



**HAL**  
open science

# Modélisation déterministe et probabiliste de la rupture par champ de phase et identification expérimentale pour la fissuration des structures en bois dans l'ameublement

Matthieu Noel

## ► To cite this version:

Matthieu Noel. Modélisation déterministe et probabiliste de la rupture par champ de phase et identification expérimentale pour la fissuration des structures en bois dans l'ameublement. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université Gustave Eiffel, 2024. Français. NNT : 2024UEFL2061 . tel-04866760

**HAL Id: tel-04866760**

**<https://theses.hal.science/tel-04866760v1>**

Submitted on 6 Jan 2025

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITÉ GUSTAVE EIFFEL**

**École doctorale Sciences, Ingénierie et Environnement**

présentée par

**Matthieu NOEL**

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Gustave Eiffel**

Domaine

**Mécanique**

Sujet de la thèse

**Modélisation déterministe et probabiliste de  
la rupture par champ de phase et identification  
expérimentale pour la fissuration des structures en  
bois dans l'ameublement**

Soutenue publiquement à Marne-la-Vallée le 9 décembre 2024  
devant le jury composé de :

Julien Yvonnet	Professeur des universités, Univ. Gustave Eiffel, MSME	Président
Véronique Lazarus	Professeure des universités, ENSTA Paris, IMSIA	Rapportrice
Julien Réthoré	Directeur de recherche, Nantes Université, GeM	Rapporteur
Mathilde Chevreuil	Maîtresse de conférences, Nantes Université, GeM	Examinatrice
Luc Chevalier	Professeur émérite, Univ. Gustave Eiffel, MSME	Directeur de thèse
Florent Pled	Maître de conférences, Univ. Gustave Eiffel, MSME	Co-encadrant
François Wilquin	Ingénieur au Laboratoire Essais & Mesures, FCBA	Invité



# Remerciements

Quelle belle et inoubliable aventure !

Ce manuscrit est le fruit de riches échanges et de collaborations précieuses avec des personnes qui m’ont soutenu et accompagné tout au long de ces dernières années. À toutes, j’exprime ma profonde gratitude.

Tout d’abord, je souhaite exprimer ma gratitude à mon directeur de thèse, M. Luc Chevalier, pour sa patience, sa pédagogie et pour m’avoir guidé tout au long de mon parcours, de la formation d’ingénieur au doctorat. Un grand merci à mon encadrant, M. Florent Pled, pour sa rigueur, sa pédagogie et son soutien quotidien tout au long de ces trois années, notamment dans les moments difficiles.

Je tiens à remercier l’ensemble des membres du jury pour avoir accepté d’examiner mon travail, et tout particulièrement les rapporteurs, Mme Véronique Lazarus et M. Julien Réthoré, pour le temps qu’ils ont consacré à la lecture attentive et à l’évaluation détaillée de ce manuscrit.

Je remercie également M. Eric Launay et M. François Wilquin de l’Institut technologique FCBA pour leur accompagnement et le soutien financier qu’ils ont apporté, qui a contribué au bon déroulement de ma thèse. Ma gratitude s’adresse également à Benoît Proust, Thanh-Tung Nguyen et Raphaël Langlois, pour leur aide précieuse dans la préparation, la conduite et l’analyse des essais. Je souhaite également remercier Céline Rousselot, Teresa Gomez-Diaz, Moindze Soilahoudine et Paul Clabaut, pour leur soutien inestimable dans l’apprentissage des bonnes pratiques de la science ouverte.

Au-delà de ces collaborations, je souhaite également exprimer ma gratitude envers l’équipe enseignante de l’ESIPE, que j’ai eu le plaisir de côtoyer d’abord en tant qu’apprenti ingénieur, puis en tant que collègue. Je tiens tout particulièrement à remercier Benoît Jacquet et Amina Laouira pour leurs précieux conseils pédagogiques et la richesse de nos échanges.

Mes pensées reconnaissantes vont également à mes collègues et amis doctorants, avec qui j’ai partagé de nombreux moments mémorables : Darwish, Zakaria, Souhail, Ali, Houda, Jana, Gilles, Bing, Xing, Arthur, Khai, Moussa, Erwan, Robin, Saad, Amritesh, Nassim, Ludo, Gabriele, Idiris, Paul, Mohamed et Rosa.

Enfin, je tiens à remercier chaleureusement Géraldine, ainsi que ma famille – mes parents et ma petite sœur – pour leur soutien constant, leur bienveillance et leur amour inconditionnel, sans lesquels ce parcours n’aurait pas été possible.



# Résumé

Dans le domaine de l'ameublement, garantir la sécurité des structures conformément aux normes européennes représente un enjeu important pour les fabricants de meubles. Avant leur commercialisation, les meubles sont soumis à des tests de validation normalisés, qui ne permettent de connaître leur comportement mécanique qu'a posteriori. Cette thèse vise à développer des outils de modélisation et de simulation numérique pour prédire la rupture par fissuration au niveau des connexions entre les éléments de meuble. Pour atteindre cet objectif, l'approche méthodologique combine la modélisation et la simulation numérique avec des essais expérimentaux. Elle utilise la méthode des éléments finis couplée à des modèles de rupture/endommagement par champ de phase pour simuler la fissuration dans des matériaux élastiques linéaires isotropes et anisotropes, dans un cadre déterministe et probabiliste. Une campagne d'essais expérimentaux est menée sur des échantillons d'épicéa troués soumis en compression uniaxiale, afin de reproduire les mécanismes de fissuration observés dans des structures réelles, notamment dans les connexions de lits en hauteur. Une procédure d'identification est développée et mise en place pour caractériser les propriétés élastiques et d'endommagement de l'épicéa, en exploitant notamment des mesures expérimentales de champs de déplacement obtenues par corrélation d'images numériques. Une méthode d'accélération des simulations d'endommagement par champ de phase est proposée pour réduire leur coût élevé en temps de calcul. Cette approche permet de prédire, indépendamment du type de connexions, le déplacement ou la force critique précédant l'amorçage de la fissuration. Les résultats numériques indiquent que, sous réserve d'appliquer des conditions aux limites réalistes et d'avoir correctement identifié les propriétés du matériau, le critère d'amorçage de fissure s'avère utile pour prédire l'emplacement des zones potentiellement endommagées/-fissurées et fournir un ordre de grandeur cohérent pour l'effort ou le déplacement nécessaire à l'initiation de la fissuration. Ce critère requiert seulement une unique simulation dans le domaine élastique linéaire, suivi d'un post-traitement avec un modèle d'endommagement par champ de phase, afin de faciliter son utilisation dans un contexte industriel, en particulier le secteur de l'ameublement. Les outils numériques développés, accessibles en open source, pourraient aider les industriels de l'ameublement à prédire la rupture fragile dans le bois et à optimiser la conception des meubles, tout en garantissant la conformité aux normes de sécurité.

**Mots clés :** Rupture par fissuration, Modèles de champ de phase (PFM), Matériaux élastiques anisotropes, Corrélation d'Images Numériques (CIN), Méthode des Éléments Finis (MEF), Identification des propriétés mécaniques du bois



# Abstract

In the furniture industry, ensuring the safety of structures in accordance with European standards presents a significant challenge for furniture manufacturers. Before commercialization, furniture are subjected to standardized validation tests, which only allow for a retrospective understanding of its mechanical behavior. This thesis aims to develop modeling and numerical simulation tools to predict the cracking failure mechanism at the connections between furniture elements. To achieve this objective, the methodological approach combines modeling and numerical simulation with experimental testing. It employs the finite element method coupled with phase-field fracture/damage models to simulate cracking in linear elastic isotropic and anisotropic materials within a deterministic and probabilistic framework. An experimental testing campaign is conducted on perforated spruce wood samples subjected to uniaxial compression to reproduce the cracking mechanisms observed in real structures, particularly in the connections of high loft beds. An identification procedure is developed and implemented to characterize the elastic and damage properties of spruce wood, in particular by exploiting experimental displacement field measurements obtained through digital image correlation. A method for accelerating phase-field damage simulations is proposed to reduce their high computational cost. This approach allows for the prediction, independently of the type of connections, of the displacement or critical force preceding crack initiation. The numerical results indicate that, provided realistic boundary conditions are applied and the material properties are correctly identified, the crack initiation criterion is useful for predicting the location of potentially damaged/cracked areas and providing a consistent order of magnitude of the force or displacement required to initiate cracking. This criterion only requires a single linear elastic simulation, followed by a post-processing with a phase-field damage model, to facilitate its use in an industrial context, in particular the furniture sector. The numerical tools developed, available in open source, could help furniture manufacturers to predict brittle fracture in wood and optimize furniture design, while guaranteeing compliance with safety standards.

**Keywords :** Fracture Mechanics, Phase-Field Models (PFM), Anisotropic elastic materials, Digital Image Correlation (DIC), Finite Element Method (FEM), Identification of mechanical wood properties



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xv</b>
<b>Glossaire et notations</b>	<b>xvii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1 Contexte . . . . .	1
2 Problématique . . . . .	2
3 Objectifs et hypothèses . . . . .	3
4 Organisation du manuscrit . . . . .	6
<b>1 Modèles de champ de phase pour la rupture fragile</b>	<b>7</b>
1 Modélisation de la rupture par champ de phase en régime quasi-statique	9
2 Modèles de régularisation de l'énergie de rupture par fissuration . . . .	11
2.1 Modèles isotropes AT1 et AT2 . . . . .	11
2.2 Modèles anisotropes . . . . .	13
3 Modèles de dégradation de l'énergie de déformation élastique . . . . .	16
3.1 Modèle de Bourdin . . . . .	17
3.2 Décomposition déviatorique de Lancioni pour les matériaux isotropes . . . . .	18
3.3 Décomposition sphérique-déviatorique de Amor pour les matériaux isotropes . . . . .	19
3.4 Décomposition spectrale de Miehe pour les matériaux isotropes	19
3.5 Généralisation de la décomposition spectrale des déformations AnisotStrain . . . . .	20
3.6 Généralisation de la décomposition spectrale des contraintes AnisotStress . . . . .	21
3.7 Décomposition spectrale de He . . . . .	22
3.8 Décomposition spectrale en contraintes de Zhang . . . . .	24
3.9 Modèles alternatifs de décomposition pour les matériaux élastiques isotropes et anisotropes . . . . .	25
4 Formulation forte . . . . .	27
5 Résolution et implémentation numérique . . . . .	29

5.1	Solveurs . . . . .	29
5.2	Prise en compte de l'irréversibilité . . . . .	31
5.3	Formulation faible . . . . .	31
5.4	Implémentation éléments finis . . . . .	33
6	Validation sur des exemples académiques 2D . . . . .	35
6.1	Plaque fissurée en cisaillement . . . . .	35
6.2	Plaque trouée en compression . . . . .	43
6.3	Bilan des simulations numériques . . . . .	48
7	Code open source . . . . .	50
8	Conclusions . . . . .	50
<b>2</b>	<b>Identification des paramètres d'un modèle de champ de phase</b>	<b>53</b>
1	Essais de compression-fissuration . . . . .	55
1.1	Les éprouvettes en épicea . . . . .	55
1.2	Le dispositif expérimental . . . . .	56
1.3	Les données expérimentales relevées . . . . .	58
1.4	Post-traitement des données expérimentales . . . . .	62
2	Corrélation d'images numériques . . . . .	63
2.1	Principes de base de la corrélation d'images numériques . . . . .	63
2.2	Implémentation éléments finis . . . . .	66
2.3	Régularisation de Tikhonov . . . . .	69
2.4	Algorithme de résolution . . . . .	70
3	Identification des paramètres matériaux . . . . .	72
3.1	Mesures expérimentales des champs de déplacement par corrélation d'images numériques . . . . .	73
3.2	Identification des propriétés élastiques . . . . .	78
3.3	Mesure de la force initiant la propagation de la fissure . . . . .	86
3.4	Identification des propriétés d'endommagement . . . . .	91
4	Disponibilité des données . . . . .	97
5	Conclusions . . . . .	97
<b>3</b>	<b>Modèle probabiliste de la rupture fragile par champ de phase</b>	<b>99</b>
1	Modélisation probabiliste des propriétés matériaux du bois d'épicéa . . . . .	101
1.1	Principe du maximum d'entropie . . . . .	101
1.2	Modèle probabiliste du taux de restitution d'énergie critique . . . . .	103
1.3	Modèle probabiliste du tenseur d'élasticité . . . . .	104
2	Identification des paramètres des modèles probabilistes . . . . .	109
2.1	Paramètres du modèle probabiliste pour le taux de restitution d'énergie critique . . . . .	109
2.2	Paramètres du modèle probabiliste pour le tenseur d'élasticité . . . . .	111
3	Simulation stochastique de la rupture fragile par champ de phase . . . . .	116
3.1	Accélération des simulations . . . . .	117
3.2	Générateur de réalisations indépendantes des variables aléatoires $G_c$ et $\mathbf{C}$ . . . . .	121
3.3	Simulations stochastiques d'endommagement . . . . .	123
4	Reproduction de l'essai expérimental de compression . . . . .	127

---

4.1	Approche déterministe . . . . .	127
4.2	Approche probabiliste . . . . .	132
5	Disponibilité des données . . . . .	135
6	Conclusions . . . . .	135
<b>Conclusions</b>		<b>137</b>
<b>A Implémentation des projecteurs</b>		<b>141</b>
1	Projecteurs en parties sphérique et déviatorique . . . . .	141
2	Projecteurs en parties positive et négative . . . . .	142
2.1	Calcul analytique des valeurs propres et des projecteurs propres d'un tenseur symétrique . . . . .	143
2.2	Construction des projecteurs . . . . .	145
3	Construction des décompositions sous forme matricielle . . . . .	146
<b>B Intégration numérique</b>		<b>149</b>
<b>C Post-traitement des courbes expérimentales</b>		<b>151</b>
<b>D Applications pratiques de l'algorithme de Metropolis-Hastings</b>		<b>153</b>
1	Échantillonnage d'une variable aléatoire . . . . .	153
2	Échantillonnage d'un vecteur aléatoire . . . . .	155
3	Conclusions . . . . .	157
<b>Bibliographie</b>		<b>159</b>



# Table des figures

1	Deux modes de rupture les plus fréquents : (a) arrachement transversal d'un panneau de particules et (b) fissuration longitudinale d'une traverse en épicéa. . . . .	2
2	Exemple d'un essai expérimental de compression réalisé sur un échantillon d'épicéa à l'aide d'un système vis-écrou noyé avant (à gauche) et après (à droite) l'application du chargement. . . . .	3
3	Structure hiérarchique du bois, de l'échelle de la molécule ( $< 1$ nm) à l'échelle de l'arbre (0.1 à 1 m) [Harrington 2002, Figure 1.1]. . . . .	5
1.1	Représentation d'un corps solide $\Omega$ avec : (a) une fissure discrète $\Gamma$ et (b) une fissure diffuse/régularisée par un champ de phase $\phi$ . . . . .	10
1.2	Représentation diffuse d'une fissure discrète $\Gamma$ 1D : (a) modèles de régularisation AT1 et AT2; (b) convergence de la fissure régularisée vers la fissure discrète lorsque $\ell$ tend vers 0 pour le modèle AT2. La fissure discrète en $x = 0$ est représentée en noir. . . . .	12
1.3	Étude paramétrique de la régularisation du champ de phase anisotrope $\phi$ pour un endommagement imposé dans l'inclusion circulaire avec le modèle AT1 et en faisant varier le facteur d'anisotropie $\beta \in \{0, 10, 40\}$ (de haut en bas) et l'orientation de la direction faible de fissuration $\alpha \in \{0, 22, 45, 68, 90\}$ degrés (de gauche à droite). . . . .	14
1.4	Essai de cisaillement en déformations planes sur un échantillon carré entaillé : le bord inférieur est fixé suivant $x$ et $y$ , les bords gauche et droit sont fixés suivant $y$ et le bord supérieur est bloqué suivant $y$ et soumis à un incrément de déplacement monotone $\Delta u$ appliqué suivant $x$ . . . . .	36
1.5	Essai de cisaillement : (a-f) champs d'endommagement $\phi$ obtenus à la dernière itération de chargement pour les modèles de Bourdin, Amor et Miehe et les modèles de régularisation (a-c) AT2 et (d-f) AT1; (g) courbes force-déplacement associées. . . . .	37
1.6	Essai de cisaillement : champ d'endommagement $\phi$ obtenu avec le modèle de Bourdin et le modèle de régularisation AT2. Un facteur d'amplification de 1 est appliqué pour représenter l'échantillon dans sa configuration déformée, et les éléments du maillage où $\phi > 0.9$ sont supprimés pour visualiser la fissure régularisée. . . . .	38

1.7	Essai de cisaillement : maillages EF raffinés pour (a) le modèle de Bourdin, où la fissure peut se propager vers le coin inférieur droit et/ou le coin supérieur droit ; et (b) les autres modèles de décomposition de l'énergie élastique, où la fissure peut se propager vers le coin inférieur droit. Une taille de maille est imposée à $\ell/2$ dans les zones raffinées et au voisinage de l'entaille, et à $3\ell/2$ en dehors. . . . .	38
1.8	Essai de cisaillement : influence du maillage optimisé par rapport au maillage uniforme pour les modèles de Bourdin, Amor et Miehe et le modèle de régularisation AT1 : (a-f) champs d'endommagement $\phi$ obtenus à la dernière itération de chargement avec les temps de calcul entre parenthèses ; (g) courbes force-déplacement associées. . . . .	39
1.9	Essai de cisaillement : (a-f) champs d'endommagement $\phi$ obtenus pour différents seuils de convergence $\epsilon$ avec le modèle de Amor, le modèle de régularisation AT1 et le maillage optimisé 1.7b ; (g) courbes force-déplacement associées. La Figure (f) représente le champ d'endommagement $\phi$ obtenu pour $\epsilon = 10^{-5}$ , où le solveur étagé n'a pas convergé. Sur la Figure (g), les croix indiquent les valeurs de la force $F$ initiant la propagation de la fissure, atteintes lorsque $\max(\phi) = 1$ . . . . .	41
1.10	Essai de cisaillement : (a-h) champs d'endommagement $\phi$ obtenus à la dernière itération de chargement pour les modèles de décomposition adaptés aux matériaux anisotropes et les deux modèles de régularisation AT2 et AT1 ; (i) courbes force-déplacement associées. . . . .	43
1.11	Essai de compression sur une plaque trouée : le bord inférieur est fixé suivant $y$ , le coin en bas à gauche est également fixé suivant $x$ et un incrément de déplacement monotone $\Delta u$ est imposé suivant $y$ sur le bord supérieur. . . . .	44
1.12	Essai de compression : maillages EF raffinés pour (a) les modèles de Bourdin et Amor, où la fissure peut se propager horizontalement vers les bords gauche et droit, et (b) les autres modèles de décomposition de l'énergie élastique, où la fissure peut se propager verticalement vers les bords supérieur et inférieur. Une taille de maille est imposée à $\ell/2$ dans les zones raffinées et à $4\ell/2$ en dehors. . . . .	45
1.13	Essai de compression : (a-c) champs d'endommagement $\phi$ obtenus à la dernière itération de chargement pour les modèles de Bourdin, Amor et Miehe et le modèle de régularisation AT1 ; (d) courbes force-déplacement associées. . . . .	45
1.14	Essai de compression : (a-d) champs d'endommagement $\phi$ obtenus à différents pas de chargement pour les modèles de décomposition adaptés aux matériaux anisotropes et le modèle de régularisation AT1 ; (e) courbes force-déplacement associées. Les champs d'endommagement $\phi$ sont relevés pour un déplacement imposé de $24.6 \mu\text{m}$ , conformément à [Nguyen et al. 2020]. . . . .	46

1.15	Essai de compression : (a-d) champs d'endommagement $\phi$ obtenus à différents pas de chargement pour les décompositions AnisotStress et de He avec le modèle de régularisation AT1 ; (e) courbes force-déplacement associées. Sur la Figure (e), les croix indiquent les valeurs de la force $F$ initiant la propagation de la fissure, atteintes lorsque $\max(\phi) = 1$ .	48
1.16	Essai de compression : (a) champ d'endommagement $\phi$ obtenu avec le maillage optimisé (voir Figure 1.15d pour le champ d'endommagement $\phi$ obtenu avec le maillage uniforme), et (b) courbes force-déplacement obtenues avec la décomposition de He et le modèle de régularisation AT1 pour les maillages uniforme et optimisé. Sur la Figure (b), les croix indiquent les valeurs de la force $F$ initiant la propagation de la fissure, atteintes lorsque $\max(\phi) = 1$ .	49
1.17	Essai de compression : (a-b) champs d'endommagement $\phi$ obtenus à la dernière itération de chargement pour les décompositions AnisotStress et de He avec le modèle de régularisation AT2 ; (c) courbes force-déplacement associées.	49
2.1	Essais expérimentaux : (a) géométrie de l'échantillon positionné entre les mors de la machine de compression ; (b) orientation $\theta$ des cernes du bois avec le repère direct $(L, T, R)$ caractérisant l'orientation du matériau.	56
2.2	Essais expérimentaux : coupe transversale du tronc d'un arbre, dans lequel des traverses (représentées en traits noirs) sont usinées. Cette vue de dessus permet de distinguer nettement les cernes du bois. L'axe $L$ des fibres du bois est normal au tronc et l'axe radial $R$ représente la direction perpendiculaire aux cernes de croissance.	57
2.3	Essais expérimentaux : machine de compression INSTRON 3366 équipée de deux plaques de compression circulaires, avec l'IHM, la caméra et la traverse annotées sur la photo, où le plateau supérieur n'est pas installé.	59
2.4	Essais expérimentaux : courbes force-déplacement relevées pour chacun des 18 essais.	59
2.5	Essais expérimentaux : forces de compression maximales $F_m$ relevées pendant les essais en fonction de l'orientation $\theta$ des cernes de l'épicéa.	60
2.6	Essais expérimentaux : représentation schématique de deux échantillons dont l'orientation des cernes correspond à un angle (a) $\theta = 0$ et (b) $\theta = \pi/2$ par rapport à l'axe horizontal. Les flèches rouges représentent le déplacement horizontal de l'échantillon, proportionnel à $-\nu_L \times u_{\text{exp}}$ , où $u_{\text{exp}}$ est le déplacement expérimental imposé suivant la direction opposée à l'axe $L$ des fibres du bois, normal au plan de la figure.	61

2.7	Essais expérimentaux : (a) courbe force-déplacement expérimentale et (b) images en niveaux de gris de l'échantillon d'épicéa prises à différents niveaux de chargement correspondant à (1) l'initiation de la fissure, (2) la propagation de la fissure et (3) la rupture pour l'essai de compression n° 4. . . . .	62
2.8	Illustration de la conservation du niveau de gris entre (a) une image de référence et (b) une image déformée où le déplacement entre l'état initial et l'état déformé est représenté par une flèche rouge. . . . .	64
2.9	(a) Définition d'un pixel de l'image de coordonnées $\mathbf{x}_p$ dans un élément $\Omega^e$ du maillage EF ; (b) coordonnées $\boldsymbol{\xi}_p$ du pixel dans l'élément de référence $\Omega^{\text{ref}}$ . Le pixel est représenté par un point rouge sur les deux figures. . . . .	67
2.10	Construction des matrices d'interpolation pour des éléments triangles linéaires Triangle à 3 nœuds (TRI3) : (a) matrice d'interpolation $[N_x]$ pour les ddls suivant $x$ , et (b) matrice d'interpolation $[N_y]$ pour les ddls suivant $y$ . Les deux matrices sont de dimension $N_{\text{ddl}} \times N_p$ . Pour chaque pixel $p$ contenu dans l'élément $\Omega^e$ , les valeurs des fonctions de forme $N_i(\boldsymbol{\xi}_p)$ sont positionnées sur la colonne $p$ associée au pixel et sur les lignes $2n_i - 1$ pour les ddls suivant $x$ et $2n_i$ pour les ddls suivant $y$ , où $n_i$ est le numéro du $i$ -ème nœud de l'élément $\Omega^e$ . . . . .	68
2.11	Influence de la période spatiale $\ell_{\text{dic}}$ sur l'onde périodique $w(\mathbf{x})$ représenté sur un domaine carré de côté $c = 32 h^e$ et discrétisé sur un maillage EF uniforme structuré composé d'éléments quadrangles linéaires QUAD4. . . . .	70
2.12	(a) Définition de la ROI de l'échantillon dans l'image et (b) construction du maillage EF de la ROI sur l'image redimensionnée pour l'essai n° 4. . . . .	73
2.13	Maillages EF construits pour plusieurs tailles de mailles définies pour $n_L \in \{5, 10, 20, 30, 40\}$ . Le nombre de pixels moyen détecté par élément est noté $N_p^e$ . . . . .	75
2.14	Somme des résidus normalisés pour $n_L = 20$ (correspondant à une taille de maille $h^e = 19.6$ pixels soit $\ell_{\text{dic}} = 8 h^e = 156.8$ pixels) et différentes longueurs de régularisation $\ell_R \in \{10, 20, 50, 78.4, 100, 150, 200, 250, 300, 350\}$ pixels avec les paramètres de régularisation $\alpha_R$ associés. . . . .	75
2.15	Somme des résidus normalisés pour $\ell_R = \ell_{\text{dic}}/2$ et différentes tailles de maille $h^e$ correspondant à $n_L \in \{5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$ . . . . .	76
2.16	Champs de déplacement expérimentaux $\mathbf{u}_{\text{exp}}$ (en pixels) mesurés pour les images 1, 11, 19 et 27 de l'essai n° 4 : (a-d) composantes horizontales $u_x$ , et (e-h) composantes verticales $u_y$ . . . . .	77
2.17	Mouvements des plateaux observés pendant les essais représentés par des flèches rouges. . . . .	78
2.18	Géométrie du problème 2D d'élasticité linéaire. Les dimensions de l'échantillon sont consultables dans le Tableau 2.1 en section 1.1. . . . .	79
2.19	Représentation des étapes 1 à 7 d'identification des paramètres élastiques avec la méthode FEMU modifiée sur le maillage de l'échantillon n° 4. . . . .	81

2.20	Comparaison entre le champ de déplacement expérimental $\mathbf{u}_{\text{exp}} = (u_x, u_y)$ mesuré par CIN (et mis à l'échelle en mm) pour l'essai n° 4 et le champ de déplacement numérique $\mathbf{u}(\mathbf{p}) = (u_x(\mathbf{p}), u_y(\mathbf{p}))$ calculé par EF pour le dernier vecteur des paramètres identifiés $\mathbf{p}$ : (a-b) composantes horizontales $u_x$ (expérimental) et $u_x(\mathbf{p})$ (numérique) dans la direction $x$ vers la droite; et (c-d) composantes verticales $u_y$ (expérimental) et $u_y(\mathbf{p})$ (numérique) dans la direction $-y$ vers le bas. Les résultats sont affichés sur le maillage mis à l'échelle en mm, et les valeurs sont également exprimées en mm. . . . .	82
2.21	Propriétés élastiques identifiées pour les 18 échantillons d'épicéa : (a) module d'Young longitudinal $E_L$ ; (b) module d'Young transversal $E_T$ ; (c) module de cisaillement longitudinal $G_L$ ; (d) coefficient de Poisson longitudinal $\nu_L$ . Chaque diagramme à barres représente la valeur moyenne avec l'écart-type correspondant indiqué par une barre d'erreur. . . . .	83
2.22	(a-b) Images de référence en échelle de gris et (c-d) distributions des niveaux de gris des pixels de la ROI pour l'échantillon n° 2 (à gauche) et pour l'échantillon n° 4 (à droite), respectivement. . . . .	85
2.23	Maillages EF associés aux trois régions d'intérêt ROI pour une taille de maille imposée $h^e$ de 19.6 pixels. . . . .	87
2.24	Détection de la fissure pour l'essai n° 10 avec la ROI 3 et un seuil $\epsilon_c = 0.2$ : (a) image déformée après l'apparition de la fissure pour une charge de 40.45 kN; (b) résidus de corrélation normalisés $\varphi(\mathbf{u}_p, \mathbf{x}_p)$ évalués en chaque pixel $p$ contenu dans la ROI représentée en bleu. Les résidus de corrélation normalisés $\varphi(\mathbf{u}_p, \mathbf{x}_p)$ sont imposés à 0 pour les pixels en dehors de la ROI. . . . .	88
2.25	Forces d'initiation de fissure $F_c$ identifiées pour les 18 essais et chacune des trois ROI et des deux valeurs seuils $\epsilon_c$ considérées. Les forces d'initiation obtenues pour un seuil $\epsilon_c = 0.1$ sont représentées par des barres à contours en pointillés, tandis que celles obtenues avec un seuil $\epsilon_c = 0.2$ sont indiquées par des barres à contours en traits pleins. Les barres bleues, oranges et vertes sont respectivement associées aux ROI 1, ROI 2 et ROI 3. . . . .	88
2.26	Détection du premier pixel pour lequel le champ résiduel de corrélation normalisé dépasse la valeur seuil (a-c) $\epsilon_c = 0.2$ et (d-f) $\epsilon_c = 0.1$ pour l'essai n° 13. . . . .	89
2.27	Détection du premier pixel pour lequel le champ résiduel de corrélation normalisé dépasse la valeur seuil $\epsilon_c = 0.2$ pour l'essai n° 3. . . . .	90
2.28	Force d'initiation de fissure $F_c$ identifiée pour chacun des 18 essais, avec $h^e = 19.6$ pixels, $\ell_R = 78$ pixels, et un seuil $\epsilon_c = 0.2$ . . . . .	90
2.29	Construction du maillage EF optimisé en fonction de la demi-largeur de fissure $\ell$ considérée. Les dimensions de l'échantillon sont spécifiées sur la Figure 2.1a et dans le Tableau 2.1. . . . .	93

2.30	Évolution de la fonction-coût $\mathcal{J}(G_c, \ell)$ en fonction de $G_c$ et $\ell$ pour les propriétés élastiques moyennes de l'échantillon n° 4. Plusieurs simulations d'endommagement sont effectuées sur une grille de paramètres de dimension $10 \times 10$ , pour $G_c$ allant de 10 à 300 N/m et $\ell$ allant de 0.45 à 4.5 mm. Chaque paire de valeurs correspond à une simulation d'endommagement réalisée jusqu'à l'initiation de la fissure (i.e. $\max(\phi) = 1$ ).	94
2.31	Taux de restitution d'énergie critique $G_c$ identifié pour chacun des 18 essais.	95
2.32	(a) Courbes force-déplacement (bornées entre 0 et 1 mm) obtenues expérimentalement (ligne bleue) et numériquement (lignes noire et rouge) avec les propriétés élastiques et d'endommagement identifiées pour l'échantillon n° 4. (b) Fissure observée expérimentalement pour la force de compression maximale $F_m$ atteinte pendant l'essai (correspondant à l'image <code>image-0229_0.tif</code> ) et (c) champ d'endommagement $\phi$ obtenu à la dernière itération de chargement (correspondant à un déplacement imposé de 0.31 mm).	96
3.1	Graphe de la surface quadratique d'équation $c_1 c_2 - c_3^2 = 0$ délimitant le support $\mathcal{S}_{123} \subset \mathbb{R}^3$ de la pdf conjointe $p_{\mathbf{C}_{123}}$ du vecteur aléatoire $\mathbf{C}_{123} = (C_1, C_2, C_3)$ .	108
3.2	(a) pdf $p_{G_c}$ et (b) cdf $F_{G_c}$ de la variable aléatoire $G_c$ qui suit une loi Gamma $\mathcal{G}(a, b)$ paramétrée par les valeurs optimales de $a$ et $b$ définies en (3.37).	110
3.3	Convergence de l'algorithme de Metropolis-Hastings : évolutions (a) des moyennes empiriques $\hat{m}_{C_1}$ , $\hat{m}_{C_2}$ et $\hat{m}_{C_3}$ de $\mathbf{C}_{123}$ et (b) de la moyenne empirique $\hat{\nu}_{\mathbf{C}}$ de $\varphi(\mathbf{C}) = \ln((C_1 C_2 - C_3^2) C_4^2 C_5^2)$ en fonction du nombre de réalisations acceptées $N_{\text{accept}}$ . Le taux de rejet, exprimé en pourcentage, est affiché en haut à droite de la Figure (b).	115
3.4	Génération de 10 000 réalisations indépendantes des variables $C_1, C_2$ et $C_3$ obtenues à partir de trois valeurs initiales $\lambda^0 \in \{-65, -120, -180\}$ pour le paramètre $\lambda < 0$ .	115
3.5	Fonctions (a) pdf $p_{C_4}$ de la variable $C_4$ et (b) pdf $p_{C_5}$ de la variable $C_5$ obtenues à partir de trois valeurs initiales $\lambda^0 \in \{-65, -120, -180\}$ pour le paramètre $\lambda < 0$ .	116
3.6	Simulation d'endommagement : (a) densité d'énergie élastique positive $\psi_0^+$ normalisée par $\psi_c$ et (b) champ d'endommagement $\phi$ obtenu lors de l'amorçage de la fissure, i.e. lorsque $\max(\psi_0^+) > \psi_c$ ; (c) évolution du niveau d'endommagement maximal $\max(\phi)$ relevé à chaque itération de chargement $i$ en fonction du déplacement imposé $u$ .	119
3.7	Évolution de la valeur maximale de la densité d'énergie élastique positive $\max(\psi_0^+)$ en fonction du déplacement imposé $u$ . La courbe bleue représente le comportement simulé, relevée pour les itérations allant de 0 à 1080 avec un pas de 54. La courbe orange correspond au modèle quadratique. La ligne horizontale rouge en pointillés indique la valeur seuil $\psi_c$ .	120

3.8	Simulation d'endommagement accélérée : (a) densité d'énergie élastique positive $\psi_0^+$ normalisée par $\psi_c$ et (b) champ d'endommagement $\phi$ obtenu lors de l'amorçage de la fissure, i.e. lorsque $\max(\psi_0^+) > \psi_c$ ; (c) évolution du niveau d'endommagement maximal $\max(\phi)$ relevé à chaque itération de chargement $i$ en fonction du déplacement imposé $u$ .	121
3.9	Génération de 1 000 réalisations indépendantes (représentées par des points bleus) pour (a-e) les 5 composantes du vecteur aléatoire $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_5)$ et (f) la variable aléatoire $G_c$ . Les valeurs moyennes empiriques estimées à partir des réalisations sont représentées par des lignes rouges horizontales sur chaque figure.	122
3.10	Analyse de convergence : évolutions des estimations statistiques de (a) la valeur moyenne $\hat{m}_{F_c}$ et de (b) l'écart-type $\hat{\sigma}_{F_c}$ de la variable aléatoire $F_c$ , en fonction du nombre de réalisations $N$ variant de 1 à 1 000.	123
3.11	Analyse de convergence : évolutions de l'intervalle de confiance à 95% et de la valeur moyenne en fonction du nombre de réalisations $N$ variant de 1 à 1 000, pour la force de compression critique aléatoire $F_c$ simulée numériquement (en bleu) et mesurée expérimentalement (en rouge).	124
3.12	Histogramme des réalisations de la variable aléatoire $F_c$ modélisant la force de compression critique $f_c$ relevée pour $\max(\phi) = 1$ (en bleu), superposée à la pdf $p_{F_c}$ de la variable $F_c$ distribuée suivant la loi Gamma $\mathcal{G}(a, b)$ paramétrée par les valeurs optimales de $a$ et $b$ (identifiées par la méthode MLE) et représentée par la ligne orange.	125
3.13	Évolution de la pdf $p_{F_c}$ de la variable aléatoire $F_c$ modélisant la force de compression critique $f_c$ relevée pour différents niveaux d'endommagement maximal correspondant à $\max(\phi) > 0$ (amorçage de l'endommagement) et $\max(\phi) \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ : (a) graphique 3D et (b) graphique 2D (superposition des courbes).	125
3.14	Fonctions cdf $F_{F_c}$ (en haut) et pdf $p_{F_c}$ (en bas) de la variable aléatoire $F_c$ modélisant la force de compression critique $f_c$ correspondant à l'amorçage de l'endommagement, i.e. lorsque $\max(\phi)$ dépasse 0.	126
3.15	Essai de compression 3D : (a) géométrie de l'échantillon d'épicéa avec les dimensions spécifiées en mm ; (b) maillage EF optimisé comprenant 274 946 éléments linéaires Tétraèdre à 4 nœuds (TETRA4) et 53 166 nœuds. Au voisinage du trou borgne vertical, la taille de maille $h^e$ est fixée à $D_2/10 = 0.7$ mm dans une zone cylindrique de diamètre $1.3 D_2 = 9.1$ mm et de profondeur $h_2 = 55$ mm, tandis qu'au voisinage du trou débouchant horizontal, $h^e$ est fixée à $D/26 \approx 0.38$ mm dans une zone cylindrique de diamètre $1.3 D = 13$ mm. L'axe $y$ représente l'axe longitudinal des fibres du bois, orthogonal au plan d'isotropie $(z, x)$ .	127
3.16	Essai de compression 3D : (a) aire $S$ de la surface $\Gamma_f$ ; (b) charge surfacique $\mathbf{q}$ imposée sur $\Gamma_f$ pour un angle d'ouverture $\beta = 2\pi/3$ .	129

3.17	Carte des contributions élémentaires à l'erreur de discrétisation obtenue avec l'estimateur d'erreur globale ZZ1 [Zienkiewicz et Zhu 1987] pour évaluer la qualité du maillage EF. Pour plus d'informations sur l'implémentation de l'estimateur d'erreur globale ZZ1 dans le cadre de la MEF, on pourra consulter la section IX.2.3 du cours <i>Calcul des structures par éléments finis</i> d'Antoine Legay  [Legay 2021], ainsi que la fonction <code>_Calc_ZZ1()</code> du script <code>EasyFEA/simulations/_elastic.py</code> . . . . .	131
3.18	Essai de compression 3D : carte du champ de densité d'énergie élastique positive normalisée $\psi_0^+/\psi_c$ , avec un zoom autour du trou débouchant, pour une charge de compression critique $f_c = 0.35$ kN. . . . .	132
3.19	Analyse de convergence : évolutions des estimations statistiques de (a) la valeur moyenne $\hat{m}_{F_c}$ et de (b) l'écart-type $\hat{\sigma}_{F_c}$ de la variable aléatoire $F_c$ , en fonction du nombre de réalisations $N$ variant de 1 à 200. . . . .	133
3.20	Analyse de convergence : évolutions de l'intervalle de confiance à 95% et de la valeur moyenne en fonction du nombre de réalisations $N$ variant de 1 à 200, pour la force de compression aléatoire $F_c$ simulée numériquement (en bleu), avec la force moyenne expérimentale $\underline{F}_c$ (en rouge). . . . .	134
3.21	Histogramme des réalisations de la force de compression critique aléatoire $F_c$ (en bleu), superposé à l'estimation non-paramétrique de la pdf $p_{F_c}$ de la variable aléatoire $F_c$ calculée par la méthode d'estimation par noyau gaussien (KDE) à partir des réalisations et représentée par la ligne orange. . . . .	135
B.1	Triangle linéaire à 3 nœuds réel $\Omega^e$ et de référence $\Omega^{\text{ref}}$ . . . . .	149
C.1	(a) Étapes de suppression de la phase transitoire et (b) courbes force-déplacement redimensionnées. . . . .	151
C.2	(a) Courbes force-déplacement expérimentale (ligne bleu clair), numérique (ligne noire) et corrigée (ligne bleu foncé), (b) association en série de deux ressorts de raideur $k_{\text{mont}}$ et $k_{\text{mat}}$ représentant le dispositif expérimental composé de la machine de compression et de l'éprouvette. . . . .	152
D.1	Échantillonnages de la variable aléatoire $X$ suivant la distribution $f_X$ , pour des écarts-types $\sigma \in \{0.1, 1, 5\}$ . Les graphiques (a-c) représentent la distribution cible $f_X(x)$ en bleu et la distribution de transition $q(x^{(i+1)}; x^{(0)}, \sigma)$ en orange. Les graphiques (d-f) représentent les réalisations obtenues, où la distribution cible normalisée $f_X(x)/k_0$ est représentée en bleu, et les histogrammes en orange représentent la distribution des échantillons. . . . .	154
D.2	Représentation des isocontours de la distribution cible $f_{\mathbf{Z}}(z_1, z_2)$ du vecteur aléatoire $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	155
D.3	Échantillonnages du vecteur aléatoire $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)$ suivant la distribution cible $f_{\mathbf{Z}}$ , pour des valeurs du paramètre $\sigma \in \{0.001, 0.01, 0.05, 0.1\}$ . . . . .	156

---

D.4 Échantillonnages du vecteur aléatoire $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)$ suivant la distribution cible $f_{\mathbf{Z}}$ , pour des valeurs du paramètre $\sigma \in \{0.001, 0.01, 0.05, 0.1\}$ et 200 itérations d'échauffement ( <code>burn_in=200</code> ). . . . .	157
---	-----



# Liste des tableaux

1.1	Forces d'initiation de fissure $F$ obtenues pour différents seuils de convergence $\epsilon$ , lorsque le champ d'endommagement $\phi$ atteint la valeur 1 en un point du domaine. . . . .	42
2.1	Essais expérimentaux : dimensions géométriques des échantillons. . .	56
2.2	Orientation $\theta$ des cernes et force maximale de compression $F_m$ relevées (voir section 1.3) pour les 18 échantillons numérotés de 0 à 17. Les échantillons sont issus de deux traverses (notées A et B) et soumis à une charge de compression uniaxiale jusqu'à rupture. . . . .	58
2.3	Estimation statistique des propriétés élastiques du bois d'épicéa calculées à partir des propriétés moyennes (représentées sur la Figure 2.21) identifiées pour les 14 échantillons retenus où les dispersions observées sur les propriétés élastiques sont inférieures ou égales à 50%. . . . .	84
2.4	Estimation statistique des propriétés élastiques du bois d'épicéa, estimées pour les traverses A et B, à partir des propriétés moyennes identifiées pour les 14 essais retenus où les dispersions observées sur les propriétés élastiques sont inférieures ou égales à 50%. . . . .	84
2.5	Coordonnées des points $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ et $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$ utilisées pour la construction des trois régions d'intérêt ROI représentées sur la Figure 2.23. . . . .	87
2.6	Synthèse des données expérimentales mesurées lors des essais de compression réalisés sur les échantillons issus des deux traverses A et B. . . . .	91
2.7	Valeur moyenne $\underline{G}_c$ et coefficient de dispersion $\delta_{G_c}$ du taux de restitution d'énergie critique $G_c$ pour chacune des deux traverses A et B. . . . .	95



# Glossaire et notations

## Glossaire

- Abaqus** Logiciel commercial de calcul par éléments finis développé par *Dassault Systèmes*. 55
- Amor** Décomposition sphérique-déviatorique des déformations introduite dans [Amor et al. 2009] applicable aux matériaux isotropes. i, v, vi, 8, 19, 37, 39–41, 44–46, 48
- AnisotStrain** Généralisation de la décomposition spectrale des déformations. i, 8, 20, 42, 43, 46, 47, 49
- AnisotStress** Généralisation de la décomposition spectrale des contraintes. i, vii, 8, 21, 42, 43, 46–50
- AT1** Modèle de régularisation de l'énergie de rupture selon [Pham et al. 2011]. i, v–vii, 8, 11, 12, 14, 28, 32, 34, 36, 37, 39–46, 48, 49, 91, 97, 116–118, 136
- AT2** Modèle de régularisation de l'énergie de rupture selon [Bourdin et al. 2000]. i, v–vii, 8, 11, 12, 28, 29, 32, 34, 36–38, 42, 43, 48, 49
- Bourdin** Modèle d'endommagement introduit dans [Bourdin et al. 2000] applicable aux matériaux isotropes et anisotropes. i, v, vi, 8, 17, 28, 36–39, 44–46, 48
- C++** Langage de programmation compilé de bas niveau. 71
- CCD** *Charge-Coupled Device*, capteur photographique basé sur un dispositif à transfert de charges qui convertit un signal lumineux en un signal électrique. 57, 63
- cdf** *Cumulative distribution function* (Fonction de répartition en français). x, xi, xxv, 110, 126
- CEN** Comité Européen de Normalisation. 1
- cernes** Cercles concentriques visibles sur une coupe transversale du tronc d'un arbre, représentant une année de croissance. Formées annuellement, elles alternent entre du bois plus clair au printemps et du bois plus sombre à l'automne et en hiver (voir Figure 2.2). vii, xv, xxiv, 56–58, 60, 61, 72, 85, 91
- CIN** Corrélation d'Images Numériques. ix, xix, xxiv, 4, 6, 62, 63, 65, 66, 73, 74, 76, 78, 79, 82, 86, 87, 89, 97, 126
- ddl** degré de liberté. viii, xxiii, xxiv, 35, 65, 68, 92

- DIC** *Digital Image Correlation*. 63
- DIS** *Dense Inverse Search*. 71
- EasyFEA** Code open source développé en [Python](#) dans le cadre de la thèse accessible sur [PyPI](#), [GitHub](#) et [Software Heritage](#) [Noel 2024]. 33, 35, 50, 66, 71, 97, 135
- EF** Éléments Finis. vi, viii, ix, xi, xii, xviii, xix, xxiii, xxv, 26, 33, 38, 45, 55, 65–67, 70, 73–75, 78–80, 82, 86, 87, 92, 93, 118, 127, 130–132
- FCBA** Institut technologique Forêt Cellulose Bois-construction Ameublement. 1–5, 55, 97, 126, 134, 137–139
- FEM** *Finite Element Method*. 2
- FEMU** *Finite Element Model Updating* (Méthode de recalage de modèle par [EF](#) en français). viii, 4, 6, 78–82, 91, 97, 137
- Hadamard** Un problème est bien posé au sens de Hadamard si une solution existe, qu'elle est unique et qu'elle dépend de façon continue des données. 65, 69
- He** Décomposition spectrale introduite dans [Nguyen et al. 2020]. i, vii, 8, 22, 42, 43, 46–51, 91, 116, 117, 119, 129, 137
- IHM** Interface Homme-Machine. vii, 57, 59
- KDE** *Kernel Density Estimation* (Estimation de la densité de probabilité par noyau en français). xii, 134, 135
- Lancioni** Décomposition déviatorique introduite dans [Lancioni et Royer-Carfagni 2009] applicable aux matériaux isotropes. i, 8, 18
- LEFM** *Linear Elastic Fracture Mechanics* (Mécanique linéaire élastique de la rupture en français). 61
- LS** *Least Squares* (Méthode des moindres carrés en français). 99, 108, 109, 111
- MaxEnt** Principe du maximum d'entropie énoncé par *E.T Jaynes* [Jaynes 1957a, Jaynes 1957b]. 101–103, 105, 106, 124, 135, 138
- MC** *Monte Carlo numerical simulation* (Méthode de simulation numérique de Monte-Carlo en français). 116, 117
- MCMC** *Markov Chain Monte Carlo* (Méthode de Monte-Carlo par Chaîne de Markov en français). 109, 112, 116, 122, 136
- MEF** Méthode des Éléments Finis. xii, xxiv, 2, 9, 13, 29, 31, 33, 50, 62, 63, 65, 66, 79, 92, 98, 129, 131, 132
- MH** Algorithme de Metropolis-Hastings. 112–114, 122, 153
- Miehe** Décomposition spectrale des déformations introduite dans [Miehe et al. 2010a] applicable aux matériaux isotropes. i, v, vi, 8, 19–22, 26, 28, 37, 39, 40, 44–46, 48, 49
- MLE** *Maximum Likelihood Estimation* (Méthode d'estimation du maximum de vraisemblance en français). xi, 99, 103, 109, 110, 124–126

- MSME** Laboratoire de Modélisation et Simulation Multi Echelle. [2](#), [5](#), [55](#), [93](#), [94](#), [137](#)
- OpenCV** Open Source Computer Vision Library. [71](#)
- pdf** *Probability density function* (Densité de probabilité en français). [x–xii](#), [xxv](#), [xxvi](#), [101–104](#), [106–114](#), [116](#), [122](#), [124–126](#), [134](#), [135](#), [153–155](#)
- PFM** *Phase-Field fracture/damage Models* (Modèles de rupture/endommagement par champ de phase en français). [4](#), [5](#), [136](#)
- Python** Langage de programmation interprété de haut niveau. [xviii](#), [33](#), [50](#), [66](#), [67](#), [81](#), [93](#), [94](#), [97](#), [110](#), [114](#), [122](#), [135](#)
- QUAD4** Quadrangle à 4 nœuds. [viii](#), [66](#), [70](#)
- QUAD8** Quadrangle à 8 nœuds. [66](#)
- ROI** Région d'intérêt (*Region Of Interest* en anglais) utilisée dans l'approche globale de la [CIN](#). Dans le contexte de la [CIN EF](#), la ROI correspond au maillage utilisé. [viii](#), [ix](#), [xv](#), [xxiv](#), [63](#), [65](#), [66](#), [73](#), [74](#), [85](#), [87–89](#)
- SEG2** Segment à 2 nœuds. [68](#)
- TETRA4** Tétraèdre à 4 nœuds. [xi](#), [68](#), [127](#), [130](#)
- TRI10** Triangle à 10 nœuds. [66](#)
- TRI3** Triangle à 3 nœuds. [viii](#), [14](#), [36](#), [47](#), [67–69](#), [74](#), [76](#), [92](#), [118](#), [149](#), [150](#)
- TRI6** Triangle à 6 nœuds. [66](#)
- UQ** *Uncertainty Quantification* (Quantification d'incertitudes en français). [101](#)
- XFEM** *eXtended Finite Element Method* (Méthode des Éléments Finis Étendus en français). [65](#)
- Zhang** Décomposition spectrale des contraintes introduite dans [[Zhang et al. 2020](#)]. [i](#), [8](#), [24](#), [42](#), [43](#), [46](#), [49](#)
- ZOI** Zone d'intérêt (*Zone Of Interest* en anglais) utilisée dans l'approche locale de la [CIN](#). [65](#)

## Notations

- Les quantités et champs scalaires (déterministes) sont notés en lettres italiques (par exemple  $\phi$ ).
- Les vecteurs et champs vectoriels (déterministes) sont notés en lettres italiques minuscules en gras (par exemple  $\mathbf{u}$ ).
- Dans le cadre de la méthode des éléments finis, les champs scalaires discrétisés sont représentés par des lettres droites minuscules (par exemple  $\Phi$ ), tandis que les vecteurs et champs vectoriels discrétisés sont notés par des lettres droites minuscules en gras (par exemple  $\mathbf{u}$ ).
- Les matrices (déterministes) sont représentées par des lettres majuscules entre crochets (par exemple  $[\mathbf{K}_u]$ ).
- Les tenseurs d'ordre deux sont représentés en lettres italiques majuscules en gras (par exemple  $\boldsymbol{\sigma}$ ).
- Les tenseurs d'ordre quatre sont représentés par des lettres doubles barres majuscules (par exemple  $\mathbb{P}$ ).
- La représentation matricielle d'un tenseur d'ordre quatre est notée en lettres double barre majuscules entre crochets (par exemple  $[\mathbb{P}]$ ).
- La représentation vectorielle d'un tenseur d'ordre deux est notée en lettres italiques minuscules en gras entre crochets (par exemple  $[\boldsymbol{\sigma}]$ ).
- Les variables aléatoires à valeur scalaire sont notées en lettres droites majuscules (par exemple  $X$ ).
- Les vecteurs aléatoires (ou variables aléatoires à valeurs vectorielles) sont notés par des lettres droites majuscules en gras (par exemple  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ ).
- Les matrices aléatoires (ou variables aléatoires à valeurs matricielles) sont notées par des lettres droites majuscules en gras entre crochets (par exemple  $[\mathbf{C}]$ ).

## Domaines et frontières

$\Omega$	Domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ .
$d$	Dimension spatiale considérée.
$\mathbf{x}$	Vecteur des coordonnées spatiales d'un point dans $\Omega$ .
$\partial\Omega$	Frontière externe de $\Omega$ .
$\Gamma$	Frontière interne de $\Omega$ correspondant à la surface de fissure discrète.
$\partial\Omega_u$	Frontière externe de Dirichlet.
$\partial\Omega_t$	Frontière externe de Neumann.
$\emptyset$	Ensemble vide.
$\mathbf{n}$	Vecteur normal unitaire sortant de $\partial\Omega$ .

## Opérateurs

$\nabla$	Opérateur gradient d'un champ vectoriel par rapport au vecteur des coordonnées spatiales $\boldsymbol{x}$ .
$\nabla \cdot$	Opérateur divergence d'un champ vectoriel ou tensoriel par rapport à $\boldsymbol{x}$ .
$\nabla$	Opérateur gradient d'un champ scalaire par rapport à $\boldsymbol{x}$ .
$\nabla^2$	Opérateur second gradient (ou Hessien) d'un champ scalaire par rapport à $\boldsymbol{x}$ .
$\nabla \cdot$	Opérateur divergence d'un champ scalaire par rapport à $\boldsymbol{x}$ .
$\Delta$	Opérateur laplacien d'un champ scalaire par rapport à $\boldsymbol{x}$ .
$\cdot$	Produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^d$ ou produit tensoriel simplement contracté.
$:$	Produit tensoriel doublement contracté.
$\dot{\bullet}$	Dérivée partielle du premier ordre de la variable $\bullet$ par rapport au temps.
$\otimes$	Produit tensoriel.
$\odot$	Produit tensoriel symétrisé.
$\wedge$	Produit vectoriel.
tr	Opérateur trace d'un tenseur d'ordre deux.
det	Opérateur déterminant d'un tenseur d'ordre deux.
$\bullet^T$	Opérateur de transposition de la matrice $\bullet$ (ou du tenseur d'ordre deux).
$\langle \bullet \rangle_{\pm}$	Version signée de l'opérateur de Macaulay tel que

$$\forall \bullet \in \mathbb{R}, \quad \langle \bullet \rangle_{\pm} = (\bullet \pm |\bullet|) / 2.$$

$R^{\pm}(\bullet)$  Version signée de la fonction de Heaviside telle que

$$\forall \bullet \in \mathbb{R}, \quad R^{\pm}(\bullet) = (\pm \text{sign}(\bullet) + 1) / 2$$

$\text{sign}(\bullet)$  Fonction sign telle que

$$\forall \bullet \in \mathbb{R}, \quad \text{sign}(\bullet) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bullet > 0, \\ 0 & \text{si } \bullet = 0, \\ -1 & \text{si } \bullet < 0. \end{cases}$$

$\partial_{\bullet}$  Dérivée partielle d'une variable par rapport à  $\bullet$ .

$\|\mathbf{v}\|$  Norme euclidienne (norme 2) sur  $\mathbb{R}^n$  d'un vecteur  $\mathbf{v} = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $\mathbb{R}^n$  définie telle que

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \|\mathbf{v}\| = \left( \sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{1/2}.$$

$\|[A]\|_F$  Norme de Frobenius d'une matrice  $[A] = ([A]_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq m}}$  de dimension  $n \times m$  définie telle que

$$\|[A]\|_F = \sqrt{\text{tr}([A]^T [A])} = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [A]_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

## Fonctionnelles

$\mathcal{E}$	Fonctionnelle d'énergie totale (1.1).
$\Psi$	Fonctionnelle d'énergie de déformation élastique dégradée (ou endommagée) (1.3).
$\Psi_c$	Fonctionnelle d'énergie de surface de fissure régularisée (1.4).
$\mathcal{P}$	Fonctionnelle d'énergie potentielle externe (ou travail des efforts extérieurs) (1.5).

## Variables mécanique

$\mathbf{u}$	Champ vectoriel de déplacement.
$\delta \mathbf{u}$	Variation du champ de déplacement.
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Champ de tenseur des déformations infinitésimales linéarisé.
$\boldsymbol{\sigma}_0$	Champ de tenseur des contraintes de <i>Cauchy</i> non endommagé.
$\mathbb{C}_0$	Tenseur d'élasticité (ou de rigidité) non endommagé.
$\mathbb{S}_0$	Tenseur de souplesse non endommagé.
$\mathbf{I}$	Tenseur identité du deuxième ordre tel que $(\mathbf{I})_{ij} = \delta_{ij}$ .
$\delta_{ij}$	Symbole de <i>Kronecker</i> tel que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

$\mathbb{I}$	Tenseur identité du quatrième ordre symétrisé tel que
--------------	---

$$(\mathbb{I})_{ijkl} = (\mathbf{I} \odot \mathbf{I})_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

$\lambda_0, \mu_0$	Coefficients de <i>Lamé</i> d'un matériau élastique isotrope (1.12a).
$K_0$	Module de compressibilité hydrostatique d'un matériau élastique isotrope (1.23).
$\mathbf{u}_D$	Vecteur des déplacements imposés sur $\partial\Omega_u$ .
$\mathbf{t}$	Vecteur des forces surfaciques imposées sur $\partial\Omega_t$ (1.5).
$\mathbf{f}$	Vecteur des forces volumiques imposées dans $\Omega$ (1.5).
$\psi_0$	Densité d'énergie élastique initiale (ou potentiel initial d'énergie libre de <i>Helmholtz</i> ) (1.12).

## Variables d'endommagement

$\phi$	Champ de phase de fissure (ou d'endommagement).
$\delta\phi$	Variation du champ d'endommagement.
$G_c$	Taux de restitution d'énergie critique (ou ténacité à la rupture) (1.4).

$\gamma$	Fonction de densité de surface de fissure (1.6).
$\Gamma_\ell$	Surface de fissure régularisée (1.7).
$\ell$	Longueur de régularisation de fissure (ou paramètre d'échelle).
$w$	Fonction géométrique de fissure (ou de dissipation d'énergie locale) (1.6).
$c_w$	Constante de normalisation (1.6).
$\psi$	Densité d'énergie élastique endommagée (ou potentiel d'état) (1.13).
$\psi_0^+, \psi_0^-$	Parties positives (active) et négative (inactive) de la densité d'énergie élastique initiale $\psi_0$ (1.13).
$g$	Fonction de dégradation de l'énergie élastique (ou des contraintes) (1.13).
$Y$	Force motrice de fissure (1.14).
$\sigma$	Champ de tenseur des contraintes de <i>Cauchy</i> endommagé (1.15).
$\varepsilon_S, \varepsilon_D$	Parties sphérique et déviatorique de $\varepsilon$ (1.20).
$\mathbb{P}_S, \mathbb{P}_D$	Projecteurs en parties sphérique et déviatorique (1.21).
$\varepsilon^+, \varepsilon^-$	Parties positive (active) et négative (inactive) de $\varepsilon$ (1.30).
$\sigma_0^+, \sigma_0^-$	Parties positive (active) et négative (inactive) de $\sigma_0$ (1.40).
$\mathbb{P}^+, \mathbb{P}^-$	Projecteurs en parties positive et négative (1.31).
$\mathbb{C}$	Tenseurs d'élasticité (ou de rigidité) endommagé (1.16).
$\mathbb{C}_0^+, \mathbb{C}_0^-$	Parties positive (active) et négative (inactive) de $\mathbb{C}_0$ (1.16).
$k_w, r_w, f_w$	Coefficients de diffusion et de réaction et terme source du problème de diffusion-réaction (1.60).
$\mathbf{A}, \mathbb{A}$	Tenseurs structurels (métriques) d'anisotropie de rupture du deuxième et du quatrième ordre (1.9).
$\mathcal{H}$	Champ d'histoire local de la densité d'énergie élastique positive (active) $\psi_0^+$ (1.64).
$\epsilon$	Valeur du seuil de convergence énergétique considéré dans le critère d'arrêt du solveur étagé (1.63).

## Discrétisation éléments finis

$N_e$	Nombre d'éléments du maillage EF.
$h^e$	Taille de maille (taille caractéristique d'un élément).
$N_n$	Nombre de nœuds du maillage EF.
$n$	Nombre de nœuds par élément.
$n_{\text{ddl}}$	Nombre d'inconnues ( <b>degré de liberté</b> ) par nœud.
$N_{\text{ddl}}$	Taille du système matriciel telle que $N_{\text{ddl}} = n_{\text{ddl}} \times N_n$ .
$\Omega^e$	Domaine occupé par un élément $e$ du maillage EF tel que $\Omega \approx \sum_{e=1}^{N_e} \Omega^e$ .
$\mathbf{u}^e, \phi^e$	Vecteurs des valeurs nodales des champs de déplacement (1.73) et d'endommagement (1.74) interpolés dans l'élément $e$ .

$[N_u^e], [N_\phi^e]$	Matrices d'interpolation de $\mathbf{u}$ et $\phi$ dans l'élément $e$ .
$\mathbf{u}^e, \phi^e$	Champs de déplacement et d'endommagement discrétisés dans l'élément $e$ .
$[\boldsymbol{\varepsilon}^e]$	Gradient de déplacement symétrisé (champ des déformations) dans l'élément $e$ (1.75).
$\nabla\phi^e$	Gradient d'endommagement dans l'élément $e$ (1.76).
$[B_u^e], [B_\phi^e]$	Matrices des dérivées des fonctions de forme de l'élément $e$ .
$\Omega^{\text{ref}}$	Domaine occupé par l'élément de référence (voir Annexe B).
$\boldsymbol{\xi}$	Vecteur des coordonnées d'un point dans l'élément de référence $\Omega^{\text{ref}}$ (voir Figure B.1).
$[J]$	Matrice jacobienne (B.2).
$J$	Jacobien (déterminant de la matrice jacobienne) (B.3).
$\boldsymbol{\xi}_i, w_i$	Vecteurs des coordonnées et poids du point d'intégration $i$ (B.5).

## Essais de compression

$F_{\text{exp}}$	Force de compression verticale mesurée expérimentalement pendant les essais.
$u_{\text{exp}}$	Déplacement vertical (de la traverse) imposé pendant les essais.
$F_m$	Force de compression maximale relevée pendant les essais (voir Figure 2.5).
$F_c$	Force initiant la propagation de fissure, mesurée par CIN (voir Figure 2.28).
$\epsilon_c$	Valeur du seuil considéré dans le critère de détection de la fissuration.
$\theta$	Orientation des <b>cernes</b> du bois pour chaque échantillon.
$\mathbf{u}_{\text{exp}}$	Champ de déplacement expérimental obtenu par CIN.
$\mathbf{u}(\mathbf{p})$	Champ de déplacement simulé par la MEF.
$\mathbf{p}$	Vecteur des paramètres élastiques de l'épicéa (2.36).

## Corrélation d'Images Numériques

$\Omega$	Région d'intérêt (ou ROI en anglais).
$f, g$	Images respectivement associées aux configurations de référence et déformée.
$r_{\text{dic}}$	Résidu de corrélation entre les deux images (2.3).
$[M_{\text{dic}}]$	Matrice (2.11) du problème de corrélation (2.10).
$\mathbf{b}_{\text{dic}}$	Vecteur des résidus (2.12) du problème de corrélation (2.10).
$[N]$	Matrice d'interpolation (voir Figure 2.10).
$[N_x], [N_y]$	Matrices d'interpolation respectivement associées aux <b>ddl</b> s $x$ et $y$ .

$\mathbf{r}_{\text{dic}}$	Vecteur des résidus de corrélation (2.12).
$\mathbf{u}$	Vecteur des valeurs nodales du champ de déplacement discrétisé sur le maillage EF.
$\delta \mathbf{u}$	Vecteur des valeurs nodales de l'incrément de déplacement discrétisé sur le maillage EF.
$\alpha_R$	Paramètre de régularisation de Tikhonov (ou fréquence de coupure d'un filtre passe-bas) (2.26).
$\ell_{\text{dic}}$	Longueur caractéristique de la taille de maille (2.25).
$\ell_R$	Longueur de régularisation.
[R]	Représentation matricielle de l'opérateur laplacien discrétisé sur le maillage EF (2.20).
$w_M, w_R$	Constantes de normalisation énergétiques (2.22).
[M <sub>reg</sub> ]	Matrice régularisée (2.27b) du problème de corrélation (2.27a).
$\mathbf{b}_{\text{reg}}$	Vecteur des résidus régularisés (2.27b) du problème de corrélation (2.27a).
$\varphi$	Résidu de corrélation normalisé (2.33).
$n_L$	Nombre d'éléments dans la largeur $L$ d'un échantillon tel que $h^e = L/n_L$ .
$N_p$	Nombre de pixels dans une image.
$N_p^e$	Nombre de pixels moyen détecté par élément tel que $N_p = \sum_{e=1}^{N_e} N_p^e$ .

## Quantification d'incertitudes

$G_c$	Variable aléatoire modélisant le taux de restitution d'énergie critique $G_c$ (voir section 1.2 du chapitre 3).
[C]	Matrice d'élasticité aléatoire pour un matériau élastique linéaire isotrope transverse et homogène (voir section 1.3 du chapitre 3).
$\mathbf{U}$	Champ de déplacement aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ .
$\Phi$	Champ d'endommagement (ou de phase) aléatoire à valeurs dans $[0, 1]$ .
$F$	Force de réaction globale aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ .
$F_c$	Force critique d'initiation de fissure aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ .
$p_{\mathbf{X}}$	Densité de probabilité (pdf) d'une variable aléatoire $\mathbf{X}$ à valeurs dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ .
$p_X$	Densité de probabilité (pdf) d'une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ .
$F_X$	Fonction de répartition (cdf) d'une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(t) dt \quad \text{et} \quad p_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x).$$

$E\{X\}$  Espérance mathématique d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$E\{X\} = m_X = \int_{\mathbb{R}} x p_X(x) dx.$$

$\sigma\{X\}$  Écart-type d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  tel que

$$\sigma\{X\} = \sigma_X = \left( \int_{\mathbb{R}} (x - E\{X\})^2 p_X(x) dx \right)^{1/2}.$$

$E\{\mathbf{X}\}$  Espérance mathématique d'une variable aléatoire  $\mathbf{X}$  à valeurs dans l'espace vectoriel euclidien  $\mathbb{R}^n$  telle que

$$E\{\mathbf{X}\} = \mathbf{m}_X, \quad \text{avec} \quad (\mathbf{m}_X)_j = m_{X_j} = E\{X_j\} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

• Valeur moyenne de la variable •.

$S(p_X)$  Entropie de la densité de probabilité  $p_X$  qui mesure l'incertitude sur la loi de probabilité d'une variable aléatoire  $\mathbf{X}$  (3.1).

$s_n$  Support de la pdf  $p_X$  d'une variable aléatoire  $\mathbf{X}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

$\mathbb{1}_{s_n}(\mathbf{x})$  Fonction indicatrice du support  $s_n$  qui prend la valeur 1 si  $\mathbf{x} \in s_n$  et 0 sinon.

$d\mathbf{x}$  Mesure de Lebesgue  $dx_1 \dots dx_n$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

$\Gamma$  Fonction gamma (3.10).

$L$  Fonction de vraisemblance (*Likelihood* en anglais).

$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  Loi normale (ou gaussienne) univariée de moyenne  $\mu \in \mathbb{R}$  et d'écart-type  $\sigma > 0$  et dont la pdf est définie en équation (D.2).

$\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, [\Sigma])$  Loi normale (ou gaussienne) multivariée de vecteur moyen  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$  et de matrice de covariance  $[\Sigma]$  carrée de dimension  $n \times n$ , symétrique définie positive et dont la pdf est définie en équation (3.49) ou (D.4).

$\mathcal{G}(a, b)$  Loi Gamma de paramètres de forme  $a > 0$  et d'échelle  $b > 0$  et dont la pdf est définie en équation (3.9) ou (3.60).

# Introduction

## 1 Contexte

Les structures mécaniques en bois utilisées dans l'ameublement peuvent être classées en trois catégories selon leur conception structurelle [Demirci 2011] : (i) les structures de type *cadre*, construites à partir de poutres ; (ii) les structures de type *panneau*, réalisées à partir de plaques ; (iii) les structures de type *mixte*, combinant à la fois des poutres et des plaques. Dans le domaine de l'ameublement, ces structures offrent une grande variété de configurations, intégrant divers types de connexions et de matériaux. Parmi les connexions les plus répandues, on retrouve les systèmes vis-écrou noyés, les tourillons et les assemblages à tenon et mortaise. Quant aux matériaux constitutifs, les structures les plus courantes incluent des métaux, des panneaux de particules, du contreplaqué, ainsi que des bois résineux, en particulier l'épicéa.

Avant de pouvoir commercialiser une structure à base de bois ou plus spécifiquement un meuble, chaque fabricant doit effectuer des tests (ou essais) de validation normalisés afin de s'assurer que le produit respecte les normes établies en matière de sécurité et de conformité. Ces normes sont élaborées par le Comité Européen de Normalisation (CEN), une organisation qui veille notamment à garantir la sécurité et la qualité des produits sur le marché européen. Par exemple, la norme EN747 [EN7] fournit des instructions et des spécifications concernant la sécurité, la résistance et la durabilité des lits en hauteur, comme les lits mezzanine. Afin de garantir la conformité à ces normes, la commercialisation d'un meuble passe par plusieurs étapes, notamment : (i) la conception du meuble ; (ii) la réalisation d'un prototype ; (iii) la conduite d'une campagne d'essais normalisés. Ce processus de « conception, prototypage, essais » peut s'avérer répétitif et coûteux, et ne permet de connaître le comportement mécanique des meubles qu'*a posteriori*.

Le défi pour les industriels de l'ameublement, comme par exemple l'Institut technologique Forêt Cellulose Bois-Constructions Ameublement (FCBA), est de diminuer les « allers-retours » entre la conception, le prototypage et les essais physiques, en s'appuyant sur les outils de simulation numérique. Ces simulations (ou essais) numériques cherchent à prédire le comportement réel/physique du meuble avant sa fabrication, en s'appuyant sur la modélisation d'un jumeau numérique, une version dite « virtuelle » du produit.

C'est dans ce contexte qu'une collaboration a été initiée entre le Laboratoire de Modélisation et Simulation Multi Échelle (MSME) et le FCBA, donnant lieu à deux thèses et plusieurs stages de Master ces dernières années, afin de répondre à cette problématique. Cette collaboration a permis de développer des outils et des méthodes destinés à modéliser et simuler des essais virtuels à différentes échelles : celle du meuble, des connexions, et des échantillons. Ces outils reposent notamment sur la méthode des éléments finis (MEF) [Zienkiewicz et Taylor 2005, Hughes 2012], ou FEM pour *Finite Element Method* en anglais. La première thèse a porté sur l'étude du comportement élastique des structures en bois, modélisées par des poutres connectées par des liaisons flexibles [Makhlouf et al. 2016]. La seconde thèse s'est concentrée sur le comportement élastique des meubles en panneaux de particules, modélisés par un assemblage de plaques et de poutres, également reliées par des connexions flexibles [Chen 2019]. Ensemble, ces travaux ont mis en évidence l'importance d'une approche multi-échelle (ou multi-modèle) pour appréhender le comportement global « simplifié » et le comportement local « complexe » des connexions entre éléments de meuble.

## 2 Problématique

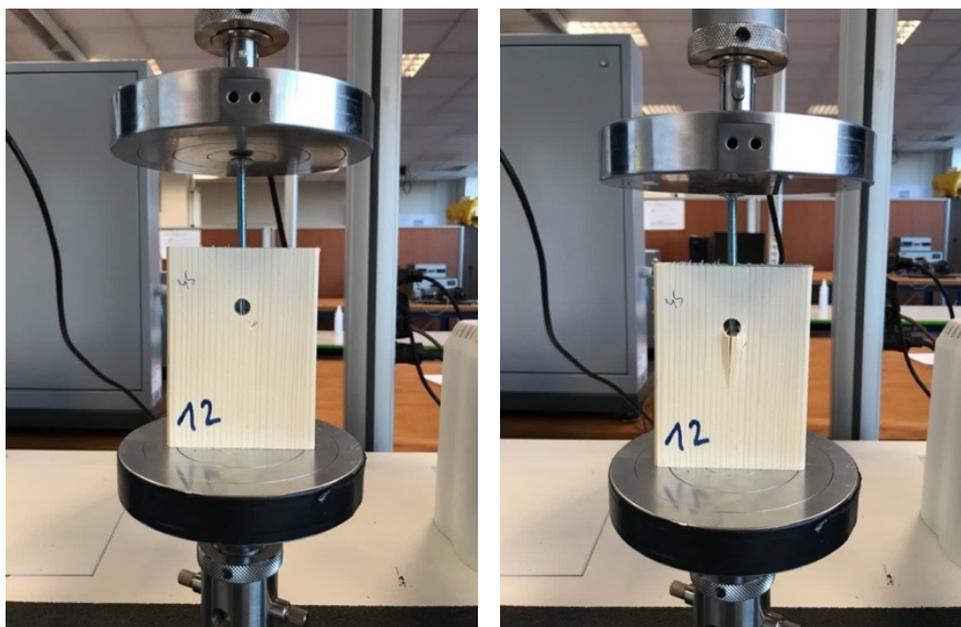
Afin de prédire le comportement mécanique des structures sous différentes conditions de chargement, le FCBA cherche aujourd'hui à étudier les mécanismes de détérioration (ou rupture) des connexions entre éléments de meuble. Les deux modes de rupture les plus couramment observés par le FCBA sont : (i) la rupture par arrachement transversal des panneaux de particules, illustrée sur la Figure 1a ; (ii) la rupture par fissuration des traverses en bois au niveau des connexions des lits hauts, représentée sur la Figure 1b. Ces modes de rupture fréquemment observés soulèvent



**FIGURE 1** – Deux modes de rupture les plus fréquents : (a) arrachement transversal d'un panneau de particules et (b) fissuration longitudinale d'une traverse en épicea.

une problématique centrale pour le FCBA : *Comment prédire la tenue mécanique des connexions entre éléments de meubles lors des tests de validation normalisés ?*

Répondre à cette question permettrait d'optimiser la conception des meubles tout en limitant le recours aux essais physiques. Pour répondre à cette problématique industrielle, une analyse approfondie de la fissuration dans des traverses en bois d'épicéa a été réalisée sur les connexions d'un lit haut [Chevalier et al. 2022]. Afin de reproduire ce mécanisme de rupture par fissuration et de quantifier la résistance mécanique d'un type de connexion, un essai de compression spécifique a été conçu à l'aide d'un système vis-écrou noyé, comme illustré sur la Figure 2. Les essais de



**FIGURE 2** – Exemple d'un essai expérimental de compression réalisé sur un échantillon d'épicéa à l'aide d'un système vis-écrou noyé avant (à gauche) et après (à droite) l'application du chargement.

compression réalisés sur une vingtaine d'échantillons troués d'épicéa jusqu'à rupture mettent en évidence la complexité des mécanismes de fissuration dans le bois et la variabilité des courbes force-déplacement.

### 3 Objectifs et hypothèses

L'objectif principal de cette thèse est de développer des outils de modélisation et de simulation numérique pour répondre à la problématique industrielle du FCBA : prédire l'initiation de la fissuration dans les assemblages en bois pour diverses configurations géométriques et conditions de chargement. L'approche proposée pour atteindre cet objectif consiste à :

1. Développer et mettre en œuvre une méthode numérique pratique et robuste pour modéliser et simuler la rupture par fissuration dans des matériaux élastiques anisotropes.
2. Élaborer une procédure d'identification combinant mesures expérimentales et

simulations numériques pour déterminer les propriétés élastiques et d'endommagement (ou de rupture) de l'épicéa.

3. Modéliser et propager les incertitudes liées à ces propriétés matériaux pour prédire l'initiation de la fissuration dans des échantillons troués de bois d'épicéa soumis en compression.

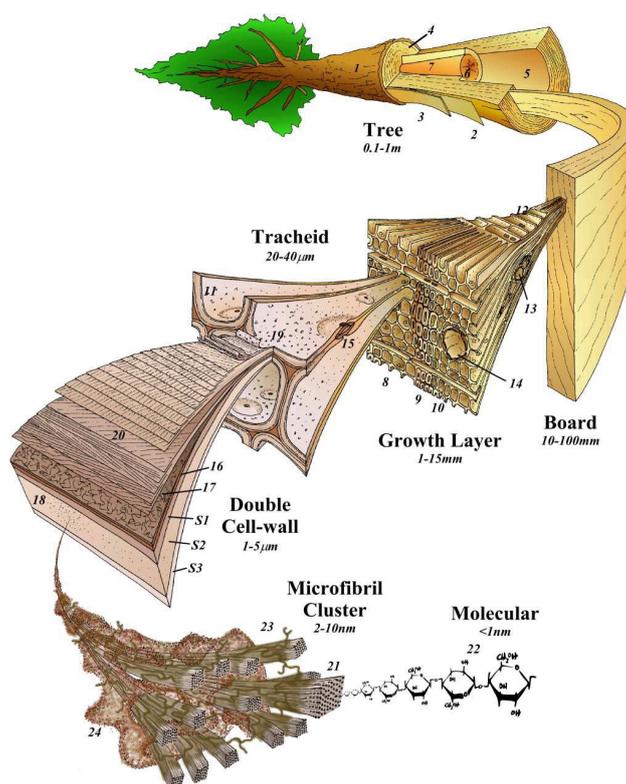
Les modèles de rupture/endommagement par champ de phase (ou **PFM** pour *Phase-Field fracture/damage Models* en anglais) [Bourdin et al. 2000] offrent aujourd'hui un cadre numérique pratique et robuste pour modéliser des mécanismes complexes de fissuration. Contrairement aux méthodes répertoriées dans [Rabczuk 2013], comme les Modèles de Zone Cohésive [Dugdale 1960, Barenblatt 1962] et la Méthode des Éléments Finis Étendus [Belytschko et Black 1999, Moës et al. 1999], les **PFM** ne souffrent pas d'une forte dépendance au maillage et permettent de simuler l'initiation, la propagation, la coalescence, la bifurcation et l'arrêt de fissures avec potentiellement plusieurs fronts et des trajectoires arbitraires de fissures en 2D et 3D dans un cadre unifié, sans nécessiter de traitement numérique spécifique. Bien que largement utilisée pour les matériaux naturels et synthétiques, la modélisation de la fissuration dans le bois reste à ce jour peu explorée avec ces modèles. Parmi les travaux existants [Carlsson et Isaksson 2018, Carlsson et Isaksson 2020, Yin et Kaliske 2020, Supriatna et al. 2022, Pech et al. 2022a, Pech et al. 2022b], aucune étude à ce jour n'a encore été menée pour modéliser et simuler l'initiation et la propagation de fissures dans des échantillons de bois soumis en compression. Cette thèse vise donc à étendre l'application des **PFM** aux matériaux élastiques anisotropes comme le bois d'épicéa afin de modéliser les mécanismes de rupture par fissuration dans ce type de matériaux.

L'identification des propriétés élastiques et d'endommagement du bois est une étape indispensable pour modéliser le comportement mécanique et prédire la rupture des assemblages lors des essais de validation normalisés conduits au **FCBA**. Dans la littérature, ces propriétés matériaux sont généralement identifiées à partir de mesures expérimentales de champs de déplacement obtenues par Corrélation d'Images Numériques (**CIN**) [Horn et Schunck 1981, Sutton et al. 2009, Hild et Roux 2012a]. Parmi les méthodes d'identification exploitant ces mesures, la plus courante est la méthode de recalage de modèle par éléments finis [Kavanagh et Clough 1971], dite **FEMU** pour *Finite Element Model Updating* en anglais, une approche itérative qui ajuste les paramètres d'un modèle numérique pour minimiser l'écart, au sens des moindres carrés, entre des données simulées et des données expérimentales. Dans le cadre des **PFM**, cette thèse propose une première tentative d'identification des propriétés élastiques et d'endommagement dans des échantillons de bois d'épicéa soumis en compression uniaxiale.

Le dernier objectif de cette thèse est de développer un modèle probabiliste de rupture fragile par champ de phase qui prenne en compte les incertitudes/variabilités observées sur les propriétés élastiques anisotropes et les propriétés d'endommagement/rupture du bois. Bien que des travaux aient été menés au cours des dernières décennies sur la construction de modèles probabilistes du tenseur/champ d'élasticité aléatoire [Guilleminot et Soize 2012, Guilleminot et Soize 2013, Soize 2017], peu

d'études ont encore pleinement intégré les incertitudes dans les PFM afin d'obtenir des prédictions numériques robustes des mécanismes de rupture [Hun et al. 2019, Hu et al. 2020, Gerasimov et al. 2020, Nagaraja et al. 2023b, Wu et al. 2023, Zhang et al. 2024]. Ce travail s'inscrit dans la continuité de la thèse de [Chen 2019], fruit d'une collaboration antérieure entre le Laboratoire MSME et l'Institut technologique FCBA, et apporte une contribution originale en proposant une modélisation probabiliste qui intègre la variabilité des propriétés matériaux, non seulement dans les propriétés élastiques mais aussi dans celles liées à l'endommagement (ou la rupture) du bois.

Ce travail de recherche s'inscrit dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire et de la mécanique de l'endommagement/rupture par champ de phase, et s'appuie sur la théorie des probabilités et les outils statistiques pour la quantification des incertitudes. Les hypothèses de modélisation adoptées portent principalement sur le modèle de comportement du bois qui est un matériau composite (hétérogène) anisotrope dont la structure hiérarchique<sup>1</sup> complexe s'organise sur plusieurs échelles distinctes [Harrington 2002]. La Figure 3 illustre les différentes échelles du bois, allant de l'échelle nanoscopique des molécules constitutives ( $< 1$  nm) jusqu'à l'échelle macroscopique de l'arbre (0.1 à 1 m). Dans le cadre de cette thèse, on se place à



**FIGURE 3** – Structure hiérarchique du bois, de l'échelle de la molécule ( $< 1$  nm) à l'échelle de l'arbre (0.1 à 1 m) [Harrington 2002, Figure 1.1].

1. Hiérarchique signifie ici que la structure du bois est organisée en plusieurs niveaux distincts imbriqués à différentes échelles.

l'échelle macroscopique de la planche de bois, comprise entre 10 et 100 mm, pour analyser les mécanismes de rupture, en considérant que les propriétés du matériau sont homogènes à cette échelle. Par souci de simplicité, les effets hydrauliques et thermiques respectivement liés aux variations d'humidité et de température ne seront pas pris en compte. On considère également que le bois se comporte comme un matériau élastique linéaire appartenant à la classe de symétrie isotrope transverse. Enfin, il est admis que les sollicitations appliquées sont suffisamment faibles pour que l'hypothèse des petites déformations soit valide.

## 4 Organisation du manuscrit

Cette thèse est organisée en trois chapitres, chacun s'appuyant sur les méthodes et notions introduites dans les chapitres précédents.

