



HAL
open science

Schémas de discrétisation en pression et éléments finis de Crouzeix-Raviart pour les écoulements de fluides incompressibles

Andrew Peitavy

► **To cite this version:**

Andrew Peitavy. Schémas de discrétisation en pression et éléments finis de Crouzeix-Raviart pour les écoulements de fluides incompressibles. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Gustave Eiffel, 2024. Français. NNT : 2024UEFL2024 . tel-04830467

HAL Id: tel-04830467

<https://theses.hal.science/tel-04830467v1>

Submitted on 11 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Schémas de discrétisation en pression et éléments finis de Crouzeix-Raviart pour les écoulements de fluides incompressibles

Thèse de doctorat de l'Université Gustave Eiffel

École doctorale Sciences, Ingénierie et Environnement (SIE) n°531

Spécialité de doctorat : Mécanique des fluides

Unité de recherche : MSME-Laboratoire de Modélisation et Simulation Multi Echelle

**Thèse présentée et soutenue à l'Université Gustave Eiffel,
le 19/06/2024, par :**

Andrew PEITAVY

Composition du Jury

Mejdi AZAIEZ

Professeur des universités, Université de Bordeaux

Examineur

Robert EYMARD

Professeur, Université Gustave Eiffel

Examineur

Florence HUBERT

Professeure des universités, Université Aix Marseille

Examinatrice

Brahim AMAZIANE

Maître de conférences, Université de Pau et des Pays de l'Adour

Rapporteur

Stella KRELL

Maîtresse de conférences, Université de Nice - Sophia Antipolis

Rapportrice

Antoine GERSCHENFELD

Ingénieur de Recherche, CEA Saclay

Invité

Eric CHÉNIER

Maître de conférence, Université Gustave Eiffel

Co-Directeur de thèse

Christophe LE POTIER

Directeur de recherche, CEA Saclay

Co-Directeur de thèse

Erell JAMELOT

Ingénieur Chercheur, CEA Saclay

Encadrante de thèse

*"Il y a du bon en ce monde, ... , et il faut se battre pour cela."
— J. R. R. Tolkien*

*Je dédie ce manuscrit au vélo de mon grand-père, vendu, pour donner une meilleure vie
à ses enfants en France.*

Remerciements

Cette thèse a été réalisée au sein du Laboratoire de Modélisation et Simulation en Mécanique des Fluides du CEA de Saclay et du Laboratoire de Modélisation et Simulation Multi-Échelle à l'Université Gustave Eiffel. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Nicolas Dorville pour m'avoir accueilli dans le Service de Thermo-hydraulique et de Mécanique des Fluides, ainsi qu'à mes cheffes de laboratoire, Julie Daron et Céline Leonard.

Je remercie sincèrement mon jury pour leur participation à la soutenance, leurs questions et commentaires qui ont apporté énormément à cette thèse, avec une mention particulière à mes rapporteurs, Stella Krell et Brahim Amaziane, pour le temps consacré à la relecture de ce manuscrit. Merci également à Mejdi Azaiez pour avoir présidé cette thèse. Je souhaite exprimer ma reconnaissance à Florence Hubert, qui m'a ouvert les portes du calcul scientifique durant ma formation à Centrale Marseille et au master de mathématiques CEPS. C'est avec une grande fierté que je conclus mon parcours d'étudiant grâce à vous. Un grand merci à Antoine Gerschenfeld pour son soutien tout au long de cette thèse et pour m'avoir permis de participer à l'aventure PolyMAC. Je souhaite également remercier Robert Eymard pour ses conseils avisés et nos discussions, toujours enrichissantes.

Cette thèse n'aurait pas été aussi passionnante sans une direction de qualité. Merci à mon équipe encadrante : Eric, pour tes conseils, ton calme et ton expérience qui ont permis à cette thèse de toujours rester sur les rails. Mon seul regret est de ne pas avoir pu te voir davantage lors de la première année en raison des restrictions liées à la COVID. Merci à toi Christophe pour ton expertise et tes idées brillantes qui nous ont souvent permis d'avancer lorsque je me trouvais dans une impasse. Enfin, merci à toi, Erell, pour ton expérience, ton expertise et ton dévouement, qui ont été cruciaux pour la réalisation de cette thèse et pour mon apprentissage. J'aspire un jour à atteindre le meilleur de ce que vous trois m'avez apporté durant ces trois années.

Pour des remerciements plus personnels, j'aimerais remercier mes deux laboratoires, en particulier mes amis et camarades du LMSF, pour nos longues et passionnantes conversations autour du feu "arbre sacré", ainsi que pour l'aide que vous apportez à chaque doctorant qui en a besoin. Je remercie également, pour les mêmes raisons, l'équipe TRUST, la TMA et le SGLS. Je souhaite également remercier personnellement toutes les personnes et tous les professeurs qui m'ont soutenu et poussé à me dépasser dans mes études.

Une thèse, c'est aussi des rencontres inoubliables avec des compagnons de route. Je suis reconnaissant envers mes amis de l'université (Dahia, Paul, Amine, George, Syphax, Simon, ...) et en particulier Abdelhamid, mon co-bureau, pour m'avoir intégré au groupe. Nos parties de Diplomatie resteront à jamais gravées dans ma mémoire pour leurs rebondissements imprévisibles et exaltants. Je remercie mes amis du Taekwondo, avec qui j'ai pu me détendre et faire une pause bienvenue dans mon travail. Merci à mes amis doctorants du STMF et à ceux qui nous ont précédés (Werner, Nicolas, Aymeric, Alan, Raksmay, Harshit ...). Une pensée particulière pour les doctorants du LMSF (Téo, Nathalie, Jaiyi, Loic, Capu, Elie, Matthieu, Sanae ...) et pour mes camarades de toujours (Pauline, Mathis, Gabriel, Antonin) ainsi que pour Clément, mon co-bureau depuis quatre ans, avec l'espoir que cette co-habitation se poursuive encore longtemps (désolé!).

Mes derniers remerciements vont à mes amis proches (Anthony, Chris, Flo, Hugo, Ju, Jason, Rodrigo, Hugo, Rémy, Chiheb, Arthur, Lamy, Alexis, Yassine, ...) et à ma famille (Manu, Claire, ma belle-famille et ma marraine ...) pour leur soutien indéfectible. Merci à mes frères, Anthony et Alan, dont l'amour et le soutien m'ont permis de rester fort. Enfin, je remercie ma femme Suzie, qui a été un pilier essentiel tout au long de cette aventure. Merci d'avoir passé de nombreuses heures à relire le manuscrit (sûrement écrit en énochien pour toi), d'avoir écouté patiemment mes répétitions incessantes, et d'avoir été présente à chaque étape de cette thèse pour me rassurer, me relever et me permettre de donner le meilleur de moi-même.

Ces derniers mots sont pour ceux qui le méritent le plus : mon grand-père, ma grand-mère, mon père et ma mère, qui ont sacrifié tant de choses pour que je puisse être ici aujourd'hui, défendre cette thèse et apporter ma première contribution à la Recherche. Merci du fond du cœur !

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Contexte industriel	9
1.2	Contexte numérique	11
1.3	Objectifs de la thèse	18
2	Modélisation	21
2.1	Notations	21
2.2	Modélisation physique et mathématique	25
3	Discrétisations dans le code TrioCFD pour les équations de Stokes	36
3.1	Schémas numériques pour les équations de Stokes	36
3.2	Discrétisation du domaine d'étude	37
3.3	Discrétisation conforme pour les équations de Stokes	43
3.4	Discrétisations non-conformes pour les équations de Stokes	44
3.5	Formulation variationnelle continue et discrète des équations de Navier-Stokes	77
3.6	Reconstruction d'une vitesse à divergence nulle pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$.	81
4	Nouveau schéma de discrétisation : $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ pour les équations de Stokes	87
4.1	Schémas Multi Point Flux Approximation pour le problème de diffusion anisotrope	88
4.2	Schéma de discrétisation $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ pour les équations de Stokes	97
4.3	Extension du schéma sur le bord du domaine	109
4.4	Étude de la convergence du schéma	115
4.5	Cas Tests Numériques	120
5	Étude du schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ sur les équations de Navier-Stokes en 3D	125
5.1	Discrétisation de la convection	125
5.2	Schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ pour les équations de Navier-Stokes en 3D	127
5.3	Cas tests numériques	131
6	Amélioration de la discrétisation $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ avec une technique d'hybridation	139
6.1	Élimination exacte de la pression avec une technique d'hybridation pour les $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$	144
6.2	Méthode de décomposition de domaine avec complément de Schur sur chaque élément	151
6.3	Résultats numériques	156
	Conclusion et Perspectives	165
A	Formules d'intégrations	169

B Etude du caractère bien posé de deux problèmes mixtes abstraits	171
B.1 Analyse d'erreur de consistance pour les schémas conformes	177
B.2 Analyse d'erreur de consistance pour les schémas non-conformes	179
C Préconditionnement du système de pression	181
Bibliographie	184

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Contexte industriel	9
1.2	Contexte numérique	11
1.2.1	Équations de Navier-Stokes	11
1.2.2	Généralités sur les discrétisations spatiales et temporelles	13
1.2.3	Couples éléments finis mixtes vitesse-pression stables	16
1.3	Objectifs de la thèse	18

1.1 Contexte industriel

En France, l'énergie nucléaire est la 1^{ère} source de production d'électricité¹. Elle provient de 56 réacteurs de différents niveaux de puissance répartis sur l'ensemble du territoire. Pour répondre au besoin énergétique futur, assurer son indépendance électrique et faire la transition vers des énergies "bas-carbone", c'est-à-dire une énergie dont la production n'émet pas ou peu de gaz à effet de serre, la France construit un nouveau réacteur nucléaire à Flamanville et prévoit la construction de 6 à 8 autres². L'énergie nucléaire est au cœur des enjeux de la politique française et il est donc essentiel d'en assurer la sécurité et la performance.

Le parc nucléaire français est composé exclusivement de réacteurs à eau pressurisée (REP). Il s'agit d'installations qui produisent de l'électricité à l'aide de turbines mises en rotation par de la vapeur. Pour obtenir cette vapeur, de l'eau dans le circuit primaire est chauffée par un combustible nucléaire dans le cœur du réacteur (appelé cuve). Dans celui-ci, la fission des atomes d'uranium produit une grande quantité de chaleur. Cette chaleur fait augmenter la température de l'eau qui y circule à plus de 300°C.

Le combustible nucléaire est composé de pastilles d'oxyde d'uranium (dioxyde d'uranium), empilées en crayons qui sont à leur tour regroupés en assemblages situés au cœur de la cuve. La collision d'un neutron d'énergie autour de $10 - 10^3 \text{ eV}$ avec un atome d'uranium, entraîne sa fission ce qui génère de la chaleur, ainsi que 2 à 3 autres neutrons. Ces neutrons supplémentaires entraînent à leur tour la fission d'autres atomes d'uranium, amorçant ainsi une réaction en chaîne. Le contrôle de cette réaction est assuré par la présence d'acide borique dans la cuve, ainsi que par des barres de contrôle capables d'absorber l'excédent de neutrons générés. Une illustration synthétique du processus de fission est présentée dans la figure 1.1.

1. Voir [EDF](#) [1]

2. Voir [world-nuclear.org](#) [2]

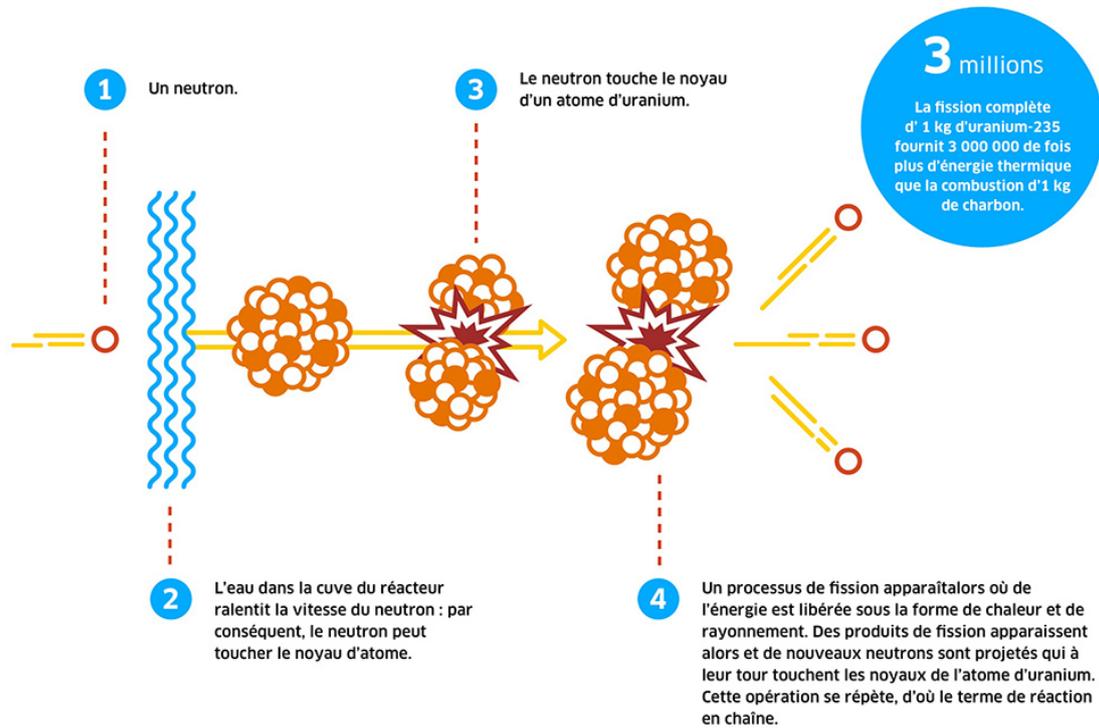


FIGURE 1.1 – Schéma de fission nucléaire par Engie [3]

L'eau est maintenue sous pression pour l'empêcher de bouillir. Ce circuit fermé est appelé circuit primaire. Un dispositif d'échangeur de chaleur est utilisé pour chauffer un circuit d'eau dit secondaire qui n'est pas en contact direct avec le combustible. L'eau chauffée dans le circuit secondaire est alors transformée en vapeur dans le générateur de vapeur. Après son passage dans les turbines, la vapeur d'eau est refroidie (par un troisième circuit dit de refroidissement) et est condensée pour être renvoyée sous forme liquide de nouveau vers le générateur de vapeur (pour un circuit fermé) ou relâchée dans une rivière à une température légèrement supérieure (pour un circuit ouvert). Les trois circuits sont étanches pour éviter les risques de contamination radioactive. Ce fonctionnement est illustré par la figure 1.2.

Pour donner quelques ordres de grandeurs, dans la cuve du REP, la température moyenne est de 306°C avec une pression moyenne de 155 bars. Le diamètre de la cuve est de 4 mètres pour une hauteur de 13 mètres. La viscosité dynamique μ du liquide est environ de $8.0 \cdot 10^{-3}$ Pa.s et la masse volumique ρ de l'eau est à $700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. La viscosité cinématique ν est définie par $\nu = \mu/\rho \simeq 1.1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Le fonctionnement des Réacteurs à Eau Pressurisée (REP) constitue un défi majeur en ingénierie, car il nécessite la coordination de nombreux composants ayant leurs propres comportements, tels que les pompes, les conduits ou la cuve. Afin de garantir sa sécurité auprès de l'Autorité de Sécurité Nucléaire, il est nécessaire d'étudier le fonctionnement du REP dans de nombreux scénarios en conditions normales et accidentelles. En France, plusieurs instituts sont chargés d'étudier le fonctionnement des REP. Parmi eux, le Commissariat à l'Energie Atomique et aux Energies Alternatives (CEA) est chargé de répondre aux enjeux de sécurité et d'optimisation de production de l'énergie nucléaire.

Lors de scénarios accidentels, il est important de comprendre les différents mécanismes impliqués, afin de les éviter, ou d'intervenir lors d'accidents nucléaires. Prenons par exemple le cas d'une chute de pression dans le circuit primaire. Il peut alors apparaître des zones de nucléation de bulle de vapeur sur la paroi. Si la nucléation est assez importante, alors un film de vapeur peut se générer entre la paroi et l'eau, agissant comme un isolant et

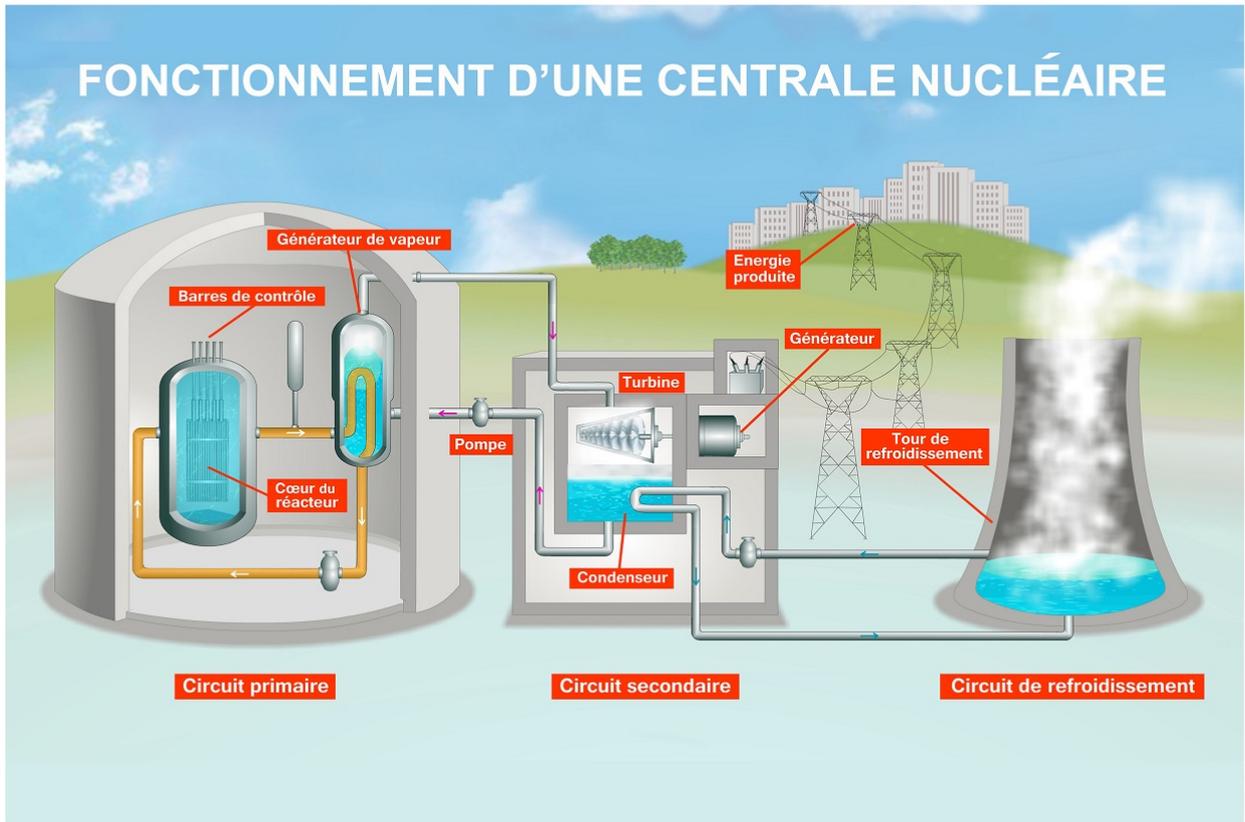


FIGURE 1.2 – Schéma de fonctionnement d'un Réacteur nucléaire à Eau Pressurisée (REP) par C. Beurtey [4]

empêchant le refroidissement du combustible. On parle de phénomène d'assèchement de paroi. Ces phénomènes induisent une très forte augmentation de la température localement et peuvent mener à la dégradation des gaines de combustible.

Or, il peut être très coûteux ou compliqué d'étudier ces phénomènes expérimentalement. Une stratégie alternative est la résolution numérique. Celle-ci permet la simulation des réacteurs. Le service de "Thermohydraulique et de mécanique des fluides" (STMF) a pour objectif de développer des outils numériques pour la thermohydraulique.

1.2 Contexte numérique

1.2.1 Équations de Navier-Stokes

Le code [TrioCFD](https://trio CFD)³ [5, 6, 7, 8] est un logiciel de mécanique des fluides numérique (CFD)⁴ développé au STMF. Il est open source, orienté objet et massivement parallèle. Il est dédié à la simulation numérique des écoulements turbulents pour des applications scientifiques et industrielles, notamment dans le domaine de l'énergie nucléaire.

La mécanique des fluides numérique consiste à résoudre numériquement, à l'aide d'un ou plusieurs processeurs, les équations de la mécanique des fluides (les équations de Navier-Stokes). Pour cela, il est nécessaire de définir un domaine d'étude :

3. <https://trio CFD>

4. Computational Fluid Dynamics

Définition 1. Soit Ω , le domaine d'étude, ouvert, connexe et borné de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 , avec une frontière $\partial\Omega$ polygonale ($d = 2$) ou polyédrique ($d = 3$) et lipschitzienne.

Une définition plus complète de Ω peut être trouvée dans [9, Définition III.1.1]. On suppose que les propriétés physiques du domaine Ω sont constantes. On considère dans ce qui suit un fluide incompressible, c'est-à-dire dont la masse volumique ρ est constante dans le domaine Ω et au cours du temps. Soient \mathbf{u} le champ vectoriel représentant la vitesse du fluide, et p le champ scalaire représentant la pression du fluide divisée par sa masse volumique. Soit $T > 0$ le temps final de simulation. Le code TrioCFD résout les équations de Navier-Stokes incompressibles qui s'écrivent :

Trouver $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t))$ tel que $\forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T)$,

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u} + \mathbf{grad} p = \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Le paramètre constant $\nu > 0$ est la viscosité cinématique du fluide qui est de l'ordre de $10^{-5} m^2 \cdot s^{-1}$ dans nos applications. La donnée \mathbf{f} est le champ vectoriel représentant les forces volumiques divisées par la masse volumique. Par exemple, on peut poser $\mathbf{f} = \mathbf{g}/\rho$ où \mathbf{g} est le vecteur force de gravitation.

La première équation correspond à l'équation du bilan de quantité de mouvement et la seconde équation correspond à l'équation de conservation de la masse. Ces équations sont complétées par des conditions initiales et des conditions aux limites. Si aucune condition aux limites n'est donnée pour la pression, on impose alors une condition de normalisation :

$$\int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} = 0.$$

L'obtention de ces équations sera développée dans le Chapitre 2.

On remarque que ces équations conduisent à un problème tridimensionnel, mixte, instationnaire, et non linéaire, et donc particulièrement difficile à résoudre. Le terme non linéaire $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u}$ est appelé terme de convection. Le terme $\nu \Delta \mathbf{u}$ est appelé le terme de diffusion.

Lorsque le terme de convection devient négligeable par rapport au terme de diffusion, le régime de la solution devient stationnaire⁵. Les équations (1.5) s'écrivent alors sous la forme des équations de Stokes :

$$\text{Trouver } (\mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})) \text{ tel que } \forall \mathbf{x} \in \Omega : \begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{grad} p = \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Ces équations sont complétées avec des conditions aux limites adéquates. On verra dans le chapitre 2 que ce problème est bien posé pour $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{(0)}^1(\Omega)$ et $p \in L_{(0)}^2(\Omega)$ (selon les conditions aux limites). Ces espaces sont définis en Section 2.1.3, p. 23.

Ainsi, lorsque les équations de Stokes et a fortiori les équations de Navier-Stokes sont résolues dans le cas incompressible, l'un des principaux problèmes est la discrétisation du champ des vitesses à divergence nulle, en particulier lorsque ν est faible :

$$\mathbf{H}^1(\Omega) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div} 0; \Omega) := \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) / \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \}.$$

5. Il est aussi possible de considérer les équations de Stokes en instationnaire lorsqu'on regarde le comportement des solutions en temps long, ce qui est le cas pour les problèmes en milieu poreux. [10]

Définition 2. On appelle "pressure robust" [11] les discrétisations telles que l'erreur d'approximation de la vitesse est indépendante de l'erreur d'approximation de la pression (et par conséquent du paramètre ν). On traduira ce terme par "robuste par rapport à la pression".

1.2.2 Généralités sur les discrétisations spatiales et temporelles

La discrétisation spatiale du problème (1.2) s'écrit :

$$\begin{cases} \nu KU + GP = F \\ DU = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \nu K & G \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

où $U \in \mathbb{R}^{N_u}$ et $P \in \mathbb{R}^{N_p}$ contiennent respectivement les inconnues de vitesse et de pression avec N_u, N_p qui désignent les nombres d'inconnues en vitesse et en pression. Le vecteur $F \in \mathbb{R}^{N_u}$ est associé à la discrétisation du terme source. La matrice $K \in \mathbb{R}^{N_u} \times \mathbb{R}^{N_u}$ est la matrice de rigidité (ou raideur). La matrice $D \in \mathbb{R}^{N_p} \times \mathbb{R}^{N_u}$ est associée à la discrétisation de l'opérateur de divergence et la matrice $G \in \mathbb{R}^{N_u} \times \mathbb{R}^{N_p}$ est associée à la discrétisation de l'opérateur de gradient. Pour que la matrice du système (1.3) soit inversible, elle doit être de rang $N_u + N_p$. Or le rang maximal des matrices D et G est égal à $\min(N_u, N_p)$. Une condition nécessaire pour que la matrice du système (1.3) soit inversible est que :

$$N_u \geq N_p, \quad (1.4)$$

et que le rang des matrices G et D est maximal, c'est-à-dire égal à N_p . Si ce critère n'est pas respecté, le système linéaire global (1.3) n'est pas inversible car la matrice $\begin{pmatrix} \nu K & G \\ D & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas de rang maximal.

Nous allons maintenant donner quelques détails sur le schéma numérique de la discrétisation du problème (1.1). On présente le système algébrique représentant les équations de Navier-Stokes (2.32) semi-discrétisé en espace :

$$\begin{cases} M \partial_t U + \nu KU + L(U)U + GP = F \\ DU = 0 \end{cases}, \quad (1.5)$$

La matrice $M \in \mathbb{R}^{N_u} \times \mathbb{R}^{N_u}$ est la matrice de masse pour la discrétisation de la vitesse, la matrice $L(U) \in \mathbb{R}^{N_u} \times \mathbb{R}^{N_u}$ est associée à la discrétisation du terme de convection et $\partial_t U$ est la dérivée par rapport au temps de U .

Soit T le temps final de discrétisation et δt le pas de temps. On note $N_t = T/\delta t$ le nombre de pas de temps. On note $U^{n+1} \simeq U(t^{n+1})$, $P^{n+1} \simeq P(t^{n+1})$ et $F^{n+1} = F(t^{n+1})$. Considérons la discrétisation implicite en temps du problème (1.5). Il s'agit de trouver $\forall n \in \{1, \dots, N_t\}$, (U^{n+1}, P^{n+1}) tel que :

$$\begin{cases} M \frac{U^{n+1} - U^n}{\delta t} + \nu KU^{n+1} + GP^{n+1} = F^{n+1} - L(U^n)U^n \\ DU^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

avec U^0 donné et $n \in \{1, \dots, N_t\}$, $N_t \in \mathbb{N}^*$. Ce système se met sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \delta t^{-1}M + \nu K & G \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{n+1} \\ P^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ où } \tilde{F}^{n+1} := \delta t^{-1}MU^n + F^{n+1} - L(U^n)U^n. \quad (1.7)$$

Ensuite nous présentons le schéma de discrétisation en temps qui est un schéma de projection défini dans les articles de Chorin [12] et Teman [13]. Il est implémenté dans le code TrioCFD. Le principe est de calculer une prédiction de la vitesse en ignorant les effets de la pression. Il est composé de 3 étapes :

1) Étape de prédiction de la vitesse :

$$M \frac{U^* - U^n}{\delta t} + \nu KU^* + GP^n = \tilde{F}^{n+1} \quad (\text{a priori } DU^* \neq 0). \quad (1.8)$$

2) Étape de résolution de la pression :

$$\delta t(D\tilde{M}^{-1}G)\delta P = DU^* \quad \text{avec } \delta P = P^{n+1} - P^n \text{ et } \tilde{M} = M + \delta t \nu K \quad (1.9)$$

3) Étape de correction de la vitesse :

$$U^{n+1} = U^* - \delta t \tilde{M}^{-1}G\delta P \quad (1.10)$$

Pour notre choix de discrétisation, les matrices K et M sont des matrices symétriques définies positives et donc, par définition de $\tilde{M} \in \mathbb{R}^{N_u} \times \mathbb{R}^{N_p}$ (1.9), la matrice \tilde{M} est également une matrice symétrique définie positive. De plus, la matrice de masse M est diagonale (en $2D$) ou diagonalisable avec une approximation appelée condensation de masse [14, Remarque 66.5].

Si les opérateurs de gradient et de divergence sont transposés l'un de l'autre et que le problème est bien posé, alors la matrice $(D\tilde{M}^{-1}G) = (D\tilde{M}^{-1}D^T) \in \mathbb{R}^{N_p} \times \mathbb{R}^{N_p}$ est symétrique définie positive. Le système peut alors être résolu avec l'algorithme (itératif) du gradient conjugué [15, p.334]. Un bon choix pour la matrice de préconditionnement est l'inverse de la matrice de masse de la pression $M_p \in \mathbb{R}^{N_p} \times \mathbb{R}^{N_p}$ (Cette remarque est justifiée dans l'annexe C).

Dans notre étude, la matrice M est symétrique définie positive. De plus, elle est diagonale où diagonalisable c'est-à-dire qu'il existe une matrice unitaire $P \in \mathbb{R}^{N_u} \times \mathbb{R}^{N_u}$ telle que :

$$M = P^T D_M P,$$

où D_M est une matrice diagonale. En particulier, on peut définir :

$$M^{1/2} := P^T D_M^{1/2} P,$$

où $D_M^{1/2}$ est la matrice définie comme une matrice diagonale dont chaque élément est la racine carrée du terme correspondant de la matrice diagonale D_M . On peut alors écrire la factorisation suivante :

$$\tilde{M} = M^{1/2}(I + \delta t \nu M^{-1/2} K M^{-1/2})M^{1/2}.$$

On notera $\tilde{K} := M^{-1/2} K M^{-1/2}$. On a donc :

$$\tilde{M} = M^{1/2}(I + \delta t \nu \tilde{K})M^{1/2} \quad \text{et} \quad \tilde{M}^{-1} = M^{-1/2}(I + \delta t \nu \tilde{K})^{-1}M^{-1/2}.$$

On donne le développement de Taylor de la matrice $(I + \delta t \nu \tilde{K})^{-1}$:

$$(I + \delta t \nu \tilde{K})^{-1} = I + \sum_{l=1}^n (-1)^l (\delta t \nu)^l \tilde{K}^l + \mathcal{O}(\tilde{K}^n),$$

et donc :

$$\tilde{M}^{-1} = M^{-1/2} \left(I + \sum_{l=1}^n (-1)^l (\delta t \nu)^l \tilde{K}^l + \mathcal{O}(\tilde{K}^n) \right) M^{-1/2},$$

$$\tilde{M}^{-1} = M^{-1} + \sum_{l=1}^n (-1)^l (\delta t \nu)^l M^{-1/2} \tilde{K}^l M^{-1/2} + \mathcal{O}(M^{-1/2} \tilde{K}^n M^{-1/2}).$$

Posons $\widehat{M}^{K,l} = (-1)^l (\delta t \nu)^l M^{-1/2} \tilde{K}^l M^{-1/2}$, de tel sorte que :

$$\tilde{M}^{-1} = M^{-1} + \sum_{l=1}^n \widehat{M}^{K,l} + \mathcal{O}(M^{-1/2} \tilde{K}^n M^{-1/2}). \quad (1.11)$$

Les coefficients des matrices

$$M = (M_{i,j})_{i,j=1}^{N_U}, \quad K = (K_{i,j})_{i,j=1}^{N_U},$$

et

$$\tilde{K} = (\tilde{K}_{i,j})_{i,j=1}^{N_U}, \quad \widehat{M}^{K,l} = (\widehat{M}_{i,j}^{K,l})_{i,j=1}^{N_U},$$

sont tels que pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, N_U\}^2$:

- $M_{i,j}^{-1/2} = \mathcal{O}(h^{-d/2})$
- $K_{i,j} = \mathcal{O}(h^{d-2})$
- $\tilde{K}_{i,j} = \mathcal{O}(h^{-2})$
- $\tilde{K}_{i,j}^l = \mathcal{O}(h^{-2l})$
- $\widehat{M}_{i,j}^{K,l} = \mathcal{O}(\delta t \nu h^{-2l-d})$
- $M_{i,j}^{-1} = \mathcal{O}(h^{-d})$

Faisons l'hypothèse suivante :

$$\nu \delta t h^{-2} = \mathcal{O}(1) \Leftrightarrow \delta t \ll \frac{h^2}{\nu}. \quad (1.12)$$

Cette hypothèse est équivalente à une condition sur le nombre de Fourier [16]

$$F := \nu \delta t / h^2. \quad (1.13)$$

Elle est à mettre en parallèle avec la condition de CFL [17] qui est déjà imposée, si le schéma de temps est explicite [18, p. 84] pour garantir la stabilité du système et s'écrit :

$$C = V \delta t / h, \quad (1.14)$$

avec $V = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (\|\mathbf{u}_h(\mathbf{x})\|)$. Ces deux inégalités imposent une condition sur le pas de temps. Si $F \leq C$, l'hypothèse (1.12) est automatiquement vérifiée lorsque la condition de CFL est vérifiée, sinon il est nécessaire de diminuer le pas de temps δt . Il y a alors un choix à faire entre la qualité d'approximation et le coût de calcul.

Si le schéma est implicite ou semi-implicite et que la convection est explicite, il existe une autre condition de Fourier [19, Lemma 3.2]. Dans ce cas, il faudra aussi comparer les deux conditions pour pouvoir déterminer le pas de temps.

Si l'hypothèse (1.12) est vérifiée, alors :

$$\max_{i,j=1,\dots,N_u} \widehat{M}_{i,j}^{K,l} \ll \max_{i,j=1,\dots,N_u} M_{i,j}^{-1},$$

Ce qui justifie l'approximation suivante de l'équation (1.11) :

$$\widetilde{M}^{-1} = M^{-1}. \quad (1.15)$$

On peut calculer explicitement la matrice $(DM^{-1}D^T)$. Le système (1.9), avec \widetilde{M} remplacée par M peut alors également être résolu avec un algorithme (direct) de Cholesky.

L'approximation (1.15) peut être améliorée si on augmente l'ordre de l'approximation de Taylor (ie. on tronque la série de Taylor (1.11) à un ordre plus élevé), néanmoins, l'hypothèse d'approximation (1.12) reste la même. Ce que l'on peut néanmoins observer est que si $\nu\delta t = h^3$, alors $\widehat{M}_{i,j}^{K,l} = \mathcal{O}(h^{l-d})$. Les termes de la matrice $M^{K,l}$ ont un ordre qui diminue avec l ce qui peut donner un ordre de précision de l'approximation faite. Par ailleurs, plus $\nu\delta t$ est petit par rapport à h et moins l'augmentation de l'ordre de l'approximation apportera en précision. Une possibilité pour avoir une approximation plus précise sera de choisir :

$$\widetilde{M}^{-1} = M^{-1} + \delta t \nu M^{-1/2} \widetilde{K} M^{-1/2}.$$

1.2.3 Couples éléments finis mixtes vitesse-pressure stables

Revenons au problème (1.3), p. 13. Dans notre travail, nous nous intéressons aux discrétisations d'ordre 1 pour la vitesse. Nous énumérons ici une liste non-exhaustive de discrétisations :

- L'élément fini mixte $\mathbf{P}^1 - P_{disc}^0$ [20, p.80]⁶ qui semble être une discrétisation a priori très naturelle pour avoir une approximation affine par morceaux pour la vitesse n'est pas stable pour les équations de Stokes (1.2) [21, p. 348]. Considérons le problème (1.3). La dimension de l'espace \mathbf{P}^1 est égale à d fois le nombre de sommets du maillage noté N_S , et la dimension de l'espace P_{disc}^0 est égale au nombre de triangles, noté N_T . On a donc : $N_u = dN_S$ et $N_p = N_T$. On rappelle qu'une condition d'inversibilité de la matrice du système est donnée par l'équation (1.4). Considérons le cas $d = 2$, d'après les relations d'Euler (voir lemme 9), on a :

$$N_T = 2N_S^i + N_S^b - 2,$$

avec N_S^i les sommets intérieurs et N_S^b les sommets sur le bord. En général, $N_S^b \geq 3$ et on a $N_T - 1 \geq 2N_S^i$, donc le critère (1.4) n'est pas respecté.

- Une solution, présentée dans les travaux de Barrenechea [22, 23], est de stabiliser la discrétisation $\mathbf{P}^1 - P_{disc}^0$ pour obtenir une approximation affine par morceaux stable des équations de Stokes (1.2). Le problème s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \nu K & B^T \\ B & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ F_{sh} \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

où $S \in \mathbb{R}^{N_p} \times \mathbb{R}^{N_p}$ est une matrice inversible et F_{sh} un second membre relié à la matrice S et à déterminer.

Il existe plusieurs matrices de stabilisations S construites à partir des formes bilinéaires suivantes. On utilise les notations définies en section 3.2.1, p. 37. La vitesse discrète est donnée par \mathbf{u}_h et la pression discrète par p_h . La fonction q_h est une fonction test discrète dans le même espace que q_h . On présente ci-dessous quelques stabilisations possibles de l'élément $\mathbf{P}^1 - P_{disc}^0$:

6. tel que $\mathbf{u}_h \in \mathbf{P}^1$ défini par (3.16), p. 41 et $p_h \in P_{disc}^0$ défini par (3.17), p. 41

- a) Stabilisation de moindre carrée issue des méthodes de Galerkin discontinues [24] :

$$S(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{f}; q_h) = - \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \frac{h_{T_\ell}^2}{\nu} (\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}_h - \mathbf{grad} p_h, \mathbf{grad} q_h)_{\mathbf{L}^2(T_\ell)} + \sum_{f \in \mathcal{I}_F} \frac{|f|}{\nu} ([p_h], [q_h])_{L^2(|F_f|)},$$

avec $[p_h]$ et $[q_h]$ les sauts de pression discrète et de pression définis par l'équation (3.18).

- b) Stabilisation des sauts de pression [25] :

$$S(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{f}; q_h) = \sum_{f \in \mathcal{I}_F} \int_{F_f} h_\mu [p_h] [q_h] d\sigma,$$

où h_μ est un paramètre à fixer.

- c) Stabilisation de Brezzi - Pitkäranta [26] :

$$S(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{f}; q_h) = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \frac{h_{T_\ell}}{\nu} (\mathbf{grad} p_h, \mathbf{grad} q_h)_{\mathbf{L}^2(T_\ell)}.$$

- d) Stabilisation polynomiale de la pression [27] :

$$S(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{f}; q_h) = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \frac{1}{\nu} ((I - \psi)p_h, (I - \psi)q_h)_{L^2(T_\ell)},$$

avec ψ un interpolateur décrit dans [22, Section 6].

- e) Stabilisation par pénalisation de la pression [28] :

$$S(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{f}; q_h) = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} (p_h, q_h)_{L^2(T_\ell)}.$$

On peut voir que ces méthodes sont nombreuses. Néanmoins, elles ajoutent des erreurs de consistance et un paramètre de stabilisation à déterminer. Une manière de choisir le paramètre de stabilisation est décrite dans [22].

Une méthode pour stabiliser l'espace $\mathbf{P}^1 - P_{disc}^0$ est d'enrichir l'espace d'approximation des vitesses \mathbf{P}^1 . Ces schémas sont de bonnes alternatives au $\mathbf{P}^1 - P_{disc}^0$. On présente ci-dessous certains de ces schémas :

- a) Le schéma $(\mathbf{P}^1 + \mathbf{P}_{Be}) - P_{disc}^0$ est aussi appelé mini-élément [29]⁷. Ce schéma consiste à enrichir l'espace des vitesses en ajoutant des degrés de liberté en vitesse associés à des fonctions de base dites "bulles" correspondant au produit des coordonnées barycentriques de l'élément (3.4).
- b) Une méthode similaire est le schéma de Bernardi-Raugel [30] noté $\mathbf{P}^1 + \mathbf{P}_{Bf}$ où l'espace de la vitesse est enrichi avec des fonctions bulles définies sur les faces des simplexes. Ces degrés correspondent aux produits des coordonnées barycentriques des faces (3.4). Une version similaire avec une méthode de condensation statique peut être retrouvée dans [31]
- c) Le schéma $(\mathbf{P}^1 + \mathbf{P}_{disc}^0) - P_{disc}^0$ [32] où l'approximation de la vitesse est enrichie avec des fonctions constantes par morceaux.

7. tel que $\mathbf{u}_h \in (\mathbf{P}^1 + \mathbf{P}_B)$ défini par (3.6) et $p_h \in P_{disc}^0$ défini par (3.17)

- Une méthode classique de discrétisation du problème (1.2), sur un maillage de simplexes, est le schéma des éléments finis mixtes de Crouzeix-Raviart non-conformes d'ordre 1. C'est-à-dire que la vitesse discrète n'est pas dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Ce schéma est présenté pour les équations de Stokes dans [33, Example 4]. On le note dans ce manuscrit $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$. La vitesse discrète \mathbf{u}_h appartient à l'espace des vecteurs de composantes P^1 non-conformes noté \mathbf{P}_{nc}^1 (défini par (3.15), p. 41). Le champ de pression discrète est dans l'espace des fonctions constantes par morceaux ($p_h \in P_{disc}^0$ défini par (3.17), p. 41). Cette méthode permet une résolution sur maillage non-structuré, avec une approximation affine par morceaux. Rappelons que le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ permet, d'avoir une matrice de masse M diagonale en 2D et diagonalisable en 3D, ce qui est important en pratique pour une discrétisation en temps efficace du problème (1.5). En effet, pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$, la matrice de divergence D est la transposée de la matrice du gradient G . L'étape de résolution de la pression (1.9) dans le schéma de projection est donc fait de manière explicite. Nous montrerons ces propriétés dans le Chapitre 3, p. 36. Néanmoins, comme la composante normale de la vitesse discrète n'est pas continue aux interfaces des éléments, la vitesse discrète n'est pas dans $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$, ce qui peut causer des problèmes de précision numérique lorsqu'on résout les équations de Navier-Stokes. Ces problèmes sont dus à l'apparition de vitesses parasites définies en section 3.4.4, p. 61, dont l'amplitude est d'autant plus grande que la viscosité est faible.

1.3 Objectifs de la thèse

Pour répondre à ce problème, un schéma a été élaboré au CEA et implémenté dans le code TrioCFD. Le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ ⁸ est une modification du schéma de Crouzeix-Raviart avec lequel on utilise plus de degrés de liberté en pression. Ce schéma améliore l'approximation des vitesses à divergence nulle, mais pour obtenir des résultats optimaux en 3D, il est nécessaire d'ajouter à nouveau des degrés de liberté en pression ce qui rend le système linéaire plus complexe à résoudre.

Un autre schéma, initialement développé pour les équations de Stokes, consiste à réaliser une reconstruction discrète de la vitesse dans l'espace $\mathbf{H}(\text{div } 0; \Omega)$ [34]. Il s'agit d'utiliser une projection de la fonction test du second membre sur un élément conforme dans $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$. Néanmoins, elle est complexe à mettre en œuvre pour les équations de Navier-Stokes car elle nécessite de modifier la matrice de masse M de la vitesse ainsi que la matrice de convection $L(U^n)$.

Enfin, une dernière méthode consiste à construire une approximation dans $\mathbf{H}(\text{div } 0; \Omega)$ en effectuant un traitement sur le maillage basé sur une technique de graphe qui consiste à supprimer certains degrés de liberté en vitesse [35].

Les études précédentes ont permis de proposer des solutions approchant mieux le champ des vitesses à divergence nulle, mais ces schémas complexifient la résolution algébrique du problème. Dans les applications industrielles, il faut toujours trouver un compromis entre le coût de calcul et la précision de la simulation.

Ces problématiques justifient le travail de cette thèse, dont l'objectif sera le suivant :

8. tel que $\mathbf{u}_h \in \mathbf{P}^1$ défini par (3.15) et $p_h \in P_{disc}^0 + P^1$ l'espace des pressions discrètes défini par (3.109)

Objectif :

Élaborer un nouveau schéma numérique pour les équations de Navier-Stokes en 3D, qui présentera une précision comparable à celle du schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$. Ce schéma sera construit en utilisant l'élément fini mixte $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$, avec un schéma MPFA pour la discrétisation du gradient de pression. Il n'introduira pas de degrés de liberté supplémentaires et ne modifiera pas les matrices de masse M ou de convection $L(U^n)$

Cette thèse est une étude approfondie d'un schéma utilisé dans le code TrioCFD dont le but est d'améliorer l'efficacité en termes de coût de calcul et de robustesse par rapport au schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0 + P^1$. Elle s'organise en 5 chapitres dont les objectifs sont les suivants :

1. Le chapitre 2 est une introduction qui présente d'abord les notions mathématiques utilisées dans le rapport puis qui énonce le contexte physique de cette thèse.
2. Le chapitre 3 présente les différentes discrétisations sur lesquelles s'appuie cette thèse. Il aborde la problématique, les enjeux et les alternatives existantes ainsi que leurs limites.
3. L'objectif du chapitre 4 est d'élaborer un schéma permettant de résoudre les équations de Stokes (1.2), p. 12. Ce schéma vise à générer une meilleure approximation des vitesses à divergence nulle, sans rajouter de degrés de liberté et sans modifier la matrice de masse ou le terme de convection. Ce schéma a ensuite été comparé avec les schémas de discrétisation proposés par les thèses de [5, 6] et l'article de [34].

Pour cela, la première étape est de définir une nouvelle discrétisation du gradient de pression dans les équations de Stokes. On utilise la discrétisation MPFA symétrique [36, 37]. En 2D (resp. 3D), la définition du gradient de pression ainsi construit est unique pour les degrés de liberté associés à un triangle (resp. tétraèdre) qui ne sont pas en contact avec le bord $\partial\Omega$. Ce n'est plus le cas pour les degrés de liberté associés à un triangle (resp. tétraèdre) en contact avec le bord $\partial\Omega$. On aura alors besoin d'ajouter des conditions de bords sur la pression ou d'introduire des degrés de liberté sur le bord ainsi que de nouvelles équations que nous détaillerons dans la section 4.3. Ensuite, la section 4.4 présentera des travaux ayant pour objectif de montrer la bonne définition du schéma. D'abord nous expliquerons pourquoi il est difficile de démontrer la convergence du schéma avec l'analyse de la condition inf-sup (définie par (3.87), p. 59), et nous proposerons alors une étude alternative, appelée "inf-sup test" qui consiste à montrer numériquement, pour des maillages donnés, la stabilité du schéma.

Enfin, dans la section 4.5, on étudiera la robustesse du schéma par rapport à la viscosité ainsi que la précision du schéma de pression. Nous comparons les résultats avec les alternatives existantes. Pour cela, nous avons étudié l'erreur d'approximation des schémas présentés pour les équations de Stokes avec différentes solutions analytiques permettant d'illustrer les critères étudiés.

4. L'objectif du chapitre 5 est d'étendre ce schéma aux équations de Navier-Stokes en 3D afin d'établir un schéma avec une pression P_{disc}^0 qui sera plus précis que le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ pour des applications où la viscosité est faible. Ce schéma est ensuite testé numériquement et comparé aux schémas de discrétisations abordés.

Pour cela, on définira un algorithme de résolution, une discrétisation en temps et un schéma de convection représenté par la matrice $L(U)$ dans (1.5). Ceux-ci sont indépendants du schéma du gradient de pression. Enfin, on illustrera les propriétés et les limites du schéma en effectuant plusieurs cas tests connus qui nous permettront de montrer que l'erreur d'approximation du schéma est bien moins sensible à la viscosité

ν , que l'approximation du gradient de pression est plus précise et le tout en ayant un coût de calcul comparable aux autres schémas de discrétisations présentées.

5. L'objectif du chapitre 6 est de proposer une amélioration du schéma de Crouzeix-Raviart permettant une résolution plus rapide en parallèle.

Pour cela, nous aborderons, dans la section 6.1, une nouvelle technique d'hybridation qui correspond à une méthode de décomposition de domaine cellule par cellule permettant une parallélisation massive. Nous illustrerons, dans la section 6.3 le gain de performance de ces nouvelles approches par rapport au schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$.

6. Enfin, nous concluons sur le travail effectué lors de cette thèse et présenterons les nouvelles perspectives qu'il a engendré.

Chapitre 2

Modélisation

Sommaire

2.1	Notations	21
2.1.1	Notations relatives au domaine d'étude	21
2.1.2	Opérateurs	22
2.1.3	Espaces des champs de pression et de vitesse	23
2.2	Modélisation physique et mathématique	25
2.2.1	Écriture des équations de conservation	28
2.2.2	Équations de Navier-Stokes	31
2.2.3	Equations et formulation faible du problème de Stokes	32

Dans ce chapitre, nous présenterons toutes les notions, définitions, propriétés et travaux précédant cette thèse. Nous commencerons dans un premier temps par les notations utilisées dans ce chapitre. Ensuite, nous présenterons la modélisation physique des problèmes étudiés. Cela nous permettra de définir ensuite les schémas implémentés dans le code TrioCFD. Nous introduirons alors le problème de la contrainte d'incompressibilité pour les éléments finis mixtes. Enfin, nous présenterons les travaux sur lesquels s'appuient cette thèse.

2.1 Notations

Dans cette section, nous présenterons les définitions, théorèmes et propriétés que nous utiliserons au cours de ce chapitre.

2.1.1 Notations relatives au domaine d'étude

On considère le domaine d'étude $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (définition 1, p. 12). On utilisera les notations suivantes :

- $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (resp. $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$) la base orthonormale canonique de \mathbb{R}^2 (resp. \mathbb{R}^3).
- $(x_1, x_2) = (x, y)$ (resp. $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$) les coordonnées d'un point de \mathbb{R}^2 (resp. \mathbb{R}^3).
- $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ (resp. $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$) les composantes d'un champ de vecteur en $2D$ (resp. $3D$).
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^d v_i w_i \in \mathbb{R}$ le produit scalaire entre \mathbf{v}, \mathbf{w} .
- $\mathbf{n}_{|\partial\Omega}$ le vecteur unitaire sortant à $\partial\Omega$.
- $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{|\partial\Omega}$ la composante normale sortante à $\partial\Omega$.

2.1.2 Opérateurs

On dénote :

— t : la variable temporelle.

— $\partial_t(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$ la dérivée partielle par rapport au temps.

— $\partial_i(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i}$ la dérivée partielle par rapport à la direction \mathbf{e}_i , $i = 1, \dots, d$.

— $\partial_i^2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial^2 x_i}$ la dérivée partielle seconde par rapport à la direction \mathbf{e}_i , $i = 1, \dots, d$.

— $\partial_{i,j}^2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_i \partial x_j}$ la dérivée partielle seconde par rapport à la direction \mathbf{e}_i et \mathbf{e}_j , $(j, i) \in \{1, \dots, d\}^2$.

— $\mathbf{grad} v = (\partial_1 v, \partial_2 v)^T$ pour $d = 2$ et $\mathbf{grad} v = (\partial_1 v, \partial_2 v, \partial_3 v)^T$ pour $d = 3$, le gradient de v .

— $\partial_n v|_{\partial\Omega} = \mathbf{grad} v \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}$: la dérivée normale de \mathbf{v} sur $\partial\Omega$.

— $\mathbf{rot} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}$ le rotationnel de \mathbf{v} pour $d = 3$.

— $\Delta v = \sum_{i=1}^d \partial_i^2 v$ le laplacien de v .

— $\Delta \mathbf{v} = \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \partial_i^2 v_j \mathbf{e}_j$ le laplacien de \mathbf{v} .

— $\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^d \partial_i v_i$ la divergence de \mathbf{v} .

— On donne la relation suivante :

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{grad} \operatorname{div}(\mathbf{v}) - \mathbf{rot} \operatorname{rot}(\mathbf{v}).$$

— Soit T un tenseur¹ de dimension $d \times d$, on notera

$$\mathbf{Div}(T) := \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \partial_j T_{i,j} \mathbf{e}_i.$$

En 2D, cela s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} \\ T_{2,1} & T_{2,2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{Div}(T) = \begin{pmatrix} \partial_1 T_{1,1} + \partial_2 T_{1,2} \\ \partial_1 T_{2,1} + \partial_2 T_{2,2} \end{pmatrix},$$

et en 3D :

$$T = \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & T_{1,3} \\ T_{2,1} & T_{2,2} & T_{2,3} \\ T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{Div}(T) = \begin{pmatrix} \partial_1 T_{1,1} + \partial_2 T_{1,2} + \partial_3 T_{1,3} \\ \partial_1 T_{2,1} + \partial_2 T_{2,2} + \partial_3 T_{2,3} \\ \partial_1 T_{3,1} + \partial_2 T_{3,2} + \partial_3 T_{3,3} \end{pmatrix}$$

— $\mathbf{Grad} \mathbf{v} = (\partial_j v_i)_{i,j=1}^d$ le gradient matriciel de \mathbf{v} :

$$\mathbf{Grad} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \partial_1 v_1 & \partial_2 v_1 \\ \partial_1 v_2 & \partial_2 v_2 \end{pmatrix} \text{ en 2D,} \quad \mathbf{Grad} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \partial_1 v_1 & \partial_2 v_1 & \partial_3 v_1 \\ \partial_1 v_2 & \partial_2 v_2 & \partial_3 v_2 \\ \partial_1 v_3 & \partial_2 v_3 & \partial_3 v_3 \end{pmatrix} \text{ en 3D}$$

1. Dans ce manuscrit, pour simplifier les notations, nous définissons les tenseurs d'ordre 2, de taille $d \times d$ comme des matrices de dimension $d \times d$

- Soient T, T' deux tenseurs de dimension $d \times d$. On dénotera le produit doublement contractant l'opérateur : qui à deux matrices associe le scalaire suivant :

$$T : T' := \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d T_{i,j} T'_{i,j}.$$

A l'instar de [9, Def A.2.3, p. 510], on choisit cette convention pour pouvoir définir un produit scalaire plutôt que la convention :

$$T : T' := \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d T_{i,j} T'_{j,i}.$$

En particulier, on a :

$$\mathbf{Grad} \mathbf{v} : \mathbf{Grad} \mathbf{w} := \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \partial_i v_j \partial_i w_j.$$

- $\partial_n \mathbf{v} := \mathbf{Grad} \mathbf{v} : \mathbf{n}|_{\partial\Omega}$ la dérivée normale de \mathbf{v} sur la frontière $\partial\Omega$.
- Soient $(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on définit le produit tensoriel de deux vecteur l'opération \otimes tel que $\mathbf{w} \otimes \mathbf{v}$ est un tenseur de dimension $d \times d$ et tel que

$$(\mathbf{w} \otimes \mathbf{v})_{i,j} = w_i v_j, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, d\}^2 \quad (2.1)$$

2.1.3 Espaces des champs de pression et de vitesse

Dans cette partie, nous présentons les différents espaces utilisés. De manière générale, les espaces vectoriels seront présentés en gras alors que les espaces scalaires sont en lettres capitales italiques. Si $A(\Omega)$ désigne un espace de scalaire, on dénotera $\mathbf{A}(\Omega) = (A(\Omega))^d$ l'espace vectoriel dont les composantes scalaires des vecteurs de $\mathbf{A}(\Omega)$ appartiennent à $A(\Omega)$. On notera aussi $d\mathbf{x} := dW$ la mesure d'un ouvert $W \subset \Omega$ et $d\sigma$ celle de sa frontière ∂W .

On introduit les espaces suivants :

- On note l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ des fonctions infiniment différentiable, à support compact dans Ω . On note $\mathbf{C}^\infty(\Omega) := (\mathcal{C}^\infty(\Omega))^d$
- On note $\bar{\Omega}$ l'adhérence de Ω . Alors $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ est l'espace des restrictions sur $\bar{\Omega}$ des fonctions infiniment différentiable, à support compact dans \mathbb{R}^d .
- $L^2(\Omega) = \left\{ v \text{ mesurable sur } \Omega : \int_{\Omega} v^2 d\mathbf{x} < \infty \right\}, \quad \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} v^2 d\mathbf{x},$
- $L^p(\Omega) = \left\{ v \text{ mesurable sur } \Omega : \int_{\Omega} v^p d\mathbf{x} < \infty \right\}, \quad \|v\|_{L^p(\Omega)}^p := \int_{\Omega} v^p d\mathbf{x},$
- $L^\infty(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable sur } \Omega : \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty \right\}, \quad \|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$
avec $\text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$ l'essentiel supérieur de $|f(x)|$ sur Ω .
- $\mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^d, \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 := \sum_{i=1}^d \|v_i\|_{L^2(\Omega)}^2,$
- $\mathbb{L}^2(\Omega) = [L^2(\Omega)]^{d \times d}, \quad \|T\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 := \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \|T_{i,j}\|_{L^2(\Omega)}^2,$
- $L_0^2(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} v d\mathbf{x} = 0 \right\},$
- $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \mathbf{grad} v \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}, \quad \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{grad} v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2,$
- $H^2(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); \mathbf{grad} v \in \mathbf{H}^1(\Omega)\}, \quad \|v\|_{H^2(\Omega)} := (\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{grad} v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2)^{1/2},$

- $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); v|_{\partial\Omega} = 0\}$, $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\mathbf{grad} v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$.
Grâce à l'inégalité de Poincaré-Steklov (2.2), dans $H_0^1(\Omega)$ la semi-norme est équivalente à la norme du graphe².
 - $\mathbf{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega)^d$, $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{Grad} \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2$,
 - $\mathbf{H}^2(\Omega) = H^2(\Omega)^d$, $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}^2 = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \|(\mathbf{Grad} \mathbf{v})_{i,j}\|_{H^1(\Omega)}^2$,
- et la semi-norme $|\mathbf{v}|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} = \left(\|\mathbf{grad} \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \sum_{\alpha=1}^d \|\partial_\alpha^2(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$,
- $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \text{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}$, $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)}^2 = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\text{div} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2$,
 - $\mathbf{H}(\text{div} 0, \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega); \text{div} \mathbf{v} = 0\}$,
- On remarque en particulier que $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div} 0, \Omega)$, $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)}^2 = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2$.
Pour $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in (\mathbf{H}^1(\Omega))^2$, on a :

$$(\mathbf{Grad} \mathbf{v}, \mathbf{Grad} \mathbf{w})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{v}, \mathbf{w})_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^d (v_i, w_i)_{H_0^1(\Omega)},$$

et

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = \|\mathbf{Grad} \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Soit une forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ définie sur $X \times Y$. Alors la norme de $a(\cdot, \cdot)$ est définie par :

$$\|a\| := \sup_{x \in X, y \in Y} \frac{|a(x, y)|}{\|x\|_X \|y\|_Y}$$

On rappelle l'inégalité de Poincaré-Steklov [38, Lemme 3.24] :

Théorème 1. Inégalité de Poincaré-Steklov³

Il existe une constante C_{PS} tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{PS} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (2.2)$$

Définition 3. Soit H , un espace de Hilbert, on désigne H' le dual de H , i.e. l'ensemble des formes linéaires sur H . On note le produit scalaire de dualité $\langle v', v_H \rangle$. La norme duale sur H' est définie par :

$$\|v'\|_{H'} = \sup_{v \in H} \langle v', v \rangle_H$$

On notera $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ le dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Espace des traces et théorème de la trace

Dans ce qui suit, on rappelle les espaces des traces et les théorèmes de la trace ([39, p. 9]).

- $L^2(\partial\Omega) = \left\{ v \text{ mesurable sur } \partial\Omega : \int_{\partial\Omega} v^2 d\sigma < \infty \right\}$, $\|v\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 = \int_{\partial\Omega} v^2 d\sigma$.
- $H^{1/2}(\partial\Omega) = \left\{ v \in L^2(\partial\Omega) : \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{(v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y}))^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^d} d\sigma(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{y}) < \infty \right\}$.
- $\mathbf{L}^2(\partial\Omega) := (L^2(\partial\Omega))^d$.
- $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega) := (H^{1/2}(\partial\Omega))^d$.

On écrit les théorèmes de trace [40, Théorème 1.2] et [20, Prop 2.24].

2. norme de $H^1(\Omega)$

3. aussi connue sous le nom "d'inégalité de Poincaré"

Théorème 2. (Premier théorème de trace)

L'opérateur $v \mapsto \gamma_0(v)$ défini par

$$\gamma_0 : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) & \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega) \\ v & \mapsto \gamma_0(v) = v_{\partial\Omega} \end{cases} \quad (2.3)$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée γ_0 , de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Théorème 3. (Second théorème de trace) On définit l'application trace normale :

$$\gamma_n : \begin{cases} \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega}) & \rightarrow \mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega) \\ \mathbf{v} & \mapsto \gamma_n(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{\partial\Omega} \end{cases} \quad (2.4)$$

où $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ est la normale sortante à $\partial\Omega$. L'application trace normale se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée γ_n ; de $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ dans $\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$.

Nous rappelons les formules d'intégrations par parties communément appelées "formules de Green" [39, Lemme 1.4, p.10] et [39, Corollaire 2.6, p.28].

Théorème 4. Formules de Green :

1) D'après le théorème 3, on a :

$$\forall (\mathbf{q}, v) \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega) \times H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{q})v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{grad} v \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}, v \rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega)}. \quad (2.5)$$

2) D'après [41], on a : $\Psi := \{z \in H^1(\Omega) \mid \Delta z \in L^2(\Omega)\} \subset H^{3/2}(\Omega)$, et on a les formules d'intégration par parties suivantes :

$$\forall (w, v) \in \Psi \times H^1(\Omega), \quad (\mathbf{grad} w, \mathbf{grad} v)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = - \int_{\Omega} \Delta w \cdot v \, d\mathbf{x} + \langle \partial_n w, v \rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega)}. \quad (2.6)$$

$$\forall (\mathbf{w}, \mathbf{v}) \in \Psi \times \mathbf{H}^1(\Omega) \quad (\mathbf{Grad} \mathbf{v}, \mathbf{Grad} \mathbf{w})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = - \int_{\Omega} \Delta \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \langle \partial_n \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)}. \quad (2.7)$$

avec $\Psi := (\Psi)^d$

2.2 Modélisation physique et mathématique

On considère un domaine Ω (voir la définition 1, p. 12). Dans cette section, nous nous appuyons sur l'ouvrage de Boyer et Fabrie [9].

Nous commençons notre introduction avec une hypothèse :

Hypothèse 1. Le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un milieu continu. C'est-à-dire qu'il peut être décrit par des grandeurs macroscopiques.

Définition 4. On dit que la description du milieu continu est valide, s'il existe une fonction positive $(t, \mathbf{X}) \mapsto \rho(t, \mathbf{X})$ tel que la masse M_t contenue dans tout volume de fluide Ω au temps t peut être écrite :

$$M_t = \int_{\Omega} \rho(t, \mathbf{X}) \, d\mathbf{X}$$

La fonction ρ est appelée le champ de masse volumique du fluide étudié

On considère un fluide incompressible [9, Définition I.6.1], c'est-à-dire que la masse volumique ρ est constante, et on note $\mathbf{u} = (u_i)_{1 \leq i \leq d}$ la vitesse du fluide et P sa pression. La viscosité dynamique du fluide est notée μ . La viscosité cinématique, définie par le rapport des deux, est donnée par $\nu = \mu/\rho$. On renvoie pour une description complète à [9, p.32] et [39, p.79]. Nous donnons ci-dessous, dans la figure 2.1, un tableau récapitulatif des variables utilisées pour définir les équations de Navier-Stokes.

Notation	Nom	Unité
\mathbf{u}	Vitesse	$m.s^{-1}$
P	Pression thermodynamique	bars ($kg.m^{-1}.s^{-2}$)
$p := P/\rho$	Pression cinématique	$m^2.s^{-2}$
ρ	Masse volumique	$kg.m^{-3}$
μ	Viscosité dynamique	Pl ($kg.m^{-1}.s^{-1}$)
ν	Viscosité cinématique	$m^2.s^{-1}$
\mathbf{f}	Source volumique	$kg.m^{-2}.s^{-2}$
Σ	Tenseur des contraintes	$kg.m^{-1}.s^{-2}$
D	Tenseur des taux de déformations	s^{-1}

TABLEAU 2.1 – Tableau des variables utilisées pour les équations de Navier-Stokes

Il y a deux manières canoniques pour décrire un fluide :

- Les coordonnées Eulériennes correspondent à des coordonnées vu d'un référentiel fixe associé à l'expérience.
- Les coordonnées Lagrangiennes sont attachées à une particule de fluide (ou un volume de fluide) et suivent son mouvement.

Pour illustrer cela, considérons un volume de fluide $\omega_0 \in \Omega$. On peut alors définir une famille d'applications bijectives telles que, pour tout t , $\omega_t := \varphi(t, \omega_0) := \varphi_t(\omega_0)$ contienne au temps t exactement les mêmes particules que celles qui étaient présentes dans ω_0 au temps initial noté t_0 .

Définition 5. On appelle *élément de fluide* la famille $(\omega_t)_t$ indexé par le temps t . Dans le cas où ω_0 est réduit à un singleton $\omega_0 = \{\mathbf{x}_0\}$, on appellera la famille une *particule de fluide*.

Par conséquence, si on prend $\omega_0 = \{\mathbf{x}_0\}$, alors φ_t décrit la position de la particule par rapport à un référentiel fixe, au temps t .

On peut alors définir :

$$\varphi_{t_0}(\omega_0) = \varphi(t_0, \omega_0) = \omega_0 = \{x_0\}, \quad (2.8)$$

et donc

$$\mathbf{X}(t, t_0, \mathbf{x}_0) := \varphi_t(\varphi_{t_0}^{-1}(\mathbf{x}_0)) \quad (2.9)$$

qui est la position au temps t de la particule de fluide qui avait comme position initiale \mathbf{x}_0 au temps t_0 . On appelle \mathbf{X} la trajectoire. Connaître \mathbf{X} à tout temps et pour tout \mathbf{x}_0 nous donne toutes les informations sur les particules de Ω , mais généralement, il est préférable de travailler avec des grandeurs macroscopiques. On définit le champ de vitesse du fluide :

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \left(\frac{\partial \mathbf{X}(s, t, \mathbf{x})}{\partial s} \right) \quad (2.10)$$

ce qui s'écrit de manière équivalente :

$$\mathbf{u}(t, \varphi_t(\mathbf{x}_0)) = \left(\frac{\partial \varphi_s(\mathbf{x}_0)}{\partial s} \right)_{|s=t} \quad (2.11)$$

Les coordonnées (t, \mathbf{X}) sont les coordonnées Eulériennes du système. Pour travailler en coordonnée Eulériennes, il faut fixer une position \mathbf{X} et écrire les équations de conservation sur ce point.

Considérons $f(t, \mathbf{X})$ une quantité relative au fluide (masse volumique, température ...) et calculons la dérivée temporelle de f associée à une particule de fluide :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(t, \mathbf{X}(t, t_0, \mathbf{x}_0))) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, \mathbf{X}(t, t_0, x_0)) + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(t, t_0, x_0) \cdot \mathbf{grad} f(t, \mathbf{X}(t, t_0, x_0)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, \mathbf{X}(t, t_0, x_0)) + \mathbf{u}(t, \mathbf{X}(t, t_0, x_0)) \cdot \mathbf{grad} f(t, \mathbf{X}(t, t_0, x_0)). \end{aligned} \quad (2.12)$$

La dérivée Eulérienne est donc définie par la relation suivante :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} f. \quad (2.13)$$

Nous rappelons le théorème suivant :

Théorème 5. (Formule de Stokes)

Si Ω est tel que décrit par la définition 1. Pour tout $\boldsymbol{\psi} \in (\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d))$ une fonction \mathcal{C}^1 à support compact, alors on a :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\psi}) \cdot \mathbf{n}_{|\partial\Omega} \, d\sigma \quad (2.14)$$

où $\mathbf{n}_{|\partial\Omega}$ est la normale sortante à $\partial\Omega$.

Démonstration. Ce théorème est une conséquence de la formule de Green (2.5). Il suffit d'appliquer la formule de Green avec $\mathbf{q} = \boldsymbol{\psi}$ et $v = 1$. \square

En suivant la démarche de [9], nous supposons que $\boldsymbol{\varphi}$ est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 (c'est-à-dire une fonction continue et dont les dérivées partielles sont aussi continues).

Nous rappelons le théorème suivant [9, Théorème I.2.1] :

Théorème 6. (Le théorème du transport)

Pour tout f fonction de classe \mathcal{C}^1 par rapport aux variables $(t, \mathbf{X}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, on a :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} f(t, \mathbf{X}) \, d\mathbf{X} = \int_{\omega_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f\mathbf{u}) \right) d\mathbf{X}$$

Pour tout t , où \mathbf{u} est un champ de vecteur dans \mathbb{R}^3 défini par (2.10)

Remarque 1. Nous ne donnons pas la preuve de ce théorème, néanmoins, il nous semble qu'il est nécessaire d'expliquer l'origine de cette égalité. Considérons le changement de variable $\mathbf{X} = \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x})$ auquel on associe le jacobien B_J (tel que $B_J(t, \mathbf{x}) := \mathbf{Grad}(\boldsymbol{\varphi})(t, \mathbf{x})$) et son déterminant $J := \det(B_J)$. On admet que $|J| = |\det(B_J)|$ est différentiable, que J n'est jamais nul comme cela est démontré dans [9] et que :

$$\frac{\partial |J|}{\partial t} = \operatorname{sgn}(J) \frac{\partial J}{\partial t} = \operatorname{sgn}(J) (\operatorname{div}(\mathbf{u}))(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x})) J = \operatorname{div}(\mathbf{u})(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x})) |J|$$

Avec un changement de variable $\mathbf{X} = \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x})$, et en appliquant la théorie de dérivation sous l'intégrale, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega_t} f(t, \mathbf{X}) \, d\mathbf{X} &= \frac{d}{dt} \int_{\omega_0} f(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x})) |J(t, \mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} (f(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x})) |J(t, \mathbf{x})|) \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(f(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}))|J(t, \mathbf{x})|) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, \boldsymbol{\varphi})|J| + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\right) \cdot \mathbf{grad}(f)|J| + f(t, \boldsymbol{\varphi})\frac{\partial}{\partial t}|J| \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \boldsymbol{\varphi}) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}(f) + f(t, \boldsymbol{\varphi})(\operatorname{div} \mathbf{u})(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}))\right)|J| \end{aligned}$$

Ainsi, avec le changement de variable inverse $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{X}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega_t} f(t, \mathbf{X}) d\mathbf{X} &= \int_{\omega_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}(f) + f \operatorname{div}(\mathbf{u})\right) d\mathbf{X} \\ &= \int_{\omega_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f\mathbf{u})\right) d\mathbf{X} \end{aligned}$$

2.2.1 Écriture des équations de conservation

On peut maintenant écrire l'équation de conservation de la masse sur les éléments $(\omega_t)_{t \geq t_0}$. En utilisant la notion de masse volumique de la définition 4, p. 25, on écrit l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho d\mathbf{X} = 0, \quad (2.15)$$

et en appliquant le théorème du transport (théorème 6), on obtient :

$$\int_{\omega_t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u})\right) d\mathbf{X} = 0, \quad \forall t > t_0. \quad (2.16)$$

Si on suppose que ρ et \mathbf{v} sont des fonctions régulières, on obtient alors l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0. \quad (2.17)$$

De plus, pour un fluide incompressible, et en supposant ρ constant dans l'espace, l'équation s'écrit :

$$\boxed{\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0}. \quad (2.18)$$

Par simplification, par la suite, nous considérerons toujours ρ constant.

On applique la seconde loi de Newton (ou principe fondamental de la dynamique) pour décrire l'évolution de la quantité de mouvement pour un élément de fluide.

La quantité de mouvement de l'élément de fluide $(\omega_t)_{t > t_0}$ vaut :

$$\int_{\omega_t} \rho \mathbf{u} d\mathbf{X}.$$

La deuxième loi de Newton stipule que le taux de variation de la quantité de mouvement est égal à la somme des forces externes appliquées à cet élément de fluide. Ces forces sont de deux types :

— Les forces volumiques

$$\int_{\omega_t} \rho \mathbf{f} d\mathbf{X}$$

En général, $\mathbf{f} = (f_i)_{i=1}^d$ modélise seulement la gravité.

— Les force de contacts :

$$\int_{\partial\omega_t} \Sigma \cdot \mathbf{n}|_{\partial\omega_t} d\sigma$$

Ces forces sont exercées sur ω_t par le reste du fluide. On les appelle les forces de contraintes. On suppose aussi que si ρ et \mathbf{u} appartiennent respectivement aux ensembles des fonctions de classe \mathcal{C}^1 et \mathcal{C}^0 par rapport aux variables $(t, \mathbf{X}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, alors la fonction $(t, \mathbf{x}) \mapsto \Sigma(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}$ est continue pour n'importe quel vecteur $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ [9, Théorème I.3.1]. Le tenseur Σ est le tenseur des contraintes défini, pour un fluide incompressible, par :

$$\Sigma = -P\mathbb{I} + T \quad (2.19)$$

où P est défini comme la pression thermodynamique du fluide, \mathbb{I} est le tenseur identité d'ordre 2 de taille $d \times d$ et T dépend des caractéristiques du fluide. On renvoie à [9, Section 3.2] pour plus de détails. Dans le cas d'un fluide Newtonien :

$$T = 2\mu D + \lambda \operatorname{div}(\mathbf{u})\mathbb{I},$$

avec μ la viscosité dynamique, λ la seconde viscosité (ou viscosité) de volume et D le tenseur des taux de déformations tel que :

$$D = \frac{1}{2}(\mathbf{Grad} \mathbf{u} + (\mathbf{Grad} \mathbf{u})^T), \quad (2.20)$$

et donc, pour un fluide incompressible :

$$\Sigma = -P\mathbb{I} + \mu(\mathbf{Grad} \mathbf{u} + (\mathbf{Grad} \mathbf{u})^T). \quad (2.21)$$

On obtient donc en appliquant le principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho \mathbf{u} d\mathbf{X} = \int_{\omega_t} \rho \mathbf{f} d\mathbf{X} + \int_{\partial\omega_t} \Sigma \cdot \mathbf{n}|_{\partial\omega_t} d\sigma. \quad (2.22)$$

On peut intégrer par partie le terme $\int_{\partial\omega_t} \Sigma \cdot \mathbf{n}|_{\partial\omega_t} d\sigma$ avec la formule (2.14) du théorème 5

$$\int_{\partial\omega_t} \Sigma : \mathbf{n}|_{\partial\omega_t} d(\sigma) = \int_{\omega_t} \mathbf{Div}(\Sigma) d\mathbf{X}.$$

Pour détailler le terme de quantité mouvement, on applique le théorème du transport (théorème 6, p. 27) avec $f = \rho u_i$ et $i \in \{1, \dots, d\}$

On a alors l'égalité suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho u_i d\mathbf{X} = \int_{\omega_t} \left(\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u_i \mathbf{u}) \right) d\mathbf{X}$$

Or, nous avons :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho u_i \mathbf{u}) &= \sum_{j=1}^d \rho \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j}, \\ &= \sum_{j=1}^d \rho \frac{\partial (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})_{i,j}}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

avec \otimes le produit tensoriel défini par (2.1).

Donc en appliquant le théorème du transport pour toutes les composantes scalaires $(u_i, i \in \{1, \dots, d\})$ de \mathbf{u} , nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho u_i d\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \left(\int_{\omega_t} \left(\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \rho \frac{\partial (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})_{i,j}}{\partial x_j} \right) \cdot \mathbf{e}_i d\mathbf{X} \right)$$

Ce qui donne finalement :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho \mathbf{u} d\mathbf{X} = \int_{\omega_t} \left(\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{Div} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right) d\mathbf{X}.$$

La conservation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\int_{\omega_t} \left(\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{Div} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right) d\mathbf{X} = \int_{\omega_t} (\rho \mathbf{f} + \mathbf{Div} (\Sigma)) d\mathbf{X}.$$

Dans le cas d'un fluide newtonien et incompressible, on écrira (voir (2.21)) :

$$\int_{\omega_t} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{Div} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) d\mathbf{X} = \int_{\omega_t} \rho \mathbf{f} + \mathbf{Div} (-P\mathbb{I} + \mu(\mathbf{Grad} \mathbf{u} + (\mathbf{Grad} \mathbf{u})^T)) d\mathbf{X} \quad (2.23)$$

Nous pouvons simplifier la formulation (2.23), en utilisant l'hypothèse que le fluide est incompressible :

On rappelle que D est le tenseur des déformation défini par (2.20). On peut écrire, pour un fluide incompressible, pour $i \in \{1, \dots, d\}$:

$$\sum_{j=1}^d \frac{\partial D_{i,j}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 x_j} = \frac{1}{2} \Delta u_i$$

Ici le terme $\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}$ est nul car le fluide est à divergence nulle.

Pour résumer, nous avons montré que pour un fluide incompressible :

$$\mathbf{Div} (\mathbf{Grad} \mathbf{u} + (\mathbf{Grad} \mathbf{u})^T) = \Delta \mathbf{u} \quad (2.24)$$

De plus,

$$\begin{aligned} \mathbf{Div} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= \rho \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \\ &= \rho \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial (u_i) u_j + u_i \partial (u_j)}{\partial x_j} \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Or comme le fluide est à divergence nulle, nous avons l'égalité suivante :

$$\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d u_i \frac{\partial (u_j)}{\partial x_j} \mathbf{e}_i = \mathbf{0},$$

et donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{Div} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= \rho \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d u_j \frac{\partial (u_i)}{\partial x_j} \mathbf{e}_i, \\ &= \rho \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d u_j \frac{\partial (\mathbf{u})}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne finalement :

$$\mathbf{Div} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) (\mathbf{u}). \quad (2.25)$$

De plus, avec un calcul explicite :

$$\mathbf{Div}(P\mathbb{I}) = \mathbf{grad} P. \quad (2.26)$$

Finalement, en utilisant (2.24), (2.25), (2.26) et la formulation (2.23), nous obtenons l'équation qui résulte du principe fondamentale de la dynamique pour un fluide Newtonien et incompressible :

$$\rho \int_{\omega_t} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{Grad}) \mathbf{u} \right) d\mathbf{X} = \int_{\omega_t} (\rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} P + \mu \Delta \mathbf{u}) d\mathbf{X}. \quad (2.27)$$

Ce qui donne sous forme locale l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour un fluide incompressible :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{Grad}) \mathbf{u} \right) - \mathbf{grad} P + \mu \Delta \mathbf{u} = \rho \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.28)$$

2.2.2 Équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes en incompressible s'obtiennent en écrivant la conservation de la masse (2.18) et la conservation de la quantité de mouvement (2.28). Elles s'écrivent :

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u} \right) - \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{grad} P = \rho \mathbf{f} & \text{pour } (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{pour } (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.29)$$

On obtient un problème similaire en adimensionnant les équations (2.29). On considère L une longueur caractéristique, U la vitesse caractéristique et $T = \frac{L}{U}$ le temps caractéristique et on note :

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T}$$

Alors on obtient, en reprenant les équations (2.29) et avec $\widetilde{\mathbf{grad}} = \mathbf{grad}_{\tilde{x}}$, $\widetilde{\operatorname{div}} = \operatorname{div}_{\tilde{x}}$ et $\widetilde{\Delta} = \Delta_{\tilde{x}}$.

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{1}{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tilde{t}}(\tilde{x}, \tilde{t}) + \left(\frac{1}{L} \mathbf{u} \cdot \widetilde{\mathbf{grad}} \right) \mathbf{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) \right) - \frac{\mu}{L^2} \widetilde{\Delta} \mathbf{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) + \frac{1}{L} \widetilde{\mathbf{grad}} p(\tilde{x}) &= \rho \mathbf{f}(\tilde{x}, \tilde{t}) \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{1}{L} \widetilde{\operatorname{div}} \mathbf{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) &= 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

On multiplie la première équation par $\frac{L}{\rho U^2}$, et on introduit la viscosité cinématique $\nu := \mu/\rho$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{U} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tilde{t}}(\tilde{x}, \tilde{t}) + \left(\frac{1}{U^2} \mathbf{u} \cdot \widetilde{\mathbf{grad}} \right) \mathbf{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) - \frac{\nu}{LU^2} \widetilde{\Delta} \mathbf{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) + \frac{1}{U^2} \widetilde{\mathbf{grad}} p(\tilde{x}) &= \frac{L}{\rho U^2} \mathbf{f}(\tilde{x}, \tilde{t}) \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \operatorname{div} \mathbf{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) &= 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Si on note :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{U}, \quad \tilde{p}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) = \frac{p(\mathbf{x}, t)}{\rho U^2}, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \frac{L}{U^2} \mathbf{f}, \quad Re = \frac{LU}{\nu} \quad (2.30)$$

On obtient, en remplaçant u, p, f par $\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{f}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \widetilde{\mathbf{grad}}) \tilde{\mathbf{u}} - \frac{1}{Re} \widetilde{\Delta} \tilde{\mathbf{u}} + \widetilde{\mathbf{grad}} \tilde{p} = \tilde{\mathbf{f}} & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \widetilde{\operatorname{div}} \tilde{\mathbf{u}} = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.31)$$

Le nombre de Reynolds Re représente le rapport entre les forces d'inerties et les forces visqueuses. Il caractérise l'écoulement du fluide. Plus celui-ci est faible, plus le fluide est visqueux et donc moins le terme convectif a d'importance dans les solutions. On parle alors de régime de Stokes ou régime laminaire. A contrario, si le nombre de Reynolds est fort, on caractérisera le régime de turbulent (dépendant de la valeur du nombre de Reynolds).

Finalement, on réécrira les équations de Navier-Stokes sous la forme classique suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u} + \mathbf{grad} p = \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

Le nombre de Reynolds est alors assimilé à l'inverse de la viscosité.

Pour obtenir (2.32), on peut simplement diviser (2.28) par la masse volumique ρ , les équations de bilan se réécrivent sous la forme classique des équations de Navier-Stokes incompressibles, en notant $p = P/\rho$.

Pour que le problème soit bien posé, il faut compléter ce système avec des conditions initiales et des conditions aux limites. De nombreuses conditions existent, dont certaines sont illustrées ci dessous :

— Imposer la vitesse sur le bord ainsi que la moyenne de la pression :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \times [0; +\infty[\\ \int_{\Omega} p d\mathbf{x} = 0 & \text{sur } [0; +\infty[\end{cases}$$

— Imposer une condition de traction nulle : Si on note le tenseur des contraintes Σ défini par (2.21), p. 29

$$\{ \Sigma \cdot \mathbf{n}_{|\partial\Omega} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega \times [0; +\infty[$$

— Imposer la vitesse tangentielle et une condition mixte sur la pression et la vitesse [42]. En 3D cela s'écrit :

$$\begin{cases} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}_{|\partial\Omega}) \times \mathbf{n}_{|\partial\Omega} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \times [0; +\infty[\\ p + \frac{\rho}{2} |\mathbf{u}|^2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0; +\infty[\end{cases}$$

— Imposer la vitesse normale et le rotationnel de \mathbf{u} (condition de Hodge) [43, 44]. En 3D, cela s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{|\partial\Omega} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0; +\infty[\\ \mathbf{rot}(\mathbf{u}) \times \mathbf{n}_{|\partial\Omega} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \times [0; +\infty[\end{cases}$$

2.2.3 Equations et formulation faible du problème de Stokes

Pour un nombre de Reynolds faible, les forces visqueuses prédominent sur les forces inertielles, et le terme de convection peut être négligé. On obtient alors les équations de Stokes instationnaires [9, Chap. IV, 5.3] :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{grad} p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.33)$$

Si de plus, l'écoulement est stationnaire, on peut alors écrire les équations de Stokes⁴ :

4. On ne précisera pas que les équations soit données en stationnaire. A contrario, on parlera des équations de Stokes instationnaire si on considère les équations (2.33).

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{grad} p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.34)$$

Ces équations correspondent aux équations de Navier-Stokes stationnaires lorsque la dérivée totale en temps est nulle.

