



HAL
open science

Etude théorique et numérique de l'instabilité interfaciale de ballottement dans une batterie à métaux liquides

Antoine Simon

► **To cite this version:**

Antoine Simon. Etude théorique et numérique de l'instabilité interfaciale de ballottement dans une batterie à métaux liquides. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Normandie Université, 2024. Français. NNT : 2024NORMIR23 . tel-04823481

HAL Id: tel-04823481

<https://theses.hal.science/tel-04823481v1>

Submitted on 6 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité **PHYSIQUE**

Préparée au sein de l'**INSA Rouen Normandie**

Etude théorique et numérique de l'instabilité interfaciale de ballottement dans une batterie à métaux liquides

Présentée et soutenue par
ANTOINE SIMON

Thèse soutenue le 09/10/2024
devant le jury composé de :

M. CHRISTOPHE DUMOUCHEL	DIRECTEUR DE RECHERCHE - INSA de Rouen Normandie	Directeur de thèse
M. INNOCENT MUTABAZI	PROFESSEUR DES UNIVERSITÉS - Université Le Havre Normandie	Président du jury
MME MARIE-CHARLOTTE RENOULT	MAÎTRE DE CONFÉRENCES - INSA de Rouen Normandie	Co-encadrant de thèse
M. JORGE CESAR BRANDLE DE MOTTA	MAÎTRE DE CONFÉRENCES - CORIA	Membre
M. BENOÎT-JOSEPH GREA	CHERCHEUR - CEA Marcoule	Membre
MME SOPHIE MIRALLES	CHERCHEUR - Institut National des Sciences Appliquées de Lyon	Membre
MME CAROLINE NORE	PROFESSEUR DES UNIVERSITÉS - Université Paris-Saclay	Rapporteur
M. CHRISTIAN RUYER-QUIL	PROFESSEUR DES UNIVERSITÉS - Polytech Annecy Chambéry	Rapporteur

Thèse dirigée par **CHRISTOPHE DUMOUCHEL** (COMPLEXE DE RECHERCHE INTERPROFESSIONNEL EN AEROTHERMOCHIMIE)



Normandie Université

THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité **PHYSIQUE**

Préparée au sein de l'INSA de Rouen Normandie

Etude théorique d'instabilités interfaciales dans les batteries à métaux liquides

Présentée et soutenue par

Antoine SIMON

Thèse soutenue publiquement le 09/10/2024

devant le jury composé de

Mme Caroline NORE	Professeur des universités, Université Paris-Saclay	Rapporteuse
M. Christian RUYER-QUIL	Professeur des universités, Université Savoie Mont Blanc	Rapporteur
M. Innocent MUTABAZI	Professeur des universités, Université Le Havre Normandie	Examineur
Mme Sophie MIRALLES	Maître de conférences, INSA de Lyon	Examinatrice
M. Benoît-Joseph GRÉA	Chercheur, CEA DAM Île-de-France	Examineur
Mme Marie-Charlotte RENOULT	Maître de conférences, INSA de Rouen Normandie	Co-encadrante
M. Jorge César BRÄNDLE DE MOTTA	Maître de conférences, Université de Rouen Normandie	Co-encadrant
M. Christophe DUMOUCHEL	Directeur de recherche, CNRS	Directeur de thèse

Thèse dirigée par Christophe DUMOUCHEL et co-encadrée par Marie-Charlotte RENOULT et Jorge César BRÄNDLE DE MOTTA, CORIA UMR 6614

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Contexte énergétique	9
1.1.1	Problème posé	9
1.1.2	Solutions	9
1.2	Batteries à métaux liquides	12
1.2.1	Représentation simplifiée	12
1.2.2	Avantages et inconvénients	13
1.3	Instabilités interfaciales	17
1.3.1	Ondes progressives	17
1.3.2	Ondes stationnaires	21
1.4	Travail réalisé	23
1.4.1	Objectif de la thèse	23
1.4.2	Organisation du manuscrit	24
2	Instabilité interfaciale sans champ magnétique	27
2.1	Analyse linéaire de stabilité	28
2.1.1	Formulation du problème	28
2.1.2	Analyse dimensionnelle	30
2.1.3	Relation de dispersion	35
2.2	Résolution du problème aux valeurs propres	37
2.2.1	Cas d'étude	37
2.2.2	Comparaison aux solutions des deux sous-systèmes à deux couches	39
2.2.3	Étude paramétrique	40
2.3	Résolution du problème aux valeurs initiales	43
2.3.1	Méthode	43
2.3.2	Solutions pour les deux sous-systèmes à deux couches	46
2.3.3	Solutions pour le système à trois couches	48

2.4	Conclusion	50
3	Instabilité interfaciale avec champ magnétique	57
3.1	Théorie non visqueuse	58
3.1.1	Formulation du problème	58
3.1.2	État de base	60
3.1.3	Etat perturbé	62
3.1.4	Relation de dispersion	69
3.1.5	Carte de stabilité	71
3.2	Théorie visqueuse avec tension de surface	72
3.2.1	Formulation du problème	72
3.2.2	Relation de dispersion	74
3.2.3	Carte de stabilité	78
3.2.4	Effet de la viscosité	78
3.3	Conclusion	79
4	Instabilité interfaciale avec prise en compte des effets de bords	81
4.1	Critère de Sele	82
4.1.1	Formulation du problème	82
4.1.2	Démonstration mathématique du critère de Sele	83
4.2	Principe énergétique	85
4.2.1	Introduction du principe énergétique	85
4.2.2	Principe énergétique adapté au critère de Sele	88
4.3	Simulations numériques	90
4.3.1	Initialisation des simulations	90
4.3.2	Carte de stabilité	92
4.4	Conclusion	93
5	Conclusion et perspectives	95
5.1	Conclusion	95
5.2	Perspectives	98

Les batteries à métaux liquides représentent une solution prometteuse pour le stockage d'énergie stationnaire, notamment dans le contexte de la transition énergétique. Leur composition entièrement liquide et soumise à un fort courant électrique et à une température élevée nécessite une étude approfondie des écoulements internes pour prévenir les risques de court-circuit dûs à des instabilités hydrodynamiques. Cette thèse se concentre sur les instabilités interfaciales causées par la redistribution du courant électrique dans des milieux de conductivité électrique différente, pouvant se manifester sous forme d'ondes progressives ou stationnaires. Le défi technique associé à l'étude théorique de ces phénomènes est la complexité des calculs liée à la prise en compte des trois couches fluides, de la viscosité, des effets électromagnétiques et des effets de bords.

Dans un premier temps, une analyse linéaire de stabilité a été effectuée pour étudier l'effet de la viscosité et, dans une moindre mesure, de la tension de surface dans un système à trois couches fluides infini soumis au seul champ de gravité. Ce champ de gravité est le moteur de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Cette instabilité ne s'observe pas dans les batteries à métaux liquides qui sont stables gravitationnellement. Cette première étude permet de caractériser le couplage entre les interfaces afin de mieux comprendre des expériences réalisées précédemment. Les résultats montrent que le comportement des interfaces dépend d'un paramètre de couplage : l'épaisseur de la couche du milieu adimensionnée par le nombre d'onde de la perturbation. Des simulations numériques directes réalisées avec le code Archer ont validé la théorie jusqu'à ce que les effets non-linéaires soient significatifs et ont permis d'identifier trois régimes selon la valeur croissante du paramètre de couplage pour un système où l'interface du haut est gravitationnellement stable et l'interface du bas est gravitationnellement instable : la succession de deux régimes couplés, l'un dominé par le comportement d'une onde de gravité, l'autre dominé par le comportement d'une instabilité de Rayleigh-Taylor et d'un régime découplé.

Dans un deuxième temps, l'effet du champ magnétique sur les instabilités interfaciales dans un système à trois couches fluides infini a été étudié. L'analyse linéaire de stabilité, étendue pour inclure les trois premières complexités, a permis de cartographier la stabilité du système en fonction d'un champ magnétique adimensionné, prenant en compte le champ magnétique induit par le courant électrique à l'intérieur de la batterie ainsi qu'un éventuel champ magnétique extérieur, et du paramètre de couplage. Un champ

magnétique critique a été identifié, dont la valeur dépend des masses volumiques des trois fluides et des tensions de surface des deux interfaces. La viscosité n'a pas d'effet sur cette carte; elle ralentit les perturbations sans affecter directement la condition de stabilité comme on pouvait s'y attendre.

Enfin, dans un troisième temps, les effets de bord et l'influence du champ magnétique dans un système à deux couches fluides ont été étudiés en utilisant une méthode énergétique. Les résultats confirment le critère de stabilité obtenu par Sele pour les cellules de réduction de l'aluminium et posent les bases d'un critère généralisé au cas d'un système fluide à trois couches incluant la viscosité et la tension de surface. De nouvelles simulations numériques directes avec Archer ont montré que le système reste stable lorsque le critère de Sele est respecté, bien que certains comportements des interfaces ne soient pas totalement prédits par la théorie existante, indiquant la nécessité d'approfondir ces recherches.

Abstract

Liquid metal batteries represent a promising solution for stationary energy storage, particularly in the context of the energy transition. Their entirely liquid composition subjected to a strong electric current and high temperature requires a thorough study of internal flows to prevent short-circuit risks due to hydrodynamic instabilities. This thesis focuses on interfacial instabilities caused by the redistribution of electric current in media with different electric conductivity, which can manifest themselves as traveling or standing waves. The technical challenge associated with the theoretical study of these phenomena is the complexity of the calculations related to the consideration of the three fluid layers, viscosity, electromagnetic effects and edge effects.

First, a linear stability analysis was performed to study the effect of viscosity and to a lesser extent of surface tension in an infinite three-layer fluid system subjected to the gravity field alone. This gravity field is the driving force of the so-called Rayleigh-Taylor instability, unlike what happens in liquid metal batteries which are gravitationally stable. This first study allows to characterize the coupling of the interfaces to better understand previously carried out experiments. The results show that the behaviour of the interfaces depends on the coupling parameter : the thickness of the medium layer adimensionalized by the wave number of the perturbation. Direct numerical simulations carried out with the Archer code validated the theory until the non-linear effects were significant and allowed to identify three regimes according to the increasing value of the coupling parameter for a system where the upper interface is gravitationally stable and the lower interface is gravitationally unstable : the succession of two coupled regimes, one dominated by the behaviour of a gravity wave, the other dominated by the behaviour of a Rayleigh-Taylor instability, and a decoupled regime.

Secondly, the effect of the magnetic field on interfacial instabilities in an infinite three-layer fluid system was studied. The linear stability analysis, extended to include the first three complexities, allowed to map the stability of the system as a function of a dimensionless magnetic field, taking into account both the magnetic field induced by the electric current inside the battery and an external magnetic field, and the coupling parameter. A critical magnetic field was identified, whose value depends on the densities of the three fluids and the surface tensions of the two interfaces. Viscosity has no effect on this map ; it slows down the perturbations without directly affecting the stability condition as expected.

Finally, the edge effects and the influence of the magnetic field in a two-layer fluid system were studied using an energetic method. The results confirm the stability criterion obtained by Sele for aluminum reduction cells and lay the foundations for a generalized criterion for the three-layer viscous case including surface tension. New direct numerical simulations with Archer showed that the system remains stable when the Sele criterion is respected, although some behaviours of the interfaces are not fully predicted by existing theory, indicating the need for further research.

1.1 Contexte énergétique

1.1.1 Problème posé

L'un des plus importants problèmes actuels concerne le stockage de l'énergie du réseau électrique. Le réseau électrique n'ayant presque aucune capacité de stockage, l'électricité produite doit alors être immédiatement consommée, favorisant les sources d'énergie stockable, souvent fossile (pétrole, charbon, gaz naturel, etc.) au détriment des sources d'énergie au caractère intermittent telles que les sources d'énergie renouvelable (principalement le soleil et le vent). Ainsi par le passé, les combustibles fossiles se sont imposés et à titre d'exemple le domaine des transports dépend encore quasi-exclusivement des produits pétroliers. Cependant, aujourd'hui on assiste à une volonté d'augmenter la part d'électricité d'origine renouvelable. L'on comprend alors l'importance du stockage d'énergie dans le développement de nouveaux systèmes énergétiques plus durables. Ainsi, l'ONU, à travers ses rapports sur le climat, insiste sur l'urgence d'accélérer le déploiement de solutions de stockage énergétique pour réduire les émissions de gaz à effet de serre et atteindre les objectifs de l'Accord de Paris (ONU, 2021).

C'est dans ce contexte énergétique que ce travail de thèse s'inscrit.

1.1.2 Solutions

Le moyen le plus familier pour stocker de l'énergie consiste à utiliser des batteries (ou accumulateurs). Ce sont des systèmes électrochimiques réversibles, qui stockent de l'énergie sous forme chimique et la restituent sous forme électrique. Une batterie comporte un ou plusieurs éléments, chacun doté d'une électrode positive, d'une électrode négative, d'un séparateur et d'un électrolyte. Selon les composants chimiques et les matières utilisées pour ces éléments, les propriétés de la batterie seront différentes. Les principales propriétés d'une batterie qui vont justifier le choix d'un type de batterie par rapport à un

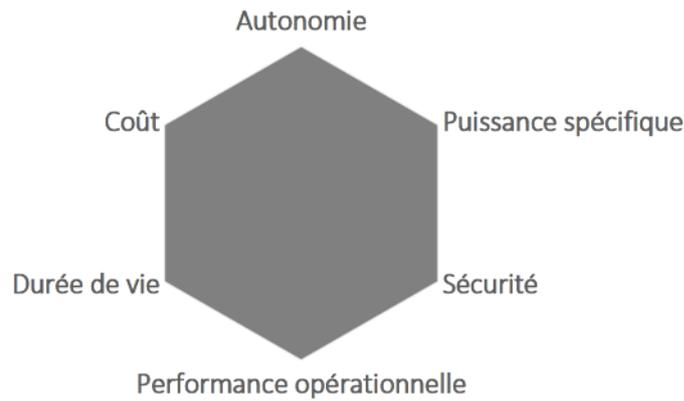


FIGURE 1.1 – Schéma représentant les six principaux critères de sélection des batteries d’après le RS2E. Plus ce schéma est coloré et plus l’autonomie, la puissance spécifique, la sécurité, la performance opérationnelle, la durée de vie et le coût de la batterie seront élevés.

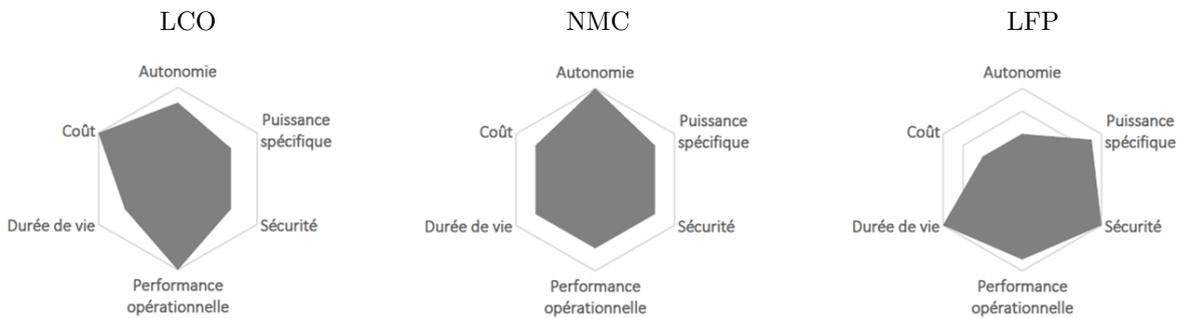


FIGURE 1.2 – Schémas représentant les critères de sélection de différents types de batteries à base de lithium : la batterie Lithium-Cobalt oxyde (LCO) qui possède une forte densité d’énergie mais une faible cyclabilité (à gauche), la batterie Li-ion Nickel-Manganèse-Cobalt (NMC) qui possède une forte densité d’énergie mais pose un problème d’éthique lié au Cobalt (au milieu) ainsi que la batterie Li-ion Lithium-Fer-Phosphate (LFP) qui est très exploitée en Chine pour son faible coût (à droite) d’après le RS2E.

autre sont son autonomie, sa puissance spécifique, sa sécurité, sa performance opérationnelle, sa durée de vie et son coût d’après le réseau français sur le stockage électrochimique de l’énergie, RS2E (voir figure 1.1).

L’autonomie (ou densité d’énergie) est la quantité d’énergie stockée par unité de masse (ou de volume) d’accumulateur. La puissance est l’énergie électrique fournie par unité de temps et par unité de masse d’accumulateur ; il s’agit de la rapidité à délivrer l’énergie. La sécurité fait référence à l’état où les risques industriels pouvant entraîner des dommages dans le cadre d’une utilisation standard sont contrôlés. La performance opérationnelle est la capacité à fonctionner dans des conditions variées, notamment en termes de température, selon des usages divers. La durée de vie (ou cyclabilité) est la capacité de stocker et de décharger de l’énergie réversiblement. Le coût (global d’utilisation) est la somme de l’ensemble des frais liés à la production et au maintien de la batterie.

On peut distinguer deux types d’application pour lesquels les choix de batterie à utiliser pour stocker l’énergie sont différents. Pour les applications de mobilité telles que dans les transports où l’Internet des objets, le critère le plus important est la densité d’énergie. Le type de batterie ayant le plus de succès est la lithium-ion car elle permet de stocker la plus grande densité d’énergie, de l’ordre de deux-cents watts heure par kilogramme et pourrait atteindre trois-cents watts heure par kilogramme avec des avancées

technologiques et l'amélioration des matériaux utilisés (NITTA et al. 2015). Le système lithium-air pourrait même atteindre plusieurs milliers de watts heure par kilogramme (BRUCE et al. 2012). Elles peuvent de plus stocker de l'énergie pendant des mois. Cependant, leur cyclabilité (de l'ordre de cinq cent à mille cycles) ainsi que leur vitesse de décharge (de l'ordre de trente minutes à une heure) sont insuffisantes pour des applications stationnaires. L'évaluation suivant les six principaux critères de sélection pour différents types de batteries à base de lithium est montrée sur la figure 1.2. Il est à noter qu'aucun système de stockage d'énergie ne possède les deux qualités de pouvoir à la fois stocker beaucoup d'énergie et la délivrer rapidement. Un bon compromis peut cependant être obtenu avec les supercondensateurs. La Nawa technologies a mis au point de telles batteries permettant un rechargement mille fois plus rapide qu'avec une batterie classique et pouvant supporter plus d'un million de cycles de charge ; soit une durée de vie de près de vingt ans (Nawa s. d.). Cependant, le coût des supercondensateurs est en général trop élevé.

Pour les applications stationnaires telles que le stockage de masse d'électricité issue d'énergie renouvelable, les densités d'énergies n'ont pas d'intérêt. Les critères de choix sont ici la cyclabilité et le coût global de possession. Le système le plus utilisé aujourd'hui pour stocker de grandes quantités d'énergie primaire lors de période de surproduction reste le stockage hydraulique (STEP : Station de Transfert d'Énergie par Pompage). De grands projets de recherche et développement sont en cours pour intégrer les batteries dans ces stockages d'énergie. Ainsi la batterie sodium-ion dont le premier prototype a été dévoilé par le réseau français RS2E aurait des propriétés similaires à la batterie lithium-ion mais coûterait moins chère. Elle ne peut néanmoins pas rivaliser avec celle-ci en termes de densité d'énergie. Les batteries Li-ion et les supercondensateurs permettent aujourd'hui de couvrir la plupart des marchés du stockage d'électricité. De nombreux systèmes sont cependant en cours de développement ; notamment sur la combinaison des deux pouvant améliorer la durée de vie d'au moins cinquante-cinq pourcent ou sur la batterie lithium-soufre avec une densité d'énergie théorique quatre fois supérieure à celle de la batterie Li-ion. En général, aujourd'hui, de grands fonds sont levés pour le déploiement industriel du stockage électrochimique de l'énergie pour des transports plus propres et le développement des énergies durables.

Les batteries jouent un rôle clé dans ce contexte, et la Commission européenne, dans sa Stratégie pour une Europe neutre en carbone d'ici 2050, met en avant l'importance de développer des technologies de stockage de l'énergie innovantes et durables pour soutenir cette transition (Commission européenne, 2019).

Un autre type de batterie se prêtant parfaitement à ces applications stationnaires sont les batteries à métaux liquides. Elles seraient un système de stockage efficace, à bas coût (comparé aux batteries Li-ion) et avec une cyclabilité de plus de dix mille cycles complets de charge et de décharge. Parmi les technologies émergentes, les batteries à métaux liquides offrent des avantages significatifs par rapport à d'autres systèmes de stockage stationnaire, comme les batteries tout solide ; les batteries à métaux liquides et les batteries tout solide étant les deux systèmes de stockage les plus étudiés pour résoudre le problème du réseau électrique (H. KIM et al. 2012, BANERJEE et al. 2020). Les batteries à métaux liquides, se caractérisent par une durée de vie prolongée et une résistance aux problèmes courants dans les batteries solides, tels que la formation de dendrites. Ces caractéristiques sont détaillées dans l'article de KELLEY et WEIER 2018, qui explore les aspects hydrodynamiques dans les batteries à métaux liquides et

souligne leur potentiel pour le stockage stationnaire de l'énergie. Les batteries tout solide, bien qu'offrant une meilleure sécurité thermique et une plus grande densité énergétique, nécessitent des matériaux plus rares et coûteux, ainsi que des processus de fabrication plus complexes. Les batteries à métaux liquides, quant à elles, utilisent des matériaux plus abondants et sont moins coûteuses à produire à grande échelle, ce qui les rend particulièrement adaptées aux besoins de stockage à long terme du réseau électrique (voir figure 1.3).

Dans cette thèse, on va s'intéresser justement aux batteries à métaux liquides et plus précisément à la

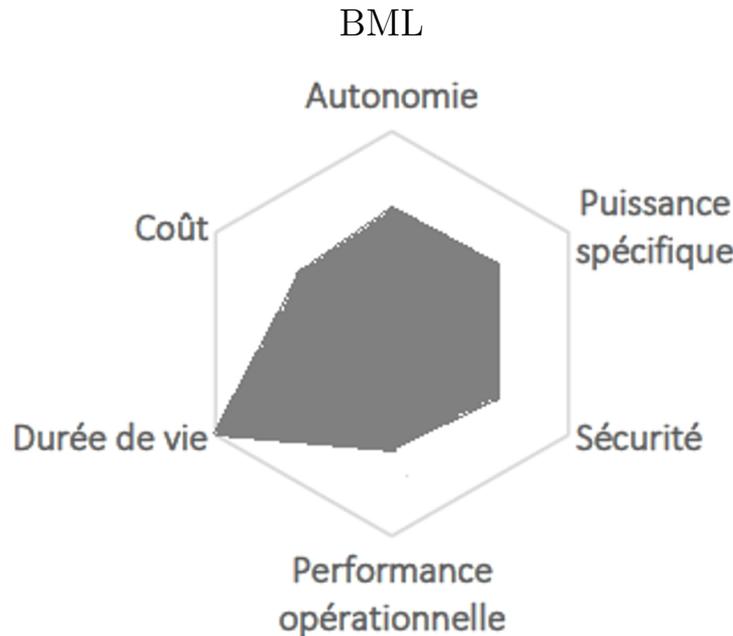


FIGURE 1.3 – Schéma représentant une estimation des notes sur les six principaux critères de sélection des batteries pour les batteries à métaux liquides basé sur les schémas du RS2E.

mécanique des fluides au sein de ces batteries, en ignorant les effets électrochimiques.

1.2 Batteries à métaux liquides

1.2.1 Représentation simplifiée

Une batterie à métaux liquides (BML) comprend généralement deux électrodes métalliques liquides séparées par un électrolyte en sel fondu. Elle peut alors être représentée par un système fluide à trois couches : la couche supérieure correspondant à l'électrode négative, la couche intermédiaire à l'électrolyte et la couche inférieure à l'électrode positive. Le fonctionnement de la batterie repose sur les mouvements d'ions entre les électrodes, entraînés par les réactions d'oxydo-réduction. Lors de la décharge, l'électrode négative subit une oxydation, libérant des électrons et des ions. Ces ions migrent ensuite vers l'électrode positive, où ils réagissent pour former un alliage. L'électrode négative joue le rôle de l'anode et l'électrode positive joue le rôle de la cathode.

Le processus de charge est exactement l'inverse de la décharge (voir figure 1.4) et en particulier, les électrodes changent de rôles.

Concernant le choix des matériaux, l'électrode négative est choisie de sorte à avoir une forte électropositivité et l'électrode positive est choisie de sorte à avoir une forte électronégativité pour faciliter le mouvement des électrons entre eux (voir figure 1.5). Il faut également que la BML soit gravitationnellement stable. Ainsi, de nombreuses études ont été entreprises concernant le choix des matériaux pour les électrodes (électrode négative || électrode positive) que ce soit la batterie $Mg||Sb$ originellement proposée par BRADWELL et al. 2012, la batterie $Na||Zn$ (XU et al. 2016) dont le coût de production est encore plus faible que les autres batteries à métaux liquides, les batteries $Li||GaSn$ (K. WANG et al. 2021) et $NaK||Ga$ (DING et al. 2020) pouvant être utilisées à température ambiante ou encore la batterie à densité d'énergie élevée $Li||SbBiSn$ (CUI et al. 2022) ou enfin la batterie plus respectueuse de l'environnement $Li||SbSn$ (H. LI et al. 2016). Concernant le choix du sel fondu pour l'électrolyte, de nos jours, les halogénures de métaux alcalins et alcalino-terreux sont privilégiés (ZENG et al. 2023). Le principal objectif étant de déterminer la composition eutectique de ces halogénures, c'est-à-dire la proportion des différents éléments le composant pour laquelle la température de fusion est minimale comme par exemple une électrolyte de $LiCl - LiI$ ($LiCl : LiI = 36 : 64 \text{ mol } \%$) opérant à une température de $410 \text{ }^\circ\text{C}$ (J. KIM et al. 2018). Certains électrolytes peuvent être composés de jusqu'à quatre molécules comme l'électrolyte quaternaire raffiné $LiF - LiCl - LiBr - LiI$ dont la composition eutectique est $LiF : LiCl : LiBr : LiI = 9,1 : 30,0 : 21,7 : 39,2 \text{ mol } \%$ permettant de toujours diminuer la température d'opération du système ZHAO et al. 2023.

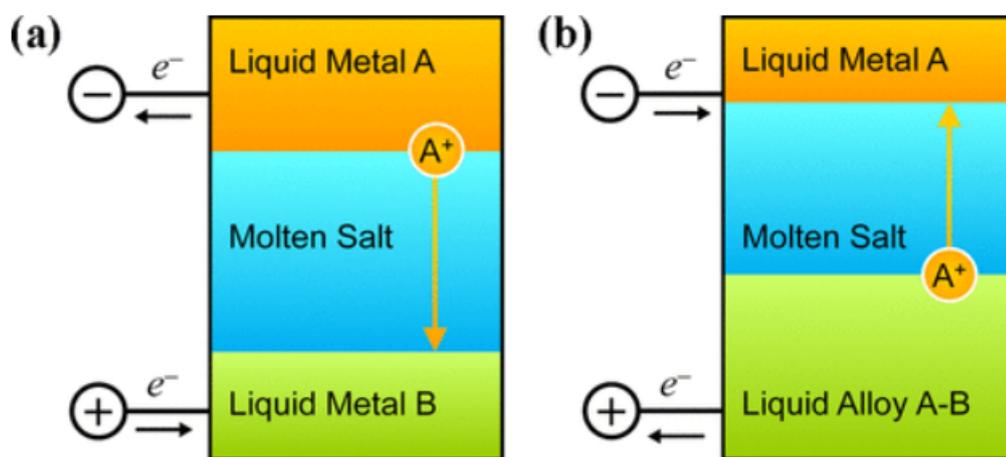


FIGURE 1.4 – Schéma représentant la réaction d'oxydo-réduction dans la batterie à métaux liquide en mode décharge (à gauche) et en mode charge (à droite), provenant de H. KIM et al. 2012.

1.2.2 Avantages et inconvénients

Bien que de nombreuses recherches sur les batteries à métaux liquides ont été effectuées dans les années 1960 et 1970, l'intérêt pour ces batteries a diminué en raison de ses contraintes opérationnelles et de la montée en popularité des batteries lithium-ion, qui offraient une meilleure densité énergétique et étaient plus adaptées aux applications de mobilité. Ce n'est que par la volonté récente de concevoir des systèmes permettant le stockage stationnaire de l'énergie à grande échelle que cet intérêt pour les batteries à métaux liquides a été ravivé au début des années 2010, grâce aux travaux d'une équipe du MIT (BRADWELL

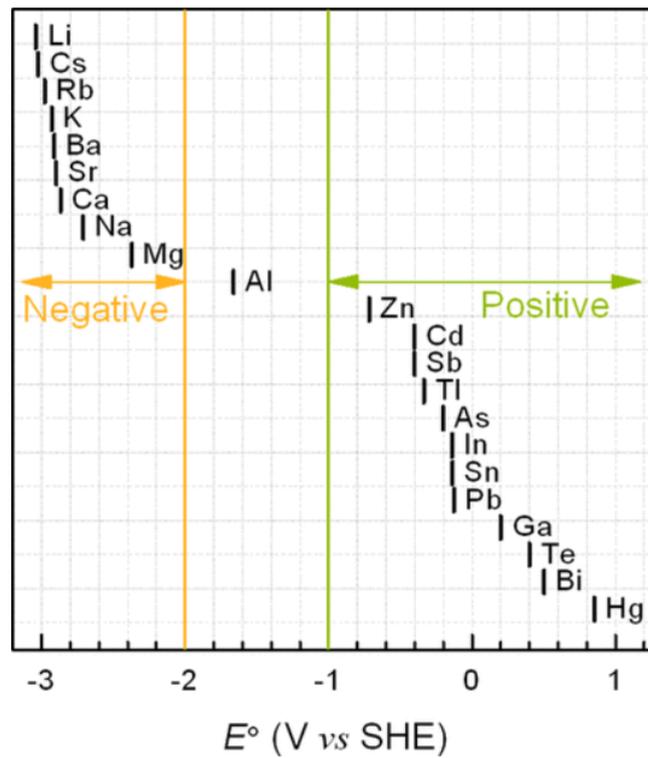


FIGURE 1.5 – Schéma représentant les différents choix d'électrodes en fonction de l'électronégativité des matériaux qui les composent, provenant de H. KIM et al. 2012.

et al. 2012). A titre d'exemples pour justifier l'utilisation de batteries à métaux liquides pour le stockage stationnaire de l'énergie à grande échelle, dans le domaine de l'énergie solaire, le transfert de chaleur est crucial pour l'efficacité et la durabilité des systèmes, et les métaux liquides émergent comme des solutions prometteuses grâce à leurs propriétés uniques (YUEGUANG, YI et JING 2021). Parallèlement, les batteries à métaux liquides offrent une solution intéressante pour le stockage d'énergie dans les éoliennes offshore, permettant de gérer l'intermittence et de réduire les coûts des infrastructures (SIMPSON et al. 2021).

Cependant, le fort courant électrique traversant la batterie ainsi que la température relativement élevée d'opération peuvent engendrer des instabilités hydrodynamiques. KELLEY et WEIER 2018 fournissent une analyse exhaustive des divers types d'instabilités présentes dans les batteries à métaux liquides. La compréhension et la gestion de ces instabilités sont cruciales pour améliorer la performance et la stabilité des BML. Les instabilités repertoriées sont décrites ci-après.

L'instabilité de Tayler est un phénomène magnétohydrodynamique qui entraîne un écoulement lorsqu'un courant axial important traverse un métal liquide. Cette instabilité est due à l'interaction entre les courants électriques et les champs magnétiques induits par ces courants. En raison de l'ampleur des courants impliqués et du fait que les conceptions actuelles de batteries à métaux liquides ont un rapport hauteur/largeur important, l'instabilité de Tayler n'affecte peut-être pas encore la technologie. Toutefois, pour les batteries de nouvelle génération plus grandes, l'instabilité de Tayler doit être soigneusement prise en compte (KELLEY et WEIER 2018). Identifiée par MARKEY et TAYLER 1974, cette instabilité est également caractérisée par le nombre de Hartmann, qui compare la force électromagnétique à la force vis-

queuse dans le fluide. Lorsque le courant dépasse une valeur seuil, des perturbations axiales et hélicoïdales se forment, menaçant la stabilité du système et, par extension, l'efficacité des batteries à métaux liquides. L'instabilité de Taylor est considérée comme préjudiciable à l'intégrité des batteries à métaux liquides, car elle pourrait induire des mouvements de fluide si forts pouvant compromettre la structure des couches de la batterie et créer des courts-circuits entre les deux électrodes (HERREMAN, NORE, CAPPANERA et J. -L. GUERMOND 2015).

L'écoulement électro-vortex est un phénomène magnétohydrodynamique qui se produit à proximité d'une électrode dont la section est plus petite que celle du métal liquide auquel elle est connectée. Ceci implique que le courant électrique dans les métaux liquides n'est pas forcément vertical comme dans les électrodes ; ainsi, si le courant circule suffisamment, l'instabilité entraîne un flux même dans le cas d'un courant purement axial et azimuthalement symétrique KELLEY et WEIER 2018. Cette instabilité est bien connue pour pouvoir améliorer le mélange et le transfert de masse et ainsi éviter la formation de dendrites au niveau des interfaces. Cependant, la déformation typique de l'interface causée par celle-ci et étudiée par HERREMAN, NORE, RAMOS et al. 2019 peut engendrer un court-circuit, même pour des batteries de tailles modérées (de dix à vingt centimètres de rayon).

En présence d'un champ magnétique extérieur, vertical et de faible amplitude, l'écoulement électro-vortex peut être tourbillonnant (HERREMAN, NORE, CAPPANERA et J. -L. GUERMOND 2020 ; BÉNARD 2023) et contrairement à l'écoulement électro-vortex non-tourbillonnant, celui-ci peut affecter la composition de l'électrode du bas.

La magnétoconvection est induite par l'interaction entre un champ magnétique et des gradients de température, principalement causés par du chauffage interne (par effet Joule), ce qui génère des mouvements convectifs dans le fluide conducteur. Cette instabilité est souvent caractérisée par le nombre de Hartmann, un nombre adimensionné qui compare la force électromagnétique aux forces visqueuses. Lorsque ce nombre dépasse une valeur seuil, l'écoulement purement conductif et donc sans mouvement à l'intérieur notamment de l'électrolyte devient convectif et potentiellement instable. Dans le contexte des batteries à métaux liquides, l'étude de SHEN et ZIKANOV 2016 explore comment ces effets peuvent conduire à des écoulements complexes et potentiellement nuisibles à la performance de la batterie. Les rouleaux de convection sont généralement poloïdaux pour les batteries à métaux liquides car leur flux est aligné et circule autour des lignes du champ magnétique, principalement induit par un courant électrique interne vertical (KELLEY et WEIER 2018). Si la paroi latérale est cylindrique, les conditions aux limites favorisent encore davantage les rouleaux de convection poloïdaux.

La convection peut également être compositionnelle puisque outre la température, les réactions chimiques peuvent modifier la masse volumique locale des fluides. HERREMAN, BÉNARD et al. 2020 ; BÉNARD 2023 ont montré que l'effet de la convection compositionnelle a un effet stabilisateur empêchant même l'écoulement électro-vortex de mélanger l'électrode positive lorsque la batterie est en mode décharge, du moins en l'absence de champ magnétique extérieur entraînant un écoulement électro-vortex tourbillonnant. Il peut cependant engendrer un mouvement convectif lorsque la batterie est en mode charge. Cette insta-

bilité est caractérisée par le nombre de Rayleigh compositionnel qui dépasse généralement de six ordres de grandeur le nombre de Rayleigh thermique. Ainsi, la convection compositionnelle est probablement beaucoup plus importante que la convection thermique (KELLEY et WEIER 2018).

L'effet Marangoni résulte des gradients de tension superficielle induits par des variations de température (effet Marangoni thermocapillaire) ou de concentration (effet Marangoni solutal) à l'interface fluide-fluide, ce qui génère des mouvements au niveau de la surface. KELLEY et WEIER 2018 ont analysé comment ces phénomènes, en conjonction avec la convection thermique, caractérisée par le nombre de Rayleigh, peuvent interagir pour déstabiliser les couches de métaux liquides, impactant l'efficacité de la batterie. L'effet Marangoni thermocapillaire est caractérisé par le nombre de Marangoni qui est analogue au nombre de Rayleigh pour la convection thermique. Cette instabilité se caractérise par l'attraction, par les régions de tension de surface plus élevée, des régions de tension de surface plus faible le long de l'interface

Les instabilités de ballottement sont des instabilité interfaciales dues à la redistribution du courant électrique après déformation de l'interface. Elle sont caractérisées par deux types de modèle, mettant en évidence des caractères distincts par DAVIDSON et LINDSAY 1998. Les premiers modèles décrits par DAVIDSON et LINDSAY 1998 sont appelés : modèles d'ondes progressives et permettent d'étudier des systèmes soumis à des perturbations de petites longueurs d'ondes, cette instabilité interfaciale se manifeste sous la forme d'une onde progressive pouvant rappeler l'instabilité de Rayleigh-Taylor (CHANDRASEKHAR 1961 ; SNEYD 1985) pour laquelle un fluide est superposé à un autre fluide de plus faible masse volumique et dont le moteur est la gravité.

Les seconds modèles décrits par DAVIDSON et LINDSAY 1998 sont appelés : modèles d'ondes stationnaires et permettent d'étudier des systèmes soumis à des perturbations de grandes longueurs d'ondes, cette instabilité interfaciale se manifeste sous la forme d'une onde tournant le long des parois d'un système borné et souvent modélisée comme une onde stationnaire (SELE 1977). Cette instabilité est principalement due à la partie verticale d'un champ magnétique extérieur à la batterie provenant par exemple d'autres batteries dans le cas d'un regroupement de batteries à métaux liquides. Elle est caractérisée par le nombre de Sele, un nombre adimensionné qui compare la force électromagnétique aux forces de pression ; lorsque celui-ci dépasse un certain seuil, l'amplitude de l'onde stationnaire augmente également dans le temps. Ce nombre de Sele a été déterminé pour des cellules de réduction de l'aluminium possédant deux couches fluides. Il n'a par la suite cessé d'être amélioré pour notamment être utilisé pour les batteries à métaux liquides. WEBER, BECKSTEIN, GALINDO et al. 2017 ont étudié l'instabilité de ballottement dans les batteries à métaux liquides à partir des modèles de cellules de réduction de l'aluminium notamment étudiés par SELE 1977. La principale différence entre ces deux systèmes outre le nombre de couches fluides est la géométrie ; les cellules de réduction de l'aluminium ayant la forme d'un parallélogramme rectangle tandis que les batteries à métaux liquides étudiées sont cylindriques. HERREMAN, NORE, J. -L. GUERMOND et al. 2019 en utilisant une méthode perturbative ont déterminé un modèle en eau profonde et peu profonde incluant entre autres la viscosité des fluides et la dissipation magnétique pour des systèmes de couches profondes. Ce modèle a ensuite été généralisé pour des systèmes à trois couches

(HERREMAN, WIERZCHALEK et al. 2023). Le couplage entre les interfaces soumises à cette instabilité a été étudié par HORSTMANN, WEBER et WEIER 2018 qui a montré que les interfaces peuvent se propager soit symétriquement soit antisymétriquement ; ce résultat est cohérent avec le modèle d'onde progressive développé par SNEYD 1985.

Avec la présence de toutes ces instabilités hydrodynamiques, il devient compliqué d'étudier l'écoulement dans les batteries à métaux liquide de manière générale. Ainsi, la suite de cette thèse se concentre sur les instabilités interfaciales en considérant des systèmes isothermes. Par la suite cette instabilité sera dénommée onde progressive dans les systèmes infinis et onde stationnaire dans les systèmes bornés pour reprendre la notation de DAVIDSON et LINDSAY 1998 bien que le terme d'onde tournante soit plus juste que le terme d'onde stationnaire. Cette thèse s'effectue en collaboration avec une autre thèse effectuée au laboratoire LOMC du Havre sur la magnétoconvection à travers le projet HILIMBA du LABEX EMC3. Dans ces deux thèses, les batteries à métaux liquides sont modélisées par des systèmes à trois couches fluides dont les instabilités ont été peut étudiés de manière théorique par le passé à l'inverse des instabilités dans des systèmes à deux couches fluides.

1.3 Instabilités interfaciales

1.3.1 Ondes progressives

Pour des systèmes infinis, l'instabilité est attendue sous la forme d'une onde progressive pouvant rappeler l'instabilité de Rayleigh-Taylor bien que la source de l'instabilité soit différente : il s'agit de la gravité pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor tandis qu'il s'agit de la force de Lorentz pour l'instabilité interfaciale présente dans les batteries à métaux liquides. En l'absence de champ magnétique, lorsque deux fluides sont superposés dans le champ de gravité, deux types d'écoulement différents peuvent se produire. Si le fluide du dessus possède une masse volumique plus importante que celui du dessous, une instabilité de Rayleigh-Taylor peut se développer à l'interface entre eux. Cette instabilité donne lieu à des digitations distinctes : des pics de la couche supérieure vers la couche inférieure et des bulles de la couche inférieure vers la couche supérieure. Cependant, si le fluide du dessous possède une masse volumique plus importante que celui du dessus, cela va générer une onde de gravité dont l'amplitude va diminuer avec le temps.

