



HAL
open science

Fonction d'Erdos Hooley d'argument friable

Julie Wetzer

► **To cite this version:**

Julie Wetzer. Fonction d'Erdos Hooley d'argument friable. Mathématiques [math]. Université du Littoral Côte d'Opale, 2024. Français. NNT : 2024DUNK0708 . tel-04871730

HAL Id: tel-04871730

<https://theses.hal.science/tel-04871730v1>

Submitted on 7 Jan 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse de Doctorat

Mention Mathématiques

présentée à l'*Ecole Doctorale en Sciences Technologie et Santé (ED 585)*

de l'**Université du Littoral et de la Côte d'Opale**

par

Julie Wetzer

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université du Littoral et de la Côte d'Opale

*Fonction d'Erdős-Hooley
d'argument friable*

Soutenue le 04 juillet 2024, après avis des rapporteurs, devant le jury d'examen :

Florent Jouve, Professeur, Université de Bordeaux
Sary Drappeau, Maître de Conférences, Université de Marseille
Cécile Dartyge, Maître de Conférences, Université de Lorraine
Lucile Devin, Maître de Conférences, ULCO
Bruno Martin, Professeur, ULCO
Gérald Tenenbaum, Professeur, Université de Lorraine

Président & Rapporteur
Rapporteur
Examinatrice
Examinatrice
Directeur de thèse
Directeur de thèse



Remerciements

Je remercie chaleureusement mes directeurs de thèse, Bruno Martin et Gérald Tenenbaum, pour ces quatre années. Pour leur patience, leur bienveillance, leur écoute, leur soutien, leur disponibilité et tout ce qu'ils m'ont appris, pas uniquement sur le plan mathématique. Je n'aurais pas pu avoir un meilleur encadrement, merci à vous.

Un grand merci à Florent Jouve et Sary Drappeau d'avoir accepté d'être les rapporteurs de mon travail.

Merci également à Cécile Dartyge et Lucile Devin pour avoir accepté d'être membre du jury de cette thèse.

Je voudrais remercier le LMPA de Calais et surtout les personnes qui le composent, sans lesquelles je n'aurais pas pu effectuer mes recherches dans les meilleures conditions possibles.

Mes premières pensées vont bien sûr vers Christian, qui m'a soutenue dans les pires moments et avec qui j'ai partagé les meilleurs. Merci pour ton amitié, pour nos longues discussions, pour avoir été ma plus belle rencontre calaisienne, merci pour tout.

L'autre personne à qui je pense immédiatement est Vincent, mon petit frère de thèse devenu petit frère de cœur. Merci pour tous ces moments, pour cette complicité précieuse. Tu m'as bien plus apporté que tu ne l'imagines.

Merci à Pierre pour ta bonne humeur et ton optimisme, pour les activités partagées et nos longues discussions plus ou moins sérieuses. Merci également aux autres doctorants du groupe « doctorants en présentiel », Keenan et Martin, pour les fous rires et les bons moments.

Merci à Isabelle, la meilleure secrétaire de labo et bien plus encore, merci de si bien veiller sur nous. Merci aussi à Gaëlle pour ta disponibilité et ta sympathie.

Merci à tous les autres membres du LMPA. Lucile, pour nos délires et discussions qu'on n'arrive jamais à raccourcir. Romuald, pour ta générosité sans faille et ton énergie, à nos bavardages dans le bureau des doctorants. Antoine, pour ta gentillesse et ton caractère attachant, à nos taquineries (et au fait que tu persistes à revendiquer l'appartenance d'une certaine ville française à une région qui ne la contient pas...). Loïc, pour tes conversations enrichissantes, ton dévouement et toute l'aide précieuse que tu m'as généreusement apportée. Jean, pour ta bienveillance et ta présence toujours des plus agréables (et bien sûr ton bon goût en matière de culture geek!). Thierry, pour tout ce qui est possible de partager avec toi, des sujets les plus sérieux aux bêtises les plus grosses, mais aussi pour toute l'aide que tu es toujours prêt à m'apporter. Pierre-Louis, pour tes conseils et ton aide éclairée lors de mes premiers pas dans l'enseignement. Christophe, pour ton humour et ta bonne humeur à toute épreuve, Denis pour ta bonhomie et ton horrible jeu que tu as rebaptisé à mon nom. Philippe, pour ta sympathie et ta disponibilité. Augustin et Nicolas, pour votre aide dévouée et le temps

passé que vous n'avez pas compté. Guillaume, pour avoir guidé mes premiers pas de doctorante. Merci à Sandrine, Virginie, Isar, Shalom, Rawaa, Xavier, Mélodie, Gaëlle, Romain, Manon, Carole, Lech, Khalide, Abderrahman, Léo... vous tous qui composez cette ambiance si agréable. Merci pour les discussions et fous rires aux repas du midi, mais également pour tous les moments en dehors des murs de la fac.

Merci encore à Christian et Cécile pour avoir composé mon comité de suivi pendant trois ans.

Merci aux doctorants et ex-doctorants de Nancy et ceux que j'ai rencontré lors de ma première école d'été. Merci d'avoir été toujours si chaleureux et accueillants.

Merci à Anne pour ton soutien et pour t'être intéressée à mon univers en venant écouter l'un de mes exposés.

Merci à Marie-Laure pour votre aide et soutien.

Merci aux personnes plus extérieures à tout ça, dont le soutien n'a pas été moins important dans l'aboutissement de ce travail. Antoine, Elisa, Jeanne, Jérôme, Maxime, Sarah, Isabelle, Muriel, Michel C... .

À un certain groupe de JDR près de Laon, dont le contact m'a apaisée sur beaucoup de choses.

Merci à Clémentine pour ta gentillesse.

Merci à ma *dream team*, je ne saurais en quelques lignes exprimer toute l'amitié et la reconnaissance que j'éprouve à votre égard. Pour vos mots, votre soutien, nos délires, nos jeux... à notre lamentable mais si belle équipe d'enquêteurs de Sherlock Holmes. À tous ces moments ensemble, passés, présents et futurs. À tout ce que vous m'avez apporté, appris. Victor, Fabien et Christophe, un immense merci.

Merci à ma famille. Mes parents, tout d'abord, dont l'amour et leur don pour les aventures rocambolesques m'a permis de rencontrer, de la plus invraisemblable des manières, mes directeurs de thèse. Merci pour tout ce que vous avez fait pour moi, depuis toujours.

Merci à Sophie et François, pour leur soutien de loin, leur compréhension et leur générosité, François, également pour être le grand frère que j'aimerai toujours embêter. Merci à Lucas et Clara d'être tout simplement les meilleurs neveux, je vous aime très fort.

Merci à Gabriel, pour notre complicité retrouvée et pour ce lien tout particulier qui nous lie. Je suis si fière d'être ta petite sœur.

Merci à mes deux piliers, mes murs porteurs, Camille et Héloïse. Je vous dois tellement.

Merci enfin à Théo, pour ces années à se supporter et à s'aimer. Merci d'être toujours là pour moi.

À toutes les personnes que j'aurais oubliées, merci pour tout.

Sommaire

Résumé	ii
Remerciements	iii
Sommaire	v
1 Introduction	1
2 Résultats auxiliaires	11
3 Estimation de $\mathfrak{S}(x, y)$ dans le domaine $2 \leq y \leq \exp\{(\log_2 x)^2\}$	19
4 Raffinement d'un théorème de Tenenbaum et Wu	30
5 Minoration de $\mathfrak{S}(x, y)$ dans H_ε	48
6 Majoration de $\mathfrak{S}(x, y)$ dans H_ε	67
Bibliographie	85
Table des matières	88

Introduction

1.1 Fonction Δ d'Erdős-Hooley et structure des diviseurs

Posons

$$(1.1) \quad \Delta(n, v) := \sum_{\substack{d|n \\ v \leq \log d < v+1}} 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*, v \in \mathbb{R}),$$

et

$$(1.2) \quad \Delta(n) := \sup_{v \in \mathbb{R}} \Delta(n, v).$$

Cette fonction a été introduite sous une forme essentiellement équivalente par Erdős [Erd74] en 1974. L'étude a été poursuivie avec Nicolas dans l'article [EN76] dans lequel la fonction est formellement définie — l'intervalle $[e^v, e^{v+1}[$ apparaissant sous la forme $[2^v, 2^{v+1}[$, ce qui ne modifie en rien la problématique. En 1979, Hooley [Hoo79] introduit les notations (1.1) et (1.2) et développe plusieurs applications de la détermination de l'ordre moyen de cette fonction. L'étude de la fonction Δ a depuis fait l'objet d'un grand nombre de travaux.

Rappelons que l'on note traditionnellement τ la fonction « nombre de diviseurs » et remarquons d'emblée que Δ/τ est une fonction de concentration au sens probabiliste. Étant donnée une fonction de répartition F , Paul Lévy a défini en 1937 la fonction de concentration Q_F par la formule

$$Q_F(\ell) := \sup_{z \in \mathbb{R}} (F(z + \ell) - F(z)) \quad (\ell > 0).$$

Ainsi, pour la spécialisation

$$F_n(z) := \frac{1}{\tau(n)} \sum_{\substack{d|n \\ \log d \leq z}} 1 \quad (z \in \mathbb{R}),$$

nous avons

$$\Delta(n) = \tau(n) Q_{F_n}(1).$$

Les tableaux suivants fournissent les premières valeurs de la fonction Δ .

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\Delta(n)$	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	3	1	2	2

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\Delta(n)$	2	1	2	1	3	2	2	1	4	1	2	1	2	1	3

On remarque que pour tout nombre premier p impair et tout entier $\alpha \geq 1$, on a $\Delta(p^\alpha) = 1$. Par ailleurs, la fonction Δ n'est pas bornée : ainsi que l'observent Hall et Tenenbaum dans [HT88, ch.6], on a par exemple $\Delta(2^\alpha 3^\beta) \geq \beta + 1$ dès que $2^\alpha > 3^\beta$.

Le calcul numérique met en évidence une croissance très lente de $\Delta^+(n) := \sup_{k \leq n} \Delta(k)$ puisqu'on a par exemple $\Delta^+(10^5) = 23$. Nous pouvons également observer la fréquence des valeurs prises par les premières valeurs de $\Delta(n)$.

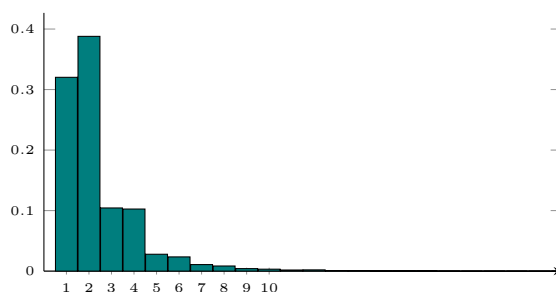


FIGURE 1.1 – Fréquence des valeurs de $\Delta(n)$ pour $1 \leq n \leq 100000$

Un premier encadrement de $\Delta(n)$ peut être énoncé sous la forme :

$$(1.3) \quad \max\left(1, \frac{\tau(n)}{1 + \log n}\right) \leq \Delta(n) \leq \tau(n) \quad (n \geq 1).$$

La majoration est triviale et la minoration résulte du principe des tiroirs. La majoration peut être améliorée en utilisant soit l'inégalité Kolmogorov-Rogozin pour les fonctions de concentration (voir par exemple [Ten22, exer. 265]), soit un théorème combinatoire de Sperner [Spe28] (voir [Ten22, exer. 266]) :

$$(1.4) \quad \Delta(n) \ll \frac{\tau(n)}{\sqrt{1 + \omega(n)}} \quad (n \geq 1),$$

où $\omega(n)$ désigne le nombre des facteurs premiers de n .

La question de l'ordre moyen de la fonction Δ consiste donc à préciser le comportement asymptotique de la quantité

$$\mathfrak{S}(x) := \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \Delta(n).$$

Via des manipulations standard, et compte tenu de la minoration triviale, la relation (1.4) fournit l'encadrement

$$(1.5) \quad 1 \leq \mathfrak{S}(x) \ll \frac{\log x}{\log_2 x} \quad (x \geq 3).$$

La détermination de l'ordre moyen de $\Delta(n)$ est un problème extrêmement difficile, toujours ouvert après de nombreux travaux. Présentons brièvement les résultats successifs obtenus.

Erdős a prouvé dans [Erd74] que $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathfrak{S}(x) = +\infty$ – Hooley détaille cette preuve dans [Hoo79]. En 1982, Hall et Tenenbaum [HT82, th. 3] ont montré que

$$(1.6) \quad \mathfrak{S}(x) \gg \log_2 x.$$

Cette minoration est longtemps restée la meilleure connue. Récemment, Ford, Koukoulopoulos et Tao [FKT23] ont amélioré ce résultat en montrant que pour $x \geq 3$,

$$(1.7) \quad \mathfrak{S}(x) \gg (\log_2 x)^{1+\eta+o(1)},$$

où $\eta \approx 0.3533227$ est une constante précisément définie dans le travail [FGK23], relatif à l'ordre normal de $\Delta(n)$ — voir [FGK23, (1.3)]. Très récemment, La Bretèche et Tenenbaum [BT24c] sont parvenus à une nouvelle amélioration en démontrant que, pour $x \geq 3$, on a

$$\mathfrak{S}(x) \gg (\log_2 x)^{3/2}.$$

Concernant la majoration, Hooley obtient dans [Hoo79] une amélioration significative de (1.5), soit

$$\mathfrak{S}(x) \ll (\log x)^{4/\pi-1} \quad (x \geq 2),$$

et anticipe que l'ordre de grandeur exact de $\mathfrak{S}(x)$ est de la forme $(\log x)^{a+o(1)}$ pour une constante convenable $a > 0$. Tenenbaum [Ten85] a infirmé cette conjecture en démontrant en 1985 qu'il existe $c_0 > 0$ tel que

$$(1.8) \quad \mathfrak{S}(x) \ll e^{c_0 \sqrt{\log_2 x \log_3 x}} \quad (x \geq 16).$$

En 2022, La Bretèche et Tenenbaum [BT23b] ont réussi à éliminer le facteur $\log_3 x$: pour tout $a > \sqrt{2} \log 2 \approx 0.98026$, on a

$$\mathfrak{S}(x) \ll e^{a \sqrt{\log_2 x}} \quad (x \geq 3).$$

En 2023, Koukoulopoulos et Tao [KT23] ont obtenu une amélioration représentant un saut qualitatif :

$$\mathfrak{S}(x) \ll (\log_2 x)^{11/4} \quad (x \geq 3).$$

Cette estimation a elle-même été raffinée par La Bretèche et Tenenbaum dans [BT24c] : nous avons

$$\mathfrak{S}(x) \ll (\log_2 x)^{5/2} \quad (x \geq 3).$$

Le meilleur encadrement connu à ce jour pour l'ordre moyen de $\Delta(n)$ est donc

$$(\log_2 x)^{3/2} \ll \mathfrak{S}(x) \ll (\log_2 x)^{5/2} \quad (x \geq 3).$$

Ainsi qu'il a été mis en évidence par Hooley, la majoration de l'ordre moyen de Δ possède de nombreuses applications. Décrivons-en une. Désignons par $\nu(x)$ le nombre d'entiers n'excédant pas x et pouvant s'écrire comme somme d'un carré et de deux

bicarrés. En exploitant la majoration $\mathfrak{S}(x) \ll (\log x)^{4/\pi-1}$, Hooley montre la minoration

$$(1.9) \quad \nu(x) > x(\log x)^{1-4/\pi-o(1)} \quad (x \rightarrow \infty).$$

L'amélioration de la majoration de $\mathfrak{S}(x)$ obtenue par La Bretèche et Tenenbaum permet d'établir (cf. [BT24b], theorem 1.1)

$$\nu(x) \gg x/(\log_2 x)^{5/2} \quad (x \rightarrow \infty).$$

Sous certaines conditions concernant les entiers positifs $k \in \mathbb{N}^*$, c_j, ℓ_j ($0 \leq j \leq k$) tels que $\ell_0 = \min \ell_j = 2$, il est possible d'étendre cette minoration au nombre des entiers $n \leq x$ représentables sous la forme

$$n = \sum_{0 \leq j < k} c_j n_j^{\ell_j}.$$

Nous renvoyons à [BT24b] pour les derniers résultats sur cet aspect de la question.

Bien que cette problématique ne soit pas abordée dans cette thèse, une autre question, toujours ouverte, concernant la fonction Δ est celle de la détermination de l'ordre normal. On rappelle qu'une propriété est dite vraie « pour presque tout entier n », si elle est vérifiée sur une partie $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$ telle que

$$|\mathcal{A} \cap [1, N]| = N + o(N) \quad (N \rightarrow \infty).$$

À ce jour, nous disposons de l'encadrement

$$(\log_2 n)^{\eta+o(1)} < \Delta(n) < (\log_2 n)^{\theta+o(1)} \quad \text{pour presque tout } n,$$

où $\eta \approx 0,3533227$ est la constante apparaissant dans [1.7], et

$$\theta := (\log 2)/(\log 2 + 1/\log 2 - 1) \approx 0,6102495.$$

La minoration est due à Ford, Green et Koukoulopoulos [c51], la majoration à La Bretèche et Tenenbaum [BT23b].

1.2 Entiers friables

Un entier naturel $n > 1$ est dit y -friable si son plus grand facteur premier $P(n)$ n'excède pas y . Par convention, nous posons $P(1) := 1$. Nous notons traditionnellement

$$S(x, y) := \{n : n \leq x, P(n) \leq y\}$$

l'ensemble des entiers y -friables n'excédant pas x et posons

$$\Psi(x, y) := |S(x, y)|.$$

L'étude des entiers friables a fait l'objet de nombreux travaux ces quarante dernières années : voir par exemple l'article de survol [Dar18]. Elle possède de nombreuses applications dans divers domaines. Par exemple, les entiers friables interviennent en cryptographie, notamment pour le problème du logarithme discret sur les entiers. Ils jouent également un rôle en théorie analytique des nombres, par exemple dans le

problème de Waring ou dans l'étude des petits écarts entre nombres premiers. Plus récemment, pour évoquer un exemple qui nous intéresse directement, Koukoulopoulos et Tao [KT23] placent leur travail sur la fonction Δ dans le cadre probabiliste des entiers friables.

L'estimation asymptotique de $\Psi(x, y)$ est une question non triviale, qui a donné lieu à de nombreux travaux [Bru51a], [Hil86], [HT86]... Certains de ces résultats jouent un rôle direct dans cette thèse. Nous en livrons ici un premier aperçu en vue d'énoncer notre résultat principal.

La première estimation historique de $\Psi(x, y)$ est due à Dickman [Dic30]. Elle fait intervenir la fonction ϱ , dite de Dickman, qui est définie comme l'unique fonction continue sur $]0, \infty[$, dérivable sur $[1, \infty[$, satisfaisant à l'équation différentielle aux différences

$$\begin{cases} \varrho(v) = 1 & (0 < v \leq 1), \\ v\varrho'(v) + \varrho(v-1) = 0 & (v > 1). \end{cases}$$

Dickman établit, pour tout $u > 0$ fixé, l'estimation asymptotique

$$(1.10) \quad \Psi(x, y) \sim x\varrho(u) \quad (x \rightarrow \infty, y = x^{1/u}).$$

Cette formule explique l'incidence du paramètre

$$u := \frac{\log x}{\log y}$$

dans la théorie des entiers friables.

Pour tout $\varepsilon > 0$, la relation (1.10) persiste dans le domaine

$$H_\varepsilon := \left\{ (x, y) : x \geq 3, \exp\left((\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\right) \leq y \leq x \right\}.$$

Plus précisément, étendant le domaine de validité d'une formule de De Bruijn [Bru51a] démontrée en 1951, Hildebrand [Hil86] établit en 1986 l'estimation

$$(1.11) \quad \Psi(x, y) = x\varrho(u) \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \quad ((x, y) \in H_\varepsilon).$$

Des estimations élémentaires (voir par exemple [Ten22, th. III.5.2]) permettent de montrer que, lorsque le paramètre y est assez petit devant x , typiquement $y \leq (\log x)^{1-\varepsilon}$, l'approximation par la fonction de Dickman n'est plus valable. Cependant, en utilisant la méthode du col, Hildebrand et Tenenbaum ont obtenu en 1986 une estimation uniforme de $\Psi(x, y)$ pour $x \geq y \geq 2$ qui permet d'appréhender le comportement statistique des entiers friables en dehors de H_ε .

Introduisons

$$(1.12) \quad \zeta(s, y) := \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad (s > 0, y \geq 2),$$

ainsi que

$$\varphi_y(s) := -\frac{\zeta'(s, y)}{\zeta(s, y)} = \sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^s - 1} \quad (\Re s > 0, y \geq 2).$$

Nous définissons $\alpha = \alpha(x, y)$ comme l'unique solution réelle positive de l'équation

$$\varphi_y(\alpha) = \log x$$

et posons

$$(1.13) \quad \bar{u} := \frac{\min(y, \log x)}{\log y} \quad (x \geq y \geq 2).$$

L'estimation de $\Psi(x, y)$ obtenue par Hildebrand et Tenenbaum est alors

$$(1.14) \quad \Psi(x, y) = \frac{x^\alpha \zeta(\alpha, y)}{\alpha \sqrt{2\pi |\varphi'_y(\alpha)|}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\bar{u}}\right) \right\} \quad (x \geq y \geq 2).$$

Formulons deux remarques à propos de ce résultat. D'une part, il implique qu'il n'existe pas de fonction continue de x et y asymptotiquement équivalente à $\Psi(x, y)$ lorsque $y \leq (\log x)^{1-\varepsilon}$. D'autre part, en adjoignant à la méthode du col des estimations issues de la théorie des résidus et d'autres techniques d'analyse, il est possible de significativement raffiner l'évaluation (1.14) dans le domaine $y \leq (\log x)^{1-\varepsilon}$: voir [BT17] pour un exposé détaillé.

1.3 La fonction d'Erdős-Hooley sur les entiers friables

Étant donnée une fonction arithmétique f , l'étude de la quantité

$$(1.15) \quad \Psi_f(x, y) := \sum_{n \in S(x, y)} f(n)$$

constitue une première approche du comportement de $f(n)$ aux arguments friables. Le cas où f est multiplicative est bien sûr emblématique et a fait l'objet de nombreux travaux : voir notamment [TW03], [HTW08], [TW08a], [TW08b], [BT23a], [BT24a] pour des résultats récents et une bibliographie détaillée.

L'objectif principal de ce travail est d'étudier le comportement moyen de la fonction Δ sur les entiers friables. Autrement dit, nous souhaitons évaluer le comportement asymptotique de la quantité

$$(1.16) \quad \mathfrak{S}(x, y) := \frac{\Psi_\Delta(x, y)}{\Psi(x, y)} = \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in S(x, y)} \Delta(n) \quad (x \geq y \geq 2).$$

D'après [1.3], nous avons

$$(1.17) \quad \frac{\Psi_\tau(x, y)}{\Psi(x, y) \log x} \ll \mathfrak{S}(x, y) \leq \frac{\Psi_\tau(x, y)}{\Psi(x, y)}.$$

Dans le domaine H_ε , l'ordre moyen de la fonction τ est donné par (voir par exemple [TW03])

$$(1.18) \quad \Psi_\tau(x, y) \sim x \varrho_2(u) \log y \quad (x \rightarrow \infty, (x, y) \in H_\varepsilon)$$

où $\varrho_2(v) := \int_{\mathbb{R}} \varrho(v-t) \varrho(t) dt$ ($v > 0$) est le carré de convolution de la fonction de

Dickman. Posons

$$\mathbf{r}(v) := \frac{\varrho_2(v)}{\sqrt{v}\varrho(v)} \quad (v \geq 1),$$

et contentons-nous d'indiquer à ce stade que

$$\mathbf{r}(v) = 2^{v+O(v/\log v)} \quad (v \geq 2).$$

Compte-tenu de (1.11) et (1.18), nous obtenons l'encadrement linéaire

$$\frac{\mathbf{r}(u)}{\sqrt{u}} \ll \mathfrak{S}(x, y) \ll 2^{u+O(u/\log u)} \log y \quad ((x, y) \in H_\varepsilon).$$

Pour énoncer notre résultat principal, introduisons quelques notations supplémentaires. Posons

$$g(t) := \log \left\{ \frac{(1+2t)^{1+2t}}{(1+t)^{1+t}(4t)^t} \right\} \quad (t > 0).$$

La fonction g est croissante et strictement positive sur $]0, +\infty[$. Elle tend vers $\log 2$ en $+\infty$ et vers 0 en 0. Plus précisément,

$$g(t) = \begin{cases} \log 2 - \frac{1}{4t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) & (t \rightarrow \infty), \\ t \log\left(\frac{1}{t}\right) - t(\log 4 - 1) + O(t^2) & (t \rightarrow 0). \end{cases}$$

Enfin nous posons

$$\varepsilon_y := \frac{1}{\sqrt{\log y}} \quad (y \geq 2).$$

Théorème 1.1. (i) Soit $\varepsilon > 0$. Pour une constante convenable $c > 0$ et uniformément dans le domaine $(x, y) \in H_\varepsilon$, nous avons

$$(1.19) \quad \log_2 y + \mathbf{r}(u) \ll \mathfrak{S}(x, y) \ll 2^{u+O(u/\log u)} e^{c\sqrt{(\log_2 y)(\log_3 y)}}.$$

(ii) Pour $2 \leq y \leq \exp\{(\log_2 x)^2\}$ et avec la notation $\lambda := y/\log x$, nous avons

$$(1.20) \quad \mathfrak{S}(x, y) \asymp \exp\{ug(\lambda)(1 + O(\varepsilon_y))\}.$$

Au début de la préparation de cette thèse, le meilleur encadrement connu dans le cas non friable était encore

$$(1.21) \quad \log_2 x \ll \mathfrak{S}(x) \ll e^{c_0\sqrt{(\log_2 x)\log_3 x}},$$

la minoration étant due à Hall et Tenenbaum et la majoration à Tenenbaum. Nous avons ainsi adapté les techniques conduisant à (1.21) pour évaluer $\mathfrak{S}(x, y)$ dans le domaine H_ε . Les progrès très récents sur l'étude en moyenne de Δ décrits plus haut permettent d'envisager une amélioration de notre résultat qui pourrait faire l'objet d'un futur travail. Remarquons cependant qu'une telle amélioration de l'encadrement (1.19) ne serait significative que pour de très grandes valeurs de y . En effet, le terme $e^{c\sqrt{(\log_2 y)\log_3 y}}$ est absorbé par le facteur d'incertitude $2^{O(u/\log u)}$ dès lors que $y \leq x^{1/(\log_2 x)^c}$ avec $c > 1/2$; de même, le terme additif $\log_2 y$ du membre de gauche est absorbé par $\mathbf{r}(u)$ dès lors que

l'on a $y \leq x^{(\log 2)/\log_3 x}$.

Le point (ii) illustre une propriété de répartition des diviseurs spécifique aux entiers friables. Dans l'article [DT18], Drappeau et Tenenbaum ont fourni des estimations quantitatives de la distance entre la fonction de répartition des entiers friables et une gaussienne appropriée. Plus précisément, considérons la variable aléatoire D_n prenant les valeurs $\log d$ lorsque d parcourt l'ensemble des diviseurs de n avec probabilité uniforme $1/\tau(n)$, de sorte que l'espérance de D_n vaut $(\log n)/2$. Notons σ_n son écart-type, et posons

$$\Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2/2} dt \quad (z \in \mathbb{R}).$$

Rappelons la définition de \bar{u} en (1.13). Le corollaire 1.2 de [DT18] énonce que, pour toute constante $c > 0$, la relation

$$\mathbb{P}(D_n \geq \frac{1}{2} \log n + z\sigma_n) = \Phi(z) + O\left(\frac{1+z^4}{\bar{u}} \Phi(|z|)\right) \quad (z \ll \bar{u}^{1/4})$$

a lieu uniformément pour $x \geq y \geq 2$ et tous les entiers n de $S(x, y)$ sauf pour au plus $\ll e^{-c\bar{u}^{1/4}} \Psi(x, y)$ exceptions. Ainsi, les diviseurs d'un entier friable normal sont concentrés autour de leur moyenne, ce qui laisse présager que le comportement de $\Delta(n)$ sur ces entiers se rapproche de celui de $\tau(n)$. Le point (ii) du Théorème 1.1 rend compte de ce phénomène : nous verrons que (1.20) découle de (1.17) dans le domaine considéré.

Le Théorème 1.1 a fait l'objet de l'article [MTW24]. Pour établir certains résultats nous avons employé dans l'article des méthodes différentes de celles utilisées ici, nous le précisons en temps voulu.

1.4 Plan de la thèse

L'objectif principal de cette thèse est la démonstration du Théorème 1.1. Il est nécessaire à l'exposé d'une preuve complète de détailler les propriétés de certaines notions évoquées dans l'introduction et de rappeler les résultats connus dont nous ferons usage. Cela fait l'objet du Chapitre 2.

Nous verrons au Chapitre 3 que pour estimer $\mathfrak{S}(x, y)$ à la précision envisagée dans le domaine $2 \leq y \leq \exp\{(\log_2 x)^2\}$, il suffit en fait d'estimer le rapport

$$(1.22) \quad \frac{\Psi_\tau(x, y)}{\Psi(x, y)}.$$

À cette fin, nous ferons appel aux résultats issus de la méthode du col. Plus précisément, nous utiliserons une estimation récente de Tenenbaum [Ten23] pour le rapport (1.22), exprimée en fonction de la quantité $\zeta(\alpha, y)$. La conclusion sera alors obtenue grâce à une formule asymptotique pour $\zeta(\alpha, y)$ dans le domaine considéré.

Dans l'article [TW03], Tenenbaum et Wu obtiennent un théorème très général qui fournit une formule asymptotique pour $\Psi_f(x, y)$ lorsque f appartient à une large classe de fonctions multiplicatives positives ou nulles.

Le Chapitre 4 est consacré à établir une version effective de ce résultat relativement à certains paramètres. Cette estimation est exploitée au chapitre suivant.

