



HAL
open science

Résolution numérique des équations de l'acoustique dans un domaine contenant des frontières mobiles

Constance Bocquet

► **To cite this version:**

Constance Bocquet. Résolution numérique des équations de l'acoustique dans un domaine contenant des frontières mobiles. Acoustique [physics.class-ph]. Le Mans Université, 2024. Français. NNT : 2024LEMA1016 . tel-04839720

HAL Id: tel-04839720

<https://theses.hal.science/tel-04839720v1>

Submitted on 16 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT

DE
LE MANS UNIVERSITÉ
SOUS LE SCEAU DE
LA COMUE ANGERS – LE MANS

ÉCOLE DOCTORALE N° 602
Sciences de l'Ingénierie et des Systèmes
Spécialité : *Acoustique*

Par

Constance BOCQUET

Résolution numérique des équations de l'acoustique dans un domaine contenant des frontières mobiles

Thèse présentée et soutenue à Le Mans, le 19 septembre 2024
Unité de recherche : Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Mans (LAUM), UMR 6613, Institut
d'Acoustique-Graduate School (IA-GS), CNRS, Le Mans Université, France
Thèse N° : 2024LEMA1016

Rapporteurs avant soutenance :

Didier DRAGNA Maître de conférences, École Centrale de Lyon
Emmanuel PERREY-DEBAIN Professeur des universités, Université de Technologie de Compiègne

Composition du Jury :

Président : Olivier DAZEL Professeur des universités, Le Mans Université
Examinatrice : Estelle PIOT Directrice de recherche, ONERA Toulouse
Dir. de thèse : Gwénaél GABARD Professeur des universités, Le Mans Université
Co-enc. de thèse : Cyril DESJOUY Maître de conférence, Le Mans Université

Invité(s) :

Vincent CLAIR Maître de conférences, École Centrale de Lyon

À la mémoire de mon père

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Didier Dragna et Emmanuel Perrey-Debain, rapporteurs de ma thèse, ainsi qu'Olivier Dazel et Estelle Piot, examinateur-ices au sein du jury, pour leur évaluation attentive et leurs commentaires constructifs qui ont enrichi ce travail doctoral.

Je souhaite également exprimer ma profonde gratitude envers mes encadrants de thèse, Gwénaél Gabard et Cyril Desjouy, pour leur expertise scientifique remarquable, leur soutien constant, leur confiance précieuse et leur engagement tout au long de ce parcours de recherche.

Je suis également reconnaissante envers Vincent Clair et Olivier Dazel, membres de mon CSI, pour leurs conseils et leur expertise enrichissante.

Un merci spécial aux doctorant-es du laboratoire, qui sont aussi mes ami-es, pour leur soutien inestimable et leur camaraderie sincère. Charlotte, Martin, Juliette, Jinyue, Alexis, Mathieu, Anis, et Antoine, votre présence et nos moments de détente et de convivialité partagés ensemble ont rendus cette expérience bien plus agréable.

À ma mère, je dois un immense merci pour son encouragement indéfectible, son soutien constant, ainsi que la force et la motivation qu'elle m'a apportées tout au long de mon parcours scolaire. À mon père, je souhaite rendre un hommage particulier pour son influence et son soutien, qui continuent de m'inspirer même en son absence. Je tiens également à remercier l'ensemble de ma famille, dont le soutien a été une source de réconfort et de motivation.

Je remercie chaleureusement la mission égalité de Le Mans Université pour la formation, l'accompagnement et la confiance dans mon investissement au sein de la cellule V2S. Également, je suis reconnaissante envers les membres du conseil du pôle doctoral pour avoir valorisé la voix des doctorant-es et pour leur écoute attentive, offrant ainsi une opportunité précieuse d'engagement au sein de notre communauté doctorale.

Enfin, je remercie profondément Camille, Suzie, Lou-Anne et Natacha pour leur soutien inestimable, leur amitié et leur bienveillance qui ont illuminé ces années de thèse. Votre présence a été essentielle pour adoucir les périodes difficiles et m'offrir des moments de répit. J'espère que nos liens continueront de se renforcer dans les aventures à venir.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	11
Introduction générale	11
Structure du manuscrit	12
1 Traitement spécifique des frontières mobiles	17
1.1 Introduction sur les frontières mobiles	17
1.1.1 Méthodes de superposition de grilles	20
1.1.2 Méthodes de frontières immergées	27
1.1.3 Conclusion sur le type de méthodes	35
1.2 Comparaison des méthodes pour les équations d'Euler linéarisées	39
1.2.1 Équations d'Euler linéarisées	40
1.2.2 Techniques choisies en FDTD	41
1.2.3 Conditions initiales	44
1.2.4 Conditions aux limites imperméables	45
1.2.5 Condition aux limites de non-réflexion	45
1.2.6 IBM employée	47
1.2.7 OGM employée	50
1.2.8 Solution analytique du problème unidimensionnel	53
1.2.9 Calcul de l'erreur par rapport à la solution analytique	55
1.3 Résultat du cas-test	55
1.3.1 Influence de la position de la frontière	55
1.3.2 Influence du mouvement de la frontière	59
1.3.3 Influence de la mise en mouvement de la frontière	60
1.4 Conclusions	62
2 Méthodes de frontières mobiles avec caractéristiques	63
2.1 Introduction	63
2.1.1 Conditions limites caractéristiques	64
2.1.2 Condition limite caractéristique et traitement des frontières mobiles	66

TABLE DES MATIÈRES

2.2	Description du cas-test	68
2.2.1	IBM pondérée	68
2.2.2	Condition limite caractéristique	70
2.2.3	IBM pour les conditions limites caractéristiques	71
2.2.4	OGM pour les conditions limites caractéristiques	72
2.3	Résultats numériques	73
2.3.1	Validation de la pondération pour la méthode ROD	73
2.3.2	Influence du type de condition limite	74
2.4	Conclusions	77
3	Extension aux problèmes non linéaires	79
3.1	Description du cas-test	79
3.1.1	Équations d'Euler	80
3.1.2	Ondes caractéristiques pour les équations d'Euler	80
3.2	Adaptation de la méthode ROD aux caractéristiques	82
3.2.1	Méthode ROD	83
3.2.2	Méthode RODC	83
3.2.3	Méthode CPIC	86
3.2.4	Méthode CPI	88
3.3	Condition initiale et solution analytique	88
3.4	Validation numérique pour le cas linéaire	91
3.5	Résultats numériques dans le cas non linéaire	96
3.6	Conclusions	98
4	Extension aux conditions limites d'impédance mobiles	101
4.1	Introduction sur les conditions limites d'impédance mobile	101
4.1.1	Conditions limites d'impédance en FDTD	102
4.1.2	Conditions limites immergées d'impédance dans le domaine temporel	104
4.2	Extension de la méthode IBM aux conditions d'impédance	106
4.2.1	Condition limite d'impédance dans le domaine temporel	106
4.2.2	Mobilité de la condition limite d'impédance	107
4.3	Résultat du cas-test	108
4.3.1	Modèle d'impédance pour un oscillateur amorti	108
4.3.2	Généralisation du modèle d'impédance par l'ajout d'un second oscillateur	110

4.4	Conclusions	112
5	Application de la méthode CPIC en deux dimensions	113
5.1	Description du cas-test	113
5.1.1	Équations d'Euler 2D	113
5.1.2	Conditions initiales	114
5.1.3	Conditions limites	114
5.1.4	Solution analytique	119
5.2	Résultats	119
5.3	Conclusions	123
	Conclusions	125
	Contributions principales	125
	Perspectives	127
	Bibliographie	129

INTRODUCTION

Introduction générale

La vibroacoustique se focalise sur la manière dont une onde peut se propager dans un fluide et peut mettre en vibration une structure à l'interface avec le fluide par couplage vibroacoustique. L'étude du phénomène inverse est également au centre de cette thématique : comment le mouvement d'une structure en vibration peut être la source d'ondes dans l'air. Ce type d'interfaces fluide-structure mobiles fait partie intégrante de nombreux objets de recherche, car les sons causés par des vibrations de structures sont des problèmes récurrents et avec de nombreuses applications industrielles. L'objectif de ce travail de thèse est de modéliser des phénomènes acoustique se produisant à proximité d'une frontière mobile.

Il est courant d'étudier les interactions vibroacoustiques dans le domaine fréquentiel. Mais seule la résolution des équations dans le domaine temporel permet de prendre en compte la dépendance au temps de la géométrie de la frontière. Le travail présenté dans ce manuscrit apporte des méthodes numériques pour la prise en compte précise des frontières mobiles pour l'acoustique générale pour la méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD). Des méthodes comparables à celles-ci sont également implémentées pour la méthode des éléments finis. Les différences finies ont de plus une plus faible consommation de mémoire que d'autres techniques. Elles sont particulièrement efficaces lorsque l'espace est discrétisé par une grille cartésienne. Toutefois, les frontières complexes et mobiles ne coïncident pas nécessairement avec la grille cartésienne. Les méthodes par éléments finis sont quant à elles robustes et stables pour la modélisation des frontières complexes dans des cas statiques, grâce à la génération de maillages complexes. Mais elles sont plus difficiles à prendre en main. En frontière mobile, la génération de maillage complexe mobile est coûteuse. L'implémentation de traitements spécifiques de systèmes dits à « frontières mobiles » en FDTD permet de bénéficier des avantages des différences finies, sans en supporter les inconvénients. Ces traitements ont fait l'objet de diverses études, en particulier en mécanique des fluides. Toutefois, peu d'auteurs se sont intéressés à cette problématique dans le domaine de l'acoustique.

Afin de réduire la dispersion et dissipation numériques lors du calcul de la propagation acoustique, des schémas de différences finies dans le domaine temporel d'ordre élevé sont utilisés. L'application de ces schémas sur des grilles cartésiennes sont privilégiées. Les méthodes de différences finies présentées sont appliquées dans des problèmes de valeurs initiales et de frontières. Les méthodes sont implémentées pour des frontières ayant un mouvement imposé à tout instant. Cela s'oppose à la simulation du mouvement, basée sur une équation dynamique pour un couplage fort entre le fluide et la frontière.

Pour répondre à la problématique de la thèse, ce travail apporte plusieurs contributions. La première consiste à identifier le meilleur type de méthodes pour résoudre les problèmes à frontières mobiles dans le contexte de l'acoustique. Pour modéliser les frontières mobiles précisément et avec un ordre élevé, une méthode à frontières immergées (IBM) avec des points fantômes remplit grâce au multiplicateur de Lagrange est développée et validée. Cette méthode est comparée pour la résolution des équations d'Euler linéarisées avec une méthode par grilles superposées (OGM). Une seconde contribution est d'ajouter la méthode des caractéristiques aux deux méthodes OGM et IBM implémentées précédemment. Ensuite, afin de modéliser des effets non linéaires, deux extensions de l'IBM avec les caractéristiques sont proposées pour les équations d'Euler générales. Puis, la frontière imperméable est remplacée par une frontière perméable grâce aux modèles d'impédance dans le domaine temporel. Enfin, la dernière contribution consiste en une extension bidimensionnelle de la méthode IBM pour une géométrie simplifiée, qui permet de présenter le potentiel multidimensionnel de cette méthode.

Structure du manuscrit

Le premier chapitre dresse un état des lieux des traitements de frontières mobiles classiques (la méthode à grilles superposées appelée « OGM » et la méthode à frontière immergée appelée « IBM »). Une première compréhension des enjeux associés à chacune des méthodes est obtenue grâce à une étude bibliographique. Les différentes méthodes existantes sont comparées selon des critères propres à l'acoustique numérique, qui sont le coût de calcul, l'ordre de convergence des méthodes ainsi que la précision de la localisation de la condition limite. Selon ces critères, une OGM à grilles superposées et adaptatives et une IBM par résolution d'un problème aux moindres carrés contraint par un polynôme de Lagrange sont choisies pour être implémentées sur un premier cas-test. Celui-ci porte sur la résolution des équations d'Euler unidimensionnelles linéarisées, avec une frontière

imperméable et mobile à faible amplitude. Pour valider ces deux modèles, une solution analytique de référence est décrite pour la propagation en régime linéaire avec une frontière mobile à faible amplitude. Tout d'abord l'influence de la position moyenne de la frontière mobile sur la convergence des solutions numériques est analysée. Ensuite l'impact du mouvement de la frontière sur la convergence des solutions est discutée. Enfin, l'influence du transitoire de mise en mouvement de la frontière sur la convergence globale des solutions est discutée.

Le second chapitre explore l'introduction des conditions limites caractéristiques aux deux méthodes présentées au chapitre 1, puisqu'elles présentent un atout pour bien poser les conditions limites du point de vue mathématique. Une étude bibliographique présente les différents enjeux liés aux conditions limites caractéristiques. Une revue des utilisations des conditions caractéristiques sur des méthodes similaires aux traitements des frontières mobiles OGM et IBM est dressée. Le cas-test de validation de cette association est identique au chapitre précédent (même géométrie et équations) pour des conditions limites formulées à partir des conditions limites caractéristiques. Les méthodes OGMc et IBMc résultent de l'adaptation aux conditions limites caractéristiques des méthodes IBM et OGM. Le chapitre précédent a mis en évidence une instabilité de l'IBM liée à certaines positions de la frontière, qui est contournée ici par l'introduction d'une fonction de pondération dans la résolution du problème aux moindres carrés contraint. L'influence des caractéristiques sur la stabilité des méthodes est détaillée.

Le troisième chapitre présente une extension de l'IBM avec les conditions limites caractéristiques pour les équations d'Euler non linéarisées. L'enjeu de ce chapitre est de remplacer les équations par celles d'Euler non linéarisées et d'appliquer le même cas-test qu'aux chapitres précédents avec de plus grandes amplitudes. Le formalisme des caractéristiques étant différent pour les équations non linéarisées, l'implémentation de la méthode à frontière immergée pour des conditions limites caractéristiques nécessite un certain nombre de modifications majeures de la méthode. En plus de l'IBM présentée au chapitre précédent appelée plus précisément ROD dans ce chapitre, deux adaptations avec les conditions limites caractéristiques s'ajoutent, appelées « RODC » et « CPIC ». Une comparaison des solutions obtenues à faible amplitude est réalisée grâce à une solution de référence du problème analytique complètement linéarisé. Une investigation approfondie du comportement numérique des méthodes à long terme est menée, ainsi que pour différentes configurations telles qu'avec ou sans impulsion et avec ou sans régime transitoire. Une simulation par la méthode CPIC à plus grande amplitude de mouvement de la

frontière permettant la mise en évidence d'effets non linéaires de propagation conclut ce chapitre.

Le quatrième chapitre propose d'introduire des conditions limites perméables mobiles à partir de condition d'impédance dans le domaine temporel. Une introduction bibliographique autour des enjeux liés aux conditions limites d'impédance, de leur utilisation avec les caractéristiques et enfin de leur association avec les traitements des frontières est présentée. Les trois méthodes ROD, CPIC et RODC sont adaptées avec les conditions limites d'impédance. Le cas-test d'étude repose sur le même principe qu'aux chapitres précédents et se compose d'une condition limite d'impédance mobile à faible amplitude en remplacement de la condition imperméable. Le modèle classique d'implémentation reposant sur le système masse ressort amorti est choisis pour ce premier cas-test en frontière perméable.

Le dernier chapitre est une proposition d'ouverture de ces travaux et présente un premier cas-test bidimensionnel applicatif de la méthode CPIC. La méthode CPIC a été préférée par rapport à la méthode RODC pour ce cas-test puisque son principe est plus atypique vis-à-vis des méthodes déjà implémentées à 2D. Les outils utilisés de CPIC étant localement unidimensionnels, il est nécessaire de montrer son potentiel multidimensionnel. Le choix s'est porté sur un cas-test 2D simplifié concernant la propagation 2D d'une impulsion gaussienne placée au milieu d'un domaine carré et réfléchié par un mur plan, imperméable et oscillant à faible amplitude.

Enfin, les conclusions et les perspectives sont présentées.

Le tableau 1 recense les méthodes implémentées dans le cadre de ce travail afin de clarifier les différents acronymes utilisés dans ce document.

Acronyme	Description de la méthode	Condition limite	Équations	Partie du manuscrit
OGM	« Overset Grid Method », Méthode à grilles superposées	directe	Euler linéarisées	chapitre 1, section 1.2.7
IBM	« Immersed Boundary Method », Méthode à frontière immergée avec points fantômes	directe	Euler linéarisées	chapitre 1, section 1.2.6
OGMc	Méthode à grilles superposées	méthode des caractéristiques	Euler linéarisées	chapitre 2, section 2.2.4
IBMc	Méthode à frontières immergées avec points fantômes	méthode des caractéristiques	Euler linéarisées	chapitre 2, section 2.2.3
ROD	Méthode à frontières immergées avec points fantômes par « Reconstruction Off-site Data »	directe	Euler générales	chapitre 3, section 3.2.1
CPI	Méthode à frontières immergées par « Constrained Polynomial Interpolation »	directe	Euler générales	chapitre 3, section 3.2.4
RODC	Méthode à frontières immergées avec points fantômes par « Reconstruction Off-site Data »	méthode des caractéristiques	Euler générales	chapitre 3, section 3.2.2
CPIC	Méthode à frontières immergées par « Constrained Polynomial Interpolation »	méthode des caractéristiques	Euler générales	chapitre 3, section 3.2.3

TABLE 1 : Nomenclature des méthodes implémentées dans ce manuscrit.

TRAITEMENT SPÉCIFIQUE DES FRONTIÈRES MOBILES

Ce chapitre est dédié à la description de plusieurs types de traitements numériques de frontières mobiles, dans le cadre des problèmes à valeur initiale et frontière (IVBP). Plusieurs de ces méthodes sont comparées sur un premier cas-test. Cette comparaison a pour objectif de déterminer les atouts et inconvénients de chacune des méthodes de frontières mobiles pour la résolution de problèmes d'acoustique.

1.1 Introduction sur les frontières mobiles

Une frontière est définie dans le cadre de ce travail de thèse comme l'extrémité d'un domaine physique. Lors de la modélisation numérique, des limites numériques sont associées à des frontières physiques qui permettent de modéliser le comportement des ondes à la frontière et/ou de limiter numériquement un problème qui est physiquement infini. Une frontière peut être mobile, dans un contexte d'interaction entre des ondes et un objet vibrant par exemple. À faibles amplitudes de vitesse de la frontière par rapport à la célérité des ondes acoustiques, le problème peut être linéarisé autour des composantes statiques du problème, ce qui implique que la frontière mobile est modélisée par une limite immobile. Si l'amplitude de mouvement de la frontière ne permet pas de satisfaire les hypothèses de linéarisation, la limite doit être mobile et les équations régissant la modélisation du problème ne peuvent pas être linéarisées.

En différences finies, les schémas différentiels sont appliqués sur des grilles structurées. La manière la plus classique d'imposer une condition limite est d'imposer la valeur de la grandeur physique considérée au point d'application de la grille associée à la limite. Ceci

est effectivement possible tant que la position de la limite coïncide avec un point de la grille. Dans le cas d'une frontière mobile, une grille structurée peut être définie afin d'être coïncidente avec la position initiale de la frontière. Cette position évoluant dans le temps, elle ne sera alors plus nécessairement coïncidente à tous les instants considérés. Il est donc nécessaire d'utiliser des techniques spécifiques pour prendre en compte les frontières mobiles.

Le premier type de techniques s'appuie sur des déformations de grilles afin d'obtenir des points coïncidents avec la frontière à tout instant. Une première approche est d'utiliser une grille structurée se déformant afin de suivre le mouvement de la frontière. La solution numérique est interpolée de l'ancienne grille vers la grille nouvellement déformée à chaque instant. Pour que la grille soit conforme à la frontière, il est généralement nécessaire d'utiliser une grille curviligne, ce qui peut introduire des variations de pas spatial. Selon certains types de déformations de la frontière, les pas peuvent ne pas être homogènes sur l'ensemble du domaine. La taille du pas ne dépend alors plus uniquement de la longueur des ondes à discrétiser, qui est le critère habituellement utilisé, mais également de la déformation de la frontière. Cela peut poser des problèmes dans les cas où les déformations sont grandes, car il est communément admis que le taux de déformation du maillage ne doit pas excéder 3% [8]. Une seconde approche est l'utilisation simultanée de plusieurs grilles structurées. L'une des grilles peut être fixe et une seconde peut être déformable ou en mouvement afin de coïncider à chaque instant avec la frontière. Ces deux approches reposent sur la nécessité d'utiliser une ou plusieurs grilles structurées et coïncidentes à la frontière à chaque pas temporel dans le but d'appliquer une condition limite directement sur les points de coïncidence. La génération de maillage ainsi que les l'interpolation des variables entre les différentes grilles sont des opérations coûteuses.

Le second type de techniques utilisées pour résoudre les problèmes à limite mobile repose sur l'utilisation d'une grille unique, fixe et cartésienne, dont le pas est calculé exclusivement à partir de la longueur d'onde des ondes se propageant dans le domaine. La frontière mobile ne coïncide donc pas nécessairement avec la grille choisie. Un traitement spécifique permettant de modéliser les frontières qui y sont immergées est alors nécessaire. La problématique du traitement de frontière mobile est commune sur certains points avec les problèmes à frontière fixe à géométrie complexe. À un instant donné, les traitements de frontière mobile reposent sur un principe similaire à ceux des frontières fixes et complexes, à la différence que le traitement doit pouvoir prendre en compte le mouvement de la frontière et la continuité entre les différents instants. Cette différence

peut entraîner un coût de calcul supplémentaire selon la méthode considérée. La figure 1.1 est une représentation schématique pour la méthode par maillage composite et pour la méthode par frontière immergée.

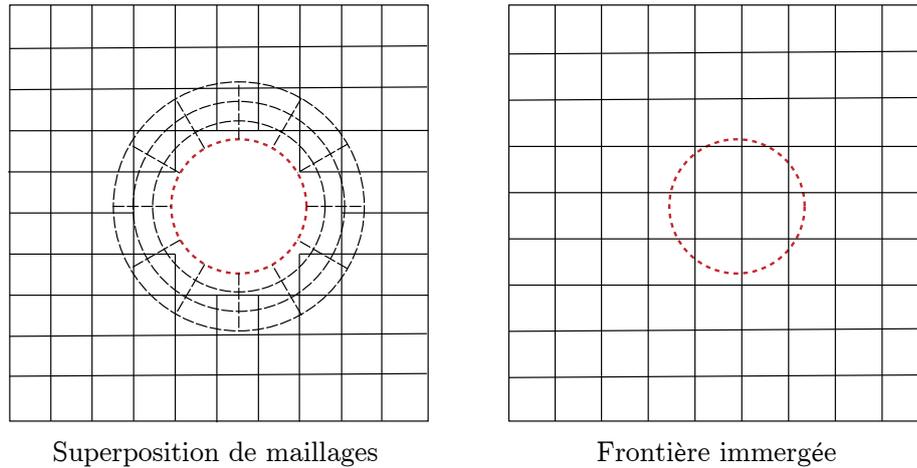


FIGURE 1.1 : Représentation des maillages (a) selon une méthode par maillage composite, à savoir un assemblage de plusieurs grilles qui se recouvrent et interagissent, et (b) selon la méthode de frontière immergée, où le maillage est unique, fixe et cartésien, et la méthode utilise un moyen indirect pour imposer des conditions limites.

Le premier type de méthode étudiée pour ce travail s'appelle la méthode des maillages superposés (« Overset Grid Method », mentionnées sous l'acronyme « OGM » dans la suite de ce manuscrit). Elle consiste à superposer plusieurs maillages qui couvrent tout le domaine physique. L'une des grilles est fixe et non coïncidente avec la frontière mobile tandis que le second est mobile et déformable de manière à coïncider avec la frontière à chaque pas de temps. Ces maillages se recouvrent et les solutions calculées sur chacun d'eux interagissent sur la zone de recouvrement. Le second type de méthode considéré est la méthode de frontières immergées (« Immersed Boundary Method », mentionnée sous l'acronyme « IBM »). Dans cette méthode, le maillage est unique, fixe et n'est pas nécessairement coïncidant avec la frontière. Les conditions aux limites sont alors prises en compte indirectement sur les points au voisinage de la frontière.

1.1.1 Méthodes de superposition de grilles

Les Overset Grid Method (OGM), aussi appelées les méthodes chimères¹, sont des méthodes qui permettent de résoudre des problèmes à géométries complexes ou contenant des frontières mobiles à l'aide d'une solution reposant sur le maillage. L'idée est d'utiliser plusieurs grilles structurées et superposées afin de faire coïncider à tout instant la position de la frontière avec des points de la grille.

Les OGM reposant sur une astuce géométrique, la première partie présentée ci-après consiste à étudier plusieurs techniques permettant de proposer un maillage coïncidant aux frontières d'un objet complexe, immobile ou d'un objet mobile. La deuxième partie porte ensuite sur l'utilisation de ces grilles afin d'obtenir une solution stable sur l'ensemble du domaine.

Génération d'un ou plusieurs maillages conformes

Il existe plusieurs manières de générer un maillage conforme à la frontière.

Les premiers travaux sur les maillages conformes à une frontière complexe immobile appliquée en différences finies ont été menés par Magnus et Yoshihara en 1970 [56]. Les auteurs se sont intéressés à l'étude d'un écoulement non visqueux transsonique sur un profil aérodynamique. Le maillage utilisé repose sur un assemblage de plusieurs grilles structurées comme représenté sur les figures 1.2 et 1.3. Plusieurs techniques d'assemblages ont été développées avec des objectifs différents. Les grilles 2 à 6 (correspondant aux grilles numérotées sur la figure 1.2) sont assemblées à la manière d'un « patchwork »², c'est-à-dire que les différentes grilles se superposent uniquement sur leurs frontières respectives, à la manière d'une couture qui relie deux pièces de tissus. Cette superposition de type « patchwork » a pour but de produire un affinement partiel du domaine sur la zone entourant la géométrie complexe pour limiter la viscosité artificielle liée aux approximations numériques effectuées en différences finies. Pour deux grilles adjacentes, les pas spatiaux les plus grands sont des multiples entiers des pas spatiaux les plus petits. L'utilisation de ces grilles de tailles différentes permet d'adapter la qualité de la grille selon les physiques qui dominent les différentes régions du domaine, tout en couvrant l'ensemble du domaine. Cette technique, bien qu'elle consiste en une superposition de grilles, ne permet pas de

1. Pour rappel, une chimère est un monstre imaginaire dont les parties du corps sont toutes issues d'animaux différents (tête de lion, corps de chèvre, queue de dragon).

2. Un patchwork est une technique de couture consistant à coudre plusieurs morceaux de tissus de tailles, formes et couleurs différentes ensemble

résoudre à elle seule des problèmes de géométrie complexe et/ou mobile.

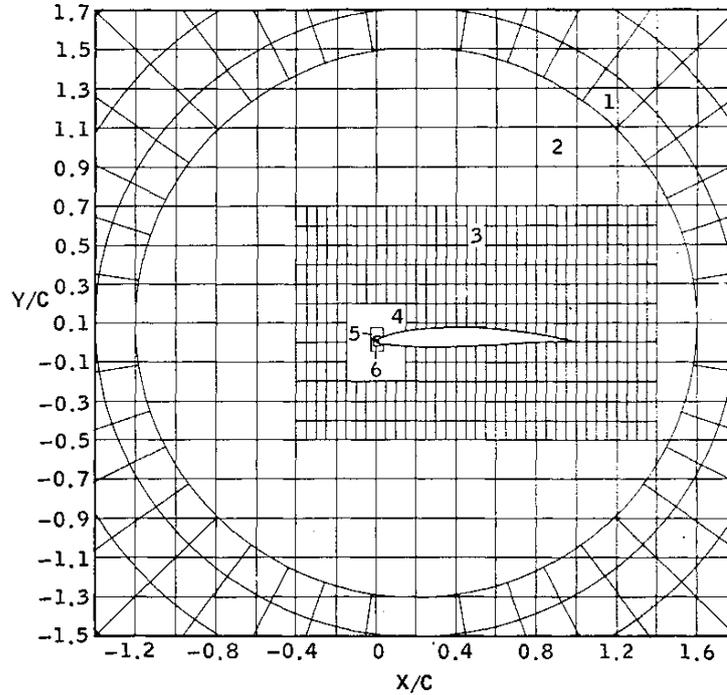


FIGURE 1.2 : Vue globale d'un maillage composite. À la manière d'un patchwork, plusieurs grilles rectangulaires cartésiennes (les grilles 2,3,4 et 5) sont assemblées dans le but d'affiner la résolution au voisinage de la frontière. Les différents maillages rectangulaires assemblés possèdent des frontières communes. Figure extraite de l'article [56].

L'autre type de technique d'assemblage de grilles consiste à superposer des grilles structurées sur une zone étendue, où une grille est générée spécifiquement afin d'être conforme à la frontière. Sur la figure 1.3, des grilles locales de 3×3 points sont générées à chaque point de la frontière et sont définies de façon à être tangentes à celle-ci. Une condition limite de vitesse normale nulle est appliquée sur la frontière. Les valeurs sur les points de la grille locale sont obtenues à partir d'une interpolation entre les valeurs de la grille non locale et la condition limite sur la frontière. Un autre type de condition limite est utilisée dans l'article [56], dont la grille associée est circulaire. Cette grille est numérotée 1 sur la figure 1.2. L'utilisation de la grille 1 permet d'exprimer le champ lointain dans un système de coordonnées polaires afin d'appliquer la condition limite d'écoulement libre. Pour le type de problème à frontière complexe immobile, la technique de grilles superposées présente un compromis raisonnable en termes de flexibilité sur la topologie de la grille. Les articles [14, 43] présentent des techniques de génération de plusieurs grilles qui se superposent, dont la principale est cartésienne, associée à plusieurs grilles conformes à la

géométrie de la frontière.

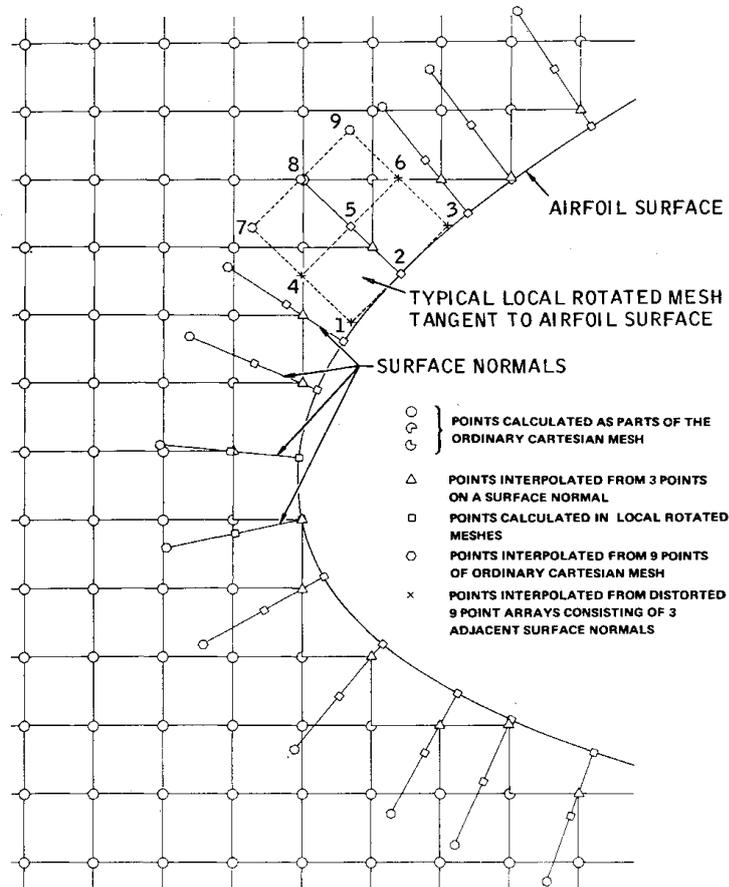


FIGURE 1.3 : Au voisinage de la frontière, le maillage cartésien sous-jacent est remplacé par une déformation de celui-ci conforme à la frontière. Figure extraite de l'article [56].

Lorsqu'il s'agit de traiter des problèmes mettant en jeu des frontières complexes, les grilles utilisées sont généralement curvilignes pour être conformes à la frontière. La génération de grilles curvilignes a été étudiée dans un premier temps pour la résolution de problèmes à maillage unique, structuré, adaptatif, dynamique vis-à-vis des données issues de la solution du problème, dans le but d'augmenter la précision de la solution [10]. La génération de grille curviligne est obtenue grâce à la résolution d'un problème d'optimisation des paramètres de maillage tels que l'orthogonalité et la régularité de la grille. L'avantage de cette méthode est de pouvoir contrôler certains paramètres de grille. En revanche, l'inconvénient de cette méthode est la nécessité de résoudre un système d'équations de grande dimension pour chaque pas de temps. Plusieurs techniques de génération de grille conforme aux frontières mobiles complexes sont décrites dans les articles [47] et [83]. Par

exemple, dans l'article [47], une grille adaptative est déformée à chaque pas de temps comme illustré sur la figure 1.4. Dans ce cas, la grille déformée est projetée sur une grille fixe cartésienne et un changement de coordonnées est utilisé pour que le problème soit résolu sur cette unique grille, de manière indifférente selon les déformations temporelles. Dans la suite, on appellera cela une « superposition temporelle des grilles », à comprendre comme étant une superposition de grille, du point de vue numérique, pour des raisons de déformation temporelle.

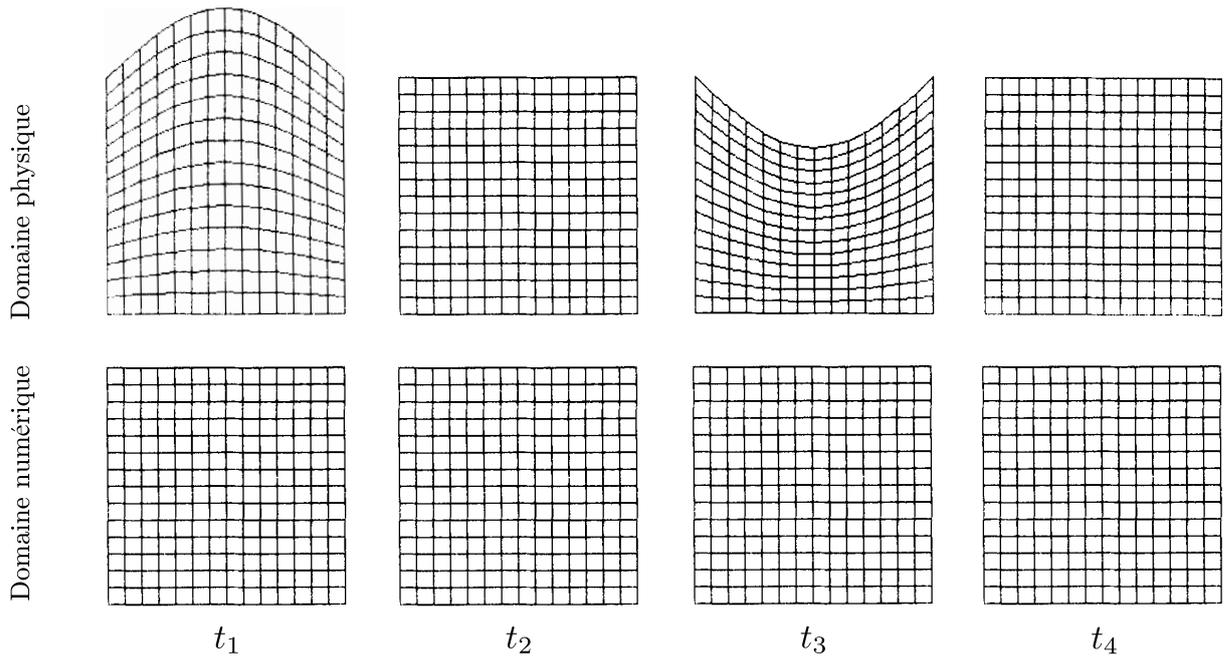


FIGURE 1.4 : Dans le domaine physique, la grille est structurée, curviligne et adaptative à une frontière mobile à quatre pas de temps différents de t_1 à t_4 . Une transformation de coordonnées est appliquée aux équations pour résoudre le problème sur une grille cartésienne associée immobile dans le domaine numérique. Figures extraites de l'article [47].

Précédemment, nous avons vu des techniques qui utilisent la superposition spatiale de grilles et d'autres la superposition temporelle de grilles. Il est également possible d'allier ces deux techniques afin d'obtenir des maillages incluant les superpositions spatiales et temporelles pour des frontières mobiles, comme [3] portant sur la robustesse d'un algorithme de ce type pour plusieurs objets mobiles. Plus récemment, l'article [41] présente une grille fixe et cartésienne (grille \mathcal{G}_1 sur la figure 1.5) utilisée en tant que grille principale. Celle-ci est accompagnée d'une seconde grille conforme à la frontière (grille \mathcal{G}_2 sur la figure 1.5 à un instant donné). Ces deux grilles se superposent afin que l'ensemble du

domaine étudié soit couvert. La grille \mathcal{G}_2 est structurée et curviligne et subit des déformations à chaque pas de temps. À gauche de la figure, les deux grilles sont représentées du point de vue physique. Au milieu et à droite de la figure se trouvent les grilles du point de vue du solveur de calcul. Bien que la grille mobile \mathcal{G}_2 soit déformée du point de vue de la physique, elle est fixe et rectiligne du point de vue du solveur, après un changement de coordonnées appliqué aux équations.

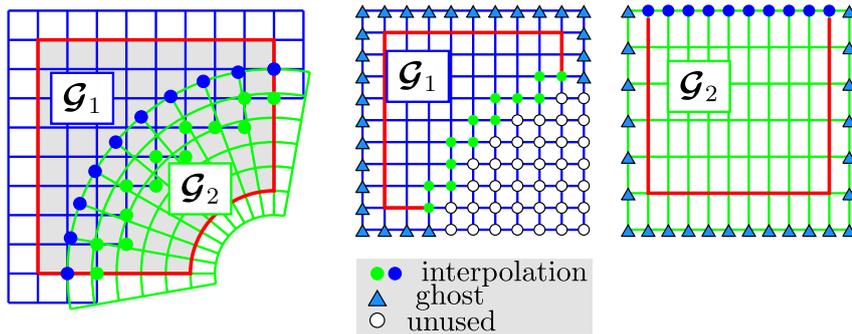


FIGURE 1.5 : À gauche : Recouvrement du maillage fixe cartésien \mathcal{G}_1 et du maillage structuré déformé \mathcal{G}_2 du point de vue physique. Au milieu et à droite : les deux maillages du point de vue du solveur numérique. La figure est extraite de l'article [41].

Cette technique possède une flexibilité suffisante pour traiter des problèmes à frontières complexes. Dans le cas des frontières mobiles, l'étape de génération de maillage par assemblage spatial de plusieurs grilles avec certaines grilles mobiles est une partie critique et coûteuse dans les OGM. Cette méthode est plutôt réservée aux translations de géométrie ou aux légères déformations pour que la grille structurée conforme puisse s'adapter à la géométrie à tous les instants.

Pour les techniques de maillage par superposition de grilles, la stabilité et la précision de la solution numérique obtenue est un enjeu. La qualité du maillage est en partie responsable de la stabilité du solveur. Un soin particulier doit être apporté à l'interpolation qui permet de faire le lien entre les variables calculées dans les différentes grilles. Deuse et Sandberg [18] ont avec cet objectif proposé une méthode particulière permettant de limiter les instabilités numériques causées par cette étape d'interpolation.

Le tableau 1.1 recense les atouts et inconvénients évoqués précédemment concernant les différentes techniques de superposition de maillages permettant de modéliser des frontières mobiles.

Technique	Superposition	Intérêt	Limite
Maillage « patchwork »	- Spatiale : uniquement sur les frontières communes des grilles	Affinement de certaines zones du maillage	La technique n'assure pas, à elle seule, la conformité du maillage à la frontière.
Grille adaptative	- Temporelle : déformation complète de la grille	Conformité d'une unique grille structurée se déformant en fonction de la frontière	Déformation complète de toute la grille à chaque modification géométrique de la frontière (coût élevé). Technique réservée à des faibles translations ou des déformations légères de la frontière.
Maillage par grilles superposées + adaptatives	- Spatiale : zone de recouvrement des grilles - Temporelle : déformation de la grille conforme uniquement	Conformité du maillage obtenu à une frontière immobile complexe ou mobile à partir d'une déformation partielle du maillage	La conformité en frontière mobile est réservée aux frontières en translation ou à des déformations légères.

TABLE 1.1 : Comparaison entre différentes techniques de superposition de grilles coïncidant pour modéliser des frontières mobiles.

Projection des variables des grilles entre elles

De nombreux travaux portent sur l'optimisation ou la mise en place de techniques permettant d'interpoler les variables d'une grille à l'autre.