Le chapitre 1 dresse un état de l'art des modèles de rupture/endommagement par champ de phase, appliqués à la rupture fragile en régime quasi-statique pour des matériaux élastiques isotropes et anisotropes. L'implémentation numérique, réalisée dans le cadre de la méthode des éléments finis, est détaillée puis validée à travers deux exemples académiques en 2D à savoir une plaque fissurée soumise en cisaillement et une plaque trouée soumise en compression.

Le chapitre 2 est dédié au développement et à la mise en place d'une méthode d'identification des propriétés élastiques et d'endommagement de l'épicéa. L'identification de ces propriétés matériaux est réalisée à l'aide de la méthode FEMU en exploitant les champs vectoriels de déplacement mesurés expérimentalement par CIN, ainsi que les courbes force-déplacement obtenues au cours d'essais expérimentaux de compression uniaxiale réalisés sur des échantillons troués d'épicéa.

Enfin, le chapitre 3 propose un modèle probabiliste de rupture fragile par champ de phase adapté aux matériaux élastiques aléatoires presque sûrement dans la classe de symétrie isotrope transverse, pour prendre en compte les incertitudes (ou fluctuations statistiques) observées expérimentalement sur les propriétés élastiques et d'endommagement de l'épicéa dans le chapitre 2. Une procédure d'accélération des simulations d'endommagement par champ de phase est également mise en œuvre, conduisant au développement d'un nouveau critère d'amorçage de fissure. Ce critère est ensuite appliqué à des simulations déterministes et stochastiques d'élasticité linéaire en 3D conduites sur des échantillons d'épicéa troués, soumis en compression via l'application d'une charge surfacique représentative des conditions de contact du système vis-écrou noyé (voir Figure 2), afin de prédire l'emplacement de l'amorce de fissure et d'estimer l'effort nécessaire à son initiation.

Chaque chapitre inclut une section dédiée à la mise à disposition des données et scripts utilisés, afin de faciliter la validation et la reproductibilité des résultats dans une démarche d'ouverture scientifique.

# Chapitre 1

## Modèles de champ de phase pour la rupture fragile de matériaux élastiques

*Ce premier chapitre présente les principes fondamentaux de la méthode des champs de phase pour la rupture fragile de matériaux élastiques en régime quasi-statique. Un état de l'art des modèles de régularisation de l'énergie de rupture/fissuration et de décomposition de l'énergie élastique est présenté dans un cadre unifié, couvrant à la fois les matériaux isotropes et anisotropes. La résolution du problème couplé endommagement-mécanique et l'implémentation numérique sont détaillées dans le cadre de la méthode des éléments finis. Le comportement des différents modèles de fissuration par champ de phase considérés est illustré et validé sur des exemples numériques 2D, à savoir une plaque fissurée en cisaillement et une plaque trouée en compression. Ces exemples sont notamment utilisés pour mettre en évidence les limitations des modèles de décomposition, qui sont rarement abordées dans la littérature.*

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Modélisation de la rupture par champ de phase en régime quasi-statique</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Modèles de régularisation de l'énergie de rupture par fissuration</b> . . . . .	<b>11</b>
2.1	Modèles isotropes AT1 et AT2 . . . . .	11
2.2	Modèles anisotropes . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Modèles de dégradation de l'énergie de déformation élastique</b> <b>16</b>	<b>16</b>
3.1	Modèle de Bourdin . . . . .	17
3.2	Décomposition déviatorique de Lancioni pour les matériaux isotropes . . . . .	18
3.3	Décomposition sphérique-déviatorique de Amor pour les matériaux isotropes . . . . .	19
3.4	Décomposition spectrale de Miehe pour les matériaux isotropes . . . . .	19
3.5	Généralisation de la décomposition spectrale des déformations AnisotStrain . . . . .	20
3.6	Généralisation de la décomposition spectrale des contraintes AnisotStress . . . . .	21
3.7	Décomposition spectrale de He . . . . .	22
3.8	Décomposition spectrale en contraintes de Zhang . . . . .	24
3.9	Modèles alternatifs de décomposition pour les matériaux élastiques isotropes et anisotropes . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Formulation forte</b> . . . . .	<b>27</b>
<b>5</b>	<b>Résolution et implémentation numérique</b> . . . . .	<b>29</b>
5.1	Solveurs . . . . .	29
5.2	Prise en compte de l'irréversibilité . . . . .	31
5.3	Formulation faible . . . . .	31
5.4	Implémentation éléments finis . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Validation sur des exemples académiques 2D</b> . . . . .	<b>35</b>
6.1	Plaque fissurée en cisaillement . . . . .	35
6.2	Plaque trouée en compression . . . . .	43
6.3	Bilan des simulations numériques . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Code open source</b> . . . . .	<b>50</b>
<b>8</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>50</b>

---

# 1 Modélisation de la rupture par champ de phase en régime quasi-statique

On considère un corps solide fissuré dans un domaine ouvert borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , où  $d = 2, 3$  est la dimension spatiale. La frontière externe du domaine est notée  $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$ , et la frontière interne notée  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{d-1}$  représente une fissure discrète. La frontière externe  $\partial\Omega$  est divisée en deux parties disjointes et complémentaires,  $\partial\Omega_u \neq \emptyset$  et  $\partial\Omega_t$ , sur lesquelles un champ de déplacement prescrit  $\mathbf{u}_D$  et un champ de force surfacique  $\mathbf{t}$  sont respectivement appliqués. De plus, des forces volumiques  $\mathbf{f}$  sont appliquées à l'intérieur du domaine  $\Omega$ . La Figure 1.1a représente le problème considéré, montrant le domaine  $\Omega$ , la frontière  $\partial\Omega$ , la fissure discrète  $\Gamma$  et les conditions aux limites appliquées. Le matériau constitutif du solide intact (en l'absence d'endommagement) est supposé linéaire élastique et caractérisé par un tenseur d'élasticité d'ordre quatre  $\mathbb{C}_0$ . Dans le cadre des petites déformations et gradients de déformation, le tenseur des déformations infinitésimales linéarisé  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  associé au champ de déplacement  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$  est défini comme  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)/2$ .

Dans les modèles de champ de phase pour la rupture fragile [Bourdin et al. 2000, Bourdin et al. 2008] basés sur l'approche variationnelle de la rupture [Francfort et Marigo 1998], la fissure  $\Gamma$  est régularisée par un champ de phase (ou champ d'endommagement) scalaire continu  $\phi \in [0, 1]$ . Ce champ est défini sur tout le domaine  $\Omega$  et prend des valeurs entre 0 et 1, où 0 indique un état de matériau intact et 1 un état de matériau complètement endommagé ou fissuré. Contrairement à la formulation variationnelle du modèle de Griffith pour la rupture fragile [Francfort et Marigo 1998], cette formulation régularisée (par champ de phase) garantit la continuité du champ de déplacement  $\mathbf{u}$  sur tout le domaine  $\Omega$ . Cette continuité est particulièrement intéressante pour la mise en œuvre numérique dans le cadre de la MEF. La Figure 1.1b représente le problème d'endommagement par champ de phase, où la fissure discrète  $\Gamma$  est régularisée par un champ d'endommagement  $\phi$ .

Sous l'hypothèse d'un chargement quasi-statique et de conditions d'évolution isothermes, le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  et le champ de phase  $\phi$  sont déterminés en minimisant la fonctionnelle d'énergie totale  $\mathcal{E}(\mathbf{u}, \phi)$  définie par

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}, \phi) = \Psi(\mathbf{u}, \phi) + \Psi_c(\phi, \nabla\phi) - \mathcal{P}(\mathbf{u}), \quad (1.1)$$

avec les contraintes suivantes : (i) les conditions aux limites de Dirichlet  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_D$  sur  $\partial\Omega_u$  pour le champ de déplacement  $\mathbf{u}$ , et (ii) les contraintes d'irréversibilité et le caractère borné du champ de phase  $\phi$  :

$$\dot{\phi} \geq 0 \quad \text{et} \quad \phi \in [0, 1], \quad (1.2)$$

où la contrainte de monotonie  $\dot{\phi} \geq 0$  garantit l'irréversibilité du processus d'endommagement/fissuration, empêchant ainsi la guérison non physique des fissures.

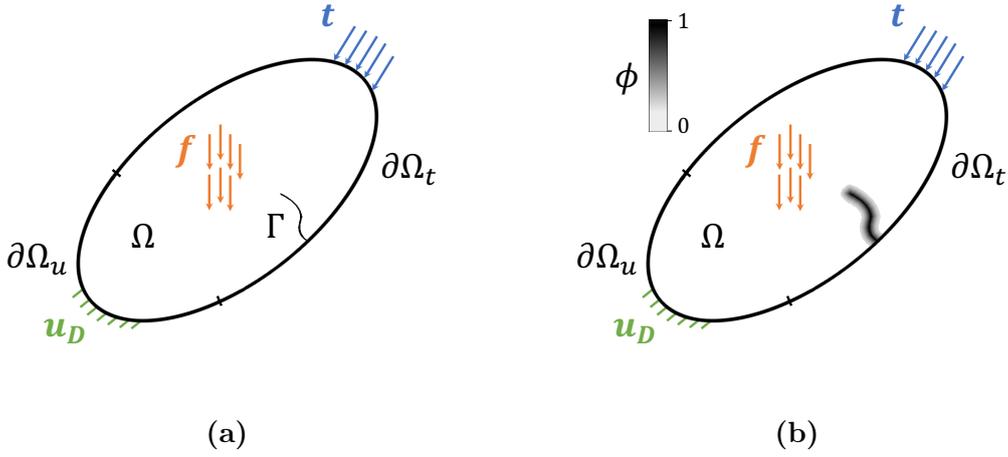


FIGURE 1.1 – Représentation d’un corps solide  $\Omega$  avec : (a) une fissure discrète  $\Gamma$  et (b) une fissure diffuse/régularisée par un champ de phase  $\phi$ .

Dans la fonctionnelle (1.1),  $\Psi(\mathbf{u}, \phi)$  représente la fonctionnelle d’énergie de déformation élastique dégradée (ou endommagée) définie par

$$\Psi(\mathbf{u}, \phi) = \int_{\Omega} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \phi) \, d\Omega, \quad (1.3)$$

où  $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \phi)$  est la densité d’énergie élastique endommagée (par unité de surface ou de volume selon la dimension spatiale  $d$ ). D’autre part,  $\Psi_c(\phi, \nabla\phi)$  est la fonctionnelle d’énergie de surface de fissure régularisée définie par

$$\Psi_c(\phi, \nabla\phi) = \int_{\Omega} G_c \gamma(\phi, \nabla\phi) \, d\Omega, \quad (1.4)$$

avec  $G_c > 0$  le taux de restitution d’énergie critique (ou ténacité à la rupture), caractérisant la résistance du matériau à la rupture. La fonction  $\gamma(\phi, \nabla\phi)$  représente la fonction de densité de surface de fissure utilisée pour approximer la topologie discrète de la fissure. Elle dépend du champ de phase  $\phi$  et de son gradient spatial  $\nabla\phi$ , où  $\nabla$  désigne l’opérateur de gradient d’un champ à valeurs scalaires par rapport au vecteur de coordonnées spatiales  $\mathbf{x}$ . Enfin,  $\mathcal{P}(\mathbf{u})$  est la fonctionnelle d’énergie potentielle externe (ou travail des efforts extérieurs), qui prend en compte le travail des forces extérieures volumiques et surfaciques et s’exprime comme

$$\mathcal{P}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \, dS. \quad (1.5)$$

Les sections suivantes présentent (i) les modèles de régularisation de l’énergie de rupture/fissuration en section 2 et (ii) les modèles de décomposition de l’énergie élastique en section 3.

## 2 Modèles de régularisation de l'énergie de rupture par fissuration

Les modèles proposés dans la littérature emploient différentes fonctions de densité de surface de fissure  $\gamma(\phi, \nabla\phi)$  pour régulariser la fissure. Elles peuvent s'écrire sous une forme générique introduite dans [Wu 2017] comme

$$\gamma(\phi, \nabla\phi) = \frac{1}{c_w \ell} (w(\phi) + \ell^2 \nabla\phi \cdot \nabla\phi), \quad (1.6)$$

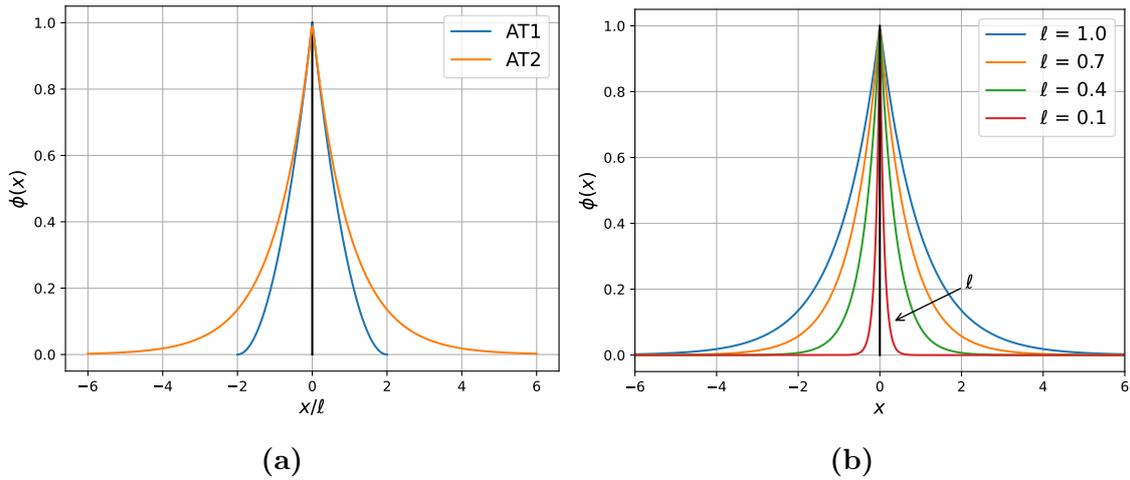
avec  $\ell > 0$  un paramètre d'échelle souvent appelé longueur de régularisation, qui contrôle la largeur de la bande d'endommagement. La fonction géométrique de fissure  $w(\phi) \in [0, 1]$ , aussi appelée fonction de dissipation d'énergie locale, est une fonction croissante qui détermine le profil décroissant du champ de phase de fissure  $\phi$  et doit respecter les conditions  $w(0) = 0$  et  $w(1) = 1$ . Le paramètre  $c_w > 0$  est une constante de normalisation (ou un paramètre de mise à l'échelle) définie comme  $c_w = 4 \int_0^1 \sqrt{w(\phi)} d\phi$  de sorte que  $\Psi_c(\phi, \nabla\phi)$  converge vers l'énergie de surface de fissure discrète  $\int_{\Gamma} G_c dS$  lorsque  $\ell$  tend vers 0. Finalement,  $\nabla\phi \cdot \nabla\phi = \|\nabla\phi\|^2$  représente la partie non-locale de la fonction de densité de surface de fissure  $\gamma$ . Introduite dans [Bourdin et al. 2000], elle s'inspire de la régularisation de [Ambrosio et Tortorelli 1990] utilisée dans la segmentation d'images. La fonction de densité de surface de fissure  $\gamma$  (1.6) permet de définir la surface de fissure régularisée  $\Gamma_\ell$  comme

$$\Gamma_\ell(\phi, \nabla\phi) = \int_{\Omega} \gamma(\phi, \nabla\phi) d\Omega. \quad (1.7)$$

### 2.1 Modèles isotropes AT1 et AT2

Deux modèles sont couramment utilisés dans la littérature pour représenter une fissure sous forme diffuse/régularisée. Le modèle AT2 (où AT fait référence à *Ambrosio-Tortorelli* [Ambrosio et Tortorelli 1990]) introduit dans [Bourdin et al. 2000] utilise une fonction quadratique  $w(\phi) = \phi^2$  et conduit à une constante de normalisation  $c_w = 2$ . D'autre part, le modèle AT1 initialement proposé dans [Pham et al. 2011], également largement utilisé dans la littérature, adopte une fonction linéaire  $w(\phi) = \phi$  conduisant à  $c_w = 8/3$ . D'autres fonctions géométriques de fissure  $w(\phi)$  sont disponibles dans la littérature, mais ne sont pas répertoriées dans ce document. Les lecteurs intéressés peuvent consulter [Wu et al. 2020a] pour plus d'informations.

Dans le cas d'une fissure unidimensionnelle (1D) située en  $x = 0$ , les champs de phase  $\phi(x)$  associés aux modèles AT1 et AT2 sont illustrés sur la Figure 1.2a. En 1D, le modèle quadratique AT2 conduit à un champ d'endommagement  $\phi(x) = \exp(-|x|/\ell)$  avec un support infini, tandis que le modèle linéaire AT1 donne  $\phi(x) = (1 - |x|/(2\ell))^2$  dont le support est fini avec une largeur de  $4\ell$ .



**FIGURE 1.2** – Représentation diffuse d’une fissure discrète  $\Gamma$  1D : (a) modèles de régularisation AT1 et AT2 ; (b) convergence de la fissure régularisée vers la fissure discrète lorsque  $\ell$  tend vers 0 pour le modèle AT2. La fissure discrète en  $x = 0$  est représentée en noir.

Selon le théorème de  $\Gamma$ -convergence [Braides 1998], lorsque l’échelle de longueur interne  $\ell$  se rapproche de zéro, la surface de fissure régularisée  $\Gamma_\ell$  définie en (1.7) converge vers la surface de fissure discrète  $\Gamma$  :

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \Gamma_\ell(\phi) = \Gamma, \quad (1.8)$$

de sorte que l’énergie de surface de fissure régularisée  $\Psi_c(\phi, \nabla\phi)$  converge vers l’énergie de surface de fissure discrète  $\Psi_\Gamma = \int_\Gamma G_c \, dS$  lorsque  $\ell$  tend vers 0. La relation, exprimée par l’équation (1.8), est illustrée dans le cas unidimensionnel sur la Figure 1.2b.

Outre leurs différences sur la manière dont la fissure est régularisée, les modèles AT2 et AT1 se distinguent principalement par leur comportement au début du chargement : le modèle AT2 voit le champ de phase évoluer immédiatement dès le début du chargement, tandis que le modèle AT1 inclut une phase purement élastique avant l’initiation de la fissure puisque  $w'(0) > 0$  [Amor et al. 2009, Pham et al. 2011, Marigo et al. 2016, Geelen et al. 2019, Wu et al. 2020a].

Les modèles de régularisation basés sur la fonction de densité de surface de fissure (1.6) sont adaptés aux matériaux dont l’énergie de fissuration peut être considérée isotrope, où le taux de restitution d’énergie critique  $G_c$  ne dépend pas de l’orientation de la microstructure du matériau. Cependant, pour les matériaux dont l’énergie de fissuration est anisotrope, où le taux de restitution d’énergie critique  $G_c$  dépend de l’orientation de la microstructure du matériau, des modèles spécifiques de régularisation sont nécessaires. Les modèles adaptés à l’anisotropie de rupture sont développés dans la section suivante.

## 2.2 Modèles anisotropes

Pour les matériaux présentant une anisotropie de rupture, le taux de restitution d'énergie critique  $G_c$  varie en fonction de l'orientation du matériau. La diminution de la ténacité suivant certaines directions privilégiées dites faibles rend ces orientations plus susceptibles à la propagation de fissures. Dans ce contexte, plusieurs modèles de régularisation ont été développés pour intégrer ces orientations dans la fonction de densité de surface de fissure [Clayton et Knap 2014, Li et al. 2015, Teichtmeister et al. 2017, Li et Maurini 2019].

Dans [Teichtmeister et al. 2017], des tenseurs structurels d'ordre 2 ou 4 sont introduits dans la partie non-locale de l'équation (1.6), et conduisent à de nouvelles fonctions de densité de surface de fissure  $\gamma$ . Ces fonctions peuvent être exprimées en adoptant les notations générales de [Nagaraja et al. 2021, Nagaraja et al. 2023a], telles que :

$$\gamma(\phi, \nabla\phi, \mathbf{A}) = \frac{1}{c_w \ell} (w(\phi) + \ell^2 \nabla\phi \cdot \mathbf{A} \cdot \nabla\phi), \quad (1.9a)$$

$$\gamma(\phi, \nabla\phi, \nabla^2\phi, \mathbb{A}) = \frac{1}{c_w} \left( \frac{w(\phi)}{\ell} + C_2 \ell \nabla\phi \cdot \nabla\phi + C_4 \ell^3 \nabla^2\phi : \mathbb{A} : \nabla^2\phi \right). \quad (1.9b)$$

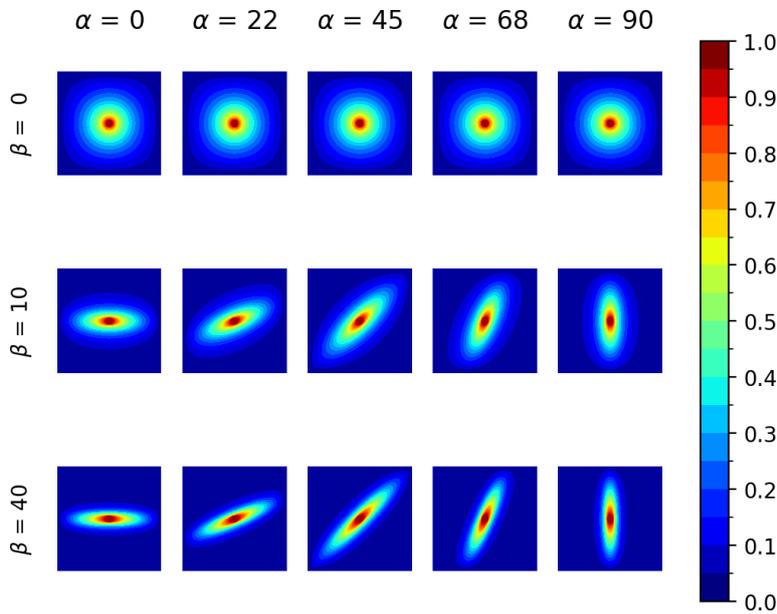
Dans l'équation (1.9a), le tenseur structurel  $\mathbf{A}$ , défini par  $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \beta \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$  pour les matériaux élastiques isotropes transverses (avec une seule direction privilégiée  $\mathbf{a}$ ), est un tenseur symétrique d'ordre 2. Ce tenseur remplace la métrique isotrope  $\mathbf{I}$  par un tenseur métrique anisotrope  $\mathbf{A}$  dans la partie non-locale  $\nabla\phi \cdot \nabla\phi$  de la fonction de dissipation d'énergie de fissuration. Le facteur d'anisotropie  $\beta \in [-1, +\infty[$  [Nagaraja et al. 2021] contrôle le degré d'anisotropie suivant une direction privilégiée (ou faible)  $\mathbf{a}$ . Dans l'équation (1.9b),  $C_2$  et  $C_4$  sont des paramètres dépendants du modèle considéré. Lorsque  $C_4 \neq 0$ , la condition  $C_2 = 0$  conduit au modèle présenté dans [Li et Maurini 2019], tandis que  $C_2 \neq 0$  conduit aux modèles décrits dans [Li et al. 2015, Teichtmeister et al. 2017]. Notons que  $C_2 = 1$  et  $C_4 = 0$  correspondent au cas isotrope de l'équation (1.6). La dérivée seconde de la variable d'endommagement est notée  $\nabla^2\phi$ , où  $\nabla^2$  désigne l'opérateur du second gradient (ou opérateur Hessien) d'un champ scalaire par rapport au vecteur de coordonnées spatiales  $\mathbf{x}^1$ . Enfin, dans l'équation (1.9b),  $\mathbb{A}$  est un tenseur structurel d'ordre 4 qui possède les symétries majeure et mineures. La construction de ces tenseurs n'est pas abordée dans ce document, mais est développée dans [Teichtmeister et al. 2017] pour certaines classes de symétrie matérielle (cubique, isotrope transverse et orthotrope).

Pour la densité de surface de fissure  $\gamma(\phi, \nabla\phi, \mathbf{A})$  définie par l'équation (1.9a), l'influence des paramètres  $\mathbf{a}$  et  $\beta$  peut être étudiée en reproduisant une analyse similaire à celle de [Nagaraja et al. 2021], tout en utilisant les paramètres matériaux et la configuration géométrique décrite dans [Nguyen et al. 2017]. On considère un domaine carré de côté  $b = 1$  m, avec en son centre une inclusion de diamètre

---

1. Dans le contexte de la MEF, l'utilisation de cet opérateur requiert l'emploi de fonctions de forme de classe  $\mathcal{C}^1$  (continues et dont les dérivées premières sont continues) [Wu et al. 2020a].

$b/20 = 5$  cm. Le modèle d'endommagement utilisé est caractérisé par une ténacité à la rupture  $G_c = 1$  J/m<sup>2</sup>, une longueur de régularisation  $\ell = b/50 = 2$  cm, un modèle de régularisation **AT1**, et l'orientation de la direction faible du vecteur unitaire  $\mathbf{a}$  est définie par un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe horizontal. Les champs d'endommagement sont obtenus en résolvant le système matriciel introduit en équation (1.77) de la section 5.4 (avec  $f_\phi = 0$ ) et en considérant les coefficients associés au modèle de régularisation **AT1** définis en équation (1.69). Le maillage est composé de triangles linéaires **TRI3** avec une taille de maille définie comme  $h^e = \ell/2 = 1$  cm. Des conditions aux limites de Dirichlet sont appliquées en imposant  $\phi = 1$  dans l'inclusion, et  $\phi = 0$  sur les bords extérieurs. Les champs d'endommagement affichés sur la Figure 1.3 sont obtenus en faisant varier le facteur d'anisotropie  $\beta$  de 0 à 40 et l'orientation de fissure  $\alpha$  de 0 à 90 degrés.



**FIGURE 1.3** – Étude paramétrique de la régularisation du champ de phase anisotrope  $\phi$  pour un endommagement imposé dans l'inclusion circulaire avec le modèle **AT1** et en faisant varier le facteur d'anisotropie  $\beta \in \{0, 10, 40\}$  (de haut en bas) et l'orientation de la direction faible de fissuration  $\alpha \in \{0, 22, 45, 68, 90\}$  degrés (de gauche à droite).

On peut constater que : (i) pour  $\beta = 0$ , le champ d'endommagement  $\phi$  ne dépend pas de l'orientation  $\alpha$  (cas de la métrique isotrope) ; (ii) pour un facteur d'anisotropie important  $\beta \gg 0$ , le champ d'endommagement  $\phi$  est pénalisé, conduisant à une fissure moins diffuse dans la direction orthogonale à  $\mathbf{a}$ .

Dans la littérature, les fonctions de densité de surface de fissure  $\gamma$  sont qualifiées de *faiblement anisotropes* (1.9a) lorsque leurs inverses  $1/\gamma$  sont convexes en référence à la convexité du tracé en coordonnées polaires de l'inverse (ou la réciproque)  $1/\gamma$  de  $\gamma$ , et de *fortement anisotropes* (1.9b) lorsque leurs inverses sont non convexes [Li et al. 2015, Li et Maurini 2019] (voir les Figures 2 de ces articles). Les modèles *fortement*

*anisotropes* se distinguent par la présence de directions interdites pour la propagation des fissures, contrairement aux modèles *faiblement anisotropes*. Cette caractéristique permet aux modèles *fortement anisotropes* de reproduire des fissures en dents de scie (ou *zigzag*) [Li et al. 2015].

D'autres modèles dans la littérature traitent l'anisotropie de rupture/fissuration en introduisant plusieurs variables d'endommagement [Nguyen et al. 2017, Bleyer et Alessi 2018]. Pour ces modèles, l'énergie de fissuration anisotrope dans le cadre d'une fissure bidimensionnelle avec les champs d'endommagement  $\phi_1$  et  $\phi_2$  associés à chacune des deux directions peut être exprimée comme

$$\Psi_c(\phi_1, \nabla\phi_1, \phi_2, \nabla\phi_2) = \int_{\Omega} G_{c1} \gamma(\phi_1, \nabla\phi_1, \mathbf{A}_1) + G_{c2} \gamma(\phi_2, \nabla\phi_2, \mathbf{A}_2) \, d\Omega, \quad (1.10)$$

où  $G_{c1}$  et  $G_{c2}$  sont les taux de restitution d'énergie critique associés aux champs d'endommagement  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , et où la fonction de densité de surface fissure  $\gamma_i(\phi_i, \nabla\phi_i, \mathbf{A}_i)$  est définie pour chaque champ d'endommagement  $\phi_i$  et longueur de régularisation  $\ell_i$  comme

$$\gamma_i(\phi_i, \nabla\phi_i, \mathbf{A}_i) = \frac{1}{c_w \ell_i} (w(\phi_i) + \ell_i^2 \nabla\phi_i \cdot \mathbf{A}_i \cdot \nabla\phi_i). \quad (1.11)$$

Dans [Nguyen et al. 2017], le tenseur métrique  $\mathbf{A}_i$  est défini tel que  $\mathbf{A}_i = \mathbf{I} + \beta_i \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i$  avec la direction privilégiée  $\mathbf{a}_i^2$ , et dans [Bleyer et Alessi 2018], le tenseur métrique isotrope  $\mathbf{I}$  est considéré en prenant  $\beta_i = 0$ .

Bien que ces modèles semblent intéressants pour modéliser la rupture/fissuration dans les matériaux caractérisés par une énergie de rupture anisotrope (où le taux de restitution d'énergie critique  $G_c$  dépend de l'orientation du matériau), ils nécessitent l'utilisation de paramètres supplémentaires à calibrer ( $\beta$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbb{A}$ ). Ces modèles ne seront pas considérés dans la suite du document qui porte principalement sur l'initiation de la fissuration.

Pour finir, les modèles développés dans le cadre de la fissuration anisotrope peuvent être classés en deux catégories : (i) une première catégorie qui prend en considération l'asymétrie du comportement à la rupture en traction-compression dans la densité d'énergie élastique endommagée  $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi)$  (voir section 3) [Clayton et Knap 2014, Nguyen et al. 2017, Bleyer et Alessi 2018, Vu et al. 2022, Pech et al. 2022a, Pech et al. 2022b]; (ii) une seconde catégorie qui ne tient pas compte de cette asymétrie [Teichtmeister et al. 2017, Li et Maurini 2019, Nagaraja et al. 2021, Nagaraja et al. 2023b, Nagaraja et al. 2023a].

---

2. Dans [Nguyen et al. 2017], la partie non-locale de la fonction de dissipation d'énergie de rupture anisotrope  $\nabla\phi \cdot \mathbf{A} \cdot \nabla\phi$  est écrite sous la forme  $\mathbf{A} : (\nabla\phi \otimes \nabla\phi)$ , avec  $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \beta (\mathbf{I} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m})$  où  $\mathbf{m}$  est le vecteur unitaire normal au plan de rupture préférentiel et correspond à la direction dite forte (orthogonale à la direction faible  $\mathbf{a}$ ). Le paramètre  $\beta > 0$  permet de pénaliser (i.e. empêcher le développement de) l'endommagement dans les plans non orthogonaux à  $\mathbf{m}$ .

### 3 Modèles de dégradation de l'énergie de déformation élastique

La fonction de densité d'énergie de déformation élastique dégradée (ou potentiel d'état)  $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi)$  intervient dans la fonctionnelle d'énergie de déformation élastique dégradée  $\Psi(\mathbf{u}, \phi)$ , telle que décrite en équation (1.3). Pour un solide élastique isotrope non endommagé, la densité d'énergie élastique initiale (ou potentiel initial d'énergie libre de *Helmholtz*)  $\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon})$  est donnée par

$$\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\lambda_0}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu_0 \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.12a)$$

$$= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_0 : \mathbb{S}_0 : \boldsymbol{\sigma}_0 = \psi_0(\boldsymbol{\sigma}_0), \quad (1.12b)$$

où  $\mathbb{C}_0 = 2\mu_0 \mathbb{I} + \lambda_0 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$  est le tenseur d'élasticité linéaire du quatrième ordre défini en fonction des coefficients de *Lamé*  $\lambda_0$  et  $\mu_0$ , où  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité du second ordre et  $\mathbb{I}$  est le tenseur identité du quatrième ordre. Le tenseur de souplesse du quatrième ordre est défini comme  $\mathbb{S}_0 = \mathbb{C}_0^{-1}$  et  $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}$  représente la relation/loi de comportement élastique linéaire définissant le tenseur des contraintes de *Cauchy* non endommagé  $\boldsymbol{\sigma}_0$ .

Pour éviter la formation de fissures dans les régions soumises en compression et empêcher l'interpénétration des surfaces/lèvres de la fissure, il est courant d'employer une séparation traction-compression du potentiel d'état  $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi)$  telle que

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi) = g(\phi) \psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) + \psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad (1.13)$$

où  $g(\phi) \in [0, 1]$  est la fonction de dégradation de l'énergie élastique (ou des contraintes) agissant sur une partie dite positive (active)  $\psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon})$ . C'est une fonction monotone décroissante définie telle que  $g(0) = 1$  (état du matériau intact),  $g(1) = 0$  (état du matériau complètement endommagé) et  $g'(1) > 0$  pour que la force motrice de fissure  $Y(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi)$  définie en équation (1.14) soit égale à 0 lorsque le champ d'endommagement  $\phi = 1$ . Elle est souvent définie comme  $g(\phi) = (1 - \phi)^2 + \eta$ , où  $\eta \ll 1$  est un paramètre introduit pour assurer le bon conditionnement du système d'équations. Les autres fonctions de dégradation énergétique sont énumérées dans le travail de synthèse de [Wu et al. 2020a]. Dans l'équation (1.13),  $\psi_0^\pm(\boldsymbol{\varepsilon})$  représentent les parties positive et négative de la fonction de densité d'énergie de déformation élastique initiale (non endommagée)  $\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon})$  introduite en équation (1.12).

En dérivant le potentiel d'état (1.13) par rapport aux variables internes  $\phi$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , nous obtenons les deux variables d'état suivantes :

$$Y(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi) = -\frac{\partial \psi}{\partial \phi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi) = -g'(\phi) \psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad (1.14)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi) = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi) = g(\phi) \boldsymbol{\sigma}_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{\sigma}_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad (1.15)$$

avec  $Y(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi)$  la force motrice de fissure qui pilote l'évolution du champ de phase  $\phi$ , et  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi)$  le tenseur des contraintes de *Cauchy* endommagé. En dérivant une nouvelle fois le tenseur  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi)$  défini en (1.15) par rapport à  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , nous obtenons le tenseur d'élasticité endommagé du quatrième ordre  $\mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi)$  défini comme

$$\mathbb{C}(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2}(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi) = g(\phi) \mathbb{C}_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbb{C}_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (1.16)$$

Cette asymétrie en traction-compression du potentiel d'état (1.13) constitue l'un des principaux enjeux des modèles de champ de phase pour simuler la rupture (quasi-)fragile de matériaux élastiques.

Dans ce contexte, différentes décompositions asymétriques en traction-compression de la fonction de densité d'énergie de déformation élastique  $\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon})$  ont été proposées dans la littérature. Un cadre variationnel unifié basé sur la *Théorie des déformations structurées* de [Del Piero et Owen 1993] a été proposé dans [Freddi et Royer-Carfagni 2010, Li et al. 2016] et permet de dériver plusieurs modèles existants d'asymétrie en traction-compression.

Dans la littérature, on distingue généralement les décompositions (*splits* en anglais) isotrope (symétrique) et anisotropes (asymétriques). Une décomposition dite isotrope est habituellement associée à un matériau où l'ensemble de la densité d'énergie élastique  $\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon})$  est endommagée, tandis qu'une décomposition dite anisotrope ne considère qu'une partie endommagée de cette densité. Dans ce contexte, la notion de décomposition isotrope ne s'applique que pour le modèle de Bourdin introduit en section 3.1. Par conséquent, dans notre travail nous n'utiliserons pas cette terminologie et nous ferons la distinction entre les décompositions applicables uniquement aux matériaux isotropes et celles applicables aux matériaux anisotropes (tels que le bois).

Les modèles de décomposition considérés dans cette thèse sont présentés dans les sections 3.1, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 et 3.8. Chaque modèle sera examiné en précisant la décomposition considérée avec les parties positive (ou active) et négative (ou inactive)  $\psi_0^\pm(\boldsymbol{\varepsilon})$  de la densité d'énergie élastique non endommagée  $\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon})$ , le tenseur des contraintes endommagé  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi)$  et les parties positive et négative  $\mathbb{C}_0^\pm$  du tenseur d'élasticité non endommagé  $\mathbb{C}_0$ .

Tous les modèles de décomposition disponibles dans la littérature ne sont pas abordés dans ce document ; cependant, un inventaire non exhaustif de ces décompositions est fourni en section 3.9.

### 3.1 Modèle de Bourdin

Dans le modèle standard de [Bourdin et al. 2000], aucune séparation traction-compression du potentiel d'état (1.13) n'est considérée, ce qui permet de l'appliquer à toutes les classes de symétrie élastique.

Les parties positive/active (endommagée) et négative/inactive (non endommagée) de la densité d'énergie élastique sont respectivement définies par

$$\psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0. \quad (1.17)$$

Le tenseur des contraintes endommagé est donné par

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi) = g(\phi) \boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{\varepsilon}) = g(\phi) \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.18)$$

Enfin, les parties positive/active (endommagée) et négative/inactive (non endommagée) du tenseur d'élasticité s'écrivent respectivement

$$\mathbb{C}_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbb{C}_0 \quad \text{et} \quad \mathbb{C}_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}. \quad (1.19)$$

Comme illustré sur la Figure 1.6 pour l'essai de cisaillement considéré en section 6.1, ce modèle peut conduire à des trajectoires de fissures irréalistes dans des zones soumises en compression.

### 3.2 Décomposition déviatorique de Lancioni pour les matériaux isotropes

Dans le modèle introduit dans [Lancioni et Royer-Carfagni 2009], la décomposition du potentiel d'état est basée sur la décomposition du tenseur des déformations linéarisé  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en ses parties sphérique (ou volumétrique)  $\boldsymbol{\varepsilon}_S$  et déviatorique  $\boldsymbol{\varepsilon}_D$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_S(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{d} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_D(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_S(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (1.20)$$

Les projecteurs permettant d'obtenir la partie sphérique  $\boldsymbol{\varepsilon}_S$  et la partie déviatorique  $\boldsymbol{\varepsilon}_D$  de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sont respectivement définis par

$$\mathbb{P}_S = \frac{1}{d} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_D = \mathbb{I} - \mathbb{P}_S, \quad (1.21)$$

tels que

$$\boldsymbol{\varepsilon}_S = \mathbb{P}_S : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_D = \mathbb{P}_D : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.22)$$

La construction de ces projecteurs est donnée dans l'implémentation numérique en section 1 de l'Annexe A. Cette décomposition en parties sphérique-déviatorique est orthogonale au sens du produit scalaire associé à la norme de Frobenius  $\boldsymbol{\varepsilon}_S : \boldsymbol{\varepsilon}_D = \boldsymbol{\varepsilon}_D : \boldsymbol{\varepsilon}_S = 0$ . Dans ce modèle, les parties positive/active (endommagée) et négative/inactive (non endommagée) de la densité d'énergie élastique sont définies par

$$\psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mu_0 \boldsymbol{\varepsilon}_D : \boldsymbol{\varepsilon}_D \quad \text{et} \quad \psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{K_0}{2} d \boldsymbol{\varepsilon}_S : \boldsymbol{\varepsilon}_S = \frac{K_0}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})^2, \quad (1.23)$$

où  $K_0 = \lambda_0 + 2\mu_0/d$  désigne le module de compressibilité hydrostatique. Le tenseur des contraintes endommagé est donné par

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi) = g(\phi) 2\mu_0 \boldsymbol{\varepsilon}_D + K_0 \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}. \quad (1.24)$$

Enfin, les parties positive/active (endommagée) et négative/inactive (non endommagée) du tenseur d'élasticité s'écrivent respectivement

$$\mathbb{C}_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = 2\mu_0 \mathbb{P}_D \quad \text{et} \quad \mathbb{C}_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = K_0 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}. \quad (1.25)$$

La forme matricielle des tenseurs  $\mathbb{C}_0^\pm(\boldsymbol{\varepsilon})$  est donnée en équation (A.36) de l'Annexe A.

Ce modèle permet de représenter la croissance de fissures en cisaillement (mode II), mais autorise cependant l'apparition de fissures dans des zones soumises en compression, car l'évolution du champ de phase est pilotée par la partie déviatorique  $\boldsymbol{\varepsilon}_D$  du tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

### 3.3 Décomposition sphérique-déviatorique de Amor pour les matériaux isotropes

Pour éviter la fissuration dans les zones en compression, la décomposition en parties déviatorique-sphérique introduite dans [Amor et al. 2009] permet d'endommager les zones soumises en cisaillement et en tension. Les parties positive/active (endommagée) et négative/inactive (non endommagée) de la densité d'énergie élastique sont respectivement définies par

$$\psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{K_0}{2} \langle \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_+^2 + \mu_0 \boldsymbol{\varepsilon}_D : \boldsymbol{\varepsilon}_D \quad \text{et} \quad \psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{K_0}{2} \langle \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_-^2. \quad (1.26)$$

Le tenseur des contraintes endommagé est donné par

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi) = g(\phi) (K_0 \langle \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_+ \mathbf{I} + 2\mu_0 \boldsymbol{\varepsilon}_D) + K_0 \langle \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_- \mathbf{I}. \quad (1.27)$$

Enfin, les parties positive/active (endommagée) et négative/inactive (non endommagée) du tenseur d'élasticité s'écrivent respectivement

$$\mathbb{C}_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = K_0 R^+(\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu_0 \mathbb{P}_D \quad \text{et} \quad \mathbb{C}_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = K_0 R^-(\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad (1.28)$$

où  $R^\pm$  désigne une version signée de la fonction de Heaviside. La forme matricielle des tenseurs  $\mathbb{C}_0^\pm(\boldsymbol{\varepsilon})$  est donnée en équation (A.37) de l'Annexe A.

Avec ce modèle, la croissance des fissures est due à des déformations de traction et de cisaillement (modes I et II), car l'évolution du champ de phase est pilotée par la partie déviatorique  $\boldsymbol{\varepsilon}_D$  et la partie volumétrique positive (en expansion)  $\langle \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_+$  du tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

### 3.4 Décomposition spectrale de Miehe pour les matériaux isotropes

Le modèle proposé dans [Miehe et al. 2010a] s'appuie sur une décomposition spectrale du tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  telle que

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^d \varepsilon_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i, \quad (1.29)$$

où  $\varepsilon_i \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^d$  sont respectivement les valeurs propres (déformations principales) et les vecteurs propres orthonormés (directions principales de déformation) de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , tels que  $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_i = \varepsilon_i \mathbf{v}_i$  et  $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$  pour  $i, j = 1, \dots, d$ . Les parties positive  $\boldsymbol{\varepsilon}^+$  et négative  $\boldsymbol{\varepsilon}^-$  du tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^+ + \boldsymbol{\varepsilon}^-$  correspondent respectivement aux déformations de traction et de compression définies par la décomposition spectrale suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\pm = \sum_{i=1}^d \langle \varepsilon_i \rangle_\pm \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i. \quad (1.30)$$

Cette décomposition est orthogonale au sens du produit scalaire associé à la norme de Frobenius  $\boldsymbol{\varepsilon}^+ : \boldsymbol{\varepsilon}^- = \boldsymbol{\varepsilon}^- : \boldsymbol{\varepsilon}^+ = 0$ . Les projecteurs  $\mathbb{P}^\pm(\boldsymbol{\varepsilon})$  permettant d'obtenir les parties positive et négative  $\boldsymbol{\varepsilon}^\pm$  de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sont définis comme

$$\mathbb{P}^\pm(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^\pm}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \text{tels que} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^\pm = \mathbb{P}^\pm(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.31)$$

Le calcul de ces projecteurs est donné dans l'implémentation numérique en section 2 de l'Annexe A. Les parties positive/active (endommagée) et négative/inactive (non endommagée) de la densité d'énergie élastique sont respectivement définies par

$$\psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\lambda_0}{2} \langle \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_+^2 + \mu_0 \boldsymbol{\varepsilon}^+ : \boldsymbol{\varepsilon}^+ \quad \text{et} \quad \psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\lambda_0}{2} \langle \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_-^2 + \mu_0 \boldsymbol{\varepsilon}^- : \boldsymbol{\varepsilon}^-. \quad (1.32)$$

Le tenseur des contraintes endommagé est donné par

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi) = g(\phi) (\lambda_0 \langle \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_+ \mathbf{I} + 2\mu_0 \boldsymbol{\varepsilon}^+) + \lambda_0 \langle \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_- \mathbf{I} + 2\mu_0 \boldsymbol{\varepsilon}^-. \quad (1.33)$$

Enfin, les parties positive/active (endommagée) et négative/inactive (non endommagée) du tenseur d'élasticité s'écrivent respectivement

$$\mathbb{C}_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \lambda_0 R^+(\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu_0 \mathbb{P}^+(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad \text{et} \quad \mathbb{C}_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = \lambda_0 R^-(\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu_0 \mathbb{P}^-(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (1.34)$$

La forme matricielle des tenseurs  $\mathbb{C}_0^\pm(\boldsymbol{\varepsilon})$  est donnée en équation (A.38) de l'Annexe A.

Avec ce modèle, la croissance des fissures est principalement due à des déformations principales positives et des déformations de traction, car l'évolution du champ de phase est pilotée par les valeurs propres positives  $\varepsilon_i > 0$  et la partie volumétrique/-sphérique positive  $\langle \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_+$  du tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Bien que ce modèle soit très largement adopté dans la littérature, il convient de souligner que contrairement aux autres décompositions considérées précédemment, ce modèle ne s'inscrit pas dans le cadre variationnel introduit dans [Freddi et Royer-Carfagni 2010, Li et al. 2016].

### 3.5 Généralisation de la décomposition spectrale des déformations **AnisotStrain**

La décomposition spectrale de Miehe pour les matériaux isotropes peut être généralisée aux matériaux anisotropes en introduisant la décomposition  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^+ + \boldsymbol{\varepsilon}^-$

en parties positive et négative  $\boldsymbol{\varepsilon}^\pm$  définies en (1.30) dans la densité d'énergie élastique initiale  $\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon})$  :

$$\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}^+ + \boldsymbol{\varepsilon}^-) : \mathbb{C}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon}^+ + \boldsymbol{\varepsilon}^-) \quad (1.35a)$$

$$= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}^+ : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^+ + \boldsymbol{\varepsilon}^+ : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^- + \boldsymbol{\varepsilon}^- : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^+ + \boldsymbol{\varepsilon}^- : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^-) \quad (1.35b)$$

$$= \frac{1}{2} (\psi_0^{++}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \psi_0^{+-}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \psi_0^{-+}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \psi_0^{--}(\boldsymbol{\varepsilon})). \quad (1.35c)$$

Contrairement aux matériaux isotropes où les termes croisés sont orthogonaux au sens du produit scalaire associé à la norme énergétique tels que  $\boldsymbol{\varepsilon}^+ : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^- = \boldsymbol{\varepsilon}^- : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^+ = \lambda_0 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^+) \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^-) + 2\mu_0 \boldsymbol{\varepsilon}^+ : \boldsymbol{\varepsilon}^- = 0$ , cette propriété n'est pas vérifiée pour les matériaux anisotropes. En effet, les termes croisés  $\psi_0^{+-}$  et  $\psi_0^{-+}$  étant non nuls, cela peut mener à différentes décompositions pour les parties positive/active (endommagée) et négative/inactive (non endommagée) de la densité d'énergie élastique comme par exemple

$$\psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \psi_0^{++} + \psi_0^{+-} + \psi_0^{-+} \quad \text{et} \quad \psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = \psi_0^{--}, \quad (1.36a)$$

$$\psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \psi_0^{++} + \psi_0^{+-} \quad \text{et} \quad \psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = \psi_0^{--} + \psi_0^{-+}, \quad (1.36b)$$

$$\psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \psi_0^{++} + \psi_0^{-+} \quad \text{et} \quad \psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = \psi_0^{--} + \psi_0^{+-}, \quad (1.36c)$$

$$\psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \psi_0^{++} \quad \text{et} \quad \psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = \psi_0^{--} + \psi_0^{+-} + \psi_0^{-+}. \quad (1.36d)$$

Pour simplifier la notation, la dépendance explicite des densités d'énergie élastique  $\psi_0^{\pm\pm}$  à  $\boldsymbol{\varepsilon}$  a été omise dans les équations. En considérant la décomposition (1.36a), les parties positive/active (endommagée) et négative/inactive (non endommagée) du tenseur d'élasticité s'écrivent

$$\mathbb{C}_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbb{C}_0^{++}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbb{C}_0^{+-}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbb{C}_0^{-+}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad \text{et} \quad \mathbb{C}_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbb{C}_0^{--}(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad (1.37)$$

où les tenseurs  $\mathbb{C}_0^{++}(\boldsymbol{\varepsilon})$ ,  $\mathbb{C}_0^{+-}(\boldsymbol{\varepsilon})$ ,  $\mathbb{C}_0^{-+}(\boldsymbol{\varepsilon})$  et  $\mathbb{C}_0^{--}(\boldsymbol{\varepsilon})$  sont définis comme

$$\mathbb{C}_0^{\pm\pm}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbb{P}^\pm(\boldsymbol{\varepsilon}) : \mathbb{C}_0 : \mathbb{P}^\pm(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (1.38)$$

### 3.6 Généralisation de la décomposition spectrale des contraintes [AnisotStress](#)

La décomposition spectrale de [Miehe](#) pour les matériaux isotropes peut être généralisée aux matériaux anisotropes en considérant la décomposition spectrale du tenseur des contraintes non endommagé  $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}$  telle que

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \sum_{i=1}^d \sigma_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i, \quad (1.39)$$

où  $\sigma_i \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^d$  sont respectivement les valeurs propres (contraintes principales) et les vecteurs propres orthonormés (directions principales de contrainte) de  $\boldsymbol{\sigma}_0$  tels que  $\boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i$  et  $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$  pour  $i, j = 1, \dots, d$ . Les parties positive  $\boldsymbol{\sigma}_0^+$  et

négative  $\sigma_0^-$  du tenseur des contraintes  $\sigma_0 = \sigma_0^+ + \sigma_0^-$  correspondent respectivement aux contraintes de traction et de compression définies par la décomposition spectrale suivante :

$$\sigma_0^\pm = \sum_{i=1}^d \langle \sigma_i \rangle_\pm \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i. \quad (1.40)$$

Cette décomposition est orthogonale au sens du produit scalaire associé à la norme de Frobenius  $\sigma_0^+ : \sigma_0^- = \sigma_0^- : \sigma_0^+ = 0$ . Les projecteurs  $\mathbb{P}^\pm(\sigma_0)$  permettant d'obtenir les parties positive et négative  $\sigma_0^\pm$  de  $\sigma_0$  sont définis comme

$$\mathbb{P}^\pm(\sigma_0) = \frac{\partial \sigma_0^\pm}{\partial \sigma_0}, \quad \text{tels que} \quad \sigma_0^\pm = \mathbb{P}^\pm(\sigma_0) : \sigma_0 = \mathbb{P}^\pm(\sigma_0) : (\mathbb{C}_0 : \varepsilon) \quad (1.41)$$

et sont donnés dans l'implémentation numérique en section 2 de l'Annexe A.

Les parties positive  $\sigma_0^+$  et négative  $\sigma_0^-$  du tenseur des contraintes  $\sigma_0$  sont utilisées pour décomposer la densité d'énergie élastique initiale  $\psi_0(\sigma_0)$  comme

$$\psi_0(\sigma_0) = \frac{1}{2} (\sigma_0^+ + \sigma_0^-) : \mathbb{S}_0 : (\sigma_0^+ + \sigma_0^-) \quad (1.42a)$$

$$= \frac{1}{2} (\sigma_0^+ : \mathbb{S}_0 : \sigma_0^+ + \sigma_0^+ : \mathbb{S}_0 : \sigma_0^- + \sigma_0^- : \mathbb{S}_0 : \sigma_0^+ + \sigma_0^- : \mathbb{S}_0 : \sigma_0^-) \quad (1.42b)$$

$$= \frac{1}{2} (\psi_0^{++}(\sigma_0) + \psi_0^{+-}(\sigma_0) + \psi_0^{-+}(\sigma_0) + \psi_0^{--}(\sigma_0)). \quad (1.42c)$$

En effectuant le même choix que pour l'équation (1.36a), on peut écrire les parties positive/active (endommagée) et négative/inactive (non endommagée) du tenseur d'élasticité comme

$$\mathbb{C}_0^+(\sigma_0) = \mathbb{C}_0^{++}(\sigma_0) + \mathbb{C}_0^{+-}(\sigma_0) + \mathbb{C}_0^{-+}(\sigma_0) \quad \text{et} \quad \mathbb{C}_0^-(\sigma_0) = \mathbb{C}_0^{--}(\sigma_0), \quad (1.43)$$

où les tenseurs  $\mathbb{C}_0^{++}(\sigma_0)$ ,  $\mathbb{C}_0^{+-}(\sigma_0)$ ,  $\mathbb{C}_0^{-+}(\sigma_0)$  et  $\mathbb{C}_0^{--}(\sigma_0)$  sont définis comme

$$\mathbb{C}_0^{\pm\pm}(\sigma_0) = (\mathbb{P}^\pm(\sigma_0) : \mathbb{C}_0) : \mathbb{S}_0 : (\mathbb{P}^\pm(\sigma_0) : \mathbb{C}_0). \quad (1.44)$$

### 3.7 Décomposition spectrale de He

Comme pour la décomposition spectrale de Miehe, ce modèle repose sur une décomposition orthogonale du tenseur des déformations en parties positive et négative [He et Shao 2019, Nguyen et al. 2020, Ziaei-Rad et al. 2023]. Toutefois, elle est effectuée de telle sorte que la décomposition des déformations soit orthogonale au sens du produit scalaire associé à la norme énergétique, et non à la norme de Frobenius :

$$\varepsilon^+ : \mathbb{C}_0 : \varepsilon^- = \varepsilon^- : \mathbb{C}_0 : \varepsilon^+ = 0, \quad (1.45)$$

où  $\mathbb{C}_0$  agit comme un tenseur métrique [Li et al. 2016, He 2018, He et Shao 2019, Ziaei-Rad et al. 2023]. La décomposition de  $\varepsilon$  est obtenue par l'introduction d'un tenseur auxiliaire de déformation transformé du second ordre  $\tilde{\varepsilon}$  défini par

$$\tilde{\varepsilon} = \mathbb{C}_0^{1/2} : \varepsilon, \quad (1.46)$$

où  $\mathbb{C}_0^{1/2}$  est la racine carrée du tenseur de rigidité élastique  $\mathbb{C}_0$  (qui possède les symétries majeures et mineures classiques et est défini positif) définie comme

$$\mathbb{C}_0^{1/2} = \sum_{i=1}^D \sqrt{\Lambda_i} \boldsymbol{\omega}_i \otimes \boldsymbol{\omega}_i, \quad \text{à partir de} \quad \mathbb{C}_0 = \sum_{i=1}^D \Lambda_i \boldsymbol{\omega}_i \otimes \boldsymbol{\omega}_i, \quad (1.47)$$

où  $\Lambda_i > 0$  et  $\boldsymbol{\omega}_i$  désignent respectivement les valeurs propres et les tenseurs propres orthonormés de  $\mathbb{C}_0$  tels que  $\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\omega}_i = \Lambda_i \boldsymbol{\omega}_i$  et  $\boldsymbol{\omega}_i : \boldsymbol{\omega}_j = \delta_{ij}$ , pour  $i, j = 1, \dots, D$  avec  $D = d(d+1)/2$ , soit  $D = 3$  pour  $d = 2$ .

Comme pour la décomposition du tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  considérée dans [Miehe et al. 2010a], le tenseur des déformations transformé  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  peut être décomposé en deux parties positive-négative  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^\pm$  telles que  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^+ + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^-$  et qui vérifient la condition d'orthogonalité au sens du produit scalaire associé à la norme de Frobenius  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^+ : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^- = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^- : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^+ = 0$ . Les parties positive et négative  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^\pm$  de  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  sont définies par la décomposition spectrale suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^\pm = \sum_{i=1}^d \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i \rangle_\pm \tilde{\boldsymbol{v}}_i \otimes \tilde{\boldsymbol{v}}_i, \quad (1.48)$$

où  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i \in \mathbb{R}$  et  $\tilde{\boldsymbol{v}}_i \in \mathbb{R}^d$  désignent respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres orthonormés de  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  tels que  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_i = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i \tilde{\boldsymbol{v}}_i$  et  $\tilde{\boldsymbol{v}}_i \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_j = \delta_{ij}$  pour  $i, j = 1, \dots, d$ . Les projecteurs  $\tilde{\mathbb{P}}^\pm(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})$  permettant d'obtenir les parties positive et négative  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^\pm$  de  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  sont définis comme

$$\tilde{\mathbb{P}}^\pm(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^\pm}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \quad \text{tels que} \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^\pm = \tilde{\mathbb{P}}^\pm(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1.49)$$

et sont donnés dans l'implémentation numérique en section 2 de l'Annexe A. Les parties positive-négative  $\boldsymbol{\varepsilon}^\pm$  sont déterminées à partir de celles  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^\pm$  du tenseur des déformations transformé  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  comme

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\pm = \mathbb{C}_0^{-1/2} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^\pm, \quad (1.50)$$

où  $\mathbb{C}_0^{-1/2}$  est la racine carrée du tenseur de souplesse  $\mathbb{C}_0^{-1} = \mathbb{S}_0$ , qui peut être calculée comme  $\mathbb{C}_0^{-1/2} = \sum_{i=1}^D (1/\sqrt{\Lambda_i}) \boldsymbol{\omega}_i \otimes \boldsymbol{\omega}_i$ . Finalement, les parties positive-négative  $\boldsymbol{\varepsilon}^\pm$  du tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  s'expriment comme

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\pm = \mathbb{P}^\pm(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{avec} \quad \mathbb{P}^\pm(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbb{C}_0^{-1/2} : (\tilde{\mathbb{P}}^\pm(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \mathbb{C}_0^{1/2}). \quad (1.51)$$

Ainsi, les parties positive/active (endommagée) et négative/inactive (non endommagée) de la densité d'énergie élastique sont définies par

$$\psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^+ : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^+ \quad \text{et} \quad \psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^- : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^- \quad (1.52a)$$

$$= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.52b)$$

Le tenseur des contraintes endommagé est donné par

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi) = g(\phi) (\mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^+) + \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^+, \quad (1.53a)$$

$$= g(\phi) (\mathbb{C}_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbb{C}_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.53b)$$

Enfin, les parties positive/active (endommagée) et négative/inactive (non endommagée) du tenseur d'élasticité s'écrivent respectivement

$$\mathbb{C}_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbb{C}_0 : \mathbb{P}^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbb{C}_0^{1/2} : (\tilde{\mathbb{P}}^+(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \mathbb{C}_0^{1/2}), \quad (1.54a)$$

$$\mathbb{C}_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbb{C}_0 : \mathbb{P}^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbb{C}_0^{1/2} : (\tilde{\mathbb{P}}^-(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \mathbb{C}_0^{1/2}). \quad (1.54b)$$

La forme matricielle des tenseurs  $\mathbb{C}_0^\pm(\boldsymbol{\varepsilon})$  est donnée en équation (A.39) de l'Annexe A.

Cette décomposition peut être interprétée comme une généralisation de la décomposition du tenseur des déformations proposée dans [Freddi et Royer-Carfagni 2010] aux matériaux élastiques anisotropes. Notons que les travaux de [Ziaei-Rad et al. 2023] présentent des formulations généralisées du modèle volumétrique-déviatorique de [Amor et al. 2009] et du modèle sans traction de [Freddi et Royer-Carfagni 2010], en se basant sur la décomposition proposée dans [He et Shao 2019] afin d'assurer la condition d'orthogonalité au sens de la norme énergétique définie en équation (1.45).

### 3.8 Décomposition spectrale en contraintes de Zhang

Le modèle proposé dans [Zhang et al. 2020] s'appuie sur une décomposition spectrale du tenseur des contraintes non endommagé  $\boldsymbol{\sigma}_0$  conformément à l'équation (1.39). Les parties positive  $\boldsymbol{\sigma}_0^+$  et négative  $\boldsymbol{\sigma}_0^-$  du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0^+ + \boldsymbol{\sigma}_0^-$  correspondent respectivement aux contraintes de traction et de compression définies par la décomposition spectrale telle que décrite dans l'équation (1.40).

Les parties positive/active (endommagée) et négative/inactive (non endommagée) de la densité d'énergie élastique sont respectivement définies par

$$\psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.55)$$

Le tenseur des contraintes endommagé est donné par

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi) = g(\phi) \boldsymbol{\sigma}_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{\sigma}_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (1.56)$$

Enfin, les parties positive/active (endommagée) et négative/inactive (non endommagée) du tenseur d'élasticité s'écrivent respectivement

$$\mathbb{C}_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbb{P}^+(\boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{\varepsilon})) : \mathbb{C}_0 \quad \text{et} \quad \mathbb{C}_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbb{P}^-(\boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{\varepsilon})) : \mathbb{C}_0. \quad (1.57)$$

La forme matricielle des tenseurs  $\mathbb{C}_0^\pm(\boldsymbol{\varepsilon})$  est donnée en équation (A.40) de l'Annexe A.

Avec ce modèle, des fissures peuvent apparaître et se propager uniquement dans les zones en traction, car l'évolution du champ de phase est pilotée par les contraintes principales positives  $\sigma_i > 0$ .

### 3.9 Modèles alternatifs de décomposition pour les matériaux élastiques isotropes et anisotropes

Cette section présente un résumé non exhaustif des travaux existants sur la décomposition du potentiel d'état  $\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon})$ . Pour obtenir une vue d'ensemble plus complète des approches existantes, on pourra consulter les travaux de synthèse disponibles dans la littérature, notamment ceux de [Li et al. 2016], [Wu et al. 2020a] et [Liu et al. 2021]. Dans [Liu et al. 2021], les approches sont classées en deux catégories : (i) les décompositions qui prennent en compte l'orientation de la fissure et (ii) celles qui ne la considèrent pas.

Il est important de noter que la majorité des modèles proposés dans la littérature ont été développés uniquement dans le cadre des matériaux élastiques isotropes, et ne peuvent donc pas être utilisés pour modéliser la fissuration dans les matériaux anisotropes comme le bois. Nous commencerons par examiner les modèles qui ne tiennent pas compte de l'orientation de la fissure en section 3.9.1, avant d'aborder ceux qui la prennent en considération en section 3.9.2.

#### 3.9.1 Modèles ne prenant pas en compte l'orientation de la fissure

Le modèle proposé dans [Wu et al. 2020b] pour les matériaux élastiques isotropes repose sur une décomposition spectrale orthogonale des contraintes non endommagées  $\boldsymbol{\sigma}_0$  en deux parties positive  $\boldsymbol{\sigma}_0^+$  et négative  $\boldsymbol{\sigma}_0^-$ , telles que  $\boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0^+ + \boldsymbol{\sigma}_0^-$  avec la condition d'orthogonalité  $\boldsymbol{\sigma}_0^+ : \mathbb{S}_0 : \boldsymbol{\sigma}_0^- = \boldsymbol{\sigma}_0^- : \mathbb{S}_0 : \boldsymbol{\sigma}_0^+ = 0$  [Wu et Cervera 2018]. Une extension prenant en compte l'orientation de la fissure est également proposée (voir Remarque 3.3 dans [Wu et al. 2020a]).

Les travaux de [Dijk et al. 2020] ont généralisé les modèles de décomposition spectrale de [Miehe et al. 2010a] et sphérique-déviatorique de [Amor et al. 2009] aux matériaux orthotropes. Une nouvelle méthode de décomposition de l'énergie élastique qui s'appuie sur la décomposition spectrale du tenseur d'élasticité  $\mathbb{C}_0$  est également proposée dans le cadre des matériaux anisotropes.

[De Lorenzis et Maurini 2022] proposent un modèle de décomposition de l'énergie élastique permettant une calibration directe des surfaces de rupture multi-axiales de type Drucker-Prager<sup>3</sup> à travers l'introduction d'un paramètre supplémentaire, et englobant le modèle volumétrique-déviatorique de [Amor et al. 2009] et le modèle sans traction de [Freddi et Royer-Carfagni 2010] comme cas particuliers.

[Vicentini et al. 2024] introduisent, pour les matériaux élastiques isotropes, une décomposition de l'énergie élastique qui améliore le modèle volumétrique-déviatorique de [Amor et al. 2009] et permet, par l'ajout d'un paramètre supplémentaire, de moduler les contributions de traction et de compression dans la densité d'énergie élastique

---

3. Ici, le modèle de rupture de type Drucker-Prager est inspiré de la loi de frottement de Coulomb, pour modéliser la rupture par compression dans les roches et les bétons [De Lorenzis et Maurini 2022].

$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi)$ . Cette approche permet de modéliser l’initiation et la propagation de fissures sous des états de contraintes multi-axiales en tenant compte du durcissement des déformations, de l’adoucissement des contraintes, de la calibration indépendante des contraintes à rupture en traction et en compression, et des contraintes résiduelles dues au contact sans frottement des lèvres/surfaces de fissure.

### 3.9.2 Modèles prenant en compte l’orientation de la fissure

[Strobl et Seelig 2015, Strobl et Seelig 2016] ont remis en question les décompositions spectrale et volumétrique-déviatorique en raison de leur incapacité à respecter les conditions aux limites de fissure<sup>4</sup>. Pour les matériaux isotropes, ils ont proposé des relations constitutives qui assurent la vérification des conditions aux limites sur des surfaces de fissures régularisées en tenant compte du vecteur normal à la surface de fissure calculé à partir du gradient du champ de phase. Cependant, bien que cette méthode soit efficace pour des échantillons initialement fissurés, elle peut conduire à des orientations de fissure irréalistes au niveau de la pointe de fissure et dans les éléments du maillage EF complètement endommagés [Steinke et Kaliske 2019].

Pour aborder cette problématique, [Steinke et Kaliske 2019] ont élaboré un modèle similaire à celui de [Strobl et Seelig 2016] qui utilise une décomposition directionnelle des contraintes dans un système de coordonnées associé à la fissure. Ce système est établi en utilisant un vecteur d’orientation perpendiculaire à la surface de fissure déterminé à partir de la direction de la contrainte principale maximale (contrainte équivalente de Rankine), complété par deux vecteurs tangentiels situés dans le plan de la fissure. Bien que cette décomposition ait été initialement mise en œuvre numériquement pour des matériaux isotropes, elle est également applicable aux matériaux anisotropes.

[Hu et al. 2020] ont développé une nouvelle méthode de décomposition du tenseur des contraintes qui traite la dégradation comme un problème de contact, incorporant une condition aux limites de fissure exempte de contraintes de traction normale à la surface de fissure et de contraintes tangentielles de cisaillement transverse en négligeant le frottement entre les lèvres/surfaces de la fissure. Dans ce travail, cette décomposition est appliquée uniquement dans les zones endommagées pour lesquelles le champ de phase  $\phi$  dépasse un certain seuil (typiquement  $\phi \geq 0.6$  ou  $\phi \geq 0.8$ ), tandis que la décomposition spectrale de Miehe est utilisée ailleurs pour piloter l’évolution du champ de phase  $\phi$ .

[Liu et al. 2021] ont proposé un modèle de décomposition anisotrope construit en utilisant une méthode d’homogénéisation similaire à celle développée dans [Storm et al. 2020] avec un volume élémentaire représentatif contenant une fissure plane en

---

4. Les conditions aux limites de fissure assurent que la contrainte normale positive perpendiculaire à une surface de fissure et les contraintes de cisaillement transverse le long des surfaces de fissure en contact sans frottement sont nulles.

son centre, afin d'établir un modèle constitutif macroscopique basé sur le comportement de la microstructure fissurée.

[Pech et al. 2022a] ont proposé un modèle hybride multi-champ de phase pour simuler la rupture cohésive dans des matériaux orthotropes, en particulier le bois. Le modèle utilise des variables de champ de phase multiples, comme celles introduites dans les travaux de [Nguyen et al. 2017, Bleyer et Alessi 2018] ou dans l'équation (1.10) de la section 2.2. De plus, ils considèrent une généralisation du modèle de décomposition directionnelle basée sur les contraintes de [Steinke et Kaliske 2019] aux matériaux anisotropes pour définir la force motrice de fissure dans l'équation d'évolution du champ de phase, combinée au modèle de [Hu et al. 2020] pour la définition de l'équation constitutive contrainte-déformation afin de respecter les conditions de bord libre de contraintes et les conditions de contact sans frottement le long des surfaces de fissure régularisées.

## 4 Formulation forte

Les équations gouvernant l'évolution du champ de déplacement  $\mathbf{u}$  et du champ de phase  $\phi$  sous des conditions de chargement quasi-statiques sont obtenues en prenant la variation première (dérivée fonctionnelle) de l'énergie totale  $\mathcal{E}(\mathbf{u}, \phi)$  définie en équation (1.1), pour les variations  $(\delta\mathbf{u}, \delta\phi)$  de  $(\mathbf{u}, \phi)$ . L'application du théorème de la divergence de Gauss, associée à la condition de stationnarité  $\delta\mathcal{E}(\mathbf{u}, \phi) = 0$  pour  $\delta\phi > 0$  et  $\delta\mathcal{E}(\mathbf{u}, \phi) > 0$  pour  $\delta\phi = 0$  et pour  $\delta\mathbf{u}$  vérifiant les conditions de Dirichlet homogènes  $\delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$  sur  $\partial\Omega_u$ , conduit au système couplé d'équations suivant :

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \phi) = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.58a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \phi) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{sur } \partial\Omega_t, \quad (1.58b)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{sur } \partial\Omega_u, \quad (1.58c)$$

$$-\nabla \cdot \left( \frac{2G_c \ell}{c_w} \nabla \phi \right) + \frac{G_c}{c_w \ell} w'(\phi) = Y(\mathbf{u}, \phi) \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.59a)$$

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (1.59b)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \phi)$  est le tenseur des contraintes endommagé défini en (1.15),  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal unitaire sortant de  $\partial\Omega$  et  $Y(\mathbf{u}, \phi)$  est la force motrice de fissure définie en (1.14).

Ici, il est important de noter que la relation constitutive contrainte-déformation (1.15) qui définit le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \phi)$  est fortement non-linéaire en raison de la décomposition asymétrique en traction-compression de la fonction de densité d'énergie de déformation élastique (1.13). Pour éviter de résoudre un sous-problème mécanique en déplacement fortement non-linéaire à chaque étape de chargement <sup>5</sup>, on

5. Ici on se place dans le cadre du solveur étagé introduit en section 5.1.

utilise un algorithme de décomposition décalé proposé dans [Nguyen et al. 2015] et utilisé dans [Nguyen et al. 2020, Vu et al. 2022], qui consiste à calculer les opérateurs de projection introduits en section 3 à partir du champ de déformations (ou de contraintes) solution calculé à l'itération de chargement précédente. Le sous-problème mécanique qui en résulte devient un simple problème d'élasticité linéaire (avec une relation constitutive contrainte-déformation linéaire). Ainsi, le système peut être résolu directement sans l'utilisation d'un schéma itératif coûteux de type Newton-Raphson, mais nécessite toutefois l'utilisation de pas de chargement suffisamment faibles. Une autre approche qualifiée d'hybride et introduite dans [Ambati et al. 2015] préserve la linéarité de la relation de comportement définie par (1.18) pour le modèle de Bourdin en considérant uniquement le modèle de décomposition de Miehe dans le problème d'évolution du champ d'endommagement, mais elle ne sera pas mise en œuvre dans ce travail.

Pour le problème couplé, les équations aux dérivées partielles (1.58a) et (1.59a) sont respectivement les équations d'équilibre locales du problème de mécanique et d'évolution de l'endommagement. Les systèmes d'équations (1.58) et (1.59) sont complétés par les contraintes d'irréversibilité et de borne du champ de phase (1.2) et constituent un problème non-linéaire couplé endommagement-mécanique formulé en  $(\mathbf{u}, \phi)$ . Les techniques permettant de traiter la condition d'irréversibilité du champ d'endommagement sont abordées en section 5.2 et les techniques de résolution en section 5.1.

L'équation d'équilibre du problème d'endommagement (1.59a) fait appel à la fonction géométrique de fissure  $w(\phi)$  et la constante de normalisation  $c_w$  introduites en section 2. Sous l'hypothèse de propriétés de fissuration  $G_c$  et  $\ell$  homogènes, l'équation d'évolution du champ de phase  $\phi$  peut être reformulée comme un problème linéaire de diffusion-réaction de la forme

$$-k_w \Delta \phi + r_w \phi = f_w, \quad (1.60)$$

où  $\Delta \phi = \nabla \cdot \nabla \phi$  désigne le laplacien de  $\phi$ ,  $k_w \in \mathbb{R}^+$  est un paramètre de diffusion,  $r_w \in \mathbb{R}^+$  est un paramètre de réaction et  $f_w \in \mathbb{R}^+$  est un terme source. En utilisant les modèles de régularisation introduits en section 2, il est possible de reformuler l'équation forte d'équilibre du problème d'endommagement pour le modèle AT1 comme

$$-\frac{3}{4} G_c \ell \Delta \phi + 2 \psi_0^+(\mathbf{u}) \phi = \left\langle 2 \psi_0^+(\mathbf{u}) - \frac{3 G_c}{8 \ell} \right\rangle_+ \quad (1.61)$$

et pour le modèle AT2 comme

$$-G_c \ell \Delta \phi + \left( 2 \psi_0^+(\mathbf{u}) + \frac{G_c}{\ell} \right) \phi = 2 \psi_0^+(\mathbf{u}). \quad (1.62)$$

D'après l'équation (1.61), on constate que pour le modèle AT1 le champ de phase  $\phi$  pourra évoluer dès lors que  $\psi_0^+(\mathbf{u}) > 3 G_c / (16 \ell)$ , assurant ainsi un comportement élastique linéaire avant l'apparition de l'endommagement. En revanche, d'après

l'équation (1.62), on voit que pour le modèle AT2 le champ de phase  $\phi$  évoluera et la fissure régularisée commencera à se former dès la première itération de chargement car  $\psi_0^+(\mathbf{u}) > 0$ .

## 5 Résolution et implémentation numérique

La résolution du problème couplé endommagement-mécanique pour la fissuration fragile présente, dans le cadre de la MEF, des défis algorithmiques importants qui peuvent être regroupés en trois problématiques [De Lorenzis et Gerasimov 2020] :

- la non-convexité de la fonctionnelle d'énergie totale  $\mathcal{E}(\mathbf{u}, \phi)$  définie en équation (1.1) par rapport aux arguments de déplacement  $\mathbf{u}$  et d'endommagement  $\phi$  ;
- la contrainte d'irréversibilité pour l'évolution de la fissure  $\dot{\phi} \geq 0$  ;
- les coûts de calculs importants liés à une longueur de régularisation  $\ell$  choisie suffisamment petite par rapport à la taille du domaine d'étude, conduisant à des maillages pouvant parfois atteindre plusieurs millions ou milliards de degrés de liberté.

Les techniques numériques permettant la résolution du problème de minimisation de la fonctionnelle non convexe  $\mathcal{E}(\mathbf{u}, \phi)$  sont abordées en section 5.1. Les techniques permettant de traiter l'irréversibilité du processus d'endommagement sont introduites en section 5.2.

Dans cette thèse, nous n'aborderons pas les techniques d'adaptation de maillage ni les méthodes de calcul haute performance associées à la troisième problématique. Pour obtenir davantage d'informations sur les techniques de raffinement et d'adaptation de maillage, on pourra consulter les travaux de synthèse de [De Lorenzis et Gerasimov 2020, Wu et al. 2020a]. Pour plus d'informations sur les outils de calcul haute performance pour les modèles d'endommagement par champ de phase, on pourra se référer aux études récentes [Ziaei-Rad et Shen 2016, Liu et al. 2022, Hao et Shen 2024, Rannou et Bovet 2024].

### 5.1 Solveurs

Parmi les différents solveurs/algorithmes existants pour résoudre le problème couplé non-linéaire en  $(\mathbf{u}, \phi)$ , on distingue principalement les solveurs (i) monolithique et (ii) étagé (ou alterné). Plusieurs algorithmes itératifs relevant de ces deux catégories ont été développés et sont documentés dans [Wu et al. 2020a, Wick 2020].

Le solveur *monolithique* résout les deux champs inconnus  $\mathbf{u}$  et  $\phi$  simultanément, mais souffre, dans le cadre de l'algorithme itératif standard de Newton-Raphson, de problèmes de convergence et de robustesse liés au manque de convexité de  $\mathcal{E}(\mathbf{u}, \phi)$ . Diverses méthodes ont été développées pour pallier ces problèmes de convergence et ainsi améliorer la robustesse des solveurs monolithiques [Heister et al. 2015, Wick 2017b, Gerasimov et De Lorenzis 2016, May et al. 2016, Singh et al. 2016], mais leurs

efficacités et leur adaptabilité ne sont pas toujours garanties pour tous les types de problèmes.

Le solveur *étagé* (ou *staggered solver* en anglais) également connu sous le nom d’algorithme de minimisation alternée [Bourdin et al. 2000, Bourdin et al. 2008, Amor et al. 2009, Miehe et al. 2010a, Wu et al. 2020a] permet d’exploiter la bi-convexité de la fonctionnelle  $\mathcal{E}(\mathbf{u}, \phi)$  pour le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  et le champ de phase  $\phi$  pris séparément. Ainsi, le problème couplé non-linéaire en  $(\mathbf{u}, \phi)$  est divisé en deux sous-problèmes : (i) un problème de mécanique en élasticité non-linéaire<sup>6</sup> (1.58) pour calculer le champ de déplacement solution  $\mathbf{u}$  pour un champ de phase  $\phi$  fixé ; (ii) un problème linéaire d’endommagement (1.59) sous contrainte (1.2) pour calculer le champ de phase solution  $\phi$  pour un champ de déplacement  $\mathbf{u}$  fixé. Cet algorithme séquentiel résout de façon alternée, les sous-problèmes d’endommagement (1.59) et de déplacement (1.58), en mettant successivement à jour les champs solutions de déplacement  $\mathbf{u}$  et de champ de phase  $\phi$ , jusqu’à ce qu’un critère d’arrêt (ou de convergence) soit atteint. Parmi les nombreux critères d’arrêt disponibles dans la littérature, on trouve ceux qui reposent sur le champ d’endommagement [Bourdin et al. 2000, Amor et al. 2009], sur l’énergie [Ambati et al. 2015], sur le champ d’endommagement et de déplacement [Pech et al. 2022a], ou sur le résidu des équations [Gerasimov et De Lorenzis 2019, Seleš et al. 2019, Seleš et al. 2021]. L’algorithme de minimisation alternée a été initialement introduit dans [Bourdin et al. 2000] et est décrit en détail dans [Wu et al. 2020a]. Bien que cet algorithme soit numériquement robuste, efficace (peu coûteux) en mémoire et flexible, il converge lentement et requiert généralement un grand nombre d’itérations. Le coût de calcul élevé peut néanmoins être réduit en utilisant des techniques d’accélération de convergence, comme celles proposées dans [Farrell et Maurini 2017, Wu 2017, Wu 2018].

Dans cette thèse, nous avons utilisé le solveur *étagé*, en raison de sa robustesse et de sa simplicité d’implémentation, en adoptant le critère d’arrêt énergétique proposé dans [Ambati et al. 2015]. Ce critère de convergence évalue, à chaque itération de chargement  $k$ , l’erreur relative sur l’énergie totale du système  $\mathcal{E}(\mathbf{u}, \phi)$ , définie en (1.1), entre deux itérations successives  $n$  et  $n + 1$  du schéma étagé, telle que

$$\frac{|\mathcal{E}(\mathbf{u}_n^k, \phi_n^k) - \mathcal{E}(\mathbf{u}_{n+1}^k, \phi_{n+1}^k)|}{\mathcal{E}(\mathbf{u}_{n+1}^k, \phi_{n+1}^k)} \leq \epsilon, \quad (1.63)$$

où  $\mathbf{u}_{n+1}^k$  et  $\phi_{n+1}^k$  désignent respectivement les champs de déplacement et d’endommagement évalués à l’itération  $n + 1$  du schéma étagé, et où  $\epsilon$  est une valeur seuil appartenant à l’intervalle  $]0, 1]$ .

Dans l’algorithme de résolution implémenté via la fonction `Solve()` du script `EasyFEA/simulations/_phasefield.py`, la valeur seuil  $\epsilon = 1$  signifie que la convergence n’est pas contrôlée, de sorte qu’une seule itération est réalisée par itération

---

6. La non-linéarité est ici associée à la décomposition de la fonction de densité d’énergie de déformation élastique, telle qu’introduite dans la section 3.

de chargement  $k$ , ce qui correspond au « *one-pass staggered algorithm* » introduit dans [Miehe et al. 2010a].

## 5.2 Prise en compte de l'irréversibilité

Le problème couplé non-linéaire est soumis aux contraintes (1.2) et nécessite l'utilisation d'algorithmes spécifiques, qui peuvent être classés en trois catégories : *relaxé*, *pénalisé* et *implicite* [Gerasimov et De Lorenzis 2019].

Pour l'algorithme *relaxé* [Bourdin et al. 2000, Bourdin et al. 2008], l'irréversibilité est prise en compte uniquement sur les points du domaine qui dépassent un certain seuil d'endommagement proche de 1. Il consiste, dans le cadre de la MEF, à imposer un champ d'endommagement  $\phi = 1$  comme condition aux limites de Dirichlet appliquées aux points (ou nœuds) qui dépassent ce seuil. Cependant, les points dont l'endommagement est inférieur à ce seuil peuvent cicatriser et ne respectent donc pas la condition d'irréversibilité du processus d'endommagement.

Les algorithmes de *pénalisation* emploient soit des multiplicateurs de Lagrange [Heister et al. 2015], soit des méthodes de Lagrangien augmenté [Wheeler et al. 2014, Wick 2017a, Wick 2017b]. Ils peuvent être utilisés dans les solveurs *monolithique* ou *étagé*, mais engendrent généralement un coût de calcul plus élevé, car ils nécessitent le calcul et le stockage de variables supplémentaires.