Au Chapitre 5, nous établissons en deux temps la minoration

$$\mathfrak{S}(x, y) \gg \log_2 y + \mathfrak{r}(u) \quad ((x, y) \in H_\varepsilon)$$

énoncée au Théorème 1.1. Tout d'abord, lorsque u tend suffisamment vite vers l'infini, nous utilisons un argument de nature probabiliste pour obtenir

$$\sum_{n \in S(x, y)} \Delta(n) \gg \frac{\Psi_{\mu^2 \tau}(x, y)}{\sqrt{(\log y) \log(2x)}} \quad (x \geq y \geq 2),$$

où μ désigne la fonction de Möbius. La somme friable de la fonction multiplicative $\tau(n)\mu(n)^2$ peut être évaluée en utilisant le théorème principal de [TW03]. Cela nous permet d'obtenir, *in fine*, la minoration

$$(1.23) \quad \mathfrak{S}(x, y) \gg \mathfrak{r}(u) \quad ((x, y) \in H_\varepsilon).$$

Cette estimation est plus faible que la minoration de (1.19) lorsque $u < (\log_3 x)/\log 2$. Nous nous plaçons ensuite dans le domaine $\{x \geq y > x^{1/(2\log_3 x)}\}$, qui est un sous-domaine de H_ε et dans lequel $1 \leq u < 2\log_3 x$. Nous adaptons la démonstration de (1.6) pour $u = 1$ en exploitant la minoration due à Hall et Tenenbaum (cf. [HT88, lemma 60.1])

$$\Delta(n) \geq \frac{1}{2\tau(n)} \sum_{\substack{d|n, d'|n \\ |\log(d/d')| \leq 1}} 1.$$

Cette minoration implique

$$(1.24) \quad \sum_{n \in S(x, y)} \Delta(n) \gg \sum_{\substack{d \leq \sqrt{x} \\ P(d) \leq y}} 2^{-\Omega(d)} \Psi\left(\frac{x}{2d^2}, y\right) \sum_{\substack{(d, d')=1, P(d') \leq y \\ d < d' \leq 2d}} 2^{-\Omega(d')},$$

où $\Omega(n)$ désigne le nombre des facteurs premiers d'un entier n , comptés avec multiplicité. La somme intérieure dans le membre de droite est la moyenne d'une fonction multiplicative sur les entiers friables, mais ici la fonction multiplicative à estimer dépend d'un paramètre supplémentaire, à savoir d . C'est ici qu'intervient la version effective du théorème de Tenenbaum et Wu établie au Chapitre 4. Des calculs standard mènent ensuite à la minoration

$$(1.25) \quad \mathfrak{S}(x, y) \gg \log_2 y + \mathfrak{r}(u) \quad (x^{1/(2\log_3 x)} < y \leq x).$$

Puisque $\mathfrak{r}(u) \gg \log_2 y$ lorsque $\exp\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x^{1/(2\log_3 x)}$, les estimations (1.23) et (1.25) impliquent bien

$$\mathfrak{S}(x, y) \gg \log_2 y + \mathfrak{r}(u) \quad ((x, y) \in H_\varepsilon).$$

Signalons que dans l'article [MTW24], nous avons suivi une autre voie, basée sur la formule d'inversion de Möbius, pour évaluer la somme intérieure dans (1.24). Cette approche est techniquement plus simple. La version effective du théorème de Tenenbaum et Wu est susceptible d'applications diverses que nous nous proposons d'explorer dans un travail ultérieur.

Afin d'achever la démonstration du Théorème [1.1](#), il faut majorer $\mathfrak{S}(x, y)$ dans H_ε . C'est l'objet du Chapitre [6](#), dans lequel nous adaptons la méthode développée par Tenenbaum [Ten85](#) au cas friable. Cela fournit, pour une constante $c > 0$ convenable,

$$\mathfrak{S}(x, y) \ll 2^{u+O(u/\log u)} e^{c\sqrt{(\log_2 y)(\log_3 y)}} \quad ((x, y) \in H_\varepsilon).$$

Résultats auxiliaires

Dans ce chapitre, nous détaillons certaines notions évoquées dans l'introduction. Nous rappelons également des résultats connus dont nous ferons usage.

2.1 Estimation de $\Psi(x, y)$

Notons $P(m)$ le plus grand facteur premier d'un entier $m > 1$ et convenons de poser $P(1) := 1$.

Rappelons qu'un entier naturel $n > 1$ est dit y -friable si $P(n)$ n'excède pas y . Nous avons introduit au chapitre précédent les notations

$$S(x, y) := \{n : n \leq x, P(n) \leq y\}$$

et

$$\Psi(x, y) := |S(x, y)|.$$

Notons d'emblée que lorsque $y \geq x$, $S(x, y)$ se confond avec l'ensemble de tous les entiers n'excédant pas x de sorte que

$$\Psi(x, y) = \lfloor x \rfloor \quad (y \geq x).$$

Le comportement asymptotique de $\Psi(x, y)$ joue un rôle important dans ce travail. Nous décrivons ici les résultats dont nous aurons l'usage en insérant quelques éléments de contexte.

La quantité $\Psi(x, y)$ satisfait l'équation fonctionnelle suivante ([Ten22, th.III.5.5]) :

$$\Psi(x, y) = 1 + \sum_{p \leq y} \Psi(x/p, p) \quad (x \geq 1, y \geq 1)$$

dont un corollaire immédiat appelé *identité de Buchstab* est

$$(2.1) \quad \Psi(x, y) = \Psi(x, z) - \sum_{y < p \leq z} \Psi(x/p, p) \quad (x \geq 1, z \geq y \geq 1).$$

On définit alors la *fonction ϱ de Dickman* comme la solution continue sur $[1, \infty[$ de la

version régularisée de l'équation (2.1), soit

$$\varrho(u) = \varrho(k) - \int_k^u \varrho(v-1) \frac{dv}{v} \quad (k < u \leq k+1),$$

avec la condition initiale $\varrho(u) = 1$ ($0 \leq u \leq 1$). Dickman [Dic30] établit que, pour tout $u > 0$ fixé, on a

$$(2.2) \quad \Psi(x, y) \sim x\varrho(u) \quad (x \rightarrow \infty, y = x^{1/u}).$$

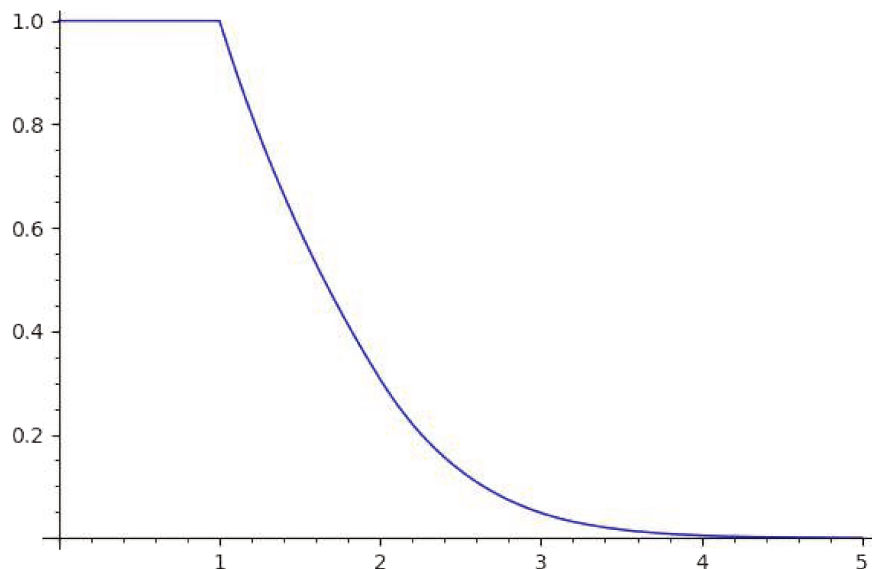


FIGURE 2.1 – La fonction ϱ de Dickman

La formule (2.2) explique l'incidence du paramètre

$$u := \frac{\log x}{\log y}$$

dans toutes les estimations portant sur les entiers friables.

2.1.1 La formule de Hildebrand

En 1951, de Bruijn [Bru51a] établit, pour $\varepsilon > 0$, la formule asymptotique

$$(2.3) \quad \Psi(x, y) = x\varrho(u) \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \quad \left(\exp\left\{(\log x)^{5/8+\varepsilon}\right\} \leq y \leq x \right).$$

Il est à noter que le domaine de validité, tel qu'exprimé par de Bruijn, est soumis à la condition $\varrho(u) \gg u^2 R(y)$, où $R(y)$ est tel que $\pi(y) - \text{li}(y) \ll yR(y)$, li désignant le logarithme intégral, soit $\text{li}(y) := \int_2^y dt/(\log t)$. Comme la meilleure estimation connue est $R(y) \ll e^{-(\log y)^{3/5-\varepsilon}}$ ($y \geq 2$), on voit que l'exposant 5/8 de (2.3) est optimal pour la

validité de la formule asymptotique en l'état du terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers.

Hildebrand a obtenu en 1986 une extension du domaine de validité également liée au terme d'erreur $R(y)$. Posons pour $\varepsilon > 0$,

$$(2.4) \quad H_\varepsilon := \left\{ (x, y) : x \geq 3, \exp\left((\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\right) \leq y \leq x \right\}.$$

Hildebrand [Hil86] a établi la formule

$$(2.5) \quad \Psi(x, y) = x \varrho(u) \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \quad ((x, y) \in H_\varepsilon).$$

Remarquons que dans le domaine H_ε , nous avons

$$(2.6) \quad \frac{\log(u+1)}{\log y} \ll \frac{1}{(\log y)^{2/5}}.$$

L'exposant $5/3$ dans la définition de H_ε est ainsi directement relié au meilleur terme d'erreur connu pour le théorème des nombres premiers, lui-même provenant de la région sans zéros de Korobov-Vinogradov pour la fonction ζ de Riemann. En l'état des connaissances actuelles, l'élargissement du domaine de validité de (2.5) nécessiterait une amélioration de la région sans zéros. Hildebrand [Hil84] a en fait montré que la validité de (2.5) dans le domaine $y \geq (\log x)^{2+\varepsilon}$ est équivalente à l'hypothèse de Riemann.

2.1.2 Méthode du col et formule de Hildebrand-Tenenbaum

Lorsque $y \leq (\log x)^{1-\varepsilon}$, on ne peut plus approcher $\Psi(x, y)$ par une fonction régulière (voir [Ten22, p. 451]). En 1986, Hildebrand et Tenenbaum [HT86] obtiennent une formule asymptotique pour $\Psi(x, y)$ valable uniformément pour $x \geq y \geq 2$, en utilisant la méthode du col. Rappelons brièvement les idées sous-jacentes.

La quantité $\Psi(x, y)$ est la fonction sommatoire de la fonction indicatrice

$$\chi(n, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } P(n) \leq y, \\ 0 & \text{dans le cas contraire,} \end{cases}$$

qui est une fonction multiplicative de n . Sa série de Dirichlet est donnée par

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n, y)}{n^s} = \zeta(s, y),$$

avec

$$(2.7) \quad \zeta(s, y) := \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad (s > 0, y \geq 2).$$

La formule de Perron permet alors d'écrire, pour tout $\alpha > 0$, $x \notin \mathbb{N}^*$, $y \geq 2$,

$$(2.8) \quad \Psi(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \zeta(s, y) x^s \frac{ds}{s}.$$

La méthode du col préconise de choisir α de manière à ce que

$$\frac{d}{d\alpha}(x^\alpha \zeta(\alpha, y)) = (\log x) \zeta(\alpha, y) + \frac{d}{d\alpha} \zeta(\alpha, y) = 0,$$

afin que l'intégrale figurant dans (2.8) soit dominée par un petit voisinage de α . Une telle valeur de α est appelée *col* ou *point-selle*. Posons

$$(2.9) \quad \varphi_y(s) := -\frac{\zeta'(s, y)}{\zeta(s, y)} = \sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^s - 1} \quad (\Re s > 0, y \geq 2).$$

Le choix optimal pour α est donc l'unique solution réelle positive $\alpha = \alpha(x, y)$ de l'équation $\varphi_y(\alpha) = \log x$. Hildebrand et Tenenbaum ont mis en œuvre cette méthode dans [HT86] et ont obtenu la formule

$$(2.10) \quad \Psi(x, y) = \frac{x^\alpha \zeta(\alpha, y)}{\alpha \sqrt{2\pi |\varphi'_y(\alpha)|}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{u} + \frac{\log y}{y}\right) \right\} \quad (x \geq y \geq 2).$$

Ce résultat a le grand avantage d'être uniforme pour $x \geq y \geq 2$. *A priori*, la définition implicite du paramètre α peut laisser penser que la formule n'est pas facile à appliquer. Néanmoins, Hildebrand et Tenenbaum ont établi des évaluations asymptotiques pour α , qui permettent non seulement de retrouver et préciser (2.5) mais aussi d'obtenir des estimations locales de $\Psi(x, y)$ dans un domaine où aucune estimation régulière n'est connue (cf. [HT86], th. 3 et cor. 3]). Dans le prolongement de (2.5), il est établi dans [HT86] que, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons

$$(2.11) \quad \Psi(x, y) = x \rho(u) \exp \left\{ O\left(\frac{\log 2u}{\log y} + \frac{u}{\exp\{(\log y)^{3/5-\varepsilon}\}}\right) \right\} \quad (x \geq 2, (\log x)^{1+\varepsilon} \leq y \leq x).$$

Cette formule représente la meilleure estimation explicite de $\Psi(x, y)$ connue à ce jour.

Quelques notations supplémentaires sont nécessaires pour énoncer les évaluations de $\alpha = \alpha(x, y)$ mentionnées plus haut. Étant donné $v > 0$, $v \neq 1$, on définit la quantité $\xi(v)$ comme l'unique solution réelle non nulle de l'équation implicite

$$(2.12) \quad e^\xi = 1 + v\xi,$$

et l'on convient que $\xi(1) = 0$. La fonction $v \mapsto \xi(v)$ vérifie (voir par exemple [HT86], lemme 1]) :

$$(2.13) \quad \xi(v) = \log(v \log v) + O\left(\frac{\log_2 v}{\log v}\right) \quad (v \geq 3).$$

Comme $\xi'(v) = \xi(v)/(1 + v(\xi(v) - 1))$, nous avons également

$$(2.14) \quad \xi'(v) = \frac{1}{v} + \frac{1}{v \log v} + O\left(\frac{\log_2 v}{v(\log v)^2}\right) \quad (v \geq 3).$$

Posons ensuite

$$L_\varepsilon(y) := \exp\{(\log y)^{3/5-\varepsilon}\} \quad (\varepsilon > 0, y \geq 2).$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, nous avons (cf. [HT86], (7.6) et (7.8)) :

$$(2.15) \quad \alpha(x, y) = \begin{cases} 1 - \frac{\xi(u)}{\log y} + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(y)} + \frac{1}{u(\log y)^2}\right) & ((\log x)^{1+\varepsilon} \leq y \leq x, x \geq x_0(\varepsilon)), \\ \frac{\log(1 + y/\log x)}{\log y} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right\} & (2 \leq y \leq (\log x)^2). \end{cases}$$

En particulier, dans H_ε ,

$$(2.16) \quad \alpha(x, y) = 1 - \frac{\xi(u)}{\log y} + O\left(\frac{1}{(\log y)^2}\right).$$

2.2 Les fonctions τ_κ et ϱ_κ

Rappelons que l'on note τ la fonction *nombre de diviseurs*. En notant $\mathbf{1}$ la fonction arithmétique définie par

$$\mathbf{1}(n) = 1 \quad (n \geq 1),$$

on peut écrire

$$(2.17) \quad \tau = \mathbf{1} * \mathbf{1},$$

où l'astérisque désigne le produit de convolution de Dirichlet. Une généralisation classique de la fonction τ est la *fonction de Piltz*, notée τ_κ pour $\kappa > 0$. Elle est définie par sa série de Dirichlet qui est la puissance κ -ième de la fonction ζ de Riemann, soit

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\tau_\kappa(n)}{n^s} = \zeta(s)^\kappa \quad (\Re s > 1).$$

La fonction τ_κ est multiplicative, et pour tout nombre premier p , on a $\tau_\kappa(p) = \kappa$. Lorsque $\kappa = k$ est un entier strictement positif, $\tau_k(n)$ coïncide avec nombre de représentations de n en un produit de k facteurs, autrement dit

$$\tau_k(n) = \sum_{d_1 d_2 \cdots d_k = n} 1.$$

La fonction τ_k est également la puissance k -ième de convolution de $\mathbf{1}$ au sens du produit de convolution de Dirichlet. Notons que $\tau_2 = \tau$. L'ordre moyen de $\tau_\kappa(n)$ est $(\log n)^{\kappa-1}/(\kappa-1)!$ (voir par exemple [Ten22], p. 394).

Rappelons la notation $\Psi_f(x, y)$ introduite en [1.15]. Dans l'article [Smi93], Smida améliore un résultat de Xuan [Xua90] et établit une formule asymptotique pour $\Psi_{\tau_\kappa}(x, y)$ qui généralise la formule [2.5] de Hildebrand. En cohérence, le résultat fait intervenir la κ -ième puissance de convolution de ϱ notée ϱ_κ . Lorsque κ n'est pas entier, ϱ_κ est définie via la transformée de Laplace : $\widehat{\varrho_\kappa} = \widehat{\varrho}^\kappa$. En l'espèce, on peut également définir ϱ_κ (voir [Hen86]) comme l'unique solution définie et continue sur $]0, \infty[$, et dérivable sur $]1, \infty[$, de l'équation différentielle aux différences

$$(2.18) \quad \begin{cases} \varrho_\kappa(v) = v^{\kappa-1}/\Gamma(\kappa) & (0 < v \leq 1), \\ v\varrho'_\kappa(v) + (1 - \kappa)\varrho_\kappa(v) + \kappa\varrho_\kappa(v-1) = 0 & (v > 1). \end{cases}$$

On pose alors $\varrho_\kappa(v) := 0$ pour $v < 0$.

D'après [Smi93, th. 1] ou [TW03, cor. 2.3], pour tout $\kappa > 0$ fixé et uniformément pour $(x, y) \in H_\varepsilon$, nous avons

$$\Psi_{\tau_\kappa}(x, y) = x \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1} \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{1}{(\log y)^\kappa}\right) \right\}.$$

En particulier,

$$(2.19) \quad \Psi_\tau(x, y) = x \varrho_2(u) \log y \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \quad ((x, y) \in H_\varepsilon).$$

De Bruijn [Bru51b] puis Alladi [All82] ont étudié le comportement asymptotique de $\varrho(u)$. Il résulte de leurs travaux que

$$\varrho(u) = \sqrt{\frac{\xi'(u)}{2\pi}} \exp\left\{\gamma - \int_1^u \xi(t) dt\right\} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{u}\right) \right\},$$

une formule dont Tenenbaum a montré [Ten22, th. III.5.13] qu'elle peut être démontrée directement par inversion de Laplace. Le comportement asymptotique de ϱ_κ a été étudié par Hensley [Hen86], puis Smida [Smi91]. Hildebrand et Tenenbaum [HT93] ont généralisé ces résultats aux solutions d'équations fonctionnelles du type

$$u f'(u) + a f(u) + b f(u-1) = 0,$$

où a et b sont des paramètres complexes arbitraires.

Lemme 2.1. *On a*

$$(2.20) \quad \varrho_\kappa(u) = \sqrt{\frac{\xi'(u/\kappa)}{2\pi\kappa}} \exp\left\{\kappa\gamma - \kappa \int_1^{u/\kappa} \xi(t) dt\right\} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{u}\right) \right\},$$

où γ désigne la constante d'Euler.

Démonstration. Il suffit d'appliquer [HT93, th. 2] avec $(a, b) = (1 - \kappa, \kappa)$. On peut également adapter la preuve de [Ten22, th. III.5.13] relative au cas $\kappa = 1$. Cela consiste à appliquer la méthode du col pour évaluer l'intégrale de Laplace inverse

$$(2.21) \quad \varrho_\kappa(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \widehat{\varrho}_\kappa(s) e^{us} d\tau = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \widehat{\varrho}(s)^\kappa e^{us} d\tau,$$

avec comme point selle $c = -\max(1, \xi(u/\kappa))$. □

Énonçons également l'estimation [TW03, (3.27)] qui nous sera utile par la suite :

Lemme 2.2. *On a*

$$(2.22) \quad \varrho_\kappa(u-v) \ll \varrho_\kappa(u) e^{v\xi_\kappa(u)} \quad (u \geq 1, 0 \leq v \leq u - c_\kappa),$$

avec $c_\kappa = 0$ pour $\kappa \geq 1$ et $c_\kappa = 1/2$ si $0 < \kappa < 1$.

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, la quantité

$$(2.23) \quad \mathbf{r}(v) := \frac{\varrho_2(v)}{\sqrt{v}\varrho(v)} \quad (v \geq 1)$$

intervient naturellement dans l'encadrement trivial de $\mathfrak{S}(x, y)$.

Proposition 2.3. *Pour $u \geq 1$, nous avons*

$$(2.24) \quad \mathbf{r}(u) \asymp \frac{1}{\sqrt{u}} \exp\left(\int_1^u (\xi(t) - \xi(t/2))t\right).$$

Démonstration. D'après (2.23) et (2.20), on a

$$(2.25) \quad \mathbf{r}(u) = \sqrt{\frac{\xi'(u/2)}{2u\xi'(u)}} \exp\left(\gamma + \int_1^u \xi(v) \, dv - 2 \int_1^{u/2} \xi(v) \, dv\right) \left\{1 + O\left(\frac{1}{u}\right)\right\}.$$

Par le changement de variable $v = t/2$, on obtient que la différence des intégrales dans l'exponentielle vaut

$$\int_1^u \xi(t) \, dt - \int_1^u \xi(t/2) \, dt + \int_1^2 \xi(t/2) \, dt = \int_1^u (\xi(t) - \xi(t/2)) \, dt + O(1).$$

Par ailleurs, d'après (2.14), on a

$$\sqrt{\frac{\xi'(u/2)}{2\xi'(u)}} = 1 + O\left(\frac{1}{\log u}\right).$$

Cela fournit bien l'estimation annoncée. \square

Corollaire 2.4.

$$(2.26) \quad \mathbf{r}(u) = 2^{u+(1+o(1))u/\log u} \quad (u \rightarrow \infty).$$

Démonstration. On déduit cette estimation de (2.24) et (2.13). \square

2.3 Quelques inégalités sur la fonction Δ

Rappelons que nous avons posé

$$\Delta(n, v) := \sum_{\substack{d|n \\ v \leq \log d < v+1}} 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*, v \in \mathbb{R}), \quad \Delta(n) := \sup_{v \in \mathbb{R}} \Delta(n, v).$$

Dans cette section, nous rassemblons quelques résultats élémentaires concernant la fonction Δ , et dont certains ont été énoncés dans l'introduction. Comme les preuves sont courtes, nous les restituons ici pour la commodité du lecteur.

Lemme 2.5. *Pour $n \geq 1$, on a*

$$\max\left(1, \frac{\tau(n)}{1 + \log n}\right) \leq \Delta(n) \leq \tau(n).$$

Démonstration. La majoration et la minoration $\Delta(n) \geq 1$ sont triviales. Montrons la minoration $\Delta(n) \geq \tau(n)/(1 + \log n)$. Il y a $\tau(n)$ nombres $\log d$ tels que $d \mid n$ et ils sont tous compris dans l'intervalle $[0, \lfloor \log n \rfloor + 1[$. Considérons la partition

$$[k, k + 1[\quad (0 \leq k \leq \log n)$$

de cet intervalle. Par le principe des tiroirs, au moins l'un de ces intervalles de longueur unité contient au moins $\tau(n)/(1 + \lfloor \log n \rfloor)$ nombres $\log d$. Cela implique bien l'encadrement attendu. \square

Lemme 2.6 ([HT88], lemme 61.1). *Pour tous entiers $m, n \geq 1$ on a*

$$(2.27) \quad \Delta(mn) \leq \tau(m)\Delta(n).$$

Démonstration. Utilisons le fait que tout diviseur de mn peut s'écrire sous la forme dt avec $d \mid m$ et $t \mid n$. Il suit

$$\Delta(mn, u) \leq \sum_{\substack{dt \mid mn \\ u - \log d \leq \log t < u - \log d + 1}} 1 = \sum_{d \mid m} \sum_{\substack{t \mid n \\ u - \log d \leq \log t < u - \log d + 1}} 1 = \sum_{d \mid m} \Delta(n, u),$$

d'où $\Delta(mn, u) \leq \tau(m)\Delta(n)$. En prenant le supremum sur $u \in \mathbb{R}$, nous obtenons bien (2.27). \square

Lemme 2.7 ([HT88], lemme 60.1). *Pour $n \geq 1$, on a*

$$(2.28) \quad \Delta(n) \geq \frac{1}{2\tau(n)} \sum_{\substack{d \mid n, d' \mid n \\ |\log(d/d')| \leq 1}} 1.$$

Démonstration. Nous avons

$$\sum_{\substack{d \mid n, d' \mid n \\ |\log(d/d')| \leq 1}} 1 \leq \sum_{d \mid n} (\Delta(n, \log d - 1) + \Delta(n, \log d)) \leq 2\tau(n)\Delta(n).$$

\square

Estimation de $\mathfrak{S}(x, y)$ dans le domaine $2 \leq y \leq \exp\{(\log_2 x)^2\}$

Dans ce chapitre, nous évaluons la quantité

$$\mathfrak{S}(x, y) := \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in S(x, y)} \Delta(n)$$

dans le domaine $2 \leq y \leq \exp\{(\log_2 x)^2\}$, et nous démontrons le point (ii) du Théorème [1.1](#).

3.1 Résultats

Du Lemme [2.5](#), nous déduisons

$$(3.1) \quad \frac{\Psi_\tau(x, y)}{2\Psi(x, y)\log x} \leq \mathfrak{S}(x, y) \leq \frac{\Psi_\tau(x, y)}{\Psi(x, y)} \quad (2 \leq y \leq x).$$

Nous verrons au Lemme [3.9](#) *infra* que, à la précision envisagée dans ce travail, l'influence du facteur $1/(\log x)$ figurant dans [\(3.1\)](#) est négligeable dans le domaine $y \leq \exp\{(\log_2 x)^2\}$. Il est donc suffisant pour l'objectif fixé d'évaluer le rapport

$$\frac{\Psi_\tau(x, y)}{\Psi(x, y)},$$

ce qui fait l'objet de la Proposition [3.1](#) *infra*.

Posons

$$g(t) := \log \left\{ \frac{(1+2t)^{1+2t}}{(1+t)^{1+t}(4t)^t} \right\} \quad (t > 0).$$

La fonction g est croissante et strictement positive sur $]0, +\infty[$. Elle tend vers $\log 2$ en

$+\infty$ et vers 0 en 0. Plus précisément,

$$(3.2) \quad g(t) = \begin{cases} \log 2 - \frac{1}{4t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) & (t \rightarrow \infty), \\ t \log\left(\frac{1}{t}\right) - t(\log 4 - 1) + O(t^2) & (t \rightarrow 0). \end{cases}$$

Dans toute la suite de ce chapitre, nous notons

$$\lambda := \frac{y}{\log x} \quad \text{et} \quad \varepsilon_y := \frac{1}{\sqrt{\log y}}.$$

Rappelons par ailleurs la notation $u = \log x / \log y$. Nous obtenons les résultats suivants.

Proposition 3.1. *Pour $2 \leq y \leq \exp\{(\log_2 x)^2\}$, on a*

$$(3.3) \quad \frac{\Psi_\tau(x, y)}{\Psi(x, y)} \asymp \exp\{ug(\lambda)(1 + O(\varepsilon_y))\}.$$

Corollaire 3.2. *Pour $2 \leq y \leq \exp\{(\log_2 x)^2\}$, on a*

$$\mathfrak{S}(x, y) \asymp \exp\{ug(\lambda)(1 + O(\varepsilon_y))\}.$$

Le Corollaire 3.2 correspond au point (ii) du Théorème 1.1. Il résulte immédiatement de l'encadrement (3.1), de la Proposition 3.1, et de l'estimation

$$\log_2 x \ll ug(\lambda)\varepsilon_y \quad (2 \leq y \leq \exp\{(\log_2 x)^2\}),$$

établie au Lemme 3.9 *infra*.

La suite de ce chapitre est donc consacrée à la démonstration de la Proposition 3.1.

3.2 Une estimation de Tenenbaum

Rappelons la définition de α en (2.15) et posons

$$D(x, y) := \sum_{n \in \mathcal{S}(x, y)} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Pour évaluer le rapport $\Psi_\tau(x, y)/\Psi(x, y)$, nous utilisons un résultat établi par Tenenbaum [Ten23] qui fournit l'ordre de grandeur du rapport

$$\frac{\Psi_\tau(x, y)}{\Psi(x, y)D(x, y)}.$$

Afin de l'énoncer, nous posons

$$(3.4) \quad h(v) := 2v \log\left(\frac{2+2v}{1+2v}\right) - \log\left(\frac{1+2v}{1+v}\right) = v \log 4 - (1+2v) \log\left(\frac{1+2v}{1+v}\right) \quad (v \geq 0),$$

$$\vartheta(x, y) := \begin{cases} u\xi(u) - 2 \int_{u/2}^u \xi(t) dt, & \text{si } (x, y) \in H_\varepsilon, \\ uh\left(\frac{y}{\log x}\right), & \text{dans le cas contraire,} \end{cases}$$

où $\xi(u)$ est défini en (2.12). Rappelons également la notation

$$\bar{u} := \min\left(\frac{y}{\log y}, u\right) = \frac{\min(y, \log x)}{\log y}.$$

Tenenbaum note que

$$\vartheta(x, y) \sim (1 - \log 2)u \quad (u \rightarrow \infty, y/\log x \rightarrow \infty), \quad \vartheta(x, y) \asymp \bar{u} \quad (x \geq y \geq 2),$$

et obtient le résultat suivant.

Théorème 3.3 ([Ten23], th. 1.2)]. *On a uniformément pour $x \geq y \geq 2$,*

$$\frac{\Psi_\tau(x, y)}{\Psi(x, y)D(x, y)} \asymp e^{-\vartheta(x, y) + O(\varepsilon_y \bar{u})}.$$

Notons

$$P(x, y, z) := \frac{1}{\zeta(\alpha, y)} \sum_{n \in S(z, y)} \frac{1}{n^{\alpha(x, y)}} \quad (x \geq y \geq 2, z \geq 2).$$

Le point (1.6) de [Ten23], th. 1.1] énonce que

$$P(x, y, z) \asymp 1 - P(x, y, z) \asymp 1 \quad (x \geq y \geq 2, \log z \gg \log x, \log(z/x) \ll \sqrt{\bar{u}} \log y).$$

En particulier, lorsque $z = x$, on a

$$(3.5) \quad D(x, y) \asymp \zeta(\alpha, y) \quad (x \geq y \geq 2).$$

Grâce au théorème 3.3 et (3.5), l'estimation de l'ordre de grandeur du rapport

$$\frac{\Psi_\tau(x, y)}{\Psi(x, y)}$$

est donc ramenée à celui de $\zeta(\alpha, y)$, qui fera l'objet du paragraphe 3.4. Avant cela, attardons nous sur le cas où y est borné.

3.3 Estimation de $D(x, y)$ et $\zeta(\alpha, y)$ lorsque y est borné

Il est établi dans [Ten23] que l'on a $D(x, y) \asymp \zeta(\alpha, y) \asymp (\log x)^{\pi(y)}$ pour $x \geq y \geq 2$. Dans ce paragraphe, nous détaillons la preuve dans le cas où y est borné. Cela revient à établir $D(x, y) \asymp \zeta(\alpha, y) \asymp (\log x)^{\pi(y)}$.