L'article [16] propose une méthode de maillage composite d'ordre élevé pour des problèmes en aéroacoustique numérique en frontière complexe immobile. Les schémas de différences finies utilisés sont les schémas à 7-points centrés DRP de [81] également utilisés pour les travaux présentés dans ce manuscrit. Il est montré que l'erreur associée à l'utilisation d'une interpolation bilinéaire domine l'erreur globale de la solution. L'élimination de cette erreur d'interpolation peut être effectuée par l'ajout d'un filtrage sélectif, qui peut cependant introduire une erreur associée. En revanche, une interpolation d'ordre 4 permet de maintenir l'erreur associée à l'interpolation en dessous de l'erreur de dispersion liée au schéma DRP. L'article [57] portant sur la simulation aéroacoustique de plusieurs objets à géométrie complexe immobile montre que la qualité de l'interpolation dépend de la méthode d'interpolation. Quatre fonctions d'interpolation à une dimension sont étudiées : les polynômes de Lagrange sur onze et sept points et les splines sur six ou quatre points. Les erreurs locales commises en utilisant chacune de ces fonctions sont comparées pour un nombre d'onde donné $\alpha = 2\pi/\lambda$ et sont représentées sur la figure 1.6. Il est observable qu'à partir de $\alpha\Delta x > 0.85$ (moins de 7.4 points par longueur d'onde), les fonctions splines sur six points sont meilleures que les polynômes de Lagrange sur sept points. Afin d'obtenir le meilleur compromis entre la précision et le coût de calcul, il paraît préférable d'utiliser l'interpolation par splines. C'est celle choisie dans l'article de Marsden [57].

Dans l'article [18] où les auteurs utilisent un schéma d'interpolation de Lagrange d'ordre 4, afin de conserver la précision globale du solveur, une discussion sur les sources d'instabilités pour les OGMs est proposée. D'après les auteurs, la présence d'ondes qui coexistent simultanément sur une zone de superposition, mais non couplées sur deux grilles différentes, sont à l'origine d'instabilités. Une réflexion d'onde parasite peut se retrouver piégée dans la zone de superposition entre les deux zones d'interpolation. Pour résoudre ce problème de stabilité, il est habituellement d'usage d'ajouter de l'absorption sélective afin d'absorber ces ondes réfléchies non physiques. Les auteurs proposent une méthode différente pour traiter ce problème, plus fidèle à la source d'erreur identifiée. Étant donné que l'instabilité provient de la zone de superposition non couplée, supprimer cette zone et juxtaposer les zones d'interpolation et utiliser des schémas d'interpolation décentrés peut être une solution, mais peut avoir des conséquences sur la précision de l'interpolation. La

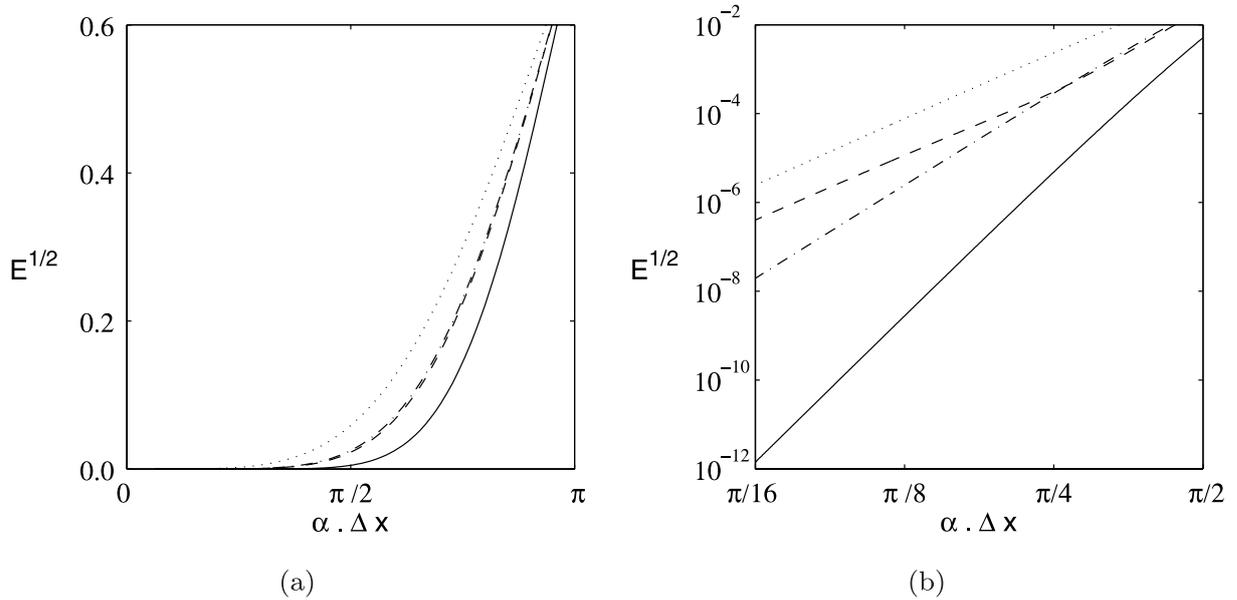


FIGURE 1.6 : Résultat de la comparaison des erreurs d'interpolation. : spline sur quatre points; - - - : spline six-points; · - · : polynôme de Lagrange sur sept points; — : polynôme de Lagrange sur onze points. Figure extraite de l'article [57].

technique présentée dans l'article consiste à utiliser une interpolation implicite en ajoutant au stencil de points d'interpolation d'une interpolation donnée, des points d'interpolation de l'autre grille. Les points d'interpolations sont désormais couplés dans les deux étapes d'interpolation relatives aux deux grilles et les interpolations sont calculées parallèlement par la résolution d'un système d'équations linéaires. Cette modification entraîne un coût de calcul supplémentaire, mais un gain en stabilité.

Peu de travaux ont été menés en dynamique. En ajoutant une dépendance temporelle sur le mouvement de la frontière, l'article [46] propose une interpolation entre un maillage mobile et un maillage fixe, qui est réalisée à partir d'une interpolation linéaire. Dans l'article de Koblitz [41] qui propose une méthode de maillage composite avec grille mobile, il est préféré l'interpolation de Lagrange quadratique standard afin de respecter le second ordre de précision global.

1.1.2 Méthodes de frontières immergées

Les Immersed Boundary Methods IBM ont été proposées pour la première fois en 1972 par Peskin [66] pour simuler le couplage entre un fluide visqueux incompressible et une valve du cœur humain qui exerce une force sur ce fluide. Il propose d'utiliser une grille

cartésienne fixe, unique et de prendre en compte la condition limite indirectement.

Dans les IBM, la frontière non coïncidente avec la grille est considérée immergée par rapport à la grille. À la différence des OGM, qui consistent à adapter la grille afin qu'elle soit coïncidente avec la frontière, les IBM utilisent une grille choisie selon les critères de la physique uniquement et non selon des contraintes géométriques de frontière. Sur la figure 1.7 (extraite de l'article [74]), est représentée une frontière circulaire immergée dans une grille cartésienne. L'enjeu est alors d'imposer d'une manière détournée les conditions limites, ce qui peut être complexe à formaliser pour obtenir un modèle numérique d'ordre élevé.

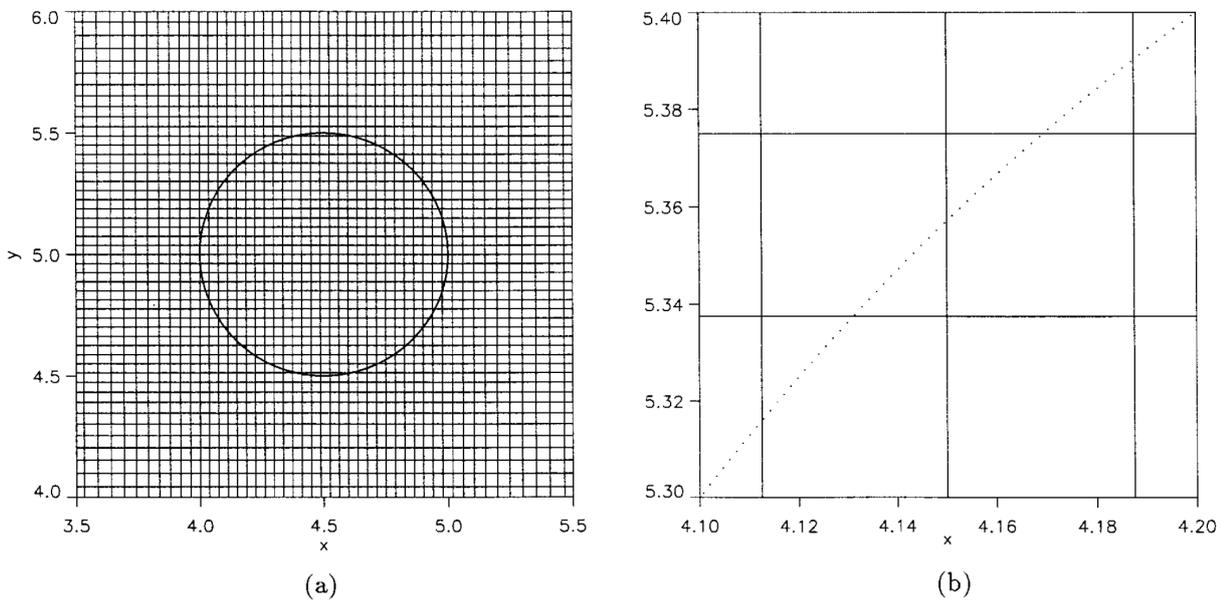


FIGURE 1.7 : Superposition d'une frontière de cylindre immergée dans un maillage cartésien : (a) ensemble du cylindre immergé; (b) portion en haut à gauche du cylindre. Figure extraite de l'article [74].

Les méthodes à frontières immergées peuvent être classées en plusieurs catégories selon la manière d'appliquer les conditions limites. Citons par exemple la classification suivante :

- l'approche par fonction de forçage continue,
- l'approche par cellules fantômes ou forçage discret.

Approche par fonction de forçage continue

L'approche par fonction de forçage continue consiste à introduire l'effet de la frontière sur le fluide par l'ajout d'un terme source dans les équations avant leur discrétisation. Dans

un premier temps, la force appliquée par la frontière sur le fluide est définie en fonction de la physique de la frontière. La condition limite du problème étant localisée sur la frontière, le forçage est appliqué sur celle-ci par une distribution de Dirac. Pour permettre une discrétisation numérique de la fonction de Dirac, cette fonction est régularisée au moyen d'une fonction δ . La fonction δ est une fonction de distribution ou « d'étalement » de la force sur les points de la grille de discrétisation. Dans ce paragraphe, après avoir détaillé plusieurs manières d'exprimer le forçage de la frontière sur le fluide, des techniques de régularisation de la fonction de Dirac par des fonctions δ seront présentées.

Les méthodes IBM par fonctions de forçage sont dans la lignée la plus directe des travaux sur les IBM menés par Peskin (1972) [66] pour la résolution des équations de Navier–Stokes. La frontière est considérée comme une membrane flexible (sans masse) séparant deux domaines fluides identiques, et la force exercée par le fluide sur la membrane est exprimée. Ce travail a été complété dans Peskin et McQueen (1980) [69] pour un mouvement de compression/détente d'une prothèse de valve de cœur. La loi de Hooke permet de décrire la force exercée par la frontière élastique sur le fluide, il s'agit de la première approche de fonction de forçage continue présentée. Puis la modélisation de frontières mobiles complexes a été développée en suivant ce modèle dans d'autres applications comme le mouvement du sang lié aux battements du cœur dans les références [58, 67, 68] ou le mouvement d'un animal aquatique [22]. L'ensemble de ces articles a en commun le précurseur de ces méthodes C. S. Peskin en tant qu'auteur ou co-auteur. Tous ces exemples sont très similaires dans leur mise en œuvre.

Une seconde approche concerne la modélisation d'objets immergés dans un fluide. Cette technique employée par Fogelson et Peskin en 1988 [24] est utilisée pour la résolution d'équation dans un domaine contenant des particules en suspension. Au lieu de prendre en compte chaque interface fluide/particule individuellement, tout le domaine est considéré comme un fluide visqueux sur lequel les équations de Stokes en 3D sont résolues. En parallèle le mouvement de chaque point est dépendant de celui de ses proches voisins. Pour se faire un solide géométrique (par exemple un octaèdre régulier) est choisie pour tout le domaine de manière à appliquer une force élastique sur chacune des arêtes. Ces forces élastiques sont internes et vont résister à la déformation des particules. Chaque particule possède localement une forme, une taille et une déformabilité en fonction des paramètres choisis.

Une autre approche est la méthode de pénalisation de Brinkman qui consiste à appliquer les équations associées aux matériaux poreux pour tous les objets en interaction avec

le fluide. Cela se traduit par l'ajout d'un terme source aux équations continues. Le terme source est défini par la loi de Darcy [50] ou par son extension, la loi de Brinkman [53]. Une fonction de masque est ajoutée au terme de force pour distinguer géométriquement les différentes natures d'objet et leur associer une valeur de porosité adaptée à la condition limite souhaitée. Pour une frontière rigide, la porosité est définie comme étant très faible. Les conditions limites sont donc implémentées automatiquement au moment de la résolution des équations d'évolution. La méthode de Liu et Vasilyev (2007) [53] est d'ordre de convergence de 1, car la frontière est localisée au centre de la cellule voisine à la frontière, pas sur la frontière elle-même.

Un tournant dans l'utilisation de ces méthodes a été pris grâce aux travaux de Goldstein *et al.* (1993) [30]. Les auteurs proposent l'implémentation d'un schéma rétroactif qui permet d'imposer une vitesse du fluide U sur une frontière, dans un contexte de simulation d'écoulement autour d'objet par résolution des équations de Navier–Stokes incompressibles. Cette technique est appelée « Virtual Boundary Method ». Dans cet article, la résolution des équations se fait en utilisant une approche spectrale. Cette méthode a été complétée en utilisant une résolution par différences finies d'ordre 2 dans l'article de Lai et Peskin (2000) [48] et d'ordre élevé dans l'article de Saki et Biringen (1996) [74]. Cette méthode s'est révélée performante pour la simulation d'un cylindre statique ou en mouvement dans un écoulement uniforme à faible nombre de Reynolds, pour les équations incompressibles.

Comme évoqué pour les méthodes de pénalisation de Brinkman, certaines méthodes sont d'ordre très faible, car la frontière est implémentée au point Eulérien le plus proche, et la frontière n'est donc pas localisée précisément. D'autres méthodes utilisent une fonction permettant d'adoucir la transition pour stabiliser numériquement la résolution [50]. Pour un problème donné, une fois que la fonction de forçage continue s'appliquant sur la frontière immergée est déterminée, il est nécessaire d'utiliser une technique de régularisation de la fonction Dirac. Cette régularisation revient à transférer les contributions de la fonction de forçage s'appliquant sur des points Lagrangiens (les points mobiles qui suivent le mouvement de la frontière) vers les points Eulériens voisins (les points immobiles de la grille).

Pour les méthodes directement basées sur les travaux de Peskin [66], le passage des points Lagrangiens à Eulériens se fait par l'utilisation d'une fonction δ de distribution spatiale. La fonction de distribution est introduite par une approximation suffisamment « étalée » du Dirac. L'article de revue [60] superpose cette fonction δ à d'autres exemples,

représenté sur la figure 1.8. L'ensemble de ces travaux met généralement en place des méthodes d'ordre 2 [45]. Néanmoins, la méthode présentée dans l'article [76] permet d'atteindre un ordre arbitraire en proposant une discrétisation d'ordre élevé de la distribution de Dirac. D'autres applications d'ordre élevé ont été proposées pour l'aéroacoustique [87].

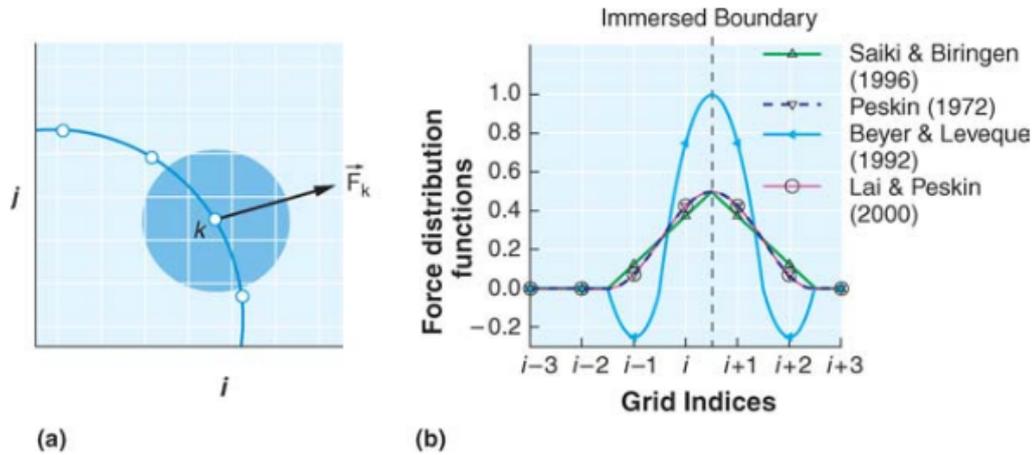


FIGURE 1.8 : (a) Le forçage est distribué sur l'ensemble de points de la zone foncée au moyen d'une fonction δ . (b) Représentation des fonctions δ employées dans les articles de Saiki & Biringen (1996)[74], Peskin (1972)[66], Beyer & Leveque (1992)[5], Lai & Peskin (2000)[48]. Figure extraite de l'article [60].

Approche par forçage discret

Cette approche des IBM par points fantômes apparaît au début des années 2000 avec les travaux de Gibou et Fedkiw [28] (faisant suite directe à l'article ayant des auteurs communs, qui n'est pas en différences finies [29]) qui porte sur la résolution d'un problème de Stefan, concernant l'évolution des transitions de phase. Des points fantômes sont ajoutés en dehors du domaine permettant d'utiliser des schémas numériques centrés. Les valeurs des grandeurs considérées aux points fantômes sont calculées en utilisant une extrapolation passant par les derniers points du domaine et la frontière. Si la frontière est trop proche d'un des points de la grille, l'extrapolation est décalée d'un point.

À la différence des IBM par forçage continu qui utilisent une fonction d'étalement pour interpoler des points Lagrangiens de la frontière sur les points Eulériens de la grille, l'approche par forçage discret consiste à implémenter la condition limite à sa position précise. Cette approche s'inscrit dans la catégorie des « sharp-interface IBM ».

Plusieurs méthodes de ce type ont vu le jour. Les méthodes diffèrent dans la technique

choisie pour interpoler les valeurs. Dans l'article [28], une comparaison de plusieurs types d'extrapolation pour les conditions limites de Dirichlet est proposée et l'article [27] propose une généralisation de la technique d'interpolation pour des conditions limites de Neumann et de Dirichlet.

Dans le domaine de l'acoustique, une méthode d'ordre 2 a été utilisée par Luo *et al.* [55] pour la simulation de l'interaction des cordes vocales humaines en vibration avec le fluide dans le but de comprendre la production du son dans le larynx. Ce dernier est modélisé en deux dimensions, par un conduit vocal fluide en interaction avec des solides élastiques. Le solveur fluide modélise des frontières mobiles élastiques et sera expliqué plus tard dans cette partie. Couplé au premier, le solveur solide linéarise les frontières à faibles déformations. Les conditions limites sont segmentées, c'est-à-dire que le déplacement est imposé sur une partie de la frontière et une traction est imposée sur le reste. Ces deux conditions limites font l'objet d'implémentations différentes.

- La condition en déplacement est la condition la plus simple à implémenter. Représentée sur la figure 1.9a, elle consiste à appliquer une condition de Dirichlet par la méthode du point-miroir interpolée à l'ordre 1 par rapport à la frontière et le stencil en bleu. À chaque point fantôme est associé un point-image (aussi appelé point-miroir) symétrique par rapport à la frontière. Une relation est ensuite appliquée à partir des valeurs au point-image ainsi qu'à la frontière pour obtenir celle au point fantôme.
- La force de traction, quant à elle, correspond à une condition de Neumann. Comme représenté sur la figure 1.9b, elle est implémentée en utilisant une interpolation par minimisation de l'erreur au sens des moindres carrés pondérés à partir d'un polynôme d'ordre 3 et des valeurs du stencil (constitué des points inclus dans un cercle de rayon R). Le rayon est adaptatif afin d'assurer un nombre de points suffisant. La résolution globale est d'ordre 2 dans le domaine solide.

La seconde utilisation dans un domaine acoustique de problème de minimisation de l'erreur au sens des moindres carrés pour modéliser une frontière mobile est présentée dans l'article [75] pour des ordres de résolution plus élevés que ceux présentés précédemment. Cet article porte sur le calcul de la diffraction acoustique provoquée par un objet solide dans un fluide en écoulement à faible nombre de Mach. Dans cette méthode, l'IBM utilisée est héritée de [59]. L'article [75] présente la méthode d'interpolation par minimisation de l'erreur plus modulable pour des problèmes avec des objets multiples rapprochés ou des géométries complexes résolus à ordre élevé, que la méthode par point-image. Pour

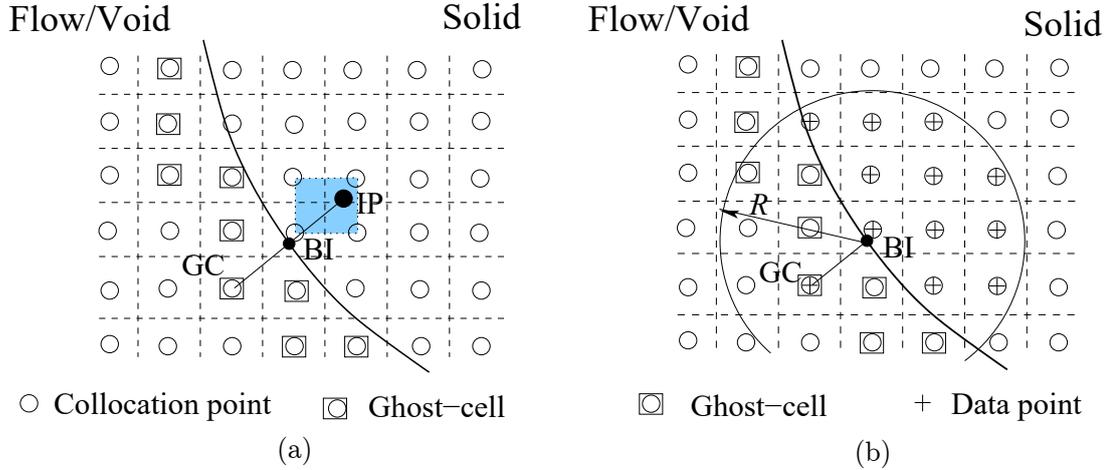


FIGURE 1.9 : Représentation des stencils des méthodes IBM associées au solveur du domaine solide pour deux types de conditions limites (a) la condition de déplacement : le stencil est représenté en bleu ; (b) la condition de traction : les points de stencil sont les points physiques inclus dans le cercle de rayon R . GC est le point fantôme considéré. BI est le point appartenant à la droite normale à la frontière passant par le point GC . IP est le point-image utile uniquement à la condition limite de déplacement. La figure est extraite de [55].

atteindre des ordres plus élevés avec la méthode par point-image, d'autres points images secondaires doivent être ajoutés au point image principal. Les distances seraient des multiples de la distance entre la frontière et le point image principal, le long de l'axe normal à la frontière passant par le point fantôme. Pour chacun de ces points, un stencil de points réels plus grand est nécessaire. Les stencils d'interpolation pour la méthode par point-image peuvent facilement intercepter un autre obstacle de par leur grande taille et sont donc généralement restreint à des résolutions d'ordre 2.

L'article [23] répond également à la problématique de proposer une méthode d'ordre élevé associée à une analyse de la convergence de la méthode. La méthode consiste à coupler une extrapolation polynomiale et un multiplicateur de Lagrange pour implémenter la condition limite. Cette méthode nécessite la détermination d'un stencil de points dans le domaine physique sur lesquels les valeurs du polynôme devront s'approcher, tout en utilisant le multiplicateur de Lagrange sur le point de la frontière pour ajouter la contrainte de la condition limite sur le calcul du polynôme. Le nombre de points du stencil est volontairement étendu dans le but d'obtenir un système sur-contraint, résolu par minimisation de l'erreur au sens des moindres carrés.

L'enjeu des frontières immergées est commun aux problèmes à frontière complexe et

à frontière mobile. Les méthodes utilisées sont proches et permettent parfois de résoudre les deux types de problème, mais la majorité des méthodes développées exploitent des frontières complexes et immergées au détriment des frontières mobiles, complexes ou non. Ainsi, assez peu d'IBM avec forçage discret se sont spécifiquement attardées sur les problèmes à frontières mobiles avec des ordres élevés.

À un ordre 2, l'article [59] propose une méthode pour frontière mobile (également utilisée pour le solveur fluide dans l'article [55], décrit précédemment). Les spécificités des problèmes à frontières mobiles par rapport aux frontières immobiles vis-à-vis des IBM est le changement de statut des points. Avec le mouvement de la frontière, certains points physiques peuvent traverser la frontière et devenir fantôme, tandis que des points fantômes entrent dans le domaine réel. En frontière immobile, les valeurs des points fantômes sont calculées à chaque étape temporelle et ne nécessitent pas d'historique de valeur au point considéré. Ainsi, pour les points nouvellement fantômes, les techniques associées aux méthodes pour les frontières immobiles peuvent être utilisées. En effet, la méthode par point-image associée à un problème aux moindres carrés contraints mobiles est implémentée à l'ordre 4 dans l'article [88] pour un contexte de diffusion acoustique.

En revanche, la valeur des points devenus récemment physiques nécessitent un historique, à savoir une valeur à l'instant précédent pour réaliser l'intégration temporelle. Cette valeur historique peut être déterminée grâce à une interpolation à partir des points voisins réels à l'instant précédent (ayant donc une ancienneté). Cette approche est réalisée à l'ordre 2 dans les articles [28, 55, 59]. Une autre approche est de conserver la valeur donnée à l'étape précédente quand le point avait le statut fantôme. Dans l'article [91], qui propose une méthode d'ordre 3 pour des problèmes avec des frontières mobiles, c'est cette seconde approche pour les points nouvellement physiques qui est utilisée, et cela, pour les équations d'Euler. En revanche, le remplissage des points fantômes ainsi que la prise en compte de la frontière immergée requièrent l'utilisation d'une technique inédite. Les points fantômes n'ont pas l'usage habituel servant à implémenter la condition limite, mais donnent une valeur aux points nouvellement réels. La condition limite est implémentée grâce à une frontière de substitution qui est constituée des points réels les plus proches de la frontière physique, comme représentée sur la figure 1.10. Une condition limite de substitution est ensuite calculée à partir du développement de Taylor de la condition limite, associé à l'équation d'évolution puis appliquée à la frontière de substitution. Les expressions sont données dans l'article pour des approximations d'ordre 1 à 3. Des schémas numériques décentrés sont alors utilisés au voisinage de la frontière de substitution. Dans

le cas où des points nouvellement réels interviennent, le remplissage des points fantômes est alors réalisé en faisant concorder les schémas numériques biaisés utilisant la condition limite de substitution et un schéma numérique centré mettant en jeu les valeurs des points fantômes.

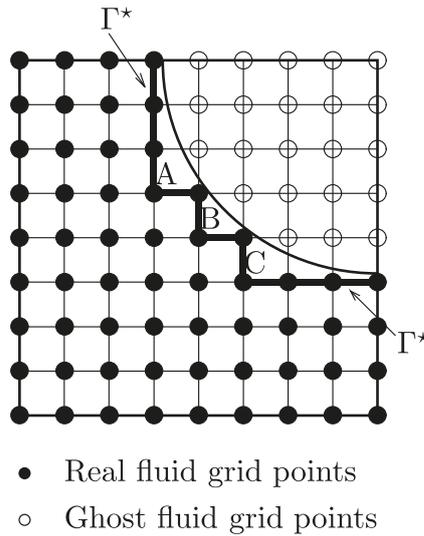


FIGURE 1.10 : La frontière réelle est remplacée par une frontière de substitution Γ^* qui est constituée des points réels ayant au moins un point voisin hors du domaine réel. La figure est extraite de [91].

1.1.3 Conclusion sur le type de méthodes

Comme décrit dans les paragraphes précédents, les méthodes adaptées à l'implémentation de conditions limites sur des frontières immergées mobiles sont multiples. Pour comprendre les enjeux, liés à la résolution de problème à frontière mobile en acoustique, plusieurs méthodes sont choisies parmi celles-ci et seront implémentées sur un premier cas-test. L'argumentation du choix parmi ces méthodes est l'objet de cette partie.

Pour permettre de faire un choix, des critères liés au type de problème que nous souhaitons résoudre sont définis. Pour rappel, le type de problèmes concernés dans ce manuscrit est celui de la propagation d'onde dans un milieu fluide en contact avec un objet vibrant. Du point de vue numérique, nous avons choisi de nous concentrer sur la résolution d'équation par différences finies. Les contraintes que nous posons sont :

- un ordre de convergence d'ordre 4 ;
- une frontière précisément localisée ;

— un coût de calcul raisonnablement faible.

Différents points de comparaison des méthodes précédemment exposées sont résumés dans le tableau 1.2 et seront explicités et mis en regard des critères liés au type de problème que nous souhaitons résoudre. Dans les paragraphes suivants, les arguments seront traités un à un afin de déterminer une méthode OGM et une méthode IBM à implémenter sur le premier cas-test.

Méthode	Intérêt	Limite
OGM : maillage par grilles superposées et adaptatives	<ul style="list-style-type: none">- rapidité d'implémentation- implémentation directe des conditions limites- possibilité d'atteindre des ordres élevés	<ul style="list-style-type: none">- stabilité numérique dépendant du maillage- projection et interpolation coûteuses
IBM par forçage continu	<ul style="list-style-type: none">- utilisation d'une grille cartésienne unique- possibilité d'atteindre des ordres élevés	<ul style="list-style-type: none">- « étalement » de la frontière- implémentation à des ordres élevés peu triviale
IBM par forçage discret	<ul style="list-style-type: none">- utilisation d'une grille cartésienne unique- condition limite précisément localisée sur la frontière- possibilité d'atteindre des ordres élevés	<ul style="list-style-type: none">- implémentation non triviale

TABLE 1.2 : Comparaison des différentes méthodes permettant d'implémenter une condition limite sur une frontière mobile.

L'utilisation de grille structurée cartésienne est favorisée par l'utilisation des schémas numériques DRP [81] permettant de diminuer les effets de dispersion de la phase et d'erreur de dissipation. De ce point de vue, l'OGM avec un maillage par grilles superposées et adaptatives permet à la fois de prendre en compte le mouvement de frontière par translation et l'utilisation de grilles structurées cartésiennes. En effet, les OGM par grilles superposées et adaptatives évitent de recourir à la génération d'un nouveau maillage complet à chaque pas temporel, à la différence des autres méthodes OGM comme représentées dans le tableau 1.1. Toutes les méthodes IBM par forçage discret ou continu peuvent être implémentées sur une grille unique structurée cartésienne. Ainsi l'argument concernant la possibilité d'implémentation de la méthode sur des grilles structurée cartésienne ne permet pas de distinguer les méthodes IBM.

Le second argument permettant de comparer les méthodes entre elles est celui de l'implémentation à ordre élevé. Afin d'assurer la faible dispersion et dissipation du calcul de la propagation acoustique, des schémas d'ordre élevé sont choisis. Afin de ne pas détériorer l'ordre global de la résolution numérique des équations, une modélisation des frontières mobiles à un ordre correspondant aux schémas numériques est privilégiée. Les OGM ne possèdent fondamentalement pas de limitation concernant l'ordre de modélisation des frontières mobiles. Il est également possible de modéliser les frontières avec des ordres élevés pour les IBM par forçage discret et continu. En revanche, les enjeux de chacune de ces méthodes à ordre élevé sont différents. Pour les IBM à forçage continu, les limitations de l'ordre de convergence concernent la discrétisation de la fonction δ . Néanmoins, des méthodes d'ordre élevé ont récemment vu le jour [76, 87]. Pour les IBM par forçage discret, l'ordre de convergence a une influence sur la taille du stencil de points réels utile pour estimer la valeur de chaque point fantôme. En particulier, cela pose des problèmes pour certaines géométries complexes avec des courbures convexes, des angles aigus ou encore lorsque plusieurs objets sont immergés dans le fluide proches les uns des autres. Dans ces situations, le nombre de points disponible dans le domaine n'est pas suffisant pour construire le stencil pour les méthodes d'ordre élevé.

Un troisième point de comparaison entre les différentes méthodes est la localisation de la frontière. L'IBM par forçage continu nécessite la présence d'une fonction δ de distribution qui « étale » la frontière sur les points Eulériens voisins. Or en acoustique, si une condition limite n'est pas appliquée précisément du point de vue spatial, un déphasage dans la solution peut apparaître. Cela constitue un argument favorisant l'utilisation des autres méthodes que les IBM à forçage continu. En dépit de cet argument, des articles ont choisi le compromis d'utiliser les IBM par forçage continu pour des problèmes acoustiques de frontières immergées, en particulier immobiles [13, 50, 53, 78, 90]. L'enjeu des frontières mobiles dans le domaine acoustique pour les méthodes IBM à forçage continu est encore assez peu abordé dans la littérature, à la connaissance des auteurs. L'article [87] présente l'une de ces méthodes pour une résolution d'un problème en aéroacoustique. Les méthodes IBM par forçage discret, autrement appelée « sharp-interface method », quant à elles, évitent spécifiquement ce problème en modélisant la frontière immergée à sa localisation précise.

L'ensemble des méthodes présentées répondent au même besoin. Par conséquent, elles ont des « ingrédients » en commun, qui se retrouvent à des étapes différentes dans chacune des méthodes. Pour comparer les méthodes vis-à-vis de la facilité d'implémentation, il

est intéressant de comparer différentes étapes clé équivalentes entre elles : la prise en compte du type de condition limite et le passage des variables Lagrangiennes aux variables Eulériennes.

Les méthodes IBM par forçage continu modélisent la physique des frontières, en implémentant directement les équations spécifiques dans les domaines de frontière. Tandis que les IBM par forçage discret et les OGM utilisent des conditions limites de type Dirichlet, Neumann ou mixte dans le but de modéliser les effets de la frontière sur le fluide.

Le passage des variables Lagrangiennes de la frontière aux variables Eulériennes de la grille est obtenu, pour les OGM, par l'association d'une grille fixe cartésienne (constituant la partie Eulérienne des points du domaine) et d'une grille adaptative déformable en fonction de la frontière (constituant la partie Lagrangienne des points du domaine). Le passage de l'une à l'autre des grilles est réalisée par une interpolation à l'endroit de la superposition entre différentes grilles. L'étape équivalente en IBM par forçage discret est réalisée en utilisant une extrapolation à partir des points réels et du point de la frontière pour remplir les points fantômes. Pour les IBM par forçage continu, cette étape est réalisée en utilisant une fonction δ . L'utilisation de la fonction δ simplifie l'implémentation du traitement de frontière mobile, car elle évite l'utilisation de schéma d'interpolation alourdissant l'implémentation de la condition limite. Cet avantage est compensé par une baisse de précision sur la localisation de la frontière et par une difficulté d'adaptation de la méthode aux ordres élevés. C'est pour cette raison que nous choisissons d'écarter les IBM par forçage continu des méthodes à considérer pour le type de problème que nous résolvons.

Pour comparer les types de méthodes sur un même cas-test de propagation d'onde en interaction avec une frontière mobile en translation, nous avons sélectionné une OGM par grilles superposées et adaptatives et une IBM par forçage discret.

L'IBM par forçage discret sélectionnée est l'approche par points fantômes de la méthode [23]. Nous avons choisi cette méthode en tant que point de départ des méthodes IBM par forçage discret étudiées dans ce travail, car c'est une méthode d'ordre élevé, dont des exemples d'utilisation sont présentés avec une résolution à l'ordre 5. De plus, cette méthode permet l'utilisation d'un large panel de conditions limites. Enfin, le traitement de frontière est présenté en tant que « boîte noire », c'est-à-dire qu'il est indépendant du reste du calcul de la résolution. Cet algorithme se montre efficace pour des calculs bidimensionnels avec des frontières de géométrie complexe, arbitraire, mais immobile. Cette méthode présente de nombreux atouts vis-à-vis du type de problème que l'on veut résoudre, mais il

nécessite un travail d'adaptation et de validation pour son utilisation avec des frontières mobiles. L'adaptation de la méthode sera détaillée du point de vue numérique dans le paragraphe 1.2.6.

1.2 Comparaison des méthodes pour les équations d'Euler linéarisées

Parmi les méthodes présentées précédemment, une IBM et une OGM sont choisies. Ces deux méthodes sont prises en main et implémentées pour la résolution des équations d'Euler linéarisées avec frontière mobile à l'ordre 4. L'erreur associée à chaque méthode est ensuite discutée.

Le problème unidimensionnel traité dans cette partie est celui de la propagation d'une impulsion gaussienne dans un tube contenant à son extrémité droite un piston mobile. Une représentation schématique du système est présentée sur la figure 1.11. Le piston impose un mouvement oscillant dans un tube de même section et de longueur infinie (voir figure 1.12). À $t = 0$, un pulse acoustique commence à se propager dans le domaine et sa réflexion par le piston est au cœur de l'étude. Le problème traité est un problème en ondes planes et la propagation est observée entre $x = 0$ et $x = L$.

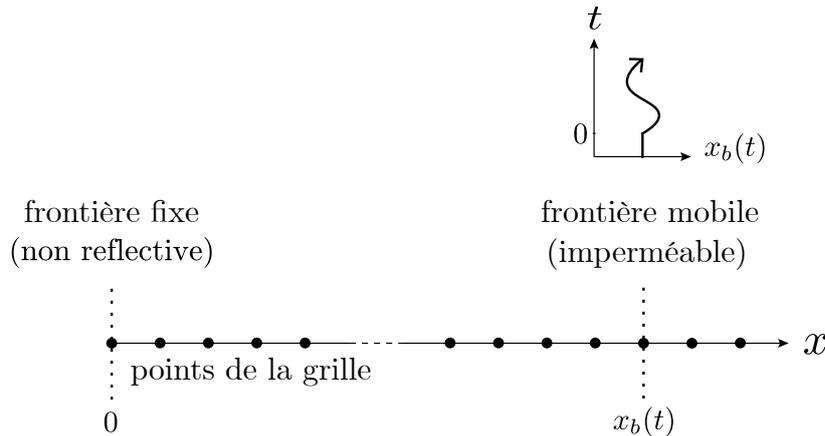


FIGURE 1.11 : Description du cas-test 1D, qui consiste à étudier la propagation d'ondes dans un domaine, dont l'extrémité à droite a un mouvement $x_b(t)$ et l'extrémité gauche est une condition fixe de non-réflexion.

Le mouvement de la frontière est décrit par les équations générales de position x_b , de

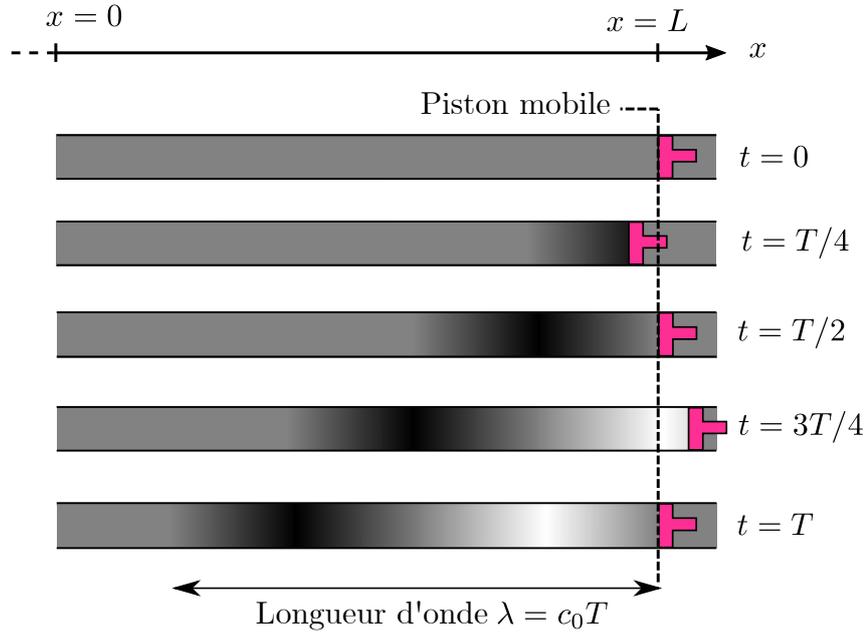


FIGURE 1.12 : Source de débit acoustique.

vitesse v_b et d'accélération a_b suivantes :

$$x_b(t) = x_{b0} - d_b[\cos(\omega t) - 1] H(t) , \quad (1.1a)$$

$$v_b(t) = \omega d_b \sin(\omega t) H(t) , \quad (1.1b)$$

$$a_b(t) = \omega^2 d_b \cos(\omega t) H(t) , \quad (1.1c)$$

où x_{b0} est la position du piston à $t = 0$ et qui varie entre x_{b0} et $x_{b0} - 2d_b$ en fonction du temps. d_b et ω sont respectivement l'amplitude et la fréquence angulaire des oscillations. $H(t)$ est la fonction d'Heaviside.