Ce système fluide à deux couches a été initialement étudié par Lord Rayleigh à la fin du dix-neuvième siècle, bien qu'il n'ait pris en compte ni la viscosité des fluides ni la tension de surface entre eux (RAYLEIGH 1883). Il a réalisé une analyse de stabilité linéaire qu'il a utilisée à l'origine pour déterminer les conditions d'instabilité d'un système en équilibre stable dans des cas simples avec différents types de surface de séparation : une surface plane et une surface oblique pour modéliser un jet (RAYLEIGH 1880). Cette méthode s'inspire des travaux de Sir W. Thomson qui a déterminé les conditions dans lesquelles une surface d'eau plane est rendue instable, donnant l'influence du vent sur les vagues (THOMSON 1871). Elle consiste à déterminer un état d'équilibre (ici, une position d'équilibre : la surface entre deux fluides considérée comme plane) puis à introduire une petite perturbation. D'après le théorème de Fourier, cette

perturbation peut être décomposée en une somme d'ondes que l'on peut considérer séparément. En coordonnées cartésiennes chaque onde peut être exprimée sous la forme $A \exp(j\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t)$, avec A l'amplitude de l'onde, j l'unité imaginaire, \vec{k} le vecteur d'onde, $\vec{x}=(x, y, z)^T$ le vecteur position, t le temps et ω le coefficient temporel complexe comprenant le taux de croissance de l'onde, $\Re(\omega)$, et la pulsation de l'onde, $\Im(\omega)$. Ainsi, une onde est dite instable si $\Re(\omega) > 0$; sinon, elle est stable. La relation de dispersion qui donne la relation entre le coefficient temporel et le vecteur d'onde permet de déterminer la condition de stabilité d'un système. RAYLEIGH 1883 a déterminé la relation de dispersion suivante pour son cas d'étude :

$$\omega^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} gk, \quad (1.1)$$

où ρ_1 et ρ_2 sont respectivement la masse volumique des couches inférieure et supérieure, g la norme du champ de gravité et k la norme du vecteur d'onde. Les solutions de cette équation sont appelées les valeurs propres de ce problème. La détermination du spectre du système est appelée la résolution du problème aux valeurs propres, chaque valeur propre correspondant à un mode normal. Le système est dit instable si au moins un de ses modes normaux est instable. Cela signifie que pour le cas étudié par Lord Rayleigh, le système est toujours instable lorsque la couche supérieure possède une masse volumique plus importante que celle de la couche inférieure.

Pour aller plus loin dans la description mathématique du problème physique, il est important de considérer la tension de surface entre les fluides ainsi que la viscosité des fluides.

Premièrement, la densité entre les deux milieux est continue, et sa fine zone de variation très près de la surface séparant les deux fluides provoque une tension de surface (MAXWELL 1876). Une conséquence de la tension de surface est un saut de pression : du côté concave, la pression dépasse celle du côté convexe de la pression de Laplace $\gamma_{12}(r_1^{-1} + r_2^{-1})$, où γ_{12} est la tension superficielle et r_1 et r_2 sont les rayons de courbure de deux sections quelconques normales à la surface et entre elles. La prise en compte de ce saut de pression dans la théorie précédente permet une nouvelle relation de dispersion (HARRISON 1908 ; CHANDRASEKHAR 1961) :

$$\omega^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} gk - \frac{\gamma_{12}}{\rho_2 + \rho_1} k^3 \quad (1.2)$$

Une couche supérieure de masse volumique plus élevée que la couche inférieure n'est plus une condition suffisante pour l'instabilité. Ici, le nombre d'onde doit également être inférieur à une valeur critique appelée nombre d'onde de coupure $k_c = ((\rho_2 - \rho_1)g/\gamma_{12})^{1/2}$.

Deuxièmement, en l'absence de viscosité, la composante tangentielle de la vitesse est discontinue (notons que la composante normale de la vitesse est continue avec la conservation de la masse). La prise en compte de la viscosité supprime cette discontinuité (LAMB 1895). En considérant la viscosité des fluides, la relation de dispersion ne peut plus être résolue analytiquement sans quelques approximations. Par exemple, en négligeant la tension de surface, HARRISON 1908 a trouvé que pour $k\sqrt{\nu/\omega} \ll 1$, ν étant la viscosité cinématique, la valeur propre pour le cas gravitationnellement instable ($\rho_2 > \rho_1$) peut être approximée comme la somme de différents termes d'ordre de grandeur par rapport à $k\sqrt{\nu/\omega}$ (Figure 1.6).

Le terme dominant ω_1 est le même que celui trouvé par Lord Rayleigh lorsque $\rho_2 > \rho_1$:

$$\omega_1 = \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} gk \right)^{1/2} \quad (1.3)$$

Le terme d'approximation du deuxième ordre ω_2 est donné par :

$$\omega_2 = \omega_1 - \omega_1^{\frac{1}{2}} \frac{2k\rho_1\rho_2(\nu_1\nu_2)^{1/2}}{(\rho_2 + \rho_1) \left(\rho_2\nu_2^{1/2} + \rho_1\nu_1^{1/2} \right)}, \quad (1.4)$$

où ν_1 et ν_2 sont respectivement la viscosité cinématique des couches inférieure et supérieure.

CHANDRASEKHAR 1961 a étudié la limite de ce cas lorsque $k\sqrt{\nu/\omega} \gg 1$ en considérant que les densités cinématiques des deux fluides sont les mêmes. Il a trouvé que la valeur propre correspondante ω_∞ devient proportionnellement à k^{-1} (Figure 1.6). Il a également montré que la viscosité n'a aucun effet sur le nombre d'onde de coupure. Ainsi, certaines valeurs propres analytiques peuvent être trouvées pour des valeurs extrêmes de $k\sqrt{\nu/\omega}$, mais pour des valeurs intermédiaires de $k\sqrt{\nu/\omega}$, elles doivent être déterminées numériquement. Une autre méthode permettant uniquement de déterminer la stabilité d'un système

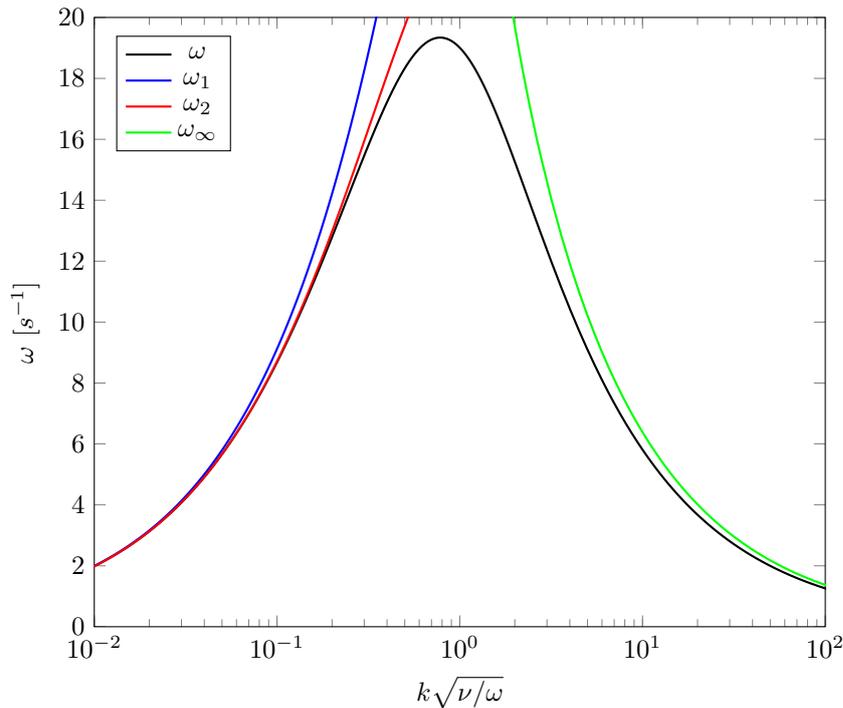


FIGURE 1.6 – Relation de dispersion de CHANDRASEKHAR 1961 en noire pour $\gamma_{12} = 0 \text{ kg.s}^{-2}$, $\rho_1 = 773 \text{ kg.m}^{-3}$, $\rho_2 = 1398 \text{ kg.m}^{-3}$, $\nu_1 = \nu_2 = 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ et $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ avec les approximations analytiques pour les valeurs extrêmes de $k\sqrt{\nu/\omega}$.

est la technique du principe énergétique. Cette méthode permet d'étudier des systèmes plus complexes avec des forces supplémentaires comme par exemple les forces de Lorentz pour mettre en évidence des effets hydromagnétiques (BERNSTEIN et al. 1958). Elle peut aussi être utilisée pour avoir un point de vue différent sur la stabilité du système : elle permet d'identifier la variation temporelle de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. La prise en compte de la viscosité permet également de déterminer le taux de dissipation d'énergie dû aux effets visqueux. Le théorème de l'énergie peut alors être appliqué pour

déterminer dans quelle condition la variation temporelle de l'énergie cinétique augmente avec le temps correspondant à un comportement instable du système (SELIG 1964).

L'étude de ce système fluide à deux couches superposées permet de mieux comprendre tout système fluide dans lequel un fluide est accéléré vers un autre fluide en contact avec lui (TAYLOR 1950). Cela concerne des phénomènes naturels tels que les milieux interstellaires et les amas de galaxies, le bord interne d'un disque astrophysique autour d'un trou noir central, l'accrétion sur les magnétosphères des étoiles à neutrons, les magnétosphères de Jupiter et de Saturne et la structure filamentaire du soleil (ZHOU 2017) ainsi que des phénomènes artificiels tels que la combustion pré-mélangée, les systèmes réactifs sans pré-mélange, les échangeurs de chaleur et les sprays dans les chambres de combustion interne, le revêtement industriel par des films liquides minces (ZHOU 2017), les cellules Hall-Héroult, les fours à arc électrique (SNEYD 1985) ainsi que les batteries à métaux liquides (KELLEY et WEIER 2018). Cependant, dans la majorité des cas, ces systèmes comportent au moins trois couches fluides.

Les systèmes fluides à trois couches ont été étudiés par MIKAELIAN 1982 sans tenir compte de la viscosité des fluides et de la tension de surface entre eux. Pour une longueur d'onde donnée, il a constaté que lorsque l'épaisseur de la couche médiane tend vers l'infini, les valeurs propres du système sont identiques à celles obtenues si chaque interface était traitée indépendamment ; les interfaces sont ainsi dites découplées. En revanche, lorsque l'épaisseur de la couche médiane tend vers zéro, les valeurs propres du système sont identiques à celles obtenues si une seule interface était traitée entre les deux couches extrêmes plus une valeur propre nulle. Comme prévu, ces travaux ont révélé que l'épaisseur de la couche médiane est un paramètre important pour étudier le couplage entre interfaces pour les systèmes fluides à trois couches.

SNEYD 1985 a par la suite ajouté une force volumique supplémentaire : la force de Lorentz due à un flux de courant électrique dans les fluides afin de déterminer les conditions dans lesquelles cette force peut déstabiliser un système fluide à trois couches avec deux interfaces gravitationnellement stables. PARHI et NATH 1991 a étudié l'effet de la tension de surface et de la viscosité sur des systèmes fluides à trois couches mais sans déterminer toutes les valeurs propres dans le cas général. Les travaux théoriques cités précédemment sont résumés dans le tableau 1.1.

Quelques travaux expérimentaux ont été réalisés pour appuyer ces théories plus récentes sur les systèmes fluides à trois couches, notamment les travaux de JACOBS et DALZIEL 2005 pour les fluides miscibles. ADKINS et al. 2017 a fourni des données expérimentales pour les fluides non miscibles et a comparé ses résultats avec ceux de MIKAELIAN 1982. Ils ont étudié deux systèmes composés d'une interface gravitationnellement instable en bas et d'une interface gravitationnellement stable en haut. Le taux de croissance de l'interface inférieure a été mesuré en supposant que son écoulement était celui d'une instabilité de Rayleigh-Taylor, tandis que l'écoulement de l'interface supérieure était celui d'une onde de gravité. Ces données ont alors révélé certains désaccords avec la théorie de MIKAELIAN 1982. Ces divergences peuvent s'expliquer par l'absence de viscosité et de tension superficielle dans la théorie de Mikaelian et par le fait que le couplage entre les interfaces n'a pas été pris en compte dans l'analyse d'Adkins et al. Une extension intéressante de la théorie de Mikaelian serait de considérer la viscosité des fluides et la tension superficielle entre eux. De plus, pour étudier le couplage entre les deux interfaces, en plus de résoudre le problème aux valeurs propres, il faut résoudre le problème aux valeurs initiales comme nous le verrons

Référence	Force volumique additionnelle	Viscosité	Tension de surface	Couches
RAYLEIGH 1883	Non	Non	Non	2
HARRISON 1908	Non	Oui	Non	2
CHANDRASEKHAR 1961	Non	Oui	Oui	2
	Force de Lorentz	Non	Non	2
MIKAELIAN 1982	Non	Non	Non	3
SNEYD 1985	Force de Lorentz	Non	Non	3
PARHI et NATH 1991	Non	Oui	Oui	3
MIKAELIAN 1996	Non	Oui	Oui	2 (finies)

TABLE 1.1 – Tableau récapitulatif des travaux théoriques marquants réalisés sur les systèmes fluides à deux ou trois couches.

dans cette thèse. Il consiste à imposer des conditions initiales aux grandeurs physiques ; par exemple, on peut imposer des conditions de déformation pure (i.e. une interface déformée avec une vitesse nulle) ou d'impulsion pure (i.e. une interface plate avec une vitesse non nulle). Le nombre de conditions dépend du nombre de valeurs propres (COTTIER, BRENN et RENOULT 2021).

1.3.2 Ondes stationnaires

Pour des systèmes bornés, l'instabilité est attendue sous la forme d'une onde stationnaire tournant le long des parois. Pour un tel système soumis à un courant électrique J^* ainsi qu'à un champ magnétique B^{ex} , tout deux verticaux et homogènes (voir figure 1.7), SELE 1977 a proposé un critère pour évaluer la stabilité des cellules de réduction de l'aluminium, des systèmes à deux couches fluides. Ce critère examine comment les forces électromagnétiques et hydrodynamiques dans la cellule affectent la stabilité de la couche de bain électrolytique et du métal liquide. Ce critère est le suivant :

$$\beta = \frac{J^* B^{ex}}{(\rho_1 - \rho_2)g} \frac{l_x}{h_1} \frac{l_y}{h_2} \leq \beta_{cr} = 12, \quad (1.5)$$

où l_x et l_y , sont respectivement la largeur et la profondeur de la cuve, h_1 et h_2 sont respectivement la hauteur de la couche de métal liquide et de l'électrolyte. β_{cr} dépend de la géométrie du système et a été

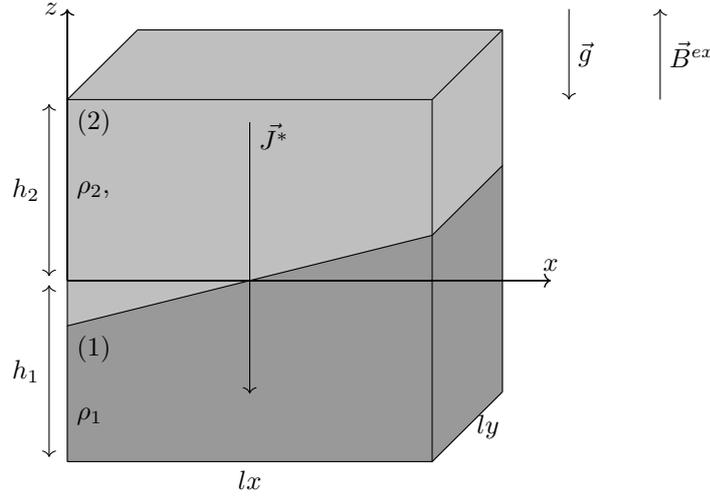


FIGURE 1.7 – Représentation schématique du système fluide à deux couches fluides étudié par SELE 1977

déterminé plus tard par BOJAREVICS et ROMERIO 1994 :

$$\beta_{cr} = \pi \left| k_x^2 \frac{l_y}{l_x} - k_y^2 \frac{l_x}{l_y} \right|. \quad (1.6)$$

SNEYD et A. WANG 1994 ont déterminés la condition de stabilité considérant un champ magnétique lointain avec gradient spatial (plus simplement vertical). La prise en compte d'un couplage de deux modes orthogonaux de coefficients temporels ω_x et ω_y a ensuite été étudié par DAVIDSON et LINDSAY 1998 en considérant l'électrode comme solide : le mouvement de ballottement est modélisé par le mouvement des pavés droits comme une oscillation en deux dimensions d'un pendule mécanique. Ils ont également considérés une faible épaisseur de l'électrolyte ainsi que des courants redistribués identiques au modèle de Sele et ont obtenu la condition suivante :

$$\frac{J^* B^{ex}}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1} > \frac{|\omega_x^2 - \omega_y^2|}{b_1 + b_2}$$

ZIKANOV 2021 a été le premier à étudier théoriquement l'instabilité de ballottement pour les BML. Il s'agit de la continuité du travail de DAVIDSON et LINDSAY 1998 pour des systèmes à 3 couches (BML) ; ici les deux pavés sont couplés par les forces électromagnétiques, l'électrolyte est considéré peu épais et le rapport d'aspect de l'ordre de l'unité. Pour un champ magnétique vertical, il a obtenu la condition suivante :

$$c_1 \frac{J_0 B_{0,z} l_x^2}{12 \rho_1 g h_1 h_2} + c_2 \frac{J_0 B_{0,z} l_x^2}{12 \rho_3 g h_2 h_3} > \left| 1 - \frac{\omega_x^2}{\omega_y^2} \right|,$$

avec c_1 et c_2 , deux constantes. Il a par la suite ajouté un champ magnétique azimutal à la manière de Sneyd. La plupart de ces critères prédisent que les cellules cylindriques sont toujours instables mais ils ne prennent pas en compte la dissipation par induction magnétique, la viscosité ainsi que la tension de surface.

En résumé, les avancées suivant l'article de Sele ont enrichi la compréhension des critères d'instabilité en intégrant des effets supplémentaires. Ces travaux ont abouti à une formulation plus complexe des critères

d'instabilité. Cependant l'étude numérique de WEBER, BECKSTEIN, HERREMAN et al. 2017 concernant un système de batterie à métaux liquides soumis à un courant électrique et un champ magnétique vertical montre que le critère de SELE 1977 permet de mieux définir l'apparition de l'instabilité que les critères définis par DAVIDSON et LINDSAY 1998 et ZIKANOV 2021 du moins pour le rapport de forme fixe étudié dans l'article. Il faut cependant noter que les deux premiers critères ont été développés pour des systèmes à deux couches et que le dernier, bien qu'ayant été développé pour des systèmes à trois couches tels que les BML, a utilisé l'hypothèse des couches peu profondes est n'est donc pas non plus entièrement adapté au système étudié. WEBER, BECKSTEIN, HERREMAN et al. 2017 insiste sur le fait qu'un critère de Sele amélioré devrait être développé pour des couches plus profondes ; il devrait également inclure la viscosité, la tension de surface ainsi que les effets de l'induction.

1.4 Travail réalisé

1.4.1 Objectif de la thèse

Trois principales difficultés ont été dénombrées pour le développement d'un modèle de batterie à métaux liquides permettant de cibler une instabilité interfaciale progressive du point de vue d'une analyse linéaire de stabilité (voir figure 1.8). La première difficulté est la prise en compte de trois couches fluides, allourdissant les calculs et augmentant le nombre de valeurs propres. La deuxième difficulté est la prise en compte de la viscosité (et dans une moindre mesure de la tension de surface) ne permettant plus la résolution analytique du problème aux valeurs propres. La troisième difficulté est la prise en compte du champ électromagnétique imposant un couplage entre les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour la mécanique des fluides et les équations de Maxwell pour l'électromagnétisme.

Le premier objectif de cette thèse est d'aboutir à un modèle prenant en compte ces trois difficultés. Cela permettra de bien comprendre le caractère progressif de l'instabilité interfaciale. Le second objectif est d'étudier le caractère stationnaire de cette instabilité permettant de mieux comprendre l'écoulement dans les batteries à métaux liquides soumise à la fois à des perturbations de petites et de grandes longueurs d'onde.

Dans l'objectif de supporter les différentes théories, des simulations numériques directes effectuées par le code maison Archer sont réalisées. Ce code a été largement utilisé dans le passé pour étudier un large éventail de cas tels que l'atomisation (MÉNARD, TANGUY et BERLEMONT 2007), la microfluidique (CHARPENTIER, MOTTA et MÉNARD 2020) et la fragmentation de gouttelettes (DEBERNE et al. 2024). Il a également été utilisé comme référence pour la validation croisée de cas canoniques tels que l'instabilité de Rayleigh-Taylor (CHEN et al. 2019), l'instabilité de Plateau-Rayleigh (DUMOUCHEL et al. 2017) et les oscillations de Lamb (ROA et al. 2023).

Le code est basé sur un maillage cartésien décalé. Les équations de continuité et de quantité de mouvement sont couplées à l'aide d'un algorithme de projection avec un schéma temporel d'Euler explicite. La méthode couplée de level-set et de volume-of-fluide est appliquée pour permettre à la fois une précision de second ordre de la description de l'interface et la conservation de la masse. Le terme visqueux est

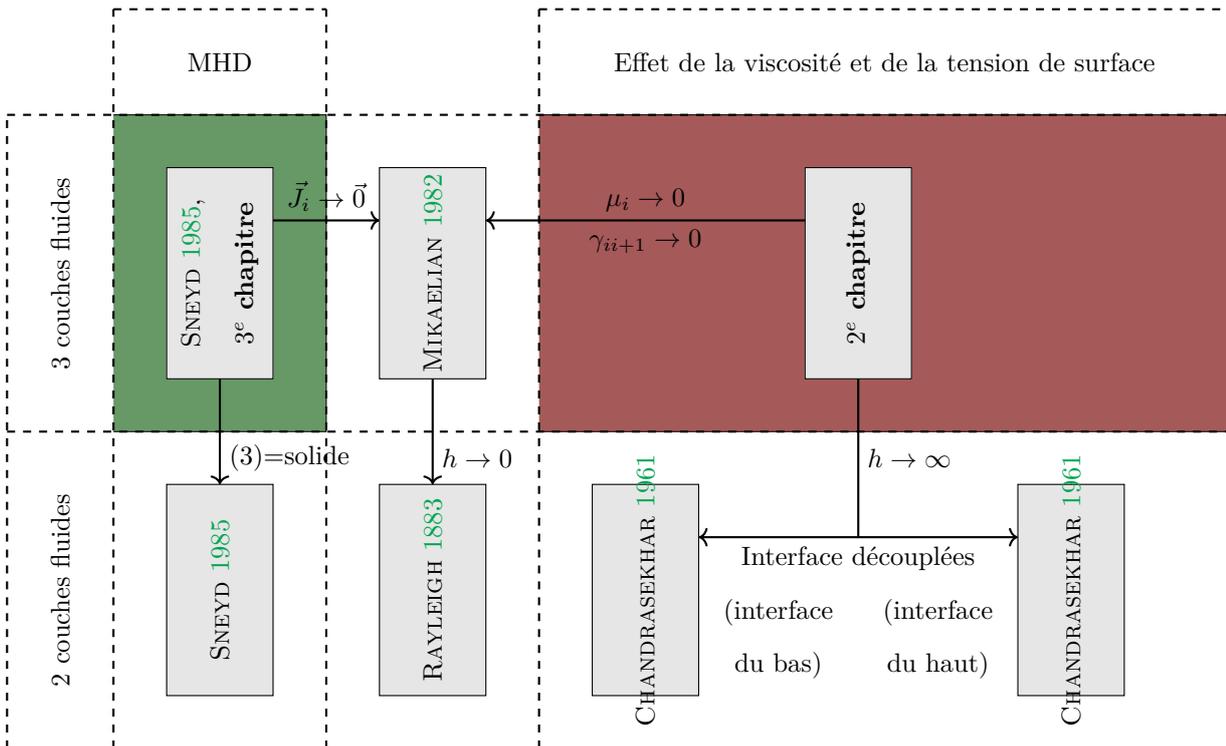


FIGURE 1.8 – Schéma représentant les trois principales difficultés (prise en compte de la viscosité et du champ magnétique ainsi que l’ajout d’une troisième couche) par rapport au travail original de RAYLEIGH 1883. Le cas rouge est étudié dans le deuxième chapitre de cette thèse. Le cas vert est étudié dans le troisième chapitre de cette thèse. La combinaison de ces deux modèles est également étudiée dans le troisième chapitre de cette thèse.

discrétisé à l’aide du schéma de Sussman (SUSSMAN et al. 2007), tandis que les termes de flux convectif sont calculés pour assurer la cohérence entre la masse et l’équation de quantité de mouvement (RUDMAN 1998). La tension de surface est prise en compte en introduisant la force source du continuum dans les équations de Navier-Stokes (BRACKBILL, KOTHE et ZEMACH 1992).

1.4.2 Organisation du manuscrit

Dans l’objectif d’étudier les instabilités interfaciales présentes lors de l’utilisation des batteries à métaux liquides, dans le deuxième chapitre, un système fluide à trois couches est étudié avec prise en compte de la viscosité ; celle-ci étant modélisée par une loi newtonienne. Dans la continuité du travail de CHANDRASEKHAR 1961 pour des systèmes à deux couches, une analyse linéaire de stabilité est menée. Ensuite dans le troisième chapitre, dans un premier temps, la viscosité n’est plus prise en compte à la faveur du champ magnétique : il s’agit de la continuité du travail de SNEYD 1985 comme expliqué sur la figure 1.9 ; dans un second temps, les trois principales difficultés sont réunies dans un modèle permettant de modéliser le caractère progressif de l’instabilité interfaciale dans les batteries à métaux liquides.

Dans un quatrième chapitre, aidé par le chargé de recherche CNRS, Dr. Romain Canu, le caractère stationnaire de l’instabilité interfaciale dans les batteries à métaux liquides a été étudié par une méthode énergétique. Les simulations numériques présentées dans ce chapitre ont fait l’objet d’un stage de Master d’une durée de deux mois et demie effectué par Hugo Véran en 2023.

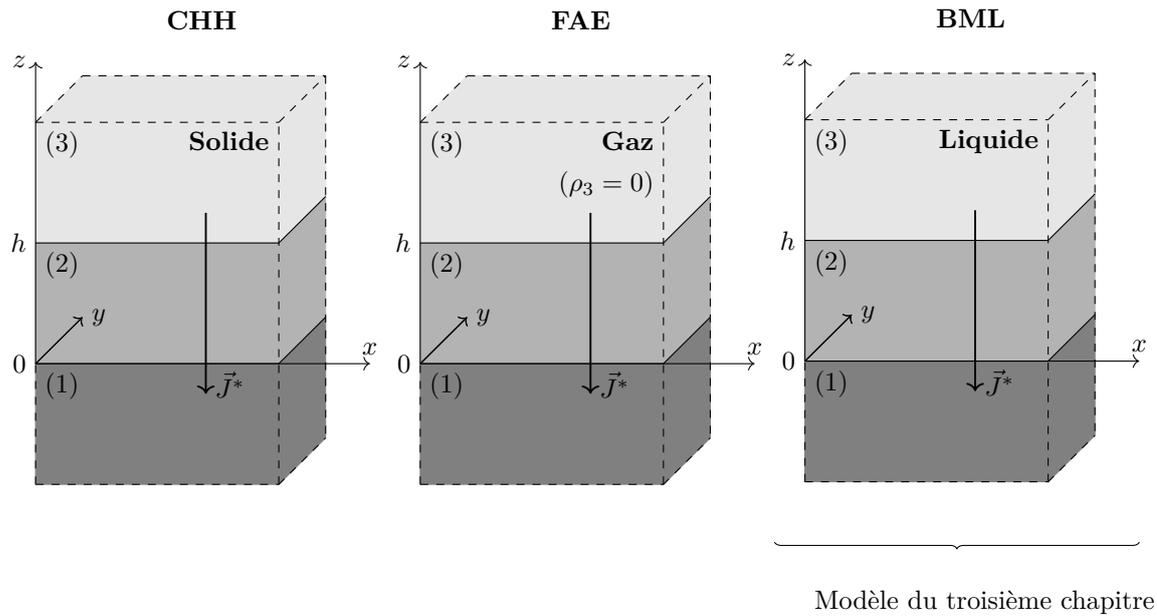


FIGURE 1.9 – Schéma du système étudié dans le troisième chapitre et modélisant une batterie à métaux liquide (à droite) et des deux systèmes étudiés par SNEYD 1985 et modélisant une cellule de Hall-Héroult (à gauche) et un four à arcs électriques (au milieu).

Un dernier chapitre apporte les conclusions et développe les perspectives associées aux différents chapitres.

Instabilité interfaciale sans champ magnétique

Comme discuté précédemment, dans ce chapitre, seulement les effets de la viscosité et de la tension de surface sont étudiés ; les effets magnétohydrodynamiques seront regardés dans le chapitre suivant. Il est considéré un système à trois couches fluides pouvant modéliser une batterie à métaux liquides non alimentée et isolée de toute source de courant lointaine. Dans ces conditions, ces batteries qui sont stratifiées gravitationnellement, sont stables lorsqu'elles sont soumises à de petites perturbations. Le comportement de leurs interfaces perturbées sera alors celui d'une onde de gravité. Pour étudier les effets de la viscosité et de la tension de surface sur une instabilité, il est faut alors considérer au moins l'une des deux interfaces gravitationnellement instable, susceptible de mettre en évidence l'instabilité de Rayleigh-Taylor en cas de légère perturbation du système. Le moteur de l'instabilité est ici la gravité contrairement aux batteries à métaux liquides dont le moteur de l'instabilité peut être la force de Lorentz. Une analyse linéaire de stabilité a été menée pour un cas général en considérant chaque interface comme potentiellement stable ou instable gravitationnellement. La viscosité complexifie l'analyse car elle implique une résolution numérique du problème aux valeurs propres pour déterminer le nombre de modes ainsi que leurs coefficients temporels. Il est alors nécessaire d'imposer un jeu de paramètres physiques. Pour cela, un cas étudié expérimentalement par ADKINS et al. [2017](#) pour lequel l'interface du bas est gravitationnellement instable et l'interface du haut est gravitationnellement stable est considéré. Ce cas d'étude leur a permis de déterminer un coefficient temporel expérimentalement à partir de l'évolution temporelle de la position de l'interface du bas. Ces résultats sont un premier point de support pour cette théorie. La résolution du problème aux valeurs propres permet également d'identifier le nombre de conditions initiales permettant de déterminer l'évolution temporelle de toutes les grandeurs physiques via la résolution du problème aux valeurs initiales. Cette résolution aide à mettre en évidence le couplage entre les interfaces dont la position se comporte à la fois comme une onde de gravité et une instabilité de Rayleigh-Taylor. L'évolution temporelle de la position des interfaces est ensuite comparée à des simulations numériques directes pour lesquelles les mêmes conditions initiales sont imposées, permettant une validation croisée

entre théorie et simulations numériques.

2.1 Analyse linéaire de stabilité

2.1.1 Formulation du problème

Dans ce chapitre sont considérés trois fluides superposés en coordonnées cartésiennes $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)^T$, dans des conditions isothermes, soumis au champ de gravité $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Par la suite les indices 1, 2 et 3 feront respectivement référence à la couche inférieure (1), à la couche intermédiaire (2) et à la couche supérieure (3) tandis que les indices 12 et 23 feront respectivement référence aux interfaces (1) – (2) et (2) – (3) entre les couches (1) et (2) et les couches (2) et (3); les indices x, y et z feront respectivement référence aux composantes des quantités vectorielles dans les directions \vec{e}_x, \vec{e}_y et \vec{e}_z . Ces fluides sont considérés non miscibles, incompressibles avec des masses volumiques : ρ_1, ρ_2 et ρ_3 et newtoniens avec des viscosités dynamiques : μ_1, μ_2 et μ_3 et des viscosités cinématiques : ν_1, ν_2 et ν_3 . Ces couches ont des largeurs et profondeurs infinies. Les couches extrêmes ont des hauteurs infinies tandis que celle du milieu a une hauteur finie h . Pour cette théorie, les tensions de surface aux interfaces γ_{12} et γ_{23} sont également prises en compte. Le système à trois fluides étudié est représenté sur la figure 2.1.

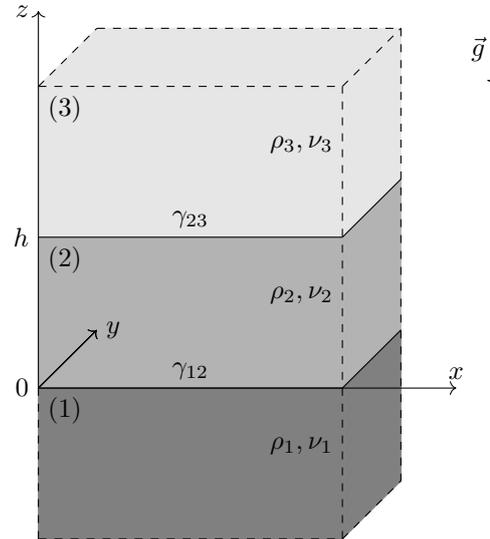


FIGURE 2.1 – Représentation schématique du système à trois fluides étudié.

Les quantités physiques servant à décrire l'écoulement telles que les vitesses : \vec{u}_1, \vec{u}_2 et \vec{u}_3 , les positions des interfaces : z_{12} et z_{23} et les pressions : p_1, p_2 et p_3 peuvent être déterminées à partir des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_i = 0 \quad \forall i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket \quad (2.1)$$

$$\rho_i \left(\vec{u}_{i,t} + (\vec{u}_i \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_i \right) = -\vec{\nabla} p_i + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}_i + \rho_i \vec{g} \quad \forall i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket \quad (2.2)$$

Avec $\bar{\bar{\tau}}_i = \mu_i \left(\bar{\nabla} \bar{u}_i + (\bar{\nabla} \bar{u}_i)^T \right)$, le tenseur des contraintes visqueuses dans le milieu (i) et $\bar{u}_{i,t}$, la dérivée partielle de la vitesse dans le milieu (i) par rapport au temps. Dans la suite du document, la virgule sera utilisée pour noter toute dérivée partielle.

Pour résoudre ces équations de volume il est nécessaire de connaître le comportement des grandeurs physiques qui les composent au travers des interfaces. Pour des fluides incompressibles, la composante normale des vitesses doit être continue aux interfaces selon l'équation de conservation de la masse. Pour des fluides viscoses, la composante tangentielle de la vitesse est également continue aux interfaces si l'on considère l'absence de glissement entre fluides adjacents. La composante normale du tenseur des contraintes visqueuses doit être discontinue aux interfaces contrairement à sa composante tangentielle selon l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Ces conditions de saut peuvent respectivement s'écrire de la manière suivante :

$$\bar{u}_i \cdot \bar{n}_i = z_{ii+1,t} = \bar{u}_{i+1} \cdot \bar{n}_i \quad \text{at } z = z_{ii+1} \quad \forall i \in \llbracket 1; 2 \rrbracket, \quad (2.3)$$

$$\bar{u}_i \times \bar{n}_i = \bar{u}_{i+1} \times \bar{n}_i \quad \text{at } z = z_{ii+1} \quad \forall i \in \llbracket 1; 2 \rrbracket, \quad (2.4)$$

$$\left(p_{i+1} - p_i - \gamma_{ii+1} \left(\frac{z_{ii+1,x,x}}{(1 + z_{ii+1,x}^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{z_{ii+1,y,y}}{(1 + z_{ii+1,y}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \right) \bar{n}_i = (\bar{\bar{\tau}}_{i+1} - \bar{\bar{\tau}}_i) \cdot \bar{n}_i \quad \text{at } z = z_{ii+1} \quad \forall i \in \llbracket 1; 2 \rrbracket, \quad (2.5)$$

avec \bar{n}_i le vecteur normal à l'interface (i) - ($i + 1$), dirigé de la couche (i) vers la couche ($i + 1$) et défini par :

$$\bar{n}_i = (z_{ii+1,x}^2 + z_{ii+1,y}^2 + 1)^{-1/2} \begin{pmatrix} -z_{ii+1,x} \\ -z_{ii+1,y} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Dans l'état de base les fluides sont au repos et les deux interfaces entre eux sont planes. L'exposant * fait référence à cet état. Ainsi, les vitesses dans chaque couche et la position des interfaces peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\bar{u}_i^* = \vec{0} \quad (2.7)$$

$$z_{ii+1}^* = (i - 1)h \quad (2.8)$$

Une fois l'état de base bien déterminé, une perturbation de petite amplitude et de la forme d'une onde avec un vecteur d'onde $\vec{k} = (k_x, k_y, 0)^T$ de norme $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ et un coefficient temporel complexe ω est introduite autour de lui. L'exposant ' fait référence aux grandeurs perturbées. Une grandeur physique quelconque peut donc s'écrire de la manière suivante :

$$Q(x, y, z, t) = Q^*(x, y, z) + Q'(x, y, z, t) \quad (2.9)$$

Dans le cadre de l'analyse linéaire de stabilité présentée dans ce chapitre, la dépendance en x , y et t de la partie perturbée d'une grandeur physique Q' est recherchée sous la forme suivante (CHANDRASEKHAR

1961) :

$$Q'(x, y, z, t) = f(z)e^{(jk_x x + jk_y y + \omega t)} \quad (2.10)$$

Avec j , l'unité imaginaire et $f(z)$, une fonction de la variable z devant être déterminée par les équations de volume (voir équations 2.1 et 2.2).

2.1.2 Analyse dimensionnelle

Les douze paramètres physiques du problème sont : $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \gamma_{12}, \gamma_{23}, g, h, k$ et ω . Les trois unités fondamentales présentes sont : kg, m et s . Ainsi selon le théorème de Vaschy-Buckingham (BUCKINGHAM 1914), nous pouvons définir $12 - 3 = 9$ nombres sans dimension pour caractériser ce problème. En isolant ρ_2, g et k , un paramètre sans dimension est déterminé pour les neuf autres en fonction d'eux trois :

$$\begin{aligned} R_i &= \rho_i \rho_2^{-1} = \rho_i m_{ref}^{-1} l_{ref}^3 \quad \forall i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket \quad (R_2 = 1) \\ N_i &= \nu_i k^{3/2} g^{-1/2} = \nu_i l_{ref}^{-2} t_{ref} \quad \forall i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket \\ \Gamma_{ii+1} &= \gamma_{ii+1} k^2 \rho_2^{-1} g^{-1} = \gamma_{ii+1} m_{ref}^{-1} t_{ref}^2 \quad \forall i \in \llbracket 1; 2 \rrbracket \\ H &= kh = h l_{ref}^{-1} \\ \Omega &= \omega g^{-1/2} k^{-1/2} = \omega t_{ref} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Une valeur de référence a été introduite pour chaque unité fondamentale. Soient une longueur caractéristique $l_{ref} = k^{-1}$, un temps caractéristique $t_{ref} = (gk)^{-1/2}$ et une masse caractéristique $m_{ref} = \rho_2 k^{-3}$. Par la suite toutes les grandeurs physiques : \vec{u}_i, p_i, z_{ii+1} , les unités spatiales : x, y, z , l'unité de temps t et l'opérateur $\vec{\nabla}$ seront remplacés par $l_{ref} t_{ref}^{-1} \vec{u}_i, m_{ref} l_{ref}^{-1} t_{ref}^{-2} p_i, l_{ref} z_{ii+1}, l_{ref} x, l_{ref} y, l_{ref} z, t_{ref} t$ et $l_{ref}^{-1} \vec{\nabla}$ et seront désormais sans dimension.