Finalement, la méthode *implicite* introduite dans [Miehe et al. 2010a] remplace la force motrice de fissure locale  $Y(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u})$ , intervenant dans l'équation d'équilibre du problème de champ de phase (1.59a), par le champ d'histoire local défini comme

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)) = \max_{\tau \in [0, t]} \psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau)), \quad (1.64)$$

pour tout point spatial  $\mathbf{x} \in \Omega$  et tout temps  $t$  appartenant à l'intervalle de temps considéré  $I$ . Le champ d'histoire local  $\mathcal{H}$  (qui croît de manière monotone) correspond à la valeur maximale de  $\psi_0^+$  atteinte au cours de l'ensemble de l'histoire du chargement du matériau<sup>7</sup>. Bien que (i) cette méthode ne puisse être employée qu'avec le solveur *étagé*, (ii) que l'introduction de la variable d'histoire  $\mathcal{H}$  fasse perdre à l'équation d'équilibre (1.59a) sa nature variationnelle [De Lorenzis et Gerasimov 2020] et (iii) qu'elle ne garantisse pas de manière exacte que le champ de phase  $\phi \in [0, 1]$  [Wu et al. 2020a] (voir par exemple la Figure 1.5), elle demeure la méthode la plus couramment utilisée dans la communauté de la mécanique numérique. C'est la raison principale pour laquelle nous l'avons retenue dans ce travail.

## 5.3 Formulation faible

Avant de pouvoir écrire la formulation discrétisée permettant la résolution du problème dans le cadre de la MEF, il est tout d'abord nécessaire d'écrire la formu-

7. Ce champ scalaire est stocké aux points d'intégration dans le cadre de la MEF.

tion faible du problème d'endommagement et de déplacement.

La formulation faible du problème d'endommagement est obtenue en multipliant (1.59a) par une fonction test  $\delta\phi$ . En intégrant cette équation sur le domaine  $\Omega$ , on obtient

$$\int_{\Omega} \left( -g(\phi) \mathcal{H} + \frac{G_c}{c_w \ell} (-w'(\phi) + 2\ell^2 \Delta\phi) \right) \delta\phi \, d\Omega = 0, \quad (1.65)$$

où les espaces fonctionnels des champs  $\phi$  et  $\delta\phi$  sont respectivement définis comme

$$\mathcal{S}_{\phi} = \{\phi \in H^1(\Omega) : \phi(\mathbf{x}) \in [0, 1], \dot{\phi}(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega\}, \quad (1.66a)$$

$$\mathcal{S}_{\delta\phi} = \{\delta\phi \in H^1(\Omega) : \delta\phi(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega\}, \quad (1.66b)$$

où  $H^1(\Omega)$ <sup>8</sup> désigne l'espace fonctionnel de Sobolev d'ordre 1 défini sur  $\Omega$ .

En utilisant la propriété  $\Delta\phi \delta\phi = \nabla \cdot (\nabla\phi \delta\phi) - \nabla\phi \cdot \nabla\delta\phi$ , le théorème de la divergence de Gauss tel que  $\int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla\phi \delta\phi) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \nabla\phi \cdot \mathbf{n} \delta\phi \, dS$  et la condition aux limites de Neumann (1.59b), nous obtenons la formulation faible du problème d'endommagement :

$$\int_{\Omega} \left( -g(\phi) \mathcal{H} - \frac{G_c}{c_w \ell} w'(\phi) \right) \delta\phi \, d\Omega - \int_{\Omega} \frac{2G_c \ell}{c_w} \nabla\phi \cdot \nabla\delta\phi \, d\Omega = 0. \quad (1.67)$$

On peut réécrire la formulation faible (1.67) sous la forme d'un problème linéaire de diffusion-réaction comme

$$\int_{\Omega} k_w \nabla\phi \cdot \nabla\delta\phi + r_w \phi \delta\phi \, d\Omega = \int_{\Omega} f_w \delta\phi \, d\Omega, \quad (1.68)$$

où  $k_w$ ,  $r_w$  et  $f_w$  sont les paramètres du problème introduits dans (1.60) et qui sont respectivement définis comme

$$k_w^{\text{AT1}} = \frac{3}{4} G_c \ell, \quad r_w^{\text{AT1}} = 2 \mathcal{H}, \quad f_w^{\text{AT1}} = \left\langle 2 \mathcal{H} - \frac{3 G_c}{8 \ell} \right\rangle_+ \quad (1.69)$$

pour le modèle de régularisation AT1, et

$$k_w^{\text{AT2}} = G_c \ell, \quad r_w^{\text{AT2}} = 2 \mathcal{H} + \frac{G_c}{\ell}, \quad f_w^{\text{AT2}} = 2 \mathcal{H} \quad (1.70)$$

pour le modèle de régularisation AT2.

En adoptant une approche similaire, on peut obtenir la formulation faible du problème en déplacement en multipliant l'équation (1.58a) par un champ test  $\delta\mathbf{u}$  et en intégrant sur le domaine  $\Omega$ . En utilisant la propriété  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \delta\mathbf{u} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \delta\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta\mathbf{u}$ , le théorème de la divergence de Gauss tel que  $\int_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \delta\mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta\mathbf{u} \, dS$  et la condition aux limites de Neumann (1.58b), nous obtenons

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \phi) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} \, dS + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega, \quad (1.71)$$

8. Cet espace contient toutes les fonctions de carré intégrable sur  $\Omega$  (dans  $L^2(\Omega)$ ) et dont les dérivées premières sont également de carré intégrable (dans  $L^2(\Omega)$ ).

où les espaces fonctionnels des champs  $\mathbf{u}$  et  $\delta\mathbf{u}$  sont respectivement définis comme

$$\mathcal{S}_u = \{\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^d : \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_D \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_u\}, \quad (1.72a)$$

$$\mathcal{S}_{\delta u} = \{\delta\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^d : \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_u\}. \quad (1.72b)$$

## 5.4 Implémentation éléments finis

L'objectif de cette section est de détailler la discrétisation du problème de déplacement (1.71) et d'endommagement (1.67) avec la MEF [Zienkiewicz et Taylor 2005, Hughes 2012], dans le cadre du solveur *étagé* introduit en section 5.1. Le code EF implémenté en Python et développé dans le cadre de cette thèse (en 2D et 3D) est accessible en open source dans EasyFEA et peut être consulté via le script [EasyFEA/simulations/\\_phasefield.py](#).

Dans le cadre du problème couplé mécanique-endommagement en 2D, le domaine  $\Omega$  est discrétisé en considérant un maillage EF formé de  $N_e$  éléments  $\Omega^e$ . Chaque élément est défini par  $n$  nœuds, ce qui donne un total de  $N_n$  nœuds dans le maillage. Dans un élément  $\Omega^e$ , le champ vectoriel de déplacement  $\mathbf{u}$  et le champ scalaire d'endommagement  $\phi$  peuvent être interpolés en fonction des valeurs nodales (par élément) des champs discrétisés  $\mathbf{u}^e = [u_1, v_1, \dots, u_n, v_n]^T$  de dimension  $2n \times 1$  et  $\phi^e = [\phi_1, \dots, \phi_n]^T$  de dimension  $n \times 1$  tels que

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{x}) = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1(\mathbf{x}) & 0 & \dots & N_n(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & N_1(\mathbf{x}) & \dots & 0 & N_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{(2 \times 2n)} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix} = [\mathbf{N}_u^e] \mathbf{u}^e, \quad (1.73)$$

$$\phi^e(\mathbf{x}) = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1(\mathbf{x}) & \dots & N_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{(1 \times n)} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} = [\mathbf{N}_\phi^e] \phi^e, \quad (1.74)$$

où  $N_i(\mathbf{x})$  sont les fonctions d'interpolation de Lagrange<sup>9</sup>, continues dans chaque élément, et où  $[\mathbf{N}_u^e]$  et  $[\mathbf{N}_\phi^e]$  désignent les matrices d'interpolation associées aux champs  $\mathbf{u}^e$  et  $\phi^e$ , respectivement. Le champ de déformations  $[\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x})]$  est interpolé dans l'élément en adoptant la notation matricielle de Kelvin-Mandel comme

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \partial_x N_1 & 0 & \dots & \partial_x N_n & 0 \\ 0 & \partial_y N_1 & \dots & 0 & \partial_y N_n \\ \partial_y N_1 & \partial_x N_1 & \dots & \partial_y N_n & \partial_x N_n \end{bmatrix}}_{3 \times 2n} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix} = [\mathbf{B}_u^e] \mathbf{u}^e \quad (1.75)$$

9. Pour obtenir plus de détails sur la construction des fonctions de forme dans le code, on pourra consulter les scripts contenus dans le dossier [EasyFEA/fem/elems](#).

où le gradient d'endommagement  $\nabla\phi^e(\mathbf{x})$  est obtenu comme

$$\nabla\phi^e(\mathbf{x}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \partial_x N_1 & \cdots & \partial_x N_n \\ \partial_y N_1 & \cdots & \partial_y N_n \end{bmatrix}}_{2 \times n} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} = [\mathbf{B}_\phi^e] \boldsymbol{\phi}^e, \quad (1.76)$$

où  $\partial_x N_i$  et  $\partial_y N_i$  sont les dérivées des fonctions de forme  $N_i$  (voir équation (B.7) de l'Annexe B), et où  $[\mathbf{B}_u^e]$  et  $[\mathbf{B}_\phi^e]$  désignent les matrices des dérivées des fonctions de forme associées aux champs  $\mathbf{u}^e$  et  $\phi^e$ , respectivement. Finalement, en introduisant cette discrétisation, le système matriciel associé au problème d'endommagement (1.68) s'écrit

$$\sum_{e=1}^{N_e} b^e \int_{\Omega^e} \left( k_w [\mathbf{B}_\phi^e]^T [\mathbf{B}_\phi^e] + r_w [\mathbf{N}_\phi^e]^T [\mathbf{N}_\phi^e] \right) d\Omega \cdot \boldsymbol{\phi}^e = \sum_{e=1}^{N_e} b^e \int_{\Omega^e} f_w [\mathbf{N}_\phi^e]^T d\Omega, \quad (1.77a)$$

$$[\mathbf{K}_\phi] \cdot \boldsymbol{\phi} = \mathbf{f}_\phi, \quad (1.77b)$$

où  $k_w$ ,  $r_w$  et  $f_w$  sont les coefficients associés au modèle de régularisation (comme introduits en équations (1.69) et (1.70) pour les modèles AT1 et AT2), et où  $b^e$  désigne l'épaisseur constante de l'élément. Les intégrales sont évaluées numériquement par la méthode de quadrature de Gauss avec les éléments isoparamétriques introduits en Annexe B. Le système linéaire associé au problème de déplacement (1.71) s'écrit

$$\sum_{e=1}^{N_e} b^e \int_{\Omega^e} [\mathbf{B}_u^e]^T [\mathbb{C}^e(\mathbf{u}^e, \phi^e)] [\mathbf{B}_u^e] d\Omega \cdot \mathbf{u}^e = \sum_{e=1}^{N_e} b^e \int_{\partial\Omega_t^e} \mathbf{t}^e [\mathbf{N}_u^e]^T dS + b^e \int_{\Omega^e} \mathbf{f}^e [\mathbf{N}_u^e]^T d\Omega, \quad (1.78a)$$

$$[\mathbf{K}_u] \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}_u, \quad (1.78b)$$

où  $\mathbf{t}^e$  et  $\mathbf{f}^e$  sont respectivement les forces surfaciques et volumiques évaluées dans l'élément<sup>10</sup>, et  $[\mathbb{C}^e(\mathbf{u}^e, \phi^e)]$  représente la forme matricielle du tenseur d'élasticité du quatrième ordre  $\mathbb{C}^e$  évaluée dans l'élément  $\Omega^e$  et définie comme

$$[\mathbb{C}^e(\mathbf{u}^e, \phi^e)] = g(\phi^e) [\mathbb{C}_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}^e)] + [\mathbb{C}_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}^e)]. \quad (1.79)$$

En considérant le solveur *étagé* introduit en section 5.1, le problème mécanique, qui permet d'obtenir le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  à l'itération de chargement  $k$ , est linéarisé en construisant les projecteurs (introduits en section 3) à partir des champs de déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  évalués à l'itération précédente  $k-1$ .

Les systèmes matriciels introduits en équations (1.77) et (1.78) peuvent s'écrire sous la forme  $[\mathbf{A}] \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , où  $[\mathbf{A}]$  est une matrice de dimension  $N_{\text{ddl}} \times N_{\text{ddl}}$  et  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{b}$  sont

10. Le vecteur des efforts surfaciques  $\mathbf{t}^e$  est évalué dans les éléments de bords du maillage (en 2D les segments).

des vecteurs de dimension  $N_{\text{ddl}} \times 1$ . Pour obtenir le vecteur solution  $\mathbf{x}$ , on décompose le système matriciel en degrés de liberté (ddl) connus  $c$  et inconnus  $i$  comme

$$\begin{bmatrix} [A_{ii}] & [A_{ic}] \\ [A_{ci}] & [A_{cc}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_i \\ \mathbf{b}_c \end{bmatrix} \quad \text{conduisant à} \quad \mathbf{x}_i = [A_{ii}]^{-1} (\mathbf{b}_i - [A_{ic}] \mathbf{x}_c). \quad (1.80)$$

## 6 Validation sur des exemples académiques 2D

Cette section présente une comparaison des résultats de plusieurs simulations menées sur deux exemples académiques en 2D : (i) un essai de cisaillement sur une plaque fissurée et (ii) un essai de compression sur une plaque trouée.

L’objectif principal de ces simulations numériques est d’identifier un modèle de décomposition de l’énergie élastique applicable aux matériaux anisotropes et de définir un seuil de convergence  $\epsilon$  approprié. Cela permettra de reproduire fidèlement l’amorçage et la propagation des fissures observées lors des essais expérimentaux décrits en section 1 du chapitre 2, tout en assurant la qualité des simulations menées dans le chapitre 3.

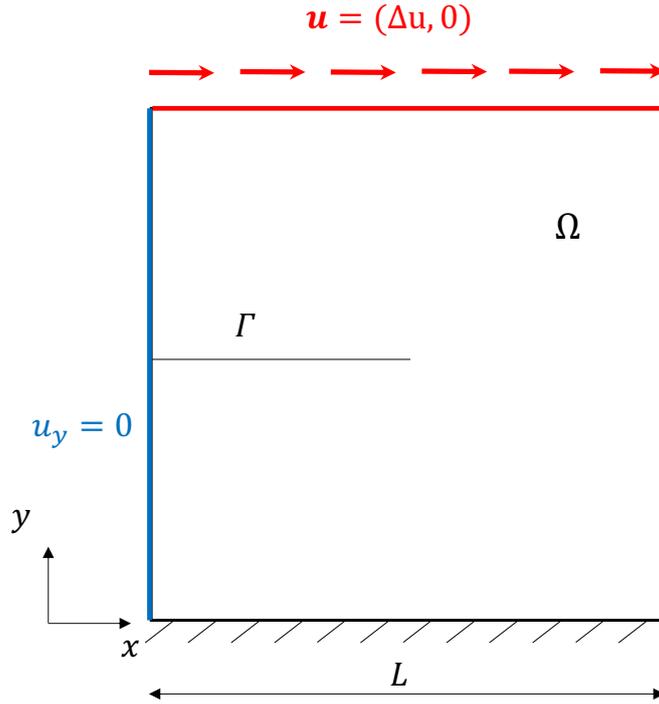
Les résultats sont analysés en comparant les trajectoires de fissures régularisées par le champ d’endommagement  $\phi$  et l’évolution des courbes de réponse force-déplacement. Les simulations sont conduites en utilisant différents modèles de régularisation de l’énergie de rupture (présentés en section 2.1) et différents modèles de décomposition de l’énergie élastique (introduits en section 3). Toutes les simulations dans cette section ont été réalisées avec le solveur *étagé*, introduit en section 5.1, en imposant un seuil de convergence  $\epsilon = 1$ , à l’exception des simulations dont les résultats sont présentés sur la Figure 1.9 pour étudier l’influence du seuil  $\epsilon$  dans l’algorithme étagé.

Les résultats des simulations numériques des essais de cisaillement (section 6.1) et de compression (section 6.2), ainsi que les conclusions qui en sont tirées, sont résumés en section 6.3.

Les simulations sont réalisées avec [EasyFEA](#), en utilisant les scripts [examples/Phasefield/Shear.py](#) et [examples/Phasefield/PlateWithHole.py](#), et les résultats sont post-traités avec le script [examples/Phasefield/PostProcess.py](#).

### 6.1 Plaque fissurée en cisaillement

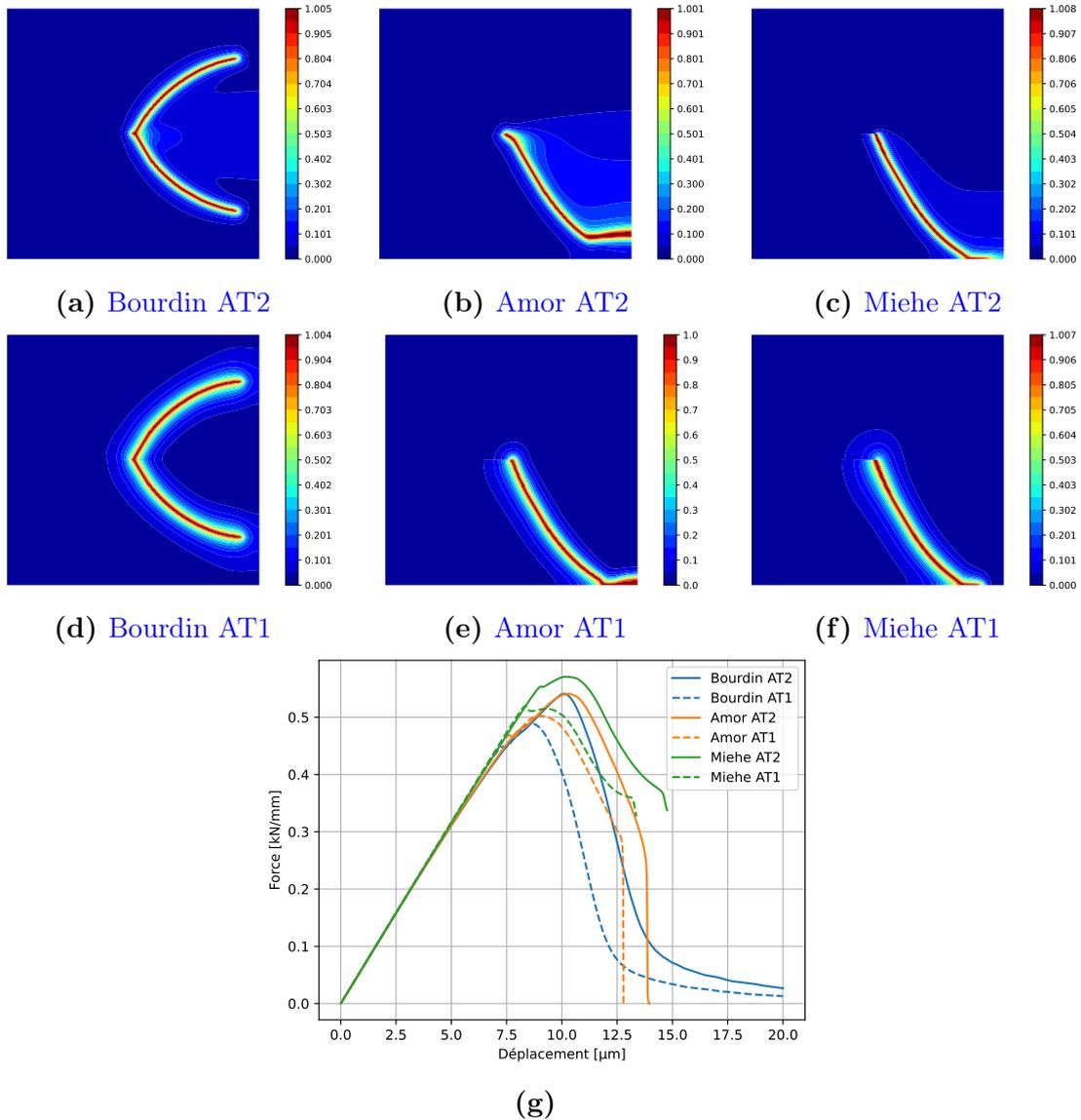
Considérons un carré de côté  $L = 1$  mm, présentant une fissure  $\Gamma$  de longueur  $L/2$  située à mi-hauteur, comme illustré sur la Figure 1.4. Comme dans [Wu et al. 2020a], le matériau élastique est supposé isotrope et homogène, caractérisé par un module de Young  $E = 210$  GPa et un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$  sous l’hypothèse des déformations planes avec une épaisseur  $b = 1$  m et un taux de restitution d’énergie critique  $G_c = 2700$  N/m. La longueur de régularisation est



**FIGURE 1.4** – Essai de cisaillement en déformations planes sur un échantillon carré entaillé : le bord inférieur est fixé suivant  $x$  et  $y$ , les bords gauche et droit sont fixés suivant  $y$  et le bord supérieur est bloqué suivant  $y$  et soumis à un incrément de déplacement monotone  $\Delta u$  appliqué suivant  $x$ .

choisie comme  $\ell = 3L/200 = 0.015$  mm et la taille de maille est définie comme  $h^e = \ell/2 = 7.5 \times 10^{-3}$  mm, conduisant à un maillage de 92 772 éléments linéaires TRI3 et 46 887 nœuds. Un incrément de déplacement monotone  $\Delta u = 1 \times 10^{-5}$  mm est imposé sur le bord supérieur pendant 2 000 itérations de chargement. La simulation est arrêtée lorsque le champ d'endommagement  $\phi$  atteint la valeur de 1 sur le bord du domaine, indiquant que l'échantillon est complètement fissuré.

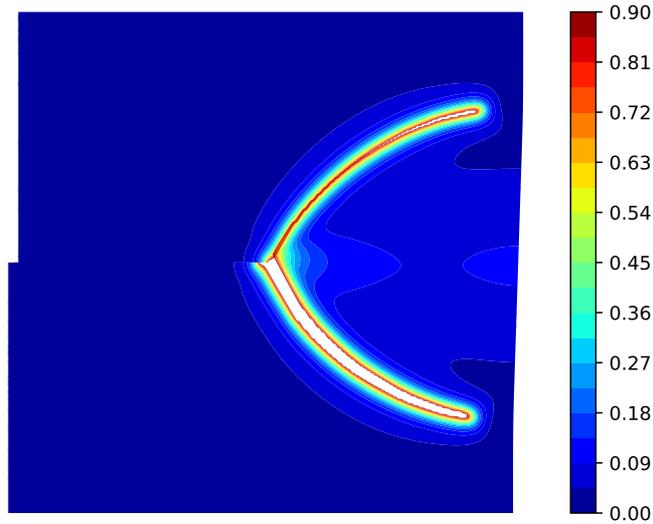
La comparaison des modèles de régularisation AT1 et AT2 est illustrée sur la Figure 1.5. Le modèle AT2 produit une fissure plus diffuse due au support infini du champ  $\phi$ , tandis que le modèle AT1, pour lequel le support de  $\phi$  est fini de largeur  $4\ell$ , conduit à une fissure plus localisée (comme illustré en 1D sur la Figure 1.2a de la section 2). Les courbes force-déplacement associées aux essais sont tracées sur la Figure 1.5g, où les résultats du modèle AT2 sont représentés en traits pleins et ceux du modèle AT1 en pointillés. On observe que pour le modèle AT1, la fissure s'amorce plus tôt que pour le modèle AT2, entraînant un adoucissement de la courbe force-déplacement plus précoce. On constate sur les Figures 1.5a et 1.6 que le modèle de Bourdin conduit à une interpénétration des lèvres de la fissure qui se propage vers le coin supérieur droit dans une zone en compression. Étant donné que le modèle ne considère aucune asymétrie tension/compression dans la fonction de densité d'énergie de déformation élastique  $\psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon})$ , telle qu'introduite en équation (1.17). Enfin, on observe que les champs d'endommagement  $\phi$  ne sont pas exactement bornés entre 0 et 1. Cela est dû



**FIGURE 1.5** – Essai de cisaillement : (a-f) champs d’endommagement  $\phi$  obtenus à la dernière itération de chargement pour les modèles de Bourdin, Amor et Miehe et les modèles de régularisation (a-c) AT2 et (d-f) AT1 ; (g) courbes force-déplacement associées.

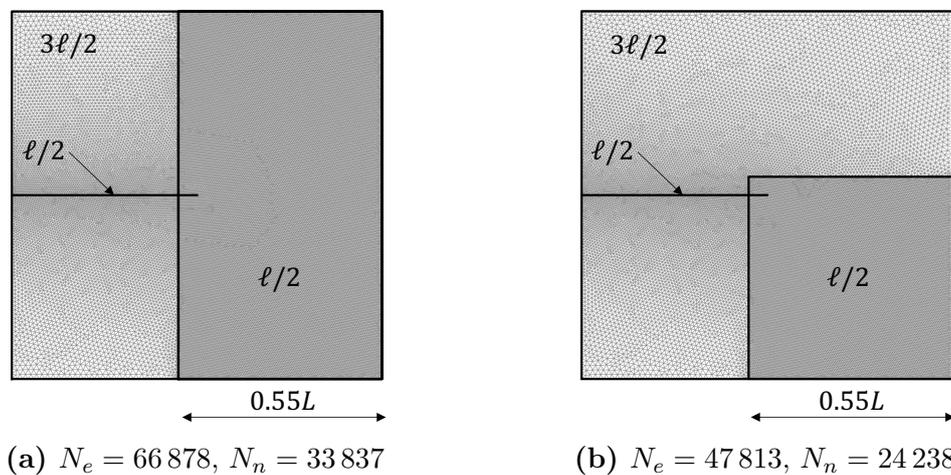
à la méthode *implicite*, qui utilise un champ d’histoire  $\mathcal{H}$  pour intégrer l’irréversibilité du processus d’endommagement, mais ne garantit pas de manière exacte que le champ  $\phi$  prenne ses valeurs dans l’intervalle  $[0, 1]$  (voir Remarque 24 dans [Wu et al. 2020a]).

La modélisation de la fissure requiert au minimum deux éléments par longueur de régularisation  $\ell$ , i.e.  $h^e \leq \ell/2$  [Miehe et al. 2010b, Miehe et al. 2010a, Nguyen et al. 2016], ce qui peut entraîner des temps de calcul importants, jusqu’à plusieurs heures/jours pour une seule simulation. C’est pourquoi, lorsque la trajectoire de la fissure est connue a priori, il est courant de considérer un maillage localement



**FIGURE 1.6** – Essai de cisaillement : champ d’endommagement  $\phi$  obtenu avec le modèle de Bourdin et le modèle de régularisation AT2. Un facteur d’amplification de 1 est appliqué pour représenter l’échantillon dans sa configuration déformée, et les éléments du maillage où  $\phi > 0.9$  sont supprimés pour visualiser la fissure régularisée.

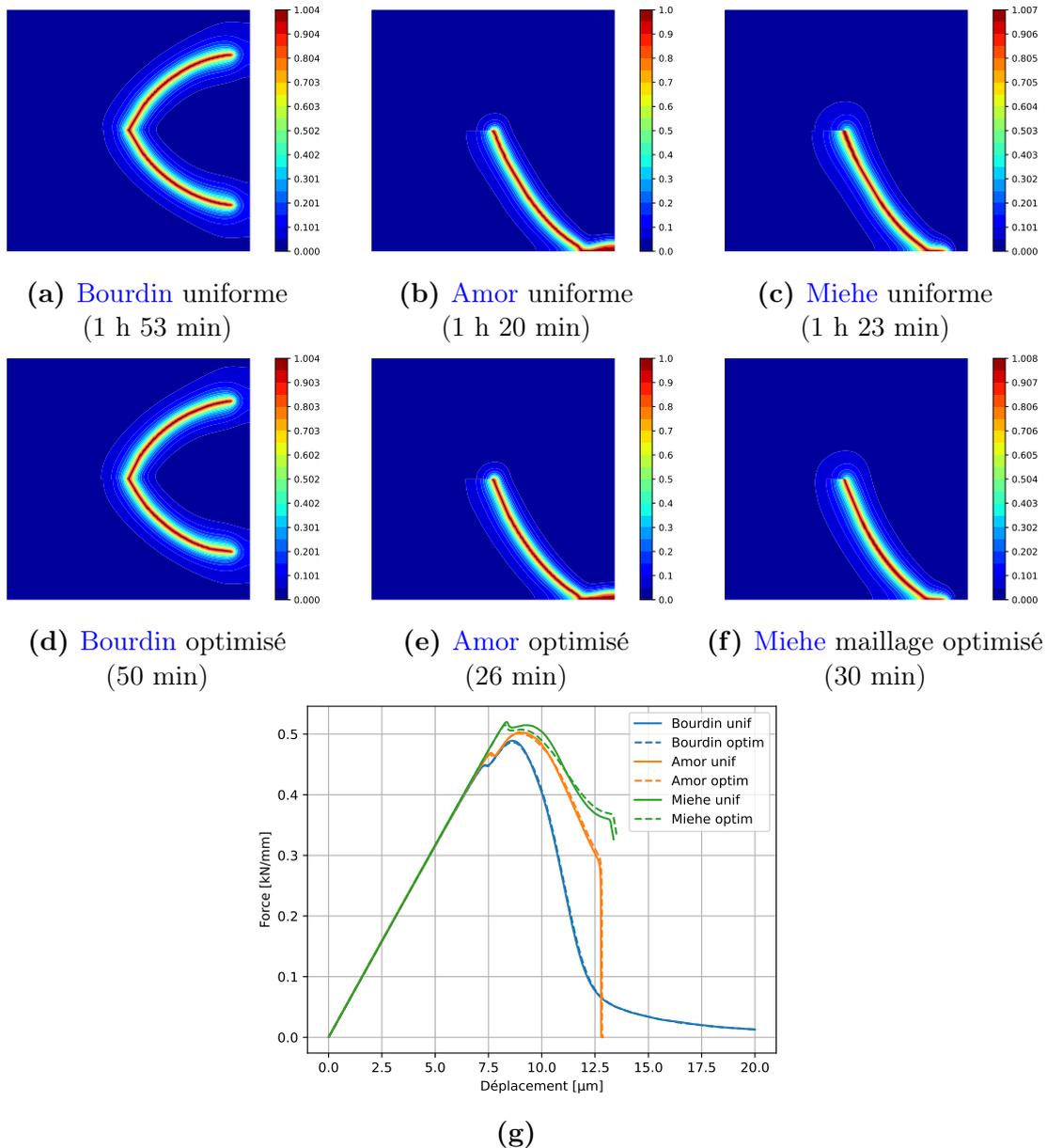
raffiné/optimisé dans les zones susceptibles de voir la fissure se propager. On considère ici un maillage raffiné localement, comme illustré sur la Figure 1.7a pour le modèle de Bourdin, et sur la Figure 1.7b pour les autres modèles de décomposition.



**FIGURE 1.7** – Essai de cisaillement : maillages EF raffinés pour (a) le modèle de Bourdin, où la fissure peut se propager vers le coin inférieur droit et/ou le coin supérieur droit ; et (b) les autres modèles de décomposition de l’énergie élastique, où la fissure peut se propager vers le coin inférieur droit. Une taille de maille est imposée à  $l/2$  dans les zones raffinées et au voisinage de l’entaille, et à  $3l/2$  en dehors.

champs d’endommagement  $\phi$ , obtenus à la dernière itération de chargement, sont représentés, avec les temps de calcul correspondants indiqués entre parenthèses, sur

les Figures 1.8a à 1.8c pour le maillage uniforme, et sur les Figures 1.8d à 1.8f pour le maillage optimisé. Les résultats semblent qualitativement similaires, avec des simu-



**FIGURE 1.8** – Essai de cisaillement : influence du maillage optimisé par rapport au maillage uniforme pour les modèles de Bourdin, Amor et Miehe et le modèle de régularisation AT1 : (a-f) champs d’endommagement  $\phi$  obtenus à la dernière itération de chargement avec les temps de calcul entre parenthèses ; (g) courbes force-déplacement associées.

lations environ 3 fois plus rapides pour le maillage optimisé par rapport au maillage uniforme. Les courbes force-déplacement correspondantes sont tracées sur la Figure 1.8g. On observe que les courbes obtenues avec le maillage uniforme (traits pleins) et le maillage optimisé (pointillés) sont quasiment superposées, à l’exception du modèle

de [Miehe](#) qui conduit à des courbes force-déplacement légèrement différentes.

Comme introduit dans la section 5.1, l'algorithme de minimisation alternée (ou solveur *étagé*) impose, à chaque itération de chargement  $k$ , que l'erreur relative, définie en équation (1.63), soit inférieure à un seuil  $\epsilon$ . Cette erreur relative est calculée entre les énergies  $\mathcal{E}(\mathbf{u}_n^k, \phi_n^k)$  et  $\mathcal{E}(\mathbf{u}_{n+1}^k, \phi_{n+1}^k)$ , évaluées respectivement aux itérations  $n$  et  $n+1$  du schéma étagé. Dans le cadre de la méthode des éléments finis, l'énergie totale du système  $\mathcal{E}(\mathbf{u}, \phi)$  définie par l'équation (1.1) est discrétisée et donnée par

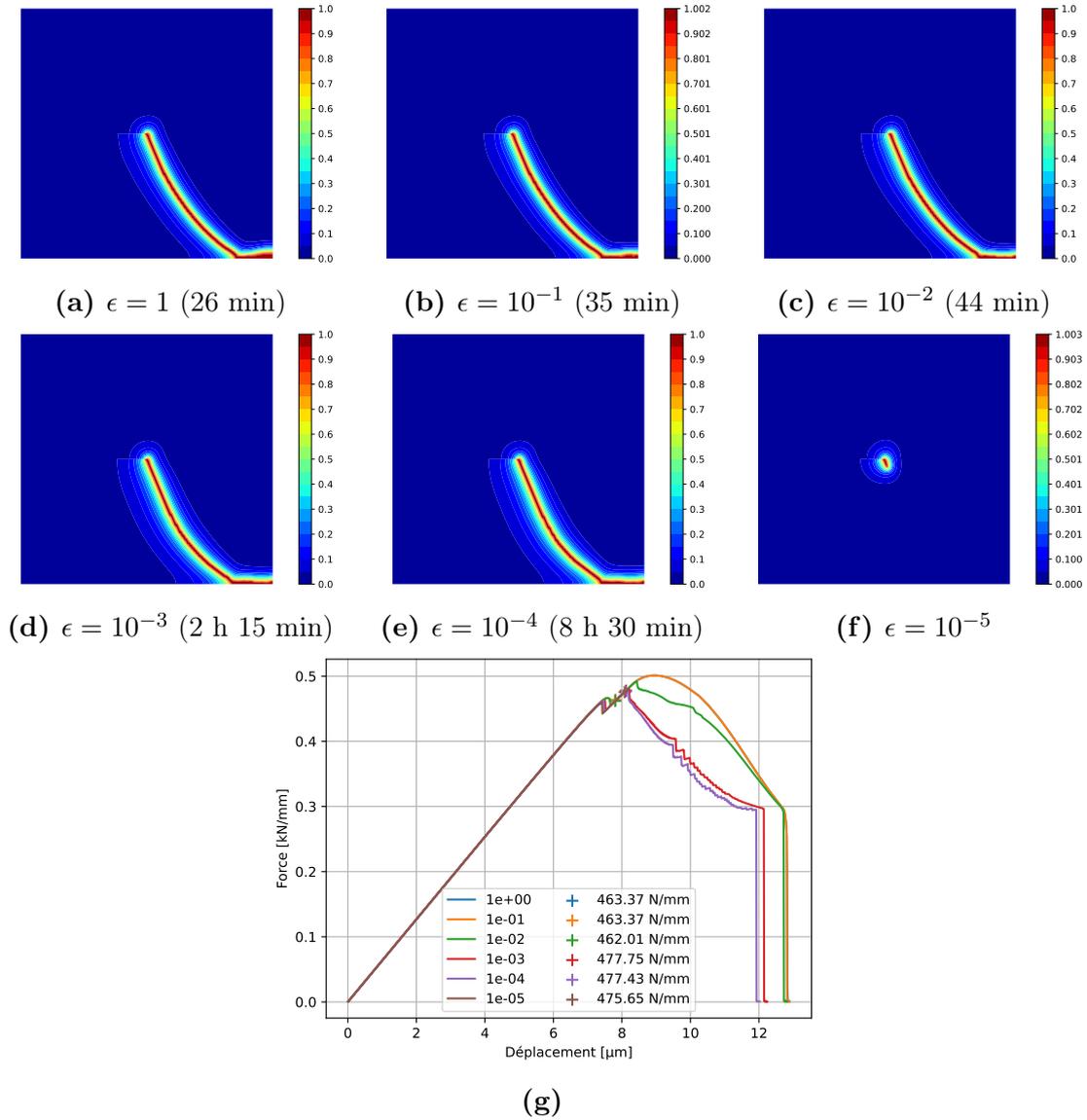
$$\mathcal{E}(\mathbf{u}, \phi) = \frac{1}{2} \phi^T [K_\phi] \phi + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T [K_u] \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f}_u, \quad (1.81)$$

où  $[K_\phi]$ ,  $\phi$ ,  $[K_u]$  et  $\mathbf{u}$  sont les matrices et vecteurs solutions des systèmes matriciels introduits en équations (1.77) et (1.78). Dans l'équation (1.81), le vecteur  $\mathbf{f}_u$  représente les forces surfaciques et volumiques appliquées sur le système, qui sont nulles dans le cadre de l'essai de cisaillement (i.e.  $\mathbf{f}_u = \mathbf{0}$ ).

Pour évaluer l'influence du seuil de convergence  $\epsilon$ , plusieurs simulations ont été réalisées en faisant varier  $\epsilon$  de 1 à  $10^{-5}$ . Ici, la valeur seuil  $\epsilon = 1$  indique que la convergence n'est pas contrôlée de sorte qu'une seule itération est réalisée par pas de chargement, ce qui correspond au « *one-pass staggered algorithm* » introduit dans [\[Miehe et al. 2010a\]](#). On utilise ici le modèle de décomposition de [Amor](#), car la construction de la matrice d'élasticité endommagée  $\mathbb{C}(\mathbf{u}, \phi)$  (1.16) nécessite moins d'opérations numériques que celle du modèle de [Miehe](#)<sup>11</sup>. On considère également le modèle de régularisation [AT1](#), qui présente un comportement élastique linéaire avant l'apparition de l'endommagement  $\phi$  et qui sera utilisé dans les chapitres 2 et 3. Les simulations sont conduites avec le maillage optimisé (raffiné localement), tel qu'illustré sur la Figure 1.7b. Les champs d'endommagement  $\phi$  obtenus à la dernière itération de chargement sont représentés sur les Figures 1.9a à 1.9f, avec les temps de calcul entre parenthèses. Les courbes force-déplacement associées sont quant à elles tracées sur la Figure 1.9g, avec les forces d'amorçage de la propagation de fissure indiquées par des croix.

On constate sur la Figure 1.9g que les seuils  $\epsilon$  inférieurs ou égaux à  $10^{-2}$  conduisent à des pertes de rigidité brutales, tandis que les seuils de 1 et  $10^{-1}$  présentent des pertes de rigidité plus progressives. Pour le seuil  $\epsilon = 10^{-5}$ , le champ d'endommagement  $\phi$  représenté sur la Figure 1.9f correspond à un déplacement imposé de 8.19  $\mu\text{m}$ , pour lequel le critère énergétique de convergence (1.63) n'est pas vérifié. En effet, une erreur relative sur l'énergie de  $4.25 \times 10^{-5}$  (supérieure à la valeur seuil imposée de  $10^{-5}$ ) est obtenue après 1 000 itérations, correspondant au nombre maximum d'itérations imposées à chaque pas de chargement dans le solveur *étagé*. À l'exception du cas  $\epsilon = 10^{-5}$  qui nécessiterait une adaptation du pas de chargement (réduction de l'incrément de déplacement  $\Delta u$  imposé), les champs d'endommagement  $\phi$  représentés sur les Figures 1.9a à 1.9e ont une allure similaire, ce qui suggère qu'il n'est pas

11. Le modèle de décomposition de [Miehe](#) nécessite de réaliser la décomposition spectrale des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en parties positive  $\boldsymbol{\varepsilon}^+$  et négative  $\boldsymbol{\varepsilon}^-$ , ainsi que de construire les projecteurs  $\mathbb{P}^+$  et  $\mathbb{P}^-$ , tels que définis dans l'équation (1.31).



**FIGURE 1.9** – Essai de cisaillement : (a-f) champs d’endommagement  $\phi$  obtenus pour différents seuils de convergence  $\epsilon$  avec le modèle de Amor, le modèle de régularisation AT1 et le maillage optimisé 1.7b ; (g) courbes force-déplacement associées. La Figure (f) représente le champ d’endommagement  $\phi$  obtenu pour  $\epsilon = 10^{-5}$ , où le solveur étagé n’a pas convergé. Sur la Figure (g), les croix indiquent les valeurs de la force  $F$  initiant la propagation de la fissure, atteintes lorsque  $\max(\phi) = 1$ .

suffisant de comparer les simulations uniquement à partir des champs d’endommagement obtenus. Les valeurs de la force d’initiation de fissure  $F$ , obtenues lorsque le champ d’endommagement  $\phi$  atteint 1 en un point du domaine (i.e.  $\max(\phi) = 1$ ), sont représentées par des croix sur la Figure 1.9g et répertoriées dans le Tableau 1.1 pour les différents seuils de convergence  $\epsilon$  considérés. La force obtenue pour  $\epsilon = 10^{-5}$  est donnée à titre informatif, mais ne doit pas être prise en compte dans l’analyse car le critère d’arrêt (de convergence) n’a pas été validé. On constate que la force

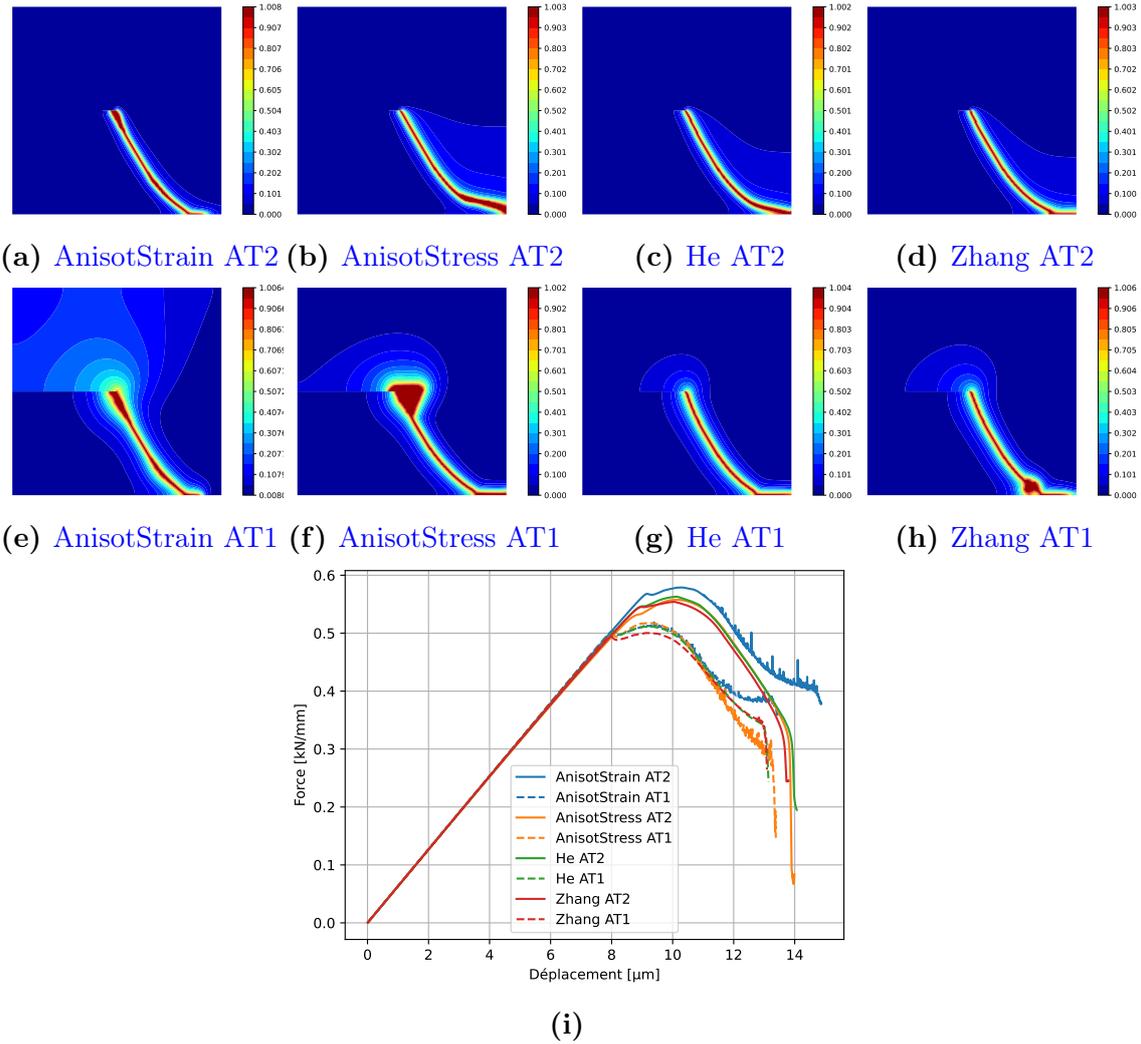
$\epsilon$	1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
$F$ [N/mm]	463.37	463.37	462.01	477.75	477.43	475.65

**TABLEAU 1.1** – Forces d’initiation de fissure  $F$  obtenues pour différents seuils de convergence  $\epsilon$ , lorsque le champ d’endommagement  $\phi$  atteint la valeur 1 en un point du domaine.

d’initiation de fissure  $F$  est identique pour les seuils  $\epsilon$  de 1 et  $10^{-1}$ . Pour le seuil  $\epsilon = 10^{-3}$  la simulation est 4 fois plus rapide que pour  $\epsilon = 10^{-4}$ , avec des forces de 477.75 N/mm et 477.43 N/mm, soit une erreur relative d’environ 0.07%. Pour le seuil  $\epsilon = 10^{-2}$  la simulation est 3 fois plus rapide que pour  $\epsilon = 10^{-3}$ , avec des forces de 462.01 N/mm et 477.75 N/mm, soit une erreur relative d’environ 3%. Un seuil  $\epsilon$  trop élevé peut donc conduire à sous-estimer la force d’initiation de fissure  $F$ . Ces résultats montrent que des seuils de convergence  $\epsilon$  proches de 0 conduisent à un comportement fragile avec des pertes de rigidité brutales (voir Figure 1.9g). Cependant, la diminution de  $\epsilon$  entraîne une augmentation très significative du temps de calcul, passant de 30 minutes pour  $\epsilon = 1$  à 9 heures pour  $\epsilon = 10^{-4}$ . Un seuil  $\epsilon$  de  $10^{-3}$  semble offrir un bon compromis dans l’essai de cisaillement pour capturer l’initiation de la fissure (correspondant au niveau de chargement pour lequel  $\max(\phi) = 1$ ).

Enfin, en adoptant une approche similaire à celle utilisée pour les modèles isotropes, en fixant le critère d’arrêt  $\epsilon$  à 1, on compare, pour un maillage uniforme, les résultats des modèles de décomposition adaptés aux matériaux anisotropes, à savoir les modèles [AnisotStrain](#), [AnisotStress](#), [He](#) et [Zhang](#), pour les deux modèles de régularisation [AT1](#) et [AT2](#). Les champs d’endommagement  $\phi$  sont illustrés sur les Figures 1.10a à 1.10h et les courbes force-déplacement associées sont tracées sur la Figure 1.10i.

On observe sur les Figures 1.10e et 1.10f que les décompositions [AnisotStrain](#) et [AnisotStress](#) conduisent à des champs d’endommagement diffus pour le modèle de régularisation [AT1](#). De plus, des instabilités sont clairement visibles sur les courbes force-déplacement de la Figure 1.10i pour les deux modèles de régularisation [AT1](#) et [AT2](#), représentés respectivement par des traits bleus et oranges. Les champs d’endommagement  $\phi$  obtenus pour le modèle de [He](#) (voir Figures 1.10c et 1.10g) restent localisés dans une bande de largeur uniforme pour les deux modèles de régularisation. Le champ d’endommagement  $\phi$  obtenu pour le modèle de [Zhang](#) présente quant à lui des instabilités pour le modèle [AT1](#) (voir Figure 1.10h) et conduit à un élargissement de fissure après avoir atteint le bord inférieur en  $y = 0$ .

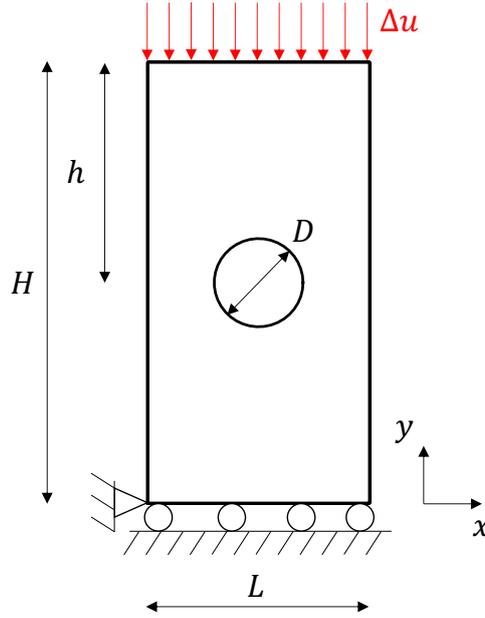


**FIGURE 1.10** – Essai de cisaillement : (a-h) champs d’endommagement  $\phi$  obtenus à la dernière itération de chargement pour les modèles de décomposition adaptés aux matériaux anisotropes et les deux modèles de régularisation AT2 et AT1 ; (i) courbes force-déplacement associées.

## 6.2 Plaque trouée en compression

Cet exemple numérique a été proposé dans [Nguyen et al. 2020] afin de reproduire des essais expérimentaux de compression uniaxiale réalisés sur des échantillons troués constitués de plâtre [Romani et al. 2015], au cours desquels une fissure est apparue en bas et en haut du trou puis s’est propagée verticalement en direction des bords supérieur et inférieur.

On considère une plaque trouée de largeur  $L = 15$  mm et de hauteur  $H = 30$  mm, comportant un trou de diamètre  $D = 12$  mm au centre de l’échantillon (à mi-hauteur, soit  $y = h = 15$  mm), comme illustré sur la Figure 1.11. Le plâtre est considéré comme un matériau élastique isotrope et homogène avec un module de



**FIGURE 1.11** – Essai de compression sur une plaque trouée : le bord inférieur est fixé suivant  $y$ , le coin en bas à gauche est également fixé suivant  $x$  et un incrément de déplacement monotone  $\Delta u$  est imposé suivant  $y$  sur le bord supérieur.

Young  $E = 12$  GPa, un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$  et un taux de restitution d'énergie critique  $G_c = 1.4$  N/m. Les simulations numériques sont conduites en 2D sous l'hypothèse des déformations planes avec une épaisseur  $b = 1$  m. Un incrément de déplacement vertical monotone  $\Delta u$  est imposé sur le bord supérieur de l'échantillon tel que

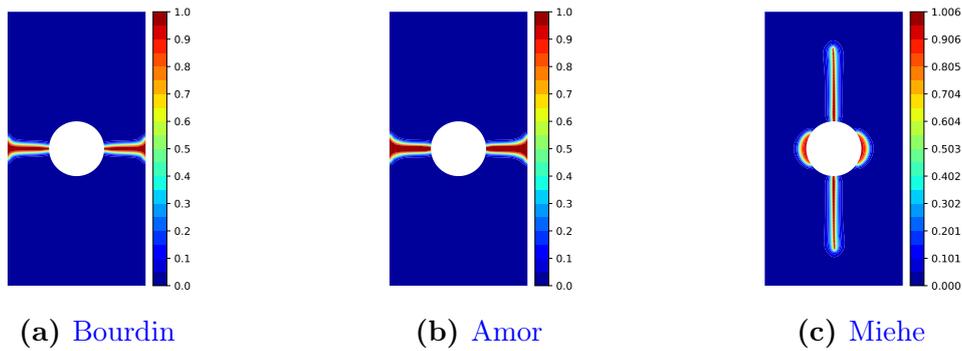
$$\Delta u = \begin{cases} -8 \times 10^{-5} \text{ mm} & \text{si } \max(\phi) < 0.6, \\ -2 \times 10^{-5} \text{ mm} & \text{si } \max(\phi) \geq 0.6. \end{cases} \quad (1.82)$$

La simulation est arrêtée lorsque le déplacement imposé atteint la valeur  $25 \mu\text{m}$  [Nguyen et al. 2020] ou que le champ d'endommagement  $\phi$  atteint la valeur 1 sur le bord du domaine, indiquant que l'échantillon est complètement fissuré. Le solveur *étagé*, introduit en section 5.1, est utilisé avec un seuil de convergence fixé à  $\epsilon = 1$  (une seule itération par pas de chargement). La longueur de régularisation est fixée à  $\ell = D/100 = 0.12$  mm, avec le modèle de régularisation AT1 et un maillage optimisé (raffiné localement) en fonction de la décomposition considérée, comme illustré sur la Figure 1.12.

On réalise dans un premier temps trois simulations pour les modèles de décomposition adaptés aux matériaux isotropes de Bourdin, Amor et Miehe. Les champs d'endommagement  $\phi$  sont affichés sur les Figures 1.13a à 1.13c, tandis que les courbes force-déplacement sont tracées sur la Figure 1.13d. On constate pour les modèles de Bourdin et Amor que la fissure régularisée se propage horizontalement depuis le trou central jusqu'aux bords gauche et droit du domaine, avec un comportement fragile sur la Figure 1.13d. Les résultats obtenus sont cohérents avec ceux de [Vicentini

(a)  $N_e = 74\,136$ ,  $N_n = 37\,456$ (b)  $N_e = 156\,208$ ,  $N_n = 78\,491$ 

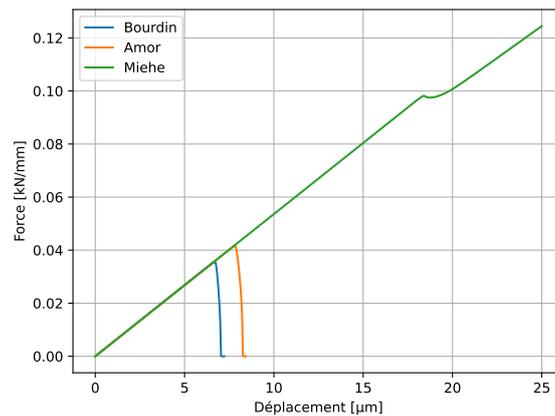
**FIGURE 1.12** – Essai de compression : maillages EF raffinés pour (a) les modèles de Bourdin et Amor, où la fissure peut se propager horizontalement vers les bords gauche et droit, et (b) les autres modèles de décomposition de l'énergie élastique, où la fissure peut se propager verticalement vers les bords supérieur et inférieur. Une taille de maille est imposée à  $l/2$  dans les zones raffinées et à  $4l/2$  en dehors.



(a) Bourdin

(b) Amor

(c) Miehe

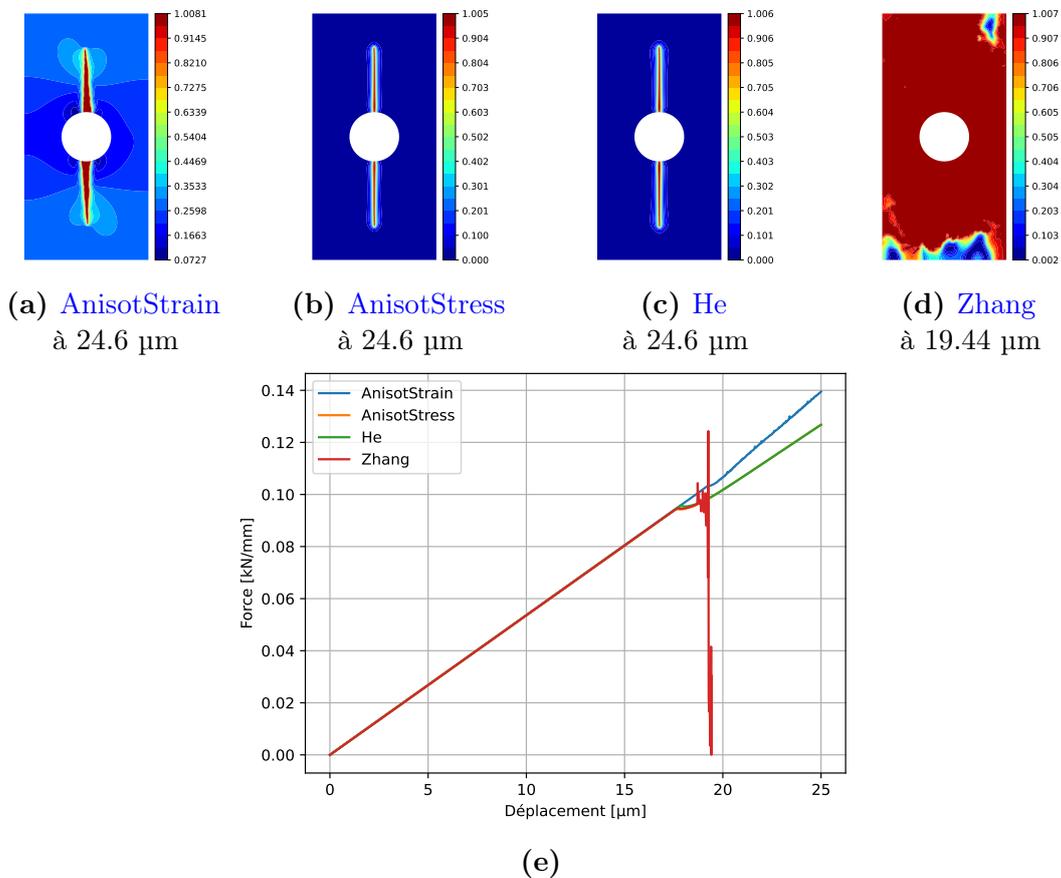


(d)

**FIGURE 1.13** – Essai de compression : (a-c) champs d'endommagement  $\phi$  obtenus à la dernière itération de chargement pour les modèles de Bourdin, Amor et Miehe et le modèle de régularisation AT1 ; (d) courbes force-déplacement associées.

et al. 2024], où la fissure se propage également horizontalement pour les modèles de Bourdin et Amor. Les modèles de Bourdin et Amor ne permettent pas de reproduire fidèlement les trajectoires de fissuration observées expérimentalement dans [Romani et al. 2015], et ne seront donc pas retenus pour la suite de cette étude. Finalement, on constate, comme dans les travaux de [Nguyen et al. 2020], que le modèle de Miehe produit une fissure régularisée verticale avec des endommagements (ou zones endommagées) parasites situés à gauche et à droite du trou qui ne sont pas observés expérimentalement dans [Romani et al. 2015].

On considère à présent les modèles de décomposition adaptés aux matériaux anisotropes AnisotStrain, AnisotStress, He et Zhang. Les simulations numériques sont



**FIGURE 1.14** – Essai de compression : (a-d) champs d’endommagement  $\phi$  obtenus à différents pas de chargement pour les modèles de décomposition adaptés aux matériaux anisotropes et le modèle de régularisation AT1 ; (e) courbes force-déplacement associées. Les champs d’endommagement  $\phi$  sont relevés pour un déplacement imposé de 24.6 μm, conformément à [Nguyen et al. 2020].

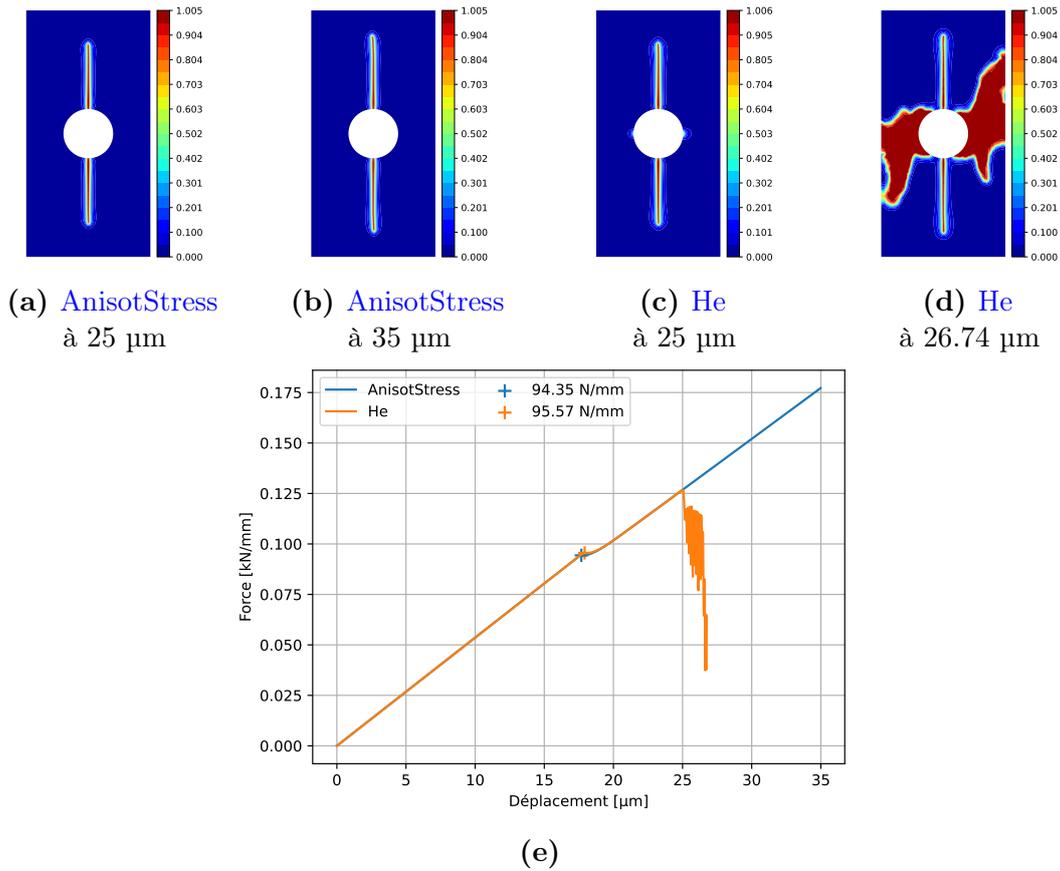
réalisées avec les mêmes propriétés mécaniques (paramètres élastiques et d’endommagement) et le même chargement. Les champs d’endommagement  $\phi$  sont illustrés sur les Figures 1.14a à 1.14d, tandis que les courbes force-déplacement associées sont tracées sur la Figure 1.14e. Le modèle de Zhang conduit à un champ d’endomma-

gement irréaliste (voir Figure 1.14d), avec une fissure qui se propage verticalement sans endommagements indésirables à gauche et à droite du trou, avant de s'élargir pour former une zone d'endommagement diffuse à partir de 18.6  $\mu\text{m}$ . Le champ d'endommagement obtenu avec le modèle `AnisotStrain` se développe de manière instable et conduit à une fissure anormalement diffuse (voir Figure 1.14a). Les modèles de décomposition `AnisotStress` et de `He` semblent reproduire correctement le comportement observé expérimentalement dans [Romani et al. 2015] dans la mesure où ils ne produisent pas d'endommagements (ou zones endommagées) indésirables à gauche et à droite du trou.

Afin de poursuivre l'analyse et d'étudier plus en détail les modèles `AnisotStress` et de `He`, les mêmes simulations sont réalisées en prolongeant les essais numériques jusqu'à un déplacement imposé de 35  $\mu\text{m}$ . On constate sur la Figure 1.14b que le champ d'endommagement  $\phi$  obtenu pour le modèle `AnisotStress` reste concentré dans une bande de largeur uniforme tout au long de l'essai. En revanche, pour le modèle de `He`, une fissure régularisée s'initie à gauche et à droite du trou (voir Figure 1.15c), puis s'élargit jusqu'à former de large zones d'endommagement dans les parties gauche et droite de l'échantillon (voir Figure 1.15d). Finalement, on observe sur la Figure 1.15e que les courbes force-déplacement associées aux décompositions `AnisotStress` et de `He` sont quasiment superposées. Toutefois, en relevant les forces d'initiation de la propagation de fissure représentées par des croix (obtenues lorsque  $\max(\phi) = 1$ ), on constate que celles-ci sont relativement proches avec une valeur de 94.35 N/mm pour la décomposition `AnisotStress` et de 95.57 N/mm pour la décomposition de `He`, soit une erreur relative d'environ 1%.

On pourrait avancer que ces résultats sont influencés par le maillage considéré. Cependant, on constate sur les Figures 1.15c, 1.16a et 1.16b que le maillage optimisé conduit, pour la décomposition de `He`, à des trajectoires de fissure similaires à celles obtenues avec un maillage uniforme de taille  $h^e = \ell/2$  sur tout le domaine  $\Omega$ , comprenant 272 258 éléments linéaires `TRI3` et 137 037 nœuds. Notons que le maillage optimisé permet de réduire le temps de calcul de la simulation, passant de 3 h 24 min pour un maillage uniforme à 54 min pour un maillage raffiné localement (voir Figure 1.12b). Les courbes force-déplacement tracées sur la Figure 1.16b indiquent des comportements similaires, les courbes étant quasiment superposées avant 25  $\mu\text{m}$ . De plus, en relevant les valeurs de la force initiant la propagation des fissures représentées par des croix (obtenues lorsque  $\max(\phi) = 1$ ), on constate que celles-ci ne diffèrent que très légèrement avec une valeur de 95.53 N/mm pour le maillage uniforme et de 95.57 N/mm pour le maillage optimisé localement, soit une erreur relative d'environ 0.04%. Ces résultats confirment que l'utilisation d'un maillage optimisé permet d'obtenir des résultats similaires à ceux d'un maillage uniforme, tout en réduisant le temps de calcul (ici d'un facteur 4 environ), avec une différence négligeable entre les forces d'initiation de fissure.

À ce stade, il pourrait sembler préférable de privilégier le modèle de décomposition `AnisotStress`. Toutefois, lorsque l'on effectue les mêmes essais numériques avec le



**FIGURE 1.15** – Essai de compression : (a-d) champs d’endommagement  $\phi$  obtenus à différents pas de chargement pour les décompositions [AnisotStress](#) et de [He](#) avec le modèle de régularisation [AT1](#); (e) courbes force-déplacement associées. Sur la Figure (e), les croix indiquent les valeurs de la force  $F$  initiant la propagation de la fissure, atteintes lorsque  $\max(\phi) = 1$ .

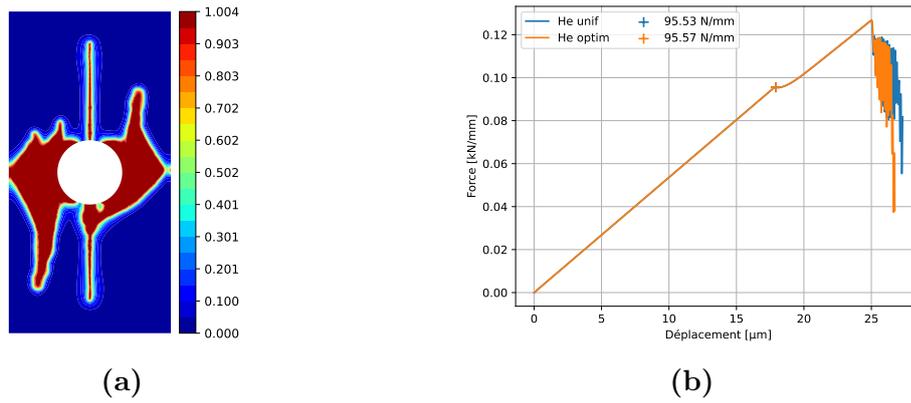
modèle de régularisation [AT2](#), on remarque sur la Figure 1.17 que, contrairement au modèle de [He](#) (voir Figure 1.17b), le modèle [AnisotStress](#) ne produit pas de fissure verticale et conduit à des trajectoires de fissures irréalistes dans les régions soumises au cisaillement (voir Figure 1.17a).

### 6.3 Bilan des simulations numériques

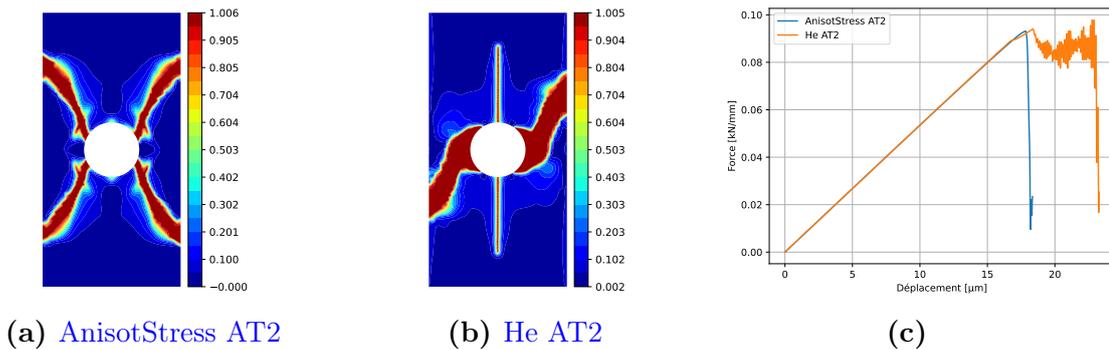
Globalement, les essais numériques de cisaillement et de compression ont permis d’illustrer l’influence des différents paramètres utilisés dans les simulations numériques de fissuration par champ de phase.

Les résultats montrent que les modèles de [Bourdin](#), [Amor](#) et [Miehe](#), en plus d’être inadaptés aux matériaux anisotropes, ne reproduisent pas correctement les fissures observées lors de l’essai expérimental de compression de [\[Romani et al. 2015\]](#).

Un maillage raffiné localement permet d’obtenir des résultats aussi précis qu’un maillage fin uniforme, notamment pour reproduire l’initiation des fissures, tout en réduisant considérablement le temps de calcul. Cependant, cela nécessite de connaître



**FIGURE 1.16** – Essai de compression : (a) champ d’endommagement  $\phi$  obtenu avec le maillage optimisé (voir Figure 1.15d pour le champ d’endommagement  $\phi$  obtenu avec le maillage uniforme), et (b) courbes force-déplacement obtenues avec la décomposition de **He** et le modèle de régularisation **AT1** pour les maillages uniforme et optimisé. Sur la Figure (b), les croix indiquent les valeurs de la force  $F$  initiant la propagation de la fissure, atteintes lorsque  $\max(\phi) = 1$ .



**FIGURE 1.17** – Essai de compression : (a-b) champs d’endommagement  $\phi$  obtenus à la dernière itération de chargement pour les décompositions **AnisotStress** et de **He** avec le modèle de régularisation **AT2**; (c) courbes force-déplacement associées.

à l’avance les zones critiques pour l’initiation et la propagation des fissures, afin d’optimiser le maillage de manière judicieuse dans ces régions spécifiques.

Les tentatives de généralisation de la décomposition spectrale de **Miehe** aux matériaux anisotropes, formulées en déformation (**AnisotStrain**) ou en contraintes (**AnisotStress**), se sont révélées non concluantes, en raison des trajectoires de fissures irréalistes observées dans les simulations numériques.

Les travaux de recherche présentés dans la littérature, notamment ceux utilisant les modèles de décomposition de **He** et **Zhang**, ne semblent pas mentionner explicitement les instabilités numériques observées, qui conduisent à des fissures régularisées qui se diffusent au cours de l’initiation ou de la propagation de l’endommagement.

Enfin, pour l’essai de cisaillement avec un incrément de déplacement monotone imposé  $\Delta u = 1 \times 10^{-5}$  mm, l’utilisation d’un algorithme de minimisation alternée avec un seuil de convergence  $\epsilon = 10^{-3}$  semble constituer un bon compromis entre précision

et coût de calcul pour reproduire l’initiation des fissures, tout en garantissant la convergence des résultats dans le cadre du solveur *étagé*.

En conclusion, les décompositions adaptées aux matériaux anisotropes de [He](#) et [AnisotStress](#) ont démontré leur efficacité à modéliser la fissuration dans la plaque trouée soumise en compression. Cependant, le modèle [AnisotStress](#) semble dépendant du modèle de régularisation et peut conduire à des trajectoires fissures irréalistes, comme nous l’avons constaté pour l’essai de cisaillement (voir Figure 1.10f) et pour l’essai de compression (voir Figure 1.17a). Par conséquent, nous utiliserons par la suite le modèle de [He](#), bien qu’il puisse engendrer des zones endommagées à gauche et à droite du trou après l’initiation et la propagation de la fissure verticale (voir Figure 1.15d). Toutefois, cela ne constitue pas un problème majeur, dans la mesure où nous nous concentrerons principalement sur l’initiation de la fissure, sans chercher à reproduire précisément le trajet de la fissure après son initiation, c’est-à-dire lorsque le champ d’endommagement  $\phi$  aura atteint la valeur 1 en au moins un point du domaine.

## 7 Code open source

Les scripts développés en [Python](#) et utilisés dans ce chapitre sont accessibles en open source via [EasyFEA](#) [[Noel 2024](#)] à la version 1.2.6. Pour plus de détails sur l’installation et l’utilisation des scripts, on pourra consulter la documentation ainsi que les nombreux exemples disponibles sur [GitHub](#) et [Software Heritage](#).

## 8 Conclusions

Ce premier chapitre présente les principes fondamentaux de la méthode des champs de phase pour la rupture fragile de matériaux élastiques en régime quasi-statique. Un état de l’art des modèles de régularisation de l’énergie de rupture par fissuration (en section 2) et de décomposition de l’énergie de déformation élastique (en section 3) est dressé dans un cadre unifié, couvrant les matériaux isotropes et anisotropes. Une attention particulière est accordée à l’implémentation des projecteurs (détaillées en section 3 et en Annexe A), ainsi qu’à l’implémentation numérique du problème couplé mécanique-endommagement pour le solveur *étagé* dans le cadre de la MEF (présentée en section 5.4 et en Annexe B). Des simulations numériques ont été conduites sur deux exemples académiques en 2D, à savoir une plaque fissurée en cisaillement et une plaque trouée en compression. Les résultats sont analysés en comparant : (i) les trajectoires de fissures régularisées par le champ d’endommagement  $\phi$  ; (ii) l’évolution des courbes force-déplacement ; (iii) les forces d’initiation de fissure relevées lorsque le champ d’endommagement  $\phi$  atteint la valeur 1 en un point du domaine ; (iv) les temps de calcul engendrés. Les analyses menées ont notamment mis en évidence l’influence des modèles de régularisation de l’énergie de rupture par fissuration ainsi que celle des modèles de décomposition de la densité d’énergie élastique sur la résolution du problème couplé endommagement-mécanique, en particulier : (i) l’influence d’un

---

maillage optimisé (raffiné localement) par rapport à un maillage fin uniforme sur la trajectoire de la fissure régularisée par le champ de phase  $\phi$ , la courbe de réponse force-déplacement et le temps de calcul ; (ii) l'influence du seuil de convergence de l'algorithme itératif étagé (1.63) sur la qualité et la précision des résultats et sur le temps de calcul. De plus, les résultats des simulations ont montré les limitations de certains modèles de décomposition, qui sont souvent peu discutés dans la littérature. Le modèle de décomposition de l'énergie élastique de He semble être le plus adapté pour reproduire l'initiation de fissure observée lors des essais expérimentaux présentés dans le chapitre 2.



## Chapitre 2

# Identification des paramètres d'un modèle de champ de phase pour la rupture fragile d'une éprouvette en épicéa

*Ce deuxième chapitre présente une procédure d'identification des propriétés élastiques et d'endommagement de l'épicéa. Des essais expérimentaux représentatifs des modes de rupture observés au niveau des jonctions d'un meuble en bois d'épicéa sont réalisés sur des éprouvettes d'épicéa trouées soumises en compression jusqu'à la rupture par fissuration. Ces essais de compression uniaxiale sont suivis par corrélation d'images numériques pour l'acquisition de mesures expérimentales de champs de déplacement. Un bref état de l'art de la corrélation d'images numériques est dressé, incluant son implémentation dans le cadre de la méthode des éléments finis. Les champs de déplacement expérimentaux et les forces critiques initiant la propagation de la fissure mesurés par corrélation d'images numériques sont utilisés pour identifier les paramètres des modèles d'élasticité (dans la classe de symétrie isotrope transverse) et d'endommagement employés pour représenter le comportement élastique endommageable de l'épicéa.*

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Essais de compression-fissuration</b>	<b>55</b>
1.1	Les éprouvettes en épicea	55
1.2	Le dispositif expérimental	56
1.3	Les données expérimentales relevées	58
1.4	Post-traitement des données expérimentales	62
<b>2</b>	<b>Corrélation d'images numériques</b>	<b>63</b>
2.1	Principes de base de la corrélation d'images numériques	63
2.2	Implémentation éléments finis	66
2.3	Régularisation de Tikhonov	69
2.4	Algorithme de résolution	70
<b>3</b>	<b>Identification des paramètres matériaux</b>	<b>72</b>
3.1	Mesures expérimentales des champs de déplacement par corrélation d'images numériques	73
3.2	Identification des propriétés élastiques	78
3.3	Mesure de la force initiant la propagation de la fissure	86
3.4	Identification des propriétés d'endommagement	91
<b>4</b>	<b>Disponibilité des données</b>	<b>97</b>
<b>5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>97</b>

---

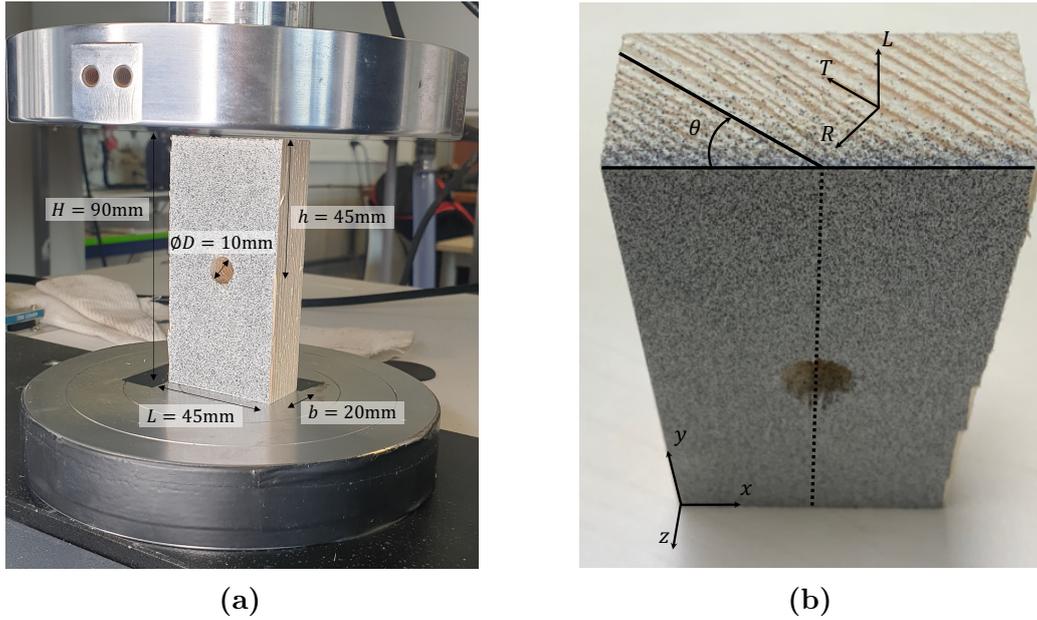
# 1 Essais de compression-fissuration

Dans le cadre d'une collaboration antérieure à la thèse, le Laboratoire [MSME](#) et l'Institut technologique [FCBA](#) ont étudié le mode de rupture par fissuration observé dans les connexions d'un lit mezzanine en épicéa [[Chevalier et al. 2022](#)]. Ce type de rupture quasi-fragile a été identifié comme le plus courant lors des tests de validation normalisés effectués sur des meubles en bois d'épicéa par le [FCBA](#). Un essai de compression spécifique a été conçu et mis en place pour reproduire ce mécanisme de rupture et quantifier la résistance mécanique d'une jonction entre deux éléments (une traverse et un montant) d'un lit mezzanine. L'essai expérimental a été réalisé via un système vis-écrou noyé en appui dans un logement cylindrique d'une éprouvette usinée dans des traverses d'épicéa, comme illustré sur la [Figure 2](#) dans l'introduction. Un modèle 3D [EF](#) représentatif de cet essai a été développé et simulé sur le logiciel [Abaqus](#) pour analyser la distribution locale des contraintes dans la jonction. Un critère de rupture de type Rankine basé sur la contrainte principale maximale (correspondant à la contrainte de traction transversale) calculée numériquement et la contrainte de rupture critique moyenne identifiée expérimentalement a été appliqué pour caractériser la résistance mécanique et prédire la rupture dans la jonction.

L'un des principaux objectifs de la thèse est d'établir pour ce type d'essai un critère d'initiation de fissure plus précis, basé sur un modèle d'endommagement par champ de phase, plutôt que sur la contrainte de rupture. Afin d'élaborer un critère d'initiation de fissure, il est tout d'abord nécessaire d'identifier les propriétés élastiques et d'endommagement du matériau en bois d'épicéa. Pour ce faire, et afin de dissocier les effets du contact écrou-bois du mécanisme de fissuration, des essais analogues, mais simplifiés par rapport à ceux réalisés dans [[Chevalier et al. 2022](#)], ont été conduits sur des échantillons d'épicéa troués (voir [Figure 2.1](#)), soumis à une charge de compression uniaxiale jusqu'à rupture. La présence du trou central génère de la traction transversale au voisinage du trou lors de la compression de l'échantillon. Cette section présente les essais expérimentaux effectués et les résultats obtenus.

## 1.1 Les éprouvettes en épicéa

Les essais de compression ont été effectués sur 18 éprouvettes d'épicéa, usinées dans deux traverses d'un lit mezzanine fournies par le [FCBA](#). Un perçage traversant est réalisé au centre des échantillons pour concentrer les contraintes et initier les fissures près du trou (en haut et en bas du trou) sous une charge de compression uniaxiale. Les dimensions des échantillons sont spécifiées sur la [Figure 2.1a](#) et résumées dans le [Tableau 2.1](#). Un mouchetis est appliqué sur la surface des échantillons à l'aide de peintures en aérosol blanche puis noire, en supposant que l'épaisseur de la couche de peinture, considérée négligeable par rapport à celle de la pièce ( $b = 20$  mm), n'altère pas le comportement mécanique de l'épicéa. Le mouchetis est utilisé pour créer une texture aléatoire et améliorer le contraste de l'image, ce qui facilite les analyses par Corrélation d'Images Numériques (voir [section 2](#)).



