



HAL
open science

Sur la propriété de stabilité pour les Espaces de Banach

Yves Raynaud

► **To cite this version:**

Yves Raynaud. Sur la propriété de stabilité pour les Espaces de Banach. Mathématiques [math].
Université Paris 7, 1981. Français. NNT: . tel-04828095

HAL Id: tel-04828095

<https://theses.hal.science/tel-04828095v1>

Submitted on 9 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PARIS VII

THESE 3^{ème} CYCLE

SPECIALITE : MATHEMATIQUES

PRESENTEE PAR: YVES RAYNAUD

SUJET de la THESE : "SUR LA PROPRIÉTÉ DE STABILITÉ POUR
LES ESPACES DE BANACH"

soutenu le, 22.1.1981 devant la commission d'examen

JURY: MM. J.L. KRIVINE Président

B. MAUREY Examineur

M. ROGALSKI "

INTRODUCTION

Les espaces de Banach stables ont été introduits par J.L.Krivine et B.Maurey. Caractérisés par une condition simple sur la norme, qui est héritée par leurs sous-espaces, ils forment le cadre général permettant d'étendre un résultat de D.Aldous (sur l'existence de sous-espaces isomorphes à l^p dans les sous-espaces de \mathbb{L}^1). En effet ils contiennent, pour un $p \geq 1$, et pour tout $\varepsilon > 0$, un sous-espace $(1+\varepsilon)$ -isomorphe à l^p .

Le chapitre I du présent travail étudie, d'une manière un peu plus générale, la propriété de stabilité pour une fonction de deux variables, et donne un théorème de représentation au moyen d'un espace réflexif, valable dans le cas le plus général, et souvent utilisé par la suite.

L'étude de la propriété de stabilité des espaces de Banach est ensuite menée dans deux directions principales:

a) étude de la conservation de la stabilité sous certaines opérations classiques: c'est l'objet du chapitre II, qui étudie notamment les produits directs, les interpolés et les quotients d'espaces stables. Les résultats sont obtenus toutefois dans des cas assez particuliers, les cas généraux restant ouverts.

b) démonstration de la stabilité d'espaces classiques.

Outre la stabilité des quotients des l^p , traitée au chap. II, on trouvera démontrées au chapitre III celle des espaces d'Orlicz de fonctions à valeurs dans un espace de Banach (stable), sous les conditions " Δ_2 ", ainsi que celle des espaces de Lorentz. (de fonctions vectorielles).

Ce dernier point est à rapprocher du point a), puisque les espaces de Lorentz sont (en théorie isomorphe) les interpolés des espaces \mathbb{L}^p .

Le chapitre IV étudie la super-propriété correspondant à la stabilité. On y démontre notamment la superstabilité de $\mathbb{L}^p(E)$ lorsque E est superstable. L'introduction de la notion de famille uniformément superstable d'espaces permet de généraliser un peu ce résultat. (par exemple aux sommes directes du type $\bigoplus_2 \mathbb{L}^{p_i}(E)$).

Signalons au passage une propriété obtenue récemment et montrant l'intérêt des espaces superstables: un espace de Banach s'appliquant dans un espace superstable par un homéomorphisme uniforme contient un isomorphe d'un l^p .

On notera que le chapitre IV met en relief les relations étroites entre la notion de superstabilité et celle d'opérateurs uniformément convexifiant introduite par B. Beauzamy voici quelques années.

Pour terminer, je tiens à remercier M.J.L. Krivine qui a assumé la direction de ce travail (et m'en a suggéré le thème); M.B. Maurey, qui m'a constamment aidé; M.M. Rogalski, qui a bien voulu l'examiner; les membres du groupe de travail sur la géométrie des Banach, dont la gentillesse m'a aidé à passer les caps difficiles.

TABLE DES MATIERES

Chapître I: Propriété de stabilité pour les fonctions de
deux variables. p 1.
§ A: Propriété de stabilité. p 1.
§ B: Passage aux mesures et linéarisation. p 6.

Chapître II: Espaces de Banach stables.(Résultats sur la
classe des espaces de Banach stables). p 10.
Définition;généralités. p 10.
Somme directe d'espaces stables. p 11.
Perturbation de la boule-unité d'un espace stable. . p 14.
Quotients de l^p p 16.

Chapître III: Stabilité de quelques espaces fonctionnels
classiques. p 20.
§ A: Stabilité des espaces d'Orlicz. p 20.
§ B: Une propriété de stabilité en loi. p 26.
§ C: Stabilité des espaces de Lorentz. p 32.

Chapître IV: Superstabilité. p 51.
§ A: Fonctions superstables. p 51.
§ B: Fonctions numériques superstables.Théorème de
représentation. p 58.
§ C: Espaces de Banach superstables. p 63.

Bibliographie. p 73.

Chapître I
 Propriété de stabilité pour
 les fonctions de deux variables

Dans ce chapitre on rappelle et développe la notion de stabilité pour une fonction de deux variables, notion qui a été introduite dans [M-K] essentiellement dans le cas particulier de la norme des espaces de Banach. (La stabilité des espaces de Banach faisant l'objet du chapitre 2).

Les résultats du B ci-dessous jouent un rôle central dans l'étude des rapports entre stabilité et intégration (et de la stabilité des espaces dont la norme est définie par une intégrale). Ils consistent en un procédé de (bi)-linéarisation par passage aux mesures, donné ici dans le cas "non dénombrable" — complétant ainsi [M-K].

A) Propriété de stabilité.

Définition 1. Soient X et Y deux ensembles, Γ un compact, et f une application de $X \times Y$ dans Γ . On dit que f est stable ssi elle est telle que:

(ST): Pour tout couple de familles $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_j)_{j \in J}$ d'éléments de X et Y respectivement, et tout couple d'ultrafiltres U sur I , V sur J , on a la propriété d'interversion des limites:

$$\lim_{i,U} \lim_{j,V} f(x_i, y_j) = \lim_{j,V} \lim_{i,U} f(x_i, y_j)$$

Remarque 2. On peut définir de même la "dénombrable stabilité" (DST) où l'on impose la condition d'égalité des limites que dans le cas des familles dénombrables. Mais dans les cas usuels ces propriétés coïncident:

Proposition 3. Si Γ est un compact métrisable, les propriétés de stabilité et de dénombrable stabilité sont équivalentes, ainsi qu'à la propriété suivante:

(DST'): Pour tout couple de suites $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, dans X , et $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ dans Y , il existe deux ultrafiltres non triviaux U et V sur \mathbb{N}_* , tels que:

$$\lim_{m,U} \lim_{n,V} f(x_m, y_n) = \lim_{n,V} \lim_{m,U} f(x_m, y_n)$$

Il est clair que (ST) entraîne (DST) qui entraîne (DST'). Le fait que (DST') entraîne (ST) résulte clairement du lemme suivant:

Lemme 4. Soient X, Y deux ensembles et (Γ, d) un espace métrique compact.

Soient $(x_i)_{i \in I}, (y_j)_{j \in J}$ deux familles d'éléments de $X, \text{ resp } Y$, et U, V deux ultrafiltres sur $I, \text{ resp } J$.

On peut trouver deux suites $(i_k)_{k=1}^\infty$ dans $I, (j_l)_{l=1}^\infty$ dans J telles que:

$$(1): \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{l > k} d(\lim_{i \in U} \lim_{j \in V} f(x_i, y_j), f(x_{i_k}, y_{j_l})) = 0$$

et $(2): \lim_{l \rightarrow \infty} \sup_{k \geq l} d(\lim_{j \in V} \lim_{i \in U} f(x_i, y_j), f(x_{i_k}, y_{j_l})) = 0.$

Il est clair qu'alors pour tout couple d'ultrafiltres non triviaux U' et V'

sur N on a: $\lim_{k \in U', l \in V'} \lim_{i \in U} \lim_{j \in V} f(x_i, y_j) = \lim_{i \in U} \lim_{j \in V} f(x_i, y_j)$

et: $\lim_{l \in V', k \in U'} \lim_{i \in U} \lim_{j \in V} f(x_i, y_j) = \lim_{j \in V} \lim_{i \in U} f(x_i, y_j)$ d'où $(DST') \rightarrow (ST).$

Preuve du lemme 4.

Soit $\alpha = \lim_{i \in U} \lim_{j \in V} f(x_i, y_j)$ et $\beta = \lim_{j \in V} \lim_{i \in U} f(x_i, y_j).$

Soit $(\epsilon_k)_{k=1}^\infty$ une suite de réels, $\epsilon_k > 0, \epsilon_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty.$

L'ensemble $A_1 = \{i \in I / d(\lim_{j \in V} f(x_i, y_j), \alpha) < \epsilon_1 / 2\}$ est dans U , donc non vide; soit i_1

l'un de ses éléments.

De même $B_1' = \{j \in J / d(f(x_{i_1}, y_j), \alpha) < \epsilon_1\} \supset \{j \in J / d(f(x_{i_1}, y_j), \lim_{j \in V} f(x_{i_1}, y_j)) < \epsilon_1 / 2\}$

qui est dans V ; donc B_1' est dans V . D'autre part :

$B_1'' = \{j \in J / d(\lim_{i \in U} f(x_i, y_j), \beta) < \epsilon_1 / 2\}$ est également dans V .

Donc $B_1 = B_1' \cap B_1''$ est aussi dans V ; soit j_1 dans B_1 .

Supposons avoir défini i_1, i_2, \dots, i_k et j_1, j_2, \dots, j_k tels que:

$$\forall l = 1, \dots, k, \quad d(\lim_{i \in U} f(x_i, y_{j_l}), \beta) < \epsilon_l / 2$$

$$\forall l = 1, \dots, k, \quad d(\lim_{j \in V} f(x_{i_l}, y_j), \alpha) < \epsilon_l / 2$$

On choisit alors i_{k+1} et j_{k+1} de la manière suivante:

$$i_{k+1} \in A_{k+1} = \{i \in I / \forall l = 1, \dots, k, d(f(x_i, y_{j_l}), \beta) < \epsilon_l\} \cap \{i \in I / d(\lim_{j \in V} f(x_i, y_j), \alpha) < \epsilon_{k+1} / 2\}$$

$$j_{k+1} \in B_{k+1} = \{j \in J / \forall l = 1, \dots, k+1, d(f(x_{i_l}, y_j), \alpha) < \epsilon_l\} \cap \{j \in J / d(\lim_{i \in U} f(x_i, y_j), \beta) < \epsilon_{k+1} / 2\}.$$

On obtient ainsi deux suites $(i_k)_{k=1}^\infty$ et $(j_l)_{l=1}^\infty$ telles que:

$$l < k \implies d(f(x_{i_k}, y_{j_l}), \beta) < \epsilon_k$$

$$k \geq l \implies d(f(x_{i_k}, y_{j_l}), \alpha) < \epsilon_l \text{ d'où le lemme.}$$

Remarque 5. Il est facile de déduire du lemme 4 la condition suivante de stabilité lorsque Γ est métrisable:

(DST'') pour tout couple de suites $\xi = (x_m)_{m=1}^\infty$ et $\eta = (y_n)_{n=1}^\infty$ d'éléments de

X, resp. Y, on a (en notant $A_{\xi\eta} = \{f(x_m, y_n) / m < n\}$): $\overline{A_{\xi\eta}} \cap \overline{A_{\eta\xi}} \neq \emptyset$.

Lorsque \mathbb{R} , ceci équivaut à:

(RST) Pour tout couple de suites $(x_m)_{m=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty$, on a:

$$\inf f(x_m, y_n) \leq \sup f(x_m, y_n)$$

Exemple 6. La réflexivité des espaces de Banach en termes de stabilité.

Soit E un espace de Banach et E^* son dual; et B_E, B_{E^*} leurs boules-unité respectives. L'application: $\langle B_E \times B_{E^*} \rangle \rightarrow [-1, +1], (x, y^*) \rightsquigarrow \langle x, y^* \rangle_{E \times E^*}$ est stable si et seulement si E est réflexif.

La suffisance de cette condition résulte de la faible compacité de B_E lorsque E est réflexif (et du fait que B_{E^*} est toujours préfaiblement compacte) tandis que l'application crochet de dualité est séparément continue pour les topologies $\sigma(E, E^*), \sigma(E^*, E)$. Si $(x_i)_{i \in I} \subset B_E$ et $(y_j^*)_{j \in J} \subset B_{E^*}$ et si U, V sont des ultrafiltres sur I, resp. J, on pose: $x_0 = \lim_{i, U} x_i$ et $y_0^* = \lim_{j, V} y_j^*$ et l'on a:

$$\lim_{i, U} \lim_{j, V} \langle x_i, y_j^* \rangle = \langle x_0, y_0^* \rangle = \lim_{j, V} \lim_{i, U} \langle x_i, y_j^* \rangle$$

La nécessité résulte de la prop.3 et du critère de réflexivité de JAMES (voir [BZY](4)): E n'est pas réflexif ssi l'on peut pour tout $\theta < 1$ trouver une suite $(x_m)_{m=1}^\infty$ dans B_E et une suite $(y_n^*)_{n=1}^\infty$ dans B_{E^*} , telles que:

$$\begin{aligned} n < m &\implies \langle x_m, y_n^* \rangle = \theta \\ n \geq m &\implies \langle x_m, y_n^* \rangle = 0 \end{aligned}$$

Fonctions stables et fonctions séparément continues sur un produit de compacts.

Si X et Y sont deux espaces topologiques compacts et si $f: X \times Y \rightarrow \Gamma$ est séparément continue, il est clair que f est stable (cf exemple 6).

Réciproquement si X et Y sont deux ensembles et si $f: X \times Y \rightarrow \Gamma$ est stable, on peut étendre f en une application séparément continue $\tilde{f}: K \times L \rightarrow \Gamma$ où K et L sont deux compacts contenant respectivement X et Y.

Il suffit en effet de poser $K = \beta X, L = \beta Y$, et si $(\xi, \eta) \in K \times L$,

$$\tilde{f}(\xi, \eta) = \lim_{x, U} \lim_{y, V} f(x, y)$$

où U (resp. V) est l'unique ultrafiltre sur X (resp. Y) tel que $\xi = \lim_{x, U} x$ dans βX (resp. $\eta = \lim_{y, V} y$ dans βY).

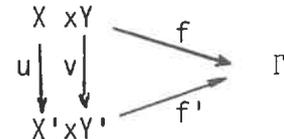
Les compactifiés de Stone-Čech ainsi introduits ne sont pas minimaux dans le sens qu'on va indiquer.

La définition suivante est introduite par commodité de vocabulaire.

Définition 7. On appellera morphisme de fonctions de deux variables à valeurs dans Γ (resp. de fonctions séparément continues à valeurs dans Γ), et on

notera $m: f \rightarrow f'$, un couple (u, v)

d'applications (resp. d'applications continues) rendant le diagramme ci-contre commutatif:



un épimorphisme sera alors un morphisme (u, v) dont les composantes u et v sont surjectives (resp. d'images denses).

Proposition 8. Soit $f: X \times Y \rightarrow \Gamma$ une fonction stable.

Il existe une fonction $g: K \times L \rightarrow \Gamma$, séparément continue sur un produit de compacts, et un épimorphisme $\pi: f \rightarrow g$, tels que: pour tout épimorphisme $\phi: f \rightarrow f'$ de f dans une fonction séparément continue (sur un produit d'espaces séparés), il existe un unique épimorphisme $\omega: f' \rightarrow g$ tel que $\omega \circ \phi = \pi$. De plus g et π sont uniques à isomorphisme près.

On peut exprimer ceci en disant que g et π forment la meilleure factorisation de f par une fonction séparément continue sur un produit de compacts.

Preuve.

Soit K l'adhérence de $\{f(x, \cdot) / x \in X\}$ dans Γ^Y ,

L " " $\{f(\cdot, y) / y \in Y\}$ dans Γ^X .

i l'application $x \rightsquigarrow f(x, \cdot) \in K$,

j " " $y \rightsquigarrow f(\cdot, y) \in L$,

et $\pi = (i, j)$.

Il existe une unique application g séparément continue prolongeant l'application $i(X) \times j(Y) \rightarrow \Gamma$, $(i(x), j(y)) \rightsquigarrow f(x, y)$ à $K \times L$.

Si $\sigma = \lim_{x, U} i(x)$ et $\tau = \lim_{y, V} j(y)$, on a:

$$\begin{aligned} g(\sigma, \tau) &= \lim_{x, U} \lim_{y, V} f(x, y) = \lim_{x, U} \tau(x) \\ &= \lim_{y, V} \lim_{x, U} f(x, y) = \lim_{y, V} \sigma(y) \end{aligned}$$

Si $f': X' \times Y' \rightarrow \Gamma$ est sép. continue et $\phi = (i', j')$ un épimorphisme de f dans f'

on pose: $p: X' \longrightarrow \Gamma^Y$, $x' \rightsquigarrow f'(x', j'(\cdot))$ et $\omega = (p, q)$
 $q: Y' \longrightarrow \Gamma^X$, $y' \rightsquigarrow f'(i'(\cdot), y')$

alors p et q sont continues, et l'on a:

$$(*) : x' = i'(x) \quad f'(x', j'(\cdot)) = f'(i'(x), j'(\cdot)) = f(x, \cdot) = i(x),$$

donc $p \circ i' = i$, et de même $q \circ j' = j$, soit $\omega \circ \phi = \pi$. De plus $p(X') = p(\overline{i'(X)}) \subset \overline{p(i'(X))} = \overline{i(X)} = K$.
 $p(X') \supset p(i'(X)) = i(X)$.

Donc p est bien une application d'image dense dans K, et de même pour q relativement à L. Enfin l'égalité $f'(x', y') = f(p(x), q(y))$, vraie sur $i'(X) \times j'(Y)$, s'étend par densité à $X' \times Y'$. Donc ω est bien un morphisme $f \longrightarrow f'$.

Inversement si ψ est un épimorphisme $f \longrightarrow f'$ tel que $\psi \circ \phi = \pi$ alors $\psi = \omega$ sur $i'(X) \times j'(Y)$, donc par densité sur $X' \times Y'$.

Définition 9. Les éléments de K (resp L) sont appelés les f-types à gauche (resp. à droite).

Remarque 10. Lorsque X et Y sont dénombrables (et Γ métrisable), K et L sont métrisables.

Définition 11. Pour $x \in X$ (resp. $y \in Y$), le type $f(x, \cdot)$ (resp. $f(\cdot, y)$) est dit type réalisé en x (resp. y).

B) Passage aux mesures et linéarisation.

Il est clair que si E est un espace de Banach réflexif, f une application $X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ source d'un morphisme dont le but est l'application produit de dualité:

$$B_E \times B_{E^*} \longrightarrow [-1, +1] \quad , \quad (x, y^*) \rightsquigarrow \langle x, y^* \rangle ,$$

alors f est stable.

Cette remarque admet une réciproque, démontrée dans [M-K] dans le cas où X et Y sont dénombrables (donc où les compacts de types sont métrisables). Le but de ce § est d'en donner la preuve dans le cas général.

Théorème 1. Si $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction numérique bornée stable, il existe

un espace de Banach réflexif G et un morphisme (u, v) de f dans l'application:

$$B_G \times B_{G^*} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (x, y^*) \rightsquigarrow C \langle x, y^* \rangle$$

(C étant une constante dépendant de f).

Le théorème 1 est une conséquence du résultat suivant:

Théorème 2. Si $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée stable, alors pour toute μ dans $l^\infty(X)^*$

et toute ν dans $l^\infty(Y)^*$, on a: $\langle \nu_y, \langle \mu_x, f(x, y) \rangle \rangle = \langle \mu_x, \langle \nu_y, f(x, y) \rangle \rangle$.

Notons $F(\mu, \nu)$ cette valeur commune. Alors F est séparément préfaiblement continue sur $l^\infty(X)^* \times l^\infty(Y)^*$.

(Nota. $\langle \nu_y, \langle \mu_x, f(x, y) \rangle \rangle$ désigne la valeur de ν sur la fonction $y \rightsquigarrow \langle \mu, f(\cdot, y) \rangle$, qui est dans $l^\infty(Y)$.)

Admettons pour l'instant le th.2. Le th.1 s'en déduit alors en considérant

l'opérateur: $l^\infty(X)^* \rightarrow l^\infty(Y)^* \quad , \mu \rightsquigarrow T\mu$, avec $T\mu(y) = \langle \mu_x, f(x, y) \rangle \quad (\forall y \in Y)$

Cet opérateur est $\sigma(l^\infty(X)^*, l^\infty(X))$, $\sigma(l^\infty(Y), l^\infty(Y)^*)$ -continu, donc est faiblement compact, donc se factorise par un espace réflexif (th. de Davis-Figuiel-Johnson).

On a donc $T = V \circ U$, avec $l^\infty(X)^* \xrightarrow{U} G \xrightarrow{V} l^\infty(Y)$, et G réflexif.

Pour toutes μ, ν dans $l^\infty(X)^*$, resp. $l^\infty(Y)^*$, on a donc: $\langle U\mu, V^*\nu \rangle = F(\mu, \nu)$.

Lorsque $\mu = \delta_x$ (x -ième projection, ou "masse de Dirac en x ") et $\nu = \delta_y$, il vient:

$$\langle U\delta_x, V^*\delta_y \rangle = f(x, y). \text{ On pose donc } u: x \longrightarrow U\delta_x, \text{ et } v: y \longrightarrow V^*\delta_y.$$

Preuve du th.2

On utilise l'injection isométrique canonique de $l^1(X)$ dans $l^\infty(X)^*$, qui est d'image préfaiblement dense. Un élément de $l^1(X)$, considéré dans $l^\infty(X)^*$, est de la forme $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \delta_{x_i}$, où $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ définit une série de réels absolument convergente.

a) L'égalité des doubles crochets est évidente si $\mu \in l^1(X), \nu \in l^1(Y)$.

En effet si $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \delta_{x_i}$ et $\nu = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \delta_{y_j}$, on a:

$$\langle \nu, \langle \mu, f(x,y) \rangle \rangle = \sum_{i,j \in \mathbf{N}} a_i b_j f(x_i, y_j) = \langle \mu, \langle \nu, f(x,y) \rangle \rangle.$$

b) La fonction $B_{l^1(X)} \times B_{l^1(Y)} \longrightarrow \mathbf{R}$, $(\mu, \nu) \rightsquigarrow F(\mu, \nu)$ est stable.

Il suffit de prouver qu'elle est dénombrablement stable.

Si $(\mu_m)_{m=1}^{\infty} \subset B_{l^1(X)}$ et $(\nu_n)_{n=1}^{\infty} \subset B_{l^1(Y)}$, posons $S_m = \text{Supp}(\mu_m)$ et $T_n = \text{Supp}(\nu_n)$

$$\text{puis: } S = \bigcup_m S_m \text{ et } T = \bigcup_n T_n$$

Alors S et T sont dénombrables. Considérons la restriction $f|_{S \times T}$ de f à $S \times T$;

Soient K_S et L_T ses compacts de types: ils sont métrisables (remarque A10).

A f correspond une application $\hat{f}: K_S \times L_T \longrightarrow \mathbf{R}$, $(\sigma, \tau) \rightsquigarrow \hat{f}(\sigma, \tau)$, "prolongeant"

$f|_{S \times T}$ en ce sens que $f(\sigma_x, \tau_y) = f(x, y)$, pour tous x, y , lorsque σ_x est le f-type à gauche réalisé en x et τ_y est le f-type à droite réalisé en y.

\hat{f} est séparément continue sur $K_S \times L_T$ (voir prop A8).

Une fonction séparément continue sur un produit de compacts métrisables est borélienne. Donc si $\hat{\mu}$ est une mesure sur K_S et $\hat{\nu}$ une mesure sur L_T , on peut définir:

$$\hat{F}(\hat{\mu}, \hat{\nu}) = \int_{K_S \times L_T} f(\sigma, \tau) d\hat{\mu}(\sigma) d\hat{\nu}(\tau)$$

Dans le cas de $\hat{\mu} = \sum_i a_i \delta_{x_i}$ et $\hat{\nu} = \sum_j b_j \delta_{\tau_j}$, il vient:

$$\hat{F}(\hat{\mu}, \hat{\nu}) = \sum_{i,j \in \mathbf{N}} a_i b_j f(x_i, y_j) = F(\mu, \nu)$$

(avec $\mu = \sum_i a_i \delta_{x_i}$ et $\nu = \sum_j b_j \delta_{y_j}$).

Or \hat{F} est séparément préfaiblement continue (i.e. pour $\sigma(M(K_S), C(K_S))$ et $\sigma(M(L_T), C(L_T))$): ceci résulte du théorème de Fubini, qui permet d'écrire:

$$\hat{F}(\hat{\mu}, \hat{\nu}) = \int_{K_S} d\hat{\mu}(\sigma) \int_{L_T} \hat{f}(\sigma, \tau) d\hat{\nu}(\tau) = \int_{L_T} d\hat{\nu}(\tau) \int_{K_S} \hat{f}(\sigma, \tau) d\hat{\mu}(\sigma).$$

On voit donc que \hat{F} est stable sur $B_M(K_S) \times B_M(L_T)$, d'où si U et V sont deux ultrafiltres sur \mathbb{N} :

$$\lim_{m,U} \lim_{n,V} F(\mu_m, \nu_n) = \lim_{m,U} \lim_{n,V} \hat{F}(\hat{\mu}_m, \hat{\nu}_n) = \lim_{n,V} \lim_{m,U} \hat{F}(\hat{\mu}_m, \hat{\nu}_n) = \lim_{n,V} \lim_{m,U} F(\mu_m, \nu_n).$$

c) Sur $B_{l^\infty}(X)$, la topologie de la convergence simple sur X et la topologie $\sigma(l^\infty(X), l^1(X))$ coïncident.

En effet la topologie de la convergence simple est moins fine que la topologie $\sigma(l^\infty(X), l^1(X))$, pour laquelle $B_{l^\infty}(X)$ est compacte.

d) preuve du résultat dans le cas général.