1.2.1 Équations d'Euler linéarisées

Les équations d'Euler sont ici considérées pour résoudre la propagation dans un domaine contenant des frontières mobiles. Ces équations peuvent être linéarisées en faisant l'hypothèse que les perturbations acoustiques sont faibles au regard de leurs composantes statiques.

Cette hypothèse de linéarisation repose sur le fait que les grandeurs physiques mises en jeu lors de la propagation acoustique peuvent s'écrire comme la somme d'une composante statique (fluide au repos) et d'une perturbation acoustique. Or, si la frontière est en

mouvement, le fluide n'est pas au repos. Les conditions de linéarisation ne sont donc pas satisfaites, et cela, même pour de faible amplitude du mouvement de la frontière.

Pour ce cas-test, on distingue le modèle numérique de la physique, au regard de laquelle le problème est intrinsèquement non linéaire à cause de l'absence de fluide au repos. Il est en revanche envisageable de réaliser une étape intermédiaire dans le développement du modèle numérique, qui ne satisfait pas la physique du problème, mais qui permet de valider certains outils numériques du modèle. C'est le cas de ce cas-test grâce à la résolution des équations linéarisées qui permet de comparer la solution numérique avec une solution analytique.

La propagation d'ondes linéaires planes dans le domaine considéré est donc régie par les équations d'Euler linéarisées. Ces équations sont écrites sous la forme d'un système reliant la pression acoustique p et la vitesse acoustique u :

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.2a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.2b)$$

avec ρ_0 la masse volumique de l'air au repos et c_0 la célérité du son dans l'air.

Ce système d'équations est obtenu en linéarisant l'équation de conservation de la masse couplée à l'équation d'état, ainsi que l'équation d'Euler, sans pertes en fluide homogène. L'hypothèse de l'acoustique linéaire consiste à considérer que les perturbations acoustiques (p, ρ, u) sont faibles en regard de leurs composantes statiques associées (respectivement P_0, ρ_0 et c_0) : $\frac{p}{P_0} \sim \frac{\rho}{\rho_0} \sim \frac{u}{c_0} \ll 1$.

1.2.2 Techniques choisies en FDTD

L'équation d'Euler est résolue en utilisant la technique FDTD (différences finies dans le domaine temporel) servant de base au travail mené dans chacun des chapitres suivants. Les schémas d'approximation des dérivées spatiales ainsi que les schémas d'intégration sont présentés. Afin d'assurer la faible dispersion et dissipation du calcul de la propagation acoustique, des schémas d'ordre élevé sont choisis.

Dérivation spatiale

Les schémas de différences finies permettent d'approximer les dérivées spatiales à partir d'un stencil de points séparés d'une distance uniforme Δx . Pour un schéma centré sur

$2M+1$ points, la dérivée spatiale d'une grandeur u en un point de coordonnée x_ℓ formalisée selon la méthode de différences finies s'écrit :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_\ell} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{m=-M}^M a_m u(x_\ell + m\Delta x), \quad (1.3)$$

où a_k sont les coefficients du schéma avec généralement $a_0 = 0$ et $a_{-m} = a_m$. Dans le cadre du travail présenté dans ce manuscrit, le schéma centré utilisé est le schéma sur sept points, proposé par Tam et Webb en 1993 [81]. Ce schéma a été développé afin de résoudre les équations d'Euler linéarisées en prêtant une attention particulière à la conservation de la relation de dispersion (DRP). Il s'agit d'un schéma d'ordre 4.

Pour les points au voisinage des frontières, des schémas décentrés sur sept points d'ordre 4 sont utilisés pour approcher le calcul des dérivées comme représenté sur la figure 1.13. Les coefficients de ces schémas DRP sont reportés en annexe de l'article de Tam et Dong de 1993 [80].

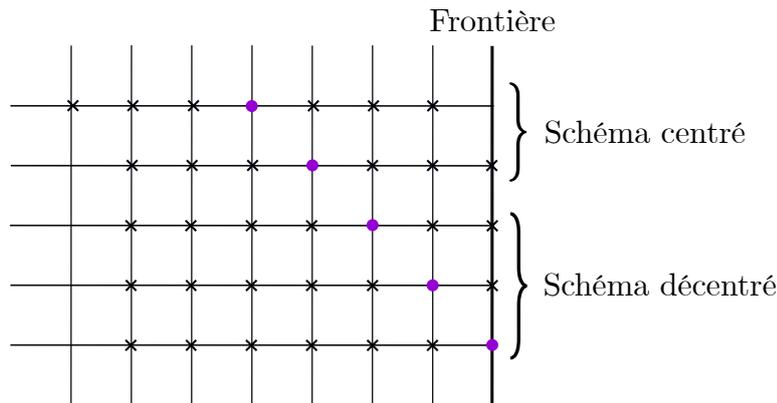


FIGURE 1.13 : Représentation des stencils schématisés par des croix pour le calculs de dérivation aux différents points schématisés par des points circulaires. Pour le calcul de dérivée à un point trop proche de la frontière, le schéma se décentre.

Intégration temporelle

Pour conserver l'ordre global de 4, l'intégration temporelle est réalisée grâce à un algorithme de Runge–Kutta à quatre sous-étapes d'ordre 4. L'équation à résoudre à l'instant t_ℓ est du type :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t_\ell} = F(t_\ell, u) \quad (1.4)$$

Pour calculer l'intégration temporelle de u entre les instant $(n + 1)\Delta t$ et $n\Delta t$, où Δt est le pas de temps, le calcul suivant est appliqué :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 = F(t_n, u_n), \\ k_2 = F(t_n + \frac{\Delta t}{2}, u_n + \frac{\Delta t}{2}k_1), \\ k_3 = F(t_n + \frac{\Delta t}{2}, u_n + \frac{\Delta t}{2}k_2), \\ k_4 = F(t_n + \Delta t, u_n + \Delta tk_3). \end{cases}, \quad (1.5)$$

Pour assurer la stabilité de l'intégration temporelle, le pas de temps Δt est sujet à la condition de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL). Le nombre de CFL $\lambda_{\max}\Delta t/\Delta x$ doit être suffisamment petit, pour que $\lambda_{\max} = \max |\lambda_i|$ soit la vitesse de phase de l'onde la plus rapide supportée par les équations d'Euler. En pratique $\lambda_{\max} = c_0$ est choisie.

Filtrage sélectif

Bien qu'aucun filtrage ne soit appliqué dans les travaux présentés dans ce manuscrit, il est souvent utilisé lors du développement de ces méthodes numériques. Le filtrage sert à absorber les ondes hautes fréquences issues de l'erreur de troncature associées aux schémas numériques d'ordre 4.

Le filtrage d'une variable u au point x peut s'écrire selon Berland *et al.* [4] :

$$u^f(x) = u(x) - \sigma_f D(x), \quad (1.6)$$

où σ_f est le coefficient de filtrage constant, compris entre 0 et 1. Les schémas de filtrage sélectif choisis sont centrés sur $2N + 1$ points, $D(x)$ est donc donné par :

$$D(x) = \sum_{k=-N}^N d_k (x + k\Delta x), \quad (1.7)$$

où d_k sont les coefficients du filtre.

Le filtre s'applique sur 7 points centrés (SF₃₃) sur les points intérieurs. Au voisinage des frontières, les stencils des filtres appliqués sont représentés sur la figure 1.14. Il permet donc de filtrer jusqu'au quatrième point en partant de la frontière. Le troisième point au voisinage de la frontière est filtré à partir d'un filtre sur 5 points centrés (SF₂₂) standard et enfin un filtre sur 3 points centrés (SF₁₁) standard est utilisé pour le deuxième point au voisinage de la frontière.

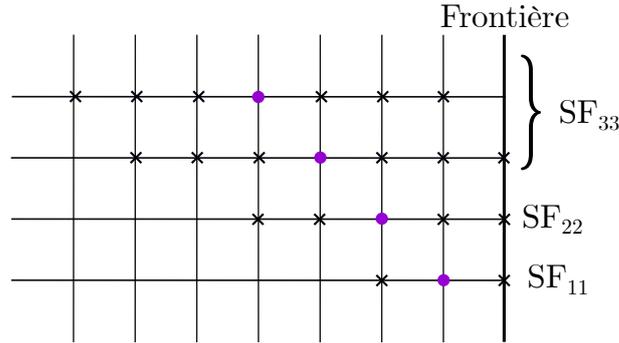


FIGURE 1.14 : Représentation des stencils des filtres employés au voisinage de la frontière.

1.2.3 Conditions initiales

Le pulse acoustique qui se réfléchit sur la frontière mobile est localisé initialement au milieu du domaine, en $x = L/2$. Les conditions initiales sont définies comme suit :

$$p(x) = A \frac{x - L/2}{w} \exp \left[\frac{-(x - L/2)^2}{2w^2} \right], \quad (1.8a)$$

$$u(x) = \frac{1}{\rho_0 c_0} p(x), \quad (1.8b)$$

où A et w sont respectivement les amplitudes et la demi-largeur du pulse. La figure 1.15 représente cette condition initiale. La pulsation des oscillations de la frontière est choisie à $\omega = 6\pi$. La demi-largeur du pulse initial vaut $w = L/20$. L'amplitude A du pulse est choisie afin d'être du même ordre de grandeur que celui des oscillations de la frontière. Bien que les équations soient linéaires, le comportement à la frontière ne l'est pas, dans la mesure où la solution dépend de l'amplitude du mouvement de la frontière. Si l'amplitude est plus grande que $2\Delta x$ par exemple, plusieurs points pourraient entrer et sortir du domaine au cours d'une oscillation, ce qui peut affecter les résultats. Pour cette première validation, on s'assurera que pas plus d'un point ne rentre dans le domaine au cours d'une oscillation. De plus l'amplitude d_b doit être faible en regard de Δx dans le but de localiser le mouvement de la frontière à plusieurs positions distinctes au sein d'un même pas Δx .

L'amplitude d_b des oscillations de la frontière est alors choisie très petite, i.e. $d_b = 10^{-10}$, pour que l'amplitude des ondes de vitesse directement issues du mouvement de la frontière vaille $\omega d_b = 1.88 \cdot 10^{-9}$ et $A \approx 1.18 \cdot 10^{-8}$.

Le travail est mené avec des paramètres adimensionnels. Pour définir l'échelle des décibels, la pression de référence $p_{\text{ref}} = 2 \times 10^{-5}$ Pa est divisée par $\rho_{\text{ref}} c_{\text{ref}}^2$ où $\rho_{\text{ref}} =$

1.16 kg/m^3 et $c_{\text{ref}} = 347 \text{ m/s}$ sont respectivement la densité et la célérité de l'air dans les conditions normales de température et de pression.

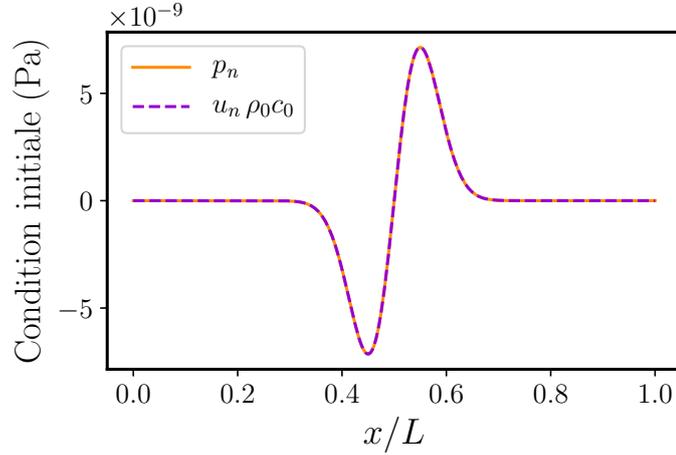


FIGURE 1.15 : Condition initiale pour le pulse acoustique avec une amplitude $A \approx 1.18 \cdot 10^{-8}$ et la demi-largeur $w = L/20$.

1.2.4 Conditions aux limites imperméables

La frontière en $x = x_b(t)$ est un piston mobile imperméable pour lequel la condition limite associée est imperméable. La théorie des équations hyperboliques démontre que pour un mur imperméable, seule la vitesse normale du fluide doit être prescrite afin d'obtenir une solution numérique unique [34]. La condition en $x = x_b(t)$ est alors écrite :

$$u_b(x_b(t), t) = v_b(t_i). \quad (1.9)$$

Le point d'application $x_b(t)$ de cette condition limite dépend du temps.

1.2.5 Condition aux limites de non-réflexion

Les conditions de non-réflexion sont implémentées en utilisant la méthode des caractéristiques [33]. L'utilisation des caractéristiques implique de décrire la condition limite en termes de réflexion. Le système d'équations d'Euler est diagonalisé à la frontière afin que les solutions soient discriminées selon leur sens de propagation suivant x . Les solutions sont également appelées « ondes caractéristiques ».

Les équations (1.2) peuvent être réécrites sous la forme matricielle non conservative suivante [51] :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad \text{où } \mathbf{q} = \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}, \quad \text{et } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \rho_0 c_0^2 \\ \frac{1}{\rho_0} & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

La matrice \mathbf{A} est diagonalisable telle que $\mathbf{A} = \mathbf{W} \mathbf{\Omega} \mathbf{W}^{-1}$,

$$\text{avec } \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho_0 c_0 & -\rho_0 c_0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} c_0 & 0 \\ 0 & -c_0 \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Le système (1.10) est réécrit en introduisant cette transformation et en effectuant le changement de variable suivant :

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{q}, \quad (1.12)$$

afin d'obtenir le système d'équations :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial x} = \mathbf{0}. \quad (1.13)$$

où $\mathbf{\Omega}$ est une matrice diagonale. Le système contient deux équations de transport découplées :

$$\frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial t} + \lambda_n \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial x} = 0, \quad \text{pour } n \in [1; 2]. \quad (1.14)$$

Cette équation de transport régit l'évolution de chaque onde caractéristique, dont la vitesse de phase associée correspond à la valeur propre $\pm c_0$. Le signe de la vitesse de phase permet de connaître le sens de propagation des ondes caractéristiques, dans le sens des x croissants et décroissants $\tilde{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \tilde{q}^+ \\ \tilde{q}^- \end{pmatrix}$.

Le guide d'ondes étant considéré infini, la condition limite numérique en $x = 0$ est une condition de non-réflexion. Le formalisme des caractéristiques est utilisé pour appliquer cette condition. À $x = 0$, la caractéristique sortante est \tilde{q}_o^- et la caractéristique entrante est \tilde{q}_o^+ (figure 2.2). La valeur de la caractéristique sortante, obtenue à partir de l'équation (1.12), s'exprime comme suit :

$$\tilde{q}_o^- = -\frac{1}{2\rho_0 c_0} p_o + \frac{1}{2} u_o, \quad (1.15)$$

où les valeurs des champs p_o et u_o sont les valeurs au point de la frontière en $x = 0$.

Afin qu'aucune onde ne se propage dans le sens des x croissants, la caractéristique entrante doit être nulle :

$$\tilde{q}_o^+ = 0. \quad (1.16)$$

En appliquant le changement de variable inverse de l'équation (1.12) aux équations (1.15) et (1.16), les expressions des valeurs de pression et vitesse acoustique à imposer en $x = 0$ sont obtenues. Elles mettent en jeu uniquement la caractéristique sortante :

$$\tilde{p}_o = -\rho_0 c_0 \tilde{q}_o^-, \quad (1.17a)$$

$$\tilde{u}_o = \tilde{q}_o^-. \quad (1.17b)$$

Il est intéressant de noter qu'en exprimant la pression et la vitesse à imposer en fonction des valeurs extrapolées en $x = 0$, il vient :

$$\tilde{p}_o = \frac{1}{2}(p_o - \rho_0 c_0 u_o), \quad (1.18a)$$

$$\tilde{u}_o = \frac{1}{2}\left(u_o - \frac{1}{\rho_0 c_0} p_o\right). \quad (1.18b)$$

Cette relation met en avant le couplage entre pression et vitesse acoustique en $x = 0$. L'impédance acoustique est alors égale à l'impédance caractéristique du fluide $Z_c = \rho_0 c_0$.

1.2.6 IBM employée

L'IBM par forçage discret utilisée dans ce premier chapitre est adaptée de la méthode développée par Fernández-Fidalgo *et al.* en 2020 [23] pour des problèmes bi-dimensionnels à frontières immobiles et complexes de formes incurvées. Dans cet article, les équations d'Euler sont résolues à l'ordre 5 pour des conditions limites générales de Robin. Cette méthode permet d'implémenter une condition limite lorsque celle-ci se trouve à une position arbitraire par rapport à la grille cartésienne. Comme évoquée dans la partie 1.1.3, cette méthode possède un certain nombre d'atouts (grille cartésienne unique, condition limite précisément localisée, possibilité d'obtenir des ordres élevés), ce qui en fait un choix pertinent pour son adaptation dans le cas de problèmes acoustiques avec des frontières mobiles. Dans cette partie, aucune amélioration de la méthode n'est proposée. Elle est simplifiée pour un cas unidimensionnel avec une condition limite de Dirichlet à l'ordre 4 et modifiée afin que le point d'application de la condition limite soit mobile.

Cette méthode fait partie des techniques utilisant des points fantômes. Ces points fantômes sont des points ajoutés en dehors du domaine physique qui ont un double intérêt : (i) appliquer les schémas de dérivation centrés dans l'ensemble du domaine numérique et (ii) imposer la condition limite à x_b . Cela est réalisé en attribuant une valeur soigneusement choisie à la solution sur les points fantômes. Pour cela, une extrapolation polynomiale des valeurs des champs autour de la frontière est réalisée. Il s'agit alors de résoudre un problème d'optimisation aux moindres carrés contenant un multiplicateur de Lagrange. Cette extrapolation polynomiale permet de construire un polynôme passant par un stencil de points réels. L'utilisation du multiplicateur de Lagrange permet de contraindre la fonction extrapolée à vérifier la condition limite au point de la frontière. Cette méthode est appelée la technique de « Reconstruction Off-site Data » et est nommée ROD dans ce manuscrit.

Le polynôme de reconstruction acoustique est écrit sous la forme :

$$\tilde{\phi}(x) = \sum_{n=0}^d a_n \psi^n(x) , \quad (1.19)$$

où a_n sont les coefficients du polynôme d'extrapolation, $\psi(x) = \frac{x-x_{\text{ref}}}{\Delta x}$ est la fonction de forme et x_{ref} est la position d'un point de référence choisi arbitrairement (dans ce cas $x_{\text{ref}} = x_b$), avec d le degré du polynôme. Le degré du polynôme est choisi de même valeur que l'ordre de convergence, soit $d = 4$. Le vecteur \mathbf{a} contient $n_d = d + 1$ inconnues. Il faudra donc au minimum $d + 1$ points de stencil pour obtenir une solution.

Un multiplicateur de Lagrange λ est utilisé afin de contraindre la valeur du polynôme de reconstruction à la condition limite de Dirichlet. Cela s'apparente à ajouter une équation au système. Le remplissage du point fantôme s'effectue donc nécessairement à partir de la résolution d'un système surdéterminé. Le nombre de points de stencil choisi pour le problème unidimensionnel d'optimisation au sens des moindres carrés est l'entier le plus proche de $N_d = \frac{3}{2}n_d$. Ici, $N_d = 7.5$, donc huit points de stencil sont choisis pour la reconstruction polynomiale contrainte par le multiplicateur de Lagrange.

Le schéma de différences finies choisi pour ce travail est un schéma DRP centré d'ordre 4 sur sept points, par conséquent trois points fantômes sont nécessaires. Pour une frontière localisée à la position $x_b(t)$, les trois points fantômes sont les trois points d'abscisse x_g les plus proches de la frontière, tels que $x_g \geq x_b(t)$. Les points de stencil localisés à l'abscisse x_{s_c} sont les huit points les plus proches tels que $x_{s_c} < x_b(t)$. Le stencil de points est constitué des premiers points les plus proches de la frontière et il est identique pour

tous les points fantômes. Un exemple de la répartition des points est représenté sur la figure 1.16.

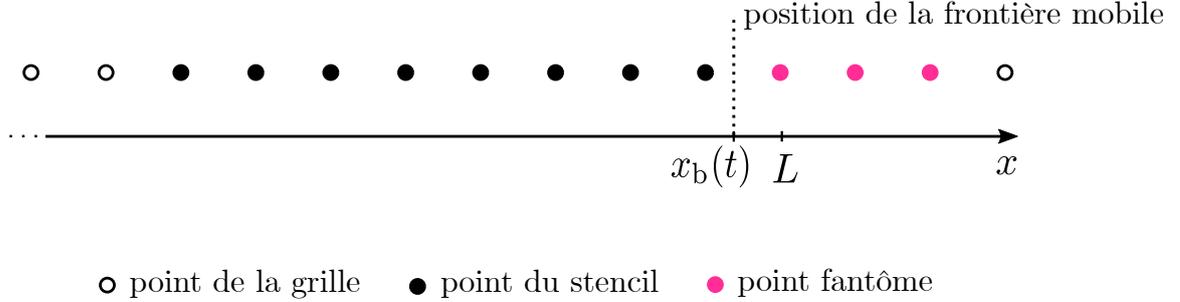


FIGURE 1.16 : Exemple de répartition des points en fonction de la position de la frontière $x_b(t)$.

Les coefficients a_n de l'extrapolation de l'expression (1.19) sont obtenus en minimisant la fonction coût suivante :

$$\mathcal{C}(\mathbf{a}, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N_d-1} [\phi_m - \tilde{\phi}(x_m)]^2 + \lambda [\tilde{\phi}(x_b) - s] . \quad (1.20)$$

Le premier terme de cette fonction traduit le passage du polynôme interpolé $\tilde{\phi}$ au plus proche des valeurs ϕ_m des points du stencil. Le second terme met en jeu le multiplicateur de Lagrange λ . Il permet à l'extrapolation de satisfaire la condition $\tilde{\phi}(x_b) = s$ au point de la frontière.

En substituant l'expression (1.19) dans l'expression de la fonction coût (1.20), l'équation suivante est obtenue :

$$\mathcal{C}(\mathbf{a}, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{m \in S_c} \left[\phi_m - \sum_{n=0}^d a_n \psi^n(x_m) \right]^2 + \lambda \left[\sum_{n=0}^d a_n \psi^n(x_b) - s \right] . \quad (1.21)$$

La résolution par optimisation revient à déterminer les coefficients a_n et λ tels que cette fonction coût soit minimale pour les valeurs \mathbf{a}_0 et λ_0 , en résolvant :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathbf{a}, \lambda} \right|_{\mathbf{a}_0, \lambda_0} = 0 , \quad (1.22)$$

où les dérivées partielles s'expriment sous les formes suivantes :

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial a_i} = \sum_{m \in S_c} \sum_{n=0}^d a_n \psi^i(x_m) \psi^n(x_m) - \sum_{m \in S_c} \phi_m \psi^i(x_m) + \lambda \psi^i(x_b) , \quad (1.23a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \lambda} = \sum_{n=0}^d a_n \psi^n(x_b) - s . \quad (1.23b)$$

Le système d'équations linéaires à résoudre à partir des expressions des dérivées partielles obtenues donne :

$$\sum_m \sum_n a_n \psi^i(x_m) \psi^n(x_m) + \lambda \psi^i(x_b) = \sum_m \phi_m \psi^i(x_m) , \quad (1.24a)$$

$$\sum_n a_n \psi^n(x_b) = s . \quad (1.24b)$$

Ce système se réécrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^T & 0 \end{array} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{\Psi}^T \boldsymbol{\phi} \\ s \end{pmatrix} , \quad (1.25)$$

où :

$$\Psi_{mn} = \psi^n(x_m) , \quad c_n = \psi^n(x_b) , \quad \boldsymbol{\phi} = \{\phi_m\} . \quad (1.26)$$

Dans le cas de la condition directe, les valeurs de vitesse aux points fantômes sont remplies par la technique ROD en imposant la valeur de la condition limite en vitesse à la frontière. Les valeurs en pression aux points fantômes sont données par l'utilisation d'une extrapolation non contraintes à l'ordre 4.

1.2.7 OGM employée

L'OGM utilisée dans ce premier chapitre repose sur la mise en place d'un maillage par grilles superposées, et adaptatives. Il s'agit de superposer une grille fixe régulière et une grille régulière en mouvement uniforme de translation coïncidente avec la frontière. Les équations d'évolution sont résolues parallèlement sur les deux grilles, et les solutions sont projetées d'une grille à l'autre.

Choix des grilles

Les deux grilles choisies sont représentées schématiquement sur la figure 1.17. La grille fixe discrétise le domaine de 0 à L avec un pas spatial Δx fixe et régulier. La grille mobile est à Δx fixe identique à celui de la grille fixe. Elle recouvre partiellement la grille fixe entre $x \approx L/2$ et $x = x_b$. Les indices des points projetés restent identiques en fonction du mouvement, peu importe la position des grilles. Trois points par grille sont extrapolés afin d'utiliser les schémas numériques de dérivation spatiale à sept points centrés. Les points projetés de la grille mobile sont les trois premiers points de celle-ci. Sur la grille fixe, les points sont choisis par rapport à la position initiale de la grille mobile en anticipant l'amplitude de mouvement maximum (l'amplitude est très petite devant Δx). Les points sont choisis pour que le stencil de la grille opposée n'ait pas de points d'intersection avec les points extrapolés opposés et quelques points supplémentaires sont choisis par sécurité. Enfin, les points du stencil sont au nombre de huit pour chaque extrapolation non contrainte. Chaque point à extrapoler possède son propre stencil des huit points les plus proches sur la grille opposée.

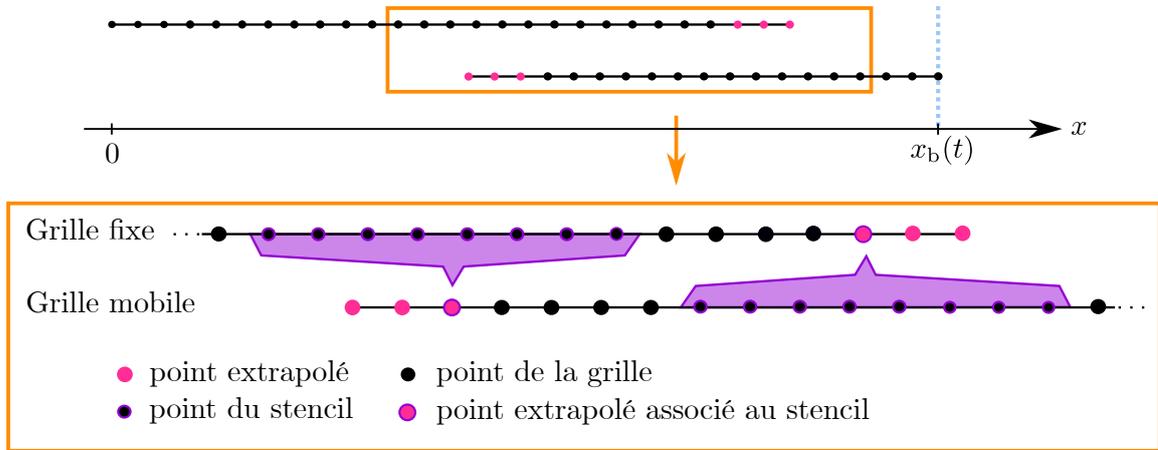


FIGURE 1.17 : Représentation schématique des grilles superposées. L'encadré représente un zoom sur la zone de superposition. Pour un point extrapolé donné (rose entouré en violet) est associé un stencil de points (noir entouré en violet).

Équation d'évolution

La résolution par OGM est schématisée sur la figure 1.18. Sur la grille fixe (à gauche sur le schéma), les équations d'évolution sont les équations d'Euler linéarisées (1.2). Sur la grille mobile, les équations qui régissent la propagation d'onde sont également les équations

d'Euler linéarisées évoquées précédemment, mais la grille étant mobile, il n'est pas possible de résoudre classiquement ces équations sans adaptation. L'adaptation est similaire à la technique de résolution sur un maillage curviligne employée notamment dans la thèse de Dragna en 2011 [20] et dans l'article [47]. On oppose la grille « physique » caractérisée par le système de coordonnées (x, t) , qui est la grille en translation à la vitesse $v_b(t)$ et la grille « numérique » caractérisée par le système de coordonnées (ξ, τ) , qui est une grille fixe, sur laquelle un système d'équations différent s'applique. Ces deux systèmes de coordonnées sont représentés sur la figure 1.19.

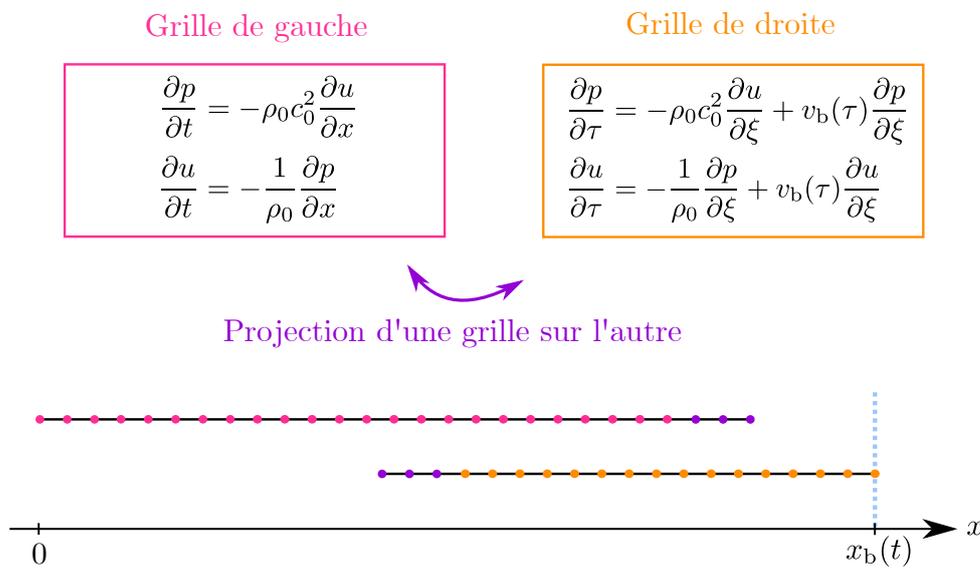


FIGURE 1.18 : Principe de la résolution en parallèle des équations associées à chaque grille.

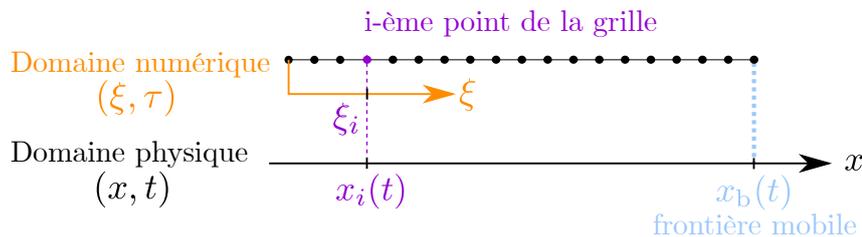


FIGURE 1.19 : Représentation des deux systèmes de coordonnées pour la grille mobile : domaine physique en mouvement de coordonnées (x, t) et domaine numérique fixe de coordonnées (ξ, τ) .

Pour chaque point x_i de la grille mobile, un point ξ_i lui est associé à un instant t selon

les relations suivantes :

$$\xi_i(x_i, t) = x_i - [x_b(t) - x_{b0}], \quad (1.27a)$$

$$\tau(x_i, t) = t, \quad (1.27b)$$

avec x_{b0} la position initiale de la frontière, définie dans l'équation (1.1).

Les règles de différentielles d'une fonction à plusieurs variables et le théorème de dérivation de fonctions composées sont utilisées pour transformer les équations d'Euler linéarisées en utilisant le système de coordonnées (ξ, τ) [2]. Le système d'équations obtenu est :

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = -\rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + v_b(\tau) \frac{\partial p}{\partial \xi} \quad (1.28a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \xi} + v_b(\tau) \frac{\partial u}{\partial \xi}. \quad (1.28b)$$

Les solutions ainsi obtenues sur la grille « numérique » s'expriment pour la grille « physique » comme suit :

$$p(\xi_i, \tau) = p(x_i, t), \quad (1.29a)$$

$$u(\xi_i, \tau) = u(x_i, t). \quad (1.29b)$$

Les systèmes d'équations sont résolus parallèlement sur les deux grilles du maillage composite, comme schématisé sur la figure 1.18. L'extrapolation permet ensuite de faire le lien entre les variables dans chaque grille. Le point de la grille fixe à $x = 0$ et le point de la grille mobile en $x = x_b(t)$ sont respectivement coïncidents à leurs frontières, comme représenté sur la figure 1.18. À gauche du domaine, la condition limite est une condition de non-réflexion résolue grâce aux caractéristiques, tandis qu'à droite du domaine, des résultats sont présentés dans la suite pour des conditions limites imperméables mobiles en condition directe.

1.2.8 Solution analytique du problème unidimensionnel

Pour quantifier l'erreur faite lors de l'utilisation des différentes techniques de frontières immergées, il est nécessaire de présenter une solution analytique de référence du cas-test linéarisé. À partir des équations couplées (1.2), on peut écrire l'équation d'onde en

pression :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 . \quad (1.30)$$

La solution analytique de cette équation peut se mettre sous la forme de deux ondes planes progressives :

$$p(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t) , \quad (1.31)$$

où f et g sont des fonctions représentant respectivement les ondes se propageant dans le sens des x croissants et dans le sens des x décroissants. La forme de la solution pour la vitesse peut alors s'écrire :

$$u(x, t) = \frac{1}{\rho_0 c_0} (f(x - c_0 t) - g(x + c_0 t)) . \quad (1.32)$$

Il s'agit maintenant d'utiliser la condition limite imposée à la frontière mobile pour exprimer l'amplitude de l'onde réfléchie g en fonction de l'onde incidente f .

Sur cette frontière, la condition limite imperméable s'applique. La vitesse de la frontière $v_b(t)$ est imposée au champ acoustique comme suit :

$$\frac{1}{\rho_0 c_0} (f(x_b(t) - c_0 t) - g(x_b(t) + c_0 t)) = v_b(t) , \quad (1.33)$$

ce qui mène à la relation entre les fonctions $g(x_b(t) + c_0 t) = g_b(t)$ et f à la frontière. Il vient :

$$g_b(t) = f(x_b(t) - c_0 t) - \rho_0 c_0 v_b(t) . \quad (1.34)$$

La reconstruction sur l'ensemble du domaine de la solution en pression nécessite la résolution du système d'équations dont les inconnus sont t_0 et $g(x, t)$:

$$x - x_b(t_0) + c_0(t - t_0) = 0 , \quad (1.35a)$$

$$g(x, t) = g_b(t_0) , \quad (1.35b)$$

où t_0 peut être défini comme l'instant où le front d'onde présent en x à t était en x_b . Pour résoudre la première ligne du système, le solveur de Newton–Raphson pré-implémenté dans le module `scipy.optimize` est utilisé.

La fonction f est définie à partir de la condition initiale (1.8).

1.2.9 Calcul de l'erreur par rapport à la solution analytique

Les diagrammes de convergence (abrégée sur les figures par « CV ») qui sont présentés dans la suite de ce manuscrit permettent de visualiser la vitesse à laquelle la solution numérique tend vers la solution analytique du problème considéré. L'évolution de l'erreur est tracée en fonction de $\lambda/\Delta x$ (qui traduit le nombre de points pour la plus petite longueur d'onde considérée).

Dans la présentation suivante, les erreurs sont calculées pour la pression. L'erreur relative E est définie en utilisant la norme Euclidienne de la pression aux points de la grilles :

$$E = \left[\frac{\sum_{k=0}^{N_x-1} (p_k^a - p_k^n)^2}{\sum_{k=0}^{N_x-1} (p_k^a)^2} \right]^{1/2}, \quad (1.36)$$

où p_k^a et p_k^n sont les valeurs de perturbation de la pression acoustique analytique et numérique au k ième point de la grille. N_x est le nombre de points du maillage spatial. L'erreur est calculée à l'instant $T = L/c_0$, qui correspond au moment où le pulse acoustique a été réfléchi sur la frontière à droite et a atteint de nouveau le milieu du domaine.

1.3 Résultat du cas-test

L'objectif de cette partie est de valider l'implémentation des techniques IBM et OGM présentées section 1.2. Ces deux techniques sont comparées et leur comportement en fonction des paramètres de la frontière mobile est discuté.

Pour ce cas-test, le CFL est fixé à $c_0\Delta t/\Delta x = 0.75$. La convergence des résultats numériques est évaluée en cherchant la vitesse avec laquelle l'erreur relative E évolue en fonction de la résolution de la grille, donnée par le nombre de points par longueur d'onde $\lambda/\Delta x$. Le diagramme de convergence est calculé pour des valeurs de Δx comprises entre $\Delta x_{\min} \approx 0.003$ ($N = 300$) et $\Delta x_{\max} \approx 0.038$ ($N = 27$). Cela correspond à $d_b/\Delta x_{\min} = 2.99 \cdot 10^{-8}$ et $d_b/\Delta x_{\max} = 2.6 \cdot 10^{-9}$.

1.3.1 Influence de la position de la frontière

Le mouvement de la frontière est décrit par l'équation (1.1). Les paramètres d_b et x_{b0} permettent de faire varier la position moyenne de la frontière ainsi que son mouvement. Pour comparer le comportement des différentes méthodes en fonction du mouvement de la frontière, trois configurations sont choisies et représentées sur les figures 1.20(a), (b)

et (c). Pour ces trois configurations, l'amplitude du mouvement est constante et est égale à $d_b = 10^{-10}$ sauf pour la configuration 1, où $d_b = -10^{-10}$ afin que la position initiale de la frontière soit en $x = L$ et qu'elle se déplace à gauche de L . L'amplitude de déplacement est choisie très faible en regard de la plus petite valeur de Δx choisie ($\Delta x = 3.3 \cdot 10^{-3}$), de manière à ce qu'au cours de son mouvement la frontière soit localisée sur une zone de Δx . La position initiale de la frontière, comme définie dans l'équation (1.1) pour la première configuration, vaut $x_{b0} = L$. Il s'agit d'une configuration de référence, car c'est la plus favorable quelque soit la méthode utilisée. En effet, les diagrammes de convergence sont calculés pour un nombre de points allant de $N = 27$ à $N = 300$, ce qui correspond à des valeurs de Δx allant d'environ $3.3 \cdot 10^{-3}$ à $3.8 \cdot 10^{-2}$. Dans cette situation $|d_b| \ll \Delta x$ pour toutes les valeurs de Δx considérées. Pour la configuration 1, la frontière ne traverse donc à aucun moment de points de la grille comme représenté schématiquement sur la figure 1.21(a). Pour rappel, lorsque la frontière est localisée exactement sur un point de la grille, celui-ci est fantôme. De plus, la frontière et le dernier point de la grille sont à une distance de l'ordre de Δx .

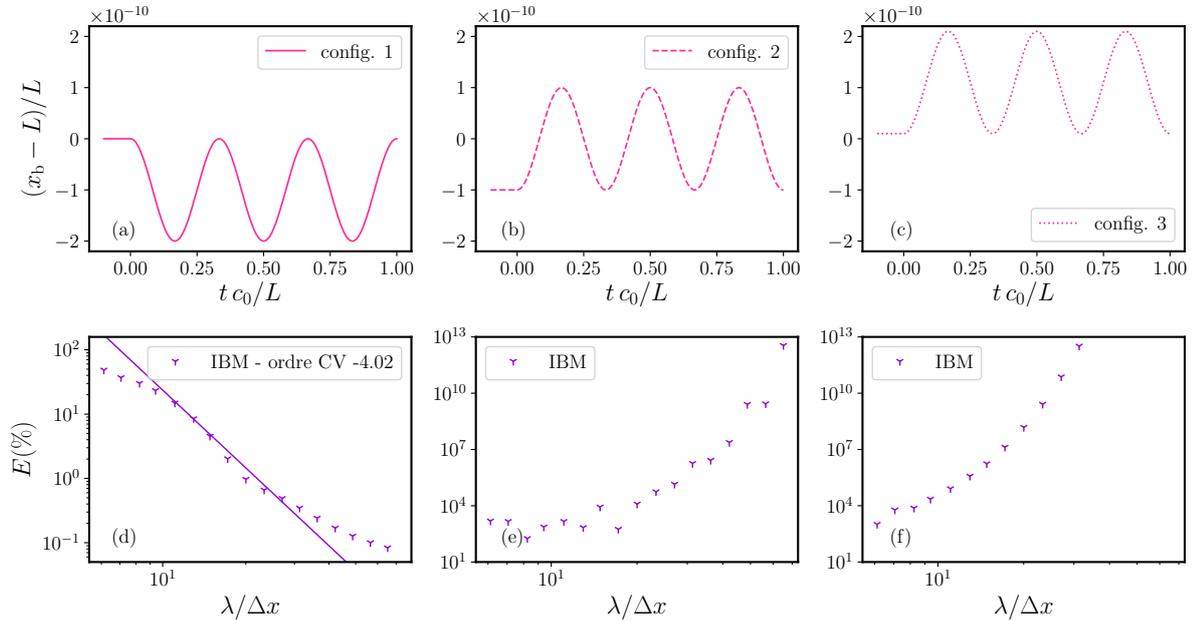


FIGURE 1.20 : Diagramme de convergence comparant les erreurs de la méthode IBM tracées pour la frontière mobile en configuration 1, 2 et 3. (L'échelle verticale du graphe (d) n'est pas identique à celle de (e) et (f).)