**FIGURE 2.1** – Essais expérimentaux : (a) géométrie de l'échantillon positionné entre les mors de la machine de compression ; (b) orientation  $\theta$  des cernes du bois avec le repère direct  $(L, T, R)$  caractérisant l'orientation du matériau.

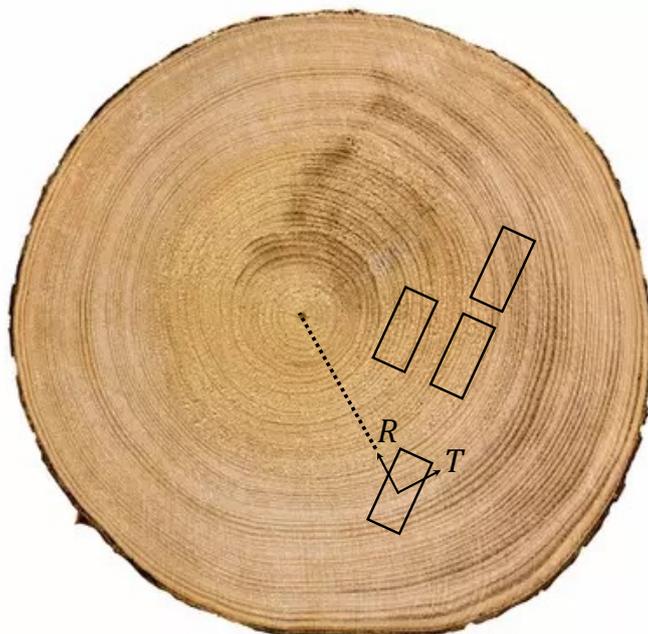
Paramètres	Valeurs [mm]
Hauteur $H$	90
Hauteur $h$	45
Largeur $L$	45
Épaisseur $b$	20
Diamètre $D$	10

**TABLEAU 2.1** – Essais expérimentaux : dimensions géométriques des échantillons.

L'orientation  $\theta$  des cernes du bois représentée sur les Figures 2.1b et 2.2 est définie en fonction des directions  $T$  et  $R$  (dans le plan transverse orthogonal à la direction longitudinale  $L$  des fibres) qui peuvent varier (i) d'une traverse à l'autre, mais aussi (ii) le long d'une traverse. Ces orientations, qui fluctuent en moyenne de 9 degrés entre les deux traverses A et B, sont répertoriées dans le Tableau 2.2 pour chacun des 18 échantillons. On observe une orientation moyenne de  $\theta_A = 33$  degrés pour la traverse A et  $\theta_B = 42$  degrés pour la traverse B, avec des dispersions respectives de  $\delta_{\theta_A} = 8\%$  et  $\delta_{\theta_B} = 5\%$ .

## 1.2 Le dispositif expérimental

Les essais de compression ont été réalisés à l'aide d'une machine INSTRON 3366 équipée de deux plaques de compression circulaires, comme illustré sur les Figures 2.1a et 2.3. Le déplacement  $u_{\text{exp}}$  de la traverse est imposé parallèlement à l'orientation  $L$  des fibres du bois et aligné suivant l'axe  $-y$  (vertical descendant) de la Figure 2.1b.



**FIGURE 2.2** – Essais expérimentaux : coupe transversale du tronc d’un arbre, dans lequel des traverses (représentées en traits noirs) sont usinées. Cette vue de dessus permet de distinguer nettement les **cernes** du bois. L’axe  $L$  des fibres du bois est normal au tronc et l’axe radial  $R$  représente la direction perpendiculaire aux **cernes** de croissance.

Pendant les essais, la machine de capacité 50 kN relève la force de réaction globale verticale  $F_{\text{exp}}$ , associée au déplacement vertical  $u_{\text{exp}}$  imposé. Il est important de noter que le déplacement mesuré par la machine correspond au déplacement de la traverse, et non à la diminution de la hauteur  $H$  de l’éprouvette. En effet,  $u_{\text{exp}}$  ne prend pas en compte la déformation de la traverse, du capteur, ou des plateaux supérieur et inférieur. Un logiciel associé à la machine, accessible via l’**Interface Homme-Machine (IHM)**, est utilisé pour piloter les essais et exporter les courbes force-déplacement relevées. Chaque échantillon d’épicéa est placé au centre de la plaque inférieure, comme le montrent les Figures 2.1a et 2.3. La traverse est entraînée verticalement à une vitesse de déplacement constante de 0.1 mm/s, et l’essai est arrêté lorsque la force de compression  $F_{\text{exp}}$  est réduite de 40% par rapport à sa valeur maximale  $F_m$ .

Comme illustré sur la Figure 2.3, des images 2D sont capturées pendant les essais par une caméra équipée d’un capteur **CCD** dont la résolution spatiale est de 2.3 Mpixels, et conduit (pour la distance entre la caméra et l’échantillon) à un facteur d’échelle de  $L/392$ , soit environ 115  $\mu\text{m}/\text{pixel}$ . La couleur des pixels est encodée en niveaux de gris sur 8 bits, et un éclairage artificiel est utilisé pour améliorer la qualité de l’image. La caméra est reliée à un ordinateur et le logiciel **VIC-Snap** est utilisé pour régler les paramètres d’acquisition de la caméra, comme la fréquence et l’intensité de l’éclairage.

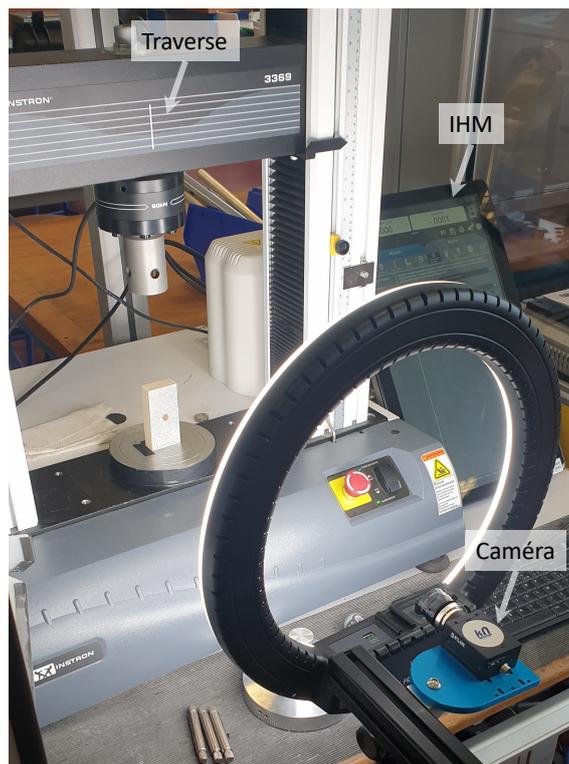
Essai	Traverse	Orientation $\theta$ [degrés]	Force max $F_m$ [kN]
0	A	32	34.75
1	B	41	42.16
2	B	43	42.31
3	B	38	40.15
4	B	46	42.49
5	A	34	34.62
6	B	43	40.58
7	A	37	33.71
8	A	34	34.16
9	B	42	40.99
10	B	41	42.31
11	B	40	41.13
12	A	28	32.67
13	A	35	33.44
14	A	35	32.86
15	A	31	34.70
16	A	31	34.98
17	B	42	39.26

**TABLEAU 2.2** – Orientation  $\theta$  des [cernes](#) et force maximale de compression  $F_m$  relevées (voir section 1.3) pour les 18 échantillons numérotés de 0 à 17. Les échantillons sont issus de deux traverses (notées A et B) et soumis à une charge de compression uniaxiale jusqu'à rupture.

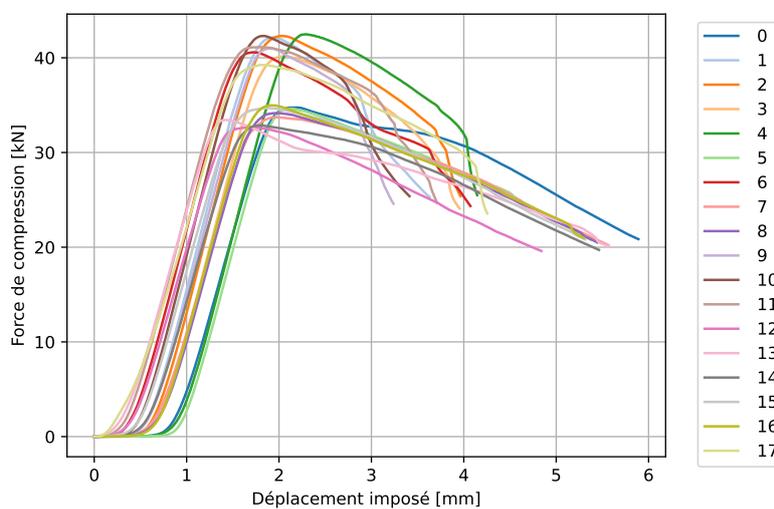
Pour assurer la synchronisation entre les images et les courbes force-déplacement, la fréquence d'acquisition de la caméra et de la machine d'essai a été fixée à 10 Hz, soit une image toutes les 100 ms. L'acquisition des images et des courbes force-déplacement est activée manuellement (par la même personne) au début de chaque essai. La caméra relève en moyenne 480 images pour chacun des 18 essais.

### 1.3 Les données expérimentales relevées

Pour chacun des 18 essais, numérotés de 0 à 17, la force de réaction globale verticale  $F_{\text{exp}}$  et le déplacement vertical imposé de la traverse  $u_{\text{exp}}$  sont enregistrés jusqu'à la rupture de l'échantillon. Les courbes force-déplacement obtenues sont affichées sur la Figure 2.4. La première partie transitoire des courbes résulte de la distance initiale (écart vertical) entre le bord supérieur de l'échantillon et la plaque de compression supérieure avant la mise en charge. Il convient de noter que ce décalage n'a aucune incidence sur les résultats de l'identification, puisque le déplacement de la traverse n'est pas pris en compte dans le processus d'identification ultérieur. Après cette phase transitoire préliminaire, un comportement élastique linéaire est observé, suivi d'un comportement inélastique caractérisé par un adoucissement de la pente (i.e. la tangente à la courbe), un passage par un maximum  $F_m$ , puis une diminution



**FIGURE 2.3** – Essais expérimentaux : machine de compression INSTRON 3366 équipée de deux plaques de compression circulaires, avec l’IHM, la caméra et la traverse annotées sur la photo, où le plateau supérieur n’est pas installé.

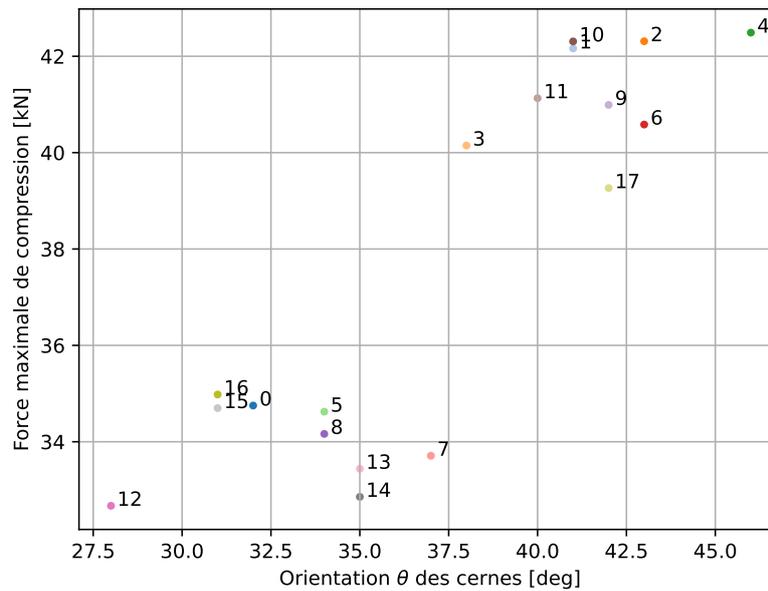


**FIGURE 2.4** – Essais expérimentaux : courbes force-déplacement relevées pour chacun des 18 essais.

progressive de la force jusqu’à la rupture complète de l’échantillon.

Deux ensembles distincts de courbes peuvent être clairement identifiés avec une

force maximale  $F_m$  dont la valeur moyenne vaut environ  $\underline{F_m^A} = 34$  kN pour la traverse A et  $\underline{F_m^B} = 41$  kN pour la traverse B, avec des dispersions respectives de  $\delta_{F_m^A} = 2.4\%$  et  $\delta_{F_m^B} = 2.6\%$ . Cette variabilité est essentiellement due au fait que les échantillons d'épicéa ont été usinés à partir de deux poutres transversales qui présentent des caractéristiques de bois différentes, notamment l'orientation  $\theta$  des **cernes** dans le plan transversal (voir Figure 2.2). Ces variations dans la microstructure du bois ont une influence sur les propriétés mécaniques des échantillons, comme illustré sur la Figure 2.5, où les forces maximales  $F_m$  inférieures à 36 kN correspondent aux éprouvettes d'épicéa usinées dans la traverse A, et dont l'orientation  $\theta$  des **cernes** est inférieure à 37.5 degrés. Celles supérieures à 38 kN correspondent aux éprouvettes



**FIGURE 2.5** – Essais expérimentaux : forces de compression maximales  $F_m$  relevées pendant les essais en fonction de l'orientation  $\theta$  des **cernes** de l'épicéa.

issues de la traverse B, dont l'orientation des **cernes** est supérieure à 37.5 degrés. Par ailleurs, d'autres imperfections microstructurales du matériau, telles que des nœuds, des vides ou des déviations des fibres, peuvent également expliquer les écarts observés expérimentalement.

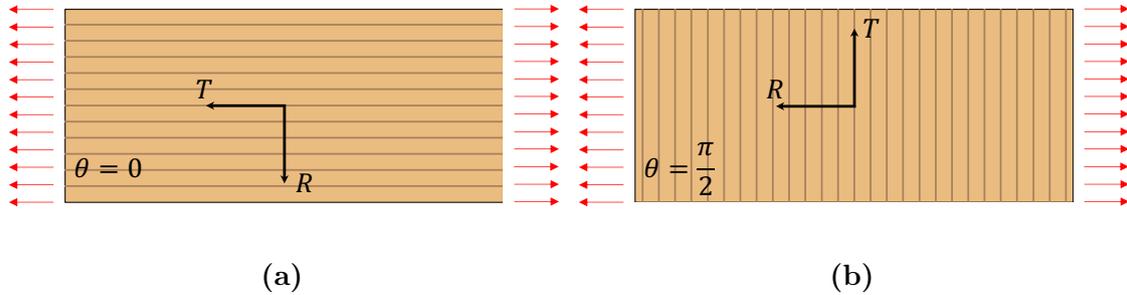
La Figure 2.5 montre que les forces maximales  $F_m$  sont plus faibles pour les échantillons présentant une orientation des **cernes**  $\theta$  inférieure à 37.5 degrés. Cela suggère que la fissure se propage plus facilement suivant l'axe radial  $R$ , perpendiculaire aux cernes de croissance [Campredon 1935, Winandy 1994]. Ce phénomène est particulièrement marqué dans le bois précoce du printemps (bois clair), qui présente une densité cellulaire plus faible comparée au bois tardif de la fin de l'été (bois sombre) [Bodig et Jayne 1993, Winandy 1994, Harrington 2002], comme illustré sur la Figure 2.2.

Pour mieux comprendre pourquoi la fissure se propage plus facilement dans

certaines directions, on peut se placer dans le cadre de la mécanique linéaire élastique de la rupture (ou **LEFM** pour *Linear Elastic Fracture Mechanics* en anglais), afin d'analyser les variations de résistance à la propagation des fissures selon les directions  $L$ ,  $T$  et  $R$  du matériau. En effet, la **LEFM** permet d'estimer la ténacité à la rupture  $K_{Ic}$  associée au mode d'ouverture de fissure (mode I), qui caractérise la capacité d'un matériau à résister à la propagation des fissures [Irwin 1957]. Dans le cas des matériaux isotropes, cette ténacité est donnée par  $K_{Ic} = \sqrt{E_{eq} G_c}$  [Besson et al. 2023], où  $E_{eq}$  est le module d'Young équivalent qui dépend de l'hypothèse 2D adoptée<sup>1</sup>. Dans le cas des matériaux anisotropes comme le bois épicea,  $K_{Ic}$  est une quantité qui dépend de l'orientation de la microstructure du matériau [Ashby et al. 1985, Laboratory 1999]. En effet, le bois épicea modélisé comme un matériau élastique orthotrope, présente des modules élastiques variant en fonction des directions  $L$ ,  $T$  et  $R$  [Carrington 1923, Campredon 1935, Winandy 1994], comme suit :

1. un module élastique longitudinal  $E_L$  d'environ 13 GPa dans la direction longitudinale  $L$  des fibres ;
2. un module élastique radial  $E_R$  de l'ordre de 0.7 GPa dans la direction radiale (orthogonale) aux **cernes**  $R$ , soit un rapport d'environ 20 entre  $E_L$  et  $E_R$  ;
3. un module élastique tangentiel  $E_T$  avoisinant 0.4 GPa dans la direction tangentielle (orthoradiale) aux **cernes**  $T$ , ce qui établit un rapport d'environ 2 entre  $E_R$  et  $E_T$ .

Le module élastique étant plus faible dans la direction tangentielle  $T$  (i.e.  $E_T < E_R < E_L$ ), il est cohérent d'observer que la ténacité à la rupture  $K_{Ic}$  soit plus faible lorsque  $\theta$  diminue et s'approche de 0 degré, comme illustré sur la Figure 2.6.

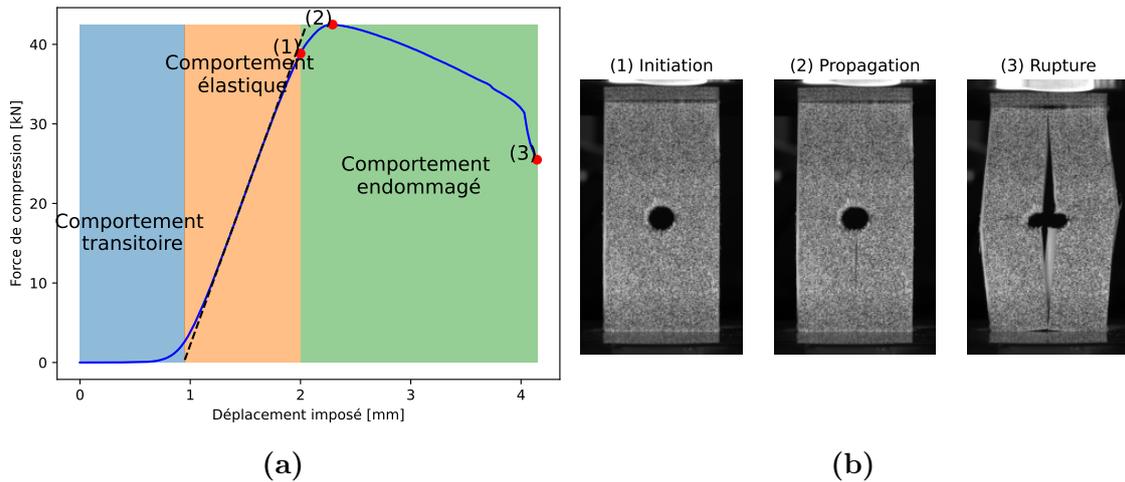


**FIGURE 2.6** – Essais expérimentaux : représentation schématique de deux échantillons dont l'orientation des cernes correspond à un angle (a)  $\theta = 0$  et (b)  $\theta = \pi/2$  par rapport à l'axe horizontal. Les flèches rouges représentent le déplacement horizontal de l'échantillon, proportionnel à  $-\nu_L \times u_{exp}$ , où  $u_{exp}$  est le déplacement expérimental imposé suivant la direction opposée à l'axe  $L$  des fibres du bois, normal au plan de la figure.

1. Le module d'Young équivalent  $E_{eq}$  est tel que  $E_{eq} = E$  en contraintes planes et  $E_{eq} = E/(1 - \nu^2)$  en déformations planes.

## 1.4 Post-traitement des données expérimentales

La Figure 2.7a montre une courbe force-déplacement expérimentale typique relevée pour l'essai de compression n° 4. Celle-ci peut être divisée en trois phases distinctes : (i) une phase transitoire d'adaptation ; (ii) un comportement élastique linéaire ; et (iii) un comportement inélastique endommagé. La phase transitoire



**FIGURE 2.7** – Essais expérimentaux : (a) courbe force-déplacement expérimentale et (b) images en niveaux de gris de l'échantillon d'épicéa prises à différents niveaux de chargement correspondant à (1) l'initiation de la fissure, (2) la propagation de la fissure et (3) la rupture pour l'essai de compression n° 4.

correspondant à des déplacements imposés entre 0 et 1 mm représente le régime au cours duquel la plaque de compression supérieure entre en contact avec l'échantillon d'épicéa. L'augmentation progressive de la charge axiale réduit les éventuels défauts de planéité des deux faces de l'éprouvette et rattrape les jeux dans la machine. Le comportement relevé pour des déplacements imposés compris entre 1 et 2 mm représente le régime élastique linéaire, qui est utilisé pour identifier le vecteur des paramètres élastiques  $\mathbf{p}$  en section 3.2. Enfin, l'initiation de fissure marque le début du régime inélastique d'endommagement qui commence en (1) comme illustré sur la Figure 2.7, et s'arrête en (3) à la rupture du matériau, lorsque la force de compression  $F_{\text{exp}}$  est réduite de 40% par rapport à sa valeur maximale  $F_m$ . La force d'initiation de fissure  $F_c$  mesurée en (1) est déterminée par CIN en section 3.3. Elle est ensuite employée en section 3.4 pour identifier les propriétés de l'épicéa utilisées dans le modèle d'endommagement par champ de phase (introduit dans le chapitre 1).

La prochaine section introduit les principes de base de la [Corrélation d'Images Numériques \(CIN\)](#) et son implémentation dans le cadre de la [MEF](#) qui est utilisée pour (i) mesurer le champ de déplacement expérimental  $\mathbf{u}_{\text{exp}}$  de l'échantillon en section 3.1, et (ii) identifier la force initiant la propagation de fissure  $F_c$  en section 3.3.

## 2 Corrélation d'images numériques

Cette section dresse un aperçu général de la [Corrélation d'Images Numériques \(CIN\)](#) en mettant l'accent sur les principes de base, l'implémentation et la résolution numérique dans le cadre de la [MEF](#). Les lecteurs intéressés peuvent notamment consulter la thèse de [[Colantonio 2020](#)] pour plus de détails.

### 2.1 Principes de base de la corrélation d'images numériques

Contrairement aux jauges de déformations et aux extensomètres, qui mesurent des valeurs ponctuelles ou moyennes, la Corrélation d'Images Numériques se distingue par sa capacité non invasive à mesurer le champ de déplacement d'un échantillon soumis à un chargement à partir d'images digitales. La [CIN](#) (ou [DIC](#) pour *Digital Image Correlation* en anglais) est une technique d'analyse d'images couramment utilisée en mécanique expérimentale pour mesurer le champ de déplacement entre deux configurations de chargement, typiquement (i) une configuration initiale de référence et (ii) une configuration déformée. Pour chaque configuration, une image de l'échantillon considéré est relevée avec une caméra équipée d'un capteur [CCD](#) et connectée à un ordinateur. Numériquement, l'image prise par la caméra peut être considérée comme un tableau (ou matrice) de valeurs, où chaque valeur est un entier qui correspond au niveau de gris d'un pixel. Avec un encodage sur huit bits (correspondant à  $2^8 = 256$  valeurs), la couleur d'un pixel est donnée par une fonction qui varie entre 0 et 255.

Avec la [CIN](#), le déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  d'un pixel de coordonnées  $\mathbf{x}$  est obtenu entre les deux configurations en formulant l'hypothèse de conservation du niveau de gris entre les deux images [[Horn et Schunck 1981](#)]. Cette hypothèse, illustrée sur la [Figure 2.8](#), s'écrit comme

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})), \quad (2.1)$$

où  $\Omega$  représente une partie de l'image souvent appelée région d'intérêt (ou [ROI](#) pour *Region Of Interest* en anglais), et où  $f(\mathbf{x})$  et  $g(\mathbf{x})$  sont respectivement les niveaux de gris évalués dans l'image de référence et l'image déformée.

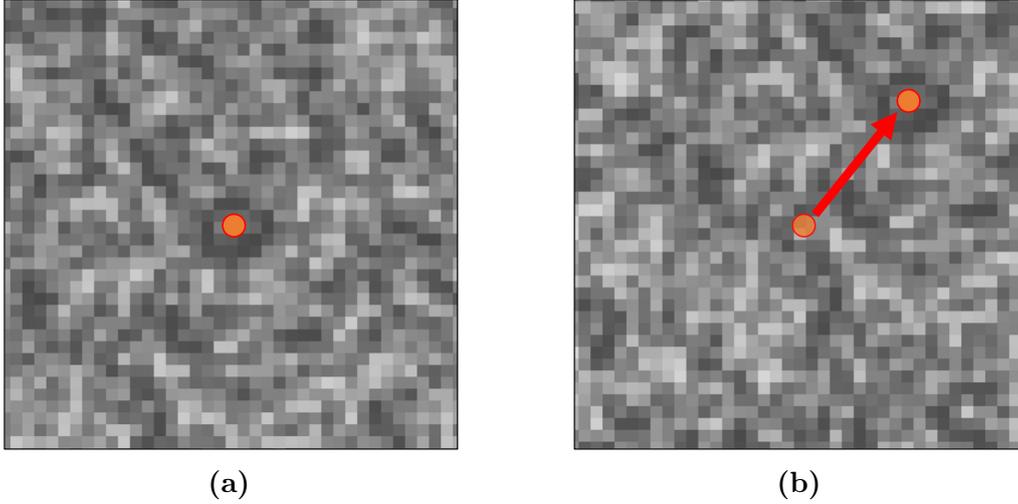
Le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  est obtenu en résolvant l'équation (2.1) au mieux sur la [ROI](#). Pour cela, on cherche à minimiser la fonctionnelle  $\mathcal{J}_{\text{dic}}$  qui s'écrit

$$\mathcal{J}_{\text{dic}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} r_{\text{dic}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})^2 \, d\Omega, \quad (2.2)$$

où  $r_{\text{dic}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})$  est le résidu de corrélation représentant la différence (ou la non-conservation) du niveau de gris entre les deux images [[Hild et Roux 2012a](#)], défini comme

$$r_{\text{dic}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})). \quad (2.3)$$

Trouver un champ de déplacement  $\mathbf{u}$  minimisant (2.2) est un problème non-linéaire qui peut être résolu à l'aide de l'algorithme de Gauss-Newton [[Bruck et al.](#)].



**FIGURE 2.8** – Illustration de la conservation du niveau de gris entre (a) une image de référence et (b) une image déformée où le déplacement entre l'état initial et l'état déformé est représenté par une flèche rouge.

1989]. Pour l'itération de convergence  $n \in \mathbb{N}$ , le champ de déplacement  $\mathbf{u}_{n+1}$  est calculé en fonction de la valeur courante  $\mathbf{u}_n$  comme

$$\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_n(\mathbf{x}) + \delta\mathbf{u}_n(\mathbf{x}), \quad (2.4)$$

où  $\delta\mathbf{u}_n(\mathbf{x})$  est la direction de descente à l'itération  $n$ , en supposant un pas de descente égal à 1. En utilisant l'équation (2.4), le niveau de gris de l'image déformée s'écrit

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x})) = g(\mathbf{x} + \mathbf{u}_n(\mathbf{x}) + \delta\mathbf{u}_n(\mathbf{x})). \quad (2.5)$$

En réalisant un développement limité de Taylor au premier ordre autour du point  $\mathbf{x} + \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x})$  et en supposant une petite perturbation  $\delta\mathbf{u}_n(\mathbf{x})$ , le niveau de gris de l'image déformée (2.5) peut être réécrit

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x})) = g(\mathbf{x} + \mathbf{u}_n(\mathbf{x})) + \delta\mathbf{u}_n(\mathbf{x})^T \nabla g(\mathbf{x} + \mathbf{u}_n(\mathbf{x})), \quad (2.6)$$

où  $\nabla g(\mathbf{x} + \mathbf{u}_n(\mathbf{x}))$  est le gradient de l'image déformée au point  $\mathbf{x} + \mathbf{u}_n(\mathbf{x})$ . Une modification est généralement apportée à l'algorithme de Gauss-Newton en considérant que le gradient de l'image déformée est égal au gradient de l'image de référence [Réthoré 2010, Leclerc et al. 2012, Hild et Roux 2012b], tel que

$$\nabla g(\mathbf{x} + \mathbf{u}_n(\mathbf{x})) = \nabla f(\mathbf{x}). \quad (2.7)$$

Comme le gradient ne dépend plus de  $\mathbf{u}_n(\mathbf{x})$ , cette technique de quasi-Newton permet généralement d'accélérer le temps de résolution, car le gradient n'est évalué qu'une seule fois.

En utilisant l'équation (2.6) et la simplification (2.7), la fonction-coût (2.2) peut être réécrite à l'itération  $n$  comme

$$\mathcal{J}_{\text{dic}}(\mathbf{u}_n(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( r_{\text{dic}}(\mathbf{u}_n(\mathbf{x}), \mathbf{x}) - \delta\mathbf{u}_n(\mathbf{x})^T \nabla f(\mathbf{x}) \right)^2 d\Omega. \quad (2.8)$$

Sans hypothèses supplémentaires sur la régularité du champ de déplacement, la résolution du problème de minimisation de la fonctionnelle  $\mathcal{J}_{\text{dic}}$  définie en (2.8) est un problème mal posé au sens de Hadamard [Bertero et al. 1988, Sutton et al. 2009, Hild et Roux 2012a]. Pour régulariser cinématiquement le problème de minimisation, l'incrément de déplacement  $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$  est recherché sous la forme

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_d} N_i(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}_i, \quad (2.9)$$

où  $\delta \mathbf{u}_i$  est le vecteur qui regroupe les **ddl**s associés à la fonction de forme  $N_i(\mathbf{x})$  et où  $n_d$  est la dimension du sous-espace vectoriel d'approximation [Colantonio 2020]. Plusieurs approches/méthodes peuvent être considérées pour le choix de la base des fonctions d'interpolation  $N_i(\mathbf{x})$ .

Les approches locales utilisent une base de fonctions polynomiales par morceaux et font partie des premières méthodes développées dans le cadre de la **CIN** [Horn et Schunck 1981, Sutton et al. 1983, Sutton et al. 1986]. Avec ces méthodes, la **ROI** est décomposée en plusieurs zones (généralement choisies carrées en 2D), appelées imagettes, zones d'intérêt (ou **ZOI** pour *Zone Of Interest* en anglais) ou masques. Les déplacements du centre de chaque zone sont déterminés séparément en recherchant, pour chaque **ZOI**, l'image correspondant à l'imagette définie dans l'image de référence au sein de l'image déformée. Bien que ces méthodes soient très utilisées dans les logiciels de **CIN** commerciaux et largement adoptées dans les milieux industriels et académiques, elles nécessitent souvent une étape de post-traitement pour obtenir un champ de déplacement exploitable, continu et régulier. Comparer le champ de déplacement expérimental (obtenu sous la forme de nuages de points) avec celui obtenu par simulation numérique (par exemple avec la **MEF**) peut s'avérer complexe.

Les approches globales utilisent des hypothèses cinématiques sur toute la région d'intérêt (**ROI**) grâce à une discrétisation de la surface d'intérêt et des bases de fonctions de forme définies sur tout le domaine (surface en 2D). Le champ de déplacement peut être supposé : (i) continu [Roux et al. 2002, Wagne et al. 2002]; (ii) continu et de dérivées premières continues [Cheng et al. 2002, Réthoré et al. 2010]; (iii) continu sur un maillage **EF** [Besnard et al. 2006, Sun et al. 2005, Pierré et al. 2016]; (iv) discontinu avec la méthode des éléments finis étendus (ou **XFEM** pour *eXtended Finite Element Method* en anglais) [Réthoré et al. 2008, Réthoré et al. 2007]. Comme on le verra par la suite en section 3.2 pour l'identification des propriétés élastiques de l'épicéa, la **CIN EF** facilite le dialogue entre la mesure et la simulation [Hild et Roux 2006], car le maillage considéré pour la **CIN** peut être réutilisé pour effectuer des simulations numériques.

Des comparaisons entre les approches locales et globales sont discutées dans [Hild et Roux 2012b, Pan et al. 2015, Blaysat et al. 2020], mais elles ne seront pas abordées dans le cadre de ce travail.

Dans la suite du manuscrit, nous nous concentrerons sur la **CIN EF** [Besnard et al. 2006, Sun et al. 2005, Pierré et al. 2016]. L'implémentation dans le code éléments finis **EasyFEA** repose sur une bibliothèque **Python** développée par *Benoit Blaysat*<sup>2</sup> et *Raphaël Langlois*<sup>3</sup>. Cette bibliothèque m'a été fournie lors d'une école d'hiver organisée à Clermont-Ferrand par le **GDR Sciences du Bois** en novembre 2022. Contrairement au code d'origine, l'implémentation considérée dans **EasyFEA** permet de réaliser la corrélation d'images avec un maillage composé d'éléments triangles quadratiques **TRI6** ou cubiques **TRI10** et d'éléments quadrangles linéaires **QUAD4** ou quadratiques **QUAD8**.

## 2.2 Implémentation éléments finis

Dans le cadre des approches globales basées sur la **MEF** en 2D, l'incrément de déplacement (solution)  $\delta \mathbf{u}$  est discrétisé sur un maillage éléments finis et représenté par le vecteur des inconnues nodales  $\delta \mathbf{u} = [\delta u_1, \delta v_1, \dots, \delta u_n, \delta v_n]^T$ , où  $\delta u_i$  et  $\delta v_i$  sont respectivement les incréments de déplacement nodaux dans les directions  $x$  et  $y$  pour le nœud  $i$ . Ce vecteur solution de dimension  $N_{\text{ddl}} \times 1$  est obtenu à chaque itération de l'algorithme de Gauss-Newton en résolvant le système matriciel suivant :

$$[\mathbf{M}_{\text{dic}}] \delta \mathbf{u} = \mathbf{b}_{\text{dic}}, \quad (2.10)$$

où  $[\mathbf{M}_{\text{dic}}]$  est une matrice de dimension  $N_{\text{ddl}} \times N_{\text{ddl}}$ , définie comme

$$[\mathbf{M}_{\text{dic}}] = [\mathbf{N}] [\nabla \mathbf{f}] \cdot [\nabla \mathbf{f}]^T [\mathbf{N}]^T, \quad (2.11a)$$

avec

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} [N_x] & [N_y] \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\nabla \mathbf{f}] = \begin{bmatrix} [\nabla_x \mathbf{f}] \\ [\nabla_y \mathbf{f}] \end{bmatrix}. \quad (2.11b)$$

Dans l'équation (2.11),  $[\mathbf{N}]$  est une matrice de dimension  $N_{\text{ddl}} \times 2N_p$  qui contient les valeurs des fonctions de forme évaluées en chaque pixel, et  $[\nabla \mathbf{f}]$  est une matrice de dimension  $2N_p \times N_p$  qui contient pour chaque pixel de coordonnées  $\mathbf{x}_p$  (appartenant à la **ROI**) le gradient de l'image de référence  $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_p)$  évalué en  $\mathbf{x}_p$ . Le vecteur des résidus  $\mathbf{b}_{\text{dic}}$  de dimension  $N_{\text{ddl}} \times 1$  s'écrit

$$\mathbf{b}_{\text{dic}} = [\mathbf{N}] [\nabla \mathbf{f}] \mathbf{r}_{\text{dic}}, \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{r}_{\text{dic}}$  est un vecteur de dimension  $N_p \times 1$  contenant pour chaque pixel de coordonnées  $\mathbf{x}_p$  le résidu de corrélation évalué comme

$$\forall p \in \{1, \dots, N_p\}, \quad r_{\text{dic}}(\mathbf{u}_p, \mathbf{x}_p) = f(\mathbf{x}_p) - g(\mathbf{x}_p + \mathbf{u}_p). \quad (2.13)$$

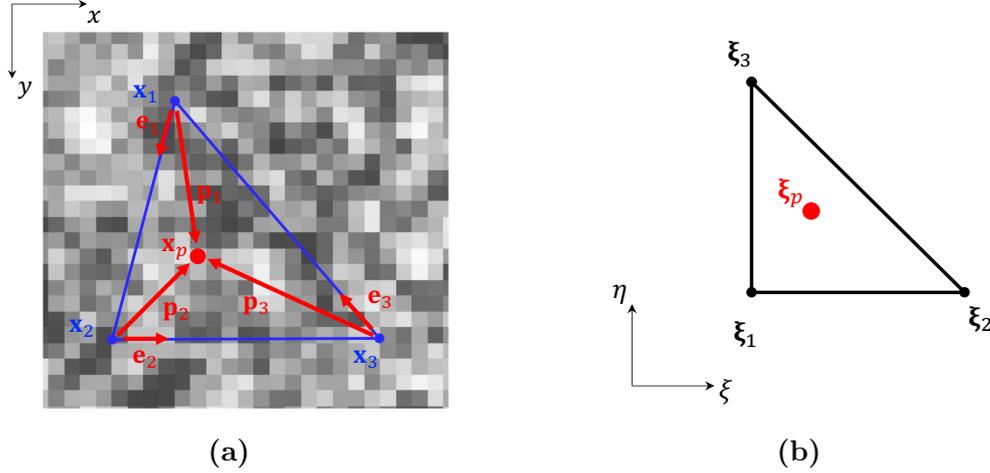
Le niveau de gris  $g(\mathbf{x}_p + \mathbf{u}_p)$  fait intervenir le vecteur déplacement  $\mathbf{u}_p$  du pixel  $p$  qui peut être évalué numériquement par interpolation en utilisant par exemple la fonction

2. Professeur des universités, Université Clermont Auvergne, Institut Pascal.

3. Ancien post-doctorant à l'Université Clermont Auvergne, Institut Pascal, et maintenant post-doctorant à l'École Centrale de Nantes, Laboratoire GEM.

`RectBivariateSpline` de la bibliothèque `Python scipy` [Virtanen et al. 2020].

La matrice d'interpolation  $[N]$  de dimension  $N_{\text{ddl}} \times 2N_p$  introduite en équation (2.11) comprend les fonctions de forme  $N_i$  évaluées en chaque pixel contenu dans les éléments du maillage. Pour évaluer les fonctions de forme  $N_i$ , il est nécessaire



**FIGURE 2.9** – (a) Définition d'un pixel de l'image de coordonnées  $\mathbf{x}_p$  dans un élément  $\Omega^e$  du maillage EF ; (b) coordonnées  $\xi_p$  du pixel dans l'élément de référence  $\Omega^{\text{ref}}$ . Le pixel est représenté par un point rouge sur les deux figures.

d'identifier à quel élément du maillage chaque pixel appartient. Pour détecter si un pixel  $p$  de coordonnées  $\mathbf{x}_p$  appartient à un élément  $\Omega^e$ , on définit dans un premier temps les vecteurs normalisés  $\mathbf{e}_n$  formés entre les  $n$  nœuds (sommets) de l'élément, de coordonnées  $\mathbf{x}_n$ . Pour un élément triangle linéaire `TRI3` (où  $n = 3$ ), comme illustré sur la Figure 2.9a, les vecteurs normalisés définis pour chaque segment/côté du triangle sont respectivement définis comme

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2\|} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3\|}. \quad (2.14)$$

Pour chaque pixel  $p$  de coordonnée  $\mathbf{x}_p$ , l'élément  $\Omega^e$  qui le contient doit vérifier les conditions suivantes :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{p}_i}{\|\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{p}_i\|} \cdot \mathbf{n} \geq 0, \quad (2.15)$$

avec  $\mathbf{p}_i = \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à la surface formée par l'élément  $\Omega^e$  défini tel que  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \wedge -\mathbf{e}_3$ .

Après avoir identifié à quel élément du maillage  $\Omega^e$  appartient le pixel, il est nécessaire d'évaluer les coordonnées  $\xi_p$  du pixel dans l'élément de référence  $\Omega^{\text{ref}}$  pour évaluer les fonctions de forme  $N_i(\xi_p)$ . Les coordonnées  $\xi_p$  du pixel  $p$  dans l'élément de référence  $\Omega^{\text{ref}}$  sont calculées comme suit :

$$\xi_p = \arg \min_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left\| \left( \mathbf{x}_1 + [J(\xi)]^T (\xi - \xi_1) \right) - \mathbf{x}_p \right\|^2, \quad (2.16)$$

où  $[J(\boldsymbol{\xi})]$  est la matrice jacobienne de la transformation introduite en équation (B.2) de l'Annexe B. Cette matrice est constante par élément pour tous les éléments linéaires (e.g. [SEG2](#), [TRI3](#), [TETRA4](#)) et plus généralement pour tous les éléments non distordus vérifiant le critère géométrique suivant :

$$\frac{\max_{i=1,\dots,m} \{J_i\}}{\min_{i=1,\dots,m} \{J_i\}} = 1, \quad (2.17)$$

où  $J_i$  est le jacobien (introduit en équation (B.3) de l'Annexe B) évalué au  $i$ -ème point d'intégration. Ainsi, pour tous les éléments non distordus respectant (2.17), les coordonnées  $\boldsymbol{\xi}_p$  du pixel  $p$  dans l'élément de référence  $\Omega^{\text{ref}}$  s'écrivent :

$$\boldsymbol{\xi}_p = \boldsymbol{\xi}_1 + [J]^{-T} (\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_1). \quad (2.18)$$

La transformation inverse des coordonnées  $\mathbf{x}_p$  dans l'élément réel  $\Omega^e$  vers les coordonnées  $\boldsymbol{\xi}_p$  dans l'élément de référence  $\Omega^{\text{ref}}$  est implémentée dans la fonction `__Get_Mapping()` du script [EasyFEA/fem/\\_group\\_elems.py](#).

Finalement, la matrice d'interpolation  $[\mathbf{N}] = [[\mathbf{N}_x] \quad [\mathbf{N}_y]]$ , définie en (2.11), de dimension  $N_{\text{ddl}} \times 2N_p$ , est obtenue par la concaténation horizontale des matrices  $[\mathbf{N}_x]$  et  $[\mathbf{N}_y]$ , toutes deux de dimension  $N_{\text{ddl}} \times N_p$ , et respectivement associées aux degrés de liberté (`ddls`) suivant  $x$  et  $y$ , comme illustré sur la Figure 2.10.

$$[\mathbf{N}_x] = \begin{bmatrix} p \\ \vdots \\ \cdots N_1(\boldsymbol{\xi}_p) \cdots 2n_1 - 1 \\ \cdots 0 \cdots \\ \vdots \\ \cdots N_2(\boldsymbol{\xi}_p) \cdots 2n_2 - 1 \\ \cdots 0 \cdots \\ \vdots \\ \cdots N_3(\boldsymbol{\xi}_p) \cdots 2n_3 - 1 \\ \cdots 0 \cdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$[\mathbf{N}_y] = \begin{bmatrix} p \\ \vdots \\ \cdots 0 \cdots 2n_1 \\ \cdots N_1(\boldsymbol{\xi}_p) \cdots \\ \vdots \\ \cdots 0 \cdots 2n_2 \\ \cdots N_2(\boldsymbol{\xi}_p) \cdots \\ \vdots \\ \cdots 0 \cdots 2n_3 \\ \cdots N_3(\boldsymbol{\xi}_p) \cdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (b)$$

**FIGURE 2.10** – Construction des matrices d'interpolation pour des éléments triangles linéaires [TRI3](#) : (a) matrice d'interpolation  $[\mathbf{N}_x]$  pour les `ddls` suivant  $x$ , et (b) matrice d'interpolation  $[\mathbf{N}_y]$  pour les `ddls` suivant  $y$ . Les deux matrices sont de dimension  $N_{\text{ddl}} \times N_p$ . Pour chaque pixel  $p$  contenu dans l'élément  $\Omega^e$ , les valeurs des fonctions de forme  $N_i(\boldsymbol{\xi}_p)$  sont positionnées sur la colonne  $p$  associée au pixel et sur les lignes  $2n_i - 1$  pour les `ddls` suivant  $x$  et  $2n_i$  pour les `ddls` suivant  $y$ , où  $n_i$  est le numéro du  $i$ -ème nœud de l'élément  $\Omega^e$ .

### 2.3 Régularisation de Tikhonov

Dans cette section, nous appliquons une régularisation de Tikhonov pour stabiliser la résolution de l'équation (2.10). Cette technique est l'une des principales méthodes employées pour résoudre les problèmes inverses mal posés au sens de [Hadamard](#). Pour plus d'informations sur ces méthodes, on pourra consulter le travail de synthèse réalisé dans la thèse de [Langlois 2023](#).

La régularisation de Tikhonov introduit un terme de pénalisation dans la fonctionnelle à minimiser [[Leclerc et al. 2012](#), [Passieux et Périé 2012](#), [Colantonio 2020](#)], ce qui permet de reformuler le système matriciel de l'équation (2.10) comme suit :

$$([M_{\text{dic}}] + \alpha_R [R]) \boldsymbol{\delta u} = \mathbf{b}_{\text{dic}} - \alpha_R [R] \mathbf{u}, \quad (2.19)$$

où  $\alpha_R \in \mathbb{R}^+$  est un paramètre de régularisation pouvant être interprété comme la fréquence de coupure d'un filtre passe-bas [[Leclerc et al. 2012](#), [Colantonio 2020](#)]. Ce paramètre, défini en équation (2.26), est utilisé pour pondérer l'influence de la régularisation lors de la résolution du système matriciel (2.19). Dans l'équation (2.19),  $[R]$  est la représentation matricielle d'un opérateur différentiel linéaire par rapport au champ solution  $\mathbf{u}$  correspondant à l'opérateur laplacien vectoriel [[Passieux et Périé 2012](#)]. Cette matrice de dimension  $N_{\text{ddl}} \times N_{\text{ddl}}$  est définie dans le cadre de la méthode des éléments finis comme

$$[R] = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} [dN_x]^T [dN_x] + [dN_y]^T [dN_y] d\Omega^e, \quad (2.20)$$

où  $[dN_x]$  et  $[dN_y]$  sont des matrices de dimension  $2 \times 2n$ , définies respectivement pour un élément triangle linéaire [TRI3](#) par

$$[dN_x(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \partial_x N_1(\mathbf{x}) & 0 & \partial_x N_2(\mathbf{x}) & 0 & \partial_x N_3(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \partial_x N_1(\mathbf{x}) & 0 & \partial_x N_2(\mathbf{x}) & 0 & \partial_x N_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (2.21a)$$

$$[dN_y(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \partial_y N_1(\mathbf{x}) & 0 & \partial_y N_2(\mathbf{x}) & 0 & \partial_y N_3(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \partial_y N_1(\mathbf{x}) & 0 & \partial_y N_2(\mathbf{x}) & 0 & \partial_y N_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (2.21b)$$

Les matrices  $[M_{\text{dic}}]$  et  $[R]$  sont ensuite normalisées par des constantes de normalisation énergétiques  $w_M$  et  $w_R$  telles que [[Mendoza et al. 2019](#)]

$$w_M = \mathbf{w}^T [M_{\text{dic}}] \mathbf{w} \quad \text{et} \quad w_R = \mathbf{w}^T [R] \mathbf{w}, \quad (2.22)$$

où  $\mathbf{w}$  est le vecteur associé à la discrétisation d'un champ vectoriel périodique bidimensionnel (suivant  $x$  et  $y$ ) du maillage qui est défini comme

$$\mathbf{w} = [w_1, w_1, \dots, w_n, w_n]^T, \quad \text{avec} \quad w_i = w(\mathbf{x}_i), \quad (2.23)$$

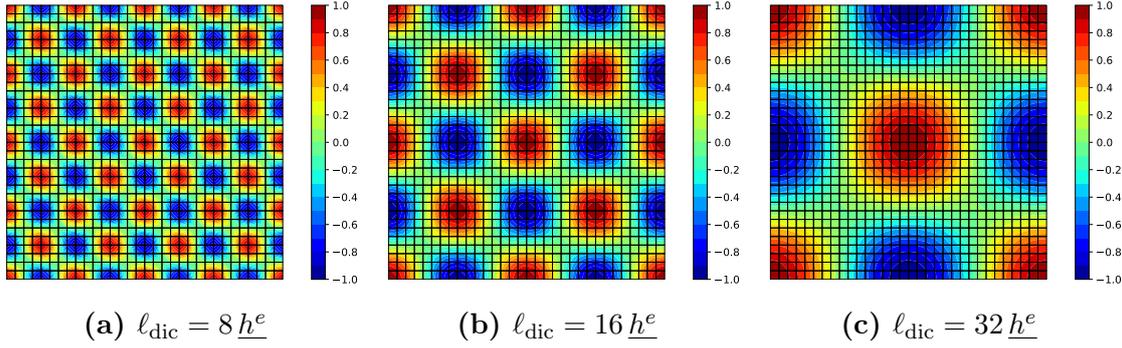
où  $w(\mathbf{x})$  est une onde périodique 2D qui s'écrit

$$w(\mathbf{x}) = \cos\left(\frac{2\pi x}{\ell_{\text{dic}}}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{\ell_{\text{dic}}}\right) \quad (2.24)$$

et  $\ell_{\text{dic}} \in \mathbb{R}^+$  représente la période spatiale, définie en fonction de la taille moyenne  $\underline{h}^e$  des éléments du maillage comme

$$\ell_{\text{dic}} = 8 \underline{h}^e. \quad (2.25)$$

Comme illustrée sur la Figure 2.11, l'onde périodique  $w(\mathbf{x})$  représenté sur un domaine carré de côté  $c = 32 \underline{h}^e$  et discrétisé sur un maillage uniforme structuré constitué d'éléments quadrangles linéaires QUAD4, possède une périodicité spatiale caractérisée par sa longueur d'onde  $\ell_{\text{dic}}$ . On constate qu'une période spatiale  $\ell_{\text{dic}} = 8 \underline{h}^e$  est



**FIGURE 2.11** – Influence de la période spatiale  $\ell_{\text{dic}}$  sur l'onde périodique  $w(\mathbf{x})$  représenté sur un domaine carré de côté  $c = 32 \underline{h}^e$  et discrétisé sur un maillage EF uniforme structuré composé d'éléments quadrangles linéaires QUAD4.

suffisante pour représenter correctement l'onde périodique  $w(\mathbf{x})$ . Le paramètre de régularisation  $\alpha_R$  introduit en équation (2.19) est défini tel que

$$\alpha_R = (\ell_R / \ell_{\text{dic}})^2, \quad (2.26)$$

où  $\ell_R > 0$  est une longueur d'onde de coupure (ou de régularisation) exprimée en pixels.

Finalement, l'incrément de déplacement solution  $\delta \mathbf{u}$  (à l'itération  $n$ ) est obtenu en résolvant le système matriciel régularisé qui s'écrit

$$[\mathbf{M}_{\text{reg}}] \delta \mathbf{u} = \mathbf{b}_{\text{reg}}, \quad (2.27a)$$

avec

$$[\mathbf{M}_{\text{reg}}] = \frac{1}{w_M} [\mathbf{M}_{\text{dic}}] + \frac{\alpha_R}{w_R} [\mathbf{R}] \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_{\text{reg}} = \frac{1}{w_M} \mathbf{b}_{\text{dic}} - \frac{\alpha_R}{w_R} [\mathbf{R}] \mathbf{u}. \quad (2.27b)$$

## 2.4 Algorithme de résolution

La résolution du système matriciel défini en équation (2.27) dans le cadre du solveur non-linéaire de Gauss-Newton nécessite d'initialiser le vecteur déplacement

solution avec un vecteur initial  $\mathbf{u}_0$ .

Une première approche consiste à imposer un champ de déplacement initial nul sur tout le domaine (en tous les nœuds du maillage) en prenant  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ . Cependant, dans le cas de grandes déformations ou de grands déplacements entre les images, cette approche peut faire diverger l'algorithme de résolution, ou faire converger celui-ci vers un minimum local [Colantonio 2020].

Dans l'implémentation considérée dans [EasyFEA](#), le vecteur solution initial  $\mathbf{u}_0 = [u_1, v_1, \dots, u_n, v_n]^T$  de dimension  $N_{\text{ddl}} \times 1$  est obtenu en minimisant, au sens des moindres carrés, l'écart entre le vecteur  $\mathbf{u}_0$  projeté sur la grille des pixels et le vecteur  $\mathbf{v}$  de dimension  $2 N_p \times 1$  représentant le déplacement de chacun des pixels suivant  $x$  et  $y$ , de sorte que la fonctionnelle à minimiser s'écrit

$$\mathcal{J}_u(\mathbf{u}_0) = \left\| [\mathbf{N}]^T \mathbf{u}_0 - \mathbf{v} \right\|^2, \quad (2.28a)$$

où

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}, \quad \text{avec } v_x = [u_1, \dots, u_p]^T \quad \text{et} \quad v_y = [v_1, \dots, v_p]^T. \quad (2.28b)$$

Le vecteur déplacement  $\mathbf{v}$  est calculé numériquement (entre les deux images considérées) avec la fonction `calc()` de la classe `DISOpticalFlow` du code [Open Source Computer Vision Library \(OpenCV\)](#). Cette fonction utilise un algorithme de type *Dense Inverse Search* (DIS) introduit dans [Kroeger et al. 2016]. Cette fonction développée en C++ est notamment disponible dans la bibliothèque `opencv-python`. En pratique, le vecteur solution initial  $\mathbf{u}_0$  minimisant (2.28) est obtenu en résolvant le système matriciel suivant :

$$[\mathbf{N}] [\mathbf{N}]^T \mathbf{u}_0 = [\mathbf{N}] \mathbf{v}, \quad (2.29a)$$

qui peut être réécrit sous la forme

$$\left( [\mathbf{N}_x] [\mathbf{N}_x]^T + [\mathbf{N}_y] [\mathbf{N}_y]^T \right) \mathbf{u}_0 = [\mathbf{N}_x] v_x + [\mathbf{N}_y] v_y. \quad (2.29b)$$

Une fois le vecteur déplacement initial  $\mathbf{u}_0$  calculé, le vecteur déplacement solution  $\mathbf{u}_n$  est mis à jour à chaque itération  $n \geq 1$  de l'algorithme de Gauss-Newton comme

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} + \delta \mathbf{u}_n, \quad (2.30)$$

où  $\delta \mathbf{u}_n$  est le vecteur d'incrément de déplacement solution obtenu en résolvant le système matriciel (2.27), construit à partir du vecteur solution  $\mathbf{u}_{n-1}$  obtenu à l'itération précédente  $n - 1$ . Finalement, l'algorithme de Gauss-Newton est interrompu lorsque la norme  $\|\mathbf{b}_{\text{reg}}\|$  du vecteur résidu  $\mathbf{b}_{\text{reg}}$  défini en (2.27b) est inférieure à une valeur seuil  $\epsilon$  proche de 0.

Pour obtenir plus de détails sur l'implémentation de l'algorithme de résolution, on pourra consulter la fonction `Solve()` du script [EasyFEA/simulations/\\_dic.py](#).

### 3 Identification des paramètres matériaux

Comme introduit à la fin de la section 1.3, le bois d'épicéa utilisé dans les essais est un matériau naturel qui présente des hétérogénéités, notamment l'orientation des *cernes*, les nœuds ou les déviations des fibres. Bien que les propriétés du bois soient sensibles à l'humidité, nous supposons dans ce travail qu'il se comporte comme un matériau élastique linéaire. Par ailleurs, le bois d'épicéa est un matériau anisotrope, avec des modules élastiques d'environ 13 GPa pour  $E_L$  selon l'axe longitudinal  $L$ , 0.4 GPa pour  $E_T$  selon l'axe tangentiel  $T$  et 0.7 GPa pour  $E_R$  selon l'axe radial  $R$  [Carrington 1923, Campredon 1935, Winandy 1994]. Comme illustré sur les Figures 2.1b et 2.2, l'axe longitudinal  $L$  correspond à l'axe principal de symétrie de rotation du tronc, tandis que les axes  $T$  et  $R$  représentent respectivement les directions tangentielle (ou orthoradiale) et radiale (ou perpendiculaire) aux *cernes* de croissance. Enfin, dans ce travail, on suppose que l'épicéa se comporte comme un matériau élastique linéaire appartenant à la classe de symétrie isotrope transverse, en considérant que  $E_T = E_R$  de sorte que les plans  $(T, R)$  perpendiculaires à l'axe longitudinal  $L$  soient des plans d'isotropie.

Dans le cadre de l'élasticité linéaire en 2D, les éprouvettes sont supposées être suffisamment minces pour que les conditions de contraintes planes soient respectées et suffisamment épaisses pour que le comportement du matériau élastique puisse être considéré homogène. Le tenseur d'élasticité initial (non endommagé) du quatrième ordre  $\mathbb{C}_0$  (reliant les déformations aux contraintes via la relation de comportement  $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}$ ) peut être représenté par la matrice d'élasticité symétrique définie positive  $[\mathbb{C}_0]$ . Cette matrice est obtenue, sous l'hypothèse des contraintes planes, en inversant la matrice de souplesse  $[\mathbb{S}_0]$  (reliant les contraintes aux déformations via la relation de comportement  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{S}_0 : \boldsymbol{\sigma}_0$ ) définie dans la notation de Kelvin-Mandel par

$$[\mathbb{S}_0] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_L}{E_L} & 0 \\ -\frac{\nu_L}{E_L} & \frac{1}{E_L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_L} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Dans (2.31),  $E_L$ ,  $\nu_L$  et  $G_L$  sont le module d'Young, le coefficient de Poisson et le module de cisaillement suivant la direction longitudinale  $L$  portée par l'axe  $y$  sur la Figure 2.1b, et  $E_T$  est le module d'Young dans le plan transversal  $(T, R)$  normal aux fibres. La matrice d'élasticité  $[\mathbb{C}_0]$  peut être exprimée avec la notation de Kelvin-Mandel comme

$$[\mathbb{C}_0] = [\mathbb{S}_0]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{E_L E_T}{E_L - E_T \nu_L^2} & \frac{E_L E_T \nu_L}{E_L - E_T \nu_L^2} & 0 \\ \frac{E_L E_T \nu_L}{E_L - E_T \nu_L^2} & \frac{E_L^2}{E_L - E_T \nu_L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2G_L \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

On désigne par  $\mathbf{p} = (E_L, E_T, G_L, \nu_L)$  le vecteur regroupant les quatre paramètres du matériau élastique isotrope transverse à identifier dans le plan d'observation  $(L, T)$  considéré.

L'identification du vecteur des paramètres  $\mathbf{p}$  peut être effectuée en utilisant les mesures expérimentales du champ de déplacement  $\mathbf{u}_{\text{exp}}$ , obtenues par CIN sur l'ensemble des images disponibles pour un niveau de chargement compris entre 15 et 25 kN. Dans cet intervalle où le comportement de l'épicéa est supposé élastique linéaire (voir Figure 2.7a), la caméra a pris en moyenne 19 images pour chaque essai.

L'obtention des champs de déplacement  $\mathbf{u}_{\text{exp}}$  est décrit en section 3.1 et la section 3.2 détaille la procédure d'identification des propriétés élastiques  $\mathbf{p}$  de l'épicéa. Enfin, les paramètres du modèle d'endommagement  $G_c$  et  $\ell$  sont déterminés en section 3.4, à partir des forces d'initiation de fissure  $F_c$  identifiées préalablement en section 3.3.

### 3.1 Mesures expérimentales des champs de déplacement par corrélation d'images numériques

La première étape lors d'une analyse par CIN consiste à définir la ROI en construisant le maillage EF qui sera utilisée pour assembler et résoudre de façon itérative le système matriciel (2.27) introduit en section 2. Pour ce faire, il est nécessaire d'identifier l'emplacement de l'échantillon dans l'image de référence considérée pour définir la ROI, comme illustré sur la Figure 2.12a. Après avoir repéré l'échantillon dans l'image de référence, il est possible de construire le maillage de la ROI sur lequel l'analyse de corrélation va être conduite. Afin de diminuer les temps de calcul de l'analyse de corrélation entre les images  $f$  et  $g$ , il est possible de redimensionner les images, comme représenté sur la Figure 2.12b, où un maillage de la ROI est superposé à l'image de référence redimensionnée.

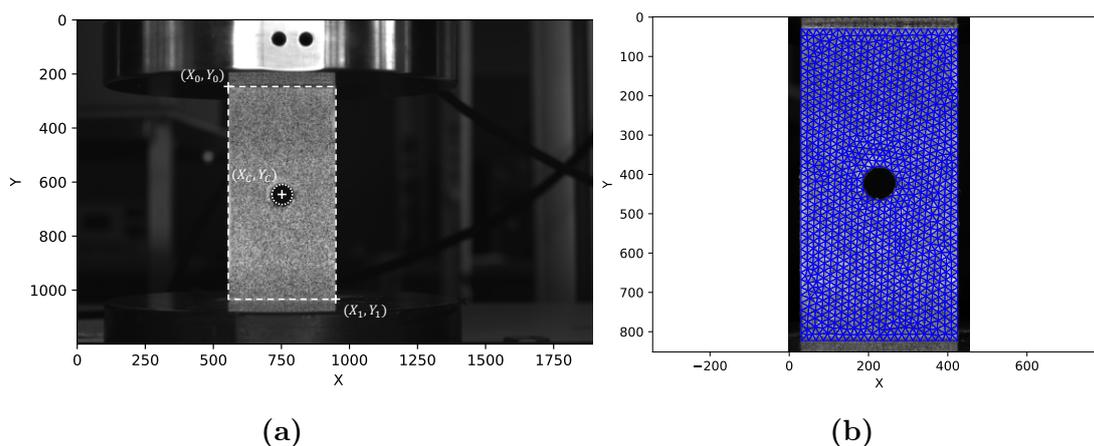


FIGURE 2.12 – (a) Définition de la ROI de l'échantillon dans l'image et (b) construction du maillage EF de la ROI sur l'image redimensionnée pour l'essai n° 4.

La qualité des mesures de champ de déplacement obtenues par corrélation d'images numériques dépend essentiellement de deux paramètres, à savoir (i) la taille des éléments du maillage  $h^e$  et (ii) la longueur de régularisation  $\ell_R$ . Dans un premier temps, l'influence de la taille de maille  $h^e$  sera étudiée, suivie de l'analyse de l'effet du paramètre de régularisation  $\ell_R$ . L'influence de chaque paramètre sera quantifiée en sommant, sur l'ensemble des pixels de la ROI, le résidu de corrélation normalisé défini en tout pixel  $p$  de coordonnées  $\mathbf{x}_p$  comme

$$\varphi(\mathbf{u}_p, \mathbf{x}_p) = \frac{r_{\text{dic}}(\mathbf{u}_p, \mathbf{x}_p)^2}{255^2}, \quad (2.33)$$

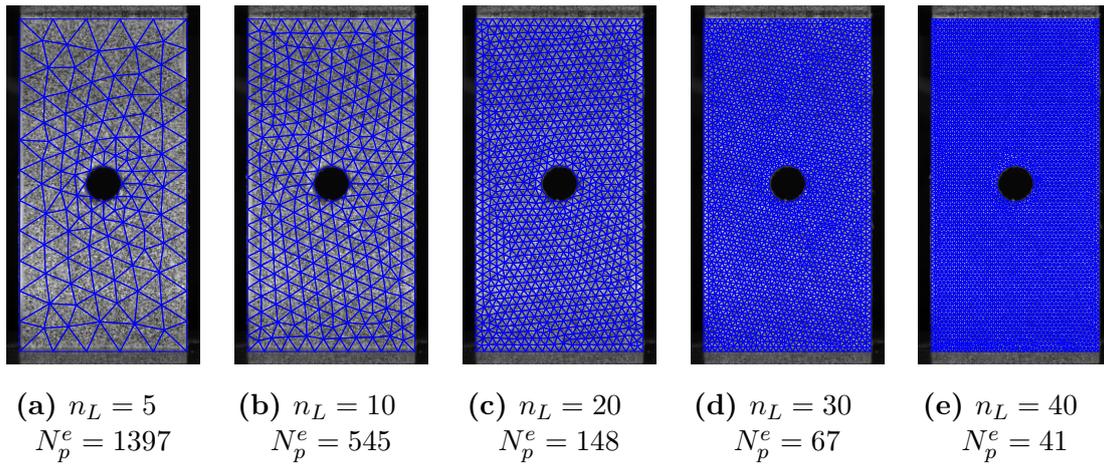
où  $r_{\text{dic}}(\mathbf{u}_p, \mathbf{x}_p)$  est le résidu entre les deux images  $f$  et  $g$ , défini en équation (2.13). Les analyses sont conduites pour les données expérimentales de l'essai n° 4, où l'image de référence  $f$  est relevée pour une force de compression d'environ 15 kN (`image-0134_0.tif`) et l'image déformée  $g$  est relevée pour une force de compression d'environ 25 kN (`image-0160_0.tif`). Pour chacune des analyses, la solution du problème non-linéaire de CIN est calculée de manière itérative à travers la résolution du système matriciel (2.27), jusqu'à ce que la norme  $\|\mathbf{b}_{\text{reg}}\|$  du vecteur résidu  $\mathbf{b}_{\text{reg}}$  défini en (2.27b) soit strictement inférieure au seuil  $\epsilon = 10^{-6}$ .

On considère différentes tailles de maille  $h^e$  pour construire le maillage EF afin d'étudier l'influence de la discrétisation sur les résultats des analyses de CIN. Les analyses sont effectuées avec le script `scripts/DIC_Mesh.py` en faisant varier la taille définie comme

$$h^e = (X_1 - X_0)/n_L, \quad (2.34)$$

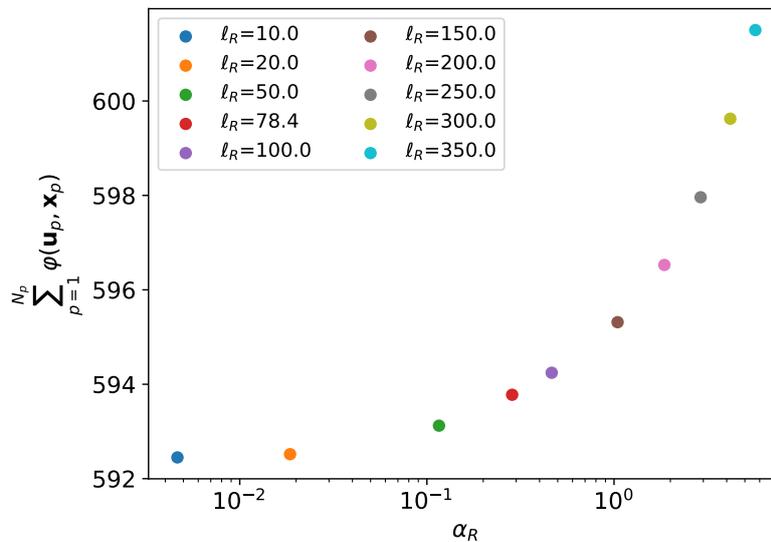
où  $X_0$  et  $X_1$  sont les coordonnées de l'échantillon introduites sur la Figure 2.12a, et où  $n_L$  représente le nombre d'éléments dans la largeur de l'échantillon (suivant la direction  $x$ ). Sans considérer de régularisation ( $\alpha_R = 0$ ), on mène différentes analyses pour plusieurs maillages construits avec  $n_L \in \{5, 10, 20, 30, 40\}$ , comme illustré sur la Figure 2.13. Pour  $n_L \in \{5, 10, 20, 30\}$ , l'algorithme de corrélation d'images a convergé ( $\|\mathbf{b}_{\text{reg}}\| < 10^{-6}$ ) et on obtient un résidu de corrélation global  $\sum_{p=1}^{N_p} \varphi(\mathbf{u}_p, \mathbf{x}_p) = 595.5, 594.7, 592.3, 590.3$ , respectivement. Cependant, pour  $n_L = 40$ , la norme du vecteur résidu  $\|\mathbf{b}_{\text{reg}}\|$  stagne à  $1.6 \times 10^{-4}$  sans jamais converger après 1 000 itérations. En calculant le nombre de pixels par élément  $N_p^e$ , on en déduit que la corrélation ne fonctionne pas pour  $n_L = 40$ , car un nombre trop faible de pixels est contenu en moyenne par élément ( $N_p^e = 41$ ), ce qui explique la stagnation observée sur la norme  $\|\mathbf{b}_{\text{reg}}\|$  du vecteur résidu  $\mathbf{b}_{\text{reg}}$  défini en (2.27b). Pour la suite, nous choisissons comme compromis  $n_L = 20$ , correspondant à une taille de maille  $h^e = 19.6$  pixels et une longueur de corrélation  $\ell_{\text{dic}} = 8 \underline{h^e} = 156.8$  pixels. Cette taille de maille permet de bien représenter la géométrie de l'échantillon (notamment la courbure du trou circulaire) et assure que, pour les éléments du maillage de l'essai n° 4, chaque élément  $\Omega^e$  contienne en moyenne 148 pixels. Cela conduit à un maillage de 2 120 éléments linéaires TRI3 et 1 130 nœuds.

En fixant  $n_L = 20$ , plusieurs analyses par CIN sont conduites avec le script `scripts/DIC_Regul.py` en faisant varier la longueur de régularisation  $\ell_R$  de 10 à



**FIGURE 2.13** – Maillages EF construits pour plusieurs tailles de mailles définies pour  $n_L \in \{5, 10, 20, 30, 40\}$ . Le nombre de pixels moyen détecté par élément est noté  $N_p^e$ .

350 pixels. La Figure 2.14 représente l'évolution du résidu global correspondant à la somme des résidus normalisés (2.33) en fonction du paramètre de régularisation  $\alpha_R = (\ell_R/\ell_{\text{dic}})^2$ , avec les longueurs de régularisation  $\ell_R$  associées. On constate que

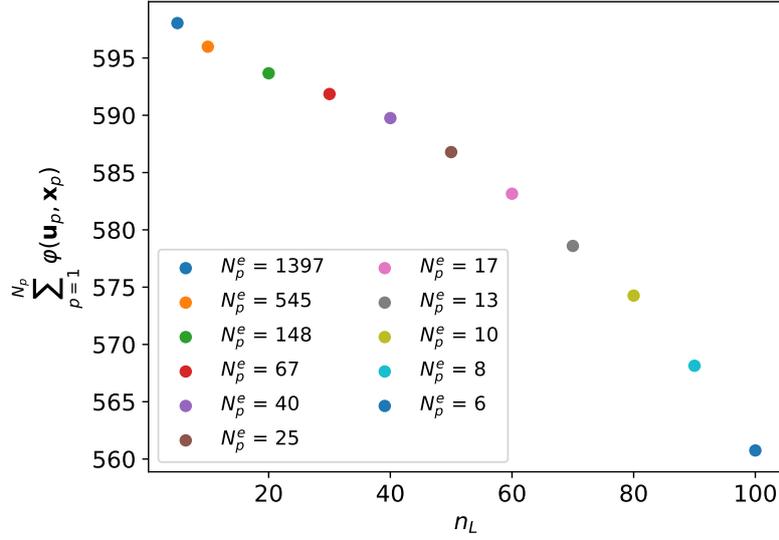


**FIGURE 2.14** – Somme des résidus normalisés pour  $n_L = 20$  (correspondant à une taille de maille  $h^e = 19.6$  pixels soit  $\ell_{\text{dic}} = 8h^e = 156.8$  pixels) et différentes longueurs de régularisation  $\ell_R \in \{10, 20, 50, 78.4, 100, 150, 200, 250, 300, 350\}$  pixels avec les paramètres de régularisation  $\alpha_R$  associés.

la somme des résidus normalisés varie peu pour de petites valeurs de  $\alpha_R$  proches de 0 (correspondant à des valeurs de  $\ell_R < \ell_{\text{dic}}/8 = h^e = 19.6$  pixels) et augmente significativement pour des valeurs de  $\alpha_R > 1$  (i.e. lorsque  $\ell_R > \ell_{\text{dic}} = 156.8$  pixels). Dans la suite, le paramètre  $\alpha_R$  (ou de manière équivalente la longueur de réguli-

sation  $\ell_R$ ) est fixé avec un critère de courbure maximale (ou *L-curve criterion* en anglais) [Hansen 2000], ce qui conduit à  $\alpha_R = 0.25$  soit une longueur de régularisation  $\ell_R = \sqrt{0.25} \ell_{\text{dic}} = \ell_{\text{dic}}/2 = 78.4$  pixels.

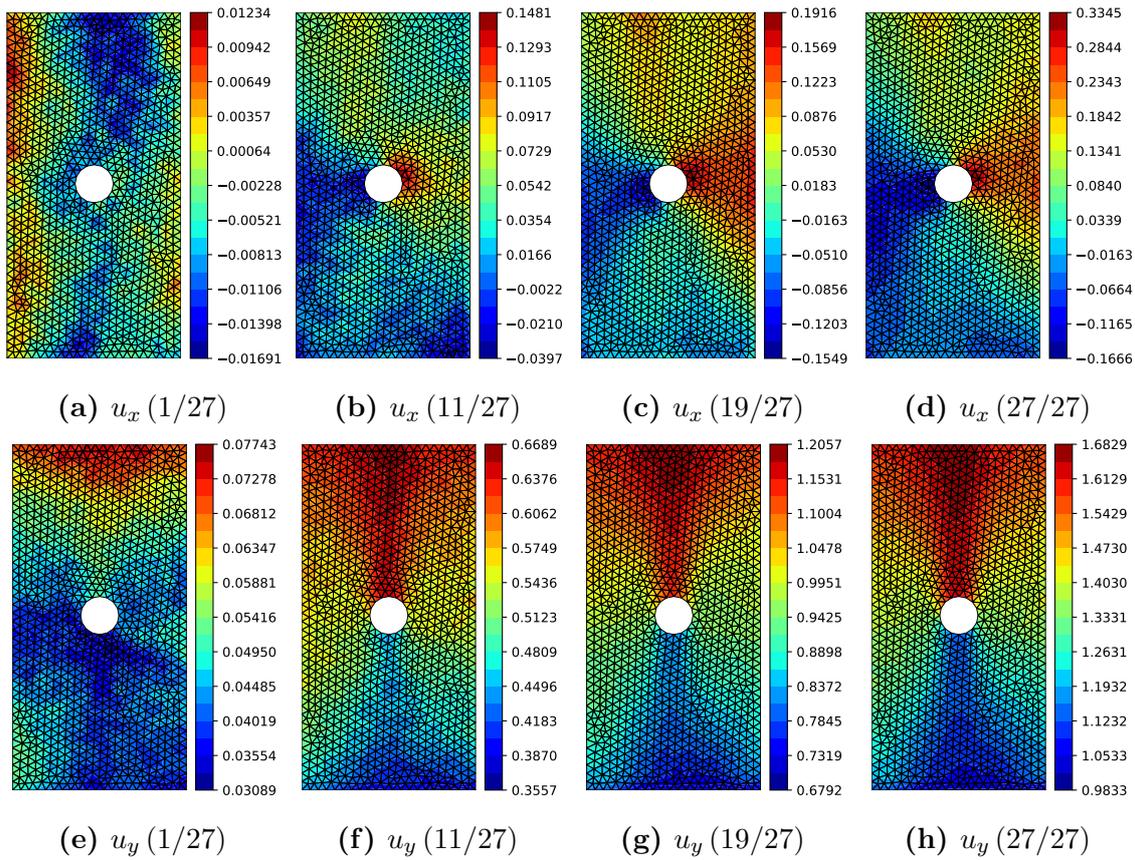
En fixant  $\ell_R = \ell_{\text{dic}}/2$  (i.e.  $\alpha_R = 0.25$ ), de nouvelles simulations sont réalisées avec le script `scripts/DIC_Mesh.py` en faisant varier  $n_L$  de 5 à 100, correspondant à une taille de maille  $h^e$  comprise entre 79 et 4 pixels. On constate sur la Figure 2.15 que



**FIGURE 2.15** – Somme des résidus normalisés pour  $\ell_R = \ell_{\text{dic}}/2$  et différentes tailles de maille  $h^e$  correspondant à  $n_L \in \{5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$ .

la somme des résidus normalisés diminue à mesure que  $n_L$  augmente, i.e. que la taille de maille  $h^e$  diminue. Pour un maillage d'éléments linéaires TRI3 avec  $n_L = 100$ , soit 47 112 éléments et 23 893 nœuds, la régularisation permet de résoudre le problème de corrélation (2.27) avec en moyenne seulement 6 pixels par élément.

Finalement, les champs de déplacement expérimentaux  $\mathbf{u}_{\text{exp}}$  sont obtenus pour chaque essai avec le script `scripts/DIC.py`, en fixant la taille de maille  $h^e$  à 19.6 pixels et la longueur de régularisation  $\ell_R = \ell_{\text{dic}}/2$  à 78 pixels. Les analyses sont conduites pour les données expérimentales de l'essai n° 4, où l'image de référence  $f$  est relevée pour une force de compression mesurée d'environ 15 kN (`image-0133_0.tif`) et les images déformées  $g$  sont relevées pour des forces de compression mesurées de 15 à 25 kN (de l'image `image-0134_0.tif` à `image-0160_0.tif`), correspondant à 27 images déformées pour l'essai n° 4. Les champs de déplacement expérimentaux  $u_x$  et  $u_y$  obtenus par corrélation sont affichés sur la Figure 2.16. On constate que les champs de déplacement  $u_x$  et  $u_y$  sont bruités jusqu'à l'image 11/27, à partir de laquelle la CIN fournit des mesures de champs de déplacement qui sont moins influencées par le bruit numérique. On rappelle que sur une image, l'axe vertical  $y$  est descendant, c'est pourquoi les valeurs positives affichées sur les Figures 2.16e à 2.16h représentent un déplacement vertical  $u_y$  vers le bas. Les champs  $u_y$  illustrés sur les



**FIGURE 2.16** – Champs de déplacement expérimentaux  $\mathbf{u}_{\text{exp}}$  (en pixels) mesurés pour les images 1, 11, 19 et 27 de l’essai n° 4 : (a-d) composantes horizontales  $u_x$ , et (e-h) composantes verticales  $u_y$ .

Figures 2.16e à 2.16h montrent que le déplacement du bord inférieur de l’échantillon en contact avec le plateau est non nul et augmente avec le déplacement imposé. Ce déplacement peut être dû à l’élasticité de la liaison entre le plateau inférieur et la machine de compression. De plus, les champs  $u_x$ , illustrés sur les Figures 2.16a à 2.16d, révèlent un déplacement asymétrique par rapport au plan  $(y, z)$  passant par le centre du trou. En analysant plus précisément les vidéos générées avec le script `scripts/_Videos.py`, on observe que les plateaux ne sont pas parfaitement parallèles et que le plateau inférieur n’est pas fixe, comme illustré sur la Figure 2.17. Le défaut de parallélisme  $\beta$  entre les plateaux supérieur et inférieur est évalué en degrés comme

$$\beta = 180 - \arccos \left( \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \right) \frac{180}{\pi}, \quad (2.35)$$

où  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont respectivement les vecteurs « horizontaux » formés entre les deux coins supérieurs d’une part et les deux coins inférieurs d’autre part du maillage déformé. Pour le champ de déplacement  $\mathbf{u}_{\text{exp}}$ , obtenu pour l’image 27/27 de l’essai n° 4, le défaut de parallélisme  $\beta$  est évalué à  $1.24 \times 10^{-2}$  degrés. Pour conclure, ces différents défauts indiquent que le déplacement vertical de compression  $u_{\text{exp}}$  imposé par la machine ne correspond pas à la réduction de la hauteur  $H$  de l’échantillon. Toutefois,

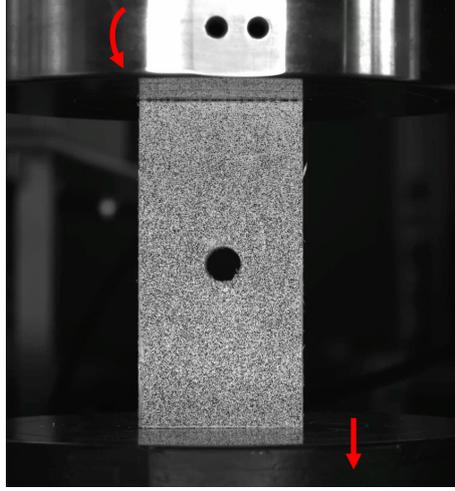


FIGURE 2.17 – Mouvements des plateaux observés pendant les essais représentés par des flèches rouges.

ces défauts n'ont pas un impact significatif et ne constituent pas un obstacle pour l'identification des propriétés élastiques dans la section suivante.

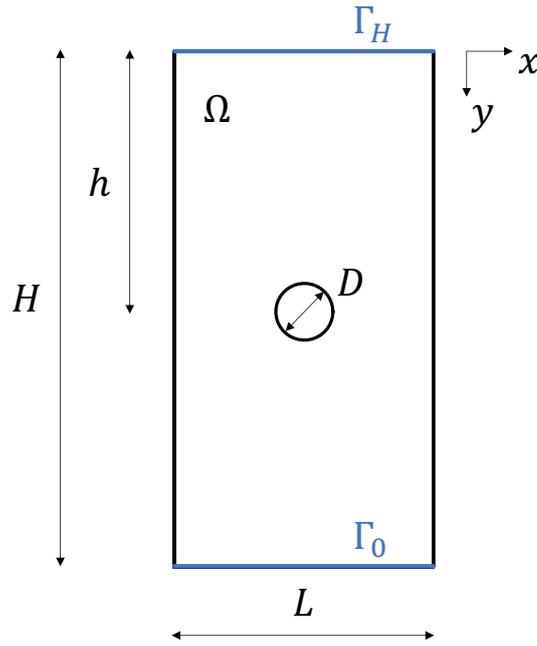
### 3.2 Identification des propriétés élastiques

Dans le domaine de la mécanique des solides, diverses méthodes d'identification inverse pour l'estimation des paramètres des matériaux basée sur des mesures de champ ont été développées au cours des dernières décennies. Pour une vue d'ensemble de ces techniques, on pourra consulter les travaux suivants [Avril et al. 2008, Grédiac et al. 2013, Roux et Hild 2020] et les références qui y figurent. Nous considérons ici la méthode de recalage de modèle par éléments finis (ou FEMU pour *Finite Element Model Updating* en anglais), l'une des méthodes d'identification les plus populaires, introduite initialement dans [Kavanagh et Clough 1971, Kavanagh 1972].

