conforme du revêtement universel $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ avec le produit $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1}$, il existe une fonction contractante $f : \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que la restriction de $\widetilde{\text{rev}}$ au graphe de f est un homéomorphisme sur Σ . ■

On parlera donc de $(n-1)$ -sphère acausale pour désigner une hypersurface localement acausale compacte de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$. Par exemple, toute hypersurface compacte riemannienne C^1 de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ est localement acausale. Les hypersurfaces de Möbius riemanniennes $\Sigma \simeq \mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ en sont des exemples. En général, il n'est pas vrai que le complémentaire dans $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ d'une $(n-1)$ -sphère acausale est KR-hyperbolique, comme on le voit dans l'exemple suivant.

Exemple 6.36. On se place dans $\mathbf{R}^{1,2}$ muni de coordonnées (t, x, y) dans lesquelles le produit standard s'écrit $-t^2 + x^2 + y^2$. Alors la surface

$$\Sigma = \{(t, x, y) \in \mathbf{R}^{1,2} \mid -t^2 + x^2 + y^2 = -1 - |t|^{1/2}\}$$

est riemannienne et se compactifie en une sphère topologique $\overline{\Sigma} \subset \mathbf{Ein}^{1,2}$. La formule de la projection stéréographique (voir l'équation 1.3) permet de vérifier que la trace de $\overline{\Sigma}$ dans $C(\infty)$ coïncide avec la trace de $C(0)$ dans $C(\infty)$. La sphère $\overline{\Sigma}$ est donc acausale. Montrons que le complémentaire de $\overline{\Sigma}$ dans $\mathbf{Ein}^{1,2}$ n'est pas KR-hyperbolique. Soit $t_0 > 0$ tel que $t_0^2 = 1 + \sqrt{t_0}$, soit $p = (t_0, 0, 0) \in \Sigma$ et soit $D = I(p, -p) \subset \mathbf{R}^{1,2}$. On peut trouver une suite d'isométries $(A_k) \in \text{O}(1, 2)$ et une suite $\lambda_k \rightarrow +\infty$ telles que les sommets du diamant $\lambda_k A_k(D)$ sont sur Σ et $\lambda_k A_k(D) \subset \mathbf{R}^{1,2} \setminus \Sigma$. Ceci montre que $\mathbf{R}^{1,2} \setminus \Sigma$ n'est pas hyperbolique en 0, donc $\mathbf{Ein}^{1,2} \setminus \overline{\Sigma}$ n'est pas hyperbolique.

Ainsi, il faut raffiner la classe de sous-variétés acausales qu'on considère si on souhaite que le complémentaire soit KR-hyperbolique.

Définition 6.37. Soit $(M, [g])$ une variété conforme lorentzienne. Un *agrandissement de la structure causale* est une classe conforme $[g']$ telle que, pour tout $v \in TM$ non nul, on ait

$$g(v, v) \leq 0 \Rightarrow g'(v, v) < 0.$$

En d'autres termes, une classe conforme $[g']$ est un agrandissement de la structure causale de $(M, [g])$ si tout vecteur causal de g est un vecteur temps de g' . On notera $[g] \prec [g']$ pour signifier que $[g']$ est un agrandissement de $[g]$.

Exemple 6.38. Pour tout $\varepsilon > 0$, la classe conforme de la métrique

$$g_\varepsilon = -(1 + \varepsilon)^2 dt^2 + \cdots + dx_n^2$$

est un agrandissement de la structure causale de $(\mathbf{R}^{1,n-1}, [\mathbf{b}])$, où $\mathbf{b} = -dt^2 + \cdots + dx_n^2$ est la métrique plate. Réciproquement, si $[g']$ est un agrandissement de la structure causale de $(\mathbf{R}^{1,n-1}, [\mathbf{b}])$, on peut trouver, au voisinage de tout point, une constante $\varepsilon > 0$ telle que $[\mathbf{b}] \prec [g_\varepsilon] \prec [g']$ localement.

La proposition 6.35 admet la version perturbative suivante.

Proposition 6.39. Soit $n \geq 3$ et $\Sigma \subset \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ une hypersurface topologique compacte. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- pour tout point $x \in \Sigma$, il existe un voisinage U de x dans $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$, une carte $\mathbf{st} : V \subset \mathbf{R}^{1,n-1} \rightarrow U$ et un agrandissement $[g']$ de la structure causale de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ tels que pour tous $y, z \in \Lambda$, les points $\mathbf{st}^{-1}(y), \mathbf{st}^{-1}(z)$ ne sont pas reliés par une courbe causale de $(\mathbf{R}^{1,n-1}, [g'])$.
- pour toute identification conforme du revêtement universel $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ avec le produit $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1}$, il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction $(1 - \varepsilon)$ -Lipschitzienne $f : \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que la restriction de $\widetilde{\mathbf{rev}}$ au graphe de f est un homéomorphisme sur Σ .

Démonstration. Si $\Sigma = \widetilde{\mathbf{rev}}(\text{Gr}(f))$, où $f : \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$ est $(1 - \varepsilon)$ -Lipschitzienne, alors Σ est acausale pour l'agrandissement $[-(1 - \varepsilon)^{-1} dt^2 + d\sigma^2]$ de la structure causale de $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$. Comme $\widetilde{\mathbf{rev}}$ est un difféomorphisme conforme local, on vérifie alors le premier point. Réciproquement, si Σ vérifie le premier point, alors Σ est en particulier acausale donc on peut écrire $\Sigma = \widetilde{\mathbf{rev}}(\text{Gr}(f))$, où $f : \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$ est 1-Lipschitzienne. Par l'exemple 6.38, on vérifie que pour tout point $x \in \mathbf{S}^{n-1}$, il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que f est $(1 - \varepsilon_x)$ -Lipschitzienne au voisinage de x . Par compacité de \mathbf{S}^{n-1} , on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que f est localement $(1 - \varepsilon)$ -Lipschitzienne. Donc f est $(1 - \varepsilon)$ -Lipschitzienne. ■

Une hypersurface satisfaisant ces propriétés sera appelée $(n - 1)$ -sphère stablement acausale. Pour une présentation plus large des hypersurfaces stablement acausales, on renvoie à [Min20]. On vérifie par exemple que toute hypersurface compacte de classe C^1 de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ est une $(n - 1)$ -sphère stablement acausale si et seulement si elle est riemannienne.

Théorème 6.40. Soit Σ une $(n - 1)$ -sphère stablement acausale. Alors $\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus \Sigma$ est un ouvert KR-hyperbolique.

Remarquons que les ouverts de la forme $\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus \Sigma$, où Σ est une $(n - 1)$ -sphère stablement acausale, ne satisfont jamais les hypothèses du théorème 6.12. En effet, pour tout $x \in \Sigma$ la trace du cône de lumière de x dans Σ est réduite à $\{x\}$, donc les traces de cônes de lumière dans Σ peuvent s'accumuler sur des points. Pour montrer l'hyperbolicité de ces exemples, nous nous ramenons à l'énoncé suivant :

Théorème 6.41. Soit (φ_k) une suite divergente mixte et soit Σ une hypersurface compacte stablement acausale. Alors la suite de sous-variétés $(\varphi_k(\Sigma))$ converge Hausdorff vers un cône de lumière contenant $\Delta^+(\varphi_k)$.

Démonstration du Thm. 6.40 à partir du Thm. 6.41. Supposons par l'absurde que Ω n'est pas KR-hyperbolique. Par le théorème 6.8, il existe un diamant $D \subset \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ et une suite divergente mixte (φ_k) tels que

$$D \cap \Delta^-(\varphi_k) \neq \emptyset \text{ et } \varphi_k(D) \cap \Sigma = \emptyset.$$

Soit $(\psi_k) = (\varphi_k^{-1})$, qui est une suite mixte telle que $\Delta^+(\psi_k) = \Delta^-(\varphi_k)$. Par le théorème 6.41, la suite $\Sigma_k = \psi_k(\Sigma)$ converge Hausdorff vers un cône de lumière C contenant $\Delta^-(\varphi_k)$. Soit $a \in D \cap \Delta^-(\varphi_k)$. Comme $a \in \Sigma = \lim_k \Sigma_k$, la suite de compacts (Σ_k) intersecte tout voisinage de a à partir d'un certain rang. Or

$$\Sigma_k \cap D = \psi_k(\varphi_k(D) \cap \Sigma) = \emptyset,$$

une contradiction. ■

Le reste de cette section est dédiée à la preuve du théorème 6.41.

Lemme 6.42. *Soit Σ une $(n-1)$ -sphère stablement acausale. Alors Σ intersecte tout photon de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ en un unique point.*

Démonstration. On se donne une identification du revêtement universel avec $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1}$. Soient Δ un photon et $f : \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$ une application contractante telle que $\Sigma = \widetilde{\text{rev}}(\text{Gr}(f))$. On note $\tilde{\Delta}$ le relevé de Δ à $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$. Alors, par la proposition 1.16, on peut trouver une géodésique riemannienne $t \mapsto \gamma(t) \in \mathbf{S}^{n-1}$ telle que

$$\tilde{\Delta} = \{(t, \gamma(t)) \mid t \in \mathbf{R}\}.$$

Soit S le support de γ dans \mathbf{S}^{n-1} . Soit $p = (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1}$. Alors

$$\begin{aligned} p \in \tilde{\Delta} \cap \text{Gr}(f) &\iff x = \gamma(t) \text{ et } f(x) = t \\ &\iff \gamma(f(x)) = x \text{ et } f(x) = t. \end{aligned}$$

Or l'application $\gamma \circ f : \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ est contractante car γ est isométrique et f est contractante, donc $\gamma \circ f$ admet un unique point fixe x_0 . Ainsi $\tilde{\Delta}$ intersecte $\text{Gr}(f)$ en un unique point $p = (f(x_0), x_0)$. On en déduit que Σ et Δ s'intersectent en un unique point. ■

Lemme 6.43. *Soit (φ_k) une suite divergente mixte et soit Σ une $(n-1)$ -sphère stablement acausale. On suppose que Σ intersecte $\Delta^-(\varphi_k)$ en dehors de $x^-(\varphi_k)$. Alors $(\varphi_k(\Sigma))$ converge Hausdorff vers $C^+(\varphi_k)$.*

Démonstration. On se donne une base $\mathbf{B} = \{e_0, \dots, e_{n+1}\}$ dans laquelle \mathbf{b} s'écrit

$$\mathbf{b}(x, x) = x_0 x_{n+1} + x_1 x_n + (x_2)^2 + \dots + (x_{n-1})^2.$$

est on note $M_0 = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et $M_1 = \text{Vect}(e_0, e_2, \dots, e_{n-1}, e_{n+1})$ ainsi que $\mathbf{st}_0, \mathbf{st}_{n+1} : M_0 \rightarrow \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ et $\mathbf{st}_1, \mathbf{st}_n : M_1 \rightarrow \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ les cartes de l'atlas standard associé. On écrit $\varphi_k = a_k d_k b_k$, où (a_k) et (b_k) sont des suites convergentes de $\text{PO}(2, n)$ et où (d_k) est une suite diagonale

$$d_k = \text{diag}(\lambda_k, \mu_k, 1, \dots, 1, \mu_k^{-1}, \lambda_k^{-1}),$$

avec $\lambda_k, \mu_k, \lambda_k/\mu_k \rightarrow +\infty$. Quitte à remplacer (φ_k) par $(a^{-1}\varphi_k b^{-1})$, où a et b sont les limites respectives de (a_k) et (b_k) , on peut supposer que les suites (a_k) et (b_k) convergent vers l'identité. On note $\Sigma_k = b_k(\Sigma)$.

Le point d'intersection entre $\Delta^-(\varphi_k) = \Delta^-(d_k) = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{R}e_n \oplus \mathbf{R}e_{n+1})$ et Σ peut s'écrire $x = \boldsymbol{\pi}(e_n + \alpha e_{n+1})$, avec $\alpha \in \mathbf{R}$. On se place dans la carte \mathbf{st}_n . La sous-variété $\mathbf{st}_n^{-1}(\Sigma) \subset M_1$ rencontre $\mathbf{R}e_{n+1}$ en αe_{n+1} . Comme $\mathbf{st}_n^{-1}(\Sigma)$ est stablement acausale, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que cette hypersurface est acausale pour la métrique $g_\varepsilon = -(1+\varepsilon)^2 dt^2 + \dots + dx_n^2$ dans un voisinage V de αe_{n+1} . Comme (b_k) converge C^∞ vers l'identité, on peut toujours supposer que les sous-variétés $\mathbf{st}^{-1}(\Sigma_k) \cap V$ sont aussi acausales pour la métrique g_ε . Ainsi, on peut trouver une suite d'applications contractantes

$$f_k : U \subset (e_{n+1}^\perp, g_\varepsilon) \rightarrow (\mathbf{R}e_{n+1}, -g_\varepsilon),$$

où e_{n+1}^\perp désigne l'orthogonal de e_{n+1} pour la métrique g_ε , telle que $\mathbf{st}^{-1}(\Sigma_k) \cap V = \text{Gr}(f_k)$. Soit $H = \text{Vect}(e_0, e_2, \dots, e_n)$. Comme H est transverse à $\mathbf{R}e_{n+1}$, la projection orthogonale sur e_{n+1}^\perp induit un isomorphisme $H \simeq e_{n+1}^\perp$. On note d la distance riemannienne sur H qui rend cet isomorphisme isométrique (où e_{n+1}^\perp est muni de la métrique g_ε). Quitte à précomposer les f_k par cette isométrie linéaire, on peut écrire $\mathbf{st}^{-1}(\Sigma_k) \cap V = \text{Gr}(f_k)$ où les f_k sont des applications contractantes

$$f_k : U \subset (H, d) \rightarrow (\mathbf{R}e_{n+1}, -g_\varepsilon).$$

Soit $z \in H$. On pose, pour tout $k \geq 0$, le point $x(k) = x_0(k)e_0 + x_2(k)e_2 + \dots + x_{n-1}(k)e_{n-1} \in H$, où

$$x_0(k) = \frac{z_0}{\lambda_k \mu_k} \text{ et } x_i(k) = \frac{z_i}{\mu_k}, \text{ pour } i = 2, \dots, n-1.$$

Pour k suffisamment grand, on a $x(k) \in U$, donc $y(k) = \mathbf{st}_n(x(k) + f_k(x(k))e_{n+1})$ est un point de $\Sigma_k = b_k(\Sigma)$. Comme les f_k sont uniformément Lipschitziennes, les valeurs des f_k sont bornées au voisinage de 0, donc

$$\begin{aligned} d_k(y(k)) &= \mathbf{st}_n \left(\lambda_k \mu_k x_0(k) e_0 + \mu_k x_2(k) e_2 + \dots + \mu_k x_{n-1}(k) e_{n-1} + \frac{\mu_k}{\lambda_k} f_k(x(k)) e_{n+1} \right) \\ &= \mathbf{st}_n \left(z_0 e_0 + z_2 e_2 + \dots + z_{n-1} e_{n-1} + \frac{\mu_k}{\lambda_k} O(1) e_{n+1} \right) \\ &\rightarrow \mathbf{st}_n(z) \text{ quand } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

En particulier, on a $b_k(d_k(y(k))) \rightarrow \mathbf{st}_n(z)$ quand $k \rightarrow \infty$. Ainsi tout point de $C^+(\varphi_k) = \boldsymbol{\pi}(e_0^\perp) \cap \mathbf{Ein}^{1, n-1}$ est limite d'une suite (z_k) telle que $z_k \in \varphi_k(\Sigma)$ pour tout $k \geq 0$. Or comme $x^-(\varphi_k) \notin \Sigma$, toute valeur d'adhérence d'une telle suite appartient à $C^+(\varphi_k)$. Ainsi on a bien $\lim_k \varphi_k(\Sigma) = C^+(\varphi_k)$. ■

Preuve du théorème 6.41. Par le lemme 6.42, la sphère Σ intersecte $\Delta^-(\varphi_k)$ en un unique point x . Si jamais $x \neq x^-(\varphi_k)$, alors on peut appliquer le lemme 6.43 et $(\varphi_k(\Sigma))$ converge Hausdorff vers $C^+(\varphi_k)$. Comme $\Delta^+(\varphi_k) \subset C^+(\varphi_k)$, on obtient le résultat.

Supposons donc que $\Sigma \cap \Delta^-(\varphi_k) = \{x^-(\varphi_k)\}$. On reprend les notations du premier paragraphe de la démonstration du lemme 6.43. Cette fois, on se place dans la carte $\mathbf{st}_{n+1} : M_0 \rightarrow \mathbf{Ein}^{1, n-1}$. Comme $\mathbf{st}_{n+1}^{-1}(\Sigma)$ est stablement acausale, en raisonnant comme pour le lemme 6.43, on peut trouver des distances riemanniennes d et \hat{d} sur $H = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ et $\mathbf{R}e_n$, respectivement, telles que pour tout $k \geq 0$ la sous-variété $\mathbf{st}_{n+1}^{-1}(\Sigma_k) \subset M_0$ s'écrive comme le graphe d'une fonction contractante

$$f_k : U \subset (H, d) \rightarrow (\mathbf{R}e_n, \hat{d}),$$

où U est un voisinage de l'origine dans H . Nous allons raisonner sur la limite de la suite $\alpha_k = \frac{\lambda_k}{\mu_k} f_k(0)$ (quitte à extraire, on peut supposer que cette suite converge vers $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$).

