



HAL
open science

Méthode des coordonnées curvilignes pour la modélisation électromagnétique des matériaux complexes : application au contrôle non destructif par courants de Foucault des matériaux composites

Houssem Chebbi

► **To cite this version:**

Houssem Chebbi. Méthode des coordonnées curvilignes pour la modélisation électromagnétique des matériaux complexes : application au contrôle non destructif par courants de Foucault des matériaux composites. Modélisation et simulation. Université Paris-Saclay, 2020. Français. NNT : 2020UP-AST004 . tel-04861098

HAL Id: tel-04861098

<https://theses.hal.science/tel-04861098v1>

Submitted on 2 Jan 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthode des Coordonnées Curvilignes pour la Modélisation Électromagnétique des Matériaux Complexes : Application au Contrôle Non Destructif par Courants de Foucault des Matériaux Composites

Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n° 575, Electrical, Optical, Bio : Physics and
Engineering (EOBE)

Spécialité de doctorat : Physique

Unité de recherche : CEA LIST/DISC/LSME

Université Paris-Saclay, CEA,

Département Imagerie et Simulation pour le Contrôle,

91191, Gif-sur-Yvette, France

Référent : Faculté des sciences d'Orsay

**Thèse présentée et soutenue en visioconférence totale le
10/11/2020, par**

Houssem CHEBBI

Composition du jury :

Lionel PICHON

Professeur des Universités, Centrale supélec (CNRS)

Président

André NICOLET

Professeur des Universités, Institut Fresnel, (UMR 6133)

Rapporteur & Examineur

Christ GLORIEUX

Professeur des Universités, KU Louvain (LATP)

Rapporteur & Examineur

Gérard BERTHIAU

Professeur des Universités, IREENA Nantes

Examineur

Gérard GRANET

Professeur des Universités, Institut Pascal (UMR 6602)

Examineur

Denis PRÉMEL

Ingénieur de recherche-HDR, CEA (LIST/DISC/LSME)

Directeur de thèse

UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

École Doctorale : **Electrical, Optical, Bio : Physics and
Engineering (EOBE)**

Laboratoire de Simulation et Modélisation en Électromagnétique
CEA LIST / DISC / LSME

Thèse doctorale

Présenté et soutenue le 10/11/2020 par

Houssem CHEBBI

**Méthode des Coordonnées Curvilignes pour la
Modélisation Électromagnétique des matériaux
complexes : Application au contrôle non destructif par
Courants de Foucault des matériaux composites**

Composition du Jury

Président

Lionel Pichon

Directeur de Recherche,

Centrale supélec (CNRS)

Rapporteurs

Christ Glorieux
André Nicolet

Professeur des Universités,
Professeur des Universités,

KU leuven (LATP)
Institut Fresnel, (UMR 6133)

Examineur

Gérard Berthiau
Gérard Granet

Professeur des Universités-HDR,
Professeur des Universités,

IREENA Nantes
Institut Pascal (UMR 6602)

Directeur de Thèse

Denis Prémel

Ingénieur Recherche-HDR,

CEA List

Dédicace
À ma femme,
À mon fils Haroun,
À mon Père,
À ma mère.

Remerciement

Ces trois ans de doctorat sont maintenant écoulés et je ressors grandit de cette expérience à la fois humaine et professionnelle. Il est désormais temps de remercier ceux qui m'ont aidé et qui ont contribué à cette réussite.

Tout d'abord je remercie Monsieur Christophe Reboud qui m'a accueilli dans son laboratoire (LSME) et qui a fait preuve d'une grande disponibilité. Ses conseils avisés ainsi que ses remarques pertinentes ont fortement contribué à l'amélioration de mon travail.

Je remercie Messieurs Marco Ricci et Stefano Lorrenti, les coordinateurs et managers du projet européen NDTonAIR, qui m'ont impliqué en me confiant à la bonne contribution dans le projet et m'ont donné l'occasion précieuse de vivre cette expérience européenne pertinente et riche d'opportunités et de connaissances.

J'adresse mes remerciements à Messieurs Marco Laracca, Luigi Ferrigno et Gui Tian, mes encadrants lors de mes deux détachements à l'université de Cassino et l'université de Newcastle Upon Tyne, pour leur accueils ponctuels dans leurs laboratoires et leurs aides précieuses lors de l'acquisition des résultats expérimentaux. Au cours de ces déplacements, j'ai eu la chance de pouvoir profiter de leurs vastes connaissances, de leur expertises scientifiques et de leurs grandes qualités humaines. Nos nombreuses discussions, toujours très enrichissantes, ont été une aide précieuse.

Je remercie M. Christ Glorieux, Professeur des Universités à l'Université de Louvain (Belgique) et M. André Nicolet, Professeur des Universités à l'Institut Fresnel (Domaine Universitaire de Saint -Jérôme) pour avoir accepté d'évaluer mon travail en tant que rapporteurs.

Je remercie très chaleureusement l'ensemble des personnes qui m'ont croisé pendant ces trois années, tous les doctorants du projet **NDTonAir**, et tous les encadrants et les référents, professeurs et responsables industriels.

J'exprime mes plus sincères remerciements et ma grande reconnaissance à Monsieur Denis Prémel, mon directeur de thèse, qui a encadré mon travail au quotidien et qui m'a fait confiance durant ces trois années. Son expertise scientifique, sa pédagogie et ses conseils avisés ont permis l'aboutissement de mes travaux. Sa grande disponibilité, son écoute ainsi que ses grandes qualités humaines ont rendu ces trois années très agréables.

Je tiens également à remercier mes parents, qui ont été toujours des sources d'encouragement ; mon père, qui a infiniment essayé de me mettre sur la bonne route, ma mère

que j'espère être toujours sa source de fierté.

Le dernier remerciement est pour quelqu'un qui le mérite mille fois, au moins pour mon caractère qui s'est peu à peu détérioré parfois et pour ma faible disponibilité, en particulier pendant les détachements de longue durée à l'étranger : c'est ma femme ! Merci à toi Sahar pour le soutien que tu m'as apporté, tu étais toujours ma source d'encouragement, de confort et de bonheur.

Table des matières

1	Introduction et Contexte	11
1.1	Projet NDTonAir	12
1.2	Motivation	13
1.3	Objectifs	15
1.4	Organisation du Manuscrit	16
2	État de l'Art	17
2.1	Matériaux Composites	18
2.1.1	Introduction	18
2.1.2	Composites à renfort unidirectionnel	18
2.1.3	Principaux défauts	21
2.2	Technique de Contrôle pour les composites	22
2.2.1	Généralité sur le Contrôle Non Destructif	23
2.2.2	Méthode de contrôle les plus répandues	24
2.3	Contrôle non Destructif à Courants de Foucault	27
2.3.1	Introduction au CND-CF	27
2.3.2	Application de CND-CF à l'inspection des composites	30
2.3.3	Modélisation de CND-CF	32
2.4	Conclusion	38
3	Champ induit dans un Composite plan	41
3.1	Introduction	42
3.2	Demi-espace anisotrope plan	42
3.2.1	Configuration et hypthèse de travail	42
3.2.2	Mise en équations	43
3.2.3	Écriture modale	45
3.2.4	Conditions de passage	53
3.3	Composite plan stratifié	55
3.3.1	Configuration	55
3.3.2	Algorithme des Matrices-S	56
3.4	Résolution numérique	60

3.4.1	Discrétisation	60
3.4.2	Calcul du champ source	66
3.4.3	Réseau multi-couches	67
3.4.4	Calcul de la réponse du capteur	69
3.5	Validation numérique	71
3.5.1	Cas # 1 : une couche anisotrope plane	71
3.5.2	Cas # 2 : milieu stratifié anisotrope plan	75
3.6	Bilan	81
4	Cas de Composite à surfaces déformées	83
4.1	Introduction	85
4.2	Méthode de Coordonnées Curvilignes	86
4.2.1	Système de Translation	86
4.2.2	Formalisme covariant des équations de Maxwell	88
4.2.3	Covariance et Contravariance	89
4.3	Conducteur isotrope à géométrie complexe	91
4.3.1	Mise en équations	91
4.3.2	Décomposition TE_w/TM_w	92
4.3.3	Équations de propagation modifiée	95
4.4	Conducteur anisotrope à géométrie complexe	97
4.4.1	Formalisme et équations	97
4.4.2	Écriture Modale	98
4.4.3	Conditions de passage	104
4.5	Résolution numérique	106
4.5.1	Calcul des matrices de convolution	107
4.5.2	Calcul champ source	111
4.5.3	Cas des interfaces non parallèles	113
4.5.4	Calcul de l'impédance	118
4.6	Validation numérique	120
4.6.1	Perturbation 3D : strates parallèles	121
4.6.2	Perturbation 3D : cas de surface complexe et un plan	127
4.6.3	Perturbation 2D5	132
4.7	Bilan	137
5	Perspectives et extension du formalisme	139
5.1	Introduction	140
5.2	Cas général des surfaces complexes	140
5.2.1	Stratégie de Résolution	140
5.2.2	Méthode Pseudo-Spectrale	143
5.2.3	Résultats préliminaires	156
5.3	Généralisation au cas des milieux non-homogènes	157

5.3.1	Configuration	158
5.3.2	Mise en équations	158
5.3.3	Validation numérique	161
5.4	Bilan	165
6	Collaborations	167
6.1	Introduction	168
6.2	Détachement à Cassino	168
6.2.1	Expérimentation	168
6.2.2	Validation expérimentale	172
6.3	Détachement à Newcastle	174
6.3.1	Expérimentation	174
6.3.2	Validation expérimentale	176
7	Conclusion Générale	179
	Appendices	181
A	Les Lois de l'électromagnétique	183
A.1	Introduction	183
A.2	Formulation Covariante des équations de Maxwell	188
B	Notion d'algèbre vectorielle et tensorielle	195
B.1	Espace vectoriel et espace dual	195
B.2	Cas des espaces euclidiens	196
B.3	Coordonnées covariantes et contravariantes d'un vecteur	197
B.4	Notions d'algèbre tensorielle	197
B.4.1	Définition	197
B.4.2	Composantes d'un tenseur	198
B.4.3	Le Tenseur Métrique	198
C	Communications relatives aux travaux de recherche	201
C.1	Papier de revue	201
C.2	Articles	201
C.3	Présentations orales dans des conférences internationales	202
C.4	Poster	202

Table des figures

1.1	Répartition géographique des partenaires du projet NDTonAIR.	13
2.1	Différents types de renforts dans les structures composites.	18
2.2	Composites à renforcements longs : structure unidirectionnelle et tissée.	19
2.3	Matériaux utilisés dans le fuselage du boeing 787.	19
2.4	Structure stratifiée des composites unidirectionnels.	20
2.5	Disposition aléatoire des fibres dans différentes orientations.	20
2.6	Différents types de défauts dans les composites.	22
2.7	Principe de contrôle non destructif.	23
2.8	Principe du test à ultrasons.	24
2.9	Principe du test à Rayon-X.	25
2.10	Principe de test Thermographie.	26
2.11	Principe du CND-CF.	28
2.12	Perturbation de la réponse du capteur en présence d'un défaut.	28
2.13	Capteur tournant constitué de deux bobine en mode T-R.	30
2.14	Réseau de capteur développé par Fraunhofer pour augmenter la résolution et la vitesse de mesure.	31
2.15	Configuration dédiée à la détection les ondulation hors-plan des fibres.	32
2.16	Impact and fiber waviness detection in CFRP using ECPT.	32
2.17	Principe d'homogénéisation	34
2.18	changement de coordonnées	37
3.1	Configuration : demi espace plan et anisotrope.	42
3.2	Conditions de passage à l'interface séparatrice.	53
3.3	Composite plan multi-couches.	55
3.4	Matrice-S : relation entre les entrées et les sorties.	57
3.5	Concaténation de matrices-S.	58
3.6	Division géométrique des capteurs en cellules trapézoïdales.	66
3.7	Norme du champ électrique et magnétique dans l'air calculés sur un plan d'équation $z = 0$	67

3.8	Algorithme de construction des matrices d'interfaces.	68
3.9	Algorithme de mise en cascade des interfaces inférieures.	68
3.10	Surface de calcul d'impédance.	69
3.11	Capteur à deux bobines rectangulaires tournant autour de son axe.	72
3.12	Diagramme polaire de la variation d'impédance en ω au borne de la bobine réceptrice.	73
3.13	Diagramme polaire de la variation d'impédance en ω au borne de la bobine émettrice.	74
3.14	Pomposite multicouches plan avec différentes orientations de fibres.	75
3.15	Partie réelle et imaginaire de E_x à différentes profondeurs	77
3.16	Partie réelle et imaginaire de E_y à différentes profondeurs	77
3.17	Partie réelle et imaginaire de H_x à différentes profondeurs	78
3.18	Partie réelle et imaginaire de H_y à différentes profondeurs	78
3.19	Partie réelle et imaginaire de H_z à différentes profondeurs	79
3.20	Densité de courant à la profondeur $z = -0.5\text{mm}$: Modèle vs FEM.	79
3.21	Densité de courant à la profondeur $z = -1.5\text{mm}$	80
3.22	Densité de courant à la profondeur $z = -2.5\text{mm}$	80
3.23	Densité de courant à la profondeur $z = -3.5\text{mm}$	80
4.1	Vue de coupe : interface complexe séparant 2 milieux différents.	86
4.2	Demi espace conducteur à surface complexe.	86
4.3	Exemple de fonction 2D et sa première dérivée partielle	107
4.4	Champ source calculé dans l'air sur une surface complexe.	111
4.5	Norme du champ électrique et magnétique dans l'air calculés sur un plan d'équation $z = 0$	112
4.6	Comparaison des modules des coefficients $\mathbf{a}_{\mathbf{q}_0^-}$ dans le conducteur.	113
4.7	Cas des interfaces parallèles : même base adoptée	113
4.8	Exemple de surfaces complexes non parallèles.	114
4.9	Vue de coupe : Domain où l'expansion du champ est valide.	117
4.10	Surface complexe de calcul d'impédance du capteur.	119
4.11	Configuration : conducteur anisotrope à surfaces complexes 3D parallèles.	121
4.12	Densité de courant normalisée et variation de la partie réelle et imaginaire de l'impédance du capteur en fonction du déplacement du capteur.	123
4.13	Partie réelle et imaginaire de E_1 sur le plan $x^3 = -0.15\text{mm}$ avec $\theta = 45^\circ$	124
4.14	Partie réelle et imaginaire de E_2 sur le plan $x^3 = -0.15\text{mm}$ avec $\theta = 45^\circ$	124
4.15	Partie réelle et imaginaire de E_3 sur le plan $x^3 = -0.15\text{mm}$ avec $\theta = 45^\circ$	125

4.16	Partie réelle et imaginaire de H_1 sur le plan $x^3 = -0.15\text{mm}$ avec $\theta = 45^\circ$	125
4.17	Partie réelle et imaginaire de H_2 sur le plan $x^3 = -0.15\text{mm}$ avec $\theta = 45^\circ$	126
4.18	Conducteur anisotrope : cas de surface complexe et un plan	127
4.19	Partie réelle et imaginaire de E_1 sur le plan $x^3 = -0.3\text{mm}$	129
4.20	Partie réelle et imaginaire de E_2 sur le plan $x^3 = -0.3\text{mm}$	129
4.21	Partie réelle et imaginaire de H_1 sur le plan $x^3 = -0.3\text{mm}$	130
4.22	Partie réelle et imaginaire de H_2 sur le plan $x^3 = -0.3\text{mm}$	130
4.23	Partie réelle et imaginaire de H_3 sur le plan $x^3 = -0.3\text{mm}$	131
4.24	Variation de la partie réelle et imaginaire de l'impédance	131
4.25	Conducteur anisotrope à surfaces complexes 2D5 non parallèles.	132
4.26	$\Re(E_1)$ et $\Im(E_1)$ sur un plan d'équation $x^3 = -0.5\text{mm}$	134
4.27	$\Re(E_2)$ et $\Im(E_2)$ sur un plan d'équation $x^3 = -0.5\text{mm}$	134
4.28	$\Re(E_3)$ et $\Im(E_3)$ sur un plan d'équation $x^3 = -0.5\text{mm}$	135
4.29	$\Re(H_1)$ et $\Im(H_1)$ sur un plan d'équation $x^3 = -0.5\text{mm}$	135
4.30	$\Re(H_2)$ et $\Im(H_2)$ sur un plan d'équation $x^3 = -0.5\text{mm}$	136
4.31	$\Re(H_3)$ et $\Im(H_3)$ sur un plan d'équation $x^3 = -0.5\text{mm}$	136
5.1	Exemple de surfaces 3D complexes non parallèles et non planes.	140
5.2	Surfaces intermédiaire adaptée à la géométrie complexe.	142
5.3	Fonctions cardinales associées aux polynômes de Chebyshev.	145
5.4	Grille de calcul modifiée dans la plaque de géométrie complexe à strates non parallèles	146
5.5	E_2 sur le plan $x^3 = 0$	157
5.6	Plaque CFRP non homogène	158
5.7	variation de σ	159
5.8	Partie réelle et imaginaire de E_x sur la surface $z = 0$	162
5.9	Partie réelle et imaginaire de E_y sur la surface $z = 0$	162
5.10	Partie réelle et imaginaire de E_z sur la surface $z = 0$	163
5.11	Partie réelle et imaginaire de H_x sur la surface $z = 0$	163
5.12	Partie réelle et imaginaire de H_y sur la surface $z = 0$	164
5.13	Partie réelle et imaginaire de H_z sur la surface $z = 0$	164
6.1	Configuration à valider expérimentalement	169
6.2	défaut artificiel introduit à la surface du conducteur par une Tour d'usinage métaux.	169
6.3	calibration capteur par calcul d'impédance brute en variant la fréquence d'excitation.	170
6.4	schema de chaine d'acquisition en regroupant les éléments parasites	171
6.5	Schéma de manip expérimental	172

6.6	Schéma de coupe du specimen	173
6.7	Cartographie du module de l'impédance : Modèle vs données expérimentales	174
6.8	Manip expérimentale	175
6.9	logiciel de visionnage et de récupération de données expérimentales lié à la caméra infrarouge	176
6.10	Densité de chaleur à la surface supérieur de la plaque : Modèle semi-analytique vs modèle NewCastle.	177
6.11	Comparison expérimentale : Densité de courant au milieu de la première couche ($\theta = 45^\circ$) et la deuxième couche ($\theta = 0^\circ$).	178

Liste des tableaux

1.1	Liste des bénéficiaires et partenaires du projet européen NDTonAir.	14
2.1	Conductivité dans des différents matériaux.	21
3.1	Paramètres numériques de discrétisation spatiale.	61
3.2	paramètres physiques de la plaque.	71
3.3	Paramètres numériques de calcul	71
3.4	Partie réelle de l'impédance totale à différentes fréquences.	74
3.5	Partie imaginaire de l'impédance totale à différentes fréquences.	75
3.6	Paramètres physiques de la plaque.	76
3.7	Paramètres numériques de calcul	76
3.8	Erreur sur la norme des composantes du champ magnétique.	76
3.9	Erreur sur la norme des composantes du champ électrique.	76
3.10	Erreur sur la densité de courants à différentes profondeurs	77
4.1	Paramètres du capteur.	112
4.2	Paramètres géométriques du défauts.	122
4.3	Paramètres numériques de calcul.	122
4.4	Paramètres du capteur.	122
4.5	Paramètres de la pièce.	122
4.6	Erreur sur la norme des composantes du champ magnétique.	123
4.7	Erreur sur la norme des composantes du champ électrique.	123
4.8	Erreur sur la norme des composantes du champ magnétique.	128
4.9	Erreur sur la norme des composantes du champ électrique.	128
4.10	Paramètres géométriques du défaut	128
4.11	Paramètres numériques de calcul	128
4.12	Paramètres du capteur	128
4.13	Paramètres de la pièce	128
4.14	Paramètres géométriques du défauts	133
4.15	Paramètres numériques de calcul	133
4.16	Paramètres du capteur	133

4.17	Paramètres de la pièce	133
4.18	Erreur sur la norme des composantes du champ magnétique.	137
4.19	Erreur sur la norme des composantes du champ électrique.	137
5.1	paramètres géométriques du défaut	157
5.2	paramètres physiques de la plaque non homogène.	159
5.3	Paramètres numériques de calcul	159
6.1	paramètres géométriques des bobines réelle et modélisée	171
6.2	Paramètres du manip expérimental	173
6.3	Paramètre du specimen sous test	173
6.4	Paramètres de la bobine.	175
6.5	Paramètres de la plaque composite.	176

Chapitre 1

Introduction et Contexte

Sommaire

1.1	Projet NDTonAir	12
1.2	Motivation	13
1.3	Objectifs	15
1.4	Organisation du Manuscrit	16

Au sein du **Laboratoire de Simulation et Modélisation Électromagnétique (LSME)** au CEA List, cette thèse s'intègre dans le cadre du projet européen **NDTonAir** financé par le *H2020 Marie Skłodowska-Curie actions (MSCA)*.

Ce projet de recherche s'inscrit dans la thématique du développement des modèles numériques rapides dédiés à la simulation de l'inspection des pièces conductrices par une technique de contrôle non destructif. Ceci demeure d'actualité avec les énormes progrès réalisés en termes de rapidité et de capacité de stockage des outils de calcul numérique. Le modèle à développer constitue une contribution à la modélisation numérique de l'interaction d'un champ électromagnétique avec une structure en matériau composite stratifié à fibres de carbone (CFRP).

1.1 Projet NDTonAir

Le projet européen **NDTonAir** (Training Network in Non-Destructive Testing and Structural Health Monitoring of Aircraft structures) est financé sous l'action : *H2020-MSCA-ITN-2016- GRANT 722134*. Ce consortium regroupe des universités, des instituts de recherche et des entreprises européennes travaillant tous sur le développement de nouvelles techniques de contrôle non destructif (**CND**) et de surveillance de l'état de la structure (**SHM**) pour l'aérospatial. L'objectif de ce projet est de former une nouvelle génération de scientifiques et d'ingénieurs chercheurs possédant de vastes connaissances théoriques et expérimentales, capables de développer leurs activités de recherche dans le monde académique et industriel, et de jouer un rôle actif pour promouvoir l'importance du contrôle de la qualité et du suivi des structures dans les composants aérospatiaux. Le programme de la formation a pour but de fournir aux jeunes chercheurs recrutés une formation approfondie et variée portant sur :

- Les compétences de base pour les techniques d'Évaluation Non-Destructive (**END**) et les **SHM** (Structural Health Monitoring).
- Les techniques de **CND** utilisées dans l'aérospatiale.
- Transfert de technologie et de l'entrepreneuriat.

L'objectif du programme de recherche est de consolider et d'innover les techniques actuelles de contrôle non destructif pour l'inspection des avions en :

- étudiant de nouveaux phénomènes physiques et de nouveaux capteurs.
- développant des modèles analytiques et numériques pour corréler les résultats de l'inspection avec les propriétés des matériaux.
- quantifiant les techniques de **CND** par leur probabilité de détecter des défauts de référence.
- élaborant des procédures pour la détection et la classification automatiques des défauts.
- transférant ces résultats à l'industrie.

Les membres du Consortium (bénéficiaires et partenaires) travailleront ensemble à la réalisation de ce programme de la formation. La collaboration scientifique sera stimulée par le détachement des chercheurs recrutés et visera à améliorer l'intégration et la comparaison des différentes techniques de **CND**. Le consortium comprend 16 organisations, dont 7 universités, 4 centres de recherche et 5 entreprises. On trouvera, ci-dessous, la liste complète des membres du consortium répartis entre les bénéficiaires (qui recrutent les chercheurs) et les partenaires (qui assurent le détachement). La Figure (1.1) représente une cartographie des bénéficiaires et partenaires du projet.

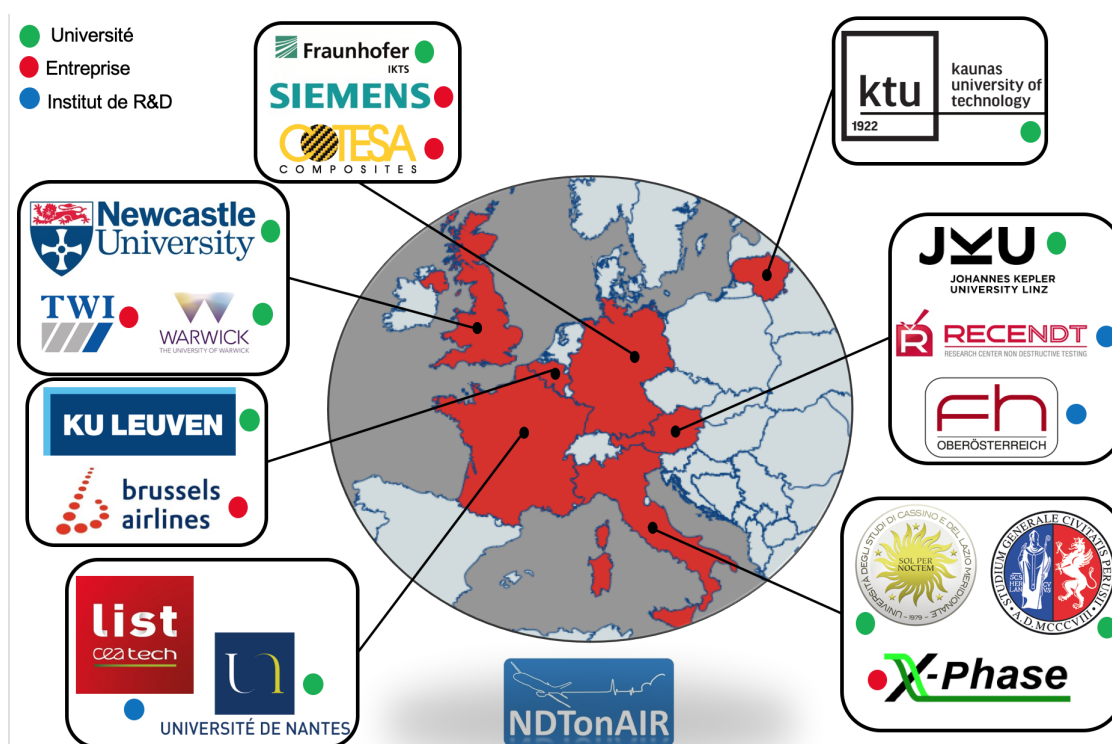


FIGURE 1.1 – Répartition géographique des partenaires du projet NDTonAIR.

1.2 Motivation

L'utilisation des matériaux composites est en forte croissance pour la fabrication des composants grâce à l'excellent compromis qu'ils offrent entre performance en résistance mécanique et faible poids. Dans les dernières décennies, la production mondiale des composites a énormément augmenté en la comparant avec la production d'autres alliages métalliques (acier et aluminium). Les principaux secteurs utilisant les composites sont : l'aéronautique, l'automobile, le ferroviaire et la

Bénéficiaires (Recrutement & Formation)	Partenaires (Détachement)
Université de Perugia (IT)	Université de Cassino (IT)
Brussels Airlines (BE)	COTESA (DE)
CEA-LIST (FR)	MDP (IT)
Fraunhofer IKTS Dresden (DE)	SIEMENS (DE)
Université de Kauno Technologijos (LT)	X-PHASE (IT)
Université de Katholieke Leuven (BE)	
Université de Nantes (FR)	
Université de Newcastle (UK)	
RECENDT (AT)	
TWI Limited (UK)	
Université de Warwick (UK)	

TABLE 1.1 – Liste des bénéficiaires et partenaires du projet européen NDTonAir.

construction civile. Tout au long de leur cycle de vie, ce type de matériau subit des impacts causant différents types de défauts qui doivent être détectés afin d'assurer leur bon fonctionnement d'où le besoin d'améliorer des méthodes de contrôle. De ce fait, il est devenu incontournable de développer des outils de simulation pour la caractérisation et la bonne optimisation des méthodes de contrôle de ce matériau complexe.

Par ailleurs, la modélisation électromagnétique constitue une aide précieuse à l'interprétation des signaux ainsi qu'un outil majeur et crucial qui permet aux industriels de remplacer partiellement les études expérimentales coûteuses (conception des capteurs, traiter de nouvelles géométries de pièces, étude de sensibilité, étude paramétrique...). Par conséquent, le développement des modèles rapides et précis présente une étape fondamentale en vue de simulation de procédés d'inspection ou d'inversion des signaux de contrôle.

En outre, le **LSME** contribue dans le développement de **CIVA**, un logiciel commercialisé dédié à la simulation de l'inspection des matériaux par différentes techniques de contrôle (par courants de Foucault, par ultrasons, par thermographie...). Maintes modèles sont implémentés pour le calcul du champ électromagnétique induit par différents types de capteurs dans des pièces de géométrie canonique (plane ou cylindrique). Ces modèles sont principalement basés sur des méthodes intégrales de volume et le formalisme de Dyades de Green. De nouvelles approches semi-analytiques sont étudiées au cours de ces dernières années pour traiter des conducteurs isotropes présentant des géométries plus complexes.

1.3 Objectifs

L'objectif global de ce travail de recherche consiste à développer un outil de simulation rapide et précis qui sert à analyser et interpréter les signaux issus des capteurs à courants de Foucault. Ces signaux résultent de l'interaction d'un champ d'excitation émis par une bobine 3D avec le matériau testé. Dans le but de caractériser ce matériau anisotrope, deux cas de configurations se présentent :

1. la caractérisation d'une pièce anisotrope saine,
2. la caractérisation d'un matériau anisotrope comprenant un défaut.

Dans le premier cas, on s'intéresse à identifier l'axe principal de l'anisotropie ce qui revient à identifier l'orientation des fibres dans chaque couche. Ceci est effectué via le calcul du champ induit dans la pièce et la réponse du capteur. Pour résoudre les équations de Maxwell en coordonnées cartésiennes, un modèle semi-analytique a été développé en se reposant sur un formalisme en potentiel. Lorsqu'on se place dans un milieu isotrope, le champ Électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{H} peuvent s'exprimer en fonction de deux potentiels scalaires. Dans un milieu anisotrope, les composantes tangentielles du champ, vérifiant un système différentiel, sont développées en une expansion modale en fonction des modes propres.

Dans le deuxième cas, on se restreint à des défauts usuels qu'on trouve souvent dans les structures composites et qui peuvent être modélisés par une déformation géométrique, citons l'exemple du délaminage ou ondulation hors-plan des fibres. Pour résoudre ce problème plus complexe, on fait appel à la Méthode des Coordonnées Curvilignes (ou Curvilinear Coordinates Method - CCM). C'est une méthode modale basée sur un changement de coordonnées adapté à la géométrie complexe de la pièce et qui consiste à résoudre les équations de Maxwell, sous leur forme covariante, dans un système de coordonnées curvilignes non orthogonal. Ce changement de coordonnées nous permettra d'écrire les conditions aux limites d'une manière simple et analytique. Cette méthode a été utilisée dans des travaux antérieurs [Thèse François] pour le calcul rapide du champ électromagnétique (\mathbf{EM}) dans des conducteurs isotropes homogène à géométries complexes 2D1/2 et 3D (travaux Denis). Il à noter que le formalisme utilisé dans le modèle est unifiant et général. De ce fait, d'autres types de défauts peuvent être envisagés en perspective du type rupture de fibre (variation brutale de conductivité).

En résumant, le projet a été divisé en deux sous problèmes : premièrement, on traite le cas d'un matériau stratifié anisotrope à surfaces planes où on vise à caractériser les propriétés de la pièce. Deuxièmement, on étend le modèle existant qui traite les conducteurs isotrope à surface complexe pour tenir compte de l'anisotropie du matériau. Chaque sous problème à été optimisé pour réduire autant que possible le temps de calcul.

1.4 Organisation du Manuscrit

Ce manuscrit est organisé comme suit : Dans le premier chapitre, on présente le cadre européen du projet, la motivation et les objectifs de ce travail de recherche. Dans le deuxième chapitre, on présente des généralités sur les matériaux composites et les techniques de contrôle non destructif les plus utilisées dans son inspection ainsi que les différentes approches de modélisation d'un procédé d'évaluation par courants de Foucault. Ensuite, on présente un modèle semi-analytique basé sur une approche modale pour le calcul rapide du champ électromagnétique induit dans un conducteur anisotrope à surfaces planes ainsi que la réponse du capteur. Dans le quatrième chapitre, on introduit une perturbation locale de géométrie et on propose de calculer le champ électromagnétique induit dans le milieu conducteur en utilisant la méthode de coordonnées curvilignes. Dans le cinquième chapitre, on propose une méthode numérique pour le calcul de champ dans un conducteur à interfaces non parallèles et non planes. Finalement, on présente les tâches effectuées lors des détachements dans des laboratoires étrangers dans le cadre de la collaboration avec nos partenaires du projet européen, qui ont pour objectifs, acquérir des connaissances et compétences en expérimentation, initier des essais expérimentaux pour la validation du modèle.

Chapitre 2

État de l'Art

Sommaire

2.1	Matériaux Composites	18
2.1.1	Introduction	18
2.1.2	Composites à renfort unidirectionnel	18
2.1.3	Principaux défauts	21
2.2	Technique de Contrôle pour les composites	22
2.2.1	Généralité sur le Contrôle Non Destructif	23
2.2.2	Méthode de contrôle les plus répandues	24
2.3	Contrôle non Destructif à Courants de Foucault	27
2.3.1	Introduction au CND-CF	27
2.3.2	Application de CND-CF à l'inspection des composites	30
2.3.3	Modélisation de CND-CF	32
2.4	Conclusion	38

2.1 Matériaux Composites

2.1.1 Introduction

Dans les dernières décennies, la production mondiale des composites apparaît être en forte croissance en la comparant avec la production d'autres alliages métalliques (acier et aluminium). Les principaux secteurs utilisant les composites sont : l'automobile, l'aéronautique, le ferroviaire, la construction navale et la construction civile. Un matériau composite est par définition toute matière métallique ou organique comportant un renfort allant de la particule de forme allongée à la fibre continue [58]. Il apporte donc de nombreux avantages ; notamment la légèreté et la résistance mécanique. Il enrichit les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes. Un matériau composite est composé de deux parties :

1. La matrice : généralement diélectrique, elle assure la cohésion de l'ensemble et le transfert des efforts sur les renforts (exemple : résine).
2. Les renforts : sont l'ossature qui assure la tenue mécanique. les différents types de renforts sont illustrés dans la Figure (2.1).

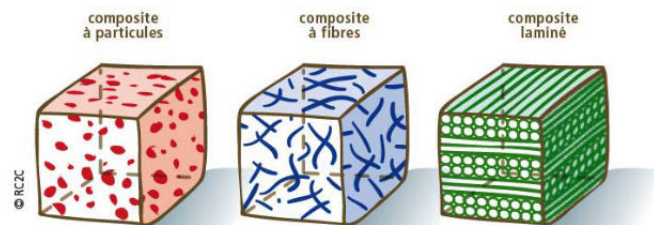


FIGURE 2.1 – Différents types de renforts dans les structures composites.

2.1.2 Composites à renfort unidirectionnel

Les structures composites unidirectionnels à base de fibres de carbone (Figure (2.2)) sont de plus en plus populaires dans les applications industrielles aéronautiques. Cela est dû aux nombreux avantages mécaniques telles qu'un poids léger, une résistance supérieure aux métaux à la corrosion et performances en fatigue

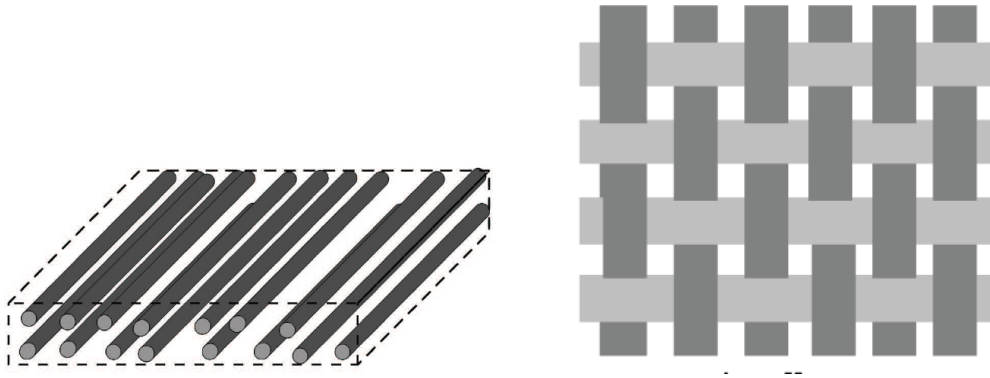


FIGURE 2.2 – Composites à renforcements longs : structure unidirectionnelle et tissée.

impressionnantes. Comme le montre la Figure (2.3), le Boeing 787 Dreamliner (introduit en 2007) a subi une augmentation de 39% de l'utilisation globale des composites par rapport à son prédécesseur, le Boeing 777, qui n'utilise que 11% des matériaux composites [1]. A l'échelle microscopique, le matériau est consti-

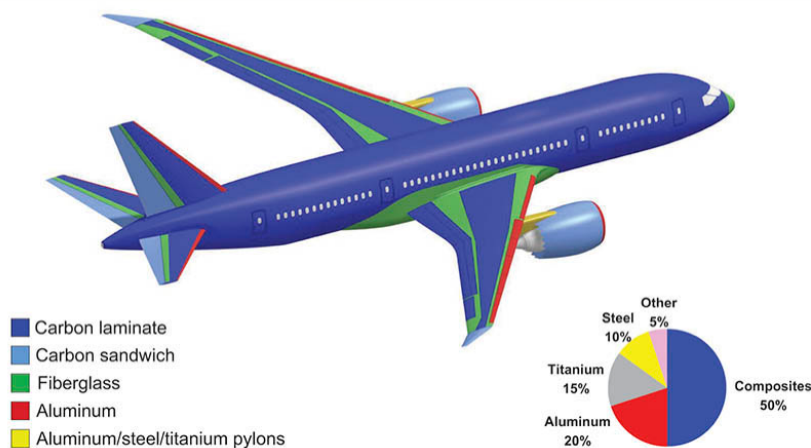


FIGURE 2.3 – Matériaux utilisés dans le fuselage du boeing 787.

tué de renforts filamentaires noyés dans une résine thermoplastique. Des fibres longues sont assemblées sous forme de toron dans une direction privilégiée et un pli unidirectionnel est ainsi constitué à l'échelle mésoscopique. Les matériaux dits unidirectionnels comportent plusieurs plis, d'environ $125 \mu\text{m}$ d'épaisseur, selon des orientations différentes comme présenté dans la Figure (2.4) [94].

Ces fibres rigides et résistantes supportent les charges auxquelles le composant

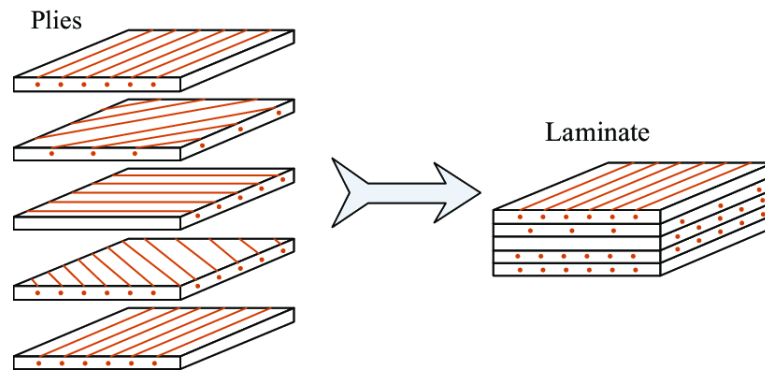


FIGURE 2.4 – Structure stratifiée des composites unidirectionnels.

ou la structure est soumise. La matrice a une faible rigidité et une faible résistance et elle contribue à la forme du composant. Elle sert à transférer des charges entre les fibres et entre elles, c'est une autre tâche importante. Contrairement aux métaux, les composites à base de fibre de carbone présentent des propriétés électriques non-homogènes et fortement anisotropes vu la disposition quasi-aléatoire des fibres comme le montre la Figure (2.5).

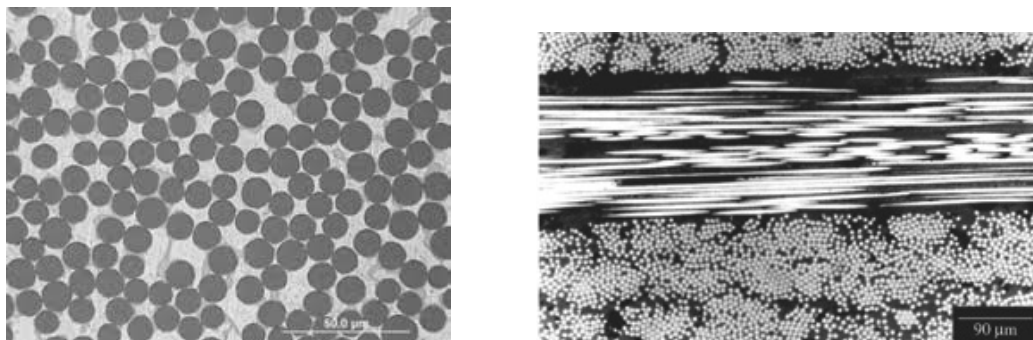


FIGURE 2.5 – Disposition aléatoire des fibres dans différentes orientations.

Les fibres de carbone ont une conductivité électrique intrinsèque beaucoup plus basse que les métaux [58]. Ceci est montré dans le tableau 2.1, où les valeurs de conductivité des métaux et des composites sont comparées : pour les composites unidirectionnels, la conductivité dans la direction de la fibre (longitudinale) est environ 1000 fois inférieure à celle des métaux, tandis que la conductivité dans la direction transversale est environ 100 fois plus faible. Par conséquent, on s'attend à ce que le matériau composite fabriqué avec ces fibres soit électriquement conducteur uniquement dans le sens des fibres. Cependant, une conductivité électrique transversale non négligeable est observée. Cette dernière vient du contact impor-

matériau	conductivité (10^4 S/m)	direction de mesure
cooper	5900	n/a
Aluminium	3500	n/a
Fer	1000	n/a
Graphite	13	n/a
Carbone	3	
Fibre de Carbone	4 - 17	
Fibre de Carbone unidirectionel	0.9 - 1.5 0.01 - 0.2	parallèle perpendiculaire

TABLE 2.1 – Conductivité dans des différents matériaux.

tant entre les fibres dans la direction d'empilement dans la même couche et entre les plis

2.1.3 Principaux défauts

À cause des conditions imparfaites au cours du processus de fabrication et des dommages qui peuvent se produire au cours du cycle de vie des composites à fibres de carbone, des différents types de défauts critiques pour la sécurité peuvent se développer dans ces structures complexes et la nature de ces défauts peut être différente de celle rencontrée dans les matériaux homogènes traditionnels.

Les imperfections peuvent se produire dans les fibres, dans la matrice, pendant la production ou durant le service d'un composant. Les fibres peuvent être cassées, et parfois des faisceaux de fibres peuvent être pliées ou ondulées, ce qui réduit la résistance à la traction et à la compression du matériau composite final.

Au cours de la fabrication, les erreurs dans l'orientation des fibres vont réduire le comportement mécanique. Les inclusions telles que l'eau et l'huile vont contaminer localement les matériaux composites finaux. D'ailleurs, Pendant le chauffage, l'eau va s'évaporer ce qui peut causer des porosités. La porosité va créer des défauts plus graves comme le délaminage. Durant le service, le composite peut être exposé à des températures élevées, à l'humidité et à des impacts imprévus. Les différents environnements peuvent de même causer la fissure dans les matériaux, fibres cassées et dommage d'impact [56]. Les exemples des principaux défauts et endommagements rencontrés dans les composites sont illustrés par la Figure (2.6).

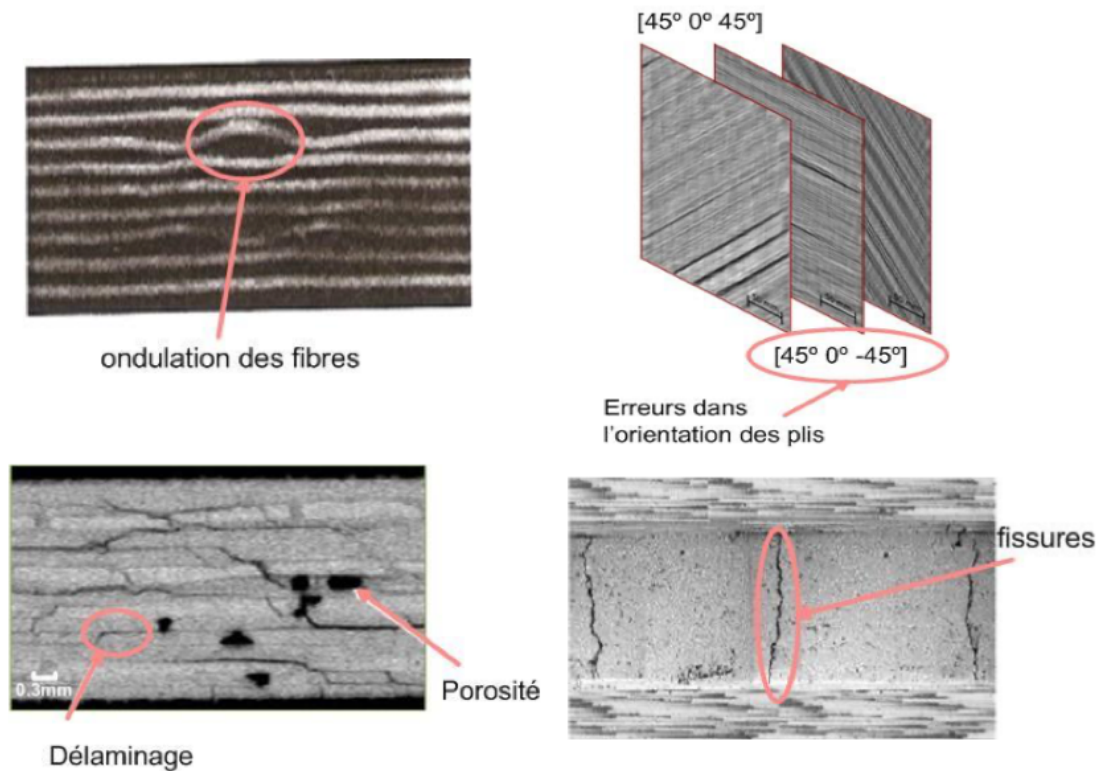


FIGURE 2.6 – Différents types de défauts dans les composites.

2.2 Technique de Contrôle pour les composites

En vu de leur structure compliqué, les matériaux composites ont des comportements physiquement et mécaniquement compliqués et variables selon chaque structure. L'évaluation de la qualité du produit fini par les techniques de **CND** pour l'aérospatiale est devenue indispensable pour les industriels en tant que conditions essentielles pour garantir les performances du composant pendant sa durée de vie. De ce fait, la caractérisation des composites est devenue un sujet de recherche attractif. La façon de choisir la méthode **CND** dépend des exigences et conditions spécifiques du matériau et de l'application. Selon la revue de la littérature, il existe de nombreux types d'inspections pour évaluer les composites et il existe de nombreuses méthodes proposées par les chercheurs pour chacune d'elles.

Les tests non destructifs impliquent une connaissance approfondie des techniques dans divers sujets et il est impossible de présenter tous les détails dans une seule thèse de doctorat. Cependant, un bref examen est fourni dans ce chapitre pour aider à présenter le contexte pertinent et à mieux comprendre ce travail de

recherche. Puis on présente brièvement les principales techniques les plus utilisées dans l'inspection des composites.

2.2.1 Généralité sur le Contrôle Non Destructif

L'Évaluation Non Destructive **END** ou Contrôle Non Destructif **CND** consiste à identifier et à caractériser les défauts surfaciques à l'intérieur de la pièce examinée. En d'autres termes, c'est un essai d'évaluation et d'inspection d'une structure dans le but de détecter des anomalies par rapport aux certaines normes sans détruire l'objet testé. Comme le montre la figure 2.7, le concept général consiste à

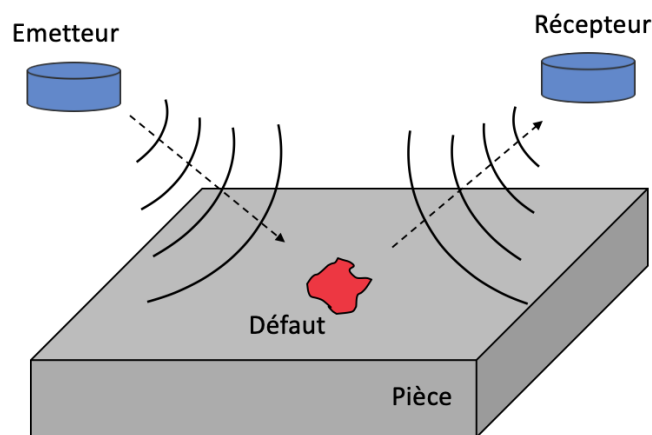


FIGURE 2.7 – Principe de contrôle non destructif.

utiliser un capteur composé généralement d'un émetteur, source de signal d'entrée, et un récepteur qui reçoit le signal réfléchi par la pièce. En passant d'une zone saine à une zone présentant un défaut, le signal reçu par le récepteur subit lui-même une perturbation. Le défaut est ainsi détecté. A travers cette définition, les techniques modernes de contrôle non destructif peuvent être utilisées pour :

- assurer l'intégrité et la fiabilité d'un produit,
- prévenir les accidents et sauver des vies,
- assurer la satisfaction du client,
- aide à la conception des produits,
- contrôler les processus de fabrication,
- coûts de fabrication réduits,
- maintenir un niveau de qualité uniforme.

Lors du choix d'une technique **CND** pour une tâche d'inspection, la première chose à considérer est de savoir si elle convient pour détecter les discontinuités existantes

avec une probabilité suffisamment élevée. Pour de nombreuses tâches, une seule méthode **CND** est suffisante pour résoudre un problème d'inspection, mais parfois, plusieurs méthodes sont également utilisées pour fournir des informations supplémentaires et améliorer la fiabilité de l'inspection [37, 38]. De plus, le choix de l'équipement d'inspection est un processus qui inclut quelques considérations.

- l'équipement doit avoir une capacité suffisante et en même temps être facile à calibrer, à entretenir et à utiliser,
- L'équipement doit également pouvoir fonctionner dans des conditions environnementales difficiles lors de l'inspection,
- L'équipement doit faciliter l'interprétation et l'enregistrement du signal,
- L'équipement doit être portable si nécessaire.

2.2.2 Méthode de contrôle les plus répandues

Test Ultrasons

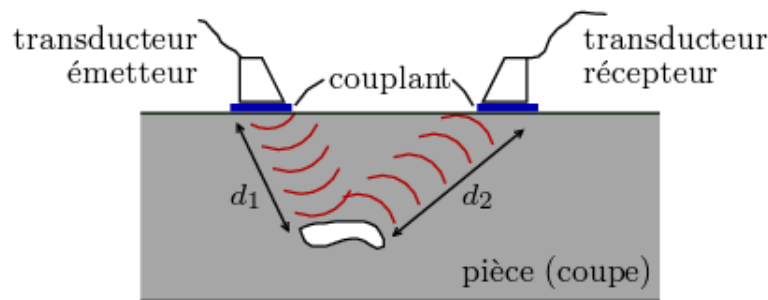


FIGURE 2.8 – Principe du test à ultrasons.

La technique par ultrasons est la plus utilisée dans l'inspection des composites. Comme présenté dans la Figure (2.8), elle implique généralement les étapes suivantes : premièrement, les vibrations mécaniques sont générées en convertissant l'énergie électrique en ultrasons à l'aide d'un transducteur contenant un cristal piézoélectrique dans une plage de fréquences qui ne peut pas être entendue par l'oreille humaine [38]. Ensuite, l'onde ultrasonore est transmise à travers l'objet inspecté et est finalement réfléchi sur la surface inférieure de l'objet. Enfin, un transducteur récepteur (peut être le transducteur émetteur) recueille le signal d'onde et l'envoie à l'instrument pour analyse. Pour améliorer la pénétration du signal ultrasonore dans l'objet, avant le début du balayage, un couplant tel que de l'eau ou un gel peut être appliqué entre le transducteur et le matériau. Il existe différentes techniques de représentation de défauts dans le **CFRP** : On cite le A-scan et le B-scan qui présentent un balayage graphique en fonction du temps et qui sont utilisés pour interpréter le signal de sortie. On trouve de même le C-scan, une représentation

de plusieurs balayages, utile pour fournir plus d'informations et produire une vue en plan de l'objet [65].

Les avantages des tests par ultrasons sont : une vitesse importante de balayage, une bonne résolution et capacité de détection des défauts. Les inconvénients comprennent la difficulté d'installation, les compétences nécessaires pour numériser une pièce avec précision et la nécessité d'un échantillon du test pour assurer un test précis. Ce type de test est excellent pour utiliser dans une chaîne de montage où la même conception de pièce doit être testée à plusieurs reprises.

radiographie (X-Ray)

L'inspection par rayons-X est une méthode de **CND** qui consiste à produire l'image d'un corps tridimensionnel dans un plan bidimensionnel comme présenté dans la Figure (2.9), de sorte que le détail de l'objet est superposé dans une projection radiographique. Les rayons X sont générés lors de l'accélération ou la

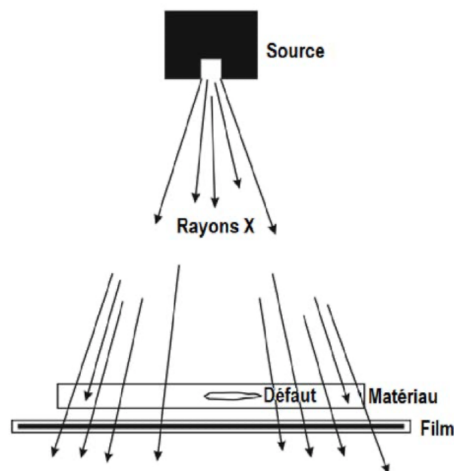


FIGURE 2.9 – Principe du test à Rayon-X.

décélération des électrons dans le matériau. En conséquence, des objets ressemblant à des défauts, appelées *des artefacts*, sont causées par ces super-impositions. Ensuite, les artefacts ainsi que les structures réelles se distinguent des défauts réels par le traitement d'images.

En réalisant un scan des MCFC avec les rayons-X, il est possible de détecter des défauts ou des dommages cachés profondément à l'intérieur. En utilisant la scanographie, une vue approfondie de la structure tridimensionnelle des composants peut être capturée, ce qui permet à son tour de détecter la position et le volume des fibres avec des matrices et des inclusions [84]. En contre partie, La sensibilité de détection des défauts dépend des dimensions de la source et de son

énergie, de la position et de l'orientation des défauts dans la pièce, de l'épaisseur de la pièce, de la sensibilité du film. De plus, les équipements utilisés (sources de rayonnement, entretien du matériel, films radiographiques, contrôles obligatoires, radioprotection...) sont très coûteux.

Thermographie

Le test par Thermographie, également appelé imagerie thermique, est l'une des techniques de **CND** en forte croissance dans l'inspection des composites. Un des plus importants instruments de la Thermographie Infrarouge est la caméra infrarouge qui permet de capter la radiation thermique et de visualiser les champs thermiques provenant des surfaces visées sous forme de cartes thermiques [49]. Selon la source d'échauffement, on peut distinguer la thermographie infrarouge passive (l'étude du gradient de température des systèmes dans un milieu naturel) et active (différents types de sources extérieures d'excitation thermique ou mécanique). Avec la thermographie active conventionnelle, la surface du matériau est généralement chauffée à l'aide des sources thermiques irradiatives telles que flash, lampes ou faisceau laser (Figure (2.10)).

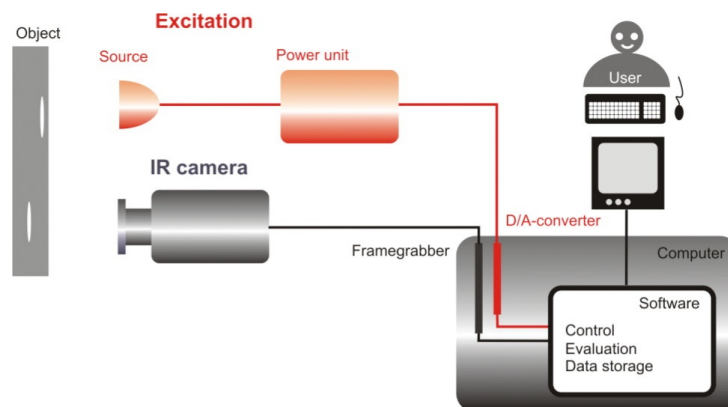


FIGURE 2.10 – Principe de test Thermographie.

Les méthodes de quantification des défauts sont construites sur la base de la conduction thermique de la surface vers l'intérieur et de sa réflexion inverse. Avec d'autres sources thermiques telles que les courants de Foucault et les ultrasons, diverses méthodes de thermographie ont été proposées. La thermographie par courants de Foucault (ECT) a été proposée à l'aide du chauffage par induction électromagnétique, qui présente de nombreux avantages, tels que le sans contact, rapide, plein champ, haute résolution et un chauffage sélectif [61]. L'un des grands avantages de cette technique est son pouvoir d'inspecter une grande surface sans besoin de couplage. Cependant, cette méthode nécessite des instruments sensibles

et coûteux. En plus elle présente des limitations de détection de défauts lorsque ceci se trouvent trop profonds de la surface.

2.3 Contrôle non Destructif à Courants de Foucault

2.3.1 Introduction au CND-CF

La technique du contrôle non destructif par courant de Foucault (CND-CF) est une technique électromagnétique basée sur le phénomène d'induction et qui permet d'aboutir à la mesure de l'épaisseur des matériaux conducteurs dans certaines conditions et à la détection des éventuels défauts dans la structure causant une perturbation au champ source. Cette méthode est bien évidemment applicable aux matériaux conducteurs. Malgré la faible conductivité du carbone vis à vis des structures métalliques, il a été prouvé que la CND-CF est efficace dans l'inspection des composites à fibres de carbone. Cette technique peut servir efficacement à identifier l'orientation principale des fibres, les ruptures des fibres, l'ondulation hors-plan et délaminage [48, 60, 54, 29, 98].

Nous explicitons dans cette partie le principe physique de la méthode, et nous présentons le cadre général de notre contribution dans la modélisation et la simulation en les comparant à d'autres travaux de recherche.

Principe Physique

Le contrôle par courants de Foucault repose sur le phénomène d'induction électromagnétique. Lorsqu'une bobine est parcourue par un courant alternatif, un champ magnétique se crée autour d'elle. Ce champ magnétique se dilate lorsque le courant alternatif augmente au maximum et s'effondre lorsque le courant est réduit à zéro. Si un conducteur électrique est amené à proximité immédiate de ce champ magnétique variable, des courants induits appelés courants de Foucault vont apparaître dans la pièce comme le montre la Figure (2.11) [2].

Lenz a énoncé l'un de ces effets de la manière suivante : *"Les courants induits, par un champ électromagnétique variable dans le temps et/ou dans l'espace au sein d'un matériau conducteur, tendent à s'opposer à la cause qui leur a donné naissance."*

Ces courants circulent dans un trajet circulaire à travers l'échantillon, ce qui crée un nouveau champ magnétique opposé au champ d'excitation. Le champ excité peut être mesuré avec une seconde bobine réceptrice (si c'est la bobine joue le rôle d'émettrice/réceptrice, le champ total sera la différence entre le champ initial et le champ induit). De même, le matériau étant électriquement résistif, une puissance

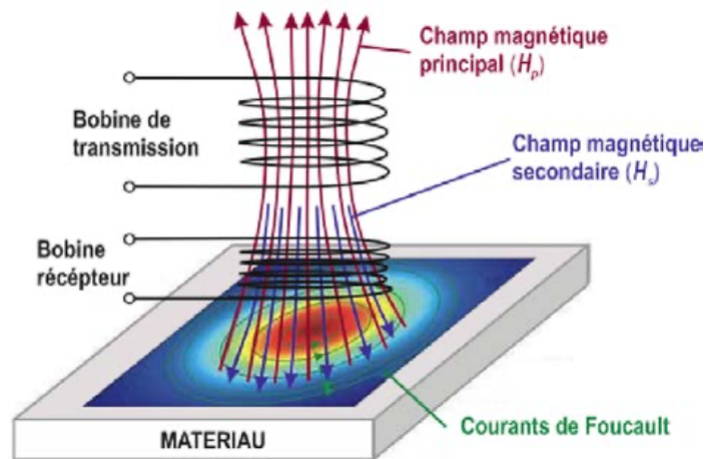


FIGURE 2.11 – Principe du CND-CF.

active sera consommée en son sein par effet Joule. Les lois de l'électromagnétisme qui permettent de prédire la distribution des courants induits sont relatives à la magnétodynamique et sont obtenues à partir des équations de Maxwell et des relations constitutives des matériaux [55]. Ces courants permettent donc de rendre compte des variations des propriétés électromagnétiques.

Si l'intégrité structurale du matériau est modifiée en raison de la présence d'un défaut, le trajet des courants induits subit une perturbation. Par conséquent, un changement de phase et d'amplitude des courants de Foucault se produira. Ce changement peut être observé sur un oscilloscope comme illustré dans la Figure (2.12) et les caractéristiques des défauts peuvent être déterminées.

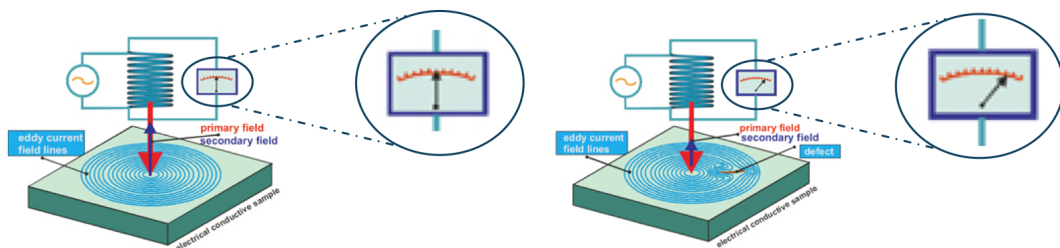


FIGURE 2.12 – Perturbation de la réponse du capteur en présence d'un défaut.

On voit donc que cette technique de contrôle ne peut être appliquée qu'à des pièces conductrices. De plus, pour des conducteurs usuels (conductivité de l'ordre du MS/m), la densité de courant induite est d'autant plus confinée à la surface du conducteur que la fréquence (et la perméabilité) est grande (effet de peau). Ceci impose de travailler à des fréquences suffisamment basses (de quelques kHz à

quelques MHz) afin d'assurer une profondeur de pénétration suffisante : on parle de régime quasi-statique. De plus, l'interprétation du signal obtenu (impédance du capteur le plus souvent) est difficile.

En raison de la faible conductivité électrique des matériaux à base de fibres de carbone qui représentent au total environ 1/1000 de la conductivité de l'aluminium, la profondeur de pénétration en fonction de la fréquence est 30 fois supérieure à celle de l'aluminium. Cette faible conductivité nécessite l'utilisation de fréquences plus élevées que celles utilisées pour l'inspection des matériaux conventionnels. Elles varient d'une dizaine de kilohertz à une dizaine de mégahertz. Au delà de 10 MHz le rapport signal sur bruit diminue et l'interprétation des résultats de mesure devient difficile [58].

Performance et limitation

La technique des courants de Foucault, principalement utilisée pour le contrôle non destructif des matériaux métalliques, peut être également adaptée pour le contrôle de matériaux composites. En effet, cette technique apparaît adéquate pour la détection et la caractérisation de défauts majeurs tels que l'inclusion [82], les erreurs dans l'orientation des fibres [37], fibres cassées[22], fissures et les défauts d'impacts [47]. En effet, les matériaux composites à fibres de carbone (MCFC) vont ajouter les difficultés pour le CND-CF parce que ils sont multi-échelles ; Ils ont les faibles conductivités, la forte anisotropie et la distribution aléatoire des fibres. L'inspection par courants de Foucault a divers avantages :

- Ils sont peu coûteux.
- Ils sont disponibles dans le commerce en grande variété.
- Ils peuvent également être fabriqués sur demande, de manière à satisfaire une application scientifique.
- Sensible à de petites fissures.
- Détecte les défauts de surface et près de la surface.
- L'inspection donne des résultats immédiats.
- L'équipement est très portable.
- Peu de préparation des pièces.
- Grandes variétés des inspections et des mesures qui peuvent être effectuées.
- La sonde n'a pas besoin d'être au contact de la pièce à contrôler.

Malgré l'absence d'inconvénient lié à l'environnement ou à la sécurité, la technique présente quelques limitations :

- Seuls les matériaux conducteurs peuvent être inspectés.
- La surface doit être accessible à la sonde.
- La profondeur de pénétration est limitée.
- Les défauts tels que des décollements qui se trouvent parallèles à la bobine de sonde sont difficilement détectables.

2.3.2 Application de CND-CF à l'inspection des composites

Malgré la faible conductivité des composites par rapport aux métaux, leur inspection par la technique de courants de Foucault a connu un essor considérable. Tout défaut modifiant de manière significative la répartition des courants induits dans les MCFC est susceptible d'être détecté par la méthode des courants de Foucault. Les délaminages sont les défauts les moins évidents à détecter. X.E. Gros [44] a pu détecter, expérimentalement, en utilisant un équipement à courants de Foucault standard, des délaminages de 0.01mm sur des pales d'hélicoptères, et des défauts d'impacts entre 0.5 et 0.7 Joules sur des panneaux en CFRPs à cinq plis.

Différents types de capteurs

En général, les capteurs CF utilisés sont constitués de simples bobines de géométrie (circulaire, rectangulaire...), avec ou sans noyaux de ferrite (pour focaliser le champ magnétique dans le matériau). Cependant, selon le type de contrôle à effectuer, la structure de composite peut exiger des configurations particulières de capteurs CF. Dans leurs travaux expérimentaux [Mook-01], G. Mook et al. ont utilisé un capteur tournant, dont la structure est décrite dans la Figure 2.13, pour la détection de l'orientation des fibres dans des composites stratifiés. Il s'agit d'un capteur à fonctions séparées. Pour la détection des ruptures de fibres, ces auteurs ont utilisé un simple capteur différentiel dans lequel un noyau en ferrite permet de focaliser le champ magnétique dans le matériau. Les deux capteurs sont conçus pour fonctionner au-delà de 500kHz.

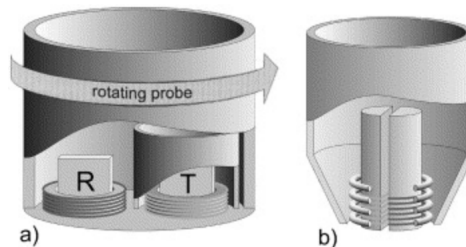


FIGURE 2.13 – Capteur tournant constitué de deux bobine en mode T-R.

Dans les travaux de Barthomiej Salski [80], l'auteur présente un nouveau type de capteur constitué de deux bobines de forme spirale, dont la gamme de Fréquence est de 10 à 500 MHz, et une méthode de contrôle applicable à des inspection 3D couplées.

L'Institut Fraunhofer pour les tests non destructifs a développé une carte intégrée de l'instrument "HC ECT EddyCus-CF" et un réseau évolutif de 16 capteurs (cf Figure 2.14) a été adopté pour augmenter la vitesse de mesure [4].

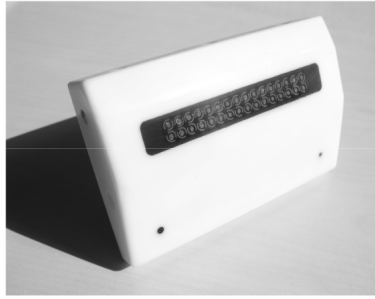


FIGURE 2.14 – Réseau de capteur développé par Fraunhofer pour augmenter la résolution et la vitesse de mesure.

Gamme de Fréquence

En vu de la faible conductivité des composites, le CND-CF à des hautes fréquences (aux alentours de 100 MHz) est considéré approprié. Cependant, les CND-CF à hautes fréquences est très sensible aux facteurs d'interférence qui rend la construction et l'implémentation des systèmes, compliqué. Jun Cheng et al [26] propose une méthode de CND-CF à basses fréquences en utilisant un capteur à deux bobines en modes T-R (transmission-réception) pour la visualisation des composites. Giovanni et al. [11] propose un procédé expérimental multifréquences (10 kHz - 15 MHz) pour la détection des défauts minces dans les composites.

Configurations

Les propriétés électriques et physiques des composites sont complexes et varient en fonction de maintes paramètres. Il est nécessaire de concevoir des configurations spécifiques pour l'inspection et la caractérisation d'un tel matériau. Chaofeng Ye [25] utilise un capteur à courants de Foucault avec des bobines à excitation orthogonale et un capteur TMP pour le calcul de la composante B_z du champ magnétique. K. Muzukami [60] propose détecter l'ondulation hors-plan et ondulation dans le plan des fibres de carbone dans une plaque composite. Pour ce faire, il utilise deux bobines rectangulaires identiques placées horizontalement par rapport au plan de l'échantillon et jouent le rôle d'émetteur et une troisième bobine de la même forme placée verticalement en mode réception au milieu des deux bobines comme le montre la Figure 2.15. Xin Li [3] utilise deux bobines rectangulaires identiques avec un noyau de ferrite pour détecter l'orientation des fibres via un diagramme polaire d'impédance.

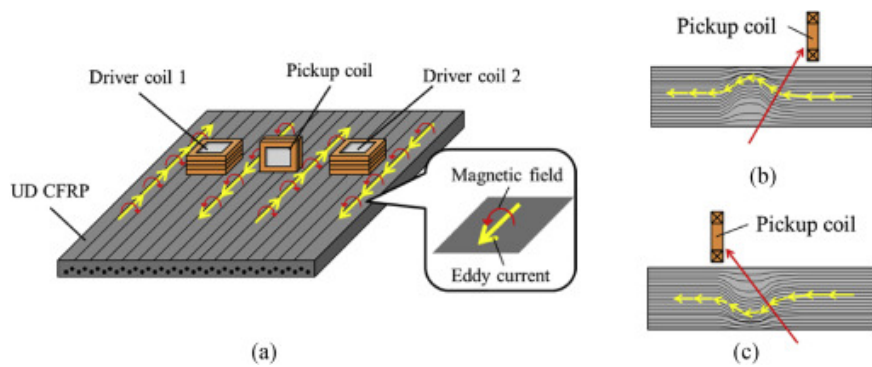


FIGURE 2.15 – Configuration dédiée à la détection des ondulations hors-plan des fibres.

Couplage avec d'autres techniques d'inspection

Un des avantages de la technique de CND-CF est qu'elle peut être couplée avec d'autres techniques de CND. En effet, les courants de Foucault induits provoquent des pertes Joule dans la pièce et donc de la chaleur. De ce fait, ils peuvent être une source d'excitation active pour la thermographie infrarouge. Dans les travaux de M. Pan [64], il utilise la thermographie à courants de Foucault pulsés pour la caractérisation des défauts dans des composites tissés. La même approche a été utilisée par Y. He [45] pour l'évaluation d'un défaut d'impact en utilisant une analyse des modes de transmission et de réflexion.

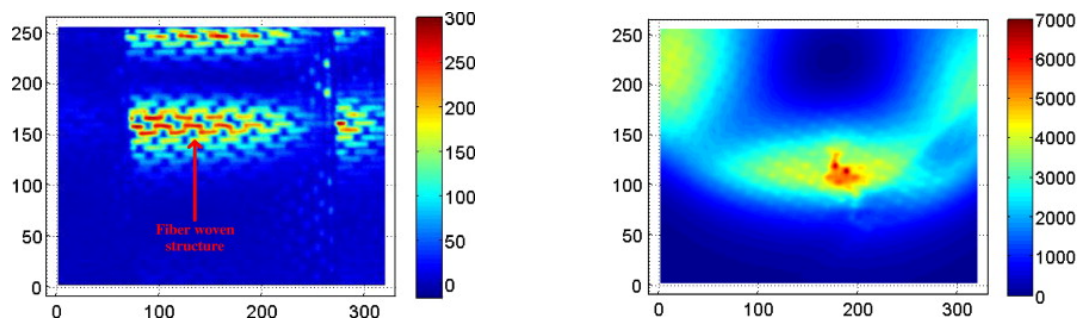


FIGURE 2.16 – Impact and fiber waviness detection in CFRP using ECPT.

2.3.3 Modélisation de CND-CF

La modélisation dans le domaine du CND-CF apporte un support important aux démarches de design des capteurs, d'interprétation des données expérimentales, de mise au point et de qualification des procédures de contrôle [33, 77]. Tout comme les autres disciplines de la physique, la modélisation des phénomènes

électromagnétiques a connu un progrès considérable grâce à l'augmentation des capacités de calcul. Elle est devenue un outil indispensable qui permet de remplacer en partie les études expérimentales coûteuses. On distingue trois groupes de modèles dédiés à la simulation du CND-CF : les méthodes analytiques, les méthodes numériques et les approches semi-analytiques.

Le projet est consacré *in fine* à la simulation du **CND** d'un matériau stratifié à l'échelle du capteur électromagnétique. Toutefois, dans l'objectif de mener des simulations aussi proches que possible de la réalité physique tout en garantissant un temps de calcul aussi faible que possible, une phase préalable de caractérisation et d'homogénéisation du matériau est cruciale. Il s'agit d'estimer les propriétés constitutives (conductivité, perméabilité magnétique) effectives du matériau. En effet, l'état de l'art a révélé un besoin en termes de modélisation, clairement exprimé par les utilisateurs de ce type de structures. Les principales difficultés rencontrées dans la modélisation du champ électromagnétique dans les CFRP sont liées à leurs dimensions multi-échelles : échelle microscopique des fibres, échelle mésoscopique du pli et échelle macroscopique du capteur et/ou de la plaque, à leurs fortes anisotropies, à l'hétérogénéité de leurs structures, ainsi qu'à des couplages capacitifs complexes aux fréquences élevées.

Homogénéisation

Le comportement effectif d'un matériau composite dépend naturellement de tous ses constituants. Il serait donc attrayant de prendre en compte l'effet de chacune des hétérogénéités qui le composent pour modéliser son comportement exact. Il est très compliqué de procéder ainsi car les capacités de calcul et de modélisation des outils informatiques actuels ne le permettent pas. De plus, les informations locales de la microstructure ne sont pas forcément utiles. Il est donc nécessaire, pour modéliser le comportement d'un milieu hétérogène, de définir un milieu homogène équivalent (cf Figure 2.17). Pour cela, il faut faire le lien entre les effets induits par les hétérogénéités à l'échelle microscopique, et le comportement du matériau à l'échelle macroscopique. L'homogénéisation est alors une méthode de modélisation qui permet de réaliser cette transition d'échelles, elle consiste à remplacer un milieu hétérogène par un milieu homogène ayant le même comportement macroscopique.

Pour traiter des problèmes électromagnétiques, l'homogénéisation est généralement réalisée avec des méthodes numériques. Ces dernières suscitent un intérêt plus conséquent de la part de la communauté scientifique que les méthodes analytiques, mais elles requièrent des ressources informatiques et des temps de calculs plus élevés. Elles sont principalement basées sur le calcul des champs d'une cellule unitaire par la méthode des éléments finis [91, 14, 62, 12, 92]. Les méthodes numériques donnent accès à la totalité des champs locaux, permettant ainsi de définir précisément la réponse du matériau en chaque point. Cet avantage peut

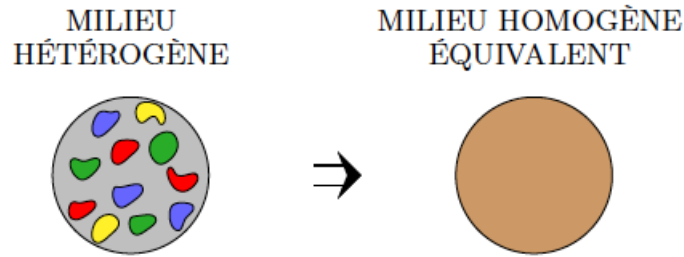


FIGURE 2.17 – Principe d’homogénéisation

se transformer en inconvénient si la microstructure présente une forte variabilité, obligeant alors à réaliser un grand nombre de calculs pour atteindre une représentativité statistique suffisante. Les méthodes analytiques quant à elles fournissent des informations locales moins précises mais sont rapides et simples à mettre en oeuvre.

Dans les travaux de V. Préault [67], il propose d’adapter une méthode basée sur des problèmes d’inclusion à une méthode d’homogénéisation dynamique permettant de définir les propriétés effectives de matériaux composites dans le cas de sollicitations électromagnétiques dynamiques. Samir BENSALIM [10] utilise une méthode asymptotique et le problème inverse pour déterminer le tenseur de conductivité effectif. Dans les travaux de Ghida Al Ashkar [7], une méthode d’homogénéisation numérique a été proposée qui s’appuie sur les techniques d’optimisation et composée de deux étapes : le calcul des coefficients de blindage et de réflexion de la plaque hétérogène par éléments finis et l’application d’une méthode d’optimisation adaptée afin de remonter aux propriétés effectives.