Rappelons que $\alpha = \alpha(x, y)$ est défini comme étant l'unique solution positive de l'équation

$$\sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1} = \log x.$$

Lemme 3.4. Pour y borné et $x \rightarrow \infty$, on a

$$(3.6) \quad \alpha \sim \frac{\pi(y)}{\log x}.$$

Démonstration. Comme $e^t - 1 \geq t$ ($t \in \mathbb{R}$), on a

$$\frac{\log p}{p^\alpha - 1} \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Donc

$$\log x = \sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1} \leq \frac{\pi(y)}{\alpha}.$$

Il suit

$$(3.7) \quad \alpha \leq \frac{\pi(y)}{\log x} \quad (2 \leq y \leq x).$$

En particulier $\alpha \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ et y est borné. Par conséquent, compte-tenu de la relation $e^t - 1 \sim_{t \rightarrow 0} t$, on a

$$\log x = \sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1} \sim \frac{\pi(y)}{\alpha} \quad (x \rightarrow +\infty),$$

ce qui achève la démonstration. □

Lemme 3.5. Pour y borné et $2 \leq y \leq x$, on a

$$D(x, y) \asymp_y (\log x)^{\pi(y)} \asymp_y \zeta(\alpha, y).$$

Démonstration. Si x est borné, ces estimations sont triviales. On peut donc supposer x suffisamment grand. D'après (3.6), pour $p \leq y$, $x \rightarrow +\infty$, on a

$$\frac{1}{1 - p^{-\alpha}} \sim \frac{1}{\alpha \log p} \sim \frac{\log x}{\pi(y) \log p}.$$

Donc, pour des constantes convenables c_y et C_y , on a pour x suffisamment grand, $p \leq y$,

$$c_y \log x \leq (1 - p^{-\alpha})^{-1} \leq C_y \log x.$$

Donc

$$\zeta(\alpha, y) \asymp_y (\log x)^{\pi(y)}.$$

Comme $D(x, y) \leq \zeta(\alpha, y)$, il suffit pour conclure la démonstration de montrer que l'on a $D(x, y) \gg (\log x)^{\pi(y)}$. On a, compte-tenu de (3.7),

$$D(x, y) \geq \frac{\Psi(x, y)}{x^\alpha} \geq e^{-\pi(y)} \Psi(x, y).$$

L'énoncé [Ten22, cor. III.5.4], dû à Ennola, énonce que sous la condition

$$2 \leq y \leq \sqrt{\log x \log_2 x},$$

nous avons uniformément

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{\pi(y)!} \prod_{p \leq y} \left(\frac{\log x}{\log p} \right) \left\{ 1 + O\left(\frac{y^2}{\log x \log y} \right) \right\}.$$

En particulier, lorsque y est borné et x suffisamment grand, $\Psi(x, y) \asymp_y (\log x)^{\pi(y)}$. Donc on a bien

$$D(x, y) \gg (\log x)^{\pi(y)},$$

ce qui achève la démonstration. \square

3.4 Une formule asymptotique pour $\zeta(\alpha, y)$

Le but de cette section est d'établir le résultat suivant.

Proposition 3.6. *On a pour $2 \leq y \leq \exp\{(\log_2 x)^2\}$,*

$$(3.8) \quad \zeta(\alpha, y) = \zeta(1, y) \exp \left\{ \frac{y}{\log y} \log \left(1 + \frac{\log x}{y} \right) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log y}} \right) \right\} \right\}.$$

La Proposition 3.6 est une conséquence directe des Lemmes 3.7 et 3.8 *infra*. Rappelons la définition de φ_y en (2.9). Nous utiliserons l'identité

$$(3.9) \quad \zeta(\alpha, y) = \zeta(1, y) \exp \left\{ \int_{\alpha}^1 \varphi_y(\sigma) \, d\sigma \right\},$$

ainsi que l'estimation (cf. Ten22, (5.12))

$$(3.10) \quad \varphi_y(\sigma) = \frac{y}{y^{\sigma} - 1} \cdot \frac{1 - y^{-(1-\sigma)}}{1 - \sigma} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log y} \right) \right\} \quad (0 < \sigma \leq 1).$$

Nous ferons également appel à l'estimation suivante, énoncée dans Ten23, (4.4) et qui découle directement de HT86, (7.8) : il existe $C_0 > 0$ tel que l'on ait, pour x assez grand,

$$(3.11) \quad \alpha = 1 - \frac{\xi(u)}{\log y} + O\left(\frac{1}{(\log y)^2} \right) \quad (C_0(\log x)(\log_2 x)^3 < y \leq x).$$

Lemme 3.7. *Pour $C_0(\log x)(\log_2 x)^3 < y \leq \exp\{(\log_2 x)^2\}$, on a*

$$(3.12) \quad \zeta(\alpha, y) = \zeta(1, y) \exp \left\{ \frac{y}{\log y} \log \left(1 + \frac{\log x}{y} \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log y}} \right) \right) \right\}.$$

Démonstration. Dans ce domaine, lorsque y est borné, x est également borné, et la formule (3.12) est alors trivialement vérifiée. On peut donc supposer y suffisamment grand. On a, par (3.10),

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^1 \varphi_y(\sigma) \, d\sigma &= \int_{\alpha}^1 \frac{y - y^{\sigma}}{(y^{\sigma} - 1)(1 - \sigma)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log y} \right) \right\} \, d\sigma \\ &= \int_{\alpha}^1 \frac{y^{\sigma}(y^{1-\sigma} - 1)}{(y^{\sigma} - 1)(1 - \sigma)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log y} \right) \right\} \, d\sigma. \end{aligned}$$

Remarquons tout d'abord que, d'après (3.11), on a

$$y^\alpha = ye^{-\xi(u)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right) \right\},$$

et ainsi, puisque $\xi(u) \asymp \log u \asymp \log_2 x$, on a

$$(3.13) \quad y^\alpha \gg \frac{y}{u\xi(u)} \gg (\log_2 x)^3 \gg (\log y)^{3/2}.$$

On a, pour $\alpha \leq \sigma \leq 1$,

$$\frac{y^\sigma}{y^\alpha - 1} = 1 + O\left(\frac{1}{y^\alpha}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{y^\alpha}\right),$$

ce qui implique, compte-tenu de (3.13),

$$\frac{y^\sigma}{y^\alpha - 1} = 1 + O\left(\frac{1}{(\log y)^{3/2}}\right).$$

Ainsi, on obtient

$$(3.14) \quad \int_\alpha^1 \varphi_y(\sigma) d\sigma = \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right) \right\} \int_\alpha^1 \frac{y^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} d\sigma.$$

Estimons à présent l'intégrale dans le membre de droite de (3.14) en effectuant le changement de variable $(1 - \sigma) \log y = \xi(t)$. Notons t_α l'unique réel strictement positif tel que

$$\alpha = 1 - \frac{\xi(t_\alpha)}{\log y}.$$

D'après (3.11), on a $\xi(t_\alpha) - \xi(u) \ll 1/\log y$ et donc

$$t_\alpha = u + O\left(\frac{u}{\log y}\right).$$

Comme $\xi'(t) = 1/t + O(1/(t \log t))$ ($t \geq 3$), on a donc

$$\begin{aligned} \int_\alpha^1 \frac{y^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} d\sigma &= \int_1^{t_\alpha} t\xi'(t) dt = t_\alpha - 1 + O\left(\int_1^{t_\alpha} \frac{dt}{\log(2t)}\right) \\ &= u + O\left(\frac{u}{\log y} + \frac{u}{\log u}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\int_\alpha^1 \varphi_y(\sigma) d\sigma = u \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log y} + \frac{1}{\log u}\right) \right\}.$$

De plus, on a

$$\frac{\log x}{y \log(1 + (\log x)/y)} = 1 + O\left(\frac{\log x}{y}\right).$$

Puisque $(\log x)/y \ll 1/(\log_2 x)^3 \ll 1/(\log u)^3$, on a donc

$$\begin{aligned} u &= \frac{y}{\log y} \cdot \frac{\log x}{y} \cdot \frac{\log(1 + (\log x)/y)}{\log(1 + (\log x)/y)} = \frac{y}{\log y} \log\left(1 + \frac{\log x}{y}\right) \left\{1 + O\left(\frac{\log x}{y}\right)\right\} \\ &= \frac{y}{\log y} \log\left(1 + \frac{\log x}{y}\right) \left\{1 + O\left(\frac{1}{(\log u)^3}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_{\alpha}^1 \varphi_y(\sigma) d\sigma = \frac{y}{\log y} \log\left(1 + \frac{\log x}{y}\right) \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log y} + \frac{1}{\log u}\right)\right\}.$$

Enfin, comme $\sqrt{\log y} \leq \log_2 x \asymp \log u$, on a

$$\frac{1}{\log u} \ll \frac{1}{\sqrt{\log y}},$$

et on obtient ainsi (3.12). □

Remarquons que l'on aurait pu étendre le domaine de validité du Lemme 3.7 à

$$C_0(\log x)(\log_2 x)^3 < y \leq x^{1/(2\log_2 x \log_3 x)},$$

ce qui aurait permis d'étendre celui de la Proposition 3.6 à $2 \leq y \leq x^{1/(2\log_2 x \log_3 x)}$, comme cela a été fait dans l'article [MTW24]. Le terme d'erreur de (3.12) s'écrirait alors

$$\frac{1}{\sqrt{\log y}} + \frac{1}{\log u}.$$

Lemme 3.8. *Soit $C > 0$. On a uniformément pour $2 \leq y \leq C(\log x)(\log_2 x)^3$,*

$$(3.15) \quad \zeta(\alpha, y) = \zeta(1, y) \exp \left\{ \frac{y}{\log y} \log\left(1 + \frac{\log x}{y}\right) \left\{1 + O\left(\frac{\log_2 y}{\log y}\right)\right\} \right\}.$$

Démonstration. Lorsque y est borné, compte-tenu de l'estimation $\zeta(\alpha, y) \asymp (\log x)^{\pi(y)}$ établie au Lemme 3.5, la formule (3.15) est trivialement vérifiée. Nous pouvons donc supposer y suffisamment grand et procéder de la même manière que dans la démonstration de [Ten22, th. III.5.2]. Par (2.15), on a certainement $\alpha \leq 3/5$ lorsque $y \leq (\log x)^2$ et y suffisamment grand. L'estimation (3.10) fournit

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^1 \varphi_y(\sigma) d\sigma &= \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right\} \int_{\alpha}^1 \frac{y(1 - y^{-(1-\sigma)})}{(y^{\sigma} - 1)(1 - \sigma)} d\sigma \\ &= \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right\} \int_{\alpha}^{3/5} \frac{y(1 - y^{-(1-\sigma)})}{(y^{\sigma} - 1)(1 - \sigma)} d\sigma + O\left(\int_{3/5}^1 \frac{y}{y^{\sigma} - 1} \frac{1 - y^{-(1-\sigma)}}{1 - \sigma} d\sigma\right). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{3/5}^1 \frac{y}{y^\sigma - 1} \frac{1 - y^{-(1-\sigma)}}{1 - \sigma} d\sigma &= \int_{3/5}^1 \frac{y - y^\sigma}{(y^\sigma - 1)(1 - \sigma)} d\sigma \asymp \int_{3/5}^1 \frac{y - y^\sigma}{y^\sigma(1 - \sigma)} d\sigma \\ &= \int_{3/5}^1 \frac{y^{1-\sigma}(1 - y^{\sigma-1})}{1 - \sigma} d\sigma \ll \int_{3/5}^1 y^{1-\sigma}(\log y) d\sigma \ll y^{2/5}. \end{aligned}$$

De plus, pour $\alpha < \sigma \leq 3/5$, $1 - y^{-(1-\sigma)} = 1 + O(y^{-2/5})$. Donc

$$\int_\alpha^1 \varphi_y(\sigma) d\sigma = \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right) \right\} \int_\alpha^{3/5} \frac{y}{(y^\sigma - 1)(1 - \sigma)} d\sigma + O(y^{2/5}).$$

On a ensuite

$$\int_\alpha^{3/5} \frac{\log y}{(1 - \sigma)(y^\sigma - 1)} d\sigma = \log\left(\frac{1 - y^{-3/5}}{1 - y^{-\alpha}}\right) + O\left(\int_\alpha^{3/5} \frac{\sigma \log y}{y^\sigma - 1} d\sigma\right),$$

et en étendant la dernière intégrale à la demi-droite $[\alpha, \infty[$,

$$\begin{aligned} \int_\alpha^{3/5} \frac{\log y}{(1 - \sigma)(y^\sigma - 1)} d\sigma &= \log\left(\frac{1 - y^{-3/5}}{1 - y^{-\alpha}}\right) + O\left(\int_\alpha^\infty \frac{\sigma \log y}{y^\sigma - 1} d\sigma\right) \\ &= \log\left(\frac{1}{1 - y^{-\alpha}}\right) + \log(1 - y^{-3/5}) + O\left(\frac{1 + \alpha \log y}{y^\alpha \log y}\right) \\ &= \log\left(\frac{1}{1 - y^{-\alpha}}\right) + O\left(y^{-3/5} + \frac{1 + \alpha \log y}{y^\alpha \log y}\right). \end{aligned}$$

On a par conséquent

$$(3.16) \quad \int_\alpha^1 \varphi_y(\sigma) d\sigma = \left(1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right) \frac{y}{\log y} \log\left(\frac{1}{1 - y^{-\alpha}}\right) + O\left(\frac{y(1 + \alpha \log y)}{(\log y)^2 y^\alpha}\right).$$

Nous allons montrer que l'on a

$$(3.17) \quad \log\left(\frac{1}{1 - y^{-\alpha}}\right) = \log\left(1 + \frac{\log x}{y}\right) \left\{1 + O\left(\frac{\log_2 y}{\log y}\right)\right\} \quad (2 \leq y \leq C(\log x)(\log_2 x)^3).$$

On déduit de (3.17),

$$(3.18) \quad \int_\alpha^1 \varphi_y(\sigma) d\sigma = \frac{y}{\log y} \log\left(1 + \frac{\log x}{y}\right) \left\{1 + O\left(\frac{\log_2 y}{\log y} + \frac{1 + \alpha \log y}{y^\alpha \log(1 + (\log x)/y) \log y}\right)\right\}.$$

Évaluons le terme d'erreur. Rappelons tout d'abord l'estimation (2.15) qui énonce que l'on a, lorsque $2 \leq y \leq (\log x)^2$,

$$(3.19) \quad \alpha = \frac{\log(1 + y/\log x)}{\log y} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right).$$

Lorsque $\log x < y \leq C(\log x)(\log_2 x)^3$, on en déduit,

$$\frac{1 + \alpha \log y}{y^\alpha \log(1 + (\log x)/y)} \asymp \frac{\log(1 + y/\log x)}{(1 + y/\log x) \log(1 + (\log x)/y)} \asymp \log\left(1 + \frac{y}{\log x}\right) \ll \log_2 y.$$

Dans le domaine $2 \leq y \leq \log x$, on tire des inégalités

$$\frac{1}{\log(1 + (\log x)/y)} \leq \frac{1}{\log 2}, \quad \frac{1 + \alpha \log y}{y^\alpha} = \frac{1 + \alpha \log y}{e^{\alpha \log y}} \leq 1,$$

l'estimation

$$\frac{1 + \alpha \log y}{y^\alpha \log(1 + (\log x)/y)} \ll 1 \quad (2 \leq y \leq \log x).$$

On en déduit

$$(3.20) \quad \frac{1 + \alpha \log y}{y^\alpha \log(1 + (\log x)/y)} \ll \log_2 y \quad (2 \leq y \leq C(\log x)(\log_2 x)^3),$$

ce qui fournit (3.15) via (3.18).

Montrons à présent (3.17). D'après [HT86, éq.(7.18)] on a, uniformément pour $2 \leq y \leq x$,

$$1 - y^{-\alpha} = \left(1 + \frac{\log x}{y}\right)^{-1} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right).$$

On a donc, si $2 \leq y \leq \log x$,

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{1}{1 - y^{-\alpha}}\right) &= \log\left(1 + \frac{\log x}{y}\right) + O\left(\frac{1}{\log y}\right) \\ &= \log\left(1 + \frac{\log x}{y}\right) \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right\}, \end{aligned}$$

et on obtient ainsi (3.17) lorsque $2 \leq y \leq \log x$.

Supposons maintenant $\log x < y \leq C(\log x)(\log_2 x)^3$. On a, d'après (3.19),

$$\begin{aligned} y^{-\alpha} &= \exp\left\{-\log\left(1 + \frac{y}{\log x}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right)\right\} \\ &= \left(1 + \frac{y}{\log x}\right)^{-1} \exp\left\{O\left(\frac{\log(1 + y/\log x)}{\log y}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{\log(1 + y/\log x)}{\log y} \ll \frac{\log_3 x}{\log y} \leq \frac{\log_2 y}{\log y}.$$

Donc

$$y^{-\alpha} = \left(1 + \frac{y}{\log x}\right)^{-1} + O\left(\frac{\log(1 + y/\log x)}{(1 + y/\log x) \log y}\right).$$

Il suit

$$1 - y^{-\alpha} = \left(1 + \frac{\log x}{y}\right)^{-1} \left\{1 + O\left(\frac{\log(1 + y/\log x) \log x}{y \log y}\right)\right\},$$

puis

$$\log\left(\frac{1}{1 - y^{-\alpha}}\right) = \log\left(1 + \frac{\log x}{y}\right) \left\{1 + O\left(\frac{\log(1 + y/\log x) \log x}{y(\log y) \log(1 + (\log x)/y)}\right)\right\}.$$

Or, on a, toujours pour $\log x < y \leq C(\log x)(\log_2 x)^3$,

$$\frac{\log(1 + y/\log x) \log x}{y \log(1 + (\log x)/y)} \ll \log_2 y,$$

on obtient donc (3.17) dans le domaine $\log x < y \leq C(\log x)(\log_2 x)^3$. Pour conclure la démonstration, il suffit d'insérer (3.18) dans (3.9). \square

3.5 Fin de la démonstration de la Proposition 3.1

Rappelons les notations

$$u = \frac{\log x}{\log y}, \quad \lambda = \frac{y}{\log x} \quad \text{et} \quad \varepsilon_y = \frac{1}{\sqrt{\log y}}.$$

Nous aurons recours au résultat auxiliaire suivant.

Lemme 3.9. *Pour $x \geq 3$, $2 \leq y \leq \exp\{(\log_2 x)^2\}$, on a*

$$(3.21) \quad \frac{\log_2 x}{ug(\lambda)\varepsilon_y} \ll \frac{(\log_2 y)^{5/2}}{\sqrt{\log y}}.$$

Démonstration. Rappelons le comportement asymptotique de la fonction g en (3.2).

Lorsque $0 < \lambda \leq 1/2$, on a $g(\lambda) \gg \lambda \log(1/\lambda)$. Donc

$$\frac{\log_2 x}{ug(\lambda)\varepsilon_y} \ll \frac{(\log_2 x)(\log y)^{3/2}}{y \log(1/\lambda)}.$$

Il suit

$$\frac{\log_2 x}{ug(\lambda)\varepsilon_y} \ll \begin{cases} (\log y)^{3/2}/y & \text{si } \lambda < 1/\sqrt{\log x}, \\ (\log_2 x)(\log y)^{3/2}/y \ll (\log_2 x)^{5/2}/\sqrt{\log x} & \text{si } 1/\sqrt{\log x} < \lambda \leq 1/2. \end{cases}$$

Lorsque $\lambda \geq 1/2$, nous avons

$$\frac{\log_2 x}{ug(\lambda)\varepsilon_y} \ll \frac{(\log_2 x)(\log y)^{3/2}}{\log x} \ll \frac{(\log_2 x)^4}{\log x}.$$

Ainsi, par décroissance de $x \mapsto (\log_2 x)^{5/2}/\sqrt{\log x}$ et $x \mapsto (\log_2 x)^4/\log x$ à partir d'un certain seuil, nous avons bien établi (3.21). \square

Démonstration de la Proposition 3.1. Lorsque x est borné, l'estimation (3.3) est trivialement vérifiée. Nous pouvons donc supposer x suffisamment grand.

D'après (3.5) et le théorème 3.3, on a

$$(3.22) \quad \frac{\Psi_\tau(x, y)}{\Psi(x, y)} \asymp \zeta(\alpha, y) e^{-\vartheta(x, y)\{1+O(\varepsilon_y)\}} \quad (2 \leq y \leq \exp\{(\log_2 x)^2\}).$$

Introduisons la fonction

$$f(v) = h(v) + v \log\left(1 + \frac{1}{v}\right) \quad (v > 0)$$

où h est défini en (3.4). D'après (3.8), nous avons, pour $2 \leq y \leq \exp\{(\log_2 x)^2\}$,

$$\zeta(\alpha, y)e^{-\vartheta(x, y)\{1+O(\varepsilon_y)\}} = \zeta(1, y) \exp\left\{ug(\lambda) + O(\varepsilon_y uf(\lambda))\right\}.$$

Compte-tenu du comportement asymptotique de g donné en (3.2), nous déduisons de l'égalité $f(\lambda) = 2\lambda \log(1 + 1/\lambda) - g(\lambda)$ que l'on a

$$(3.23) \quad f(t) \sim t \log(1/t) \quad (t \rightarrow 0) \quad \text{et} \quad f(t) \sim 2 - \log 2 \quad (t \rightarrow +\infty),$$

donc la fonction f/g est bornée. On obtient ainsi

$$\zeta(\alpha, y)e^{-\vartheta(x, y)\{1+O(\varepsilon_y)\}} = \zeta(1, y)e^{ug(\lambda)\{1+O(\varepsilon_y)\}}.$$

Rappelons que la formule de Mertens implique $\zeta(1, y) \asymp \log y$. D'après (3.21), on a

$$\log_2 y \leq \log_2 x \ll u\varepsilon_y g(\lambda),$$

et donc

$$(3.24) \quad \zeta(\alpha, y)e^{-\vartheta(x, y)\{1+O(\varepsilon_y)\}} = e^{ug(\lambda)\{1+O(\varepsilon_y)\}} \quad (2 \leq y \leq \exp\{(\log_2 x)^2\}).$$

En insérant (3.24) dans (3.22), nous obtenons bien (3.3). □

Chapitre 4

Raffinement d'un théorème de Tenenbaum et Wu

4.1 Introduction des notations et énoncé du résultat

Conformément à l'usage nous désignons par $\Omega(n)$ le nombre de facteurs premiers d'un entier n comptés avec multiplicité. Dans le but d'établir la minoration (1.25), soit

$$\mathfrak{S}(x, y) \gg \log_2 y + \mathfrak{r}(u) \quad (x \geq y > x^{1/(2\log_3 x)}),$$

nous aurons à établir au Chapitre 5 une formule asymptotique pour la quantité

$$(4.1) \quad \sum_{\substack{d < d' \leq 2d \\ (d, d') = 1, P(d') \leq y}} 2^{-\Omega(d')}.$$

L'uniformité dans le paramètre d sera à cet égard cruciale. Dans cette perspective, nous consacrons ce chapitre à l'obtention d'une version uniforme en certains paramètres de [TW03, th. 2.1], un théorème qui fournit une formule asymptotique pour la valeur moyenne friable de certaines fonctions multiplicatives positives ou nulles.

Une autre approche, suivie dans l'article [MTW24, lem.3.1], consiste à détecter la condition $(d, d') = 1$ par la formule d'inversion de Möbius, puis à appliquer la version standard du théorème de Tenenbaum et Wu. Les difficultés techniques sont moindres et le terme d'erreur obtenu est un peu meilleur, mais cette méthode est moins générale.

Commençons par rappeler et/ou généraliser plusieurs définitions et notations introduites dans [TW03].

Étant donnée une fonction arithmétique f , rappelons la notation

$$(4.2) \quad \Psi_f(x, y) := \sum_{n \in S(x, y)} f(n).$$

Dans [TW03, p. 6], les auteurs introduisent une classe de fonctions régulières notée $\mathcal{R}(b, \kappa)$ et dont les éléments peuvent servir de critère pour mesurer l'ordre de grandeur de certains termes d'erreur. Nous reprenons cette définition en introduisant deux paramètres supplémentaires \mathcal{B} et \mathcal{V} . Étant donnée une fonction croissante $R \in \mathcal{C}^1([1, \infty[, \mathbb{R}^{+*})$, nous

posons

$$\varphi_R(v) := \log R(e^v) \quad (v > 0).$$

Définition 4.1. Soient $\mathcal{B} \geq 1$, $\mathcal{V} \geq 1$, $\kappa > 0$, $b \in]0, \frac{1}{2}]$. Nous dirons qu'une fonction croissante $R \in \mathcal{C}^1([1, \infty[, \mathbb{R}^{+*})$ appartient à la classe $\mathcal{R}(b, \kappa, \mathcal{B}, \mathcal{V})$ si elle vérifie les trois conditions suivantes :

(i) $v \mapsto v\varphi'_R(v)$ est monotone, φ'_R est décroissante,

$$(4.3) \quad \varphi'_R(v) = O(1) \quad (v > 0),$$

et

$$(4.4) \quad \frac{1}{2}\varphi'_R\left(\frac{1}{2}v\right) \leq (1-b) \int_b^1 \varphi'_R(tv) dt + O\left(\frac{1}{v}\right) \quad (v > 0);$$

(ii) On a

$$(4.5) \quad \int_{3/2}^{\infty} \frac{dv}{vR(v^b)\log v} \leq \mathcal{V}$$

(iii) Il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que

$$(4.6) \quad 1 + \frac{(\log v)^{1-\kappa} (\log_2 v)^{\delta_{\kappa 1}}}{\mathcal{B}} \leq R(v) \ll e^{(\log v)^{3/5-\varepsilon}} \quad (v \geq 3),$$

où $\delta_{\kappa 1}$ désigne le symbole de Kronecker.

Les constantes implicites présentes dans (i), (ii), et (iii) peuvent dépendre de ε , κ et b mais ni de \mathcal{V} ni de \mathcal{B} .

Remarque 4.2. Comme noté dans [TW03], la condition (i) est certainement réalisée si l'on a

$$(4.7) \quad \frac{1}{2}\varphi'_R\left(\frac{1}{2}v\right) \leq (1-b)^2\varphi'_R(v) + O(1/v) \quad (v > 0).$$

Étant donnés des paramètres supplémentaires $A > 0$, $C > 0$, $\eta \in]0, \frac{1}{2}[$, introduisons ensuite, comme dans [TW03], la classe

$$\mathcal{M}_\kappa = \mathcal{M}_\kappa(A, C, \eta; R)$$

constituée des fonctions multiplicatives réelles positives f satisfaisant à

$$(4.8) \quad \sum_p \sum_{\nu \geq 2} \frac{f(p^\nu)}{p^{(1-\eta)\nu}} \leq A,$$

$$(4.9) \quad \left| \sum_{p \leq z} f(p) \log p - \kappa z \right| \leq Cz/R(z) \quad (z > 1).$$

Pour $f \in \mathcal{M}_\kappa$, posons encore

$$(4.10) \quad C_\kappa(f) := \prod_p (1 - 1/p)^\kappa \sum_{\nu \geq 0} f(p^\nu)/p^\nu.$$

Pour une fonction R satisfaisant aux conditions (i)-(iii), définissons

$$(4.11) \quad \begin{aligned} Y_\varepsilon &:= y^{\sqrt{R(y^b) \min\{R(y^b), \log y\} / \{\varepsilon(1+|\log R(y^b)|)\}}}, \\ Y_\varepsilon^* &:= y^{R(y^b) / \{\varepsilon(1+|\log R(y^b)|)\}}, \end{aligned}$$

et introduisons les domaines

$$(4.12) \quad \begin{aligned} J_\varepsilon(R) &= \{(x, y) : 2 \leq y \leq x \leq Y_\varepsilon\}, \\ J_\varepsilon^*(R) &= \{(x, y) : 2 \leq y \leq x \leq Y_\varepsilon^*\}. \end{aligned}$$

Remarquons que $Y_\varepsilon \leq Y_\varepsilon^*$, ce qui implique que $J_\varepsilon(R) \subset J_\varepsilon^*(R)$. Posons également

$$(4.13) \quad R_b(y) := \int_{3/2}^y \frac{dt}{tR(t^b)} \quad (b > 0, y \geq 3/2).$$

Enfin, pour $\mathcal{B}, \mathcal{V} \geq 1, \mathfrak{r} > 0$, posons

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{B}, \mathcal{V}}(x, y; \mathfrak{r}) &:= e^{\mathfrak{r}\mathcal{V}} \left(\frac{R_b(y) \log(u+1) + \mathcal{B}R_b(y) + \mathcal{B} \log(u+1)}{\log y} + \frac{(\mathcal{B} + R_b(y)^\kappa)}{(\log y)^\kappa} \right. \\ &\quad \left. + \frac{u \log(u+1)}{R(y^b)} + \frac{u^2 \log(u+1)^2}{R(y^b) \log y} \right) \end{aligned}$$

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le résultat suivant, qui explicite la dépendance en \mathcal{B} et \mathcal{V} dans le terme d'erreur de [TW03, th. 2.1].

Théorème 4.3. *Soient $A > 0, C > 0, \varepsilon > 0, \kappa > 0, 0 < b \leq 1/2, 0 < \eta < 1/2, \mathcal{B}, \mathcal{V} \geq 1, R \in \mathcal{R}(b, \kappa, \mathcal{B}, \mathcal{V})$.*

(i) *Il existe $\mathfrak{r} > 0$ telle que, uniformément pour $\mathcal{B} \geq 1, \mathcal{V} \geq 1, f \in \mathcal{M}_\kappa(A, C, \eta; R)$, $(x, y) \in J_\varepsilon(R)$, on ait*

$$(4.14) \quad \Psi_f(x, y) = x \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1} \{C_\kappa(f) + O(E_{\mathcal{B}, \mathcal{V}}(x, y; \mathfrak{r}))\}.$$

(ii) *Sous l'hypothèse supplémentaire que la suite $\{f(p)\}_{p \geq 2}$ est bornée, la formule (4.14) est valable dans le domaine $J_\varepsilon^*(R)$ avec*

$$(4.15) \quad \begin{aligned} E_{\mathcal{B}, \mathcal{V}}(x, y; \mathfrak{r}) &:= \frac{\mathcal{B}e^{\mathfrak{r}\mathcal{V}} \log(u+1) + \mathcal{B}e^{\mathfrak{r}\mathcal{V}} R_b(y) + \log(u+1) R_b(y)}{\log y} \\ &\quad + \frac{\mathcal{B}e^{\mathfrak{r}\mathcal{V}} + R_b(y)^\kappa}{(\log y)^\kappa} + \frac{u \log(u+1)}{R(y^b)}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, la constante implicite de (4.14) peut dépendre de la quantité $\sup_p f(p)$.

Le Théorème 4.3 sera appliqué dans le Chapitre 5 afin d'estimer, uniformément pour $x \geq 2, 1 \leq d \leq x, y > x^{1/2 \log_3 x}$, la quantité

$$(4.16) \quad \sum_{\substack{n \in S(x, y) \\ (n, d) = 1}} 2^{-\Omega(n)},$$

où $\Omega(n)$ désigne le nombre de facteurs premiers comptés avec multiplicité. Nous nous contentons d'indiquer ici que nous effectuerons les choix $\mathcal{B} = \sqrt{\log_2 d}$ et $\mathcal{V} = 5 + \log_3 d$.

Cependant, nous pouvons d'ores et déjà évaluer le degré de précision du Théorème 4.3 en l'appliquant à l'évaluation du nombre des entiers $n \in S(x, y)$ qui sont premiers avec un entier $d \geq 1$, soit

$$\Psi_{f_d}(x, y) = \sum_{\substack{n \in S(x, y) \\ (n, d) = 1}} 1,$$

où f_d est l'indicatrice de $\{n \in \mathbb{N}^* : (n, d) = 1\}$. Le Théorème 4.3 fournit l'existence d'une constante absolue, calculable, $c > 0$, telle que l'on ait

$$(4.17) \quad \Psi_{f_d}(x, y) = \frac{\varphi(d)}{d} \Psi(x, y) \left(1 + O\left((\log_2 3d)^c \frac{\log(u+1)}{\log y} \right) \right)$$

uniformément pour

$$(x, y) \in H_\varepsilon, \quad y \geq y_0(\varepsilon), \quad \log_2 3d \leq (1 - \varepsilon) \log y.$$

Nous omettons la démonstration car les détails sont similaires à ceux livrés dans le Chapitre 5 pour l'estimation de (4.16), notamment quant au choix des paramètres \mathcal{B} et \mathcal{V} .