Les figures 1.20(d), (e) et (f) reportent les diagrammes de convergences associés à ces

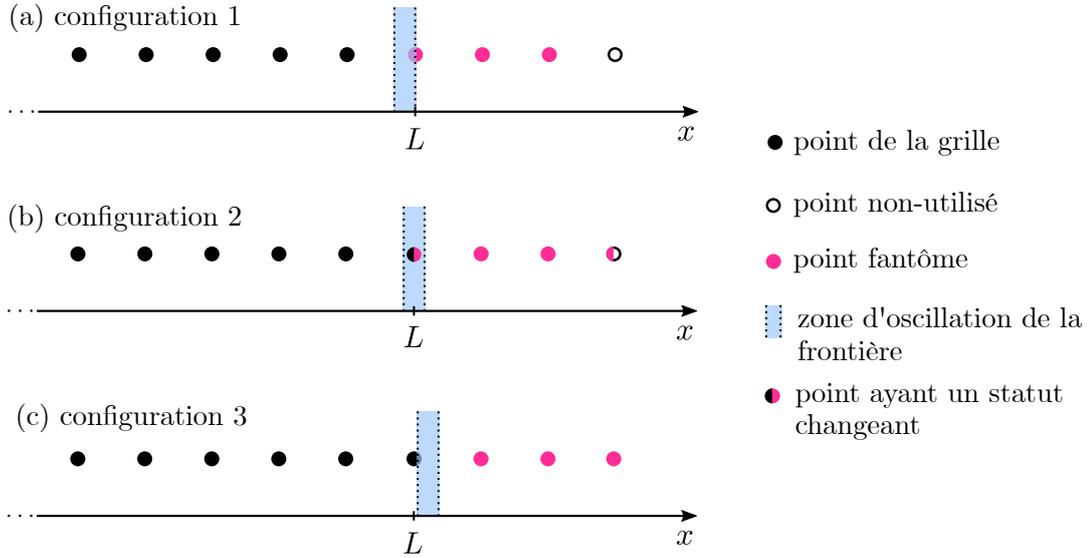


FIGURE 1.21 : Schémas de la position du mouvement de la frontière par rapport aux points de la grille selon les trois configurations présentées données figure 1.22.

trois configurations pour l'IBM. Sur la figure 1.20(d), correspondant à la configuration 1, un ordre global de 4 est vérifié pour la méthode IBM (trait plein). En revanche, elle présente un palier à grand $\lambda/\Delta x$.

La configuration 2 a pour objectif de vérifier l'influence du passage de la frontière à travers les points de la grille pour la résolution pour la méthode IBM. Le mouvement de la frontière est représenté sur la figure 1.20(b), avec $x_{b0} = L - d_b$. La situation de la frontière dans la grille est représentée figure 1.21(b). Le point localisé à $x = L$ change de statut de point de la grille à point fantôme alternativement. Aucun ordre de convergence n'est identifié dans cette configuration (voir la figure 1.20(e)) et ne peut valider le traitement associé au passage de la frontière à travers un point de la grille. Pour rappel, dans la méthode IBM quand un point fantôme change de statut et devient réel, la valeur à l'étape précédente du point ayant le statut fantôme est conservée quand il devient réel et sert pour le calcul de l'intégration temporelle.

La position initiale de la frontière de la configuration 3 vaut $x_{b0} = L + 10^{-11}$. La frontière oscille à droite du point $x = L$ sans le traverser, ni coïncider parfaitement avec celui-ci, de manière à éviter tout changement de statut, comme représenté sur la figure 1.21(c). Le diagramme de convergence associé à cette configuration (voir la figure 1.20(f)) présente une erreur non convergente pour l'IBM. L'erreur obtenue dans la configuration 3 est d'ailleurs encore plus importante que celle obtenue dans la configuration 2. La non-

convergence de l'erreur s'interprète par la difficulté à résoudre le système sur-contraint de l'équation (1.25). Qualitativement, cela traduit la difficulté à faire correspondre par la technique des moindres carrés, un polynôme aux valeurs de l'ensemble des points du stencil et de la condition limite. Plus la condition limite est proche du dernier point du stencil, plus le polynôme doit coïncider avec des valeurs approchées « contradictoires ». Pour correspondre au mieux, le polynôme obtenu peut alors prendre des valeurs incohérentes sur les points fantômes. Dans la seconde configuration, on retrouve la proximité de la frontière et du point de la grille pour la moitié de la période du mouvement. Pour l'autre moitié du temps, une fois que la frontière traverse le point, il devient fantôme et la distance entre la frontière et le dernier point de la grille est de l'ordre de grandeur de Δx . Il semble que la valeur de l'erreur soit approximativement deux fois plus faible pour la configuration 2 que pour la configuration 3, mais cela ne suffit pas à affirmer que le changement de statut des points ne serait pas la cause d'une erreur s'ajoutant à celle précédemment expliquée.

L'OGM quant à elle utilise un maillage adaptatif composé d'une grille mobile qui reste coïncidente avec la frontière quelle que soit sa localisation. Les diagrammes de convergence restent donc quasiment identiques pour les trois configurations, comme le montre la figure 1.22. L'OGM ne converge pas.

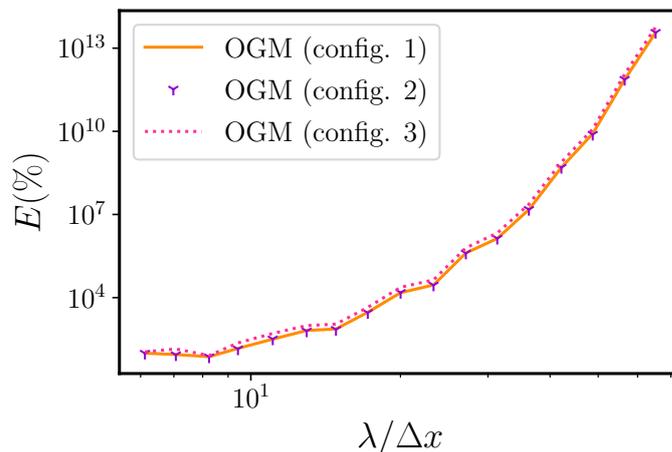


FIGURE 1.22 : Diagramme de convergence comparant les erreurs de la méthode OGM tracées pour la frontière mobile en configuration 1, 2 et 3.

1.3.2 Influence du mouvement de la frontière

Pour évaluer l'influence du mouvement de la frontière, la figure 1.23 présente l'évolution de l'erreur dans le cas d'une frontière immobile en configuration 1 et 3. Dans ce cas, la frontière est placée à la position moyenne du mouvement de la frontière mobile associée à chaque configuration. La position moyenne de la frontière dans la configuration 1 n'est pas coïncidente avec un point de la grille dans le cas de la technique IBM.

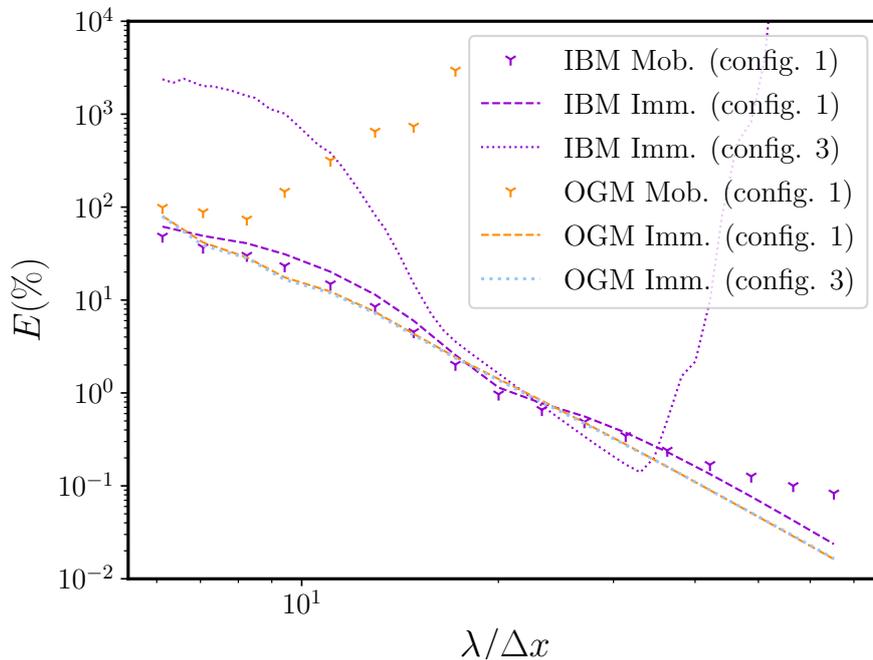


FIGURE 1.23 : Comparaison des erreurs des méthodes IBM et OGM pour une frontière immobile à la position moyenne des configurations 1 et 3 et une frontière mobile en configuration 1.

Les diagrammes de convergence obtenus dans les cas immobiles ne possèdent pas le palier pour des grands $\lambda/\Delta x$ retrouvé dans le cas de la frontière mobile en configuration 1. L'erreur obtenue pour la frontière immobile pour la configuration 3 associée à la méthode IBM est également représentée. Sur la plage centrale de $\lambda/\Delta x$, la courbe en pointillés présente une convergence d'ordre 4. En revanche, en dehors de cette zone, l'erreur est importante. Même dans le cas d'une frontière immobile, l'erreur obtenue avec la méthode IBM est importante si la frontière est trop proche du dernier point de la grille.

Les erreurs commises sur la solution numérique obtenues avec l'OGM sont similaires

pour les configuration 1 et 3.

1.3.3 Influence de la mise en mouvement de la frontière

Pour identifier l'origine de l'erreur obtenue avec la méthode OGM, la mise en mouvement de la frontière mobile est explorée. À $t = 0$, la frontière débute son mouvement. Pour les simulations précédemment présentées, la mise en mouvement de la frontière implique un régime transitoire brutal. Afin d'adoucir cette mise en mouvement, la position de la frontière peut être décrite par l'équation :

$$x_b(t) = x_{b0} - f_w(t) d_b[\cos(\omega t) - 1] , \quad (1.37a)$$

$$f_w(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1 - \cos(\pi t/T_w)}{2} & \text{si } 0 < t < T_w \\ 1 & \text{si } T_w < t \end{cases} . \quad (1.37b)$$

et $T_w = 2.5\pi/\omega$. Les mouvements de référence (équation (1.1)) et le mouvement adoucie (équation (1.37)) sont représentés sur la figure 1.24.

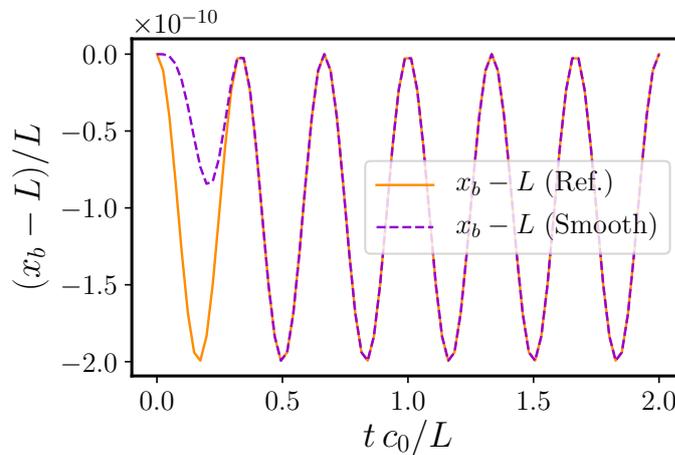


FIGURE 1.24 : Mouvement de la frontière en configuration de référence (orange) et avec une mise en mouvement adoucie (violet).

Les erreurs associées aux résolutions par la méthode OGM avec les mouvements de référence et adouci sont représentées sur la figure 1.25. Sur la figure 1.25(a), l'évolution de l'erreur en fonction de la résolution de la grille permet de montrer que l'utilisation de

la méthode OGM avec le mouvement de référence ne présente pas de convergence d'ordre 4. En y ajoutant le mouvement de la frontière adouci, la méthode converge à l'ordre 4 pour les faibles valeurs de $\lambda/\Delta x$. La méthode OGM est sensible aux instabilités causées par le mouvement abrupte initialement imposé à la frontière.

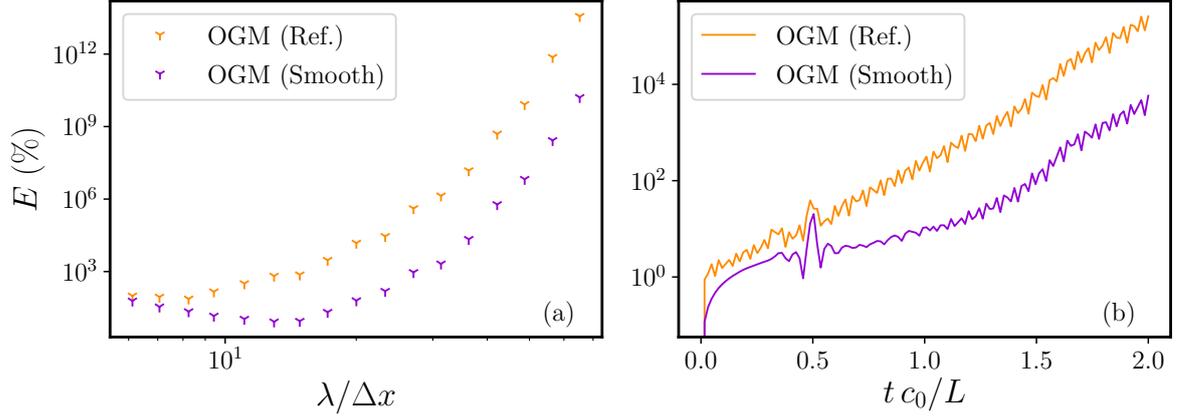


FIGURE 1.25 : Comparaison de l'évolution de l'erreur pour la méthode OGM avec le mouvement de frontière de référence et le mouvement de frontière adouci (Smooth) (a) en fonction de la résolution à $t/T = 1$ et (b) en fonction du temps à $\lambda/\Delta x = 11$, correspondant au 5ème point de la courbe (a). (Les échelles verticales ne sont pas identiques.)

Sur la figure 1.25(b), l'erreur est représentée en fonction du temps pour $\lambda/\Delta x = 11$ (équivalent au cinquième point de la figure 1.25(a)). L'erreur obtenue en utilisant le mouvement de référence naît au niveau de la frontière mobile dès $t = 0$ et se propage dans l'ensemble du domaine au cours du temps. Dans le cas du mouvement adouci, l'erreur croît dans tout le domaine à partir de $t/T = 0.9$ et provient de la droite du domaine également. T_w vaut alors environ 0.42, donc l'émergence de l'erreur n'est pas synchronisée avec le mouvement de la frontière à pleine amplitude. Adoucir le mouvement de la frontière permet de diminuer significativement la source d'instabilité causée par la frontière mobile. À $t/T = 0.5$, qui correspond au moment où le pulse se réfléchit sur la frontière mobile, un pic d'erreur est cependant visible pour les deux configurations. En revanche, cette erreur ne se propage pas dans l'ensemble du domaine.

Plus la résolution de la grille est haute, plus l'erreur provenant de la frontière mobile se propage rapidement sur l'ensemble du domaine. Elle ne semble pas liée à un événement particulier mais est vraisemblablement très sensible aux sources d'erreur provenant de la condition limite mobile lors de l'utilisation de la méthode OGM.

1.4 Conclusions

Dans la revue bibliographique, différents critères de comparaison ont été sélectionnés : l'ordre de convergence, une frontière précisément localisée, le coût de calcul faible, la facilité d'implémentation.

Les IBM et OGM ont un coût de calcul raisonnablement faible, et du même ordre de grandeur que dans le cas sans frontière mobile. La frontière est précisément localisée pour les deux méthodes.

Concernant leur convergence, les deux techniques présentent des défauts. L'IBM présente une convergence d'ordre 4 sur une partie du diagramme de convergence, dans la configuration 1. Pour les deux autres configurations étudiées, la méthode IBM ne converge pas. La stabilité de cette méthode dépend clairement de la position de la frontière par rapport à la grille. La méthode OGM présente des fortes instabilités, principalement provoquées par la brutalité de mise en mouvement de la frontière. Une mise en mouvement de la frontière plus douce permet de limiter cette instabilité et permet d'obtenir une convergence d'ordre 4 sur une partie du diagramme de convergence (à faible résolution de la grille). Une erreur résiduelle provenant de la frontière mobile reste cependant présente.

Enfin, la facilité d'implémentation des méthodes ne peut pas être discutée à l'issue de cette comparaison. Aucune de ces deux méthodes n'est en l'état pleinement fonctionnelle pour le traitement des frontières mobiles pour ce cas-test.

L'enjeu pour la suite de ce travail est d'améliorer ces deux méthodes notamment en implémentant la frontière mobile à l'aide d'une condition limite caractéristique.

MÉTHODES DE FRONTIÈRES MOBILES AVEC CARACTÉRISTIQUES

Le premier chapitre a permis de montrer que les méthodes IBM et OGM considérées ne sont pas fonctionnelles en l'état pour les frontières mobiles. Pour l'IBM, une amélioration de la méthode est proposée dans ce second chapitre. Elle consiste à ajouter une pondération dans l'étape d'extrapolation contrainte en fonction de la position de la frontière. L'implémentation de la limite mobile en utilisant la méthode des caractéristiques est également traitée dans le cadre des méthodes IBM et OGM.

2.1 Introduction

Cette section a pour objectif de présenter bibliographiquement en quoi l'utilisation des caractéristiques apporte un formalisme plus précis aux conditions limites. Dans la première section, après avoir présenté la théorie pour que les conditions limites soient compatibles avec les problèmes bien posés, plusieurs catégories de conditions limites sont présentées en fonction de leur exactitude. Pour ce qui est de la catégorie des conditions limites exactes, les conditions caractéristiques sont détaillées. Les enjeux des caractéristiques pour les équations d'Euler et de Navier–Stokes sont présentés : la prise en compte de la viscosité, l'extension des caractéristiques pour des domaines multidimensionnels. Dans la seconde section, on abordera les méthodes à frontières mobiles utilisant des conditions limites caractéristiques. Peu de méthodes ont proposées des conditions caractéristiques pour les frontières mobiles, mais des méthodes proches ont été jusqu'à maintenant développées pour les frontières à géométrie complexe : en grille adaptative curviligne, en maillage composite avec plusieurs grilles en superposition, et en IBM en frontière immobile.

2.1.1 Conditions limites caractéristiques

Dans ce travail, il s'agit de résoudre des modèles numériques en conditions initiale et frontière (« Initial Boundary Value Problem (IBVP) »). Lors du passage du modèle physique continu au modèle numérique discrétisé, des conditions limites sont imposées sur les valeurs ou leurs dérivées (Dirichlet, Neumann, ...).

La fidélité de la condition limite numérique avec la physique du problème est un enjeu important, puisqu'elle conditionne la stabilité du modèle numérique. L'approche traditionnelle en dynamique des fluides consiste à appliquer des conditions de Dirichlet sur le nombre correct de variables du problème. Ce type d'approche peut cependant introduire des ondes parasites à la réflexion sur la frontière [15]. Selon le type de frontière considérée, cette approche traditionnelle ne permet pas toujours d'être fidèle à la physique du problème. Comment poser des conditions limites de la manière la plus conforme par rapport au modèle physique ? Un certain nombre de travaux se sont intéressés à la théorie des problèmes bien posés. Kreiss en 1970 [44] détermine des règles à respecter pour les systèmes hyperboliques linéaires. Higdon en 1986 [34] présente une étude et une interprétation de la théorie des problèmes bien posés issues de l'article [44]. Une condition importante décrite dans l'article de Nordström et Carpenter en 1999 [64] et également dans le livre [32] est que les problèmes bien posés doivent avoir une solution unique dépendant de manière continue des données du problème. Le chapitre 3 de [32] présente un état des lieux des problèmes bien posés.

On peut différencier plusieurs types de conditions limites, et toutes ne permettent pas toujours de bien poser de problème à la frontière. La première catégorie est celle des conditions physiques, qui sont celles données par la physique de la frontière. Elles sont exactes. La seconde catégorie concerne les conditions limites dites « souples », qui servent, le cas échéant, à compléter les conditions dictées par la physique de la frontière quand elles ne sont pas suffisantes par rapport à la quantité de conditions nécessaires à l'implémentation du modèle numérique. Ces conditions manquantes peuvent être choisies arbitrairement (il s'agit par exemple d'extrapoler des valeurs manquantes sur la frontière [89]), mais leur compatibilité avec le modèle physique n'est pas assurée et peut aboutir à un problème mal posé. Certains auteurs précisent d'ailleurs qu'il est préférable d'éviter de recourir à l'extrapolation [63, 64]. Une autre possibilité pour remplir les variables manquantes est d'utiliser les équations de conservation.

C'est ce qui est fait lors de l'utilisation des conditions limites caractéristiques. L'article de Colonius en 2004 [15] présente une revue des différentes méthodes permettant de

bien poser les conditions limites de non-réflexion, et notamment la méthode des caractéristiques. La théorie des problèmes bien posés pour les équations linéaires aux dérivées partielles est bien établie [15]. Il s'agit de décrire des relations basées sur les lignes caractéristiques. Les valeurs intégrées le long des courbes caractéristiques sont appelées les invariants de Riemann [15]. Les caractéristiques sont définies dans la deuxième partie du livre de Gustafsson paru en 2013 [32] comme étant les relations uniques entre x et t passant par la solution initiale du problème. Chaque courbe caractéristique possède une pente correspondant à sa vitesse respective. Des conditions limites sont requises pour chaque courbe caractéristique qui traverse la frontière [15]. Pour appliquer les conditions limites, les caractéristiques sont différenciées selon le sens de traversée de la frontière. L'objectif est d'exprimer les ondes entrantes à partir des ondes sortantes. L'article de Poinot en 1992 [71] présente des conditions limites précises à partir des caractéristiques permettant d'éviter les instabilités numériques et de contrôler les ondes parasites réfléchies à la frontière.

La définition des caractéristiques est propre à chaque type d'équations. Elles sont bien définies pour les équations d'Euler et de Navier–Stokes. Un bon nombre d'enjeux liés aux conditions caractéristiques sont en commun pour ces deux équations.

C'est le cas du premier enjeu, qui est la prise en compte des effets non linéaires pour les équations compressibles. Hedstrom [33] propose en 1979 l'expression unidimensionnelle classiquement utilisée des conditions de non-réflexion pour les systèmes hyperboliques non linéaires à l'aide des caractéristiques. Ces caractéristiques non linéaires ont un formalisme très proche des caractéristiques linéarisées. Dans le cas non-linéaire, les caractéristiques entrantes ne doivent pas propager uniquement les perturbations acoustiques autour d'un état d'équilibre, comme c'est le cas pour les caractéristiques linéarisées, mais l'ensemble des propagations du fluide [15]. L'article de Huet en 2015 [35] apporte un éclairage physique quant à l'injection d'onde caractéristiques entrantes non linéaires et propose un nouveau formalisme unidimensionnel des caractéristiques pour l'injection de grandes perturbations non linéaires de nature acoustique et entropique. Dans la même direction, Kim et Lee en 2000 [39] proposent des conditions limites caractéristiques pour les équations sous forme conservative, sans extrapolation et sans simplification des équations. L'intérêt de cet article réside sur l'idée d'ajouter des termes correctifs pour préserver la forme conservative des équations. Les résultats sont obtenus à un ordre élevé et à une haute résolution de grille.

Le second enjeu est la prise en compte des effets de viscosité et concerne uniquement

les équations de Navier–Stokes car l’ajout de la viscosité change la nature mathématique des équations. L’article de Poinso et Lele en 1992 [71] propose une extension des caractéristiques pour les méthodes d’Euler compressibles. L’extension consiste d’abord à exprimer les caractéristiques sans la prise en compte de la viscosité, puis d’ajouter un terme source introduisant un comportement amortissant dans les ondes entrantes pour prendre en compte la viscosité. Cette méthode a été largement utilisée [39, 62].

Plusieurs des méthodes précédemment citées ont été développées pour la propagation unidimensionnelle. La propagation multidimensionnelle a également été l’objet de nombreux travaux. Les premiers articles ayant apportés à cette thématique sont ceux de Thompson en 1987 et 1990 [84, 85]. Ces approches proposent une extension de la méthode de Hedstrom [33] à plusieurs dimensions pour les conditions limites de non-réflexion et généralisée à tous les types de conditions limites pour les systèmes d’équations hyperboliques. Poinso et Lele en 1992 [71] appliquent cette technique aux équations d’Euler et de Navier–Stokes. Les techniques présentées dans ces trois articles reposent sur une approximation locale unidimensionnelle normale à la frontière. Pour une onde plane acoustique, cette approximation se montre efficace, mais pour les problèmes de vortex sortants avec une grande composante transversale à la frontière, cette approche n’est pas suffisante et le problème est mal posé [15, 35]. D’après [39], il est nécessaire de prendre en compte les interactions multidimensionnelles des ondes à la frontière pour la bonne prise en compte des non-linéarités. Lodato *et al.* [54] développent en 2008 une approche des caractéristiques pour un domaine tridimensionnel pour les équations de Navier–Stokes avec un traitement spécifique des termes transversaux permettant d’obtenir une solution précise et stable. L’idée est de ne pas utiliser d’hypothèse unidimensionnelle, mais plutôt d’injecter une composante transversale dans l’amplitude des ondes entrantes [79]. L’article [54] généralise cette approche pour les bords et les angles lors de simulations tridimensionnelles. Il reste que peu de travaux concernent la mise en place des caractéristiques dans le cas de géométries complexes.

2.1.2 Condition limite caractéristique et traitement des frontières mobiles

La description des conditions limites caractéristiques s’appliquant à des frontières à géométrie mobile est un sujet peu étudié et c’est l’objet de ce second chapitre. À la connaissance des auteurs, aucune méthode n’exploite les caractéristiques avec les frontières

mobiles, avec les problèmes à grille non conforme aux frontières. Les méthodes présentés ci-dessous sont malgré tout des pistes préalables à notre approche visant à associer les caractéristiques et les frontières mobiles.

La première approche visant à implémenter des problèmes à frontières complexes est l'expression des caractéristiques sur des grilles non nécessairement rectangulaire par Thompson en 1987 [84]. Dans l'article de Kim et Lee en 2000 [39], la démarche est la généralisation des conditions caractéristiques pour les grilles curvilignes conformes à la frontière. Les équations résolues dans l'ensemble du domaine sont les équations d'Euler et de Navier–Stokes compressibles à un ordre élevé, dans un contexte d'écoulement visqueux autour d'un cylindre. Les caractéristiques sont exprimées en coordonnées généralisées sur la frontière. Elles sont définies par l'approximation locale non visqueuse et unidimensionnelle. Le modèle est présenté comme robuste jusqu'à ce qu'une forte vorticité soit introduite.

La seconde approche concerne la technique par maillage composite. L'article de Kim et Lee en 2003 [38] porte sur la simulation d'un écoulement autour d'un profil d'aile d'avion. Dans ces travaux, l'utilisation d'un maillage composite multi-bloc permet de suivre la géométrie du problème en évitant les singularités géométriques. Dans cette approche, aux abords d'une interface entre deux blocs juxtaposés, les stencils de différences finies ne traversent pas la frontière et ce sont les caractéristiques déterminées aux frontières qui relient les blocs entre eux. Dans ces travaux, l'expression des caractéristiques est issue de l'article [39]. Les travaux plus récents de Kopriva de 2022 [42] étudient la preuve que les problèmes multi-blocs multidimensionnels soient bien posés grâce à la méthode énergie, pour la résolution des systèmes hyperboliques linéaires à coefficients constants. Dans le cas unidimensionnel, l'utilisation des caractéristiques pour transférer les données d'un sous-domaine à chaque interface conduit à des preuves de stabilité. En deux dimensions, la stabilité associée à l'utilisation des caractéristiques pour le transfert de données n'est pas aussi assurée. Comme une diagonalisation parfaite du problème n'est pas possible, il est nécessaire d'ajouter un terme correctif afin de stabiliser l'OGM. Cela signifie que les caractéristiques multidimensionnelles seules ne permettent pas d'assurer une stabilité de la solution numérique.

La troisième approche concerne les conditions limites caractéristiques associées à l'implémentation de cellules fantômes. Le point de départ de ce sujet est l'article de Gross et Fasel en 2007 [31], dans lequel les frontières du problème sont fixes mais complexes curvilignes. Cette méthode décrit ses caractéristiques d'après les travaux [39, 71, 84, 85].

La grille de calcul est curviligne et conforme à la géométrie de la frontière. La frontière n'est donc pas immergée dans la grille, mais une technique utilisant des cellules fantômes est choisie. Le remplissage des cellules fantômes est réalisée par une reconstruction du point fantôme à l'ordre 1. Le stencil de différences finies choisi à la frontière est d'ordre 1, tandis que dans le domaine les équations de Navier–Stokes sont résolues par un schéma différences finies d'ordre élevé. Ce travail a ensuite été complété par celui de Motheau *et al.* en 2017 [62]. Les caractéristiques sont alors appliquées aux équations de Navier–Stokes pour des problèmes bidimensionnels cartésiens à géométrie simple immobile et coïncidente avec la grille choisie. La discrétisation du problème est en volumes finis et l'implémentation choisie utilise les cellules fantômes. Ce travail ajoute au précédent [31], la prise en compte des termes transversaux et la prise en compte des coins. La technique nécessite trois cellules fantômes. La condition limite caractéristique utilisée est définie dans l'article [79] et en particulier [54] pour les coins. La grille étant conforme à la frontière, la technique des points miroirs est mise en place. Les valeurs données aux cellules fantômes sont déterminées en utilisant des stencils de différences finies centrés à la frontière.

2.2 Description du cas-test

Dans le chapitre 1, les limites des méthodes IBM et OGM ont été identifiées. La solution obtenue avec l'IBM ne converge que pour certaines configurations de la frontière. Une pondération est donc proposée ici pour contrer ce problème. L'OGM présente quant à elle des instabilités importantes issues de la frontière. La condition limite directe de la frontière mobile est ici remplacée par une condition limite caractéristique pour que le formalisme de la condition limite soit bien posé et puisse permettre de stabiliser la solution obtenue avec l'OGM. Ce formalisme est également appliquée aux IBM.

2.2.1 IBM pondérée

Les résultats présentés dans le premier chapitre ont mis en évidence que la méthode ROD ne permet pas d'obtenir de convergence de la solution numérique vers la solution analytique, peu importe la position de la frontière par rapport à la grille sous-jacente. Quand la frontière est mobile, elle peut traverser un point de la grille qui va changer le statut du point de physique à fantôme (ou inversement). L'interpolation polynomiale décrite dans la méthode ROD est donc discontinue en temps, car le point de la grille

utilisé pour cette interpolation change soudainement. De plus, quand x_b est proche d'un point physique de la grille, le problème aux moindres carrés contraint (équation (1.25)) devient mal-conditionné, ce qui conduit à des problèmes de stabilité numérique.

Pour résoudre ce problème, nous proposons d'introduire une fonction de pondération $\gamma(x)$ pour adoucir la transition lorsque la frontière croise un point de la grille. Elle est définie comme suit, et est illustrée sur la figure 2.1 :

$$\gamma(x) = \begin{cases} \{\cos[\pi(x - x_b + \ell + N_d \Delta x)/\ell] + 1\}/2 & \text{si } x_b - N_d \Delta x - \ell - \delta\ell \leq x < x_b - N_d \Delta x - \delta\ell \\ 1 & \text{si } x_b - N_d \Delta x - \delta\ell \leq x < x_b - \ell - \delta\ell \\ \{\cos[\pi(x - x_b + \ell)/\ell] + 1\}/2 & \text{si } x_b - \ell - \delta\ell \leq x < x_b - \delta\ell \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Cette fonction est non-nulle sur la région $x_b - N_d \Delta x - \ell - \delta\ell < x < x_b - \delta\ell$, qui correspond à l'extension du stencil \mathcal{S} de points physiques utilisés pour l'interpolation polynomiale. Elle vaut $\gamma = 1$ sur la région $x_b - N_d \Delta x - \delta\ell < x < x_b - \ell - \delta\ell$. Avant et après cette région, la fonction $\gamma(x)$ transitionne progressivement entre 1 et 0 sur une longueur ℓ . La longueur totale du stencil ainsi définie comporte un point supplémentaire par rapport à la taille N_d du stencil sans pondération. Les valeurs aux deux extrémités se compensent.

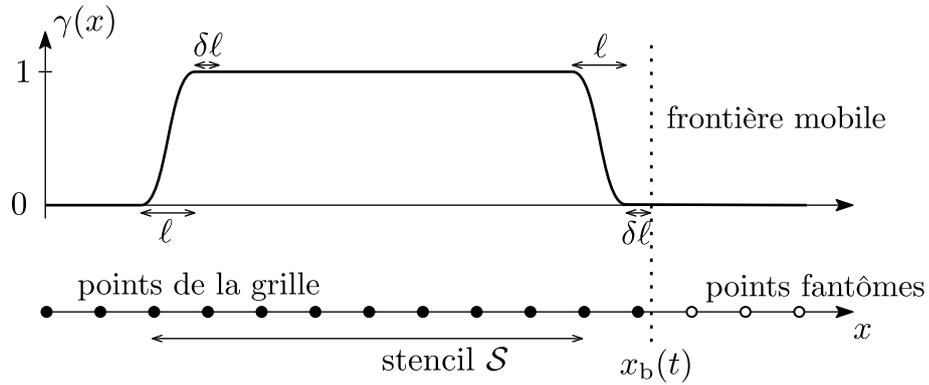


FIGURE 2.1 : Représentation de la fonction de pondération $\gamma(x)$, des points physiques de la grille et des points fantômes.

La définition de la fonction coût donnée équation 1.20 qui permet de déterminer les coefficients du polynôme d'extrapolation contrainte par la résolution d'un problème aux

moindres carrés est modifiée en introduisant $\gamma(x)$, comme suit :

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathcal{S}} \gamma^2(x_m) [\tilde{\phi}(x_m) - \phi(x_m)]^2 + \lambda [\tilde{\phi}(x_b) - s] . \quad (2.2)$$

La structure du système linéaire (1.25) reste identique, à l'exception de $\Psi_{mn} = \gamma(x_m)\psi(x_m)^n$ et $\phi_m = \gamma(x_m)\phi(x_m)$. Avec cette forme de moindres carrés mobiles, les contributions des points de la grille sortant ou entrant dans le stencil \mathcal{S} vont être progressivement remplacés. De plus, si un point de la grille dans le stencil est trop proche de x_b , sa contribution va être réduite d'un facteur $\gamma(x_m)$, ce qui améliore le conditionnement du système linéaire.

Pour la région $x_b - \ell < x < x_b$, la solution est mise à jour en partie par l'interpolation. La solution $\phi(x_m)$ est remplacée par $\gamma(x_m)\phi(x_m) + (1 - \gamma(x_m))\tilde{\phi}(x_m)$. Comme le point s'approche et ensuite traverse la frontière, sa solution varie doucement à partir d'un point de la grille physique à un point fantôme.

Le paramètre ℓ est déterminée après plusieurs tests et est défini à $\Delta x/4$. Une validation de ce paramètre est montrée dans la suite.

2.2.2 Condition limite caractéristique

Les équations d'Euler linéarisées diagonalisées (1.14) forment le point de départ de l'expression des conditions limites caractéristiques. En $x = x_b(t)$, la caractéristique sortante est \tilde{q}_b^+ , et la caractéristique entrante est \tilde{q}_b^- , comme illustré sur la figure 2.2. La condition limite est décrite en réflexion, c'est-à-dire que les caractéristiques entrantes sont exprimées par rapport aux caractéristiques sortantes.

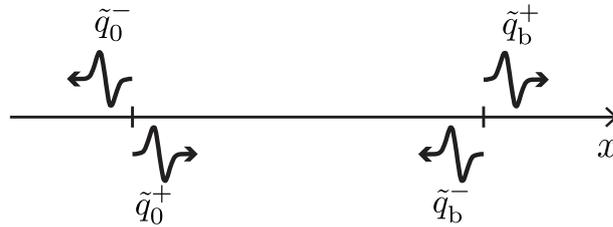


FIGURE 2.2 : Représentation des ondes caractéristiques \tilde{q} au voisinage des conditions aux limites.

La caractéristique sortante \tilde{q}_b^+ est calculée à partir des variables du domaine extrapolées sur la frontière p_b et u_b . Elle est exprimée à partir de la première ligne du changement

de variable (1.12), comme suit :

$$\tilde{q}_b^+ = \frac{1}{2\rho_0 c_0} p_b + \frac{1}{2} u_b. \quad (2.3)$$

En utilisant la deuxième ligne du changement de variable inverse ($\mathbf{q} = \mathbf{W} \tilde{\mathbf{q}}$) concernant la variable de vitesse acoustique, la caractéristique entrante, à partir de la vitesse d'oscillation de la frontière et de la caractéristique sortante, s'écrit comme suit :

$$\tilde{q}_b^- = v_b - \tilde{q}_b^+. \quad (2.4)$$

Il est maintenant possible d'exprimer les valeurs de pression et de vitesse à imposer (\tilde{p}_b et \tilde{u}_b) en fonction de la caractéristique sortante et de la vitesse de la frontière :

$$\tilde{p}_b = \rho_0 c_0 [2\tilde{q}_b^+ - v_b], \quad (2.5a)$$

$$\tilde{u}_b = v_b. \quad (2.5b)$$

Le symbole \sim appliqué aux pression et vitesse acoustiques est utilisé pour traduire le fait qu'il s'agit des valeurs à imposer à la frontière. Les pression et vitesse acoustiques sans ce symbole sont utilisées pour les valeurs extrapolées sur la frontière.

Les valeurs imposées exprimées à partir des pression et vitesse extrapolées à la frontière peuvent alors s'écrire :

$$\tilde{p}_b = p_b + \rho_0 c_0 [u_b - v_b], \quad (2.6a)$$

$$\tilde{u}_b = v_b. \quad (2.6b)$$

En plus d'imposer avec l'équation (2.6b) la condition de vitesse imposée sur la frontière, les caractéristiques permettent d'imposer une valeur de pression dépendant de la vitesse de la frontière.

L'application des caractéristiques permet donc d'imposer simultanément des valeurs à la limite sur la pression et la vitesse.

2.2.3 IBM pour les conditions limites caractéristiques

Dans le cadre d'une condition sous la forme caractéristique, des adaptations de la méthode ROD sont apportées. C'est la première fois qu'une méthode avec des points

fantômes présente des conditions limites caractéristiques.

À l'état initial, les valeurs de pression et de vitesse sont disponibles sur les points appartenant au stencil. La démarche proposée se décompose en cinq étapes représentées schématiquement sur la figure 2.3. La caractéristique sortante est extrapolée sur les points fantômes uniquement à partir des valeurs dans le domaine à gauche de la frontière. À la frontière, la caractéristique entrante est définie à partir de la valeur de la caractéristique sortante et de la condition limite. Les valeurs de la caractéristique entrante sont calculées aux points fantômes, en la contraignant à vérifier la valeur de caractéristique entrante à la frontière ainsi que ses valeurs dans le domaine à gauche de la frontière, grâce à l'extrapolation contrainte. La démarche est la suivante :

1. Calcul des valeurs caractéristiques entrantes et sortantes sur les points du stencil à partir des valeurs de pression et vitesse acoustique sur ces points, en utilisant l'expression (1.12) ;
2. Extrapolation non contrainte des caractéristiques sortantes \tilde{q}_b^+ sur la frontière et aux points fantômes \tilde{q}_g^+ ;
3. Utilisation de l'équation (2.4) sur la frontière permettant de calculer la valeur de la caractéristique entrante \tilde{q}_b^- à partir de la vitesse de la frontière $v_b(t)$ et la caractéristique sortante \tilde{q}_b^+ calculée précédemment ;
4. Extrapolation contrainte grâce à la technique ROD de la caractéristique entrante sur les points fantômes \tilde{q}_g^- ;
5. Calcul des valeurs de pression p_g et vitesse u_g acoustiques sur les points fantômes à partir des valeurs des caractéristiques \tilde{q}_g grâce à la relation inverse de l'équation (1.12).

2.2.4 OGM pour les conditions limites caractéristiques

L'OGM présente l'avantage d'être coïncidente avec la frontière, ainsi l'implémentation de la méthode pour des conditions limites caractéristiques est plus directe que pour l'IBM. Elle consiste à remplacer les valeurs de pression et vitesse par celles déterminées dans l'équation (2.5).