Modèles analytiques

Les méthodes analytiques sont souvent utilisées pour l’étude des configurations aux géométries simples. Dodd et Deeds [20] décrit les solutions analytiques pour des problèmes de courants de Foucault avec une sonde constituée d’une bobine circulaire dont l’impédance a été calculée pour le cas où bobine est placée au-dessus d’une plaque conductrice. Theodoulidis [87, 85] présente le calcul analytique du champ électromagnétique et de l’impédance d’une bobine cylindrique à courants de Foucault orientée arbitrairement au-dessus d’un demi-espace conducteur. L’effet de l’orientation de la bobine sur le changement d’impédance a été étudié. Dans [15], les courants de Foucault sont calculés dans une tige conductrice cylindrique de longueur finie due à une bobine circulaire coaxiale transportant un courant alternatif. La variation de l’impédance de la bobine, arbitrairement orientée, en fonction de la fréquence est déterminée à partir du champ électromagnétique. Dans [16] un

modèle théorique a été proposé pour la prédiction des signaux dus aux fissures dans les trous cylindriques circulaires. Le champ électromagnétique est décomposé en mode scalaire transverse électrique et transverse magnétique. L'effet de la fissure planaire est représenté par une couche de dipôles de courants électriques orientés normalement à la surface de la fissure. Dans les travaux de Burke [19], il donne l'expression de la variation de l'impédance de la bobine circulaire placée sur une plaque mince, infinie et conductrice sans et avec fissure à travers un modèle théorique présenté pour décrire l'induction électromagnétique harmonique dans le temps des courants de Foucault dans une plaque anisotrope uniaxiale.

Modèles numériques

Il y a beaucoup de méthodes numériques pour simuler les phénomènes électromagnétiques. Nous citons la méthode des éléments finis (MEF) dont les bases théoriques, depuis son introduction aux années 50, ont été considérablement consolidées et son champ d'applications s'est élargi à la plupart des domaines de la physique moderne et plus particulièrement à l'électromagnétisme. En effet, de nombreux travaux théoriques [8, 63, 13] ont permis le développement des modèles numériques, notamment dans le domaine des courants de Foucault, où cette méthode est rapidement devenue incontournable. Son avantage principal réside dans sa généralité qui lui permet de traiter des configurations présentant des caractéristiques géométriques et physiques très variées. Cependant, elle conduit pour la plupart des configurations industrielles (grandes dimensions, multi-échelles etc...), à la résolution numérique d'un système de grande taille (mais creux), ce qui peut conduire à des temps de calcul importants. En 2000, D. Trichet a initié les travaux sur le chauffage par induction des MCFC en utilisant la MEF [89]. En 2006, S. Bensaid a développé un code Elements Finis (EF) sur la base d'éléments coques pour étudier le comportement électromagnétique et thermique des MCFC [9]. En 2009, B. Ramdane s'est appuyé sur la MEF pour développer un outil performant pour la technique thermo-inductive de CND [17]. La même année, H. Menana a travaillé sur la Méthode Différence finie (MDF) pour les MCFC. Il a utilisé la loi de Biot-Savart pour éviter le maillage de l'air [59, 57]. Les parties actives sont les seules à discrétiser dans le matériau. Plus récemment, en 2011, G. Wasslyneck et H. K. Bui ont travaillé sur l'interaction entre les ondes électromagnétiques et les MCFC pour chercher les circulations des courants dans les matériaux [93, 18]. Des difficultés sont rencontrées dans l'intégration des MCFC dans un calcul de champ électromagnétique. Ces difficultés sont liées aux facteurs d'échelle, à leur forte anisotropie, à leur inhomogénéité et à des couplages capacitifs complexes entre les fibres et les plis. Le facteur d'échelle étant trop important, une modélisation multi-échelle a été développée. Le matériau composite est divisé en cellules élémentaires de taille microscopique. A l'échelle microscopique, les conductivités du composite selon les

trois directions sont déterminées. Au niveau macroscopique, le tenseur de conductivité de chaque pli est défini dans un repère commun.

Modèles semi-analytiques

Les méthodes semi-analytiques sont des méthodes très efficaces pour résoudre des équations différentielles partielles où une partie du problème est résolue numériquement et l'autre partie analytiquement. Ces méthodes sont très utiles lorsque la direction purement analytique est très compliquée et la direction purement numérique est très coûteuse. Elles se sont révélées être un outil très puissant dans le calcul électromagnétique (CEM). Parmi ces approches, on cite les méthodes intégrales de volumes (MIV) et de surfaces (MIS), qui s'appuient sur une formulation intégrale des équations de Maxwell qui ont connu un développement important à la fin du siècle dernier.

Les MIS [46] reposent sur une représentation en sources de courants surfaciques magnétiques et électriques équivalentes des champs électromagnétiques et sur l'utilisation du noyau de Green de l'espace libre. Ainsi, le problème volumique est ramené à un problème surfacique, ne nécessitant de mailler que les interfaces des parties actives de la configuration. Ceci conduit à la résolution d'un système de taille réduite par rapport à la méthode des éléments finis. Elle permet donc de traiter des configurations de géométries complexes. Cependant, cette formulation n'est valable que pour des matériaux homogènes. De plus, le système obtenu étant nécessairement plein, la résolution directe peut être lourde pour certaines configurations et nécessite l'utilisation des techniques de compression spécifiques.

Dans le travail de Sabbagh [78], le problème de la recherche consiste à développer un modèle et un algorithme d'inversion qui conviennent à l'évaluation quantitative non destructive tridimensionnelle des matériaux composites avancés en utilisant des courants de Foucault. R. Thomas [79, 75, 74, 88] a proposé un modèle semi-analytique basé sur une approche modale et calcul de matrices de Green pour la résolution des équations de Maxwell et le calcul des courants induits dans un matériau anisotrope biaxial plan.

Dans le travail de Li et Liu [50, 53], des modèles numériques dédiés à la simulation pour l'interaction d'un composite à fibres circulaires avec des ondes électromagnétiques. Les fibres expansées manquantes et déplacées ainsi que les inclusions circulaires à l'intérieur d'une fibre sont modélisées comme des sources équivalentes.

D. Dos Reis [31] propose une méthode de récupération de défauts volumineux dans une plaque métallique non magnétique à partir de cartes de champs magnétiques anormaux harmoniques dans le temps dans l'air en raison d'une source basse fréquence à proximité est considérée. Le champ d'onde est modélisé à partir d'une formulation intégrale rigoureuse du domaine vectoriel pleine onde et l'inversion est effectuée via une version binaire de la technique dite de type gradient de source de

contraste. Dans [32], M. Lambert présente une méthode d'inversion qui repose sur une méthode d'optimisation basée sur un méta-modèle. Ce dernier est obtenu par interpolation de fonction de base radiale sur une base de données précédemment générée par conception séquentielle.

La formulation MIV, implémentée dans le module dédié au contrôle par courants de Foucault de la plateforme CIVA développée au CEA LIST, repose sur l'écriture analytique de la dyade de Green associée à la géométrie de la configuration considérée [27]. Cette méthode est très rapide puisque seul le défaut est discrétisé en cellules élémentaires. Le calcul du champ primaire est effectué à l'aide de méthodes semi-analytiques limitées à ce type de géométries [86].

Notre objectif global consiste à développer un modèle numérique pour le calcul du champ EM induit par une sonde à courants de Foucault dans un conducteur anisotrope à géométrie complexe en faisant appel à la **CCM** : Introduite par le professeur Jean Chandezon, cette méthode est née dans les années 80 de la nécessité de résoudre rigoureusement des problèmes de diffraction sur des surfaces périodiques ondulées en régime de résonance [24, 23, 51]. La principale difficulté de ces problèmes est l'adéquation des conditions aux limites. Il est évident que toute méthode visant à résoudre l'équation de Maxwell est d'autant plus efficace qu'elle est capable d'adapter la géométrie du problème.

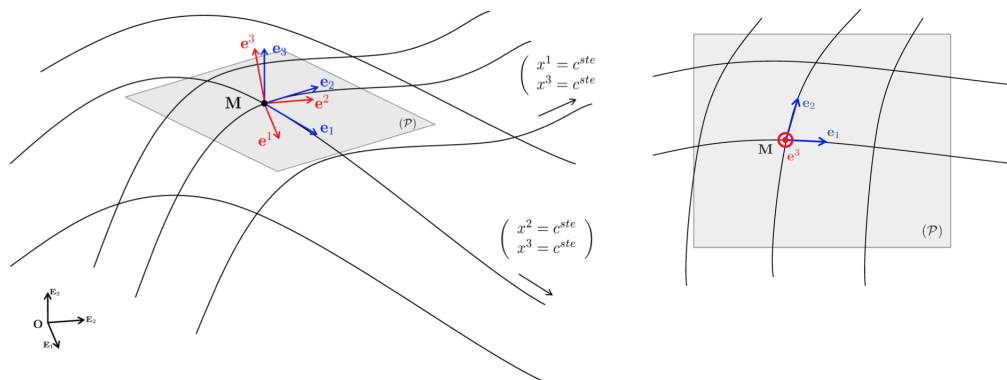


FIGURE 2.18 – changement de coordonnées

À cette fin, Chandezon a introduit le système de coordonnées curvilignes déduit du système de coordonnées cartésiennes. Par conséquent, étant donné que la frontière du problème physique coïncide avec les surfaces de coordonnées curvilignes (cf Figure 2.18), l'écriture des conditions aux limites est aussi simple que pour les problèmes classiques en coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques. Il s'agit du premier ingrédient de la méthode-C. Le second consiste à écrire les équations de Maxwell sous la forme covariante [35, 40]. Cette formulation provient de la relativité où un système de coordonnées non orthogonal est utilisé. Chandezon

a dérivé leur formulation 3D du formalisme général du Post relativiste 4D [66]. La dernière caractéristique de la méthode-C est l'aspect numérique de résolution où l'opérateur matriciel est obtenu en étendant les composantes du champ en fonction des modes propres (expansion modale) [6]. ces caractéristiques ci-dessus peuvent être résumées en disant que la **CCM** est une méthode modale à coordonnées curvilignes par expansion modale [34].

Cette méthode a été adapté au domaine du CND-CF en basses fréquences, par D. Prémel. En effet, d'autre modèles semi-analytiques on été implémenté qui sont basés sur des approches modales pour le calcul de champ induit par une sonde à courants de Foucault : D. Prémel propose une formulation de vecteur potentiel de second ordre pour la résolution des équations de Maxwell dans un système non-orthogonal curviligne et arbitraire [30], et une représentation modale du champ (expansion en série de Fourier) induit par une bobine 3D dans un matériau isotrope et homogène présentant des interfaces complexes [68].

2.4 Conclusion

En guise de conclusion de cette introduction, ce travail de thèse a pour but le développement d'un modèle semi-analytique dédié à la simulation de l'interaction d'un matériau composite homogénéisé avec une excitation électromagnétique constitué d'un capteur à courants de Foucault. Le modèle a pour but la résolution des équations de Maxwell. La première étape consiste à déterminer analytiquement les systèmes différentiels vérifiés par les composantes du champ EM [75] dans le cas d'un conducteur à tenseur de conductivité généralisé. La résolution numérique d'un tel système se fait par approche modale [69, 90] où les composantes du champ EM sont exprimées en fonction des modes propres.

Dans un premier temps, on commence par introduire le modèle dédié au calcul du champ dans un conducteur anisotrope à surfaces planes. Dans un second temps, on introduira la complexité géométrique et on présentera l'extension du modèle **CCM** présenté dans [70, 36] pour tenir compte de l'anisotropie du milieu.

Nous verrons par la suite que le modèle numérique du cas plan implique la manipulation des matrices creuses ce qui réduit énormément le temps de calcul. Sa résolution est alors plus efficace et ne comporte pas de limitation en vue de l'implémentation numérique, ce qui n'est pas envisageable dans le cas général. En effet, l'introduction de géométrie complexe implique la manipulation des matrices pleines ce qui limite le choix du nombre de modes à utiliser pour représenter le champ.

Actuellement, il existe des méthodes semi-analytiques dédiées à la simulation de la réponse d'un composite à une excitation d'onde EM. Étant limitées à des structures multicouches à interfaces planes, ces méthodes sont basées sur le calcul

les Dyades de Green [83, 79]. Les approches modales dédiées à la résolution des équations de Maxwell dans des milieux présentant des interfaces complexes, sont limitées pour le moment aux matériaux isotropes et homogènes.

Nous proposons de développer un modèle unifiant basé sur une approche modale et qui utilise un changement de coordonnées adapté pour la résolution numérique des équations de Maxwell pour le cas d'un conducteur anisotrope. Le modèle étant générique, on peut l'étendre au cas des milieux anisotropes et non homogènes.

Chapitre 3

Calcul du champ induit dans un conducteur anisotrope plan et stratifié

Sommaire

3.1	Introduction	42
3.2	Demi-espace anisotrope plan	42
3.2.1	Configuration et hypothèse de travail	42
3.2.2	Mise en équations	43
3.2.3	Écriture modale	45
3.2.4	Conditions de passage	53
3.3	Composite plan stratifié	55
3.3.1	Configuration	55
3.3.2	Algorithme des Matrices-S	56
3.4	Résolution numérique	60
3.4.1	Discrétisation	60
3.4.2	Calcul du champ source	66
3.4.3	Réseau multi-couches	67
3.4.4	Calcul de la réponse du capteur	69
3.5	Validation numérique	71
3.5.1	Cas # 1 : une couche anisotrope plane	71
3.5.2	Cas # 2 : milieu stratifié anisotrope plan	75
3.6	Bilan	81

3.1 Introduction

Pour une structure composite à fibre de carbone unidirectionnel, les propriétés adaptées de résistance mécanique peuvent être maintenues grâce à la disposition particulière des fibres dans chaque pli du stratifié. Cependant, des erreurs de désorientations ou de distorsion de fibres peuvent apparaître au cours de la fabrication et/ou au cours du cycle de vie du composant.

Dans ce chapitre on propose de déterminer l'orientation principale des fibres (axe principale d'anisotropie) via l'analyse de la réponse du capteur. Le modèle semi-analytique développé repose sur une approche modale pour le calcul du champ EM induit dans la pièce. Dans chaque pli de la structure multi-couches, les composantes du champ sont exprimées en une somme de modes propres et les constantes de propagation du champ à travers la structure sont également déterminées analytiquement. Les coefficients inconnus de l'expansion modale sont déterminés en appliquant les conditions aux limites à l'interface séparatrice. Pour traiter l'intervention des surfaces inférieures, on fait appel à un algorithme récursif de matrices de diffusion qu'on détaillera par la suite.

3.2 Demi-espace anisotrope plan

3.2.1 Configuration et hypothèse de travail

On considère un demi-espace conducteur anisotrope éclairé par une bobine 3D à courants de Foucault, présenté dans la Figure 3.1. L'interface séparatrice

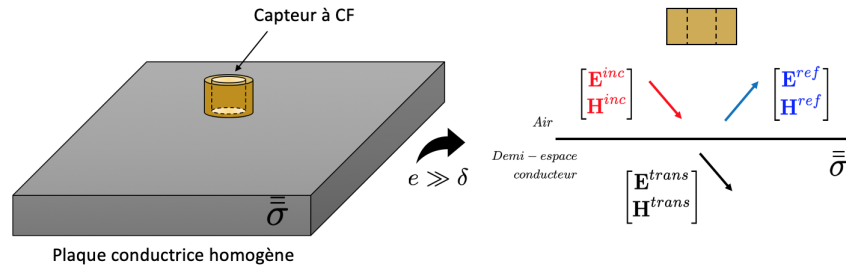


FIGURE 3.1 – Configuration : demi espace plan et anisotrope.

plane est considérée infinie dans les directions transversales Ox et Oy . Dans l'air (référé par l'indice 0), le champ EM totale peut être décomposé en champ incident provenant de la bobine et un champ réfléchi par l'interface air-conducteur. Dans le conducteur (référé par l'indice 1), le champ EM se limite au champ transmis par l'interface. Étant non magnétiques, les deux milieux 0 et 1 sont caractérisés par

une constante de perméabilité magnétique relative $\mu_r = 1$. De ce fait, le tenseur de perméabilité se réduit à $\bar{\mu} = \mu_0$. Le tenseur de conductivité prend, quant à lui, une forme plus complexe. En effet, si on se positionne par rapport à un référentiel local rattaché au milieu 1 et en considérant les conductivités dans les directions principale [57], le tenseur de conductivité local $\bar{\sigma}_{local}$ prend sa forme biaxial [75] :

$$\bar{\sigma}_{local} = \begin{bmatrix} \sigma_l & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Pour tenir en compte de la rotation éventuelle des fibres, on introduit une rotation par un angle θ par rapport au référentiel général choisi [94], définie par :

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

De ce fait, le tenseur de conductivité généralisé devient :

$$\bar{\sigma} = R^{-1} \bar{\sigma}_{local} R = \begin{bmatrix} \sigma_l \cos^2(\theta) + \sigma_t \sin^2(\theta) & \frac{(\sigma_l - \sigma_t)}{2} \sin(2\theta) & 0 \\ \frac{(\sigma_l - \sigma_t)}{2} \sin(2\theta) & \sigma_t \cos^2(\theta) + \sigma_l \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Finalement, on adopte cette forme plus compacte du tenseur pour alléger les écritures :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

On travaille dans les basses fréquences (de quelques kHz jusqu'au quelques MHz) donc au régime quasi-statique. En travaillant dans le régime harmonique avec une excitation sinusoïdale, on impose une dépendance en temps de type $e^{i\omega t}$ à toutes les composantes du champ EM (ω est la pulsation du signal d'entrée). On adopte aussi l'hypothèse de l'absence de toute autre source de charge que la bobine et l'absence de toute densité surfacique extérieure.

3.2.2 Mise en équations

Pour le calcul du champ induit, on s'intéresse à résoudre les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday (cf Annexe A). Sous les hypothèses présentées, les équations à résoudre sont :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mu_r \mu_0 \mathbf{H} \quad (3.5a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \omega \varepsilon_0 \bar{\varepsilon}_r \mathbf{E} + \mathbf{J} \quad (3.5b)$$

où l'opérateur $\nabla \times$ est écrit en coordonnées cartésiennes. μ_0 est la perméabilité magnétique du vide et ε_0 est la permittivité électrique du vide. Les grandeurs vectorielles \mathbf{E} , \mathbf{H} et \mathbf{J} sont respectivement le champ électrique, le champ magnétique et la densité de courant. Le tenseur de permittivité relative $\bar{\bar{\varepsilon}}_r$ se réfère à la polarisation électrique du matériau. Dans notre cas, le matériau est uniformément polarisé donc $\bar{\bar{\varepsilon}}_r = \bar{I}$ mais le cas général peut être facilement étudié. Puisque $\mathbf{J} = \bar{\sigma} \mathbf{E}$, et en introduisant une variable auxiliaire $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$, les équations 3.5a et 3.5b peuvent donc s'écrire :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -ik\mu_0 \mathbf{G} \quad (3.6a)$$

$$\nabla \times \mathbf{G} = ik\bar{\bar{\varepsilon}} \mathbf{E} \quad (3.6b)$$

Où $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ est le nombre d'onde, $\mathbf{G} = Z_0 \mathbf{H}$ et $\bar{\bar{\varepsilon}}$ est défini par :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{\varepsilon}}_r - \frac{i\bar{\sigma}}{\omega\varepsilon_0} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{11} & \varepsilon^{12} & 0 \\ \varepsilon^{21} & \varepsilon^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{33} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

où

$$\begin{cases} \varepsilon^{11} = 1 - \frac{i\sigma_{xx}}{\omega\varepsilon_0} \\ \varepsilon^{22} = 1 - \frac{i\sigma_{yy}}{\omega\varepsilon_0} \\ \varepsilon^{33} = 1 - \frac{i\sigma_{zz}}{\omega\varepsilon_0} \\ \varepsilon^{12} = -\frac{i\sigma_{xy}}{\omega\varepsilon_0} \\ \varepsilon^{21} = -\frac{i\sigma_{yx}}{\omega\varepsilon_0} \end{cases} \quad (3.8)$$

Finalement, les équations (3.6a) et (3.6b) peuvent s'écrire explicitement en système de six équations :

$$\partial_y E_z - \partial_z E_y = -ik\mu_0 G_x \quad (3.9a)$$

$$\partial_z E_x - \partial_x E_z = -ik\mu_0 G_y \quad (3.9b)$$

$$\partial_x E_y - \partial_y E_x = -ik\mu_0 G_z \quad (3.9c)$$

$$\partial_y G_z - \partial_z G_y = ik [\varepsilon^{11} E_x + \varepsilon^{12} E_y] \quad (3.9d)$$

$$\partial_z G_x - \partial_x G_z = ik [\varepsilon^{21} E_x + \varepsilon^{22} E_y] \quad (3.9e)$$

$$\partial_x G_y - \partial_y G_x = ik \varepsilon^{33} E_z \quad (3.9f)$$

3.2.3 Écriture modale

Décomposition TE_z/TM_z dans un milieu isotrope (air)

Dans le cas particulier d'un milieu isotrope, la conductivité se réduit à une constante σ donc ($\bar{\varepsilon} = \varepsilon$). Par conséquent, les équations de Maxwell se simplifient et les composantes du champ sont toutes découplées. On peut donc considérer une polarisation particulière de l'onde. En effet, pour une incidence par exemple en polarisation $E_{//}$, la partie de l'onde diffractée en polarisation $G_{//}$ est déterminée indépendamment de celle diffractée en polarisation $E_{//}$. Il suffit d'imposer $G_z = 0$ dans le premier cas et $E_z = 0$ dans le second cas. Ensuite le champ totale diffracté est exprimé comme une somme de la contribution directe et croisé de l'onde diffractée [6]. On considère donc une décomposition du champ selon l'axe longitudinal Oz :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + E_z \mathbf{z} \quad (3.10a)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_t + G_z \mathbf{z} \quad (3.10b)$$

On désigne par E_z et G_z les deux composantes longitudinales. L'idée est de séparer si possible les composantes transversales et les composantes longitudinales. On effectue une décomposition en absence de source. On pose un opérateur transverse ∇_t tel que : $\nabla = \nabla_t + \partial_z \mathbf{z}$. On effectue alors la décomposition de l'opérateur ∇ dans les équations de Maxwell :

$$(\nabla_t + \partial_z \mathbf{z}) \times (\mathbf{E}_t + E_z \mathbf{z}) = -ik\mu (\mathbf{G}_t + G_z \mathbf{z}) \quad (3.11a)$$

$$(\nabla_t + \partial_z \mathbf{z}) \times (\mathbf{G}_t + G_z \mathbf{z}) = +ik\varepsilon (\mathbf{E}_t + E_z \mathbf{z}) \quad (3.11b)$$

Soit :

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t + \nabla_t \times E_z \mathbf{z} + \partial_z \mathbf{z} \times \mathbf{E}_t = \quad (3.12a)$$

$$-ik\mu (\mathbf{G}_t) \quad (3.12b)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{G}_t + \nabla_t \times G_z \mathbf{z} + \partial_z \mathbf{z} \times \mathbf{G}_t = \quad (3.12c)$$

$$+ik\varepsilon (\mathbf{E}_t) \quad (3.12d)$$

On applique $\partial_z \mathbf{z} \times$ à la première équation. On remarque que $\mathbf{z} \times \nabla_t \times \mathbf{E}_t = 0$ et $\mathbf{z} \times \nabla_t \times \mathbf{G}_t = 0$. De plus, d'après l'équation (4.29), on remplace $\partial_z \mathbf{z} \times \mathbf{G}_t$ par $+ik\varepsilon (\mathbf{E}_t) - \nabla_t \times G_z \mathbf{z} - \nabla_t \times \mathbf{G}_t$, soit :

$$\begin{aligned} \partial_z \mathbf{z} \times \nabla_t \times E_z \mathbf{z} + \partial_z^2 \mathbf{z} \times \mathbf{z} \times \mathbf{E}_t &= -ik\mu \partial_z \mathbf{z} \times \mathbf{G}_t \\ &= -ik\mu [+ik\varepsilon \mathbf{E}_t - \nabla_t \times G_z \mathbf{z}] \\ &= k_c^2 (\mathbf{E}_t) + ik\mu_2 (\nabla_t \times G_z \mathbf{z}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

or $\mathbf{z} \times \nabla_t \times \mathbf{z} = \nabla_t$ et $\mathbf{z} \times \mathbf{z} \times \mathbf{E}_t = -\mathbf{E}_t$ et $\mathbf{z} \times (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) = 0$, d'où :

$$(k_c^2 + \partial_z^2) \mathbf{E}_t = \partial_z \nabla_t E_z - ik\mu (\nabla_t \times \mathbf{z} G_z) \quad (3.14)$$

La même démarche peut être adoptée pour trouver l'équation sur \mathbf{G}_t :

$$(k_c^2 + \partial_z^2) \mathbf{G}_t = \nabla_t \partial_z G_z + ik\varepsilon (\nabla_t \times \mathbf{z} E_z) \quad (3.15)$$

À ce stade, on impose l'hypothèse forte de séparation de variable :

$$\Phi(x, y, z) = \exp(i\lambda z) \Phi(x, y) \quad (3.16)$$

Où Φ est une fonction scalaire qui réfère une composante du champ et λ est une constante de propagation complexe. On verra par la suite que seules les constantes à parties imaginaires (positives ou négatives selon le sens de z) vérifiant le postula des ondes sortantes (pas de propagation à l'infini) sont gardées. De ce fait, le terme $\exp^{i\lambda z}$ regroupe les $+i\lambda$ et les $-i\lambda$. Pour le moment, on maintient cette notation pour alléger les écritures. Il est à noter que les opérateurs scalaires de dérivation ∂_x , ∂_y et ∂_z sont commutatifs. On montrera par la suite que ça ne sera pas le cas en introduisant une nouvelle métrique liée à la géométrie complexe.

En remplaçant l'opérateur ∂_z^2 par $-\lambda^2$, on trouve alors :

$$\mathbf{E}_t = \frac{1}{k_c^2 - \lambda^2} (\partial_z \nabla_t E_z - ik\mu \nabla_t \times \mathbf{z} G_z) \quad (3.17a)$$

$$\mathbf{G}_t = \frac{1}{k_c^2 - \lambda^2} (\partial_z \nabla_t G_z + ik\varepsilon \nabla_t \times \mathbf{z} E_z) \quad (3.17b)$$

L'opérateur ∇_t est remplacé par $(\partial_x \mathbf{x} + \partial_y \mathbf{y})$, d'où :

$$\mathbf{E}_t = \frac{1}{k_c^2 - \lambda^2} [\partial_z (\partial_x \mathbf{x} + \partial_y \mathbf{y}) E_z - ik\mu (\partial_y \mathbf{x} - \partial_x \mathbf{y}) G_z] \quad (3.18a)$$

$$\mathbf{G}_t = \frac{1}{k_c^2 - \lambda^2} [\partial_z (\partial_x \mathbf{x} + \partial_y \mathbf{y}) G_z + ik\varepsilon (\partial_y \mathbf{x} - \partial_x \mathbf{y}) E_z] \quad (3.18b)$$

On en déduit les composantes tangentielles :

$$E_x = \frac{1}{k_c^2 - \lambda^2} [\partial_x \partial_z E_z - ik\mu \partial_y G_z] \quad (3.19a)$$

$$E_y = \frac{1}{k_c^2 - \lambda^2} [\partial_y \partial_z E_z + ik\mu \partial_x G_z] \quad (3.19b)$$

$$G_x = \frac{1}{k_c^2 - \lambda^2} [ik\varepsilon \partial_y E_z + \partial_x \partial_z G_z] \quad (3.19c)$$

$$G_y = \frac{1}{k_c^2 - \lambda^2} [-ik\varepsilon \partial_x E_z + \partial_y \partial_z G_z] \quad (3.19d)$$

On peut définir alors les modes Ψ^{TE} et Ψ^{TM} tels que :

$$[\Psi^{TE} \quad \Psi^{TM}] = \frac{1}{k_c^2 - \lambda^2} \begin{bmatrix} ik\mu\partial_x\phi & \partial_y\partial_z\phi \\ \partial_x\partial_z\phi & ik\varepsilon\partial_y\phi \\ \partial_y\partial_z\phi & -ik\varepsilon\partial_x\phi \\ -ik\mu\partial_y\phi & \partial_x\partial_z\phi \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

où $\phi = \phi(x, y)$ est un potentiel à déterminer par la suite qui fait référence à E_z et G_z . Dans le but d'aboutir à une forme algébrique du problème 3.20, on transpose nos équations dans le domaine de Fourier. On applique alors la transformation 2D suivante :

$$\hat{\tau}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_x \int_y \tau(x, y) e^{-i\alpha x} e^{-i\beta y} dx dy \quad (3.21)$$

dont la transformée inverse est défini par :

$$\tau(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha \int_\beta \hat{\tau}(\alpha, \beta) e^{i\alpha x} e^{i\beta y} d\alpha d\beta \quad (3.22)$$

En se projetant dans le domaine de Fourier (produit scalaire des fonctions de base au sens de distribution [21]), on s'intéresse à déterminer les quantités $\hat{\phi}$. Par conséquent, la dérivation selon l'axe Ox ($\frac{\partial}{\partial x}$) se transforme en une multiplication par $-i\alpha$. De même, la dérivation selon l'axe Oy ($\frac{\partial}{\partial y}$) se transforme en une multiplication par $-i\beta$. De ce fait, on obtient la forme algébrique des modes :

$$[\Psi^{TE} \quad \Psi^{TM}] = \frac{1}{k_c^2 - \lambda^2} \begin{bmatrix} k\mu[\alpha][\hat{\phi}] & -i[\beta]\partial_z[\hat{\phi}] \\ -i[\alpha]\partial_z[\hat{\phi}] & k\varepsilon[\beta][\hat{\phi}] \\ -i[\beta]\partial_z[\hat{\phi}] & -k\varepsilon[\alpha][\hat{\phi}] \\ -k\mu[\beta][\hat{\phi}] & -i[\alpha]\partial_z[\hat{\phi}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau^{TE} & \tau^{TM} \\ \Pi^{TE} & \Pi^{TM} \\ \Theta^{TE} & \Theta^{TM} \\ \Lambda^{TE} & \Lambda^{TM} \end{bmatrix} [\hat{\phi}] \quad (3.23)$$

Où [] fait référence à une matrice qu'on présentera par la suite.

Détermination des constantes de propagations

La décomposition modale TE_z/TM_z qu'on vient de déterminer réduit les inconnues à déterminer. En effet, il suffit de déterminer le potentiel ϕ (cf système 3.20), pour déduire toutes les autres composantes du champ. Dans le régime harmonique avec une dépendance temporelle de $exp(-i\omega t)$, il est possible de construire des solutions générales aux équations de champ une fois que nous avons des solutions générales à l'équation scalaire de Helmholtz [39]. Dans un système de coordonnées cartésien, l'équation de Helmholtz 3D s'écrit :

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 + k^2) \phi = 0 \quad (3.24)$$

où $k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon}$ est le nombre d'onde. En utilisant l'hypothèse (3.16) et la transformé (3.21), on obtient :

$$(-\alpha^2 - \beta^2 + k^2) \phi = \lambda^2 \phi \quad (3.25)$$

La fonction $\phi(x, y)$ est donc un mode propre de l'équation (3.25). On déduit alors la constante de propagation :

$$\lambda^2 = k^2 - \alpha^2 - \beta^2 \quad (3.26)$$

À partir de la configuration 3.1, on peut accorder au modes TE/TM qui se propagent dans le milieu 0 dans le sens des z décroissant (mode incident) deux amplitudes scalaires de propagation notées $\mathbf{a}_0^{-TE}(x, y)$ et $\mathbf{a}_0^{-TM}(x, y)$. Pour les modes qui se propagent dans le milieu 0 dans le sens des z croissant (mode réfléchi), on identifie les amplitudes par $\mathbf{a}_0^{+TE}(x, y)$ et $\mathbf{a}_0^{+TM}(x, y)$. fait, on peut écrire d'une manière plus compacte le système 3.19 comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_t \\ \mathbf{G}_t \end{bmatrix} = \Xi_0^+ \Psi_0^+ \mathbf{a}_0^+ + \Xi_0^- \Psi_0^+ \mathbf{a}_0^- \quad (3.27)$$

où on définit :

$$\Psi_0^\pm = [\Psi_0^{TE\pm} \quad \Psi_0^{TM\pm}] = \begin{bmatrix} \tau^{TE} \hat{\phi}^\pm & \tau^{TM} \hat{\phi}^\pm \\ \Pi^{TE} \hat{\phi}^\pm & \Pi^{TM} \hat{\phi}^\pm \\ \Theta^{TE} \hat{\phi}^\pm & \Theta^{TM} \hat{\phi}^\pm \\ \Lambda^{TE} \hat{\phi}^\pm & \Lambda^{TM} \hat{\phi}^\pm \end{bmatrix} \quad (3.28a)$$

$$\Xi_0^\pm = \begin{bmatrix} e^{\pm\lambda^{TE}z} & 0 \\ 0 & e^{\pm\lambda^{TM}z} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

et les amplitudes :

$$\mathbf{a}_0^\pm = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^{\pm TE} \\ \mathbf{a}_0^{\pm TM} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

les coefficients inconnus \mathbf{a}_0^\pm de l'expansion modale seront déterminer en appliquant les conditions aux limites au niveau de l'interface séparatrice.

Décomposition Modale dans un milieu anisotrope

On se propose de suivre la même démarche de résolution adaptée pour le cas isotrope, on essaie d'exprimer les composantes tangentielles du champ en fonction

des deux potentiels. En effet, on prenant compte de la forme généralisée du tenseur $\bar{\varepsilon}$ (5.113), il peut être décomposé comme suit :

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon^t & 0 \\ 0 & \varepsilon^{33} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

on abouti à :

$$\begin{aligned} [k^2 \mu \boldsymbol{\varepsilon}_t + \partial_w^2 \mathbf{I}_d] \begin{bmatrix} E_u \\ E_v \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -k^2 \mu \varepsilon^{13} & -ik \mu \partial_v \\ -k^2 \mu \varepsilon^{23} & +ik \mu \partial_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_w \\ G_w \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \partial_u & +ik \mu \varepsilon^{23} \\ \partial_v & +ik \mu \varepsilon^{13} \end{bmatrix} \partial_w \begin{bmatrix} E_w \\ G_w \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.32)$$

et

$$\begin{aligned} [k^2 \mu \boldsymbol{\varepsilon}_t + \partial_w^2 \mathbf{I}_d] \begin{bmatrix} G_u \\ G_v \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} +ik (\varepsilon^{11} \partial_v - \varepsilon^{12} \partial_u) & -k^2 \mu (\varepsilon^{11} g^{13} + \varepsilon^{12} g^{23}) \\ +ik (\varepsilon^{21} \partial_v - \varepsilon^{22} \partial_u) & -k^2 \mu (\varepsilon^{21} g^{13} + \varepsilon^{22} g^{23}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_w \\ G_w \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} +ik \varepsilon^{23} & \partial_u \\ -ik \varepsilon^{13} & \partial_v \end{bmatrix} \partial_w \begin{bmatrix} E_w \\ G_w \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.33)$$

On remarque directement que les composantes du champ ne sont plus découplées. la composante longitudinale référée par ϕ ne pas être déduite ce qui empêche la détermination d'une équation de propagation des potentiels. Ceci nous mène à contourner le problème et trouver une autre représentation modale du champ. En effet, à partir des systèmes (5.115c) et (5.115f) on obtient :

$$E_z = \frac{1}{ik\varepsilon^{33}} [\partial_x G_y - \partial_y G_x] \quad (3.34a)$$

$$G_z = \frac{1}{ik\mu} [\partial_x E_y - \partial_y E_x] \quad (3.34b)$$

En les réinjectant (3.34a) et (3.34b) dans (5.115a), (5.115b), (5.115d) et (5.115e), on aboutit à un système différentiel reliant le champ électrique tangent \mathbf{E}_t d'une part et le champ magnétique tangent \mathbf{G}_t d'autre part :

$$\partial_z \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \partial_z \mathbf{E}_t = \mathcal{L}_{EG} \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\partial_z \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix} = \partial_z \mathbf{G}_t = \mathcal{L}_{GE} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Où \mathcal{L}_{EG} and \mathcal{L}_{GE} sont des opérateurs matriciels différentiels définis par :

$$\mathcal{L}_{EG} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial_x \partial_y}{ik\varepsilon^{33}} & \frac{\partial_x^2}{ik\varepsilon^{33}} - ik\mu \\ -\frac{\partial_y^2}{ik\varepsilon^{33}} + ik\mu & \frac{\partial_y \partial_x}{ik\varepsilon^{zz}} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\mathcal{L}_{GE} = \begin{bmatrix} \frac{\partial_x \partial_y}{ik\mu} + ik\varepsilon^{21} & -\frac{\partial_x^2}{ik\mu} + ik\varepsilon^{22} \\ \frac{\partial_y^2}{ik\mu} - ik\varepsilon^{11} & -\frac{\partial_x \partial_y}{ik\mu} - ik\varepsilon^{12} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

En appliquant l'opérateur différentiel ∂_z aux deux équations 3.37 et 3.38, on obtient deux systèmes différentiels de second ordre découplés vérifiés par les composantes transversales du champ électrique d'une part et du champ magnétique d'autre part :

$$\frac{\partial^2}{\partial_z^2} \mathbf{E}_t = \mathcal{L}_{EG} \mathcal{L}_{GE} [\mathbf{E}_t] \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial_z^2} \mathbf{G}_t = \mathcal{L}_{GE} \mathcal{L}_{EG} [\mathbf{G}_t] \quad (3.40)$$

On pose

$$\mathcal{D}_E = \mathcal{L}_{EG} \mathcal{L}_{GE} = \begin{bmatrix} d_E^{(11)} & d_E^{(12)} \\ d_E^{(21)} & d_E^{(22)} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

où

$$\begin{cases} d_E^{(11)} = \frac{-\partial_x \partial_y}{ik\varepsilon^{zz}} \left(\frac{\partial_x \partial_y}{ik\mu} + ik\varepsilon^{yx} \right) + \left(\frac{\partial_x^2}{ik\varepsilon^{zz}} - ik\mu \right) \left(\frac{\partial_y^2}{ik\mu} - ik\varepsilon^{xx} \right) \\ d_E^{(12)} = \frac{-\partial_x \partial_y}{ik\varepsilon^{zz}} \left(-\frac{\partial_x^2}{ik\mu} + ik\varepsilon^{yy} \right) + \left(\frac{\partial_x^2}{ik\varepsilon^{zz}} - ik\mu \right) \left(-\frac{\partial_x \partial_y}{ik\mu} - ik\varepsilon^{xy} \right) \\ d_E^{(21)} = \left(-\frac{\partial_y^2}{ik\varepsilon^{zz}} + ik\mu \right) \left(\frac{\partial_x \partial_y}{ik\mu} + ik\varepsilon^{yx} \right) + \left(\frac{\partial_y \partial_x}{ik\varepsilon^{zz}} \right) \left(\frac{\partial_y^2}{ik\mu} - ik\varepsilon^{xx} \right) \\ d_E^{(22)} = \left(\frac{-\partial_x \partial_y}{ik\varepsilon^{zz}} \right) \left(\frac{\partial_x \partial_y}{ik\mu} + ik\varepsilon^{yx} \right) + \left(\frac{\partial_x^2}{ik\varepsilon^{zz}} - ik\mu \right) \left(\frac{\partial_y^2}{ik\mu} - ik\varepsilon^{xx} \right) \end{cases} \quad (3.42)$$

et on pose

$$\mathcal{D}_G = \mathcal{L}_{GE}\mathcal{L}_{EG} = \begin{bmatrix} d_G^{(11)} & d_G^{(12)} \\ d_G^{(21)} & d_G^{(22)} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

où

$$\begin{cases} d_G^{(11)} = \frac{-\partial_x \partial_y}{ik\varepsilon^{33}} \left(\frac{\partial_x \partial_y}{ik\mu} + ik\varepsilon^{21} \right) + \left(\frac{\partial_x^2}{ik\mu} - ik\varepsilon^{22} \right) \left(\frac{\partial_y^2}{ik\varepsilon^{33}} - ik\mu \right) \\ d_G^{(12)} = \left(\frac{\partial_x \partial_y}{ik\mu} + ik\varepsilon^{21} \right) \left(\frac{\partial_x^2}{ik\varepsilon^{33}} - ik\mu \right) + \left(\frac{-\partial_x^2}{ik\mu} + ik\varepsilon^{22} \right) \left(\frac{\partial_y \partial_x}{ik\varepsilon^{33}} \right) \\ d_G^{(21)} = \left(\frac{-\partial_y^2}{ik\mu} - ik\varepsilon^{11} \right) \left(\frac{\partial_x \partial_y}{ik\mu} + ik\varepsilon^{21} \right) + \left(\frac{-\partial_x \partial_y}{ik\mu} - ik\varepsilon^{12} \right) \left(\frac{\partial_y^2}{ik\varepsilon^{33}} - ik\mu \right) \\ d_G^{(22)} = \left(\frac{-\partial_y^2}{ik\mu} - ik\varepsilon^{11} \right) \left(\frac{\partial_x^2}{ik\varepsilon^{33}} - ik\mu \right) + \left(\frac{-\partial_x \partial_y}{ik\mu} - ik\varepsilon^{12} \right) \left(\frac{\partial_y \partial_x}{ik\varepsilon^{33}} \right) \end{cases} \quad (3.44)$$

En utilisant l'hypothèse 3.16 et en appliquant de même la transformée 3.21, on obtient naturellement deux systèmes à valeurs propres vérifiés respectivement par \mathbf{E}_t et \mathbf{G}_t :

$$-\gamma^2 \mathbf{E}_t = \lambda_E \mathbf{E}_t = \widehat{\mathcal{D}}_E \mathbf{E}_t \quad (3.45)$$

$$-\gamma^2 \mathbf{G}_t = \lambda_G \mathbf{G}_t = \widehat{\mathcal{D}}_G \mathbf{G}_t \quad (3.46)$$

Où $\widehat{\mathcal{D}}_E$ et $\widehat{\mathcal{D}}_G$ sont deux matrices algébriques scalaires. les composantes E_z et G_z sont alors déterminées en écrivant :

$$E_z = \frac{1}{ik\varepsilon^{zz}} [-i\alpha G_y + i\beta G_x] \quad (3.47)$$

$$G_z = \frac{i}{k\mu_{zz}} [-i\alpha E_y + i\beta E_x] \quad (3.48)$$

Le système (3.45) possède deux valeurs propres conjugués λ_{E_1} et λ_{E_2} correspondant à deux vecteurs propres V_{E_1} et V_{E_2} . Les valeurs propres λ_{E_1} et λ_{E_2} peuvent être déterminer analytiquement vue la simplicité du problème (matrice 2x2) :

$$\begin{aligned} \lambda_{E_1} &= \frac{1}{2} \sqrt{(d_E^{(11)})^2 + (d_E^{(22)})^2 - 2(d_E^{(11)})(d_E^{(22)}) + 4(d_E^{(12)})(d_E^{(21)})} \\ &\quad + d_E^{(11)} + d_E^{(22)} \\ \lambda_{E_2} &= \frac{-1}{2} \sqrt{(d_E^{(11)})^2 + (d_E^{(22)})^2 - 2(d_E^{(11)})(d_E^{(22)}) + 4(d_E^{(12)})(d_E^{(21)})} \\ &\quad + d_E^{(11)} + d_E^{(22)} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Par conséquent, on obtient :

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

où

$$\gamma_1 = \pm \sqrt{\lambda_{E_1}} \quad (3.51)$$

$$\gamma_2 = \pm \sqrt{\lambda_{E_2}} \quad (3.52)$$

De même pour le milieu anisotrope, on ne garde que les valeurs propres qui sont physiquement acceptables : celle ayant une partie imaginaire négative $\Im(\lambda) < 0$ relative au mode de propagation dans les z décroissants et vise vers ça. Les vecteurs propres associés sont alors dans ce cas les modes propres. Le champ électrique tangent peut être finalement écrit en une combinaison linéaire :

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{V}_E^+ \Xi_E^+ \mathbf{a}_E^+ + \mathbf{V}_E^- \Xi_E^- \mathbf{a}_E^- \quad (3.53a)$$

Où

$$\Xi_E^\pm = \begin{bmatrix} e^{\pm i\gamma_1} & 0 \\ 0 & e^{\pm i\gamma_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_E^\pm = \begin{bmatrix} a_{E_1}^\pm \\ a_{E_2}^\pm \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_E^\pm = \begin{bmatrix} V_{E_1} \\ V_{E_2} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Les composantes tangentielles du champ magnétique s'écrivent alors en combinaison linéaires des \mathbf{E}_t . En effet, à partir du système 3.36 on obtient :

$$\begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix} = \frac{i}{\lambda} \mathcal{L}_{GE} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Finalement, le champ tangent dans le milieu 1 peut s'écrire d'une manière compacte :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_t \\ \mathbf{G}_t \end{bmatrix} = \Psi_1^+ \Xi_1^+ \mathbf{a}_1^+ + \Psi_1^- \Xi_1^- \mathbf{a}_1^- \quad (3.56)$$

où

$$\Psi_1^\pm = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_E^\pm \\ \mathcal{L}_{GE} \mathbf{V}_E^\pm \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$\Xi_0^\pm = \begin{bmatrix} \frac{i}{\lambda_{E_1}} e^{\pm \lambda_{E_1} z} & \frac{i}{\lambda_{E_2}} e^{\pm \lambda_{E_2} z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{\lambda_{G_1}} e^{\pm \lambda_{G_1} z} & \frac{i}{\lambda_{G_1}} e^{\pm \lambda_{G_1} z} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

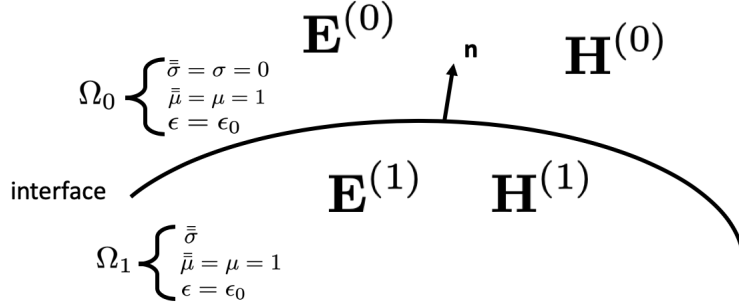


FIGURE 3.2 – Conditions de passage à l'interface séparatrice.

3.2.4 Conditions de passage

Le champ électromagnétique doit satisfaire, aussi que les équations physiques de Maxwell, des conditions particulières, dites de passage (cf Annexe B), au niveau de l'interface air-conducteur. En absence de densité surfacique de charge extérieure et dans le cas d'un matériau conducteur de conductivité finie, celles-ci s'écrivaient :

$$(\mathbf{E}^{(0)} - \mathbf{E}^{(1)}) \times \mathbf{n} = 0 \quad (3.59a)$$

$$(\mathbf{H}^{(0)} - \mathbf{H}^{(1)}) \times \mathbf{n} = 0 \quad (3.59b)$$

(0) et (1) désignent respectivement l'air et le milieu conducteur et \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à l'interface qui sépare ces deux milieux. Ces relations permettent d'assurer l'unicité des solutions des équations physiques que l'on vient de voir. En développant, les conditions de passage se traduisent par la continuité des composantes tangentielles en passant à travers l'interface séparatrice :

$$\mathbf{E}_x^{(0)} = \mathbf{E}_x^{(1)} \quad (3.60a)$$

$$\mathbf{E}_y^{(0)} = \mathbf{E}_y^{(1)} \quad (3.60b)$$

$$\mathbf{H}_x^{(0)} = \mathbf{H}_x^{(1)} \quad (3.60c)$$

$$\mathbf{H}_y^{(0)} = \mathbf{H}_y^{(1)} \quad (3.60d)$$

Ceci peut se traduire par une égalité de décomposition modale lorsque $z = 0$. dans ce cas, le terme $\Xi_{i \in (1,2)}^\pm$ se réduit à l'unité. De ce fait, on écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_t^{(0)} \\ \mathbf{G}_t^{(0)} \end{bmatrix} \stackrel{z=0}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_t^{(1)} \\ \mathbf{G}_t^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Donc

$$\Psi_0^- \cdot \mathbf{a}_0^- + \Psi_0^+ \cdot \mathbf{a}_0^+ = \Psi_1^- \cdot \mathbf{a}_1^- + \Psi_1^+ \cdot \mathbf{a}_1^+ \quad (3.62)$$

L'interface séparatrice $z = 0$ peut être considéré comme un système d'entrée-sortie. Par convention, les champs incidents à l'interface sont les entrées (\mathbf{a}_0^- , \mathbf{a}_1^+) et les champs partant de l'interface sont les sorties (\mathbf{a}_0^+ , \mathbf{a}_1^-). On obtient alors :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^+ \\ \mathbf{a}_1^- \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Psi_0^+ & -\Psi_1^- \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\Psi_0^- & \Psi_1^+ \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_0} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^- \\ \mathbf{a}_1^+ \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Dans notre cas de demi espace, l'intervention de la surface inférieur est considérée nulle. Le \mathbf{a}_1^+ est alors nul. Le \mathbf{a}_0^- est considéré comme l'amplitude du champ rattaché au mode Ψ_0 se propageant dans le sens des $z < 0$ donc au champ incident (champ source provenant de la bobine). Intuitivement, on sait qu'un champ magnétique variable est créé autour de la bobine, on impose alors :

$$[\Psi_0^-]_{|G} \cdot \mathbf{a}_0^- = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_x^{inc} \\ \mathbf{H}_y^{inc} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$\Psi_0^-|_H$ est la restriction du mode $\Psi_0^- = [\Psi_0^{-TE} \ \Psi_0^{-TM}]_H$ au composantes du champ magnétique :

$$[\Psi_0^-]_{|G} = \begin{bmatrix} \Theta_0^{-TE} & \Theta_0^{-TM} \\ \Lambda_0^{-TE} & \Lambda_0^{-TM} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

On obtient alors :

$$\mathbf{a}_0^- = \begin{bmatrix} \Theta_0^{-TE} & \Theta_0^{-TM} \\ \Lambda_0^{-TE} & \Lambda_0^{-TM} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_x^{inc} \\ H_y^{inc} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Si on suppose que la matrice \mathbf{S}_0 est définie par :

$$\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} S_0^{11} & S_0^{12} \\ S_0^{21} & S_0^{22} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

On aura finalement :

$$\mathbf{a}_0^+ = S_0^{11} \mathbf{a}_0^- \quad (3.68)$$

$$\mathbf{a}_1^- = S_0^{21} \mathbf{a}_0^- \quad (3.69)$$

Tous les coefficients sont alors identifiés et l'expansion modale dans chaque milieu est déterminée. On peut alors construire le champ électromagnétique partout dans le domaine de Fourier.

3.3 Composite plan stratifié

Dans la section précédente, nous venons d'introduire une méthode spécifique pour résoudre les équations de Maxwell dans un demi-espace conducteur anisotrope à géométrie plane. Cependant, ce cas ne permet qu'une configuration approximative de sorte que l'influence de l'interface inférieures du milieu peut être ignorée ce qui signifie que l'épaisseur de la pièce est très grande par rapport à l'épaisseur de la peau. Maintenant, nous proposons d'étendre l'étude précédente pour considérer l'existence des interfaces inférieures dans la pièce. Par conséquent, nous considérons un réseau multi-couches. Les différentes couches qui composent la pièce sont considérées comme des matériaux linéaires et anisotropes. La stratégie que nous allons présenter ici dépend fortement de la méthode analytique utilisée pour gérer les situations complexes de demi-espace. En fait, la première étape du calcul consiste à déterminer la décomposition modale du champ électromagnétique dans chaque couche. Le calcul des coefficients inconnus est plus compliqué, car il faut considérer ici toutes les interactions entre les modes. Cette étape sera réalisée en introduisant un algorithme récursif, présenté dans ses détails.

3.3.1 Configuration

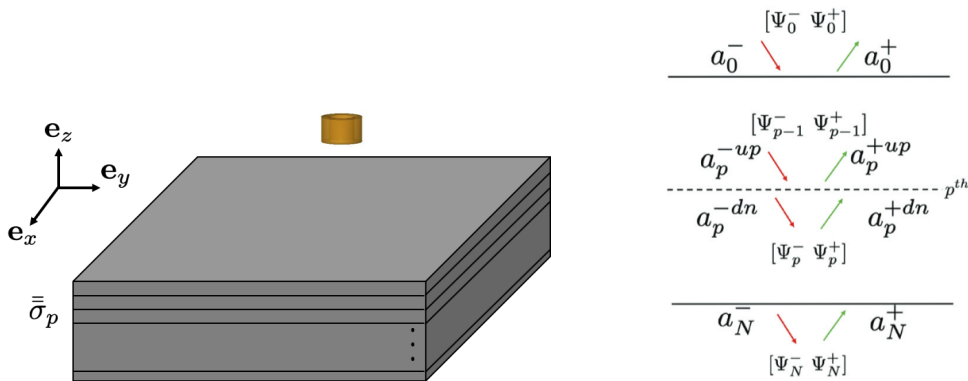


FIGURE 3.3 – Composite plan multi-couches.

On considère la structure décrite dans la Figure (3.3). La pièce est composée de $N - 1$ couches anisotropes séparées par N interfaces planes. La p^{eme} couche est délimitée par l'interface p et $p + 1$. L'épaisseur de chaque pli et le nombre d'onde sont notés respectivement par e_p et k_{c_p} . Dans la couche d'indice p , les modes propres sont notés Ψ^\pm . À l'interface j , nous avons les ondes sortantes correspondant aux coefficients $(\mathbf{a}_j^{+up}, \mathbf{a}_j^{-dn})$ et les ondes entrantes correspondant aux coefficients $(\mathbf{a}_j^{-up}, \mathbf{a}_j^{+dn})$. les exposants $-$ et $+$ réfèrent à la transmission et à la

réflexion respectivement. De plus, les scripts supérieurs (up) et (dn) font référence aux coefficients supérieurs et inférieurs concernant p^{eme} interface. En supposant que la couche 0 et la couche N+1 sont de l'air, \mathbf{a}_0^- résulte du champ incident dû à la bobine et $\mathbf{a}_N^+ = 0$.

3.3.2 Algorithme des Matrices-S

Introduit par [28] pour remplacer la méthode conventionnelle de matrice de transfert utilisé par [23], l'algorithme des matrices de diffusion (connu aussi par le nom de l'algorithme des matrices-S ou *Scattering-matrix algorithm* en anglais) est un algorithme numérique récursif dédié à la modélisation de très nombreux systèmes multi-couches avec de nombreuses composantes du champ électromagnétique. L. Li [51] a montré que dans cette technique, au lieu de relier les champs optiques de la première interface aux champs optiques de la dernière interface par un produit de matrices de transfert, on relie les champs d'entrée et les champs de sortie par une matrice globale de diffusion. La structure de cet algorithme matriciel est récursive et la dimension de la matrice est indépendante du nombre de couches. Cette technique évite les problèmes de champs à croissance exponentielle en se propageant à travers les strates, ce qui évite les instabilités numériques. En effet, toutes les méthodes numériques dédiées à l'analyse des réseaux en couches font face à une difficulté commune associée aux fonctions exponentielles de la variable spatiale dans la direction perpendiculaire au plan du réseau [76]. Cette difficulté est révélatrice de nombreux problèmes de propagation et de diffusion des ondes dans les systèmes en multi-couches, et elle est exacerbée par le fait qu'une analyse numérique précise des réseaux nécessite généralement un grand nombre de modes propres.

Structuration : Matrice de couche / matrice d'interface

La méthode adoptée représente la structure comme un pile de couches uniformes dans le sens longitudinal. Une matrice de diffusion permet de représenter une telle structure complexe comme une «boîte noire». Elle relie les ondes incidentes sur la boîte aux ondes diffusées par la boîte dans les deux sens. En fait, les propriétés électromagnétiques de toute structure linéaire peuvent être résumées dans une matrice de diffusion représentée dans la Figure 3.4. e_i^- et e_i^+ sont les i^{eme} entrées respectivement dans le sens positif et négatif de propagation de l'onde. de même pour les sorties s_i^- et s_i^+ . Le paramètre S^{21} représente la quantité de l'onde appliquée au port 1 et réfléchi par le même port. De même pour S^{12} au port 2. S^{11} signifie la quantité de l'onde appliquée au port 1 et qui est transmise via la structure au port 2. Le S^{22} , quant à lui, quantifie la quantité d'onde appliqué au port 2 et transmet via la structure vers le port 1. Cela peut être généralisé de

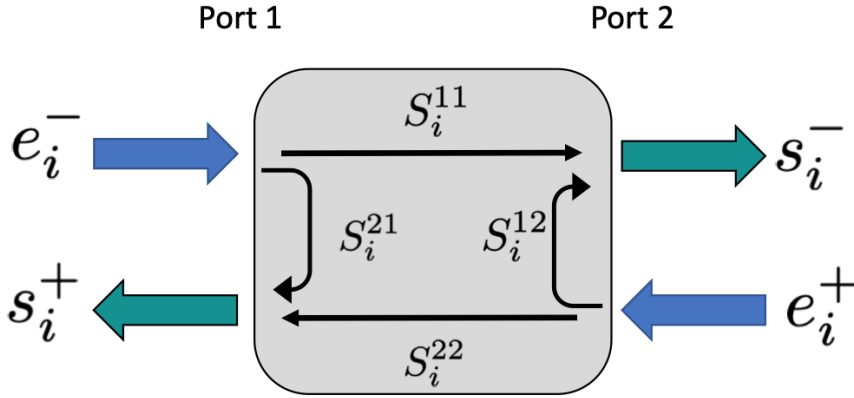


FIGURE 3.4 – Matrice-S : relation entre les entrées et les sorties.

sorte que $S_{mn(m \neq n)}$ représente la quantité d'une onde appliquée au port n et réfléchi au même port, tandis que $S_{mn(m=n)}$ représente la quantité d'une onde appliquée au port m et transmise par la structure vers le port n . De cette manière, il est communément entendu que S^{21} représente la réflexion et S^{11} représente la transmission. Pour les dispositifs symétriques, il est prévu que $S^{21} = S^{12}$. On considère la structure multi-couche décrite dans la Figure 3.3, on peut distinguer deux types de matrices de diffusion : une matrice de couche et une matrice d'interface. Pour la matrice de la j^{eme} couche notée $S_c^{(j)}$ elle est définie par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_p^{+dn} \\ \mathbf{a}_{p+1}^{-up} \end{bmatrix} = S_c^{(p)} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_p^{-dn} \\ \mathbf{a}_{p+1}^{+up} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_c^{(p)11} & S_c^{(p)12} \\ S_c^{(p)21} & S_c^{(p)22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_p^{-dn} \\ \mathbf{a}_{p+1}^{+up} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Lorsque les interfaces limitant la couche sont parallèles (et c'est le cas), on suppose :

$$\mathbf{a}_{p+1}^{-up} = \phi_p^- \mathbf{a}_p^{-dn} = e^{-i\lambda^- e_p} \mathbf{a}_p^{-dn} \quad (3.71)$$

$$\mathbf{a}_p^{+dn} = \phi_p^+ \mathbf{a}_{p+1}^{+up} = e^{+i\lambda^+ e_p} \mathbf{a}_{p+1}^{+up} \quad (3.72)$$

donc :

$$S_c^{(p)} = \begin{bmatrix} \phi_p^- & 0 \\ 0 & \phi_p^+ \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Quant à la matrice d'interface définie au niveau de la p^{me} interface notée S_p , elle est donnée par la relation :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_p^{+up} \\ \mathbf{a}_p^{-dn} \end{bmatrix} = S_i^{(p)} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_p^{-up} \\ \mathbf{a}_p^{+dn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_i^{11} & S_i^{12} \\ S_i^{21} & S_i^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_p^{-up} \\ \mathbf{a}_p^{+dn} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Les conditions aux limites sont appliquées en égalisant les composantes tangentielles des champs de chaque côté de l'interface considérée. Pour résoudre efficacement le problème des conditions aux limites, des matrices de diffusion sont apparues comme la méthode la plus populaire et résolvent le problème des conditions aux limites une couche à la fois au lieu de toutes les couches simultanément. En se basant sur l'équation (3.63), on définit alors la matrice de l'interface p par :

$$S_i^{(p)} = [\Psi_{p-1}^- - \Psi_p^+]^{-1} [\Psi_{p-1}^+ \Psi_p^-] \quad (3.75)$$

De cette manière, la propagation à travers l'ensemble du dispositif peut être décrite de manière rigoureuse. Itérativement, les matrices de diffusion sont calculées pour chaque couche et sont combinées en une seule matrice de diffusion globale qui décrit la propagation à travers l'ensemble du dispositif à travers une mise en cascade.

Mise en cascade

Pour tenir compte des interactions entre les différentes interfaces, une phase de combinaison (Mise en cascade) de matrices est nécessaire pour présenter le réseau multi-couches par une seule matrice de diffusion globale. C'est l'un des avantages de cet algorithme. Ceci se fait à l'aide de la technique de "concaténation" des interfaces qui consiste à balayer la structure du bas vers le haut en rassemblant les interfaces comme illustré dans la Figure 3.5.

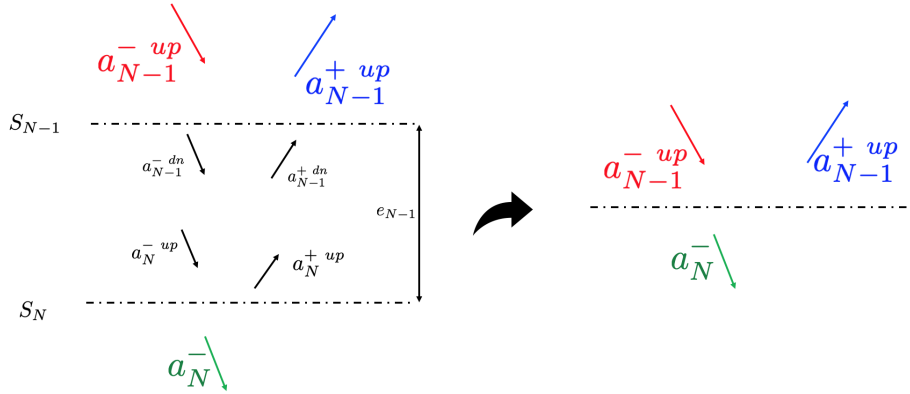


FIGURE 3.5 – Concaténation de matrices-S.

Soit les matrices d'interfaces :

$$S_N = \begin{bmatrix} S_N^{11} & S_N^{12} \\ S_N^{21} & S_N^{22} \end{bmatrix} = [\Psi_{N-1}^+ - \Psi_N^-]^{-1} [\Psi_{N-1}^- \Psi_N^+] \quad (3.76)$$

et

$$S_{N-1} = \begin{bmatrix} S_{N-1}^1 1 & S_{N-1}^1 2 \\ S_{N-1}^2 1 & S_{N-1}^2 2 \end{bmatrix} = [\Psi_{N-2}^+ - \Psi_{N-1}^-]^{-1} [\Psi_{N-2}^- \Psi_{N-1}^+] \quad (3.77)$$

qui vérifient respectivement :

$$\begin{bmatrix} a_N^+ \text{ up} \\ a_N^- \end{bmatrix} = S_N \begin{bmatrix} a_N^- \text{ up} \\ a_N^+ \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

et

$$\begin{bmatrix} a_{N-1}^+ \text{ up} \\ a_{N-1}^- \text{ dn} \end{bmatrix} = S_{N-1} \begin{bmatrix} a_{N-1}^- \text{ up} \\ a_{N-1}^+ \text{ dn} \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Notre but final est d'établir une relation de type :

$$\begin{bmatrix} a_{N-1}^+ \text{ up} \\ a_N^- \end{bmatrix} = S_g \begin{bmatrix} a_{N-1}^- \text{ up} \\ a_N^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_g^{11} & S_g^{12} \\ S_g^{21} & S_g^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{N-1}^- \text{ up} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

On peut déterminer les relations entre les coefficients :

$$a_N^+ \text{ up} = S_N^{11} a_N^- \text{ up} \quad (3.81)$$

$$a_N^- = S_N^{21} a_N^- \text{ up} \quad (3.82)$$

$$a_{N-1}^+ \text{ up} = S_{N-1}^{11} a_{N-1}^- \text{ up} + S_{N-1}^{12} a_{N-1}^+ \text{ dn} \quad (3.83)$$

$$a_{N-1}^- \text{ dn} = S_{N-1}^{21} a_{N-1}^- \text{ up} + S_{N-1}^{22} a_{N-1}^+ \text{ dn} \quad (3.84)$$

En tenant compte du fait que

$$a_{N-1}^+ \text{ dn} = \phi_{N-1}^+ a_N^+ \text{ up} \quad (3.85)$$

$$a_N^- \text{ up} = \phi_{N-1}^- a_{N-1}^- \text{ dn} \quad (3.86)$$

On peut établir une relation directe entre les coefficients (a_N^+, a_N^-) et $(a_{N-1}^+ \text{ up}, a_{N-1}^- \text{ up})$. En effet, en injecte 3.85 dans 3.84, on obtient :

$$\begin{aligned} a_{N-1}^- \text{ dn} &= S_{N-1}^{21} a_{N-1}^- \text{ up} + S_{N-1}^{22} \phi^+ a_N^+ \text{ up} \\ &= S_{N-1}^{21} a_{N-1}^- \text{ up} + S_{N-1}^{22} \phi^+ S_N^{11} a_N^- \text{ up} \\ &= S_{N-1}^{21} a_{N-1}^- \text{ up} + S_{N-1}^{22} \phi^+ S_N^{11} \phi^- a_{N-1}^- \text{ dn} \end{aligned} \quad (3.87)$$

finalement :

$$a_{N-1}^- \text{ dn} = \underbrace{[I_d - S_{N-1}^{22} \phi^+ S_N^{11} \phi^-]^{-1} S_{N-1}^{21}}_D a_{N-1}^- \text{ up} \quad (3.88)$$

En outre, on a :

$$a_{N-1}^- \text{ dn} = D a_{N-1}^- \text{ up} \quad (3.89)$$

en multipliant de part et d'autre par $S_N^{21}\phi^-$, on obtient :

$$a_N^- = S_N^{21}\phi^- D a_{N-1}^{-\text{up}} \quad (3.90)$$

D'où

$$S_g^{21} = S_N^{21}\phi^- D \quad (3.91)$$

D'autre part, injectant 3.86 dans 3.85 on obtient :

$$\begin{aligned} a_{N-1}^{+\text{up}} &= S_{N-1}^{11} a_{N-1}^{-\text{up}} + S_{N-1}^{12} \phi^+ a_N^{+\text{up}} \\ &= S_{N-1}^{11} a_{N-1}^{-\text{up}} + S_{N-1}^{12} \phi^+ S_N^{11} a_N^{-\text{up}} \\ &= S_{N-1}^{11} a_{N-1}^{-\text{up}} + S_{N-1}^{12} \phi^+ S_N^{11} \phi^- a_{N-1}^{-\text{up}} \\ &= S_{N-1}^{11} a_{N-1}^{-\text{up}} + \underbrace{S_{N-1}^{12} \phi^+ S_N^{11} \phi^- D}_{K} a_{N-1}^{-\text{up}} \\ &= [S_{N-1}^{11} + K] a_{N-1}^{-\text{up}} \end{aligned} \quad (3.92)$$

d'où

$$S_g^{11} = S_{N-1}^{11} + K \quad (3.93)$$

Si on généralise ce que nous venons d'illustrer à l'itération p ($p = N.., 2$), on calcule K_p et D_p et on obtient :

$$(S_g^{21})^{(p)} = S_p^{21} \phi_p^- D_p \quad (3.94)$$

$$(S_g^{11})^{(p)} = S_{p-1}^{11} + K_p \quad (3.95)$$

Finalement, on aura une matrice-S globale qui vérifie :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^+ \\ \mathbf{a}_N^- \end{bmatrix} = S_g \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^- \\ \mathbf{a}_N^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_g^{11} & S_g^{12} \\ S_g^{21} & S_g^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^- \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

3.4 Résolution numérique

3.4.1 Discrétisation

La formulation utilisée pour la résolution modale des équations de Maxwell se présente sous forme continue. Cependant, pour résoudre le problème numériquement, une étape de discrétisation est nécessaire. Les transformées continues 3.22 et 3.21 sont alors remplacées par la forme discrète :

$$\hat{\tau}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{x_i} \sum_{y_i} \tau(x_i, y_i) e^{i\alpha x_i} e^{i\beta y_i} dx_i dy_i \quad (3.97)$$

$$\tau(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_m \sum_n \hat{\tau}(\alpha_m, \beta_n) e^{i\alpha_m x} e^{i\beta_n y} d\alpha d\beta \quad (3.98)$$

Notre problème consiste alors à déterminer la quantité $\hat{\tau}(\alpha_m, \beta_n)$ qui représente le potentiel $\hat{\phi}$ dans un premier temps. Ceci revient à projeter les composantes du champ EM sur une base de fonctions tests exponentielles :

$$T_{mn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad (3.99)$$

$$(x, y) \rightarrow e^{i\alpha_m x} e^{i\beta_n y} \quad (3.100)$$

Les grandeurs α_m et β_n (où m et n sont des entiers relatifs) sont respectivement les pulsations spatiales discrètes selon les directions x et y . Si on considère les paramètres numériques de discrétisation spatiale présentés dans la Table (3.1),

Paramètres	Désignation	valeurs
M_{max}	Nombre de points selon x	à choisir
N_{max}	Nombre de points selon y	à choisir
x_{max}	borne maximale selon x	selon la taille du capteur
x_{min}	borne minimale selon x	$-x_{max}$
y_{max}	borne maximale selon y	selon la taille du capteur
y_{min}	borne minimale selon y	$-y_{max}$
Δx	pas de discrétisation selon x	$(x_{max} - x_{min})/M_{max}$
Δy	pas de discrétisation selon y	$(y_{max} - y_{min})/N_{max}$

TABLE 3.1 – Paramètres numériques de discrétisation spatiale.

on peut définir :

$$\alpha_m = \frac{2\pi m}{M_{max}}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (3.101)$$

$$\beta_n = \frac{2\pi n}{N_{max}}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.102)$$

On fixe donc à ce stade les résolutions spectrales Δ_x et Δ_y , et l'on considère une infinité de fonctions T_{mn} . En revenant à l'équation de Helmholtz 3.25, le potentiel ϕ est un mode propre correspondant à la valeur propre λ^2 . La projection sur les fonctions de base T_{mn} se traduit par une expansion du potentiel en série de Floquet-Fourier :

$$\Phi(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{mn} T_{mn} \quad (3.103)$$

En se projetant dans la base exponentielle, on obtient l'équation matricielle :

$$\lambda^2 \Phi = [k^2 \mathbb{I} - [\alpha]^2 - [\beta]^2] \Phi \quad (3.104)$$

où Φ est une matrice de vecteurs propres colonnes :

$$\begin{bmatrix} \cdot & \dots & \dots \\ \vdots & \phi_{mn} & \vdots \\ \dots & \dots & \cdot \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

et $[\alpha]$ et $[\beta]$ sont deux matrices diagonales dont les éléments sont respectivement les α_m et β_n et \mathbb{I} est la matrice d'identité. La solution à ce système aux valeurs propres ci-dessus est bien sûr triviale puisque la matrice est diagonale. Introduisons l'indices q pour numéroter les valeurs propres et les fonctions propres. Les valeurs propres λ_q sont déduites de leur nombre au carré :

$$\lambda_q^2 = k^2 - \alpha_q^2 - \beta_q^2 \quad (3.106)$$

et les vecteurs propres sont déterminés par $\phi_{mn,q} = \delta_{m,q}$ où $\delta_{m,q}$ est le symbole de Kronecker. La racine carrée de λ_q^2 est définie comme suit :

$$\lambda = \begin{cases} \sqrt{\lambda_q^2}, & \text{si } \lambda_q^2 \in \mathfrak{R}^+ \\ \sqrt{-\lambda_q^2}, & \text{si } \lambda_q^2 \in \mathfrak{R}^- \\ (\lambda_q^2)^{\frac{1}{2}}, & \text{si } \Im(\lambda_q^2) > 0 \end{cases} \quad (3.107)$$

En coordonnées cartésiennes, les solutions aux équations de Helmholtz peuvent être considérées comme les vecteurs propres d'une équation matricielle. Les valeurs propres λ_{mn} sont déterminées analytiquement car la matrice est diagonale. Il existe deux ensembles de modes, dont le nombre est égal : ceux se propageant ou se désintégrant dans le sens positif de z et ceux se propageant ou se désintégrant dans le sens opposé. Nous dénotons ces modes en exposant $+$ et $-$ respectivement. La dépendance z d'un mode propre est déterminée par la fonction $\exp(i\lambda z)$ En augmentant z à $z + \Delta z$, $\exp(i\lambda z)$ est multiplié par $\exp(i\lambda \Delta z) = \exp(i\Re(\lambda)\Delta z) \times \exp(-\Im(\lambda)\Delta z)$ Les valeurs propres réelles ont $\Im(\lambda) = 0$ et correspondent donc aux modes avant si $\Re(\lambda) > 0$ ou aux modes évanescents si $\Re(\lambda) < 0$. Les modes valeurs propres complexes ont un partie imaginaire non nulle et éventuellement aussi partie réelle non nulle. Les modes propres associés se désintègrent en avant si $\Im(\lambda) > 0$ ou en arrière si $\Im(\lambda) < 0$. Ces extensions sont appelées extensions de

Rayleigh [6]. Les composantes tangentielles du champ (cf 3.19 et 3.23) s'écrivent alors :

$$E_x = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} a^{\pm TE} \tau_{mn}^{TE} \phi_{mn} e^{i\pm\lambda z} + \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} a^{\pm TM} \tau_{mn}^{TM} \phi_{mn} e^{i\pm\lambda z} \quad (3.108a)$$

$$E_y = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} a^{\pm TE} \Pi_{mn}^{TE} \phi_{mn} e^{i\pm\lambda z} + \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} a^{\pm TM} \Pi_{mn}^{TM} \phi_{mn} e^{i\pm\lambda z} \quad (3.108b)$$

$$G_x = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} a^{\pm TE} \Theta_{mn}^{TE} \phi_{mn} e^{i\pm\lambda z} + \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} a^{\pm TM} \Theta_{mn}^{TM} \phi_{mn} e^{i\pm\lambda z} \quad (3.108c)$$

$$G_y = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} a^{\pm TE} \Lambda_{mn}^{TE} \phi_{mn} e^{i\pm\lambda z} + a^{\pm TM} \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \Lambda_{mn}^{TM} \phi_{mn} e^{i\pm\lambda z} \quad (3.108d)$$

Concernant l'expansion modale dans le milieu anisotrope, on peut remarquer facilement qu'à partir des coefficients α_m et β_n , on reconstruit de la même manière les matrices diagonales $[\alpha]$ et $[\beta]$. Rappelons que $\varepsilon_{(i,j)\in(1,2,3)}^{ij}$ et μ sont des scalaires donc automatiquement transformés en des matrices diagonales $\bar{\varepsilon}^{ij} = \varepsilon^{ij}\mathbb{I}$ et $\bar{\mu} = \mu\mathbb{I}$. Le système à valeurs propres à résoudre 3.45 est une matrice (2x2) par bloc et que chaque bloc (cf 3.44) est une matrice diagonale. Ceci est un très grand avantages qui nous permet de manipuler numériquement des matrices diagonales creuses dont ça réduit énormément le temps de calcul qu'on détaillera par la suite.

Implémentation & Troncature

Afin de résoudre numériquement le problème discrétisé de taille infinie, il est nécessaire de se limiter à un nombre fini de fonctions T_{mn} : on effectue donc une troncature de la base d'ondes planes choisie pour représenter les solutions. On définit donc, des nombres de modes M_x et M_y dans chaque direction. Il est clair que la précision de la méthode dépend grandement du choix de ces paramètres numériques. On obtient alors :

$$\Phi(x, y) = \sum_{m=-M_x}^{m=+M_x} \sum_{n=-M_y}^{n=+M_y} \phi_{mn} T_{mn} \quad (3.109)$$

Si on suppose $M_{max} = (2M_x + 1)$ et $N_{max} = (2M_y + 1)$, On remarque qu'on obtient $M_{max} \times N_{max}$ termes. D'autre part, on obtient alors les vecteurs :

$$\alpha = \underbrace{[\alpha_{-M_x}, \alpha_{-M_x+1}, \dots, \alpha_0, \dots, \alpha_{M_x-1}, \alpha_{M_x}]^T}_{M_{max}} \quad (3.110)$$

$$\beta = \underbrace{[\beta_{-M_y}, \beta_{-M_y+1}, \dots, \beta_0, \dots, \beta_{M_y-1}, \beta_{M_y}]^T}_{N_{max}} \quad (3.111)$$

Pour construire numériquement les blocs $(\tau, \Pi, \Theta, \Lambda)$ (3.23), on fait appel à un produit de kroneker. En effet, en se plaçant dans le domaine de Fourier, les coefficients de multiplication α_m et β_n sont repartis sur une grille 2D. construit alors la matrice $[\alpha]$ contenant N_{max} blocs diagonal de taille M_{max} chacun donc de taille $Dim = M_{max} \times N_{max}$.

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{-M_x} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{M_x} \end{pmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \begin{pmatrix} \alpha_{-M_x} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{M_x} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

De la même manière, on construit la matrice $[\beta]$ contenant M_{max} blocs diagonal de taille N_{max} chacun donc de taille $Dim = M_{max} \times N_{max}$.