Dans l'état de base, les hypothèses sans dimension s'écrivent de la manière suivante :

$$\vec{u}_i^* = \vec{0} \quad (2.12)$$

$$z_{ii+1}^* = (i - 1)H \quad (2.13)$$

La pression dans la couche (i) est définie à une constante près p_{ci} par l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$p_i^* = -R_i z + p_{ci} \quad (2.14)$$

$$p_{ci} = p_i^*(z = (i - 1)H) + R_i(i - 1)H \quad (2.15)$$

Les conditions de saut pour la quantité de mouvement permettent d'établir la relation entre ces constantes :

$$p_{ci+1} = p_{ci} + (R_i - R_{i+1})(i - 1)H \quad (2.16)$$

Après avoir perturbé le système de la manière introduite précédemment, les équations de volume linéarisées sans dimension peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$jk_x k^{-1} u_{ix} + jk_y k^{-1} u_{iy} = -u_{iz,z} \quad (2.17)$$

$$jk_x k^{-1} p'_i = -R_i \Omega u_{ix} + R_i N_i (u_{ix,z,z} - u_{ix}) \quad (2.18)$$

$$jk_y k^{-1} p'_i = -R_i \Omega u_{iy} + R_i N_i (u_{iy,z,z} - u_{iy}) \quad (2.19)$$

$$p'_{i,z} = -R_i \Omega u_{iz} + R_i N_i (u_{iz,z,z} - u_{iz}) \quad (2.20)$$

En additionnant le produit de l'équation 2.18 par $k_x k^{-1}$ et le produit de l'équation 2.19 par $k_y k^{-1}$ et en utilisant l'équation 2.17, nous obtenons une nouvelle expression pour les pressions perturbées :

$$p'_i = (-R_i \Omega u_{iz} + R_i N_i (u_{iz,z,z} - u_{iz}))_{,z} \quad (2.21)$$

En comparant la dérivée par rapport à z de cette expression avec l'équation 2.20 on obtient une équation différentielle sur la composante verticale de la vitesse uniquement :

$$(\Omega u_{iz} - N_i (u_{iz,z,z} - u_{iz}))_{,z,z} - (\Omega u_{iz} - N_i (u_{iz,z,z} - u_{iz})) = 0 \quad (2.22)$$

Les solutions générales de cette équation différentielle sont des combinaisons linéaires des fonctions $e^{\pm z}$ et $e^{\pm q_i z}$ avec $q_i = (1 + \Omega N_i^{-1})^{1/2}$. Soit K , une matrice 3 par 4 définie telle que les colonnes de la matrice e^{zK} soient les différentes fonctions de z impliquées dans u_{iz} : e^{-z} , $e^{-q_i z}$, e^z et $e^{q_i z}$; ses lignes 1, 2 et 3 faisant référence aux couches (1), (2) et (3) :

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -q_1 & 1 & q_1 \\ -1 & -q_2 & 1 & q_2 \\ -1 & -q_3 & 1 & q_3 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Voici les formes des vitesses verticales dans chaque couche :

$$u_{1z} = \sum_{n=3}^4 A_n e^{K_{1n} z} e^{(jk_x x + jk_y y + \omega t)} \quad (2.24)$$

$$u_{2z} = \sum_{n=1}^4 B_n e^{K_{2n} z} e^{(jk_x x + jk_y y + \omega t)} \quad (2.25)$$

$$u_{3z} = \sum_{n=1}^2 C_n e^{K_{3n} z} e^{(jk_x x + jk_y y + \omega t)} \quad (2.26)$$

Puisque la vitesse ne peut pas être infinie, les coefficients A_1 , A_2 , C_3 et C_4 doivent être nuls.

Les conditions de saut (2.3, 2.4 et 2.5), linéarisées sans dimension peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$u_{i+1z} - u_{iz} = 0 \quad \text{en } z = (i-1)H \quad (2.27)$$

$$u_{i+1z,z} - u_{iz,z} = 0 \quad \text{en } z = (i-1)H \quad (2.28)$$

$$N_{i+1}(u_{i+1z,z,z} + u_{i+1z}) - N_i(u_{iz,z,z} + u_{iz}) = 0 \quad \text{en } z = (i-1)H \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} & (R_{i+1}u_{i+1z,z} - (R_{i+1}N_{i+1})\Omega^{-1}(u_{i+1z,z,z,z} - u_{i+1z,z})) - (R_i u_{iz,z} - (R_i N_i)\Omega^{-1}(u_{iz,z,z,z} - u_{iz,z})) = \\ & - (R_{i+1} - R_i - \Gamma_{ii+1})\Omega^{-2}(u_{i+1z} + u_{iz})/2 - (R_{i+1}N_{i+1} - R_i N_i)\Omega^{-1}(u_{i+1z,z} + u_{iz,z}) \\ & \quad \text{en } z = (i-1)H \quad (2.30) \end{aligned}$$

En tenant compte des formes de la vitesse, les quatre conditions de saut scalaires évaluées au niveau de l'interface du bas (i.e. en $z = 0$) peuvent s'écrire comme suit :

$$B_1 + B_2 + B_3 + B_4 - A_3 - A_4 = 0 \quad (2.31)$$

$$-B_1 - q_2 B_2 + B_3 + q_2 B_4 - A_3 - q_1 A_4 = 0 \quad (2.32)$$

$$2B_1 + (1 + q_2^2)B_2 + 2B_3 + (1 + q_2^2)B_4 - A_3 - (1 + q_1^2)A_4 = 0 \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} & -B_1 + (-q_2 - \frac{N_2}{\Omega}(q_2^3 - q_2))B_2 + B_3 + (q_2 - \frac{N_2}{\Omega}(q_2^3 - q_2))B_4 - R_1 A_3 + (-q_1 R_2 + \frac{R_1 N_1}{\Omega}(q_1^3 - q_1))A_4 = \\ & - \left(\frac{1 - R_1 - \Gamma_{12}}{2\Omega^2} - \frac{N_2 - R_1 N_1}{\Omega} \right) B_1 - \left(\frac{1 - R_1 - \Gamma_{12}}{2\Omega^2} + q_2 \frac{N_2 - R_1 N_1}{\Omega} \right) B_2 - \\ & \left(\frac{1 - R_1 - \Gamma_{12}}{2\Omega^2} + \frac{N_2 - R_1 N_1}{\Omega} \right) B_3 - \left(\frac{1 - R_1 - \Gamma_{12}}{2\Omega^2} - q_2 \frac{N_2 - R_1 N_1}{\Omega} \right) B_4 - \\ & \left(\frac{1 - R_1 - \Gamma_{12}}{2\Omega^2} + \frac{N_2 - R_1 N_1}{\Omega} \right) A_3 - \left(\frac{1 - R_1 - \Gamma_{12}}{2\Omega^2} - q_1 \frac{N_2 - R_1 N_1}{\Omega} \right) A_4 \quad (2.34) \end{aligned}$$

De même, les quatre conditions de saut scalaires évaluées au niveau de l'interface du haut (i.e. en $z = H$) peuvent s'écrire comme suit :

$$C_1 e^{-H} + C_2 e^{-q_3 H} - B_1 e^{-H} - B_2 e^{-q_2 H} - B_3 e^H - B_4 e^{q_2 H} = 0 \quad (2.35)$$

$$-C_1 e^{-H} - q_3 C_2 e^{-q_3 H} + B_1 e^{-H} + q_2 B_2 e^{-q_2 H} - B_3 e^H - q_2 B_4 e^{q_2 H} = 0 \quad (2.36)$$

$$2C_1 e^{-H} + (1 + q_3^2)C_2 e^{-q_3 H} - 2B_1 e^{-H} - (1 + q_2^2)B_2 e^{-q_2 H} - 2B_3 e^H - (1 + q_2^2)B_4 e^{q_2 H} = 0 \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} & -R_3 C_1 e^{-H} + (-q_3 - \frac{N_3}{\Omega}(q_3^3 - q_3))C_2 e^{-q_3 H} + \\ & B_1 e^{-H} + (q_2 + \frac{N_2}{\Omega}(q_2^3 - q_2))B_2 e^{-q_2 H} - B_3 e^H + (-q_2 + \frac{N_2}{\Omega}(q_2^3 - q_2))B_4 e^{q_2 H} = \\ & - \left(\frac{R_3 - 1 - \Gamma_{23}}{2\Omega^2} - \frac{R_3 N_3 - N_2}{\Omega} \right) C_1 e^{-H} - \left(\frac{R_3 - 1 - \Gamma_{23}}{2\Omega^2} + q_3 \frac{R_3 N_3 - N_2}{\Omega} \right) C_2 e^{-q_3 H} - \\ & \left(\frac{R_3 - 1 - \Gamma_{23}}{2\Omega^2} - \frac{R_3 N_3 - N_2}{\Omega} \right) B_1 e^{-H} - \left(\frac{R_3 - 1 - \Gamma_{23}}{2\Omega^2} + q_2 \frac{R_3 N_3 - N_2}{\Omega} \right) B_2 e^{-q_2 H} - \\ & \left(\frac{R_3 - 1 - \Gamma_{23}}{2\Omega^2} + \frac{R_3 N_3 - N_2}{\Omega} \right) B_3 e^H - \left(\frac{R_3 - 1 - \Gamma_{23}}{2\Omega^2} - q_2 \frac{R_3 N_3 - N_2}{\Omega} \right) B_4 e^{q_2 H} \quad (2.38) \end{aligned}$$

Ce problème à huit équations ((2.31)-(2.38)) et huit inconnues ($A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4, C_1$ et C_2) peut donc être exprimé de manière matricielle :

$$M(0 \ 0 \ A_3 \ A_4 \ B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4 \ C_1 \ C_2 \ 0 \ 0)^T = \vec{0} \quad (2.39)$$

où M est une matrice 8 par 12 définie de la manière suivante :

$$M_{s_1 s_2} = \left(M_{s_1 s_3}^c (\varepsilon_{s_4+1 s_5 s_6} + \varepsilon_{s_4 s_5 s_6}) + M_{s_1 s_3}^d (\varepsilon_{s_4+1 s_5 s_6} - \varepsilon_{s_4 s_5 s_6}) \right) e^{K_{s_6 s_7} (i-1)H} \quad (2.40)$$

$s_1 \in \llbracket 1; 8 \rrbracket$ et $s_2 \in \llbracket 1; 12 \rrbracket$ désignent la s_1 ième ligne et la s_2 ième colonne de la matrice M . $s_3 \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, $s_4 \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$, $s_5 \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$, $s_6 \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ et $s_7 \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$ peuvent être exprimés en fonction de s_1 et s_2 de la manière suivante :

$$\begin{aligned} s_3 &= s_1 - \lfloor \frac{s_1-1}{4} \rfloor \\ s_4 &= s_2 - 2 \lfloor \frac{s_2-1}{2} \rfloor \\ s_5 &= s_4 + s_2 + 1 - 3 \lfloor \frac{s_4+s_2+1-1}{3} \rfloor \\ s_6 &= \lfloor \frac{s_2-1}{4} \rfloor + 1 \\ s_7 &= s_2 - 4(s_6 - 1) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ces indices ont été définis pour formuler la matrice de manière compacte. Ils font référence à la s_3 ième condition de saut à l'interface $(s_4) - (s_4 + 1)$, à la couche (s_6) et aux différents nombre d'onde de par la s_7 ème colonne de la matrice K . L'indice s_5 permet de considérer les vitesses présentes dans une condition donnée avec le symbole de Levi-Civita ε .

L'exposant c fait référence à l'évaluation de la continuité d'une grandeur physique à travers une interface. Les coefficients pour chacune des quatre lignes de la matrice $M_{s_3 s_2}^c$ s'expriment comme suit pour une colonne s_2 donnée :

$$M_{1s_2}^c = 1 \quad (2.42)$$

$$M_{2s_2}^c = K_{s_5 s_6} \quad (2.43)$$

$$M_{3s_2}^c = (1 + K_{s_5 s_6}^2) R_{s_6} N_{s_6} \quad (2.44)$$

$$M_{4s_2}^c = R_{s_5} K_{s_5 s_6} - \frac{R_{s_5} N_{s_5}}{\Omega} (K_{s_5 s_6}^3 - K_{s_5 s_6}) \quad (2.45)$$

L'exposant d fait référence au saut de cette même quantité physique à travers une interface. Ainsi $M_{s_3}^d = 0$ signifie que la condition s_3 n'implique pas un saut de la grandeur physique mise en évidence à travers cette condition. Les coefficients pour chacune des quatre lignes de la matrice $M_{s_3 s_2}^d$ s'expriment comme suit pour une colonne s_2 donnée :

$$M_{1s_2}^d = 0 \quad (2.46)$$

$$M_{2s_2}^d = 0 \quad (2.47)$$

$$M_{3s_2}^d = 0 \quad (2.48)$$

$$M_{4s_2}^d = \frac{R_{s_6+1} - R_{s_6} - \Gamma_{s_4 s_4+1}}{2\Omega^2} + \frac{R_{s_6+1} N_{s_6+1} - R_{s_6} N_{s_6}}{\Omega} K_{s_5 s_6} \quad (2.49)$$

Pour poser un problème aux valeurs propres bien défini, les deux premières et deux dernières colonnes de la matrice M doivent être supprimées car $A_1 = B_1 = C_3 = C_4 = 0$; ces colonnes doivent être prises en compte pour un système avec des couches de profondeurs non-infinies mais deux conditions supplémentaires devraient être considérées. Ainsi, $s_2 \in \llbracket 3; 10 \rrbracket$ doit être imposé pour obtenir le problème équivalent suivant :

$$M \cdot (A_3 \ A_4 \ B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4 \ C_1 \ C_2)^T = \vec{0} \quad (2.50)$$

Où M est maintenant une matrice 8 par 8 définie comme suit :

$$M = \begin{pmatrix} A_{12}^+ & B_{12}^- & B_{12}^+ & 0_{4,2} \\ 0_{4,2} & B_{23}^- & B_{23}^+ & C_{23}^- \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

A_{12}^+ , B_{12}^- , B_{12}^+ , B_{23}^- , B_{23}^+ , C_{23}^- et $0_{4,2}$ sont des matrices 4 par 2. Les lettres A , B et C font référence aux coefficients de la matrice M correspondant à la vitesse dans les couches (1), (2) et (3), respectivement. Les indices 12 et 23 font référence aux coefficients de la matrice M correspondant respectivement aux interfaces (1) – (2) et (2) – (3). Les exposants + et – font référence aux coefficients de la matrice M correspondant respectivement aux fonctions de z : e^{+z} et e^{-z} . Ces matrices s'expriment comme suit :

$$A_{12}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & q_1 \\ 2R_1N_1 & (1+q_1^2)R_1N_1 \\ R_1 + \frac{R_1-1+\Gamma_{12}}{2\Omega^2} - \frac{N_2-R_1N_1}{\Omega} & \frac{R_1-1+\Gamma_{12}}{2\Omega^2} - q_1 \frac{N_2-R_1N_1}{\Omega} \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

$$B_{12}^- = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & q_2 \\ -2N_2 & -(1+q_2^2)N_2 \\ 1 + \frac{R_1-1+\Gamma_{12}}{2\Omega^2} + \frac{N_2-R_1N_1}{\Omega} & \frac{R_1-1+\Gamma_{12}}{2\Omega^2} + q_2 \frac{N_2-R_1N_1}{\Omega} \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

$$B_{12}^+ = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -q_2 \\ -2N_2 & -(1+q_2^2)N_2 \\ -1 + \frac{R_1-1+\Gamma_{12}}{2\Omega^2} - \frac{N_2-R_1N_1}{\Omega} & \frac{R_1-1+\Gamma_{12}}{2\Omega^2} - q_2 \frac{N_2-R_1N_1}{\Omega} \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

$$B_{23}^- = \begin{pmatrix} \exp(-H) & \exp(-q_2H) \\ -\exp(-H) & -q_2 \exp(-q_2H) \\ 2N_2 \exp(-H) & (1+q_2^2)N_2 \exp(-q_2H) \\ \left(-1 + \frac{1-R_3+\Gamma_{23}}{2\Omega^2} + \frac{R_3N_3-N_2}{\Omega}\right) \exp(-H) & \left(\frac{1-R_3+\Gamma_{23}}{2\Omega^2} + q_2 \frac{R_3N_3-N_2}{\Omega}\right) \exp(-q_2H) \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

$$B_{23}^+ = \begin{pmatrix} \exp(H) & \exp(q_2H) \\ \exp(H) & q_2 \exp(q_2H) \\ 2N_2 \exp(H) & (1+q_2^2)N_2 \exp(q_2H) \\ \left(1 + \frac{1-R_3+\Gamma_{23}}{2\Omega^2} - \frac{R_3N_3-N_2}{\Omega}\right) \exp(H) & \left(\frac{1-R_3+\Gamma_{23}}{2\Omega^2} - q_2 \frac{R_3N_3-N_2}{\Omega}\right) \exp(q_2H) \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

$$C_{23}^- = \begin{pmatrix} -\exp(-H) & -\exp(-q_3 H) \\ \exp(-H) & q_3 \exp(-q_3 H) \\ -2R_3 N_3 \exp(-H) & -(1 + q_3^2) R_3 N_3 \exp(-q_3 H) \\ \left(R_3 + \frac{1-R_3+\Gamma_{12}}{2\Omega^2} + \frac{R_3 N_3 - N_2}{\Omega}\right) \exp(-H) & \left(\frac{1-R_3+\Gamma_{12}}{2\Omega^2} + q_3 \frac{R_3 N_3 - N_2}{\Omega}\right) \exp(-q_3 H) \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

$0_{4,2}$ est quant à elle la matrice nulle.

2.1.3 Relation de dispersion

La relation de dispersion est définie par l'équation suivante :

$$|M| = 0 \quad (2.58)$$

La résolution de cette équation permet de déterminer les valeurs propres du problème posé, c'est-à-dire les valeurs du coefficient temporel complexe (Ω sous sa forme sans dimension). La prise en compte de la viscosité ne conduit plus à des solutions analytiques pour les valeurs propres comme souligné dans le chapitre 1. Nous en avons néanmoins déterminé une :

$$\Omega = -N_2. \quad (2.59)$$

Cette valeur propre réelle négative correspond à un mode stable qui n'apparaît que lorsque l'on considère un système fluide à trois couches et la viscosité des fluides.

En négligeant la viscosité et la tension de surface (ce qui ne change pas la résolution analytique ou numérique du problème), nous retrouvons la relation de dispersion analytique de MIKAELIAN 1982 :

$$(R_1 - 1)(1 - R_3) \sinh(H) + \Omega^2 (R_1 - R_3) [\cosh(H) + \sinh(H)] + \Omega^4 [(R_1 + R_3) \cosh(H) + (1 + R_1 R_3) \sinh(H)] = 0. \quad (2.60)$$

Il s'agit d'un polynôme du second degré par rapport à Ω^2 , et ses solutions peuvent facilement être déterminées analytiquement. Pour des valeurs extrêmes de H , MIKAELIAN 1982 a montré que ces solutions tendent vers celles de sous-systèmes à deux couches fluides. Lorsque $H \gg 1$, les fonctions hyperboliques $\sinh(H)$ et $\cosh(H)$ admettent pour limite $e^H/2$ et les solutions sont similaires à celles trouvées lors de l'étude indépendante de deux sous-systèmes : les deux couches infinies (1) et (2) autour de l'interface (1) – (2) et les deux couches infinies (2) et (3) autour de l'interface (2) – (3) :

$$\Omega = \pm ((1 - R_1) (1 + R_1)^{-1})^{1/2}, \quad (2.61)$$

et

$$\Omega = \pm ((R_3 - 1) (1 + R_3)^{-1})^{1/2}. \quad (2.62)$$

Les solutions représentées par l'équation 2.61 sont identiques à celles exposées dans le chapitre 1 (équation 1.1) mais formulées de manières adimensionnées.

Lorsque $H \ll 1$, les fonctions hyperboliques $\sinh(H)$ et $\cosh(H)$ admettent pour limite 0 et 1, respecti-

vement et les solutions sont similaires à celles trouvées lors de l'étude des deux couches infinies (1) et (3) autour de l'interface (1) – (3) plus une valeur propre nulle :

$$\Omega = \pm ((R_3 - R_1)(R_1 + R_3)^{-1})^{1/2}, \quad (2.63)$$

et

$$\Omega = 0. \quad (2.64)$$

En négligeant la viscosité mais plus la tension de surface, la relation de dispersion devient :

$$\begin{aligned} (R_1 - 1 + \Gamma_{12})(1 - R_3 + \Gamma_{23}) \sinh(H) + \Omega^2[(R_1 - R_3)(\cosh(H) + \sinh(H)) - \\ \Gamma_{12}(\cosh(H) + R_3 \sinh(H)) - \Gamma_{23}(\cosh(H) + R_1 \sinh(H))] + \\ \Omega^4[(R_1 + R_3) \cosh(H) + (1 + R_1 R_3) \sinh(H)] = 0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Lorsque $H \gg 1$, les valeurs propres de la relation de dispersion précédente deviennent celles de deux sous-systèmes à deux couches séparées. L'un correspondant à l'interface (1) – (2) entourée des fluides (1) et (2) de profondeurs infinies. L'autre correspondant à l'interface (2) – (3) entourée des fluides (2) et (3) de profondeurs infinies :

$$\Omega = \pm ((1 - R_1 - \Gamma_{12})(1 + R_1)^{-1})^{1/2}, \quad (2.66)$$

et

$$\Omega = \pm ((R_3 - 1 - \Gamma_{23})(1 + R_3)^{-1})^{1/2}. \quad (2.67)$$

Ces solutions sont identiques à celles exposées dans le chapitre 1 (équation 1.2) mais formulées de manières adimensionnées. Un terme de stabilisation apparaît et le système est instable si $1 - R_1 > \Gamma_{12}$ ou $R_3 - 1 > \Gamma_{23}$.

Lorsque $H \ll 1$, les valeurs propres de la relation de dispersion précédente deviennent celles d'un système à deux couches (1) et (3) superposées pour lequel la tension de surface entre les milieux (1) et (3) serait égale à la somme entre les tensions de surfaces entre les milieux (1) et (2) et (2) et (3) plus une valeur propre nulle :

$$\Omega = \pm ((R_3 - R_1 - (\Gamma_{12} + \Gamma_{23}))(R_1 + R_3)^{-1})^{1/2}, \quad (2.68)$$

et

$$\Omega = 0. \quad (2.69)$$

Un terme de stabilisation apparaît également dans cette limite et ici, le système est instable si $R_3 - R_1 > \Gamma_{12} + \Gamma_{23}$.

Revenons maintenant à notre problème visqueux dont les solutions ne sont pas analytiques (sauf $\Omega = -N_2$). Il est intéressant de noter que la viscosité ne change pas le comportement des solutions pour de grandes valeurs de H . Pour montrer cela, $|M|$ peut être écrit comme le déterminant d'une matrice de blocs comme suit :

$$|M| = |-(B_{12}^+|0_{4,2})(B_{23}^+|C_{23}^-)^{-1}(0_{4,2}|B_{23}^-)(B_{23}^+|C_{23}^-) + (A_{12}^+|B_{12}^-)(B_{23}^+|C_{23}^-)|. \quad (2.70)$$

Où $(M_1|M_2)$ désigne la concaténation entre les matrices M_1 et M_2 . Lorsque la valeur de H est suffisamment importante, la matrice concaténée $(0_{4,2}|B_{23}^-)$ tend vers la matrice nulle 4 par 4 et $|M|$ peut être simplifié de la manière suivante :

$$|M| = |(A_{12}^+|B_{12}^-)|| (B_{23}^+|C_{23}^-)|. \quad (2.71)$$

Les valeurs propres sont alors les solutions de ces deux équations :

$$|(B_{23}^+|C_{23}^-)| = 0, \quad (2.72)$$

et

$$|(A_{12}^+|B_{12}^-)| = 0. \quad (2.73)$$

$|(B_{23}^+|C_{23}^-)| = 0$ est la même relation de dispersion que dans CHANDRASEKHAR 1961, p. 443, qui prend en compte les deux couches infinies (1) et (2) autour de l'interface (1) – (2) positionnée en $z = 0$. $|(A_{12}^+|B_{12}^-)| = 0$ est également la même relation mais prenant en compte les deux couches infinies (2) et (3) autour de l'interface (2) – (3) positionnée en $z = H$. Comme déterminé par MIKAELIAN 1982 pour le cas non visqueux sans tenir compte de la tension de surface, les deux interfaces peuvent être étudiées indépendamment. L'ajout de la tension de surface ne modifie pas ce comportement.

L'hypothèse de négliger la viscosité présente l'avantage d'obtenir une expression analytique des valeurs propres en fonction des autres paramètres physiques. Dans le cadre de cette thèse, nous imposons une valeur pour chaque paramètre physique afin de déterminer numériquement toutes les valeurs propres à l'exception de la valeur analytique pour un cas donné. Pour obtenir la relation de dispersion, nous faisons varier H . Une étude paramétrique de cette relation de dispersion peut donc mettre en évidence l'effet d'un paramètre sur les valeurs propres et donc l'évolution temporelle de toute perturbation monomode. Bien que n'importe quel cas hypothétique puisse être analysé à travers cette étude, ADKINS et al. 2017 a fourni des données expérimentales concernant les valeurs propres pour deux cas auxquels cette théorie s'applique.

2.2 Résolution du problème aux valeurs propres

2.2.1 Cas d'étude

Dans cette partie, les expériences réalisées par ADKINS et al. 2017 sont utilisées pour étayer nos résultats théoriques. Ces expériences ont été réalisées avec la méthode de lévitation magnétique pour contrôler les conditions initiales en imposant une perturbation monomode. Les auteurs ont étudié deux cas pour lesquelles la couche inférieure est une huile, tandis que la couche intermédiaire est de l'eau avec du sel paramagnétique afin d'utiliser la lévitation magnétique. Pour le cas 1, le fluide supérieur est le même que celui du bas (Figure 2.2 à gauche), alors qu'il s'agit d'air pour le cas 2 (Figure 2.2 à droite). Dans ces deux cas, l'interface du bas est gravitationnellement instable tandis que celle du haut est gravitationnellement stable. Les propriétés des fluides sont présentées dans le tableau 2.1. Les paramètres variables sont l'épaisseur de la couche intermédiaire et le nombre d'onde de la perturbation

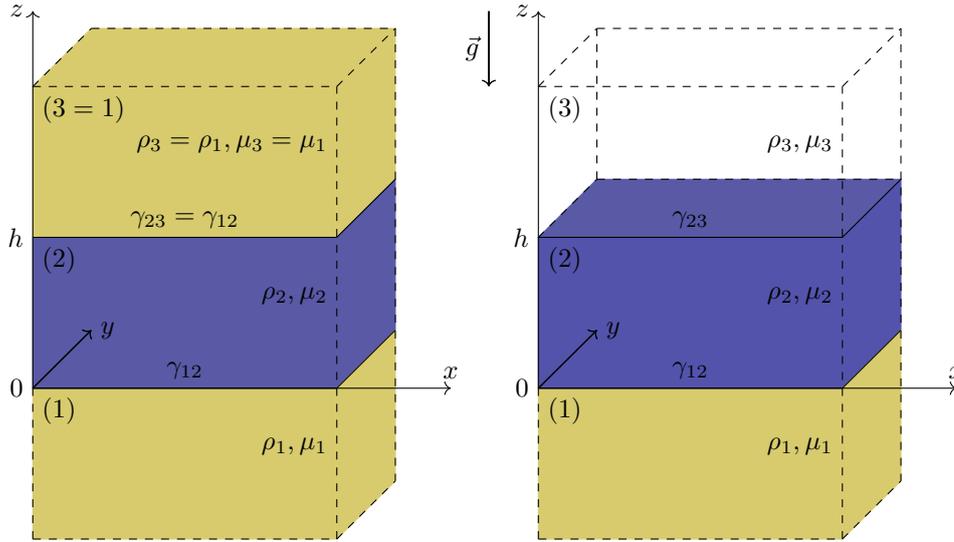


FIGURE 2.2 – Cas 1 \equiv (1)/(2)/(1) (à gauche) et cas 2 \equiv (1)/(2)/(3) (à droite) étudiés par ADKINS et al. 2017.

(les valeurs sont indiquées dans les deux premières colonnes du tableau 2.2). Pour un couple donné de ces paramètres, les auteurs ont extrait le taux de croissance de l'interface gravitationnellement instable en supposant que les interfaces sont découplées : l'interface gravitationnellement instable n'est influencée que par les valeurs propres réelles, tandis que l'interface gravitationnellement stable n'est influencée que par les valeurs propres complexes. La valeur propre réelle positive est déterminée numériquement

(i)	ρ_i [kg.m ⁻³]	μ_i [kg.m ⁻¹ .s ⁻¹]	γ_{ii+1} [kg.s ⁻²]
(3)	1,3	$1,8 \times 10^{-5}$	
(2)	1398	$6,2 \times 10^{-3}$	72×10^{-3}
(1)	773	$3,3 \times 10^{-3}$	$3,5 \times 10^{-3}$

TABLE 2.1 – Propriétés des fluides pour les deux cas étudiés par ADKINS et al. 2017. Les cas 1 et 2 font référence aux systèmes à trois couches (1)/(2)/(1) et (1)/(2)/(3) respectivement.

par un algorithme de recherche de zéro. L'erreur relative entre cette prédiction théorique et la valeur expérimentale est comprise entre 13% et 33% selon les cas (Tableau 2.2), les valeurs expérimentales étant systématiquement inférieures aux valeurs théoriques. Selon les valeurs de k et h , elle se situe entre 10% et plus de 20% inférieure à celle obtenue en comparant à la théorie de MIKAELIAN 1982. Cette erreur relative reste significative. Cela peut probablement s'expliquer par les effets de bord présents dans les expériences et aussi par le fait que le couplage des interfaces n'a pas été pris en compte alors que l'interface gravitationnellement stable a tendance à devenir plate, et plus les interfaces sont proches, plus l'amplitude de la déformation de l'interface gravitationnellement instable va diminuer et plus la valeur propre réelle

k [m^{-1}]	h [mm]	ω_{A1} [s^{-1}]	ω_{A2} [s^{-1}]	ω_{M1} [s^{-1}]	ω_{M2} [s^{-1}]	ω_1 [s^{-1}]	ω_2 [s^{-1}]	$\frac{ \omega_{A1} - \omega_1 }{\omega_{A1}}$	$\frac{ \omega_{A2} - \omega_2 }{\omega_{A2}}$
503	1		20,8		31,7		23,6		0,13
	2	24,8	24,0	36,4	35,8	29,7	29,0	0,20	0,21
	5	25,6	25,2	37,6	37,6	31,5	31,4	0,23	0,25
419	1		18,0		27,7		21,3		0,18
	2	22,1	21,3	32,8	31,9	27,7	26,8	0,25	0,26
	5	22,9	22,4	34,3	34,2	29,9	29,8	0,31	0,33
314	1		15,0		22,1		17,7		0,18
	2	19,7	18,9	27,6	26,3	24,2	22,9	0,23	0,21
	5	21,5	21,2	29,5	29,3	26,8	26,6	0,25	0,25
	2	18,3	17,1	24,0	22,4	21,4	19,9	0,17	0,16
	5	20,6	20,3	26,1	25,8	24,2	23,9	0,17	0,18

TABLE 2.2 – Paramètres variables k et h correspondant aux deux cas étudiés par ADKINS et al. 2017. ω_{Ac} , ω_{Mc} et ω_c font respectivement référence au taux de croissance extrait par ADKINS et al. 2017, à la valeur propre réelle positive prédite par la théorie de Mikaelian et à celle prédite par cette théorie. $c \in \{1; 2\}$ fait référence au cas c .

positive va diminuer. Avant de résoudre le problème aux valeurs initiales qui permet d'obtenir l'évolution temporelle des deux interfaces en fonction de toutes les valeurs propres, il convient d'analyser l'influence des paramètres physiques sur les valeurs propres. Seul le cas 1, c'est-à-dire le système fluide à trois couches (1)/(2)/(1) (Figure 2.2 à gauche), est étudié pour des raisons de simplification. Le nombre de paramètres est réduit, six au lieu de neuf, comme $R_3 = R_1$, $N_3 = N_1$ et $\Gamma_{23} = \Gamma_{12}$. A noter que ce cas ne dépend pas de la direction de la gravité. Dans l'analyse suivante, la valeur propre analytique ($\Omega = -N_2$) est négligée par rapport aux autres valeurs propres, qui sont déterminées numériquement par un algorithme de recherche de zéro.

2.2.2 Comparaison aux solutions des deux sous-systèmes à deux couches

Pour mieux comprendre l'évolution du couplage entre les interfaces par rapport à l'épaisseur de la couche du milieu adimensionnée, décomposons d'abord le système en deux sous-systèmes associés à chaque interface entourée de fluides de profondeur infinie (Figure 2.3). Le premier sous-système correspond à une interface instable entourée d'une couche infinie d'eau (au dessus) et d'une couche infinie d'huile (en dessous). Le deuxième sous-système est l'inverse, correspondant à une interface stable entourée d'une couche infinie d'eau (en dessous) et d'une couche infinie d'huile (au dessus). Pour le premier cas, le spectre de M ne contient qu'une seule valeur propre réelle positive, tandis que pour le second, il existe deux valeurs propres complexes conjuguées avec une partie réelle négative. Le système fluide à trois couches a une valeur propre positive réelle et deux valeurs propres complexes conjuguées avec une partie

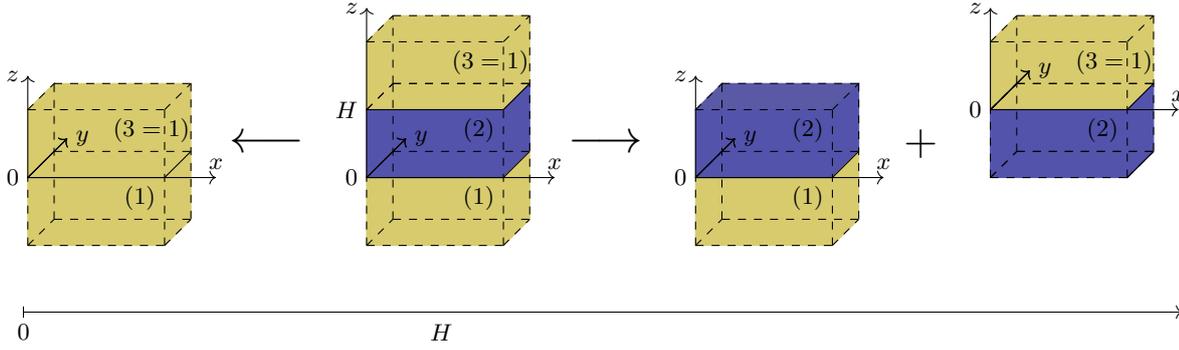


FIGURE 2.3 – Représentation de la décomposition du système fluide à trois couches qui modélise le cas 1 de ADKINS et al. 2017 en deux sous-systèmes fluides à deux couches pour des valeurs extrêmes de H selon la théorie de MIKAEILIAN 1982.

réelle négative :

$$Sp(M) = \{\Omega_1, \Omega_2, \overline{\Omega_2}\}. \quad (2.74)$$

Ce spectre est résolu en fonction de H pour un ensemble de paramètres fixes $(R_1, N_1, N_2, \Gamma_{12}) = (5, 53 \times 10^{-1}, 1.52 \times 10^{-2}, 1.61 \times 10^{-2}, 6.45 \times 10^{-2})$ obtenus en considérant les paramètres physiques dimensionnels du tableau 2.1 associé à la première valeur de k du tableau 2.2. Les solutions sont tracées dans la figure 2.4. Comme déterminé précédemment, lorsque la valeur de H devient très grande, les valeurs propres du système tendent vers celles des deux sous-systèmes. Ces valeurs sont constantes, car elles ne dépendent pas de H . Remarquablement, lorsque H tend vers zéro, les valeurs propres du système étudié ne tendent pas vers les valeurs d'un système fluide à une seule couche, la couche supérieure superposant le même fluide que dans celle du bas, comme le prédit la théorie de MIKAEILIAN 1982.

2.2.3 Étude paramétrique

Pour cette étude paramétrique, l'ensemble de référence des paramètres fixes $(R_1, N_1, N_2, \Gamma_{12})$ correspond à celui de la figure 2.4. Faisons ensuite varier les paramètres R_1, N_1 et N_2 individuellement et analysons l'évolution des trois valeurs propres Ω séparées en parties réelles et imaginaires par rapport au paramètre de couplage H . À noter que le paramètre $\Gamma_{12} = \gamma_{12}k^2\rho_2^{-1}g^{-1}$ n'est pas analysé ici mais sa valeur reste inférieure à $1 - R_1$ dans l'étude paramétrique pour s'assurer que l'interface gravitationnellement instable n'est pas stabilisée par l'effet de la tension de surface. Les valeurs asymptotiques des sous-systèmes fluides bicouches définis précédemment sont ajoutées aux figures. Cela permet un point d'analyse supplémentaire sur le couplage entre les interfaces, puisque toutes les valeurs propres du système fluide à trois couches tendent vers ces asymptotes lorsque H devient suffisamment grand.

Concernant le paramètre $R_1 = \rho_1\rho_2^{-1}$ (Figure 2.5), les valeurs positives des asymptotes réelles et imaginaires diminuent lorsque ce paramètre augmente. Ce résultat est cohérent car lorsque R_1 tend vers l'unité, le système devient stable. Deuxièmement, les parties réelles des valeurs propres correspondant au système fluide à trois couches tendent plus lentement vers leurs asymptotes lorsque R_1 augmente. Ce comportement n'est pas similaire pour les parties imaginaires de Ω , qui tendent plus lentement vers leurs asymptotes pour les valeurs médianes de R_1 . Lorsque $H = 0$, les parties imaginaires de Ω dépendent

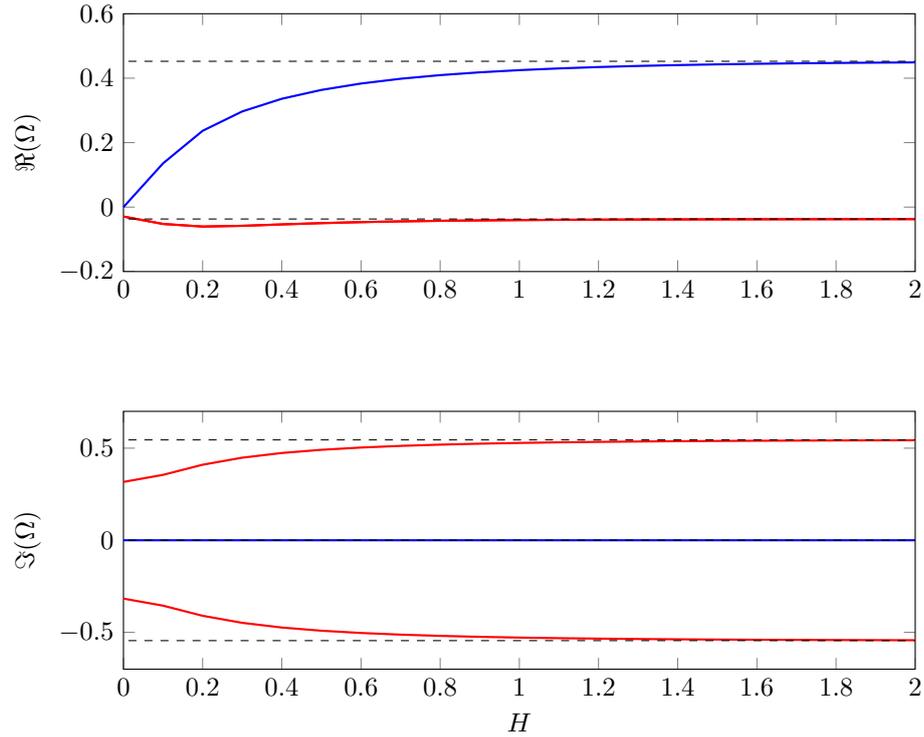


FIGURE 2.4 – Parties réelles (haut) et parties imaginaires (bas) des valeurs propres Ω tracées séparément en fonction de l'épaisseur de la couche du milieu H . Les lignes en pointillées, bleues et rouges correspondent respectivement aux valeurs propres des deux sous-systèmes, aux valeurs propres instables et stables du système à trois couches fluides pour $(R_1, N_1, N_2, \Gamma_{12}) = (5,53 \times 10^{-1}, 1,52 \times 10^{-2}, 1,61 \times 10^{-2}, 6,45 \times 10^{-2})$.

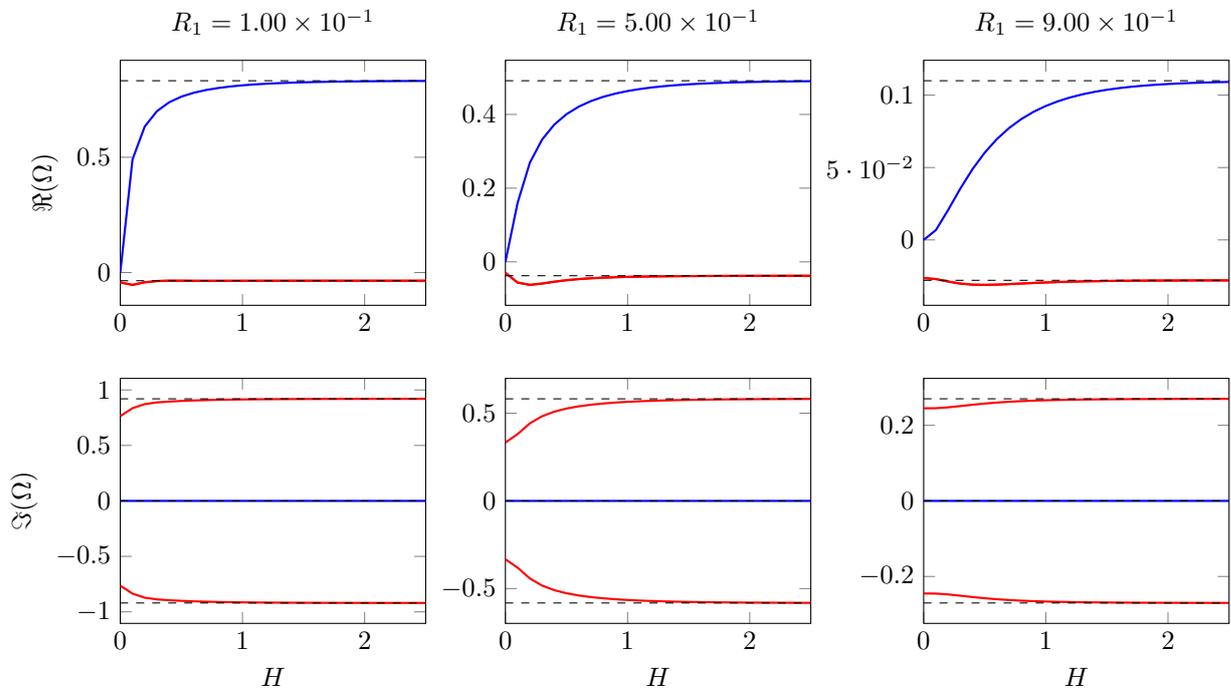


FIGURE 2.5 – Effet de R_1 pour $N_1 = 1,52 \times 10^{-2}$, $N_2 = 1,61 \times 10^{-2}$ et $\Gamma_{12} = 6,45 \times 10^{-2}$ sur les parties réelles (haut) et parties imaginaires (bas) des valeurs propres Ω tracées séparément en fonction de l'épaisseur de la couche du milieu H . Les lignes pointillées, bleues et rouges correspondent respectivement aux valeurs propres des deux sous-systèmes, aux valeurs propres instables et stables du système à trois couches fluides.