Premier cas : $\alpha \in \mathbf{R}$. Soit $z \in H$. On pose, pour tout $k \geq 0$, le point $x(k) = x_1(k)e_1 + \cdots + x_{n-1}(k)e_{n-1} \in H$, où

$$x_1(k) = \frac{z_1}{\lambda_k \mu_k} \text{ et } x_i(k) = \frac{z_i}{\lambda_k}, \text{ pour } i = 2, \dots, n-1.$$

Pour k suffisamment grand, on a $x(k) \in U$, donc $y(k) = \mathbf{st}_{n+1}(x(k) + f_k(x(k))e_n)$ est un point de $\Sigma_k = b_k(\Sigma)$. Comme les f_k sont uniformément Lipschitziennes, on a

$$\begin{aligned} d_k(y(k)) &= \mathbf{st}_{n+1} \left(\lambda_k \mu_k x_1(k) e_1 + \lambda_k x_2(k) e_2 + \cdots + \lambda_k x_{n-1}(k) e_{n-1} + \frac{\lambda_k}{\mu_k} f_k(x(k)) e_n \right) \\ &= \mathbf{st}_{n+1} \left(z_1 e_1 + z_2 e_2 + \cdots + z_{n-1} e_{n-1} + \frac{\lambda_k}{\mu_k} (f_k(0) + O(d(x(k), 0))) e_n \right) \\ &= \mathbf{st}_{n+1} \left(z + \alpha_k e_n + \frac{\lambda_k}{\mu_k} O(d(x(k), 0)) e_n \right). \end{aligned}$$

Or par construction $d(x(k), 0) = O(1/\lambda_k)$ donc

$$\begin{aligned} d_k(y(k)) &= \mathbf{st}_{n+1}(z + \alpha_k e_n + O(1/\mu_k) e_n) \\ &\rightarrow \mathbf{st}_{n+1}(z + \alpha e_n) \text{ quand } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Soit $H' = H + \alpha e_n$ et soit C le cône de lumière de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ tel que $C = \overline{\mathbf{st}_{n+1}(H')}$, dont l'existence est donnée par le Fait 6.13. On vérifie directement que le sommet de C est $\pi(\alpha e_0 + e_1) \in \Delta^+(\varphi_k)$, donc $\Delta^+(\varphi_k) \subset C$. Par ce qui précède, tout point de C est limite d'une suite (z_k) telle que $z_k \in \varphi_k(\Sigma)$ pour tout $k \geq 0$. Montrons que pour toute suite (z_k) telle que $z_k \in \varphi_k(\Sigma)$ pour tout $k \geq 0$, les valeurs d'adhérence de (z_k) appartiennent à C . Quitte à extraire, on suppose que (z_k) converge vers $z \in \mathbf{Ein}^{1,n-1}$. Si jamais $z \in \Delta^+(\varphi_k)$, alors $z \in C$. Sinon, on peut écrire

$$b_k^{-1}(z_k) = \mathbf{st}_{n+1} \left(\lambda_k \mu_k x_1(k) e_1 + \lambda_k x_2(k) e_2 + \cdots + \lambda_k x_n(k) e_n + \frac{\lambda_k}{\mu_k} f_k(x(k)) e_n \right)$$

pour une certaine suite $x(k) \in H$ telle que $x(k) \rightarrow 0$. Si $z \in \mathbf{st}_{n+1}(H_0)$, alors $d(x(k), 0) = O(1/\lambda_k)$ donc $\lim_k \frac{\lambda_k}{\mu_k} f_k(x(k)) = \alpha$ et donc $z \in C$. Sinon, on pose

$$s_k = \max \left(\{ \lambda_k |x_i(k)| \}_{i=2, \dots, n-1} \cup \{ \lambda_k \mu_k |x_1(k)| \} \right) \geq \lambda_k d(x(k), 0).$$

Par hypothèse $s_k \rightarrow +\infty$. On a

$$\frac{\lambda_k}{\mu_k} f_k(x(k)) = \frac{\lambda_k}{\mu_k} (f_k(0) + O(d(x(k), 0))) = O(1) + \frac{1}{\mu_k} O(\lambda_k d(x(k), 0)) = o(s_k).$$

Ainsi, en notant $X(k) = x(k) + f_k(x(k))e_n$, on obtient (voir l'équation 1.3)

$$\begin{aligned} b_k^{-1}(z_k) &= \pi \left(e_{n+1} + \lambda_k \mu_k x_1(k) e_1 + \lambda_k x_2(k) e_2 + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \lambda_k x_{n-1}(k) e_{n-1} + \frac{\lambda_k}{\mu_k} f_k(x(k)) e_n - \lambda_k^2 \mathbf{b}(X(k), X(k)) e_0 \right) \\ &= \pi \left(e_{n+1} + O(s_k) x_1(k) e_1 + O(s_k) e_2 + \cdots \right. \\ &\quad \left. + O(s_k) e_{n-1} + o(s_k) e_n - \lambda_k^2 \mathbf{b}(X(k), X(k)) e_0 \right). \end{aligned}$$

Ainsi on a $z = \lim b_k^{-1}(z_k) \in \boldsymbol{\pi}(\mathbf{R}e_0 \oplus \mathbf{R}e_1) = \Delta^+(\varphi_k) \subset C$. Ceci montre que $\lim_k \varphi_k(\Sigma) = C$.

Second cas : $\alpha = \pm\infty$. Dans ce cas, nous allons montrer que $\lim_k \varphi_k(\Sigma) = C^+(\varphi_k)$. Soit $z \in \text{Vect}(e_0, e_2, \dots, e_n)$. On cherche un point $x \in U$ tel que $f_k(x) \neq 0$ et tel que les $(n-1)$ -premieres coordonnées de $y = \mathbf{st}_{n+1}(x + f_k(x)e_n)$ dans la carte \mathbf{st}_n soient celle de z . Fixons donc $x \in U$ tel que $f_k(x) \neq 0$ et soit $y = \mathbf{st}_{n+1}(x + f_k(x)e_n)$. On a (voir aussi section 6.2.1)

$$\begin{aligned} d_k(y) &= \mathbf{st}_{n+1} \left(\lambda_k \mu_k x_1 e_1 + \lambda_k x_2 e_2 + \dots + \lambda_k x_{n-1} e_{n-1} + \frac{\lambda_k}{\mu_k} f_k(x) e_n \right) \\ &= \mathbf{st}_n \left(\frac{1}{\frac{\lambda_k}{\mu_k} f_k(x)} \left(e_{n+1} + \lambda_k x_2 e_2 + \dots + \lambda_k x_{n-1} e_{n-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \lambda_k^2 \mathbf{b}(x + f_k(x)e_n, x + f_k(x)e_n) e_0 \right) \right) \end{aligned}$$

Ainsi, on est ramené à résoudre le système (non linéaire) suivant :

$$\begin{cases} \frac{\lambda_k \mu_k \mathbf{b}(x + f_k(x)e_n, x + f_k(x)e_n)}{f_k(x)} = z_0 \\ \frac{x_i \mu_k}{f_k(x)} = z_i, \text{ pour tout } i \in \{2, \dots, n-1\} \end{cases}$$

On peut réarranger ce système pour le mettre sous la forme

$$\begin{cases} x_2 = \frac{z_0}{\lambda_k \mu_k} - \frac{f_k(x)}{\mu_k^2} (z_2^2 + \dots + z_{n-1}^2) \\ x_i = \frac{z_i f_k(x)}{\mu_k}, \text{ pour tout } i \in \{2, \dots, n-1\} \end{cases}$$

On obtient un problème de point fixe de la forme $x = \theta_k(x)$, où les coordonnées de $\theta_k : U \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ sont données par l'équation précédente. Dans un premier temps, les applications θ_k convergent uniformément vers 0 sur U , donc à partir d'un certain rang θ_k est à valeurs dans un ouvert relativement compact de U . De plus θ_k est $c \frac{z_2^2 + \dots + z_{n-1}^2}{\mu_k^2} + c \frac{|z_2| + \dots + |z_{n-1}|}{\mu_k}$ -Lipschitzienne, où c est une constante de Lipschitz uniforme pour les f_k . Ainsi, l'application θ_k est contractante à partir d'un certain rang. Elle admet donc un unique point fixe $x(k)$. Il nous reste à estimer $\lambda_k f_k(x(k))/\mu_k$. Par définition on sait que

$$x(k) = \theta_k(x(k)) = O\left(\frac{1}{\mu_k}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

En utilisant $x(k) = \theta_k(x(k))$ et $f_k(x(k)) = f_k(0) + O(d(x(k), 0))$, on obtient

$$d(x(k), 0) = O\left(\frac{1}{\lambda_k \mu_k}\right) + O\left(\frac{f_k(0)}{\mu_k}\right) + O\left(\frac{d(x(k), 0)}{\mu_k}\right) = O\left(\frac{f_k(0)}{\mu_k}\right) + o(d(x(k), 0)).$$

Donc $d(x(k), 0) = O\left(\frac{f_k(0)}{\mu_k}\right)$, d'où $\frac{\lambda_k f_k(x(k))}{\mu_k} = \frac{\lambda_k (f_k(0) + o(f_k(0)))}{\mu_k} \sim \alpha_k \rightarrow +\infty$. Ainsi la suite de points $y(k) = \mathbf{st}_n(x(k) + f_k(x(k))e_n)$ converge vers $\mathbf{st}_n(z)$. Donc tout point de $C^+(\varphi_k)$ est limite d'une suite (y_k) telle que $y_k \in \varphi_k(\Sigma)$ pour tout $k \geq 0$. Comme avant, on montre que les valeurs d'adhérences de telles suites appartiennent à $C^+(\varphi_k)$. Ainsi $\lim_k \varphi_k(\Sigma) = C$. ■

Avec des techniques similaires à celles de la preuve de théorème 6.40, on peut aussi retrouver l'hyperbolicité du complémentaire de sous-variétés lorentziennes compactes de dimension ≥ 2 (ceci a déjà été montré, voir le théorème 6.28). En effet, soit $\Sigma \subset \mathbf{Ein}^{1,n-1}$ une sous-variété lorentzienne compacte de dimension ≥ 2 . Supposons que $\Omega \setminus \Sigma$ ne soit pas hyperbolique, de sorte qu'il existe une suite mixte (φ_k) et un diamant D tels que $\varphi_k(D) \cap \Sigma = \emptyset$ et $D \cap \Delta^-(\varphi_k) \neq \emptyset$. On note $\psi_k = \varphi_k^{-1}$. Par la Proposition 6.29, la sous-variété Σ intersecte $C^-(\psi_k)$ en un point $x \notin \Delta^-(\psi_k)$. On peut alors trouver une courbe C^1 transverse à $C^-(\psi_k)$ passant par x (toute courbe temps convient). On obtient un abusité grâce au lemme suivant :

Lemme 6.44. *La suite de compacts $\psi_k(\gamma)$ converge Hausdorff vers $\Delta^+(\psi_k) = \Delta^-(\varphi_k)$.*

Démonstration. On reprend les notations du premier paragraphe de la démonstration du lemme 6.43. La trace de $\gamma_k = b_k(\gamma)$ dans la carte \mathbf{st}_n est une courbe qui peut être paramétrée de sorte que $\gamma_k(0) \in \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}, e_{n+1})$ et $(\gamma_k^0)'(0) \neq 0$, où $(\gamma_k^0, \gamma_k^2, \dots, \gamma_k^{n-1}, \gamma_k^{n+1})$ sont les coordonnées de γ_k dans \mathbf{st}_n . Quitte à réduire l'intervalle de définition de la courbe, on peut supposer que les $\gamma_k^0 : I \rightarrow \mathbf{R}$ sont des difféomorphismes sur leurs images et que celles-ci contiennent un voisinage commun V de 0. Pour $r > 0$, on peut donc trouver une suite $t_k \in I$ telle que $\gamma_k^1(t_k) = r \frac{\mu_k}{\lambda_k}$ pour tout k . On a alors

$$\begin{aligned} \psi_k(\gamma_k(t_k)) &= \mathbf{st}_n \left(\frac{\lambda_k \gamma_k^0(t_k)}{\mu_k} e_0 + \frac{\gamma_k^2(t_k)}{\mu_k} e_2 + \dots + \frac{\gamma_k^{n-1}(t_k)}{\mu_k} e_{n-1} + \frac{\gamma_k^{n+1}(t_k)}{\mu_k \lambda_k} e_{n+1} \right) \\ &= \mathbf{st}_n(r e_0 + o(1)) \\ &\rightarrow \pi(r e_0 + e_1). \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_k \varphi_k(\gamma_k) = \Delta^+(\psi_k) = \pi(\mathbf{R}e_0 \oplus \mathbf{R}e_1)$. ■

6.4.3 Action sur les sphères acausales

Le but de cette section est de donner une formulation du théorème 6.41 en termes d'action de suites mixtes sur l'espace des sphères stablement acausales. En signature riemannienne, il est connu que l'action de $\text{Conf}(\mathbf{S}^n)$ sur certains espaces de sous-variétés C^1 de \mathbf{S}^n est propre (voir [BZ04, Thm. 1.4]). Dans notre cas, nous ne supposons pas de régularité C^1 pour les sous-variétés, mais nous imposons une restriction sur le type dynamique des suites. On définit

$$\mathcal{M}_{\text{s.a.}} = \{ \Sigma \subset \mathbf{Ein}^{1,n-1} \mid (n-1)\text{-sphère stablement acausale} \}$$

l'espace des $(n-1)$ -sphères stablement acausales. Le théorème 6.41 implique que pour tout $\Sigma \in \mathcal{M}_{\text{s.a.}}$ et pour toute suite (φ_k) à dynamique mixte, la suite $(\varphi_k(\Sigma))$ quitte tout compact de $\mathcal{M}_{\text{s.a.}}$, pour la topologie induite par $\mathcal{C}(\mathbf{Ein}^{1,n-1})$. Ceci ne permet pas exactement de conclure que l'action d'un groupe à dynamique mixte est propre sur $\mathcal{M}_{\text{s.a.}}$. Pour cela, on peut raffiner la topologie sur $\mathcal{M}_{\text{s.a.}}$ et dire qu'une suite (Σ_k) converge *stablement* vers $\Sigma \in \mathcal{M}$ s'il existe une identification conforme du revêtement universel $\widetilde{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ avec le produit $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1}$, un nombre $\varepsilon > 0$ et une suite d'applications $(1-\varepsilon)$ -Lipschitziennes $(f_k : \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R})$ convergeant uniformément vers une application $f : \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$ tels que $\Sigma_k = \widetilde{\text{rev}}(\text{Gr}(f_k))$ et $\Sigma = \widetilde{\text{rev}}(\text{Gr}(f))$. La preuve du théorème 6.41 s'adapte alors pour obtenir le corollaire suivant :

Corollaire 6.45. *L'action d'un groupe $\Gamma < \text{PO}(2, n)$ agissant par suites divergentes mixtes sur l'espace $\mathcal{M}_{\text{s.a.}}$ est propre, pour la topologie de la convergence stable.* ■

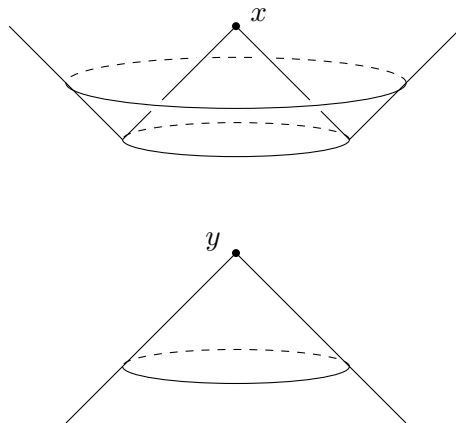


FIGURE 6.3 – Une surface localement achronale Σ de $\mathbf{Ein}^{1,2}$ obtenue comme réunion de deux composantes des cônes de lumière de x et y . Le stabilisateur de Σ contient des suites divergentes mixtes dont x et y sont des points attracteurs et répulseurs.

Par “agir par suites divergentes mixtes”, on entend que le type dynamique de toute suite divergente $(\gamma_k) \in \Gamma^{\mathbf{N}}$ est celui d’une suite mixte.

En général, l’action d’une suite divergente quelconque sur $\mathcal{M}_{\text{s.a}}$ n’est pas propre. Par exemple, toute suite divergente de $\text{Conf}(\mathbf{dS}^{1,n-1})$ préserve la sphère de Möbius riemannienne $\partial\mathbf{dS}^{1,n-1} \subset \mathbf{Ein}^{1,n-1}$. On peut aussi construire des exemples de sous-variétés acausales non-régulières invariantes par des groupes monogènes admettant une dynamique bornée. Enfin, il n’est pas possible de réduire l’hypothèse de régularité de la surface. En effet, on peut construire des sous-variétés localement achronales³ stabilisées par des suites divergentes mixtes (voir Figure 6.3).

3. Une hypersurface est *localement achronale* si, localement, deux points de la surface ne peuvent pas être reliés par une courbe temps.

Chapitre 7

Markowitz vs Kobayashi–Royden-hyperbolique

Nous avons vu au Chapitre 5 que la métrique de Kobayashi–Royden est une métrique à faible régularité : elle est le produit d’une fonction semi-continue supérieurement avec une métrique lisse de la classe conforme. Dans ce chapitre, on s’intéresse à des classes d’exemples de variétés conformément plates pour lesquelles la métrique de Kobayashi–Royden est régulière, c’est-à-dire au moins continue. Pour obtenir de la régularité, on se place dans le cadre des variétés Markowitz-hyperboliques qui ont été décrites en partie aux chapitres 2 et 3. Cela nous permet d’obtenir une forme de compacité pour $\text{Conf}(\mathbf{D}^{p,q}, M)$ (voir la proposition 7.1 pour un énoncé précis). En particulier, pour les variétés Markowitz-hyperboliques, on obtient l’existence d’applications conformes $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ qui réalisent le maximum de $\nu_g(x) = \sup_{\varphi} \text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, x)$. Ceci permet notamment d’obtenir de la régularité pour la métrique de Kobayashi–Royden.

Théorème (Voir Thm. 7.6). *Soit M une variété conformément plate Markowitz-hyperbolique. Alors M est Kobayashi–Royden-hyperbolique et pour tout $x \in M$, il existe une application conforme $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ telle que*

$$g_{\text{KR}}^M|_x = \varphi_* g_{\mathbf{D}^{p,q}}|_x.$$

De plus, la métrique g_{KR}^M est localement Lipschitzienne.

Ici, la régularité localement Lipschitzienne signifie que le facteur conforme de g_{KR}^M devant toute métrique lisse est une fonction localement Lipschitzienne. La preuve est basée sur un résultat de compacité pour les applications conformes entre variétés Markowitz-hyperboliques, valide pour les variétés même non conformément plates (voir proposition 7.1).

Nous étudions ensuite deux familles de variétés Markowitz-hyperboliques :

- Les variétés à développante propre, pour lesquelles on décrit une métrique pseudo-riemannienne invariante à la *Carathéodory*. Ceci permet d’obtenir des caractérisations du diamant similaires à la caractérisation de la boule unité de \mathbf{C}^n par Wong [Won77] et Rosay [Ros79]. Voir la proposition 7.14 et la proposition 7.16 pour une application aux espace-temps Cauchy-compacts.
- Les domaines *futur-complets* de l’espace de Minkowski lorentzien $\mathbf{R}^{1,n-1}$ admettant un temps cosmologique régulier, pour lesquels on peut décrire explicitement la métrique de Kobayashi–Royden (voir proposition 7.21). Parmi ces domaines futur-complets, on distingue une sous-famille introduite par Bonsante [Bon05], pour laquelle la métrique de Kobayashi–Royden est de régularité C^1 . Dans ce cas spécifique, on obtient même une inégalité sur la courbure presque partout.