Pour l'identification du vecteur des paramètres élastiques  $\mathbf{p} = (E_L, E_T, G_L, \nu_L)$ , cette méthode itérative consiste à minimiser la différence, au sens des moindres carrés, entre le champ de déplacement  $\mathbf{u}_{\text{exp}}$  mesuré expérimentalement par CIN et le champ de déplacement simulé numériquement  $\mathbf{u}(\mathbf{p})$  calculé par EF comme

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathcal{A}} \|\mathbf{u}_{\text{exp}} - \mathbf{u}(\mathbf{p})\|^2, \quad (2.36)$$

où  $\mathcal{A} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times ]0, 0.5[$  est l'ensemble admissible du vecteur des paramètres élastiques  $\mathbf{p}$ . Le champ de déplacement numérique  $\mathbf{u}(\mathbf{p})$  est calculé en résolvant le problème 2D d'élasticité linéaire représenté sur la Figure 2.18, où les bords  $\Gamma_H$  et  $\Gamma_0$  sont respectivement les bords supérieur et inférieur de l'échantillon. Le champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{p})$  et le tenseur des contraintes de Cauchy (non endommagé)  $\boldsymbol{\sigma}_0$



**FIGURE 2.18** – Géométrie du problème 2D d'élasticité linéaire. Les dimensions de l'échantillon sont consultables dans le Tableau 2.1 en section 1.1.

associé doivent satisfaire le système d'équations suivant :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.37a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbb{C}_0(\mathbf{p}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.37b)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{exp}} \quad \text{sur } \Gamma_H \cup \Gamma_0, \quad (2.37c)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus (\Gamma_H \cup \Gamma_0). \quad (2.37d)$$

Dans notre cas, aucun champ de force volumique  $\mathbf{f}$  n'est considéré en négligeant le poids propre de l'échantillon. Le problème d'élasticité linéaire (2.37) est résolu à l'aide de la **Méthode des Éléments Finis (MEF)** classique (formulée en déplacement), en utilisant le maillage **EF** (mis à l'échelle en mm) employé dans les analyses par **CIN**. On note que la méthode **FEMU** tire partie des avantages des approches de **CIN** globales par rapport aux approches locales (voir section 2), dans la mesure où aucun post-traitement n'est nécessaire pour comparer le champ expérimental  $\mathbf{u}_{\text{exp}}$  avec le champ solution simulé  $\mathbf{u}(\mathbf{p})$ .

La méthode **FEMU** standard, basée uniquement sur des mesures expérimentales du champ de déplacement  $\mathbf{u}_{\text{exp}}$ , ne permet cependant pas, sans mesures supplémentaires de forces extérieures  $F_{\text{exp}}$ , d'identifier toutes les composantes du vecteur des paramètres  $\mathbf{p}$ , mais seulement des quantités adimensionnées telles que le rapport  $E_T/E_L$  [Mathieu et al. 2015]. Pour résoudre ce problème, une autre approche peut être envisagée en intégrant dans la fonction-coût à minimiser (2.36) l'écart entre la force de compression (résultante globale)  $F_{\text{exp}}$  mesurée expérimentalement et celle

$F(\mathbf{p})$  calculée numériquement par EF, tel que

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathcal{A}} \eta \frac{\|\mathbf{u}_{\text{exp}} - \mathbf{u}(\mathbf{p})\|^2}{\|\mathbf{u}_{\text{exp}}\|^2} + (1 - \eta) \frac{(F_{\text{exp}} - F(\mathbf{p}))^2}{F_{\text{exp}}^2}, \quad (2.38)$$

où  $\eta \in [0, 1]$  est un paramètre adimensionné de pondération des termes en déplacement et en effort. Cette approche n'est pas retenue, car le choix du coefficient de pondération  $\eta$  est délicat pour bien équilibrer les contributions entre les écarts relatifs sur le champ de déplacement et la force de réaction.

Pour surmonter les limitations des approches FEMU classiques basées sur des mesures de champs cinématiques et/ou des quantités statiques et identifier simultanément toutes les composantes du vecteur des paramètres  $\mathbf{p}$ , nous utilisons une approche FEMU modifiée proposée dans [Réthoré et al. 2013]. Appliquée à notre problème, cette approche consiste dans un premier temps à résoudre le système d'équations (2.37) pour un vecteur de paramètres initial  $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{A}$ , correspondant à une hypothèse initiale *ad hoc* et choisi comme  $\mathbf{p}_0 = (12\,000, 450, 500, 0.02)$  en ([MPa], [MPa], [MPa], [-]) pour les propriétés élastiques de l'épicéa [Campredon 1935, Winandy 1994]. Le champ de déplacement obtenu  $\mathbf{u}_0$  est ensuite utilisé pour calculer/évaluer la force de réaction globale  $F_0$  en intégrant le champ de force surfacique  $\mathbf{t}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{n}$  sur le bord supérieur  $\Gamma_H$  comme

$$F_0 = \int_{\Gamma_H} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (2.39)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal unitaire sortant du bord  $\Gamma_H$  défini comme  $\mathbf{n} = [0, -1]^T$ . Un champ de force surfacique plus réaliste  $\mathbf{t}_{\text{exp}}$  peut finalement être obtenu et défini par  $\mathbf{t}_{\text{exp}} = \alpha \mathbf{t}_0$  sur  $\Gamma_H$ , où  $\alpha$  est un facteur d'ajustement de la force de réaction globale verticale  $F_0$  définie en (2.39) calculée numériquement, pour correspondre à celle mesurée expérimentalement pendant l'essai de compression :

$$\alpha = \frac{F_{\text{exp}} - F_1}{F_0}. \quad (2.40)$$

Dans l'équation (2.40), la force  $F_1$  correspond à l'effort de compression d'environ 15 kN associé à l'image de référence. Cette approche exploite ainsi les seules informations supplémentaires disponibles relevées pendant les essais concernant le chargement statique. Finalement, la méthode FEMU modifiée consiste à calculer le champ de déplacement numérique  $\mathbf{u}(\mathbf{p})$  en résolvant un problème aux limites d'élasticité linéaire similaire à celui décrit en (2.37), mais dans lequel les conditions aux limites de Dirichlet (2.37c) sur  $\Gamma_H$  sont remplacées par des conditions aux limites de Neumann :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.41a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbb{C}_0(\mathbf{p}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.41b)$$

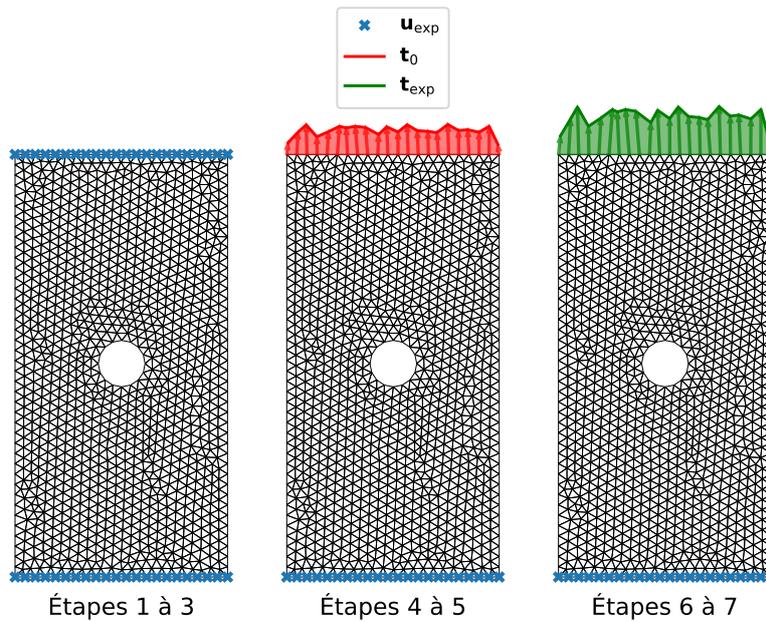
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{exp}} \quad \text{sur } \Gamma_0, \quad (2.41c)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus (\Gamma_H \cup \Gamma_0), \quad (2.41d)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_{\text{exp}} \quad \text{sur } \Gamma_H, \quad (2.41e)$$

où le champ de force surfacique  $\mathbf{t}_{\text{exp}}$  est imposé comme conditions aux limites de Neumann non homogènes sur  $\Gamma_H$ . Les différentes étapes associées à la méthode **FEMU** modifiée sont illustrées sur la Figure 2.19 et énumérées ci-dessous :

1. Initialiser le vecteur des paramètres  $\mathbf{p}_0 = (12\,000, 450, 500, 0.02)$ .
2. Imposer les conditions aux limites de Dirichlet  $\mathbf{u}_{\text{exp}}$  sur  $\Gamma_H$  et  $\Gamma_0$ .
3. Calculer le champ de déplacement  $\mathbf{u}_0$  solution du problème aux limites (2.37).
4. Calculer le champ de force surfacique  $\mathbf{t}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{n}$  et la force résultante correspondante  $F_0$  sur  $\Gamma_H$ .
5. Calculer le facteur d'échelle  $\alpha$  défini en (2.40).
6. Imposer les conditions aux limites de Dirichlet  $\mathbf{u}_{\text{exp}}$  sur  $\Gamma_0$ .
7. Imposer les conditions aux limites de Neumann  $\mathbf{t}_{\text{exp}} = \alpha \mathbf{t}_0$  sur  $\Gamma_H$ .
8. Calculer le vecteur des paramètres optimal  $\mathbf{p}^*$  par résolution du problème de minimisation (2.36) où  $\mathbf{u}(\mathbf{p})$  est la solution du problème aux limites (2.41) paramétré par  $\mathbf{p}$ .



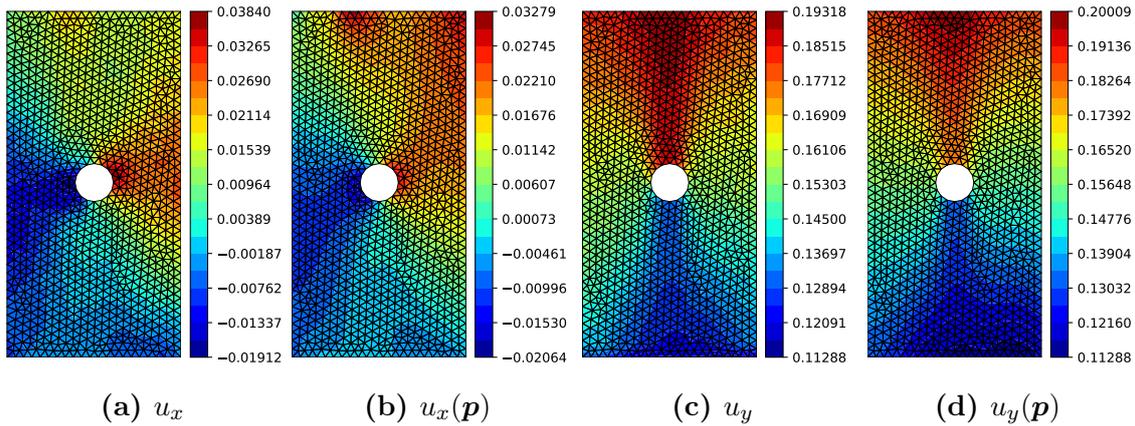
**FIGURE 2.19** – Représentation des étapes 1 à 7 d'identification des paramètres élastiques avec la méthode **FEMU** modifiée sur le maillage de l'échantillon n° 4.

L'identification du vecteur des paramètres  $\mathbf{p} \in \mathcal{A}$  à l'étape 8 est effectuée à l'aide d'un algorithme d'optimisation sous contraintes de type *trust-region reflective algorithm*, décrit dans [Branch et al. 1999]. Cet algorithme itératif, implémenté dans la fonction `least_squares()` de la bibliothèque `Python scipy.optimize` [Virtanen et al. 2020], est particulièrement bien adapté à la résolution de problèmes de minimisation des moindres carrés non-linéaires sous contraintes. Le critère d'arrêt du solveur d'optimisation est défini en fixant la tolérance prescrite sur le pas de solution `xtol`,

la fonction objectif  $\text{ftol}$  et la norme du gradient  $\text{gtol}$  à  $10^{-14}$ , ce qui correspond à une valeur très petite proche de la précision machine.

L'identification du vecteur des paramètres élastiques  $\mathbf{p}$  est réalisée en considérant uniquement les niveaux de charge compris entre 15 et 25 kN, pour lesquels le comportement du matériau peut être considéré comme élastique linéaire pour tous les essais (voir Figures 2.4 et 2.7a). Pour chacun des 18 essais de compression, les 10 premières images sont écartées (voir Figure 2.16), car le bruit d'acquisition des images, d'un ordre de grandeur comparable à l'amplitude du champ de déplacement mesuré  $\mathbf{u}_{\text{exp}}$ , perturbe l'identification. Les données expérimentales permettent d'identifier autant de valeurs pour les propriétés élastiques que d'images traitées.

Pour l'essai de compression n° 4, la Figure 2.20 compare le champ de déplacement expérimental  $\mathbf{u}_{\text{exp}}$  mesuré par CIN, et le champ de déplacement numérique  $\mathbf{u}(\mathbf{p})$  calculé par EF. Le champ expérimental  $\mathbf{u}_{\text{exp}}$  (mis à l'échelle en mm) est obtenu à partir de la dernière image prise à un pas de chargement proche de 25 kN (`image-0160_0.tif`), et le champ numérique  $\mathbf{u}(\mathbf{p})$  est obtenu pour le vecteur des paramètres  $\mathbf{p}$  identifiés par la méthode FEMU modifiée. Le champ de déplacement

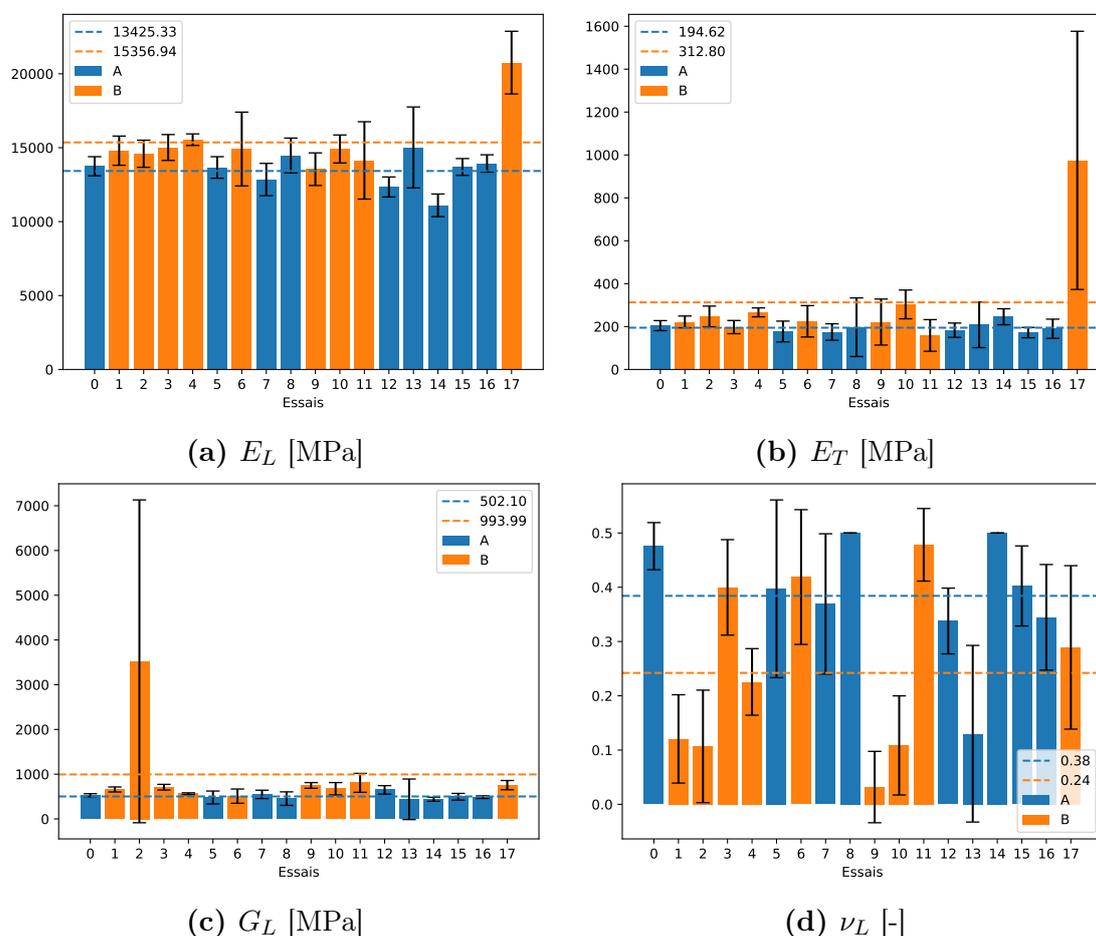


**FIGURE 2.20** – Comparaison entre le champ de déplacement expérimental  $\mathbf{u}_{\text{exp}} = (u_x, u_y)$  mesuré par CIN (et mis à l'échelle en mm) pour l'essai n° 4 et le champ de déplacement numérique  $\mathbf{u}(\mathbf{p}) = (u_x(\mathbf{p}), u_y(\mathbf{p}))$  calculé par EF pour le dernier vecteur des paramètres identifiés  $\mathbf{p}$  : (a-b) composantes horizontales  $u_x$  (expérimental) et  $u_x(\mathbf{p})$  (numérique) dans la direction  $x$  vers la droite ; et (c-d) composantes verticales  $u_y$  (expérimental) et  $u_y(\mathbf{p})$  (numérique) dans la direction  $-y$  vers le bas. Les résultats sont affichés sur le maillage mis à l'échelle en mm, et les valeurs sont également exprimées en mm.

numérique  $\mathbf{u}(\mathbf{p})$  est en assez bon accord avec son homologue expérimental  $\mathbf{u}_{\text{exp}}$ , malgré l'hypothèse d'homogénéité des propriétés élastiques du matériau (i.e. que  $\mathbf{p}$  est indépendant du vecteur des coordonnées spatiales  $\mathbf{x}$ ). Comme observé précédemment sur la Figure 2.16 de la section 3.1, on constate que la composante horizontale  $u_x(\mathbf{p})$  du champ de déplacement numérique n'est pas parfaitement symétrique par rapport au plan  $(y, z)$  passant par le centre du trou, à l'instar du champ expérimental  $u_x$

(voir Figures 2.20a et 2.20b). De même, la composante verticale  $u_y(\mathbf{p})$  du champ de déplacement numérique n'est pas égale à zéro sur le bord inférieur  $\Gamma_0$ , tout comme le champ expérimental  $u_y$  (voir Figures 2.20c et 2.20d). Elle n'est pas non plus uniformément répartie le long du bord supérieur  $\Gamma_H$ , avec des valeurs plus élevées au centre qu'aux coins. Cette variation peut s'expliquer par la présence du trou central, qui entraîne une perte de rigidité au centre par rapport aux bords de l'échantillon.

Pour chacun des 18 essais de compression, les champs de déplacement  $\mathbf{u}_{\text{exp}}$  et les forces de compression  $F_{\text{exp}}$  mesurés expérimentalement permettent de déterminer un ensemble de valeurs pour le vecteur des paramètres  $\mathbf{p} = (E_L, E_T, G_L, \nu_L)$ . Les valeurs moyennes et les écarts-types correspondants estimés pour les quatre paramètres élastiques  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $G_L$  et  $\nu_L$  sont représentés sur la Figure 2.21. Pour les modules



**FIGURE 2.21** – Propriétés élastiques identifiées pour les 18 échantillons d'épicéa : (a) module d'Young longitudinal  $E_L$  ; (b) module d'Young transversal  $E_T$  ; (c) module de cisaillement longitudinal  $G_L$  ; (d) coefficient de Poisson longitudinal  $\nu_L$ . Chaque diagramme à barres représente la valeur moyenne avec l'écart-type correspondant indiqué par une barre d'erreur.

$E_L$ ,  $E_T$ ,  $G_L$  et  $\nu_L$ , on peut calculer la moyenne des valeurs identifiées pour les échantillons des traverses A et B, représentées par des lignes horizontales en pointillés,

respectivement bleues et oranges. Les valeurs de  $G_L$  obtenues pour l'échantillon n° 2 (voir Figure 2.21c) et celles de  $E_L$  et  $E_T$  obtenues pour l'échantillon n° 17 (voir Figures 2.21a et 2.21b) sont significativement plus élevées que celles des autres échantillons et présentent également des dispersions très importantes (supérieures à 60% et 100% sur les Figures 2.21b et 2.21c, respectivement). Pour les résultats d'identification du coefficient de Poisson longitudinal  $\nu_L$ , la Figure 2.21d montre que les valeurs identifiées présentent de fortes fluctuations d'un échantillon à l'autre, ainsi que de grandes dispersions pour chacun des échantillons. Cela suggère que l'essai de compression sur l'éprouvette d'épicéa trouée ne permet pas d'identifier le coefficient de Poisson longitudinal  $\nu_L$ , qui caractérise l'expansion latérale dans la direction transversale  $x$  sous l'effet de la compression verticale dans la direction longitudinale  $y$  (vers le bas).

En écartant les valeurs singulières observées pour les essais n° 2 et n° 17, ainsi que tous les essais où la dispersion d'au moins un des paramètres  $E_L$ ,  $E_T$  ou  $G_L$  dépasse 50% (i.e. les essais n° 2, n° 8, n° 13 et n° 17), on peut estimer les valeurs moyennes, les écarts-types et les coefficients de dispersion des propriétés élastiques à partir des propriétés moyennes identifiées pour les 14 échantillons retenus, comme résumé dans le Tableau 2.3. On constate que la dispersion sur le module élastique longitudinal  $E_L$

Paramètre élastique	Valeur moyenne	Écart-type	Dispersion [%]
$E_L$ [GPa]	13.87	1.15	8.27
$E_T$ [MPa]	209.98	39.06	18.60
$G_L$ [MPa]	592.46	109.79	18.53
$\nu_L$ [-]	0.33	0.14	43.64

**TABLEAU 2.3** – Estimation statistique des propriétés élastiques du bois d'épicéa calculées à partir des propriétés moyennes (représentées sur la Figure 2.21) identifiées pour les 14 échantillons retenus où les dispersions observées sur les propriétés élastiques sont inférieures ou égales à 50%.

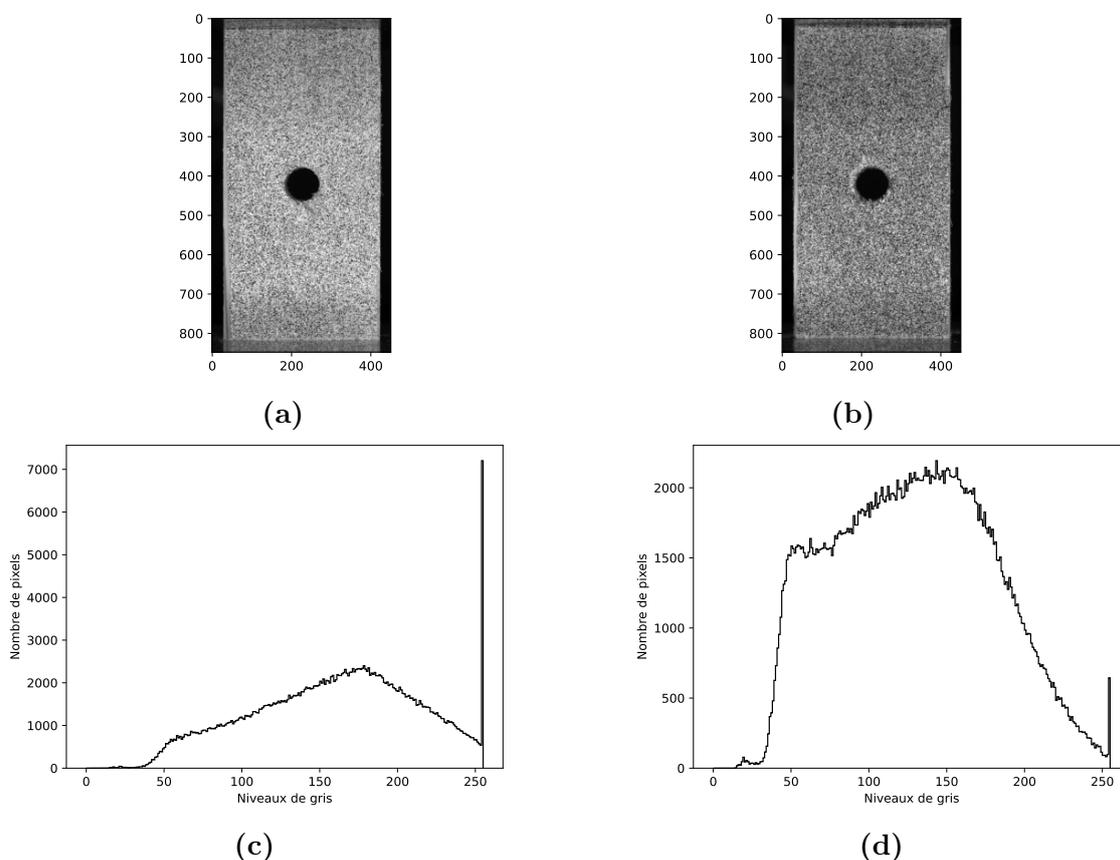
de 9% est relativement faible en comparaison avec les dispersions observées sur le module transversal  $E_T$  de 18% et le module de cisaillement  $G_L$  de 15%, indiquant que l'essai réalisé est plus adapté pour identifier  $E_L$ . Le Tableau 2.4 présente les valeurs moyennes et les dispersions estimées pour chaque paramètre, en fonction des traverses A et B. On constate que les valeurs moyennes et les coefficients de dispersion sont

	$\underline{E_L}$ [GPa]	$\delta_{E_L}$ [%]	$\underline{E_T}$ [MPa]	$\delta_{E_T}$ [%]	$\underline{G_L}$ [MPa]	$\delta_{G_L}$ [%]	$\underline{\nu_L}$	$\delta_{\nu_L}$ [%]
A	13.05	7.32	192.38	12.51	518.07	12.09	0.40	14.35
B	14.70	4.11	227.58	18.92	666.84	14.32	0.25	64.30

**TABLEAU 2.4** – Estimation statistique des propriétés élastiques du bois d'épicéa, estimées pour les traverses A et B, à partir des propriétés moyennes identifiées pour les 14 essais retenus où les dispersions observées sur les propriétés élastiques sont inférieures ou égales à 50%.

du même ordre de grandeur avec des variations modérées d'une traverse à l'autre pour l'ensemble des paramètres élastiques identifiés, à l'exception de  $\nu_L$ . Néanmoins, les variations observées sur les valeurs moyennes de  $E_L$ ,  $E_T$  et  $G_L$  d'une traverse à l'autre suggèrent que les propriétés élastiques identifiées dépendent de la traverse d'origine. Les valeurs moyennes  $\underline{E}_L$ ,  $\underline{E}_T$  et  $\underline{G}_L$  estimées à partir des 7 échantillons retenus de la traverse A sont relativement plus faibles que celles des 7 échantillons retenus issus de la traverse B. Par ailleurs, on constate que les dispersions observées sur  $E_L$  sont du même ordre de grandeur que celles observées sur : (i) l'orientation  $\theta$  des **cernes**, en section 1.1, d'environ 7% ; (ii) la force de compression maximale  $F_m$ , en section 1.3, d'environ 2 à 3%.

Pour mieux comprendre les fluctuations observées, la Figure 2.22 présente les histogrammes des niveaux de gris pour deux images de référence  $f$ , l'une associée à l'échantillon n° 2 et l'autre à l'échantillon n° 4. Ces histogrammes représentent la



**FIGURE 2.22** – (a-b) Images de référence en échelle de gris et (c-d) distributions des niveaux de gris des pixels de la ROI pour l'échantillon n° 2 (à gauche) et pour l'échantillon n° 4 (à droite), respectivement.

distribution des niveaux de gris pour chaque pixel de la ROI dans l'intervalle  $[0, 255]$ , où la valeur minimale 0 correspond à un pixel noir et la valeur maximale 255 à un pixel blanc, et fournissent des informations utiles sur le contraste et la qualité globale des images. L'histogramme des niveaux de gris de l'image de l'échantillon n° 2,

représenté sur la Figure 2.22c, indique une mauvaise qualité d'image. La distribution des niveaux de gris n'est pas équilibrée, avec un grand nombre de pixels entièrement saturés en blanc. En revanche, le contraste de l'image de l'échantillon n° 4, représenté sur la Figure 2.22d, est meilleur avec une distribution des niveaux de gris plus équilibrée et une légère saturation en pixels blancs. Ces observations suggèrent que les conditions d'éclairage diffus n'étaient pas optimales au cours de l'essai n° 2, ce qui a notamment conduit à une mauvaise distribution du niveau de gris des pixels des images de l'échantillon n° 2, et par conséquent à des valeurs singulières lors de l'identification des propriétés élastiques.

L'identification des paramètres élastiques est menée dans cette section avec le script `scripts/FEMU_elastic.py` à partir des mesures expérimentales de champs de déplacement  $\mathbf{u}_{\text{exp}}$  et de forces de réaction  $F_{\text{exp}}$ .

### 3.3 Mesure de la force initiant la propagation de la fissure

Cette section détaille la méthode mise en œuvre pour mesurer expérimentalement la force d'initiation de fissure  $F_c$ , définie comme la force de compression à partir de laquelle la fissure apparaît (ou commence à se propager), comme illustré par le point (1) sur la Figure 2.7a.

La principale difficulté liée aux mesures cinématiques sur des échantillons fissurés réside dans l'identification expérimentale et la modélisation numérique de la discontinuité du déplacement le long des surfaces de fissure. Le traitement de la discontinuité du champ de déplacement le long des surfaces de fissure reste une question ouverte dans le contexte des approches par CIN globales [Langlois 2023] et peut, par exemple, être effectué au moyen de critères *ad hoc* basés sur des indicateurs spécifiques, dérivés soit du champ résiduel de corrélation  $r_{\text{dic}}$  défini en (2.3) [Réthoré et al. 2008, Rannou et al. 2010, Réthoré et al. 2011, Réthoré 2015], soit du champ de déformations expérimental  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\text{exp}})$  [Romani et al. 2015, Hosdez et al. 2017, Feld-Payet et al. 2020].

Nous utilisons ici un critère adimensionnel basé sur le résidu de corrélation normalisé  $\varphi(\mathbf{u}_p, \mathbf{x}_p)$ , introduit en équation (2.33) de la section 3.1. Au voisinage d'une surface de fissure, ce critère se traduit par une augmentation locale de  $\varphi$ , indiquant une violation de l'hypothèse de continuité du champ de déplacement EF [Réthoré et al. 2011]. Ainsi, la force expérimentale d'initiation de fissure  $F_c$  est déterminée lorsque le champ résiduel normalisé dépasse un certain seuil  $\epsilon_c$  en au moins un pixel  $p$  de l'image :

$$\exists p \in N_p \quad \text{tel que} \quad \varphi(\mathbf{u}_p, \mathbf{x}_p) \geq \epsilon_c. \quad (2.42)$$

L'ensemble des analyses réalisées par la suite sont conduites en lignes 321-458 du script `scripts/_Import.py`.

Pour détecter l'initiation de fissure, nous considérons trois régions d'intérêt différentes au voisinage du trou, dont les maillages EF sont représentés sur la Figure

2.23. Pour chacune des trois ROI considérées, les coordonnées du coin supérieur gauche et du coin inférieur droit de la ROI sont respectivement notées  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$  et  $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$ , et sont résumées dans le Tableau 2.5. L'objectif est d'identifier une

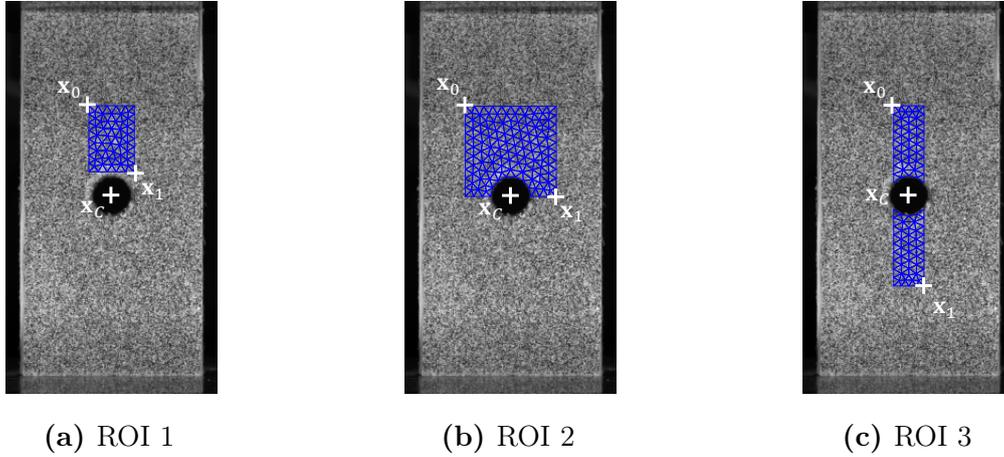
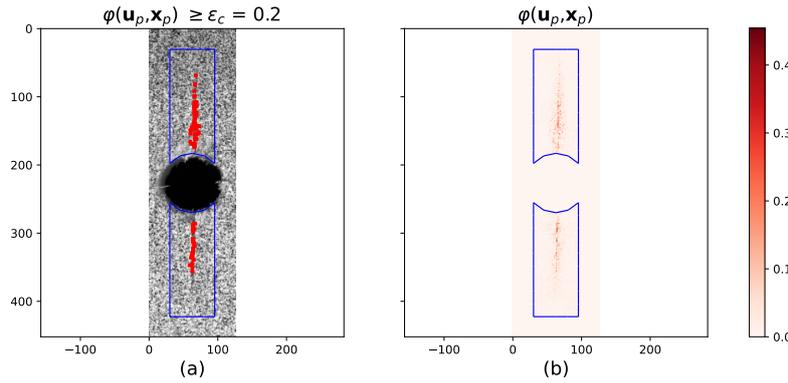


FIGURE 2.23 – Maillages EF associés aux trois régions d'intérêt ROI pour une taille de maille imposée  $h^e$  de 19.6 pixels.

ROI	$x_0$	$y_0$	$x_1$	$y_1$
1	$x_C - L/8$	$y_C - H/4$	$x_C + L/8$	$y_C - 0.6 D$
2	$x_C - L/4$	$y_C - H/4$	$x_C + L/4$	$y_C$
3	$x_C - 3D/4$	$y_C - H/4$	$x_C + 3D/4$	$y_C + H/4$

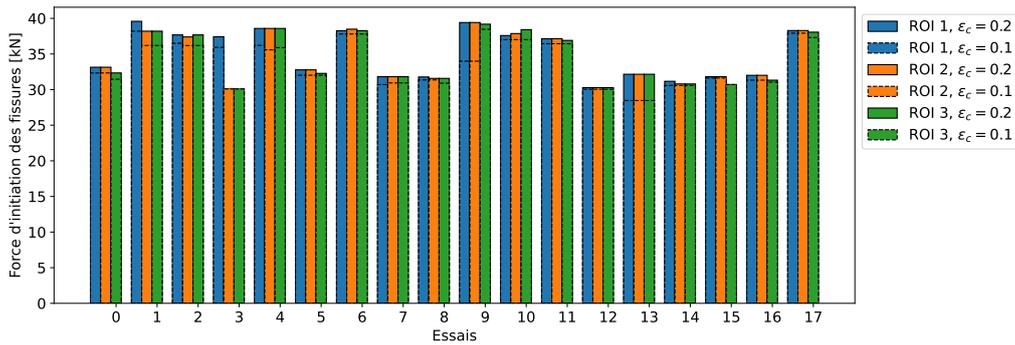
TABLEAU 2.5 – Coordonnées des points  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$  et  $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$  utilisées pour la construction des trois régions d'intérêt ROI représentées sur la Figure 2.23.

ROI et un seuil  $\epsilon_c$  appropriés pour détecter automatiquement la force d'initiation de fissure  $F_c$  pour l'ensemble des essais expérimentaux de compression réalisés. Pour ce faire, plusieurs analyses sont conduites par CIN avec les trois régions d'intérêt illustrées sur la Figure 2.23 et les deux valeurs seuils  $\epsilon_c$  de 0.1 et 0.2. Les maillages sont construits pour chaque essai sur les images de référence relevées pour un niveau de chargement  $F_{\text{exp}}$  d'environ 15 kN avec une taille de maille imposée  $h^e$  de 19.6 pixels. Les analyses sont effectuées en imposant une longueur de régularisation  $\ell_R$  de 78 pixels et sont arrêtées lorsque la norme  $\|\mathbf{b}_{\text{reg}}\|$  du vecteur résidu  $\mathbf{b}_{\text{reg}}$  défini en (2.27b) est strictement inférieure à  $10^{-12}$ . Pour chaque essai, les analyses sont conduites sur les images acquises à partir d'un niveau de chargement  $F_{\text{exp}}$  d'environ 25 kN, jusqu'à ce qu'au moins un pixel de la ROI présente un résidu normalisé dépassant le seuil  $\epsilon_c$  considéré. La Figure 2.24 illustre un exemple d'application pour l'essai n° 10, où les points rouges sur l'image de la Figure 2.24a indiquent l'ensemble des pixels pour lesquels le champ résiduel de corrélation normalisé (représenté sur la Figure 2.24b) dépasse le seuil  $\epsilon_c = 0.2$ . Ce nuage de points reflète la discontinuité du champ de déplacement détectée après l'initiation de la fissure, sous un chargement



**FIGURE 2.24** – Détection de la fissure pour l'essai n° 10 avec la ROI 3 et un seuil  $\epsilon_c = 0.2$  : (a) image déformée après l'apparition de la fissure pour une charge de 40.45 kN ; (b) résidus de corrélation normalisés  $\varphi(\mathbf{u}_p, \mathbf{x}_p)$  évalués en chaque pixel  $p$  contenu dans la ROI représentée en bleu. Les résidus de corrélation normalisés  $\varphi(\mathbf{u}_p, \mathbf{x}_p)$  sont imposés à 0 pour les pixels en dehors de la ROI.

de 40.45 kN. La Figure 2.25 représente les différentes forces obtenues pour les trois ROI et les seuils  $\epsilon_c$  de 0.1 et 0.2. On constate que pour chaque essai, un seuil  $\epsilon_c = 0.1$

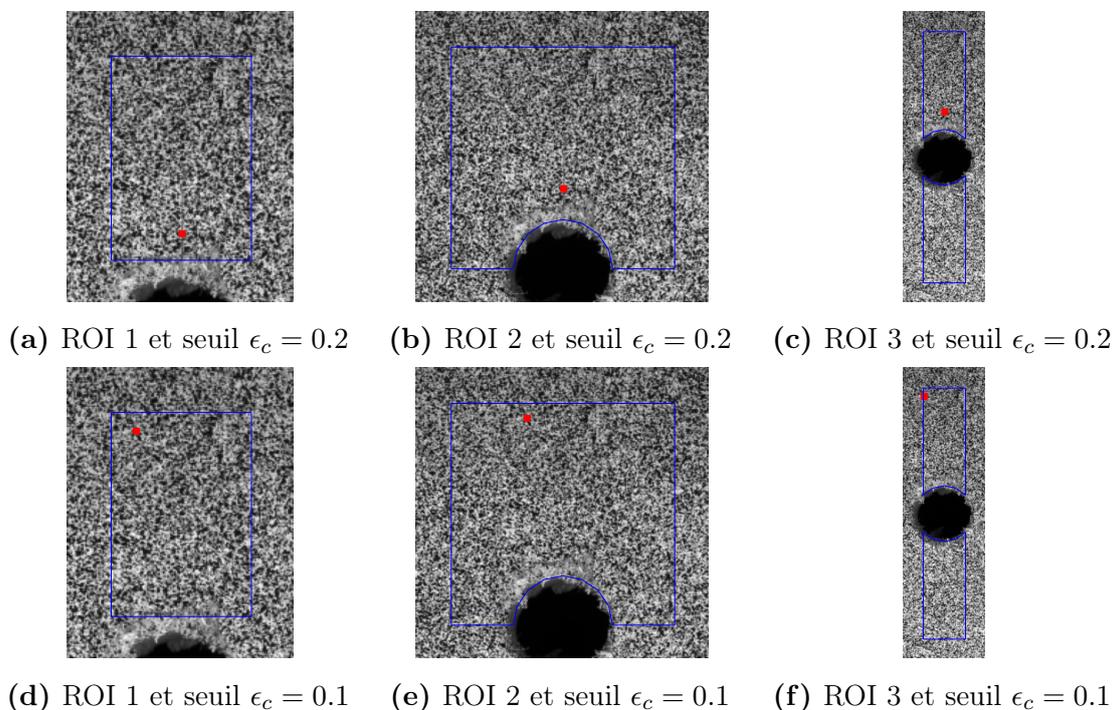


**FIGURE 2.25** – Forces d'initiation de fissure  $F_c$  identifiées pour les 18 essais et chacune des trois ROI et des deux valeurs seuils  $\epsilon_c$  considérées. Les forces d'initiation obtenues pour un seuil  $\epsilon_c = 0.1$  sont représentées par des barres à contours en pointillés, tandis que celles obtenues avec un seuil  $\epsilon_c = 0.2$  sont indiquées par des barres à contours en traits pleins. Les barres bleues, oranges et vertes sont respectivement associées aux ROI 1, ROI 2 et ROI 3.

conduit à une force plus faible que pour un seuil de 0.2. En effet, la Figure 2.25 montre que les barres avec un contour en pointillés, associées au seuil  $\epsilon_c = 0.1$ , sont plus petites que celles associées au seuil  $\epsilon_c = 0.2$ , représentées par des barres en traits pleins. De plus, pour un seuil  $\epsilon_c = 0.2$ , les trois maillages considérés semblent fournir des forces d'initiation de fissure  $F_c$  quasi-identiques pour les essais n° 4, n° 7, n° 12 et n° 13, et assez voisines pour les autres essais, excepté l'essai n° 3 pour lequel la ROI 1 conduit à une valeur de  $F_c$  plus élevée que celles obtenues avec la ROI 2 et la ROI 3.

On analyse tout d'abord les résultats de l'essai n° 13 sur la Figure 2.26, qui

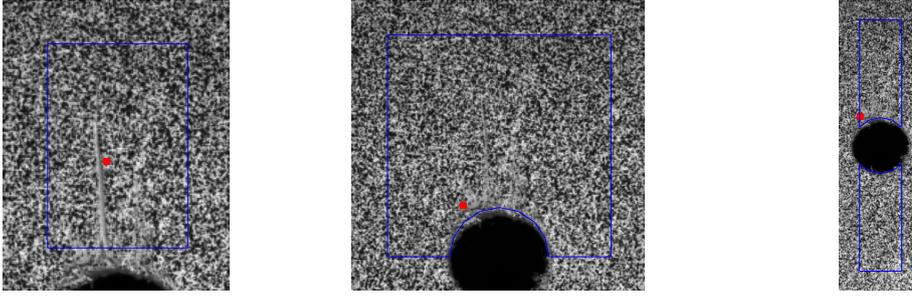
mettent en évidence l'influence du seuil  $\epsilon_c$  observée sur la Figure 2.25, tout en restant insensibles à la ROI considérée. La Figure 2.26 représente pour l'essai n° 13 le premier pixel détecté dans chaque ROI en fonction du seuil  $\epsilon_c$  considéré. On constate que



**FIGURE 2.26** – Détection du premier pixel pour lequel le champ résiduel de corrélation normalisé dépasse la valeur seuil (a-c)  $\epsilon_c = 0.2$  et (d-f)  $\epsilon_c = 0.1$  pour l'essai n° 13.

le seuil  $\epsilon_c = 0.2$  conduit, pour une force de compression de 32.15 kN, à détecter un pixel dans une zone fissurée, comme illustré sur les Figures 2.26a, 2.26b et 2.26c pour chacune des trois ROI. En revanche, le seuil  $\epsilon_c = 0.1$  conduit, pour une force de compression de 28.46 kN, à détecter un pixel dans une zone non fissurée, comme illustré sur les Figures 2.26d, 2.26e et 2.26f pour chacune des trois ROI. La valeur seuil prédéfinie  $\epsilon_c$  doit donc être choisie avec soin et être suffisamment élevée pour ne pas détecter d'artefacts parasites de CIN ou d'éventuels bruits/erreurs numériques. Toutefois, elle doit être suffisamment petite pour ne pas sous-estimer la force d'initiation de fissure  $F_c$ .

On étudie à présent les résultats de l'essai n° 3 sur la Figure 2.27, qui révèlent une forte influence de la ROI utilisée, comme illustré sur la Figure 2.25. La Figure 2.27 représente pour l'essai n° 3 le premier pixel détecté dans chaque ROI pour un seuil  $\epsilon_c$  de 0.2. Les Figures 2.27b et 2.27c montrent qu'avec la ROI 2 et la ROI 3, un pixel est détecté en dehors de zone fissurée, à proximité du trou, pour la même force de compression de 30.08 kN. Ce phénomène entraîne une sous-estimation de la force d'initiation de fissure  $F_c$  lorsque ces régions d'intérêt sont utilisées.

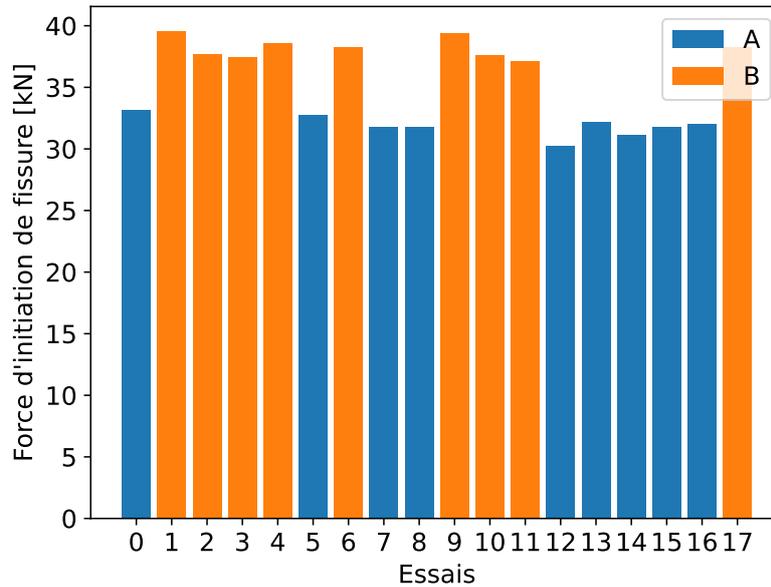


(a) ROI 1 et seuil  $\epsilon_c = 0.2$     (b) ROI 2 et seuil  $\epsilon_c = 0.2$     (c) ROI 3 et seuil  $\epsilon_c = 0.2$

**FIGURE 2.27** – Détection du premier pixel pour lequel le champ résiduel de corrélation normalisé dépasse la valeur seuil  $\epsilon_c = 0.2$  pour l'essai n° 3.

Bien que la **ROI 3** semble a priori plus adaptée pour détecter l'apparition d'une fissure en haut comme en bas du trou, l'identification des forces d'initiation a été effectuée avec la **ROI 1**, afin d'éviter une sous-estimation de ces forces. Il est important de souligner que ce choix est spécifique aux essais de compression effectués.

La Figure 2.28 représente les forces d'initiation de fissure  $F_c$  identifiées pour chacun des 18 essais. Le graphique présente deux séries de valeurs : (i) une première



**FIGURE 2.28** – Force d'initiation de fissure  $F_c$  identifiée pour chacun des 18 essais, avec  $h^e = 19.6$  pixels,  $\ell_R = 78$  pixels, et un seuil  $\epsilon_c = 0.2$ .

série en bleu associée aux 9 échantillons issus de la traverse A, où la valeur moyenne  $\underline{F_c^A}$  est d'environ 32 kN, avec une dispersion  $\delta_{F_c^A}$  de 2.5%, et (ii) une seconde série en orange associée aux 9 échantillons issus de la traverse B, où les valeurs de  $F_c$  sont plus élevées avec une valeur moyenne  $\underline{F_c^B}$  d'environ 38 kN et une dispersion  $\delta_{F_c^B}$  de 2.1%.

Le Tableau 2.6 résume les valeurs moyennes et les coefficients de dispersion obtenus pour (i) l'orientation  $\theta$  des **cernes** (section 1.1), (ii) la force de compression maximale  $F_m$  (section 1.3), et (iii) la force d'initiation de fissure  $F_c$ . On constate

	$\underline{\theta}$ [degrés]	$\delta_\theta$ [%]	$\underline{F_m}$ [kN]	$\delta_{F_m}$ [%]	$\underline{F_c}$ [kN]	$\delta_{F_c}$ [%]
A	33	8	34	2.4	32	2.5
B	42	5	41	2.6	38	2.1

**TABLEAU 2.6** – Synthèse des données expérimentales mesurées lors des essais de compression réalisés sur les échantillons issus des deux traverses A et B.

que la force d'initiation de fissure  $F_c$  est inférieure à la force maximale  $F_m$  pour chacune des traverses et que les dispersions observées sur ces deux valeurs d'effort sont similaires, de l'ordre de 2 à 3% pour les deux traverses A et B. Finalement, en comparant les résultats sur les données expérimentales mesurées fournies dans le Tableau 2.6 avec ceux des paramètres élastiques identifiés dans le Tableau 2.4, on constate que les valeurs moyennes des forces  $F_m$  et  $F_c$  sont plus faibles pour les échantillons issus de la traverse A que celles des échantillons de la traverse B, tout comme les valeurs moyennes des modules élastiques  $E_L$ ,  $E_T$  et  $G_L$ . On remarque également que les dispersions  $\delta_{E_L}$  sur le module d'Young longitudinal  $E_L$  sont du même ordre de grandeur (quelques %) que celles  $\delta_\theta$ ,  $\delta_{F_m}$  et  $\delta_{F_c}$  observées sur  $\theta$ ,  $F_m$  et  $F_c$ , respectivement.

### 3.4 Identification des propriétés d'endommagement

L'objectif de cette section est de reproduire numériquement l'initiation de la propagation des fissures observées expérimentalement en utilisant le modèle d'endommagement par champ de phase introduit dans le chapitre 1. Pour ce faire, on cherche dans un premier temps à identifier les paramètres d'endommagement  $G_c$  et  $\ell$  du bois épicéa, à partir des forces d'initiation de fissure  $F_c$  identifiées dans la section précédente. Toutes les simulations d'endommagement sont conduites avec le modèle de décomposition de l'énergie élastique de He introduit en section 3.7 et le modèle de régularisation de l'énergie de rupture/fissuration AT1 introduit en section 2.1.

Comme pour l'identification des paramètres élastiques du bois épicéa présentée en section 3.2, l'identification des paramètres d'endommagement est réalisée avec la méthode FEMU, en minimisant l'erreur relative au carré entre la force d'initiation de fissure mesurée expérimentalement  $F_c$  et celle calculée/simulée numériquement  $F(G_c, \ell)$  comme suit :

$$(G_c^*, \ell^*) = \arg \min_{(G_c, \ell) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} \mathcal{J}(G_c, \ell), \quad \text{avec} \quad \mathcal{J}(G_c, \ell) = \left( \frac{F_c - F(G_c, \ell)}{F_c} \right)^2, \quad (2.43)$$

où  $F(G_c, \ell)$  représente la force d'initiation de fissure correspondant à la force de réaction globale sur le bord supérieur  $\Gamma_H$  dans la direction verticale  $y$  (portée par le

vecteur normal  $\mathbf{n}$  à  $\Gamma_H$ ) définie par

$$F(G_c, \ell) = - \int_{\Gamma_H} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (2.44)$$

obtenue à partir d'une simulation d'endommagement par champ de phase et relevée lorsque  $\max(\phi) = 1$ . Dans le cadre de la [MEF](#), cette force peut être calculée numériquement comme

$$F(G_c, \ell) = - \sum_{i \in \mathcal{N}_H} \{[K_u] \mathbf{u}\}_i, \quad (2.45)$$

où  $[K_u]$  est la matrice [EF](#) globale (assemblée) de dimension  $N_{\text{ddl}} \times N_{\text{ddl}}$  et  $\mathbf{u}$  est le vecteur solution de dimension  $N_{\text{ddl}} \times 1$  du système matriciel [\(1.78\)](#) associé au problème mécanique formulé en déplacement, et  $\mathcal{N}_H$  désigne l'ensemble des [ddls](#) suivant  $y$  associés aux nœuds situés sur le bord supérieur  $\Gamma_H$ . Cette force d'initiation de fissure est associée au début de la propagation de fissure, en considérant que la fissure s'est formée et commence à se propager lorsque le champ d'endommagement  $\phi$  atteint 1 en au moins un nœud du maillage [EF](#).

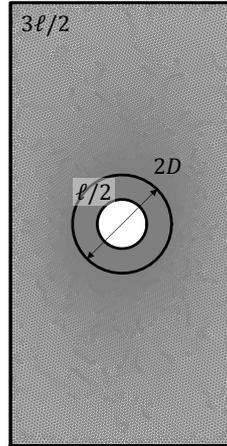
Pour représenter la fonction-coût  $\mathcal{J}(G_c, \ell)$  à minimiser, plusieurs simulations d'endommagement sont menées avec le script [scripts/FEMU\\_Gc\\_Grid.py](#). Ces simulations couvrent une grille de paramètres comprenant 10 valeurs de  $G_c$  allant de 10 à 300 N/m et 10 valeurs de  $\ell$  allant de 0.45 à 4.5 mm. Pour chaque paire de valeurs  $(G_c, \ell)$ , une simulation d'endommagement par champ de phase est conduite jusqu'à ce que le champ d'endommagement  $\phi$  atteigne 1 en au moins un nœud du maillage (i.e.  $\max(\phi) = 1$ ). On utilise les propriétés élastiques moyennes identifiées pour l'échantillon n° 4, soit :

$$E_L = 15.54 \text{ GPa}, \quad E_T = 266.22 \text{ MPa}, \quad G_L = 562.28 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \nu_L = 0.23. \quad (2.46)$$

Les simulations sont effectuées avec un maillage optimisé, représenté sur la [Figure 2.29](#), et construit à partir de la plus petite longueur de régularisation considérée  $\ell = L/100 = 0.45$  mm. Dans ce maillage, la taille des éléments  $h^e$  est imposée à  $\ell/2$  dans une zone circulaire de diamètre  $2D$  centrée sur le trou, et à  $3\ell/2$  en dehors, ce qui aboutit (pour  $\ell = 0.45$  mm) à un maillage composé de 39 108 éléments linéaires [TRI3](#) et 19 825 nœuds. Les simulations sont effectuées en considérant un chargement de compression uniaxiale analogue à celui appliqué au problème de la plaque trouée en section [6.2](#) du chapitre 1, mais adapté aux dimensions des échantillons spécifiées dans le [Tableau 2.1](#). Un incrément monotone de déplacement est imposé sur le bord supérieur  $\Gamma_H$  de l'échantillon tel que

$$\Delta u = \begin{cases} -24 \times 10^{-5} \text{ mm} & \text{si } \max(\phi) \leq 0.2, \\ -6 \times 10^{-5} \text{ mm} & \text{si } \max(\phi) > 0.2. \end{cases} \quad (2.47)$$

À chaque itération de chargement  $k$ , la convergence de l'algorithme de minimisation alternée est assurée lorsque l'erreur relative entre les énergies libres  $\mathcal{E}(\mathbf{u}_n^k, \phi_n^k)$  et



**FIGURE 2.29** – Construction du maillage EF optimisé en fonction de la demi-largeur de fissure  $\ell$  considérée. Les dimensions de l'échantillon sont spécifiées sur la Figure 2.1a et dans le Tableau 2.1.

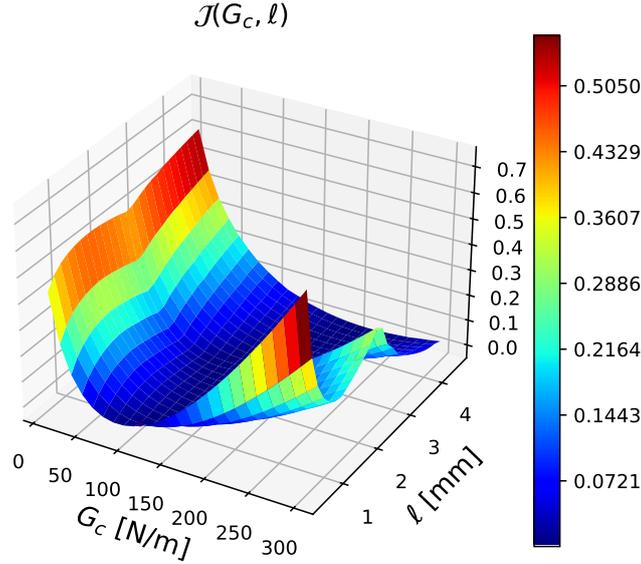
$\mathcal{E}(\mathbf{u}_{n+1}^k, \phi_{n+1}^k)$  (aux itérations  $n$  et  $n + 1$ , respectivement) devient inférieure à un seuil  $\epsilon$ , conformément à l'équation (1.63). Les simulations sont conduites avec le script `scripts/FEMU_Gc_Grid.py` et sont réalisées sur les stations de calculs du Laboratoire MSME, en utilisant le solveur parallèle direct `pypardiso`<sup>4</sup>, adapté à la résolution directe de grands systèmes d'équations linéaires creux. La Figure 2.30 représente l'évolution de la fonction-coût  $\mathcal{J}(G_c, \ell)$  pour les propriétés élastiques moyennes identifiées pour l'échantillon n°4 rappelées en (2.46) et avec un seuil de convergence  $\epsilon = 10^{-2}$  pour l'algorithme de minimisation alternée. La forme de la surface obtenue montre que la longueur de régularisation  $\ell$  a une influence négligeable par rapport à celle du taux de restitution d'énergie critique  $G_c$ .

Par conséquent, le processus d'identification vise par la suite à rechercher uniquement le paramètre  $G_c$ , tandis que la longueur de régularisation  $\ell$  est choisie suffisamment petite par rapport à la taille du domaine et est arbitrairement fixée à  $\ell_0 = L/100 = 0.45$  mm. Pour chaque essai, les valeurs optimales de  $G_c$  peuvent alors être calculées en résolvant le problème d'optimisation non-linéaire sous contraintes suivant :

$$G_c^* = \arg \min_{G_c \in [1, 500] \text{ N/m}} \mathcal{J}(G_c, \ell_0), \quad (2.48)$$

où l'ensemble admissible du paramètre  $G_c \in \mathbb{R}^+$  est réduit à l'intervalle de valeurs comprises entre 1 et 500 N/m, qui contient la valeur optimale  $G_c^*$  en laquelle la fonction-coût  $\mathcal{J}(G_c, \ell_0)$  atteint son minimum, comme le montre la Figure 2.30. Ces bornes réduites permettent d'éviter des valeurs de  $G_c$  trop élevées, qui conduiraient à un comportement excessivement ductile, ainsi que des valeurs trop faibles, qui entraîneraient un comportement trop fragile, avec un endommagement/rupture

4. Interface `Python` du solveur parallèle direct Intel *Math Kernel Library* (MKL) Pardiso.



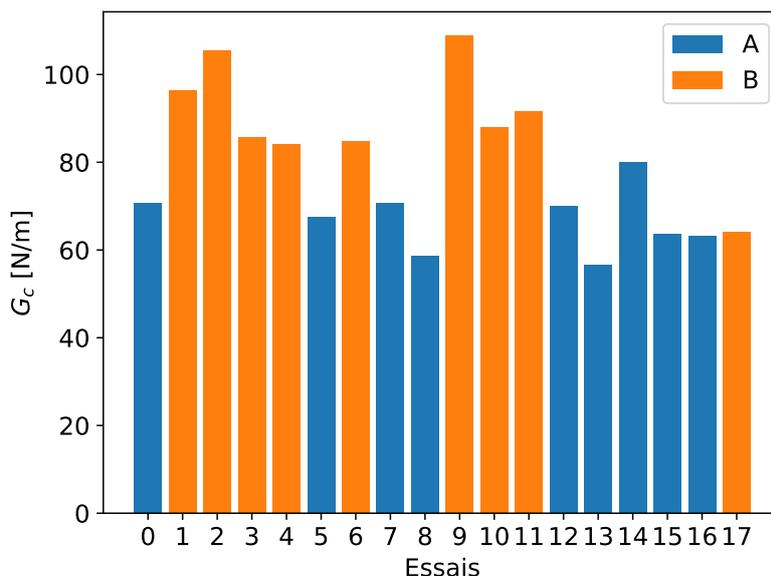
**FIGURE 2.30** – Évolution de la fonction-coût  $\mathcal{J}(G_c, \ell)$  en fonction de  $G_c$  et  $\ell$  pour les propriétés élastiques moyennes de l'échantillon n° 4. Plusieurs simulations d'endommagement sont effectuées sur une grille de paramètres de dimension  $10 \times 10$ , pour  $G_c$  allant de 10 à 300 N/m et  $\ell$  allant de 0.45 à 4.5 mm. Chaque paire de valeurs correspond à une simulation d'endommagement réalisée jusqu'à l'initiation de la fissure (i.e.  $\max(\phi) = 1$ ).

prématuré(e) dès les premières itérations de chargement. Enfin, pour résoudre le problème de minimisation sous contrainte (2.48), nous avons recours à l'algorithme *L-BFGS-B* introduit et décrit dans [Byrd et al. 1995, Zhu et al. 1997]. L'algorithme est implémenté dans la fonction `minimize()` disponible dans la bibliothèque `Python scipy.optimize` [Virtanen et al. 2020]. Le critère d'arrêt du solveur d'optimisation est défini en fixant la tolérance sur la fonction objectif `tol` à  $10^{-7}$ , tandis que le seuil de convergence  $\epsilon$  pour le critère d'arrêt du solveur étagé défini en équation (1.63) est fixé à  $10^{-2}$ . L'incrément monotone de déplacement imposé sur le bord supérieur  $\Gamma_H$  de l'échantillon est légèrement diminué par rapport à (2.47) (pour  $\max(\phi) > 0.2$ ) afin de capturer précisément l'initiation de la propagation de fissure :

$$\Delta u = \begin{cases} -24 \times 10^{-5} \text{ mm} & \text{si } \max(\phi) \leq 0.2, \\ -2 \times 10^{-5} \text{ mm} & \text{si } \max(\phi) > 0.2. \end{cases} \quad (2.49)$$

Les simulations sont réalisées avec le script `scripts/FEMU_Gc.py` sur les stations de calculs du Laboratoire `MSME`, en utilisant le solveur parallèle direct `pypardiso`.

La Figure 2.31 représente les taux de restitution d'énergie critique  $G_c$  identifiés pour l'ensemble des 18 essais. Le graphique présente deux séries de valeurs : (i) une première série associée aux 9 échantillons issus de la traverse A, représentée par des barres bleues, où la valeur moyenne  $\underline{G}_c^A$  est d'environ 66.8 N/m, avec une dispersion  $\delta_{G_c^A}$  de 10.1%, et (ii) une seconde série associée aux 9 échantillons issus de la traverse B, représentée par des barres oranges, où les valeurs de  $F_c$  sont plus



**FIGURE 2.31** – Taux de restitution d’énergie critique  $G_c$  identifié pour chacun des 18 essais.

élevées, avec une valeur moyenne  $\underline{G_c^B}$  d’environ 89.9 N/m et une dispersion  $\delta_{G_c^B}$  de 13.8%. Il est important de noter que la valeur identifiée pour l’échantillon n° 17 est plus faible que celles des autres échantillons de la traverse B. Cette différence provient des propriétés élastiques identifiées pour l’échantillon n° 17, notamment le module d’Young transversal  $E_T$  dont la valeur moyenne et la dispersion sont très élevées par rapport à celles obtenues pour les autres échantillons, comme illustré sur la Figure 2.21b. Les valeurs moyennes et dispersions identifiées pour chacune des deux traverses sont résumées dans le Tableau 2.7. La gamme de valeurs obtenues

	$\underline{G_c}$ [N/m]	$\delta_{G_c}$ [%]
A	66.8	10.1
B	89.9	13.8

**TABLEAU 2.7** – Valeur moyenne  $\underline{G_c}$  et coefficient de dispersion  $\delta_{G_c}$  du taux de restitution d’énergie critique  $G_c$  pour chacune des deux traverses A et B.

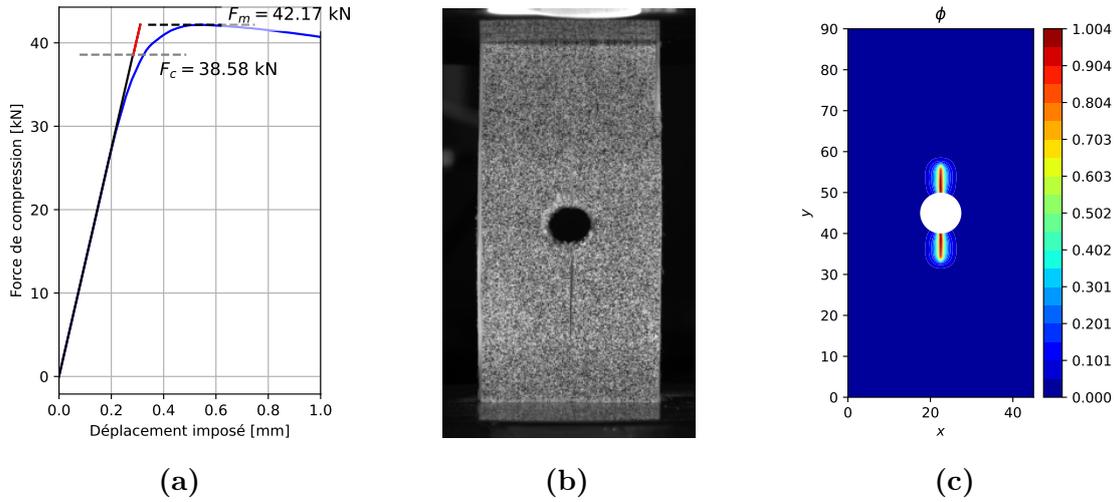
est cohérente avec les valeurs disponibles dans la littérature scientifique [Daudeville 1999, Pech et al. 2022b]. En considérant l’ensemble des 18 échantillons, la valeur moyenne  $\underline{G_c}$  et la dispersion  $\delta_{G_c}$  du taux de restitution d’énergie critique  $G_c$  valent respectivement :

$$\underline{G_c} = 78.3 \text{ N/m} \quad \text{et} \quad \delta_{G_c} = 19.5\%. \quad (2.50)$$

Le taux de restitution d’énergie critique moyen  $\underline{G_c}$  est plus faible pour les échantillons issus de la traverse A que pour ceux issus de la traverse B avec un écart relatif significatif d’environ 30%, ce qui indique une dépendance du paramètre  $G_c$  à la traverse d’origine. L’origine des variations observées sur les valeurs de  $G_c$  dans chaque

traverse est probablement liée à l'hétérogénéité du bois, étant donné qu'il s'agit d'un matériau naturel, où l'influence de la microstructure joue un rôle significatif dans le mécanisme d'initiation de fissure.

Pour finir, on réalise une simulation d'endommagement par champ de phase avec le script `scripts/SIMU.py` en utilisant les propriétés élastiques et d'endommagement identifiées pour l'échantillon n° 4 correspondant aux valeurs de  $E_L, E_T, G_L$  et  $\nu_L$  rappelées en (2.46) et à la valeur  $G_c = 84.2$  N/m. On applique les mêmes conditions aux limites que pour le problème de la plaque trouée en compression en section 6.2 du chapitre 1, avec les dimensions spécifiées dans le Tableau 2.1. La simulation d'endommagement est menée avec un maillage optimisé construit avec l'option `optimCircle=False` de la fonction `DoMesh()` du script `scripts/_Fonctions.py`, où la taille de maille  $h^e$  est imposée à  $\ell_0/2$  dans un domaine rectangulaire de hauteur  $H$  et de largeur  $2D$  centré sur le trou, et à  $3\ell_0/2$  en dehors. L'incrément monotone de déplacement  $\Delta u$  imposé sur le bord  $\Gamma_H$  est défini par l'équation (2.49), et la simulation est interrompue lorsque la force de réaction globale simulée  $F(G_c, \ell_0)$  défini en (2.45) atteint ou dépasse la force maximale de compression expérimentale  $F_m$ . La Figure 2.32a représente les courbes force-déplacement expérimentale et numérique superposées pour l'essai n° 4, où la courbe expérimentale (ligne bleue) a été recalée selon la procédure décrite en Annexe C. La ligne rouge représente



**FIGURE 2.32** – (a) Courbes force-déplacement (bornées entre 0 et 1 mm) obtenues expérimentalement (ligne bleue) et numériquement (lignes noire et rouge) avec les propriétés élastiques et d'endommagement identifiées pour l'échantillon n° 4. (b) Fissure observée expérimentalement pour la force de compression maximale  $F_m$  atteinte pendant l'essai (correspondant à l'image `image-0229_0.tif`) et (c) champ d'endommagement  $\phi$  obtenu à la dernière itération de chargement (correspondant à un déplacement imposé de 0.31 mm).

l'évolution de la courbe force-déplacement après l'initiation de la propagation de fissure (i.e. lorsque  $\max(\phi) = 1$ ). La force d'initiation de fissure  $F_c$  et la force de compression maximale  $F_m$  sont indiquées respectivement par des lignes horizontales

en pointillés gris et noir. On observe qu'avant l'initiation de la fissure, le comportement est bien linéaire (ligne noire), conformément au comportement élastique linéaire associé au modèle [AT1](#) en l'absence d'endommagement (i.e.  $\phi = 0$ ) [[Tanné et al. 2018](#)]. La Figure [2.32c](#) représente le champ d'endommagement  $\phi$  obtenu pour la force de compression maximale  $F_m$ , qui montre une trajectoire de fissure similaire à celle observée expérimentalement dans l'image de la Figure [2.32b](#). Bien que les fissures ne soient pas de même longueur, on observe qu'elles se propagent verticalement en direction des bords inférieur et supérieur de l'échantillon. Bien que l'évolution de la force de réaction globale reste quasi-linéaire au-delà de la force d'initiation de fissure  $F_c$  (ligne rouge), l'approche par champ de phase a permis de modéliser et simuler numériquement l'initiation de la fissuration dans des échantillons en bois d'épicéa soumis en compression.

## 4 Disponibilité des données

Les données expérimentales utilisées dans ce chapitre sont accessibles en open source sur [entrepot.recherche.data.gouv.fr](https://entrepot.recherche.data.gouv.fr), sous la référence [NGOKFP] [[Noel et al. 2024](#)]. Les scripts [Python](#) permettant de générer ou d'exploiter ces données, sont accompagnés d'une documentation détaillée sur [GitLab](#) et [Software Heritage](#). Pour reproduire les résultats des simulations, il est nécessaire d'installer la bibliothèque [EasyFEA](#) à la version [1.2.6](#) pour [Python 3.11.8](#).

## 5 Conclusions

Dans le contexte industriel de l'ameublement, nous avons développé un essai expérimental représentatif d'un mode de détérioration (rupture par fissuration) fréquemment observé lors des essais normalisés réalisés par l'Institut technologique [FCBA](#). Une campagne de 18 essais a été menée sur des éprouvettes en bois d'épicéa soumises à une charge de compression uniaxiale. Les échantillons sont percés afin d'induire une concentration de contraintes et d'initier la propagation des fissures au voisinage du trou. Grâce à ces essais et à la procédure d'identification mise en place, nous avons déterminé les paramètres élastiques du matériau bois d'épicéa dans la classe de symétrie isotrope transverse pour chacun des 18 échantillons en utilisant une méthode [FEMU](#) modifiée, et nous avons mis en œuvre un processus pour mesurer expérimentalement la force critique d'initiation de fissure  $F_c$  par [CIN](#). Cette force d'initiation de fissure a permis d'identifier le taux de restitution d'énergie critique  $G_c$  pour chaque échantillon, à l'aide de la méthode [FEMU](#) en exploitant les résultats de simulations d'endommagement. Les dispersions observées d'une traverse à l'autre sur les données expérimentales  $\theta$ ,  $F_m$  et  $F_c$  (environ 4%, voir [Tableau 2.6](#)) sont plus faibles que celles observées sur les propriétés élastiques (environ 11%, voir [Tableau 2.4](#)) et les propriétés d'endommagement (environ 12%, voir [Tableau 2.7](#)). Les résultats d'identification montrent que les propriétés élastiques et d'endommagement dépendent de la traverse d'origine. Il convient de souligner qu'un prélèvement d'échantillons sur un plus grand nombre de traverses aurait permis

d'obtenir des estimations statistiques plus précises sur les propriétés élastiques et d'endommagement du bois d'épicéa. Les simulations numériques de la propagation des fissures dans les éprouvettes d'épicéa sont réalisées à l'aide de la [Méthode des Éléments Finis](#), couplée à un modèle d'endommagement par champ de phase utilisé pour simuler numériquement l'évolution de fissures dans les matériaux élastiques anisotropes. Le modèle d'endommagement pour la rupture fragile en régime (quasi-)statique, avec les paramètres matériaux identifiés, ne parvient pas à reproduire l'adoucissement observé expérimentalement après l'initiation de la fissure. Toutefois, le modèle de champ de phase utilisé (adapté aux matériaux élastiques anisotropes) a permis de simuler et prédire l'initiation de la propagation d'une fissure dans une éprouvette en bois d'épicéa.

## Chapitre 3

# Modèle probabiliste de la rupture fragile par champ de phase

*Ce troisième chapitre présente un modèle probabiliste du tenseur d'élasticité aléatoire (presque sûrement dans la classe de symétrie isotrope transverse) et du taux de restitution d'énergie critique aléatoire pour la rupture fragile par champ de phase, afin de prendre en compte les incertitudes (ou fluctuations statistiques) observées expérimentalement sur les propriétés élastiques et d'endommagement de l'épicéa dans le chapitre 2. L'identification des paramètres des modèles probabilistes est effectuée à l'aide de méthodes d'inférence/estimation statistique, à savoir la méthode des moindres carrés (LS) et la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance (MLE), avec les données expérimentales obtenues en sections 3.2 et 3.4 du chapitre 2. Une procédure est mise en œuvre pour accélérer les simulations, permettant d'identifier un critère d'amorçage de fissure. Ce critère, appliqué aux échantillons d'épicéa troués soumis à un chargement complexe de compression via un système vis-écrou noyé, permet de prédire l'emplacement de l'amorce de fissure et d'estimer l'effort nécessaire à son initiation. En outre, la procédure mise en œuvre permet d'évaluer la probabilité d'amorçage d'une fissure en fonction de la charge appliquée.*

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Modélisation probabiliste des propriétés matériaux du bois d'épicéa</b> . . . . .	<b>101</b>
1.1	Principe du maximum d'entropie . . . . .	101
1.2	Modèle probabiliste du taux de restitution d'énergie critique .	103
1.3	Modèle probabiliste du tenseur d'élasticité . . . . .	104
<b>2</b>	<b>Identification des paramètres des modèles probabilistes</b> . .	<b>109</b>
2.1	Paramètres du modèle probabiliste pour le taux de restitution d'énergie critique . . . . .	109
2.2	Paramètres du modèle probabiliste pour le tenseur d'élasticité	111
<b>3</b>	<b>Simulation stochastique de la rupture fragile par champ de phase</b> . . . . .	<b>116</b>
3.1	Accélération des simulations . . . . .	117
3.2	Générateur de réalisations indépendantes des variables aléatoires $G_c$ et $\mathbf{C}$ . . . . .	121
3.3	Simulations stochastiques d'endommagement . . . . .	123
<b>4</b>	<b>Reproduction de l'essai expérimental de compression</b> . . . .	<b>127</b>
4.1	Approche déterministe . . . . .	127
4.2	Approche probabiliste . . . . .	132
<b>5</b>	<b>Disponibilité des données</b> . . . . .	<b>135</b>
<b>6</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>135</b>

---

# 1 Modélisation probabiliste des propriétés matériaux du bois d'épicéa

L'objectif de cette section est de construire des modèles probabilistes du tenseur d'élasticité aléatoire et du taux de restitution d'énergie critique aléatoire pour prendre en compte les incertitudes (ou fluctuations statistiques) observées expérimentalement sur les propriétés élastiques et d'endommagement de l'épicéa, respectivement identifiées en sections 3.2 et 3.4 du chapitre 2. La section 1.1 présente le principe général du maximum d'entropie (ou **MaxEnt** pour *Maximum Entropy* en anglais) qui est une méthode générale d'optimisation sous contraintes initialement introduite dans le cadre de la théorie de l'information et couramment utilisée dans le domaine de la quantification d'incertitudes (ou **UQ** pour *Uncertainty Quantification* en anglais) pour la construction de modèles probabilistes. Ce principe est utilisé pour construire les lois de probabilité du taux de restitution d'énergie critique modélisé par la variable aléatoire  $G_c$  en section 1.2, ainsi que du tenseur d'élasticité aléatoire dans la classe de symétrie isotrope transverse représenté par la matrice d'élasticité aléatoire  $[C]$  en section 1.3, en considérant que ces variables aléatoires sont statistiquement indépendantes.

Pour plus d'informations sur la construction de modèles probabilistes par le principe du **MaxEnt**, les lecteurs intéressés pourront consulter l'ouvrage de référence [Soize 2017].

## 1.1 Principe du maximum d'entropie

Le principe du maximum d'entropie (**MaxEnt**), initialement formulé par [Jaynes 1957a, Jaynes 1957b] pour des vecteurs aléatoires, est une méthode d'optimisation sous contraintes qui s'appuie sur la théorie de l'information de [Shannon 1948, Shannon 2001, Balian 1968]. Ce principe est utilisé dans la quantification d'incertitudes (**UQ**) pour construire explicitement et définir la densité de probabilité  $p_{\mathbf{X}}$  d'un vecteur aléatoire (ou variables aléatoires à valeurs vectorielles)  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , en utilisant exclusivement les informations disponibles sur la variable  $\mathbf{X}$  qui traduisent des propriétés mathématiques, physiques et statistiques sur  $\mathbf{X}$  [Sobczyk et Trębicki 1990, Kapur et Kesavan 1992, Jumarie 2000, Cover et Thomas 2006, Soize 2017]. L'entropie  $S(p_{\mathbf{X}})$  de la densité de probabilité (ou **pdf** pour *probability density function* en anglais)  $p_{\mathbf{X}}$  de  $\mathbf{X}$  est définie par

$$S(p_{\mathbf{X}}) = - \int_{\mathbb{R}^n} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \ln(p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = -E\{\ln(p_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}))\}, \quad (3.1)$$

où  $\ln$  est le logarithme népérien et  $E$  est l'espérance mathématique. Cette quantité scalaire mesure l'incertitude sur la loi de probabilité (représentée par la **pdf**  $p_{\mathbf{X}}$ ) de la variable aléatoire  $\mathbf{X}$ . Plus l'entropie  $S(p_{\mathbf{X}})$  est grande, et plus l'incertitude sur  $p_{\mathbf{X}}$  est élevée ; à l'inverse, plus l'entropie  $S(p_{\mathbf{X}})$  est petite, et plus l'incertitude est faible. La **pdf**  $p_{\mathbf{X}}$  que l'on cherche à construire avec le principe du maximum d'entropie doit maximiser l'incertitude (ou l'entropie) parmi toutes les densités de probabilité qui

vérifient les contraintes définissant l'information disponible de manière à obtenir la pdf  $p_{\mathbf{X}}$  la plus objective, i.e. celle qui introduit le biais de modélisation le plus réduit, sous certaines contraintes.

Soit une variable aléatoire  $\mathbf{X}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  avec un support  $s_n \subset \mathbb{R}^n$ . On considère  $m$  vecteurs  $\mathbf{f}_1 \in \mathbb{R}^{\nu_1}, \dots, \mathbf{f}_m \in \mathbb{R}^{\nu_m}$  donnés, où  $\nu_1, \dots, \nu_m$  sont  $m$  entiers supérieurs ou égaux à 1, tels que

$$E\{\mathbf{g}_j(\mathbf{X})\} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{f}_j \in \mathbb{R}^{\nu_j}, \quad \text{avec } j = 1, \dots, m, \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{g}_j(\mathbf{x})$  est une application mesurable connue de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^{\nu_j}$ , et où  $d\mathbf{x}$  est la mesure de Lebesgue  $dx_1 \dots dx_n$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Les  $m$  équations (3.2) définissent les informations disponibles introduites sous forme de contraintes dans le principe du MaxEnt pour construire la pdf inconnue  $p_{\mathbf{X}}$ , en supposant connues les  $m$  applications  $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$  avec les vecteurs associés  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$ .

On définit  $\mathcal{C}_{\text{ad}}$ , l'espace admissible des fonctions  $\mathbf{x} \mapsto p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  intégrables définies de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^+$ , de support (supposé connu)  $s_n \subset \mathbb{R}^n$ , vérifiant les  $m + 1$  équations (3.2) définissant l'information utilisable et la condition de normalisation définie par

$$\int_{s_n} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1. \quad (3.3)$$

Le principe du MaxEnt consiste à choisir la pdf  $p_{\mathbf{X}}$  qui maximise l'entropie  $S(p_{\mathbf{X}})$  définie en (3.1) sous les  $m + 1$  contraintes définies en équations (3.2) et (3.3) qui traduisent l'information disponible sur  $\mathbf{X}$  :

$$\max_{p_{\mathbf{X}} \in \mathcal{C}_{\text{ad}}} S(p_{\mathbf{X}}). \quad (3.4)$$

Le problème d'optimisation défini en équation (3.4) est résolu en introduisant  $m + 1$  multiplicateurs de Lagrange, avec  $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$  le multiplicateur de Lagrange associé à la condition de normalisation (3.3), et  $\boldsymbol{\lambda}_1 \in \mathbb{R}^{\nu_1}, \dots, \boldsymbol{\lambda}_m \in \mathbb{R}^{\nu_m}$  les  $m$  multiplicateurs de Lagrange associés aux  $m$  contraintes (3.2). Le Lagrangien  $\mathcal{L}(p_{\mathbf{X}})$  associé au problème d'optimisation (3.4) s'écrit

$$\mathcal{L}(p_{\mathbf{X}}; \boldsymbol{\lambda}) = S(p_{\mathbf{X}}) - (\lambda_0 - 1) \left( \int_{\mathbb{R}^n} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - 1 \right) - \sum_{j=1}^m \boldsymbol{\lambda}_j \cdot \left[ \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \mathbf{f}_j \right], \quad (3.5)$$

où  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_m) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{\nu_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{\nu_m}$  est le vecteur des  $m + 1$  multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes sur la pdf  $p_{\mathbf{X}}$ . La solution  $p_{\mathbf{X}}$  du problème d'optimisation (3.4) doit alors vérifier la condition de stationnarité  $\partial_{p_{\mathbf{X}}} \mathcal{L}(p_{\mathbf{X}}; \boldsymbol{\lambda}) = 0$  et s'écrit finalement

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \mathbb{1}_{s_n}(\mathbf{x}) \exp \left( -\lambda_0 - \sum_{j=1}^m \boldsymbol{\lambda}_j \cdot \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \right) = \mathbb{1}_{s_n}(\mathbf{x}) k_0 \exp \left( -\sum_{j=1}^m \boldsymbol{\lambda}_j \cdot \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \right), \quad (3.6)$$

où  $\mathbf{x} \mapsto \mathbb{1}_{s_n}(\mathbf{x})$  est la fonction indicatrice du support  $s_n$  et  $k_0 > 0$  est la constante de normalisation définie par

$$k_0 = \exp(-\lambda_0) = \left( \int_{s_n} \exp \left( - \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} \right)^{-1}. \quad (3.7)$$

Les  $m$  multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  constituent l'ensemble des paramètres de la loi de probabilité de  $\mathbf{X}$  représentée par sa pdf  $p_{\mathbf{X}}$ .