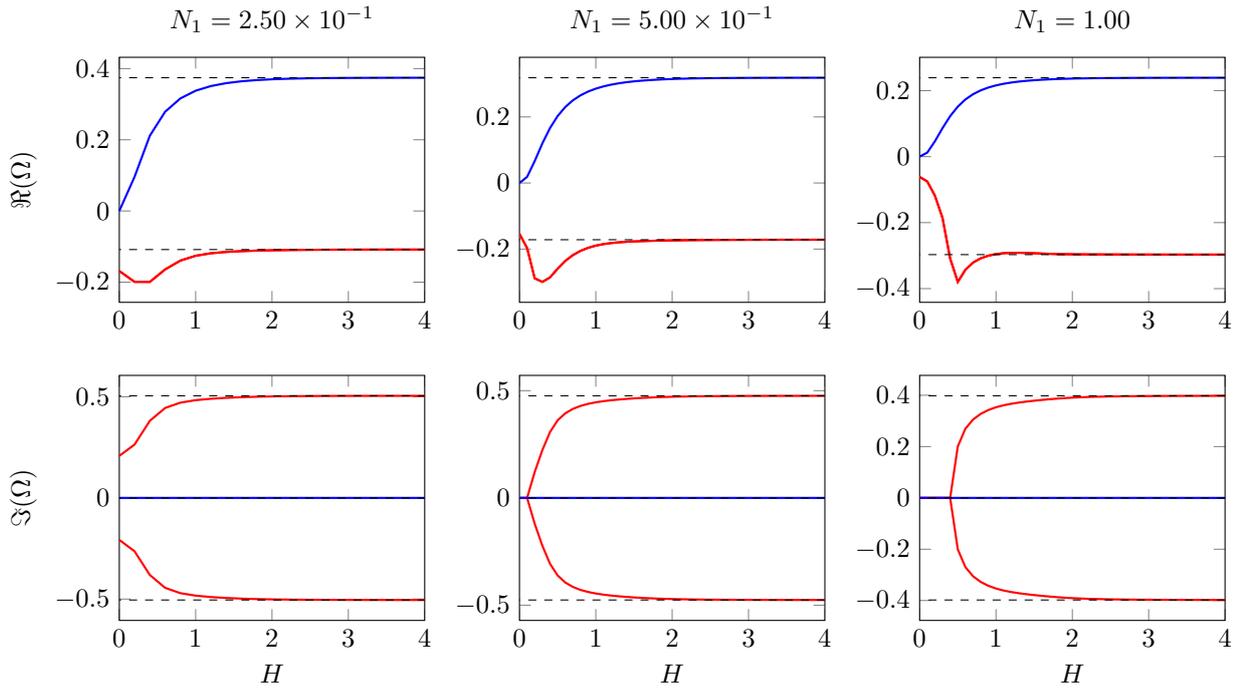


FIGURE 2.6 – Effet de N_1 pour $R_1 = 5,53 \times 10^{-1}$, $N_2 = 1,61 \times 10^{-2}$ et $\Gamma_{12} = 6,45 \times 10^{-2}$ sur les parties réelles (haut) et parties imaginaires (bas) des valeurs propres Ω tracées séparément en fonction de l'épaisseur de la couche du milieu H . Les lignes pointillées, bleues et rouges correspondent respectivement aux valeurs propres des deux sous-systèmes, aux valeurs propres instables et stables du système à trois couches fluides.

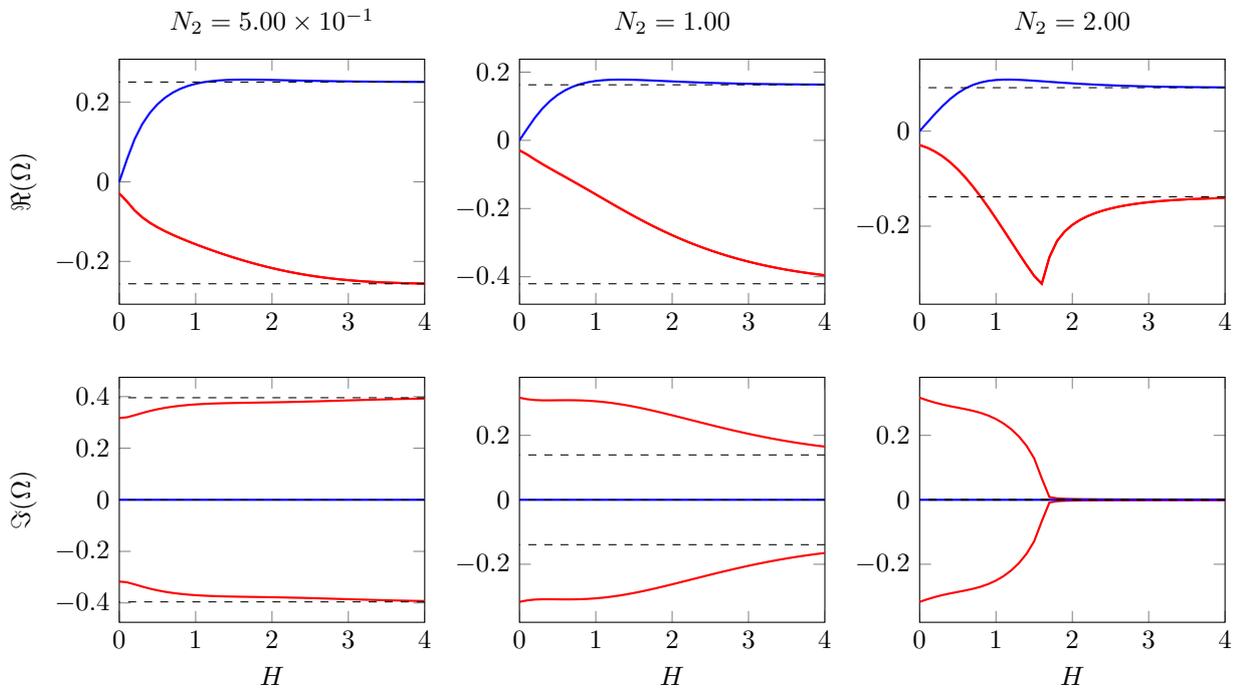


FIGURE 2.7 – Effet de N_2 pour $R_1 = 5,53 \times 10^{-1}$, $N_1 = 1,52 \times 10^{-2}$ et $\Gamma_{12} = 6,45 \times 10^{-2}$ sur les parties réelles (haut) et parties imaginaires (bas) des valeurs propres Ω tracées séparément en fonction de l'épaisseur de la couche du milieu H . Les lignes pointillées, bleues et rouges correspondent respectivement aux valeurs propres des deux sous-systèmes, aux valeurs propres instables et stables du système à trois couches fluides.

également de R_1 : leur valeur absolue diminue lorsque R_1 augmente.

Concernant le paramètre $N_1 = \nu_1 k^{3/2} g^{-1/2}$ (Figure 2.6), les valeurs des asymptotes varient de manière similaire aux précédents cas. Cependant, le comportement diffère du cas précédent lorsque N_1 dépasse la valeur de l'unité où un point de rebroussement apparaît dans l'évolution de la partie réelle négative de Ω correspondant à la valeur de H pour laquelle les parties imaginaires de Ω diffèrent de zéro. A partir d'une certaine valeur (non déterminée de manière précise dans le cadre de ce travail), N_1 tend à faire disparaître l'oscillation des interfaces relativement couplées.

Concernant le paramètre $N_2 = \nu_2 k^{3/2} g^{-1/2}$ (Figure 2.7), comme dans le cas précédent, un point de rebroussement apparaît dans l'évolution de la partie réelle négative de Ω lorsque N_2 devient grand par rapport à l'unité. Elle correspond à la valeur de H pour laquelle toutes les parties imaginaires de Ω tendent vers zéro. Contrairement au cas précédent, à partir d'une certaine valeur (non déterminée de manière précise dans le cadre de ce travail), N_2 tend à faire disparaître l'oscillation des interfaces relativement découplées.

Dans la partie suivante, les effets de tous les modes sur l'évolution temporelle des interfaces sont étudiés en faisant la résolution du problème aux valeurs initiales.

2.3 Résolution du problème aux valeurs initiales

2.3.1 Méthode

Quantités physiques théoriques

Toutes les quantités physiques Q_i de la couche (i) peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$Q_i = \Re \left(\sum_{n=1}^N Q_i^n(z) \exp(jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \Omega_n t) \right). \quad (2.75)$$

Où N est le nombre de modes et Q_i^n , l'amplitude de Q_i correspondant à la valeur propre Ω_n :

$$Q_i^n(z) = Q_{i1}^n e^{-z} + Q_{i2}^n e^{-q_i^n z} + Q_{i3}^n e^z + Q_{i4}^n e^{q_i^n z}. \quad (2.76)$$

Par exemple, $Q_i^n = A^n$, $Q_i^n = B^n$ et $Q_i^n = C^n$ pour la vitesse dans les couches inférieure, intermédiaire et supérieure, respectivement. Dans la suite, on se limitera à l'étude du cas bidimensionnel sans perte de généralité : $k_x = k$ et $k_y = 0$ et on considérera la vitesse dans la couche intermédiaire, car cette couche est en contact avec les deux interfaces. Les conditions initiales imposées à l'interface peuvent s'écrire en fonction des amplitudes composant cette vitesse :

$$u_{2z} = \Re \left(\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^4 B_m^n \exp(K_{2m}^n z) \exp(\Omega_n t) \exp(jx) \right). \quad (2.77)$$

Soit la perturbation du déplacement (ξ telle que $\xi_{,t} \equiv \mathbf{u}$) exprimée dans la couche du milieu pour sa composante verticale :

$$\xi_{2z} = \Re \left(\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^4 B_m^n \exp(K_{2m}^n z) (\Omega_n)^{-1} \exp(\Omega_n t) \exp(jx) \right). \quad (2.78)$$

En $z = 0$, cette quantité est gale à la perturbation de la position de l'interface inférieure. En $z = H$, elle est égale à la perturbation de la position de l'interface supérieure :

$$\eta_{ii+1} = \Re \left(\sum_{n=1}^N H_{ii+1}^n \exp(\Omega_n t) \exp(jx) \right), \quad (2.79)$$

Avec :

$$H_{ii+1}^n = \sum_{m=1}^4 B_m^n \exp(K_{2m}^n (i-1)H) (\Omega_n)^{-1}. \quad (2.80)$$

Lors de la résolution du problème aux valeurs propres, les huit équations (conditions de saut) n'ont pas permis de déterminer les huit constantes de vitesse mais plutôt deux valeurs propres (plus leurs conjuguées). Le nombre total de constantes de vitesse est donc de seize. Il faut alors imposer deux conditions initiales supplémentaires ($N = 2$) pour pouvoir déterminer toutes les constantes :

$$\eta_{ii+1}(t = 0) = a_i \cos(x). \quad (2.81)$$

Où $i = 1$ pour la condition au niveau de l'interface inférieure et $i = 2$ pour la condition au niveau de l'interface supérieure. Cela implique que :

$$\Re \left(\sum_{n=1}^2 H_{ii+1}^n \right) = a_i. \quad (2.82)$$

La résolution de ce nouveau système nous permet de déterminer toutes les constantes de vitesse. Puisque la dépendance en x de u_{ix} est e^{jx} , l'équation de conservation de la masse (voir équation 2.1) devient :

$$j u_{ix} = -D u'_{iz} \quad (2.83)$$

et la composante horizontale de la vitesse peut alors être déterminée :

$$u_{ix} = j u_{iz,z}. \quad (2.84)$$

Pour les deux sous-systèmes, les quatre conditions de saut permettant de trouver une valeur propre (plus son conjugué). Ainsi, une seule condition initiale ($N = 1$) est nécessaire pour pouvoir déterminer les quatre constantes. On considère $i = 1$ pour le sous-système instable et $i = 2$ pour le sous-système stable. Cela signifie que :

$$\Re (H_{ii+1}^n) = a_i. \quad (2.85)$$

Pour le sous-système instable, les vitesses dans chaque couche peuvent ainsi s'écrire :

$$u_{2z} = \Re \left(\sum_{m=1}^2 B_m^n \exp(K_{2m}^n z) \exp(\Omega_n t) \right) \cos(x), \quad (2.86)$$

et

$$u_{1z} = \Re \left(\sum_{m=3}^4 A_m^n \exp(K_{1m}^n z) \exp(\Omega_n t) \right) \cos(x), \quad (2.87)$$

avec les valeurs suivantes pour les amplitudes des vitesses :

$$(A_3, A_4, B_1, B_2) = a_1 (3.16 \times 10^{-4}, -6.64 \times 10^{-5}, 2.95 \times 10^{-4}, -4.52 \times 10^{-5}). \quad (2.88)$$

L'évolution temporelle de la position de l'interface peut s'écrire comme suit :

$$\eta_{12}(x, t) = a_1 e^{\Omega_1 t} \cos(x). \quad (2.89)$$

Pour le sous-système stable, les vitesses dans chaque couche peuvent ainsi s'écrire :

$$u_{2z} = \Re \left(\sum_{m=3}^4 B_m^n \exp(K_{2m}^n z) \exp(\Omega_n t) \right) \cos(x), \quad (2.90)$$

et

$$u_{3z} = \Re \left(\sum_{m=1}^2 C_m^n \exp(K_{3m}^n z) \exp(\Omega_n t) \right) \cos(x), \quad (2.91)$$

avec les valeurs suivantes pour les amplitudes des vitesses :

$$(B_3, B_4, C_1, C_2) = a_2 (8.96 \times 10^{-1} + 4.44 \times 10^1 j, -6.06 + 6.42 j, \\ -7.38 \times 10^{-1} + 4.16 \times 10^1 j, -4.43 + 3.62 j). \quad (2.92)$$

L'évolution temporelle de la position de l'interface peut s'écrire comme suit :

$$\eta_{23}(x, t) = \cos(kx) e^{\Re(\Omega_2)t} (\Re(\Omega_2)^2 + \Im(\Omega_2)^2)^{-1} [\cos(\Im(\Omega_2)t) a_2 + \\ \sin(\Im(\Omega_2)t) ((\Re(B_3) + \Re(B_4)) \Im(\Omega_2) - (\Im(B_3) + \Im(B_4)) \Re(\Omega_2))] \quad (2.93)$$

La vitesse initiale dans chaque couche ainsi que la position initiale des interfaces entre elles sont les conditions initiales des simulations numériques directes présentées dans la partie suivante (figure 2.8).

Simulations numériques directes

Pour faire une validation croisée avec la théorie développée, des simulations numériques directes sont effectuées par Jorge César Brändle de Motta (MCF à l'université de Rouen Normandie) à l'aide du code interne ARCHER (MÉNARD, TANGUY et BERLEMONT 2007 ; VAUDOR et al. 2017).

La longueur du domaine dans la direction horizontale est $2\pi/k$. La solution théorique est développée en supposant une profondeur infinie dans les couches supérieure et inférieure. Néanmoins, ceci n'est pas

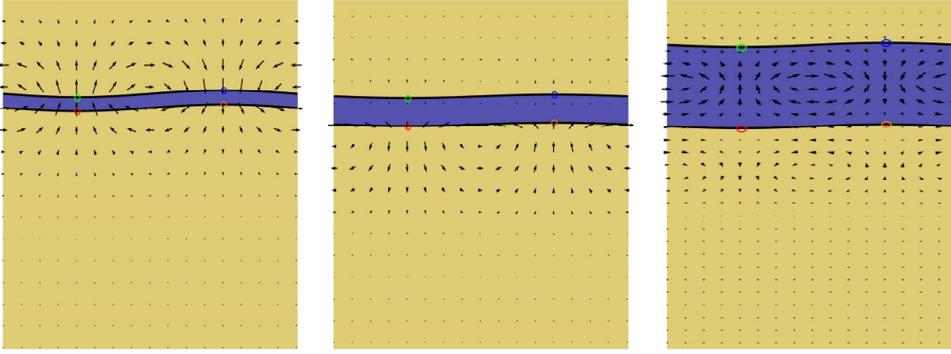


FIGURE 2.8 – Conditions initiales sur la position des interfaces et sur la vitesse pour la théorie et les simulations avec le système correspondant au cas 1 étudié par ADKINS et al. 2017 pour $H = 2,51 \times 10^{-1}$ (à gauche), $H = 5,03 \times 10^{-1}$ (au milieu) et $H = 2,51$ (à droite). Les cercles colorés font référence à la figure 2.9.

autorisé pour les simulations numériques directes. Une étude de sensibilité concernant les effets de bord a été réalisée, montrant que l'utilisation d'une hauteur de domaine quatre fois plus grande que la longueur d'onde est suffisante, ce qui est cohérent avec l'approximation en eaux profondes. De la même manière, une étude de convergence de maillage a été menée et les solutions pour le cas à deux couches ont convergé pour 64 nœuds de maillage dans la longueur d'onde. Néanmoins, pour le système à trois couches, le maillage est augmenté pour s'assurer que la taille du maillage soit suffisamment grande pour décrire la couche intermédiaire (au moins 8 nœuds de maillage dans l'épaisseur). Des conditions aux limites symétriques sont définies au niveau des limites supérieures et inférieures, tandis que des conditions périodiques sont définies sur les limites horizontales.

Pour initialiser l'ensemble des niveaux, la distance exacte à l'interface est calculée pour chaque centre de cellule. Le volume-of-fluide est ensuite dérivé du level-set. Puisque le champ de vitesse donné par les équations (2.24)-(2.26) est développé pour de petites perturbations, la continuité à l'interface est fixée en $z = 0$ et $z = h$. Ainsi, ces équations ne peuvent pas être directement utilisées pour initialiser la vitesse numérique. La position exacte de l'interface doit être prise en compte. Le mappage est effectué pour z à l'aide du champ level-set. Les valeurs cartographiées de z garantissent que les transitions entre les vitesses de chaque phase se produisent à 0 et h .

Pour toutes les configurations étudiées, les positions extrêmes de chaque interface sont extraites pour comparaison avec la théorie (Figure 2.9).

2.3.2 Solutions pour les deux sous-systèmes à deux couches

Cas instable

Prenons les valeurs des paramètres correspondant aux deux couches inférieures du cas de référence : $(R_1, N_1, N_2, \Gamma_{12}) = (5.53 \times 10^{-1}, 1,52 \times 10^{-2}, 1,61 \times 10^{-2}, 6,45 \times 10^{-2})$. Elles permettent de mettre en évidence l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Trois valeurs de l'amplitude initiale sont étudiées : $2\pi a_1^{-1} \in \{50; 100; 200\}$. Les prédictions théoriques concernant ce sous-système sont comparées sur la

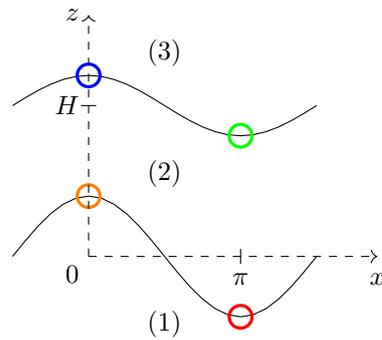


FIGURE 2.9 – Positions d'intérêt des interfaces à un instant donné. Les couleurs orange, rouge, bleu et vert font respectivement référence à l'interface inférieure en $x = 0$ et $x = \pi$ et à l'interface supérieure en $x = 0$ et $x = \pi$.

Figure 2.10 avec les simulations numériques pour chaque valeur de l'amplitude initiale.

On observe tout d'abord que jusqu'à un certain temps, la théorie coïncide avec les simulations, même si la théorie surestime de plus en plus l'amplitude de la position de l'interface. Cet écart n'est pas surprenant puisque lorsque l'amplitude de la perturbation devient trop importante, la théorie linéaire n'est plus valable. De plus, pour la théorie linéaire actuelle, le haut et le bas de l'interface sont toujours symétriques, ils ont tendance à se déplacer vers le bas dans les simulations. Introduisons la quantité :

$$\eta_{12}(x = 0, t) - \eta_{12}(x = \pi, t). \quad (2.94)$$

Cette quantité est théoriquement égale à zéro. Elle permet de déterminer à partir de quel moment les effets non linéaires ne sont plus négligeables. Choisissons arbitrairement l'instant t_{10} à partir duquel cette quantité est égale à 10%. On observe comme prévu que t_{10} augmente lorsque l'amplitude initiale diminue (Tableau 2.3). Il est intéressant de remarquer que quelle que soit la valeur de l'amplitude initiale, t_{10} correspond au moment où l'amplitude atteint une valeur de l'ordre de l'unité.

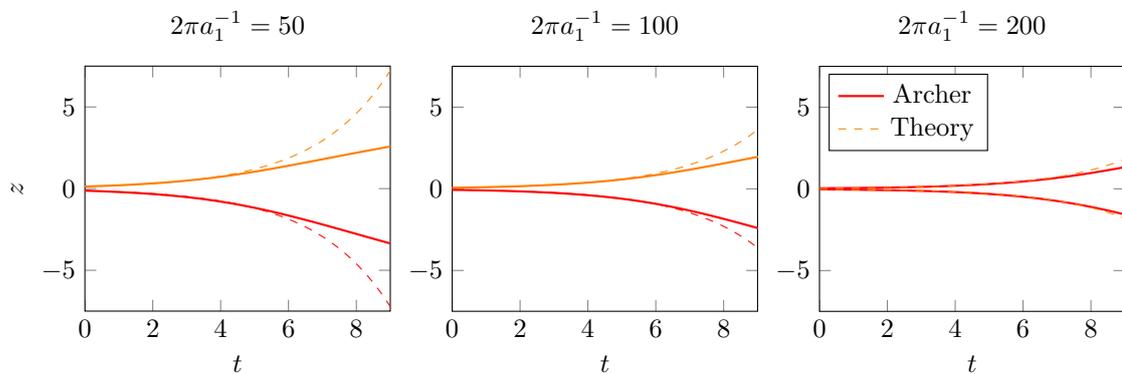


FIGURE 2.10 – Comparaison entre les évolutions temporelles théorique (lignes pointillées) et numérique (lignes pleines) de la position de l'interface en $x = 0$ (orange) et $x = \pi$ (rouge) pour le sous-système instable et différentes valeurs de a_1 .

$2\pi a_1^{-1}$	50	100	200
t_{10}	4.6	6.3	7.6

TABLE 2.3 – t_{10} en fonction de l'amplitude initiale.

Cas stable

Prenons les valeurs des paramètres correspondant aux deux couches supérieures du cas de référence : $(R_3, N_3, N_2, \Gamma_{23}) = (5, 53 \times 10^{-1}, 1, 52 \times 10^{-2}, 1, 61 \times 10^{-2}, 6, 45 \times 10^{-2})$. Elles permettent de mettre en évidence uniquement une onde de gravité. Trois valeurs de l'amplitude initiale sont étudiées : $2\pi a_2^{-1} \in \{5; 10; 50\}$. Les prédictions théoriques concernant ce sous-système sont comparées sur la Figure 2.11 avec des simulations numériques pour chaque valeur de l'amplitude initiale.

Premièrement, nous n'observons pas le même comportement que dans le cas précédent. Ici, en utilisant une amplitude initiale suffisamment petite, les simulations soutiennent la théorie. Cependant, lorsque l'amplitude initiale est trop grande, l'analyse de stabilité linéaire ne peut pas être utilisée, car un décalage et une erreur aux grandes amplitudes sont observés. Les cas où l'amplitude initiale est trop importante ($2\pi a_2^{-1} < 10$) ne seront plus étudiés, puisque la théorie linéaire n'est jamais valable.

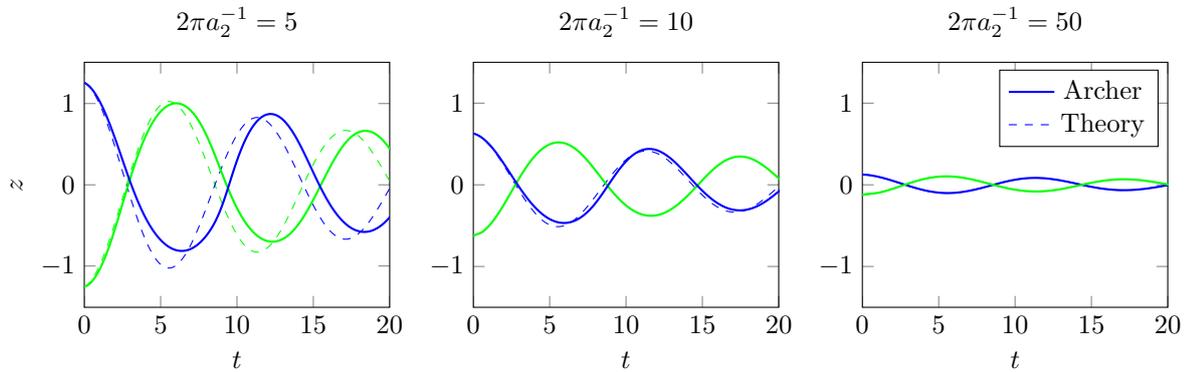


FIGURE 2.11 – Comparaison entre les évolutions temporelles théorique (lignes pointillées) et numérique (lignes pleines) de la position de l'interface en $x = 0$ (bleu) et $x = \pi$ (vert) pour le sous-système stable et différentes valeurs de a_2 .

2.3.3 Solutions pour le système à trois couches

Prenons les valeurs des paramètres correspondant au cas de référence : $(R_1 = R_3, N_1 = N_3, N_2, \Gamma_{12} = \Gamma_{23}) = (5, 53 \times 10^{-1}, 1, 52 \times 10^{-2}, 1, 61 \times 10^{-2}, 6, 45 \times 10^{-2})$. Les amplitudes initiales sont fixées à la même valeur $a_1 = a_2 = a$ sans perte de généralité. Les trois valeurs des amplitudes initiales considérées pour le sous-système instable sont étudiées : $2\pi a^{-1} \in \{50; 100; 200\}$. Cinq valeurs de l'épaisseur de la couche intermédiaire (c'est-à-dire du paramètre de couplage) sont également étudiées : $H \in \{2.51 \times 10^{-1}, 3.77 \times 10^{-1}, 5.03 \times 10^{-1}, 1, 01, 2, 51\}$.

Pour les trois valeurs de l'amplitude initiale a et les cinq valeurs de l'épaisseur de la couche intermédiaire

H soit un total de 15 configurations, les amplitudes des trois vitesses sont déterminées à travers \mathbf{X}^n à l'aide de la méthode exposée précédemment. Pour chaque configuration, des simulations numériques sont effectuées à des fins de validation croisée ainsi que pour montrer l'évolution des effets non linéaires.

Comme attendu avec les résultats concernant le sous-système instable, lorsque l'amplitude initiale des positions de l'interface est plus petite, le temps pendant lequel la théorie et les simulations numériques coïncident augmente (voir les figures 2.12 à 2.16). En commentaire général sur ces figures, nous identifions trois régimes principaux concernant le comportement de l'interface en fonction de l'épaisseur de la couche intermédiaire H pour notre choix de paramètres.

Le premier régime se produit lorsque H est suffisamment élevé (voir la figure 2.12 pour $H = 2.51$). Dans ce régime, le comportement des deux interfaces est indépendant : l'amplitude de l'interface inférieure augmente de façon exponentielle, tandis que l'amplitude de l'interface supérieure oscille comme prévu pour les interfaces découplées. Il est intéressant de noter que ce résultat est observé pour des valeurs de H inférieures à celle de l'hypothèse d'eaux profondes ($2\pi \approx 6.28$). Ce premier régime est appelé «régime découplé».

Pour $H = 1.01$ on observe une sortie du "régime découplé" (voir la figure 2.13), où l'amplitude de l'interface supérieure commence par osciller, bien qu'elle soit rapidement rattrapée par le comportement de l'interface inférieure dont l'amplitude augmente de façon exponentielle. Dans les simulations, ceci est observé lorsque l'analyse linéaire de stabilité n'est plus valide.

Le deuxième régime se produit lorsque H continue de diminuer (voir la figure 2.14 pour $H = 5,03 \times 10^{-1}$). Dans ce régime, l'amplitude de l'interface supérieure n'a pas le temps d'osciller. Le mode associé à la valeur propre réelle positive est le mode dominant, l'amplitude des deux interfaces augmentant de façon exponentielle. Ce deuxième régime est appelé «régime à mode dominant instable». Lorsque H continue de diminuer, on observe un écart par rapport au «régime à mode dominant instable» (voir la figure 2.15) pour $H = 3,77 \times 10^{-1}$, où l'amplitude des deux interfaces commence par diminuer (voire osciller) avant d'augmenter comme pour le régime précédent.

Le troisième régime se produit lorsque H continue de diminuer (voir la figure 2.16 pour $H = 2,51 \times 10^{-1}$). Dans ce régime, l'amplitude des deux interfaces oscille clairement avant que l'interface inférieure ne rattrape la supérieure. Plus H est petit, plus l'amplitude des interfaces oscille longtemps. Les modes associés aux valeurs propres imaginaires sont les modes dominants. Ce troisième régime est appelé «régime à mode dominant stable».

L'évolution temporelle de la position des interfaces pour les cas $H = 2,51$, $H = 5,03 \times 10^{-1}$ et $H = 2,51 \times 10^{-1}$ est respectivement représentée sur les figures 2.17, 2.18 et 2.19.

De même que pour le sous-système instable, nous introduisons les deux quantités suivantes :

$$\eta_{ii+1}(x = 0, t) - \eta_{ii+1}(x = \pi, t). \quad (2.95)$$

Les valeurs de t_{10} pour lesquelles ces quantités sont égales à 10% sont tracées pour les deux interfaces et l'ensemble des paramètres précédents H et a (Figure 2.20). Pour les deux interfaces, les valeurs de t_{10} tendent vers l'infini quand H tend vers zéro. Ceci n'est pas surprenant puisque le système fluide à trois couches tend vers un système monocouche stable. Lorsque H augmente, les valeurs de t_{10} pour l'interface

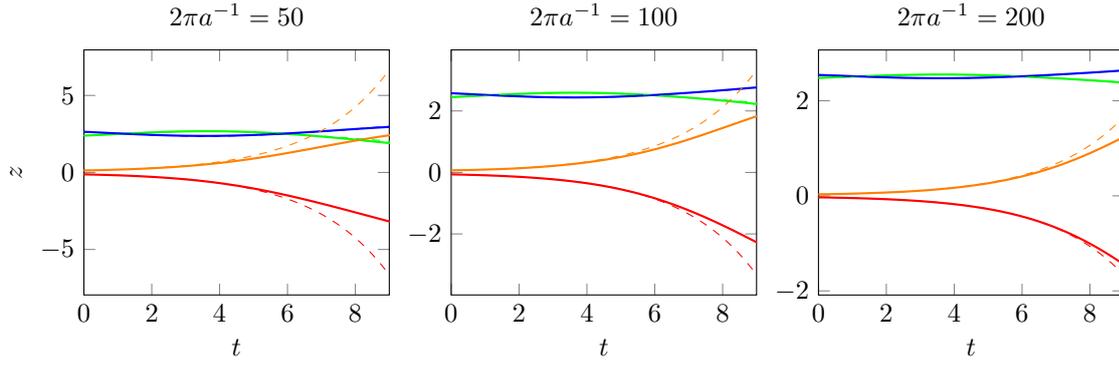


FIGURE 2.12 – Évolution temporelle de la position des interfaces en $x = 0$ (rouge pour z_{12} et vert pour z_{23}) et $x = \pi$ (orange pour z_{12} et bleu pour z_{23}) pour différentes valeurs de l'amplitude initiale et $H = 2, 51$, pour les simulations numériques (lignes pleines) et les prédictions théoriques (lignes pointillées).

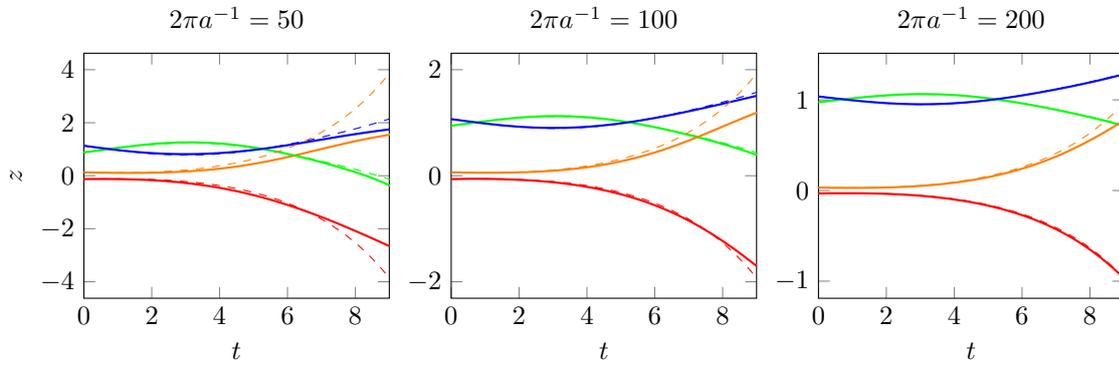


FIGURE 2.13 – Évolution temporelle de la position des interfaces en $x = 0$ (rouge pour z_{12} et vert pour z_{23}) et $x = \pi$ (orange pour z_{12} et bleu pour z_{23}) pour différentes valeurs de l'amplitude initiale et $H = 1, 01$, pour les simulations numériques (lignes pleines) et les prédictions théoriques (lignes pointillées).

inférieure tendent vers les valeurs du sous-système instable. Les valeurs de t_{10} pour l'interface supérieure tendent vers l'infini; soit la valeur du sous-système stable. Pour des amplitudes initiales suffisamment faibles, t_{10} diminue strictement en fonction de H pour l'interface inférieure. Pour l'interface supérieure le minimum de t_{10} est atteint pour des valeurs de H proche de l'unité.

2.4 Conclusion

Une analyse linéaire de stabilité a été réalisée pour étudier l'effet de la viscosité et de la tension de surface dans un système composé de trois fluides newtoniens incompressibles immiscibles superposés sous le champ de gravité. Le paramètre qui caractérise le couplage entre les deux interfaces est le produit entre le nombre d'onde de la perturbation et l'épaisseur de la couche intermédiaire $H = kh$. Lorsque H est suffisamment grand, ce système tend vers deux sous-systèmes fluides à deux couches différents, qui ont également été définis pour conserver ce comportement asymptotique au cours de toute l'étude. En particulier, les résultats de l'étude montre que cette limite est atteinte lorsque l'hypothèse d'eaux profondes est vérifiée. Le système d'intérêt est composé d'une interface gravitationnellement instable en bas et d'une interface gravitationnellement stable en haut pour mettre en évidence respectivement

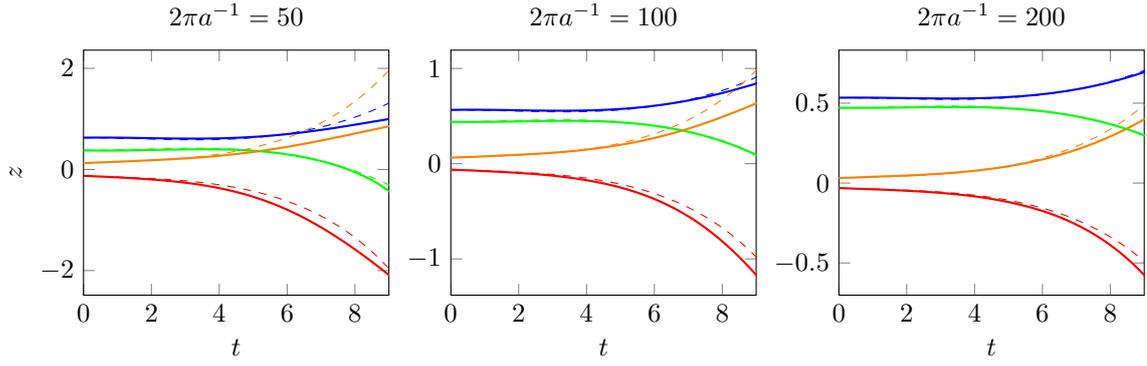


FIGURE 2.14 – Évolution temporelle de la position des interfaces en $x = 0$ (rouge pour z_{12} et vert pour z_{23}) et $x = \pi$ (orange pour z_{12} et bleu pour z_{23}) pour différentes valeurs de l'amplitude initiale et $H = 5,03 \times 10^{-1}$, pour les simulations numériques (lignes pleines) et les prédictions théoriques (lignes pointillées).

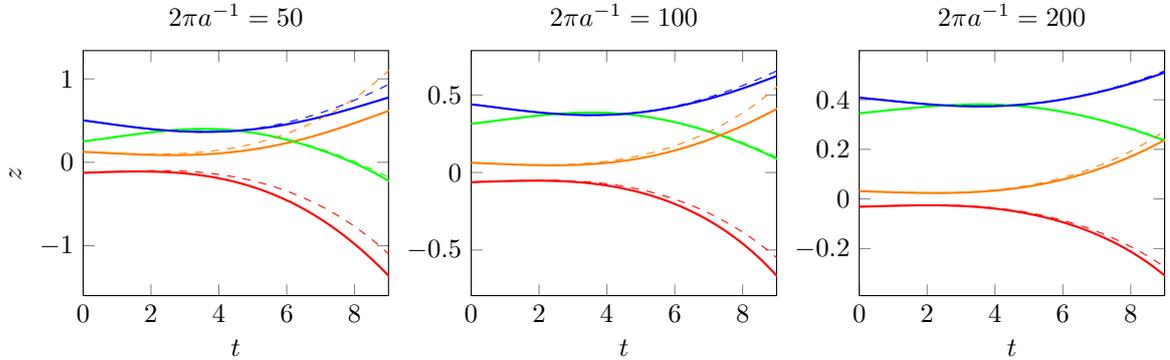


FIGURE 2.15 – Évolution temporelle de la position des interfaces en $x = 0$ (rouge pour z_{12} et vert pour z_{23}) et $x = \pi$ (orange pour z_{12} et bleu pour z_{23}) pour différentes valeurs de l'amplitude initiale et $H = 3,77 \times 10^{-1}$, pour les simulations numériques (lignes pleines) et les prédictions théoriques (lignes pointillées).

l'instabilité de Rayleigh-Taylor et une onde de gravité ainsi que le couplage entre ces deux phénomènes. Les paramètres physiques correspondent à un système symétrique composé d'une couche d'eau entourée de deux couches d'huile étudiées expérimentalement dans un travail précédent.

Le problème aux valeurs propres a été résolu pour un ensemble de paramètres afin de déterminer le coefficient temporel sans dimension de la perturbation $\Omega = \omega g^{-1/2} k^{-1/2}$ en fonction de H . Une étude paramétrique a été réalisée pour montrer comment cette relation de dispersion est influencée par le rapport de densité $R_1 = \rho_1 \rho_2^{-1}$ et la viscosité sans dimension de chaque couche $N_i = \nu_i g^{-1/2} k^{3/2}$: R_1 tend à favoriser le couplage entre les deux interfaces (voir figure 2.5), N_1 tend à faire disparaître l'oscillation des interfaces relativement couplées (voir figure 2.6), alors que N_2 tend à faire disparaître l'oscillation des interfaces relativement découplées (voir figure 2.7).