Dans ce qui suit, on considère les équations de Stokes avec des conditions au bord de Dirichlet homogène pour la vitesse. La formulation variationnelle des équations de Stokes, s'obtient en multipliant par une fonction test $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ la première équation et par une fonction test $q \in L_0^2(\Omega)$ la seconde, puis en intégrant par parties. On obtient alors :

Problème: 1. *Trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ tels que*

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases} \quad (2.35)$$

avec $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ les formes bilinéaires telles que :

$$\begin{cases} a : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu \int_{\Omega} \mathbf{Grad} \mathbf{u} : \mathbf{Grad} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\begin{cases} b : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ b(\mathbf{u}, q) = -(\operatorname{div} \mathbf{v}, q)_{L^2(\Omega)} := - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} q \, d\mathbf{x} \end{cases} \quad (2.37)$$

On peut aussi ré-écrire le problème sous une forme plus condensée :

Problème: 2. *Trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times L_0^2(\Omega)$ tels que*

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + b(\mathbf{u}, q) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \quad (2.38)$$

on notera l'espace :

$$\mathbf{V} := \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \mid b(\mathbf{v}, q) = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega) \} \quad (2.39)$$

Remarque 2. *On remarque que trouver la vitesse \mathbf{u} du problème (2.38) est équivalent à résoudre la vitesse \mathbf{u}' du problème suivant :*

Problème: 3. *Trouver $(\mathbf{u}', p) \in \mathbf{V} \times L_0^2(\Omega)$ tels que*

$$a(\mathbf{u}', \mathbf{v}') = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}' \rangle_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v}' \in \mathbf{V} \quad (2.40)$$

Démonstration. En effet, si on considère \mathbf{u} dans (2.38) en supposant l'unicité de \mathbf{u} qui sera démontrée par le théorème 7, p. 34, alors on peut écrire :

$$\forall \mathbf{v}' \in \mathbf{V}, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}') = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}' \rangle_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}$$

Or le problème (2.40) est bien posé. Cela se montre en utilisant le théorème 20, p. 172 de Lax Milgram. Les vitesses sont donc bien unique pour les deux problèmes et en particulier : $\mathbf{u}' = \mathbf{u}$. \square

On rappelle la proposition suivante [39, Corollaire 2.4, p.24] :

Proposition 1. *L'opérateur div est un isomorphisme de \mathbf{V}^\perp dans $L_0^2(\Omega)$, où \mathbf{V}^\perp est l'orthogonal de \mathbf{V} dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$:*

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) = \mathbf{V} \oplus \mathbf{V}^\perp$$

Il existe une constante C_{div} positive tel que pour tout $q \in L_0^2(\Omega)$, il existe un unique $\mathbf{v}_q \in \mathbf{V}^\perp$ tel que :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v}_q &= q, \\ \|\mathbf{v}_q\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} &\leq C_{\operatorname{div}} \|\operatorname{div} \mathbf{v}_q\|_{L^2(\Omega)} = C_{\operatorname{div}} \|q\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Remarque 3. *Soit $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, alors en utilisant une intégration par parties [45], nous obtenons :*

$$(\operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{u})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \langle \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{u})), \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = 0.$$

On applique la formule d'intégration par parties (2.5), p. 25 avec $\mathbf{q} = \mathbf{u}$, $v = \operatorname{div} \mathbf{u}$:

$$(\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{u})_{L^2(\Omega)} + \langle \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\mathbf{u})), \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = 0.$$

En additionnant ces deux équations, il vient :

$$(\operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{u})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{u})_{L^2(\Omega)} = \langle \Delta \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}$$

et en intégrant par parties :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}^2 = \|\operatorname{div}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{rot}(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2$$

Et donc en particulier, la constante C_{div} de l'équation (2.41) est supérieure à 1.

Avec ces deux résultats, on peut rappeler le théorème suivant [33, Théorème 1] :

Théorème 7. *Le problème de Stokes (2.35) est bien posé : il existe une solution (\mathbf{u}, p) unique qui dépend continûment de la donnée :*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} &\leq \nu^{-1} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}, \\ \|p\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_{\operatorname{div}} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Démonstration. On applique le théorème 23, p. 174 avec $X = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et $M = L_0^2(\Omega)$. La forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ correspond à ν fois le produit scalaire dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, elle est donc coercive et continue.

Il reste à montrer que la forme bilinéaire $b(\cdot, \cdot)$ est continue et satisfait la condition inf-sup.

Montrons d'abord que la forme bilinéaire $b(\cdot, \cdot)$ est continue. En utilisant une inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$b(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} \leq \|q\|_{L^2(\Omega)} \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq d \|q\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}$$

Pour montrer la condition inf-sup, on utilise la proposition 1. Considérons $q \in L_0^2(\Omega)$, en utilisant la proposition 1, on sait qu'il existe un unique $\mathbf{v}_q \in \mathbf{V}^\perp$ tel que $\operatorname{div} \mathbf{v}_q = q$. Alors en prenant $\mathbf{v} = \mathbf{v}_q$, on obtient :

$$|b(\mathbf{v}_q, q)| = \left| \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v}_q d\mathbf{x} \right| = \left| \int_{\Omega} q^2 d\mathbf{x} \right| = \|q\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Or, en utilisant l'inégalité (2.41) de la proposition 1, nous obtenons

$$\|q\|_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{C_{\text{div}}} \|\mathbf{v}_q\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \quad (2.43)$$

On retrouve donc que $\forall q \in L_0^2(\Omega)$, il existe \mathbf{v}_q tel que :

$$|b(\mathbf{v}_q, q)| = \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{C_{\text{div}}} \|q\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \quad (2.44)$$

La forme bilinéaire $b(\cdot, \cdot)$ vérifie bien la condition inf-sup. Donc d'après le théorème 23, il existe un unique couple (\mathbf{u}, p) , qui résout le problème de Stokes (2.35) pour $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$.

Maintenant, nous montrons la dépendance continue aux données : (2.42) :

D'après la seconde équation de (2.35) : $\forall q \in L_0^2(\Omega)$, $b(\mathbf{u}, q) = 0$, en particulier d'après la remarque 2, $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$. Si on pose $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ dans la première équation de (2.35), puis nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\nu \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}^2 = a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -b(\mathbf{u}, p) + \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leq \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)},$$

Finalement, nous obtenons :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leq \nu^{-1} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}. \quad (2.45)$$

Pour l'inégalité sur p , on utilise la proposition 1, p. 34. Il existe $\mathbf{v}_p \in \mathbf{V}^\perp$ tel que $\text{div } \mathbf{v}_p = -p$.

Comme $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ et $\mathbf{v}_p \in \mathbf{V}^\perp$, on remarque que :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_p) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}_p)_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = 0.$$

En utilisant $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p$ dans la première équation de (2.35), nous avons :

$$\begin{aligned} b(\mathbf{v}_p, p) &= -(p, \text{div } \mathbf{v}_p)_{L^2(\Omega)} = \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_p \rangle_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \\ &\leq \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \|\mathbf{v}_p\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leq C_{\text{div}} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \|p\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\|p\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\text{div}} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}. \quad (2.46)$$

□

Chapitre 3

Discrétisations dans le code TrioCFD pour les équations de Stokes

Sommaire

3.1	Schémas numériques pour les équations de Stokes	36
3.2	Discrétisation du domaine d'étude	37
3.2.1	Maillage	37
3.2.2	Espaces fonctionnels	41
3.3	Discrétisation conforme pour les équations de Stokes	43
3.4	Discrétisations non-conformes pour les équations de Stokes	44
3.4.1	Les éléments finis non-conformes d'ordre 1 scalaires	45
3.4.2	Les éléments finis non-conformes d'ordre 1 vectoriels	48
3.4.3	Lien avec la méthode HHO	50
3.4.4	Le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$	56
3.4.5	Le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$	65
3.4.6	Le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1 + P^a)$ en 3D	74
3.5	Formulation variationnelle continue et discrète des équations de Navier-Stokes	77
3.5.1	Formulation variationnelle des équations de Navier-Stokes	78
3.5.2	Formulation variationnelle discrète des équations de Navier-Stokes	81
3.6	Reconstruction d'une vitesse à divergence nulle pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$	81
3.6.1	Définition des éléments finis de Raviart-Thomas	81
3.6.2	Projection des fonctions tests sur des éléments finis conformes dans $\mathbf{H}(\text{div})$	82
3.6.3	Établissement de la formulation variationnelle	82
3.6.4	Résultats numériques	85

Dans ce chapitre, nous présenterons les discrétisations sur lesquelles se basent les travaux de cette thèse. On présentera les schémas implémentés dans le code TrioCFD. Nous introduirons le problème de la contrainte d'incompressibilité pour les éléments finis mixtes et nous présenterons des schémas robustes en pression ou quasi-robustes (voir définition 2, p. 13).

3.1 Schémas numériques pour les équations de Stokes

Il existe une variété de schémas numériques disponibles pour la discrétisation des équations de Navier-Stokes. On peut citer les schémas classiques de différences finies [46], de

volumes finis [47] et d'éléments finis [39]. Chacun d'eux apportent sa propre approche pour discrétiser l'espace et le temps afin d'approximer les solutions de ces équations fondamentales.

Plus récemment, des approches innovantes ont émergé, telles que des schémas adaptés aux maillages avec des mailles de forme générale et des approximations d'ordre élevé, comme illustré par :

1. Les schémas Discontinuous Galerkin DG [48, 49] qui consistent à faire une approximation polynomiale dans la cellule, et de pénaliser la discontinuité des fonctions de bases sur les faces.
2. Les schémas Hybrid Discontinuous Galerkin HDG [50], qui se basent sur une discrétisation DG. L'idée est d'ajouter le tenseur de vitesse comme inconnue du système et de résoudre un problème triple avec la vitesse \mathbf{u}_h , la pression p_h et le tenseur de vitesse σ_h . Le tenseur des vitesse est ensuite hybridé¹ sur les faces. Le problème continu, pour les équations de Stokes, s'écrit formellement :

$$\begin{aligned} \mathbf{Grad} \mathbf{u} - \sigma &= \mathbf{0} \\ -\nu \mathbf{Div} (\sigma + \sigma^T) + \mathbf{grad} p &= \mathbf{f} \\ \mathbf{div} \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

3. Les schémas Hybrid High Order HHO [51], qui consistent à générer une approximation polynomiale hybride (sur les faces et sur les cellules) pour avoir une reconstruction d'ordre supérieure dans chaque cellule. C'est aussi une méthode non-conforme.
4. Les schémas Virtual Element Method VEM [52] sont des schémas de discrétisation dont les fonctions de bases sont implicites et créées avec des critères de continuité à définir.

Ces schémas peuvent se voir comme des schémas d'éléments finis avec des fonctions de base particulières. Cependant, il est important de noter que ces schémas novateurs ne sont pas couramment intégrés dans des codes industriels (bien que l'on peut citer les travaux en développement sur le Code_Aster [53] à EDF avec le schéma HHO).

Au sein du CEA, le code TrioCFD tire parti de schémas numériques spécifiques, notamment le schéma VEF² [7, 5, 6], basé sur une modification du schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$, et le schéma VDF³, qui est une adaptation du schéma MAC [54, 55]. Tout deux sont des schémas de bas ordre, c'est à dire que la vitesse est approchée par des fonctions affines par morceaux. Ces schémas ont démontré une grande performance [56], permettant la réalisation de calculs complexes. Cependant, ils présentent également certaines limitations, qui seront abordées en section 3.4.4, p. 61.

Dans ce contexte, les travaux de cette thèse ont été entrepris dans le but d'améliorer un code de calcul déjà robuste et efficace sur le plan numérique pour en proposer une alternative qui se veut tout aussi efficace mais avec moins de degrés de liberté afin de diminuer le coût de la méthode en 3D.

3.2 Discrétisation du domaine d'étude

3.2.1 Maillage

Dans cette section, nous allons définir le maillage, les espaces d'indices utilisés ainsi que certaines hypothèses utiles pour la suite. Dans ce qui suit, on considère un maillage

1. Des précisions sur l'hybridation sont données dans le Chapitre 6
2. Volumes éléments finis
3. Volumes différences finies

de simplexes, c'est-à-dire un maillage de triangles ($2D$), tétraèdres ($3D$). La définition de maillage de simplexes peut se trouver dans [57, 58].

Éléments géométriques

On suppose que Ω est recouvert par un maillage de simplexes notés \mathcal{T}_h , avec l'ensemble des faces \mathcal{F}_h et des sommets \mathcal{S}_h . On note \mathcal{A}_h l'espace des arêtes pour $d = 3$. On définit les espaces des indices suivants pour les différents ensembles composant le maillage \mathcal{T}_h :

Remarque 4. *On utilisera le terme facettes pour désigner les arêtes (resp. les faces) pour $d = 2$ (resp. $d = 3$).*

— \mathcal{I}_T représente l'espace des indices des mailles tel que $\mathcal{T}_h := \bigcup_{\ell \in \mathcal{I}_T} T_\ell$.

— \mathcal{I}_F représente l'espace des indices des facettes tel que $\mathcal{F}_h := \bigcup_{f \in \mathcal{I}_F} F_f$

On note $\mathcal{I}_F = \mathcal{I}_F^i \cup \mathcal{I}_F^b$, où $\forall f \in \mathcal{I}_F^i, F_f \subset \Omega$ et $\forall f \in \mathcal{I}_F^b, F_f \subset \partial\Omega$.

— \mathcal{I}_S représente l'espace des indices des sommets, tel que $\mathcal{S}_h := (S_j)_{j \in \mathcal{I}_S}$ est l'ensemble des sommets.

On note $\mathcal{I}_S = \mathcal{I}_S^i \cup \mathcal{I}_S^b$, où $\forall j \in \mathcal{I}_S^i, S_j \subset \Omega$ et $\forall j \in \mathcal{I}_S^b, S_j \subset \partial\Omega$.

On notera les indices par les lettres suivantes :

— Pour les cellules : ℓ, ℓ', r, k

— Pour les sommets : i, j, m

— Pour les faces : f, f'

On notera N_T, N_F, N_S les cardinaux des espaces $\mathcal{I}_T, \mathcal{I}_F, \mathcal{I}_S$. De même pour les espaces des indices des éléments intérieurs et respectivement du bord que l'on notera N_F^i, N_S^i et N_F^b, N_S^b .

On définit aussi les espaces d'indices des sous-ensembles suivants :

— $\forall \ell \in \mathcal{I}_T, \mathcal{I}_{F,\ell} = \{f \in \mathcal{I}_F \mid F_f \subset T_\ell\}, \quad \mathcal{I}_{S,\ell} = \{j \in \mathcal{I}_S \mid S_j \subset T_\ell\}$.

— $\forall i \in \mathcal{I}_S, \mathcal{I}_{T,i} = \{\ell \in \mathcal{I}_T \mid S_i \subset T_\ell\}, \quad N_{T,i} := \text{card}(\mathcal{I}_{T,i})$.

— $\forall i \in \mathcal{I}_S, \mathcal{I}_{S,i} = \{j \in \mathcal{I}_S \mid S_j S_i \subset \mathcal{F}_h\}, \quad N_{S,i} := \text{card}(\mathcal{I}_{S,i})$.

— $\forall i \in \mathcal{I}_S, \mathcal{I}_{F,i} = \{f \in \mathcal{I}_F \mid S_i \subset F_f\}, \quad N_{F,i} := \text{card}(\mathcal{I}_{F,i})$.

— $\forall f \in \mathcal{I}_F, \mathcal{I}_{S,f} = \{i \in \mathcal{I}_S \mid S_i \subset F_f\}$.

Ainsi, par exemple, si $f \in \mathcal{I}_F$, alors $\mathcal{I}_{S,f}$ est l'espace d'indices de l'ensemble des sommets qui sont sur la face F_f .

On note qu'en $2D$, si $S_j \not\subset \partial\Omega$, alors $N_{T,j} = N_{S,j}$.

Pour tout $f \in \mathcal{I}_F$, M_f est le barycentre de la face F_f , et on note \mathbf{n}_f sa normale unitaire (sortante si $F_f \subset \partial\Omega$). On notera la normale sortante de F_f au triangle T_ℓ le vecteur $\mathbf{n}_{f,\ell}$. Pour tout $\ell \in \mathcal{I}_T$, et pour tout $j \in \mathcal{I}_{S,\ell}$, on notera $\lambda_{j,\ell}$, les coordonnées barycentriques (décrites en (3.3)); $F_{j,\ell}$ désigne la facette opposée au sommet S_j dans l'élément T_ℓ . On appelle $\mathcal{S}_{j,\ell}$ le vecteur face normale sortant de $F_{j,\ell}$ de norme $|\mathcal{S}_{j,\ell}| = |F_{j,\ell}|$.

La taille du maillage est donnée par le paramètre h qui est le maximum des diamètres des simplexes de \mathcal{T}_h . La définition est donnée en [38, Définition 8.4, p.73].

On propose deux hypothèses de maillage :

Hypothèse 2. (Régularité du maillage 1) : *L'intersection de deux éléments distincts de \mathcal{T}_h est soit vide, soit un point, une arête ou une face commune (en $3D$).*

Hypothèse 3. (Régularité du maillage 2) : *Pour tous les simplexes $T_\ell, \ell \in \mathcal{I}_T$, on suppose que le rapport du diamètre du cercle (resp. de la sphère en $3D$) circonscrit h_ℓ sur le*

diamètre ρ_ℓ du cercle inscrit (resp. de la sphère inscrite en 3D), au triangle T_ℓ , est borné indépendamment de T_ℓ et de \mathcal{T}_h ie.

$$\forall \ell \in \mathcal{I}_T, \quad \frac{h_\ell}{\rho_\ell} =: \sigma_\ell < \sigma$$

La caractérisation de la régularité du maillage est donnée par σ . De plus, on a l'inégalité suivante [33, (3.17)] :

$$\forall \ell \in \mathcal{I}_T, \forall f \in \mathcal{I}_{F,\ell} \quad |F_f| |T_\ell|^{-1} \leq C_\rho \rho_\ell^{-1}, \quad (3.2)$$

et C_ρ ne dépend pas du maillage.

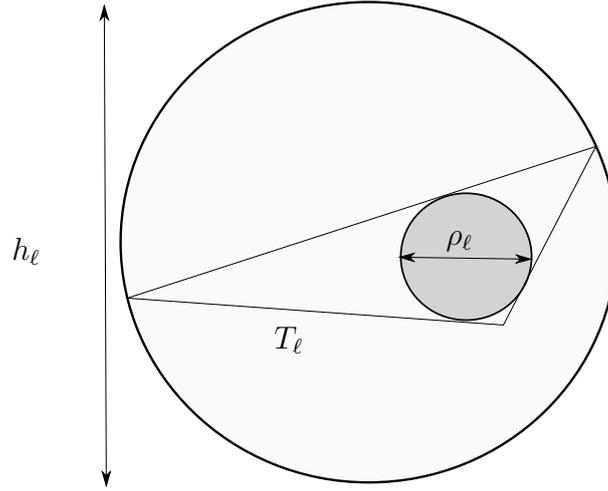


FIGURE 3.1 – Schéma d'un triangle $T_\ell \subset \mathcal{T}_h$

Coordonnées barycentriques

Les coordonnées barycentriques sont très utiles dans le domaine des éléments finis. Elles permettent de définir des fonctions de bases, et s'intègrent très facilement sur l'élément de référence. Considérons un triangle T_ℓ , avec $\ell \in \mathcal{I}_T$ de sommet S_i, S_j, S_m , avec $i, j, m \in \mathcal{I}_{S,\ell}$

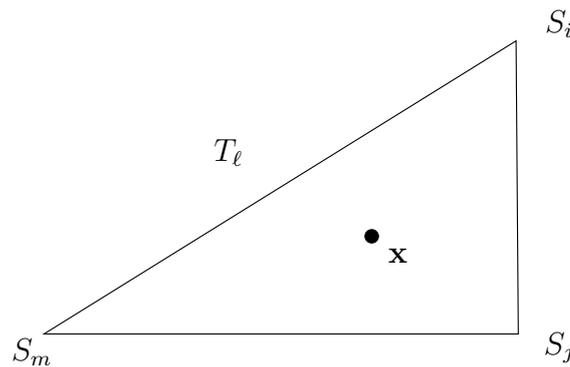


FIGURE 3.2 – Schéma du triangle T_ℓ de sommet S_i, S_j, S_m .

La configuration du triangle T_ℓ est représentée sur la figure 3.2. On considère un point \mathbf{x} dans le triangle T_ℓ de sommets S_i, S_j, S_m et un point O quelconque défini comme l'origine. On peut écrire :

$$\mathbf{x} = \sum_{\alpha=\{i,j,m\}} \lambda_{\alpha,\ell} \overrightarrow{OS}_\alpha, \quad (3.3)$$

Avec :

$$\lambda_{\alpha,\ell}(\mathbf{x}) = (d|T_\ell|)^{-1} \mathcal{S}_{\alpha,\ell} \cdot (\overrightarrow{OM}_{\alpha,\ell} - \mathbf{x}), \quad (3.4)$$

où $M_{\alpha,\ell}$ est le barycentre de la face opposé au sommet S_α du triangle T_ℓ et donc :

$$\mathbf{grad} \lambda_{\alpha,\ell} = -(d|T_\ell|)^{-1} \mathcal{S}_{\alpha,\ell}.$$

On appelle les $\lambda_{\alpha,\ell}$, $\alpha \in \{1, \dots, d+1\}$ les coordonnées barycentriques et la formule (3.3) (donnée pour $d=2$) la décomposition en coordonnées barycentriques.

On pourra définir la fonction "bulle" sur l'élément définie par :

$$\phi_{B_e,\ell} = \prod_{\alpha=1}^{d+1} \lambda_{\alpha,\ell}, \quad (3.5)$$

et on peut définir l'espace :

$$P_{B_e} = \{q \in L^2(\Omega), q|_{T_\ell} = q_\ell \phi_{B_e,\ell}, q_\ell \in \mathbb{R}, \forall \ell \in \mathcal{I}_T\} \quad \mathbf{P}_{B_e} := (P_{B_e})^d. \quad (3.6)$$

On note la formule d'intégration, donnée dans [59] :

$$\int_{T_\ell} \prod_{\alpha=1}^{d+1} \lambda_{\alpha,\ell}^{k_\alpha} d\mathbf{x} = d! |T_\ell| \frac{\prod_{\alpha=1}^{d+1} k_\alpha!}{\left(d + \sum_{\alpha=1}^{d+1} k_\alpha\right)!}. \quad (3.7)$$

Élément de référence

On définit le triangle de référence \hat{T} [15, p.58]. Tout ce qui est relié à ce triangle sera noté avec un accent circonflexe.

On considère l'élément de référence \hat{T} de sommets $(\hat{S}_i, \hat{S}_j, \hat{S}_m)$ de coordonnées respectives : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On notera $\hat{h}, \hat{\sigma}, \hat{\rho}$ les paramètres du triangles de références correspondants aux notations déjà présentées. On définit \mathcal{F}_ℓ la transformation de \hat{T} vers $T_\ell \in \mathcal{T}_h$:

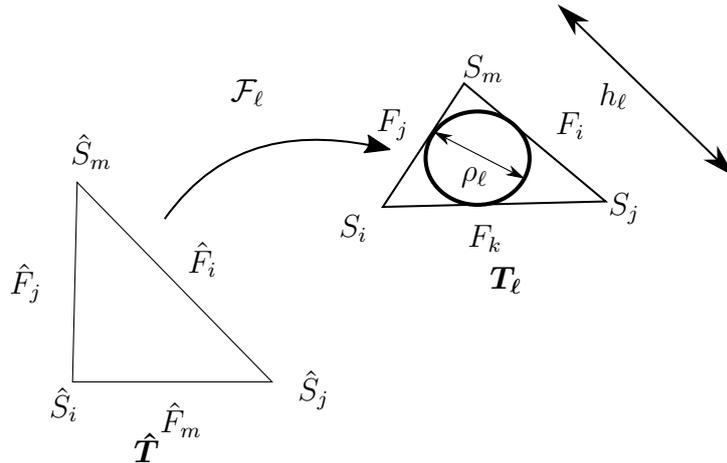


FIGURE 3.3 – Schéma de l'élément de référence \hat{T} et du triangle T_ℓ

$$\mathcal{F}_\ell(\hat{x}) = \mathbb{B}_\ell \hat{x} + b_\ell \quad (3.8)$$

avec $\mathbb{B}_\ell \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $b_\ell \in \mathbb{R}^3$.

On notera $\forall \ell \in \mathcal{I}_T, f \in \mathcal{I}_{F,\ell}$:

- Les faces de l'élément de référence : $\hat{F}_{f,\ell} = \mathcal{F}_\ell^{-1}(F_{f,\ell})$.
- Les normales de l'élément de référence : $\hat{\mathbf{n}}_{f,\ell} = \mathcal{F}_\ell^{-1}(\mathbf{n}_{f,\ell})$.
- Les vecteurs faces normales de l'élément de référence : $\hat{\mathcal{S}}_{f,\ell} = \mathcal{F}_\ell^{-1}(\mathcal{S}_{f,\ell})$.
- Le déterminant de la matrice de passage $\mathbb{B}_\ell : J_\ell = \det(\mathbb{B}_\ell)$.
- L'opérateur $\hat{\cdot}_\ell$, qui pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(T_\ell)$, est défini par $\hat{\mathbf{v}}_\ell := \mathbf{v}|_{T_\ell} \circ \mathcal{F}_\ell^{-1}$.
- L'opérateur gradient suivant la variable $\hat{\mathbf{x}} : \mathbf{grad}_{\hat{\mathbf{x}}}$.

Relations entre les éléments et l'élément de référence

Soit $\ell \in \mathcal{I}_T$ et une face $f \in \mathcal{I}_{F,\ell}$. Considérons la normale $\hat{\mathbf{n}}_{f,\ell}$, à la face \hat{F}_f sortante au triangle \hat{T} . L'égalité suivante est vérifiée [38, Lemme 9.11] :

$$\mathbf{n}_{f,\ell} = |T_\ell| |\hat{F}_{f,\ell}| |F_{f,\ell}|^{-1} (\mathbb{B}_\ell^{-1})^T \hat{\mathbf{n}}_{f,\ell}. \quad (3.9)$$

On donne les relations suivantes [38, Lemme 11.1] :

$$\begin{aligned} |J_\ell| &= |T| |\hat{T}|^{-1} \\ \|\mathbb{B}_\ell\| &\leq h_\ell / \hat{\rho} \\ \|\mathbb{B}_\ell^{-1}\| &\leq \hat{h} / \rho_\ell \end{aligned} \quad (3.10)$$

Proposition 2. *Soit $v \in H^1(\Omega)$. Les égalités et inégalités suivantes sont vérifiées :*

$$\|v\|_{T_\ell}^2 = |J_\ell| \|\hat{v}|_{T_\ell}\|_{L^2(\hat{T})}^2, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{grad} v|_{T_\ell} = (\mathbb{B}_\ell^{-1})^T \mathbf{grad}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{v}, \quad (3.12)$$

$$\|\mathbf{grad} v\|_{L^2(T_\ell)}^2 \leq \|\mathbb{B}_\ell^{-1}\|^2 |J_\ell| \|\mathbf{grad}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{v}\|_{\hat{T}}^2, \quad (3.13)$$

$$\|\mathbf{grad}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{v}\|_{L^2(\hat{T})}^2 \leq \|\mathbb{B}_\ell\|^2 |J_\ell|^{-1} \|\mathbf{grad} v\|_{L^2(T_\ell)}^2. \quad (3.14)$$

Démonstration. Ces inégalités sont obtenues avec le changement de variables $x = \mathcal{F}_\ell(\hat{x})$. \square

3.2.2 Espaces fonctionnels

On définit l'espace :

$$\mathcal{P}_h H^1 = \{v \in L^2(\Omega); \quad \forall \ell \in \mathcal{I}_T, v|_{T_\ell} \in H^1(T_\ell)\}, \quad \mathcal{P}_h \mathbf{H}^1 = [\mathcal{P}_h H^1]^d, \quad (3.15)$$

ainsi que les espaces discrets suivants :

Pour tout $D \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble de simplexes connectés, et $k \in \mathbb{N}$, on appelle $P^k(D)$ l'ensemble des polynômes de degré k sur D . En particulier on peut définir :

$$\text{Pour } k \in \mathbb{N}^* : P^k(\mathcal{T}_h) := \{q \in C^0(\overline{\Omega}), \forall \ell \in \mathcal{I}_T, q|_{T_\ell} \in P^k(T_\ell)\}, \quad \mathbf{P}^k(\mathcal{T}_h) := (P^k(\mathcal{T}_h))^d, \quad (3.16)$$

$$\text{Pour } k \in \mathbb{N} : P_{disc}^k(\mathcal{T}_h) = \{q \in L^2(\Omega); \quad \forall \ell \in \mathcal{I}_T, q|_{T_\ell} \in P^k(T_\ell)\}, \quad \mathbf{P}_{disc}^k(\mathcal{T}_h) := (P_{disc}^k(\mathcal{T}_h))^d. \quad (3.17)$$

On note $[\mathbf{v}_h]_{F_f}(\overrightarrow{OM}_f)$ le saut de \mathbf{v}_h à travers le milieu M_f de la face F_f .

— Si F_f est une face intérieure, telle que $\overline{F_f} = \overline{T_\ell} \cap \overline{T_{\ell'}}$, avec $\ell < \ell'$. Le saut $[\mathbf{v}_h]_{F_f}(\overline{\mathcal{O}\vec{M}_f})$ s'écrit :

$$[\mathbf{v}_h]_{F_f}(\overline{\mathcal{O}\vec{M}_f}) := \mathbf{v}_h|_{T_\ell}(\overline{\mathcal{O}\vec{M}_f}) - \mathbf{v}_h|_{T_{\ell'}}(\overline{\mathcal{O}\vec{M}_f}). \quad (3.18)$$

— Si F_f est une face du bord appartenant à l'élément T_ℓ , alors $[\mathbf{v}_h]_{F_f}(\overline{\mathcal{O}\vec{M}_f}) := \mathbf{v}_h|_{T_\ell}(\overline{\mathcal{O}\vec{M}_f})$.

Soit $k \geq 1$. On notera $\pi_h^k(p)$ l'opérateur de projection relié à l'espace $P^k(\mathcal{T}_h)$ défini par (3.16), p. 41.

$$\int_{\Omega} q_h \pi_h^k(p) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} q_h p \, d\mathbf{x}, \quad \forall q_h \in P^k(\mathcal{T}_h). \quad (3.19)$$

En particulier l'opérateur de projection $\pi_h^0(\cdot)$ est défini pour tout $q \in L^2(\Omega)$ comme l'opérateur :

$$\forall \ell \in \mathcal{I}_T, \pi_h^0(q)|_{T_\ell} = |T_\ell|^{-1} \int_{T_\ell} q \, d\mathbf{x}. \quad (3.20)$$

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on notera $a \lesssim b$ (resp. $a \gtrsim b$) si il existe une constante c , indépendante du maillage, telle que $a \leq cb$ (resp. $a \geq cb$).

Opérateurs reliés au maillage :

Pour simplifier les notations, on définit :

— Pour tout $v \in L^2(T_\ell)$, $\overline{v}_\ell := |T_\ell|^{-1} \int_{T_\ell} v|_{T_\ell} \, d\mathbf{x}$.

— Pour tout $v \in H^1(\Omega)$, $\overline{v}_f := |F_f|^{-1} \int_{F_f} v|_{F_f} \, d\sigma$.

— Pour tout $v \in L^2(F_f)$, $\overline{v}_{f,\ell} := |F_f|^{-1} \int_{F_f} v|_{T_\ell} \, d\sigma$.

Ces définitions s'étendent aux fonctions \mathbf{v} telles que :

— $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(T_\ell)$, $\overline{\mathbf{v}}_\ell := |T_\ell|^{-1} \int_{T_\ell} \mathbf{v}|_{T_\ell} \, d\mathbf{x}$.

— $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $\overline{\mathbf{v}}_f := |F_f|^{-1} \int_{F_f} \mathbf{v}|_{F_f} \, d\sigma$.

— $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(F_f)$, $\overline{\mathbf{v}}_{f,\ell} := |F_f|^{-1} \int_{F_f} \mathbf{v}|_{T_\ell} \, d\sigma$

Inégalités locales :

Proposition 3. (Inégalité de Poincaré-Steklov dans la cellule [38, Lemme 12.11])

Pour tout $\ell \in \mathcal{I}_T$, et pour tout $v \in H^1(T_\ell)$, on a :

$$\|v - \overline{v}_\ell\|_{L^2(T_\ell)} \lesssim h_\ell \|\mathbf{grad} v\|_{\mathbf{L}^2(T_\ell)}. \quad (3.21)$$

Proposition 4. (Inégalité de Poincaré-Steklov sur les faces [21, Lemme 36.8])

Soit $v \in H^1(T_\ell)$. Pour toute cellule T_ℓ , $\ell \in \mathcal{I}_T$ et pour une face F_f , $f \in \mathcal{I}_{F,\ell}$, on a :

$$\|v - \overline{v}_{f,\ell}\|_{L^2(F_f)} \lesssim \sigma^{1/2} h_\ell^{1/2} \|\mathbf{grad} v\|_{\mathbf{L}^2(T_\ell)}. \quad (3.22)$$

Proposition 5. (Inégalité de trace dans la cellule [38, Lemme 12.15])

Soit $\ell \in \mathcal{I}_T$, alors $\forall v \in H^1(T_\ell)$, on a :

$$\|v\|_{L^2(F_f)} \lesssim \sigma_\ell^{1/2} \|v\|_{L^2(T_\ell)}^{1/2} \left(h_\ell^{-1/2} \|v\|_{L^2(T_\ell)}^{1/2} + \|\mathbf{grad} v\|_{\mathbf{L}^2(T_\ell)}^{1/2} \right). \quad (3.23)$$

Si on combine (3.21) et (3.23), alors on obtient :

Proposition 6. Soit $\ell \in \mathcal{I}_T$ et $f \in \mathcal{I}_{F,\ell}$. L'inégalité suivante est vérifiée pour tout $v \in H^1(T_\ell)$:

$$\|v - \bar{v}_\ell\|_{L^2(F_f)} \lesssim \sigma_\ell^{1/2} h_\ell^{1/2} \|\mathbf{grad} v\|_{\mathbf{L}^2(T_\ell)}. \quad (3.24)$$

Proposition 7. Pour toute cellule T_ℓ , $\ell \in \mathcal{I}_T$, et pour tout $v \in H^1(T_\ell) \cap P^1(T_\ell)$, l'inégalité inverse suivante est vérifiée :

$$\|\mathbf{grad} v\|_{\mathbf{L}^2(T_\ell)} \lesssim (\rho_\ell)^{-1} \|v - \bar{v}_\ell\|_{L^2(T_\ell)}. \quad (3.25)$$

Démonstration. On suit la preuve de [60, Lemme 2] : on passe par l'élément de référence pour obtenir :

$$\|\mathbf{grad} v\|_{\mathbf{L}^2(T_\ell)} \lesssim \|\mathbb{B}_\ell^{-1}\| |T_\ell|^{1/2} \left| \int_{\hat{T}} \mathbf{grad}_{\hat{x}} \hat{v}_\ell d\mathbf{x} \right|.$$

En intégrant par parties dans l'élément de référence, on obtient :

$$\left| \int_{\hat{T}} \mathbf{grad}_{\hat{x}} \hat{v}_\ell d\mathbf{x} \right| = \left| \int_{\partial\hat{T}} \hat{v} \hat{\mathbf{n}}_{|\partial\hat{T}} d\sigma \right|.$$

Enfin, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et en repassant dans l'élément T_ℓ , on retrouve l'inégalité (3.25). \square

Opérateurs discrets

On peut définir les opérateurs discrets :

— \mathbf{grad}_h tel que : $\forall q \in \mathcal{P}_h H^1$, $\mathbf{grad}_h q \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, est tel que

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega), (\mathbf{grad}_h q, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} (\mathbf{grad} q, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(T_\ell)}.$$

— \mathbf{Grad}_h tel que : $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{P}_h \mathbf{H}(\text{div})$, $\mathbf{Grad}_h \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, est tel que

$$\forall \mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega), (\mathbf{Grad}_h \mathbf{v}, \mathbf{w})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} (\mathbf{Grad} \mathbf{v}, \mathbf{w})_{\mathbf{L}^2(T_\ell)}.$$

— div_h tel que : $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{P}_h \mathbf{H}(\text{div})$, $\text{div}_h \mathbf{v} \in L^2(\Omega)$, est tel que

$$\forall q \in L^2(\Omega), (\text{div}_h \mathbf{v}, q)_{L^2(\Omega)} = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} (\text{div} \mathbf{v}, q)_{L^2(T_\ell)}.$$

3.3 Discrétisation conforme pour les équations de Stokes

Dans cette section, nous discutons de l'analyse numérique d'un schéma conforme pour les équations de Stokes. Une analyse d'erreur pour des problèmes abstraits est proposée en annexe B, p. 171, analogue à celle de la thèse de Heib [5, section 2.2.1].

La méthode des éléments finis nécessite des espaces d'approximations de dimension finie pour les inconnues, relatifs au maillage. Dans cette démarche, supposons deux espaces fermés de dimension finie $\mathbf{X}_h \subset \mathbf{X}$ et $M_h \subset M$. Cette discrétisation est dite conforme. Le problème discret s'écrit alors :

Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times M_h$ tel que :

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 & \forall q_h \in M_h \end{cases}$$

avec a et b définies par (2.36), p. 33 et (2.37), p. 33. On peut alors définir l'espace

$$\mathbf{V}_h := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \mid b(\mathbf{v}_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in M_h\}. \quad (3.26)$$

Remarque 5. *Même si le schéma d'approximation est conforme, il est possible que $\mathbf{V}_h \not\subset \mathbf{V}$.*

Existence et unicité de la solution

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution, nous pouvons appliquer le théorème 23, p. 174 d'existence et d'unicité du problème continu en substituant les espaces continus par les espaces discrets. Il reste donc à montrer les hypothèses du théorème :

- Continuité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ sur $\mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h$ (B.7) : Celle-ci est vérifiée par la continuité de $a(\cdot, \cdot)$ sur $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$.
- Continuité de la forme bilinéaire $b(\cdot, \cdot)$ sur $\mathbf{X}_h \times M_h$ (B.8) : Celle-ci est vérifiée par la continuité de $b(\cdot, \cdot)$ sur $\mathbf{X} \times M$.
- Coercivité de la forme bilinéaire de $a(\cdot, \cdot)$ sur \mathbf{V}_h (B.9) : La coercivité de a sur \mathbf{V} n'implique pas la coercivité sur \mathbf{V}_h car $\mathbf{V}_h \not\subset \mathbf{V}$, néanmoins la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$ sur \mathbf{X} implique celle de $a(\cdot, \cdot)$ sur \mathbf{X}_h .
- La condition inf-sup (2.44) de $b(\cdot, \cdot)$ sur $\mathbf{X}_h \times M_h$ (B.10) : La condition inf-sup du problème continu n'implique pas la condition inf-sup sur l'espace $\mathbf{X}_h \times M_h$. Comme vu avec les remarques précédentes, c'est souvent la seule condition à vérifier avec un schéma conforme.

L'utilisation des schémas conformes est très pratique car leur analyse se base sur l'analyse du problème continu. Cependant, en pratique, il peut s'avérer difficile de trouver une paire d'éléments finis qui respecte la condition inf-sup en étant d'ordre 1. En effet, le schéma $\mathbf{P}^1 - P_{disc}^0$ ne respecte pas la condition inf-sup (voir p. 16).

Il est possible de considérer d'autres éléments inf-sup stables (qui respectent la condition inf-sup). C'est le cas des éléments finis de Taylor-Hood [61] ($\mathbf{P}^2 - P^1$)⁴ et du mini-élément ($\mathbf{P}^1 + \mathbf{P}_{Be}$) - P_{disc}^0 [29]⁵.

Il est aussi possible de choisir un espace d'approximation non-inclus dans l'espace de la solution et de considérer des fonctions de base en vitesse pouvant être discontinues. Cette approche conduit à des paires d'éléments finis capables de s'adapter aux discontinuités du terme source tout en ayant une erreur acceptable. Cependant, elles nécessitent une analyse numérique plus approfondie pour démontrer leur convergence.

3.4 Discrétisations non-conformes pour les équations de Stokes

Dans la section précédente, nous avons abordé la définition des méthodes conformes, ainsi qu'une méthodologie d'analyse numérique les concernant. Dans cette section, nous nous intéressons aux méthodes non-conformes : une approximation non-conforme consiste à approcher l'espace continu \mathbf{H}_0^1 par un espace discret $\mathbf{X}_{0,h}$ qui n'est pas inclus dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Dans cette section, trois discrétisations non conformes basées sur les éléments finis de Crouzeix-Raviart non conformes d'ordre 1 [33, Exemple 4, p. 58] pour résoudre les équations de Stokes. Celui-ci sera présenté en section 3.4.4, p. 56 (noté $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$). Ce schéma pose un problème de consistance (p. 61). Pour corriger cela, un schéma modifié avec des degrés de liberté en pression supplémentaires localisés sur les sommets du maillage sera proposé dans la section 3.4.5, p. 65. Bien que ce schéma présente des propriétés intéressantes, pour les maintenir en 3D, l'ajout de degrés supplémentaires sur les arêtes est nécessaire. Ce dernier schéma sera présenté dans la section 3.4.6, p. 74.

4. tel que $\mathbf{u}_h \in (P^2)^d \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et $p_h \in P^1 \cap L_0^2(\Omega)$. Ces espaces sont définis par (3.16)

5. tel que $\mathbf{u}_h \in (\mathbf{P}^1 + \mathbf{P}_{Be})$ et $p_h \in P_{disc}^0$. Ces espaces sont définis par (3.16), (3.6) et (3.17)

3.4.1 Les éléments finis non-conformes d'ordre 1 scalaires

Pour définir les éléments finis non-conformes d'ordre 1, on introduit un maillage triangulaire \mathcal{T}_h de sommets \mathcal{S}_h et de facettes \mathcal{F}_h comme défini en section 3.2.1. Dans un premier temps, nous définissons les éléments finis P_{nc}^1 . L'espace de discrétisation est :

$$X_h = \{v_h \in [P_{disc}^1(\mathcal{T}_h)]^d \mid \forall f \in \mathcal{I}_F^i : [v_h]_{F_f}(\overrightarrow{OM}_f) = \mathbf{0}\}, \quad (3.27)$$

La condition :

$$[v_h]_{F_f}(\overrightarrow{OM}_f) = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

est communément appelée le "patch test".

On appelle $X_{0,h}$ le sous-espace de X_h tel que :

$$X_{0,h} := \{v_h \in X_h \mid \forall f \in \mathcal{I}_F^b, v_h|_{\partial\Omega} = v_h(\overrightarrow{OM}_f) = \mathbf{0}\}. \quad (3.29)$$

Comme les fonctions $v_h \in X_h$ sont discontinues aux interfaces, cette approximation est non-conforme dans $H^1(\Omega) : X_h \not\subset H^1(\Omega)$. On peut définir le produit scalaire associé à l'espace $X_{0,h}$ suivant :

$$(\cdot, \cdot)_h : \begin{cases} X_{0,h} \times X_{0,h} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (v_h, w_h) & \mapsto (v_h, w_h)_h := (\mathbf{grad}_h v_h, \mathbf{grad}_h w_h)_{L^2(\Omega)} \end{cases} \quad (3.30)$$

Sa norme associée est notée :

$$\|\cdot\|_h : \begin{cases} X_{0,h} & \rightarrow \mathbb{R} \\ v_h & \mapsto \|v_h\|_h := (v_h, v_h)_h^{1/2} \end{cases} \quad (3.31)$$

Proposition 8. *La forme bilinéaire $(\cdot, \cdot)_h$ est bien un produit scalaire associé à l'espace $X_{0,h}$.*

Démonstration. Les preuves de propriétés de symétrie, et de positivité sont immédiates. Il reste à montrer que la forme bilinéaire $(\cdot, \cdot)_h$ est bien définie.

Si $\|v_h\|_h = 0$, alors nous avons :

$$\forall \beta \in \{1, \dots, d+1\}, \partial_\beta v_h = 0 \quad \text{sur } T_\ell, \ell \in \mathcal{I}_T$$

ce qui veut dire que v_h est constant sur chaque $T_\ell, \ell \in \mathcal{I}_T$. Or, par la propriété du patch test, on sait que :

$$\forall f \in \mathcal{I}_F, \int_{F_f} [v_h] = 0.$$

Ce qui implique que v_h est constant sur tout le domaine Ω et comme $v_h \in X_{0,h}$, on en conclut que $v_h = 0$. L'opérateur $\|\cdot\|_h$ est donc bien une norme sur $X_{0,h}$. \square

Fonctions de base pour les éléments finis P_{nc}^1

Proposition 9. *L'espace $X_{0,h}$ est un espace vectoriel de dimension N_F^i . On peut le munir d'une base de fonctions affines par morceaux $(\phi_f)_{f=1}^{N_F}$ de sorte que les fonctions satisfassent :*

$$\phi_f(\overrightarrow{OM}_{f'}) = \delta_{ff'}, \quad \forall 1 \leq f, f' \leq N_F. \quad (3.32)$$

Soit $T_\ell \in \mathcal{T}_h$, les fonctions de base locales de l'élément P_{nc}^1

$$\phi_{\alpha,\ell}(\mathbf{x}), \quad 1 \leq \alpha \leq d+1,$$

associées aux barycentres des éléments T_ℓ sont telles que

$$\phi_{\alpha,\ell}(\overrightarrow{OM}_{\alpha',\ell}) = \delta_{\alpha\alpha'}, \quad 1 \leq \alpha' \leq d+1.$$

Ces fonctions peuvent s'exprimer en fonction des coordonnées barycentriques $\lambda_{\alpha,\ell}$ définies

par (3.4), p. 39 telles que si $\mathbf{x} \in T_\ell$, alors $\mathbf{x} = \sum_{\alpha=1}^{d+1} \lambda_{\alpha,\ell}(\overrightarrow{OS}_{\alpha,\ell})(\mathbf{x})$

$$\phi_{\alpha,\ell}(\mathbf{x}) = 1 - d\lambda_{\alpha,\ell}(\mathbf{x}). \quad (3.33)$$

Remarque 6. Pour une facette intérieure F_f , $f \in \mathcal{I}_F^i$ partagée par deux triangle T_ℓ, T_k , on a :

$$\forall x \subset F_f, \quad \phi_{\ell,f}(\mathbf{x}) = \phi_{k,f}(\mathbf{x}) = 1$$

Si F_f est une arête intérieure ($f \in \mathcal{I}_F^i$) partagée par le triangle T_k et T_ℓ : $F_f \subset \partial T_k \cap \partial T_\ell$, $(\ell, k) \in \mathcal{I}_T$, $\ell \neq k$. On a alors :

$$\phi_f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \phi_{\ell,f}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \overline{T_\ell} \\ \phi_{k,f}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \overline{T_k} \end{cases}$$

Si F_f est une arête du bord ($f \in \mathcal{I}_F^b$) sur le triangle T_ℓ , alors on définira

$$\phi_f(\mathbf{x}) = \phi_{\ell,f}(\mathbf{x})$$

L'opérateur d'interpolation des éléments finis de Crouzeix-Raviart non-conforme d'ordre 1 : π_h^{CR} pour des fonctions scalaire est défini par (3.34) :

$$\pi_h^{CR} : \begin{cases} H^1(\Omega) & \rightarrow X_h \\ v & \mapsto \sum_{f \in \mathcal{I}_F} \bar{v}_f \psi_f \end{cases} \quad (3.34)$$

Notons que $\forall f \in \mathcal{I}_F$, $\int_{F_f} \pi_h^{CR} v d\sigma = \int_{F_f} v d\sigma$.

On donne les propriétés de l'opérateur d'interpolation π_h^{CR} suivantes :

Proposition 10. Les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|\pi_h^{CR} v\|_h \leq \|\mathbf{grad} v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad (3.35)$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \forall \ell \in \mathcal{I}_T, \quad \|v - \pi_h^{CR}(v)\|_{L^2(T_\ell)} \lesssim h_\ell \|\mathbf{grad} v\|_{\mathbf{L}^2(T_\ell)}. \quad (3.36)$$

De plus, pour tout $v \in P^1(\Omega)$, $\pi_h^{CR} v = v$.

La constante de stabilité de la borne sur $\|\pi_h^{CR} v\|_h$ est égale à 1 [62, Lemme 2]. En particulier, elle est indépendante de l'anisotropie du maillage.

Démonstration. On reprend la preuve de [60, Lemme 2]. Posons $\ell \in \mathcal{I}_T$. On donne la relation entre le gradient de la fonction interpolée v_h et le gradient de la fonction v , en intégrant par parties deux fois :

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}(v_h)|_{T_\ell} &= |T_\ell|^{-1} \int_{T_\ell} \mathbf{grad} v_h d\mathbf{x} &= |T_\ell|^{-1} \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \int_{F_f} v_h \mathbf{n}_{f,\ell} d\sigma, \\ &= |T_\ell|^{-1} \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \int_{F_f} v \mathbf{n}_{f,\ell} d\sigma &= |T_\ell|^{-1} \int_{T_\ell} \mathbf{grad} v d\mathbf{x}, \\ & &\leq |T_\ell|^{-1} (\|\mathbf{grad} v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 |T_\ell|^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

En particulier, en intégrant le gradient constant sur T_ℓ , on obtient :

$$|T_\ell| |\mathbf{grad}(v_h)|_{T_\ell}|^2 = \|\mathbf{grad}(v_h)\|_{L^2(T_\ell)}^2 \leq \|\mathbf{grad} v\|_{L^2(T_\ell)}^2.$$

En sommant sur tout les triangles T_ℓ , $\ell \in \mathcal{I}_T$, on retrouve l'inégalité voulu pour v . L'équation (3.47) en est déduite directement.

Pour l'inégalité (3.48), nous reprenons la preuve disponible dans [63, p. 7]. Posons $v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et $\ell \in \mathcal{I}_T$. On considère la transformation affine \mathcal{F}_ℓ du triangle T_ℓ au triangle de référence \hat{T} défini par (3.8) ainsi que la projection :

$$\hat{\pi}_h^{CR} : \begin{cases} H^1(\hat{T}) & \rightarrow X_h \\ \hat{v} & \mapsto \sum_{f \in \{1, \dots, d+1\}} \hat{\pi}_f \hat{v} \phi_f \end{cases}, \text{ où } \hat{\pi}_f v = \frac{1}{|\hat{F}_f|} \int_{\hat{F}_f} v d\sigma.$$

avec $\hat{v} = v \circ \mathcal{F}_\ell^{-1}$. On reprend la preuve de la Proposition 7, p. 43, et on passe dans l'élément de référence pour obtenir :

$$\|v - \pi_h^{CR}(v)\|_{L^2(T_\ell)}^2 \leq \frac{|T_\ell|}{|\hat{T}|} \|\hat{v}_\ell - \hat{\pi}_h^{CR}(\hat{v}_\ell)\|_{L^2(\hat{T})}^2$$

On observe que l'opérateur $\hat{\pi}^{CR}$ est l'opérateur identité pour les fonctions affines. En particulier, il préserve les fonctions constantes. Ceci implique que la fonction $v_\ell - \pi_h^{CR}(\hat{v}_\ell)$ est à moyenne nulle. On utilise l'inégalité de Poincaré-Steklov (3.21) :

$$\|v - \pi_h^{CR}(v)\|_{L^2(T_\ell)}^2 \leq \frac{|T_\ell|}{|\hat{T}|} |\hat{v}_\ell - \hat{\pi}_h^{CR}(\hat{v}_\ell)|_{H^1(\hat{T})}^2$$

Ensuite, en utilisant un changement de variable, l'inégalité se ré-écrit :

$$\|v - \pi_h^{CR}(v)\|_{L^2(T_\ell)}^2 \leq \frac{|T_\ell|}{|\hat{T}|} \|\mathbb{B}_\ell\|^2 \left(\frac{|T_\ell|}{|\hat{T}|} \right)^{-1} |v_\ell - \pi_h^{CR}(v_\ell)|_{H^1(T_\ell)}^2$$

et donc :

$$\|v - \pi_h^{CR}(v)\|_{L^2(T_\ell)}^2 \leq h_\ell^2 |v_\ell - \pi_h^{CR}(v_\ell)|_{H^1(T_\ell)}^2$$

□

Théorème 8. (Inégalité de Poincaré-Steklov discrète) [21, Lemme 36.6]

Il existe une constante C_{PS}^{nc} indépendante du pas du maillage \mathcal{T}_h et proportionnelle au diamètre de Ω , tel que

$$\forall v_h \in X_{0,h}, \quad \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{PS}^{nc} \|v_h\|_h. \quad (3.37)$$

Problème de diffusion anisotrope et éléments finis de Crouzeix-Raviart

On considère le problème suivant :

Problème: 4. Trouver u tel que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\lambda \mathbf{grad}(u)) &= f && \text{dans } \Omega \\ u &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

avec $\lambda \in L^\infty(\Omega) := \left\{ f \text{ mesurable sur } \Omega : f \text{ est essentiellement bornée} \right\}$, [38, (1.5b), p.7]

une fonction uniformément bornée par une constante strictement positive. On peut alors donner la formulation faible associée à ce problème :

Problème: 5. Trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \lambda \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v \, dx = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (3.38)$$

Ce problème admet une unique solution [14, Lemme 61.1, p.60]. Il suffit de montrer que la forme bilinéaire $(u, v) \mapsto \int_{\Omega} \lambda \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v \, dx$ définie un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. On peut alors appliquer le théorème de Lax-Milgram (voir théorème 20, p. 172).

Remarque 7. On peut généraliser le problème en substituant λ par $\Lambda \in (L^\infty(\Omega))^{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d}$ [21, Remarque 40.2, p. 194].

Le problème discrétisé avec les éléments finis P_{nc}^1 s'écrit alors :

Problème: 6. Trouver $u \in X_{0,h}$, tel que

$$a_{\lambda,h}(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \quad \forall v_h \in X_{0,h} \quad (3.39)$$

avec la forme bilinéaire $a_{\lambda,h}$ définie par (3.40).

$$a_{\lambda,h} : \begin{cases} X_{0,h} \times X_{0,h} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (u_h, v_h) & \mapsto a_{\lambda,h}(u_h, v_h) := \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \int_{T_\ell} \lambda \mathbf{grad} u_h \cdot \mathbf{grad} v_h \, dx \end{cases} \cdot \quad (3.40)$$

On a alors la proposition suivante donnée dans [21, Lemme 41.1] :

Proposition 11. Le problème 6 est bien posé. Il admet une unique solution qui dépend continûment des données.

Démonstration. De la même façon, on peut montrer que la forme bilinéaire $a_{\lambda,h}$ est un produit scalaire sur $X_{0,h}$. La preuve est exactement la même que celle de la proposition 8. On conclut que ce problème admet une unique solution en utilisant le théorème de Lax-Milgram (voir théorème 20, p. 172). \square

3.4.2 Les éléments finis non-conformes d'ordre 1 vectoriels

Pour les paires d'éléments finis que nous présentons dans cette section, l'espace des vitesses discrètes est le sous-espace de $\mathcal{P}_h \mathbf{H}^1$, tel que :

$$\mathbf{X}_h := (X_h)^d \quad (3.41)$$

On peut alors généraliser le "patch test" pour les éléments \mathbf{P}_{nc}^1 :

$$[\mathbf{v}_h]_{F_f}(\overline{\mathbf{O}\mathbf{M}_f}) = \mathbf{0} \quad (3.42)$$

On appelle $\mathbf{X}_{0,h}$ le sous-espace des vecteurs de \mathbf{X}_h :

$$\mathbf{X}_{0,h} := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \mid \mathbf{v}_h|_{\partial\Omega} = \mathbf{v}_h(\overline{\mathbf{O}\mathbf{M}_f}) = \mathbf{0}, \forall f \in \mathcal{I}_F^b\}. \quad (3.43)$$

Pour la même raison que l'espace X_h , cette approximation est non-conforme dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$: $\mathbf{X}_h \not\subset \mathbf{H}^1(\Omega)$.

On peut définir le produit scalaire associé à l'espace $\mathbf{X}_{0,h}$ suivant :

$$(\cdot, \cdot)_h : \begin{cases} \mathbf{X}_{0,h} \times \mathbf{X}_{0,h} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) & \mapsto (\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)_h := (\mathbf{Grad}_h \mathbf{v}_h, \mathbf{Grad}_h \mathbf{w}_h)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \end{cases} \quad (3.44)$$

associée à la norme $\|\cdot\|_h$.

Proposition 12. *La forme bilinéaire $(\cdot, \cdot)_h$ est bien un produit scalaire associé à l'espace $\mathbf{X}_{0,h}$.*

Démonstration. Les preuves de propriétés de symétrie, et de positivité sont immédiates. Il reste à montrer que la forme bilinéaire $(\cdot, \cdot)_h$ est bien définie. Celle-ci se montre avec la proposition (8), en appliquant le même raisonnement à chaque composante scalaire. \square

On notera aussi l'opérateur div_h tel que :

$$\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \forall \ell \in \mathcal{I}_T, \text{div}_h(\mathbf{v}_h)|_{T_\ell} = \text{div}(\mathbf{v}_h)|_{T_\ell}.$$

Fonctions de base pour les éléments en vitesse

On donne les fonctions de bases vectorielles des éléments finis \mathbf{P}_{nc}^1

$$\phi_{\alpha,\ell}^\beta := \phi_{\alpha,\ell}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_\beta,$$

et on définit

$$\phi_f^\beta := \phi_f(\mathbf{x}) \mathbf{e}_\beta. \quad (3.45)$$

L'opérateur d'interpolation des éléments finis vectoriel de Crouzeix-Raviart non-conforme d'ordre 1 est défini par :

$$\Pi_h^{CR} := (\pi_h^{CR})^d. \quad (3.46)$$

Notons que $\forall f \in \mathcal{I}_F, \int_{F_f} \Pi_h^{CR} \mathbf{v} d\sigma = \int_{F_f} \mathbf{v} d\sigma$. On donne les propriétés de l'opérateur d'interpolation Π_h^{CR} suivantes :

Proposition 13. *Les inégalités suivantes sont vérifiées :*

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \|\Pi_h^{CR} \mathbf{v}\|_h \leq \|\mathbf{Grad} \mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad (3.47)$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \forall \ell \in \mathcal{I}_T, \quad \|\mathbf{v} - \Pi_h^{CR}(\mathbf{v})\|_{\mathbb{L}^2(T_\ell)} \lesssim h_\ell \|\mathbf{Grad} \mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^2(T_\ell)}. \quad (3.48)$$

De plus, pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{P}^1(\Omega)$, $\Pi_h^{CR} \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Démonstration. On a déjà montré ces inégalités dans le lemme 13 pour le cas scalaire. La preuve est donc immédiate. \square

Théorème 9. (Inégalité de Poincaré-Steklov discrète) [21, Lemme 36.6]

Il existe une constante C_{PS}^{nc} indépendante du pas du maillage \mathcal{T}_h et proportionnelle au diamètre de Ω , tel que

$$\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h}, \quad \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C_{PS}^{nc} \|\mathbf{v}_h\|_h \quad (3.49)$$

Discussions sur la stabilité des éléments finis $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ pour le problème de Darcy-Stokes

Le problème de Darcy-Stokes s'écrit : Trouver (\mathbf{u}, p) tel que :

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{u} - 2\mu \text{div}(D) + \mathbf{grad} p &= \mathbf{f} \\ \text{div}(\mathbf{u}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

avec

- les constante de viscosité et perméabilité $\sigma > 0, \mu > 0$ et au moins l'un des deux est plus grand que 1.
- le tenseur D défini par (2.20), p. 29
- la forces \mathbf{f} .

Ce problème est intéressant à résoudre, car il peut intervenir lorsqu'on utilise des schémas de projection pour les écoulements de Stokes et pour les écoulements à nombre de Reynolds élevé. Dans ce cas, un schéma pouvant résoudre le problème de Darcy et celui de Stokes peut être avantageux. Le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ est un bon candidat, mais celui-ci ne converge pas lorsqu'on l'applique au problème de Darcy. Ceci est expliqué dans l'article [64] [65]. Dans ces articles, il est stipulé que ces instabilités viennent du fait que l'inégalité de Korn n'est pas vérifiée :

$$\exists C > 0, \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C(\|D\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)})$$

Pour pouvoir corriger l'élément $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ et vérifier l'inégalité de Korn, on ajoute une pénalisation issue des méthodes de Galerkin Discontinues qui s'écrit :

$$s_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{f \in \mathcal{I}_f^i} \int_{F_f} 2 \frac{\mu}{h} [\mathbf{u}] \cdot [\mathbf{v}] d\sigma \quad (3.51)$$

Dans [65], il est expliqué que le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ avec cette stabilisation correspond exactement à une méthode de Galerkin Discontinues.

3.4.3 Lien avec la méthode HHO

La méthode HHO (Hybrid High-Order) [51] est une méthode de discrétisation non conforme qui s'inscrit dans le formalisme des schémas gradients [66]. Les liens entre cette méthode et les méthodes de Galerkin Discontinues Hybrides (HDG) ont été fait dans [67] et le lien entre la méthode HHO et la méthode des Virtual Element methods (VEM) est proposée dans [68]. Ce schéma a aussi été appliqué aux équations de Stokes et Navier-Stokes [69, 70].

Présentation de la méthode HHO :

La méthode HHO consiste à créer un schéma qui approche la solution avec des polynômes de degrés l dans les cellules et k sur les facettes. Le principe repose sur deux points :

- La reconstruction locale : On résout un problème local dans chaque élément avec une intégration par partie.
- Le terme de stabilisation : On ajoute un terme de pénalisation qui permet d'imposer faiblement sur chaque face de la cellule la consistence entre les inconnues de la face et les traces des inconnues de cellule de part et d'autre de la face. Cela assure la stabilité tout en préservant les propriétés d'approximation de reconstruction.

Un des avantages des schémas HHO est qu'ils sont définis sur des mailles de forme polytopal [51, définition 1.4]. Néanmoins, pour simplifier les notations, nous considérons ici seulement un maillage de simplexe.

Approximation polynomiale

Pour présenter l'espace d'approximation polynomiale, on introduit deux définitions :

Définition 6. On définit \mathbf{A}_d^l l'espace de vecteur à d composantes et dont la somme de chaque composante est inférieure à $l \in \mathbb{N}$. On a donc

$$\mathbf{A}_d^l := \{\alpha \in \mathbb{N}^d : |\alpha| \leq l\} \quad (3.52)$$

On note son cardinal N_d^l qui vaut d combinaisons parmi l .

$$N_d^l := \text{card}(\mathbf{A}_d^l) = \binom{l+d}{d} = \frac{(l+d)!}{l!d!} \quad (3.53)$$

L'idée est de réaliser une approximation polynomiale sur les cellules et sur les facettes. Pour simplifier, on réalise une approximation de même ordre sur les facettes et les cellules. On note le degré de cette approximation k . On considère X un sous-ensemble de \mathbb{R}^d . On définit l'espace polynomiales de degré au plus l défini sur X par :

$$\mathbb{P}^l(X) := \left\{ p : X \rightarrow \mathbb{R} : \exists (\gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{A}_d^l} \in \mathbb{R}^{N_d^l} \text{ tel que } p(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbf{A}_d^l} \gamma_\alpha \mathbf{x}^\alpha, \quad \forall \mathbf{x} \in X \right\}.$$

On a alors que

$$\dim(\mathbb{P}_d^l) = N_d^l.$$

Cette espace est similaire à $P^k(D)$, où D un ensemble de simplexe. Cependant, cette définition nous permet également de définir des espaces polynomiaux sur des éléments géométriques de dimensions plus petit que d . Par exemple, nous pouvons appliquer la même définition à une facette ou à une cellule.

Projection sur des espaces polynomiaux locaux

Par la suite x désignera l'indice d'une cellule ou d'une facette notée X_x . On définit les projecteurs suivant [51, d'éditions 1.38 & 1.39, p.29] :

Définition 7. Le projecteur L^2 orthogonal $\pi_x^{0,l}$ est défini par :

$$\begin{aligned} \pi_x^{0,l} : L^1(X_x) &\rightarrow \mathbb{P}^l(X_x) \\ v &\rightarrow \pi_x^{0,l}v \end{aligned} \quad (3.54)$$

et tel que $\forall w \in \mathbb{P}^l(X_x)$

$$(\pi_x^{0,l}v - v, w)_{L^2(X_x)} = 0.$$

Définition 8. Le projecteur elliptique $\pi_x^{1,l}$ est défini par :

$$\begin{aligned} \pi_x^{1,l} : L^1(X_x) &\rightarrow \mathbb{P}^l(X_x) \\ v &\rightarrow \pi_x^{1,l}v \end{aligned} \quad (3.55)$$

et tel que $\forall w \in \mathbb{P}^l(X_x)$,

$$(\mathbf{grad}(\pi_x^{1,l}v - v), \mathbf{grad} w)_{L^2(X_x)} = 0 \quad \text{et} \quad (\pi_x^{1,l}v - v, 1)_{L^2(X_x)} = 0.$$

Application au problème de Poisson

Pour illustrer le schéma, considérons le problème de Poisson décrit par (3.56).

Problème: 7. Trouver u tel que :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.56)$$

avec $f \in L^2(\Omega)$. On rappelle que sa formulation variationnelle est donnée par :

Problème: 8. Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.57)$$

Nous effectuons une construction locale en nous positionnant dans une cellule spécifique, où nous calculons ensuite toutes les contributions associées.

Calcul du projecteur L^2 elliptique local

On fixe un degré k et un élément du maillage T_ℓ , $\ell \in \mathcal{I}_T$. Soit $(v, w) \in H^1(T_\ell) \times H^1(T_\ell)$ et $\Delta w \in L^2(T_\ell)$. En intégrant par partie avec (2.6), p. 25, on obtient :

$$(\mathbf{grad} v, \mathbf{grad} w)_{L^2(T_\ell)} = -(v, \Delta w)_{L^2(T_\ell)} + \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} (v, \mathbf{grad} w \cdot \mathbf{n}_{f,\ell})_{L^2(F_f)}. \quad (3.58)$$

Si on prend $w \in \mathbb{P}^{k+1}(T_\ell)$, alors, pour $k \geq 1$, $\Delta w \in \mathbb{P}^{k-1}(T_\ell) \subset \mathbb{P}^k(T_\ell)$ et pour $k = 0$, $\Delta w = 0$, $\Delta w \in \mathbb{P}^k(T_\ell)$.

— En utilisant la définition 7 de $\pi_\ell^{0,k}$, on peut substituer le terme

$$(v, \Delta w)_{L^2(T_\ell)} \quad \text{par} \quad (\pi_\ell^{0,k} v, \Delta w)_{L^2(T_\ell)},$$

dans le second membre de l'équation (3.58). De plus, pour tout $f \in \mathcal{I}_{F,\ell}$, on a $\mathbf{grad} w \in (\mathbb{P}^k(F_f))^d$, car $\mathbf{n}_{f,\ell} \in (\mathbb{P}^0(F_f))^d$.

— En utilisant la définition 7 du projecteur $\pi_f^{0,k}$, on peut remplacer

$$(v, \mathbf{grad} w \cdot \mathbf{n}_{f,\ell})_{L^2(F_f)} \quad \text{par} \quad (\pi_f^{0,k} v, \mathbf{grad} w \cdot \mathbf{n}_{f,\ell})_{L^2(F_f)}.$$

— Finalement, en utilisant la définition 8 du projecteur elliptique $\pi_\ell^{1,k+1}$, on écrit :

$$(\mathbf{grad} \pi_\ell^{1,k+1} v, \mathbf{grad} w)_{L^2(T_\ell)} \quad \text{au lieu de} \quad (\mathbf{grad} v, \mathbf{grad} w)_{L^2(T_\ell)}.$$

En conclusion, on obtient :

$$(\mathbf{grad} \pi_\ell^{1,k+1} v, \mathbf{grad} w)_{L^2(T_\ell)} = -(\pi_\ell^{0,k} v, \Delta w)_{L^2(T_\ell)} + \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} (\pi_f^{0,k} v, \mathbf{grad} w \cdot \mathbf{n}_{f,\ell})_{L^2(F_f)}. \quad (3.59)$$

Et en utilisant les définitions de $\pi_\ell^{0,k}$ et $\pi_\ell^{1,k+1}$:

$$0 = (\pi_\ell^{1,k+1} v - v, 1)_{L^2(T_\ell)} = (\pi_\ell^{1,k+1} v - \pi_\ell^{0,k} v, 1)_{L^2(T_\ell)}.$$

Cela veut dire que pour calculer $\pi_\ell^{1,k+1} v$, on a juste besoin de :

- $\pi_\ell^{0,k} v$ la projection L^2 de v sur $\mathbb{P}^k(T_\ell)$
- $\forall f \in \mathcal{I}_{F,\ell}$, $\pi_f^{0,k} v$ la projection L^2 de v sur $\mathbb{P}^k(F)$.

Espace des inconnues locales discrètes

Dans cette partie, on se place localement dans une cellule T_ℓ , $\ell \in \mathcal{I}_T$. L'espace des inconnues locales est donné par :

$$\underline{U}_\ell^k := \{ \underline{v}_\ell = (v_\ell, (v_f)_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}}) : v_\ell \in \mathbb{P}^k(T_\ell) \text{ et } v_f \in \mathbb{P}^k(F_f) \forall f \in \mathcal{I}_{F,\ell} \}. \quad (3.60)$$

Ainsi, si $k = 0$, nous avons une inconnue par cellule et une inconnue par facette. Si $k = 1$, on aura $N_d^1 = d + 1$ inconnues par cellule et $N_{d-1}^1 = d$ inconnues par facettes où N_d^l est défini par (3.53) et ainsi de suite. On définit ensuite la semi-norme discrète H^1 sur T_ℓ par :

$$\begin{aligned} \forall \underline{v}_\ell \in \underline{U}_\ell^k, \quad \| \underline{v}_\ell \|_{1,T_\ell} &:= \left(\| \mathbf{grad} v_\ell \|_{L^2(T_\ell)}^2 + |v_\ell|_{1,\partial T_\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ |v_\ell|_{1,\partial T_\ell} &:= \left(\sum_{F \in \mathcal{I}_{F,\ell}} h_F^{-1} \|v_f - v_\ell\|_{L^2(F_f)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Soit $a_h(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire coercive et continue. On définit la norme discrète associée à la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{a,h} : \mathcal{P}_h H^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \underline{u}_\ell &\rightarrow \|\underline{u}_\ell\|_{a,h} := \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} a_h(\underline{u}_\ell, \underline{u}_\ell). \end{aligned} \quad (3.62)$$

On définit ensuite un outil pour l'analyse de la méthode HHO :

Définition 9. *L'interpolateur local est défini par :*

$$\begin{aligned} \underline{I}_\ell^k : H^1(T_\ell) &\rightarrow \underline{U}_\ell^k \\ v &\rightarrow \underline{I}_\ell^k v := (\pi_\ell^{0,k} v, (\pi_f^{0,k} v)_{\forall f \in \mathcal{I}_{F,\ell}}) \end{aligned} \quad (3.63)$$

La proposition suivante nous donne la continuité de l'interpolateur [51, proposition 2.2, p. 46] :

Proposition 14. (Borne de l'interpolateur local)

Il existe une constante $C_{h_d, \rho, k} > 0$, telle que pour tout $\ell \in \mathcal{I}_T$ et $v \in H^1(T_\ell)$

$$\|\underline{I}_\ell^k v\|_{1, T_\ell} \leq C_{h_d, \rho, k} \|\mathbf{grad} v\|_{L^2(T_\ell)}$$

Construction de l'opérateur de reconstruction de potentiel

On peut créer, en utilisant (3.58) et (3.59), un opérateur de reconstruction pour passer de l'espace HHO à l'espace des polynômes de degré $k+1$ dans chaque cellule. Ce projecteur est défini par [51, (2.16), p.47]. On note celui-ci : $p_\ell^{k+1} : \underline{U}_\ell^k \rightarrow \mathbb{P}^{k+1}(T_\ell)$ tel que pour $\underline{v}_\ell \in \underline{U}_\ell^k, \forall w \in \mathbb{P}^{k+1}(T_\ell)$:

$$(\mathbf{grad} p_\ell^{k+1} \underline{v}_\ell, \mathbf{grad} w)_{L^2(T_\ell)} = (-v_\ell, \Delta w)_{L^2(T_\ell)} + \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} (v_f, \mathbf{grad} w \cdot \mathbf{n}_{f,\ell})_{L^2(F_f)}, \quad (3.64)$$

et

$$(p_\ell^{k+1} \underline{v}_\ell - v_\ell, 1)_{L^2(T_\ell)} = 0. \quad (3.65)$$

L'équation (3.64) est équivalente à, $\forall w \in \mathbb{P}^{k+1}(T_\ell)$:

$$(\mathbf{grad} p_\ell^{k+1} \underline{v}_\ell, \mathbf{grad} w)_{L^2(T_\ell)} = (\mathbf{grad} v_\ell, \mathbf{grad} w)_{L^2(T_\ell)} + \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} (v_f - v_\ell, \mathbf{grad} w \cdot \mathbf{n}_{f,\ell})_{L^2(F_f)}.$$

Quand on compare (3.65) à (3.59), on identifie :

$$p_\ell^{k+1} \underline{I}_\ell^k v = \pi_\ell^{1, k+1} v. \quad (3.66)$$

On illustre ces propriétés de commutation par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^1 & \xrightarrow{\underline{I}_\ell^k} & \underline{U}_\ell^k \\ & \searrow \pi_\ell^{1, k+1} & \downarrow p_\ell^{k+1} \\ & & \mathbb{P}^{k+1}(T_\ell) \end{array}$$

Contribution locale

Dans une cellule T_ℓ , on approche la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ par :

$$a_\ell(\underline{u}_\ell, \underline{v}_\ell) := (\mathbf{grad} p_\ell^{k+1} \underline{u}_\ell, \mathbf{grad} p_\ell^{k+1} \underline{v}_\ell)_{L^2(T_\ell)} + s_\ell(\underline{u}_\ell, \underline{v}_\ell), \quad (3.67)$$

où $s_\ell : \underline{U}_\ell^k \times \underline{U}_\ell^k \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire locale de stabilisation dont le but est d'assurer la coercivité de la forme bilinéaire a_ℓ . Pour que le problème discret soit bien posé, la forme bilinéaire s_ℓ doit satisfaire 3 propriétés [51, hypothèse 2.4] :

Hypothèse 4. (*Propriété de s_ℓ*).

- 1) La forme bilinéaire s_ℓ doit être symétrique semi-définie positive.
- 2) $\exists \eta > 0$, indépendant de h et T_ℓ tel que $\forall \underline{v}_\ell \in \underline{U}_\ell^k$:

$$\eta^{-1} \|\underline{v}_\ell\|_{1, T_\ell}^2 \leq a_\ell(\underline{v}_\ell, \underline{v}_\ell) \leq \eta \|\underline{v}_\ell\|_{1, T_\ell}^2$$

- 3) $\forall w \in \mathbb{P}^{k+1}(T), \forall \underline{v}_\ell \in \underline{U}_\ell^k$

$$s_\ell(\underline{I}_\ell^k w, \underline{v}_\ell) = 0$$

Il existe plusieurs choix de stabilisation. Classiquement, on peut prendre [51, (2.22), p. 50] :

$$s_\ell(\underline{u}_\ell, \underline{v}_\ell) := \sum_{f \in \mathcal{I}_{F, \ell}} h_f^{-1} ((\delta_{\ell, f}^k - \delta_\ell^k) \underline{u}_\ell, (\delta_{\ell, f}^k - \delta_\ell^k) \underline{v}_\ell)_{L^2(F_f)}, \quad (3.68)$$

où

$$\delta_\ell^k \underline{v}_\ell := \pi_\ell^{0, k}(p_\ell^{k+1}(\underline{v}_\ell) - v_\ell), \text{ et } \delta_{\ell, f}^k := \pi_f^{0, k}(p_\ell^{k+1}(\underline{v}_\ell) - v_\ell). \quad (3.69)$$

Dans ce cas là, seules les quantités sur les facettes sont pénalisées. Le facteur h_f^{-1} assure l'homogénéité dans (3.67).

Avant de donner des propriétés sur la forme bilinéaire s_ℓ , on rappelle les définitions des espaces de Sobolev suivants :

Définition 10. (*Multi-indice et espace de sobolev*)

On note $m = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{N}^d$ un multi-indice, tel que $|m| = \sum_{i=1}^d m_i$. On définira alors la dérivée partielle $\partial^m(\cdot) = \partial_1^{m_1} \dots \partial_d^{m_d}$. On peut alors définir les espaces de Sobolev d'ordre $r > 0$ suivants :

$$— H^r(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega) \mid \forall m \in \mathbb{N}^d, |m| \leq r, \partial^m q \in L^2(\Omega)\}, \quad |v|_{H^m(\Omega)} := \left(\sum_{0 < |m| \leq r} \|\partial^m v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

On définit aussi l'espace :

$$\mathcal{P}_h H^r = \{v \in L^2(\Omega); \quad \forall \ell \in \mathcal{I}_T, v|_{T_\ell} \in H^r(T_\ell)\}, \quad \mathcal{P}_h \mathbf{H}^r = [\mathcal{P}_h H^r]^d. \quad (3.70)$$

On peut maintenant donner les propriétés de la forme bilinéaire s_ℓ [51, proposition 2.14] :

Proposition 15. (*Consistance de s_ℓ*).

Soit une cellule T_ℓ , $\ell \in \mathcal{I}_T$ et s_ℓ un terme de stabilisation comme décrit par la propriété 4. Alors si $r \in \{0, \dots, k\}$, $\forall v \in H^{r+2}(T_\ell)$

$$s_\ell(\underline{I}_\ell^k v, \underline{I}_\ell^k v)^{\frac{1}{2}} \leq C h_\ell^{r+1} |v|_{H^{r+2}(T_\ell)}$$

où la constante C dépend de T_ℓ et k .

Démonstration. On utilise la Propriété 4.3 de la forme bilinéaire s_ℓ avec $w = \pi_\ell^{0,k+1}v \in \mathbb{P}^{k+1}(T)$ et la proposition 14. On obtient :

$$\begin{aligned} s_\ell(\underline{I}_\ell^k v, \underline{I}_\ell^k v)^{1/2} &= s_T(\underline{I}_\ell^k(v - \pi_\ell^{0,k+1}v), \underline{I}_\ell^k(v - \pi_\ell^{0,k+1}v))^{1/2} \\ &\leq \eta^{1/2} \|\underline{I}_\ell^k(v - \pi_\ell^{0,k+1}v)\|_{1,T_\ell} \\ &\leq C |v - \pi_\ell^{0,k+1}v|_{1,T_\ell} \quad \text{avec } C = \eta^{1/2} C_{h_d, \rho, k} \\ &\leq Ch_\ell^{r+1} |v|_{H^{r+2}(T_\ell)} \end{aligned}$$

□

Définition des inconnues globales :

On définit l'espace global des inconnues discrètes :

$$\underline{U}_h^k = \{\underline{v}_h = [(v_\ell)_{\ell \in \mathcal{I}_T}, (v_f)_{f \in \mathcal{I}_F}] : v_\ell \in \mathbb{P}^k(T_\ell), \forall \ell \in \mathcal{I}_T, v_f \in \mathbb{P}^k(F_f), \forall f \in \mathcal{I}_F\}.$$

On définit l'interpolateur global :

$$\underline{I}_h^k v := ((\pi_\ell^{0,k} v)_{\ell \in \mathcal{I}_T}, (\pi_f^{0,k} v)_{f \in \mathcal{I}_F}). \quad (3.71)$$

On définit la semi-norme globale :

$$\|\underline{v}_h\|_{1,h}^2 := \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \|\underline{v}_\ell\|_{1,T_\ell}^2. \quad (3.72)$$

On note aussi :

$$\underline{U}_{h,0}^k := \{\underline{v}_h \in \underline{U}_h^k : v_f = 0, \forall f \in \mathcal{I}_F\},$$

l'espace des inconnues associées aux conditions de bord de dirichlet homogènes.

Définitions des formes bilinéaires globales :

On définit les forme bilinéaires globales suivantes :

$$a_h(\underline{u}_h, \underline{v}_h) := \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} a_\ell(\underline{u}_\ell, \underline{v}_\ell), \quad (3.73)$$

et

$$s_h(\underline{u}_h, \underline{v}_h) := \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} s_\ell(\underline{u}_\ell, \underline{v}_\ell). \quad (3.74)$$

On énonce la propriété suivante [51, p. 57] :

Proposition 16. Propriétés de a_h

La forme bilinéaire a_h possède les propriétés suivantes :

— La forme bilinéaire a_h est stable et bornée : $\forall \underline{v}_h \in \underline{U}_{h,0}^k$, on a :

$$\eta^{-1} \|\underline{v}_h\|_{1,h}^2 \leq a_h(\underline{v}_h, \underline{v}_h) \leq \eta \|\underline{v}_h\|_{1,h}^2.$$

— L'erreur de consistance \mathcal{E}_h est telle que, pour tout $r \in \{0, \dots, k\}$ et tout $w \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{P}_h H^r$ tel que $\Delta w \in L^2(\Omega)$.

$$\sup_{\underline{v}_h \in \underline{U}_{h,0}^k, \|\underline{v}_h\|_{1,h} = 1} |\mathcal{E}_h(w; \underline{v}_h)| \leq Ch^{r+1} \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} |w|_{H^{r+2}(T_\ell)},$$

où la constante C ne dépend pas de w et h . L'erreur de consistance \mathcal{E}_h s'écrit :

$$\forall \underline{v}_h \in \underline{U}_{h,0}^k, \quad \mathcal{E}_h(w, \underline{v}_h) := -(\Delta w, \underline{v}_h)_{L^2(\Omega)} - a_h(\underline{I}_h^k w, \underline{v}_h). \quad (3.75)$$

Formulation du problème de poisson pour la méthode HHO

La formulation variationnelle HHO sur le problème de Poisson avec conditions limites de Dirichlet homogènes s'écrit :

Problème: 9. Trouver $\underline{u}_h \in \underline{U}_{h,0}^k$ tel que

$$a_h(\underline{u}_h, \underline{v}_h) = (f, \underline{v}_h)_{0,\Omega}, \quad \forall \underline{v}_h \in \underline{U}_{h,0}^k \quad (3.76)$$

Proposition 17. Le problème (3.76) est bien posé. [51, lemma 2.19].

Démonstration. On vérifie seulement les hypothèses du Théorème 20 (Lax-Milgram) avec $U = \underline{U}_{h,0}^k$. Or $\underline{U}_{h,0}^k$ est un espace Hilbertien avec la norme induite par a_h . La forme bilinéaire est donc U -coercive avec une constante de coercivité égale à 1. Finalement, il suffit d'utiliser une inégalité de Poincaré discrète, prouvé dans [51, p. 55] et l'équivalence des normes de la propriété 16.

$$|(f, v_h)_{L^2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\underline{v}_h\|_{1,h} \leq \eta^{1/2} C_P \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\underline{v}_h\|_{a,h},$$

où C_P est la constante de l'inégalité de Poincaré et $\|\cdot\|$ est définie en (3.62). Ceci implique que la forme linéaire f est continue avec une constante de continuité égale à $\eta^{1/2} C_P$ \square

On donne ensuite un théorème de majoration de l'erreur pour le problème de Poisson [51, théorème 2.32, p. 68] :

Théorème 10. (Estimation d'erreur en norme L^2)

Soit $(\mathcal{M}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ un maillage régulier et $k \geq 0$ un degré polynomial fixé. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ l'unique solution du problème (3.57) et telle que $u \in \mathcal{P}_h H^{r+2}$, pour $r \in \{0 \dots k\}$. Pour tout $h \in \mathcal{H}$, on note $\underline{u}_h \in \underline{U}_{h,0}^k$ l'unique solution de (3.76). Supposons $f \in \mathcal{P}_h H^1$, alors :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \|p_h^{k+1} \underline{u}_h - u\|_{L^2(T_\ell)} &\leq C h^2 \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \|f\|_{H^1(T_\ell)} \quad \text{si } k=0 \\ &\leq C \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} h^{r+2} |u|_{H^{r+2}(T_\ell)} \quad \text{si } k>0 \end{aligned}$$

Avec une constante qui ne dépend pas de h et u .