Si $\mu \in B_{l^\infty}(X)^*$ et $\nu \in B_{l^\infty}(Y)^*$, on approche μ et ν par des éléments de $B_{l^1}(X)$ et $B_{l^1}(Y)$:

$$\mu = \lim_{i,U} \mu_i \quad \text{et} \quad \nu = \lim_{j,V} \nu_j \quad (\text{limites préfaibles}).$$

Alors :

$$\begin{aligned} \langle \mu_x, \langle \nu_y, f(x,y) \rangle \rangle &= \lim_{i,U} \langle \mu_i, \langle \nu_y, f(x,y) \rangle \rangle \\ &= \lim_{i,U} \lim_{j,V} \langle \mu_i, \langle \nu_j, f(x,y) \rangle \rangle \end{aligned} \quad (1)$$

car les fonctions $x \mapsto \langle \nu_j, f(x,y) \rangle$ sont uniformément bornées dans $l^\infty(X)$, et tendent simplement selon l'ultrafiltre V vers la fonction $x \mapsto \langle \nu_y, f(x,y) \rangle$ de sorte qu'on peut leur appliquer le c).

$$\text{De même on a : } \langle \nu_y, \langle \mu_x, f(x,y) \rangle \rangle = \lim_{j,V} \lim_{i,U} \langle \nu_j, \langle \mu_i, f(x,y) \rangle \rangle \quad (2)$$

Les points a) et b) ci dessus montrent alors l'égalité de (1) et (2), C.Q.F.D.

Il y a lieu de remarquer que le th.2 admet un analogue pour les fonctions séparément continues sur un produit de compacts, les mesures jouant le rôle des formes linéaires sur $l^\infty(X), l^\infty(Y)$ (qui sont d'ailleurs elles-mêmes des mesures sur les compacts $\beta X, \beta Y$). On a ainsi le :

Théorème 2 bis. Soit $f: K \times L \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique bornée séparément continue sur le produit de compacts $K \times L$. Alors :

i) Pour toute mesure de Radon μ sur K , l'application :

$$L \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \int_K f(x,y) d\mu(x) \text{ est continue.}$$

De même $\forall \nu \in M(L)$, l'application $K \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_L f(x,y) d\nu(y)$ est continue.

ii) pour toutes $\mu \in M(K)$, $\nu \in M(L)$, on a :

$$\int_K d\mu(x) \int_L f(x,y) d\nu(y) = \int_L d\nu(y) \int_K f(x,y) d\mu(x)$$

Notons $F(\mu, \nu)$ cette valeur commune; alors $(\mu, \nu) \mapsto F(\mu, \nu)$ est séparément préfaiblement continue (donc stable sur $B_{M(K)} \times B_{M(L)}$).

Preuve. i) Si $\mu \in M(K)$, on peut la prolonger d'après le th. de Hahn-Banach en une forme linéaire $\tilde{\mu}$ sur $l^\infty(K)$, de même norme. Il résulte alors du th. 2 que si U est un ultrafiltre sur K , $\lim_{x,U} \langle \tilde{\mu}_y, f(x,y) \rangle = \langle \tilde{\mu}_y, \lim_{x,U} f(x,y) \rangle$, car $\lim_{x,U}$ est un élément de $l^\infty(K)$. D'où immédiatement la continuité annoncée.

ii) En étendant μ et ν en des éléments de $l^\infty(K)^*$, $l^\infty(L)^*$, l'égalité des doubles intégrales revient à l'égalité des doubles crochets du th. 2.

Chapître II
 Espaces de Banach stables
 (Résultats sur la classe des
 espaces de Banach stables)

Après un rappel sur la définition et les propriétés des espaces de Banach stables (d'après [M-K]), on donne quelques résultats concernant la classe des espaces de Banach stables:

- somme directe d'espaces de Banach stables,
- interpolation et quotient (dans des situations particulières).

Définition 1. L'espace de Banach E est dit stable ssi la fonction

$$B_E \times B_E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad (x,y) \rightsquigarrow \|x+y\|$$

est stable.

D'après la proposition IA3, E est stable ssi tous ses sous-espaces séparables le sont.

On voit facilement que E est stable ssi la fonction à valeurs dans le compact $\overline{\mathbb{R}_+}$

$$f: \quad E \times E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$$

$$(x,y) \rightsquigarrow \|x+y\|$$

est stable. Les espaces de f-types à gauche et à droite coïncident; en excluant le type identiquement égal à $+\infty$, on obtient l'espace \mathcal{C} des "types sur E", qui est localement compact (et métrisable si E est séparable).

E se plonge homéomorphiquement dans \mathcal{C} par l'application $x \rightsquigarrow \theta_x$, type réalisé en x.

L'application $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+, (x,y) \rightsquigarrow \|x+y\|$ se prolonge en une unique application séparément continue $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+, (\sigma, \tau) \rightsquigarrow [\sigma, \tau]$.

De même, l'application: $E \times E \longrightarrow E, (x,y) \rightsquigarrow x+y$ se prolonge en une application $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}, (\sigma, \tau) \rightsquigarrow \sigma * \tau$, séparément continue.

Le produit $\lambda \cdot \sigma$ se définit par continuité (à partir de la multiplication scalaire de E) lorsque $\lambda \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathcal{C}$.

Les deux propriétés principales des espaces de Banach stables sont les suivantes:

Propriété 2. Tout sous espace (de dimension infinie) d'un espace de Banach stable contient, pour tout $\varepsilon > 0$, un sous espace $(1+\varepsilon)$ -isomorphe à un espace l^p (pour un $p \geq 1$ au moins) (voir [M-K]).

Propriété 3. Tout espace de Banach stable est faiblement séquentiellement complet. (voir [G-L])

Le principal exemple d'espace de Banach stable est donné par les $l^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ avec $1 \leq p < \infty$. Plus généralement, si E est stable, alors $l^p(\Omega, \Sigma, \mu; E)$ est stable.

Un exemple d'espace non stable est c_0 . En effet si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ est la base naturelle de c_0 , et si on pose $u_n = e_1 + e_2 + \dots + e_n$, on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_m + u_n\| = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|e_m + u_n\| = 1.$$

On en déduit que c_0 n'est isomorphe à aucun espace stable: en effet pour toute norme N sur c_0 équivalente à la norme naturelle, il existe un sous espace F de c_0 tel que (F, N) soit $(1+\varepsilon)$ -isomorphe à c_0 (cf [T-L], I, 2e2).

On obtiendra plus loin un espace isomorphe à l^2 et non stable.

Sommes directes d'espaces stables.

Si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'espaces stables, leur somme directe au sens de l^p ($1 \leq p < \infty$) est stable.

Si E_1, \dots, E_n sont des espaces stables et N une norme sur \mathbb{R}^n telle que

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = N(\|x_1\|, \|x_2\|, \dots, \|x_n\|)$$

définisse une norme sur $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$, alors cette norme est stable.

Cette remarque ne s'étend pas à tout les cas de somme directe, même finie:

Proposition 4. Il existe un espace de Banach non stable, somme directe de deux sous-espaces stables, isométriques par exemple à l^p , avec des constantes de projection égales à 1.

Preuve. Soient E et F stables ayant chacun une base précisément incondition-

nelle (par ex. l^p). Notons $(e_n)_{n=1}^\infty$ et $(f_n)_{n=1}^\infty$ ces bases, que l'on prend normalisées.

Soit $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_*}$ une matrice de réels telle que:

$$\forall i,j, \quad 1 \leq a_{ij} < 2$$

$$\text{et: } \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} a_{ij} \neq \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} a_{ij}$$

Dans $X = E \oplus F$ (somme algébrique), on pose:

$$B_E = \{(u, 0) / u \in E, \|u\|_E \leq 1\} \quad \text{et} \quad B_F = \{(0, v) / v \in F, \|v\|_F \leq 1\},$$

et pour tous i, j , soit: $x_{ij} = \frac{e_i + f_j}{a_{ij}}$, et $S = \{x_{ij} / i, j \in \mathbb{N}_*\}$.

Posons $B = \text{co}(B_E \cup B_F \cup S)$: c'est une partie convexe symétrique de X , ne contenant aucune demi-droite issue de 0, donc sa jauge est une norme sur X , qu'on notera $\| \cdot \|$. Alors:

$B \supset \text{co}(B_E \cup B_F) = \{u+v / u \in B_E, v \in B_F, \|u\|_E + \|v\|_F \leq 1\}$, qui est la boule unité de la norme $\| \cdot \|_1$ de $E \oplus_1 F$. D'autre part:

$\{u+v \in X / \|u\|_E \leq 1, \|v\|_F \leq 1, u \in E, v \in F\} \supset B_E \cup B_F \cup S$ donc contient aussi son enveloppe convexe B . Mais le membre de gauche de cette relation d'inclusion est la boule-unité de $E \oplus_\infty F$, dont la norme sera notée $\| \cdot \|_\infty$.

On voit donc que: $\forall x \in X, \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \|x\|_1$. En particulier si $x \in E$ (resp $x \in F$),

$$\|x\|_E \quad (\text{resp. } \|x\|_F) = \|x\| = \|x\|_1 \text{ donc } = \|x\|$$

Les projections sur E et F sont bien de norme 1, puisque: si $u \in E, v \in F$:

$$\left. \begin{array}{l} \|u\|_E \\ \|v\|_F \end{array} \right\} \leq \|u+v\|_\infty \leq \|u+v\|.$$

Montrons que $\forall i, j, \|x_{ij}\| = 1$. L'inégalité $\|x_{ij}\| \leq 1$ étant claire, supposons qu'il existe i_0, j_0 tels que cette inégalité soit stricte: $\|x_{i_0 j_0}\| < 1$.

autrement dit $\exists \alpha > 1$ tel que: $\alpha x_{i_0 j_0} \in B$.

Il existe donc une partie finie L de \mathbb{N}_*^2 , des points $u \in E, v \in F$ et des réels λ_{ij}

$(i, j \in L)$ tels que:

$$\frac{e_{i_0} + f_{j_0}}{a_{i_0 j_0}} = u + v + \sum_{(i,j) \in L} \lambda_{ij} \frac{e_i + f_j}{a_{ij}},$$

$$\text{et: } \|u\| + \|v\| + \sum_{(i,j) \in L} \lambda_{ij} \leq 1.$$

Retranchons le terme d'indice (i_0, j_0) , et divisons par $1 - \lambda_{i_0 j_0}$, il vient:

$$\frac{e_{i_0} + f_{j_0}}{a_{i_0 j_0}} = u' + v' + \sum_{(i,j) \in L'} \lambda'_{ij} \cdot \frac{e_i + f_j}{a_{ij}}$$

$$\|u'\| + \|v'\| + \sum_{(i,j) \in L'} |\lambda'_{ij}| \leq 1$$

(en posant: $\alpha' = \frac{\alpha - \lambda_{i_0 j_0}}{1 - \lambda_{i_0 j_0}}$ qui est > 1 , et $L' = L - \{(i_0, j_0)\}$).

En identifiant les composantes sur e_{i_0} , resp. sur f_{j_0} , et en sommant membre à membre, il vient:

$$(*) \quad \frac{2\alpha'}{a_{i_0 j_0}} = u'_{i_0} + v'_{j_0} + \sum_{\substack{(i_0, j) \in L \\ j \neq j_0}} \frac{\lambda'_{i_0 j}}{a_{i_0 j}} + \sum_{\substack{(i, j_0) \in L \\ i \neq i_0}} \frac{\lambda'_{i j_0}}{a_{i j_0}},$$

où u'_{i_0} , resp. v'_{j_0} , est la composante de u' , resp. v' , sur e_{i_0} , resp. f_{j_0} .

Les bases $(e_i)_i, (f_j)_j$, étant par hypothèse précisément inconditionnelles,

on a: $|u'_{i_0}| \leq \|u'\|$ et $|v'_{j_0}| \leq \|v'\|$

de sorte que l'on a:

$$|u'_{i_0}| + |v'_{j_0}| + \sum_{\substack{(i_0, j) \in L \\ j \neq j_0}} \frac{|\lambda'_{i_0 j}|}{a_{i_0 j}} + \sum_{\substack{(i, j_0) \in L \\ i \neq i_0}} \frac{|\lambda'_{i j_0}|}{a_{i j_0}} \leq \|u'\| + \|v'\| + \sum_{(i,j) \in L'} \frac{|\lambda'_{ij}|}{a_{ij}},$$

donc ≤ 1 , car $\forall i, j, a_{ij} \geq 1$.

Mais le membre de gauche dans (*) est < 1 , d'où la contradiction.

Donc les $\|x_{ij}\| = 1$. Par conséquent: $\forall i, j, \|e_i + f_j\| = a_{ij}$ et d'après le choix de (a_{ij}) , $\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \|e_i + f_j\| \neq \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \|e_i + f_j\|$, et X n'est pas stable, CQFD.

Corollaire 5. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un espace de Banach $(1 + \varepsilon)$ -isomorphe à l^2 , qui soit non stable.

En effet si l'on prend $E \cong F \cong l^2$ dans la construction ci dessus, alors $X \cong l^2$.

On considère alors sur X la nouvelle norme $\| \cdot \|_{1+\varepsilon}$, où $\| \cdot \|_2$ est la norme de $E \oplus_{l^2} F$.

Remarque 6. On peut donc obtenir par ce procédé un espace réflexif, admettant une base symétrique de constante symétrique $1 + \varepsilon$, et non stable.

Mais l'espace de Tsirelson (ou son dual), cf [F-J], fournit un exemple d'espace à base symétrique (de constante symétrique 1), et non réflexif

stable, puisque ne contenant isomorphiquement aucun l^p (et il en est d'ailleurs ainsi de ses sous espaces et de ses quotients).

Corollaire 7. Il existe un espace de Banach non stable X , admettant un sous-espace Y tel que Y et X/Y soient stables.

Perturbation de la boule-unité d'un espace stable et application à l'interpolation.

Proposition 8. Soit E un espace de Banach stable, et B_E sa boule-unité.

Soit C un compact symétrique équilibré de E . Alors les jauges des boules-unité "perturbées":

$$B' = \text{co}(B_E \cup C) \quad B'' = B_E + C$$

sont des normes stables sur E .

Ces normes sont par ailleurs clairement équivalentes à la norme initiale.

Preuve. Notons j_C la jauge de C , qui est une fonction homogène sur E (valant éventuellement $+\infty$); notons $\|\cdot\|'$ et $\|\cdot\|''$ respectivement les jauges de B_E , et $B_E \cup C$.

On a pour tout x dans E :

$$\begin{aligned} \|x\|' &= \inf\{\lambda > 0 / x = \lambda(\alpha b + \beta c); b \in B_E, c \in C; \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 / x = \lambda(b+c); b, c \in E; \|b\|_E + j_C(c) = 1\} \\ &= \inf\{\|b\| + j_C(c) / b, c \in E\} \end{aligned}$$

et de même:

$$\begin{aligned} \|x\|'' &= \inf\{\lambda > 0 / x = \lambda(b+c); b \in B_E, c \in C\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 / x = \lambda(b+c); b, c \in E; \|b\| \leq 1, j_C(c) \leq 1\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 / x = \lambda(b+c); b, c \in E; \|b\| \vee j_C(c) \leq 1\} \\ &= \inf\{\|b\| \vee j_C(c) / b, c \in E, x = b+c\} \end{aligned}$$

Examinons le cas de $\|\cdot\|'$. Si $\|x\|' \leq 2$, on a:

$$\forall \epsilon > 0, \exists v: \|x-v\| + j_C(v) \leq (1+\epsilon)\|x\|' \leq 2(1+\epsilon), \text{ donc a fortiori pour ce } v, \text{ on a:}$$

$$j_C(v) \leq 2(1+\epsilon). \text{ Donc en fait: } \|x\|' = \inf\{\|x-v\| + j_C(v); v \in 2.C\}.$$

Le graphe K de la fonction $2.C \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto j_C(x)$ est un compact de $E \times \mathbb{R}_+$.

Soit $\epsilon > 0$. Recouvrons K par un nombre fini $N(\epsilon)$ de boules $B((v_i; j_C(v_i)); \epsilon)$ de rayon ϵ (pour la distance $d((x, \rho), (x', \rho')) = \|x-x'\| + |\rho-\rho'|$ sur $E \times \mathbb{R}_+$)

et posons: $\forall x \in E, \|x\|'_\epsilon = \inf_{i=1}^{N(\epsilon)} \{ \|x-v_i\| + j_C(v_i) \}$

alors $0 < \|x\|'_\epsilon - \|x\| < \epsilon$, pour tout $x \in 2B'$.

Chaque fonction $B' \times B' \rightarrow \mathbb{R}_+, (x,y) \mapsto \|x+y-v_i\| + j_C(v_i)$ est stable, donc également leur infimum fini $(x,y) \mapsto \|x+y\|'_\epsilon$; en faisant $\epsilon \rightarrow 0$, on voit que $(x,y) \mapsto \|x+y\|'$ est stable.

La preuve est analogue pour $\| \cdot \|''$.

Corollaire 9. Soient A_0, A_1 deux espaces de Banach, avec une injection

compacte (en norme) $A_0 \hookrightarrow A_1$.

Si A_1 est stable alors l'interpolé réel $[A_0, A_1]_{\theta, p}$ est stable pour la norme s .

Rappelons la définition de la norme $\| \cdot \|_s$ selon [BZY⁴]. Soient A_0 et A_1 les boules-unité de A_0, A_1 respectivement, et pour tout $m \in \mathbb{Z}$, soit :

$$U_m = e^{\theta m} \cdot B_0 + e^{-(1-\theta)m} \cdot B_1.$$

Soit j_m la jauge de U_m . Alors $[A_0, A_1]_{\theta, p} = \{x \in A_1 / \sum_{m \in \mathbb{Z}} j_m(x)^p < \infty\}$, et si $x \in [A_0, A_1]_{\theta, p}$

$$\|x\|_s = \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} j_m(x)^p \right)^{1/p}.$$

Preuve du cor.9. D'après la prop.8, chaque norme j_m est une norme stable sur A_1 , donc a fortiori sur le sous-espace $[A_0, A_1]_{\theta, p} = S$.

Alors $\sum_{m \in \mathbb{Z}} (S, j_m)$ est stable comme l^p-somme d'espaces stables, donc aussi

sa diagonale, qui est isométrique à $([A_0, A_1]_{\theta, p}, \| \cdot \|_s)$.

Exemple 10. $A_1 = L^q(\Omega)$, où Ω est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n ,

$A_0 = H_{k,q}^q(\Omega)$, espace de Sobolev d'indices q, k .

Il est classique que si $\frac{1}{q'} < \frac{1}{q} + \frac{k}{n}$, l'injection $A_0 \hookrightarrow A_1$ est compacte: donc l'interpolé est stable. Notons que c'est l'espace de Besov $B_{q,p}^k$ quand $q=q'$.

Quotients d'espaces stables. Quotients de l^p .

Le problème de la stabilité des quotients d'espaces stables n'est résolu ici que dans deux cas très particuliers:

- Quotients par un sous-espace de dimension finie,
- Quotients de l^p .

Il est clair qu'en général le quotients d'un espace stable peuvent ne pas être stables, puisque tout espace de Banach est, pour tout $\epsilon > 0$, $(1+\epsilon)$ -isomorphe à un quotient de l^1 . (donc l^1 a des quotients non stables).

En revanche la question de savoir si un espace stable réflexif peut avoir des quotients non stables reste ouverte.

Proposition 11. Tout quotient d'un espace stable par un sous-espace de dimension finie est stable.

Preuve. Il s'agit en fait d'un cas limite de "perturbation" de la boule-unité au sens de la prop.8.

Soit E stable et $V \subset E$ un sous espace de dimension finie.

Pour tout $\xi \in E/V$, on a si $\xi = x + V$ ($x \in E$):

$$\|\xi\|_{E/V} = \inf\{ \|x+v\| / v \in V \} = \inf\{ \|x+v\| / v \in V, \|v\| \leq 2\|x\| \}$$

(puisque $\|v\| > 2\|x\| \implies \|x+v\| > 2\|x\| - \|v\| = \|x\|$)

On en déduit immédiatement que si $\|\xi\| \leq 1$, $\|\eta\| \leq 1$, on a

$$\|\xi + \eta\| = \inf\{ \|x+y+v\| / v \in V, \|v\| \leq 4 \}$$

Comme B_V est compact, on peut achever la preuve comme pour la prop.8.

Théorème 12. Soit $1 \leq p < \infty$, et F un sous espace fermé de l^p . Si $p=1$, on suppose que F est $\sigma(l^1, c_0)$ -fermé. Alors le quotient l^p/F est stable.

Remarquons dans le cas $p=1$, que la condition imposée revient à dire que F est l'orthogonal G° d'un sous espace G de c_0 , i.e. l^1/F est le dual de G . Le th.12 admet donc l'énoncé équivalent:

Le dual de tous sous-espace de l^p ($1 < p < \infty$) ou de c_0 est stable.

Dans ce qui suit on note w^* la topologie préfaible $\sigma(l^1, c_0)$ dans le cas $p=1$,

et $\sigma(l^p, l^q)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ quand $p > 1$.

La démonstration du th12 utilise quelques lemmes .

Lemme 13. Soit $1 \leq p < \infty$. Pour tout $a \in l^p$, et toute suite $(x_n)_{n=1}^\infty$, bornée dans l^p , et telle que $x_n \xrightarrow{w^*} 0$, on a la propriété d'"additivité asymptotique":

$$\|a + x_n\|^p - (\|a\|^p + \|x_n\|^p) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Preuve. On se ramène au cas où a est à support fini; les x_n lui sont alors asymptotiquement étrangers.

Lemme 14. Soit F un sous-espace w^* -fermé de l^p ($1 \leq p < \infty$) et $(\xi_n)_{n=1}^\infty$ une suite bornée dans l^p/F .

Supposons qu'il existe une suite de représentants des ξ_n dans l^p , bornée et tendant préfaiblement vers 0.

Alors toute suite $(y_n)_{n=1}^\infty$ de représentants dans l^p des ξ_n , "asymptotiquement optimale" (i.e. $\|y_n\| \leq \|\xi_n\| + \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$) tend elle aussi préfaiblement vers 0 .

Preuve. Il suffit de prouver que 0 est l'unique valeur d'adhérence préfaible de la suite $(y_n)_n$. (puisque les topologies $\sigma(l^1, c_0)$ et $\sigma(l^p, l^q)$ sont métrisables sur les bornés).

Soit $(x_n)_{n=1}^\infty$ une suite bornée de représentants des ξ_n , et tendant préfaiblement vers 0.

Posons $h_n = y_n - x_n$, et soit h une valeur de w^* -adhérence de $(h_n)_n$.

Comme $\forall n, h_n \in F$ par construction, et que F est w^* -fermé, on a $h \in F$.

On peut extraire une suite $(h_{n_k})_{k=1}^\infty$, telle que $h_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} h$. On écrit:

$$y_{n_k} = (x_{n_k} + h_{n_k} - h) + h, \text{ et comme } x_{n_k} + h_{n_k} - h \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \text{ on a}$$

d'après le lemme 13:

$$\begin{aligned} \|y_{n_k}\|^p &= \|x_{n_k} + h_{n_k} - h\|^p + \|h\|^p + \eta_k \quad (\text{avec } \eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0) \\ &\geq \|\xi_{n_k}\|^p + \|h\|^p + \eta_k \quad (\text{puisque } x_{n_k} + h_{n_k} - h \text{ représente } \xi_{n_k}) \\ &\geq \|y_{n_k}\|^p + \|h\|^p + \eta_k - \varepsilon_{n_k} \quad (\text{puisque } (y_n) \text{ est "asymptotiquement optimale"}) \end{aligned}$$

et comme $\eta_k - \varepsilon_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, cette inégalité entraîne $h=0$, d'où le lemme.

Lemme 15. Soit $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite bornée dans l^p/F .

Il existe une suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de représentants des ξ_n , telle que:

$$(P): \begin{cases} \text{Pour tout } \alpha \in l^p/F, \text{ et tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } a \in \alpha \text{ et une suite} \\ \text{extraite } (x_{n_1})_{1=1}^{\infty} \text{ tels que:} \\ \forall l, \quad \|a + x_{n_1}\| \leq \|\alpha + \xi_{n_1}\| + \varepsilon. \end{cases}$$

Preuve. Soit $(\hat{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de représentants des ξ_n , avec $\|\hat{x}_n\| < 2\|\xi_n\| \quad (\forall n)$.

$(\hat{x}_n)_n$ étant bornée, on peut trouver une sous-suite préfaiblement convergente:

$(\hat{x}_{n_1})_1$, soit x sa w^* -limite.

Soit $(x_{n_1})_1$ une suite de représentants des ξ_{n_1} , telle que $(x - x_{n_1})_1$ soit une suite "asymptotiquement optimale" des $\hat{x} - \xi_{n_1}$. Il résulte du lemme 2 que $x_{n_1} \xrightarrow[1 \rightarrow \infty]{} x$

Il est clair qu'on peut se limiter au cas où $(x_{n_1})_1 = (x_n)_n$.

Choisissons a tel que $\|a + x\|^p \leq \|\alpha + \hat{x}\|^p + \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit enfin $(h_n)_{n=1}^{\infty} \subset F$, telle que $(a + x_n + h_n)_n$ soit asymptotiquement optimale

comme suite de représentants des $\alpha + \xi_n$, i.e. : $\|a + x_n + h_n\|^p = \|\alpha + \xi_n\|^p + \eta_n, \eta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

La suite $(h_n)_n$ étant bornée dans F , on peut extraire une sous-suite $(h_{n_1})_1$

telle que $h_{n_1} \xrightarrow[1 \rightarrow \infty]{} h$, et on a $h \in F$.