Théorème (Voir Thm 7.27). *Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^{1,n-1}$ un domaine de Bonsante. Alors la métrique de Kobayashi–Royden est de classe C^1 et admet des dérivées partielles secondes presque partout. De plus, g_{KR}^Ω satisfait l'inégalité de courbure sectionnelle $K \geq -1$ en presque tout plan temps et $K \leq 1$ en presque tout plan espace.*

7.1 Hyperbolicité des exemples de Markowitz

7.1.1 Compacité pour les applications conformes

Dans cette section, nous montrons que dans la cadre des variétés Markowitz-hyperboliques (pas nécessairement conformément plates), on peut exhiber des sous-familles compactes de $\text{Conf}(M, N)$. Explicitement, on a la proposition suivante :

Proposition 7.1. *Soient M et N deux variétés conformes Markowitz-hyperboliques. Alors pour tout point $x \in M$, pour tout compact $K \subset N$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toutes métriques g et \tilde{g} dans les classes conformes de M et N , respectivement, l'ensemble*

$$\mathcal{F}_{\varepsilon, g, \tilde{g}}(x, K) = \{f \in \text{Conf}(M, N) \mid f(x) \in K, \text{dc}(f, g, \tilde{g}, x) \geq \varepsilon\}$$

est un compact de $\text{Conf}(M, N)$ pour la topologie de la convergence C^∞ sur tout compact.

La preuve est basée sur le résultat suivant de convergence des applications conformes dû à Frances.

Théorème 7.2 ([Fra12, Thm. 1.2]). *Soient M et N deux variétés conformes et $f_k : M \rightarrow N$ une suite d'applications conformes qui convergent uniformément sur tout compact vers une application continue $f : M \rightarrow N$. Alors f est de classe C^∞ et la suite (f_k) converge C^∞ vers f sur les compacts de M . De plus, on distingue deux possibilités :*

- *Soit f est une application conforme.*
- *Soit f est une submersion sur une sous-variété totalement isotrope (possiblement réduite à un point).*

Comme le cadre d'application de la proposition 7.1, et donc du théorème 7.2, est celui des variétés conformément plates, nous incluons la preuve dans ce cas plus simple.

Démonstration. Comme l'énoncé est local, on peut toujours se ramener au cas d'une suite d'applications $f_k : U \rightarrow V$, avec U et V deux ouverts de $\mathbf{Ein}^{p,q}$. On peut donc étendre les f_k en des transformations de $\text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ par le théorème de Liouville. On distingue alors deux cas :

- Cas 1 : la suite (f_k) reste dans un compact de $\text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$. On peut extraire une sous-suite $(f_{n(k)})$ qui converge dans $\text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$ vers une transformation h . Alors $(f_{n(k)})$ converge C^∞ vers h sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$, donc $f = h|_U$ est une application conforme et $(f_{n(k)})$ converge C^∞ sur tout compact de U vers f .
- Cas 2 : la suite (f_k) diverge dans $\text{Conf}(\mathbf{Ein}^{p,q})$. On peut extraire une sous-suite $(f_{n(k)})$ telle que $(f_{n(k)})$ est m -divergente pour un certain $m \geq 0$. Soient \mathcal{L}^+ et \mathcal{L}^- ses m -photons attracteurs et répulseurs et soit $\theta^- : (\mathcal{L}^-)^* \rightarrow \mathcal{L}^+$ le difféomorphisme projectif tel que

$$f_{n(k)} \longrightarrow \theta \circ \pi_{\mathcal{L}^-}$$

sur tout compact de $\mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(\mathcal{L}^-)$. Soit $x \in U$. Alors pour toute suite (x_k) convergeant vers x , la suite $(f_k(x_k))$ converge vers $f(x)$, donc $D_{(g_k)}(x) = \{f(x)\}$. En particulier $x \notin C(\mathcal{L}^-)$, donc $U \subset \mathbf{Ein}^{p,q} \setminus C(\mathcal{L}^-)$. Ainsi la suite $f_{n(k)}$ converge C^∞ vers $\theta^- \circ \pi_{\mathcal{L}^-}|_U$. Par la proposition 1.15, cette application est une submersion sur une sous-variété totalement dégénérée.

Dans les deux cas, l'application f est de classe C^∞ et il existe une sous-suite de (f_k) qui converge C^∞ vers f . Par un argument de compacité, on en déduit que (f_k) converge C^∞ vers l'application f . ■

Démonstration de la proposition 7.1. On fixe un point $x \in M$, un compact $K \subset N$, un réel $\varepsilon > 0$ et deux métriques g et \tilde{g} dans les classes conformes de M et N , respectivement. Soit (f_k) une suite de $\mathcal{F}_{\varepsilon, g, \tilde{g}}(x, K)$. Quitte à extraire, on peut supposer que $y_k = f_k(x)$ converge vers un point $y \in N$. Comme N est localement compacte, on peut trouver $r > 0$ tel que $B_{\delta_N}(y, 2r)$ est relativement compact dans N . Pour $k \geq 0$ suffisamment grand, on a $\delta_N(y_k, y) \leq r$, donc par la proposition 2.19, on a

$$f(B_{\delta_M}(x, r)) \subset B_{\delta_N}(y, 2r).$$

Le théorème d'Ascoli implique qu'une sous-suite $(f_{m(k)})$ converge uniformément sur tout compact de $B_{\delta_M}(x, r)$ vers une application $f : B_{\delta_M}(x, r) \rightarrow N$. Par le théorème 7.2, la limite f est lisse et la convergence est C^∞ sur $B_{\delta_M}(x, r)$. Étudions maintenant le comportement de la distorsion conforme de (f_k) . Fixons des métriques g et \tilde{g} dans les classes conformes de M et N , respectivement. Soit (x_k) une suite de M convergeant vers un point $x \in M$. Soit $v \in T_x M$ un vecteur temps. On a

$$\varepsilon^2 \leq \text{dc}(f_k, g, \tilde{g}, x)^2 = \tilde{g}(T_x f_k \cdot v, T_x f_k \cdot v) / g(v, v) \longrightarrow \tilde{g}(T_x f \cdot v, T_x f \cdot v) / g(v, v). \quad (7.1)$$

En particulier $\tilde{g}(T_x f \cdot v, T_x f \cdot v) \neq 0$, donc f n'est pas une submersion sur une sous-variété totalement isotrope. Le théorème 7.2 implique que $f : B_{\delta_M}(x, r) \rightarrow N$ est une application conforme. Par le lemme 7.3, on en déduit que la suite $(f_{m(k)})$ converge dans $\text{Conf}(M, N)$, donc $\mathcal{F}_{\varepsilon, g, \tilde{g}}(x, K)$ est un compact dans $\text{Conf}(M, N)$. ■

Il ne reste plus qu'à montrer le lemme classique suivant que nous avons utilisé dans la preuve de la proposition 7.1.

Lemme 7.3. *Soit $f_k : M \rightarrow N$ une suite d'applications conformes. On suppose qu'il existe un ouvert non vide U tel que $f_k|_U$ converge C^∞ sur U vers une application conforme $f : U \rightarrow N$. Alors f s'étend en une application conforme $f : M \rightarrow N$ et (f_k) converge vers f .*

Ce lemme se montre à l'aide de la connexion de Cartan associée à une structure conforme pseudo-riemannienne. Nous rappelons succinctement cette construction et nous renvoyons à [Sha97]. Une géométrie de Cartan modélisée sur l'espace homogène $\mathbf{Ein}^{p,q} = \text{PO}(p+1, q+1)/P$ (où P est le stabilisateur d'une droite isotrope dans $G = \text{PO}(p+1, q+1)$) est la donnée des objets suivants :

- Un P -fibré principal $\pi : \hat{M} \rightarrow M$ au dessus d'une variété de dimension $p+q$.
- Un parallélisme $\omega : T\hat{M} \rightarrow \mathfrak{g}$ (i.e. $\omega_{\hat{x}} : T_{\hat{x}}\hat{M} \rightarrow \mathfrak{g}$ est un isomorphisme pour tout $\hat{x} \in \hat{M}$) appelé *connexion de Cartan* satisfaisant les deux conditions suivantes :
 1. $\omega(\frac{d}{dt}|_{t=0} x \cdot e^{tv}) = v$ pour tout vecteur $v \in \mathfrak{p}$ et tout point $x \in \hat{M}$, où $e^u \in G$ est l'exponentielle de $u \in \mathfrak{g}$;
 2. $(R_h)^*\omega = \text{Ad}(h^{-1}) \cdot \omega$ pour tout vecteur $h \in P$.

Montrons comment une géométrie de Cartan $\pi : \hat{M} \rightarrow M$ modélisée sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$ permet de déterminer une classe conforme de métriques pseudo-riemanniennes sur M . Soient $x \in M$ et $\hat{x} \in \pi^{-1}(\{x\})$. Comme $T_{\hat{x}}(x \cdot P) = \ker T_{\hat{x}}\pi$, l'application tangente $T_{\hat{x}}\pi$ identifie naturellement $T_{\hat{x}}\hat{M}/T_{\hat{x}}(x \cdot P)$ avec $T_x M$. Par la Propriété 1, la connexion de Cartan ω se factorise en un isomorphisme

$$\omega_{\hat{x}} : T_{\hat{x}}\hat{M}/T_{\hat{x}}(x \cdot P) \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{p}.$$

La concaténation de ces deux identifications donne un isomorphisme $j_{\hat{x}} : T_x M \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$. Cependant, un tel isomorphisme dépend du choix d'un point $\hat{x} \in \pi^{-1}(\{x\})$. Si on avait choisi un autre point $\hat{x} \cdot h$ au dessus de x , alors la Propriété 2 donne

$$j_{\hat{x} \cdot h} = \text{Ad}(h^{-1}) \circ j_{\hat{x}}.$$

Ainsi, l'espace tangent $T_x M$ est identifié à $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ modulo l'action adjointe de P . La projection stéréographique permet d'identifier $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ à $\mathbf{R}^{p,q}$ et l'action adjointe est alors conjuguée à l'action de P par similitude sur $(\mathbf{R}^{p,q}, [\mathbf{b}])$. En particulier, il existe une classe conforme de métriques plates $[\mathbf{b}]$ de signature (p, q) et $\text{Ad}(P)$ -invariante sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$. La classe $j_x^*[\mathbf{b}]$ définit donc une classe conforme de métriques de signature (p, q) sur M .

Étant donné $(M, [g])$ une variété conforme pseudo-riemannienne de signature (p, q) , on dira qu'une géométrie de Cartan sur M , modélée sur $\mathbf{Ein}^{p,q}$, est compatible à $[g]$, si jamais la classe conforme $[g]$ coïncide avec la classe conforme construite précédemment (i.e. $[g] = j^*[\mathbf{b}]$). En général, il existe plusieurs géométries de Cartan (distinctes) sur M compatibles à $[g]$. On peut montrer qu'il existe une condition de normalisation qui rend le choix de la connexion de Cartan unique sur M (voir [Sha97]) :

Théorème 7.4 (Cartan). *Soit $(M, [g])$ une variété conforme pseudo-riemannienne de signature (p, q) . Alors il existe une unique géométrie de Cartan normale compatible à $[g]$.*

En particulier, si $f : M \rightarrow N$ est une application conforme, alors on peut relever f en une application $\hat{f} : (\hat{M}, \omega_M) \rightarrow (\hat{N}, \omega_N)$ préservant le parallélisme, c'est-à-dire $\hat{f}^* \omega_N = \omega_M$. Maintenant, si (f_k) est une suite de $\text{Conf}(M, N)$ qui converge sur un ouvert U vers une application $f : U \rightarrow N$, alors on peut faire un choix de relevés adéquat (\hat{f}_k) préservant le parallélisme tels que la suite de points $(\hat{f}_k(\hat{x}))$ converge dans \hat{N} pour un certain $\hat{x} \in \hat{M}$ (voir [Fra12, Fait 4.4]). Le lemme 7.3 se ramène donc au lemme suivant :

Lemme 7.5. *Soient (M^n, ω_M) et (N^n, ω_N) deux variétés connexes munies d'un parallélisme et soit (f_k) une suite d'applications $f_k : M \rightarrow N$ préservant le parallélisme. S'il existe un point $x \in M$ tel que $(f_k(x))$ converge dans N , alors (f_k) converge C^∞ sur tout compact vers une application $f : M \rightarrow N$ préservant le parallélisme.*

Démonstration. Donnons quelques notations. Pour un vecteur $v \in \mathbf{R}^n$, on note \hat{v} les champs de vecteurs sur M et N tels que $\omega(\hat{v}) = v$. Fixons un produit scalaire riemannien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur \mathbf{R}^n . On note $g_M = \omega_M^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ et $g_N = \omega_N^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ les métriques riemanniennes induites sur M et N , respectivement. Pour $v \in \mathbf{R}^n$ et $x \in M$, on note $\exp(x, v) := \exp(x, \hat{v}_x)$, où $\exp(x, \hat{v}_x)$ est l'application exponentielle de g_M . On utilisera aussi la notation $\exp(y, v)$ pour l'application exponentielle sur N . Soit

$$\Omega = \{x \in M \mid (f_k(x)) \text{ converge dans } N\}.$$

Par hypothèse, l'ensemble Ω est non vide. Soit $x \in \Omega$ et soit $y \in N$ la limite de la suite $(y_k := f_k(x))$. On peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $\exp(x, \cdot)$ est définie sur $B(0, \varepsilon)$ et est un difféomorphisme sur son image (on dit alors que $\exp(x, B(0, \varepsilon)) = B(x, \varepsilon)$ est une *boule géodésique*, voir [Lee97]). Comme f est une isométrie riemannienne, on a

$$f_k(\exp(x, v)) = \exp(y_k, v), \tag{7.2}$$

pour tout $v \in B(0, \varepsilon)$ (en particulier, l'application exponentielle $\exp(y_k, \cdot)$ est définie sur $B(0, \varepsilon)$ pour tout $k \geq 0$). *Affirmation :* *l'application exponentielle $\exp(y, \cdot)$ est définie sur $B(0, \varepsilon)$. Remarquons qu'il n'est pas vrai en général que $B(y, \varepsilon)$ est une boule géodésique car*

on n'a pas supposé les f_k injectifs. Soient $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ et $v \in \mathbf{R}^n$ un vecteur unitaire tels que la géodésique $t \mapsto \exp(y, tv)$ soit définie sur l'intervalle $[0, \varepsilon')$. Montrons qu'on peut prolonger cette géodésique en ε' . Soit $k \geq 0$ tel que $d(y_k, y) \leq (\varepsilon - \varepsilon')/2$ et soit γ une courbe C^1 de y_k à y de longueur $L(\gamma, g_N) < (\varepsilon - \varepsilon')/2$. La concaténation de la courbe γ et de la géodésique $t \mapsto \exp(y, tv)$ donne une courbe α de longueur

$$L(\alpha, g_N) = L(\gamma, g_N) + \varepsilon' \leq \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2} + \varepsilon' = \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2} < \varepsilon.$$

Comme la boule $B(x, \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2})$ est relativement compacte dans M , la courbe α se relève en une unique courbe $\tilde{\alpha}$ par f_k avec comme condition $\tilde{\alpha}(0) = x$. De plus, la courbe $\tilde{\alpha}$ admet un prolongement à droite. Donc $\alpha = f_k \circ \tilde{\alpha}$ se prolonge à droite. Ainsi il en est de même pour la géodésique $t \mapsto \exp(y, tv)$, d'où l'affirmation ci-dessus. Par l'équation 7.2, on en déduit que f_k converge C^∞ vers l'application

$$\exp(y, \cdot) \circ \exp(x, \cdot)^{-1},$$

sur la boule géodésique $B(x, \varepsilon)$. Ceci montre que

$$\Omega = \{x \in M \mid (f_k) \text{ converge } C^\infty \text{ sur toute boule géodésique centrée en } x\}.$$

En particulier Ω est ouvert. On déduit aussi de l'égalité précédente que Ω est fermé. En effet, si $(x_k) \in \Omega^N$ converge vers $x \in M$, alors pour $k \geq 0$ suffisamment grand, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $B(x_k, \varepsilon)$ est une boule géodésique et $x \in B(x_k, \varepsilon)$ (voir [Lee97, Lem. 5.12]). Comme $f_k|_{B(x, \varepsilon)}$ converge, la suite $(f_k(x))$ converge donc $x \in \Omega$. Par connexité, on a $\Omega = M$. Donc (f_k) converge C^∞ vers une application $f : M \rightarrow N$. Or

$$f^* \omega_N = \lim_k f_k^* \omega_N = \omega_M,$$

donc f préserve le parallélisme. ■

7.1.2 Markowitz-hyperbolique implique KR-hyperbolique

Cette section est consacrée à la preuve du Théorème suivant :

Théorème 7.6. *Soit M une variété conformément plate Markowitz-hyperbolique. Alors M est KR-hyperbolique et pour tout $x \in M$, il existe une application conforme $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ telle que*

$$g_{\text{KR}}^M|_x = \varphi_* g_{\mathbf{D}^{p,q}}|_x.$$

De plus, g_{KR}^M est localement Lipschitzienne.

Démonstration. On fixe une métrique g dans la classe conforme de M et un point $a \in \mathbf{D}^{p,q}$. Soient $x \in M$ et $\varphi_k : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ une suite d'applications conformes tels que $\varphi_k(a) = x$ et

$$\text{dc}(\varphi_k, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a) \rightarrow \nu_g(x).$$

Avec les notations de la proposition 7.1, la suite (φ_k) appartient à $\mathcal{F}_{\varepsilon, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g}(a, x)$ à partir d'un certain rang, pour ε tel que $0 < \varepsilon < \nu_g(x)$. Par la proposition 7.1, on peut extraire une sous-suite $(\varphi_{m(k)})$ qui converge C^∞ vers une application conforme $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$. Par passage à la limite on a

$$\text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a) = \nu_g(x),$$

donc $g_{\text{KR}}^M|_x = \varphi_* g_{\mathbf{D}^{p,q}}|_x$.

Montrons la continuité de ν_g . Soit (x_k) une suite de M telle que $x_k \rightarrow x \in M$. Pour tout $k \geq 0$, on peut trouver $\varphi_k : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ tel que $\varphi_k(a) = x_k$ et

$$\mathrm{dc}(\varphi_k, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a) = \nu_g(x_k).$$

Comme ν_g est semi-continue inférieurement (proposition 5.2), on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que

$$\nu_g(x_k) \geq \varepsilon, \text{ pour tout } k \geq 0.$$

Ainsi il existe un voisinage compact K de x tel que la suite (φ_k) appartient à $\mathcal{F}_{\varepsilon, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g}(a, K)$. Par la proposition 7.1, on peut extraire une sous-suite $(\varphi_{m(k)})$ qui converge C^∞ vers une application conforme $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$. Comme ν_g est semi-continue inférieurement, on a

$$\lim_k \nu_g(x_{m(k)}) = \lim_k \mathrm{dc}(\varphi_{m(k)}, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a) = \mathrm{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a) \geq \nu_g(x).$$

Or par définition de ν_g , on a $\nu_g(x) \geq \mathrm{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a)$, donc $\lim_k \nu_g(x_{m(k)}) = \nu_g(x)$. Ainsi la suite $(\nu_g(x_k))$ admet $\nu_g(x)$ comme seule valeur d'adhérence, donc ν_g est continue et M est bien KR-hyperbolique.