Lien avec le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$:

Lorsqu'on résout les équations de Stokes (2.35) ou le problème de diffusion anisotrope, avec la méthode HHO [51] sur un maillage de simplexes et les paramètres ($k = 0, l = -1$) (ie. des fonctions de bases constantes sur les faces et aucune fonction de base dans les cellules), cela revient à utiliser le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ [71, p.179]. Par ailleurs, la méthode de stabilisation (3.68), p. 54 utilisée pour la méthode HHO est alors exactement celle donnée pour stabiliser les éléments finis $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ pour le problème de Stokes-Darcy (3.51), p. 50.

3.4.4 Le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$

Le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ est un schéma mixte pour les équations de Stokes et Navier-Stokes basé sur les éléments finis de Crouzeix-Raviart non-conformes d'ordre 1 [33, Exemple 4].

Formulation variationnelle des équations Stokes pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$

On associe à la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ (2.36) la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ telle que :

$$a_h : \begin{cases} \mathbf{X}_{0,h} \times \mathbf{X}_{0,h} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) & \mapsto \nu(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_h \end{cases} . \quad (3.77)$$

L'espace de discrétisation de la pression est défini par l'espace des fonctions constantes sur chaque maille ($P_{disc}^0(\mathcal{T}_h)$) :

$$M_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega); \forall T_\ell, \ell \in \mathcal{I}_T, q_h|_{T_\ell} \in P_{disc}^0(T_\ell)\} = P_{disc}^0(\mathcal{T}_h) \cap L_0^2(\Omega). \quad (3.78)$$

On associe à la forme bilinéaire $b(\cdot, \cdot)$ (2.37), la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$ telle que :

$$b_h : \begin{cases} \mathbf{X}_{0,h} \times M_h & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}_h, p_h) & \mapsto -(\operatorname{div}_h \mathbf{v}_h, p_h) \end{cases} . \quad (3.79)$$

On définit aussi l'espace des fonctions à divergence discrète nulle

$$\mathbf{V}_h := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h} \mid \forall q_h \in M_h, b_h(\mathbf{v}_h, q_h) = 0\}.$$

On montre un lemme intéressant : [64, Lemme 3.1]

Lemme 1. *Pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, on a $\forall \ell \in \mathcal{I}_T, \operatorname{div}(\mathbf{v}_h|_{T_\ell}) = 0$.*

Démonstration. On a avec une intégration par parties :

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}_h \mathbf{v}_h, 1)_{L^2(\Omega)} &= \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} (\operatorname{div} \mathbf{v}_h, 1)_{L^2(T_\ell)} = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \int_{\partial T_\ell} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}|_{\partial T_\ell} d\sigma \\ &= \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \int_{F_f} [\mathbf{v}_h] \cdot \mathbf{n}_f d\sigma = 0 \end{aligned}$$

car $\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h}$ (3.42), p. 48. Donc pour $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ et $q_h \in P_{disc}^0(\mathcal{T}_h)$, si on pose $\bar{q}_h := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} q_h$, on obtient :

$$(\operatorname{div}_h \mathbf{v}_h, q_h)_{L^2(\Omega)} = (\operatorname{div}_h \mathbf{v}_h, \bar{q}_h)_{L^2(\Omega)} + (\operatorname{div}_h \mathbf{v}_h, q_h - \bar{q}_h)_{L^2(\Omega)} = \bar{q}_h \sum_K (\operatorname{div} \mathbf{v}_h, 1)_{L^2(T_\ell)} = 0.$$

Finalement, on a bien $(\operatorname{div}_h \mathbf{v}_h, q_h) = 0$ pour tout $q_h \in P_{disc}^0(\mathcal{T}_h)$, et donc, pour tout $\ell \in \mathcal{I}_T$, $\operatorname{div} \mathbf{v}_h|_{T_\ell} = 0$. □

Lorsqu'on discrétise les équations de Stokes (2.35), p. 33 avec une méthode non-conformes et un terme source $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, les fonctions de tests $\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h}$ n'étant pas dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, il faut réaliser un traitement sur le second membre.

Soit $\ell_{\mathbf{f}} \in \mathcal{L}(\mathbf{X}_{0,h}, \mathbb{R})$ tel que

$$\ell_{\mathbf{f}} : \begin{cases} \mathbf{X}_{0,h} & \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v}_h & \mapsto \ell_{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_h) \end{cases}$$

avec

$$\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h}, \quad \ell_{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_h) := \begin{cases} (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} & \text{si } \mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \\ \langle \mathbf{f}, \mathcal{J}_h(\mathbf{v}_h) \rangle_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} & \text{si } \mathbf{f} \notin \mathbf{L}^2(\Omega). \end{cases} \quad (3.80)$$

où $\mathcal{J}_h : \mathbf{X}_{0,h} \rightarrow \mathbf{Y}_{0,h}$ est un opérateur de moyennisation [38, §22.4.1], avec

$$\mathbf{Y}_{0,h} = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_{h|K} \in \mathbf{P}^k(K)\}.$$

De plus, il existe une constante $C_{\mathcal{J}_h}^{nc}$ strictement positive, indépendante du maillage et telle que :

$$\|\mathcal{J}_h \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leq C_{\mathcal{J}_h}^{nc} \|\mathbf{v}_h\|_h. \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h} \quad (3.81)$$

Pour obtenir un problème bien posé, on remplace le second membre par $\ell_f(\mathbf{v}_h)$.

Par ailleurs, lorsque $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et que le calcul exact de $\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}$, avec $\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h}$ n'est pas possible, nous approchons cette intégrale avec des formules de quadrature qui sont définies dans l'Annexe A.

Nous rappelons le résultat suivant présenté dans [60, Lemme 2] et [72] :

Proposition 18. *L'opérateur d'interpolation Π_h^{CR} des éléments finis P_{nc}^1 joue le rôle d'un opérateur de Fortin (voir (B.20), p. 176) :*

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \|\Pi_h^{CR} \mathbf{v}\|_h \leq \|\mathbf{Grad} \, \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad (3.82)$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \forall q_h \in M_h, \quad (\operatorname{div}_h \Pi_h^{CR} \mathbf{v}, q_h)_{L^2(\Omega)} = (\operatorname{div} \mathbf{v}, q_h)_{L^2(\Omega)}. \quad (3.83)$$

Démonstration. L'équation (3.82) a déjà été prouvé dans la proposition 13, p. 49. Montrons (3.83). On intègre par parties, sur un triangle T_ℓ , $\ell \in \mathcal{I}_T$:

$$\begin{aligned} \int_{T_\ell} \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} &= \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \int_{F_f} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{f,\ell} \, d\sigma = \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \int_{F_f} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_f \, d\sigma, \\ &= \int_{T_\ell} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

□

La proposition précédente permet de montrer rapidement la condition inf-sup de la forme bilinéaire b_h (B.10) sur $\mathbf{X}_h - P_{disc}^0$. En réalité, l'espace \mathbf{X}_h est plus grands que nécessaire pour démontrer la condition inf-sup du schéma. On montre un résultat analogue à la proposition précédente en utilisant un espace plus restreint. On peut construire un opérateur inverse à droite explicite pour l'opérateur div_h de M_h à $\mathbf{X}_{h,0}$:

Lemme 2. *Pour tout $q_h \in M_h$, il existe $\mathbf{v}_{h,\pi_h^0(q_h)} \in \mathbf{X}_{h,0}$ tel que :*

$$-(\operatorname{div}_h \mathbf{v}_{h,\pi_h^0(q_h)}, \pi_h^0(q_h))_{L^2(\Omega)} = \nu^{-1} \|\pi_h^0(q_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.84)$$

$$\|\mathbf{v}_{h,\pi_h^0(q_h)}\|_h \leq C_{\operatorname{div}} \nu^{-1} \|\pi_h^0(q_h)\|_{\Omega} \quad (3.85)$$

Démonstration. Soit $q_h \in M_h$. On utilise la proposition 1, p. 34 : Il existe $\mathbf{v}_{\pi_h^0(q_h)} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tel que

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_{\pi_h^0(q_h)} = -\nu^{-1} \pi_h^0(q_h), \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}_{\pi_h^0(q_h)}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leq C_{\operatorname{div}} \nu^{-1} \|\pi_h^0(q_h)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Soit $\mathbf{v}_{h,\pi_h^0(q_h)} \in \mathbf{X}_{h,0}$ tel que $\forall f \in \mathcal{I}_F^i$,

$$\mathbf{v}_{h,\pi_h^0(q_h)}(M_f) = \Pi_h^{CR}(\mathbf{v}_{\pi_h^0(q_h)})(M_f)$$

On intègre ensuite par parties deux fois et on obtient :

$$\forall \ell \in \mathcal{I}_T, \quad \int_{T_\ell} \operatorname{div} \mathbf{v}_{h,\pi_h^0(q_h)} \, d\mathbf{x} = \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \int_{F_f} \mathbf{v}_{h,\pi_h^0(q_h)} \cdot \mathbf{n}_{f,\ell} \, d\sigma = \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \int_{F_f} \mathbf{v}_{\pi_h^0(q_h)} \cdot \mathbf{n}_{f,\ell} \, d\sigma = \int_{T_\ell} \operatorname{div} \mathbf{v}_{\pi_h^0(q_h)} \, d\mathbf{x}.$$

Ce qui nous donne la première égalité (3.84). La dernière inégalité s'obtient en utilisant (3.47), p. 49. □

On peut donc construire le représentant de q_h dans $\mathbf{X}_{0,h}$ qu'avec les composantes normales. La discrétisation du Problème (2.35) s'écrit alors :

Problème: 10. *Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h$ tels que $\forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h$:*

$$\begin{cases} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) &= \ell_f(\mathbf{v}_h), \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0. \end{cases} \quad (3.86)$$

Avec $\ell_f(\cdot)$ qui est défini par (3.80), p. 57.

Pour montrer l'existence et l'unicité du problème (10), on peut utiliser le théorème 23. Il faut donc vérifier :

- La continuité de la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ sur $\mathbf{X}_{0,h} \times \mathbf{X}_{0,h}$,
- La continuité de la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$ sur $\mathbf{X}_{0,h} \times M_h$,
- La coercivité de la forme bilinéaire sur \mathbf{V}_h définie par (3.26).
- La condition inf-sup discrète entre les espaces $\mathbf{X}_{0,h}$ et M_h pour la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$:

$$\exists \beta > 0, \quad \inf_{\substack{q_h \in M_h \\ q_h \neq 0}} \sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h} \\ \mathbf{v}_h \neq 0}} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \geq \beta \|q_h\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.87)$$

Comme la méthode est non-conforme, on ne peut pas utiliser les propriétés des formes bilinéaires $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ du problème continu pour montrer ces propriétés. Il faut donc démontrer ces quatre points.

Proposition 19. *La forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ est continue et coercive sur $\mathbf{X}_{0,h} \times \mathbf{X}_{0,h}$.*

Démonstration. En utilisant la proposition 12, on sait que : $a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)^{1/2} = \nu^{1/2} \|\mathbf{v}_h\|_h$ est une norme sur $\mathbf{X}_{0,h}$. La coercivité et la continuité de la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ sont donc établies. \square

Rappelons les propriétés [63, Lemme 3.1, Lemme 5.2] :

Proposition 20. *La forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$ est continue et respecte la condition inf-sup discrète (3.87) :*

Démonstration. Pour la continuité de b_h , elle s'obtient en utilisant une inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour montrer la condition inf-sup, à l'instar de la preuve du problème continu (voir Théorème 7, p. 34), nous allons utiliser la proposition 1, p. 34. Cette preuve se base sur le fait que Π_h^{CR} est un opérateur de Fortin : Soit $q_h \in P_{disc}^0(\mathcal{T}_h) \cap L_0^2(\Omega)$, Il existe un unique $\mathbf{v}_{q_h} \in \mathbf{V}^\perp$ tel que $\operatorname{div} \mathbf{v}_{q_h} = q_h$ et

$$\|\mathbf{v}_{q_h}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leq C_{\operatorname{div}} \|\operatorname{div} \mathbf{v}_{q_h}\|_{L^2(\Omega)} = C_{\operatorname{div}} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

En appliquant le lemme 2, on définit la vitesse discrète

$$\mathbf{v}_{h,q_h} := \Pi_h^{CR} \mathbf{v}_{q_h},$$

telle que :

$$\|\mathbf{v}_{h,q_h}\|_h \leq \|\mathbf{Grad} \mathbf{v}_{q_h}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \|\mathbf{v}_{q_h}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leq C_{\operatorname{div}} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.88)$$

Nous avons donc en utilisant (3.83), on a :

$$(\operatorname{div}_h \mathbf{v}_{h,q_h}, q_h)_{L^2(\Omega)} = (\operatorname{div}_h \mathbf{v}_{q_h}, q_h)_{L^2(\Omega)} = \|q_h\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Et en utilisant l'inégalité (3.88), on trouve :

$$|b_h(\mathbf{v}_{h,q_h}, q_h)| \geq \frac{1}{C_{\operatorname{div}}} \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_{h,q_h}\|_h.$$

\square

On observe que dans la preuve de la condition inf-sup, la vitesse est $\mathbf{v}_{h,qh}$ est construite seulement avec les composantes normales (voir le lemme 2). On rappelle le théorème suivant [33, Théorème 3], [73, Théorème 2] :

Théorème 11. *Le problème (3.86) est bien posé. C'est-à-dire qu'il admet une unique solution $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h$ telle que :*

— Si $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ on a :

$$\|\mathbf{u}_h\|_h \leq C_{\mathcal{J}_h}^{mc} \nu^{-1} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}, \quad (3.89)$$

$$\|p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq 2C_{\mathcal{J}_h}^{mc} C_{\text{div}} C_{PS}^{mc} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}. \quad (3.90)$$

— Si $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, on a :

$$\|\mathbf{u}_h\|_h \leq C_{PS}^{mc} \nu^{-1} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad (3.91)$$

$$\|p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq 2C_{PS}^{mc} C_{\text{div}} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad (3.92)$$

avec C_{div} , $C_{\mathcal{J}_h}^{mc}$, C_{PS}^{mc} les constantes définies par (2.41), p. 34, (3.81), p. 58, (3.49), p. 49.

Démonstration. Pour montrer que le problème est bien posé, il suffit d'utiliser le théorème de Babuska-Brezzi (théorème 23, p. 174) avec $X := \mathbf{X}_{0,h}$ défini par (3.41) et $Y := M_h$ par (3.78). La continuité et la coercivité de la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ sont établies par la proposition 19. La continuité et la condition inf-sup de b_h ont été démontrées dans la proposition 20.

Pour montrer (3.89), on considère (\mathbf{u}_h, p_h) l'unique solution de (3.86). On sait que $\text{div}_h \mathbf{u}_h = 0$. Si on prend $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$ dans (3.86), et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que l'inégalité (3.81), p. 58 si $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ ou (3.49), p. 49 si $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, on obtient :

$$\begin{cases} \|\mathbf{u}_h\|_h \leq \nu^{-1} C_{\mathcal{J}_h}^{mc} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} & \text{si } \mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \\ \|\mathbf{u}_h\|_h \leq \nu^{-1} C_{PS}^{mc} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} & \text{si } \mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \end{cases} \quad (3.93)$$

Pour obtenir l'inégalité de stabilité sur p_h (3.90), on utilise la proposition 1, on sait que

$$\exists! \mathbf{v}_{p_h} \in \mathbf{V}^\perp \text{ tel que } \text{div } \mathbf{v}_{p_h} = p_h.$$

On considère $\mathbf{v}_{h,p_h} := \Pi_h^{CR} \mathbf{v}_{p_h}$, et on teste la première équation de (3.86) avec $\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_{h,p_h}$. En utilisant l'inégalité triangulaire, de Cauchy-Schwarz et de Poincaré-Steklov discrète (3.49), puis en utilisant la proposition 13, on obtient :

$$\begin{aligned} \|p_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \nu(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_{h,p_h})_h - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_{h,p_h})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \\ &\leq \nu \|\mathbf{u}_h\|_h \|\mathbf{v}_{h,p_h}\|_h + \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_{h,p_h}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, && \text{en utilisant Cauchy-Schwarz} \\ &\leq 2C_{PS}^{mc} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_{h,p_h}\|_h, && \text{avec (3.49) et (3.93)} \\ &\leq 2C_{PS}^{mc} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\mathbf{Grad } \mathbf{v}_{p_h}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, && \text{avec (3.82)} \\ &\leq 2C_{PS}^{mc} C_{\text{div}} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|p_h\|_{L^2(\Omega)}. && \text{avec (2.41), p. 34} \end{aligned}$$

De la même façon, si $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, la preuve est identique :

$$\begin{aligned} \|p_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \nu(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_{h,p_h})_h - \ell_{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_h), \\ &\leq \nu \|\mathbf{u}_h\|_h \|\mathbf{v}_{h,p_h}\|_h + C_{\mathcal{J}_h}^{mc} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \|\mathbf{v}_{h,p_h}\|_h, && \text{en utilisant Cauchy-Schwarz et (3.81)} \\ &\leq 2C_{\mathcal{J}_h}^{mc} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \|\mathbf{v}_{h,p_h}\|_h, && \text{avec (3.93)} \\ &\leq 2C_{\mathcal{J}_h}^{mc} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \|\mathbf{Grad } \mathbf{v}_{p_h}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, && \text{avec (3.82)} \\ &\leq 2C_{\mathcal{J}_h}^{mc} C_{\text{div}} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \|p_h\|_{L^2(\Omega)}. && \text{avec (2.41), p. 34} \end{aligned}$$

□

Estimation d'erreurs

Pour les estimations d'erreur, on peut consulter l'Annexe B (B.26) et (B.27) en utilisant les propriétés d'approximation des espaces discrets [6, p.25]. On donne ici, les estimations d'erreurs suivantes [33, Théorème 4, 6] :

Théorème 12. *Supposons que la solution du problème (2.35) (\mathbf{u}, p) appartienne à $(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)) \times H^1(\Omega)$. Alors la vitesse \mathbf{u}_h solution du problème (3.86) converge vers \mathbf{u} dans $\mathbf{X}_{0,h}$:*

$$\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_h \lesssim h \left(|\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + \nu^{-1} |p|_{H^1(\Omega)} \right), \quad (3.94)$$

$$\|p_h - p\|_{L^2(\Omega)} \lesssim h \sigma \left(|\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + \nu^{-1} |p|_{H^1(\Omega)} \right). \quad (3.95)$$

De plus, si Ω est un domaine convexe :

$$\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \lesssim h^2 \left(|\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + \nu^{-1} |p|_{H^1(\Omega)} \right). \quad (3.96)$$

On peut voir dans les estimateurs d'erreur (3.96) que même si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, nous avons

$$\|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \nu^{-1} h^2 \|p\|_{L^2(\Omega)}.$$

On se propose de détailler cette estimation dans la prochaine sous-section.

Modes parasites de vitesse

Dans cette sous-section, nous mettons en exergue un problème de vitesses parasites pour le schéma numérique $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$. Ces vitesses parasites sont générées par la non-conformité du schéma et dépendent linéairement de l'inverse de la viscosité.

On considère $\varphi \in H^1(\Omega)$, et les équations de Stokes (2.35) avec $\mathbf{f} = \mathbf{grad} \varphi$. On peut alors écrire le problème sous cette forme :

Problème. *Trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ tels que*

$$\nu(\mathbf{Grad} \mathbf{u}, \mathbf{Grad} \mathbf{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - (p, \text{div} \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} = (\mathbf{grad} \varphi, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \quad (3.97)$$

$$(q, \text{div} \mathbf{u})_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \quad (3.98)$$

Or, en faisant une intégration par parties au membre de droite de (3.97), on obtient :

$$\nu(\mathbf{Grad} \mathbf{u}, \mathbf{Grad} \mathbf{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + (p, \text{div} \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} = -(\varphi, \text{div} \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

On peut alors reformuler le problème précédent par celui-ci :

Problème. *Trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ tels que*

$$\begin{cases} \nu(\mathbf{Grad} \mathbf{u}, \mathbf{Grad} \mathbf{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - ((p - \varphi), \text{div} \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} = 0 & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ (q, \text{div} \mathbf{u})_{L^2(\Omega)} = 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases}$$

En appliquant le théorème 11, on sait que la solution de ce problème existe et qu'elle est unique. Cette solution est $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{0}, \varphi)$.

Si maintenant, nous considérons le problème discret issu du schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$:

Problème: 11. *Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h$ tels que*

$$\begin{cases} \nu(\mathbf{Grad}_h \mathbf{u}_h, \mathbf{Grad}_h \mathbf{v}_h)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - (p_h, \text{div}_h \mathbf{v}_h)_{L^2(\Omega)} = (\mathbf{grad} \varphi, \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h} \\ (q_h, \text{div}_h \mathbf{u}_h)_{L^2(\Omega)} = 0 & \forall q_h \in M_h \end{cases} \quad (3.99)$$

De la même manière que pour le problème continu, on intègre par parties ce terme avec la formule de Green (théorème 4) et on trouve :

$$\begin{aligned} (\mathbf{grad} \varphi, \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \left(- \int_{T_\ell} \varphi \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \int_{F_f} [\mathbf{v}_h] \cdot \varphi \mathbf{n}_{f,\ell} \, d\mathbf{x} \right), \\ &= \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} - \int_{T_\ell} \varphi \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \sum_{f \in \mathcal{I}_F} \int_{F_f} [\mathbf{v}_h] \cdot \varphi \mathbf{n}_f \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Le terme

$$\sum_{f \in \mathcal{I}_F} \int_{F_f} [\mathbf{v}_h] \cdot \varphi \mathbf{n}_f \, d\mathbf{x} \quad (3.101)$$

peut être alors non nul, car $\mathbf{v}_h \notin \mathbf{H}^1(\Omega)$. Ce terme agit alors comme une source numérique pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Ainsi, la solution discrète \mathbf{u}_h n'est pas nulle, elle tend vers $\mathbf{0}$ et génère des vitesses parasites dont l'amplitude va dépendre de ν à cause du terme de diffusion.

On peut montrer avec la propriété du patch test (3.42) la propriété suivante :

Lemme 3. Soit $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\left| \sum_{f \in \mathcal{I}_F} \int_{F_f} [\mathbf{v}_h] \varphi \mathbf{n}_f \, d\sigma \right| \lesssim \sigma h \|\mathbf{grad} \varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_h\|_h. \quad (3.102)$$

Démonstration. En effet, on écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{f \in \mathcal{I}_F} \int_{F_f} [\mathbf{v}_h] \varphi \mathbf{n}_f \, d\sigma &= \sum_{f \in \mathcal{I}_F} \int_{F_f} [\mathbf{v}_h - \bar{\mathbf{v}}_f] \varphi \mathbf{n}_f \, d\sigma, \\ &= \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \int_{F_f} |(\mathbf{v}_h - \bar{\mathbf{v}}_f) \varphi \mathbf{n}_{\partial T_\ell}| \, d\mathbf{x}, \\ &= \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \int_{F_f} |(\mathbf{v}_h - \bar{\mathbf{v}}_f) (\varphi - \bar{\varphi}_\ell) \mathbf{n}_{\partial T_\ell}| \, d\mathbf{x} \quad \text{car} \quad \int_{F_f} (\mathbf{v}_h - \mathbf{v}_f) \, d\sigma = 0. \end{aligned}$$

et donc en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{f \in \mathcal{I}_F} \int_{F_f} [\mathbf{v}_h] \varphi \mathbf{n}_f \, d\sigma \right| \leq \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \|\mathbf{v}_h - \bar{\mathbf{v}}_f\|_{\mathbf{L}^2(F_f)} \|\varphi - \bar{\varphi}_\ell\|_{L^2(F_f)}.$$

— Montrons d'abord une inégalité sur le terme $\|\varphi - \bar{\varphi}_\ell\|_{L^2(F_f)}$. En utilisant l'inégalité de trace locale (3.23), p. 42 puis l'inégalité de Poincaré-Steklov dans la cellule (3.21), p. 42, on a :

$$\begin{aligned} \|\varphi - \bar{\varphi}_\ell\|_{L^2(F_f)} &\leq \sigma^{1/2} \|\varphi - \bar{\varphi}_\ell\|_{L^2(T_\ell)}^{1/2} (h_\ell^{1/2} \|\bar{\varphi}_\ell\|_{L^2(T_\ell)}^{1/2} + \|\mathbf{grad} \varphi\|_{\mathbf{L}^2(T_\ell)}). \\ &\lesssim \sigma^{1/2} h_\ell^{1/2} \|\mathbf{grad} \varphi\|_{\mathbf{L}^2(T_\ell)}. \end{aligned}$$

— Pour obtenir une inégalité sur le terme $\|\mathbf{v}_h - \bar{\mathbf{v}}_f\|_{\mathbf{L}^2(F_f)}$, on utilise la proposition 4, p. 42 (Inégalité de Poincaré-Steklov sur les faces) :

$$\|\mathbf{v}_h - \mathbf{v}_f\|_{\mathbf{L}^2(F_f)} \leq (\sigma h)_{T_\ell}^{1/2} \|\mathbf{Grad} \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{L}^2(T_\ell)}.$$

Finalement, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète, on a prouvé l'inégalité suivante :

$$\left| \sum_{f \in \mathcal{I}_F} \int_{F_f} [\mathbf{v}_h] \varphi \mathbf{n}_f \, d\sigma \right| \lesssim \sigma h \|\mathbf{grad} \varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_h\|_h.$$

□

En particulier, on remarque que même si la stabilité est indépendante de l'anisotropie (3.35), p. 46, ce n'est pas le cas de la consistance du schéma (3.102) qui dépend de h et σ .

Considérons les équations de Stokes (3.86) avec comme terme source :

$$\mathbf{f} = \sum_{f \in \mathcal{I}_F} \int_{F_f} [\mathbf{v}_h] \cdot \varphi \mathbf{n}_f \, dx.$$

On pose $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$ et on obtient :

$$\|\mathbf{u}_h\|_h \lesssim \nu^{-1} \sigma h \|\mathbf{grad} \varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad (3.103)$$

Pour obtenir une approximation qui ne soit pas dégradée par le manque de consistance, il faut choisir le pas du maillage de sorte que $h \ll \nu$. Dans le cadre de nos applications industrielles, on a $\nu = 10^{-5}$ (cf p. 10). Il faut donc un pas de maillage très faible, ce qui sera coûteux.

La solution du problème approché ne sera donc pas $(\mathbf{u}_h, p_h) = (\mathbf{0}, \pi_h^0(\varphi))$. Considérons les équations de Stokes discrétisées par les éléments finis $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ (Problème 10, p. 59), avec comme second membre $\mathbf{f} = \mathbf{grad}(x + y)$. La solution de ce problème est alors :

$$(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{0}, (x + y) - 1) \quad (3.104)$$

Sur la figure 3.5, est représentée l'erreur en vitesse (en norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$) tracée en fonction de la viscosité avec un pas de maillage de $h = 0.05$. On peut voir que l'erreur en vitesse augmente linéairement pas rapport à l'inverse de la viscosité ν . Dans le tableau 3.1, on représente l'erreur absolue en vitesse et relative pression en norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$ pour plusieurs pas de maillage h . On définit

$$\varepsilon_0^{CR}(\mathbf{u}_h) := \begin{cases} \|\mathbf{u}_h^{CR}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} & \text{si } \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \frac{\|\mathbf{u}_h^{CR} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \varepsilon_0^{CR}(p_h) := \begin{cases} \|p_h^{CR}\|_{L^2(\Omega)} & \text{si } p = 0 \\ \frac{\|p_h^{CR} - p\|_{L^2(\Omega)}}{\|p\|_{L^2(\Omega)}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.105)$$

Si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (resp. $p = 0$) on donnera l'erreur absolue en vitesse (resp. en pression), sinon on donnera l'erreur relative. On notera "TCM" le taux de convergence moyenné.

h	$\varepsilon_0^{CR}(\mathbf{u}_h)$	$\varepsilon_0^{CR}(p_h)$
1.00×10^{-1}	1.01×10^0	2.35×10^{-2}
5.00×10^{-2}	2.38×10^{-1}	6.90×10^{-3}
2.50×10^{-2}	5.85×10^{-2}	2.05×10^{-3}
1.25×10^{-2}	1.48×10^{-2}	7.87×10^{-4}
TCM	2.03	1.63

TABLEAU 3.1 – Tableau des erreurs en vitesse et en pression pour $\nu = 10^{-3}$

On peut voir sur la figure 3.4, la représentation de la norme de ces vitesses parasites. L'erreur en vitesse étant générée seulement par ces vitesses parasites, on peut remarquer sur la figure 3.5 que l'amplitude de ces vitesses parasites dépend linéairement de $1/\nu$. Dans le tableau 3.1, on montre que l'amplitude de ces vitesses s'atténue lorsqu'on diminue le pas du maillage et donc que le schéma converge.

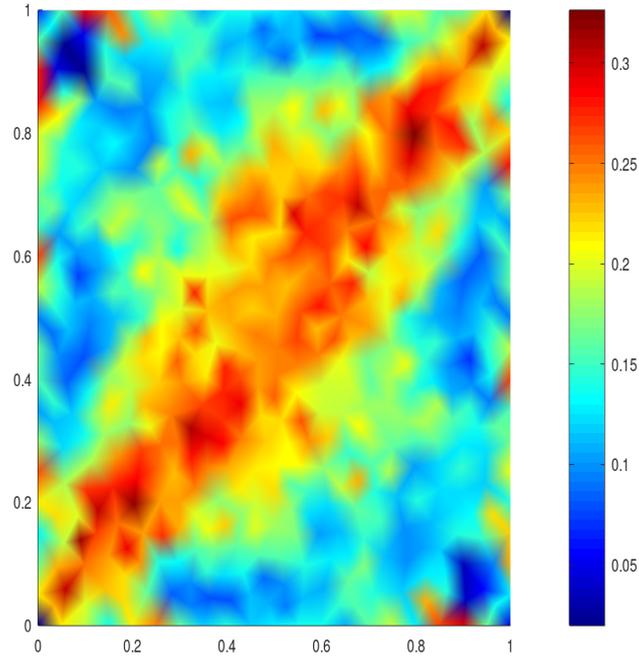


FIGURE 3.4 – Norme des vitesses parasites du schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ pour $(\mathbf{u} = \mathbf{0}, p = x + y - 1)$ et $\nu = 10^{-3}$, $h = 0.05$

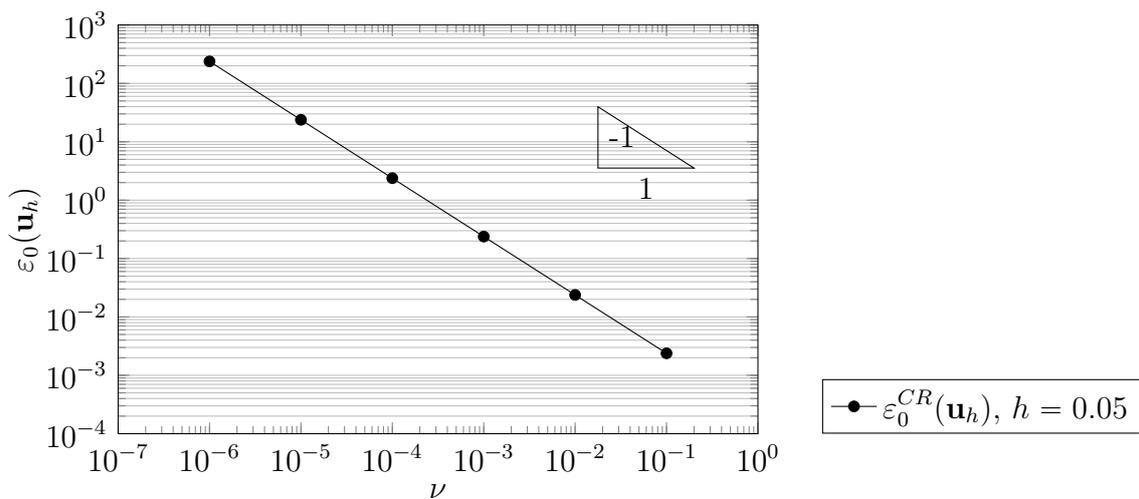


FIGURE 3.5 – Erreur en vitesse, en norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$ pour $(\mathbf{u} = \mathbf{0}, p = x + y - 1)$, le pas de maillage est fixé à $h = 0.05$.

Stratégies pour corriger la consistance du schéma

Considérons le problème 11 sous forme matricielle comme décrit par (1.3), p. 13 :

$$\begin{cases} \nu KU_\nu + B^T P &= F \\ BU &= 0 \end{cases} \quad (3.106)$$

avec F qui ne dépend pas de ν . En particulier, on a $U_\nu = \nu^{-1}K^{-1}(F - B^T P)$. La dépendance par rapport à la viscosité ν de la vitesse est alors évidente car le terme $K^{-1}(F - B^T P)$ ne dépend pas de ν pour ce cas test. Si on pose $U_1 = K^{-1}(F - B^T P)$, on a $U_\nu = \nu^{-1}U_1$. Pour ne plus voir cette dépendance de l'erreur à la viscosité, il peut être intéressant de prendre la norme $(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}^2 + \nu^{-2}\|p\|_{L^2(\Omega)})^{1/2}$ pour la définition de nos erreurs relatives.

Ces vitesses parasites sont donc un problème lorsque l'on va résoudre les équations de Stokes et a fortiori Navier-Stokes avec des viscosités faibles. Celles-ci sont gênantes par leur dépendance à ν qui augmentera donc l'erreur générée par l'approximation. Dans un réacteur à eau pressurisé, ν vaut environ 10^{-5} , ce qui peut augmenter fortement l'erreur. Par ailleurs, ce phénomène est accentué pour les équations de Navier-Stokes avec une résolution itérative car les erreurs se cumulent.

Il existe différentes stratégies pour remédier à ce problème bien connu :

1. Utiliser un schéma avec une approximation polynomiale de degré supérieur [74, 75]. En augmentant l'ordre d'approximation du schéma, on réduit l'amplitude des sources numériques de (3.100).
2. Construire une approximation dans $\mathbf{H}(\text{div } 0; \Omega)$ en effectuant un traitement sur le maillage, qui consiste à supprimer certains degrés de liberté en vitesse. [35]
3. Augmenter le nombre de degrés de liberté des pressions discrètes [5, 6]. Une approche naturelle est de rajouter des degrés de liberté de pression pour renforcer la contrainte de divergence nulle. Cela permet de diminuer l'amplitude du terme de non-conformité sans changer la discrétisation de la vitesse, néanmoins, l'étape de résolution de la pression (1.9) peut devenir alors plus coûteuse. Cette méthode est illustrée par les sections 3.4.5, p. 65 et 3.4.6, p. 74.
4. Projeter les fonctions tests sur un sous-espace discret de $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$ [34]. Ce schéma permet de faire disparaître complètement le terme de discontinuité (3.101), p. 62 puisque l'intégration par partie sera exacte. Il s'agit d'utiliser une projection de la fonction test du second membre sur un élément conforme dans $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$. Néanmoins, elle est complexe à mettre en œuvre pour les équations de Navier-Stokes car elle nécessite de modifier la matrice de masse M de la vitesse ainsi que le terme de convection $L(U^n)$ ce qui peut rendre l'étape (1.9), p. 14 coûteuse. Cette méthode est décrite en section 3.6, p. 81.

On se propose de présenter par la suite les deux derniers schémas. D'autres schémas plus spécifiques existent comme par exemple :

- Considérer une formulation vitesse vorticité pression pour rendre le schéma robuste en pression [76, 43].
- Une stabilisation "grad-div" qui consiste à pénaliser les sauts de vitesse normale le long des arêtes [77].

Ces schémas sont nombreux et ne seront pas étudiés dans la suite de ce manuscrit (car elles s'inscrivent dans un contexte plus large encore).

3.4.5 Le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$

Le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ a initialement été proposé par Heib [5]. Il présente l'avantage de réduire les modes parasites en vitesses tout en apportant une discrétisation

plus précise pour le gradient de pression. L'idée est d'ajouter une nouvelle composante $P^1(\mathcal{T}_h)$ ⁶ à la pression. On présente d'abord les espaces de discrétisation :

Espace pour la vitesse :

L'espace d'approximation des vitesses est l'espace \mathbf{X}_h défini par (3.41), p. 48. Si on impose des conditions de Dirichlet homogène, on utilisera l'espace $\mathbf{X}_{0,h}$ défini par (3.43), p. 48.

Espace pour la pression :

$$M_h^0 := P_{disc}^0(\mathcal{T}_h) \cap L_0^2(\Omega) \quad (3.107)$$

$$\text{Pour } k \in \mathbb{N}^* : \quad M_h^k = P^k(\mathcal{T}_h) \cap L_0^2(\Omega) \quad (3.108)$$

$$M_h := \{ q_h \in L^2(\Omega) / q_h = q_{0,h} + q_{1,h}, \quad q_{0,h} \in M_h^0, \quad q_{1,h} \in M_h^1 \} = M_h^0 + M_h^1. \quad (3.109)$$

On considère le problème suivant :

Problème: 12. *Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h$ tels que $\forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h$:*

$$\begin{cases} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h^{01}(\mathbf{v}_h, p_h) = \ell_{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h} \\ b_h^{01}(\mathbf{u}_h, q_h) = 0. & \forall q_h \in M_h \end{cases} \quad (3.110)$$

avec la forme linéaire $\ell_{\mathbf{f}}(\cdot)$ définie par l'équation (3.80), p. 57 et la formes bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ est définie par (3.77) et la formes bilinéaire $b_h^{01}(\cdot, \cdot)$ est définie par (3.111) :

$$b_h^{01} : \begin{cases} \mathbf{X}_h \times M_h & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}_h, q_h) & \mapsto -(\text{div}_h \mathbf{v}_h, q_{0,h})_{L^2(\Omega)} + (\mathbf{v}_h, \mathbf{grad} q_{1,h})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \end{cases} . \quad (3.111)$$

et on a :

$$\mathbf{V}_h := \{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h} \mid \forall q_h \in M_h, b_h^{01}(\mathbf{v}_h, q_h) = 0 \}$$

Remarque 8. *(Calcul de la norme L^2 de la pression)*

On peut calculer la norme L^2 de la pression avec l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \|p_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} (|T_\ell| (p_{0,h}|_{T_\ell})^2) + \tilde{C}_d \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} |T_\ell| \left(\sum_{i \in \mathcal{I}_{S,\ell}} (p_{1,h}(S_i))^2 + \sum_{i,j \in \mathcal{I}_{S,\ell}} p_{1,h}(S_i) p_{1,h}(S_j) \right) \\ &\quad + \frac{2}{d+1} \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} |T_\ell| p_{0,h}|_{T_\ell} \sum_{i \in \mathcal{I}_{S,\ell}} p_{1,h}(S_i) \end{aligned}$$

avec $\tilde{C}_d = 1/6$ si $d = 2$ et $\tilde{C}_d = 1/10$ si $d = 3$.

On a besoin d'une hypothèse supplémentaire sur le maillage :

Hypothèse 5. *Pour chaque triangle du maillage, il y a au plus une arête qui appartient au bord pour $d = 2$ et au plus deux faces pour $d = 3$.*

6. défini par (3.16), p. 41

Condition inf-sup

Une preuve partielle est disponible dans [5, Section 4.2] et [6, Théorème 4.3.1] à partir des travaux de [63], mais elle est plus difficile à démontrer que celle des $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$. On présente ici une preuve complète faite dans [72]. On utilisera les notations de la page 42. Avant de faire celle-ci, on énonce les propositions et les lemmes suivants nécessaires à la démonstration :

On notera pour tout $q \in L^2(\Omega)$ et $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$:

$$\tilde{q} := q - \pi_h^0(q) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{v}} := \mathbf{v} - \Pi_h^0(\mathbf{v}). \quad (3.112)$$

Lemme 4. Soit $(\mathbf{v}_h, q_{1,h}) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h^1$. L'inégalité suivante est vérifiée :

$$\left| \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{f,\ell}, q_{1,h})_{L^2(F_f)} \right| \leq \sigma \|\mathbf{v}_h\|_h \|\tilde{q}_{1,h}\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.113)$$

Démonstration. La preuve de ce théorème est identique à celle du lemme 3, p. 62. \square

Proposition 21. (Décomposition L^2 -orthogonale de M_h) Soit $q_h \in M_h$, $q_h = q_{0,h} + q_{1,h}$ et $(q_{0,h}, q_{1,h}) \in M_h^0 + M_h^1$. On peut définir une décomposition orthogonal de q_h dans $M_h^0 + \widetilde{M}_h^1$ avec

$$\widetilde{M}_h^1 := \{q_h \in M_h \mid \forall \ell \in \mathcal{I}_T, \int_K q_h d\mathbf{x} = 0\}. \quad (3.114)$$

En particulier, si on a $q_h \in M_h$, et $q_h = q_{0,h} + q_{1,h}$, alors $\tilde{q}_{1,h} = q_h - \pi_0(q_h)$. De plus, la somme étant directe, on peut établir l'égalité de norme suivante :

$$\|q_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\pi_h^0(q_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{q}_{1,h}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.115)$$

Si l'hypothèse 5 est vérifiée, alors on peut aussi définir un opérateur inverse à droite explicite de la divergence discrète de M_h^1 à $\mathbf{X}_{T,h} := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h} \mid \forall f \in \mathcal{I}_F, \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_F = 0\}$:

Lemme 5. On suppose l'hypothèse 5, alors $\forall q_{1,h} \in M_h^1, \exists \mathbf{v}_{T,h} \in \mathbf{X}_{T,h}$ tel que :

$$(\mathbf{grad} q_{1,h}, \mathbf{v}_{T,h})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \gtrsim \nu^{-1} \sigma^{-2(d-2)} \|\tilde{q}_{1,h}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (3.116)$$

$$(\text{div} \mathbf{v}_{T,h}, q_{0,h})_{L^2(T_\ell)} = 0 \quad \forall q_{0,h} \in M_h^0, \forall \ell \in \mathcal{I}_T, \quad (3.117)$$

$$\|\mathbf{v}_{T,h}\|_h \lesssim \nu^{-1} \sigma^2 \|\tilde{q}_{1,h}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.118)$$

Démonstration. (Preuve du lemme 5) Soit $q_{1,h} \in M_h^1$. Pour tout $\ell \in \mathcal{I}_T$, on pose $q_\ell := q_{1,h}|_{T_\ell}$ et $\hat{q}_\ell = q_\ell \circ \mathcal{F}_\ell$. L'opérateur \mathbf{grad} est continu de $H^1(\Omega)$ vers $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ [78, Proposition 2.2.10]. En particulier, comme $q_{1,h} \in H^1(\Omega)$, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\forall f \in \mathcal{I}_F, |F_f = T_\ell \cap T_k, \mathbf{grad} q_\ell \times \mathbf{n}_f = \mathbf{grad} q_k \times \mathbf{n}_f.$$

On construit $\mathbf{v}_{T,h} \in \mathbf{X}_{T,h} \mid \forall f \in \mathcal{I}_F, \mathbf{v}_{T,h}(M_f) = \nu^{-1} h_f^2 \mathbf{n}_f \times (\mathbf{grad} q_{1,h} \times \mathbf{n}_f)$, où h_f est le diamètre de la face F_f . On a pour tout $\ell \in \mathcal{I}_T$:

$$(\mathbf{grad} q_{1,h}, \mathbf{v}_{T,h})_{\mathbf{L}^2(T_\ell)} = \nu^{-1} \frac{|K|}{d+1} \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}^i} h_f^2 |\mathbf{grad} q_\ell \times \mathbf{n}_f|^2. \quad (3.119)$$

On effectue un changement de variable du triangle T_ℓ vers l'élément de référence et en utilisant la relation (3.9), p. 41, on obtient :

— Si $d = 2$, en utilisant l'hypothèse 5, on obtient :

$$\sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}^i} h_{F_f}^2 |\mathbf{grad} q_\ell \times \mathbf{n}_f|^2 = \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}^i} |\hat{F}_{f,\ell}|^2 |\mathbf{grad}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{q}_\ell \times \hat{\mathbf{n}}_{f,\ell}|^2 \gtrsim |\mathbf{grad}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{q}_\ell|^2. \quad (3.120)$$

— si $d = 3$, alors le terme précédent s'écrit

$$|\mathbf{grad} q_\ell \times \mathbf{n}_f| = |\hat{F}_{f,\ell}| |F_f|^{-1} |\mathbb{B}_\ell \mathbf{grad}_{\hat{\mathbf{x}} \hat{q}_\ell} \times \hat{\mathbf{n}}_{f,\ell}|.$$

On obtient alors :

$$|\mathbf{grad} q_\ell \times \mathbf{n}_f| \gtrsim |F_f|^{-1} \|\mathbb{B}_\ell^{-1}\|^{-1} |\mathbf{grad}_{\hat{\mathbf{x}} \hat{q}_\ell} \times \hat{\mathbf{n}}_{f,\ell}|. \quad (3.121)$$

Or,

$$h_f |F_f|^{-1} \|\mathbb{B}_\ell^{-1}\|^{-1} \gtrsim \sigma_\ell^{-1},$$

en supposant l'hypothèse 5, on obtient :

$$\sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}^i} h_{F_f}^2 |\mathbf{grad} q_\ell \times \mathbf{n}_f|^2 \gtrsim \sigma_\ell^{-2} |\mathbf{grad}_{\hat{\mathbf{x}} \hat{q}_\ell}|^2$$

On utilise l'inégalité de Poincaré-Steklov dans l'élément de référence \hat{T} (2.2), p. 24 et en appliquant l'inégalité (3.120) ou (3.121) dans l'équation (3.119), on en déduit :

$$(\mathbf{grad} q_{1,h}, \mathbf{v}_{T,h})_{\mathbf{L}^2(T_\ell)} \gtrsim \nu^{-1} \sigma_\ell^{-2(d-2)} |T_\ell| |\mathbf{grad}_{\hat{\mathbf{x}} \hat{q}_\ell}|^2 \gtrsim \nu^{-1} \sigma_\ell^{-2(d-2)} \|\tilde{q}_\ell\|_{\mathbf{L}^2(T_\ell)}^2$$

En sommant sur tout les triangles T_ℓ , $\ell \in \mathcal{I}_T$, on obtient l'équation (3.116). Pour obtenir (3.117), on remarque que $\mathbf{grad} \phi_{f,\ell} = |T_\ell|^{-1} |F_f| \mathbf{n}_{f,\ell}$. En particulier cela implique que :

$$\mathbf{grad}(\phi_{f,\ell}) \perp \mathbf{v}_{T,h}(M_f)$$

et

$$(\operatorname{div} \mathbf{v}_{T,h}, q_{0,h})_{\mathbf{L}^2(T_\ell)} = |T_\ell| q_{0,h}|_{T_\ell} \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}^i} \mathbf{grad} \phi_{f,\ell} \cdot \mathbf{v}_{T,h}(M_f) = 0.$$

Finalement, l'équation (3.118) s'obtient en remarquant que :

$$\mathbf{Grad} \mathbf{v}_{T,h|\ell} = \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}^i} \mathbf{v}_{T,h}(M_f) \otimes \mathbf{grad} \phi_{f,\ell}$$

Ce qui implique :

$$\|\mathbf{Grad} \mathbf{v}_{T,h}\|_{\mathbb{L}(T_\ell)}^2 \lesssim \nu^{-2} \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}^i} |F_f|^2 |T_\ell|^{-1} h_{F_f}^4 |\mathbf{grad} q_\ell \times \mathbf{n}_f|^2.$$

En utilisant l'équation (3.2) et l'hypothèse 5, l'inégalité se réécrit :

$$\|\mathbf{Grad} \mathbf{v}_{T,h}\|_{\mathbb{L}^2(T_\ell)}^2 \lesssim \nu^{-2} \sigma_\ell^2 h_{T_\ell}^2 |T_\ell| \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}^i} |\mathbf{grad} q_\ell \times \mathbf{n}_f|^2 \lesssim \nu^{-2} \sigma_\ell^2 h_{T_\ell}^2 \|\mathbf{grad} q_\ell\|_{\mathbf{L}^2(T_\ell)}^2.$$

L'inégalité (3.25), p. 43 donne :

$$\|\mathbf{Grad} \mathbf{v}_{T,h}\|_{\mathbb{L}^2(T_\ell)} \lesssim \nu^{-1} \sigma_\ell^2 \|\tilde{q}_\ell\|_{\mathbf{L}^2(T_\ell)}.$$

L'inégalité (3.118) s'obtient en sommant l'inégalité précédente sur tout les triangles T_ℓ , $\ell \in \mathcal{I}_T$. □

On énonce le théorème suivant :

Théorème 13. *Si l'hypothèse 5 est vérifiée, alors la forme bilinéaire $b_h^{01}(\cdot, \cdot)$ est continue et respecte une condition de type inf-sup :*

$$\forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h, \quad |b_h^{01}(\mathbf{v}_h, q_h)| \lesssim \sigma \|\mathbf{v}_h\|_h \|q_h\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.122)$$

$$\inf_{q_h \in M_h, q_h \neq 0} \sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h} \\ \mathbf{v}_h \neq 0}} \frac{b_h^{01}(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \gtrsim \frac{1}{\sqrt{2}} C_{\text{div}}^{-2} \sigma^{-2d} \|q_h\|_{M_h}. \quad (3.123)$$

Démonstration. (Preuve du théorème 13)

Soit $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h$. La première inégalité s'obtient en intégrant par parties la forme bilinéaire $b_h^{01}(\cdot, \cdot)$:

$$b_h^{01}(\mathbf{v}_h, q_h) = -(\text{div}_h \mathbf{v}_h, \pi_0(q_h))_{L^2(\Omega)} + \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{f,\ell}, q_{1,h})_{L^2(F_f)}. \quad (3.124)$$

En utilisant Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$|(\text{div}_h \mathbf{v}_h, \pi_0(q_h))_{L^2(\Omega)}| \leq \sqrt{d} \|\mathbf{v}_h\|_h \|\pi_0(q_h)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.125)$$

Finalement, on retrouve la continuité de la forme bilinéaire $b_h^{01}(\cdot, \cdot)$ (3.122) en utilisant (3.125), (3.113) et la proposition 21.

On veut maintenant démontrer la seconde inégalité (3.123). Soit $q_h \in M_h \setminus \{0\}$ avec $q_h = q_{0,h} + q_{1,h}$ tels que $(q_{0,h}, q_{1,h}) \in (M_h^0 \times M_h^1)$ et soit $\mathbf{v}_{h,\pi_h^0(q_h)} = \mathbf{v}_{h,\pi_h^0(q_h)}(q_h)$ issu du lemme 2. En utilisant (3.124), avec (3.113) et (3.84), on établit :

$$b_h^{01}(\mathbf{v}_{h,\pi_h^0(q_h)}, q_h) \gtrsim \nu^{-1} \|\pi_h^0(q_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \sigma \|\mathbf{v}_{h,\pi_h^0(q_h)}\|_h \|\tilde{q}_{1,h}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.126)$$

En utilisant l'inégalité (3.85) et l'inégalité de Young, on obtient pour tout $\epsilon > 0$:

$$-\|\mathbf{v}_{h,\pi_h^0(q_h)}\|_h \|\tilde{q}_{1,h}\|_{L^2(\Omega)} \geq -\frac{1}{2} C_{\text{div}} \nu^{-1} (\epsilon \|\pi_h^0(q_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon^{-1} \|\tilde{q}_{1,h}\|_{L^2(\Omega)}^2). \quad (3.127)$$

En utilisant l'inégalité (3.126) dans (3.127), on écrit :

$$b_h^{01}(\mathbf{v}_{h,\pi_h^0(q_h)}, q_h) \gtrsim \nu^{-1} \left(\left(1 - \frac{\epsilon}{2} C_{\text{div}} \sigma\right) \|\pi_h^0(q_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{C_{\text{div}}}{2\epsilon} \sigma \|\tilde{q}_{1,h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (3.128)$$

Posons $\mathbf{v}_{T,h} := \mathbf{v}_{T,h}(q_{1,h})$ défini dans le lemme 5. En utilisant (3.116) et (3.117), on obtient :

$$b_h^{01}(\mathbf{v}_{T,h}, q_{1,h}) = (\mathbf{grad} q_{1,h}, \mathbf{v}_{T,h})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \gtrsim \nu^{-1} \sigma^{-2(d-2)} \|\tilde{q}_{1,h}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.129)$$

Enfin, considérons $\mathbf{v}_h^* = \mu \mathbf{v}_{h,\pi_h^0(q_h)} + \mathbf{v}_{T,h}$, avec $\mu > 0$. En utilisant les équations (3.128) et (3.129), on infère :

$$\begin{aligned} b_h^{01}(\mathbf{v}_h^*, q_h) &= \mu b_h^{01}(\mathbf{v}_{h,\pi_h^0(q_h)}, q_h) + b_h^{01}(\mathbf{v}_{T,h}, q_h), \\ &\gtrsim \nu^{-1} \left(\mu \left(1 - \frac{\epsilon}{2} C_{\text{div}} \sigma\right) \|\pi_0(q_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\sigma^{-2(d-2)} - \frac{\mu C_{\text{div}}}{2\epsilon} \sigma) \|\tilde{q}_{1,h}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Si on choisit $\epsilon = (C_{\text{div}} \sigma)^{-1} \leq 1$ et $\mu = \sigma^{-2(d-2)} \epsilon^2$, il vient :

$$b_h^{01}(\mathbf{v}_h^*, q_h) \gtrsim C_{\min} \nu^{-1} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.130)$$

avec $C_{\min} = \epsilon^2 \sigma^{-2(d-2)} = C_{\text{div}}^{-2} \sigma^{-2(d-1)}$. Il reste à montrer que la norme $\|\mathbf{v}_h^*\|_h$ est bornée par $\|q_h\|_{L^2(\Omega)}$. Pour prouver cela, on sait que :

$$\|\mathbf{v}_h^*\|_h^2 \leq 2(\mu^2 \|\mathbf{v}_{h,\pi_h^0(q_h)}\|_h^2 + \|\mathbf{v}_{T,h}\|_h^2).$$

Ensuite, en utilisant (3.85) et (3.117), on obtient :

$$\|\mathbf{v}_h^*\| \leq 2\nu^{-2}(\mu^2 C_{\text{div}}^2 \|\pi_0(q_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sigma^4 \|\tilde{q}_{1,h}\|_{L^2(\Omega)}^2),$$

ce qui mène à :

$$\|\mathbf{v}_h^*\|_h^2 \leq C_{\max}^2 \nu^{-2} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{avec} \quad C_{\max} = \sqrt{2}\sigma^2. \quad (3.131)$$

On conclut en utilisant (3.130) et (3.131) pour obtenir (3.123) avec $C_{\min} C_{\max}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} C_{\text{div}}^{-2} \sigma^{-2d}$. \square

On énonce ensuite le théorème suivant [5, Proposition 4.2.2] :

Théorème 14. *Si l'hypothèse 5, p. 66 est vérifiée, alors il existe une unique solution au problème (3.110) qui vérifie :*

$$\|\mathbf{u}_h\|_h + \nu^{-1} \|p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

avec c qui est une constante qui ne dépend pas de h . Si de plus, la solution (\mathbf{u}, p) est dans l'espace $\mathbf{H}^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$, avec Ω convexe, alors il existe une constante c' indépendante de h telle que :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_h + \nu^{-1} \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq c'h (\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + \nu^{-1} \|p\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}).$$

avec $\|\mathbf{v}_h\|_h^2$ la norme de $\mathbf{X}_{0,h}$.

Propriétés en 2D

Avant de montrer une propriété intéressante du schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$, on établit le lemme suivant

Lemme 6. *Soit $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h := \{\mathbf{w}_h \in \mathbf{X}_h \mid \forall q_h \in M_h, \quad b_h^{01}(\mathbf{w}_h, q_h) = 0\}$ et $q_{1,h} \in M_h^1$. On a :*

$$\sum_{f \in \mathcal{I}_F} \int_{F_f} q_{1,h}[\mathbf{v}_h] \cdot \mathbf{n}_f \, d\sigma = 0. \quad (3.132)$$

Démonstration. Soit $q_{1,h} \in M_h^1$, et $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, en utilisant la définition de \mathbf{V}_h et une intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{f \in \mathcal{I}_F} \int_{F_f} q_{1,h}[\mathbf{v}_h] \cdot \mathbf{n}_f &= \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \left(\int_{T_\ell} \mathbf{grad}_h q_{1,h} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \right) + \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \left(\int_{T_\ell} \text{div}(\mathbf{v}_h) q_{1,h} \, d\mathbf{x} \right), \\ &= (\text{div}_h(\mathbf{v}_h), \pi_h^0(q_{1,h}))_{L^2(\Omega)} = 0. \end{aligned}$$

\square

En 2D, on peut montrer une propriété intéressante du schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ [72, Lemme 5-6] :

Lemme 7. *Soit $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$. Alors, pour $d = 2$, nous avons que pour tout $q_{2,h} \in P^2(\mathcal{T}_h)$ défini par (3.16), p. 41,*

$$\sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \int_{T_\ell} \mathbf{grad} q_{2,h} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = 0.$$

Cette propriété illustre le fait que le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ donne une bonne approximation du gradient dans le sens où si $\mathbf{f} = \mathbf{grad} \varphi$ avec $\varphi \in P^2(\mathcal{T}_h)$, alors on obtient exactement $\mathbf{u}_h = \mathbf{0}$.

Démonstration. Soit $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ alors, avec une intégration par parties (théorème 4, p. 25), on obtient :

$$\sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \int_{T_\ell} \mathbf{grad} q_{2,h} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = - \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \int_{T_\ell} q_{2,h} \operatorname{div}(\mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} + \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \int_{\partial T_\ell} q_{2,h} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{|\partial T_\ell} \, d\sigma$$

avec $\mathbf{n}_{|\partial T_\ell}$ la normale sortante à T_ℓ . Comme la fonction \mathbf{v}_h appartient à \mathbf{V}_h , en utilisant le fait que $\operatorname{div}_h \mathbf{v}_h|_{T_\ell}$ est constant T_ℓ , $\ell \in \mathcal{I}_T$, on obtient :

$$\sum_{\ell} \int_{T_\ell} q_{2,h} \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \sum_{\ell} \int_{T_\ell} \pi_0(q_{2,h}) \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = 0$$

Cette dernière égalité est vérifiée car $\forall q \in M_h^0$, $\int_{\Omega} \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h q_h \, d\mathbf{x} = 0$. Ce qui donne :

$$\sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \int_{T_\ell} \mathbf{grad} q_{2,h} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \int_{\partial T_\ell} q_{2,h} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{|\partial T_\ell} \, d\sigma$$

En intégrant par parties et en utilisant le lemme 6, on sait que pour un élément $q_{1,h} \in M_h^1$, on peut écrire :

$$\sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \int_{\partial T_\ell} q_{1,h} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{|\partial T_\ell} \, d\sigma = 0 \quad (3.133)$$

La stratégie de la preuve est d'interpoler $q_{2,h}$ avec un élément de M_h^1 , noté $q_{1,h}$. En utilisant l'équation (3.133) et le lemme 6, on peut écrire :

$$\begin{aligned} (\mathbf{grad}_h q_{2,h}, \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= \sum_{f \in \mathcal{I}_F} \int_{F_f} q_{2,h} [\mathbf{v}_h] \cdot \mathbf{n}_f \, d\sigma \\ &= \sum_{F_f} \int_{F_f} (q_{2,h} - q_{1,h}) [\mathbf{v}_h] \cdot \mathbf{n}_f \, d\sigma \\ &= \sum_{F_f} \int_{F_f} (q_{2,h} - q_{1,h}) [\mathbf{v}_h - \bar{\mathbf{v}}_f] \cdot \mathbf{n}_f \, d\sigma \end{aligned} \quad (3.134)$$

On choisit $q_{1,h}$ tel que $q_{1,h}(S_i) = q_{2,h}(S_i)$ pour tout $i \in \mathcal{I}_S$ de tel sorte que la fonction $(\mathbf{v}_h - \bar{\mathbf{v}}_f)(q_{2,h} - q_{1,h})$ s'annule aux points de quadrature de la formule de Simpson (A.2), p. 169 exacte pour les polynômes de degré 3. On obtient alors :

$$\sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \int_{T_\ell} \mathbf{grad} q_{2,h} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \int_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \int_{F_f} (q_{2,h} - q_{1,h}) (\mathbf{v}_h - \bar{\mathbf{v}}_f) \cdot \mathbf{n}_{|\partial T_\ell} \, d\sigma = 0$$

□

Lemme 8. Soit $\varphi \in H^3(\Omega) \cap L^2_{zmv}(\Omega)$ tel que $|\varphi|_{H^3(\Omega)} \neq 0$. Alors, pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h$,

$$(\mathbf{grad} \varphi, \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \lesssim \sigma h^2 |\varphi|_{H^3(\Omega)} \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

Démonstration. Soit $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h$. En utilisant le lemme 7 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient pour tout $q_h \in P^2(\mathcal{T}_h)$:

$$|(\mathbf{grad} \varphi, \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}| = |(\mathbf{grad}(\varphi - q_h), \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}|.$$

On utilise le lemme de Bramble-Hilbert [38, Lemme 11.9] pour conclure.

□

On peut énoncer les estimations suivantes, valable pour $d = 2$ ([5, Proposition 4.4.1] et [72, Lemme 5]) :

Théorème 15. *Supposons que Ω est convexe et considérons la fonction $\varphi \in H^3(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ qui est telle que $|\varphi|_{H^3(\Omega)} \neq 0$. Soit (\mathbf{u}_h, p_h) la solution de (3.110) avec $\mathbf{f} = \mathbf{grad} \varphi$. La solution des équations de Stokes (2.35), p. 33 est $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{0}, \varphi)$ et on a :*

$$\nu \|\mathbf{u}_h\|_h \lesssim \sigma^2 h^3 |\varphi|_{H^3(\Omega)}; \quad \nu \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \lesssim \sigma^3 h^4 |\varphi|_{H^3(\Omega)}. \quad (3.135)$$

Démonstration. On pose $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$ dans (3.110) et en utilisant le lemme 8, il vient :

$$\nu \|\mathbf{u}_h\|_h^2 = (\mathbf{grad} \varphi, \mathbf{u}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \lesssim \sigma h^2 |\varphi|_{H^3(\Omega)} \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

En utilisant [33, Théorème 4], nous obtenons $\|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \lesssim \sigma h \|\mathbf{u}_h\|_h$. On en déduit que $\nu \|\mathbf{u}_h\|_h \lesssim \sigma^2 h^3 |\varphi|_{H^3(\Omega)}$. En utilisant cette estimation, on retrouve l'inégalité souhaitée :

$$\nu \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \lesssim \sigma^3 h^4 |\varphi|_{H^3(\Omega)}.$$

□

Pour illustrer cette propriété, on résout le problème (2.34), p. 33 avec le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ pour $(\mathbf{u} = \mathbf{0}, p = (x_1 - x_2)^2 - 1/3)$. Ces résultats ont été obtenus avec une maquette sur Octave [79]. Les approximations sont notées $(\mathbf{u}_h^{Trio}, p_h^{Trio})$ et on note les erreurs (définies par (3.136), p. 72 pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$) dans le Tableau 3.2 :

$$\varepsilon_0^{Trio}(\mathbf{u}_h) := \begin{cases} \|\mathbf{u}_h^{Trio}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} & \text{si } \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \frac{\|\mathbf{u}_h^{Trio} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \varepsilon_0^{Trio}(p_h) := \begin{cases} \|p_h^{Trio}\|_{L^2(\Omega)} & \text{si } p = 0 \\ \frac{\|p_h^{Trio} - p\|_{L^2(\Omega)}}{\|p\|_{L^2(\Omega)}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.136)$$

h	$\varepsilon_0(\mathbf{u}_h^{Trio})$	$\varepsilon_0(p_h^{Trio})$
1.00×10^{-1}	1.15×10^{-19}	1.80×10^{-3}
5.00×10^{-2}	1.47×10^{-19}	4.12×10^{-4}
2.50×10^{-2}	1.72×10^{-19}	1.00×10^{-4}
1.25×10^{-2}	1.72×10^{-19}	2.36×10^{-5}
TCM	—	2.08

TABLEAU 3.2 – Tableau des erreurs en vitesse et en pression pour $\nu = 10^{-3}$ avec le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$

Sur le tableau 3.2, on écrit l'erreur en norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$ pour la vitesse et $L^2(\Omega)$ pour la pression. Le terme TCM veut dire le taux de convergence moyen. Nous voyons dans le Tableau 3.2, que l'erreur en norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$ pour la vitesse est nulle à l'erreur machine près. Pour la pression, nous retrouvons de l'ordre 2. En outre, on observera un ordre de convergence supplémentaire (h^2) en vitesse lorsqu'on considérera un cas test avec une vitesse affine et une pression quelconque.

A l'instar du schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P^0$, considérons le problème 11 sous forme matricielle comme décrit par (1.3), p. 13 :

$$\begin{cases} \nu K U_\nu + B^T P = F \\ BU = 0 \end{cases}$$

avec F qui ne dépend pas de ν . En particulier, on a $U_\nu = \nu^{-1}K^{-1}(F - B^T P)$. Si on pose $U_1 = K^{-1}(F - B^T P)$, on a $U_\nu = \nu^{-1}U_1$. Pour le cas $(\mathbf{u} = \mathbf{0}, p = (x_1 - x_2)^2 - 1/3)$, on a $U_1 = 0$ (à la précision machine près) et donc cela implique que $U_\nu = 0$ (à la précision machine fois l'ordre de $(\nu)^{-1}$ près).

Par ailleurs, dans un cadre plus général, une observation numérique est que si la solution exacte est telle que la pression $p \in P^2(\Omega)$ est un polynôme d'ordre 2, alors l'erreur en vitesse ne dépend pas de la viscosité ν . En effet, considérons les équations de Stokes (2.33) avec comme solution

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} (x_1 - x_2)^2 \\ (x_1 - x_2)^2 \end{pmatrix}, \quad p = (x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{3} \quad (3.137)$$

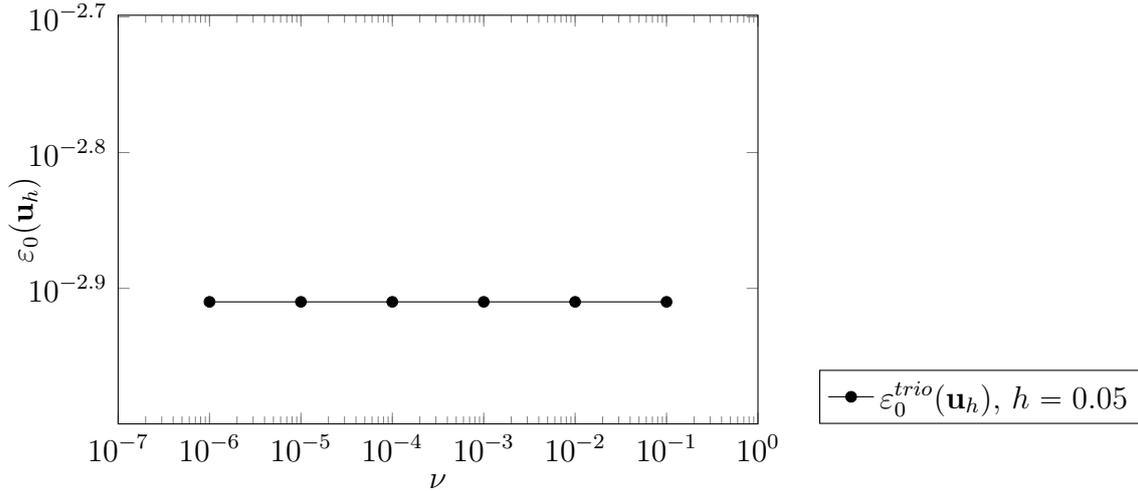


FIGURE 3.6 – Erreur en vitesse, en norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$ pour (\mathbf{u}, p) donnés par (3.137), le pas de maillage est fixé à $h = 0.05$.

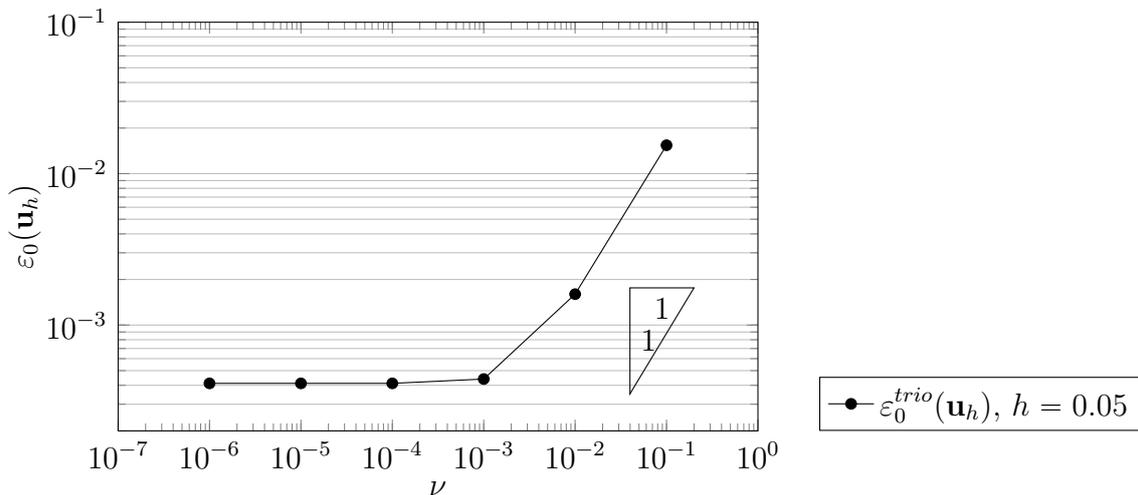


FIGURE 3.7 – Erreur en pression, en norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$ pour (\mathbf{u}, p) donnés par (3.137), le pas de maillage est fixé à $h = 0.05$.

On peut voir sur les figures 3.6 et 3.7 les erreurs relatives en norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ de la vitesse et de la pression tracées en fonction de la viscosité. Nous remarquons que l'erreur en vitesse ne dépend plus de la viscosité et pour la pression, l'erreur diminue jusqu'à atteindre un seuil qui correspond à la viscosité à partir de laquelle l'erreur en pression est dominée par l'erreur générée par l'approximation sur la vitesse.

Néanmoins, cette propriété de super-convergence est due à une formule de quadrature valable seulement en 2D (A.2), p. 169. Pour garder cette propriété de super-convergence en 3D, on doit rajouter des degrés de liberté sur les arêtes comme expliqué dans la thèse [6].

3.4.6 Le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1 + P^a)$ en 3D

Afin d'obtenir les mêmes propriétés du 2D en 3D, Fortin [6] a rajouté une composante d'éléments finis d'arête à la pression. Pour pouvoir définir celui-ci on complète les notations du maillages de la section 3.2.1, p. 37 avec :

- L'espace d'indices des arêtes \mathcal{I}_A (pour $d = 3$), tel que $\mathcal{A}_h := (A_a)_{a \in \mathcal{I}_A}$ est l'ensemble des arêtes. On notera N_A le cardinal de cet espace.
On note $\mathcal{I}_A = \mathcal{I}_A^i \cup \mathcal{I}_A^b$, où $\forall a \in \mathcal{I}_A^i, A_a \subset \Omega$ et $\forall a \in \mathcal{I}_A^b, A_a \subset \partial\Omega$. Leurs cardinaux seront donnés respectivement par N_A^i et N_A^b .
- L'ensemble $\forall f \in \mathcal{I}_F, \mathcal{I}_{A,f} = \{a \in \mathcal{I}_A \mid A_a \subset F_f\}$.
- On utilisera comme indices pour les arêtes : a, a'

Le schéma s'écrit alors avec les espaces de discrétisation suivants :

Pour la vitesse :

L'espace utilisé pour la discrétisation de la vitesse est l'espace \mathbf{X}_h défini par (3.41), p. 48. Si on considère des conditions de Dirichlet homogènes, on choisira l'espace $\mathbf{X}_{0,h}$ (3.43), p. 48.

Pour la pression :

On utilise l'espace M_h^0 et M_h^1 définis respectivement par (3.107), p. 66 et (3.108), p. 66, ainsi que l'espace suivant :

$$M_h^a := \{q_h \in C^0(\bar{\Omega}) \cap L_0^2(\Omega); \forall a \in \mathcal{I}_A, q_h|_{A_a} \in P^2(A_a) \mid q_h(S_i) = 0, \forall i \in \mathcal{I}_S\}. \quad (3.138)$$

Remarque 9. On peut donner une base explicite de M_h^a en fonction des coordonnées barycentriques (3.3). Si on note S_i, S_j les deux sommets de l'arête A_a , $a \in \mathcal{I}_A$ du tétraèdre T . On définit la fonction de base pour l'arête A_a :

$$\phi_a = 4\lambda_i\lambda_j.$$

Pour des raisons de stabilité, on ne peut pas prendre une pression issues de l'espace résultant de la somme des espaces M_h^0, M_h^1 et M_h^a . Pour corriger cela on définit la forme bilinéaire Γ définie sur $(M_h^a + M_h^1) \times (M_h^a + M_h^1)$ telle que,

$$\forall p_h, q_h \quad \Gamma(p_h, q_h) := \sum_{\ell \in \mathcal{I}_\ell} |T_\ell| \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}^i} (\mathbf{grad} p_h(M_f) \times \mathbf{n}_f, \mathbf{grad} q_h(M_f) \times \mathbf{n}_f)_{L^2(F_f)}$$

avec M_f le barycentre de la face F_f . On définit l'espace suivant :

$$M_h^{1,p} := \{q_h^a \in M_h^a \mid \forall q_{1,h} \in M_h^1, \Gamma(q_h^a, q_{1,h}) = 0\}. \quad (3.139)$$

Ainsi, pour $q_h^a \in M_h^a \setminus M_h^{1,p}$ et $q_{1,h} \in M_h^1$, nous avons la relation :

$$\Gamma(q_h^a + q_{1,h}, q_h^a + q_{1,h}) = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_\ell} |T_\ell| \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}^i} (|\mathbf{grad} q_h^a(M_f) \times \mathbf{n}_f|^2 + |\mathbf{grad} q_{1,h}(M_f) \times \mathbf{n}_f|^2),$$

avec $|\cdot|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^3 .

On définira alors l'espace de la pression :

$$M_h := \{q_h \in L^2(\Omega) \mid q_h = q_{0,h} + q_{1,h} + q_h^a, \quad q_{0,h} \in M_h^0, q_{1,h} \in M_h^1, q_h^a \in M_h^a \setminus M_h^{1,p}\}. \quad (3.140)$$

Le problème s'écrit alors :

Problème: 13. Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h$ tel que $\forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h$:

$$\begin{cases} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h^a(\mathbf{v}_h, p_h) = \ell_f(\cdot), & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h} \\ b_h^a(\mathbf{u}_h, q_h) = 0. & \forall q_h \in M_h \end{cases} \quad (3.141)$$

avec la forme linéaire $\ell_f(\cdot)$ définie par l'équation (3.80), p. 57 et la forme bilinéaire a_h définie par (3.77) et la forme bilinéaire b_h^a définie par :

$$b_h^a : \begin{cases} \mathbf{X}_{0,h} \times M_h & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}_h, q_h) & \mapsto - \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \int_{T_\ell} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{grad} (q_{1,h} + q_{a,h}) - \operatorname{div} \mathbf{v}_h q_{0,h} \, d\mathbf{x} \end{cases} \quad (3.142)$$

et donc :

$$\mathbf{V}_h := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h} \mid \forall q_h \in M_h, b_h^a(\mathbf{v}_h, q_h) = 0\}.$$

On énonce le théorème suivant postulé dans [6, Théorème 4.4.3] :

Théorème 16. La forme bilinéaire b_h^a respecte la condition inf-sup :

$$\exists \beta, \quad \inf_{q_h \in M_h, q_h \neq 0} \sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h} \\ \mathbf{v}_h \neq 0}} \frac{b_h^a(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \geq \beta \|q_h\|_{M_h} \quad (3.143)$$

En particulier, le problème 13 est bien posé.

Propriétés de super-convergence en 3D

En 3D, la formule d'intégration suivante, sur une face F_f , $f \in \mathcal{I}_F$:

$$\int_{F_f} p_3 \, d\sigma = |F_f| \left(\sum_{i \in \mathcal{I}_{S,f}} \frac{1}{20} p_3(S_i) + \sum_{a \in \mathcal{I}_{A,f}} \frac{2}{15} p_3(m_{A_a}) + \frac{9}{20} p_3(G_{M_f}) \right).$$

est exacte pour un polynôme de degré 3. Avec S_i , $i \in \mathcal{I}_{S,f}$ les sommets, A_a , $a \in \mathcal{I}_{A,f}$ les arêtes et M_f le barycentre de la face F_f .

Cette remarque justifie l'ajout des degrés de liberté sur les arêtes. De plus, ce nouvel élément satisfait la propriété suivante :

Proposition 22. Soit $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h := \{\mathbf{w}_h \in \mathbf{X}_h \mid \forall q_h \in M_h, b_h^a(\mathbf{w}_h, q_h) = 0\}$. Alors, pour $d = 3$, on a pour tout $q_{2,h} \in P^2(\mathcal{T}_h)$,

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{grad} q_{2,h} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = 0.$$

La preuve est exactement la même que pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$.

Cet ajout de degrés supplémentaires permet donc de conserver la proposition 7 en 3D et garantit la robustesse par rapport aux vitesses parasites. Pour illustrer cela, on résout les équations de Stokes (2.33) avec comme solution :

$$\mathbf{u} = 0, \quad p = \frac{1}{2}(x_1)^2 - \frac{1}{3} \quad (3.144)$$

On représente les erreurs absolues obtenues en vitesse dans le tableau 3.3. Les calculs sont lancés avec le code TrioCFD, pour $\nu = 1$ en utilisant un schéma implicite en temps (car l'hypothèse (1.12), p. 15 pour faire l'approximation (1.15), p. 16 est moins justifiée

h	$\ \mathbf{u}_h^{Trio}\ _{\mathbf{L}^2(\Omega)}$	$\ \mathbf{u}_h^a\ _{\mathbf{L}^2(\Omega)}$
$2.00e-01$	4.30×10^{-6}	3.05×10^{-18}
$1.00e-01$	4.12×10^{-7}	2.82×10^{-17}
$5.00e-02$	4.51×10^{-8}	7.03×10^{-17}
TCM	3.27	—

TABLEAU 3.3 – Tableau des erreurs en vitesse pour $\nu = 1$ avec le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ et le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1 + P^a)$

pour $\nu = 1$). Pour pouvoir résoudre les équations de Stokes, nous résolvons le problème de Stokes instationnaire jusqu'à atteindre la convergence du régime stationnaire. On notera la vitesse \mathbf{u}_h^{Trio} l'approximation résultante du schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ ⁷ et la vitesse \mathbf{u}_h^a celle du schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1 + P^a)$. Les erreurs sont données en absolues on notera l'approximation générée par schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1 + P^a)$: \mathbf{u}_h^a .

On peut voir que pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1 + P^a)$, nous obtenons une erreur absolue pour la norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$ en vitesse qui est exacte, ce qui n'est plus le cas avec le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$. Par ailleurs, cette erreur augmente avec ν , c'est ce qu'on représente ci-dessous, dans le tableau 3.4 où est écrit l'erreur absolues en vitesse pour les deux schéma pour $\nu = 10^{-5}$.

h	$\ \mathbf{u}_h^{Trio}\ _{\mathbf{L}^2(\Omega)}$	$\ \mathbf{u}_h^a\ _{\mathbf{L}^2(\Omega)}$
$2.00e-01$	4.30×10^{-4}	1.17×10^{-17}
$1.00e-01$	4.61×10^{-5}	3.52×10^{-16}
$5.00e-02$	4.94×10^{-6}	3.76×10^{-15}
TCM	3.22	—

TABLEAU 3.4 – Tableau des erreurs en vitesse pour $\nu = 10^{-5}$ avec les schémas $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ et $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1 + P^a)$

Complexité du schéma

Les schémas $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ en 2D et $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1 + P^a)$ en 3D, présentent de bonnes propriétés d'approximation, notamment lorsque le terme source est un gradient d'une fonction polynomiale. Néanmoins, ceux-ci rajoutent un grand nombre de degrés de liberté. Dans cette sous-section, nous verrons comment l'ajout des degrés supplémentaires impacte le calcul.

D'abord, nous donnons le lemme suivant [38, p.76]

Lemme 9. (Relations d'Euler)

Soit \mathcal{T}_h un maillage de simplexes que nous supposons connexe (par simplification). Alors nous avons les relations suivantes :

- Pour $d = 2$, si l'on reprend les notations de la section 3.2.1, c'est à dire, en notant N_T, N_F, N_S le nombre de triangles, faces et sommets ainsi que N_F^b, N_S^b leurs équivalents respectifs sur le bord, on a :

$$N_T - N_F + N_S = 1 \quad (3.145)$$

$$N_S^b - N_F^b = 0 \quad (3.146)$$

$$2N_F - N_F^b = 3N_T \quad (3.147)$$

7. Ce choix est fait car le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ est le schéma par défaut du code TrioCFD lorsqu'on demande la discrétisation "Volume Élément Finis".

- Pour $d = 3$, si on note J le nombre de composantes connexes de la frontière⁸ de Ω (si $\Omega = [0; 1]^3$, nous avons $J = 6$), et N_T, N_F, N_S, N_A nombre de triangles, faces, sommets et arêtes ainsi que N_F^b, N_S^b, N_A^b leurs équivalents respectifs sur le bord, on a :

$$N_T - N_F + N_A - N_S = -J - 1 \quad (3.148)$$

$$N_F^b - N_A^b + N_S^b = 2J \quad (3.149)$$

$$2N_F - N_F^b = 4N_T \quad (3.150)$$

Remarque 10. On veut comparer le nombre de degrés de liberté ajoutés par rapport au $P_{nc}^1 - P_{disc}^0$. Supposons $\Omega = [0; 1]^d$ de tel sorte que $J = 6$. Afin de comparer les nombres de degrés de liberté, avec les relations d'Euler, on estime le nombre de degré de liberté ajouté en fonction du nombre de cellules :

- **En 2D :** En utilisant la formule (3.146) et (3.147), on a :

$$2N_F - N_S^b = 3N_T$$

En substituant N_F dans l'équation (3.145) et en multipliant par 2, nous pouvons écrire :

$$2N_T - 3N_T - N_S^b + 2N_S = 2$$

Soit

$$N_T = 2(N_S - 1) - N_S^b$$

On peut donc conclure que l'on rajoute environ $\frac{N_T}{2}$ inconnues supplémentaires.

- **En 3D :** Il est plus difficile d'utiliser les relations d'Euler mais nous pouvons statuer en prenant en compte qu'il y a six arêtes par tétraèdre qui sont partagées en moyenne par six éléments. On a donc environ autant d'arêtes que de cellule.

On représente dans le tableau 3.5, le nombre d'inconnues en pression pour les différents schéma pour plusieurs pas de maillage et $\Omega = (0, 1)^3$. On peut voir que si il y a, à peu près, le même nombres d'inconnue entre le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ et le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$, ce n'est plus le cas avec le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1 + P^a)$ qui double le nombre d'inconnue. On ajoute donc un grand nombre d'inconnues au schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1 + P^a)$ par rapport au schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ ce qui peut ralentir l'étape de résolution de la pression (1.9), p. 14.

h	$\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$	$\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$	$\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1 + P^a)$
2.00×10^{-1}	2 560	3 289	6 961
1.00×10^{-1}	29 160	36 019	73 981
5.00×10^{-2}	274 360	333 679	676 021
2.50×10^{-2}	2 372 760	2 865 799	5 768 101

TABLEAU 3.5 – Nombres d'inconnues en pression pour plusieurs maillages en 3D

3.5 Formulation variationnelle continue et discrète des équations de Navier-Stokes

Pour pouvoir, de manière analogue aux équations de Stokes, discrétiser les équations de Navier-Stokes, on présente dans cette section la formulation variationnelle et variationnelle

8. C'est à dire, le nombre de groupe connexes minimale utilisés pour définir la frontière. Pour un domaine carré, ce sera $J = 4$ et pour un domaine cubique, ce sera $J = 6$

discrète. Dans cette sous-section, nous considérons $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ afin d'énoncer un théorème d'existence de solution.