Comme $a + x_{n_1} + h_{n_1} = a + x + h + (x_{n_1} - x + h_{n_1} - h)$ et que: $x_{n_1} - x + h_{n_1} - h \xrightarrow[1 \rightarrow \infty]{} 0$, on a d'après

le lemme 1:

$$\|a + x_{n_1} + h_{n_1}\|^p = \|a + x + h\|^p + \|x - x_{n_1} + h - h_{n_1}\|^p + \delta_1, \text{ avec } \delta_1 \xrightarrow[1 \rightarrow \infty]{} 0.$$

Or on a:

$$\|a + x + h\|^p \geq \|\alpha + \hat{x}\|^p \geq \|a + x\|^p - \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{d'après le choix de } a)$$

$$\text{et: } \|x - x_{n_1} + h - h_{n_1}\|^p \geq \|\hat{x} - \xi_{n_1}\|^p \geq \|x - x_{n_1}\|^p - \varepsilon_{n_1}, \text{ avec } \varepsilon_{n_1} \xrightarrow[1 \rightarrow \infty]{} 0$$

(d'après le choix des x_n)

Il résulte de ces inégalités que:

$$\|a + x_{n_1} + h_{n_1}\|^p \geq \|a + x\|^p + \|x - x_{n_1}\|^p + \delta_1 - \varepsilon_{n_1} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

On peut regrouper dans le membre de droite, d'après le lemme 1, puisque:

$$x - x_{n_1} \xrightarrow[1 \rightarrow \infty]{} 0 \quad \implies \|a + x\|^p + \|x - x_{n_1}\|^p = \|a + x_{n_1}\|^p + \rho_1 \text{ avec } \rho_1 \xrightarrow[1 \rightarrow \infty]{} 0$$

On a donc : $\|a + x_{n_1} + h_{n_1}\|^p \geq \|a + x_{n_1}\|^p + (\rho_1 + \delta_1 - \varepsilon_{n_1}) - \frac{\varepsilon}{2}$

D'après le choix des h_n , il en résulte:

$$\|\alpha + \xi_{n_1}\|^p > \|a + x_{n_1}\|^p + (\rho_1 + \delta_1 - \eta_1 - \varepsilon_{n_1}) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour l assez grand, on a: $|\rho_1 + \delta_1 - \eta_1 - \varepsilon_{n_1}| < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où: $\|a + x_{n_1}\|^p < \|\alpha + \xi_{n_1}\|^p + \varepsilon$.

D'où le lemme 15.

Preuve du th.12.

Soient $(\xi_n)_n, (\zeta_m)_m$ deux suites bornées dans l^p/F . Au moyen du lemme 15, on cons-

- truit :
- une suite de représentants $(z'_m)_m$ des ζ_m ,
 - une suite de représentants $(x_n)_n$ des ξ_n ,
 - une suite extraite $(z_{m_k})_{k=1}^\infty$,

telles que : $\forall n \in \mathbb{N}_*, \forall k \in \mathbb{N}, \|x_n + z_{m_k}\| < \|\xi_n + \zeta_{m_k}\| + \frac{1}{n}$.

(Il suffit d'appliquer le lemme 15 à la suite $(\zeta_m)_m$ et, successivement, aux points ξ_n , avec les valeurs $\varepsilon = \frac{1}{n}$, et de prendre la suite diagonale des suites extraites successives).

Pour tous ultrafiltres U et V sur \mathbb{N}_* , non triviaux, on a alors:

$$\lim_{n,U} \lim_{k,V} \|\xi_n + \zeta_{m_k}\| = \lim_{n,U} \lim_{k,V} \|x_n + z_{m_k}\|$$

d'où par stabilité de l^p : $= \lim_{k,V} \lim_{n,U} \|x_n + z_{m_k}\|$ qui est $\geq \lim_{k,V} \lim_{n,U} \|\xi_n + \zeta_{m_k}\|$

En appliquant le même raisonnement aux suites $(\xi'_k)_k = (\zeta_{m_k})_k$, et $(\zeta'_n)_n = (\xi_n)_n$, on obtient l'inégalité inverse moyennant une extraction d'une sous-suite $(\xi_{n_1})_1$

de $(\xi_n)_n$. D'où finalement: $\lim_{n,U} \lim_{k,V} \|\xi_{n_1} + \zeta_{m_k}\| = \lim_{k,V} \lim_{n,U} \|\xi_{n_1} + \zeta_{m_k}\|$

pour tous ultrafiltres U et V sur \mathbb{N}_* (non triviaux). D'où le th.12.

Remarque 16. Le résultat du théorème 12 est vrai plus généralement pour les

espaces $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_*} l^p E_n$, l^p -sommes directes d'espaces E_n de dimensions finies.

En effet le lemme 1 reste valable pour de tels espaces.

Chapître III
 Stabilité de quelques espaces
 fonctionnels classiques.

On démontre ici la stabilité des espaces d'Orlicz (sous les conditions " Δ_2 "), puis celle des espaces de Lorentz. En ce qui concerne ce dernier cas, un ingrédient essentiel de la preuve est une propriété de "stabilité en loi": si f, g sont deux variables aléatoires sur un espace probabilisé, à valeurs dans $[-M, +M]$, leur loi $\pi_{(f,g)}$ (ainsi que la loi $\pi_{(f+g)}$ de leur somme) est fonction stable de f et g .

Plus généralement, les espaces $L(E)$, où L est un espace d'Orlicz ou un espace de Lorentz, et E un espace de Banach stable, sont stables.

A) Stabilité des espaces d'Orlicz.

Notations et hypothèses 1.

* Dans ce §, F est une fonction d'Orlicz, i.e. une fonction $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ convexe croissante et telle que $F(0)=0, F(1)=1$.

* On suppose que F vérifie les conditions Δ_2 , c'est à dire qu'il existe une constante K telle que: $\forall x \in \mathbb{R}_+^* , \frac{F(2x)}{F(x)} \leq K$.

* (Ω, Σ, μ) est un espace mesuré,

E est un espace de Banach dont la norme est notée $\| \cdot \|_E$ ou $\| \cdot \|$.

* L'espace d'Orlicz $\mathbb{L}_F(\Omega, \Sigma, \mu; E)$ de fonctions vectorielles est l'espace des fonctions $f: \Omega \rightarrow E$, μ -mesurables et telles que l'intégrale:

$$\Phi(f) = \int_{\Omega} F(\|f(\omega)\|_E) d\mu(\omega) \text{ soit finie.}$$

Si $f \neq 0$, la norme $\|f\|_{\mathbb{L}_F}$ de f dans $\mathbb{L}_F(\Omega, \Sigma, \mu; E)$ est l'unique nombre $\theta > 0$ tel que $\Phi(\frac{1}{\theta} \cdot f) = 1$.

Quand $E = \mathbb{R}$, on obtient l'espace $\mathbb{L}_F(\Omega, \Sigma, \mu)$, en général le seul dénommé "espace d'Orlicz" dans la littérature.

Lemme 2. Toute fonction d'Orlicz F (satisfaisant les conditions Δ_2) a ses puissances F^ρ sous homogènes pour ρ assez petit, c'est à dire:

$$\rho \leq \rho_0 \implies \forall x > 0, \forall \lambda \geq 1, F^\rho(\lambda x) \leq \lambda F^\rho(x).$$

Preuve. Soit F'_d la dérivée à droite de F : cette fonction est croissante (par convexité de F), et F en est une intégrale indéfinie. Donc pour tout $x > 0$, on a:

$$\int_x^{2x} F'_d(s) ds \geq x F'_d(x).$$

mais: $\int_x^{2x} F'_d(s) ds = F(2x) - F(x) \leq (K-1) \cdot F(x)$, d'où: $\forall x > 0, \frac{F'_d(x)}{F(x)} \leq \frac{K-1}{x}$.

Prenons $\rho \leq \frac{1}{K-1}$ et $G = F^\rho$, on a donc: $\forall x > 0, \frac{G'_d(x)}{G(x)} \leq \frac{1}{x}$.

Donc pour tout $\lambda \geq 1$, on a: $\text{Log} \frac{G(\lambda x)}{G(x)} = \int_x^{\lambda x} \frac{G'_d(s)}{G(s)} ds \leq \text{Log} \lambda$, soit: $G(\lambda x) \leq \lambda G(x)$.

D'où le lemme 2.

Lemme 3. Soient: E un espace de Banach stable.

G une fonction $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ croissante et sous-homogène.

Il existe alors une fonction $\phi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ bornée stable, telle que:

$$\forall x, y \in E, G(|x+y|) - G(|x|) - G(|y|) = \sqrt{G(|x|) \cdot G(|y|)} \phi(x, y).$$

Preuve. a) On montre d'abord l'inégalité entre réels :

$$(1): \forall u, v \in \mathbb{R}_*, \left| \frac{G(|u+v|) - G(|u|) - G(|v|)}{\sqrt{G(|u|) \cdot G(|v|)}} \right| \leq 2 \sqrt{\frac{G(|u|)}{G(|v|)} \wedge \frac{G(|v|)}{G(|u|)}}$$

Supposons $u \geq v > 0$, et posons $v = \lambda u$. Comme $\lambda \leq 1$, on a: $G(v) = G(\lambda u) \geq \lambda G(u)$.

On a: $G(u) \leq G(u+v) \leq \frac{u+v}{u} \cdot G(u) = (1+\lambda) \cdot G(u)$

ainsi que: $(1-\lambda) \cdot G(u) \leq \frac{u-v}{u} \cdot G(u) \leq G(u-v) \leq G(u)$

ceci parce que G est croissante et sous-homogène. On voit donc que:

$$\left| \frac{G(u \pm v) - G(u)}{\lambda} \right| \leq G(u)$$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } \left| \frac{G(u \pm v) - G(u)}{\sqrt{G(u) \cdot G(v)}} \right| &\leq \frac{\lambda \cdot G(u)}{\sqrt{G(u) \cdot G(v)}} \leq \frac{G(v)}{\sqrt{G(u) \cdot G(v)}} \\ &= \sqrt{\frac{G(v)}{G(u)}} \end{aligned}$$

et l'on en déduit facilement (1).

b) On en déduit une inégalité analogue pour les éléments de E:

$$(2): \left| \frac{G(|x+y|) - G(|x|) - G(|y|)}{G(|x|) \cdot G(|y|)} \right| \leq 2 \cdot \sqrt{\frac{G(|x|)}{G(|y|)} \wedge \frac{G(|y|)}{G(|x|)}}$$

pour tous $x, y \in E - \{0\}$. (On déduit (2) de (1) au moyen des inégalités triangulaires pour la norme de E).

c) Posons alors: $\phi: ExE \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \rightsquigarrow \phi(x, y) = \begin{cases} \text{le membre de gauche dans (2) si } x \\ \text{et } y \text{ sont non nuls,} \\ = 0 \text{ si } x \text{ ou } y \text{ est nul.} \end{cases}$$

Cette fonction s'étend en une fonction $\hat{\phi}$ séparément continue $\overline{\mathcal{C}} \times \overline{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathbb{R}$ (où \mathcal{C} est l'espace des types sur E, et $\overline{\mathcal{C}}$ son compactifié d'Alexandrov) en posant:

$$\hat{\phi}(\sigma, \tau) = \frac{G(\sigma, \tau) - G(\sigma(0)) - G(\tau(0))}{\sqrt{G(\sigma(0)) \cdot G(\tau(0))}} \quad \text{si } \sigma, \tau \neq 0, \infty,$$

$$= 0 \quad \text{si } \sigma \text{ ou } \tau = 0 \text{ ou } \infty.$$

(Il est clair que $\hat{\phi}$ est séparément continue en tout point (σ, τ) , où $\sigma, \tau \neq 0, \infty$.)

D'autre part:

$$\hat{\phi}(\sigma, \tau) < 2 \cdot \sqrt{\frac{G(\sigma(0))}{G(\tau(0))} \wedge \frac{G(\tau(0))}{G(\sigma(0))}}$$

donc $\hat{\phi}(\sigma, \tau) \longrightarrow 0$ quand σ ou τ tend vers 0 ou ∞ .

Donc $\hat{\phi}$ est stable sur ExE , et le lemme 3 s'ensuit.

Lemme 4. Soit E un espace de Banach stable, et F une fonction d'Orlicz satisfaisant les conditions Δ_2 .

Il existe un entier k (ne dépendant que de F) et k fonctions ϕ_i

de ExE dans \mathbb{R} , bornées et stables, telles que (en posant $\alpha_i = \frac{i}{k+1}$):

$$(3): \forall x, y \in E, \quad F(|x+y|) - F(|x|) - F(|y|) = \sum_{i=1}^k F(|x|)^{\alpha_i} \cdot F(|y|)^{1-\alpha_i} \cdot \phi_i(x, y)$$

Preuve. D'après le lemme 2, il existe un entier \hat{k} tel que $F^{2/\hat{k}}$ soit sous-homogène. Appliquant le lemme 3 à $F^{2/\hat{k}}$, on trouve:

$$\forall x, y \in E, \quad F^{2/\hat{k}}(|x+y|) = F^{2/\hat{k}}(|x|) + F^{2/\hat{k}}(|y|) + F^{1/\hat{k}}(|x|) \cdot F^{1/\hat{k}}(|y|) \cdot \phi(x, y),$$

où ϕ est stable sur ExE . On peut supposer que $\hat{k} = 2l, l$ entier. En élevant les

deux membres de l'égalité qui précède à la puissance 1, on obtient l'égalité du lemme 4. (avec $k = \hat{k} - 1$)

Théorème 5. Soit F une fonction d'Orlicz satisfaisant les conditions Δ_2 ,

E un espace de Banach stable,

$\mathbb{L}_F(\Omega, \Sigma, \mu; E)$, espace d'Orlicz de fonctions à valeurs dans E

Alors la fonction $\mathbb{L}_F(E) \times \mathbb{L}_F(E) \longrightarrow \mathbb{R}_+$,

$$(f, g) \rightsquigarrow \Phi(f+g) = \int_{\Omega} F(|f(\omega) + g(\omega)|_E) d\mu(\omega)$$

est stable sur tout produit de bornés $B \times B'$ de \mathbb{L}_F .

Preuve. On peut appliquer à F le lemme 4. Les fonctions ϕ_i intervenant dans (3) étant bornées stables sur $E \times E$, il existe d'après le th. IB1 des espaces de Banach réflexifs G_i et des applications $u_i: E \longrightarrow G_i, v_i: E \longrightarrow G_i^*$ telles que:

$$\forall x, y \in E, \phi_i(x, y) = C_i \langle u_i(x), v_i(y) \rangle_{G_i \times G_i^*}.$$

Posons: $\tilde{u}_i(x) = F(|x|)^{\alpha_i} \cdot u_i(x)$ et: $\tilde{v}_i(x) = F(|x|)^{1-\alpha_i} \cdot v_i(x)$. Alors:

$$\forall x, y \in E, F(|x+y|) - F(|x|) - F(|y|) = \sum_{j=1}^k C_j \langle u_j(x), v_j(y) \rangle$$

et de plus: $\|u_i(x)\|_{G_i} \leq F(|x|)^{\alpha_i}, \|v_i(y)\|_{G_i^*} \leq F(|y|)^{1-\alpha_i}$.

Si f et g des fonctions $\Omega \longrightarrow E$ étagées mesurables, alors les fonctions $u_j \circ f, v_j \circ g$ sont des fonctions étagées mesurables à valeurs dans G_j , resp. G_j^* , et il vient:

$$\begin{aligned} \Phi(f+g) - \Phi(f) - \Phi(g) &= \int_{\Omega} (F(|f+g|(\omega)) - F(|f|(\omega)) - F(|g|(\omega))) d\mu(\omega) = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^k C_j \langle u_j \circ f(\omega), v_j \circ g(\omega) \rangle_{G_j \times G_j^*} d\mu(\omega) = \\ &= \sum_{j=1}^k C_j \langle u_j \circ f, v_j \circ g \rangle_{\mathbb{L}^{p_j}(\Omega; G_j) \times \mathbb{L}^{q_j}(\Omega; G_j^*)} \end{aligned} \quad (4)$$

où l'on a posé $p_j = \frac{1}{\alpha_j}$. Soit aussi $q_j = \frac{1}{1-\alpha_j}$ l'exposant conjugué de p_j , on a:

$$\|u_j \circ f\|_{\mathbb{L}^{p_j}(\Omega; G_j)}^{p_j} = \int_{\Omega} \|u_j \circ f(\omega)\|_{G_j}^{p_j} d\mu(\omega) \leq \int_{\Omega} F(|f(\omega)|_E) d\mu(\omega) = \Phi(f)$$

et de même $\|v_j \circ g\|_{\mathbb{L}^{q_j}(\Omega; G_j^*)}^{q_j} \leq \Phi(g)$.

Or Φ est bornée sur tout borné de \mathbb{L}_F (comme il résulte du Rappel 6 ci-dessous). D'après IA6, chaque crochet de dualité dans (4) est donc fonction

stable de (f,g) , sur un produit de bornés de $\mathcal{E}_F(\Omega;E)$ (espace des fonctions $\Omega \rightarrow E$ étagées mesurables, muni de la norme de \mathbb{L}_F). On conclut par densité de $\mathcal{E}_F(\Omega,E)$ dans $\mathbb{L}_F(\Omega;E)$.

Rappel 6. Si l'on pose:

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ , & \lambda &\rightsquigarrow \phi(\lambda) = \sup_{x>0} \frac{F(\lambda x)}{F(x)} \\ \psi: \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ , & \lambda &\rightsquigarrow \psi(\lambda) = \inf_{x>0} \frac{F(\lambda x)}{F(x)} \quad \left(= \frac{1}{\phi(\frac{1}{\lambda})} \right) \end{aligned}$$

alors: ϕ est convexe/croissante (et $\phi(0)=0, \phi(1)=1$)
 ψ est continue/croissante (et $\psi(0)=0, \psi(1)=1$)

et pour toute $f \in \mathbb{L}_F(\Omega, \Sigma, \mu; E)$, on a la relation suivante:

$$\psi(\|f\|) \leq \Phi(f) \leq \phi(\|f\|) .$$

On déduit alors du th.5 le:

Corollaire 7. Sous les hypothèses du th.5, l'espace de Banach $\mathbb{L}_F(\Omega, \Sigma, \mu; E)$ est stable.

Preuve. Soient $(f_n)_{n=1}^\infty$ et $(g_m)_{m=1}^\infty$ deux suites bornées de \mathbb{L}_F , et U, V deux ultrafiltres sur \mathbb{N}_* . Posons:

$$\alpha = \lim_{n,U} \lim_{m,V} \|f_n + g_m\| \quad \text{et} \quad \beta = \lim_{m,V} \lim_{n,U} \|f_n + g_m\|$$

1° cas. Si α ou β est nul.

Par exemple $\alpha=0$. Comme $\phi(f_n + g_m) \leq \phi(\|f_n + g_m\|)$ d'après le rappel 6, il vient:

$$\lim_{n,U} \lim_{m,V} \phi(f_n + g_m) = 0, \text{ donc aussi } \lim_{m,V} \lim_{n,U} \phi(f_n + g_m) = 0,$$

et comme $\|f_n + g_m\| \leq \psi^{-1}(\phi(f_n + g_m))$ on en déduit $\alpha=0, \text{ donc } \beta=0$.

2° cas. Si α et β sont non nuls.

$$\text{On a: } \psi\left(\frac{\|f_n + g_m\|}{\alpha}\right) \leq \phi\left(\frac{f_n + g_m}{\alpha}\right) \leq \phi\left(\frac{\|f_n + g_m\|}{\alpha}\right),$$

d'où par définition de α et par continuité de ϕ et ψ^{-1} ,

$$\lim_{n,U} \lim_{m,V} \phi\left(\frac{f_n + g_m}{\alpha}\right) = 1.$$

Par stabilité de ϕ , on en déduit: $\lim_{m,V} \lim_{n,U} \phi\left(\frac{f_n + g_m}{\alpha}\right) = 1.$

Mais on a aussi: $\lim_{m,V} \lim_{n,U} \Phi\left(\frac{f_n + g_m}{\beta}\right) = 1$

Supposons par exemple $\alpha \geq \beta$. Alors $\forall u \in \mathbb{R}_+$, $F\left(\frac{u}{\beta}\right) \geq \frac{\alpha}{\beta} \cdot F\left(\frac{u}{\alpha}\right)$.

par convexité de F, et par conséquent: $\forall f \in \mathcal{L}_F$, $\Phi\left(\frac{1}{\beta} \cdot f\right) \geq \frac{\alpha}{\beta} \cdot \Phi\left(\frac{1}{\alpha} \cdot f\right)$

d'où: $1 = \lim_{m,V} \lim_{n,U} \Phi\left(\frac{f_n + g_m}{\beta}\right) \geq \frac{\alpha}{\beta} \cdot \lim_{m,V} \lim_{n,U} \Phi\left(\frac{f_n + g_m}{\alpha}\right) = \frac{\alpha}{\beta}$.

D'où $\alpha \leq \beta$, i.e. $\alpha = \beta$, CQFD.

Remarque 8. Soit $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite d'espaces stables, et l_F un espace d'Orlicz de suites (F satisfaisant les conditions Δ_2).

L'espace $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}}^{(1)_F} E_n$ est stable.

Preuve. Cet espace est isométrique à un sous-espace de $l_F(E)$, où E est l'espace stable $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}}^{(1)_2} E_n$.

B) Stabilité en loi.

Soit $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ la droite réelle achevée, et $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}^2)$ l'ensemble des probabilités de Radon sur le compact $\overline{\mathbb{R}}^2$, que l'on munit de la topologie de la convergence vague (topologie induite par la topologie *-faible de $C(\overline{\mathbb{R}}^2)^*$.) $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}^2)$ étant compact, on peut examiner la question de la stabilité de fonctions à valeurs dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}^2)$.

Proposition 1. Soit (Ω, Σ, P) un espace probabilisé, et $\mathbb{L}_{\overline{\mathbb{R}}}^0(\Omega, \Sigma, P)$ l'espace

des fonctions $\Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, P-mesurables.

L'application: $\mathbb{L}_{\overline{\mathbb{R}}}^0 \times \mathbb{L}_{\overline{\mathbb{R}}}^0 \longrightarrow \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}^2)$

$(f, g) \rightsquigarrow \pi(f, g) = \text{loi du couple } (f, g)$

est (vaguement) stable.

Preuve. Soient $(f_n)_{n=1}^\infty$, et $(g_m)_{m=1}^\infty$ deux suites de $\mathbb{L}_{\overline{\mathbb{R}}}^0$, et U et V deux ultrafiltres sur \mathbb{N}_* . Posons:

$$\pi = \lim_{n, U} \lim_{m, V} \pi(f_n, g_m) \qquad \pi' = \lim_{m, V} \lim_{n, U} \pi(f_n, g_m)$$

Soit F une fonction de $C(\overline{\mathbb{R}}^2)$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\mathbb{R}}^2} F(x, y) d\pi(x, y) &= \lim_{n, U} \lim_{m, V} \int_{\overline{\mathbb{R}}^2} F(x, y) d\pi(f_n, g_m)(x, y) \\ &= \lim_{n, U} \lim_{m, V} \int_{\Omega} F(f_n(\omega), g_m(\omega)) dP(\omega) . \end{aligned}$$

Or pour toute $F \in C(\overline{\mathbb{R}}^2)$, l'application:

$$(1): \quad \mathbb{L}^0(\Omega; \overline{\mathbb{R}}) \times \mathbb{L}^0(\Omega; \overline{\mathbb{R}}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \rightsquigarrow \int_{\Omega} F(f(\omega), g(\omega)) dP(\omega)$$

est stable. En effet si $F = \sum_{i=1}^n \phi_i \otimes \psi_i$, avec ϕ_i et $\psi_i \in C(\overline{\mathbb{R}})$, cette propriété de stabilité résulte de la stabilité du crochet de dualité des espaces de Hilbert, puisque:

$$\int_{\Omega} F(f(\omega), g(\omega)) dP(\omega) = \sum_{i=1}^n \langle \phi_i \circ f, \psi_i \circ g \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega)}$$

D'autre part toute $F \in C(\overline{\mathbb{R}}^2)$ s'approche uniformément sur $\overline{\mathbb{R}}^2$ par des fonctions du type précédent, d'où encore la stabilité de (1) dans le cas général.

En revenant à la démonstration de la proposition, on voit donc que:

$$\lim_{n,U} \lim_{m,V} \int_{\Omega} F(f_n(\omega), g_m(\omega)) dP(\omega) = \lim_{m,V} \lim_{n,U} \int_{\Omega} F(f_n(\omega), g_m(\omega)) dP(\omega)$$

d'où:

$$\int F(x,y) d\pi(x,y) = \int F(x,y) d\pi'(x,y)$$

ceci $\forall F \in C(\mathbb{R}^2)$, donc $\pi = \pi'$, CQFD.

Corollaire 2. L'application: $B_{\mathbb{L}^{\infty}}(\Omega) \times B_{\mathbb{L}^{\infty}}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$
 $(f,g) \rightsquigarrow \pi_{|f+g|} = \text{loi de } |f+g|,$
 est (étroitement) stable.

(On remarquera que cette application peut en fait être considérée comme à valeurs dans $\mathcal{S}([0,2])$).

Preuve. L'application $S: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \rightsquigarrow |x+y|$ est continue, et induit donc une application $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}), \pi \rightsquigarrow S\pi$, continue pour les topologies de la convergence étroite. On a alors $\pi_{|f+g|} = S\pi(f,g)$, et le cor.2 en résulte.

Remarque 3. Il résulte du cor.2 ci-dessus que la norme de \mathbb{L}^p est stable sur $B_{\mathbb{L}^{\infty}}$, puisque:

$$\forall f, g \in B_{\mathbb{L}^{\infty}}(\Omega), \quad \|f+g\|_{\mathbb{L}^p}^p = \int_{\mathbb{R}} |x|^p d\pi_{(|f+g|)}(x) \\ = \int_{\mathbb{R}} (|x| \wedge 2)^p d\pi_{(|f+g|)}(x),$$

et que la fonction $x \rightsquigarrow (|x| \wedge 2)^p$ est continue bornée sur \mathbb{R} .

(En revanche, on ne déduit pas directement de ce cor.2 que la norme de \mathbb{L}^p est stable sur $B_{\mathbb{L}^p} \times B_{\mathbb{L}^p}$).

Remarque 4. Soit ϕ une application continue $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; de manière analogue au cor.2, on constate que l'application:

$$B_{\mathbb{L}^{\infty}}(\Omega) \times B_{\mathbb{L}^{\infty}}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ (f,g) \rightsquigarrow \pi_{\phi(f,g)} = \text{loi de } \phi(f,g)$$

est stable (en notant $\phi(f,g)$ l'application $\omega \rightsquigarrow \phi(f(\omega), g(\omega))$).