Ce résultat est à comparer avec [FT96, th.1]. En vertu de cet énoncé, nous avons

$$(4.18) \quad \Psi_{f_d}(x, y) := \frac{\varphi(d)}{d} \Psi(x, y) \left(1 + O\left((\log_2 dy) \frac{\log_2 x}{\log y} \right) \right),$$

pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé et uniformément pour

$$(4.19) \quad (x, y) \in H_\varepsilon, \quad y \geq y_0(\varepsilon), \quad \log_2(d+2) \leq \left(\frac{\log y}{\log(u+1)} \right)^{1-\varepsilon}.$$

Le domaine de validité de la formule asymptotique $\Psi_{f_d}(x, y) \sim \{\varphi(d)/d\} \Psi(x, y)$ impliquée par (4.18) englobe donc significativement celui qui résulte de (4.17). Notons encore que [BT05b, th. 2.1] permet une extension supplémentaire de ce domaine de validité, la formule asymptotique étant valable uniformément pour $x \geq y \geq 2$ sous une contrainte impliquant seulement $\omega(d)$.

4.2 Démonstration du Théorème 4.3

La démonstration du Théorème 4.3 est une adaptation de la preuve [TW03, th. 2.1]. Nous ferons fréquemment appel à des résultats ou à des calculs établis dans [TW03] qui ne sont pas liés aux conditions (ii) et (iii) de la Définition 4.1. Les constantes implicites qui y interviennent ne dépendent donc ni de \mathcal{B} ni de \mathcal{V} .

La première étape de la preuve du Théorème 4.3 consiste à établir une formule asymptotique pour $\Psi_f(x, y)$ lorsque f est exponentiellement multiplicative, c'est-à-dire vérifiant

$$f(p^\nu) = \frac{f(p)^\nu}{\nu!} \quad (p \geq 2, \nu \geq 1).$$

On note

$$\mathcal{M}_\kappa^* := \mathcal{M}_\kappa^*(C; R)$$

la classe des fonctions arithmétiques exponentiellement multiplicatives satisfaisant (4.9).

La deuxième étape consiste à remarquer que toute fonction $f \in \mathcal{M}(A, C, \eta; R)$ peut s'écrire comme le produit de convolution d'une fonction $f^* \in \mathcal{M}_K^*(C, R)$ avec une fonction g suffisamment maniable. Grâce à l'égalité

$$\Psi_f(x, y) = \sum_{m \in \mathcal{S}(x, y)} g(m) \Psi_{f^*}(x/m, y),$$

nous pourrons ainsi étendre le résultat obtenu pour \mathcal{M}_κ^* à $\mathcal{M}(A, C, \eta; R)$.

Dans toute la démonstration, la lettre \mathfrak{c} désigne une quantité dont la valeur peut varier à chaque occurrence, mais qui ne dépend ni de \mathcal{B} ni de \mathcal{V} .

4.2.1 Résultats auxiliaires

Rappelons les énoncés des lemmes 3.1 et 3.2 de [TW03], qui seront utilisés à plusieurs reprises.

Lemme 4.4. ([TW03], lemme 3.1) Soient $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$, $b \in]0, 1/2]$, $\mathcal{B}, \mathcal{V} \geq 1$, $R \in \mathcal{R}(b, \kappa, \mathcal{B}, \mathcal{V})$. On a

$$u \xi_\kappa(u) \ll R(y^b), \quad \frac{u^2 \xi_\kappa(u)^2}{R(y^b) \log y} \ll 1 \quad ((x, y) \in J_\varepsilon(R))$$

et

$$u \xi_\kappa(u) \ll R(y^b) \quad ((x, y) \in J_\varepsilon^*(R)).$$

Les constantes implicites dépendent au plus de ε .

Lemme 4.5. ([TW03], lemme 3.2) Soit $R \in \mathcal{C}^1(]1, \infty[, \mathbb{R}^{+*})$ une fonction monotone et φ la fonction définie par $\varphi(v) := \log R(e^v)$ ($v > 0$). Posons $b := 1$ si φ est décroissante et supposons que, si φ est croissante, φ' est décroissante et vérifie

$$\frac{1}{2} \varphi'_R(\frac{1}{2}v) \leq (1-b) \int_b^1 \varphi'_R(tv) dt + O\left(\frac{1}{v}\right) \quad (v > 0)$$

pour un nombre réel positif convenable $b \in]0, 1/2]$. Alors on a uniformément pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $y \geq w > 1$,

$$(4.20) \quad \int_w^y \frac{dt}{t^\alpha R(t)} \ll \int_w^y \frac{dt}{tR(t^b)} + \frac{y^{1-\alpha} - 1}{(1-\alpha)R(y^b)}.$$

Observons en particulier que, pour $R \in \mathcal{R}(b, \kappa, \mathcal{B}, \mathcal{V})$, la constante implicite de la majoration (4.20) ne dépend ni de \mathcal{B} ni de \mathcal{V} .

Rappelons la définition de la fonction implicite ξ en (2.12) et posons

$$\xi_\kappa(v) := \max\{1, \xi(v/\kappa)\} \quad (\kappa > 0, v \geq 1),$$

$$\alpha = \alpha_\kappa(x, y) := 1 - \frac{\xi_\kappa(u)}{\log y}.$$

Établissons à présent une version uniforme en \mathcal{B} et \mathcal{V} de [TW03], lemme 3.4]. Nous notons \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers.

Lemme 4.6. Soient $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$, $b \in]0, 1/2]$, $\mathcal{B}, \mathcal{V} \geq 1$, $R \in \mathcal{R}(b, \kappa, \mathcal{B}, \mathcal{V})$. Uniformément pour $\mathcal{B}, \mathcal{V} \geq 1$, $(x, y) \in J_\varepsilon^*(R)$, $\{f(p)\}_{p \in \mathcal{P}} \in [0, \infty]^{\mathcal{P}}$ satisfaisant (4.9), $j \in \{0; 1\}$, nous avons

$$(4.21) \quad \sum_{p \leq y} \frac{f(p)^2 (\log p)^j}{p^{2\alpha_\kappa}} \ll \mathcal{V} + \frac{u^2 \xi_\kappa(u)}{(\log y)^{1-j} R(y^b)}.$$

De plus, si la suite $\{f(p)\}_{p \in \mathcal{P}}$ est bornée, alors on a

$$(4.22) \quad \sum_{p \leq y} \frac{f(p)^2 (\log p)^j}{p^{2\alpha_\kappa}} \ll 1.$$

Démonstration. L'hypothèse (4.9) implique la majoration uniforme en \mathcal{B} et \mathcal{V}

$$f(p) \ll \frac{p}{R(p) \log p}.$$

On en déduit

$$S_j := \sum_{p \leq y} \frac{f(p)^2 (\log p)^j}{p^{2\alpha_\kappa}} \ll \sum_{p \leq y} \frac{f(p) (\log p)^{j-1}}{p^{2\alpha_\kappa-1} R(p)} = \int_{2^-}^y \frac{(\log t)^{j-2}}{t^{\alpha_\kappa-1} R(t)} dN(t),$$

avec

$$N(t) := \sum_{p \leq t} f(p) \log p.$$

En intégrant par parties et en utilisant l'hypothèse $\varphi'_R(\log t) = O(1)$, on obtient

$$\begin{aligned} S_j &\ll \left[\frac{(\log t)^{j-2} N(t)}{t^{\alpha_\kappa-1} R(t)} \right]_{2^-}^y + \int_2^y \frac{(\log t)^{j-2}}{t^{2\alpha_\kappa} R(t)} \left\{ \frac{j-2}{\log t} + 1 - 2\alpha_\kappa - \varphi'_R(\log t) \right\} N(t) dt \\ &\ll \frac{y^{2-2\alpha_\kappa}}{(\log y)^{2-j} R(y)} + \int_2^y \frac{(\log t)^{j-2}}{t^{2\alpha_\kappa-1} R(t)} dt. \end{aligned}$$

Nous appliquons (4.20) à la fonction $v \mapsto (\log v)^{2-j} R(v)$. Par croissance de R et l'hypothèse (ii), on obtient

$$\begin{aligned} \int_2^y \frac{(\log t)^{j-2}}{t^{2\alpha_\kappa-1} R(t)} dt &\ll \int_2^y \frac{dt}{t (\log t^b)^{2-j} R(t^b)} + \frac{y^{2-2\alpha_\kappa}}{(2-2\alpha_\kappa) (\log y^b)^{2-j} R(y^b)} \\ &\ll \mathcal{V} + \frac{u^2 \xi_\kappa(u)}{(\log y)^{1-j} R(y^b)}. \end{aligned}$$

Enfin, lorsque $f(p) \ll 1$ et $(x, y) \in J_\varepsilon^*(R)$, on a $\alpha_\kappa > 2/3$ dès que y est suffisamment grand. Ainsi, une intégration par partie fournit

$$\sum_{p \leq y} \frac{f(p)^2 \log p}{p^{2\alpha_\kappa}} \ll \sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^{2\alpha_\kappa}} \ll 1.$$

On obtient donc (4.22). □

4.2.2 Cas des fonctions exponentiellement multiplicatives

Dans cette section, nous établissons le résultat suivant qui fournit une version uniforme en \mathcal{B} et \mathcal{V} de la formule [TW03, (4.47)]. Conformément à l'usage, γ désigne la constante d'Euler.

Proposition 4.7. *Soient $A > 0$, $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$, $0 < b \leq 1/2$, $0 < \eta < 1/2$, $\mathcal{B} \geq 1$, $\mathcal{V} \geq 1$ et $R \in \mathcal{R}(b, \kappa, \mathcal{B}, \mathcal{V})$. On a uniformément pour $2 \leq y \leq x \leq Y_\varepsilon^*$, $\mathcal{B}, \mathcal{V} \geq 1$ et $f \in \mathcal{M}_\kappa^*(C; R)$,*

$$(4.23) \quad \Psi_f(x, y) = e^{-\gamma\kappa} x \varrho_\kappa(u) \frac{F(1, y)}{\log y} \left\{ 1 + O\left(E_\kappa^*(x, y) + \mathcal{B}e^{c\mathcal{V}} E_1(x, y)\right) \right\},$$

avec

$$(4.24) \quad E_1(x, y) = \frac{\xi_\kappa(u)}{\log y} + \frac{1}{(\log y)^\kappa} + \frac{R_b(y)}{\log y},$$

$$(4.25) \quad E_\kappa^*(x, y) = \frac{\xi_\kappa(u)(u+1)}{R(y^b)} + \frac{\xi_\kappa(u)R_b(y)}{\log y} + \frac{R_b(y)^\kappa}{(\log y)^\kappa}.$$

La constante implicite dans 4.23 ne dépend ni de \mathcal{B} ni de \mathcal{V} .

Pour aboutir à ce résultat, nous explicitons la dépendance en \mathcal{B} et \mathcal{V} de plusieurs estimations contenues dans les paragraphes 3 et 4 de [TW03]. Nous obtiendrons en particulier une version effective de [TW03, prop. 4.1].

Nous désignons par

$$F(s, y) := \sum_{P(n) \leq y} f(n)/n^s \quad (\Re s > 0, y \geq 2)$$

la série de Dirichlet de la restriction de f aux entiers y -friables.

La première étape consiste à établir une majoration uniforme de $|F(\alpha_\kappa + i\tau, y)|$ au voisinage de $\tau = 0$.

Lemme 4.8. *Soient $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$, $b \in]0, 1/2]$, $\mathcal{B}, \mathcal{V} \geq 1$ et $R \in \mathcal{R}(b, \kappa, \mathcal{B}, \mathcal{V})$. Il existe une constante $c_0 = c_0(\kappa) > 0$ telle que, uniformément pour $\mathcal{B}, \mathcal{V} \geq 1$, $f \in \mathcal{M}_\kappa^*$, $(x, y) \in J_\varepsilon^*(R)$, $\alpha := \alpha_\kappa(x, y)$, $s = \alpha + i\tau$ et $|\tau| \leq \pi/\log y$, on a*

$$(4.26) \quad F(s, y) \ll F(\alpha, y) e^{-c_0 u (\tau \log y)^2 + c\mathcal{V}}.$$

De plus, notant

$$\frac{1}{R^*(w)} := \int_w^\infty \frac{dv}{v R(v^b) \log v} \quad (w > 1),$$

il existe une constante $c_1 = c_1(R) > 0$ telle que, uniformément lorsque

$$\pi/\log y \leq |\tau| \leq c_1 \min\{R(y^b)/\xi_\kappa(u)^2, R^*(y^{1/\xi_\kappa(u)})\},$$

on ait

$$(4.27) \quad F(s, y) \ll F(\alpha, y) \left(\frac{1 + |\tau| \log w_\tau}{\xi_\kappa(u) + |\tau| \log y} \right)^\kappa e^{-u/2(\log^2(u+1))}$$

où w_τ est défini par la relation $|\tau| + R^*(2) = R^*(w_\tau)$.

Démonstration. Comme $f \in \mathcal{M}_\kappa^*$, on a

$$F(s, y) = \prod_{p \leq y} \sum_{\nu \geq 0} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}} = \exp \left(\sum_{p \leq y} \frac{f(p)}{p^s} \right).$$

Donc

$$(4.28) \quad \left| \frac{F(s, y)}{F(\alpha, y)} \right| = \exp \left\{ - \sum_{p \leq y} \frac{f(p) \{1 - \cos(\tau \log p)\}}{p^\alpha} \right\}.$$

Posons ensuite, comme dans [TW03],

$$Q(v) := \sum_{p \leq v} \{f(p) - \kappa\} \log p \ll \frac{v}{R(v)} \quad (v > 1),$$

$$X(w) := \int_w^y \frac{1 - \cos(\tau \log v)}{v^\alpha \log v} dQ(v) \quad (1 < w \leq y).$$

De (4.28) nous déduisons la majoration [TW03, (3.17)]

$$(4.29) \quad \left| \frac{F(s, y)}{F(\alpha, y)} \right| \leq e^{-\kappa V - X(3/2)},$$

où

$$V := \sum_{p \leq y} \{1 - \cos(\tau \log p)\} / p^\alpha.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$(4.30) \quad X(3/2) = \left[\frac{1 - \cos(\tau \log v)}{v^\alpha \log v} Q(v) \right]_{3/2}^y + \int_{3/2}^y \left(\frac{(1 + |\tau|) Q(v)}{v^{\alpha+1} \log v} \right) dv$$

$$\ll \left[\frac{1 - \cos(\tau \log v)}{v^\alpha \log v} Q(v) \right]_{3/2}^y + (1 + |\tau|) \int_{3/2}^y \frac{dv}{v^\alpha R(v) \log v}.$$

Le lemme 3.2 de [TW03] appliqué à la fonction $v \mapsto R(v) \log v$ fournit l'estimation uniforme en \mathcal{B} et \mathcal{V} ,

$$\int_{3/2}^y \frac{dt}{t^\alpha R(t) \log t} \ll \int_{3/2}^y \frac{dt}{t R(t^b) \log t} + \frac{y^{1-\alpha} - 1}{(1-\alpha) R(y^b) \log y}.$$

Ainsi,

$$X(3/2) \ll \frac{y^{1-\alpha}}{R(y) \log y} + (1 + |\tau|) \left\{ \int_{3/2}^y \frac{dv}{v R(v^b) \log v} + \frac{y^{1-\alpha} - 1}{(1-\alpha) R(y^b) \log y} \right\}.$$

L'hypothèse (ii) conduit alors à

$$X(3/2) \ll \frac{u + u|\tau|}{R(y^b)} + (1 + |\tau|) \int_{3/2}^\infty \frac{dv}{v R(v^b) \log v} \ll \mathcal{V} \quad (\tau \ll 1).$$

On a ensuite

$$V \geq \frac{2\tau^2}{\pi^2} \sum_{p \leq y} \frac{(\log p)^2}{p^\alpha}.$$

De plus, nous avons

$$\sum_{p \leq y} \frac{(\log p)^2}{p^\alpha} = \int_{2^-}^y \frac{\log t}{t^\alpha} d\vartheta(t),$$

avec $\vartheta(t) := \sum_{p \leq t} \log p$. En intégrant par partie et en utilisant

$$\vartheta(t) = t + \mathcal{R}(t),$$

avec $\mathcal{R}(t) \ll t/\log t$, on obtient, pour u suffisamment grand,

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq y} \frac{(\log p)^2}{p^\alpha} &= \frac{y^{1-\alpha} \log y}{(1-\alpha)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{(1-\alpha) \log y}\right) \right\} + O(1) \\ &\geq \frac{y^{1-\alpha} \log y}{(1-\alpha)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\xi_\kappa(u)}\right) \right) + O(1) \gg \frac{u(\log y)^2}{\kappa}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la formule asymptotique (2.16) pour α et le fait que $\xi_\kappa(u) \asymp \log u$ pour u assez grand. Ainsi

$$V \gg \frac{\tau^2 u}{\kappa} (\log y)^2.$$

Par ailleurs, pour $u \leq u_0$, $y \geq y_0$, on a $\alpha \leq 1$ et

$$\sum_{p \leq y} \frac{(\log p)^2}{p^\alpha} \geq \sum_{p \leq y} \frac{(\log p)^2}{p} \gg (\log y)^2 \geq \frac{u}{u_0} (\log y)^2.$$

En reportant dans (4.29), on en déduit (4.26).

Nous ne détaillons pas ici la preuve de (4.27), identique à celle de [TW03]. En effet, un examen de cette preuve montre qu'elle ne fait pas intervenir les paramètres \mathcal{B} et \mathcal{V} introduits à la Définition 4.1. \square

Établissons à présent une version uniforme en \mathcal{B} et \mathcal{V} de la majoration contenue dans l'estimation [TW03], (3.24).

Lemme 4.9. Soient $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$, $b \in]0, 1/2]$, $\mathcal{B}, \mathcal{V} \geq 1$, $R \in \mathcal{R}(b, \kappa, \mathcal{B}, \mathcal{V})$. On a uniformément pour $\mathcal{B}, \mathcal{V} \geq 1$, $f \in \mathcal{M}_\kappa^*$, $(x, y) \in J_\varepsilon^*(R)$,

$$(4.31) \quad \frac{x^\alpha F(\alpha, y)}{\sqrt{u} \log y} \ll x \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1} e^{c\mathcal{V}}.$$

Démonstration. Nous suivons la preuve de [TW03], (3.24). On a

$$F(\alpha, y) = \exp\left(\sum_{p \leq y} \frac{f(p)}{p^s}\right) \asymp \zeta(\alpha, y)^\kappa \exp\left(\sum_{p \leq y} \frac{f(p) - \kappa}{p^\alpha}\right) \quad ((x, y) \in J_\varepsilon^*(R)).$$

Une sommation d'Abel analogue à celle effectuée en (4.30) et nos hypothèses impliquent

$$\sum_{p \leq y} \frac{f(p) - \kappa}{p^\alpha} = \int_{3/2}^y \frac{dQ(t)}{t^\alpha \log t} \ll \mathcal{V}.$$

Ainsi,

$$x^\alpha F(\alpha, y) \ll x e^{-u\xi_\kappa(u) + \mathfrak{c}\mathcal{V}} \zeta(\alpha, y)^\kappa \asymp x e^{-u\xi_\kappa(u) + \mathfrak{c}\mathcal{V}} (\log y)^\kappa \hat{\varrho}(-\xi_\kappa(u))^\kappa,$$

où la dernière estimation provient de [Ten22, III.(5.68)]. En utilisant l'estimation [TW03, (3.25)]

$$(4.32) \quad \varrho_\kappa(u) \asymp \frac{e^{-u\xi_\kappa(u)} \hat{\varrho}(-\xi_\kappa(u))^\kappa}{\sqrt{u}} \quad (u \geq 1),$$

on obtient bien (4.31). \square

Établissons à présent une version uniforme en $\mathcal{B}, \mathcal{V} \geq 1$ de [TW03, lemme 3.7] qui fournit une majoration de $\Psi_f(x, y)$ du bon ordre de grandeur.

Lemme 4.10. *Soient $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$, $b \in]0, 1/2]$, $\mathcal{B}, \mathcal{V} \geq 1$ et $R \in \mathcal{R}(b, \kappa, \mathcal{B}, \mathcal{V})$. On a uniformément pour $\mathcal{B}, \mathcal{V} \geq 1$, $f \in \mathcal{M}_\kappa^*$, $y \geq 2$, $2 \leq x \leq Y_\varepsilon^*$,*

$$(4.33) \quad \Psi_f(x, y) \ll \mathcal{B} e^{\mathfrak{c}\mathcal{V}} x \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$(4.34) \quad \Psi_f\left(\frac{3x}{2}, y\right) - \Psi_f\left(\frac{x}{2}, y\right) \leq \mathcal{B} e^{\mathfrak{c}\mathcal{V}} x \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1}.$$

En effet, on peut déduire (4.33) de (4.34) en exprimant $[1, x]$ comme une réunion d'intervalles dyadiques.

Nous avons, d'après [TW03, p.140],

$$(4.35) \quad \Psi_f\left(\frac{3x}{2}, y\right) - \Psi_f\left(\frac{x}{2}, y\right) \ll \int_{-2}^2 F(s, y) x^s \left(1 - \frac{|\tau|}{2}\right) d\tau \quad (s = \alpha + i\tau),$$

où la constante implicite est absolue.

En appliquant (4.26), on obtient tout d'abord

$$(4.36) \quad \int_{-\pi/\log y}^{\pi/\log y} F(s, y) x^s \left(1 - \frac{1}{2}|\tau|\right) d\tau \ll \frac{x^\alpha F(\alpha, y) e^{\mathfrak{c}\mathcal{V}}}{\sqrt{u} \log y}.$$

On estime ensuite la contribution de l'intervalle $\pi/\log y \leq \tau \leq 2$. Par symétrie, cela fournira également la contribution de l'intervalle $-2 \leq \tau \leq -\pi/\log y$.

Rappelons la notation $R_b(y)$ en 4.13. Dans la preuve de [TW03, lemme 3.7], les auteurs établissent la majoration

$$\frac{F'(s, y)}{F(s, y)} \ll \frac{y^{1-\alpha} - 1}{\tau} + R_b(y) + \frac{u \log y}{R(y^b)}.$$

Un examen de la preuve montre que la constante implicite ne dépend ni de \mathcal{B} ni de \mathcal{V} .

En conséquence, on a

$$(4.37) \quad \frac{F'(s, y)}{F(s, y)} \ll (\log x) K(x, y; \tau),$$

avec

$$K(x, y; \tau) := \frac{\xi_\kappa(u)}{\tau \log y} + \frac{R_b(y)}{u \log y} + \frac{1}{R(y^b)} \quad (\pi/\log y \leq \tau \leq 2).$$

Une intégration par parties et la majoration (4.37) fournissent

$$\begin{aligned} \int_{\pi/\log y}^2 F(s, y) x^s (1 - \frac{1}{2}\tau) d\tau &= \left[F(s, y) \frac{x^s (1 - \tau/2)}{iu \log y} \right]_{\pi/\log y}^2 \\ &+ O\left(x^\alpha \int_{\pi/\log y}^2 |F(s, y)| K(x, y; \tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Ainsi, d'après (4.27), on a

$$\int_{\pi/\log y}^2 F(s, y) x^s (1 - \frac{1}{2}\tau) d\tau \ll x^\alpha e^{\epsilon \nu} F(\alpha, y) \left\{ \frac{e^{-c_0 \pi^2 u}}{u \log y} + \frac{M}{\sqrt{H(u)}} \right\},$$

avec

$$\begin{aligned} H(u) &:= e^{u/\log^2(u+1)} \quad (u \geq 1), \\ M &:= \int_{\pi/\log y}^2 \frac{K(x, y; \tau)}{(\tau \log y)^\kappa} d\tau \ll \frac{\xi_\kappa(u)}{\log y} + \frac{(\log_2 y)^{\delta_{\kappa 1}} R_b(y)}{(\log y)^{\min(\kappa, 1)+1}}. \end{aligned}$$

La première inégalité de (4.5) entraîne

$$\frac{(\log_2 y)^{\delta_{\kappa 1}} R_b(y)}{(\log y)^{\min(\kappa, 1)+1}} \ll \frac{\mathcal{B}}{\log y}$$

et donc la majoration

$$M \ll \frac{\xi_\kappa(u)}{\log y} + \frac{\mathcal{B}}{\log y}.$$

Finalement, on obtient

$$(4.38) \quad \begin{aligned} \int_{\pi/\log y}^2 F(s, y) x^s (1 - \frac{1}{2}\tau) d\tau &\ll \frac{x^\alpha e^{\epsilon \nu} F(\alpha, y)}{\log y} \left(\frac{\xi_\kappa(u)}{\sqrt{H(u)}} + \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{H(u)}} \right) \\ &\ll \frac{\mathcal{B} e^{\epsilon \nu} x^\alpha F(\alpha, y)}{\sqrt{u \log y}}. \end{aligned}$$

Compte tenu de (4.36) et (4.38), on obtient bien (4.34). \square

Lemme 4.11. Soient $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$, $b \in]0, 1/2]$, $\mathcal{B}, \mathcal{V} \geq 1$, $R \in \mathcal{R}(b, \kappa, \mathcal{B}, \mathcal{V})$. On a uniformément pour $\mathcal{B}, \mathcal{V} \geq 1$, $(x, y) \in J_\varepsilon^*(R)$, $f \in \mathcal{M}_\kappa^*(C; R)$, $1 \leq t \leq x$, $\alpha = \alpha_\kappa(x, y)$,

$$(4.39) \quad \Psi_f(tx, y) \ll \mathcal{B} e^{\epsilon \nu} t^\alpha x \rho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1}.$$

Démonstration. La démonstration est en tout point similaire à celle de [TW03, lemme 3.8]. On peut supposer y assez grand et $\varepsilon < 1$. Sous ces conditions on a $(tx, y) \in J_{\varepsilon/2}^*(x, y)$.

Posons $v := (\log t)/\log y$. Par (4.33), on a

$$(4.40) \quad \Psi_f(tx, y) \ll \mathcal{B}e^{c\mathcal{V}} tx \varrho_\kappa(u+v)(\log y)^{\kappa-1}.$$

La majoration

$$(4.41) \quad \varrho_\kappa(u+v) \ll \varrho_\kappa(u)t^{\alpha-1},$$

établie dans la démonstration de [TW03, lemme 3.8], entraîne directement (4.39). \square

Nous sommes maintenant en mesure d'établir une version effective de [TW03, prop. 4.1].

Lemme 4.12. *Soient $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$, $b \in]0, 1/2]$, $\mathcal{B}, \mathcal{V} \geq 1$, $R \in \mathcal{R}(b, \kappa, \mathcal{B}, \mathcal{V})$, on a uniformément pour $\mathcal{B}, \mathcal{V} \geq 1$, $(x, y) \in J_\varepsilon^*(R)$, $f \in \mathcal{M}_\kappa^*(C; R)$,*

$$(4.42) \quad \Psi_f(x, y) = \frac{\kappa x}{\log x} \sum_{\substack{x/y < m \leq x \\ P(m) \leq y}} \frac{f(m)}{m} + O(\mathcal{B}e^{c\mathcal{V}} x \varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1} E_1(x, y)),$$

où $E_1(x, y)$ est défini en (4.24).

Démonstration. On utilise l'identité

$$(4.43) \quad \Psi_f(x, y) = \frac{1}{\log x} \sum_{n \in S(x, y)} f(n) \log n + \frac{1}{\log x} \int_1^x \frac{\Psi_f(t, y)}{t} dt,$$

qui découle d'une sommation d'Abel.

Les majorations (4.33) et (2.22) entraînent une version effective de [TW03, (4.3)] : on a, pour $y \geq 2$, $2 \leq x \leq Y_\varepsilon^*$ et $f \in \mathcal{M}_\kappa^*$,

$$(4.44) \quad \begin{aligned} \int_1^x \frac{\Psi_f(t, y)}{t} dt &\ll \int_1^y (\log 2t)^{\kappa-1} + x \mathcal{B}e^{c\mathcal{V}} (\log y)^\kappa \int_0^{u-1} \varrho_\kappa(u-v) y^{-v} dv \\ &\ll y (\log y)^{\kappa-1} + x \mathcal{B}e^{c\mathcal{V}} (\log y)^\kappa \varrho_\kappa(u) \int_0^u e^{v\xi_\kappa(u)} y^{-v} dv \\ &\ll \mathcal{B}e^{c\mathcal{V}} x (\log y)^{\kappa-1} \varrho_\kappa(u). \end{aligned}$$

Pour évaluer $\sum_{n \in S(x, y)} f(n) \log n$, nous utilisons la formule suivante établie dans la démonstration de [TW03, prop. 4.1] : on a

$$(4.45) \quad \sum_{n \in S(x, y)} f(n) \log n = \sum_{mp \in S(x, y)} f(m) f(p) \log p + O(S),$$

avec

$$S := \sum_{\substack{mp^\nu \in S(x, y) \\ \nu \geq 2}} f(m) \frac{f(p)^\nu}{\nu!} \log p^\nu.$$

La constante implicite dans (4.45) est absolue. Suivant toujours la démonstration de [TW03, prop. 4.1], nous allons établir la majoration

$$(4.46) \quad S \ll \mathcal{B}e^{c\mathcal{V}} x u \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\max(\kappa-1, 0)}.$$

Compte-tenu de (4.43), (4.45) et de (4.44), cela fournira :

$$(4.47) \quad \Psi_f(x, y) = \frac{1}{\log x} \sum_{mp \in S(x, y)} f(m)f(p) \log p + O\left(\mathcal{B}e^{\mathcal{V}} \frac{x \varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}}{(\log y)^{\min(\kappa, 1)}}\right),$$

soit une version uniforme en \mathcal{B} et \mathcal{V} de [TW03], (4.6)]. On a

$$S \leq \sum_{\substack{p \leq y, \nu \geq 2 \\ p^\nu \leq x}} \frac{f(p)^\nu \log p^\nu}{p^\nu \nu!} \Psi_f\left(\frac{x}{p^\nu}, y\right).$$

Dans le cas $\kappa \geq 1$, nous avons la majoration (cf. [TW03], p. 146])

$$S \ll x \varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1} \sum_{p \leq y} \frac{f(p)^2 \log p}{p^{2\alpha}},$$

qui est uniforme en \mathcal{B} et \mathcal{V} . En utilisant (4.21) et la majoration (cf. [TW03], (3.3)])

$$(4.48) \quad u \xi_\kappa(u) \ll R(y^b) \quad (x, y) \in J_\varepsilon^*(R),$$

nous obtenons

$$S \ll \mathcal{B}e^{\mathcal{V}} x u \varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1},$$

soit (4.46) dans le cas $\kappa \geq 1$. Dans le cas $0 < \kappa < 1$, il est remarqué dans [TW03] que

$$S \ll \mathcal{B}e^{\mathcal{V}} x u \varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1} + O(S^*)$$

avec

$$S^* := x \sum_{\substack{p \leq y, \nu \geq 2 \\ x/\sqrt{y} < p^\nu \leq x}} \frac{f(p)^\nu \log p^\nu}{p^\nu \nu!} \left\{ \log \frac{2x}{p^\nu} \right\}^{\kappa-1}.$$

La majoration

$$S^* \ll u e^{-u \xi_\kappa(u)} x \sum_{p \leq y} \frac{f(p)^2 \log p}{p^{2\alpha}},$$

où la constante implicite ne dépend ni de \mathcal{B} ni de \mathcal{V} , est établie dans [TW03]. En utilisant (4.21), (4.48) et (4.32), nous obtenons bien (4.46) dans le cas $0 < \kappa < 1$.