3.5.1 Formulation variationnelle des équations de Navier-Stokes

Dans cette sous-section, on présente la formulation faible des équations de Navier-Stokes définies par (2.32). A l'instar des équations de Stokes, multiplions la première équation par une fonction test $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et la seconde par une fonction test $q \in L_0^2(\Omega)$ et intégrons par partie. On définit premièrement la forme tri-linéaire suivante :

$$c : \begin{cases} \mathbf{X} \times \mathbf{X} \times \mathbf{X} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) & \mapsto c(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} - ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} \right) d\mathbf{x} \end{cases} \quad (3.151)$$

Cette forme trilineaire est issue du terme de convection $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u}$ de l'équation (2.32), p. 32. Nous utilisons cette forme et non pas la forme trilineaire $c^*(\cdot, \cdot, \cdot)$ définie par (3.152) :

$$c^* : \begin{cases} \mathbf{X} \times \mathbf{X} \times \mathbf{X} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) & \mapsto c^*(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} \end{cases} \quad (3.152)$$

car, si l'on considère $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in (\mathbf{H}_0^1(\Omega))^3$ alors nous avons :

$$\int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i d\mathbf{x}$$

En intégrant par parties :

$$\int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} = - \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j w_i) v_i d\mathbf{x},$$

$$\int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} = - \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} w_i + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} u_j \right) v_i d\mathbf{x}.$$

Or :

$$- \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial (u_j w_i)}{\partial x_j} v_i d\mathbf{x} = - \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \left(\int_{\Omega} w_i \frac{\partial (u_j)}{\partial x_j} v_i d\mathbf{x} - \int_{\Omega} u_j \frac{\partial (w_i)}{\partial x_j} v_i d\mathbf{x} \right).$$

Ce qui nous donne :

$$\int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) \operatorname{div}(\mathbf{u}) d\mathbf{x} \quad (3.153)$$

En particulier si $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ l'espace des vitesses à divergence nulle défini par (2.39), en posant $\mathbf{w} = \mathbf{v}$, nous avons que :

$$\int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Ce qui implique que :

$$\int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = 0. \quad (3.154)$$

De plus, si $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \quad (3.155)$$

Les équations (3.154) et (3.155) sont automatiquement vérifiées par la forme trilinéaire définie par (3.151) pour $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, car elle est antisymétrique : Si $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, nous avons :

$$c(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0. \quad (3.156)$$

$$c(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -c(\mathbf{u}; \mathbf{w}, \mathbf{v}). \quad (3.157)$$

En particulier, en utilisant l'équation (3.153), nous avons $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in (\mathbf{H}_0^1(\Omega))^3$:

$$c(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{w}) = c^*(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \operatorname{div}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x}$$

et si $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, alors

$$c(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{w}) = c^*(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (3.158)$$

Donc la forme trilinéaire $c(\cdot; \cdot, \cdot)$ ne change pas la solution de notre problème. La forme trilinéaire $c(\cdot; \cdot, \cdot)$ sera plus stable en temps pour les schémas de projection car les relations (3.156) et (3.157) sont vérifiées même lorsque $\mathbf{u} \notin \mathbf{V}$.

Pour les équations de Navier-Stokes, nous avons alors la formulation variationnelle suivante :

Problème: 14.

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + c(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases} \quad (3.159)$$

où les formes bilinéaires $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ sont définies par (2.36), (2.37) et $c(\cdot; \cdot, \cdot)$ la forme tri-linéaire est définie par (3.151).

On rappelle les deux théorèmes suivant [38, Théorème 2.26 p.17] et [38, Lemme 1.40 p.8] :

Théorème 17. (Théorème d'injection de Sobolev) L'injection de l'espace $H_0^1(\Omega)$ dans l'espace $L^4(\Omega)$ est continue :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^4(\Omega)} \leq \sqrt{C_{\Omega}} \|\mathbf{grad} v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

où C_{Ω} est une constante qui ne dépend que de Ω

Théorème 18. (Inégalité de Hölder) Soient $1 \leq p, q, r < \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Alors pour $(u, v, w) \in L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) \times L^r(\Omega)$, le produit $u v w$ appartient à $L^1(\Omega)$ et on a :

$$\int_{\Omega} |u v w| \, d\mathbf{x} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} \|w\|_{L^r(\Omega)}.$$

Proposition 23. Les formes a, b, c sont toutes continues [39, Lemme 2.1, p.284, Théorème 5.1].

Démonstration. La continuité de $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ se montre de manière évidente en utilisant une inégalité de Cauchy-Schwarz. On peut maintenant montrer que $c(\cdot, \cdot, \cdot)$ est continue sur $(\mathbf{H}_0^1(\Omega))^3$. Considérons $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in (\mathbf{H}_0^1(\Omega))^3$, en appliquant le théorème 17, nous obtenons que $u_i, v_i \in L^4(\Omega), \forall i \in \{1, \dots, d\}$. Ensuite en utilisant le théorème 18, et comme $(w_i, \partial_j u_i, v_i) \in L^4(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^4(\Omega)$, alors le produit $w_i \partial_j u_i v_i$ appartient à $L^1(\Omega)$ et :

$$\left| \int_{\Omega} w_j \partial_j u_i v_i \, d\mathbf{x} \right| \leq \|w_j\|_{L^4(\Omega)} \|\partial_j u_i\|_{L^2(\Omega)} \|v_i\|_{L^4(\Omega)}$$

Et en utilisant le théorème 17 avec $\|w_j\|_{L^4(\Omega)}$ et $\|v_i\|_{L^4(\Omega)}$, on obtient :

$$\left| \int_{\Omega} w_j \partial_j u_i v_i \, d\mathbf{x} \right| \leq C_{\Omega} \|w_j\|_{H_0^1(\Omega)} \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)} \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)}$$

□

On suppose que l'hypothèse suivante est vraie :

Hypothèse 6. *On suppose que la vitesse initiale \mathbf{u}_0 et le terme source \mathbf{f} vérifient :*

$$\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}, \mathbf{f} \in L^{\infty}([0, +\infty[; \mathbf{L}^2(\Omega)), \partial_t \mathbf{f} \in L^{\infty}([0, +\infty[; \mathbf{L}^2(\Omega)),$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1} + \sup_{t \geq 0} (\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\partial_t \mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}) \leq C.$$

où C est une constante indépendante du temps.

On peut alors donner un théorème d'existence et d'unicité pour le problème 14. La démonstration est donnée dans [80, Théorème 2]

Théorème 19. *Si l'hypothèse 6 est vérifiée, alors le problème (14) admet une unique solution $(\mathbf{u}, p) \in C([0, T]; \mathbf{V}) \times L^2([0, T]; H^1(\Omega))$ et telle que $(u_t, \partial_{i,j} \mathbf{u}) \in (\mathbf{L}^2(0, T; L^2(\Omega)))^2, \forall i, j \in \{1, \dots, d\}$. Cette solution satisfait les estimations suivantes :*

-Pour $\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \nu e^{-\delta_0 t} \int_0^t e^{-\delta_0 s} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 ds &\leq e^{-\delta_0 t} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \delta_0^{-2} C_f^2, \\ \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \nu e^{-\delta_0 t} \int_0^t e^{-\delta_0 s} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 ds &\leq e^{-\delta_0 t} \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \delta_0^{-2} C_f^2, \end{aligned}$$

-Pour $\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + e^{-\delta_0 t} \int_0^t e^{-\delta_0 s} (\|\partial_t \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}^2 + \|p\|_{H^1(\Omega)}^2) ds &\leq \kappa, \\ \tau(t) (\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}^2 + \|p(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\partial_t \mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2) + e^{-\delta_0 t} \int_0^t e^{\delta_0 s} \tau(s) \|\partial_t \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 ds &\leq \kappa, \\ \tau(t)^2 \|\partial_t \mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + e^{-\delta_0 t} \int_0^t e^{\delta_0 s} \tau(s)^2 (\|\partial_t \mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}^2 + \|\partial_t p\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\partial_{tt} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2) ds &\leq \kappa. \end{aligned}$$

pour tout $t \geq 0$, où $\tau(t) = \min(1, t)$, $\delta_0 = \frac{\nu}{2\gamma_0}$ et où κ est une constante qui dépend seulement des conditions initiales et du domaine Ω .

Il existe peu de théorèmes démontrant l'existence de solutions pour les équations de Navier-Stokes sans faire d'hypothèses particulières. Pour de plus amples informations sur ce sujet, on renvoie à la référence [81].

3.5.2 Formulation variationnelle discrète des équations de Navier-Stokes

Dans cette sous-section, nous présenterons la formulation variationnelle discrète des équations de Navier-Stokes.

Nous partons de la formulation variationnelle des équations de Navier-Stokes définie en (3.159) : Considérons des espaces d'approximation \mathbf{X}_h et M_h approchant $\mathbf{H}^1(\Omega)$ et $L_0^2(\Omega)$. On se restreint à $\mathbf{f}(\cdot, t) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. La formulation variationnelle discrète en espace s'écrit :

Problème: 15. *Trouver $\forall t \in [0, T]$, $(\mathbf{u}_h(\cdot, t), p_h(\cdot, t)) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h$ tel que pour tout $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h$, on a*

$$\begin{cases} (\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t}, \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + c_h(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) & = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) & = 0 \end{cases} \quad (3.160)$$

où a_h est la forme bilinéaire qui modélise le terme de diffusion a , b_h est le terme de couplage vitesse pression b , c_h est le terme de convection.

3.6 Reconstruction d'une vitesse à divergence nulle pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$

Dans cette section, nous présentons le schéma introduit en section 3.4.4, p. 61, pour corriger les problèmes de vitesses parasites des schémas non-conformes. L'idée est de projeter les fonctions tests sur un espace d'éléments finis inclus dans $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$. Cette technique ajoute une erreur de consistance mais corrige le problème des vitesses parasites. En effet, on peut montrer alors que les estimations a-priori en norme $\mathbf{H}^1(\Omega)$ sont indépendantes de la pression. Ce schéma a été initialement présenté par A. Linke [34] pour les équations de Stokes avec le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ puis par [82] pour les équations de Navier-Stokes. Elle a été proposée pour d'autres schémas numériques comme le schéma HHO [83] ou bien pour les schémas de Galerkin discontinues [84]. Mais cela a été aussi effectué avec d'autres espaces d'éléments finis conformes dans $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ comme les éléments finis de Brezzi-Douglas-Marini [85], [86].

3.6.1 Définition des éléments finis de Raviart-Thomas

Pour définir ce schéma, on définit les éléments finis de Raviart-Thomas qui sont des éléments finis conformes dans $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$. Cette propriété est intéressante, car elle permet à la première formule de Green du théorème 4 d'être exacte. Ainsi, il n'y a pas de source numérique due à la non-conformité comme dans l'équation (3.100). On définit les éléments finis de Raviart-Thomas ainsi :

$$\mathbf{X}_h^{RT} := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) / \forall \ell \in \mathcal{I}_T, \exists (\mathbf{a}_{T_\ell}, b_{T_\ell}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \mathbf{v}_h|_{T_\ell}(\mathbf{x}) := \mathbf{a}_{T_\ell} + b_{T_\ell} \mathbf{x}\}. \quad (3.161)$$

On considère une cellule T_ℓ , $\ell \in \mathcal{I}_T$, on peut définir un vecteur

$$\mathbf{v}_h|_{T_\ell}(\mathbf{x}) := \mathbf{a}_{T_\ell} + b_{T_\ell} \mathbf{x}$$

qui sera défini avec $d + 1$ grandeurs (d valeurs pour \mathbf{a}_{T_ℓ} et une pour b). On peut donc déterminer celles-ci avec les valeurs normales de $\mathbf{v}_h|_{F_f} \cdot \mathbf{n}_{\partial T_\ell}$ pour toutes les faces F_f , $f \in \mathcal{I}_{F,\ell}$.

3.6.2 Projection des fonctions tests sur des éléments finis conformes dans $\mathbf{H}(\text{div})$

Ce qui suit est un résumé du travail de Linke [34]. Ce schéma consiste à projeter les fonctions tests sur un espace conforme dans $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$. Le but est de retrouver l'intégration par partie exactement afin de ne pas générer de vitesses parasites (comme dans l'équation (3.100)). L'inconvénient est qu'il faut modifier le terme de convection $L(U)$, le second membre F et la matrice de masse M dans l'équation (1.5), p. 13.

3.6.3 Établissement de la formulation variationnelle

Dans ce qui suit, on notera :

- L'espace des éléments finis de Raviart-Thomas \mathbf{X}_h^{RT} défini par (3.161)
- L'espace des éléments finis de Crouzeix-Raviart non-conformes d'ordre 1 \mathbf{X}_h^{CR} défini par (3.41), p. 48.

On considère la formulation variationnelle des équations de Navier-Stokes (15), p. 81 et on suppose que pour tout $t \in [0, T]$, $\mathbf{f}(t, \cdot) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$.

Définition des projecteurs

Dans un premier temps, pour présenter ce schéma, on doit définir la projection des fonctions de base des Crouzeix-Raviart sur des éléments finis conformes dans $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$. A l'instar de [34], on choisit le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ avec les éléments finis de Raviart-Thomas \mathbf{X}_h^{RT} :

On définit les projecteurs suivants :

1. Projecteur des Éléments finis $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0 : \Pi_h^{CR}$ dont la définition est donné par (3.46), p. 49.
2. Projecteur des Éléments finis de Raviart-Thomas
Ce projecteur est relié à l'espace \mathbf{X}_h^{RT} défini par (3.161).

$$\mathbf{n}_f \cdot (\Pi_h^{RT}(\mathbf{v}))(\overrightarrow{OM}_f) = \begin{cases} \frac{1}{|F_f|} \int_{F_f} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_f d\sigma, & \text{si } f \in \mathcal{I}_F^i \\ 0 & \text{si } f \in \mathcal{I}_F^b \end{cases}. \quad (3.162)$$

3. Projecteur sur l'espace $P_{disc}^0(\mathcal{T}_h)$:

Le projecteur π_h^0 défini par (3.20), p. 42 et $\Pi_h^0 := (\pi_h^0)^d$. Ce projecteur est relié à l'espace $P^0(\mathcal{T}_h)$ défini par (3.17), p. 41.

La première propriété donnée sur ces projecteurs est :

Lemme 1. Soit $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \text{div}(\Pi_h^{RT}(\mathbf{v})) &= \Pi_h^0(\text{div}(\mathbf{v})), \\ \text{div}_h(\Pi_h^{CR}(\mathbf{v})) &= \Pi_h^0(\text{div}(\mathbf{v})). \end{aligned} \quad (3.163)$$

Démonstration. Soit $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ et $\ell \in \mathcal{I}_T$, alors en utilisant une intégration par parties (première formule du Théorème 4, p. 25) :

$$\int_{T_\ell} \Pi_h^0(\text{div} \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{T_\ell} \text{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} = \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \int_{F_f} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{f,\ell} d\sigma$$

avec $\mathbf{n}_{f,\ell}$ la normale à F_f sortante au triangle T_ℓ . Or avec la définition du projecteur des Crouzeix-Raviart, il vient directement :

$$\begin{aligned} \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \int_{F_f} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{f,\ell} d\sigma &= \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} |F_f| \Pi_h^{CR}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_{f,\ell} = \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} |F_f| \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{f,\ell} = \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \int_{F_f} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{f,\ell} d\sigma \\ &= \int_{T_\ell} \operatorname{div}(\Pi_h^{CR} \mathbf{v}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

De même pour les Raviart Thomas, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \int_{F_f} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{f,\ell} d\sigma &= \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} |F_f| \mathbf{n}_{f,\ell} \cdot (\Pi_h^{RT}(\mathbf{v})) = \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} |F_f| \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{f,\ell} = \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \int_{F_f} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{f,\ell} d\sigma \\ &= \int_{T_\ell} \operatorname{div}(\Pi_h^{CR} \mathbf{v}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

On remarque que pour les deux égalités nous avons utilisé une intégration par parties. \square

Soit $\phi_{f,\ell}^\beta$ la fonction de base des éléments finis \mathbf{P}_{nc}^1 associée à la facette F_f du triangle T_ℓ pour la composante β défini par (3.32), p. 45 et $\phi_{f,\ell}^\beta$ défini par (3.45), p. 49. On peut définir la projection des fonctions de bases des éléments finis \mathbf{P}_{nc}^1 sur les éléments finis de Raviart-Thomas $\pi^{RT}(\phi_{f,\ell}^\beta)$ par le projecteur qui satisfait :

$$\Pi_h^{RT}(\phi_{f,\ell}^\beta)(\overrightarrow{OM}_{f'}) \cdot \mathbf{n}_{f',\ell} = \frac{1}{|F_{f'}|} \int_{F_{f'}} \phi_{f,\ell}^\beta \cdot \mathbf{n}_{f',\ell} d\sigma, \quad \forall f' \in \{1, \dots, d+1\} \quad (3.164)$$

Avec $M_{f'}$ le point milieu de la face $F_{f'}$. On peut donner la propriété suivante :

Proposition 24. *Soit $\ell \in \mathcal{I}_T$, $f \in \mathcal{I}_{F,\ell}$, et $\phi_{f,\ell}^\beta := \phi_{f,\ell}^\beta \mathbf{e}_\beta$ la fonction de base des éléments finis \mathbf{P}_{nc}^1 associées au barycentre de la face F_f du triangle T_ℓ et à la composante $\beta \in \{1, \dots, d\}$. Sa projection, dans le triangle T_ℓ , sur les éléments finis de Raviart-Thomas, est définie par :*

$$\Pi_h^{RT}(\phi_{f,\ell}^\beta)|_{T_\ell} = (d|T_\ell|)^{-1}(\mathbf{x} - \overrightarrow{OS}_{f,\ell}) \mathcal{S}_{f,\ell}^\beta \quad (3.165)$$

avec $\mathcal{S}_{f,\ell}^\beta = \mathcal{S}_{f,\ell} \cdot \mathbf{e}_\beta$.

L'une des caractéristiques importantes de ce projecteur est que :

$$\operatorname{div}_h(\Pi_h^{RT}(\phi_{f,\ell}^\beta)|_{T_\ell}) = |T_\ell|^{-1} \mathcal{S}_{f,\ell}^\beta = \operatorname{div}(\phi_{f,\ell}^\beta)$$

C'est-à-dire que la divergence des éléments finis $\mathbf{P}^1 - P_{disc}^0$ est conservée par la projection sur les Raviart-Thomas. Cette équation est donnée directement par (3.163).

Formulation variationnelle discrète

Pour obtenir la formulation variationnelle discrète, il faut tester les termes clefs avec des fonctions à divergence nulles. Pour cela, on projette les fonctions tests des éléments finis $\mathbf{P}^1 - P_{disc}^0$ sur les éléments finis de Raviart-Thomas.

Modification sur le second membre

La modification sur le second membre est relativement simple. De plus, étant donné que le terme de diffusion et la matrice de divergence ne nécessitent pas de correction, ce schéma numérique est facilement applicable aux équations de Stokes.

Pour traiter le second membre, il faut utiliser comme fonctions test les projetées des fonctions de Crouzeix-Raviart sur les éléments finis de Raviart-Thomas. Soit $T_\ell, \ell \in \mathcal{I}_T$, et soit $F_f, f \in \mathcal{I}_{F,\ell}$. Il faut remplacer :

$$\int_{F_f} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\phi}_{f,\ell} d\sigma \quad (3.166)$$

par

$$\int_{F_f} \mathbf{f} \cdot \Pi^{RT}(\boldsymbol{\phi}_{f,\ell}^\beta)|_{T_\ell} d\sigma \quad (3.167)$$

dans la formulation variationnelle.

Modification sur le terme de convection

Cette partie se base sur l'article [82]. Soient $(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \in (\mathbf{X}_h)^3$, on définit la forme trilinéaire suivante :

$$\hat{c}_h(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) := c_{rot}(\mathbf{u}_h; \Pi_h^{RT}(\mathbf{v}_h), \Pi_h^{RT}(\mathbf{w}_h)) \quad (3.168)$$

où

$$c_{rot}(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) := (\mathbf{rot}_h \mathbf{u}_h \times \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h, \text{div}_h \mathbf{w}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

avec $\mathbf{rot}_h \mathbf{v}$ le rotationnel vectoriel discret de \mathbf{v} défini par : $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{P}_h H^1$, $\mathbf{rot}_h \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, est tel que :

$$\forall \mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega), (\mathbf{rot}_h \mathbf{v}, \mathbf{w})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} (\mathbf{rot} \mathbf{v}, \mathbf{w})_{\mathbf{L}^2(T_\ell)}.$$

On préfère utiliser cette forme même si une variante existe pour la forme trilinéaire discrète dérivant de $c^*(\cdot; \cdot, \cdot)$ (3.152), p. 78, pour les même raison énoncer en p. 78. La forme trilinéaire symétrisée donnée par (3.151), p. 78 quant à elle n'est pas utilisable car $\Pi_h^{RT}(\mathbf{v}_h)$ n'est pas dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$.

En pratique, le second terme n'est pas implémenté et on résout le problème avec la pression de Bernoulli discrète dont l'équivalent continu est défini par :

$$P := p + \frac{1}{2} \mathbf{grad}(|\mathbf{u}|^2)$$

Dans ce cas là, il faut par la suite calculer la pression discrète p_h avec [82, p. 6] :

$$p_h = P_h - \frac{1}{2} \underset{q_h \in M_h}{\text{argmin}} \|q_h - |\mathbf{u}_h|^2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

La projection est faite deux fois pour le terme de convection (3.168). La projection des fonctions tests est faite pour corriger le manque de robustesse du schéma. La seconde projection permet à la forme trilinéaire $\hat{c}_h(\cdot; \cdot, \cdot)$ de vérifier trivialement les propriétés d'anti-symétrie (3.156), p. 79 et (3.157), p. 79. Par ailleurs, en continu, nous avons que :

$$\mathbf{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{grad}(\mathbf{u}^2) = \frac{1}{2} \mathbf{grad}(\mathbf{u}^2).$$

Cette propriété est approchée en discret par la forme trilinéaire $\hat{c}_h(\cdot; \cdot, \cdot)$ et cela permet de grandement réduire l'erreur d'un écoulement irrotationnel [34, p. 17] car le terme non-linéaire $(\mathbf{rot} \mathbf{u}_h \times \Pi_h^{RT}(\mathbf{u}_h))$ est alors quasiment irrotationnelle.

Modification sur la matrice de masse

On modifie la matrice de masse avec la forme bilinéaire m_h^{RT} suivante :

$$\begin{cases} m_h^{RT} : \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \mapsto m_h^{RT}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = (\Pi_h^{RT}(\mathbf{u}_h), \Pi_h^{RT}(\mathbf{v}_h))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \end{cases} \quad (3.169)$$

Ce choix est fait pour garder la symétrie du produit scalaire mais aussi pour une propriété de consistance. Supposons un écoulement irrotationnel, alors, la solution des équations de Navier-Stokes est donnée par $\mathbf{u} = \chi_t$, $p = -|u|^2/2 - \xi_t$ [82, Lemme 5.1]. En particulier :

$$\frac{1}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \frac{1}{dt}(\chi_t, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$$

L'équivalent discret de cette propriété est obtenue avec la forme bilinéaire m_h^{RT} . En particulier, avec des conditions de Dirichlet homogène⁹, on retrouvera une approximation en vitesse exacte à chaque pas de temps [82, Théorème 4.9 & Remarque 4.10].

Récapitulatifs

Finalement, on peut regrouper les éléments définis pour obtenir le problème suivant :

Problème: 16. *Trouver les fonctions $(\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h$ tels que, pour tout $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h$:*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{dt} m_h^{RT}(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + a_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + \hat{c}_h(\mathbf{u}_h^{n+1}; \mathbf{u}_h^{n+1}, \Pi_h^{RT}(\mathbf{v}_h)) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h^{n+1}) & = F_h^{n+1}(\mathbf{v}_h) \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ b_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, q_h) & = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ \mathbf{u}_h & = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ \mathbf{u}_h & = \mathbf{u}_0 \quad \text{sur } \{t = 0\} \times \Omega \end{array} \right.$$

Avec $F_h^{n+1}(\mathbf{v}_h) := (\mathbf{f}(\cdot, t^{n+1}), \Pi_h^{RT}(\mathbf{v}_h))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{dt} m_h^{RT}(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h)$ et $t^n = ndt$ où dt est le pas de temps.

3.6.4 Résultats numériques

Afin d'illustrer les résultats nous proposons quelques résultats numériques. Dans un premier temps, nous discrétisons les équations de Stokes (2.35), p. 33 sur $\Omega = (0, 1)^2$. On montre dans un premier temps que l'erreur en vitesse est bien nulle lorsqu'on approche un terme source potentiel. C'est ce qui est illustré par le cas tests avec (\mathbf{u}, p) donné par (3.170). Dans la figure 3.6, on représente l'erreur absolue en vitesse pour la norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et relative pour la pression en norme $L^2(\Omega)$. On peut voir que l'ordre de convergence en pression est 1 soit l'ordre théorique attendu. L'erreur en vitesse est nulle à la précision machine. On notera ce schéma CR_{RT} .

$$(\mathbf{u}, p) = \left(\mathbf{0}, \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{3} \right) \quad (3.170)$$

Ensuite nous pouvons illustrer la propriété de robustesse par rapport à ν avec le cas test suivant. Considérons les équations de Navier-Stokes (2.29) avec la solution stationnaire prescrite (3.171). On résout ce problème avec le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0)$ avec la modification

⁹. On peut considérer des conditions de bord de Dirichlet non-homogènes avec une hypothèse supplémentaire donnée par [82, p. 319]

h	$\varepsilon_0^{CRRT}(\mathbf{u}_h)$	$\varepsilon_0^{CRRT}(p_h)$
1.00×10^{-1}	9.37×10^{-16}	8.19×10^{-2}
5.00×10^{-2}	4.90×10^{-16}	3.92×10^{-2}
2.50×10^{-2}	4.10×10^{-16}	1.92×10^{-2}
1.25×10^{-2}	8.26×10^{-16}	9.69×10^{-3}
TCM	–	1.02

TABLEAU 3.6 – Tableau des erreurs en vitesse et en pression pour (\mathbf{u}, p) donné par (3.170) et $\nu = 0.01$

du second membre décrite par (3.167), pour $\nu \in \{1, 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}\}$. Les résultats sont présentés dans le tableau 3.7. Les calculs sont fait pour $h = 5.00 \times 10^{-2}$, et avec le code TrioCFD sur $\Omega = (0, 1)^2$. Pour résoudre les équations de Navier-Stokes stationnaire, on résout les équations de Navier-Stokes instationnaire (2.33) et on atteint la convergence vers le régime stationnaire.

$$(\mathbf{u}, p) = \left(\begin{pmatrix} 2x_2x_1^2(1-x_1)^2(1-x_2)(1-2x_2) \\ -2x_1x_2^2(1-x_2)^2(1-x_1)(1-2x_1) \end{pmatrix}, 0 \right) \quad (3.171)$$

ν	$\varepsilon_0^{CRRT}(\mathbf{u}_h)$	$\varepsilon_0^{CRRT}(p_h)$
1.00×10^0	7.82×10^{-2}	3.88×10^{-3}
1.00×10^{-1}	7.82×10^{-2}	3.89×10^{-4}
1.00×10^{-2}	7.89×10^{-2}	4.49×10^{-5}
1.00×10^{-3}	7.89×10^{-2}	2.28×10^{-5}

TABLEAU 3.7 – Tableau des erreurs relatives en norme L^2 en vitesse et en pression pour (\mathbf{u}, p) donné par (3.171) et $h = 5.00 \times 10^{-2}$ pour différentes valeurs de ν

Chapitre 4

Nouveau schéma de discrétisation : $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ pour les équations de Stokes

Sommaire

4.1 Schémas Multi Point Flux Approximation pour le problème de diffusion anisotrope	88
4.1.1 Les schémas volumes finis	88
4.1.2 Formulation volumes finis pour les éléments finis $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$	90
4.1.3 Introduction aux schémas MPFA	93
4.1.4 MPFA-O	94
4.1.5 Variantes du schéma MPFA	96
4.2 Schéma de discrétisation $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ pour les équations de Stokes	97
4.2.1 Définition de la nouvelle approximation du gradient	97
4.2.2 Formulation variationnelle	100
4.2.3 Discrétisations alternatives du gradient de pression	103
4.3 Extension du schéma sur le bord du domaine	109
4.3.1 Enrichissement de la contrainte d'incompressibilité avec des conditions sur le bord	110
4.3.2 Contraintes des vitesses proches du bord	112
4.3.3 Comparaison des méthodes	113
4.3.4 Schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ implémenté dans TrioCFD	113
4.4 Étude de la convergence du schéma	115
4.4.1 Condition inf-sup	116
4.4.2 Test numérique de la condition inf-sup	119
4.5 Cas Tests Numériques	120
4.5.1 Étude de la convergence	120
4.5.2 Étude de la robustesse à la viscosité du schéma	121
4.5.3 Maillage déformé	123

Dans le premier chapitre, nous avons introduit les outils de discrétisation pour les équations de Navier-Stokes. Nous avons aussi présenté différents schémas numériques présents dans le code industriel TrioCFD et relevé la problématique des vitesses parasites. L'objectif de ce chapitre sera d'élaborer un schéma permettant de résoudre les équations de Stokes, de manière plus robuste et précise que les éléments finis $\mathbf{P}_{nc}^1 - P^0$, sans rajouter de degrés de liberté et sans modifier la matrice de masse M ou le terme de convection $L(U)$ dans l'équation (1.5), p. 13. Le but de cette approche est d'obtenir un schéma avec moins d'inconnues

que le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P^0 + P^1)$ pour obtenir un coût de calcul plus faible en 3D. Ces travaux ont déjà été présentés dans [87].

Dans un premier temps, dans la section 4.1, p. 88 nous introduisons les schémas MPFA pour le problème du laplacien puis dans la section 4.2, p. 97 nous définirons une nouvelle discrétisation basée sur le schéma MPFA symétrique [36, 37] pour le gradient de pression dans les équations de Stokes. En 2D (resp. 3D), la définition du gradient de pression ainsi construit est unique pour les degrés de liberté associés à un triangle (resp. tétraèdre) qui ne sont pas en contact avec le bord $\partial\Omega$. Ce n'est plus le cas pour les degrés de liberté associés à un triangle (resp. tétraèdre) en contact avec le bord $\partial\Omega$. On devra alors rajouter des conditions de bords sur la pression ou introduire des degrés de liberté sur le bord tout en complétant le système avec de nouvelles équations que nous détaillerons dans la section 4.3, p. 109. Dans la section 4.4, p. 115, on présentera une analyse de ce schéma. Enfin, dans la section 4.5, p. 120, on étudiera la robustesse du schéma par rapport à la viscosité ainsi que la précision du schéma de pression par rapport au coût de calcul. On comparera les résultats avec ceux des alternatives existantes.

Nous utiliserons les notations présentées dans le chapitre 1 dans la partie 2.1, p. 21 ainsi que les notations du maillage décrites dans la sous-section 3.2.1, p. 37. Les équations étudiées seront celles de Stokes (2.34), p. 33 dont la formulation variationnelle est donnée par les équations (2.35), p. 33.

4.1 Schémas Multi Point Flux Approximation pour le problème de diffusion anisotrope

Dans cette section, nous présentons le schéma de discrétisation volumes finis MPFA (Multi-Point Flux Approximation). Cette méthode est une famille de schémas numériques qui approche les flux par plusieurs degrés de liberté. Celle-ci s'oppose à la méthode TPFA (Two Point Flux Approximation) qui approche les flux avec deux degrés de liberté.

4.1.1 Les schémas volumes finis

Les schémas volumes finis [88] sont une famille de méthode très connus, qui consiste à diviser le domaine en petits volumes (aussi appelés cellules), et approche les équations sur chacun d'eux. Les solutions sont calculées en imposant la continuité des flux à travers les faces des cellules.

Dans un premier temps, on décrit brièvement la méthode des volumes finis. Considérons un maillage triangulaire \mathcal{T}_h , dont la description est faite dans la section 3.2.1, p. 37 et le problème suivant :

Problème: 17. *Trouver u tel que*

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\Lambda \mathbf{grad}(u)) &= g && \text{dans } \Omega \\ u &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.1)$$

avec Λ un tenseur d'ordre 2 de taille $d * d$ qui est symétrique, borné et coercif.

Supposons $g \in L^1(\Omega)$, on note la solution de (4.1) $u \in H^1(\Omega)$ ainsi qu'un volume $\omega \subset \Omega$. On intègre sur ω l'équation (4.1), et en utilisant une formule de Green (Formule 1 du théorème 4, p. 25), on obtient la relation suivante :

$$\langle -\Lambda \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{n}_{\partial\omega}, 1 \rangle_{H^{1/2}(\partial\omega)} = \int_{\omega} g(x) dx$$

Remarque 11. *Il est aussi possible de choisir une régularité plus faible pour le second membre ($g \in H^{-1}(\Omega)$) mais cette approche ne sera pas utilisée dans ce qui suit. On renvoie à l'article [89] pour une description détaillée.*

L'idée des volumes finis est de choisir différents ω qui sont appelés volumes d'intégration, afin d'obtenir plusieurs équations. Si on choisit $\omega = T_\ell$, $\ell \in \mathcal{I}_T$, alors l'équation devient :

$$\sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \overline{\mathcal{F}}_{\ell,f} = \int_{T_\ell} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (4.2)$$

Avec le flux $\overline{\mathcal{F}}_{\ell,f} = -\langle \Lambda \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{n}_{f,\ell} \rangle_{H^{1/2}(F_f)}$ qui est défini comme le flux de u à travers la face F_f et $\mathbf{n}_{f,\ell}$ la normale à la face F_f sortante du simplexe T_ℓ . De plus, en notant $r \in \mathcal{I}_T$ l'indice du triangle voisin à T_ℓ par l'arête F_f , tel que $T_\ell \cap T_r = F_f$, alors :

$$\overline{\mathcal{F}}_{\ell,f} + \overline{\mathcal{F}}_{r,f} = 0 \quad (4.3)$$

L'équilibre (4.2) et la conservativité (4.3) des flux sont les propriétés principales vérifiées par les schémas des volumes finis.

Dans un cadre simplifié, considérons une approximation de la solution u_h qui est une fonction constante par morceaux sur chaque cellule. On définit alors les inconnues u_ℓ , $\ell \in \mathcal{I}_T$ qui sont les valeurs de u sur les barycentres des cellules T_ℓ , $\ell \in \mathcal{I}_T$ et qui seront une approximation des valeurs $u(\mathbf{x}_{T_\ell})$, $\ell \in \mathcal{I}_T$.

Le principe des volumes finis est alors d'établir des approximations consistantes des flux $\overline{\mathcal{F}}_{\ell,f}$ par $\mathcal{F}_{\ell,f}$ pour tout $\ell \in \mathcal{I}_T$, $f \in \mathcal{I}_{F,\ell}$. Ensuite, on peut écrire une version discrète de (4.2) et (4.3).

Pour tout T_ℓ , $\ell \in \mathcal{I}_T$:

$$\sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \mathcal{F}_{\ell,f} = \int_{T_\ell} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (4.4)$$

et pour tout $f \in \mathcal{I}_F$, tel qu'il existe un couple $(\ell, r) \in (\mathcal{I}_T)^2$, $T_\ell \cap T_r = F_f$:

$$\mathcal{F}_{\ell,f} + \mathcal{F}_{r,f} = 0 \quad (4.5)$$

Une étude des schémas de volumes finis appliqués aux équations de diffusion a été réalisée par J. Droniou [90], mettant en avant notamment les schémas MPFA. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à cet article. Bien que la liste des schémas de volumes finis soit vaste et difficile à énumérer intégralement, les schémas suivants peuvent être présentés :

- Les schémas "hybrid, mixed, and mimetic" (HMM) se composent de trois familles de méthodes développées séparément : la méthode "Hybrid Finite-Volume" (HFV) [91, 92], la méthode "Mixed Finite-Difference" (MFD) [93], et la méthode "Mixed Finite-Volume" (MFV) [94]. Ces méthodes sont équivalentes [95]. Elles introduisent des inconnues auxiliaires sur les faces pour calculer des flux définis par des produits scalaires locaux.
- Le schéma "Discrete Duality Finite Volume" (DDFV) [96, 97, 98] ajoute de nouvelles inconnues définies comme des approximations du gradient dans différentes directions indépendantes et localisées sur les sommets du maillage. Ces inconnues sont ensuite utilisées pour reconstruire une approximation précise du gradient. Ce schéma numérique a été très bien étudié [99, 100, 101, 102] avec diverses conditions aux bords [103] sur de nombreux problèmes [104, 105].

Il existe une diversité de schémas de volumes finis, sans qu'un "framework" permette d'établir une méthodologie d'analyse numérique similaire à celle des éléments finis avec des critères tels que la condition Inf-Sup et la théorie BNB. C'est dans cette perspective

qu'une approche [106, 107] a été développée. Cette approche vise à regrouper différents schémas qui discrétisent l'opérateur gradient selon certains critères, les classant ainsi dans la catégorie des "Gradient Schemes" (Schémas gradient). Une analyse générale présentée dans [106] s'applique alors, permettant de démontrer la stabilité et la bonne définition d'un schéma en montrant son appartenance à la famille des schémas gradient.

4.1.2 Formulation volumes finis pour les éléments finis $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$

On peut montrer que le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ est aussi un schéma qui s'inscrit dans les méthodes des volumes finis [7, p. 22]. C'est aussi un schéma Gradient [106, Section 9.3.1]. On présente ici la méthode sous le formalisme "volumes éléments finis" défini par Emonot [7, p. 11]. Considérons les équations de Stokes (2.33). Reprenons l'espace $\mathbf{X}_{0,h}$ et M_h définis par (3.41), p. 48 et (3.78), p. 57. On rappelle que, si $\mathbf{u}_h \in \mathbf{X}_{0,h}$ et $q_h \in M_h$, alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_h &= \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \sum_{f \in \mathcal{I}_F^i} u_{f,\alpha} \phi_f \mathbf{e}_\alpha, \\ p_h &= \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} p_\ell \psi_\ell,\end{aligned}$$

où $(\phi_f)_{f \in \mathcal{I}_F}$ désigne les fonctions de bases des éléments finis \mathbf{P}_{nc}^1 et $(\psi_\ell)_{\ell \in \mathcal{I}_T}$ les fonctions de bases des éléments finis P_{disc}^0 .

Notons qu'avec la propriétés du patch test (3.42), p. 48, nous avons que, pour toute facette $f \in \mathcal{I}_F^i$ partagée par les triangles T_k et T_ℓ , l'égalité suivante est vérifiée :

$$\int_{F_f} \mathbf{u}_h|_{T_k} \cdot \mathbf{n}_{f,k} d\sigma = \int_{F_f} \mathbf{u}_h|_{T_\ell} \cdot \mathbf{n}_{f,k} d\sigma \quad (4.6)$$

Cette propriété assure la continuité de $\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_f$ au barycentre de la facette $f \in \mathcal{I}_F^i$.

Définition des volumes de contrôle

Pour chaque facette $f \in \mathcal{I}_F$, nous définissons le volume ω_f associé, qui correspond au quadrilatère ayant pour sommets les sommets de la facette et le barycentre des triangles partageant cette même facette. On définit $\gamma_f = \partial\omega_f$. La figure 4.1 représente cette configuration pour $d = 2$ et une facette F_f partagée par les triangle T_k et T_ℓ .

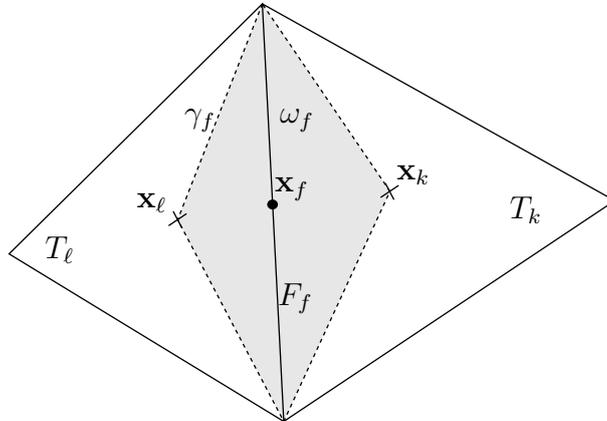


FIGURE 4.1 – Schéma du triangle T_ℓ et T_k qui partagent la facette F_f . Le volume ω_f est représenté en gris.

Formulation conservative discrète des $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$

On cherche à exprimer les flux conservatifs reliés à la méthode. Pour cela, on cherche un champ de vitesse dont chaque composante est affine par élément, continue aux milieux des facette et un champs de pression constant par élément vérifiant les équations de stokes sur chaque volume de contrôle :

$$\begin{aligned} \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}^i} \int_{F_f} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_f d\sigma &= 0, & \forall \ell \in \mathcal{I}_T \\ \int_{\gamma_f} (p_h Id - \mathbf{Grad}_h \mathbf{u}_h) : \mathbf{n}_{|\gamma_f} d\sigma &= \int_{\omega_f} \mathbf{f} d\mathbf{x}, & \forall f \in \mathcal{I}_F \\ \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_f) &= 0, & \forall f \in \mathcal{I}_F^b \end{aligned} \quad (4.7)$$

avec Id la matrice identité de taille $d \times d$. En développant les fonctions \mathbf{u}_h et p_h , on obtient :

$$\sum_{f \in \mathcal{I}_F^i} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_f) \cdot \int_{\partial T_\ell} \phi_f \mathbf{n}_{|\partial T_\ell} d\sigma = 0, \quad \forall \ell \in \mathcal{I}_T, \quad (4.8)$$

qui exprime la conservation de la masse et :

$$\sum_{f' \in \mathcal{I}_F^i} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_{f'}) \left(\int_{\gamma_{f'}} -\mathbf{grad} \phi_{f'} \cdot \mathbf{n}_{|\omega_{f'}} d\sigma \right) + \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} p_h(\mathbf{x}_\ell) \int_{\gamma_f} \psi_\ell \mathbf{n}_{|\omega_f} d\sigma = \int_{\omega_f} \mathbf{f} d\mathbf{x}, \quad \forall f \in \mathcal{I}_F^i \quad (4.9)$$

qui exprime la conservation de la quantité de mouvement.

Ces équations peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} A & & C_x \\ & A & C_y \\ & & A & C_z \\ B_x & B_y & B_z & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Avec :

- U_x, U_y, U_z sont les vecteurs de tailles N_F^i contenant les valeurs de chaque composante de la vitesse :

$$\forall f \in \mathcal{I}_F^i, \quad (U_x)_f = u_{h,x}(\mathbf{x}_f), \quad (U_y)_f = u_{h,y}(\mathbf{x}_f), \quad (U_z)_f = u_{h,z}(\mathbf{x}_f).$$

- P est le vecteur de taille N_T contenant les valeurs de la pression dans les cellules :

$$\forall \ell \in \mathcal{I}_T, \quad (P)_\ell = p_h(\mathbf{x}_\ell).$$

- A est une matrice de taille $N_F^i \times N_F^i$ dont les coefficients sont :

$$\forall (f, f') \in (\mathcal{I}_F^i)^2, \quad (A)_{f,f'} = \int_{\gamma_f} -\mathbf{grad} \phi_{f'} \cdot \mathbf{n}_{|\omega_f} d\sigma.$$

- B_x, B_y et B_z sont des matrices de taille $N_T \times N_F^i$ dont les coefficients sont :

$$\forall (f, l) \in (\mathcal{I}_F^i \times \mathcal{I}_T), \quad \forall \alpha \in \{x, y, z\}, \quad (B_\alpha)_{\ell,f} = \int_{\partial T_\ell} \phi_f \mathbf{n}_{|\partial T_\ell} d\sigma.$$

- C_x, C_y et C_z sont des matrices de taille $N_F^i \times N_T$ dont les coefficients sont :

$$\forall (f, l) \in (\mathcal{I}_F^i \times \mathcal{I}_T), \quad \forall \alpha \in \{x, y, z\}, \quad (C_\alpha)_{f,\ell} = \int_{\gamma_f} \psi_\ell \mathbf{n}_{\alpha,|\gamma_f} d\sigma.$$

— F_x, F_y et F_z sont des vecteurs de taille N_F^i tels que :

$$\forall (f) \in \mathcal{I}_F^i, \quad \forall \alpha \in \{x, y, z\}, \quad (F_\alpha)_f = \int_{\omega_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_\alpha \, d\mathbf{x}.$$

Ce qui se ré-écrit, en notant :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = (B_x \ B_y \ B_z), \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{U} + \mathcal{C}\mathcal{P} &= \mathcal{F} \\ \mathcal{B}\mathcal{U} &= 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

On rappelle le lemme suivant [7, Lemme 2.1 & 2.2] :

Lemme 10. *La matrice \mathcal{B} est la transposée de la matrice \mathcal{C} et les matrices \mathcal{A} et \mathcal{B} issues de la formulation volumes finies du schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ sont identiques aux matrices obtenus avec le formalisme éléments finis (3.106), p. 65.*

Ainsi, seul le second membre est différent entre les deux schémas puisqu'en général :

$$\forall f \in \mathcal{I}_F, \quad \int_{\omega_f} \mathbf{f} \, d\mathbf{x} \neq \int_{\Omega} \mathbf{f} \phi_f \, d\mathbf{x}.$$

Formulation variationnelle du schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P^0$ en volumes éléments finis

En pratique, on utilise pas la formulation (4.7). On peut obtenir une formulation variationnelle, en multipliant par les fonctions tests $q_h \in M_h$ et $\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h}$:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} q_h|_{T_\ell} \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}^i} \int_{F_f} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_f \, d\sigma &= 0, & \forall q_h \in M_h \\ \sum_{f \in \mathcal{I}_F} \mathbf{v}_f \cdot \int_{\gamma_f} (pId - \mathbf{Grad}_h \mathbf{u}_h) : \mathbf{n}|_{\gamma_f} \, d\sigma &= \sum_{f \in \mathcal{I}_F} \mathbf{v}_f \cdot \int_{\omega_f} \mathbf{f} \, d\mathbf{x}, & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h} \\ \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_f) &= 0, & \forall f \in \mathcal{I}_F^b \end{aligned}$$

Ce qui se ré-écrit : Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h$

$$\begin{cases} a_h^V(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h^V(\mathbf{v}_h, p_h) = L_h^V(\mathbf{v}_h) \\ c_h^V(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

avec les formes bilinéaires a_h^V , b_h^V et c_h^V défini par (4.13), (4.14), (4.15) et le second membre L_h^V par (4.16).

$$a_h^V : \begin{cases} \mathbf{X}_{0,h} \times \mathbf{X}_{0,h} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) & \mapsto a_h^V(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) := - \sum_{f \in \mathcal{I}_F} \mathbf{v}_f \cdot \int_{\gamma_f} \mathbf{Grad}_h \mathbf{u}_h : \mathbf{n}|_{\gamma_f} \, d\sigma \end{cases} \tag{4.13}$$

$$b_h^V : \begin{cases} \mathbf{X}_{0,h} \times M_h & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}_h, q_h) & \mapsto b_h^V(\mathbf{v}_h, q_h) = \sum_{f \in \mathcal{I}_F^i} \mathbf{v}_f \cdot \int_{\gamma_f} q_h \cdot \mathbf{n}|_{\partial\omega_f} \, d\sigma \end{cases} \tag{4.14}$$

$$c_h^V : \begin{cases} \mathbf{X}_{0,h} \times \mathbf{X}_{0,h} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}_h, q_h) & \mapsto c_h^V(\mathbf{v}_h, q_h) = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} q_{h|T_\ell} \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}^i} \int_{F_f} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_f d\sigma \end{cases} \quad (4.15)$$

$$L_h^V : \begin{cases} \mathbf{X}_{0,h} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (v_h) & \mapsto L_h^V(v_h) := \sum_{f \in \mathcal{I}_F} \mathbf{v}_f \cdot \int_{\omega_f} \mathbf{f} d\mathbf{x}, \end{cases} \quad (4.16)$$

En particulier, on retrouve quasiment le second membre issu de la formulation éléments finis. Cette formulation est strictement équivalente à (4.9) et (4.8).

Remarque 12. (*Remarque sur le second membre*) Le second membre de l'équation (4.12) n'est en général pas calculé par la méthode Volumes Éléments Finis mais par la méthode des Éléments Finis. En effet, le second membre entraîne une perte de précision. Supposons $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$. Considérons $f \in \mathcal{I}_F$ et la fonction de base associée ϕ_f des éléments finis P_{nc}^1 :

$$\left| \sum_{\ell \in \mathcal{I}_{T,f}} \int_{T_\ell} \mathbf{f} \phi_f d\mathbf{x} - \int_{\omega_f} \mathbf{f} d\mathbf{x} \right| = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_{T,f}} \left| \sum_{f' \in \mathcal{I}_{F,\ell}, f' \neq f} \int_{\omega_{f'} \cap T_\ell} \mathbf{f} \phi_f d\mathbf{x} - d \int_{\omega_f \cap T_\ell} \mathbf{f} \lambda_{f,\ell} d\mathbf{x} \right|$$

avec $\lambda_{f,\ell}$ le coefficient barycentrique du triangle T_ℓ associé au sommet opposé à F_f . On peut majorer cette quantité par :

$$\left| \sum_{\ell \in \mathcal{I}_{T,f}} \int_{T_\ell} \mathbf{f} \phi_f d\mathbf{x} - \int_{\omega_f} \mathbf{f} d\mathbf{x} \right| \leq \sum_{\ell \in \mathcal{I}_{T,f}} \left(\sum_{f' \in \mathcal{I}_{F,\ell}, f' \neq f} (|\omega_{f'} \cap T_\ell|^{1/2} + d \|\lambda_{f,\ell}\|_{L^2(\omega_{f'} \cap T_\ell)}) \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(T_\ell)} \right)$$

Or, en utilisant la formule d'intégration des coefficient barycentrique(3.7), on écrit :

$$\|\lambda_{f,\ell}\|_{L^2(\omega_f \cap T_\ell)} \leq \|\lambda_{f,\ell}\|_{L^2(T_\ell)} = |T_\ell| \frac{d! 2!}{(d+2)!}$$

et finalement, en remarquant que $|\omega_f \cap T_\ell| = \frac{|T_\ell|}{d+1}$, on écrit :

$$\left| \sum_{\ell \in \mathcal{I}_{T,f}} \int_{T_\ell} \mathbf{f} \phi_f d\mathbf{x} - \int_{\omega_f} \mathbf{f} d\mathbf{x} \right| \leq \left(\frac{|T_\ell|}{(d+1)} \right)^{1/2} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(T_\ell)} \lesssim h^d \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^\infty(T_\ell)}. \quad (4.17)$$

4.1.3 Introduction aux schémas MPFA

Nous avons déjà défini les schémas des volumes finis de manière générale. Nous présentons maintenant la méthode "multipoint flux approximation".

La méthode multipoint flux approximation (MPFA) a été initialement présentée dans les années 90 par [108, 109] puis par [110] sur des maillages de quadrilatères pour des problèmes non-homogènes dans des milieux anisotropes. Le schéma a ensuite été développé, par la suite, dans les ouvrages [111, 112]. L'idée est que pour obtenir un schéma qui approche les flux de manière consistante sur des maillages généraux, il faut des valeurs approchées de l'inconnue ailleurs que sur le barycentre des triangles partageant une même arête. Cela peut être sur les sommets, les arêtes ou bien dans les cellules. Dans cet optique, on ajoute des inconnues au système que l'on nommera inconnues auxiliaires.

On suppose alors que la solution est affine par morceaux sur des macro-cellules autour de chaque sommet, créant ainsi un maillage dual (voir la figure 4.2) avec les positions

des inconnues auxiliaires ajoutées. Ces inconnues sont ensuite éliminées en écrivant des équations de continuité (sur le bord inclus) pour la solution. Les flux ainsi construits sont conservatifs (4.5) et s'expriment seulement avec les inconnues des cellules. Nous reviendrons sur ce principe plus en détails dans les sous-sections suivantes.

Il existe plusieurs schémas MPFA, leurs différences venant du choix de la continuité locale et des équations de conservations des flux. Par ailleurs, cette discrétisation a été utilisée dans de nombreux domaines et montre une capacité à discrétiser de manière précise les termes de diffusions sur des maillages non-structurés [113].

4.1.4 MPFA-O

Le schéma MPFA-O, initialement présenté par [110, 111, 36], est une variante très connue des schémas MPFA. Pour le présenter rapidement, considérons un maillage triangulaire en 2D et un sommet S_i , $i \in \mathcal{I}_S$. On ajoute des inconnues localisées sur le milieu de chacune des arêtes F_{f_j} , $f_j \in \mathcal{I}_{F,i}$, $j = \{1, \dots, N_{F,i}\}$. Cette configuration est décrite par la figure 4.2 pour $\text{card}(\mathcal{I}_{F,i}) = 4$. On définit la macro-cellule \mathcal{M}_i comme la cellule autour du sommet S_i dont les sommets sont les points $\mathbf{x}_{T_{\ell_k}}$, $\ell_k \in \mathcal{I}_{T,i}$ et $\mathbf{x}_{F_{f_k}}$, $f_k \in \mathcal{I}_{F,i}$ avec $k \in \{1, \dots, N_{F,i}\}$. On notera les quadrangles $Q_{\ell,i}$ comme les intersections entre les triangles T_ℓ et la macro-cellule \mathcal{M}_i ,

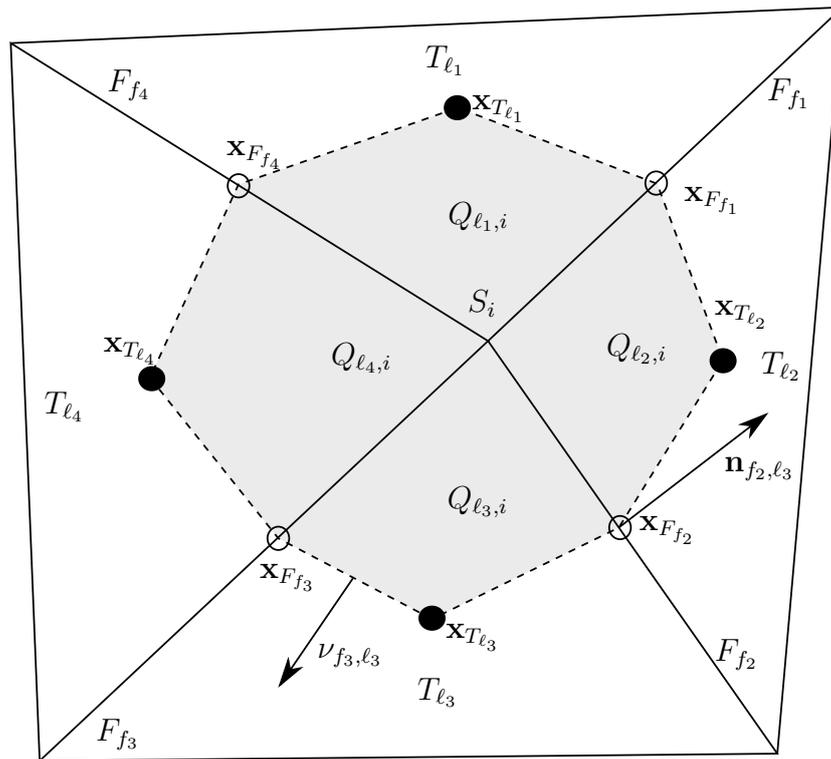


FIGURE 4.2 – Sous-maillage local autour du sommet S_i et inconnues du schéma MPFA-O pour $\text{card}(\mathcal{I}_{F,i}) = 4$.

On veut résoudre le problème (4.1), la solution u du problème est alors approchée aux points $\mathbf{x}_{T_{\ell_k}}$, $\ell_k \in \mathcal{I}_{T,i}$ et $\mathbf{x}_{F_{f_k}}$, $f_k \in \mathcal{I}_{F,i}$ qui sont respectivement les barycentres des triangles T_{ℓ_k} et faces F_{f_k} pour tous les sommets S_i , $i \in \mathcal{I}_S$ et $k \in \{1, \dots, N_{T,i}\}$.

Les inconnues sont u_{T_ℓ} , $\ell_k \in \mathcal{I}_T$ et $u_{F_{f_k}}$, $f_k \in \mathcal{I}_{F,i}$, $\forall i \in \mathcal{I}_S$.

Remarque 13. (*Les inconnues auxiliaires*) On note qu'en 2D, une arête définie par deux sommets aura donc deux inconnues auxiliaires qui peuvent avoir des valeurs différentes. Cela vient du fait que ces inconnues soient relatives aux sommets, et le schéma n'impose pas de condition de continuité entre les deux inconnues. Il en est de même en 3D mais les inconnues auxiliaires ne sont plus sur les arêtes mais sur les faces du maillage.

On approche la solution u par une fonction u_h qui est affine par morceau sur chacun des quadrangles. Ainsi, on peut définir un gradient constant par morceaux, sur chacun des quadrangles $Q_{\ell,i}$, $\ell \in \mathcal{I}_{T,i}$.

À cette étape, l'approximation u_h est affine par quadrangle. Il faut donc 3 valeurs pour la définir. On note $\mathcal{G}_{\ell,i}$ la valeur du gradient sur le quadrangle $Q_{\ell,i}$. Notons $F_f, F_{f'}$ les deux arêtes qui ont pour sommet S_i et qui sont dans le triangle T_ℓ . En intégrant sur les segments $[\mathbf{x}_{T_\ell}\mathbf{x}_{F_f}]$ et $[\mathbf{x}_{T_\ell}\mathbf{x}_{F_{f'}}]$, on écrit :

$$\mathcal{G}_{\ell,i}(u_h) \cdot (\mathbf{x}_{T_\ell} - \mathbf{x}_{F_f}) = u_{T_\ell} - u_{F_f},$$

et

$$\mathcal{G}_{\ell,i}(u_h) \cdot (\mathbf{x}_{T_\ell} - \mathbf{x}_{F_{f'}}) = u_{T_\ell} - u_{F_{f'}}.$$

Si les vecteur $\overrightarrow{\mathbf{x}_{T_\ell}\mathbf{x}_{F_f}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{x}_{T_\ell}\mathbf{x}_{F_{f'}}$ ne sont pas colinéaires (ie. le triangle n'est pas un triangle plat) alors on obtient :

$$\mathcal{G}_{\ell,i}(u_h) = \frac{-1}{2|T_{\ell,f,f'}|} \left((u_{F_f} - u_{T_\ell})\nu_{f',\ell} + (u_{F_{f'}} - u_{T_\ell})\nu_{f,\ell} \right),$$

avec $|T_{\ell,f,f'}|$ l'aire du triangle $(\mathbf{x}_{T_\ell}\mathbf{x}_{F_f}\mathbf{x}_{F_{f'}})$, $\nu_{f,\ell}$ la normale au vecteur $\overrightarrow{\mathbf{x}_{T_\ell}\mathbf{x}_{F_{f'}}$ de longueur $|\mathbf{x}_{T_\ell}\mathbf{x}_{F_{f'}}|$ et $\nu_{f',\ell}$ la normale au vecteur $\overrightarrow{\mathbf{x}_{T_\ell}\mathbf{x}_{F_f}}$ de longueur $|\mathbf{x}_{T_\ell}\mathbf{x}_{F_f}|$.

En établissant une définition du gradient, nous sommes en mesure de définir les flux. Lorsque nous considérons un sommet comme point de départ, nous définissons des demi-flux associés aux demi-arêtes. Ces demi-flux sont définis pour chaque demi-arête par l'équation (4.18) et les flux résultent de la somme de ces demi-flux sur chaque arête.

$$\mathcal{F}_{\ell,f,i} := |\mathbf{x}_{T_\ell}\mathbf{x}_{F_f}| \Lambda_{|T_\ell} \mathcal{G}_{\ell,i}(u_h) \cdot \mathbf{n}_{f,\ell}. \quad (4.18)$$

Maintenant que la définition des flux a été établie, dans une méthodologie des volumes finis, on impose la conservation des flux autour des sommets S_i , $i \in \mathcal{I}_S$: Pour tout $f \in \mathcal{I}_{F,i}$, et si on suppose qu'il existe $(\ell, k) \in (\mathcal{I}_{T,i})^2$ tel que $T_\ell \cap T_k = F_f$, on impose :

$$\mathcal{F}_{\ell,f,i} + \mathcal{F}_{k,f,i} = 0. \quad (4.19)$$

Si l'arête F_f est sur le bord, il faut alors effectuer un traitement particulier. Si nous avons des conditions de Dirichlet, alors on imposera la valeur des inconnues auxiliaires sur le bord. Si nous avons des conditions de Neumann, on pourra alors imposer les demi-flux.

Les équations de conservation permettent alors d'obtenir des systèmes autour des sommets liant les inconnues auxiliaires et les inconnues des cellules. On pourra alors écrire de nouveau le système avec seulement les inconnues des cellules. Le schéma est bien défini seulement si toutes les matrices locales ainsi définies sont inversibles.

Pour finir, nous avons construit des flux consistants (en donnant une approximation de notre gradient) et conservatifs par construction. Le schéma "volumes finis" est donc bien posé. Ce schéma s'étend aux cellules polygonales et en 3D [114].

4.1.5 Variantes du schéma MPFA

Nous répertorions dans cette section certains des schémas MPFA les plus utilisés. Cependant, il est important de noter que notre liste ne prétend pas à l'exhaustivité, mais elle offre un point de départ pour explorer le monde des schémas MPFA.

MPFA -L et -G :

Le schéma MPFA-L a été développé par [115] puis généralisé avec le schéma MPFA-G (initialement présenté par [116, 117]). Les différences majeures avec le schéma MPFA-O sont explicitées dans [90, p.13] et nous les rappelons ici :

- Il n'y a pas d'inconnues auxiliaires ajoutées au système, mais les gradients deviennent des inconnues à substituer.
- Les équations de continuité des demi-flux sont écrites sur seulement deux arêtes (pour $d = 2$).
- L'équation de continuité de l'approximation linéaire est imposée sur toute l'arête et non plus au barycentre de la face.
- La manière de construire les gradients discrets et les approximations linéaires par morceaux sur les quadrangles dépend de l'arête $F_f, f \in \mathcal{I}_F$ que nous utilisons pour calculer le flux.

Dans le schéma MPFA-L, on impose la continuité sur toute l'arête f . Avec les notations précédentes, et en choisissant de construire l'approximation avec l'arête f_2 , cela s'écrit pour l'arête f_3 et f_2 :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in F_{f_3} \quad u_{T_{l_3}} + (\mathcal{G}_{\ell_3, f_2}(u))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{T_{l_3}}) &= u_{T_{l_4}} + (\mathcal{G}_{\ell_4, f_2}(u))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{T_{l_4}}), \\ \forall \mathbf{x} \in F_{f_2} \quad u_{T_{l_3}} + (\mathcal{G}_{\ell_3, f_2}(u))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{T_{l_3}}) &= u_{T_{l_2}} + (\mathcal{G}_{\ell_2, f_2}(u))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{T_{l_2}}). \end{aligned} \quad (4.20)$$

On peut écrire ces équations de continuités aux point S_i, \mathbf{x}_{f_3} et S_i, \mathbf{x}_{f_2} . Ces 4 équations sont ensuite complétées avec la conservation des demi-flux :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\ell_3, f_2} \cdot \mathbf{n}_{f_3, \ell_3} + \mathcal{G}_{\ell_4, f_2} \cdot \mathbf{n}_{f_3, \ell_4} &= 0, \\ \mathcal{G}_{\ell_3, f_2} \cdot \mathbf{n}_{f_2, \ell_3} + \mathcal{G}_{\ell_2, f_2} \cdot \mathbf{n}_{f_2, \ell_2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Les gradients peuvent être exprimés en fonctions des inconnues des cellules.

Le schéma MPFA-G est une généralisation du schéma MPFA-L où les flux totaux d'une arête F_f est construit à partir d'une combinaison convexe des demi-flux (resp. sous-flux) de l'arête F_f (resp. face) pour $d = 2$ (resp. $d = 3$). Ces combinaisons sont choisies localement pour améliorer les propriétés de coercivité du schéma.

Un schéma d'éléments finis mixtes MPFA :

Les articles [118, 119] présentent une approche des éléments finis du schéma MPFA-O. Ce n'est pas un schéma différent, mais plutôt un formalisme alternatif, développé dans le cadre des schémas éléments finis. C'est une approche connue qui consiste à faire correspondre un schéma volumes finis par un schéma d'éléments finis mixtes approprié [120] et avec une règle de quadrature spécifique.

MPFA symétrique :

Le schéma MPFA symétrique [121, 122, 123] est celui qui a été choisi dans cette thèse. C'est un schéma MPFA-O, dont les inconnues sont placées aux tiers des arêtes ou aux barycentres des faces des quadrangles générés en 3D. Ce choix permet au schéma d'être symétrique, c'est-à-dire qu'il conduit à une matrice symétrique définie positive pour un problème de Poisson [121, Proposition 3.1]. De plus, il s'inscrit dans le formalisme des schémas gradients [124, Section 12.1]. Ce choix se justifie, car le schéma MPFA symétrique appliqué au problème de Laplacien est consistant, coercif et convergent avec des hypothèses de convergence proche de celles des éléments finis P^1 (Proposition 25, p. 100). Nous détaillerons ce schéma par la suite.

4.2 Schéma de discrétisation $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ pour les équations de Stokes

L'idée de ce schéma est d'utiliser les éléments finis de Crouzeix-Raviart non-conformes d'ordre 1 pour la vitesse et les éléments finis P_{disc}^0 pour la pression avec un gradient MPFA symétrique présenté dans la section 4.1 sur un maillage de simplexe. On appellera ce schéma : $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$.

L'espace des vitesses discrètes sera donc celui défini par (3.41), p. 48 que nous rappelons ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_h &:= \{ \mathbf{v}_h \in [P_{disc}^1(\mathcal{T}_h)]^d \mid \forall f \in \mathcal{I}_F^i : [\mathbf{v}_h](\overline{OM}_f) = \mathbf{0} \}, \\ \mathbf{X}_{0,h} &:= \{ \mathbf{v}_h \in [P_{disc}^1(\mathcal{T}_h)]^d \mid \forall f \in \mathcal{I}_F : [\mathbf{v}_h](\overline{OM}_f) = \mathbf{0} \}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Et celui des pressions discrètes :

$$M_h = \{ q_h \in L_0^2(\Omega), \mid \forall T_\ell, \ell \in \mathcal{I}_T, q_h|_{T_\ell} \in P_0(T_\ell) \} \quad (4.23)$$

4.2.1 Définition de la nouvelle approximation du gradient

Dans un premier temps, on établit la nouvelle discrétisation de notre gradient en 2D. Contrairement à la section 4.1.4, p. 94, nous présentons ici un formalisme issu des éléments finis pour le schéma MPFA symétrique. C'est-à-dire que nous établissons une formulation variationnelle avec les fonctions de bases de notre discrétisation. En suivant la démarche décrite dans [121, 122, 123], nous commençons par diviser les triangles en trois quadrangles, en reliant le barycentre du triangle au milieu de chaque facette. Soit $q_h \in M_h$, nous allons calculer une approximation affine de q_h sur chaque quadrangle. Pour ce faire, nous ajoutons des inconnues auxiliaires temporaires situées aux tiers des facettes (en 2D). La méthode de construction en 3D est analogue et sera expliquée dans le chapitre suivant.

D'abord, nous introduisons certaines notations. Nous allons définir le schéma localement autour des sommets du maillage.

Soit $j \in \mathcal{I}_S$. On définit le macro-élément \mathcal{M}_j tel que $\overline{\mathcal{M}}_j := \bigcup_{\ell \in \mathcal{I}_{T,j}} \overline{T}_\ell$.

Renombrons les sommets tel que : $S_0 = S_j$, $\mathcal{I}_{S,i=0} = \{1, \dots, N_{S,i=0}\}$. On définit la renumérotation suivante : $i \in \mathcal{I}_{S,i=0}$, $S_i S_{i+1} \in \mathcal{F}_h$ (on pose $S_{N_{S,i=0}+1} = S_1$). Pour $i \in \mathcal{I}_{S,i=0}$ on note :

- T_i le triangle de sommets $S_0 S_i S_{i+1}$, et on appellera son barycentre G_i .
- F_i la facette tel que $F_i = S_0 S_i$, et on appelle M_i son point milieu.
- $F_{i,0}$ la facette opposée au sommet S_0 dans T_i .
- \tilde{F}_i la demi-facette définie par S_0 et le point milieu de F_i . On notera l'ensemble des indices de toutes les demi-facettes $\mathcal{I}_{\tilde{F},i=0}$ et celles situées sur le bord $\mathcal{I}_{\tilde{F}}^b$.
- Q_i le quadrangle de sommets $S_0 M_i G_i M_{i+1}$ (figure 4.4-(a) pour $S_0 \subset \Omega$ et 4.5-(a) pour $S_0 \subset \partial\Omega$).

Pour $i, j \in \mathcal{I}_{S,i=0}$, on note $\mathcal{S}_{i,j}$ le vecteur normal sortant de T_j au point F_i et de norme $|F_i|$. Pour $i \in \mathcal{I}_{S,i=0}$, on appelle $\mathcal{S}_{0,i}$ le vecteur normal à $F_{i,0}$ sortant de T_i . Sur la figure 4.3-(a), on représente \mathcal{M}_0 dans le cas où $S_0 \subset \Omega$ et $N_{S,i=0} = 6$. Sur la figure 4.3-(b), on représente le triangle T_1 avec les vecteurs $(\mathcal{S}_{j,1})_{j=0}^2$ et son barycentre G_1 .

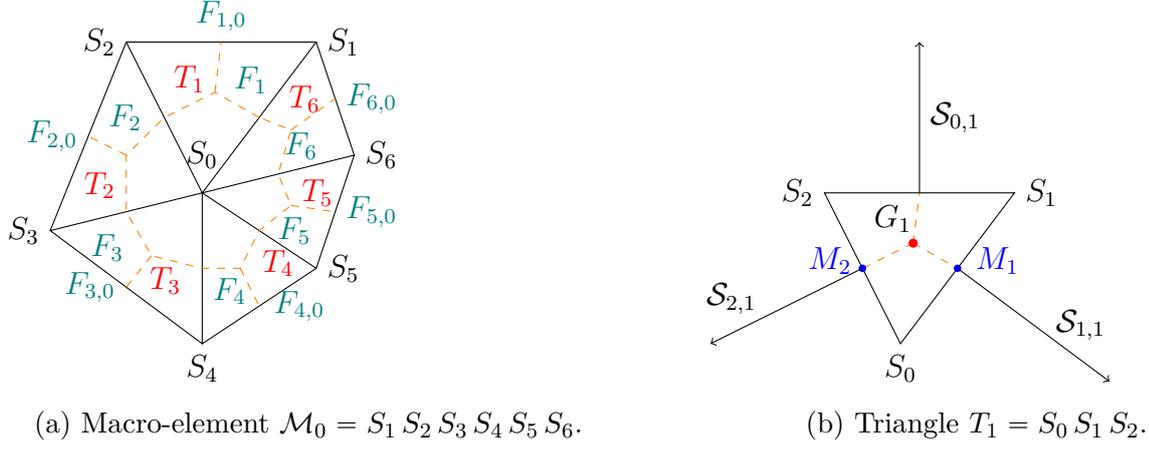


FIGURE 4.3 – Notations pour $N_{S,i=0} = 6$ et $j \in \mathcal{I}_S^i$.

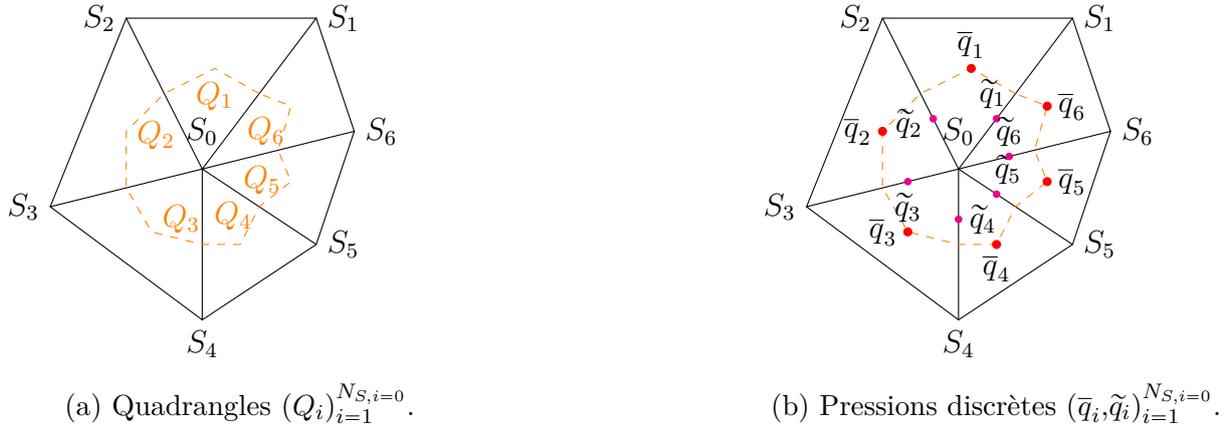


FIGURE 4.4 – Schéma MPFA pour $j \in \mathcal{I}_S^i$ et $N_{S,i=0} = 6$.

Soit $q_h \in M_h$. On note $q_{h|T_\ell} := \bar{q}_\ell$.

Considérons $S_0 \subset \Omega$ (figure 4.4). En suivant la méthodologie de construction du schéma MPFA, construisons une approximation affine par morceaux de q_h sur chaque quadrangle $(Q_i)_{i=1}^{N_{S,i=0}}$ (voir figure 4.4-(a)). Nous appelons cette approximation \tilde{q}_h . Nous introduisons tout d'abord des pressions auxiliaires discrètes $(\tilde{q}_i)_{i=1}^{N_{S,i=0}}$ sur les tiers des facettes intérieures (en 2D) de \mathcal{M}_0 (voir figure 4.4-(b)).

Pour tout $j \in \mathcal{I}_{S,i}$, on définit

$$\mathcal{G}_{0,i}(q_h) := \mathbf{grad} \tilde{q}_h|_{Q_i},$$

à l'aide d'une intégration par parties, comme cela est fait dans [122, Section 3] et [123, Section 1.1.1] :

$$|Q_i| \mathcal{G}_{0,i} = \int_{Q_i} \mathcal{G}_{0,i}(q_h) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial Q_i} \tilde{q}_h \mathbf{n}_{\partial Q_i} \, d\mathbf{x} = \tilde{q}_i \frac{\mathcal{S}_{i,i}}{d} + \tilde{q}_{i+1} \frac{\mathcal{S}_{i+1,i}}{d} + \bar{q}_i \left(-\frac{\mathcal{S}_{i,i}}{d} - \frac{\mathcal{S}_{i+1,i}}{d} \right).$$

Ainsi, en constatant que $|Q_i| = \frac{|T_i|}{d+1}$, on obtient :

$$\mathcal{G}_{0,i}(q_h) = \frac{1}{|Q_i|} \left((\tilde{q}_i - \bar{q}_i) \frac{\mathcal{S}_{i,i}}{d} + (\tilde{q}_{i+1} - \bar{q}_i) \frac{\mathcal{S}_{i+1,i}}{d} \right) = \frac{d+1}{d|T_i|} (\tilde{q}_i \mathcal{S}_{i,i} + \tilde{q}_{i+1} \mathcal{S}_{i+1,i} + \bar{q}_i \mathcal{S}_{0,i}). \quad (4.24)$$



FIGURE 4.5 – Schéma MPFA pour $j \in \mathcal{T}_S^b$ et $N_{S,i=0} = 4$

Afin de préserver le flux à travers les bords intérieurs de \mathcal{M}_0 , nous écrivons que :

$$\forall i \in \mathcal{I}_{S,i=0}, \quad \mathcal{G}_{0,i}(q_h) \cdot \mathcal{S}_{i+1,i} + \mathcal{G}_{0,i+1}(q_h) \cdot \mathcal{S}_{i+1,i+1} = 0. \quad (4.25)$$

Ces $N_{S,i=0}$ équations avec $N_{S,i=0}$ inconnues (les valeurs des pressions discrètes auxiliaires $(\tilde{q}_i)_{i=1}^{N_{S,i=0}}$) conduisent à un système linéaire bien posé. Nous pouvons donc évaluer les pressions auxiliaires $(\tilde{q}_i)_{i=1}^{N_{S,i=0}}$ avec les données $(\bar{q}_i)_{i=1}^{N_{S,i=0}}$. Les gradients de pression $(\mathcal{G}_{0,i}(q_h))_{i=1}^{N_{S,i=0}}$ définis par (4.24) s'écrivent alors seulement en fonctions des inconnues $(\bar{q}_i)_{i=1}^{N_{S,i=0}}$.

Remarque 14. *Un moyen de montrer que ces sous-systèmes sont bien posés est de remarquer qu'ils correspondent à un problème de Laplacien résolu localement par des éléments finis P_{nc}^1 (voir Remarque 18, p. 108). Or d'après le Chapitre 1, on sait que les problèmes de laplacien, résolus par les éléments finis P_{nc}^1 sont bien posés. En effet, il suffit de manière analogue à la proposition (12), p. 49 de montrer que la forme bilinéaire $(\cdot, \cdot)_h$ est un produit scalaire sur $X_{0,h} \times X_{0,h}$ associé à la norme $\|\cdot\|_h$ (voir proposition (8)).*

Considérons maintenant $S_0 \subset \partial\Omega$ (voir figure 4.5). Formellement, nous avons que la solution (\mathbf{u}, p) du problème (2.33) est telle que :

$$\mathbf{grad} p \cdot \mathbf{n}_{|\partial\Omega} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_{|\partial\Omega} - \nu \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{|\partial\Omega}, \quad (4.26)$$

où $\mathbf{n}_{|\partial\Omega}$ est le vecteur normal sortant de $\partial\Omega$.

Si $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{1/2+\epsilon}(\Omega)$ avec $\epsilon > 0$, nous pouvons expliciter les pressions discrètes localisées sur $\partial\Omega$ (ie \tilde{q}_1 et \tilde{q}_4 sur figure 4.5-(b)) en imposant que pour tout $i \in \mathcal{I}_{S,i=0}$ tel que $\tilde{F}_i \subset \partial\Omega$:

$$\int_{\tilde{F}_i} \mathcal{G}_{0,i}(q_h) \cdot \mathbf{n}_{|\tilde{F}_i} d\mathbf{x} = \int_{\tilde{F}_i} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_{|\tilde{F}_i} d\mathbf{x}. \quad (4.27)$$

Ce type de condition a été étudié par [125]. Ces équations sont des approximations de (3.86), p. 59, mais semblent donner de bons résultats numériques comme le montre la section 4.5, p. 120.

Les valeurs auxiliaires de pressions discrètes sont de nouveau, solutions d'un système linéaire bien posé. Elles peuvent être éliminées avec les données $(\bar{q}_i)_{i=1}^{N_{S,i=0}}$ et nous pouvons exprimer les gradients discret en fonction de ces données.

Nous détaillerons le cas où $S_0 \subset \partial\Omega$ dans la section 4.3 en proposant d'autres alternatives à cette condition. Si le second membre \mathbf{f} est une fonction peu régulière, on peut élargir l'espace des pressions discrètes en ajoutant les inconnues auxiliaires du bord en tant que degrés de liberté.

Pour $i \in \mathcal{I}_S$, on pose $(Q_{i,j})_{j \in \mathcal{I}_{S,i}}$ l'ensemble des quadrangles construit autour de S_i , et on appelle $\mathcal{Q}_h := ((Q_{i,j})_{j \in \mathcal{I}_{S,i}})_{i \in \mathcal{I}_S}$ l'ensemble de tous les quadrangles. Soit $q_h \in M_h$ et $i \in \mathcal{I}_S$. Dans le macro-élément \mathcal{M}_i , on appelle $\mathcal{G}_{i,j}(q_h)$ le gradient localement reconstruit de q_h . Nous définissons maintenant la reconstruction du gradient MPFA comme l'opérateur \mathcal{G}_h .

$$\mathcal{G}_h : \begin{cases} M_h & \rightarrow \mathbf{P}_{disc}^0(\mathcal{Q}_h) \\ q_h & \mapsto \mathcal{G}_h(q_h) \end{cases} \quad | \quad \forall i \in \mathcal{I}_S, \forall j \in \mathcal{I}_{S,i}, \quad \mathcal{G}_h(q_h)|_{Q_{i,j}} = \mathcal{G}_{i,j}(q_h|_{\mathcal{M}_i}). \quad (4.28)$$

Le schéma MPFA symétrique appliqué à l'opérateur de diffusion présente certaines propriétés :

Proposition 25. *L'approximation consistante des flux dans le schéma MPFA symétrique est réalisée à l'aide de triangles et de $p \in C^2(\Omega)$. En outre, l'approximation exacte des gradients pour les fonctions affines est obtenue en introduisant les inconnues auxiliaires de pression aux tiers des facettes. Enfin, le schéma MPFA symétrique présente des propriétés de consistance, de coercivité et de convergence*

La preuve de cette proposition se trouve dans [122, Prop. 2, Prop. 3] et [126, Théoreme 3.2].

4.2.2 Formulation variationnelle

On se propose maintenant d'établir la formulation variationnelle de notre problème. Soit $g_h(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire suivante :

$$g_h : \begin{cases} \mathbf{X}_h \times M_h & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}_h, q_h) & \mapsto (\mathcal{G}_h(q_h), \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \end{cases} . \quad (4.29)$$

La discrétisation de (2.33), p. 32 en utilisant le schéma MPFA pour discrétiser le gradient de pression s'écrit :

Problème: 18. *Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h$ |*

$$\begin{cases} a_{\nu,h}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + g_h(\mathbf{v}_h, p_h) = \ell_{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h} \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 & \forall q_h \in M_h \end{cases} , \quad (4.30)$$

où les formes bilinéaires $a_h(\cdot, \cdot)$ et $b_h(\cdot, \cdot)$ sont définies par (3.77), p. 57, et (3.79), p. 57. Le second membre $\ell_{\mathbf{f}}(\cdot)$ est défini par (3.80), p. 57. Le système linéaire lié à la formulation variationnelle (4.30) n'est pas symétrique. En effet, on note :

$$\begin{aligned} (A_\phi)_{ff'} &:= \nu \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \int_{T_\ell} \mathbf{grad} \phi_f \cdot \mathbf{grad} \phi_{f'} d\mathbf{x}, & A &= \begin{pmatrix} A_\phi & 0 \\ 0 & A_\phi \end{pmatrix} \\ (G^\alpha)_{kf} &:= \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \int_{T_\ell} \phi_f \mathcal{G}_h(\psi_k) \cdot \mathbf{e}_\alpha d\mathbf{x}, & G &= \begin{pmatrix} G^x \\ G^y \end{pmatrix} \\ (D^\alpha)_{fk} &:= \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \int_{T_\ell} \psi_k \operatorname{div}(\phi_f \mathbf{e}_\alpha) d\mathbf{x}, & D &= \begin{pmatrix} D^x & D^y \end{pmatrix} \\ (F^\alpha)_f &:= \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \int_{T_\ell} \phi_f \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_\alpha d\mathbf{x}, & F &= \begin{pmatrix} F^x \\ F^y \end{pmatrix} \\ & & U &= (U^x \quad U^y)^t \end{aligned} \quad (4.31)$$

avec :

— Les fonctions de base pour la vitesse $(\phi_f \mathbf{e}_\alpha)_{f \in \mathcal{I}_F}^{\alpha \in \{x,y\}}$ définies par (3.45).