## 1.2 Modèle probabiliste du taux de restitution d'énergie critique

Le taux de restitution d'énergie critique  $G_c$  est modélisé par une variable aléatoire  $G_c$  du second ordre, i.e. telle que  $E\{G_c^2\} < +\infty$ , dont on cherche à construire la loi de probabilité inconnue  $P_{G_c}$  à partir des informations suivantes :

1. la variable aléatoire  $G_c$  est presque sûrement positive, i.e. telle que  $G_c > 0$  presque sûrement, ce qui définit le support  $\mathbb{R}^+$  de sa pdf  $p_{G_c}$  ;
2. sa moyenne  $E\{G_c\} = \underline{G}_c < +\infty$  est une donnée ;
3. la moyenne  $E\{\ln(G_c)\} = q$  avec  $|q| < +\infty$  ;
4. la pdf  $p_{G_c}$  satisfait la condition de normalisation :

$$\int_{\mathbb{R}^+} p_{G_c}(G_c) dG_c = 1. \quad (3.8)$$

La condition 3. correspond à une contrainte de répulsion en la valeur  $G_c = 0$  et permet de montrer que la variable  $G_c$  et son inverse  $G_c^{-1}$  sont des variables aléatoires du second ordre, i.e. telles que  $E\{G_c^2\} < +\infty$  et  $E\{(G_c^{-1})^2\} < +\infty$ , pour assurer l'existence d'un champ de phase aléatoire du second ordre  $\Phi$  solution du problème aux limites stochastique d'endommagement sous-jacent. Ces conditions permettent d'établir que la variable aléatoire  $G_c$ , construite par **MaxEnt**, est à valeurs positives (dans  $\mathbb{R}^+$ ) et distribuée suivant une loi Gamma  $\mathcal{G}(a, b)$  de paramètres de forme  $a$  et d'échelle  $b$ , dont la pdf  $p_{G_c}$  est définie par

$$p_{G_c}(G_c; a, b) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(G_c) \frac{G_c^{a-1}}{b^a \Gamma(a)} \exp \left( \frac{-G_c}{b} \right), \quad (3.9)$$

où  $G_c \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(G_c)$  est la fonction indicatrice du support  $\mathbb{R}^+$ , et  $\Gamma(a)$  est la fonction gamma définie pour  $a > 0$  comme

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt. \quad (3.10)$$

Les paramètres  $a > 2$  et  $b > 0$  peuvent être estimés à partir de réalisations indépendantes de la variable  $G_c$  en utilisant la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance (**MLE**) présentée en section 2.1. L'espérance mathématique  $E\{G_c\} = m_{G_c}$  et le coefficient de dispersion  $\delta_{G_c}$  de  $G_c$  sont respectivement donnés par

$$E\{G_c\} = m_{G_c} = ab > 0 \quad \text{et} \quad \delta_{G_c} = \frac{1}{\sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707. \quad (3.11)$$

La pdf  $p_{G_c}$  définie en (3.9) peut être reparamétrisée par la moyenne  $m_{G_c}$  et le coefficient de variation  $\delta_{G_c}$  sous la forme

$$p_{G_c}(G_c; m_{G_c}, \delta_{G_c}) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(G_c) \frac{(\delta_{G_c}^{-2})^{\delta_{G_c}^{-2}}}{\Gamma(\delta_{G_c}^{-2}) m_{G_c}} \left( \frac{G_c}{m_{G_c}} \right)^{(\delta_{G_c}^{-2})-1} \exp\left( \frac{-G_c}{m_{G_c}} \delta_{G_c}^{-2} \right) \quad (3.12)$$

Il convient de noter que la contrainte de répulsion 3. et la condition de borne inférieure  $a > 2$  (ou de manière équivalente la condition de borne supérieure  $\delta_{G_c} < 1/\sqrt{2}$  selon la paramétrisation choisie) assurent l'existence du moment d'ordre deux de l'inverse  $G_c^{-1}$  du taux de restitution d'énergie critique aléatoire  $G_c$ , i.e.  $E\{(G_c^{-1})^2\} < +\infty$ .

### 1.3 Modèle probabiliste du tenseur d'élasticité

Cette section détaille la construction d'un modèle probabiliste du tenseur d'élasticité linéaire  $\mathbb{C}_0$  appartenant à la classe de symétrie isotrope transverse proposé dans [Guilleminot et Soize 2013, Guilleminot et Soize 2012], qui intègre et caractérise la dépendance statistique entre les composantes aléatoires de  $\mathbb{C}_0$ .

Pour un matériau élastique linéaire isotrope transverse, le tenseur d'élasticité non endommagé  $\mathbb{C}_0$  peut être représenté en 3D par la matrice d'élasticité  $[\mathbb{C}_0]$ . D'après la formulation introduite avec la notation de Voigt en section 13.3.iv de [Torquato 2002], la matrice d'élasticité  $[\mathbb{C}_0]$ , de dimension  $6 \times 6$ , peut être représentée avec la notation de Kelvin-Mandel comme

$$[\mathbb{C}_0] = \begin{bmatrix} k_T + G_T & 2k_T \nu_L & k_T - G_T & 0 & 0 & 0 \\ 2k_T \nu_L & E_L + 4\nu_L^2 k_T & 2k_T \nu_L & 0 & 0 & 0 \\ k_T - G_T & 2k_T \nu_L & k_T + G_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_L \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Dans l'équation (3.13),  $k_T$  est le module de compressibilité hydrostatique,  $G_T$  est le module de cisaillement transverse dans le plan d'isotropie  $(T, R)$ , respectivement définis comme :

$$k_T = \frac{E_L E_T}{2(1 - \nu_T) E_L - 4\nu_L^2 E_T} \quad \text{et} \quad G_T = \frac{E_T}{2(1 + \nu_T)}, \quad (3.14)$$

où  $\nu_T$  est le coefficient de Poisson transverse.

En utilisant la représentation algébrique introduite dans [Walpole 1984], on peut montrer que le tenseur d'élasticité d'ordre quatre  $\mathbb{C}_0$  peut être décomposé sous la forme

$$\mathbb{C}_0 = c_1 \mathbb{E}_1 + c_2 \mathbb{E}_2 + c_3 \mathbb{E}_3 + c_4 \mathbb{E}_4 + c_5 \mathbb{E}_5, \quad (3.15)$$

où  $\{c_1, \dots, c_5\}$  est un ensemble de coefficients associés aux 5 paramètres élastiques  $(E_L, E_T, G_L, \nu_L, \nu_T)$ , et où  $\{\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_5\}$  est la base tensorielle d'ordre quatre de

Walpole [Walpole 1984], tels que :

$$c_1 = E_L + 4 \nu_L^2 k_T \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_1 = \mathbf{P} \otimes \mathbf{P}, \quad (3.16a)$$

$$c_2 = 2 k_T \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q}), \quad (3.16b)$$

$$c_3 = 2 \sqrt{2} k_T \nu_L \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{P}), \quad (3.16c)$$

$$c_4 = 2 G_T \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_4 = \mathbf{Q} \odot \mathbf{Q} - \mathbb{E}_2, \quad (3.16d)$$

$$c_5 = 2 G_L \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_5 = \mathbb{I} - \mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2 - \mathbb{E}_4, \quad (3.16e)$$

où  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  sont deux tenseurs symétriques d'ordre deux définis par

$$\mathbf{P} = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \quad \text{et} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P}. \quad (3.17)$$

Dans l'équation (3.17),  $\mathbf{l} = (0, 1, 0)^T$  représente l'axe vertical  $y$  dirigé suivant la direction longitudinale  $L$  des fibres du bois comme illustré sur la Figure 2.1b. D'après le système d'équations (3.16), les paramètres  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $G_L$ ,  $G_T$ ,  $\nu_L$ ,  $\nu_T$  et  $k_T$  peuvent être déduits de  $(c_1, \dots, c_5)$  à l'aide des relations suivantes [Chen 2019] :

$$\begin{aligned} k_T &= \frac{c_2}{2}, \quad \nu_L = \frac{c_3}{2\sqrt{2}k_T}, \quad E_L = c_1 - 4\nu_L^2 k_T, \quad G_T = \frac{c_4}{2}, \\ G_L &= \frac{c_5}{2}, \quad E_T = \frac{4k_T E_L G_T}{G_T E_L + 4k_T \nu_L^2 G_T + k_T E_L} \quad \text{et} \quad \nu_T = \frac{E_T}{2G_T} - 1. \end{aligned} \quad (3.18)$$

À l'instar de la décomposition (3.15) du tenseur d'élasticité  $\mathbb{C}_0$ , la matrice d'élasticité  $[\mathbb{C}_0]$  peut être décomposée en adoptant la notation de Kelvin-Mandel comme

$$[\mathbb{C}_0] = c_1 [\mathbb{E}_1] + c_2 [\mathbb{E}_2] + c_3 [\mathbb{E}_3] + c_4 [\mathbb{E}_4] + c_5 [\mathbb{E}_5], \quad (3.19)$$

où  $\{[\mathbb{E}_1], \dots, [\mathbb{E}_5]\}$  est la représentation matricielle de la base tensorielle d'ordre quatre de Walpole. La définition des représentations matricielles  $[\mathbb{E}_1], \dots, [\mathbb{E}_5]$  des tenseurs d'ordre quatre  $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_5$  de la base de Walpole est donnée dans [Guilleminot et Soize 2012, Annexe A] pour un axe de symétrie de rotation  $\mathbf{l} = (0, 0, 1)^T$ . On pourra également se référer à [Walpole 1984, Section II.B], [Kunin 1981], [Guilleminot et Soize 2013, Section 3] et [Staber et Guilleminot 2017, Section 3 et Annexe C] pour la définition de la base tensorielle des tenseurs d'élasticité d'ordre quatre pour différentes classes de symétrie élastique. L'implémentation numérique de cette décomposition est consultable dans la fonction `Elas_IsotTrans.Walpole_Decomposition()` du script `EasyFEA/materials/_elastic.py`.

D'après le modèle probabiliste présenté dans [Guilleminot et Soize 2013, Guilleminot et Soize 2012], la matrice d'élasticité aléatoire  $[\mathbf{C}]$  peut être construite à partir du vecteur aléatoire  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_5)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^5$ , telle que

$$[\mathbf{C}] = C_1 [\mathbb{E}_1] + C_2 [\mathbb{E}_2] + C_3 [\mathbb{E}_3] + C_4 [\mathbb{E}_4] + C_5 [\mathbb{E}_5]. \quad (3.20)$$

La loi de probabilité inconnue  $P_{\mathbf{C}}$  du vecteur aléatoire  $\mathbf{C}$  est construite en utilisant le principe du `MaxEnt` avec les informations suivantes :

1. la matrice d'élasticité aléatoire  $[\mathbf{C}]$  est presque sûrement définie positive, ce qui implique que les 5 composantes du vecteur aléatoire  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_5)$  doivent respecter presque sûrement les inégalités suivantes [Guilleminot et Soize 2012] :

$$C_1 + C_2 > 0, \quad (3.21a)$$

$$C_1 C_2 - C_3^2 > 0, \quad (3.21b)$$

$$C_4 > 0, \quad (3.21c)$$

$$C_5 > 0. \quad (3.21d)$$

Pour respecter ces inégalités, le support  $\mathcal{S}$  de la pdf conjointe  $p_{\mathbf{C}}$  du vecteur aléatoire  $\mathbf{C}$  doit être défini comme

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{123} \times \mathcal{S}_4 \times \mathcal{S}_5 \subset \mathbb{R}^5, \quad (3.22a)$$

où  $\mathcal{S}_{123}$ ,  $\mathcal{S}_4$  et  $\mathcal{S}_5$  désignent les supports du vecteur aléatoire  $\mathbf{C}_{123} = (C_1, C_2, C_3)$  et des variables aléatoires  $C_4$  et  $C_5$ , définis respectivement par

$$\mathcal{S}_{123} = \{(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}; c_1 c_2 - c_3^2 > 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_5 = \mathbb{R}^+. \quad (3.22b)$$

2. la valeur moyenne  $E\{\mathbf{C}\}$  du vecteur aléatoire  $\mathbf{C}$ , notée  $\underline{\mathbf{c}} = (\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_5)$ , est une donnée :

$$E\{\mathbf{C}\} = \underline{\mathbf{c}}, \quad (3.23)$$

où le vecteur moyen  $\underline{\mathbf{c}}$  peut être estimé à partir du système d'équations (3.16), des propriétés élastiques  $\mathbf{p} = (E_L, E_T, G_L, \nu_L)$  identifiées en section 3.2 du chapitre 2 (voir Figure 2.21) et de la valeur  $\nu_T = 0.44$  [Chevalier et al. 2022] pour le bois d'épicéa ;

3. la matrice d'élasticité aléatoire  $[\mathbf{C}]$  et son inverse  $[\mathbf{C}]^{-1}$  sont des matrices aléatoires du second ordre, i.e.  $E\{\|[\mathbf{C}]\|_F^2\} < +\infty$  et  $E\{\|[\mathbf{C}]^{-1}\|_F^2\} < +\infty$ , ce qui est assuré par la condition de répulsion suivante :

$$E\{\ln(\det([\mathbf{C}]))\} = \nu_{\mathbf{C}} \quad \text{avec} \quad |\nu_{\mathbf{C}}| < +\infty; \quad (3.24)$$

4. la pdf  $p_{\mathbf{C}}$  satisfait la condition de normalisation :

$$\int_{\mathcal{S}} p_{\mathbf{C}}(\mathbf{c}) \, d\mathbf{c} = 1, \quad (3.25)$$

où  $d\mathbf{c} = dc_1 \dots dc_5$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^5$ .

La condition de répulsion (3.24) et la propriété 1. de définie positivité de  $[\mathbf{C}]$  assurent l'existence d'un champ de déplacement aléatoire du second ordre  $\mathbf{U}$  solution du problème aux limites stochastique d'élasticité sous-jacent.

En appliquant le principe du MaxEnt avec ces conditions, on peut montrer que la pdf conjointe  $p_{\mathbf{C}}$  du vecteur aléatoire  $\mathbf{C}$  s'écrit sous la forme [Soize 2017]

$$p_{\mathbf{C}}(\mathbf{c}) = \mathbb{1}_{\mathcal{S}}(\mathbf{c}) k_0 \exp(-\lambda \cdot \mathbf{g}(\mathbf{c})), \quad (3.26)$$

où  $\mathbf{c} \mapsto \mathbb{1}_{\mathcal{S}}(\mathbf{c})$  est la fonction indicatrice du support  $\mathcal{S}$  de  $p_{\mathbf{C}}$ ,  $k_0 = \exp(-\lambda_0)$  est la constante de normalisation exprimée en fonction du multiplicateur de Lagrange  $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$  associé à la condition de normalisation (3.25), et  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_5) \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{\lambda}}$  est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes (3.23) et (3.24). On note  $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathcal{A}_{\lambda} \times \mathcal{A}_{(\lambda_1, \dots, \lambda_5)}$  l'espace admissible des multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$  tels que  $\mathcal{A}_{\lambda} \subset \mathbb{R}$  et  $\mathcal{A}_{(\lambda_1, \dots, \lambda_5)} \subset \mathbb{R}^5$ . Enfin,  $\mathbf{c} \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{c})$  est une application définie de  $\mathbb{R} \times \mathcal{S}$  dans  $\mathbb{R}^6$ , telle que  $\mathbf{g}(\mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \varphi(\mathbf{c}))$ , avec  $\mathbf{c} \mapsto \varphi(\mathbf{c})$  la fonction définie de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbb{R}$

$$\varphi(\mathbf{c}) = \ln(\det([\mathbb{C}_0(\mathbf{c})])) = \ln((c_1 c_2 - c_3^2) c_4^2 c_5^2) \quad (3.27a)$$

$$= \ln(c_1 c_2 - c_3^2) + 2 \ln(c_4) + 2 \ln(c_5). \quad (3.27b)$$

En exploitant la séparabilité de la fonction  $\varphi$  définie en (3.27), la pdf conjointe  $p_{\mathbf{C}}$  du vecteur aléatoire  $\mathbf{C}$  s'exprime finalement sous la forme suivante [Guilleminot et Soize 2013, Guilleminot et Soize 2012] :

$$p_{\mathbf{C}}(\mathbf{c}) = \mathbb{1}_{\mathcal{S}}(\mathbf{c}) k_0 \exp(-\lambda \varphi(\mathbf{c})) \prod_{i=1}^5 \exp(-\lambda_i c_i), \quad (3.28a)$$

$$= p_{(C_1, C_2, C_3)}(c_1, c_2, c_3) \times p_{C_4}(c_4) \times p_{C_5}(c_5). \quad (3.28b)$$

En résumé, les 5 composantes  $C_1, \dots, C_5$  du vecteur aléatoire  $\mathbf{C}$  caractérisant la matrice d'élasticité aléatoire  $[\mathbf{C}]$  définie en (3.20) sont telles que :

- $C_1, C_2$  et  $C_3$  sont des variables aléatoires statistiquement dépendantes et conjointement distribuées suivant la pdf conjointe  $(c_1, c_2, c_3) \mapsto p_{(C_1, C_2, C_3)}(c_1, c_2, c_3)$  définie par

$$p_{(C_1, C_2, C_3)}(c_1, c_2, c_3) = \mathbb{1}_{\mathcal{S}_{123}}(c_1, c_2, c_3) k_{123} (c_1 c_2 - c_3^2)^{-\lambda} \exp\left(-\sum_{i=1}^3 \lambda_i c_i\right), \quad (3.29)$$

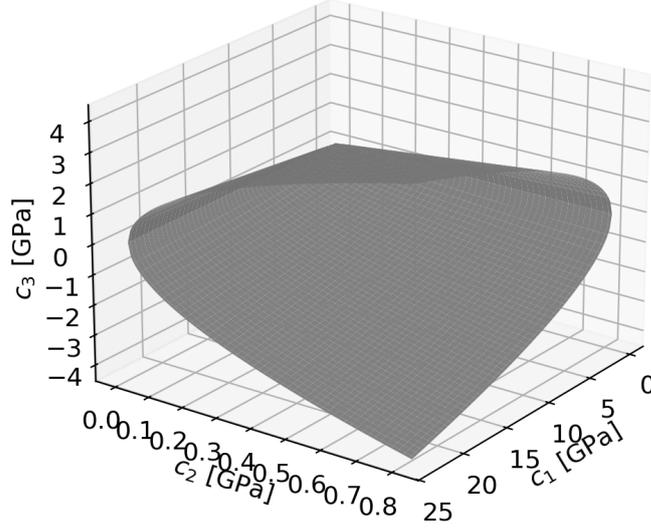
où  $\mathcal{S}_{123}$  est le support de forme conique défini en (3.22b), comme illustré sur la Figure 3.1 et  $k_{123} > 0$  est la constante de normalisation définie en équation (3.47) de la section 2.2 qui dépend implicitement des paramètres  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$ . Dans l'équation (3.29),  $\lambda < 1/2$  est un paramètre de forme,  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$  et  $\lambda_3 \in \mathbb{R}$  sont des paramètres d'intensité tels que  $2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} - \lambda_3 > 0$  afin d'assurer l'intégrabilité de la pdf conjointe  $p_{(C_1, C_2, C_3)}$  sur son support  $\mathcal{S}_{123}$  ;

- $C_4$  et  $C_5$  sont des variables aléatoires à valeurs positives (dans  $\mathbb{R}^+$ ) statistiquement indépendantes de toutes les autres composantes aléatoires et distribuées suivant des lois Gamma, dont les pdfs  $c_4 \mapsto p_{C_4}(c_4)$  et  $c_5 \mapsto p_{C_5}(c_5)$  sont respectivement définies par

$$p_{C_4}(c_4) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(c_4) k_4 c_4^{-2\lambda} \exp(-\lambda_4 c_4), \quad (3.30)$$

$$p_{C_5}(c_5) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(c_5) k_5 c_5^{-2\lambda} \exp(-\lambda_5 c_5), \quad (3.31)$$

où  $\lambda < 1/2$  est un paramètre de forme qui contrôle la dispersion (i.e. le niveau des fluctuations statistiques) de  $C_4$  et  $C_5$ , et  $\lambda_4 > 0$  et  $\lambda_5 > 0$  sont



**FIGURE 3.1** – Graphe de la surface quadratique d'équation  $c_1 c_2 - c_3^2 = 0$  délimitant le support  $\mathcal{S}_{123} \subset \mathbb{R}^3$  de la pdf conjointe  $p_{\mathbf{C}_{123}}$  du vecteur aléatoire  $\mathbf{C}_{123} = (C_1, C_2, C_3)$ .

des paramètres d'intensité. Les constantes de normalisation  $k_4 > 0$  et  $k_5 > 0$  s'écrivent respectivement

$$k_4 = \frac{1}{b_4^{a_4} \Gamma(a_4)} = \frac{\lambda_4^{1-2\lambda}}{\Gamma(1-2\lambda)} \quad \text{et} \quad k_5 = \frac{1}{b_5^{a_5} \Gamma(a_5)} = \frac{\lambda_5^{1-2\lambda}}{\Gamma(1-2\lambda)}, \quad (3.32)$$

où  $a_4 = a_5 = 1 - 2\lambda > 0$  sont les paramètres de forme et  $b_4 = 1/\lambda_4 > 0$  et  $b_5 = 1/\lambda_5 > 0$  sont les paramètres d'échelle. Les espérances mathématiques  $E\{C_4\} = m_{C_4}$  et  $E\{C_5\} = m_{C_5}$  et les coefficients de dispersions (identiques)  $\delta_{C_4}$  et  $\delta_{C_5}$  des variables aléatoires  $C_4$  et  $C_5$  sont respectivement donnés par

$$E\{C_4\} = \underline{c}_4 = a_4 b_4 = \frac{1-2\lambda}{\lambda_4} > 0, \quad E\{C_5\} = \underline{c}_5 = a_5 b_5 = \frac{1-2\lambda}{\lambda_5} > 0 \quad \text{et} \\ \delta_{C_4} = \delta_{C_5} = \frac{1}{\sqrt{a_4}} = \frac{1}{\sqrt{a_5}} = \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}} > 0. \quad (3.33)$$

Les composantes aléatoires  $C_4$  et  $C_5$  présentent exactement le même niveau de fluctuations statistiques ( $\delta_{C_4} = \delta_{C_5}$ ) qui est contrôlé par le paramètre  $\lambda < 1/2$ .

L'identification du vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$  est réalisée en utilisant la méthode des moindres carrés (LS) en section 2.2.

## 2 Identification des paramètres des modèles probabilistes

L'objectif de cette section est d'identifier les paramètres des modèles probabilistes associés au taux de restitution d'énergie critique aléatoire  $G_c$ , présenté en section 1.2, et à la matrice d'élasticité aléatoire  $[C]$ , introduite en section 1.3. Dans la littérature, plusieurs méthodes sont utilisées pour estimer les paramètres (ou hyper-paramètres) des modèles probabilistes [Soize 2017], parmi lesquelles figurent notamment : (i) la méthode des moments, (ii) la méthode des moindres carrés, et (iii) la méthode du maximum de vraisemblance.

La méthode d'estimation du maximum de vraisemblance, ou **MLE** pour *Maximum Likelihood Estimation* en anglais, est utilisée en section 2.1 pour identifier les paramètres de la pdf  $p_{G_c}$  définie en (3.9) de la variable aléatoire  $G_c$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ .

La méthode des moindres carrés, ou **LS** pour *Least Squares* en anglais, est couplée à une méthode de Monte-Carlo par Chaîne de Markov (**MCMC**) en section 2.2 pour identifier les paramètres de la pdf conjointe  $p_C$  définie en (3.28) du vecteur aléatoire  $C = (C_1, \dots, C_5)$  à valeurs dans le sous-ensemble non borné  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{123} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  de  $\mathbb{R}^5$  défini en (3.22a).

### 2.1 Paramètres du modèle probabiliste pour le taux de restitution d'énergie critique

Dans cette section, on utilise la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance (**MLE**) pour déterminer le vecteur des paramètres  $(a, b)$  de la pdf  $p_{G_c}(G_c; a, b)$  définie en (3.9) de la variable aléatoire  $G_c$ , modélisant les fluctuations statistiques observées expérimentalement sur le taux de restitution d'énergie critique  $G_c$  en section 3.4 du chapitre 2 (voir Figure 2.31).

On considère les  $n = 18$  valeurs moyennes du taux de restitution d'énergie critique  $G_c$  identifiées sur la Figure 2.31 comme un ensemble  $\mathcal{G}_c = \{G_c^{(i)}, i = 1, \dots, n\}$  de  $n$  réalisations indépendantes de la variable aléatoire  $G_c$ , qui suit une loi Gamma  $\mathcal{G}(a, b)$  dépendant de deux paramètres inconnus  $a > 2$  et  $b > 0$ , et dont la pdf  $p_{G_c}$  est définie par l'équation (3.9).

Afin d'identifier le vecteur des deux paramètres  $(a, b)$  du modèle probabiliste de  $G_c$ , on introduit la vraisemblance (ou fonction de vraisemblance)  $L(\mathcal{G}_c)$  des données  $\mathcal{G}_c$  sur la variable aléatoire  $G_c$  qui s'écrit

$$L(\mathcal{G}_c; a, b) = \prod_{i=1}^n p_{G_c}(G_c^{(i)}; a, b). \quad (3.34)$$

La log-vraisemblance  $\ln(L(\mathcal{G}_c))$  de la variable aléatoire  $G_c$  est définie par

$$\ln(L(\mathcal{G}_c; a, b)) = \sum_{i=1}^n \ln(p_{G_c}(G_c^{(i)}; a, b)), \quad (3.35a)$$

$$= -n a \ln(b) - n \ln(\Gamma(a)) + (a - 1) \sum_{i=1}^n \ln(G_c^{(i)}) - \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n G_c^{(i)}. \quad (3.35b)$$

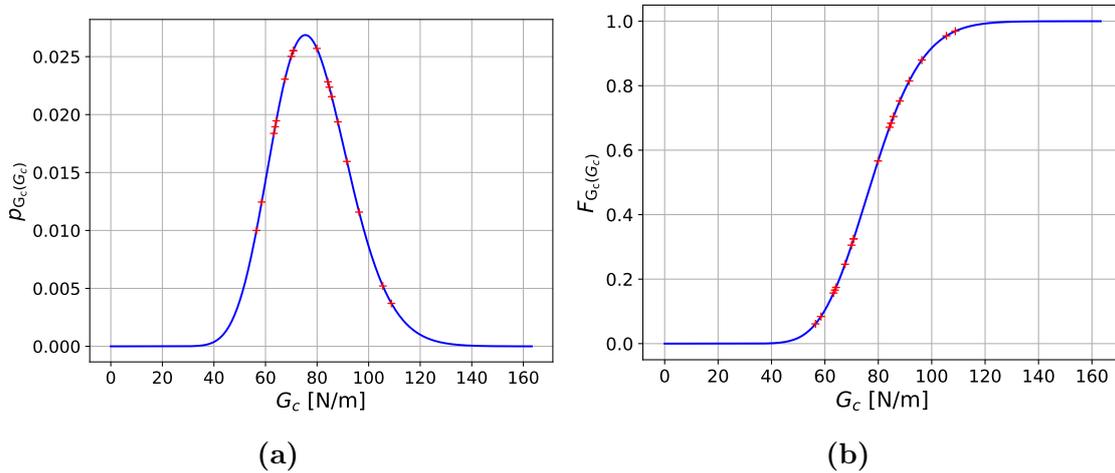
Avec la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance (MLE), les valeurs optimales des paramètres  $(a, b)$  sont obtenues en maximisant la vraisemblance  $L(\mathcal{G}_c; a, b)$  ou de manière équivalente la log-vraisemblance  $\ln(L(\mathcal{G}_c; a, b))$  :

$$\max_{(a,b) \in ]2, +\infty[ \times \mathbb{R}^+} L(\mathcal{G}_c; a, b) \quad \text{ou} \quad \max_{(a,b) \in ]2, +\infty[ \times \mathbb{R}^+} \ln(L(\mathcal{G}_c; a, b)). \quad (3.36)$$

En pratique, les paramètres  $a$  et  $b$  sont estimés à partir des  $n = 18$  réalisations indépendantes de  $G_c$  avec la fonction `fit()` implémentée dans la bibliothèque Python `scipy.stats.gamma` [Virtanen et al. 2020], en fixant le paramètre de localisation (ou décalage) `floc` à 0, ce qui conduit aux valeurs optimales suivantes :

$$a = 26.97 \quad \text{et} \quad b = 2.90 \text{ N/m}. \quad (3.37)$$

La pdf  $p_{G_c}$  et la fonction de répartition (ou cdf pour *cumulative distribution function* en anglais)  $F_{G_c}$  de la variable aléatoire  $G_c$  sont représentées sur la Figure 3.2, où les croix rouges représentent les données expérimentales identifiées en section 3.4 du chapitre 2. La valeur moyenne  $E\{G_c\} = m_{G_c}$  et le coefficient de dispersion



**FIGURE 3.2** – (a) pdf  $p_{G_c}$  et (b) cdf  $F_{G_c}$  de la variable aléatoire  $G_c$  qui suit une loi Gamma  $\mathcal{G}(a, b)$  paramétrée par les valeurs optimales de  $a$  et  $b$  définies en (3.37).

$\delta_{G_c}$  définis en (3.11) valent respectivement

$$E\{G_c\} = m_{G_c} = ab = 78.34 \text{ N/m} \quad \text{et} \quad \delta_{G_c} = \frac{1}{\sqrt{a}} = 19.26\%. \quad (3.38)$$

## 2.2 Paramètres du modèle probabiliste pour le tenseur d'élasticité

Dans cette section, on utilise la méthode des moindres carrés (LS) afin d'estimer le vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$  de la pdf conjointe  $p_{\mathbf{C}}(\mathbf{c}; \boldsymbol{\lambda})$  définie en (3.28) du vecteur aléatoire  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_5)$ . Le vecteur aléatoire  $\mathbf{C}$  modélise les fluctuations statistiques observées expérimentalement sur les propriétés élastiques  $\mathbf{p} = (E_L, E_T, G_L, \nu_L)$  en section 3.2 du chapitre 2 (voir Figure 2.21).

Les 14 valeurs moyennes<sup>1</sup> des propriétés élastiques  $\mathbf{p} = (E_L, E_T, G_L, \nu_L)$  identifiées sur la Figure 2.21 sont post-traitées pour déterminer les valeurs correspondantes des coefficients  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_5)$  en utilisant le système d'équations (3.16) et en prenant la valeur  $\nu_T = 0.44$  [Chevalier et al. 2022, Tableau 1] pour le bois d'épicéa. On considère les  $n = 14$  valeurs obtenues pour le vecteur des coefficients  $\mathbf{c}$  comme un ensemble  $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}^{(i)}, i = 1, \dots, n\}$  de  $n$  réalisations indépendantes du vecteur aléatoire  $\mathbf{C}$ .

Afin d'identifier le vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\lambda}$  du modèle probabiliste de  $\mathbf{C}$ , on introduit le vecteur cible  $\mathbf{f} = (\mathbf{m}_{\mathbf{C}}, \nu_{\mathbf{C}})$ , où  $\mathbf{m}_{\mathbf{C}} = E\{\mathbf{C}\} = \underline{\mathbf{c}} = (c_1, \dots, c_5)$  est la moyenne empirique du vecteur aléatoire  $\mathbf{C}$  définie en (3.23) et  $\nu_{\mathbf{C}} = E\{\ln(\det([\mathbf{C}]))\} = E\{\varphi(\mathbf{C})\}$  est la moyenne empirique de la variable aléatoire  $\varphi(\mathbf{C}) = \ln((C_1 C_2 - C_3^2) C_4^2 C_5^2)$  définie en (3.27), qui sont estimées à partir des données  $\mathcal{C}$  et conduisent à

$$\mathbf{f} = (\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3, \underline{c}_4, \underline{c}_5, \nu_{\mathbf{C}}) = (13.96, 0.38, 0.17, 0.15, 1.18, -1.94) \\ \text{en } ([\text{GPa}], [\text{GPa}], [\text{GPa}], [\text{GPa}], [\text{GPa}], [-]). \quad (3.39)$$

On définit ensuite le vecteur des contraintes  $\hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\lambda})$  en fonction du vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\lambda}$  comme

$$\hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\lambda}) = (\hat{\mathbf{m}}_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\lambda}), \hat{\nu}_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\lambda})) = (\hat{m}_{C_1}(\boldsymbol{\lambda}), \dots, \hat{m}_{C_5}(\boldsymbol{\lambda}), \hat{\nu}_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\lambda})), \quad (3.40)$$

où la valeur moyenne  $\hat{\mathbf{m}}_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\lambda})$  de  $\mathbf{C}$  et celle  $\hat{\nu}_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\lambda})$  de  $\varphi(\mathbf{C})$  peuvent être estimées en utilisant un générateur aléatoire de réalisations indépendantes de  $\mathbf{C}$  paramétré par  $\boldsymbol{\lambda}$  et une méthode d'estimation statistique. Avec la méthode des moindres carrés (LS), les valeurs optimales des multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$  sont obtenues en résolvant le problème d'optimisation (minimisation au sens des moindres carrés) suivant :

$$\min_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{\lambda}}} \mathcal{J}_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}), \quad \text{avec} \quad \mathcal{J}_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\|\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\lambda})\|^2}{\|\mathbf{f}\|^2}. \quad (3.41)$$

Comme dans [Guilleminot et Soize 2012], l'espace admissible  $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathcal{A}_{\lambda} \times \mathcal{A}_{(\lambda_1, \dots, \lambda_5)}$  pour les multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$  est défini comme

$$\mathcal{A}_{\lambda} \in ]-\infty, 1/2[, \quad (3.42a)$$

$$\mathcal{A}_{(\lambda_1, \dots, \lambda_5)} = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_5) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+; \quad 2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} - \lambda_3 > 0 \right\}, \quad (3.42b)$$

1. Il s'agit des 14 essais retenus où les dispersions observées sur les propriétés élastiques  $E_L$ ,  $E_T$  et  $G_L$  sont inférieures ou égales à 50%.

afin d'assurer l'intégrabilité de la pdf conjointe  $p_{\mathbf{C}_{123}}$  sur son support  $\mathcal{S}$  défini en équation (3.22a). La pdf conjointe  $p_{\mathbf{C}}$  définie en équation (3.28) du vecteur aléatoire  $\mathbf{C}$  peut être réécrite sous la forme

$$p_{\mathbf{C}}(\mathbf{c}; \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{1}_{\mathcal{S}}(\mathbf{c}) k_0 \exp(-\Phi(\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda})), \quad (3.43)$$

avec

$$\Phi(\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^5 \lambda_i c_i + \lambda \varphi(\mathbf{c}) \quad (3.44a)$$

$$= \sum_{i=1}^5 \lambda_i c_i + \lambda \ln(c_1 c_2 - c_3^2) + 2 \lambda \ln(c_4) + 2 \lambda \ln(c_5). \quad (3.44b)$$

Les valeurs initiales de  $(\lambda_1, \dots, \lambda_5)$  sont choisies comme dans [Chen 2019] telles que la valeur modale de la pdf  $p_{\mathbf{C}}$  coïncide avec le vecteur moyen  $\underline{\mathbf{c}}$  :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{c}}(\underline{\mathbf{c}}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}, \quad (3.45)$$

ce qui conduit aux valeurs initiales suivantes :

$$\lambda_1 = \frac{-\lambda \underline{c}_2}{\underline{c}_1 \underline{c}_2 - \underline{c}_3^2}, \quad \lambda_2 = \frac{-\lambda \underline{c}_1}{\underline{c}_1 \underline{c}_2 - \underline{c}_3^2}, \quad \lambda_3 = \frac{2 \lambda \underline{c}_3}{\underline{c}_1 \underline{c}_2 - \underline{c}_3^2}, \quad \lambda_4 = \frac{-2 \lambda}{\underline{c}_4}, \quad \lambda_5 = \frac{-2 \lambda}{\underline{c}_5}. \quad (3.46)$$

L'identification des multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{\lambda}}$  nécessite la génération de réalisations indépendantes du vecteur aléatoire  $\mathbf{C}_{123} = (C_1, C_2, C_3)$  à valeurs dans  $\mathcal{S}_{123} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ , dont la pdf conjointe  $p_{\mathbf{C}_{123}}$ , définie par l'équation (3.29), est caractérisée par un support complexe de forme conique  $\mathcal{S}_{123}$  défini en (3.22b) (voir Figure 3.1). Le calcul de la constante de normalisation  $k_{123}$ , définie par

$$k_{123}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left( \int_{\mathcal{S}_{123}} (c_1 c_2 - c_3^2)^{-\lambda} \exp \left( - \sum_{i=1}^3 \lambda_i c_i \right) dc_1 dc_2 dc_3 \right)^{-1}, \quad (3.47)$$

s'avère complexe à effectuer, aussi bien analytiquement que numériquement. C'est la raison pour laquelle une méthode de Monte-Carlo par Chaînes de Markov (MCMC) est utilisée par la suite. Cette classe de méthodes regroupe une famille d'algorithmes permettant de générer des réalisations indépendantes d'une variable aléatoire dont la pdf (dite cible) est connue à une constante de normalisation près (ici,  $k_{123}$ ). Il est important de noter que cette procédure est uniquement mise en œuvre dans ce travail pour générer des réalisations indépendantes des composantes aléatoires  $C_1, C_2$  et  $C_3$  statistiquement dépendantes, et non pour générer des réalisations indépendantes des composantes aléatoires  $C_4$  et  $C_5$  qui sont statistiquement indépendantes et distribuées suivant des lois Gamma  $\mathcal{G}(a_4, b_4)$  et  $\mathcal{G}(a_5, b_5)$ .

On utilise plus spécifiquement un algorithme de type Metropolis-Hastings (MH) [Metropolis et Ulam 1949, Metropolis et al. 1953, Hastings 1970, Soize 2017], qui

permet de générer un ensemble  $\mathcal{C}_{123} = \{\mathbf{c}_{123}^{(i)} = (c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, c_3^{(i)}), i = 1, \dots, N\}$  de  $N$  réalisations indépendantes du vecteur aléatoire  $\mathbf{C}_{123}$  suivant la distribution non normalisée  $p_{\mathbf{C}_{123}}$ <sup>2</sup>, définie telle que

$$p_{\mathbf{C}_{123}}(c_1, c_2, c_3) = \mathbb{1}_{\mathcal{S}_{123}}(c_1, c_2, c_3) (c_1 c_2 - c_3^2)^{-\lambda} \exp\left(-\sum_{i=1}^3 \lambda_i c_i\right). \quad (3.48)$$

À chaque itération  $i$  de l'algorithme **MH** (pour  $i = 1, \dots, N$ ), une nouvelle réalisation  $\mathbf{c}_{123}^{(i+1)}$  est proposée et générée suivant une distribution de transition (ou *proposal distribution* en anglais)  $q_{\mathbf{C}_{123}}$ . Cette distribution est choisie, comme dans [Chen 2019], sous la forme d'une loi normale multivariée (tridimensionnelle), dont la pdf  $q_{\mathbf{C}_{123}}$  s'exprime comme

$$q_{\mathbf{C}_{123}}(\mathbf{c}_{123}^{(i+1)}; \mathbf{c}_{123}^{(i)}, [\Sigma]) = \frac{1}{\sqrt{\det([\Sigma])} (2\pi)^3} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\mathbf{c}_{123}^{(i+1)} - \mathbf{c}_{123}^{(i)}\right)^T [\Sigma]^{-1} \left(\mathbf{c}_{123}^{(i+1)} - \mathbf{c}_{123}^{(i)}\right)\right\}, \quad (3.49)$$

où  $\mathbf{c}_{123}^{(i)} = (c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, c_3^{(i)}) = (13.96, 0.38, 0.17)$  est le vecteur moyen exprimé en ([GPa], [GPa], [GPa]) pour la première itération et  $[\Sigma]$  est la matrice de covariance de dimension  $3 \times 3$  définie telle que

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \frac{-c_1^2}{\lambda} & \frac{-c_3^2}{\lambda} & \frac{-c_1 c_3}{\lambda} \\ & \frac{-c_2^2}{\lambda} & \frac{-c_2 c_3}{\lambda} \\ \text{syms} & & \frac{-(c_3^2 + c_1 c_2)}{2\lambda} \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

dont les composantes  $[\Sigma]_{ij}$ , avec  $1 \leq i, j \leq 3$ , sont définies telles que

$$[\Sigma]_{ij}^{-1} = \frac{\partial^2 \Phi_{123}}{\partial c_i \partial c_j}(c_1, c_2, c_3), \quad \text{avec} \quad \Phi_{123}(c_1, c_2, c_3) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i c_i + \lambda \ln(c_1 c_2 - c_3^2). \quad (3.51)$$

Étant donné que la matrice de covariance  $[\Sigma]$  est symétrique définie positive, l'espace admissible  $\mathcal{A}_\lambda$  défini en (3.42) pour le paramètre  $\lambda$  se réduit à l'intervalle  $]-\infty, 0[$  de sorte que  $\lambda < 0$ .

Finalement, à chaque itération  $i$  de l'algorithme **MH**, la nouvelle réalisation  $\mathbf{c}_{123}^{(i+1)}$  de  $\mathbf{C}_{123}$  est acceptée sous réserve que le critère suivant soit vérifié [Soize 2017] :

$$u \leq \min \left\{ 1, \frac{p_{\mathbf{C}_{123}}(\mathbf{c}_{123}^{(i+1)}) q_{\mathbf{C}_{123}}(\mathbf{c}_{123}^{(i)})}{p_{\mathbf{C}_{123}}(\mathbf{c}_{123}^{(i)}) q_{\mathbf{C}_{123}}(\mathbf{c}_{123}^{(i+1)})} \right\}, \quad (3.52)$$

où  $u$  est une réalisation indépendante d'une variable aléatoire  $U$  uniformément distribuée sur l'intervalle  $[0, 1]$  (de loi uniforme  $\mathcal{U}(0, 1)$ ). Le taux de rejet de l'algorithme

2. Il s'agit de la pdf  $p_{(C_1, C_2, C_3)}$  définie en équation (3.29), avec la constante de normalisation  $k_{123} = 1$ .

MH est défini comme  $1 - N_{\text{accept}}/N$ , où  $N_{\text{accept}}$  désigne le nombre de réalisations indépendantes acceptées selon le critère défini par l'équation (3.52). Les deux exemples d'applications pratiques présentés dans l'Annexe D montrent qu'un taux de rejet compris entre 20 et 25% semble indiquer un échantillonnage adéquat de la distribution cible.

Pour générer correctement des réalisations indépendantes de  $\mathbf{C}_{123}$  suivant la pdf  $p_{\mathbf{C}_{123}}$  définie en (3.48), il est donc nécessaire d'appliquer un coefficient correctif  $\sigma$  à la matrice de covariance  $[\Sigma]$  définie en (3.50). En faisant varier manuellement le paramètre  $\sigma$  dans le script `scripts/MCMC_MH_C123.py`, il a été observé que la valeur  $\sigma = 0.15$  conduit à un taux de rejet compris entre 20 et 25%, donc nous utiliserons cette valeur dans la suite de ce chapitre.

Afin de générer un nombre de réalisations indépendantes  $N$  adapté à l'identification du vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\lambda}$ , on réalise une analyse de convergence des estimations statistiques de  $\hat{m}_{C_1}$ ,  $\hat{m}_{C_2}$ ,  $\hat{m}_{C_3}$  et  $\hat{\nu}_{\mathbf{C}}$ <sup>3</sup> à l'aide du script `scripts/MCMC_MH_C123.py`, en faisant varier le nombre de réalisations  $N$  de 10 à 5000. Ce script fait appel à la fonction `MH_C123()` du script `scripts/_Functions.py` qui implémente l'algorithme de Metropolis-Hastings. La valeur initiale  $\lambda^0 = -180$ , ajustée manuellement à l'aide du script `scripts/UQ_IsotTrans.py`, a été définie comme une valeur raisonnable de  $\lambda$ , pour laquelle la fonction-coût  $\mathcal{J}_{\lambda}$ , introduite dans l'équation (3.41), affiche des valeurs de l'ordre de  $1 \times 10^{-4}$  dès la première évaluation. On constate sur la Figure 3.3 que l'algorithme MH converge rapidement et que  $N = 2000$  réalisations semblent être suffisant pour atteindre la convergence statistique de  $\hat{m}_{C_1}$ ,  $\hat{m}_{C_2}$  et  $\hat{m}_{C_3}$  sur la Figure 3.3a et  $\hat{\nu}_{\mathbf{C}}$  sur la Figure 3.3b.

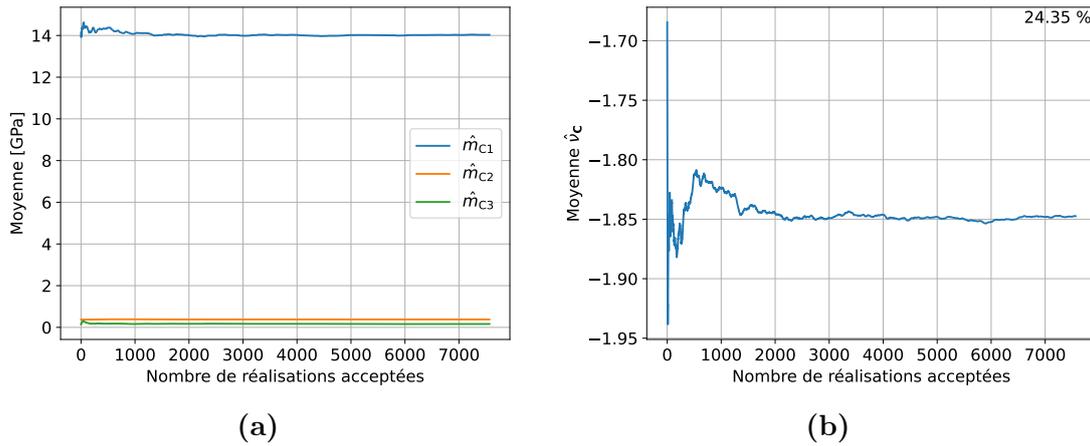
Finalement, la valeur optimale du vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\lambda}$  est obtenue avec le script `scripts/UQ_IsotTrans.py` en résolvant le problème d'optimisation sous contraintes (3.41) à l'aide l'algorithme *Constrained Optimization BY Quadratic Approximations* (COBYQA) [Ragonneau 2023], implémenté via la fonction `minimize()`, disponible dans la bibliothèque Python `scipy.optimize` [Virtanen et al. 2020].

La Figure 3.4 représente 10 000 réalisations indépendantes du vecteur aléatoire  $\mathbf{C}_{123} = (C_1, C_2, C_3)$  pour trois valeurs initiales  $\lambda^0 \in \{-65, -120, -180\}$  du paramètre  $\lambda < 0$ . On observe que la valeur initiale  $\lambda^0 = -65$  conduit à des réalisations plus dispersées/éparpillées autour des données, tandis que  $\lambda^0 = -180$  conduit à des réalisations plus concentrées autour des données. Les pdfs  $p_{C_4}$  et  $p_{C_5}$  des variables  $C_4$  et  $C_5$  sont respectivement illustrées sur les Figures 3.5a et 3.5b, où l'on observe que la valeur initiale  $\lambda^0$  a une influence significative sur la distribution des deux pdfs, qui présente une dispersion d'autant plus faible que  $\lambda^0$  diminue. Ce résultat est cohérent avec l'expression (3.33) du coefficient de dispersion  $\delta_{C_4} = \delta_{C_5} = 1/\sqrt{1 - 2\lambda}$  des variables  $C_4$  et  $C_5$  dont la valeur diminue lorsque  $\lambda$  diminue.

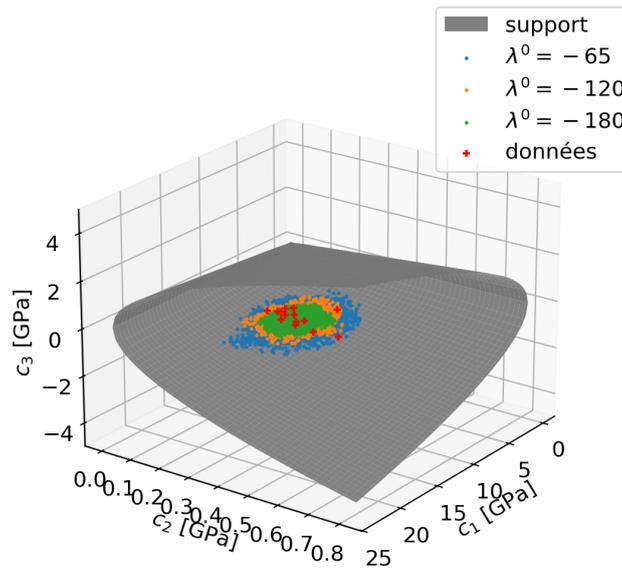
Pour la suite, la valeur initiale  $\lambda^0 = -65$  est retenue afin de générer des réalisations indépendantes de  $\mathbf{C}_{123}$  qui semblent plus représentatives des données expérimentales.

---

3. Ces variables constituent les composantes du vecteur  $\hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\lambda}) = (\hat{m}_{C_1}(\boldsymbol{\lambda}), \dots, \hat{m}_{C_5}(\boldsymbol{\lambda}), \hat{\nu}_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\lambda}))$ , défini dans l'équation (3.40), qui doivent être évaluées numériquement afin d'identifier le vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\lambda}$ .



**FIGURE 3.3** – Convergence de l’algorithme de Metropolis-Hastings : évolutions (a) des moyennes empiriques  $\hat{m}_{C_1}$ ,  $\hat{m}_{C_2}$  et  $\hat{m}_{C_3}$  de  $\mathbf{C}_{123}$  et (b) de la moyenne empirique  $\hat{v}_C$  de  $\varphi(\mathbf{C}) = \ln((C_1 C_2 - C_3^2) C_4^2 C_5^2)$  en fonction du nombre de réalisations acceptées  $N_{\text{accept}}$ . Le taux de rejet, exprimé en pourcentage, est affiché en haut à droite de la Figure (b).

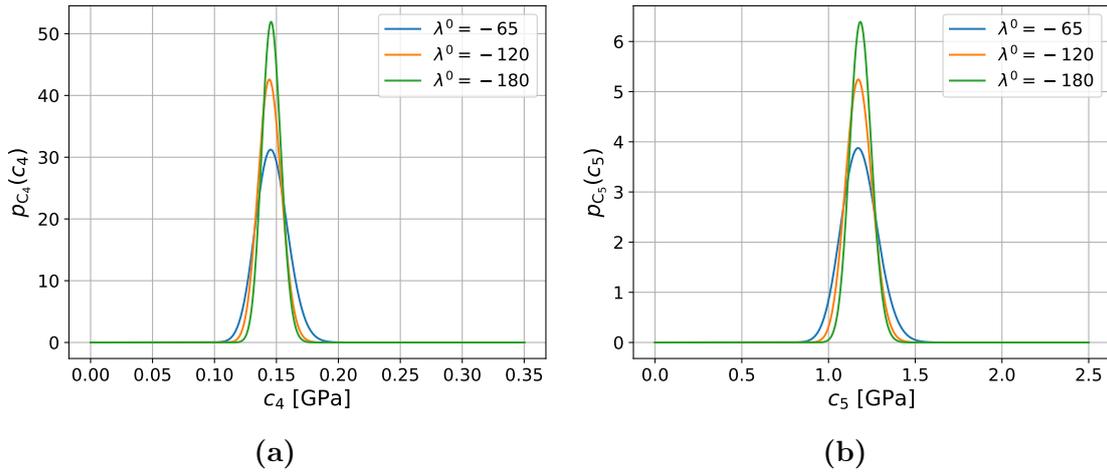


**FIGURE 3.4** – Génération de 10 000 réalisations indépendantes des variables  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  obtenues à partir de trois valeurs initiales  $\lambda^0 \in \{-65, -120, -180\}$  pour le paramètre  $\lambda < 0$ .

tales. Le vecteur des paramètres identifiés  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$  est donné (avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_5$  exprimés en  $\text{GPa}^{-1}$ ) par

$$\boldsymbol{\lambda} = (-63.67, 4.75, 200.95, -4.49, 834.61, 109.72), \quad (3.53)$$

pour lequel la fonction-coût  $\mathcal{J}_\lambda$  atteint la valeur  $7.4 \times 10^{-7}$ .



**FIGURE 3.5** – Fonctions (a) pdf  $p_{C_4}$  de la variable  $C_4$  et (b) pdf  $p_{C_5}$  de la variable  $C_5$  obtenues à partir de trois valeurs initiales  $\lambda^0 \in \{-65, -120, -180\}$  pour le paramètre  $\lambda < 0$ .

### 3 Simulation stochastique de la rupture fragile par champ de phase

L'objectif de cette section est de simuler numériquement les variabilités (ou fluctuations statistiques) observées expérimentalement sur les courbes force-déplacement en section 1.3 du chapitre 2 (voir Figure 2.4) et plus particulièrement sur la force critique d'initiation de fissure en section 3.3 du chapitre 2 (voir Figure 2.28) en utilisant :

1. le modèle déterministe de rupture fragile (ou d'endommagement) par champ de phase, basé sur le modèle de régularisation de l'énergie de rupture [AT1](#) et sur la décomposition de l'énergie élastique de [He](#), respectivement introduits en sections 2.1 et 3.7 du chapitre 1 ;
2. les modèles probabilistes du taux de restitution d'énergie critique et de la matrice d'élasticité introduits en section 1, dont les paramètres ont été identifiés en section 2 ;
3. le générateur aléatoire basé sur l'algorithme de Metropolis-Hastings (appartenant à la classe des méthodes [MCMC](#)) mis en place en section 2 et des générateurs de nombres pseudo-aléatoires distribués suivant des lois de probabilité classiques, notamment la loi normale (ou gaussienne), la loi uniforme et la loi Gamma ;
4. la méthode de simulation de Monte-Carlo (ou [MC](#) pour *Monte Carlo numerical simulation* en anglais) [[Caffisch 1998](#), [Schuëller et Spanos 2001](#), [Robert et Casella 2004](#), [Rubinstein et Kroese 2016](#)] utilisée comme solveur stochastique pour calculer des réalisations indépendantes des champs aléatoires de déplacement  $\mathbf{U}$  (à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ ) et d'endommagement  $\Phi$  (à valeurs dans  $[0, 1]$ ), solutions du problème stochastique couplé mécanique-endommagement sous-jacent. Cette

méthode permet de déduire des estimations statistiques (de la valeur moyenne, de l'écart-type, du coefficient de dispersion, d'un quantile ou d'un intervalle de confiance) de quantités d'intérêt probabilistes, telles que la force de réaction globale aléatoire  $F$  et la force critique d'initiation de fissure aléatoire  $F_c$  (à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ ).

La modélisation stochastique et la simulation numérique des incertitudes/variabilités observées expérimentalement requièrent généralement, dans le cadre de la méthode de simulation de Monte-Carlo (MC), la réalisation d'un grand nombre de simulations stochastiques d'endommagement par champ de phase pour atteindre la convergence statistique des estimations, ce qui peut s'avérer très coûteux en termes de temps de calcul. Une approche exploitant les propriétés du modèle de régularisation de l'énergie de rupture AT1 est proposée en section 3.1 afin de réduire significativement le nombre d'itérations de chargement requis pour prédire la force d'initiation de fissure dans les simulations d'endommagement/rupture par champ de phase, telles que celles menées en section 3.4 du chapitre 2 pour l'identification des propriétés d'endommagement (ou de rupture par fissuration). La génération de 1 000 réalisations indépendantes de la variable aléatoire  $G_c$  et du vecteur aléatoire  $\mathbf{C}$ , modélisant les propriétés matériaux incertaines d'endommagement et d'élasticité du bois d'épicéa, est présentée en section 3.2. L'analyse statistique des résultats obtenus à l'issue des 1 000 simulations stochastiques d'endommagement correspondantes est conduite en section 3.3 pour estimer la probabilité d'amorçage de fissure dans des échantillons troués en bois d'épicéa, soumis à un chargement de compression uniaxiale déterministe.

### 3.1 Accélération des simulations

Comme dans la section 3.4 du chapitre 2, on considère le problème 2D de la plaque trouée illustré sur la Figure 1.11 avec les conditions aux limites associées et les dimensions du problème synthétisées dans le Tableau 2.1. Le matériau élastique est supposé isotrope transverse, dont la matrice d'élasticité (déterministe)  $[\mathbf{C}_0]$  est exprimée en notation de Kelvin-Mandel, conformément à l'équation (2.32). On suppose que l'échantillon est suffisamment mince ( $b = 20$  mm) pour respecter les conditions de contraintes planes en 2D et on considère les propriétés matériaux homogènes identifiées pour l'échantillon n° 4, à savoir :

$$\begin{aligned} E_L &= 15.54 \text{ GPa}, & E_T &= 266.22 \text{ MPa}, & G_L &= 562.28 \text{ MPa}, \\ \nu_L &= 0.23 & \text{et} & & G_c &= 84.2 \text{ N/m}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Comme lors des simulations d'endommagement conduites dans le chapitre 2 dans un cadre déterministe, on considère : (i) une longueur de régularisation fixée à  $\ell = L/100 = 0.45$  mm ; (ii) le modèle de décomposition de l'énergie élastique de He ; (iii) le modèle de régularisation de l'énergie de rupture AT1.

On rappelle que le modèle de régularisation AT1 présente un comportement purement élastique en l'absence d'endommagement (i.e. lorsque  $\phi = 0$ ) [Tanné et al. 2018]. Dans le cadre de la méthode *implicite* de [Miehe et al. 2010a], utilisée pour

traiter l'irréversibilité de l'évolution du champ d'endommagement  $\phi$  (voir section 5.2 du chapitre 1), le terme source  $f_w^{\text{AT1}}$  défini en (1.69), qui contrôle l'évolution du champ de phase  $\phi$ , peut être réécrit comme

$$f_w^{\text{AT1}} = \langle \mathcal{H} - \psi_c \rangle_+, \quad \text{avec} \quad \psi_c = \frac{3G_c}{16\ell}, \quad (3.55)$$

où  $\mathcal{H} = \max_{\tau \in [0,t]}(\psi_0^+(\tau))$  défini en (1.64) est le champ d'histoire local de la densité d'énergie élastique positive (active)  $\psi_0^+$  donnée en (1.13). On note à travers l'équation (3.55) que la fissure régularisée ne peut s'initier que lorsque la densité d'énergie  $\psi_0^+$  dépasse la valeur seuil  $\psi_c$ , i.e.  $\psi_0^+ > \psi_c$ .

Le maillage optimisé considéré, illustré sur la Figure 2.29 du chapitre 2, comprend 39 108 éléments linéaires `TR13` et 19 825 nœuds. Un incrément monotone de déplacement  $\Delta u$  est appliqué sur le bord supérieur de l'échantillon, conformément à l'équation (2.49) qui est rappelée ci-dessous :

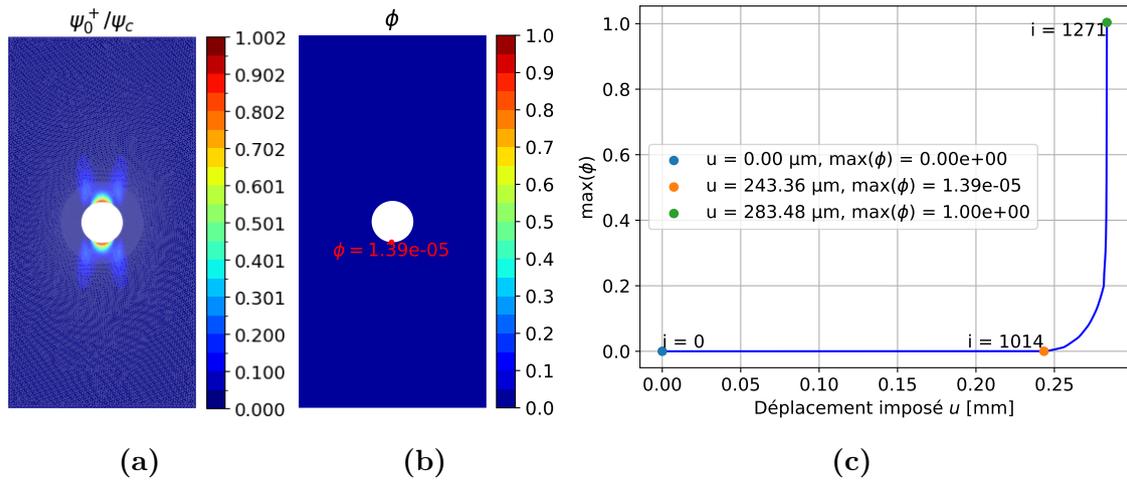
$$\Delta u = \begin{cases} -24 \times 10^{-5} \text{ mm} & \text{si } \max(\phi) \leq 0.2, \\ -2 \times 10^{-5} \text{ mm} & \text{si } \max(\phi) > 0.2. \end{cases} \quad (3.56)$$

La simulation d'endommagement est conduite jusqu'à ce que le niveau d'endommagement maximal  $\max(\phi)$ , correspondant à la valeur maximale du champ d'endommagement  $\phi$  sur le domaine  $\Omega$ , atteigne la valeur 1.

La Figure 3.6 représente les résultats de la simulation d'endommagement réalisée avec le script `scripts/SIMU.py`, où la Figure 3.6a représente la densité d'énergie élastique positive  $\psi_0^+$  normalisée par  $\psi_c$  pour un déplacement imposé  $u = 243.36 \mu\text{m}$ . Cette densité d'énergie élastique positive normalisée est représentée sur les éléments du maillage `EF`<sup>4</sup>, où une valeur supérieure à 1 indique que  $\max(\psi_0^+) > \psi_c$ . Ainsi, comme illustré sur la Figure 3.6b, pour l'itération `i=1014` (indiquée par un point orange sur la Figure 3.6c), le niveau d'endommagement maximal  $\max(\phi) = 1.39 \times 10^{-5} > 0$  est obtenu en un point situé en bas du trou, marquant le début de l'évolution du champ d'endommagement  $\phi$ . Finalement, on observe sur la Figure 3.6c qu'environ 80% des itérations de chargement sont réalisées dans le régime élastique du matériau, avant l'initiation de fissure, pour un déplacement imposé  $u$  inférieur à  $243.36 \mu\text{m}$  (point orange), et donc que seules les 20% restantes participent à la formation de la fissure (régularisée par le champ d'endommagement  $\phi$ ) jusqu'à ce que le niveau d'endommagement maximal  $\max(\phi)$  atteigne 1 pour un déplacement imposé  $u = 283.48 \mu\text{m}$  (point vert).

La procédure mise en œuvre par la suite vise à réduire le nombre d'itérations de chargement réalisées dans le régime purement élastique du matériau avant l'amorçage de fissure, i.e. lorsque  $\max(\psi_0^+) \leq \psi_c$ . Il est important de rappeler que cette procédure n'est valable que pour le modèle de régularisation `AT1`, qui présente une phase (ou

4. En effectuant la moyenne sur les 3 points d'intégration (auxquels sont stockées les valeurs de  $\psi_0^+$ ) dans chaque élément du maillage `EF` (voir la note 2 de l'Annexe B).



**FIGURE 3.6** – Simulation d’endommagement : (a) densité d’énergie élastique positive  $\psi_0^+$  normalisée par  $\psi_c$  et (b) champ d’endommagement  $\phi$  obtenu lors de l’amorçage de la fissure, i.e. lorsque  $\max(\psi_0^+) > \psi_c$ ; (c) évolution du niveau d’endommagement maximal  $\max(\phi)$  relevé à chaque itération de chargement  $i$  en fonction du déplacement imposé  $u$ .

un régime) purement élastique avant l’initiation de fissure [Tanné et al. 2018]. La méthode proposée consiste à évaluer, à l’aide d’un seul calcul dans le régime élastique du matériau, le déplacement critique  $u_c$  qui précède le début de l’évolution du champ d’endommagement  $\phi$ , i.e. lorsque  $\max(\psi_0^+)$  atteint  $\psi_c$ . Pour ce faire, on exploite la forme quadratique en  $\varepsilon^+$  de la densité d’énergie élastique positive  $\psi_0^+(\varepsilon)$  définie comme

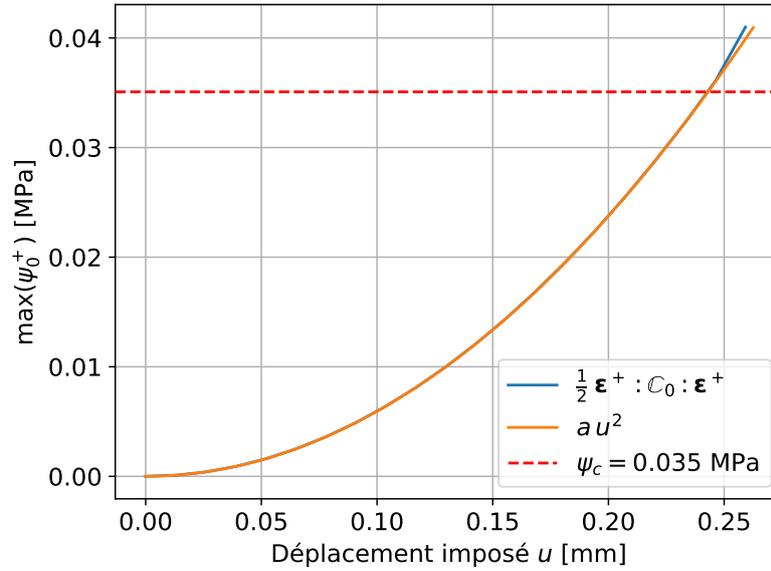
$$\psi_0^+(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon^+ : \mathbb{C}_0 : \varepsilon^+, \quad (3.57)$$

conformément à l’équation (1.52) pour le modèle de décomposition de He. La Figure 3.7 représente l’évolution de la valeur maximale de  $\psi_0^+$  en fonction du déplacement imposé  $u$ . La ligne horizontale rouge en pointillés représente la densité d’énergie critique seuil  $\psi_c$ , définie par l’équation (3.55), et dont la valeur est 0.035 MPa pour  $G_c = 84.2$  N/m et  $\ell = 0.45$  mm. Les courbes bleue et orange représentent respectivement le comportement simulé et le comportement approximé par un modèle quadratique représenté par le polynôme d’ordre 2 en  $u$  de la forme

$$\max(\psi_0^+) = a u^2. \quad (3.58)$$

On observe qu’après l’amorçage de la fissure (i.e. lorsque  $\max(\psi_0^+) > \psi_c$ ), le comportement approximé (courbe orange) ne correspond plus au comportement simulé (courbe bleue), avec un écart visible entre les deux courbes. En effectuant seulement un calcul dans le régime élastique (i.e. lorsque  $\max(\psi_0^+) \leq \psi_c$ ), il est donc possible de déterminer le déplacement critique  $u_c$  qui précède l’amorçage de l’évolution du champ d’endommagement  $\phi$ , tel que

$$a u_c^2 = \psi_c \quad \implies \quad u_c = \sqrt{\frac{\psi_c}{a}}. \quad (3.59)$$



**FIGURE 3.7** – Évolution de la valeur maximale de la densité d'énergie élastique positive  $\max(\psi_0^+)$  en fonction du déplacement imposé  $u$ . La courbe bleue représente le comportement simulé, relevée pour les itérations allant de 0 à 1080 avec un pas de 54. La courbe orange correspond au modèle quadratique. La ligne horizontale rouge en pointillés indique la valeur seuil  $\psi_c$ .

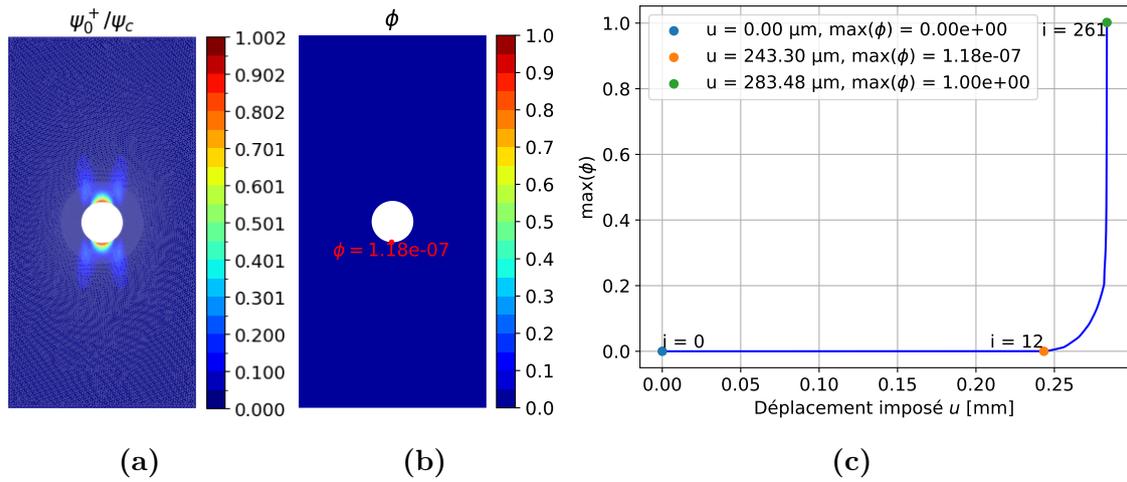
Dans l'équation (3.59),  $a \in \mathbb{R}^+$  est un paramètre en  $\text{N/m}^4$  homogène à une pression par unité de surface qui dépend des propriétés matériaux, de la géométrie de l'échantillon, des conditions de chargement et du modèle de décomposition de l'énergie élastique considérée. Il convient de noter que ce critère d'amorçage d'endommagement peut également être formulé en fonction de la force de compression résultante  $f$ , ce qui permet d'identifier une force de compression critique  $f_c$ .

Il est important de souligner que le critère d'amorçage de fissure proposé dans l'équation (3.59) permet d'estimer le chargement critique<sup>5</sup> précédant l'initiation de l'endommagement, i.e. lorsque  $\max(\psi_0^+)$  atteint la valeur seuil  $\psi_c$  (correspondant au point orange sur la Figure 3.6c), mais il ne correspond pas au chargement pour lequel la fissure régularisée est formée et commence à se propager, i.e. lorsque  $\max(\phi)$  atteint sa valeur maximale de 1 (correspondant au point vert sur la Figure 3.6c).

Après avoir identifié le déplacement critique  $u_c = 243.06 \mu\text{m}$  correspondant à  $\max(\psi_0^+) = \psi_c$ , il est possible de se placer directement à ce niveau de chargement, puis de continuer à incrémenter le déplacement imposé  $u$  de la valeur  $\Delta u$  définie en (3.56), ce qui permet de réduire considérablement le coût de calcul d'une simulation d'endommagement.

Finalement, la Figure 3.8 représente les résultats de la simulation d'endommagement accélérée menée avec le script `scripts/SIMU_Jump.py`. La valeur du

5. Chargement critique  $u_c$  en déplacement ou  $f_c$  en effort.



**FIGURE 3.8** – Simulation d’endommagement accélérée : (a) densité d’énergie élastique positive  $\psi_0^+$  normalisée par  $\psi_c$  et (b) champ d’endommagement  $\phi$  obtenu lors de l’amorçage de la fissure, i.e. lorsque  $\max(\psi_0^+) > \psi_c$ ; (c) évolution du niveau d’endommagement maximal  $\max(\phi)$  relevé à chaque itération de chargement  $i$  en fonction du déplacement imposé  $u$ .

déplacement  $u$  à partir de laquelle le champ d’endommagement  $\phi$  commence à évoluer (i.e. lorsque  $\max(\phi) > 0$  ou de manière équivalente  $\max(\psi_0^+) > \psi_c$ ) est donnée par  $u = u_c + |\Delta u| = 243.30 \mu\text{m}$  et indiquée par le point orange sur la Figure 3.8c. On observe que le champ d’endommagement  $\phi$  atteint sa valeur maximale de 1 pour la même valeur du déplacement  $u$  que dans la simulation précédente (sans accélération), soit  $u = 283.48 \mu\text{m}$ , avec une erreur relative d’environ  $7 \times 10^{-5}$ . La valeur de la force résultante correspondante (calculée avec l’équation (2.45)) est estimée à 38.66 kN (pour  $u = 283.48 \mu\text{m}$ ), avec une erreur relative d’environ  $9 \times 10^{-5}$  par rapport à celle de la simulation précédente (sans accélération).

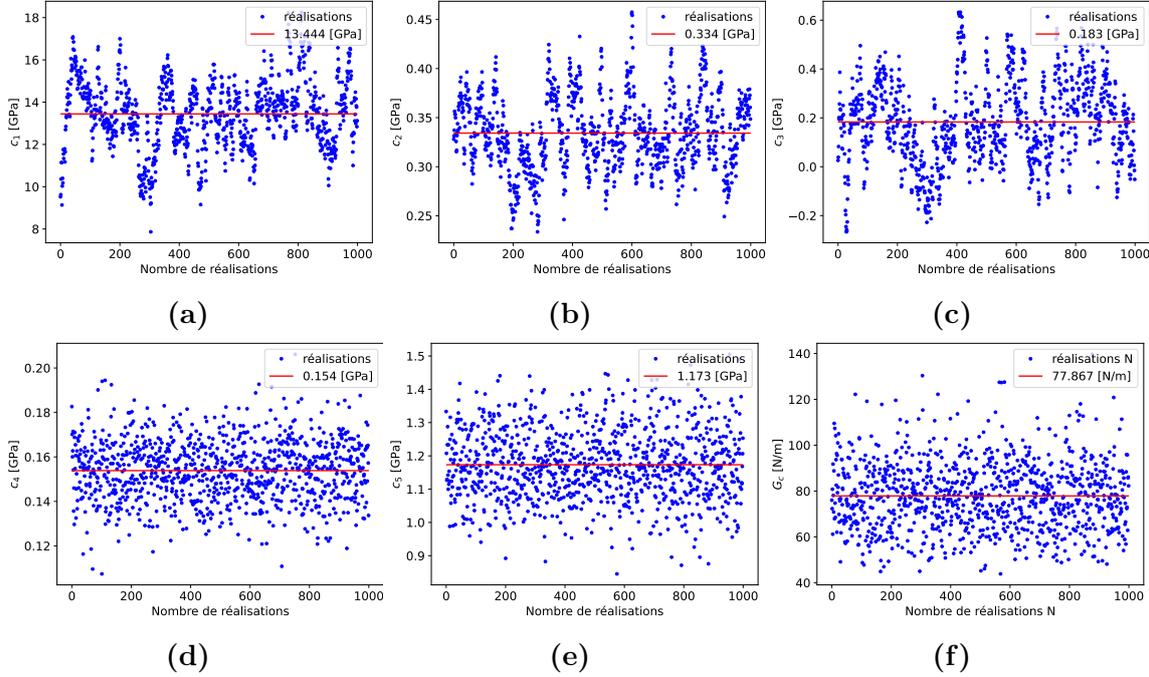
Cette méthode d’accélération conduit aux mêmes résultats avec environ 5 fois moins d’itérations (passant de 1 272 à 262) pour le même gain en temps de calcul (passant de 20 min à 4 min), et elle est adoptée pour les simulations stochastiques d’endommagement menées dans la section 3.3.

## 3.2 Générateur de réalisations indépendantes des variables aléatoires $G_c$ et $\mathbf{C}$

Dans cette section, on analyse le comportement des générateurs aléatoires utilisés pour simuler des réalisations indépendantes de la variable aléatoire  $G_c$  et du vecteur aléatoire  $\mathbf{C}$ . Pour cela, on considère les valeurs optimales des paramètres  $a$  et  $b$  définis en équation (3.37) pour la distribution de  $G_c$ , ainsi que celles du vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\lambda}$  définies en équation (3.53) pour la distribution de  $\mathbf{C}$ .

On génère  $N = 1\,000$  réalisations indépendantes  $G_c^{(1)}, \dots, G_c^{(N)}$  de  $G_c$  et  $\mathbf{c}^{(1)}, \dots, \mathbf{c}^{(N)}$

de  $\mathbf{C}$  avec le script `scripts/Generate_Samples.py`, qui sont affichées sur la Figure 3.9. Les variables aléatoires  $G_c$ ,  $C_4$  et  $C_5$  (statistiquement indépendantes et distribuées



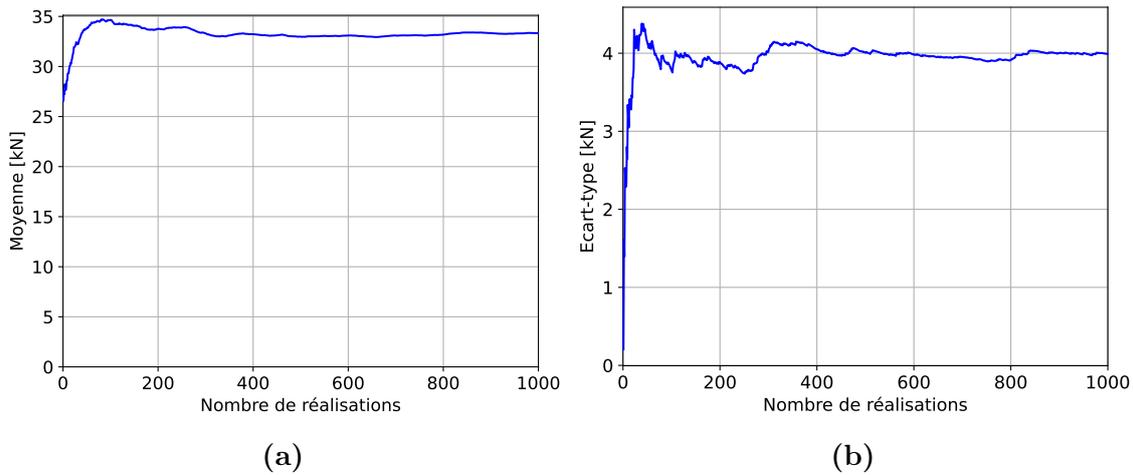
**FIGURE 3.9** – Génération de 1 000 réalisations indépendantes (représentées par des points bleus) pour (a-e) les 5 composantes du vecteur aléatoire  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_5)$  et (f) la variable aléatoire  $G_c$ . Les valeurs moyennes empiriques estimées à partir des réalisations sont représentées par des lignes rouges horizontales sur chaque figure.

suivant des lois Gamma) sont simulées à l’aide de la fonction `rvs()` implémentée dans la bibliothèque `Python scipy.stats.gamma` [Virtanen et al. 2020]. Les variables aléatoires  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  (statistiquement dépendantes) sont quant à elles simulées via à un algorithme MCMC de type Metropolis-Hastings introduit en section 2.2 et illustré en Annexe D. Les réalisations de  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  générées à l’aide de l’algorithme MH sont respectivement illustrées sur les Figures 3.9a, 3.9b et 3.9c. Ces réalisations présentent une corrélation qui résulte du fait que dans une chaîne de Markov, chaque réalisation  $\mathbf{c}_{123}^{(i)} = (c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, c_3^{(i)})$ , avec  $i = 1, \dots, N$ , dépend de la réalisation précédente  $\mathbf{c}_{123}^{(i-1)}$ . Cette dépendance entraîne une corrélation entre les réalisations successives, ce qui permet une exploration progressive de la distribution à échantillonner, ici  $p_{\mathbf{C}_{123}}$  définie en (3.48). En revanche, les réalisations de  $C_4$ ,  $C_5$  et  $G_c$ , respectivement illustrées sur les Figures 3.9d, 3.9e et 3.9f, sont générées de manière indépendante à l’aide d’un générateur aléatoire pour la distribution Gamma. Enfin, on constate que toutes les réalisations des variables  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_4$ ,  $C_5$  et  $G_c$  sont positives (dans  $\mathbb{R}^+$ ) alors que celles de la variable  $C_3$  sont réelles (dans  $\mathbb{R}$ ), conformément aux supports des pdfs  $p_{\mathbf{C}}$  et  $p_{G_c}$ .

### 3.3 Simulations stochastiques d'endommagement

Les simulations stochastiques d'endommagement sont effectuées avec le script `scripts/SIMU_Sto.py` en considérant la procédure d'accélération présentée en section 3.1 pour réduire le nombre d'itérations de chargement dans le régime élastique du matériau, i.e. lorsque  $\max(\psi_0^+) \leq \psi_c$  ou de manière équivalente  $\max(\phi) = 0$ . Pour chaque simulation, on relève à chaque itération de chargement : (i) le déplacement  $u$  imposé sur le bord supérieur ; (ii) la force de compression  $f$  résultante suivant  $y$  ; (iii) la valeur maximale du champ d'endommagement  $\phi$ .