Il s'ensuit que l'application: $B_{\mathbb{L}^{\infty}}(\Omega) \times B_{\mathbb{L}^{\infty}}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, (f,g) \rightsquigarrow \|\phi(f,g)\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}$
 est stable elle aussi.

Extension au cas des fonctions mesurables bornées vectorielles.

Proposition 4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach stable, et (Ω, Σ, P) un espace

probabilisé. L'application:

$$B_{\mathbb{L}^\infty}(E) \times B_{\mathbb{L}^\infty}(E) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad , (f, g) \rightsquigarrow \pi_{\|f+g\|} = \text{loi de } \|f+g\|_E (\cdot)$$

est (étroitement) stable.

(En fait l'application peut être considérée comme à valeurs dans $\mathcal{S}([0, 2])$).

Preuve. Soit $F: [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

La fonction: $B_E \times B_E \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightsquigarrow F(\|x+y\|_E)$ étant stable bornée, il existe d'après le th. IBI un espace réflexif G et deux applications :

$$u: B_E \longrightarrow B_G \quad , \text{ et } v: B_E \longrightarrow B_{G^*} \quad ,$$

tels que pour tous x, y dans B_E , $F(\|x+y\|_E) = C \langle u(x), v(y) \rangle_{G \times G^*}$. ($C = \text{constante}$).

Notons $\mathcal{E}^\infty(\Omega; E)$ l'espace des fonctions étagées mesurables à valeurs dans E , muni de la norme de $\mathbb{L}^\infty(\Omega; E)$.

Si f, g sont dans $B_{\mathcal{E}^\infty}(\Omega; E)$, alors $u \circ f$ et $v \circ g$ sont étagées mesurables (à valeurs dans G , resp. G^*), et l'on a:

$$\int_{\Omega} F(\|f(\omega) + g(\omega)\|) dP(\omega) = C \int_{\Omega} \langle u \circ f(\omega), v \circ g(\omega) \rangle_{G \times G^*} dP(\omega) = C \langle u \circ f, v \circ g \rangle_{\mathbb{L}^2(G) \times \mathbb{L}^2(G^*)}$$

et de plus $\|u \circ f\|_{\mathbb{L}^2(G)} \leq 1$, $\|v \circ g\|_{\mathbb{L}^2(G^*)} \leq 1$.

Donc $(f, g) \rightsquigarrow \int_{\Omega} F(\|f+g\|(\omega)) dP(\omega)$ est stable sur $B_{\mathcal{E}^\infty} \times B_{\mathcal{E}^\infty}$.

On passe à $B_{\mathbb{L}^\infty} \times B_{\mathbb{L}^\infty}$ par densité de la manière suivante:

i) si F est K -lipschitzienne.

Pour tout $\varepsilon > 0$ et toutes f, g dans $B_{\mathbb{L}^\infty}(\Omega; E)$ on peut trouver \hat{f} et \hat{g} dans $B_{\mathcal{E}^\infty}(\Omega; E)$

avec: $\|f - \hat{f}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2K}$ et: $\|g - \hat{g}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2K}$.. On a alors:

$$\left| \int_{\Omega} F(\|f+g\|(\omega)) dP(\omega) - \int_{\Omega} F(\|\hat{f}+\hat{g}\|(\omega)) dP(\omega) \right| \leq K \int_{\Omega} \left| \|f+g\|(\omega) - \|\hat{f}+\hat{g}\|(\omega) \right| dP(\omega) \leq K(\|f-\hat{f}\|_\infty + \|g-\hat{g}\|_\infty) \leq \varepsilon$$

d'où $(f, g) \rightsquigarrow \int_{\Omega} F(\|f+g\|(\omega)) dP(\omega)$ est stable, sur $B_{\mathbb{L}^\infty} \times B_{\mathbb{L}^\infty}$.

ii) cas général.

Il s'en déduit car toute application $F \in C([0, 2])$ s'approche uniformément sur $[0, 2]$ par des fonctions lipschitziennes.

Extension au cas d'un espace mesuré quelconque.

Notations 5. Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et E un espace de Banach.

On note \mathcal{B}_a l'ensemble des $f \in B_{\mathbb{L}^\infty}(\Omega, \Sigma, \mu; E)$ dont le support est de mesure $\leq a$.

Si $f \in \mathcal{B}_a$, notons m_f la trace sur $]0, +\infty[$ de l'image de μ par l'application $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $\omega \mapsto \|f\|_E(\omega)$.

(on a $\text{Supp } m_f \subset]0, k]$ et $m_f(]0, k]) \leq a$).

Soit $C_0([0, k])$ l'espace des fonctions continues $[0, k] \longrightarrow \mathbb{R}$, s'annulant en 0.

(alors $C_0([0, k])^* = M_b(]0, k])$, espace des mesures de Radon bornées sur $]0, k]$).

Notons $\mathcal{P}_{a, k} = \{\mu \in M_b(]0, k]) \mid \mu \geq 0, \|\mu\| \leq a\}$.

(ce convexe est compact pour la topologie *-faible $\sigma(M_b(]0, k]), C_0([0, k])$)).

Proposition 6. L'application: $\mathcal{B}_a \times \mathcal{B}_a \longrightarrow \mathcal{P}_{2a, 2} \subset M_b(]0, 2])$

$$(f, g) \mapsto m(f+g)$$

est stable. (pour la topologie *-faible, ou, ce qui revient au même ici, pour la convergence vague.)

Preuve. Soit $F \in C_0([0, k])$; la fonction $B_E \times B_E \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto F(\|x+y\|)$

s'annule en $(0, 0)$. On pose alors: $\phi(x, y) = F(\|x+y\|) - F(\|x\|) - F(\|y\|)$.

ϕ est stable bornée et s'annule sur $(B_E \times \{0\}) \cup (\{0\} \times B_E)$.

On peut donc écrire $\forall x, y \in B_E$, $\phi(x, y) = \langle u(x), v(y) \rangle_{G \times G^*}$ (G réflexif, $u(B_E) \subset B_G$,

$v(B_E) \subset B_{G^*}$). Mais on peut supposer $u(0) = 0, v(0) = 0$, car de toute manière:

$$\begin{aligned} \langle u(x) - u(0), v(y) - v(0) \rangle &= \langle u(x), v(y) \rangle - \langle u(0), v(y) \rangle - \langle u(x), v(0) \rangle + \langle u(0), v(0) \rangle \\ &= \phi(x, y) - \phi(0, y) - \phi(x, 0) + \phi(0, 0) \\ &= \phi(x, y) \end{aligned}$$

Si f, g sont dans \mathcal{B}_a , on constate que: $u \circ f \in \mathbb{L}^2(G), v \circ g \in \mathbb{L}^2(G^*)$ avec:

$$\|u \circ f\|_{\mathbb{L}^2(G)} \leq \sqrt{a}, \quad \|v \circ g\|_{\mathbb{L}^2(G^*)} \leq \sqrt{a},$$

de sorte que le raisonnement de la prop. 4 permet de montrer que la fonction:

$$\mathcal{B}_a \times \mathcal{B}_a \longrightarrow \mathbb{R}_+, (f, g) \mapsto \int_{\Omega} \phi(f(\omega), g(\omega)) dP(\omega) \quad \text{est stable.}$$

Il en est alors clairement de même de l'application $(f,g) \mapsto \int_{\Omega} (|f+g|)(\omega) dP(\omega)$, sur $\mathcal{B}_a \times \mathcal{B}_a$, d'où la proposition.

Application au problème de la stabilité des espaces r.i.

Proposition 7. Soit L un espace de Banach de fonctions, invariant par réarrangement. On suppose $L \subset \mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$, (inclusion ensembliste). (cf. [TZL], II-2).

Soit E un espace de Banach stable.

Soit $\mathcal{B}_a = \{f \in \mathcal{L}^{\infty}(E) / \mu(\text{Supp } f) \leq a; f \in B_{\mathcal{L}^{\infty}}(E)\}$ comme ci-dessus.

Supposons que l'application $2.\mathcal{B}_{2a} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f \mapsto \|f\|_L(E)$ se factorise

$$\text{selon : } \begin{array}{ccc} 2.\mathcal{B}_{2a} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{F}_{2a,2} \xrightarrow{\quad \Theta \quad} \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto & m_f & \mapsto \|f\|_L(E) = \Theta(m_f) \end{array} \quad (\text{cf. notations 5 ci-dessus})$$

au moyen d'une application $\Theta: \mathcal{F}_{2a,2} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $m \mapsto \Theta(m)$, continue pour la topologie vague de $\mathcal{F}_{2a,2} (\subset \mathcal{F}([0, \infty[))$.

Alors l'application $\mathcal{B}_a \times \mathcal{B}_a \rightarrow \mathbb{R}_+$, $(f,g) \mapsto \|f+g\|_L(E)$ est stable.

Quand μ est une probabilité, ce critère prend la forme plus simple suivante:

Si l'application: $2.B_{\mathcal{L}^{\infty}}(E) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f \mapsto \|f\|_L(E)$ se factorise selon:

$$2.B_{\mathcal{L}^{\infty}}(E) \xrightarrow{\quad} \mathcal{F}([0,2]) \xrightarrow{\quad \Theta \quad} \mathbb{R}_+, \quad f \mapsto \pi_f (\text{loi de } f) \mapsto \|f\|_L(E) = \Theta(\pi_f)$$

l'application $\Theta: \mathcal{F}([0,2]) \rightarrow \mathbb{R}_+$ étant vaguement continue, alors l'application

$$B_{\mathcal{L}^{\infty}}(E) \times B_{\mathcal{L}^{\infty}}(E) \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad (f,g) \mapsto \|f+g\|_L(E) \text{ est stable.}$$

Notons par ailleurs que l'existence de Θ est toujours assurée pour un espace L r.i., mais non sa continuité. (Le cas le plus simple où Θ est continue est celui des espaces \mathcal{L}^p , $1 \leq p < \infty$).

Preuve de la prop.7. Elle résulte trivialement de la prop.6 .

Définition 8. Soit L un espace fonctionnel de Köthe (cf. [TZL], II, déf Ib17),

sur l'espace mesuré (Ω, Σ, μ) . Soit E un espace de Banach.

Une partie C de $L(E)$ est dite équiintégrable (dans $L(E)$) ssi:

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $K < \infty$ et $A \subset \Omega$, avec $\mu(A) < \infty$, tels que:

$$C \subset K.B_{\mathcal{L}^{\infty}}(A; E) + \epsilon.B_L(E).$$

(où $\mathcal{L}^{\infty}(A; E)$ est le sous-espace de $\mathcal{L}^{\infty}(\Omega; E)$ constitué par les fonctions à support dans A).

Cette définition est cohérente avec la définition II-2g9 de TZL ,
ainsi qu'on le vérifie aisément.

Corollaire 9. Soient L un espace fonctionnel invariant par réarrangement,

E un espace de Banach stable; L et E vérifiant la condition de la prop.7.

Tout sous espace X de $L(E)$, dont la boule-unité B_X est équiintégrable
dans $L(E)$ est stable.

C-Stabilité des espaces de Lorentz.

Notations et rappels 1.

Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, et E un espace de Banach.

Si $f \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu; E)$, on note f^* la réarrangée décroissante de la fonction $\omega \mapsto \|f(\omega)\|_E$. C'est l'unique fonction $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, décroissante et continue à gauche, telle que:

$$\forall a > 0, \mu(\{\omega / \|f(\omega)\|_E \geq a\}) = \lambda(\{t \in \mathbb{R}_+ / f^*(t) \geq a\}),$$

où λ est la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}_+ .

Les propriétés suivantes de la réarrangée, qui sont classiques (cf. [HLP], Chap. 10) seront utilisées dans la suite.

(i) Si f est telle que $\forall a > 0, \mu(\{\omega / \|f(\omega)\| \geq a\}) < \infty$, alors f et f^* sont "équi-mesurables", c'est à dire: pour tout A borélien de \mathbb{R}_+ , on a:

$$\mu(\{\omega / \|f(\omega)\| \in A\}) = \lambda(\{t / f^*(t) \in A\}),$$

d'où il résulte que pour toute fonction $F: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne, on a:

$$\int_{\Omega} F(\|f(\omega)\|) d\mu(\omega) = \int_0^{\infty} F \circ f^*(t) dt.$$

(ii) Pour tout $A \subset \Omega$, mesurable, on a, si $\mu(A) = \alpha$:

$$\int_0^{\alpha} f^*(t) dt \geq \int_A \|f(\omega)\| d\mu(\omega).$$

(et si μ est diffuse, $\int_0^{\alpha} f^*(t) dt \geq \sup_{\mu(A)=\alpha} \int_A \|f(\omega)\| d\mu(\omega)$.)

Plus généralement pour toute fonction $g \geq 0$, mesurable $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_0^{\infty} g^*(t) f^*(t) dt \geq \int_{\Omega} g(\omega) \cdot \|f(\omega)\| d\mu(\omega).$$

(iii) Pour toute fonction décroissante $h: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, et toutes $f, g \in L^0(\Omega; E)$

$$\int_0^{\infty} h(t) (f+g)^*(t) dt \leq \int_0^{\infty} h(t) f^*(t) dt + \int_0^{\infty} h(t) g^*(t) dt.$$

et plus généralement pour tout $q \geq 1$, on a:

$$\left(\int_0^{\infty} h(t) (f+g)^{*q}(t) dt \right)^{1/q} \leq \left(\int_0^{\infty} h(t) f^{*q}(t) dt \right)^{1/q} + \left(\int_0^{\infty} h(t) g^{*q}(t) dt \right)^{1/q}.$$

(iv) On pose pour toute $f \in L^1_{loc}(\Omega, \Sigma, \mu; E)$:

$$\forall t > 0, f^{**}(t) = \frac{1}{t} \cdot \int_0^t f^*(s) ds.$$

f^{**} est une fonction continue décroissante. Pour $f, g \in \mathbb{L}_{loc}^1(\Omega; E)$, on a l'inégalité triangulaire "ponctuelle" :

$$\forall t > 0, (f+g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t)$$

d'où en combinant avec l'inégalité de Minkowski, on obtient pour toute mesure $m \geq 0$ sur \mathbb{R}_+ et tout $q \geq 1$:

$$\left(\int_0^\infty (f+g)^{**q}(t) dm(t) \right)^{1/q} \leq \left(\int_0^\infty f^{**q}(t) dm(t) \right)^{1/q} + \left(\int_0^\infty g^{**q}(t) dm(t) \right)^{1/q}$$

(v) L'espace de Lorentz $\mathbb{L}^{p,q}(\Omega, \Sigma, \mu; E)$ est l'espace des fonctions $f \in \mathbb{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu; E)$ telles que $\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} < \infty$, et l'on pose :

$$\forall f \in \mathbb{L}^{p,q}, \quad \|f\|_{p,q} = \left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \quad (\text{cf. [B-L]})$$

C'est une quasi-norme, en fait une norme lorsque $q \leq p$.

Pour $p > 1, q \geq 1$, on définit une norme sur $\mathbb{L}^{p,q}$, équivalente à cette quasi-norme :

$$\|f\|'_{p,q} = \left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^{**}(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

Ces espaces interviennent naturellement en théorie de l'interpolation (avec des normes équivalentes à celles-ci.)

(vi) Rappelons, d'après [TZ-L], une généralisation des $\mathbb{L}^{p,q}$ pour $q \leq p$:

Soit W une fonction $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, satisfaisant les conditions :

$$(W) \quad \begin{cases} (* W \text{ est décroissante positive} \\ (* \int_0^1 W(t) dt < \infty \\ (* \text{ si } \mu(\Omega) = \infty, \int_0^\infty W(t) dt = \infty \end{cases}$$

Alors $\mathbb{L}_{W,q}(\Omega, \Sigma, \mu; E) = \{f \in \mathbb{L}^0(\Omega; E) / \int_0^\infty f^{*q}(t) W(t) dt < \infty\}$

et $\mathbb{L}_{W,q}$ est muni de la norme :

$$\|f\|_{W,q} = \left(\int_0^\infty f^{*q}(t) W(t) dt \right)^{1/q}.$$

Avec $W(t) = t^{\frac{q}{p}-1}$, on retrouve la définition (v) de $\mathbb{L}^{p,q}$ (si $q \leq p$).

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 2. Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré ($\mu \geq 0$) et E un espace de Banach stable. Alors:

i) Pour toute fonction W satisfaisant les conditions (W) ci-dessus, l'espace $\mathbb{L}_{W,q}(\Omega; E)$ est stable.

(En particulier l'espace $\mathbb{L}^{p,q}(\Omega; E)$, muni de la norme $\|\cdot\|_{p,q}$ pour $q \leq p$, est stable.)

ii) Pour $1 < p < \infty$, et $1 \leq q < \infty$, l'espace $\mathbb{L}^{p,q}(\Omega; E)$, muni de la norme $\|\cdot\|'_{p,q}$ est stable.

La démonstration de ce théorème comporte deux parties:

- dans la première on montre que l'application $(f, g) \rightsquigarrow \|f+g\|$ est stable sur $B_{\mathbb{L}^\infty(\Omega; E)} \times B_{\mathbb{L}^\infty(\Omega; E)}$, quand μ est bornée (resp. sur les $\mathcal{B}_a \times \mathcal{B}_a$ quand $\mu(\Omega) = \infty$, où les \mathcal{B}_a ont été définis en B5). On utilise ici la propriété de stabilité en loi exposée au §B.

- dans la seconde partie, on se ramène au cas précédent au moyen d'un résultat de décomposition: si $(f_n)_{n=1}^\infty$ et $(g_m)_{m=1}^\infty$ sont deux suites bornées dans $\mathbb{L}_{W,q}$ (ou dans $\mathbb{L}^{p,q}$), on peut se ramener au cas où il existe des décompositions:

$f_n = \hat{f}_n + \overline{f}_n$, $g_m = \hat{g}_m + \overline{g}_m$, avec $(\overline{f}_n)_n, (\overline{g}_m)_m \subset B_{\mathbb{L}^\infty}$ (resp. dans un \mathcal{B}_a) et $\forall n, m, \left| \|f_n + g_m\|^q - \|\hat{f}_n\|^q - \|\hat{g}_m\|^q - \|\overline{f}_n + \overline{g}_m\|^q \right| < \varepsilon$

1° Cas de la stabilité sur $B_{\mathbb{L}^\infty} \times B_{\mathbb{L}^\infty}$ (resp. $\mathcal{B}_a \times \mathcal{B}_a$)

Proposition 3. Soient (Ω, Σ, μ) , E, p, q, W comme en 1.

a) Supposons que μ est une probabilité.

Alors les normes $\|\cdot\|_{p,q}$, $\|\cdot\|'_{p,q}$, $\|\cdot\|_{W,q}$ dépendent continûment des lois des éléments de $B_{\mathbb{L}^\infty}$, i.e. l'application:

$$B_{\mathbb{L}^\infty(\Omega; E)} \longrightarrow \mathbb{R}_+, f \rightsquigarrow \|f\|_{p,q} \text{ (ou } \|f\|'_{p,q} \text{, ou } \|f\|_{W,q})$$

se factorise selon:

$$B_{\mathbb{L}^\infty(\Omega; E) \xrightarrow{\pi} \mathcal{S}([0,1]) \xrightarrow{\theta} \mathbb{R}_+}$$

$$f \rightsquigarrow \pi_f \rightsquigarrow \|f\|_{p,q}$$

où θ est continue (pour la convergence vague des probabilités).

b) Dans le cas μ quelconque, on a un résultat analogue, en remplaçant $B_{\mathbb{L}^\infty}$ par un B_a ($a > 0$ quelconque), et $\pi: f \rightsquigarrow \pi_f$ par l'application

$$B_a \longrightarrow \mathcal{P}_{1,1}, f \rightsquigarrow \pi_f. \text{ (Pour les notations, voir B5.)}$$

⊙ est alors continue pour la topologie de la convergence vague des mesures de Radon sur $]0,1]$.

Preuve. Supposons que μ est une probabilité.

i) Définition de Θ .

A toute probabilité π sur \mathbb{R}_+ , associons la fonction $M^\pi: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, définie

par: $\forall a > 0, M^\pi(a) = \pi([\bar{a}, +\infty[)$. ($1 - M^\pi$ est la fonction de répartition

de π). Posons alors $\phi_\pi: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, définie par: $\phi_\pi(t) = \text{Sup}\{u / M^\pi(u) \geq t\}$.

(pour tout $t \geq 0$). ϕ_π est une fonction décroissante continue à gauche.

Posons enfin: $\Theta(\pi) = \|\phi_\pi\|_{\mathbb{L}^{p,q}(\mathbb{R}_+, dt)} = \left(\int_0^\infty \phi_\pi(t)^q t^{q-1} dt \right)^{1/q}$

On vérifie facilement que lorsque $\pi = \pi_f$, loi de $\|f\|_E$, f appartenant à $\mathbb{L}^{p,q}(\Omega; E)$

on a: $\phi_{\pi_f} = f^*$, donc: $\Theta(\pi_f) = \|f\|_{p,q}$.

De manière analogue, on posera $\Theta(\pi) = \|\phi_\pi\|_{\mathbb{L}^{p,q}(\mathbb{R}_+, dt)}$, resp. $\|\phi_\pi\|_{\mathbb{L}^{p,q}(\mathbb{R}_+, dt)}$

pour l'étude des cas de $\|\cdot\|_{W,q}$, resp. $\|\cdot\|_{p,q}$.

ii) Continuité de Θ .

Il suffit de montrer que si $\pi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \pi$, (vaguement), alors $\Theta(\pi_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Theta(\pi)$, puisque

la convergence vague des probabilités sur \mathbb{R}_+ définit une topologie métrisable.

On sait que si $\pi_n \xrightarrow{} \pi$ (vaguement), alors les fonctions de répartitions

$F_{\pi_n} \longrightarrow F_\pi$, en tout point de continuité de la fonction F_π . (cf [T], §12, prop.2).

On a donc en l'occurrence: $M^{\pi_n} \longrightarrow M^\pi$, en tout point de continuité de M^π .

Il est possible de montrer de même que $\phi_{\pi_n} \longrightarrow \phi_\pi$ en tout point de continuité de ϕ_π . On peut toutefois faire ici l'économie de cette démonstration de la manière suivante.

Soit m une mesure diffuse sur \mathbb{R}_+ . Soit $h_n = \phi_{\pi_n}$ et $h = \phi_\pi$. Il vient:

$$\int_0^1 h(t)^q dm(t) = \int_0^1 dm(t) \int_0^{h(t)} \frac{1}{q} u^{q-1} du = \frac{1}{q} \iint_{\substack{u \leq h(t) \\ (u,t) \in \Delta}} u^{q-1} du dm(t)$$

où l'on a posé $\Delta = [0,1]^2$. (Noter que $0 \leq h(t) \leq 1$ car $\pi \in \mathcal{B}(0,1)$).

Or on constate facilement que: $\{(u,t) \in \Delta / u \leq \phi_{\pi}(t)\} = \{(u,t) \in \Delta / t \leq M^{\pi}(u)\}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc: } \int_0^1 h(t)^q dm(t) &= \frac{1}{q} \cdot \iint_{\substack{t \leq M^{\pi}(u) \\ (u,t) \in \Delta}} u^{q-1} du dm(t) \\ &= \frac{1}{q} \cdot \int_0^1 u^{q-1} du \int_0^{M^{\pi}(u)} dm(t) = \frac{1}{q} \int_0^1 u^{q-1} H(M^{\pi}(u)) du \end{aligned}$$

où H est la fonction $x \mapsto H(x) = \int_0^x dm(t)$. Comme m est supposée diffuse, H est continue.

Comme $M^{\pi_n}(u) \rightarrow M^{\pi}(u)$ en presque tous les points de $[0,1]$ (et même en tous les points sauf un ensemble au plus dénombrable, car inclus dans l'ensemble des points de discontinuité de M^{π}), le théorème de Lebesgue montre que:

$$\int_0^1 h_n(t)^q dm(t) \rightarrow \int_0^1 h(t)^q dm(t). \quad (h_n = \phi_{\pi_n} \text{ et } h = \phi_{\pi}).$$

Lorsque l'on prend $dm = t^{q-1} dt$, on obtient $\|\phi_{\pi_n}\|_{p,q} \rightarrow \|\phi_{\pi}\|_{p,q}$.

De même si $dm = W(t).dt$, on obtient $\|\phi_{\pi_n}\|_{W,q} \rightarrow \|\phi_{\pi}\|_{W,q}$

Enfin avec $dm = 1_{\{t \leq s\}} dt$, il vient: $\phi_{\pi_n}^{**}(s) \rightarrow \phi_{\pi}^{**}(s)$, pour tout $s > 0$,

et une nouvelle application du th. de Lebesgue montre que:

$$\|\phi_{\pi_n}\|'_{p,q} \rightarrow \|\phi_{\pi}\|'_{p,q}.$$

La continuité de Θ est donc montrée dans chacun de ces trois cas.

Le raisonnement est analogue dans le cas où μ est quelconque (bornée ou non).

Corollaire 4. Soient $(\Omega, \Sigma, \mu), E$ et W comme dans l'énoncé du th.2.

Soient p, q des réels, $1 \leq p, q < \infty$.

Pour tout $a > 0$, les applications $\mathcal{B}_a \times \mathcal{B}_a \rightarrow \mathbb{R}_+$, $(f, g) \mapsto \|f+g\|_{p,q}$,
 $(f, g) \mapsto \|f+g\|'_{p,q}$, $(f, g) \mapsto \|f+g\|_{W,q}$ sont stables.

Preuve. Ceci résulte de la prop.3 ci-dessus et du résultat 7 du §B.

2°) Cas général.

2°-a) Un résultat de décomposition pour une suite bornée dans l'espace de Lorentz.

Proposition 5. On considère $\mathbb{L}_{W,q}(\Omega, \Sigma, \mu; E)$, resp. $\mathbb{L}^{p,q}(\Omega, \Sigma, \mu; E)$, et l'on pose $dm = W(t).dt$, resp. $dm = t^{\frac{q}{p}-1}.dt$.

Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite bornée dans $B_{\mathbb{L}_{W,q}}$, resp. $B_{\mathbb{L}^{p,q}}$.

On peut trouver une sous-suite $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ et pour chaque k , une

décomposition: $f_{n_k} = f'_k + f''_k + f'''_k$, avec:

i) $\mu(\text{Supp } f''_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ et $\|f'''_k\|_{\infty} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$

ii) Pour tout k , les fonctions f'_k, f''_k, f'''_k sont deux à deux étrangères,

iii) La famille $(f_k^{*q})_{k=1}^{\infty}$ est m -équiintégrable.

La preuve de cette proposition se fait en trois temps: on montre d'abord un résultat de décomposition pour une suite bornée dans un espace \mathbb{L}^1 quelconque (lemme 8 ci-dessous); on l'applique au cas d'une famille de fonctions décroissantes dans $B_{\mathbb{L}^1}(\mathbb{R}_+, m)$, en renforçant la conclusion; on applique enfin ce dernier résultat aux réarrangées f_n^{*q} .

Il sera commode d'user de la terminologie suivante:

Définition 6. Soit \mathcal{G} une famille bornée de $\mathbb{L}^1(\Omega, \Sigma, \nu)$.

i) \mathcal{G} est dite "localement équiintégrable" ssi:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \subset \Omega \text{ mesurable, et tel que } \nu(A) \leq \delta, \forall g \in \mathcal{G},$$

$$\int_A |g(\omega)| d\nu(\omega) \leq \epsilon.$$

ii) \mathcal{G} est dite "équisupportée" ssi:

$$\forall \epsilon > 0, \exists a < \infty, \forall g \in \mathcal{G}, \exists A \subset \Omega \text{ mesurable avec } \nu(A) \leq a, \text{ et:}$$

$$\int_A |g(\omega)| d\nu(\omega) \leq \epsilon$$

iii) \mathcal{G} est dite "également intégrable" ssi elle vérifie les deux conditions précédentes.

Cette dernière notion est plus faible que l'équiintégrabilité (cf. Bourbaki Intégration, IV, §5, n°11, déf 10). Elle équivaut à l'équiintégrabilité des

réarrangées g^* , pour la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}_+ .

Le lemme suivant est facile:

Lemme 7. Soit \mathcal{G} bornée dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \Sigma, \nu)$. Alors:

i) \mathcal{G} est localement équi-intégrable ssi :
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N < \infty, \forall g \in \mathcal{G}, \int_{\{|g(\omega)| > N\}} |g(\omega)| d\nu(\omega) < \varepsilon$.

ii) \mathcal{G} est équisupportée ssi:
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall g \in \mathcal{G}, \int_{\{|g(\omega)| < \delta\}} |g(\omega)| d\nu(\omega) < \varepsilon$

On a alors le lemme de décomposition annoncé:

Lemme 8. Pour toute suite bornée dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \Sigma, \nu), (\phi_n)_{n=1}^\infty$, il existe une sous-suite $(\phi_{n_k})_{k=1}^\infty$ et une partition: $\Omega = A_k + B_k + C_k$ (pour chaque k) telles que:

i) La famille $(1_{A_k} \cdot \phi_{n_k})_{k=1}^\infty$ est ν -également intégrable.

ii) $(1_{B_k} \cdot \phi_{n_k})_k \xrightarrow{\mathbb{L}^\infty} 0$, et $\|1_{B_k} \cdot \phi_{n_k}\|_\infty \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

iii) $\nu(C_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

iv) $B_k = \{|\phi_{n_k}| < \delta_k\}$ et $C_k = \{|\phi_{n_k}| \geq N_k\}$ pour certains réels δ_k, N_k .

Preuve. a) Pour toute $f \in \mathbb{L}^1(\Omega, \Sigma, \nu)$ et $\delta > 0$, posons:

$$\rho(f, \delta) = \int_{\{|f(\omega)| < \delta\}} |f(\omega)| d\nu(\omega).$$

Si $\Phi = (\phi_n)_{n=1}^\infty \subset B_{\mathbb{L}^1}$, posons: $\rho_\Phi(\delta) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \rho(\phi_n, \delta)$

$$\rho_\Phi = \inf_{\delta > 0} \rho_\Phi(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho_\Phi(\delta)$$

Notons que si Ψ est une suite extraite, alors $\rho_\Psi \leq \rho_\Phi$.

Soit $(\delta_k)_{k=1}^\infty$ une suite de réels > 0 , tendant vers 0. Pour chaque k soit n_k tel que: $n_k > n_{k-1}$ et: $|\rho_\Phi(\delta_k) - \rho(\phi_{n_k}, \delta_k)| < \frac{1}{k}$.

Pour alléger les notations on peut supposer que $(\phi_{n_k})_k = (\phi_n)_n$ (ce qui, ici, ne change pas la valeur de ρ_Φ).

Posons $B_k = 1_{\{|\phi_k(\omega)| < \delta_k\}}$; on a clairement $\|1_{B_k} \cdot \phi_k\|_\infty \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$; montrons que

$(1_{B_k} \cdot \phi_k)_{k=1}^\infty$ vérifie la condition (ii) du lemme 7.

Dans le cas contraire, on pourrait trouver $\varepsilon > 0$ tel que:

$$\forall \alpha > 0, \exists k \in \mathbb{N}_* \text{ avec: } \int_{\{|\phi_k(\omega)| < \alpha\}} 1_{B_k^c}(\omega) \cdot |\phi_k(\omega)| dv(\omega) \geq \varepsilon,$$

Choisissons une suite $(\alpha_l)_l$, tendant vers 0. On trouve alors une suite extraite

$$(\phi_{k_l})_l = \Psi, \text{ telle que: } \forall l, \int_{\{\delta_{k_l} \leq |\phi_{k_l}(\omega)| < \alpha_l\}} |\phi_{k_l}(\omega)| dv(\omega) \geq \varepsilon.$$

$$\text{et par cons\u00e9quent: } \forall l, \int_{\{|\phi_{k_l}(\omega)| < \alpha_l\}} |\phi_{k_l}(\omega)| dv(\omega) \geq \rho(\delta_{k_l}) - \frac{1}{k_l} \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{+\varepsilon} \rho + \varepsilon$$

On a donc: $\rho_\Psi \geq \rho_\Phi + \varepsilon > \rho_\Phi$, ce qui est impossible.

b) De mani\u00e8re analogue, posons:

$$\eta(\psi, N) = \int_{\{|\psi(\omega)| \geq N\}} |\psi(\omega)| dv(\omega) \quad \text{pour toute } \psi \in B_{\mathbb{L}}^1.$$

$$\text{et si } \Psi = (\psi_n)_{n=1}^\infty, \text{ soient: } \eta_\Psi(N) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \eta(\psi_n, N)$$

$$\eta_\Psi = \inf_{N \rightarrow \infty} \eta_\Psi(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \eta_\Psi(N).$$

En procédant comme au a) ci-dessus, on voit qu'on peut extraire de toute suite $(\psi_n)_{n=1}^\infty \subset B_{\mathbb{L}}^1$ une sous-suite $(\psi_{n_k})_k$ et trouver une suite $(N_k)_k$ de r\u00e9els, telles qu'en posant $B_k = \{|\psi_{n_k}(\omega)| \geq N_k\}$, la suite $(1_{B_k^c} \cdot \psi_{n_k})_{k=1}^\infty$ v\u00e9rifie la condition (ii) du lemme 7. Il est clair alors que $v(B_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$.

c) En appliquant successivement les proc\u00e9d\u00e9s (a) et (b) ci-dessus, on obtient le r\u00e9sultat du lemme 8.

Lemme 9. Soit m une mesure (de Radon) positive sur \mathbb{R}_+ , ne chargeant pas le

point 0.

Soit $(\psi_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions de $B_{\mathbb{L}}^1(\mathbb{R}_+, m)$, positives, d\u00e9croissantes et c.a.g. .

On peut trouver une sous suite $(\psi_{n_k})_{k=1}^\infty$, et des intervalles :

$$I_k = [0, \alpha_k], \quad J_k =]\alpha_k, \beta_k], \quad H_k =]\beta_k, +\infty[$$

tels que:

$$\text{i) } m(I_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad (\text{i.e. } \alpha_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0)$$

$$\text{ii) } \|\psi_{n_k} \cdot 1_{H_k}\|_\infty \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad (\text{i.e. } \psi_{n_k}(\beta_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0)$$

$$\text{iii) } I_k = \{t/|\psi_{n_k}|(t) \geq N_k\} \text{ et } H_k = \{t/|\psi_{n_k}|(t) < \delta_k\}$$

(pour certains r\u00e9els N_k, δ_k).

iv) La famille $(\phi_k)_{k=1}^{\infty}$ est équiintégrable, où ϕ_k est définie par: $\phi_k = 1_{I_k} \cdot \psi_{n_k}(\alpha_k) + 1_{J_k} \cdot \psi_{n_k}$.

Avant de montrer le lemme 9, énonçons le:

Sous-lemme 10. Soient m une mesure (de Radon) positive, sur \mathbb{R}_+ , ne chargeant pas 0 ; $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions décroissantes positives dans $B_{\mathbb{L}^1}(\mathbb{R}_+, m)$. IL existe alors une sous-suite $(\psi_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, et une suite de réels $(\tau_k)_{k=1}^{\infty}$, telles que:

- i) $\forall k, \tau_k > 0$ et $\tau_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$
- ii) $m([0, \tau_k]) \cdot \sup_{l \in \mathbb{N}_*} \psi_{n_l}(\tau_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$

Admettons ce lemme pour l'instant, et donnons la preuve du lemme 9.

D'après le lemme 8, et quitte à extraire, on peut supposer que:

$$\forall n, \psi_n = 1_{I_n} \cdot \psi_n + 1_{J_n} \cdot \psi_n + 1_{H_n} \cdot \psi_n,$$

où $I_n = \{t/\psi_n(t) \geq N_n\}$ et $H_n = \{t/\psi_n(t) < \delta_n\}$; $m(I_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, $\|1_{H_n} \cdot \psi_n\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

et la famille $(1_{J_n} \cdot \psi_n)_{n=1}^{\infty}$ est m -également intégrable.

Mais comme les ψ_n sont décroissantes, I_n, J_n , et H_n sont, pour tout n , des intervalles contigus de \mathbb{R}_+ . (et plus précisément de la forme $[0, \alpha_n],]\alpha_n, \beta_n],]\beta_n, +\infty[$, compte tenu du fait que les ψ_n sont supposées c.a.g.)

Comme $m(I_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, on voit qu'en fait la famille $(1_{J_n} \cdot \psi_n)_n$ est m -équi-intégrable (et non seulement également intégrable).

D'après le sous-lemme 10, et quitte encore à extraire, on peut supposer que: $\exists (\tau_n)_{n=1}^{\infty}$, $\tau_n > 0$, $\tau_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, avec: $m([0, \tau_n]) \cdot \sup_l \psi_l(\tau_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Quitte à extraire une nouvelle fois, on peut supposer aussi que pour tout n , $I_n \subset [0, \tau_n]$. Posons alors pour tout n :

$$a_n = (\psi_n(\tau_n) + 1) \wedge N_n, \hat{\tau}_n = \text{Sup}\{t/\psi_n(t) = a_n\}; \text{ on a: } \alpha_n \leq \hat{\tau}_n \leq \tau_n.$$

Soient $I'_n = [0, \hat{\tau}_n]$; $J'_n = J_n \setminus I'_n$; $H'_n = H_n \setminus I'_n$;

Alors $\|1_{H'_n} \cdot \psi_n\|_{\infty} \leq \|1_{H_n} \cdot \psi_n\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$; $m(I'_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ (car m ne charge pas 0).

$(1_{J'_n} \cdot \psi_n)_n$ est m -équi-intégrable, et comme: $\|1_{I'_n} \cdot \psi_n(\hat{\tau}_n)\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}_+, m)} < m([0, \tau_n]) (\psi_n(\tau_n) + 1)$ qui tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, on voit que les $1_{I'_n} \cdot \psi_n(\hat{\tau}_n) + 1_{J'_n} \cdot \psi_n$ sont

m-équintégrables .D'où le lemme 9.

Preuve du sous-lemme 10.

a) Il suffit de prouver que: $\lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} m([0, \tau]) \cdot \psi_n(\tau) = 0$.

ce qui revient à dire que:

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0, \forall t_0 > 0, \exists \tau, 0 < \tau \leq t_0 \text{ tel que } m([0, \tau]) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(\tau) < \varepsilon$$

En effet si (*) a lieu, alors, pour tous ε et $t_0 > 0$, il existe $\tau, 0 < \tau \leq t_0$,

et une suite extraite $(\psi_{n_k}^\varepsilon)_{k=1}^\infty$, tels que: $\forall k \geq 1, m([0, \tau]) \cdot \psi_{n_k}^\varepsilon(\tau) < \varepsilon$

Supposons avoir choisi $\tau_1 > \tau_2 \dots > \tau_l$, et les suites extraites successives

$(\psi_{n_k^j})_{k=1}^\infty, j=1, \dots, l$. On choisit alors t_0 tel que $\forall t \leq t_0$ et $\forall j \leq l$,

$$m([0, t]) \cdot \psi_{n_j^j}(t) \leq \frac{1}{l+1}, \text{ (ce qui est possible car ceci est } \leq \int_0^t \psi_{n_j^j}(t) dm(t))$$

puis $\tau_{l+1} \leq t_0$ et $(\psi_{n_k^{j+1}})_{k=1}^\infty$ extraite tels que: $\forall k > 1, m([0, \tau_{l+1}]) \cdot \psi_{n_k^{j+1}}(\tau_{l+1}) \leq \frac{1}{l+1}$

La suite diagonale $(\psi_{n_j})_{j=1}^\infty$ vérifie alors $m([0, \tau_j]) \cdot \sup \psi_{n_j}(\tau_j) \leq \frac{1}{j}$.

b) Supposons la propriété (*) du (a) ci-dessus fausse.

Il existe alors $\varepsilon > 0$ et $t_0 > 0$, tels que: $\forall \tau, 0 < \tau \leq t_0$, on ait: $m([0, \tau]) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(\tau) \geq \varepsilon$

$$\text{Alors: } \int_0^{t_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(\tau) dm(\tau) \geq \varepsilon \cdot \int_0^{t_0} \frac{dm(\tau)}{m([0, \tau])} = \int_0^{m([0, t_0])} \frac{du}{u} = +\infty$$

ce qui est impossible d'après le lemme de Fatou:

$$\int_0^{t_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(\tau) dm(\tau) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t_0} \psi_n(\tau) dm(\tau) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\psi_n\|_{L^1(\mathbb{R}_+, m)} \leq 1.$$

D'où la contradiction et le sous-lemme 10.

On peut maintenant donner la preuve de la prop.5.

Soit $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite bornée dans $L_{W,q}$ (resp. $L^{p,q}$); appliquons le lemme 9 à la suite $(f_n^{*q})_{n=1}^\infty$ et à la mesure m ($dm=W(t).dt$, resp. $t^{q-1}.dt$)

$$\text{il vient: } f_{n_k}^* = 1_{I_k} \cdot f_{n_k}^* + 1_{J_k} \cdot f_{n_k}^* + 1_{H_k} \cdot f_{n_k}^*,$$

$$\text{avec: } I_k = \{t / f_{n_k}^*(t) \geq N_k\}; J_k = \{t / \delta_k \leq f_{n_k}^*(t) < N_k\}; H_k = \{t / f_{n_k}^*(t) < \delta_k\}.$$

On pose alors:

$$A_k = \{\omega \in \Omega / \delta_k \leq \|f_{n_k}(\omega)\| < N_k\} ; B_k = \{\omega \in \Omega / \|f_{n_k}(\omega)\| \geq N_k\} ; C_k = \{\omega \in \Omega / \|f_{n_k}(\omega)\| < \delta_k\}$$

puis: $f'_k = 1_{A_k} \cdot f_{n_k} ; f''_k = 1_{B_k} \cdot f_{n_k} ; f'''_k = 1_{C_k} \cdot f_{n_k} .$

On a alors si $I_k = [0, \alpha_k]$:

$$\mu(B_k) = \alpha_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 ; \|f'''_k\|_\infty = \|1_{H_k} \cdot f_{n_k}^*\|_\infty \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

et comme $f_k^* = 1_{J_k} \cdot f_{n_k}^*(\alpha_k + \cdot) \leq 1_{I_k} \cdot f_{n_k}^*(\alpha_k) + 1_{J_k} \cdot f_{n_k}^*$

on voit que la famille $(f_k^{*q})_{k=1}$ est m -équiintégrable. D'où la prop.5.

2°-b) Approximation d'une famille dont les réarrangées sont équi-intégrables par une famille bornée dans \mathbb{L}^∞ et à supports de mesures bornées.

Proposition 11. Soient $\mathbb{L}_{W,q}$, resp. $\mathbb{L}^{p,q}$, et m comme dans la prop.5.

Soit $\mathcal{G} \subset B_{\mathbb{L}_{W,q}}$ (ou: $\subset B_{\mathbb{L}^{p,q}}$) telle que la famille $\mathcal{G}^{*q} = (g^{*q})_g$ soit m -localement équiintégrable, resp. m -équisupportée (cf. déf.6), resp. m -équiintégrable.

Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe une famille $\tilde{\mathcal{G}} \subset B_{\mathbb{L}_{W,q}}$ (ou $B_{\mathbb{L}^{p,q}}$), $\tilde{\mathcal{G}} = (\tilde{g})_{g \in \mathcal{G}}$

telle que: $\|g - \tilde{g}\|_{W,q} \leq \epsilon$ (ou: $\|g - \tilde{g}\|_{p,q} \leq \epsilon$) pour tout $g \in \mathcal{G}$, et vérifiant la condition i), resp. la condition ii), resp. les conditions i) et ii)

ci-dessous:

i) $\tilde{\mathcal{G}}$ est dans \mathbb{L}^∞ , et bornée dans \mathbb{L}^∞ .

ii) Les supports des $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{G}}$ sont de μ -mesures finies et uniformément bornées.

Preuve. a) Le cas d'une famille \mathcal{G} telle que \mathcal{G}^{*q} soit m -localement équiintégrable.

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe N tel que: $\forall g \in \mathcal{G}, \int_{\{g^{*q}(t) \geq N\}} g^{*q}(t) dm(t) < \epsilon^q$.

(cf. lemme 7). On a donc $\|1_{\{\|g(\omega)\| \geq N\}} g\|_{W,q} < \epsilon$. On pose $\tilde{g} = 1_{\{\|g(\omega)\| < N\}} \cdot g$.

b) Le cas d'une famille \mathcal{G} telle que \mathcal{G}^{*q} soit m -équisupportée.

Il est trivial si $\mu(\Omega) < \infty$. Supposons donc $\mu(\Omega) = \infty$, on rappelle que dans ce cas

$$\int_0^\infty W(t) dt = +\infty \text{ par hypothèse (cf "conditions (W))".}$$

Il s'agit de montrer qu'on peut "couper" les réarrangées g^{*q} en un point a

de manière que les "queues" $1_{]a, +\infty[} g^{*q}$ aient une réarrangée de norme petite dans $L^1(\mathbb{R}_+, m)$.

Pour $a > 0$, et $g \in \mathcal{G}$, posons $\gamma_{a,g} = g^{*q}(a) \cdot 1_{[0,a]} + g^{*q} \cdot 1_{]a, +\infty[}$.
 La famille $\Gamma = (\gamma_{a,g})_{a > 0}$ est m -équisupportée (car $\gamma_{a,g} \leq g^{*q}$): il existe donc $B \in \mathbb{R}_+$ tel que: $g \in \mathcal{G}$

$$m(B) < \infty \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}_+ \setminus B} \gamma(t) \, dm(t) < \frac{1}{3} \varepsilon^q \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

Soit b tel que $m(B) \leq m([0, b]) < \infty$, on a $b < \infty$ car $m(\mathbb{R}_+) = +\infty$, et comme les $\gamma \in \Gamma$ sont décroissantes, on a (a fortiori) $\forall \gamma \in \Gamma, \int_b^\infty \gamma(t) \, dm(t) < \frac{1}{3} \varepsilon^q$.

On choisit alors δ tel que: $\delta > 0, \delta^q m([0, b]) < \frac{1}{3} \varepsilon^q$ et $\int_{\{g^{*q}(t) < \delta\}} g^{*q}(t) \, dm(t) < \frac{1}{3} \varepsilon^q$.

Posons $a_g = \sup \{t / g^*(t) \geq \delta\}$ (de sorte que $\{g^*(t) < \delta\} =]a_g, +\infty[$).

$$\begin{aligned} \text{On a alors: } \int_0^\infty \gamma_{a_g, g}(t) \, dm(t) &\leq \int_0^b \gamma_{a_g, g}(t) \, dm(t) + \frac{1}{3} \varepsilon^q \\ &\leq m([0, b]) \cdot g^{*q}(a_g) + \int_{a_g}^\infty g^{*q}(t) \, dm(t) + \frac{1}{3} \varepsilon^q \\ &< \varepsilon^q. \end{aligned}$$

Or il est clair que: $(1_{]a_g, +\infty[} g)^* = g^*(a_g + \cdot) \leq 1_{[0, a_g]} g^*(a_g) + 1_{]a_g, +\infty[} g^* = \gamma_{a_g, g}$

Posons pour tout $g \in \mathcal{G}$: $\tilde{g}(\omega) = 1_{\{\|g(\omega)\| \geq \delta\}} g(\omega)$. On a: $(g - \tilde{g})^*(t) = g^*(a_g + t)$
 et par conséquent: $\|g - \tilde{g}\|_{W, q}^q < \varepsilon^q$.

Par ailleurs: $\mu(\text{Supp}(g)) = a_g$. Or $\delta^q m([0, a_g]) \leq \int_0^{a_g} g^{*q}(t) \, dm(t) \leq \|g\|_{W, q}^q \leq 1$

donc $\sup_{g \in \mathcal{G}} m([0, a_g]) \leq \frac{1}{\delta^q} < \infty$, d'où (puisque $m(\mathbb{R}_+) = +\infty$): $\sup_{g \in \mathcal{G}} a_g < \infty$.

2°-c) Règle de q-additivité/des normes dans les décompositions asymptotique du type de la prop.5.

Proposition 12. On considère l'espace de Lorentz $L_{W, q}(\Omega, \Sigma, \mu; E)$, où E est un espace de Banach quelconque. m est la mesure $W(t).dt$.

Supposons que pour deux suites $(f_n)_{n=1}^\infty, (g_m)_{m=1}^\infty$ bornées dans $L_{W, q}$, on ait des décompositions:

$$f_n = f_n' + f_n'' + f_n''' \quad \text{et} \quad g_m = g_m' + g_m'' + g_m'''$$

avec:

- (* f_n', f_n'', f_n''' étrangères deux à deux (pour tout n)
- (* $\mu(\text{supp } f_n'') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $\|f_n''\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$)
- (* la suite $(f_n^{*q})_{n=1}^\infty$ est m -équiintégrable.

et de même pour les g'_m, g''_m, g'''_m .

Alors pour tout couple U, V d'ultrafiltres non triviaux sur \mathbb{N}_* ,

$$\lim_{n,U} \lim_{m,V} \|f_n + g_m\|_{W,q}^q = \lim_{n,U} \lim_{m,V} \|f'_n + g'_m\|_{W,q}^q + \lim_{n,U} (\|f''_n\|_{W,q}^q + \|f'''_n\|_{W,q}^q) + \lim_{m,V} (\|g''_m\|_{W,q}^q + \|g'''_m\|_{W,q}^q).$$

On a la propriété analogue dans $\mathbb{L}^{p,q}$ pour la norme $\|\cdot\|_{p,q}$ quand $p > 1$.

Cette proposition est conséquence facile du lemme suivant, qu'il suffit d'appliquer plusieurs fois:

Lemme 13. Dans $B_{\mathbb{L}^{W,q}}$ on considère une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ et une famille \mathcal{G} .

On suppose que l'on est dans l'une des deux situations suivantes:

Situation 1. i) Il existe pour tout n une décomposition

$f_n = f'_n + f''_n$ de f_n en deux fonctions étrangères, avec:

$\|f''_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $(f'_n)^{*q}_{n=1}^{\infty}$ équisupportée (relativement à la mesure $dm = W(t).dt$)

ii) La famille \mathcal{G} est m -équisupportée.

Situation 2. i) Il existe pour tout n une décomposition

$f_n = f'_n + f''_n$ de f_n en deux fonctions étrangères, avec:

$\mu(\text{Supp } f''_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $(f'_n)^{*q}_{n=1}^{\infty}$ m -localement équiintégrable.

ii) La famille \mathcal{G} est m -localement équiintégrable.

Alors on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{g \in \mathcal{G}} (\|f_n + g\|_{W,q}^q - \|f'_n + g\|_{W,q}^q - \|f''_n\|_{W,q}^q) = 0.$$

On a un résultat analogue dans $B_{\mathbb{L}^{p,q}}$, pour la norme $\|\cdot\|_{p,q}$, quand $p > 1$.

(Il suffit donc d'appliquer le lemme 12, d'abord avec $\mathcal{G} = \{f_n\}$, puis avec

$\mathcal{G} = \{g'_m + g''_m / m \in \mathbb{N}_*\}$, dans la situation 1; puis à nouveau, d'abord avec

$\mathcal{G} = \{f'_n + f''_n\}$, puis avec $\mathcal{G} = \{g'_m / m \in \mathbb{N}_*\}$, dans la situation 2; pour obtenir

la prop.11).

Preuve du lemme 13 dans le cas de $\mathbb{L}_{W,q}$.

a) Dans la situation 1.

D'après la proposition 11, on peut supposer que les supports des f'_n et des $g \in \mathcal{G}$ sont de μ -mesures $\leq a$ ($< \infty$).

Soit $\rho > 0$, et introduisons l'espace (de Banach) auxiliaire $\hat{E} = E \oplus \mathbb{R}.e$, où la somme directe est prise au sens de l^1 , et où $\|e\|=1$.