Montrons maintenant que $g_{\mathrm{KR}}^M = \nu_g^{-2}g$ est localement Lipschitzienne. Ceci revient à montrer que le facteur conforme ν_g est localement Lipschitzien. Quitte à remplacer M par son revêtement universel (ce qui ne change pas la régularité de g_{KR} par la proposition 5.4), on peut toujours supposer que M est développable, de telle sorte que toute application conforme $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ est injective (proposition 1.29). Soit $x \in M$. Pour simplifier les notations, on suppose que $B_{\delta_M}(x, 1)$ est relativement compact dans M .

Lemme 7.7. *Il existe un voisinage V de x et des constantes $c_1, c_2, c_3 > 0$ telles que pour tout $y \in V$ et pour tout $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ tel que $\varphi(a) = y$ et $\mathrm{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a) = \nu_g(y)$, on ait*

- (1) $B_{\delta_M}(y, c_1) \subset \varphi(B_{\delta_{\mathbf{D}^{p,q}}}(a, 1/2))$.
- (2) $c_2 \delta_{\mathbf{D}^{p,q}}(a_1, a_2) \leq \delta_M(\varphi(a_1), \varphi(a_2))$, pour tous $a_1, a_2 \in B_{\delta_{\mathbf{D}^{p,q}}}(a, 1/2)$.
- (3) $|\mathrm{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a_1) - \mathrm{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a_2)| \leq c_3 \delta_{\mathbf{D}^{p,q}}(a_1, a_2)$, pour tous $a_1, a_2 \in B_{\delta_{\mathbf{D}^{p,q}}}(a, 1/2)$.

Démonstration du lemme 7.7. Il suffit de trouver des voisinages V_1, V_2 et V_3 tels que V_i satisfait l'assertion (i) du lemme 7.7 et de prendre $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3$. Soit

$$\mathcal{F} = \{\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M \mid \varphi(a) \in \bar{B}_{\delta_M}(x, 1/2) \text{ et } \mathrm{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a) = \nu_g(\varphi(a))\}.$$

Comme ν_g est continue, on sait que la condition “ $\mathrm{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a) = \nu_g(\varphi(a))$ ” est fermée dans $\mathrm{Conf}(\mathbf{D}^{p,q}, M)$. Ainsi, la proposition 7.1 implique que \mathcal{F} est un compact de $\mathrm{Conf}(\mathbf{D}^{p,q}, M)$.

- (1) Montrons qu'il existe un voisinage V_1 de x et une constante $c_1 > 0$ tels que pour tout $y \in V_1$ et pour tout $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ tel que $\varphi(a) = y$ et $\mathrm{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a) = \nu_g(y)$, on ait $B_{\delta_M}(y, c_1) \subset \varphi(B_{\delta_{\mathbf{D}^{p,q}}}(a, 1/2))$. Supposons par l'absurde qu'il existe $(\varphi_k) \in \mathcal{F}^{\mathbf{N}}$ tel que $y_k = \varphi_k(a)$ converge vers $x \in M$ et qu'il existe une suite (z_k) telle que $\delta_M(y_k, z_k) \rightarrow 0$ et $z_k \notin \varphi_k(B_{\delta_{\mathbf{D}^{p,q}}}(a, 1/2))$. Par compacité, on peut supposer (quitte à extraire) que la suite (φ_k) converge C^∞ vers un élément $\varphi \in \mathcal{F}$. Comme $z_k \rightarrow x$ et $\varphi(a) = x$, la suite (z_k) appartient à $\varphi(B_{\delta_{\mathbf{D}^{p,q}}}(a, 1/4))$ à partir d'un certain rang (car l'application φ est ouverte). Or, pour $k \geq 0$ suffisamment grand, on a $\varphi(B_{\delta_{\mathbf{D}^{p,q}}}(a, 1/4)) \subset \varphi_k(B_{\delta_{\mathbf{D}^{p,q}}}(a, 1/2))$ car $\varphi_k \rightarrow \varphi$. Donc $z_k \in \varphi_k(B_{\delta_{\mathbf{D}^{p,q}}}(a, 1/2))$ à partir d'un certain rang, une contradiction.
- (2) Montrons qu'il existe un voisinage V_2 de x et une constante $c_2 > 0$ tels que pour tout $y \in V_2$ et pour tout $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ tel que $\varphi(a) = y$ et $\mathrm{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a) = \nu_g(y)$, on ait $c_2 \delta_{\mathbf{D}^{p,q}}(a_1, a_2) \leq \delta_M(\varphi(a_1), \varphi(a_2))$, pour tous $a_1, a_2 \in B_{\delta_{\mathbf{D}^{p,q}}}(a, 1/2)$. Soit $B =$

$B_{\delta_M}(x, 5/6)$. Comme δ_M et δ_B sont des distances localement équivalentes à des distances riemanniennes (voir théorème 2.24), on peut trouver un voisinage V_2 de x et une constance $c_2 > 0$ tels que $\delta_B(y, z) \leq (c_2)^{-1} \delta_M(y, z)$ pour tous $y, z \in V_2$. Quitte à réduire V_2 , on peut toujours supposer que $V_2 \subset B_{\delta_M}(x, 1/3)$. Soient $a_1, a_2 \in B_{\delta_{\mathbf{D}^{p,q}}}(a, 1/2)$ et $\varphi \in \mathcal{F}$ telle que $\varphi(a) \in V_2$. Comme $\varphi(B_{\delta_{\mathbf{D}^{p,q}}}(a, 1/2)) \subset B(x, 5/6)$, on a

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{D}^{p,q}}(a_1, a_2) &= \delta_{\mathbf{D}^{p,q}}(\varphi^{-1}(\varphi(a_1)), \varphi^{-1}(\varphi(a_2))) \\ &\leq \delta_B(\varphi(a_1), \varphi(a_2)) \\ &\leq (c_2)^{-1} \delta_M(\varphi(a_1), \varphi(a_2)). \end{aligned}$$

d'où le résultat.

- (3) Enfin, montrons qu'il existe un voisinage V_3 de x et une constante $c_3 > 0$ tels que pour tout $y \in V_3$ et pour tout $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ tel que $\varphi(a) = y$ et $\text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a) = \nu_g(y)$, on ait $|\text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a_1) - \text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a_2)| \leq c_3 \delta_{\mathbf{D}^{p,q}}(a_1, a_2)$, pour tous $a_1, a_2 \in B_{\delta_{\mathbf{D}^{p,q}}}(a, 1/2)$. Ceci est une conséquence du fait que l'application $\Psi : \text{Conf}(\mathbf{D}^{p,q}, M) \times \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\Psi(\varphi, b) = \text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, b)$ est localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et que \mathcal{F} est compact pour la topologie C^∞ . ■

On fixe un voisinage V et des constantes $c_1, c_2, c_3 > 0$ comme dans le lemme 7.7. Quitte à réduire V on peut supposer que $V \subset B_{\delta_M}(x, c_1/2)$. Soient $y, z \in V$ et soit $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ une application conforme telle que $\varphi(a) = y$ et $\text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a) = \nu_g(y)$. Comme $B(y, c_1) \subset \varphi(B(a, 1))$ et $\delta_M(y, z) \leq \delta(y, x) + \delta_M(x, z) \leq c_1$, on peut trouver $b \in \mathbf{D}^{p,q}$ tel que $\delta_{\mathbf{D}^{p,q}}(a, b) \leq 1/2$ et $\varphi(b) = z$. On a alors

$$\begin{aligned} \nu_g(z) &\geq \text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, b) \\ &\geq \text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a) - c_3 \delta_{\mathbf{D}^{p,q}}(a, b) \\ &\geq \text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a) - \frac{c_3}{c_2} \delta_M(y, z) \\ &= \nu_g(y) - \frac{c_3}{c_2} \delta_M(y, z). \end{aligned}$$

Donc $\nu_g(y) - \nu_g(z) \leq \frac{c_3}{c_2} \delta_M(y, z)$. De même, on a $\nu_g(y) - \nu_g(z) \leq \frac{c_3}{c_2} \delta_M(y, z)$, donc

$$|\nu_g(y) - \nu_g(z)| \leq \frac{c_3}{c_2} \delta_M(y, z), \text{ pour tous } y, z \in V. \quad \blacksquare$$

7.1.3 Un exemple de non continuité

Le but de cette section est de donner un exemple de domaine $\Omega_\varepsilon \subset \mathbf{R}^{1,1}$ qui est KR-hyperbolique et tel que la métrique de Kobayashi–Royden g_{KR} n'est pas continue. Pour cela, on commence par calculer explicitement la métrique de Kobayashi–Royden pour un domaine Markowitz-hyperbolique Ω_0 de $\mathbf{R}^{1,1}$ (voir Figure 7.1). On munit $\mathbf{R}^{1,1}$ d'une métrique plate \mathbf{b} et on fixe une fois pour toutes une base (e, f) dans laquelle la métrique \mathbf{b} prend l'expression

$$\mathbf{b}(xe + yf, xe + yf) = xy.$$

On oriente temporellement $\mathbf{R}^{1,1}$ de sorte que e soit un vecteur futur et f soit un vecteur passé.

La métrique de Ω_0

On note $\Omega_0 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^{1,1} \mid x > 0 \text{ et } |xy| < 1\}$ (voir Figure 7.1). Nous voulons étudier la métrique $g_{\mathbf{KR}}$ pour l'ouvert Ω_0 . Grâce au théorème 2.46, le domaine Ω_0 est Markowitz-hyperbolique. Une autre façon de justifier que Ω_0 est Markowitz-hyperbolique est de dire que c'est un ouvert faiblement dualement convexe qui ne contient pas de droite de lumière et d'appliquer la proposition 3.1. Ainsi, on sait déjà que $g_{\mathbf{KR}}$ est continue par le théorème 7.6. Nous allons vérifier que la régularité est en fait de classe C^∞ .

Le groupe conforme de Ω_0 fixe les deux points de $\overline{\Omega_0} \subset \mathbf{Ein}^{1,1}$ contenus dans le bord à l'infini. Il fixe donc le sommet à l'infini et est contenu dans $\text{Conf}(\mathbf{R}^{1,1})$. On en déduit que $\text{Conf}(\Omega_0) \subset SO_0(\mathbf{b}) \simeq \mathbf{R}$ est un groupe à 1 paramètre dont l'action s'écrit

$$t \cdot (x, y) = (e^t x, e^{-t} y),$$

dans la base (e, f) .

Soit $z = (x, y) \in \Omega_0$ et soit $D = D(a, b)$ un diamant contenant z et contenu dans Ω . On peut toujours agrandir D et supposer que D est maximal, de sorte que $b = (1/\lambda, -\lambda)$ et $a = (0, \lambda)$ pour un certain $\lambda > 0$. La condition $z \in D$ est alors équivalente à $\lambda \in (|y|, 1/x)$. Par la remarque 1.21, la métrique du diamant D s'écrit

$$g_D|_z = \frac{\|a - b\|^2}{\|a - z\|^2 \|b - z\|^2} \mathbf{b}|_z,$$

où $\|v\|^2 = |\mathbf{b}(v, v)|$. Un calcul direct donne que $g_D|_z = 2(xF_z(\lambda))^{-1} \mathbf{b}|_z$, où

$$F_z(\lambda) = (\lambda^{-1} - x)(\lambda^2 - y^2). \quad (7.3)$$

On note $\eta(z) = \sup_{\lambda \in (|y|, 1/x)} F_z(\lambda)$ et $\nu : \Omega_0 \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $g_{\mathbf{KR}} = \nu \cdot \mathbf{b}$, de sorte que

$$\nu(z) = 2(x\eta(z))^{-1}. \quad (7.4)$$

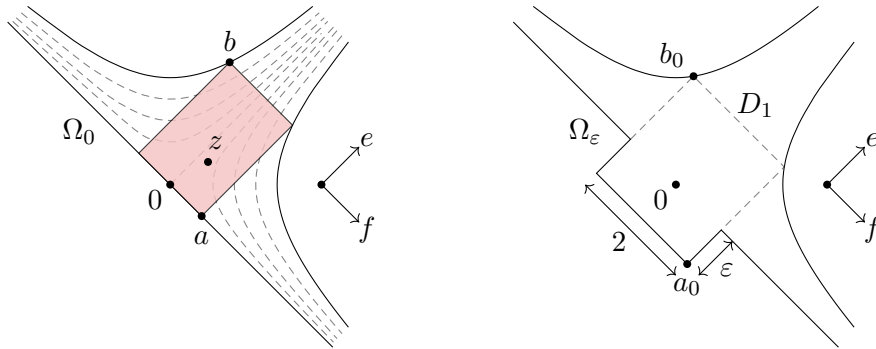


FIGURE 7.1 – À gauche : le domaine Ω_0 est la région contenue entre les trois courbes pleines. Les orbites du groupe conforme de Ω_0 sont représentées en pointillé. Le facteur conforme ν est constant le long de ces trajectoires. À droite : l'ouvert Ω_ε est obtenu en ajoutant à Ω_0 le diamant D_1 .

Calcul de η .

Nous détaillons rapidement la solution du problème d'optimisation sous contraintes

$$\eta(z) = \sup_{\lambda \in (|y|, 1/x)} F_z(\lambda).$$

La fonction $\lambda \mapsto F_z(\lambda)$ tend vers zéro aux bornes de l'intervalle $(|y|, 1/x)$, donc elle admet au moins un maximiseur sur cet intervalle. Un calcul direct donne

$$\frac{\partial F_z}{\partial \lambda}(\lambda) = -2x\lambda + 1 + y^2/\lambda^2.$$

La condition nécessaire du premier ordre implique qu'un maximiseur λ_{max} de $F_z(\cdot)$ est racine de l'équation $2x\lambda^3 - \lambda^2 - y^2 = 0$. Une étude de fonction montre que cette équation d'ordre 3 admet une unique solution réelle $\lambda(z)$, et le théorème des fonctions implicites assure que l'application $z \mapsto \lambda(z)$ est de classe C^∞ sur les deux sous-domaines $\{z \in \Omega_0 \mid y > 0\}$ et $\{z \in \Omega_0 \mid y < 0\}$. Remarquons qu'on pourrait écrire une formule explicite pour $\lambda(z)$ sur chacun de ces sous-domaines à l'aide des formules des solutions d'une équation du troisième degré¹. Lorsque $y = 0$, l'équation précédente admet une forme simple et on obtient $\lambda(x, 0) = (2x)^{-1}$. Par l'équation 7.3, on a donc $\eta(x, 0) = F_{x,0}(\lambda(x, 0)) = (4x)^{-1}$. En particulier, le facteur conforme est constant le long de la droite $\{y = 0\}$ et vaut $\nu(x, 0) = 2(x/4x)^{-1} = 8$ par l'équation 7.4.

Convergence du facteur conforme au voisinage du bord lumière de Ω_0 .

Montrons que la restriction de ν aux droites affines de lumière de direction f converge uniformément vers une constante lorsque l'on se rapproche de la droite $\mathbf{R}f$. Les métriques \mathbf{b} et $g_{KR} = \nu \cdot \mathbf{b}$ étant $\text{Conf}(\Omega_0)$ -invariantes, le facteur conforme ν est invariant sous l'action du groupe conforme de Ω_0 . Pour $t > 0$, on pose

$$\begin{aligned} \nu_t : \quad (-t^{-1}, t^{-1}) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ y &\longmapsto \nu(t, y). \end{aligned}$$

L'invariance de ν se traduit par la relation $\nu_t(y) = \nu_1(ty)$. Ainsi, on obtient

$$\nu_t(y) = \nu_1(ty) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \nu_1(0) = \nu(1, 0) = 8.$$

Donc $\nu_t \rightarrow 8$ uniformément sur tout compact (car ν est continue au voisinage de $(1, 0)$).

La métrique de Ω_ε

Soit $\varepsilon > 0$ et soient $a_1 = -\varepsilon e + f$ et $b_1 = e - f$. On pose $D_1 = D(a_1, b_1)$ et on note $\Omega_\varepsilon := \Omega_0 \cup D_1$ (voir Figure 7.1). Contrairement à Ω_0 , le domaine Ω_ε n'est plus Markowitz-hyperbolique. En effet, la distance δ_{Mark} est identiquement nulle sur la portion de droite lumière $\Omega_\varepsilon \cap \mathbf{R}f = (-f, f)$ (voir aussi la Figure 2.3).

Proposition 7.8. *Si $\varepsilon < 1/7$, la métrique de Kobayashi–Royden de l'ouvert Ω_ε n'est pas continue en 0.*

Démonstration. Commençons par montrer que D_1 est un diamant maximisant en 0, c'est-à-dire $g_{KR}|_0 = g_{D_1}|_0$. Pour tout $\ell \in (0, 1]$, on définit $D_\ell = D(a_\ell, b_\ell)$, où $a_\ell = -\varepsilon e + \ell f$ et $b_\ell = \ell^{-1}e - \ell f$. Les diamants maximaux de Ω_0 contenant 0 sont tous de la forme D_ℓ pour un certain $\ell \in (0, 1]$. Il faut donc montrer que D_1 maximise la distorsion conforme en 0 parmi les diamants $(D_\ell)_{\ell \in (0, 1]}$. Or

$$g_{D_\ell}|_0 = \frac{\|a_\ell - b_\ell\|^2}{\|a_\ell\|^2 \|b_\ell\|^2} \mathbf{b}|_0 = \frac{(\ell^{-1} + \varepsilon)2\ell}{\ell\varepsilon \times 1} \mathbf{b}|_0 = \left(1 + \frac{1}{\ell\varepsilon}\right) \mathbf{b}|_0 \geq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \mathbf{b}|_0 = g_{D_1}|_0,$$

1. En utilisant le changement de variable $\alpha = \lambda^{-1}$, l'équation $2x\lambda^3 - \lambda^2 - y^2 = 0$ devient $\alpha^3 + y^{-2}\alpha - 2xy^{-2} = 0$. On est ramené à une équation de la forme $\alpha^3 + p\alpha + q = 0$ dont l'expression des solutions est connue.

donc D_1 est bien maximisant en 0. En particulier $g_{\text{KR}}^{\Omega_\varepsilon}|_0 = (1 + \frac{1}{\varepsilon}) \mathbf{b}|_0$.