Évaluons à présent la somme double figurant au second membre de (4.47). Dans [TW03], p. 147-148], Tenenbaum et Wu obtiennent la formule

$$(4.49) \quad \sum_{mp \in S(x, y)} f(m)f(p) \log p = U_1 + U_2,$$

avec

$$U_1 = \left(\sum_{p \leq y} f(p) \log p \right) \sum_{m \in S(x/y, y)} f(m),$$

$$U_2 = \kappa x \sum_{\substack{x/y < m \leq x/2 \\ P(m) \leq y}} \frac{f(m)}{m} + U_3,$$

avec

$$(4.50) \quad U_3 \ll \sum_{\substack{x/y < m \leq x/2 \\ P(m) \leq y}} \frac{xf(m)}{mR(x/m)},$$

où la constante implicite dans (4.50) ne dépend ni de \mathcal{B} ni de \mathcal{V} . Par (4.9), (4.33) et (2.22), on a, lorsque $x \geq y^2$,

$$U_1 \ll \mathcal{B}e^{c\mathcal{V}} x \varrho_\kappa(u-1) (\log y)^{\kappa-1} + x \mathcal{B}e^{c\mathcal{V}} \varrho_\kappa(u) u \xi_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1},$$

tandis que $U_1 \ll x$ si $y \leq x \leq y^2$. On a donc dans tous les cas

$$(4.51) \quad U_1 \ll \mathcal{B}e^{c\mathcal{V}} \left(x \varrho_\kappa(u) \xi_\kappa(u) u (\log y)^{\kappa-1} + x \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\max(\kappa-1, 0)} \right).$$

La majoration suivante est alors établie en [TW03, (4.10)]

$$U_3 \ll \frac{y \Psi_f(x/y, y)}{R(y)} + \Psi_f(x, y) + \int_2^y \frac{\Psi_f(x/t, y)}{R(t)} dt,$$

et là encore, on peut observer que la constante implicite ne dépend ni de \mathcal{B} ni de \mathcal{V} . Sous nos hypothèses, on en déduit

$$(4.52) \quad U_3 \ll \mathcal{B}e^{c\mathcal{V}} x (\log y)^{\kappa-1} \varrho_\kappa(u) \left(R_b(y) + \frac{u \log y}{R(y^b)} \right).$$

En reportant (4.49), (4.51) et (4.52) dans (4.47), on obtient (4.42). \square

Preuve de la Proposition 4.7.

Nous utilisons [TW03, prop. 4.4] : étant donnés $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$, $b \in]0, 1/2]$, $R \in \mathcal{R}(b, \kappa, \mathcal{B}, \mathcal{V})$, on a uniformément pour $2 \leq y \leq x \leq Y_\varepsilon^*$, $f \in \mathcal{M}_\kappa^*(C; R)$,

$$(4.53) \quad \widetilde{\psi}_f(x, y) := \sum_{\substack{n > x \\ P(n) \leq y}} \frac{f(n)}{n} = F(1, y) \lambda_\kappa(u) \{1 + O(E_\kappa^*(x, y))\},$$

où $E_\kappa^*(x, y)$ est défini en (4.25) et

$$\lambda_\kappa(u) := e^{-\gamma\kappa} \int_u^\infty \varrho_\kappa(v) dv.$$

Un examen de la preuve de [TW03, prop. 4.4] montre que la constante implicite dans (4.53) ne dépend ni de \mathcal{B} ni de \mathcal{V} . L'estimation (4.42) s'écrit

$$\Psi_f(x, y) = \frac{\kappa x}{\log x} \left(\widetilde{\psi}_f\left(\frac{x}{y}, y\right) - \widetilde{\psi}_f(x, y) \right) + O(\mathcal{B}e^{c\mathcal{V}} x \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1} E_1(x, y)).$$

En y injectant (4.53) et la majoration $E_\kappa^*(x/y, y) \ll E_\kappa^*(x, y)$, on obtient

$$\begin{aligned} \Psi_f(x, y) &= \frac{\kappa x}{\log x} F(1, y) (\lambda_\kappa(u-1) - \lambda_\kappa(u)) \{1 + O(E_\kappa^*(x, y))\} \\ &\quad + O(\mathcal{B}e^{c\mathcal{V}} x \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1} E_1(x, y)). \end{aligned}$$

Nous disposons (cf. [TW03], p. 160]) de l'identité

$$(4.54) \quad \kappa\{\lambda_\kappa(u-1) - \lambda_\kappa(u)\} = e^{-\gamma_\kappa} u \varrho_\kappa(u) \quad (u \geq 1)$$

ainsi que de l'estimation

$$(4.55) \quad \frac{\lambda_\kappa(u-1)}{u \varrho_\kappa(u)} \ll 1 \quad (u \geq 1).$$

En insérant (4.54) et (4.55) dans (4.53), on obtient bien (4.23).

4.2.3 Preuve du Théorème 4.3

Le but est à présent d'étendre le résultat de la Proposition 4.7 à $\mathcal{M}(A, C, \eta; R)$. Soit $f \in \mathcal{M}(A, C, \eta; R)$. Posons

$$g(p^\nu) := \sum_{j+k=\nu} (-1)^j f(p^k) f(p)^j / j! \quad (p \geq 2, \nu \geq 1).$$

On peut écrire $f = f^* * g$, avec $f^* \in \mathcal{M}_\kappa^*(C; R)$ et on peut vérifier que $g(p) = 0$ pour tout nombre p premier. On a alors

$$(4.56) \quad \Psi_f(x, y) = \sum_{m \in S(x, y)} g(m) \Psi_{f^*}(x/m, y).$$

Pour établir (4.14), nous allons insérer la formule (4.23) dans (4.56). Pour mener à bien ce calcul, nous commençons par estimer les sommes

$$\sum_{p \leq y} \sum_{\nu \geq 1} \frac{|g(p^\nu)| (\log p^\nu)^j}{p^{\nu\alpha}} \quad (j \in \{0, 1\}, (x, y) \in J_\varepsilon^*(R)),$$

avec $\alpha := \alpha_\kappa(x, y) = 1 - \xi_\kappa(u) / \log y$. Suivant la démonstration de [TW03], p.161], pour $j \in \{0, 1\}$, on a la majoration uniforme en \mathcal{B} et \mathcal{V} :

$$(4.57) \quad \sum_{p \leq y} \sum_{\nu \geq 1} \frac{|g(p^\nu)| (\log p^\nu)^j}{p^{\nu\alpha}} \ll 1 + \sum_{p \leq y} \frac{f(p)^2 (\log p)^j}{p^{2\alpha}} \quad ((x, y) \in J_\varepsilon^*(R)).$$

En utilisant (4.21) pour majorer le deuxième terme du second membre de (4.57), on obtient

$$(4.58) \quad \sum_{\substack{p \leq y \\ \nu \geq 1}} \frac{|g(p^\nu)|}{p^{\nu\alpha}} \ll \nu + \frac{u^2 \xi_\kappa(u)}{R(y^b) \log y} \quad ((x, y) \in J_\varepsilon^*(R)),$$

$$(4.59) \quad \sum_{\substack{p \leq y \\ \nu \geq 1}} \frac{|g(p^\nu)| \log p^\nu}{p^{\nu\alpha}} \ll \nu + \frac{u^2 \xi_\kappa(u)}{R(y^b)} \quad ((x, y) \in J_\varepsilon^*(R)).$$

Or, le lemme 4.4 fournit l'estimation

$$(4.60) \quad \frac{u^2 \xi_\kappa(u)^2}{R(y^b) \log y} \ll 1 \quad ((x, y) \in J_\varepsilon(R)).$$

Nous avons donc

$$(4.61) \quad \sum_{\substack{p \leq y \\ \nu \geq 1}} \frac{|g(p^\nu)|}{p^{\nu\alpha}} \ll \mathcal{V} \quad ((x, y) \in J_\varepsilon(R)).$$

Il résulte de (4.61) et de la multiplicativité de g que

$$(4.62) \quad \sum_{P(m) \leq y} \frac{|g(m)|}{m^\alpha} \ll e^{c\mathcal{V}} \quad ((x, y) \in J_\varepsilon(R)).$$

On déduit ensuite de (4.59) et (4.62) que

$$(4.63) \quad \sum_{P(m) \leq y} \frac{|g(m)| \log m}{m^\alpha} \leq \sum_{P(m) \leq y} \frac{|g(m)|}{m^\alpha} \sum_{\substack{p \leq y \\ \nu \geq 1}} \frac{|g(p^\nu)| \log p^\nu}{p^{\nu\alpha}} \\ \ll e^{c\mathcal{V}} \left(1 + \frac{u^2 \xi_\kappa(u)}{R(y^b)}\right) \quad ((x, y) \in J_\varepsilon(R)).$$

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la démonstration du Théorème 4.3. Posons

$$z := y^{1/2\xi_\kappa(u)}, \quad F^*(1, y) := \sum_{P(n) \leq y} f^*(n)/n$$

et rappelons la notation $u_t = (\log t)/\log y$. Observons également que les quantités $E_1(x, y)$ et $E_\kappa^*(x, y)$ sont des fonctions croissantes de x . En insérant (4.23) dans (4.56) nous obtenons

$$(4.64) \quad \Psi_f(x, y) = x e^{-\gamma\kappa} \frac{F^*(1, y)}{\log y} \sum_{m \leq z} \frac{g(m) \varrho_\kappa(u - u_m)}{m} + V_1 + V_2 + O(V_1^* + V_2^*),$$

avec

$$V_1 = x e^{-\gamma\kappa} \frac{F^*(1, y)}{\log y} \sum_{\substack{z \leq m \leq x/\sqrt{y} \\ P(m) \leq y}} \frac{g(m) \varrho_\kappa(u - u_m)}{m},$$

$$V_2 = x e^{-\gamma\kappa} \frac{F^*(1, y)}{\log y} \sum_{\substack{x/\sqrt{y} < m \leq x \\ P(m) \leq y}} \frac{g(m) \varrho_\kappa(u - u_m)}{m},$$

$$V_1^* = x (\log y)^{\kappa-1} \left(E_\kappa^*(x, y) + \mathcal{B} e^{c\mathcal{V}} E_1(x, y) \right) \sum_{\substack{m \leq x/\sqrt{y} \\ P(m) \leq y}} \frac{|g(m)| \varrho_\kappa(u - u_m)}{m},$$

$$V_2^* = x (\log y)^{\kappa-1} \left(E_\kappa^*(x, y) + \mathcal{B} e^{c\mathcal{V}} E_1(x, y) \right) \sum_{\substack{x/\sqrt{y} \leq m \leq x/\sqrt{y} \\ P(m) \leq y}} \frac{|g(m)| \varrho_\kappa(u - u_m)}{m}.$$

D'après (2.22), on a pour $m \leq \sqrt{x}/y$,

$$(4.65) \quad \varrho_\kappa(u - u_m) \ll e^{u_m \xi_\kappa(u)} \varrho_\kappa(u).$$

On a donc d'après (4.63),

$$\begin{aligned} V_1 &\ll x \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1} \sum_{P(m) \leq y} \frac{|g(m)| \log m}{m^\alpha \log z} \\ &\ll e^{c\nu} x \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1} \left\{ \frac{\xi_\kappa(u)}{\log y} + \frac{u^2 \xi_\kappa(u)^2}{R(y^b) \log y} \right\}. \end{aligned}$$

La même majoration est valable pour V_2 si $\kappa \geq 1$. Dans le cas contraire, on a

$$V_2 \ll x^\alpha y^{(1-\alpha)/2} \sum_{P(m) \leq y} \frac{|g(m)| \log m}{m^\alpha \log x} \ll \frac{x e^{-(u-1/2)\xi_\kappa(u)}}{u \log y} \sum_{P(m) \leq y} \frac{|g(m)| \log m}{m^\alpha}.$$

En appliquant (2.22) à $v = u - 1/2$, on obtient

$$e^{-(u-1/2)\xi_\kappa(u)} \ll \varrho_\kappa(u).$$

Cela fournit, d'après (4.63) et le lemme 4.4,

$$V_2 \ll e^{c\nu} \left\{ 1 + \frac{u^2 \xi_\kappa(u)}{R(y^b)} \right\} \frac{x e^{-(u-1/2)\xi_\kappa(u)}}{u \log y} \ll e^{c\nu} \frac{x \varrho_\kappa(u)}{\log y}.$$

Finalement

$$V_1 + V_2 \ll e^{c\nu} x \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1} \left\{ \frac{\xi_\kappa(u)}{\log y} + \frac{1}{(\log y)^\kappa} + \frac{u^2 \xi_\kappa(u)^2}{R(y^b) \log y} \right\} \quad ((x, y) \in J_\varepsilon(R)).$$

En utilisant à nouveau (4.65) puis (4.62), on a

$$\begin{aligned} V_1^* &\ll x \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1} \left(E_\kappa^*(x, y) + \mathcal{B} e^{c\nu} E_1(x, y) \right) \sum_{P(m) \leq y} \frac{|g(m)| e^{u_m \xi_\kappa(u)}}{m} \\ &\ll e^{c\nu} x \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1} \left(E_\kappa^*(x, y) + \mathcal{B} E_1(x, y) \right). \end{aligned}$$

La même majoration est valable pour V_2^* si $\kappa \geq 1$. Dans le cas contraire, on observe que

$$\begin{aligned} V_2^* &\ll \left(E_\kappa^*(x, y) + \mathcal{B} e^{c\nu} E_1(x, y) \right) V_2 \\ &\ll e^{c\nu} \left(E_\kappa^*(x, y) + \mathcal{B} E_1(x, y) \right) \frac{x \varrho_\kappa(u)}{\log y}. \end{aligned}$$

On a donc dans tous les cas

$$V_1^* + V_2^* \ll e^{c\nu} \left(E_\kappa^*(x, y) + \mathcal{B} E_1(x, y) \right) x \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1}.$$

Finalement

$$(4.66) \quad \Psi_f(x, y) = x e^{-\gamma\kappa} \frac{F^*(1, y)}{\log y} \sum_{m \leq z} \frac{g(m) \varrho_\kappa(u - u_m)}{m} + O(W) \quad ((x, y) \in J_\varepsilon(R)),$$

avec

$$\begin{aligned} W &:= x \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1} e^{c\mathcal{V}} \left(E_\kappa^*(x, y) + \mathcal{B}E_1(x, y) + \frac{\xi_\kappa(u)}{\log y} + \frac{1}{(\log y)^\kappa} + \frac{u^2 \xi_\kappa(u)^2}{R(y^b) \log y} \right) \\ &\ll x \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1} e^{c\mathcal{V}} \left(E_\kappa^*(x, y) + \mathcal{B}E_1(x, y) + \frac{\xi_\kappa(u)^{\delta(\kappa)}}{(\log y)^{\min(1, \kappa)}} + \frac{u^2 \xi_\kappa(u)^2}{R(y^b) \log y} \right). \end{aligned}$$

Le terme principal de (4.66) se traite de la même manière que dans [TW03, p.163, 1.1-3]. De l'estimation $\varrho'_\kappa(u-w) \asymp \varrho_\kappa(u) \log(u+1)$ pour tout $w \in [0, 1/(2\xi_\kappa(u))]$, on tire

$$\varrho_\kappa(u-v) = \varrho_\kappa(u) \{1 + O(v \log(u+1))\} \quad (0 \leq v \leq 1/\{2\xi_\kappa(u)\}).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq z} \frac{g(m) \varrho_\kappa(u-u_m)}{m} &= \varrho_\kappa(u) \sum_{m \leq z} \frac{g(m)}{m} + O\left(\frac{\varrho_\kappa(u) \xi_\kappa(u)}{\log y} \sum_{m \leq z} \frac{|g(m)| \log m}{m}\right) \\ &= \varrho_\kappa(u) \left\{ \prod_{p \leq y} \sum_{\nu \geq 0} \frac{g(p^\nu)}{p^\nu} + O\left(\sum_{P(m) \leq y} \frac{|g(m)| \log m}{m \log z}\right) \right\} \\ &= \varrho_\kappa(u) \left\{ \prod_{p \leq y} \sum_{\nu \geq 0} \frac{g(p^\nu)}{p^\nu} + O\left(\frac{e^{c\mathcal{V}} \xi_\kappa(u)}{\log y} + \frac{e^{c\mathcal{V}} u^2 \xi_\kappa(u)^2}{R(y^b; d) \log y}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement (4.14) en remarquant que

$$F^*(1, y) \prod_{p \leq y} \sum_{\nu \geq 0} \frac{g(p^\nu)}{p^\nu} = F(1, y)$$

et que d'après [TW03, (2.7)], on a uniformément pour $(x, y) \in J_\varepsilon(R)$,

$$F(1, y) = e^{\gamma\kappa} C_\kappa(f) (\log y)^\kappa \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{R(y^b)}\right) \right\}.$$

Supposons pour finir que la suite $\{f(p)\}_{p \in \mathcal{P}}$ est bornée et établissons le point (ii) du Théorème 4.3. Dans ce cas, la somme du membre de droite de (4.57) est $\ll 1$ dans le domaine $J_\varepsilon^*(R)$, uniformément en \mathcal{B} et \mathcal{V} d'après (4.22). Cela implique que le terme de gauche de (4.61) est $\ll 1$ et par suite les membres de gauche de (4.62) et (4.63) sont également $\ll 1$, toujours uniformément en \mathcal{B} et \mathcal{V} . On obtient ainsi les majorations pour $(x, y) \in J_\varepsilon^*(R)$,

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &\ll x \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1} \left\{ \frac{\xi_\kappa(u)}{\log y} + \frac{1}{(\log y)^\kappa} \right\}, \\ V_1^* + V_2^* &\ll \left(E_\kappa^*(x, y) + \mathcal{B}e^{c\mathcal{V}} E_1(x, y) \right) x \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1}. \end{aligned}$$

Donc, le terme d'erreur de (4.66) devient, dans le cas où la suite $\{f(p)\}_{p \geq 2}$ est bornée,

$$\mathcal{W} := x \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1} \left(E_\kappa^*(x, y) + \mathcal{B}e^{c\mathcal{V}} E_1(x, y) + \frac{\xi_\kappa(u)^{\delta(\kappa)}}{(\log y)^{\min(1, \kappa)}} \right).$$

Cela achève la preuve du Théorème 4.3

Chapitre 5

Minoration de $\mathfrak{S}(x, y)$ dans H_ε

Dans toute cette partie, nous fixons $\varepsilon > 0$ et convenons que les constantes implicites peuvent dépendre de ε . Rappelons la définition

$$H_\varepsilon := \left\{ (x, y) : x \geq 3, \exp\left((\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\right) \leq y \leq x \right\},$$

qui correspond au domaine de validité de la formule de Hildebrand (1.11). Rappelons également la notation

$$\mathfrak{r}(v) := \frac{\varrho_2(v)}{\sqrt{v}\varrho(v)} \quad (v \geq 1).$$

Dans ce chapitre, nous démontrons la minoration du point (i) du Théorème 1.1, soit la proposition suivante.

Proposition 5.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et $(x, y) \in H_\varepsilon$, nous avons*

$$(5.1) \quad \mathfrak{S}(x, y) \gg_\varepsilon \log_2 y + \mathfrak{r}(u).$$

La Proposition 5.1 résultera de minoration de $\mathfrak{S}(x, y)$ dans les deux sous-domaines suivants :

$$(5.2) \quad \mathfrak{D}_1 := H_\varepsilon \quad \text{et} \quad \mathfrak{D}_2 := \{x \geq y > x^{1/(2\log_3 x)}\}.$$

La démonstration se déroulera donc en deux temps.

Tout d'abord, en employant un argument probabiliste élémentaire, nous nous ramenons à l'estimation simple de la moyenne d'une fonction multiplicative sur les entiers friables. Une application directe d'un résultat de [TW03] permet alors d'obtenir une première minoration valable dans H_ε , triviale lorsque u est borné.

Dans un deuxième temps, nous évaluons $\mathfrak{S}(x, y)$ dans le domaine \mathfrak{D}_2 en nous ramenant à l'estimation d'une fonction multiplicative sur les entiers friables dépendant d'un paramètre qu'il nous faut contrôler. Nous appliquons alors la version effective établie au chapitre 4 de [TW03, th. 2.1].

5.1 Minoration de $\mathfrak{S}(x, y)$ dans le domaine \mathfrak{D}_1

L'objet de cette section est d'établir la proposition suivante.

Proposition 5.2. Soit $\varepsilon > 0$. On a uniformément pour $(x, y) \in H_\varepsilon$,

$$\mathfrak{S}(x, y) \gg \mathfrak{r}(u).$$

Remarque 5.3. Lorsque u est borné, cette minoration est triviale.

Remarque 5.4. Pour $a \geq 1/\log 2$ et $\exp\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x^{1/(a \log_3 x)}$, nous avons, compte-tenu de (2.26), $\mathfrak{r}(u) \gg \log_2 y$. Dans ce sous-domaine, la Proposition 5.2 implique donc la Proposition 5.1.

Pour chaque entier naturel $n \geq 1$, introduisons la variable aléatoire D_n définie par

$$\mathbb{P}(D_n = \log d) = \frac{1}{\tau(n)} \quad (d \mid n),$$

où τ désigne la fonction « nombre de diviseurs », définie par

$$\tau(n) := \sum_{d \mid n} 1.$$

Nous avons

$$\mathbb{E}(D_n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} \log d = \frac{1}{2} \log n,$$

puisque $\prod_{d \mid n} d^2 = n^{\tau(n)}$. Ainsi, compte tenu de [Ten87], (8),

$$(5.3) \quad \sigma_n^2 := \mathbb{V}(D_n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} (\log d - \frac{1}{2} \log n)^2 = \frac{1}{12} \sum_{p^\nu \parallel n} \nu(\nu+2)(\log p)^2.$$

Proposition 5.5. Pour $x \geq y \geq 2$, on a

$$(5.4) \quad \Delta(n) \geq \frac{3\tau(n)}{16\sigma_n + 4}.$$

Démonstration. Dans un premier temps, remarquons que l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev appliquée à D_n fournit, pour tout nombre réel $T > 0$, la majoration

$$\frac{1}{\tau(n)} \sum_{\substack{d \mid n \\ |\log d - \frac{1}{2} \log n| \geq T/2}} 1 \leq \frac{4}{\tau(n)T^2} \sum_{d \mid n} (\log d - \frac{1}{2} \log n)^2 = \frac{4\sigma_n^2}{T^2}.$$

En posant $T = 4\sigma_n$, il suit

$$\frac{1}{\tau(n)} \sum_{\substack{d \mid n \\ |\log d - \frac{1}{2} \log n| \geq T/2}} 1 \leq \frac{1}{4},$$

et donc

$$(5.5) \quad \sum_{\substack{d \mid n \\ |\log d - \frac{1}{2} \log n| < T/2}} 1 \geq \frac{3}{4} \tau(n).$$

L'intervalle $I :=]\frac{1}{2} \log n - T/2, \frac{1}{2} \log n + T/2[$ contient donc au moins $\frac{3}{4} \tau(n) \log d$ valeurs de $\log d$ ($d \mid n$) alors qu'il contient au plus $\lfloor T \rfloor + 1$ intervalles de longueur 1. D'après le principe des tiroirs, l'un au moins de ces intervalles contient au moins

$$\frac{3\tau(n)}{4(\lfloor T \rfloor + 1)} \geq \frac{3\tau(n)}{4(T + 1)}$$

diviseurs. Cela implique

$$\Delta(n) \geq \frac{3\tau(n)}{4(T + 1)} = \frac{3\tau(n)}{16\sigma_n + 4} \quad (n \geq 1). \quad \square$$

La Proposition [5.5](#) permet de minorer $\sum_{n \in S(x, y)} \Delta(n)$ par la somme friable d'une fonction multiplicative.

Proposition 5.6. *Uniformément pour $x \geq y \geq 2$, nous avons*

$$\sum_{n \in S(x, y)} \Delta(n) \gg \frac{1}{\sqrt{\log y \log(2x)}} \sum_{n \in S(x, y)} \tau(n) \mu(n)^2.$$

Démonstration. Pour tout entier $n \in S(x, y)$ sans facteur carré, d'après [\(5.3\)](#), on a

$$\sigma_n^2 = \frac{3}{12} \sum_{p \mid n} (\log p)^2 \leq \frac{1}{4} (\log y) \sum_{p \mid n} \log p = \frac{1}{4} (\log y) (\log n).$$

Donc on a d'après [\(5.4\)](#),

$$\begin{aligned} \sum_{n \in S(x, y)} \Delta(n) &\geq \sum_{n \in S(x, y)} \Delta(n) \mu(n)^2 \gg \frac{1}{\sqrt{\log y}} \sum_{n \in S(x, y)} \frac{\tau(n) \mu(n)^2}{\sqrt{\log(2n)}} \\ &\gg \frac{1}{\sqrt{\log y \log(2x)}} \sum_{n \in S(x, y)} \tau(n) \mu(n)^2, \end{aligned}$$

ce qui implique bien l'estimation annoncée. \square

Nous avons donc réduit la preuve de la Proposition [5.2](#) à l'estimation de la quantité

$$(5.6) \quad \sum_{n \in S(x, y)} \tau(n) \mu(n)^2.$$

Pour minorer [\(5.6\)](#), on utilise un corollaire du théorème principal de [TW03](#). Étant donné $\varepsilon > 0$ et $y \geq 2$, rappelons la notation

$$L_\varepsilon(y) := \exp\{(\log y)^{3/5-\varepsilon}\},$$

la définition de $C_\kappa(f)$ en [\(4.10\)](#) et celle de $\mathcal{M}_\kappa(A, C, \eta; L_{\varepsilon/2})$ en [\(4.8\)](#) et [\(4.9\)](#).

Théorème 5.7 ([TW03](#), cor. 2.3). *Soient $A, C, \varepsilon, \eta, \kappa$, des nombres positifs tels que $\eta < \frac{1}{2}$. Alors, on a*

$$\Psi_f(x, y) = C_\kappa(f) x \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1} \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{1}{(\log y)^\kappa} \right) \right\},$$

uniformément pour $f \in \mathcal{M}_\kappa(A, C, \eta; L_{\varepsilon/2})$ et $(x, y) \in H_\varepsilon$.

Appliquons le Théorème [5.7](#) avec $f(n) := \tau(n)\mu(n)^2$. À cette fin, vérifions que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K(\varepsilon) > 0$ et $A > 0$ tels que $f \in \mathcal{M}_2(A, K(\varepsilon), \eta; L_{\varepsilon/2})$. Comme $f(p^\nu) = 0$ pour tout entier $\nu \geq 2$, la condition [\(4.8\)](#) est trivialement vérifiée. On a

$$\left| \sum_{p \leq z} f(p) \log p - 2z \right| = 2|\vartheta(z) - z|,$$

avec la notation usuelle

$$\vartheta(z) := \sum_{p \leq z} \log p \quad (z \geq 2).$$

On a, classiquement, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(5.7) \quad |\vartheta(z) - z| \leq K(\varepsilon)z \exp(-(\log z)^{3/5-\varepsilon/2}) \quad (z \geq 2).$$

Donc la condition [\(4.9\)](#) est vérifiée et $f \in \mathcal{M}_2(A, K(\varepsilon), \eta; L_{\varepsilon/2})$, pour tout $A > 0$. On obtient, pour $(x, y) \in H_\varepsilon$:

$$\sum_{n \in \mathcal{S}(x, y)} \tau(n)\mu(n)^2 = C_2(f)x\varrho_2(u) \log y \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\}.$$

La quantité $\log(u+1)/\log y$ tend vers 0 dans H_ε , comme noté en [\(2.6\)](#). On a ensuite

$$\begin{aligned} C_2(f) &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \sum_{\nu \geq 0} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \sum_{\nu \geq 0} \frac{\tau(p^\nu)\mu(p^\nu)^2}{p^\nu} \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{p}\right) = \prod_p \left(1 - \frac{3}{p^2} + \frac{2}{p^3}\right) = \prod_p \left(1 + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Ce produit infini est donc absolument convergent. De plus, $C_2(f) > 0$ puisque tous ses facteurs sont non nuls. On a donc

$$(5.8) \quad \sum_{n \in \mathcal{S}(x, y)} \tau(n)\mu(n)^2 \gg x\varrho_2(u) \log y \quad ((x, y) \in H_\varepsilon).$$

On obtient, pour $(x, y) \in H_\varepsilon$,

$$\sum_{n \in \mathcal{S}(x, y)} \Delta(n) \gg \frac{1}{\sqrt{(\log y) \log(2x)}} \sum_{n \in \mathcal{S}(x, y)} \tau(n)\mu(n)^2 \gg \frac{x\varrho_2(u)\sqrt{\log y}}{\sqrt{\log x}} = \frac{x\varrho_2(u)}{\sqrt{u}}.$$

Il reste à comparer la minoration obtenue à $\Psi(x, y)$. On utilise pour cela la formule de Hildebrand [\(2.5\)](#), valable pour tout $\varepsilon > 0$ uniformément dans le domaine H_ε . Elle fournit la minoration

$$\frac{x\varrho_2(u)}{\sqrt{u}} \gg_\varepsilon \Psi(x, y) \frac{\varrho_2(u)}{\sqrt{u}\varrho(u)} \quad ((x, y) \in H_\varepsilon).$$

On obtient donc, pour $(x, y) \in H_\varepsilon$,

$$\mathfrak{S}(x, y) = \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in S(x, y)} \Delta(n) \gg_\varepsilon \frac{\varrho_2(u)}{\sqrt{u\varrho(u)}} = \mathfrak{r}(u).$$

Cela conclut la preuve de la Proposition [5.2](#).

5.2 Minoration de $\mathfrak{S}(x, y)$ dans le domaine \mathcal{D}_2

Rappelons les définitions

$$\mathcal{D}_1 := H_\varepsilon, \quad \mathcal{D}_2 := \{x \geq y > x^{1/(2\log_3 x)}\},$$

et celle de \mathfrak{r} en [\(2.23\)](#). Nous nous proposons ici de démontrer le résultat suivant.

Proposition 5.8. *On a, uniformément pour $(x, y) \in \mathcal{D}_2$,*

$$(5.9) \quad \mathfrak{S}(x, y) \gg \log_2 y + \mathfrak{r}(u).$$

On remarque que si $a \geq 1/\log 2$, nous avons $u \geq (\log_3 x)/\log 2$ dans le domaine

$$\exp\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x^{1/(a\log_3 x)},$$

et donc, en vertu de [\(2.26\)](#),

$$\mathfrak{r}(u) \gg \log_2 y.$$

Comme expliqué à la remarque [5.4](#), cela établit bien [\(5.1\)](#).

Commençons par établir une première minoration de $\sum_{n \in S(x, y)} \Delta(n)$ en partant de l'inégalité [\(2.28\)](#).

Posons

$$T_d(x, y) := \sum_{\substack{(d, d')=1, P(d') \leq y \\ d' \leq x}} 2^{-\Omega(d')} = \sum_{\substack{P(d') \leq y \\ d' \leq x}} g_d(d'),$$

avec

$$(5.10) \quad g_d(d') = \begin{cases} 2^{-\Omega(d')} & \text{si } (d, d') = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

de sorte que

$$(5.11) \quad C_{1/2}(g_d) = \prod_p \frac{(1-1/p)^{1/2}}{1-1/2p} \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{2p}\right) = C_{1/2}(g_1) \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{2p}\right).$$

On observe en particulier que

$$(5.12) \quad C_{1/2}(g_d) \asymp \left(\frac{\varphi(d)}{d}\right)^{1/2},$$

où φ désigne la fonction indicatrice d'Euler.