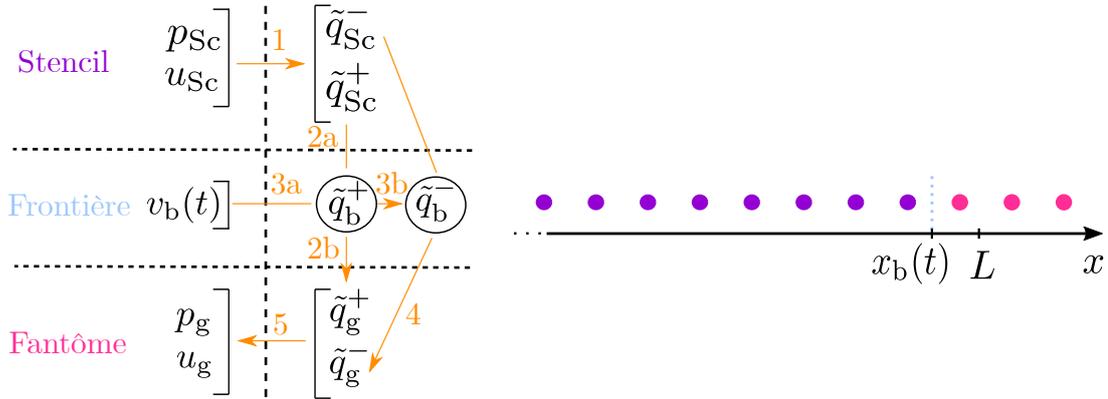


FIGURE 2.3 : Représentation schématique de l'implémentation des conditions limites sous la forme des caractéristiques pour la méthode des IBM. En violet, les huit points du stencil, en rose, les trois points fantômes, et en bleu, la frontière mobile.

2.3 Résultats numériques

Les paramètres du cas-test sont identiques à ceux du chapitre 1. Le CFL est fixé à $c_0 \Delta t / \Delta x = 0.75$.

2.3.1 Validation de la pondération pour la méthode ROD

La première validation porte sur l'influence de la position de la frontière sur la convergence de la solution pour la méthode ROD avec la pondération. Pour mettre en valeur ce point, l'évolution de l'erreur est tracée sur la figure 2.4 en fonction de la position initiale de la frontière entre l'avant dernier point de la grille (en $x = L - \Delta x$) et le dernier point, pour un nombre de point de la grille $N = 100$. Les valeurs des paramètres ℓ et $\delta\ell$ (définis dans l'équation (2.1)) varient afin de déterminer les paramètres tels que l'erreur soit stable sur tout l'intervalle de x_{b0} compris entre $L - \Delta x$ et L .

La courbe en $\ell = 0$ et $\delta\ell = 0$ correspond au cas sans pondération. L'erreur augmente lorsque x_{b0} est en dessous de 20% de Δx . Il s'agit de la région dans laquelle se trouve la configuration 3 présentée dans la section 1.3.1, qui montre une solution instable. Plusieurs essais de paramètres ℓ et $\delta\ell$ sont réalisés et les paramètres optimaux sont les plus petits pour que la solution soit stable. Les essais permettent d'aboutir aux paramètres optimaux suivants : $\ell = \delta\ell = \Delta x / 5$. Dès qu'un des deux paramètres (ou les deux) est remplacé par $\Delta x / 6$, l'erreur présente un pic vers $x_{b0} = L - 80\% \Delta x$. Lorsque $\ell = \delta\ell = \Delta x / 4$, l'erreur est stable et vaut rigoureusement la même valeur pour toutes les courbes tracées.

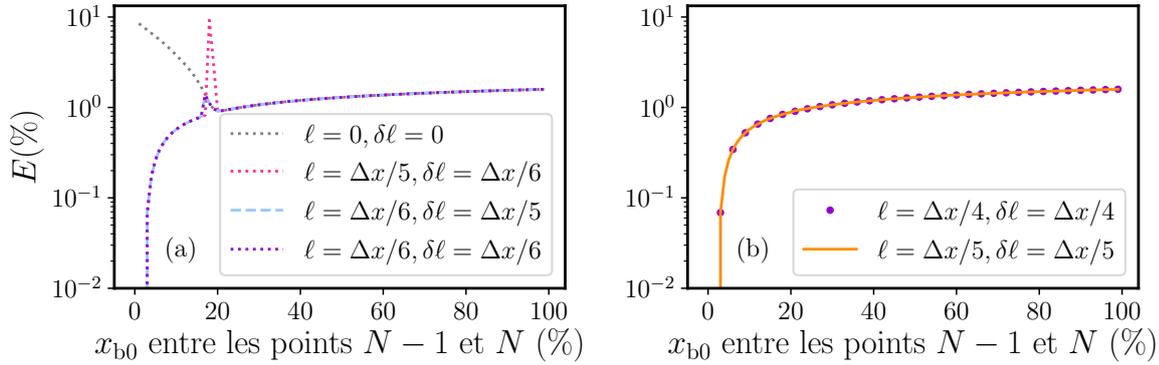


FIGURE 2.4 : Évolution de l’erreur obtenue avec l’IBM pondérée en fonction de la position initiale de la frontière x_{b0} pour $N = 100$. Les paramètres de pondération pour lesquels la solution présente des instabilités (a), et la solution est stable (b).

Les paramètres $\ell = \delta\ell = \Delta x/5$ permettent de stabiliser les solutions sur toutes les positions de la frontière par rapport à la grille.

Avec ces paramètres ainsi obtenus, il est désormais intéressant de comparer l’évolution de l’erreur obtenue en utilisant l’IBM pondérée en fonction de la résolution pour les trois configurations de la frontière présentées section 1.3.1 et schématisées sur la figure 1.21. Les résultats des diagrammes de convergence obtenus avec la méthode ROD pondérée sont présentés sur la figure 2.5(b). Sur la figure 2.5(a) sont rappelés les résultats sans pondération. Pour les paramètres $\ell = \delta\ell = \Delta x/5$, on remarque sur la figure 2.5(b) que toutes les erreurs sont stabilisées et convergent vers 0. Toutefois, les erreurs présentent un écart dépendant de la configuration. L’erreur reste légèrement dépendante de la position de la frontière. L’erreur obtenue pour la configuration 1 augmente légèrement avec la pondération. Le paramètre ℓ choisi a donc un impact sur la configuration 1. La configuration 2 devient la configuration pour laquelle l’erreur est la plus faible. Dans la suite de ce chapitre, les résultats de l’IBM sont toujours présentés avec cette pondération. La configuration 2 est la configuration retenue pour la suite de ce travail, car elle permet d’évaluer la performance des méthodes pour une frontière qui traverse un point de la grille.

2.3.2 Influence du type de condition limite

Il s’agit ici de comparer l’erreur obtenue en utilisant les conditions limites directes et les conditions caractéristiques pour les méthodes IBM et OGM dans la configuration 2. Les variantes utilisant les caractéristiques sont respectivement nommées IBMc et OGMc. Les

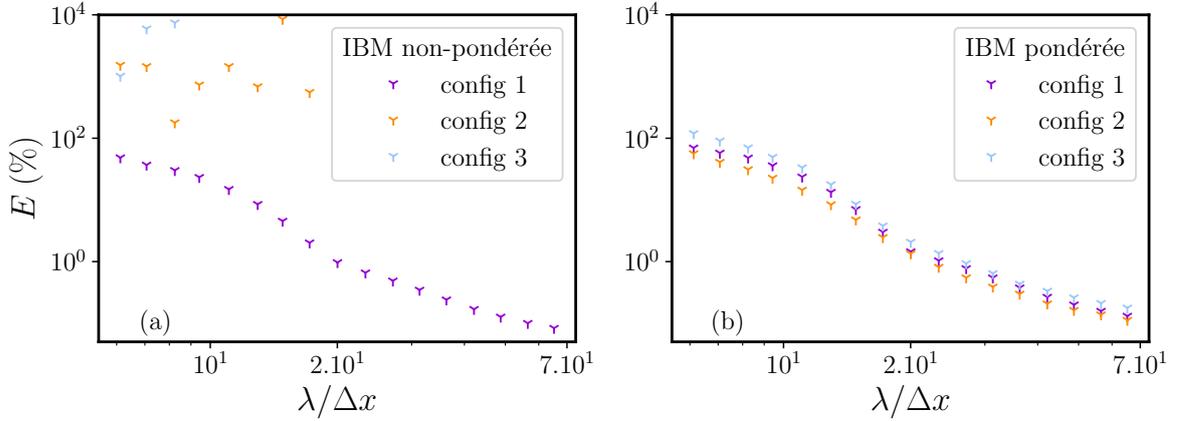


FIGURE 2.5 : Variation de l'erreur selon trois configurations de la frontière (données figure 1.20) (a) sans pondération et (b) avec pondération pour $\ell = \delta\ell = \Delta x/5$.

résultats sont synthétisés sur la figure 2.6. Pour l'IBM, la technique est moins sensible au passage des conditions limites directes à caractéristiques que dans le cas des OGM. L'erreur obtenue avec les conditions limites caractéristiques est légèrement plus faible qu'en condition directe pour l'IBM. Comme discuté au premier chapitre, l'OGM en condition directe présente une erreur qui se propage dans l'ensemble du domaine, mais l'utilisation des conditions caractéristiques permet d'améliorer significativement la solution. L'erreur ainsi obtenue pour l'OGM converge pour des petits $\lambda/\Delta x$, mais elle reste importante pour des grands $\lambda/\Delta x$. Les caractéristiques permettent donc de diminuer significativement l'erreur, mais celle-ci reste importante pour les petites résolutions.

La figure 2.7 représente l'évolution temporelle de l'erreur pour $\lambda/\Delta x = 65.2$ (correspond à une valeur pour laquelle la solution ne converge pas) et $\lambda/\Delta x = 21.2$ (correspond à une valeur pour laquelle la solution converge). Le pic visible à $t c_0/L = 0.5$ correspond à la réflexion du pulse, et la légère augmentation à $t c_0/L = 1.5$ correspond à la sortie du pulse à travers la condition limite de non-réflexion à gauche du domaine. Il n'y a pas d'autres événements sur la courbe à $\lambda/\Delta x = 65.2$ qui auraient pu être responsables de la non-convergence de celle-ci.

La courbe bleue sur la figure 2.6 correspond au cas où la mise en mouvement de la frontière est adoucie, comme discuté dans la section 1.3.3 (OGMc Smooth). Comme c'est le cas sans caractéristique, l'erreur est causée par la propagation dans tout le domaine de l'instabilité causée par la mise en mouvement de la frontière. Ce problème a cependant été significativement atténué par l'ajout des caractéristiques pour les OGM. L'erreur obtenue

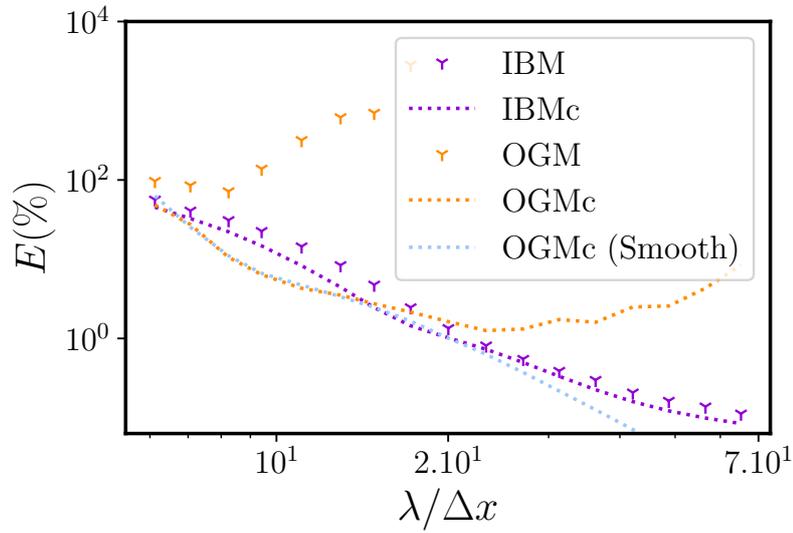


FIGURE 2.6 : Diagramme de convergence comparant les erreurs obtenues pour la frontière mobile en configuration 2 avec condition directe (pour IBM et OGM) et condition caractéristique (pour IBMc et OGMc).

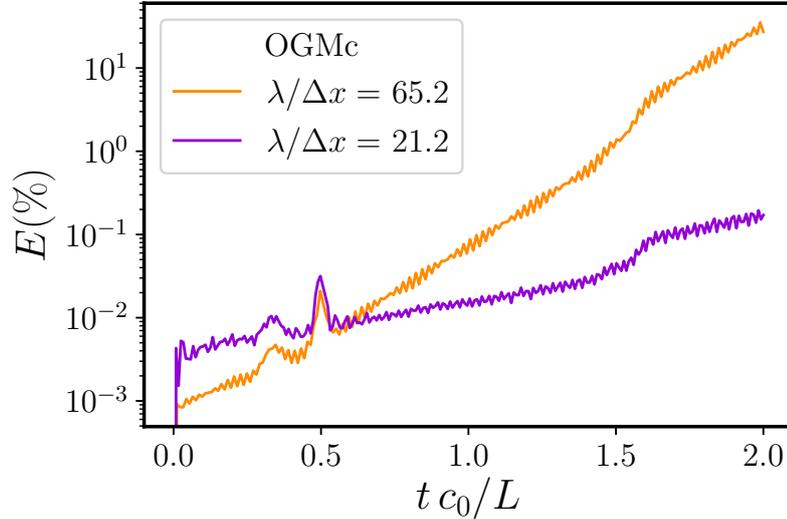


FIGURE 2.7 : Évolution temporelle de l'erreur pour la méthode OGM avec les caractéristiques pour deux valeurs de $\lambda/\Delta x$.

pour l'OGM avec la frontière dont la mise en mouvement est adoucie et l'utilisation des caractéristiques est celle qui apporte les meilleurs résultats. En revanche, elle nécessite

d'altérer le mouvement de la frontière pendant le régime transitoire.

2.4 Conclusions

Comme observé au chapitre précédent, la méthode IBM présente une instabilité pour certaines positions de la frontière. Cette instabilité est causée par un changement abrupte de statut des points et un mauvais conditionnement du problème à résoudre dû à la proximité de la condition limite et du stencil de reconstruction. L'ajout d'une pondération dans la reconstruction polynomiale permet de résoudre ce problème, car il adoucit la transition des points tout en déplaçant le stencil. Une convergence d'ordre 4 est alors atteinte pour toutes les positions de la frontière en IBM.

Dans ce chapitre, la condition de frontière mobile est formulée en termes de caractéristiques. L'adaptation de l'IBM à ce type de condition nécessite une implémentation en plusieurs étapes, tandis que l'OGM s'adapte sans modification spécifique.

Les résultats obtenus en utilisant les méthodes IBM et OGM avec et sans caractéristiques sont comparés. Pour l'IBM, le formalisme des caractéristiques diminue l'erreur sur l'ensemble des résolutions considérées. Pour l'OGM, les conditions limites caractéristiques apportent une amélioration significative de la convergence des résultats par rapport à ceux obtenus avec les conditions limites directes. Malgré cela, la solution tend à diverger pour les grandes résolutions. Un adoucissement de la mise en mouvement de la frontière permet cependant d'obtenir une convergence d'ordre 4 pour l'ensemble des résolutions considérées. En retirant les sources d'instabilités du problème, la solution numérique converge donc vers la solution analytique. Ces résultats confirment que la méthode OGM présente une sensibilité importante aux diverses instabilités du problème.

L'enjeu pour la suite de ce travail est d'implémenter les conditions limites caractéristiques pour les équations non linéaires. Le fait que la méthode OGM ne converge pas sans avoir à adoucir le mouvement de la frontière mobile en fait un mauvais candidat pour la suite de ce travail. C'est donc la méthode IBM qui sera retenue pour traiter le cas du problème non linéaire présenté dans la suite.

EXTENSION AUX PROBLÈMES NON LINÉAIRES

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que l'ajout des conditions limites caractéristiques augmente la stabilité globale des solutions numériques des équations linéaires. Dans le but de prendre en compte les effets non linéaires pour de grandes amplitudes de pression dans le domaine, ce second chapitre porte sur l'extension des méthodes IBMc et OGMc aux équations d'Euler générales. Le formalisme des caractéristiques pour les équations non linéaires est différent de celui des équations linéaires et une adaptation de l'IBM est nécessaire pour les prendre en compte. Une validation sur un cas-test unidimensionnel est présentée. Ces résultats ont été publiés dans l'article [7].

3.1 Description du cas-test

Pour formuler les IBM proposées précédemment dans le cadre des caractéristiques non linéaires, le problème acoustique unidimensionnel représenté sur la figure 1.11 est considéré, dans le cas des équations d'Euler non linéarisées. La validation des méthodes numériques présentées dans cette partie est réalisée dans un premier temps dans le domaine linéaire, c'est-à-dire en considérant de petites amplitudes de mouvement de la frontière, afin d'avoir à disposition une solution analytique de référence. Le modèle sera ensuite validé pour le cas non linéaire dans la section 3.5.

La formulation des caractéristiques non linéaires retenue pour ce cas-test est celle présentée par Hedstrom en 1979 [33].

Plusieurs adaptations de la technique ROD (précédemment mentionnée) à l'expression

des caractéristiques non linéaires sont comparées.

3.1.1 Équations d'Euler

Le fluide est considéré non visqueux et gouverné par les équations d'Euler pour un gaz parfait, écrites sous la forme conservative unidimensionnelle :

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (3.1)$$

où \mathbf{w} est le vecteur des quantités conservées (masse, quantité de mouvement, énergie) et \mathbf{f} contient les flux de ces quantités :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho e + p)u \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

avec ρ , u et e la densité de masse, la vitesse et l'énergie spécifique du fluide, respectivement. La pression est donnée par $p = (\gamma - 1)(\rho e - \frac{1}{2}\rho u^2)$ avec $\gamma = 1.4$ le ratio des chaleurs spécifiques pour l'air.

Les équations d'Euler peuvent aussi être reformulées sous forme non conservative :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (3.3)$$

avec le vecteur \mathbf{q} et la matrice \mathbf{A} définis comme suit :

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

3.1.2 Ondes caractéristiques pour les équations d'Euler

L'implémentation des caractéristiques dans le cas des équations d'Euler repose sur le même principe que pour les équations linéarisées. Le système d'équations est diagonalisé et les directions de propagation des caractéristiques sont données par le signe de leur vitesse. Les conditions limites sont alors imposées sur les caractéristiques entrantes.

Les définitions des caractéristiques sont obtenues en diagonalisant la matrice $\mathbf{A} =$

$\mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$, où \mathbf{S} contient les vecteurs propres et $\mathbf{\Lambda}$ est la matrice diagonale contenant les valeurs propres. Pour les équations d'Euler présentées ci-dessus, il existe trois valeurs propres :

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c, \quad (3.5)$$

où la célérité du son c peut être obtenue en utilisant la relation $\gamma p = \rho c^2$. Les trois valeurs propres correspondent à la vitesse de phase des trois ondes portées par les équations. λ_1 et λ_3 correspondent aux ondes acoustiques se propageant respectivement vers la gauche et la droite. λ_2 correspond à l'onde d'entropie convectée par la vitesse locale du fluide.

En utilisant la diagonalisation de \mathbf{A} , les équations d'évolution (3.3) sont écrites comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\mathbf{S}\mathbf{\Lambda} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{L}_3 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{L}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x}, \quad \text{et} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\rho/c & 1 & \rho/c \\ 1 & 0 & 1 \\ -\rho c & 0 & \rho c \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

À la différence du cas des équations linéarisées, les termes de la matrice \mathbf{S} ainsi que les vitesses de phase varient en fonction du temps et de la position.

Les valeurs de \mathcal{L}_i sont directement reliées aux taux de variation en espace de chaque solution des équations d'Euler dans leur forme non conservative et leur expression détaillée, obtenue avec la matrice \mathbf{S}^{-1} , sont :

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2\rho c} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.7a)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.7b)$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2\rho c} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3.7c)$$

Condition de non-réflexion en $x = 0$

L'implémentation de la condition limite de non-réflexion à gauche du domaine ($x = 0$) consiste à fixer les amplitudes des caractéristiques entrantes à zéro. En d'autres termes, $\mathcal{L}_i = 0$ est imposée pour toutes les caractéristiques avec $\lambda_i > 0$.

À $x = 0$, la frontière est fixe. La condition limite est donc appliquée sur le dernier point de la grille. Les caractéristiques sortantes sont calculées en utilisant les solutions à l'intérieur du domaine, à partir des définitions de l'équation (3.6). Les dérivées spatiales

sont calculées à la frontière en utilisant les schémas de dérivation décentrés au voisinage de la frontière.

Pour un fluide subsonique ($|u| < c$), l'onde acoustique se propageant vers la gauche est toujours sortante ($\lambda_1 < 0$) et l'onde se propageant vers la droite est toujours entrante ($\lambda_3 > 0$). Néanmoins, pour l'onde d'entropie (λ_2), sa direction de propagation dépend du signe de la vitesse acoustique u et \mathcal{L}_2 est imposée nulle seulement lorsque $u > 0$.

Condition imperméable à partir des caractéristiques en $x = x_b(t)$

La position du point d'application $x_b(t)$ de cette condition limite dépend du temps et n'est pas nécessairement coïncidante avec un point de la grille. La relation entre les caractéristiques pour une frontière imperméable est expliquée ici. La vitesse du fluide est donc imposée égale à celle de la frontière :

$$u(x_b(t), t) = v_b(t) . \quad (3.8)$$

Comme dans le cas de la condition limite de non-réflexion, les caractéristiques sont discriminées selon le signe de leur vitesse relative par rapport à la vitesse de la frontière. Les hypothèses de faibles amplitudes ($v_b(t) \ll c$) et de fluide subsonique ($u < c$) permettent de s'assurer que la caractéristique \mathcal{L}_1 est toujours entrante et \mathcal{L}_3 est sortante. La relation obtenue à partir de la seconde ligne de l'équation (3.6) en imposant l'accélération de la frontière est :

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{u-c} \frac{\partial v_b}{\partial t} - \frac{u+c}{u-c} \mathcal{L}_3 . \quad (3.9)$$

La direction de la caractéristique \mathcal{L}_2 dépend du signe de $u(x_b(t), t) - v_b(t)$. Quand $u(x_b(t), t) - v_b(t) < 0$, la caractéristique \mathcal{L}_2 est fixée à 0.

3.2 Adaptation de la méthode ROD aux caractéristiques

Cette section décrit les méthodes numériques proposées pour résoudre le problème acoustique avec des frontières mobiles. La technique ROD (Reconstruction Off-Site Data) présentée dans la section 3.2.1 suivante est directement adaptée de la méthode IBM présentée aux chapitres 1 et 2 et qui n'utilise pas de condition limite caractéristique. Elle sert de méthode de référence pour la comparaison avec les deux méthodes incluant les

conditions limites caractéristiques.

La section 3.2.2 détaille la méthode RODC (Reconstruction Off-Site Data with Characteristics). La méthode CPIC (Constrained Polynomial Interpolation with Characteristics) est une seconde alternative à ROD qui fournit une nouvelle variante des IBM, présentée dans la section 3.2.3. Cette technique est également inspirée de ROD mais elle propose une implémentation différente des caractéristiques reposant sur une interpolation contrainte sans point fantôme. Enfin, la méthode CPI (Constrained Polynomial Interpolation) présentées dans la section 3.2.4 est également comparée aux alternatives précédentes. Cette méthode utilise la même technique d'interpolation contrainte mais sans les conditions limites caractéristiques.

3.2.1 Méthode ROD

La section 1.2.6 présente la technique ROD issue de l'article [23]. En frontière mobile, cette technique est instable lorsque la frontière est trop proche des points du stencil. Pour résoudre ce problème, une fonction de pondération a été ajoutée à la méthode IBM dans la section 2.2.1. Cette pondération permet de stabiliser la solution pour une position de la frontière arbitraire avec les équations linéarisées.

La méthode ROD sans caractéristiques utilisée dans ce chapitre 3 repose sur le même principe que celle présentée au chapitre 2. Les valeurs de densité et de pression à la frontière sont extrapolées simplement aux points fantômes. Les valeurs de vitesse acoustique sont quant à elles extrapolées et contraintes par la vitesse à imposer à la frontière, incluant la fonction de pondération.

Pour ce cas-test, les paramètres de pondération utilisés pour la méthode ROD sont fixés à $\ell = \Delta x/4$ et $d\ell = 0$. Ils assurent une stabilité suffisante pour les trois configurations étudiées (figure 1.21) comme le montre la figure 3.1. Un ordre 4 de convergence est atteint pour toutes les configurations. Notons qu'en comparaison des résultats obtenus à la figure 1.23 dans le cas linéaire, ces solutions obtenues avec la méthode ROD dans le cas non linéaire présentent un plateau plus marqué pour les grands $\lambda/\Delta x$.

3.2.2 Méthode RODC

Cette méthode consiste à conserver la logique globale de la méthode ROD et de contraindre les valeurs des caractéristiques sur la frontière.

Il s'agit de définir les valeurs des grandeurs ρ , u , p aux points fantômes de manière

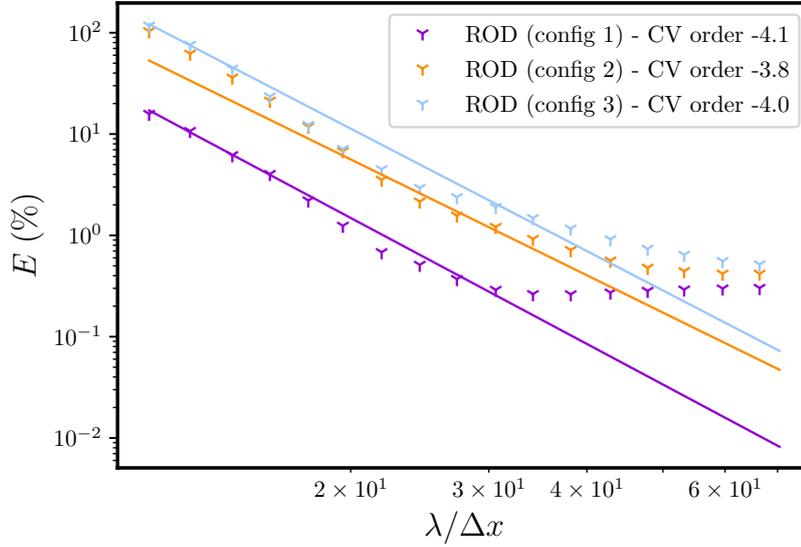


FIGURE 3.1 : Erreur sur la solution obtenue avec la méthode ROD avec $\ell = \Delta x/4$ et $d\ell = 0$.

à vérifier la condition limite sur la frontière. Pour rappel, la condition limite caractéristique consiste à calculer \mathcal{L}_3 (la caractéristique sortante) à partir de la solution à l’instant considéré, calculer la caractéristique \mathcal{L}_1 (toujours entrante) à partir de l’équation (3.9) et enfin imposer \mathcal{L}_2 nulle si celle-ci est entrante. Pour connaître les vitesses de phase relatives des caractéristiques, il est nécessaire d’extrapoler les valeurs des grandeurs d’étude sur la frontière à partir des valeurs du domaine afin de déterminer u et c en $x_b(t)$. Il faut ensuite définir les valeurs de \mathcal{L}_3 sur la frontière. Pour cela, les dérivées spatiales sont calculées sur tous les points du domaine à partir des schémas centrés et décentrés. À partir de ces valeurs, \mathcal{L}_3 est alors calculée sur les derniers points du domaine permettant d’obtenir ses valeurs sur un stencil. Sa valeur sur la frontière est finalement extrapolée. Les étapes clés sont résumées sur la figure 3.2.

La condition limite impose les valeurs des caractéristiques entrantes sur la frontière. L’objectif est d’utiliser la reconstruction polynomiale présentée en section 1.2.6 sur toutes les grandeurs d’étude simultanément en contraignant les polynômes à la frontière grâce

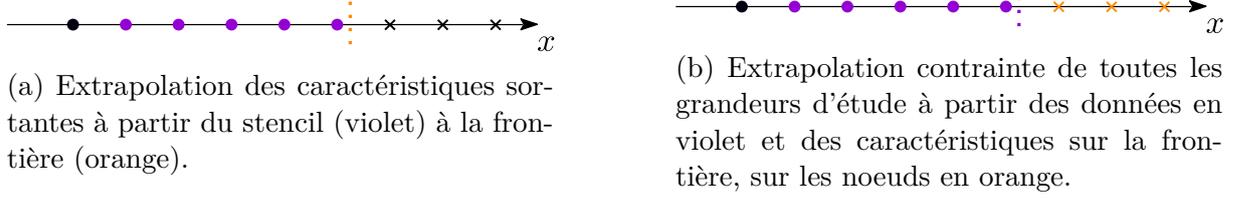


FIGURE 3.2 : Étapes-clés de l'approche RODC basée sur les caractéristiques. La ligne pointillée montre la position de la frontière mobile à une étape temporelle donnée. (Pour simplifier la figure le stencil d'extrapolation a été réduit à 5 points.)

aux valeurs des caractéristiques. Les trois polynômes de reconstruction sont définis par :

$$\tilde{\phi}_\rho(x_b) = \mathbf{a}_\rho^T \boldsymbol{\psi}_b, \quad (3.10a)$$

$$\tilde{\phi}_u(x_b) = \mathbf{a}_u^T \boldsymbol{\psi}_b, \quad (3.10b)$$

$$\tilde{\phi}_p(x_b) = \mathbf{a}_p^T \boldsymbol{\psi}_b, \quad (3.10c)$$

où \mathbf{a}_κ sont les coefficients du polynôme $\tilde{\phi}_\kappa$ associé à la solution $\kappa \in \{\rho, u, p\}$. Le n -ième terme du vecteur $\{\boldsymbol{\psi}_b\}_n = \psi^n(x_b)$ est obtenu pour n allant de 0 à d , le degré du polynôme, avec ψ défini par l'expression (1.19). Pour chaque variable κ , la dérivée spatiale du polynôme est donnée par :

$$\left. \frac{\partial \tilde{\phi}_\kappa}{\partial x} \right|_{x_b} = \mathbf{a}_\kappa^T \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x_b}, \quad (3.11)$$

où le i -ième terme du vecteur $\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x_b}$ vaut $\left\{ \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x_b} \right\}_i = i (x_b - x_{\text{ref}})^{i-1}$.

La fonction coût pondérée utilisée dans le cadre de cette méthode permet de calculer les trois polynômes simultanément avec la contrainte des caractéristiques. Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_u, \mathbf{a}_p, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = & \frac{1}{2} \sum_m \gamma^2(x_m) \left[(\rho(x_m) - \mathbf{a}_\rho \boldsymbol{\psi}(x_m))^2 + (u(x_m) - \mathbf{a}_u \boldsymbol{\psi}(x_m))^2 + (p(x_m) - \mathbf{a}_p \boldsymbol{\psi}(x_m))^2 \right] + \\ & \lambda_1 \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}_u \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x_b} - \frac{1}{2\rho_b c_b} \mathbf{a}_p \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x_b} - \mathcal{L}_1 \right) + \lambda_2 \left(\mathbf{a}_\rho \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x_b} - \frac{1}{c_b^2} \mathbf{a}_p \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x_b} - \mathcal{L}_2 \right) + \\ & \lambda_3 \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}_u \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x_b} + \frac{1}{2\rho_b c_b} \mathbf{a}_p \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x_b} - \mathcal{L}_3 \right), \quad (3.12) \end{aligned}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les trois multiplicateurs de Lagrange. La première partie de cette expression traduit la correspondance des polynômes de reconstruction des fonctions ρ, u, p à leurs valeurs respectives sur les points du stencil. La seconde partie correspond au forçage par les caractéristiques des dérivées spatiales des polynômes de reconstruction.

Pour déterminer les inconnues \mathbf{a}_κ et les λ_j avec $j \in \{1, 2, 3\}$, il s'agit de minimiser la fonction coût en posant les variations $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathbf{a}_\kappa, \lambda_j} = 0$. En calculant les variations de la fonction \mathcal{C} par rapport à \mathbf{a}_κ et les multiplicateurs de Lagrange λ_j , le système d'équations est mis sous la forme matricielle suivante¹ :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} (\gamma\Psi)^T\gamma\Psi & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \beta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\gamma\Psi)^T\gamma\Psi & \mathbf{0} & \frac{1}{2}\beta & \mathbf{0} & \frac{1}{2}\beta \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\gamma\Psi)^T\gamma\Psi & \frac{-1}{2\rho c}\beta & \frac{-1}{c^2}\beta & \frac{1}{2\rho c}\beta \\ \hline \mathbf{0} & \frac{1}{2}\beta^T & \frac{-1}{2\rho c}\beta^T & 0 & 0 & 0 \\ \beta^T & \mathbf{0} & \frac{-1}{c^2}\beta^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}\beta^T & \frac{1}{2\rho c}\beta^T & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{a}_\rho \\ \mathbf{a}_u \\ \mathbf{a}_p \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi^T\gamma\phi_\rho \\ \Psi^T\gamma\phi_u \\ \Psi^T\gamma\phi_p \\ \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{L}_3 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

où $\beta = \partial\psi/\partial x|_{x_b}$ avec $\beta_0 = 0$ et $\beta_i = i(x_b - x_{\text{ref}})^{i-1}$ pour $i > 0$.

Les résultats numériques présentés à la fin de ce chapitre pour la méthode RODC sont obtenus en utilisant $x_{\text{ref}} = x_b$ ², donc $\beta_1 = 1$ et $\beta_i = 0$ pour $i \neq 1$.

Cette méthode constitue une évolution notable par rapport à la méthode présentée dans [23]. Dans cet article, l'implémentation générale n'est formulée que pour des conditions limites de Dirichlet, de Neumann et de Robin. La méthode RODC présente une contrainte par couplage des dérivées spatiales des grandeurs à la frontière. La reconstruction polynomiale a lieu pour toutes les grandeurs simultanément, ce qui n'est pas le cas des travaux présentés dans l'article [23].

3.2.3 Méthode CPIC

Pour la méthode RODC présentée précédemment, l'interpolation est contrainte par des caractéristiques sortantes, qui sont des valeurs extrapolées. La seconde approche proposée pour implémenter les conditions limites mobiles caractéristiques consiste à contraindre les caractéristiques entrantes uniquement.

1. Pour alléger la notation, les indices b correspondant à la frontière sont omis dans cette expression.
2. Des essais ont également été menés avec x_{ref} sur le premier point fantôme, et aucune différence notable n'a été constatée.

Le principe de cette procédure est le suivant. Les caractéristiques sortantes peuvent être exprimées sur les trois derniers points à partir des dérivées spatiales utilisant des schémas décentrés, car elles utilisent les données à gauche de la frontière. En revanche, les caractéristiques entrantes sont calculées d'abord à la frontière à partir des caractéristiques sortantes et de la condition limite, puis une interpolation contrainte est utilisée pour le calcul des caractéristiques entrantes aux trois derniers points. Il est important de noter que cette approche ne nécessite pas l'utilisation de points fantômes.

Cette seconde approche appelée CPIC se divise en plusieurs étapes principales appliquées à chaque pas de temps, illustrées sur la figure 3.3.

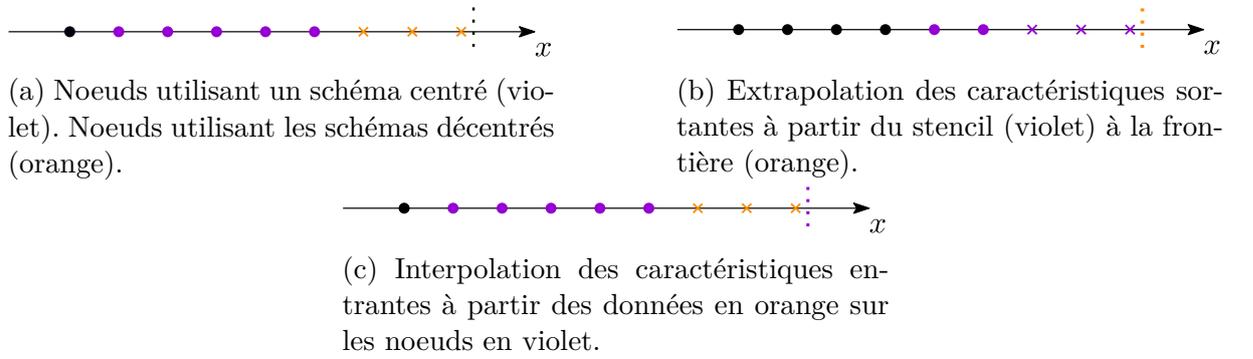


FIGURE 3.3 : Étapes-clés utilisées pour l'approche CPIC basée sur les caractéristiques. La ligne pointillée montre la position de la frontière mobile à une étape temporelle donnée. (Pour simplifier la figure le stencil d'extrapolation a été réduit à 5 points.)

Le détail des étapes de la méthode CPIC est le suivant :

1. La première étape consiste à calculer les dérivées spatiales de la solution \mathbf{q} . Le calcul est effectué en utilisant le schéma de différences finies à 7-points centré sur la plupart des points physiques de la grille. Pour les trois derniers points physiques, $\partial\mathbf{q}/\partial x$ est calculé en utilisant des schémas décentrés, pour utiliser uniquement les données des points physiques.
2. À partir de la connaissance de $\partial\mathbf{q}/\partial x$, les caractéristiques sortantes \mathcal{L} sont calculées sur tous les points physiques en utilisant l'équation (3.6).
3. Les caractéristiques sortantes et les solutions \mathbf{q} sont extrapolées sans contrainte à la frontière à x_b .
4. À la frontière, la condition limite est utilisée pour calculer la valeur \mathcal{L}_1 (la caractéristique entrante) avec l'expression (3.9).

5. La caractéristique entrante \mathcal{L}_1 est interpolée sur les trois derniers points de la grille où les schémas de différences finies décentrés ont été utilisés. La méthode d'interpolation contrainte (sans pondération) est décrite équation (1.25), dont la contrainte est la valeur de \mathcal{L}_1 calculée à la frontière à l'étape 4.
6. À chaque point de la grille, les dérivées temporelles de la solution $\partial \mathbf{q} / \partial t$ sont calculées en utilisant les valeurs de \mathcal{L}_i et l'expression (3.6).

3.2.4 Méthode CPI

La méthode CPI consiste à adapter sans caractéristiques la méthode CPIC. Elle n'utilise ni points fantômes, ni interpolation contrainte.

Sur les trois derniers points de la grille à gauche de la frontière, les dérivées spatiales ne peuvent pas être calculées avec des schémas centrés. Sans les caractéristiques, la condition limite fixe la valeur de $\partial u / \partial t$ à la frontière. La dérivée temporelle de la vitesse est alors interpolée sur les trois derniers points et contrainte par la condition limite. Les dérivées temporelles de la pression et de la densité sont simplement extrapolées aux trois derniers points à partir des valeurs dans le domaine.

Les étapes principales sont les suivantes :

1. Les dérivées spatiales de la solution \mathbf{q} sont calculées en utilisant seulement le stencil de différences finies de sept points centrés pour tous les points physiques de la grille, où le stencil peut être appliqué.
2. À la frontière, la condition limite directe $\partial u / \partial t$ est fournie par (3.8). Les valeurs de $\partial u / \partial t$ aux trois derniers points sont obtenus en construisant une interpolation contrainte à partir du système (1.25).
3. Les valeurs de $\partial \rho / \partial t$ et $\partial p / \partial t$ aux trois derniers points sont obtenues en utilisant une extrapolation non contrainte.

La méthode est considérée ici à seule fin de comparaison avec la méthode CPIC.

3.3 Condition initiale et solution analytique

Le mouvement de la frontière est défini de la même façon que pour le cas linéaire présenté au premier chapitre, donné par le système (1.1). Pour ce cas-test, $\omega = 6\pi$. Indépendamment de l'amplitude de déplacement d_b , la frontière mobile traverse un point,

car l'oscillation de la frontière est centrée sur un point de la grille en paramétrant $x_{b0} = L - d_b$.

De plus, le pulse acoustique initial est défini par :

$$\rho(x) = \rho_0, \quad u(x) = 0, \quad p(x) = p_0 + A \frac{x - L/2}{w} \exp\left[-\frac{(x - L/2)^2}{2w^2}\right], \quad (3.14)$$

où A et w sont l'amplitude et la largeur à mi-hauteur du pulse gaussien, p_0 est la pression atmosphérique adimensionnée. La figure 3.4 présente cette condition initiale.

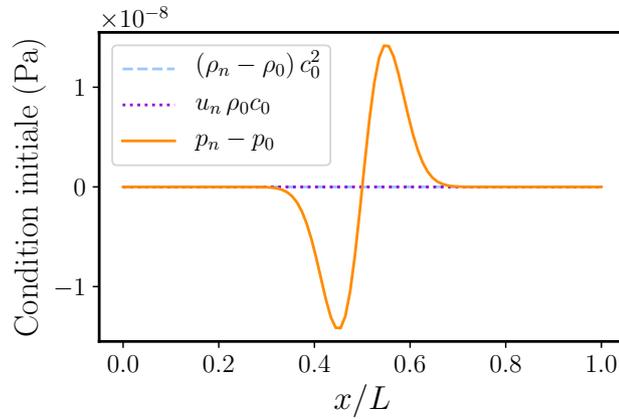


FIGURE 3.4 : Condition initiale pour le pulse acoustique avec $A \approx 2,4 \cdot 10^{-8}$ et $w = L/20$.