— Les fonctions de base pour la pression $(\psi_k)_{k \in \mathcal{I}_T}$ qui sont définies par :

$$\psi_k = \mathbf{1}_{T_\ell}, \quad \forall k \in \mathcal{I}_T.$$

Remarque 15. *Si on garde les inconnues auxiliaires sur le bord, alors il faut enrichir le bord avec les fonctions ψ_o^{bd} , $o \in \mathcal{I}_F^b$. Ces fonctions sont définies comme les fonctions affines valant 1 sur le tiers des demi-facettes auxquelles elles sont associées et 0 autre part.*

Si nous considérons la formulation matricielle de ce problème éléments finis, le problème 18 s'écrit :

$$\begin{cases} \nu KU + GP = F \\ DU = 0 \end{cases}$$

avec K la matrice de raideur des éléments finis \mathbf{P}_{nc}^1 , G la matrice qui représente le gradient et D la divergence des éléments finis P_{disc}^0 . Finalement, le problème (4.30), s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A & G \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Les opérateurs gradient et divergence ne sont plus adjoints. Ce choix s'explique car si nous considérons la formulation symétrique de ce problème :

$$\begin{cases} \nu KU + GP = F \\ G^t U = 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

alors la convergence est dégradée. Nous proposons d'illustrer cela numériquement. Soit $\Omega = [0, 1]^2$. On présente les cas tests suivants pour les équations de Stokes (2.34), p. 33 :

1) Si la solution est donnée par le couple :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \quad p = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3}$$

h	$\varepsilon_0^{Mps}(u_h^{Mps})$	$\varepsilon_0^{Mps}(p_h^{Mps})$
1.00×10^{-1}	1.26×10^{-2}	7.09×10^{-1}
5.00×10^{-2}	4.89×10^{-3}	6.27×10^{-1}
2.50×10^{-2}	2.29×10^{-3}	6.24×10^{-1}
1.25×10^{-2}	1.11×10^{-3}	6.04×10^{-1}
TCM	1.2	0.08

TABLEAU 4.1 – Tableau d'erreurs en vitesse et en pression pour la norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ pour $u_x = y$, $u_y = x$, $p = (x^2 + y^2)/2 - 1/3$ et (4.33).

Dans le tableau 4.1 sont écrites les erreurs en vitesse et en pression pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ pour différents pas de maillage. On peut observer que le schéma converge en ordre 1 pour la vitesse (en norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$) et ne converge pas pour la pression (en norme $L^2(\Omega)$). Cette non-convergence se produit dès lors que la vitesse approchée est non-nulle.

2) Si la solution est donnée par le couple :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad p = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y).$$

Dans la figure 4.2 sont représentées les erreurs en vitesse et en pression pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$. On peut voir que le schéma converge en ordre 3 pour la vitesse (en norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$) et 2 pour la pression (en norme $L^2(\Omega)$).

h	$\varepsilon_0^{Mps}(u_h^{Mps})$	$\varepsilon_0^{Mps}(p_h^{Mps})$
1.00×10^{-1}	1.32×10^{-4}	1.81×10^{-2}
5.00×10^{-2}	1.34×10^{-5}	4.53×10^{-3}
2.50×10^{-2}	2.10×10^{-6}	1.17×10^{-3}
1.25×10^{-2}	2.94×10^{-7}	2.85×10^{-4}
TCM	3.0	2.0

TABLEAU 4.2 – Tableau d’erreurs en vitesse et en pression pour la norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ pour $\mathbf{u} = \mathbf{0}, p = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$ et (4.33).

La formulation symétrique dégrade le caractère affine exacte de l’approximation des éléments finis \mathbf{P}_{nc}^1 . En effet, la divergence est conservée seulement sur un macro-élément, et non plus localement. Pour illustrer ceci, on pose $p_h \in P_{disc}^0$, une fonction de base de pression p_{T_ℓ} associée à un triangle T_ℓ de sommets S_i, S_j, S_l (pour simplifier, nous choisissons que S_i, S_j, S_l sont des sommets appartenant à l’intérieur du domaine, mais le raisonnement est strictement analogue lorsque nous considérons un sommet du bord). Celle-ci génère un gradient non-nul sur les macro-cellules $\mathcal{M}_i, \mathcal{M}_j, \mathcal{M}_l$ avec les pressions auxiliaires. Les macro-cellules \mathcal{M}_α sont définies par le regroupement de tous les quadrangles reliés au sommet S_α , $\alpha \in \mathcal{I}_{F,\ell}$, c’est-à-dire :

$$\mathcal{M}_\alpha := \bigcup_{i=1}^{N_{S,i=\alpha}} (Q_i).$$

On représente le support de la fonction associée au gradient MPFA symétrique (4.28) pour la fonction de base de pression p_{T_ℓ} sur la figure 4.6.

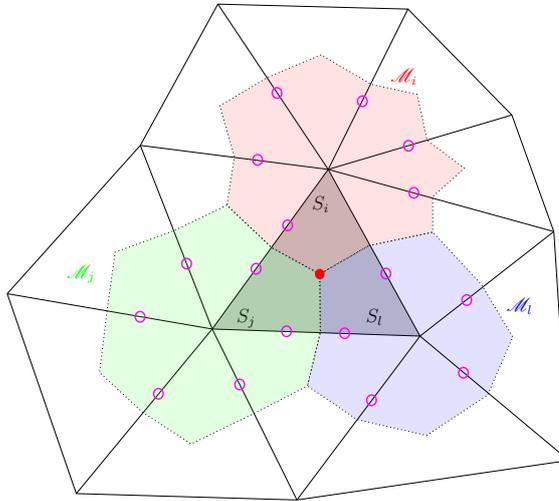


FIGURE 4.6 – Macro-cellules $\mathcal{M}_j, \mathcal{M}_i, \mathcal{M}_l$ du triangle T_ℓ . Le rond rouge est la localisation du degré de liberté p_{T_ℓ} et les cercles magenta représentent les degrés auxiliaires situés aux tiers des facettes.

On définit χ_ℓ la fonction dont le gradient est défini constant par morceaux sur les macro-cellules $\mathcal{M}_i, \mathcal{M}_j, \mathcal{M}_l$ et tel qu’il correspond aux gradients de notre pression discrète définis par le schéma MPFA (4.28), p. 100. Nous pouvons voir cette fonction comme une nouvelle fonction de base reliée à la formulation MPFA. Ainsi la condition de divergence nulle ne s’applique pas triangle par triangle mais plutôt sur une macro-cellule $\mathcal{M} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}_{S,T_\ell}} \mathcal{M}_i$.

Soit $\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h$, on multiplie le gradient MPFA généré par la fonction p_{T_ℓ} par \mathbf{v}_h :

$$\int_{\Omega} \mathcal{G}_h(p_{T_\ell}) \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{M}_i} \mathcal{G}_h(p_{T_\ell}) \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{M}_j} \mathcal{G}_h(p_{T_\ell}) \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{M}_l} \mathcal{G}_h(p_{T_\ell}) \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}$$

On note χ_ℓ , la fonction affine par morceau telle que :

$$\mathbf{grad} \chi_{\ell|T_k \cap \mathcal{M}_\alpha} = \mathcal{G}_h(p_{T_\ell})|_{T_k \cap \mathcal{M}_\alpha} \quad \forall k \in \mathcal{I}_T, \forall \alpha \in \{i, j, l\}$$

En intégrer par parties, on obtient :

$$\int_{\Omega} \mathcal{G}_h(p_{T_\ell}) \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = - \sum_{\alpha=\{i,j,l\}} \int_{\mathcal{M}_\alpha} \chi_\ell \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\partial \mathcal{M}_\alpha} \chi_\ell \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}|_{\partial \mathcal{M}_\alpha} \, d\sigma$$

Le terme $\int_{\partial \mathcal{M}_\alpha} \chi_\ell \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}|_{\partial \mathcal{M}_\alpha} \, d\sigma$ peut être non-nul car ici on ne peut pas utiliser la propriété du patch test (3.42), p. 48. Ainsi, imposer :

$$\int_{\Omega} \mathcal{G}_h(p_{T_\ell}) \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = 0,$$

n'implique pas

$$\sum_{\alpha=\{i,j,l\}} \int_{\mathcal{M}_\alpha} \chi_\ell \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = 0.$$

En particulier, on ne peut rien conclure sur la divergence de la solution \mathbf{u}_h . Pour corriger ce problème, la stratégie a été d'utiliser la divergence des éléments finis P_{disc}^0 définie par (3.79), p. 57, ce qui est écrit dans le problème (4.32), p. 101.

Nous avons donc amélioré la discrétisation du gradient mais la formulation du problème n'est plus symétrique. Cela impose donc d'utiliser des solveurs différents (GMRES [127]) qui requièrent de manière générale plus de ressources de calculs. Néanmoins, les sous-systèmes d'élimination des inconnues auxiliaires se parallélisent naturellement car ils sont indépendants les uns des autres.

4.2.3 Discrétisations alternatives du gradient de pression

Dans cette sous-section, on présente plusieurs formulations alternatives du schéma MPFA qui ont été implémentées sur un code maquette en [Octave](#) [79].

Discrétisation avec un volume d'intégration en diamant :

On présente dans un premier temps une autre forme pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ que l'on notera $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mpd}^0$ qui est obtenue en changeant les formules de quadrature. Cette formulation est équivalente à celle présentée précédemment mais correspond à un formalisme "Volumes élément finis" des éléments finis \mathbf{P}_{nc}^1 , comme décrite dans [7, 5, 6].

Considérons le triangle T_ℓ , $\ell \in \mathcal{I}_T$ et une facette F_f , $f \in \mathcal{I}_{F,\ell}$ du triangle T_ℓ . On peut alors définir le volume d'intégration $\omega_{f,\ell}$ qui est le triangle défini par les sommets S_m , $m \in \mathcal{I}_{S,F_f}$ et le barycentre x_{T_ℓ} . On gardera les mêmes notations pour le triangle T_k voisin à T_ℓ par la face F_f . On notera aussi les quadrangles $Q_{i,\ell}$, définis par le schéma MPFA (voir figure 4.4-(a) pour $S_0 \subset \Omega$) relié au triangle T_ℓ et au sommet S_m . On représente cette configuration dans la figure 4.7 :

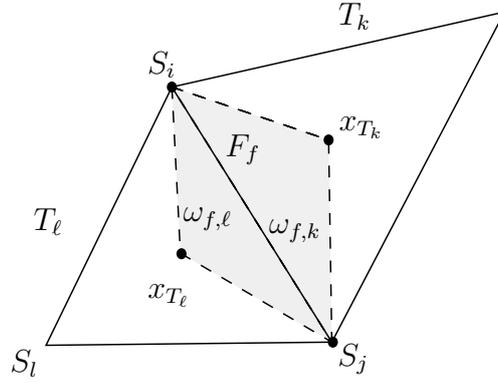


FIGURE 4.7 – Volumes d'intégration $\omega_{f,\ell}$ et $\omega_{f,k}$

Ensuite, nous considérons la formule de quadrature suivante :

$$(\mathcal{G}_h(q_h), \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \simeq \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \sum_{i \in \mathcal{I}_{S,F_f}} \int_{\omega_{f,\ell}} \frac{\mathcal{G}_h(q_h)|_{Q_{i,\ell}}}{2} \cdot \mathbf{v}_f \, d\mathbf{x} \quad (4.34)$$

avec $\mathcal{G}_h(q_h)$ le gradient MPFA reconstitué à partir des éléments fini P^0 (voir (4.28), p. 100). Cette formulation est une approximation du schéma $\mathbf{P}_{nc} - P_{Mps}^0$ mais correspond plus à l'approche "volumes éléments finis" développée par [5, 6]. En effet, les volumes d'intégrations $\omega_{f,\ell}$, $\forall \ell \in \mathcal{I}_T$, $\forall f \in \mathcal{I}_{F,\ell}$ sont les mêmes utilisés pour intégrer la vitesse dans l'approche volumes éléments finis. Numériquement, le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mpd}^0$ donne exactement les mêmes erreurs que le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ sur les équations de Stokes.

Schéma MPFA moyenné

Cette variante du schéma MPFA est issue de raisonnement dont le but était de trouver un schéma MPFA qui, par son intégration, vérifierait de manière évidente la condition inf-sup. L'objectif était de changer la formule de quadrature en effectuant une moyenne du gradient autour des facettes. On note ce schéma : $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mpm}^0$. Reprenons les notations précédentes.

On considère aussi $\omega_f := \bigcup_{t \in \mathcal{I}_{T,f}} \omega_{f,t}$.

Pour obtenir ce schéma, on utilise la formule de quadrature suivante :

$$(\mathcal{G}_h(q_h), \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \simeq \sum_{f \in \mathcal{I}_F} \sum_{k \in \mathcal{I}_{T,f}} \sum_{i \in \mathcal{I}_{S,F_f}} \int_{\omega_f} \frac{\mathcal{G}_h(q_h)|_{Q_{i,\ell}}}{4} \cdot \mathbf{v}_f \, d\mathbf{x} \quad (4.35)$$

On peut remarquer que lorsque l'on considère une pression affine, les gradients étant exactes et constants, nous retrouvons rigoureusement la formulation diamant. On conserve donc le caractère affine exacte.

Néanmoins, ce schéma semble moins précis. Pour illustrer cela, considérons les équations de Stokes (2.34), p. 33 avec comme solution :

$$(\mathbf{u}, p) = \left(\left(\begin{array}{c} (\cos(2\pi x_1) - 1) \sin(2\pi x_2) \\ -(\cos(2\pi x_2) - 1) \sin(2\pi x_1) \end{array} \right), \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2) \right) \quad (4.36)$$

Dans les tableaux 4.3 et 4.4, on donne respectivement le tableau des erreurs absolues en vitesse et relatives en pression pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ et le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mpm}^0$. On peut voir que les schémas convergent en ordre 2 pour la vitesse (en norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$). Pour la pression, seul le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ converge en ordre 1 (en norme $L^2(\Omega)$).

h	$\varepsilon_0^{Mps}(u_h^{Mps})$	$\varepsilon_0^{Mpm}(u_h^{Mpm})$
1.00×10^{-1}	2.60×10^{-2}	3.50×10^{-2}
5.00×10^{-2}	6.77×10^{-3}	8.02×10^{-3}
2.50×10^{-2}	1.66×10^{-3}	1.74×10^{-3}
1.25×10^{-2}	4.20×10^{-4}	3.71×10^{-4}
TCM	1.98	2.16

TABLEAU 4.3 – Tableau d’erreurs en vitesse pour la norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ pour $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $p = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$ et les schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mpm}^0$ et $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$.

h	$\varepsilon_0^{Mps}(p_h^{Mps})$	$\varepsilon_0^{Mpm}(p_h^{Mpm})$
1.00×10^{-1}	1.47×10^0	19.32×10^0
5.00×10^{-2}	5.74×10^{-1}	20.57×10^0
2.50×10^{-2}	2.28×10^{-1}	20.81×10^0
1.25×10^{-2}	8.76×10^{-2}	21.54×10^0
TCM	1.34	-0.05

TABLEAU 4.4 – Tableau d’erreurs en pression pour la norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ pour $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $p = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$ et les schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mpm}^0$ et $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$.

Lien avec les fonctions de bases des Crouzeix-Raviart

Cette approche est née d’une remarque sur les systèmes d’élimination des inconnues issues de la continuité des flux (4.25), p. 99 qui correspond à la résolution d’un problème de Laplacien pour les éléments finis de Crouzeix-Raviart non-conformes d’ordre 1 sur un maillage dual P^2 . On définit d’abord un maillage \mathcal{T}_h comme défini dans la section 3.2.1, p. 37.

Dans cette partie, nous réinterprétons le schéma MPFA en utilisant les fonctions de bases des éléments finis de Crouzeix-Raviart non-conformes d’ordre 1 sur un maillage dual correspondant au maillage des éléments finis P^2 . Celui-ci est obtenu en reliant les milieux des faces de chaque triangle. On définira alors l’ensemble \mathcal{T}_h^{CRR} comme l’ensemble des triangles définis par le maillage P^2 . On notera ce maillage \mathcal{T}_{2h} ainsi que l’espace d’indice \mathcal{I}_T^{2h} tel que $\mathcal{T}_{2h} = \bigcup_{\tilde{\ell} \in \mathcal{I}_T^{2h}} T_{\tilde{\ell}}^{2h}$. La figure 4.8 représente un exemple des deux maillages.

Remarque 16. *Pour obtenir une définition globale du schéma, il est nécessaire d’imposer que la solution soit constante sur certains triangles du maillage P^2 . Ceux-ci correspondent aux triangles générés par les barycentres des faces du maillage P^1 (notés t_i , $i \in \mathcal{I}_{S,i=0}$ dans la figure (4.10), p. 108-(a)). Ces triangles sont représentés en gris dans la figure 4.8.*

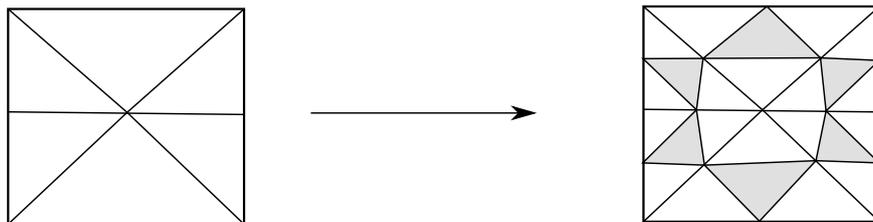


FIGURE 4.8 – Maillage P^1 à gauche noté \mathcal{T}_h et maillage P^2 à droite, noté \mathcal{T}_{2h} . Les triangles grisés sont ceux où la solution p_h est constante.

Pour définir le schéma, de manière analogue au schéma MPFA, on choisit un sommet S_j , $j \in \mathcal{I}_S$ que nous renumérotions S_0 . Nous reprenons les mêmes notations que dans la sous-section 4.2.1, p. 97 que nous rappelons ci-dessous :

On définit le macro-élément \mathcal{M}_j tel que $\overline{\mathcal{M}}_j := \bigcup_{\ell \in \mathcal{I}_{T,j}} \overline{T}_\ell$.

On définit la renumérotation suivante : $i \in \mathcal{I}_{S,i=0} = \{1, \dots, N_{S,i=0}\}$, $S_i S_{i+1} \in \mathcal{F}_h$. (on pose $S_{N_{S,i=0}+1} = S_{N_{S,i=0}}$). Pour $i \in \mathcal{I}_{S,i=0}$ on note :

- T_i le triangle de sommets $S_0 S_i S_{i+1}$, et on appellera son barycentre G_i .
- F_i la facette telle que $F_i = S_0 S_i$, et on appelle M_i son point milieu.
- $F_{i,0}$ la facette opposée au sommet S_0 dans T_i .
- \tilde{F}_i la demi-facette définie par S_0 et le point milieu de F_i . On notera l'ensemble des indices de toutes les demi-facettes $\mathcal{I}_{\tilde{F},S_0}$ et celles situées sur le bord $\mathcal{I}_{\tilde{F}}^b$.

Afin d'introduire nos problèmes locaux, on définit le sous-maillage suivant : on considère les triangles $t_{0,i}$ de sommets $S_0 M_i M_{i+1}$ et t_i les triangles de sommets $M_i M_{i+1} M_{i+1,0}$, pour $i \in \mathcal{I}_{S,i=0}$.

On définit alors la solution q_h comme une fonction affine par morceaux sur les triangles $t_{0,i}$ et constante sur les triangles t_i pour $i \in \mathcal{I}_{S,i=0}$. On définit le sous-maillage

$$\mathcal{M}_h^{CRR,0} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}_{S,i=0}} t_i,$$

ainsi que l'espace d'indices :

$$\mathcal{I}_{F,i=0}^{CRR} := \{ \tilde{f} \in \mathcal{I}_{F,i=0}^{CRR} \mid \tilde{F}_{\tilde{f}} \subset \mathcal{M}_h^{CRR,0} \}.$$

De manière analogue à la définition du maillage en 3.2.1, p. 37, on définit les milieux de ces demi-facettes par le point $M_{\tilde{f}}$. De plus, nous pouvons séparer les indices en deux ensembles : Les indices des faces du bord $\mathcal{I}_{F,i=0}^{b,CRR}$ et les indices des faces intérieures $\mathcal{I}_{F,i=0}^{i,CRR}$ du sous-maillage $\mathcal{M}_h^{CRR,0}$.

Remarque 17. *On note que l'espace des indices des demi-facettes intérieures à $\mathcal{M}_h^{CRR,0}$ noté $\mathcal{I}_{F,i=0}^{i,CRR}$ est exactement l'espace $\mathcal{I}_{\tilde{F},S_0}$ (défini p. 88). Nous introduisons l'espace $\mathcal{I}_{F,i=0}^{CRR}$ afin d'avoir un sous-maillage correspondant à la définition donnée en section 3.2.1, p. 37.*

Nous illustrons cette configuration ci-dessous pour $N_{S,i=0} = 6$, dans la figure 4.9 qui représente les différents triangles et faces associés à S_0 et la figure 4.10-(a) qui représente les triangles t_i et $t_{0,i}$.

Afin d'avoir une approximation affine sur les triangles $t_{0,i}$, $i \in \mathcal{I}_{S,i=0}$, on introduit des inconnues auxiliaires qui seront situées aux milieux des demi-faces $\tilde{F}_{\tilde{f}}$, $\tilde{f} \in \mathcal{I}_{F,i=0}^{CRR}$. On note ces inconnues $\tilde{q}_{\tilde{f}}$ et celles-ci sont représentées pour $N_{S,i=0} = 6$ sur la figure 4.10-(b). On définit l'espace :

$$X_h^{CRR,0} = \{ s_h \in P_{disc}^1(\mathcal{M}_h^{CRR,0}) \mid \forall \tilde{f} \in \mathcal{I}_{F,i=0}^{CRR} : [s_h](\overrightarrow{OM}_{\tilde{f}}) = \mathbf{0} \},$$

avec $P_{disc}^1(\mathcal{M}_h^{CRR,0})$ l'espace défini par (3.17), p. 41 et $[s_h](\overrightarrow{OM}_{\tilde{f}})$ le saut de la fonction s_h sur la demi-face $\tilde{F}_{\tilde{f}}$ reliée au sommet S_0 tel que

- Si $\tilde{F}_{\tilde{f}}$ est une face intérieure, telle que $\tilde{F}_{\tilde{f}} = \overline{t_{0,i}} \cap \overline{t_{0,i+1}}$. Le saut $[s_h]_{\tilde{F}_{\tilde{f}}}(\overrightarrow{OM}_{\tilde{f}})$ est défini par :

$$[s_h]_{\tilde{F}_{\tilde{f}}}(\overrightarrow{OM}_{\tilde{f}}) := s_h|_{t_i}(\overrightarrow{OM}_{\tilde{f},0}) - s_h|_{t_{i+1}}(\overrightarrow{OM}_{\tilde{f}}). \quad (4.37)$$

- Si $\tilde{F}_{\tilde{f}}$ est une face du bord de $\mathcal{M}_h^{CRR,0}$ appartenant à l'élément T_ℓ , alors $[s_h](\overrightarrow{OM}_{\tilde{f}}) := s_h|_{T_\ell}(\overrightarrow{OM}_{\tilde{f}})$.

On définit aussi l'espace :

$$\mathbf{X}_{0,h}^{CRR,0} := \{s_h \in \mathbf{X}_h \mid s_h(\overrightarrow{OM_{\tilde{f}}}) = 0, \forall \tilde{f} \in \mathcal{I}_F^{CRR,b}\}. \quad (4.38)$$

Alors q_h est la solution du problème suivant :

Problème: 19. Trouver $q_h \in X_h^{CRR,0}$ tel que

$$\begin{aligned} -\Delta q_h &= 0 & \text{sur } \mathcal{M}_h^{CRR,0} \\ q_h(M_{\tilde{f}}) &= \bar{q}_i & \forall \tilde{f} \in \mathcal{I}_{F,S_0}^{b,CRR} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Qui s'écrit sous la formulation variationnelle suivante :

Problème: 20. Trouver $q_h \in X_h^{CRR,0}$ tel que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{I}_{S,i=0}} \int_{t_i} \mathbf{grad} q_h \cdot \mathbf{grad} s_h dx &= 0 & \forall s_h \in X_{0,h}^{CRR,0} \\ q_h(M_{\tilde{f}}) &= \bar{q}_i & \forall \tilde{f} \in \mathcal{I}_{F,S_0}^{b,CRR} \end{aligned} \quad (4.40)$$

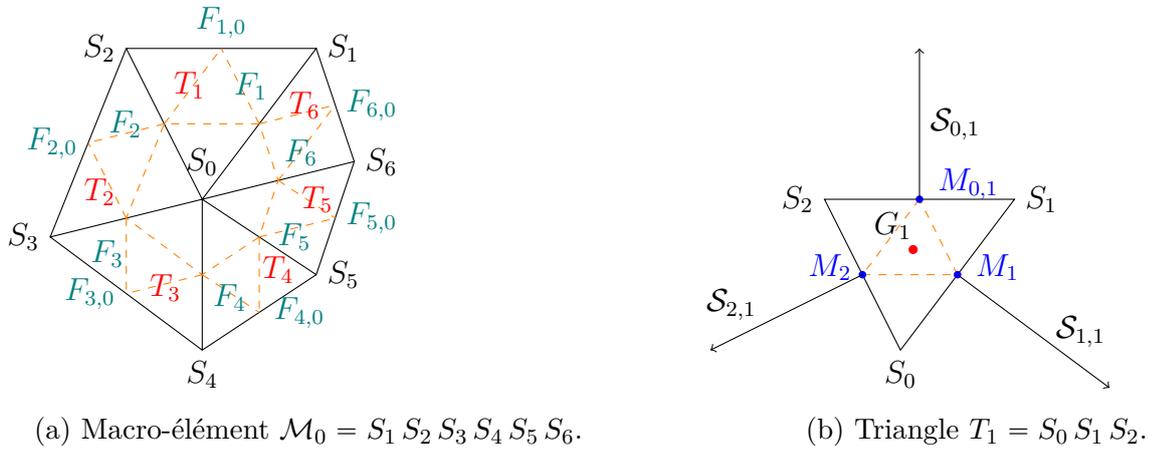


FIGURE 4.9 – Notations pour $N_{S,i=0} = 6$ et $j \in \mathcal{I}_S$.

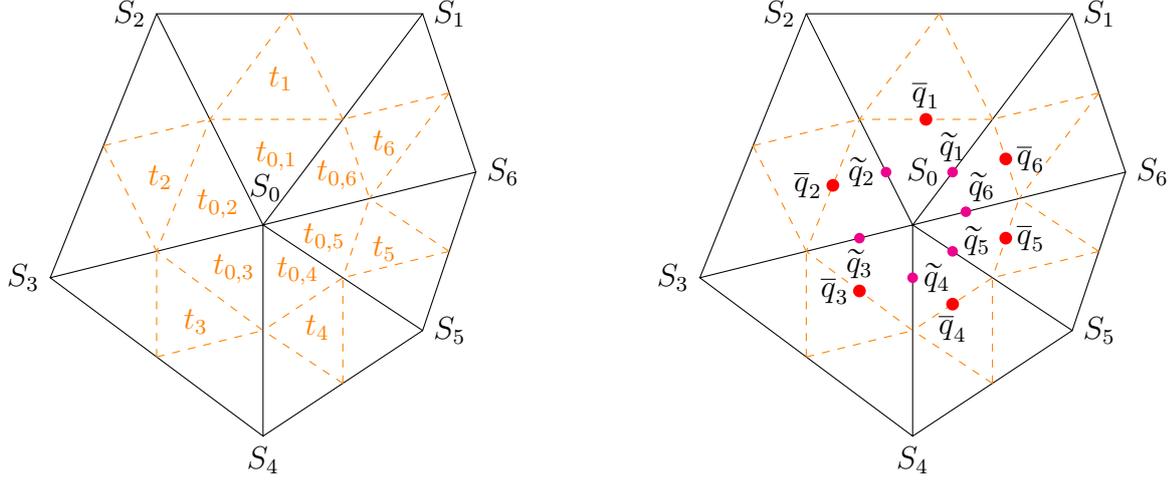
D'après la proposition 11, p. 48, le problème 20 est bien posé. On peut alors résoudre les inconnues auxiliaires $(\tilde{q}_i)_{i \in \mathcal{I}_{S,i=0}}$ en fonction des inconnues $(\bar{q}_i)_{i \in \mathcal{I}_{S,i=0}}$.

On écrit les systèmes d'éliminations des inconnues auxiliaires, qui correspondent à la résolution des problèmes de Crouzeix-Raviart locaux (4.40) :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i \in \mathcal{I}_{S,i=0}} \int_{t_i} \mathbf{grad} q_h \mathbf{grad} \phi_i dx = \frac{1}{2|t_{0,i}|} \int_{t_{0,i}} \mathbf{grad} q_h \cdot \mathcal{S}_{i,i} dx + \frac{1}{2|t_{0,i-1}|} \int_{t_{0,i-1}} \mathbf{grad} q_h \cdot \mathcal{S}_{i,i-1} dx, \\ 0 &= \frac{1}{4|t_{0,i}|} (\tilde{q}_{i+1} \mathcal{S}_{i+1,i} + \tilde{q}_i \mathcal{S}_{i,i} + \bar{q}_i \mathcal{S}_{0,i}) \cdot \mathcal{S}_{i,i} + \frac{1}{4|t_{0,i-1}|} (\tilde{q}_{i-1} \mathcal{S}_{i-1,i-1} + \tilde{q}_i \mathcal{S}_{i,i-1} + \bar{q}_{i-1} \mathcal{S}_{0,i-1}) \cdot \mathcal{S}_{i,i-1}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne, en écrivant $\mathcal{S}_{i,i-1} = -\mathcal{S}_{i,i}$ et $\mathcal{S}_{0,i} = -\mathcal{S}_{i+1,i} - \mathcal{S}_{i,i}$:

$$\frac{1}{|t_{0,i}|} ((\tilde{q}_{i+1} - \bar{q}_i) \mathcal{S}_{i+1,i} + (\tilde{q}_i - \bar{q}_i) \mathcal{S}_{i,i}) \cdot \mathcal{S}_{i,i} = \frac{1}{|t_{0,i-1}|} ((\tilde{q}_{i-1} - \bar{q}_{i-1}) \mathcal{S}_{i-1,i-1} + (\tilde{q}_i - \bar{q}_{i-1}) \mathcal{S}_{i,i-1}) \cdot \mathcal{S}_{i,i} \quad (4.41)$$



(a) Triangles $(t_{0,i})_{i=1}^{N_{S,i=0}}$ et $(t_i)_{i=1}^{N_{S,i=0}}$.

(b) Pressions discrètes $(\bar{q}_i, \tilde{q}_i)_{i=1}^{N_{S,i=0}}$.

FIGURE 4.10 – Schéma CRR pour $j \in \mathcal{I}_S^i$ et $N_{S,i=0} = 6$.

Remarque 18. L'équation (4.41) correspond exactement à l'équation de continuité des flux du schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ (4.25), p. 99.

On notera $\mathcal{T}_h^{CRR,j} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}_{S,i=0}} t_i$ et on définit l'espace :

$$P_h^{0,j} := \{p_h \in L^2(\mathcal{T}_h^{CRR,j}) \mid \forall i \in \mathcal{I}_{S,i=0}, p_h|_{t_i} \in P_{disc}^0(t_i)\}$$

comme l'ensemble des fonctions constantes par morceaux sur les triangle t_i , $i \in \mathcal{I}_{S,i=0}$.

Remarque 19. (définition globale) Pour obtenir la définition sur tout le maillage dual P^2 , il suffit de remarquer que $\bigcup_{j \in \mathcal{I}_S} (\mathcal{M}_h^{CRR,j} \cup \mathcal{T}_h^{CRR,j}) = \mathcal{T}_{2h}$. On définira alors un nouvel espace d'approximation :

$$\mathbf{X}_h^{CRR} := \left\{ p_h \in L^2(\Omega), \mid \forall \ell^{2h} \in \mathcal{I}_T^{2h} \quad \begin{array}{ll} p_h|_{T_{\ell^{2h}}} \in X_h^{CRR,j} & \text{si } \exists j \in \mathcal{I}_S, |T_{\ell^{2h}} \in \mathcal{M}_h^{CRR,j} \\ p_h|_{T_{\ell^{2h}}} \in P_h^{0,j} & \text{si } \exists j \in \mathcal{I}_S, |T_{\ell^{2h}} \in \mathcal{T}_h^{CRR,j} \end{array} \right\}$$

L'avantage de cette approche est qu'il est possible d'écrire exactement l'opérateur divergence avec une intégration par partie sur des volumes bien choisis (voir p. 102). Par ailleurs, à l'instar du schéma MPFA, on peut aussi décrire une fonction de bases générée par une inconnues \bar{q}_ℓ , $\ell \in \mathcal{I}_T$.

Remarque 20. (Fonctions de bases du gradient CRR)

Soit $\ell \in \mathcal{I}_T$. Considérons la fonction $q_h \in P_{disc}^0(\Omega)$ telle que $q_h|_{T_\ell} = 1$ et q_h est nulle ailleurs. La fonction q_h correspond à la fonction de base des éléments finis $P_{disc}^0(\Omega)$ associée à la cellule T_ℓ . Lorsque nous appliquons la discrétisation précédente à cette fonction et résolvons le problème 20, nous obtenons la contribution à chaque degré auxiliaire $(\tilde{q}_i)_{i \in \mathcal{I}_{S,j}}$, $\forall j \in \mathcal{I}_S, \ell$ provenant de \bar{q}_ℓ . Avec la discrétisation des Crouzeix-Raviart sur le maillage dual, nous pouvons associer une nouvelle fonction de base issue de la discrétisation du gradient. La figure 4.11 représente le support de cette fonction ainsi que les degrés auxiliaires non nuls engendrés par \bar{q}_ℓ .

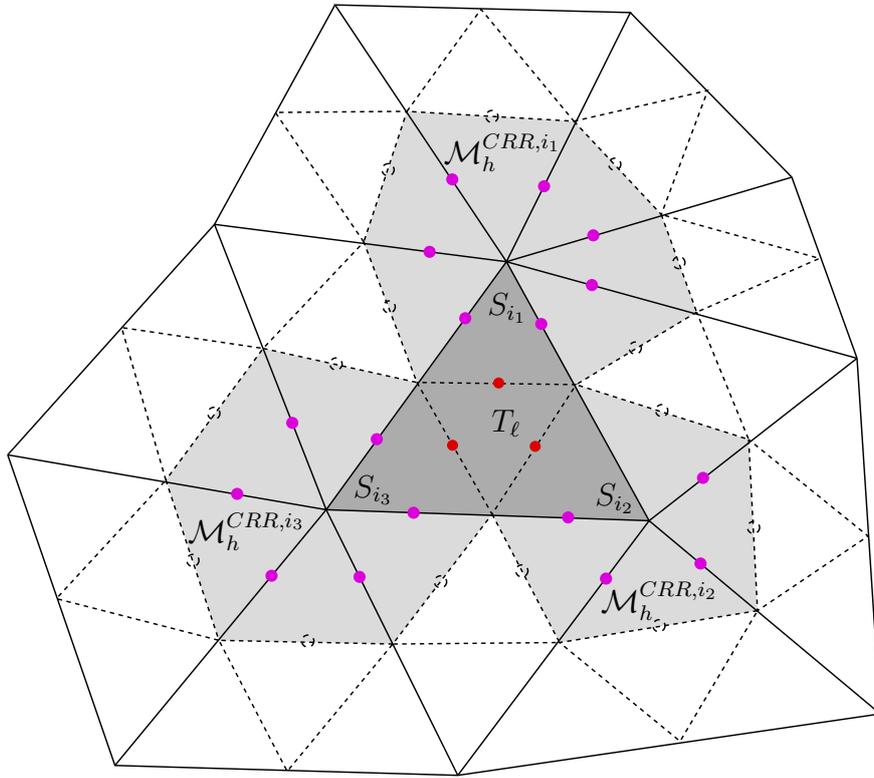


FIGURE 4.11 – Schéma du triangle T_ℓ de sommets $S_{i_1}, S_{i_2}, S_{i_3}$. En rouge sont représentées les trois inconnues qui valent \bar{q}_ℓ , en magenta les inconnues auxiliaires non-nulles générées par \bar{q}_ℓ , et enfin le cercle en pointillés représente les inconnues à valeurs nulles. Le support de la fonction de base générée par la discrétisation du gradient correspond aux zones grisées.

4.3 Extension du schéma sur le bord du domaine

Le schéma MPFA fait apparaître des inconnues sur le tiers des arêtes (figure 4.4-(a) pour $S_0 \subset \Omega$ et 4.5-(a) pour $S_0 \subset \partial\Omega$) (en 2D) et sur le barycentre des faces des quadrangles (en 3D). Celles-ci sont substituées par les pressions des cellules via des systèmes locaux reliés aux sommets.

Lorsque l'on impose aucune condition sur le bord pour la pression, les systèmes locaux ne sont pas inversibles sur le bord. Nous devons alors ajouter des conditions supplémentaires ou bien garder ces inconnues auxiliaires comme des inconnues du système global. Dans la section précédente, nous avons présenté une méthode pour compléter les équations de continuité de flux qui nous servent à substituer les inconnues auxiliaires ajoutées par le schéma MPFA. Pour cela, nous réalisons une approximation (4.27), p. 99 dans le cas où

$$\left| \nu \int_{\Omega} \mathbf{Grad} \mathbf{u} : \mathbf{Grad} \mathbf{v} \, dx \right| \ll \left| \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx \right|.$$

Néanmoins, il se peut que certaines applications ne soient pas dans le cadre de cette approximation et que celles-ci donnent alors de mauvais résultats. D'autres schémas de discrétisation sur le bord ont été proposés dans le cadre de cette thèse. Nous proposons de les présenter ci-dessous et d'expliquer l'avantage et la contre-partie qu'ils imposent. Nous restons, par simplicité, dans le cas 2D mais les solutions présentées peuvent s'adapter à la dimension supérieure.

Dans ce qui suit, nous reprenons le maillage défini dans la section 3.2.1, p. 37 et nous considérons le problème 18, p. 100 avec une condition de bord de Dirichlet pour la vitesse qui est déterminée par la donnée \mathbf{u}_b :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_b : \Omega : & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} & \mapsto \mathbf{u}_b(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (4.42)$$

4.3.1 Enrichissement de la contrainte d'incompressibilité avec des conditions sur le bord

Méthode A1 :

L'idée de ce schéma est d'utiliser les conditions de bord afin d'obtenir des équations permettant de renforcer la condition de divergence nulle proche du bord. On appellera cette méthode de discrétisation, la méthode A1.

Considérons un triangle T_ℓ sur le bord et renumérotions ses arêtes avec la configuration suivante : $\mathbf{u}_{f_3}, f_3 \in \mathcal{I}_F^b$ est un degré de liberté situé sur une arête du bord et $\mathbf{u}_{f_1}, \mathbf{u}_{f_2}, (f_1, f_2) \in (\mathcal{I}_F^i)^2$ sont des degrés de liberté sur des arêtes intérieures. On introduit des inconnues de vitesse aux sommets $\mathbf{u}_{S_{i_1}}, \mathbf{u}_{S_{i_2}}, (i_1, i_2) \in \mathcal{I}_S^b$ sur le bord. Les sommets $S_{i_1}, S_{i_2}, S_{i_3}$ sont respectivement opposés aux faces $F_{f_1}, F_{f_2}, F_{f_3}$.

On peut déterminer ces inconnues aux sommets avec les conditions aux bords. Cette configuration est représentée sur la figure 4.12.

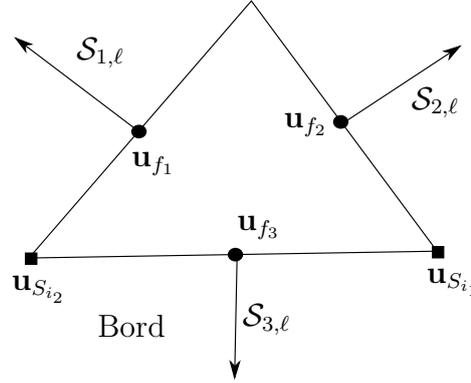


FIGURE 4.12 – Triangle T_ℓ avec la face F_{f_3} sur le bord.

La condition de divergence nulle, donnée par (4.30), p. 100, s'écrit :

$$\mathbf{u}_{f_1} \cdot \mathcal{S}_{f_1,\ell} + \mathbf{u}_{f_2} \cdot \mathcal{S}_{f_2,\ell} + \mathbf{u}_{f_3} \cdot \mathcal{S}_{f_3,\ell} = 0 \quad (4.43)$$

On cherche à exprimer \mathbf{u}_{f_1} en fonction de $\mathbf{u}_{f_1}, \mathbf{u}_{S_{i_1}}, \mathbf{u}_{f_2}$ et \mathbf{u}_{f_3} .

Par définition de la vitesse discrète :

$$\mathbf{u}_h = \sum_{\alpha=1}^d \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} u_\alpha \phi_f \mathbf{e}_\alpha$$

avec ϕ_f , la fonction de base des Crouzeix-Raviart reliée à la face F_f . En particulier, \mathbf{u}_h est une fonction affine sur T_ℓ et donc, si on note \mathbf{x}_ℓ le barycentre du triangle T_ℓ .

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{f_1} &= \frac{3}{2}(\mathbf{u}_h(\mathbf{x}_\ell)) - \frac{1}{2}\mathbf{u}_{S_{i_1}} \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}(\mathbf{u}_{f_1} + \mathbf{u}_{f_2} + \mathbf{u}_{f_3})\right) - \frac{1}{2}\mathbf{u}_{S_{i_1}} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{f_1} + \mathbf{u}_{f_2} + \mathbf{u}_{f_3}) - \frac{1}{2}\mathbf{u}_{S_{i_1}} \end{aligned} \quad (4.44)$$

On substitue \mathbf{u}_{f_1} avec (4.44) dans (4.43) :

$$\mathcal{S}_{f_1,\ell} \cdot \left(\frac{1}{2}(\mathbf{u}_{f_1} + \mathbf{u}_{f_2} + \mathbf{u}_{f_3}) - \frac{1}{2}\mathbf{u}_{S_{i_1}} \right) + \mathbf{u}_{f_2} \cdot \mathcal{S}_{f_2,\ell} = -\mathbf{u}_{f_3} \cdot \mathcal{S}_{f_3,\ell}$$

On applique le même principe pour \mathbf{u}_{F_2} et on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{f_1} + \mathbf{u}_{f_2}) \cdot \mathcal{S}_{f_1,\ell} + \mathbf{u}_{f_2} \cdot \mathcal{S}_{f_2,\ell} &= -\mathbf{u}_{f_3} \cdot (\mathcal{S}_{f_3,\ell} + \frac{1}{2}\mathcal{S}_{f_1,\ell}) + \frac{1}{2}\mathbf{u}_{S_{i_1}} \cdot \mathcal{S}_{f_1,\ell} &:= R_1 \\ \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{f_1} + \mathbf{u}_{f_2}) \cdot \mathcal{S}_{f_2,\ell} + \mathbf{u}_{f_1} \cdot \mathcal{S}_{f_1,\ell} &= -\mathbf{u}_{f_3} \cdot (\mathcal{S}_{f_3,\ell} + \frac{1}{2}\mathcal{S}_{f_2,\ell}) + \frac{1}{2}\mathbf{u}_{S_{i_2}} \cdot \mathcal{S}_{f_2,\ell} &:= R_2 \\ \mathbf{u}_{f_1} \cdot \mathcal{S}_{f_1,\ell} + \mathbf{u}_{f_2} \cdot \mathcal{S}_{f_2,\ell} &= -\mathbf{u}_{f_3} \cdot \mathcal{S}_{f_3,\ell} &:= R_3 \end{aligned} \quad (4.45)$$

Nb : Les seconds membres renommés R_1 , R_2 , R_3 sont calculés explicitement avec les conditions de bord. On peut alors donner la formulation équivalente suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{f_2} \cdot (\mathcal{S}_{f_1,\ell} + \mathcal{S}_{f_1,\ell}) &= 2R_1 - R_3 \\ \mathbf{u}_{f_1} \cdot (\mathcal{S}_{f_1,\ell} + \mathcal{S}_{f_1,\ell}) &= 2R_2 - R_3 \\ \mathbf{u}_{f_1} \cdot \mathcal{S}_{f_1,\ell} + \mathbf{u}_{f_2} \cdot \mathcal{S}_{f_2,\ell} &= R_3 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Proposition 26. *Les équations (4.46) sont indépendantes.*

Démonstration. Afin de montrer que ces équations sont indépendantes, on fixe une coordonnée, et on montre que le système qui en résulte est inversible.

Si $\mathcal{S}_{x,f_1,\ell} + \mathcal{S}_{x,f_2,\ell} \neq 0$, alors on fixe $u_{y,F_{f_1}}$ sinon, on fixe $u_{x,F_{f_1}}$ (et on a $\mathcal{S}_{y,f_1,\ell} + \mathcal{S}_{y,f_2,\ell} \neq 0$ car les vecteurs ne sont pas colinéaires avec l'hypothèse des triangles non-déformés¹). On obtient alors le système linéaire suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{S}_{x,f_1,\ell} + \mathcal{S}_{x,f_2,\ell} & \mathcal{S}_{y,f_1,\ell} + \mathcal{S}_{y,f_2,\ell} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_{x,f_1,\ell} + \mathcal{S}_{x,f_2,\ell} \\ \mathcal{S}_{x,f_2,\ell} & \mathcal{S}_{y,f_2,\ell} & \mathcal{S}_{x,f_1,\ell} \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} u_{x,F_{f_2}} \\ u_{y,F_{f_2}} \\ u_{x,F_{f_1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2R_1 - R_3 \\ 2R_2 - R_3 - u_{y,F_{f_1}}(\mathcal{S}_{y,f_1,\ell} + \mathcal{S}_{y,f_2,\ell}) \\ R_3 - u_{y,F_{f_1}}(\mathcal{S}_{y,f_1,\ell}) \end{pmatrix}$$

On peut alors calculer le déterminant de cette matrice :

$$|\det M| = |(\mathcal{S}_{x,f_1,\ell} + \mathcal{S}_{x,f_2,\ell})(\mathcal{S}_{x,f_1,\ell}\mathcal{S}_{y,f_2,\ell} - \mathcal{S}_{x,f_2,\ell}\mathcal{S}_{y,f_1,\ell})| \quad (4.47)$$

$$= 2|(\mathcal{S}_{x,f_1,\ell} + \mathcal{S}_{x,f_2,\ell})||T| \quad (4.48)$$

Et donc comme $\mathcal{S}_{x,f_1,\ell} + \mathcal{S}_{x,f_2,\ell} \neq 0$, cela implique que $|\det M| \neq 0$. En particulier, la matrice M est inversible et les inconnues \mathbf{u}_{f_1} , \mathbf{u}_{f_2} sont déterminés de manière unique. Le raisonnement est équivalent si on fixe $u_{x,F_{f_1}}$. \square

Néanmoins, ces équations imposent une contrainte sur le maillage. En effet, considérons deux triangles T_k, T_ℓ , $(k, \ell) \in (\mathcal{I}_T)^2$, définis respectivement par les arêtes $F_{f_3}, F_{f_4}, F_{f_5}$ et $F_{f_1}, F_{f_2}, F_{f_3}$ avec $(f_2, f_4) \in (\mathcal{I}_F^b)^2$ sont des indices d'arêtes sur le bord et $(f_1, f_3, f_5) \in (\mathcal{I}_F^i)^3$ sont des indices d'arêtes à l'intérieur du domaine. Cette configuration est représentée sur la figure 4.13. Il est à noter que celle-ci peut être générée naturellement par les mailleurs, notamment sur les coins d'un domaine carré.

1. Non-plats

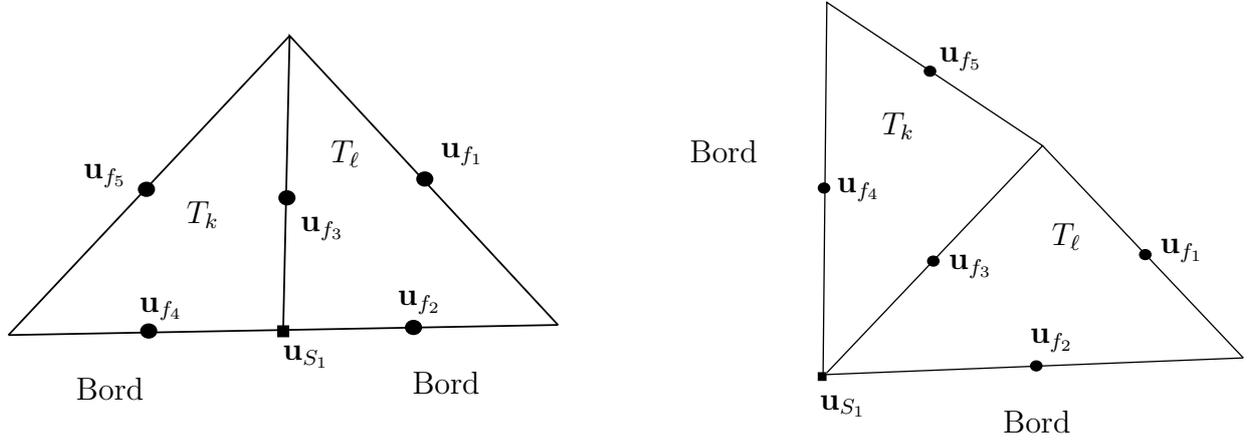


FIGURE 4.13 – Configuration d'une arête intérieure partagée par deux triangles ayant une arête sur le bord

alors on peut écrire le système (4.45) appliqué aux deux triangles de la figure 4.13 :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{f_3} \cdot (\mathcal{S}_{f_1,\ell} + \mathcal{S}_{f_2,\ell}) &= \mathbf{u}_{f_2} \cdot (3\mathcal{S}_{f_2,\ell} + \mathcal{S}_{f_1,\ell}) + \mathbf{u}_{S_{i_1}} \cdot \mathcal{S}_{f_1,\ell} \\ \mathbf{u}_{f_3} \cdot (\mathcal{S}_{f_5,k} + \mathcal{S}_{f_4,k}) &= \mathbf{u}_{F_{f_4}} \cdot (3\mathcal{S}_{f_4,k} + \mathcal{S}_{f_5,k}) + \mathbf{u}_{S_{i_1}} \cdot \mathcal{S}_{f_5,k} \end{aligned} \quad (4.49)$$

qui est équivalent, en utilisant l'égalité : $\mathcal{S}_{F_3,k} - \mathcal{S}_{F_3,\ell}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{f_3} \cdot (-\mathcal{S}_{f_3,\ell}) &= \mathbf{u}_{f_2} \cdot (3\mathcal{S}_{f_2,\ell} + \mathcal{S}_{f_1,\ell}) + \mathbf{u}_{S_{i_1}} \cdot \mathcal{S}_{f_1,\ell} \\ \mathbf{u}_{f_3} \cdot (+\mathcal{S}_{f_3,\ell}) &= \mathbf{u}_{F_{f_4}} \cdot (3\mathcal{S}_{f_4,k} + \mathcal{S}_{f_5,k}) + \mathbf{u}_{S_{i_1}} \cdot \mathcal{S}_{F_{f_5},k} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Remarque 21. (Variante du schéma sur le bord : méthode A2)

On considère la configuration de la figure 4.13. Le point de départ est l'expression de \mathbf{u}_{f_1} en fonction de $\mathbf{u}_{S_{i_1}}$, \mathbf{u}_{f_2} et \mathbf{u}_{f_3} . On reprend l'égalité (4.44)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{f_1} &= \frac{3}{2}(\mathbf{u}_h(\mathbf{x}_T)) - \frac{1}{2}\mathbf{u}_{S_{i_1}} \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}(\mathbf{u}_{f_1} + \mathbf{u}_{f_2} + \mathbf{u}_{f_3})\right) - \frac{1}{2}\mathbf{u}_{S_{i_1}} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{f_1} + \mathbf{u}_{f_2} + \mathbf{u}_{f_3}) - \frac{1}{2}\mathbf{u}_{S_{i_1}} \end{aligned} \quad (4.51)$$

On a alors l'égalité suivante :

$$\mathbf{u}_{f_2} - \mathbf{u}_{f_1} = \mathbf{u}_{f_3} - \mathbf{u}_{S_{i_1}} \quad (4.52)$$

Cette égalité nous donne deux équations sur les composantes. Mais ce système d'équations donne un rang incomplet lorsqu'on considère la configuration présentée dans la figure 4.13, p. 112. En effet, comme avec la méthode A1, on retrouvera la même équation écrite pour le triangle T_ℓ et T_k (voir (4.50)).

4.3.2 Contraintes des vitesses proches du bord

Méthode B :

On décrit ici un autre schéma pour compléter le système lorsqu'on impose les conditions de bord de Dirichlet homogènes. L'idée est d'imposer une continuité plus forte pour les éléments finis en vitesse pour les arêtes intérieures proche du bord. On peut ainsi générer une approximation qui est plus conforme dans $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$. Pour cela, on s'inspire de la propriété du patch test (3.42), p. 48, en imposant que le flux de la vitesse soit nul contre

un polynôme d'ordre 1. Ce schéma donne de bons résultats, néanmoins, il impose la même condition que le schéma précédent et interdit les configurations décrites par la figure 4.13.

Soit \mathcal{T}_h^b l'ensemble des triangles ayant une face sur le bord et \mathcal{I}_T^b l'espace des indices des triangles appartenant à cet ensemble. Nous imposons la condition suivante :

$$\forall \ell \in \mathcal{I}_T^b, \forall f \in \mathcal{I}_{F,\ell}, \text{ tel que } S_i S_j = F_f, \text{ si } F_f \not\subset \partial\Omega, \text{ alors } \int_{F_f} [\mathbf{u}_h] \cdot \mathcal{S}_{f,\ell} \lambda_i d\sigma = 0 \quad (4.53)$$

où λ_i est la coordonnée barycentrique (3.4), p. 39 associée à l'un des sommets de l'arête F_f , $f \in \mathcal{I}_F$.

Pour les mêmes raisons que la méthode précédente, cette discrétisation ne fonctionne pas lorsqu'on considère la configuration décrite par la figure 4.13, p. 112. En effet, si nous appliquons cette discrétisation à une arête partagent deux triangles ayant au moins une face sur le bord, nous écrivons deux fois la même équation. Cela mènera donc à un système non-complet. Dans ce cas, une solution est un post-traitement du maillage visant à enlever ces configurations.

Remarque 22. *Une possibilité pour obtenir un système inversible est de compléter les équations obtenues avec les conditions (4.53) en prenant d'autres arêtes intérieures du domaine, de préférence éloigné du bord pour ne pas sur-contraindre le système.*

4.3.3 Comparaison des méthodes

Considérons le couple de solution aux équations de Stokes (2.33), p. 32 suivant :

$$(\mathbf{u}, p) = \left(\begin{pmatrix} (\cos(2\pi x_1) - 1) \sin(2\pi x_2) \\ -(\cos(2\pi x_2) - 1) \sin(2\pi x_1) \end{pmatrix}, \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2) \right) \quad (4.54)$$

On résout le problème (4.30), p. 100 avec le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ et les différentes méthodes proposées pour discrétiser le bord (A1, A2, B) ainsi que la méthode proposée par l'équation (4.27), p. 99 que nous appellerons méthode C. Nous utilisons un maillage n'admettant pas la configuration décrite par la figure 4.13, p. 112. Les erreurs relatives obtenues en vitesse (notées $\varepsilon_0^{Mps}(\mathbf{u}_h)$) sont tracées dans la figure 4.14 et celle en pression (notées $\varepsilon_0^{Mps}(p_h)$) sont tracées dans la figure 4.15. On remarque que les erreurs données par la méthode A1 et A2 sont identiques. Plus généralement, les erreurs des différents schémas sont équivalentes. On retrouve les ordres de convergence théorique qui sont 2 pour la norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$ pour la vitesse et 1 pour la norme $L^2(\Omega)$ pour la pression. Par ailleurs, la méthode qui semble la plus précise est la méthode C.

4.3.4 Schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ implémenté dans TrioCFD

Dans le code TrioCFD, un schéma s'appuyant sur le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ et pouvant traiter des maillages polyédriques a été implémenté par Antoine Gerschenfeld [128]. Celui-ci est appelé PolyVEF_P0 et permet la discrétisation du gradient de pression par d'autres schémas MPFA que le schéma MPFA symétrique. Lorsqu'on applique le schéma PolyVEF_P0 en précisant l'utilisation du schéma MPFA symétrique, à des maillages triangulaire (en 2D) ou tétraédrique (en 3D), on obtient le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$.

Dans cette partie, nous expliquons comment est complété le système (4.30), p. 100 dans le schéma PolyVEF_P0.

On considère le système (4.32), p. 101, mais nous imposons sur le bord une seule inconnue en pression qui sert à définir les d gradients des quadrangles de la face. Ainsi, si l'on considère

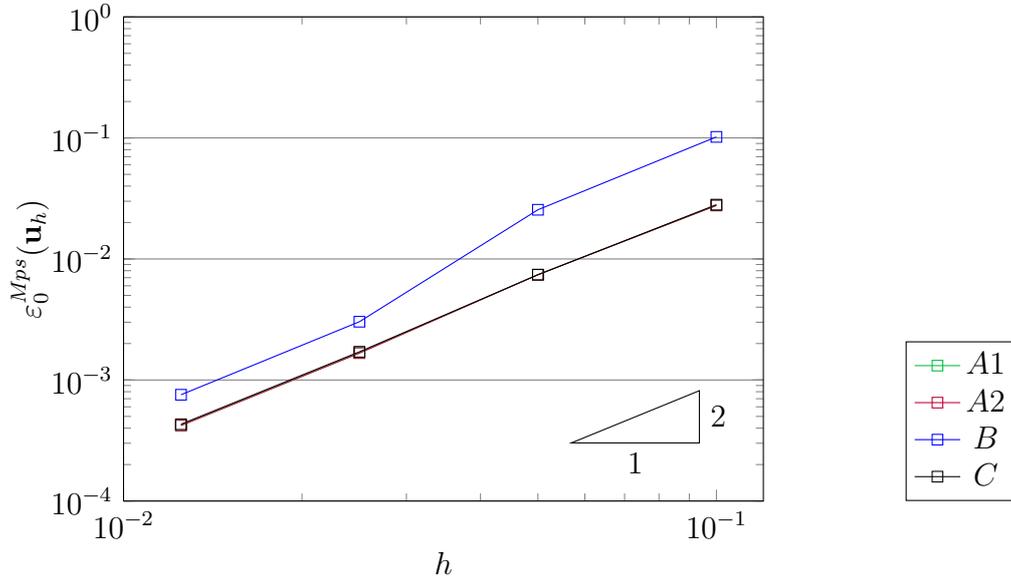


FIGURE 4.14 – $\varepsilon_0^{Mps}(\mathbf{u}_h)$ pour (\mathbf{u}, p) donné par (4.54) et $\nu = 1$

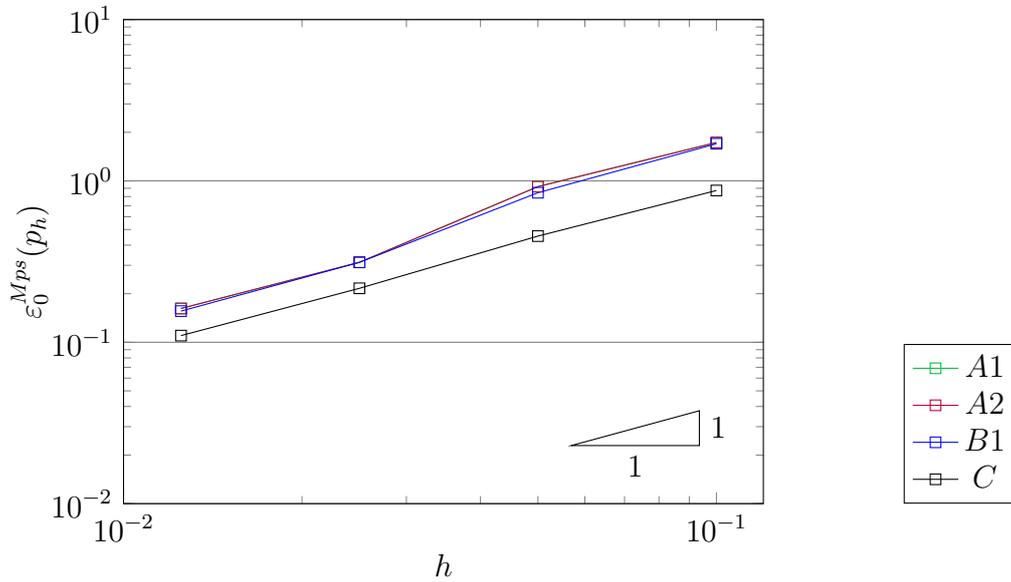


FIGURE 4.15 – $\varepsilon_0^{Mps}(p_h)$ pour (\mathbf{u}, p) donné par (4.54) et $\nu = 1$

une face du bord, en $2D$, cela impose que les valeurs des pressions auxiliaires définies en section 4.2.1, p. 97 sont égales. Cette construction permet d'aboutir à un schéma pour la pression permettant toujours de retrouver une solution exacte si p est une fonction affine mais ne permet pas de garantir la symétrie de la matrice liée à la discrétisation du laplacien et donc peut détériorer la stabilité [122].

On écrit le système en gardant les vitesses du bord comme des inconnues et ajoutons les équations correspondantes :

$$\begin{pmatrix} A_{\Omega, \Omega} & A_{\Omega, \partial\Omega} & G_{\Omega}^i & G_{\Omega}^b \\ A_{\partial\Omega, \Omega} & A_{\partial\Omega, \partial\Omega} & G_{\partial\Omega}^i & G_{\partial\Omega}^b \\ D_{\Omega} & D_{\partial\Omega} & 0 & 0 \\ 0 & D_{V_n} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\Omega} \\ U_{\partial\Omega} \\ P^i \\ P^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{\Omega} \\ F_{\partial\Omega} \\ 0 \\ V_n \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

avec

- Le nombre de degrés de liberté en vitesses $N_u = N_u^{\Omega} + N_u^{\partial\Omega}$ est divisé en deux nombres : Le nombre de degrés de liberté pour les vitesses intérieures $N_u^{\Omega} = d N_F^i$ et

extérieures $N_u^{\partial\Omega} = d N_F^b$.

- Le nombre de degrés de liberté en pression $N_p = N_p^i + N_p^b$ divisé en deux nombres :
Le nombre de degrés de liberté des pressions dans les cellules $N_p^i = N_T$ et le nombre de degrés de liberté en pression sur le bord $N_p^b = N_F^b$.
- Le tableau des inconnues en vitesse sur les faces intérieures $U_\Omega \in \mathbb{R}^{N_u^\Omega}$ et les inconnues en vitesse sur les faces du bord $U_{\partial\Omega} \in \mathbb{R}^{N_u^{\partial\Omega}}$.
- Le tableau des inconnues en pression $P^i \in \mathbb{R}^{N_p^i}$ et le tableau des inconnues de pressions auxiliaires sur le bord $P^b \in \mathbb{R}^{N_p^b}$.
- Les matrices $A_{\Omega,\Omega} \in \mathbb{R}^{N_u^\Omega} \times \mathbb{R}^{N_u^\Omega}$, $A_{\partial\Omega,\Omega} = A_{\Omega,\partial\Omega}^T \in \mathbb{R}^{N_u^\Omega} \times \mathbb{R}^{N_u^\Omega}$ et $A_{\partial\Omega,\partial\Omega} \in \mathbb{R}^{N_u^{\partial\Omega}} \times \mathbb{R}^{N_u^{\partial\Omega}}$ sont les matrices de raideur (défini par la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ (3.77), p. 57) associées aux couplages des vitesses "intérieures/intérieures", "bord/intérieures", et "bord/bord".
- Les matrices $G_\Omega^i \in \mathbb{R}^{N_F^\Omega} \times \mathbb{R}^{N_p^i}$, $G_\Omega^b \in \mathbb{R}^{N_F^\Omega} \times \mathbb{R}^{N_p^b}$ et $G_{\partial\Omega}^i \in \mathbb{R}^{N_F^{\partial\Omega}} \times \mathbb{R}^{N_p^i}$, $G_{\partial\Omega}^b \in \mathbb{R}^{N_F^{\partial\Omega}} \times \mathbb{R}^{N_p^b}$ sont associées à la discrétisation de l'opérateur gradient (4.29), p. 100 et contiennent les contributions des vitesses aux faces intérieures et sur le bord pour les degrés de pression dans les cellules ou sur les arêtes du bord.
- Les matrices $D_\Omega \in \mathbb{R}^{N_p^i} \times \mathbb{R}^{N_u^\Omega}$ et $D_{\partial\Omega} \in \mathbb{R}^{N_p^i} \times \mathbb{R}^{N_u^{\partial\Omega}}$ sont associées à la discrétisation de l'opérateur divergence (3.79), p. 57 et contiennent les contributions des vitesses aux faces intérieures et sur le bord.
- La matrice $D_{V_n} \in \mathbb{R}^{N_F^b} \times \mathbb{R}^{N_F^b}$ qui permet d'imposer les vitesses normales sur le bord.
- Le tableau $V_n \in \mathbb{R}^{N_F^b}$ qui contient les vitesses normales du bord imposées.
- Le tableau $F_\Omega \in \mathbb{R}^{N_u^\Omega}$ et $F_{\partial\Omega} \in \mathbb{R}^{N_u^{\partial\Omega}}$ qui contiennent les valeurs des termes sources pour les vitesses intérieurs et du bord.

On rappelle que N_T est le nombre de triangle, N_F^i est le nombre de faces intérieures et N_F^b est le nombre de faces du bord et sont définies dans la section 3.2.1, p. 37.

Aussi, on ajoute, dans les matrices $A_{\partial\Omega,\Omega}$ un terme de pénalisation permettant d'imposer la vitesse normale sur ces équations. Ainsi, si l'on écrit le système (4.55) pour une face F_f , $f \in \mathcal{I}_F^b$ du bord du domaine pour les équations de Stokes, on obtient :

$$A_{f,\Omega} U_\Omega + A_{f,\partial\Omega} U_{\partial\Omega} + G_f^i P^i + G_f^b P^b + \frac{1}{h^{d_V}} (\mathbf{u}_{F_f} \cdot \mathbf{n}_{f,\partial\Omega} - \mathbf{u}_{b,f} \cdot \mathbf{n}_{f,\partial\Omega}) = F_{\partial\Omega}$$

où $\mathbf{u}_{b,f}$ est la valeur imposée sur l'arête F_f . Les matrices lignes $A_{f,\Omega}$, $A_{f,\partial\Omega}$, G_f^i , G_f^b , correspondent aux lignes de l'arête F_f des matrices du système (4.55). Enfin, $\mathbf{n}_{f,\partial\Omega}$ est le vecteur normale sortant de l'arête F_f du domaine Ω . On applique cette équations aux nombres de composantes de la vitesse \mathbf{u}_{F_f} sur le bord.

Remarque 23. (*Cas du 3D*)

Cette condition s'adapte en 3D, en choisissant qu'un seul vecteur tangent par face et en ajoutant qu'une pression auxiliaire par face du bord.

Ce schéma de discrétisation se généralise aux équations de Navier-Stokes en ajoutant le terme de convection, et la matrice de masse dans les matrices $A_{\Omega,\Omega}$, $A_{\partial\Omega,\Omega}$, $A_{\partial\Omega,\partial\Omega}$ ainsi qu'en modifiant les seconds membres F_Ω et $F_{\partial\Omega}$. Numériquement, ces équations suffisent à obtenir un système inversible ainsi qu'à conserver la propriété de discrétisation exacte des pression affines.

4.4 Étude de la convergence du schéma

Dans cette partie, on s'intéresse à la convergence du schéma. Bien qu'à l'issue des travaux de cette thèse, nous n'avons pas obtenu la convergence théorique du schéma, nous avons pu

montrer un critère numérique nécessaire. Nous présentons dans cette partie notre démarche visant à prouver la condition inf-sup, afin de mettre en exergue les difficultés de cette preuve. Ensuite une étude numérique appelée inf-sup test qui garantit une stabilité pour des maillages donnés est entreprise, mais cette démarche ne peut se substituer à une preuve théorique.

4.4.1 Condition inf-sup

Comme montré dans la section 3.3, p. 43, pour montrer la convergence d'un schéma d'éléments finis mixte ayant une formulation symétrique pour les équations de Stokes, on utilise le théorème Babuska-Brezzi (Théorème 23, p. 174). Lorsque l'on considère une formulation non-symétrique, il est nécessaire de montrer deux conditions inf-sup (voir Théorème (25), p. 176 [129]). Pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$, celles-ci s'énoncent :

$$\exists \beta_g > 0, \inf_{\substack{q_h \in M_h \\ q_h \neq 0}} \sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h} \\ \mathbf{v}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{(\mathbf{v}_h, \mathcal{G}_h(q_h))_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \geq \beta_g \|q_h\|_{M_h}, \quad (4.56)$$

$$\exists \beta_d > 0, \inf_{\substack{q_h \in M_h \\ q_h \neq 0}} \sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h} \\ \mathbf{v}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{(\mathbf{v}_h, q_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}{\|\mathbf{v}_h\|_h} \geq \beta_d \|q_h\|_{M_h}, \quad (4.57)$$

où β_g, β_d sont des constantes strictement positives qui ne dépendent pas du pas du maillage.

La seconde équation est montrée dans la proposition (20), p. 59. Il suffit donc de montrer la première équation pour montrer la bonne définition de notre schéma.

Dans cette partie, nous développons le début de la preuve de la condition inf-sup (4.56). Ensuite, nous proposons un candidat naturel pour la vitesse permettant de montrer la condition inf-sup. Nous montrons que celui-ci ne convient pas et mettons en exergue la difficulté de la preuve.

Soit $q_h \in M_h$, une pression discrète. On peut alors définir le gradient MPFA de q_h , noté $\mathcal{G}_h(q_h)$ par (4.28), p. 100. Cette fonction est constante par morceaux sur les quadrangles $Q_{i,j}$ (définis en section 4.2.1, p. 97), pour $i, j \in \mathcal{I}_S$, tel que S_i et S_j soient des sommets voisins. Ces quadrangles sont aussi reliés de manière unique à un triangle et à un sommet.

Dans un premier temps, nous allons raisonner localement. Pour cela, on introduit une notation locale pour simplifier la démonstration. On considère un triangle T_ℓ , $\ell \in \mathcal{I}_T$, de sommet S_1, S_2, S_3 et de face opposée F_1, F_2, F_3 . On note les normales $\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_{i,\ell}$, les vecteurs faces normales $\mathcal{S}_i = |F_i| \mathbf{n}_{i,\ell}$ et les quadrangles associés au triangle Q^i , $i \in \{1, 2, 3\}$. Les trois gradients constants sur chacun des triangles avec le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ sont notés $\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3$. Une représentation de cette configuration est donnée dans la figure 4.16, p. 117.

On obtient, en utilisant une formulation d'intégration avec les points aux sommets :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_h, \mathcal{G}_h(q_h))_{L^2(Q^i_T)} &= \mathbf{G}^i \cdot \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \sum_{\alpha=1}^d v_f^\alpha \int_{Q^i} \phi_f \mathbf{e}_\alpha \\ &= \frac{|T_\ell|}{3} \mathbf{G}^i \cdot \left(\frac{11}{18} (\mathbf{v}_{f_j} + \mathbf{v}_{f_k}) - \frac{2}{9} \mathbf{v}_{f_i} \right) \\ &= |T_\ell| \mathbf{G}^i \cdot \left(\frac{11}{54} (\mathbf{v}_{f_j} + \mathbf{v}_{f_k}) - \frac{2}{27} \mathbf{v}_{f_i} \right) \end{aligned} \quad (4.58)$$

où $f_i, f_j, f_k \in \mathcal{I}_F$, $(i, j, k) \in \{1, 2, 3\}^3$ les indices, tous différents les uns des autres, des sommets du triangle et v_f^α est la composante scalaire en α du degré de liberté \mathbf{v}_f .

Afin de montrer la condition (4.57), il faut construire une vitesse \mathbf{v}_{h,q_h} telle que

$$\frac{(\mathbf{v}_{h,q_h}, \mathcal{G}(q_h))_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}{\|\mathbf{v}_{h,q_h}\|_h} \geq \beta_g \|q_h\|_{L^2(\Omega)}$$

Moralement, il suffit de construire une vitesse dans \mathbf{X}_h tel que :

$$”\mathbf{v}_{h,q_h} \simeq \mathcal{G}_h(q_h)”$$

En effet, cette remarque vient du cas continu où l’inégalité s’écrit :

$$(\mathbf{grad} q, \mathbf{grad} q)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \geq \|q\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui est automatiquement vérifié avec l’inégalité de Poincaré (2.2), p. 24. On définit alors pour chaque facette f_i , $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\mathbf{v}_{f_i} = \frac{1}{d} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{d+1} (\mathbf{G}^j \cdot \mathcal{S}_i) \cdot \mathcal{S}_i \quad (4.59)$$

On peut voir qu’avec la condition de continuité des flux du gradient $\mathbf{G}^j \cdot \mathcal{S}_i$ pour $j \neq i$ sur la facette F_{f_i} (4.25), p. 99, la vitesse \mathbf{v}_{f_i} est défini de manière unique sur chaque arête intérieure du maillage.

Par construction, la vitesse définie par les éléments finis \mathbf{P}_{nc}^1 , sur le triangle T , est :

$$\mathbf{v}_h = \sum_{\alpha=1}^d \sum_{i=1}^{d+1} v_{f_i}^\alpha \phi_{f_i} \mathbf{e}_\alpha$$

où $v_{f_i}^\alpha$ est la composante scalaire en α reliée au vecteur \mathbf{e}_α de \mathbf{v}_{f_i} et ϕ_{f_i} la fonction de base des éléments finis P_{nc}^1 de l’arête F_i (3.33).

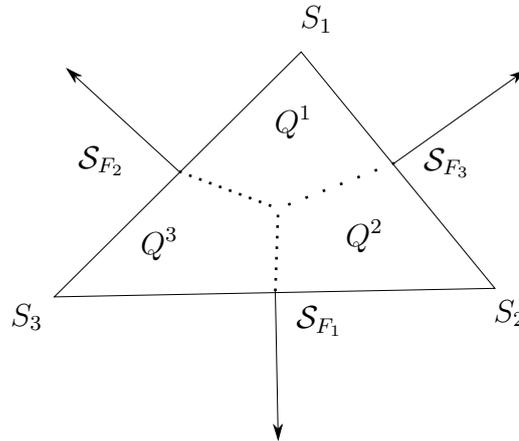


FIGURE 4.16 – Numérotation locale du triangle T_ℓ

Bien que ce candidat semble naturel, nous pouvons montrer que celui-ci ne peut pas être suffisant pour montrer la condition inf-sup. Considérons T_ℓ le triangle rectangle T de sommet $S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ que nous représentons dans la figure 4.17.

Les vecteurs face-normales sont alors :

$$\mathcal{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathcal{S}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

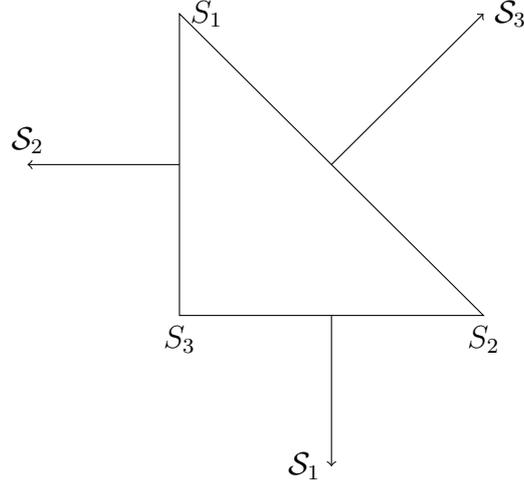


FIGURE 4.17 – Triangle $T = S_1 S_2 S_3$.

On peut alors expliciter les vitesses :

$$\mathbf{v}_{f_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ G_y^2 + G_y^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{f_2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} G_x^1 + G_x^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{f_3} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} G_x^1 + G_y^1 + G_x^2 + G_y^2 \\ G_x^1 + G_y^1 + G_x^2 + G_y^2 \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

On peut alors calculer :

$$\begin{aligned} \int_{Q^1} \mathbf{v}_h \mathcal{G}_h(q_h) &= \frac{\mathbf{G}^1}{108} \cdot \begin{pmatrix} 11(G_x^1 + G_x^3 + G_x^1 + G_y^2 + G_x^2 + G_y^2) \\ 11(G_x^1 + G_x^3 + G_x^1 + G_y^2 + G_x^2 + G_y^2) - 4(G_y^2 + G_y^3) \end{pmatrix} \\ \int_{Q^2} \mathbf{v}_h \mathcal{G}_h(q_h) &= \frac{\mathbf{G}^2}{108} \cdot \begin{pmatrix} 11(G_x^1 + G_y^1 + G_x^2 + G_y^2) - 4(G_x^1 + G_x^3) \\ 11(G_y^2 + G_y^3 + G_x^1 + G_y^1 + G_x^2 + G_y^2) \end{pmatrix} \\ \int_{Q^3} \mathbf{v}_h \mathcal{G}_h(q_h) &= \frac{\mathbf{G}^3}{108} \cdot \begin{pmatrix} 11(G_x^1 + G_x^3) - 4(G_x^1 + G_y^1 + G_x^2 + G_y^2) \\ 11(G_y^2 + G_y^3) - 4(G_x^1 + G_y^1 + G_x^2 + G_y^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On note $A_{1,x}$ la somme des termes des contributions de G_x^1 :

$$A_{1,x} := \begin{aligned} &11(2(G_x^1)^2 + G_x^1 G_x^3 + G_x^1 G_y^1 + G_x^1 G_x^2 + G_x^1 G_y^2 + G_x^1 G_y^1 + G_x^1 G_x^2 + G_y^2 G_x^1 + G_x^1 G_x^3) \\ &- 4(G_x^1 G_x^2 + G_x^1 G_x^3 + G_x^1 G_y^3) \end{aligned} \quad (4.62)$$

Pour poursuivre la démonstration, il est nécessaire d'appliquer l'inégalité de Young aux produits mixtes et de démontrer que le résultat obtenu est positif. Cependant, on voit que cela n'est pas le cas ici. Le candidat naturel pour la vitesse ne permet pas de montrer la condition inf-sup.

Remarque 24. (*Macro-éléments*) Une approche intéressante abordée lors des travaux de cette thèse est celle du macro-élément [130]. L'idée est de montrer une condition inf-sup non pas sur tout le maillage, mais sur un volume d'intégration \mathcal{M} qui est générateur du maillage. Le maillage se décompose en macro-éléments \mathcal{M}_i , où $i \in 1, \dots, N_{\mathcal{M},\Omega}$, qui sont des transformations affines de \mathcal{M} . Néanmoins, avec cette approche, la construction d'une vitesse est tout aussi difficile et aboutit au même résultat que précédemment lorsque l'on considère \mathcal{M} comme le macro-élément défini dans la section 4.2.1, p. 97.

4.4.2 Test numérique de la condition inf-sup

Dans cette sous-section, nous présentons un test numérique [131, 132] qui détermine si la condition inf-sup est remplie. D'autres tests ont été élaborés [133] (par exemple, comparer le nombre de degrés de liberté en vitesse et en pression). Néanmoins, ces règles peuvent être trompeuses, car elles ne se substituent pas aux preuves de condition inf-sup. D'un autre côté, il est très intéressant d'avoir un test qui permet de prédire si la condition inf-sup est réalisée ou non lorsque, par exemple, la preuve de celle-ci n'est pas évidente. On rappelle la condition inf-sup :

$$\exists \beta_g > 0, \quad \inf_{\substack{q_h \in M_h \\ q_h \neq 0}} \sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h} \\ \mathbf{v}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{(\mathbf{v}_h, \mathcal{G}_h(q_h))_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}{\|\mathbf{v}_h\|_h \|q_h\|_{M_h}} := \beta_h \geq \beta_g \quad (4.63)$$

où β_h est une constante strictement positive qui dépend du maillage.

Pour réaliser ce test, nous suivons l'article [131]. Soit $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{X}_h \times M_h$. On définit les vecteur $V \in \mathbb{R}^{N_u}$ et $Q \in \mathbb{R}^{N_p}$ qui contiennent les inconnues de pression q_h et de vitesse \mathbf{v}_h . On définit les matrices :

— $T = GM_p^{-1}G^T$ la matrice telle que :

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}_h \cdot \mathcal{G}_h(q_h) d\mathbf{x} = Q^T T V \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, q_h \in M_h,$$

où la matrice G est définie par (4.31), p. 100, la matrice $M_p \in \mathbb{R}^{N_p} \times \mathbb{R}^{N_p}$ (la matrice de masse de la pression) est définie par :

$$(M_p)_{\ell, \ell'} = |T_{\ell}| \delta_{\ell, \ell'} \quad \forall (\ell, \ell') \in (\mathcal{I}_T)^2 \quad (4.64)$$

— K la matrice de raideur, telle que

$$\int_{\Omega} \mathbf{Grad}_h \mathbf{v}_h : \mathbf{Grad}_h \mathbf{v}_h d\mathbf{x} = V^T K V$$

On a alors l'égalité suivante :

$$\beta_h = \inf_{\substack{q_h \in M_h \\ q_h \neq 0}} \sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h} \\ \mathbf{v}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{(\mathbf{v}_h, \mathcal{G}_h(q_h))_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}{\|\mathbf{v}_h\|_h \|q_h\|_{M_h}} = \inf_{Q \in \mathbb{R}^{N_p}} \sup_{V \in \mathbb{R}^{N_u}} \frac{Q^T T V}{\sqrt{Q^T T Q} \sqrt{V^T K V}}. \quad (4.65)$$

Cette égalité nous permet de prédire la constante de l'inégalité inf-sup et d'observer si celle-ci tend vers 0. Pour la déterminer, nous donnons la proposition suivante [131, Proposition. 2.1] :

Proposition 27. *Considérons le problème de valeurs propres généralisé suivant :*

$$T V = \lambda K V \quad (4.66)$$

Appelons λ_p la première valeur propre non-nulle. Alors la valeur de β_h de l'équation (4.65) est $\sqrt{\lambda_p}$.

Cette proposition permet de calculer la constante β_h .

Pour réaliser le test inf-sup, il faut calculer cette constante β_h pour plusieurs pas de maillages différents et regarder si β_h est bornée ou tend vers 0. Nous proposons d'appliquer celui-ci au schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ et au schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$. Dans la figure 4.18 est représenté les valeurs des constantes β_h^{CR} (resp. β_h^{Mps}) du schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ (resp. $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$) pour différents pas de maillage. On peut voir que celles-ci sont bien bornée par 0.23 pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ et par 0.15 pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$. Les deux schémas satisfont le test inf-sup. Bien que ce test n'a pas valeur de preuve, il permet de supposer que celle-ci est vérifiée par le schéma.

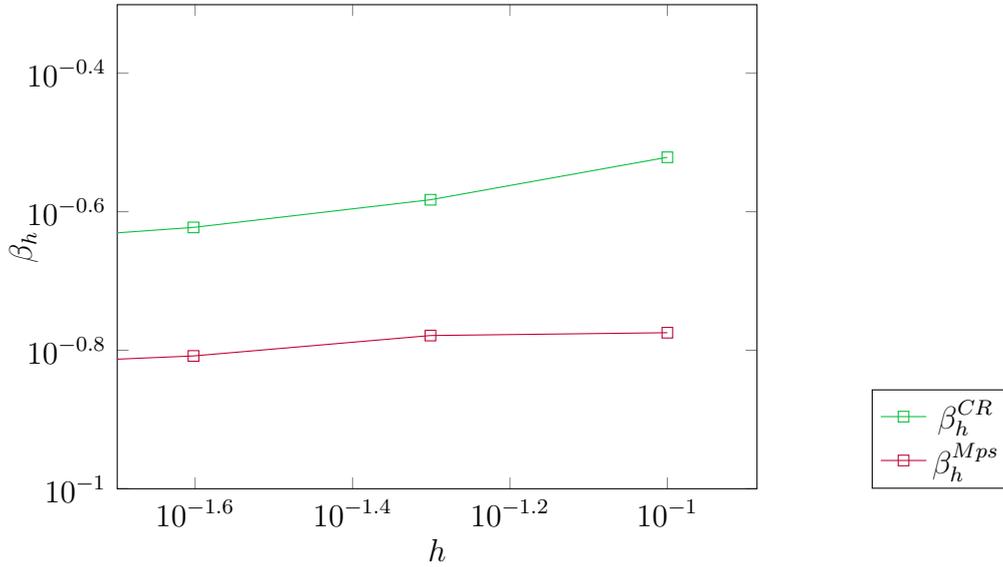


FIGURE 4.18 – Constante β_h pour les schémas $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ et $\mathbf{P}^1 - P_{Mps}^0$ pour différents pas de maillage.