Posons pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $g \in \mathcal{G}$:

$$\hat{f}'_n(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } f'_n(\omega) = 0 \\ f'_n(\omega) \oplus \rho.e & \text{si } f'_n(\omega) \neq 0. \end{cases}$$

$$\hat{f}_n = \hat{f}'_n + f''_n$$

$$\hat{g}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } g(\omega) = 0 \\ g(\omega) \oplus \rho.e & \text{si } g(\omega) \neq 0. \end{cases}$$

Soit $A_n = \text{Supp}(f'_n)$, $B_g = \text{Supp}(g)$; $A_{n,g} = A_n \cup B_g$; $\alpha_{n,g} = \mu(A_{n,g})$ ($\leq 2a$).

On a pour $\omega \in A_{n,g}$: $\|\hat{f}'_n(\omega) + \hat{g}(\omega)\| \geq \rho$

et pour $\omega \notin A_{n,g}$: $\|\hat{f}'_n(\omega) + \hat{g}(\omega)\| = \|f''_n(\omega)\| \leq \|f''_n\|_\infty$

Soit n_0 tel que: $n \geq n_0 \implies \|f''_n\|_\infty \leq \rho$. Alors pour $n \geq n_0$, la réarrangée de $\hat{f}_n + \hat{g}$

vérifie: $\forall t > \alpha_{n,g}$, $(\hat{f}_n + \hat{g})^*(t) = (1_{A_{n,g}} \cdot f''_n)^*(t)$

ce qui permet d'écrire:

$$(1): \int_0^\infty (\hat{f}_n + \hat{g})^{*q}(t) \, d\mu(t) = \int_0^{\alpha_{n,g}} (\hat{f}_n + \hat{g})^{*q}(t) \, d\mu(t) + \int_{\alpha_{n,g}}^\infty (f''_n \cdot 1_{A_{n,g}})^{*q}(t) \, d\mu(t).$$

Mais on a l'inégalité triangulaire:

$$\left| \left(\int_0^{\alpha_{n,g}} (\hat{f}_n + \hat{g})^{*q}(t) \, d\mu(t) \right)^{1/q} - \left(\int_0^{\alpha_{n,g}} (\hat{f}'_n + \hat{g})^{*q}(t) \, d\mu(t) \right)^{1/q} \right|$$

$$\leq \left(\int_0^{\alpha_{n,g}} f''_n^{*q}(t) \, d\mu(t) \right)^{1/q} \leq \|f''_n\|_\infty \mu(0, 2a)^{1/q}$$

En utilisant l'inégalité entre réels positifs: $|x^q - y^q| \leq |x - y| \cdot \text{Max}(x^{q-1}, y^{q-1})$,

on en déduit que:

$$(2) \left| \int_0^{\alpha_{n,g}} (\hat{f}_n + \hat{g})^{*q}(t) \, d\mu(t) - \int_0^{\alpha_{n,g}} (\hat{f}'_n + \hat{g})^{*q}(t) \, d\mu(t) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

uniformément en $g \in \mathcal{G}$.

D'autre part: $t > \alpha_{n,g} \implies (f'_n + g)^*(t) = 0$, donc:

$$(3) \int_0^{\alpha_{n,g}} (f'_n + g)^{*q}(t) \, d\mu(t) = \int_0^\infty (f'_n + g)^{*q}(t) \, d\mu(t).$$

Par ailleurs $\int_0^{\alpha_{n,g}} (f_n'' \cdot 1_{A_{n,g}^c})^{*q}(t) dm(t) < \|f_n''\|_{\infty}^q m(0, 2a)$

d'où: (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\alpha_{n,g}}^{\infty} (f_n'' \cdot 1_{A_{n,g}^c})^{*q}(t) dm(t) - \|f_n'' \cdot 1_{A_{n,g}^c}\|_{W,q}^q \right| = 0$,

uniformément en g . Enfin on a:

(5) $\|f_n'' \cdot 1_{A_{n,g}^c} - f_n''\|_{W,q} = \|f_n'' \cdot 1_{A_{n,g}}\|_{W,q} < \|f_n''\|_{\infty} m(0, 2a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

De (1) à (5) on déduit: $\lim_n (\|f_n'+g\|_{W,q}^q - \|f_n'+g\|_{W,q}^q - \|f_n''\|_{W,q}^q) = 0$,

uniformément en g .

Comme $\|\hat{f}_n - f_n\|_{W,q}^q \leq \rho^q \cdot m([0, a])$ et $\|g-g\|_{W,q}^q \leq \rho^q \cdot m([0, a])$, le résultat annoncé est obtenu en faisant $\rho \rightarrow 0$.

b) dans la situation 2.

D'après la proposition 11, on peut maintenant supposer la suite $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ et la famille \mathcal{G} bornées dans L^{∞} :

$\exists K < \infty$, avec: $(f_n')_{n=1}^{\infty} \subset K \cdot B_{L^{\infty}}$ et $\mathcal{G} \subset K \cdot B_{L^{\infty}}$.

Posons $\alpha_n = \mu(\text{Supp } f_n'')$.

Introduisons la fonction \hat{f}_n'' :
$$\begin{cases} \hat{f}_n''(\omega) = 0 & \text{si } f_n''(\omega) = 0, \\ \hat{f}_n''(\omega) = (\|f_n''(\omega)\| \vee 3K) \cdot \frac{f_n''(\omega)}{\|f_n''(\omega)\|} & \text{si } f_n''(\omega) \neq 0. \end{cases}$$

et soit $\hat{f}_n = f_n' + \hat{f}_n''$

On a alors:
$$\begin{cases} \|\hat{f}_n(\omega) + g(\omega)\| \geq \|\hat{f}_n''(\omega)\| - \|g(\omega)\| \geq 3K - K = 2K & \text{si } \omega \in \text{Supp}(f_n'') \\ \leq \|f_n'(\omega)\| + \|g(\omega)\| \leq K + K = 2K & \text{si } \omega \notin \text{Supp}(f_n'') \end{cases}$$

Donc:
$$\begin{cases} (f_n'+g)^{*q}(t) = (\hat{f}_n''+g)^{*q}(t) & \text{pour } t \leq \alpha_n, \\ = (f_n'+g)^{*q}(t-\alpha_n) & \text{pour } t \geq \alpha_n. \end{cases}$$

D'où: (6) $\int_0^{\infty} (\hat{f}_n'+g)^{*q}(t) dm(t) = \int_0^{\alpha_n} (\hat{f}_n''+g)^{*q}(t) dm(t) + \int_{\alpha_n}^{\infty} (f_n'+g)^{*q}(t-\alpha_n) dm(t)$

Or on a:

(7): $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\alpha_n} (\hat{f}_n''+g)^{*q}(t) \cdot W(t) dt - \|\hat{f}_n''\|_{W,q}^q \right) = 0$, uniformément en $g \in \mathcal{G}$

(Ceci résulte de l'inégalité triangulaire:

$$\left| \left(\int_0^{\alpha_n} (\hat{f}_n''+g)^{*q}(t) W(t) dt \right)^{1/q} - \left(\int_0^{\alpha_n} \hat{f}_n''^{*q}(t) W(t) dt \right)^{1/q} \right| \leq \left(\int_0^{\alpha_n} g^{*q}(t) W(t) dt \right)^{1/q}$$
,

du fait que $\alpha_n = \mu(\text{Supp } f_n'') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et de ce que $g^{*q} \leq K^q$.)

On a enfin:

$$(8): \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\alpha_n}^{\infty} (f'_n + g)^{*q}(t - \alpha_n) W(t) dt - \int_0^{\infty} (f'_n + g)^{*q}(t) W(t) dt \right) = 0,$$

uniformément en $g \in \mathcal{G}$.

(En effet, comme les réarrangées sont décroissantes, ainsi que W , on voit que:

$$\int_{\alpha_n}^{\infty} (f'_n + g)^{*q}(t) W(t) dt \leq \int_{\alpha_n}^{\infty} (f'_n + g)^{*q}(t - \alpha_n) W(t) dt = \int_0^{\infty} (f'_n + g)^{*q}(t) W(t + \alpha_n) dt \leq \int_0^{\infty} (f'_n + g)^{*q}(t) W(t) dt,$$

et la différence des membres extrêmes dans ces inégalités est:

$$\int_0^{\alpha_n} (f'_n + g)^{*q}(t) W(t) dt \leq (2K)^q m([0, \alpha_n]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$\text{De (7) et (8) on déduit: } \lim_n \left(\| \hat{f}_n + g \|_{W,q}^q - \| f'_n + g \|_{W,q}^q - \| \hat{f}_n \|_{W,q}^q \right) = 0, \quad (9)$$

uniformément en $g \in \mathcal{G}$.

$$\text{Mais on a: } \| \hat{f}_n - f_n \|_{W,q}^q = \int_0^{\alpha_n} (\hat{f}_n - f_n)^{*q}(t) dm(t) \leq (3K)^q m([0, \alpha_n]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

le résultat annoncé est donc conséquence de (9).

Preuve du lemme 13 pour la norme $\| \cdot \|_{p,q}$.

Elle utilise le résultat suivant:

Sous-lemme 14. Si $\mathcal{G} \subset B_{p,q}$ est telle que $\mathcal{G}^{*q} = (g^{*q})_g$ soit équisupportée, resp. localement équiintégrable (pour la mesure $dm = t^{\frac{q}{p}-1} dt$), il en est de même de la famille $\mathcal{G}^{**q} = (g^{**q})_g$. (pourvu que $p > 1$).

Admettons ce lemme pour l'instant.

a) Dans la situation 1 de l'énoncé 12.

Soit $\varepsilon > 0$; d'après le sous-lemme 14 ci-dessus, on peut trouver $\alpha < \infty$, tel que:

$$(10): \forall n \in \mathbb{N}_*, \forall g \in \mathcal{G}, \int_{\alpha}^{\infty} (f'_n + g)^{**q}(t) dm(t) < \varepsilon^q.$$

On a alors:

$$(11): \| f_n + g \|_{p,q}^q = \int_0^{\alpha} (f_n + g)^{**q}(t) dm(t) + \int_{\alpha}^{\infty} (f_n + g)^{**q}(t) dm(t)$$

On a l'inégalité triangulaire:

$$\left| \left(\int_0^{\alpha} (f_n + g)^{**q}(t) dm(t) \right)^{1/q} - \left(\int_0^{\alpha} (f'_n + g)^{**q}(t) dm(t) \right)^{1/q} \right| \leq \left(\int_0^{\alpha} f_n^{**q}(t) dm(t) \right)^{1/q} \leq \| f_n \|_{\infty} \left(\frac{p}{q} \right)^{1/q} \alpha^{1/q}.$$

$$\text{de sorte que: } (12) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\alpha} (f_n + g)^{**q}(t) dm(t) - \int_0^{\alpha} (f'_n + g)^{**q}(t) dm(t) \right) = 0,$$

uniformément en g . Notons au passage que:

$$(13): \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\alpha f_n^{**q}(t) \, dm(t) = 0, \text{ uniformément en } g \in \mathcal{G}.$$

On a aussi:

$$(14): \left| \int_\alpha^\infty (f_n + g)^{**q}(t) \, dm(t)^{1/q} - \int_\alpha^\infty f_n^{**q}(t) \, dm(t)^{1/q} \right| \leq \int_\alpha^\infty (f_n + g)^{**q}(t) \, dm(t)^{1/q} < \varepsilon, \text{ d'après (10).}$$

De (12) et (10) d'une part, (14) et (13) d'autre part, on déduit:

$$(15): \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\alpha (f_n + g)^{**q}(t) \, dm(t) - \|f_n + g\|_{p,q}^q \right) \leq \varepsilon$$

$$(16): \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\int_\alpha^\infty (f_n + g)^{**q}(t) \, dm(t) - \|f_n\|_{p,q}^q \right) \leq \varepsilon, \text{ uniformément en } g \in \mathcal{G}.$$

En sommant (15) et (16), et en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$, on trouve le résultat annoncé.

b) Dans la situation 2.

La preuve est analogue au cas précédent. (10) est remplacée par:

$$(10\text{bis}) \forall n \in \mathbb{N}_*, \forall g \in \mathcal{G}, \int_0^\alpha (f_n + g)^{**q}(t) \, dm(t) < \varepsilon^q. \text{ (pour un } \alpha = \alpha(\varepsilon) > 0 \text{).}$$

(13) est remplacée par:

$$(13\text{bis}): \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\alpha^\infty f_n^{**q}(t) \, dm(t) = 0, \text{ uniformément en } g \in \mathcal{G}.$$

(en effet, on a: $f_n^{**q}(t) = \frac{1}{t} \int_0^a f_n^{**}(s) \, ds$ si $a_n = \mu(\text{Supp } f_n^{**})$ et $t \geq a_n$.

comme $\int_0^a f_n^{**}(s) \, ds \leq \|f_n^{**}\|_{p,q} \cdot \left(\frac{p'}{q'}\right)^{1/q'} \cdot a^{1/p'}$ d'après Hölder, p' et q' étant

les exposants conjugués de p et q , on obtient finalement, pour $a_n < \alpha$:

$$\int_\alpha^\infty f_n^{**q}(t) t^{\frac{q}{p}-1} dt \leq C^{ste} \cdot \|f_n^{**}\|_{p,q} \cdot \left(\frac{a_n}{\alpha}\right)^{1/p'} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0; \text{ d'où (13bis).}$$

(15) et (16) sont alors remplacées par:

$$(15 \text{ bis}) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\int_\alpha^\infty (f_n + g)^{**q}(t) \, dm(t) - \|f_n + g\|_{p,q}^q \right) \leq \varepsilon$$

$$(16 \text{ bis}) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\alpha (f_n + g)^{**q}(t) \, dm(t) - \|f_n\|_{p,q}^q \right) \leq \varepsilon$$

On conclut comme dans le cas précédent, ce qui achève la preuve du lemme 13.

Il reste à donner la preuve du résultat 14, utilisé dans ce qui précède.

Preuve du sous-lemme 14.

a) cas où \mathcal{G}^{**q} est équisupportée.

Soit $\varepsilon > 0$; on peut trouver $a < \infty$, tel que: $\forall g \in \mathcal{G}, \int_a^\infty g^{**q}(t) \, dm(t) \leq \left(\frac{p-1}{p} \cdot \frac{\varepsilon}{2}\right)^q$

On a : $g^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t g^*(s) ds = \frac{1}{t} \int_0^a g^*(s) ds + \frac{1}{t} \int_a^t g^*(s) ds.$

d'où pour tout b : $\left(\int_b^\infty g^{**q}(t) \cdot t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q} \leq \left(\int_b^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^a g^*(s) ds \right)^q t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q} + \left(\int_b^\infty \left(\frac{1}{t} \int_a^t g^*(s) ds \right)^q t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q} \quad (1).$

Si $b \geq a$, on peut majorer le deuxième terme de (1) au moyen de l'inégalité de Hardy, donc par : $\frac{p}{p-1} \left(\int_a^\infty g^{*q}(t) t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q}$ qui est $< \frac{\epsilon}{2}$.

Le premier terme de (1) vaut : $\left(\int_0^a g^*(s) ds \right) \cdot \left(\frac{p}{q(p-1)} \right)^{1/q} \cdot b^{-1/p'}$

(où p' est l'exposant conjugué de p). Mais $\int_0^a g^*(s) ds \leq \|g\|_{p,q} \left(\frac{p}{q} \right)^{1/q'} a^{1/p'}$, donc le 1° terme de (1) est majoré par $C \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^{1/p'}$, et est donc $< \frac{\epsilon}{2}$ pour

b assez grand. Donc $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_b^\infty g^{**q}(t) dm(t) = 0$, uniformément en $g \in \mathcal{G}$, CQFD.

b) cas où \mathcal{G}^{*q} est localement équi-intégrable.

Quand \mathcal{G}^* est bornée dans $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}_+)$, il en est de même de \mathcal{G}^{**} . On peut toujours se ramener à ce cas au moyen de la prop. 11.

2°-d) Fin de la démonstration du théorème 2.

Les propositions 5 et 12 ci-dessus permettent de réduire le problème de la stabilité à la commutation des limites : $\lim_{n,U} \lim_{m,V} \|f_n + g_m\| = \lim_{m,V} \lim_{n,U} \|f_n + g_m\|$

pour des suites $(f_n)_{n=1}^\infty$ et $(g_m)_{m=1}^\infty$ dont les réarrangées ont leur puissances q -ièmes équi-intégrables (pour la mesure m).

La proposition 11 permet alors de se ramener au cas où les f_n, g_m sont uniformément bornées (dans \mathbb{L}^∞), et où leurs supports ont leur mesures uniformément bornées. Le corollaire 4 correspond précisément à ces hypothèses.

D'où le th. 2.

Remarque 15. Supposons $\mathbb{L}^{p,q}(\Omega; E)$ (resp. $\mathbb{L}_{W,q}(\Omega; E)$) séparable.

On considère l'ensemble \mathcal{C}_b des types sur $\mathbb{L}^{p,q}$ (resp. $\mathbb{L}_{W,q}$) définis par une suite d'éléments uniformément bornés dans \mathbb{L}^∞ , et dont les supports sont de mesures uniformément bornées.

On considère d'autre part l'ensemble \mathcal{C}_∞ des types de la forme :

$f \rightsquigarrow (\|f\|^q + a)^{1/q}$, où $a \geq 0$.

\mathcal{C}_b et \mathcal{C}_∞ sont deux "classes coniques" de types (selon la terminologie de [M-K]).

Les propositions 5 et 12 montrent que ces deux classes coniques engendrent l'espace \mathcal{C} des types sur $\mathbb{L}^{p,q}$ (resp. $\mathbb{L}_{W,q}$), et plus précisément:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_b * \mathcal{C}_\infty.$$

Chapitre IV
Superstabilité

On peut construire une théorie de la finie représentabilité des fonctions de deux variables analogue à la théorie de la finie représentabilité des espaces vectoriels normés. L'homologue de la propriété de superréflexivité des espaces de Banach est ici la propriété de superstabilité. Un procédé de "linéarisation" analogue à celui exposé au chap. I, §B, pour les fonctions stables, fait intervenir la notion d'opérateur uniformément convexifiant, définie dans [BZY 2].

Les espaces de Banach superstables sont les espaces dont les ultrapuissances sont stables; ou, ce qui revient au même, tels que la fonction $(x,y) \rightsquigarrow \|x+y\|$ soit superstable. Le résultat principal du §C ci dessous est alors le fait que si E est superstable, il en est de même de $\mathbb{L}^p(E)$.

A) Fonctions superstables.

Définition 1. Soit (Γ, d) un espace métrique, et $f: X \times Y \rightarrow \Gamma$, $f': X' \times Y' \rightarrow \Gamma$ deux fonctions de deux variables à valeurs dans Γ .

On dira que f' est finiment représentable dans f , (f' f.r. f), ssi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout réel } \epsilon > 0, \text{ et tout couple de familles finies} \\ (x'_i)_{i=1}^N, (y'_j)_{j=1}^N \text{ dans } X', \text{ resp. } Y', \text{ il existe des familles } (x_i)_{i=1}^N \\ \text{et } (y_j)_{j=1}^N \text{ dans } X, \text{ resp. } Y, \text{ telles que:} \\ (\forall i=1, \dots, N, \forall j=1, \dots, N : d(f(x_i, y_j), f'(x'_i, y'_j)) < \epsilon . \end{array} \right.$$

Exemple 2. Si $f: X \times Y \rightarrow \Gamma$ est stable, l'application $: K \times L \rightarrow \Gamma$ séparément continue sur le produit des compacts de types associée est finiment représentable dans f .

Définition 3. Si X est un ensemble, et I un ensemble d'indices, D un ultrafiltre sur I, l'ultrapuissance X^I/D est l'espace quotient de X^I pour la relation d'équivalence: $(x_i)_{i \in I} \sim (y_i)_{i \in I} \iff \{i \in I / x_i = y_i\} \in D$.

Définition 4. Soit $f: X \times Y \rightarrow \Gamma$ une fonction à valeurs dans (Γ, d) métrique compact. Soit I un ensemble d'indices et D un ultrafiltre sur I.

L'ultrapuissance f^I/D est l'application $F: X^I/D \times Y^I/D \longrightarrow \Gamma$, définie par:

$$\forall \xi = (\dot{x}_i)_{i \in I} \in X^I/D, \forall \eta = (\dot{y}_i)_{i \in I} \in Y^I/D, F(\xi, \eta) = \lim_{i, D} f(x_i, y_i).$$

La finie représentabilité s'exprime de manière immédiate en termes d'ultrapuissances:

Proposition 5. Soient X, Y des ensembles, (Γ, d) métrique compact et $f: X \times Y \longrightarrow \Gamma$ une application.

Pour que $g: X' \times Y' \longrightarrow \Gamma$ soit finiment représentable dans f , il faut et il suffit qu'il existe un morphisme (cf. déf I A 7) de g dans une ultrapuissance f^I/D de f .

(Si X' et Y' sont dénombrables, on peut prendre I dénombrable).

En d'autres termes il existe deux applications $h: X' \longrightarrow X^I/D, k: Y' \longrightarrow Y^I/D$, telles qu'on ait le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} X' \times Y' & \xrightarrow{g} & \Gamma \\ \begin{array}{c} h \downarrow \quad k \downarrow \\ X^I/D \times Y^I/D \end{array} & \xrightarrow{f^I/D} & \Gamma \end{array}$$

Preuve. Il est clair que f^I/D est f.r. dans f .

Inversement si g est f.r. dans f , on considère l'ensemble $P_f(X')$ des parties finies de X' , qui est filtrant croissant pour l'inclusion, ainsi que $P_f(Y')$, et on pose $I = P_f(X') \times P_f(Y') \times \mathbb{N}_*$, muni de l'ordre produit (si $i = (A, B, n)$ et $i' = (A', B', n')$, alors $i \leq i' \iff A \subset A', B \subset B', n \leq n'$). Soit D un ultrafiltre plus fin que le filtre des sections finissantes de I .

Si $i = (A, B, n) \in I$, on pose $\alpha_i: A \longrightarrow X, \beta_i: B \longrightarrow Y$, telles que:

$$\forall a \in A, \forall b \in B, d(f(\alpha_i(a), \beta_i(b)), g(a, b)) < \frac{1}{n}$$

On pose alors: $\hat{h}: X' \times Y' \longrightarrow X^I/D$ et $\hat{k}: X' \times Y' \longrightarrow Y^I/D$,

$$(x', y') \rightsquigarrow (\overline{\alpha_i(x')})_{i \in I} \quad (x', y') \rightsquigarrow (\overline{\beta_i(y')})_{i \in I}$$

avec: $x_i = \alpha_i(x'), y_i = \beta_i(y')$ si $i = (A, B, n)$ est tel que $x' \in A, y' \in B$.

x_i, y_i choisis de manière arbitraire dans les autres cas.

Alors \hat{h} (resp. \hat{k}) ne dépend pas de y' (resp. x'): ceci résulte du fait que l'ensemble $\{i = (A, B, n) / y' \notin B \text{ ou } y'_1 \notin B\}$ n'est jamais dans l'ultrafiltre D (quels que soient y' et y'_1).

Posons: $\forall x' \in X', \forall y' \in Y', h(x') = \hat{h}(x', y')$ et $k(y') = \hat{k}(x', y')$. Il vient:

$$(f^I/D)(h(x'), k(y')) = \lim_{i, D} f(\alpha_i(x'), \beta_i(y')) = g(x', y'),$$

par construction de α_i et β_i .

Définition 6. Soit (Γ, d) métrique compact.

La fonction: $X \times Y \rightarrow \Gamma$ est dite superstable ssi toute fonction $g: X' \times Y' \rightarrow \Gamma$, finiment représentable dans f est stable.

On a la caractérisation suivante:

Proposition 7. Soit $f: X \times Y \rightarrow \Gamma$ à valeurs dans Γ métrique compact.

Les assertions suivantes sont équivalentes:

- i) f est superstable.
- ii) Pour tout ensemble d'indices I et tout ultrafiltre D sur I , l'ultrapuissance f^I/D est stable.
- iii) Il existe un ultrafiltre non trivial D sur \mathbb{N} tel que l'ultrapuissance $f^{\mathbb{N}}/D$ soit stable.
- iv) Pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tout couple de familles $(x_i)_{i=1}^N \in X, (y_i)_{i=1}^N \in Y$, on ait:

$$d(\{f(x_i, y_j) / 1 \leq i < j \leq N\}, \{f(x_i, y_j) / 1 \leq j < i \leq N\}) < \epsilon.$$

Preuve. (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) est clair.

(iii) \Rightarrow (iv): Si (iv) est fausse, alors il existe un réel $\epsilon > 0$, et pour tout N , un couple de familles $(x_i^N)_{i=1}^N \in X, (y_i^N)_{i=1}^N \in Y$, tels que :

$$d(\{f(x_i^N, y_j^N) / 1 \leq i < j \leq N\}, \{f(x_i^N, y_j^N) / 1 \leq j < i \leq N\}) \geq \epsilon$$

Pour tout $i > N$, choisissons de manière arbitraire x_i^N dans X , et y_i^N dans Y .

Si D est un ultrafiltre non trivial quelconque sur \mathbb{N}_* , posons $\phi = f^{\mathbb{N}}/D$ et:

$$\xi_i = \frac{\cdot}{(x_i^N)_N} \in \mathbb{N}_*, \quad \eta_i = \frac{\cdot}{(y_i^N)_N} \in \mathbb{N}_*$$

(éléments de $X^{\mathbb{N}}/D$, resp. $Y^{\mathbb{N}}/D$), il vient:

$$d(\{\phi(\xi_i, \eta_j) / 1 \leq i < j\}, \{\phi(\xi_i, \eta_j) / 1 \leq j < i\}) \geq \epsilon$$

donc l'ultrapuissance $f^{\mathbb{N}}/D$ n'est pas stable (cf I A 5). Donc (iii) est fausse.

(iv) \Rightarrow (i) La propriété (iv) entraîne la stabilité et se conserve par finie représentabilité.

Corollaire 8. Toute fonction continue $f:KxL \longrightarrow \Gamma$ sur un produit de compacts, à valeurs dans Γ métrique compact, est superstable.