La tension de surface sans dimension, $\Gamma_{12} = \gamma_{12} \rho_2^{-1} g^{-1} k^2$ a été fixée pour garantir que l'interface inférieure n'est pas stabilisée par la tension de surface ($\Gamma_{12} < 1 - R_1$). L'évolution temporelle des grandeurs physiques est obtenue en résolvant le problème aux valeurs initiales. Pour cela, des interfaces sinusoïdales sont initialement imposées comme conditions initiales. Les simulations numériques ont été réalisées en utilisant le code interne Archer initialisé à la fois par la position initiale des interfaces et les vitesses

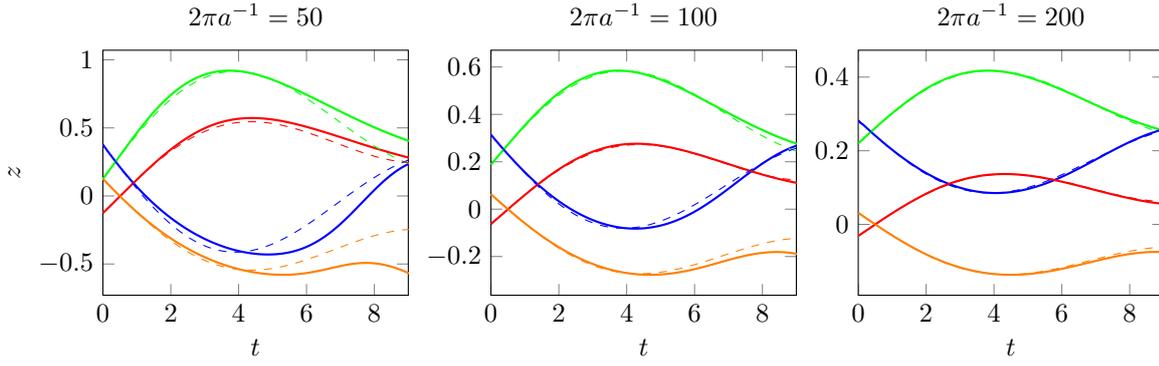


FIGURE 2.16 – Évolution temporelle de la position des interfaces en $x = 0$ (rouge pour z_{12} et vert pour z_{23}) et $x = \pi$ (orange pour z_{12} et bleu pour z_{23}) pour différentes valeurs de l'amplitude initiale et $H = 2,51 \times 10^{-1}$, pour les simulations numériques (lignes pleines) et les prédictions théoriques (lignes pointillées).

initiales dans l'ensemble du domaine. Cela nous a permis de comparer l'évolution temporelle des positions des interfaces, ce qui conforte ces résultats théoriques jusqu'à ce que l'amplitude d'une interface devienne trop grande au même titre que les effets non linéaires de l'écoulement. Nous avons identifié trois régimes principaux pour le comportement des interfaces lorsque H varie : deux régimes couplés, le régime à mode dominant stable et le régime à mode dominant instable et un régime découplé. Lorsque H est proche de zéro, l'amplitude des modes de valeurs propres complexes des deux interfaces est bien plus grande que celle du mode de valeur propre réelle positive. Ensuite, lorsque H augmente, le mode de valeur propre réelle positive est dominant pour les deux interfaces. Enfin, lorsque H continue d'augmenter, les interfaces se découplent. L'amplitude du mode de valeur propre réelle positive est dominante pour l'interface inférieure (gravitationnellement instable), tandis que celle des modes de valeurs propres complexes est dominante pour l'interface supérieure (gravitationnellement stable).

Les perspectives de ce travail sont d'étudier les effets de l'inclusion d'une force volumique supplémentaire telle que la force de Lorentz pour les fluides conducteurs soumis à un courant électrique (voir le chapitre 3) puis d'explorer les effets de bord en considérant à la fois les parois horizontales et verticales (voir le chapitre 4) ; tout cela dans le but notamment de modéliser l'instabilité de ballonnement dans les batteries à métaux liquides.

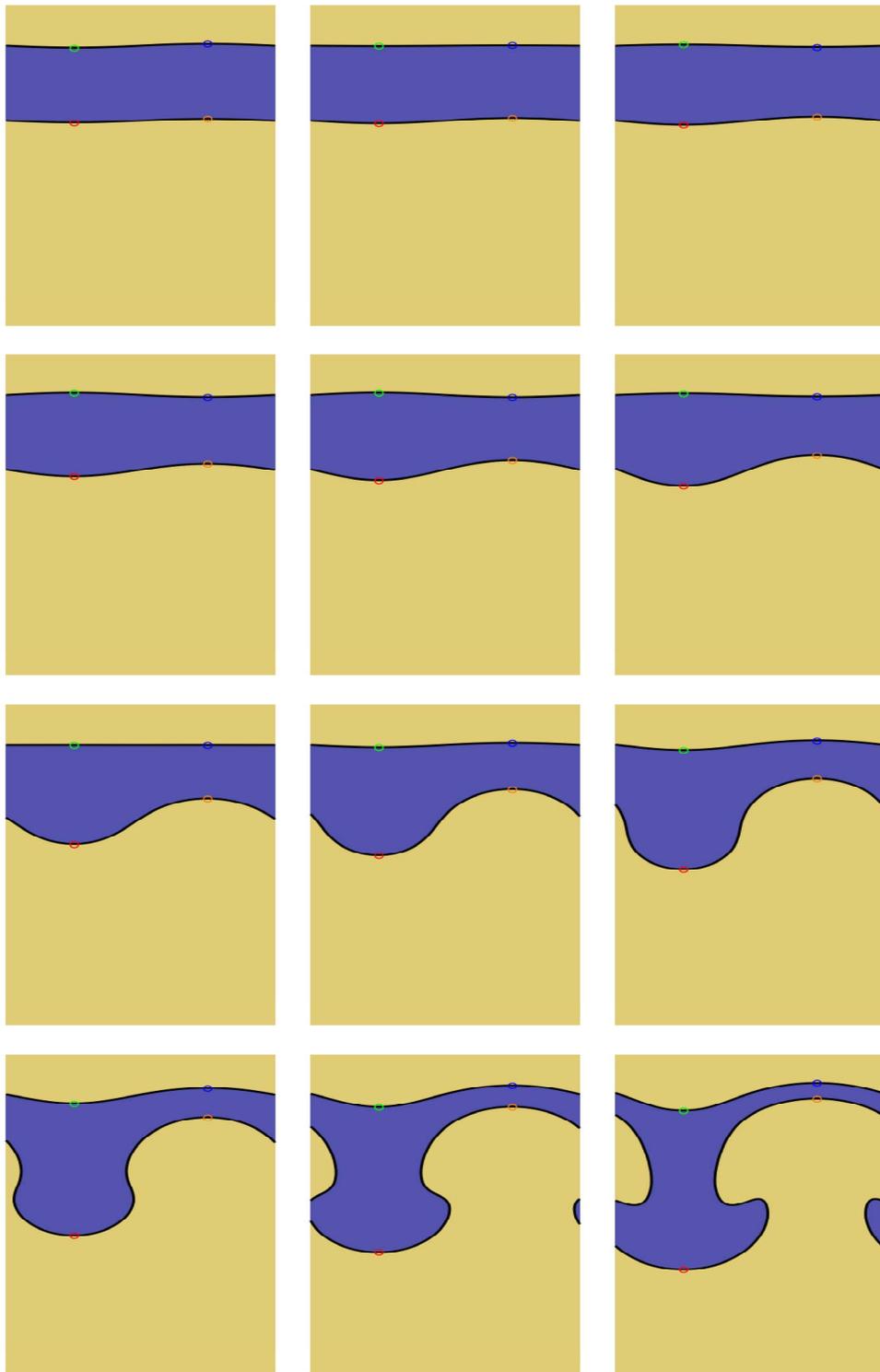


FIGURE 2.17 – Évolution temporelle de la position des interfaces des simulations numériques du système à trois couches pour $t \in [0; 11]$, $H = 2,51$ et $2\pi a^{-1} = 100$.

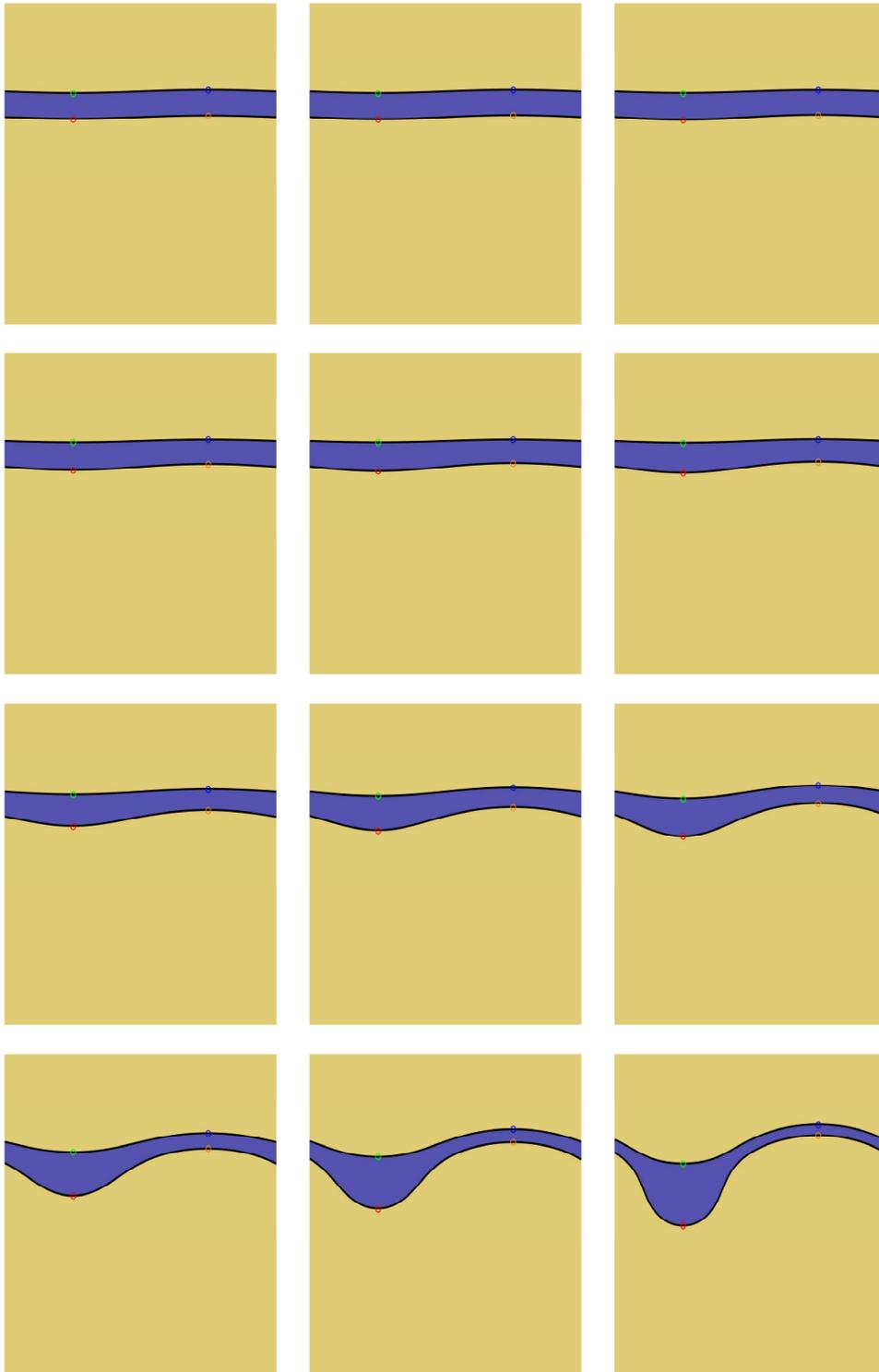


FIGURE 2.18 – Évolution temporelle de la position des interfaces des simulations numériques du système à trois couches pour $t \in [0; 11]$, $H = 5,03 \times 10^{-1}$ et $2\pi a^{-1} = 100$.

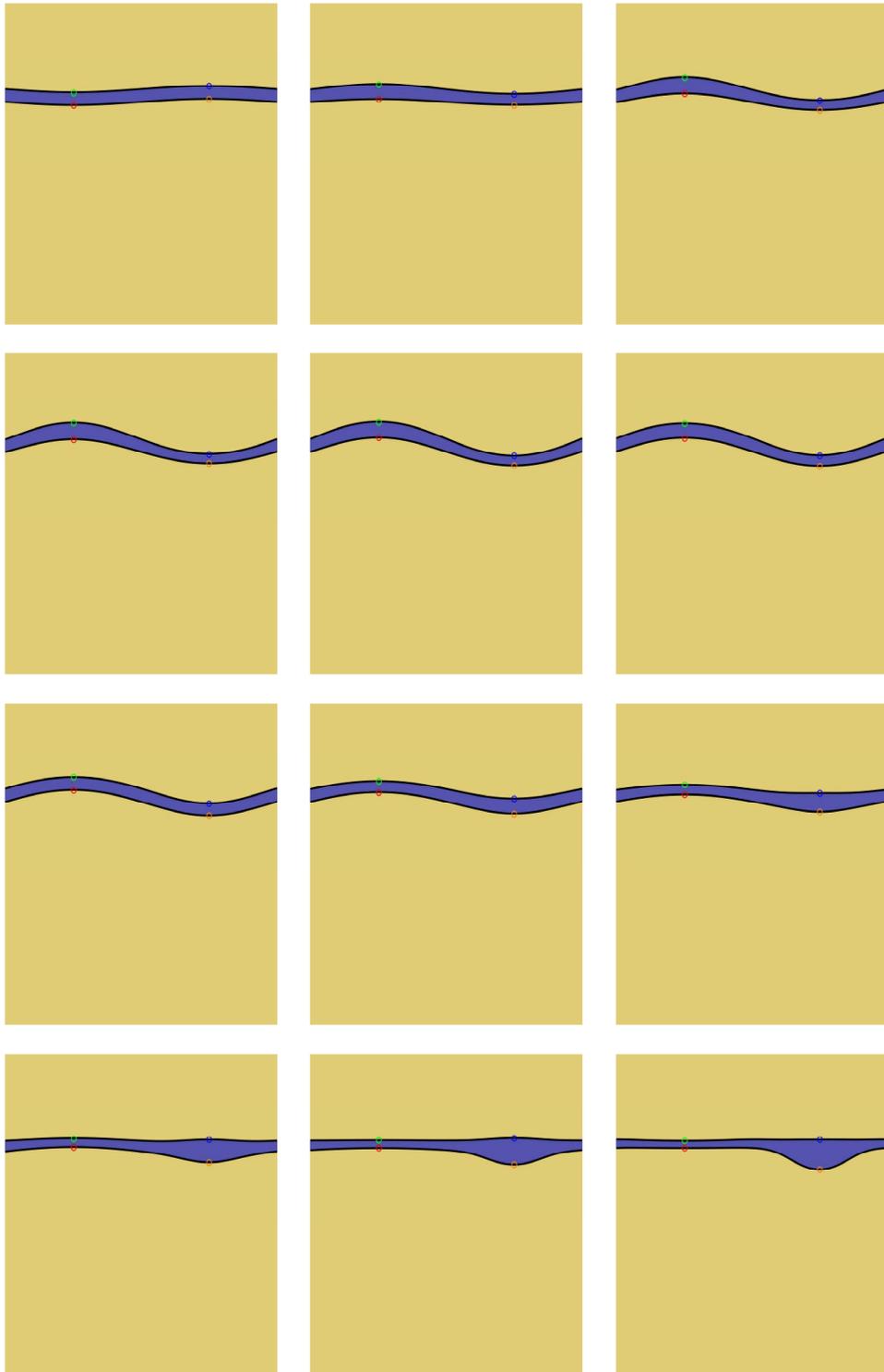


FIGURE 2.19 – Évolution temporelle de la position des interfaces des simulations numériques du système à trois couches pour $t \in [0; 11]$, $H = 2,51 \times 10^{-1}$ et $2\pi a^{-1} = 100$.

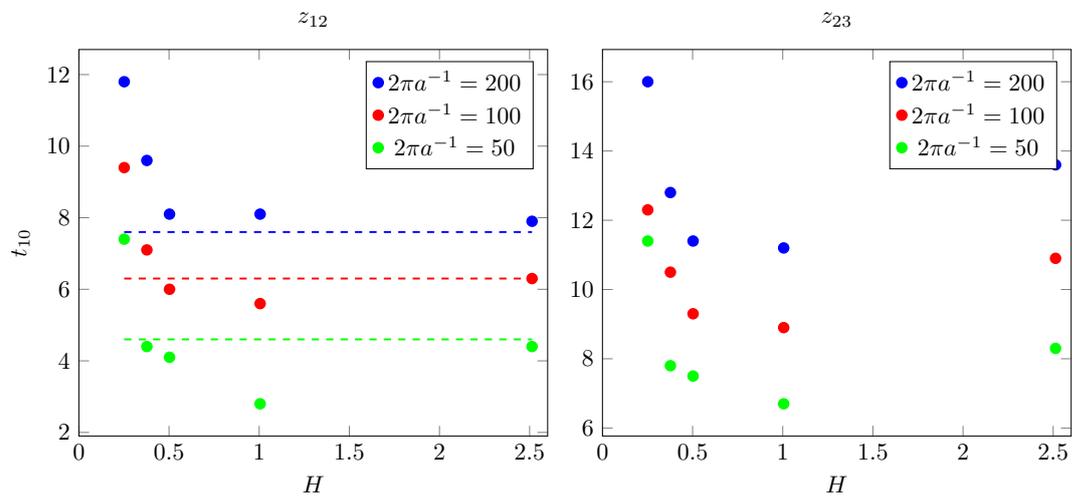


FIGURE 2.20 – t_{10} en fonction de H pour l'interface du bas (gauche) et l'interface du haut (droite) et différentes valeurs de a .

Instabilité interfaciale avec champ magnétique

Comme discuté précédemment, dans ce chapitre, les effets magnétohydrodynamiques sont regardés pour un système à trois couches fluides pouvant modéliser une batterie à métaux liquides dans le cas où la longueur de la perturbation est petite comparée aux dimensions latérales de la batterie. Dans un premier temps les effets de la viscosité et de la tension de surface sont négligés ; cette étude s'inscrit dans la continuité d'un travail effectué par SNEYD 1985 qui traite de deux systèmes proches des batteries à métaux liquides ((1 \equiv liquide)\(2 \equiv liquide)\(3 \equiv *liquide*)) : les cellules de réduction de l'aluminium ((1 \equiv liquide)\(2 \equiv liquide)\(3 \equiv *solide*)) et les fours à arcs électriques ((1 \equiv liquide)\(2 \equiv liquide)\(3 \equiv *gaz*)). Ces systèmes possèdent trois principaux points communs. Premièrement ils sont stratifiés gravitationnellement. Deuxièmement ils sont soumis à un fort courant électrique vertical. Enfin, la conductivité électrique de la couche du milieu est nettement inférieure à celle des couches extrêmes. Pour ces systèmes à plusieurs couches fluides, le moteur de l'instabilité est le champ magnétique qu'il soit induit par le courant électrique ou bien qu'il s'agisse d'un champ magnétique extérieur comme par exemple du champ magnétique terrestre ou bien d'un champ dû à la proximité d'autres batteries dans le cas d'un regroupement de batteries à métaux liquides. Sous certaines conditions, ces batteries, stratifiées gravitationnellement, deviennent instables lorsqu'elles sont soumises à de petites perturbations. Une analyse linéaire de stabilité a été menée pour un cas général puis une carte de stabilité a été tracée pour un cas où les propriétés des fluides ont été fixées en utilisant les valeurs du travail de WEBER, BECKSTEIN, HERREMAN et al. 2017 sur l'instabilité de ballottement dans les batteries à métaux liquides. Les deux paramètres variables non liés aux propriétés des fluides sinon à la géométrie de la batterie et à son utilisation sont respectivement l'épaisseur de la couche du milieu et le champ magnétique. Cette carte de stabilité indique, pour un couple donné de ces paramètres variables si le système est stable ou instable. Elle permet notamment de déterminer un champ magnétique induit critique (ou courant électrique critique) au delà duquel le système peut possiblement se déstabiliser. Dans un second temps les effets de la viscosité et de la tension de surface sont regardés. Inclure la vis-

cosité complexifie l'analyse, nécessitant comme pour le chapitre précédent une résolution numérique du problème aux valeurs propres pour déterminer le nombre de modes ainsi que leurs coefficients temporels. De la même manière que dans la partie précédente une carte de stabilité du système est établie dans un cas plus réaliste prenant en compte des paramètres physiques à effet stabilisateur bien que la viscosité n'ait pas d'effet sur la stabilité du système en soi sinon sur l'évolution temporelle de l'écoulement.

3.1 Théorie non visqueuse

3.1.1 Formulation du problème

Comme pour le chapitre précédent, dans cette partie sont considérés trois fluides superposés en coordonnées cartésiennes $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)^T$, dans des conditions isothermes, soumis au champ de gravité $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Par la suite les indices 1, 2 et 3 feront référence respectivement à la couche inférieure de métal liquide ($1 \equiv ML$), à la couche intermédiaire d'électrolyte ($2 \equiv E$) et à la couche supérieure de métal liquide ($3 \equiv ML$) tandis que les indices 12 et 23 feront référence respectivement aux interfaces (1)–(2) et (2)–(3) entre les couches (1) et (2) et les couches (2) et (3); les indices x , y et z feront respectivement référence aux composantes des quantités vectorielles dans les directions \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z . Ces fluides sont considérés non miscibles, incompressibles avec des masses volumiques : ρ_1 , ρ_2 et ρ_3 et non visqueux. Pour cette théorie, les tensions de surface aux interfaces ne sont pas prises en compte. Ces fluides sont plus où moins conducteurs, de conductivité électrique : σ_1 , σ_2 et σ_3 . Dans l'état de base, ils sont soumis à un courant électrique vertical et homogène \vec{J}^* ainsi qu'à un champ magnétique extérieur \vec{B}^{ex*} de source inconnue; l'exposant * fait référence à cet état de base. L'approximation des régimes quasi-stationnaires ainsi que l'approximation usuelle de la magnétohydrodynamique consistant à négliger les déplacements de courant sont utilisées ici. Les trois couches ont des largeurs et profondeurs infinies. Les couches extrêmes ont des hauteurs infinies tandis que la couche du milieu a une hauteur finie h (voir figure 3.1). Les grandeurs

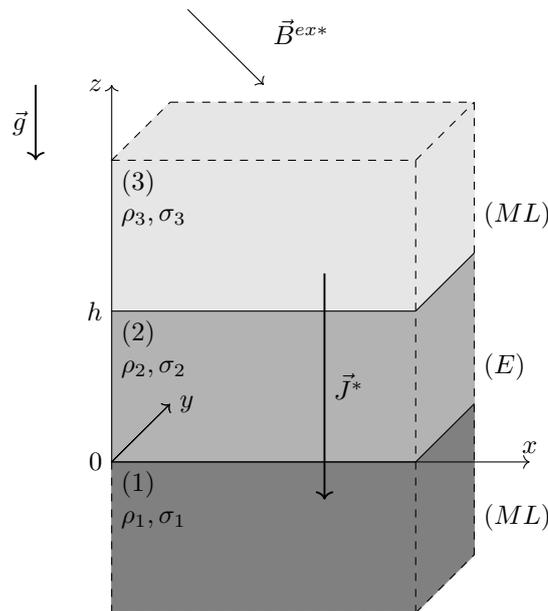


FIGURE 3.1 – Représentation schématique du système à trois fluides avec champ magnétique.

physiques telles que les vitesses : \vec{u}_1 , \vec{u}_2 et \vec{u}_3 , la position des interfaces : z_{12} et z_{23} , les pressions : p_1 , p_2 et p_3 , les courants électriques : \vec{J}_1 , \vec{J}_2 et \vec{J}_3 , les champs électriques : \vec{E}_1 , \vec{E}_2 et \vec{E}_3 ainsi que les champs magnétiques : \vec{B}_1 , \vec{B}_2 et \vec{B}_3 peuvent être déterminés à partir du couplage entre les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement et les équations de Maxwell.

Soit les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_i = 0 \quad \forall i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket, \quad (3.1)$$

$$\rho_i \left(\vec{u}_{i,t} + (\vec{u}_i \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_i \right) = -\vec{\nabla} p_i + \vec{f}_{Li} + \rho_i \vec{g} \quad \forall i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket, \quad (3.2)$$

avec

$$\vec{f}_{Li} = \vec{J}_i \times \vec{B}_i, \quad (3.3)$$

la force de Lorentz dans le milieu (i). La forme du champ électromagnétique, peut être déterminée à partir des équations de Maxwell-Gauss, Maxwell-Faraday, Maxwell-Flux et Maxwell-Ampère :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (3.4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (3.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (3.7)$$

La loi d'Ohm utilisée par la suite est la suivante :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (3.8)$$

Les relations de passage au travers d'une interface des champs électrique et magnétique imposent la continuité de la composante normale du courant électrique :

$$\vec{J}_i \cdot \vec{n}_{ii+1} = \vec{J}_{i+1} \cdot \vec{n}_{ii+1} \quad \text{en } z = z_{ii+1}, \quad (3.9)$$

la continuité de la composante tangentielle du champ électrique :

$$\vec{E}_i \times \vec{n}_{ii+1} = \vec{E}_{i+1} \times \vec{n}_{ii+1} \quad \text{en } z = z_{ii+1}, \quad (3.10)$$

ainsi que la continuité de la composante normale du champ magnétique :

$$\vec{B}_i \cdot \vec{n}_{ii+1} = \vec{B}_{i+1} \cdot \vec{n}_{ii+1} \quad \text{en } z = z_{ii+1}. \quad (3.11)$$

Ici, \vec{n}_{ii+1} désigne, comme dans le chapitre précédent (2.6), le vecteur normal à l'interface (i) - ($i+1$) dirigé de la couche (i) vers la couche ($i+1$). Avec l'expression de ces vecteurs normaux, ces conditions

deviennent :

$$-J_{ix}z_{ii+1,x} - J_{iy}z_{ii+1,y} + J_{iz} = -J_{i+1x}z_{ii+1,x} - J_{i+1y}z_{ii+1,y} + J_{i+1z} \text{ en } z = z_{ii+1} \quad (3.12)$$

$$\begin{pmatrix} E_{iy} + E_{iz}z_{ii+1,y} \\ -E_{iz}z_{ii+1,x} - E_{ix} \\ -E_{ix}z_{ii+1,y} + E_{iy}z_{ii+1,x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{i+1y} + E_{i+1z}z_{ii+1,y} \\ -E_{i+1z}z_{ii+1,x} - E_{i+1x} \\ -E_{i+1x}z_{ii+1,y} + E_{i+1y}z_{ii+1,x} \end{pmatrix} \text{ en } z = z_{ii+1} \quad (3.13)$$

$$-B_{ix}z_{ii+1,x} - B_{iy}z_{ii+1,y} + B_{iz} = -B_{i+1x}z_{ii+1,x} - B_{i+1y}z_{ii+1,y} + B_{i+1z} \text{ en } z = z_{ii+1} \quad (3.14)$$

Cinq nouveaux paramètres physiques apparaissent lorsque le champ magnétique est considéré : σ_1 , σ_2 , σ_3 , J^* et la permittivité du vide μ_0 pour une nouvelle unité fondamentale : l'Ampère A , l'unité de l'intensité du courant électrique. Ainsi, quatre nouveaux nombres sans dimension doivent être définis pour caractériser ce problème. En isolant J^* , un nombre sans dimension est déterminé pour chacun des quatre autres nouveaux paramètres en fonction de J^* ainsi que des trois paramètres utilisés dans le chapitre précédent, ρ_2 , g et k :

$$\begin{aligned} M_0 &= \mu_0 J^{*2} \rho_2^{-1} g^{-1} k^{-1} = \mu_0 m_{ref}^{-1} l_{ref}^{-1} t_{ref}^2 I_{ref}^2 \\ S_i &= \sigma_i J^{*2} k^{1/2} \rho_2^{-1} g^{-3/2} = \sigma_i m_{ref} l_{ref}^3 t_{ref}^{-3} I_{ref}^{-2} \quad \forall i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket \end{aligned} \quad (3.15)$$

Où une intensité du courant électrique de référence $I_{ref} = J^* k^{-2}$ a été introduite. Les masses volumiques, la hauteur et le coefficient temporel, adimensionnés définis dans le chapitre précédent et ne dépendant donc pas de I_{ref} seront également utilisés par la suite :

$$\begin{aligned} R_i &= \rho_i \rho_2^{-1} = \rho_i m_{ref}^{-1} l_{ref}^3 \quad \forall i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket \setminus \{2\} \\ H &= kh = hl_{ref}^{-1} \\ \Omega &= \omega g^{-1/2} k^{-1/2} = \omega t_{ref} \end{aligned}$$

Toutes les nouvelles grandeurs physiques : \vec{J} , \vec{E} et \vec{B} seront désormais remplacées par $l_{ref}^{-2} I_{ref} \vec{J}$, $m_{ref} l_{ref} t_{ref}^{-3} I_{ref}^{-1} \vec{E}$ et $m_{ref} t_{ref}^{-2} I_{ref}^{-1} \vec{B}$ et seront donc sans dimension.

3.1.2 État de base

Dans l'état de base, les interfaces sont considérées planes :

$$z_{ii+1}^* = (i-1)H, \quad (3.16)$$

les fluides sont au repos :

$$\vec{u}_i^* = \vec{0}, \quad (3.17)$$

et le courant électrique est considéré vertical et homogène :

$$\vec{J}_i^* = \vec{e}_z. \quad (3.18)$$

La loi d'Ohm permettant de déterminer le champ électrique est la suivante :

$$\vec{E}_i^* = S_i^{-1} \vec{e}_z. \quad (3.19)$$

Les équations de Maxwell-Flux et Maxwell-Ampère permettent de déterminer la forme des champs magnétiques admissibles dans l'état de base :

$$\vec{B}_i^* = \vec{B}^{in*}(x, y) + \vec{B}^{ex*}(x, y) + \vec{B}_c \quad (3.20)$$

Les champs magnétiques admissibles peuvent être considérés comme la somme de deux contributions $\vec{B}^{in*}(x, y)$ et $\vec{B}^{ex*}(x, y)$ à une constante près \vec{B}_c donnée par :

$$\vec{B}_c = \begin{pmatrix} B_{cx} \\ B_{cy} \\ B_{cz} \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

$\vec{B}^{in*}(x, y)$ correspond au champ magnétique induit par le courant électrique imposé à l'état de base (équation 3.7) :

$$\vec{B}_i^{in*} = M_0 \begin{pmatrix} -y/2 \\ x/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

tandis que $\vec{B}^{ex*}(x, y)$ correspond à la forme admissible du champ magnétique extérieur :

$$\vec{B}_i^{ex*} = M_0 \begin{pmatrix} Qx + Ry \\ Rx - Qy \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Avec Q et R , deux constantes. Finalement l'expression du champ magnétique dans l'état de base est donnée par :

$$\vec{B}_i^* = M_0 \begin{pmatrix} Qx + (R - 1/2)y \\ (R + 1/2)x - Qy \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{cx} \\ B_{cy} \\ B_{cz} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

La force de Lorentz résultant de l'interaction entre ce champ magnétique et le courant électrique s'écrit comme suit :

$$\vec{f}_{Li}^* = M_0 \begin{pmatrix} -(R + 1/2)x + Qy \\ Qx + (R - 1/2)y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -B_{cy} \\ B_{cx} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Cette force est irrotationnelle et peut être exprimée comme le gradient d'une pression dite magnétique définie telle que :

$$\vec{\nabla} \times \vec{f}_{Li}^* = \vec{0} \Rightarrow \vec{f}_{Li}^* = -\vec{\nabla} p_{Mi}^* \quad (3.26)$$

La pression magnétique dans l'état de base s'écrit donc de la manière suivante :

$$p_{Mi}^* = M_0 \left(-Qxy + \frac{1}{4} (x^2 + y^2) - \frac{1}{2} R (y^2 - x^2) \right) - B_{cy}x + B_{cx}y \quad (3.27)$$

Soit la pression généralisée, somme d'une pression hydrostatique et d'une pression magnétique :

$$p_{Gi}^* = p_i^* + \rho_i g z + p_{Mi}^*(x, y) \quad (3.28)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement dans l'état de base se réduit alors à :

$$\vec{\nabla} p_{Gi}^* = \vec{0} \quad (3.29)$$

La pression généralisée est donc constante dans tout le domaine.

Dans cette partie ont été retrouvés les résultats de SNEYD 1985 sur les deux systèmes proches des batteries à métaux liquides : ((1 ≡ liquide)\(2 ≡ liquide)\(3 ≡ solide)) et ((1 ≡ liquide)\(2 ≡ liquide)\(3 ≡ gaz)) et notamment la forme du champ magnétique dans l'état de base (équation 3.24), la forme de la force de Lorentz (équation 3.25) ainsi que la forme de la pression magnétique (équation 3.27).

3.1.3 Etat perturbé

Equations de volume

Comme dans le chapitre précédent, une grandeur physique quelconque peut s'écrire de la manière suivante :

$$Q(x, y, z, t) = Q^*(x, y, z) + Q'(x, y, z, t) \quad (3.30)$$

Où l'exposant ' fait référence à l'état perturbé et Q' est la perturbation d'une quantité physique Q vis-à-vis de l'état de base Q^* . Q' est recherchée sous la forme suivante :

$$Q'(x, y, z, t) = f(z)e^{(jk_x x + jk_y y + \omega t)} \quad (3.31)$$

Les équations de Maxwell et la loi d'Ohm peuvent donc s'écrire de la manière suivante dans l'état perturbé :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \vec{J}' &= \vec{0} \\ \vec{\nabla}^2 \vec{E}' &= \vec{0} \\ \vec{\nabla}^2 \vec{B}' &= \vec{0} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Les quantités physiques \vec{J}' , \vec{E}' et \vec{B}' sont des fonctions harmoniques. Puisque \vec{J}' et \vec{E}' sont reliés par

la loi d'Ohm et que \vec{J}' et \vec{B}' sont reliés par l'équation de Maxwell-Ampère, \vec{J}' , \vec{E}' et \vec{B}' peuvent alors tous se formuler en fonction d'une seule fonction harmonique, le potentiel électrique pouvant s'écrire de la manière suivante :

$$\phi_i = (\alpha_i e^z + \beta_i e^{-z}) e^{j(k_x x + k_y y) + \omega t}, \quad (3.33)$$

et définie de sorte que :

$$\vec{J}'_i = \vec{\nabla} \phi_i \quad (3.34)$$

Les coefficients α_1 , β_1 , α_2 , β_2 , α_3 et β_3 doivent être déterminés à partir des conditions de saut. Puisque le potentiel électrique ne peut pas être infini loin des interfaces, les coefficients β_1 et α_3 doivent être nuls. Ainsi la forme du potentiel électrique dans chaque couche peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \alpha_1 e^z e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t} \\ \phi_2 &= (\alpha_2 e^z + \beta_2 e^{-z}) e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t} \\ \phi_3 &= \beta_3 e^{-z} e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t} \end{aligned} \quad (3.35)$$

La loi d'Ohm permet de déterminer la forme du champ électrique en fonction du potentiel électrique :

$$\vec{E}'_i = S_i^{-1} \vec{\nabla} \phi_i \quad (3.36)$$

Le champ magnétique perturbé doit satisfaire les équations de Maxwell-Flux et de Maxwell-Ampère (voir équations 3.6 et 3.7) qui peuvent s'écrire de la manière suivante en introduisant le potentiel électrique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}'_i = 0, \quad (3.37)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}'_i = M_0 \vec{\nabla} \phi. \quad (3.38)$$

Soit la forme du champ magnétique perturbé :

$$\vec{B}'_i = \begin{pmatrix} f_{i1}(z) \\ f_{i2}(z) \\ f_{i3}(z) \end{pmatrix} e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}, \quad (3.39)$$

où f_{i1} , f_{i2} et f_{i3} sont des fonctions propres à chaque milieu (i) dont la dépendance en z peut s'écrire sous la forme d'un terme en e^z et d'un terme en e^{-z} telles que $f_{i1} e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}$, $f_{i2} e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}$ et $f_{i3} e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}$ soient des fonctions harmoniques. L'équation 3.38 donne alors les relations suivantes :

$$\vec{B}'_i = \begin{pmatrix} jk_y f_{i3} - f_{i2,z} \\ f_{i1,z} - jk_x f_{i3} \\ jk_x f_{i2} - jk_y f_{i1} \end{pmatrix} e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t} = \begin{pmatrix} M_0 jk_x k^{-1} \phi_i \\ M_0 jk_y k^{-1} \phi_i \\ M_0 j \phi_{i,z} \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

La fonction $f_{i3} e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}$ est harmonique et la fonction f_{i3} peut donc s'écrire de la manière suivante :

$$f_{i3} = f_{i3}^+ e^z + f_{i3}^- e^{-z}, \quad (3.41)$$

avec f_{i3}^+ et f_{i3}^- , deux constantes. En isolant les fonctions f_{i1} et f_{i2} et en se servant de la forme de la fonction f_{i3} , la forme générale du champ magnétique suivante peut être déterminée :

$$\vec{B}'_i = \begin{pmatrix} jk_x k^{-1} (f_{i3}^+ e^z - f_{i3}^- e^{-z}) e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t} + M_0 j k_y k^{-1} \phi_i \\ jk_y k^{-1} (f_{i3}^+ e^z - f_{i3}^- e^{-z}) e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t} - M_0 j k_x k^{-1} \phi_i \\ (f_{i3}^+ e^z + f_{i3}^- e^{-z}) e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t} \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Pour déterminer les constantes f_{13}^+ , f_{13}^- pour le milieu (1), f_{23}^+ , f_{23}^- pour le milieu (2) et f_{33}^+ , f_{33}^- pour le milieu (3) il faut déterminer des conditions sur le champ magnétique. Premièrement, le champ magnétique perturbé ne peut pas être infini loin de l'interface ; les constantes f_{13}^- et f_{33}^+ doivent donc être nulles :

$$(f_{13}^-, f_{33}^+) = \vec{0}. \quad (3.43)$$

Les relations de passage du champ magnétique au travers des interfaces suffisent pour déterminer les quatre autres constantes. La continuité de la composante normale du champ magnétique est obtenue à partir de l'équation de Maxwell-Flux (équation 3.37). Elle permet d'obtenir les conditions suivantes :

$$\begin{cases} f_{11}^+ - f_{23}^+ - f_{23}^- = 0 \\ f_{23}^+ e^H + f_{23}^- e^{-H} - f_{33}^- e^{-H} = 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

La composante tangentielle du champ magnétique subit quant à elle une discontinuité au passage d'une interface. Pour déterminer cette discontinuité, il faut intégrer l'équation de Maxwell-Ampère (équation 3.38) sur une petite épaisseur autour de l'interface. Cela permet d'obtenir les relations suivantes :

$$\begin{cases} -(B_{2y} - B_{1y}) = M_0 j k_x k^{-1} (\phi_{2,z} - \phi_{1,z}) \\ (B_{2x} - B_{1x}) = M_0 j k_y k^{-1} (\phi_{2,z} - \phi_{1,z}) \end{cases} \quad (3.45)$$

Ces deux relations pour chaque interface permettent de déterminer les conditions suivantes :

$$\begin{cases} f_{13}^+ - f_{23}^+ + f_{23}^- = 0 \\ f_{23}^+ e^H - f_{23}^- e^{-H} + f_{33}^- e^{-H} = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

Le système d'équations formé des équations 3.44 et 3.46 implique que toutes ces constantes sont nulles :

$$(f_{13}^+, f_{23}^+, f_{23}^-, f_{33}^-) = \vec{0}. \quad (3.47)$$

Le champ magnétique perturbé peut ainsi s'écrire de la manière suivante en fonction du potentiel électrique :

$$\vec{B}'_i = \begin{pmatrix} M_0 j k_y k^{-1} \phi_i \\ -M_0 j k_x k^{-1} \phi_i \\ 0 \end{pmatrix} e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}. \quad (3.48)$$

Il peut également s'écrire de la manière suivante :

$$\vec{B}'_i = M_0 \left(\vec{\nabla} \phi_i \right)_{,z} \times \vec{e}_z, \quad (3.49)$$

pour reprendre la notation de SNEYD 1985. Ainsi, l'analyse des trois quantités vectorielles que sont la perturbation du courant électrique \vec{J}'_i , la perturbation du champ électrique \vec{E}'_i et la perturbation du champ magnétique \vec{B}'_i peut se résoudre à l'analyse d'une seule quantité scalaire : le potentiel électrique ϕ_i .