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{-M_y} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta_{M_y} \end{pmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \begin{pmatrix} \beta_{-M_y} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta_{M_y} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

De ce fait, la matrice de potentiels (vecteurs propres) 3.105 est diagonale de taille $Dim = M_{max} \times N_{max}$ correspondant à un vecteur de valeurs propres λ de taille Dim . Par conséquent, les blocs des modes $(\tau, \Pi, \Theta, \Lambda)$ (3.23) sont alors des matrices diagonales creuses et carrées de taille $Dim = M_{max} \times N_{max}$:

$$\tau^{TE/TM} = \begin{bmatrix} \ddots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \tau_{ij}^\pm & \vdots \\ \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \Pi^{TE/TM} = \begin{bmatrix} \ddots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \Pi_{ij}^\pm & \vdots \\ \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

$$\Theta^{TE/TM} = \begin{bmatrix} \ddots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \Theta_{ij}^\pm & \vdots \\ \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \Lambda^{TE/TM} = \begin{bmatrix} \ddots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \Lambda_{ij}^\pm & \vdots \\ \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

où $(i, j) \in \{1, \dots, Dim\}$. Finalement, le champ tangent s'écrit finalement :

$$E_x = \sum_{m=-M_x}^{m=+M_x} \sum_{n=-M_y}^{n=+M_y} a^{\pm TE} \tau_{mn}^{TE} \phi_{mn} e^{i\pm\lambda z} + \sum_{m=-M_x}^{m=+M_x} \sum_{n=-M_y}^{n=+M_y} a^{\pm TM} \tau_{mn}^{TM} \phi_{mn} e^{i\pm\lambda z} \quad (3.116a)$$

$$E_y = \sum_{m=-M_x}^{m=+M_x} \sum_{n=-M_y}^{n=+M_y} a^{\pm TE} \Pi_{mn}^{TE} \phi_{mn} e^{i\pm\lambda z} + \sum_{m=-M_x}^{m=+M_x} \sum_{n=-M_y}^{n=+M_y} a^{\pm TM} \Pi_{mn}^{TM} \phi_{mn} e^{i\pm\lambda z} \quad (3.116b)$$

$$G_x = \sum_{m=-M_x}^{m=+M_x} \sum_{n=-M_y}^{n=+M_y} a^{\pm TE} \Theta_{mn}^{TE} \phi_{mn} e^{i\pm\lambda z} + \sum_{m=-M_x}^{m=+M_x} \sum_{n=-M_y}^{n=+M_y} a^{\pm TM} \Theta_{mn}^{TM} \phi_{mn} e^{i\pm\lambda z} \quad (3.116c)$$

$$G_y = \sum_{m=-M_x}^{m=+M_x} \sum_{n=-M_y}^{n=+M_y} a^{\pm TE} \Lambda_{mn}^{TE} \phi_{mn} e^{i\pm\lambda z} + \sum_{m=-M_x}^{m=+M_x} \sum_{n=-M_y}^{n=+M_y} a^{\pm TM} \Lambda_{mn}^{TM} \phi_{mn} e^{i\pm\lambda z} \quad (3.116d)$$

Chaque composante est alors une matrice carré diagonale de taille Dim . l'expansion modale est alors obtenue. La même démarche est appliquée pour la décomposition modale dans le milieu anisotrope où les d_E^{kl} (3.43) sont des matrices diagonale creuses de taille Dim . De ce fait, on construit des matrices de vecteurs propres \mathbf{V}_E et \mathbf{V}_G de taille $((2Dim, 1))$ d'une manière itérative. En effet, les blocs d_E^{ij} sont des matrices diagonales creuse de taille Dim . En faisant une boucle sur la diagonale, on construit à chaque itération une matrice scalaire de taille 2×2 dont la détermination des vecteurs propres est simple.

Numériquement, on prend en compte le caractère creux des matrices. En effet, on ne considère que les éléments diagonaux dans les multiplications et la construction de champ, ceci réduit énormément le temps de calcul et nous permet d'augmenter autant qu'on veut le nombre de modes M_x et M_y pour la représentation du champ dans le domaine de Fourier. C'est donc un moyen d'améliorer la convergence du modèle.

On vient de présenter une résolution numérique de la configuration 3.1. l'expansion modale est déterminée de part et d'autre de l'interface supérieure. Il reste à appliquer les conditions aux limites 3.62 pour déterminer les coefficients inconnus. il a été déjà montré que pour le cas d'un demi-espace, les inconnues du système peuvent être exprimer en fonction de l'amplitude modale correspondante au champ incident provenant de la bobine (3.68 et 3.69).

3.4.2 Calcul du champ source

On propose dans cette partie de présenter brièvement le modèle semi-analytique implémenté dans **CIVA** pour le calcul du champ source pour une bobine 3D. sDans un premier temps, le champ incident est considéré comme étant le champ créé par la bobine seule rayonnant dans l'espace libre. Dans [73], le calcul de champs électromagnétique émis par un capteur donné dans une pièce plane stratifiée se ramène à un calcul de champ magnétique dans l'air \mathbf{H}_0 . Une technique classique de calcul de ce champ à la position r , induit par une source volumique de courant $\mathbf{J}(r')$, consiste à appliquer la loi de Biot-Savart :

$$\mathbf{H}_0(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{r' \in V} \frac{\mathbf{J}(r') \times (r - r')}{(r - r')^3} dr' \quad (3.117)$$

Cependant, le calcul de l'intégrale de l'équation (3.117) doit être effectué numériquement si l'on considère un capteur de forme complexe. Afin d'éviter cela, une autre stratégie consiste à approximer la géométrie du capteur par un ensemble d'éléments de géométrie simple pour lesquels des expressions analytiques du champ \mathbf{H}_0 sont connues [86]. La forme de base retenue est le trapèze. Les différentes formes de capteurs modélisés avec cette méthode sont illustrées en Figure (3.6).

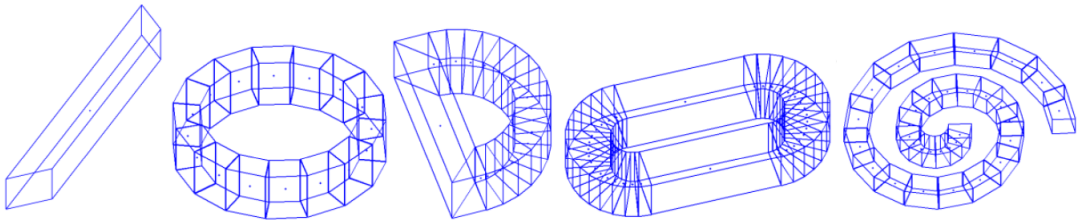


FIGURE 3.6 – Division géométrique des capteurs en cellules trapézoïdales.

Après le calcul du champ magnétique dans l'espace libre, les champs électriques et magnétiques peuvent être calculés dans la pièce et à la surface en utilisant les expressions établies à l'aide de la méthode présentée dans [5]. le domaine spatial global est réduit à un domaine cartésien fini (zone de calcul) dont les dimensions et la résolution spatiale dépendent de la taille du capteur. Le champ source est finalement projeté sur des plans [21]. Dans les Figures (4.5), on présente une vue de coupe de la norme du champ électrique E et de champ magnétique H dans l'air et projeté sur un plan d'équation $z = 0$.

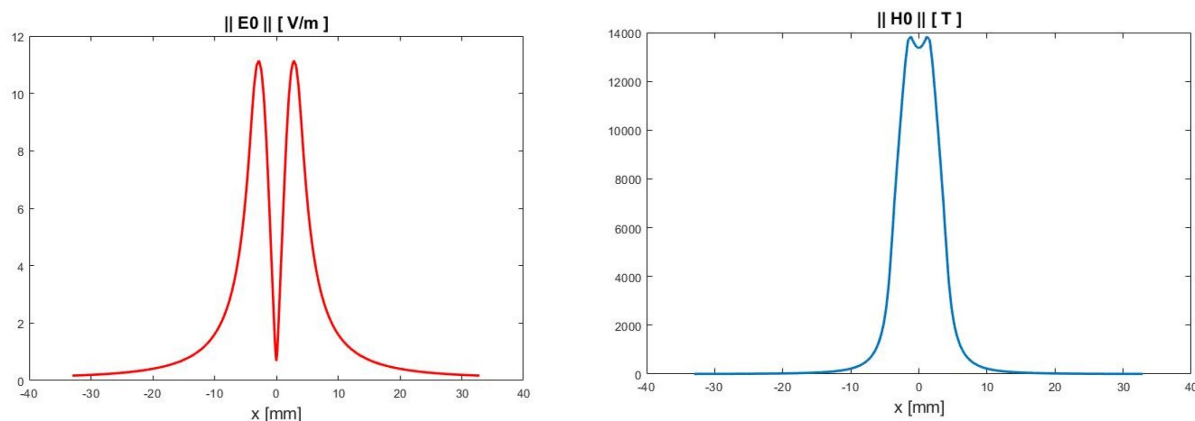


FIGURE 3.7 – Norme du champ électrique et magnétique dans l'air calculés sur un plan d'équation $z = 0$.

Une fois le champ source est calculé, on applique la transformée (3.97) pour se projeter dans le domaine de Fourier. On utilise alors 3.66 pour déterminer l'amplitude \mathbf{a}_0^- donc tous les coefficients de l'expansion modale 4.50 et 4.83.

3.4.3 Réseau multi-couches

Comme a été déjà évoqué, on adopte une méthode récursive pour tenir compte de l'interaction entre les différentes interfaces inférieures. L'implémentation de l'algorithme-S se fait sur deux parties : la première consiste à parcourir toutes les interfaces inférieures, on calcul les modes propres Ψ_p^\pm et Ψ_{p-1}^\pm dans chaque couche en résolvant le systèmes à valeur propres 3.45 et on construit les matrices d'interfaces S_i .

Dans la Figure 3.8, on présente l'algorithme implémenté. Pour améliorer la performance de l'algorithme, on utilise une décomposition LU (cf Annexe B) ce qui rend le calcul de l'inverse d'une matrice plus rapide.

La deuxième partie de l'algorithme consiste en la concaténation de toutes les interfaces inférieurs pour que la structure multi-couches se comporte finalement

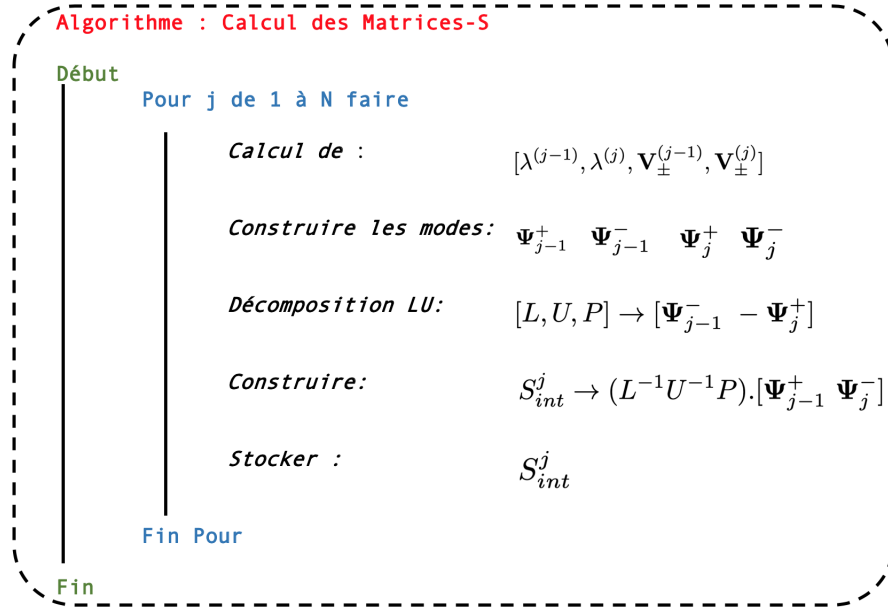


FIGURE 3.8 – Algorithme de construction des matrices d’interfaces.

comme une plaque à une seule couche d’épaisseur finie. On présente dans la Figure 3.9 l’algorithme implémenter qui tient en compte les termes d’atténuation dans chaque pli et les matrices d’interfaces déjà calculées dans la première phase.

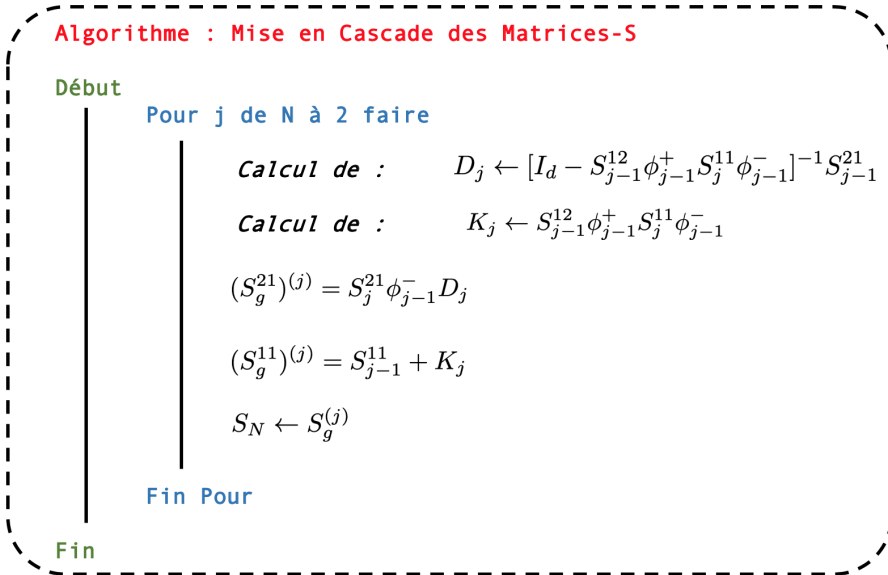


FIGURE 3.9 – Algorithme de mise en cascade des interfaces inférieures.

Un des avantages de l'algorithme des matrices-S est que la taille des matrices de diffusion à calculer dans chaque itération dans les deux parties de l'algorithme est indépendante du nombre de couches de la structure. En effet, on peut remarquer qu'à chaque itération, les S_{int}^p sont toujours des matrices carrées de taille $4Dim$.

3.4.4 Calcul de la réponse du capteur

On s'intéresse maintenant au calcul de la réponse de la sonde en présence du conducteur. En particulier, on recherche la variation d'impédance ΔZ par rapport à la configuration de référence (calcul dans l'espace libre en absence de plaque conductrice). Dans ce cas où une unique sonde est présente et joue à la fois le rôle d'émetteur et de récepteur, [99, 81] B. A. Auld et J. C. Moulder ont montré [Auld 1999] que la variation d'impédance de la sonde s'écrit :

$$\Delta Z = Z - Z_{ref} = \frac{1}{I_0^2} \iint_{S_F} (\mathbf{E}^{ref} \times \mathbf{H} + \mathbf{H}^{ref} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} ds. \quad (3.118)$$

où I_0 désigne l'amplitude du courant imposé dans la sonde, S_F la surface fermée représentée en coupe sur la Figure (4.10) et \mathbf{n} le vecteur unitaire normal et sortant de la surface S_F .

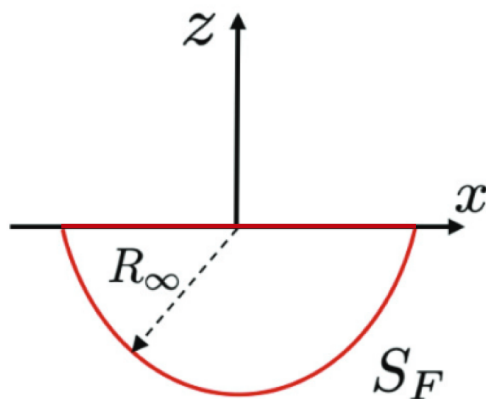


FIGURE 3.10 – Surface de calcul d'impédance.

Le choix de la surface S_F étant arbitraire, on peut faire tendre le rayon du demi-cylindre ainsi que sa hauteur vers l'infini ou, en pratique vers des valeurs assurant que les champs électromagnétiques soient nuls sur la partie cylindrique de S_F ainsi que sur ses parois verticales (parallèles au plan xOz). La seule contribution restante est alors la quantité

$$\Upsilon = \iint_{S_c} (\mathbf{E}^{ref} \times \mathbf{H} + \mathbf{H}^{ref} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} ds. \quad (3.119)$$

où S_c désigne l'interface air-conducteur. On a alors :

$$(\mathbf{H}^{ref} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{H}^{ref} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{z} = H_x^{(ref)} E_y - H_y^{(ref)} E_x \quad (3.120)$$

Il est important de noter ici que lorsque l'on travaille dans des bases de coordonnées naturelles, les vecteurs de bases que l'on utilise ne sont pas nécessairement normés, ce qui signifie que les composantes de champ calculées ne représentent pas directement des grandeurs physiques : il faut les diviser par la norme des vecteurs de base. Jusqu'ici, ce problème n'était pas apparu puisque les coefficients de normalisation apparaissaient des deux côtés des équations que l'on souhaitait résoudre (notamment le système traduisant la continuité des composantes tangentielles (4.91)). Ici, on doit travailler avec les champs "physiques", c'est-à-dire normalisés et on doit donc considérer les quantités :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{H} = \frac{1}{Z_0} \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

On a donc obtenu :

$$\Delta Z = E_x^{ref} H_y - E_y^{ref} H_x + H_x^{ref} E_y - H_y^{ref} E_x \, ds \quad (3.122)$$

Finalement, l'expression exacte donnant la variation d'impédance du capteur s'écrit :

$$\Delta Z = \frac{1}{I_0} \int_x \int_y (E_x^{ref} H_y - E_y^{ref} H_x) + (H_x^{ref} E_y - H_y^{ref} E_x) \, dx dy \quad (3.123)$$

L'intégrale est alors calculée numériquement à l'aide de la formule des trapèzes.

Si on se place dans le cas d'un capteur à deux bobines, une émettrice et une réceptrice, on utilise un modèle numérique implémenté dans **CIVA**. Il consiste à introduire un champ fictif dans la bobine réceptrice considéré comme un champ de référence et calcul l'impédance via la formule :

$$Z = Z_{piece} + j * [2\pi * f * M_0] \quad (3.124)$$

Le M_0 étant l'inductance mutuelle définit par :

$$M_0 = k \sqrt{(L_1 \cdot L_2)} \quad (3.125)$$

où k est un facteur de couplage compris entre 0 et 1 et qui dépend de la distance entre les bobines et le matériau ainsi que la forme géométrique du capteur [3].

3.5 Validation numérique

On propose dans cette section de valider numériquement le modèle développé. Pour ce faire, on distingue deux cas de configuration différents : celui d'une couche anisotrope plane dont le but est de déterminer l'orientation des fibres à partir de la réponse du capteur et celui d'une structure stratifié avec différentes dispositions des plis dont le but est de déterminer l'orientation des fibres dans chaque couche. Les résultats du modèle sont comparés à des données éléments finis obtenus par *Comsol Multiphysics*.

3.5.1 Cas # 1 : une couche anisotrope plane

On considère une plaque composite homogénéisée dont les fibres ont une orientation de 0° par rapport à l'axe Ox . on propose d'utiliser une sonde constituée de deux bobines rectangulaires identiques comme présenté dans la Figure (3.11), une joue le rôle émettrice et la seconde joue le rôle de réceptrice dont les caractéristiques sont présentées dans les tableaux (3.2) et (3.3). Cette configuration a été utilisée par W. Yin [97] où il ajoute deux noyaux de ferrite aux centres des bobines pour mieux concentrer et intensifier le champ magnétique créé. La forme rectangulaire du capteur a été choisi précisément pour ce cas de configuration. En effet, puisqu'on applique un scan rotationnel, on doit choisir une forme géométrique du capteur qui n'a pas d'axe de révolution (pas de symétrie de révolution autour d'un axe qui est le cas d'une bobine cylindrique)

TABLE 3.2 – paramètres physiques de la plaque.

Paramètres	Symboles	Valeurs
Fréquence	f	0.8 MHz
Courant	I_0	1 A
Longueur	L	10 mm
Largeur	W	5 mm
Hauteur	e	1 mm
No de tours	N	3
Liftoff	l_0	1 mm
Distance	d	10 mm

TABLE 3.3 – Paramètres numériques de calcul

Symboles	Valeurs
M_u	80
M_v	80
x_{max}	32 mm
y_{max}	32 mm
σ_l	1 MS/m
σ_t	0.01 MS/m
σ_n	0.01 MS/m
E	1 mm
θ	0°

Dans cette configuration, on s'intéresse au calcul du module de la variation de l'impédance au niveau de la bobine réceptrice pour caractériser l'axe principale

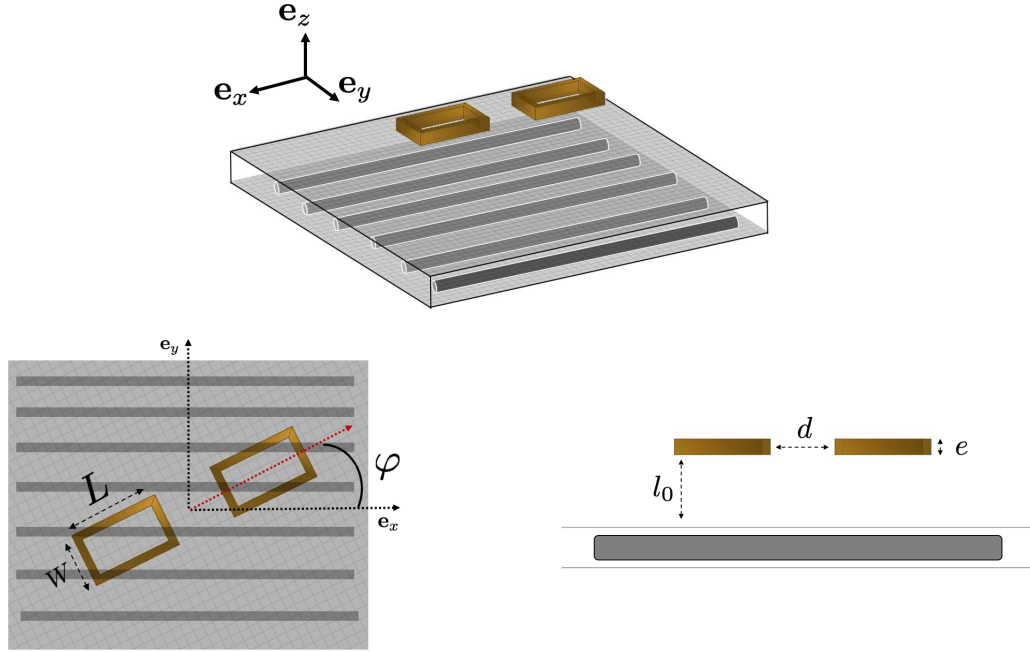


FIGURE 3.11 – Capteur à deux bobines rectangulaires tournant autour de son axe.

d'anisotropie de la pièce.

$$|\Delta Z| = \sqrt{\Delta R^2 + \Delta X^2} \quad (3.126)$$

$$\Delta R = R - R_0 \quad (3.127)$$

$$\Delta X = X - X_0 \quad (3.128)$$

Pour ce faire, on applique une rotation à la sonde (deux bobines solidaires) par rapport à l'axe Oz (O étant le centre de la pièce). La position initiale est telle que l'angle $\varphi = 0^\circ$. Pour la solution donnée par les éléments finis, la méthode de calcul est différente de celle présentée dans la section précédente et est basée sur une approche énergétique. On a en effet :

$$\mathbf{P}_J = \iiint_{\Omega_c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv \quad (3.129)$$

où \mathbf{P}_J est la puissance dissipée par les courants de Foucault et \mathbf{J} la densité de courants induits dans le conducteur. Ω_c désigne le domaine de la pièce conductrice. De plus, on a :

$$\mathbf{P}_M = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv \quad (3.130)$$

où \mathbf{P}_M désigne la puissance magnétique et Ω l'ensemble de l'espace. Ainsi, le calcul numérique de ces deux intégrales volumiques nous permet de calculer directement l'impédance de la sonde dans la configuration considérée. On a en effet $\Re Z_{FEM} = \frac{\mathbf{P}_j}{I^2}$ et $\Im Z_{FEM} = 4\pi f \frac{\mathbf{P}_M}{I^2}$.

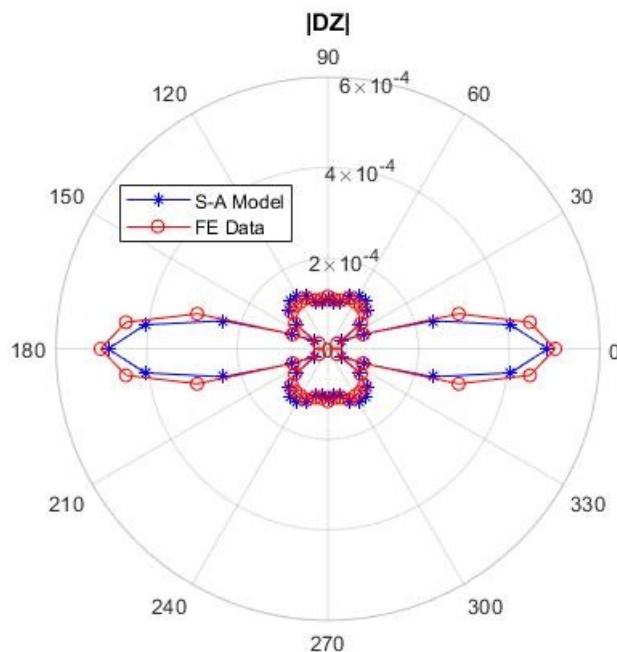


FIGURE 3.12 – Diagramme polaire de la variation d'impédance en ω au borne de la bobine réceptrice.

Dans la Figure (3.12), on présente le diagramme polaire de la variation d'impédance calculée au borne de la bobine réceptrice. la quantité présentée est le module en Ω . Cette configuration a pour avantage d'améliorer sur deux points les performances du contrôle [72].

1. Augmenter la rapidité : avec une sonde classique disposant d'une seule bobine, il sera nécessaire d'augmenter la durée d'inspection, qui peut devenir relativement longue pour Améliorer la résolution. L'utilisation de deux bobines peut pallier ce problème.
2. Réduire l'influence des paramètres perturbateurs : Dans le cas d'une seule bobine, la réponse du capteur est calculée à partir du champ total qui présente la compensation du champ secondaire avec le champ primaire. L'utilisation d'une deuxième bobine, à fonction séparatrice, réduit l'influence de la bobine émettrice et augmente la sensibilité de la bobine réceptrice.

Dans la Figure 3.13, on présente le résultat pour un capteur à un seul élément (une seule bobine a été utilisée). Dans ce cas, la valeur initiale de l'angle de rotation

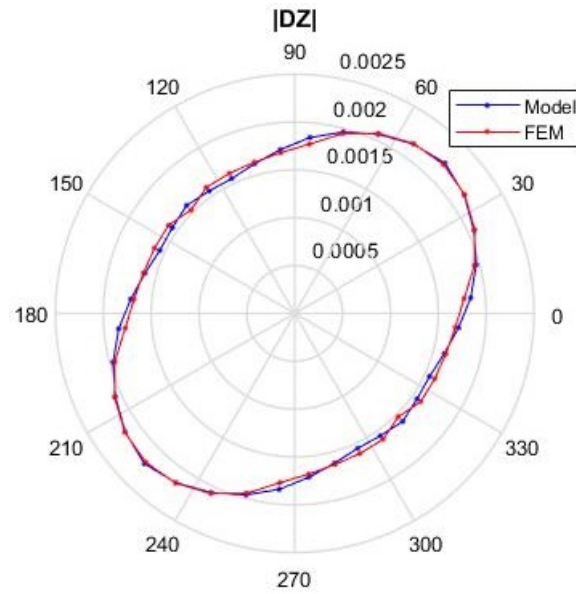


FIGURE 3.13 – Diagramme polaire de la variation d'impédance en ω au borne de la bobine émettrice.

φ est de -45° . De ce fait, l'orientation principale des fibres est considéré 45° ce qui est visible à travers l'orientation de l'axe principale de la courbe elliptique. Enfin, nous calculons la moyenne de l'erreur relative commise en utilisant la formule suivante :

$$\xi = \left| \frac{F^{(modele)} - F^{(FEM)}}{F^{(FEM)}} \right| \quad (3.131)$$

Où $|\cdot|$ est le module en pourcent (%). La comparaison des deux résultats est représentée dans les tables 3.4 et 3.5 pour trois fréquences différentes à la position initiale $\varphi = 0^\circ$ montre un très bon accord.

Fréquences (MHz)	$\Re(Z_{FEM})$	$\Re(Z)$	$\xi(\%)$
0.8	0.00219	0.002	0.45%
1	0.00342	0.0034	0.58%
10	0.2235	0.2227	0.357%

TABLE 3.4 – Partie réelle de l'impédance totale à différentes fréquences.

Fréquences (MHz)	$\Im(Z_{FEM})$	$\Im(Z)$	$\xi(\%)$
0.8	0.5608	0.562	0.213%
1	0.533	0.529	0.75%
10	5.2012	5.1687	0.624%

TABLE 3.5 – Partie imaginaire de l'impédance totale à différentes fréquences.

3.5.2 Cas # 2 : milieu stratifié anisotrope plan

On considère maintenant une structure anisotrope constituée de quatre couches anisotropes comme présentée dans la Figure (3.14). On choisit arbitrairement la séquence d'orientation est $[45^\circ, 0^\circ, 90^\circ, -45^\circ]$. On s'intéresse dans cette configuration au calcul du champ induit dans l'échantillon ainsi que la densité de courant à des profondeurs différentes. On se limite donc à un seul capteur circulaire à section carré dont les caractéristiques géométriques sont présentées dans TABLE (3.6) et (3.7).

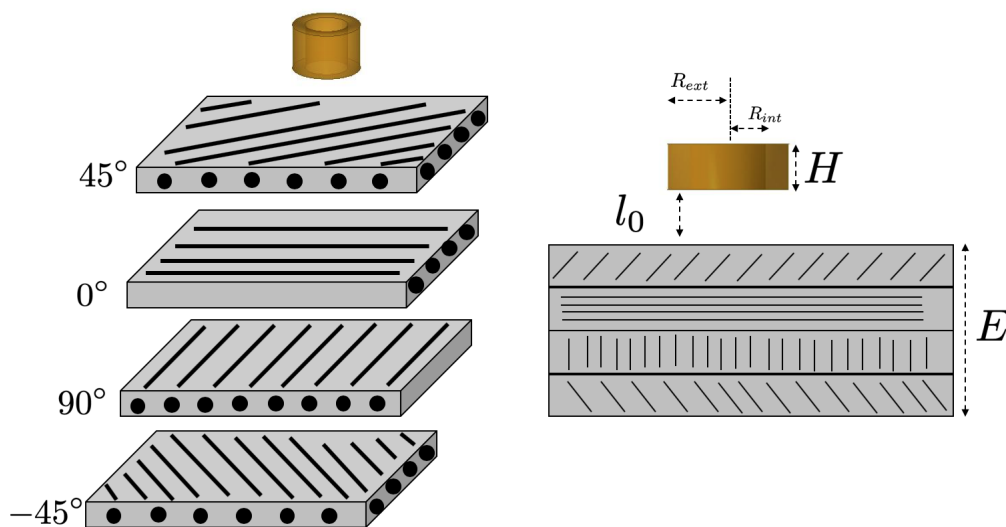


FIGURE 3.14 – Pomposite multicouches plan avec différentes orientations de fibres.

Dans les Figures 3.15-3.19, on présente une vue de coupe des parties réelles et imaginaires des différents composants du champ. Le calcul a été fait en trois différentes profondeurs dans l'échantillon. On utilise la formule suivante pour calculer l'erreur quadratique entre les données simulées du modèle et celles d'éléments finis. Le résultat est présenté dans les tableaux 4.18 et 4.19.

TABLE 3.6 – Paramètres physiques de la plaque.

Paramètres	Symboles	Valeurs
Fréquence	f	1 MHz
Courant	I_0	1 A
Rayon intérieur	L	2 mm
Rayon extérieur	L	6 mm
Hauteur	e	2 mm
No de tours	N	50
Lift-off	l_0	0.8 mm

TABLE 3.7 – Paramètres numériques de calcul

Symboles	Valeurs
M_u	35
M_v	35
x_{max}	23 mm
y_{max}	23 mm
σ_l	1 MS/m
σ_t	0.001 MS/m
σ_n	0.001 MS/m
E	1 mm
θ	[45°, 0°, 90°, -45°]

$$\xi = \sqrt{\frac{\|F_{FEM} - F_{Modele}\|_{L_2}}{\|F_{FEM}\|_{L_2}}} \quad (3.132)$$

Profondeur [mm]	$\xi(\%) H_x$	$\xi(\%) H_y$	$\xi(\%) H_z$
0	0.88	0.75	0.79
0.4	1	0.987	1.1
0.8	1.48	1.45	1.41

TABLE 3.8 – Erreur sur la norme des composantes du champ magnétique.

Profondeur [mm]	$\xi(\%) E_x$	$\xi(\%) E_y$	$\xi(\%) E_z$
0	1.2	1.04	4.2
0.4	2.34	2.03	5.8
0.8	2.5	2.36	6.76

TABLE 3.9 – Erreur sur la norme des composantes du champ électrique.

De plus, on calcul les composantes spatiales de la densité de courant :

$$J_x = \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y \quad (3.133a)$$

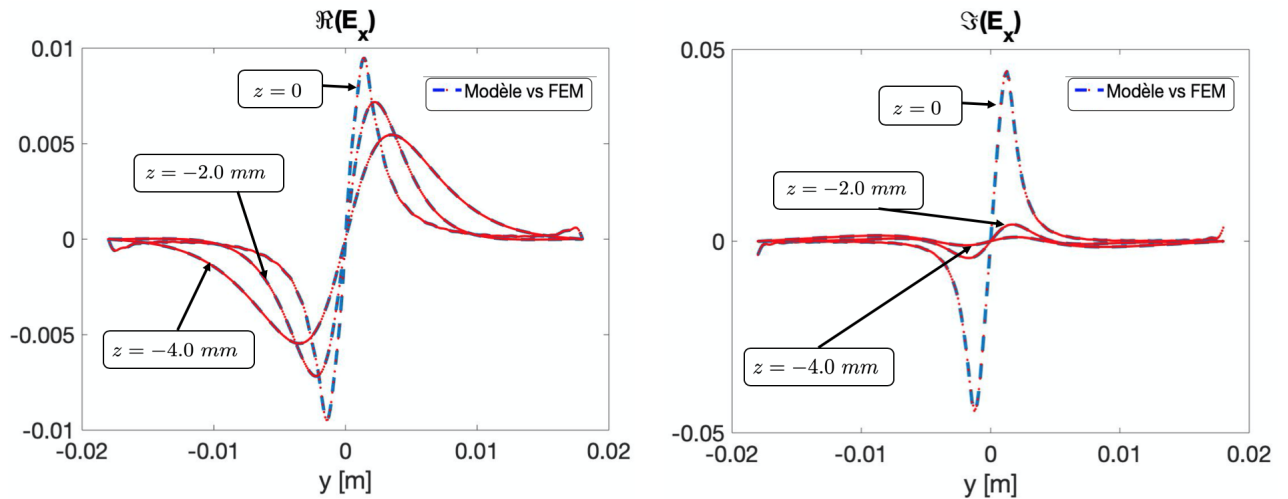
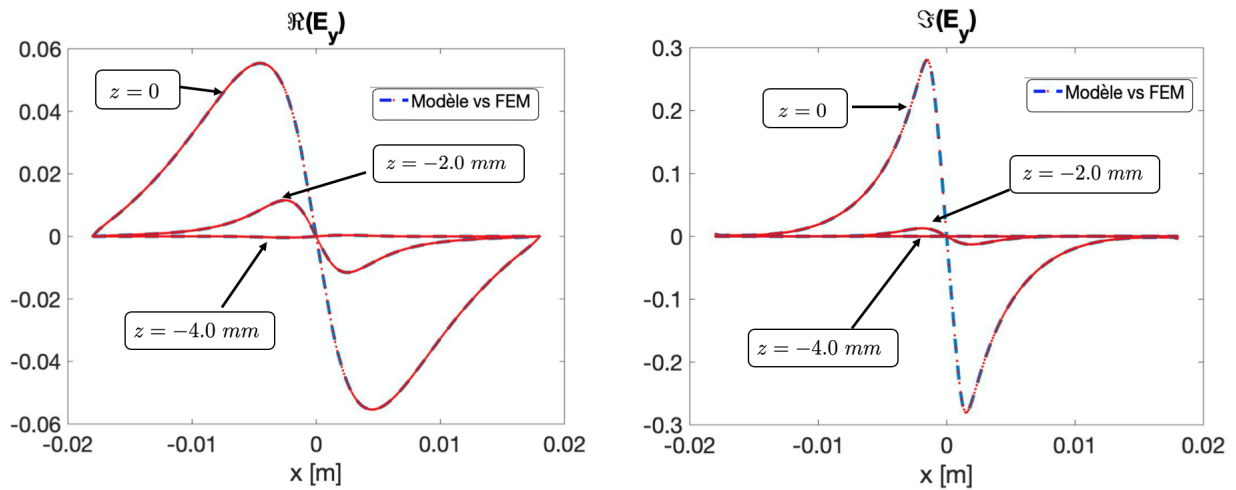
$$J_y = \sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y \quad (3.133b)$$

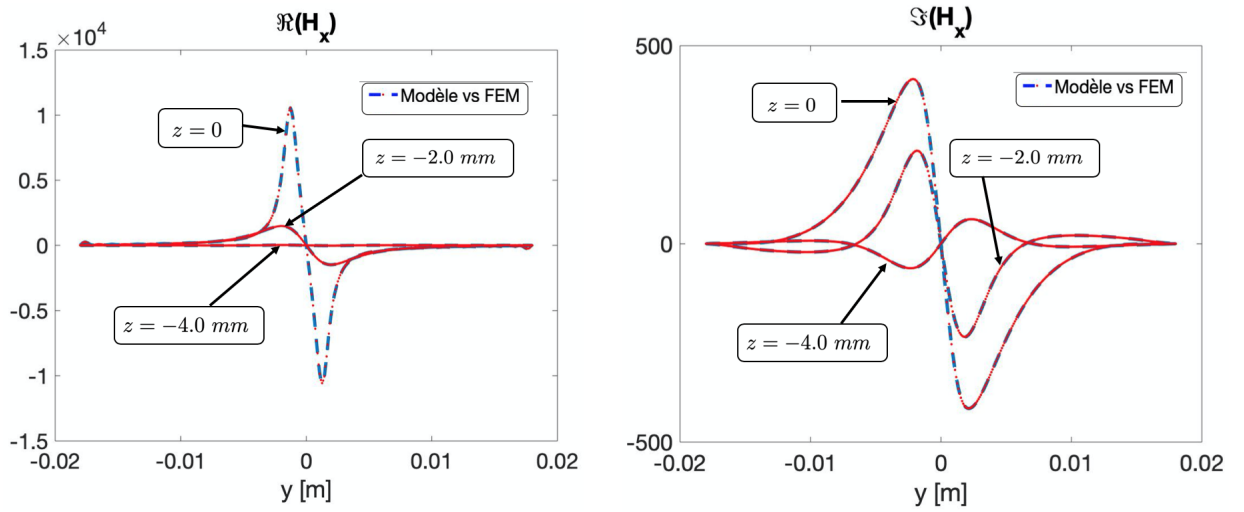
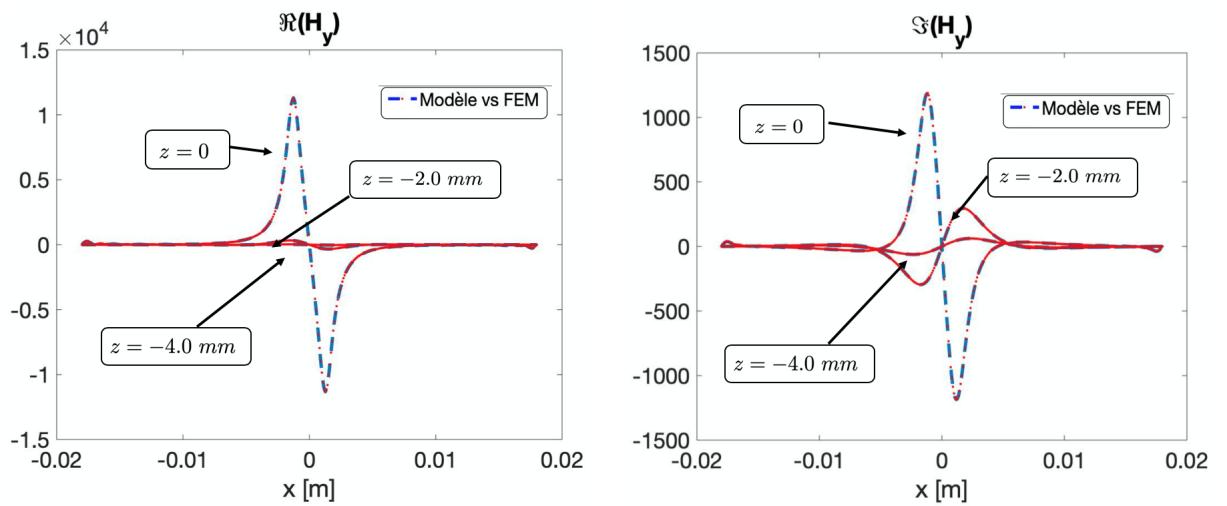
$$J_z = \sigma_{zz}E_z \quad (3.133c)$$

Les σ_{ij} sont les conductivités de la couche dans la quelle on effectue le calcul. Dans les Figures 3.20-3.23 on présente la norme de la densité de courant sur quatre plans d'équation $z = z_0$ au milieu de chaque pli.

Profondeur [mm]	$\xi(\%) J$
0	1.76
0.4	1.81
0.8	1.87

TABLE 3.10 – Erreur sur la densité de courants à différentes profondeurs

FIGURE 3.15 – Partie réelle et imaginaire de E_x à différentes profondeursFIGURE 3.16 – Partie réelle et imaginaire de E_y à différentes profondeurs

FIGURE 3.17 – Partie réelle et imaginaire de H_x à différentes profondeursFIGURE 3.18 – Partie réelle et imaginaire de H_y à différentes profondeurs

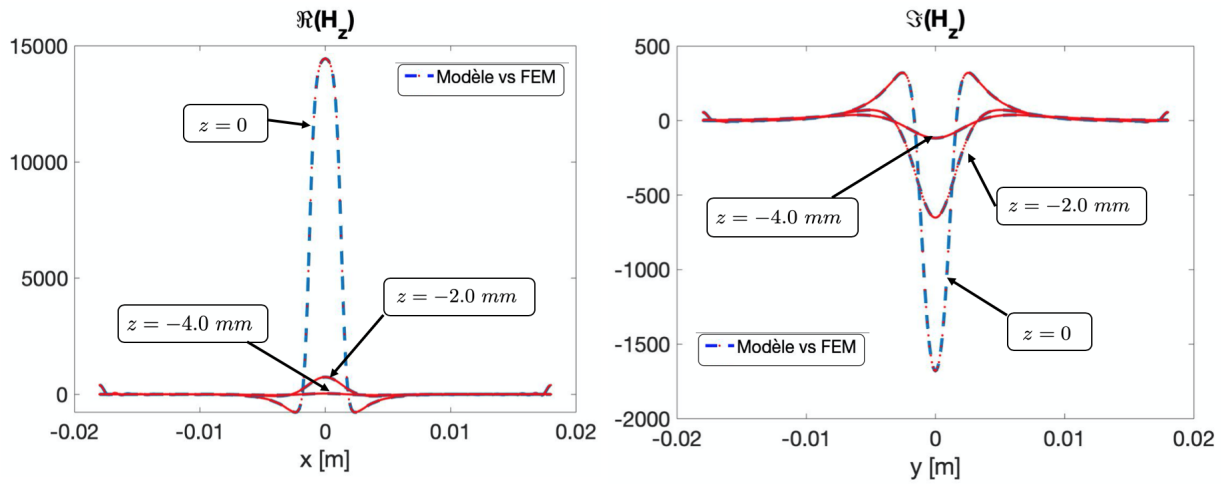


FIGURE 3.19 – Partie réelle et imaginaire de H_z à différentes profondeurs

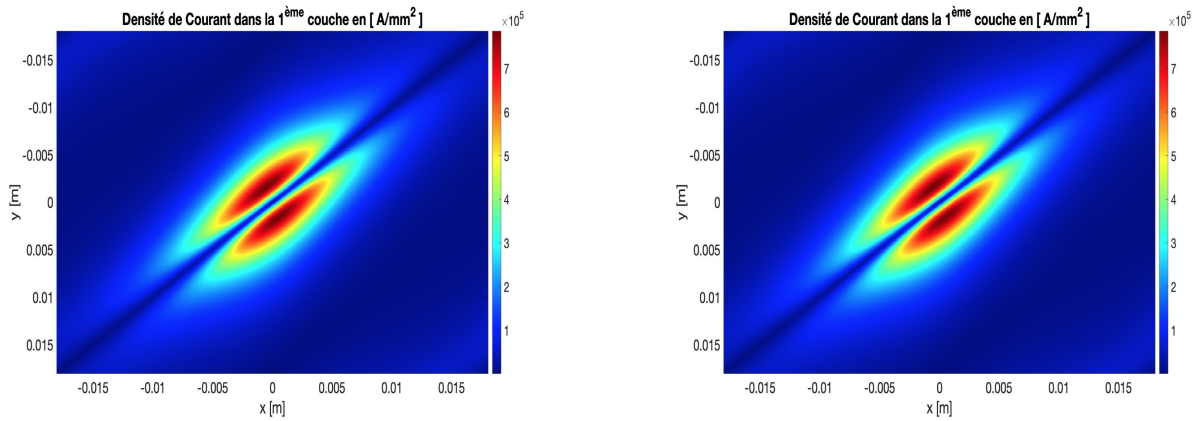
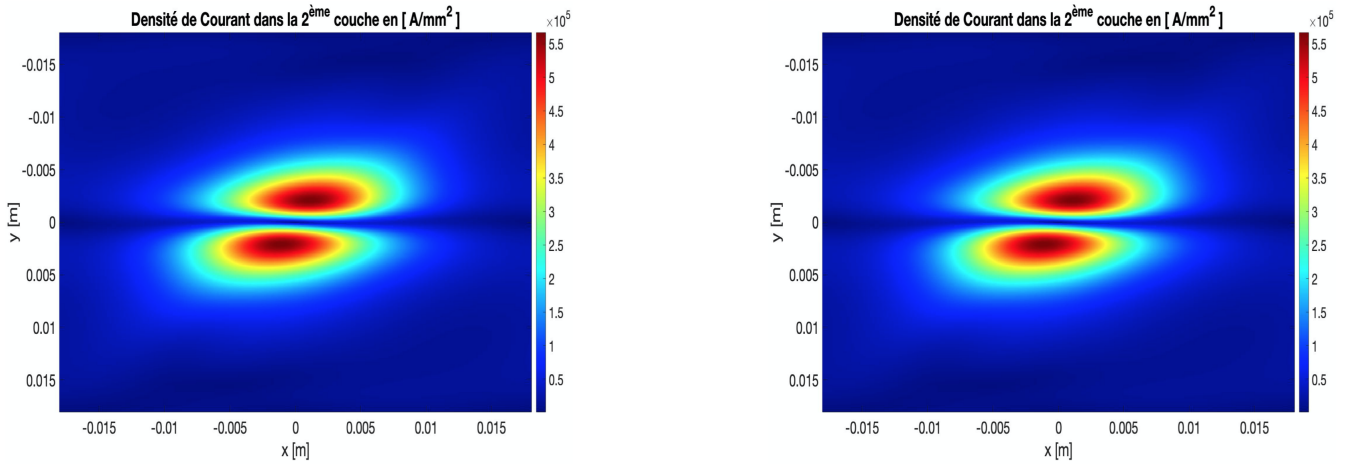
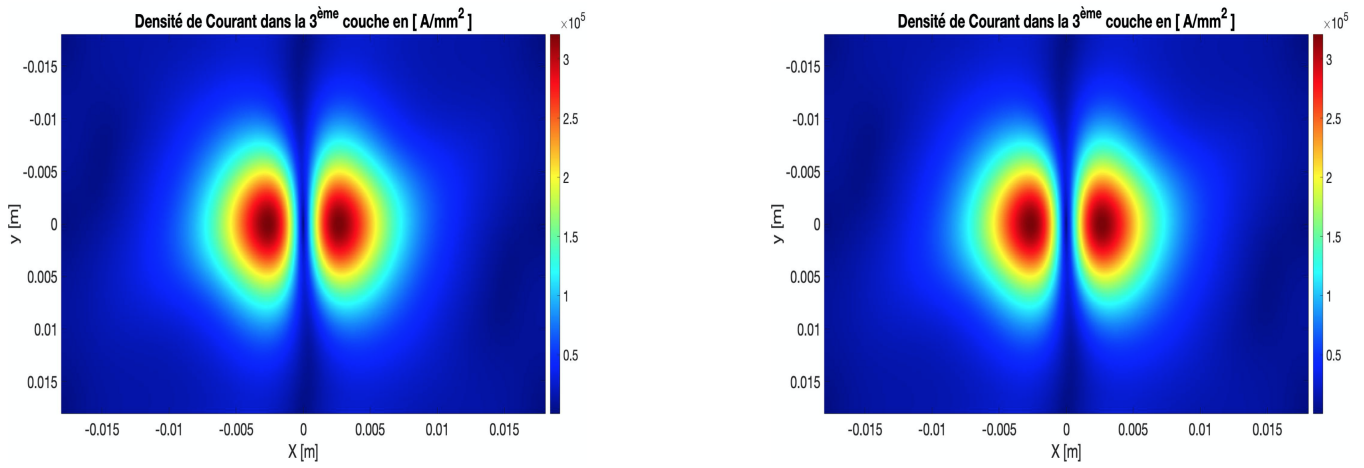
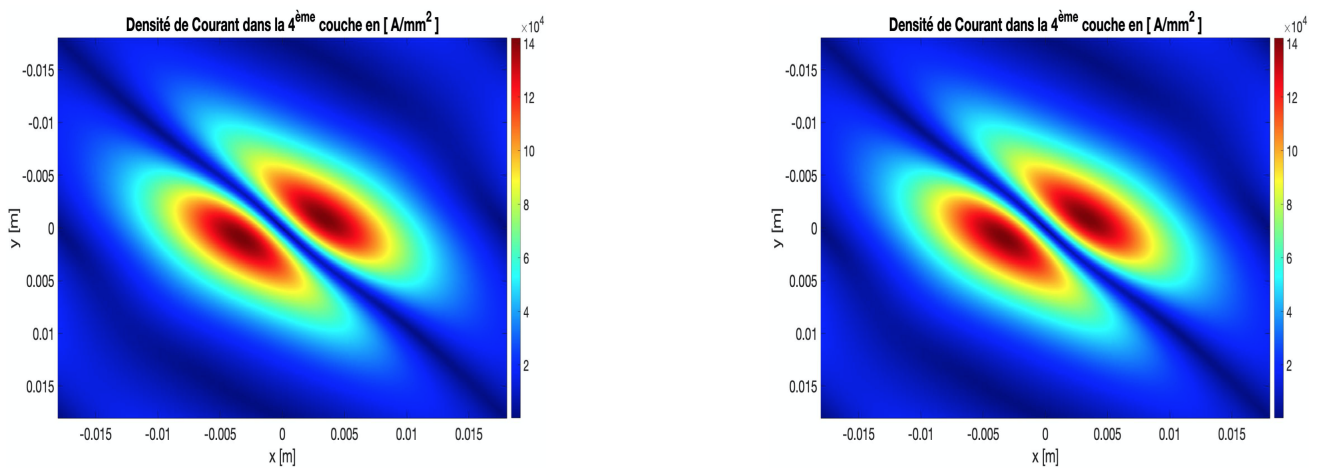


FIGURE 3.20 – Densité de courant à la profondeur $z = -0.5$ mm : Modèle vs FEM.

FIGURE 3.21 – Densité de courant à la profondeur $z = -1.5\text{mm}$ FIGURE 3.22 – Densité de courant à la profondeur $z = -2.5\text{mm}$ FIGURE 3.23 – Densité de courant à la profondeur $z = -3.5\text{mm}$

3.6 Bilan

Nous avons donc validé le modèle développé afin de traiter des pièces à propriétés conductrices anisotropes quelconques, homogènes et à interfaces planes. La comparaison avec une solution numérique obtenue par une méthode des éléments finie montre que ce modèle permet de calculer les champs électromagnétiques induits dans la pièce, ainsi que l'impédance de la sonde de manière rapide et précise pour différentes positions du capteur et pour différentes fréquences de travail.

Ce modèle constitue de plus une première partie de la caractérisation d'un matériau composite unidirectionnel à fibres conductrices. Comme nous l'avons déjà expliqué dans l'introduction, ce type de configuration présente un intérêt important dans la communauté du contrôle non destructif par courants de Foucault, en particulier pour l'identification des orientations des plis d'un composite. Cependant, cette solution approchée ne permettrait pas de traiter le cas d'un échantillon ayant un défaut ce qui rend la performances insuffisantes. On propose dans le chapitre suivant un modèle plus unifiant et plus générique qui traite le cas général d'un conducteur anisotrope à surface complexe afin de modéliser les défauts liés à la déformation de la géométrie de la pièce.

Chapitre 4

Calcul du champ induit dans un conducteur stratifié à géométrie complexe

Sommaire

4.1	Introduction	85
4.2	Méthode de Coordonnées Curvilignes	86
4.2.1	Système de Translation	86
4.2.2	Formalisme covariant des équations de Maxwell	88
4.2.3	Covariance et Contravariance	89
4.3	Conducteur isotrope à géométrie complexe	91
4.3.1	Mise en équations	91
4.3.2	Décomposition TE_w/TM_w	92
4.3.3	Équations de propagation modifiée	95
4.4	Conducteur anisotrope à géométrie complexe	97
4.4.1	Formalisme et équations	97
4.4.2	Écriture Modale	98
4.4.3	Conditions de passage	104
4.5	Résolution numérique	106
4.5.1	Calcul des matrices de convolution	107
4.5.2	Calcul champ source	111
4.5.3	Cas des interfaces non parallèles	113
4.5.4	Calcul de l'impédance	118
4.6	Validation numérique	120
4.6.1	Perturbation 3D : strates parallèles	121
4.6.2	Perturbation 3D : cas de surface complexe et un plan	127

4.6.3	Perturbation 2D5	132
4.7	Bilan	137

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous venons de développer un modèle numérique spécifiquement dédié au calcul du champ induit par un capteur CF 3D dans une pièce conductrice anisotrope et homogène à surfaces planes. Néanmoins, ce modèle ne répond pas à tous les besoins industriels. En effet, il existe des différents types de défauts, liés à la déformation géométrique de la pièce, du type délaminage ou ondulation hors-plan des fibres qui peuvent apparaître dans un composite (cf sous section 2.1.3). Dans les travaux antérieurs de F. Caire [21], un modèle numérique basé sur le formalisme potentiel vecteur de second ordre a été développé pour le calcul du champ induit dans un conducteur isotrope et homogène à surfaces complexes 2D5 (la pièce éclairée par un capteur 3D et présente une variation géométrique selon un premier axe transversal et extrudée selon le second axe). L'approche semi-analytique a été basée sur une représentation modale des potentiels vecteurs dans un système de coordonnées non-orthogonal. Des travaux de recherche menés par D. Prémel [30, 69, 68] traitent le cas général d'un conducteur isotrope à surface complexe 3D : une décomposition TE/TM en potentiel du champ a été considéré et la résolution numérique du problème se réduit à la détermination de l'équation de propagation des potentiels.

Dans ce chapitre, on propose d'étendre le modèle existant pour tenir compte de l'anisotropie du milieu à surfaces complexes a-périodiques. La stratégie qu'on va exposer se décompose en deux étapes : la première consiste à déterminer des solutions propres de l'équation de Helmholtz en coordonnées curvilignes générales dans les milieux isotropes. Dans les milieux anisotropes, une décomposition de type TE/TM n'est plus applicable : on ne peut plus extraire une équation de propagation particulière en vu du couplage entre les composantes du champ. On mettra en avant alors la généralisation du formalisme présenté dans le chapitre précédent aux milieux anisotropes à surfaces complexes.

On considère au premier lieu une interface complexe quelconque, présentée dans la Figure 4.1, qui sépare deux milieux conducteurs homogènes Ω_1 et Ω_2 . La source électromagnétique est une bobine 3D circulaire à section carrée. Étant non magnétiques, les deux milieux sont caractérisés par une perméabilité magnétique relative constante. De même que le chapitre précédent, le champ totale dans Ω_1 est la superposition du champ incident et sa partie réfléchi. Dans Ω_2 , le champ totale se restreint à l'onde transmise par l'interface séparatrice.

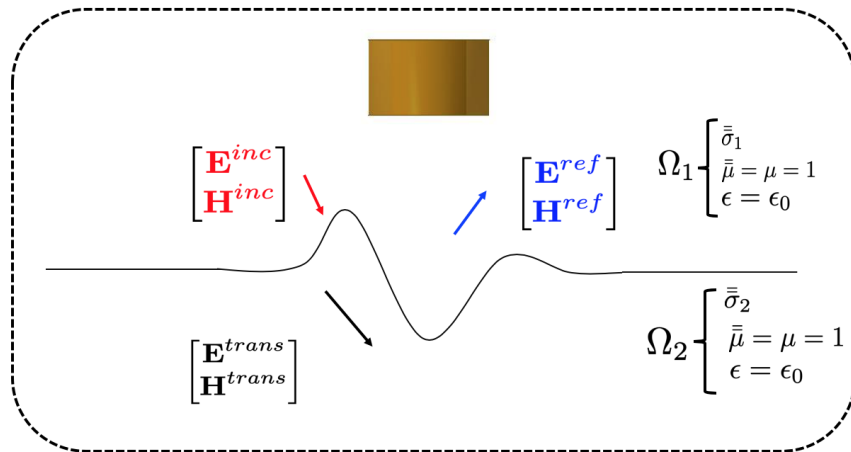


FIGURE 4.1 – Vue de coupe : interface complexe séparant 2 milieux différents.

4.2 Méthode de Coordonnées Curvilignes

4.2.1 Système de Translation

Dans l'espace euclidien d'origine O et vecteur de base $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, considérons une surface (Σ) infinie selon les deux axes transversaux. Cette surface sépare deux milieux linéaires homogènes notés (1) et (2) comme le montre la Figure (4.2). Le demi-espace conducteur est considéré comme homogène de conductivité non nulle. En coordonnées cartésiennes, une telle surface peut être décrite par l'équation

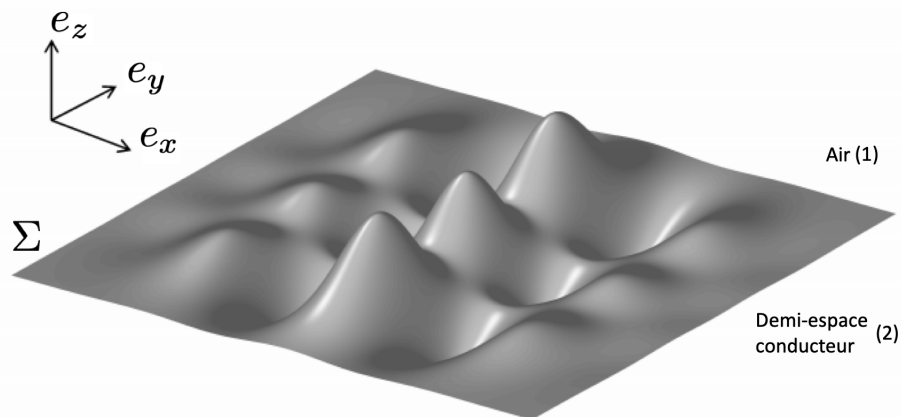


FIGURE 4.2 – Demi espace conducteur à surface complexe.

$z = a(x, y)$. Tout champ électromagnétique interagissant avec cette géométrie

particulière satisfait certaines conditions aux limites. Par exemple, les composantes tangentielles du vecteur de champ électrique et la composante normale du vecteur de champ de déplacement sont continues à la surface. En fait, il faut retenir que les conditions aux limites impliquent des quantités qui dépendent évidemment de la position à la surface à laquelle elles sont considérées. Nous sommes ainsi amenés à proposer un nouveau système de coordonnées qui s'adapte au problème et le rend plus facile à résoudre que dans un cadre cartésien. On définit la transformation directe (coordonnées curvilignes en coordonnées cartésiennes) :

$$\begin{cases} x = x^1 \\ y = x^2 \\ z = x^3 + a(x, y) \end{cases} \quad (4.1)$$

et la transformation inverse (coordonnées cartésiennes en coordonnées curvilignes) :

$$\begin{cases} x^1 = u = x \\ x^2 = v = y \\ x^3 = w = z - a(x, y) \end{cases} \quad (4.2)$$

Un des avantages de ce système de translation est la simplification du traitement des conditions de passage. En effet, la surface $z = a(x, y)$ coïncide avec la surface de coordonnées $x^3 = 0$. Le point $M(x, y, z = a(x, y))$ situé à la surface (Σ) est maintenant référencé par le triplet $(x^1, x^2, 0)$. Chaque surface d'équation $x^3 = x_0^3$, ($x_0^3 \in \mathbb{R}$), est obtenue en traduisant chaque point à la surface (Σ) avec le vecteur $x_0^3 \mathbf{e}_z$ d'où le nom donné par Chandezon à ce système de coordonnées particulier : système de coordonnées de translation. Les composantes du champ électromagnétique impliquées dans la résolution des conditions aux limites sont tangentes à la surface diffractante d'équation $x^3 = x_0^3$. Dans un tel système, un vecteur $\mathbf{V} = [V_x, V_y, V_z]^T$ peut être exprimé par ses coordonnées covariantes ou contravariantes (voir annexe A). Les composantes covariantes du vecteur \mathbf{V} sont données en fonction des composantes cartésiennes par les relations suivantes.

$$\begin{cases} V_{x^1}(x^1, x^2, x^3) = V_x(x, y, z) + \frac{\partial a(x, y)}{\partial x} V_y(x, y, z) \\ V_{x^2}(x^1, x^2, x^3) = V_y(x, y, z) + \frac{\partial a(x, y)}{\partial y} V_y(x, y, z) \\ V_{x^3}(x^1, x^2, x^3) = V_z(x, y, z) \end{cases} \quad (4.3)$$

Les dérivées partielles du profil analytique $a(u, v)$ sont notées par :

$$\dot{a}_u = \frac{\partial a(u, v)}{\partial u} \quad (4.4a)$$

$$\dot{a}_v = \frac{\partial a(u, v)}{\partial v} \quad (4.4b)$$

Ce changement de coordonnées peut également être considéré comme un changement de variable. Ce point de vue permet une meilleure compréhension du comportement numérique de la méthode de coordonnées curvilignes.

4.2.2 Formalisme covariant des équations de Maxwell

Comme déjà évoqué, les équations de Maxwell décrites à l'aide du formalisme de Maxwell-Minkowski-Post sont invariantes par changement de coordonnées. Dans le système de coordonnées curvilignes non orthogonales (u, v, w) , ces équations sont écrites :

$$\begin{cases} \xi^{l,m,n} \partial_m E_n = -\partial_t B^l, \\ \partial_l B^l = 0, \\ \xi^{l,m,n} \partial_m H_n = \partial_t D^l + J^l, \\ \partial_i D^i = \rho, \end{cases} \quad (4.5)$$

où $l, m, n = 1, 2$ ou 3 et $\xi^{l,m,n}$ désigne l'indicateur de Lévi-Civita et $J^l = J_s^l + J_i^l$, où J_s désigne la densité de courant au niveau de la sonde (source) et J_i la densité de courants induits au niveau du conducteur. La densité de courant J_s est imposée au niveau de la sonde et celle-ci est nulle dans toute autre zone de l'espace. On cherche à calculer les champs dans les zones extérieures à la sonde. La densité de courant source peut donc être supprimée des équations qu'on considère. De plus, dans le cadre du contrôle non destructif par courants de Foucault classique, le courant d'injection imposé au niveau de la sonde est sinusoïdal de pulsation ω . On travaillera alors en régime harmonique et la dépendance en t des différentes grandeurs physiques sera représentée par le facteur $e^{i\omega t}$, avec $i = \sqrt{-1}$, on s'intéresse alors aux deux équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère suivantes :

$$\xi^{l,m,n} \partial_m E_n = i\omega B^l, \quad (4.6a)$$

$$\xi^{l,m,n} \partial_m H_n = J_i^l - i\omega D^l, \quad (4.6b)$$

Les relations de milieu dans le cas d'un matériau homogène, linéaire et isotrope et ne comportant pas de source de courant s'écrivent :

$$\begin{cases} D^l = \varepsilon g^{lm} E_m, \\ B^l = \mu g^{lm} H_m, \\ J_i^l = \sigma g^{lm} E_m, \end{cases} \quad (4.7)$$

où ε , μ et σ désignent respectivement la permittivité électrique, la perméabilité magnétique et la conductivité électrique du matériau. On peut alors réinjecter ces expressions dans les équations (4.6a) et (4.6) et l'on obtient des équations portant uniquement sur les composantes covariantes des champs \mathbf{E} et \mathbf{H} :

$$\mu \partial_l g^{lm} H_m = 0, \quad (4.8)$$

$$\xi^{l,m,n} \partial_m E_n = i\omega \mu g^{lm} H_m, \quad (4.9)$$

$$\xi^{l,m,n} \partial_m H_n = (\sigma - i\omega \varepsilon) g^{lm} E_m, \quad (4.10)$$

On pose alors $\varsigma = \sigma - i\omega \varepsilon$ afin de simplifier les relations. On peut noter que dans le cadre du contrôle non destructif par courants de Foucault, les ordres de grandeur des conductivités et des fréquences d'excitation mises en jeu permettent d'écrire que $\varsigma \equiv \sigma$ dans le milieu conducteur. En revanche, dans l'air, on va considérer que $\varsigma \equiv -i\omega \varepsilon$, et non $\varsigma = 0$. Ce choix nous permet de développer un formalisme valable à la fois dans l'air et dans le conducteur.

4.2.3 Covariance et Contravariance

Définissons maintenant une nouvelle base d'un espace euclidien E de dimension n que l'on notera e'_i et qui se déduit de la précédente par les relations linéaires :

$$e'_j = B_j^i e_i \text{ et } e_i = A_i^j e'_j, \quad (4.11)$$

Où B_j^i et A_i^j forment les matrices inverses l'une de l'autre. Les bases duales de ces deux bases se déduisent alors l'une de l'autre par des relations analogues mais en inversant les deux matrices mises en jeu, i.e :

$$\bar{e}^{j'} = A_i^j \bar{e}^i \text{ et } \bar{e}^i = B_j^i \bar{e}^{j'} = \bar{e}^{j'} \quad (4.12)$$

Ceci se montre aisément en considérant un vecteur quelconque \mathbf{x} de E et en écrivant que :

$$\bar{\mathbf{e}}^{j'}(x) = \bar{\mathbf{e}}^{j'}(x^i \mathbf{e}_i) = \bar{\mathbf{e}}^{j'}(A_k^i e'_k) x^i = A_k^i \bar{\mathbf{e}}^{j'}(e'_k) x^i = A_k^i \delta_k^j x^i = A_i^j x^i \quad (4.13)$$

Or, on a $x^i = \bar{e}^i(x)$ par définition. Comme l'égalité est vérifiée quelque soit x , on a donc montré la première relation de (A.5). La seconde se démontre de manière analogue. Si on considère maintenant deux éléments quelconques : l'un de E (noté x) et l'autre de E^* (noté \bar{x}), et que l'on définit leurs coordonnées respectives dans les différentes bases considérées comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = x^i \mathbf{e}_i = x^{i'} \mathbf{e}_{j'} \\ \bar{\mathbf{x}} = x_i \bar{\mathbf{e}}^i = x_{i'} \bar{\mathbf{e}}^{i'} \end{cases} \quad (4.14)$$

on montre en réinjectant les différentes expressions de changement de base dans les expressions précédentes que l'on a :

$$\begin{cases} x^i = B_j^i x^{j'} \\ x^{j'} = A_i^j x^i \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_i = A_j^i x_{j'} \\ x_{j'} = B_j^i x_i \end{cases} \quad (4.15)$$

Où l'on voit que les composantes de $\bar{\mathbf{x}}$ évoluent dans le même sens que les vecteurs de base de E . On dit qu'elles évoluent de façon covariante par rapport à ces vecteurs. Inversement, les composantes de x évoluent dans le sens contraire des vecteurs de base de E . On dit qu'elles évoluent de façon contravariante par rapport à ces vecteurs.

E. J. Post et J. Chandezon ont donné la structure tensorielle des composantes des champs F et G que nous avons identifiées aux composantes spatiales des champs électromagnétiques. Pour ce faire, la stratégie est toujours la même : on observe comment sont transformées ces composantes, le postulat de base étant que $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ et $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ sont respectivement les composantes covariantes et contravariantes de deux tenseurs d'ordre deux de l'espace de Minkowski. Ajoutons qu'on se limite ici à des transformations spatiales et holonômes, c'est-à-dire pouvant être représentées par des matrices agissant sur les vecteurs de base de type spatial uniquement. Autrement dit, la caractérisation de ces composantes dans ce cadre se ramène à l'étude de leur transformation par un changement de base à 4 dimensions, représenté par une matrice de changement de base de la forme :

$$\tilde{A}_v^\mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & A_j^i & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

où A_j^i est une matrice de changement de base tri-dimensionnelle. Sa matrice inverse est notée C_j^i . Chandezon donne les résultats de l'étude de ces transformations sur les différentes composantes des champs :

	Comportement	Type de composantes	Type de l'objet
E_i	$E'_j = A_j^i E_i$	covariante	tenseur
H_i	$H'_j = A_j^i H_i$	covariante	tenseur
B^i	$B'^j = C_j^i B^i$	contravariante	pseudo-tenseur
D^i	$D'^j = C_j^i D^i$	contravariante	pseudo-tenseur

F.Caire présente une démonstration pour les composantes E_i sous forme d'un exercice calculatoire.

4.3 Conducteur isotrope à géométrie complexe

4.3.1 Mise en équations

La translation décrite ci-dessus fait introduire une nouvelle métrique à déterminer. Pour ce faire, nous calculons tout d'abord la matrice de transformation jacobienne qui nous permet d'exprimer la composante covariante du vecteur en fonction de la composante cartésienne [70]. La matrice jacobienne transformée est donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dot{a}_u & \dot{a}_v & 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

On obtient le tenseur global g_{ij} donné par :

$$g_{ij} = A^t * A = \begin{bmatrix} 1 + \dot{a}_u^2 & \dot{a}_u \dot{a}_v & \dot{a}_u \\ \dot{a}_u \dot{a}_v & 1 + \dot{a}_v^2 & \dot{a}_v \\ \dot{a}_u & \dot{a}_v & 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Par définition, le tenseur métrique est donné par :

$$[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\dot{a}_u \\ 0 & 1 & -\dot{a}_v \\ -\dot{a}_u & -\dot{a}_v & 1 + \dot{a}_u^2 + \dot{a}_v^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & g^{13} \\ 0 & 1 & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Finalement, les équations de Maxwell à résoudre dans le nouveau système de coordonnées s'écrivent :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -ik\mu\sqrt{g\bar{g}}\mathbf{G} \quad (4.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{G} = -ik\varepsilon\sqrt{g\bar{g}}\mathbf{E} \quad (4.21)$$

où $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_r - \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega}$ et l'opérateur $\nabla \times$ s'écrit comme en coordonnées cartésiennes :

$$\nabla \times \Phi = \begin{bmatrix} 0 & -\partial_w & \partial_v \\ \partial_w & 0 & -\partial_u \\ -\partial_v & \partial_u & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_u \\ \phi_v \\ \phi_w \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

où (ϕ_u, ϕ_v, ϕ_w) sont les composantes covariantes du vecteur Φ et g est le déterminant de $[g^{ij}]$ donné par :

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & g^{13} \\ 0 & 1 & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{vmatrix} \quad (4.23)$$

En se plaçant dans un milieu isotrope (le cas de l'air au-dessus et au-dessous de la structure composite), il n'y a en fait aucune différence dans la manière de dériver les solutions élémentaires de l'équation scalaire de Helmholtz en coordonnées cartésiennes ou en systèmes de coordonnées de translation. Les deux sont des vecteurs propres d'un problème de valeurs propres avec des conditions aux limites pseudo-périodiques [6]. Dans les deux cas, le problème des valeurs propres de l'opérateur est transformé en problème de valeurs propres de la matrice grâce à la méthode de Galerkin. Par conséquent, la résolution de l'équation scalaire de Helmholtz dans n'importe quel système de coordonnées est la toute première étape lors de la mise en œuvre de la méthode-C. Dans les deux paragraphes suivants, on détermine une décomposition modale en potentiel des composantes covariantes du champ puis on propose de déterminer l'équation de propagation dans le nouveau système de coordonnées.