Preuve. Toute ultrapuissance f^I/D de f est la source d'un morphisme (p,q) de f^I/D dans f , défini par:

$$p(\overline{(x_i)_{i \in I}}) = \lim_{i,D} x_i \quad \text{et} \quad q(\overline{(y_i)_{i \in I}}) = \lim_{i,D} y_i$$

Corollaire 9. Soit E un espace de Banach, E^* son dual. Pour que l'application:

$$B_E \times B_{E^*} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y^*) \rightsquigarrow \langle x, y^* \rangle_{E \times E^*}$$

soit superstable, il faut et il suffit que E soit superréflexif.

En effet la condition (iv) de la prop. 7 équivaut ici à un critère classique de superréflexivité.

Plus généralement on peut interpréter en termes de superstabilité la notion d'opérateur uniformément convexifiant (ou "super-faiblement compact") introduite dans [BZY 2].

Définition 10. Soient E et F deux espaces de Banach. Si T est un opérateur borné de E dans F , on appelle ultrapuissance T^I/D de T (selon l'ultrafiltre D sur l'ensemble I) l'opérateur $E^I/D \longrightarrow F^I/D$ défini par:

$$(T^I/D)(\overline{(x_i)_{i \in I}}) = \overline{(T(x_i))_{i \in I}}.$$

On dit que T est uniformément convexifiant (ou super-faiblement compact) ssi toute ultrapuissance de T est faiblement compacte.

(cf [BZY 2], th. I.1).

Caractérisation 11. $T: E \longrightarrow F$ n'est pas uniformément convexifiant ssi l'on peut trouver un nombre $\theta, 0 < \theta < 1$, et, pour tout réel $\epsilon > 0$, et tout entier N , des points x_1, x_2, \dots, x_N de B_E , et des points $y_1^*, y_2^*, \dots, y_N^*$ de B_{E^*} , tels que :

$$\begin{aligned} \langle Tx_i, y_j^* \rangle &> (1-\epsilon)\theta & \text{si } 1 \leq i \leq j \leq N, \\ |\langle Tx_i, y_j^* \rangle| &< \epsilon & \text{si } 1 \leq j < i \leq N. \end{aligned}$$

Preuve. Ceci résulte de [BZY 2], déf. 4 et prop. I.3.

Corollaire 12. Soient E, F deux espaces de Banach et $T: E \longrightarrow F$ un opérateur borné. Pour que l'application:

$$B_E \times B_{F^*} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y^*) \rightsquigarrow \langle Tx, y^* \rangle_{F \times F^*}$$

soit superstable, il faut et il suffit que T soit uniformément convexifiant.

Preuve. Nécessité: elle résulte de la caractérisation 11.

Suffisance: Toute ultrapuissance de l'application considérée se factorise par l'application: $B_{E^I/D} \times B_{(F^I/D)^*} \longrightarrow \mathbb{R}, (\xi, \eta^*) \rightsquigarrow \langle \theta \xi, \eta^* \rangle$

où $\theta = T^I/D$ est faiblement compact: elle est donc stable.

Familles uniformément superstables.

Définition 13. Soit (Γ, d) métrique compact, et F une famille de fonctions:

$$f: X_f \times Y_f \longrightarrow \Gamma$$

On dira qu'une fonction g est finiment représentable dans F ssi:

(g étant une fonction $X' \times Y' \longrightarrow \Gamma$)

{ Pour tout réel $\epsilon > 0$, et tout couple de familles finies
 { $(x'_i)_{i=1}^N, (y'_i)_{i=1}^N$ dans $X', \text{ resp } Y'$, il existe $f \in F$ et des familles
 { $(x_i)_{i=1}^N, (y_i)_{i=1}^N$ dans $X_f, \text{ resp. } Y_f$, telles que:
 { $(\forall i=1, \dots, N, \forall j=1, \dots, N, d(f(x_i, y_j), g(x'_i, y'_j))) < \epsilon$

On dira que F est uniformément superstable ssi toute fonction g finiment représentable dans F est stable.

Un cas simple de famille non uniformément superstable est le suivant: F est

la famille des applications $f_n: B_{\mathbb{R}} \times B_{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1, +1], (x, y) \rightsquigarrow \|x+y\|_{\infty}$

(chaque f_n est superstable). Alors pour tout espace vectoriel normé E ,

l'application $B_E \times B_E \longrightarrow [-1, +1], (x, y) \rightsquigarrow \|x+y\|_E$ est f.r. dans F .

Si $(f_1)_{1 \in L}$ est une famille de fonctions $X_1 \times Y_1 \longrightarrow \Gamma$, et D un ultrafiltre sur L

$\prod_1 f_1/D$ est l'application $\prod_1 X_1/D \times \prod_1 Y_1/D \longrightarrow \Gamma, ((\overline{x_1})_1, (\overline{y_1})_1) \rightsquigarrow \lim_{1, D} f_1(x_1, y_1)$.

Proposition 14. Soit F une famille d'applications $f: X_f \times Y_f \longrightarrow \Gamma$.

Les assertions suivantes sont équivalentes:

- i) F est une famille uniformément superstable.
- ii) Pour toute famille $(f_1)_{1 \in L}$ d'éléments de F , et tout ultrafiltre D sur L , l'ultraproduit $\prod_1 f_1/D$ est stable.
- iii) Il existe une fonction $\phi: \text{EXT} \longrightarrow \Gamma$ superstable, et pour tout $f \in F$ un morphisme de f dans ϕ (cf déf I A 7).

iv) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour toute } f \in F \text{ et toutes familles de } N \text{ points } (x_i)_{i=1}^N \subset X_f, \\ (y_j)_{j=1}^N \subset Y_f, \text{ on a: } d(\{f(x_i, y_j) / 1 \leq i \leq j \leq N\}, \{f(x_i, y_j) / 1 \leq j < i \leq N\}) \end{array} \right.$$

Preuve. La preuve de (i) \iff (ii) \iff (iv) est analogue à la preuve de la prop.7, et ne sera donc pas détaillée ici.

(iii) \implies (i) est clair. Montrons que (iv) \implies (iii).

Posons en effet $\Xi = \sum_{f \in F} X_f$ et $T = \sum_{f \in F} Y_f$ (sommes ensemblistes), et:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= f(x, y) \text{ lorsque } x \text{ et } y \text{ sont dans } X_f, \text{ resp. } Y_f, \\ \phi(x, y) &= \gamma_0 \text{ fixé lorsque } x \in X_f, y \in Y_g, \text{ où } f \neq g. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, et $N = N(\varepsilon)$ donné par l'énoncé de (iv). Posons $N' = N + 1$.

Soient $(x_i)_{i=1}^{N'} \subset \Xi$ et $(y_j)_{j=1}^{N'} \subset T$ deux familles de N' points.

- Si pour tous $1 \leq i \leq j \leq N'$, il existe $f_{ij} \in F$ tel que $(x_i, y_j) \in X_{f_{ij}} \times Y_{f_{ij}}$

on voit facilement que tous les f_{ij} sont égaux à un certain

$f \in F$, et donc $(x_i)_{i=1}^{N'} \subset X_f$, $(y_j)_{j=1}^{N'} \subset Y_f$, et $\phi(x_i, y_j) = f(x_i, y_j)$.

Donc d'après le choix de N' :

$$\begin{aligned} d(\{\phi(x_i, y_j) / 1 \leq i \leq j \leq N'\}, \{\phi(x_i, y_j) / 1 \leq j < i \leq N'\}) &= \\ &= d(\{f(x_i, y_j) / 1 \leq i \leq j \leq N'\}, \{f(x_i, y_j) / 1 \leq j < i \leq N'\}) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

- De même si pour tous $1 \leq j < i \leq N'$, on a $(x_i, y_j) \in X_{f_{ij}} \times Y_{f_{ij}}$, on

voit que les f_{ij} sont égaux à un certain $f \in F$, et que

$$(x_i)_{i=2}^{N'} \subset X_f, \text{ et } (y_j)_{j=1}^N \subset Y_f$$

et l'on conclut comme dans le cas précédent.

- Enfin si aucune des deux éventualités précédentes n'est

réalisée, alors chacun des ensembles $\{\phi(x_i, y_j) / 1 \leq i \leq j \leq N'\}$ et

$\{\phi(x_i, y_j) / 1 \leq j < i \leq N'\}$ contient γ_0 , donc leur distance est nulle.

On voit donc d'après la prop.7 que ϕ est superstable.

Exemple 15. On rappelle qu'étant donnés deux espaces de Banach F et G, un opérateur $T:F \rightarrow G$ est dit uniformément convexe ssi il existe une fonction $\delta:]0,2[\rightarrow]0,1[$, avec $\delta(\varepsilon) > 0$ pour $\varepsilon > 0$, telle que:

$$\left. \begin{array}{l} \|x\| \|y\| \leq 1, \\ \|T(x-y)\| \geq \varepsilon \end{array} \right\} \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta(\varepsilon).$$

La plus grande de ces fonctions δ est le module de convexité δ_T de T. Un opérateur uniformément convexe est a fortiori uniformément convexifiant, et la réciproque est vraie modulo un renormage adéquat de F et G. (cf BZY 2).

Soit \mathcal{C} une famille d'opérateurs uniformément convexes $T:F_T \rightarrow G_T$. Supposons que le module de convexité de la famille \mathcal{C} , défini par:

$$\delta_{\mathcal{C}} = \inf_{T \in \mathcal{C}} \delta_T$$

vérifie $\delta_{\mathcal{C}}(\varepsilon) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. Il s'ensuit facilement que la

famille de fonctions: $B_{F_T} \times B_{G_T}^* \rightarrow \mathbb{R}, (x, y^*) \mapsto \langle Tx, y^* \rangle,$

est uniformément superstable.

En effet tout ultraproduit $\prod_{i \in I} T_i / D$ d'une famille $(T_i)_{i \in I}$ dont tous les éléments sont dans \mathcal{C} est uniformément convexe (avec un module de convexité supérieur à $\delta_{\mathcal{C}}$).

B) Fonctions numériques superstables. Théorème de représentation.

L'objet de cette partie est de montrer que le cor.12 du A fournit en fait essentiellement toutes les fonctions numériques bornées superstables.

Plus précisément on a le résultat suivant, analogue au th. I B 1.

Théorème 1. Pour qu'une fonction bornée $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ soit superstable, il faut

et il suffit qu'il existe deux espaces de Banach F et G , et un opérateur $T: F \rightarrow G$ uniformément convexifiant, ainsi qu'un morphisme (u, v) de f dans l'application $B_F \times B_G^* \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y^*) \mapsto \langle Tx, y^* \rangle$.
(cf déf. I A 7)

Le th.1 est une conséquence du th.2 suivant (comme le th. I B 1 était une conséquence du th. I B 2).

Théorème 2. Soit $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ bornée superstable; pour toute $\mu \in l^\infty(X)^*$ et

toute $\nu \in l^\infty(Y)^*$, posons $F(\mu, \nu) = \langle \nu_y, \langle \mu_x, f(x, y) \rangle \rangle = \langle \mu_x, \langle \nu_y, f(x, y) \rangle \rangle$ (cf. th. IB2).

Alors la restriction de F à $B_{l^\infty(X)}^* \times B_{l^\infty(Y)}^*$ est superstable.

Montrons d'abord comment le th.1 se déduit du th.2.

Il suffit de démontrer que la condition du th.1 est nécessaire, sa suffisance résultant du cor.12 du §A.

On considère l'opérateur: $T: l^\infty(X)^* \rightarrow l^\infty(Y)$, $\mu \mapsto T\mu$, avec $T\mu(y) = \langle \mu_x, f(x, y) \rangle$
(pour tout $y \in Y$)

Alors pour tous $\mu \in B_{l^\infty(X)}^*$, $\nu \in B_{l^\infty(Y)}^*$ on a: $\langle T\mu, \nu \rangle = F(\mu, \nu)$. D'après le th.2 et

le cor 12 du §A, l'opérateur T est uniformément convexifiant.

Pour $x \in X$, soit $\delta_x \in l^\infty(X)^*$, $h \mapsto h(x)$. On définit de même δ_y pour $y \in Y$; on a:

$$\forall x \in X, y \in Y, \langle T\delta_x, \delta_y \rangle = f(x, y).$$

$(x, y) \mapsto (\delta_x, \delta_y)$ est alors le morphisme cherché.

Passons à la démonstration du th2.

A toute application stable $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, on associe l'application

$$\Lambda f: B_{l^\infty(X)}^* \times B_{l^\infty(Y)}^* \rightarrow \mathbb{R}, (\mu, \nu) \mapsto F(\mu, \nu) = \langle \mu_x, \langle \nu_y, f(x, y) \rangle \rangle.$$

Le th.2 résulte alors du:

Lemme 3. Si $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée superstable, I un ensemble d'indices et D un ultrafiltre sur I , il existe un morphisme (s, t) de $(\Lambda f)^I/D$ dans $\Lambda(f^I/D)$.

Alors: f superstable $\implies f^I/D$ stable $\implies \Lambda(f^I/D)$ stable (cf th. IB2)
 $\implies (\Lambda f)^I/D$ stable (par le lemme 3)

ceci pour tous I et D , donc Λf est superstable, CQFD.

Preuve du lemme 3.

On a des plongements canoniques (linéaires isométriques):

$$u : l^\infty(X)^{*I}/D \longrightarrow (l^\infty(X)^I/D)^* \quad ; \quad v : l^\infty(Y)^{*I}/D \longrightarrow (l^\infty(Y)^I/D)^*$$

définis par: (1): $u(\overset{\circ}{(\mu_i)_i}, \overset{\circ}{(\phi_i)_i}) = \lim_{i, D} \langle \mu_i, \phi_i \rangle$,
 et la définition analogue pour v .

On a aussi des plongements linéaires isométriques:

$$h : l^\infty(X)^I/D \longrightarrow l^\infty(X^I/D) \quad ; \quad k : l^\infty(Y)^I/D \longrightarrow l^\infty(Y^I/D),$$

définis par: (2): $\forall \overset{\circ}{\phi} = (\phi_i)_i \in l^\infty(X)^I/D, \forall \overset{\circ}{x} = (x_i)_i \in X^I/D, h(\overset{\circ}{\phi})(\overset{\circ}{x}) = \lim_{i, D} \phi_i(x_i)$,
 et la définition analogue pour k .

Le théorème de Hahn-Banach donne des sections (non linéaires) conservant la norme, σ et τ , aux projections h^* et k^* .

On pose alors $S = \sigma \circ u$ et $T = \tau \circ v$. Ce sont des applications (non linéaires) isométriques: $S : l^\infty(X)^{*I}/D \longrightarrow (l^\infty(X^I/D))^*$ et $T : l^\infty(Y)^{*I}/D \longrightarrow (l^\infty(Y^I/D))^*$

Posons $\hat{F} = F^I/D, \hat{f} = f^I/D$, et montrons que pour tous $\hat{\mu} = (\overset{\circ}{\mu_i})_i \in l^\infty(X)^{*I}/D, \hat{\nu} = (\overset{\circ}{\nu_i})_i \in l^\infty(Y)^{*I}/D$

on a: (3): $\hat{F}(\hat{\mu}, \hat{\nu}) = \langle S\hat{\mu}_{\hat{x}}, \langle T\hat{\nu}_{\hat{y}}, \hat{f}(\hat{\mu}, \hat{\nu}) \rangle \rangle$

ce qui signifie que les restrictions de S et T aux boules-unité de $l^\infty(X)^{*I}/D$ et $l^\infty(Y)^{*I}/D$ forment le morphisme annoncé dans l'énoncé du lemme, à ceci près que, stricto sensu, les ultrapuissances $l^\infty(X)^{*I}/D, l^\infty(Y)^{*I}/D$ sont prises dans ce qui précède au sens des espaces de Banach, et non au sens ensembliste de la déf. 3 du §A. Mais ce distinguo est inessentiel ici, car $(\Lambda f)^I/D$ se factorise par \hat{F} et les surjections canoniques:

$$p : (B_{l^\infty(X)^{*I}/D}) \longrightarrow B_{(l^\infty(X)^I/D)} \quad \text{et} \quad q : (B_{l^\infty(Y)^{*I}/D}) \longrightarrow B_{(l^\infty(Y)^I/D)}$$

classe de $(\mu_i)_i$ au sens ensembliste \rightsquigarrow classe de $(\mu_i)_i$ au sens Banachiste idem.

selon: $F(p\xi, q\eta) = (\Lambda f)^I/D (\xi, \eta)$. Il suffit donc de poser $s = S \circ p, t = T \circ q$.

Prouvons donc (3). On a: $F(\hat{\mu}, \hat{\nu}) = \lim_{i, D} \langle \mu_i, \nu_i, f(x, y) \rangle$ (par définition de F).

Notons ϕ_i la fonction $x \mapsto \langle \nu_i, f(x, y) \rangle$: alors $\phi_i \in l^\infty(X)$. Soit $\hat{\phi} = (\phi_i)_{i \in I} \in l^\infty(X)^I / D$.

Il vient: (4): $F(\hat{\mu}, \hat{\nu}) = \lim_{i, D} \langle \mu_i, \phi_i \rangle = \langle u(\hat{\mu}), \hat{\phi} \rangle$ (par définition de u).

$$= \langle \sigma u(\hat{\mu}), h\hat{\phi} \rangle \text{ (par définition de } \sigma \text{),}$$

$$= \langle S\hat{\mu}, h(\hat{\phi}) \rangle \quad (5)$$

Calculons $h(\hat{\phi})$. Si $\hat{x} = (x_i)_{i \in I} \in X^I / D$, on a:

$$(6): h(\hat{\phi})(\hat{x}) = \lim_{i, D} \phi_i(x_i) \text{ (par définition de } h)$$

$$= \lim_{i, D} \langle \nu_i, f(x_i, \cdot) \rangle \text{ (par définition de } \phi_i)$$

Posons $\psi_i = f(x_i, \cdot)$. Le même raisonnement qui a conduit à (4) et (5) montre que:

$$(7): \lim_{i, D} \langle \nu_i, \psi_i \rangle = \langle T\hat{\nu}, k(\hat{\phi}) \rangle$$

De (4) à (7) on tire: $F(\hat{\mu}, \hat{\nu}) = \langle S\hat{\mu}, T\hat{\nu}, k(\hat{\phi}) \rangle$. (8).

Calculons enfin $k(\hat{\phi})$. Si $\hat{y} = (y_i)_{i \in I} \in Y^I / D$, on a:

$$k(\hat{\phi})(\hat{y}) = \lim_{i, D} \psi_i(y_i) \text{ (par définition de } k)$$

$$= \lim_{i, D} f(x_i, y_i) \text{ (par définition de } \psi_i)$$

$$= \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) \quad (9) \text{ (par définition de } \hat{f})$$

De (8) et (9) on déduit (3), ce qui achève la démonstration du lemme (et donc du th.2).

Le th 2 admet un énoncé en termes de mesure quand f est séparément continue sur un produit de compacts.

Théorème 2 bis. Soit $f: K \times L \rightarrow \mathbb{R}$ bornée, séparément continue et superstable sur le produit de compacts $K \times L$.

L'application associée $Mf: B_{M(K)} \times B_{M(L)} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(\mu, \nu) \mapsto \int_K d\mu(x) \int_L f(x, y) d\nu(y) \\ = \int_L d\nu(y) \int_K f(x, y) d\mu(x)$$

(cf th. IA 2-bis) est superstable.

Preuve. Comme toute mesure sur K, resp. L, se prolonge en un élément de $l^\infty(K)^*$ de même norme (resp. un élément de $l^\infty(L)^*$), le th. 2-bis se déduit aisément du th.2. Inversement le th.2 est un cas particulier du th 2 bis (poser $K = \beta X, L = \beta Y$, prolonger f à $K \times L$, en une fonction séparément continue, superstable car f.r. dans f).

Remarque 3. Il résulte du th.2-bis que lorsque $f:K \times L \rightarrow \mathbb{R}$, bornée superstable est séparément continue sur le produit de compacts, il est possible d'obtenir une représentation de f , comme dans le th.1, au moyen d'un opérateur T uniformément convexifiant $F=H^* \rightarrow G$ et d'applications u, v continues pour les topologies préfaibles $\sigma(H^*, H)$ et $\sigma(G^*, G)$.

Il suffit en effet de prendre $F=M(K)$ (donc $H=C(K)$), $G=C(L)$,

$u: x \mapsto \delta_x, v: y \mapsto \delta_y$ (masse de Dirac en x , resp. y) et $T_\mu(\cdot) = \int_K f(x, \cdot) d\mu(x)$.

Application: Moyenne d'une fonction superstable de deux variables aléatoires.

Proposition 4. Soient K, L deux compacts métrisables.

$\phi: K \times L \rightarrow \mathbb{R}$ une application bornée superstable, séparément continue
 (Ω, Σ, P) un espace probabilisé
 $\mathbb{L}^0(K)$, resp. $\mathbb{L}^0(L)$, l'espace des variables aléatoires à valeurs dans K , resp. L .

L'application $\Phi: \mathbb{L}^0(K) \times \mathbb{L}^0(L) \rightarrow \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \int_\Omega \phi(f(\omega), g(\omega)) dP(\omega)$ est super-stable.

Preuve.

Notons que ϕ étant séparément continue, et K, L métrisables, elle est métrisable. Comme la tribu borélienne $\mathcal{B}(K \times L)$ est ici identique au produit $\mathcal{B}(K) \otimes \mathcal{B}(L)$, on voit que l'application $\Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto \phi(f(\omega), g(\omega))$ est mesurable.

a) Φ est f.r. dans sa restriction à $\mathcal{E}(K) \times \mathcal{E}(L)$, où $\mathcal{E}(K)$, resp $\mathcal{E}(L)$ est l'espace des fonctions étagées mesurables à valeurs dans K , resp. L .

En effet on peut approcher uniformément toute $f \in \mathbb{L}^0(K)$ par une suite $(f_m)_m$ de fonctions de $\mathcal{E}(K)$ (recouvrir, pour tout m , K par des boules $B(k_m^j; \frac{1}{m})$, $j=1, \dots, N_m$, et poser $f_m = \sum_{j=1}^{N_m} k_m^j 1_{\{f(\omega) \in B(k_m^j; \frac{1}{m})\}}$) et d'après le th. de Lebesgue (et la continuité à gauche de ϕ), on a pour toute $g \in \mathbb{L}^0(L)$ fixée:

$$\int_\Omega \phi(f_m(\omega), g(\omega)) dP(\omega) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_\Omega \phi(f(\omega), g(\omega)) dP(\omega).$$

b) Le théorème de représentation 1 permet d'écrire:

$$\phi(x, y) = \langle Tu(x), v(y) \rangle_{F \times G^*}, \text{ où } T \text{ est uniformément}$$

convexifiant de F dans G , et $u: K \rightarrow B_F, v: L \rightarrow B_{G^*}$.

Lorsque $f \in \mathcal{E}(K)$, $u \circ f$ est étagée mesurable bornée de Ω dans F , donc est dans

$\mathbb{L}^2(\Omega, \Sigma, P; F)$, en fait dans sa boule-unité. De même $g \in \mathcal{E}(L) \implies \forall \theta \in \mathbb{L}^2(G^*) \subset \mathbb{L}^2(G)^*$

De T se déduit l'opérateur $\mathbb{L}^2(T): \mathbb{L}^2(F) \longrightarrow \mathbb{L}^2(G)$, $h \rightsquigarrow Toh$, qui est encore uniformément convexifiant. (cf. BZY², cor. de la prop. II.3). Alors :

$$\forall (f,g) \in \mathfrak{X}(K) \times \mathfrak{X}(L), \Phi(f,g) = \int_{\Omega} \langle \text{Uof}(\omega), \text{vog}(\omega) \rangle_{G \times G^*} dP(\omega) \\ = \langle \mathbb{L}^2(T) \text{ uof}, \text{vog} \rangle_{\mathbb{L}^2(G) \times \mathbb{L}^2(G^*)}$$

Donc, d'après le th.1, Φ est superstable. CQFD.

C)Espaces de Banach superstables.

Définition 1. L'espace de Banach E est dit superstable ssi tout espace de Banach F finiment représentable dans E est stable.

Remarque 2. Une CNS pour que E soit superstable est que la fonction:

$$f_E: B_E \times B_E \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{en fait } \longrightarrow [0,2]) \\ (x, y) \rightsquigarrow \|x+y\|$$

soit superstable.

Il suffit en effet de noter que pour tout I et D, on passe de $(f_E)^I/D$ à $f_{(E^I/D)}$ par un morphisme et réciproquement.

(Dans le 1° cas, le morphisme est (p,p) , où p est la surjection naturelle

$$(B_E)^I/D \longrightarrow B_{E^I/D}$$

associant à une classe au sens ensembliste la classe correspondante au sens banachiste. Dans le 2° cas, s étant une section de p, on a le morphisme (s,s) .)

Exemple 3. - Tout espace de dimension finie,

- Tout espace de Hilbert,

- Tout espace $\mathbb{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, avec $1 \leq p < \infty$, est superstable.

En effet toute ultrapuissance d'un espace d'un de ces types est du même type.

(Dans le cas des \mathbb{L}^p , voir [DCK]).

Exemple 4. Un espace stable, non superstable.

L'espace $E = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_n$ est stable, mais non superstable (car $\mathbb{1}^{\infty}$ est f.r. dans E)

Exemple 5. Pour toute norme N sur \mathbb{R}^n , inconditionnelle (rel. à la base naturelle),

et tous E_1, E_2, \dots, E_n superstables, l'espace $(E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n)_N$, somme directe au sens de N, est superstable.

En effet l'ultrapuissance $(E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n)_N^I/D$ est isométrique à

$$(E_1^I/D \oplus E_2^I/D \oplus \dots \oplus E_n^I/D)_N$$

Théorème 6. Soit (Ω, Σ, P) un espace probabilisé, et $1 \leq p < \infty$.

Pour tout espace de Banach superstable E, l'espace $\mathbb{L}^p(\Omega, \Sigma, P; E)$ est superstable.

Dans le cas $1 < p < 2$, on utilise le lemme suivant:

Lemme 7. Soit E un espace de Banach superstable, et $1 < p < 2$.