Montrons maintenant qu'il existe un voisinage de l'origine V tel que $g_{\text{KR}}^{\Omega_\varepsilon}$ et $g_{\text{KR}}^{\Omega_0}$ coïncident sur $V \cap \Omega_\varepsilon$. Soit $z = (x, y) \in \Omega_0$ tel que $x < 1 - \varepsilon$ et $|y| < 1$. Soit $\ell \in (0, 1]$ tel que $x\ell < 1$ et $|y| < \ell$, de sorte que $z \in D_\ell$. On peut minorer la distorsion conforme de D_ℓ en z comme suit :

$$\begin{aligned} g_{D_\ell}|_z &= \frac{\|a_\ell - b_\ell\|^2}{\|a_\ell - z\|^2 \|b_\ell - z\|^2} \mathbf{b}|_z \\ &= \frac{(\ell^{-1} + \varepsilon)2\ell}{(\ell^{-1} - x)(\ell - y)(\ell + y)(\varepsilon + x)} \mathbf{b}|_z \\ &= \frac{2 + 2\varepsilon\ell}{(\ell^{-1} - x)(\ell^2 - y^2)(\varepsilon + x)} \mathbf{b}|_z \\ &> \frac{2}{(\ell^{-1} - x)(\ell^2 - y^2)x} \mathbf{b}|_z && \text{(Car } x < 1 - \varepsilon) \\ &= \frac{2}{F_z(\ell)x} \mathbf{b}|_z && \text{(Eq. 7.3)} \\ &\geq g_{\text{KR}}^{\Omega_0}|_z. && \text{(Eq. 7.4)} \end{aligned}$$

Or tout diamant maximal de Ω_ε contenant z est soit un diamant maximal de Ω_0 , soit de la forme D_ℓ . On en déduit que $g_{\text{KR}}^{\Omega_\varepsilon} = g_{\text{KR}}^{\Omega_0}$ sur l'ouvert $V = \{z \in \Omega_0 \mid x < 1 - \varepsilon\}$. En particulier

$$\lim_{x \rightarrow 0} g_{\text{KR}}^{\Omega_\varepsilon}|_{(x,0)} = 8\mathbf{b}|_0 < \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \mathbf{b}|_0 = g_{\text{KR}}^{\Omega_\varepsilon}|_0. \quad \blacksquare$$

7.2 Métrique pseudo-riemannienne de Carathéodory

On introduit maintenant une métrique pseudo-riemannienne qui est l'analogie de la distance de Carathéodory pour la métrique de Kobayashi–Royden g_{KR} . Un des défauts de cette construction est qu'elle ne fait sens que pour les variétés conformément plates développables à développante propre (i.e. l'image de l'application de développement est un ouvert propre de l'univers d'Einstein). Dans ce contexte, la variété est Markowitz-hyperbolique donc Kobayashi–Royden-hyperbolique ce qui permet d'obtenir de la compacité pour les applications conformes comme à la section 7.1.2.

7.2.1 Propriétés de la métrique de Carathéodory

Soit M une variété conformément plate et g une métrique de la classe conforme. On pose $\eta : M \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ la fonction définie par

$$\eta_g(x) = \sup_{\varphi} \text{dc}(\varphi, g, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, x),$$

où le supremum est pris sur toutes les applications conformes $\varphi : M \rightarrow \mathbf{D}^{p,q}$, avec la convention $\sup \emptyset = 0$. La *métrique pseudo-riemannienne de Carathéodory de M* est définie comme

$$g_{\text{Car}}^M = \eta_g^2 g.$$

Comme dans la section 5.1, on vérifie que cette définition ne dépend pas du choix de la métrique g dans la classe conforme. On peut aussi définir g_{Car} grâce à l'ordre \leq_x sur $[g]_x$: pour $x \in M$ on a

$$g_{\text{Car}}^M|_x = \sup_{\varphi} \varphi^* g_{\mathbf{D}^{p,q}}|_x, \quad (7.5)$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des applications conformes $\varphi : M \rightarrow \mathbf{D}^{p,q}$.

Grâce au lemme de Schwarz, on peut calculer la métrique de Carathéodory du diamant (la preuve est identique à celle du Corollaire 5.20) :

Proposition 7.9. $g_{\text{Car}}^{\mathbf{D}^{p,q}} = g_{\mathbf{D}^{p,q}}$. ■

De plus, la propriété de naturalité de la métrique de Kobayashi–Royden est aussi valable pour la métrique de Carathéodory :

Proposition 7.10. Soit $f : M \rightarrow N$ une application conforme. Alors $f^* g_{\text{Car}}^N \leq g_{\text{Car}}^M$. ■

On en déduit le corollaire suivant qui permet de décrire exactement quand la métrique pseudo-riemannienne de Carathéodory est non-dégénérée.

Corollaire 7.11. Soit M une variété conformément plate et g une métrique dans sa classe conforme. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) Il existe $x \in M$ tel que $\eta_g(x) > 0$.
- (2) Pour tout $x \in M$, il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que $c_1 \leq \eta_g \leq c_2$ au voisinage de x .
- (3) M est développable à développante d'image propre.

Démonstration. L'implication (2) \Rightarrow (1) est immédiate. Montrons (1) \Rightarrow (3). Soit $x \in M$ tel que $\eta_g(x) > 0$. Il existe une application conforme $\varphi : M \rightarrow \mathbf{D}^{p,q}$. Soit $D \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ un diamant de $\mathbf{Ein}^{p,q}$ et $\psi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow D$ un difféomorphisme conforme. Alors $\text{dev} = \psi \circ \varphi : M \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ est une application de développement d'image D , donc l'image de dev est propre. Enfin, montrons (3) \Rightarrow (2). Soit $\text{dev} : M \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ une développante d'image propre. On peut toujours trouver un diamant $D \subset \mathbf{Ein}^{p,q}$ contenant $\text{dev}(M)$. Soit $\psi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow D$ un difféomorphisme conforme et $\varphi = \psi^{-1} \circ \text{dev} : M \rightarrow \mathbf{D}^{p,q}$. Par la proposition 7.9 et la proposition 7.10, on a

$$\varphi^* g_{\mathbf{D}^{p,q}} = \varphi^* g_{\text{Car}}^{\mathbf{D}^{p,q}} \leq g_{\text{Car}}^M.$$

Donc le facteur conforme de g_{Car}^M est localement minoré par une constante positive. De plus, pour tout $x \in M$, on peut trouver un plongement conforme $f : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ contenant x dans son image. Encore une fois, par la proposition 7.9 et la proposition 7.10, on a

$$g_{\text{Car}}^M \leq \varphi_* g_{\text{Car}}^{\mathbf{D}^{p,q}} = \varphi_* g_{\mathbf{D}^{p,q}}.$$

donc le facteur conforme de g_{Car}^M est localement majoré par une constante positive. ■

Comme pour la métrique de Kobayashi–Royden des variétés Markowitz-hyperboliques, le problème d'optimisation donné par l'équation 7.5 admet toujours une solution.

Proposition 7.12. Soit M une variété conformément plate développable à développante propre. Alors, pour tout $x \in M$, il existe une application conforme $\varphi : M \rightarrow \mathbf{D}^{p,q}$ telle que

$$g_{\text{Car}}^M|_x = \varphi^* g_{\mathbf{D}^{p,q}}|_x.$$

Démonstration. Comme $\text{dev} : M \rightarrow \mathbf{Ein}^{p,q}$ est d'image propre, son image est Markowitz-hyperbolique. Ainsi M est Markowitz-hyperbolique par la proposition 2.26. On fixe g une métrique dans la classe conforme de M . Soit $x \in M$ et soit $\varphi_k : M \rightarrow \mathbf{D}^{p,q}$ une suite d'applications conformes telle que

$$\text{dc}(\varphi_k, g, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, x) \rightarrow \eta_g(x).$$

On peut toujours composer chacun des φ_k par un élément convenable de $\text{Conf}(\mathbf{D}^{p,q})$ et supposer qu'il existe $a \in \mathbf{D}^{p,q}$ tel que $\varphi_k(x) = a$ pour tout $k \geq 0$. Par la proposition 7.1, on peut extraire une sous-suite telle que $\varphi_{m(k)}$ converge C^∞ vers une application conforme $\varphi : M \rightarrow \mathbf{D}^{p,q}$. En particulier

$$\text{dc}(\varphi, g, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, x) = \lim_k \text{dc}(\varphi_{m(k)}, g, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, x) = \eta_g(x),$$

donc $g_{\text{Car}}^M|_x = \eta_g(x)^2 g|_x = \text{dc}(\varphi, g, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, x)^2 g|_x = \varphi^* g_{\mathbf{D}^{p,q}}|_x$. \blacksquare

7.2.2 Lien avec la métrique de Kobayashi–Royden

Pour une variété conformément plate, le lemme de Schwarz implique une inégalité entre les métriques de Carathéodory et de Kobayashi–Royden :

Proposition 7.13. *Soit M une variété conformément plate. Alors $g_{\text{Car}}^M \leq g_{\text{KR}}^M$.*

Démonstration. Soient $x \in M$ et $a \in \mathbf{D}^{p,q}$ et soit $\varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ une application conforme telle que $\varphi(a) = x$. On fixe g une métrique dans la classe conforme de M . Soit $\psi : M \rightarrow \mathbf{D}^{p,q}$ une application conforme. Alors la composée $\psi \circ \varphi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow \mathbf{D}^{p,q}$ est une application conforme, donc par la lemme de Schwarz on a :

$$\begin{aligned} 1 &\geq \text{dc}(\psi \circ \varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, a) \\ &= \text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a) \text{dc}(\psi, g, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, x). \end{aligned}$$

Ainsi $\text{dc}(\psi, g, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, x) \leq \text{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a)^{-1}$, donc, par passage aux bornes inférieures et supérieures, on obtient

$$\eta_g(x) \leq \nu_g(x)^{-1},$$

ce qui implique le résultat. \blacksquare

Pour le diamant $\mathbf{D}^{p,q}$, on sait que l'inégalité de la proposition précédente est une égalité. On peut montrer que c'est le seul cas d'égalité :

Proposition 7.14. *Soit M une variété conformément plate développable à développante propre. On suppose qu'il existe un point $x \in M$ tel que*

$$g_{\text{Car}}^M|_x = g_{\text{KR}}^M|_x.$$

Alors M est conformément équivalente à $\mathbf{D}^{p,q}$.

Remarque 7.15. Cet énoncé est inspiré d'un résultat analogue en géométrie complexe dû à Wong et Rosay (voir [Won77, Thm E] et [Ros79, Lem. 1]). Dans le cadre complexe, les applications conformes sont remplacées par des applications holomorphes et le diamant est remplacé par la boule unité de \mathbf{C}^n .

Démonstration. Par la proposition 7.12, il existe $\varphi : M \rightarrow \mathbf{D}^{p,q}$ une application conforme telle que

$$\varphi^* g_{\mathbf{D}^{p,q}}|_x = g_{\text{Car}}^M|_x.$$

De plus, comme M est à développante propre, la variété M est Markowitz-hyperbolique. Par le théorème 7.6, il existe une application conforme $\psi : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow M$ telle que $\psi(a) = x$ pour un certain $a \in \mathbf{D}^{p,q}$ et

$$\psi_* g_{\mathbf{D}^{p,q}}|_x = g_{\text{KR}}^M|_x.$$

Soit $f : \mathbf{D}^{p,q} \rightarrow \mathbf{D}^{p,q}$ l'application définie par $f = \varphi \circ \psi$. On a

$$\mathrm{dc}(f, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, a) = \mathrm{dc}(\varphi, g, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, x) \mathrm{dc}(\psi, g_{\mathbf{D}^{p,q}}, g, a) = 1,$$

où g est une métrique dans la classe conforme. Par le cas d'égalité dans le lemme de Schwarz, l'application f est un élément de $\mathrm{Conf}(\mathbf{D}^{p,q})$. Montrons que ψ est surjective. Par connexité, il suffit de montrer que $\psi(\mathbf{D}^{p,q})$ est fermé dans M . Pour tous $x, y \in \mathbf{D}^{p,q}$, on a :

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{D}^{p,q}}(x, y) &= \delta_{\mathbf{D}^{p,q}}(f(x), f(y)) \\ &= \delta_{\mathbf{D}^{p,q}}(\varphi \circ \psi(x), \varphi \circ \psi(y)) \\ &\leq \delta_M(\psi(x), \psi(y)). \end{aligned}$$

Or, comme ψ est une application conforme, on sait déjà que $\delta_M(\psi(x), \psi(y)) \leq \delta_{\mathbf{D}^{p,q}}(x, y)$ par la proposition 2.19. Ainsi

$$\delta_M(\psi(x), \psi(y)) = \delta_{\mathbf{D}^{p,q}}(x, y) \text{ pour tous } x, y \in \mathbf{D}^{p,q}. \quad (7.6)$$

Soit $(x_k) \in \Omega^{\mathbf{N}}$ une suite telle que $y_k = f(x_k)$ converge vers un élément $y \in M$. Comme (y_k) est une suite convergente, elle est de Cauchy, donc (x_k) est de Cauchy par l'équation 7.6. Comme $\delta_{\mathbf{D}^{p,q}}$ est complète (voir la proposition 2.31), on en déduit que (x_k) converge vers un point $x \in \mathbf{D}^{p,q}$, donc $y = f(x) \in f(\mathbf{D}^{p,q})$. Ainsi $f(\mathbf{D}^{p,q})$ est fermé dans M , ce qui conclut la preuve. ■

7.2.3 Une application pour les espace-temps Cauchy-compact

Dans cette section, nous allons donner une application de la proposition 7.14 à la géométrie des ouverts causalement convexes de l'espace de Minkowski. Cette application est inspirée du théorème de Wong et Rosay en géométrie complexe, qui est lui-même une application de la version holomorphe de la proposition 7.14 (voir [Won77] et [Ros79]).

On se donne un ouvert propre $\Omega \subset \widehat{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ dualement convexe, ce qui revient à être causalement convexe globalement hyperbolique maximal, voir section 3.1. On se donne une identification $\widehat{\mathbf{Ein}}^{1,n-1} = \mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1}$. Soit U la projection orthogonale de Ω sur \mathbf{S}^{n-1} . On peut alors trouver deux fonctions 1-Lipschitziennes $f_+, f_- : U \rightarrow L$ qui coïncident sur ∂U telles que

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbf{R} \times U \mid f_-(x) < t < f_+(x)\}.$$

On note $f : \partial U \rightarrow L$ la valeur commune de f_+ et f_- sur ∂U et on note $\partial_e \Omega = \mathrm{Gr}(f)$ le graphe de f . On dira que $\partial_e \Omega$ est le *bord espace* de Ω . On dira que $p = (f(x), x) \in \partial_e \Omega$ est un *point de régularité* C^2 si \bar{U} est une sous-variété à bord de classe C^2 au voisinage de x et f est de classe C^2 au voisinage de x , avec $T_p \partial_e \Omega$ de signature riemannienne.

On dira que Ω est *Cauchy quasi-homogène* s'il existe une surface de Cauchy $\Sigma \subset \Omega$ et il existe un compact $K \subset \Sigma$ tels que

$$\Sigma = G_\Sigma \cdot K,$$

où G_Σ est le stabilisateur de Σ dans $\mathrm{Conf}(\Omega)$, i.e. $G_\Sigma = \{g \in \mathrm{Conf}(\Omega) \mid g(\Sigma) = \Sigma\}$.

Proposition 7.16. *Tout ouvert causalement convexe maximal de $\widehat{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$ qui est Cauchy quasi-homogène et avec un point de régularité C^2 dans le bord espace, est un diamant.*

Démonstration. Soit Ω un ouvert causalement convexe maximal de $\widehat{\mathbf{Ein}}^{1,n-1}$, Cauchy quasi-homogène, tel que $p \in \Omega$ est un point de régularité C^2 de $\partial_e \Omega$. On garde les notations précédentes pour Ω . Comme $T_p \partial_e \Omega$ est riemannien, on peut trouver deux diamants D_1 et D_2

disjoints tels que $p \in \partial_e D_1 \cap \partial_e D_2$ et $T_p \partial_e \Omega = T_p \partial_e D_1 = T_p \partial_e D_2$. Comme p est un point de régularité C^2 , on peut toujours réduire D_1 et D_2 et les interchanger si besoin de sorte que $D_1 \subset \Omega \subset D_2^* = \overline{\mathbf{Ein}^{1,n-1}} \setminus \cup_{x \in \overline{D_2}} C(x)$. On a alors, pour tout $x \in D_1$:

$$g_{D_2^*}|_x = g_{\text{Car}^*}^{D_2^*}|_x \leq g_{\text{Car}}^\Omega|_x \leq g_{\text{KR}}^\Omega|_x \leq g_{\text{KR}}^{D_1}|_x = g_{D_1}|_x \quad (7.7)$$

Comme Ω est Cauchy quasi-homogène, on peut trouver une surface de Cauchy Σ telle que G_Σ agit cocompactement sur Σ . On peut écrire $\Sigma = \text{Gr}(h)$, où $h : U \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction 1-Lipschitzienne telle que $f_- < h < f_+$. On note $\alpha : D_1 \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 1}$ la fonction telle que $g_{D_1} = \alpha^2 g_{D_2^*}$ (la fonction α est bien à valeurs dans $\mathbf{R}_{\geq 1}$ par le lemme de Schwarz). Soit x la projection de p sur U et soit $(x_k) \in U^{\mathbf{N}}$ une suite de U convergeant vers x le long de la droite $T_x U^\perp$. On note $p_k = (h(x_k), x_k) \in \Sigma^{\mathbf{N}}$. Par la formule 1.21, on a $\alpha(p_k) \rightarrow 1$ quand $k \rightarrow \infty$. En notant $\beta : \Omega \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 1}$ la fonction telle que $g_{\text{KR}}^\Omega = \beta^2 g_{\text{Car}}^\Omega$, l'équation 7.7 implique que $1 \leq \beta(p_k) \leq \alpha(p_k)$, donc

$$\beta(p_k) \rightarrow 1.$$

Or, comme Ω est Cauchy-cocompact, on peut trouver une suite $(g_k) \in \text{Conf}(\Omega)$ telle que (quitte à extraire) la suite $(g_k(p_k))$ converge vers un point $p' \in \Omega$. Ainsi on a

$$\beta(p') = \lim_k \beta(g_k(p_k)) = \lim_k \beta(g_k(p_k)) = 1,$$

Donc $g_{\text{KR}}^\Omega|_{p'} = g_{\text{Car}}^\Omega|_{p'}$. Par la proposition 7.14, on en déduit que Ω est un diamant. ■

Remarque 7.17. Il est aussi possible d'obtenir la conclusion de la proposition 7.16 sans utiliser la métrique de Carathéodory et de Kobayashi–Royden avec des techniques dynamiques similaires à celles développées en section 6.4.2.