4.3.2 Décomposition TE_w/TM_w

On adopte la même démarche de décomposition en potentiel scalaire que le chapitre précédent (polarisation de l'onde diffractée) : en remarquant que le tenseur métrique est indépendant de la composante x^3 , on exprime les composantes covariantes E_u, E_v, G_u et G_v en fonction des deux potentiels E_w et G_w . Dans toute la suite, on propose une écriture compacte des équations. On considère alors une décomposition du champ selon cet axe :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + E_w \mathbf{x}^3 \quad (4.24)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_t + G_w \mathbf{x}^3 \quad (4.25)$$

On désigne par E_w et G_w les deux composantes longitudinales selon l'axe \mathbf{x}^3 . On pose l'opérateur transverse ∇_t tel que : $\nabla = \nabla_t + \partial_w \mathbf{x}^3$. On effectue alors la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} (\nabla_t + \partial_w \mathbf{x}^3) \times (\mathbf{E}_t + E_w \mathbf{x}^3) &= -ik\mu\sqrt{g} g^{ij} (\mathbf{G}_t + G_w \mathbf{x}^3) \\ (\nabla_t + \partial_w \mathbf{x}^3) \times (\mathbf{G}_t + G_w \mathbf{x}^3) &= +ik\varepsilon\sqrt{g} g^{ij} (\mathbf{E}_t + E_w \mathbf{x}^3) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Où μ et ε sont des constantes. On partitionne la matrice g^{ij} en :

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} I_d & g^{tw} \\ g^{wt} & g^{ww} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

où I_d est l'opérateur identité. Soit :

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t + \nabla_t \times E_w \mathbf{x}^3 + \partial_w \mathbf{x}^3 \times \mathbf{E}_t = -ik\mu (\mathbf{G}_t + g^{tw} G_w) \quad (4.28)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{G}_t + \nabla_t \times G_w \mathbf{x}^3 + \partial_w \mathbf{x}^3 \times \mathbf{G}_t = +ik\varepsilon (\mathbf{E}_t + g^{tw} E_w) \quad (4.29)$$

On applique $\partial_w \mathbf{x}^3 \times$ à la première équation. On remarque que $\mathbf{x}^3 \times \nabla_t \times \mathbf{E}_t = 0$ et $\mathbf{x}^3 \times \nabla_t \times \mathbf{G}_t = 0$. De plus, d'après l'équation (4.29), on remplace $\partial_w \mathbf{x}^3 \times \mathbf{G}_t$ par $+ik\varepsilon (\mathbf{E}_t + g^{tw} E_w) - \nabla_t \times G_w \mathbf{x}^3 - \nabla_t \times \mathbf{G}_t$, soit :

$$\begin{aligned} \partial_w \mathbf{x}^3 \times \nabla_t \times E_w \mathbf{x}^3 + \partial_w^2 \mathbf{x}^3 \times \mathbf{x}^3 \times \mathbf{E}_t &= -ik\mu \partial_w \mathbf{x}^3 \times \mathbf{G}_t - ik\mu \partial_w \mathbf{x}^3 \times g^{tw} G_w \\ &= k_c^2 (\mathbf{E}_t + g^{tw} E_w) + ik\mu \nabla_t \times G_w \mathbf{x}^3 \\ &\quad + ik\mu \nabla_t \times \mathbf{G}_t - ik\mu \partial_w \mathbf{x}^3 \times g^{tw} G_w \\ &= k_c^2 (\mathbf{E}_t + g^{tw} E_w) + ik\mu (\nabla_t \times G_w \mathbf{x}^3) \\ &\quad - ik\mu \partial_w \mathbf{x}^3 \times g^{tw} G_w \end{aligned} \quad (4.30)$$

Où $k_c^2 = k^2 \mu \varepsilon$ (se réduit à $k^2 \mu_0 \varepsilon_r$ dans le cas de l'air). De plus :

$$\mathbf{x}^3 \times \nabla_t \times \mathbf{x}^3 = \nabla_t \quad (4.31a)$$

$$\mathbf{x}^3 \times \mathbf{x}^3 \times \mathbf{E}_t = -\mathbf{E}_t \quad (4.31b)$$

$$\mathbf{x}^3 \times (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) = 0 \quad (4.31c)$$

d'où :

$$(k_c^2 + \partial_w^2) \mathbf{E}_t = \partial_w \nabla_t E_w - k_c^2 g^{tw} E_w - ik\mu_2 \nabla_t \times \mathbf{x}^3 G_w + ik\mu_2 \partial_w \mathbf{x}^3 \times g^{tw} G_w \quad (4.32)$$

La même démarche peut être adoptée pour trouver l'équation sur \mathbf{G}_t pour obtenir :

$$(k_c^2 + \partial_w^2) \mathbf{G}_t = \nabla_t \partial_w G_w - k_c^2 g^{tw} G_w + ik\varepsilon_2 \nabla_t \times \mathbf{x}^3 E_w - ik\varepsilon_2 \partial_w \mathbf{x}^3 \times g^{tw} E_w \quad (4.33)$$

Maintenant, on utilise la même hypothèse forte de séparation de variable 3.16 et on remplace l'opérateur ∂_w^2 par $-\lambda^2$. Quant à lui, l'opérateur ∇_t peut être remplacé par $(\partial_u \mathbf{u} + \partial_v \mathbf{v})$. Finalement, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t &= \frac{1}{k_c^2 - \lambda^2} \left[\partial_w (\partial_u \mathbf{u} + \partial_v \mathbf{v}) E_w - k_c^2 g^{tw} E_w - ik\mu_2 (\partial_v \mathbf{u} - \partial_u \mathbf{v}) G_w \right] \\ &\quad + ik\mu \partial_w \mathbf{x}^3 \times g^{tw} G_w \\ \mathbf{G}_t &= \frac{1}{k_c^2 - \lambda^2} \left[\partial_w (\partial_u \mathbf{u} + \partial_v \mathbf{v}) G_w - k_c^2 g^{tw} G_w + ik\varepsilon (\partial_v \mathbf{u} - \partial_u \mathbf{v}) E_w \right] \\ &\quad - ik\varepsilon \partial_w \mathbf{x}^3 \times g^{tw} E_w \end{aligned} \quad (4.34)$$

Où $k_c^2 - \lambda^2$ est un nombre complexe. On en déduit alors les composantes tangentielles :

$$\begin{aligned} E_u &= \frac{1}{k_c^2 - \lambda^2} \left[(\partial_u \partial_w - k_c^2 g^{13}) E_w - ik\mu (\partial_v + g^{23} \partial_w) G_w \right] \\ E_v &= \frac{1}{k_c^2 - \lambda^2} \left[(\partial_v \partial_w - k_c^2 g^{23}) E_w + ik\mu (\partial_u + g^{13} \partial_w) G_w \right] \\ G_u &= \frac{1}{k_c^2 - \lambda^2} \left[+ik\varepsilon (\partial_v + g^{23} \partial_w) E_w + (\partial_u \partial_w - k_c^2 g^{13}) G_w \right] \\ G_v &= \frac{1}{k_c^2 - \lambda^2} \left[-ik\varepsilon (\partial_u + g^{13} \partial_w) E_w + (\partial_v \partial_w - k_c^2 g^{23}) G_w \right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

Il est important de noter que dans ce cas particulier, les opérateurs ∂_u, ∂_v commutent avec ∂_w mais pas entre eux. Il est aussi fondamentale de noter que le produit $g^{ij} E_w$ (respectivement G_w), n'est pas commutatif vu que les deux quantités dépendent de x^1 et x^2 . On verra par la suite que ceci se transforme en un produit de convolution dans le domaine de Fourier. Rappelons que selon le signe de la partie imaginaire des constantes de propagation, on désigne les ondes qui se propagent dans le sens des x^3 décroissant (du haut vers le bas) et celles qui se propagent dans le sens opposé. On déduit alors l'expression compacte des modes dans le nouveau système de coordonnées :

$$\left[\Psi^{\pm TE} \quad \Psi^{\pm TM} \right] = \frac{1}{k_c^2 - \lambda^2} \begin{bmatrix} \pm ik\mu (\partial_u \phi + g^{13} \partial_w \phi) & \partial_v \partial_w \phi \pm k_c^2 g^{23} \phi \\ \partial_u \partial_w \phi - k_c^2 g^{13} \phi & \pm ik\varepsilon (\partial_v \phi + g^{23} \partial_w \phi) \\ \partial_v \partial_w \phi + k_c^2 g^{23} \phi & \pm ik\varepsilon (\partial_u \phi + g^{13} \partial_w \phi) \\ \pm ik\mu (\partial_v \phi + g^{23} \partial_w \phi) & \partial_u \partial_w \phi - k_c^2 g^{13} \phi \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Les modes propres sont sous leur forme différentielle. On remarque bien que dans le cas particulier $g^{ij} = 0$ (cas plan), on retrouve les expressions (3.20). On applique

de même la transformée de Fourier 3.21. Le produit des fonctions dépendantes de (x^1, x^2) se transforme alors en un produit de convolution 2D défini dans le domaine de Fourier continu :

$$(\widehat{g^{ij} \cdot \phi})(x, y) = (\widehat{g^{ij}} * \widehat{\phi})(\alpha, \beta) = \int_{\beta_j} \int_{\alpha_i} \widehat{g^{ij}}(\alpha - \alpha_i, \beta - \beta_j) \widehat{\phi}(\alpha_i, \beta_j) d\alpha_i d\beta_j \quad (4.37)$$

Algébriquement, on traitera des matrices 2D dans le domaine de Fourier et le produit (4.37) traduit matriciellement par :

$$(\widehat{g^{ij}} * \widehat{\phi}) = [[g^{ij}]] \cdot \widehat{\phi} = \widehat{\mathfrak{A}} \cdot \widehat{\phi} \quad (4.38)$$

Où $\widehat{\mathfrak{A}}$ est une matrice de convolution à déterminer par la suite. On obtient la forme algébrique suivante :

$$[\Psi^{\pm TE} \quad \Psi^{\pm TM}] = \begin{bmatrix} \tau_a^{\pm TE} & \tau_a^{\pm TM} \\ \Pi_a^{\pm TE} & \Pi_a^{\pm TM} \\ \Theta_a^{\pm TE} & \Theta_a^{\pm TM} \\ \Lambda_a^{\pm TE} & \Lambda_a^{\pm TM} \end{bmatrix} \widehat{\phi} \quad (4.39)$$

Où

$$\tau_a^{\pm TE} = \pm k\mu (\alpha + \hat{g}^{13} * \partial_w) \quad (4.40a)$$

$$\tau_a^{\pm TM} = -i\beta\partial_w \pm k_c^2(\hat{g}^{23} *) \quad (4.40b)$$

$$\Pi_a^{\pm TE} = -i\alpha\partial_w - k_c^2(\hat{g}^{13} *) \quad (4.40c)$$

$$\Pi_a^{\pm TM} = \pm ik\varepsilon (-i\beta + \hat{g}^{23} * \partial_w) \quad (4.40d)$$

$$\Theta_a^{\pm TE} = -i\beta\partial_w + k_c^2(\hat{g}^{23} *) \quad (4.40e)$$

$$\Theta_a^{\pm TM} = \pm ik\varepsilon (-i\alpha + \hat{g}^{13} * \partial_w) \quad (4.40f)$$

$$\Lambda_a^{\pm TE} = \pm ik\mu (-i\beta + \hat{g}^{23} * \partial_w) \quad (4.40g)$$

$$\Lambda_a^{\pm TM} = -i\alpha\partial_w - k_c^2(\hat{g}^{13} *) \quad (4.40h)$$

l'indice $_a$ réfère à la dépendance à la variation géométrique décrite par la fonction $a(x^1, x^2)$, tandis que $*$ présente le produit de convolution. Il reste à déterminer les constantes de propagation λ ainsi que l'équation de propagation du potentiel $\widehat{\phi}$.

4.3.3 Équations de propagation modifiée

Dans cette section, nous dérivons l'équation principale de la méthode-C. On considère le changement de variables $x^1 = x; x^2 = y; x^3 = z - a(x, y)$ dans le domaine spatial. La règle de chaîne pour les dérivés a la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_x = \partial_u + g^{13} \partial_w \\ \partial_y = \partial_v + g^{23} \partial_w \\ \partial_z = \partial_w \end{cases} \quad (4.41)$$

On obtient l'expression de la dérivée partielle de ϕ :

$$\partial_x \phi = \partial_u \phi + g^{13} \partial_w \phi \quad (4.42)$$

On obtient l'expression de la dérivée seconde :

$$\partial_x^2 \phi = \partial_u^2 \phi + \partial_u (g^{13} \partial_w \phi) + g^{13} \partial_w \partial_u \phi + g^{13} \partial_w (g^{13} \partial_w \phi) \quad (4.43)$$

Si on considère un potentiel scalaire ϕ , sa dérivée partielle est :

$$\partial_y \phi = \partial_v \phi + g^{23} \partial_w \phi \quad (4.44)$$

Ensuite,

$$\partial_u^2 \phi = \partial_v^2 \phi + \partial_v (g^{23} \partial_w \phi) + g^{23} \partial_w \partial_v \phi + \partial_w (g^{23} \partial_w \phi) g^{23} \quad (4.45)$$

Enfin, l'équation de propagation de Helmholtz en coordonnées curvilignes devient :

$$[g^{33} \partial_w^2 + (\partial_u g^{13} + g^{31} \partial_u) \partial_w + (\partial_v g^{23} + g^{32} \partial_v) \partial_w + \partial_u^2 + \partial_v^2 + k_p^2] \phi = 0 \quad (4.46)$$

Contrairement au cas plan, il n'existe pas de solution trivial et analytique pour cette équation de propagation. Afin de déterminer la solution souhaitée, on propose une résolution d'un système à valeur propres. En adoptant la même hypothèse de séparation de variable 3.16, on pose les notations suivantes :

$$\phi(u, v, w) = \phi(u, v) e^{i\lambda w}$$

$$\phi'(u, v) = \partial_w \phi(u, v) = i\lambda \phi$$

En passant dans le domaine de Fourier, on peut alors écrire :

$$\hat{g}^{33} * \partial_w \hat{\phi}' + (\partial_u \hat{g}^{13} * + \hat{g}^{31} * \partial_u) \partial_w \hat{\phi} + (\partial_v \hat{g}^{23} * + \hat{g}^{32} * \partial_v) \partial_w \hat{\phi} = -(\partial_u^2 + \partial_v^2 + k_c^2) \hat{\phi} \quad (4.47)$$

on remplace ∂_u par $-i\alpha$ et ∂_v par $-i\beta$ et on pose :

$$\eta^2 = k_c^2 - \alpha^2 - \beta^2$$

et

$$\mathbf{D} = (\alpha \hat{g}^{13} * + \hat{g}^{31} * \alpha) + (\eta^2 * \hat{g}^{23} + \hat{g}^{32} * \eta^2)$$

on obtient une équation algébrique :

$$i\lambda\widehat{\phi}' = -i(\widehat{g}^{33})^{-1} * \mathbf{D} * \widehat{\phi}' + \eta^2 * (\widehat{g}^{33})^{-1} * \widehat{\phi} \quad (4.48)$$

Ceci nous permet de construire alors le système à valeurs propres suivant :

$$\lambda \begin{bmatrix} i\widehat{\phi}' \\ \widehat{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\widehat{g}^{33})^{-1} * \mathbf{D} & (\widehat{g}^{33})^{-1} * \eta^2 \\ I_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i\widehat{\phi}' \\ \widehat{\phi} \end{bmatrix} = \mathcal{C} \begin{bmatrix} i\widehat{\phi}' \\ \widehat{\phi} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Ainsi, le potentiel vérifiant l'équation de Helmholtz généralisée est un vecteur propre de la matrice \mathcal{C} . On détaillera par la suite la construction numérique de ce vecteur. Pour le moment on se limite à l'écriture compacte des champs : on suppose connaître le potentiel $\widehat{\phi}$, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_t(u, v) \\ \mathbf{G}_t(u, v) \end{bmatrix} = \Psi_0^+(u, v) \Xi_0^+ \mathbf{a}_0^+ + \Psi_0^-(u, v) \Xi_0^- \mathbf{a}_0^- \quad (4.50)$$

où on définit :

$$\Psi_0^\pm = [\Psi_0^{TE\pm} \quad \Psi_0^{TM\pm}] = \begin{bmatrix} \tau_a^{\pm TE}[\widehat{\phi}^\pm] & \tau_a^{\pm TM}[\widehat{\phi}^\pm] \\ \Pi_a^{\pm TE}[\widehat{\phi}^\pm] & \Pi_a^{\pm TM}[\widehat{\phi}^\pm] \\ \Theta_a^{\pm TE}[\widehat{\phi}^\pm] & \Theta_a^{\pm TM}[\widehat{\phi}^\pm] \\ \Lambda_a^{\pm TE}[\widehat{\phi}^\pm] & \Lambda_a^{\pm TM}[\widehat{\phi}^\pm] \end{bmatrix} \quad (4.51a)$$

$$\Xi_0^\pm = \begin{bmatrix} e^{\pm\lambda^{TE}x^3} & 0 \\ 0 & e^{\pm\lambda^{TM}x^3} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

et les amplitudes sont :

$$\mathbf{a}_0^\pm = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^{\pm TE} \\ \mathbf{a}_0^{\pm TM} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Les coefficients inconnus \mathbf{a}_0^\pm de l'expansion modale seront déterminer en appliquant les conditions aux limites au niveau de l'interface séparatrice.

4.4 Conducteur anisotrope à géométrie complexe

4.4.1 Formalisme et équations

Si on se place dans un milieu anisotrope, le tenseur de conductivité $\bar{\sigma}$ (et par conséquent le tenseur $\bar{\varepsilon}$) prend sa forme générale 3.4 (et 5.113). Les équations de

Maxwell à résoudre s'écrivent dans le nouveau repère :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -ik\mu\sqrt{g}\bar{g}\mathbf{G} \quad (4.54)$$

$$\nabla \times \mathbf{G} = -ik\sqrt{g}\bar{g}\mathbf{E} \quad (4.55)$$

On pose

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_g = [\bar{\varepsilon}][g^{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon^{11} & \varepsilon^{12} & \varepsilon^{11}g^{13} + \varepsilon^{12}g^{23} \\ \varepsilon^{21} & \varepsilon^{22} & \varepsilon^{21}g^{13} + \varepsilon^{22}g^{23} \\ \varepsilon^{33}g^{31} & \varepsilon^{33}g^{32} & \varepsilon^{33}g^{33} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

On voit bien que les termes du tenseur $\bar{\bar{\varepsilon}}_g$ sont des fonctions scalaires qui dépendent de (x^1, x^2) . En développant les équations (4.54 et 4.55), on peut écrire :

$$\partial_v E_w - \partial_w E_v = -ik\mu\sqrt{g} [G_u + g^{13}G_w] \quad (4.57a)$$

$$\partial_w E_u - \partial_u E_w = -ik\mu\sqrt{g} [G_v + g^{23}G_v] \quad (4.57b)$$

$$\partial_u E_v - \partial_v E_u = -ik\mu\sqrt{g} [g^{31}G_u + g^{32}G_v + g^{33}G_w] \quad (4.57c)$$

$$\partial_v G_w - \partial_w G_v = ik\sqrt{g} [\varepsilon_g^{11}E_u + \varepsilon_g^{12}E_v + \varepsilon_g^{13}E_w] \quad (4.57d)$$

$$\partial_w G_u - \partial_u G_w = ik\sqrt{g} [\varepsilon_g^{21}E_u + \varepsilon_g^{22}E_v + \varepsilon_g^{23}E_w] \quad (4.57e)$$

$$\partial_u G_v - \partial_v G_u = ik\sqrt{g} [\varepsilon_g^{31}E_u + \varepsilon_g^{32}E_v + \varepsilon_g^{33}E_w] \quad (4.57f)$$

4.4.2 Écriture Modale

Première tentative : décomposition TE/TM

Comme déjà évoqué dans l'introduction, le formalisme dédié aux milieux anisotropes à interfaces complexes présente une extension des travaux antérieurs. De ce fait, on propose une première tentative de résolution en adoptant la même décomposition en milieu isotrope (4.25). on cherche une écriture modale particulière à partir de laquelle le degré de liberté du problème se réduit à la détermination d'un seul potentiel scalaire. Ceci nous permettra par la suite de se projeter facilement sur les différents systèmes de coordonnées (cas d'un réseau de surfaces complexes non identiques). On peut alors écrire :

$$(\nabla_t + \partial_w \mathbf{x}^3) \times (\mathbf{E}_t + E_w \mathbf{x}^3) = -Sik\mu g^{ij} (\mathbf{G}_t + G_w \mathbf{x}^3) \quad (4.58a)$$

$$(\nabla_t + \partial_w \mathbf{x}^3) \times (\mathbf{G}_t + G_w \mathbf{x}^3) = +Sik\varepsilon_g^{ij} (\mathbf{E}_t + E_w \mathbf{x}^3) \quad (4.58b)$$

On peut décomposer ce tenseur telle que :

$$\bar{\bar{\epsilon}}_g = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_t & \boldsymbol{\epsilon}_t \cdot \mathbf{g}^{tw} \\ \varepsilon_{zz} \mathbf{g}^{wt} & \varepsilon_{zz} g^{ww} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_t & \boldsymbol{\epsilon}^{tw} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{wt} & \varepsilon^{ww} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

En reprenant le même développement et les mêmes hypothèses, on aboutit finalement à :

$$\mathbf{E}_t = [k^2 \mu_2 \boldsymbol{\epsilon}_t + \partial_w^2 \mathbf{I}_d]^{-1} (\partial_w \nabla_t E_w - k^2 \mu_2 \boldsymbol{\varepsilon}^{tw} E_w - ikS \mu_2 \nabla_t \times G_w \mathbf{x}^3 + ikS \mu_2 \partial_w \mathbf{x}^3 \times \mathbf{g}^{tw} G_w) \quad (4.60a)$$

$$\mathbf{G}_t = [k^2 \mu_2 \boldsymbol{\epsilon}_t + \partial_w^2 \mathbf{I}_d]^{-1} (\partial_w \nabla_t G_w - k^2 \mu_2 \boldsymbol{\epsilon}_t \mathbf{g}^{tw} G_w + ikS \boldsymbol{\epsilon}_t \nabla_t \times E_w \mathbf{x}^3 - ikS \partial_w \mathbf{x}^3 \times \boldsymbol{\varepsilon}^{tw} E_w) \quad (4.60b)$$

On en déduit les composantes tangentielles :

$$[k^2 \mu_2 \boldsymbol{\epsilon}_t + \partial_w^2 \mathbf{I}_d] \begin{bmatrix} E_u \\ E_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k^2 \mu \varepsilon^{13} & -ik \mu \partial_v \\ -k^2 \mu \varepsilon^{23} & +ik \mu \partial_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_w \\ G_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_u & +ik \mu_2 \varepsilon^{23} \\ \partial_v & +ik \mu_2 \varepsilon^{13} \end{bmatrix} \partial_w \begin{bmatrix} E_w \\ G_w \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

et

$$[k^2 \mu_2 \boldsymbol{\epsilon}_t + \partial_w^2 \mathbf{I}_d] \begin{bmatrix} G_u \\ G_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +ik (\varepsilon^{11} \partial_v - \varepsilon^{12} \partial_u) & -k^2 \mu (\varepsilon^{11} g^{13} + \varepsilon^{12} g^{23}) \\ +ik (\varepsilon^{21} \partial_v - \varepsilon^{22} \partial_u) & -k^2 \mu (\varepsilon^{21} g^{13} + \varepsilon^{22} g^{23}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_w \\ G_w \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} +ik \varepsilon^{23} & \partial_u \\ -ik \varepsilon^{13} & \partial_v \end{bmatrix} \partial_w \begin{bmatrix} E_w \\ G_w \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

avec :

$$[k^2 \mu \boldsymbol{\epsilon}_t + \partial_w^2 \mathbf{I}_d] = \begin{bmatrix} \partial_w^2 + k^2 \mu \varepsilon^{11} & k^2 \mu_2 \varepsilon^{12} \\ k^2 \mu \varepsilon^{21} & \partial_w^2 + k^2 \mu \varepsilon^{22} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

On trouve donc une décomposition en fonction de E_w et G_w . Il reste à déterminer E_w et G_w . Il est à noter que l'équation de propagation scalaire de Helmholtz est déterminée à partir des équations de Maxwell (manipulation des opérateurs de divergence et rotationnel). La raison pour la quelle on ne peut pas utiliser la même équation de propagation (4.47) est donc évidente. En effet, lorsque les grandeurs physiques (conductivité, permittivité et perméabilité) prennent leur forme générale tensorielle, une équation de propagation scalaire vérifiée par chaque composante du champ n'est plus adoptée. On cherche alors à déterminer un système à valeurs propres vérifié par E_w ou G_w . On essaie d'exprimer d'abord les composantes E_w et G_w en fonction des composantes tangentielles :

$$G_w = [g^{33}]^{-1} \left[\frac{1}{-ik\mu_2} (\partial_u E_v - \partial_v E_u) - g^{31} G_u - g^{32} G_v \right] \quad (4.64)$$

$$E_w = [\varepsilon^{33}]^{-1} \left[\frac{1}{ik} (\partial_u G_v - \partial_v G_u) - \varepsilon^{31} E_u - \varepsilon^{32} E_v \right] \quad (4.65)$$

On définit une matrice : $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et on écrit les équations de Maxwell sous forme compacte :

$$\begin{bmatrix} \partial_v \\ -\partial_u \end{bmatrix} E_w + \partial_w \mathbf{P} \begin{bmatrix} E_u \\ E_v \end{bmatrix} = -ikS\mu_2 \begin{bmatrix} G_u \\ G_v \end{bmatrix} - ikS\mu_2 \begin{bmatrix} g^{13} \\ g^{23} \end{bmatrix} G_w \quad (4.66)$$

$$\begin{bmatrix} \partial_v \\ -\partial_u \end{bmatrix} G_w + \partial_w \mathbf{P} \begin{bmatrix} G_u \\ G_v \end{bmatrix} = +ikS\boldsymbol{\varepsilon}^t \begin{bmatrix} E_u \\ E_v \end{bmatrix} + ikS \begin{bmatrix} \varepsilon^{13} \\ \varepsilon^{23} \end{bmatrix} E_w \quad (4.67)$$

De la deuxième équation, on tire :

$$\begin{bmatrix} E_u \\ E_v \end{bmatrix} = \frac{1}{ikS} [\boldsymbol{\varepsilon}^t]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \partial_v \\ -\partial_u \end{bmatrix} G_w + \partial_w \mathbf{P} \begin{bmatrix} G_u \\ G_v \end{bmatrix} - ikS \begin{bmatrix} \varepsilon^{13} \\ \varepsilon^{23} \end{bmatrix} E_w \right\}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \partial_v \\ -\partial_u \end{bmatrix} E_w + \partial_w \mathbf{P} \left[\frac{1}{ikS} [\boldsymbol{\varepsilon}^t]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \partial_v \\ -\partial_u \end{bmatrix} G_w + \partial_w \mathbf{P} \begin{bmatrix} G_u \\ G_v \end{bmatrix} \right\} - ikS \begin{bmatrix} \varepsilon^{13} \\ \varepsilon^{23} \end{bmatrix} E_w \right] \\ = -ikS\mu_2 \begin{bmatrix} G_u \\ G_v \end{bmatrix} - ikS\mu_2 \begin{bmatrix} g^{13} \\ g^{23} \end{bmatrix} G_w \end{aligned} \quad (4.68)$$

on multiplie par $ik \boldsymbol{\varepsilon}_t$ et on rappelle que $\partial_w \boldsymbol{\varepsilon}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t \partial_w$, d'où :

$$\begin{aligned} ik\boldsymbol{\varepsilon}_t \begin{bmatrix} \partial_v \\ -\partial_u \end{bmatrix} E_w + \partial_w \mathbf{P} \begin{bmatrix} \partial_v \\ -\partial_u \end{bmatrix} G_w - k^2 \mu \boldsymbol{\varepsilon}_t \begin{bmatrix} g^{13} \\ g^{23} \end{bmatrix} G_w + ik \partial_w \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon}_t \begin{bmatrix} \varepsilon^{13} \\ \varepsilon^{23} \end{bmatrix} E_w \\ = (-\partial_w^2 \mathbf{P} \mathbf{P} + k^2 \mu \boldsymbol{\varepsilon}_t) \begin{bmatrix} G_u \\ G_v \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.69)$$

or on a : $\mathbf{P} \mathbf{P} = -\mathbf{I}_d$, donc :

$$\begin{aligned} ik\boldsymbol{\varepsilon}_t \begin{bmatrix} \partial_v \\ -\partial_u \end{bmatrix} E_w + \partial_w \mathbf{P} \begin{bmatrix} \partial_v \\ -\partial_u \end{bmatrix} G_w - k^2 \mu \boldsymbol{\varepsilon}_t \begin{bmatrix} g^{13} \\ g^{23} \end{bmatrix} G_w + ik \partial_w \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon}_t \begin{bmatrix} \varepsilon^{13} \\ \varepsilon^{23} \end{bmatrix} E_w \\ = (\partial_w^2 \mathbf{I}_d + k^2 \mu \boldsymbol{\varepsilon}_t) \begin{bmatrix} G_u \\ G_v \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.70)$$

Par ailleurs,

$$\begin{bmatrix} G_u \\ G_v \end{bmatrix} = \frac{1}{-ikS\mu} \left\{ \begin{bmatrix} \partial_v \\ -\partial_u \end{bmatrix} E_w + \partial_w \mathbf{P} \begin{bmatrix} E_u \\ E_v \end{bmatrix} \right\} - \begin{bmatrix} g^{13} \\ g^{23} \end{bmatrix} G_w \quad (4.71)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \partial_v \\ -\partial_u \end{bmatrix} G_w + \partial_w \mathbf{P} \left[\frac{1}{-ik\mu} \left\{ \begin{bmatrix} \partial_v \\ -\partial_u \end{bmatrix} E_w + \partial_w \mathbf{P} \begin{bmatrix} E_u \\ E_v \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} g^{13} \\ g^{23} \end{bmatrix} G_w \right] \\ = +ik\boldsymbol{\varepsilon}^t \begin{bmatrix} E_u \\ E_v \end{bmatrix} + ik \begin{bmatrix} \varepsilon^{13} \\ \varepsilon^{23} \end{bmatrix} E_w \end{aligned} \quad (4.72)$$

on multiplie par $-ik\mu$,

$$\begin{aligned} -ik\mu \begin{bmatrix} \partial_v \\ -\partial_u \end{bmatrix} G_w + \partial_w \mathbf{P} \left\{ \begin{bmatrix} \partial_v \\ -\partial_u \end{bmatrix} E_w + \partial_w \mathbf{P} \begin{bmatrix} E_u \\ E_v \end{bmatrix} \right\} - ik\mu \partial_w \mathbf{P} \begin{bmatrix} g^{13} \\ g^{23} \end{bmatrix} G_w \\ = +k^2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^t \begin{bmatrix} E_u \\ E_v \end{bmatrix} + k^2\mu \begin{bmatrix} \varepsilon^{13} \\ \varepsilon^{23} \end{bmatrix} E_w \end{aligned} \quad (4.73)$$

d'où :

$$\begin{aligned} -ik\mu \left(\begin{bmatrix} \partial_v \\ -\partial_u \end{bmatrix} G_w + \partial_w \mathbf{P} \begin{bmatrix} g^{13} \\ g^{23} \end{bmatrix} \right) G_w + \left(\partial_w \mathbf{P} \begin{bmatrix} \partial_v \\ -\partial_u \end{bmatrix} - k^2\mu \begin{bmatrix} \varepsilon^{13} \\ \varepsilon^{23} \end{bmatrix} \right) E_w \\ = (\partial_w^2 \mathbf{I}_d + k^2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^t) \begin{bmatrix} E_u \\ E_v \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.74)$$

On retrouve d'autres expressions des composantes tangentielles. En utilisant (4.65) et (4.64), on trouve :

$$ik \begin{bmatrix} [\varepsilon^{33}] & 0 \\ 0 & -\mu[g^{33}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_w \\ G_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ik \varepsilon^{31} & -ik \varepsilon^{32} \\ -\partial_v & \partial_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_u \\ E_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\partial_v & \partial_u \\ ik\mu g^{31} & +ik\mu g^{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_u \\ G_v \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Finalement, on se trouve dans la mesure où on n'est pas capable de déterminer ni une équation de propagation ni un système différentiel vérifiée uniquement par E_w et H_w à cause du couplage entre toutes les composantes du champ. On propose alors de généraliser le formalisme développé pour le cas plan pour tenir compte de la variation géométrique.

Décomposition en modes propres

À partir des équations (4.57), on remarque que les composantes du champ électromagnétique sont toutes couplées. Pareil que le cas plan, on essaie de déterminer un système différentiel vérifié par les composantes tangentielles du champ. En effet, on peut extraire les composantes normales :

$$E_w = [\varepsilon_g^{33}]^{-1} \left[\frac{1}{ik} (\partial_u G_v - \partial_v G_u) - \varepsilon_g^{31} E_u - \varepsilon_g^{32} E_v \right] \quad (4.76a)$$

$$G_w = [g^{33}]^{-1} \left[\frac{-1}{ik\mu} (\partial_u E_v - \partial_v E_u) - g^{31} G_u - g^{32} G_v \right] \quad (4.76b)$$

En injectant (4.76a) et (4.76b) dans les équations (4.57) on obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_g^{33} \partial_w E_u &= [-\partial_u \varepsilon_g^{31} - \partial_v] E_u + [-\partial_u \varepsilon_g^{32} + \partial_u] E_v \\ &\quad + \left[-\frac{1}{ik} \partial_u \partial_v \right] G_u + \left[\frac{1}{ik} \partial_u \partial_u \right] G_v \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_g^{33} \partial_w E_v &= [-\partial_v \varepsilon_g^{31} + \partial_v] E_u + [-\partial_v \varepsilon_g^{32} - \partial_u] E_v \\ + [ik \mu - \frac{1}{ik} \partial_v \partial_v - ik\mu] G_u &+ [ik\mu + \frac{1}{ik} \partial_v \partial_u - ik\mu] G_v \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} \mu \partial_w G_u &= [ik \varepsilon_g^{21} + \frac{1}{ik} \partial_u \partial_v - ik \varepsilon_g^{23} \varepsilon_g^{31}] E_u \\ + [ik \varepsilon_g^{22} - \frac{1}{ik} \partial_u \partial_u - ik \varepsilon_g^{23} [\varepsilon_g^{33}]^{-1} \varepsilon_g^{32}] E_v \\ + [-\partial_u \mu - \varepsilon_g^{23} \partial_v] G_u &+ [\varepsilon_g^{23} [\varepsilon_g^{33}]^{-1} \partial_u] G_v \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \mu \partial_w G_v &= [-ik \varepsilon_g^{11} + \frac{1}{ik} \partial_v \partial_v + ik \varepsilon_g^{13} [\varepsilon_g^{33}]^{-1} \varepsilon_g^{31}] E_u \\ + [-ik \varepsilon_g^{12} - \frac{1}{ik} \partial_v \partial_u + ik \varepsilon_g^{13} [\varepsilon_g^{33}]^{-1} \varepsilon_g^{32}] E_v \\ + [-\partial_v \mu + \varepsilon_{13} [\varepsilon_g^{33}]^{-1} \partial_v] G_u &+ [-\partial_v \mu - \varepsilon_g^{13} [\varepsilon_g^{33}]^{-1} \partial_u] G_v \end{aligned} \quad (4.80)$$

On aboutit à un système différentiel plus complexe regroupant toutes les composantes du champ électromagnétique. Dans le cas particulier d'un composite plan à tenseur de conductivité diagonale, M. Roberts [2] détermine un système à valeurs propres à partir duquel il détermine les fonctions de Green. Dans notre cas, on considère le cas plus générale d'un tenseur biaxiale avec une déformation qui

entraîne une interférence entre toutes les composantes du champ. En utilisant la même hypothèse de séparation de variable 3.16, la dérivation selon w est remplacée par $i\lambda$. La même TF 2D 3.21 est aussi appliquée. Par conséquent, les termes de la matrice $\bar{\varepsilon}_g$ sont des opérateur de convolution 2D tels que $\varepsilon_g^{ij} = (\varepsilon^{ij} \widehat{g}^{ij*})$. On obtient la forme algébrique suivante :

$$-i\lambda \begin{bmatrix} E_u \\ E_v \\ G_u \\ G_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_u \\ E_v \\ G_u \\ G_v \end{bmatrix} = \mathcal{L} \begin{bmatrix} E_u \\ E_v \\ G_u \\ G_v \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

Où :

$$L_{11} = i\alpha [\varepsilon_g^{33}]^{-1} * \varepsilon_g^{31} \quad (4.82a)$$

$$L_{12} = i\alpha [\varepsilon_g^{33*}]^{-1} * \varepsilon_g^{32} \quad (4.82b)$$

$$L_{13} = k\mu - \frac{\alpha}{k} [\varepsilon_g^{33}]^{-1} * \beta \quad (4.82c)$$

$$L_{14} = -ik\mu + i\frac{\alpha}{k} [\varepsilon_g^{33}]^{-1} * \alpha \quad (4.82d)$$

$$L_{21} = i\beta [\varepsilon_g^{33}]^{-1} * \varepsilon_g^{31} \quad (4.82e)$$

$$L_{22} = i\beta [\varepsilon_g^{33}]^{-1} * \varepsilon_g^{32} \quad (4.82f)$$

$$L_{23} = ikS \mu - i\frac{\beta}{k} [\varepsilon_g^{33*}]^{-1} \beta \quad (4.82g)$$

$$L_{24} = i\frac{\beta}{k} [\varepsilon_g^{33}]^{-1} * \alpha \quad (4.82h)$$

$$L_{31} = (-k \varepsilon_g^{21*}) + \frac{\alpha}{kS} [\mu]^{-1} \beta - ik \varepsilon_g^{23} * [\varepsilon_g^{33}]^{-1} * \varepsilon_g^{31} \quad (4.82i)$$

$$L_{32} = (ik \varepsilon_g^{22*}) - \frac{\alpha}{kS} [\mu]^{-1} i\alpha - ik \varepsilon_g^{23} * [\varepsilon_g^{33}]^{-1} * \varepsilon_g^{32} \quad (4.82j)$$

$$L_{33} = i\varepsilon_g^{23} * [\varepsilon_g^{33}]^{-1} * \beta \quad (4.82k)$$

$$L_{34} = -i\varepsilon_g^{23} * [\varepsilon_g^{33}]^{-1} * \alpha \quad (4.82l)$$

$$L_{41} = (-ik \varepsilon_g^{11*}) + i\frac{\beta}{kS} [\mu]^{-1} \beta + ik \varepsilon_g^{13} * [\varepsilon_g^{33}]^{-1} * \varepsilon_g^{31} \quad (4.82m)$$

$$L_{42} = (-ik \varepsilon_g^{12*}) - \frac{\beta}{kS} [\mu]^{-1} i\alpha + ik \varepsilon_g^{13} * [\varepsilon_g^{33}]^{-1} * \varepsilon_g^{32} \quad (4.82n)$$

$$L_{43} = -i\varepsilon^{13} * [\varepsilon^{33}]^{-1} * \beta \quad (4.82o)$$

$$L_{44} = +i\varepsilon^{13} * [\varepsilon^{33}]^{-1} * \alpha \quad (4.82p)$$

C'est un système à valeurs propres à matrice pleine de taille (4×4) , dont les valeurs et les vecteurs propres ne sont plus triviaux. On propose de le résoudre

numériquement. Si on considère les quatre vecteur propres $\mathbf{V}_1^+, \mathbf{V}_1^-, \mathbf{V}_2^+$, et \mathbf{V}_2^- correspondents au quatre valeurs propres (deux à deux conjuguées) $\lambda_1^+, \lambda_1^-, \lambda_2^+$ et λ_2^- , on peut écrire d'une manière compacte la décomposition modale du champ comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_t \\ \mathbf{G}_t \end{bmatrix} (u, v, x^3) = \Psi_1^+(u, v) \Xi_1^+(x^3) \mathbf{a}_1^+ + \Psi_1^-(u, v) \Xi_1^-(x^3) \mathbf{a}_1^- \quad (4.83)$$

où

$$\Psi_1^\pm = [\mathbf{V}_1^\pm \quad \mathbf{V}_2^\pm] = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{E_1}^\pm & \mathcal{N}_{E_1}^\pm \\ \mathcal{M}_{E_2}^\pm & \mathcal{N}_{E_2}^\pm \\ \mathcal{M}_{G_1}^\pm & \mathcal{N}_{G_1}^\pm \\ \mathcal{M}_{G_2}^\pm & \mathcal{N}_{G_2}^\pm \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Et :

$$\Xi_0^\pm = \begin{bmatrix} e^{\pm\lambda_1 x^3} & 0 \\ 0 & e^{\pm\lambda_2 x^3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_1^\pm = \begin{bmatrix} a_E^\pm \\ a_G^\pm \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

4.4.3 Conditions de passage

Le grand avantage de la méthode des coordonnées curvilignes via son changement de coordonnées adapté se manifeste dans l'écriture explicite et simple des conditions aux limites. En effet, la continuité des composantes tangentielles du champ électromagnétique est toujours assurée et l'écriture modale du champ dans chaque milieu tient en compte de la déformation géométrique. Par conséquent, si on considère deux milieu (p) et (q) séparés par une interface complexe d'équation $x^3 = x_0^3 \mathbf{e}_3$, le champ électromagnétique doit satisfaire, aussi que les équations physiques de Maxwell, les conditions de passage suivantes :

$$(\mathbf{E}^{(p)} - \mathbf{E}^{(q)}) \times \mathbf{n} = 0 \quad (4.86a)$$

$$(\mathbf{D}^{(p)} - \mathbf{D}^{(q)}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.86b)$$

$$(\mathbf{H}^{(p)} - \mathbf{H}^{(q)}) \times \mathbf{n} = 0 \quad (4.86c)$$

$$(\mathbf{B}^{(p)} - \mathbf{B}^{(q)}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.86d)$$

Où \mathbf{n} désigne \mathbf{e}_3 . Ces relations, qui permettent d'assurer l'unicité des solutions des équations physiques que l'on vient de voir ne sont néanmoins pas exploitables sous cette forme : il faut déterminer exactement quelles composantes (covariantes ou contravariantes) des champs sont conservées à la traversée de l'interface. Dans les travaux de F. Caire [21], l'auteur montre que par construction des vecteurs de

base $\mathbf{e}_i = \frac{\partial OM}{\partial x^i}$, les composantes tangentielles à l'interface u_{t1} et u_{t2} d'un vecteur quelconque u doivent vérifier :

$$u_{t1} = u \cdot e_1 = (u_i e_i) \cdot e_1 = u_i \delta_i^1 = u_1 \quad (4.87)$$

et de même $u_{t2} = u_2$. Les composantes tangentielles d'un champ de vecteurs sur l'interface sont donc les composantes covariantes 1 et 2.

De façon analogue, le calcul de $e_1 \times e_2$ (en passant par la base cartésienne ou directement en utilisant les formules du produit vectoriel de tenseurs) montre que e_3 est normal à la surface. La composante d'un champ de vecteur normale à la surface est donc la troisième composante contravariante. On peut donc écrire les conditions de passage sous la forme :

$$\mathbf{E}_1^{(p)} = \mathbf{E}_1^{(q)} \quad (4.88a)$$

$$\mathbf{E}_2^{(p)} = \mathbf{E}_2^{(q)} \quad (4.88b)$$

$$\mathbf{H}_1^{(p)} = \mathbf{H}_1^{(q)} \quad (4.88c)$$

$$\mathbf{H}_2^{(p)} = \mathbf{H}_2^{(q)} \quad (4.88d)$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_t^{(p)} \\ \mathbf{G}_t^{(p)} \end{bmatrix} \stackrel{x^3=x_0^3}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_t^{(q)} \\ \mathbf{G}_t^{(q)} \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Ce qui se traduit par l'égalisation entre les deux expansions modale :

$$\Psi_p^- \Xi_p^-(x_0^3) \mathbf{a}_p^- + \Psi_p^+ \Xi_p^+(x_0^3) \mathbf{a}_p^+ \stackrel{x^3=x_0^3}{=} \Psi_q^- \Xi_q^-(x_0^3) \mathbf{a}_q^- + \Psi_q^+ \Xi_q^+(x_0^3) \mathbf{a}_q^+ \quad (4.90)$$

Par conséquent, on détermine les coefficients inconnus de l'expansion à travers la relation d'entrée sortie :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_p^+ \\ \mathbf{a}_q^+ \end{bmatrix} = [\Psi_p^+ \Xi_p^+ \quad -\Psi_q^- \Xi_q^-]^{-1} [-\Psi_p^- \Xi_p^- \quad \Psi_q^+ \Xi_q^+] \begin{bmatrix} \mathbf{a}_p^- \\ \mathbf{a}_q^- \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

Dans le cas de la première interface séparatrice "air-conducteur" d'équation $x_0^3 = 0$, la matrice \mathbf{S}_0 définie dans (3.63) prend alors la forme :

$$\mathbf{S}_0 = [\Psi_0^+ \quad -\Psi_1^-]^{-1} [-\Psi_0^- \quad \Psi_1^+] = \begin{bmatrix} \tau_a^{TE} \hat{\phi}^+ & \tau_a^{TM} \hat{\phi}^+ & -\mathcal{M}_{E_1}^- & -\mathcal{N}_{E_1}^- \\ \Pi_a^{TE} \hat{\phi}^+ & \Pi_a^{TM} \hat{\phi}^+ & -\mathcal{M}_{E_2}^- & -\mathcal{N}_{E_2}^- \\ \Theta_a^{TE} \hat{\phi}^+ & \Theta_a^{TM} \hat{\phi}^+ & -\mathcal{M}_{G_1}^- & -\mathcal{N}_{G_1}^- \\ \Lambda_a^{TE} \hat{\phi}^+ & \Lambda_a^{TM} \hat{\phi}^+ & -\mathcal{M}_{G_2}^- & -\mathcal{N}_{G_2}^- \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\tau_a^{TE} \hat{\phi}^- & -\tau_a^{TM} \hat{\phi}^- & \mathcal{M}_{E_1}^+ & \mathcal{N}_{E_1}^+ \\ -\Pi_a^{TE} \hat{\phi}^- & -\Pi_a^{TM} \hat{\phi}^- & \mathcal{M}_{E_2}^+ & \mathcal{N}_{E_2}^+ \\ -\Theta_a^{TE} \hat{\phi}^- & -\Theta_a^{TM} \hat{\phi}^- & \mathcal{M}_{G_1}^+ & \mathcal{N}_{G_1}^+ \\ -\Lambda_a^{TE} \hat{\phi}^- & -\Lambda_a^{TM} \hat{\phi}^- & \mathcal{M}_{G_2}^+ & \mathcal{N}_{G_2}^+ \end{bmatrix}$$

Ainsi, les coefficients \mathbf{a}_0^+ et \mathbf{a}_1^- peuvent être déterminés. On remarque bien que le cas général anisotrope en coordonnées curvilignes est beaucoup plus compliqué. Les matrices à manipuler sont pleines à cause du produit de convolution dans le domaine de Fourier. Ceci impacte la performance du modèle et limite le nombre de modes utilisé pour la représentation modale du champ.

4.5 Résolution numérique

De même que le chapitre précédent, le passage dans le domaine de Fourier discret est basé sur une projection de type Galerkin avec des fonctions de base de type :

$$T_{mn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ (x^1, x^2) \rightarrow e^{i\alpha_m x^1} e^{i\beta_n x^2}$$

Les grandeurs α_m et β_n (où m et n sont des entiers relatifs) sont respectivement les pulsations spatiales discrètes selon les directions x^1 et x^2 (cf Section 3.4). Le choix de ces fonctions de base a été fait d'une part pour des raisons historiques (la méthode C a été développée initialement pour des configurations périodiques, cf [39]), et d'autre part car elles permettent une implémentation simple ainsi qu'un temps de calcul réduit pour les applications visées. Il est clair que d'autres fonctions de bases peuvent être envisagées, notamment des polynômes de Legendre ou des B-splines [42]. En rappel que l'approche adoptée est inspirée des travaux de Granet et Chandezon [39, 42, 23], de ce fait, on suppose une pseudo-périodicité des fonctions scalaires.

Afin de résoudre numériquement le système aux valeurs propres (4.49) et (4.81), de taille infinie, il est nécessaire de se limiter à un nombre fini de fonctions T_{mn} : on effectue donc une troncature de la base d'ondes planes choisie pour représenter les solutions. On définit donc de nouveau, les nombres de modes M_u et M_v dans chaque direction. Il est clair que la précision de la méthode dépend grandement du choix de ces paramètres numériques.

Remarque : On voit alors que l'on " périodise " artificiellement la géométrie et donc les solutions du problème. Il en résulte que les conditions implicites sur les bords sont des conditions de périodicité : par ce schéma numérique, on impose que les solutions soient périodiques de périodes spatiales $T_1 = x_{max}^1 - x_{min}^1$ suivant x^1 et $T_2 = x_{max}^2 - x_{min}^2$. Ceci n'est pas gênant si l'on s'assure que les solutions soient nulles sur les bords, c'est-à-dire si l'on choisit un domaine numérique suffisamment grand.

4.5.1 Calcul des matrices de convolution

Comme nous l'avons vu, la résolution numérique des systèmes à valeurs propres nécessitent un pré-calcul des matrices de convolution (tronquées) associées aux dérivées de la fonction $a(x^1, x^2)$. Pour cela, on doit en tout premier lieu calculer les coefficients a_q définis à l'aide de la transformée de Fourier 2D :

$$\hat{a}_{pq} = \iint \dot{a}_{pq}(x^1, x^2) e^{-i\alpha_p x^1} e^{-i\beta_q x^2} dx^1 dx^2 \quad (4.92)$$

Où \dot{a} désigne ∂_1 ou ∂_2 . En outre, de même que l'axe spectral, l'axe spatial est discrétisé et borné : on fixe des bornes finies $[x_{min}^1; x_{max}^1]$ et $[x_{min}^2; x_{max}^2]$ et deux résolutions spatiales ∂_1 et ∂_2 . La transformée de Fourier 2D est alors remplacée par une Transformée de Fourier discrète, et l'on obtient :

$$\hat{a}_{pq} = \sum_{n=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \dot{a}(n\delta_{x^1}, m\delta_{x^2}) e^{-ip\frac{2\pi n}{N_1}} e^{-iq\frac{2\pi m}{N_2}} \quad (4.93)$$

Pour construire numériquement les matrices de convolution décrites ci-dessus, il est nécessaire de calculer les dérivées de la fonction " \mathbf{a} " notées par " $\partial_1 a$ " et " $\partial_2 a$ ". Dans ce travail, on se limite à des profils géométriquement doux ($\mathbf{a}(x, y) \in C^2$) décrits par des fonctions dont l'expression de la dérivée est analytiquement simple à implémenter. Un exemple de fonction est présenté dans la Figure (4.3). Dans

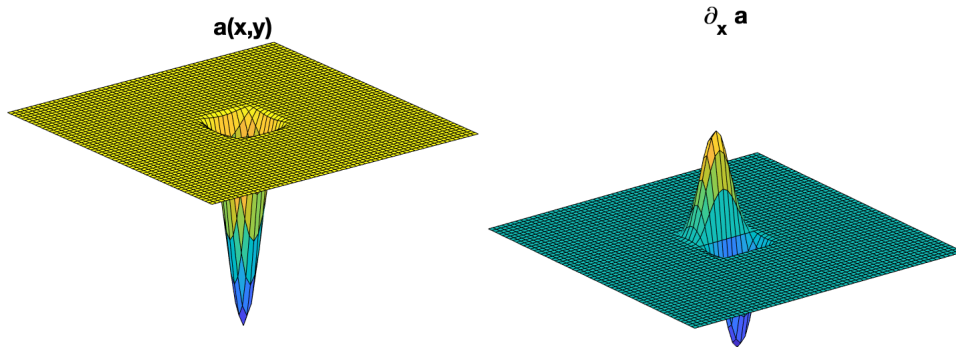


FIGURE 4.3 – Exemple de fonction 2D et sa première dérivée partielle

le cas général, la fonction " \mathbf{a} " peut être arbitrairement choisie et sa dérivée sera approchée numériquement. On applique la transformée de Fourier discrète (3.97) pour obtenir les composantes du tenseur métrique dans le domaine de Fourier. On pose $\Upsilon = g^{ij}$, et on calcul la quantité $\langle \Upsilon \Phi, T_{mn} \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \Upsilon \Phi, T_{mn} \rangle &= \int \int \Upsilon(u, v) \sum_{k,l} \Phi_{kl} T_{kl}(u, v) T_{mn}(u, v) dudv \\
&= \sum_{k,l} \Phi_{kl} \int \int \Upsilon(x^1, x^2) T_{kl}(u, v) T_{mn}(u, v) dudv \\
&= \sum_{k,l} \Phi_{kl} \int \int \Upsilon(x^1, x^2) e^{(u_k - u_m)x^1} e^{(v_l - v_n)x^2} dudv
\end{aligned} \tag{4.94}$$

La quantité « $\iint \Upsilon(x^1, x^2) e^{(u_k - u_m)x^1} e^{(v_l - v_n)x^2} dudv$ » peut être calculer analytiquement pour certaines fonctions de Υ . Néanmoins, afin de conserver la robustesse importante du code, on choisit de calculer numériquement cette intégrale. Pour ce faire, on va approcher la fonction Υ par l'expression suivante :

$$\Upsilon(x^1, x^2) = \sum_{p,q} \hat{\Upsilon}_{pq} e^{u_q x^1} e^{v_p x^2} \tag{4.95}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
\langle \Upsilon \Phi, T_{mn} \rangle &= \sum_{k,l} \Phi_{kl} \sum_{p,q} \hat{\Upsilon}_{pq} \iint e^{u_p x^1} e^{v_q x^2} e^{(u_k - u_m)x^1} e^{(v_l - v_n)x^2} dudv \\
&= \sum_{k,l} \Phi_{kl} \sum_{p',q'} \hat{\Upsilon}_{p'-k, q'-l} \delta_{q',m} \delta_{p',l} \\
&= \sum_{k,l} \Phi_{kl} \hat{\Upsilon}_{m-k, n-l}
\end{aligned} \tag{4.96}$$

On voit alors un produit de convolution 2D. On définit alors la matrices de convolution 2D associée à Υ que l'on note \mathfrak{L} et qui vérifie :

$$\forall \hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{Z}} / x_{mn} \in \mathbb{C}, \hat{\mathbf{y}} = \mathfrak{L} \hat{\mathbf{x}} \rightarrow \forall (m, n) \in \mathbb{Z}, \hat{y}_{mn} = \sum_{k,l} \hat{x}_{kl} \hat{\Upsilon}_{m-k, n-l}$$

Implémentation numérique

Numériquement, on construit les matrices de convolution associées aux g^{ij} à l'aide des $(2M_u + 1) \times (2M_v + 1)$ coefficients de \hat{a}_1 et \hat{a}_2 que l'on a calculés. Pour ce faire, on effectue un bourrage de zéros, c'est à dire que l'on construit les matrices de la manière suivante :

$$[\dot{A}_1] = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \hat{a}_{1(-M_u, -M_v)} & \cdots & \hat{a}_{1(M_u, -M_v)} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \hat{a}_{1(-M_u, M_v)} & \cdots & \hat{a}_{1(M_u, M_v)} & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

$$[\dot{A}_2] = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \hat{a}_{2(-M_u, -M_v)} & \cdots & \hat{a}_{2(M_u, -M_v)} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \hat{a}_{2(-M_u, M_v)} & \cdots & \hat{a}_{2(M_u, M_v)} & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

Ce qui revient à imposer la nullité des coefficients non calculés (on voit encore l'importance du choix des paramètres numériques). Puis on calcule la matrice de toeplitz construite à partir de $[\dot{A}_i]$ que l'on note \tilde{A}_i . Cette matrice carrée de taille $4(2M_u + 1) \times 4(2M_v + 1)$ est alors tronquée et l'on a finalement :

$$\tilde{A}_{ij} = A_{m_i, n_j}, \text{ avec } \begin{cases} n_j = 3M_u + 1 + j, j = 1, \dots, 2M_u + 1 \\ m_i = i, j = 1, \dots, 2M_u + 1 \end{cases} \quad (4.99)$$

Il est alors clair que les troncatures opérées nécessitent une attention particulière lors du choix des paramètres numériques, notamment des bornes spectrales puisque c'est dans le domaine de Fourier que l'on effectue le produit de convolution. En effet, le produit de convolution réalisé avec les matrices de convolution ainsi définies ne sera exact que si les fonctions mises en jeu (la dérivée du profil géométrique notamment) possèdent un spectre de largeur suffisamment étroit devant le domaine spectral considéré. Finalement, Les blocs des matrices qui contiennent un produit de convolution se calcul simplement par un produit matriciel de **Hadamard** (produit terme à terme).

Revenant au système aux valeurs propres où la première étape consiste à déterminer des solutions modales de l'équation de Helmholtz en coordonnées curvilignes dans le milieu isotrope. On cherche donc les fonctions $\Phi(x^1, x^2)$ et $\Phi'(x^1, x^2)$ telles que :

$$\lambda \begin{bmatrix} i\hat{\Phi}' \\ \hat{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\hat{g}^{33})^{-1} * \mathbf{D} & (\hat{g}^{33})^{-1} * \eta^2 \\ I_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i\hat{\Phi}' \\ \hat{\Phi} \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

En utilisant un nombre fini de fonction tests, on obtient

$$\Phi(x^1, x^2) = \sum_{m=-M_u}^{m=+M_u} \sum_{n=-M_v}^{n=+M_v} \widehat{\Phi}_{mn} T_{mn}(x^1, x^2) \quad (4.101a)$$

$$\Phi'(x^1, x^2) = \sum_{m=-M_u}^{m=+M_u} \sum_{n=-M_v}^{n=+M_v} \widehat{\Phi}'_{mn} T_{mn}(x^1, x^2) \quad (4.101b)$$

Les inconnus du problème sont désormais les coefficients $\widehat{\Phi}_{mn}$ et $\widehat{\Phi}'_{mn}$ qui vérifient, en projetant le système sur la base de fonctions test, le système discret suivant :

$$\lambda \begin{bmatrix} i\widehat{\Phi}'_{mn} \\ \widehat{\Phi}_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\widehat{g}^{33})^{-1} * \mathbf{D} & (\widehat{g}^{33})^{-1} * \eta^2 \\ I_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i\widehat{\Phi}'_{mn} \\ \widehat{\Phi}_{mn} \end{bmatrix} = \mathcal{K} \begin{bmatrix} i\widehat{\Phi}'_{mn} \\ \widehat{\Phi}_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

Pareil que le chapitre précédent, on construit les matrices carrées de coefficients de Fourier $[\alpha_{ij}]$ et $[\beta_{ij}]$ de taille $Dim = (2M_u + 1) \times (2M_v + 1)$. De ce fait, le système matriciel (4.102) est de taille $(2Dim \times 2Dim)$. À partir de construction des matrices de convolution $[g^{ij} *]$, on en déduit les matrices $[\varepsilon^{ij} *]$. Par conséquent, les blocs L_{kl} , de taille Dim , de la matrice \mathcal{L} sont déterminés. Si on se place dans un milieu isotrope le champ s'écrit finalement :

$$E_1(x^1, x^2, x^3) = \sum_{m=-M_u}^{m=+M_u} \sum_{n=-M_v}^{n=+M_v} \tau_{mn}^{\pm} \widehat{\phi}_{mn} a_q^{\pm} e^{\pm i\lambda_{mn} x^3} \quad (4.103a)$$

$$E_2(x^1, x^2, x^3) = \sum_{m=-M_u}^{m=+M_u} \sum_{n=-M_v}^{n=+M_v} \Pi_{mn}^{\pm} \widehat{\phi}_{mn} a_q^{\pm} e^{\pm i\lambda_{mn} x^3} \quad (4.103b)$$

$$G_1(x^1, x^2, x^3) = \sum_{m=-M_u}^{m=+M_u} \sum_{n=-M_v}^{n=+M_v} \Theta_{mn}^{\pm} \widehat{\phi}_{mn} a_q^{\pm} e^{\pm i\lambda_{mn} x^3} \quad (4.103c)$$

$$G_2(x^1, x^2, x^3) = \sum_{m=-M_u}^{m=+M_u} \sum_{n=-M_v}^{n=+M_v} \Lambda_{mn}^{\pm} \widehat{\phi}_{mn} a_q^{\pm} e^{\pm i\lambda_{mn} x^3} \quad (4.103d)$$

Si on se place dans un milieu anisotrope :

$$E_1(x^1, x^2, x^3) = \sum_{m=-M_u}^{m=+M_u} \sum_{n=-M_v}^{n=+M_v} [\mathcal{M}_{E_1, mn}^{\pm} + \mathcal{N}_{E_1, mn}^{\pm}] a_q^{\pm} e^{\pm i \lambda_{mn} x^3} \quad (4.104a)$$

$$E_2(x^1, x^2, x^3) = \sum_{m=-M_u}^{m=+M_u} \sum_{n=-M_v}^{n=+M_v} [\mathcal{M}_{E_2, mn}^{\pm} + \mathcal{N}_{E_2, mn}^{\pm}] a_q^{\pm} e^{\pm i \lambda_{mn} x^3} \quad (4.104b)$$

$$G_1(x^1, x^2, x^3) = \sum_{m=-M_u}^{m=+M_u} \sum_{n=-M_v}^{n=+M_v} [\mathcal{M}_{G_1, mn}^{\pm} + \mathcal{N}_{G_1, mn}^{\pm}] a_q^{\pm} e^{\pm i \lambda_{mn} x^3} \quad (4.104c)$$

$$G_2(x^1, x^2, x^3) = \sum_{m=-M_u}^{m=+M_u} \sum_{n=-M_v}^{n=+M_v} [\mathcal{M}_{G_2, mn}^{\pm} + \mathcal{N}_{G_2, mn}^{\pm}] a_q^{\pm} e^{\pm i \lambda_{mn} x^3} \quad (4.104d)$$

On obtient alors l'expression des composantes du champ EM dans Fourier. On applique la Transformée de Fourier inverse (3.98) pour les déterminer dans le domaine spatial.

4.5.2 Calcul champ source

Dans le cas plan, le champ incident provenant de la bobine est calculé par **CIVA** sur un plan qui sépare l'air et un conducteur à conductivité très faible (quelque S/M). En suivant la même démarche, le calcul du champ incident doit être effectué en tout point de l'interface complexe d'intérêt. Ceci assure la bonne estimation du coefficient \mathbf{a}_0^- . Ainsi, pour une configuration donnée par la Figure 4.4, une bobine, dont les paramètres sont décrits dans le tableau 4.1, éclaire une

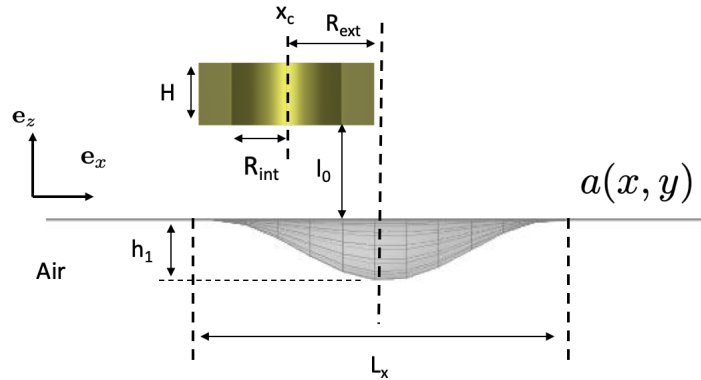


FIGURE 4.4 – Champ source calculé dans l'air sur une surface complexe.

Parameter	Symbol	Value
Fréq	f	100 kHz
Courant	I_0	1 A
Inner radius	R_{int}	1 mm
Outer radius	R_{ext}	1.6 mm
Height	H	2 mm
N° de tours	N	100
Liftoff	l_0	0.3 mm
Xpos	x_c	2 mm
Ypos	y_c	0 mm

TABLE 4.1 – Paramètres du capteur.

surface $a(x, y)$ dont l'expression est donnée par l'équation

$$a(x, y) = f(x)f(y) \quad (4.105)$$

Où

$$f(x) = \begin{cases} \frac{h}{2} \times [1 + \cos(2\pi \frac{x}{L})], & \text{si } x \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.106)$$

Une vue de coupe de la norme du champ électrique \mathbf{E}_0 et la norme du champ magnétique \mathbf{H}_0 . On remarque la déformation du champ sur ce type de surface complexe.

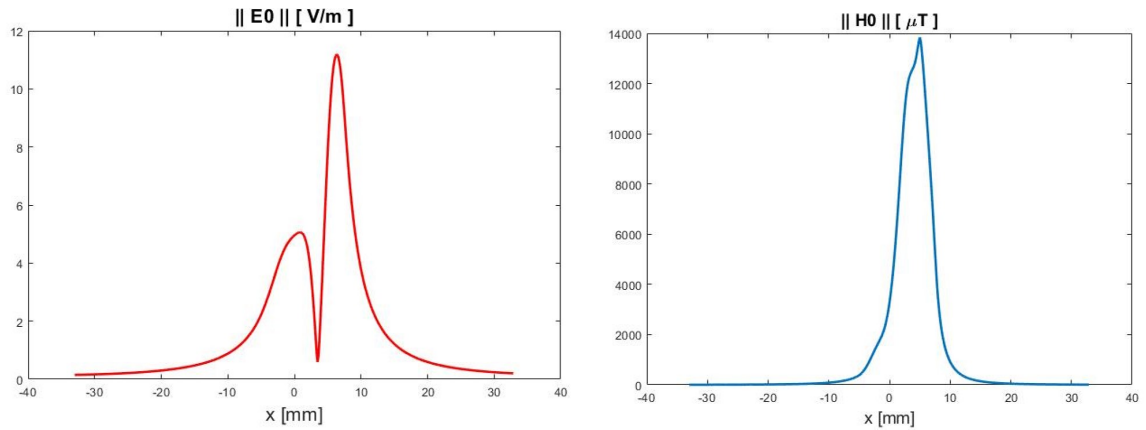


FIGURE 4.5 – Norme du champ électrique et magnétique dans l'air calculés sur un plan d'équation $z = 0$.

La Figure 4.6 présente la différence entre le vecteur coefficient \mathbf{a}_0^- , qui réfère l'amplitude du mode incident, entre le cas plan et le cas de surface complexe.

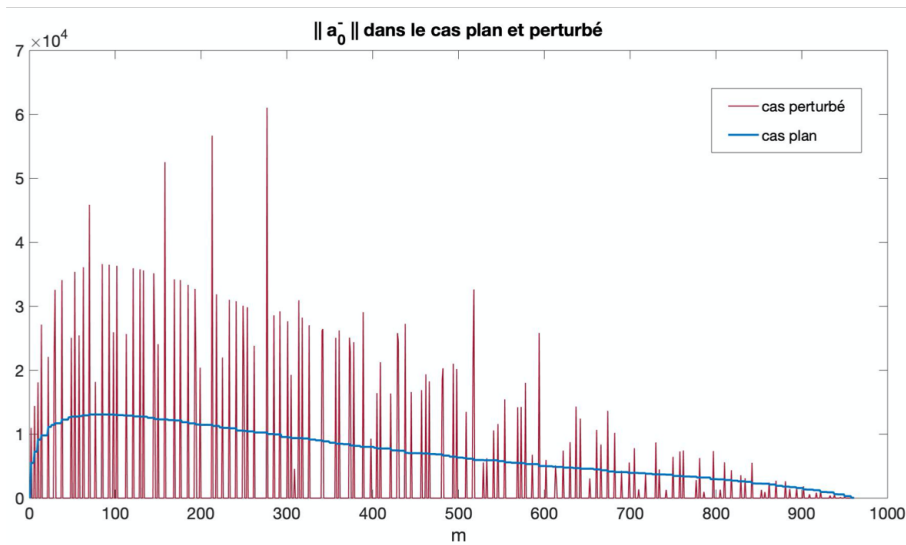


FIGURE 4.6 – Comparaison des modules des coefficients $\mathbf{a}_{\mathbf{q}_0}^-$ dans le conducteur.

4.5.3 Cas des interfaces non parallèles

Dans le cas particulier où toutes les interfaces sont parallèles, l'algorithme des matrices-S développé dans le chapitre précédent reste valable. En effet, le système de translation adopté sera le même pour les deux interfaces complexes à une constantes près comme le montre la Figure (??).

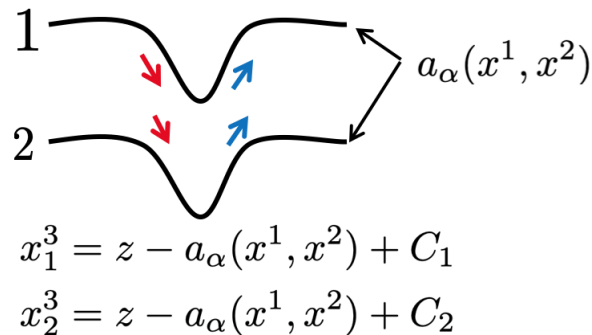


FIGURE 4.7 – Cas des interfaces parallèles : même base adoptée

La même hypothèse d'atténuation exponentielle est alors considérée. Par conséquent, la matrice-S de couche est définie par :

$$S_c = \begin{bmatrix} e^{-i\lambda^+\Delta} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda^-\Delta} \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

Où $\Delta = C_1 - C_2$. Cependant, si on se place dans le cas des interfaces non parallèles, on doit définir un nouveau système de coordonnées à chaque interface.

On considère maintenant le cas de deux interfaces non parallèles délimitant un milieu conducteur homogène, comme le montre la Figure 4.8. L'approche de résolution adoptée par la suite peut être généralisée pour traiter un réseau multicouches.

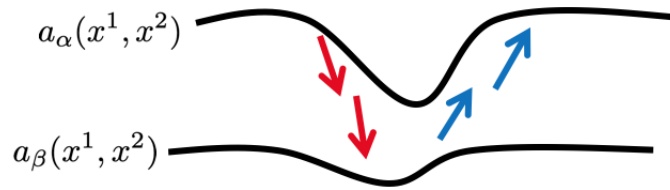


FIGURE 4.8 – Exemple de surfaces complexes non parallèles.

changement de coordonnées adapté

Lorsque la pièce est formée de strates non parallèles, on doit appliquer un changement de coordonnées différent lié à chaque interface. En effet, chacune des interfaces peut être décrite par une équation de la forme

$$z = a_{p,p+1}(x) + C_{p,p+1}, \quad (4.108)$$

où p et $p + 1$ désignent les numéros des domaines séparés par la strate considérée. On applique alors un changement de coordonnées de la forme suivante pour chaque interface entre les domaines p et $p + 1$:

$$\begin{cases} x^1 = x \\ x^2 = y \\ x_{p,p+1}^3 = z - a_{p,p+1}(x, y) \end{cases} \quad (4.109)$$

Ceci conduit à la construction de plusieurs repères naturels.

Nouvelles expansions modales : Cas de potentiel scalaire

Si on se place dans un milieu conducteur isotrope, les potentiels inconnus vérifieront les équations de Helmholtz covariantes associées à chaque système de

coordonnées. L'équation de l'interface supérieure est $z = a_\alpha(x)$, et celle de l'interface inférieure est $z = a_\beta(x) + C_\beta$, où C_β est une constante. Les potentiels scalaires vivant dans la strate 1 (la strate 0 étant l'air et la strate 2 la strate inférieure : air ou substrat) sont alors approchés par deux types d'expansions modales [21]. On définit alors les deux couples d'expansions modales, vivant dans la strate (1) et définis par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{t,\alpha} \\ \mathbf{H}_{t,\alpha} \end{bmatrix} = \Psi_{1,\alpha}^\pm(x_\alpha^1, x_\alpha^2) a_{1,\alpha}^\pm e^{i\gamma_\alpha^\pm x_\alpha^3} \quad (4.110)$$

et

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{t,\beta} \\ \mathbf{H}_{t,\beta} \end{bmatrix} = \Psi_{1,\beta}^\pm(x_\beta^1, x_\beta^2) a_{1,\beta}^\pm e^{i\gamma_\beta^\pm x_\beta^3} \quad (4.111)$$

En remarquant que l'on a $z = x_\alpha^3 + a_\alpha(x_\alpha^1) = x_\beta^3 + a_\beta(x_\beta^1)$, on définit deux types de potentiels transformés :

$$\begin{aligned} \phi_{\beta \rightarrow \alpha}^{(1)+}(x_\beta^1, x_\beta^2, x_\beta^3) &= \phi_{\beta \rightarrow \alpha}^{(1)+}(x_\beta^1, x_\beta^2, x_\alpha^3 + a_\alpha(x_\alpha^1) - a_\beta(x_\beta^1)) \\ &= \Psi_{1,\beta}^\pm(x_\beta^1, x_\beta^2) a_{1,\beta}^\pm e^{i\gamma_\beta^\pm x_\beta^3} e^{i\gamma_\beta^\pm (a_\alpha(x_\alpha^1) - a_\beta(x_\beta^1))} \end{aligned} \quad (4.112)$$

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha \rightarrow \beta}^{(1)-}(x_\alpha^1, x_\alpha^2, x_\alpha^3) &= \phi_{\alpha \rightarrow \beta}^{(1)-}(x_\alpha^1, x_\alpha^2, x_\beta^3 + a_\beta(x_\beta^1) - a_\alpha(x_\alpha^1)) \\ &= \Psi_{1,\alpha}^\pm(x_\alpha^1, x_\alpha^2) a_{1,\alpha}^\pm e^{i\gamma_\alpha^\pm x_\alpha^3} e^{i\gamma_\alpha^\pm (a_\beta(x_\beta^1) - a_\alpha(x_\alpha^1))} \end{aligned} \quad (4.113)$$

À partir de ces expressions, on va construire une matrice \mathbf{S} particulière, dite matrice d'interface adaptée qui va nous permettre de relier les coefficients inconnus de la strate (1) liés à l'interface α à ceux liés à l'interface β . Pour ce faire, on va exprimer le fait que les deux représentations des potentiels de la strate 1 doivent être égales lorsqu'elles sont calculées au même point de l'espace. Cela s'écrit sous la forme :

$$\phi_{\beta \rightarrow \alpha}^{(1)+}(x^1, x^2, x_\alpha^3) = \phi_\alpha^{(1)+}(x^1, x^2, x_\alpha^3) \quad (4.114)$$

$$\phi_{\alpha \rightarrow \beta}^{(1)-}(x^1, x^2, x_\beta^3) = \phi_\beta^{(1)+}(x^1, x^2, x_\beta^3) \quad (4.115)$$

En discrétisant ces relations dans le domaine de Fourier et en remarquant que l'on :

$$\phi_{\beta \rightarrow \alpha}^{\hat{(1)}+} = TF(\phi_{\beta}^{(1)+}) * TF(e^{i\gamma_{\alpha}^{\pm}(a_{\beta}(x_{\beta}^1) - a_{\alpha}(x_{\alpha}^1))}) \quad (4.116)$$

$$\phi_{\alpha \rightarrow \beta}^{\hat{(1)}-} = TF(\phi_{\alpha}^{(1)+}) * TF(e^{i\gamma_{\beta}^{\pm}(a_{\alpha}(x_{\alpha}^1) - a_{\beta}(x_{\beta}^1))}) \quad (4.117)$$

où TF désigne la transformée de Fourier et $\langle * \rangle$ le produit de convolution, on construit la matrice S de couche \tilde{S}_c définie par :

$$\begin{bmatrix} a_j^{+dn} \\ a_{-up} \\ a_{j+1} \end{bmatrix} = S_c^{(j)} \begin{bmatrix} a_j^{-dn} \\ a_{+up} \\ a_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{\beta \rightarrow \alpha}^{(j)+} & 0 \\ 0 & \tilde{S}_{\alpha \rightarrow \beta}^{(j)-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j^{-dn} \\ a_{+up} \\ a_{j+1} \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

On voit donc que le calcul de ces matrices S d'interfaces permet de passer d'une base modale à une autre.

Nouvelles expansions modales : Cas de décomposition en modes propres

On vient de présenter une méthode pour tenir compte du changement de base effectué entre deux interfaces complexes non-identiques. Néanmoins, on remarque que cette approche prend en compte de la différence des profils dans la dépendance en x^3 du potentiel vecteur qui vérifie une certaine équation de propagation scalaire. Ceci n'est plus applicable dans un milieu anisotrope où le champ est exprimé en fonction des modes propres (pas d'équation de propagation particulière). Pour contourner ce problème, on s'inspire des travaux de Lifeng Li et Gérard Granet [52]. L'auteur présente un cadre théorique d'une hypothèse cruciale utilisée dans [35] pour les profils à différentes formes. Une extension de la méthode-C, utilisée par chandezon pour les profils périodiques et parallèles, pour tenir compte d'un réseau multicouches à différents profils. Dans ce qui suit, on présente une approche de calcul des matrices de diffusion pour tenir compte de la propagation de l'onde à travers une couche délimitée par deux surfaces complexes non parallèles. En revenant au système (4.81), on peut écrire

$$M^{p,q} \begin{bmatrix} F_m^{p,q} \\ G_m^{p,q} \end{bmatrix} = \lambda^{p,q} \begin{bmatrix} F_m^{p,q} \\ G_m^{p,q} \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

où λ est la valeur propre, $(F_m^{p,q}, G_m^{p,q})$ constitue ensemble le vecteur propre correspondant et $M^{p,q}$ est une matrice complexe. La solution générale du système (4.119) peut être écrite sous forme d'une combinaison des vecteurs propres associés à leurs

valeurs propres :

$$\mathbf{F}_{\pm}^{p,q}(x^1, x^2, x^3) = \sum_{m,n} e^{-i\alpha_m x^1} e^{-i\beta_n x^2} F_{mn}^{\pm} e^{i\lambda x^3} a_{mn}^{\pm p,q} \quad (4.120a)$$

$$\mathbf{G}_{\pm}^{p,q}(x^1, x^2, x^3) = \sum_{m,n} e^{-i\alpha_m x^1} e^{-i\beta_n x^2} G_{mn}^{\pm} e^{i\lambda x^3} a_{mn}^{\pm p,q} \quad (4.120b)$$

Ce type de représentation partielle du champ se considère comme une solution valide des équations de Maxwell partout dans le domaine p . Cependant, pour le champ total, une telle représentation ne peut être considérée qu'avec une considération attentive des conditions aux limites. L'hypothèse imposé par G. Granet et discutée par Li est présentée dans la Figure 4.9. Si on divise le domaine p en trois

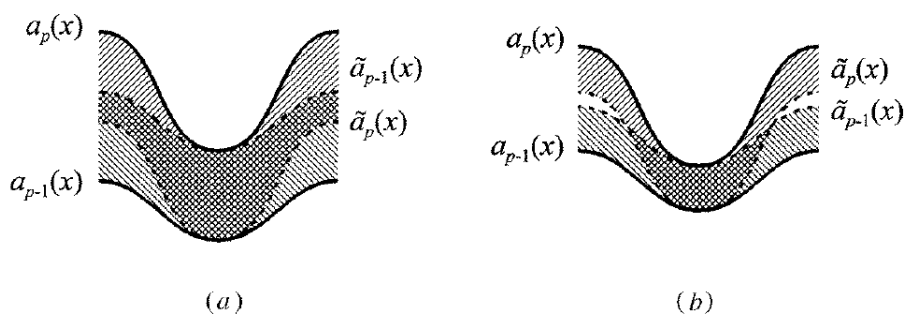


FIGURE 4.9 – Vue de coupe : Domain où l'expansion du champ est valide.

sous domaines :

Ω_p : l'espace délimité par $a_p(x)$ et $a_{p-1}(x)$

Ω_p^+ : l'espace délimité par $a_p(x)$ et $\tilde{a}_p(x)$

Ω_p^- : l'espace délimité par $a_{p-1}(x)$ et $\tilde{a}_{p-1}(x)$

Le champ totale s'écrit alors dans Ω_p^+ :

$$\mathbf{F}^{p,p}(x^1, x^2, u_p) = \mathbf{F}_+^{p,p}(x^1, x^2, u_p) + \mathbf{F}_-^{p,p}(x^1, x^2, u_p) \quad (4.121a)$$

$$\mathbf{G}^{p,p}(x^1, x^2, u_p) = \mathbf{G}_+^{p,p}(x^1, x^2, u_p) + \mathbf{G}_-^{p,p}(x^1, x^2, u_p) \quad (4.121b)$$

et dans Ω_p^- :

$$\mathbf{F}^{p,p-1}(x^1, x^2, u_{p-1}) = \mathbf{F}_+^{p,p-1}(x^1, x^2, u_{p-1}) + \mathbf{F}_-^{p,p-1}(x^1, x^2, u_{p-1}) \quad (4.122a)$$

$$\mathbf{G}^{p,p-1}(x^1, x^2, u_{p-1}) = \mathbf{G}_+^{p,p-1}(x^1, x^2, u_{p-1}) + \mathbf{G}_-^{p,p-1}(x^1, x^2, u_{p-1}) \quad (4.122b)$$

Par conséquent, les conditions aux limites à $u_p = 0$ s'écrivent à l'aide des matrices de diffusion :

$$\begin{bmatrix} a_{p+1,p}^+ \\ a_{p,p}^- \end{bmatrix} = S_p^i \begin{bmatrix} a_{p,p}^- \\ a_{p+1,p}^+ \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

Où

$$S_p^i = \begin{bmatrix} F_{mn}^{(p+1,p)+} & -F_{mn}^{(p,p)-} \\ G_{mn}^{(p+1,p)+} & -G_{mn}^{(p,p)-} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_{mn}^{(p,p)+} & -F_{mn}^{(p+1,p)-} \\ G_{mn}^{(p,p)+} & -G_{mn}^{(p+1,p)-} \end{bmatrix} \quad (4.124)$$

L. Li a montré que cette hypothèse est essentiellement basée sur intuition ou sur l'invariance des valeurs propres des équations de Maxwell, et en raison de la troncature inévitable de la matrice se produisant dans l'analyse numérique, cette hypothèse est discutable. D'autre part, les lois de la physique exigent également que le champ électromagnétique total être covariant sous une transformation de coordonnées. Si à un endroit donné la fonction propre les extensions du champ total dans deux systèmes de coordonnées convergent toutes deux, elles doivent correspondre au même champ physique. On adopte la méthode "hybrid-spectrum connection method", dans laquelle L. Li remplace l'hypothèse de G. Granet par :

$$\mathbf{F}^p(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{F}_+^{(p,p-1)}(x^1, x^2, u_{p-1}(x^3)) + \mathbf{F}_-^{(p,p)}(x^1, x^2, u_p(x^3)) \quad (4.125)$$

$$\mathbf{G}^p(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{G}_+^{(p,p-1)}(x^1, x^2, u_{p-1}(x^3)) + \mathbf{G}_-^{(p,p)}(x^1, x^2, u_p(x^3)) \quad (4.126)$$

Par conséquent, la matrice de diffusion devient :

$$S_p^i = \begin{bmatrix} F_{mn}^{(p+1,p)+} & -F_{mn}^{(p,p)-} \\ G_{mn}^{(p+1,p)+} & -G_{mn}^{(p,p)-} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_{mn}^{(p,p-1)+} & -F_{mn}^{(p+1,p+1)-} \\ G_{mn}^{(p,p-1)+} & -G_{mn}^{(p+1,p+1)-} \end{bmatrix} \quad (4.127)$$

Cette manière de construction des matrices de diffusion modifiées est applicable dans le cas d'une surface complexe placé au dessus d'un plan ou deux surfaces complexe non identique dont la déformation est orientée dans la même direction.