En utilisant la même logique que celle de SNEYD 1985, la force de Lorentz perturbée peut se décomposer en la somme d'une force purement horizontale non conservative, \vec{f}'_{Lh} et d'une force verticale conservative, \vec{f}'_{Lc} :

$$\vec{f}'_{Li} = \vec{f}'_{Lhi} + \vec{f}'_{Lci}, \quad (3.50)$$

L'expression de sa composante verticale conservative peut s'écrire comme suit :

$$\vec{f}'_{Lci} = -M_0^{-1} \vec{\nabla} \left(\vec{B}'_i \cdot \vec{B}'_i \right) \quad (3.51)$$

Soit la pression magnétique perturbée p'_{Mi} dans la couche (i) définie telle que :

$$-\vec{\nabla} p'_{Mi} = \vec{f}'_{Lci} \quad (3.52)$$

$$\Rightarrow p'_{Mi} = M_0^{-1} \left(\vec{B}'_i \cdot \vec{B}'_i \right) \quad (3.53)$$

L'expression de la composante horizontale de la force de Lorentz perturbée peut s'écrire comme suit :

$$\vec{f}'_{Lhi} = M_0^{-1} \left(\left(\vec{B}'_i \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B}'_i + \left(\vec{B}'_i \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B}'_i \right) \quad (3.54)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f}'_{Lhi} = 2M_0 b D \phi_i, \quad (3.55)$$

Où l'opérateur $D = \frac{\partial \square}{\partial z}$ a été introduit. Ici, le paramètre sans dimension :

$$b = M_0 \left(R \frac{k_x^2 - k_y^2}{k^2} - 2Q \frac{k_x k_y}{k^2} - \frac{1}{2} \right), \quad (3.56)$$

représente le champ magnétique induit par le courant électrique de l'état de base et le champ magnétique extérieur. Soient les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans l'état perturbé :

$$\Omega R'_i + \vec{\nabla} \cdot (R_i \vec{u}_i) = 0 \quad (3.57)$$

$$R_i \omega \vec{u}_i = -\vec{\nabla} p'_G + \vec{f}'_{Lhi} - R'_i g \vec{e}_z \quad (3.58)$$

Ces équations évaluées dans chaque couche (i) donnent l'équation différentielle suivante concernant la vitesse verticale :

$$R_i \Omega (D^2 - 1) u_{iz} = -D \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}'_{Lhi} \right) \quad (3.59)$$

Cette équation permet de déterminer la forme de la vitesse verticale :

$$u_{iz} = \left(A_i e^z + B_i e^{-z} - z \frac{bH}{R_i \Omega} D\phi_i \right) e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}. \quad (3.60)$$

Où $u_{izh} = (A_i e^z + B_i e^{-z}) e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}$ est la solution homogène de l'équation :

$$R_i \Omega (D^2 - 1) u_{iz} = 0, \quad (3.61)$$

$u_{izp} = -z \frac{bH}{R_i \Omega} D\phi_i e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}$ est la solution particulière due au second membre de l'équation 3.59 : $-D \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}_{Lhi} \right)$. Les coefficients A_1, B_1, A_2, B_2, A_3 et B_3 doivent être déterminés à partir des conditions de saut. Puisque la vitesse des fluides ne peut pas être infinie loin des interfaces, les coefficients B_1 et A_3 doivent être nuls. Ainsi, la forme de la vitesse dans chaque couche peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} u_{1z} &= \left(A_1 e^z - z \frac{bH}{R_1 \Omega} D\phi_1 \right) e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}, \\ u_{2z} &= \left(A_2 e^z + B_2 e^{-z} - z \frac{bH}{\Omega} D\phi_2 \right) e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}, \\ u_{3z} &= \left(B_3 e^{-z} - z \frac{bH}{R_3 \Omega} D\phi_3 \right) e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

En tenant compte de la forme du potentiel électrique (voir équation 3.35), la forme de la vitesse verticale dans chaque couche peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} u_{1z} &= \left(A_1 e^z - z \frac{bH}{R_1 \Omega} \alpha_1 e^z \right) e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}, \\ u_{2z} &= \left(A_2 e^z + B_2 e^{-z} - z \frac{bH}{\Omega} \alpha_2 e^z + z \frac{bH}{\Omega} \beta_2 e^{-z} \right) e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}, \\ u_{3z} &= \left(B_3 e^{-z} + z \frac{bH}{R_3 \Omega} \beta_3 e^{-z} \right) e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Ainsi huit conditions de saut sont nécessaires pour poser un problème aux valeurs propres à partir des huit inconnues du système : $\alpha_1, A_1, \beta_2, B_2, \alpha_2, A_2, \beta_3$ et B_3 .

Conditions de saut

Les relations de passage au travers des interfaces concernant le courant électrique (voir équation 3.12), le champ électrique (voir équation 3.13) et le champ magnétique (voir équation 3.14) donnent les conditions de saut suivantes sur le potentiel électrique :

$$\Delta_s (D\phi_i) = 0 \quad (3.64)$$

$$\Delta_s \left(\frac{1}{S_i} \phi_i + \frac{1}{S_i \Omega} u_{iz} \right) = 0 \quad (3.65)$$

Où la fonction Δ_s représentant le saut d'une quantité physique au niveau des interfaces a été introduite.

Ainsi, l'expression 3.64 implique les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} D\phi_2 - D\phi_1 = 0 & \text{en } z = 0 \\ D\phi_3 - D\phi_2 = 0 & \text{en } z = H \end{cases} \quad (3.66)$$

En tenant compte des formes de la vitesse et du potentiel électrique, les deux conditions de saut scalaires concernant le potentiel électrique évaluées au niveau de l'interface du bas (i.e. en $z = 0$) peuvent s'écrire comme suit :

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \beta_2 = 0 \quad (3.67)$$

$$\frac{A_1}{S_1\Omega} + \frac{\alpha_1}{S_1} - \frac{A_2}{S_2\Omega} - \frac{B_2}{S_2\Omega} - \frac{\alpha_2}{S_2} - \frac{\beta_2}{S_2} = 0 \quad (3.68)$$

De même, les deux conditions de saut scalaires concernant le potentiel électrique évaluées au niveau de l'interface du haut (i.e. en $z = H$) peuvent s'écrire comme suit :

$$\alpha_2 e^H - \beta_2 e^{-H} + \beta_3 e^{-H} = 0 \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{S_2\Omega} e^H + \frac{B_2}{S_2\Omega} e^{-H} + \left(1 - \frac{Hb}{\Omega^2}\right) \frac{\alpha_2}{S_2} e^H + \left(1 + \frac{Hb}{\Omega^2}\right) \frac{\beta_2}{S_2} e^{-H} \\ - \frac{B_3}{S_3\Omega} e^{-H} - \left(1 + \frac{Hb}{\Omega^2}\right) \frac{\beta_3}{S_3} e^{-H} = 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

Si la conductivité électrique adimensionnée du milieu (2) est bien inférieure à celle des milieux (1) et (3), i.e. $S_2 \ll (S_1, S_3)$, la deuxième condition de saut ne fait plus intervenir de conductivité électrique adimensionnée S_i . Cette hypothèse est justifiable pour des batteries à métaux liquides et permet de se passer de l'étude de trois nombres sans dimension.

Les équations 3.68 et 3.70 se simplifient de la manière suivante :

$$\frac{A_2}{\Omega} + \frac{B_2}{\Omega} + \alpha_2 + \beta_2 = 0 \quad (3.71)$$

$$\frac{A_2}{\Omega} e^H + \frac{B_2}{\Omega} e^{-H} + \left(1 - \frac{Hb}{\Omega^2}\right) \alpha_2 e^H + \left(1 + \frac{Hb}{\Omega^2}\right) \beta_2 e^{-H} = 0 \quad (3.72)$$

Pour déterminer les conditions de saut sur la vitesse horizontale, comme effectué dans le chapitre précédent, il faut utiliser les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement en considérant la variation des grandeurs physiques effectuant un saut au niveau de l'interface : seulement la masse volumique dans cette partie et également la viscosité dans la partie suivante. Ces équations linéarisées peuvent s'écrire comme suit :

$$\Omega R' + \vec{\nabla} \cdot (R\vec{u}) = 0 \quad (3.73)$$

$$R\Omega\vec{u} = -\vec{\nabla} p'_G + \vec{f}'_{Lh} - R' g \vec{e}_z \quad (3.74)$$

Soient les conditions de saut sur la vitesse verticale :

$$\Delta_s(u_z) = 0 \quad (3.75)$$

$$\Delta_s \left(\frac{R_i}{\Omega} u_z + R_i \Omega D u_z \right) = 0 \quad (3.76)$$

La première condition de saut correspond à la continuité de la vitesse verticale obtenue à partir de l'équation de conservation de la masse. La seconde condition de saut est obtenue en effectuant l'opération suivante :

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times (\text{équation 3.74}) \right) \cdot \vec{e}_z \quad (3.77)$$

Cette technique similaire à celle utilisée par CHANDRASEKHAR 1961 permet d'isoler la composante normale de la vitesse puisque :

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times (\vec{u}) \right) \cdot \vec{e}_z = -\vec{\nabla}^2 u_z. \quad (3.78)$$

Les deux conditions de saut scalaires concernant la vitesse horizontale évaluées au niveau de l'interface du bas (i.e. en $z = 0$) peuvent s'écrire comme suit :

$$A_1 - A_2 - B_2 = 0 \quad (3.79)$$

$$\left(\Omega + \frac{1}{\Omega} \right) R_1 A_1 - \left(\Omega + \frac{1}{\Omega} \right) A_2 - \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right) B_2 = 0 \quad (3.80)$$

Les deux conditions de saut scalaires concernant la vitesse verticale évaluées au niveau de l'interface du haut (i.e. en $z = H$) peuvent s'écrire comme suit :

$$A_2 e^H + B_2 e^{-H} - B_3 e^{-H} - \frac{Hb}{\Omega} \alpha_2 e^H + \frac{Hb}{\Omega} \beta_2 e^{-H} - \frac{Hb}{R_3 \Omega} \beta_3 e^{-H} = 0 \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} & \left(\Omega + \frac{1}{\Omega} \right) A_2 e^H + \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right) B_2 e^{-H} - \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right) R_3 B_3 e^{-H} - \\ & \left(1 + \frac{1}{\Omega^2} \right) Hb \alpha_2 e^H - \left(1 + \frac{1}{\Omega^2} \right) Hb \beta_2 e^{-H} + \left(1 + \frac{1}{\Omega^2} \right) Hb \beta_3 e^{-H} = 0 \end{aligned} \quad (3.82)$$

Le problème aux valeurs propres peut finalement s'écrire de la manière suivante :

$$M \cdot (\alpha_1 \ A_1 \ \beta_2 \ B_2 \ \alpha_2 \ A_2 \ \beta_3 \ B_3)^T = 0, \quad (3.83)$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} M_{12}^+ & M_{12}^- \\ M_{23}^+ & M_{23}^- \end{pmatrix}, \quad (3.84)$$

$$M_{12}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\Omega} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \left(\Omega + \frac{1}{\Omega} \right) R_1 & 0 & \Omega - \frac{1}{\Omega} \end{pmatrix}, \quad (3.85)$$

$$M_{12}^- = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\Omega} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\Omega + \frac{1}{\Omega} \right) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.86)$$

$$M_{23}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -e^{-H} & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 + \frac{Hb}{\Omega^2}\right) e^{-H} & \frac{1}{\Omega} e^{-H} \\ 0 & 0 & \frac{Hb}{\Omega} e^{-H} & e^{-H} \\ 0 & 0 & \left(-1 + \frac{1}{\Omega^2}\right) Hb e^{-H} & -\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right) e^{-H} \end{pmatrix}, \quad (3.87)$$

$$M_{23}^- = \begin{pmatrix} e^H & 0 & e^{-H} & 0 \\ \left(1 - \frac{Hb}{\Omega^2}\right) e^H & \frac{1}{\Omega} e^H & 0 & 0 \\ -\frac{Hb}{\Omega} e^H & e^H & -\frac{Hb}{R_3 \Omega} e^{-H} & -e^{-H} \\ -\left(1 + \frac{1}{\Omega^2}\right) Hb e^H & \left(\Omega + \frac{1}{\Omega}\right) e^H & \left(1 - \frac{1}{\Omega^2}\right) Hb e^{-H} & \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right) R_3 e^{-H} \end{pmatrix}. \quad (3.88)$$

Les solutions non-triviales de l'équation 3.83 sont les solutions de l'équation suivante :

$$|M| = 0 \quad (3.89)$$

3.1.4 Relation de dispersion

Le calcul du déterminant de la matrice M dans l'équation 3.89 permet d'obtenir la relation de dispersion suivante :

$$\begin{aligned} & \Omega^4 \left((R_1 + R_3) \cosh(H) + (1 + R_1 R_3) \sinh(H) \right) + \\ & \Omega^2 \left((R_1 - R_3) (\cosh(H) + \sinh(H)) - \frac{Hb(R_1 + R_3)}{\sinh(H)} \right) + \\ & (R_1 - 1)(1 - R_3) \sinh(H) - \frac{Hb(R_1 - R_3)}{\sinh(H)} - \frac{H^2 b^2}{\sinh(H)} = 0 \quad (3.90) \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation du second degré par rapport à Ω^2 . Lorsque la masse volumique du milieu (3) devient très petite, i.e. le nombre adimensionné R_3 tend vers zéro, cette relation de dispersion devient identique à celle déterminée par SNEYD 1985 pour étudier la stabilité d'un système modélisant un four à arc électrique pour lequel la couche (3) est un gaz tandis que les deux autres couches sont liquides. Lorsqu'aucun champ magnétique n'est considéré, i.e. le paramètre b tend vers zéro, cette relation de dispersion (équation 3.90) devient identique à la relation de dispersion déterminée par MIKAELIAN 1982 et discutée dans le chapitre précédent. Lorsque la hauteur de la couche du milieu devient très grande, i.e. le paramètre H tend vers l'infini le champ magnétique n'a plus d'effet sur la stabilité du système et les valeurs propres sont celles déterminées par MIKAELIAN 1982. Les deux interfaces sont découplées et les deux premières valeurs propres correspondent au système à deux couches fluides infinies (1) et (2) :

$$\Omega = \pm \left(\frac{1 - R_1}{1 + R_1} \right)^{1/2}, \quad (3.91)$$

les deux autres valeurs propres correspondent au système à deux couches fluides infinies (2) et (3) :

$$\Omega = \pm \left(\frac{R_3 - 1}{R_3 + 1} \right)^{1/2} \quad (3.92)$$

Lorsque la hauteur de la couche du milieu devient très petite, i.e. le paramètre H tend vers zéro, les valeurs propres sont les suivantes :

$$\Omega = \pm \left(\frac{R_3 - R_1 - Hb}{R_3 + R_1} \right)^{1/2} \quad (3.93)$$

Deux cas peuvent être observés. Premièrement, si le coefficient

$$b = M_0 \left(R \frac{k_x^2 - k_y^2}{k^2} - 2Q \frac{k_x k_y}{k^2} - \frac{1}{2} \right)$$

est supérieur à 0, le champ magnétique a un effet stabilisateur et les valeurs propres sont similaires à celles déterminées dans le chapitre précédent lorsque la tension de surface était prise en compte mais pas la viscosité. Ici le coefficient Hb qui pourrait se dénommer "tension de surface magnétique" car il joue le rôle d'une tension de surface équivalente entre les fluides (1) et (3) :

$$Hb \sim \Gamma_{13} \quad (3.94)$$

Si b est inférieur à zéro, ce qui est le cas si le champ magnétique extérieur est petit voir négligé par rapport au champ magnétique induit, le système est instable lorsque :

$$-Hb > R_1 - R_3 \quad (3.95)$$

Pour des valeurs intermédiaires de hauteur de la couche du milieu, la relation 3.90 doit être utilisée pour déterminer la stabilité du système. Cette équation peut s'écrire de la manière suivante :

$$a_M \Omega^4 + b_M \Omega^2 + c_M = 0, \quad (3.96)$$

avec

$$a_M = (R_1 + R_3) \cosh(H) + (1 + R_1 R_3) \sinh(H), \quad (3.97)$$

$$b_M = (R_1 - R_3)(\cosh(H) + \sinh(H)) - \frac{Hb(R_1 + R_3)}{\sinh(H)} \quad (3.98)$$

$$c_M = (R_1 - 1)(1 - R_3) \sinh(H) - \frac{Hb(R_1 - R_3)}{\sinh(H)} - \frac{H^2 b^2}{\sinh(H)}. \quad (3.99)$$

Les racines de ce polynôme sont les suivantes :

$$\Omega^2 = \frac{-b_M \pm (b_M^2 - 4a_M c_M)^{1/2}}{2a_M} \quad (3.100)$$

Si $b_M^2 - 4a_M c_M > 0$, Ω^2 est un nombre réel. Le système est stable si $\Omega^2 \leq 0$; il est instable si $\Omega^2 > 0$. Puisque a_M est positif, le système est instable si c_M est négatif pour que $(b_M^2 - 4a_M c_M)^{1/2} > b_M$. La condition générale de stabilité du système est alors la suivante :

$$c_M \geq 0 \quad (3.101)$$

Cette condition peut également s'écrire comme une condition sur le champ magnétique :

$$\frac{R_3 - R_1 - \left((R_3 - R_1)^2 + 4 \sinh(H)^2 (R_3 + R_1 - 1 - R_1 R_3) \right)^{1/2}}{2H} \leq b \leq \frac{R_3 - R_1 + \left((R_3 - R_1)^2 + 4 \sinh(H)^2 (R_3 + R_1 - 1 - R_1 R_3) \right)^{1/2}}{2H}. \quad (3.102)$$

3.1.5 Carte de stabilité

Pour un couple de paramètres (R_1, R_3) donné, les frontières entre les cas stable et instable sont tracées dans le plan (H, b) . Les valeurs utilisées par WEBER, BECKSTEIN, HERREMAN et al. 2017 dans le cadre d'un travail permettant d'étudier l'instabilité de ballottement dans les batteries à métaux liquides permettent de tracer cette carte de stabilité (voir figure 3.2).

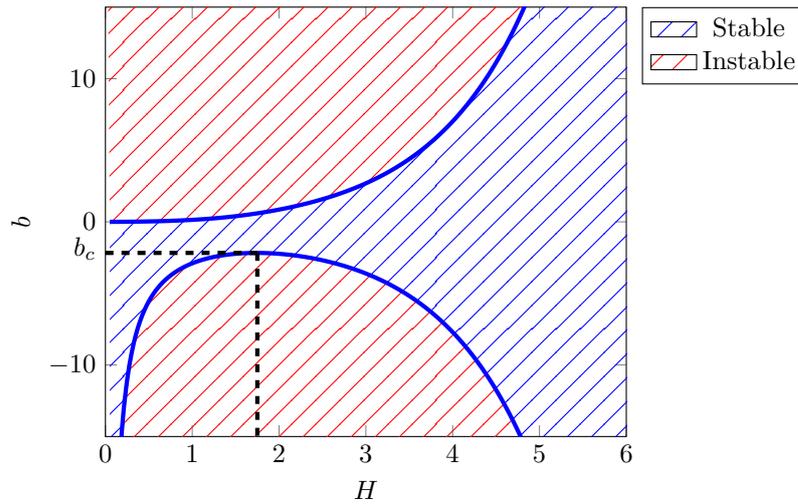


FIGURE 3.2 – Plan de stabilité du modèle inviscide de batteries à métaux liquides pour $R_1 = 3,65$ et $R_3 = 0,89$. Ici, le champ magnétique critique $b_c = -2,17$ apparaît pour une épaisseur de la couche du milieu $H = 1,75$.

La partie instable supérieure de cette carte, obtenue à partir de la condition 3.102, correspond à la condition :

$$b \geq \frac{R_3 - R_1 + \left((R_3 - R_1)^2 + 4 \sinh(H)^2 (R_3 + R_1 - 1 - R_1 R_3) \right)^{1/2}}{2H}. \quad (3.103)$$

Cette valeur limite est positive et ne peut être atteinte que sous certaines conditions concernant le champ magnétique lointain puisque si celui-ci est négligé ($Q = R = 0$) :

$$b = -\frac{M_0}{2}, \quad (3.104)$$

est négatif; ainsi, seule la partie négative de cette carte est intéressante; une valeur critique de b pour laquelle le système peut devenir instable peut alors être déterminée (voir figure 3.3) :

$$b_c = \max \left(\frac{R_3 - R_1 - ((R_3 - R_1)^2 + 4 \sinh(H)^2 (R_3 + R_1 - 1 - R_1 R_3))^{1/2}}{2H} \right). \quad (3.105)$$

Plusieurs isovaleurs de b_c ont été tracées pour différentes valeurs de $R_1 \geq 1$ et de $R_3 \leq 1$ pour garantir la stratification gravitationnelle du système (voir figure 3.3). Évidemment plus la masse volumique de la couche inférieure est élevée et plus la masse volumique de la couche supérieure est faible plus le champ magnétique et donc le courant électrique qui l'induit doit être important en norme pour déstabiliser le système.

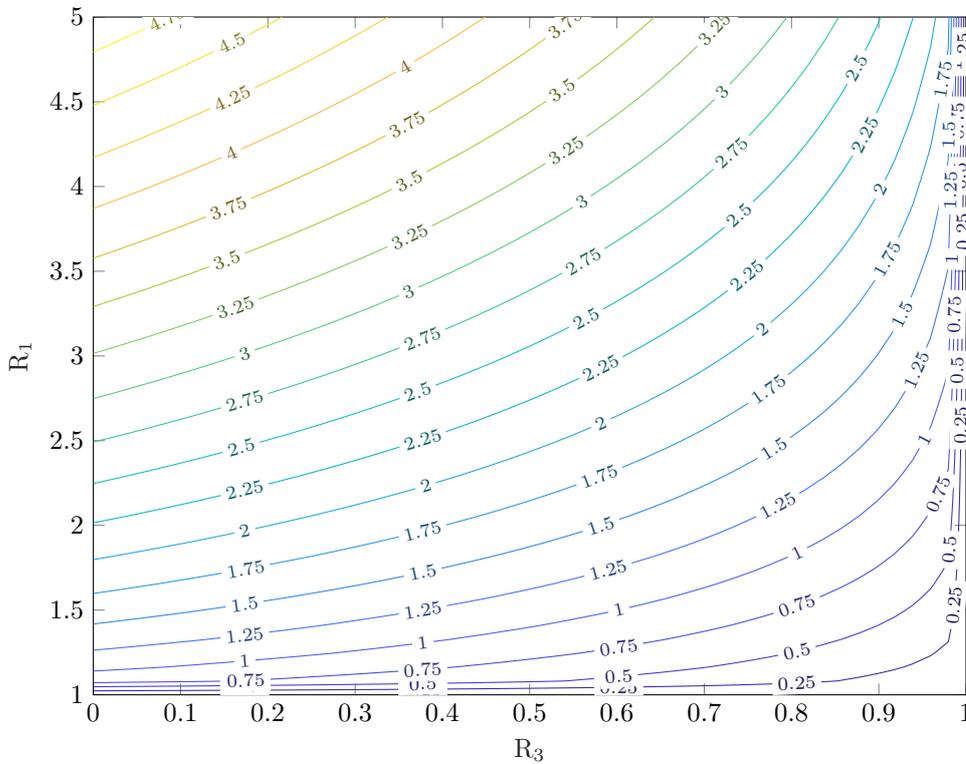


FIGURE 3.3 – Valeur absolue du champ magnétique critique en fonction de R_1 et R_3 .

3.2 Théorie visqueuse avec tension de surface

3.2.1 Formulation du problème

Dans cette partie, la viscosité des fluides est considérée. Les fluides sont caractérisés par leurs viscosités dynamiques : μ_1 , μ_2 et μ_3 et leurs viscosités cinématiques : ν_1 , ν_2 et ν_3 (voir figure 3.4). Les unités fondamentales de référence ainsi que les paramètres adimensionnés nécessaires pour cette étude sont rappelés dans les tableaux 3.1 et 3.2 respectivement.

La viscosité des fluides et la tension de surface n'influençant pas l'état de base, celui-ci est identique à

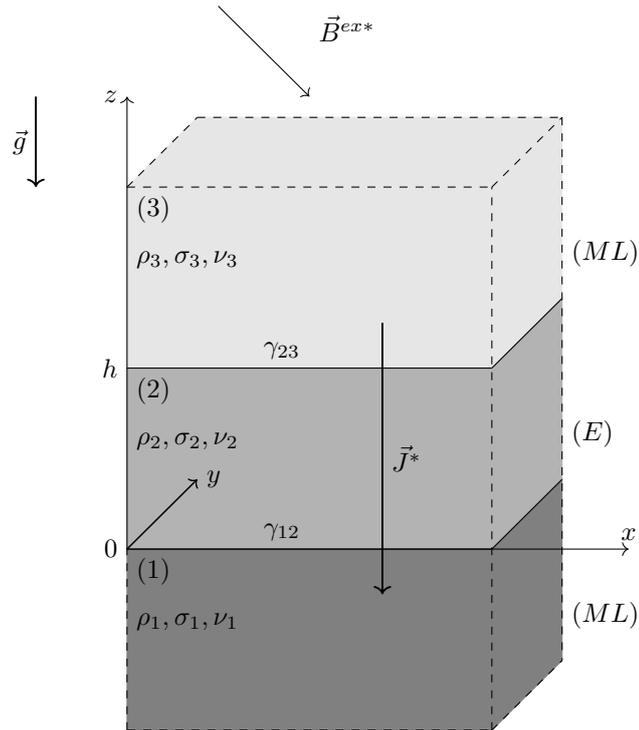


FIGURE 3.4 – Représentation schématique du système à trois fluides étudié dans ce chapitre en tenant compte de la viscosité des fluides ainsi que de la tension de surface au niveau des interfaces.

Unité du système international	Unité de référence en fonction de ρ_2, g, k et J^*
Masse : m	$m_{ref} = \frac{\rho_2}{k^3}$
Longueur : l	$l_{ref} = \frac{1}{k}$
Temps : t	$t_{ref} = \frac{1}{g^{1/2}k^{1/2}}$
Intensité du courant électrique : I	$I_{ref} = \frac{J^*}{k^2}$

TABLE 3.1 – Présentation des différentes unités fondamentales avec leurs valeurs de référence permettant d'adimensionner tous les paramètres et quantités physiques du système.

celui de la partie précédente ; le résultat principal étant la forme des champs magnétiques admissibles exprimés en tant qu'une somme d'un champ magnétique induit par le courant électrique vertical et homogène imposé à l'état de base et d'un champ magnétique lointain. La forme de ce champ magnétique dans l'état de base et donnée par l'équation 3.24 est la suivante :

$$\vec{B}_i^* = M_0 \begin{pmatrix} Qx + (R - 1/2)y \\ (R + 1/2)x - Qy \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{cx} \\ B_{cy} \\ B_{cz} \end{pmatrix} \quad (3.106)$$

Paramètres physiques [Unité du système international]	Paramètre adimensionné en fonction de ρ_2, g, k et J^*
Masses volumiques : ρ_i [ml^{-3}]	$R_i = \frac{\rho_i}{\rho_2}$
Viscosités cinématique : ν_i [m^2t^{-1}]	$N_i = \frac{\nu_i k^{3/2}}{g^{1/2}}$
Tensions de surface : γ_{ii+1} [mt^{-2}]	$\Gamma_{ii+1} = \frac{\gamma_{ii+1} k^2}{\rho_2 g}$
Épaisseur : h [m]	$H = kh$
Coefficient temporel : ω [t^{-1}]	$\Omega = \frac{\omega}{g^{1/2} k^{1/2}}$
Permittivité du vide : μ_0 [$mlt^{-2}I^{-2}$]	$M_0 = \frac{\mu_0 J^{*2}}{\rho_2 g k}$
Conductivités électriques : σ_i [$m^{-1}l^{-3}t^3I^2$]	$S_i = \frac{\sigma_i J^{*2} k^{1/2}}{\rho_2 g^{3/2}}$

TABLE 3.2 – Choix d'un nombre minimum de paramètres adimensionnés caractérisant le système.

Concernant l'état perturbé, le courant électrique et les champs électrique et magnétique sont identiques ; ils gardent une forme harmonique se formulant en somme des fonctions e^z et e^{-z} et notamment la forme du potentiel électrique dans chaque couche et donnée par l'équation 3.35 est la suivante :

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \alpha_1 e^z e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t} \\
\phi_2 &= (\alpha_2 e^z + \beta_2 e^{-z}) e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t} \\
\phi_3 &= \beta_3 e^{-z} e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}
\end{aligned} \tag{3.107}$$

3.2.2 Relation de dispersion

Soient les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans l'état perturbé :

$$\Omega R'_i + \vec{\nabla} \cdot (R_i \vec{u}_i) = 0 \tag{3.108}$$

$$R_i \omega \vec{u}_i = -\vec{\nabla} p'_G + \vec{\nabla} \bar{\tau}_i + \vec{f}_{Lhi} - R'_i g \vec{e}_z \tag{3.109}$$

Ces équations évaluées dans chaque couche (i) conduisent à l'équation différentielle suivante concernant la vitesse verticale :

$$(R_i\Omega - R_iN_i(D^2 - 1))(D^2 - 1)u_{iz} = -D(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}_{Lhi}) \quad (3.110)$$

Cette dernière permet de déterminer la forme de la vitesse verticale :

$$u_{iz} = A_i e^z + B_i e^{-z} + C_i e^{q_i z} + D_i e^{-q_i z} - z \frac{bH}{R_i\Omega} D\phi_i \quad (3.111)$$

La solution homogène de l'équation 3.110, $u_{izh} = A_i e^z + B_i e^{-z} + C_i e^{q_i z} + D_i e^{-q_i z}$ est identique à celle déterminée par CHANDRASEKHAR 1961 et retrouvée dans le chapitre précédent. La solution particulière de l'équation 3.110, $u_{izp} = -z \frac{bH}{R_i\Omega} D\phi_i$ est identique à celle déterminée dans la partie précédente de ce chapitre et ne dépend donc pas de la viscosité des fluides. Les coefficients $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, A_3, B_3, C_3$ et D_3 doivent, comme dans la partie précédente, être déterminés à partir des conditions de saut. Puisque la vitesse des fluides ne peut pas être infinie loin des interfaces, les coefficients B_1, D_1, A_3 et C_3 doivent être nuls. Ainsi, la forme de la vitesse dans chaque couche peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} u_{1z} &= \left(A_1 e^z + C_1 e^{q_1 z} - z \frac{bH}{R_1\Omega} D\phi_1 \right) e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}, \\ u_{2z} &= \left(A_2 e^z + B_2 e^{-z} + C_2 e^{q_2 z} + D_2 e^{-q_2 z} - z \frac{bH}{\Omega} D\phi_2 \right) e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}, \\ u_{3z} &= \left(B_3 e^{-z} + D_3 e^{-q_3 z} - z \frac{bH}{R_3\Omega} D\phi_3 \right) e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}. \end{aligned} \quad (3.112)$$

En tenant compte de la forme du potentiel électrique (voir équation 3.107), la forme de la vitesse verticale dans chaque couche peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} u_{1z} &= \left(A_1 e^z + C_1 e^{q_1 z} - z \frac{bH}{R_1\Omega} \alpha_1 e^z \right) e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}, \\ u_{2z} &= \left(A_2 e^z + B_2 e^{-z} + C_2 e^{q_2 z} + D_2 e^{-q_2 z} - z \frac{bH}{\Omega} \alpha_2 e^z + z \frac{bH}{\Omega} \beta_2 e^{-z} \right) e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}, \\ u_{3z} &= \left(B_3 e^{-z} + D_3 e^{-q_3 z} + z \frac{bH}{R_3\Omega} \beta_3 e^{-z} \right) e^{jk^{-1}(k_x x + k_y y) + \omega t}. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Ainsi douze conditions de saut sont nécessaires pour poser un problème aux valeurs propres à partir des douze inconnues du système : $\alpha_1, A_1, C_1, \beta_2, B_2, D_2, \alpha_2, A_2, C_2, \beta_3, B_3$ et D_3 .

Soient les conditions de saut sur le potentiel électrique obtenues à partir de la continuité du courant électrique normal, du champ électrique tangentiel et du champ magnétique normal avec l'hypothèse que la conductivité électrique de la couche du milieu est très inférieure à celle des couches extrêmes :

$$\Delta_s(D\phi) = 0 \quad (3.114)$$

$$\Delta_s \left(\frac{1}{S_i} \phi_i + \frac{1}{S_i\Omega} u_{iz} \right) = 0 \quad (3.115)$$

Ces deux conditions de saut scalaires concernant le potentiel électrique évaluées au niveau de l'interface du bas (i.e. en $z = 0$) peuvent respectivement s'écrire comme suit :

$$\alpha_1 + \beta_2 - \alpha_2 = 0 \quad (3.116)$$

$$\beta_2 + \frac{1}{\Omega} B_2 + \frac{1}{\Omega} D_2 + \alpha_2 + \frac{1}{\Omega} A_2 + \frac{1}{\Omega} C_2 = 0 \quad (3.117)$$

Lorsqu'elles sont évaluées au niveau de l'interface du haut (i.e. en $z = H$), elles peuvent respectivement s'écrire comme suit :

$$-e^{-H}\beta_2 + e^H\alpha_2 + e^H\beta_3 = 0 \quad (3.118)$$

$$\left(1 + \frac{Hb}{\Omega^2}\right) e^{-H}\beta_2 + \frac{1}{\Omega}e^{-H}B_2 + \frac{1}{\Omega}e^{-q_2H}D_2 + \left(1 - \frac{Hb}{\Omega^2}\right) e^H\alpha_2 + \frac{1}{\Omega}e^HA_2 + \frac{1}{\Omega}e^{q_2H}C_2 = 0 \quad (3.119)$$

Soient les conditions de saut sur la vitesse verticale :

$$\Delta_s(u_{iz}) = 0 \quad (3.120)$$

$$\Delta_s(Du_{iz}) = 0 \quad (3.121)$$

$$\Delta_s(R_i N_i (1 + D^2) u_{iz}) = 0 \quad (3.122)$$

$$\Delta_s\left(\left(\frac{R_i}{\Omega}\right) u_{iz} + R_i (\Omega + 3N_i) Du_{iz} - R_i N_i D^3 u_{iz}\right) - \frac{\Gamma_{ii+1}}{\Omega} u_{ii+1z} = 0 \quad (3.123)$$

Les trois premières conditions de saut correspondent à la continuité de la vitesse verticale (cette condition est également valable lorsque la viscosité des fluides n'est pas considérée), de la vitesse horizontale et de la composante tangentielle du tenseur des contraintes visqueuses (cf. chapitre précédent). La quatrième condition de saut est obtenue en effectuant la même opération que dans la partie précédente :

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times (\text{équation 3.109})\right) \cdot \vec{e}_z \quad (3.124)$$

Ces quatre conditions de saut scalaires concernant la vitesse verticale évaluées au niveau de l'interface du bas (i.e. en $z = 0$) peuvent respectivement s'écrire comme suit :

$$-\frac{bH}{R_1\Omega}\alpha_1 + A_1 + C_1 - \frac{bH}{\Omega}\beta_2 - B_2 - D_2 + \frac{bH}{\Omega}\alpha_2 - A_2 - C_2 = 0 \quad (3.125)$$

$$-\frac{bH}{R_1\Omega}\alpha_1 + A_1 + q_1C_1 - \frac{bH}{\Omega}\beta_2 + B_2 + q_2D_2 + \frac{bH}{\Omega}\alpha_2 - A_2 - C_2 = 0 \quad (3.126)$$

$$-\frac{3N_1}{\Omega}b\alpha_1 + 2R_1N_1A_1 + R_1N_1(1 + q_1^2)C_1 + \frac{N_2}{\Omega}b\beta_2 - 2N_2B_2 - N_2(1 + q_2^2)D_2 + \frac{3N_2}{\Omega}b\alpha_2 - 2N_2A_2 - N_2(1 + q_2^2)D_2 = 0 \quad (3.127)$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 \left(-1 + \frac{\Gamma_{12} - R_1}{R_1 \Omega^2} \right) bH + A_1 \left(R_1 \Omega - \frac{\Gamma_{12} - R_1}{\Omega} + 2R_1 N_1 \right) + \\
& \quad C_1 \left(-\frac{\Gamma_{12} - R_1}{\Omega} + 2R_1 N_1 q_1 \right) - \beta_2 \left(1 - \frac{\Gamma_{12} - 1}{\Omega^2} \right) bH - \\
& \quad B_2 \left(-\Omega - \frac{\Gamma_{12} - 1}{\Omega} - 2N_2 \right) - D_2 \left(-\frac{\Gamma_{12} - 1}{\Omega} - 2N_2 q_2 \right) - \\
& \quad \alpha_2 \left(-1 + \frac{\Gamma_{12} - 1}{\Omega^2} \right) bH - B_2 \left(\Omega - \frac{\Gamma_{12} - 1}{\Omega} - 2N_2 \right) - \\
& \quad \quad \quad D_2 \left(-\frac{\Gamma_{12} - 1}{\Omega} + 2N_2 q_2 \right) = 0 \quad (3.128)
\end{aligned}$$

Lorsqu'elles sont évaluées au niveau de l'interface du haut (i.e. en $z = H$), elles peuvent respectivement s'écrire comme suit :

$$\frac{bH}{\Omega} e^{-H} \beta_2 + e^{-H} B_2 + e^{-q_2 H} D_2 - \frac{bH}{\Omega} e^H \alpha_2 + e^H A_2 + e^{q_2 H} C_2 = 0 \quad (3.129)$$

$$\frac{bH}{\Omega} (1 - H) e^{-H} \beta_2 - e^{-H} B_2 - q_2 e^{-q_2 H} D_2 - \frac{bH}{\Omega} (1 + H) e^H \alpha_2 + e^H A_2 + q_2 e^{q_2 H} C_2 = 0 \quad (3.130)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{N_2 b}{\Omega} (1 - H) e^{-H} \beta_2 + 2N_2 e^{-H} B_2 + (1 + q_2^2) N_2 e^{-q_2 H} D_2 - \\
& \quad \frac{N_2 b}{\Omega} (3 + H) e^H \alpha_2 + 2N_2 e^H A_2 + (1 + q_2^2) N_2 e^{q_2 H} C_2 + \\
& \quad \frac{N_3 b}{\Omega} (1 - H) e^{-H} \beta_3 - 2R_3 N_3 e^{-H} B_3 - (1 + q_3^2) R_3 N_3 e^{-q_3 H} D_3 = 0 \quad (3.131)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 - H \left(1 + 2\frac{N_2}{\Omega} \right) - \frac{\Gamma_{23} - 1}{\Omega^2} \right) b e^{-H} \beta_2 + \left(-\Omega - \frac{\Gamma_{23} - 1}{\Omega} - 2N_2 \right) e^{-H} B_2 + \\
& \quad \left(-\frac{\Gamma_{23} - 1}{\Omega} - 2q_2 N_2 \right) e^{-q_2 H} D_2 + \left(-1 - H \left(1 + 2\frac{N_2}{\Omega} \right) + \frac{\Gamma_{23} - 1}{\Omega^2} \right) b e^H \alpha_2 + \\
& \quad \left(\Omega - \frac{\Gamma_{23} - 1}{\Omega} + 2N_2 \right) e^H A_2 + \left(-\frac{\Gamma_{23} - 1}{\Omega} + 2q_2 N_2 \right) e^{q_2 H} C_2 + \\
& \quad \left(-1 + H \left(1 + 2\frac{N_3}{\Omega} \right) - \frac{\Gamma_{23} - R_3}{R_3 \Omega^2} \right) b e^{-H} \beta_3 + \\
& \quad \left(R_3 \Omega + \frac{\Gamma_{23} - R_3}{\Omega} + 2R_3 N_3 \right) e^{-H} B_3 + \left(\frac{\Gamma_{23} - R_3}{\Omega} + 2q_3 R_3 N_3 \right) e^{-q_3 H} D_3 = 0 \quad (3.132)
\end{aligned}$$

Finalement, le problème aux valeurs propres peut s'écrire de la manière suivante :

$$M \cdot (\alpha_1 \ A_1 \ C_1 \ \beta_2 \ B_2 \ D_2 \ \alpha_2 \ A_2 \ C_2 \ \beta_3 \ B_3 \ D_3)^T = 0 \quad (3.133)$$

En négligeant la viscosité mais pas la tension de surface, la relation de dispersion devient la suivante :

$$a_M \Omega^4 + b_M \Omega^2 + c_M = 0 \quad (3.134)$$

Avec

$$a_M = (R_1 + R_3) \cosh(H) + (1 + R_1 R_3) \sinh(H) \quad (3.135)$$

$$b_M = (R_1 - R_3)(\cosh(H) + \sinh(H)) - \frac{Hb(R_1 + R_3)}{\sinh(H)} + \Gamma_{12}(R_3 \sinh(H) + \cosh(H)) + \Gamma_{23}(R_1 \sinh(H) + \cosh(H)) \quad (3.136)$$

$$c_M = (R_1 - 1 + \Gamma_{12})(1 - R_3 + \Gamma_{23}) \sinh(H) - \frac{Hb(R_1 - R_3 + \Gamma_{12} + \Gamma_{23})}{\sinh(H)} - \frac{H^2 b^2}{\sinh(H)} \quad (3.137)$$

3.2.3 Carte de stabilité

Il est important de noter que d'après le chapitre précédent, la carte de stabilité ne dépend pas de la viscosité des fluides ; les valeurs propres du système dépendent de la viscosité mais pas leur caractère réel positif ou imaginaire qui permet de déterminer si le système est stable. Cependant, un des paramètres les plus difficiles à déterminer expérimentalement pour des batteries à métaux liquides est la tension de surface entre deux fluides. Ceci est notamment dû à l'opacité des matériaux gênant les appareils de mesures optiques comme le tensiomètre. Pour cela, la formule de Girifalco-Good est souvent utilisée pour estimer la tension de surface entre deux liquides immiscibles à partir de leurs tensions de surface individuelles. Soit cette formule déterminée à partir d'une méthode énergétique en prenant compte des interactions moléculaires de Van der Waals (GIRIFALCO et GOOD 1957) :

$$\Gamma_{ii+1} = \Gamma_i + \Gamma_{i+1} - 2C_{\Gamma_{i+1}} \sqrt{\Gamma_i \Gamma_{i+1}} \quad (3.138)$$

$C_{\Gamma_{ii+1}}$ est un paramètre d'interaction empirique qui dépend de la nature des liquides, souvent proche de l'unité.