7.3 Métrique de Kobayashi–Royden pour les domaines de Bonsante

Dans cette section, nous menons une étude détaillée de la métrique de Kobayashi–Royden pour une classe d'ouverts de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ introduite par Bonsante dans [Bon05, Section 4]. Pour cette famille d'exemples que nous appellerons *domaines de Bonsante*, la métrique de Kobayashi–Royden est de classe C^1 et admet des dérivées secondes presque partout, et la courbure sectionnelle est ≤ 1 au sens de Alexander-Bishop [AB08].

7.3.1 Temps cosmologique

Nous rappelons la notion de temps cosmologique pour un espace-temps. Nous renvoyons à [AGH98] pour une étude détaillée. Soit (M, g) un espace-temps (i.e. M est une variété lorentzienne orientée en temps). Pour deux points $x, y \in M$ avec $x \leq y$, la *distance lorentzienne* entre x et y est par définition

$$\tau(x, y) = \sup_\gamma \int \sqrt{|g(\gamma', \gamma')|}.$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des courbes causales futures γ de x à y . La *fonction temps cosmologique* de M est la fonction $\mathbf{t} : M \rightarrow (0, +\infty]$ définie par

$$\mathbf{t}(y) = \sup_{x < y} \tau(x, y),$$

On dit que le temps cosmologique est *régulier* s'il satisfait les deux conditions suivantes :

- le temps cosmologique est fini : $\mathbf{t}(y) < +\infty$ pour tout $y \in M$;
- pour toute courbe causale passée inextensible $\gamma : [0, 1) \rightarrow M$, on a $\mathbf{t}(\gamma(t)) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 1$.

Rappelons la propriété fondamentale suivante des espace-temps admettant un temps cosmologique régulier :

Proposition 7.18 ([AGH98, Prop. 3.1]). *Soit (M, g) un espace-temps avec un temps cosmologique \mathbf{t} régulier. Alors le temps cosmologique \mathbf{t} est localement semi-convexe². En particulier τ est deux fois différentiable presque partout.*

7.3.2 Domaines futur-complets

On muni $\mathbf{R}^{1,n-1}$ de sa métrique plate \mathbf{b} et d'une orientation temporelle. Étant donné un vecteur $v \in \mathbf{R}^{1,n-1}$, on notera abusivement $\|v\| = \sqrt{|\mathbf{b}(v, v)|}$ la *norme lorentzienne* de v . Les ensembles $I^+(x)$ (resp. $I^-(x)$, $J^+(x)$, $J^-(x)$) feront référence au futur chronologique d'un point x dans $\mathbf{R}^{1,n-1}$ (resp. passé chronologique, etc...).

Définition 7.19. On dit qu'un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^{1,n-1}$ est *futur-complet* si $I^+(x) \subset \Omega$ pour tout $x \in \Omega$.

Ceci revient à dire que toute demi-droite future issue d'un point de Ω est contenue dans Ω , ou de façon équivalente $\Omega = I^+(\Omega)$.

Remarque 7.20. Un ouvert futur-complet est toujours causalement convexe dans $\mathbf{R}^{1,n-1}$. En particulier, le passé chronologique d'un point $x \in (\Omega, \mathbf{b})$ est l'intersection $I^-(x) \cap \Omega$, où $I^-(x)$ est le passé de x dans $(\mathbf{R}^{1,n-1}, \mathbf{b})$.

Fixons Ω un domaine futur-complet, qu'on muni de la métrique \mathbf{b} . Comme Ω est causalement convexe, la distance lorentzienne de (Ω, \mathbf{b}) prend l'expression

$$\tau(x, y) = \|y - x\|,$$

pour tout $x, y \in \Omega$ tels que $x \leq y$. Ainsi, le temps cosmologique d'un ouvert futur-complet prend l'expression suivante :

$$\mathbf{t}(y) = \sup_{x < y} \|y - x\|, \quad (7.8)$$

où x varie dans $I^-(y) \cap \Omega$.

Proposition 7.21. *Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^{1,n-1}$ un domaine futur-complet qui évite un hyperplan riemannien. Alors le temps cosmologique de (Ω, \mathbf{b}) est régulier. De plus, la métrique de Kobayashi–Royden prend l'expression*

$$g_{\text{KR}}^\Omega|_x = \frac{\mathbf{b}|_x}{\mathbf{t}(x)^2}.$$

En particulier, la métrique de Kobayashi–Royden de Ω est deux fois différentiable presque partout.

2. On dit qu'une fonction $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ est localement semi-convexe s'il existe au voisinage de tout point une fonction lisse g telle que $f + g$ est convexe.

Remarque 7.22. On sait déjà que le complémentaire d'un hyperplan riemannien dans $\mathbf{R}^{1,n-1}$ est Markowitz-hyperbolique. Ceci est, par exemple, une conséquence de la proposition 3.1, car le complémentaire d'un hyperplan riemannien est un domaine faiblement dualement convexe de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ qui ne contient pas de droite de lumière (le calcul explicite de la distance de Markowitz du complémentaire d'un hyperplan riemannien est réalisé dans [Mar82]). Ainsi, si Ω est un domaine de $\mathbf{R}^{1,n-1}$ qui évite un hyperplan riemannien, alors Ω est Markowitz-hyperbolique par la proposition 2.26. En particulier, on sait déjà que la métrique de Kobayashi–Royden est localement Lipschitzienne par le théorème 7.6.

Démonstration. Commençons par montrer que le temps cosmologique est régulier. Soit H un hyperplan riemannien qui évite Ω et soit $U = I^+(H)$. Pour $x \in \Omega$ on a

$$I^-(x) \cap \Omega \subset I^-(x) \cap U,$$

et $I^-(x) \cap U$ est relativement compact dans $\mathbf{R}^{1,n-1}$, donc $I^-(x) \cap \Omega$ est relativement compact dans $\mathbf{R}^{1,n-1}$. En particulier, par l'équation 7.8, la fonction temps cosmologique $\mathbf{t}(y) = \sup_{x \in I^-(x) \cap \Omega} \|y - x\|$ est finie en tout point et pour tout $y \in \Omega$, la borne supérieure est atteinte en au moins un point $y \in \partial\Omega \cap J^-(x)$. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ une courbe causale passée inextensible (dans le passé). Rappelons que $\mathbf{R}^{1,n-1}$ est globalement hyperbolique et que H est une surface de Cauchy de $\mathbf{R}^{1,n-1}$. Comme $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^{1,n-1}$ ne rencontre pas H , on peut étendre γ en 1 par une valeur $\gamma(1) \in \partial\Omega$. Supposons que $\mathbf{t}(\gamma(t)) \not\rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 1$. Comme

$$I^-(\gamma(t)) \cap \Omega \subset I^-(\gamma(0)) \cap \Omega \text{ pour tout } t \in [0, 1],$$

et que $I^-(\gamma(0)) \cap \Omega$ est compact, on peut trouver une suite $t_k \rightarrow 1$ et une suite $(x_k) \in \partial\Omega$ avec $x_k \in J^-(\gamma(t_k))$ et

$$\|x_k - \gamma(t_k)\| \not\rightarrow 0.$$

Quitte à extraire, la suite (x_k) converge vers un élément $x \in J^-(\gamma(1))$ et $\|x - \gamma(1)\| \neq 0$. Donc $\gamma(1) \in I^+(x) \subset \Omega$, ce qui contredit $\gamma(1) \in \partial\Omega$. Ainsi, le temps cosmologique est bien régulier.

Calculons maintenant $g_{\mathbf{KR}}$. En utilisant la définition 5.1, on a $g_{\mathbf{KR}} = \nu_{\mathbf{b}}^{-2} \cdot \mathbf{b}$. Il suffit donc de montrer $\nu_{\mathbf{b}} = \mathbf{t}$. Étant donné un point $a \in \mathbf{R}^{1,n-1}$, rappelons que l'ouvert $I^+(a)$ est conformément difféomorphe à $\mathbf{D}^{1,n-1}$, et que la métrique $\varphi_* g_{\mathbf{D}^{1,n-1}}$ donnée par une identification $\varphi : \mathbf{D}^{1,n-1} \rightarrow I^+(a)$ vaut

$$\varphi_* g_{\mathbf{D}^{1,n-1}}|_x = \frac{\mathbf{b}|_x}{\|x - a\|^2}.$$

Voir aussi la remarque 1.21. Soit $x \in \Omega$ et D un diamant contenant x et contenu dans Ω . Soit a tel que $I^+(a) = I^+(D)$ (le point a est le sommet “passé” de D). Par construction le point a appartient à \overline{D} . Soit $\varphi : \mathbf{D}^{1,n-1} \rightarrow D$ un difféomorphisme conforme. Par le lemme de Schwarz, on a

$$\mathrm{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{1,n-1}}, \mathbf{b}, \varphi^{-1}(x)) \leq \|x - a\| \leq \mathbf{t}(x).$$

Donc $\nu_{\mathbf{b}}(x) \leq \mathbf{t}(x)$. Réciproquement, si $a \in I^-(x)$, alors pour $\varphi : \mathbf{D}^{1,n-1} \rightarrow I^+(a)$ un difféomorphisme conforme, on a

$$\|x - a\| = \mathrm{dc}(\varphi, g_{\mathbf{D}^{1,n-1}}, \mathbf{b}, \varphi^{-1}(x)) \leq \nu_{\mathbf{b}}(x),$$

donc $\mathbf{t}(x) \leq \nu_{\mathbf{b}}(x)$. Ainsi $\nu_{\mathbf{b}}(x) = \mathbf{t}(x)$. Par le théorème 7.18, on en déduit que $\nu_{\mathbf{b}}$ est deux fois différentiable presque partout. ■

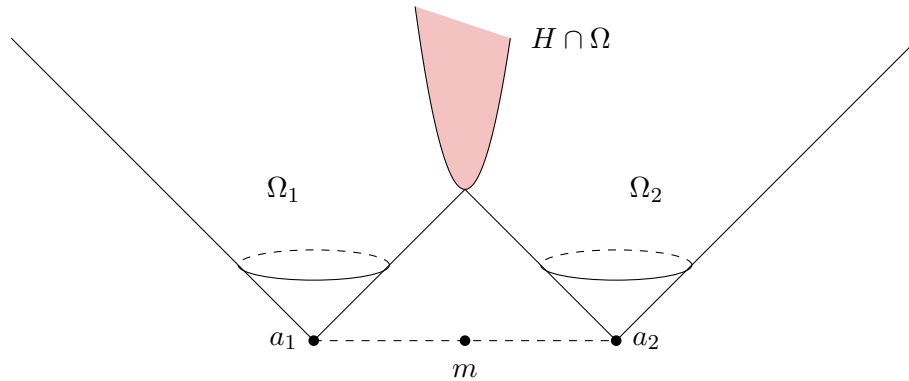


FIGURE 7.2 – Réunion de deux diamants $I^+(a_1)$ et $I^+(a_2)$ avec un sommet commun à l’infini. L’hyperplan médiateur $H = m + (a_2 - a_1)^\perp$ délimite deux régions $\Omega_1 \subset I^+(a_1)$ et $\Omega_2 \subset I^+(a_2)$ sur lesquelles g_{KR}^Ω coïncide avec $g_{I^+(a_1)}$ et $g_{I^+(a_2)}$, respectivement.

Exemple 7.23. Soient $a_1, a_2 \in \mathbf{R}^{1,n-1}$ deux points qui ne sont pas causalement reliés. Alors le domaine $\Omega = I^+(a_1) \cup I^+(a_2)$ est un domaine futur-complet évitant un hyperplan riemannien (voir Figure 7.2). Soit H l’hyperplan médiateur entre a_1 et a_2 , i.e. H est l’hyperplan de direction $m = (a_2 - a_1)^\perp$ passant par $(a_1 + a_2)/2$. L’hyperplan H découpe Ω en deux régions Ω_1 et Ω_2 de sorte que

$$\mathbf{t}(x) = \|x - a_i\| \iff x \in \Omega_i.$$

La métrique de Kobayashi–Royden de Ω prend l’expression

$$g_{\text{KR}}^\Omega|_x = \begin{cases} \frac{\mathbf{b}|_x}{\|x - a_1\|^2} & \text{si } x \in \Omega_1, \\ \frac{\mathbf{b}|_x}{\|x - a_2\|^2} & \text{si } x \in \Omega_2 \end{cases}.$$

La métrique g_{KR}^Ω est donc C^∞ sur deux ouverts dont la réunion est dense, et n’est pas différentiable en tous les points de $H \cap \Omega$.

7.3.3 Domaines de Bonsante

Nous venons de voir (proposition 7.21) que la métrique de Kobayashi–Royden des domaines futurs complets admet une régularité inattendue. Nous introduisons maintenant une classe de domaines étudiés par Bonsante [Bon05] pour lesquels la métrique de Kobayashi–Royden a une régularité C^1 .

Définition 7.24. Nous appellerons *domaine de Bonsante* tout ouvert convexe futur-complet qui évite au moins un hyperplan riemannien.

Pour un ouvert convexe Ω , la condition “ Ω évite au moins un hyperplan riemannien” équivaut à demander que Ω admette au moins un hyperplan d’appui riemannien. Le temps cosmologique d’un domaine de Bonsante est de classe C^1 :

Proposition 7.25 ([Bon05, Prop. 4.3]). *Soit Ω un domaine de Bonsante. Alors pour tout $x \in \Omega$, il existe un unique point $\mathbf{t}(x) \in \partial\Omega \cap J^-(x)$ tel que*

$$t(x) = \|r(x) - x\|.$$

L’application $r : \Omega \rightarrow \partial\Omega$ est continue et le temps cosmologique $\mathbf{t} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ est de classe C^1 . De plus si $x \in \Omega$ et $a \in \partial\Omega$, alors $r(x) = a$ si et seulement si l’hyperplan passant par a de direction $(x - a)^\perp$ est un hyperplan d’appui à Ω en a .

L'application $r : \Omega \rightarrow \partial\Omega$ s'appelle la *rétraction dans le passé*. Dans la suite, étant donné un diamant maximal $D \subset \Omega$, on notera $C(D)$ la réunion des points $x \in \Omega$ tels que $D = I^+(r(x))$. Par la proposition précédente, la collection $\{C(D)\}_D$ est une stratification de Ω . En combinant le lemme précédent avec la proposition 7.21, on obtient la description suivante de la métrique de Kobayashi–Royden pour les domaines de Bonsante :

Corollaire 7.26. *Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^{1,n-1}$ un domaine de Bonsante. Alors, pour tout $x \in \Omega$, le diamant $D_x = I^+(r(x))$ est l'unique diamant $D \subset \Omega$ contenant x tel que*

$$g_{\text{KR}}^\Omega|_x = g_D|_x.$$

De plus, étant donné $D = I^+(a)$ un diamant maximal de Ω , alors $D_x = D$ si et seulement si l'hyperplan passant par a de direction $(x - a)^\perp$ est un hyperplan d'appui de Ω . Enfin, la métrique g_{KR}^Ω est de classe C^1 et est deux fois différentiable presque partout. ■

En particulier, comme g_{KR}^Ω admet des dérivées secondes presque partout, la courbure sectionnelle de g_{KR}^Ω est définie presque partout. Le signe de cette courbure sera étudié en détail dans la section suivante.

7.3.4 Inégalité sur la courbure presque partout

Pour une variété pseudo-riemannienne (M, g) , il est classique qu'une majoration ou une minoration sur la courbure sectionnelle des plans non-dégénérés impose que la courbure est constante (voir par exemple [O'N83, Prop. 8.28]). Ainsi, Alexander et Bishop ont proposé une convention pour l'inégalité de courbure sectionnelle $K \leq \alpha$ (voir [AB08]). Le théorème suivant montre que la métrique g_{KR} d'un domaine de Bonsante satisfait une telle inégalité de courbure.

Théorème 7.27. *Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^{1,n-1}$ un domaine de Bonsante. Alors la courbure sectionnelle de g_{KR}^Ω satisfait l'inégalité de courbure sectionnelle $K \leq 1$ au sens de Alexander-Bishop en presque tout plan tangent, c'est-à-dire*

$$K(\Pi) \geq -1 \text{ pour presque tout plan temps } \Pi \subset TM,$$

et

$$K(\Pi) \leq 1 \text{ pour presque tout plan espace } \Pi \subset TM.$$

La preuve est basée sur l'inégalité géométrique suivante qui est similaire à l'inégalité obtenue par Kulkarni–Pinkall [KP94] et Apanasov [Apa91] pour la métrique canonique sur les ouverts de la sphère conforme.