4.5.4 Calcul de l'impédance

On s'intéresse maintenant au calcul de la réponse de la sonde en présence du conducteur. En particulier, on recherche la variation d'impédance ΔZ par rapport à la configuration de référence (calcul dans l'espace libre en absence de plaque conductrice). Dans ce cas où une unique sonde est présente et joue à la fois le rôle

d'émetteur et de récepteur, B. A. Auld et J. C. Moulder ont montré [Auld 1999] que la variation d'impédance de la sonde s'écrit :

$$\Delta Z = Z - Z_{ref} = \frac{1}{I_0^2} \oiint_{S_F} (\mathbf{E}^{ref} \times \mathbf{H} + \mathbf{H}^{ref} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} ds. \quad (4.128)$$

où I_0 désigne l'amplitude du courant imposé dans la sonde, S_F la surface fermée représentée en coupe sur la Figure (4.10) et \mathbf{n} le vecteur unitaire normal et sortant de la surface S_F .

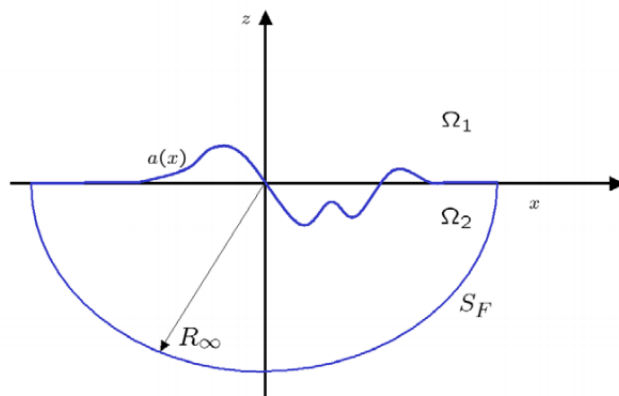


FIGURE 4.10 – Surface complexe de calcul d'impédance du capteur.

Le choix de la surface S_F étant arbitraire, on peut faire tendre le rayon du demi-cylindre ainsi que sa hauteur vers l'infini ou, en pratique vers des valeurs assurant que les champs électromagnétiques soient nuls sur la partie cylindrique de S_F ainsi que sur ses parois verticales (parallèles au plan xOz). La seule contribution restante est alors la quantité

$$\Upsilon = \oiint_{S_c} (\mathbf{E}^{ref} \times \mathbf{H} + \mathbf{H}^{ref} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} ds. \quad (4.129)$$

où S_c désigne l'interface air-conducteur. On a alors :

$$(\mathbf{H}^{ref} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{x}^3 = H_1^{(ref)} E_2 - H_2^{(ref)} E_1 \quad (4.130)$$

Il est important de noter ici que lorsque l'on travaille dans des bases de coordonnées naturelles, les vecteurs de bases que l'on utilise ne sont pas nécessairement normés, ce qui signifie que les composantes de champ calculées ne représentent pas directement des grandeurs physiques : il faut les diviser par la norme des vecteurs de base. Jusqu'ici, ce problème n'était pas apparu puisque les coefficients de normalisation apparaissaient des deux côtés des équations que l'on souhaitait

résoudre (notamment le système traduisant la continuité des composantes tangentielles (4.91)). Ici, on doit travailler avec les champs "physiques", c'est-à-dire normalisés et on doit donc considérer les quantités :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} \quad (4.131)$$

On a donc obtenu :

$$\Delta Z = \sqrt{E_1^{ref} H_2 - E_2^{ref} H_1 + H_1^{ref} E_2 - H_2^{ref} E_1} \, ds \quad (4.132)$$

Finalement, l'expression exacte donnant la variation d'impédance du capteur s'écrit :

$$\Delta Z = \frac{1}{I_0} \int_{x^1} \int_{x^2} (E_1^{ref} H_2 - E_2^{ref} H_1) + (H_1^{ref} E_2 - H_2^{ref} E_1) dx^1 dx^2 \quad (4.133)$$

L'intégrale est alors calculée numériquement à l'aide de la formule trapèze. Le calcul de l'impédance par le module éléments finis est effectué de la même manière présentée dans le chapitre précédent (approche énergétique).

4.6 Validation numérique

Nous présentons ici les résultats de validation numérique pour le cas d'un conducteur anisotrope homogène à géométrie complexe. Nous considérons trois cas de configurations différentes : le cas d'interfaces complexes parallèles, le cas d'interfaces non parallèles (surface complexe-plan) et le cas de déformation 2D5. On s'intéresse au calcul du champ ainsi que la réponse du capteur. Pour remédier au problème de complexité numérique, on faisant un déplacement du capteur selon un seul axe (Ox par exemple). Nous avons choisi de comparer les résultats à ceux obtenus grâce à un logiciel commercial de calcul par éléments finis [Comsol Multiphysics 2018]. Les composantes des champs complexes obtenues sont alors comparées à celles données par notre modèle sur des interfaces parallèle aux profils géométriques (plan d'équation $x^3 = cste$).

Nous présentons, en plus des résultats obtenus, les paramètres numériques ainsi que les temps de calcul de la méthode **CCM** dans les différentes configuration considérées. Concernant le modèle éléments finis, le temps de calcul pour chacune des configuration est sensiblement le même. En effet, la configuration implémentée (notamment le maillage) conduit à la détermination de près de 5 millions de degrés de liberté dans chaque cas. Le temps de calcul pour chaque position du capteur est de l'ordre de quinzaine de minutes.

La machine utilisée pour le calcul par éléments finis possède deux coeurs d'une fréquence d'horloge de 3.1 GHz et 32 Gb de mémoire RAM. Celle utilisée pour les calculs avec la méthode semi-analytique possède deux coeurs de 3.1 GHz de fréquence d'horloge et 8 Gb de mémoire vive.

4.6.1 Perturbation 3D : strates parallèles

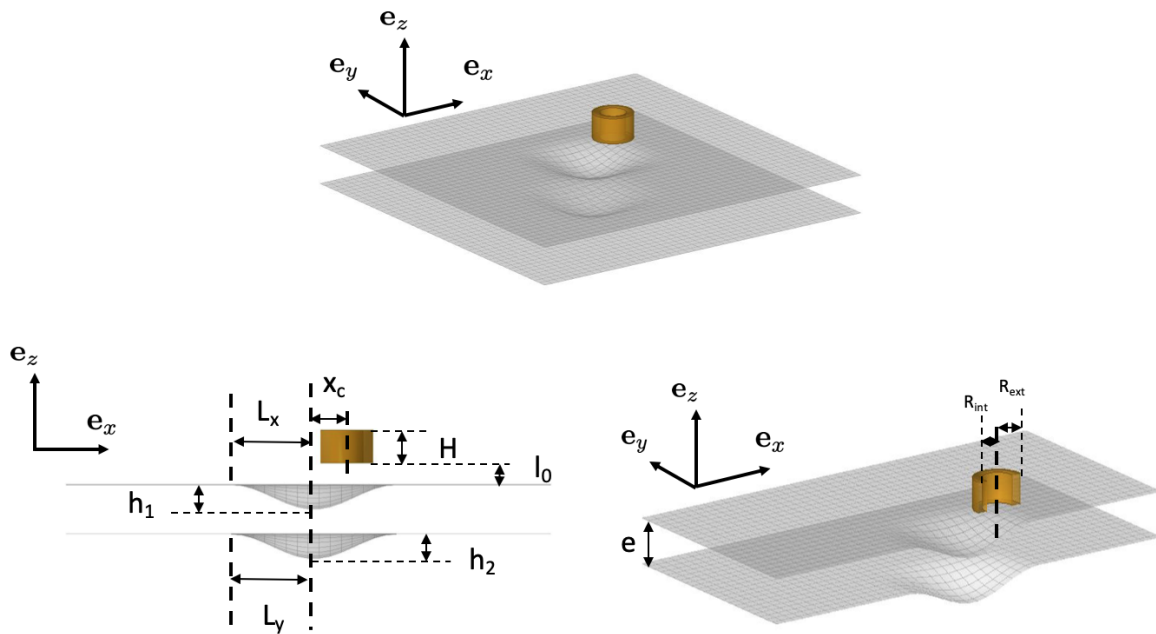


FIGURE 4.11 – Configuration : conducteur anisotrope à surfaces complexes 3D parallèles.

On considère la configuration présentée Dans la Figure 4.11 et dont les différents paramètres sont détaillés dans les tableaux 4.2, 4.4 et 4.5. La fréquence est choisi élevée par rapport à celle choisi dans le cas isotrope due à la faible conductivité selon l'axe vertical, pour assurer une densité de champ et de courant importante près de la surface supérieur. Le tableau ?? recense les paramètres numériques utilisés pour le calcul. Rappelons que ces paramètres doivent être ajustés en fonction de la fréquence : comme nous l'avons déjà vu, l'expansion spatiale des champs est d'autant plus importante que la fréquence est basse [36] et l'on doit s'assurer que ceux-ci sont bien nuls sur les extrémités de la boîte. En d'autres termes, plus la fréquence est basse et plus les paramètres x_{max} et y_{max} devront être

grands (pour rappel, ces paramètres désignent les tailles du domaine numérique considéré dans les directions x^1 et x^2 respectivement). On doit alors augmenter le nombre de modes afin d'assurer la convergence de la méthode. Un autre paramètre à considérer dans le choix des paramètres numérique : la conductivité selon les différents axes. En effet, si la conductivité selon les axes sont très faibles, ceci fait que le champ soit plus étalé (ne s'annule pas trop vite) dont il faut ajuster le domaine de calcul pour tenir compte l'anisotropie de la pièce. Ce point constitue l'inconvénient majeur de la stratégie de discrétisation que nous avons choisie.

TABLE 4.2 – Paramètres géométriques du défauts.

symbole	interface 1	interface 2
Lpx	7	7
Lpy	7	7
cx	0	0
cy	0	0
x3	0	-2
hp	-1	-1

TABLE 4.3 – Paramètres numériques de calcul.

Parameter	Symbol	Value
N° de modes (Ox)	M_u	15
N° de modes (Oy)	M_v	15
Borne de calcul (Ox)	x_{max}	23 mm
Borne de calcul (Oy)	y_{max}	23 mm
hauteur interface	x^3	[-0.15] mm

TABLE 4.4 – Paramètres du capteur.

Parameter	Symbol	Value
Fréq	f	1 MHz
Courant	I_0	1 A
Inner radius	R_{int}	1 mm
Outer radius	R_{ext}	1.6 mm
Height	H	2 mm
N° de tours	N	100
Liftoff	l_0	0.3 mm
Xpos	x_c	2 mm
Ypos	y_c	0 mm

TABLE 4.5 – Paramètres de la pièce.

Parameter	Symbol	Value
conductivité		
- longitudinale	σ_l	1 MS/m
-transversale	σ_t	0.05 MS/m
-normale	σ_n	0.1 MS/m
Orientation	θ	45 deg

Sur la figure 6.16, nous avons représenté les cartographies des parties réelles et imaginaires des composantes du champ électriques obtenues par les deux méthodes sur une surface d'équation $x^3 = -0.5$ mm. De même, les cartographies des composantes de H apparaissent sur la figure 6.17. On voit un très bon accord des résultats et pour s'en assurer, nous avons tracé les erreurs relatives correspondantes sur la figure 6.18. Celles-ci sont très faibles puisqu'elles sont inférieures à 3% hormis en des points isolés où elles atteignent 5%.

Profondeur [mm]	$\xi(\%) H_x$	$\xi(\%) H_y$	$\xi(\%) H_z$
0	2.88	2.75	2.79
0.15	2	2.987	2.1
0.3	2.48	2.45	2.41

TABLE 4.6 – Erreur sur la norme des composantes du champ magnétique.

Profondeur [mm]	$\xi(\%) E_x$	$\xi(\%) E_y$	$\xi(\%) E_z$
0	2.45	2.04	3.02
0.15	2.67	2.88	3.24
0.3	3.5	3.36	4.12

TABLE 4.7 – Erreur sur la norme des composantes du champ électrique.

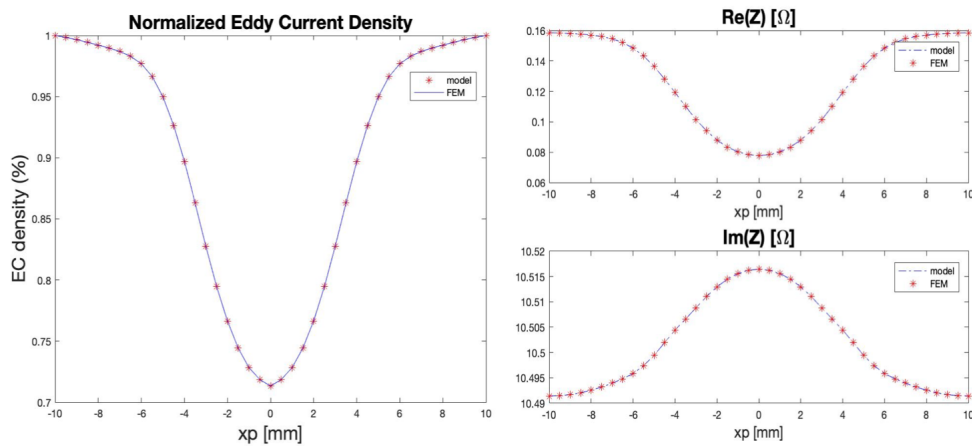


FIGURE 4.12 – Densité de courant normalisée et variation de la partie réelle et imaginaire de l'impédance du capteur en fonction du déplacement du capteur.

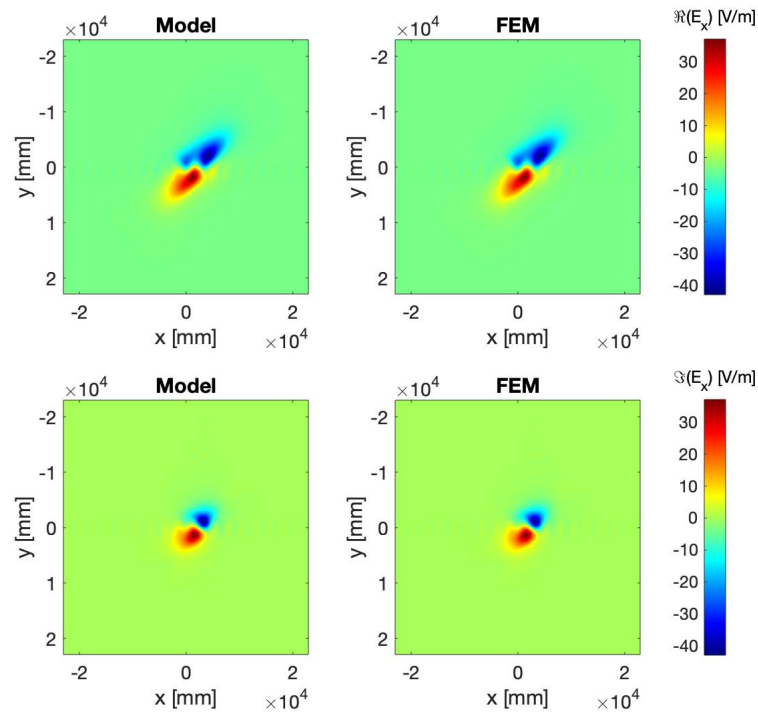


FIGURE 4.13 – Partie réelle et imaginaire de E_1 sur le plan $x^3 = -0.15\text{mm}$ avec $\theta = 45^\circ$

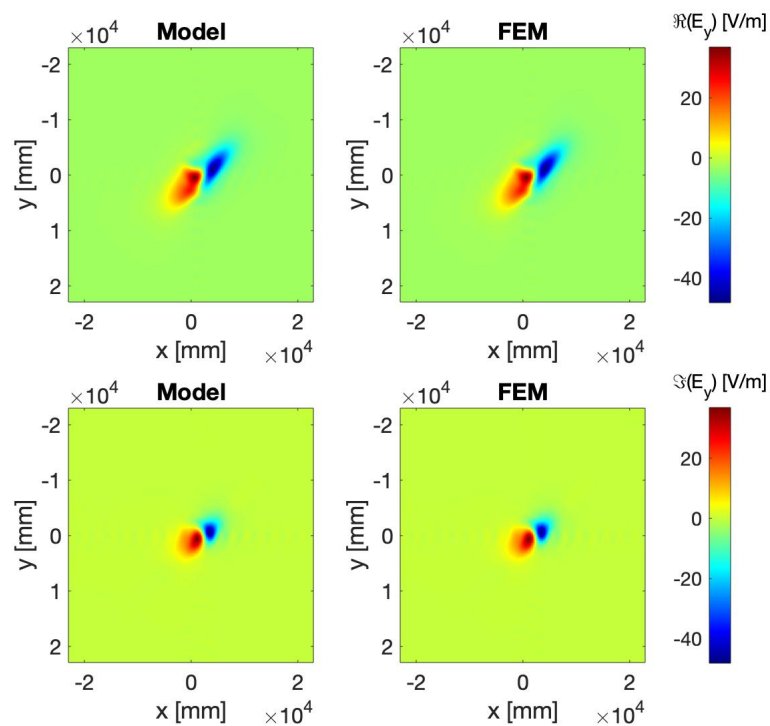


FIGURE 4.14 – Partie réelle et imaginaire de E_2 sur le plan $x^3 = -0.15\text{mm}$ avec $\theta = 45^\circ$

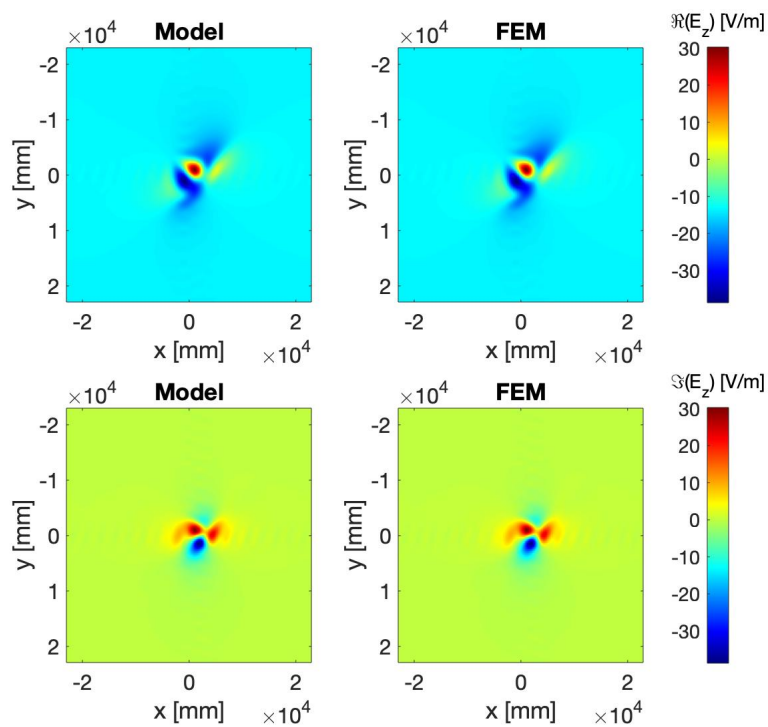


FIGURE 4.15 – Partie réelle et imaginaire de E_3 sur le plan $x^3 = -0.15\text{mm}$ avec $\theta = 45^\circ$

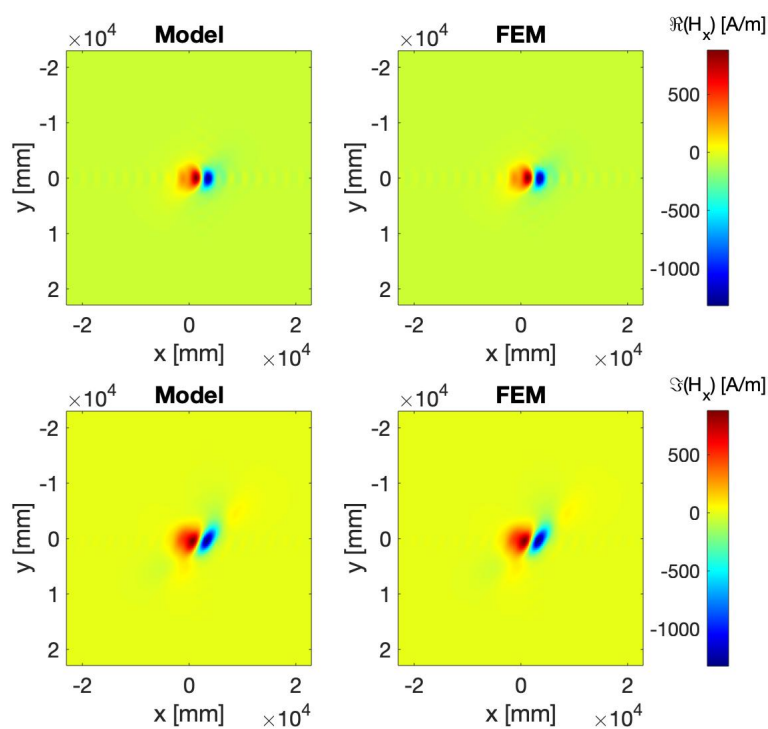


FIGURE 4.16 – Partie réelle et imaginaire de H_1 sur le plan $x^3 = -0.15\text{mm}$ avec $\theta = 45^\circ$

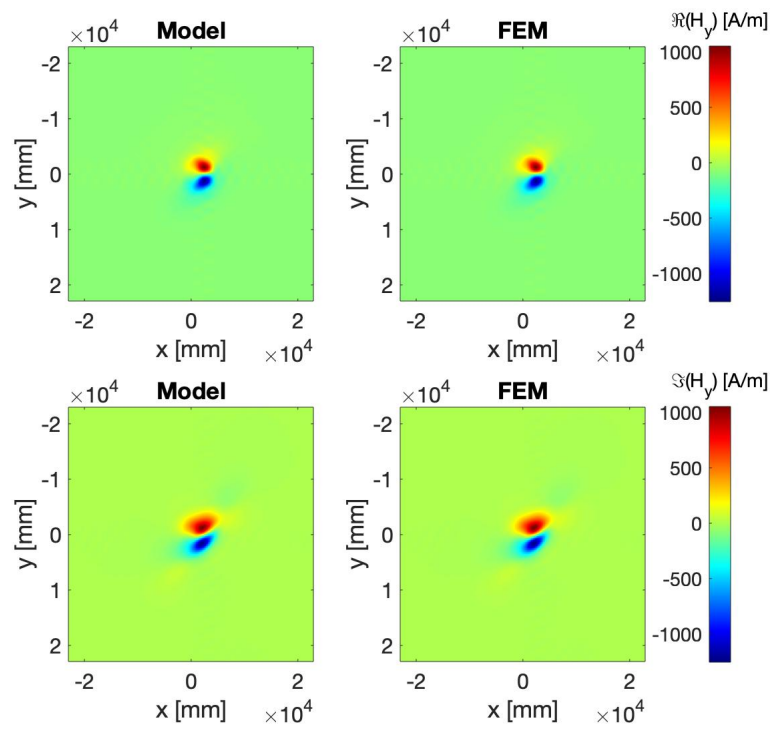


FIGURE 4.17 – Partie réelle et imaginaire de H_2 sur le plan $x^3 = -0.15\text{mm}$ avec $\theta = 45^\circ$

4.6.2 Perturbation 3D : cas de surface complexe et un plan

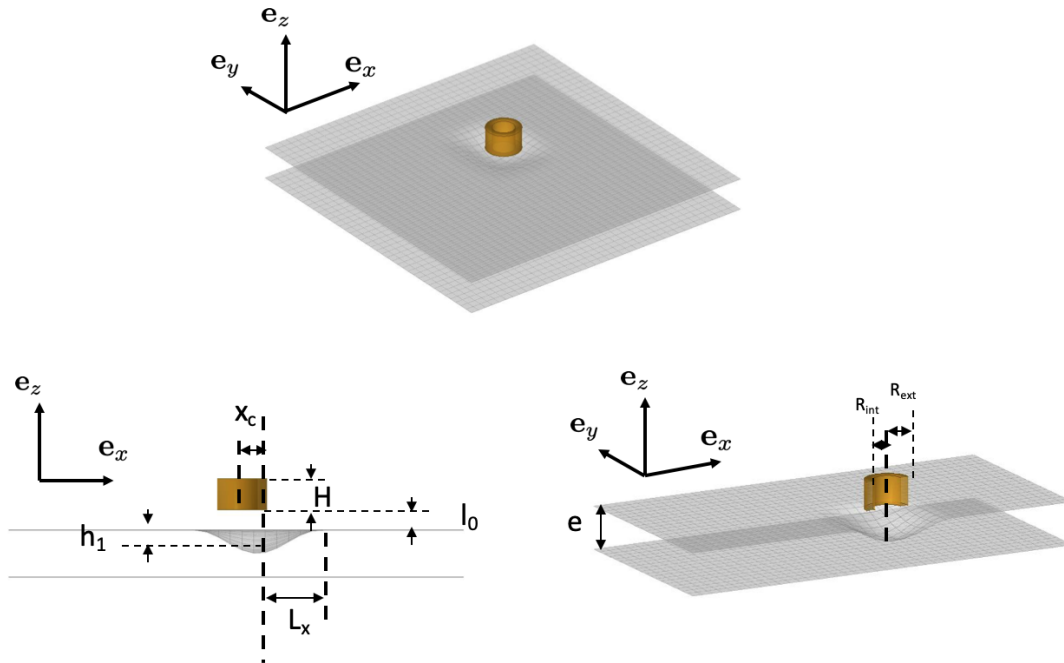


FIGURE 4.18 – Conducteur anisotrope : cas de surface complexe et un plan

la configuration représentée sur la Figure 4.18 et dont les différents paramètres sont détaillés sur le tableau 4.10.

Les tableaux 4.11, 4.12 et 4.13 recensent les paramètres numériques utilisés pour le calcul ainsi que les différents temps de calcul obtenus pour cette configuration.

Sur les Figures 4.19, 4.20 et 4.21, nous avons représenté les cartographies des parties réelles et imaginaires des composantes du champ électrique obtenues par les deux méthodes sur une surface d'équation $x^3 = -0.5$ mm. De même, les cartographies des composantes du champ magnétique apparaissent sur les Figure 4.22, 4.23 et 4.24. On voit un très bon accord des résultats et pour s'en assurer, nous avons tracé les erreurs relatives correspondantes sur le tableau!!!!. Celles-ci sont très faibles puisqu'elles sont inférieures à 3% hormis en des points isolés où elles atteignent 5%.

Profondeur [mm]	$\xi(\%) H_x$	$\xi(\%) H_y$	$\xi(\%) H_z$
0	2.88	2.75	2.79
0.15	2	2.987	2.1
0.3	2.48	2.45	2.41

TABLE 4.8 – Erreur sur la norme des composantes du champ magnétique.

Profondeur [mm]	$\xi(\%) E_x$	$\xi(\%) E_y$	$\xi(\%) E_z$
0	2.45	2.04	3.02
0.15	2.67	2.88	3.24
0.3	3.5	3.36	4.12

TABLE 4.9 – Erreur sur la norme des composantes du champ électrique.

TABLE 4.10 – Paramètres géométriques du défaut

symbole	interface 1	interface 2
Lpx	7	7
Lpy	7	7
cx	0	0
cy	0	0
x3	0	-2
hp	-1	-1

TABLE 4.11 – Paramètres numériques de calcul

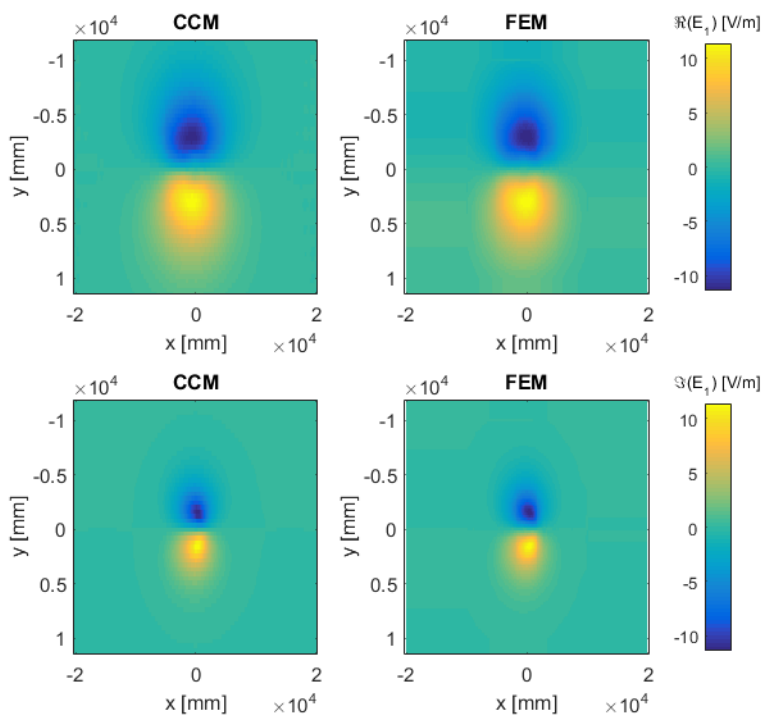
Parameter	Symbol	Value
N° de modes (Ox)	M_u	15
N° de modes (Oy)	M_v	15
Borne de calcul (Ox)	x_{max}	23 mm
Borne de calcul (Oy)	y_{max}	23 mm
x3	x_3	-0.3 mm

TABLE 4.12 – Paramètres du capteur

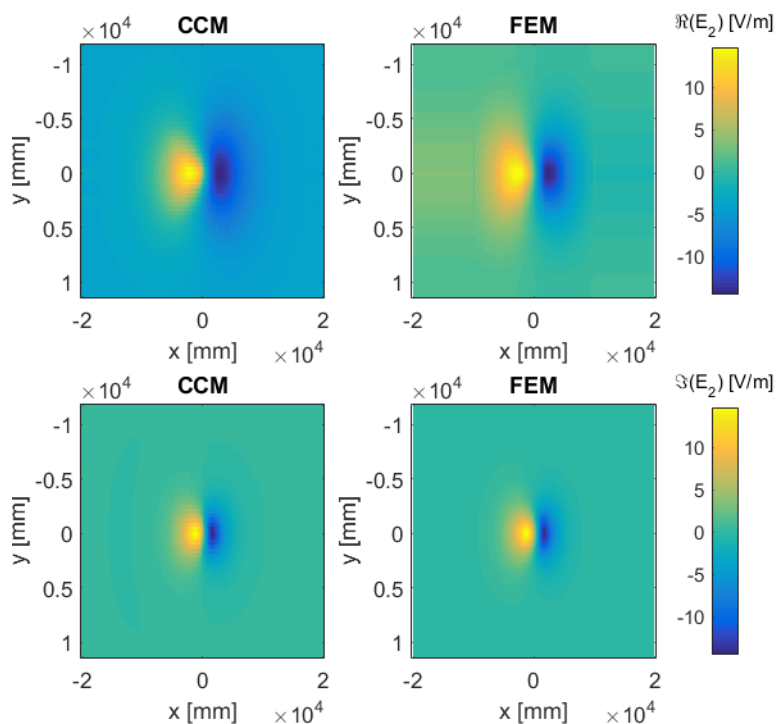
Parameter	Symbol	Value
Fréq	f	1 MHz
Courant	I_0	1 A
Inner radius	R_{int}	1 mm
Outer radius	R_{ext}	1.6 mm
Height	H	2 mm
N° de tours	N	100
Liftoff	l_0	0.3 mm
Xpos	x_c	2 mm
Ypos	y_c	0 mm

TABLE 4.13 – Paramètres de la pièce

Parameter	Symbol	Value
conductivité		
- longitudinale	σ_l	1 MS/m
-transversale	σ_t	0.05 MS/m
-normale	σ_n	0.1 MS/m
Orientation	θ	45 deg

FIGURE 4.19 – Partie réelle et imaginaire de E_1 sur le plan $x^3 = -0.3\text{mm}$.

1

FIGURE 4.20 – Partie réelle et imaginaire de E_2 sur le plan $x^3 = -0.3\text{mm}$.

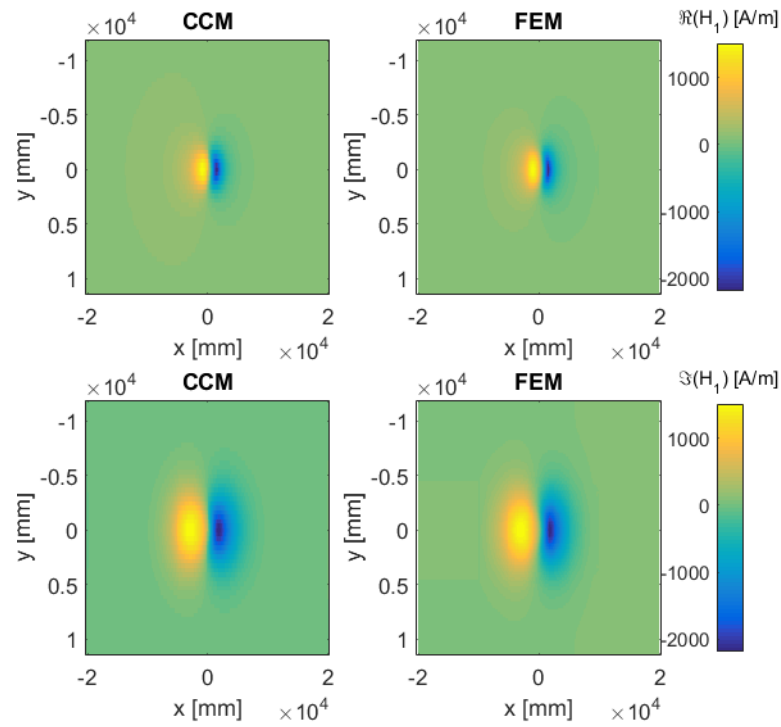


FIGURE 4.21 – Partie réelle et imaginaire de H_1 sur le plan $x^3 = -0.3\text{mm}$.

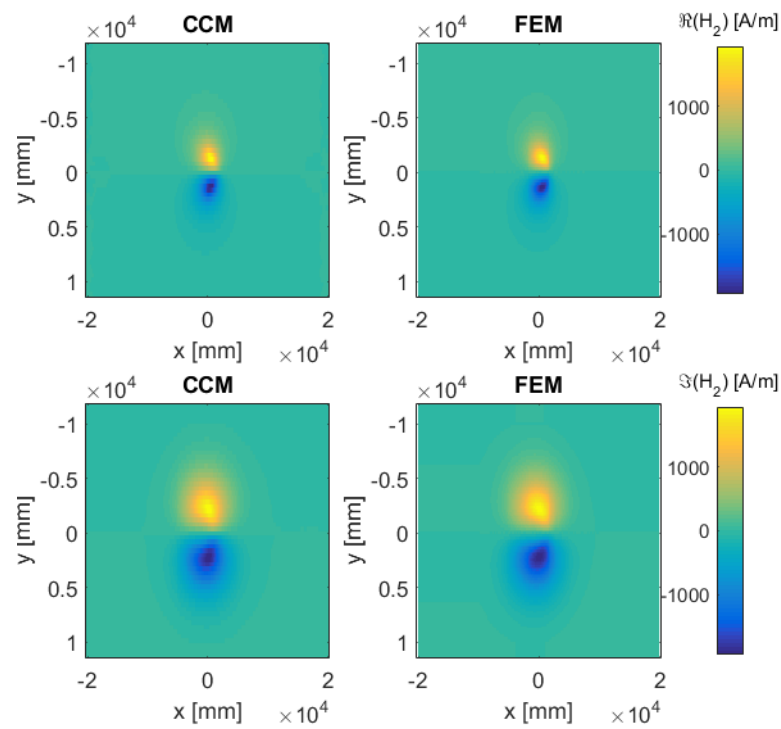


FIGURE 4.22 – Partie réelle et imaginaire de H_2 sur le plan $x^3 = -0.3\text{mm}$.

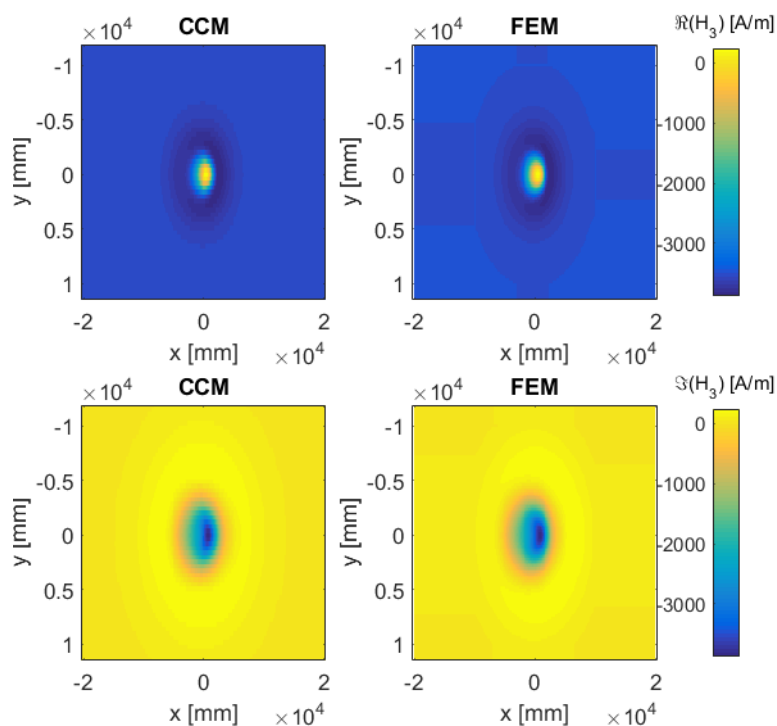


FIGURE 4.23 – Partie réelle et imaginaire de H_3 sur le plan $x^3 = -0.3\text{mm}$.

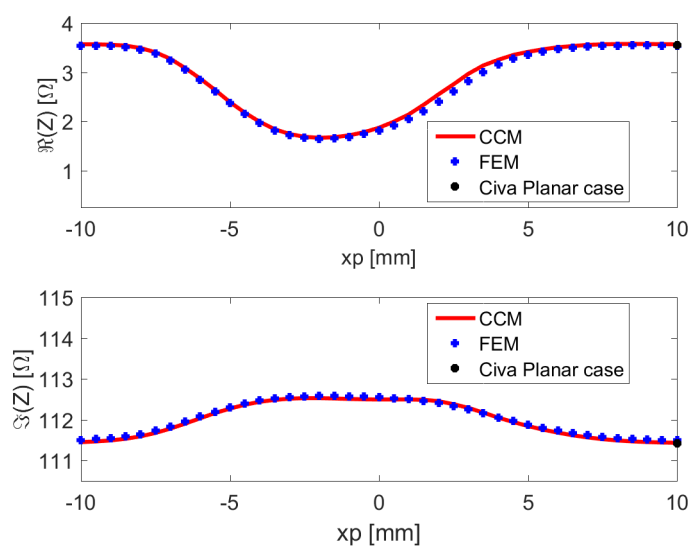


FIGURE 4.24 – Variation de la partie réelle et imaginaire de l'impédance

4.6.3 Perturbation 2D5

dans le but de simplifier et d'alléger la complexité numérique de résolution de la configuration (4.25), dont les paramètres sont présentés dans le tableau (4.14) tout en assurant une meilleure convergence de la solution, on suppose une invariance géométrique selon un axe transversale (Oy par exemple). De ce fait, on traite une configuration dite 2D5 comme présentée dans la figure!!!!. la structure déformée présente une complexité géométrique selon un seul axe (Ox) et est extrudée selon l'autre direction. ça se traduit par une dépendance en x seulement de la géométrie ($a(x,y)=a(x)$) et le tenseur métrique se simplifie. Numériquement, ça nous permet d'augmenter le nombre de modes selon la direction x^1 et boucler sur la direction d'invariance avec un nombre modes autant qu'on veut.

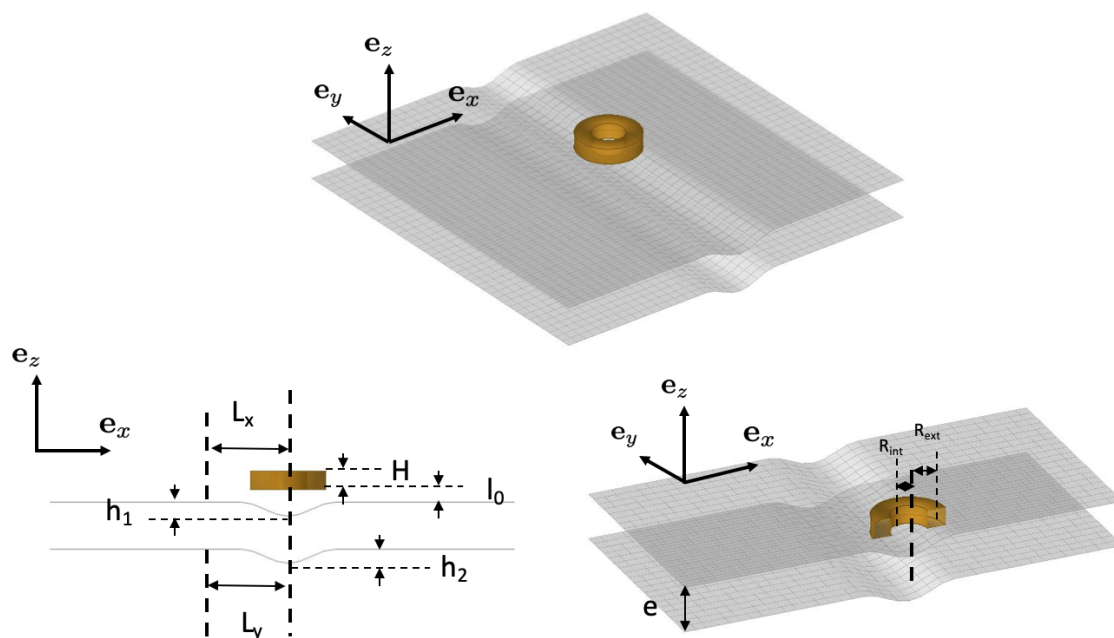


FIGURE 4.25 – Conducteur anisotrope à surfaces complexes 2D5 non parallèles.

Les tableaux (4.15), (4.16) et (4.17) recensent les paramètres numériques utilisés pour le calcul ainsi que les différents temps de calcul obtenus pour cette configuration.

TABLE 4.14 – Paramètres géométriques du défauts

symbole	interface 1	interface 2
Lpx	0	0
cx	0	0
x3	0	-2
hp	-1.5	-1.5

TABLE 4.15 – Paramètres numériques de calcul

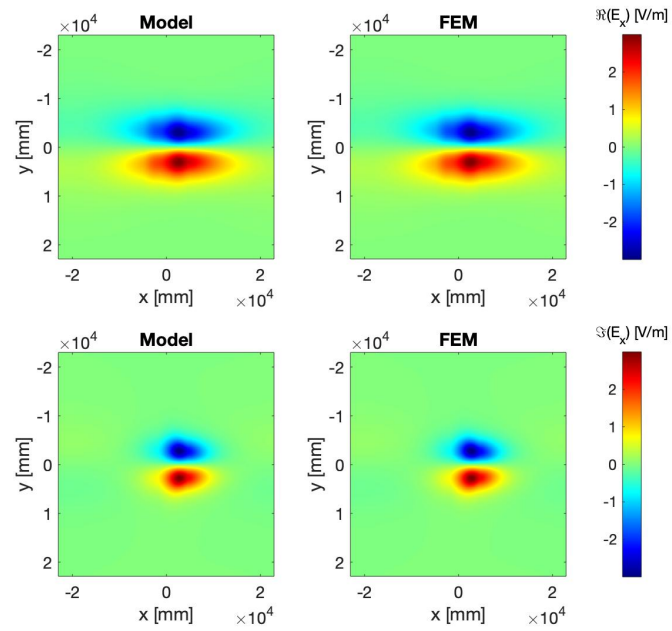
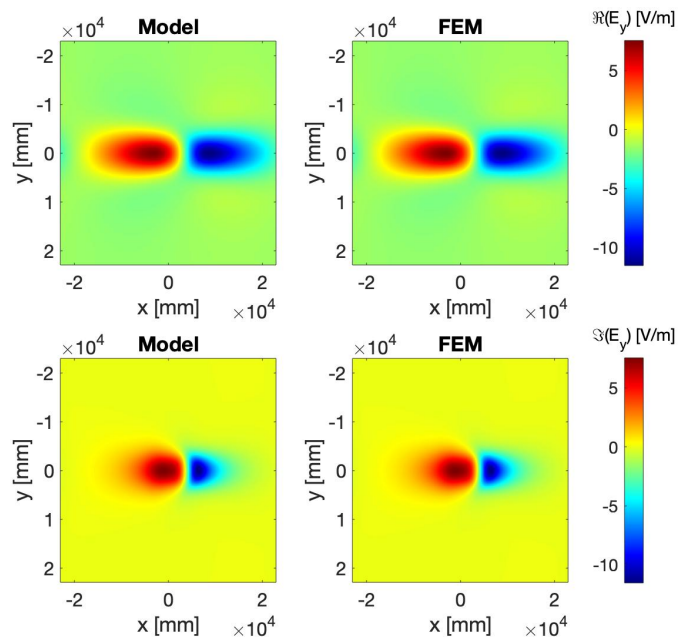
Parameter	Symbol	Value
N° de modes (Ox)	M_u	30
N° de modes (Oy)	M_v	80
Borne (Ox)	x_{max}	23 mm
Borne (Oy)	y_{max}	23 mm
x3	x_3	-0.5 mm

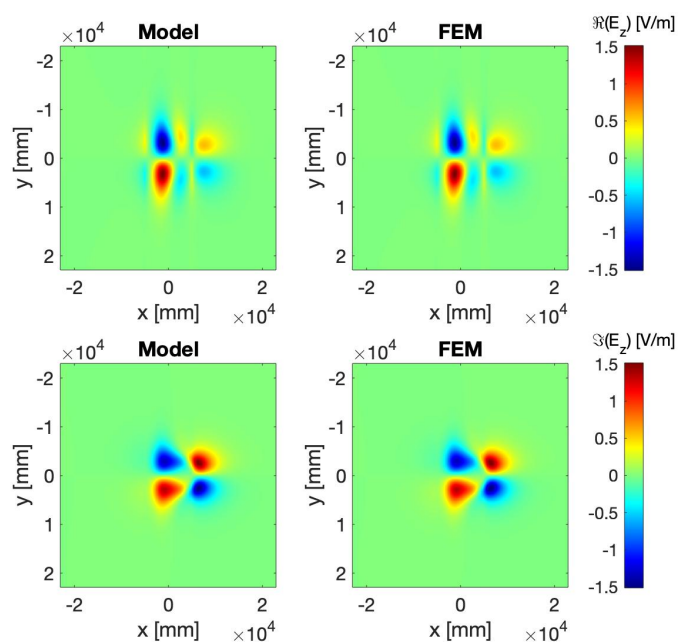
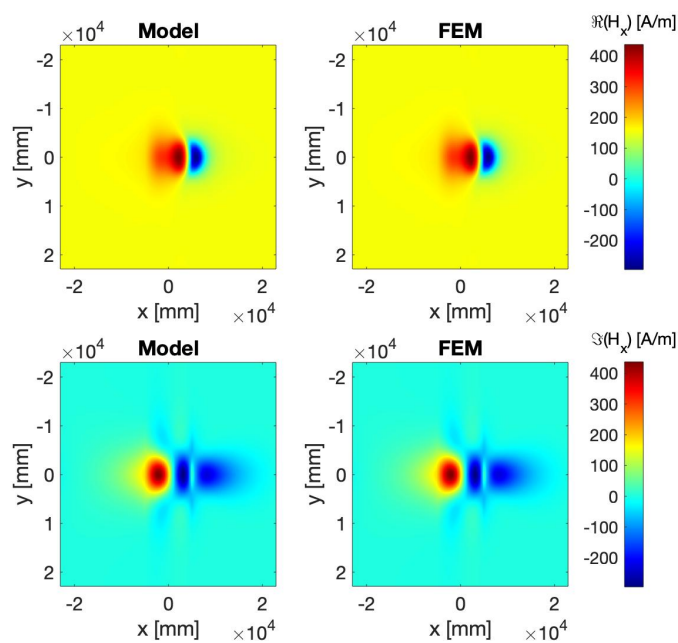
TABLE 4.16 – Paramètres du capteur

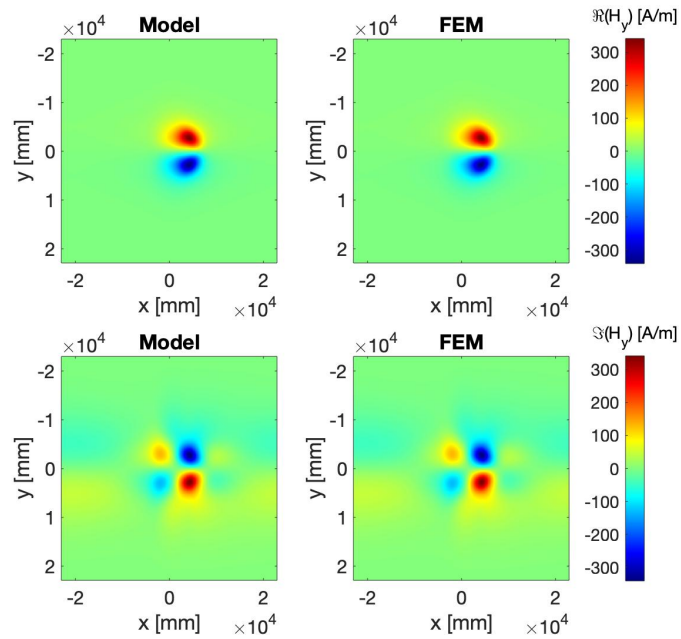
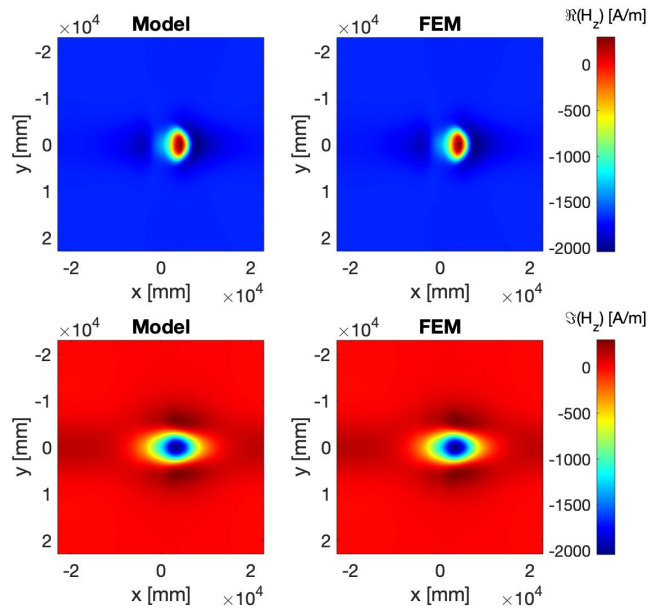
Parameter	Symbol	Value
Fréq	f	100 kHz
Courant	I_0	1 A
Inner radius	R_{int}	2 mm
Outer radius	R_{ext}	4 mm
Height	H	2 mm
N° de tours	N	100
Liftoff	l_0	0.3 mm
Xpos	x_c	0 mm

TABLE 4.17 – Paramètres de la pièce

Parameter	Symbol	Value
conductivité		
-longitudinale	σ_l	1 MS/m
-transversale	σ_t	0.1 MS/m
-normale	σ_n	0.1 MS/m
Orientation	θ	0 deg

FIGURE 4.26 – $\Re(E_1)$ et $\Im(E_1)$ sur un plan d'équation $x^3 = -0.5\text{mm}$.FIGURE 4.27 – $\Re(E_2)$ et $\Im(E_2)$ sur un plan d'équation $x^3 = -0.5\text{mm}$.

FIGURE 4.28 – $\Re(E_3)$ et $\Im(E_3)$ sur un plan d'équation $x^3 = -0.5\text{mm}$.FIGURE 4.29 – $\Re(H_1)$ et $\Im(H_1)$ sur un plan d'équation $x^3 = -0.5\text{mm}$.

FIGURE 4.30 – $\Re(H_2)$ et $\Im(H_2)$ sur un plan d'équation $x^3 = -0.5\text{mm}$.FIGURE 4.31 – $\Re(H_3)$ et $\Im(H_3)$ sur un plan d'équation $x^3 = -0.5\text{mm}$.

Profondeur [mm]	$\xi(\%) H_x$	$\xi(\%) H_y$	$\xi(\%) H_z$
0	0.88	0.75	0.79
0.15	1	1.987	1.1
0.3	1.48	1.45	1.41

TABLE 4.18 – Erreur sur la norme des composantes du champ magnétique.

Profondeur [mm]	$\xi(\%) E_x$	$\xi(\%) E_y$	$\xi(\%) E_z$
0	0.45	1.04	1.02
0.15	1.67	1.88	1.24
0.3	2.15	2.36	2.12

TABLE 4.19 – Erreur sur la norme des composantes du champ électrique.

4.7 Bilan

Nous avons donc validé le modèle développé afin de traiter des pièces homogènes, à interfaces complexes et à propriétés conductrices anisotropes quelconques. La comparaison avec une solution numérique obtenue par une méthode éléments finis présente un bon accord avec les données simulées. ceci montre que ce modèle permet de calculer les champs électromagnétiques induits dans la pièce à différentes profondeurs, ainsi que l'impédance de la sonde de manière rapide et précise pour différentes positions du capteur et pour différentes fréquences de travail.

Le formalisme utilisé est unifiant et peut être étendu pour le cas d'un matériau non homogène. Ceci introduira une complexité numérique pour la résolution des systèmes aux valeurs propres ainsi que les produits de convolution.

Pour contourner le problème de surfaces complexes quelconques d'une manière plus rigoureuse, on propose en perspective une méthode purement numérique pour la résolution des équations de maxwell covariante dans la strate anisotrope.

Nous verrons par la suite que le formalisme utilisé est unifiant et générique qui peut être étendu au cas des milieux anisotropes non homogènes à surfaces complexes par l'intermédiaire d'une variation spatiale des composantes du tenseur de conductivité et du tenseur de perméabilité. Ce qui revient à modéliser un autre type de défaut fréquemment trouvé comme la rupture des fibres

Chapitre 5

Perspectives et extension du formalisme

Sommaire

5.1	Introduction	140
5.2	Cas général des surfaces complexes	140
5.2.1	Stratégie de Résolution	140
5.2.2	Méthode Pseudo-Spectrale	143
5.2.3	Résultats préliminaires	156
5.3	Généralisation au cas des milieux non-homogènes	157
5.3.1	Configuration	158
5.3.2	Mise en équations	158
5.3.3	Validation numérique	161
5.4	Bilan	165

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, le formalisme a présenté des limitations vis à vis le cas général des interfaces complexes non parallèles, en particulier celles à déformations de sens opposé, présentées dans la Figure (5.1).

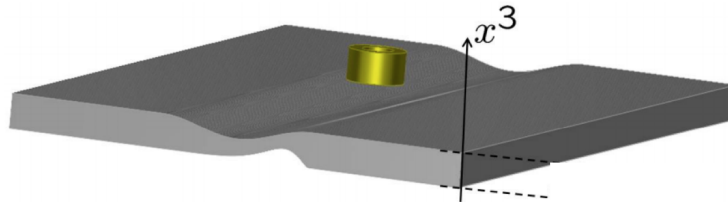


FIGURE 5.1 – Exemple de surfaces 3D complexes non parallèles et non planes.

Dans le présent chapitre, on présente un modèle hybride couplant d'une part la même approche modale qui reste applicable dans le milieu isotrope et permettant une représentation optimale des composantes du champ à l'aide des solutions propres de l'équation de Helmholtz en coordonnées curvilignes et d'autre part une approche purement numérique pour le calcul du champ dans la strate anisotrope à interfaces complexes non planes et non parallèles. Dans ce type de domaine, nous chercherons donc directement à déterminer les champs électromagnétiques en tout point en résolvant les équations de Maxwell à l'aide d'un schéma numérique que nous allons détailler.

Dans une deuxième partie, on propose d'étendre le formalisme unifiant présenté dans le chapitre précédent pour traiter le cas des matériaux non homogène. Un cas test simplifié a été étudié tenant compte d'une variation brutale de la conductivité d'une pièce composite plane homogénéisée.

Des résultats préliminaires de validation numériques seront présentés où les résultats de simulations sont comparées à des données éléments finis.

5.2 Cas général des surfaces complexes

5.2.1 Stratégie de Résolution

La stratégie de résolution consiste à remplacer l'approche semi-analytique, utilisée pour la détermination du champ dans le milieu anisotrope, par une méthode purement numérique tout en gardant la même démarche modale de résolution si on se place dans un milieu isotrope. Ceci nécessite une méthode de discrétisation spécifique de la structure anisotrope. Les formulations classique de la méthode

éléments finis du type " $A - \phi$ " sont très coûteuse. Afin d'obtenir une résolution plus légère sans avoir recourt à un maillage, on fait appel à une méthode pseudo-spectrale qui est basée sur une discrétisation des équations selon la profondeur.

Nous nous limiterons ici au cas d'une seule couche à surfaces complexes non identiques et non planes. La méthode développée peut être étendue au cas de plusieurs couches adjacentes. On discrétiserait alors séparément ces couches et on imposerait les conditions de passage des champs le long de leur interfaces communes.

Afin d'obtenir une résolution efficace du problème, nous utilisons une nouvelle fois le formalisme covariant des équations de Maxwell, que nous généralisons à des systèmes de coordonnées étendus permettant de prendre en compte directement les deux interfaces extrêmes de la strate non-homogène. La définition de ce type de système est réalisée par une méthode de raccordement de coordonnées (ou coordinate matching en anglais) qui est détaillée dans la partie suivante [40].

Raccordement de coordonnées et discrétisation

Le raccordement de coordonnées a été utilisé pour l'étude de réseaux de diffraction à deux dimensions avec la méthode modale de Fourier [95]. Nous proposons de le transposer dans notre domaine d'étude avec la méthode-C qui est plus appropriée à notre problème. On considère une pièce composée de deux interfaces complexes d'équations respectives $z = a_1(x) + C_1$ et $z = a_2(x) + C_2$, comme le montre la Figure (5.1), où C_1 et C_2 sont des constantes qui désignent l'altitude moyenne des profils. L'opération de raccordement de systèmes de coordonnées consiste à définir un changement de coordonnées de la forme :

$$\begin{cases} x = x^1 \\ y = x^2 \\ z = a(x, y, x^3) \end{cases} \quad (5.1)$$

où « a » est une fonction de l'espace vérifiant les deux égalités suivantes :

$$a(x^1, x^2, x^3 = C_1) = a_1(x^1, x^2) + C_1 \quad (5.2)$$

$$a(x^1, x^2, x^3 = C_2) = a_1(x^1, x^2) + C_2 \quad (5.3)$$

On obtient alors un système de coordonnées naturelles associées au tenseur métrique suivant [71] :

$$[g^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-\dot{a}_1}{\dot{a}_3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\dot{a}_1}{\dot{a}_3} & 0 & \frac{1+\dot{a}_1^2}{\dot{a}_3^2} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Il existe une infinité de fonctions $a(x^1, x^2, x^3)$ vérifiant les deux conditions (5.3) et (5.3). Nous avons choisi de la construire en utilisant une fonction de transition $h_n(x^3)$ de la forme :

$$h_n : x^3 \rightarrow \left(\frac{x^3 - C_2}{C_1 - C_2} \right) \quad (5.5)$$

On voit aussi qu'il est nécessaire d'imposer $C_1 - C_2 \neq 0$ afin que les fonctions h_n soient bien définies. Il est clair que ces fonctions valent 1 en $x^3 = C_1$ et 0 en $x^3 = C_2$. On construit alors $a(x^1, x^2)$ de la façon suivante :

$$a(x^1, x^2, x^3) = h_n(x^3)(a_1(x^1, x^2) + C_1) + (1 - h_n(x^3))(a_2(x^1, x^2) + C_2) \quad (5.6)$$

un exemple d'interfaces intermédiaires adaptées à la géométrie complexe est illustré dans la Figure (5.2), où $C_1 = 0$ et $C_2 = -1$.

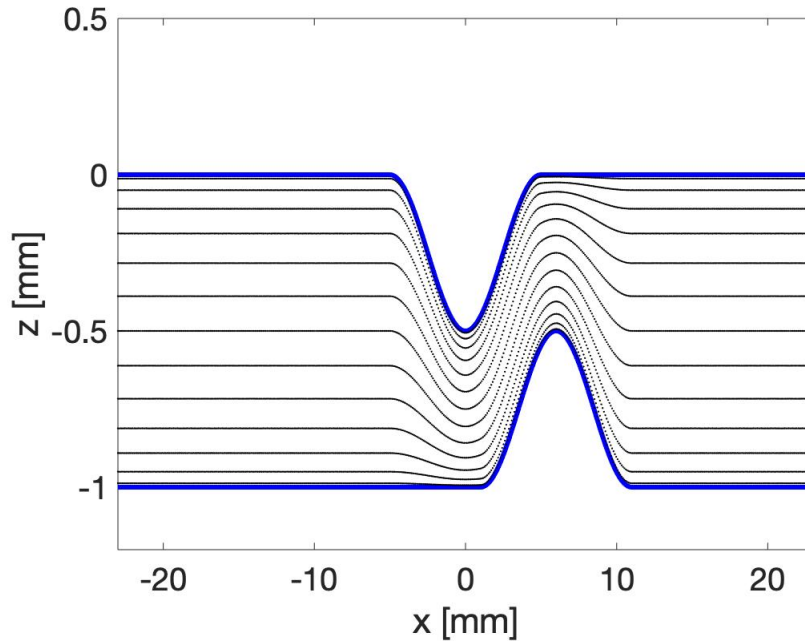


FIGURE 5.2 – Surfaces intermédiaire adaptée à la géométrie complexe.

Équations Physiques

Comme précédemment, nous allons considérer les équations de Maxwell sous forme tensorielle. On cherche de même les composantes covariantes tangentielles

des champs électromagnétiques :

$$\partial_v E_w - \partial_w E_v = -ik\mu\sqrt{g} [g^{11}G_u + g^{12}G_v + g^{13}G_w] \quad (5.7)$$

$$\partial_w E_u - \partial_u E_w = -ik\mu\sqrt{g} [g^{21}G_u + g^{22}G_v + g^{23}G_w] \quad (5.8)$$

$$\partial_u E_v - \partial_v E_u = -ik\mu\sqrt{g} [g^{31}G_u + g^{32}G_v + g^{33}G_w] \quad (5.9)$$

$$\partial_v G_w - \partial_w G_v = ik\sqrt{g} [\varepsilon_g^{11}E_u + \varepsilon_g^{12}E_v + \varepsilon_g^{13}E_w] \quad (5.10)$$

$$\partial_w G_u - \partial_u G_w = ik\sqrt{g} [\varepsilon_g^{21}E_u + \varepsilon_g^{22}E_v + \varepsilon_g^{23}E_w] \quad (5.11)$$

$$\partial_u G_v - \partial_v G_u = ik\sqrt{g} [\varepsilon_g^{31}E_u + \varepsilon_g^{32}E_v + \varepsilon_g^{33}E_w] \quad (5.12)$$

Où ε^{ij} sont définis dans (5.114). En adoptant la même démarche de décomposition, on aboutit au système différentiel complet suivant :

$$\partial_3 \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

La méthode numérique a alors pour but de discrétiser l'opérateur différentiel ∂_3 . On propose donc de déterminer numériquement les quatre composantes des champs vérifiant ces équations au sein de la strate anisotrope. Afin d'obtenir des solutions uniques à ce problème, il est nécessaire d'imposer des conditions de bords à ces quatre composantes. De même que lorsque nous avons traité le cas d'une pièce stratifiée, les conditions que l'on impose ici sont de type Dirichlet puisqu'elles traduisent la continuité de ces quatre composantes au niveau des deux interfaces extrêmes.

5.2.2 Méthode Pseudo-Spectrale

Les méthodes spectrales et pseudo-spectrales ont été largement utilisées afin de résoudre des équations aux dérivées partielles dans divers domaines de la physique. Leur avantage principal réside dans leur convergence très rapide (on parle de convergence spectrale) lorsque la solution est douce. L'idée générale afin de déterminer les valeurs aux $N+1$ noeuds de discrétisation x_k de la solution $f(x)$ d'une équation différentielle par une méthode spectrale est d'approcher cette fonction par une série de fonctions $\rho_k(x)$. On obtient alors un interpolant de f , que l'on notera \hat{f} et qui s'écrit sous la forme :

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=0}^N f(x_k)\rho_k(x) \quad (5.14)$$

Les fonctions $\rho_k(x)$ sont appelées les fonctions cardinales et vérifient la propriété suivante : $\forall(k, l) \in \mathbb{N}^2$:

$$\rho_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = l \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.15)$$

On approxime alors la dérivée de f par celle de \hat{f} via l'hypothèse $\hat{f}'(x) = \sum_k f(x_k) \rho_k'(x)$. On souhaite de plus obtenir les coefficients v_k de l'interpolant f' défini par :

$$\hat{f}'(x) = \sum_{k=0}^N v_k \rho_k(x) \quad (5.16)$$

Afin d'obtenir une relation entre les f'_k et les $f(x_k)$, nous introduisons une base de $N + 1$ fonctions tests définies sur l'intervalle $[-1; 1]$. Finalement, ces relations peuvent être exprimées sous la forme matricielle suivante :

$$[M_{ij}][f(x_j)]_0^N = [L_{ij}][v_j]_0^N, \quad (5.17)$$

Où les M_{ij} et L_{ij} sont deux matrices décrites explicitement dans le chapitre 7 de [21]. On peut donc définir une matrice dite de différenciation $D_N = L^{-1}M$. On a donc $[v_j] = D_N[f(x_j)]$.

Discrétisation

Afin de limiter l'erreur commise entre les noeuds de discrétisation qui peut être plus ou moins importante suite à l'utilisation des impulsion de Dirac (des oscillations importantes peuvent apparaître connues sous le nom de phénomène de Runge), une solution communément employée est d'utiliser une base de polynômes de Chebyshev définis sur l'intervalle $[-1; 1]$ par :

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (5.18)$$

En effet, l'une des propriétés de ces polynômes est qu'ils présentent une oscillation minimale (par rapport à n'importe quel polynôme de même degré) sur l'intervalle $[-1; 1]$. Afin de discrétiser les équations que l'on a obtenu par le formalisme covariant des équations de Maxwell suivant la direction x_3 , on utilisera donc une base de $N + 1$ polynômes de Chebyshev associés aux noeuds de Chebyshev définis par :

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right), \quad k \in [0, N] \quad (5.19)$$

Les fonctions cardinales associées à cette base sont définies de la façon suivante [Boyd 2001, chap. 5] :

$$\rho_k(x) = \frac{(-1)^{(k+1)}(1-x^2)T'_N(x_k)}{c_k N^2(x-x_k)}, \quad c_k = 1 + \delta_{k,0} + \delta_{k,N} \quad (5.20)$$

Les x_k constitueront donc la grille de discrétisation de l'axe x^3 . Sur la Figure 5.4 nous avons représenté ces fonctions obtenues pour $N = 6$ sur l'intervalle $[-1; 1]$. Les noeuds ont été représentés par des croix noires et l'on peut voir que leur densité est accrue aux extrémités du domaine. Les coefficients de la matrice de différenciation

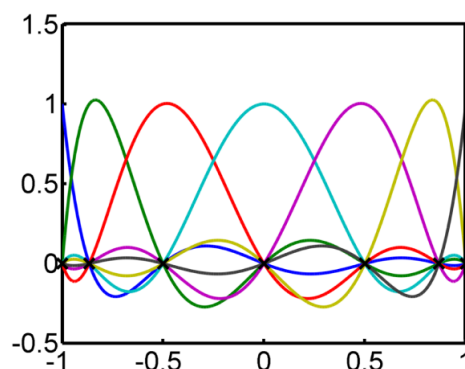


FIGURE 5.3 – Fonctions cardinales associées aux polynômes de Chebyshev.

correspondante sont les suivants :

$$D_{kj} = \frac{c_k(-1)^{j+k}}{c_j(x_k - x_j)}, \quad (5.21a)$$

$$D_{kk} = \frac{-x_k}{2(1-x_k^2)}, \quad (5.21b)$$

$$D_{00} = -D_{NN} = \frac{2N^2 + 2}{6}. \quad (5.21c)$$

Ceci est aisément transposable à tout intervalle $I_2 = [a, b]$ en appliquant la transformée :

$$G : I \rightarrow I_2 \quad (5.22)$$

$$(x) \rightarrow \frac{a-b}{2}x + \frac{a+b}{2} \quad (5.23)$$

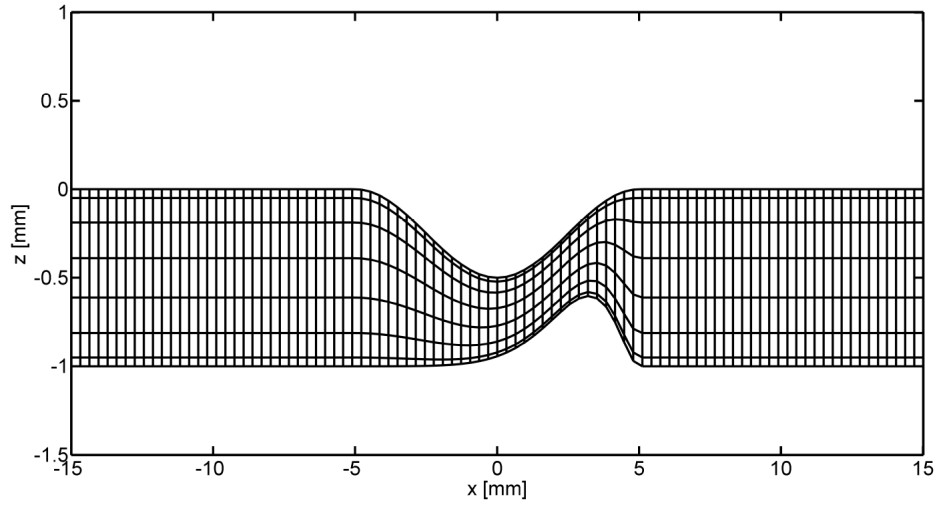


FIGURE 5.4 – Grille de calcul modifiée dans la plaque de géométrie complexe à strates non parallèles

Résolution numérique

La plaque est stratifiée en couches homogènes à interfaces quelconques. On localise les interfaces de couches dans un système de coordonnées $w_0 < w_1 < \dots < w_N$. la variable w_0 correspond au premier interface $z = a_1(x)$ et a_N correspond au dernier interface $z = a_2(x)$. Chaque couche est discrétisée en un ensemble de points : ξ tels que $w_{p-1} < \xi < w_p$, $0 \leq p \leq N$.

La méthode pseudo-spectrale consiste à approcher la dérivée d'une quantité $g_p = F_p$ par une relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} g'(w_{p-1}^+) \\ \mathbf{g}'_p \\ g'(w_p^-) \end{bmatrix} \approx \mathbf{D}^p \begin{bmatrix} g(w_{p-1}^+) \\ \mathbf{g}_p \\ g(w_p^-) \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

où \mathbf{g}_p est un vecteur colonne qui contient les valeurs des inconnues F_p aux points de discrétisation à l'intérieur de la couche p . $g(w_{p-1}^+)$ désigne les valeurs des inconnues sur l'interface $w = w_{p-1}^+$ et $g(w_p^+)$ désigne les valeurs des inconnues sur l'interface $w = w_p^+$. Soit :

$$\mathbf{g}_p = [g(w_{p,1}) \quad g(w_{p,2}) \quad \dots \quad g(w_{p,q-1}) \quad g(w_{p,q})]^T \quad (5.25)$$

La matrice de différentiation peut s'écrire :

$$\mathbf{D}^p = \begin{bmatrix} d_1^{(p)} & \mathbf{d}_2^{(p)} & d_3^{(p)} \\ \mathbf{d}_4^{(p)} & \mathbf{d}_5^{(p)} & \mathbf{d}_6^{(p)} \\ d_7^{(p)} & \mathbf{d}_8^{(p)} & d_9^{(p)} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Les conditions limites à chaque interface se traduisent par des égalités entre les composantes tangentielles de champ E_u, E_v et H_u, H_v , soit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}_{p-1}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}_p^- \quad (5.27)$$

on écrit les conditions limites :

1. sur le premier interface $z = a_1(x)$, on définit les valeurs de \mathbf{E}_0^+ et \mathbf{G}_0^+ aux points d'échantillonnage qui sont des inconnues. Ces inconnues sont en fait reliées aux inconnues \mathbf{a}_0^+ par les relations :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0^+ &= \begin{bmatrix} \psi_0^- \end{bmatrix}_E \mathbf{a}_0^- + \begin{bmatrix} \psi_0^+ \end{bmatrix}_E \mathbf{a}_0^+ \\ \mathbf{G}_0^+ &= \begin{bmatrix} \psi_0^- \end{bmatrix}_G \mathbf{a}_0^- + \begin{bmatrix} \psi_0^+ \end{bmatrix}_G \mathbf{a}_0^+ \end{aligned}$$

où \mathbf{E}_0^+ et \mathbf{G}_0^+ représentent respectivement les deux composantes tangentielles du champ électrique et magnétique au premier interface. Noter que $[\psi_0^-]_E$ est la restriction du vecteur $[\psi_0^-]$ au deux composantes E_u, E_v . Idem pour \mathbf{G} . Pour déterminer \mathbf{a}_0^- , on peut se contenter d'une seule équation.