Lemme 5.9. Pour $2 \leq y \leq x$, on a

$$(5.13) \quad \sum_{n \in \mathcal{S}(x, y)} \Delta(n) \gg \sum_{\substack{d \leq \sqrt{x} \\ P(d) \leq y}} 2^{-\Omega(d)} \Psi\left(\frac{x}{d^2}, y\right) (T_d(2d, y) - T_d(d, y)).$$

Démonstration. On déduit directement de (2.28) que

$$\Delta(n) \geq \frac{1}{2\tau(n)} \sum_{\substack{dd' | n \\ |\log(d/d')| \leq 1}} 1 \geq \frac{1}{\tau(n)} \sum_{\substack{d, d' | n \\ d' < d \leq 2d'}} 1.$$

Or on a

$$\sum_{\substack{d, d' | n \\ d' < d \leq 2d'}} 1 = \sum_{k | n} \sum_{\substack{d, d' | n \\ d < d' \leq 2d \\ (d, d') = k}} 1 = \sum_{\substack{dd' | n \\ d < d' \leq 2d \\ (d, d') = 1}} \sum_{k | (n/dd')} 1 = \sum_{\substack{dd' | n \\ d < d' \leq 2d \\ (d, d') = 1}} \tau\left(\frac{n}{dd'}\right).$$

Pour $a, b \geq 1$, on a $\tau(ab) \leq \tau(a)2^{\Omega(b)}$.

Spécialisant $a = n/dd'$, $b = dd'$, il vient $\tau(n/dd') \geq \tau(n)/2^{\Omega(dd')}$. D'où

$$\Delta(n) \gg \sum_{\substack{dd' | n \\ d < d' \leq 2d \\ (d, d') = 1}} 2^{-\Omega(dd')}.$$

Nous avons donc

$$\sum_{n \in \mathcal{S}(x, y)} \Delta(n) \gg \sum_{n \in \mathcal{S}(x, y)} \sum_{\substack{dd' | n \\ d < d' \leq 2d \\ (d, d') = 1}} 2^{-\Omega(dd')} = \sum_{\substack{(d, d') = 1, P(dd') \leq y \\ d < d' \leq 2d \leq 2\sqrt{x}}} 2^{-\Omega(dd')} \Psi\left(\frac{x}{dd'}, y\right).$$

La fonction $n \mapsto \Omega(n)$ est complètement additive, donc $n \mapsto 2^{-\Omega(n)}$ est complètement multiplicative. On a par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathcal{S}(x, y)} \Delta(n) &\gg \sum_{\substack{d \leq \sqrt{x} \\ P(d) \leq y}} 2^{-\Omega(d)} \sum_{\substack{(d, d') = 1, P(d') \leq y \\ d < d' \leq 2d}} 2^{-\Omega(d')} \Psi\left(\frac{x}{dd'}, y\right) \\ &\gg \sum_{\substack{d \leq \sqrt{x} \\ P(d) \leq y}} 2^{-\Omega(d)} \Psi\left(\frac{x}{d^2}, y\right) \sum_{\substack{(d, d') = 1, P(d') \leq y \\ d < d' \leq 2d}} 2^{-\Omega(d')}. \end{aligned}$$

Comme on a

$$\sum_{\substack{(d, d') = 1, P(d') \leq y \\ d < d' \leq 2d}} 2^{-\Omega(d')} = T_d(2d, y) - T_d(d, y),$$

nous obtenons bien (5.13). □

Pour estimer $T_d(2d, y) - T_d(d, y)$, nous allons utiliser le Théorème 4.3.

Dans la suite nous posons, pour $d > 3$ et $z > 1$,

$$(5.14) \quad \begin{aligned} K_d &:= e^{-\sqrt{\log_2 d}}, \\ R(z; d) &= 2 + K_d e^{\sqrt{\log z}}, \end{aligned}$$

Rappelons la définition de la classe $\mathcal{R}(b, \kappa, \mathcal{B}, \mathcal{V})$ en [4.1](#)

Lemme 5.10. *Soit $d \geq 16$ un nombre entier. Pour*

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_d := \sqrt{\log_2 d}, \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}_d := 5 + \log_3 d, \quad \kappa = 1/2, \quad b = 1/10,$$

la fonction $R = R(\cdot; d)$ définie en [\(5.14\)](#) appartient à $\mathcal{R}(b, \kappa, \mathcal{B}, \mathcal{V})$. Les constantes implicites dans [\(4.3\)](#) et [\(4.6\)](#) ne dépendent pas de d .

Démonstration. Vérifions que la fonction R satisfait bien les hypothèses de la Définition [4.1](#). On a

$$\varphi_R(v) := \log R(e^v; d) = \log(2 + K_d e^{\sqrt{v}}), \quad \varphi'_R(v) = \frac{K_d e^{\sqrt{v}}}{2\sqrt{v}(2 + K_d e^{\sqrt{v}})}.$$

La fonction $w \mapsto w/(2+w)$ est croissante pour $w \geq 0$. On peut donc écrire

$$\frac{1}{2}\varphi'_R\left(\frac{1}{2}v\right) = \frac{K_d e^{\sqrt{v/2}}}{4\sqrt{v/2}(2 + K_d e^{\sqrt{v/2}})} \leq \frac{K_d e^{\sqrt{v}}}{4\sqrt{v/2}(2 + K_d e^{\sqrt{v}})} = \frac{\varphi'_R(v)}{\sqrt{2}}.$$

La condition (i) de la Définition [4.1](#) est donc bien réalisée puisque [\(4.7\)](#) est réalisée du fait que $2^{-1/2} \leq (1-b)^2$.

On a

$$\begin{aligned} \int_{3/2}^{(\log d)^{1/b}} \frac{dv}{vR(v^b; d)\log v} &= \int_{3/2}^{(\log d)^{1/b}} \frac{dv}{v(2 + K_d \exp(\sqrt{b \log v}))\log v} \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{3/2}^{(\log d)^{1/b}} \frac{dv}{v \log v} = \frac{1}{2} [\log_2 v]_{3/2}^{(\log d)^{1/b}} \\ &= \frac{1}{2} (\log_3 d - \log_2(3/2) - \log b) \leq \frac{1}{2} \log_3 d + 3. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \int_{(\log d)^{1/b}}^{\infty} \frac{dv}{vR(v^b; d)\log v} &= \int_{(\log d)^{1/b}}^{\infty} \frac{dv}{v(2 + K_d \exp(\sqrt{b \log v}))\log v} \\ &\leq \frac{1}{K_d} \int_{(\log d)^{1/b}}^{\infty} \frac{dv}{v \exp(\sqrt{b \log v})\log v}. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{b \log v}$, on obtient

$$\int_{(\log d)^{1/b}}^{\infty} \frac{dv}{vR(v^b; d)\log v} \leq \frac{2}{K_d} \int_{\sqrt{\log_2 d}}^{\infty} \frac{dt}{te^t} \leq \frac{2}{K_d} \int_{\sqrt{\log_2 d}}^{\infty} \frac{dt}{e^t} \leq 2.$$

Ainsi,

$$\int_{3/2}^{\infty} \frac{dv}{vR(v^b; d) \log v} \leq \mathcal{V}.$$

La condition (ii) de la Définition 4.1 est donc bien vérifiée.

On a immédiatement, pour $v \geq 3$ et $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{10}$,

$$R(v; d) = 2 + K_d e^{\sqrt{\log v}} \ll e^{\sqrt{\log v}} \leq e^{(\log v)^{3/5-\varepsilon}}.$$

Ensuite, on a trivialement

$$1 + \frac{(\log v)^{1/2}}{\mathcal{B}_d} \leq 2 \leq R(v; d) \quad (v \leq \log d).$$

Lorsque $v > \log d$, la croissance de la fonction $w \mapsto e^w/w$ pour $w \geq 1$ fournit

$$K_d e^{\sqrt{\log v}} \geq \frac{\sqrt{\log v}}{\sqrt{\log_2 d}} = \frac{\sqrt{\log v}}{\mathcal{B}_d}.$$

Donc pour $v \geq 3$,

$$R(v; d) \geq 1 + \frac{\sqrt{\log v}}{\mathcal{B}_d}.$$

La condition (iii) de la Définition 4.1 est donc également vérifiée. \square

Pour $d \geq 1$, rappelons la définition de g_d en (5.10). Pour $\mathfrak{r} > 0$, posons

$$(5.15) \quad \mathcal{E}_d(x, y; \mathfrak{r}) := (\log_2 3d)^{\mathfrak{r}} \left(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{1}{\sqrt{\log y}} + \frac{1}{\sqrt{\log x}} \right) + \frac{u \log(u+1)}{R(y^{1/10}; d)} + \frac{1}{R(x^{1/10}; d)}.$$

Rappelons la définition de C_κ en (4.10) et posons, en accord avec (4.11),

$$(5.16) \quad Y_\varepsilon^*(y, d) = y^{R(y^{1/10}; d) / \{\varepsilon(1 + |\log R(y^{1/10}; d)|)\}}.$$

Lemme 5.11. *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\mathfrak{r} > 0$ tel que, uniformément pour $y \geq 2$, $2 \leq d \leq x \leq Y_\varepsilon^*(y, d)$, on a*

$$(5.17) \quad T_d(x, y) = \frac{x \varrho_{1/2}(u)}{\sqrt{\log y}} \left\{ C_{1/2}(g_d) + O\left(\mathcal{E}_d(x, y; \mathfrak{r})\right) \right\}.$$

Démonstration. Supposons tout d'abord $d \geq 16$. D'après le Lemme 5.10, si l'on pose

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_d := \sqrt{\log_2 d}, \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}_d := 5 + \log_3 d, \quad \kappa = 1/2, \quad b = 1/10,$$

la fonction $R = R(\cdot; d)$ définie en (5.14) appartient à la classe $\mathcal{R}(b, \kappa, \mathcal{B}, \mathcal{V})$. Nous souhaitons appliquer le Théorème 4.3 à la fonction g_d définie en (5.10). Dans ce but, commençons par montrer qu'il existe des constantes absolues $A, C > 0$ et $0 < \eta < 1/2$ telles que pour tout $d \geq 16$, on a $g_d \in \mathcal{M}_{1/2}(A, C, \eta; R(\cdot; d))$.

On a, avec η fixé tel que $0 < \eta < 1/2$,

$$\begin{aligned} \sum_p \sum_{\nu \geq 2} \frac{g_d(p^\nu)}{p^{(1-\eta)\nu}} &= \sum_{p \nmid d} \sum_{\nu \geq 2} \frac{1}{p^{(1-\eta)\nu} 2^\nu} = \sum_{p \nmid d} \frac{1}{2p^{1-\eta}(2p^{1-\eta} - 1)} \\ &\ll \sum_{p \nmid d} \frac{1}{p^{2(1-\eta)}}. \end{aligned}$$

Donc, comme $2(1-\eta) > 1$, on a bien

$$\sum_p \sum_{\nu \geq 2} \frac{g_d(p^\nu)}{p^{(1-\eta)\nu}} \ll 1.$$

Donc la condition (4.8) est bien vérifiée quelque soit $\eta \in]0, 1/2[$.

Il faut ensuite montrer que

$$\left| \sum_{p \leq z} g_d(p) \log p - \frac{1}{2}z \right| \ll \frac{z}{R(z; d)} \quad (z > 1),$$

autrement dit que

$$|\vartheta_d(z) - z| \ll \frac{z}{R(z; d)} \quad (z > 1),$$

avec

$$\vartheta_d(z) := \sum_{\substack{p \leq z \\ p \nmid d}} \log p.$$

Lorsque $z \leq \log d$, $R(z; d) \asymp 1$. Comme $\vartheta_d(z) - \vartheta(z) \ll z$, on a bien dans ce cas

$$|\vartheta_d(z) - z| \ll \frac{z}{R(z; d)}.$$

Lorsque $z > \log d$, $R(z; d) \asymp K_d e^{\sqrt{\log z}}$. Comme $|\vartheta_d(z) - \vartheta(z)| \leq \log d$, on a, en vertu de (5.7),

$$|\vartheta_d(z) - z| \ll z e^{-\sqrt{\log z}} + \log d.$$

Comme la fonction $X \mapsto X e^{-\sqrt{\log X}}$ est croissante pour $X > e^{1/4}$, on a

$$K_d \log d \ll \frac{z}{e^{\sqrt{\log z}}} \quad (z > \log d).$$

Donc $\log d \ll z/R(z; d)$ et on en déduit

$$|\vartheta_d(z) - z| \ll \frac{z}{R(z; d)}.$$

Finalement, la condition (4.9) est bien vérifiée. Donc il existe $A, C > 0$ et $\eta \in]0, 1/2[$ tels que $g_d \in \mathcal{M}_{1/2}(A, C, \eta; R(\cdot; d))$.

La suite $\{g_d(p)\}_p$ est bornée, donc d'après le point (ii) du Théorème 4.3, il existe $\mathfrak{c}_0 > 0$ tel que uniformément pour $2 \leq y \leq x \leq Y_\varepsilon^*(y, d)$, $d \geq 16$,

$$(5.18) \quad T_d(x, y) = \frac{x \varrho_{1/2}(u)}{\sqrt{\log y}} \left\{ C_{1/2}(g_d) + O\left(E_{\mathcal{B}_d, \mathcal{V}_d}(x, y; \mathfrak{c}_0)\right) \right\},$$

avec

$$E_{\mathcal{B}_d, \mathcal{V}_d}(x, y; \mathfrak{r}_0) := \frac{\mathcal{B}_d e^{\mathfrak{r}_0 \mathcal{V}_d} R_b(y; d) \log(u+1)}{\log y} + \frac{\mathcal{B}_d e^{\mathfrak{r}_0 \mathcal{V}_d} + \sqrt{R_b(y; d)}}{\sqrt{\log y}} + \frac{u \log(u+1)}{R(y^b; d)}.$$

Estimons $E_{\mathcal{B}_d, \mathcal{V}_d}(x, y; \mathfrak{r}_0)$. Nous avons

$$\begin{aligned} R_b(y; d) &= \int_{3/2}^{(\log d)^{1/b}} \frac{dt}{tR(t^b; d)} + \int_{(\log d)^{1/b}}^y \frac{dt}{tR(t^b; d)} \\ &\leq \int_{3/2}^{(\log d)^{1/b}} \frac{dt}{2t} + \frac{1}{K_d} \int_{(\log d)^{1/b}}^y \frac{dt}{te^{\sqrt{b \log t}}}. \end{aligned}$$

Le changement de variable $v = \sqrt{b \log t}$ et une intégration par partie nous donne

$$\begin{aligned} \int_{(\log d)^{1/b}}^y \frac{dt}{te^{\sqrt{b \log t}}} &= \frac{2}{b} \int_{\sqrt{\log_2 d}}^{\sqrt{b \log y}} v e^{-v} dv \\ &= \frac{2}{b} \left\{ K_d (1 + \sqrt{\log_2 d}) - e^{-\sqrt{b \log y}} (1 + \sqrt{b \log y}) \right\}. \end{aligned}$$

Donc $R_b(y; d) \ll \log_2 d$. On en déduit

$$E_{\mathcal{B}_d, \mathcal{V}_d}(x, y; \mathfrak{r}_0) \ll \mathcal{E}_d(x, y; \mathfrak{r}_0),$$

ce qui établit bien (5.18) avec $\mathfrak{r}_1 = 3/2 + \mathfrak{r}_0$ lorsque $d \geq 16$ et $2 \leq y \leq x \leq Y_\varepsilon^*(y, d)$.

Supposons d'abord $y > x$ et $d \geq 16$. Dans ce cas, on a $T_d(x, y) = T_d(x, x)$ et d'après le Théorème 4.3 appliqué avec $y = x$, on obtient

$$T_d(x, y) = \frac{x \varrho_{1/2}(1)}{\sqrt{\log x}} \left\{ C_{1/2}(gd) + O\left(E_{\mathcal{B}_d, \mathcal{V}_d}(x, x; \mathfrak{r}_0)\right) \right\}.$$

On note que

$$E_{\mathcal{B}_d, \mathcal{V}_d}(x, x; \mathfrak{r}_0) \ll \frac{(\log_2 3d)^{\mathfrak{r}_1}}{\sqrt{\log x}} + \frac{1}{R(x^b; d)}.$$

De plus, comme $\varrho_{1/2}(u)/\varrho_{1/2}(1) = u^{-1/2}$ ($0 < u \leq 1$), on a

$$\frac{x \varrho_{1/2}(1)}{\sqrt{\log x}} = \frac{x \varrho_{1/2}(u)}{\sqrt{\log y}}.$$

Cela fournit bien (5.17).

Lorsque $2 \leq d \leq 15$, nous n'avons pas besoin d'expliciter la dépendance en d et nous pouvons directement appliquer le théorème 2.1 de [TW03] avec $R(z) = e^{\sqrt{\log z}}$. Des calculs similaires fournissent (5.17). Cela achève la preuve du lemme. \square

Nous rappelons la définition de $Y_{1/10}^*(y, d)$ en (5.16).

Lemme 5.12. *Pour x suffisamment grand, $y \geq x^{1/2 \log_3 x}$, $2 \leq d \leq x$, on a $x \leq Y_{1/10}^*(y, d)$.*

Démonstration. Soit $(x, y) \in \mathfrak{D}_2$, $d \leq x$. On a donc $\log y \geq (\log x)/(2 \log_3 x)$. Puisque

$$x \leq Y_{1/10}^*(y, d) \Leftrightarrow \frac{10R(y^b; d) \log y}{1 + |\log R(y^b; d)|} \geq \log x,$$

il suffit de montrer que

$$(5.19) \quad 2\log_3 x \leq \frac{10R(y^b; d)}{1 + |\log R(y^b; d)|}.$$

Or pour x assez grand, nous avons $\log y \geq (4/b)\log_2 x$, donc $R(y^b; d) \geq e^{\sqrt{\log_2 x}}$, ce qui entraîne bien (5.19). \square

Dans la suite, nous posons pour tout $t \geq 2$, $c > 0$, $\varepsilon_{c,t} := (\log_2 t)^c / \sqrt{\log t}$.

Lemme 5.13. *Il existe une constante absolue $\mathfrak{r} > 0$ tel que l'on ait, uniformément pour $y > x^{1/(2\log_3 x)}$ et $2 \leq d \leq x$, on a*

$$(5.20) \quad T_d(x, y) = \frac{x\varrho_{1/2}(u)}{\sqrt{\log y}} \left\{ C_{1/2}(g_d) + O(\varepsilon_{\mathfrak{r}, x}) \right\}.$$

Notons que le lemme 3.1 de [MTW24] fournit une formule asymptotique pour $T_d(x, y)$ dans un domaine plus large. Comme nous l'avons déjà évoqué, nous avons choisi dans ce mémoire de conserver notre première preuve, reposant sur le Théorème 4.3.

Démonstration. D'après (5.17) appliqué avec $\varepsilon = 1/10$ et d'après le Lemme 5.12, il existe $\mathfrak{r}_1 > 0$ tel que uniformément pour $y > x^{1/(2\log_3 x)}$ et $2 \leq d \leq x$, on a

$$T_d(x, y) = \frac{x\varrho_{1/2}(u)}{\sqrt{\log y}} \left\{ C_{1/2}(g_d) + O(\mathcal{E}_d(x, y; \mathfrak{r}_1)) \right\},$$

où $\mathcal{E}_d(x, y; \mathfrak{r}_1)$ est défini en (5.15).

Estimons $\mathcal{E}_d(x, y; \mathfrak{r}_1)$. On a, pour x suffisamment grand, $y > x^{1/(2\log_3 x)}$, $2 \leq d \leq x$,

$$(5.21) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_d(x, y; \mathfrak{r}_1) &\leq (\log_2 3d)^{\mathfrak{r}_1} \left(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{1}{\sqrt{\log y}} + \frac{1}{\sqrt{\log x}} \right) + \frac{u \log(u+1)}{R(y^b; d)} + \frac{1}{R(x^b; d)} \\ &\ll (\log_2 3d)^{\mathfrak{r}_1} \left(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{1}{\sqrt{\log y}} + \frac{1}{\sqrt{\log x}} \right) \\ &\quad + \frac{u \log(u+1) \exp(\sqrt{\log_2 x})}{\exp(\sqrt{b \log y})} + \frac{\exp(\sqrt{\log_2 x})}{\exp(\sqrt{b \log x})}. \end{aligned}$$

Puisque $u < 2\log_3 x$ et $d \leq x$, on a

$$\begin{aligned} \frac{(\log_2 3d)^{\mathfrak{r}_1} \log(u+1)}{\log y} &\ll \frac{(\log_2 x)^{\mathfrak{r}_1} \log_4 x}{\log y} \ll \frac{(\log_2 y)^{\mathfrak{r}_1} \log_4 y}{\log y}, \\ \frac{(\log_2 3d)^{\mathfrak{r}_1}}{\sqrt{\log y}} &\ll \frac{(\log_2 x)^{\mathfrak{r}_1}}{\sqrt{\log y}} \ll \frac{(\log_2 y)^{\mathfrak{r}_1}}{\sqrt{\log y}}, \\ \frac{u \log(u+1) \exp(\sqrt{\log_2 x})}{\exp(\sqrt{b \log y})} &\ll \frac{(\log_3 x)(\log_4 x) \exp(\sqrt{\log_2 x})}{\exp(\sqrt{b \log y})} \ll \frac{(\log_3 y)(\log_4 y)}{\exp(\sqrt{b \log y} - \sqrt{2 \log_2 y})}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\mathcal{E}_d(x, y; \mathfrak{r}_1) \ll \varepsilon_{\mathfrak{r}_1, y} + \varepsilon_{\mathfrak{r}_1, x}.$$

Puisque $t \mapsto \varepsilon_{\mathfrak{r}_1, t}$ est décroissante pour $t \geq t_0(\mathfrak{r}_1)$ et que $y > x^{1/(2\log_3 x)}$, on a

$$\varepsilon_{\mathfrak{r}_1, y} \ll \varepsilon_{\mathfrak{r}_1+1, x}.$$

Cela montre que, pour $\mathfrak{c}_2 = \mathfrak{c}_1 + 1$, nous avons

$$\mathcal{E}_d(x, y; \mathfrak{c}_1) \ll \varepsilon_{\mathfrak{c}_2, x}.$$

Cela achève la démonstration de (5.20). \square

Disposant d'une formule asymptotique pour $T_d(x, y)$, nous sommes en mesure d'obtenir une minoration de $T_d(2d, y) - T_d(d, y)$. Posons

$$u_t := \frac{\log t}{\log y}.$$

Lemme 5.14. *Il existe $d_0 > 0$ tel que, pour tout $d \geq d_0$ et $y > (2d)^{1/(2\log_3(2d))}$, on ait,*

$$(5.22) \quad T_d(2d, y) - T_d(d, y) \gg \frac{1}{\sqrt{\log y}} \left(\frac{\varphi(d)}{d} \right)^{1/2} d \varrho_{1/2}(u_d).$$

Démonstration. Comme $y > (2d)^{1/(2\log_3(2d))}$, nous déduisons de (5.20) l'estimation

$$\begin{aligned} T_d(2d, y) - T_d(d, y) &= \frac{d}{\sqrt{\log y}} \left\{ 2\varrho_{1/2}(u_{2d})(C_{1/2}(g_d) + O(\varepsilon_{\mathfrak{c}, d})) \right. \\ &\quad \left. - \varrho_{1/2}(u_d)(C_{1/2}(g_d) + O(\varepsilon_{\mathfrak{c}, d})) \right\}. \end{aligned}$$

Comparons $\varrho_{1/2}(u_{2d})$ et $\varrho_{1/2}(u_d)$. Lorsque $d > y$, on a $u_d > 1$ et

$$|\varrho_{1/2}(u_{2d}) - \varrho_{1/2}(u_d)| \leq (u_{2d} - u_d) \max_{u_d \leq t \leq u_{2d}} |\varrho'_{1/2}(t)|.$$

De plus, d'après [Smi93, lemme 6.2], nous avons

$$(5.23) \quad |\varrho'_{1/2}(t)| \ll \varrho_{1/2}(t) \log(2t) \quad (t \geq 1).$$

Comme la fonction $t \mapsto \varrho_{1/2}(t)$ est décroissante (voir par exemple [Smi91, lemme 4.2]), on en déduit, toujours pour $d > y$,

$$|\varrho_{1/2}(u_{2d}) - \varrho_{1/2}(u_d)| \ll \frac{\varrho_{1/2}(u_d) \log(2u_{2d})}{\log y} \ll \frac{\log_2 d}{\log y} \varrho_{1/2}(u_d) \ll \frac{\log_2 y}{\log y} \varrho_{1/2}(u_d).$$

Lorsque $2d < y$, on a, par un calcul explicite

$$\varrho_{1/2}(u_{2d}) = \varrho_{1/2}(u_d) \left(1 + O\left(\frac{1}{\log d} \right) \right).$$

Lorsque $d \leq y \leq 2d$, on a

$$|\varrho_{1/2}(u_{2d}) - \varrho_{1/2}(u_d)| \leq |\varrho_{1/2}(u_{2d}) - \varrho_{1/2}(1)| + |\varrho_{1/2}(u_d) - \varrho_{1/2}(1)|.$$

Par (5.23) et en vertu de la décroissance de la fonction $t \mapsto \varrho_{1/2}(t)$, on obtient

$$|\varrho_{1/2}(u_{2d}) - \varrho_{1/2}(1)| \ll \frac{\log_2 y}{\log y}.$$

On a ensuite

$$\varrho_{1/2}(u_d) - \varrho_{1/2}(1) = \varrho_{1/2}(u_d) \left(1 - \sqrt{\frac{\log d}{\log y}}\right) \ll \frac{\varrho_{1/2}(u_d)}{\log d}.$$

On obtient

$$|\varrho_{1/2}(u_{2d}) - \varrho_{1/2}(u_d)| \ll \frac{\log_2 y}{\log y} + \frac{\varrho_{1/2}(u_d)}{\log d}.$$

Finalement, dans tous les cas on a

$$\varrho_{1/2}(u_{2d}) = \varrho_{1/2}(u_d) \left(1 + O\left(\frac{\log_2 y}{\log y} + \frac{1}{\log d}\right)\right).$$

Puisque $(\log_2 y)/\log y \ll (\log_2 d)^2/\log d$ et $1/\log d \ll \varepsilon_{\mathfrak{c}, d}$, on en déduit

$$\begin{aligned} T_d(2d, y) - T_d(d, y) &= \frac{d}{\sqrt{\log y}} \left\{ 2\varrho_{1/2}(u_d) (1 + O(\varepsilon_{\mathfrak{c}, d})) (C_{1/2}(gd) + O(\varepsilon_{\mathfrak{c}, d})) \right. \\ &\quad \left. - \varrho_{1/2}(u_d) (C_{1/2}(gd) + O(\varepsilon_{\mathfrak{c}, d})) \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} T_d(2d, y) - T_d(d, y) &\geq \frac{d\varrho_{1/2}(u_d)}{\sqrt{\log y}} \left\{ C_{1/2}(gd) + O(\varepsilon_{\mathfrak{c}, d}) \right\} \\ &\geq \frac{C_{1/2}(gd)}{\sqrt{\log y}} d\varrho_{1/2}(u_d) \left\{ 1 + O\left(\frac{\varepsilon_{\mathfrak{c}, d}}{C_{1/2}(gd)}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Pour d suffisamment grand, nous obtenons, compte-tenu de (5.12) et de la minoration $\varphi(d) \geq (e^{-\gamma}d)/(2\log_2 d)$ (cf. [Ten22, I.(5.14)]),

$$T_d(2d, y) - T_d(d, y) \gg \left(\frac{\varphi(d)}{d}\right)^{1/2} \frac{d\varrho_{1/2}(u_d)}{\sqrt{\log y}},$$

ce qui achève la preuve du lemme 5.14. \square

Lemme 5.15. *Soit d_0 tel que défini au lemme 5.14. Pour $(x, y) \in \mathfrak{D}_2$, y suffisamment grand, nous avons*

$$(5.24) \quad \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in \mathcal{S}(x, y)} \Delta(n) \gg \frac{1}{\varrho(u)\sqrt{\log y}} \sum_{\substack{d_0 \leq d \leq \sqrt{x} \\ P(d) \leq y}} \frac{\varrho(u - u_{d^2})\varrho_{1/2}(u_d)}{2^{\Omega(d)}d} \left(\frac{\varphi(d)}{d}\right)^{1/2}.$$

Démonstration. Lorsque $x/d^2 \geq y$, nous déduisons de (2.5) l'estimation suivante

$$\frac{\Psi(x/d^2, y)}{\Psi(x, y)} = \frac{\varrho(u - u_{d^2})}{d^2\varrho(u)} \left\{ 1 + O_\varepsilon\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \quad ((x, y) \in H_\varepsilon).$$

Cela implique

$$\Psi\left(\frac{x}{d^2}, y\right) \gg \frac{\Psi(x, y)\varrho(u - u_{d^2})}{d^2\varrho(u)} \quad ((x, y) \in \mathfrak{D}_2, d^2 \leq x/y).$$

Lorsque $\sqrt{x/y} < d \leq \sqrt{x}$, on a $\Psi(x/d^2, y) = \lfloor x/d^2 \rfloor$ et $\varrho(u - u_{d^2}) = 1$. Comme de plus $x/d^2 \geq 1$, on a $\lfloor x/d^2 \rfloor \geq x/(2d^2)$ et on peut écrire, grâce à (2.5),

$$\begin{aligned} \frac{\Psi(x/d^2, y)}{\Psi(x, y)} &= \frac{\lfloor x/d^2 \rfloor \varrho(u - u_{d^2})}{x \varrho(u) (1 + O(\log(u+1)/\log y))} \\ &\geq \frac{\varrho(u - u_{d^2})}{2d^2 \varrho(u) (1 + O(\log(u+1)/\log y))}. \end{aligned}$$

Cela implique

$$\Psi\left(\frac{x}{d^2}, y\right) \gg \frac{\Psi(x, y) \varrho(u - u_{d^2})}{d^2 \varrho(u)} \quad ((x, y) \in \mathcal{D}_2, \sqrt{x/y} < d \leq \sqrt{x}).$$

On a donc finalement

$$(5.25) \quad \Psi\left(\frac{x}{d^2}, y\right) \gg \frac{\Psi(x, y) \varrho(u - u_{d^2})}{d^2 \varrho(u)} \quad ((x, y) \in \mathcal{D}_2, d \leq \sqrt{x}).$$

Nous déduisons de (5.13) et de (5.25) l'estimation

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in \mathcal{S}(x, y)} \Delta(n) &\gg \sum_{\substack{d \leq \sqrt{x} \\ P(d) \leq y}} \frac{\varrho(u - u_{d^2})}{2^{\Omega(d)} d^2 \varrho(u)} (T_d(2d, y) - T_d(d, y)) \\ &\geq \sum_{\substack{d_0 \leq d \leq \sqrt{x} \\ P(d) \leq y}} \frac{\varrho(u - u_{d^2})}{2^{\Omega(d)} d^2 \varrho(u)} (T_d(2d, y) - T_d(d, y)). \end{aligned}$$

Le lemme 5.14 nous permet d'en déduire (5.24). \square

Fin de la preuve de la Proposition 5.8.