4.5 Cas Tests Numériques

Dans cette partie, nous illustrons numériquement les propriétés du schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$. Dans un premier temps, nous illustrons la convergence du schéma, et ensuite la robustesse au paramètre ν . On notera :

- $X = CR$ pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$
- $X = Trio$ pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$
- $X = Mps$ pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$

Les estimations d'erreurs sont données par (4.67) :

$$\varepsilon_0^X(\mathbf{u}_h) := \begin{cases} \|\mathbf{u}_h^X\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} & \text{si } \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \frac{\|\mathbf{u}_h^X - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \varepsilon_0^{CR}(p_h) := \begin{cases} \|p_h^X\|_{L^2(\Omega)} & \text{si } p = 0 \\ \frac{\|p_h^X - p\|_{L^2(\Omega)}}{\|p\|_{L^2(\Omega)}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.67)$$

4.5.1 Etude de la convergence

Dans cette section, nous donnons des résultats numériques en 2D pour les équations de Stokes. On compare le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ aux schémas $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ et $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$. Considérons les équations de Stokes (2.34), p. 33 avec comme solution $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{0}, \varphi)$. Nous notons que :

- Lorsque φ est une fonction affine, alors le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ et le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ donne exactement $\mathbf{u}_h = \mathbf{0}$.
- Lorsque φ est une fonction quadratique, alors le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ donne exactement $\mathbf{u}_h = \mathbf{0}$, en conséquence de la propriété 7, p. 70. Cette propriété est conservée seulement pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1 + P^a)$ en 3D.

Dans ce qui suit, nous fixons $\Omega = (0, 1)^2$. Nous désignons les estimations en norme $L^2(\Omega)$ de l'erreur de la vitesse et de la pression discrètes par (4.67), p. 120 avec $X = CR$ (resp. $X = Trio$ et $X = Mps$) qui fait référence à la solution calculée avec le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ (resp. $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ et $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$).

Nous considérons tout d'abord le problème (2.34) avec la solution :

$$(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{0}, \sin(2\pi x) \sin(2\pi y))$$

Sur la figure 4.19 (resp. 4.20), nous traçons $\varepsilon_0^X(\mathbf{u}_h)$ (resp. $\varepsilon_0^X(p_h)$) en fonction du pas du maillage h à l'échelle logarithmique, pour $\nu = 1$ et $\nu = 10^{-3}$.

Nous remarquons que $\varepsilon_0^X(\mathbf{u}_h) \propto \nu^{-1}$ pour les trois schémas. En ce qui concerne le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$, nous remarquons tout d'abord que $\varepsilon_0^{Mps}(\mathbf{u}_h)$ donne des résultats intermédiaires entre $\varepsilon_0^{CR}(\mathbf{u}_h)$ et $\varepsilon_0^{Trio}(\mathbf{u}_h)$ (voir figure 4.19). Ensuite, nous remarquons sur la figure 4.20 que l'erreur $\varepsilon_0^{Mps}(p_h)$ est très proche de $\varepsilon_0^{Trio}(p_h)$. Enfin, nous remarquons qu'avec le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$, on obtient un taux de convergence d'ordre 3 pour $\varepsilon_0^{Mps}(\mathbf{u}_h)$ et 2 pour $\varepsilon_0^{Mps}(p_h)$.

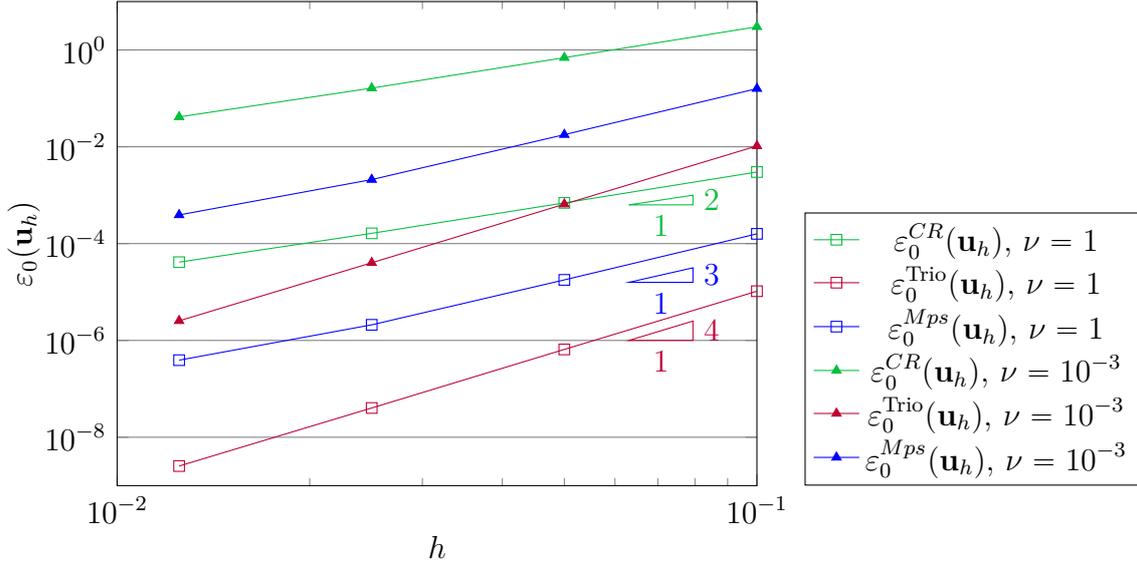


FIGURE 4.19 – $\varepsilon_0^X(\mathbf{u}_h)$ pour $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{0}, \sin(2\pi x) \sin(2\pi y))$

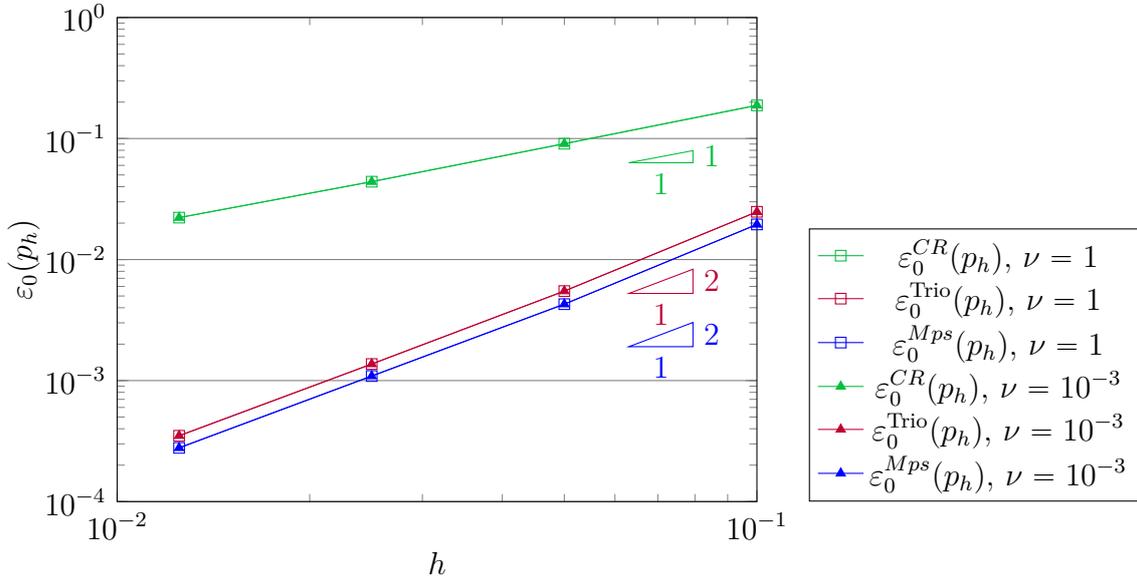


FIGURE 4.20 – $\varepsilon_0(p_h)$ pour $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{0}, \sin(2\pi x) \sin(2\pi y))$

4.5.2 Étude de la robustesse à la viscosité du schéma

On s'intéresse à la dépendance à la viscosité de l'erreur générée par les différents schémas. Nous remarquons que, par rapport au schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$, les erreurs sont fortement réduites

par les schémas $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ et $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ lorsque l'on considère le cas où la solution en vitesse est nulle. Ces schémas permettent d'atténuer l'amplitude des vitesses parasites et donc de fournir une meilleure approximation. Ceci est illustré par la résolution des équations de Stokes (2.34), p. 33 avec (\mathbf{u}, p) défini par (4.68), p. 122. Dans ce cas, comme \mathbf{u} n'est pas une fonction affine, les trois schémas donnent un taux de convergence d'ordre 2 pour $\varepsilon_0(\mathbf{u}_h)$ et 1 pour $\varepsilon_0(p_h)$. Les erreurs résultantes pour $h = 0.1$ et $h = 1.25 \times 10^{-2}$ sont tracées en fonction de la viscosité dans les figures 4.21 et 4.22. Sur ces graphiques, nous remarquons que le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ donne des résultats intermédiaires. Nous remarquons également que les erreurs de vitesses parasites deviennent prépondérantes lorsque :

- $\nu \leq 10^0$ avec $h = 0.1$ et $\nu \leq 10^0$ pour $h = 0.0125$ et le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$.
- $\nu \leq 10^{-2}$ avec $h = 0.1$ et $\nu \leq 10^{-3}$ pour $h = 0.0125$ et le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$.
- $\nu \leq 10^{-3}$ avec $h = 0.1$ et $\nu \leq 10^{-5}$ pour $h = 0.0125$ et le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$.

La viscosité à partir de laquelle les erreurs de vitesses parasites deviennent dominantes, dépend de l'erreur de vitesse générée par le manque de consistance du second membre de (4.30) et donc de la taille du maillage. Comme ces schémas convergent avec des ordres différents lorsque $\mathbf{u} = 0$, on peut constater que la diminution de la taille des mailles réduit la viscosité à laquelle ce point est atteint, plus ou moins en fonction de l'ordre de convergence. Pour la pression, l'erreur L^2 (représentée sur la figure 4.22) diminue, à l'ordre un, jusqu'à une valeur seuil, comme cela est prévu par l'analyse d'erreur classique.

$$(\mathbf{u}, p) = \left(\begin{pmatrix} (\cos(2\pi x) - 1) \sin(2\pi y) \\ -(\cos(2\pi y) - 1) \sin(2\pi x) \end{pmatrix}, \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \right) \quad (4.68)$$

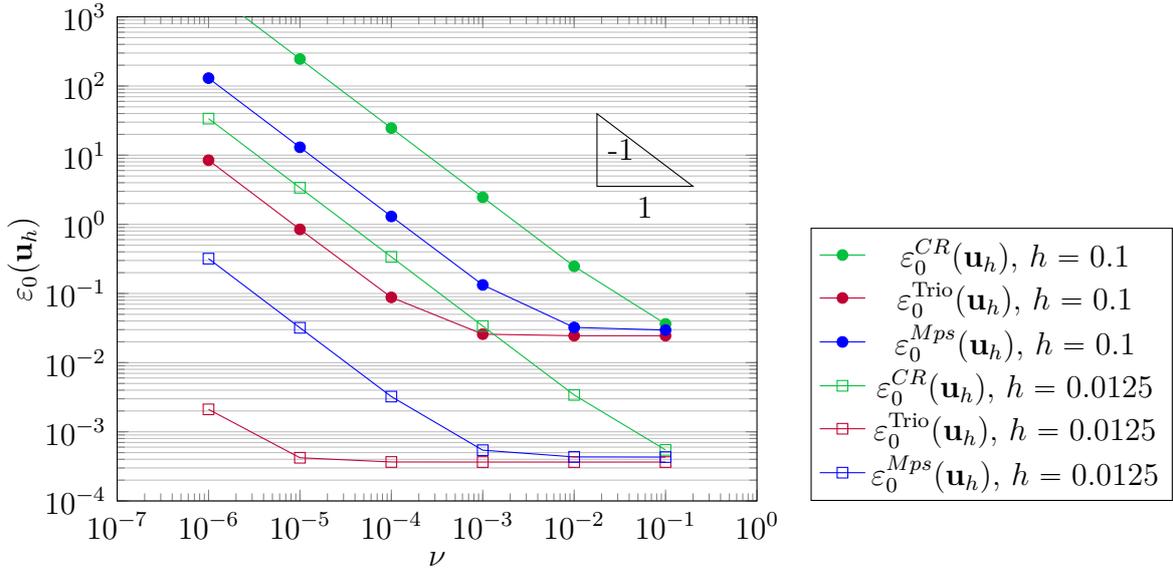


FIGURE 4.21 – $\varepsilon_0(\mathbf{u}_h)$ pour \mathbf{u} et p des fonctions sinusoïdales. La viscosité est en abscisse, et les courbes correspondent à différents pas de maillage.

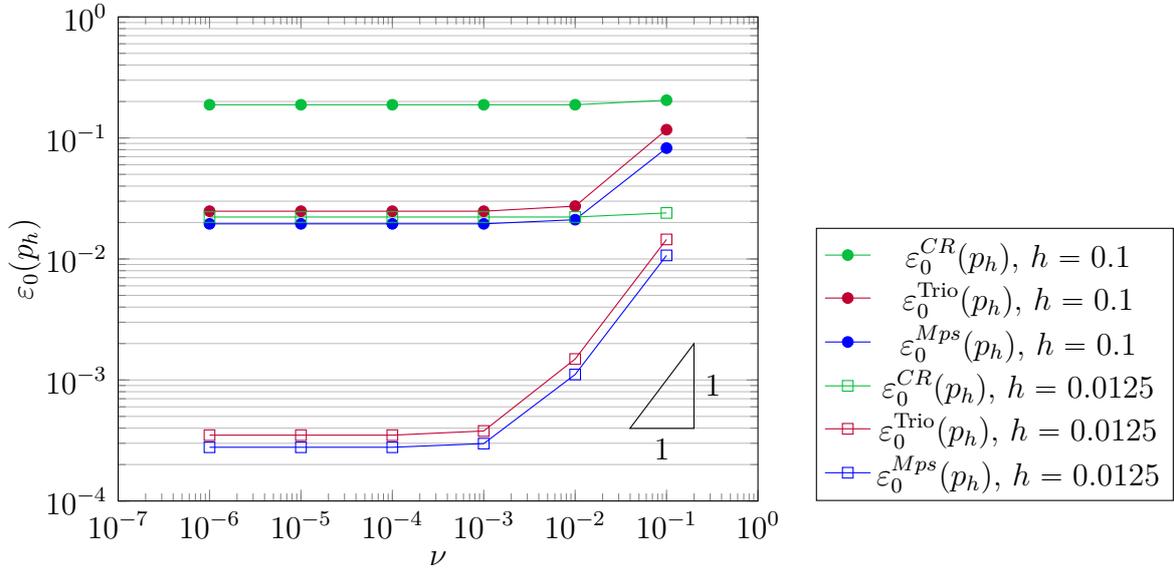


FIGURE 4.22 – $\varepsilon_0(p_h)$ pour \mathbf{u} et p des fonctions sinusoidales. La viscosité est en abscisse, et les courbes correspondent à différents pas de maillage.

4.5.3 Maillage déformé

Nous nous intéressons également à la sensibilité des déformations du maillage. En effet, les techniques de raffinement de maillage basées sur des estimateurs d'erreur a posteriori ou des contraintes industrielles peuvent générer des maillages anisotropes. Dans cette sous-section, nous montrons que les trois schémas ont le même comportement vis-à-vis de la régularité du maillage et convergent dans les mêmes conditions. Pour illustrer cette propriété, nous proposons d'utiliser les maillages de Kershaw présentés dans le benchmark [134] (voir figure 4.23) avec (\mathbf{u}, p) dans (4.68). Comme le maillage est composé de quadrilatères, nous coupons chaque cellule en reliant les sommets avec le barycentre du quadrangle pour obtenir un maillage triangulaire, ce qui nous permet de rester dans des hypothèses de convergence raisonnables tout en conservant l'anisotropie. Le maillage est représenté sur la figure 4.23 et nous traçons les erreurs sur la vitesse et sur la pression en norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ pour les équations de Stokes (2.34), p. 33 sur les figures 4.24 et 4.25. Nous pouvons constater que les schémas ont un taux de convergence d'ordre 2 pour $\varepsilon_0(\mathbf{u}_h)$ et 1 pour $\varepsilon_0(p_h)$.

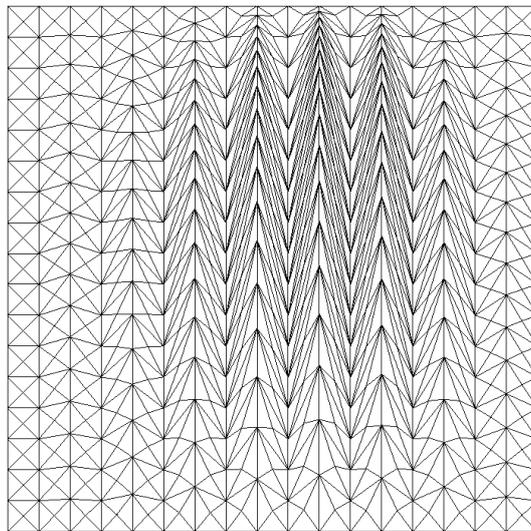


FIGURE 4.23 – Maillage de Kershaw.

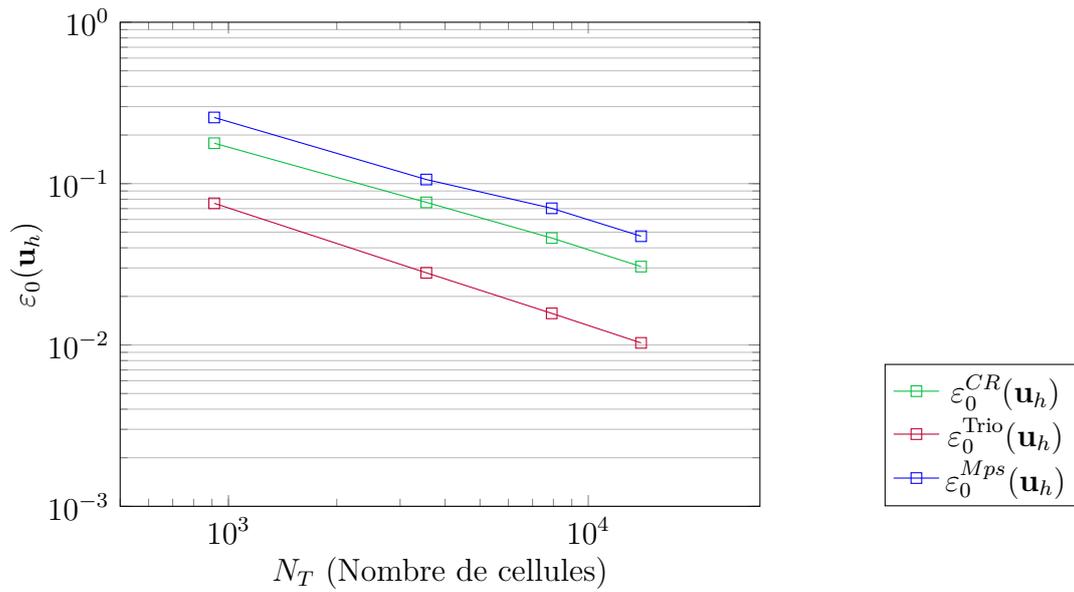


FIGURE 4.24 – $\varepsilon_0(\mathbf{u}_h)$ pour \mathbf{u} et p fonctions sinusoïdales en fonction de la viscosité avec différents maillages de Kershaw et avec $\nu = 1$.

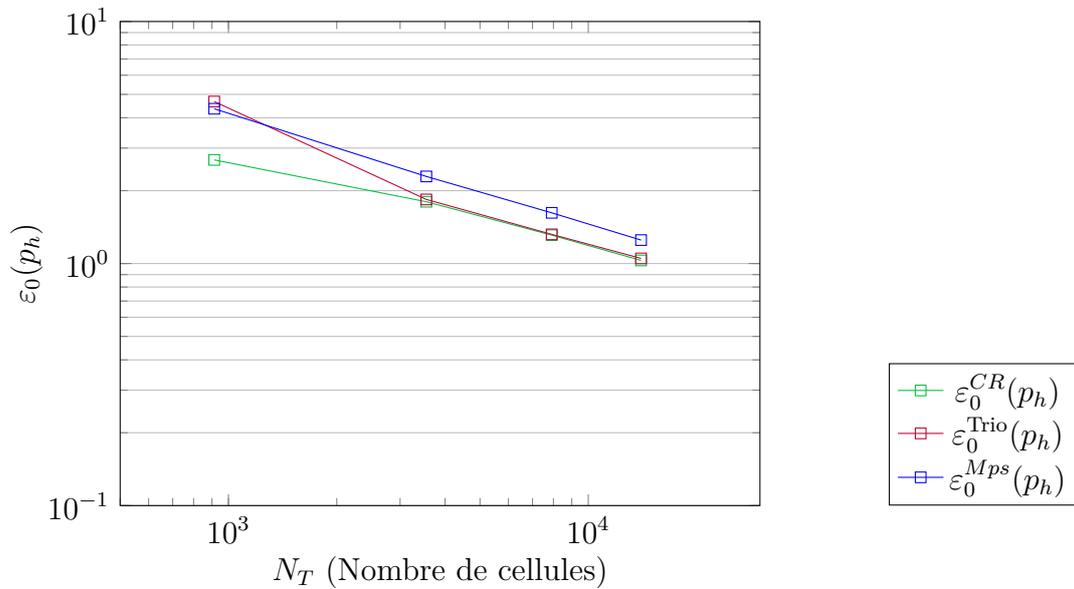


FIGURE 4.25 – $\varepsilon_0(p_h)$ pour \mathbf{u} et p fonctions sinusoïdales en fonction de la viscosité avec différents maillages de Kershaw et avec $\nu = 1$.

Chapitre 5

Étude du schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ sur les équations de Navier-Stokes en 3D

Sommaire

5.1	Discrétisation de la convection	125
5.2	Schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ pour les équations de Navier-Stokes en 3D	127
5.3	Cas tests numériques	131

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit et analysé le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ pour résoudre les équations de Stokes (2.35), p. 33. Nous avons développé des variantes de ce schéma et détaillé les différentes méthodes de discrétisation pour les éléments du bord. La convergence du schéma a été étudiée, et certaines propriétés ont été mises en évidence à travers des cas tests. Dans ce nouveau chapitre, nous introduisons cette discrétisation pour les équations de Navier-Stokes, et nous procédons à plusieurs tests numériques afin d'illustrer ses performances.

5.1 Discrétisation de la convection

Dans TrioCFD, plusieurs schémas de convection sont proposés dans [5, p.88] [6, p122] : Le "schéma centré", "décentré amont", "dérivé des Volumes Finis" etc. Dans cette section, on se propose de présenter deux schémas de convection qui ont été utilisés pour les travaux de cette thèse. L'un est présent et très utilisé dans le code TrioCFD, il permet un calcul robuste et rapide. Le second a un ordre de convergence plus élevé et a le même stencil que la matrice de raideur résultant du schéma des Crouzeix-Raviart. Ce dernier a été implémenté sur une maquette Octave.

Schéma 1 : Le schéma EF_Stab

Pour pouvoir définir les schémas de convections, on rappelle l'égalité suivante :

$$\text{Pour un volume } \omega \subset \Omega, \quad \int_{\omega} \mathbf{Div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\omega} \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma.$$

— **Le schéma centré** est décrit par la forme bilinéaire $c_h^c(\cdot; \cdot, \cdot)$ telle que, pour tout $\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \in (\mathbf{X}_{0,h})^3$:

$$c_h^c(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) = \sum_{f \in \mathcal{T}_F^i} \mathbf{w}_f \int_{\partial\omega_f} \mathbf{u}_h(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}|_{\partial\omega_f}) \, d\mathbf{x} \quad (5.1)$$

avec $\forall f \in \mathcal{I}_f^i, k, \ell \in \mathcal{I}_{T,f}$, les volumes ω_f sont définies par $\omega_f = \omega_{f,k} \cup \omega_{f,\ell}$. Ces volumes sont représentés et définis par la figure 4.7, p. 104.

- Le schéma amont est décrit par la forme bilinéaire $c_h^a(\cdot; \cdot, \cdot)$ telle que, pour tout $\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \in (\mathbf{X}_{0,h})^3$:

$$c_h^c(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) = \sum_{f \in \mathcal{I}_F^i} \mathbf{w}_f \sum_{f' \in \mathcal{I}_F^i} \int_{\gamma_{f,f'}} \mathbf{u}_f \max(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{|\partial\omega_f}, 0) + \mathbf{u}_{f'} \min(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{|\partial\omega_f}, 0) d\mathbf{x} \quad (5.2)$$

avec $\gamma_{f,f'} = \omega_f \cap \omega_{f'}$. En particulier, si $\text{div}_h(\mathbf{u}_h) = 0$, alors la matrice résultante de cette discrétisation sera a diagonale dominante, ce qui assure une stabilité conditionnelle de ce schéma [5, p.40].

- Le schéma EF_Stab est caractérisé par un paramètre $\alpha \in [0, 1]$ qui détermine les proportions de sa partie amont et décentrée. Il est décrit par la forme bilinéaire $c_h(\cdot, \cdot)$ telle que pour tout $\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \in (\mathbf{X}_{0,h})^3$, on a :

$$c_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) = \alpha c_h^a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + (1 - \alpha) c_h^c(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h). \quad (5.3)$$

Schéma 2 : Schéma Upwind

Initialement défini dans [135], ce schéma de convection est présenté et comparé à d'autres schémas de convection dans [136] (schéma 4). Les notations correspondent à l'article [137]. Son avantage est de réduire le stencil du système linéaire.

Soit $\ell \in \mathcal{I}_T$, on note ses facettes $f, f', f'' \in \mathcal{I}_{F,\ell}^3$. Les points milieux des facettes sont notés $\mathbf{x}_f, \mathbf{x}_{f'}, \mathbf{x}_{f''}$ et son barycentre x_ℓ . Enfin, on sépare le triangle en trois parties de même volume comme sur la figure 5.1, en reliant les sommets au barycentre de ℓ .

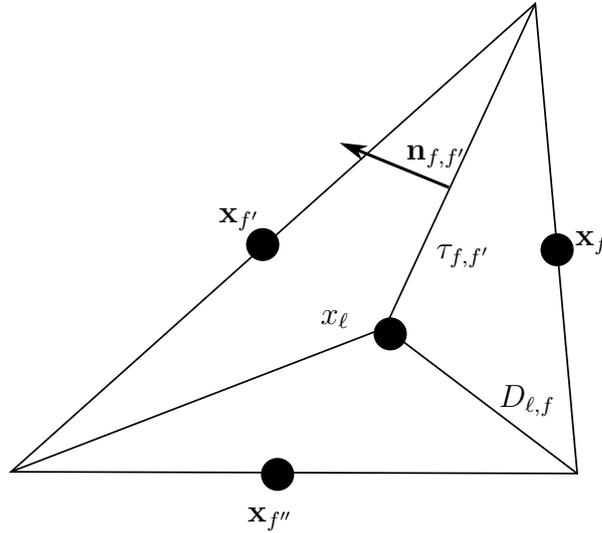


FIGURE 5.1 – Co-volumes associés avec les faces

On définit ainsi le cône $D_{\ell,f}$, relié à une face f et un simplexe T_ℓ . Ses sommets sont définis par les sommets de la face f et par le centre de gravité de T_ℓ . Ainsi, on peut définir un "sous-maillage" de la cellule T_ℓ de $d(d-1)$ faces internes dénotées $\tau_{f,f'}$ pour toute paire $(f, f') \in \mathcal{I}_{F,\ell}$. On définit la forme bilinéaire $c_h(\cdot; \cdot, \cdot)$ représentant la convection par :

$$\forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \in (\mathbf{X}_{0,h})^3 \quad c_h(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) := \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \sum_{(f,f') \in \mathcal{I}_{F,\ell}} F_{f,f'}(\mathbf{u}_h) (\mathbf{v}_{f'} - \mathbf{v}_f) \cdot \frac{\mathbf{w}_f + \mathbf{w}_{f'}}{2} \quad (5.4)$$

Cela se ré-écrit :

$$c_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) := \frac{1}{2} \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \mathbf{w}_f \cdot \sum_{f' \in \mathcal{F}_h(K) \setminus \{f\}} F_{f,f'}(\mathbf{u}_h)(\mathbf{v}_{f'} - \mathbf{v}_f) \quad (5.5)$$

où le flux $F_{f,f'}(\mathbf{u}_h)$ est défini par

$$F_{f,f'}(\mathbf{u}_h) = \int_{\tau_{f,f'}} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_{f,f'} d\sigma$$

On remarque que le point milieu $\mathbf{x}_{f,f'}$ de $\tau_{f,f'}$ s'écrit :

$$\mathbf{x}_{f,f'} = \mathbf{x}_f + \mathbf{x}_{f'} - \mathbf{x}_\ell$$

et

$$|\tau_{f,f'}| \mathbf{n}_{f,f'} = \frac{1}{d+1} (\mathcal{S}_{\ell,f'} - \mathcal{S}_{\ell,f})$$

avec $\mathcal{S}_{\ell,f}$, la normale sortante à T_ℓ , $\ell \in \mathcal{I}_T$ de la facette F_f , $f \in \mathcal{I}_{F,\ell}$

On peut alors ré-écrire le flux sous la forme suivante :

$$F_{f,f'}(\mathbf{u}_h) = \left(\mathbf{u}_f + \mathbf{u}_{f'} - \frac{1}{d+1} \sum_{f'' \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \mathbf{u}_{f''} \right) \cdot \frac{1}{d+1} (\mathcal{S}_{\ell,f'} - \mathcal{S}_{\ell,f}) \quad (5.6)$$

Avec cette formulation, on peut vérifier que la relation de divergence nulle :

$$\sum_{f' \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \mathbf{u}_{f'} \cdot \mathcal{S}_{\ell,f'}$$

implique que :

$$\sum_{f' \in \mathcal{I}_{F,\ell}} F_{f,f'}(\mathbf{u}_h) = -\mathbf{u}_f \cdot \mathcal{S}_{\ell,f}$$

Ainsi si $\text{div}_h \mathbf{u}_h = 0$, on obtient que $c_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) = 0$, $\forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in (\mathbf{X}_{0,h})^2$. Cette propriété permet de ne pas rajouter d'erreur de consistance au schéma.

L'avantage de ce schéma est que dans la définition (5.4), pour une vitesse donnée \mathbf{v}_f , $f \in \mathcal{I}_F$, seules les valeurs $\mathbf{u}_{f'}$, $f' \in \mathcal{I}_{F,\ell}$ apparaissent dans l'expression. La matrice issue de la discrétisation du terme trilineaire sera diagonale par blocs (comme la matrice de diffusion).

5.2 Schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ pour les équations de Navier-Stokes en 3D

Dans cette section, nous détaillons l'application du nouveau schéma aux équations de Navier-Stokes en 3D. Dans un premier temps, on décrira le schéma MPFA symétrique discrétisant le gradient de pression en 3D, pour cela nous nous utiliserons la section 4.2.1, p. 97.

Schéma MPFA symétrique en 3D

Dans cette partie, on établit le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ en 3D. Pour cela, nous reprenons la section 4.2.1, p. 97. A l'instar de la définition en 2D, on va construire le maillages en créant des sous-maillages centrées sur les sommets.

Soit $i \in \mathcal{I}_S$. On définit le macro-élément \mathcal{M}_i tel que $\overline{\mathcal{M}}_i := \bigcup_{\ell \in \mathcal{I}_{T,i}} \overline{T}_\ell$.

On définit d'abord les sous-cellules du maillage dual qui sont construites en joignant les sommets du maillage aux centres des faces connectées au sommet S_i et en joignant les centres des faces aux milieux des arêtes correspondantes. Enfin les sous-cellules sont obtenues en prenant l'enveloppe convexe créée en reliant le barycentre des arêtes et des faces avec le barycentre de la cellule. On définit donc 4 sous-cellules par triangle, chacune reliée à un sommet. On notera ces sous-cellules $Q_{\ell,i}, \forall \ell \in \mathcal{I}_{T,i}$. Une représentation est donnée par la figure 5.2 pour un tétraèdre T_ℓ de sommets $S_{i_1}, S_{i_2}, S_{i_3}, S_{i_4}$ avec les faces F_{f_1}, F_{f_2} de sommets respectifs $S_{i_1}, S_{i_2}, S_{i_3}$ et $S_{i_1}, S_{i_2}, S_{i_4}$. On appellera sous-faces $\tilde{F}_{f,\ell,i}$ l'intersection entre la face $F_f, f \in \mathcal{I}_F$ et le quadrangle $Q_{\ell,i}, \forall \ell \in \mathcal{I}_{T,i}$. On notera l'ensemble des sous-faces du triangle T_ℓ et du sommet S_i $\mathcal{I}_{\tilde{F},\ell,i}$ et $\mathcal{I}_{\tilde{F},i}$ l'ensemble des sous-faces reliées au sommet S_i .

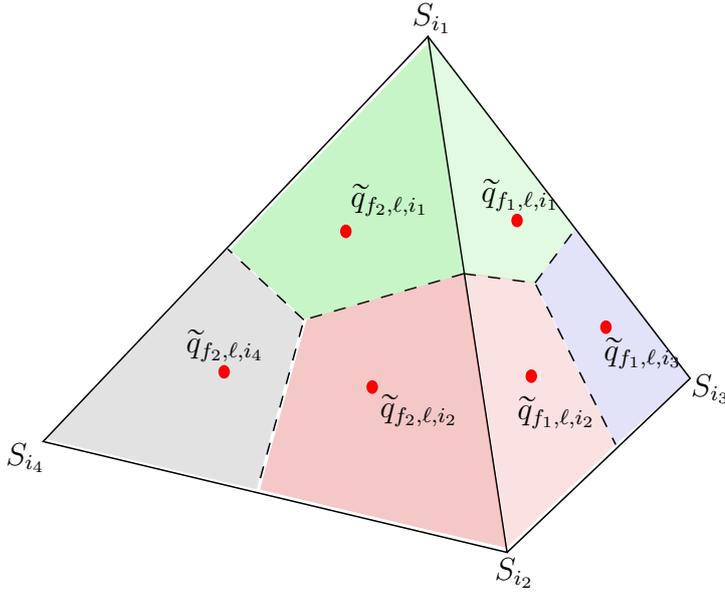


FIGURE 5.2 – Triangle $T_\ell = S_1S_2S_3S_4$ avec les faces F_{f_1} et F_{f_2} et les inconnues auxiliaires $\tilde{q}_{f,\ell,i}, \forall i \in \{i_1, i_2, i_3, i_4\}, f \in \mathcal{I}_{F,i}, \ell \in \mathcal{I}_{T,f}$

Soit $q_h \in M_h$. On note $q_{h|T_\ell} := \bar{q}_\ell$. Les inconnues auxiliaires sont localisées aux barycentres des sous-faces. On les notera, $\tilde{q}_{f,\ell,j}, \forall j \in \mathcal{I}_S, f \in \mathcal{I}_{F,i}, \ell \in \mathcal{I}_{T,f}$. On représente celle-ci avec les points rouges sur la figure 5.2. Ainsi, on peut donner la nouvelle formule pour approcher le gradient constant sur chaque quadrangle $Q_{\ell,i}$, et en constatant que $|Q_{\ell,i}| = \frac{|T_\ell|}{d+1}$, on obtient :

$$\mathcal{G}_{\ell,i}(q_h) = \frac{1}{|Q_{\ell,i}|} \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,i} \cap \mathcal{I}_{F,\ell}} (\tilde{q}_{f,\ell,i} - \bar{q}_i) \frac{\mathcal{S}_{f,\ell}}{d} \quad (5.7)$$

Afin de préserver le flux à travers les bords intérieurs de \mathcal{M}_0 , on impose la continuité des sous-flux :

$$\forall f \in \mathcal{I}_{F,i}, \forall (\ell, k) \in \mathcal{I}_{T,f}, \mathcal{G}_{\ell,i}(q_h) \cdot \mathcal{S}_{f,\ell} + \mathcal{G}_{k,i}(q_h) \cdot \mathcal{S}_{f,k} = 0. \quad (5.8)$$

Pour un sommet S_i , cela revient à écrire $N_{F,i}^i$ équations. On peut donc substituer les valeurs des pressions discrètes auxiliaires $\tilde{q}_{f,\ell,i}$ par les inconnues $\bar{q}_\ell, \ell \in \mathcal{I}_{T,i}$. Ce système linéaire est à nouveau bien posé. Les gradients de pression $(\mathcal{G}_{\ell,i}(q_h))_{\ell \in \mathcal{I}_{T,i}}$ définis par (5.7) s'écrivent alors seulement en fonctions des inconnues $\bar{q}_\ell, \ell \in \mathcal{I}_{T,i}$.

Remarque 25. (Condition de bord naturelle pour la pression) :

Comme nous l'avons fait pour les équations de Stokes (4.26) pour déterminer les pressions auxiliaires sur la frontière du schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$, nous imposons une condition pour le gradient de pression au bord. Sur chaque demi-arête $\tilde{F}_{f,\ell,i}$ liée au sommet S_i , au triangle T_ℓ et à l'arête F_f sur $\partial\Omega$:

$$\int_{\tilde{F}_{f,\ell,i}} \mathcal{G}_{i,\ell} \cdot \mathbf{n}_{|\tilde{F}_{f,\ell,i}} d\sigma = \int_{\tilde{F}_{f,\ell,i}} (\mathbf{f} + (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n)/\delta t + (\mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u}_h^n) \cdot \mathbf{n}_{|\tilde{F}_{f,\ell,i}} d\sigma. \quad (5.9)$$

On notera alors la reconstruction du gradient MPFA avec les éléments finis P^0 l'opérateur \mathcal{G}_h défini par :

$$\mathcal{G}_h : \begin{cases} M_h & \rightarrow \mathbf{P}_{disc}^0(Q_h) \\ q_h & \mapsto \mathcal{G}_h(q_h) \end{cases} \quad | \quad \forall \ell \in \mathcal{I}_T, \forall i \in \mathcal{I}_{S,\ell}, \quad \mathcal{G}_h(q_h)|_{Q_{i,\ell}} = \mathcal{G}_{i,\ell}(q_h|_{M_i}). \quad (5.10)$$

Formulation variationnelle

On donne la formulation variationnelle du schéma pour les équations de Navier-Stokes : On se propose maintenant d'établir la formulation variationnelle de notre problème. Soit $g_h(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire suivante :

$$g_h : \begin{cases} \mathbf{X}_h \times M_h & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}_h, q_h) & \mapsto (\mathcal{G}_h(q_h), \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \end{cases}. \quad (5.11)$$

La discrétisation des équations de Navier-Stokes, semi-discrétisé en espace pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ s'écrit :

Problème: 21. Trouver pour tout $t \in [0, T]$, $(\mathbf{u}_h(t, \cdot), p_h(t, \cdot)) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h$

$$\begin{cases} (\partial_t \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + c_h(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + a_{\nu,h}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + g_h(\mathbf{v}_h, p_h) & = (\mathbf{f}(\cdot, t), \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h} \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) & = 0 \quad \forall q_h \in M_h \end{cases},$$

où les formes bilinéaires $a_h(\cdot, \cdot)$ et $b_h(\cdot, \cdot)$ sont définies par (3.77), p. 57, et (3.79), p. 57. Le second membre $\ell_f(\cdot)$ est défini par (3.80), p. 57. Le terme de convection $c_h(\cdot; \cdot, \cdot)$ est donné par 5.1, 5.2, 5.3 ou 5.5.

Formulation algébrique

Dans cette partie, on présente deux méthodes de résolutions différentes pour les équations de Navier-Stokes. L'une en 2D sur une maquette Octave et l'autre en 3D dans le code TrioCFD. Introduisons d'abord la discrétisation spatiale des équations de Navier-Stokes (2.32) :

$$\begin{cases} M\partial_t U + \nu KU + L(U)U + GP = F \\ DU = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

où U, P contiennent les inconnues de vitesse et de pression et F est le second membre. Les matrices M et K sont respectivement les matrices de masse et de rigidité. Les matrices G et D représentent les opérateurs de gradient et de divergence. Enfin, la matrice $L(U)$ est associée au terme de convection et $\partial_t U$ est la dérivée temporelle de U .

Pour la discrétisation en temps, nous utiliserons le schéma de prédiction-corrrection ((1.8), (1.9), (1.10), p. 14) ou bien le schéma euler implicite ou explicite [14, Chapitre 67].

Résolution algébrique

On présente rapidement les méthodes de résolution implémentées dans la maquette Octave et dans le code TrioCFD pour le problème de Navier-Stokes.

- **Résolution dans la maquette Octave :** Dans la maquette Octave, deux algorithmes de résolution (en $2D$) sont possible, l'un avec le solveur de Octave, l'autre avec un algorithme GMRES [127]. La convection sera discrétisée par 5.5, p. 127.
- **Résolution dans le code TrioCFD :** Comme cela a été expliqué dans la sous-section 4.3.4, p. 113, une version du schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P^0$ a été implémentée dans le code TrioCFD [138]. La convection sera discrétisée avec le schéma EF_stab 5.3, p. 126 ou par le schéma amont 5.2, p. 126.

Remarque 26. (CFL du schéma semi-implicite)

Le schéma semi-implicite admet la condition de CFL suivante :

$$\delta t < \frac{1}{c} CFL h \quad (5.13)$$

La CFL est dominée par la convection, car la partie diffusive est implicite [13, Théorème II].

Remarque 27. (Pas de temps dans le code TrioCFD) Dans le code trioCFD, le pas de temps est calculé avec l'équation (5.14) :

$$\frac{1}{\delta t} = \frac{1}{\delta t_{conv}} + \frac{1}{\delta t_{diff}} \quad (5.14)$$

avec

$$\delta t_{conv} = \frac{h}{\max_{\alpha \in \{1, \dots, d\}, f \in \mathcal{I}_F^i} (|\mathbf{u}_f^{n-1} \cdot \mathbf{e}_\alpha|)}, \text{ et } \delta t_{diff} = \frac{h^2}{2\nu}.$$

Remarque 28. (Schéma de projection) :

Nous pouvons approximer \tilde{M} par M en suivant les idées de [12] (voir (1.15), p. 16). Cette approximation est celle qui est actuellement utilisée dans le code TrioCFD. Dans une deuxième étape, bien que le schéma MPFA conduise à une résolution non symétrique, une approximation de (1.9), p. 14 avec $\tilde{M} = M$ peut corriger cela. Le système est équivalent à un problème de diffusion, et si nous uniformisons la matrice de masse en approchant M par mId , où Id désigne la matrice identité et m le volume minimum de $T_\ell \in \mathcal{T}_h$, nous retrouvons un système proche du système symétrique MPFA classique pour le problème de Poisson [37]. Une approximation possible est de substituer ce système par le système MPFA classique.

Remarque 29. (parallélisation I) :

Pour obtenir une parallélisation massive du code TrioCFD, une méthode de cellules fantômes est utilisée (voir Fig. 5.3) qui consiste à stocker les inconnues des voisins de la pression d'un domaine traité par un processeur. De cette manière, la communication est fortement réduite et les sous-problèmes sont presque découplés. La première étape consiste à résoudre une vitesse prédite (1.8). Comme tout est explicite, la vitesse prédite U^* peut être calculée même à la frontière des domaines de deux processeurs grâce au stencil du schéma et au stockage de U^n et P^n . Avec la vitesse prédite, (1.9) peut être résolu. Ensuite, les processeurs communiquent, pour mettre à jour les inconnues de pression situées sur les cellules fantômes. Enfin, l'équation (1.10) est résolue par un calcul explicite.

Remarque 30. (parallélisation II) :

Un aspect intéressant du nouveau schéma est la parallélisation. En effet, les matrices obtenues avec (4.25) peuvent être construites indépendamment. De plus, la même méthode détaillée dans la remarque précédente peut être appliquée au schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$.

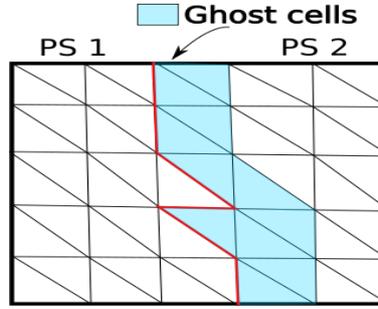


FIGURE 5.3 – "Ghost cells" pour deux processeurs notés PS 1 et PS 2. La frontière est en rouge.

5.3 Cas tests numériques

Dans cette partie, nous nous intéressons à étudier le nouveau schéma sur des cas tests numériques pour les équations de Navier-Stokes. Dans un premier temps, à l'instar du chapitre 1, nous illustrerons la convergence du schéma ainsi que sa robustesse à la viscosité et sur l'anisotropie du maillage. Ensuite nous nous intéresserons aux cas tests de la marche ascendante qui illustrera le gain de précision sur le gradient de pression. On étudiera ensuite la complexité numérique du schéma et comparerons les résultats aux schémas présents dans le code TrioCFD.

Les équations Navier Stokes en 2D

Soit $\Omega = (0, 1)^2$. Nous considérons le problème (2.32), p. 32 avec $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ de tel sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -\cos\left(2\pi\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) \sin\left(2\pi\left(y + \frac{1}{2}\right)\right) \exp(-8\pi^2 t) \\ \sin\left(2\pi\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(2\pi\left(y + \frac{1}{2}\right)\right) \exp(-8\pi^2 t) \end{pmatrix} \\ p = -\frac{1}{4} \cos\left(4\pi\left(x + \frac{1}{4}\right)\right) + \cos\left(4\pi\left(y + \frac{1}{2}\right)\right) \exp(-16\pi^2 t) \end{array} \right. \quad (5.15)$$

Nous fixons $T = 0.01$ le temps final de la simulation. Le pas de temps est choisi par rapport au CFL (5.13) avec $C = \frac{1}{2}$. Les erreurs de vitesse et de pression au temps final sont représentées sur les figures 5.4 et 5.5 en fonction du pas de maille. Nous pouvons voir que les trois schémas convergent avec les ordres attendus de 2 pour $\varepsilon_0^{Mps}(\mathbf{u}_h)$ et 1 pour $\varepsilon_0^{Mps}(p_h)$ (Les erreurs sont définies par (4.67), p. 120).

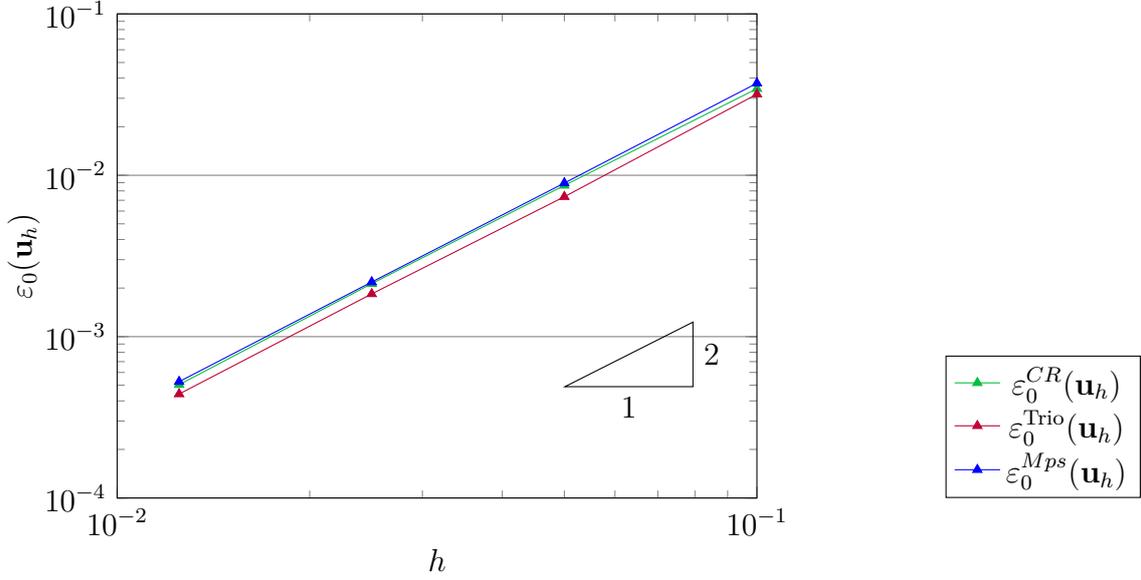


FIGURE 5.4 – $\varepsilon_0(\mathbf{u}_h)$ pour $(\mathbf{u}, p) \in (5.15)$ avec $\nu = 1$.

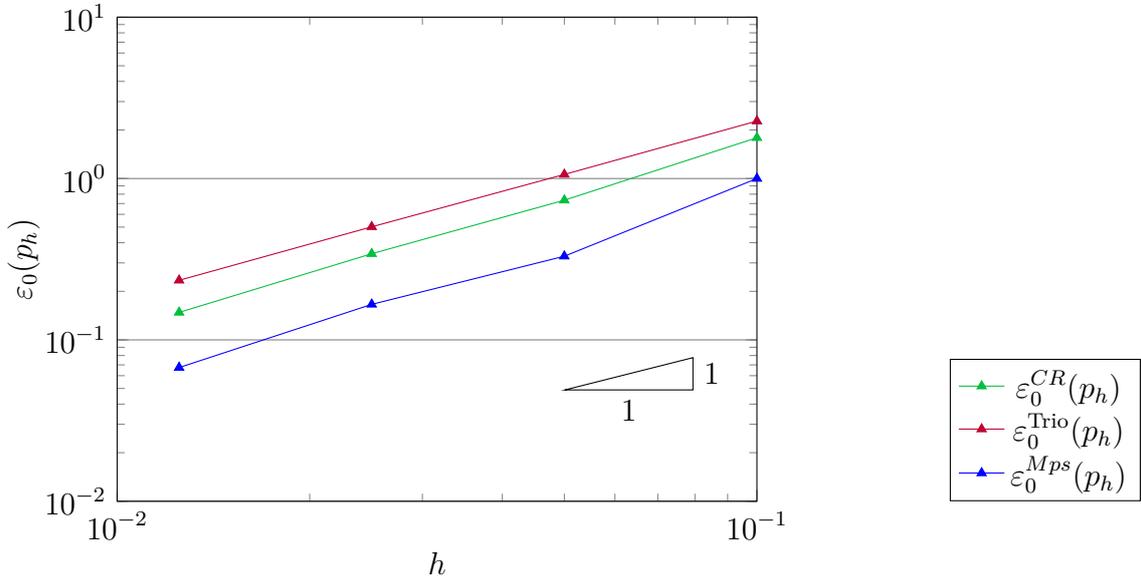


FIGURE 5.5 – $\varepsilon_0(p_h)$ pour $(\mathbf{u}, p) \in (5.15)$ avec $\nu = 1$.

Convergence du schéma en 3D pour l'écoulement de Beltrami généralisé

Dans cette partie, nous nous proposons d'illustrer numériquement la convergence en 3D du schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ implémenté dans le code TrioCFD, ainsi que de comparer les erreurs avec les schémas $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ et $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$. Pour ce faire, nous considérons (\mathbf{u}, p) comme solution des équations de Navier-Stokes (2.32), p. 32 donnée par (5.17), avec $\mathbf{f} = 0$ comme second membre. Ce cas test a déjà été étudié dans [139, Section 5.2] pour les schémas $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ et $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$. Le schéma de convection utilisé est le schéma amont (5.2), p. 126, tandis que le schéma de temps est un schéma d'Euler explicite. Le pas de temps est choisi en fonction du pas du maillage h de telle sorte que $\delta t \simeq 0.1\nu^{-1}Fh^2$, où F est la constante de la condition de Fourier (1.13), p. 15. Le temps final est fixé à $T = \frac{1}{1000\nu} = 0.01$, avec $\nu = 10^{-1}$. Pour prendre en compte l'erreur en temps, nous calculerons l'erreur comme suit :

$$\varepsilon_{0,t}^X(\mathbf{u}_h) := \int_0^T \|\mathbf{u}_h^X - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} dt \quad \text{et} \quad \varepsilon_{0,t}^{CR}(p_h) := \int_0^T \|p_h^X - p\|_{L^2(\Omega)} dt \quad (5.16)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u} = e^{38vt} \begin{pmatrix} e^{2x-5y-5z}(-2e^{x+7z} + 3e^{8y}) \\ e^{-5x+2y-5z}(-2e^{7x+y} + 3e^{8z}) \\ e^{-5x-5y+2z}(-2e^{7y+z} + 3e^{8x}) \end{pmatrix} \\ p = \frac{19}{5}e^{76vt} \left(5e^{-3(x+y+z)}(e^{8x+y} + e^{8y+z}e^{x+8z}) + \sinh(2) + \sinh(3) - \sinh(5) \right) \end{cases} \quad (5.17)$$

Les figures 5.6 et 5.7 représentent les erreurs absolues en norme L^2 intégrée dans $[0, T]$ tracées en fonctions des inconnues. On peut voir qu'on trouve un ordre de convergence de 1 pour la vitesse et pour la pression en norme $L^2(\Omega)$. L'ordre de convergence de la vitesse est dégradé par l'utilisation du schéma amont pour la convection. En particulier, pour cette raison, les courbes d'erreurs sont très proches (l'erreur étant dominée par l'erreur du schéma de convection). Dans ce cas là, le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ semble être le plus précis.

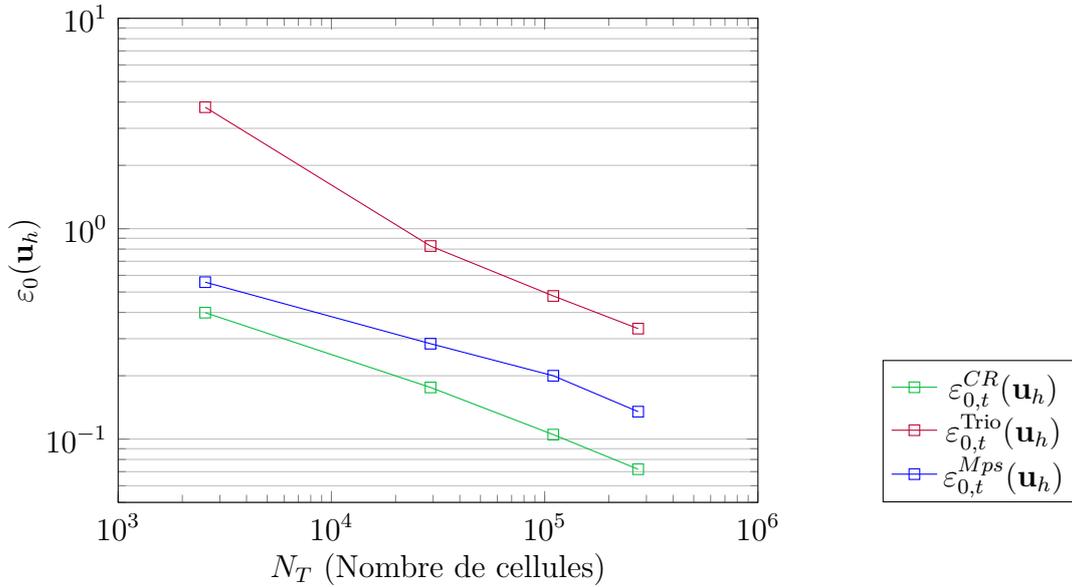


FIGURE 5.6 – $\varepsilon_{0,t}(\mathbf{u}_h)$ pour $(\mathbf{u}, p) \in (5.17)$ avec $\nu = 0.1$.

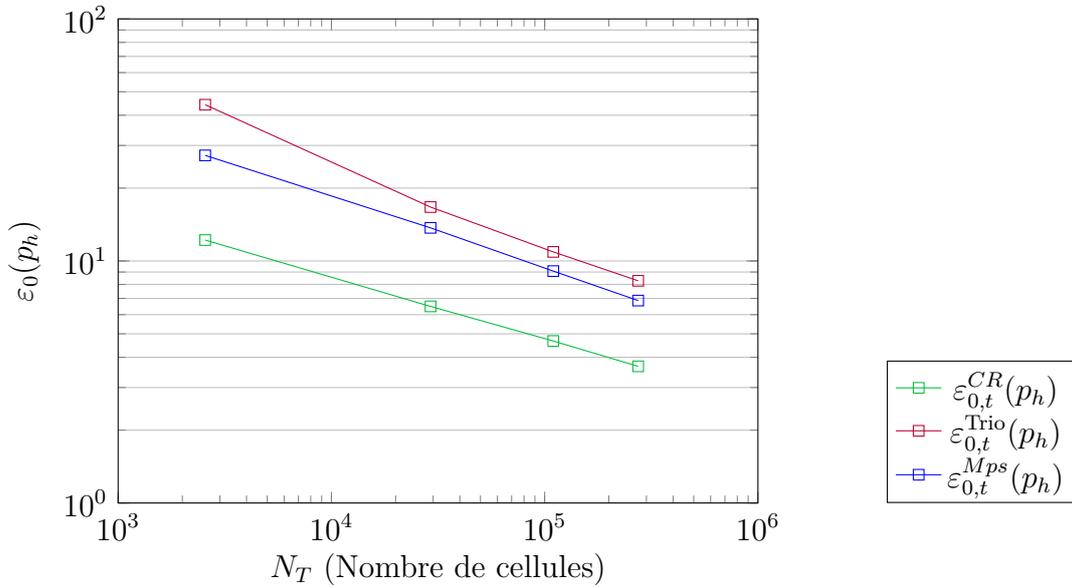


FIGURE 5.7 – $\varepsilon_{0,t}(p_h)$ pour $(\mathbf{u}, p) \in (5.17)$ avec $\nu = 0.1$.

Robustesse par rapport à la viscosité

Nous avons vu à la page 61 et dans la sous-section 4.5.2, p. 121 que l'erreur d'approximation faites sur la pression est directement relié à la dépendance à la viscosité. Il est donc intéressant de vérifier la convergence pour le problème de Stokes avec comme solution $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{0}, \varphi)$. Nous notons que lorsque φ est une fonction affine, alors le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ et le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ donne exactement $\mathbf{u}_h = \mathbf{0}$. Néanmoins, l'approximation n'est plus exacte lorsque φ est une fonction quadratique contrairement au cas $2D$ (voir 120). Les erreurs absolues en vitesse et en pression pour le problème de Stokes (2.33), p. 32 sont données par les figures 5.8 et 5.9 dans le cas où la solution est donnée par (5.18).

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad p = \frac{1}{2}((2x - 1)^2 + (2y - 1)^2) - \frac{1}{3}. \quad (5.18)$$

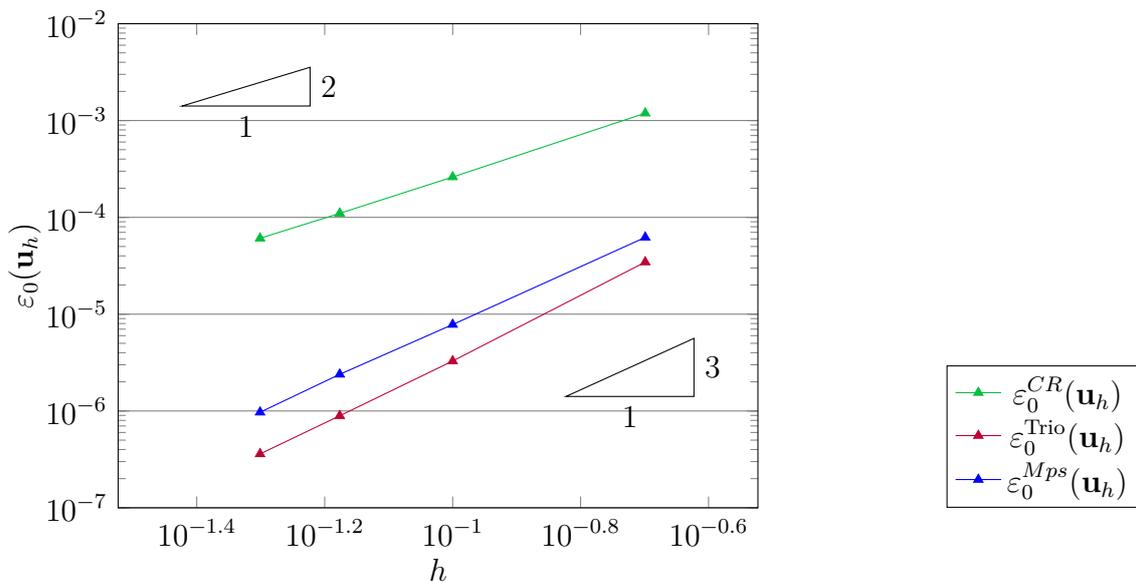


FIGURE 5.8 – $\varepsilon_0(\mathbf{u}_h)$ pour $(\mathbf{u}, p) \in (5.18)$ avec $\nu = 1$.

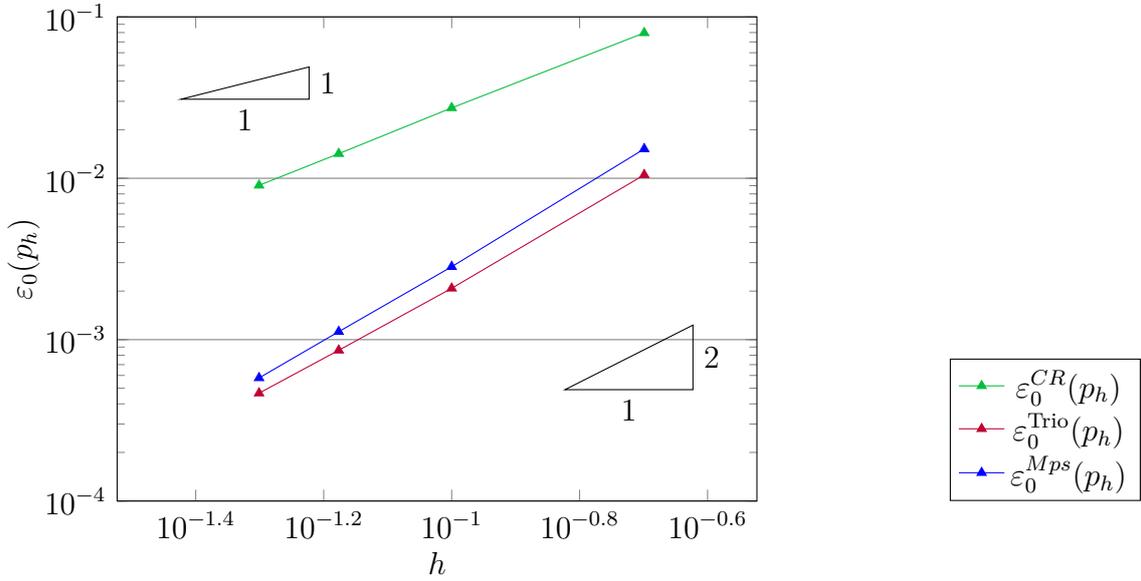


FIGURE 5.9 – $\varepsilon_0(p_h)$ pour $(\mathbf{u}, p) \in (5.18)$ avec $\nu = 1$.

Dans ces figures, nous observons que l'ordre de convergence est de 2 pour l'erreur en vitesse en norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et de 1 pour l'erreur en pression en norme $L^2(\Omega)$. Pour les schémas $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ et $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$, nous trouvons un ordre de convergence attendu de 3 pour la vitesse et de 2 pour la pression. Contrairement au cas 2D de la section 4.5.2, p. 121, le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ produit des résultats équivalents aux résultats du schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P^0 + P^1)$. Ainsi, le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ présente les mêmes propriétés d'approximation que le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ en 3D pour les écoulements dont le second membre dérive d'un gradient.

La cavité entraînée

On reprend ici l'expérience de la cavité entraînée dont les résultats de référence sont donnés par [140]. Ce cas test a déjà été illustré pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P^0 + P^1)$ par [5, p. 89]. On considère le domaine $\Omega = [0, 1]^2$, et $\nu = 1.10^{-4} m^2.s^{-1}$. La frontière $\partial\Omega$ est divisée en deux interfaces :

- La paroi du haut qui défile à une vitesse $v_{paroi} = 1 m.s^{-1}$.
- Les autres parois qui sont fixes.

Le maillage est raffinée sur les bords afin de mieux capturer les zones de recirculations. La figure 5.10 représente celui-ci.

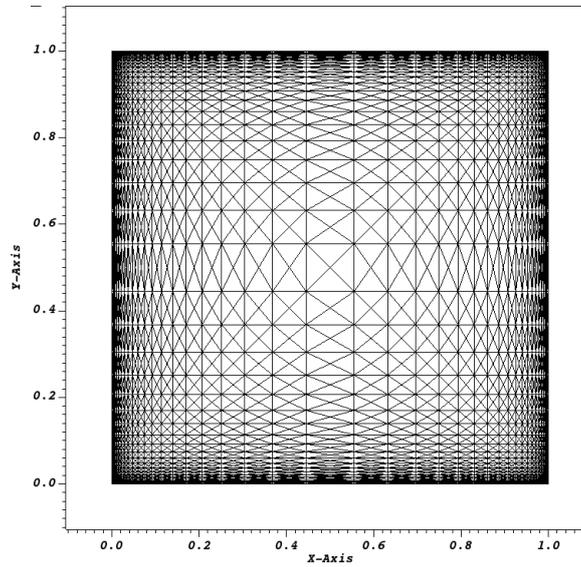


FIGURE 5.10 – Maillage de la cavité entraînée.

Le schéma en temps est un schéma d'Euler implicite et le schéma de convection est un schéma Amont. Les figures 5.11, 5.12, et 5.13 représentent les lignes de courant pour les schémas $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$, $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ et $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ respectivement. Des défauts apparaissent dans les figures ; étant donné que le champ de vitesses est à divergence nulle, les lignes de courant ne devraient pas se terminer sur la paroi ni se croiser. Néanmoins, ces défauts semblent être plus présents sur le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$. En comparant les figures, on observe que la position des tourbillons dans les coins n'est pas tout à fait identique pour les différentes discrétisations. Les discrétisations $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ et $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ sont plus conformes aux résultats présentés dans [140].

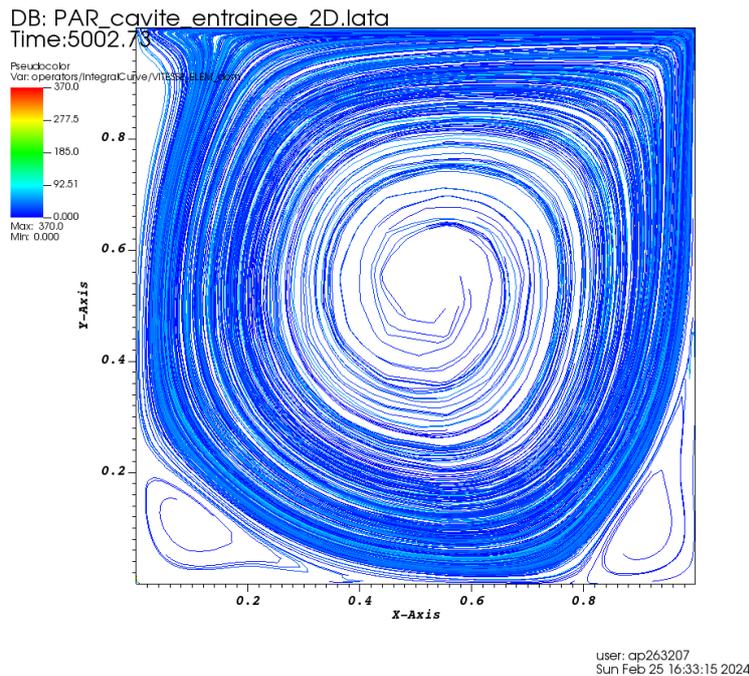


FIGURE 5.11 – Lignes de courants de la cavité entraînée pour le problème de Navier-Stokes et le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$.

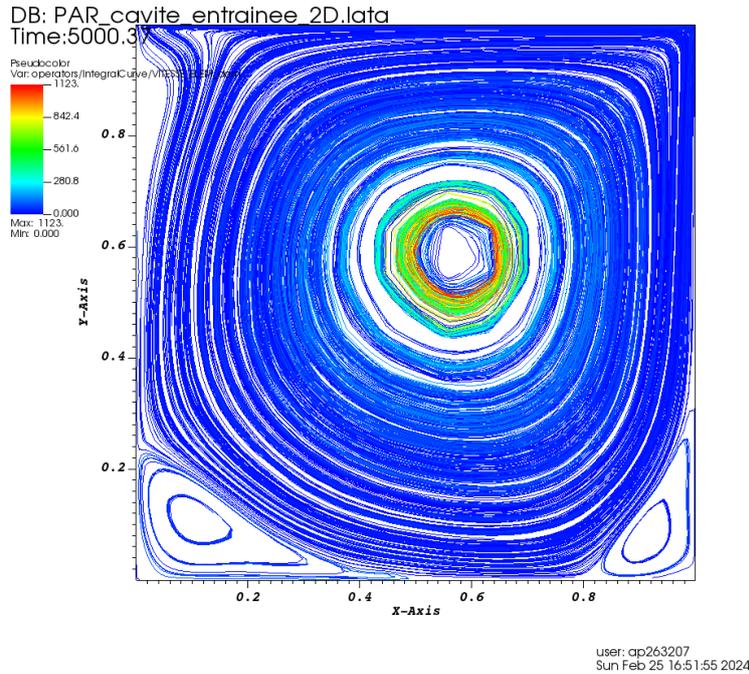


FIGURE 5.12 – Lignes de courants de la cavité entraînée pour le problème de Navier-Stokes et le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$.

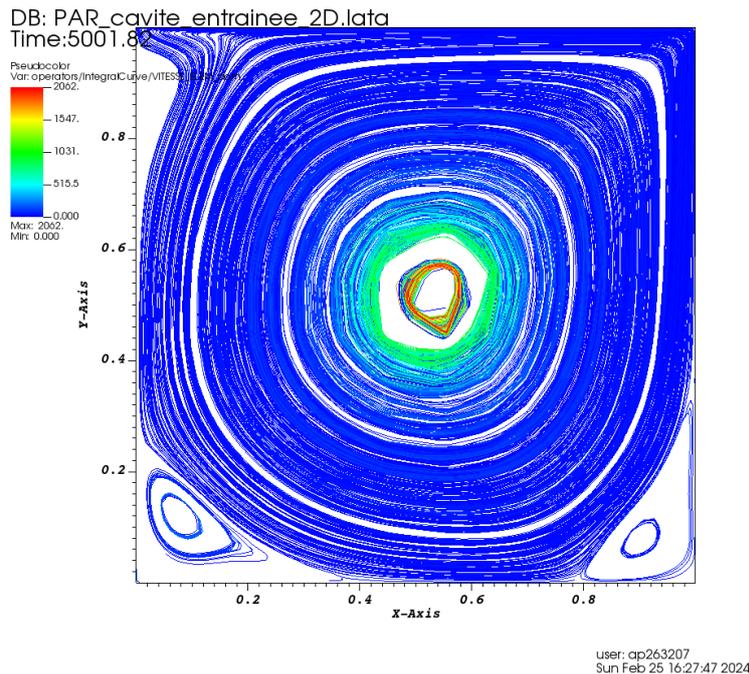


FIGURE 5.13 – Lignes de courants de la cavité entraînée pour le problème de Navier-Stokes et le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$.

La marche descendante

Nous proposons ici de tester et de comparer notre schéma de simulation au cas test de la marche descendante. Dans ce scénario, nous considérons un écoulement en 2D dans une conduite principale d'une longueur de 7 mètres et d'une hauteur de 1 mètre. Au bout de cette conduite, une seconde conduite de 15 mètres de longueur et 2 mètres de hauteur est raccordée. La simulation est réalisée sur une durée de 30 secondes, avec un schéma de

convection amont et l'utilisation d'un schéma de temps Euler implicite. La pression est maintenue constante à la sortie de la conduite, tandis que l'écoulement se produit de gauche à droite. La vitesse d'entrée est fixée à 1 mètre par seconde. La figure 5.14 représente le maillage de la conduite.

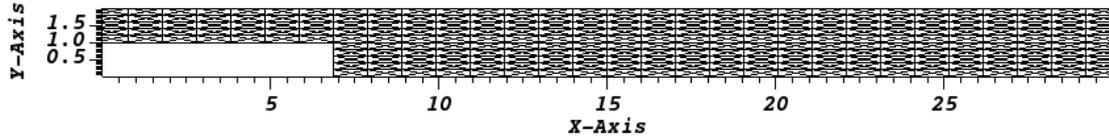


FIGURE 5.14 – Maillage de la marche descendante.

Les figures 5.15, 5.16, 5.17 représentent les lignes de courants. On peut voir, comme cela est prévu par [141] l'apparition d'une zone de recirculation à la jonction des deux conduites. Comme pour le cas de la cavité entraînée, les lignes de courants ont moins de défauts pour les schémas $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ et $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$. De plus, la zone de recirculation est plus faible et grossière pour le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$. La zone de recirculation semble néanmoins être mieux représentée par le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ qui est optimal en $2D$ mais perd cette optimalité en $3D$.

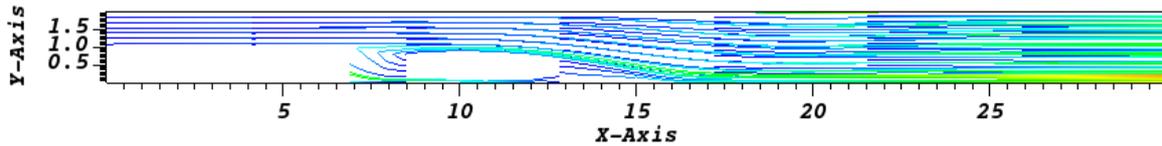


FIGURE 5.15 – Lignes de courants de la marche descendante pour le problème de Navier-Stokes et le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$.

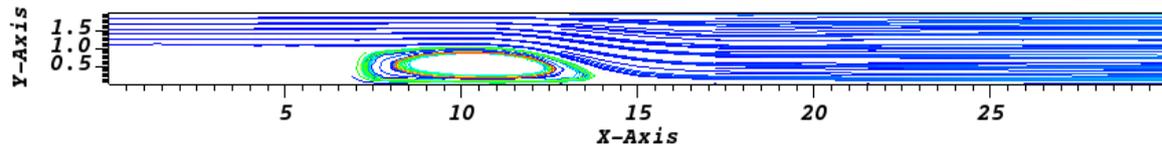


FIGURE 5.16 – Lignes de courants de la marche descendante pour le problème de Navier-Stokes et le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$.

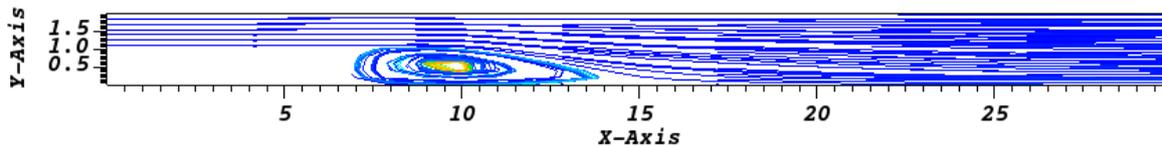


FIGURE 5.17 – Lignes de courants de la marche descendante pour le problème de Navier-Stokes et le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$.

Chapitre 6

Amélioration de la discrétisation $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ avec une technique d'hybridation

Sommaire

6.1 Élimination exacte de la pression avec une technique d'hybridation pour les $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$	144
6.1.1 Assemblage des matrices par blocs	144
6.1.2 Méthode d'hybridation	145
6.1.3 Résolution du système hybridé	149
6.2 Méthode de décomposition de domaine avec complément de Schur sur chaque élément	151
6.2.1 Décomposition de domaine avec complément de Schur dual	151
6.2.2 Généralisation aux équations de Stokes	153
6.3 Résultats numériques	156
6.3.1 Tests de convergence	157
6.3.2 Efficacité de la parallélisation	159

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode pour résoudre les équations de Navier-Stokes (2.32), p. 32 et de Stokes (2.34), p. 33 avec les éléments finis de Crouzeix-Raviart non-conformes d'ordre 1 (notés $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$) présentés en section 3.4.4.

Ce chapitre reprend les travaux effectués dans [137]. Cet article présente une technique d'hybridation définie de manière purement algébrique et permettant l'élimination des inconnues de pression du système global. Les résultats de ces travaux étaient principalement présentés en 2D, avec une technique de parallélisation grossière qui n'exploitait pas efficacement la procédure d'élimination de la pression.

L'idée de ce chapitre est d'étendre la technique d'hybridation, qui sera aussi présentée de manière purement algébrique, aux équations de Navier-Stokes en utilisant le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$, tout en détaillant le cadre d'une discrétisation efficace en 3D. Nous commencerons par une définition détaillée de la méthode, en décrivant sa construction et son intérêt. Ensuite, nous présenterons des tests numériques afin de démontrer les propriétés de cette méthode, soulignant sa capacité de parallélisation.

Nous utiliserons les notations décrites dans la section 2.1.3, p. 23 et la description du maillage dans la section 3.2.1, p. 37. On considérera des conditions de bord de Dirichlet homogène et une condition de moyenne nulle pour normaliser la pression. Les espaces utilisés pour la discrétisation sont définis par (3.41), p. 48 et (3.78), p. 57 et sont rappelés ci-dessous :

$$\mathbf{X}_h := \{\mathbf{v}_h \in [P_{disc}^1(\mathcal{T}_h)]^d \mid \forall f \in \mathcal{I}_F^i : [\mathbf{v}_h](\overrightarrow{OM}_f) = \mathbf{0}\}, \quad (6.1)$$

$$M_h = P_{disc}^0(\mathcal{T}_h) \cap L_0^2(\Omega) \quad (6.2)$$

On rappelle que la formulation variationnelle discrète est donnée, dans le cas des équations de Stokes par le problème 22 :

Problème: 22. *Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h$ tels que $\forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h$:*

$$\begin{cases} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) &= (\mathbf{f}, \Pi^{RT}(\mathbf{v}_h))_{L^2(\Omega)}, \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

où $a(\cdot, \cdot)$ est la forme bilinéaire définie par (3.77), p. 57, et $b(\cdot, \cdot)$ est la forme bilinéaire définie par (3.79), p. 57. Le terme source est modélisé par $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Nous considérons aussi la projection du second membre sur les éléments finis de Raviart-Thomas pour obtenir un système robuste en pression comme cela est décrit dans la section 3.6, p. 81.

Lorsque l'on résout les équations de Navier-Stokes, avec un schéma en temps d'Euler implicite, on rappelle que la formulation variationnelle discrète est donnée par :

Problème: 23. *Trouver les fonctions \mathbf{u}_h^{n+1} tels que :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{m}_h\left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1}}{dt}, \mathbf{v}_h\right) + a_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + c_h(\mathbf{u}_h^{n+1}; \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h^{n+1}) &= F_h^{n+1} \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ b_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, q_h) &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ \mathbf{u}_h &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ \mathbf{u}_h &= \mathbf{u}_0 \quad \text{sur } \{t = 0\} \times \Omega \end{array} \right.$$

Pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h$, $q_h \in M_h$.

avec :

- $F_h^{n+1} := (\mathbf{f}(\cdot, t^{n+1}), \Pi_h^{RT}(\mathbf{v}_h))_{L^2(\Omega)} + m_h^{RT}\left(\frac{\mathbf{u}_h^n}{dt}, \mathbf{v}_h\right)$ et $t^n = ndt$ où dt est le pas de temps et Π_h^{RT} le projecteur des éléments finis de Raviart-Thomas défini par (3.162), p. 82.
- La forme trilineaire $c_h(\cdot; \cdot, \cdot)$ qui discrétise la convection est définie dans la section (5.1), p. 125. Celle-ci est choisie, car elle n'augmente pas le stencil du schéma lorsqu'on traite les équations de Navier-Stokes. Par ailleurs, ce schéma a montré de bons résultats dans le benchmark réalisé dans [136].
- La forme bilinéaire \hat{m}_h est définie par (6.4) et résulte de la condensation de masse. Rappelons que la condensation de masse est une opération qui consiste à diagonaliser la matrice de masse des éléments finis utilisés en effectuant une approximation.

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \hat{m}_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_K \Pi_h^{ML}(\mathbf{u}) \Pi_h^{ML}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} \quad (6.4)$$

avec $\Pi_h^{ML}(\mathbf{v}_h) = \sum_{\alpha=1}^d \pi_h^{ML}(v_h^\alpha) \mathbf{e}_\alpha$ où v_h^α est la composante en α de la fonction vecteur \mathbf{v}_h . On remarque que $\pi_h^{ML} = Id$ si $d = 2$ car la matrice de masse est déjà diagonale. Pour $d = 3$, on définit le projecteur π_h^{ML} tel que, pour tout $f \in \mathcal{I}_F$, et $\ell \in \mathcal{I}_{T,f}$:

$$\pi_h^{ML}(\phi_f)(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \omega_f \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.5)$$

où $\phi_f, f \in \mathcal{I}_F^i$ est la fonction de base des éléments finis P_{nc}^1 définis par (3.32), p. 45 et ω_f est l'union des deux triangles (resp. tétraèdre) définis par les sommets de la facette F_f et les barycentres des triangles (resp. tétraèdre) dont F_f est la facette.

Finalement, dans les deux problèmes, nous retrouverons un système ayant la même forme décrite par l'équation (6.6) dite forme généralisée de problème de point selle :

$$\begin{pmatrix} A & D^T \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

avec $A \in \mathbb{R}^{N_U} \times \mathbb{R}^{N_U}$, $D \in \mathbb{R}^{N_P} \times \mathbb{R}^{N_U}$. Les nombres N_U et N_P désignent respectivement le nombre d'inconnues en vitesse et en pression.

- Dans le cas des équations de Stokes, la matrice A représente le terme de diffusion donné par la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$, la matrice D représente la divergence et R désigne le second membre. Ces matrices sont définies par l'équation (4.31), p. 100.
- Dans le cas des équations de Navier-Stokes, la matrice A représente le terme de diffusion ainsi que le terme associé à la forme bilinéaire $m(\cdot, \cdot)$. On pourra expliciter le terme de convection afin de le traiter comme un second membre ou alors, appliquer l'algorithme de Newton-Raphson décrit par l'algorithme 1, p. 142 et inclure alors sa contribution dans la matrice A .

Dans ce qui suit, on appliquera la méthode d'hybridation seulement aux problèmes instationnaires. Il est possible d'appliquer cette méthode aux problèmes instationnaire en introduisant une stabilisation qui "recouple faiblement" le système sans changer la solution. Cette méthode de stabilisation est décrite dans [137, p.12].

Remarque 31. (*Élimination de la vitesse*) Pour les équations de Stokes, la matrice A est symétrique définie positive, mais son inverse est une matrice pleine. Une résolution par élimination de la vitesse est donc très coûteuse.

Remarque 32. (*Conditions aux limites*) Dans ce Chapitre, nous imposons des conditions aux limites de Dirichlet homogènes. Pour imposer des conditions aux limites non-homogènes, il suffit de faire un relèvement [21, Section 31.2.2]. Finalement, pour compléter le système, nous pouvons imposer une condition de moyenne nulle pour la pression. Une autre façon d'imposer la condition de normalisation est d'imposer la pression sur une maille T_{ℓ_0} , $\ell_0 \in \mathcal{I}_T$. Cette méthode sera appliquée dans ce chapitre.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à la résolution couplée de la vitesse et de la pression. Cela permet de prendre en compte de manière simultanée les équations de conservation de la masse et les équations de conservation de la quantité de mouvement. Aucun schéma de projection n'est donc utilisé pour la résolution de ces équations contrairement aux autres chapitres.

Lorsqu'on résout un problème mixte, il peut être intéressant de ne pas séparer la résolution des inconnus. L'utilisation d'un schéma de projection peut dégrader la convergence en temps [142] et induit une approximation des équations. La résolution couplée peut aussi améliorer la convergence vis-à-vis des solveurs itératifs [143, p.86] et permet la prise en compte de conditions aux limites plus facilement (par exemple, lorsqu'on considère des conditions aux limites mixtes (voir p. 32). Par ailleurs, cela est aussi utile pour certaines applications comme dans la modélisation des interactions fluide-structure [144] pour prendre en compte de manière précise l'influence mutuelle entre le fluide et la structure solide. Lorsqu'on considère des écoulements diphasiques [145], cela permet aussi d'éviter des problèmes de stabilité entre deux phases [143, Section 3.3].