2. De même, au dernier interface, dans le dernier milieu :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_3^- &= \begin{bmatrix} \psi_3^- \end{bmatrix}_E \mathbf{a}_3^- \\ \mathbf{G}_3^- &= \begin{bmatrix} \psi_3^- \end{bmatrix}_G \mathbf{a}_3^- \end{aligned}$$

on développe les calculs pour une seule couche $p = 1$. Il est important de noter que les valeurs discrètes de z dans la couche sont réparties entre la surface supérieure, les points intérieurs et les points sur la surface inférieure. Il en va de même pour les valeurs de \mathbf{E} et \mathbf{G} . Donc quand on écrit par exemple $\partial_w \mathbf{E} = \mathcal{L}_{11} \mathbf{E} + \mathcal{L}_{12} \mathbf{G}$, il faut tenir compte du fait que les valeurs de champ \mathbf{E} et \mathbf{G} sur les surfaces s'expriment aussi en fonction des inconnues \mathbf{a}_0^+ et \mathbf{a}_3^- . Donc, à l'instat de l'opérateur \mathbf{D}^p , on doit aussi partitionner en blocks les matrice L^{ij} :

$$\mathbf{L}_{ij} = \begin{bmatrix} L_{ij}[1] & \mathbf{L}_{ij}[2] & L_{ij}[3] \\ \mathbf{L}_{ij}[4] & \mathbf{L}_{ij}[5] & \mathbf{L}_{ij}[6] \\ L_{ij}[7] & \mathbf{L}_{ij}[8] & L_{ij}[9] \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Pour les points intérieurs dans la plaque, aux points de discrétisation, on a les deux égalités :

$$\begin{aligned} d_4 \mathbf{E}_0^+ + d_5 \mathbf{E}_1 + d_6 \mathbf{E}_2^- &= \mathcal{L}_{11}[5] \mathbf{E}_1 + \mathcal{L}_{12}[5] \mathbf{G}_1 \\ d_4 \mathbf{G}_0^+ + d_5 \mathbf{G}_1 + d_6 \mathbf{G}_2^- &= \mathcal{L}_{21}[5] \mathbf{E}_1 + \mathcal{L}_{22}[5] \mathbf{G}_1 \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} d_4 \mathbf{E}_0^+ + (d_5 - \mathcal{L}_{11}[5]) \mathbf{E}_1 - \mathcal{L}_{12}[5] \mathbf{G}_1 + d_6 \mathbf{E}_2^- &= 0 \\ d_4 \mathbf{G}_0^+ - \mathcal{L}_{21}[5] \mathbf{E}_1 + (d_5 - \mathcal{L}_{22}[5]) \mathbf{G}_1 + d_6 \mathbf{G}_2^- &= 0 \end{aligned}$$

par ailleurs, on doit satisfaire aussi deux conditions au moins aux interfaces extrêmes :

$$\begin{aligned} d_1 \mathbf{E}_0^+ + d_2 \mathbf{E}_1 + d_3 \mathbf{E}_2^- &= \mathcal{L}_{11}[1] \mathbf{E}_0^+ + \mathcal{L}_{12}[1] \mathbf{G}_0^+ \\ d_1 \mathbf{G}_0^+ + d_2 \mathbf{G}_1 + d_3 \mathbf{G}_2^- &= \mathcal{L}_{21}[1] \mathbf{E}_0^+ + \mathcal{L}_{22}[1] \mathbf{G}_0^+ \\ d_7 \mathbf{E}_0^+ + d_8 \mathbf{E}_1 + d_9 \mathbf{E}_2^- &= \mathcal{L}_{11}[9] \mathbf{E}_2^- + \mathcal{L}_{12}[9] \mathbf{G}_2^- \\ d_7 \mathbf{G}_0^+ + d_8 \mathbf{G}_1 + d_9 \mathbf{G}_2^- &= \mathcal{L}_{21}[9] \mathbf{E}_2^- + \mathcal{L}_{22}[9] \mathbf{G}_2^- \end{aligned}$$

On a seulement 4 inconnues, c'est à dire $\mathbf{a}_0^+, \mathbf{E}_1, \mathbf{G}_1, \mathbf{a}_3^-$, il suffit de quatre équations, deux équations dans la couche discrétisée et une seule équation sur chaque interface extrême, par exemple :

$$\begin{aligned} d_1 \mathbf{G}_0^+ + d_2 \mathbf{G}_1 + d_3 \mathbf{G}_2^- &= \mathcal{L}_{21}[1] \mathbf{E}_0^+ + \mathcal{L}_{22}[1] \mathbf{G}_0^+ \\ d_7 \mathbf{G}_0^+ + d_8 \mathbf{G}_1 + d_9 \mathbf{G}_2^- &= \mathcal{L}_{21}[9] \mathbf{E}_2^- + \mathcal{L}_{22}[9] \mathbf{G}_2^- \end{aligned}$$

On remplace \mathbf{E}_0^+ par $[\psi_0^-]_E \mathbf{a}_0^- + [\psi_0^+]_E \mathbf{a}_0^+$ et \mathbf{G}_0^+ par $([\psi_0^-]_G \mathbf{a}_0^- + [\psi_0^+]_G \mathbf{a}_0^+)$. On remplace aussi \mathbf{E}_2^- par $[[\psi_3^-]_E \mathbf{a}_3^-]$ et \mathbf{G}_2^- par $[[\psi_3^-]_G \mathbf{a}_3^-]$. On obtient le système :

$$\begin{aligned} d_4 [\psi_0^+]_E \mathbf{a}_0^+ + (d_5 - \mathcal{L}_{11}[5]) \mathbf{E}_1 - \mathcal{L}_{12}[5] \mathbf{G}_1 + d_6 [\psi_3^-]_E \mathbf{a}_3^- &= -d_4 [\psi_0^-]_E \mathbf{a}_0^- \\ d_4 [\psi_0^+]_G \mathbf{a}_0^+ - \mathcal{L}_{21}[5] \mathbf{E}_1 + (d_5 - \mathcal{L}_{22}[5]) \mathbf{G}_1 + d_6 [\psi_3^-]_G \mathbf{a}_3^- &= -d_4 [\psi_0^-]_G \mathbf{a}_0^- \\ d_1 [\psi_0^+]_G \mathbf{a}_0^+ + d_2 \mathbf{G}_1 + d_3 [\psi_3^-]_G \mathbf{a}_3^- &= -d_1 [\psi_0^-]_G \mathbf{a}_0^- \\ d_7 [\psi_0^+]_G \mathbf{a}_0^+ + d_8 \mathbf{G}_1 + d_9 [\psi_3^-]_G \mathbf{a}_3^- &= -d_7 [\psi_0^-]_G \mathbf{a}_0^- \end{aligned}$$

on construit donc le système matriciel :

$$\begin{bmatrix} d_4 \begin{bmatrix} \psi_0^+ \\ \psi_0^+ \end{bmatrix}_E & (d_5 - \mathcal{L}_{11}[5]) & -\mathcal{L}_{12}[5] & d_6 \begin{bmatrix} \psi_3^- \\ \psi_3^- \end{bmatrix}_E \\ d_4 \begin{bmatrix} \psi_0^+ \\ \psi_0^+ \end{bmatrix}_G & -\mathcal{L}_{21}[5] & (d_5 - \mathcal{L}_{22}[5]) & d_6 \begin{bmatrix} \psi_3^- \\ \psi_3^- \end{bmatrix}_G \\ d_1 \begin{bmatrix} \psi_0^+ \\ \psi_0^+ \end{bmatrix}_G & 0 & d_2 & d_3 \begin{bmatrix} \psi_3^- \\ \psi_3^- \end{bmatrix}_G \\ d_7 \begin{bmatrix} \psi_0^+ \\ \psi_0^+ \end{bmatrix}_G & 0 & d_8 & d_9 \begin{bmatrix} \psi_3^- \\ \psi_3^- \end{bmatrix}_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^+ \\ \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{a}_3^- \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} d_4 \begin{bmatrix} \psi_0^- \\ \psi_0^- \end{bmatrix}_E \\ d_4 \begin{bmatrix} \psi_0^- \\ \psi_0^- \end{bmatrix}_G \\ d_1 \begin{bmatrix} \psi_0^- \\ \psi_0^- \end{bmatrix}_G \\ d_7 \begin{bmatrix} \psi_0^- \\ \psi_0^- \end{bmatrix}_G \end{bmatrix} \mathbf{a}_0^- \quad (5.29)$$

section correction calcul pseudo-spectral (cas une couche)

dans le cas d'une couche on adopte la convention suivante :

au dessus de la plaque (région air), on a :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{G}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_u^0 \\ E_v^0 \\ G_u^0 \\ G_v^0 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Dans la plaque, on a :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^1 \\ \mathbf{G}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_u^1 \\ E_v^1 \\ G_u^1 \\ G_v^1 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

et au dessous de la plaque (région air) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^2 \\ \mathbf{G}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_u^2 \\ E_v^2 \\ G_u^2 \\ G_v^2 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

equation pour $D(E_u)$

$$D(E_u) = L_{11}E_u + L_{12}E_v + L_{13}G_u + L_{14}G_v \quad (5.33)$$

$$D(E_u) = \mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_3 + \mathbb{I}_4 \quad (5.34)$$

si on projette cette equation sur la première interface on aura :

$$D(E_u)_0 = d_1 E_u^0 + d_2 E_u^1 + d_3 E_u^2 = \mathbb{I}_1^0 + \mathbb{I}_2^0 + \mathbb{I}_3^0 + \mathbb{I}_4^0 \quad (5.35)$$

où

$$\Gamma_1^0 = L_{11}[1]E_u^0 + L_{11}[2]E_u^1 + L_{11}[3]E_u^2 \quad (5.36)$$

$$\Gamma_2^0 = L_{12}[1]E_v^0 + L_{12}[2]E_v^1 + L_{12}[3]E_v^2 \quad (5.37)$$

$$\Gamma_3^0 = L_{13}[1]G_u^0 + L_{13}[2]G_u^1 + L_{13}[3]G_u^2 \quad (5.38)$$

$$\Gamma_4^0 = L_{14}[1]G_v^0 + L_{14}[2]G_v^1 + L_{14}[3]G_v^2 \quad (5.39)$$

Dans la plaque :

$$D(E_u)_1 = d_4E_u^0 + d_5E_u^1 + d_6E_u^2 = \Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 + \Gamma_3^1 + \Gamma_4^1 \quad (5.40)$$

où

$$\Gamma_1^1 = L_{11}[4]E_u^0 + L_{11}[5]E_u^1 + L_{11}[6]E_u^2 \quad (5.41)$$

$$\Gamma_2^1 = L_{12}[4]E_v^0 + L_{12}[5]E_v^1 + L_{12}[6]E_v^2 \quad (5.42)$$

$$\Gamma_3^1 = L_{13}[4]G_u^0 + L_{13}[5]G_u^1 + L_{13}[6]G_u^2 \quad (5.43)$$

$$\Gamma_4^1 = L_{14}[4]G_v^0 + L_{14}[5]G_v^1 + L_{14}[6]G_v^2 \quad (5.44)$$

au dessous de la plaque :

$$D(E_u)_2 = d_7E_u^0 + d_8E_u^1 + d_9E_u^2 = \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2 + \Gamma_4^2 \quad (5.45)$$

où

$$\Gamma_1^2 = L_{11}[7]E_u^0 + L_{11}[8]E_u^1 + L_{11}[9]E_u^2 \quad (5.46)$$

$$\Gamma_2^2 = L_{12}[7]E_v^0 + L_{12}[8]E_v^1 + L_{12}[9]E_v^2 \quad (5.47)$$

$$\Gamma_3^2 = L_{13}[7]G_u^0 + L_{13}[8]G_u^1 + L_{13}[9]G_u^2 \quad (5.48)$$

$$\Gamma_4^2 = L_{14}[7]G_v^0 + L_{14}[8]G_v^1 + L_{14}[9]G_v^2 \quad (5.49)$$

equation pour $D(E_v)$

$$D(E_v) = L_{21}E_u + L_{22}E_v + L_{23}G_u + L_{24}G_v \quad (5.50)$$

$$D(E_v) = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 \quad (5.51)$$

si on projette cette equation sur la première interface on aura :

$$D(E_v)_0 = d_1E_v^0 + d_2E_v^1 + d_3E_v^2 = \Pi_1^0 + \Pi_2^0 + \Pi_3^0 + \Pi_4^0 \quad (5.52)$$

où

$$\Pi_1^0 = L_{21}[1]E_u^0 + L_{21}[2]E_u^1 + L_{21}[3]E_u^2 \quad (5.53)$$

$$\Pi_2^0 = L_{22}[1]E_v^0 + L_{22}[2]E_v^1 + L_{22}[3]E_v^2 \quad (5.54)$$

$$\Pi_3^0 = L_{23}[1]G_u^0 + L_{23}[2]G_u^1 + L_{23}[3]G_u^2 \quad (5.55)$$

$$\Pi_4^0 = L_{24}[1]G_v^0 + L_{24}[2]G_v^1 + L_{24}[3]G_v^2 \quad (5.56)$$

Dans la plaque :

$$D(E_v)_1 = d_4E_v^0 + d_5E_v^1 + d_6E_v^2 = \Pi_1^1 + \Pi_2^1 + \Pi_3^1 + \Pi_4^1 \quad (5.57)$$

où

$$\Pi_1^1 = L_{21}[4]E_u^0 + L_{21}[5]E_u^1 + L_{21}[6]E_u^2 \quad (5.58)$$

$$\Pi_2^1 = L_{22}[4]E_v^0 + L_{22}[5]E_v^1 + L_{22}[6]E_v^2 \quad (5.59)$$

$$\Pi_3^1 = L_{23}[4]G_u^0 + L_{23}[5]G_u^1 + L_{23}[6]G_u^2 \quad (5.60)$$

$$\Pi_4^1 = L_{24}[4]G_v^0 + L_{24}[5]G_v^1 + L_{24}[6]G_v^2 \quad (5.61)$$

au dessous de la plaque :

$$D(E_v)_2 = d_7E_v^0 + d_8E_v^1 + d_9E_v^2 = \Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2 + \Pi_4^2 \quad (5.62)$$

où

$$\Pi_1^2 = L_{21}[7]E_u^0 + L_{21}[8]E_u^1 + L_{21}[9]E_u^2 \quad (5.63)$$

$$\Pi_2^2 = L_{22}[7]E_v^0 + L_{22}[8]E_v^1 + L_{22}[9]E_v^2 \quad (5.64)$$

$$\Pi_3^2 = L_{23}[7]G_u^0 + L_{23}[8]G_u^1 + L_{23}[9]G_u^2 \quad (5.65)$$

$$\Pi_4^2 = L_{24}[7]G_v^0 + L_{24}[8]G_v^1 + L_{24}[9]G_v^2 \quad (5.66)$$

equation pour $D(G_u)$

$$D(G_u) = L_{31}E_u + L_{32}E_v + L_{33}G_u + L_{34}G_v \quad (5.67)$$

$$D(G_u) = \text{III}_1 + \text{III}_2 + \text{III}_3 + \text{III}_4 \quad (5.68)$$

si on projette cette equation sur la première interface on aura :

$$D(G_u)_0 = d_1G_u^0 + d_2G_u^1 + d_3G_u^2 = \text{III}_1^0 + \text{III}_2^0 + \text{III}_3^0 + \text{III}_4^0 \quad (5.69)$$

où

$$\mathbb{III}_1^0 = L_{31}[1]E_u^0 + L_{31}[2]E_u^1 + L_{31}[3]E_u^2 \quad (5.70)$$

$$\mathbb{III}_2^0 = L_{32}[1]E_v^0 + L_{32}[2]E_v^1 + L_{32}[3]E_v^2 \quad (5.71)$$

$$\mathbb{III}_3^0 = L_{33}[1]G_u^0 + L_{33}[2]G_u^1 + L_{33}[3]G_u^2 \quad (5.72)$$

$$\mathbb{III}_4^0 = L_{34}[1]G_v^0 + L_{34}[2]G_v^1 + L_{34}[3]G_v^2 \quad (5.73)$$

Dans la plaque :

$$D(G_u)_1 = d_4G_u^0 + d_5G_u^1 + d_6G_u^2 = \mathbb{III}_1^1 + \mathbb{III}_2^1 + \mathbb{III}_3^1 + \mathbb{III}_4^1 \quad (5.74)$$

où

$$\mathbb{III}_1^1 = L_{31}[4]E_u^0 + L_{31}[5]E_u^1 + L_{31}[6]E_u^2 \quad (5.75)$$

$$\mathbb{III}_2^1 = L_{32}[4]E_v^0 + L_{32}[5]E_v^1 + L_{32}[6]E_v^2 \quad (5.76)$$

$$\mathbb{III}_3^1 = L_{33}[4]G_u^0 + L_{33}[5]G_u^1 + L_{33}[6]G_u^2 \quad (5.77)$$

$$\mathbb{III}_4^1 = L_{34}[4]G_v^0 + L_{34}[5]G_v^1 + L_{34}[6]G_v^2 \quad (5.78)$$

au dessous de la plaque :

$$D(G_u)_2 = d_7G_u^0 + d_8G_u^1 + d_9G_u^2 = \mathbb{III}_1^2 + \mathbb{III}_2^2 + \mathbb{III}_3^2 + \mathbb{III}_4^2 \quad (5.79)$$

où

$$\mathbb{III}_1^2 = L_{31}[7]E_u^0 + L_{31}[8]E_u^1 + L_{31}[9]E_u^2 \quad (5.80)$$

$$\mathbb{III}_2^2 = L_{32}[7]E_v^0 + L_{32}[8]E_v^1 + L_{32}[9]E_v^2 \quad (5.81)$$

$$\mathbb{III}_3^2 = L_{33}[7]G_u^0 + L_{33}[8]G_u^1 + L_{33}[9]G_u^2 \quad (5.82)$$

$$\mathbb{III}_4^2 = L_{34}[7]G_v^0 + L_{34}[8]G_v^1 + L_{34}[9]G_v^2 \quad (5.83)$$

equation pour $D(G_v)$

$$D(G_v) = L_{41}E_u + L_{42}E_v + L_{43}G_u + L_{44}G_v \quad (5.84)$$

$$D(G_v) = \mathbb{IV}_1 + \mathbb{IV}_2 + \mathbb{IV}_3 + \mathbb{IV}_4 \quad (5.85)$$

si on projette cette equation sur la première interface on aura :

$$D(G_v)_0 = d_1G_v^0 + d_2G_v^1 + d_3G_v^2 = \mathbb{IV}_1^0 + \mathbb{IV}_2^0 + \mathbb{IV}_3^0 + \mathbb{IV}_4^0 \quad (5.86)$$

où

$$\mathbb{IV}_1^0 = L_{41}[1]E_u^0 + L_{41}[2]E_u^1 + L_{41}[3]E_u^2 \quad (5.87)$$

$$\mathbb{IV}_2^0 = L_{42}[1]E_v^0 + L_{42}[2]E_v^1 + L_{42}[3]E_v^2 \quad (5.88)$$

$$\mathbb{IV}_3^0 = L_{43}[1]G_u^0 + L_{43}[2]G_u^1 + L_{43}[3]G_u^2 \quad (5.89)$$

$$\mathbb{IV}_4^0 = L_{44}[1]G_v^0 + L_{44}[2]G_v^1 + L_{44}[3]G_v^2 \quad (5.90)$$

Dans la plaque :

$$D(G_v)_1 = d_4G_v^0 + d_5G_v^1 + d_6G_v^2 = \mathbb{IV}_1^1 + \mathbb{IV}_2^1 + \mathbb{IV}_3^1 + \mathbb{IV}_4^1 \quad (5.91)$$

où

$$\mathbb{IV}_1^1 = L_{41}[4]E_u^0 + L_{41}[5]E_u^1 + L_{41}[6]E_u^2 \quad (5.92)$$

$$\mathbb{IV}_2^1 = L_{42}[4]E_v^0 + L_{42}[5]E_v^1 + L_{42}[6]E_v^2 \quad (5.93)$$

$$\mathbb{IV}_3^1 = L_{43}[4]G_u^0 + L_{43}[5]G_u^1 + L_{43}[6]G_u^2 \quad (5.94)$$

$$\mathbb{IV}_4^1 = L_{44}[4]G_v^0 + L_{44}[5]G_v^1 + L_{44}[6]G_v^2 \quad (5.95)$$

au dessous de la plaque :

$$D(G_v)_2 = d_7G_v^0 + d_8G_v^1 + d_9G_v^2 = \mathbb{IV}_1^2 + \mathbb{IV}_2^2 + \mathbb{IV}_3^2 + \mathbb{IV}_4^2 \quad (5.96)$$

où

$$\mathbb{IV}_1^2 = L_{41}[7]E_u^0 + L_{41}[8]E_u^1 + L_{41}[9]E_u^2 \quad (5.97)$$

$$\mathbb{IV}_2^2 = L_{42}[7]E_v^0 + L_{42}[8]E_v^1 + L_{42}[9]E_v^2 \quad (5.98)$$

$$\mathbb{IV}_3^2 = L_{43}[7]G_u^0 + L_{43}[8]G_u^1 + L_{43}[9]G_u^2 \quad (5.99)$$

$$\mathbb{IV}_4^2 = L_{44}[7]G_v^0 + L_{44}[8]G_v^1 + L_{44}[9]G_v^2 \quad (5.100)$$

Determination du system matriciel d'inconnues à résoudre

En remplaçant $\Xi_{u,v}^0 = [\psi_0^+]_{\Xi_{u,v}} a_0^+ + [\psi_0^-]_{\Xi_{u,v}} a_0^-$ et $\Xi_{u,v}^2 = [\psi_2^+]_{\Xi_{u,v}} a_0^+$, où $\Xi = E$ ou G . Les inconnues dans ces termes sont les a_0^+ et a_2^- . De plus on a les inconnues $E_u^1, E_v^1, G_u^1, G_v^1$. Finalement veut avoir un système :

$$[Z_{ij}] \begin{bmatrix} a_0^+ \\ E_u^1 \\ E_v^1 \\ G_u^1 \\ G_v^1 \\ a_2^- \end{bmatrix} = [Y_i] a_0^- \quad (5.101)$$

Dans la plaquePour E_u^1 :

$$\begin{aligned} & \left\{ (d_4 - L_{11}[4])[\psi_0^+]_{E_u} - L_{12}[4][\psi_0^+]_{E_v} - L_{13}[4][\psi_0^+]_{G_u} - L_{14}[4][\psi_0^+]_{G_v} \right\} a_0^+ \\ & \quad + (d_5 - L_{11}[5])E_u^1 - L_{12}[5]E_v^1 - L_{13}[5]G_u^1 - L_{14}[5]G_v^1 \\ & + \left\{ (d_6 - L_{11}[6])[\psi_2^-]_{E_u} - L_{12}[6][\psi_2^-]_{E_v} - L_{13}[6][\psi_2^-]_{G_u} - L_{14}[6][\psi_2^-]_{G_v} \right\} a_2^- \\ & = \left\{ (L_{11}[4] - d_4)[\psi_0^-]_{E_u} + L_{12}[4][\psi_0^-]_{E_v} + L_{13}[4][\psi_0^-]_{G_u} + L_{14}[4][\psi_0^-]_{G_v} \right\} a_0^- \end{aligned}$$

$$Z_{31}a_0^+ + Z_{32}E_u^1 + Z_{33}E_v^1 + Z_{34}G_u^1 + Z_{35}G_v^1 + Z_{36}a_2^- = Y_3a_0^- \quad (5.102)$$

Pour E_v^1 :

$$\begin{aligned} & \left\{ (d_4 - L_{22}[4])[\psi_0^+]_{E_v} - L_{21}[4][\psi_0^+]_{E_u} - L_{23}[4][\psi_0^+]_{G_u} - L_{24}[4][\psi_0^+]_{G_v} \right\} a_0^+ \\ & \quad + (d_5 - L_{22}[5])E_v^1 - L_{21}[5]E_u^1 - L_{23}[5]G_u^1 - L_{24}[5]G_v^1 \\ & + \left\{ (d_6 - L_{22}[6])[\psi_2^-]_{E_v} - L_{21}[6][\psi_2^-]_{E_u} - L_{23}[6][\psi_2^-]_{G_u} - L_{24}[6][\psi_2^-]_{G_v} \right\} a_2^- \\ & = \left\{ (L_{22}[4] - d_4)[\psi_0^-]_{E_v} + L_{21}[4][\psi_0^-]_{E_u} + L_{23}[4][\psi_0^-]_{G_u} + L_{24}[4][\psi_0^-]_{G_v} \right\} a_0^- \end{aligned}$$

$$Z_{41}a_0^+ + Z_{42}E_u^1 + Z_{43}E_v^1 + Z_{44}G_u^1 + Z_{45}G_v^1 + Z_{46}a_2^- = Y_4a_0^- \quad (5.103)$$

Pour G_u^1 :

$$\begin{aligned} & \left\{ (d_4 - L_{33}[4])[\psi_0^+]_{G_u} - L_{32}[4][\psi_0^+]_{E_v} - L_{31}[4][\psi_0^+]_{E_u} - L_{34}[4][\psi_0^+]_{G_v} \right\} a_0^+ \\ & \quad + (d_5 - L_{33}[5])G_u^1 - L_{32}[5]E_v^1 - L_{31}[5]E_u^1 - L_{34}[5]G_v^1 \\ & + \left\{ (d_6 - L_{33}[6])[\psi_2^-]_{E_u} - L_{32}[6][\psi_2^-]_{E_v} - L_{31}[6][\psi_2^-]_{E_u} - L_{34}[6][\psi_2^-]_{G_v} \right\} a_2^- \\ & = \left\{ (L_{33}[4] - d_4)[\psi_0^-]_{G_u} + L_{32}[4][\psi_0^-]_{E_v} + L_{31}[4][\psi_0^-]_{E_u} + L_{34}[4][\psi_0^-]_{G_v} \right\} a_0^- \end{aligned}$$

$$Z_{51}a_0^+ + Z_{52}E_u^1 + Z_{53}E_v^1 + Z_{54}G_u^1 + Z_{55}G_v^1 + Z_{56}a_2^- = Y_5a_0^- \quad (5.104)$$

Pour G_v^1 :

$$\begin{aligned} & \left\{ (d_4 - L_{44}[4])[\psi_0^+]_{G_v} - L_{42}[4][\psi_0^+]_{E_v} - L_{43}[4][\psi_0^+]_{G_u} - L_{41}[4][\psi_0^+]_{E_u} \right\} a_0^+ \\ & \quad + (d_5 - L_{44}[5])G_v^1 - L_{42}[5]E_v^1 - L_{43}[5]G_u^1 - L_{41}[5]E_u^1 \\ & + \left\{ (d_6 - L_{44}[6])[\psi_2^-]_{G_v} - L_{42}[6][\psi_2^-]_{E_v} - L_{43}[6][\psi_2^-]_{G_u} - L_{41}[6][\psi_2^-]_{E_u} \right\} a_2^- \\ & = \left\{ (L_{44}[4] - d_4)[\psi_0^-]_{G_v} + L_{42}[4][\psi_0^-]_{E_v} + L_{43}[4][\psi_0^-]_{G_u} + L_{41}[4][\psi_0^-]_{E_u} \right\} a_0^- \end{aligned}$$

$$Z_{61}a_0^+ + Z_{62}E_u^1 + Z_{63}E_v^1 + Z_{64}G_u^1 + Z_{65}G_v^1 + Z_{66}a_2^- = Y_6a_0^- \quad (5.105)$$

conditions aux limites au niveau de la première interface

Pour des raisons de précision numérique, les conditions aux limites sont choisies sur G_u et G_v .

Pour $D(G_u^1)_0$:

$$\begin{aligned}
& \left\{ (d_1 - L_{33}[1])[\psi_0^+]_{G_u} - L_{32}[1][\psi_0^+]_{E_v} - L_{31}[1][\psi_0^+]_{E_u} - L_{34}[1][\psi_0^+]_{G_v} \right\} a_0^+ \\
& \quad + (d_2 - L_{33}[2])G_u^1 - L_{32}[2]E_v^1 - L_{31}[2]E_u^1 - L_{34}[2]G_v^1 \\
& + \left\{ (d_3 - L_{33}[3])[\psi_2^-]_{G_u} - L_{32}[3][\psi_2^-]_{E_v} - L_{31}[3][\psi_2^-]_{E_u} - L_{34}[3][\psi_2^-]_{G_v} \right\} a_2^- \\
& = \left\{ (L_{33}[1] - d_1)[\psi_0^-]_{G_u} + L_{32}[1][\psi_0^-]_{E_v} + L_{31}[1][\psi_0^-]_{E_u} + L_{34}[1][\psi_0^-]_{G_v} \right\} a_0^- \\
& \quad Z_{11}a_0^+ + Z_{12}E_u^1 + Z_{13}E_v^1 + Z_{14}G_u^1 + Z_{15}G_v^1 + Z_{16}a_2^- = Y_1a_0^- \quad (5.106)
\end{aligned}$$

Pour $D(G_v^1)_0$:

$$\begin{aligned}
& \left\{ (d_1 - L_{44}[1])[\psi_0^+]_{G_v} - L_{42}[1][\psi_0^+]_{E_v} - L_{43}[1][\psi_0^+]_{G_u} - L_{41}[1][\psi_0^+]_{E_u} \right\} a_0^+ \\
& \quad + (d_2 - L_{44}[2])G_v^1 - L_{42}[2]E_v^1 - L_{43}[2]G_u^1 - L_{41}[2]E_u^1 \\
& + \left\{ (d_3 - L_{44}[3])[\psi_2^-]_{G_v} - L_{42}[3][\psi_2^-]_{E_v} - L_{43}[3][\psi_2^-]_{G_u} - L_{41}[3][\psi_2^-]_{E_u} \right\} a_2^- \\
& = \left\{ (L_{44}[1] - d_1)[\psi_0^-]_{G_v} + L_{42}[1][\psi_0^-]_{E_v} + L_{43}[1][\psi_0^-]_{G_u} + L_{41}[1][\psi_0^-]_{E_u} \right\} a_0^- \\
& \quad Z_{21}a_0^+ + Z_{22}E_u^1 + Z_{23}E_v^1 + Z_{24}G_u^1 + Z_{25}G_v^1 + Z_{26}a_2^- = Y_2a_0^- \quad (5.107)
\end{aligned}$$

conditions aux limites au niveau de la seconde interface

Pour des raisons de précision numérique, les conditions aux limites sont choisies sur G_u et G_v .

Pour $D(G_u^1)_2$:

$$\begin{aligned}
& \left\{ (d_7 - L_{33}[7])[\psi_0^+]_{G_u} - L_{32}[7][\psi_0^+]_{E_v} - L_{31}[7][\psi_0^+]_{E_u} - L_{34}[7][\psi_0^+]_{G_v} \right\} a_0^+ \\
& \quad + (d_8 - L_{33}[8])G_u^1 - L_{32}[8]E_v^1 - L_{31}[8]E_u^1 - L_{34}[8]G_v^1 \\
& + \left\{ (d_9 - L_{33}[9])[\psi_2^-]_{G_u} - L_{32}[9][\psi_2^-]_{E_v} - L_{31}[9][\psi_2^-]_{E_u} - L_{34}[9][\psi_2^-]_{G_v} \right\} a_2^- \\
& = \left\{ (L_{33}[7] - d_7)[\psi_0^-]_{G_u} + L_{32}[7][\psi_0^-]_{E_v} + L_{31}[7][\psi_0^-]_{E_u} + L_{34}[7][\psi_0^-]_{G_v} \right\} a_0^- \\
& \quad Z_{71}a_0^+ + Z_{72}E_u^1 + Z_{73}E_v^1 + Z_{74}G_u^1 + Z_{75}G_v^1 + Z_{76}a_2^- = Y_7a_0^- \quad (5.108)
\end{aligned}$$

Pour $D(G_v^1)_2$:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ (d_7 - L_{44}[7])[\psi_0^+]_{G_v} - L_{42}[7][\psi_0^+]_{E_v} - L_{43}[7][\psi_0^+]_{G_u} - L_{41}[7][\psi_0^+]_{E_u} \right\} a_0^+ \\
 & \quad + (d_8 - L_{44}[8])G_v^1 - L_{42}[8]E_v^1 - L_{43}[8]G_u^1 - L_{41}[8]E_u^1 \\
 & + \left\{ (d_9 - L_{44}[9])[\psi_2^-]_{G_v} - L_{42}[9][\psi_2^-]_{E_v} - L_{43}[9][\psi_2^-]_{G_u} - L_{41}[9][\psi_2^-]_{E_u} \right\} a_2^- \\
 & = \left\{ (L_{44}[7] - d_7)[\psi_0^-]_{G_v} + L_{42}[7][\psi_0^-]_{E_v} + L_{43}[7][\psi_0^-]_{G_u} + L_{41}[7][\psi_0^-]_{E_u} \right\} a_0^- \\
 & \quad Z_{81}a_0^+ + Z_{82}E_u^1 + Z_{83}E_v^1 + Z_{84}G_u^1 + Z_{85}G_v^1 + Z_{86}a_2^- = Y_8a_0^- \quad (5.109)
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} & Z_{16} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} & Z_{25} & Z_{26} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} & Z_{35} & Z_{36} \\ Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & Z_{45} & Z_{46} \\ Z_{51} & Z_{52} & Z_{53} & Z_{54} & Z_{55} & Z_{56} \\ Z_{61} & Z_{62} & Z_{63} & Z_{64} & Z_{65} & Z_{66} \\ Z_{71} & Z_{72} & Z_{73} & Z_{74} & Z_{75} & Z_{76} \\ Z_{81} & Z_{82} & Z_{83} & Z_{84} & Z_{85} & Z_{86} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^+ \\ E_u^1 \\ E_v^1 \\ G_u^1 \\ G_v^1 \\ a_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \\ Y_8 \end{bmatrix} a_0^- \quad (5.110)$$

A noter que les 2 premières lignes sont à compacter en une seule (vu que $a_0^+ = \begin{bmatrix} a_{0|TE}^+ \\ a_{0|TM}^+ \end{bmatrix}$). de même pour les deux dernières lignes.

Finalement on aura :

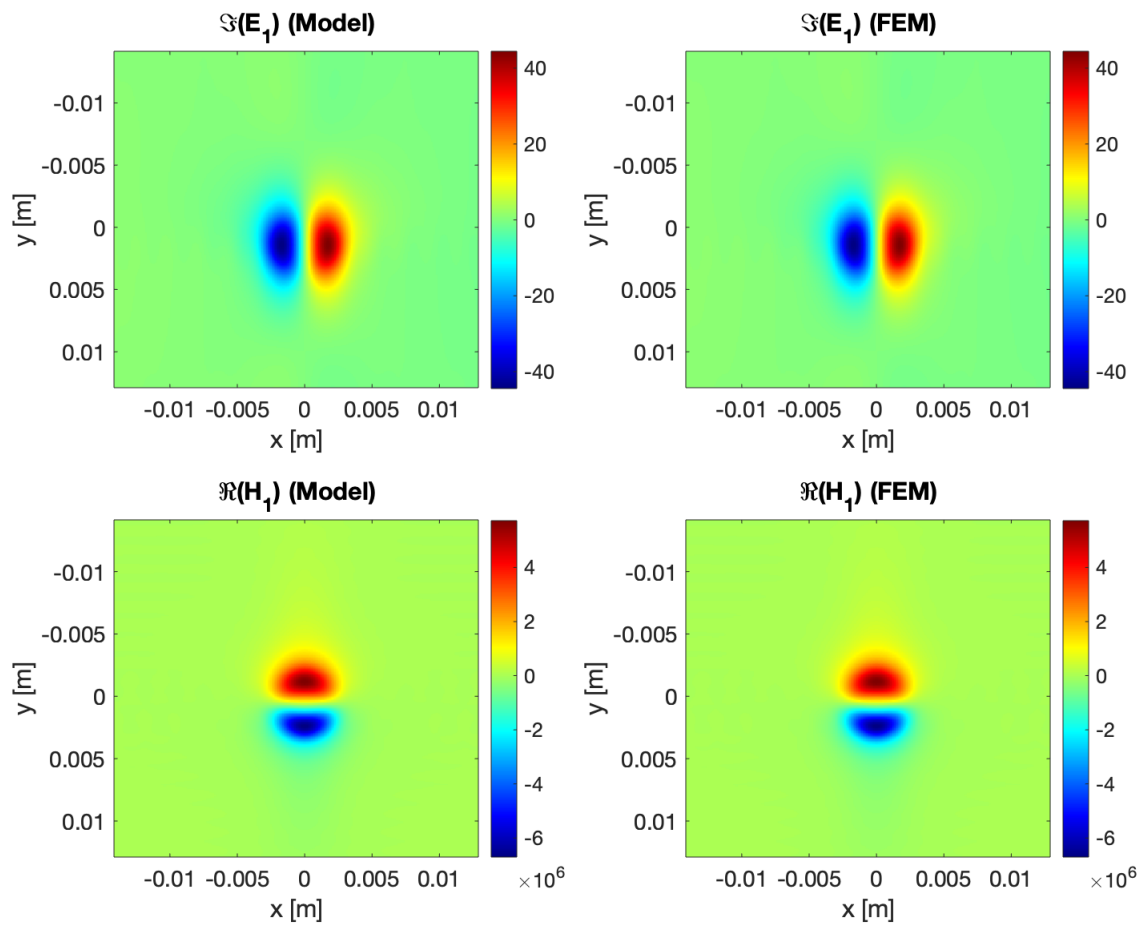
$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} & Z_{16} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} & Z_{25} & Z_{26} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} & Z_{35} & Z_{36} \\ Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & Z_{45} & Z_{46} \\ Z_{51} & Z_{52} & Z_{53} & Z_{54} & Z_{55} & Z_{56} \\ Z_{61} & Z_{62} & Z_{63} & Z_{64} & Z_{65} & Z_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^+ \\ E_u^1 \\ E_v^1 \\ G_u^1 \\ G_v^1 \\ a_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \end{bmatrix} a_0^- \quad (5.111)$$

5.2.3 Résultats préliminaires

On adopte dans cette section deux interfaces non parallèles de géométrie complexe 2D5. la configuration est décrite dans la Figure (5.2), dont les paramètres sont stockés dans le tableau (5.1). On présente dans la Figure (??) et (5.5) la partie réelle, imaginaire et le module de la composante E_1 ainsi que E_2 du champ électrique sur l'interface supérieure d'équation $x^3 = 0$ pour une position fixe du capteur à $x_p = 0$.

symbole	interface 1	interface 2
L_{px}	10	10
cx	-2.5	2.5
x_3	0	-1
hp	-0.5	+0.7

TABLE 5.1 – paramètres géométriques du défaut

FIGURE 5.5 – E_2 sur le plan $x^3 = 0$.

5.3 Généralisation au cas des milieux non-homogènes

On présente dans cette section une extension du formalisme pour traiter le cas des milieux anisotrope non-homogène. Ceci se traduit par une variation spatiale

du tenseur de conductivité. Inspirée des travaux de G. Granet pour les méthodes Fourier Modales [43, 96, 41], l'approche adoptée peut servir à modéliser le caractère non-homogène des CFRP (cf chapitre 2), ainsi que quelques types de défauts tels que les ruptures des fibres ou des porosités, ce qui se traduit par une variation spatiale de la conductivité. Pour alléger les calculs, on propose de considérer le cas plan (absence de déformation géométrique) où le tenseur métrique se réduit à l'identité.

5.3.1 Configuration

On considère la configuration décrite dans la Figure (5.6) dont les paramètres sont présentés dans les tableaux 5.2 et 5.3.

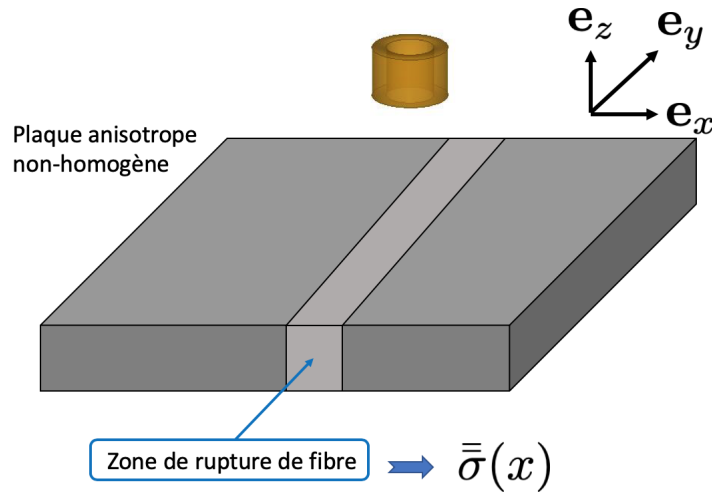


FIGURE 5.6 – Plaque CFRP non homogène

Une plaque anisotrope non homogène dont le tenseur de conductivité est choisi diagonale est éclairée par un capteur circulaire à section carrée. Pour modéliser une rupture de fibre dans la plaque, on introduit une variation uniaxiale de la conductivité comme le montre la Figure (5.7). Dans le but de simplifier le problème et de réduire le temps de calcul, on considère le cas plan ($[g^{ij}] = \mathbb{I}$).

5.3.2 Mise en équations

$$\nabla \times \mathbf{E} = -ik\mu_0 \mathbf{G} \quad (5.112a)$$

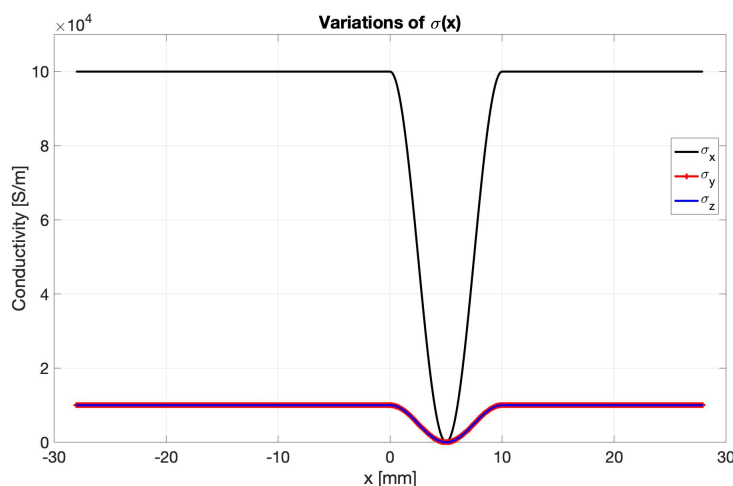
$$\nabla \times \mathbf{G} = ik\bar{\epsilon} \mathbf{E} \quad (5.112b)$$

TABLE 5.2 – paramètres physiques de la plaque non homogène.

Paramètres	Symboles	Valeurs
Fréquence	f	800 kHz
Courant	I_0	0.4 A
Rayon intérieur	R_{int}	4 mm
Rayon extérieur	R_{ext}	6 mm
Hauteur	H	1 mm
N° de tours	N	50
Lift-off	l_0	0.6 mm

TABLE 5.3 – Paramètres numériques de calcul

Symboles	Valeurs
M_u	50
M_v	30
x_{max}	27 mm
y_{max}	27 mm
$\sigma_{l,max}$	0.1 MS/m
$\sigma_{t,max}$	0.01 MS/m
$\sigma_{n,max}$	0.01 MS/m
E	1 mm
θ	0°


 FIGURE 5.7 – variation de σ

Où $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ est le nombre d'onde, $\mathbf{G} = Z_0\mathbf{H}$ et $\bar{\bar{\epsilon}}(x)$ est défini par :

$$\bar{\bar{\epsilon}}(x) = \bar{\bar{\epsilon}}_r - \frac{i\bar{\bar{\sigma}}(x)}{\omega\epsilon_0} = \begin{bmatrix} \epsilon^{11}(x) & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^{22}(x) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^{33}(x) \end{bmatrix} \quad (5.113)$$

où

$$\begin{cases} \epsilon^{11}(x) = 1 - \frac{i\sigma_{xx}(x)}{\omega\epsilon_0} \\ \epsilon^{22}(x) = 1 - \frac{i\sigma_{yy}(x)}{\omega\epsilon_0} \\ \epsilon^{33}(x) = 1 - \frac{i\sigma_{zz}(x)}{\omega\epsilon_0} \end{cases} \quad (5.114)$$

Finalement, les équations (5.112a) et (5.112b) peuvent s'écrire explicitement en système de six équations :

$$\partial_y E_z - \partial_z E_y = -ik\mu_0 G_x \quad (5.115a)$$

$$\partial_z E_x - \partial_x E_z = -ik\mu_0 G_y \quad (5.115b)$$

$$\partial_x E_y - \partial_y E_x = -ik\mu_0 G_z \quad (5.115c)$$

$$\partial_y G_z - \partial_z G_y = ik [\varepsilon^{11} E_x + \varepsilon^{12} E_y] \quad (5.115d)$$

$$\partial_z G_x - \partial_x G_z = ik [\varepsilon^{21} E_x + \varepsilon^{22} E_y] \quad (5.115e)$$

$$\partial_x G_y - \partial_y G_x = ik\varepsilon^{33} E_z \quad (5.115f)$$

Si on se place dans l'air (milieu isotrope), la décomposition modale du champ reste inchangée. Par contre, dans le milieu anisotrope non homogène, il faut tenir compte de la variation spatial de conductivité. En adoptant la même démarche de décomposition dans le chapitre 3, on aboutit aux systèmes différentiels suivants :

$$\frac{\partial^2}{\partial_z^2} \mathbf{E}_t = \mathcal{L}_{EG} \mathcal{L}_{GE} [\mathbf{E}_t] \quad (5.116)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial_z^2} \mathbf{G}_t = \mathcal{L}_{GE} \mathcal{L}_{EG} [\mathbf{G}_t] \quad (5.117)$$

Il est important de noter que dans le cas de variation spatial de la conductivité, les opérateurs de dérivation ne commutent plus. En passant dans le domaine de Fourier, le produit $\varepsilon^{ii}(x)\Phi(x, y, z)$ se transforme en produit de convolution. Numériquement, il s'agit de construire de la même manière que la sous section 4.5.1.1, la matrice de convolution :

$$[\bar{\varepsilon}^*] = 1 - \frac{i}{\omega\varepsilon_0} [\bar{\sigma}^*] \quad (5.118)$$

$$(5.119)$$

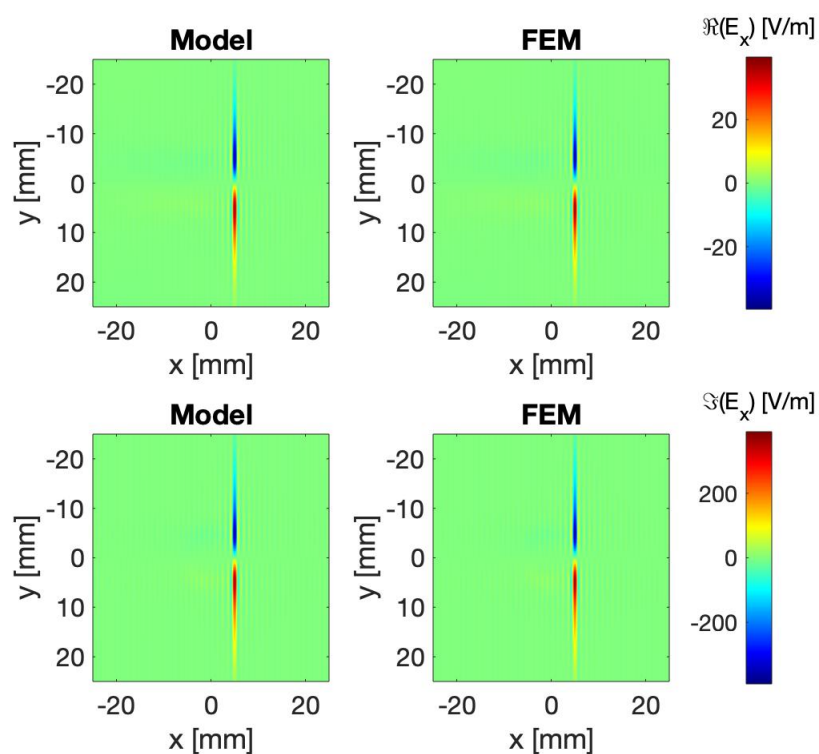
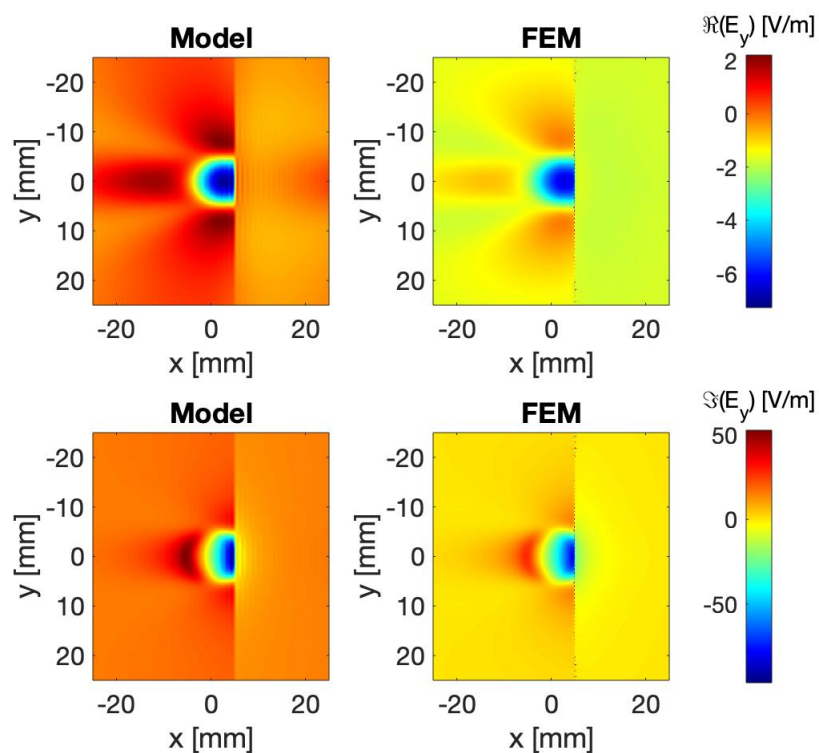
De ce fait, le système 3.42 s'écrit :

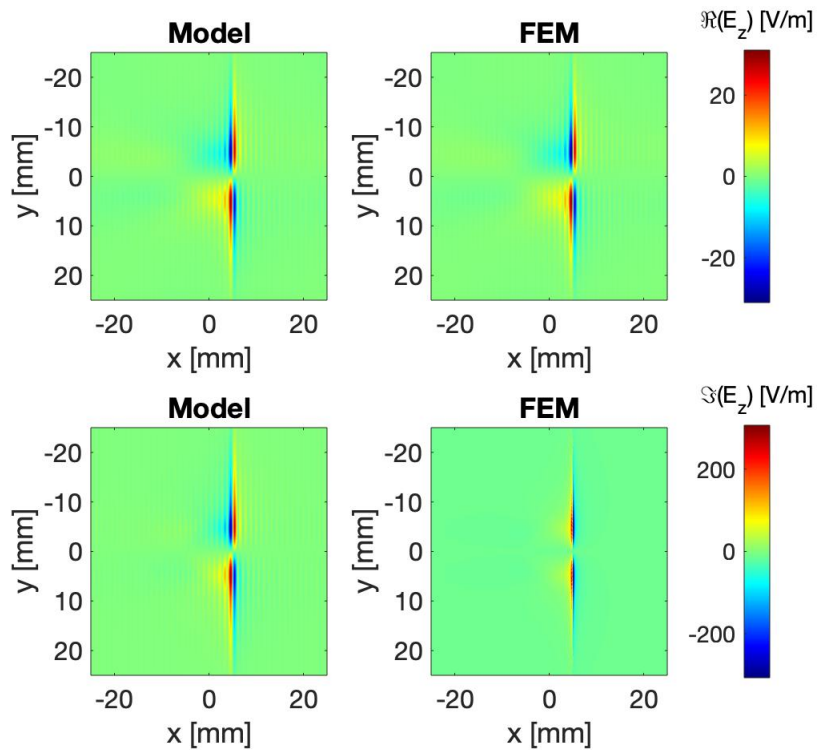
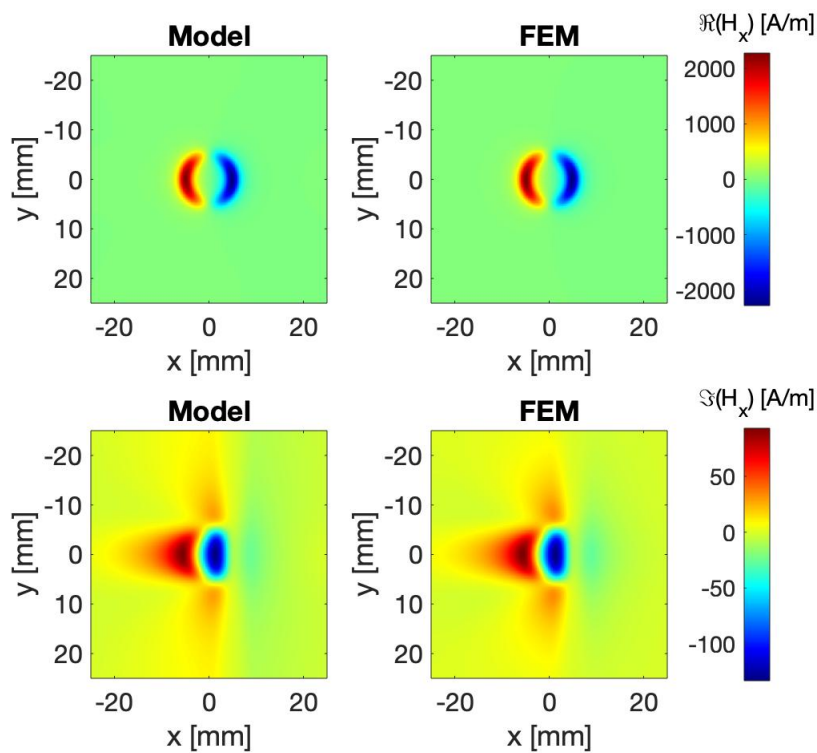
$$\begin{cases} \tilde{d}_E^{(11)} = \frac{-\alpha\beta}{ik} [\varepsilon^{33*}]^{-1} \left(\frac{-\alpha\beta}{ik\mu} \right) + \left(\frac{-\alpha^2}{ik} [\varepsilon^{33*}]^{-1} - ik\mu \right) \left(\frac{-\beta^2}{ik\mu} - ik\varepsilon^{11*} \right) \\ \tilde{d}_E^{(12)} = \frac{\alpha\beta}{ik} [\varepsilon^{33*}]^{-1} \left(\frac{\alpha^2}{ik\mu} + ik\varepsilon^{22*} \right) + \left(\frac{-\alpha^2}{ik} [\varepsilon^{33*}]^{-1} - ik\mu \right) \left(\frac{\alpha\beta}{ik\mu} \right) \\ \tilde{d}_E^{(21)} = \left(\frac{\beta^2}{ik} [\varepsilon^{33*}]^{-1} + ik\mu \right) \left(\frac{-\alpha\beta}{ik\mu} \right) + \left(\frac{-\beta\alpha}{ik} [\varepsilon^{33*}]^{-1} \right) \left(\frac{-\beta^2}{ik\mu} - ik\varepsilon^{11*} \right) \\ \tilde{d}_E^{(22)} = \left(\frac{\alpha\beta}{ik} [\varepsilon^{33*}]^{-1} \right) \left(\frac{-\alpha\beta}{ik\mu} \right) + \left(\frac{-\alpha^2}{ik} [\varepsilon^{33*}]^{-1} - ik\mu \right) \left(\frac{-\beta^2}{ik\mu} - ik\varepsilon^{11*} \right) \end{cases} \quad (5.120)$$

On gardera par la suite la même méthodologie de résolution numérique.

5.3.3 Validation numérique

Dans cette partie, on propose de présenter des résultats préliminaires du modèle dédié au milieu non-homogène. les résultats obtenus sont comparés aux données de simulation par éléments finis. Dans Les Figures 5.8-5.13, on présente les parties réelles et imaginaires des différentes composantes du champ. L'allure des figures présente un bon accord mais il reste des imperfections au niveau de quelques amplitudes. Ceci peut être du au maillage du modèle FEM ou à la taille des boites de calcul qui doivent être ajuster pour prendre en compte les effets de bords où l'amplitude maximale du champ dans la zone proche du capteur.

FIGURE 5.8 – Partie réelle et imaginaire de E_x sur la surface $z = 0$ FIGURE 5.9 – Partie réelle et imaginaire de E_y sur la surface $z = 0$

FIGURE 5.10 – Partie réelle et imaginaire de E_z sur la surface $z = 0$ FIGURE 5.11 – Partie réelle et imaginaire de H_x sur la surface $z = 0$

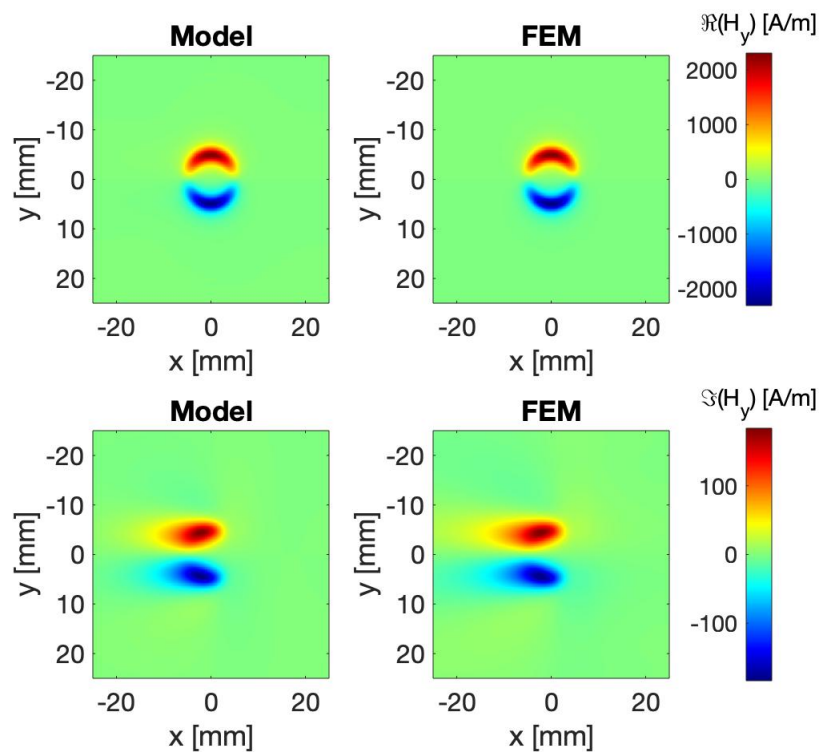


FIGURE 5.12 – Partie réelle et imaginaire de H_y sur la surface $z = 0$

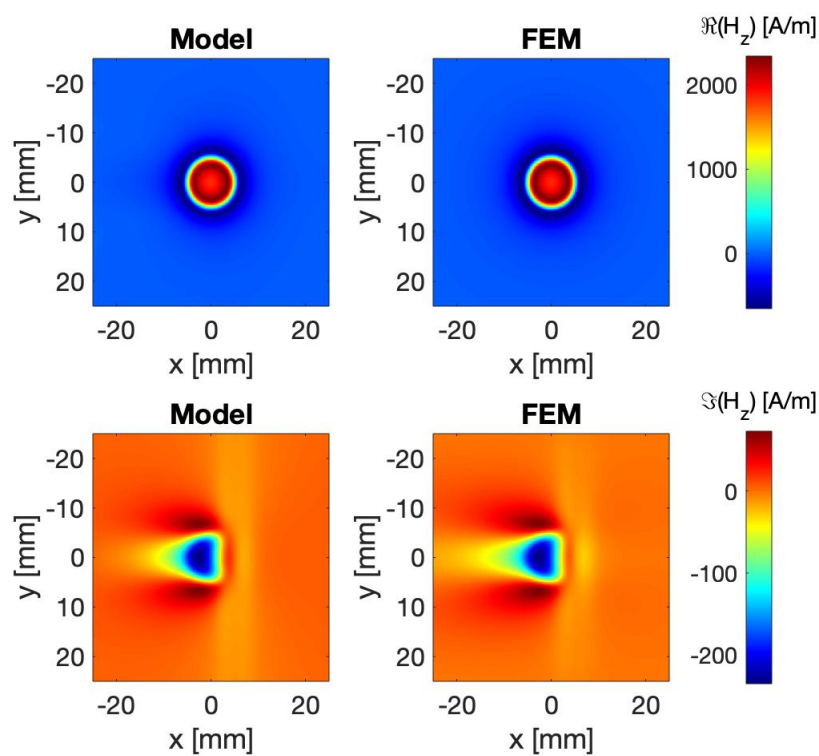


FIGURE 5.13 – Partie réelle et imaginaire de H_z sur la surface $z = 0$

5.4 Bilan

Dans ce chapitre, on vient de présenter, au premier lieu, une approche numérique pour traiter le cas général d'un conducteur anisotrope à surfaces complexes non identiques à déformation opposée. Il est clair que la méthode modale précédemment développée présente quelques limitations en traitant le cas général. Ceci peut répondre au besoin de la mesure de l'épaisseur de la pièce testée.

La méthode hybride (obtenue par un couplage de la méthode modale précédente et d'une approche pseudo-spectrale) présentée ici s'appuie quant à elle sur le même formalisme des équations de Maxwell dans les domaines homogènes (air et substrat par exemple).

Les équations régissant le comportement des champs dans le milieu anisotrope sont discrétisées par une méthode numérique d'ordre élevé présentant une convergence très rapide (méthode pseudo-spectrale de Chebyshev) et les deux formalismes sont couplés par l'application des conditions de passage des champs aux deux interfaces séparant les milieux homogènes de la strate.

En utilisant une méthode pseudo-spectrale basée sur une discrétisation spécifique du milieu, on résout les systèmes différentiels vérifié par les composantes du champ électromagnétique. La méthode est en cours de développement et les résultats obtenus nécessitent encore de raffinement.

Au deuxième lieu, on propose un exemple d'extension du formalisme unifiant au cas des milieux non homogène. En se basant sur les approches Fourier Modale, on introduit une variation brutale au tenseur du conductivité. Ceci peut modéliser une rupture des fibres ou une zone de porosité.

À partir de la validation numérique, on peut conclure que le formalisme possède des perspectives prometteuses.

Chapitre 6

Collaborations avec les partenaires du projet NDTonAir

Sommaire

6.1	Introduction	168
6.2	Détachement à Cassino	168
6.2.1	Expérimentation	168
6.2.2	Validation expérimentale	172
6.3	Détachement à Newcastle	174
6.3.1	Expérimentation	174
6.3.2	Validation expérimentale	176

6.1 Introduction

En tant que ESR (Early Stage Researcher) du projet européen NDTonair, et dans le cadre de nos collaborations avec nos partenaires, j'ai effectué deux détachements de longue durée (de deux à trois mois chacun) dans des laboratoires étrangers. Le premier était au sein de l'université de Cassino, en Italie, plus précisément au sein de laboratoire électronique. Le deuxième était effectué au sein de l'université de Newcastle upon Tyne, en Angleterre, plus précisément au sein de " Electric and Electronic engineering school". L'objectif était d'échanger des résultats, des données et acquérir des compétences et d'élargir mes connaissances expérimentales.

De ce fait, on présente dans ce chapitre les différentes tâches faites au cours de ces détachement, ainsi que des expérimentations prometteuses pour la validation du modèle pour deux classes de configuration. Au premier lieu, on considère le cas d'un conducteur isotrope à surface complexe. on s'intéresse au calcul de la réponse du capteur. Au second lieu, on considère le cas d'un **CFRP** à surfaces planes (sans défauts). on s'intéresse à la reconstruction de la chaleur induite par une bobine de chauffage et à la densité de courants induite dans la plaque afin d'identifier l'orientation principale des fibres. Ces validations m'ont permis de m'assurer que le modèle donnait des résultats prometteurs.

6.2 Détachement à Cassino

Dans le laboratoire de l'électronique à l'université de Cassino, l'activité principale repose sur le développement des capteurs à courants de Foucault et la recherche dans le domaine du contrôle non destructif par techniques électromagnétiques. les objectifs du détachement fixés sont :

- Acquérir des données expérimentales nécessaires à la validation de nos modèles semi-analytiques
- Comparaison de données expérimentales à des données simulées pour l'inspection de pièces conductrices de géométrie complexe.
- Pour écrire des publications en commun.

6.2.1 Expérimentation

configuration

La configuration adoptée est décrite dans la Figure (6.1) : un conducteur homogène et isotrope à surface complexe est évalué par un capteur à courants de Foucault. Pour mieux approcher la configuration élaborée par le modèle, la bobine

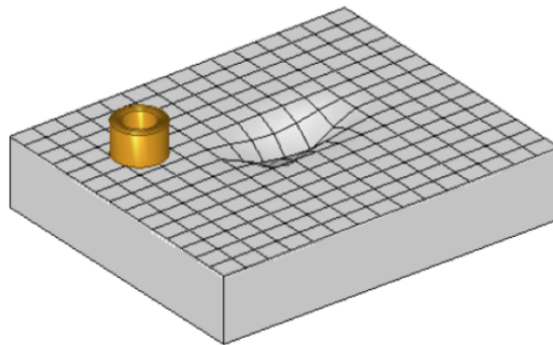


FIGURE 6.1 – Configuration à valider expérimentalement

était manuellement construite : un support en plastique à été conçu par un logiciel de conception mécanique 3D [solidworks 2018] et a été fabriqué à l'aide d'une imprimante 3D. La plaque conductrice était une plaque d'aluminium "AL 5068" commandée par un fournisseur local. Afin de valider expérimentalement le modèle développé en se rapprochant le plus possible des conditions réelles, le défauts a été manuellement introduit à la surface de la pièce à l'aide d'une machine d'usinage (Tour) (cf Figure 6.2).

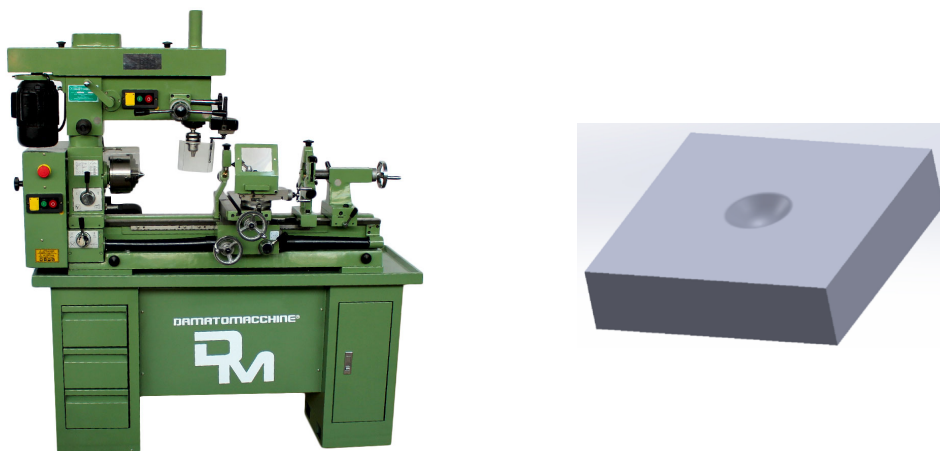


FIGURE 6.2 – défaut artificiel introduit à la surface du conducteur par une Tour d'usinage métaux.

Caractérisation de la bobine

Le modèle existant traite le cas idéal (pas de phénomène parasite et bobine parfaitement établie). De ce fait, nous souhaitons corriger les mesures afin de

s'affranchir d'un effet parasite que le modèle utilisé pour le calcul des champs de référence ne prend pas en compte. Il s'agit de l'effet de peau apparaissant dans le bobinage même de la sonde lorsque l'on y impose un courant variable. Afin de tenir compte de cet effet à l'échelle du capteur, nous avons choisi de déterminer un rayon extérieur effectif de la bobine (qui sera donc nécessairement plus faible que le rayon extérieur indiqué par le constructeur) qui sera par la suite utilisé comme donnée d'entrée pour le modèle. Le rayon intérieur restera quant à lui inchangé.

Afin de déterminer le rayon effectif optimal, nous avons utilisé une méthode d'optimisation stochastique [21] qui nous permet de déterminer le rayon extérieur qui minimise l'écart entre la mesure de l'impédance de la bobine dans l'air et d'une bobine idéale calculée par un modèle analytique [20]. Dans un circuit simple composé d'un générateur de tension, un oscilloscope, une résistance de $1\text{k}\Omega$ et un capteur à effet hall, la tension étant fixée, on fait varier la fréquence et on mesure l'intensité de courant au borne de la résistance qui réfère à l'intensité de courant circulant dans tout le circuit. l'impédance dans l'air résulte alors du rapport de la tension sur l'intensité. La Figure 6.3 montre un bon accord de l'impédance calculée dans l'air entre la bobine fabriquée manuellement et une bobine modélisé dont les caractéristique sont présentées dans le Tableau 6.1

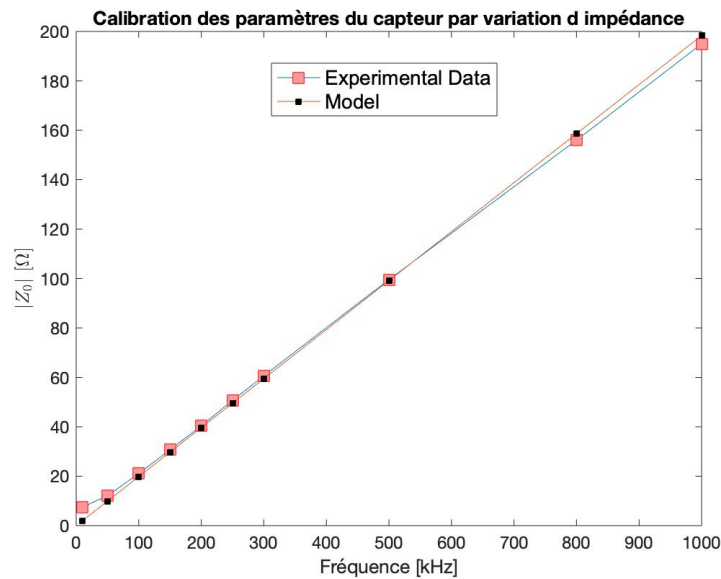


FIGURE 6.3 – calibration capteur par calcul d'impédance brute en variant la fréquence d'excitation.

paramètres	Bobine réelle	bobine modélisée
R_{int} [mm]	4	4
R_{ext} [mm]	6.2	6.7
H [mm]	2	2
N	50	52

TABLE 6.1 – paramètres géométriques des bobines réelle et modélisée

caractérisation de la chaîne d'acquisition

Nous avons vu que le champ incident que nous utilisons dans le modèle développé était calculé par un module semi-analytique permettant de calculer le champ rayonné par une sonde inductive (considérée comme une source de courant parfaite). Il est clair que les impédances parasites ne sont pas prises en compte dans notre modèle en l'état actuel. On va maintenant chercher à identifier les différents éléments de la chaîne d'acquisition afin de les soustraire à la mesure et donc d'isoler l'impédance Z . Moulder et al. [Moulder 1998].

La partie acquisition comporte réellement des éléments parasites qui sont représentés sur la Figure 6.4. Ce modèle électrique a été initialement proposé par D. J. Harrison et al. [Harrison 1996].

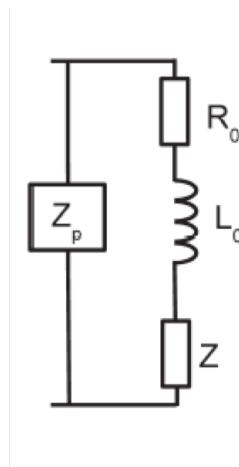


FIGURE 6.4 – schema de chaîne d'acquisition en regroupant les éléments parasites

En effet, R_0 et L_0 représentent la résistance et l'inductance de la sonde en régime continu (DC). Nous regroupons alors toutes les impédances parasites dues à la chaîne d'acquisition (hormis la sonde) sous la forme d'une seule impédance Z_p . Cette impédance Z_p permet de prendre en compte tous les effets capacitifs,

résistifs et inductifs parasites de la chaîne d'acquisition. Finalement, l'impédance Z représente la variation d'impédance due à l'induction de courants de Foucault dans le conducteur sous test.

La première étape consiste à effectuer des mesures de l'impédance en l'absence du spécimen à des fréquences les plus basses possibles. L'impédance mesurée dans ces conditions est notée Z_A . On peut alors en déduire les valeurs de R_0 et L_0 . En effet, pour R_0 , on choisira la valeur moyenne de la partie réelle de Z_A . Pour déterminer L_0 , on effectue une régression linéaire de $\text{Im}(Z_A)$ est considérée comme étant sensiblement égale à jL_0 , la pente de la droite nous donnant L_0 . Ainsi, on peut donc directement obtenir l'admittance $Y_p = 1/Z_p$.

6.2.2 Validation expérimentale

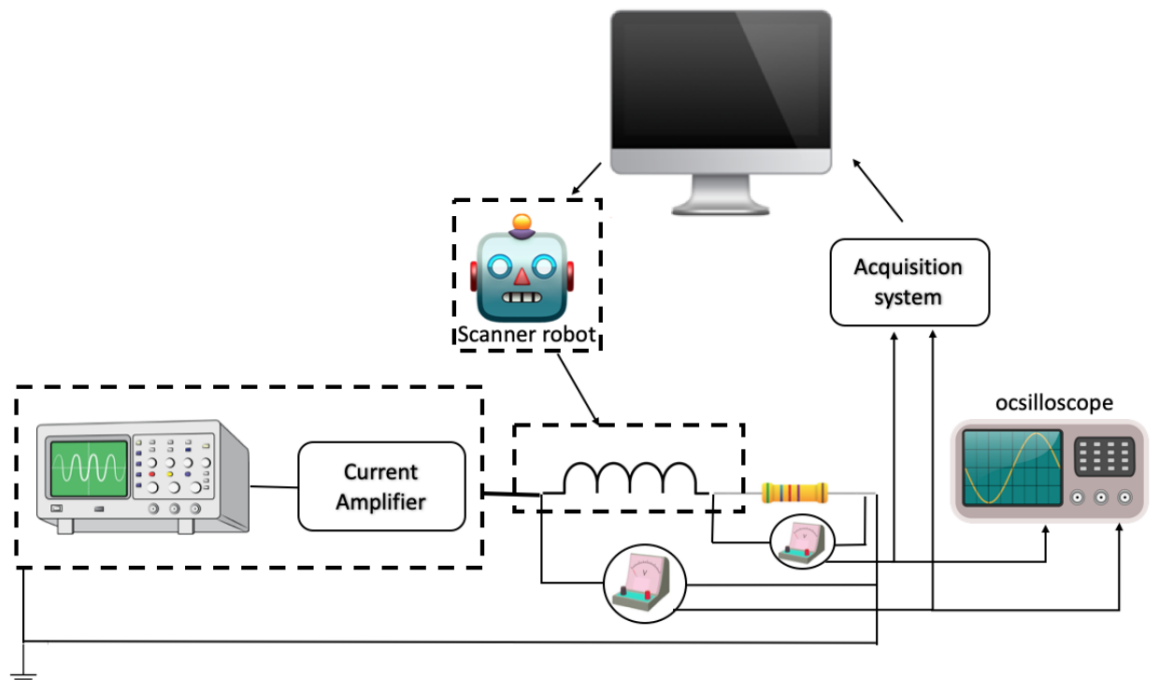


FIGURE 6.5 – Schéma de manip expérimental

Le processus expérimental est présenté dans la Figure 6.5 : un générateur Fluke 397 a été utilisé pour générer la tension d'entrée (signal sinusoïdal). Un amplificateur de courant a été implémenté en série avec le générateur pour atteindre des intensités acceptables de courant circulant dans le circuit. Pour simplifier la mesure de l'intensité, une résistance de 1 kΩ est mise en série avec la bobine. En variant la fréquence d'excitation, on peut visualiser la variation de la tension au borne de

la résistance et donc l'intensité du courant circulant dans le circuit peut être fixé. Un robot de balayage triaxial a été utilisé pour déplacer la sonde sur la zone de maillage. Selon la taille de la bobine et les dimensions du défaut artificiel, qui est centrée sur (0,0), la sonde balaye un surface de : $[-20 : 20] \times [-20 : 20]$ $[\text{mm}^2]$. Un système d'acquisition local a été utilisé simultanément. À chaque point de mesure, deux signaux sont enregistrés avec une fréquence d'échantillonnage $f_c = 2$ MHz et le nombre d'échantillons $N = 4000$. Les paramètres de la configuration (cf Figure 6.6) sont présentés dans les Tableaux 6.2 et ??.

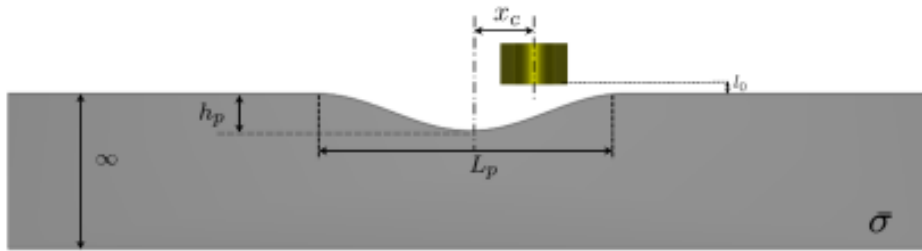


FIGURE 6.6 – Schéma de coupe du specimen

Courant d'excitation	I_0	0.4 [A]
Fréquence d'excitation	f	50 [kHz]
Liftoff	l_0	0.3 [mm]

TABLE 6.2 – Paramètres du manip expérimental

paramètres de la pièce	symboles	valeurs
Épaisseur	E	10 [mm]
conductivité	σ	1.74 [MS/m]
Zone d'inspection	S	20×20 $[\text{mm}^2]$
Largeur du défaut	L	10 [mm]
Hauteur du défaut	h	2 [mm]

TABLE 6.3 – Paramètre du specimen sous test

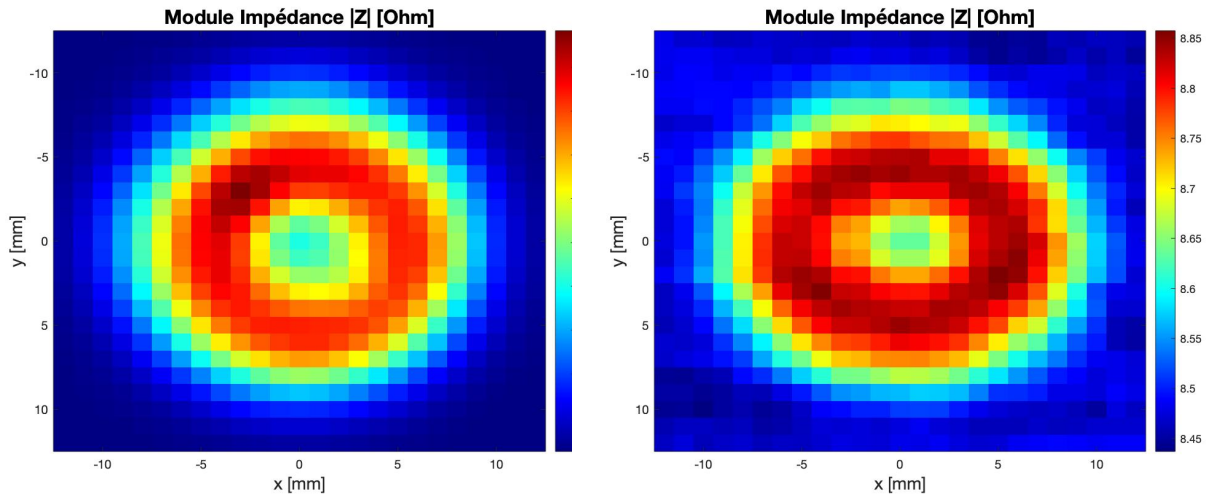


FIGURE 6.7 – Cartographie du module de l'impédance : Modèle vs données expérimentales

6.3 Détachement à Newcastle

Le second détachement s'était effectué au sein de " Electric and Electronic engineering school " à l'université de Newcastle Upon Tyne. Nos partenaires du projet mènent des travaux de recherche portant sur l'inspection des matériaux composites à base de fibres de carbone par des techniques de contrôle non destructif de types thermographie infrarouge et Thermographie à courants de Foucault pulsés (ECPT)

6.3.1 Expérimentation

Il est important de noter que notre modèle développé est limité à une source d'excitation sinusoïdale (dépendance en temps du type $e^{i\omega t}$). la comparaison avec des données expérimentales par la méthode ECPT nous fait face à deux obstacles : la durée de détachement et les tâches à accomplir ne permet pas d'investir du temps pour changer le type de la source d'excitation et faire les changements nécessaires du codes. De plus, le code a pour but le calcul du champ EM induit dans le specimen, la réponse du capteur et même la densité de courant. par contre, la technique ECPT se base sur la détection de la variation du champ de température à l'aide d'une caméra infrarouge. Pour contourner ce problème, on a choisi de comparer la densité de courant et la quantité de chaleur induite par une bobine de chauffage sur la surface supérieur du specimen. Pour ce faire, une plaque de composite unidirectionnel à surface plane (CFRP) dont les caractéristiques sont présentées

dans le tableau 6.4, a été éclairé par une bobine de chauffage comme le montre la Figure 6.8 et dont les paramètres sont illustrés dans le tableau 6.5. Un générateur de tension est utilisé pour générer un signal d'excitation sinusoïdal. La fréquence utilisée était de l'ordre de 300 kHz. Étant une bobine de chauffage (spécialement dédié à induire des champs assez fort pour l'échauffement), l'intensité de courant d'excitation utilisée était particulièrement élevée par rapport à ce qu'on utilise dans l'inspection par courant de Foucault usuelle. C'était de l'ordre de 200 A.