Nous allons à présent estimer le terme de droite de (5.24). Tout d'abord, remarquons que l'on a

$$(5.26) \quad \begin{aligned} &\sum_{\substack{d_0 < d \leq \sqrt{x} \\ P(d) \leq y}} \frac{\varrho(u - u_{d^2}) \varrho_{1/2}(u_d)}{2^{\Omega(d)} d \varrho(u) \sqrt{\log y}} \sqrt{\frac{\varphi(d)}{d}} \\ &= \sum_{\substack{2 \leq d \leq \sqrt{x} \\ P(d) \leq y}} \frac{\varrho(u - u_{d^2}) \varrho_{1/2}(u_d)}{2^{\Omega(d)} d \varrho(u) \sqrt{\log y}} \sqrt{\frac{\varphi(d)}{d}} - \sum_{\substack{2 \leq d \leq d_0 \\ P(d) \leq y}} \frac{\varrho(u - u_{d^2}) \varrho_{1/2}(u_d)}{2^{\Omega(d)} d \varrho(u) \sqrt{\log y}} \sqrt{\frac{\varphi(d)}{d}}. \end{aligned}$$

Pour $2 \leq d \leq d_0$ et y suffisamment grand, on a $u_d < 1$ et donc $\varrho_{1/2}(u_d) = \sqrt{\log y} / \sqrt{\pi \log d}$. On a alors, toujours pour $d \leq d_0$,

$$\frac{\varrho(u - u_{d^2}) \varrho_{1/2}(u_d)}{2^{\Omega(d)} d \varrho(u) \sqrt{\log y}} \left(\frac{\varphi(d)}{d}\right)^{1/2} = \frac{\varrho(u - u_{d^2})}{\varrho(u) d \sqrt{\pi \log d}} \left(\frac{\varphi(d)}{d}\right)^{1/2} \ll \frac{\varrho(u - u_{d^2})}{\varrho(u)},$$

et on a, grâce à [Ten22, (III.5.57)],

$$\frac{\varrho(u - u_{d^2})}{\varrho(u)} = 1 + O\left(\frac{\log_2 y}{\log y}\right).$$

On a donc, d'après (5.24),

$$(5.27) \quad \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in \mathcal{S}(x, y)} \Delta(n) \gg \frac{1}{\varrho(u)\sqrt{\log y}} \sum_{\substack{d \leq \sqrt{x} \\ P(d) \leq y}} \frac{2^{-\Omega(d)}}{d} \left(\frac{\varphi(d)}{d}\right)^{1/2} \varrho_{1/2}(u_d) \varrho(u - u_{d^2}) + O(1).$$

Soit g la fonction multiplicative vérifiant

$$g(n) := \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^{1/2} 2^{-\Omega(n)}.$$

On a pour $t \geq 2$, $\log y \geq (\log_2 t)^{5/3+\varepsilon}$,

$$K(t) := \sum_{\substack{d \leq t \\ P(d) \leq y}} 2^{-\Omega(d)} \left(\frac{\varphi(d)}{d}\right)^{1/2} = \frac{C(g)t\varrho_{1/2}(u_t)}{\sqrt{\log y}} + \mathcal{E}(t),$$

avec

$$(5.28) \quad \mathcal{E}(t) \ll \frac{t\varrho_{1/2}(u_t)}{\log y} \left\{ 1 + \frac{\log(u_t + 1)}{\sqrt{\log y}} + \frac{\sqrt{\log y}}{\log t} \right\}.$$

Lorsque $t \geq y$, cette estimation est obtenue grâce au Théorème 5.7 appliqué à $f = g$. Le troisième terme de l'accolade de (5.28) permet de prendre en compte le cas $t < y$. En effet, dans ce cas, on a, par la méthode de Selberg-Delange, une majoration du terme d'erreur de l'ordre de $\mathcal{E}(t) \ll t/(\log t)^{3/2} \asymp t\varrho_{1/2}(u_t)/(\sqrt{\log y} \log t)$.

Posons

$$(5.29) \quad I := \frac{1}{\sqrt{\log y}} \sum_{\substack{2 \leq d \leq \sqrt{x} \\ P(d) \leq y}} \frac{2^{-\Omega(d)}}{d} \left(\frac{\varphi(d)}{d}\right)^{1/2} \varrho_{1/2}(u_d) \varrho(u - u_{d^2}),$$

de sorte que

$$I = \frac{1}{\sqrt{\log y}} \int_{2^-}^{\sqrt{x}} \Upsilon(t) \mathrm{d}K(t),$$

où l'on a posé

$$\Upsilon(t) := \frac{\varrho_{1/2}(u_t) \varrho(u - u_{t^2})}{t}.$$

On a

$$(5.30) \quad I = I_1 + I_2 + I_3,$$

avec

$$I_1 := \frac{C(g)}{\log y} \int_2^{\sqrt{x}} \Upsilon(t) \varrho_{1/2}(u_t) dt, \quad I_2 := \frac{C(g)}{(\log y)^2} \int_2^{\sqrt{x}} \Upsilon(t) \varrho'_{1/2}(u_t) dt,$$

$$I_3 := \frac{1}{\sqrt{\log y}} \int_{2^-}^{\sqrt{x}} \Upsilon(t) d\mathcal{E}(t).$$

Montrons qu'on a $I_1 \gg \varrho(u) \{\log_2 y + \mathfrak{r}(u)\}$. Il suffira ensuite de montrer que $I_2 + I_3 = o(I_1)$ pour établir (5.9).

Lemme 5.16. *Pour $2 \leq y \leq x$, on a $I_1 \gg \varrho(u) (\log_2 y + \mathfrak{r}(u))$.*

Démonstration. Commençons par scinder I_1 .

$$I_1 = \frac{C(g)}{\log y} (I_{11} + I_{12}),$$

avec

$$I_{11} := \int_2^y \Upsilon(t) \varrho_{1/2}(u_t) dt, \quad I_{12} := \int_y^{\sqrt{x}} \Upsilon(t) \varrho_{1/2}(u_t) dt.$$

D'après [FT96, lemme 6.1] et [Ten22, (III.5.63)], on a, pour une constante positive c_0 ,

$$(5.31) \quad \varrho(w - v) \asymp \varrho(w) e^{v\xi(w)} \quad (1 \leq v \leq c_0 \sqrt{w}).$$

Cela implique, puisque $\varrho_{1/2}(v)^2 = 1/(\pi v)$ pour $0 < v \leq 1$,

$$I_{11} = \frac{\log y}{\pi} \int_2^y \frac{\varrho(u - u_{t2})}{t \log t} dt \asymp (\log y) \varrho(u) \int_2^y \frac{\exp(u_{t2} \xi(u))}{t \log t} dt \gg \varrho(u) \log y \log_2 y.$$

Estimons à présent I_{12} . On écrit, grâce au changement de variable $u_t = s/2$,

$$I_{12} = \frac{\log y}{2} \int_2^u \varrho(u - s) \varrho_{1/2}\left(\frac{s}{2}\right)^2 ds.$$

Comme, grâce à (2.20),

$$\varrho_{1/2}(s/2)^2 \asymp \frac{\varrho(s)}{\sqrt{s}} \quad (s \geq 2),$$

il suit

$$\begin{aligned} \frac{\log y}{2} \int_2^u \varrho(u - s) \varrho_{1/2}\left(\frac{s}{2}\right)^2 ds &\gg (\log y) \int_2^u \frac{\varrho(u - s) \varrho(s)}{\sqrt{s}} ds \\ &\geq \frac{\log y}{\sqrt{u}} \int_2^u \varrho(u - s) \varrho(s) ds. \end{aligned}$$

Pour tout $\kappa_1, \kappa_2 > 0$,

$$\varrho_{\kappa_1} * \varrho_{\kappa_2} = \varrho_{\kappa_1 + \kappa_2}.$$

Donc on a

$$\frac{1}{\sqrt{u}} \int_2^u \varrho(u - s) \varrho(s) ds \gg \frac{1}{\sqrt{u}} (\varrho * \varrho)(u) = \frac{\varrho_2(u)}{\sqrt{u}}.$$

Donc finalement

$$I_{12} \gg (\log y) \frac{\varrho_2(u)}{\sqrt{u}}.$$

Donc on a bien $I_1 \gg \varrho(u) \log_2 y + \varrho_2(u)/\sqrt{u} = \varrho(u) \log_2 y + \varrho(u) \mathbf{r}(u)$. \square

Estimons à présent I_2 et I_3 .

Lemme 5.17. *On a, pour $2 \leq y \leq x$,*

$$I_2 + I_3 \ll \left(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{1}{\sqrt{\log y}} \right) I_1.$$

Démonstration. D'après (5.23), on a

$$\int_2^{\sqrt{x}} \Upsilon(t) \varrho'_{1/2}(u_t) dt \ll \int_2^{\sqrt{x}} \Upsilon(t) \varrho_{1/2}(u_t) \log(2u_t) dt \leq \log(u+1) \int_2^{\sqrt{x}} \Upsilon(t) \varrho_{1/2}(u_t) dt.$$

Donc

$$I_2 \ll \frac{\log(u+1)}{\log y} I_1.$$

On a, en intégrant par parties,

$$\int_{2^-}^{\sqrt{x}} \Upsilon(t) d\mathcal{E}(t) = \Upsilon(\sqrt{x})\mathcal{E}(\sqrt{x}) - \Upsilon(2^-)\mathcal{E}(2^-) - \int_2^{\sqrt{x}} \Upsilon'(t)\mathcal{E}(t) dt.$$

Donc

$$(5.32) \quad \int_{2^-}^{\sqrt{x}} \Upsilon(t) d\mathcal{E}(t) \leq \int_2^{\sqrt{x}} \Upsilon'(t) |\mathcal{E}(t)| dt + |\Upsilon(\sqrt{x})\mathcal{E}(\sqrt{x})| + |\Upsilon(2^-)\mathcal{E}(2^-)|.$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &\ll \frac{\log(u_t+1)t\varrho_{1/2}(u_t)}{(\log y)^{3/2}} + \frac{t\varrho_{1/2}(u_t)}{\log y} + \frac{t\varrho_{1/2}(u_t)}{\sqrt{\log y} \log t} \\ &\ll \frac{t\varrho_{1/2}(u_t)}{\log y} + \frac{t\varrho_{1/2}(u_t)}{\sqrt{\log y} \log t}. \end{aligned}$$

Désignons par $I_{\mathcal{E}}$ l'intégrale figurant au membre de droite de (5.32). On a

$$I_{\mathcal{E}} = I_{\mathcal{E}1} + I_{\mathcal{E}2} + I_{\mathcal{E}3} + I_{\mathcal{E}4} + I_{\mathcal{E}5} + I_{\mathcal{E}6},$$

avec

$$\begin{aligned}
I_{\mathcal{E}1} &:= \frac{1}{(\log y)^2} \int_2^{\sqrt{x}} \Upsilon(t) \varrho'_{1/2}(u_t) dt, \\
I_{\mathcal{E}2} &:= \frac{1}{(\log y)^2} \int_2^{\sqrt{x}} \frac{(-2) \varrho_{1/2}(u_t)^2 \varrho'(u - u_{t^2})}{t} dt, \\
I_{\mathcal{E}3} &:= \frac{1}{(\log y)^{3/2}} \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\Upsilon(t) \varrho'_{1/2}(u_t)}{\log t} dt, \\
I_{\mathcal{E}4} &:= \frac{1}{(\log y)^{3/2}} \int_2^{\sqrt{x}} \frac{(-2) \varrho_{1/2}(u_t)^2 \varrho'(u - u_{t^2})}{t \log t} dt, \\
I_{\mathcal{E}5} &:= -\frac{1}{\log y} \int_2^{\sqrt{x}} \Upsilon(t) \varrho_{1/2}(u_t) dt, \\
I_{\mathcal{E}6} &:= -\frac{1}{\sqrt{\log y}} \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\Upsilon(t) \varrho_{1/2}(u_t)}{\log t} dt.
\end{aligned}$$

On remarque tout d'abord que $I_{\mathcal{E}1} \asymp I_2$. Le calcul de $I_{\mathcal{E}2}$ fournit ensuite, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
I_{\mathcal{E}2} &\ll \frac{1}{\log y} \int_2^{\sqrt{x}} \varrho_{1/2}(u_t)^2 \left(\frac{-2 \varrho'(u - u_{t^2})}{t \log y} \right) dt \\
&= \frac{1}{\log y} \left(\left[\varrho(u - u_{t^2}) \varrho_{1/2}(u_t)^2 \right]_2^{\sqrt{x}} - \frac{2}{\log y} \int_2^{\sqrt{x}} \Upsilon(t) \varrho'_{1/2}(u_t) dt \right) \\
&\ll \frac{1}{\log y} (\varrho_{1/2}(u/2)^2 + \varrho(u - 2u_2) \varrho_{1/2}(u_2)^2) + \frac{1}{(\log y)^2} \int_2^{\sqrt{x}} \Upsilon(t) \varrho'_{1/2}(u_t) dt \\
&\ll \frac{\log(u+1)}{\log y} I_1.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
I_{\mathcal{E}3} &\ll \frac{1}{(\log y)^{3/2}} \int_2^{\sqrt{x}} \Upsilon(t) \varrho'_{1/2}(u_t) dt = \sqrt{\log y} I_{\mathcal{E}1} \ll \frac{\log(u+1)}{\sqrt{\log y}} I_1, \\
I_{\mathcal{E}4} &\ll \frac{1}{(\log y)^{3/2}} \int_2^{\sqrt{x}} \frac{(-2) \varrho_{1/2}(u_t)^2 \varrho'(u - u_{t^2})}{t} dt = \sqrt{\log y} I_{\mathcal{E}2} \ll \frac{\log(u+1)}{\sqrt{\log y}} I_1.
\end{aligned}$$

Enfin, nous avons

$$I_{\mathcal{E}5} \ll \frac{I_1}{\log y} \quad I_{\mathcal{E}6} \ll \frac{I_1}{\sqrt{\log y}}.$$

Les deux derniers termes du membre de droite de (5.32) étant majorés par I_1 , on obtient

$$\begin{aligned}
I_3 &\ll \frac{I_2}{\sqrt{\log y}} + \frac{\log(u+1) I_1}{(\log y)^{3/2}} + \frac{\log(u+1) I_1}{\log y} + \frac{I_1}{(\log y)^{3/2}} + \frac{I_1}{\log y} + \frac{I_1}{\sqrt{\log y}} \\
&\ll \frac{\log(u+1) I_1}{\log y} + \frac{I_1}{\sqrt{\log y}}.
\end{aligned}$$

Cela achève la preuve du lemme 5.17. \square

On déduit de (5.30) et du lemme 5.17 que dans le domaine \mathcal{D}_2 , on a

$$I \gg I_1 \gg \varrho(u)(\log_2 y + \mathbf{r}(u)),$$

où la dernière minoration provient du lemme 5.16. Cela implique, d'après (5.27),

$$\frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in S(x, y)} \Delta(n) \gg \frac{I_1}{\varrho(u)} + O(1) \gg \log_2 y + \mathbf{r}(u).$$

Donc on a bien

$$\mathfrak{S}(x, y) \gg \log_2 y + \mathbf{r}(u).$$

Ceci achève la démonstration de (5.9).

Chapitre 6

Majoration de $\mathfrak{S}(x, y)$ dans H_ε

Ce chapitre est consacré à établir la majoration du point (i) du Théorème [1.1](#) :

$$\mathfrak{S}(x, y) \ll 2^{u+O(u/\log u)} e^{c\sqrt{(\log_2 y)(\log_3 y)}} \quad ((x, y) \in H_\varepsilon).$$

Pour ce faire, nous adaptons la preuve de [Ten85](#) de la majoration

$$(6.1) \quad \mathfrak{S}(x) \ll \exp(c_0 \sqrt{\log_2 x \log_3 x}) \quad (x \geq 16),$$

où c_0 est une constante convenable.

6.1 Résultat

Dans toute cette partie, nous fixons $\varepsilon > 0$ et convenons que les constantes implicites peuvent dépendre de ε . Nous nous plaçons dans le domaine

$$H_\varepsilon = \left\{ (x, y) : x \geq 3, \exp\left((\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\right) \leq y \leq x \right\}.$$

Rappelons la notation $u := (\log x)/\log y$ et remarquons que si $(x, y) \in H_\varepsilon$, en notant

$$\varepsilon' = 9\varepsilon/(5 + 3\varepsilon) > 0,$$

on a

$$1 \leq u \leq \exp\left((\log y)^{3/5-\varepsilon'}\right).$$

L'objectif de ce chapitre est de démontrer la proposition suivante, où l'on rappelle la définition de $\mathfrak{S}(x, y)$ en [\(1.16\)](#).

Proposition 6.1. *Pour une constante $C > 0$ convenable, on a*

$$(6.2) \quad \mathfrak{S}(x, y) \ll 2^{u+O(u/\log u)} e^{C\sqrt{(\log_2 y)(\log_3 y)}} \quad ((x, y) \in H_\varepsilon).$$

Remarque 6.2. *Lorsque u est borné, la majoration [\(6.1\)](#) implique*

$$\Psi_\Delta(x, y) = \sum_{n \in \mathfrak{S}(x, y)} \Delta(n) \leq \sum_{n \leq x} \Delta(n) \ll x e^{\sqrt{c_0 \log_2 x \log_3 x}},$$

ce qui fournit directement l'estimation (6.2). On peut donc dans la suite supposer u, x et donc y , suffisamment grands.

Afin de majorer la quantité $\sum_{n \leq x} \Delta(n)$, Tenenbaum [Ten85] développe une méthode reposant sur l'étude d'une moyenne pondérée de la fonction Δ , suivie d'une méthode itérative. Nous nous proposons ici de suivre cette méthode en l'adaptant au cas friable.

6.2 Une première majoration de $\Psi_\Delta(x, y)$

L'objet de cette section est de démontrer la proposition suivante, qui fournit une première majoration de $\Psi_\Delta(x, y)$.

Proposition 6.3. *Pour $(x, y) \in H_\varepsilon$, on a*

$$(6.3) \quad \Psi_\Delta(x, y) \ll \Psi(x, y) 2^{u+O(u/\log u)} + \frac{x}{\log x} \sum_{\substack{x/y < n \leq x \\ P(n) \leq y}} \frac{\Delta(n)}{n}.$$

On a, par sommation partielle

$$(6.4) \quad \Psi_\Delta(x, y) \log x = \int_1^x \frac{\Psi_\Delta(t, y)}{t} dt + \sum_{n \in S(x, y)} \Delta(n) \log n.$$

L'objet des Propositions 6.4 et 6.6 *infra* est de donner une estimation du second membre du terme de droite de (6.4).

Proposition 6.4. *On a, pour $x \geq y \geq 2$,*

$$(6.5) \quad \sum_{n \in S(x, y)} \Delta(n) \log n \ll y \Psi_\Delta\left(\frac{x}{y}, y\right) + x \sum_{\substack{x/y < m \leq x \\ P(m) \leq y}} \frac{\Delta(m)}{m} + \sqrt{x} \sum_{\substack{m \leq x \\ P(m) \leq y}} \frac{\Delta(m)}{\sqrt{m}}.$$

Démonstration. On a

$$\sum_{n \in S(x, y)} \Delta(n) \log n = \sum_{n \in S(x, y)} \Delta(n) \sum_{p^\nu || n} \log(p^\nu).$$

On utilise ensuite l'inégalité (2.27)

$$\Delta(mn) \leq \tau(m) \Delta(n) \quad (m, n \geq 1).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \in S(x, y)} \Delta(n) \log n &= \sum_{\substack{p^\nu m \leq x \\ (m, p) = 1 \\ P(m) \leq y \\ p \leq y}} \Delta(p^\nu m) \log(p^\nu) \leq \sum_{\substack{p^\nu m \leq x \\ P(m) \leq y \\ p \leq y}} \Delta(m) (\nu + 1) \log(p^\nu) \\ &= \sum_{m \in S(x, y)} \Delta(m) \left\{ \sum_{p \leq \min(x/m, y)} 2 \log p + \sum_{\substack{p^\nu \leq x/m \\ \nu \geq 2 \\ p \leq y}} (\nu + 1) \log(p^\nu) \right\}. \end{aligned}$$

Comme

$$\vartheta(x) := \sum_{p \leq x} \log p \ll x \quad (x \geq 1),$$

on a, pour $m \leq x$,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p^\nu \leq x/m \\ \nu \geq 2 \\ p \leq y}} (\nu+1) \log(p^\nu) &\ll \sum_{2 \leq \nu \leq \log(x/m)} \nu^2 \vartheta \left\{ \left(\frac{x}{m} \right)^{1/\nu} \right\} \ll \sqrt{\frac{x}{m}} + \left(\frac{x}{m} \right)^{1/3} \sum_{\nu \leq \log(x/m)} \nu^2 \\ &\ll \sqrt{\frac{x}{m}} + \left(\frac{x}{m} \right)^{1/3} \log \left(\frac{x}{m} \right)^3 \ll \sqrt{\frac{x}{m}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \in S(x, y)} \Delta(n) \log n &\ll \vartheta(y) \sum_{m \in S(x/y, y)} \Delta(m) + \sum_{\substack{x/y < m \leq x \\ P(m) \leq y}} \Delta(m) \vartheta \left(\frac{x}{m} \right) + \sum_{\substack{m \leq x \\ P(m) \leq y}} \Delta(m) \sqrt{\frac{x}{m}} \\ &\leq y \Psi_\Delta \left(\frac{x}{y}, y \right) + x \sum_{\substack{x/y < m \leq x \\ P(m) \leq y}} \frac{\Delta(m)}{m} + \sqrt{x} \sum_{\substack{m \leq x \\ P(m) \leq y}} \frac{\Delta(m)}{\sqrt{m}}, \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat annoncé. \square

On a donc, grâce à (6.4) et (6.5),

$$(6.6) \quad \Psi_\Delta(x, y) \log x \ll \int_1^x \frac{\Psi_\Delta(t, y)}{t} dt + y \Psi_\Delta \left(\frac{x}{y}, y \right) + x \sum_{\substack{x/y < n \leq x \\ P(n) \leq y}} \frac{\Delta(n)}{n} + \sqrt{x} \sum_{n \in S(x, y)} \frac{\Delta(n)}{\sqrt{n}}.$$

Lemme 6.5. Pour $0 < b < 2$ et $(x, y) \in H_\varepsilon$, on a

$$(6.7) \quad \int_1^x \Psi_\tau(t, y) t^{-b} dt \ll_b (\log y) x^{2-b} \varrho_2(u) + y^{2-b} \log y.$$

Démonstration. On a

$$\int_1^x \frac{\Psi_\tau(t, y)}{t^b} dt = \int_1^y \frac{\Psi_\tau(t, y)}{t^b} dt + \int_y^x \frac{\Psi_\tau(t, y)}{t^b} dt.$$

Effectuons les changements de variable $t = y^w$, $v = u - w$, puis appliquons (2.19).

$$(6.8) \quad \begin{aligned} \int_y^x \frac{\Psi_\tau(t, y)}{t^b} dt &\ll \int_1^u \varrho_2(w) y^{w(2-b)} (\log y)^2 dw \\ &\ll x^{2-b} (\log y)^2 \int_0^u \varrho_2(u-v) y^{-v(2-b)} dv. \end{aligned}$$

D'après [TW03, (3.27)], pour $\kappa > 0$, on a

$$(6.9) \quad \varrho_\kappa(u-v) \ll \varrho_\kappa(u) e^{v\xi(u/\kappa)} \quad (u \geq 1, 0 \leq v \leq u - c_\kappa),$$

avec $c_\kappa = 0$ pour $\kappa \geq 1$. On obtient ainsi

$$\int_0^u \varrho_2(u-v)y^{-v(2-b)} dv \ll \varrho_2(u) \int_0^u e^{v(\xi(u/2)-(2-b)\log y)} dv.$$

Pour $(x, y) \in H_\varepsilon$, on a $\log y \gg (\log u)^{5/3+\varepsilon}$ et donc, pour une constante convenable c_0 ,

$$\log y \int_0^u e^{v(\xi(u/2)-(2-b)\log y)} dv \leq \int_0^u (\log y)y^{-vc_0} dv \ll 1.$$

Le terme de gauche de (6.8) est donc $\ll (\log y)x^{2-b}\varrho_2(u)$.

Comme $\sum_{n \leq t} \tau(n) \ll t \log t$ ($t \geq 2$), on a

$$(6.10) \quad \int_1^y \frac{\Psi_\tau(t, y)}{t^b} dt \ll \int_1^y t^{1-b} \log t dt = \frac{y^{2-b} \log y}{2-b} + \frac{y^{2-b} - 1}{(2-b)^2}.$$

La combinaison de (6.8) et (6.10) fournit bien (6.7). \square

Lemme 6.6. Pour $(x, y) \in H_\varepsilon$, on a

$$\sum_{n \in S(x, y)} \frac{\Delta(n)}{\sqrt{n}} \ll \sqrt{x} \varrho_2(u) \log y.$$

Démonstration. On a

$$\sum_{n \in S(x, y)} \frac{\Delta(n)}{\sqrt{n}} \leq \sum_{n \in S(x, y)} \frac{\tau(n)}{\sqrt{n}}.$$

En intégrant par parties et en appliquant le Lemme 6.5 avec $b = 3/2$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \in S(x, y)} \frac{\tau(n)}{\sqrt{n}} &= \int_{1-}^x \frac{d\Psi_\tau(t, y)}{\sqrt{t}} = \frac{\Psi_\tau(x, y)}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \int_1^x \Psi_\tau(t, y) t^{-3/2} dt \\ &\ll \sqrt{x} \varrho_2(u) \log y + \sqrt{y} \log y. \end{aligned}$$

Comme

$$\sqrt{y} \ll \sqrt{x} \varrho_2(u) \quad ((x, y) \in H_\varepsilon),$$

d'après (2.20) et (2.23), cela nous fournit bien le résultat annoncé. \square

Nous sommes à présent en mesure de démontrer la Proposition 6.3.

Preuve de la Proposition 6.3. On a, d'après (6.6), pour $(x, y) \in H_\varepsilon$,

$$\Psi_\Delta(x, y) \ll \frac{1}{\log x} \int_1^x \frac{\Psi_\Delta(t, y)}{t} dt + \frac{y \Psi_\Delta(x/y, y)}{\log x} + \frac{x}{\log x} \sum_{\substack{x/y < n \leq x \\ P(n) \leq y}} \frac{\Delta(n)}{n} + \frac{\sqrt{x}}{\log x} \sum_{n \in S(x, y)} \frac{\Delta(n)}{\sqrt{n}}.$$

On a

$$\int_1^x \frac{\Psi_\Delta(t, y)}{t} dt \leq \int_1^x \frac{\Psi_\tau(t, y)}{t} dt.$$

D'après le Lemme [6.5](#) appliqué avec $b = 1$, on a donc

$$\int_1^x \frac{\Psi_\Delta(t, y)}{t} dt \ll x \varrho_2(u) \log y + y \log y \ll x \varrho_2(u) \log y.$$

De [\(2.5\)](#) et [\(2.23\)](#), on déduit immédiatement

$$x \varrho_2(u) \asymp \Psi(x, y) \mathfrak{r}(u) \sqrt{u} \quad ((x, y) \in H_\varepsilon).$$

D'où

$$\frac{x \varrho_2(u) \log y}{\log x} = \frac{x \varrho_2(u)}{u} \ll \Psi(x, y) 2^{u+O(u/\log u)}.$$

Donc

$$\frac{1}{\log x} \int_1^x \frac{\Psi_\Delta(t, y)}{t} dt \ll \Psi(x, y) 2^{u+O(u/\log u)}.$$

Si $x/y < y$, alors u est borné et, comme $\sum_{n \leq x} \tau(n) \ll x \log x$, on a

$$\frac{y \Psi_\Delta(x/y, y)}{\log x} \leq \frac{y}{\log x} \sum_{n \leq x/y} \tau(n) \ll \frac{x \log(x/y)}{\log x} < \frac{x}{u} \ll x.$$

Dans le cas contraire, autrement dit si $x/y \geq y$, on a, d'après [\(2.19\)](#),

$$\frac{y \Psi_\Delta(x/y, y)}{\log x} \ll \frac{x \varrho_2(u-1)}{u}.$$

D'après [\(6.9\)](#), [\(2.23\)](#), et [\(2.26\)](#),

$$\frac{x \varrho_2(u-1)}{u} \ll \frac{x \varrho_2(u) e^{\xi(u/2)}}{u} \ll x 2^{u+O(u/\log u)} \varrho(u).$$

De l'estimation [\(2.5\)](#) on déduit enfin

$$\frac{y \Psi_\Delta(x/y, y)}{\log x} \ll x 2^{u+O(u/\log u)} \varrho(u) \ll \Psi(x, y) 2^{u+O(u/\log u)}.$$

Enfin, nous avons, d'après le Lemme [6.6](#),

$$\frac{\sqrt{x}}{\log x} \sum_{n \in S(x, y)} \frac{\Delta(n)}{\sqrt{n}} \ll \frac{x \varrho_2(u)}{u} \ll \Psi(x, y) 2^{u+O(u/\log u)}.$$

Cela fournit donc bien [\(6.3\)](#). □

6.3 Démonstration de la Proposition [6.1](#)

Compte-tenu de la formule [\(6.3\)](#), il reste à estimer la quantité

$$(6.11) \quad \sum_{\substack{x/y < n \leq x \\ P(n) \leq y}} \frac{\Delta(n)}{n}.$$

Posons

$$(6.12) \quad \beta := \beta(x, y) = \alpha(\sqrt{x}, y).$$

Notons que β correspond au point selle qui apparaît dans l'estimation de $\Psi_\tau(x, y)$ par la méthode du col (voir [Dra16](#), §2.1). On a, d'après [\(2.15\)](#),

$$(6.13) \quad \beta = 1 - \frac{\xi(u/2)}{\log y} + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(y)} + \frac{1}{u(\log y)^2}\right) \quad ((x, y) \in H_\varepsilon).$$

Remarquons que pour x suffisamment grand, $\beta > 2/3$.

Dans toute la suite, la notation \sum^* désigne une somme indexée par les entiers sans facteur carré. L'étude de [\(6.11\)](#) peut-être réduite à celle d'une somme indexée par des entiers friables sans facteur carré grâce aux lemmes suivants.

Lemme 6.7. *Pour $(x, y) \in H_\varepsilon$, on a, pour y suffisamment grand,*

$$(6.14) \quad \sum_{\substack{x/y < n \leq x \\ P(n) \leq y}} \frac{\Delta(n)}{n} \ll \frac{e^{\xi(u/2)}}{x^{1-\beta}} \sum_{\substack{x/y < n \leq x \\ P(n) \leq y}} \frac{\Delta(n)}{n^\beta}.$$

Démonstration. Comme $\beta < 1$ pour y suffisamment grand, on a d'après [\(6.13\)](#),

$$(6.15) \quad \sum_{\substack{x/y < n \leq x \\ P(n) \leq y}} \frac{\Delta(n)}{n} \leq \frac{1}{(x/y)^{1-\beta}} \sum_{\substack{x/y < n \leq x \\ P(n) \leq y}} \frac{\Delta(n)}{n^\beta} \ll \frac{e^{\xi(u/2)}}{x^{1-\beta}} \sum_{\substack{x/y < n \leq x \\ P(n) \leq y}} \frac{\Delta(n)}{n^\beta}.$$

De plus, comme $\beta > 2/3$ pour y suffisamment grand, on a

$$(6.16) \quad \sum_{\substack{x/y < n \leq x \\ P(n) \leq y}} \frac{\Delta(n)}{n^\beta} \leq \sum_{P(n) \leq y} \frac{\Delta(n)}{n^\beta} \leq \sum_{P(m) \leq y}^* \frac{\Delta(m)}{m^\beta} \sum_{P(d) \leq y} \frac{\tau(d^2)}{d^{2\beta}} \ll \sum_{P(m) \leq y}^* \frac{\Delta(m)}{m^\beta},$$

où la seconde majoration provient de [\(2.27\)](#), ce qui fournit bien [\(6.14\)](#). \square

En injectant [\(6.14\)](#) dans [\(6.3\)](#), on obtient le résultat suivant.