Méthode de Newton-Raphson

L'algorithme de Newton-Raphson est une méthode numérique itérative couramment utilisée pour résoudre des systèmes d'équations non linéaires. Il consiste à linéariser le problème

à chaque itération en utilisant une approximation locale. Ensuite, l'algorithme résout le système linéaire résultant pour obtenir une solution corrigée. Ce processus est répété jusqu'à convergence. Le nombre d'itérations dépend de l'initialisation et, si le pas de maillage est assez petit avec un nombre de Reynolds modéré, alors un bon candidat peut être obtenu en résolvant un problème de Stokes [146]. Afin d'écrire cet algorithme, on définit la forme bilinéaire \mathcal{A}_h :

$$\mathcal{A}_h : \begin{cases} \mathbf{X}_h \times M_h & \rightarrow \mathbb{R} \\ ((\mathbf{v}_h, q_h); (\mathbf{w}_h, r_h)) & \mapsto \mathcal{A}_h((\mathbf{v}_h, q_h); (\mathbf{w}_h, r_h)) \end{cases} \quad (6.7)$$

et

$$\mathcal{A}_h((\mathbf{v}_h, q_h); (\mathbf{w}_h, r_h)) = \int_{\Omega} \left(\partial_t \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{w}_h + \nu (\mathbf{Grad}_h \mathbf{v}_h : \mathbf{Grad}_h \mathbf{w}_h) + ((\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{Grad}_h) \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{w}_h - q_h \operatorname{div}_h(\mathbf{w}_h) - r_h \operatorname{div}_h(\mathbf{v}_h) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}_h \right) dx$$

On peut alors donner la différentielle de la fonction $\mathcal{A}_h(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ au point (\mathbf{v}_h, q_h) :

$$D\mathcal{A}_h : \begin{cases} \mathbf{X}_h \times M_h & \rightarrow \mathbb{R} \\ ((\mathbf{v}_h, q_h); (\mathbf{w}_h, r_h); (\delta \mathbf{v}_h, \delta q_h)) & \mapsto D\mathcal{A}_h((\mathbf{v}_h, q_h); (\mathbf{w}_h, r_h); (\delta \mathbf{v}_h, \delta q_h)) \end{cases} \quad (6.8)$$

et

$$D\mathcal{A}_h((\mathbf{v}_h, q_h); (\mathbf{w}_h, r_h); (\delta \mathbf{v}_h, \delta q_h)) = \int_{\Omega} \left(\partial_t \delta \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{w}_h + \nu (\mathbf{Grad}_h \delta \mathbf{v}_h : \mathbf{Grad}_h \mathbf{w}_h) + ((\delta \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{Grad}_h) \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{w}_h + ((\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{grad}) \delta \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{w}_h - \delta q_h \operatorname{div}_h(\mathbf{w}_h) - r_h \operatorname{div}_h(\delta \mathbf{v}_h) \right) dx$$

L'algorithme de Newton s'écrit alors, pour $N_{ite} \in \mathbb{N}^*$ un nombre d'itération maximum et $\varepsilon > 0$ un paramètre de tolérance à l'erreur :

Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in (\mathbf{X}_h \times M_h)$ tel que $\mathcal{A}_h(\mathbf{u}, p_h, \mathbf{v}_h, q_h) = 0, \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in (\mathbf{X}_h \times M_h)$:

Algorithm 1: Méthode de Newton-Raphson

Données: N_{ite}, ε

Résultat: \mathbf{u}_h, p_h

Initialisation $\mathbf{u}_{h,0}, p_{h,0} \in (\mathbf{X}_h \times M_h), i = 0$;

tant que $i < N_{ite}$ **faire**

si $\|(\delta \mathbf{u}_{h,i}, \delta p_{h,i})\|_h > \varepsilon$ **alors**

 Résoudre $\forall (\mathbf{w}_h, r_h) \in (\mathbf{X}_h \times M_h)$:

$D\mathcal{A}_h((\mathbf{u}_{h,i}, p_{h,i}); (\mathbf{w}_h, r_h); (\delta \mathbf{u}_{h,i}, \delta p_{h,i})) = -\mathcal{A}_h((\mathbf{u}_{h,i}, p_{h,i}), (\mathbf{w}_h, r_h))$;

$\mathbf{u}_{h,i+1} = \mathbf{u}_{h,i} + \delta \mathbf{u}_{h,i}, p_{h,i+1} = p_{h,i} + \delta p_{h,i}, i = i + 1$;

sinon

$\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_{h,i}, p_h = p_{h,i}$;

Stop ;

finsi

fintq

avec :

$$\|\mathbf{v}_h, q_h\|_h = (\|\mathbf{v}_h\|_h^2 + \|q_h\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}$$

Problèmes de solveurs pour le système (6.6)

Lorsqu'on veut résoudre le système (6.6), la présence de zéro sur la diagonale rend la matrice globale non-définie positive (en raison de la présence de valeurs propres négatives). En effet, si A est une matrice symétrique définie positive, nous avons alors une équivalence entre le système (6.6) et le système (6.9).

$$\begin{pmatrix} A & D^T \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ -DA^{-1}R \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

où $S = -DA^{-1}D^T$ est une matrice symétrique définie négative [147, p.496]. En particulier, le système (6.9) et par équivalence, le système (6.6) admettent N_U valeurs propres positives et N_P valeurs propres négatives [148, p.21].

Ce problème est connu et complexifie l'utilisation de solveurs itératifs comme le gradient conjugué [15, p.334] où l'algorithme GMRES [127]. Une alternative est l'utilisation de solveurs directes qui sont plus coûteux en calcul. Une autre option consiste à ajouter des connexions diagonales entre les pressions, comme dans les méthodes de Lagrangien augmentées [149, Chapitre 2]. Cependant, dans ce cas, la solution peut être dégradée par la modification du système discret.

Une famille de méthodes connues, permettant de résoudre ces problèmes, sont les méthodes d'hybridations qui consistent à ajouter des inconnues sur les faces du maillages. L'hybridation peut être définie comme le processus qui libère la contrainte de continuité dans les espaces d'éléments finis en introduisant de nouveaux degrés de liberté, tout en conservant la solution du problème discret. Ces méthodes mènent alors à un système symétrique défini positif pour ces nouvelles inconnues. Cela est illustré par de nombreux travaux. L'article [150] introduit le schéma "Mixed High-Order Methods" résultant d'une hybridation pour résoudre les équations de Stokes sur des maillages de formes générales. Dans [151], une technique d'implémentation d'éléments finis mixtes est décrite, utilisant les multiplicateurs de Lagrange pour assurer la continuité à travers les éléments. L'article [152] explore une approche d'hybridation d'éléments finis de Raviart-Thomas d'ordre 0. Enfin, [153] présente une méthode d'hybridation avec des multiplicateurs de Lagrange qui conduit à un système avec une matrice symétrique définie positive pour un problème elliptique, améliorant ainsi les performances d'un algorithme multigrille¹.

L'hybridation peut être interprétée comme une résolution sous contrainte, intégrant des multiplicateurs de Lagrange dans un espace choisi pour renforcer la continuité requise [151]. La méthode Discontinuous Hybrid Galerkin (HDG) est une application connue de l'hybridation [154]. Elle étend la méthode des éléments finis de Galerkin discontinus [155] en introduisant des variables hybrides (dans les cellules et sur les faces). Ce faisant, on améliore les performances et la stabilité de la résolution du système linéaire, tout en limitant le nombre d'inconnues. Cette méthode amène à résoudre un premier système réduit sur les inconnues aux faces avec une méthode de condensation statique, puis à résoudre un système explicite pour retrouver la solution du problème initiale.

Une distinction majeure entre la méthode HDG et le travail décrit dans ce chapitre réside dans le fait que les fonctions de base des schémas DG ne sont pas continues même ponctuellement sur les faces. Par conséquent, l'hybridation s'effectue avec le tenseur de gradient de vitesse, qui sera alors une inconnues, plutôt qu'avec la vitesse elle-même. Le système résolu est donnée par (3.1), p. 37.

Enfin, cette méthode est conçue pour être utilisée en parallèle, car elle conduit à un système linéaire présentant une structure adaptée, qui est également assemblée "bloc par

1. "multigrid"

bloc". Ceci sera détaillé dans la première section et des résultats numériques seront présentés dans la seconde section.

Remarque 33. (*Hypothèse de la méthode*) Pour pouvoir choisir un schéma numérique auquel appliquer la méthode d'hybridation de manière purement algébrique, plusieurs pré-requis sont nécessaires :

- Le stencil de la pression doit être local.
- Les inconnues en vitesse doivent être localisées sur les faces.

Le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ respecte ces pré-requis. C'est aussi le cas des éléments finis de Rannacher-Turek [156].

6.1 Élimination exacte de la pression avec une technique d'hybridation pour les $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$

Dans cette section, nous présentons la méthode d'hybridation pour les éléments finis mixtes $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$. Nous présenterons le schéma de manière purement algébrique en abordant une méthode d'assemblage locale, blocs par blocs, et introduirons la notion d'hybridation. Ensuite, nous appliquerons cette méthode aux équations de Navier-Stokes instationnaires.

6.1.1 Assemblage des matrices par blocs

Lorsqu'on résout les équations de Stokes ou de Navier-Stokes, on peut assembler les matrices A et D par blocs. Cette méthode d'assemblage permet entre autre une forte parallélisation de l'assemblage. Pour définir une telle construction, nous devons d'abord définir les matrices élémentaires suivantes : Soit une maille T_ℓ , $\ell \in \mathcal{I}_T$. On définit les matrices suivantes :

1. La matrice $H_\ell^\alpha \in \mathbb{R}^{N_F^i} \times \mathbb{R}^{N_{F,\ell}^i}$ (avec $N_F^i = \text{card}(\mathcal{I}_F^i)$ et $N_{F,\ell}^i = \text{card}(\mathcal{I}_{F,\ell}^i)$) est définie telle que, dans la colonne associée à une vitesse sur la face F_f , $f \in \mathcal{I}_{F,\ell}$, toutes les composantes sont nulles sauf celles qui se trouvent à la ligne associée à la composante alpha de la vitesse de la face F_f . Un schéma matriciel est donné par (6.10).

$$H_\ell^\alpha = \sum_{f \in \mathcal{I}_{F,\ell}} \begin{matrix} & \xrightarrow{N_{F,\ell}^i} & \\ & & j \\ & & \vdots \\ f & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} & \downarrow N_F^i \end{matrix} \quad (6.10)$$

où j est l'indice locale de F_f dans l'ensemble $\mathcal{I}_{F,\ell}$. On peut ensuite définir la matrice $H_\ell \in \mathbb{R}^{dN_F^i} \times \mathbb{R}^{dN_{F,\ell}^i}$ définie comme une matrice diagonale par blocs telle que chaque bloc est défini par la matrice H_ℓ^α .

2. La matrice $F_\ell \in \mathbb{R}^{N_T-1} \times \mathbb{R}^1$ est définie telle que toutes les composantes sont nulles sauf celles qui se trouvent à la ligne associée à la maille T_ℓ . On remarque que la matrice est définie avec $N_T - 1$ composantes car on impose la pression dans la maille T_{ℓ_0} . Un schéma matriciel est donné par (6.11).

$$F_\ell = \ell \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \Bigg| N_T \quad (6.11)$$

Avec les matrices élémentaires définies par (6.10) et (6.11), nous pouvons redéfinir les matrices A , D et le second membre R provenant de l'équation (6.6) par :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} H_\ell A_\ell H_\ell^T, \\ D &= \sum_{\ell \in \{\mathcal{I}_T \setminus \ell_0\}} F_\ell D_\ell^T H_\ell^T, \\ R &= \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} H_\ell R_\ell. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Les matrices A_ℓ , D_ℓ et le vecteur R_T sont les contributions du triangle T_ℓ aux matrices globales respectives. On peut obtenir ces termes en restreignant les intégrales de la formulation variationnelle du problème 23 à T_ℓ .

6.1.2 Méthode d'hybridation

Dans cette section, on détaille la technique d'hybridation utilisée. Pour cela, on ajoute des inconnues auxiliaires qui seront situées sur les faces. Ces inconnues seront dénotées par $\hat{W} = (\hat{W}_{\alpha,f})_{\alpha=1\dots d, f \in \mathcal{I}_F^i}$. Nous pouvons alors définir des inconnues en vitesse (et en pression) qui seront locales à chaque cellule T_ℓ , $\ell \in \mathcal{I}_T$. Les inconnues du système seront alors :

- les vitesses locales $\hat{U} = (\hat{U}_{f,\ell,\alpha})$ pour $\ell \in \mathcal{I}_T, f \in \mathcal{I}_F^i$,
- les pressions locales $\hat{P} = (\hat{P}_\ell)$ pour $\ell \in \mathcal{I}_T$,
- les inconnues auxiliaires $\hat{W} = (\hat{W}_{\alpha,f})$ pour $\alpha = 1 \dots d, f \in \mathcal{I}_F^i$.

On notera $\hat{U}_{f,\ell} := (\hat{U}_{f,\ell,\alpha})_{\alpha=1,\dots,d}$ pour $\ell \in \mathcal{I}_T, f \in \mathcal{I}_F$ ainsi que $\hat{W}_f := (\hat{W}_{\alpha,f})_{\alpha=1,\dots,d}$ pour $f \in \mathcal{I}_F^i$. Une représentation des degrés de liberté (en 2D) avant et après application de la méthode d'hybridation est donnée par la figure 6.1 pour deux triangles T_ℓ, T_r avec $(\ell, r) \in \mathcal{I}_T^2$. Les faces du triangle T_ℓ sont données par les indices $f_1, f_2, f_3 \in (\mathcal{I}_F)^3$ et les faces du triangle T_r sont données par $f_3, f_4, f_5 \in (\mathcal{I}_F)^3$. La partie haute de l'image représente les inconnues avant l'hybridation et la partie basse représente les inconnues après l'hybridation. Les vitesses sont localisées aux centres des faces (indiquées les ronds noir), les pressions sont localisées aux barycentres des triangles (indiquées par les carrés) et enfin les inconnues auxiliaires sont situées sur les centres des faces (indiquées par les triangles noir). Les inconnues locales sont indiquées par des formes géométriques non-remplies et les globales par des formes géométriques remplies.

Les inconnues auxiliaires sont définies de tel sorte qu'elles permettent d'assurer la continuité des vitesses \hat{U} aux faces (6.13).

$$\forall f \in \mathcal{I}_F^i, \forall (\ell, r) \in \mathcal{I}_{T,f}, \forall \alpha \in \{1, \dots, d\} \quad \hat{U}_{f,\ell,\alpha} = \hat{U}_{f,r,\alpha} \quad (6.13)$$

On notera :

$$\hat{U}_{f,\ell} := (\hat{U}_{f,\ell,\alpha})_{\alpha \in \{1,\dots,d\}} \quad (6.14)$$

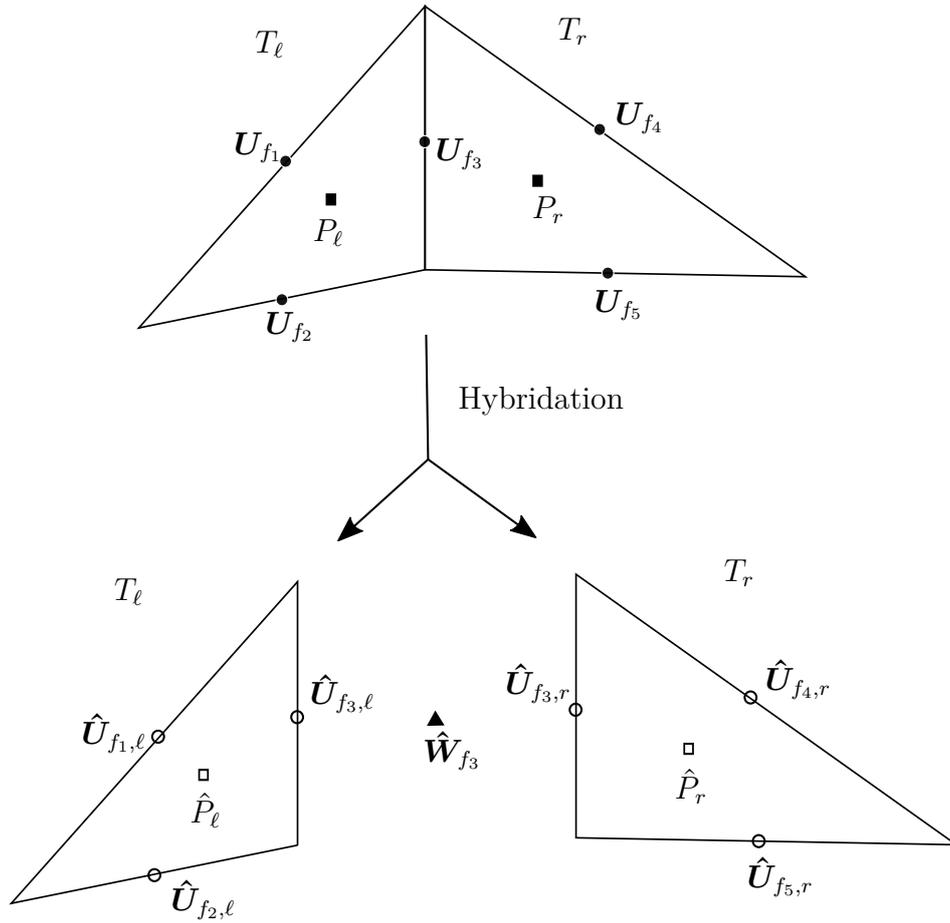


FIGURE 6.1 – Schéma récapitulatif des inconnues résultants de l’hybridation pour deux triangles voisins T_ℓ, T_r .

Ce qui amène à définir pour toutes mailles $T_\ell, \ell \in \mathcal{I}_T$, des matrices $(C_\ell)_{\ell \in \mathcal{I}_T}$ telles que, pour deux triangles voisins T_ℓ, T_r qui partagent une face F_f :

$$(C_\ell)_{\alpha,f,\alpha,f} \hat{U}_{f,\ell,\alpha} + (C_r)_{\alpha,f,\alpha,f} \hat{U}_{f,r,\alpha} = 0 \quad \text{pour tout } \alpha = 1 \dots d \quad (6.15)$$

et

$$(C_\ell)_{\alpha,f,\alpha,f} + (C_r)_{\alpha,f,\alpha,f} = 0 \quad \text{pour tout } \alpha = 1 \dots d \quad (6.16)$$

En pratique, $\left((C_\ell)_{\alpha,f,\alpha,f} \right)_{f \in \mathcal{I}_F, \alpha \in \{1, \dots, d\}}$ vaut plus ou moins la valeur de la taille de la facette F_f .

Hybridation des équations de Navier-Stokes

De manière analogue au système précédent, nous pouvons définir un assemblage par bloc des matrices issues de la méthode d’hybridation. Pour cela, on définit les matrices élémentaires, telles que pour $\ell \in \mathcal{I}_T, \hat{H}_\ell \in \mathbb{R}^{2dN_F^i} \times \mathbb{R}^{dN_{F,\ell}}$. La matrice \hat{H}_ℓ est telle que à la colonne associée à l’inconnue locale de la vitesse $\hat{U}_{f,\ell,\alpha}$ (avec $\alpha \in \{1, \dots, d\}$ et $f \in \mathcal{I}_F$), toutes les composantes sont nulles sauf celle qui se trouve à la ligne associée à l’inconnue globale $\hat{U}_{f,\ell,\alpha}$. Un schéma matriciel est donné par (6.17) définissant les matrices \hat{H}_ℓ^α situées sur les blocs diagonaux de la matrice \hat{H}_ℓ .

Remarque 36. (Équivalence des solutions de (6.22) et (6.6)) On peut montrer que la solution de (6.22) est aussi solution de (6.6). Cette preuve est disponible dans [137]. Pour prouver cela, on sait que

$$\hat{C}\hat{U} = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} H_\ell C_\ell \hat{H}_\ell^T \hat{U} = 0$$

En particulier, pour tout $\alpha \in \{1, \dots, d\}$ et $f \in \mathcal{I}_{F,\ell}^i$ avec $(\ell, r) \in \mathcal{I}_{T,f}$, on a :

$$(C_\ell)_{\alpha,f,\alpha,f} \hat{U}_{\ell,\alpha,f} + (C_r)_{\alpha,f,\alpha,f} \hat{U}_{r,\alpha,f} = 0$$

ce qui implique en utilisant (6.16) que

$$\hat{U}_{f,\ell,\alpha} = \hat{U}_{f,r,\alpha} := U_{f,\alpha} \quad (6.25)$$

On note ces inconnues $U = (U_{f,\alpha})_{\alpha=1,\dots,d, f \in \mathcal{I}_F^i}$. On a :

$$\hat{H}_\ell^T \hat{U} = H_\ell^T U \quad \forall \ell \in \mathcal{I}_T \quad (6.26)$$

On définit la matrice J telle que si on multiplie à gauche l'équation $\hat{A}\hat{U} + \hat{D}^T \hat{P} + \hat{C}^T \hat{W} = \hat{R}$, on obtient l'addition des équations reliées aux inconnues ℓ, α, f et r, α, f avec $f \in \mathcal{I}_F$, $(\ell, r) \in (\mathcal{I}_{T,f})^2$ et $\alpha \in \{1, \dots, d\}$. La matrice $J \in \mathbb{R}^{dN_F^i} \times \mathbb{R}^{2dN_F^i}$ est définie par :

$$J = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} H_\ell \hat{H}_\ell^T.$$

On obtient alors :

$$J\hat{A}\hat{U} + J\hat{D}^T \hat{P} + J\hat{C}^T \hat{W} = J\hat{R}.$$

En utilisant l'équation (6.23), il vient

$$J\hat{A}\hat{U} = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} H_\ell \hat{H}_\ell^T \sum_{r \in \mathcal{I}_T} \hat{H}_r(A_r) \hat{H}_r^T \hat{U} = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} H_\ell(A_\ell) \hat{H}_\ell^T \hat{U}.$$

On applique ensuite (6.26), pour obtenir :

$$J\hat{A}\hat{U} = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} H_\ell A_\ell H_\ell^T U = AU$$

De nouveau en appliquant (6.23), on peut calculer :

$$J\hat{D}^T \hat{P} = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} H_\ell \hat{H}_\ell^T \sum_{r \in \mathcal{I}_T, r \neq \ell_0} \hat{H}_\ell D_r^T F_r^T \hat{P} = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T, \ell \neq \ell_0} H_\ell D_\ell F_\ell^T \hat{P} = D^T \hat{P},$$

$$J\hat{R} = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} H_\ell \hat{H}_\ell^T \sum_{r \in \mathcal{I}_T} \hat{H}_r R_r = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} H_\ell R_\ell = R.$$

La matrice $J\hat{C}^T$ satisfait

$$J\hat{C}^T = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} H_\ell \hat{H}_\ell^T \sum_{r \in \mathcal{I}_T} \hat{H}_r^T C_r H_r = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} H_\ell C_\ell H_\ell,$$

qui est nulle d'après l'équation (6.16). On a finalement :

$$AU + D^T \hat{P} = R.$$

De manière similaire, de l'équation $\hat{D}\hat{U} = 0$, on obtient, en appliquant (6.26) :

$$\hat{D}\hat{U} = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T, \ell \neq \ell_0} F_\ell D_\ell^T \hat{H}_\ell^T \hat{U} = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T, \ell \neq \ell_0} F_\ell D_\ell^T U = DU = 0$$

On conclut que (U, \hat{P}) est solution de (6.6) et en particulier, comme ce système est inversible, la solution est unique et donc $\hat{P} = P$.

Remarque 37. (*Inversibilité du système (6.22)*) Pour obtenir l'inversibilité du système (6.22), on peut montrer que si $\hat{R} = 0$ (ie. les vecteurs R_ℓ sont tous nuls) alors on a une unique solution à (6.22), $(\hat{U}, \hat{P}, \hat{W})$ est nulle. En utilisant la remarque précédente, on a que \hat{U} et \hat{P} sont solutions du système (6.6) avec $R = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} H_\ell R_\ell = 0$. Or ce système est inversible,

ce qui implique que $(U, \hat{P}) = 0$. Comme $U = 0$, (6.25) implique que $\hat{U} = 0$. Finalement, en utilisant la première équation du système (6.22), il vient que

$$\hat{A}\hat{U} + \hat{D}^T\hat{P} + \hat{C}^T\hat{W} = \hat{R} \implies \hat{C}^T\hat{W} = 0.$$

Cette équation se ré-écrit pour tout $\alpha \in \{1, \dots, d\}$ et $f \in \mathcal{I}_{F,\ell}^i$ avec $(\ell, r) \in \mathcal{I}_{T,f}$:

$$(C_\ell)_{\alpha,f,\alpha,f}\hat{W}_{\ell,\alpha,f} + (C_r)_{\alpha,f,\alpha,f}\hat{W}_{r,\alpha,f} = 0.$$

Ce qui implique que $\hat{W} = 0$. Le système linéaire (6.22) est donc bien inversible et sa résolution donne également la solution du système (6.6)

Remarque 38. (*Méthode de décomposition de domaine avec complément de Schur*) Une autre méthode permettant d'obtenir ce système est de considérer une méthode de décomposition de domaine [157], en considérant chaque triangle comme un sous-domaine de Ω . On obtient alors le même système décrit par (6.22). Cette idée est développée dans la section 6.2. L'avantage de présenter cette méthode de manière purement algébrique est que cela permet de détailler une méthodologie pouvant s'appliquer à n'importe quel schéma satisfaisant les hypothèses de la remarque 33.

6.1.3 Résolution du système hybridé

Nous avons vu que la méthode d'hybridation nous mène à résoudre le système (6.22). Bien que le système possède un stencil très faible, celui-ci est aussi beaucoup plus grand que le système (6.6). La suite de la méthodologie présentée est d'appliquer une méthode de condensation statique afin d'éliminer \hat{U} et \hat{P} et d'obtenir un système sur \hat{W} qui pourrait être résolu de manière plus efficace que le système (6.6).

Élimination de la vitesse et de la pression

Pour effectuer l'élimination des inconnues de vitesse et de pression, on suppose l'hypothèse suivante :

Hypothèse 7. Pour tout $\ell \in \mathcal{I}_T$, toutes les valeurs propres de la matrice symétrique A_ℓ sont strictement positives ou strictement négatives.

On a

$$\boxed{\hat{U} = \hat{A}^{-1}(-\hat{D}^T P - \hat{C}^T \hat{W} + \hat{R})}. \quad (6.27)$$

En substituant \hat{U} dans l'équation $\hat{D}\hat{U}$, on obtient :

$$\hat{D}\hat{A}^{-1}(-\hat{D}^T P - \hat{C}^T \hat{W} + \hat{R}) = 0.$$

On définit la matrice $B = \hat{D}\hat{A}^{-1}\hat{D}^T$. En utilisant la propriété :

$$\hat{H}_\ell^T \hat{A}^{-1} \hat{H}_r = \begin{cases} \hat{A}_\ell^{-1} & \text{si } \ell = r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (6.28)$$

on obtient que :

$$B = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T, \ell \neq \ell_0} F_\ell D_\ell^T \hat{A}_\ell^{-1} D_\ell F_\ell^T.$$

La matrice B est diagonale avec comme blocs diagonaux $B_\ell := D_\ell^T \hat{A}_\ell^{-1} D_\ell, \forall \ell \in \mathcal{I}_T$. On note Λ la matrice issue de la décomposition en valeurs propres de la matrice \hat{A}_ℓ^{-1} de telle sorte qu'il existe une matrice orthogonale Q tel que $\hat{A}_\ell^{-1} = Q^T \Lambda_\ell Q$. Posons λ_ℓ , la plus petite valeur propre de \hat{A}_ℓ^{-1} , on obtient alors que :

$$\begin{aligned} |B_\ell| &= |D_\ell^T \hat{A}_\ell^{-1} D_\ell| = |D_\ell^T Q^T \Lambda_\ell Q D_\ell| = |D_\ell^T Q^T (\Lambda_\ell^{1/2})^T \Lambda_\ell^{1/2} Q D_\ell| \\ &\geq \lambda |D_\ell^T Q^T Q D_\ell| = \lambda |D_\ell^T D_\ell| \geq \lambda \|D_\ell\|_2 > 0 \end{aligned}$$

car il existe au moins une valeur de D non nulle et qu'il y a une seule pression par triangle ce qui implique que la matrice D_ℓ est de taille $1 \times dN_{F,\ell}^i$. La matrice diagonale B est donc inversible et on peut écrire :

$$B^{-1} = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T, \ell \neq \ell_0} B_\ell^{-1} F_\ell F_\ell^T,$$

et

$$\boxed{P = B^{-1} \hat{D} \hat{A}^{-1} (-\hat{C}^T \hat{W} + \hat{R})}. \quad (6.29)$$

On obtient alors

$$\hat{C} \hat{A}^{-1} (-\hat{D}^T P - \hat{C}^T \hat{W} + \hat{R}) = 0,$$

ce qui amène, en définissant

$$G = \hat{C} \left(\hat{A}^{-1} - \hat{A}^{-1} \hat{D}^T B^{-1} \hat{D} \hat{A}^{-1} \right) \hat{C}^T \quad (6.30)$$

et

$$S = \hat{C} \left(\hat{A}^{-1} - \hat{A}^{-1} \hat{D}^T B^{-1} \hat{D} \hat{A}^{-1} \right) \hat{R}, \quad (6.31)$$

à

$$\boxed{G \hat{W} = S}. \quad (6.32)$$

La matrice G est alors inversible puisque résoudre ce système est équivalent à résoudre le système (6.22) (sous l'hypothèse des valeurs propres de \hat{A}_K).

Remarque 39. (*Stencil de la matrice G*) Sous l'hypothèse γ , en utilisant (6.23), et

$$\forall (\ell, r) \in (\mathcal{I}_T)^2, \quad F_\ell^T F_r = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

on obtient

$$G = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} H_\ell G_\ell H_\ell^T$$

avec, pour tout $\ell \in \mathcal{I}_T, \ell \neq \ell_0$:

$$G_\ell = C_\ell (\hat{A}_\ell^{-1} - B_\ell^{-1} \hat{A}_\ell^{-1} D_\ell D_\ell^T \hat{A}_\ell^{-1}) C_\ell,$$

et

$$G_{\ell_0} = C_{\ell_0} \hat{A}_{\ell_0}^{-1} C_{\ell_0}.$$

En particulier, l'assemblage de la matrice G montre qu'elle possède le même stencil que la matrice $A = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T} H_\ell A_\ell H_\ell^T$ (dans le cas où la matrice A_ℓ est une matrice pleine).

Remarque 40. (*Les équations de Stokes instationnaire*) Dans le cas des équations de Stokes instationnaire (problème 2.33, p. 32), toutes les matrices A_ℓ sont symétriques définies positives ce qui implique que la matrice G l'est aussi. En effet, soit un vecteur \hat{W} , on pose

$$a = \hat{W}^T G \hat{W}.$$

On définit $Z_\ell = C_\ell^T H_\ell^T \hat{W}$ et le produit scalaire $\langle X, Y \rangle_\ell = X^T \hat{A}_\ell^{-1} Y$, on a alors :

$$a = \sum_{\ell \in \mathcal{I}_T, \ell \neq \ell_0} \left(\langle Z_\ell, Z_\ell \rangle_\ell - \frac{(\langle Z_\ell, D_\ell \rangle_\ell)^2}{\langle D_\ell, D_\ell \rangle_\ell} \right) + \langle Z_{\ell_0}, Z_{\ell_0} \rangle_{\ell_0}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$(\langle Z_\ell, D_\ell \rangle_\ell)^2 \leq \langle Z_\ell, Z_\ell \rangle_\ell \langle D_\ell, D_\ell \rangle_\ell.$$

ce qui implique que $a \geq 0$. Comme on a montré que la matrice G est inversible, pour les équations de Stokes instationnaire elle est symétrique définie positive.

Résolution

Finalelement la stratégie de résolution s'énumère ainsi :

1. On construit les matrices G et S définies par (6.30) et (6.31).
2. On résout le système linéaire (6.32) : $G\hat{W} = S$.
3. On retrouve les solutions P et U avec les équations (6.29) et (6.27).

On remarque que les systèmes (6.29) et (6.27) sont complètement explicites. La résolution est donc instantanée.

Remarque 41. (*Application aux équations de Stokes et Navier-Stokes stationnaire*)

Dans le cas stationnaire, nous devons modifier les blocs diagonaux afin d'obtenir une matrice diagonale par blocs inversible. [137, Section 3.2, p. 12]. Cette modification n'affecte pas la solution du système linéaire. Après l'hybridation, dans le cas des équations de Stokes, nous obtenons un système linéaire symétrique pour les inconnues auxiliaire \hat{W} , mais la matrice G n'est plus définie positive.

6.2 Méthode de décomposition de domaine avec complément de Schur sur chaque élément

Dans cette section, nous présentons de manière analytique, une définition de la méthode d'hybridation qui revient à utiliser une méthode de décomposition de domaine sur chaque cellule [157].

6.2.1 Décomposition de domaine avec complément de Schur dual

Pour illustrer la méthode de décomposition de domaine avec complément de Schur dual [158, Section 2.1], on suppose deux domaines Ω_1, Ω_2 tels que $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$ et leur frontière commune Σ et on note pour $i \in \{1, 2\}$, $\Gamma_i := \partial\Omega_i \cap \partial\Omega$. Cette configuration est illustrée sur la figure 6.2.

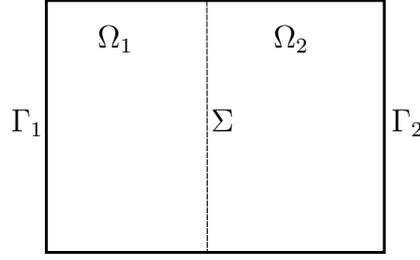


FIGURE 6.2 – Schéma du domaine $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

On considère le problème de Poisson (3.56), p. 51. On peut alors diviser ce problème sur les domaines $(\Omega_i)_{i=1}^2$. Les différents problèmes s'écrivent alors :

Problème: 24. Trouver $u_i \in H^2(\Omega_i)$ tels que :

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f_i & \text{dans } \Omega_i \\ u_i = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_i \\ \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}_{\sigma,i}} = (-1)^i \lambda & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (6.33)$$

avec, pour $i \in \{1, 2\}$, $f_i = f|_{\partial\Omega_i} \in L^2(\Omega_i)$ et $\mathbf{n}_{\sigma,i}$ le vecteur normal de la face Σ sortant de Ω_i . Pour simplifier les notations, on admet une hypothèse de régularité forte sur f et u . Le terme $(-1)^i$ vient du fait que les normales sortantes sont de signes contraires sur Σ . Enfin, l'inconnue λ est déterminée avec la condition :

$$u_1 = u_2 \quad \text{sur } \Sigma$$

On notera U_1, U_2 les inconnues associées à u_1, u_2 et U_Σ les inconnues sur les faces appartenant à l'interface Σ . Résoudre les équations (6.33) revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & A_{1,\Sigma} \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,\Sigma} \\ A_{\Sigma,1} & A_{\Sigma,2} & A_{\Sigma,\Sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_\Sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^1 \\ R^2 \\ R_\Sigma \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

On décompose $A_{\Sigma,\Sigma}$ et R_Σ en une somme de chaque sous-domaines :

$$A_{\Sigma,\Sigma} = A_{\Sigma,\Sigma}^1 + A_{\Sigma,\Sigma}^2 \quad \text{et} \quad R_\Sigma = R_\Sigma^1 + R_\Sigma^2.$$

On peut alors écrire ce problème sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,\Sigma} & 0 \\ A_{\Sigma,1} & A_{\Sigma,\Sigma}^1 + A_{\Sigma,\Sigma}^2 & A_{\Sigma,2} \\ 0 & A_{\Sigma,2} & A_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_\Sigma \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^1 \\ R_\Sigma \\ F^2 \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

On double les inconnues sur la frontières Σ :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & A_{1,\Sigma} & 0 \\ 0 & A_{2,2} & 0 & A_{2,\Sigma} \\ A_{1,\Sigma}^T & A_{2,\Sigma}^T & A_{\Sigma,\Sigma}^1 & A_{\Sigma,\Sigma}^2 \\ A_{1,\Sigma}^T & A_{2,\Sigma}^T & A_{\Sigma,\Sigma}^1 & A_{\Sigma,\Sigma}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_\Sigma^1 \\ U_\Sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^1 \\ R^2 \\ R_\Sigma^1 \\ R_\Sigma^2 \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

Ce système n'est pas inversible, pour le rendre inversible, on impose $U_\Sigma^1 = U_\Sigma^2$, le système se ré-écrit :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,\Sigma} & 0 & 0 \\ A_{1,\Sigma}^T & A_{\Sigma,\Sigma}^1 & A_{2,\Sigma}^T & A_{\Sigma,\Sigma}^2 \\ 0 & 0 & A_{2,2} & A_{2,\Sigma} \\ A_{1,\Sigma}^T & A_{\Sigma,\Sigma}^2 & A_{2,\Sigma}^T & A_{\Sigma,\Sigma}^2 \\ 0 & I_\Sigma & 0 & -I_\Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_\Sigma^1 \\ U_2 \\ U_\Sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^1 \\ R_\Sigma^1 \\ R^2 \\ R_\Sigma^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

La matrice est alors rectangulaire, on ajoute donc une inconnue pour résoudre le système

$$\lambda = -(A_{2,\Sigma}^T U_2 + A_{\Sigma,\Sigma}^2 U_\Sigma^2) + R_\Sigma^2 = (A_{1,\Sigma}^T U_1 + A_{\Sigma,\Sigma}^1 U_\Sigma^1) - R_\Sigma^1. \quad (6.38)$$

On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,\Sigma} & 0 & 0 & 0 \\ A_{1,\Sigma}^T & A_{\Sigma,\Sigma}^1 & 0 & 0 & I_\Sigma^T \\ 0 & 0 & A_{2,2} & A_{2,\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 & A_{2,\Sigma}^T & A_{\Sigma,\Sigma}^2 & -I_\Sigma^T \\ 0 & I_\Sigma & 0 & -I_\Sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_\Sigma^1 \\ U_2 \\ U_\Sigma^2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^1 \\ R_\Sigma^1 \\ R_\Sigma^2 \\ R^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.39)$$

Pour simplifier les notations, on définit

$$A_i = \begin{pmatrix} A_{i,i} & A_{i,\Sigma} \\ A_{\Sigma,i} & A_{\Sigma,\Sigma}^i \end{pmatrix}, \quad \hat{R}_i = \begin{pmatrix} R^i \\ R_\Sigma^i \end{pmatrix}, \quad \hat{U}_i = \begin{pmatrix} U_i \\ U_\Sigma^i \end{pmatrix}, \quad C_i^T = \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^i I_\Sigma \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

On remarque que l'égalité $U_\Sigma^1 = U_\Sigma^2$ s'écrit :

$$C_1^T \hat{U}_1 = C_2^T \hat{U}_2.$$

Cette équation est analogue à (6.15), p. 146. De plus, pour chaque Ω_i , le problème se reformule :

$$A_i \hat{U} = \hat{R}_i - C_i^T \lambda.$$

Le système s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & C_1^T \\ 0 & A_2 & C_2^T \\ C_1 & C_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{R}_1 \\ \hat{R}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.41)$$

6.2.2 Généralisation aux équations de Stokes

Considérons une partition de notre domaine $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_\Omega} \Omega_i$ tel que :

$$\forall i, j \in J_\Omega := \{1, \dots, N_\Omega\}, i \neq j.$$

- les interfaces $\Sigma_{i,j} = \Sigma_{j,i} = \bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j$ la frontière entre les domaines Ω_i et Ω_j ,
- l'espace d'indices $J_i = \{j \in \{1, \dots, N_\Omega\} \mid \Sigma_{i,j} \neq \emptyset\}$,
- les normales sortantes $\mathbf{n}_{i,j}$ de l'interface $\Sigma_{i,j}$ orientées de Ω_i vers Ω_j ,
- les frontières $\Gamma_i := \partial\Omega \cap \partial\Omega_i$,
- la vitesse $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}|_{\Omega_i}$,
- la pression $p_i = p|_{\Omega_i}$,
- les termes sources $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}|_{\Omega_i}$.

On supposera, pour simplifier les notations, $\mathbf{u}_i \in \mathbf{H}^2(\Omega)$, $\mathbf{f}_i \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. On peut supposer une régularité plus faible de la solution, mais cela nécessite de définir un cadre plus générale.

On considère les problèmes locaux suivant :

Problème: 25. Pour tout $i \in \{1, \dots, N_\Omega\}$, trouver les fonctions $\mathbf{u}_i \in \mathbf{H}^2(\Omega_i)$, $p_i \in L^2(\Omega_i)$, telles que

$$\forall i \in \{1, \dots, N_\Omega\} \left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta \mathbf{u}_i + \mathbf{grad} p_i = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega_i \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_i = 0 & \text{dans } \Omega_i \\ \mathbf{u}_i = 0 & \text{sur } \Gamma_i \\ \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j & \text{sur } \Sigma_{i,j} \\ \partial_{\mathbf{n}_{i,j}} \mathbf{u}_i = \lambda_{i,j} = -\lambda_{j,i} & \text{sur } \Sigma_{i,j} \\ \int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} = 0 & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (6.42)$$

Avec les $\lambda_{i,j}$ des multiplicateurs de Lagrange (dans $L^2(\Gamma_{i,j})$).

On définit les espaces suivants :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{1, \dots, N_\Omega\}, \quad \mathbf{H}_{0,\Gamma_i}^p(\Omega_i) := \{\mathbf{v}_i \in \mathbf{H}^p(\Omega_i) \mid \mathbf{v}_i|_{\Gamma_i} = \mathbf{0}\}. \quad (6.43)$$

On peut écrire la formulation variationnelle suivante qui correspond aux équations de Stokes, avec des conditions de Neumann sur $\bigcup_{j \in J_i} \Sigma_{i,j}$ et de Dirichlet homogènes sur Γ_i :

Problème: 26. Trouver les fonctions $\left((\mathbf{u}_i)_{i=1}^{N_\Omega}, (p_i)_{i=1}^{N_\Omega} \right) \in \left(\prod_{i=1}^{N_\Omega} \mathbf{H}_{0,\Gamma_i}^2(\Omega_i) \times L^2(\Omega_i) \right)$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nu \int_{\Omega_i} \mathbf{Grad} \mathbf{u}_i : \mathbf{Grad} \mathbf{v}_i \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_i} \operatorname{div} \mathbf{v}_i p_i \, d\mathbf{x} - \sum_{j \in J_i} (\lambda_{i,j}, \mathbf{v}_i)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega_i} \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i \, d\mathbf{x} & \forall \mathbf{v}_i \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega_i) \\ \int_{\Omega_i} \operatorname{div} \mathbf{u}_i q_i \, d\mathbf{x} = 0 & \forall q_i \in L^2(\Omega_i) \\ (\boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)_{L^2(\Sigma_{i,j})} = 0 & \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbf{L}^2(\Sigma_{i,j}) \\ \sum_{i=1}^{N_\Omega} \int_{\Omega_i} p_i \, d\mathbf{x} = 0 & \end{array} \right. \quad (6.44)$$

Contrairement au problème 24, on a déjà dupliqué les inconnues de vitesse sur les interfaces $\Sigma_{i,j}$. On discrétise le problème 26 avec le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$. Pour cela, pour tout $i \in \{1, \dots, N_\Omega\}$ on note les matrices et vecteurs suivants :

- les matrices \hat{A}_i, \hat{D}_i associées respectivement à la discrétisation de la diffusion et de la divergence (3.77), p. 57, (3.79), p. 57 sur Ω_i . Ces matrices sont définies par (4.31), p. 100.
- les matrices C_i associées à la continuité des vitesses \mathbf{u}_i . Les matrices C_i sont définies de la même façon que (6.40).
- les vecteurs de vitesse et de pression (\hat{U}_i, \hat{P}_i) associés à la discrétisation $\mathbf{P}_{nc}^1 - P^0$ sur le domaine Ω_i .
- le vecteur \hat{R}_i associées aux discrétisations du terme source \mathbf{f}_i sur Ω_i .
- le vecteur Λ associé aux inconnues $(\lambda_{i,j})_{i=1, \dots, N_\Omega, j \in J_i}$.

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_i & 0 & 0 & \hat{D}_1^T & C_1^T \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \hat{A}_{N_\Omega} & \hat{D}_{N_\Omega}^T & C_{N_\Omega}^T \\ \hat{D}_1 & \dots & \hat{D}_{N_\Omega} & 0 & 0 \\ \hat{C}_1 & \dots & \hat{C}_{N_\Omega} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}_1 \\ \vdots \\ \hat{U}_{N_\Omega} \\ \hat{P} \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{R}_1 \\ \vdots \\ \hat{R}_{N_\Omega} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.45)$$

alors si on note $\hat{A} = \text{diag}(\hat{A}_i)_{i=1}^{N_\Omega}$, $\hat{D} = (\hat{D}_i)_{i=1}^{N_\Omega}$, $\hat{C} = (\hat{C}_i)_{i=1}^{N_\Omega}$, $\hat{U} = (\hat{U}_i)_{i=1}^{N_\Omega}$, $\hat{P} = (\hat{P}_i)_{i=1}^{N_\Omega}$, $\hat{R} = (\hat{R}_i)_{i=1}^{N_\Omega}$:

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & -\hat{D}^T & -\hat{C}^T \\ \hat{D} & 0 & 0 \\ \hat{C} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U} \\ \hat{P} \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.46)$$

Si nous prenons, $N_\Omega = N_T$ et que pour tout $i = \ell \in \mathcal{I}_T$, $\Omega_i = T_\ell$, $\forall \ell \in \mathcal{I}_T$ (c'est-à-dire que chaque sous-domaine devient un triangle du maillage \mathcal{T}_h), on retrouve alors exactement la formulation hybride définie de manière algébrique (6.22).

Remarque 42. (*Résolution avec la pression*)

Il est possible de résoudre (6.46), en commençant par la pression. Cela permet notamment d'imposer la condition de normalisation $\int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} = 0$ de manière forte, lors de la résolution, ce qui peut la rendre plus stable. En écrivant

$$\hat{U} = \hat{A}^{-1}(\hat{R} + \hat{D}^T \hat{P} + \hat{C}^T \Lambda),$$

on peut écrire (6.46) sous la forme :

$$\hat{D} \hat{A}^{-1} \hat{R} + \hat{D}^T \hat{A}^{-1} \hat{D} \hat{P} + \hat{D} \hat{A}^{-1} \hat{C}^T \Lambda = 0, \quad (6.47)$$

$$\hat{C} \hat{A}^{-1} \hat{R} + \hat{C} \hat{A}^{-1} \hat{D}^T \hat{P} + \hat{C} \hat{A}^{-1} \hat{C}^T \Lambda = 0, \quad (6.48)$$

On peut déterminer \hat{P} :

$$\hat{P} = (\hat{D} \hat{A}^{-1} \hat{D}^T)^{-1} (-\hat{D} \hat{A}^{-1} \hat{C}^T \Lambda - \hat{D} \hat{A}^{-1} \hat{R}). \quad (6.49)$$

On note la matrice $K_{\hat{P}} := \hat{D} \hat{A}^{-1} \hat{D}^T$ et en injectant (6.49) dans (6.47)

$$\hat{C} \hat{A}^{-1} \hat{R} + \hat{C} \hat{A}^{-1} \hat{D}^T K_{\hat{P}}^{-1} (-\hat{D} \hat{A}^{-1} \hat{C}^T \Lambda - \hat{D} \hat{A}^{-1} \hat{R}) + \hat{C} \hat{A}^{-1} \hat{C}^T \Lambda = 0.$$

On a le système suivant pour Λ :

$$(-\hat{C} \hat{A}^{-1} \hat{D}^T K_{\hat{P}}^{-1} \hat{D} \hat{A}^{-1} \hat{C}^T + \hat{C} \hat{A}^{-1} \hat{C}^T) \Lambda = \hat{C} \hat{A}^{-1} \hat{D}^T K_{\hat{P}}^{-1} \hat{D} \hat{A}^{-1} \hat{R} - \hat{C} \hat{A}^{-1} \hat{R}. \quad (6.50)$$

En utilisant (6.47), on a :

$$\Lambda = (\hat{C} \hat{A}^{-1} \hat{C}^T)^{-1} (-\hat{C} \hat{A}^{-1} \hat{R} - \hat{C} \hat{A}^{-1} \hat{D}^T \hat{P}). \quad (6.51)$$

On note $K_{\Lambda} := \hat{C} \hat{A}^{-1} \hat{C}^T$. On injecte (6.50) dans (6.47) :

$$\hat{D} \hat{A}^{-1} \hat{R} + \hat{D} \hat{A}^{-1} \hat{D}^T \hat{P} - \hat{D} \hat{A}^{-1} \hat{C}^T K_{\Lambda}^{-1} \hat{C} \hat{A}^{-1} \hat{D}^T \hat{P} - \hat{D} \hat{A}^{-1} \hat{C}^T K_{\Lambda}^{-1} \hat{C} \hat{A}^{-1} \hat{R} = 0 \quad (6.52)$$

Le système s'écrit alors :

$$\begin{aligned} G_{\hat{P}} \hat{P} &= S_{\hat{P}}, \\ G_{\Lambda} \Lambda &= S_{\Lambda}, \\ G_{\hat{U}} \hat{U} &= S_{\hat{U}}. \end{aligned} \quad (6.53)$$

avec

$$\begin{aligned} G_{\hat{P}} &= \hat{D}(\hat{A}^{-1} \hat{D}^T \hat{P} - \hat{A}^{-1} \hat{C}^T K_{\Lambda}^{-1} \hat{C} \hat{A}^{-1}) \hat{D}^T, & S_{\hat{P}} &= \hat{D} \hat{A}^{-1} \hat{C}^T K_{\Lambda}^{-1} \hat{C} \hat{A}^{-1} \hat{R} - \hat{D} \hat{A}^{-1} \hat{R}, \\ G_{\Lambda} &= (\hat{C} \hat{A}^{-1} \hat{C}^T) & S_{\Lambda} &= -\hat{C} \hat{A}^{-1} \hat{R} - \hat{C} \hat{A}^{-1} \hat{D}^T \hat{P}, \\ G_{\hat{U}} &= \hat{A} & S_{\hat{U}} &= (\hat{R} + \hat{D}^T \hat{P} + \hat{C}^T \Lambda). \end{aligned}$$

On remarque que néanmoins, l'assemblage n'est plus bloc par bloc, ce qui sera plus coûteux à l'étape d'assemblage.

6.3 Résultats numériques

Dans cette section, nous proposons d'illustrer l'efficacité de la méthode présentée dans la section précédente. Le code utilisé est implémenté en [Fortran 90](#) [159], et les calculs ont été réalisés en parallèle avec la librairie de solveur [Hypre](#) [160]. Dans un premier temps, nous effectuerons des tests de convergence. Cela permettra entre autres d'illustrer que la discrétisation du second membre et de la convection ne dégrade pas le système hybride. Dans un second temps, nous démonterons l'efficacité de la parallélisation du système (6.32), p. 150.

Le maillage est généré de manière homogène avec [Gmsh](#) [161], et le partitionnement est réalisé avec la bibliothèque METIS [162]. Cette génération a été choisie pour s'aligner au plus près des conditions d'utilisation d'un utilisateur qui ne pourrait pas faire un partitionnement naturel de son problème. Nous pouvons voir dans la figure 6.3 une illustration du partitionnement du domaine $\Omega = [0, 1]^3$ en 8 sous-domaines².

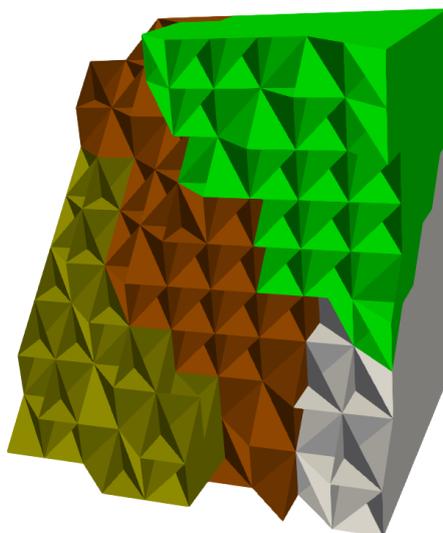


FIGURE 6.3 – Schéma de partitionnement du domaine $\Omega = [0, 1]^3$ en 8 sous-domaines par METIS.

Les solveurs linéaires :

Pour résoudre le système (6.32), on utilisera un préconditionneur BoomerAMG [163] avec un algorithme multi-grille³ [164].

L'idée des préconditionneurs algébriques multigrilles est d'utiliser plusieurs "grilles de résolution" qui correspondent à des tailles de problèmes différentes. Considérons le problème suivant :

$$Au = f,$$

où $A := (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ est une matrice de taille $n \times n$, $n \in \mathbb{N}^*$. On peut alors définir un ensemble d'indice de point, différents les uns des autres, appelé "grille" de taille m . Celle-ci est notée \mathcal{N} . Les vecteurs u et f sont alors définis par les valeurs pour les points $i \in \mathcal{N}$. On notera $u = (u_i)_{i \in \mathcal{N}}$ et $f = (f_i)_{i \in \mathcal{N}}$. Dans toute méthode de multigrille, l'idée centrale est que "l'erreur régulière", e , qui n'est pas éliminée par la relaxation, est éliminée par une correction sur une grille plus grossière. Cela est réalisé en résolvant l'équation résiduelle $Ae = r$ sur une grille plus grossière, puis en interpolant l'erreur sur la grille fine et en l'utilisant pour calculer une approximation corrigée u_{corr} sur la grille fine par $u_{corr} = u + e$.

2. dont 4 sont apparents
3. multigrid

Définissons plusieurs sous-grilles \mathcal{N}^k $k \in \{1, \dots, M\}$, tels que $\mathcal{N}^{k+1} \subset \mathcal{N}^k$ et $\mathcal{N}^1 = \mathcal{N}$. On pourra alors définir les opérateurs A^k et les vecteurs f^k définis sur les grilles \mathcal{N}^k . Ces grilles sont reliées par des opérateurs d'interpolation I_{k+1}^k et de restriction I_k^{k+1} , $\forall k \in \{1, \dots, M-1\}$. Enfin on utilise un schéma de relaxation⁴ à chaque niveau. L'algorithme (μ_1, μ_2) V-cycle est décrit par l'algorithme 2 :

<p>Algorithm 2: $MV^k(u^k, f^k)$ avec (μ_1, μ_2) V-cycle</p> <p>Données: M, μ_1, μ_2; Résultat: u^1 si $k=M$ alors Relaxer μ_1 fois sur $A^k u_k = f_k$; sinon Faire une correction sur grille grossière : Définir $u^{k+1} = 0, f^{k+1} = I_k^{k+1}(f^k - A^k u^k)$; Résoudre sur le niveau $k+1$ avec $MV^{k+1}(u^{k+1}, f^{k+1})$; Corriger la solution par $u_k \leftarrow u_k + I_k^{k+1} u_{k+1}$; Relaxer μ_2 fois sur $A^k u_k = f_k$; finsi finsi</p>

Le choix des composantes dans AMG est effectué lors d'une étape de prétraitement distincte, appelée "phase de configuration" et décrit par l'algorithme 3.

<p>Algorithm 3: $MV^k(u^k, f^k)$ avec (μ_1, μ_2) V-cycle</p> <p>Résultat: $M, \mathcal{N}^k, I_k^{k+1}, I_{k+1}^k$; 1) On pose $k = 1$ 2) On partitionne \mathcal{N}^k en deux ensembles disjoints C^k et F^k : a) On pose $\mathcal{N}^{k+1} = C^k$; b) On définit l'interpolateur I_{k+1}^k; 3) On pose $I_k^{k+1} = (I_{k+1}^k)^T$ et $A^{k+1} = I_k^{k+1} A^k I_{k+1}^k$; si \mathcal{N}^{k+1} <i>est assez petit</i> alors on pose $M = k + 1$; Stop ; finsi sinon On pose $k=k+1$, et on va à l'étape 2; finsi</p>
--

La restriction I_k^{k+1} utilisée ici, sera défini par la méthode PMIS-Coarsening [165] et la méthode d'interpolation I_{k+1}^k par la méthode Hybrid symmetric Gauss-Seidel or SSOR [166].

6.3.1 Tests de convergence

Dans cette partie, nous illustrons la convergence de la méthode hybride décrite par la section précédente. On rappelle que la convergence est montrée par l'équivalence des solutions (cf remarque 36). Bien que la résolution des équations de Stokes et Navier-Stokes approchées avec les éléments finis $\mathbf{P}_{nc}^1 - P^0$ soit déjà établi, nous utilisons ici la méthode de projection du second membre décrite en section 3.6, p. 81 ainsi qu'un schéma de convection défini dans la section 5.1, p. 125. Il est donc intéressant de vérifier numériquement la convergence ainsi que l'erreur que l'on génère. Pour cela on étudie la résolution de la méthode hybride avec la solution prescrite de Green-taylor qui est donnée par (6.55) pour les

4. Schéma de résolution itératifs du système linéaire.

équation de Navier-Stokes.

Remarque 43. (*Calcul du pas de maillage et du pas de temps*)

Dans les résultats numérique de cette section, le pas de maillage h est donné par la moyenne des $(h_\ell)_{\ell \in \mathcal{I}_T}$. Les pas de temps sont données par une CFL (1.14), p. 15. En pratique, les pas de temps sont choisis très petit pour ne pas influencer sur les résultats de convergence en espace.

On utilisera l'estimateur d'erreur suivant :

$$\varepsilon_0(\mathbf{u}_h) := \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \varepsilon_0(p_h) := \|p_h - p\|_{L^2(\Omega)}. \quad (6.54)$$

Pour les équations de Navier-Stokes

Dans les figures 6.4 et 6.5 sont tracées les erreurs pour la vitesse et pour la pression en norme L^2 avec l'estimation d'erreur défini par (6.54). On écrit dans le tableau 6.1, l'estimation du taux de convergence entre chaque maillage. On peut voir qu'on obtient bien les ordres de convergence attendus, c'est-à-dire 2 pour la vitesse et 1 pour la pression. L'ordre de convergence en pression est légèrement plus élevé, mais le taux de convergence estimé diminue et tend vers l'ordre attendu.

$$\mathbf{u} = \operatorname{Re} \begin{pmatrix} -\cos(2\pi(x_1 + \frac{1}{4})) \sin(2\pi(x_2 + \frac{1}{2})) \exp(-8\pi^2 t) \\ \sin(2\pi(x_1 + \frac{1}{4})) \cos(2\pi(x_2 + \frac{1}{2})) \exp(-8\pi^2 t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.55)$$

$$p = -\frac{Re^2}{4} \left(\cos(4\pi(x_1 + \frac{1}{4})) + \cos(4\pi(x_2 + \frac{1}{2})) \right) \exp(-16\pi^2 t) \quad (6.56)$$

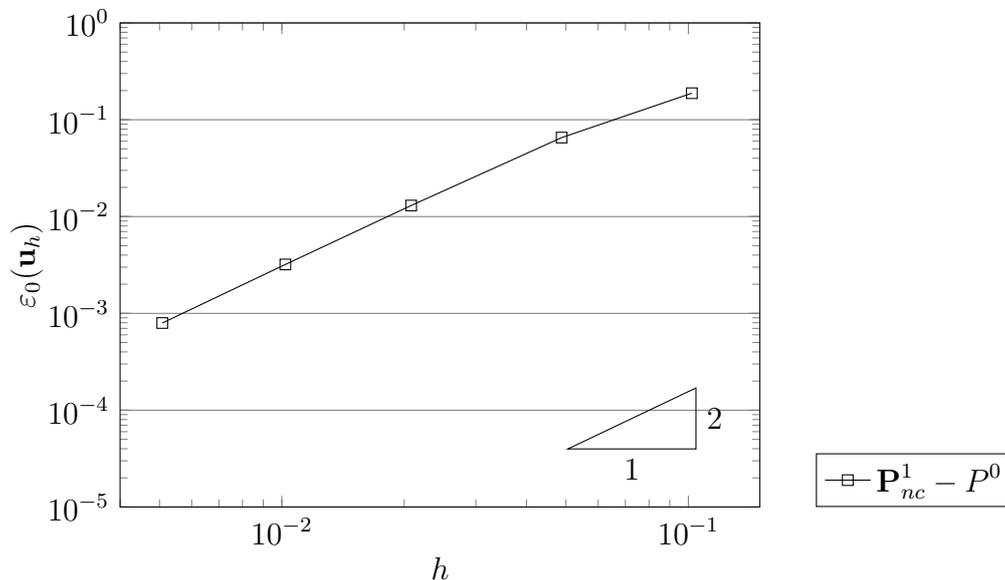


FIGURE 6.4 – $\varepsilon_0(\mathbf{u}_h)$ pour (\mathbf{u}, p) donnés par (6.55) et $Re = 100$

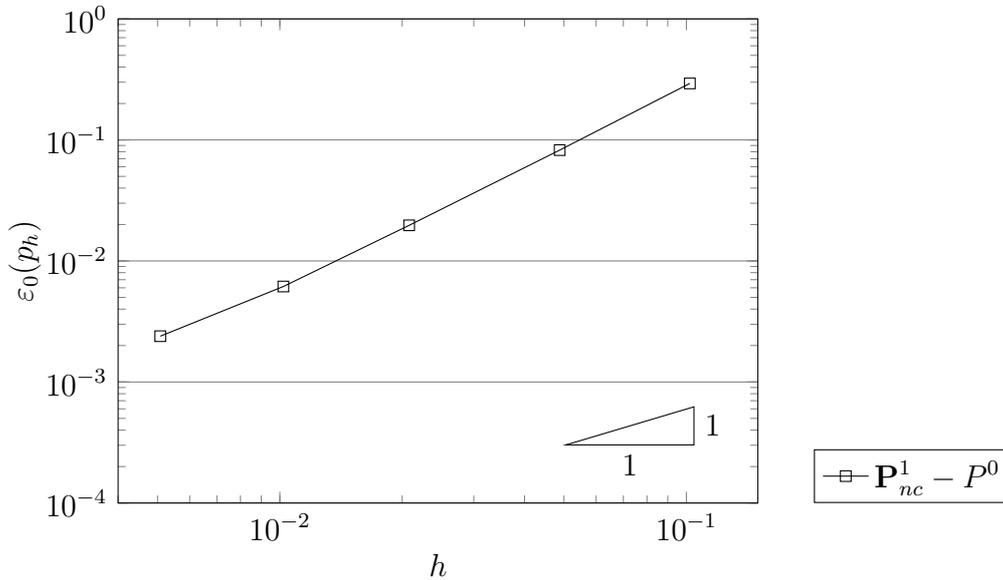


FIGURE 6.5 – $\varepsilon_0(p_h)$ pour (\mathbf{u}, p) donnés par (6.55) et $Re = 100$

h	$\tau_{\mathbf{u}}$	τ_p
1.02×10^{-1}	–	–
4.88×10^{-2}	1.43	1.72
2.08×10^{-2}	1.89	1.68
1.02×10^{-2}	1.97	1.64
5.08×10^{-3}	2.00	1.35

TABLEAU 6.1 – Tableau des ordre de convergence en vitesse et en pression pour la norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ pour (\mathbf{u}, p) donnés par (6.55) et $Re = 100$

6.3.2 Efficacité de la parallélisation

L'approche classique pour mesurer l'efficacité d'un solveur dans le domaine du calcul haute performance est de mesurer sa scalabilité. Cela permet d'évaluer les performances du solveur lorsque le nombre de processeur est augmenté. Pour mesurer les performances du solveur, deux métriques peuvent être définies : l'accélération S et l'efficacité E . Ces métriques peuvent être également défini pour deux scalabilité différente : la scalabilité faible et forte.

1. **La scalabilité forte** consiste à, pour une taille de problème fixée, augmenter le nombre de processeurs et analyser le temps de résolution. Idéalement, la résolution doit être linéaire. Dans le cas d'une application parallélisable, l'objectif est de trouver le point où un temps de calcul raisonnable est atteint tout en limitant les surcharges de calculs induites par la parallélisation. L'accélération est définie alors comme le gain d'un calcul parallèle avec p processus par rapport au même algorithme sur un nombre de processus de référence noté p_{ref} (voir (6.57)) :

$$S_s(p) = \frac{t_{ref}}{t_p} p_{ref}, \quad (6.57)$$

avec t_{ref} le temps de résolution avec p_{ref} processus et t_p le temps de résolution pour le même problème avec p processus.

2. **La scalabilité faible** consiste à augmenter le nombre de processus et la taille du problème proportionnellement, de telle sorte que la quantité de données à traiter

par processus reste constante. Dans le cas d'une scalabilité faible idéale, un temps d'exécution constant du programme devrait être atteint. Cela correspond à une efficacité constante qui est donc indépendante du nombre de processus. Dans ce contexte, l'accélération est définie par (6.58) :

$$S_w(p) = \frac{t_{ref}}{t_p} p \quad (6.58)$$

Dans les deux cas de scalabilité, l'efficacité E fournit une évaluation de la "performance" du calcul parallèle. Celle-ci est défini par :

$$E_s(p) = \frac{S_s(p)}{p} \quad \text{et} \quad E_w(p) = \frac{S_w(p)}{p}. \quad (6.59)$$

On prendra $p_{ref} = 48$ (et non $p_{ref} = 1$), ce qui correspond à prendre un noeuds complet de la machine [Irene](#) [167] du "Très grand centre de calcul" (TGCC) du CEA. Ce choix est fait pour enlever un effet d'accélération ou de parasitisme qui viendrait du fait qu'on utilise pas le noeuds entièrement.

Pour pouvoir mesurer les temps de résolution, on fixe le nombre d'itérations de l'algorithme de Newton-Raphson.

Les temps de résolution t_{tot} sont données en trois parties :

1. Le temps t_a d'assemblage des matrices ($G, \hat{A}, \hat{R}, \dots$)
2. Le temps t_{Hy} de la résolution avec la bibliothèque Hyre du système (6.32), p. 150 (qui comprends l'envoi et le rapatriement des données).
3. Le temps $t_{u,p}$ du calcul explicite de U et P (6.27), p. 149 et (6.29), p. 150.

Ces temps sont mesurés en prenant la médiane des temps relevés pour chaque processeur (afin d'éviter les influences des extrêmes qui sont liés à des problèmes de super-calculateur). En réalité, ces temps sont dominés par le temps de résolution des inconnues \hat{W} . On représente ces différents temps dans les tableaux 6.2, 6.3, 6.4 pour plusieurs tailles de problème ($N_F \in \{12\,600, 3\,970\,674, 64\,496\,250\}$) et en faisant varier le nombre de processeurs N_p associés à la résolution. Il apparaît clairement que c'est l'étape de résolution avec la bibliothèque Hyre qui est coûteuse en temps de calculs, d'autant plus lorsque la taille du problème est plus importante.

N_p	t_a	t_{Hy}	$t_{u,p}$
12	3.58×10^{-3}	6.71×10^{-2}	5.86×10^{-4}
48	9.49×10^{-4}	4.75×10^{-2}	1.20×10^{-4}
192	3.18×10^{-4}	4.55×10^{-2}	3.83×10^{-5}
384	1.85×10^{-4}	6.11×10^{-2}	2.21×10^{-5}

TABLEAU 6.2 – Tableau des temps (en seconde) de résolution pour $N_F = 12\,600$

N_p	t_a	t_{Hy}	$t_{u,p}$
12	1.52×10^0	4.86×10^1	2.27×10^{-1}
48	4.14×10^{-1}	1.54×10^1	4.77×10^{-2}
192	1.20×10^{-1}	3.84×10^0	1.44×10^{-2}
384	6.57×10^{-2}	1.99×10^0	7.63×10^{-3}

TABLEAU 6.3 – Tableau des temps (en seconde) de résolution pour $N_F = 3\,970\,674$

N_p	t_a	t_{Hy}	$t_{u,p}$
384	1.84×10^0	2.29×10^2	2.74×10^{-1}
1536	4.92×10^{-1}	3.92×10^1	7.48×10^{-2}
3072	2.54×10^{-1}	2.04×10^1	3.11×10^{-2}
6144	1.36×10^{-1}	9.60×10^0	1.63×10^{-2}

TABLEAU 6.4 – Tableau des temps (en seconde) de résolution pour $N_F = 64\,496\,250$

Dans cette section, nous présentons une analyse des performance du code avec hybridation. Pour cela, nous évaluerons la méthode pour la scalabilité faible et la scalabilité forte. Considérons (\mathbf{u}, p) le couple solution des équations de Stokes prescrit par (6.60) pour $d = 3$ avec $\mathbf{f} = 0$. On posera $Re = 100$ et le temps final sera $t = 10^{-3}$

$$(\mathbf{u}, p) = \left(Re \begin{pmatrix} -\cos(2\pi(x_1 + \frac{1}{4})) \sin(2\pi(x_2 + \frac{1}{2})) \exp(-8\pi^2 t) \\ \sin(2\pi(x_1 + \frac{1}{4})) \cos(2\pi(x_2 + \frac{1}{2})) \exp(-8\pi^2 t) \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right) \quad (6.60)$$

On peut alors étudier la scalabilité forte et faible pour la méthode hybride.

Scalabilité forte

Dans les figures 6.6 et 6.7, on trace l'accélération et l'efficacité pour la scalabilité forte en fonction du nombre de processeurs et pour différentes tailles de problème. Celles-ci sont caractérisées par le nombre de faces du maillages N_F . Comme attendu, sur un problème donnée, trop augmenter le nombre de processeurs diminue l'efficacité de la résolution. Pour une taille de problème raisonnable, nous retrouvons bien une droite linéaire pour l'accélération et une constante à 1 pour l'efficacité.

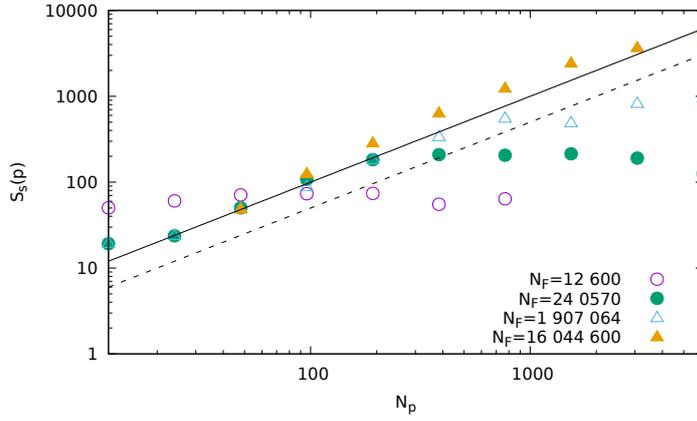


FIGURE 6.6 – Accélération pour la scalabilité forte en fonction du nombre de processeurs et $p_{ref} = 48$ pour le temps de résolution t_{Hy} .

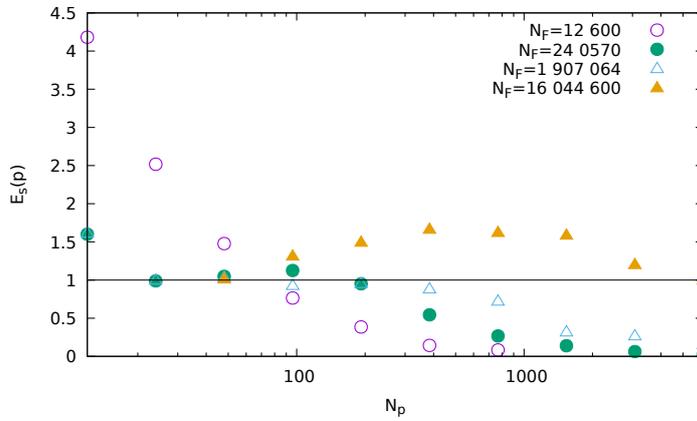


FIGURE 6.7 – Efficacité pour scalabilité forte en fonction du nombre de processeurs et $p_{ref} = 48$ pour le temps de résolution t_{Hy} .

Scalabilité faible

On représente dans les figures 6.8 et 6.9 l'accélération et l'efficacité dans le cadre de la scalabilité faible en fonction du nombre de processeurs utilisés pour la résolution. La charge par processeur est calculée avec le nombre de faces divisé par le nombre de processeurs affectés à la tâche ($C_p = N_F/N_p$). On peut voir que l'efficacité diminue fortement lorsque les processeurs ne sont pas assez chargés. Autrement, pour des fortes charges $N_F/p \simeq 70^3$, celle-ci reste proche de 0.7. Nous observons les mêmes effets sur l'accélération.

Dans les figures 6.10 et 6.11, on trace l'accélération dans le cadre de la scalabilité faible pour le temps d'assemblage des matrices et pour la résolution de U et P en fonction du nombre de processeurs. On peut voir que l'accélération est linéaire et donc que ces étapes se parallélisent très bien, de manière quasi-indépendante de la charge.

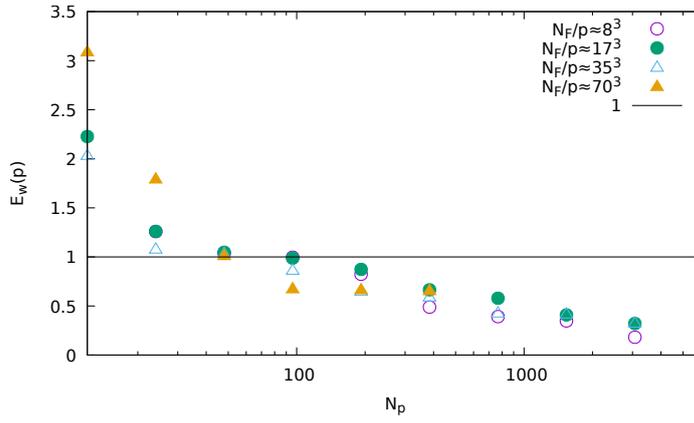


FIGURE 6.8 – Accélération pour la scalabilité faible en fonction du nombre de processeurs et avec $p_{ref} = 48$ pour le temps de résolution t_{Hy} .

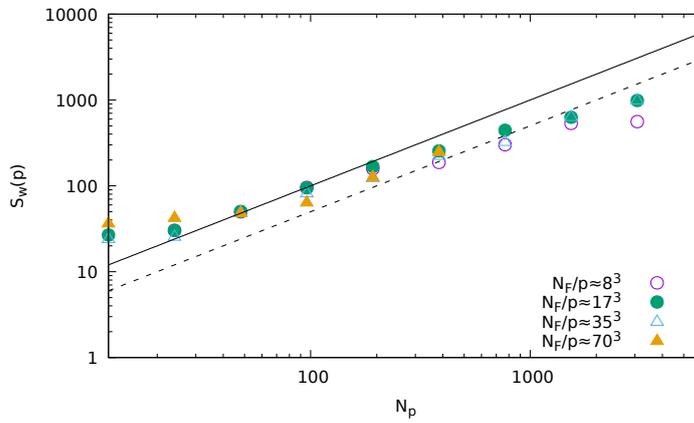


FIGURE 6.9 – Efficacité pour la scalabilité faible en fonction du nombre de processeurs et avec $p_{ref} = 48$ pour le temps de résolution t_{Hy} .

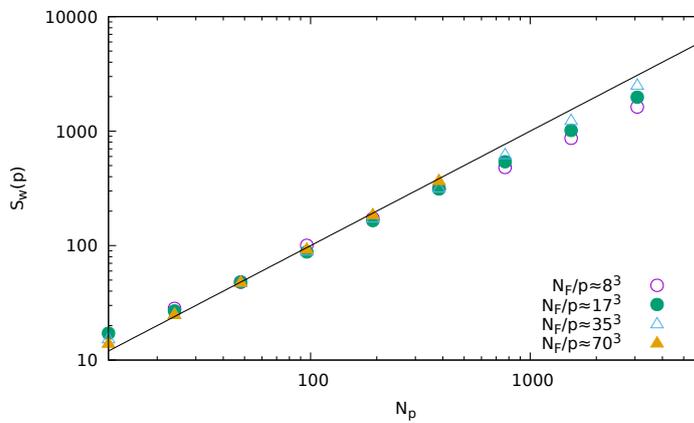


FIGURE 6.10 – Accélération pour l'étape d'assemblage (caractérisée par le temps t_a) avec une scalabilité faible en fonction du nombre de processeurs et avec $p_{ref} = 48$.

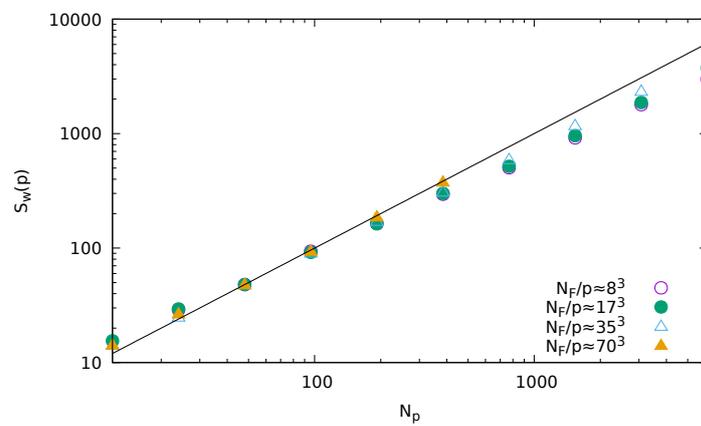


FIGURE 6.11 – Accélération pour l’étape de résolution (caractérisée par le temps $t_{u,p}$) avec une scalabilité faible en fonction du nombre de processeurs et avec $p_{ref} = 48$.

Conclusion et Perspectives

Cette thèse porte sur les schémas numériques non conformes appliqués aux équations discrètes de Navier-Stokes présents dans le code TrioCFD. L'objectif de cette thèse était d'élaborer un nouveau schéma numérique pour les équations de Navier-Stokes en 3D, qui présenterait une précision comparable à celle du schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$. Ce schéma serait construit en utilisant l'élément fini mixte $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$, avec un schéma MPFA symétrique pour la discrétisation du gradient de pression. Il n'introduirait pas de degrés de liberté supplémentaires et ne modifierait pas les matrices de masse M ou de convection $L(U^n)$.

À l'issue de cette thèse, ce schéma a été implémenté. Celui-ci est décrit dans le chapitre 4. Ce schéma a été implémenté en 2D sur une maquette Octave et en 3D dans le code TrioCFD. Nous avons également décrit plusieurs variantes de ce schéma, notamment pour la discrétisation du bord du domaine. Les schémas résultants présentent une meilleure consistance et donc une meilleure robustesse vis-à-vis de la viscosité, ainsi qu'une meilleure représentation de la physique. Cette thèse représente également une construction hybride d'un schéma entre le monde des volumes finis et celui des éléments finis, ouvrant ainsi plusieurs perspectives.

Cette thèse constitue une étude approfondie d'un schéma utilisé dans le code TrioCFD, visant à améliorer l'efficacité en terme de coût de calcul et de robustesse par rapport au schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$. Elle est structurée en 5 chapitres, chacun poursuivant les objectifs suivants :

1. Le chapitre 1 est une introduction générale sur la thèse.
2. Le chapitre 2 est une introduction qui commence par présenter les notions mathématiques utilisées dans le rapport, puis énonce le contexte physique de cette thèse.
3. Le chapitre 3 présente les différentes discrétisations sur lesquelles s'appuie cette thèse. Il aborde la problématique, les enjeux et les alternatives existantes ainsi que leurs limites.
4. Le chapitre 4 présente le nouveau schéma pour les équations de Stokes (1.2), p. 12. Ce schéma génère une meilleure approximation des vitesses à divergence nulle, sans ajouter de degrés de liberté et sans modifier la matrice de masse ou le terme de convection. Plusieurs variantes de ce schéma sont ensuite étudiées, et une analyse numérique de la stabilité du schéma est proposée. Enfin, ce schéma est comparé avec les schémas de discrétisation proposés par les thèses de [5, 6] et l'article de [34].
5. L'objectif du chapitre 5 est d'étendre ce schéma aux équations de Navier-Stokes en 3D afin d'établir un schéma avec une pression P_{disc}^0 qui sera plus précis que le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ pour des applications où la viscosité est faible. Ce schéma est ensuite testé numériquement et comparé aux schémas de discrétisation abordés précédemment.
6. Enfin, l'objectif du chapitre 6 est de proposer une amélioration du schéma de Crouzeix-Raviart $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ permettant une résolution plus rapide en parallèle grâce à une technique d'hybridation qui correspond à une méthode de décomposition de domaine cellule par cellule.

Finalement, les travaux de cette thèse répondent à la problématique énoncée plus tôt. Le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$ est un bon candidat pour réaliser des calculs en 3D. Ces propriétés

d'approximations ont été illustrées dans la section 5.3, p. 131, montrant notamment la robustesse du schéma par rapport à la viscosité et par rapport à la consistance. Néanmoins, quelques limites ont été mises en exergue dans cette thèse :

1. Les résultats numériques ont été fortement limités par les schémas de convection implémentés qui étaient soit trop instables, soit avec une convergence dégradée.
2. Le temps de calcul a été peu probante. En effet, les schémas présents dans TrioCFD sont massivement parallélisés avec des préconditionneurs bien adaptés, contrairement au schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{Mps}^0$. Un axe d'amélioration serait de proposer un bon préconditionneur et une résolution adaptée au schéma.
3. L'analyse numérique du schéma n'a pas pu être réalisée car la condition inf-sup n'a pu être établie.

Ces limitations étant prises en compte, les travaux de cette thèse ont également permis d'envisager les perspectives suivantes :

1. La première perspective envisagée est d'étendre ce schéma aux mailles polyédriques. C'est ce qu'a réalisé Antoine Gerschenfeld avec le schéma PolyVEF_P0, qui permet d'utiliser des inconnues de vitesses vectoriels aux faces avec d composantes et des gradients calculés avec des méthodes MPFA.
2. La discrétisation en pression étant faite par un schéma MPFA, il est possible d'échanger celui-ci avec un des schémas présentés dans la sous-section 4.1.5, p. 96. Par ailleurs, dans le schéma PolyVEF_P0, il est possible de choisir une discrétisation mixte entre le schéma MPFA symétrique et deux autres schémas MPFA-O (non présentés dans ce manuscrit). Certains schéma MPFA-O peuvent être plus précis mais moins stable (ou moins coercive), cette méthode permet d'optimiser la précision du schéma.
3. Nous avons vu dans la section 4.3, p. 109 que certaines configurations du maillage sur le bord du domaine n'étaient pas compatibles avec certaines de nos discrétisations sur le bord. Dans ce cas, il est possible de considérer seulement une seule inconnue de pression sur le bord afin d'obtenir un système complet tout en gardant la propriété de consistance exacte pour les pressions affines. Néanmoins, cela implique que le schéma résultant ne sera plus exactement le schéma MPFA symétrique. En particulier, cela pourra ajouter de l'instabilité au schéma.

Résumé en français

Dans le cadre de la sécurité nucléaire, le Laboratoire de Modélisation et de Simulation en mécanique des Fluides (LMSF) développe le code TrioCFD, qui permet la résolution des équations de Navier-Stokes. Pour les maillages de simplexes, la discrétisation spatiale du code TrioCFD est basée sur les éléments finis non conformes de Crouzeix-Raviart [33] (noté $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$) : l'espace de discrétisation des composantes de la vitesse est l'espace P_{nc}^1 et l'espace de discrétisation de la pression est l'espace composé de fonction affines et constantes (noté $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$) ce qui permet de réduire les courants parasites et d'améliorer la précision [7, 5]. Cette amélioration est optimale en 2D, mais en 3D [6], il faut rajouter un nombre important de degrés de liberté pour la pression qui rendent la résolution plus coûteuse en nombre d'opérations et en empreinte mémoire.

Le but de ces travaux est d'obtenir un schéma aussi précis que le schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ avec moins de degrés de liberté pour la pression et une discrétisation efficace des équations de Navier-Stokes.

Dans cette optique, une nouvelle méthode de discrétisation avec les éléments finis de Crouzeix-Raviart non conformes pour la vitesse et un schéma MPFA symétrique (Multipoint Flux Approximations) pour la pression est proposée. Son principe en 2D est de découper les mailles triangulaires en trois quadrangles en reliant les milieux des arêtes et le barycentre des éléments. Ensuite, en introduisant des inconnues aux tiers des arêtes pour la pression, on peut définir un gradient de pression constant pour chaque quadrangle. Enfin, en imposant la continuité des flux de ces gradients à travers les arêtes, on peut alors substituer les inconnues des arêtes par celles des cellules dans le système global. Pour éliminer les inconnues de pression des arêtes sur le bord, on y impose une condition. Cette méthode livre des résultats prometteurs et est un bon compromis entre les schémas $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ et $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$.