FIGURE 6.8 – Manip expérimentale

paramètres de la bobine	symboles	valeurs
Rayon intérieur	R_{int}	5.5 [cm]
Rayon extérieur	R_{ext}	7 [cm]
Hauteur	H	6 [cm]
Nombre de tour	N	4
Courant d'excitation	I_0	200 [A]
Fréquence d'excitation	f	300 [kHz]
Liftoff	l_0	1 [cm]

TABLE 6.4 – Paramètres de la bobine.

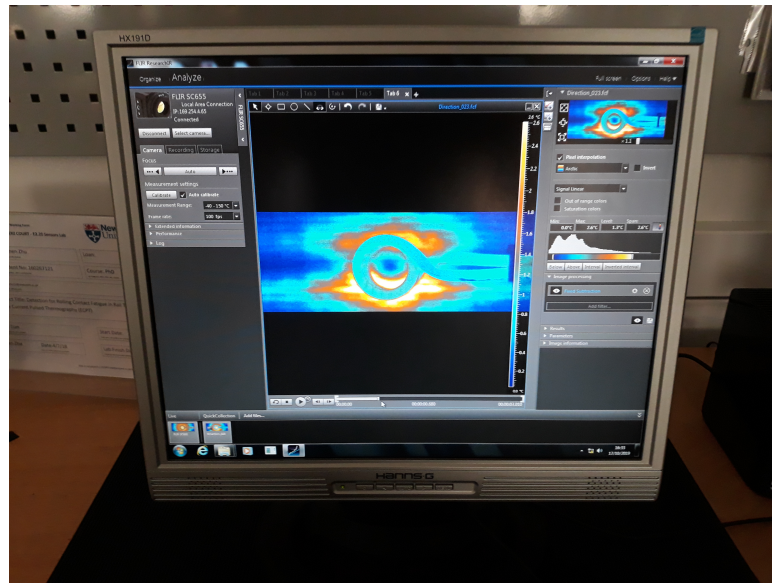


FIGURE 6.9 – logiciel de visionnage et de récupération de données expérimentales lié à la caméra infrarouge

paramètres de la pièce	symboles	valeurs
Epaisseur	E	4 [mm]
Nbre de couche	N_c	2
conductivité		
-longitudinale	σ_l	$39 \cdot 10^3$ [S/m]
-transversale	σ_t	8 [S/m]
-normale	σ_n	8 [S/m]
Zone d'inspection	S	25×25 [cm ²]
Séquence d'orientation	θ	[0,45] [deg]

TABLE 6.5 – Paramètres de la plaque composite.

6.3.2 Validation expérimentale

Comme déjà évoqué, le modèle prend en compte une source d'excitation sinusoïdale. la chaleur Q peut être déterminé à travers la formule :

$$Q = \left[\frac{1}{\bar{\sigma}} \right]^{-1} | \mathbf{J}_s |^2 = | \sqrt{\bar{\sigma}} \mathbf{E} |^2 \quad (6.1)$$

D'autre part, on sait bien que la chaleur Q vérifie l'équation de la chaleur :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = Q(x, y, z, t) \quad (6.2)$$

La chaleur dépend alors du temps (cycle de chauffage et cycle de refroidissement) et la caméra infrarouge détecte la variation temporelle des grandeur, alors qu'on travaille dans le régime quasi-static. pour remédier à ce problème, on choisi un instant $t_0 = 0.284$ [ms] au milieu de la phase de chauffage. La Figure 6.10 présente la densité de chaleur Q créée à la surface supérieur de la même plaque de CFRP. On voit bien un très bon accord des résultats de simulation avec les données expérimentales.

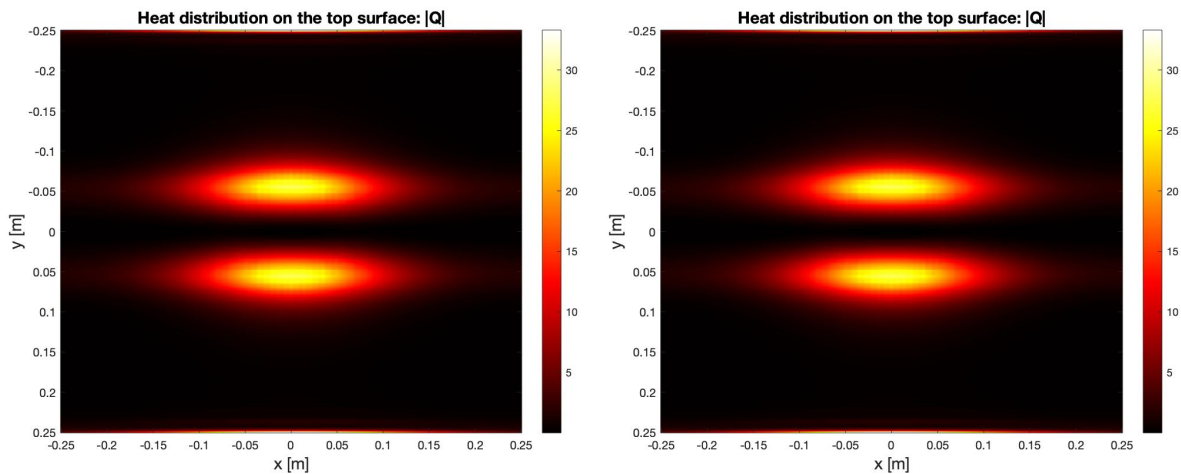


FIGURE 6.10 – Densité de chaleur à la surface supérieur de la plaque : Modèle semi-analytique vs modèle NewCastle.

La direction principale des fibres est identifié à 0° . A l'aide d'un algorithme de post-processing et de traitement d'image propre au labo, on peut recalculer approximativement la densité de courant surfacique induite par une telle bobine. la comparaison des résultats est illustrée dans la Figure ?? . On remarque un accord entre les résultats de simulation et les données expérimentales.

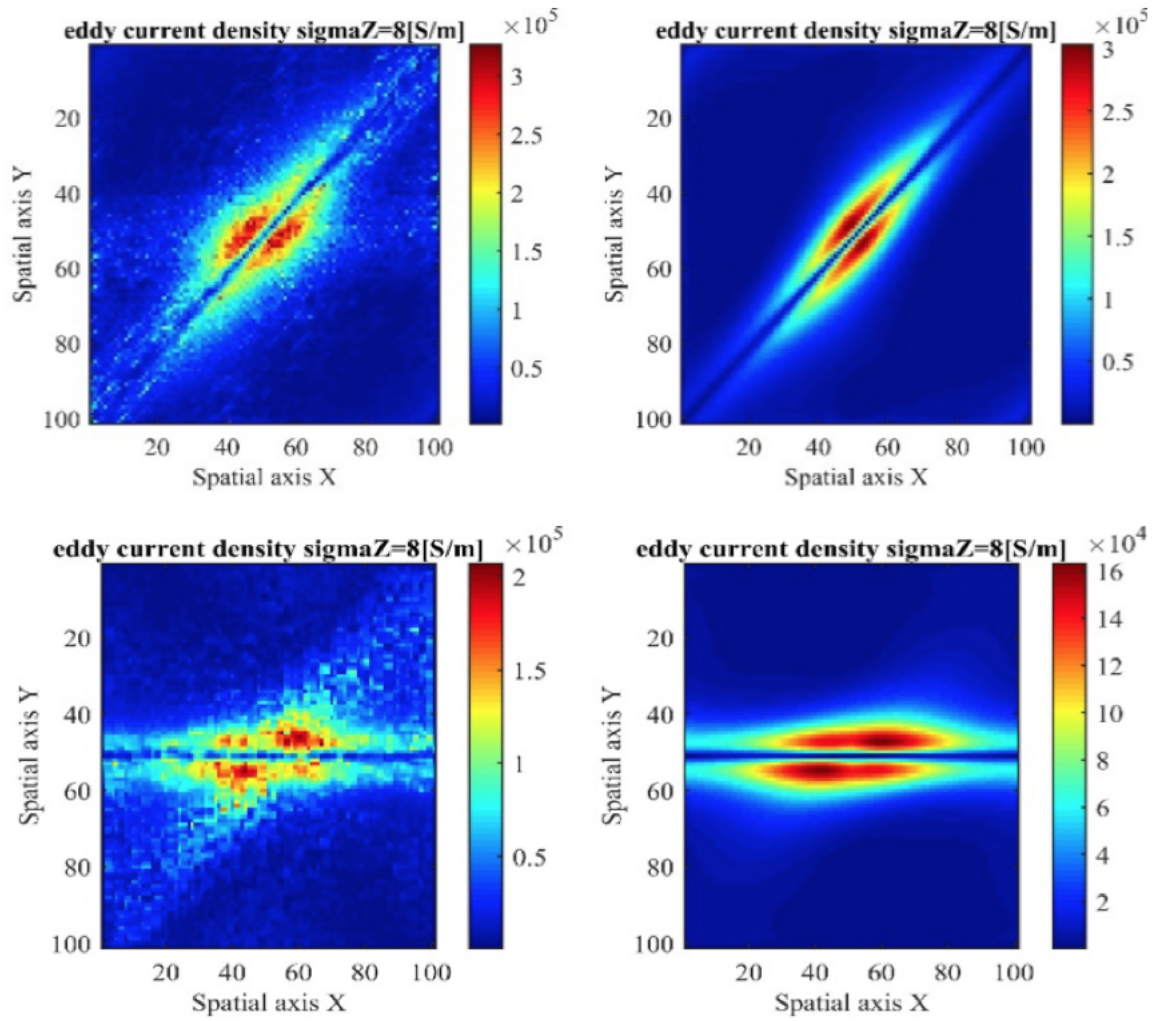


FIGURE 6.11 – Comparison expérimentale : Densité de courant au milieu de la première couche ($\theta = 45^\circ$) et la deuxième couche ($\theta = 0^\circ$).

Chapitre 7

Conclusion Générale

Le travail présenté dans ce mémoire traite la modélisation électromagnétique des matériaux composites pour des applications de contrôle non destructif. Un intérêt particulier est prêté aux matériaux composites, du type **CFRP** (Carbon fibers Reinforced Polymer), formés à partir de fibres conductrices unidirectionnelles noyées dans une matrice diélectrique.

Au cours de ce travail de thèse de doctorat, deux formalismes pertinents ont été développés et implémentés numériquement, dont l'un d'eux sera prochainement dans **CIVA**, dédiés au contrôle non destructif par courants de Foucault des pièces composites homogénéisées. L'approche unifiante et générique a pour but le calcul de l'interaction du champ électromagnétique émis par un capteur 3D avec un conducteur anisotrope homogène et stratifié. Afin de caractériser un tel matériau, on s'est intéressé, au premier lieu, à la détermination de l'orientation des fibres via le calcul de la réponse d'un capteur CF tournant sur son axe et au deuxième lieu, à des défauts du type délaminage ou ondulation des fibres qui se manifestent par une déformation locale de la géométrie.

Les modèles semi-analytiques existants dans la littérature dédiés au calcul du champ dans des milieux anisotropes sont basés sur le formalisme de Dyades de Green et limités aux géométries planes. L'approche proposée est donc innovante à travers ce formalisme générique pour le calcul rapide du champ issu de l'interaction d'un capteur CF quelconque sans noyau de ferrite avec un composite plan du type **CFRP**. En s'inspirant des méthodes de Fourier modal, le modèle numérique est basé sur une approche modale dédié à la résolution des équations de Maxwell dans un système de coordonnées cartésien. Numériquement, il exploite les structures particulières des matrices creuses pour réduire le temps de calcul sans limitation de nombre de modes utilisé pour la représentation des composantes du champ. L'intervention des interfaces inférieures est prise en compte moyennant un algorithme récursif et stable de matrices de diffusion. Les temps de calcul obtenus sont très faibles par rapport aux méthodes purement numériques.

Le premier formalisme permet donc de calculer les champs induits dans le matériau à interfaces planes avec différentes orientations des fibres dans chaque pli ainsi que l'impédance du capteur éclairant la structure. Il répond tout d'abord au besoin industriel puisqu'il permet de détecter la disposition particulière des fibres (l'axe principale de l'anisotropie), une étape nécessaire pour éviter les dis-orientation ou distorsion des fibres dans les couches ce qui peut perturber la résistance du composant.

Le deuxième formalisme constitue l'innovation apportée par ce travail de thèse. Nous avons proposé une approche basée sur un changement de coordonnées adapté aux profils des interfaces complexes. Étant performant et unificateur, le modèle numérique est basé sur le formalisme covariant des équations de Maxwell en tenant compte des propriétés conductrices anisotropes du milieu. On a fait appel à la méthode de coordonnées curvilignes, usuellement utilisée en optique pour les réseaux de diffraction, et on l'a adapté au domaine du contrôle des composites par courants de Foucault. Ce formalisme constitue une extension des méthodes semi-analytiques de calcul de champ actuelles dans des conducteurs isotropes et homogènes à surfaces complexes.

Le modèle permet donc un calcul complet des champs électromagnétiques dans des configurations plus complexes où les pièces composites homogénéisées sont formées de plusieurs interfaces irrégulières parallèles et quelques cas particuliers des profils non parallèles. Dans le cas 2D5 (capteur 3D et variation géométrique 2D), le modèle montre des résultats pertinents et ne présente aucune limitation en nombre de modes. Le cas général des profils 3D non identiques présente aujourd'hui quelques limitations qui nécessitent le développement des outils numériques complémentaires comme les méthode pseudo-spectrales. En dépit de ces limitations numériques actuelles, ce formalisme possède un fort potentiel de développement grâce à l'essor de nouvelles méthodes de Fourier Modales itératives pour traiter les géométries complexes 3D. De plus, ce formalisme peut facilement être étendu pour traiter à la fois : la variation brutale de conductivité (milieu non homogène) et l'anisotropie magnétique (tenseur de perméabilité généralisé).

Finalement, j'ai eu l'occasion de développer des compétences théoriques et expérimentales à travers les formations proposées par le projet européen ainsi que d'effectuer des expérimentations prometteuses pour la validation du modèle.

Appendices

Annexe A

Les Lois de l'électromagnétisme

A.1 Introduction

Les équations de Maxwell, aussi appelées équations de Maxwell-Lorentz, sont des lois fondamentales de la physique. Elles constituent les postulats de base de l'électromagnétisme, avec l'expression de la force électromagnétique de Lorentz. Ces équations traduisent sous forme locale différents théorèmes (Gauss, Ampère, Faraday) qui régissaient l'électromagnétisme avant que Maxwell les réunisse sous forme d'équations intégrales. Elles donnent ainsi un cadre mathématique précis au concept fondamental de champ introduit en physique par Faraday dans les années 1830. Ces équations montrent notamment qu'en régime stationnaire, le champ électrique et le champ magnétique sont indépendants l'un de l'autre, alors qu'ils ne le sont pas en régime variable. Cet aspect trouve sa formulation définitive dans le formalisme covariant présenté dans la deuxième section de ce chapitre : le champ électromagnétique est représenté par un objet mathématique unique, le tenseur électromagnétique, dont certaines composantes s'identifient à celles du champ électrique et d'autres à celles du champ magnétique.

En réalité, les signaux expérimentaux obtenus dans le domaine du contrôle non destructif (l'impédance de la sonde par exemple) sont souvent rattachés à des grandeurs énergétiques et donc intégrales. De ce fait, nous présentons très rapidement ici les lois bien connues de l'électromagnétisme en commençant par leurs formes intégrales.

Loi de Gauss

Soit une surface fermée δ_Ω ne possédant pas de densité de charge surfacique et formant un volume Ω contenant une charge électrique Q_Ω . La loi de Gauss est La première loi de l'électromagnétisme décrit le flux du champ électrique \mathbf{E} à travers

cette surface :

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_\Omega}{\varepsilon_0} \quad (\text{A.1})$$

où ε_0 est la permittivité électrique du vide. Il est important de noter ici que la charge Q_Ω peut être ponctuelle, mais peut aussi être créée par une densité volumique de charges $\rho(r)$. On a donc :

$$Q_\Omega = \iiint_{\Omega} \rho(r) \, dV \quad (\text{A.2})$$

Loi de Faraday

Le postulat de la loi de Faraday s'énonce comme suit : pour toute surface S s'appuyant sur un contour fermé Γ , les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} vérifient :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = \frac{d}{dt} \left(\iint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} \right) \quad (\text{A.3})$$

Cette loi décrit un phénomène dynamique qui est à l'origine même de la création des courants de Foucault. Le terme de gauche représente la circulation du champ électrique le long du contour Γ et est souvent appelé la force électromotrice \mathbf{e} . Le terme de droite représente la dérivée temporelle du flux du champ magnétique à travers la surface S .

Loi d'Ampère modifiée

La dernière loi est attribuée à Ampère et s'écrit, en conservant les mêmes notations que précédemment et en se plaçant dans le vide :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\iint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} \right) \quad (\text{A.4})$$

où $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ désigne la densité de courant. En réalité, la loi d'Ampère telle qu'il l'a formulée ne contient pas la deuxième intégrale du terme de droite. C'est Maxwell qui, s'apercevant de l'incohérence des équations ainsi obtenues (la conservation de la charge n'était pas assurée en régime dynamique) postula la présence de courants de déplacement ($\varepsilon_0 \frac{d}{dt} \mathbf{E}$ dans le vide), unifiant alors les trois lois que nous venons de voir.

La force de Lorentz

Soit une charge ponctuelle "q" placée en un point M de l'espace de coordonnées (x, y, z) . La force de Lorentz permet de décrire, à un instant t , l'action de la répartition totale des charges électrostatiques et courants de l'univers sur "q". Les notions de champ électrique et d'induction magnétique sont introduites au travers de la définition de cette force qui s'écrit :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + v(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A.5})$$

où $v(\mathbf{r}, t)$ représente le vecteur vitesse de la charge q.

Absence de monopole magnétique

À l'heure actuelle, aucun monopole ou charge magnétique n'a été découvert. ce constat considéré expérimental empêche la détermination d'une version analogue au théorème de Gauss pour le champ magnétique. Ceci se traduit par le fait que le flux du champ magnétique au travers d'une surface fermée $\partial\Omega$ est inconditionnellement nul :

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Conservation de la charge électrique

À l'instar de la relation précédente, la loi de conservation de la charge électrique repose sur une réalité physique simple : la présence d'un courant électrique (flux de charges électriques) traversant une surface fermée $\partial\Omega$ formant un volume Ω contenant une charge $Q_\Omega(t)$ conduit nécessairement à une variation de $Q_\Omega(t)$ afin de compenser a charge sortante (ou entrante), i.e. :

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt}Q_\Omega(t) \quad (\text{A.7})$$

Forme Locale des équations de Maxwell

La forme locale de ces équations a été décrite en tout premier lieu par Maxwell au XIXe siècle, dans son ouvrage intitulé "Electricity and Magnetism" sous la forme d'un système de huit équations couplées. C'est Heaviside qui a réduit ce système par la suite aux quatre équations différentielles que nous connaissons aujourd'hui :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \quad (\text{A.11})$$

où l'opérateur ∇ est un opérateur différentiel qui prend la forme $\nabla = [\partial x, \partial y, \partial z]^T$ en coordonnées cartésiennes, avec la convention $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha}$. À ces équations, on peut ajouter la forme locale de l'équation de conservation de la charge :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.12})$$

Relations constitutives de milieu

Ces équations mettent en jeu 5 grandeurs vectorielles \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} et \mathbf{J} qui sont appelées respectivement le champ électrique, l'induction électrique, le champ d'induction magnétique, le champ magnétique et la densité de courant électrique ainsi qu'une grandeur scalaire, la densité volumique de charges électriques ρ du milieu. Elles sont reliées entre elles par les relations de milieu qui font intervenir des objets mathématiques représentant les propriétés électromagnétiques du milieu à l'échelle macroscopique.

Dans le cas général, ces objets sont des tenseurs d'ordre deux et de rang trois qu'on repérera par le symbole $\bar{\bar{}}$. Ces relations relient les différentes grandeurs vectorielles qu'on vient de citer et s'écrivent sous la forme suivante pour un matériau linéaire :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \bar{\bar{\epsilon}}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{r}, t) = \bar{\bar{\sigma}}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \bar{\bar{\mu}}(\mathbf{r}, t) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A.15})$$

où le terme $\mathbf{J}_i(\mathbf{r}, t)$ représente la densité de courant résultant uniquement du mouvement des charges soumises à la force de Lorentz. En présence d'une source de courant, la densité de courant totale dans le milieu source s'écrit :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_i(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}_e(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A.16})$$

où \mathbf{J}_e représente la densité de courant "externe", c'est à dire imposée au niveau de la source. Dans le cas d'un matériau homogène et isotrope tel que l'air ou le vide,

on peut remplacer les tenseurs de permittivité, de conductivité et de perméabilité par des grandeurs scalaires, ce qui simplifie énormément le problème à résoudre. Au sens large, la modélisation des phénomènes électromagnétiques repose sur la résolution numérique des équations de Maxwell afin de calculer les champs vectoriels en tout point de l'espace et à tout instant t . À partir de la connaissance de ces grandeurs, il est possible de calculer numériquement des grandeurs intégrales telles que l'impédance d'un capteur, ou le flux du champ magnétique etc... Dans la plupart des configurations, différents matériaux cohabitent et des domaines présentant des propriétés électromagnétiques différentes sont mis en jeu. Ainsi, au lieu de résoudre un problème complexe global, on résout souvent les équations de Maxwell dans chaque milieu et on assure l'unicité de la solution en imposant des conditions de passage entre les différents milieux.

Conditions de passage

Si on considère une surface \mathbf{S} séparant un milieu 1 d'un milieu 2, les relations de passage entre les champs électromagnétiques s'écrivent :

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n} = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = \rho_s \quad (\text{A.18})$$

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{n} = \mathbf{J}_s \quad (\text{A.19})$$

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{A.20})$$

où ρ_s est la densité surfacique de charges présentes sur la surface \mathbf{S} et \mathbf{J}_s est la densité de courant surfacique sur cette même surface. Dans le cas d'une conductivité élevée ou fréquences élevées, la densité volumique de charge devient très grande au voisinage de l'interface et décroît très rapidement en s'éloignant de cette interface, ce qui entraîne une variation locale des champs très importante sur une très faible épaisseur. Ainsi, si on observe la variation de la composante normale de \mathbf{D} sur une distance supérieure, il est possible d'observer un saut. Le "modèle" de la densité de charge surfacique assure une représentation fidèle à la réalité. De même, une densité de courant surfacique ne peut apparaître que dans un conducteur parfait, c'est-à-dire un matériau qui repousse de façon idéale les lignes des champs électromagnétiques : les charges et courants sont repoussés au niveau des surfaces du matériau et s'organisent de sorte à annuler les champs à l'intérieur du matériau (les champs d'excitation sont compensés par les champs créés par ces nouvelles distributions de charges et courants).

Le modèle de conducteur parfait est d'autant plus proche de la réalité que l'épaisseur de peau δ est faible. En effet, dans ce cas, on a vu qu'on pouvait approcher les densités de charge et de courant par des grandeurs surfaciques et

considérer les champs nuls à l'intérieur du conducteur. Comme notre domaine d'application est le contrôle non destructif par courants de Foucault, on travaille ici dans le cadre des basses fréquences (régime quasi-statique) et on considère donc que $\rho_s = 0$ et $\mathbf{J}_s = 0$ dans toute la suite de ce document.

A.2 Formulation Covariante des équations de Maxwell

On présente brièvement dans cette section le cadre théorique de la formulation covariante des équations de Maxwell, une formulation tridimensionnelle et tensorielle utilisée dans le cas général lorsqu'on est dans un système de coordonnées curvilignes. À l'origine de la théorie de la relativité restreinte d'Albert Einstein, E. J. Post étudie l'invariance naturelle par toute transformation de Lorentz de l'équation de propagation des champs \mathbf{E} et \mathbf{H} dans le vide et prouve la conservation de l'invariance des équations de propagation en introduisant les champs \mathbf{B} et \mathbf{D} dans les équations de Maxwell. Ceux-ci sont alors reliés aux champs \mathbf{E} et \mathbf{H} (cf chapitre précédent) par les relations constitutives du matériau qui sont transformées d'une manière particulière. On dit qu'elles sont " covariantes ". En d'autres termes, l'invariance de Lorentz des équations de Maxwell dans le vide est généralisée par la covariance de Lorentz de l'ensemble des équations de Maxwell et des relations constitutives dans un matériau.

S'inspirant des travaux de Post, J. Chandezon s'est intéressé à la façon dont se transformaient les relations constitutives par un changement de coordonnées tridimensionnel. Il en a déduit une formulation tensorielle covariante des équations de Maxwell tridimensionnelles en faisant intervenir une nouvelle métrique décrivant l'opération du changement de coordonnées. Ces équations constituent le fondement théorique de la méthode des coordonnées curvilignes qu'on souhaite utiliser.

Géométrie de l'espace-temps de Minkowski

L'espace-temps de Minkowski (1908) est une variété différentielle M plate munie d'une métrique lorentzienne. Soit un système de coordonnées quelconque x^μ autour d'un évènement (point) P de l'espace-temps, et soient $\mathbf{e}_\mu(x)$ une base locale de $T_x M$, espace tangent à la variété au point $x \in M$. Un vecteur tangent $\mathbf{w} \in T_x M$ s'écrit alors comme la combinaison linéaire :

$$\mathbf{w} = w^\mu \mathbf{e}_\mu \tag{A.21}$$

Les w^μ sont appelées les composantes contravariantes du vecteur \mathbf{w} . Le tenseur métrique η est la forme bilinéaire symétriques

$$\eta = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (\text{A.22})$$

Dans une base orthonormée d'un référentiel inertiel, ses composantes covariantes $\eta_{\mu\nu}$ sont :

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +) \quad (\text{A.23})$$

Ses composantes contravariantes $\eta^{\mu\nu}$ vérifient :

$$\eta_{\mu\alpha} \eta^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu \quad (\text{A.24})$$

On obtient explicitement :

$$\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +) \quad (\text{A.25})$$

On utilisera ci-dessous les conventions usuelles suivantes :

- un indice grec varie de 0 à 3. Il est associé à une grandeur dans l'espace-temps ;
- un indice latin varie de 1 à 3. Il est associé aux composantes spatiales d'une grandeur dans l'espace-temps.

Par exemple, les composantes contravariantes du 4-vecteur position s'écrivent dans un système de coordonnées orthonormales :

$$x^\mu = (x^0, x^i) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (\text{A.26})$$

Le tenseur métrique définit pour chaque point $x \in M$ de l'espace-temps un pseudo-produit scalaire (pseudo au sens où l'hypothèse de positivité est retirée) dans l'espace $T_x M$ euclidien tangent à M au point x . Si \mathbf{u} et \mathbf{v} sont deux vecteurs de $T_x M$, leur produit scalaire s'écrit :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \eta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \eta_{\mu\nu} u^\mu v^\nu \quad (\text{A.27})$$

En particulier, en prenant deux vecteurs de base, on obtient les composantes :

$$\eta_{\mu\nu} = \eta(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu \quad (\text{A.28})$$

w^μ désignant les composantes contravariantes du vecteur \mathbf{w} , on peut définir de même ses composantes covariantes par :

$$w_\mu = \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_\mu \quad (\text{A.29})$$

Par exemple, les composantes covariantes du 4-vecteur position s'écrivent dans un système de coordonnées orthonormales :

$$x_\mu = (x_0, x_i) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (-ct, x, y, z) \quad (\text{A.30})$$

Quadri-gradient

On introduit l'opérateur différentiel quadri-gradient par ses composantes covariantes :

$$\partial_\mu = (\partial_0 \partial_i) = (1/c \partial_t; \vec{\nabla}) \quad (\text{A.31})$$

Ses composantes contravariantes s'écrivent :

$$\partial^\mu = (\partial^0 \partial^i) = (-1/c \partial_t; \vec{\nabla}) \quad (\text{A.32})$$

L'opérateur invariant d'Alembertien s'écrit par exemple :

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 + \vec{\nabla}^2 \quad (\text{A.33})$$

Quadri-courant

On introduit le quadri-courant électromagnétique par ses composantes contravariantes :

$$j^\mu = (j^0 j^i) = (\rho c, \vec{j}) \quad (\text{A.34})$$

où ρ est le scalaire densité électrique de charge, et \vec{j} le vecteur densité de courant. Ses composantes covariantes s'écrivent :

$$j_\mu = (j_0 j_i) = (-\rho c, \vec{j}) \quad (\text{A.35})$$

Tenseur de Maxwell

Le tenseur électromagnétique est le tenseur antisymétrique de rang deux défini à partir du quadri-potentiel par :

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha = -F_{\beta\alpha} \quad (\text{A.36})$$

Ses composantes covariantes s'écrivent explicitement :

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.37})$$

On obtient ses composantes contravariantes en écrivant :

$$F^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} F_{\mu\nu} \quad (\text{A.38})$$

La métrique étant diagonale dans un référentiel inertiel, on obtient alors les formules suivantes, sans sommation sur les indices répétés :

- $F^{00} = \eta^{00}\eta^{00}F_{00} = +F_{00} = 0$
 - $F^{0i} = \eta^{00}\eta^{ii}F_{0i} = -F_{0i}$
 - $F^{ij} = \eta^{ii}\eta^{jj}F_{ij} = +F_{ij}$
- soit explicitement :

$$F^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.39})$$

Équations de Maxwell sous forme covariante

Les équations de Maxwell se mettent sous forme relativiste covariante. Les deux équations de Maxwell sans termes de sources s'écrivent :

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \quad (\text{A.40})$$

c'est la première équation Maxwell-Minkowski. Les deux équations de Maxwell avec termes de sources s'écrivent :

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\mu_0 j^\beta \quad (\text{A.41})$$

Puisque le tenseur de Maxwell est antisymétrique, cette dernière relation entraîne en particulier que le quadri-courant est conservé :

$$\partial_\beta (\partial_\alpha F^{\alpha\beta}) = 0 = -\mu_0 \partial_\beta j^\beta \implies \partial_\beta j^\beta = 0 \quad (\text{A.42})$$

La deuxième équation Maxwell-Minkowski est définie comme suit :

$$\partial_\beta G^{\alpha\gamma} = J^\beta \quad (\text{A.43})$$

où $J^\beta = [c\rho, J]$ et le pseudo-tenseur G est défini par :

$$G^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{D_x}{c} & \frac{D_y}{c} & \frac{D_z}{c} \\ -\frac{D_x}{c} & 0 & H_z & -H_y \\ -\frac{D_y}{c} & -H_z & 0 & H_x \\ -\frac{D_z}{c} & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

Cas particulier Tridimensionnel

À partir des résultats précédents, il est maintenant possible d'avoir une formulation tensorielle tridimensionnelle des équations de Maxwell. On considérera alors la base canonique de l'espace R^3 et de son produit scalaire canonique.

Identification des champs tridimensionnels

On remarque que les composantes non-nulles des tenseurs F et G s'identifiaient avec les composantes spatiales des champs électromagnétiques. Cette identification prend la forme suivante :

$$\begin{cases} E_i = cF_{0i} \\ B^i = \frac{1}{2}\xi^{ijk}\mathcal{F}_{jk} \\ D^i = cG^{0i} \\ H_i = \frac{1}{2}\xi^{ijk}\mathcal{G}_{jk} \end{cases} \quad (\text{A.45})$$

où ξ désigne l'indicateur de Lévi-Civita. En présence de sources, on identifie aussi les composantes du quadri-vecteur \mathcal{J} :

$$\begin{cases} \rho = c\mathcal{J}^0 \\ J_i = \mathcal{J}^i \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

Les équations de Maxwell covariantes tri-dimensionnelles s'écrivent donc en utilisant ces identifications :

$$\begin{cases} \xi^{ijk}\partial_j E_k = -c\partial_0 B^i = -\partial_t B^i \\ \partial_i B^i = 0 \\ \xi^{ijk}\partial_j H_k = c\partial_0 D^i + J^i = \partial_t D^i + J^i \\ \partial_i D^i = \rho \end{cases} \quad (\text{A.47})$$

Ces équations ont été obtenues dans l'espace de Minkowski, c'est à-dire avec des vecteurs de base de type spatial orthogonaux. Elles ne diffèrent donc en rien des équations de Maxwell tridimensionnelles classiques écrites dans un système orthonormé. Cependant, c'est bien ce caractère tensoriel qui va nous permettre de les transposer à un système de coordonnées non-orthogonales obtenu par une transformation de la base orthonormée spatiale.

Relations de milieu tridimensionnelles pour un milieu conducteur homogène et isotrope

En présence d'un milieu isotrope homogène, le tenseur qui vient d'être introduit prend une forme spécifique. En fait, dans le cadre classique, on obtient :

$$\mathbf{D} = \bar{\epsilon}\mathbf{E} \quad (\text{A.48})$$

$$\mathbf{B} = \bar{\mu}\mathbf{H} \quad (\text{A.49})$$

$$\mathbf{J} = \bar{\sigma}\mathbf{E} \quad (\text{A.50})$$

où $\bar{\epsilon}$, $\bar{\mu}$ et $\bar{\sigma}$ sont des grandeurs tensorielles. Ici, nous nous plaçons dans un système de coordonnées cartésiennes orthogonales. Selon J. Chandezon [Chandezon

1979], nous pouvons réécrire ces relations sous la forme suivante (les composantes covariantes et inverses sont source de confusion pour les systèmes orthogonaux) :

$$D^i = \varepsilon^{ij} \delta^{ij} E_j \quad (\text{A.51})$$

$$B^i = \mu^{ij} \delta^{ij} H_j \quad (\text{A.52})$$

$$J^i = \sigma^{ij} \delta^{ij} E_j \quad (\text{A.53})$$

Comme $g^{ij} = \delta^{ij}$ pour un système orthonormé, on peut écrire qu'on a :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^{ij} g^{ij} \quad (\text{A.54})$$

$$\mu_{ij} = \mu^{ij} g^{ij} \quad (\text{A.55})$$

$$\sigma_{ij} = \sigma^{ij} g^{ij} \quad (\text{A.56})$$

Finalement, si on considère un repère naturel, dont la matrice de changement de base est la jacobienne de la transformation, on a :

$$\varepsilon^{ij} = \varepsilon_{ij} \sqrt{g} g^{ij} \quad (\text{A.57})$$

$$\mu^{ij} = \mu_{ij} \sqrt{g} g^{ij} \quad (\text{A.58})$$

$$\sigma^{ij} = \sigma_{ij} \sqrt{g} g^{ij} \quad (\text{A.59})$$

Il faut noter que les relations précédentes restent valables dans le cas plus général où les propriétés physiques du matériau ne sont plus des constantes scalaires mais des fonctions scalaires des variables de l'espace.

Annexe B

Notion d'algèbre vectorielle et tensorielle

Nous présentons ici les notions algébriques nécessaires à l'écriture des équations de Maxwell dans un repère non-orthogonal. Cette annexe s'inspire très largement du cours d'algèbre tensorielle de J Garrigues [Garrigues]. Nous en avons extrait les éléments nécessaires au développement du formalisme en potentiels vecteurs du second ordre dans des systèmes de coordonnées curvilignes non-orthogonaux.

B.1 Espace vectoriel et espace dual

On se place dans un espace vectoriel E de dimension n sur un corps K , dont les vecteurs de base sont notés \mathbf{e}_i . Un élément quelconque \mathbf{x} de E s'écrira donc sous la forme :

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + \dots + x^n \mathbf{e}_n \quad (\text{B.1})$$

ou plus simplement, en utilisant la convention de sommation d'Einstein qui sera utilisée dans toute la suite :

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \quad (\text{B.2})$$

On peut alors définir l'espace dual de E (noté E^*) et représentant l'ensemble des formes linéaires $\bar{\mathbf{u}}$ de E dans K qui satisfont aux conditions suivantes :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \forall \lambda \in K, \bar{\mathbf{u}}(\lambda x + y) = \lambda x + y, \quad (\text{B.3})$$

Considérons maintenant les éléments particuliers de E^* que l'on notera \mathbf{e}^i et qui sont définis sous la forme suivante :

$$\forall x \in E / x = x^i \mathbf{e}_i, \bar{\mathbf{e}}^i(x) = x^i, \quad (\text{B.4})$$

En d'autres termes, les \bar{e}^i sont les formes linéaires sur E qui à tout vecteur x de E associent sa i ème coordonnée dans la base des e_i . Par définition, ces éléments particuliers \bar{e}^i de E^* sont associés aux éléments e_i de E . Ils sont au nombre de n et vérifient :

$$\bar{e}^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

On montre alors qu'ils forment une base de E^* , généralement appelée "base duale" de la base des e_i . E^* est donc de dimension n .

B.2 Cas des espaces euclidiens

Lorsque E a une structure d'espace Euclidien, on peut définir dans cet espace une loi de composition interne appelée "produit scalaire" notée $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et faisant correspondre à tout couple de vecteur x et y un élément du corps $\mathbf{K} = \mathfrak{R}$ (corps des réels pour un espace euclidien). Ce produit scalaire satisfait de plus les conditions suivantes :

—
—
—

Le caractère euclidien de E (ou même pré-euclidien le cas échéant) a une conséquence importante sur E^* . En effet, chaque élément \bar{e}^i de E^* est une forme linéaire de E dans \mathfrak{R} . On a donc : $\forall x \in E, \bar{e}^i(x) = e^i \text{fflx}$ où les e^i s'obtiennent par la définition :

$$\bar{e}^i(e_j) = \delta_j^i = e^i \text{ffle}_j \quad (\text{B.6})$$

On vient donc de montrer que les e^i sont des éléments de E orthogonaux aux e_j et qu'ils forment donc une autre base de E . Ainsi, la base des e_i sera nommée base covariante et la base des e^j sera la base contravariante et on peut écrire un vecteur $x \in E$ sous la forme :

$$\mathbf{x} = x^i e_i = x_j e^j \quad (\text{B.7})$$

ce qui permet de remplacer les éléments de E^* par leur correspondant dans E et donc de ne travailler que dans l'espace E . La base des e^i sera aussi appelée base duale de la base des e_i .

B.3 Coordonnées covariantes et contravariantes d'un vecteur

On a donc montré que tout vecteur \mathbf{x} appartenant à un espace vectoriel E euclidien était défini de manière équivalente par la donnée de ses composantes dans une base de E et par ses composantes dans la base duale associée. On a vu de plus (cf. (A.6)) que les premières évoluent de façon contravariante par un changement de base, alors que les secondes évoluaient de façon covariantes. Elles seront donc nommées respectivement les composantes contravariantes et covariantes du vecteur \mathbf{x} par analogie avec les vecteurs de base. En conclusion, les composantes contravariantes d'un vecteur \mathbf{x} sont ses composantes "naturelles", associées aux vecteurs de base de l'espace vectoriel considéré. Elles sont communément notées avec un indice en haut de telle sorte que l'on ait :

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \quad (\text{B.8})$$

Les composantes covariantes de \mathbf{x} correspondent aux produit scalaire de \mathbf{x} avec la base de E considérée et sont aussi les coordonnées du vecteur dans la base duale. Elles sont notées avec un indice en bas :

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}^i \quad (\text{B.9})$$

B.4 Notions d'algèbre tensorielle

On se limitera ici au cas des espaces vectoriels euclidiens et l'on se placera directement dans un \mathbb{R} -espace vectoriel euclidien de dimension n .

B.4.1 Définition

Un tenseur \mathbf{T} d'ordre p est une application p -linéaire de E_p dans \mathbb{R} . La p -linéarité signifie que \mathbf{T} est linéaire par rapport aux p vecteurs auquel il s'applique : $\forall \mathbf{x}_p \in E^p$ et $\mathbf{x}'_k \in E$,

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k + \mathbf{x}'_k, \dots, \mathbf{x}_p) = \mathbf{T}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_p) + \mathbf{T}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}'_k, \dots, \mathbf{x}_p)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{T}(\mathbf{x}_1, \dots, \lambda \mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_p) = \lambda \mathbf{T}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_p)$$

B.4.2 Composantes d'un tenseur

Comme nous allons le voir, un tenseur peut être représenté par différentes composantes traduisant l'action de cette forme p-linéaire sur les vecteurs de l'espace de E. Afin d'illustrer ceci, prenons le cas d'un tenseur \mathbf{T} d'ordre 3. Considérons ensuite trois vecteurs quelconques de E que l'on notera \mathbf{x} ; \mathbf{y} et \mathbf{z} . On a vu que ces vecteurs pouvaient s'écrire dans une base covariante $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$ de E de la façon suivante :

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j, \text{ et } \mathbf{z} = z^k \mathbf{e}_k, \quad i, j, k = 1, \dots, n. \quad (\text{B.10})$$

Comme \mathbf{T} est trilinéaire, on a :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) x^i y^j z^k \quad (\text{B.11})$$

On définit alors les $T_{ijk} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$ qui sont appelés les composantes 123-covariantes du tenseur \mathbf{T} et qui sont au nombre de n^3 . Si on est capable de calculer ces composantes, on peut alors calculer l'image de tout triplet de vecteurs de E par \mathbf{T} , puisque l'on a :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E, \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = T_{ijk} x^i y^j z^k$$

De plus, on peut par exemple définir les composantes 12-covariantes et 3-contravariantes de \mathbf{T} qui sont définies par $T_{ij}^k = \mathbf{T}(e_i; e_j; e^k)$. On voit qu'il existe alors 23 types de composantes pour un tenseur d'ordre 3 et pour une base de E (associée à sa base duale). De façon générale, un tenseur d'ordre p possède 2^p types de composantes différentes pour une seule base de E.

B.4.3 Le Tenseur Métrique

Le tenseur métrique est le tenseur \mathbf{G} d'ordre deux défini par :

$$\mathbf{G} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E \times E, \rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad (\text{B.12})$$

où « \cdot » désigne le produit scalaire sur les éléments de E défini dans la section A.5.3 qui est bien une forme bilinéaire sur R. Ce tenseur étant d'ordre 2, il possède 4 types de composantes :

$$g^{ij} = \mathbf{G}(e_i, e_j) \quad g_i^j = \mathbf{G}(e_i, e^j) = \delta_i^j \quad (\text{B.13})$$

$$g_{ij} = \mathbf{G}(e^i, e^j) \quad g_j^i = \mathbf{G}(e^i, e_j) = \delta_j^i \quad (\text{B.14})$$

Puisque le produit scalaire est commutatif, on voit directement que ce tenseur est symétrique. De plus, on peut montrer directement que le tenseur métrique est l'élément neutre du produit tensoriel contracté simple. En effet, on a :

$$\forall x \in E, (\mathbf{G}.\mathbf{x}) : \forall y \in E \rightarrow (\mathbf{G}.\mathbf{x})(y) = g^i x^j y_i = \delta^i x^j y_i = x^i y_i = \mathbf{x}.y \quad (\text{B.15})$$

Ceci peut être facilement généralisé à tout tenseur \mathbf{T} d'ordre >1 : $\mathbf{G}.\mathbf{T} = \mathbf{T}.\mathbf{G} = \mathbf{T}$. Cette propriété du tenseur métrique nous permet d'exprimer les composantes covariantes d'un vecteur quelconque en fonction de ses coordonnées contravariantes. En effet, si l'on considère un vecteur $\mathbf{x} = x^i e_i = x_i e^i$, on a :

$$\mathbf{G}.\mathbf{x} = g^{ij} x_j e_i = \mathbf{x} = x^i e_i \text{ et } \mathbf{G}.\mathbf{x} = g_{ij} x^j e^i = \mathbf{x} = x_i e^i \quad (\text{B.16})$$

d'où l'on tire par identification $x^i = g^{ij} x_j$ et inversement, $x_i = g_{ij} x^j$. En particulier, on peut donc exprimer les vecteurs de la base contravariante en fonction de ceux de la base covariante et l'on a :

$$\mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{e}^j \text{ et } \mathbf{e}^i = g^{ij} \mathbf{e}_j \quad (\text{B.17})$$

Annexe C

Communications relatives aux travaux de recherche

C.1 Papier de revue

1. H.Chebbi, D. Prémel : "*The fast computation of eddy current distribution and probe response in homogenized composite material based on semi-analytical approach*"., European Physical Journal : Applied Physics, Vol 89, No 1, pp 10901, 2020.

C.2 Articles

1. Q. Yi, G. Tian, H. Chebbi and D. Prémel, "*Investigation of layer interface model of multi-layer structure using semi-analytical and FEM analysis for eddy current pulsed thermography*". 2020 IEEE International Instrumentation and Measurement Technology Conference (I2MTC), Dubrovnik, Croatia, 2020, pp. 1-5. (publié)
2. H. Chebbi, D. Prémel : "*Semi Analytical Computation of a Quasi-Static Field Induced by a 3D Eddy Current Probe in Anisotropic Material With Rough Interfaces*"., CEFC 2020, IEEE Transactions on Magnetics. (Accepté)

C.3 Présentations orales dans des conférences internationales

1. *Semi-analytical modeling of eddy current inspection of stratified and homogenized composite materials.* 10th International Symposium on NDT in Aerospace, 24-26 Oct 2018, Dresden, Allemagne
2. *Computation of quasi-static field induced by 3D eddy current probe in composite materials presenting parallel rough interfaces.* 11th International Symposium on NDT in Aerospace, 15-19 Novembre 2019, Saclay, France.
3. *Semi-analytical modeling of eddy current inspection of stratified and homogenized composite materials.* CEFC2020, Pise, Italie.

C.4 Poster

1. *Modélisation semi-analytique de l'inspection par courants de Foucault de matériaux composites plans homogénéisés.* Journée Doctorale, Cofrend 2018, France
2. *Semi-Analytical modeling of eddy current inspection of multilayered anisotropic and homogeneous media.* Compumag 2019

Bibliographie

- [1] The use of composites in aircraft construction. <https://vandaair.com/2014/04/14/the-use-of-composites-in-aircraft-construction/>. George Brown : 14-04-2014.
- [2] *Non Destructive Testing Handbook*, chapter 36-42. 1959.
- [3] *Characterization of Carbon Fiber Reinforced Composite by Means of Non-Destructive Eddy Current Testing and FEM Modeling*, 2008.
- [4] *Eddy Current Testing of Carbon Fiber Materials by High Resolution Directional Sensors*, 2011.
- [5] *Semi-analytical Modeling of ECT configurations involving complex probes*, 2011.
- [6] *Grating theory and numeric application*, chapter 8. 2012.
- [7] Ghida Al Achkar. *Modélisation électromagnétique et homogénéisation de composites tissés pour applications en compatibilité électromagnétique*. PhD thesis, Université Paris-Saclay, 2018.
- [8] R. Albanese and G. Rubinacci. Finite element methods for the solution of 3d eddy current problems. volume 102 of *Advances in Imaging and Electron Physics*, pages 1 – 86. Elsevier, 1997.
- [9] S. Bensaid, D. Trichet, and J. Fouladgar. 3-d simulation of induction heating of anisotropic composite materials. *IEEE Transactions on Magnetics*, 41(5) :1568–1571, 2005.
- [10] Samir BENSALD. *Contribution à la Caractérisation et à la Modélisation Electromagnétique et Thermique des Matériaux Composites*. PhD thesis, Université de Nantes, 2016.

- [11] Giovanni Betta, Luigi Ferrigno, Marco Laracca, Pietro Burrascano, Marco Ricci, and Giuseppe Silipigni. An experimental comparison of multi-frequency and chirp excitations for eddy current testing on thin defects. *Measurement*, 63 :207 – 220, 2015.
- [12] A. Bordianu, O. de la Barriere, O. Bottauscio, M. Chiampi, and A. Manzin. A multiscale approach to predict classical losses in soft magnetic composites. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(4) :1537–1540, 2012.
- [13] Alain Bossavit. *Électromagnétisme, en vue de la modélisation*, volume 14. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993.
- [14] Oriano Bottauscio, Mario Chiampi, and Alessandra Manzin. Homogenized magnetic properties of heterogeneous anisotropic structures including nonlinear media. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 45 :3946 – 3949, 11 2009.
- [15] J. R. Bowler, T. P. Theodoulidis, H. Xie, and Y. Ji. Evaluation of eddy-current probe signals due to cracks in fastener holes. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(3) :1159–1170, 2012.
- [16] John R Bowler¹ and Theodoros P Theodoulidis². Eddy currents induced in a conducting rod of finite length by a coaxial encircling coil. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 2005.
- [17] Ramdane. Brahim, Belkadi. Mohamed Trichet. Didier, and Fouladgar. Javad. 3-d numerical modeling of the thermo-inductive technique using shell elements. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 46 :3037 – 3040, 09 2010.
- [18] H. K. Bui, G. Wasselynck, D. Trichet, B. Ramdane, G. Berthiau, and J. Fouladgar. 3-d modeling of thermo inductive non destructive testing method applied to multilayer composite. *IEEE Transactions on Magnetics*, 49(5) :1949–1952, 2013.
- [19] S. K. Burke. Eddy current induction in a uniaxially anisotropic plate. *Journal of applied physics*, 1990.
- [20] W. E. Deeds C. V. Dodd. Analytical solution to eddy-current probe-coil problems. *Journal of applied physics*, 1968.
- [21] François Caire. *Les équations de Maxwell covariantes pour le calcul rapide des champs diffractés par des conducteurs complexes. Application au Contrôle Non Destructif par courants de Foucault*. PhD thesis, CEA, Université Paris-Sud, 2014.

- [22] W J Cantwell and J Morton. The significance of damage and defects and their detection in composite materials : A review. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 27(1) :29–42, 1992.
- [23] J. Chandezon, M. T. Dupuis, G. Cornet, and D. Maystre. Multicoated gratings : a differential formalism applicable in the entire optical region. *J. Opt. Soc. Am.*, 72(7) :839–846, Jul 1982.
- [24] J Chandezon, G Raoult, and D Maystre. A new theoretical method for diffraction gratings an its numerical application. *Journal of Optics*, 11(4) :235–241, jul 1980.
- [25] Ye. Chaofeng, Rosell. Anders, Haq. Mahmoodul, Stitt. Erik, Udpa. Lalita, and Udpa. Satish. *EC probe with orthogonal excitation coils and TMR sensor for CFRP inspection*. 2019.
- [26] Jun Cheng, Jinhao Qiu, Hongli Ji, Enrong Wang, Toshiyuki Takagi, and Tet-suya Uchimoto. Application of low frequency ect method in noncontact detection and visualization of cfrp material. *Composites Part B : Engineering*, 110 :141 – 152, 2017.
- [27] Weng Cho Chew. *Waves and fields in inhomogeneous media*, volume 522. IEEE press New York, 1995.
- [28] N. P. K. Cotter, T. W. Preist, and J. R. Sambles. Scattering-matrix approach to multilayer diffraction. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12(5) :1097–1103, May.
- [29] M.P. De Goeje and K.E.D. Wapenaar. Non-destructive inspection of carbon fibre-reinforced plastics using eddy current methods. *Composites*, 23(3) :147 – 157, 1992.
- [30] Prémel. Denis. Generalization of the second order vector potential formulation for arbitrary non-orthogonal curvilinear coordinates systems from the covariant form of maxwell’s equations. *Journal of Electromagnetic Analysis and Applications*, 4 :400–409, 01 2012.
- [31] Daniel Dos Reis, Marc Lambert, and Dominique Lesselier. Eddy-current evaluation of 3-D defects in a metal plate. *Inverse Problems*, 18(6) :1857–1871, November 2002.
- [32] R. Douvenot, M. Lambert, and D. Lesselier. Adaptive metamodels for crack characterization in eddy-current testing. *IEEE Transactions on Magnetics*, 47(4) :746–755, 2011.

- [33] P. Dular, J. Gyselinck, C. Geuzaine, N. Sadowski, and J. P. A. Bastos. A 3-d magnetic vector potential formulation taking eddy currents in lamination stacks into account. *IEEE Transactions on Magnetics*, 39(3) :1424–1427, 2003.
- [34] K. Edee, J.P. Plumey, and J. Chandezon. On the rayleigh–fourier method and the chandezon method : Comparative study. *Optics Communications*, 286 :34 – 41, 2013.
- [35] G Granet et al. Scattering by a periodically corrugated dielectric layer with non-identical faces. *Pure and Applied Optics : Journal of the European Optical Society Part A*, 4 :1–5, mar 1996.
- [36] Caire. François, Prémel. Denis, and Gérard Granet. Semi-analytical computation of a quasi-static field induced by an eddy current probe in a conductor with a rough surface. *The European Physical Journal Applied Physics*, 64(2) :24511, 2013.
- [37] Juergen Pohl Gerhard Mook and Fritz Michel. Non destructive characterization of smart cfrp structures. *IOPScience*, 2003.
- [38] S. Gholizadeh. A review of non-destructive testing methods of composite materials. *Procedia Structural Integrity*, 1 :50–57, 2016.
- [39] G Granet, J P Plumey, and J Chandezon. Scattering by a periodically corrugated dielectric layer with non-identical faces. *Pure and Applied Optics : Journal of the European Optical Society Part A*, 4(1) :1–5, jan 1995.
- [40] Gérard Granet. Fourier-matching pseudospectral modal method for diffraction gratings : comment. *J. Opt. Soc. Am. A*, 29(9) :1843–1845, Sep 2012.
- [41] Gérard Granet, Lala Bakonirina Andriamanampisoa, Karyl Raniriharinosy, Ana Maria Armeanu, and Kofi Edee. Modal analysis of lamellar gratings using the moment method with subsectional basis and adaptive spatial resolution. *J. Opt. Soc. Am. A*, 27(6) :1303–1310, Jun 2010.
- [42] Gérard Granet, Manjakavola Honore Randriamihaja, and Karyl Raniriharinosy. Polynomial modal analysis of slanted lamellar gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 34(6) :975–982, Jun 2017.
- [43] Gérard Granet and Jean-Pierre Plumey. Parametric formulation of the fourier modal method for crossed surface-relief gratings. *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, 4(5) :S145–S149, aug 2002.

- [44] X.E. Gros. Contrôle non destructif de matériaux composites par la technique des courants de Foucault : une nouvelle approche. *Annales de Chimie Science des Matériaux*, 23(7) :981 – 990, 1998.
- [45] Yunze He, Guiyun Tian, Mengchun Pan, and Dixiang Chen. Impact evaluation in carbon fiber reinforced plastic (CFRP) laminates using eddy current pulsed thermography. *Composite Structures*, 109 :1 – 7, 2014.
- [46] Ralf Hiptmair and Jörg Ostrowski. Coupled boundary-element scheme for eddy-current computation. *Journal of Engineering Mathematics*, 51 :231–250, 03 2005.
- [47] W. Johnson and S. K. Ghosh. Some physical defects arising in composite material fabrication. *Journal of Materials Science*, 16 :285–301, 1981.
- [48] H. Hiroshi K. Kiyoshi and K. Gouki. Eddy Current Nondestructive Testing for Carbon Fiber- Reinforced Composites. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 135(4), 06 2013. 041501.
- [49] Tobias Kroeger. Thermographic inspection of composites. *Reinforced Plastics*, 58(4) :42 – 43, 2014.
- [50] C. Y. Li, D. Lesselier, and Y. Zhong. Full-wave model and numerical study of electromagnetic plane wave scattering by multilayered, fiber-based periodic composites. *Radio Science*, 50(7) :688–697, 2015.
- [51] Lifeng Li, Jean Chandezon, Gérard Granet, and Jean-Pierre Plumey. Rigorous and efficient grating-analysis method made easy for optical engineers. *Appl. Opt.*, 38(2) :304–313, Jan 1998.
- [52] Lifeng Li, G Granet, J P Plumey, and J Chandezon. Some topics in extending the c method to multilayer gratings of different profiles. *Pure and Applied Optics : Journal of the European Optical Society Part A*, 5(2) :141–156, mar 1996.
- [53] Z. Liu, D. Lesselier, and Y. Zhong. Electromagnetic imaging of damages in fibered layered laminates via equivalence theory. *IEEE Transactions on Computational Imaging*, 4(2) :219–227, 2018.
- [54] Miguel A. Machado, Kim-Niklas Antin, Luís S. Rosado, Pedro Vilaça, and Telmo G. Santos. Contactless high-speed eddy current inspection of unidirectional carbon fiber reinforced polymer. *Composites Part B : Engineering*, 168 :226 – 235, 2019.

- [55] Javier García Martín, Jaime Gómez Gil, and Ernesto Vázquez Sánchez. Non-destructive techniques based on eddy current testing. *Sensors*, 11 :2525–2565, 2011.
- [56] Matzkanin. *A Review of Nondestructive Characterization of Composites Using NMR*. 1989.
- [57] H. Menana and M. Feliachi. 3-d eddy current computation in carbon-fiber reinforced composites. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(3) :1008–1011, 2009.
- [58] Hocine Menana. *Modélisation 3D simplifiée pour l'évaluation non destructive des matériaux composites anisotropes*. PhD thesis, IREENA saint-Nazaire, l'Université de Nantes, 2009.
- [59] Menana, H. and Féliachi, M. Modeling the response of a rotating eddy current sensor for the characterization of carbon fiber reinforced composites. *Eur. Phys. J. Appl. Phys.*, 52(2) :23304, 2010.
- [60] Koichi Mizukami, Yoshihiro Mizutani, Akira Todoroki, and Yoshiro Suzuki. Detection of in-plane and out-of-plane fiber waviness in unidirectional carbon fiber reinforced composites using eddy current testing. *Composites Part B : Engineering*, 86 :84 – 94, 2016.
- [61] Ravibabu Mulaveesala and Suneet Tuli. Applications of frequency modulated thermal wave imaging for non-destructive characterization. *AIP Conference Proceedings*, 1004(1) :15–22, 2008.
- [62] D. Patrick N. Innocent, S. Ruth and G. Christophe. Nonlinear computational homogenization method for the evaluation of eddy currents in soft magnetic composites. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 50 :61–64, 02 2014.
- [63] J.-C. Nedelec and J. Planchard. Une méthode variationnelle d'éléments finis pour la résolution numérique d'un problème extérieur dans \mathbf{R}^3 . *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 7(R3) :105–129, 1973.
- [64] Mengchun Pan, Yunze He, Guiyun Tian, Dixiang Chen, and Feilu Luo. Defect characterisation using pulsed eddy current thermography under transmission mode and ndt applications. *NDT and E International*, 52 :28 – 36, 2012.
- [65] Wenjie Peng, Yanwen Zhang, Baowen Qiu, and Huan Xue. A brief review of the application and problems in ultrasonic fatigue testing. *AASRI Procedia*, 2 :127 – 133, 2012. AASRI Conference on Power and Energy Systems.

- [66] E.J. Post. *Formal Structure of Electromagnetics : General Covariance and Electromagnetics*. Series in physics. North-Holland Publishing Company, 1962.
- [67] Valentin Préault. *Méthode d'homogénéisation pour la modélisation électromagnétique de matériaux composites. Application au blindage de boîtiers d'équipement électronique*. PhD thesis, Université Paris-Sud, 2013.
- [68] Denis Prémel, Jean-Marc Decitre, and G. Pichenot. Simulation of eddy current inspection including magnetic field sensor such as a giant magnetoresistance over planar stratified media components with embedded flaws. *AIP Conference Proceedings*, 1335 :655–662, 06 2011.
- [69] Denis Prémel, E.A. Fnaeich, S. Djafa, L. Pichon, A Trillon, and B. Bisiaux. Simulation of magnetic flux leakage : Application to tube inspection. *AIP Conference Proceedings*, 1430 :1918–1925, 05 2012.
- [70] Denis Prémel, G. Granet, and François Caire. Matching curvilinear coordinates for the computation of the distribution of eddy currents in a cylindrical tube described by an arbitrary longitudinal internal/external profile. *The European Physical Journal Applied Physics*, 73, 11 2015.
- [71] Denis Prémel, G. Granet, and François Caire. Matching curvilinear coordinates for the computation of the distribution of eddy currents in a cylindrical tube described by an arbitrary longitudinal internal/external profile. *The European Physical Journal Applied Physics*, 73, 11 2015.
- [72] Cyril RAVAT. *Conception de multicateurs à courants de Foucault et inversion des signaux associés pour le contrôle non destructif*. PhD thesis, Université Paris-Sud 11, 2008.
- [73] C. Reboud and T. Theodoulidis. Field computations of inductive sensors with various shapes for semi-analytical ect simulation. *Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics*, 36 :3–10, 01 2012.
- [74] T. M. Roberts, H. A. Sabbagh, and L. D. Sabbagh. Electromagnetic interactions with an anisotropic slab. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(6) :3193–3200, 1988.
- [75] Harold A. R. Thomas M., Sabbagh and L. David Sabbagh. Electromagnetic scattering for a class of anisotropic layered media. *Journal of Mathematical Physics*, 29(12) :2675–2681, 1988.
- [76] R. C. Rumpf. Improved formulation of scattering matrices for semi-analytical methods that is consistent with convention. *Progress In Electromagnetics Research B*, 35 :241–261, May 2011.

- [77] R. V. Sabariego and P. Dular. A perturbation approach for the modeling of eddy current nondestructive testing problems with differential probes. *IEEE Transactions on Magnetics*, 43(4) :1289–1292, 2007.
- [78] H. Sabbagh and L. Sabbagh. An eddy-current model for three-dimensional inversion. *IEEE Transactions on Magnetics*, 22(4) :282–291, 1986.
- [79] L. David Sabbagh and Harold A. Sabbagh. Eddy current modeling and flaw reconstruction. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 7(1) :2447–2454, 1988.
- [80] B. Salski, W. Gwarek, and P. Korpas. Electromagnetic inspection of carbon-fiber-reinforced polymer composites with coupled spiral inductors. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 62(7) :1535–1544, 2014.
- [81] Radhika Satvelia and John C. Moulder. Impedance of a coil near an imperfectly layered metal structure : The layer approximation. *Journal of Applied Physics*, 79 :2811, 1996.
- [82] K. Senthil, A. Arockiarajan, R. Palaninathan, B. Santhosh, and K.M. Usha. Defects in composite structures : Its effects and prediction methods – a comprehensive review. *Composite Structures*, 106 :139 – 149, 2013.
- [83] A. Skarlatos, G. Pichenot, Dominique Lesselier, Bernard Duchêne, and Marc Lambert. ModÉlisation du contrÔle par courants de foucault de tubes ferromagnÉtiques eddy current modeling of ferromagnetic tube inspection. 10 2008.
- [84] K.T. Tan, N. Watanabe, and Y. Iwahori. X-ray radiography and micro-computed tomography examination of damage characteristics in stitched composites subjected to impact loading. *Composites Part B : Engineering*, 42(4) :874 – 884, 2011.
- [85] T. Theodoulidis. Analytical model for tilted coils in eddy-current nondestructive inspection. *IEEE Transactions on Magnetics*, 41(9) :2447–2454, 2005.
- [86] Theodoros Theodoulidis. Analytical model for tilted coils in eddy-current nondestructive inspection. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 41 :2447 – 2454, 10 2005.
- [87] Theodoros P. Theodoulidis. Model of ferrite-cored probes for eddy current nondestructive evaluation. *Journal of applied physics*, 2003.
- [88] T.M.Roberts. Explicit eigenmodes for anisotropic media. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(6) :3064–3071, Nov 1990.

- [89] Didier Trichet. *Contribution a la modelisation, a la conception et au developpement du chauffage par induction des materiaux composites conducteurs*. PhD thesis, IREENA saint-Nazaire, l'Université de Nantes, 2000.
- [90] Adrien Trillon, François Deneuville, Denis Prémel, Steve Djafa, and Lionel Pichon. A fast 3d semi-analytical model for simulating flaw responses provided by a magnetic flux leakage ndt system inspecting ferromagnetic pipes. *AIP Conference Proceedings*, 1581, 01 2014.
- [91] H. Waki, H. Igarashi, and T. Honma. Analysis of magnetic shielding effect of layered shields based on homogenization. *IEEE Transactions on Magnetics*, 42(4) :847–850, 2006.
- [92] G. Wasselynck, D. Trichet, and J. Fouladgar. Determination of the electrical conductivity tensor of a cfrp composite using a 3-d percolation model. *IEEE Transactions on Magnetics*, 49(5) :1825–1828, 2013.
- [93] G. Wasselynck, D. Trichet, B. Ramdane, and J. Fouladgar. Microscopic and macroscopic electromagnetic and thermal modeling of carbon fiber reinforced polymer composites. *IEEE Transactions on Magnetics*, 47(5) :1114–1117, 2011.
- [94] Guillaume WASSELYNCK. *Etude des interactions entre les ondes électromagnétiques de fréquences moyennes et les matériaux composites. Application à l'assemblage par induction de ces matériaux*. PhD thesis, Université de Nantes, 2011.
- [95] Thomas Weiss, Gérard Granet, Nikolay A. Gippius, Sergei G. Tikhodeev, and Harald Giessen. Matched coordinates and adaptive spatial resolution in the fourier modal method. *Opt. Express*, 17(10) :8051–8061, May 2009.
- [96] Thomas Weiss, Gérard Granet, Nikolay A. Gippius, Sergei G. Tikhodeev, and Harald Giessen. Matched coordinates and adaptive spatial resolution in the fourier modal method. *Opt. Express*, 17(10) :8051–8061, May 2009.
- [97] Umesh Sharma Wuliang Yin, Philip J. Withers and Anthony J. Peyton. Non-contact characterization of carbon fiber reinforced plastics using multifrequency eddy current sensors. *IEEE Transactions on instrumentation and measurement*, 58(3), March 2009.
- [98] W. Yin, P. J. Withers, U. Sharma, and A. J. Peyton. Noncontact characterization of carbon-fiber-reinforced plastics using multifrequency eddy current sensors. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 58(3) :738–743, 2009.

- [99] A.J.M. Zaman, C. Gardner, and S.A. Long. Change in impedance of a single-turn coil due to a flaw in a conducting half space. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 3 :37–43, March 1982.

The fast computation of eddy current distribution and probe response in homogenized composite material based on semi-analytical approach

Housseem Chebbi* and Denis Prémel

CEA LIST, Laboratoire de Simulation et de Modélisation en Électromagnétisme, Gif-sur-Yvette 91191, France

Received: 23 July 2019 / Received in final form: 19 December 2019 / Accepted: 4 February 2020

Abstract. Due to the excessive use of composites in the industrial field, many numerical modeling approaches dedicated to the characterization of such complex material by means of Non Destructive Testing Techniques were developed. In this paper, we present a numerical model dedicated to simulate the inspection of unidirectional Carbon Fiber Reinforced Polymer using Eddy Current technique for detecting fiber disorientation. A semi-analytical model based on a modal approach is developed for the fast computation of quasi-static field induced by an arbitrary 3D Eddy Current probe in the material. Because of the high anisotropy and strong heterogeneity of such material, a prior phase of homogenization is assumed and the material is then considered as homogeneously anisotropic. The modal approach consists in resolving Maxwell's equations in the Fourier domain. Therefore, the electromagnetic field is expressed as a sum of eigen-modes. To take into account the wave propagation through the multilayered structure and boundary conditions at each separating interface, a stable and recursive scattering matrix algorithm has been implemented. The impedance of the probe is computed analytically using Auld's formula in orders to identify the main orientation of the fibers in the inspected zone. For numerical validation, simulated data provided by the model are compared to finite element data.

1 Introduction

The use of unidirectional composite materials as Carbon Fiber Reinforced Polymer (CFRP) in manufacturing aeronautical structure has been significantly increased during the last decades thanks to their lightness and stiffness characteristics. Therefore, a wide variety of NDT techniques have been used, including ultrasonic testing, infrared thermography testing, radiographic testing, shearography testing, and Eddy Current Testing [1], for the characterization and the detection of defects such fiber disorientation in intermediate layers, delamination, out-of-plan waviness or fiber breakage.

Despite of the low electrical conductivity along carbon fibers with respect to metallic structure, eddy currents remain sensitive to the abrupt variation of the conductivity and sufficiently enough for detecting eventual damages. In a favorable manner, this method has an ability of fast and contact-free inspection of defects in conductive materials and also the global characterization of the sample as the estimation of the bulk conductivity using a multi-frequency analysis and the identification of fiber orientation [2]. Therefore, many research works show interest in developing inspection procedure using new specific sensors and signal processing [3,4]. Moreover, CFRP is a non-homogeneous and highly anisotropic conductive material due to the random positioning of the carbon

fibers which it challenging for modeling. To overcome this problem, homogenization method were proposed in [5] to determine an equivalent conductivity tensor. Besides, new modeling approaches dedicated to the analysis of the response of such complex material to a EC probe excitation have been developed: Finite Element (FE) models were proposed as in [6,7] for the characterization and flaw detection in homogenized composite materials but still need costly computing resources. Other models were introduced in [8,9] based on integral equations and Green's Dyads. In addition, analytical models were presented in [10] to deal with the response of such material to an incident plane wave.

In the present paper, we present a Semi-Analytical (S-A) model based on a modal approach dedicated to the fast computation of quasi static fields and EC density distribution induced by an arbitrary EC probe. Contrarily to the S-A model in [11] where the second order potential formalism where used, our S-A method consists in resolving Maxwell's equations in the Fourier domain in order to obtain an algebraic form. Hence, the electromagnetic (EM) field is expanded in each layer of the laminate as sum of eigen-modes. Applying boundary conditions (BC) leads us to estimate the unknown coefficients of the modal expansion. In practice, we only have access to the response of the probe to the presence of the plate or the eventual defect, thus we compute the variation of its impedance using Auld's formula [12] involving the interaction between the incident field

* e-mail: housseem.chebbi@cea.fr

from the coil and its interaction with the anisotropic material.

To deal with the stratified media, we made use of a S-matrix formalism, used generally in optics for numerical modeling of multilayered diffraction gratings [13,14], in which the multilayered structure is considered as a black box taking into account the propagation of the fields through the layers. Face to the physical complexity of the problem due to the high anisotropy and non-homogeneity of the material, a prior phase of homogenization is assumed and the material is considered as anisotropically homogeneous layer by layer while the rotation of the fibers is considered in the conductivity tensor.

This paper is organized as follows, first we present the formalism used for the S-A modeling approach and we illustrate the keystone of the modal decomposition of the EM field in both isotropic and anisotropic media. Then we express the BC and the S-matrix formalism used for stratified media. Next, the computation of eddy current distribution and probe response are explained. Finally, the comparison between the numerical results provided by the model and Finite Element data is presented to demonstrate the effectiveness of the method.

2 Modeling framework

2.1 Material characteristics

As described in Figure 1, a CFRP structure is made of several unidirectional plies with different orientation of around 125 μm of thickness. Each ply is composed of carbon fibers embedded in an electrically non-conductive polymer matrix. Since the fibers are in reality not perfectly aligned as displayed in Figure 2, the contact between them give rise to a transversal and cross-ply conductivities. Depending on the volume fraction and the orientation of the fibers in the ply, the electrical conductivity along the fiber varies between 5×10^3 and 5×10^4 S/m, and between 1 and 5×10^2 S/m in the transverse and cross-ply direction [5]. The conductivity effects are therefore introduced by $(\sigma_l, \sigma_t, \sigma_n)$. The rotation of the fibers is referred by the angle θ introduced in the rotation matrix R :

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Thus, the conductivity tensor in each ply is obtained as follow:

$$\bar{\sigma} = R(\theta) \cdot \begin{bmatrix} \sigma_l & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{bmatrix} \cdot R^{-1}(\theta). \quad (2)$$

2.2 Physical equations

We suppose that the field components have $e^{i\omega t}$ time dependency and assuming the absence of any external electric source and external charge density, we have $J_s = 0$ and $\rho = 0$. Thus, we focus on Maxwell-Faraday law for induction and Ampere's law equations. We introduce the

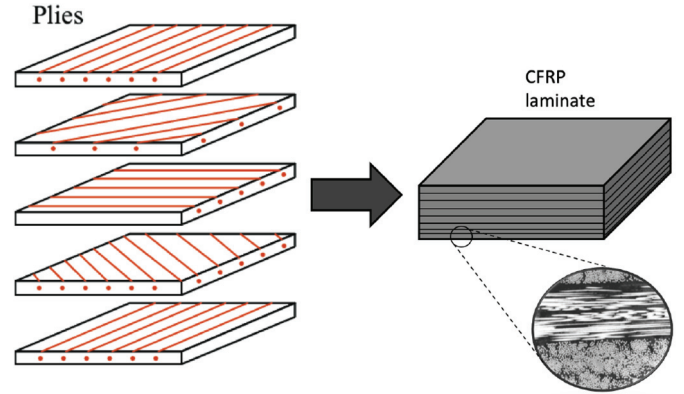


Fig. 1. Structure of multilayered CFRP.

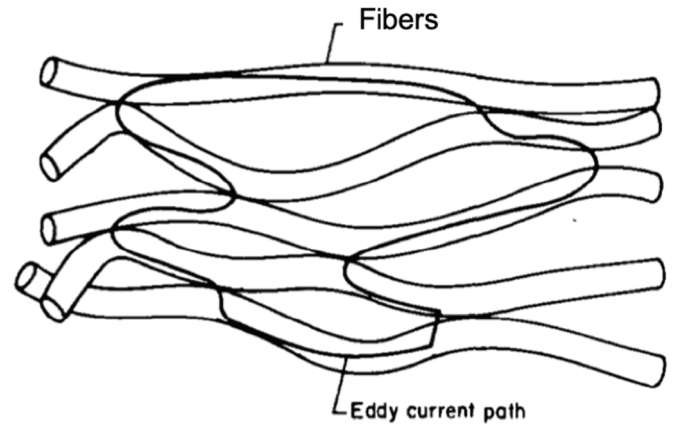


Fig. 2. Eddy current path through contact points in transversal and cross ply directions.

permeability and the permittivity of vacuum respectively μ_0 and ε_0 :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mu_r\mathbf{H} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\varepsilon_0\bar{\varepsilon}_r\mathbf{E} + \bar{\sigma}\mathbf{E}. \quad (4)$$

Therefore we define:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_r - \frac{i\bar{\sigma}}{\omega\varepsilon_0} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

The permittivity tensor is denoted by $\bar{\varepsilon}_r$ refers to the uniform electric polarization of the material (in our case we choose $\bar{\varepsilon}_r = \bar{I}$ but it is not required in general). The relative permeability is a constant $\mu_r = 1$.