Lemme 7.28. *Soit D un diamant maximal dans Ω et $x \in D$. On identifie D avec $-\mathbf{R} \times \mathbf{H}^{n-1}$ et on note $d(x, C(D))$ la distance hyperbolique de x à $C(D)$. Alors, en posant $\lambda(x) = 1/\cosh(d(x, C(D)))$, on a l'encadrement suivant sur D :*

$$\lambda^2 g_D \leq g_{\text{KR}} \leq g_D.$$

Démonstration. L'inégalité $g_{\text{KR}} \leq g_D$ est vraie par définition de g_{KR} . Montrons l'autre inégalité. Pour simplifier les notations, on se place dans le cas où $D = I^+(0)$. Soit $x \in D$. Si $x \in C(D)$, alors $d(x, C(D)) = 0$ et l'inégalité $\lambda^2(x)g_D|_x \leq g_{\text{KR}}|_x$ est en fait une égalité. On se place dans le cas où $x \notin C(D)$, de sorte que $r(x)$ est un vecteur espace non-nul. Soit $u = r(x)/\|r(x)\|$ et soit $H = u^\perp$. On note \mathcal{K} l'intersection de D avec le demi-espace $\{\mathbf{b}(u, \cdot) \leq 0\}$ (voir Figure 7.3). Montrons que

$$C(D) \subset \mathcal{K}.$$

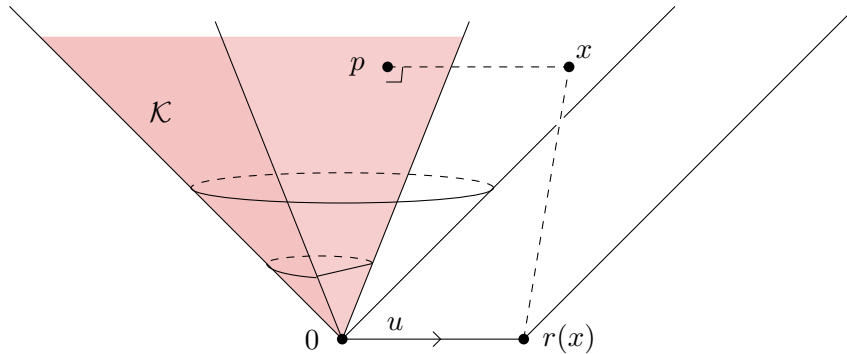


FIGURE 7.3

En effet, si $y \in C(D)$ alors $y \in I^+(\varepsilon u)$ pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Ainsi

$$g_{\text{KR}}|_y = \frac{1}{\|y\|^2} \mathbf{b}|_y \leq g_{I^+(\varepsilon u)}|_y = \frac{1}{\|y - \varepsilon u\|^2} \mathbf{b}|_y.$$

Toujours pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on obtient donc $\|y - \varepsilon u\|^2 = \|y\|^2 + 2\varepsilon \mathbf{b}(u, y) - \varepsilon^2 \|u\|^2 \leq \|y\|^2$. Ceci implique que $g(u, y)$ est négatif, donc $y \in \mathcal{K}$

Soit maintenant p le projeté orthogonal de x sur H . Comme $C(D) \subset \mathcal{K}$, on obtient

$$d(x, C(D)) \geq d(x, \mathcal{K}) = d(x, p).$$

Or on peut écrire explicitement

$$d(x, p) = \cosh^{-1} \left(\frac{\mathbf{b}(x, p)}{\|x\| \cdot \|p\|} \right).$$

Ainsi on obtient

$$\lambda^2(x) = \frac{1}{\cosh(d(x, C(D)))^2} \leq \frac{\|x\|^2 \|p\|^2}{\mathbf{b}(x, p)^2} = \frac{\|x\|^2 \|p\|^2}{\|p\|^4} = \frac{\|x\|^2}{\|p\|^2} \leq \frac{\|x\|^2}{\|x - r(x)\|^2},$$

la dernière inégalité provenant de l'inégalité suivante

$$\|x - r(x)\|^2 = \|p + \mathbf{b}(x, u)u - r(x)\|^2 = \|p\|^2 - (\mathbf{b}(x, u) - \|r(x)\|)^2 \leq \|p\|^2.$$

Ainsi on a bien

$$\lambda^2(x) g_D|_x = \frac{\lambda^2(x)}{\|x\|^2} \mathbf{b}|_x \leq \frac{1}{\|x - r(x)\|^2} \mathbf{b}|_x = g_{\text{KR}}|_x.$$

■

Pour obtenir une estimée sur la courbure presque partout de g_{KR} à partir du lemme 7.28, nous aurons besoin de comparer la courbure sectionnelle de deux métriques conformes. La formule suivante fait le lien entre les tenseurs de courbure de deux telles métriques.

Lemme 7.29 ([Bes07] thm 1.159). *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne et soit $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$ avec $\varphi \in C^\infty(M)$. On note R et \tilde{R} les $(4, 0)$ -tenseurs de courbure de g et \tilde{g} ,*

respectivement. Alors³

$$\tilde{R} = e^{2\varphi} R - e^{2\varphi} g \otimes \left(\text{Hess } \varphi - d\varphi \otimes d\varphi + \frac{1}{2} |d\varphi|^2 g \right).$$

Soit M une variété lisse munie d'une métrique pseudo-riemannienne g et soient $x \in M$ et $f : M \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ admettant des dérivées d'ordre deux en x . On suppose que

$$f(x) = 1 \text{ et } f'(x) = 0.$$

On veut calculer les courbures sectionnelles de $\tilde{g} = f \cdot g$ en x . On note R et \tilde{R} les tenseurs de courbure de g et \tilde{g} , respectivement. On note de même K et \tilde{K} les courbures sectionnelles de g et \tilde{g} . Soit $\varphi = (\ln f)/2$, de sorte que $\tilde{g} = e^{2\varphi} g$. Par le lemme 7.29, on a

$$\tilde{R} = f(R - g \otimes \text{Hess } \varphi).$$

Soient $\Pi \subset T_x M$ un 2-plan non dégénéré et (X, Y) une base orthonormée de Π pour g , c'est-à-dire

$$g(X, Y) = 0 \text{ et } |g(X, X)| = |g(Y, Y)| = 1.$$

On écrira $\text{sign}(Z) = 1$ (resp. $\text{sign}(Z) = -1$) si Z est espace (resp. temps). En développant la formule précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{R}_x(X, Y, Y, X) &= f(x) (R_x(X, Y, Y, X) - g_x \otimes \text{Hess}_x \varphi(X, Y, Y, X)) \\ &= R_x(X, Y, Y, X) - g_x(X, X) \text{Hess}_x \varphi(Y, Y) \\ &\quad - g_x(Y, Y) \text{Hess}_x \varphi(X, X) + 2g_x(X, Y) \text{Hess}_x \varphi(X, Y) \\ &= R_x(X, Y, Y, X) - (\text{sign}(X) \text{Hess}_x \varphi(X, X) + \text{sign}(Y) \text{Hess}_x \varphi(Y, Y)) \\ &= R_x(X, Y, Y, X) - 2(\text{sign}(X) \text{Hess}_x f(X, X) + \text{sign}(Y) \text{Hess}_x f(Y, Y)), \end{aligned}$$

car $\text{Hess}_x \varphi = 2 \text{Hess}_x f$. Comme $\tilde{g}_x = g_x$, la paire (X, Y) est aussi une base orthonormée de Π pour \tilde{g} . Ainsi, en divisant l'expression précédente par $\text{sign}(X) \text{sign}(Y)$, on obtient la relation suivante entre les courbures sectionnelles de \tilde{g} et g :

$$\tilde{K}(\Pi) = K(\Pi) - 2 \text{sign}(Y) \text{Hess}_x f(X, X) - 2 \text{sign}(X) \text{Hess}_x f(Y, Y). \quad (7.9)$$

Par exemple, si $\Pi \subset T_x M$ est un 2-plan espace et $f \geq 1$ au voisinage de x , alors

$$\tilde{K}(\Pi) \leq K(\Pi).$$

Démonstration du théorème 7.27. Soit $x \in \Omega$ tel que $g_{\mathbf{KR}}^\Omega$ soit deux fois différentiable en x . On note $D = D_x$ le diamant canonique associé à x , c'est-à-dire $D = I^+(r(x))$. On note $d : D \times D \rightarrow \mathbf{R}$ la distance hyperbolique dans l'identification $D \simeq (-\mathbf{R}) \times \mathbf{H}^{n-1}$. Soit $h : D \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$h(y) = \frac{1}{\cosh(d(x, y))^2},$$

et soit $\nu : D \rightarrow \mathbf{R}$ tel que $g_{\mathbf{KR}} = \nu g_D$ sur D (une telle fonction existe car $g_{\mathbf{KR}}$ et g_D sont conformes). Grâce au lemme 7.28, on a l'encadrement suivant sur D :

$$h \leq \nu \leq 1.$$

3. Rappelons que $h \otimes k$ désigne le produit de Kulkarni-Nomizu de h et k [Bes07, Déf. 1.110]. On peut écrire explicitement

$$h \otimes k(x, y, z, t) = h(x, z)k(y, t) + h(y, t)k(x, z) - h(x, t)k(y, z) - h(y, z)k(x, t).$$

Or $h(x) = 1$ et $h'(x) = 0$. Donc $\nu(x) = 1$, le point x est un point critique de ν et la hessienne de ν satisfait

$$\text{Hess}_x h(X, X) \leq \text{Hess}_x \nu(X, X) \leq 0,$$

pour tout $X \in T_x \Omega$. Calculons $\text{Hess}_x h$. Pour se faire on se place dans le modèle $D \simeq (-\mathbf{R}) \times \mathbf{H}^{n-1}$, où \mathbf{H}^{n-1} est identifié au demi-espace $\{p \in \mathbf{R}^{n-1} \mid p_{n-1} > 0\}$. Par homogénéité, il suffit de calculer $\text{Hess}_x h$ lorsque $x = (0, \dots, 0, 1)$. Dans ces coordonnées, la fonction f prend l'expression suivante :

$$h(t, p) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\|\bar{p} - p\|^2}{2p_n}\right)^2},$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur \mathbf{R}^{n-1} et $\bar{p} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbf{H}^{n-1}$. Au voisinage de x on a donc

$$h(t, p) = 1 - \|\bar{p} - p\|^2 + o(\|\bar{p} - p\|^2).$$

Donc $\text{Hess}_x h = -\frac{1}{2}g_{\mathbf{H}^{n-1}}$.

Soit $\Pi = \text{Vect}(X, Y) \subset T_x \Omega$ un plan non dégénéré.

— Cas 1 : Π_x est temps. On peut choisir une base orthogonale (X, Y) de Π de la forme

$$X = \alpha \frac{\partial}{\partial t} + u \in T\mathbf{R} \oplus T\mathbf{H}^{n-1} \text{ et } Y = v \in T\mathbf{H}^{n-1},$$

avec

$$-\alpha^2 + \|u\|^2 = -1, \|v\| = 1 \text{ et } g(u, v) = 0.$$

Par la formule 7.9, on obtient

$$\begin{aligned} K_{\text{KR}}(\Pi_x) &= K_D(\Pi_x) - 2 \text{Hess } \nu(X, X) + 2 \text{Hess } \nu(Y, Y) \\ &\geq \|u\|^2 \|v\|^2 - g(u, v)^2 - \|v\|^2 \\ &\geq -1. \end{aligned}$$

— Cas 2 : Π_x est espace. On peut choisir une base orthogonale (X, Y) de Π de la forme

$$X = \alpha \frac{\partial}{\partial t} + u \in T\mathbf{R} \oplus T\mathbf{H}^{n-1} \text{ et } Y = \beta \frac{\partial}{\partial t} + v \in T\mathbf{R} \oplus T\mathbf{H}^{n-1},$$

avec

$$-\alpha^2 + \|u\|^2 = -\beta^2 + \|v\|^2 = 1 \text{ et } -\alpha\beta + g(u, v) = 0.$$

Par la formule 7.9, on obtient

$$\begin{aligned} K_{\text{KR}}(\Pi_x) &= K_D(\Pi_x) - 2 \text{Hess } \nu(X, X) - 2 \text{Hess } \nu(Y, Y) \\ &\leq -(\|u\|^2 \|v\|^2 - g(u, v)^2) + \|u\|^2 + \|v\|^2 \\ &= -(1 + \alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2 \beta^2 - (\alpha\beta)^2) + 1 + \alpha^2 + 1 + \beta^2 \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

■

7.3.5 Domaines de Misner réguliers

Pour terminer ce chapitre, on donne quelques exemples concrets de calculs de g_{KR} pour des domaines de Bonsante homogènes. On se place dans l'espace de Minkowski $\mathbf{R}^{1,n-1}$ muni de sa métrique lorentzienne \mathbf{b} et d'une orientation temporelle. Soit $F \subset \mathbf{R}^{1,n-1}$ un sous-espace affine riemannien de dimension $k \geq 0$. On note M_k^n le futur de F dans $\mathbf{R}^{1,n-1}$. En termes d'équation, on peut écrire

$$M_k^n = I^+(F) = \{x + y \in F \oplus F^\perp \mid \mathbf{b}(y, y) < 0 \text{ et } \mathbf{b}(y, e) < 0\},$$

où $e \in \mathbf{R}^{1,n-1}$ est un vecteur futur fixé au préalable. Comme l'action de $\text{Conf}(\mathbf{R}^{1,n-1})$ sur l'ensemble des k -espaces affines riemanniens est transitive, la structure conforme de M_k^n ne dépend pas du choix de F . Cet espace est parfois appelé *domaine de Misner régulier* de rang k . C'est un domaine de Bonsante, et on peut explicitement calculer sa métrique de Kobayashi–Royden.

Proposition 7.30. *La variété lorentzienne (M_k^n, g_{KR}) est isométrique à*

$$\left((\mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{H}^{n-k-1}) \times_{t^{-1}} \mathbf{R}^k, -t^{-2}dt^2 \oplus g_{\mathbf{H}} \oplus t^{-2}g_{\mathbf{R}^k} \right).$$

En particulier $\text{Conf}(M_k^n)$ agit sur M_k^n par isométrie pour la métrique $-t^{-2}dt^2 \oplus g_{\mathbf{H}} \oplus t^{-2}g_{\mathbf{R}^k}$.

Démonstration. Soit $\pi : \mathbf{R}^{1,n-1} \rightarrow F^\perp$ la projection orthogonale sur F^\perp . On vérifie que π est la rétraction dans le passé de M_k^n et que le temps cosmologique est donné par $\mathbf{t} : x \mapsto \sqrt{\mathbf{b}(\pi(x), \pi(x))}$. Par la proposition 7.21, on a donc

$$g_{\text{KR}}|_x = \frac{\mathbf{b}|_x}{\mathbf{t}(x)^2} = \frac{\mathbf{b}|_x}{|\mathbf{b}(\pi(x), \pi(x))|}.$$

Le domaine de Misner M_k^n se décompose orthogonalement en $\pi(M_k^n) \oplus F$ et $\pi(M_k^n)$ est un diamant de F^\perp . Par la proposition 1.20, l'application

$$x \mapsto (\mathbf{t}(x), x_{F^\perp} / \mathbf{t}(x), x_F)$$

est une isométrie explicite de M_k^n vers $(\mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{H}^{n-k-1}) \times_{t^{-1}} \mathbf{R}^k$. ■

Lorsque $k = n - 1$, l'ouvert M_{n-1}^n est un demi-espace délimité par un hyperplan riemannien dans $\mathbf{R}^{1,n-1}$. Cet espace est appelé *univers d'Einstein-de Sitter* et il est conformément équivalent à

$$(\mathbf{R}_{>0} \times_{t^{-1}} \mathbf{R}^{n-1}, [t^{-2}(-dt^2 \oplus g_{\mathbf{R}^{n-1}})])$$

La métrique $t^{-2}(-dt^2 \oplus g_{\mathbf{R}^{n-1}})$ est incomplète, une description de ses géodésiques est donnée dans [Nom82]. Donnons une description conforme de M_{n-1}^n . Fixons une $(n - 1)$ -sphère de Möbius riemannienne $\Sigma \simeq \mathbf{S}^{n-1}$ et identifions $\mathbf{dS}^{1,n-1}$ avec le complémentaire de Σ dans l'univers d'Einstein. Étant donné un point $x \in \Sigma$, la trace de Σ dans une projection stéréographique selon x est un hyperplan riemannien de $\mathbf{Ein}^{1,n-1} \setminus C(x) \simeq \mathbf{R}^{1,n-1}$. Ainsi, la trace de $\mathbf{dS}^{1,n-1}$ dans cette même carte est la réunion de deux ouverts conformément équivalents à l'univers d'Einstein-de Sitter. On peut vérifier que la métrique $t^{-2}(-dt^2 \oplus g_{\mathbf{R}^{n-1}})$ correspond alors à la métrique de $\mathbf{dS}^{1,n-1}$.

Soit $1 \leq k \leq n - 1$. La proposition 7.30 implique qu'on a une identification isométrique $M_k^n \simeq M_k^{k+1} \times \mathbf{H}^{n-k-1}$. Tout domaine de Misner peut s'écrire comme le produit de l'univers d'Einstein de Sitter avec un espace hyperbolique. En particulier, la métrique de Kobayashi–Royden de M_k^n est incomplète si $k \neq 0$, et la courbure sectionnelle de ses plans temps satisfait toujours $K(\Pi) \geq 0$.

Perspectives

Un axe de recherche futur pour la métrique de Kobayashi–Royden est l’étude de cette métrique du point de vue des espaces de longueur lorentziens. Un espace de longueur lorentzien est l’analogie pour les variétés lorentziennes de ce que sont les espaces métriques de longueur pour les variétés riemanniennes. Ces espaces apparaissent notamment dans l’étude des espace-temps dont la métrique a une faible régularité. Si M est un espace-temps conforme Kobayashi–Royden-hyperbolique et si $x, y \in M$ sont causalement reliés, on peut définir la distance lorentzienne entre x et y , aussi appelée le *temps de séparation* entre x et y , comme

$$\mathcal{T}_{\text{KR}}(x, y) = \sup_{\gamma} \int \|\dot{\gamma}(t)\|_{\text{KR}} dt,$$

où le supremum est pris sur toutes les courbes causales γ de x à y et où $\|v\|_{\text{KR}} = \sqrt{|g_{\text{KR}}^M(v, v)|}$ pour tout vecteur causal $v \in TM$. Comme la métrique g_{KR}^M est semi-continue supérieurement, l’intégrale dans le terme de droite a du sens et est finie. Lorsque x et y ne sont pas causalement reliés dans M , alors $\mathcal{T}_{\text{KR}}(x, y) = 0$ par convention. On montre directement que la fonction de temps de séparation $\mathcal{T}_{\text{KR}} : M \times M \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ satisfait l’inégalité triangulaire inversée :

$$\mathcal{T}_{\text{KR}}(x, y) + \mathcal{T}_{\text{KR}}(y, z) \leq \mathcal{T}_{\text{KR}}(x, z).$$

En supposant par exemple que M est globalement hyperbolique, la fonctionnelle \mathcal{T}_{KR} est finie et continue. Si on note \leq et \ll les relations de causalité sur M , la donnée du quadruplet $(M, \leq$

, $\ll, \mathcal{T}_{\text{KR}})$ définit un *pré-espace de longueur lorentzien* au sens de Kunzinger et Sämann (voir [KS18]). Un premier élément à déterminer serait de savoir quelles sont les hypothèses causales sur l’espace-temps M qui font que ce pré-espace de longueur est un espace de longueur lorentzien. Lorsque g_{KR} est continue et que M est fortement causale, on sait que $(M, \leq, \ll, \mathcal{T}_{\text{KR}})$ est un espace de longueur (voir [KS18, Sect. 5.1]). Pour les espaces de longueur lorentzien, Kunzinger et Sämann ont introduit un analogue des espaces métriques satisfaisant une inégalité CAT(k). Un espace de longueur lorentzien satisfait une *inégalité de courbure sectionnelle temps synthétique* $K \leq \alpha$ si ses triangles géodésiques temps sont plus fins que ceux du modèle $\mathbf{H}(\alpha)$ à courbure constante égale à α .

Question. Si M est une variété conforme lorentzienne Kobayashi–Royden hyperbolique, l’espace de longueur lorentzien $(M, \leq, \ll, \mathcal{T}_{\text{KR}})$ satisfait-il une inégalité de courbure sectionnelle temps synthétique ?