Afin de pouvoir comparer les solutions numériques à la solution analytique de référence, l'amplitude A du pulse et l'amplitude d_b des oscillations de la frontière sont choisis petites : $A \approx 2,4 \cdot 10^{-8}$ et $d_b = 10^{-10}$. Le niveau de pression acoustique de l'onde générée dans ce cas est de $L_p \approx 31$ dB calculé avec la définition standard : $L_p = 10 \log_{10}(p_{\text{rms}}^2/p_{\text{ref}}^2)$.

La solution analytique utilisée ici est différente de celle présentée dans le premier chapitre. Pour rappel, dans le premier chapitre, le problème analytique consiste à résoudre les équations d'Euler linéarisées avec des conditions limites mobiles. Le raisonnement concernant les hypothèses de linéarisation est expliqué en section 1.2. Pour linéariser les équations, il est nécessaire de considérer de faibles perturbations acoustiques autour d'un état d'équilibre. La géométrie du domaine étant mobile, il n'y a pas d'état d'équilibre. Nous avons donc pris le parti de résoudre numériquement et analytiquement ce problème avec équations linéarisées et frontière mobile, dans le but de valider le modèle numérique, même si les solutions ainsi obtenues ne sont pas physiquement réaliste.

Dans le cas-test de ce troisième chapitre, le problème numérique contient les frontières

mobiles ainsi que les équations non linéarisées. Pour décrire une solution analytique à faible amplitude, le problème complet est linéarisé. Les équations linéarisées sont résolues avec une frontière fixe à sa position moyenne soumise à une perturbation en vitesse oscillante. On peut alors appliquer le principe de superposition des ondes. La solution analytique s'écrit comme suit :

$$p^a(x, t) = p_0 + f_1(x, t) + g_1(x, t) + g_2(x, t) + g_3(x, t) , \quad (3.15a)$$

$$f_1(x, t) = A \frac{x - c_0 t - L/2}{w} \exp \left[\frac{-(x - c_0 t - L/2)^2}{2w^2} \right] , \quad (3.15b)$$

$$g_1(x, t) = A \frac{x + c_0 t - L/2}{w} \exp \left[\frac{-(x + c_0 t - L/2)^2}{2w^2} \right] , \quad (3.15c)$$

$$g_2(x, t) = A \frac{-(x + c_0 t - 3L/2)}{w} \exp \left[\frac{-(x + c_0 t - 3L/2)^2}{2w^2} \right] , \quad (3.15d)$$

$$g_3(x, t) = -\rho_0 c_0 v_b \left(\frac{x - L}{c_0} + t \right) . \quad (3.15e)$$

Les termes f_1 et g_1 correspondent aux ondes se propageant dans les deux directions de l'espace. Le terme g_2 représente la réflexion du pulse initial par la frontière à droite du domaine. Le terme g_3 correspond quant à lui à l'onde générée par le mouvement de cette frontière de droite.

L'erreur relative E est de nouveau calculée à partir de la norme Euclidienne de la pression :

$$E = \left[\frac{\sum_{k=0}^{N_x} (p_k^a - p_k^n)^2}{\sum_{k=0}^{N_x} (p_k^a - p_0)^2} \right]^{1/2} , \quad (3.16)$$

où p_k^a et p_k^n sont les valeurs de pression analytique et numérique au point k .

L'erreur est calculée à plusieurs instants et en particulier à $T = L/c_0$, qui correspond au moment où le pulse acoustique a été réfléchi sur la frontière de droite et atteint de nouveau le centre du domaine.

Une validation pour de plus grandes amplitudes de mouvement de la frontière et du pulse initial impliquées dans la génération d'harmoniques due aux effets non linéaires peut être mise en place. La solution numérique obtenue est comparée à la solution de Fubini–Ghiron [70]. Elle décrit la propagation non linéaire d'une onde 1D produite par une frontière mobile en mouvement sinusoïdal avant la formation d'un choc. L'expression

analytique de cette solution est la suivante :

$$p(x, t) = P_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sigma} J_n(n\sigma) \sin \left[n\omega \left(t - \frac{x}{c_0} \right) \right], \quad (3.17)$$

où $\sigma = x/\bar{x}$ est la distance normalisée par la distance de formation du choc $\bar{x} = \rho_0 c_0^2 / (\beta k P_0)$. Le paramètre adimensionnel β définit le coefficient de non-linéarité, pour l'air $\beta = 1.2$. Dans les résultats présentés dans la suite, 35 termes sont utilisés dans la somme. L'amplitude P_0 et la fréquence ω de la solution sont ajustées à celles du cas-test.

3.4 Validation numérique pour le cas linéaire

Cette section présente les solutions numériques obtenues lors de la résolution des équations d'Euler non linéarisées en utilisant les deux méthodes sans caractéristiques, i.e. ROD et CPI, ainsi que les deux méthodes avec caractéristiques, i.e. RODC et CPIC.

Pour ce cas-test, le CFL est fixé à $c_0 \Delta t / \Delta x = 0.8$. La convergence des résultats numériques est évaluée en cherchant la vitesse avec laquelle l'erreur relative E évolue en fonction de la résolution de la grille, donnée par le nombre de points par longueur d'onde $\lambda / \Delta x$. Le diagramme de convergence est calculé pour des valeurs de Δx comprises entre $\Delta x_{\min} \approx 0.003$ ($N = 300$) et $\Delta x_{\max} \approx 0.021$ ($N = 49$). Cela correspond à $d_b / \Delta x_{\min} = 2.99 \cdot 10^{-8}$ et $d_b / \Delta x_{\max} = 4.8 \cdot 10^{-9}$. Les amplitudes sont identiques à utilisées dans les chapitres 1 et 2.

L'erreur est calculée à deux instants. À $t = L/c_0$, l'impulsion a été réfléchiée par la frontière mobile et s'est propagée jusqu'au centre du domaine de calcul, d'où elle est partie. À $t = 2L/c_0$, l'impulsion a quitté le domaine de calcul en passant par la condition de non-réflexion à gauche (à $x = 0$). Les résultats présentés sur la figure 3.5 montrent qu'une convergence d'ordre 4 est obtenue pour les quatre méthodes considérées. Néanmoins, pour les hautes résolutions ($\lambda / \Delta x > 60$), les solutions convergent vers un même plateau. La méthode ROD est plus performante que la méthode CPIC lorsque l'impulsion est présente dans le domaine (voir la figure 3.5a). La situation est inversée lorsque l'impulsion a quitté le domaine et que seules les ondes acoustiques directement générées par la frontière mobile sont présentes (voir la figure 3.5b). Ces résultats montrent également que l'utilisation des caractéristiques avec la méthode CPIC permet d'améliorer la précision aux temps $t = L/c_0$ et $t = 2L/c_0$. À $t = L/c_0$, l'erreur obtenue en utilisant la méthode RODC est du même ordre de grandeur que celle obtenue avec la méthode ROD. Cependant, à $t = 2L/c_0$, la

méthode RODC semble être plus sensible à la résolution de la grille que ROD, puisque le taux de convergence est plus élevé en utilisant RODC.

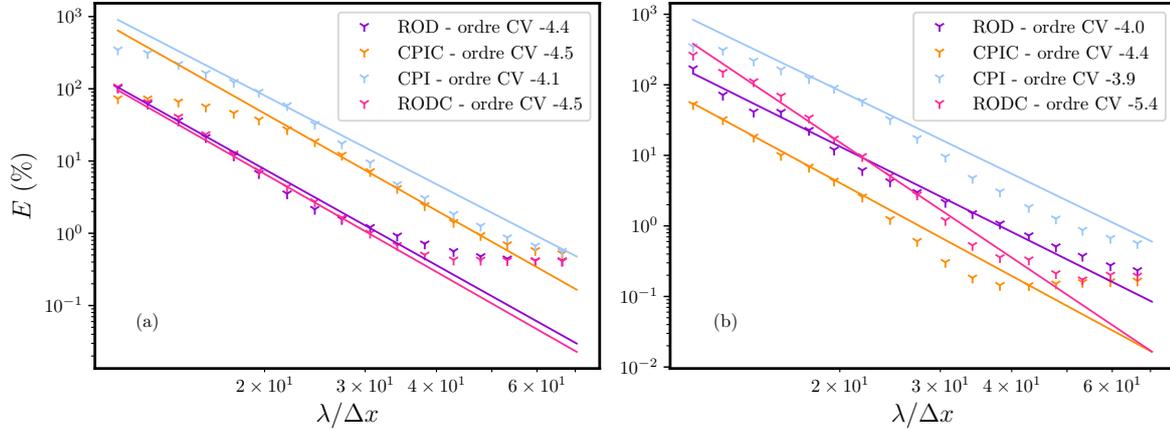


FIGURE 3.5 : Variation de l'erreur relative E en fonction de la résolution de la grille $\lambda/\Delta x$ avec CFL = 0.8 constant, à (a) $t = L/c_0$ et (b) $t = 2L/c_0$.

Des simulations complémentaires sont mises en place pour tenter d'expliquer la présence du plateau pour les hautes résolutions visible sur la figure 3.5. Tout d'abord, la taille du domaine de calcul est augmentée à gauche pour éloigner la condition limite de non-réflexion de la limite mobile à droite du domaine. Ainsi, ni l'impulsion, ni l'onde provenant de la frontière mobile n'atteignent la condition limite de non-réflexion située à gauche. Le résultat est présenté sur la figure 3.6a. Le plateau reste inchangé et n'est donc pas dû à la condition de non-réflexion. Il est cependant intéressant de noter que pour des résolutions moyenne et basse, les résultats obtenus avec la méthode ROD sont plus précis. Cela suggère que lors de l'utilisation de la méthode ROD, des ondes ne sont pas correctement absorbées par la condition de non-réflexion caractéristique du côté gauche. Nous reviendrons sur ce point plus loin dans cette section.

Deuxièmement, une autre source potentielle d'erreur numérique est l'interpolation (avec ou sans contrainte) utilisée par les méthodes CPIC et ROD pour implémenter la condition de frontière mobile. L'ordre d'interpolation est augmenté de 4 à 5 pour les interpolations simples et contraintes, afin d'évaluer l'influence de ce paramètre. Les résultats présentés sur la figure 3.6b montrent qu'une légère amélioration est obtenue pour la méthode ROD, principalement pour les faibles résolutions. Pour la méthode CPIC, l'erreur augmente lorsqu'une interpolation de cinquième ordre est utilisée. L'interpolation polynomiale peut en effet être instable lorsque son ordre est trop élevé. C'est le cas ici pour

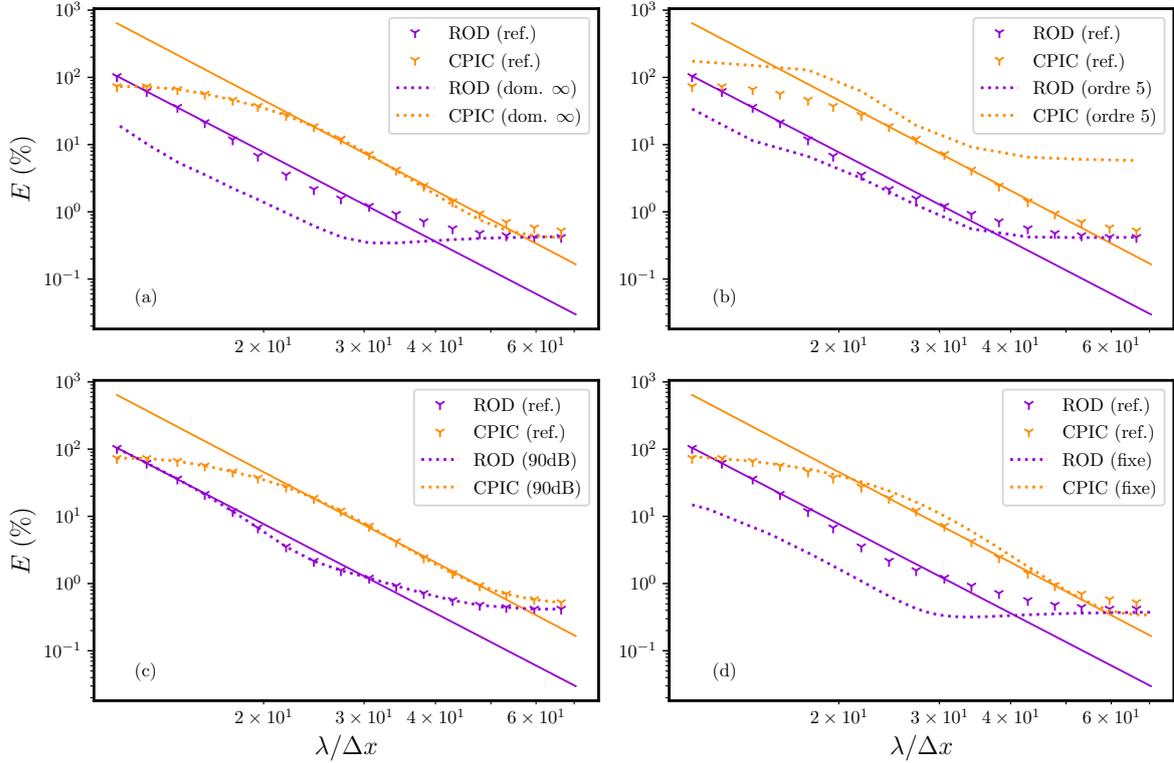


FIGURE 3.6 : Convergence du modèle numérique avec $CFL = 0.8$ constant et à $t = L/c_0$. (a) influence de la condition de non-réflexion sur l'extrémité gauche du domaine de calcul ; (b) influence de l'ordre d'interpolation (4 ou 5) ; (c) influence de l'amplitude (31dB ou 90dB) ; (d) influence du mouvement de la frontière.

la méthode CPIC car elle utilise un plus grand nombre de reconstructions polynomiales³ que la méthode ROD⁴.

Troisièmement, la solution numérique est basée sur les équations d'Euler non linéaires, tandis que la solution analytique de référence est basée sur les équations linéarisées. Des simulations numériques avec de fortes amplitudes pour l'impulsion initiale et les oscillations de la frontière sont donc réalisées. Aucune différence n'est observée sur les résultats de la figure 3.6c, ce qui confirme que le plateau n'est pas dû à la présence d'effets non linéaires.

Quatrièmement, le palier persiste lorsque la frontière est fixe. En effet, sur la fi-

3. quatre extrapolations simples sur la frontière et une interpolation contrainte sur les trois derniers points

4. deux extrapolations simples sur les points fantômes et une extrapolation contrainte sur les mêmes points

gure 3.6d, la solution de référence avec frontière mobile est comparée à la solution pour une frontière fixe placée à $x_b = L - \Delta x/2$. L'erreur de la solution obtenue avec CPIC est très peu influencée par le mouvement de la frontière. Tandis que pour ROD, l'erreur obtenue en frontière fixe est plus faible. Cela montre que cette méthode est sensible à l'erreur introduite par le mouvement de la frontière, ce qui n'est pas le cas de la méthode CPIC.

Pour conclure, plusieurs facteurs qui auraient pu permettre d'expliquer la présence de ce plateau d'erreur (la condition limite à gauche, l'ordre de convergence des extrapolations, les effets non linéaires, mouvement de la frontière) ont été envisagés mais aucun n'a pu être identifié comme étant à son origine. Ces résultats complémentaires ne nous permettent donc pas d'apporter d'explication claire à la présence de ce plateau.

Pour mieux évaluer le comportement des différents modèles numériques, la figure 3.7 présente l'évolution de l'erreur numérique sur une longue durée (jusqu'à $t = 4L/c_0$).

Les figures 3.7a et 3.7b reportent les résultats pour lesquelles l'impulsion et l'onde provenant de la frontière mobile sont présentes dans le domaine, pour deux résolutions de grilles différentes ($\lambda/\Delta x = 22, 1$ et $\lambda/\Delta x = 34, 1$, respectivement). L'erreur numérique obtenue en utilisant les méthodes ROD et RODC tend à osciller rapidement et augmente régulièrement tout au long de la simulation, sauf pour $t \simeq 3L/c_0$ comme le montre la figure 3.7b. Pour les hautes résolutions considérées, la méthode RODC est globalement plus précise que la méthode ROD (figure 3.7b). L'erreur obtenue en utilisant la méthode CPIC est moins oscillante et beaucoup plus faible pour les temps de simulation longs. En particulier, l'erreur commise en utilisant la méthode CPIC est plus importante lorsque l'impulsion réfléchie se propage dans le domaine de calcul (entre $t \simeq \frac{1}{2}L/c_0$ et $t \simeq \frac{3}{2}L/c_0$). Une fois que l'impulsion réfléchie a quitté le domaine en passant par la condition de non-réflexion à gauche, l'erreur obtenue avec CPIC est inférieure d'environ un ordre de grandeur à celles obtenues avec les méthodes ROD et RODC.

Comme les valeurs d'erreur obtenues avec CPIC paraissent différentes pour l'impulsion et l'onde émise par la frontière mobile, les figures 3.7c et 3.7d présentent les résultats sans l'impulsion. La solution initiale associée à ce cas-test est présentée figure 3.8a. La condition initiale est nulle, puis l'onde émise par la frontière mobile se propage progressivement dans le domaine de calcul (jusqu'à $t \simeq L/c_0$). Pendant ce transitoire, les niveaux d'erreurs sont importants pour toutes les méthodes, l'erreur obtenue avec la méthode CPIC étant plus élevée et ROD et RODC étant comparables. Une fois que l'onde a rempli le domaine de calcul, les niveaux d'erreur diminuent de manière significative, en particulier pour

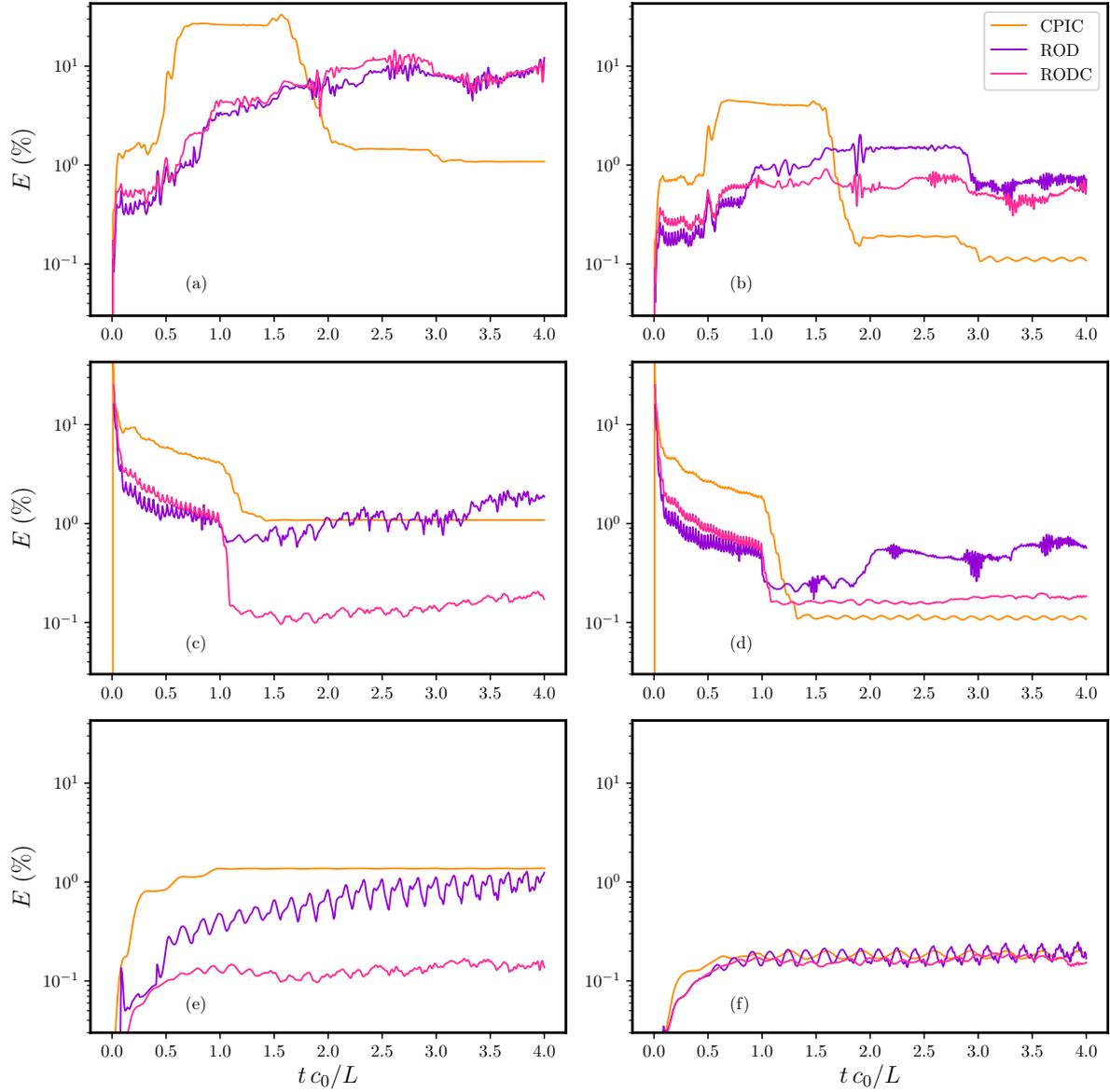


FIGURE 3.7 : Évolution temporelle de l'erreur obtenue avec les méthodes CPIC, ROD et RODC sur un temps long (jusqu'à $t = 4L/c_0$). Les erreurs sont calculées avec une impulsion (a)(b), sans l'impulsion (c)(d) et sans l'impulsion, sans régime transitoire (e)(f) (la condition initiale est représentée sur la figure 3.8(b)), à $\lambda/\Delta x = 22.1$ sur la première colonne (a)(c)(e), et à $\lambda/\Delta x = 34,1$ sur la deuxième colonne (b)(d)(f).

les méthodes CPIC et RODC. La méthode RODC est significativement plus précise que la méthode ROD. Même après le transitoire, l'erreur commise en utilisant la méthode

ROD continue d'augmenter progressivement, ce qui indique des problèmes de stabilité. Le comportement à long terme de la méthode CPIC est nettement plus stable que celui des méthodes ROD et RODC.

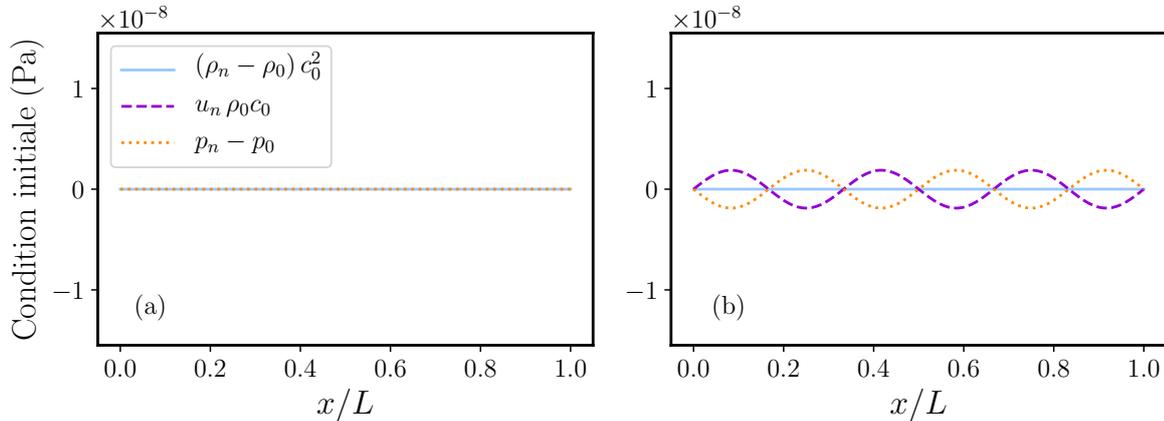


FIGURE 3.8 : Solution initiale pour les cas à gauche sans impulsion (correspondant aux sous-figures 3.7(c)(d)) et à droite sans impulsion et sans régime transitoire (sous-figures 3.7(e)(f)).

Enfin, les figures 3.7e et 3.7f présentent les résultats obtenus lorsque la condition initiale est la solution analytique de l'onde progressive générée uniquement par la frontière mobile. La solution initiale associée à ce cas-test est reportée figure 3.8b. Dans cette configuration particulière, il n'y a donc pas de transitoire, puisque l'onde est déjà présente partout dans le domaine de calcul. Pour une faible résolution de grille, les erreurs numériques obtenues pour les méthodes RODC et CPIC présentent presque le même plateau que celles visibles sur les figures (c) et (e). Cependant, l'erreur obtenue avec la méthode ROD augmente progressivement, ce qui confirme à nouveau les problèmes de stabilité. Pour la haute résolution, les trois méthodes produisent le même niveau d'erreur numérique.

3.5 Résultats numériques dans le cas non linéaire

Afin d'illustrer la robustesse du modèle numérique proposé, la méthode CPIC présentée dans la section 3.2.3 est utilisée dans le cas d'amplitudes de pression beaucoup plus élevées afin d'observer les effets de la propagation non linéaire. L'amplitude de l'impulsion de la condition initiale et l'amplitude des oscillations de la frontière mobile sont ajustées

afin de générer des niveaux de pression acoustique de 155 dB dans le domaine. Une résolution spatiale de $\lambda/\Delta x = 42$ pour garantir la convergence des résultats numériques.

La figure 3.9a présente la comparaison entre les résultats numériques obtenus à l'aide de la méthode du CPIC à grande amplitude et la solution analytique de référence linéaire. Les effets non linéaires sont clairement visibles. L'impulsion se déforme progressivement au cours de sa propagation jusqu'à avoir un profil en dents de scie, comme prévu par la théorie.

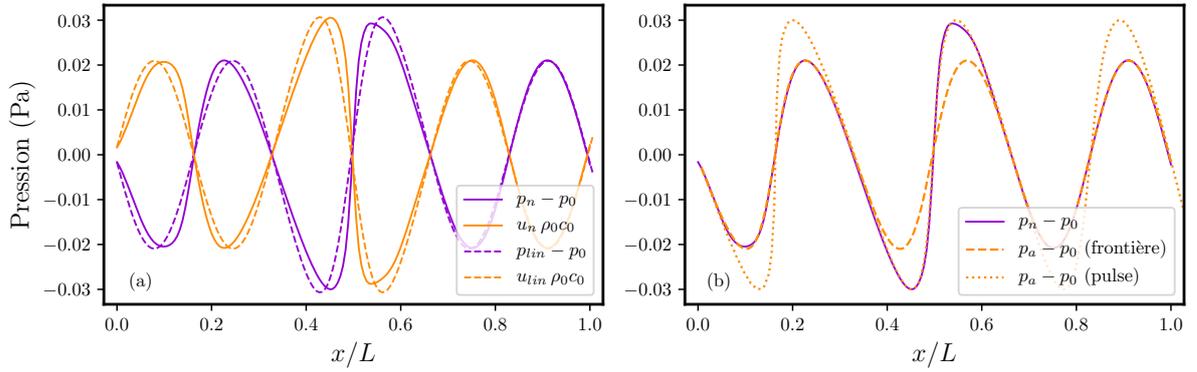


FIGURE 3.9 : Solution à $t = L/c_0$ pour $L_p = 155$ dB. (a) Les solutions numériques (lignes pleines) sont comparées à la solution du problème linéarisé (lignes de tirets). (b) Les solutions numériques en pression (lignes pleines) sont comparées à la solution analytique du modèle de Fubini–Ghiron avec l'amplitude de l'onde provenant du mouvement de la frontière (lignes de tirets), et avec l'amplitude de l'onde provenant de la réflexion de l'impulsion (lignes de points).

La comparaison avec la solution de Fubini–Ghiron (donnée équation (3.17)) est présentée sur la figure 3.9b. La forme d'onde analytique est d'abord calculée avec P_0 correspondant à l'onde générée par la frontière mobile (lignes de tirets). On observe un excellent accord avec la solution numérique, sauf au milieu du domaine (environ $0.3 < x/L < 0.7$) où l'impulsion est présente. Si P_0 dans (3.17) est fixé à l'amplitude initiale de l'impulsion (lignes de points), on obtient un bon accord avec les résultats numériques au milieu du domaine. Cela indique que le modèle numérique est capable de capturer la propagation non linéaire de l'impulsion et de l'onde générée par la frontière en mouvement.

Ce cas-test illustre que la méthode proposée dans le cadre de cette thèse peut résoudre des situations où les effets non linéaires de propagation sont importants. Cependant, pour aller plus loin et traiter pleinement les problèmes impliquant des ondes de choc acoustiques, il est nécessaire d'introduire des techniques de capture de chocs, telle que

celle proposée par Bogey *et al.* [9].

3.6 Conclusions

Dans ce chapitre, les conditions limites caractéristiques sont formalisées pour les équations non linéarisées. L'adaptation des méthodes à frontière mobile aux conditions limites caractéristiques n'est pas triviale et nous en avons décrit deux : les méthodes CPIC et RODC. La méthode RODC est une amélioration de la méthode ROD avec pondération (présentée au chapitre 2) en utilisant des conditions limites couplées reposant sur les caractéristiques non linéaires. La méthode CPIC est une approche nouvelle utilisant à profit la direction des ondes caractéristiques à la frontière pour implémenter la condition limite caractéristique mobile. Pour de faibles amplitudes de propagation, une comparaison des méthodes utilisant les caractéristiques CPIC et RODC et des méthodes sans caractéristiques (ROD et CPI) a été présentée. Un quatrième ordre de convergence a été atteint comme attendu, quelle que soit la méthode utilisée. L'introduction des caractéristiques dans la formulation des IBM présente plusieurs avantages. Elles permettent d'améliorer significativement la précision de la solution pour tous les cas considérés. Elles permettent également d'améliorer la précision de la solution sur les longues durées de propagation dans le cas de la méthode RODC.

En comparant les méthodes ROD, RODC et CPIC, trois critères de comparaison se dessinent : la précision de la réflexion de l'impulsion sur la frontière mobile, la robustesse des méthodes sur une longue durée de simulation et la sensibilité des méthodes à la résolution. La précision de la réflexion de l'impulsion sur la frontière mobile est meilleure en utilisant les méthodes ROD et RODC. La méthode CPIC s'avère quant à elle plus robuste pour les calculs à long terme. En effet, les résultats obtenus avec les méthodes ROD, et RODC ont montré que des réflexions parasites peuvent apparaître à gauche du domaine, ce qui entraîne une détérioration de la solution. Ce phénomène n'est pas présent en utilisant la méthode CPIC. La méthode RODC est également plus sensible à la résolution de la grille que les deux autres méthodes.

Pour toutes les méthodes, l'erreur atteint un plateau à haute résolution. Ce plateau disparaît lorsque la frontière est fixe. Des investigations sur sa cause ont été menées. Nous avons montré qu'il n'est pas causé par la condition limite de non-réflexion à gauche du domaine. De plus, il n'est pas dépendant de l'ordre d'interpolation des schémas d'interpolations, ni de la présence d'effets non linéaires.

Pour terminer ce chapitre posant le formalisme des conditions limites caractéristiques mobiles pour les équations non linéaires, la méthode CPIC est testée pour de grandes amplitudes de mouvement de la frontière et de l'impulsion initiale. La solution numérique est comparée à la solution de Fubini–Ghiron [70]. Il a été montré que la méthode CPIC peut résoudre des problèmes avec la présence d'effets non linéaires de propagation. Pour aller plus loin dans ce travail, il pourrait être envisageable d'introduire des algorithmes de capture de chocs pour résoudre les problèmes impliquant des ondes de choc acoustiques.

EXTENSION AUX CONDITIONS LIMITES D'IMPÉDANCE MOBILES

Il est utile de modéliser des problèmes avec des revêtements acoustiques sur des objets mobiles ou déformables. Pour cela il peut être nécessaire d'associer les méthodes à frontières immergées mobiles et les conditions limites d'impédance dans le domaine temporel. L'intérêt du formalisme des caractéristiques pour bien poser les problèmes à frontière mobile a été discuté au chapitre précédent. Les trois méthodes CPIC, ROD et RODC seront utilisées dans ce chapitre. Ce travail présente un cas-test similaire au précédent pour lequel la frontière imperméable est remplacé par une frontière impédante. Pour cette première implémentation, le modèle d'impédance choisi est le système masse-ressort amorti proposé par Tam et Auriault [82].

4.1 Introduction sur les conditions limites d'impédance mobile

L'objectif de cette section est de présenter dans un premier temps les modèles classiques de conditions limites d'impédance dans le domaine temporel. Ensuite, les travaux qui montrent l'intérêt des caractéristiques pour poser mathématiquement les conditions limites d'impédance dans le domaine temporel sont exposés. Enfin, une revue des méthodes de frontières immergées mettant en jeu des conditions limites d'impédance pour des frontières immobiles est réalisé.

4.1.1 Conditions limites d'impédance en FDTD

Une surface traitée acoustiquement est souvent modélisée par une impédance acoustique. L'impédance est la relation qui relie linéairement la pression \hat{P} et la vitesse acoustique normale à la surface impédance \hat{V}_n dans le domaine fréquentiel :

$$Z(\omega) = \hat{P}(\omega)/\hat{V}_n(\omega).$$

La transformée de Fourier inverse de la relation précédente permet d'exprimer la pression dans le domaine temporel, comme suit :

$$p(t) = \int_0^{+\infty} z(\tau)v_n(t - \tau)d\tau,$$

où p , v_n et z sont des valeurs temporelles de pression, vitesse normale et impédance acoustique dans le domaine temporel. Ainsi pour obtenir la valeur de la pression à un instant t , il est nécessaire de stocker les valeurs d'impédance et de vitesse normale à toutes les étapes précédentes. Deux axes principaux de recherche sont menés sur ce sujet. Le premier concerne la prise en compte des propriétés acoustiques du revêtement dans le modèle fréquentiel afin d'obtenir un modèle dans le domaine temporel générique, efficace et large bande. Le second concerne l'approximation du produit de convolution afin de limiter le stockage de données. Deng [17] dresse une revue des conditions limites d'impédance dans le domaine temporel.

Le premier type de modèle d'impédance dans le domaine temporel développé est celui à trois paramètres (proportionnel, intégral et dérivatif) proposé par Tam et Auriault [82]. Il consiste à modéliser le comportement acoustique d'un revêtement par celui d'un oscillateur masse-ressort amorti. L'implémentation de cette condition limite repose sur la résolution des relations dynamiques temporelles de cet oscillateur. La pression du fluide à la frontière agit comme un terme de force sur l'oscillateur. La vitesse résultante de l'oscillateur intervient alors dans la contrainte imposée au fluide. Rienstra [73] présente des conditions nécessaires pour que les fonctions d'impédance soient physiquement admissibles.

Özyörük et Long [65] ouvrent la porte des modèles large bande, c'est-à-dire dont la relation d'impédance est maîtrisée sur un intervalle fréquentiel étendu. Ils consistent à utiliser une fraction rationnelle pour approximer la fonction d'impédance dans le domaine de la transformée en z . L'utilisation de la transformée en z dans ce cadre permet d'abou-

tir à des filtres numériques récurrents à réponse impulsionnelle infinie, ce qui permet au passage en temporel d'estimer récursivement la valeur de la pression à un instant donné par rapport aux valeurs de pression et de vitesse à plusieurs instants précédents. Cette opération nécessite une connaissance restreinte des valeurs antérieures des pressions et des vitesses acoustiques à la surface, contrairement à la convolution. L'article soulève la nécessité de choisir avec attention le pas temporel afin de ne pas diminuer la précision. Pour poursuivre avec les modèles large-bande, Reymen *et al.* [72] proposent un modèle d'impédance sous la forme d'une fraction rationnelle mais cette fois dans le domaine fréquentiel. Elle peut s'écrire comme une série de fractions partielles avec des résidus et des pôles. Il s'agit de la méthode multipôle, qui consiste à généraliser la méthode à trois paramètres de Tam et Auriault [82]. Le passage dans le domaine temporel est réalisé grâce à une convolution récursive, c'est-à-dire par le stockage d'un unique accumulateur mis à jour à chaque étape. Cet accumulateur ne dépend que des valeurs à l'étape précédente. Li *et al.* [52] proposent une évolution du modèle multipôle large bande en utilisant une expression légèrement différente de l'impédance. Combinant la méthode multipôle large-bande introduite par Reymen *et al.* [72] et le modèle à trois paramètres de Tam et Auriault [82]. Cette nouvelle expression permet de modéliser plus finement les revêtements acoustiques dont la résistance est constante et la réactance augmentent avec la fréquence. La méthode de convolution récursive est utilisée dans le cadre de cette approche.

Les travaux de Dragna *et al.* [21] proposent une alternative aux méthodes de convolution utilisées jusqu'alors. Il s'agit de résoudre des équations différentielles auxiliaires pour la propagation acoustique dans les matériaux poreux. Ces équations auxiliaires découlent de l'utilisation d'une fonction de relaxation, qui décrit la réponse d'un matériau poreux à une excitation. Fréquentiellement, cette fonction de relaxation est une fraction rationnelle avec des pôles simples. Dans le domaine temporel, la fonction de relaxation est approximée par une somme de fonctions de relaxation classiques et chacune d'elles décroît exponentiellement avec le temps. Grâce à cette forme spécifique d'approximation, la convolution est remplacée par une somme de fonctions auxiliaires, qui sont des accumulateurs. Ces accumulateurs sont les solutions d'équations différentielles du premier ordre, résolues en utilisant les mêmes schémas numériques d'ordre élevé que pour les équations de propagation. Troian *et al.* [86] utilisent ces équations différentielles auxiliaires, dans le cas de l'impédance multipôle large-bande, introduite par Reymen *et al.* [72].

Le modèle de Monteghetti *et al.* [61] permet d'améliorer la prise en compte des propriétés des matériaux de surface. Il repose sur une représentation de l'impédance faisant

intervenir une partie oscillatoire et une partie diffusive. Grâce à cette formulation, la convolution se réduit alors à la résolution d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre pour chacune des deux parties. La discrétisation de la condition limite ainsi obtenue fait entrer en jeu une série finie de gains et de pôles. Une technique d'optimisation au sens des moindres carrés est mise en place pour déterminer les valeurs des gains et des pôles à partir d'une répartition de pôles sur un intervalle fréquentiel donnée en fonction des propriétés de surface à modéliser.

Un autre enjeu lié à cette thématique est la prise en compte des effets non linéaires car le concept même de surface impédante n'est strictement valide qu'en régime linéaire. L'article de Diab *et al.* en 2022 [19] propose un modèle multipôle large bande pour une plaque perforée, valable pour de grande amplitude d'excitation, permettant donc la prise en compte d'effets non linéaires.

Les conditions limites d'impédance en présence d'écoulement rasant posent des difficultés concernant la stabilité des solutions [25, 26, 36]. Cette notion n'est pas approfondie ici, mais une revue est donnée par Brambley [11].

Dans cette section plusieurs types de modèles de condition limite d'impédance dans le domaine temporel sont présentés. Il s'agira ici de pouvoir modéliser de manière réaliste des revêtements acoustiques.

4.1.2 Conditions limites immergées d'impédance dans le domaine temporel

Peu de travaux portent sur les traitements d'interface perméable mobile. Kim et Peskin [40] ont abordé la question pour la dynamique des fluides. Ils ont étudié l'aérodynamisme d'un parachute en considérant les interactions entre le fluide en écoulement à vitesse rapide et la canopée¹ qui est flexible, élastique et poreuse. Sa porosité satisfait la loi de Darcy qui relie la vitesse normale relative traversant l'interface à la différence de pression de part et d'autre de cette interface. La vitesse de fuite à travers l'interface est ce qui va caractériser la force de la frontière sur le fluide, qui est implémentée en utilisant une méthode IBM par forçage continu. Dans la lignée directe de ce travail se trouve celui de Stockie [77]. Ces travaux apportent l'ajout d'un terme de correction de porosité aux équations discrétisées afin d'améliorer la conservation volumique.

Une deuxième approche en mécanique des fluides est celle présentée par Layton [49]

1. La canopée est la partie en tissus d'un parachute.

pour l'implémentation d'une interface perméable mobile, appliquée au transport d'un fluide visqueux à travers une membrane perméable à l'eau, élastique et immergée. La résolution bidimensionnelle mise en place repose sur une méthode de saut explicite sur la frontière, permettant de prendre en compte les discontinuités des solutions et des dérivées à travers une interface, combinée à la prise en compte d'une interface mobile. On appelle ce type de méthode les Méthodes à Interface Immergées (IIM). La technique de forçage utilisée s'opère par le biais de l'approximation discrète d'une fonction δ , permettant d'éliminer la singularité du forçage. Le flux qui traverse la membrane est décrit grâce à la différence de pression et de concentration du soluté de part et d'autre de l'interface.