La fonction $\phi_E: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, définie par:

$$\phi(x,y) = \frac{\|x+y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p}{\|x\|^{p/2} \|y\|^{p/2}} \quad \text{si } x \neq 0, y \neq 0,$$

$$\phi(x,y) = 0 \quad \text{si } x=0 \text{ ou } y=0,$$

est bornée et superstable.

Preuve du lemme 7.

a) Rappelons brièvement d'après [M-K], la preuve du fait que ϕ est bornée stable (sous l'hypothèse plus large que E est simplement stable).

On a une inégalité entre réels:

$$\left| \frac{\|u+v\|^p - \|u\|^p - \|v\|^p}{\|u\|^{p/2} \|v\|^{p/2}} \right| \leq C \left(\frac{\|u\|}{\|v\|} \wedge \frac{\|v\|}{\|u\|} \right)^{1-p/2}$$

d'où l'on déduit l'inégalité analogue dans $E \setminus \{0\}$:

$$(1) \quad |\phi(x,y)| \leq C \left(\frac{\|x\|}{\|y\|} \wedge \frac{\|y\|}{\|x\|} \right)^{1-p/2}$$

Donc ϕ est bornée, et $\lim \phi(x,y) = 0$ lorsque x ou $y \rightarrow 0$ ou ∞ .

ϕ s'étend en une fonction séparément continue sur $\bar{\mathcal{C}} \times \bar{\mathcal{C}}$ (où $\bar{\mathcal{C}}$ est le compactifié d'Alexandrov de l'espace \mathcal{C} des types sur E) en posant:

$$\phi(\sigma, \tau) = \frac{\sigma, \tau^p - \sigma(0)^p - \tau(0)^p}{\sigma(0)^{p/2} \tau(0)^{p/2}} \quad \text{si } \sigma, \tau \neq 0, \infty$$

$$\phi(\sigma, \tau) = 0 \quad \text{si } \sigma \text{ ou } \tau = 0 \text{ ou } \infty.$$

Donc ϕ est stable.

b) superstabilité de ϕ .

Soit ϕ_E^I/D une ultrapuissance de ϕ_E .

Soient $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}$ deux familles de points de E indexées par I ,

ξ et η leurs classes dans E^I/D . Lorsque ces familles définissent deux éléments de E^I/D , ultrapuissance au sens des espaces de Banach (i.e. lorsque

$\lim_{i,D} \|x_i\| \neq \infty$ et $\lim_{i,D} \|y_i\| \neq \infty$), soient ξ' et η' , et si $\xi', \eta' \neq 0$ alors il est clair

que: $(\phi_E)^{I/D}(\xi, \eta) = \phi_{E^{I/D}}(\xi', \eta')$

et comme $E^{I/D}$ est stable (puisque E est superstable), et donc que $\phi_{E^{I/D}}$ est stable d'après le a) ci-dessus, on voit que $(\phi_E)^{I/D}$ est stable sur $A \times A$, où:

$$A = \{ \xi = (x_i)_{i \in I} / \lim_{i, D} \|x_i\| \neq 0, \infty \}.$$

Ceci étant, supposons que ϕ_E ne soit pas superstable: il existe donc $\epsilon > 0$,

et pour tout N , deux familles $(x_i^N)_{i=1}^N, (y_i^N)_{i=1}^N$ de points de E , telles que:

$$(2) \quad \inf_{1 \leq i < j \leq N} \phi(x_i^N, y_j^N) > \sup_{1 \leq j < i \leq N} \phi(x_i^N, y_j^N) + \epsilon.$$

Il est clair qu'on peut supposer les x_i^N, y_i^N différents de 0 (car ϕ est séparément continue).

(2) entraîne que l'une au moins des inégalités suivantes a lieu:

$$(3): \quad \inf_{1 \leq i < j \leq N} \phi(x_i^N, y_j^N) > \frac{\epsilon}{2} \quad ; \quad (4): \quad \sup_{1 \leq i < j \leq N} \phi(x_i^N, y_j^N) < \frac{\epsilon}{2}$$

L'une de ces inégalités a donc lieu pour une infinité d'entiers N , soit $(N_k)_k$.

En éliminant les entiers $N \notin \{N_k\}_k$, on se ramène au cas où cette inégalité

a toujours lieu. Donc par exemple:

$$\forall N, \quad \inf_{1 \leq i < j \leq N} \phi(x_i^N, y_j^N) > \frac{\epsilon}{2}.$$

Mais ϕ est homogène de degré 0. Quitte à diviser les x_i^N, y_j^N par $\|x_1^N\|$ (pour chaque N), on peut supposer que: $\forall N, \|x_1^N\| = 1$.

De: $\phi(x_1^N, y_j^N) > \frac{\epsilon}{2}$, on tire d'après (1) que $\alpha \leq \|y_j^N\| \leq \beta$, pour certains $\alpha > 0, \beta < \infty$ indépendants de N et j , ceci pour tout N et tout $j, 1 \leq j \leq N$.

De $\phi(x_i^N, y_N^N) > \frac{\epsilon}{2}$, on tire de même d'après (1) que $\alpha' \leq \|x_i^N\| \leq \beta'$, pour certains α' et β' indépendants de i et N , ceci pour tout N et tout $i, 1 \leq i \leq N$.

Posons alors $x_i^N = 0, y_i^N = 0$ pour tous $i > N$, et soit D un ultrafiltre non trivial

sur \mathbb{N}_* . Soient ξ_i, η_j , les points de l'ultrapuissance E^N/D correspondant aux familles $(x_i^N)_{N \in \mathbb{N}}, (y_j^N)_{N \in \mathbb{N}}$: ils sont tous dans la partie A définie plus

haut. Pourtant $\phi = \phi^{I/D}$ vérifie: $\inf_{1 \leq i < j} \phi(\xi_i, \eta_j) > \sup_{1 \leq j < i} \phi(\xi_i, \eta_j) + \epsilon$,

donc ϕ n'est pas stable sur $A \times A$, d'où la contradiction.

Preuve du th. 6, dans le cas $1 \leq p < 2$.

Comme ϕ_E est superstable, il existe, d'après le th.1 du §B, deux espaces de Banach F et G , un opérateur uniformément convexifiant $T: F \rightarrow G$, et deux applications $u: E \rightarrow B_F$, $v: E \rightarrow B_{G^*}$, telles que:

$$\phi_E(x, y) = \langle Tu(x), v(y) \rangle_{G \times G^*} \quad \text{pour tous } x, y \text{ dans } E.$$

C'est-à-dire:

$$\|x+y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p = \|x\|^{p/2} \cdot \|y\|^{p/2} \langle Tu(x), v(y) \rangle.$$

Posons: $\tilde{u}(x) = \|x\|^{p/2} \cdot u(x)$ et: $\tilde{v}(y) = \|y\|^{p/2} \cdot v(y)$.

On a donc: $\|\tilde{u}(x)\| \leq \|x\|^{p/2}$ et: $\|\tilde{v}(y)\| \leq \|y\|^{p/2}$ ainsi que:

$$\|x+y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p = \langle Tu(x), v(y) \rangle, \text{ pour tous } x, y \text{ dans } E.$$

Si f, g sont des fonctions étagées mesurables de Ω dans E , on voit que:

$$\|uof\|_{\mathbb{L}^2(F)}^2 = \int_{\Omega} \|u(f(\omega))\|_G^2 dP(\omega) \leq \int_{\Omega} \|f(\omega)\|_E^p dP(\omega) = \|f\|_{\mathbb{L}^p(E)}^p,$$

donc: $\|uof\|_{\mathbb{L}^2(F)} \leq \|f\|_{\mathbb{L}^p(E)}^{p/2}$ et de même: $\|vog\|_{\mathbb{L}^2(G^*)} \leq \|g\|_{\mathbb{L}^p(E)}^{p/2}$.

Donc si f et g sont dans $B_{\mathbb{L}^p(E)}$, alors uof (resp vog) est dans $B_{\mathbb{L}^2(F)}$ (resp. dans $B_{\mathbb{L}^2(G^*)}$). De plus:

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{\mathbb{L}^p(E)}^p - \|f\|_{\mathbb{L}^p(E)}^p - \|g\|_{\mathbb{L}^p(E)}^p &= \int_{\Omega} \langle Tuof(\omega), vog(\omega) \rangle dP(\omega) \\ &= \langle \mathbb{L}^2(T) ouof, vog \rangle_{\mathbb{L}^2(G) \times \mathbb{L}^2(G)^*}, \end{aligned}$$

où l'on rappelle que $\mathbb{L}^2(T)$ est l'opérateur:

$$\mathbb{L}^2(F) \longrightarrow \mathbb{L}^2(G), \quad h \mapsto Toh.$$

On a identifié $\mathbb{L}^2(G^*)$ à une partie de $\mathbb{L}^2(G)^*$.

$\mathbb{L}^2(T)$ est, comme T , uniformément convexifiant. D'après le th.1 du §B, on voit donc que l'application $(f, g) \rightarrow \|f+g\|^p$ est superstable sur la boule-unité du sous espace $\mathfrak{E}_p(\Omega; E)$ des fonctions étagées mesurables à valeurs dans E .

On conclut alors par densité de $\mathfrak{E}_p(\Omega; E)$ dans $\mathbb{L}^p(\Omega, E)$.

D'où le th6 dans le cas $1 \leq p < 2$. Dans le cas général, le lemme 7 ci-dessus admet l'analogue suivant:

Lemme 7 bis. Si E est superstable, et $p \geq 1$, il existe un entier k , et des réels $\alpha_i, i=1, \dots, k$, avec $0 < \alpha_i < p$, ainsi que des fonctions $\phi_i: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ bornées et

et superstables, telles que:

$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p = \sum_{i=1}^k \|x\|^{\alpha_i} \|y\|^{p-\alpha_i} \phi_i(x, y).$$

Preuve. Pour $1 \leq p < 2$, ceci résulte du lemme 7 (on a $k=1, \alpha_1=1/2$). On montre alors, en élevant au carré les deux membres, que si l'assertion est vraie pour la valeur p , elle l'est pour la valeur $2p$. On utilise le fait qu'un produit (fini) resp. une somme (finie) de fonction superstables est encore superstable.

Fin de la preuve du th. 6.

Pour des opérateurs $T_i: F_i \longrightarrow G_i$ ($1 \leq i \leq k$) uniformément convexifiants convenables, ainsi que des applications $u_i: E \longrightarrow F_i$ et $v_i: E \longrightarrow G_i^*$, on a:

$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p = \sum_{i=1}^k \langle T_i u_i(x), v_i(y) \rangle_{G_i \times G_i^*}$$

avec de plus: $\|u_i(x)\| \leq \|x\|^{\alpha_i}$, $\|v_i(y)\| \leq \|y\|^{p-\alpha_i}$.

En intégrant on trouve maintenant:

$$\forall f, g \in \mathcal{E}_p(\Omega, E), \quad \|f+g\|_{\mathcal{L}^p(E)}^p - \|f\|_{\mathcal{L}^p(E)}^p - \|g\|_{\mathcal{L}^p(E)}^p = \sum_{i=1}^k \langle \mathcal{L}^{p_i}(T_i) u_i \circ f, v_i \circ g \rangle_{\mathcal{L}^{p_i}(G_i) \times \mathcal{L}^{p_i}(G_i)^*}$$

avec $p_i = \frac{p}{\alpha_i}$ ($\forall i, 1 \leq i \leq k$). De plus: $\|u_i \circ f\|_{\mathcal{L}^{p_i}(F_i)} < \|f\|_{\mathcal{L}^p(E)}^{\alpha_i}$ et:

$$\|v_i \circ g\|_{\mathcal{L}^{p_i}(G_i^*)} < \|g\|_{\mathcal{L}^p(E)}^{p-\alpha_i}$$

Donc chacun des crochets de dualité est fonction superstable de ses arguments (sur $B_{\mathcal{E}_p} \times B_{\mathcal{E}_p}$), et l'on conclut.

Généralisation: familles uniformément superstables d'espaces de Banach.

Définition 8. Une famille \mathcal{E} d'espaces de Banach est dite uniformément

superstable ssi la famille Φ des fonctions:

$$\phi_E: B_E \times B_E \longrightarrow \mathbf{R}, \quad (x, y) \rightsquigarrow \|x+y\|,$$

(E décrivant \mathcal{E}) est uniformément superstable.

Remarque 9. Il revient au même de dire que, pour toute famille $(E_l)_{l \in L}$

d'éléments de \mathcal{E} , et tout ultrafiltre D sur L , l'espace de Banach

$\prod_{l \in L} E_l / D$ est stable.

Le Th.6 admet alors l'analogie suivant:

Théorème 10. Si \mathcal{E} est une famille uniformément superstable d'espaces de Banach, alors pour tout $1 < p < \infty$, l'espace $\bigoplus_{1 \leq i \leq k} E$ est superstable.

Preuve. Le lemme 7bis ci-dessus se généralise de la manière suivante:

Lemme 7 ter. Si \mathcal{E} est une famille uniformément superstable d'espaces de Banach, et si $p \geq 1$, alors il existe un entier k et des réels α_i , ($1 \leq i \leq k$), avec $0 < \alpha_i < p$, et, pour chaque $E \in \mathcal{E}$, des fonctions $\phi_i^E: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, tels que:

- i) $\forall E \in \mathcal{E}, \forall x, y \in E, \|x+y\|_E^p - \|x\|_E^p - \|y\|_E^p = \sum_{i=1}^k \|x\|_E^{\alpha_i} \|y\|_E^{p-\alpha_i} \phi_i^E(x, y)$,
- ii) La famille $(\phi_i^E)_{i=1, \dots, k}$ est uniformément superstable.

On ne détaillera pas la démonstration de ce lemme, formellement analogue à celle des lemmes 7 et 7bis.

D'après la prop. 14 du §A, il existe donc une fonction $\psi_i: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, bornée superstable, et pour tout E , un morphisme $(\hat{u}_i^E, \hat{v}_i^E)$ de ϕ_i^E dans ψ_i .

On peut alors appliquer le th. de représentation (th.1 du §B), qui fournit des opérateurs uniformément convexifiants $T_i: F_i \rightarrow G_i$, indépendants de E , et des applications $u_i^E: E \rightarrow F_i, v_i^E: E \rightarrow G_i^*$, tels que $\phi_i^E(x, y) = \langle T_i u_i^E(x), v_i^E(y) \rangle$.

avec $\|u_i^E(x)\| < \|x\|_E^{\alpha_i}, \|v_i^E(y)\| < \|y\|_E^{p-\alpha_i} \quad (\forall x, y \in E)$

On conclut alors comme pour le th.6, puisque les $l_i^{p_i}(T_i)$ sont uniformément convexifiants ($p_i = \frac{p}{\alpha_i} > 1$).

Corollaire 11. Soit \mathcal{E} une famille d'espaces de Banach. Les assertions suivantes sont équivalentes:

- i) \mathcal{E} est uniformément superstable.
- ii) Tous les éléments E de \mathcal{E} sont isométriques à des sous-espaces d'un même espace de Banach superstable.
- iii) Tous les éléments E de \mathcal{E} sont uniformément finiment représentables dans un même espace superstable.

Preuve. Le point non trivial est $i) \implies ii)$, qui résulte immédiatement du th.10.

Il résulte du cor.11 et du th.6 que si \mathcal{E} est une famille uniformément superstable d'espaces de Banach, il en est de même de la famille $(\mathbb{L}^p(E))_{E \in \mathcal{E}}$ (pour un certain espace probabilisé et un $p \geq 1$ fixé).

On peut étendre le th.6 dans une autre direction, qui fournit des familles uniformément superstables non triviales.

Théorème 12. Soit E un espace de Banach superstable; (Ω, Σ, P) un espace probabilisé, et $p_0 < \infty$. La famille $(\mathbb{L}^p(E))_{1 \leq p \leq p_0}$ est uniformément superstable.

Preuve. Par analogie avec la démonstration du th.6, on est conduit à considérer les fonctions $\phi_p, E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, définies par:

$$\begin{aligned} \phi_p(x, y) &= \frac{\|x+y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p}{\|x\|^{p/2} \|y\|^{p/2}} \\ &= 0 \text{ si } x \text{ ou } y = 0. \end{aligned}$$

a) La famille $(\phi_p)_{1 \leq p \leq p_0}$ est uniformément bornée et superstable, pourvu que $p_0 < 2$.

i) Notons d'abord que pour tout $\rho, 1 \leq \rho < 2$, on a: $\phi_p(x, y) \xrightarrow{p \rightarrow \rho} \phi_\rho(x, y)$ uniformément en $(x, y) \in E \times E$.

Les ϕ_p étant homogènes de degré 0, il suffit de vérifier que cette limite a lieu uniformément pour $(x, y) \in E \times S_E$, où S_E est la sphère-unité de E .

On a:
$$\begin{aligned} \phi_p(x, y) &< C_p \left(\frac{\|x\| \|y\|}{\|x\| \|y\|} \right)^{1-p/2} \quad (\text{avec } C_p \leq 1 + p \cdot 2^{p-1}) \quad (*) \\ &= C_p \left(\|x\| \frac{1}{\|x\|} \right)^{1-p/2} \quad \text{quand } \|y\| = 1. \end{aligned}$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que pour tout $p, 1 \leq p \leq \frac{\rho+2}{2}$, on ait:

$$\|y\| = 1 \text{ et } \|x\| > \alpha \text{ ou } < \frac{1}{\alpha} \implies \phi_p(x, y) < \varepsilon.$$

Par ailleurs $\phi_p(x, y) \xrightarrow{p \rightarrow \rho} \phi_\rho(x, y)$ uniformément sur $A_\alpha = \{x \in E / \alpha \leq \|x\| \leq \frac{1}{\alpha}\} \times S_E$. (car les $\frac{d}{dp} \phi_p(x, y)$ sont bornées uniformément pour $(x, y) \in A_\alpha$ et $1 \leq p \leq 2$, comme on le voit aisément).

La limite uniforme (*) a donc lieu.

ii) Ceci étant, soit $\prod_{i \in I} \phi_{p_i} / D$ un ultraproduit d'une famille $(\phi_{p_i})_{i \in I}$, avec $\forall i \in I, 1 \leq p_i \leq p_0$. Soit $\rho = \lim_{i, D} p_i$, on a un isomorphisme:

$$(\text{id}_E, \text{id}_E) : \prod_{i \in I} \phi_{p_i} / D \longrightarrow \phi_\rho^I / D.$$

(car pour tout couple de familles $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}$ dans E:

$$\lim_{i, D} \phi_{p_i}(x_i, y_i) = \lim_{i, D} \phi_\rho(x_i, y_i) \quad)$$

Comme ϕ_ρ^I/D est stable (puisque ϕ_ρ est superstable d'après le lemme 7),

l'ultraproduit $\prod_{i \in I} \phi_{p_i}/D$ est stable. Finalement $(\phi_p)_{1 \leq p \leq p_0}$ est uniformément superstable.

b) cas p_0 quelconque.

De manière analogue au résultat 7bis, on voit qu'il existe k entier (dépendant de p_0 , et plus précisément $k \leq \log_2 p_0$) et des fonctions $\phi_{i,p}$ ($1 \leq i \leq k, 1 \leq p \leq p_0$)

tels qu'en posant $\alpha_i(p) = \frac{i}{k+1} \cdot p$ ($1 \leq i \leq k$) on ait:

$$\|x+y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p = \sum_{i=1}^k \|x\|^{\alpha_i(p)} \|y\|^{p-\alpha_i(p)} \phi_{i,p}(x,y) \quad ,$$

les k familles $(\phi_{i,p})_{1 \leq p \leq p_0}$, $i=1, \dots, k$, étant uniformément superstables.

(Comme pour le résultat 7bis, ceci est vrai pour $p_0 < 2$ - inégalité stricte ici - et l'on déduit le résultat pour $p'_0 = 2 \cdot p_0$ à partir du résultat pour p_0 par élévation des deux membres au carré.)

Il existe donc, d'après la prop. 14 du §A, k fonctions $\phi_i: \exists_i x T_i \longrightarrow \mathbb{R}$

superstables, et des morphismes $(\hat{u}_{i,p}, \hat{v}_{i,p}) : \phi_{i,p} \longrightarrow \phi_i$.

On obtient donc k opérateurs uniformément convexifiants $T_i: F_i \longrightarrow G_i$, et des

applications $u_{i,p}: E \longrightarrow F_i$ et $v_{i,p}: E \longrightarrow G_i^*$, telles que:

$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p = \sum_{i=1}^k \langle T_i u_{i,p}(x), v_{i,p}(y) \rangle$$

et:
$$\|u_{i,p}(x)\|_{F_i} < \|x\|^{\alpha_i(p)} \quad , \quad \|v_{i,p}(y)\|_{G_i^*} < \|y\|^{p-\alpha_i(p)}$$

On en déduit, en intégrant:

$$\forall f, g \in \mathbb{L}^p(E), \quad \|f+g\|_{\mathbb{L}^p(E)}^p - \|f\|_{\mathbb{L}^p(E)}^p - \|g\|_{\mathbb{L}^p(E)}^p = \sum_{i=1}^k \mathbb{L}^{\rho_i(p)}(T_i) \text{fov}_{i,p},$$

$\text{gov}_{i,p} >$

en posant $\rho_i(p) = \frac{p}{\alpha_i(p)}$. Notons que $\forall p, 1 \leq p \leq p_0$, on a: $\frac{k+1}{k} \leq \rho_i(p) \leq (k+1) \cdot p_0$.

L'énoncé du th.12 se déduit maintenant clairement du lemme suivant:

Lemme 13. Soit $T: F \rightarrow G$ un opérateur uniformément convexifiant.

Soient p_0, \hat{p}_0 des réels avec $1 < \hat{p}_0 < p_0$ ($< \infty$). La famille de fonctions $(\psi_p)_{\hat{p}_0 < p < p_0}$

$$\psi_p: \mathbb{L}^p(F) \times \mathbb{L}^p(G)^* \longrightarrow \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \langle \mathbb{L}^p(T)f, g \rangle$$

est uniformément superstable.

Preuve. Il est clair qu'on ne modifie pas le problème si l'on remplace les normes de F et G par des normes équivalentes (indépendantes de p).

On peut donc (cf. BZY 2, th. I-2) supposer que T est uniformément convexe, c.a.d.: il existe une fonction $\delta, [0, 2] \rightarrow [0, 1]$, avec $\delta(\varepsilon) > 0$ pour $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \text{telle que: } \|x\| \vee \|y\| \leq 1 \\ \|T(x-y)\| \geq \varepsilon \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon). \end{aligned}$$

Pour chaque $p > 1$, T admet alors un module de convexité p -homogène δ_p (avec $\delta_p(\varepsilon) > 0$ pour $\varepsilon > 0$), i.e.:

$$\|T(x-y)\| \geq \varepsilon (\|x\| \vee \|y\|) \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p < (1 - \delta_p(\varepsilon)) \cdot \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}$$

(cf. BZY 2, lemme p.125)

Mais la famille $(\delta_p)_p$ est totalement ordonnée, et plus précisément:

$$p_1 \leq p_2 \implies \delta_{p_1} \leq \delta_{p_2}$$

(car l'inégalité entre réels:

$$\left(\frac{\|u\|^{p_1} + \|v\|^{p_1}}{2} \right)^{1/p_1} \leq \left(\frac{\|u\|^{p_2} + \|v\|^{p_2}}{2} \right)^{1/p_2}$$

entraîne: $(1 - \delta_{p_1})^{1/p_1} \geq (1 - \delta_{p_2})^{1/p_2}$ d'où $\delta_{p_1} \leq \delta_{p_2}$).

Par conséquent la famille $(\delta_p)_{\hat{p}_0 \leq p}$ est minorée par $\delta_{\hat{p}_0}$.

Or si T est uniformément convexe, il en est de même de $\mathbb{L}^p(T)$, pour tout $p > 1$, et son module de convexité est minoré par la fonction:

$$\varepsilon \mapsto 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p} \cdot \delta_p(\varepsilon) \right)^{1/p}$$

où δ_p est le module p -homogène de T . (cf. BZY 2, preuve de la prop. II-3).

Donc les $\mathbb{L}^p(T)$, $\hat{p}_0 \leq p \leq p_0$ ont leurs modules de convexité tous minorés par

la fonction $\varepsilon \mapsto \Delta(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^{p_0}}{2^{p_0}} \cdot \delta_{\hat{p}_0}(\varepsilon) \right)^{1/p_0}$.

Donc la famille $(\psi_p)_{\hat{p}_0 \leq p \leq p_0}$ de l'énoncé du lemme 13 est uniformément superstable, ainsi qu'il résulte du résultat 15 du §A.

Ceci achève la preuve du lemme 13 et donc du th.12.

Corollaire 14. Soit E un espace de Banach superstable, et $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de réels, avec $1 < \hat{p}_0 \leq p_n \leq p_0 < \infty, \forall n > 1$. Alors pour tout $q, 1 \leq q < \infty$, l'espace de Banach $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_*} \mathbb{L}^{p_n}(\Omega, \Sigma, P; E)$ est superstable.

Preuve. Ceci résulte du th.12 et du th.10.

Remarque 15. Dans le cor.14 on pourrait remplacer \mathbb{L}^q par un espace \mathbb{L}^q de la manière suivante:

Soient $(\Omega, \Sigma, P), (\Omega', \Sigma', P')$ deux espaces probabilisés, E un espace de Banach, et $p: \omega' \rightarrow [1, +\infty[$ une application mesurable.

On définit l'espace $\mathbb{L}^q(\Omega', \mathbb{L}^{p(\omega')}(\Omega; E))$ comme l'espace des fonctions $f: \Omega \times \Omega' \rightarrow E, P \otimes P'$ -mesurables, telles que:

- pour presque tout $\omega', f(\cdot, \omega') \in \mathbb{L}^{p(\omega')}(\Omega; E)$
- l'application $\omega' \mapsto \|f(\cdot, \omega')\|_{\mathbb{L}^{p(\omega')}(\Omega; E)}$ est dans $\mathbb{L}^q(\Omega', \mathbb{R}_+)$.

Alors si E est superstable et si $1 < \hat{p}_0 \leq p(\omega') \leq p_0$, pour presque tout ω' , l'espace $\mathbb{L}^q(\mathbb{L}^p(E))$ est superstable.