Lorsque la métrique de Kobayashi–Royden est lisse (c’est le cas des variétés homogènes), on sait qu’une inégalité de courbure sectionnelle temps synthétique revient à une inégalité de la courbure sectionnelle standard sur les plans temps (voir l’article récent [BKOR24] pour l’équivalence entre les notions d’inégalité de courbure sectionnelle). Par exemple, les domaines de Misner réguliers satisfont une inégalité de courbure sectionnelle temps synthétique ≥ 0 .

Par des arguments de recollement de Beran et Rott [BR24], on peut construire des domaines de Bonsante ayant une métrique de Kobayashi–Royden $C^{1,1}$ satisfaisant une inégalité de courbure sectionnelle temps ≥ 0 . Le futur chronologique d’une demi-droite riemannienne dans l’espace de Minkowski en est un exemple. Il serait intéressant de trouver d’autres classes d’exemples, notamment en lien avec le théorème 7.27.

Il serait aussi intéressant d’étudier la dynamique du groupe conforme d’une variété conformément plate lorentzienne à l’aide de la structure d’espace de longueur. On a vu qu’il existe beaucoup de variétés compactes Kobayashi–Royden hyperboliques (c’est le cas de toutes les variétés kleiniennes dont l’holonomie est irréductible, voir le Corollaire 6.25). Cependant, on s’attend à ce que dans la plupart des cas, le groupe conforme de ces variétés soit compact.

Question. Quelles sont les variétés Kobayashi–Royden hyperboliques compactes ayant un groupe conforme non-compact ?

Pour les métriques lorentziennes lisses, on sait que la non-compactité du groupe d’isométries implique une forte contrainte sur la géométrie de la variété lorsque celle-ci est compacte (voir [Zeg97]). L’argument de Zeghib s’appuie fortement sur l’existence d’une connexion affine invariante par l’action du groupe. Pour les variétés conformément plates, la géométrie de Cartan associée à une structure conforme et la structure d’espace de longueur sont probablement suffisantes pour contraindre la dynamique du groupe conforme. Notamment, on s’attend à ce que le groupe conforme d’une variété Kobayashi–Royden-hyperbolique préserve une métrique lisse, i.e. soit inessentiel.

Concernant la distance de Markowitz, il serait intéressant de développer son étude pour les variétés conformément plates.

Dans le cadre compact, le théorème 4.2 montre que les seules variétés lorentziennes dont l’image de l’application de développement est propre sont des quotients du diamant. Les variétés à développante propre sont des exemples de variétés Markowitz-hyperboliques. Il est naturel de se demander si le théorème 4.2 s’étend pour les variétés Markowitz-hyperboliques :

Question. Toute variété compacte conformément plate Markowitz-hyperbolique est-elle un quotient du diamant ?

Une première difficulté est qu’il n’est pas clair que ces exemples soient kleiniens. Pour les variétés compactes affines plates Kobayashi-hyperboliques, Kobayashi obtient l’injectivité de l’application de développement par des techniques de convexité, en étudiant le domaine de définition de l’application exponentielle (voir [Kob84]). Il est peut-être possible d’obtenir l’injectivité de la développante en se restreignant au cas des variétés de similitudes compactes. Une deuxième difficulté est qu’il n’est pas clair que le revêtement universel est un diamant, même sous l’hypothèse d’injectivité de la développante. En effet, le diamant est le seul ouvert propre quasi-homogène de l’univers d’Einstein (voir théorème 4.1), mais ce n’est pas le seul ouvert Markowitz-hyperbolique quasi-homogène de l’univers d’Einstein. Les domaines de Misner réguliers donnent des exemples d’ouverts Markowitz-hyperboliques quasi-homogènes. Cependant, ces domaines n’admettent pas de quotients compacts. Nous ne savons pas si ces exemples sont les seuls ouverts Markowitz-hyperboliques quasi-homogènes de l’univers d’Einstein.

À l’inverse, on s’attend à une abondance d’espace-temps globalement hyperboliques maximaux Cauchy-compacts Markowitz-hyperboliques. Il serait intéressant de développer l’étude de la distance de Markowitz pour ces exemples. Par le théorème 3.2, les ouverts causalement convexes maximaux sans géodésiques paramétrées projectivement sur \mathbf{R} sont Markowitz-hyperboliques et leur distance de Markowitz est complète. Il est probable que cet énoncé

s'étende aux variétés globalement hyperboliques maximales. Ceci permettrait une étude des variétés sans photons complets et viendrait compléter l'étude des espace-temps maximaux avec des photons complets initiée par Smaï (voir [Sma22b]). Une première classe d'exemples auxquels on pourrait s'intéresser est celle des petites déformations de représentations Fuchsienues $\rho : \Gamma \rightarrow \mathrm{PO}(1, n) \subset \mathrm{PO}(2, n + 1)$ dans $\mathrm{PO}(2, n + 1)$, où $\Gamma < \mathrm{PO}(1, n)$ est un réseau hyperbolique cocompact et où l'ensemble limite de ρ est le bord espace d'un diamant (voir section 1.4). On sait que ces représentations sont toujours l'holonomie d'une variété Cauchy compacte globalement hyperbolique maximale (voir [Sma22a]). Il serait intéressant de savoir si la distances de Markowitz de ces variétés admet des propriétés spécifiques.

Bibliographie

- [AB08] Stephanie Alexander and Richard Bishop. Lorentz and semi-riemannian spaces with alexandrov curvature bounds. *Communications in Analysis and Geometry*, 16, 05 2008.
- [AGH98] Lars Andersson, Gregory J Galloway, and Ralph Howard. The cosmological time function. *Classical and Quantum Gravity*, 15(2) :309, feb 1998.
- [Apa91] Boris Apanasov. Kobayashi conformal metric on manifolds, Chern-Simons and η -invariants. *International Journal of Mathematics*, 2(4) :361–382, 1991.
- [Apa92] Boris N. Apanasov. Deformations of conformal structures on hyperbolic manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 35 :1–20, 1992.
- [Aud03] Michèle Audin. *Geometry*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [Bar80] Theodore J. Barth. Convex domains and kobayashi hyperbolicity. *Proceedings of the American Mathematical Society*, (79) :556–558, 1980.
- [Bar05] Thierry Barbot. Globally hyperbolic flat space–times. *Journal of Geometry and Physics*, 53(2) :123–165, feb 2005.
- [Ben60] Jean-Paul Benzécri. Sur les variétés localement affines et localement projectives. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 88 :229–332, 1960.
- [Ben08] Yves Benoist. A survey on divisible convex sets. *Geometry, analysis and topology of discrete groups*, 6 :1–18, 2008.
- [Bes07] A.L. Besse. *Einstein Manifolds*. Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [BK23] Jonas Beyrer and Fanny Kassel. $\mathbb{H}^{p,q}$ -convex cocompactness and higher higher teichmüller spaces, 2023.
- [BKOR24] Tobias Beran, Michael Kunzinger, Argam Ohanyan, and Felix Rott. The equivalence of smooth and synthetic notions of timelike sectional curvature bounds, 2024.
- [Bon05] Francesco Bonsante. Flat spacetimes with compact hyperbolic Cauchy surfaces. *Journal of Differential Geometry*, 69(3) :441 – 521, 2005.
- [BR24] Tobias Beran and Felix Rott. Gluing constructions for lorentzian length spaces. *manuscripta mathematica*, 173(1) :667–710, 2024.
- [Bro78] Robert Brody. Compact manifolds and hyperbolicity. *Transactions of the American Mathematical Society*, 235 :213–219, 1978.
- [BS05] Antonio N. Bernal and Miguel Sánchez. Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic spacetimes. *Communications in Mathematical Physics*, 257(1) :43–50, 2005.
- [BZ04] Charles Boubel and Abdelghani Zeghib. Isometric actions of lie subgroups of the moebius group. *Nonlinearity*, 17(5) :1677, jun 2004.

- [CCD⁺21] Benoît Claudon, Pietro Corvaja, Jean-Pierre Demailly, Simone Diverio, Julien Duval, Carlo Gasbarri, Stefan Kebekus, Mihai Păun, Erwan Rousseau, Nessim Sibony, et al. *Hyperbolicity properties of algebraic varieties*. Société Mathématique de France, 2021.
- [CG24] Adam Chalumeau and Blandine Galiay. Proper quasi-homogeneous domains of the Einstein universe. *arXiv*, 2024.
- [DGK17] Jeffrey Danciger, François Guéritaud, and Fanny Kassel. Convex cocompact actions in real projective geometry, 2017.
- [Fer69] Jacqueline Ferrand. Transformations conformes et quasiconformes des variétés riemanniennes ; application à la démonstration d’une conjecture de A. Lichnerowicz. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A*, 269 :583–586, 1969.
- [Fer96] Jacqueline Ferrand. The action of conformal transformations on a Riemannian manifold. *Mathematische Annalen*, 304(1) :277–291, 1996.
- [FM23] Charles Frances and Karin Melnick. The lorentzian lichnerowicz conjecture for real-analytic, three-dimensional manifolds. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2023(803) :183–218, 2023.
- [Fra03] Charles Frances. Une preuve du théorème de Liouville en géométrie conforme dans le cas analytique. *Enseign. Math. (2)*, 49(1-2) :95–100, 2003.
- [Fra04] Charles Frances. Lorentzian Kleinian groups. *Commentarii Mathematici Helvetici - Comment Math Helv*, 80, 01 2004.
- [Fra05] Charles Frances. Sur les variétés lorentziennes dont le groupe conforme est essentiel. *Mathematische Annalen*, 332(1) :103–119, 2005.
- [Fra07] Charles Frances. Sur le groupe d’automorphismes des géométries paraboliques de rang 1. *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure*, 40(5) :741–764, 2007.
- [Fra12] Charles Frances. Dégénérescence locale des transformations conformes pseudo-riemanniennes. *Annales de l’Institut Fourier*, 62(5) :1627–1669, 2012.
- [Fra15] Charles Frances. About pseudo-riemannian lichnerowicz conjecture. *Transformation Groups*, 20(4) :1015–1022, 2015.
- [Fra18] Charles Frances. Lorentz dynamics on closed 3-manifolds. *Annales Henri Lebesgue*, 3, 04 2018.
- [Gal24] Blandine Galiay. Rigidity of proper quasi-homogeneous domains in positive flag manifolds, 2024.
- [Gau97] Hervé Gaussier. Characterization of convex domains with noncompact automorphism group. *Michigan Mathematical Journal*, 44(2) :375 – 388, 1997.
- [Gol21] William M. Goldman. *Geometric structures on manifolds*. University of Maryland, 2021.
- [Hen99] Jeffrey T. Henrikson. Completeness and total boundedness of the hausdorff metric. *MIT Undergrad. J. Math.*, 1 :69–80, 1999.
- [HGK02] Kang-Tae Kim Hervé Gaussier and Steven G. Krantz. A note on the wong-rosay theorem in complex manifolds. *Complex Variables, Theory and Application : An International Journal*, 47(9) :761–768, 2002.
- [Kob84] Shoshichi Kobayashi. Projectively invariant distances for affine and projective structures. *Banach Center Publications*, 12(1) :127–152, 1984.

- [Kob05] Shoshichi Kobayashi. *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings*. WORLD SCIENTIFIC, 2nd edition, 2005.
- [KP94] Ravi Kulkarni and Ulrich Pinkall. A canonical metric for Möbius structures and its applications. *Mathematische Zeitschrift*, 216(1) :89–129, 1994.
- [KS18] Michael Kunzinger and Clemens Sämann. Lorentzian length spaces. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 54(3) :399–447, 2018.
- [Lee97] John M. Lee. *Riemannian Manifolds : An Introduction to Curvature*. 1997.
- [Lee12] John M. Lee. *Smooth Manifolds*. Springer New York, New York, NY, 2012.
- [LM24] Rachel Lee and Karin Melnick. Classification of closed conformally flat lorentzian manifolds with unipotent holonomy, 2024.
- [LZ19] Wouter van Limbeek and Andrew Zimmer. Rigidity of convex divisible domains in flag manifolds. *Geometry & Topology*, 23(1) :171–240, 2019.
- [Mar81] Michael J Markowitz. An intrinsic conformal Lorentz pseudodistance. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 89(2) :359–371, 1981.
- [Mar82] Michael J. Markowitz. Conformal hyperbolicity of lorentzian warped products. *General Relativity and Gravitation*, 14(12) :1095–1105, 1982.
- [Min20] Ettore Minguzzi. On the regularity of cauchy hypersurfaces and temporal functions in closed cone structures. *Reviews in Mathematical Physics*, 32 :2050033, 04 2020.
- [Mor15] Dave Witte Morris. Introduction to arithmetic groups, 2015.
- [MS08] E. Minguzzi and M. Sanchez. The causal hierarchy of spacetimes, 2008.
- [MV21] Karin Melnick and Pecastaing Vincent. The conformal group of a compact simply connected lorentzian manifold. *Journal of the American Mathematical Society*, 35 :1, 03 2021.
- [Nom82] Katsumi Nomizu. The Lorentz-Poincaré metric on the upper half-space and its extension. *Hokkaido Mathematical Journal*, 11(3) :253 – 261, 1982.
- [Oba71] Morio Obata. The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 6(2) :247 – 258, 1971.
- [O’N83] Barrett. O’Neill. *Semi-Riemannian geometry : with applications to relativity*. Pure and applied mathematics ; 103. Academic Press, New York, 1983.
- [OT04] V. Ovsienko and S. Tabachnikov. *Projective Differential Geometry Old and New : From the Schwarzian Derivative to the Cohomology of Diffeomorphism Groups*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2004.
- [Ros79] Jean-Pierre Rosay. Sur une caractérisation de la boule parmi les domaines de \mathbf{C}^n par son groupe d’automorphismes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 29(4) :ix, 91–97, 1979.
- [Roy71] H. L. Royden. Remarks on the kobayashi metric. In John Horváth, editor, *Several Complex Variables II Maryland 1970*, pages 125–137, Berlin, Heidelberg, 1971. Springer Berlin Heidelberg.
- [Sal13] Clara Rossi Salvemini. Maximal extension of conformally flat globally hyperbolic space-times. *Geometriae Dedicata*, 174, 06 2013.
- [Sch95] R. Schoen. On the conformal and CR automorphism groups. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 5(2) :464–481, 1995.
- [Sha97] R.W. Sharpe. *Differential geometry : Cartan’s generalization of Klein’s Erlangen program*. Springer, 1997.

- [Sma22a] Rym Smaï. Anosov representations as holonomies of globally hyperbolic spatially compact conformally flat spacetimes. *Geometriae Dedicata*, 216(4) :45, 2022.
- [Sma22b] Rym Smaï. *Espace-temps conformément plats globalement hyperboliques maximaux avec des photons complets*. PhD thesis, 2022. Thèse de doctorat dirigée par Barbot, Thierry Mathématiques Avignon 2022.
- [Sma23a] Rym Smaï. Causal completion of a globally hyperbolic conformally flat spacetime. *to appear in Journal of Mathematical Physics*, 2023.
- [Sma23b] Rym Smaï. Enveloping space of a globally hyperbolic conformally flat spacetime. *to appear in Annales de l'Institut Fourier*, 2023.
- [Thu97] William P. Thurston. *Three-Dimensional Geometry and Topology, Volume 1*. Princeton University Press, 1997.
- [Tro24] R. Troubat. Global hyperbolicity in higher signature. in preparation, 2024.
- [Vey70] J. Vey. Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., III. Ser.*, 24 :641–665, 1970.
- [Vig80] Marie-France Vignéras. *Arithmétique des Algèbres de quaternions*. Lecture notes in mathematics. Springer-Verlag, 1980.
- [Web77] S. M. Webster. On the transformation group of a real hypersurface. *Transactions of the American Mathematical Society*, 231(1) :179–190, 1977.
- [Won77] B. Wong. Characterization of the unit ball in \mathbf{C}^n by its automorphism group. *Invent. Math.*, 41(3) :253–257, 1977.
- [Wu81] Hung-Hsi Wu. Some theorems on projective hyperbolicity. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 33(1) :79–104, 1981.
- [Zeg97] Abdelghani Zeghib. Isometry groups and geodesic foliations of lorentz manifolds. part i : Foundations of lorentz dynamics. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 9 :775–822, 1997.
- [Zeg99a] Abdelghani Zeghib. Geodesic foliations in lorentz 3-manifolds. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 74(1) :1–21, 1999.
- [Zeg99b] Abdelghani Zeghib. Isometry groups and geodesic foliations of lorentz manifolds. part ii : Geometry of analytic lorentz manifolds with large isometry groups. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 9(4) :823–854, 1999.
- [Zim17] Andrew M. Zimmer. Characterizing domains by the limit set of their automorphism group. *Advances in Mathematics*, 308 :438–482, 2017.
- [Zim18] Andrew M. Zimmer. Proper quasi-homogeneous domains in flag manifolds and geometric structures. *Ann. Inst. Fourier*, 68(6) :2635–2662, 2018.

Nous nous intéressons aux variétés munies d'une classe conforme de métriques pseudo-riemanniennes, dites variétés conformes. Ces variétés apparaissent naturellement dans la théorie de la relativité pour l'étude de la structure causale des espace-temps et dans l'étude du bord des espaces à courbure constante. Contrairement aux variétés pseudo-riemanniennes, les variétés conformes admettent peu d'invariants locaux : seules les géodésiques isotropes, appelées géodésiques de lumière, ont un sens conforme. Leur groupe de symétries peut avoir une dynamique différente de celle d'un groupe d'isométrie. Un des problèmes classiques de la géométrie conforme est de comprendre à quel point la dynamique du groupe de symétries d'une variété conforme s'éloigne de celle d'un groupe d'isométrie : c'est le problème d'essentialité.

Pour les variétés conformes riemanniennes, Kulkarni–Pinkall et Apanasov ont apporté une forme de réponse constructive au problème d'essentialité en construisant, grâce à la théorie de Kobayashi–Royden, une métrique riemannienne conformément invariante à faible régularité. Motivé par leurs travaux, nous étudions deux constructions de Kobayashi–Royden en géométrie conforme pseudo-riemannienne. La première est une pseudo-distance conformément invariante introduite par Markowitz et la seconde est une métrique pseudo-riemannienne inspirée de la métrique canonique de Kulkarni–Pinkall et Apanasov.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
UMR 7501
Université de Strasbourg et CNRS
7 Rue René Descartes
67 084 STRASBOURG CEDEX

Tél. 03 68 85 01 29
Fax 03 68 85 03 28
<https://irma.math.unistra.fr>
irma@math.unistra.fr

cnrs

Université
de Strasbourg

IRMA
Institut de Recherche
Mathématique Avancée

IRMA 2024/007
<https://theses.hal.science/tel-04819767>

ISSN 0755-3390