Dans le but de faire une étude paramétrique sur les paramètres adimensionnés Γ_{12} et Γ_{23} (les tensions de surface adimensionnées), les valeurs de tensions de surfaces individuelles utilisées dans l'article de WEBER, BECKSTEIN, HERREMAN et al. 2017 sont utilisées (voir tableau 3.3) ; le paramètre $C_{\Gamma_{ii+1}}$ variant entre 0 et 1. De la même manière que pour la partie précédente, la carte de stabilité est tracée dans le plan (H, b) . Cela permet également de mesurer l'importance de la détermination de ce paramètre dans le but d'établir une carte de stabilité la plus adaptée aux batteries à métaux liquides. Il est observé que la prise en compte des tensions de surfaces a tendance à stabiliser le système (voir figure 3.5). De plus, plus le coefficient $C_{\Gamma_{ii+1}}$ est petit plus le domaine de stabilité du système s'élargit. Une nette différence entre les cartes de stabilité pour les cas $C_{\Gamma_{ii+1}} = 0,5$ et $C_{\Gamma_{ii+1}} = 1$ montre qu'il est important de déterminer ce paramètre avec précision. Puisque la viscosité n'a pas d'effet sur la stabilité intrinsèque du système, la carte de stabilité pour laquelle $C_{\Gamma_{ii+1}} = 1$ (voir figure 3.5 en haut à droite) peut servir à établir les conditions de stabilité pour une batterie à métaux liquide pour les valeurs de paramètres R_1 , R_3 , Γ_{12} et Γ_{23} correspondant à la table 3.3.

3.2.4 Effet de la viscosité

L'effet de la viscosité sur les solutions de la relation de dispersion et sur la forme des interfaces n'a pas été étudié comme dans le chapitre précédent car il y a un manque d'expérience et de simulations numériques pour conforter les résultats théoriques.

(i)	ρ_i [kg.m ⁻³]	μ_i [kg.m ⁻¹ .s ⁻¹]	γ_i [kg.s ⁻²]	σ_i [kg ⁻¹ m ⁻³ s ³ A ²]
(3 = Mg)	1,3	$1,8 \times 10^{-5}$	0,54	$3,6 \times 10^6$
(2 = NaCl– KCl – MgCl ₂)	1398	$6,2 \times 10^{-3}$	0,09	80
(1 = Sb)	773	$3,3 \times 10^{-3}$	0,37	$8,7 \times 10^5$

TABLE 3.3 – Propriétés des fluides pour le cas étudié par WEBER, BECKSTEIN, HERREMAN et al. 2017.

3.3 Conclusion

Une analyse linéaire de stabilité a été réalisée pour étudier principalement l'effet du champ magnétique, mais également de la viscosité et de la tension de surface dans un système composé de trois fluides newtoniens incompressibles immiscibles superposés sous le champ de gravité.

Le système d'intérêt est inspiré du travail théorique de SNEYD 1985 sur deux systèmes relativement proches des batteries à métaux liquides avec les propriétés des fluides du travail numérique de WEBER, BECKSTEIN, HERREMAN et al. 2017 sur un modèle de ces batteries. Pour cet ensemble donné de paramètres liés aux propriétés des fluides, le problème aux valeurs propres a été résolu en faisant varier un paramètre de fonctionnement de la batterie : le champ magnétique adimensionné, $b = M_0 \left(R \frac{k_x^2 - k_y^2}{k^2} - 2Q \frac{k_x k_y}{k^2} - \frac{1}{2} \right)$, et notamment le courant électrique ainsi qu'un paramètre géométrique : l'épaisseur de la couche du milieu adimensionnée, $H = kh$, afin de déterminer les coefficients temporels de la perturbation. Cela permet d'obtenir une carte indiquant la stabilité du système pour un couple (H, b) donné. Deux frontières sont tracées entre lesquelles le système est stable ; en dehors il est instable. Une des deux régions instables, celle correspondant à des valeurs positives de b n'est accessible que par l'effet d'un champ magnétique extérieur relativement élevé. L'autre région instable correspond à des valeurs négatives de b et ne peut se produire à partir d'un champ magnétique critique b_c . Celui-ci augmente en valeur absolue et donc favorise la stabilité lorsque la masse volumique adimensionnée du milieu (1), $R_1 = \rho_1/\rho_2$ augmente et lorsque la masse volumique adimensionnée du milieu (3), $R_3 = \rho_3/\rho_2$ diminue. Naturellement, lorsque $\Gamma_{12} = \gamma_{12}k^2(\rho_2g)^{-1}$ et $\Gamma_{23} = \gamma_{23}k^2(\rho_2g)^{-1}$ augmentent, le domaine de stabilité du système s'élargit. La viscosité n'a pas d'effet sur le domaine de stabilité ; elle ralentit l'évolution de la perturbation.

Les perspectives de ce travail sont d'explorer les effets de bord en considérant à la fois les parois horizontales et verticales (voir le chapitre 4) ; tout cela dans le but notamment de modéliser l'instabilité de ballonnement dans les batteries à métaux liquides.

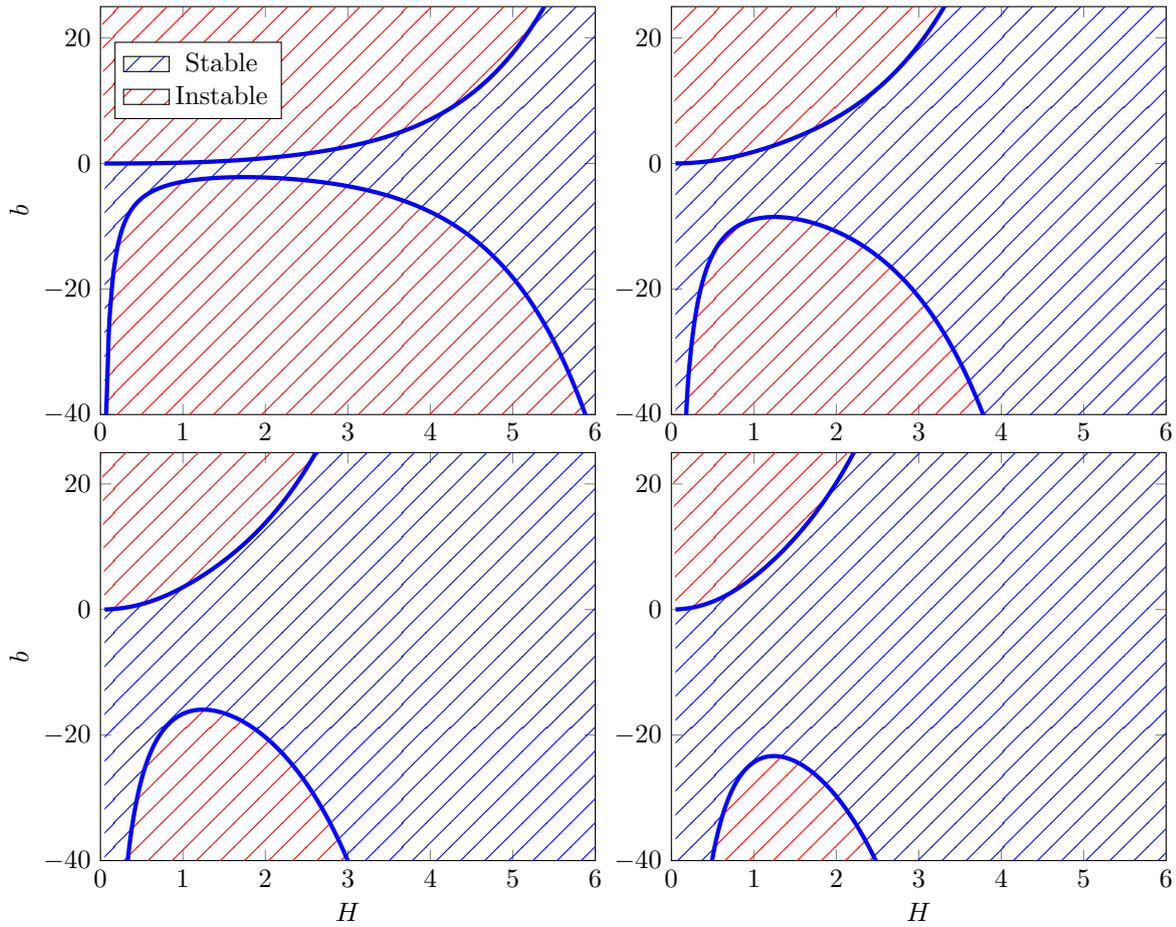


FIGURE 3.5 – Plan de stabilité du modèle visqueux de batteries à métaux liquides pour $R_1 = 3,65$ et $R_3 = 0,89$. Sur la figure en haut à gauche, la tension de surface n'est pas prise en compte. Sur les figures en haut à droite, en bas à gauche et en bas à droite, le coefficient C_Γ vaut respectivement 1, 0,5 et 0. Cela implique que $\Gamma_{12} \in \{0; 1,43; 4,17; 6,91\}$ et $\Gamma_{23} \in \{0; 2,84; 6,15; 9,46\}$.

Instabilité interfaciale avec prise en compte des effets de bords

Comme discuté précédemment, dans ce chapitre, les effets magnétohydrodynamiques sont regardés pour un système à deux couches fluides borné pouvant modéliser d’abord une cellule de réduction de l’aluminium ; ce système pouvant être étendu à des systèmes à trois couches afin de modéliser une batterie à métaux liquides. Ce système à deux couches peut également modéliser une batterie à métaux liquides dans l’hypothèse d’une couche inférieure de masse volumique très élevée (voir WEBER, BECKSTEIN, HERREMAN et al. 2017). La stabilité de tels systèmes a été déterminée par SELE 1977 qui a proposé une démonstration mathématique de son critère. Dans un premier temps, cette démonstration mathématique est exposée avec les différentes hypothèses de ce travail. Ensuite, contrairement aux deux chapitres précédents, une méthode énergétique est utilisée à la place de la méthode des modes normaux utilisée lors des deux précédents chapitres. Cette méthode ne permet cependant pas cette fois de déterminer l’évolution temporelle des quantités physiques sinon de redémontrer le critère de Sele par une méthode pouvant être utilisée pour des cas plus généraux. L’objectif est de déterminer un critère de Sele généralisé plus adapté aux batteries à métaux liquides. Enfin, des simulations numériques directes ont été effectuées avec le code maison Archer, utilisé lors du deuxième chapitre sur le couplage entre les instabilités interfaciales sans champ magnétique. Ces simulations ont permis d’observer le caractère stationnaire de l’instabilité de ballotement tournant le long des parois du système. De ces simulations a été extraite l’énergie cinétique moyenne du système permettant d’en déduire sa stabilité. Enfin, comme pour le chapitre précédent, une carte de stabilité a été tracée donnant la stabilité du système pour un couple d’épaisseur de l’électrolyte et de champ magnétique extérieur donné.

4.1 Critère de Sele

4.1.1 Formulation du problème

Contrairement aux parties précédentes, dans ce chapitre sont considérés deux fluides superposés repérés par des coordonnées cartésiennes $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)^T$, dans des conditions isothermes et soumis au champ de gravité $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Par la suite les indices 1 et 2 feront respectivement référence à la couche inférieure (1) de métal liquide d'épaisseur h_1 et à la couche supérieure (2) d'électrolyte liquide d'épaisseur h_2 ; comme pour les parties précédentes, les indices x , y et z feront respectivement référence aux composantes des grandeurs vectorielles dans les directions \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z . Les fluides sont considérés non miscibles, incompressibles avec des masses volumiques : ρ_1 et ρ_2 et non visqueux. Les tensions de surface aux interfaces ne sont pas prises en compte. La couche de métal liquide est un bien meilleur conducteur électrique que l'électrolyte : $\sigma_1 \gg \sigma_2$. Dans l'état de base, ces couches sont des parallélépipèdes rectangles de largeur l_x et de profondeurs l_y et le système est soumis à un champ magnétique extérieur vertical \vec{B}^{ex} ainsi qu'à un courant électrique vertical \vec{J}^* . La perturbation du système se caractérise par une inclinaison de la surface de contact entre les fluides d'un angle α_x très petit créant un courant électrique de redistribution \vec{J} supposé vertical dans la couche supérieure par analogie entre l'électrolyte et l'intérieur d'un condensateur. Ce courant perturbé est considéré horizontal dans la couche inférieure car il doit se redistribuer dans une zone relativement petite (voir figure 4.1).

SELE 1977 a proposé un critère pour évaluer la stabilité des cellules de réduction de l'aluminium. Ce critère examine comment les forces électromagnétiques et hydrodynamiques dans la cellule affectent la stabilité de la couche de bain électrolytique et du métal liquide. Ce critère est le suivant :

$$\beta = \frac{J^* B^{ex}}{(\rho_1 - \rho_2)g} \frac{l_x l_y}{h_1 h_2} \leq \beta_{cr} = 12 \quad (4.1)$$

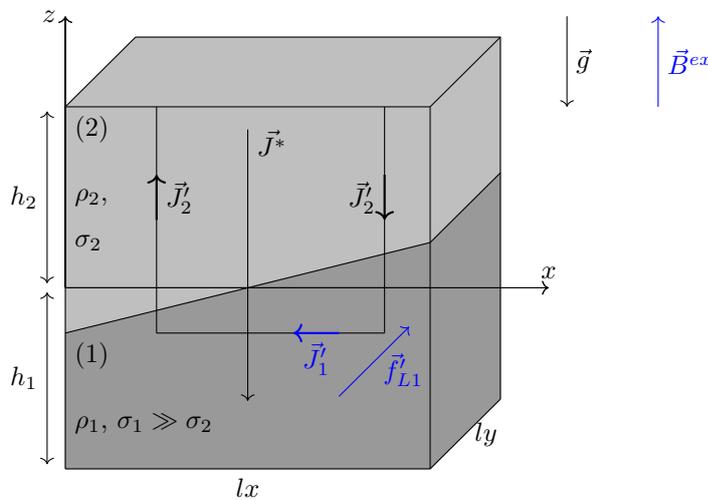


FIGURE 4.1 – Représentation schématique du système à deux couches fluides étudié par SELE 1977

4.1.2 Démonstration mathématique du critère de Sele

Comme pour le chapitre précédent, le courant électrique perturbé peut s'écrire en fonction du potentiel électrique. Dans le milieu (2), cela donne l'expression suivante :

$$\vec{J}_2 = J^* \vec{\nabla} \phi_2 \quad (4.2)$$

En faisant l'analogie entre l'électrolyte, très peu conductrice et comprise entre deux milieux conducteurs (la couche de métal liquide en bas et le collecteur de courant électrique en haut), et un condensateur plan, la relation suivante est obtenue :

$$\vec{\nabla} \phi_2 = \frac{\phi_2(z = h_2) - \phi_2(z = \alpha_x x)}{h_2 - \alpha_x x} \vec{e}_z \quad (4.3)$$

Or il a été vu dans le chapitre précédent que lorsque la conductivité électrique de l'électrolyte est négligeable par rapport à celles des électrodes (i.e. $\sigma_2 \ll (\sigma_1, \sigma_3)$) la condition de saut concernant la composante tangentielle du champ électrique donne la relation suivante :

$$\phi_2(z = z_{ii+1}) = -\eta_{ii+1}, \quad (4.4)$$

avec $z_{ii+1} = z_{ii+1}^* + \eta_{ii+1}$, la position de l'interface qui est égale à la somme de sa position dans l'état de base et de sa perturbation. Ici, $\phi_2(z = h_2) = 0$ comme pour le cas étudié par SNEYD 1985 lorsque la couche supérieure est solide et qu'ainsi la position de l'interface de contact entre celle-ci et l'électrolyte reste plane et horizontale, $\phi_2(z = \alpha_x x) = -\alpha_x x$. Ainsi les équations 4.2, 4.3 et 4.4 donnent la relation suivante :

$$J'_{2z} = J^* \frac{\alpha_x x}{h_2 - \alpha_x x}. \quad (4.5)$$

En considérant une faible inclinaison de la surface ($\alpha_x x \ll h_2$) :

$$J'_{2z} = J^* \frac{\alpha_x x}{h_2}. \quad (4.6)$$

Ensuite, ce courant électrique perturbé doit s'égaliser horizontalement dans le métal liquide, donnant l'expression suivante :

$$J'_{1x}(x) = \frac{1}{h_1} \int_{-l_x/2}^x J'_{2z}(x) dx. \quad (4.7)$$

$$\Rightarrow J'_{1x}(x) = J^* \frac{\alpha_x}{h_1 h_2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{l_x^2}{8} \right). \quad (4.8)$$

En raison de la présence de ce courant électrique horizontal dans le métal liquide, une force de Lorentz apparaît due à l'interaction de celui-ci avec le champ magnétique extérieur :

$$\vec{f}_{L1} = \vec{J}'_{1x} \times \vec{B}^{ex}. \quad (4.9)$$

$$\Rightarrow \vec{f}_{L1} = -J'_{1x} B^{ex} \vec{e}_y. \quad (4.10)$$

Cette force est équivalente à un gradient de pression :

$$\vec{\nabla}P = \vec{j}_{L1}. \quad (4.11)$$

Cette expression correspond au gradient de pression local qui dépend de x . Pour obtenir la moyenne de la force de Lorentz dans la couche de métal liquide, il faut moyenner $J'_{1x}(x)$:

$$P_{,y} = -\frac{B^{ex}}{l_x} \int_{-l_x/2}^{l_x/2} J'_{1x}(x) dx. \quad (4.12)$$

En remplaçant avec l'équation 4.8, la relation suivante est obtenue :

$$P_{,y} = \frac{J^* B^{ex} \alpha_x l_x^2}{12h_1 h_2}. \quad (4.13)$$

Donc la force de Lorentz crée un gradient de pression dans la direction \vec{e}_y , provoquant ainsi un déplacement du liquide dans cette direction. La surface va s'incliner jusqu'à avoir un équilibre entre ce gradient de pression et la gravité.

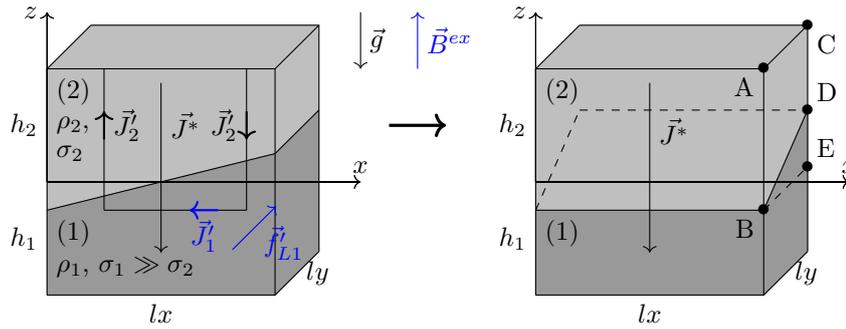


FIGURE 4.2 – Représentation schématique du système à deux couches fluides étudié par SELE 1977 (à gauche) et l'évolution d'un quart de tour autour de la paroi de la perturbation (à droite). Les lettres A, B, C, D et E sur la figure de droite servent à expliquer l'équilibre entre le gradient de pression dû à la force de Lorentz et la gravité.

$$\begin{aligned} P_A &= P_0, \\ P_B &= P_0 + \rho_2 g \left(h_2 + \frac{\alpha_y l_y}{2} \right), \\ P_C &= P_0, \\ P_D &= P_0 + \rho_2 g \left(h_2 - \frac{\alpha_y l_y}{2} \right), \\ P_E &= P_0 + \rho_2 g \left(h_2 - \frac{\alpha_y l_y}{2} \right) + \rho_1 g \alpha_y l_y. \end{aligned} \quad (4.14)$$

En considérant encore une fois une faible inclinaison de la surface, cette équation se simplifie de la manière suivante :

$$\Rightarrow P_{,y} = \frac{P_E - P_B}{l_y} = (\rho_1 - \rho_2) g \alpha_y. \quad (4.15)$$

Cela permet de déterminer l'expression de α_y , le nouvel angle d'équilibre dans la direction \vec{e}_y :

$$\alpha_y = \frac{1}{(\rho_1 - \rho_2) g} P_{,y}. \quad (4.16)$$

Ensuite, le processus de rotation de la surface dû à la force de Lorentz se poursuit. La situation est semblable à la configuration de la figure 4.1 à l'exception faite que la surface est inclinée dans la direction \vec{e}_y avec un angle α_y au lieu d'être inclinée dans la direction \vec{e}_x avec un angle α_x . La surface de la couche de métal liquide va de nouveau se retrouver inclinée dans la direction \vec{e}_x mais cette fois-ci dans le sens opposé. L'équation équivalente à l'équation 4.13 après que la perturbation a effectué un quart de tour est la suivante :

$$P_{,x} = -\frac{J^* B^{ex} \alpha_y l_y^2}{12h_1 h_2} \quad (4.17)$$

Le nouvel angle d'équilibre $\alpha_x^{(2)}$ selon la direction \vec{e}_x s'écrit de manière similaire à α_y :

$$\alpha_x^{(2)} = \frac{1}{(\rho_1 - \rho_2)g} P_{,x} \quad (4.18)$$

Maintenant, la situation est opposée à celle de la configuration initiale. Le système est instable si $|\alpha_x^{(2)}| > |\alpha_x|$ et stable si $|\alpha_x^{(2)}| \leq |\alpha_x|$. La limite de stabilité du système correspond au cas $\alpha_x^{(2)} = -\alpha_x$. Avec les équations 4.13, 4.16, 4.17 et 4.18, la relation suivante peut-être déterminée :

$$\frac{\alpha_x^{(2)}}{\alpha_y} = -\frac{\alpha_y l_y^2}{\alpha_x l_x^2}. \quad (4.19)$$

Au niveau de la limite de stabilité du système ($\alpha_x^{(2)} = -\alpha_x$), cette relation devient :

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_y} = \frac{l_y}{l_x}. \quad (4.20)$$

Les équations 4.17 et 4.18 permettent d'écrire :

$$P_{,x} = -\alpha_x (\rho_1 - \rho_2)g = -\frac{J^* B^{ex} \alpha_y l_y^2}{12h_1 h_2}. \quad (4.21)$$

Enfin, en utilisant l'équation 4.20, la limite de stabilité du système est atteinte pour :

$$\beta = \frac{B^{ex} J^* l_x l_y}{(\rho_1 - \rho_2)g h_1 h_2} = 12, \quad (4.22)$$

avec β , le critère de stabilité de Sele. Si $\beta > 12$ le système est instable et si $\beta \leq 12$, le système est stable. Les quatre quarts de tour effectués par le système selon le modèle de SELE 1977 sont représentés sur la figure 4.3.

4.2 Principe énergétique

4.2.1 Introduction du principe énergétique

Pour résoudre un problème de magnétohydrodynamique, il y a deux principales méthodes : la résolution par modes normaux et la résolution variationnelle (énergétique). Les avantages de la méthode des modes normaux sont que premièrement, dans le cadre de la stabilité linéaire, la décomposition en modes normaux simplifie souvent les équations et permet de résoudre des systèmes d'équations différen-

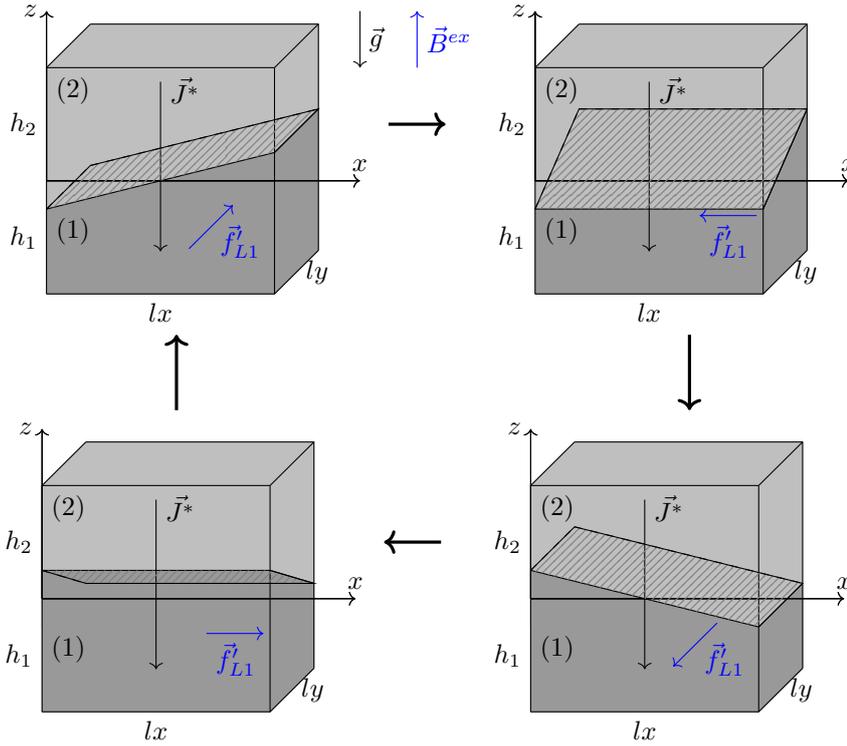


FIGURE 4.3 – Représentation schématique du système à deux couches fluides étudié par SELE 1977 avec chaque quart de tour.

tielles linéaires. De plus, elle fournit directement les taux de croissance des perturbations, permettant de déterminer l'évolution temporelle de toutes les quantités physiques. Les inconvénients de la méthode des modes normaux sont que, cette méthode peut nécessiter des conditions aux limites spécifiques pour être appliquée, pouvant limiter son utilisation dans des configurations géométriques complexes ou des conditions limites réalistes. Elle devient également compliquée lorsqu'on s'éloigne du cadre linéaire.

Les avantages de la méthode variationnelle (ou énergétique) sont qu'elle est souvent plus flexible et peut être appliquée à une plus large gamme de problèmes, y compris ceux avec des conditions aux limites complexes et des géométries variées. Ensuite, cette méthode permet d'obtenir des critères de stabilité globaux basés sur l'énergie totale du système. Cela peut offrir une perspective plus générale sur la stabilité sans nécessiter une décomposition modale détaillée. Les formulations variationnelles peuvent être plus adaptées à la prise en compte des effets non linéaires, ce qui permet une analyse plus globale du comportement du système. Les inconvénients de la méthode variationnelle (ou énergétique) sont que sa formulation peut sembler moins intuitive que l'analyse par modes normaux et sa résolution peut être mathématiquement plus complexe. Elle ne permet également pas de déterminer l'évolution temporelle des quantités physiques.

Dans l'objectif principal de déterminer un critère de stabilité pour un système borné, la méthode énergétique a été jugée plus adaptée à cette étude.

Soit l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla}P + \sum_i \vec{f}_{nci} + \sum_j \vec{f}_{cj}, \quad (4.23)$$

où

$$\sum_i \vec{f}_{nci} \quad (4.24)$$

est la somme des forces extérieures non conservatives et

$$\sum_j \vec{f}_{cj} \quad (4.25)$$

est la somme des forces extérieures conservatives. Les forces conservatives, dont la force gravitationnelle fait partie, dérivent d'une énergie potentielle; les forces volumiques conservatives dérivent donc d'une énergie potentielle volumique :

$$\sum_j \vec{f}_{cj} = - \sum_j \vec{\nabla} e_{pj} \quad (4.26)$$

L'équation 4.23 peut donc s'écrire comme suit :

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla} \left(\rho g z + P + \sum_j e_{pj} \right) + \sum_i \vec{f}_{nci} \quad (4.27)$$

En faisant le produit scalaire de cette équation par le vecteur \vec{u} puis en l'intégrant sur le volume V d'intérêt, la relation suivante est obtenue :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_V \rho \|\vec{u}\|^2 dv \right) = - \int_V \vec{\nabla} \left(\rho g z + P + \sum_j e_{pj} \right) \cdot \vec{u} dV + \int_V \sum_i \vec{f}_{nci} \cdot \vec{u} dV. \quad (4.28)$$

Le premier terme :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_V \rho \|\vec{u}\|^2 dV \right), \quad (4.29)$$

correspond à la variation de l'énergie cinétique moyenne dans le volume V .

Le deuxième terme :

$$\frac{dE_p}{dt} = \int_V \vec{\nabla} \left(\rho g z + P + \sum_j e_{pj} \right) \cdot \vec{u} dV, \quad (4.30)$$

correspond à la variation de l'énergie potentielle moyenne dans le volume V , celle-ci est décomposée en plusieurs termes : la variation de l'énergie potentielle gravitationnelle moyenne dans le volume V ,

$$\int_V \vec{\nabla} (\rho g z) \cdot \vec{u} dV, \quad (4.31)$$

la variation de l'énergie potentielle de pression moyenne dans le volume V ,

$$\int_V \vec{\nabla} (P) \cdot \vec{u} dV, \quad (4.32)$$

et la variation des énergies potentielles liées aux forces conservatives moyennes dans le volume V ,

$$\int_V \vec{\nabla} \left(\sum_j e_{pj} \right) \cdot \vec{u} dV, \quad (4.33)$$

Le dernier terme :

$$P_{nc} = \int_V \sum_i \vec{f}_{nci} \cdot \vec{u} dV, \quad (4.34)$$

correspond à la puissance des forces non conservatives.

Cette formulation énergétique du problème permet donc de retrouver le théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE_c}{dt} = -\frac{dE_p}{dt} + P_{nc}. \quad (4.35)$$

La variation de l'énergie mécanique (somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle) est égale à la puissance des forces non conservatives. Ce théorème spécifie que si la variation de l'énergie cinétique est négative, alors l'énergie cinétique diminue et se transforme en énergie potentielle. La vitesse des particules fluides diminue en moyenne et le système est donc stable. Inversement, si la variation de l'énergie cinétique est positive, alors l'énergie potentielle diminue en se transformant en énergie cinétique ; la vitesse des particules fluides augmente en moyenne et le système est donc instable. Soit la condition de stabilité du système :

$$-\frac{dE_p}{dt} + P_{nc} \leq 0. \quad (4.36)$$

4.2.2 Principe énergétique adapté au critère de Sele

Dans le cas d'intérêt étudié par SELE 1977, l'équation de conservation de la quantité de mouvement est la suivante :

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \vec{f}_L. \quad (4.37)$$

En utilisant la même méthode que celle décrite précédemment, à savoir faire le produit scalaire de l'équation 4.37 par le vecteur vitesse \vec{u}_i puis intégrer le tout sur le volume d'intérêt V , la relation suivante est obtenue :

$$\frac{dE_c}{dt} = -\int_V \vec{\nabla}P \cdot \vec{u} dV + \int_V \rho\vec{g} \cdot \vec{u} dV + \int_V \vec{f}_L \cdot \vec{u} dV, \quad (4.38)$$

avec, comme précédemment :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_V \rho \|\vec{u}\|^2 dV \right) \quad (4.39)$$

Naturellement, la condition de stabilité du système est la suivante :

$$-\int_V \vec{\nabla}P \cdot \vec{u} dV + \int_V \rho\vec{g} \cdot \vec{u} dV + \int_V \vec{f}_L \cdot \vec{u} dV \leq 0 \quad (4.40)$$

Il convient maintenant de définir le volume dans lequel cette équation souhaite être intégrée. L'objectif est de savoir si une perturbation de la surface entre le métal liquide et l'électrolyte va s'amplifier ou non. Ainsi, cette surface doit se trouver à l'intérieur du volume en question. Ensuite, il n'est pas nécessaire d'intégrer sur tout le domaine ; ce domaine d'intégration peut se limiter à un parallélépipède rectangle entourant l'interface dans sa profondeur, de longueur l_x et de largeur l_y . Comme les propriétés des fluides diffèrent entre les deux fluides, il faut séparer ce volume V en deux sous-volumes V_1 et V_2 associés respectivement au milieu (1 \equiv métal liquide) et au milieu (2 \equiv électrolyte) (voir figure 4.4).

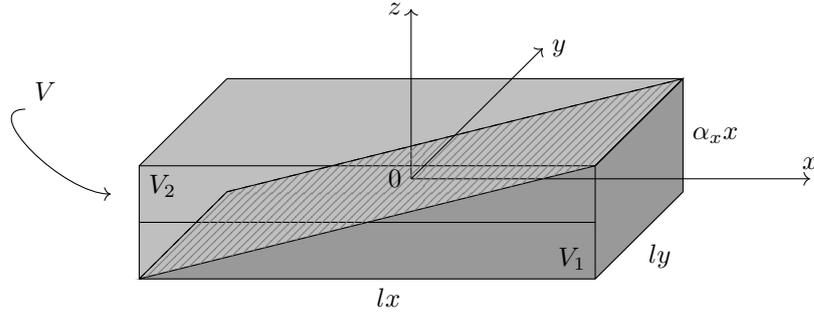


FIGURE 4.4 – Représentation schématique du volume d'intégration V décomposé en deux sous-volumes V_1 et V_2 . Dans V , $x \in [-l_x/2, l_x/2]$, $y \in [-l_y/2, l_y/2]$ et $z \in [-\alpha_x x/2, \alpha_x x/2]$.

Pour déterminer le premier terme :

$$\int_V \vec{\nabla} P \cdot \vec{u} dV = \int_{V_1} \vec{\nabla} P_1 \cdot \vec{u}_1 dV + \int_{V_2} \vec{\nabla} P_2 \cdot \vec{u}_2 dV, \quad (4.41)$$

il faut commencer par déterminer l'expression de la pression P dans chaque sous-volume. A partir de la loi de l'hydrostatique, il peut être montré que :

$$P_1 = P_0 + \rho_2 g \left(\frac{\alpha_x l_x}{2} - \alpha_x x \right) + \rho_1 g (\alpha_x x - z), \quad (4.42)$$

$$P_2 = P_0 + \rho_2 g \left(\frac{\alpha_x l_x}{2} - z \right), \quad (4.43)$$

avec P_0 la pression constante telle que dans l'état de base, $P_i^* = P_0 - \rho_i g z$ pour que $\vec{\nabla}(P_i^* + \rho_i g) = \vec{0}$.

Avec ces expressions de la pression P dans chaque couche, l'équation 4.48 donne :

$$\int_V \vec{\nabla} P \cdot \vec{u} dV = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} g \alpha_x^2 l_x^2 l_y u_{1x} - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} g \alpha_x l_x^2 l_y u_{12z} \quad (4.44)$$

De la même manière :

$$\int_V \rho \vec{g} \cdot \vec{u} dV = \int_{V_1} \rho_1 \vec{g} \cdot \vec{u}_1 dV + \int_{V_2} \rho_2 \vec{g} \cdot \vec{u}_2 dV. \quad (4.45)$$

La relation suivante est obtenue :

$$\int_V \rho \vec{g} \cdot \vec{u} dV = -\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} g \alpha_x l_x^2 l_y u_{12z}. \quad (4.46)$$

Avec $u_{12z} = u_{1z}(z=0) = u_{2z}(z=0)$, la vitesse au niveau de l'interface.

Pour le dernier terme concernant la force de Lorentz, l'expression déterminée dans la partie précédente peut être réutilisée :

$$\vec{f}_{L1} = \frac{J^* B^{ex} \alpha_x l_x^2}{12 h_1 h_2} \vec{e}_y. \quad (4.47)$$

Enfin, toujours de la même manière :

$$\int_V \vec{f}_L \cdot \vec{u} dV = \int_{V_1} \vec{f}_{L1} \cdot \vec{u}_1 dV, \quad (4.48)$$

car il n'y a pas de force de Lorentz dans la couche d'électrolyte puisque la perturbation du courant électrique et le champ magnétique y sont colinéaires. La relation suivante est obtenue :

$$\int_V \vec{f}_L \cdot \vec{u} dV = \frac{J^* B^{ex} \alpha_x^2 l_x^4 l_y}{24 h_1 h_2} u_{1y} \quad (4.49)$$

Soit la variation de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = -\frac{\rho_1 - \rho_2}{2} g \alpha_x^2 l_x^2 l_y u_{1x} + \frac{J^* B^{ex} \alpha_x^2 l_x^4 l_y}{24 h_1 h_2} u_{1y} \quad (4.50)$$

La limite de stabilité du système correspond à

$$\frac{dE_c}{dt} = 0 \quad (4.51)$$

Cela conduit au critère suivant :

$$\beta = \frac{J^* B^{ex} l_x^2}{h_1 h_2 (\rho_1 - \rho_2) g} \frac{u_{1y}}{u_{1x}} = 12 \quad (4.52)$$

Ce raisonnement a été effectué pour un quart de tour ; en le ré-effectuant pour un second quart de tour, la limite de stabilité obtenue est la suivante :

$$\beta = \frac{J^* B^{ex} l_y^2}{h_1 h_2 (\rho_1 - \rho_2) g} \frac{u_{1x}}{u_{1y}} = 12 \quad (4.53)$$

Cela donne la relation suivante entre u_{1x} et u_{1y} :

$$\frac{u_{1x}}{u_{1y}} = \frac{l_x}{l_y} \quad (4.54)$$

En remplaçant cette relation dans un des deux critères de stabilité déterminés, cela permet d'obtenir le critère premièrement déterminé par SELE 1977 :

$$\beta = \frac{J^* B^{ex} l_x l_y}{h_1 h_2 (\rho_1 - \rho_2) g} = 12 \quad (4.55)$$

Ainsi, le système est stable si $\beta \leq 12$; il est instable si $\beta > 12$.

4.3 Simulations numériques

4.3.1 Initialisation des simulations

Comme pour le deuxième chapitre, des simulations numériques directes réalisées avec le code maison Archer permettent de valider les résultats théoriques précédents. Le système d'intérêt est similaire à celui étudié par SELE 1977 ; les propriétés des fluides étant celles utilisées par WEBER, BECKSTEIN, HERREMAN et al. 2017 dans le cas d'une étude sur l'instabilité de ballotement dans les batteries à métaux liquide (voir table 4.1).

Soit la formule de GIRIFALCO et GOOD 1957 permettant d'estimer la tension de surface entre deux liquides

(i)	ρ_i [kg.m ⁻³]	μ_i [kg.m ⁻¹ .s ⁻¹]	γ_i [kg.s ⁻²]	σ_i [kg ⁻¹ m ⁻³ s ³ A ²]
(3 = Mg)	1577	$1,8 \times 10^{-5}$	0,54	$3,6 \times 10^6$
(2 = NaCl– KCl – MgCl ₂)	1715	$6,2 \times 10^{-3}$	0,09	80
(1 = Sb)	6260	$3,3 \times 10^{-3}$	0,37	$8,7 \times 10^5$

TABLE 4.1 – Propriétés des fluides pour le cas étudié par WEBER, BECKSTEIN, HERREMAN et al. 2017. Ici, seulement les propriétés des couches (1) et (2) sont utilisées.

immiscibles à partir de leurs tensions de surface individuelles et définit dans le chapitre précédent :

$$\gamma_{ii+1} = \gamma_i + \gamma_{i+1} - 2C_{\gamma_{i+1}}\sqrt{\gamma_i\gamma_{i+1}}, \quad (4.56)$$

avec le paramètre d'interaction empirique $C_{\Gamma_{ii+1}}$, souvent proche de l'unité, et choisi égal à l'unité dans l'étude de WEBER, BECKSTEIN, HERREMAN et al. 2017. les valeurs des tensions de surface entre les couches (1) et (2) et les couches (2) et (3) sont alors les suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= 0,095 \text{ kg.s}^{-2} \\ \gamma_{23} &= 0,19 \text{ kg.s}^{-2} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Il est important de noter que dans ce chapitre, les simulations numériques n'ont pas été initialisées par la

$l_x = l_y$ [m]	J^* [A.m ⁻²]	α_x [°]
0,1	10^4	5°

TABLE 4.2 – Paramètre d'initialisation pour les simulations numériques effectuées avec Archer.

vitesse, l'objectif étant encore une fois de déterminer la stabilité d'un système plutôt que de déterminer précisément l'évolution temporelle de la surface entre le métal liquide et l'électrolyte. Concernant la position initiale de l'interface, elle n'est pas non plus monomode mais correspond à une faible inclinaison d'angle $\alpha_x =$ et soumis à un courant électrique vertical comme dans le cas étudié par SELE 1977 (voir 4.2). Le système est un demi-cube de dimensions : $l_x = l_y = 2(h_1 + h_2) = 1\text{cm}$; les deux seuls paramètres à faire varier pour obtenir une carte de stabilité sont la hauteur de l'électrolyte h_2 qui impose la hauteur du métal liquide h_1 et le champ magnétique extérieur B^{ex} .