Pour les IBM, c'est-à-dire pour les problèmes de réflexion, les méthodes de pénalisation déjà évoquées dans le chapitre 1 peuvent constituer un choix intéressant pour la prise en compte de surfaces poreuses. Ces méthodes consistent à remplacer les objets en interaction avec un fluide par des matériaux poreux. La loi de Darcy et la loi de Brinkman sont prises en compte en ajoutant un terme source aux équations continues. La porosité varie selon la nature des objets. Plusieurs travaux ont recouru à cette méthode pour les problèmes d'acoustique comportant des frontières à géométrie complexe (sans mouvement) [1, 50, 53]. La méthode de Brown–Dymkoski *et al.* [12] mêle la pénalisation de Brinkman et les conditions caractéristiques.

Enfin, certains travaux ont traité les IBM avec des conditions limites d'impédance dans le domaine temporel. Les travaux de Jiang *et al.* [37] portent pour la première fois sur cette thématique pour la résolution des équations d'Euler linéarisées. La surface du corps immergée est discrétisée par un maillage triangulaire. L'IBM employée est celle par forçage direct continu de Sun et Jiang [78] (évoquée dans le chapitre 1). Le modèle d'impédance dans le domaine temporel est celui de Reymen *et al.* [72]. À chaque pas de temps, la vitesse normale requise par l'IBM est calculée uniquement à partir des valeurs de pression à l'étape précédente et des paramètres du modèle d'impédance. Bilbao a mené de nombreux travaux en acoustique sur cette thématique dont l'article [6] qui présente une IBM par forçage discret direct. Le modèle d'impédance dans le domaine temporel est celui du système masse ressort amorti exprimé dans le domaine de Laplace. Dans cet article, les conditions limites d'impédance sont également généralisées pour les problèmes en transmission.

Tous les articles portant sur des conditions limites d'impédance concernent des frontières immergées immobiles. À la connaissance des auteurs, il n'existe pas de travaux associant les conditions d'impédance et les frontières mobiles. L'objectif de ce chapitre est

donc d'apporter une formulation de la condition d'impédance pour les frontières immergées en utilisant la méthode des caractéristiques pour les équations d'Euler non linéaires.

4.2 Extension de la méthode IBM aux conditions d'impédance

Il s'agit dans cette partie d'implémenter des conditions limites d'impédance dans le domaine temporel. La configuration géométrique considérée ici est celle décrite à la figure 1.11. La condition limite mobile est implémentée en utilisant la méthode des caractéristiques. Les équations résolues sont les équations d'Euler non linéarisées, voir section 3.1.1. La condition initiale et le mouvement de la condition limite sont similaires à celles utilisées au chapitre 3, (cf. équations (3.14) et (1.1) avec les paramètres $\omega = 6\pi$, $d_b = 10^{-10}$ et $x_{b0} = L - d_b$, configuration 2 expliquée dans la section 1.3.1, incluant l'entrée et la sortie de points à travers la frontière mobile).

4.2.1 Condition limite d'impédance dans le domaine temporel

Le modèle d'impédance retenu dans cette partie est celui à trois paramètres de Tam et Auriault en 1996 [82]. Il représente la relation pression-vitesse de manière analogue à celle d'un oscillateur masse-ressort amorti. Ce modèle sera étendu dans la suite de ce chapitre.

Le déplacement relatif ξ de la masse de l'oscillateur par rapport à la frontière fixe et la vitesse relative η de cette masse sont gouvernés par les équations usuelles :

$$M_o \frac{d\eta}{dt} + R_o \eta + K_o \xi = p(x_b(t), t) - p_0, \quad (4.1a)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \eta, \quad (4.1b)$$

dans lesquelles la pression $p(x_b(t), t)$ du fluide à la frontière $x_b(t)$ agit comme un forçage sur l'oscillateur, et p_0 est la pression atmosphérique. La masse, la rigidité et l'amortissement de l'oscillateur sont notés respectivement M_o , K_o et R_o .

Dans le domaine fréquentiel (en utilisant une dépendance implicite au temps $e^{-i\omega t}$), la fonction d'impédance reliant linéairement la pression et la vitesse de l'oscillateur est :

$$\hat{Z}(\omega) = \frac{\hat{p}(\omega)}{\hat{\eta}(\omega)} = -i\omega M_o + R_o + \frac{K_o}{-i\omega}, \quad (4.2)$$

où $\hat{}$ est la notation correspondante aux quantités dans le domaine fréquentiel, obtenues par la transformée de Fourier. Les paramètres M_o , K_o et R_o sont ajustés en fonctions de l'impédance acoustique souhaitée.

4.2.2 Mobilité de la condition limite d'impédance

L'implémentation de cette condition limite nécessite la résolution en parallèle des équations d'Euler (3.1) et du système dynamique de l'oscillateur (4.1). Le couplage entre les grandeurs acoustiques et les grandeurs dynamiques de l'oscillateur est formalisé comme suit. L'effort du fluide sur la masse de l'oscillateur apparaît à droite de l'équation (4.1a). La masse agit réciproquement sur le fluide par l'application de la condition limite de vitesse imposée suivante :

$$u(x_b(t), t) = \eta(t) + v_b(t) . \quad (4.3)$$

La vitesse de l'oscillateur η correspond à la vitesse de fuite du fluide à travers la frontière. Cette condition limite est implémentée grâce aux caractéristiques. Dans l'équation (3.9), la condition limite imperméable (3.8) est remplacée par la condition limite perméable (4.3). L'expression de la caractéristique entrante ainsi obtenue est la suivante :

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{u-c} \left(\frac{\partial v_b}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) - \frac{u+c}{u-c} \mathcal{L}_3 , \quad (4.4)$$

où la dérivée $\partial \eta / \partial t$ est remplacée par la relation (4.1a).

Les conditions initiales du système dynamique de l'oscillateur sont :

$$\eta_0 = u(x_{b0}, t=0) - v_b(t=0) , \quad \xi_0 = \frac{p(x_{b0}, t=0) - p_0 - R_o \eta_0}{K_o} . \quad (4.5)$$

Pour que les effets de la frontière d'impédance soient significatifs, les paramètres de l'oscillateur sont choisis afin que l'oscillateur interagisse avec le pulse, c'est-à-dire que la fréquence de résonance de l'oscillateur soit dans la gamme de fréquence excitée par le pulse. Si la fréquence de résonance est trop éloignée de cette gamme (pulsation comprise entre 12 et 50), la frontière est alors vue par le pulse comme étant imperméable. Les paramètres de l'oscillateur adimensionnés sont calculés comme suit :

- choix la pulsation de résonance de l'oscillateur $W_o = 26.7$ (identique à la pulsation au maximum de l'énergie du pulse initial) ;
- taux d'amortissement faible imposé $\tau_o = 0.2$;

- masse imposée $M_o = 0.6$;
- raideur $K_o = W_o^2 M_o = 428$;
- résistance $R_o = 2 \tau_o W_o M_o = 6.4$.

4.3 Résultat du cas-test

Pour ce cas-test, le CFL est fixé à $c_0 \Delta t / \Delta x = 0.8$.

4.3.1 Modèle d'impédance pour un oscillateur amorti

La figure 4.1 présente les résultats obtenus pour $\lambda / \Delta x = 42$ en utilisant la méthode CPIC. Cette figure inclut également les résultats analytiques correspondants obtenus avec une frontière mobile rigide. L'effet de l'impédance de la frontière mobile est clairement visible dans la forme de l'onde réfléchie observée figure 4.1a. L'effet de l'amortissement de l'oscillateur se manifeste par la réduction de l'amplitude du pulse.. Cela indique que la frontière a absorbé une partie de l'onde incidente. Lorsque la masse de l'oscillateur est grande ($M_o = 20$ pour la même fréquence de résonance), la solution numérique est proche de celle d'un mur rigide comme illustré sur la figure 4.1b.

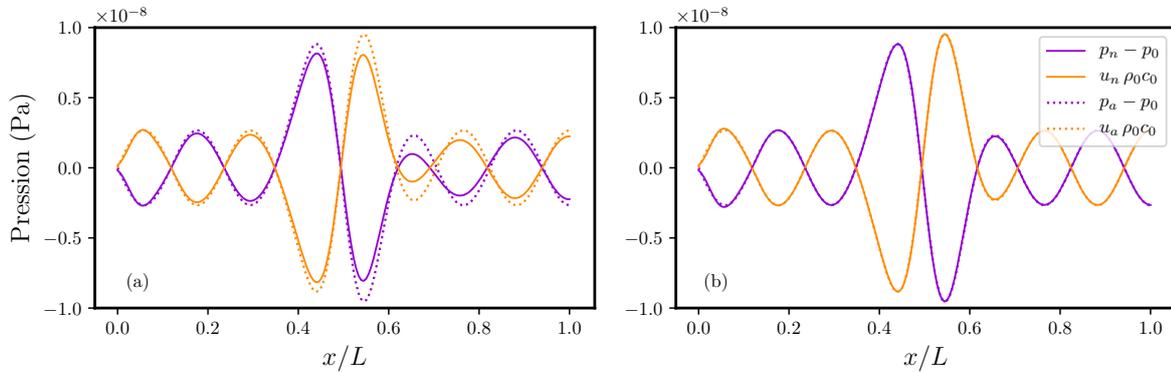


FIGURE 4.1 : Solution à $t = L/c_0$ pour la frontière mobile d'impédance. Les solutions numériques par la méthode CPIC (lignes pleines) sont comparées aux solutions du problème linéarisé avec une frontière imperméable (lignes pointillées). Les paramètres des oscillateurs sont (a) $W_o = 26.7$, $M_o = 0.6$, $K_o = 427$, $R_o = 6.4$ avec $\tau_o = 0.2$, et (b) $M_o = 20$.

Il est possible de valider le modèle numérique dans le domaine fréquentiel en calculant l'impédance effective $Z_{\text{num}} = \hat{p} / \hat{v}$ de la frontière mobile, où \hat{p} et \hat{v} sont les transformées de

Fourier de la pression et de la vitesse numérique à l'abscisse $x = x_b$. La valeur analytique de cette impédance est donnée par l'équation (4.2). Pour faciliter la comparaison entre les valeurs analytiques et numériques, la figure 4.2 présente les coefficients de réflexion calculés à partir de l'impédance en utilisant l'équation :

$$R_p(\omega) = \frac{\tilde{B}e^{-jkL}}{\tilde{A}e^{jkL}} = \frac{Z(\omega) - \rho_0 c_0}{Z(\omega) + \rho_0 c_0}. \quad (4.6)$$

Cette figure 4.2 reporte les résultats obtenus pour la frontière mobile, mais aussi ceux obtenus pour une frontière d'impédance fixe. Les résultats numériques sont obtenus en utilisant les méthodes CPIC, RODC et ROD (pour les paramètres de pondération $\ell = \Delta x/4$ et $d\ell = 0 \Delta x$). Dans tous les cas, un excellent accord entre les coefficients de réflexion numériques et théoriques est observé, ce qui montre que les trois modèles numériques sont capables de représenter avec précision l'impédance de la frontière (qu'elle soit fixe ou mobile).

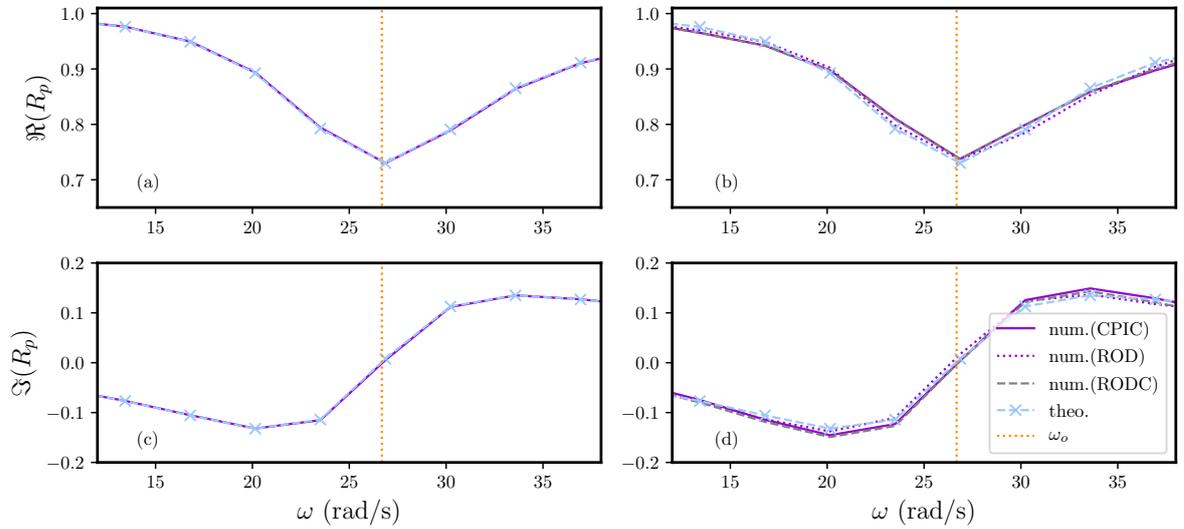


FIGURE 4.2 : Parties réelle et imaginaire des coefficients de réflexion dans le domaine fréquentiel à $x = x_b(t)$ dans le cas d'une frontière d'impédance fixe (à gauche) et d'une frontière d'impédance mobile (à droite).

4.3.2 Généralisation du modèle d'impédance par l'ajout d'un second oscillateur

La méthode des équations différentielles auxiliaires (ADE) [21, 86] permet de décrire une impédance complexe sous la forme générale :

$$\hat{Z}(\omega) \approx \hat{Z}_p(\omega) = \hat{z}_\infty + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\lambda_k - i\omega} + \sum_{k=1}^M \frac{1}{2} \frac{B_k + iC_k}{\alpha_k + i\beta_k - i\omega}, \quad (4.7)$$

où \hat{z}_∞ est la limite haute fréquence de $\hat{Z}_p(\omega)$. Le second terme décrit une somme de N systèmes d'absorption à décroissance exponentielle de constantes $1/\lambda_k$ associées à N pôles réels λ_k . Le troisième terme contient M systèmes amortis à $2M$ pôles complexes conjugués. Chaque oscillateur amorti possède un coefficient β_k décrivant sa période d'oscillations et α_k sa décroissance.

Même si la forme de l'impédance pour le système masse-ressort amorti n'est pas identique à celle du modèle ADE avec $M = 1$, le même type de généralisation est utilisé afin d'associer deux oscillateurs amortis ($M = 2$) dont les impédances sont parallèles. Le modèle ADE tel que décrit précédemment prend en entrée la vitesse du fluide et exerce une pression en sortie. Pour rester en accord avec la description des conditions limites précédemment exploitées dans ce manuscrit, l'inverse est choisi à savoir l'entrée du modèle d'impédance est la pression et sa sortie est la vitesse. Le couplage entre les deux impédances en parallèle Z_1 et Z_2 s'écrit donc :

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}, \quad (4.8)$$

où Z est l'impédance équivalente, qui interagit à la frontière avec les ondes présentes dans le domaine.

Le système d'équations (4.1) est dupliqué pour prendre en compte le second oscillateur, mais avec des paramètres distincts. Le couplage numérique entre les deux oscillateurs et les ondes fluides est régit par :

$$u(x_b(t), t) = v_b(t) + \eta_1(t) + \eta_2(t). \quad (4.9)$$

Les paramètres des deux oscillateurs sont choisies de manière à donner un coefficient de réflexion globale qui ne peut être obtenu avec un unique oscillateur. Les paramètres

sont pour le premier oscillateur $M_o^{(1)} = 0.6$, $K_o^{(1)} = 427$, $R_o^{(1)} = 6.4$ et pour le second oscillateur $M_o^{(2)} = 0.4$, $K_o^{(2)} = 160$, $R_o^{(2)} = 4.8$.

Pour ce cas-test, les résultats numériques sont calculés à $\lambda/\Delta x = 42$ en utilisant les méthodes CPIC, ROD et RODC. Les résultats numériques obtenus sont représentés en termes de coefficient de réflexion sur la figure 4.3. Le passage de la fonction d'impédance au coefficient de réflexion est obtenu en utilisant l'équation (4.6). Les impédances numériques des deux oscillateurs représentées sur les figures de gauche sont calculées séparément pour chaque oscillateur grâce au rapport des transformées de Fourier de la pression calculée à la frontière et des vitesses $\eta_{1,2}$ obtenues numériquement à chaque pas de temps. Afin d'améliorer la lisibilité de la figure, seuls les résultats obtenus avec la méthode CPIC sont représentés. Les résultats obtenus avec les méthodes ROD et RODC se superposent parfaitement aux résultats obtenus avec la méthode CPIC. Les impédances théoriques respectives de chaque oscillateur sont données par l'équation (4.2). La partie gauche de la figure 4.3 présente les deux oscillateurs masse-ressorts amortis aux propriétés différentes. Les erreurs obtenues pour chaque oscillateur sont équivalentes à celle obtenue pour l'oscillateur simple (voir section 4.3.1).

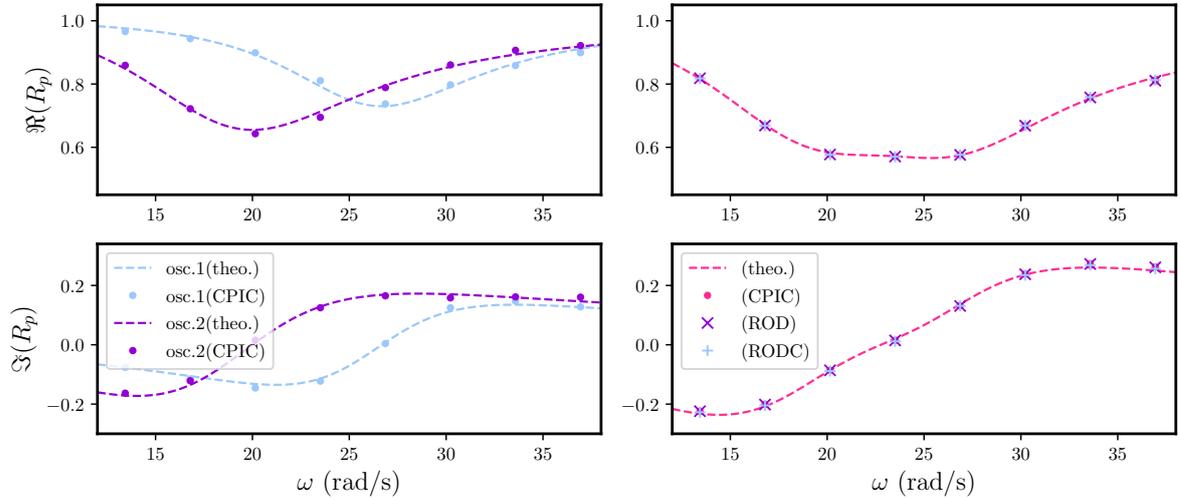


FIGURE 4.3 : Parties réelles et imaginaires des coefficients de réflexion dans le domaine fréquentiel pour chaque oscillateur (à gauche) et de la frontière globale mobile (à droite).

Les figures 4.3 à droite correspondent à l'impédance globale du système des oscillateurs amortis couplés. L'impédance numérique est calculée à partir de la transformée de Fourier de la vitesse du fluide à savoir la vitesse acoustique du fluide $u(x_b(t), t) - v_b(t)$. L'impédance théorique de l'impédance globale est obtenue grâce à la relation (4.8). De

part la forme du coefficient de réflexion, les propriétés de la condition limite sont plus complexes qu'un unique oscillateur. Les accords sont très bons entre les résultats numériques et théoriques. Le couplage d'oscillateurs peut permettre d'obtenir une multitude de fonctions d'impédance, et ainsi d'approcher une condition limite numérique déterminée en fonction d'un revêtement acoustique réel donné.

4.4 Conclusions

L'étude bibliographique des modèles d'impédance dans le domaine temporel a indiqué que la modélisation des conditions limites mobiles d'impédance n'avait pas été abordée. C'est donc à partir de ce constat que le travail présenté dans ce chapitre s'est focalisé sur l'extension des méthodes CPIC, RODC et ROD au cas d'une frontière mobile impédante pour laquelle le modèle d'impédance du système masse-ressort amorti de Tam et Auriault [82] a été retenu.

Pour approfondir l'implémentation du cas-test, une généralisation du modèle d'impédance dans le domaine temporel est proposée en mettant en jeu deux oscillateurs amortis est étudié. Cette condition limite d'oscillateurs couplés pour la méthode CPIC obtient une bonne correspondance par reconstruction des résultats numériques dans le domaine fréquentiel avec la forme théorique du coefficient de réflexion. Cette méthode de généralisation qui considère un couplage simple entre des oscillateurs est une première étape dans le design de conditions limites d'impédance pour des revêtements complexes disposés sur des objets mobiles.

Pour généraliser ce travail aux grandes amplitudes de déplacement de la frontière et/ou de pression acoustique dans le domaine, il serait pertinent d'étendre le modèle d'impédance afin qu'il puisse prendre en compte des effets non linéaires. L'article de Diab *et al.* [19] propose une première ébauche à ce sujet dans un contexte de revêtement perforé pour une excitation harmonique. L'admittance est approximée par un modèle multipôle, grâce à la méthode ADE. Deux approches sont étudiées. Elles utilisent deux dépendances différentes de l'admittance à la vitesse à travers les perforations. Il pourrait être intéressant d'adapter ce modèle d'impédance pour un revêtement perforé en mouvement. Il s'agirait dans ce cas d'apporter une description analytique de l'admittance dynamique du matériau en fonction de la vitesse du fluide à travers les perforations et de la vitesse de la frontière.

APPLICATION DE LA MÉTHODE CPIC EN DEUX DIMENSIONS

L'objectif de ce chapitre est d'utiliser la méthode CPIC pour la résolution d'équations en deux dimensions. Le cas-test choisi est géométriquement simplifiée car la frontière mobile est plane. De plus, toutes les frontières considérées sont parallèles aux axes x et y de la grille considérée. La méthode des caractéristiques propose une description parfaite des conditions limites pour les problèmes unidimensionnels. Bien qu'elles deviennent imparfaites pour les problèmes multidimensionnels, elles restent toutefois couramment utilisées. Il est alors utile de montrer comment la méthode va se comporter pour le cas test d'une impulsion bidimensionnelle qui se réfléchit sur une frontière mobile.

5.1 Description du cas-test

Le domaine de calcul est un carré de dimension $L_x = L_y = L = 1$. La grille cartésienne possède $N_x = N_y = 81$ points dans chaque direction. Le CFL est fixé à $c_0 \Delta t / \Delta x = 0.5$. La frontière à droite du domaine est un mur plan oscillant et imperméable dont le mouvement est le même que pour le problème 1D décrit dans la section 3.1.

5.1.1 Équations d'Euler 2D

Les équations d'Euler bidimensionnelles s'écrivent de la manière suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad (5.1)$$

où \mathbf{w} est le vecteur des quantités conservées (masse, quantité de mouvement selon x et y , énergie) et \mathbf{f} et \mathbf{g} contiennent les flux :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v u \\ (\rho e + p)u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ (\rho e + p)v \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

avec u et v les composantes de la vitesse selon x et y . La pression est donnée par $p = (\gamma - 1) \left[\rho e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right]$.

5.1.2 Conditions initiales

La condition initiale est une impulsion de pression gaussienne placée au milieu du domaine de calcul :

$$p(x, y) = p_0 + A \exp \left[- \ln(2) \frac{(x - L/2)^2 + (y - L/2)^2}{B^2} \right], \quad (5.3)$$

avec une amplitude $A = 10^{-8}$. Cette amplitude est choisie faible afin de pouvoir négliger les effets non linéaires de propagation. La largeur du pulse vaut $B = L/16$. La densité de masse ρ et les vitesses u et v sont initialisées à zéro sur l'ensemble du domaine.

5.1.3 Conditions limites

Les conditions caractéristiques appliquées dans ce cas-test sont celles présentées dans l'article de Thompson [84]. Sur les frontières, les caractéristiques entrantes normales sont fixées. Sur les coins, les deux directions sont normales, alors les caractéristiques entrantes des deux directions sont fixées.

Les équations d'Euler bidimensionnelles peuvent aussi être reformulées sous forme non conservative :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} = \mathbf{0}. \quad (5.4)$$

avec le vecteur \mathbf{q} et les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} définis par :

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 1/\rho \\ 0 & 0 & \gamma p & v \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Les caractéristiques sont exprimées dans la direction normale à la condition limite. Les vecteurs normaux aux frontières dans les directions x et y peuvent être aisément déterminés.

Les équations d'Euler non conservatives mettent en jeu les caractéristiques selon l'axe x , sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\mathbf{S}\Lambda\mathcal{L} - \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y}, \quad (5.6)$$

avec

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{L}_3 \\ \mathcal{L}_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\rho/c & 1 & 0 & \rho/c \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\rho c & 0 & \rho c & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Les quatre valeurs propres associées aux caractéristiques sont :

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u, \quad \lambda_4 = u + c. \quad (5.8)$$

Les caractéristiques selon l'axe x sont définies comme suit :

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2\rho c} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5.9a)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5.9b)$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (5.9c)$$

$$\mathcal{L}_4 = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2\rho c} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (5.9d)$$

\mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_4 correspondent aux ondes acoustiques se propageant vers les x décroissants et vers les x croissants. \mathcal{L}_2 correspond aux ondes entropiques convectées par les vitesses locales u . \mathcal{L}_3 correspond à l'advection dans la direction x de v .

Les équations d'Euler font intervenir les caractéristiques selon l'axe y sous la forme

suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} - \mathbf{P} \Upsilon \mathbf{x}, \quad (5.10)$$

avec \mathbf{P} , Υ et \mathbf{x} étant définis sous la forme :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\rho/c & 0 & 1 & \rho/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -\rho c & 0 & 0 & \rho c \end{bmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} v - c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v + c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{X}_2 \\ \mathcal{X}_3 \\ \mathcal{X}_4 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Les caractéristiques selon l'axe y sont définies de la manière suivante :

$$\mathcal{X}_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2\rho c} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (5.12a)$$

$$\mathcal{X}_2 = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (5.12b)$$

$$\mathcal{X}_3 = \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (5.12c)$$

$$\mathcal{X}_4 = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2\rho c} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (5.12d)$$

Une représentation de la grille de calcul à un instant t est donnée sur la figure 5.1. Les lignes bleues représentent les conditions limites de non-réflexion coïncidentes avec les points situés à $x = 0$, $y = 0$ et $y = L$. La condition limite imperméable mobile située à $x = x_b(t)$ est représentée en orange pointillé. Les points où s'appliquent à la fois la condition limite de non-réflexion dans une direction et une condition limite imperméable sont représentés en rose. Les implémentations de ces trois types de conditions limites sont présentées dans les sections suivantes.

Condition limite de non-réflexion

L'implémentation de la condition limite de non-réflexion suit un principe identique au cas 1D. À chaque point coïncidant à une frontière, les caractéristiques entrantes sont toutes fixées à 0.

Pour la frontière non-réflexive à $x = 0$, la caractéristique \mathcal{L}_4 est entrante et \mathcal{L}_1 est sortante tandis que \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_3 entrent si $u > 0$; De même pour la frontière en $y = 0$, la caractéristique \mathcal{X}_4 est entrante et \mathcal{X}_1 est sortante et \mathcal{X}_2 et \mathcal{X}_3 entrent si $v > 0$. Concernant la frontière $y = L$, \mathcal{X}_1 est entrante, \mathcal{X}_4 est sortante et \mathcal{X}_2 et \mathcal{X}_3 entrent si $v < 0$.

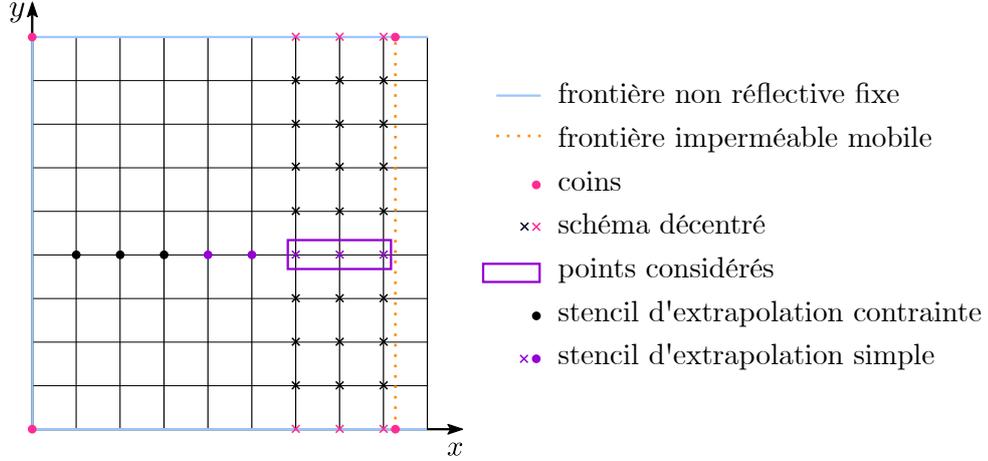


FIGURE 5.1 : Représentation de la nature des points pour l'implémentation 2D de la méthode CPIC. Pour l'exemple, la taille des stencils est réduite à cinq points.

Condition limite imperméable mobile

La frontière imperméable mobile est la frontière à droite à $x = x_b(t)$, donc les caractéristiques utilisées sont selon x . À la frontière mobile, \mathcal{L}_1 est toujours entrante et \mathcal{L}_4 est toujours sortante, tandis que les directions de \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_3 dépendent du signe de u à la frontière. $\partial u / \partial t$ est exprimée en fonction des caractéristiques à partir de la deuxième ligne de l'équation (5.6). En ajoutant la condition limite $u(x_b(t), t) = v_b(t)$ à cette expression, la relation qui définit la caractéristique entrante à partir de celle sortante et de la vitesse de la frontière est la suivante :

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{u-c} \frac{\partial v_b}{\partial t} - \frac{u+c}{u-c} \mathcal{L}_4 - \frac{v}{u-c} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (5.13)$$

L'implémentation des conditions limites mobiles suit le même principe que celui de la méthode CPIC à une dimension, présenté dans la section 3.2.3. Implémenter les conditions limites mobiles revient ici à calculer les bonnes valeurs des dérivées temporelles du vecteur \mathbf{q} des points schématisés par des croix sur la figure 5.1 (plus de détails sont donnés section 3.2.3). Pour illustrer cette l'implémentation, prenons l'exemple du calcul de $\partial \mathbf{q} / \partial t$ aux trois points entourés en violet sur la figure 5.1. Afin de mener à bien ce calcul, la méthode utilisée pour le cas 1D est modifiée comme suit :

- la relation 2D présentée équation (5.13) est utilisée en lieu et place de la relation 1D présentée équation (3.9),
- le calcul de $\partial u / \partial y$ sur la frontière est calculée grâce aux schémas de dérivation

appliquées aux valeurs extrapolées de u .

Le calcul des valeurs de $\partial \mathbf{q} / \partial t$ s'effectue en plusieurs étapes :

1. La première étape consiste à calculer les dérivées spatiales de la solution \mathbf{q} . Le calcul est effectué en utilisant le schéma de différences finies à 7-points centré sur la plupart des points physiques de la grille. $\partial \mathbf{q} / \partial x$ et $\partial \mathbf{q} / \partial y$ sont calculés sur les trois derniers points physiques, en utilisant des schémas décentrés, afin d'utiliser uniquement les données des points physiques.
2. À partir de la connaissance de $\partial \mathbf{q} / \partial x$, les caractéristiques sortantes \mathcal{L} sont calculées sur tous les points physiques en utilisant les équations (5.9).
3. Les caractéristiques sortantes et les solutions \mathbf{q} sont extrapolées sans contrainte à la frontière à $x = x_b$. Le stencil de points est en violet sur la figure 5.1.
4. Les dérivées spatiales par rapport à y des valeurs de \mathbf{u} extrapolées sur la frontière sont calculées grâce aux schémas centrés et aux schémas décentrés proches des frontières en $y = 0$ et $y = L$.
5. À la frontière en $x = x_b$, la condition limite est utilisée pour calculer la valeur \mathcal{L}_1 (la caractéristique entrante) avec l'expression (5.13).
6. La caractéristique entrante \mathcal{L}_1 est interpolée sur les trois derniers points de la grille où les schémas de différences finies décentrés ont été utilisés. La méthode d'interpolation contrainte unidimensionnelle (sans pondération) est décrite équation (1.25), dont la contrainte est la valeur de \mathcal{L}_1 calculée à la frontière à l'étape 5.
7. À chaque point de la grille, les dérivées temporelles de la solution $\partial \mathbf{q} / \partial t$ sont calculées en utilisant les valeurs de \mathcal{L}_i et l'expression (5.6).

Traitement des coins

Aux coins les caractéristiques sont prescrites simultanément dans les deux directions. Il s'agit des points en rose sur la figure 5.1. Les dérivées temporelles sont calculées à partir de l'équation d'Euler suivante, exprimées à partir des caractéristiques dans les deux directions :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\mathbf{S} \Lambda \mathcal{L} - \mathbf{P} \Upsilon \mathcal{X} . \quad (5.14)$$

Comme les dérivées temporelles ne sont pas calculées directement sur les points immergés, les croix roses (représentés sur la figure 5.1) subissent ce traitement. À l'étape 7 présentée précédemment, l'équation (5.6) est alors remplacée par l'équation (5.14).

5.1.4 Solution analytique

Une solution analytique 1D pour ce problème 2D peut s'écrire en $y = L/2$ sous la forme :

$$p(x, y = L/2, t) = p_D(x, y = L/2, t) + p_R(x, y = L/2, t) + p_B(x, t) . \quad (5.15)$$

où p_D et p_R sont respectivement la pression de l'onde directe et de l'onde réfléchie, et p_B est l'onde associée au mouvement de la paroi oscillante 1D. L'impulsion initiale localisée en $(x = L/2; y = L/2)$ dont l'expression est donnée équation (5.3) se propage dans le domaine puis elle est réfléchie en incidence normale sur la paroi positionnée en $x = L$. Les ondes directes et réfléchies sont alors données par [20] :

$$p_{D,R}(x, y = L/2, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) G_{D,R}(x, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega H(t) , \quad (5.16)$$

où S est l'intensité de la source ponctuelle et $H(t)$ est la fonction de Heaviside. Les fonctions de Green 2D $G_{D,R}$ pour les ondes directes et réfléchies, s'écrivent respectivement comme suit :

$$S(\omega) = i\omega \frac{A\pi B^2}{c_0^2 \ln(2)} \exp\left(\frac{-\omega^2 B^2}{4 \ln(2) c_0^2}\right) , \quad G_{D,R}(x, \omega) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_0} |x - x_{D,R}|\right) \quad (5.17)$$

où $x_D = L/2$ et $x_R = 3L/2$.

L'onde 1D associée au mouvement de la paroi rigide en $x = x_b(t)$ est donnée par :

$$p_B(x, t) = -\rho_0 c_0 v_b(t + (x - L)/c_0) . \quad (5.18)$$

Les pressions directe et réfléchie données équation (5.16) sont calculées numériquement en utilisant la transformée de Fourier inverse discrète.

5.2 Résultats

Le mouvement de la frontière est exprimé de manière identique au chapitre 1 (cf. équation (1.1)). Les paramètres utilisés dans la suite correspondent à ceux de la configuration 2 donnés à la section 1.3.1 pour $x_{b0} = L_x - d_b$ et pour $d_b = 10^{-10}$.

La réflexion de l'impulsion 2D sur la paroi oscillante est illustrée par les résultats pré-

sentés à la figure 5.2. La solution initiale dans le domaine est représentée sur la figure 5.2a. Les résultats présentés figures 5.2b, 5.2c et 5.2d montrent que la réflexion de l'impulsion se propage dans la direction opposée au mur et son amplitude diminue avec la distance de propagation. L'onde plane rayonnée par le mur oscillant se propage de droite à gauche. La solution numérique est stable.

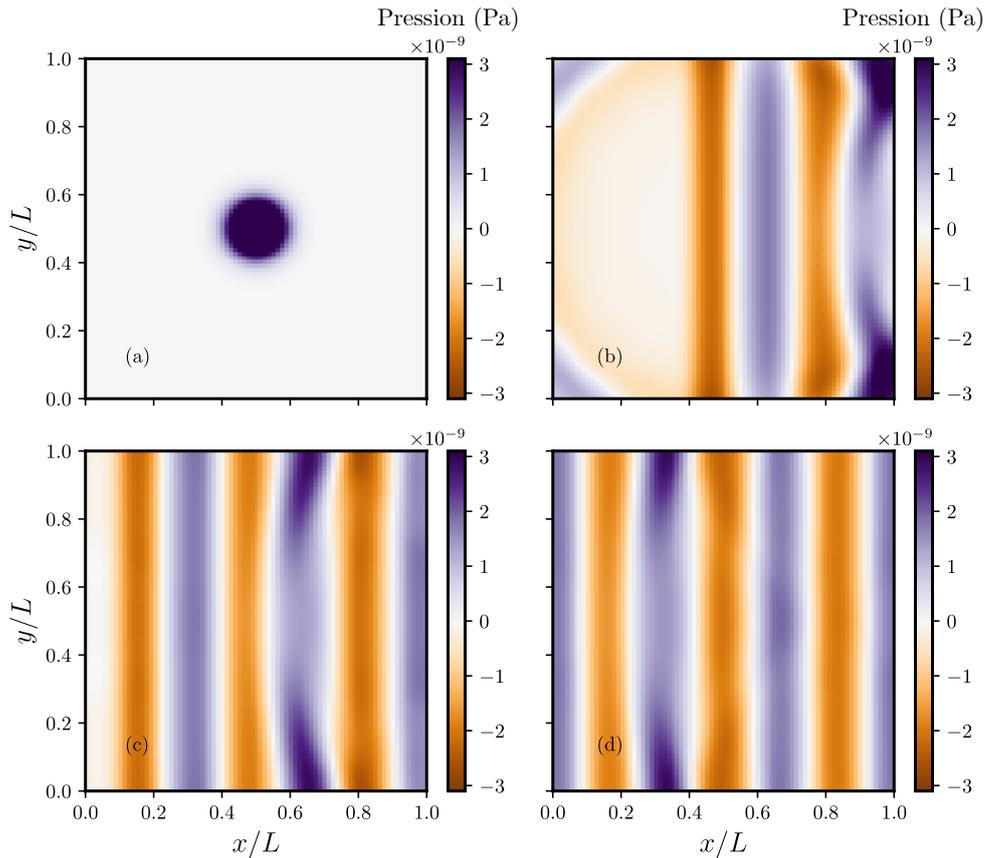


FIGURE 5.2 : Solution numérique en pression à (a) $t = 0L/c_0$, (b) $t = 0.5L/c_0$, (c) $t = L/c_0$, (d) $t = 1.5L/c_0$.

Pour mieux visualiser l'erreur numérique liée à la réflexion de l'impulsion, la solution en vitesse v à $t = 1.5L/c_0$ est présentée sur la figure 5.3, puisque cette variable n'est pas influencée par l'onde rayonnée par la frontière mobile (qui se propage uniquement selon l'axe x). L'impulsion réfléchiée est visible près de $x/L = 0.3$. Des réflexions parasites issues des coins et induites par la condition d'absorption de Thompson sont visibles en dehors de l'impulsion.

La figure 5.4 montre les solutions analytiques (données dans la section 5.1.4) et numériques pour la pression acoustique en fonction du temps au point de coordonnées

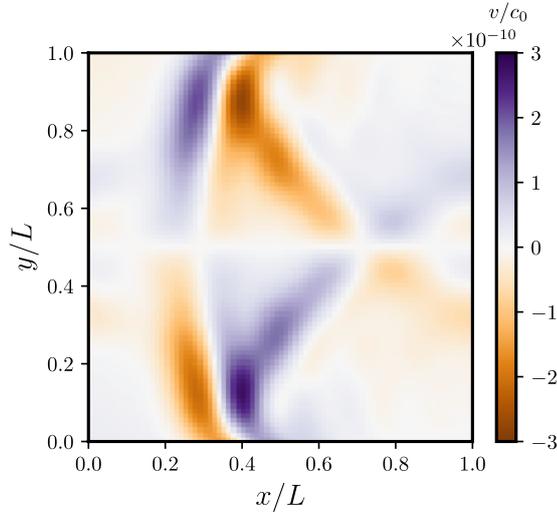


FIGURE 5.3 : Solution numérique pour v/c_0 à $t = 1.5L/c_0$.