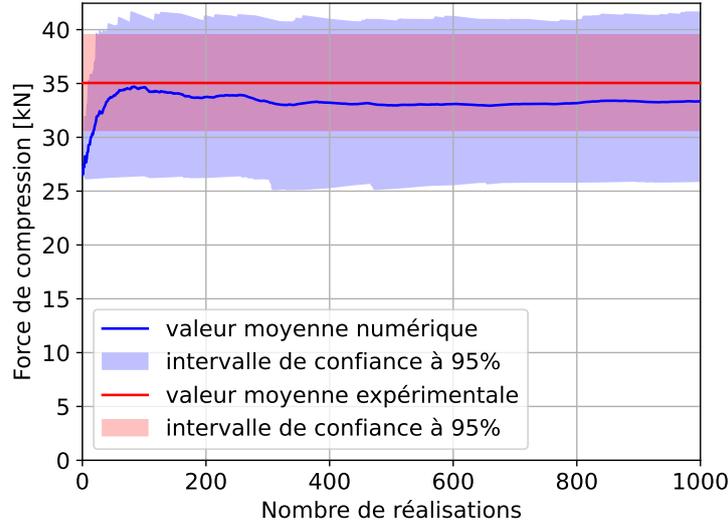
On introduit la variable aléatoire  $F_c$  à valeurs positives (dans  $\mathbb{R}^+$ ) modélisant la force de compression critique  $f_c$  correspondant à un niveau d'endommagement maximal  $\max(\phi) = 1$ . Pour chacune des  $N$  réalisations indépendantes de  $G_c$  et  $\mathbf{C}$  générées en section 3.2, on calcule la réalisation correspondante de  $F_c$  en effectuant une simulation d'endommagement. On note  $\mathcal{F}_c = \{f_c^{(i)}, i = 1, \dots, N\}$  l'ensemble des  $N$  réalisations indépendantes de la variable aléatoire  $F_c$  obtenues à l'issue des  $N = 1\,000$  simulations d'endommagement. Les évolutions des estimations statistiques de la valeur moyenne  $\hat{m}_{F_c}$  et de l'écart-type  $\hat{\sigma}_{F_c}$  de la variable aléatoire  $F_c$  calculées à partir des données simulées numériquement  $\mathcal{F}_c$  sont représentées sur la Figure 3.10 en fonction du nombre de réalisations  $N$  allant de 1 à 1000. On constate que 500 réali-



**FIGURE 3.10** – Analyse de convergence : évolutions des estimations statistiques de (a) la valeur moyenne  $\hat{m}_{F_c}$  et de (b) l'écart-type  $\hat{\sigma}_{F_c}$  de la variable aléatoire  $F_c$ , en fonction du nombre de réalisations  $N$  variant de 1 à 1000.

sations semblent suffisant pour obtenir la convergence des estimations statistiques de la valeur moyenne  $\hat{m}_{F_c}$  (voir Figure 3.10a) et de l'écart-type  $\hat{\sigma}_{F_c}$  (voir Figure 3.10b), qui sont respectivement évaluées à 33.34 kN et 3.99 kN pour  $N = 1\,000$  réalisations. L'estimation de la force moyenne  $\hat{m}_{F_c} = 33.34$  kN calculée numériquement est en assez bon accord avec la force moyenne  $F_c = 35.05$  kN mesurée expérimentalement (voir section 3.3 du chapitre 2), avec une erreur relative d'environ 5%. On observe que l'estimation de la valeur moyenne  $\hat{m}_{F_c}$  calculée numériquement, représentée par une ligne bleue sur la Figure 3.11, appartient à l'intervalle de confiance à 95%

expérimental représenté en rouge. Cela semble indiquer une bonne correspondance



**FIGURE 3.11** – Analyse de convergence : évolutions de l’intervalle de confiance à 95% et de la valeur moyenne en fonction du nombre de réalisations  $N$  variant de 1 à 1 000, pour la force de compression critique aléatoire  $F_c$  simulée numériquement (en bleu) et mesurée expérimentalement (en rouge).

entre les résultats numériques et les observations expérimentales, malgré un intervalle de confiance à 95% plus large pour la force critique aléatoire calculée numériquement, et une estimation de l’écart-type  $\hat{\sigma}_{F_c} = 3.99$  kN calculée numériquement légèrement plus importante que l’écart-type  $\sigma_{F_c} = 3.36$  kN mesuré expérimentalement avec une erreur relative d’environ 16%.

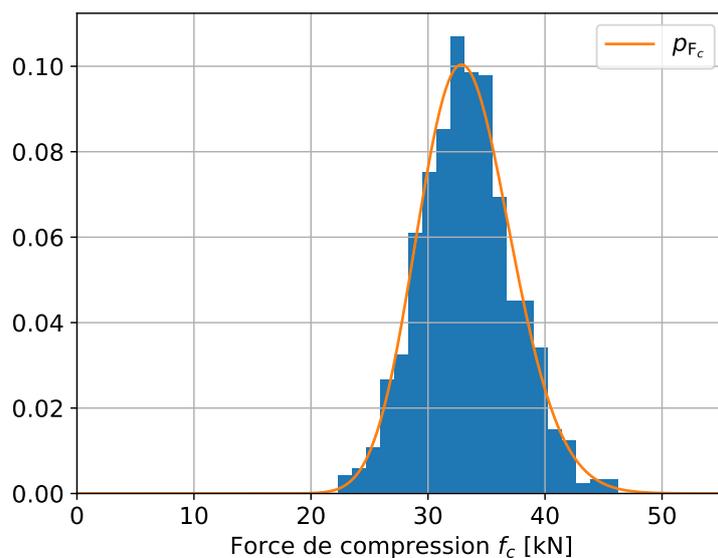
De plus, la distribution des réalisations de la variable aléatoire  $F_c$ , représentée sous la forme d’un histogramme sur la Figure 3.12, peut être représentée/approchée par une loi Gamma  $\mathcal{G}(a, b)$ <sup>6</sup>, en supposant que la force de compression critique aléatoire  $F_c$  est une variable à valeurs positives (dans  $\mathbb{R}^+$ ) dont la pdf  $p_{F_c}$  est définie comme

$$p_{F_c}(f_c; a, b) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(f_c) \frac{f_c^{a-1}}{b^a \Gamma(a)} \exp\left(\frac{-f_c}{b}\right), \quad (3.60)$$

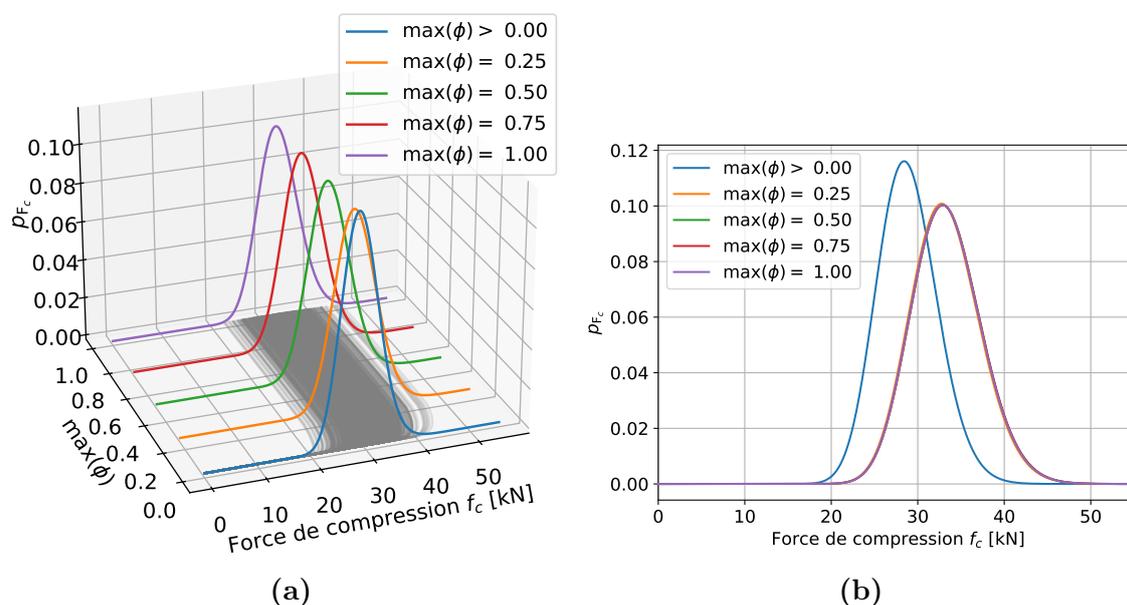
où les paramètres de forme  $a > 2$  et d’échelle  $b > 0$  sont estimés par la méthode MLE introduite en section 2.1 avec les données simulées numériquement  $\mathcal{F}_c$ , et  $\Gamma(a)$  est la fonction gamma définie en (3.10).

En utilisant ce modèle probabiliste paramétrique, la Figure 3.13a représente l’évolution de la pdf  $p_{F_c}$  de la variable aléatoire  $F_c$  modélisant la force critique  $f_c$  relevée pour différents niveaux d’endommagement maximal  $\max(\phi)$  appartenant à l’intervalle  $]0, 1]$ . Sur la Figure 3.13b, on constate que les fonctions pdfs varient très peu au-delà du niveau d’endommagement maximal  $\max(\phi) = 0.25$ , qui semble être

6. À l’instar du taux de restitution d’énergie critique aléatoire  $G_c$  dont le modèle probabiliste construit par MaxEnt est présenté en section 1.2.



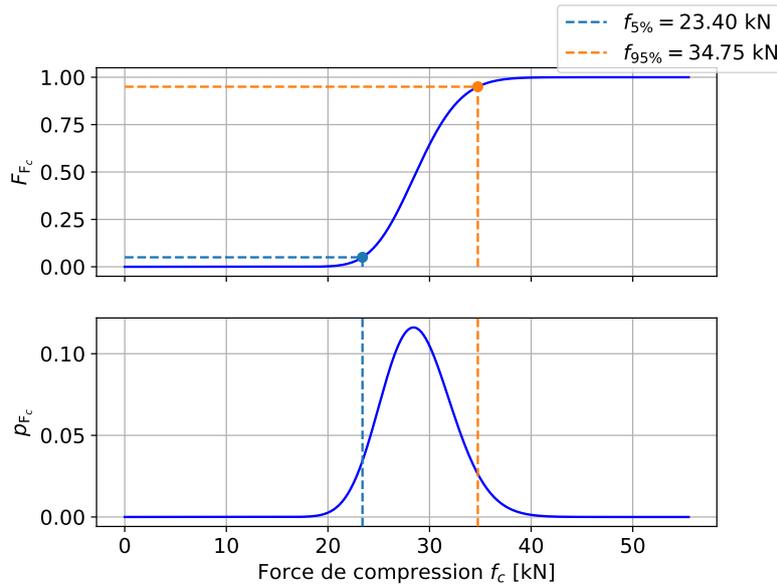
**FIGURE 3.12** – Histogramme des réalisations de la variable aléatoire  $F_c$  modélisant la force de compression critique  $f_c$  relevée pour  $\max(\phi) = 1$  (en bleu), superposée à la pdf  $p_{F_c}$  de la variable  $F_c$  distribuée suivant la loi Gamma  $\mathcal{G}(a, b)$  paramétrée par les valeurs optimales de  $a$  et  $b$  (identifiées par la méthode MLE) et représentée par la ligne orange.



**FIGURE 3.13** – Évolution de la pdf  $p_{F_c}$  de la variable aléatoire  $F_c$  modélisant la force de compression critique  $f_c$  relevée pour différents niveaux d'endommagement maximal correspondant à  $\max(\phi) > 0$  (amorçage de l'endommagement) et  $\max(\phi) \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$  : (a) graphique 3D et (b) graphique 2D (superposition des courbes).

une valeur seuil indiquant le début de la propagation de fissure.

Dans le contexte industriel de l'ameublement et plus particulièrement l'Institut technologique FCBA qui a pour objectif de prédire la tenue mécanique à la rupture des connexions entre éléments de meubles, on cherche à présent à évaluer la probabilité d'amorçage de fissure, i.e. lorsque le champ d'endommagement  $\phi$  commence à évoluer. Pour ce faire, on représente sur la Figure 3.14 les fonctions pdf  $p_{F_c}$  et cdf  $F_{F_c}$  de la variable aléatoire  $F_c$  modélisant la force de compression critique  $f_c$  associée à l'amorçage de l'endommagement, i.e. lorsque le niveau d'endommagement maximal  $\max(\phi)$  dépasse la valeur 0. Pour les paramètres  $a = 69.53$  et  $b = 0.48$  kN



**FIGURE 3.14** – Fonctions cdf  $F_{F_c}$  (en haut) et pdf  $p_{F_c}$  (en bas) de la variable aléatoire  $F_c$  modélisant la force de compression critique  $f_c$  correspondant à l'amorçage de l'endommagement, i.e. lorsque  $\max(\phi)$  dépasse 0.

estimés par la méthode MLE avec les données simulées numériquement, la cdf  $F_{F_c}$  de  $F_c$ , représentée en haut de la Figure 3.14, permet d'estimer qu'une force de compression de 23.40 kN correspond à une probabilité d'amorçage de fissure de 5%, tandis qu'une force de compression de 34.75 kN correspond à une probabilité de 95%. Pour conclure sur l'essai expérimental présenté au chapitre 2, 95% des échantillons resteront intacts (i.e.  $\max(\phi) = 0$ ) pour une force de compression critique  $f_c$  inférieure à  $f_{5\%} = 23.40$  kN (correspondant au quantile à 5% de la variable aléatoire  $F_c$ ).

On remarque que la force  $f_{5\%}$  calculée numériquement est inférieure à la force critique moyenne  $\underline{F}_c = 35.05$  kN mesurée expérimentalement par CIN en section 3.3 du chapitre 2, ce qui correspond à un coefficient de sécurité  $s = 1.5$ , supérieur au coefficient de sécurité usuel de 1.2 généralement considéré dans l'ameublement [Chevalier et al. 2022].

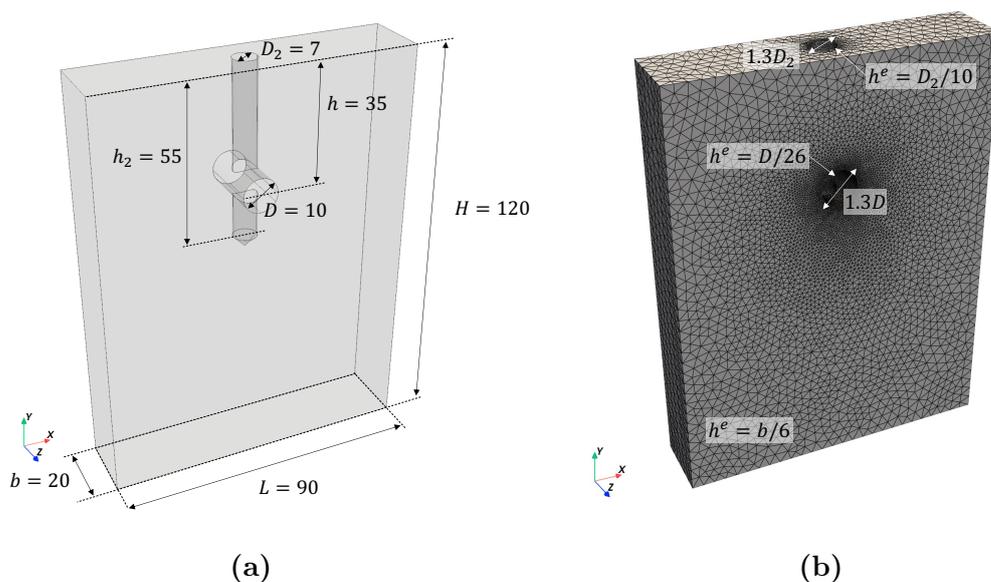
## 4 Reproduction de l'essai expérimental de compression via un assemblage vis-écrou noyé

Cette section vise à reproduire l'essai de compression expérimental réalisé sur des échantillons d'épicéa dans [Chevalier et al. 2022], via un assemblage vis-écrou noyé, tel que représenté sur la Figure 2 en page 3 de l'introduction.

Plusieurs simulations du problème 3D d'élasticité linéaire sont conduites dans un cadre déterministe en section 4.1 et probabiliste en section 4.2, et le critère d'amorçage de fissure défini dans l'équation (3.59) de la section 3.1 est appliqué pour prédire le niveau de chargement nécessaire à l'amorçage d'une fissure.

### 4.1 Approche déterministe

On considère un essai de compression 3D analogue à celui simulé numériquement en section 4 de [Chevalier et al. 2022], où l'échantillon d'épicéa, représenté sur la Figure 3.15 avec le maillage EF considéré, est un parallélépipède de largeur  $L = 90$  mm, de hauteur  $H = 120$  mm et d'épaisseur  $b = 20$  mm. Un perçage traversant (ou



**FIGURE 3.15** – Essai de compression 3D : (a) géométrie de l'échantillon d'épicéa avec les dimensions spécifiées en mm ; (b) maillage EF optimisé comprenant 274 946 éléments linéaires TETRA4 et 53 166 nœuds. Au voisinage du trou borgne vertical, la taille de maille  $h^e$  est fixée à  $D_2/10 = 0.7$  mm dans une zone cylindrique de diamètre  $1.3 D_2 = 9.1$  mm et de profondeur  $h_2 = 55$  mm, tandis qu'au voisinage du trou débouchant horizontal,  $h^e$  est fixée à  $D/26 \approx 0.38$  mm dans une zone cylindrique de diamètre  $1.3 D = 13$  mm. L'axe  $y$  représente l'axe longitudinal des fibres du bois, orthogonal au plan d'isotropie  $(z, x)$ .

trou débouchant) de diamètre  $D = 10$  mm dont le centre est situé à une distance

$h = 35$  mm du bord supérieur, ainsi qu'un trou borgne de diamètre  $D_2 = 7$  mm et de profondeur  $h_2 = 55$  mm, sont réalisés au centre de l'échantillon en  $x = L/2 = 45$  mm.

Les propriétés élastiques de l'épicéa utilisées sont celles répertoriées dans le Tableau 1 de [Chevalier et al. 2022], et le taux de restitution d'énergie critique est pris égal à la valeur moyenne  $\underline{G}_c$  identifiée expérimentalement et donnée en (2.50), à savoir :

$$\begin{aligned} E_L &= 11\,580 \text{ MPa}, & E_T &= 500 \text{ MPa}, & G_L &= 450 \text{ MPa}, \\ \nu_L &= 0.02, & \nu_T &= 0.44 & \text{ et } & G_c &= 78.3 \text{ N/m}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

La simulation du problème 3D d'élasticité linéaire est réalisée en bloquant le bord inférieur de l'échantillon  $\Gamma_0$  (situé en  $y = 0$ ) suivant les 3 directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ , et en appliquant une charge surfacique  $\mathbf{q}$  modélisant l'action de l'écrou noyé sur la surface  $\Gamma_f$  en contact avec le trou débouchant (voir Figure 3.16a) et définie par

$$\mathbf{q}(\theta) = \alpha \frac{f}{S} \sin\left(\frac{\pi}{\beta}(\theta - \theta_1)\right) \mathbf{n}(\theta), \quad (3.62)$$

où  $f$  est la force de compression globale imposée sur la surface  $\Gamma_f$  d'aire  $S$  représentée en rouge sur la Figure 3.16a,  $\beta = 2\pi/3$  désigne l'angle d'ouverture de la force de compression appliquée, et  $\alpha$  est un facteur correctif adimensionné tel que la résultante globale sur  $\Gamma_f$  du champ de force surfacique  $\mathbf{q}$  suivant l'axe vertical  $\mathbf{y} = [0, 1]^T$  coïncide avec  $f$  :

$$\int_{\Gamma_f} \mathbf{q} \cdot \mathbf{y} \, dS = f, \quad (3.63)$$

afin de prendre en compte la forme complexe de la surface  $\Gamma_f$  due à la présence du trou borgne. Dans l'équation (3.62) et sur la Figure 3.16b,  $\mathbf{n}(\theta)$  est le vecteur normal unitaire sortant de  $\Gamma_f$ , dont l'orientation  $\theta < 0$  par rapport à l'axe horizontal varie dans l'intervalle  $[\theta_1, \theta_2]$ , avec  $\theta_1 = (\beta - \pi)/2 = -\pi/6$  et  $\theta_2 = \theta_1 - \beta = -5\pi/6$ . Pour la géométrie et le maillage considérés, le facteur correctif  $\alpha \approx 1.93$  et l'aire  $S \approx 168.05 \text{ mm}^2$  de la surface  $\Gamma_f$  sont évaluées numériquement à l'aide de la méthode de quadrature de Gauss<sup>7</sup>.

Le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  et le tenseur des contraintes de Cauchy (non endommagé)  $\boldsymbol{\sigma}_0$  associé sont solutions du problème aux limites d'élasticité linéaire gouverné par le système d'équations suivant :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.64a)$$

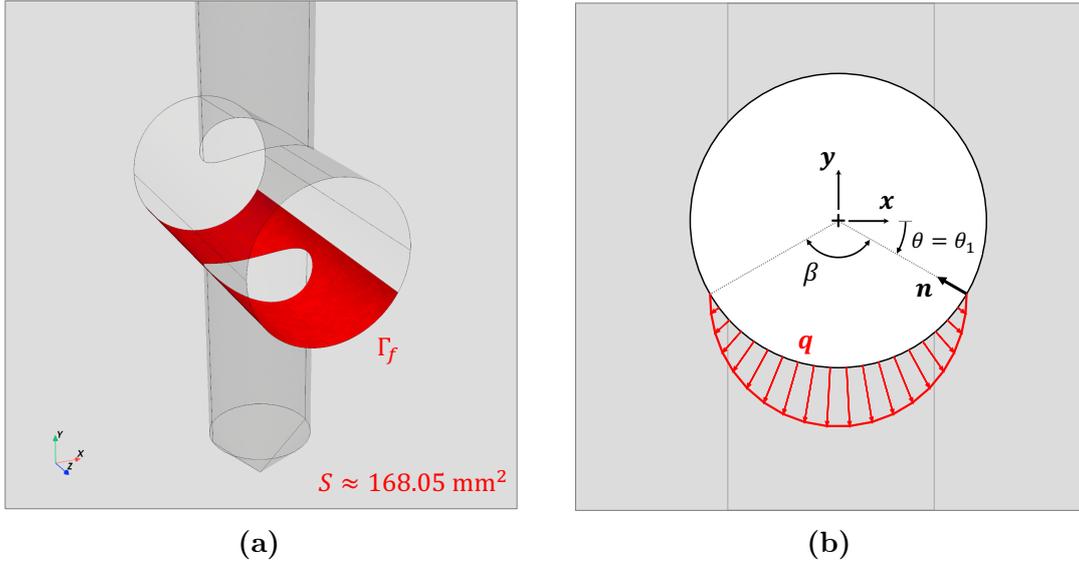
$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.64b)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_0, \quad (3.64c)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus (\Gamma_f \cup \Gamma_0), \quad (3.64d)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q} \quad \text{sur } \Gamma_f. \quad (3.64e)$$

7. L'intégration est effectuée en sommant l'aire de chaque élément 2D appartenant à la surface  $\Gamma_f$ , de sorte que  $S = \int_{\Gamma_f} dS \approx \sum_{e \in \Gamma_f} \sum_{i=1}^p J_i^e w_i$ . Les lecteurs intéressés peuvent consulter l'Annexe B pour plus de détails.



**FIGURE 3.16** – Essai de compression 3D : (a) aire  $S$  de la surface  $\Gamma_f$  ; (b) charge surfacique  $q$  imposée sur  $\Gamma_f$  pour un angle d'ouverture  $\beta = 2\pi/3$ .

La simulation du problème 3D d'élasticité linéaire, réalisée avec le script [scripts/SIMU\\_FCBA.py](#), est conduite pour une force de compression  $f = 1$  N, bien plus faible que la force critique moyenne  $\underline{F}_c = 2.25$  kN mesurée expérimentalement dans [Chevalier et al. 2022].

Après avoir résolu le problème aux limites (3.64) par la MEF (formulée en déplacement), le champ de tenseur des déformations linéarisé  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est post-traité à l'aide d'un modèle d'endommagement/rupture par champ de phase pour évaluer la densité d'énergie élastique positive (active)  $\psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon})$  correspondant à la partie endommagée de la densité d'énergie élastique  $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \phi)$  définie en (1.13). Cette densité d'énergie élastique positive est calculée comme  $\psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = 1/2(\boldsymbol{\varepsilon}^+ : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^+)$  en considérant le modèle de décomposition de l'énergie élastique de He. La force critique  $f_c$  qui précède l'amorçage de fissure est ensuite calculée (pour  $f = 1$  N) comme

$$f_c = \sqrt{\frac{\psi_c}{a}} \quad \text{avec} \quad a = \frac{\max(\psi_0^+)}{f^2} \quad \text{et} \quad \psi_c = \frac{3G_c}{16\ell_c}. \quad (3.65)$$

Pour évaluer correctement cette force critique, il est essentiel de déterminer la longueur de régularisation critique  $\ell_c$ . Initialement perçue comme un simple paramètre numérique de régularisation dans les modèles d'endommagement par champ de phase [Miehe et al. 2010b], la longueur de régularisation  $\ell$  est désormais considérée comme un paramètre intrinsèque au matériau [Amor et al. 2009, Pham et al. 2011, Borden et al. 2012, Nguyen et al. 2016] dans la mesure où  $\ell$  a une influence sur la contrainte de rupture critique  $\sigma_c$ . La longueur critique  $\ell_c$  peut être déterminée en considérant la solution analytique d'un problème de rupture quasi-statique 1D d'une barre élastique isotrope et homogène soumise en traction uniaxiale [Wu et al. 2020a, Tableaux 5 et

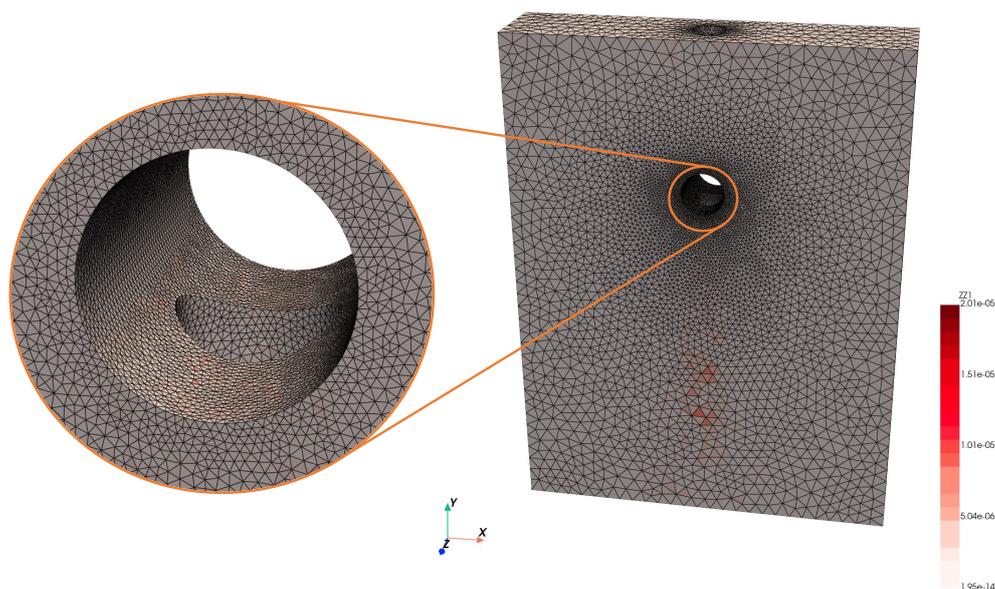
6], telle que

$$\ell_c = \frac{3 E G_c}{8 \sigma_c^2}, \quad (3.66)$$

où  $\sigma_c$  est la contrainte critique de traction. Avec les propriétés  $E = E_T = 500$  MPa et  $G_c = 78.3$  N/m mentionnées dans l'équation (3.61), ainsi que  $\sigma_c = 1.7$  MPa [Chevalier et al. 2022], la longueur critique  $\ell_c$  est estimée à 5.08 mm, soit approximativement  $L/18$ .

Pour cette longueur critique  $\ell_c = 5.08$  mm, la force de compression critique  $f_c$ , évaluée à 0.35 kN via l'équation (3.65), est environ 6 fois plus faible que la force de compression expérimentale moyenne  $F_c = 2.25$  kN rapportée dans [Chevalier et al. 2022]. Plusieurs sources d'erreurs peuvent expliquer cette différence :

1. **Maillage** : En utilisant l'estimateur d'erreur globale ZZ1 [Zienkiewicz et Zhu 1987] basé sur une technique de lissage du champ de contraintes calculé par EF, on peut déterminer les contributions élémentaires à l'erreur de discrétisation dont la carte (répartition spatiale) est représentée sur la Figure 3.17. La contribution élémentaire maximale est estimée à  $2.01 \times 10^{-5}$  dans les éléments linéaires TETRA4 éloignés de la surface  $\Gamma_f$  sur laquelle le chargement est appliqué, tandis qu'une contribution élémentaire maximale de  $4.97 \times 10^{-6}$  est obtenue dans les éléments en contact avec la frontière  $\Gamma_f$ . Cela suggère que la différence entre les résultats des simulations numériques et les mesures expérimentales ne semble pas être due à la qualité du maillage EF.
2. **Conditions aux limites** : Les conditions aux limites appliquées diffèrent de celles utilisées dans [Chevalier et al. 2022], où la charge est appliquée via un ensemble vis-écrou noyé modélisé comme un solide unique en acier, avec des conditions de contact par frottement à l'interface entre le bois et l'écrou. Bien que, selon [Chevalier et al. 2022], « *le coefficient de frottement ne semble pas avoir une forte influence sur les résultats numériques* », le fait de ne pas prendre en compte explicitement les conditions de contact dans la simulation pourrait contribuer à l'écart observé entre  $f_c$  et  $\underline{F}_c$  (sans pour autant expliquer un rapport de 6 entre  $\underline{F}_c$  et  $f_c$ ).
3. **Comparaison des mesures** : Les forces de compression  $F_c$  mesurées dans [Chevalier et al. 2022], comprises entre 1.80 kN et 2.70 kN, correspondent aux forces pour lesquelles on observe une première perte de rigidité sur les courbes force-déplacement. Dans le cadre des simulations d'endommagement menées sur la plaque trouée en compression uniaxiale, présentées en sections 6.2 et 3.4 des chapitres 1 et 2 respectivement, la force critique  $F_c$  représente le niveau d'effort pour lequel la fissure régularisée par le champ d'endommagement  $\phi$  commence à se propager, i.e. lorsque  $\max(\phi) = 1$  (voir les Figures 1.15e, 1.16b et 2.32a). Dans le cadre des modèles de rupture/endommagement par champ de phase, les deux forces critiques  $F_c$  et  $f_c$  ne correspondent pas au même niveau d'effort :  $F_c$  correspond au chargement pour lequel la fissure commence à se propager (i.e. lorsque  $\max(\phi) = 1$ ), tandis que  $f_c$  représente la force de compression précédant l'amorçage de la fissure, lorsque le champ d'endommagement  $\phi$  n'a



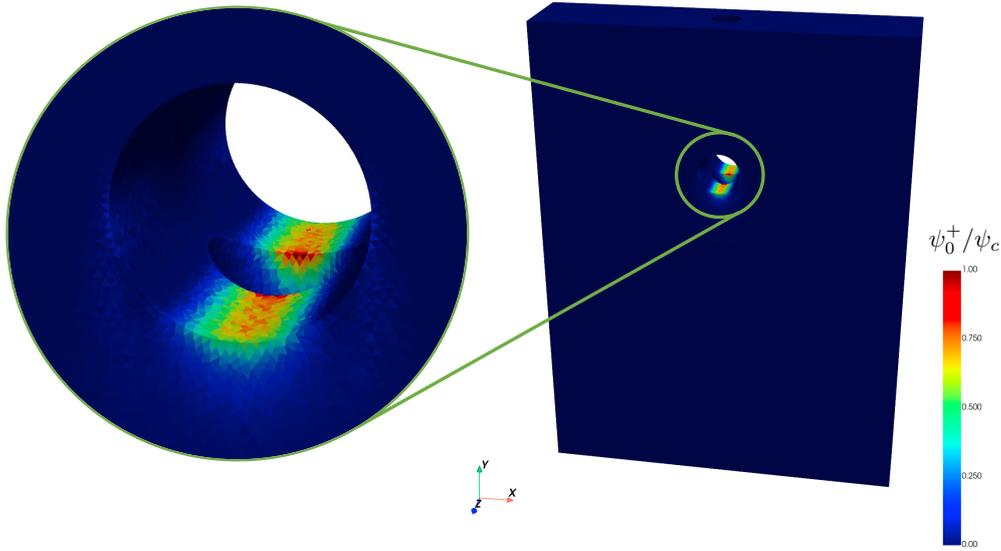
**FIGURE 3.17** – Carte des contributions élémentaires à l'erreur de discrétisation obtenue avec l'estimateur d'erreur globale ZZ1 [Zienkiewicz et Zhu 1987] pour évaluer la qualité du maillage EF. Pour plus d'informations sur l'implémentation de l'estimateur d'erreur globale ZZ1 dans le cadre de la MEF, on pourra consulter la section IX.2.3 du cours *Calcul des structures par éléments finis* d'Antoine Legay [Legay 2021], ainsi que la fonction `_Calc_ZZ1()` du script `EasyFEA/simulations/_elastic.py`.

pas encore commencé à évoluer (i.e. lorsque  $\max(\psi_0^+) \leq \psi_c$  ou de manière équivalente  $\max(\phi) = 0$ ).

Finalement, la Figure 3.18 représente la carte du champ scalaire normalisé  $\psi_0^+/\psi_c$  qui permet d'identifier les éléments du maillage susceptibles de se fissurer, sans avoir recours à des simulations d'endommagement coûteuses en temps de calcul. Pour une charge critique  $f_c = 0.35$  kN, les éléments du maillage EF représentés en rouge sur la Figure 3.18 (correspondant à  $\psi_0^+/\psi_c = 1$ ) indiquent la zone potentielle d'amorçage de fissure pour une force appliquée  $f$  supérieure à  $f_c$ , qui est située au centre de l'échantillon (en  $x = L/2 = 45$  mm), à l'intersection des deux perçages. Cette observation a été confirmée expérimentalement, comme illustré à droite sur la Figure 2 en page 3 de l'introduction, où l'enfoncement de l'écrou noyé dans la pièce est à l'origine de la fissure verticale.

En résumé, le processus d'évaluation de la force critique  $f_c$  précédant l'amorçage de fissure s'articule en plusieurs étapes :

1. Calcul de la densité d'énergie élastique critique  $\psi_c$  à partir de l'équation (3.55), en tenant compte du taux de restitution d'énergie critique  $G_c$  et de la longueur de régularisation critique  $\ell_c$ ;
2. Application des conditions aux limites et résolution du système d'équations



**FIGURE 3.18** – Essai de compression 3D : carte du champ de densité d'énergie élastique positive normalisée  $\psi_0^+/\psi_c$ , avec un zoom autour du trou débouchant, pour une charge de compression critique  $f_c = 0.35$  kN.

- (3.64) par la MEF, suivie du post-traitement du champ de déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ;
3. Calcul de la densité d'énergie élastique positive (active)  $\psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon})$  sur les éléments du maillage EF, conformément au modèle de décomposition de l'énergie élastique considéré (voir section 3 du chapitre 1) ;
  4. Évaluation du chargement critique ( $u_c$  ou  $f_c$ ) précédant l'amorçage de la fissure, conformément à l'équation (3.59) formulée en déplacement, ou à l'équation (3.65) formulée en effort.

Les étapes 1, 2 et 4 ne posent pas de difficultés particulières, mais la 3-ème étape s'avère plus complexe pour les modèles de décomposition reposant sur la décomposition spectrale du tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Une implémentation détaillée de ces décompositions en 2D et 3D est disponible dans l'Annexe A.

## 4.2 Approche probabiliste

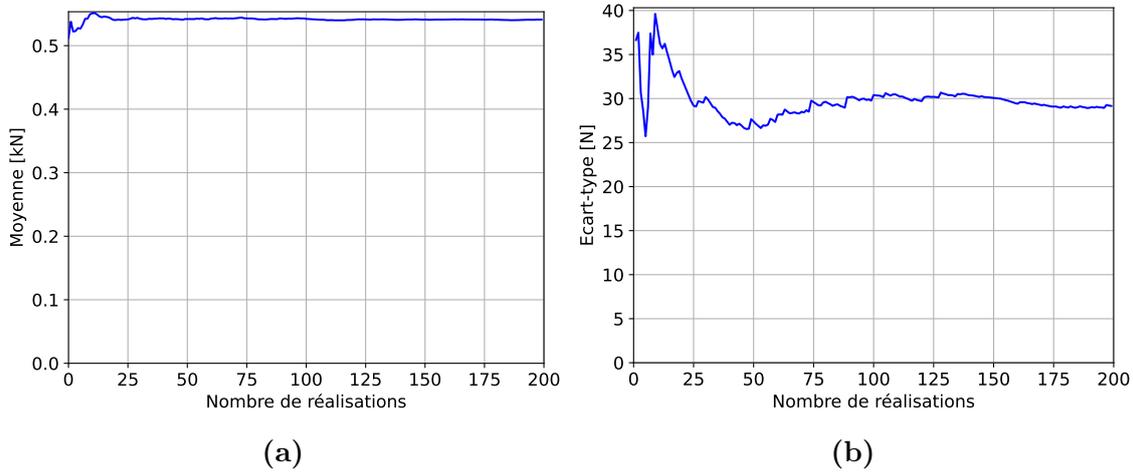
On considère la même géométrie, le même maillage et les mêmes conditions aux limites (avec une charge  $f = 1$  N) que pour la simulation du problème 3D d'élasticité linéaire conduite dans un cadre déterministe en section précédente (voir les Figures 3.15 et 3.16 et le système d'équations (3.64)).

Les simulations stochastiques sont réalisées avec le script `scripts/SIMU_FCBA_Sto.py` en considérant  $N = 200$  réalisations indépendantes de la variable aléatoire  $G_c$  et du vecteur aléatoire  $\mathbf{C}$  générées avec les générateurs aléatoires décrits en section 3.2. Pour chaque couple de réalisations  $(G_c^{(i)}, \mathbf{c}^{(i)})$  des variables aléatoires  $G_c$  et  $\mathbf{C}$ , la force de compression critique  $f_c^{(i)}$  est calculée en utilisant la procédure synthétisée

dans la section précédente, qui requiert la résolution du problème aux limites 3D d'élasticité linéaire (3.64). La longueur de régularisation critique  $\ell_c^{(i)}$  est alors calculée conformément à l'équation (3.66) comme

$$\ell_c^{(i)} = \frac{3 E_T^{(i)} G_c^{(i)}}{8 \sigma_c^2}, \quad (3.67)$$

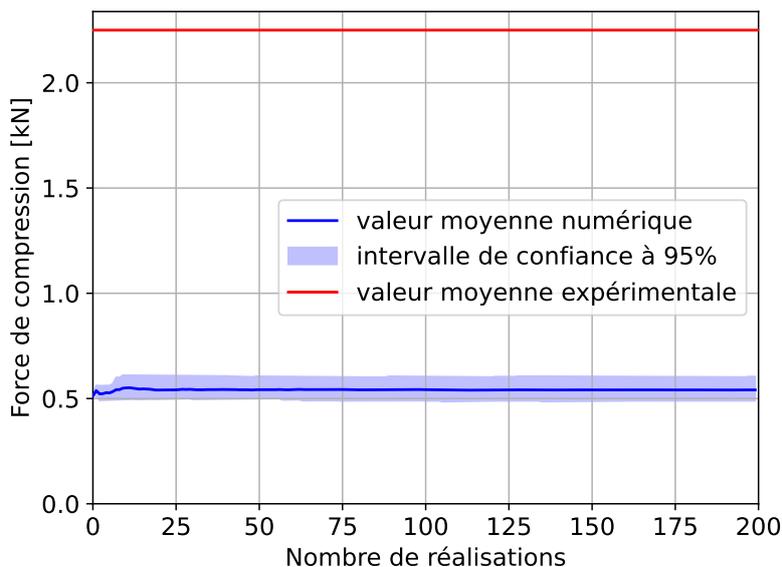
où le module d'Young transverse  $E_T^{(i)}$  est évalué numériquement à partir des coefficients  $c_1^{(i)}, \dots, c_5^{(i)}$  en utilisant l'équation (3.18), et la contrainte critique de traction  $\sigma_c = 1.7$  MPa [Chevalier et al. 2022]. On définit  $\mathcal{F}_c = \{f_c^{(i)}, i = 1, \dots, N\}$  comme l'ensemble des  $N$  réalisations indépendantes de la variable aléatoire  $F_c$  obtenues à l'issue des  $N = 200$  simulations du problème 3D d'élasticité linéaire (3.64). Les évolutions des estimations statistiques de la valeur moyenne  $\hat{m}_{F_c}$  et de l'écart-type  $\hat{\sigma}_{F_c}$  de la variable aléatoire  $F_c$  calculées à partir des données simulées numériquement  $\mathcal{F}_c$  sont représentées sur la Figure 3.19 en fonction du nombre de réalisations  $N$  allant de 1 à 200. On constate que 175 réalisations semblent suffisant pour atteindre



**FIGURE 3.19** – Analyse de convergence : évolutions des estimations statistiques de (a) la valeur moyenne  $\hat{m}_{F_c}$  et de (b) l'écart-type  $\hat{\sigma}_{F_c}$  de la variable aléatoire  $F_c$ , en fonction du nombre de réalisations  $N$  variant de 1 à 200.

la convergence des estimations statistiques de la valeur moyenne  $\hat{m}_{F_c}$  (voir Figure 3.19a) et de l'écart-type  $\hat{\sigma}_{F_c}$  (voir Figure 3.19b), qui sont respectivement évaluées à 0.54 kN et 29 N pour  $N = 200$  réalisations.

Les évolutions des estimations statistiques de l'intervalle de confiance à 95% et de la valeur moyenne pour la force de compression aléatoire  $F_c$  simulée numériquement est représentée sur la Figure 3.20. Comme attendu, l'estimation de la force moyenne de compression critique  $\hat{m}_{F_c} = 0.54$  kN est inférieure à la force moyenne expérimentale  $\underline{F}_c = 2.25$  kN rapportée dans [Chevalier et al. 2022], car la variable aléatoire  $F_c$  modélise la force critique précédant l'amorçage de la fissure, tandis que la force  $F_c$  mesurée expérimentalement correspond à l'initiation de la propagation de fissure



**FIGURE 3.20** – Analyse de convergence : évolutions de l’intervalle de confiance à 95% et de la valeur moyenne en fonction du nombre de réalisations  $N$  variant de 1 à 200, pour la force de compression aléatoire  $F_c$  simulée numériquement (en bleu), avec la force moyenne expérimentale  $\underline{F}_c$  (en rouge).

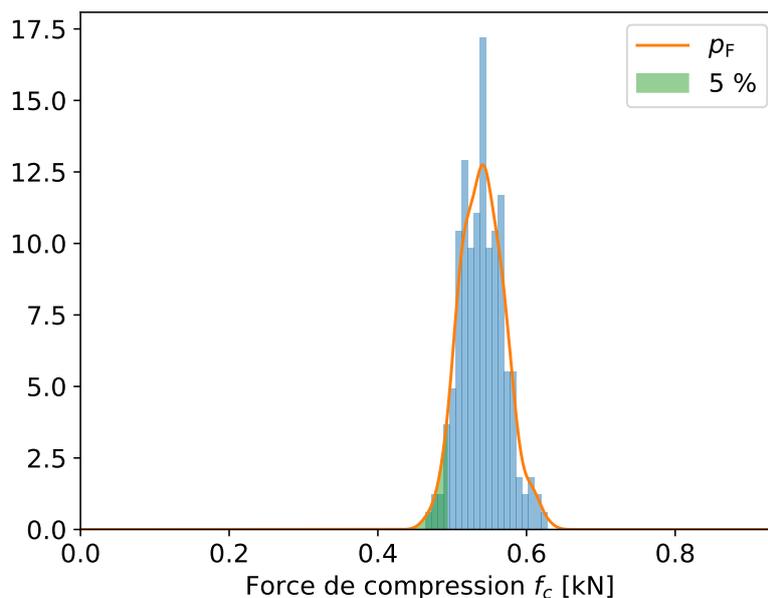
(voir les explications sur la comparaison des mesures en page 130 de la section 4.1).

Enfin, des approximations de la pdf  $p_{F_c}$  de la force de compression critique aléatoire  $F_c$  sont représentées sur la Figure 3.21 en construisant d’une part l’histogramme des 200 réalisations de  $F_c$ , et d’autre par l’estimation non-paramétrique calculée par la méthode d’estimation de la densité par noyau gaussien (ou KDE pour *Kernel Density Estimation* en anglais) [Bowman et Azzalini 1997, Horová et al. 2012, Givens et Hoeting 2013, Scott 2015]. La force critique  $f_{5\%}$  est calculée numériquement de sorte que :

$$F_{F_c}(f_{5\%}) = \int_{-\infty}^{f_{5\%}} p_{F_c}(t) dt = 0.05, \quad (3.68)$$

indiquant que 95% des échantillons resteront intacts pour des forces inférieures à 0.49 kN.

Pour conclure, nous avons mis en œuvre un procédé (ou processus) numérique permettant d’évaluer la force d’amorçage de fissure, à partir de simples calculs élastiques combinés à un critère d’endommagement pour déterminer si une fissure pourrait s’initier dans l’échantillon. Ce processus, résumé à la fin de la section 4.1, présente l’avantage d’être facilement adaptable par l’Institut technologique FCBA pour analyser d’autres géométries, telles que des assemblages avec plusieurs écrous noyés.



**FIGURE 3.21** – Histogramme des réalisations de la force de compression critique aléatoire  $F_c$  (en bleu), superposé à l’estimation non-paramétrique de la pdf  $p_{F_c}$  de la variable aléatoire  $F_c$  calculée par la méthode d’estimation par noyau gaussien (KDE) à partir des réalisations et représentée par la ligne orange.

## 5 Disponibilité des données

Les données expérimentales (sans les images) fournies dans [Noel et al. 2024] et les scripts Python utilisés dans ce chapitre sont accessibles en open source sur GitLab ou sur Software Heritage. Pour reproduire les résultats des simulations, il est nécessaire d’installer la bibliothèque EasyFEA à la version 1.2.6 pour Python 3.11.8.

## 6 Conclusions

Ce troisième chapitre présente les modèles probabilistes mis en œuvre pour prendre en compte les incertitudes (ou fluctuations statistiques) observées expérimentalement sur les propriétés élastiques et d’endommagement de l’épicéa dans le chapitre 2. Les paramètres de ces modèles stochastiques, construits selon le principe du maximum d’entropie (MaxEnt) présenté en section 1, ont été identifiés en section 2 en utilisant des méthodes d’inférence/estimation statistique. Dans ces modèles, le taux de restitution d’énergie critique  $G_c$  est modélisé par une variable aléatoire  $G_c$  à valeurs positives (dans  $\mathbb{R}^+$ ), et la matrice d’élasticité aléatoire  $[\mathbf{C}]$  est représentée par un vecteur aléatoire  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_5)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^5$  modélisant les propriétés élastiques dans la classe de symétrie isotrope transverse. Les variables aléatoires  $G_c$ ,  $C_4$  et  $C_5$  (statistiquement indépendantes et distribuées suivant des lois Gamma) sont simulées à l’aide d’un générateur de réalisations indépendantes pour la distribution

Gamma. Les variables aléatoires  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  (statistiquement dépendantes) sont quant à elles simulées via à un algorithme MCMC de type Metropolis-Hastings introduit en section 2.2 et illustré en Annexe D. Ces modèles probabilistes sont ensuite utilisés en section 3 pour modéliser de manière probabiliste la rupture fragile par champ de phase d'échantillons d'épicéa soumis à une charge de compression uniaxiale déterministe. Une procédure permettant d'accélérer les simulations d'endommagement est proposée, réduisant jusqu'à cinq fois le nombre d'itérations préalablement nécessaires aux simulations réalisées dans un cadre déterministe, en section 3.4 du chapitre 2. Cette approche repose sur un critère d'amorçage de fissure, exploitant une propriété du modèle de régularisation de l'énergie de rupture AT1, qui présente un régime purement élastique avant l'amorçage de la fissure. Dans le cadre des modèles de rupture/endommagement par champ de phase (PFM), ce critère permet avec une seule itération de chargement dans une simulation d'endommagement (sous réserve d'être dans le régime élastique du matériau), d'identifier le chargement critique (en déplacement ou en effort) qui précède l'amorçage de la fissure régularisée par le champ d'endommagement  $\phi$ . Ce critère pourrait également être utilisé pour réduire le temps de calcul inhérent à l'identification du taux de restitution d'énergie critique  $G_c$  menée dans le chapitre 2. Cette méthode est ensuite employée pour réaliser 1 000 simulations d'endommagement sur la plaque trouée en compression, afin de reproduire les fluctuations statistiques observées expérimentalement sur la force critique d'initiation de fissure, et évaluer la probabilité d'amorçage de fissure. Enfin, des simulations numériques d'un problème d'élasticité linéaire menées dans un cadre déterministe et probabiliste en section 4 portent sur une géométrie 3D complexe inspirée de [Chevalier et al. 2022] (échantillons d'épicéa troués soumis en compression via un système vis-écrou noyé). Les résultats de ces simulations montrent que le critère d'amorçage de fissure permet de localiser l'amorce de fissure à partir d'un simple calcul élastique et d'estimer l'effort ou le déplacement nécessaire à son initiation.

# Conclusions

Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre le Laboratoire [MSME](#) et l'Institut technologique [FCBA](#), une structure qui accompagne les industriels de l'ameublement dans la commercialisation de leurs produits, notamment via la réalisation d'essais de validation normalisés. L'objectif principal de ce travail de recherche était de contribuer au développement d'outils de modélisation et de simulation numérique permettant d'anticiper la rupture par fissuration dans le bois observée lors de ces essais. Pour répondre à cet objectif, trois axes majeurs ont été explorés :

1. Le développement et l'implémentation d'une méthode numérique flexible et robuste pour modéliser et simuler la rupture par fissuration dans les matériaux élastiques anisotropes.
2. La mise en place d'une procédure d'identification basée sur des mesures expérimentales et des résultats de simulations numériques pour caractériser les propriétés élastiques et d'endommagement (ou de rupture) de l'épicéa.
3. La prise en compte des incertitudes liées à ces propriétés matériaux pour obtenir des prédictions robustes de la force critique d'initiation de fissure dans des échantillons troués en bois d'épicéa soumis en compression.

Le premier volet de la thèse s'est concentré sur l'implémentation numérique, dans le cadre de la méthode des éléments finis, des modèles de rupture/endommagement par champ de phase, pour les matériaux élastiques isotropes et anisotropes en 2D et 3D. Les simulations conduites, notamment celles menées sur les essais de compression uniaxiale sur la plaque trouée, illustrent les limitations des modèles de décomposition applicables aux matériaux isotropes et anisotropes. Le modèle de décomposition de l'énergie élastique de [He](#) semble être le plus adapté pour reproduire l'initiation de la fissuration dans les matériaux élastiques anisotropes comme le bois d'épicéa.

Le second volet de la thèse a porté sur l'identification des propriétés élastiques et d'endommagement du bois d'épicéa. Une campagne d'essais a été réalisée sur 18 échantillons d'épicéa troués soumis en compression pour reproduire les mécanismes de fissuration observés dans les connexions de lits hauts. Les champs de déplacement expérimentaux et les forces critiques d'initiation de la propagation de fissure mesurés par corrélation d'images numériques ont été utilisés pour identifier, à l'aide de la méthode [FEMU](#), les paramètres des modèles d'élasticité (dans la classe de symétrie isotrope transverse) et d'endommagement employés pour représenter le comportement élastique endommageable de l'épicéa. Le modèle d'endommagement pour la rupture fragile en régime (quasi-)statique, avec les paramètres matériaux identifiés, n'a pas été

en mesure de reproduire l'adoucissement observé expérimentalement sur la réponse force-déplacement après l'initiation de la fissuration. Toutefois, le modèle de champ de phase utilisé (adapté aux matériaux élastiques anisotropes) a permis de simuler et prédire l'initiation de la propagation d'une fissure dans une éprouvette en bois d'épicéa.

Finalement, le troisième et dernier volet de la thèse présente des modèles probabilistes ad hoc du tenseur d'élasticité aléatoire (presque sûrement dans la classe de symétrie isotrope transverse) et du taux de restitution d'énergie critique aléatoire (presque sûrement positif) pour la rupture fragile par champ de phase dans un cadre stochastique, afin de prendre en compte les incertitudes (ou fluctuations statistiques) observées expérimentalement sur les propriétés élastiques et d'endommagement de l'épicéa. Les modèles probabilistes ont été construits par le principe du [MaxEnt](#) pour satisfaire les propriétés algébriques et statistiques requises du tenseur d'élasticité aléatoire et du taux de restitution d'énergie critique aléatoire. Les paramètres des modèles probabilistes ont été identifiés en utilisant des méthodes d'inférence/estimation statistique comme la méthode des moindres carrés et la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance. Une procédure est mise en œuvre pour accélérer les simulations, permettant d'identifier un critère d'amorçage de fissure. Ce critère, appliqué aux échantillons d'épicéa troués soumis à un chargement complexe de compression via un système vis-écrou noyé, permet de prédire l'emplacement de l'amorce de fissure et d'estimer l'effort nécessaire à son initiation. En outre, la procédure mise en œuvre permet d'évaluer la probabilité d'amorçage d'une fissure en fonction de la charge appliquée.

Les contributions scientifiques de cette thèse reposent sur l'intégration de plusieurs modèles et outils issus de divers champs de recherche afin de répondre à la problématique industrielle suivante : « *Comment prédire la tenue mécanique des connexions entre éléments de meubles lors des tests de validation normalisés ?* ». Ce travail combine les approches de la mécanique de la rupture et de l'endommagement, l'identification inverse de propriétés matériaux, ainsi que la quantification et la modélisation des incertitudes pour tenter d'apporter des éléments de réponse à cette question.

En confrontant les résultats numériques obtenus avec les modèles d'endommagement par champ de phase aux mesures expérimentales, notamment lors des essais de compression réalisés sur des échantillons en bois d'épicéa troués, il a été observé que le modèle utilisé ne reproduit pas fidèlement le comportement adoucissant observé expérimentalement sur les courbes force-déplacement après l'amorçage de la fissure.

Sur le plan pratique et industriel, cette thèse fournit au [FCBA](#) un outil de modélisation et de simulation capable de prédire l'emplacement et la charge critique d'amorçage d'une fissure. Bien que l'étude se soit concentrée sur des échantillons de bois soumis à une charge de compression uniaxiale, l'extension de cet outil à d'autres géométries, matériaux et conditions de chargement est tout à fait réalisable, mais relève davantage d'un travail d'ingénierie que de recherche.

Par ailleurs, le travail réalisé a conduit au développement d'un code de calcul par éléments finis open source en Python [[Noel 2024](#)], intégrant notamment les modèles

d'endommagement/rupture par champ de phase ainsi que les outils de corrélation d'images numériques.

Ce travail de thèse repose sur certaines hypothèses et présente des limites.

En ce qui concerne les hypothèses de modélisation, les propriétés élastiques et d'endommagement du bois d'épicéa constituant les échantillons ont été supposées homogènes à l'échelle de la planche et le bois d'épicéa a été modélisé comme un matériau élastique linéaire de la classe de symétrie isotrope transverse. Ce choix de modélisation ne prend pas en compte la variabilité naturelle du matériau, notamment la porosité qui varie entre le bois précoce du printemps (bois clair) et le bois tardif de la fin de l'été (bois sombre), conduisant à un comportement hétérogène et orthotrope [Bodig et Jayne 1993, Winandy 1994, Harrington 2002].

Concernant les modèles numériques, bien que les modèles de décomposition de l'énergie élastique pour les matériaux anisotropes aient été développés et comparés, aucune direction préférentielle pour la propagation de la fissure n'a été considérée dans l'énergie de rupture/fissuration régularisée par champ de phase [Teichtmeister et al. 2017, Nguyen et al. 2017, Bleyer et Alessi 2018, Li et Maurini 2019].

À propos des essais expérimentaux, un prélèvement d'échantillons sur un plus grand nombre de traverses aurait permis d'obtenir des estimations statistiques plus précises et robustes sur les propriétés élastiques et d'endommagement du bois d'épicéa. De plus, un positionnement plus optimal de la caméra lors de la réalisation des essais expérimentaux et un meilleur contrôle de l'éclairage lors de la capture des images contribueraient à améliorer la qualité des mesures de champs cinématiques obtenues via la corrélation d'images numériques.

Ces limites ouvrent de nouvelles perspectives intéressantes pour des recherches futures, tant sur le plan industriel que scientifique. Du côté des applications industrielles, plusieurs axes pourraient être explorés par le FCBA :

- S'approprier les outils numériques développés pour prédire la tenue mécanique des connexions de lits hauts (influence d'une ou deux vis, taille du trou, etc.).
- Appliquer le critère d'amorçage à d'autres géométries, matériaux et conditions de chargement, par exemple dans le cas de la rupture par arrachement dans les panneaux de particules.
- Mener des campagnes d'essais supplémentaires afin d'identifier les propriétés mécaniques d'autres matériaux à base de bois comme les panneaux de particules et le contreplaqué.

Sur le plan scientifique, plusieurs pistes de recherche mériteraient d'être approfondies :

- Intégrer des modèles d'anisotropie de fissuration plus complexes, prenant en compte des directions préférentielles dans l'énergie de rupture régularisée par champ de phase pour la propagation des fissures dans le bois [Yin et Kaliske 2020, Pech et al. 2022a].
- Intégrer un modèle de zone cohésive régularisée par champ de phase pour parvenir à reproduire l'adoucissement observé expérimentalement après l'amorçage de la fissure [Wu 2017, Wu 2018].

- Étendre la procédure d'identification des propriétés d'endommagement à d'autres types d'échantillons, comme les éprouvettes *Compact Tension* (CT) et *Compact Tension Shear* (CTS) [Pham et al. 2017, Corre et Lazarus 2021].

Ces perspectives offrent de nombreuses pistes prometteuses pour approfondir et étendre ce travail, que ce soit dans un cadre académique ou industriel.

# Annexe A

## Implémentation des projecteurs

La loi de comportement linéaire élastique  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}$  peut être exprimée sous la forme matricielle  $[\boldsymbol{\sigma}] = [\mathbb{C}_0] [\boldsymbol{\varepsilon}]$ . En 3D, la loi de comportement s'écrit dans la notation de Kelvin-Mandel comme

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \sqrt{2}C_{1123} & \sqrt{2}C_{1113} & \sqrt{2}C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & \sqrt{2}C_{2223} & \sqrt{2}C_{2213} & \sqrt{2}C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & \sqrt{2}C_{3323} & \sqrt{2}C_{3313} & \sqrt{2}C_{3312} \\ \sqrt{2}C_{2311} & \sqrt{2}C_{2322} & \sqrt{2}C_{2333} & 2C_{2323} & 2C_{2313} & 2C_{2312} \\ \sqrt{2}C_{1311} & \sqrt{2}C_{1322} & \sqrt{2}C_{1333} & 2C_{1323} & 2C_{1313} & 2C_{1312} \\ \sqrt{2}C_{1211} & \sqrt{2}C_{1222} & \sqrt{2}C_{1233} & 2C_{1223} & 2C_{1213} & 2C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

et en 2D, elle s'écrit comme

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & \sqrt{2}C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & \sqrt{2}C_{2212} \\ \sqrt{2}C_{1211} & \sqrt{2}C_{1222} & 2C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Sous l'hypothèse des contraintes planes en 2D, il est important de noter que les coefficients  $C_{ijkl}$  diffèrent de ceux utilisés en 3D.

### 1 Projecteurs en parties sphérique et déviatorique

Les modèles de décomposition isotropes introduits en sections 3.2 et 3.3 décomposent le tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en parties sphérique  $\boldsymbol{\varepsilon}_S$  et déviatorique  $\boldsymbol{\varepsilon}_D$  comme

$$\boldsymbol{\varepsilon}_S(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{d} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} = \mathbb{P}_S : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_D(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_S(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbb{P}_D : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (\text{A.3})$$

Il est possible de définir ces projecteurs sous la forme matricielle telle que

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_S] = [\mathbb{P}_S] [\boldsymbol{\varepsilon}] \quad \text{et} \quad [\boldsymbol{\varepsilon}_D] = [\mathbb{P}_D] [\boldsymbol{\varepsilon}]. \quad (\text{A.4})$$

Les projecteurs  $[\mathbb{P}_S]$  et  $[\mathbb{P}_D]$  sont définis en 2D comme

$$[\mathbb{P}_S] = \frac{1}{d} [\mathbf{I}] \otimes [\mathbf{I}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\mathbb{P}_D] = [\mathbb{I}] - [\mathbb{P}_S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

où

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbb{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

En 3D, les projecteurs sont construits comme

$$[\mathbb{P}_S] = \frac{1}{d} [\mathbf{I}] \otimes [\mathbf{I}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7a})$$

$$[\mathbb{P}_D] = [\mathbb{I}] - [\mathbb{P}_S] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7b})$$

où

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbb{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

## 2 Projecteurs en parties positive et négative pour la décomposition spectrale

La décomposition spectrale de [Miehe et al. 2010a] introduite en section 3.4 sépare le tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en parties positive et négative  $\boldsymbol{\varepsilon}^\pm$  (correspondant à des déformations de traction et de compression), de sorte que

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{a=1}^d \varepsilon_a \mathbf{v}_a \otimes \mathbf{v}_a = \sum_{a=1}^d \varepsilon_a \mathbf{M}_a, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^\pm = \sum_{a=1}^d \langle \varepsilon_a \rangle_\pm \mathbf{M}_a = \mathbb{P}^\pm : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (\text{A.9})$$

avec  $\varepsilon_a$  et  $\mathbf{M}_a = \mathbf{v}_a \otimes \mathbf{v}_a$  les valeurs propres de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et les projecteurs propres orthonormés associés.

## 2.1 Calcul analytique des valeurs propres et des projecteurs propres d'un tenseur symétrique

Les valeurs propres et projecteurs propres sont obtenus analytiquement en utilisant les travaux de [He et Shao 2019, Nguyen et al. 2020] en 2D et [He 2018] en 3D. L'approche adoptée permet d'exprimer les valeurs propres et projecteurs propres en fonction des invariants du tenseur d'ordre 2 symétrique  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (ou  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  ou encore  $\boldsymbol{\sigma}_0$ ).

### 2.1.1 Définition des projecteurs en 2D

Les valeurs propres sont définies comme

$$\varepsilon_1 = \frac{I_1 - \sqrt{I_2^2 - 4I_2}}{2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{I_1 + \sqrt{I_2^2 - 4I_2}}{2}, \quad (\text{A.10})$$

où  $I_1$  et  $I_2$  sont les deux invariants du tenseur  $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad I_2 = \det(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (\text{A.11})$$

Finalement, les projecteurs propres sont construits tels que

$$\mathbf{M}_1 = \frac{\boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_2 \mathbf{I}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{M}_1 \quad \text{si } \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2, \quad (\text{A.12a})$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{si } \varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad (\text{A.12b})$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité 2D et où  $\mathbf{M}_a$  peut s'écrire sous la forme matricielle ou vectorielle comme

$$\mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} M_a^{11} & M_a^{12} \\ M_a^{12} & M_a^{22} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{M}_a] = \begin{bmatrix} M_a^{11} \\ M_a^{22} \\ \sqrt{2}M_a^{12} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

### 2.1.2 Définition des projecteurs en 3D

Les invariants du tenseur  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sont définis comme

$$I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad I_2 = \frac{1}{2} (\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})^2 - \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)), \quad I_3 = \det(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (\text{A.14})$$

On définit deux fonctions  $g$  et  $\theta$  en fonction de ces invariants

$$g(I_1, I_2) = I_1^2 - 3I_2, \quad (\text{A.15})$$

$$\theta(I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{2I_1^3 - 9I_1I_2 + 27I_3}{2g^{3/2}} \right) \quad \text{avec } 0 \leq \theta \leq \pi/3, \quad (\text{A.16})$$

sous la condition  $g \neq 0$ , et où  $\theta$  est l'angle de Lode utilisé en mécanique. On peut montrer que

$$g(I_1, I_2) = I_1^2 - 3I_2 = \frac{1}{2} ((\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2). \quad (\text{A.17})$$

Ainsi,  $g = 0 \iff \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = I_1/3$ . Dans le cas contraire ( $g \neq 0$ ), les valeurs propres dans l'ordre croissant sont données par

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{3}I_1 + \frac{2}{3}g^{1/2} \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right), \quad (\text{A.18})$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{3}I_1 + \frac{2}{3}g^{1/2} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right), \quad (\text{A.19})$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{3}I_1 + \frac{2}{3}g^{1/2} \cos(\theta). \quad (\text{A.20})$$

On distingue quatre situations en fonction des valeurs de  $g$  et  $\theta$  permettant de calculer analytiquement les projecteurs propres orthonormés. En 3D, les projecteurs sont définis sous la forme matricielle  $\mathbf{M}_a$  ou vectorielle  $[\mathbf{M}_a]$  comme

$$\mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} M_a^{11} & M_a^{12} & M_a^{13} \\ M_a^{12} & M_a^{22} & M_a^{23} \\ M_a^{13} & M_a^{23} & M_a^{33} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{M}_a] = \begin{bmatrix} M_a^{11} \\ M_a^{22} \\ M_a^{33} \\ \sqrt{2}M_a^{23} \\ \sqrt{2}M_a^{13} \\ \sqrt{2}M_a^{12} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

Quatre cas distincts doivent être pris en compte pour construire analytiquement les projecteurs propres  $\mathbf{M}_a$  sous forme matricielle, en fonction des valeurs propres  $\varepsilon_a$  :

**1. Cas de trois valeurs propres distinctes**  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$  ( $g \neq 0$  et  $\theta \in ]0, \pi/3[$ )

$$\mathbf{M}_a = \prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^3 \frac{\varepsilon - \varepsilon_b \mathbf{I}}{\varepsilon_a - \varepsilon_b} \quad \text{pour } a = 1, 2, 3, \quad (\text{A.22})$$

avec  $\mathbf{I}$  la matrice identité 3D.

**2. Cas d'une valeur propre maximale double**  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 = \varepsilon_3$  ( $g \neq 0$  et  $\theta = \pi/3$ )

$$\mathbf{M}_1 = g^{-1/2} \left( \frac{1}{3} (I_1 - g^{1/2}) \mathbf{I} - \varepsilon \right), \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_3 = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{M}_1). \quad (\text{A.23})$$

**3. Cas d'une valeur propre minimale double**  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 < \varepsilon_3$  ( $g \neq 0$  et  $\theta = 0$ )

$$\mathbf{M}_3 = g^{-1/2} \left( \varepsilon - \frac{1}{3} (I_1 - g^{1/2}) \mathbf{I} \right), \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{M}_3). \quad (\text{A.24})$$

**4. Cas de trois valeurs propres identiques**  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$  ( $g = 0$ )

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

## 2.2 Construction des projecteurs

Les projecteurs peuvent être construits en utilisant les travaux de [Miehe et Lambrecht 2001, Liu et al. 2016, Geelen et al. 2019, Ziaei-Rad et al. 2023].

### 2.2.1 Projecteurs en 2D

En 2D, les projecteurs  $\mathbb{P}^\pm$  sont construits comme

$$\mathbb{P}^\pm = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^\pm}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \beta^\pm \mathbb{I} + \sum_{a=1}^2 \gamma_a^\pm \mathbf{M}_a \otimes \mathbf{M}_a \quad (\text{A.26})$$

et on peut distinguer deux cas :

#### 1. Cas de deux valeurs propres distinctes $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$

$$\beta^\pm = \frac{\langle \varepsilon_1 \rangle_\pm - \langle \varepsilon_2 \rangle_\pm}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \quad \gamma_a^\pm = d_a^\pm - \beta^\pm \quad (\text{A.27})$$

avec

$$d_a^\pm = \frac{\partial \langle \varepsilon_a \rangle_\pm}{\partial \varepsilon_a} = R^\pm(\varepsilon_a). \quad (\text{A.28})$$

#### 2. Cas de deux valeurs propres identiques $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2} \beta^\pm = d_1^\pm, \quad \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2} \gamma_a^\pm = d_a^\pm - d_1^\pm. \quad (\text{A.29})$$

Finalement, la représentation matricielle  $[\mathbb{P}^\pm]$  des projecteurs  $\mathbb{P}^\pm$  est définie en 2D comme

$$[\mathbb{P}^\pm] = \beta^\pm [\mathbb{I}] + \sum_{a=1}^2 \gamma_a^\pm [\mathbf{M}_a] \otimes [\mathbf{M}_a]. \quad (\text{A.30})$$

### 2.2.2 Projecteurs en 3D

En 3D, les projecteurs  $\mathbb{P}^\pm$  sont construits comme

$$\mathbb{P}^\pm = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^\pm}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{a=1}^3 d_a^\pm \mathbf{M}_a \otimes \mathbf{M}_a + \sum_{a=1}^3 \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^3 \vartheta_{ab}^\pm \mathbb{G}_{ab} \quad (\text{A.31})$$

avec

$$d_a^\pm = R^\pm(\varepsilon_a), \quad \vartheta_{ab}^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2} R^\pm(\varepsilon_a) & \text{lorsque } \varepsilon_a = \varepsilon_b, \\ \frac{\langle \varepsilon_a \rangle_\pm - \langle \varepsilon_b \rangle_\pm}{2(\varepsilon_a - \varepsilon_b)} & \text{lorsque } \varepsilon_a \neq \varepsilon_b \end{cases} \quad \text{et} \quad (\text{A.32})$$

$$\mathbb{G}_{ab}^{ijkl} = \mathbf{M}_a^{ik} \mathbf{M}_b^{jl} + \mathbf{M}_a^{il} \mathbf{M}_b^{jk}. \quad (\text{A.33})$$

Finalement, la représentation matricielle  $[\mathbb{P}^\pm]$  des projecteurs  $\mathbb{P}^\pm$  est définie en 3D comme

$$[\mathbb{P}^\pm] = \sum_{a=1}^3 d_a^\pm [\mathbf{M}_a] \otimes [\mathbf{M}_a] + \sum_{a=1}^3 \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^3 \vartheta_{ab}^\pm [\mathbb{G}_{ab}] \quad (\text{A.34})$$

avec

$$[\mathbb{G}_{ab}] = \begin{bmatrix} G_{ab}^{1111} & G_{ab}^{1122} & G_{ab}^{1133} & \sqrt{2}G_{ab}^{1123} & \sqrt{2}G_{ab}^{1113} & \sqrt{2}G_{ab}^{1112} \\ G_{ab}^{2211} & G_{ab}^{2222} & G_{ab}^{2233} & \sqrt{2}G_{ab}^{2223} & \sqrt{2}G_{ab}^{2213} & \sqrt{2}G_{ab}^{2212} \\ G_{ab}^{3311} & G_{ab}^{3322} & G_{ab}^{3333} & \sqrt{2}G_{ab}^{3323} & \sqrt{2}G_{ab}^{3313} & \sqrt{2}G_{ab}^{3312} \\ \sqrt{2}G_{ab}^{2311} & \sqrt{2}G_{ab}^{2322} & \sqrt{2}G_{ab}^{2333} & 2G_{ab}^{2323} & 2G_{ab}^{2313} & 2G_{ab}^{2312} \\ \sqrt{2}G_{ab}^{1311} & \sqrt{2}G_{ab}^{1322} & \sqrt{2}G_{ab}^{1333} & 2G_{ab}^{1323} & 2G_{ab}^{1313} & 2G_{ab}^{1312} \\ \sqrt{2}G_{ab}^{1211} & \sqrt{2}G_{ab}^{1222} & \sqrt{2}G_{ab}^{1233} & 2G_{ab}^{1223} & 2G_{ab}^{1213} & 2G_{ab}^{1212} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.35})$$

### 3 Construction des décompositions sous forme matricielle

Avec les projecteurs  $[\mathbb{P}_D]$  et  $[\mathbb{P}_S]$  définis en équations (A.5) en 2D et (A.7) en 3D, les parties positive/négative  $\mathbb{C}_0^\pm(\boldsymbol{\varepsilon})$  du tenseur d'élasticité  $\mathbb{C}_0$  pour le modèle de [Lancioni et Royer-Carfagni 2009] introduites en équation (1.25) (de la section 3.2 du chapitre 1) s'écrivent sous forme matricielle :

$$[\mathbb{C}_0^+(\boldsymbol{\varepsilon})] = 2\mu_0 [\mathbb{P}_D], \quad [\mathbb{C}_0^-(\boldsymbol{\varepsilon})] = K_0 d [\mathbb{P}_S]. \quad (\text{A.36})$$

La décomposition de [Amor et al. 2009] telle qu'introduite en équation (1.28) (de la section 3.3 du chapitre 1) s'écrit :

$$[\mathbb{C}_0^+(\boldsymbol{\varepsilon})] = K_0 R^+(\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})) d [\mathbb{P}_S] + 2\mu_0 [\mathbb{P}_D], \quad [\mathbb{C}_0^-(\boldsymbol{\varepsilon})] = K_0 R^-(\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})) d [\mathbb{P}_S]. \quad (\text{A.37})$$

Avec les projecteurs  $[\mathbb{P}^\pm]$  définis en équations (A.30) en 2D et (A.34) en 3D, la décomposition de [Miehe et al. 2010a] introduite en équation (1.34) (de la section 3.4 du chapitre 1) s'écrit :

$$[\mathbb{C}_0^+(\boldsymbol{\varepsilon})] = \lambda_0 R^+(\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})) d [\mathbb{P}_S] + 2\mu_0 [\mathbb{P}^+], \quad [\mathbb{C}_0^-(\boldsymbol{\varepsilon})] = \lambda_0 R^-(\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})) d [\mathbb{P}_S] + 2\mu_0 [\mathbb{P}^-]. \quad (\text{A.38})$$

La décomposition de [He et Shao 2019] introduite en équation (1.54) (de la section 3.7 du chapitre 1) s'écrit :

$$[\mathbb{C}_0^+(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}))] = [\mathbb{C}_0^{1/2}] \cdot \left( [\tilde{\mathbb{P}}^+] \cdot [\mathbb{C}_0^{1/2}] \right), \quad [\mathbb{C}_0^-(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}))] = [\mathbb{C}_0^{1/2}] \cdot \left( [\tilde{\mathbb{P}}^-] \cdot [\mathbb{C}_0^{1/2}] \right), \quad (\text{A.39})$$

où  $[\mathbb{C}_0^{1/2}]$  est la représentation matricielle de la racine carrée du tenseur d'élasticité  $\mathbb{C}_0$  définie en équation (1.47) et où  $[\tilde{\mathbb{P}}^\pm]$  sont les projecteurs définis en équation (1.49) et construits à partir du tenseur auxiliaire des déformations  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  défini en équation (1.46).

Finalement, le modèle de [Zhang et al. 2020] introduit en équation (1.57) (de la section 3.8 du chapitre 1) s'écrit :

$$[\mathbb{C}_0^+] = [\mathbb{P}^+] \cdot [\mathbb{C}_0], \quad [\mathbb{C}_0^-] = [\mathbb{P}^-] \cdot [\mathbb{C}_0] \quad (\text{A.40})$$

Il est important de noter que la notation de Kelvin-Mandel permet de construire les projecteurs spectraux selon la même procédure, que ce soit pour le tenseur des déformations auxiliaires  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  ou celui des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_0$ .

Les décompositions vérifient les relations suivantes :

$$[\mathbb{C}_0] = [\mathbb{C}_0^+] + [\mathbb{C}_0^-], \quad (\text{A.41a})$$

$$[\boldsymbol{\sigma}_0] = [\mathbb{C}_0^+] [\boldsymbol{\varepsilon}] + [\mathbb{C}_0^-] [\boldsymbol{\varepsilon}], \quad (\text{A.41b})$$

$$\frac{1}{2} [\boldsymbol{\varepsilon}]^T [\mathbb{C}_0] [\boldsymbol{\varepsilon}] = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\varepsilon}]^T [\mathbb{C}_0^+] [\boldsymbol{\varepsilon}] + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\varepsilon}]^T [\mathbb{C}_0^-] [\boldsymbol{\varepsilon}]. \quad (\text{A.41c})$$

Pour obtenir encore plus de détails sur l'implémentation numérique des projecteurs, on pourra consulter la fonction `Calc_C()` du script [EasyFEA/materials/\\_phasefield.py](#).

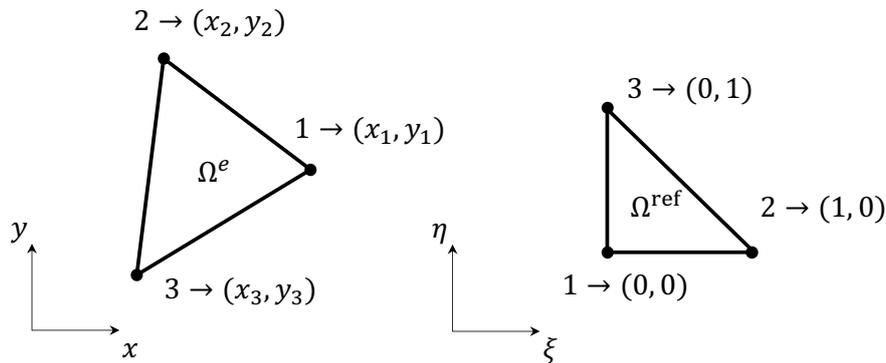


## Annexe B

# Intégration numérique

Cette annexe est un résumé de la section 6 du document pédagogique de M. Yves Debard qui est téléchargeable avec ce [lien](#).

L'application de la méthode des éléments finis nécessite l'évaluation d'intégrales sur chaque élément  $\Omega^e$ . Ces intégrales, qui ne sont parfois pas calculables analytiquement, peuvent être évaluées numériquement en utilisant un élément de référence  $\Omega^{\text{ref}}$ , tel que présenté dans la Figure B.1. La transformation géométrique de l'élément de



**FIGURE B.1** – Triangle linéaire à 3 nœuds réel  $\Omega^e$  et de référence  $\Omega^{\text{ref}}$

référence  $\Omega^{\text{ref}}$  vers l'élément physique/réel  $\Omega^e$  s'écrit comme

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} x(\boldsymbol{\xi}, \eta) \\ y(\boldsymbol{\xi}, \eta) \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad x(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i \quad \text{et} \quad y(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i, \quad (\text{B.1})$$

où  $x(\boldsymbol{\xi})$  et  $y(\boldsymbol{\xi})$  sont les coordonnées d'un point dans l'élément  $\Omega^e$ ,  $n$  est le nombre de nœuds par élément (ici  $n = 3$  pour un triangle linéaire **TRI3**),  $N_i(\boldsymbol{\xi})$  sont les fonctions de formes<sup>1</sup>,  $\xi$  et  $\eta$  sont les coordonnées d'un point dans l'élément de référence  $\Omega^{\text{ref}}$ , et  $x_i$  et  $y_i$  sont les coordonnées du nœud  $i$  de l'élément  $\Omega^e$ . Le gradient de cette

---

1. On pourra consulter les scripts disponibles dans le dossier [EasyFEA/fem/elems](#) pour plus de détails.

transformation  $\nabla [\Phi]$  est la matrice jacobienne transposée qui s'écrit pour un triangle à trois nœuds comme :

$$[J(\boldsymbol{\xi})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi}(\boldsymbol{\xi}) & \frac{\partial N_2}{\partial \xi}(\boldsymbol{\xi}) & \frac{\partial N_3}{\partial \xi}(\boldsymbol{\xi}) \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta}(\boldsymbol{\xi}) & \frac{\partial N_2}{\partial \eta}(\boldsymbol{\xi}) & \frac{\partial N_3}{\partial \eta}(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Le déterminant de la matrice jacobienne est appelé jacobien, il représente dans le cas d'un élément 2D, le rapport de surface entre l'élément réel et l'élément de référence comme

$$J(\boldsymbol{\xi}) = \det [J(\boldsymbol{\xi})] = \frac{d\Omega^e}{d\Omega^{\text{ref}}}. \quad (\text{B.3})$$

L'intégrale d'une fonction  $f(x, y)$  sur  $\Omega^e$  peut s'écrire sur l'élément de référence  $\Omega^{\text{ref}}$  comme

$$\int_{\Omega^e} f(x, y) d\Omega^e = \int_{\Omega^{\text{ref}}} J(\boldsymbol{\xi}) f(x(\boldsymbol{\xi}), y(\boldsymbol{\xi})) d\Omega^{\text{ref}}. \quad (\text{B.4})$$

Dans l'élément de référence, les intégrales sont évaluées numériquement comme

$$\int_{\Omega^{\text{ref}}} f(\xi, \eta) d\Omega^{\text{ref}} \approx \sum_{i=1}^p w_i f(\xi_i, \eta_i), \quad (\text{B.5})$$

où  $p$  représente le nombre de points d'intégration<sup>2</sup>,  $w_i$  est le poids du point d'intégration  $i$ , et  $\xi_i$  et  $\eta_i$  sont les coordonnées du point d'intégration  $i$ . Les coordonnées et les poids des points d'intégration sont listés dans des tableaux et sont par exemple disponibles avec ce [lien](#), ou peuvent être consultés (pour chaque élément implémenté) dans le script `EasyFEA/fem/_gauss.py`. Dans le cas de la formulation éléments finis du problème d'élasticité endommagée introduite en équation (1.78) du chapitre 1, on peut par exemple évaluer la matrice de rigidité élémentaire comme

$$[K_u^e] = b^e \int_{\Omega^e} [B_u^e(\mathbf{x})]^T [C^e(\mathbf{u}^e(\mathbf{x}), \phi^e(\mathbf{x}))] [B_u^e(\mathbf{x})] d\Omega^e \quad (\text{B.6a})$$

$$\approx b^e \sum_{i=1}^p J_i^e w_i [B_u^e(\boldsymbol{\xi}_i)]^T [C^e(\mathbf{u}^e(\boldsymbol{\xi}_i), \phi^e(\boldsymbol{\xi}_i))] [B_u^e(\boldsymbol{\xi}_i)], \quad (\text{B.6b})$$

où les dérivées des fonctions de forme  $\partial_x N_i$  et  $\partial_y N_i$ , utilisées dans  $[B_u^e(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_i))]$  en équation (1.75) sont définies comme

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

2. Le nombre de points d'intégration dépend de l'ordre des polynômes de Lagrange considérés dans les fonctions de forme  $N_i$ . Par exemple, une simulation d'endommagement avec des triangles `TRI3` nécessite 1 point d'intégration pour le problème en déplacement (1.78) et 3 points pour le problème d'endommagement (1.77).