3 Methodology

3.1 Modal decomposition in isotropic media

In isotropic media where $\bar{\sigma}$ is reduced to a constant ($\sigma = 0$ in air), so that from equation (3) and equation (4), the tangential components of the electric field denoted by E_x , E_y and magnetic field denoted by H_x , H_y can be

expressed in function of two potential E_z and H_z so called the TE/TM decomposition:

$$\begin{cases} [\partial_z^2 + k^2 \mu_r \varepsilon] E_x = \partial_z \partial_x E_z - ik \mu_r Z_0 \partial_y H_z \\ [\partial_z^2 + k^2 \mu_r \varepsilon] E_y = \partial_z \partial_y E_z + ik \mu_r Z_0 \partial_x H_z \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} [\partial_z^2 + k^2 \mu_r \varepsilon] H_x = \frac{ik\varepsilon}{Z_0} \partial_y E_z + \partial_z \partial_x H_z \\ [\partial_z^2 + k^2 \mu_r \varepsilon] H_y = \partial_z \partial_y H_z - \frac{ik\varepsilon}{Z_0} \partial_x E_z. \end{cases} \quad (7)$$

At this stage, we suppose the variable separation $f(x, y, z) = f(x, y) e^{-i\gamma z}$, thus, one can obtain:

$$(k_c^2 - \gamma^2) \begin{bmatrix} \mathbf{E}_t \\ \mathbf{H}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm \gamma \partial_y \\ \pm \gamma \partial_x \\ \varepsilon \partial_y \\ -\varepsilon \partial_x \end{bmatrix} E_z + \begin{bmatrix} -\mu_r \\ \mu_r \partial_x \\ \pm \gamma \partial_x \\ \pm \gamma \partial_y \end{bmatrix} H_z \quad (8)$$

where $k_c^2 = k^2 \mu_r \varepsilon_r$ and $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$. The two potentials E_z and H_z (referred by ϕ) verify Helmholtz's equation to be resolve:

$$(\partial_x + \partial_y + k_c^2 - \gamma^2) \phi = 0. \quad (9)$$

3.2 Modal decomposition in anisotropic media

In the general case where $\bar{\varepsilon}$ takes the equations (3) and (4), we obtain:

$$\begin{cases} \partial_y E_z - \partial_z E_y = -ik \mu_r Z_0 H_x \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z = -ik \mu_r Z_0 H_y \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x = -ik \mu_r Z_0 H_z \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \partial_y H_z - \partial_z H_y = \frac{ik}{Z_0} (\varepsilon^{xx} E_x + \varepsilon^{xy} E_y) \\ \partial_z H_x - \partial_x H_z = \frac{ik}{Z_0} (\varepsilon^{yy} E_y + \varepsilon^{yx} E_x) \\ \partial_x H_y - \partial_y H_x = \frac{ik}{Z_0} \varepsilon^{zz} E_z \end{cases} \quad (11)$$

Contrary to the isotropic case, the TE/TM decomposition cannot be adopted since the tangential components of the fields are no longer decoupled. From Maxwell's equations, we obtain:

$$\partial_z \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \mathcal{L}_{EG} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\partial_z \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \mathcal{L}_{GE} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad (13)$$

where \mathcal{L}_{EG} and \mathcal{L}_{GE} is differential operators defined by:

$$\mathcal{L}_{EG} = \begin{bmatrix} -\frac{Z_0 \partial_x \partial_y}{ik \varepsilon^{zz}} & \frac{Z_0 \partial_x^2}{ik \varepsilon^{zz}} - ik \mu_r \\ -\frac{Z_0 \partial_y^2}{ik \varepsilon^{zz}} + ik \mu_r & \frac{Z_0 \partial_y \partial_x}{ik \varepsilon^{zz}} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathcal{L}_{GE} = \begin{bmatrix} \frac{\partial_x \partial_y}{i Z_0 k \mu_r} + ik \varepsilon^{yx} & -\frac{\partial_x^2}{i Z_0 k \mu_r} + ik \varepsilon^{yy} \\ \frac{\partial_y^2}{i Z_0 k \mu_r} - ik \varepsilon^{xx} & -\frac{\partial_x \partial_y}{i Z_0 k \mu_r} - ik \varepsilon^{xy} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Applying the operator ∂_z on equations (12) and (13) we obtain two decoupled differential systems verified by

the transversal components of the electric field in one hand and the magnetic field in the other hand. we obtain:

$$-\gamma^2 [\mathbf{E}_t] = \mathcal{L}_{EG} \mathcal{L}_{GE} [\mathbf{E}_t] \quad (16)$$

$$-\gamma^2 [\mathbf{H}_t] = \mathcal{L}_{GE} \mathcal{L}_{EG} [\mathbf{H}_t]. \quad (17)$$

Finally we can recompute the E_z and H_z from the last two equalities of equations (10) and (11).

3.3 Fourier transform and truncating

To obtain an algebraic form, we aim to resolve Maxwell's equation in the Fourier domain. Thus, we apply 2D discrete Fourier Transform (FT) along Ox and Oy donated by:

$$F(\alpha, \beta) = \sum_{u=-M_u}^{u=M_u} \sum_{v=-M_v}^{v=M_v} f(x, y) e^{-i\alpha u x} e^{-i\beta v y} \quad (18)$$

where

$$\begin{cases} \alpha_u = \frac{2\pi u}{dx}, -M_u < u < M_u \\ \beta_v = \frac{2\pi v}{dy}, -M_v < v < M_v. \end{cases} \quad (19)$$

The M_u and M_v denote the number of modes used to represent a wave function in the Fourier domain. Numerically, each component is a matrix of dimension L , with $L = (2M_u + 1)(2M_v + 1)$. Besides, the partial derivatives ($\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial i}$) become $\partial_x \equiv -i\alpha$ and $\partial_y \equiv -i\beta$. In the Fourier domain, the solution of Helmholtz's equation can be expressed as sum of Fourier basic functions:

$$\tilde{E}_z = \sum_{u,v} \Gamma_{uv}^{\pm TE} F^{TE}(\alpha, \beta) e^{-i(\gamma_{uv}^{\pm} z)} \quad (20)$$

$$\tilde{H}_z = \sum_{u,v} \Gamma_{uv}^{\pm TM} F^{TM}(\alpha, \beta) e^{-i(\gamma_{uv}^{\pm} z)} \quad (21)$$

with

$$\alpha_u^2 + \beta_v^2 + \gamma_{uv}^2 = k_c^2 = k^2 \mu_r \varepsilon_r. \quad (22)$$

These expansions are known as Rayleigh expansions. From equation (8) we obtain the modal expansion:

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \end{bmatrix} = \Psi^{\pm TE} A^{\pm TE} \phi + \Psi^{\pm TM} A^{\pm TM} \phi \quad (23)$$

adopting the Einstein convention we obtain:

$$\Psi^{\pm TE} = \frac{1}{k_{cp}^2 - \gamma_{uv}^2} \begin{bmatrix} \pm \gamma_{uv} \beta_v \\ \pm \gamma_{uv} \alpha_u \\ \varepsilon \beta_v \\ -\varepsilon \alpha_u \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\Psi^{\pm TM} = \frac{1}{k_c^2 - \gamma_{uv}^2} \begin{bmatrix} -\mu_r \\ \mu_r \alpha_u \\ \pm \gamma_{uv} \alpha_u \\ \pm \gamma_{uv} \beta_v \end{bmatrix}. \quad (25)$$

In the above compact relations, the superscripts \pm correspond to wave that propagate or decay in the positive (+) or negative (-) Oz direction respectively. The unknown vector coefficients $A^{\pm TE}$ et $A^{\pm TM}$ are determined by Boundary Conditions.

On the other hand, the eigenvalues system (Eq. (16)) provides two eigenvalues $\pm\sqrt{\lambda_1}$ et $\pm\sqrt{\lambda_2}$ corresponding to the direction of the propagation of the wave, and two associated eigenvectors \mathbf{v}_1 and \mathbf{v}_2 . So E_x and E_y are a linear combination of eigenvectors. In a vector writing:

$$\mathbf{E}_t = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \mathbf{V}_E^- \mathbf{a}_E^- + \mathbf{V}_E^+ \mathbf{a}_E^+. \quad (26)$$

The eigenvalues are used to calculate the wave attenuation factors $\phi_i^\pm(\gamma)$. From equation (13) we reconstruct the \mathbf{H}_t components:

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \frac{i}{\gamma} \mathcal{L}_{GE} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \mathbf{V}_H^- \mathbf{a}_H^- + \mathbf{V}_H^+ \mathbf{a}_H^+. \quad (27)$$

Finally the modal decomposition in the anisotropic media is defined by:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_t \\ \mathbf{H}_t \end{bmatrix} = [\mathbf{W}^- \ \mathbf{W}^+] \begin{bmatrix} \mathbf{A}^- \\ \mathbf{A}^+ \end{bmatrix} \quad (28)$$

where the modes are:

$$\mathbf{W}^\pm = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_E^\pm \\ \mathbf{V}_H^\pm \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\mathbf{A}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_E^- \\ \mathbf{a}_H^- \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_E^+ \\ \mathbf{a}_H^+ \end{bmatrix} \quad (31)$$

3.4 General configuration

We consider the configuration in Figure 3 which consists of a multilayer stack with N layers, labeled by $p = 1, 2, \dots, N$ of the wave number k_{c_p} and thickness e_p . each layer is bounded by the p th and $(p+1)$ th interfaces in which the eigenmodes are denoted by Ψ_p^\pm . At the p th interface, we have the outgoing waves corresponding to the coefficients (a_p^{+up}, a_p^{-dn}) and the incoming waves corresponding to the coefficients (a_p^{-up}, a_p^{+dn}) . the superscripts - and + refers to transmission and reflection respectively. Moreover, the superscripts (up) and (dn) refer to the upper and downer coefficients regarding the p th interface. Assuming that the 0th and the N th layers are in air, a_0^- results from the incident field due to the coil and $a_N^+ = 0$.

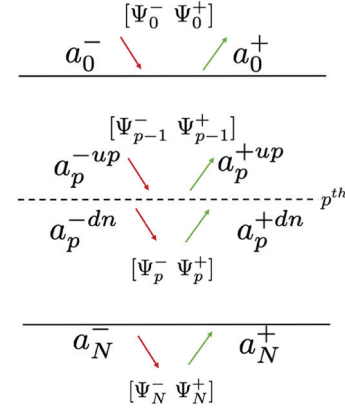


Fig. 3. General diagram: multilayered structure.

3.4.1 Boundary conditions

In this paragraph, we express the boundary conditions (BC) at the first separating interface “air-plate” to determine the unknown coefficients of the modal expansions. In the absence of any surface current ($J_s = 0$), the BC at a separating interface are defined by the continuity of the tangential components of the EM field:

$$\mathbf{E}_0 \times \mathbf{z} = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{z} \quad (32)$$

$$\mathbf{H}_0 \times \mathbf{z} = \mathbf{H}_1 \times \mathbf{z}. \quad (33)$$

This leads us to the equality between the two modal expansions. We consider the relationship between outputs and inputs coefficients:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0^+ \\ \mathbf{A}_1^- \end{bmatrix} = [\mathbf{W}_0^+ \ -\mathbf{W}_1^-]^{-1} [\mathbf{W}_0^- \ \mathbf{W}_1^+] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0^- \\ \mathbf{A}_1^+ \end{bmatrix} \quad (34)$$

In the case of semi-infinite case $A_1^+ = 0$. A_0^- is computed using the relationship:

$$A_0^- = \begin{bmatrix} \frac{(\varepsilon\beta - \gamma\alpha)}{k_c^2 - \gamma^2} \\ \frac{(-\varepsilon\alpha - \gamma\beta)}{k_c^2 - \gamma^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_z^{inc} \\ H_z^{inc} \end{bmatrix} = [\Gamma_0^-]^{-1} \begin{bmatrix} E_z^{inc} \\ H_z^{inc} \end{bmatrix} \quad (35)$$

where Γ_0^- is the part of the mode Ψ_0^- that corresponds to the magnetic field and the incident EM field provided by the coil in air E_z^{inc}, H_z^{inc} is calculated by means of analytical model already implemented into CIVA software [15].

3.4.2 S-matrix algorithm

The S-matrix formalism [16,17] is now well established for the study of modulated or planar stratified media. It is not affected by numerical instabilities linked to the number of the thickness of the layers. This is precisely because the boundary conditions are writing by dividing the waves according to the propagation medium. For a given structure as shown in Figure 3 a (4×4) matrix connects the incoming waves with the outgoing waves.

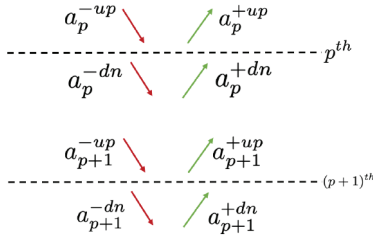


Fig. 4. Illustration of the field propagation in the p th layer.

Globally the sought global \mathbf{S}_g matrix is such as:

$$\begin{bmatrix} a_0^+ \\ a_N^- \end{bmatrix} = \mathbf{S}_g \begin{bmatrix} a_N^+ \\ a_0^- \end{bmatrix} \quad (36)$$

The global \mathbf{S}_g matrix is obtained through classical recursion formulas between intermediate S_p matrices at each separating interface. As displayed in **Figure 4**, the intermediate scattering matrix S_j takes into account the modal decomposition of the field on both sides of the p th interface and the BC to calculate the unknown intermediate coefficients. Thus we have the output–input relationship:

$$\begin{bmatrix} a_p^{+up} \\ a_p^{-dn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_p^{11} & S_p^{12} \\ S_p^{21} & S_p^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p^{+dn} \\ a_p^{-up} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_p \begin{bmatrix} a_p^{+dn} \\ a_p^{-up} \end{bmatrix} \quad (37)$$

where

$$S_p = [\Psi_{p-1}^+ - \Psi_p^-]^{-1} [\Psi_p^+ - \Psi_{p-1}^-] \quad (38)$$

In a recursive way, all the intermediate S-matrices are concatenated taking into account the relationship between the coefficient describing the wave propagation through the layers. So we can write:

$$\begin{bmatrix} a_p^{+dn} \\ a_{p+1}^{-up} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_p^+ & 0 \\ 0 & \phi_p^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{p+1}^{+up} \\ a_p^{-dn} \end{bmatrix} \quad (39)$$

where $\phi^\pm = e^{\pm ik_{cp} \gamma e_p}$ is th attenuation factor through the p th layer and e_p is the thickness inside the material.

3.5 Eddy current density and skin effect

In metallic structure, Eddy currents are closed loops of induced current circulating in planes perpendicular to the magnetic flux. However in CFRP, Eddy Currents have a different behaviour: they lengthen along the fibers due the high anisotropy and its decreasing depends on the nature of the plies and how they are stacked. Eddy currents remain travelling parallel to the coil's winding and its flow is limited to the area of the inducing magnetic field [18,19].

The depth that eddy currents penetrate into a material known as skin effect is affected by the frequency of the excitation current and the electrical conductivity and magnetic permeability of the specimen. To keep the δ reasonable with respect to the low values of σ_{zz} , we work in the frequency range 0.8–10 MHz. Although, δ depends

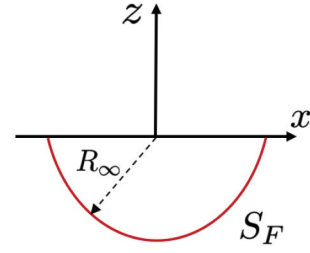


Fig. 5. Closed surface for impedance calculation.

also on the number and the sequence of plies. Thus, at fixed depth ‘ p ’ we consider:

$$|\mathbf{J}_p| = \sqrt{\mathbf{J}_{px}^2 + \mathbf{J}_{py}^2 + \mathbf{J}_{pz}^2} \quad (40)$$

where

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{px} = \sigma_{xx}^p \mathbf{E}_x^p + \sigma_{xy}^p \mathbf{E}_y^p \\ \mathbf{J}_{py} = \sigma_{yx}^p \mathbf{E}_x^p + \sigma_{yy}^p \mathbf{E}_y^p \\ \mathbf{J}_{pz} = \sigma_{zz}^p \mathbf{E}_z^p. \end{cases} \quad (41)$$

3.6 Impedance of the probe

We are interested here in the calculation of the impedance of the probe in the presence of anisotropic flawless plate. In particular, we focus on the variation of the impedance ΔZ . For that, the method we chose is based on the reciprocity theorem proved by Lorentz and adapted by Auld [12]. It has been proved that the variation ΔZ of the coil impedance is given by the following formula:

$$\Delta Z = \frac{1}{I_0^2} \iint_{S_F} (\mathbf{E}^i \times \mathbf{H} - \mathbf{E} \times \mathbf{H}^i) \cdot \mathbf{n} \, dx \, dy \quad (42)$$

where I_0 is the driven current intensity circulating in the coil. \mathbf{E}^i and \mathbf{H}^i are respectively the incident electric field and incident magnetic field producing by the coil in air. Numerically, they are computed by means of a module already implemented into CIVA software based on analytic approach (Dyades and Deeds) [15], while \mathbf{E} and \mathbf{H} are respectively the total electric and magnetic field resulting from the interaction with the anisotropic multilayered structure. The choice of the closed surface S_F being arbitrary, we can extend R_∞ to the infinity as presented in **Figure 5**. In practice, we reach to regions where the EM field is null. The only contribution left is the surface ($z = 0$) separating the plate and air. Thus, we obtain:

$$\Delta Z = \frac{1}{I_0^2} \iint_{S_{z=0}} (\mathbf{E}^i \times \mathbf{H} - \mathbf{E} \times \mathbf{H}^i) \cdot \mathbf{z} \, dx \, dy. \quad (43)$$

The total impedance is then given by:

$$Z = Z_{air} + \Delta Z \quad (44)$$

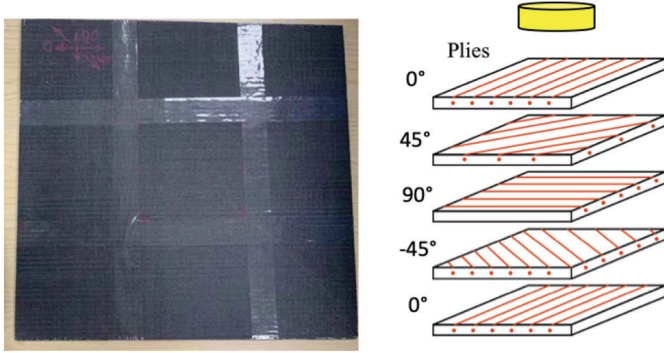
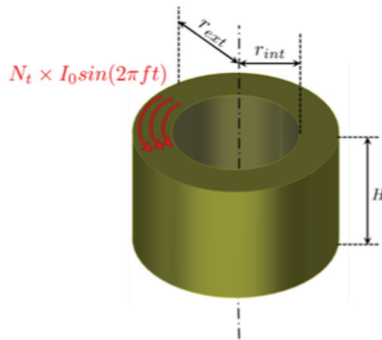
where Z_{air} is the impedance of the coil in air.

Table 1. Numerical parameters of the model.

Parameter	Symbol	Value
Number of modes along Ox	M_u	35
Number of modes along Oy	M_v	35
Spatial bound along x	x_{\max}	32 mm
Spatial bound along y	y_{\max}	32 mm

Table 2. Parameters of the first configuration.

Parameter	Symbol	Value
Specimen		
longitudinal Conductivity	σ_l	39^{-3} MS/m
transversal Conductivity	σ_t	7.9^{-6} MS/m
normal Conductivity	σ_n	7.9^{-6} MS/m
Total thickness	e	1 mm
Probe		
Frequency	f	1 MHz
Excitation current	I_0	1 A
Internal radius	r_{int}	4 mm
External radius	r_{ext}	6 mm
Height	H	1 mm
Number of turns	N	50
Liftoff	l_0	0.8 mm

**Fig. 6.** Config1: flawless unidirectional CFRP sample.**Fig. 7.** cylindrical pancake coil with a rectangular cross-section.

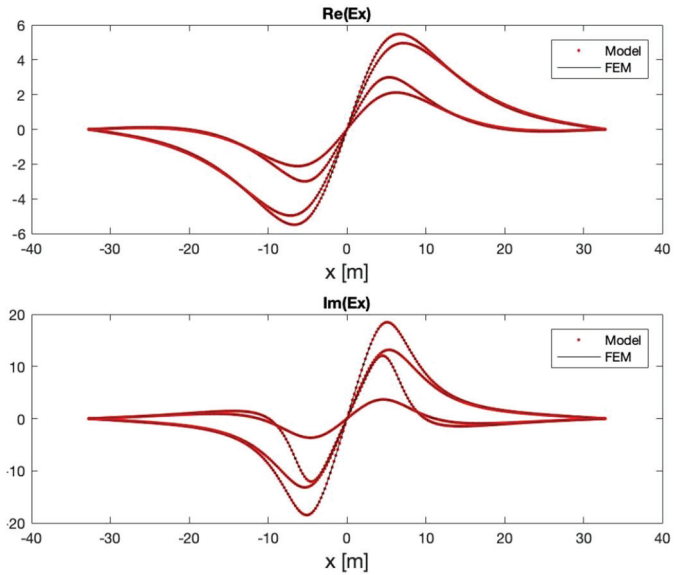
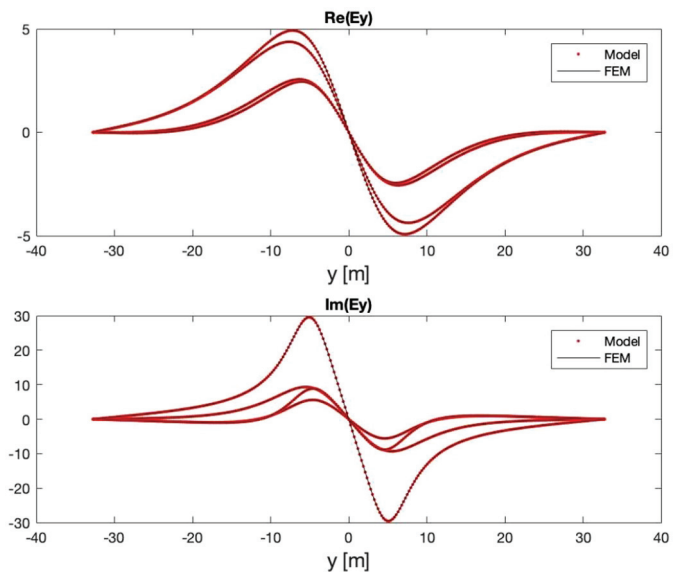
4 Numerical validation

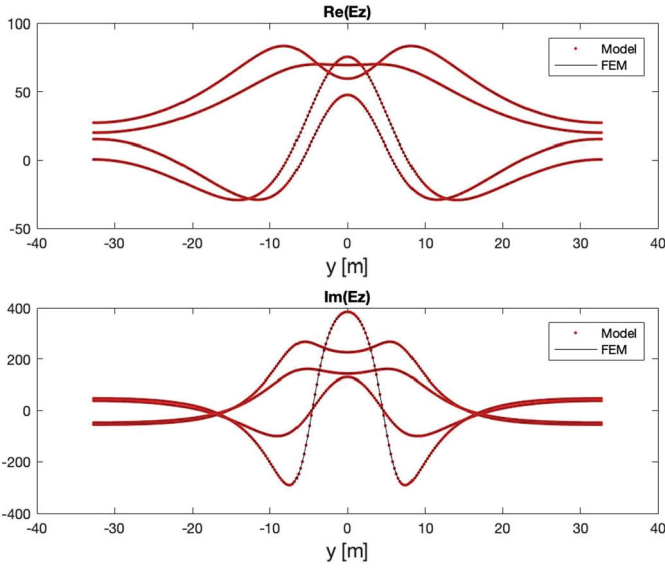
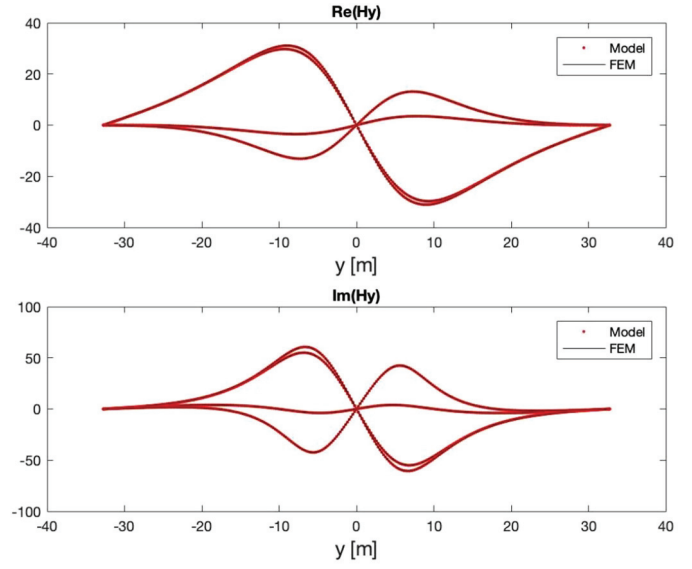
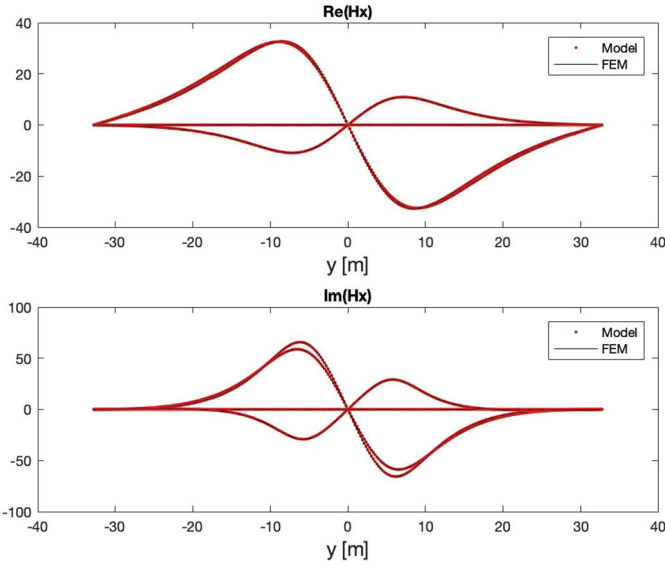
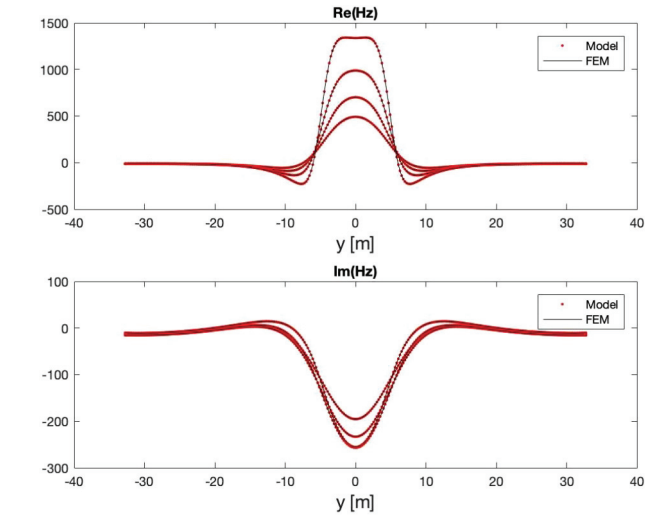
We adopt two test cases: firstly we aim to calculate the EM field inside the anisotropic material and the eddy current distribution in each ply. Second, we aim to detect the fiber orientation via the computation of the probe response. For that reason, two configurations were adopted as explored in the next section. For the numerical validation, numerical parameters are in Table 1 and we use a finite element commercial software (COMSOL Multiphysics) to compare our simulated data with FE results.

4.1 First configuration

4.1.1 Description

The considered unidirectional CFRP sample is provided by the electric department in Newcastle University as a partner of the project. It is composed of 5 layers with the sequence $[0^\circ, -45^\circ, 90^\circ, 45^\circ, 0^\circ]$ as shown in Figure 6. Based on homogenization model described in [5], electric department in Nantes university estimate the

**Fig. 8.** Slice view of $\Re(E_x)$ and $\Im(E_x)$ at several depths.**Fig. 9.** Slice view of $\Re(E_y)$ and $\Im(E_y)$ at several depths.


Fig. 10. Slice view of $\Re(E_z)$ and $\Im(E_z)$ at several depths.

Fig. 12. Slice view of $\Re(H_y)$ and $\Im(H_y)$ at several depths.

Fig. 11. Slice view of $\Re(H_x)$ and $\Im(H_x)$ at several depths.

Fig. 13. Slice view of $\Re(H_z)$ and $\Im(H_z)$ at several depths.

conductivities along the principle axis in each ply to be $\sigma_t = 39000 \text{ S/m}$, $\sigma_l = \sigma_n = 7.8 \text{ S/m}$. For this configuration, we consider a cylindrical pancake 3D Eddy Current probe with a rectangular cross-section as shown in [Figure 7](#) and its characteristics are stored in [Table 2](#). It is to highlight that the adopted numerical model is generic and any shape of probe can be used.

4.1.2 Results

We present in [Figures 8–13](#), the slice views of the electric field and magnetic field at 4 different depths from the top surface $z = 0$ to $z = -4 \text{ mm}$. We obtained a good agreement between the FE data and simulation results. In [Figures 14–18](#), we display the 2D distribution of eddy current density in the middle of each layer. Obviously the main orientation of the fibers can be identified. As

Table 3. Quadratic error on the module of electric field.

Depth (mm)	ξ (%) E_x	ξ (%) E_y	ξ (%) E_z
0	1.2	1.04	4.2
0.4	2.34	2.03	6.76
0.8	2.5	2.36	5.8

perspective opening, one can study the evolution of \mathbf{J} by crossing a separating surface of two layers with different fiber orientation.

In order to quantify the error, the quadratic relative error is computed. We define the quantity as in equation (45). To illustrate the accuracy of the model, the error is calculated at three different depths and stored in [Tables 3](#) and [4](#).

$$\xi = \sqrt{\frac{\|F_{FE} - F_{model}\|_{L_2}}{\|F_{FE}\|_{L_2}}}. \quad (45)$$

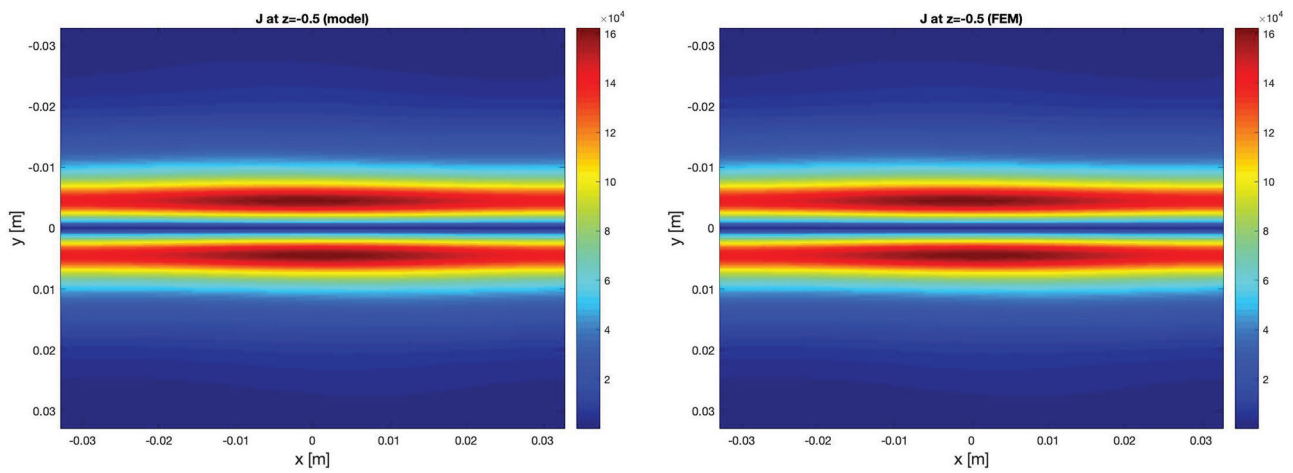


Fig. 14. Top view of \mathbf{J} at the surface $z = -0.5$ mm.

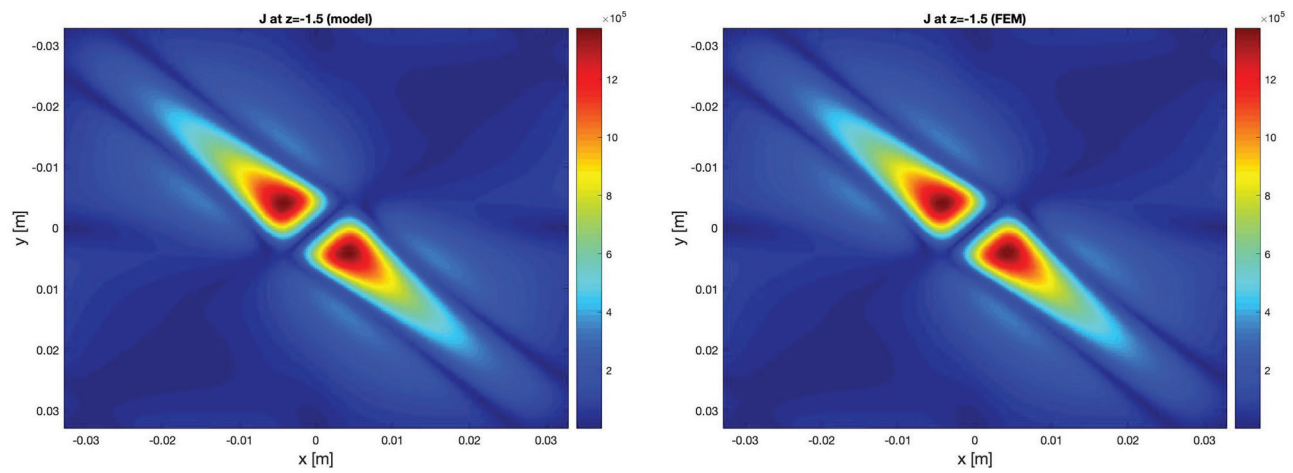


Fig. 15. Top view of \mathbf{J} at the surface $z = -1.5$ mm.

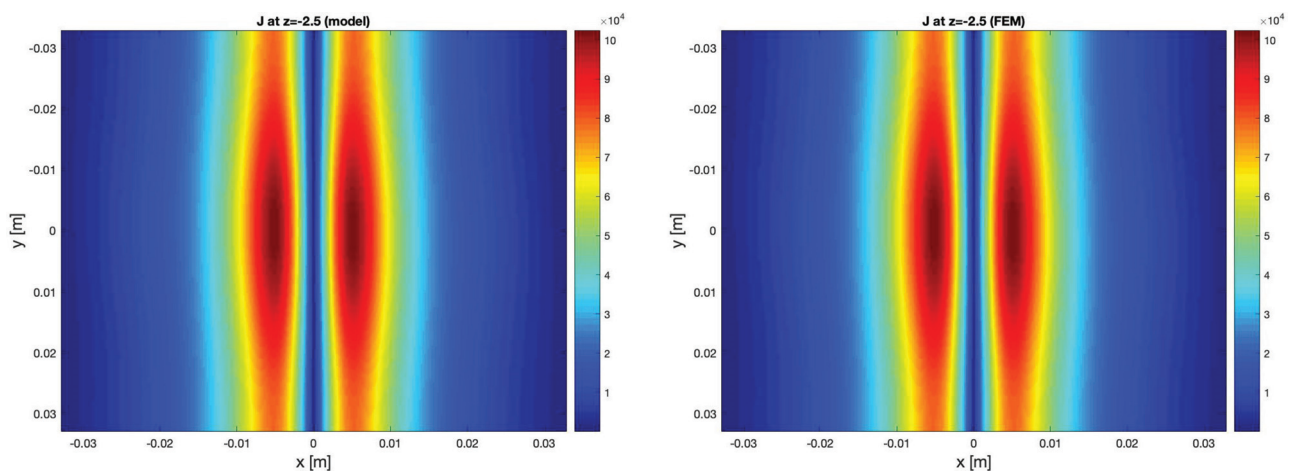


Fig. 16. Top view of \mathbf{J} at the surface $z = -2.5$ mm.

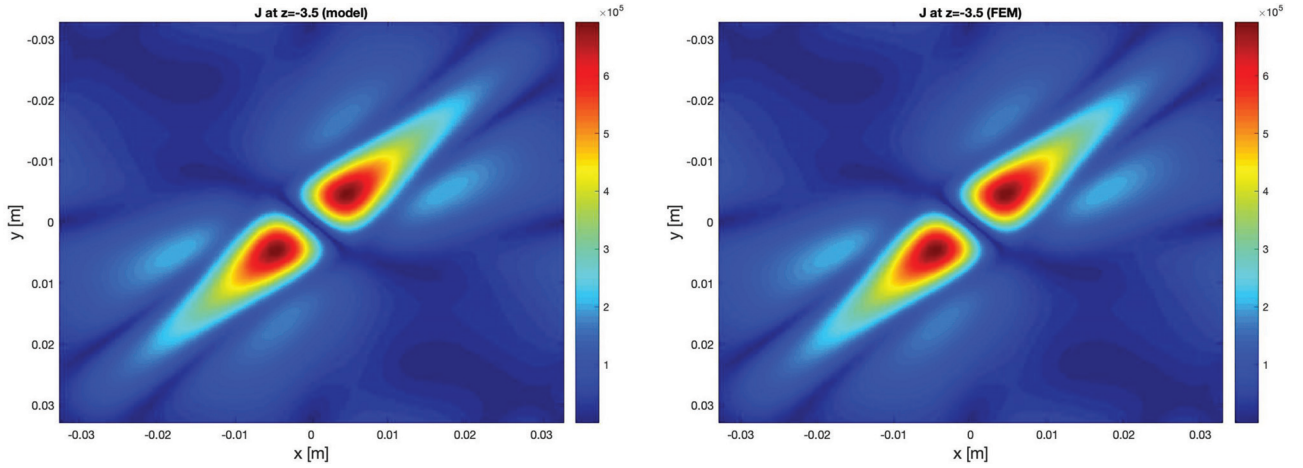


Fig. 17. Top view of \mathbf{J} at the surface $z = -3.5$ mm.

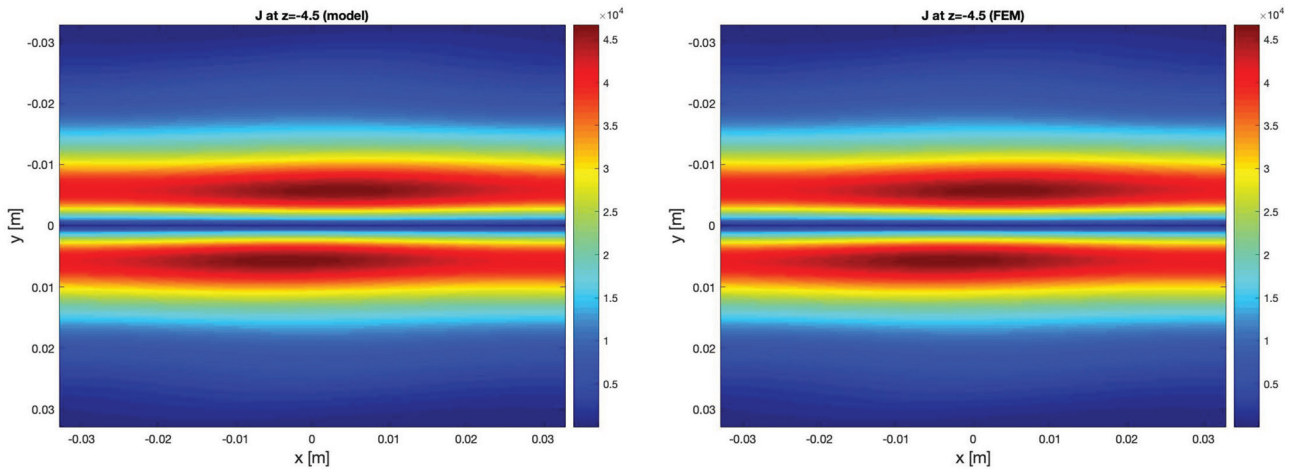


Fig. 18. Top view of \mathbf{J} at the surface $z = -4.5$ mm.

Table 4. Quadratic error on the module of magnetic field.

Depth (mm)	ξ (%) H_x	ξ (%) H_y	ξ (%) H_z
0	0.88	0.75	0.79
0.4	1.0	0.987	1.1
0.8	1.5	1.45	1.44

Table 5. Computation time comparison between the S-A model and the FEM.

Computation time	FEM	S-A model
	$\simeq 180$ mn	$\simeq 2$ mn

The computation time for both cases is presented in Table 5. It is obvious that the adopted semi-analytical approach is well advantageous over a classic FEM. The calculation time depends on the number of modes (M_u, M_v) and the complexity of the geometry (will be discussed in future work).

4.2 Second configuration

4.2.1 Description

As presented in Figure 19 (see [6]), we consider an EC probe made of 2 identical square coils, the parameters of the configuration are stored in Table 6. The anisotropic slab is made of one layer with fibers aligned along the Ox axis ($\theta = 0^\circ$). The anti-symmetry of the coil regarding the vertical axis leads to a difference in the Joule loss in the material during a rotated scan. Thus, we are able to identify the main orientation of the fibers thanks to the variation of the impedance.

4.2.2 Results

Thanks to the symmetry of the anisotropy with respect to the Oyz plane, one can apply a quarter turn scan from 0° to 90° rotation with 20 steps and we plot the polar diagram of the impedance as shown in Figure 20. The simulated data are compared to FE data. Using equation (45), the error on the current induced on the top surface is calculated and stored in Table 7. To complete the validation part, we end with the error on the real part and imaginary

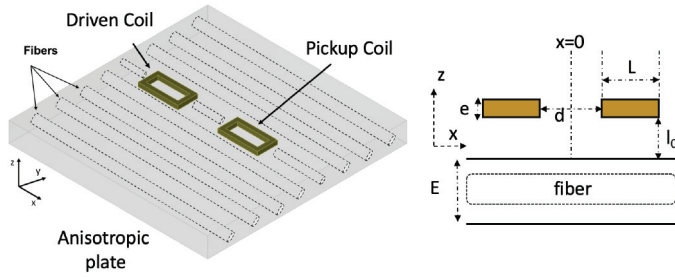


Fig. 19. Config2: a planar anisotropic slab excited by a rectangular 3D EC probe.

Table 6. Parameters of the second configuration.

Parameter	Symbol	Value
Specimen		
longitudinal Conductivity	σ_l	1 MS/m
transverse Conductivity	σ_t	0.01 MS/m
normal Conductivity	σ_n	0.01 MS/m
Total thickness	E	1 mm
orientation	θ	0°
Probe		
Frequency	f	0.8 MHz
Excitation current	I_0	1 A
Length	L	10 mm
Width	W	5 mm
Height	e	1 mm
Number of turns	N	3
Liftoff	l_0	1 mm
Distance	d	10 mm

Table 7. Quadratic error on the EC density on the top surface.

Depth (mm)	ξ (%) $\ \mathbf{J} \ _{L_2}$
0	1.76
0.4	1.81
0.8	1.87

Table 8. Real part of the total impedance at different frequencies with relative quadratic error.

Frequency (kHz)	$\Re(Z_{FEM})$	$\Re(Z)$	ξ (%) $\Re(Z)$
800	0.00219	0.0022	0.4545
10^3	0.00342	0.0034	0.58
10^4	0.2235	0.2227	0.35

Table 9. Imaginary part of the total impedance at different frequencies with relative quadratic error.

Frequency (kHz)	$\Im(Z_{FEM})$	$\Im(Z)$	ξ (%) $\Im(Z)$
800	0.5608	0.562	0.213
10^3	0.533	0.529	0.75
10^4	5.2012	5.1687	0.624

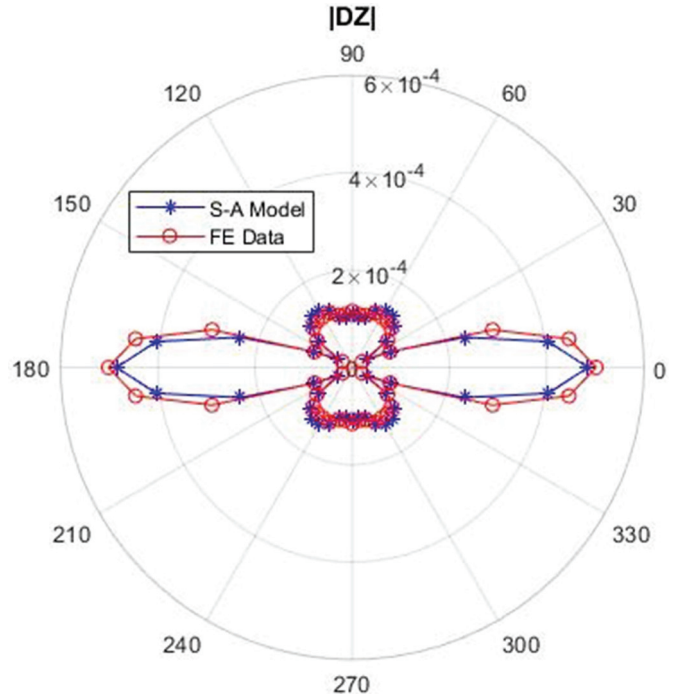


Fig. 20. Polar diagram of ΔZ .

part of the impedance of the coil for three different frequencies. The results are presented in Tables 8 and 9.

5 Conclusion

In the present paper, we adopt a semi-analytical approach to simulate the response of an anisotropic, planar and multilayered structure to the excitation of 3D Eddy current probe. The proposed technique can be so helpful in detecting the fiber disorientation in intermediate plies. It represents the first part of the PhD work in which we aim to compute the field induced inside the material under test and to calculate the probe response via the variation of its impedance. The semi-analytical approach is based on a modal decomposition of the field in different layers. The numerical validation consist in using Finite Element solver to compare data with numerical results. The validity and the efficiency of the formalism was demonstrated as it shows a good agreement with the FE data. This work is the first step in a set of other future work in which we aim to generalize this knowledge to deal with anisotropic material presenting a complex geometry, like a flaw or a delamination or fiber breakage.

This work is financially supported by the European Union's Horizon 2020 research and innovation program under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement No 722134. The research has been undertaken as a part of NDTonAir project.

Author contribution statement

All authors have contributed equally to the paper. H.C. and D.P. are responsible for analytic and numerical calculations.

References

1. S. Gholizadeh, Proc. Struct. Integr. **1**, 50 (2016)
2. X. Li, W. Yin, Z. Liu, P.J. Withers, A.J. Peyton, in *17th World Conference on Nondestructive Testing*, 2008
3. K. Kiyoshi, H. Hiroshi, K. Gouki, J. Press. Vessel Technol. **135**, 1 (2013)
4. B. Salski, W. Gwarek, P. Korpas, IEEE Trans. Microw. Theory Tech. **62**, 1535 (2013)
5. G. Wasselynck, D. Trichet, J. Fouladgar, IEEE Trans. Magn. **49**, 1825 (2013)
6. W. Yin, P.J. Withers, U. Sharma, A.J. Peyton, IEEE Trans. Instrum. Measur. **58**, 738 (2009)
7. J. Cheng, J. Qiu, H. Ji, E. Wang, T. Takagi, T. Uchimoto, Composites Part B **110**, 141 (2017)
8. T.M. Roberts, H.A. Sabbagh, L.D. Sabbagh, Math. Phys. **29**, 2675 (1988)
9. T.M. Roberts, IEEE Trans. Magn. **26**, 3064 (1990)
10. I. Bardi, R. Remski, D. Perry, Z. Cendes, IEEE Trans. Magn. **38**, 641 (2002)
11. F. Caire, D. Prémel, G. Granet, Eur. Phys. J. Appl. Phys. **64**, 24511 (2013)
12. B.A. Auld, J.C. Moulder, J. Nondestruct. Eval. **18**, 3 (1999)
13. J. Chandezon, G. Raoult, D. Maystre, J. Opt. **11**, 235 (1980)
14. N.P.K. Cotter, T.W. Preist, J.R. Sambles, J. Opt. Soc. Am. A **12**, 1097 (1995)
15. T.P. Theodoulidis, IEEE Trans. Magn. **41**, 2447 (2005)
16. G. Granet, J.P. Plumey, J. Chandezon, Pure Appl. Opt. **4**, 1 (1995)
17. L. Li, J. Opt. Soc. Am. A **13**, 1024 (1996)
18. H.M. Wen, Compos. Sci. Technol. **61**, 1163 (2001)
19. J. Cheng, H. Ji, J. Qiu, T. Takagi, T. Uchimoto, N. Hu, NDT&E Int. **68**, 1 (2014)

Open Access This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Cite this article as: Houssem Chebbi, Denis Prémel, The Fast Computation of Eddy Current Distribution and Probe Response in Homogenized Composite Material Based on Semi-Analytical Approach, Eur. Phys. J. Appl. Phys. **89**, 10901 (2020)

Investigation of layer interface model of multi-layer structure using semi-analytical and FEM analysis for eddy current pulsed thermography

Qiuji Yi

*School of Engineering,
Newcastle University, Merz
Court, NE1 7RU,*

Newcastle upon Tyne, UK

Qiuji.yi@newcastle.ac.uk

GuiYun Tian

*School of Engineering,
Newcastle University, Merz
Court, NE1 7RU,*

Newcastle upon Tyne, UK

g.y.tian@newcastle.ac.uk

Houssem Chebbi

*CEA LIST, Laboratoire de
Simulation et de Modélisation en
Electromagnétisme,*

Gif-sur-Yvette, 91191, France.

Houssem.CHEBBI@cea.fr

Denis Prémel

*CEA LIST, Laboratoire de
Simulation et de Modélisation en
Electromagnétisme,*

Gif-sur-Yvette, 91191, France.

Denis.PREMEL@cea.fr

Abstract— The use of a multi-layer structure is widely recognized in aerospace engineering due to the fact that structural and functional properties can be implemented by designing geometric structure. Eddy current pulsed thermography (ECPT) is one of the crucial NDT techniques to inspect and evaluate the defects in composite multi-layer structure due to the volumetric heating nature. Thus, it is important to investigate the scattering electromagnetic wave into the interface of multi-layer structure to improve the detectability and evaluation capability of an ECPT system. In this work, the conductivity tensor form is used to describe the scattering EM wave in the 3D FEM model to investigate the fiber orientation influence on each layer interface. The semi-analytical model is used to prove the concept and both results are validated by experimental studies with dedicated samples. The findings can be applied for simulating the scattering electromagnetic behavior in the interface of the multi-layer structure.

Keywords— layer interface model, multi-layer structure, eddy current, 3D finite element model, semi-analytical model

I INTRODUCTION

The use of CFRP materials has become increasingly popular among conventional engineered materials due to their extraordinary mechanical and thermal properties, such as high strength-to-weight ratio, corrosion resistance, improved fatigue performance and low coefficient of thermal expansion. Multilayer composites are a broad and important group of structural and functional materials whose properties may vary over a very wide range. The possibility of combining in one monolithic material layers of a different nature that exhibit markedly different physical properties makes it possible to construct materials for very different functional purposes, including impact and high temperature, heat and corrosion-resistance, heat-conducting, and heat-protective.

Eddy Current Pulsed Thermography (ECPT) has been recently proposed for multi-layer composite structure evaluation. When ECPT is applied to CFRP, the stimulation can be considered volumetric since the electrical conductivity is relatively low. Depending on the excitation frequency of the Eddy Current (EC) and the sample thickness, the typically achieved skin depths are greater than the sample thickness itself, or at least comparable to it [1]. In addition, due to the multi-physics nature of the ECT, the electrical and thermal properties can be evaluated simultaneously in one experiment. ECT is also less influenced by the surface conditions of the

SUT such as emissivity, roughness, etc. [2]. Moreover, ECT can be exploited to evaluate the barely visible impact damage on composites [3] and the presence of delamination [4, 5].

In order to understand the electromagnetic and thermal behaviour of the induction thermography. Simulation and modelling are needed. The current challenges for modelling inductive thermography are the anisotropic conductivity of the material especially the through-thickness electrical conductivity [6]. The electrical conductivity of CFRPs depends strongly on the orientation of carbon fibers: the longitudinal conductivity (parallel to the fiber direction, σ_L) is the highest; while the transverse conductivity (perpendicular to the fibers, σ_T) is relatively lower and on the same order of magnitude as the electrical conductivity along the thickness of the specimen (σ_{Th}) [6]. Additionally, this anisotropic electrical conductivity is further compounded by a strong dependence on the presence of interfaces between adjacent plies. These interfaces vary in size, physical composition, and chemical composition and therefore result in uncertain value [7]. In addition, σ_{Th} (according to the thickness of CFRP laminates) can be greatly affected by the presence of interfaces between layers and the lamination of the individual plies. For instance, the stacking sequence tends to increase the dispersion of measurements [8]. Thus, using σ_{Th} to interpret the interface condition of the laminated composites can be the solution to model the anisotropic behaviour of the composites.

Due to the important number of carbon fibers impregnated in each layer, it is very difficult to take into account the real geometry in the simulation. The composite layer is then replaced by a homogenized one [9]. Moreover, as the composite sheets have a small thickness compared with their other dimensions, shell elements can be used to reduce the number of unknowns. The case of three-dimensional (3-D) induction heating simulation of composite plate with equivalent anisotropic conductivities has been presented [10]. In the meantime, CEA LIST has recently developed a new semi-analytical method for the computation of the 3D primary fields induced by an eddy current probe in a homogeneous conductor presenting a local perturbation of the geometry [11]. This approach is an extension of the curvilinear coordinate method (CCM), which is efficient for the computation of the fields scattered by 2D diffraction gratings enlightened by a plane wave or perfectly conductive random surfaces [12, 13].

In this work, 3-D induction heating simulation model of a multilayer anisotropic composite materials is proposed. The real geometry of multilayer composite materials with an equivalent anisotropic individual layer is considered. A global equivalent model is then introduced to consider the different fibers' orientations. In addition, to model the scattering electromagnetic field penetrating which contains the internal reflections occurring inside every layer composing the structure, the conductivity tensor in perpendicular direction in FEM model is obtained by approximating the output of semi-analytical method.

The rest of the paper is organized as follows: Section II introduces the methodology of FEM model and semi-analytical method to simulate the electromagnetic behaviour of CFRP. Section III presents the experimental setup. Section IV gives the results and analysis and conclusion is introduced in Section V.

II LAYER INTERFACE MODELLING

3D FEM method and semi-analytical models are introduced and discussed.

A 3D FEM method for multi-layer CFRP

To model the anisotropic behaviour of composites material, the electrical and thermal conductivities (σ_i, λ_i) have tensor form as follows [10]:

$$\sigma_i = \begin{bmatrix} \sigma_{xx_i} & \sigma_{xy_i} & 0 \\ \sigma_{yx_i} & \sigma_{yy_i} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z_i} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_{xx_i} & \lambda_{xy_i} & 0 \\ \lambda_{yx_i} & \lambda_{yy_i} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{z_i} \end{bmatrix} \quad (2)$$

This work considers the conductivity tensor to represent electromagnetic properties of each laminate. The relationship between conductivity tensor and the orientation of the layer is shown in Eq. (3) and (4) respectively.

$$\sigma_\theta = \begin{bmatrix} \sigma_L \cos^2 \theta + \sigma_T \sin^2 \theta & \frac{\sigma_L - \sigma_T}{2} \sin 2\theta & 0 \\ \frac{\sigma_L - \sigma_T}{2} \sin 2\theta & \sigma_L \cos^2 \theta + \sigma_T \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{Th} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\lambda_\theta = \begin{bmatrix} \lambda_L \cos^2 \theta + \lambda_T \sin^2 \theta & \frac{\lambda_L - \lambda_T}{2} \sin 2\theta & 0 \\ \frac{\lambda_L - \lambda_T}{2} \sin 2\theta & \lambda_L \cos^2 \theta + \lambda_T \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{Th} \end{bmatrix} \quad (4)$$

For N layers of laminated composites, each layer i's magnetic field can be calculated:

$$\begin{cases} \frac{d^2 H_x(z)}{dz^2} - j\omega\mu \cdot \sigma_{yy_i} H_x(z) = j\omega\mu \cdot \sigma_{yx_i} H_y(z) \\ \frac{d^2 H_y(z)}{dz^2} - j\omega\mu \cdot \sigma_{xx_i} H_y(z) = j\omega\mu \cdot \sigma_{xy_i} H_x(z) \\ \frac{d^2 H_z(z)}{dz^2} - j\omega\mu \cdot \sigma_{z_i} H_z(z) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

The boundary conditions of the magnetic field are as follows:

$$\begin{cases} H\left(\frac{p_i}{2}\right) = H_i \\ H\left(-\frac{p_i}{2}\right) = H_{i+1} \end{cases} \quad (6)$$

where p_i represents the thickness of layer i.

According to Faraday's law combined with the local form of Ohm's law, the anisotropic electrical field of each layer can be obtained as follows:

$$\begin{pmatrix} E_i \\ E_{i+1} \end{pmatrix} = k \times \begin{pmatrix} \alpha_i & -\beta_i \\ \beta_i & -\alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_i \\ H_{i+1} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Where k is the normal vector and α_i, β_i are scalar values dependable on electrical conductivity tensor is shown in Eq (1) and can be calculated as [14].

After obtaining current density E_i of layer i. The heat source Q_i of in layer i can be obtained as:

$$Q_i = J_i^T \cdot E_i = J_i^T \cdot \sigma_i^{-1} \cdot J_i \quad (8)$$

$$J_i = \text{rot}H(i) \quad (9)$$

After the calculation of Q_i of each layer. The heat transfer inside the anisotropic material can be solved as:

$$\rho_i C_{p_i} \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}(-\lambda_i \cdot \text{grad}T) = Q_i \quad (10)$$

with the boundary condition:

$$-\lambda_i \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = h(T - T_a) \quad (11)$$

Where λ_i is the tensor form shown in Eq. (2), ρ_i is the material density, C_{p_i} is the specific heat, h is the convective coefficient, T is the temperature of layer i and T_a is the room temperature.

For all cases, the 3-D electromagnetic and thermal behaviour are solved in COMSOL multi-physics.

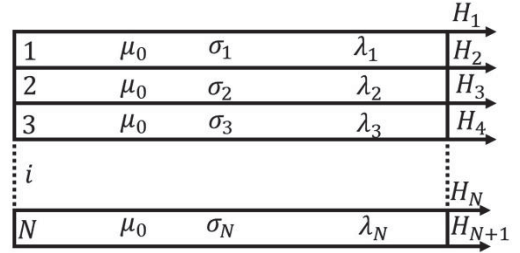


Fig 1. Multi-layer representation by FEM.

B Semi-analytical method

The configuration for the semi-analytical method in this paper is shown in Fig.2. It consists of a multilayer stack with N layers, labelled by $p=1,2,\dots,N$ of the wave number k_{cp} and thickness e_p . each layer is bounded by the p^{th} and $(p+1)^{\text{th}}$ interfaces in which the eigenmodes are denoted by Ψ_p^\pm . At the p^{th} interface, we have the outgoing waves corresponding to the coefficients (a_p^{+up}, a_p^{-dn}) and the incoming waves corresponding to the coefficients (a_p^{-up}, a_p^{+dn}). The superscripts - and + refers to transmission and reflection respectively. Moreover, the superscripts (up) and (dn) refer to the upper and downer coefficients regarding the p^{th} interface. Assuming that the 0th and the Nth layers are in air, results from the incident field due to the coil and $a_N^\pm = 0$ Thus, the 2D discrete FT along Ox and Oy was adopted:

$$F(\alpha, \beta, z) = \sum_{u=-M_u}^{M_u} \sum_{v=-M_v}^{M_v} F(x, y, z) e^{-i\alpha u x} e^{-i\beta v y} \quad (12)$$

Where

$$\begin{cases} \alpha_u = \frac{2\pi u}{dx}, -M_u < u < M_u \\ \beta_v = \frac{2\pi v}{dy}, -M_v < v < M_v \end{cases} \quad (13)$$

Therefore, the partial derivatives ($\partial_i = \frac{\partial}{\partial_i}$) become $\partial_x \equiv -i\alpha$ and $\partial_y \equiv -i\beta$. We take also the assumption of variable separation: $f(x, y, z) = f(x, y)e^{-iyz}$ so $\partial_z \equiv -iy$. The modal representation of the field depends on the truncation orders M_u and M_v of the FT. Numerically, each component is a matrix of dimension L , with $L = (2M_u + 1)(2M_v + 1)$. Depending on the nature of the considered anisotropic layer, the modal decomposition is presented in [12].

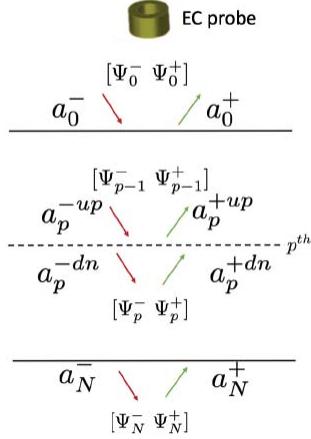


Fig. 2. General diagram: multi-layered structure simulation using semi-analytical model

III EXPERIMENTAL SETUP AND STUDIES

To validate two simulation approaches, experiments on two-layer thin CFRP plate are conducted. As fig. 3(c) shows, the ECPT contains four units, an excitation module with a rectangle coil, an infrared camera, a signal generator, and a computer. In this study, only the operational RMS current and frequency of the excitation module were changed to 300 A and 300 kHz, respectively. The heating induced by eddy current is 500 ms. A 10 mm lift-off between the coil's bottom edge and the top faces of the specimen was kept in all the ROIs' testing. In addition, as shown in fig 3(a) and fig 3(b), the 0-45 sequence sample is used for the experiment. The parameters for the sample are shown in Table I.

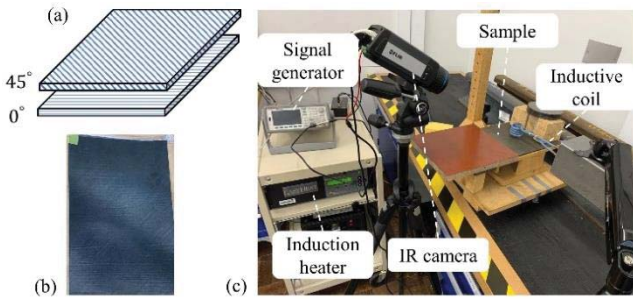


Fig 3 experimental details: (a) sample sketch, (b) sample picture, (c) experimental setup

Table I: Sample parameters

Parameters	Value	Unit
Relative permeability	1	1
Electrical conductivity(fibre axis, $\sigma_L, \sigma_T, \sigma_{th}$)	{39000, 7.9, 7.9}	S/m
Relative permittivity	4.3	1
Thermal conductivity(fibre axis, $\lambda_L, \lambda_T, \lambda_{th}$)	{60, 4, 4}	W/(m·K)
Density	1500	kg/m ³
Heat capacity at constant pressure	1000	J/(kg·K)

IV RESULTS AND ANALYSIS

In order to validate the proposed FEM model, the temperature evolution over time is compared for experimental and simulated data. It is observed that in Fig 4, the experimental data are scattering around the simulated data, which confirms the validation of FEM data and experimental data.

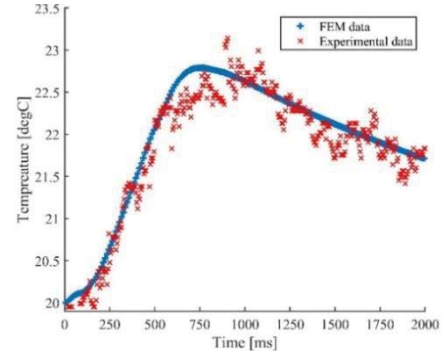
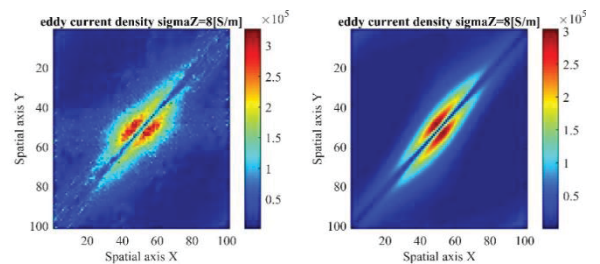


Fig 4 Transient temperature validation of FEM model and experimental

After the validation of the model, the semi-analytical model is calculated based on the parameters of the FEM model. The eddy current density distribution of the top layer and bottom layer are shown in Fig 5 and Fig 6. The quantitative analysis on the amplitude and distribution of eddy current intensity and thermal transient patterns are compared. It is observed that when σ_{th} is equal to 8[S/m] in both cases, the magnitude in FEM Fig 5 and Fig 6 is slightly higher than that of semi-analytical model. The behavior is also observed in Figs 7(a) and 10(a). To simulate the behavior of scattering electromagnetic field, smaller value is applied to approximate the results of semi-analytical model. Thus, it is observed that in Fig 8 and Fig 9 that the amplitude of FEM model and semi-analytical model was approximated in terms of using 2[S/m] as σ_{Th} . Data of one line in Fig 8 and Fig 9 were extracted as shown in Fig 7(b) and Fig 9(b) to prove that using 2[S/m] as σ_{Th} can help describe the scattering of electromagnetic field in FEM.



(a) (b)
Fig5 Comparison of Eddy current density distribution on the top surface (45° fibre orientation) (a) FEM model $\sigma_{Th} = 8 \text{ S/m}$,(b) Semi-analytical model $\sigma_{Th} = 8 \text{ S/m}$

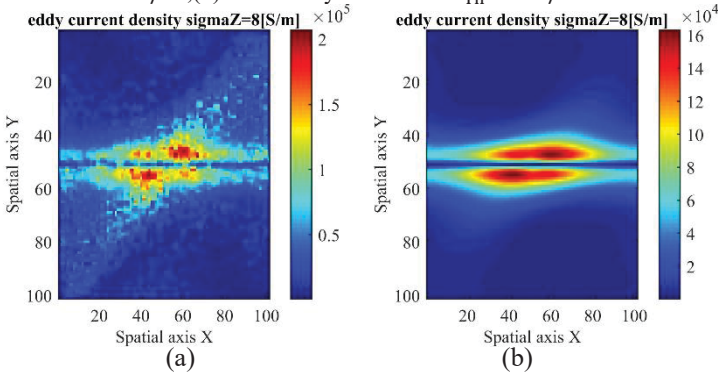


Fig6 Comparison of Eddy current density distribution on the bottom surface (0° fibre orientation) (a) FEM model $\sigma_{Th} = 8 \text{ S/m}$,(b) Semi-analytical model $\sigma_{Th} = 8 \text{ S/m}$

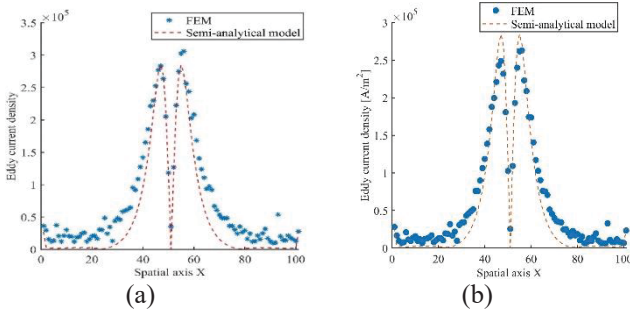


Fig7 Comparison of top surface cross section eddy current density (when Spatial axis $Y=50$) of FEM and semi-analytical calculation: (a) FEM model $\sigma_{Th} = 8 \text{ S/m}$,Semi-analytical model $\sigma_{Th} = 8 \text{ S/m}$,(b) FEM model $\sigma_{Th} = 2 \text{ S/m}$,Semi-analytical model $\sigma_{Th} = 8 \text{ S/m}$

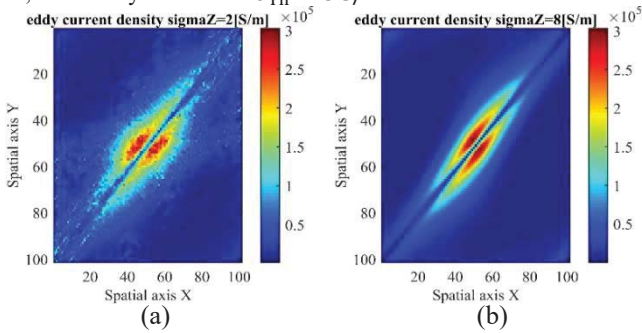


Fig8 Comparison of Eddy current density distribution on the top surface (45° fibre orientation) (a) FEM model $\sigma_{Th} = 2 \text{ S/m}$,(b) Semi-analytical model $\sigma_{Th} = 8 \text{ S/m}$

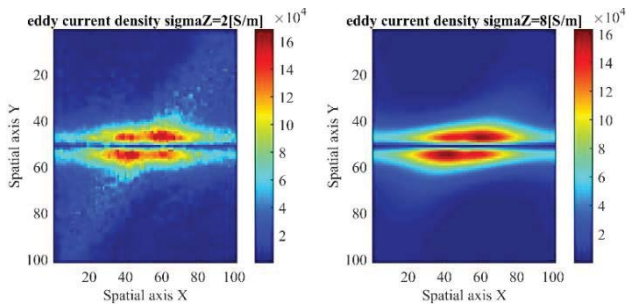


Fig9 Comparison of Eddy current density distribution on the top surface (0° fibre orientation) (a) FEM model $\sigma_{Th} = 2 \text{ S/m}$,(b) Semi-analytical model $\sigma_{Th} = 8 \text{ S/m}$

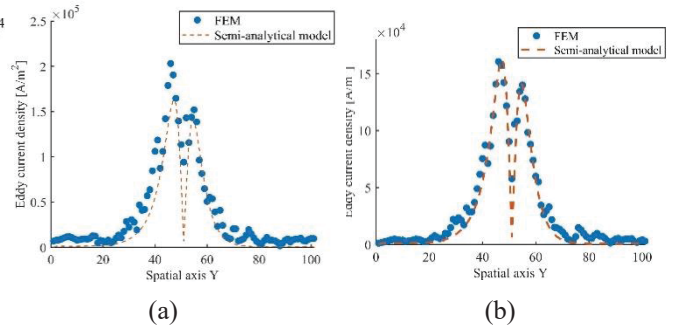


Fig10 Comparison of bottom surface cross section eddy current density (when Spatial axis $X=60$) of FEM and semi-analytical calculation: (a) FEM model $\sigma_{Th} = 8 \text{ S/m}$,Semi-analytical model $\sigma_{Th} = 8 \text{ S/m}$,(b) FEM model $\sigma_{Th} = 2 \text{ S/m}$,Semi-analytical model $\sigma_{Th} = 8 \text{ S/m}$

V CONCLUSION AND FUTURE WORK

Based on the above analysis, the conclusions are as follows:

1.The scattering electromagnetic field at the interface in multi-layer structure is modelled by the semi-analytical model and the results are used to model the interface in FEM methods.

2.Experimental results for ECPT match with the simulated study. However, it is observed that temperature experimental data at heating stage is slightly lower than simulated output, which can be due to the lack of description of the scattering electromagnetic field in FEM.

3.The scattering EM field in the interface can be modelled by varying the through-thickness conductivity, which is proved in this work.

Future work will continue to investigate the relationship between σ_{Th} and different stacking sequences of the composite material

ACKNOWLEDGEMENT

This project is funded by the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement No 722134 – NDTonAIR.

REFERENCE:

- [1] Yang R, He Y. Eddy current pulsed phase thermography considering volumetric induction heating for delamination evaluation in carbon fiber reinforced polymers. Applied Physics Letters. 2015;106:234103.
- [2] Zhu J, Min Q, Wu J, Tian GY. Probability of detection for eddy current pulsed thermography of angular defect quantification. IEEE Transactions on Industrial Informatics. 2018;14:5658-66.
- [3] Liang T, Ren W, Tian GY, Elradi M, Gao Y. Low energy impact damage detection in CFRP using eddy current pulsed thermography. Composite Structures. 2016;143:352-61.
- [4] Yi Q, Tian G, Malekmohammadi H, Zhu J, Laureti S, Ricci M. New features for delamination depth evaluation in carbon fiber reinforced plastic materials using eddy current pulse-compression thermography. NDT & E International. 2019;102:264-73.

- [5] Yi Q, Tian G, Yilmaz B, Malekmohammadi H, Laureti S, Ricci M, et al. Evaluation of debonding in CFRP-epoxy adhesive single-lap joints using eddy current pulse-compression thermography. *Composites Part B: Engineering*. 2019;178:107461.
- [6] Lin Y, Gigliotti M, Lafarie-Frenot MC, Bai J, Marchand D, Mellier D. Experimental study to assess the effect of carbon nanotube addition on the through-thickness electrical conductivity of CFRP laminates for aircraft applications. *Composites Part B: Engineering*. 2015;76:31-7.
- [7] Selvakumaran L, Lubineau G. Electrical behavior of laminated composites with intralaminar degradation: a comprehensive micro-meso homogenization procedure. *Composite Structures*. 2014;109:178-88.
- [8] Barakati A, Zhupanska O. Mechanical response of electrically conductive laminated composite plates in the presence of an electromagnetic field. *Composite Structures*. 2014;113:298-307.
- [9] Senghor FD, Wasselynck G, Bui HK, Branchu S, Trichet D, Berthiau G. Electrical conductivity tensor modeling of stratified woven-fabric carbon fiber reinforced polymer composite materials. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2017;53:1-4.
- [10] Bui HK, Wasselynck G, Trichet D, Ramdane B, Berthiau G, Fouladgar J. 3-D modeling of thermo inductive non destructive testing method applied to multilayer composite. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2013;49:1949-52.
- [11] Caire F, Prémel D, Granet G. Fast computation of the fields diffracted by a multi-layered conductor with non-parallel rough interfaces. Application to eddy-current non-destructive testing simulation. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2015;51:1-4.
- [12] Prémel D, Granet G. Development of the curvilinear coordinate method for the computation of quasi-static fields induced by an eddy current probe scanning a 3D conductor of complex shape characterized by an arbitrary 2D surface. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*. 2018;31:e2219.
- [13] Prémel D, Granet G. Fast computation of the response of any 3D Eddy Current probe scanning a 3D stratified conductor characterized by a set of arbitrary interfaces of complex shape. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*. 2019:1-7.
- [14] Ramdane B, Trichet D, Belkadi M, Saidi T, Fouladgar J. Electromagnetic and thermal modeling of composite materials using multilayer shell elements. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2010;47:1134-7.

Titre : Méthode des Coordonnées Curvilignes pour la Modélisation Électromagnétique des Matériaux Complexes : Application au Contrôle Non Destructif par Courants de Foucault des Matériaux Composites.

Mots clés : Méthode des Coordonnées Curvilignes, Courants de Foucault, Matériau Composite, Contrôle non destructif, Approche Modale.

Résumé : Ce travail de thèse de doctorat, effectué au sein de Laboratoire de Simulation et Modélisation Électromagnétique (LSME) du CEA List, s'intègre dans le cadre du projet européen « NDTonAir » financé sous l'action « H2020-MSCA-ITN-2016- GRANT 722134 ». Le principal objectif est le développement d'un outil de simulation rapide et précis dédié au contrôle non destructif par courants de Foucault des matériaux composites homogénéisés. Comme cas d'application, on s'intéresse particulièrement à l'orientation des fibres d'une part, et d'autre part, à des défauts de type délaminage et ondulation des fibres qui se manifestent par une déformation géométrique locale des interfaces.

Les méthodes semi-analytiques existantes dans la littérature, basées sur le formalisme des Dyades de Green, sont limitées jusqu'au à des structures planes multicouches. Pour introduire des variations locales de géométrie aux interfaces, nous proposons une approche innovante basée sur un changement de coordonnées adapté au profil de la pièce et des interfaces. On propose un modèle numérique performant basé sur le formalisme covariant des équations de Maxwell. Ce formalisme unificateur englobe l'anisotropie du spécimen et les déformations locales des interfaces. La méthode de coordonnées curvilignes est usuellement utilisée pour résoudre des problèmes de diffraction sur des surfaces rugueuses

dans le domaine des hautes fréquences (diffraction sur des réseaux). Ce travail de thèse s'inspire des méthodes de Fourier modale et propose de nouveaux outils adaptés au domaine des courants de Foucault. L'extension de la méthode des coordonnées curvilignes au domaine du contrôle des composites par courants de Foucault constitue l'innovation de ce travail.

Deux modèles numériques ont été développés pour le calcul de l'interaction du champ émis par un capteur à courants de Foucault avec un matériau composite multicouches. Le modèle numérique développé pour le contrôle des composites plans exploite les structures particulières des matrices creuses pour réduire le temps de calcul sans limitation de nombre de modes utilisés pour la représentation du champ. Dans le cas des profils curvilignes des interfaces, le modèle permet de traiter des interfaces parallèles et quelques cas particuliers des profils non parallèles. Ce cas général présente quelques limitations qui nécessitent le développement des outils numériques complémentaires.

Enfin, plusieurs configurations de contrôle ont été envisagées et les résultats numériques produits par les modèles ont été confrontés à des données de simulation par éléments finis. Quelques expérimentations ont été effectuées dans des laboratoires partenaires étrangers pour accroître notre expérience sur la validation expérimentale.

Title : Curvilinear Coordinates Method for Electromagnetic Modeling of Complex Materials : Application to Eddy Current Non Destructive Testing of Composite Material.

Keywords : Curvilinear Coordinates Method, Eddy Currents, Composite Material, Non Destructive Testing, Modal approach.

Abstract : This doctoral thesis work, carried out within the Laboratory of Simulation and Modeling for Electromagnetics (LSME) of CEA List, is part of the “NDTonAir” European project funded under the action “H2020-MSCA-ITN -2016- GRANT 722134”. The main goal of the project is the development of a fast and accurate simulation tool for the non-destructive eddy current testing of homogenized composite materials. As an application case, we are particularly interested in the orientation of the fibers on the one hand, and on the other hand, in defects as delamination which are manifested by a local geometrical deformation of the interfaces.

The semi-analytical methods existing in the literature, based on Green’s Dyad formalism, have been limited so far to multilayered and planar structures. To introduce local variations in geometry at the interfaces, we propose an innovative approach based on a change of coordinates adapted to the profile of the local perturbation. We propose a powerful numerical model based on the covariant formalism of Maxwell’s equations. This unifying formalism takes in the anisotropy of specimen and the local deformations of the interfaces. The curvilinear coordinate method is usually used to solve diffraction problems on rough interfaces in the high frequency domain (diffraction on gratings). This

thesis work is inspired by Fourier Modal Methods and proposes new tools which have been adapted to the field of eddy currents. The extension of the curvilinear coordinate method to the field of eddy currents non-destructive testing technique of composites constitutes the innovation of this work.

Two numerical models have been developed to calculate the interaction of the field emitted by an eddy current probe with a multilayered composite material. The numerical model developed for the evaluation of planar composite exploits the particular structures of sparse matrices to reduce the computation time without limiting the number of modes used for the modal expansion of the field. In the case of the curvilinear profiles of the interfaces, the model makes it possible to treat parallel interfaces and some particular cases of non-parallel profiles. The general case of non-identical profiles presents some limitations which require the development of complementary numerical tools.

Finally, several testing configurations were considered and the numerical results produced by the models were compared to finite element simulated data. Some experiments were carried out in foreign partner laboratories to increase our experience on experimental validation.