$x/L = 0.25$ et $y/L = 0.5$. La propagation est calculée pour trois cas avec et sans impulsion, avec et sans mouvement de la frontière. Sur la figure 5.4(a) se trouve la propagation de l'onde issue du mouvement de la frontière. La correspondance entre la solution analytique et numérique pour ce cas présente un léger défaut lié à la mise en mouvement de la frontière mobile à $tc_0/L = 1.25$. Il s'agit d'un défaut déjà évoqué pour la méthode CPIC utilisée, évoqué section 3.4. Sur la figure 5.4(b) seules l'impulsion et sa réflexion se propagent au point considéré. Sur la solution analytique on observe deux contributions différentes. La première à $tc_0/L = 0.25$ correspond à la propagation directe du pulse initialement placée en $x = L/2$ vers la frontière à gauche. La seconde contribution à $tc_0/L = 1.25$ est issue de la réflexion du pulse initial sur la frontière fixe à droite. Pour ces deux premières contributions, la solution numérique subit un léger retard. En revanche, une troisième contribution apparaît à $tc_0/L = 1.63$ sur la solution numérique, qui n'est pas sur la solution analytique. Cette troisième contribution vient également de la réflexion parasite sur les coins, mis en évidence sur la représentation de la solution de pression dans tout le domaine à $tc_0/L = 1.63$ figure 5.5. En effet, le croisement des pulses parasites réfléchis sur les coins est bien visible à $x/L = 0.25$ et $y = L/2$, le point où sont tracés les solutions temporelles (cf. la troisième contribution figure 5.4(b)). Sur la dernière figure 5.4(c) incluant la propagation du pulse et de l'onde issue de la frontière, la correspondance est bonne. Le défaut provoqué par la mise en mouvement de la frontière mobile est clairement identifiable sur la figure 5.4(a). La réflexion parasite sur les coins à $tc_0/L = 1.63$ est également visible.

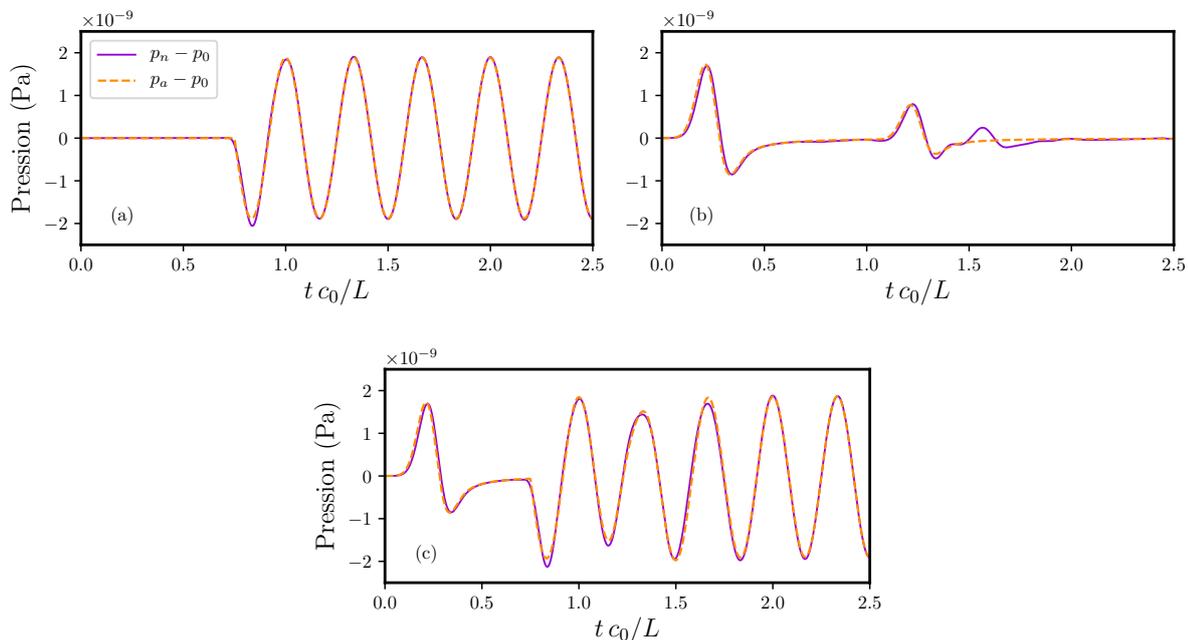


FIGURE 5.4 : Solution numérique (ligne continue) et analytique (lignes pointillées) pour p en fonction du temps à $(x, y) = (0.25, 0.5)$, dans les cas de (a) propagation de l'onde issue du mouvement de la frontière, sans impulsion, (b) propagation de l'impulsion en frontière fixe, (c) propagations conjointes de l'impulsion et de l'onde issue de la frontière mobile.

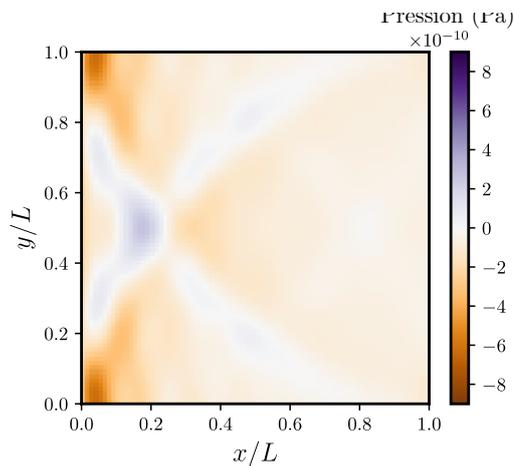


FIGURE 5.5 : Solution numérique pour p à $t = 1.63L/c_0$ pour le cas avec frontière imperméable fixe.

5.3 Conclusions

Une extension 2D de la méthode CPIC est appliquée à un problème simple où une frontière plane et mobile réfléchit une impulsion acoustique. L'évolution temporelle de la solution numérique présente une bonne stabilité. La comparaison en temporel de la solution numérique avec une solution analytique en un point de la grille présente un bon accord. En revanche, la solution de vitesse dans la direction transversale par rapport au mouvement de la frontière permet de mettre en évidence des réflexions parasites induites par les coins. Ce problème pourrait être résolu en utilisant une approche multidimensionnelle des caractéristiques qui permet de mieux prendre en compte les composantes transversales aux frontières [54, 79].

Diverses pistes peuvent être explorées pour développer davantage la méthode proposée. Une extension de ce cas-test pour une frontière à géométrie complexe mobile comme le cas-test d'une sphère pulsante pourrait être pertinente. Prenons l'exemple de l'implémentation d'une frontière mobile non-plane, dont la forme et le mouvement sont prescrits en entrée du problème. La première étape consiste à discrétiser de la frontière. Si celle-ci a une forme régulière, il est possible de choisir des points équidistants. Un exemple de ce cas de figure est représenté sur la figure 5.6. En revanche si la forme possède des angles aigus une procédure basée sur la courbure de la frontière peut être nécessaire, de manière à discrétiser plus finement certaines de ses parties. Une fois la technique de discrétisation de la frontière déterminée, il est nécessaire de calculer la normale à la frontière pour chaque point, afin d'appliquer la méthode des caractéristiques. Pour chacun des points où les schémas de dérivés décentrés sont appliqués, la méthode CPIC est appliquée. D'abord, un stencil de point bidimensionnel est défini sur les points les plus proches du point considéré [23], ainsi que les deux points de la frontière les plus proches sont choisies. La formulation précise de la reconstruction polynomiale à partir des caractéristiques sur plusieurs points de la frontière doit faire l'objet d'un travail plus approfondi.

À l'issue de ce cas-test, il pourrait être intéressant de proposer un modèle prenant en compte un objet déformable, présentant ainsi un couplage fort entre un fluide et une frontière.

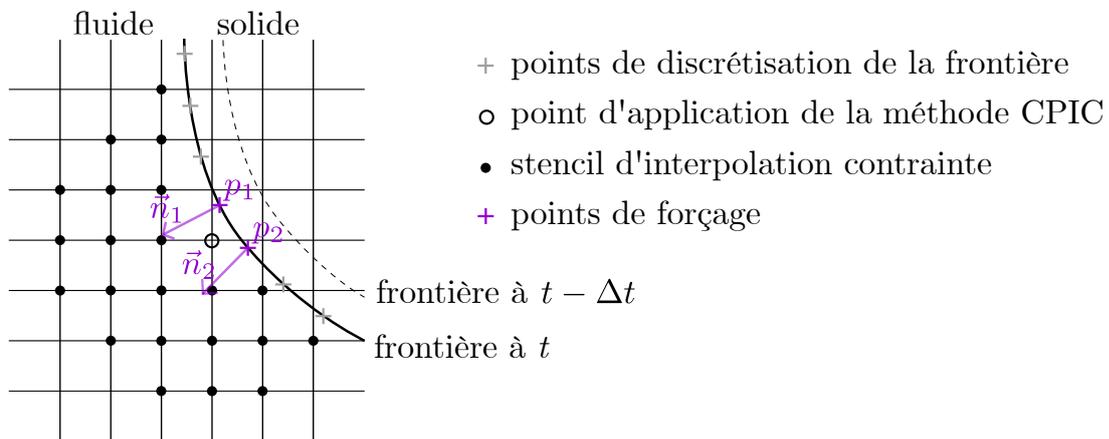


FIGURE 5.6 : Exemple d'une résolution 2D pour une frontière non-plane. Pour le point considéré, les points utiles pour appliquer la méthode CPIC sont représentés.

CONCLUSIONS

Contributions principales

Les travaux présentés dans ce mémoire répondent à la problématique de la modélisation numérique en différences finies de champs acoustiques dans un domaine contenant une frontière mobile. Pour cela, il s'agit de proposer une méthode de différences finies dans le domaine temporel, qui soit versatile, stable et d'ordre de convergence élevé. Le mouvement de la frontière peut être prescrit au préalable, ou calculé à partir d'une équation dynamique pour un couplage fort entre le fluide et la frontière. Pour cette étude, le mouvement de la frontière est toujours prescrit au préalable. Les problèmes étudiés sont de complexité croissante. Le premier d'entre eux présente une comparaison entre la méthode classique OGM et une méthode IBM pour la résolution des équations d'Euler linéarisées. La frontière mobile rigide considérée dans ce contexte est implémentée en utilisant une condition directe et la méthode des caractéristiques. Puis, les équations d'Euler générales remplacent les équations linéarisées et la méthode des caractéristiques est adaptée à ces équations à la frontière. Ensuite, les frontières perméables sont implémentées grâce aux conditions limites d'impédances dans le domaine temporel. Enfin, la méthode IBM est adaptée au cas de problèmes bidimensionnels.

Dans le premier chapitre, la méthode IBM développée par Fidalgo *et al.* [23] est adaptée pour la première fois à une frontière mobile et à l'ordre 4 sur un cas-test unidimensionnel. La stabilité des solutions numériques obtenues en utilisant cette méthode dépend de la position de la frontière par rapport à la grille. En effet, le changement de statut des points et/ou la proximité entre la condition limite et le stencil de reconstruction créent des instabilités qui sont dûes au mauvais conditionnement du problème. La méthode IBM est comparée à une méthode OGM classique implémentée à l'ordre 4. Cette dernière présente des instabilités importantes quelle que soit la position de la frontière. Celle-ci est en effet sensible aux sources d'instabilités, comme par exemple la mise en mouvement abrupte de la frontière. Aucune de ces deux méthodes n'est en l'état pleinement efficace pour le traitement des frontières mobiles.

Pour résoudre le problème de stabilité de l'IBM, une pondération est ajoutée à l'ex-

trapolation contrainte, ce qui permet d'adoucir le changement de statut des points tout en éloignant le stencil selon la stabilité de la méthode. L'application de la méthode des caractéristiques à des frontières mobiles est peu étudiée dans la littérature. Dans le second chapitre, la méthode des caractéristiques est appliquée à la frontière mobile pour les méthodes IBM et OGM, car elle permet une formulation exacte des conditions limites pour le cas unidimensionnel. Ce formalisme diminue l'erreur sur l'ensemble des résolutions IBM considérées. En OGM, ce formalisme apporte une amélioration significative de la convergence par rapport aux cas utilisant des conditions limites directes, mais la solution diverge toujours pour les grandes résolutions.

La méthode IBM est retenue pour la suite de ce travail car elle présente une meilleure convergence que la méthode OGM. L'adaptation de la méthode IBM (appelée ROD) à l'utilisation de la méthode des caractéristiques appliquées aux équation d'Euler générales n'est pas triviale. Dans le troisième chapitre, deux adaptations sont présentées. La première méthode RODC consiste à extrapoler sur les points fantômes toutes les grandeurs physiques simultanément et à les contraindre par les caractéristiques, en couplant les dérivées spatiales des grandeurs physiques. La seconde alternative est la méthode CPIC qui utilise une interpolation contrainte de la caractéristique entrante sur les trois derniers points de la grille (sans points fantômes). Ces deux méthodes sont validées à faible amplitude. L'ajout des caractéristiques pour les méthodes CPIC et RODC améliorent significativement la précision de la solution pour tous les cas de figure considérés, par rapport aux mêmes méthodes sans les caractéristiques. La précision de la réflexion de l'impulsion sur la frontière mobile est meilleure avec la méthode RODC qu'avec CPIC. La méthode CPIC est plus robuste pour une longue durée de simulation car une erreur issue d'une réflexion parasite sur la frontière absorbante pour RODC s'accumule et détériore la précision de la solution sur les temps longs. Tous les résultats obtenus présentent un plateau à haute résolution lorsque la frontière est mobile. Plusieurs raisons qui auraient pu expliquer la présence de ce plateau ont été écartées, à savoir une mauvaise réflexion sur la condition limite de non-réflexion de gauche, une précision insuffisante des schémas d'interpolations, et la présence d'effets non linéaires. La cause de la présence de ce plateau n'a pas été identifiée. Pour terminer, une validation à grande amplitude de la méthode CPIC est effectuée en comparant les solutions obtenues numériquement à la solution de Fubini–Ghiron.

La modélisation des conditions limites mobiles d'impédance acoustique n'avait pas été abordée dans d'autres travaux. Dans le chapitre 4, une condition limite avec le système

masse-ressort amorti de Tam et Auriault [82] est implémentée en utilisant les méthodes CPIC et RODC. Grâce au couplage de deux systèmes masse ressort en parallèle, une condition limite d'impédance large-bande a été obtenue.

Enfin, le chapitre 5 présente une extension bidimensionnelle de la méthode CPIC appliqué à un problème simplifié où une frontière imperméable plane et mobile réfléchit une impulsion acoustique.

Perspectives

Pour aller plus loin sur les aspects non linéaires, il semble indispensable de mettre en place des procédures de capture de chocs pour résoudre les problèmes à grandes amplitudes de propagation impliquant l'apparition d'ondes de choc acoustiques, par exemple l'algorithme de Bogey *et al.* [9].

Il serait également pertinent d'étendre le modèle d'impédance pour des cas plus généraux. À l'issue de notre cas-test pour deux systèmes masse-ressorts amortis couplés, le modèle large-bande général des ADE [21] peut être appliqué directement. La prise en compte par la frontière perméable mobile des effets non linéaires pour les grandes amplitudes de propagation nécessite des modèles spécifiques, tel que le modèle multipôle pour une plaque perforée présenté par Diab *et al.* [19].

De plus, approfondir les travaux à plusieurs dimensions est une perspective nécessaire pour que la méthode soit utilisable sur des problèmes réalistes d'acoustique. Pour cela, la méthode des caractéristiques doit comporter une approche multidimensionnelle, qui permet de mieux prendre en compte les composantes transversales aux frontières. Les travaux de [79] présentent un modèle qui permet d'injecter une composante transversale dans l'amplitude des ondes entrantes, qui est également étendue pour les bords et les angles du domaine numérique [54]. En particulier pour les géométries complexes, ces approches sont à combiner avec une extension multidimensionnelle générale de la méthode CPIC, permettant d'effectuer une reconstruction polynomiale contrainte par les caractéristiques par rapport à la direction du vecteur normal et tangentiel à la frontière. Un formalisme de la méthode de reconstruction polynomiale pour une frontière complexe est présenté par Fernández-Fidalgo *et al.* [23]. Le point clé qu'il reste à formuler est l'imbrication des caractéristiques vectorielles dans la méthode CPIC.

Avec ces problèmes à géométries complexes, les frontières imperméables peuvent être remplacées par un modèle d'impédance multipôle.

Enfin, il serait intéressant de proposer un modèle prenant en compte une frontière déformable, présentant un couplage fort entre le fluide et la frontière, dont le mouvement est gouverné par les équations de dynamique de structure.

Communications scientifiques

Ces travaux ont donné lieu à deux présentations en conférences :

- Congrès Français d'Acoustique (CFA) 2022 - Marseille, 11 et 15 avril 2022 : « Résolution numérique des équations d'Euler dans un domaine contenant des limites perméables mobiles en utilisant une méthode de frontières immergées par points fantômes », Bocquet, Desjoux et Gabard,
- European Community on Computational Methods in Applied Sciences (ECCOMAS) 2022 - Oslo, 5-9 juin 2022 : « Numerical Resolution of Eulers equations in a domain containing permeable moving boundary using immersed boundary methods with ghost points », Bocquet, Desjoux et Gabard,

ainsi qu'à un article dans un journal international :

- C. BOCQUET, C. DESJOUY et G. GABARD, « A High-Order Immersed Moving Boundary Method using Ghost Points and Characteristics for Acoustics », in : *J. Theor. Comput. Acoust.* (2023), DOI : 10.1142/S2591728523300015.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. V. ABALAKIN, N. S. ZHDANOVA et T. K. KOZUBSKAYA, « Immersed Boundary Method for Numerical Simulation of Inviscid Compressible Flows », in : *Comput. Math. and Math. Phys.* 58 (2018), DOI : 10.1134/S0965542518090026.
- [2] J. D. ANDERSON, *Computational Fluid Dynamics*, sous la dir. de J. F. WENDT, 2009, chap. 6 Transformations and Grids, ISBN : 978-3-540-85055-7.
- [3] D. M. BELK et R. C. MAPLE, « Automated assembly of structured grids for moving body problems », in : *12th Computational Fluid Dynamics Conference* (1995), p. 381-390, DOI : 10.2514/6.1995-1680.
- [4] J. BERLAND, C. BOGEY, O. MARSDEN et C. BAILLY, « High-order, low dispersive and low dissipative explicit schemes for multiple-scale and boundary problems », in : *J. Comput. Phys.* 224 (2007), p. 637-662, DOI : 10.1016/j.jcp.2006.10.017.
- [5] R. P. BEYER et R. J. LEVEQUE, « Analysis of a One-Dimensional Model for the Immersed Boundary Method », in : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 29.2 (1992), DOI : 10.1137/0729022.
- [6] S. BILBAO, « Modeling impedance boundary conditions and acoustic barriers using the immersed boundary method : The one-dimensional case », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 153.4 (2023).
- [7] C. BOCQUET, C. DESJOUY et G. GABARD, « A High-Order Immersed Moving Boundary Method using Ghost Points and Characteristics for Acoustics », in : *J. Theor. Comput. Acoust.* (2023), DOI : 10.1142/S2591728523300015.
- [8] C. BOGEY et C. BAILLY, « A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for computing the aerodynamic noise », in : *8th AIAA, CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit* (2004), DOI : 10.2514/6.2002-2509.
- [9] C. BOGEY, N. de CACQUERAY et C. BAILLY, « A shock-capturing methodology based on adaptative spatial filtering for high-order non-linear computations », in : *J. Comput. Phys.* 228 (5 2009), DOI : 10.1016/j.jcp.2008.10.042.

-
- [10] J. U. BRACKBILL et J. S. SALTZMAN, « Adaptive zoning for singular problems in two dimensions », in : *J. Comput. Phys.* 46 (3 1982), p. 342-368, DOI : 10.1016/0021-9991(82)90020-1.
- [11] E. BRAMBLEY, « Review of acoustic liner models with flow », in : *Acoustics 2012*, sous la dir. de Société Française d'ACOUSTIQUE, 2012.
- [12] E. BROWN-DYMKOSKI, N. KASIMOV et O. V. VASILYEV, « A characteristic based volume penalization method for general evolution problems applied to compressible viscous flows », in : *J. Comput. Phys.* 262 (2014), DOI : 10.1016/j.jcp.2013.12.060.
- [13] L. CHENG, L. DU, X. WANG, L. WU, X. JING et X. SUN, « Influence of non-uniform mean flow on acoustic scattering from complex geometries », in : *Comput. Fluids.* 163 (2018), DOI : 10.1016/j.compfluid.2017.12.014.
- [14] G. CHESHIRE et W. D. HENSHAW, « Composite Overlapping Meshes for the Solution of Partial Differential Equations », in : *J. Comput. Phys.* 90 (1990), p. 1-64, DOI : 10.1016/0021-9991(90)90196-8.
- [15] T. COLONIUS et S. K. LELE, « Computational aeroacoustics : progress on nonlinear problems of sound generation », in : *Progress in Aerospace Sciences* 40 (2004), p. 345-416, DOI : 10.1016/j.paerosci.2004.09.001.
- [16] J. W. DELFS, « An overlapped grid technique for high resolution CAA schemes for complex geometries », in : *7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit* (2001), DOI : 10.2514/6.2001-2199.
- [17] Y. DENG, « Time-domain simulation of sound propagation in a lined flow duct : characterization and suppression of hydrodynamic instabilities », thèse de doctorat (2020), Université de Lyon.
- [18] M. DEUSE et R. D. SANDBERG, « Implementation of a stable high-order overset grid method for high-fidelity simulations », in : *Comput. Fluids.* 211.104449 (2020), p. 1-10, DOI : 10.1016/j.compfluid.2020.104449.
- [19] D. DIAB, D. DRAGNA, E. SALZE et M.-A. GALLAND, « Nonlinear broadband time-domain admittance boundary condition for duct acoustics. Application to perforated plate liners », in : *J. Sound Vib.* 528 (2022), DOI : 10.1016/j.jsv.2022.116892.

-
- [20] D. DRAGNA, « Modélisation par une approche temporelle de la propagation acoustique en milieu extérieur : traitement de frontières complexes et validation sur site ferroviaire », thèse de doctorat (2011), École Centrale de Lyon.
- [21] D. DRAGNA, P. PINEAU et P. BLANC-BENON, « A generalized recursive convolution method for time-domain propagation in porous media », in : *J. Acoust. Soc. Amer.* 138 (2015), DOI : 10.1121/1.4927553.
- [22] L. J. FAUCI et C. S. PESKIN, « A Computational Model of Aquatic Animal Locomotion », in : *J. Comput. Phys.* 77 (1988), p. 85-108, DOI : 0021-9991(88)90158-1.
- [23] J. FERNÁNDEZ-FIDALGO, S. CLAIN, L. RAMÍREZ, I. COLOMINAS et X. NOGUEIRA, « Very high-order method on immersed curved domains for finite difference schemes with regular Cartesian grids », in : *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 360 (2020), p. 112782, DOI : 10.1016/j.cma.2019.112782.
- [24] A. L. FOGELSON et C. S. PESKIN, « A Fast Numerical Method for Solving the Three-Dimensional Stokes' Equations in the Presence of Suspended Particles », in : *J. Comput. Phys.* 79 (1988), p. 50-69, DOI : 0021-9991(88)90003-4.
- [25] K.-Y. FUNG, H. JU et B. TALLAPRAGADA, « Impedance and Its Time-Domain Extensions », in : *AIAA J* 38.1 (2000), DOI : 10.2514/2.950.
- [26] G. GABARD et E.J. BRAMBLEY, « A full discrete dispersion analysis of time-domain simulations of acoustic liners with flow », in : *J. Comput. Phys.* 273 (2014), p. 310-326, DOI : 10.1016/j.jcp.2014.05.004.
- [27] R. GHAS, R. MITTAL et H. DONG, « A sharp interface immersed boundary method for compressible viscous flows », in : *J. Comput. Phys.* 225 (2007), p. 528-553, DOI : 10.1016/j.jcp.2006.12.007.
- [28] F. GIBOU et R. FEDKIW, « A fourth order accurate discretization for the Laplace and heat equations on arbitrary domains, with applications to the Stefan problem », in : *J. Comput. Phys.* 202 (2005), p. 577-601, DOI : 10.1016/j.jcp.2004.07.018.
- [29] F. G. GIBOU, R. P. FEDKIW, L.-T. CHENG et M. KANG, « A Second Order Accurate Symmetric Discretization of the Poisson Equation on Irregular Domains », in : *J. Comput. Phys.* 176 (1 2002), p. 205-227, DOI : 10.1006/jcph.2001.6977.
- [30] D. GOLDSTEIN, R. HANDLER et L. SIROVICH, « Modeling a No-Slip Flow Boundary with an External Force Field », in : *J. Comput. Phys.* 105 (1993), p. 354-366, DOI : 10.1006/jcph.1993.1081.

-
- [31] A. GROSS et H. F. FASEL, « Characteristic Ghost-Cell Boundary Condition », in : *AIAA J* 45.1 (2007), DOI : 10.2514/1.23130.
- [32] B. GUSTAFSSON, H.-O. KREISS et J. OLIGER, *TimeDependent Problems and Difference Methods*, John Wiley et Sons, Ltd, 2013, ISBN : 9781118548448.
- [33] G. W. HEDSTROM, « Nonreflecting boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems », in : *J. Comput. Phys.* 30.2 (1979), DOI : 10.1016/0021-9991(79)90100-1.
- [34] R. L. HIGDON, « Initial-Boundary Value Problems for Linear Hyperbolic System », in : *SIAM Rev.* 28.2 (1986), p. 177-217, DOI : 10.1137/1028050.
- [35] M. HUET, « One-dimensional characteristic boundary conditions using nonlinear invariants », in : *J. Comput. Phys.* 283 (2015), DOI : 10.1016/j.jcp.2014.12.010.
- [36] S. JAENSCH, C. SOVARDI et W. POLIFKE, « On the robust, flexible and consistent implementation of time domain impedance boundary conditions for compressible flow simulations », in : *J. Comput. Phys.* 314 (2016), DOI : 10.1016/j.jcp.2016.03.010.
- [37] Y. JIANG, X. WANG, X. JING et X. SUN, « A Study of Three-Dimensional Acoustic Scattering by Arbitrary Distribution Multibodies Using Extended Immersed Boundary Method », in : *J. Vib. Acoust.* 136 (3 2014), DOI : 10.1115/1.4026672.
- [38] J. W. KIM et D. J. LEE, « Characteristic Interface Conditions for Multiblock High-Order Computation on Singular Structured Grid », in : *AIAA J* 41.12 (2003), DOI : 10.2514/2.6858.
- [39] J. W. KIM et D. J. LEE, « Generalized Characteristic Boundary Conditions for Computational Aeroacoustics », in : *AIAA J* 38.11 (2000), DOI : 10.2514/2.891.
- [40] Y. KIM et C. S. PESKIN, « 2-D parachute simulation by the immersed boundary method », in : *SIAM J. Sci. Comput.* 28.6 (2006), p. 2294-2312, DOI : 10.1137/S1064827501389060.
- [41] A. R. KOBLITZ, S. LOVETT, N. NIKIFORAKIS et W. D. HENSHAW, « Direct numerical simulation of particulate flows with an overset grid method », in : *J. Comput. Phys.* 343 (2017), p. 414-431, DOI : 10.1016/j.jcp.2017.04.058.
- [42] D. A. KOPRIVA, J. NORDSTRÖM et G. J. GASSNER, « On the theoretical foundation of overset grid methods for hyperbolic problems : Well-posedness and conservation », in : *J. Comput. Phys.* 448 (2022), DOI : 10.1016/j.jcp.2021.110732.

-
- [43] B. KREISS, « Construction of a Curvilinear Grid », in : *J. Sci. Stat. Comput* 4.2 (1983), DOI : 10.1137/0904021.
- [44] H.-O. KREISS, « Initial boundary value problems for hyperbolic systems », in : *Commun Pure Appl Math* 23.3 (1970), DOI : 10.1002/cpa.3160230304.
- [45] M. KUMAR, A. RAJ et S. ROY, *Immersed Boundary Method, Development and Applications*, sous la dir. de S. ROY, A. DE et E. BALARAS, Springer, Computational Methods in Engineering and the Sciences, 2020, chap. Chapter 3 : Mass Conservation in Sharp Interface Immersed Boundary Method-A GPGPU Accelerated Implementation, p. 81-106, ISBN : 9811539391.
- [46] M. KUORDA, « FDTD Method for the Analysis of Moving Boundary Problems-Over Set Grid Generation Method and Body Fitted Grid Generation Method with Moving Boundaries- », in : *IEEE* (2017), DOI : 10.1109/ICEAA.2017.8065302.
- [47] S. KURODA et M. KURODA, « Body Fitted Grid Generation with Moving Boundary and its Application for Dielectric Waveguides », in : *Int. J. Numer. Model. : Electron. Netw. Devices Fields* 6 (1993), p. 127-134, DOI : 10.1002/jnm.1660060205.
- [48] M.-C. LAI et C. S. PESKIN, « An Immersed Boundary Method with Formal Second-Order Accuracy and Reduced Numerical Viscosity », in : *J. Comput. Phys.* 160 (2 2000), p. 705-719, DOI : 10.1006/jcph.2000.6483.
- [49] A. T. LAYTON, « Modeling water transport across elastic boundaries using an explicit jump method », in : *SIAM J. Sci. Comput.* 28.6 (2006), p. 2189-2207, DOI : 10.1137/050642198.
- [50] M. LEMKE et J. REISS, « Approximate acoustic boundary conditions in the time-domain using volume penalization », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 153 (2023), p. 12191228, DOI : 10.1121/10.0017347.
- [51] R. J. LEVEQUE, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2009, chap. 7 Boundary COnditions and Ghost Cells, DOI : 10.1017/CB09780511791253.
- [52] X. Y. LI, X. D. LI et C.K.W. TAM, « Improved Multipole Broadband Time-Domain Impedance Boundary Condition », in : *AIAA J* 50.4 (2012), DOI : 10.2514/1.J051361.

-
- [53] Q. LIU et O. V. VALILYEV, « A Brinkman penalization method for compressible flows in complex geometries », in : *J. Comput. Phys.* 227 (2 2007), p. 946-966, DOI : 10.1016/j.jcp.2007.07.037.
- [54] G. LODATO, P. DOMINGO et L. VERVISCH, « Three-dimensional boundary conditions for direct and large-eddy simulation of compressible viscous flows », in : *J. Comput. Phys.* 227.10 (2008), DOI : 10.1016/j.jcp.2008.01.038.
- [55] H. LUO, R. MITTAL, X. ZHENG, S. A. BIELAMOWICZ, R. J. WALSH et J. K. HAHNE, « An immersed-boundary method for flowstructure interaction in biological systems with application to phonation to the Stefan problem », in : *J. Comput. Phys.* 227 (22 2008), p. 9303-9332, DOI : 10.1016/j.jcp.2008.05.001.
- [56] R. MAGNUS et H. YOSHIHARA, « Inviscid Transonic Flow over Airfoils », in : *AIAA J* 8.12 (1970), p. 2157-2162, DOI : 10.2514/3.6080.
- [57] O. MARSDEN, C. BOGEY et C. BAILLY, « High-order Curvilinear Simulations of Flows around Non-Cartesian Bodies », in : *J. Comput. Acoust.* 13 (2005), p. 731-748, DOI : 10.1142/S0218396X05002906.
- [58] D. M. MCQUEEN et C. S. PESKIN, « A Three-Dimensional Computational Method for Blood Flow in the Heart. II. Contractile Fibers », in : *J. Comput. Phys.* 82 (1989), p. 289-297, DOI : 0021-9991(89)90050-8.
- [59] R. MITTAL, H. DONG, M. BOZKURTTAS, F. M. NAJJAR, A. VARGAS et A. von LOEBBECKE, « A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries », in : *J. Comput. Phys.* 227 (2008), p. 4825-4852, DOI : 10.1016/j.jcp.2008.01.028.
- [60] R. MITTAL et G. IACCARINO, « Immersed Boundary Methods », in : *Annual Review of Fluid Mechanics* 37 (2005), p. 239-261, DOI : 10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743.
- [61] F. MONTEGHETTI, D. MATIGNO, E. PIOT et L. PASCAL, « Design of broadband time-domain impedance boundary conditions using the oscillatory-diffusive representation of acoustical models », in : *J. Acoust. Soc. Amer.* 140 (2016), DOI : 10.1121/1.4962277.
- [62] E. MOTHEAU, A. ALMGREN et J. B. BELL, « Navier-Stokes characteristic boundary conditions using ghost cells », in : *AIAA J* 55.10 (2017), DOI : 10.2514/1.J055885.

-
- [63] J. NORDSTRÖM, « The use of characteristic boundary conditions for the Navier–Stokes equations », in : *Comput Fluids* 24.5 (1995), DOI : 10.1016/0045-7930(95)00006-x.
- [64] J. NORDSTRÖM et M. H. CARPENTER, « Boundary and Interface Conditions for High-Order Finite-Difference Methods Applied to the Euler and NavierStokes Equations », in : *J. Comput. Phys.* 148.2 (1999), DOI : jcph.1998.6133.
- [65] Y. ÖZYÖRÜK et L. N. LONG, « A Time-Domain Implementation of Surface Acoustic Impedance Condition with and Without Flow », in : *J. Comput. Acoust.* 05.03 (1997), DOI : 10.1142/S0218396X97000162.
- [66] C. S. PESKIN, « Flow Patterns Around Heart Valves : A Numerical Method », in : *J. Comput. Phys.* 10 (1972), p. 252-271, DOI : 10.1016/0021-9991(72)90065-4.
- [67] C. S. PESKIN, « Numerical Analysis of Blood Flow in the Heart », in : *J. Comput. Phys.* 25 (1977), p. 220-252, DOI : 0021-9991(77)90100-0.
- [68] C. S. PESKIN et D. M. MCQUEEN, « A Three-Dimensional Computational Method for Blood Flow in the Heart I. Immersed Elastic Fibers in a Viscous Incompressible Fluid », in : *J. Comput. Phys.* 81 (1989), p. 372-405, DOI : 0021-991(89)90213-1.
- [69] C. S. PESKIN et D. M. MCQUEEN, « Modeling Prosthetic Heart Valves for Numerical Analysis of Blood Flow in the Heart », in : *J. Comput. Phys.* 37 (1980), p. 113-132, DOI : 0021-9991(80)100113-21.
- [70] A. D. PIERCE, *Acoustics*, sous la dir. de Springer CHAM, 2019, chap. 11 Nonlinear Effects in Sound Propagation, p. 649-709, ISBN : 978-3-030-11213-4, DOI : 10.1007/978-3-030-11214-1.
- [71] T. J. POINSOT et S. K. LELE, « Boundary Conditions for Direct Simulations of Compressible Viscous Flows », in : *J. Comput. Phys.* 101 (1992), p. 104-129, DOI : 10.1016/0021-9991(92)90046-2.
- [72] Y. REYMEN, M. BAELMANS et W. DESMET, « Efficient Implementation of Tam and Auriaults Time-Domain Impedance Boundary Condition », in : *AIAA J* 46 (9 2008), DOI : 10.2514/1.35876.
- [73] S. W. RIENSTRA, « Impedance Models in Time Domain, Including the Extended Helmholtz Resonator Model », in : *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (27th AIAA Aeroacoustics Conference)*, 2006, DOI : 10.2514/6.2006-2686.

-
- [74] E. M. SAIKI et S. BIRINGEN, « Numerical Simulation of a Cylinder in Uniform Flow : Application of a Virtual Boundary Method », in : *J. Comput. Phys.* 123.0036 (1996), p. 450-465, DOI : 0021-9991/96.
- [75] J. H. SEO et R. MITTAL, « A high-order immersed boundary method for acoustic wave scattering and low-Mach number flow-induced sound in complex geometries », in : *J. Comput. Phys.* 230 (4 2011), p. 1000-1019, DOI : 10.1016/j.jcp.2010.10.017.
- [76] D. B. STEIN, R. D. GUY et B. THOMASES, « Immersed Boundary Smooth Extension (IBSE) : A high-order method for solving incompressible flows in arbitrary smooth domains », in : *J. Comput. Phys.* 335 (2017), p. 155-178, DOI : 10.1016/j.jcp.2017.01.010.
- [77] J. M. STOCKIE, « Modelling and simulation of porous immersed boundaries », in : *Comput. Fluids.* 87 (11-12 2009), DOI : 10.1016/j.compstruc.2008.11.001.
- [78] X. SUN et Y. JIANG, « An immersed boundary computational model for acoustic scattering problems with complex geometries », in : *J. Acoust. Soc. Am.* 132 (2012), p. 3190, DOI : 10.1121/1.4757747.
- [79] C. S. YOO, Y. WANG, A. TROUVÉ et H. G. IM, « Characteristic boundary conditions for direct simulations of turbulent counterflow flames », in : *Combust. Theory Model.* 9.4 (2005), DOI : 10.1080/13647830500307378.
- [80] C. K. W. TAM et Z. DONG, « Wall Boundary Conditions for High-Order Finite-Difference Schemes in Computational Aeroacoustics », in : *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 6 (1993), p. 303-322, DOI : 10.1007/BF00311843.
- [81] C. K. W. TAM et J. C. WEBB, « Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustics », in : *J. Comput. Phys.* 107 (1993), p. 262-281, DOI : 10.1006/jcph.1993.1142.
- [82] C.K.W. TAM et L. AURIAULT, « Time-domain impedance boundary conditions for computational aeroacoustics », in : *AIAA J* 34.5 (1996), DOI : 10.2514/3.13168.
- [83] J. F. THOMPSON, Z. U.A. WARSI et C. W. MASTIN, « Boundary-fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equationsA review », in : *J. Comput. Phys.* 47 (1 1982), p. 1-108, DOI : 10.1016/0021-9991(82)90066-3.
- [84] K. W THOMPSON, « Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems », in : *J. Comput. Phys.* 68.1 (1987), DOI : 10.1016/0021-9991(87)90041-6.

-
- [85] K. W THOMPSON, « Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems, II », in : *J. Comput. Phys.* 89.2 (1990), DOI : 10.1016/0021-9991(90)90152-Q.
- [86] R. TROIAN, D. DRAGNA, C. BAILLY et M.-A. GALLAND, « Broadband liner impedance eduction for multimodal acoustic propagation in the presence of a mean flow », in : *J. Sound Vib.* 392 (2017), DOI : 10.1016/j.jsv.2016.10.014.
- [87] L. WANG, F.-B. TIAN et J. C.S. LAI, « An immersed boundary method for fluid-structure-acoustics interactions involving large deformations and complex geometries », in : *J. Fluids Struct.* 95 (2020), DOI : 10.1016/j.jfluidstructs.2020.102993.
- [88] F. XIE, Y. QU, M. ARIFUL et G. MENG, « A sharp-interface Cartesian grid method for time-domain acoustic scattering from complex geometries », in : *Comput. Fluids.* 202 (2020), DOI : 10.1016/j.compfluid.2020.104498.
- [89] H. C. YEE, « Numerical approximation of boundary conditions with applications to inviscid equations of gas dynamics », in : *NASA Technical Memorandum NASA TM-81265* (1981).
- [90] W. YING, R. FATTAH, S. CANTOS, S. ZHONG et T. KOZUBSKAYA, « Computational aeroacoustics of aerofoil leading edge noise using the volume penalization-based immersed boundary methods », in : *International Journal of Aeroacoustics* 21.1-2 (2022), p. 74-94, DOI : 10.1177/1475472X221079557.
- [91] X. ZENG et C. FARHAT, « A systematic approach for constructing higher-order immersed boundary and ghost fluid methods for fluidstructure interaction problems », in : *J. Comput. Phys.* 231 (2012), p. 2892-2923, DOI : 10.1016/j.jcp.2011.12.027.

Résolution numérique des équations de l'acoustique dans un domaine contenant des frontières mobiles.

Mot clés : Méthodes de frontières immergées, Ondes acoustiques, Frontières mobiles, Schémas de différences finies

Résumé : Les problèmes acoustiques réels mettent souvent en jeu des interactions entre des objets de formes complexes en mouvement à l'interface avec un domaine fluide. Ces travaux de thèse portent sur la modélisation numérique en différences finies de champs acoustiques dans un domaine contenant une frontière mobile. La plupart des études reportées dans la littérature ont été menées à des ordres peu élevés (1 ou 2), donc ce travail porte sur des ordres de convergence élevés pour minimiser l'erreur sur le nombre d'onde acoustique. Le premier axe de recherche est

la résolution des équations d'Euler linéarisées, avec une frontière mobile imperméable, modélisée d'une part en condition directe et d'autre part en utilisant la méthode des caractéristiques. Le second axe est l'adaptation de la méthode des caractéristiques pour les frontières mobiles, aux équations d'Euler générales. Le troisième axe se compose des frontières perméables mobiles grâce à un modèle d'impédance dans le domaine temporel. Et enfin, le quatrième axe est la résolution bidimensionnelle sur un modèle simplifié de frontière mobile.

Numerical simulations of acoustic waves with moving boundaries.

Keywords: Immersed boundary methods, Acoustic waves, Moving boundaries, Finite-Difference schemes

Abstract: Realistic acoustic problems often involve interactions between arbitrary-shaped moving objects at the interface with a fluid domain. This thesis focuses on finite-difference numerical modeling of the acoustic field in a domain containing a moving boundary. Most of the studies reported in the literature have been conducted with low-order schemes, so this work focuses on high-order methods to minimize the numerical error on the acoustic wave number. The first research focus is the resolution of the linearized Euler equa-

tions, with an impermeable moving boundary, modeled on the one hand by direct conditions and on the other hand using the method of characteristics. The second focus is the extension of the method of characteristics for moving boundaries to the general Euler equations. The third focus consists of moving permeable boundaries using a time-domain impedance model. And finally, the fourth focus is the two-dimensional resolution of a simplified moving boundary model.