4.3.2 Carte de stabilité

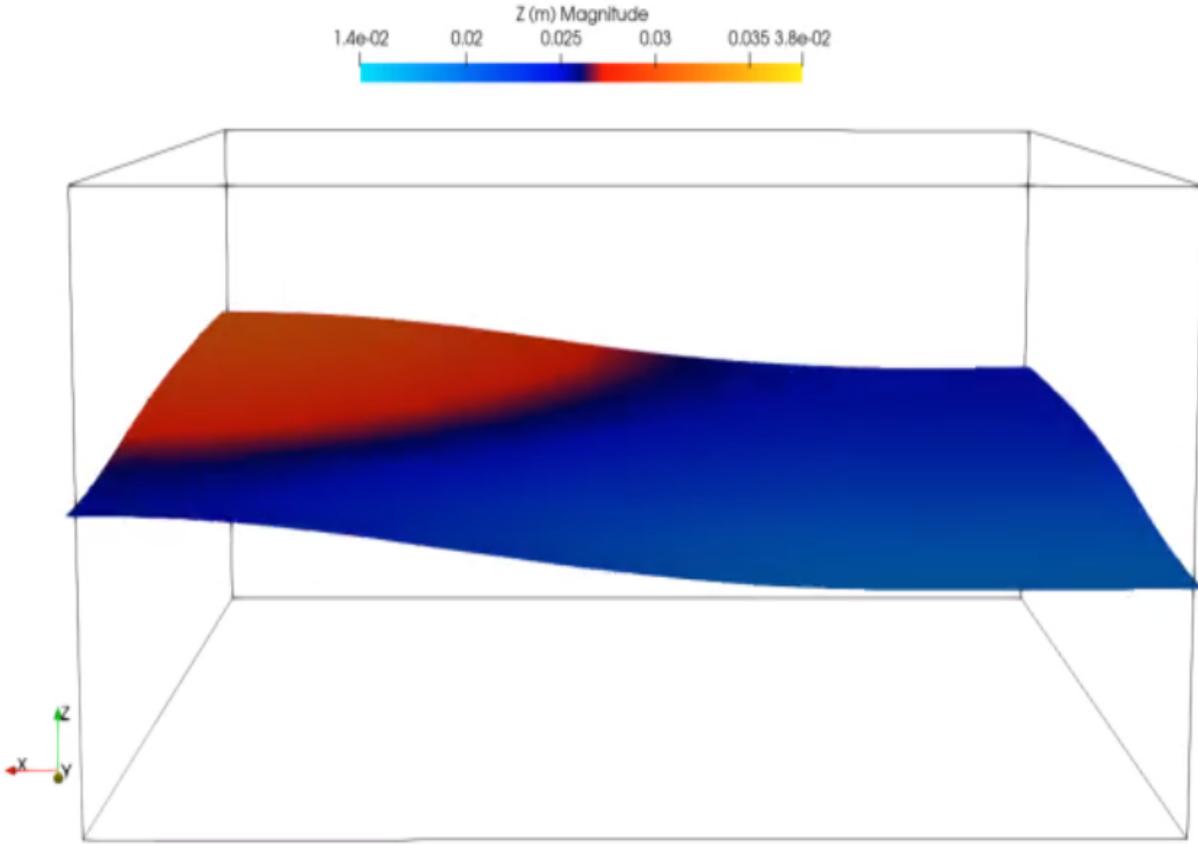


FIGURE 4.5 – Simulation numérique effectuée avec Archer à un instant t donné représentant l'instabilité de ballottement dans un système borné à deux couches fluides pour $B^{ex} = 101,5 \text{ mT}$ et $h_2 = 2,5 \text{ cm}$.

Lors de ces simulations numériques, trois principaux régimes ont été observés par rapport à

$$\beta = \frac{J^* B^{ex} l_x l_y}{(\rho_1 - \rho_2) g h_1 h_2} = 12. \quad (4.58)$$

Premièrement, les deux cas prédits par l'étude de SELE 1977 ont été retrouvés (voir figure 4.5). Le premier d'entre eux correspond au cas pour lequel l'énergie cinétique moyenne du domaine tend vers zéro. L'amplitude de la perturbation de l'interface diminue également jusqu'à ce que l'interface retrouve sa position initiale :

$$\frac{dE_c}{dt} < 0, \quad (4.59)$$

(voir les points verts de la figure 4.6) et est toujours déterminé pour des valeurs de :

$$\beta = \frac{J^* B^{ex} l_x l_y}{(\rho_1 - \rho_2) g h_1 h_2} < 12. \quad (4.60)$$

Le second cas correspond au cas pour lequel l'énergie cinétique moyenne du domaine augmente au cours du temps. L'amplitude de la perturbation de l'interface augmente également jusqu'au contact entre le

métal liquide et l'électrode, synonyme de court-circuit :

$$\frac{dE_c}{dt} > 0, \quad (4.61)$$

(voir les points rouges de la figure 4.6) et est toujours déterminé pour des valeurs de :

$$\beta = \frac{J^* B^{ex} l_x l_y}{(\rho_1 - \rho_2) g h_1 h_2} > 12. \quad (4.62)$$

Cela signifie que les cas de cette étude numérique déterminés stables le sont également d'après le critère de Sele. D'autre part, les cas de cette étude numérique déterminés instables le sont également d'après le critère de Sele.

Cependant, lors de ces simulations numériques, un troisième principal régime a été observé pour des valeurs de :

$$\beta = \frac{J^* B^{ex} l_x l_y}{(\rho_1 - \rho_2) g h_1 h_2} \approx 12. \quad (4.63)$$

Cela correspond à un cas pour lequel l'énergie cinétique moyenne du domaine augmente ou diminue jusqu'à un seuil puis reste constante (voir les points oranges de la figure 4.6). L'amplitude de la perturbation de l'interface augmente ou diminue jusqu'à atteindre une certaine hauteur, puis la perturbation tourne le long des parois du système sans que l'interface ne redevienne plane ni qu'elle touche la paroi supérieure (création d'un court-circuit).

4.4 Conclusion

Une méthode énergétique a été utilisée pour étudier les effets de bords ainsi que les effets du champ magnétique sur un système composé de deux couches fluides. Cela a notamment permis de retrouver le critère de stabilité des cellules de réduction de l'aluminium proposé par Sele.

Enfin des simulations numériques directes ont été effectuées par le code maison Archer. Le système d'intérêt étant similaire à celui étudié par SELE 1977 ; les propriétés des fluides étant celles utilisées par WEBER, BECKSTEIN, HERREMAN et al. 2017 dans le cas de l'étude d'une batterie à métaux liquides. Ces simulations ont montré que le système était stable seulement lorsque le critère de Sele était vérifié :

$$\beta = \frac{J^* B^{ex} l_x l_y}{12 h_1 h_2 (\rho_1 - \rho_2)} < 12. \quad (4.64)$$

Cependant pour certaines valeurs des paramètres physiques, le comportement de l'interface dont l'amplitude atteint une valeur seuil puis continue de tourner le long des parois n'était pas prévisible par cette théorie.

Cette étude a permis la réalisation d'une ébauche des simulations plus approfondies qui seront réalisées à l'avenir. Pour ces simulations, une étude plus complète de convergence en maillage devrait être réalisée. De plus la couche supérieure de métal liquide devrait également être considérée.

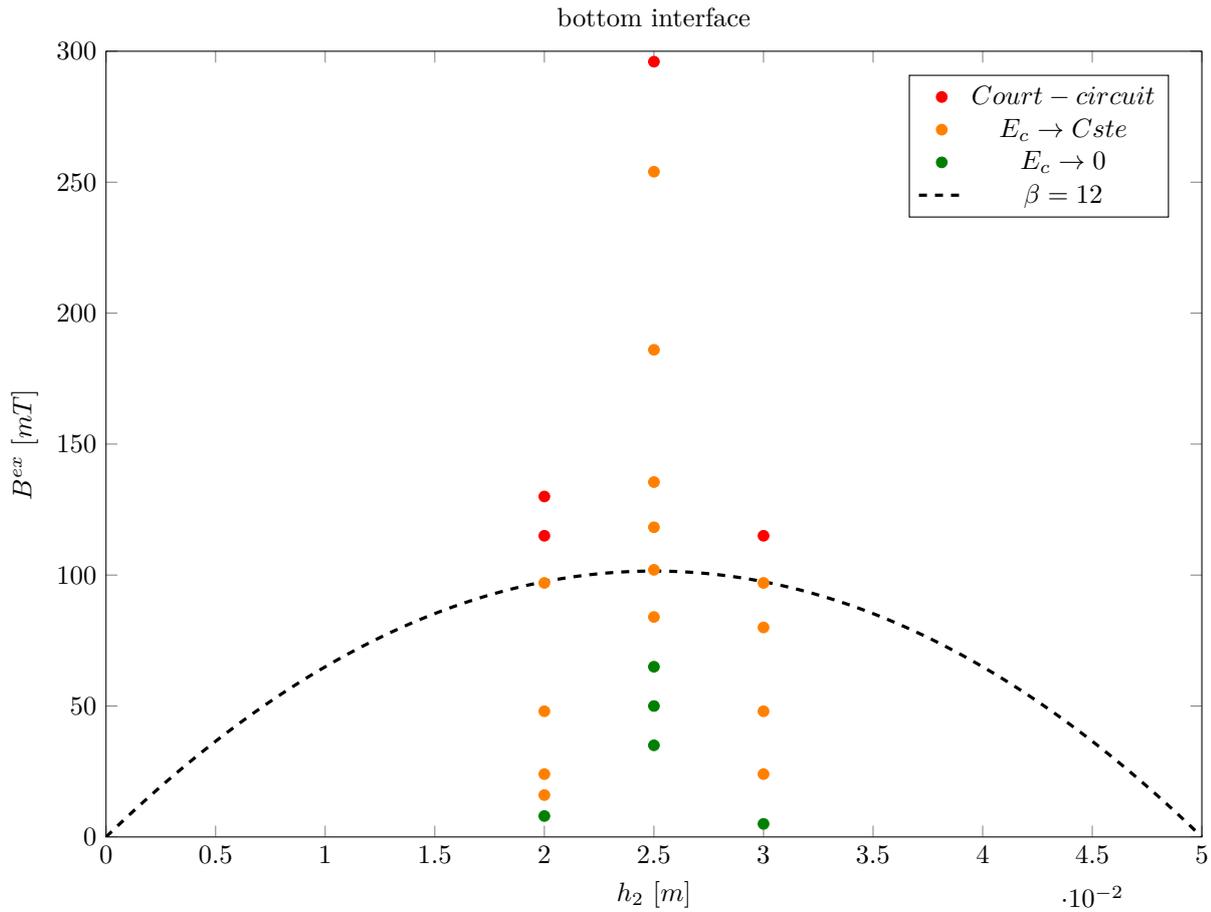


FIGURE 4.6 – Carte de stabilité déterminée à partir de simulations numériques effectuées avec Archer avec les propriétés des fluides du tableau 4.1 et les paramètres physiques du tableau 4.2 pour différentes valeurs du champ magnétique extérieur et d'épaisseur de la couche d'électrolyte. La courbe en pointillés représente le critère de Sele.

5.1 Conclusion

Les Batteries à Métaux Liquides (BML) ont récemment été introduites pour résoudre un important problème concernant le stockage de l'énergie du réseau électrique. Celui-ci n'ayant presque aucune capacité de stockage, l'électricité produite doit alors être immédiatement consommée, favorisant les sources d'énergie stockables telles que celles fossiles au détriment des sources d'énergie au caractère intermittent telles que celles renouvelables. Comme l'heure est à la transition énergétique, une multitude de nouvelles technologies concernant les accumulateurs, moyen le plus familier pour le stockage d'énergie, est alors étudiée, que ce soit pour des applications stationnaires telles qu'évoquées précédemment ou pour des applications de mobilité telles que dans les transports ou l'Internet des objets. On peut notamment citer, outre les BML, les batteries tout-solide ou les supercondensateurs. S'agissant des applications stationnaires, les BML semblent être des candidates idéales de par leur faible coût global de possession ainsi que leur forte cyclabilité. Les BML sont composées de deux électrodes (une anode et une cathode) séparées par un électrolyte. Leur particularité est que ces trois composantes sont liquides. Il est donc nécessaire d'étudier leurs écoulements et notamment les conditions de leur stabilité à l'intérieur de ces BML pour éviter un court-circuit qui interviendrait en cas de contact des deux électrodes.

Pour cela, parmi de nombreuses instabilités hydrodynamiques pouvant même coexister au sein d'une batterie à métaux liquides, seulement les instabilités interfaciales dues à la redistribution du courant électrique et non à la thermique ont été étudiées dans cette thèse. Ces instabilités interfaciales peuvent avoir le comportement d'une onde progressive pour des systèmes infinis ou en considérant des perturbations de petites longueurs d'onde ; elles peuvent en revanche avoir le comportement d'une onde stationnaire, tournant le long des parois pour des systèmes bornés ou en considérant des perturbations de grandes longueurs d'onde.

Trois principales difficultés ont été dénombrées pour le développement d'un modèle de batterie à métaux

liquides permettant de cibler une instabilité interfaciale progressive du point de vue d'une analyse linéaire de stabilité. La première difficulté est la prise en compte de trois couches fluides, alourdissant les calculs et augmentant le nombre de valeurs propres. La deuxième difficulté est la prise en compte de la viscosité (et dans une moindre mesure de la tension de surface) ne permettant plus la résolution analytique du problème aux valeurs propres. La troisième difficulté est la prise en compte du champ électromagnétique imposant un couplage entre les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour la mécanique des fluides et les équations de Maxwell pour l'électromagnétisme.

Lors du deuxième chapitre, les deux premières difficultés ont été considérées et ainsi, une analyse linéaire de stabilité a été réalisée pour étudier l'effet de la viscosité et de la tension de surface dans un système composé de trois fluides newtoniens incompressibles immiscibles superposés sous le champ de gravité. Outre le fait d'étudier l'écoulement dans une batterie à métaux liquides sans la moindre présence d'un champ magnétique, cela a permis dans un premier temps d'étudier le couplage entre les interfaces ; le paramètre caractérisant ce couplage étant le produit entre le nombre d'onde de la perturbation et l'épaisseur de la couche intermédiaire $H = kh$. Lorsque H est suffisamment grand, ce système tend vers deux sous-systèmes fluides à deux couches différents. Cela a également permis dans un second temps de faire une validation croisée de cette théorie avec des simulations numériques directes ; pour cela, il faut choisir un système d'intérêt, résoudre le problème aux valeurs propres puis résoudre le problème aux valeurs initiales en imposant uniquement dans ce cas la forme sinusoïdale des deux interfaces. Le système d'intérêt est composé d'une interface gravitationnellement instable en bas et d'une interface gravitationnellement stable en haut pour mettre en évidence respectivement l'instabilité de Rayleigh-Taylor et une onde de gravité ainsi que le couplage entre ces deux phénomènes. Les paramètres physiques correspondent à un système symétrique composé d'une couche d'eau entourée de deux couches d'huile étudié expérimentalement dans un travail précédent. Les coefficients temporels sans dimension de la perturbation $\Omega = \omega g^{-1/2} k^{-1/2}$ ont alors été déterminés en fonction de H . Les simulations numériques ont été réalisées pour différentes valeurs de H en utilisant le code maison Archer initialisé à la fois par la position initiale des interfaces et les vitesses initiales dans l'ensemble du domaine. Cela nous a permis de comparer l'évolution temporelle des positions des interfaces. Les résultats théoriques sont confortés jusqu'à ce que l'amplitude d'une interface devienne trop grande au même titre que les effets non linéaires de l'écoulement. Nous avons identifié trois régimes principaux pour le comportement des interfaces lorsque H varie : deux régimes couplés, le régime à mode dominant stable et le régime à mode dominant instable et un régime découplé. Lorsque H est proche de zéro, l'amplitude des modes de valeurs propres complexes des deux interfaces est bien plus grande que celle du mode de valeur propre réelle positive. Ensuite, lorsque H augmente, le mode de valeur propre réelle positive est dominant pour les deux interfaces. Enfin, lorsque H continue d'augmenter, les interfaces se découpent. L'amplitude du mode de valeur propre réelle positive est dominante pour l'interface inférieure (gravitationnellement instable), tandis que celle des modes de valeurs propres complexes est dominante pour l'interface supérieure (gravitationnellement stable).

Ces résultats probants donnent une certaine confiance en la méthode utilisée et le champ magnétique peut être ajouté sereinement dans la théorie bien qu'aucune simulation ne permette pour le moment, au CORIA, de faire une validation croisée aussi précise que celle effectuée dans le deuxième chapitre.

Dans le but de toujours considérer deux des trois principales difficultés, lors du troisième chapitre une

analyse linéaire de stabilité a été réalisée pour étudier principalement l'effet du champ magnétique. Dans un premier temps, les première et troisième difficultés ont été considérées (la prise en compte des trois couches fluides et de la viscosité) et ainsi, l'effet du champ magnétique sur un système composé de trois fluides non visqueux incompressibles immiscibles superposés sous le champ de gravité a été étudié. Dans un second temps, les trois difficultés sont unifiées permettant de modéliser l'instabilité interfaciale progressive dans une batterie à métaux liquides soumise à des perturbations de petites longueurs d'ondes. Le système d'intérêt est ici inspiré du travail théorique de SNEYD 1985 sur deux systèmes relativement proches des batteries à métaux liquides avec les propriétés des fluides du travail numérique de WEBER, BECKSTEIN, HERREMAN et al. 2017 sur un modèle de ces batteries. Pour cet ensemble donné de paramètres liés aux propriétés des fluides, le problème aux valeurs propres a été résolu en faisant varier un paramètre de fonctionnement de la batterie : un champ magnétique adimensionné, b , et notamment à travers le courant électrique ainsi que le paramètre de couplage H , afin de déterminer les coefficients temporels de la perturbation. Cela permet d'obtenir une carte indiquant la stabilité du système pour un couple (H, b) donné. Un champ magnétique critique b_c uniquement dû au courant électrique imposé au système et à partir duquel ce dernier peut potentiellement se déstabiliser est alors déterminé. Celui-ci augmente et donc favorise la stabilité lorsque la masse volumique adimensionnée du milieu (1), R_1 augmente et lorsque la masse volumique adimensionnée du milieu (3), R_3 diminue. Naturellement, lorsque les tensions de surface adimensionnées Γ_{12} et Γ_{23} augmentent, le domaine de stabilité du système s'élargit. La viscosité n'a pas d'effet sur le domaine de stabilité ; elle ralentit seulement l'évolution de la perturbation. Dans le but de brièvement étudier le caractère stationnaire de l'instabilité interfaciale dans les batteries à métaux liquides, lors du quatrième chapitre une méthode énergétique a été utilisée pour étudier les effets de bords ainsi que les effets du champ magnétique sur un système composé de deux couches fluides. Cela a notamment permis de retrouver le critère de stabilité des cellules de réduction de l'aluminium proposé par Sele. Cela permet alors de poser les bases du calcul d'un critère de Sele généralisé prenant en compte toutes les difficultés expliquées précédemment.

Enfin de nouvelles simulations numériques directes ont été effectuées avec le code maison Archer. Le système d'intérêt étant similaire à celui étudié par SELE 1977 ; les propriétés des fluides étant toujours celles utilisées par WEBER, BECKSTEIN, HERREMAN et al. 2017 dans le cas de l'étude d'une batterie à métaux liquides. Ces simulations ont montré que le système était stable seulement lorsque le critère de Sele était vérifié. Cependant pour certaines valeurs des paramètres physiques, le comportement de l'interface dont l'amplitude atteint une valeur seuil puis dont l'onde continue de tourner le long des parois n'était pas prévisible par cette théorie.

Le deuxième chapitre a fait l'objet de plusieurs contributions :

- Une présentation lors d'une conférence internationale :
A. Simon , M. -C. Renoult. "Viscous theory for three-layer Rayleigh-Taylor instability". ICMF 2023, 2023, Kobe, Japan.
- Deux présentations lors d'un GDR :
A. Simon, J. C. Brändle de Motta , C. Dumouchel , M. -C. Renoult. "Viscous theory for 3 layers Rayleigh Taylor instability". GDR TRANSINTER, 2022, Aussois, France.

A. Simon, J. C. Brändle de Motta, C. Dumouchel, M.-C. Renoult. "Study of an interfacial instability in a 3-layer fluid system". GDR TRANSINTER, 2023, Aussois, France.

— Un article soumis mais refusé par le journal *Journal of Fluid Mechanics* et en cours de modification pour une nouvelle soumission dans le journal *Physica D : Nonlinear Phenomena* :

A. Simon, J. C. Brändle de Motta, C. Dumouchel and M.-C. Renoult. "Study of interfacial instabilities in three-layer fluid systems", 2024.

Le troisième chapitre a fait l'objet de plusieurs contributions également :

— Deux présentations lors d'une conférence internationale :

A. Simon, J. C. Brändle de Motta, C. Dumouchel and M.-C. Renoult. "Theoretical study of metal pad roll instability in a liquid metal battery", ICMF 2023, 2023, Kobe, Japan.

A. Simon, J. C. Brändle de Motta, C. Dumouchel and M.-C. Renoult. "Theoretical (and numerical) study of pad roll instability in a three fluid-layers system". EFMC14, 2022, Athènes, Greece.

— Un symposium :

A. Simon, J. C. Brändle de Motta, C. Dumouchel and M.-C. Renoult. "Study of the coupling between 2 interfaces in a model of liquid metal battery". Symposium in honour of Prof. Innocent Mutabazi, Sep 2023, Le Havre, France.

5.2 Perspectives

Concernant le deuxième chapitre, les perspectives sont, premièrement, d'effectuer des simulations numériques pour une plus grande gamme de valeurs du paramètre de couplage. Deuxièmement, le choix d'un cas d'étude non symétrique devrait être fait, ce qui augmenterait considérablement le nombre de paramètres à faire varier pour l'étude paramétrique, mais permettrait de mieux comprendre les écoulements dans des systèmes à trois couches dans leur globalité. Enfin, en vue des connaissances acquises sur le couplage entre les interfaces, des expériences permettraient de comparer l'ensemble des valeurs propres vis-à-vis du poids de chaque mode sur les interfaces. Cela permettra de parfaitement comprendre le couplage entre les interfaces en fonction de l'épaisseur les séparant.

Concernant le troisième chapitre, des simulations numériques devraient être effectuées en prenant en compte le champ magnétique, et ainsi la résolution du problème aux valeurs initiales devrait être réalisée pour permettre une validation croisée. Enfin, une étude plus poussée des effets de la viscosité sur les valeurs propres devrait également être menée, bien que l'on s'attende à ce que la viscosité n'ait pas d'effet sur les conditions de stabilité, mais seulement sur les valeurs propres.

Concernant le dernier chapitre, deux principales perspectives de ce travail sont dénombrées. La première est évidemment de poursuivre le travail sur la méthode énergétique pour obtenir un critère de Sele généralisé. La seconde perspective est d'ordre numérique : il s'agit d'approfondir le travail des simulations. Pour ces simulations, une étude plus complète de convergence en maillage devrait être réalisée. De plus, la couche supérieure de métal liquide devrait également être considérée. Ainsi, en faisant varier la forme des perturbations et notamment leur longueur d'onde, une validation croisée pourrait être effectuée avec, d'une part, un modèle du caractère progressif de l'instabilité interfaciale dans les batteries à métaux liquides utilisant une technique dite des modes normaux et permettant une comparaison de l'évolution

temporelle des quantités physiques telles que la position des interfaces. Cette corrélation croisée pourrait être réalisée avec, d'autre part, un modèle du caractère stationnaire de ces batteries utilisant une méthode énergétique ne permettant que de supporter les conditions de stabilité du système.

Ainsi, le point le plus important de ces perspectives est de continuer le développement de la partie électromagnétique du code Archer. Une thèse est d'ailleurs prévue au CORIA sur ce sujet. Pour développer la partie électromagnétique du code Archer, couplant les méthodes VOF et Level Set, la méthode numérique développée par GODINEZ-BRIZUELA et al. 2023 pour simuler la déformation des interfaces de l'électrolyte due aux déplacements des espèces lors des réactions chimiques dans les batteries à métaux liquides $Na||Zn$ et utilisant la méthode VOF pour le suivi d'interface pourrait être utilisée. De même, les simulations 3D d'une cellule de réduction de l'aluminium de MUNGER et VINCENT 2006, utilisant la méthode Level Set pour la représentation de l'interface, pourraient servir de base à ce développement des simulations numériques.

D'autres perspectives d'un ordre moindre dans le contexte de ce travail seraient, par exemple, de déterminer les conditions de stabilité d'un système donné en diminuant le risque d'instabilité, en implémentant par exemple une structure de grille à l'intérieur du système permettant de réduire l'effet de la force de Lorentz B. LI et al. 2023; C. LI et al. 2023, ou bien en améliorant la mouillabilité des électrodes positives ZHOU et NING 2023.

Un autre système fort intéressant à étudier est une batterie à métaux liquides possédant une électrode négative en mousse métallique ZHENG et al. 2018. Cette mousse possède une porosité élevée, augmentant la surface active et permettant une interaction plus efficace avec l'électrolyte. Une amélioration de la cyclabilité et une meilleure conductivité thermique et électrique, permettant d'éviter d'augmenter le prix de la batterie à métaux liquides pour l'isoler correctement, en fait également un bon candidat pour résoudre le problème lié au stockage du réseau électrique.

Bibliographie

- ADKINS, R. et al. (2017). "Interface coupling and growth rate measurement in multilayer Rayleigh-Taylor instabilities." In : *Phys. Rev. Fluids* 2, p. 1-8. DOI : [10.1103/PhysRevFluids.2.062001](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.2.062001). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.2.062001>.
- BANERJEE, A. et al. (2020). "Interfaces and Interphases in All-Solid-State Batteries with Inorganic Solid Electrolytes". In : *Chem. Rev.* 120. DOI : [10.1021/acs.chemrev.0c00101](https://doi.org/10.1021/acs.chemrev.0c00101).
- BÉNARD, S. (2023). "Flows and mixing in liquid metal batteries". diplomathesis. Université Paris-Saclay.
- BERNSTEIN, I. B. et al. (1958). "An energy principle for hydromagnetic stability problems". In : *Proc. R. Soc. A* 244, p. 17-40. ISSN : 0080-4630. DOI : [10.1098/rspa.1958.0023](https://doi.org/10.1098/rspa.1958.0023).
- BOJAREVICS, V. et M. V. ROMERIO (1994). "Long waves instability of liquid metal-electrolyte interface in aluminium electrolysis cells: A generalization of Sele's criterion". In : *eur. J. Mech. B/Fluids* 13.
- BRACKBILL, J. U., D. B. KOTHE et C. ZEMACH (1992). "A continuum method for modeling surface tension". In : *J. Comput. Phys* 100.2, p. 335-354. ISSN : 00219991. DOI : [10.1016/0021-9991\(92\)90240-Y](https://doi.org/10.1016/0021-9991(92)90240-Y). URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/002199919290240Y>.
- BRADWELL, D. J. et al. (2012). "Magnesium-antimony liquid metal battery for stationary energy storage". In : *J. Am. Chem. Soc.* 134, p. 1895-1897.
- BRUCE, P. G. et al. (2012). "A perspective on lithium-air batteries". In : *Nat. Mater.* 11.1, p. 19-29. DOI : [10.1038/nmat3191](https://doi.org/10.1038/nmat3191).
- BUCKINGHAM, E. (1914). "On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations." In : *Phys. Rev.* 4, p. 345-375.
- CHANDRASEKHAR, S. (1961). *Hydrodynamic and hydromagnetic instability*. Oxford University Press.
- CHARPENTIER, J. -B., J. C. Brändle de MOTTA et T. MÉNARD (2020). "Capillary phenomena in assemblies of parallel cylindrical fibers: From statics to dynamics". In : *Int. J. Multiph. Flow* 129, p. 103304. ISSN : 0301-9322. DOI : [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103304](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103304). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932219309735>.
- CHEN, T. et al. (2019). "Simulation of Immiscible Two-Phase Flows Based on a Kinetic Diffuse Interface Approach". In : *10th International Conference on Multiphase Flow*, 10th International Conference on Multiphase Flow, Brazil, p. 10. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02315240>.

- COTTIER, L., G. BRENN et M. -C. RENOULT (2021). “Initial conditions to study the temporal behaviour of a viscoelastic liquid jet under perturbation.” In : *At. Sprays* 31, p. 73-87.
- CUI, K. et al. (2022). “Low-Temperature and High-Energy-Density Li-Based Liquid Metal Batteries Based on LiCl–KCl Molten Salt Electrolyte”. In : *ACS Sustain. Chem. Eng.* 10, p. 1871-1879. DOI : [10.1021/acssuschemeng.1c07560](https://doi.org/10.1021/acssuschemeng.1c07560).
- DAVIDSON, P. et R. LINDSAY (1998). “Stability of interfacial waves in aluminium reduction cells”. In : *J. Fluid Mech.* 362, p. 273-295. DOI : <https://doi.org/10.1017/S0022112098001025>.
- DEBERNE, C. et al. (2024). “Breakup prediction of oscillating droplets under turbulent flow”. In : *Int. J. Multiph. Flow* 173, p. 104731. ISSN : 03019322. DOI : [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2024.104731](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2024.104731). URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0301932224000132>.
- DING, Y. et al. (2020). “Room-Temperature All-Liquid-Metal Batteries Based on Fusible Alloys with Regulated Interfacial Chemistry and Wetting”. In : *Adv. Mater.* 32, p. 2002577. DOI : [10.1002/adma.202002577](https://doi.org/10.1002/adma.202002577).
- DUMOUCHEL, C. et al. (2017). “Multi-scale analysis of simulated capillary instability”. In : *Int. J. Multiph. Flow* 92, p. 181-192. ISSN : 03019322. DOI : [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2017.03.012](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2017.03.012). URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0301932216305766>.
- GIRIFALCO, L. A. et R. J. GOOD (1957). “A theory for the estimation of surface and interfacial energy. I. Derivation and application to interfacial tension”. In : *J. Phys. Chem.* 61, p. 904-909.
- GODINEZ-BRIZUELA, O. et al. (2023). *A continuous multiphase model for liquid metal batteries*.
- HARRISON, W. J. (1908). “The influence of viscosity on the oscillations of superposed fluids.” In : *Proc. London Math. Soc.* s2-6, p. 396-405.
- HERREMAN, W., S. BÉNARD et al. (2020). “Solutal buoyancy and electrovortex flow in liquid metal batteries”. In : *Phys. Rev. Fluids* 5. DOI : [10.1103/PhysRevFluids.5.074501](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.5.074501).
- HERREMAN, W., C. NORE, L. CAPPANERA et J. -L. GUERMOND (2020). “Efficient mixing by swirling electrovortex flows in liquid metal batteries”. In : *J. Fluid Mech.* DOI : [10.1017/jfm.2021.79](https://doi.org/10.1017/jfm.2021.79).
- (2015). “Taylor instability in liquid metal columns and liquid metal batteries”. In : *J. Fluid Mech.* 771, p. 79-6114. DOI : [10.1017/jfm.2015.159](https://doi.org/10.1017/jfm.2015.159).
- HERREMAN, W., C. NORE, J. -L. GUERMOND et al. (2019). “Perturbation theory for metal pad roll instability in cylindrical reduction cells”. In : *J. Fluid Mech.* 878, p. 598-646. DOI : [10.1017/jfm.2019.642](https://doi.org/10.1017/jfm.2019.642).
- HERREMAN, W., C. NORE, P. RAMOS et al. (2019). “Numerical simulation of electro-vortex flows in cylindrical fluid layers and liquid metal batteries”. In : *Phys. Rev. Fluids*. DOI : [10.1103/PhysRevFluids.4.113702](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.4.113702).
- HERREMAN, W., L. WIERZCHALEK et al. (2023). “Stability theory for metal pad roll instability in cylindrical liquid metal batteries”. In : *J. Fluid Mech.* 962. DOI : [10.1017/jfm.2023.238](https://doi.org/10.1017/jfm.2023.238).
- HORSTMANN, G. M., N. WEBER et T. WEIER (2018). “Coupling and stability of interfacial waves in liquid metal batteries”. In : *J. Fluid Mech.* 845, p. 1-35. DOI : [10.1017/jfm.2018.223](https://doi.org/10.1017/jfm.2018.223).
- JACOBS, J. W. et S. B. DALZIEL (2005). “Rayleigh Talor instability in complex stratifications.” In : *J. Fluid Mech.* 542, p. 251-279.

- KELLEY, D. H. et T. WEIER (2018). “Fluid mechanics of liquid metal batteries”. In : *Appl. Mech. Rev.* 70, p. 1-23.
- KIM, H. et al. (2012). “Liquid metal batteries: past present and future”. In : *Chem. Rev.* 113, p. 2075-2099.
- KIM, J. et al. (2018). “LiCl-LiI molten salt electrolyte with bismuth-lead positive electrode for liquid metal battery”. In : *J. Power Sources* 377, p. 87-92. DOI : [10.1016/j.jpowsour.2017.11.081](https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2017.11.081).
- LAMB, Sir Horace (1895). *Hydrodynamics*. Cambridge University Press.
- LI, B. et al. (2023). “An Approach for Suppressing Fluid Instabilities in Liquid Metal Battery with an Internal Structure”. In : *J. Phys. Conf. Ser.* 2584, p. 012003. DOI : [10.1088/1742-6596/2584/1/012003](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2584/1/012003).
- LI, C. et al. (2023). “A new method to suppress the MHD instability of cylindrical liquid metal batteries”. In : *E3S Web Conf.* 385. DOI : [10.1051/e3sconf/202338503033](https://doi.org/10.1051/e3sconf/202338503033).
- LI, H. et al. (2016). “High Performance Liquid Metal Battery with Environmental Friendly Antimony-Tin Positive Electrode”. In : *ACS Appl. Mater. Interfaces* 8, p. 12830-12835. DOI : [10.1021/acsami.6b02576](https://doi.org/10.1021/acsami.6b02576).
- MARKEY, P. et R. J. TAYLER (1974). “The Adiabatic Stability of Stars Containing Magnetic Fields – III: ADDITIONAL RESULTS FOR POLOIDAL FIELDS”. In : *MNRAS* 168.3, p. 505-514. ISSN : 0035-8711. DOI : [10.1093/mnras/168.3.505](https://doi.org/10.1093/mnras/168.3.505). URL : <https://doi.org/10.1093/mnras/168.3.505>.
- MAXWELL, J. C. (1876). “Capillary action.” In : *Ency. Brit., 9th ed., 1875-89* 5, p. 56-71.
- MÉNARD, T., S. TANGUY et A. BERLEMONT (2007). “Coupling level set/VOF/ghost fluid methods: Validation and application to 3D simulation of the primary break-up of a liquid jet”. In : *Int. J. Multiph. Flow* 33.5, p. 510-524. ISSN : 03019322. DOI : [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2006.11.001](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2006.11.001).
- MIKAEILIAN, K. O. (1996). “Rayleigh-Taylor instabilities in finite-thickness fluids with viscosity and surface tension.” In : *Phys. Rev. E* 54, p. 3676-3680.
- (1982). “Rayleigh-Taylor instabilities in stratified fluids.” In : *Phys. Rev. A* 26, p. 2140-2158.
- MUNGER, D. et A. VINCENT (2006). “Direct simulations of MHD instabilities in aluminum reduction cells”. In : *Magnetohydrodynamics* 42.
- Nawa (s. d.). URL : <https://nawah.fr>.
- NITTA, N. et al. (2015). “Li-ion battery materials: present and future”. In : *Mater. Today Commun.* 18.5, p. 252-264. ISSN : 1369-7021. DOI : [10.1016/j.mattod.2014.10.040](https://doi.org/10.1016/j.mattod.2014.10.040). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1369702114004118>.
- PARHI, S. et G. NATH (1991). “A sufficient criterion for Rayleigh-Taylor instability of incompressible viscous three-layer flow.” In : *G. Int. J. Eng. Sci.* 29, p. 1439-1450.
- RAYLEIGH, Lord (1883). “Investigation on the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density.” In : *Proc. London Math. Soc.* s1-14, p. 170-177.
- (1880). “On the stability, or instability, of certain fluid motion.” In : *Proc. London Math. Soc.* s1-11, p. 57-72.
- ROA, I. et al. (2023). “Droplet oscillations in a turbulent flow”. In : *Front. Phys.* Physics of Droplets - Edited by Carole Planchette 11, p. 1173521. ISSN : 2296-424X. DOI : [10.3389/fphy.2023.1173521](https://doi.org/10.3389/fphy.2023.1173521). URL : <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fphy.2023.1173521/full>.

- RUDMAN, M. (1998). "A volume-tracking method for incompressible multifluid flows with large density variations". In : *Int. J. Numer. Methods Fluids* 28.2, p. 357-378. ISSN : 0271-2091, 1097-0363. DOI : [10/fn7v9p](https://doi.org/10.1002/%28SICI%291097-0363%2819980815%2928%3A2%3C357%3A%3AAID-FLD750%3E3.0.CO%3B2-D). URL : <http://doi.wiley.com/10.1002/%28SICI%291097-0363%2819980815%2928%3A2%3C357%3A%3AAID-FLD750%3E3.0.CO%3B2-D>.
- SELE, T. (1977). "Instabilities of the metal surface in electrolytic alumina reduction cells". In : *Metall. Mater. Trans. B* 8, p. 613-618.
- SELIG, F. (1964). "Variational principle for Rayleigh-Taylor instability". In : *Phys. Fluids* 7, p. 1114-1116. DOI : [10.1063/1.1711350](https://doi.org/10.1063/1.1711350).
- SHEN, Y. et O. ZIKANOV (2016). "Thermal convection in a liquid metal battery". In : *Theor. Comput. Fluid Dyn.* 30. DOI : [10.1007/s00162-015-0378-1](https://doi.org/10.1007/s00162-015-0378-1).
- SIMPSON, J. G. et al. (2021). "Liquid metal battery storage in an offshore wind turbine: Concept and economic analysis". In : *Renew. Sustain. Energy Rev.* 149, p. 111387. ISSN : 1364-0321. DOI : [10.1016/j.rser.2021.111387](https://doi.org/10.1016/j.rser.2021.111387). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364032121006729>.
- SNEYD, A. D. (1985). "Stability of fluid layers carrying a normal electric current." In : *J. Fluid Mech.* 156, p. 223-236.
- SNEYD, A. D. et A. WANG (1994). "Long waves instability of liquid metal-electrolyte interface in aluminium electrolysis cells: A generalization of Sele's criterion". In : *J. Fluid Mech.* 53, p. 343-360. DOI : [10.1017/S0022112094004143](https://doi.org/10.1017/S0022112094004143).
- SUSSMAN, M. et al. (2007). "A sharp interface method for incompressible two-phase flows". In : *J. Comput. Phys.* 221.2, p. 469-505. ISSN : 00219991. DOI : [10.1016/j.jcp.2006.06.020](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.06.020). URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0021999106002981>.
- TAYLOR, Sir Geoffrey (1950). "The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes". In : *Proc. R. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci.* 201, p. 192-196.
- THOMSON, Sir (1871). "Hydrokinetic solutions and observations." In : *Lond. Edinb. Dublin philos. mag. j. sci.* s4-42, p. 362-377.
- VAUDOR, G. et al. (2017). "A consistent mass and momentum flux computation method for two phase flows. Application to atomization process". In : *Comput. Fluids* 152, p. 204-216. ISSN : 00457930. DOI : [10.1016/j.compfluid.2017.04.023](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2017.04.023).
- WANG, K. et al. (juill. 2021). "A High Performance Room-Temperature Li||Ga-Sn Liquid Metal Battery for Grid Energy Storage". In : *Energy Technol.* 9. DOI : [10.1002/ente.202100330](https://doi.org/10.1002/ente.202100330).
- WEBER, N., P. BECKSTEIN, V. GALINDO et al. (2017). "Metal pad roll instability in liquid metal batteries". In : *MAGNETOHYDRODYNAMICS* 53, p. 3-13.
- WEBER, N., P. BECKSTEIN, W. HERREMAN et al. (2017). "Sloshing instability and electrolyte layer rupture in liquid metal batteries". In : *Phys. Fluids* 29, p. 1-15.
- XU, J. et al. (2016). "Na-Zn liquid metal battery". In : *Journal of Power Sources* 332, p. 274-280. ISSN : 0378-7753. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2016.09.125>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378775316313143>.
- YUEGUANG, D., J. YI et L. JING (2021). "Liquid metal technology in solar power generation - Basics and applications". In : *Sol. Energy Mater. Sol. Cells* 222, p. 110925. ISSN : 0927-0248. DOI : [10.1016/j.solmat.2021.110925](https://doi.org/10.1016/j.solmat.2021.110925).

- [1016/j.solmat.2020.110925](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0927024820305213). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0927024820305213>.
- ZENG, Q. et al. (2023). “Electrolytes for Liquid Metal Batteries”. In : *Mater. Res. Bull.* 170. DOI : [10.1016/j.materresbull.2023.112586](https://doi.org/10.1016/j.materresbull.2023.112586).
- ZHAO, X. et al. (2023). “Design of Refined Quaternary Electrolyte LiFLiClLiBrLiI Used for the Liquid Metal Battery”. In : *ChemPhysChem* 25. DOI : [10.1002/cphc.202300546](https://doi.org/10.1002/cphc.202300546).
- ZHENG, Y. et al. (2018). “High-Capacity All-Solid-State Sodium Metal Battery with Hybrid Polymer Electrolytes”. In : *Adv. Energy Mater.* 8, p. 1801885. DOI : [10.1002/aenm.201801885](https://doi.org/10.1002/aenm.201801885).
- ZHOU, Y. (2017). “Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instability induced flow, turbulence and mixing. I”. In : *Phys. Rep.* 720–722, p. 1-136.
- ZHOU, Y. et X. NING (2023). “Improving Wettability at Positive Electrodes to Enhance the Cycling Stability of Bi-Based Liquid Metal Batteries”. In : *Small*. DOI : [10.1002/smll.202304528](https://doi.org/10.1002/smll.202304528).
- ZIKANOV, O. (2021). “Long waves instability of liquid metal-electrolyte interface in aluminium electrolysis cells: A generalization of Sele’s criterion”. In : *MAGNETOHYDRODYNAMICS* 53, p. 3-13.