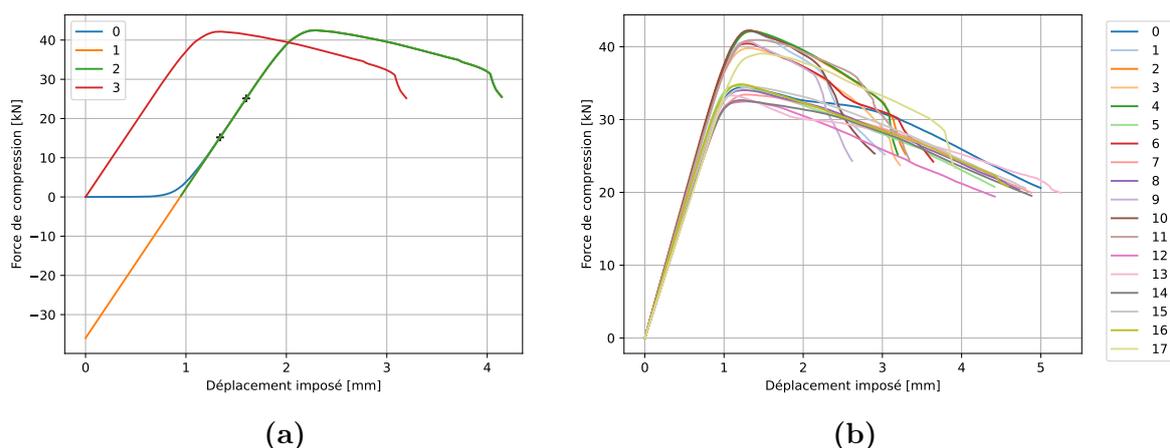
# Annexe C

## Post-traitement des courbes expérimentales

L'objectif de cette annexe est de décrire la procédure utilisée pour obtenir la courbe force-déplacement, représentée par une ligne bleue dans la Figure 2.32a, où la phase transitoire (illustrée sur la Figure 2.7a) a été supprimée. Les étapes mises en œuvre sont énumérées ci-dessous :

0. Importer la courbe expérimentale.
1. Remplacer la portion de courbe correspondant à une force inférieure à 15 kN par une droite affine, passant par deux points relevés pour 15 et 25 kN.
2. Supprimer la portion de courbe correspondant aux efforts négatifs (inférieurs à 0 kN).
3. Translater horizontalement la courbe pour que  $F_{\text{exp}} = 0$  soit en  $u_{\text{exp}} = 0$ .

Les étapes sont illustrées sur la Figure C.1a et les courbes de la Figure 2.4 sont redimensionnées pour tous les essais et affichées sur la Figure C.1b. On observe encore



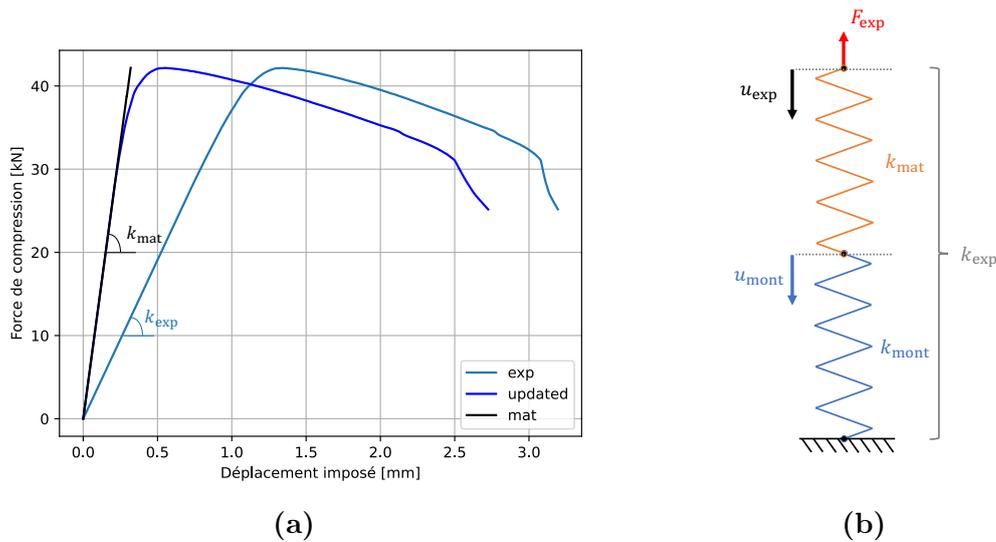
**FIGURE C.1** – (a) Étapes de suppression de la phase transitoire et (b) courbes force-déplacement redimensionnées.

plus distinctement que les deux séries de courbes proviennent de deux traverses

différentes. En superposant la courbe force-déplacement obtenue numériquement à la courbe expérimentale redimensionnée sur la Figure C.2a, on observe que la raideur  $k_{\text{exp}}$  identifiée lors de l'essai et la raideur  $k_{\text{mat}}$  associée au matériau ne sont pas identiques. Cette différence notable est due au fait que le déplacement  $u_{\text{exp}}$  mesuré lors de l'essai expérimental correspond au déplacement vertical de la traverse (illustrée en Figure 2.3), tandis que le déplacement  $u_{\text{mat}}$  correspond à la stricte compression verticale de l'éprouvette pendant la simulation d'endommagement (illustrée sur la Figure 1.11). Le déplacement corrigé  $u_{\text{exp}}^*$  est obtenu en soustrayant au déplacement expérimental  $u_{\text{exp}}$ , le déplacement associé au montage  $u_{\text{mont}} = F_{\text{exp}}/k_{\text{mont}}$  représenté sur les Figures 2.17 (par une flèche rouge) et C.2b (par une flèche bleue). Le déplacement corrigé s'écrit

$$u_{\text{exp}}^* = u_{\text{exp}} - \frac{F_{\text{exp}}}{k_{\text{mont}}} \quad \text{tel que} \quad \frac{1}{k_{\text{exp}}} = \frac{1}{k_{\text{mont}}} + \frac{1}{k_{\text{mat}}}, \quad (\text{C.1})$$

en supposant que la machine de compression se comporte comme un ressort de compression de raideur  $k_{\text{mont}}$  monté en série avec l'éprouvette de raideur  $k_{\text{mat}}$  pour le matériau. Ici,  $F_{\text{exp}}$  (représentée par une flèche rouge sur la Figure C.2b) est la force de réaction résultante associée au déplacement imposé  $u_{\text{exp}}$  (représenté par une flèche noire sur la Figure C.2b).



**FIGURE C.2** – (a) Courbes force-déplacement expérimentale (ligne bleu clair), numérique (ligne noire) et corrigée (ligne bleu foncé), (b) association en série de deux ressorts de raideur  $k_{\text{mont}}$  et  $k_{\text{mat}}$  représentant le dispositif expérimental composé de la machine de compression et de l'éprouvette.

## Annexe D

# Applications pratiques de l'algorithme de Metropolis-Hastings

L'objectif de cette annexe est d'illustrer, à travers deux applications pratiques, l'utilisation d'un algorithme de type Metropolis-Hastings (MH). Cet algorithme est introduit dans la section 2.2 du chapitre 3 afin de générer des réalisations du vecteur aléatoire  $\mathbf{C}_{123} = (C_1, C_2, C_3)$  suivant une distribution cible non normalisée  $p_{\mathbf{C}_{123}}$ , telle que définie par l'équation (3.48), à partir d'une distribution de transition normale (ou gaussienne) trivariée  $q_{\mathbf{C}_{123}}$  convenablement choisie, telle que définie par l'équation (3.49). La section 1 présente un premier exemple d'application de l'algorithme MH pour générer des réalisations  $x^{(i)}$  d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , tandis que la section 2 illustre le comportement de l'algorithme MH à travers un second exemple d'application pour générer des réalisations  $\mathbf{z}^{(i)} = (z_1^{(i)}, z_2^{(i)})$  d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ .

## 1 Échantillonnage d'une variable aléatoire

Cet exemple, inspiré de [Dirty Quant 2021] et implémenté dans le script `scripts/MCMC_MH_1D.py`, illustre la génération de réalisations  $x^{(i)}$  d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , où la distribution cible  $f_X(x)$  à échantillonner s'écrit

$$f_X(x) = 2 p_X(x; -2, 1) + 1 p_X(x; 4, 2), \quad (\text{D.1})$$

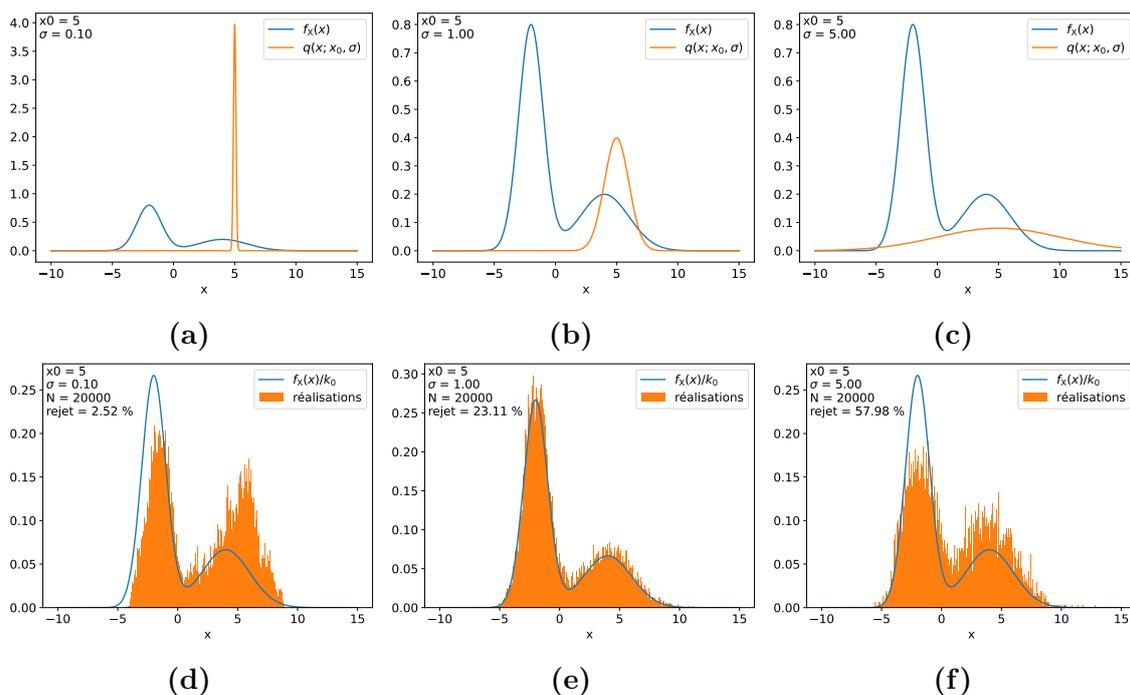
où  $p_X(x; \mu, \sigma)$  est la pdf d'une loi normale (ou gaussienne)  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ , de moyenne  $\mu \in \mathbb{R}$  et d'écart-type  $\sigma > 0$  définie telle que

$$p_X(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (\text{D.2})$$

Cet exemple est avant tout pédagogique, car la constante de normalisation  $k_0 > 0$  peut être facilement calculée analytiquement (dans ce cas précis  $k_0 = 3$ ).

À chaque itération  $i$  de l'algorithme, la nouvelle réalisation  $x^{(i+1)}$  est tirée selon la distribution de transition  $q(x^{(i+1)}; x^{(i)}, \sigma)$ , choisie ici comme la loi normale (ou

gaussienne)  $\mathcal{N}(x^{(i)}, \sigma)$  de moyenne  $x^{(i)} \in \mathbb{R}$  et d'écart-type  $\sigma > 0$ . On définit arbitrairement  $x^{(0)} = 5$  comme valeur initiale de l'algorithme, on fixe le nombre de réalisations cible  $N$  à 20 000 et on fait varier l'écart-type  $\sigma$  pour les valeurs 0.1, 1 et 5. Les distributions des réalisations obtenues sont affichées sous forme d'histogrammes et comparées aux pdfs cibles correspondantes sur la Figure D.1, où les paires de Figures (D.1a, D.1d), (D.1b, D.1e) et (D.1c, D.1f) sont respectivement associées aux écarts-types  $\sigma = 0.1$ ,  $\sigma = 1$  et  $\sigma = 5$ . On constate que (i) lorsque l'écart-type est



**FIGURE D.1** – Échantillonnages de la variable aléatoire  $X$  suivant la distribution  $f_X$ , pour des écarts-types  $\sigma \in \{0.1, 1, 5\}$ . Les graphiques (a-c) représentent la distribution cible  $f_X(x)$  en bleu et la distribution de transition  $q(x^{(i+1)}; x^{(0)}, \sigma)$  en orange. Les graphiques (d-f) représentent les réalisations obtenues, où la distribution cible normalisée  $f_X(x)/k_0$  est représentée en bleu, et les histogrammes en orange représentent la distribution des échantillons.

faible ( $\sigma = 0.1$ ), la distribution de transition est pointue et proche d'une loi de Dirac centrée en  $x = 5$  (voir Figure D.1a) et l'histogramme des réalisations illustré sur la Figure D.1d ne correspond pas à la distribution attendue, avec un taux de rejet très faible de 2.52%; (ii) lorsque  $\sigma = 1$ , l'histogramme des réalisations correspond à la distribution attendue (voir Figure D.1e), avec un taux de rejet modéré/acceptable de 23.11%; (iii) lorsque  $\sigma = 5$ , la distribution de transition est aplatie/étalée (voir Figure D.1c) et l'histogramme des réalisations illustré sur la Figure D.1f ne correspond pas à la distribution attendue, avec un taux de rejet élevé de 57.98%.

Cet exemple montre que l'écart-type  $\sigma$  doit être judicieusement choisi pour générer des réalisations conformes à la distribution attendue (ici  $f_X$ ). Un taux de rejet modéré compris entre 20 et 25% semble indiquer, dans ce cas, que la distribution des

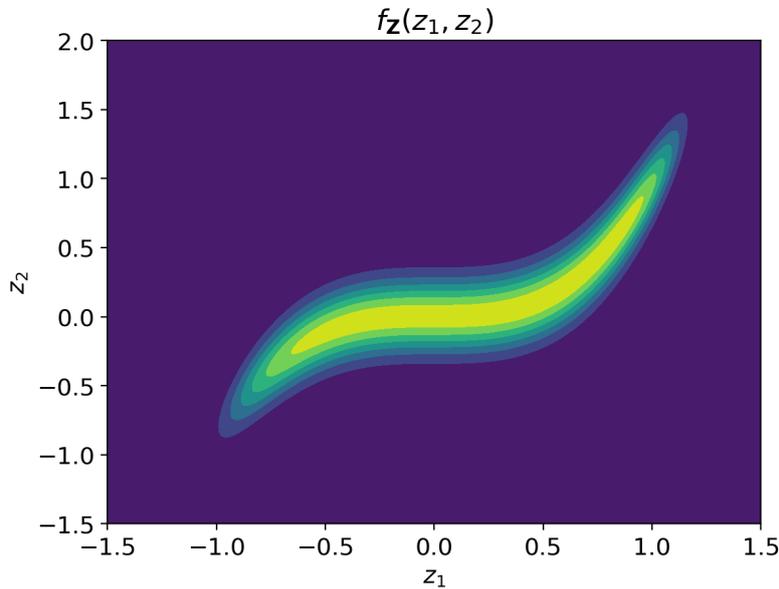
réalisations (représentée ici sous forme d'histogramme) correspond à la distribution attendue.

## 2 Échantillonnage d'un vecteur aléatoire

Cet exemple, implémenté dans le script `scripts/MCMC_MH_2D.py`, illustre la génération de réalisations  $\mathbf{z}^{(i)} = (z_1^{(i)}, z_2^{(i)})$  d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . Il est tiré de la section 4.2.2 du chapitre 4 de [Soize 2017] où la distribution cible  $f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$  à échantillonner s'écrit comme

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \exp(-15(z_1^3 - z_2)^2 - (z_2 - 0.3)^4). \quad (\text{D.3})$$

La distribution cible  $f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$  est illustrée sur la Figure D.2.



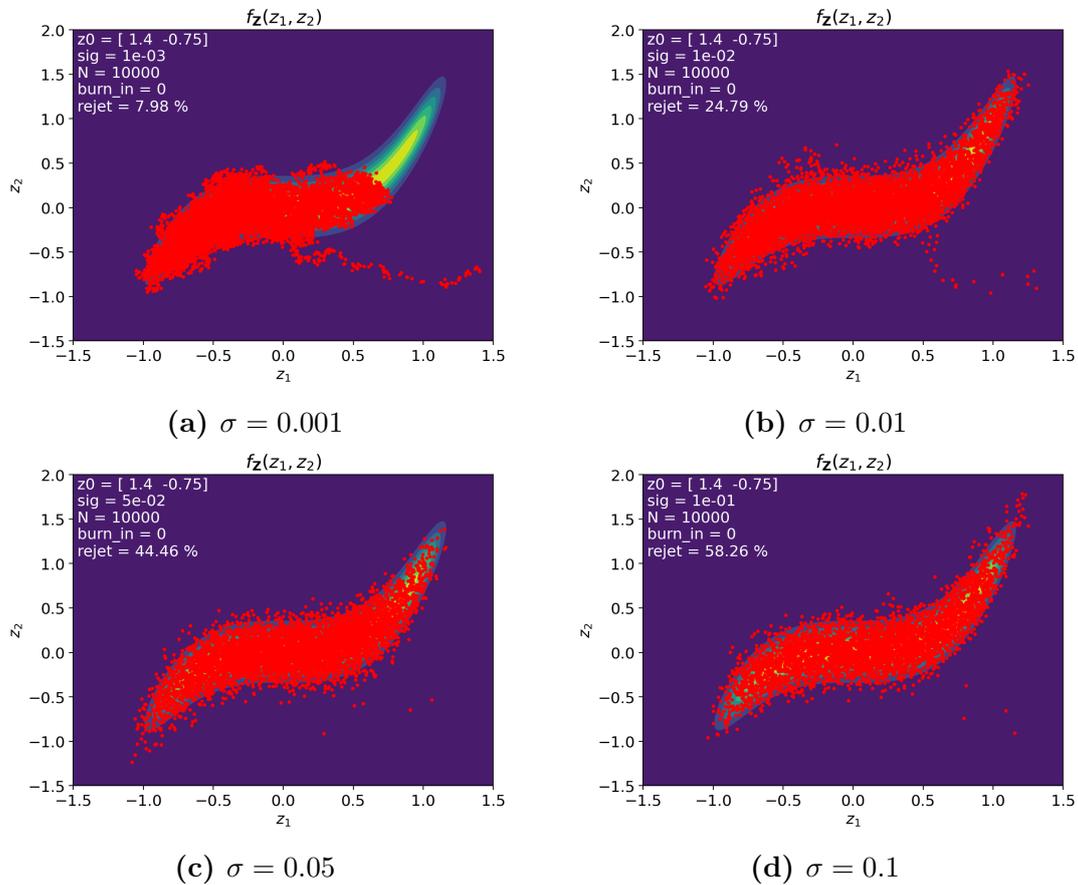
**FIGURE D.2** – Représentation des isocontours de la distribution cible  $f_{\mathbf{Z}}(z_1, z_2)$  du vecteur aléatoire  $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ .

À chaque itération  $i$  de l'algorithme, la nouvelle réalisation  $\mathbf{z}^{(i+1)}$  est tirée selon la distribution de transition  $q(\mathbf{z}^{(i+1)}; \mathbf{z}^{(i)}, [\Sigma])$ , choisie ici comme une loi normale (ou gaussienne) bivariée  $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, [\Sigma])$ , dont la pdf s'écrit

$$p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\mu}, [\Sigma]) = \frac{1}{\sqrt{\det([\Sigma])} (2\pi)^3} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^T [\Sigma]^{-1} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})\right\}, \quad (\text{D.4})$$

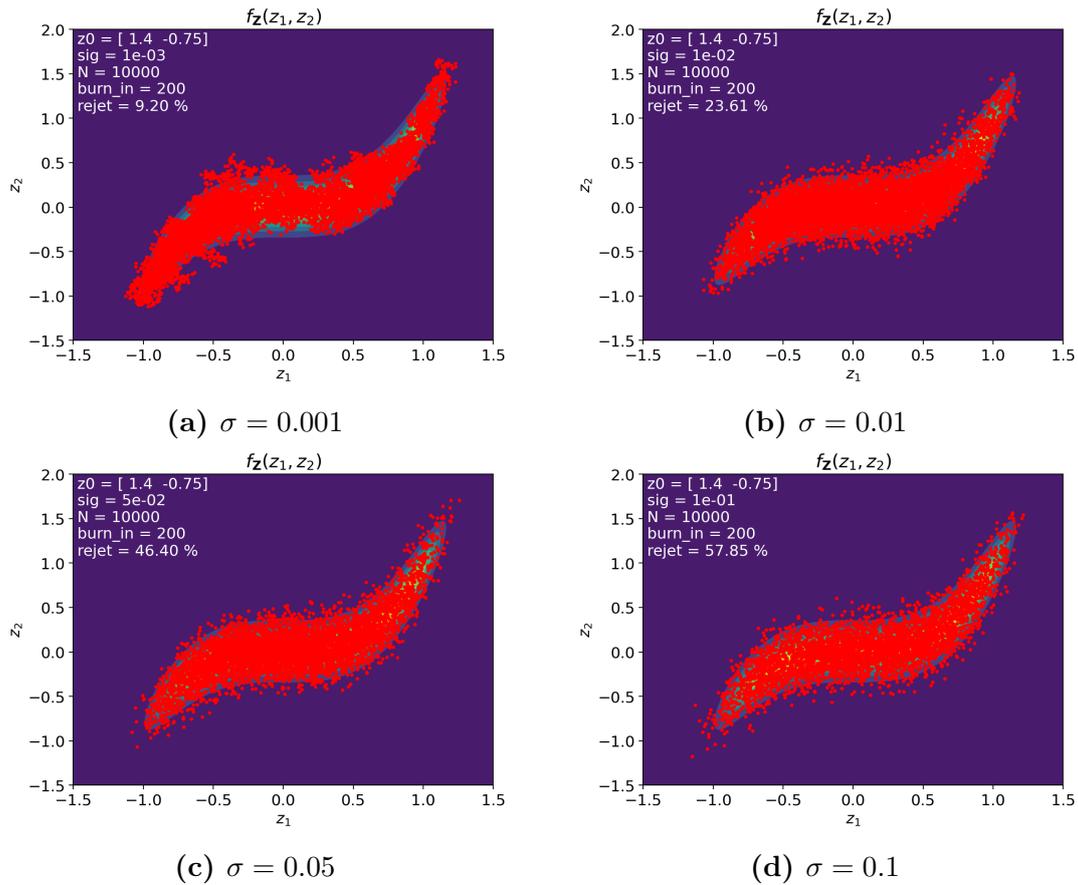
où  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^2$  est le vecteur moyen et  $[\Sigma]$  est la matrice de covariance définie comme dans [Soize 2017] telle que  $[\Sigma] = \sigma^2 \mathbf{I}_2$ , où  $\mathbf{I}_2$  est la matrice identité en dimension 2 et  $\sigma > 0$  représente un écart-type qui intervient comme paramètre de taille de pas dans l'algorithme de Metropolis-Hastings et qui a une forte influence sur le taux de rejet et la vitesse de convergence de l'algorithme [Soize 2017].

On définit  $\mathbf{z}^{(0)} = (1.4, -0.75)$  comme point de départ de l'algorithme, on fixe le nombre de réalisations cible  $N$  à 10 000 et on fait varier l'écart-type  $\sigma$  pour les valeurs 0.001, 0.01, 0.05 et 0.1. Les réalisations obtenues sont affichées sous forme de nuages de points rouges et comparées à la distribution cible  $f_{\mathbf{Z}}$  sur la Figure D.3. Sur



**FIGURE D.3** – Échantillonnages du vecteur aléatoire  $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)$  suivant la distribution cible  $f_{\mathbf{Z}}$ , pour des valeurs du paramètre  $\sigma \in \{0.001, 0.01, 0.05, 0.1\}$ .

toutes les Figures D.3a à D.3d, on constate que le point de départ  $\mathbf{z}^{(0)} = (1.4, -0.75)$  est situé en queue de distribution donc mal choisi, ce qui conduit au tirage de réalisation en dehors de la distribution cible  $f_{\mathbf{Z}}$ . On remarque également que le taux de rejet est d'autant plus élevé que le paramètre  $\sigma$  est élevé. Comme représenté sur la Figure D.4, on peut contourner ce problème en imposant une période d'échauffement (ou *burn-in* en anglais) correspondant au rejet des réalisations tirées au cours des  $\text{burn\_in}$  premières itérations. En effet, on observe sur la Figure D.4 qu'avec une période d'échauffement de 200 itérations ( $\text{burn\_in}=200$ ), aucune réalisation n'est obtenue en queue de distribution dans la zone proche du point de départ  $\mathbf{z}^{(0)}$ . On constate sur les Figures D.3a et D.4a que pour un paramètre faible  $\sigma = 0.001$ , les réalisations ne décrivent pas correctement la distribution attendue, avec des taux de rejets faibles de 7.98% et 9.20%, respectivement. Les paramètres  $\sigma \in \{0.05, 0.1\}$  (voir Figures D.4c et D.4d) semblent produire des distributions légèrement plus étalées qui ne représentent pas précisément la distribution cible  $f_{\mathbf{Z}}$ , avec des taux de rejets



**FIGURE D.4** – Échantillonnages du vecteur aléatoire  $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)$  suivant la distribution cible  $f_{\mathbf{Z}}$ , pour des valeurs du paramètre  $\sigma \in \{0.001, 0.01, 0.05, 0.1\}$  et 200 itérations d'échauffement (`burn_in=200`).

relativement élevés de 46.40% et 57.85%, respectivement. En revanche, le paramètre  $\sigma = 0.01$  (voir Figure D.4b) semble mieux échantillonner la distribution attendue, avec un taux de rejet modéré/acceptable de 23.61%.

### 3 Conclusions

Cette annexe illustre, à travers deux applications pratiques : (i) l'influence de l'écart-type  $\sigma$  sur l'échantillonnage d'une distribution cible non normalisée. Il apparaît que ce paramètre doit être soigneusement ajusté afin d'obtenir un taux de rejet compris entre 20 et 25%, ce qui semble garantir un échantillonnage adéquat de la distribution cible ; (ii) l'importance de considérer une période d'échauffement (`burn_in`) en cas d'incertitude ou d'erreur sur la réalisation initiale ( $x^{(0)}$  ou  $\mathbf{z}^{(0)}$  dans les exemples).

Pour conclure, l'algorithme de type Metropolis-Hastings sera utilisé afin de générer des réalisations indépendantes du vecteur aléatoire  $\mathbf{C}_{123}$  qui suit la distribution cible

$p_{\mathbf{C}_{123}}$  définie en (3.48) et dont le support est l'ensemble non borné  $\mathcal{S}_{123} \subset \mathbb{R}^3$  défini en (3.22b). Comme illustré dans l'exemple bidimensionnel de la section D.2, la distribution normale (ou gaussienne) multivariée définie par l'équation (D.4) sera utilisée en tant que distribution de transition.

# Bibliographie

- [EN7 ] European committee for standardization cen, en 747, furniture |bunk beds and high beds for domestic use |part 2 : test methods. URL <https://standards.globalspec.com/std/9934832/en-747-2,2012-present>. (Cité en page 1.)
- [Ambati et al. 2015] M. Ambati, T. Gerasimov, et L. De Lorenzis. A review on phase-field models of brittle fracture and a new fast hybrid formulation. *Computational Mechanics*, 55(2):383–405, Féb. 2015. ISSN 0178-7675, 1432-0924. URL <http://link.springer.com/10.1007/s00466-014-1109-y>. (Cité en pages 28 et 30.)
- [Ambrosio et Tortorelli 1990] L. Ambrosio et V. M. Tortorelli. Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via t-convergence. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 43(8):999–1036, 1990. ISSN 1097-0312. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cpa.3160430805>. \_eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/cpa.3160430805>. (Cité en page 11.)
- [Amor et al. 2009] H. Amor, J.-J. Marigo, et C. Maurini. Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact : Numerical experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(8):1209–1229, 2009. ISSN 0022-5096. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509609000659>. (Cité en pages xvii, 12, 19, 24, 25, 30, 129 et 146.)
- [Ashby et al. 1985] M. F. Ashby, K. E. Easterling, R. Harrysson, et S. K. Maiti. The fracture and toughness of woods. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 398(1815):261–280, Avr. 1985. URL <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1985.0034>. Publisher : Royal Society. (Cité en page 61.)
- [Avril et al. 2008] S. Avril, M. Bonnet, A.-S. Bretelle, M. Grédiac, F. Hild, P. Ienny, F. Latourte, D. Lemosse, S. Pagano, E. Pagnacco, et F. Pierron. Overview of Identification Methods of Mechanical Parameters Based on Full-field Measurements. *Experimental Mechanics*, 48(4):381, Jul. 2008. ISSN 1741-2765. URL <https://doi.org/10.1007/s11340-008-9148-y>. Number : 4. (Cité en page 78.)
- [Balian 1968] R. Balian. Random matrices and information theory. *Il Nuovo Cimento B (1965-1970)*, 57(1):183–193, Sep 1968. ISSN 1826-9877. URL <https://doi.org/10.1007/BF02710326>. (Cité en page 101.)
- [Barenblatt 1962] G. I. Barenblatt. The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture. *Dans* H. L. Dryden, T. von Kármán, G. Kuerti,

- F. H. van den Dungen, et L. Howarth, éd(s), *Advances in Applied Mechanics*, vol. 7, p. 55–129. Elsevier, Jan. 1962. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0065215608701212>. (Cité en page 4.)
- [Belytschko et Black 1999] T. Belytschko et T. Black. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5):601–620, 1999. ISSN 1097-0207. URL [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990620\)45:5%3C601::AID-NME598%3E3.0.CO;2-S](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990620)45:5%3C601::AID-NME598%3E3.0.CO;2-S). (Cité en page 4.)
- [Bertero et al. 1988] M. Bertero, T. Poggio, et V. Torre. Ill-posed problems in early vision. *Proceedings of the IEEE*, 76(8):869–889, Ao t 1988. ISSN 1558-2256. URL <https://ieeexplore.ieee.org/document/5962>. Conference Name : Proceedings of the IEEE. (Cité en page 65.)
- [Besnard et al. 2006] G. Besnard, F. Hild, et S. Roux. “Finite-Element” Displacement Fields Analysis from Digital Images : Application to Portevin–Le Ch telier Bands. *Experimental Mechanics*, 46(6):789–803, 2006. ISSN 1741-2765. URL <https://doi.org/10.1007/s11340-006-9824-8>. (Cité en pages 65 et 66.)
- [Besson et al. 2023] J. Besson, J. Bleyer, S. Feld-Payet, A.-F. Gourgues-Lorenzon, F. Hannard, T. Helfer, J. Hure, D. Kondo, V. Lazarus, C. Le Bourlot, H. Maitournam, C. Maurini, N. Mo s, T. Morgeneyer, L. Morin, T. Petit, et A. Simar. *MEALORII book - Damage Mechanics and Local Approach to Fracture*. Nov. 2023. (Cité en page 61.)
- [Blaysat et al. 2020] B. Blaysat, J. Neggers, M. Grédiac, et F. Sur. Towards Criteria Characterizing the Metrological Performance of Full-field Measurement Techniques. *Experimental Mechanics*, 60(3):393–407, Mars 2020. ISSN 1741-2765. URL <https://doi.org/10.1007/s11340-019-00566-4>. (Cité en page 65.)
- [Bleyer et Alessi 2018] J. Bleyer et R. Alessi. Phase-field modeling of anisotropic brittle fracture including several damage mechanisms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 336:213–236, 2018. ISSN 0045-7825. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782518301373>. (Cité en pages 15, 27 et 139.)
- [Bodig et Jayne 1993] J. Bodig et B. A. Jayne. *Mechanics of Wood and Wood Composites*. Krieger Publishing Company, 1993. ISBN 978-0-89464-777-2. (Cité en pages 60 et 139.)
- [Borden et al. 2012] M. J. Borden, C. V. Verhoosel, M. A. Scott, T. J. Hughes, et C. M. Landis. A phase-field description of dynamic brittle fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 217-220:77–95, 2012. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.01.008>. (Cité en page 129.)
- [Bourdin et al. 2000] B. Bourdin, G. A. Francfort, et J.-J. Marigo. Numerical experiments in revisited brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(4):797–826, 2000. ISSN 0022-5096. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509699000289>. (Cité en pages xvii, 4, 9, 11, 17, 30 et 31.)

- [Bourdin et al. 2008] B. Bourdin, G. A. Francfort, et J.-J. Marigo. The Variational Approach to Fracture. *Journal of Elasticity*, 91(1):5–148, April 2008. ISSN 1573-2681. URL <https://doi.org/10.1007/s10659-007-9107-3>. (Cité en pages 9, 30 et 31.)
- [Bowman et Azzalini 1997] A. W. Bowman et A. Azzalini. *Applied Smoothing Techniques for Data Analysis*. Oxford University Press, Oxford, 1997. (Cité en page 134.)
- [Braides 1998] A. Braides. *Approximation of free-discontinuity problems*. Num. 1694 de Lecture notes in mathematics. Springer, Berlin Heidelberg, 1998. ISBN 978-3-540-64771-3 978-0-19-850246-3. (Cité en page 12.)
- [Branch et al. 1999] M. A. Branch, T. F. Coleman, et Y. Li. A Subspace, Interior, and Conjugate Gradient Method for Large-Scale Bound-Constrained Minimization Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(1):1–23, Jan. 1999. ISSN 1064-8275. URL <https://epubs.siam.org/doi/10.1137/S1064827595289108>. Publisher : Society for Industrial and Applied Mathematics. (Cité en page 81.)
- [Bruck et al. 1989] H. A. Bruck, S. R. McNeill, M. A. Sutton, et W. H. Peters. Digital image correlation using Newton-Raphson method of partial differential correction. *Experimental Mechanics*, 29(3):261–267, Sept. 1989. ISSN 1741-2765. URL <https://doi.org/10.1007/BF02321405>. (Cité en page 63.)
- [Byrd et al. 1995] R. H. Byrd, P. Lu, J. Nocedal, et C. Zhu. A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 16(5):1190–1208, Sept. 1995. ISSN 1064-8275, 1095-7197. URL <http://epubs.siam.org/doi/10.1137/0916069>. (Cité en page 94.)
- [Caffisch 1998] R. E. Caffisch. Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods. *Acta Numerica*, 7:1–49, 1998. URL <https://dx.doi.org/10.1017/S0962492900002804>. (Cité en page 116.)
- [Campredon 1935] J. Campredon. Contribution à l’étude des propriétés élastiques des bois. *Annales de l’Ecole Nationale des Eaux et Forêts et de la Station de Recherches et Expériences Forestières*, 5(3):251–288, 1935. URL <https://hal.science/hal-03483806>. (Cité en pages 60, 61, 72 et 80.)
- [Carlsson et Isaksson 2018] J. Carlsson et P. Isaksson. Dynamic crack propagation in wood fibre composites analysed by high speed photography and a dynamic phase field model. *International Journal of Solids and Structures*, 144–145:78–85, 2018. ISSN 0020-7683. URL <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.04.015>. (Cité en page 4.)
- [Carlsson et Isaksson 2020] J. Carlsson et P. Isaksson. Simulating fracture in a wood microstructure using a high-resolution dynamic phase field model. *Engineering Fracture Mechanics*, 232:107030, 2020. ISSN 0013-7944. URL <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.107030>. (Cité en page 4.)
- [Carrington 1923] H. Carrington. CV. The elastic constants of spruce. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 45(269):1055–1057, Mai 1923. ISSN 1941-5982. URL <https://doi.org/10.>

- [1080/14786442308636317](https://doi.org/10.1080/14786442308636317). Publisher : Taylor & Francis \_eprint : <https://doi.org/10.1080/14786442308636317>. (Cité en pages 61 et 72.)
- [Chen 2019] Z. Chen. *Simulation virtuelle des essais de validation pour l'ameublement - meubles à base de plaques*. phdthesis, Université Paris-Est, Jan. 2019. URL <https://theses.hal.science/tel-02865474>. (Cité en pages 2, 5, 105, 112 et 113.)
- [Cheng et al. 2002] P. Cheng, M. A. Sutton, H. W. Schreier, et S. R. McNeill. Full-field speckle pattern image correlation with B-Spline deformation function. *Experimental Mechanics*, 42(3):344–352, Sept. 2002. ISSN 1741-2765. URL <https://doi.org/10.1007/BF02410992>. (Cité en page 65.)
- [Chevalier et al. 2022] L. Chevalier, F. Pled, L. Winkler, F. Wilquin, et E. Launay. A multi-model approach for wooden furniture failure under mechanical load. *Mechanics & Industry*, 23:28, 2022. ISSN 2257-7777, 2257-7750. URL <https://www.mechanics-industry.org/10.1051/meca/2022025>. (Cité en pages 3, 55, 106, 111, 126, 127, 128, 129, 130, 133 et 136.)
- [Clayton et Knap 2014] J. D. Clayton et J. Knap. A geometrically nonlinear phase field theory of brittle fracture. *International Journal of Fracture*, 189(2):139–148, Oct. 2014. ISSN 1573-2673. URL <https://doi.org/10.1007/s10704-014-9965-1>. (Cité en page 13.)
- [Colantonio 2020] G. Colantonio. *Stéréo-corrélation d'images numériques éléments finis : de l'étalonnage à l'identification*. Thèse de doctorat, 2020. (Cité en pages 63, 65, 69 et 71.)
- [Corre et Lazarus 2021] T. Corre et V. Lazarus. Kinked crack paths in polycarbonate samples printed by fused deposition modelling using criss-cross patterns. *International Journal of Fracture*, Mars 2021. ISSN 0376-9429, 1573-2673. URL <http://link.springer.com/10.1007/s10704-021-00518-x>. (Cité en page 140.)
- [Cover et Thomas 2006] T. M. Cover et J. A. Thomas. *Elements of Information Theory*. A Wiley-Interscience publication. Wiley, New York, NY, USA, 2006. ISBN 0471241954. (Cité en page 101.)
- [Daudeville 1999] L. Daudeville. Fracture in spruce : experiment and numerical analysis by linear and non linear fracture mechanics. *Holz als Roh- und Werkstoff*, 57(6):425–432, Déc. 1999. ISSN 1436-736X. URL <https://doi.org/10.1007/s001070050068>. (Cité en page 95.)
- [De Lorenzis et Gerasimov 2020] L. De Lorenzis et T. Gerasimov. *Numerical Implementation of Phase-Field Models of Brittle Fracture*, p. 75–101. Springer International Publishing, Cham, 2020. ISBN 978-3-030-37518-8. URL [https://doi.org/10.1007/978-3-030-37518-8\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-37518-8_3). (Cité en pages 29 et 31.)
- [De Lorenzis et Maurini 2022] L. De Lorenzis et C. Maurini. Nucleation under multi-axial loading in variational phase-field models of brittle fracture. *International Journal of Fracture*, 237(1):61–81, 2022. URL <https://doi.org/10.1007/s10704-021-00555-6>. (Cité en page 25.)

- [Del Piero et Owen 1993] G. Del Piero et D. R. Owen. Structured deformations of continua. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 124(2):99–155, Juin 1993. ISSN 1432-0673. URL <https://doi.org/10.1007/BF00375133>. (Cité en page 17.)
- [Demirci 2011] H. I. Demirci. The Experimental and Finite Element Analysis of Diagonal Tensile Tests Conducted on Frame-Type Constructed Corner . . . . *Technology*, 14(1):11–21, Jan. 2011. URL [https://www.academia.edu/23673930/The\\_Experimental\\_and\\_Finite\\_Element\\_Analysis\\_of\\_Diagonal\\_Tensile\\_Tests\\_Conducted\\_on\\_Frame\\_Type\\_Constructed\\_Corner\\_](https://www.academia.edu/23673930/The_Experimental_and_Finite_Element_Analysis_of_Diagonal_Tensile_Tests_Conducted_on_Frame_Type_Constructed_Corner_). (Cité en page 1.)
- [Dijk et al. 2020] N. V. Dijk, J. Espadas-Escalante, et P. Isaksson. Strain energy density decompositions in phase-field fracture theories for orthotropy and anisotropy. *International Journal of Solids and Structures*, 196-197:140–153, Juil. 2020. ISSN 00207683. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0020768320301396>. (Cité en page 25.)
- [Dirty Quant 2021] Dirty Quant. The Metropolis-Hastings Algorithm (MCMC in Python), Jan. 2021. URL [https://www.youtube.com/watch?v=MxI78mpq\\_44](https://www.youtube.com/watch?v=MxI78mpq_44). (Cité en page 153.)
- [Dugdale 1960] D. S. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8(2):100–104, Mai 1960. ISSN 0022-5096. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509660900132>. (Cité en page 4.)
- [Farrell et Maurini 2017] P. Farrell et C. Maurini. Linear and nonlinear solvers for variational phase-field models of brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 109(5):648–667, 2017. ISSN 1097-0207. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.5300>. \_eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.5300>. (Cité en page 30.)
- [Feld-Payet et al. 2020] S. Feld-Payet, G. Le Besnerais, V. Bonnard, D. Pacou, et L. Thiercelin. Crack path tracking from full field measurements : a novel empirical methodology. *Strain*, 56(2), Mars 2020. URL <https://hal.science/hal-02386276>. Publisher : Wiley-Blackwell. (Cité en page 86.)
- [Francfort et Marigo 1998] G. A. Francfort et J. J. Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(8):1319–1342, 1998. ISSN 0022-5096. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509698000349>. (Cité en page 9.)
- [Freddi et Royer-Carfagni 2010] F. Freddi et G. Royer-Carfagni. Regularized variational theories of fracture : A unified approach. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 58(8):1154–1174, Ao t 2010. ISSN 00225096. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022509610000475>. (Cité en pages 17, 20, 24 et 25.)
- [Geelen et al. 2019] R. J. Geelen, Y. Liu, T. Hu, M. R. Tupek, et J. E. Dolbow. A phase-field formulation for dynamic cohesive fracture. *Computer Methods in*

- Applied Mechanics and Engineering*, 348:680–711, 2019. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.01.026>. (Cité en pages 12 et 145.)
- [Gerasimov et De Lorenzis 2016] T. Gerasimov et L. De Lorenzis. A line search assisted monolithic approach for phase-field computing of brittle fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 312:276–303, 2016. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.12.017>. Phase Field Approaches to Fracture. (Cité en page 29.)
- [Gerasimov et De Lorenzis 2019] T. Gerasimov et L. De Lorenzis. On penalization in variational phase-field models of brittle fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 354:990–1026, Sept. 2019. ISSN 00457825. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782519303081>. (Cité en pages 30 et 31.)
- [Gerasimov et al. 2020] T. Gerasimov, U. Römer, J. Vondřejc, H. G. Matthies, et L. De Lorenzis. Stochastic phase-field modeling of brittle fracture : Computing multiple crack patterns and their probabilities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 372:113353, 2020. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113353>. (Cité en page 5.)
- [Givens et Hoeting 2013] G. H. Givens et J. A. Hoeting. *Computational Statistics*. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2nd éd., 2013. (Cité en page 134.)
- [Grédiac et al. 2013] M. Grédiac, F. Hild, et A. Pineau, éd. *Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics*. John Wiley & Sons, Ltd, 2013. ISBN 9781118578469. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118578469>. (Cité en page 78.)
- [Guilleminot et Soize 2012] J. Guilleminot et C. Soize. Generalized stochastic approach for constitutive equation in linear elasticity : a random matrix model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90(5):613–635, 2012. ISSN 1097-0207. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.3338>. \_eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.3338>. (Cité en pages 4, 104, 105, 106, 107 et 111.)
- [Guilleminot et Soize 2013] J. Guilleminot et C. Soize. On the Statistical Dependence for the Components of Random Elasticity Tensors Exhibiting Material Symmetry Properties. *Journal of Elasticity*, 111(2):109–130, 2013. ISSN 1573-2681. URL <https://doi.org/10.1007/s10659-012-9396-z>. (Cité en pages 4, 104, 105 et 107.)
- [Hansen 2000] P. C. Hansen. The L-Curve and Its Use in the Numerical Treatment of Inverse Problems. *Dans Computational Inverse Problems in Electrocardiology*, p. 119–142. WIT Press, 2000. (Cité en page 76.)
- [Hao et Shen 2024] S. Hao et Y. Shen. An efficient parallel solution scheme for the phase field approach to dynamic fracture based on a domain decomposition method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 125(6):e7405, 2024. ISSN 1097-0207. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.7405>. \_eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.7405>. (Cité en page 29.)

- [Harrington 2002] J. J. Harrington. *Hierarchical modelling of softwood hygro-elastic properties*. Thèse de doctorat, Sept. 2002. URL <https://ir.canterbury.ac.nz/items/04cb25db-e457-47f9-be2c-b3b7bd6d6858>. (Cité en pages v, 5, 60 et 139.)
- [Hastings 1970] W. K. Hastings. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika*, 57(1):97–109, 1970. URL <https://doi.org/10.1093/biomet/57.1.97>. (Cité en page 112.)
- [He 2018] Q.-C. He. Three-dimensional strain and stress orthogonal decompositions via an elastic energy preserving transformation. submitted, 2018. (Cité en pages 22 et 143.)
- [He et Shao 2019] Q.-C. He et Q. Shao. Closed-Form Coordinate-Free Decompositions of the Two-Dimensional Strain and Stress for Modeling Tension-Compression Dissymmetry. *Journal of Applied Mechanics*, 86(3), Mars 2019. ISSN 0021-8936, 1528-9036. URL <https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article/doi/10.1115/1.4042217/446406/ClosedForm-CoordinateFree-Decompositions-of-the>. (Cité en pages 22, 24, 143 et 146.)
- [Heister et al. 2015] T. Heister, M. F. Wheeler, et T. Wick. A primal-dual active set method and predictor-corrector mesh adaptivity for computing fracture propagation using a phase-field approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 290:466–495, 2015. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.03.009>. (Cité en pages 29 et 31.)
- [Hild et Roux 2006] F. Hild et S. Roux. Digital Image Correlation : from Displacement Measurement to Identification of Elastic Properties – a Review. *Strain*, 42(2):69–80, 2006. ISSN 1475-1305. URL <https://doi.org/10.1111/j.1475-1305.2006.00258.x>. (Cité en page 65.)
- [Hild et Roux 2012a] F. Hild et S. Roux. *Optical Methods for Solid Mechanics. A Full-Field Approach*, chap. Digital Image Correlation, p. 183–228. Wiley-VCH, Weinheim (Germany), 2012a. (Cité en pages 4, 63 et 65.)
- [Hild et Roux 2012b] F. Hild et S. Roux. Comparison of Local and Global Approaches to Digital Image Correlation. *Experimental Mechanics*, 52(9):1503–1519, Nov. 2012b. ISSN 0014-4851, 1741-2765. URL <http://link.springer.com/10.1007/s11340-012-9603-7>. (Cité en pages 64 et 65.)
- [Horn et Schunck 1981] B. K. Horn et B. G. Schunck. Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 17(1):185 – 203, 1981. ISSN 0004-3702. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0004370281900242>. (Cité en pages 4, 63 et 65.)
- [Horov et al. 2012] I. Horov, J. Kolcek, et J. Zelinka. *Kernel Smoothing in MATLAB : Theory and Practice of Kernel Smoothing*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2012. ISBN 978-981-4405-48-5. URL <http://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/8468#t=aboutBook>. (Cité en page 134.)

- [Hosdez et al. 2017] J. Hosdez, J.-F. Witz, C. Martel, N. Limodin, D. Najjar, E. Charakaluk, P. Osmond, et F. Szmytka. Fatigue crack growth law identification by Digital Image Correlation and electrical potential method for ductile cast iron. *Engineering Fracture Mechanics*, 182:577–594, 2017. ISSN 0013-7944. URL <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.05.037>. (Cité en page 86.)
- [Hu et al. 2020] T. Hu, J. Guilleminot, et J. E. Dolbow. A phase-field model of fracture with frictionless contact and random fracture properties : Application to thin-film fracture and soil desiccation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 368:113106, 2020. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113106>. (Cité en pages 5, 26 et 27.)
- [Hughes 2012] T. J. R. Hughes. *The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Courier Corporation, Mai 2012. ISBN 978-0-486-13502-1. Google-Books-ID : cHH2n\_qBK0IC. (Cité en pages 2 et 33.)
- [Hun et al. 2019] D.-A. Hun, J. Guilleminot, J. Yvonnet, et M. Bornert. Stochastic multiscale modeling of crack propagation in random heterogeneous media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 119(13):1325–1344, 2019. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.6093>. (Cité en page 5.)
- [Irwin 1957] G. R. Irwin. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24(3):361–364, Jan. 1957. (Cité en page 61.)
- [Jaynes 1957a] E. T. Jaynes. Information Theory and Statistical Mechanics. *Phys. Rev.*, 106:620–630, 1957a. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.106.620>. (Cité en pages xviii et 101.)
- [Jaynes 1957b] E. T. Jaynes. Information Theory and Statistical Mechanics. II. *Phys. Rev.*, 108:171–190, 1957b. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.171>. (Cité en pages xviii et 101.)
- [Jumarie 2000] G. Jumarie. *Maximum Entropy, Information Without Probability and Complex Fractals : Classical and Quantum Approach*, vol. 112 de *Fundamental Theories of Physics*. Springer Science & Business Media, Dordrecht, 2000. URL <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9496-7>. (Cité en page 101.)
- [Kapur et Kesavan 1992] J. N. Kapur et H. K. Kesavan. *Entropy Optimization Principles and Their Applications*, p. 3–20. Springer Netherlands, Dordrecht, 1992. ISBN 978-94-011-2430-0. URL [https://doi.org/10.1007/978-94-011-2430-0\\_1](https://doi.org/10.1007/978-94-011-2430-0_1). (Cité en page 101.)
- [Kavanagh 1972] K. T. Kavanagh. Extension of classical experimental techniques for characterizing composite-material behavior : The experimental-analytical method described in this paper is shown to yield material descriptions from specimen shapes previously considered intractable. *Experimental Mechanics*, 12(1):50–56, Jan. 1972. ISSN 0014-4851, 1741-2765. URL <http://link.springer.com/10.1007/BF02320791>. (Cité en page 78.)

- [Kavanagh et Clough 1971] K. T. Kavanagh et R. W. Clough. Finite element applications in the characterization of elastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7(1):11–23, Jan. 1971. ISSN 00207683. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020768371900151>. (Cité en pages 4 et 78.)
- [Kroeger et al. 2016] T. Kroeger, R. Timofte, D. Dai, et L. Van Gool. Fast Optical Flow using Dense Inverse Search, Mars 2016. URL <http://arxiv.org/abs/1603.03590>. arXiv :1603.03590 [cs]. (Cité en page 71.)
- [Kunin 1981] I. Kunin. An algebra of tensor operators and its applications to elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 19(12):1551–1561, 1981. ISSN 0020-7225. URL [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(81\)90078-1](https://doi.org/10.1016/0020-7225(81)90078-1). Dedicated to Prof. K. Kondo on the occasion of his seventieth birthday. (Cité en page 105.)
- [Laboratory 1999] F. P. Laboratory. Wood handbook : wood as an engineering material. *General technical report FPL ; GTR-113. Madison, WI : U.S. Department of Agriculture, Forest Service, Forest Products Laboratory : xi, [463] pages : ill. ; 28 cm.*, 113, 1999. URL <https://www.fs.usda.gov/research/treesearch/5734>. (Cité en page 61.)
- [Lancioni et Royer-Carfagni 2009] G. Lancioni et G. Royer-Carfagni. The Variational Approach to Fracture Mechanics. A Practical Application to the French Panthéon in Paris. *Journal of Elasticity*, 95(1-2):1–30, Avr. 2009. ISSN 0374-3535, 1573-2681. URL <http://link.springer.com/10.1007/s10659-009-9189-1>. (Cité en pages xviii, 18 et 146.)
- [Langlois 2023] R. Langlois. *Non-parametric evaluation of stress fields for history-dependent materials : Formulation, Validation and Applications*. phdthesis,  cole centrale de Nantes, Jan. 2023. URL <https://theses.hal.science/tel-04397571>. (Cité en pages 69 et 86.)
- [Leclerc et al. 2012] H. Leclerc, J.-N. Périé, F. Hild, et S. Roux. Digital volume correlation : what are the limits to the spatial resolution? *Mechanics & Industry*, 13(6):361–371, 001 2012. (Cité en pages 64 et 69.)
- [Legay 2021] A. Legay. Calcul des structures par éléments finis, 2021. URL [http://antoinelegay.free.fr/Calcul\\_des\\_structures\\_par\\_elements\\_finis\\_Legay.pdf](http://antoinelegay.free.fr/Calcul_des_structures_par_elements_finis_Legay.pdf). (Cité en pages xii et 131.)
- [Li et Maurini 2019] B. Li et C. Maurini. Crack kinking in a variational phase-field model of brittle fracture with strongly anisotropic surface energy. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 125:502–522, Avr. 2019. ISSN 00225096. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022509618308664>. (Cité en pages 13, 14, 15 et 139.)
- [Li et al. 2015] B. Li, C. Peco, D. Mill n, I. Arias, et M. Arroyo. Phase-field modeling and simulation of fracture in brittle materials with strongly anisotropic surface energy : PHASE-FIELD MODELING AND SIMULATION OF STRONGLY ANISOTROPIC FRACTURE. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 102(3-4):711–727, Avr. 2015. ISSN 00295981. URL <https://doi.org/10.1002/nme.1511>.

- [//onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nme.4726](https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nme.4726). (Cité en pages 13, 14 et 15.)
- [Li et al. 2016] T. Li, J.-J. Marigo, D. Guilbaud, et S. Potapov. Gradient damage modeling of brittle fracture in an explicit dynamics context. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 108(11):1381–1405, 2016. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.5262>. (Cité en pages 17, 20, 22 et 25.)
- [Liu et al. 2016] G. Liu, Q. Li, M. A. Msekh, et Z. Zuo. Abaqus implementation of monolithic and staggered schemes for quasi-static and dynamic fracture phase-field model. *Computational Materials Science*, 121:35–47, 2016. ISSN 0927-0256. URL <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2016.04.009>. (Cité en page 145.)
- [Liu et al. 2022] X. Liu, J. Réthoré, et A. A. Lubrecht. An efficient matrix-free preconditioned conjugate gradient based multigrid method for phase field modeling of fracture in heterogeneous materials from 3D images. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 388:114266, Jan. 2022. ISSN 0045-7825. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782521005764>. (Cité en page 29.)
- [Liu et al. 2021] Y. Liu, C. Cheng, V. Ziaei-Rad, et Y. Shen. A micromechanics-informed phase field model for brittle fracture accounting for unilateral constraint. *Engineering Fracture Mechanics*, 241:107358, Jan. 2021. ISSN 00137944. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0013794420309383>. (Cité en pages 25 et 26.)
- [Makhlouf et al. 2016] H. Makhlouf, L. Chevalier, E. Favier, et E. Launay. A stochastic approach for the evaluation of the reliability of wood furniture in an industrial context : managing virtual standardization tests. *Mechanics & Industry*, 17(5):503, 2016. ISSN 2257-7777, 2257-7750. URL <https://www.mechanics-industry.org/articles/meca/abs/2016/05/mi150071/mi150071.html>. (Cité en page 2.)
- [Marigo et al. 2016] J.-J. Marigo, C. Maurini, et K. Pham. An overview of the modeling of fracture by gradient damage models. *Meccanica*, 51(12):3107–3128, Déc. 2016. ISSN 1572-9648. URL <https://doi.org/10.1007/s11012-016-0538-4>. (Cité en page 12.)
- [Mathieu et al. 2015] F. Mathieu, H. Leclerc, F. Hild, et S. Roux. Estimation of Elastoplastic Parameters via Weighted FEMU and Integrated-DIC. *Experimental Mechanics*, 55(1):105–119, Jan. 2015. ISSN 1741-2765. URL <https://doi.org/10.1007/s11340-014-9888-9>. (Cité en page 79.)
- [May et al. 2016] S. May, J. Vignollet, et R. de Borst. A new arc-length control method based on the rates of the internal and the dissipated energy. *Engineering Computations*, 33(1):100–115, 2016. URL <https://doi.org/10.1108/EC-02-2015-0044>. (Cité en page 29.)
- [Mendoza et al. 2019] A. Mendoza, J. Neggens, F. Hild, et S. Roux. Complete Mechanical Regularization Applied to Digital Image and Volume Correlation.

- Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 355:27–43, 2019. URL <https://hal.science/hal-02148780>. Publisher : Elsevier. (Cité en page 69.)
- [Metropolis et Ulam 1949] N. Metropolis et S. Ulam. The Monte Carlo Method. *Journal of the American Statistical Association*, 44(247):335–341, 1949. URL <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01621459.1949.10483310>. PMID : 18139350. (Cité en page 112.)
- [Metropolis et al. 1953] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, et E. Teller. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *The Journal of Chemical Physics*, 21(6):1087–1092, 1953. URL <https://doi.org/10.1063/1.1699114>. (Cité en page 112.)
- [Miehe et Lambrecht 2001] C. Miehe et M. Lambrecht. Algorithms for computation of stresses and elasticity moduli in terms of Seth–Hill’s family of generalized strain tensors. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 17(5):337–353, 2001. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cnm.404>. (Cité en page 145.)
- [Miehe et al. 2010a] C. Miehe, M. Hofacker, et F. Welschinger. A phase field model for rate-independent crack propagation : Robust algorithmic implementation based on operator splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(45):2765–2778, 2010a. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.04.011>. (Cité en pages xviii, 19, 23, 25, 30, 31, 37, 40, 117, 142 et 146.)
- [Miehe et al. 2010b] C. Miehe, F. Welschinger, et M. Hofacker. Thermodynamically consistent phase-field models of fracture : Variational principles and multi-field FE implementations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(10):1273–1311, Sept. 2010b. ISSN 0029-5981, 1097-0207. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nme.2861>. (Cité en pages 37 et 129.)
- [Mo s et al. 1999] N. Mo s, J. Dolbow, et T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1):131–150, 1999. ISSN 1097-0207. (Cité en page 4.)
- [Nagaraja et al. 2021] S. Nagaraja, K. Leichsenring, M. Ambati, L. De Lorenzis, et M. B l. On a phase-field approach to model fracture of small intestine walls. *Acta Biomaterialia*, 130:317–331, Ao t 2021. ISSN 1742-7061. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S174270612100369X>. (Cité en pages 13 et 15.)
- [Nagaraja et al. 2023a] S. Nagaraja, P. Carrara, et L. De Lorenzis. Experimental characterization and phase-field modeling of anisotropic brittle fracture in silicon. *Engineering Fracture Mechanics*, 293:109684, D c. 2023a. ISSN 00137944. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0013794423006422>. (Cité en pages 13 et 15.)
- [Nagaraja et al. 2023b] S. Nagaraja, U. Römer, H. G. Matthies, et L. De Lorenzis. Deterministic and stochastic phase-field modeling of anisotropic brittle fracture.

- Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 408:115960, Avr. 2023b. ISSN 0045-7825. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578252300083X>. (Cité en pages 5 et 15.)
- [Nguyen et al. 2015] T. Nguyen, J. Yvonnet, Q.-Z. Zhu, M. Bornert, et C. Chateau. A phase field method to simulate crack nucleation and propagation in strongly heterogeneous materials from direct imaging of their microstructure. *Engineering Fracture Mechanics*, 139:18–39, 2015. ISSN 0013-7944. URL <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.03.045>. (Cité en page 28.)
- [Nguyen et al. 2016] T. T. Nguyen, J. Yvonnet, M. Bornert, C. Chateau, K. Sab, R. Romani, et R. Le Roy. On the choice of parameters in the phase field method for simulating crack initiation with experimental validation. *International Journal of Fracture*, 197(2):213–226, Fév. 2016. ISSN 1573-2673. URL <https://doi.org/10.1007/s10704-016-0082-1>. (Cité en pages 37 et 129.)
- [Nguyen et al. 2017] T. T. Nguyen, J. Réthoré, et M.-C. Baietto. Phase field modelling of anisotropic crack propagation. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 65:279–288, 2017. ISSN 0997-7538. URL <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.05.002>. (Cité en pages 13, 15, 27 et 139.)
- [Nguyen et al. 2020] T.-T. Nguyen, J. Yvonnet, D. Waldmann, et Q.-C. He. Implementation of a new strain split to model unilateral contact within the phase field method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 121(21):4717–4733, 2020. ISSN 1097-0207. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.6463>. (Cité en pages vi, xviii, 22, 28, 43, 44, 46 et 143.)
- [Noel 2024] M. Noel. EasyFEA : a user-friendly Python library that simplifies finite element analysis, Avr. 2024. URL <https://hal.science/hal-04571962>. (Cité en pages xviii, 50 et 138.)
- [Noel et al. 2024] M. Noel, F. Pled, et L. Chevalier. Material parameters of a phase field model used to simulate brittle fracture of spruce specimens., 2024. URL <https://doi.org/10.57745/NGOKFP>. (Cité en pages 97 et 135.)
- [Pan et al. 2015] B. Pan, B. Wang, G. Lubineau, et A. Moussawi. Comparison of Subset-Based Local and Finite Element-Based Global Digital Image Correlation. *Experimental Mechanics*, 55(5):887–901, Juin 2015. ISSN 1741-2765. URL <https://doi.org/10.1007/s11340-015-9989-0>. (Cité en page 65.)
- [Passieux et Périé 2012] J.-C. Passieux et J.-N. Périé. High resolution digital image correlation using proper generalized decomposition : PGD-DIC. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 92(6):531–550, 2012. ISSN 1097-0207. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.4349>. \_eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.4349>. (Cité en page 69.)
- [Pech et al. 2022a] S. Pech, M. Lukacevic, et J. Füssl. A hybrid multi-phase field model to describe cohesive failure in orthotropic materials, assessed by modeling failure mechanisms in wood. *Engineering Fracture Mechanics*, 271:108591, Août 2022a. ISSN 00137944. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S001379442200323X>. (Cité en pages 4, 15, 27, 30 et 139.)

- [Pech et al. 2022b] S. Pech, M. Lukacevic, et J. Füssl. Validation of a hybrid multi-phase field model for fracture of wood. *Engineering Fracture Mechanics*, 275:108819, Nov. 2022b. ISSN 00137944. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0013794422005379>. (Cité en pages 4, 15 et 95.)
- [Pham et al. 2011] K. Pham, H. Amor, J.-J. Marigo, et C. Maurini. Gradient Damage Models and Their Use to Approximate Brittle Fracture. *International Journal of Damage Mechanics*, 20(4):618–652, 2011. URL <https://doi.org/10.1177/1056789510386852>. (Cité en pages xvii, 11, 12 et 129.)
- [Pham et al. 2017] K. H. Pham, K. Ravi-Chandar, et C. M. Landis. Experimental validation of a phase-field model for fracture. *International Journal of Fracture*, 205(1):83–101, Mai 2017. ISSN 1573-2673. URL <https://doi.org/10.1007/s10704-017-0185-3>. (Cité en page 140.)
- [Pierré et al. 2016] J. E. Pierré, J. C. Passieux, J. N. P ri , F. Bugarin, et L. Robert. Unstructured finite element-based digital image correlation with enhanced management of quadrature and lens distortions. *Optics and Lasers in Engineering*, 77:44–53, F b. 2016. ISSN 0143-8166. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S014381661500161X>. (Cité en pages 65 et 66.)
- [Rabczuk 2013] T. Rabczuk. Computational Methods for Fracture in Brittle and Quasi-Brittle Solids : State-of-the-Art Review and Future Perspectives. *International Scholarly Research Notices*, 2013(1):849231, 2013. ISSN 2356-7872. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1155/2013/849231>. \_eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1155/2013/849231>. (Cité en page 4.)
- [Ragonneau 2023] T. M. Ragonneau. Model-based derivative-free optimization methods and software. 2023. URL <https://theses.lib.polyu.edu.hk/handle/200/12294>. Accepted : 2023-04-12T01 :58 :42Z Publisher : Hong Kong Polytechnic University. (Cité en page 114.)
- [Rannou et Bovet 2024] J. Rannou et C. Bovet. Domain decomposition methods and acceleration techniques for the phase field fracture staggered solver. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 125(17):e7544, 2024. ISSN 1097-0207. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.7544>. \_eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.7544>. (Cité en page 29.)
- [Rannou et al. 2010] J. Rannou, N. Limodin, J. Réthoré, A. Gravouil, W. Ludwig, M.-C. Ba etto-Dubourg, J.-Y. Buffi re, A. Combescure, F. Hild, et S. Roux. Three dimensional experimental and numerical multiscale analysis of a fatigue crack. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21–22):1307–1325, 2010. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.09.013>. (Cité en page 86.)
- [Réthoré 2010] J. Réthoré. A fully integrated noise robust strategy for the identification of constitutive laws from digital images. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(6):631–660, 2010. ISSN 1097-0207. URL <https://doi.org/10.1002/nme.2908>. (Cité en page 64.)

- [Réthoré et al. 2011] J. Réthoré, N. Limodin, J.-Y. Buffière, F. Hild, W. Ludwig, et S. Roux. Digital volume correlation analyses of synchrotron tomographic images. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 46(7):683–695, 2011. URL <https://doi.org/10.1177/0309324711409999>. (Cité en page 86.)
- [Robert et Casella 2004] C. Robert et G. Casella. *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer Texts in Statistics. Springer-Verlag, New York, NY, USA, 2 éd., 2004. ISBN 978-1-4757-4145-2. URL <https://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-4145-2>. (Cité en page 116.)
- [Romani et al. 2015] R. Romani, M. Bornert, D. Leguillon, R. Le Roy, et K. Sab. Detection of crack onset in double cleavage drilled specimens of plaster under compression by digital image correlation – Theoretical predictions based on a coupled criterion. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 51:172–182, 2015. ISSN 0997-7538. URL <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2014.12.002>. (Cité en pages 43, 46, 47, 48 et 86.)
- [Roux et Hild 2020] S. Roux et F. Hild. Optimal procedure for the identification of constitutive parameters from experimentally measured displacement fields. *International Journal of Solids and Structures*, 184:14–23, Fév. 2020. ISSN 0020-7683. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768318304542>. (Cité en page 78.)
- [Roux et al. 2002] S. Roux, F. Hild, et Y. Berthaud. Correlation image velocimetry : a spectral approach. *Appl. Opt.*, 41(1):108–115, Jan 2002. URL <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-41-1-108>. (Cité en page 65.)
- [Rubinstein et Kroese 2016] R. Y. Rubinstein et D. P. Kroese. *Simulation and the Monte Carlo method*, vol. 10 de *Wiley Series in Probability and Statistics*. John Wiley & Sons, 3rd éd., 2016. URL <https://dx.doi.org/10.1002/9780470230381>. (Cité en page 116.)
- [Réthoré 2015] J. Réthoré. Automatic crack tip detection and stress intensity factors estimation of curved cracks from digital images. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 103(7):516–534, 2015. ISSN 1097-0207. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.4905>. \_eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.4905>. (Cité en page 86.)
- [Réthoré et al. 2007] J. Réthoré, S. Roux, et F. Hild. From pictures to extended finite elements : extended digital image correlation (X-DIC). *Comptes Rendus. Mécanique*, 335(3):131–137, 2007. ISSN 1873-7234. URL <https://comptes-rendus.academie-sciences.fr/mecanique/articles/10.1016/j.crme.2007.02.003/>. (Cité en page 65.)
- [Réthoré et al. 2008] J. Réthoré, F. Hild, et S. Roux. Extended digital image correlation with crack shape optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73(2):248–272, 2008. ISSN 1097-0207. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.2070>. \_eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.2070>. (Cité en pages 65 et 86.)

- [Réthoré et al. 2010] J. Réthoré, T. Elguedj, P. Simon, et M. Coret. On the Use of NURBS Functions for Displacement Derivatives Measurement by Digital Image Correlation. *Experimental Mechanics*, 50(7):1099–1116, Sept. 2010. ISSN 1741-2765. URL <https://doi.org/10.1007/s11340-009-9304-z>. (Cité en page 65.)
- [Réthoré et al. 2013] J. Réthoré, Muhibullah, T. Elguedj, M. Coret, P. Chaudet, et A. Combescure. Robust identification of elasto-plastic constitutive law parameters from digital images using 3D kinematics. *International Journal of Solids and Structures*, 50(1), Jan. 2013. ISSN 0020-7683. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768312003836>. (Cité en page 80.)
- [Schuëller et Spanos 2001] G. Schuëller et P. D. Spanos. *Monte Carlo Simulation*. A.A. Balkema, Rotterdam, The Netherlands, 2001. (Cité en page 116.)
- [Scott 2015] D. W. Scott. *Multivariate Density Estimation : Theory, Practice, and Visualization*. John Wiley & Sons, Inc., second édn, 2015. URL <https://doi.org/10.1002/9781118575574>. (Cité en page 134.)
- [Seleš et al. 2019] K. Seleš, T. Lesičar, Z. Tonković, et J. Sorić. A residual control staggered solution scheme for the phase-field modeling of brittle fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 205:370–386, 2019. ISSN 0013-7944. URL <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.09.027>. (Cité en page 30.)
- [Seleš et al. 2021] K. Seleš, F. Aldakheel, Z. Tonković, J. Sorić, et P. Wriggers. A general phase-field model for fatigue failure in brittle and ductile solids. *Computational Mechanics*, 67(5):1431–1452, mar 2021. URL <https://doi.org/10.1007/s00466-021-01996-5>. (Cité en page 30.)
- [Shannon 1948] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27(3):379–423, Jul 1948. ISSN 0005-8580. URL <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x>. (Cité en page 101.)
- [Shannon 2001] C. E. Shannon. A Mathematical Theory of Communication. *SIG-MOBILE Mob. Comput. Commun. Rev.*, 5(1):3–55, Jan. 2001. ISSN 1559-1662. URL <http://doi.acm.org/10.1145/584091.584093>. (Cité en page 101.)
- [Singh et al. 2016] N. Singh, C. Verhoosel, R. de Borst, et E. van Brummelen. A fracture-controlled path-following technique for phase-field modeling of brittle fracture. *Finite Elements in Analysis and Design*, 113:14–29, 2016. ISSN 0168-874X. URL <https://doi.org/10.1016/j.finel.2015.12.005>. (Cité en page 29.)
- [Sobezyk et Trębicki 1990] K. Sobezyk et J. Trębicki. Maximum entropy principle in stochastic dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 5(3):102–110, 1990. ISSN 0266-8920. URL [https://doi.org/10.1016/0266-8920\(90\)90001-Z](https://doi.org/10.1016/0266-8920(90)90001-Z). (Cité en page 101.)
- [Soize 2017] C. Soize. *Uncertainty Quantification : An Accelerated Course with Advanced Applications in Computational Engineering*, vol. 47 de *Interdisciplinary*

- Applied Mathematics*. Springer International Publishing, 1 édn, 2017. ISBN 978-3-319-54339-0. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-319-54339-0>. (Cité en pages 4, 101, 106, 109, 112, 113 et 155.)
- [Staber et Guillemot 2017] B. Staber et J. Guillemot. Stochastic modeling and generation of random fields of elasticity tensors : A unified information-theoretic approach. *Comptes Rendus Mécanique*, 345(6):399–416, 2017. ISSN 1631-0721. URL <https://doi.org/10.1016/j.crme.2017.05.001>. (Cité en page 105.)
- [Steinke et Kaliske 2019] C. Steinke et M. Kaliske. A phase-field crack model based on directional stress decomposition. *Computational Mechanics*, 63(5):1019–1046, 2019. URL <https://doi.org/10.1007/s00466-018-1635-0>. (Cité en pages 26 et 27.)
- [Storm et al. 2020] J. Storm, D. Supriatna, et M. Kaliske. The concept of representative crack elements for phase-field fracture : Anisotropic elasticity and thermo-elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 121(5):779–805, 2020. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.6244>. (Cité en page 26.)
- [Strobl et Seelig 2015] M. Strobl et T. Seelig. A novel treatment of crack boundary conditions in phase field models of fracture. *PAMM*, 15(1):155–156, 2015. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/pamm.201510068>. (Cité en page 26.)
- [Strobl et Seelig 2016] M. Strobl et T. Seelig. On constitutive assumptions in phase field approaches to brittle fracture. *Procedia Structural Integrity*, 2:3705–3712, 2016. ISSN 24523216. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2452321616304796>. (Cité en page 26.)
- [Sun et al. 2005] Y. Sun, J. H. L. Pang, C. K. Wong, et F. Su. Finite element formulation for a digital image correlation method. *Appl. Opt.*, 44(34):7357–7363, Dec 2005. URL <https://opg.optica.org/ao/abstract.cfm?URI=ao-44-34-7357>. (Cité en pages 65 et 66.)
- [Supriatna et al. 2022] D. Supriatna, B. Yin, D. Konopka, et M. Kaliske. An anisotropic phase-field approach accounting for mixed fracture modes in wood structures within the Representative Crack Element framework. *Engineering Fracture Mechanics*, 269:108514, 2022. ISSN 0013-7944. URL <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2022.108514>. (Cité en page 4.)
- [Sutton et al. 1983] M. Sutton, W. Wolters, W. Peters, W. Ranson, et S. McNeill. Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image and Vision Computing*, 1(3):133–139, 1983. ISSN 0262-8856. URL [https://doi.org/10.1016/0262-8856\(83\)90064-1](https://doi.org/10.1016/0262-8856(83)90064-1). (Cité en page 65.)
- [Sutton et al. 1986] M. Sutton, C. Mingqi, W. Peters, Y. Chao, et S. McNeill. Application of an optimized digital correlation method to planar deformation analysis. *Image and Vision Computing*, 4(3):143–150, 1986. ISSN 0262-8856. URL [https://doi.org/10.1016/0262-8856\(86\)90057-0](https://doi.org/10.1016/0262-8856(86)90057-0). (Cité en page 65.)
- [Sutton et al. 2009] M. A. Sutton, J.-J. Orteu, et H. Schreier. *Image Correlation for Shape, Motion and Deformation Measurements : Basic Concepts, Theory*

- and Applications*. Springer US, Boston, MA, 2009. ISBN 978-0-387-78746-6 978-0-387-78747-3. URL <https://link.springer.com/10.1007/978-0-387-78747-3>. (Cité en pages 4 et 65.)
- [Tanné et al. 2018] E. Tanné, T. Li, B. Bourdin, J. J. Marigo, et C. Maurini. Crack nucleation in variational phase-field models of brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 110:80–99, Jan. 2018. ISSN 0022-5096. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509617306543>. (Cité en pages 97, 117 et 119.)
- [Teichtmeister et al. 2017] S. Teichtmeister, D. Kienle, F. Aldakheel, et M.-A. Keip. Phase field modeling of fracture in anisotropic brittle solids. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 97:1–21, 2017. (Cité en pages 13, 15 et 139.)
- [Torquato 2002] S. Torquato. *Random Heterogeneous Materials : Microstructure and Macroscopic Properties*, vol. 16. Springer-Verlag, New York, NY, USA, 2002. ISBN 978-1-4757-6355-3. URL <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6355-3>. (Cité en page 104.)
- [Vicentini et al. 2024] F. Vicentini, C. Zolesi, P. Carrara, C. Maurini, et L. De Lorenzis. On the energy decomposition in variational phase-field models for brittle fracture under multi-axial stress states. *International Journal of Fracture*, 2024. URL <https://doi.org/10.1007/s10704-024-00763-w>. (Cité en pages 25 et 44.)
- [Virtanen et al. 2020] P. Virtanen, R. Gommers, T. E. Oliphant, M. Haberland, T. Reddy, D. Cournapeau, E. Burovski, P. Peterson, W. Weckesser, J. Bright, S. J. van der Walt, M. Brett, J. Wilson, K. J. Millman, N. Mayorov, A. R. J. Nelson, E. Jones, R. Kern, E. Larson, C. J. Carey, Í. Polat, Y. Feng, E. W. Moore, J. VanderPlas, D. Laxalde, J. Perktold, R. Cimrman, I. Henriksen, E. A. Quintero, C. R. Harris, A. M. Archibald, A. H. Ribeiro, F. Pedregosa, P. van Mulbregt, et SciPy 1.0 Contributors. SciPy 1.0 : Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, 17:261–272, 2020. URL <https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2>. (Cité en pages 67, 81, 94, 110, 114 et 122.)
- [Vu et al. 2022] B.-T. Vu, H. L. Quang, et Q.-C. He. Modelling and simulation of fracture in anisotropic brittle materials by the phase-field method with novel strain decompositions. *Mechanics Research Communications*, 124:103936, 2022. ISSN 0093-6413. URL <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2022.103936>. (Cité en pages 15 et 28.)
- [Wagne et al. 2002] B. Wagne, S. Roux, et F. Hild. Spectral approach to displacement evaluation from image analysis. *The European Physical Journal Applied Physics*, 17(3):247–252, Mars 2002. ISSN 1286-0042, 1286-0050. URL <https://www.epjap.org/articles/epjap/abs/2002/03/ap01131/ap01131.html>. Number : 3 Publisher : EDP Sciences. (Cité en page 65.)
- [Walpole 1984] L. J. Walpole. Fourth-rank tensors of the thirty-two crystal classes : multiplication tables. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 391(1800):149–179, 1984. ISSN 0080-

4630. URL <https://doi.org/10.1098/rspa.1984.0008>. (Cité en pages 104 et 105.)
- [Wheeler et al. 2014] M. F. Wheeler, T. Wick, et W. Wollner. An augmented-Lagrangian method for the phase-field approach for pressurized fractures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 271:69–85, Avr. 2014. ISSN 0045-7825. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782513003459>. (Cité en page 31.)
- [Wick 2017a] T. Wick. An Error-Oriented Newton/Inexact Augmented Lagrangian Approach for Fully Monolithic Phase-Field Fracture Propagation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 39(4):B589–B617, 2017a. URL <https://doi.org/10.1137/16M1063873>. (Cité en page 31.)
- [Wick 2017b] T. Wick. Modified Newton methods for solving fully monolithic phase-field quasi-static brittle fracture propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 325:577–611, 2017b. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.07.026>. (Cité en pages 29 et 31.)
- [Wick 2020] T. Wick. *Multiphysics Phase-Field Fracture : Modeling, Adaptive Discretizations, and Solvers*. De Gruyter, Berlin, Boston, 2020. ISBN 9783110497397. URL <https://doi.org/10.1515/9783110497397>. (Cité en page 29.)
- [Winandy 1994] J. E. Winandy. Wood properties. *Encyclopedia of agricultural science*, 4:549–561, 1994. URL [https://www.fpl.fs.usda.gov/products/publications/specific\\_pub.php?posting\\_id=13112](https://www.fpl.fs.usda.gov/products/publications/specific_pub.php?posting_id=13112). Publisher : Academic Press Orlando. (Cité en pages 60, 61, 72, 80 et 139.)
- [Wu 2017] J.-Y. Wu. A unified phase-field theory for the mechanics of damage and quasi-brittle failure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 103:72–99, 2017. ISSN 0022-5096. URL <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.03.015>. (Cité en pages 11, 30 et 139.)
- [Wu 2018] J.-Y. Wu. A geometrically regularized gradient-damage model with energetic equivalence. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 328:612–637, 2018. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.09.027>. (Cité en pages 30 et 139.)
- [Wu et Cervera 2018] J.-Y. Wu et M. Cervera. A novel positive/negative projection in energy norm for the damage modeling of quasi-brittle solids. *International Journal of Solids and Structures*, 139-140:250–269, 2018. ISSN 0020-7683. URL <https://doi.org/10.1016/j.ijstr.2018.02.004>. (Cité en page 25.)
- [Wu et al. 2020a] J.-Y. Wu, V. P. Nguyen, C. T. Nguyen, D. Sutula, S. Sinaie, et S. P. A. Bordas. Chapter One - Phase-field modeling of fracture. Dans S. P. A. Bordas et D. S. Balint,  ds, *Advances in Applied Mechanics*, vol. 53, p. 1–183. Elsevier, Jan. 2020a. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0065215619300134>. (Cité en pages 11, 12, 13, 16, 25, 29, 30, 31, 35, 37 et 129.)
- [Wu et al. 2020b] J.-Y. Wu, V. P. Nguyen, H. Zhou, et Y. Huang. A variationally consistent phase-field anisotropic damage model for fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 358:112629, jan 2020b. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.112629>. (Cité en page 25.)

- [Wu et al. 2023] J.-Y. Wu, J.-R. Yao, et J.-L. Le. Phase-field modeling of stochastic fracture in heterogeneous quasi-brittle solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 416:116332, 2023. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116332>. (Cité en page 5.)
- [Yin et Kaliske 2020] B. Yin et M. Kaliske. An anisotropic phase-field model based on the equivalent crack surface energy density at finite strain. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 369:113202, 2020. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113202>. (Cité en pages 4 et 139.)
- [Zhang et al. 2024] H. Zhang, J. E. Dolbow, et J. Guilleminot. Representing model uncertainties in brittle fracture simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 418:116575, 2024. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116575>. (Cité en page 5.)
- [Zhang et al. 2020] S. Zhang, W. Jiang, et M. R. Tonks. A new phase field fracture model for brittle materials that accounts for elastic anisotropy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 358, Jan. 2020. ISSN 00457825. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782519305274>. (Cité en pages xix, 24 et 147.)
- [Zhu et al. 1997] C. Zhu, R. H. Byrd, P. Lu, et J. Nocedal. Algorithm 778 : L-BFGS-B : Fortran Subroutines for Large-Scale Bound-Constrained Optimization. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 23(4):550–560, Déc. 1997. ISSN 0098-3500. URL <http://www.scopus.com/inward/record.url?scp=0031345518&partnerID=8YFLogxK>. (Cité en page 94.)
- [Ziaei-Rad et Shen 2016] V. Ziaei-Rad et Y. Shen. Massive parallelization of the phase field formulation for crack propagation with time adaptivity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 312:224–253, Déc. 2016. ISSN 0045-7825. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782516302006>. (Cité en page 29.)
- [Ziaei-Rad et al. 2023] V. Ziaei-Rad, M. Mollaali, T. Nagel, O. Kolditz, et K. Yoshioka. Orthogonal decomposition of anisotropic constitutive models for the phase field approach to fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 171:105143, 2023. ISSN 0022-5096. URL <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2022.105143>. (Cité en pages 22, 24 et 145.)
- [Zienkiewicz et Taylor 2005] O. C. Zienkiewicz et R. L. Taylor. *The finite element method for solid and structural mechanics*. Elsevier Butterworth-Heinemann, Amsterdam ; Boston, 6th ed éd., 2005. ISBN 978-0-7506-6321-2. (Cité en pages 2 et 33.)
- [Zienkiewicz et Zhu 1987] O. C. Zienkiewicz et J. Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(2):337–357, 1987. URL <https://doi.org/10.1002/nme.1620240206>. (Cité en pages xii, 130 et 131.)