Une autre approche développée dans cette thèse est une méthode d'hybridation appliquée au schéma $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ permettant une résolution couplée de la vitesse et de la pression via des inconnues auxiliaires introduites en amont et conduisant à la résolution de systèmes fortement parallélisables.

Résumé en anglais

In the context of nuclear safety, the Laboratoire de Modélisation et de Simulation en Mécanique des Fluides (LMSF) is developing the TrioCFD code, which enables the resolution of the Navier-Stokes equations. For simplex meshes, the TrioCFD code's spatial discretization is based on the non-conforming finite element of Crouzeix-Raviart [33] (denoted $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$): the discretization space for velocity components is the P_{nc}^1 space and the discretization space for pressure is the space composed of affine and constant functions (denoted $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$), which reduces parasitic currents and improves accuracy [7, 5]. This improvement is optimal in 2D, but in 3D [6], a large number of pressure degrees of freedom must be added, making the resolution more costly in terms of number of operations and memory footprint.

The aim of this work is to obtain a scheme as accurate as the $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ scheme, with fewer degrees of freedom for the pressure and an efficient discretization of the Navier-Stokes equations.

With this in mind, a new discretization method using non-conforming Crouzeix-Raviart finite elements for velocity and a symmetrical MPFA (Multipoint Flux Approximations) scheme for pressure is proposed. Its principle in 2D is to cut triangular meshes into three quadrangles by connecting the middles of the edges and the barycenters of the elements. Then, by introducing unknowns for pressure at thirds of the edges, we can define a constant pressure gradient for each quadrangle. Finally, by imposing continuity of flow for these gradients across the edges, we can then substitute the unknowns of the edges with those of the cells in the overall system. To eliminate the edge pressure unknowns, a condition is imposed. This method delivers promising results and is a good compromise between the $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ and $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$ schemes.

Another approach developed in this thesis is a hybridization method applied to the $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$ scheme, enabling coupled resolution of velocity and pressure via auxiliary unknowns introduced upstream and resulting in the resolution of highly parallelizable systems.

Annexe A

Formules d'intégrations

Les formules d'intégration jouent un rôle crucial dans les schémas numériques. En effet, il n'est pas toujours possible de réaliser une intégration exacte dans les formulations variationnelles ou dans les intégrations sur les volumes finis. Pour les éléments finis, deux cas sont alors possibles : si l'expression dépend entièrement des coefficients barycentriques, il est possible de réaliser une intégration exacte en utilisant (3.7), p. 40. Sinon, on peut appliquer des formules de quadrature. Dans la suite, nous présentons les formules d'intégration utilisées dans le manuscrit. Nous considérons un triangle T_ℓ , $\ell \in \mathcal{I}_T$.

Formules d'intégration de bas ordre

Nous présentons d'abord deux formules d'intégration de bas ordre [21, p71]. Elles sont toutes les deux issues des formules d'intégration de Gauss. Pour des compléments de référence, l'auteur pourra consulter [168, 169, 170]. Considérons une fonction $g(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega)$.

— **Première formule d'intégration :**

Cette formule s'écrit :

$$\int_{T_\ell} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \simeq \frac{|T_\ell|}{d+1} \sum_{i \in \mathcal{I}_S, T_\ell} g(\vec{OS}_i) \quad (\text{A.1})$$

Cette formule de quadrature consiste à prendre la somme de l'évaluation de la fonction g aux différents sommets du triangle T_ℓ . Elle est exacte pour des polynômes d'ordre 1 et utilise les degrés de liberté des éléments finis P^1 de Lagrange.

— **Seconde formule de quadrature :**

Cette formule s'écrit :

$$\int_{T_\ell} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \simeq \frac{|T_\ell|}{d+1} \sum_{f \in \mathcal{I}_F, T_\ell} g(\vec{OM}_f) \quad (\text{A.2})$$

Cette formule de quadrature consiste à prendre la somme de l'évaluation de la fonction g aux barycentres des facettes M_f , $f \in \mathcal{I}_F, T_\ell$ (ie arêtes en 2D, faces en 3D) du triangle T_ℓ . Elle est exacte pour des polynômes d'ordre 2 en 2D et exacte pour des polynômes d'ordre 1 en 3D. Elle utilise les degrés de liberté des éléments finis P_{nc}^1 .

Formule d'intégration de haut ordre

Intégration d'Hammer-Marlow-Stroud [171]

Ces formules d'intégrations sont données par des tables exprimées pour le triangle de référence \hat{T} . Elles sont d'ordres variables, mais s'écrivent sous la forme générique suivante :

$$\int_{T_\ell} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = d!|T_\ell| \int_{\hat{T}} g(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} = \sum_i w_i g\left(\begin{array}{c} \xi_i \\ \eta_i \end{array}\right) \quad (\text{A.3})$$

Avec $\hat{\mathbf{x}} = \left(\begin{array}{c} \xi_i \\ \eta_i \end{array}\right)$.

Les tables sont trouvable dans l'annexe C de [172] et [173, p. 780].

Annexe B

Etude du caractère bien posé de deux problèmes mixtes abstraits

Dans cette partie, on se propose de parler brièvement de l'existence et l'unicité de la solution d'un problème mixte abstrait. Les résultats présentés sont applicables sur le problème continu, ainsi que sur le problème discret. Dans le premier cas, on peut s'assurer de l'existence et de l'unicité de la solution de notre problème alors que dans le second cas, on peut aussi savoir si le schéma numérique va converger vers la solution continue.

Étude préliminaire d'un problème non-mixte

Lorsque l'on s'intéresse à un problème non-mixte, on peut alors utiliser le théorème de Lax-Milgram (cf. théorème 20, p. 172). Considérons le problème suivant :

Problème: 27. *Trouver $u \in H^1(\Omega)$*

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où $f \in H^{-1}(\Omega)$. On multiplie (B.1) par $v \in H^1(\Omega)$ et intègre sur le domaine Ω .

$$-\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \langle f, v \rangle_{H^1(\Omega)}$$

On intègre par partie le terme de gauche en utilisant la première formule de Green du théorème 4. On obtient :

$$v \int_{\Omega} \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v \, dx = \langle f, v \rangle_{H_0^1(\Omega)}$$

De plus, comme $u \in H^1(\Omega)$, en utilisant le théorème de la trace (voir Théorème 2, p. 25), on observe que la condition limite $u = 0$ sur $\partial\Omega$ implique que l'on peut chercher $u \in H_0^1(\Omega)$. La formulation variationnelle est donc :

Problème: 28. *Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que*

$$\int_{\Omega} \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v \, dx = \langle f, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (\text{B.2})$$

avec $f \in L^2(\Omega)$

Si on pose

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v \, dx$$

et

$$l := \int_{\Omega} f \cdot v \, dx$$

le problème se reformule :

Problème: 29. Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (\text{B.3})$$

Alors le théorème de Lax-milgram s'énonce ainsi :

Théorème 20. (Lax-Milgram). Soit U un espace de Hilbert réel. Si $a : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue et $f \in U'$ (où U' est le dual de U) et que a est coercive sur U , i.e. il existe C tel que

$$a(v, v) > C \|v\|_U^2$$

alors le problème

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle_U \quad \forall v \in U$$

est bien posé et admet une unique solution u telle que

$$\|u\|_U \leq C^{-1} \|f\|_{U'}$$

Sa démonstration est donnée dans [174, p. 94].

Ce théorème nous donne l'existence et l'unicité d'un problème non-mixte en montrant la continuité de la forme bilinéaire et de la forme linéaire du second membre ainsi qu'une condition supplémentaire : la coercivité de la forme bilinéaire.

Pour revenir au problème du laplacien, afin de montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel, on utilise le Théorème 20.

On doit donc montrer que la forme linéaire l est continue et que la forme bilinéaire a est coercive et continue.

On suppose que la forme linéaire l est continue :

$$l(v) = \langle f, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} \leq \|l\| \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

La continuité de la forme bilinéaire a se montre par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La coercivité se montre par l'inégalité de Poincaré :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} u \, dx \geq C_{\Omega} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Le problème est donc bien posé, il admet une unique solution. Le théorème de Lax-Milgram est un cas particulier du théorème BNB (Banach-Nečas-Babuška) :

Théorème 21. (Banach-Nečas-Babuška) Soient V et W deux espaces de Hilbert et a une forme bilinéaire continue sur $V \times W$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Pour toute forme linéaire continue l sur W , il existe un unique $u \in V$ tel que :

$$a(u, w) = l(w), \quad \forall w \in W.$$

2. Les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\exists \alpha > 0, \inf_{v \in V} \left(\sup_{w \in W} \frac{a(v, w)}{\|v\|_V \|w\|_W} \right) \geq \alpha$$

$$(\forall v \in V, a(v, w) = 0) \implies w = 0$$

Dans le cas où ces deux propositions sont vérifiées, alors l'unique solution u vérifie :

$$\|u\|_V \leq \frac{\|l\|_{W'}}{\alpha}$$

Le théorème BNB a été énoncé par Nečas en 1962 [175]. L'importance de cette contribution pour l'analyse des schémas d'éléments finis a été mise en avant par Babuška en 1972 [176]

Formulation d'un problème abstrait symétrique

Lorsqu'on s'intéresse à un problème mixte symétrique, on peut utiliser un autre théorème avec une forme plus adaptée pour les problèmes mixtes. Pour cela, on introduit le problème abstrait suivant :

Soient X et M deux espaces de Hilbert et deux formes bilinéaires.

$$\begin{cases} a : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \\ b : X \times M \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

on veut résoudre le problème suivant :

Trouver $(u, p) \in X \times Y$ tels que :

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = \langle f, v \rangle_X \quad \forall v \in X \\ b(u, q) = 0 \quad \forall q \in M \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

alors, on a le théorème suivant [39, Lemme 4.1, p.58] :

Théorème 22. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\exists \beta > 0$ tel que $\inf_{q \in M, q \neq 0} \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X \|q\|_M} \geq \beta$

2. Il existe un isomorphisme B' de M sur V° vérifiant les propriétés suivantes :

$$b(v, q) = \langle v; B'q \rangle_X \quad \forall q \in M, \|q\|_M \leq \frac{1}{\beta} \|B'q\|_{X'}$$

où V° est le polaire de V est défini par $V^\circ := \{h \in X' / \forall v \in V, \langle h, v \rangle = 0\}$.

3. Il existe un isomorphisme B de V_\perp sur M' vérifiant :

$$b(v, q) = \langle Bv; q \rangle_M \quad \forall v \in V^\perp, \|v\|_X \leq \frac{1}{\beta} \|Bv\|_{M'}$$

où V^\perp est l'orthogonal de V est défini par $V^\perp := \{v \in X / \forall w \in V, (v, w) = 0\}$

On peut alors utiliser ce théorème pour démontrer le théorème de Babuška-Brezzi [176, 177] :

Théorème 23. (Babuška-Brezzi) Soient deux espaces de Hilbert X et M . Considérons $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ deux formes bilinéaires, telles que :

$$a : \begin{cases} X \times X \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto a(u, v) \end{cases} \quad b : \begin{cases} X \times M \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, p) \mapsto b(u, p) \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Si les formes bilinéaires $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ vérifient les hypothèses suivantes :

(1) a et b sont continues, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $C_a, C_b > 0$ telles que :

$$\forall \mathbf{u} \in X, \mathbf{v} \in X, \quad a(u, v) \leq C_a \|u\|_X \|v\|_X \quad (\text{B.7})$$

$$\forall \mathbf{u} \in X, q \in M, \quad b(u, q) \leq C_b \|u\|_X \|q\|_M \quad (\text{B.8})$$

(2) a est coercive sur $V := \{v \in X, b(v, q) = 0, \forall q \in M\}$:

$$\exists \alpha > 0, \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in V \quad (\text{B.9})$$

(3) b satisfait la condition inf-sup :

$$\exists \beta, \quad \inf_{\substack{q \in M \\ q \neq 0}} \sup_{\substack{v \in X \\ v \neq 0}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} \geq \beta \|q\|_M \quad (\text{B.10})$$

Alors le problème (B.5) admet une unique solution $(u, p) \in X \times M$

La preuve de ce théorème est donnée par exemple dans [39, p. 59].

Remarque 44. La condition 3 du théorème 23, p. 174 est équivalente à

$$\forall q \in M, \exists v \in X \text{ tel que } b(v, q) \geq \beta \|q\|_M \|v\|_X.$$

Si l'on se place dans les conditions du théorème 23, p. 174, on a alors le théorème suivant :

Théorème 24. Si les hypothèses 1,2,3 du théorème 23, p. 174, alors pour tout $\mathbf{f} \in X'$, il existe une unique solution au problème (u, p) . De plus, on a

$$\begin{aligned} \|u\|_X &\leq \frac{1}{\alpha} (\|f\|_{X'} + \frac{\|a\|}{\beta} \|g\|_{M'}), \\ \|p\|_M &\leq \frac{1}{\beta} (\|f\|_{X'} + \frac{\|a\|}{\alpha} (\|f\|_{X'} + \frac{\|a\|}{\beta} \|g\|_{M'})). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Démonstration. On considère le problème B.5 tel que la condition (B.10), p. 174 soit vraie, ainsi que les hypothèses 1 et 2 du théorème 23, p. 174. Alors, on peut écrire qu'il existe un unique $u_g \in V^\perp$ tel que

$$\begin{aligned} Bu_g &= g \quad \text{et } \|u_g\| \leq \frac{1}{\beta} \|g\|_{M'}, \\ \forall q \in M, \quad &\langle Bu_g; q \rangle = \langle g, q \rangle_M. \end{aligned}$$

Si on pose $u_0 = u - u_g$, le problème s'écrit : Trouver u_0 dans V tel que :

$$\forall v \in V, \quad a(u_0, v) = \langle f, v \rangle_X - a(u_g, v)$$

On peut alors appliquer le théorème de Lax-Milgram énonçant qu'il existe un unique u_0 dans V qui vérifie alors :

$$\begin{aligned} \alpha \|u_0\|_X^2 &\leq a(u_0; u_0) = \langle f; u_0 \rangle_X - a(u_g; u_0), \\ \alpha \|u_0\|_X^2 &\leq \|f\|_{X'} \|u_0\|_X + \|a\| \|u_g\|_X \|u_0\|_X, \\ \|u_0\|_X &\leq \frac{1}{\alpha} (\|f\|_{X'} + \|a\| \|u_g\|_X). \end{aligned}$$

Or $u = u_0 + u_g$, donc on a l'existence et l'unicité de u pour le problème (B.5). Maintenant, on peut écrire un problème indépendant pour la pression et on pourra étudier l'unicité et l'existence de p . On peut écrire avec la première équation de (B.5) :

$$\forall v \in X, b(v, p) = \langle f; v \rangle_X - a(u, v)$$

On définit F la forme linéaire suivante :

$$\forall v \in X, \langle F; v \rangle_X = \langle f; v \rangle_X - a(u, v)$$

De façon à ce qu'on ait :

$$\forall v \in V, \quad \langle F; v \rangle_X = 0,$$

ce qui veut dire que $F \in V^\circ$. Le théorème 22 énonce l'existence d'un isomorphisme B' de M sur V° :

$$\exists! p \in M, \quad B'p = F,$$

et donc

$$\exists! p \in M, \forall v \in X, \quad b(v, p) = \langle f; v \rangle_X - a(u, v),$$

ainsi que

$$\|p\|_M \leq \frac{1}{\beta} \|F\|_{X'}.$$

Or, par définition de F

$$\|F\|_{X'} \leq \|f\|_{X'} + \|a\| \|u\|_X.$$

Ce qui donne finalement

$$\|p\|_M \leq \frac{1}{\beta} (\|f\|_{X'} + \|a\| \|u\|_X).$$

□

Formulation d'un problème abstrait non-symétrique

Si l'on considère un problème non-symétrique, on peut donner un résultat analogue au précédent. On se propose dans cette partie de rappeler les résultats contenus dans [129]. Le problème étant plus générale, les notations sont changées par rapport à ce qui précède et correspondent à l'article cité. Ainsi, on définit $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, des espaces de Hilbert, leurs normes associées $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}_i}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}_i}, \forall i \in \{1, 2\}$, ainsi que les formes bilinéaires $b_1(v_2, \theta_1)$ et $b_2(v_1, \theta_2)$ telles qu'on puisse considérer le problème suivant :

Trouver les fonctions $u \in \mathcal{V}_1$ et $\phi \in \mathcal{Q}_2$ telles que :

$$\begin{cases} a(u, v_2) + b_1(v_2, \phi) = \langle f, v \rangle_X & \forall v_2 \in \mathcal{V}_2 \\ b_2(u, \psi_2) = \langle g, \psi_2 \rangle_{\mathcal{Q}_2} & \forall \psi_2 \in \mathcal{Q}_2 \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

avec $f \in \mathcal{V}'_2$ et $g \in \mathcal{Q}'_2$

Pour $i = 1, 2$, on définit l'espace

$$\mathcal{Z}_i := \{z_i \in \mathcal{V}_i / b_i(z_i, \theta_i) = 0, \forall \theta_i \in \mathcal{Q}_i\}, \quad (\text{B.13})$$

et son complémentaire

$$\mathcal{W}_i := \mathcal{Z}_i^\perp, \quad (\text{B.14})$$

dans \mathcal{V}_i tel que

$$\mathcal{V}_i = \mathcal{Z}_i + \mathcal{W}_i. \quad (\text{B.15})$$

On considère les hypothèses suivantes :

Hypothèse 8. Soit le problème (B.12), on suppose qu'il existe $K_i, \gamma_i, \zeta_i, i = 1, 2$ tels que :

1. La forme bilinéaire $a(v_1, v_2)$ définie pour $v_1 \in \mathcal{V}_1, v_2 \in \mathcal{V}_2$ est continue :

$$a(z_1, z_2) \leq M \|z_1\|_{\mathcal{V}_1} \|z_2\|_{\mathcal{V}_2} \quad \text{pour } z_i \in \mathcal{V}_i, i = 1, 2. \quad (\text{B.16})$$

2. La forme bilinéaire a est coercive :

$$\sup_{\|z_2\|=1} a(z_1, z_2) \geq \delta \|z_1\|_{\mathcal{V}_1}, \quad \sup_{z_1} a(z_1, z_2) > 0. \quad (\text{B.17})$$

3. Pour $i = 1, 2$, les formes bilinéaires b_i sont continues :

$$|b_i(v_i, \psi_i)| \leq K_i \|v_i\|_{\mathcal{V}_i} \|\psi_i\|_{\mathcal{Q}_i} \quad \forall v_i \in \mathcal{V}_i, \psi_i \in \mathcal{Q}_i. \quad (\text{B.18})$$

4. Pour $i = 1, 2$, les formes bilinéaires b_i respectent une condition inf-sup :

$$\sup_{\|\psi_i\|=1} |b_i(v_i, \psi_i)| \geq \gamma_i \|v_i\|_{\mathcal{V}_i} \quad \text{et} \quad \sup_{v_i \in \mathcal{V}_i} b(v_i, \phi_i) > 0, \quad \forall \phi_i \in \mathcal{Q}_i, \phi_i \neq 0. \quad (\text{B.19})$$

En admettant ces hypothèses, on peut montrer le théorème suivant :

Théorème 25. Sous les hypothèses 8, le problème B.12 admet une unique solution $u \in \mathcal{V}_1$ et $\phi \in \mathcal{Q}_1$ et il existe des constantes $c_{ij}, i, j = 1, 2$ telles que :

$$\|u\| \leq c_{11} \|f\| + c_{12} \|g\|, \quad \|\phi\| \leq c_{21} \|f\| + c_{22} \|g\|.$$

La preuve se trouve dans [129]. L'intérêt de ce résultat réside dans le fait que pour montrer l'existence et l'unicité d'un problème mixte non-symétrique, il suffit de montrer deux conditions inf-sup (B.19).

Discussion sur la condition inf-sup discrète

Afin de montrer que le schéma d'un problème mixte est convergent, on utilise aussi le théorème 23, p. 174 et en particulier, la condition inf-sup. Cette condition apporte beaucoup d'éléments importants pour le schéma numérique étudié. D'une part, elle est une condition nécessaire et suffisante à la stabilité du schéma numérique. D'autre part, si la constante est très petite (plus petite que la précision machine) ou si elle est dépendante du pas du maillage (si elle tend vers 0 lorsque le pas du maillage tends vers 0) une dégradation de la convergence peut être constater. Lorsque cette constante vaut 0, le problème est mal posé. C'est pour cela que l'étude de la constante β de la condition inf-sup est nécessaire à l'étude du schéma numérique.

Opérateur de fortin

Lorsqu'on veut montrer la condition Inf-Sup discrète, il peut être intéressant de montrer qu'il existe un projecteur $\Pi_h^{\mathbf{X}}$ de \mathbf{X} dans \mathbf{X}_h qui joue le rôle d'un opérateur de fortin [15, Section 8.4.1]. C'est à dire :

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u} - \Pi_h^{\mathbf{X}}(\mathbf{u}), q_h) &= 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{X}, q_h \in M_h, \\ \|\Pi_h^{\mathbf{X}}(\mathbf{u})\|_{\mathbf{X}} &\leq c \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}}. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Si $\Pi^{\mathbf{X}}$ est un opérateur de fortin, alors la condition inf-sup est vérifiée pour $X_h \times M_h$ [15, Proposition 8.4.1, p.469].

B.1 Analyse d'erreur de consistance pour les schémas conformes

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'analyse d'erreur d'un schéma conforme pour le problème B.5, p. 173. Pour cela, on essaie de majorer les "erreurs de consistance" suivantes : $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}}$ et $\|p - p_h\|_M$. D'abord on établit la majoration de $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}}$.

Majoration de $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}}$

Soit $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h) &= a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h) \\ \nu \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}}^2 &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h \rangle - b(\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h, p_h) - a(\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h) \end{aligned}$$

Or, par linéarité, $\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ et donc :

$$b(\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h, p_h) = 0$$

En utilisant la coercivité de a :

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \nu(\mathbf{Grad} \mathbf{u}_h, \mathbf{Grad} \mathbf{v}_h)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

on a :

$$\nu \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}}^2 = a(\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h)$$

et donc :

$$\nu \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}}^2 = (\mathbf{f}, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - a(\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h)$$

En utilisant le fait que \mathbf{u}_h est solution du problème, on peut écrire :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

et on peut donner l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \nu \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}}^2 &= a(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h, p) - a(\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h) \\ \nu \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}}^2 &= a(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h, p) \end{aligned}$$

et en utilisant le fait que $\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, et par définition de \mathbf{V}_h :

$$b(\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in M_h$$

et donc

$$\nu \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}}^2 = a(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h, p - q_h)$$

et en utilisant les propriétés de continuité des formes bilinéaires a et b et $\|\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\| \leq d\|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}}$:

$$\begin{aligned} \nu \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}}^2 &\leq \nu \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}} + d \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}} \|p - q_h\|_M \\ \nu \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}} &\leq \nu \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}} + d \|p - q_h\|_M \end{aligned}$$

En utilisant ensuite une inégalité triangulaire, on obtient :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}} \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}} + \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}}$$

En appliquant cette inégalité à la précédente, on a alors :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}} \leq 2\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}} + \frac{d}{\nu} \|p - q_h\|_M$$

Et en utilisant le fait que cette inégalité est vraie pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, $q_h \in M_h$:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}} \leq 2 \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}} + \frac{d}{\nu} \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M$$

Il faut alors donner une majoration de $\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}}$, pour cela on donne la proposition suivante :

Proposition 28. *On suppose que b est continue sur $\mathbf{X}_h \times M_h$ et vérifie la condition inf-sup (2.44) avec la constante β_h , alors $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}$:*

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}} \leq \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta_h}\right) \inf_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{X}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{X}} \quad (\text{B.21})$$

La preuve de ce théorème est donnée dans [39, p. 115]. En utilisant la proposition précédente, on obtient :

$$\boxed{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}} \leq 2 \left(1 + \frac{d}{\beta_h}\right) \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}} + \frac{d}{\nu} \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M} \quad (\text{B.22})$$

Cette majoration est utile car elle assure la convergence lorsque l'espace \mathbf{X} est approché par \mathbf{X}_h en ordre 1 par rapport à la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ et lorsque M est approché à l'ordre 1 par M_h pour la norme $\|\cdot\|_M$. Ensuite, il reste à trouver la majoration de $\|p - p_h\|_M$

Majoration de $\|p - p_h\|_M$

Soit $q_h \in M_h$, en utilisant la condition inf-sup, on obtient :

$$\begin{aligned} \beta_h \|p_h - q_h\|_M &\leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, p_h - q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}}} \\ b(\mathbf{v}_h, p_h - q_h) &= b(\mathbf{v}_h, p_h) - b(\mathbf{v}_h, q_h) \\ &= \langle f, \mathbf{v}_h \rangle - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b(\mathbf{v}_h, q_h) \\ &= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b(\mathbf{v}_h, q_h) \\ &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p - q_h) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \quad b(\mathbf{v}_h, p_h - q_h) &\leq \nu \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}} \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}} + d \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}} \|p - q_h\|_M \\ \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \quad \frac{b(\mathbf{v}_h, p_h - q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}}} &\leq \nu \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}} + d \|p - q_h\|_M \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

En passant ensuite au supremum pour tous les \mathbf{v}_h , on obtient :

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, p_h - q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}}} \leq \nu \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}} + d \|p - q_h\|_M$$

Ce qui nous donne avec la première inégalité (B.23) :

$$\beta_h \|p_h - q_h\|_M \leq \nu \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}} + d \|p - q_h\|_M$$

Or, avec l'inégalité triangulaire :

$$\|p - p_h\|_M \leq \|p - q_h\|_M + \|q_h - p_h\|_M$$

On obtient alors :

$$\|p - p_h\|_M \leq \frac{\nu}{\beta_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}} + \left(1 + \frac{d}{\beta_h}\right) \|p - q_h\|_M$$

En utilisant la majoration B.22

$$\|p - p_h\|_M \leq \frac{\|a\|}{\beta_h} \left(1 + \frac{\|a\|}{\nu}\right) \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta_h}\right) \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}} \quad (\text{B.24})$$

$$+ \left(1 + \frac{\|a\|\|b\|}{\nu\beta_h} + \frac{\|b\|}{\beta_h}\right) \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M \quad (\text{B.25})$$

B.2 Analyse d'erreur de consistance pour les schémas non-conformes

Analyse d'erreur de consistance

Contrairement au cas conforme, dans le cas non-conforme, on rajoute une erreur de consistance que l'on note $r_h(\mathbf{u}, p)$.

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \\ a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + r_h(\mathbf{u}, p)(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \\ a_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p - p_h) &= r_h(\mathbf{u}, p)(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \end{aligned}$$

De même que dans le cas conforme, on peut établir les estimations d'erreur pour le cas non-conforme. Dans ce qui suit, on présente l'analyse d'erreur faite par V. Girault et P.-A. Raviart [178, p.58].

Majoration de $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}_h}$

Soit $\mathbf{w}_h \in \mathbf{X}_h$ alors :

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h) &= a_h(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h) + a_h(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h) \\ &= b_h(\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p - p_h) - r_h(\mathbf{u}, p)(\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h) + a_h(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h) \end{aligned}$$

Si on choisit $\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h := \{\mathbf{w}_h \in \mathbf{X}_h, \forall q_h \in M_h, b_h(\mathbf{w}_h, q_h) = 0\}$ et $q_h \in M_h$:

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h) &= b_h(\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p - q_h) - r_h(\mathbf{u}, p)(\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h) + a_h(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h) \\ \alpha_h \|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{X}_h} &\leq \|b_h\| \|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{X}_h} \|p - q_h\|_{M_h} + \|r_h(\mathbf{u}, p)\|_h^* \|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{X}_h} \\ &\quad + \|a_h\| \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{X}_h} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{X}_h} \end{aligned}$$

Avec

$$\|r_h(\mathbf{u}, p)\|_h^* := \sup_{v_h \in \mathbf{X}_h} |r_h(\mathbf{u}, p)(v_h)|$$

En utilisant l'inégalité triangulaire suivante : $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}_h} \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{X}_h} + \|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{X}_h}$, on obtient :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}_h} \leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h} + \frac{1}{\alpha_h} \|r_h(\mathbf{u}, p)\|_h^*\right) \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{X}_h} + \frac{\|b_h\|}{\alpha_h} \|p - q_h\|_{M_h}$$

Avec α_h la constante de coercivité discrète.

En passant à l'infimum, et en utilisant la propriété inf-sup de la forme bilinéaire b_h , on obtient (cf (28) dans le cas conitnu) :

$$\inf_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{X}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{X}_h} \leq \left(1 + \frac{\|b_h\|}{\beta_h}\right) \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}_h}$$

On obtient finalement la majoration suivante :

$$\boxed{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}_h} \leq \left(1 + \frac{\|a_h\|}{\alpha_h} + \frac{1}{\alpha_h} \|r_h(\mathbf{u}, p)\|_h^*\right) \left(1 + \frac{\|b_h\|}{\beta_h}\right) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}_h} + \frac{\|b_h\|}{\alpha_h} \|p - q_h\|_{M_h}.}$$
(B.26)

Majoration de $\|p - p_h\|_{M_h}$

On utilise la propriété inf-sup (B.10), p. 174 de la forme bilinéaire b_h :

$$\begin{aligned} \beta_h \|p_h - q_h\|_{M_h} &\leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, p_h - q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}_h}} \\ b_h(\mathbf{v}_h, p_h - q_h) &= b_h(\mathbf{v}_h, p_h - p) + b_h(\mathbf{v}_h, p - q_h) \\ &= r_h(\mathbf{u}, p)(\mathbf{v}_h) - a_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p - q_h) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\beta_h \|p_h - q_h\|_{M_h} \leq \|r_h(\mathbf{u}, p)\|_h^* + \|b_h\| \|p - q_h\|_{M_h} + \|a_h\| \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}_h}$$

En utilisant ensuite une inégalité triangulaire, on établit :

$$\|p - p_h\|_{M_h} \leq \|p - q_h\|_{M_h} + \|q_h - p_h\|_{M_h}$$

En injectant cette inégalité dans la précédente, on trouve :

$$\|p - p_h\|_{M_h} \leq \frac{\|a_h\|}{\beta_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}_h} + \left(1 + \frac{\|b_h\|}{\beta_h}\right) \|p - q_h\|_{M_h} + \frac{1}{\beta_h} \|r_h(\mathbf{u}, p)\|_h^*$$

En utilisant la majoration de $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}_h}$ (B.26), on obtient :

$$\boxed{\|p - p_h\|_{M_h} \leq \frac{\|a_h\|}{\beta_h} \left(1 + \frac{\|a_h\|}{\alpha_h} + \frac{1}{\alpha_h} \|r_h(\mathbf{u}, p)\|_h^*\right) \left(1 + \frac{\|b_h\|}{\beta_h}\right) \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}_h} + \left(1 + \frac{\|a_h\| \|b_h\|}{\alpha_h \beta_h} + \frac{\|b_h\|}{\beta_h}\right) \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_{M_h} + \frac{1}{\beta_h} \|r_h(\mathbf{u}, p)\|_h^*}$$
(B.27)

On remarque que les estimations d'erreur sont très similaires au cas conforme. Le terme supplémentaire ajouté est l'erreur de consistance $r_h(\mathbf{u}, p)$.

Annexe C

Préconditionnement du système de pression

Dans cette section, nous rappelons pourquoi la matrice de masse de la pression est un bon pré-conditionneur au système de pression pour les équations de Stokes (2.35), p. 33 [179, Lemme 5.9] [180, Section 15.7]. En particulier, cela s'applique au schémas $\mathbf{P}_{nc}^1 - P_{disc}^0$, $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1)$, $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P_{disc}^0 + P^1 + P^a)$.

Soit deux espaces $\mathbf{X}_{0,h}, M_h$ approchant respectivement $\mathbf{H}_0^1(\Omega), L^2(\Omega)$. On note $(\phi_i)_{i=1}^{N_U}$ et ψ_j les fonctions de bases reliées à $\mathbf{X}_{0,h}$ et $M_h(\Omega)$. Si $\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h}$ et $q_h \in M_h$, alors il existe des vecteurs $V := (v_i)_{i=1}^{N_U} \in \mathbb{R}^{N_U}$ et $Q := (q_j)_{j=1}^{N_P} \in \mathbb{R}^{N_P}$, tels que

$$\mathbf{v}_h = \sum_{i=1}^{N_U} v_i \phi_i, \quad q_h = \sum_{j=1}^{N_P} q_j \psi_j.$$

On note M_P la matrice de masse associée à la discrétisation de M_h .

Rappelons le système algébrique relié à la discrétisation des équations de Stokes avec $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h$:

$$\begin{cases} AU + B^t P = F \\ BU = 0 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

avec les matrices $A \in \mathbb{R}^{N_U} \times \mathbb{R}^{N_U}$, et $B \in \mathbb{R}^{N_P} \times \mathbb{R}^{N_U}$ qui sont les matrices de raideur et de divergence.

On suppose que les conditions suivantes sont respectées :

— Condition de continuité : $\forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{X}_{0,h} \times M_h$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h q_h \, d\mathbf{x} \leq \kappa_h \|\mathbf{v}_h\|_h \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \equiv \langle Q, BV \rangle^2 \leq C \langle Q, M_P Q \rangle \langle V, AV \rangle \quad (\text{C.2})$$

— Condition Inf-Sup discrète : $\forall q_h \in M_h, \exists \mathbf{v}_h$ tel que :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h q_h \, d\mathbf{x} \leq \beta_h \|\mathbf{v}_h\|_h \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \equiv \langle Q, BV \rangle^2 \geq \beta_h \langle Q, M_P Q \rangle \langle V, AV \rangle \quad (\text{C.3})$$

Une manière de résoudre le système (C.1) de manière découplé est de faire apparaître le complément de Schur. Pour cela on écrit :

$$\begin{cases} AU + B^t P = F \\ BU = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} U + A^{-1} B^t P = A^{-1} F \\ BU = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} U = A^{-1} B^t P + A^{-1} F \\ BA^{-1} B^t P = BA^{-1} F \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Le système (C.1) revient donc à résoudre un problème sur la pression avec la matrice

$$S := BA^{-1}B^t \quad (\text{C.5})$$

puis à résoudre de manière purement explicite la vitesse. Si nous devons résoudre ce système de manière itératifs alors une manière efficace de résoudre les systèmes reliées à la vitesse est de faire une factorisation de Cholesky de la matrice S (C.6) et de stocker les matrices issu de cette factorisation. Le système à résoudre à chaque itération est ensuite donné par (C.7)

$$S = LL^T \quad (\text{C.6})$$

avec L une matrice triangulaire.

$$LL^T P = BA^{-1}F \Leftrightarrow \begin{cases} LZ = BA^{-1}F \\ L^T P = Z \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

La matrice S (C.5) est appelée complément de Schur. Il s'agit de la même matrice qui apparaît lorsque l'on utilise un schéma de projection (1.9), p. 14.

Remarque 45. (*Condition inf-sup uniforme*) Si la constante β_h est minorée indépendamment du maillage, on dit que la condition inf-sup est uniforme. Dans ce cas, le nombre d'itérations de l'algorithme du gradient conjugué est indépendant de la taille du maillage. [73, Section 6.1].

Définition 11. Soit $C \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et $D \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ deux matrices de tailles $N \times M$ avec $N \in \mathbb{N}^*$. On note

$$C \leq D$$

Si pour tout $q \in \mathbb{R}^N$, on a :

$$\langle Aq, q \rangle \leq \langle Bq, q \rangle$$

Définition 12. Soit $A \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ une matrice définie positive de taille $N \times M$ avec $N, M \in (\mathbb{N}^*)^2$. On note la norme $\| \cdot \|_A$ définie telle que $\forall Q \in \mathbb{R}^M$

$$\|Q\|_A^2 := \sup_{V \in \mathbb{R}^N, V \neq 0} \langle AQ, V \rangle$$

Cette norme est associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ tel que $\forall V \in \mathbb{R}^N, Q \in \mathbb{R}^M$

$$\langle AV, Q \rangle_A := \langle AV, Q \rangle$$

On rappelle le lemme suivant [179, Lemme 5.9] :

Lemme 11. On suppose que les conditions (C.2) et (C.3) sont vérifiées. Alors la matrice du complément de Schur S (C.5) est symétrique positive définie et telle que :

$$\beta_h^2 M \leq S \leq M \quad (\text{C.8})$$

Démonstration. La symétrie de la matrice S est induite par celle de la matrice A et donc A^{-1} . Le caractère définie vient du fait que le système (C.1) est inversible. Pour un vecteur $Q \in \mathbb{R}^{N_P}$ et $V \in \mathbb{R}^{N_U}$ reliés à une discrétisation éléments finis pour $q_h \in M_h$ et $\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h$, on peut écrire :

$$\|q_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle M_P Q, Q \rangle, \quad \|\mathbf{v}_h\|_h = \langle KV, V \rangle, \quad (q_h, \text{div}_h \mathbf{v}_h) = \langle Q, BV \rangle$$

$$\sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_{0,h} \\ \mathbf{v}_h \neq 0}} \frac{(q_h, \text{div}_h \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_h} = \sup_{\substack{V \in \mathbb{R}^{N_U} \\ V \neq 0}} \frac{\langle Q, BV \rangle}{\langle AV, V \rangle}$$

On ré-écrit la condition inf-sup avec le complément de Schur :

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{V \in \mathbb{R}^{N_U} \\ V \neq 0}} \frac{\langle Q, BV \rangle^2}{\langle AV, V \rangle} &= \sup_{\substack{V \in \mathbb{R}^{N_U} \\ V \neq 0}} \frac{\langle B^T Q, V \rangle^2}{\langle AV, V \rangle} \\
&= \sup_{\substack{V \in \mathbb{R}^{N_U} \\ V \neq 0}} \frac{\langle A^{-1} B^T Q, AV \rangle^2}{\langle AV, V \rangle} \\
&= \sup_{\substack{V \in \mathbb{R}^{N_U} \\ V \neq 0}} \frac{\langle A^{-1} B^T Q, AV \rangle^2}{\|V\|_A} \\
&= \|A^{-1} B^T Q\|_A^2 \\
&= \langle A^{-1} B^T Q, A^{-1} B^T Q \rangle_A = \langle B^T Q, A^{-1} B^T Q \rangle = \langle SQ, Q \rangle
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité Inf-sup, on a :

$$\langle SQ, Q \rangle = \sup_{\substack{V \in \mathbb{R}^{N_U} \\ V \neq 0}} \frac{\langle Q, BV \rangle^2}{\langle AV, V \rangle} \geq (\beta_h)^2 \|q_h\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Or en utilisant la continuité de B (C.2), il vient :

$$\langle SQ, Q \rangle \leq \kappa_h^2 \|q_h\|_{L^2(\Omega)}^2$$

et donc

$$(\beta_h)^2 \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \langle SQ, Q \rangle \leq \kappa_h^2 \|q_h\|_{L^2(\Omega)}$$

□

On rappelle la remarque suivant [180, Section 15.7].

Remarque 46. *Si la condition inf-sup est uniforme, la matrice $M^{-1}(BA^{-1}B^T)$ est équivalente à une constante multipliée par la matrice identité (C.8). Ainsi, le nombre de conditionnement de $M^{-1}(BA^{-1}B^T)$ est plus proche de un que celui de $BA^{-1}B^T$, surtout lorsque κ_h et β_h sont proches de un. La matrice M_P est donc un bon pré-conditionneur.*

Bibliographie

- [1] <https://www.edf.fr/groupe-edf/espaces-dedies/jeunes-enseignants/pour-les-jeunes/lenergie-de-a-a-z/produire-de-lelectricite/le-nucleaire-en-chiffres>.
- [2] <https://world-nuclear.org/information-library/country-profiles/countries-a-f/france.aspx>
- [3] <https://nuclear.engie-electrabel.be/fr/energie-nucleaire/comment-fonctionne-une-centrale-nucleaire>.
- [4] <https://www.cea.fr/comprendre/Pages/energies/nucleaire/essentiel-sur-fonctionnement-reacteur-nucleaire-electrogene.aspx>.
- [5] S. HEIB. « Nouvelles discrétisations non structurées pour des écoulements de fluides à incompressibilité renforcée ». URL. Thèse de doct. Université Paris VI, 2003.
- [6] T. FORTIN. « Une méthode éléments finis à décompositoin L^2 d'ordre élevé motivée par la simulation d'écoulement diphasique bas Mach ». URL. Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie – Paris VI, 2006.
- [7] Ph. EMONOT. « Méthode de volumes éléments finis : applications aux équations de Navier-Stokes et résultats de convergence ». URL. Thèse de doct. Université Claude Bard – Lyon I, 1992.
- [8] P.-E. ANGELI, M.-A. PUSCAS, G. FAUCHET et A. CARTALADE. « FVCA8 benchmark for the Stokes and Navier-Stokes equations with the TrioCFD code ». In : *Finite Volumes for Complex Applications VIII - Methods and Theoretical Aspects*. Sous la dir. de C. CANCÈS et P. OMNES. T. 199. URL. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 2017, p. 181-302.
- [9] F. BOYER et P. FABRIE. *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models*. Applied Mathematical Sciences. URL. Springer New York, 2012.
- [10] B. AMAZIANE et M. JURAK. « A new formulation of immiscible compressible two-phase flow in porous media ». In : *Comptes Rendus Mécanique* 336.7 (2008). URL, p. 600-605. ISSN : 1631-0721. DOI : [10.1016/j.crme.2008.04.008](https://doi.org/10.1016/j.crme.2008.04.008).
- [11] J. VOLKER, A. LINKE, C. MERDON, M. NEILAN et L.G. REBHOLZ. « On the Divergence Constraint in Mixed Finite Element Methods for Incompressible Flows ». In : *SIAM Review* 59.3 (2017). URL, p. 492-544.
- [12] A. CHORIN. « A numerical method for solving incompressible viscous flow problems ». In : *Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University* 10012 (1967). URL.
- [13] R. TEMAM. « Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes ». In : *Bulletin de la Société Mathématique de France* 96 (1968). URL, p. 115-152.
- [14] A. ERN et J. -L. GUERMOND. *Finite Elements III: First-Order and Time-Dependent PDEs*. URL. Springer, 2021.

- [15] D. BOFFI, F. BREZZI et M. FORTIN. *Mixed and hybrid finite element methods and applications*. URL. Springer-Verlag, 2013.
- [16] J. G. CHARNEY, R. FJÖRTOFT et J. VON NEUMANN. « Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation ». In : *Tellus* 2.4 (1950). URL, p. 237-254. DOI : [10.1111/j.2153-3490.1950.tb00336.x](https://doi.org/10.1111/j.2153-3490.1950.tb00336.x).
- [17] R. COURANT, K. FRIEDRICHS et H. LEWY. « On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics ». In : *IBM Journal of Research and Development* 11.2 (1967). URL, p. 215-234. DOI : [10.1147/rd.112.0215](https://doi.org/10.1147/rd.112.0215).
- [18] F. MICHEL. « Optimisation des Échangeurs Compacts à Ailettes : Etude Numérique et Expérimentale ». URL. Thèse de doct. Université Joseph Fourier, Grenoble 1, 2003.
- [19] R. TEMAM. « Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes ». In : *S. M. F* 96 (1968), p. 115-152.
- [20] E. BÉCACHE, P. CIARLET, C. HAZARD et E. LUNÉVILLE. *La méthode des éléments finis : de la théorie à la pratique. Tome 2 : Compléments*. URL. Coll. Les Cours, Les Presses de l'ENSTA, mars 2020, p. 284.
- [21] A. ERN et J. -L. GUERMOND. *Finite Elements II: Galerkin approximation, elliptic and mixed PDEs*. URL. Springer, 2021.
- [22] M. AINSWORTH, A. ALLENDES, G. R. BARRENECHEA et R. RANKIN. « On the Adaptive Selection of the Parameter in Stabilized Finite Element Approximations ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 51.3 (2013). URL, p. 1585-1609. DOI : [10.1137/110837796](https://doi.org/10.1137/110837796).
- [23] G. R. BARRENECHEA et F. VALENTIN. « Consistent Local Projection Stabilized Finite Element Methods ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 48.5 (2010). URL, p. 1801-1825. DOI : [10.1137/090753334](https://doi.org/10.1137/090753334).
- [24] T. J. R. HUGHES, L. P. FRANCA et M. BALESTRA. « A new finite element formulation for computational fluids dynamics: V. Circumventing the Babuska–Brezzi condition: A stable Petrov–Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations ». In : *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 59 (1986). URL, p. 85-99. DOI : [10.1016/0045-7825\(87\)90184-8](https://doi.org/10.1016/0045-7825(87)90184-8).
- [25] L. ZHANG T. Tang. « A stabilized finite volume method for Stokes equations using the lowest order P1-P0 element pair ». In : *Advances in Computational Mathematics* 41 (2015). URL, p. 781-798. ISSN : 1572-9044. DOI : [10.1007/s10444-014-9385-9](https://doi.org/10.1007/s10444-014-9385-9).
- [26] F. BREZZI et J. PITKÄRANTA. « On the stabilization of finite element approximations of the Stokes equations ». In : *Efficient Solutions of Elliptic Systems*. Sous la dir. de W. HACKBUSH. T. 10. Notes on Numerical Fluid Mechanics. URL. 1984.
- [27] P. B. BOCHEV, C. R. DOHRMANN et M. D. GUNZBURGER. « Stabilization of Low-Order Mixed Finite Elements for the Stokes Equations ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 44.1 (2006). URL, p. 82-101. ISSN : 00361429.
- [28] G.F. CAREY et R. KRISHNAN. « Penalty approximation of Stokes flow ». In : *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 35.2 (1982). URL, p. 169-206.
- [29] D. N. ARNOLD, F. BREZZI et M. FORTIN. « A stable finite element for the stokes equations ». In : *CALCOLO* 21 (1984). URL, p. 337-344.
- [30] C. BERNARDI et G. RAUGEL. « Analysis of Some Finite Elements for the Stokes Problem ». In : *Mathematics of Computation* 44.169 (1985). URL, p. 71-79. ISSN : 00255718, 10886842.

- [31] Y. LI et L. T. ZIKATANOV. « New stabilized P1-P0 finite element methods for nearly inviscid and incompressible flows ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 393 (2022). URL. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2022.114815](https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.114815).
- [32] N. CHAABANE, V. GIRAULT, B. RIVIERE et T. THOMPSON. « A stable enriched Galerkin element for the Stokes problem ». In : *Applied Numerical Mathematics* 132 (2018). URL, p. 1-21. ISSN : 0168-9274. DOI : [10.1016/j.apnum.2018.04.008](https://doi.org/10.1016/j.apnum.2018.04.008).
- [33] M. CROUZEIX et P.-A. RAVIART. « Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations ». In : *RAIRO, Sér. Anal. Numer.* 33 (1973). DOI : [10.1051/m2an/197307R300331](https://doi.org/10.1051/m2an/197307R300331).
- [34] A. LINKE. « On the Role of the Helmholtz-Decomposition in Mixed Methods for Incompressible Flows and a New Variational Crime ». In : *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 268.1 (2014). URL, p. 782-800.
- [35] F. HECHT. « Construction d'une base de fonctions P_1 non conforme à divergence nulle dans \mathbb{R}^3 ». In : *RAIRO. Analyse numérique* 15.2 (1981). URL, p. 119-150.
- [36] L. AGELAS et R. MASSON. « Convergence of the finite volume MPFA O scheme for heterogeneous anisotropic diffusion problems on general meshes ». In : *Acad. Sci. Paris, Ser. I* 346 (2008). URL.
- [37] C. Le POTIER. « Schéma volumes finis pour des opérateurs de diffusion fortement anisotropes sur des maillages non structurés ». In : *Comptes Rendus Mathématique Acad. Sci. Paris* (2005). URL. DOI : [10.1016/j.crma.2005.05.011](https://doi.org/10.1016/j.crma.2005.05.011).
- [38] A. ERN et J. -L. GUERMOND. *Finite Elements I: Approximation and interpolation*. URL. Springer, 2021.
- [39] V. GIRAULT et P.-A. RAVIART. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*. URL. Springer-Verlag, 1986. DOI : [10.1007/978-3-642-61623-5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-61623-5).
- [40] P. CIARLET et E. LUNÉVILLE. *La Méthode des Éléments Finis. De la Théorie à la Pratique. I. Concepts Généraux*. URL. Coll. Les Cours, Les Presses de l'ENSTA, mars 2009.
- [41] D. JERISON et C. E. KENIG. « The Neumann problem on Lipschitz domains ». In : *Bulletin of the American Mathematical Society* 4 (1981). URL, p. 203-207. ISSN : 1088-9485.
- [42] M. KAZUNORI. « A projection method for Navier–Stokes equations with a boundary condition including the total pressure ». In : *Numerische Mathematik* 152 (2022). URL, p. 1-37.
- [43] F. DUBOIS, M. SALAÜN et S. SALMON. « Vorticity–velocity–pressure and stream function–vorticity formulations for the Stokes problem ». In : *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 82.11 (2003). URL, p. 1395-1451. ISSN : 0021-7824. DOI : [10.1016/j.matpur.2003.09.002](https://doi.org/10.1016/j.matpur.2003.09.002).
- [44] S. MONNIAUX. « Various boundary conditions for Navier-Stokes equations in bounded Lipschitz domains ». In : *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S* 6.5 (2013). URL, p. 1355-1369. ISSN : 1937-1632. DOI : [10.3934/dcdss.2013.6.1355](https://doi.org/10.3934/dcdss.2013.6.1355).
- [45] A. BUFFA et P. CIARLET. « On traces for functional spaces related to Maxwell's equations Part II: Hodge decompositions on the boundary of Lipschitz polyhedra and applications ». In : *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 24.1 (2001). URL, p. 31-48. DOI : [10.1002/1099-1476](https://doi.org/10.1002/1099-1476).
- [46] A.J. CHORIN. « Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations. » In : (1968). URL, p. 745-762.

- [47] S. DELCOURTE. « Developpement de methodes de volumes finis pour la mecanique des fluides ». [URL](#). Theses. Université Paul Sabatier - Toulouse III, sept. 2007.
- [48] C.-W. SHU B. COCKBURN G. E. KARNIADAKIS. *Discontinuous Galerkin Method: Theory, Computation and Applications*. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. [URL](#). Springer Berlin, Heidelberg, 2000.
- [49] V. DOLEJŠÍ et M. FEISTAUER. *Discontinuous Galerkin Method: Analysis and Applications to Compressible Flow*. Springer Series in Computational Mathematics. [URL](#). Springer International Publishing, 2015.
- [50] B. COCKBURN, J. GOPALAKRISHNAN, N. CUONG NGUYEN, J. PERAIRE et F.-J. SAYAS. « Analysis of HDG methods for Stokes flow ». In : *Mathematics of Computation* 80 (2011). [URL](#), p. 723-760.
- [51] D. Di PIETRO et J. DRONIOU. *The Hybrid High-Order Method for Polytopal Meshes*. Modeling, Simulation and Applications series. [URL](#). Springer International Publishing, 2020.
- [52] L. BEIRAO DA VEIGA, F. BREZZI, A. CANGIANI, G. MANZANI, L. MARINI et A. RUSSO. « Basic principles of Virtual elements methods ». In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 23.01 (2013). [URL](#).
- [53] N. PIGNET. « Méthodes hybrides d'ordre élevé pour la mécanique des solides non-linéaire ». [URL](#). Thèse de doct. Paris Est, 2019.
- [54] F. HARLOW et J. WELCH. « Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface ». In : *Physics of Fluids* 8 (1965). DOI : [10.1063/1.1761178](#), p. 2182-2189.
- [55] R. EYMARD, T. GALLOUET, R. HERBIN et J.-C. LATCHÉ. « convergence of the mac scheme for the compressible stokes equations ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 48.6 (2010). [URL](#), p. 2218-2246.
- [56] P-E. ANGELI, M-A. PUSCAS, G. FAUCHET et G. CARTALADE. « FVCA8 Benchmark for the Stokes and Navier–Stokes Equations with the TrioCFD Code—Benchmark Session ». In : *Finite Volumes for Complex Applications VIII - Methods and Theoretical Aspects*. Sous la dir. de Clément CANCÈS et Pascal OMNES. [cea-02434556](#). Springer International Publishing, 2017, p. 181-202.
- [57] J.-D. BOISSONNAT. « Geometric structures for threedimensional shape representation ». In : *ACM Transactions on Graphics* (1984). [URL](#).
- [58] P. RUSHENAS. « Etude et implantation d'un système de modélisation géométrique multidimensionnelle pour la conception assistée par ordinateur ». In : [URL](#). 1991.
- [59] P. G. CIARLET. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. T. 40. Society for Industrial et Applied Mathematics, 2002.
- [60] T. APEL, S. NICAISE et J. SCHÖBERL. « Crouzeix-Raviart type finite elements on anisotropic meshes ». In : *Numerische Mathematik* 89 (2) (2001). [URL](#), p. 193-223. DOI : [10.1007/PL00005466](#).
- [61] C. TAYLOR et P. HOOD. « A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique ». In : *Computers & Fluids* 1 (1973). [URL](#), p. 73-100. ISSN : 0045-7930. DOI : [10.1016/0045-7930\(73\)90027-3](#).
- [62] T. APEL, S. NICAISE et J. SCHÖBERL. « Crouzeix-Raviart Type Finite Elements on Anisotropic Meshes ». In : *Numerische Mathematik* 89.2 (2001). [URL](#), p. 193-223.
- [63] C. BERNARDI et F. HECHT. « More pressure in the finite element discretization of the Stokes problem ». In : *ESAIM: M2AN* 34.5 (2000). DOI : [10.1051/m2an:2000111](#), p. 953-980.

- [64] E. BURMAN et P. HANSBO. « Stabilized Crouzeix-Raviart Element for the Darcy-Stokes Problem ». In : *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 21.5 (2005).
- [65] P. HANSBO et M. G. LARSON. « Discontinuous Galerkin and the Crouzeix-Raviart element : application to elasticity ». In : *Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 37.1 (2003).
- [66] D. Di PIETRO, J. DRONIOU et G. MANZINI. « Discontinuous Skeletal Gradient Discretisation Methods on polytopal meshes ». In : *Journal of Computational Physics* 355 (2017), p. 397-425.
- [67] B. COCKBURN, D. Di PIETRO et A. ERN. « Bridging the Hybrid High-Order and Hybridizable Discontinuous Galerkin Methods ». In : *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. Polyhedral discretization for PDE 50 (2016). [URL](#).
- [68] S. LEMAIRE. « Bridging the Hybrid High-Order and Virtual Element methods ». In : *IMA Journal of Numerical Analysis* (2020). [URL](#).
- [69] D. Di PIETRO et S. KRELL. « A Hybrid High-Order Method for the Steady Incompressible Navier–Stokes Problem ». In : *Journal of Scientific Computing* 74.3 (2017). [URL](#), p. 1677-1705. ISSN : 1573-7691. DOI : [10.1007/s10915-017-0512-x](#).
- [70] D. Di PIETRO et S. KRELL. « Benchmark Session: The 2D Hybrid High-Order Method ». In : *Finite Volumes for Complex Applications VIII - Methods and Theoretical Aspects*. Sous la dir. de C. CANCE`S et P. OMNES. [URL](#). Cham : Springer International Publishing, 2017, p. 91-106. ISBN : 978-3-319-57397-7.
- [71] D. A. DI PIETRO, A. ERN, A. LINKE et F. SCHIEWECK. « A discontinuous skeletal method for the viscosity-dependent Stokes problem ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 306 (2016). [URL](#), p. 175-195. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2016.03.033](#).
- [72] E. JAMELOT, P. CIARLET et S. SAUTER. *Stability of the $\mathbf{P}_{nc}^1 - (P^0 + P^1)$ element*. [URL](#). 2023.
- [73] E. JAMELOT et P. CIARLET. *The T -coercivity approach for solving Stokes problem : stabilization of finite element pairs*. [URL](#). 2024.
- [74] M. FORTIN et M. SOULIE. « A non-conforming piecewise quadratic finite element on triangles ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 19 (1983). [URL](#), p. 505-520.
- [75] E. JAMELOT. « Improved stability estimates for solving Stokes problem with Fortin-Soulie finite elements ». [cea-03833616](#). 2023.
- [76] N. AHMED, G.R. BARRENECHEA, E. BURMAN, J. GUZMAN, A. LINKE et C. MERDON. « A pressure-robust discretization of oseen’s equation using stabilization in the vorticity equation ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 59.5 (2021). [URL](#), p. 2746-2774.
- [77] M. AKBAS, A. LINKE, L.G REBHOLZ et P. W. SCHROEDER. « The analogue of grad–div stabilization in DG methods for incompressible flows: Limiting behavior and extension to tensor-product meshes ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 341 (2018). [URL](#), p. 917-938.
- [78] F. ASSOUS, P. CIARLET et S. LABRUNIE. *Mathematical Foundations of Computational Electromagnetism*. [URL](#). 2018. DOI : [10.1007/978-3-319-70842-3](#).
- [79] <https://octave.org/>.

- [80] J. G. HEYWOOD et R. RANNACHER. « Finite Element Approximation of the Nonstationary Navier–Stokes Problem. I. Regularity of Solutions and Second-Order Error Estimates for Spatial Discretization ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 19.2 (1982). URL, p. 275-311.
- [81] T. BRATANOW. « Navier-Stokes equations: Theory and Numerical Analysis: R. Temam North-Holland, Amsterdam and New York ». In : *Applied Mathematical Modelling* 2 (3 1978). URL.
- [82] A. LINKE et C. MERDON. « Pressure-robustness and discrete Helmholtz projectors in mixed finite element methods for the incompressible Navier–Stokes equations ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 311 (2016). URL, p. 304-326. ISSN : 0045-7825.
- [83] D. A. DI PIETRO, A. ERN, A. LINKE et F. SCHIEWECK. « A discontinuous skeletal method for the viscosity-dependent Stokes problem ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 306 (2016). URL, p. 175-195. ISSN : 0045-7825.
- [84] X. HU, S. LEE, L. MU et S.-Y. YI. « Pressure-robust enriched Galerkin methods for the Stokes equations ». In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 436 (2024). URL, p. 115449. ISSN : 0377-0427.
- [85] C. BRENNECKE, A. LINKE, C. MERDON et J. SCHÖBERL. « Optimal and pressure-independent L^2 velocity error estimates for a modified crouzeix-raviart stokes element with bdm reconstructions ». In : *Journal of Computational Mathematics* 33.2 (2015). URL, p. 191-208. ISSN : 02549409, 19917139.
- [86] F. BREZZI, J. DOUGLAS et L. D. MARINI. « Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems ». In : *Numerische Mathematik* 47 (1985). URL, p. 217-235. ISSN : 0945-3245. DOI : [10.1007/BF01389710](https://doi.org/10.1007/BF01389710).
- [87] E. CHÉNIER, E. JAMELOT, C. LE POTIER et A. PEITAVY. « Improved Crouzeix-Raviart Scheme for the Stokes Problem ». In : *Finite Volumes for Complex Applications X—Volume 1, Elliptic and Parabolic Problems*. Sous la dir. d’E. FRANCK, J. FUHRMANN, V. MICHEL-DANSAC et L. NAVORET. URL. Springer Nature Switzerland, 2023, p. 245-253. ISBN : 978-3-031-40864-9.
- [88] R. EYMARD, T. GALLOUËT et R. HERBIN. « Finite Volume Methods ». In : *Solution of Equation in R^n (Part 3), Techniques of Scientific Computing (Part 3)*. Sous la dir. de J. L. LIONS et P. CIARLET. T. 7. Handbook of Numerical Analysis. URL. Elsevier, 2000, p. 713-1020. DOI : [10.1016/S1570-8659\(00\)07005-8](https://doi.org/10.1016/S1570-8659(00)07005-8).
- [89] J. DRONIOU et T. GALLOUËT. « Finite volume methods for convection-diffusion equations with right-hand side in H^{-1} ». In : *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 36.4 (2002). URL, p. 705-724. DOI : [10.1051/m2an:2002031](https://doi.org/10.1051/m2an:2002031).
- [90] J. DRONIOU. « Finite volume schemes for diffusion equations: Introduction to and review of modern methods ». In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 24.08 (2014). URL, p. 1575-1619. DOI : [10.1142/S0218202514400041](https://doi.org/10.1142/S0218202514400041).
- [91] R. EYMARD, T. GALLOUËT et R. HERBIN. « Discretisation of heterogeneous and anisotropic diffusion problems on general non-conforming meshes. SUSHI: a scheme using stabilisation and hybrid interfaces ». In : *IMA* 30 (2010). URL. DOI : [10.1093/imanum/drn084](https://doi.org/10.1093/imanum/drn084).
- [92] R. EYMARD, C. GUICHARD, R. HERBIN et R. MASSON. « Vertex-centred discretization of multiphase compositional Darcy flows on general meshes ». In : *Computational Geosciences* 16 (2012). URL. DOI : [10.1007/s10596-012-9299-x](https://doi.org/10.1007/s10596-012-9299-x).

- [93] F. BREZZI, K. LIPNIKOV et M. SHASHKOV. « Convergence of the Mimetic Finite Difference Method for Diffusion Problems on Polyhedral Meshes ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 43.5 (2006). URL, p. 1872-1896. ISSN : 00361429.
- [94] J. DRONIOU et R. EYMARD. « A mixed finite volume scheme for anisotropic diffusion problems on any grid ». In : *Numerische Mathematik* 105 (2006). DOI : [10.1007/s00211-006-0034-1](https://doi.org/10.1007/s00211-006-0034-1), p. 35-71. ISSN : 0945-3245.
- [95] J. DRONIOU, R. EYMARD, T. GALLOUET et R. HERBIN. « A unified approach to mimetic finite difference, hybrid finite volume, and mixed finite volume methods ». In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 20.02 (2010). URL, p. 265-295. ISSN : 1793-6314. DOI : [10.1142/s0218202510004222](https://doi.org/10.1142/s0218202510004222).
- [96] B. ANDREIANOV, F. BOYER et F. HUBERT. « Discrete duality finite volume schemes for Leray-Lions type elliptic problems on general 2D meshes ». In : *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 23 (2007). URL, pp 145-195. DOI : [10.1002/num.20170](https://doi.org/10.1002/num.20170).
- [97] F. BOYER et F. HUBERT. « Finite Volume Method for 2D Linear and Nonlinear Elliptic Problems with Discontinuities ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 46.6 (2008). URL, p. 3032-3070. DOI : [10.1137/060666196](https://doi.org/10.1137/060666196).
- [98] K. DOMELEVO et P. OMNES. « A finite volume method for the Laplace equation on almost arbitrary two-dimensional grids ». In : *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 39.6 (2005). URL, p. 1203-1249. DOI : [10.1051/m2an:2005047](https://doi.org/10.1051/m2an:2005047).
- [99] F. BOYER, S. KRELL et F. NABET. « Inf-Sup Stability of the Discrete Duality Finite Volume method for the 2D Stokes problem ». In : *Mathematics of Computation* 84 (2015). URL, p. 2705-2742. DOI : [10.1090/mcom/2956](https://doi.org/10.1090/mcom/2956).
- [100] S. KRELL et G. MANZINI. « The Discrete Duality Finite Volume method for the Stokes equations on 3-D polyhedral meshes ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 50.2 (2012). URL, p. 808-837. DOI : [10.1137/110831593](https://doi.org/10.1137/110831593).
- [101] S. KRELL. « Stabilized DDFV schemes for stokes problem with variable viscosity on general 2D meshes ». In : *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 27.6 (2011). URL, p. 1666-1706. DOI : <https://doi.org/10.1002/num.20603>.
- [102] B. ANDREIANOV, M. BENDAHMANE, F. HUBERT et S. KRELL. « On 3D DDFV discretization of gradient and divergence operators. I. Meshing, operators and discrete duality. » In : *IMA Journal of Numerical Analysis* 32.4 (oct. 2012). URL, pp.1574-1603. DOI : [10.1093/imanum/drr046](https://doi.org/10.1093/imanum/drr046).
- [103] M. GANDER, L. HALPERN, F. HUBERT et S. KRELL. « Discrete Optimization of Robin Transmission Conditions for Anisotropic Diffusion with Discrete Duality Finite Volume Methods ». In : *Vietnam Journal of Mathematics* (sept. 2021). URL. DOI : [10.1007/s10013-021-00518-3](https://doi.org/10.1007/s10013-021-00518-3).
- [104] T. GOUDON, S. KRELL et G. LISSONI. « DDFV method for Navier-Stokes problem with outflow boundary conditions ». In : *Numerische Mathematik* (2019). URL.
- [105] F. BOYER, S. KRELL et F. NABET. « Benchmark Session: The 2D Discrete Duality Finite Volume Method ». In : *Finite Volumes for Complex Applications VIII - Methods and Theoretical Aspects*. Sous la dir. de C. CANCÈS et P. OMNES. URL. Cham : Springer International Publishing, 2017, p. 163-180. ISBN : 978-3-319-57397-7. DOI : [10.1007/978-3-319-57397-7_11](https://doi.org/10.1007/978-3-319-57397-7_11).

- [106] J. DRONIOU, R. EYMARD, T. GALLOUËT et R. HERBIN. « Gradient Schemes: a generic framework for the discretisation of linear, nonlinear and nonlocal elliptic and parabolic equations ». In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* (2013). [URL](#).
- [107] J. DRONIOU, R. EYMARD et P. FERON. « Gradient schemes for Stokes problem ». In : *IMA J. Numer. Anal.* 36.4 (2016). [10.1093/imanum/drv061](#), p. 1636-1669.
- [108] M. EDWARDS et C. ROGERS. « A Flux Continuous Scheme for the Full Tensor Pressure Equation ». In : D, cp-233-00037 (1994). [URL](#). ISSN : 2214-4609. DOI : [10.3997/2214-4609.201411178](#).
- [109] M. G. EDWARDS et C. ROGERS. « Finite volume discretization with imposed flux continuity for the general tensor pressure equation ». In : 2.4 (1998). [URL](#), p. 259-290. DOI : [10.1023/A:1011510505406](#).
- [110] I. AAVATSMARK, T. BARKVE, O. BØE et T. MANNSETH. « Discretization on Non-Orthogonal, Quadrilateral Grids for Inhomogeneous, Anisotropic Media ». In : *Journal of Computational Physics* 127.1 (1996). [URL](#), p. 2-14. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1006/jcph.1996.0154](#).
- [111] I. AAVATSMARK, T. BARKVE, O. BØE et T. MANNSETH. « Discretization on Unstructured Grids for Inhomogeneous, Anisotropic Media. Part I: Derivation of the Methods ». In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 19.5 (1998). [URL](#), p. 1700-1716. DOI : [10.1137/S1064827595293582](#).
- [112] I. AAVATSMARK, T. BARKVE, O. BØE et T. MANNSETH. « Discretization on Unstructured Grids For Inhomogeneous, Anisotropic Media. Part II: Discussion And Numerical Results ». In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 19.5 (1998). [URL](#), p. 1717-1736. DOI : [10.1137/S1064827595293594](#).
- [113] B. AMAZIANE, M. EL OSSMANI et K. TALALI. « Convergence of a multi-point flux approximation finite volume scheme for a sharp–diffuse interfaces model for seawater intrusion ». In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 418 (2023). [URL](#), p. 114696. ISSN : 0377-0427. DOI : [10.1016/j.cam.2022.114696](#).
- [114] L. AGÉLAS, C. GUICHARD et R. MASSON. « Convergence of Finite Volume MPFA O type Schemes for Heterogeneous Anisotropic Diffusion Problems on General Meshes ». In : *International Journal On Finite Volumes* 7 (déc. 2010). [10.1016/j.crma.2008.07.015](#).
- [115] I. AAVATSMARK, G.T. EIGESTAD, B.T. MALLISON et J.M. NORDBOTTEN. « A compact multipoint flux approximation method with improved robustness ». In : *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 24.5 (2008). [URL](#), p. 1329-1360. DOI : [10.1002/num.20320](#).
- [116] L. AGÉLAS, D. DI PIETRO et J. DRONIOU. « The G method for heterogeneous anisotropic diffusion on general meshes ». In : *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 44.4 (2010). [URL](#), p. 597-625. DOI : [10.1051/m2an/2010021](#).
- [117] I. AAVATSMARK, G. EIGESTAD, B.-O. HEIMSUND, B. MALLISON, J. NORDBOTTEN et E. OIAN. « A New Finite-Volume Approach to Efficient Discretization on Challenging Grids ». In : *SPE Journal* 15 (avr. 2013). DOI : [10.2118/106435-MS](#).
- [118] M. F. WHEELER et I. YOTOV. « A Multipoint Flux Mixed Finite Element Method ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 44.5 (2006). [URL](#), p. 2082-2106. DOI : [10.1137/050638473](#).
- [119] R. A. KLAUSEN et R. WINTHER. « Convergence of multipoint flux approximations on quadrilateral grids ». In : *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 22.6 (2006). [URL](#), p. 1438-1454. DOI : [10.1002/num.20158](#).

- [120] T. ARBOGAST, C. DAWSON, P. KEENAN, M. WHEELER et I. YOTOV. « Enhanced Cell-Centered Finite Differences For Elliptic Equations On General Geometry ». In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 19 (mai 2000). URL. DOI : [10.1137/S1064827594264545](https://doi.org/10.1137/S1064827594264545).
- [121] C. Le POTIER. « Finite volume monotone scheme for highly anisotropic diffusion operators on unstructured triangular meshes ». In : *CRAS Paris Ser. I* 341 (2005). [10.1016/j.crma.2005.10.010](https://doi.org/10.1016/j.crma.2005.10.010).
- [122] C. Le POTIER. « A finite volume method for the approximation of highly anisotropic diffusion operators on unstructured meshes ». In : *Finite Volumes for Complex Applications IV, Marrakesh, Marocco* (2005). URL. DOI : [10.1016/j.crma.2005.05.011](https://doi.org/10.1016/j.crma.2005.05.011).
- [123] C. Le POTIER. « Construction et développement de nouveaux schémas pour des problèmes elliptiques ou paraboliques ». URL. Habilitation à diriger des recherches. Université Paris-Est, 2017.
- [124] J. DRONIOU, R. EYMARD, T. GALLOUET, C. GUICHARD et R. HERBIN. « The Multi-point Flux Approximation MPFA-O Scheme ». In : URL. The Gradient Discretisation Method, 2018, p. 343-351. DOI : [10.1007/978-3-319-79042-8_12](https://doi.org/10.1007/978-3-319-79042-8_12).
- [125] R. L. SANI, J. SHEN, O. PIRONNEAU et P. M. GRESHO. « Pressure boundary condition for the time-dependent incompressible Navier–Stokes equations ». In : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 50.6 (2006). URL, p. 673-682. DOI : [10.1002/flid.1062](https://doi.org/10.1002/flid.1062).
- [126] K. LIPNIKOV, M. SHASHKOV et I. YOTOV. « Local flux mimetic finite difference methods ». In : *Numerische Mathematik* 112 (2009). URL, p. 115-152.
- [127] Y. SAAD et M. H. SCHULTZ. « GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems ». In : *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* 7.3 (1986). URL, p. 856-869. ISSN : 0196-5204. DOI : [10.1137/0907058](https://doi.org/10.1137/0907058).
- [128] A. GERSCHENFELD. *Schéma numérique PolyMAC. Application à l'OCS TrioMC. Unification des échelles sous canal et CFD*. Note Technique CEA DEN-DANS-DM2S-STMF-LMEC-NT-2018-64061-A. CEA, 2018.
- [129] R. A. NICOLAIDES. « Existence, Uniqueness and Approximation for Generalized Saddle Point Problems ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 19.2 (1982). URL, p. 349-357.
- [130] J. M. BOLAND et R. A. NICOLAIDES. « Stability of Finite Elements under Divergence Constraints ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 20.4 (1983). URL, p. 722-731. DOI : [10.1137/0720048](https://doi.org/10.1137/0720048).
- [131] D. CHAPELLE et K.J. BATHE. « The inf-sup test ». In : *Computers and Structures* 47.4 (1993). URL, p. 537-545.
- [132] K.-J. BATHE. « The inf-sup condition and its evaluation for mixed finite element methods ». In : *Computers and Structures* 79 (2001). URL, p. 243-252. DOI : [10.1016/S0045-7949\(00\)00123-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00123-1).
- [133] F. BREZZI et K.-J. BATHE. « A discourse on the stability conditions for mixed finite element formulations ». In : *Applied Mechanics and Engineering* 82 (1990). URL, p. 27-57. DOI : [10.1016/0045-7825\(90\)90157-H](https://doi.org/10.1016/0045-7825(90)90157-H).
- [134] R. HERBIN et F. HUBERT. « Benchmark on Discretization Schemes for Anisotropic Diffusion Problems on General Grids ». In : *Finite volumes for complex applications V*. Sous la dir. d'ISTE. [hal-00429843](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00429843). Wiley, 2008, p. 659-692.

- [135] L. GASTALDO, R. HERBIN et J.-C. LATCHÉ. « An unconditionally stable finite element-finite volume pressure correction scheme for the drift-flux model ». In : *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique* 44.2 (2010). URL, p. 251-287. DOI : [10.1051/m2an/2010002](https://doi.org/10.1051/m2an/2010002).
- [136] R. EYMARD, P. FERON et C. GUICHARD. « Family of convergent numerical schemes for the incompressible Navier-Stokes equations ». In : *Mathematics and Computers in Simulation* (2017). URL. DOI : [10.1016/j.matcom.2017.08.003](https://doi.org/10.1016/j.matcom.2017.08.003).
- [137] E. CHÉNIER et R. EYMARD. *Exact pressure elimination for the Crouzeix-Raviart scheme applied to the Stokes and Navier-Stokes problems*. URL. 2021. DOI : [10.48550/ARXIV.2101.03777](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2101.03777). eprint : [2101.03777](https://arxiv.org/abs/2101.03777).
- [138] P.-L. BACQ, A. GERSCHENFELD et M. NDJINGA. « PolyMAC: Staggered Finite Volume Methods on General Meshes for Incompressible Navier–Stokes Problems ». In : *Finite Volumes for Complex Applications X—Volume 1, Elliptic and Parabolic Problems*. Sous la dir. d’E. FRANCK, J. FUHRMANN, V. MICHEL-DANSAC et L. NAVORET. Cham : Springer Nature Switzerland, 2023, p. 149-156.
- [139] P.-E. ANGELI et M. A. PUSCAS. *Convergence des schémas numériques du code TrioCFD pour des problèmes de Stokes et Navier-Stokes stationnaires et instationnaires en 2D et en 3D*. Note Technique CEA DEN-DANS-DM2S-STMFLMEC-NT-2019-65485-A. CEA, 2019.
- [140] U GHIA, K.N GHIA et C.T SHIN. « High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method ». In : *Journal of Computational Physics* 48.3 (1982). URL, p. 387-411. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1016/0021-9991\(82\)90058-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(82)90058-4).
- [141] R. J. GOLDSTEIN, V. L. ERIKSEN, R. M. OLSON et E. R.G. ECKERT. « Laminar separation, reattachment, and transition of the flow over a downstream-facing step ». In : *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME* 92.4 (1970). URL, p. 732-739. ISSN : 0098-2202. DOI : [10.1115/1.3425124](https://doi.org/10.1115/1.3425124).
- [142] J.-L. GUERMOND. « Un résultat de convergence d’ordre deux pour l’approximation des équations de Navier-Stokes par projection incrémentale ». In : *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series I - Mathematics* 325.12 (1997). URL, p. 1329-1332. ISSN : 0764-4442. DOI : [10.1016/S0764-4442\(97\)82364-6](https://doi.org/10.1016/S0764-4442(97)82364-6).
- [143] M. EL OUAFA. « Développement d’un solveur tout-couplé parallèle 3D pour la simulation des écoulements diphasiques incompressibles à forts rapports de viscosités et de masses volumiques ». URL. 2022.
- [144] A. LEPREVOST, V. FAUCHER et M. PUSCAS. « A Computationally Efficient Dynamic Grid Motion Approach for Arbitrary Lagrange–Euler Simulations ». In : *Fluids* 8 (2023). URL, p. 156. DOI : [10.3390/fluids8050156](https://doi.org/10.3390/fluids8050156).
- [145] B. AMAZIANE, M. JURAK et I. RADIŠIĆ. « Convergence of a finite volume scheme for immiscible compressible two-phase flow in porous media by the concept of the global pressure ». In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 399 (juill. 2021). URL, p. 113728. DOI : [10.1016/j.cam.2021.113728](https://doi.org/10.1016/j.cam.2021.113728).
- [146] Dong Kim S., Hun Lee Y. et Chun Shin B. « Newton’s method for the Navier-Stokes equations with finite-element initial guess of stokes equations ». In : *Computers and Mathematics with Applications* 51.5 (2006). URL, p. 805-816. ISSN : 0898-1221. DOI : [10.1016/j.camwa.2006.03.007](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2006.03.007).
- [147] R. A. HORN et C. R. JOHNSON. *Matrix Analysis*. URL. Cambridge University Press, 1985. DOI : [10.1017/CB09780511810817](https://doi.org/10.1017/CB09780511810817).

- [148] M. BENZI, G. H. GOLUB et J. LIESEN. « Numerical solution of saddle point problems ». In : *Acta Numerica* 14 (2005). URL, p. 1-137. DOI : [10.1017/S0962492904000212](https://doi.org/10.1017/S0962492904000212).
- [149] M. FORTIN et R. GLOWINSKI. *Augmented Lagrangian methods : applications to the numerical solution of boundary-value problems*. URL. 1983.
- [150] J. AGHILI, S. BOYAVAL et D. A. DI PIETRO. « Hybridization of mixed high-order methods on general meshes and application to the Stokes equations ». In : *Comput. Methods Appl. Math.* 15.2 (2015). URL, p. 111-134. ISSN : 1609-4840. DOI : [10.1515/cmam-2015-0004](https://doi.org/10.1515/cmam-2015-0004).
- [151] D. N. ARNOLD et F. BREZZI. « Mixed and nonconforming finite element methods : implementation, postprocessing and error estimates ». In : *M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique* 19.1 (1985). URL, p. 7-32.
- [152] M. VOHRALIK, J. MARYŠKA et O. SEVERÝN. « Mixed and nonconforming finite element methods on a system of polygons ». In : *Appl. Numer. Math.* 57.2 (2007). URL, p. 176-193. ISSN : 0168-9274. DOI : [10.1016/j.apnum.2006.02.005](https://doi.org/10.1016/j.apnum.2006.02.005).
- [153] Z. CHEN. « Equivalence between and multigrid algorithms for nonconforming and mixed methods for second-order elliptic problems ». In : *East-West J. Numer. Math.* 4.1 (1996). URL, p. 1-33. ISSN : 0928-0200.
- [154] B. COCKBURN et K. SHI. « Devising HDG methods for Stokes flow: An overview ». In : *Computers and Fluids* 98 (2014). URL, p. 221-229. ISSN : 0045-7930. DOI : [10.1016/j.compfluid.2013.11.017](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.11.017).
- [155] Di Pietro D. et Ern A. *Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods*. URL. Springer, 2012. DOI : [10.1007/978-3-642-22980-0](https://doi.org/10.1007/978-3-642-22980-0).
- [156] R. RANNACHER et S. TUREK. « Simple nonconforming quadrilateral Stokes element ». In : *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 8.2 (1992). URL, p. 97-111. DOI : [10.1002/num.1690080202](https://doi.org/10.1002/num.1690080202).
- [157] P.-M. BERTHE, C. JAPHET et P. OMNES. « Space–Time Domain Decomposition with Finite Volumes for Porous Media Applications ». In : t. 98. URL. Juill. 2014, p. 567-576. ISBN : 978-3-319-05788-0. DOI : [10.1007/978-3-319-05789-7_54](https://doi.org/10.1007/978-3-319-05789-7_54).
- [158] B. LATHUILIÈRE. « Méthode de décomposition de domaine pour les équations du transport simplifié en neutronique ». 2010BOR14001. Thèse de doct. 2010.
- [159] Fortran90 : <https://wg5-fortran.org/N001-N1100/N692.pdf>.
- [160] Hypre : <https://computing.llnl.gov/projects/hypr-scalable-linear-solvers-multigrid-methods>.
- [161] Gmsh : <https://gmsh.info/>.
- [162] METIS : <https://github.com/KarypisLab/METIS>.
- [163] V. E. HENSON et U. M. YANG. « BoomerAMG: A parallel algebraic multigrid solver and preconditioner ». In : *Applied Numerical Mathematics* 41.1 (2002). URL, p. 155-177. ISSN : 0168-9274. DOI : [10.1016/S0168-9274\(01\)00115-5](https://doi.org/10.1016/S0168-9274(01)00115-5).
- [164] K. STÜBEN, J. W. RUGE, T. CLEES et S. GRIES. « Algebraic Multigrid: From Academia to Industry ». In : *Scientific Computing and Algorithms in Industrial Simulations: Projects and Products of Fraunhofer SCAI*. Sous la dir. de M. GRIEBEL, A. SCHÜLLER et M. A. SCHWEITZER. URL. Springer International Publishing, 2017, p. 83-119. ISBN : 978-3-319-62458-7. DOI : [10.1007/978-3-319-62458-7_5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-62458-7_5).
- [165] H. STERCK, U. YANG et J. HEYS. « Reducing Complexity in Parallel Algebraic Multigrid Preconditioners ». In : *SIAM J. Matrix Analysis Applications* 27 (jan. 2006). URL, p. 1019-1039. DOI : [10.1137/040615729](https://doi.org/10.1137/040615729).

- [166] A. BAKER, R. FALGOUT, T. KOLEV et U. YANG. « Multigrid Smoothers for Ultraparallel Computing ». In : *SIAM J. Scientific Computing* 33 (jan. 2011). URL, p. 2864-2887. DOI : [10.1137/100798806](https://doi.org/10.1137/100798806).
- [167] IRENE : <https://www-hpc.cea.fr/tgcc-public/en/latex/tgcc-public.pdf>.
- [168] M. ABRAMOWITZ et I.-A. STEGUN. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. ninth Dover printing, tenth GPO printing. URL. Dover, 1964.
- [169] D.-W. ARTHUR, P.-J. DAVIS et P. RABINOWITZ. « Methods of numerical Integration (2nd edition), ISBN 0-12-206360-0 (Academic Press) ». In : *The Mathematical Gazette* 70 (1986). URL.
- [170] A.H. STROUD. *Approximate Calculation of Multiple Integrals*. Language in Education. URL. Prentice-Hall, 1971. ISBN : 9780130438935.
- [171] P. C. HAMMER, O. J. MARLOWE et A. H. STROUD. « Numerical integration over simplexes and cones ». In : *Mathematics of Computation* 10 (1956). URL, p. 130-137.
- [172] A. FORTIN et A. GARON. *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*. URL. 2011.
- [173] R. DAUTRAY, J.-L. LIONS, M. ARTOLA, M. CESSENAT et B. SCHEURER. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Tome 2 : L'Opérateur de Laplace*. Paris : Elsevier Masson, 1985. ISBN : 2225812969.
- [174] A. ERN et J.-L. GUERMOND. *Theory and practice of finite elements*. T. 159. URL. Springer, Science & Business Media, 2004.
- [175] J. NEČAS. « Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle ». In : *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Scienze Fisiche e Matematiche. III. Ser.* 16 (1962). URL.
- [176] I. BABUŠKA. « The Finite Element Method with Lagrangian Multipliers. » In : *Numerische Mathematik* 20 (1972). URL, p. 179-192.
- [177] F. BREZZI. « On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers ». In : *R.A.I.R.O. Analyse Numérique* 8 (1974). URL, p. 129-151.
- [178] V. GIRAULT et P.-A. RAVIART. *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*. [10.1007/BFb0063447](https://doi.org/10.1007/BFb0063447). Springer-Verlag, 1979.
- [179] M. A. OLSHANSKII et E. E. TYRTYSHNIKOV. *Iterative Methods for Linear Systems*. URL. Philadelphia, PA : Society for Industrial et Applied Mathematics, 2014. DOI : [10.1137/1.9781611973464](https://doi.org/10.1137/1.9781611973464).
- [180] E. JAMELOT. « Résolution des équations de Maxwell avec des éléments finis de Galerkin continus ». URL. Theses. Ecole Polytechnique X, 2005.