Lemme 6.8. *Pour $(x, y) \in H_\varepsilon$, on a*

$$(6.17) \quad \Psi_\Delta(x, y) \ll \Psi(x, y) 2^{u+O(u/\log u)} + \frac{x^\beta e^{\xi(u/2)}}{\log x} \sum_{P(m) \leq y}^* \frac{\Delta(m)}{m^\beta}.$$

Nous avons donc réduit l'étude à celle d'une moyenne friable pondérée de la fonction Δ sur les entiers sans facteurs carrés. Rappelons que $\omega(n)$ désigne le nombre des facteurs premiers distincts d'un entier générique n et écrivons

$$(6.18) \quad \sum_{P(m) \leq y}^* \frac{\Delta(m)}{m^\beta} = Z_K + Z'_K,$$

avec

$$(6.19) \quad Z_K := \sum_{\substack{P(m) \leq y \\ \omega(m) \leq K}}^* \frac{\Delta(m)}{m^\beta}, \quad Z'_K := \sum_{\substack{P(m) \leq y \\ \omega(m) > K}}^* \frac{\Delta(m)}{m^\beta}.$$

Pour estimer Z_K , nous utilisons la méthode itérative développée dans [Ten85](#) (voir aussi [HT88](#), ch.7).

Pour une constante $C'' > 0$ déterminée ultérieurement, nous prenons

$$(6.20) \quad K = \lfloor C''(\log_2 y + u) \rfloor.$$

Ce choix est justifié de la manière suivante. On sait ([BT05a](#), th.1.6]) que l'ordre normal de $\omega(n)$ sur les entiers friables est de l'ordre de $\log_2 y + u$. En choisissant la constante C'' assez grande, nous pouvons effectivement faire en sorte que Z'_K soit négligeable devant Z_K .

À ce stade, fixons $k \geq 1$ et évaluons Z_k .

Notant $\{p_j(n)\}_{j=1}^{\omega(n)}$ la suite des facteurs premiers distincts d'un entier n , rangés par ordre croissant, posons

$$(6.21) \quad n_k := \begin{cases} \prod_{1 \leq j \leq k} p_j(n) & \text{si } k \leq \omega(n), \\ \prod_{1 \leq j \leq \omega(n)} p_j(n) & \text{si } k > \omega(n), \end{cases}$$

et commençons par remarquer que l'on a

$$Z_k = \sum_{\substack{P(n) \leq y \\ \omega(n) \leq k}}^* \frac{\Delta(n_k)}{n^\beta}.$$

Posons

$$M_q(n) := \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(n; u)^q \, du.$$

D'après [HT88](#), (7.8)], on a, pour tout nombre entier $q \geq 1$,

$$\Delta(n) \leq 2^{(q-1)/q} M_q(n)^{1/q}.$$

Donc

$$(6.22) \quad Z_k \leq 2L_{k,q},$$

avec

$$L_{k,q} = \sum_{P(n) \leq y}^* \frac{M_q(n_k)^{1/q}}{n^\beta}.$$

D'après [HT88](#), (7.5)], on a

$$\lim_{q \rightarrow \infty} M_q(n)^{1/q} = \Delta(n).$$

Il est donc naturel de vouloir choisir q dans [\(6.22\)](#) le plus grand possible. Nous verrons

néanmoins que nous serons limités dans ce choix.

Nous introduisons pour la suite la quantité

$$(6.23) \quad \zeta_1(s, y) := \prod_{p \leq y} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) \quad (s > 0, y \geq 2),$$

en remarquant que l'on a

$$\zeta_1(s, y) \asymp \zeta(s, y) \quad (s \geq 2/3, y \geq 2).$$

Nous commençons par estimer $L_{k+1, q}$ en fonction de $L_{k, q}$, mais il est commode d'introduire la quantité

$$(6.24) \quad L_{k, q}^* = L_{k, q} + 2^{k/q} D_q,$$

où D_q désigne, pour une constante convenable c_2 , la quantité

$$D_q := \zeta_1(\beta, y) e^{\xi(u/2)q + u/2 + (c_2 u)/\log y}.$$

Nous allons montrer (Lemmes [6.12](#) et [6.13](#) *infra*) que, pour des constantes convenables c_1, c_3 et $k_0 > 0$, u suffisamment grand, et sous les conditions

$$k \geq k_0, \quad 2 \leq q \leq q(k) := \lfloor c_1 \sqrt{k/\log k} \rfloor, \quad 1 < r < q \leq r\sqrt{2},$$

on a

$$\begin{cases} L_{k+1, q}^* \leq 3^{1/q} L_{k, q}^*, \\ L_{k, q}^* \leq u^{c_3 r} L_{k, r}^*. \end{cases}$$

Ces estimations sont les analogues de [\[Ten85, \(34\)\]](#) et [\[Ten85, \(35\)\]](#) et nous permettront d'évaluer $L_{k, q}^*$ au moyen d'une double récurrence.

Posons

$$\begin{aligned} N(n; w, a_0, a_1) &:= \int_{\mathbb{R}} \Delta(n; v)^{a_0} \Delta(n; v - w)^{a_1} \mathbf{d}v, \\ E_q(n, p) &:= \sum_{1 \leq j < q} \binom{q}{j} N(n; \log p; j, q - j), \end{aligned}$$

et

$$G_k := \sum_{\substack{P(n) \leq y \\ \omega(n) \geq k+1}}^* \frac{E_q(n_k, p_{k+1})^{1/q}}{n^\beta}.$$

Lemme 6.9. *On a, pour tout $k, q > 1$,*

$$L_{k+1, q} \leq 2^{1/q} L_{k, q} + G_k.$$

Démonstration. On a, d'après [\[HT88, \(7.23\)\]](#), pour tout entier n et tout nombre premier p ne divisant pas n ,

$$\Delta(np; u) = \Delta(n; u) + \Delta(n; u - \log p),$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \Delta(np; u)^q \mathbf{d}u &= \int_{\mathbb{R}} \Delta(n; u)^q \mathbf{d}u + \int_{\mathbb{R}} \Delta(n; u - \log p)^q \mathbf{d}u \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \sum_{1 \leq j < q} \binom{q}{j} \Delta(n; u)^j \Delta(n; u - \log p)^{q-j} \mathbf{d}u. \end{aligned}$$

Posant

$$N(n; w; j, q-j) = \int_{\mathbb{R}} \Delta(n; u)^j \Delta(n; u - w)^{q-j} \mathbf{d}u,$$

on obtient

$$M_q(np) = 2M_q(n) + \sum_{1 \leq j < q} \binom{q}{j} N(n; \log p; j, q-j).$$

Si $\omega(n) \geq k+1$, alors $n_{k+1} = n_k p_{k+1}$, on a donc

$$M_q(n_{k+1}) = 2M_q(n_k) + E_q(n_k, p_{k+1}).$$

Il suit

$$M_q(n_{k+1})^{1/q} \leq 2^{1/q} M_q(n_k)^{1/q} + E_q(n_k, p_{k+1})^{1/q} \quad \text{si } \omega(n) \geq k+1.$$

De plus,

$$M_q(n_{k+1})^{1/q} \leq 2^{1/q} M_q(n_k)^{1/q} \quad \text{si } \omega(n) \leq k.$$

On obtient donc bien

$$L_{k+1, q} \leq 2^{1/q} L_{k, q} + G_k.$$

Cela achève la démonstration. □

Posons

$$S_k := 2^k \sum_{\substack{P(n) \leq y \\ \omega(n) \geq k}}^* \frac{1}{n^\beta \{\log p_k(n)\}^{1-1/q}}.$$

Lemme 6.10. *Pour tous entiers $k, q > 1$ et une constante convenable c_4 , on a*

$$G_k \leq c_4 e^{\xi(u/2)} q L_{k, q}^{(q-2)/(q-1)} S_k^{1/(q-1)}.$$

Démonstration. Pour $P(n) \leq y$, $\omega(n) \geq k+1$ et $\mu(n)^2 = 1$, on pose $n = mph$ avec

$$\begin{cases} P^-(h) > p, & \mu(h)^2 = 1, & P(h) \leq y \\ \omega(m) = k, & \mu(m)^2 = 1, \\ P(m) < p < P^-(h). \end{cases}$$

On a

$$G_k = \sum_{\substack{m \geq 1 \\ \omega(m) = k}}^* \sum_{P(m) < p \leq y} \frac{E_q(m, p)^{1/q}}{m^\beta p^\beta} \sum_{\substack{P^-(h) > p \\ P(h) \leq y}}^* \frac{1}{h^\beta}.$$

Rappelons que ℓ désigne génériquement un nombre premier et posons

$$(6.25) \quad T(z) = T(z, \beta) := \sum_{\ell \leq z} \frac{1}{\ell^\beta} \quad (z \geq 2).$$

Rappelons également la définition de $\zeta_1(\beta, y)$ en [\(6.23\)](#). Comme

$$\sum_{\substack{P^-(h) > p \\ P(h) \leq y}}^* \frac{1}{h^\beta} \leq \prod_{\ell > p} \left(1 + \frac{1}{\ell^\beta}\right) \ll \zeta_1(\beta, y) \prod_{\ell \leq p} \left(1 + \frac{1}{\ell^\beta}\right)^{-1} \ll \zeta_1(\beta, y) e^{-T(p)},$$

on a

$$\begin{aligned} G_k &\ll \zeta_1(\beta, y) \sum_{\substack{m \geq 1 \\ \omega(m)=k}}^* \frac{1}{m^\beta} \sum_{P(m) < p \leq y} \frac{E_q(m, p)^{1/q}}{p^\beta} e^{-T(p)} \\ &\ll \zeta_1(\beta, y) \sum_{\substack{m \geq 1 \\ \omega(m)=k}}^* \frac{e^{-T(P(m))}}{m^\beta} \sum_{P(m) < p \leq y} \frac{E_q(m, p)^{1/q}}{p^\beta}. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à la somme intérieure avec les exposants q et $q/(q-1)$, et en posant

$$G_{k,1} := \sum_{p > P(m)} \frac{E_q(m, p) \log p}{p}, \quad G_{k,2} := \sum_{P(m) < p \leq y} \frac{p^{(1-\beta)q/(q-1)}}{(\log p)^{1/(q-1)} p},$$

on obtient

$$G_k \ll \zeta_1(\beta, y) \sum_{\substack{m \geq 1 \\ \omega(m)=k}}^* \frac{e^{-T(P(m))}}{m^\beta} G_{k,1}^{1/q} G_{k,2}^{(q-1)/q}.$$

Par le théorème des nombres premiers, pour $z > 0$, on a

$$\sum_{p > P(m)} \frac{1}{p(\log p)^z} \ll \frac{1}{z \{\log(P(m))\}^z}.$$

Donc, pour $z = 1/(q-1)$, on a

$$G_{k,2}^{(q-1)/q} \ll \frac{q y^{1-\beta}}{\{\log P(m)\}^{1/q}}.$$

De plus, d'après [\[HT88, \(7.11\)\]](#), pour tout entier $q \geq 2$ et $(a_0, a_1) \in [0, q]^2$ tels que $a_0 + a_1 = q$, on a

$$\sum_p N(n; \log p; a_0, a_1) \frac{\log p}{p} \ll 2^{q-1} \tau(n)^{1+1/(q-1)} M_q(n)^{(q-2)/(q-1)}.$$

Donc pour $\mu^2(m) = 1$, on a

$$G_{k,1} \leq \sum_p \frac{E_q(m,p) \log p}{p} \ll \sum_{1 \leq j < q} \binom{q}{j} 2^{q-1} \tau(m)^{q/(q-1)} M_q(m)^{(q-2)/(q-1)} \\ \ll 4^q 2^{kq/(q-1)} M_q(m)^{(q-2)/(q-1)}.$$

Ainsi,

$$G_{k,1}^{1/q} \ll 2^{k/(q-1)} M_q(m)^{(q-2)/q(q-1)}.$$

Donc, comme d'après (6.13) pour y suffisamment grand, $y^{1-\beta} \ll e^{\xi(u/2)}$, on a

$$G_k \ll 2^{k/(q-1)} e^{\xi(u/2)} q \zeta_1(\beta, y) \sum_{\substack{m \geq 1 \\ \omega(m)=k}}^* \frac{e^{-T(P(m))} M_q(m)^{(q-2)/q(q-1)}}{m^\beta \{\log P(m)\}^{1/q}}.$$

Or,

$$\sum_{\substack{P(n) \leq y \\ n_k = m \\ \omega(n) \geq k}}^* \frac{1}{n^\beta} = \frac{1}{m^\beta} \sum_{\substack{P(h) \leq y \\ P^-(h) > P(m)}}^* \frac{1}{h^\beta} = \frac{1}{m^\beta} \prod_{P(m) < \ell \leq y} \left(1 + \frac{1}{\ell^\beta}\right) \\ = \frac{\zeta_1(\beta, y)}{m^\beta} \prod_{\ell \leq P(m)} \left(1 + \frac{1}{\ell^\beta}\right)^{-1} \asymp \frac{\zeta_1(\beta, y)}{m^\beta} e^{-T(P(m))}.$$

Donc

$$(6.26) \quad G_k \ll 2^{k/(q-1)} e^{\xi(u/2)} q \sum_{\substack{m \geq 1 \\ \omega(m)=k}}^* \sum_{\substack{P(n) \leq y \\ n_k = m \\ \omega(n) \geq k}}^* \frac{M_q(m)^{(q-2)/q(q-1)}}{n^\beta \{\log(P(m))\}^{1/q}} \\ = 2^{k/(q-1)} e^{\xi(u/2)} q \sum_{\substack{P(n) \leq y \\ \omega(n) \geq k}}^* \frac{M_q(n_k)^{(q-2)/q(q-1)}}{n^\beta \{\log(p_k(n))\}^{1/q}}.$$

En utilisant ensuite l'inégalité de Hölder à la somme figurant dans (6.26) avec les exposants $(q-1)/(q-2)$ et $q-1$, on obtient bien l'estimation annoncée. \square

Lemme 6.11. *Il existe une constante absolue c_2 telle que, pour $(x, y) \in H_\varepsilon$, y et u suffisamment grands, k et q des nombres entiers tels que $1 < k \ll u + \log_2 y$ et $q > 1$, on a*

$$S_k \ll \frac{e^{\xi(u/2)} \zeta_1(\beta, y) e^{u/2 + (c_2 u)/\log y}}{(1 - 1/2q)^k}.$$

Démonstration. Pour $P(n) \leq y$, $\omega(n) \geq k$ et $\mu(n)^2 = 1$, on pose $n = m p h$ dans S_k avec

$$\begin{cases} P^-(h) > p, & \mu(h)^2 = 1, & P(h) \leq y \\ \omega(m) = k-1, & \mu(m)^2 = 1, \\ P(m) < p \leq y. \end{cases}$$

On obtient alors

$$S_k = 2^k \sum_{\substack{P(m) \leq y \\ \omega(m)=k-1}}^* \frac{1}{m^\beta} \sum_{P(m) < p \leq y} \frac{1}{p^\beta (\log p)^{1-1/q}} \sum_{\substack{P(h) \leq y \\ P^-(h) > p}}^* \frac{1}{h^\beta}.$$

On rappelle les notations $T(s)$ et $\zeta_1(\beta, y)$ respectivement définies en [\(6.25\)](#) et [\(6.23\)](#). On a

$$\begin{aligned} S_k &\ll 2^k \zeta_1(\beta, y) \sum_{\substack{P(m) \leq y \\ \omega(m)=k-1}}^* \frac{1}{m^\beta} \sum_{P(m) < p \leq y} \frac{e^{-T(p)}}{p^\beta (\log p)^{1-1/q}} \\ &\leq 2^k \zeta_1(\beta, y) \sum_{p \leq y} \frac{e^{-T(p)}}{p^\beta (\log p)^{1-1/q}} \sum_{\substack{P(m) < p \\ \omega(m)=k-1}}^* \frac{1}{m^\beta} \\ &\leq \frac{2^k \zeta_1(\beta, y)}{(k-1)!} \sum_{p \leq y} \frac{e^{-T(p)} T(p)^{k-1}}{p^\beta (\log p)^{1-1/q}} \leq \frac{2^k \zeta_1(\beta, y) y^{1-\beta}}{(k-1)!} \widetilde{S}_k, \end{aligned}$$

avec

$$\widetilde{S}_k := \sum_{p \leq y} \frac{e^{-T(p)} T(p)^{k-1}}{p (\log p)^{1-1/q}}.$$

Énonçons une estimation issue de [\[BT05b\]](#) pour $T(s)$. Suivant les notations de [\[BT05b\]](#), (3.26)] et [\[BT05b\]](#), (3.21)], posons

$$w_\sigma(t) := \frac{t^{1-\sigma} - 1}{(1-\sigma) \log t}, \quad L(y) := \exp\{(\log y)^{3/5} / (\log_2 y)^{1/5}\}.$$

Introduisons également

$$g(t) := \int_1^{w_\beta(e^t)} v \xi'(v) dv \ll w_\beta(e^t)$$

et remarquons que pour tout $\eta > 0$, u assez grand, on a, avec $\beta = \beta(x, y)$,

$$w_\beta(y^\eta) \leq e^{\eta(1-\beta) \log y} \asymp e^{\eta \xi(u/2)} = \left(1 + \frac{u}{2} \xi\left(\frac{u}{2}\right)\right)^\eta \leq (u \log(2u))^\eta \quad ((x, y) \in H_\varepsilon).$$

D'après [\[BT05b\]](#), (3.25)], on a, pour des constantes b_1 et c_1 convenables,

$$T(y) = \log_2 y + g(\log y) + b_1 + O\left(\frac{w_\beta(y)}{L(y)^{c_1}} + \frac{\log u}{\log y}\right).$$

Nous avons donc, pour une constante convenable c ,

$$\sum_{p \leq y^{1/4}} \frac{e^{-T(p)} T(p)^{k-1}}{p (\log p)^{1-1/q}} \ll \sum_{p \leq y^{1/4}} \frac{(\log_2 p + cu^{1/3})^{k-1}}{p (\log p)^{2-1/q}} \ll \int_0^\infty \frac{(v + cu^{1/3})^{k-1}}{e^{v(2-1/q)}} dv.$$

Le changement de variable $w = (v + cu^{1/3})(2 - 1/q)$ fournit

$$\sum_{p \leq y^{1/4}} \frac{e^{-T(p)} T(p)^{k-1}}{p(\log p)^{1-1/q}} \ll \frac{e^{2cu^{1/3}}}{(2-1/q)^{k-1}} \int_0^\infty \frac{w^{k-1}}{e^w} dw \ll \frac{e^{2cu^{1/3}} (k-1)!}{(2-1/q)^{k-1}}.$$

Nous avons ensuite, lorsque $y^{1/4} < p \leq y$ et pour une constante b_2 convenable,

$$\begin{aligned} & (\log_2 p + g(\log p) + b_1 + O(1 + w_\beta(p)/L(p)^{c_1}))^{k-1} \\ & \leq (\log_2 p + g(\log p) + b_2)^{k-1} \exp\{O((uk)/L(y)^{c_1/3})\}. \end{aligned}$$

Puisque $(x, y) \in H_\varepsilon$ et que $k \ll \log_2 y + u$, on a $uk \ll L(y)^{c_1/3}$. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{y^{1/4} < p \leq y} \frac{e^{-T(p)} T(p)^{k-1}}{p(\log p)^{1-1/q}} & \ll \int_{y^{1/4}}^y \frac{e^{-g(\log t) - b_2} (\log_2 t + g(\log t) + b_2)^{k-1}}{t(\log t)^{3-1/q}} dt \\ & \ll \int_{\log_2(y^{1/4})}^{\log_2 y} \frac{e^{-g(e^v) - b_2} (v + g(e^v) + b_2)^{k-1}}{e^{v(2-1/q)}} dv \\ & \ll \int_{\log_2(y^{1/4})}^{\log_2 y} \frac{e^{\{g(e^v) + b_2\}\{1-1/q\}} (v + g(e^v) + b_2)^{k-1}}{e^{(2-1/q)\{v + g(e^v) + b_2\}}} dv. \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $z = (v + g(e^v) + b_2)(2 - 1/q)$. Comme la dérivée de g est positive et que $g(\log y) \ll w_\beta(y) = u/2 + O(u/(\log u \log y))$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\log_2(y^{1/4})}^{\log_2 y} \frac{e^{\{g(e^v) + b_2\}\{1-1/q\}} (v + g(e^v) + b_2)^{k-1}}{e^{(2-1/q)\{v + g(e^v) + b_2\}}} dv & \ll \frac{e^{(g(\log y) + b_2)(1-1/q)}}{(2-1/q)^k} \int_0^\infty \frac{z^{k-1}}{e^z} dz \\ & \ll \frac{(k-1)!}{(2-1/q)^k} \exp\{g(\log y)(1-1/q)\} \ll \frac{e^{u/2 + O(u/\log y)} (k-1)!}{(2-1/q)^k}. \end{aligned}$$

Donc, puisque $q > 1$, on a, pour u suffisamment grand,

$$\widetilde{S}_k \ll \frac{e^{2cu^{1/3}} (k-1)!}{(2-1/q)^{k-1}} + \frac{e^{u/2 + O(u/\log y)} (k-1)!}{(2-1/q)^k} \ll \frac{e^{u/2 + O(u/\log y)} (k-1)!}{(2-1/q)^k}.$$

On en déduit

$$S_k \ll \frac{e^{\xi(u/2)} \zeta_1(\beta, y) e^{u/2 + O(u/\log y)}}{(1-1/2q)^k},$$

ce qui achève la démonstration. □

Rappelons la notation $L_{k,q}^*$ définie en (6.24) et donnons-en deux majorations en vue d'estimer cette quantité par une double récurrence.

Lemme 6.12. *Pour des constantes convenables $c_1, k_0 > 0$, et sous les conditions*

$$k \geq k_0, \quad 2 \leq q \leq q(k) := \lfloor c_1 \sqrt{k/\log k} \rfloor,$$

on a

$$(6.27) \quad L_{k+1,q}^* \leq 3^{1/q} L_{k,q}^*.$$

Démonstration. On a, d'après les Lemmes 6.9 et 6.10,

$$L_{k+1,q} \leq 2^{1/q} L_{k,q} + G_k \leq 2^{1/q} L_{k,q} + c_4 e^{\xi(u/2)} q L_{k,q}^{(q-2)/(q-1)} S_k^{1/(q-1)}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} L_{k+1,q}^* &\leq 2^{1/q} \left(L_{k,q}^* - 2^{k/q} D_q \right) + 2^{(k+1)/q} D_q + c_4 e^{\xi(u/2)} q L_{k,q}^* \left(\frac{S_k}{L_{k,q}^*} \right)^{1/(q-1)} \\ &\leq 2^{1/q} L_{k,q}^* + c_4 e^{\xi(u/2)} q L_{k,q}^* \left(\frac{S_k}{L_{k,q}^*} \right)^{1/(q-1)} \\ &\leq 2^{1/q} L_{k,q}^* + c_4 e^{\xi(u/2)} q L_{k,q}^* \left(\frac{S_k}{2^{k/q} D_q} \right)^{1/(q-1)}. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 6.11, on a

$$\frac{S_k}{2^{k/q} D_q} \ll \frac{e^{\xi(u/2)(1-q)}}{2^{k/q} \{1 - 1/(2q)\}^k}.$$

Donc, pour une constante convenable c_5 , on obtient

$$L_{k+1,q}^* \leq 2^{1/q} L_{k,q}^* + c_5 q \left\{ 2^{1/q} \left(1 - \frac{1}{2q} \right) \right\}^{-k/(q-1)} L_{k,q}^*.$$

On a, par croissance de la fonction $q \mapsto \log 2 + q \log \{1 - 1/(2q)\}$ lorsque $q \geq 2$,

$$2^{1/q} \left(1 - \frac{1}{2q} \right) \geq \left(\frac{9}{8} \right)^{1/q}$$

Donc

$$L_{k+1,q}^* \leq 2^{1/q} L_{k,q}^* + c_5 q \left(\frac{9}{8} \right)^{-k/(q(q-1))} L_{k,q}^*.$$

Pour k suffisamment grand, disons $k \geq k_0$, $c_1 \sqrt{k/\log k} > 1$ et $(\log c_5)/\log k < 1/2$. La condition $2 \leq q \leq \lfloor c_1 \sqrt{k/\log k} \rfloor$ implique donc

$$c_5 q \left(\frac{8}{9} \right)^{k/(q(q-1))} \leq c_5 q \left(\frac{8}{9} \right)^{k/q^2} \leq \left(\frac{1}{k} \right)^{\log(9/8)/c_1^2 - 1/2 - \log c_5 / \log k} \leq \left(\frac{1}{k} \right)^{\log(9/8)/c_1^2 - 1}.$$

Donc, pourvu que c_1 soit suffisamment petit, on a

$$c_5 q \left(\frac{8}{9} \right)^{k/(q(q-1))} \leq \frac{1}{k}.$$

Donc

$$L_{k+1,q}^* \leq L_{k,q}^* (2^{1/q} + 1/k).$$

Puisque $2^{1/q} + 1/k \leq 3^{1/q}$ dès que k est suffisamment grand, cela achève la démonstration. \square

Lemme 6.13. *Soit $1 < r < q$ tels que $q \leq r\sqrt{2}$. Pour une constante convenable c_3 on a pour $k > 0$ et u suffisamment grand,*

$$(6.28) \quad L_{k,q}^* \leq u^{c_3 r} L_{k,r}^*.$$

Démonstration. De l'inégalité (cf. [Ten85](#), (8))

$$M_q(n)^{1/q} \leq 2^{1+1/r} M_r(n)^{1/r} \quad (n \geq 1, 1 \leq r \leq q),$$

on déduit

$$L_{k,q} \leq 3L_{k,r} \quad (1 \leq r \leq q).$$

Donc, puisque $r/q < 1$ et $q/r \leq \sqrt{2}$, pour une constante convenable c ,

$$L_{k,q}^* \leq (L_{k,r} + 2^{k/r} D_r) e^{c\xi(u/2)r}.$$

Pour une constante convenable c_3 , on obtient donc bien [\(6.28\)](#), car $\xi(u/2) \ll \log u$. \square

Rappelons que l'on a posé, avec C'' à choisir ultérieurement,

$$K = \lfloor C''(\log_2 y + u) \rfloor.$$

Nous avons, d'après [\(6.27\)](#),

$$L_{k+1,q}^* \leq 3^{1/q} L_{k,q}^* \quad (k_0 \leq k \leq K, 2 \leq q \leq \lfloor c_1 \sqrt{k/\log k} \rfloor).$$

Posons également

$$k_j = 2^j, \quad q_j = \lfloor c_1 \sqrt{\frac{k_j}{\log k_j}} \rfloor \quad (j \geq 1)$$

ainsi que

$$J = \lfloor \frac{\log K}{\log 2} \rfloor,$$

de sorte que

$$2^J \leq K < 2^{J+1}.$$

Nous sommes donc à présent en mesure d'obtenir, par une double récurrence, une estimation de la quantité L_{K,q_J}^* en fonction du terme initial L_{k_0,q_0}^* .

Proposition 6.14. *Pour une constante convenable C' , on a*

$$(6.29) \quad L_{K,q_J}^* \leq \exp(C' \sqrt{K \log K}) L_{k_0,q_0}^*.$$

Démonstration. Remarquons que l'on a bien $q_j \leq \sqrt{2}q_{j-1}$ pour j suffisamment grand. On applique alors [\(6.28\)](#) et on obtient

$$L_{k_J,q_J}^* \leq u^{c_3 q_{J-1}} L_{k_J,q_{J-1}}^*.$$

Puisque $q_{J-1} \leq q(k_J)$, d'après [\(6.27\)](#), on a

$$L_{k_J,q_{J-1}}^* \leq 3^{1/q_{J-1}} L_{k_{J-1},q_{J-1}}^*.$$

Comme $q_{J-1} \leq q(k_{J-1})$ et que la fonction $k \mapsto q(k)$ est croissante, on peut appliquer k_{J-1} fois [\(6.27\)](#) et on obtient,

$$L_{k_J,q_{J-1}}^* \leq 3^{k_{J-1}/q_{J-1}} L_{k_{J-1},q_{J-1}}^*.$$

Nous obtenons ainsi par récurrence,

$$L_{k_J, q_J}^* \leq \exp \left(\sum_{1 \leq j < J} \frac{k_j}{q_j} + c_3 \log u \sum_{1 \leq j < J} q_j \right) L_{k_0, q_0}^*.$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j < J} \frac{k_j}{q_j} + c_3 \log u \sum_{1 \leq j < J} q_j &\ll \sum_{1 \leq j < J} \frac{k_j}{q_j} + J \sum_{1 \leq j < J} q_j \ll \sum_{1 \leq j < J} 2^{j/2} \sqrt{j} + J \sum_{1 \leq j < J} \frac{2^{j/2}}{\sqrt{j}} \\ &\ll \sqrt{J} 2^{J/2} \ll \sqrt{\log K} \exp \left(\frac{\log K \log 2}{2 \log 2} \right) \ll \sqrt{K \log K}. \end{aligned}$$

On obtient, pour constante convenable C ,

$$(6.30) \quad L_{k_J, q_J}^* \leq \exp(C \sqrt{K \log K}) L_{k_0, q_0}^*.$$

On applique ensuite $(K - k_J)$ fois [\(6.28\)](#) à [\(6.30\)](#) et on obtient, pour une constante convenable C' ,

$$L_{K, q_J}^* \leq 3^{(K - k_J)/q_J} L_{k_J, q_J}^* \leq \exp(C' \sqrt{K \log K}) L_{k_0, q_0}^*.$$

Cela achève la démonstration. \square

D'après le Lemme [6.8](#) et en rappelant les notations Z_K et Z'_K définies en [\(6.19\)](#), on a

$$(6.31) \quad \Psi_\Delta(x, y) \ll \Psi(x, y) 2^{u + O(u/\log u)} + \frac{x^\beta e^{\xi(u/2)}}{\log x} (Z_K + Z'_K).$$

D'après [\(6.22\)](#), on a

$$Z_K \leq L_{K, q_J} \leq L_{K, q_J}^*.$$

Il nous reste donc à établir, à l'aide de la Proposition [6.14](#), une majoration de $Z_K + Z'_K$. Démontrons à cet effet une estimation du rapport $\zeta(\beta, y)/\zeta(\alpha, y)$.

Lemme 6.15. *On a*

$$\zeta(\beta, y) = \zeta(\alpha, y) e^{-u/2 + O(u/\log u)} \quad ((x, y) \in H_\varepsilon).$$

Démonstration. La formule [\[Ten23, \(4.2\)\]](#) énonce que, pour x suffisamment grand, on a

$$\frac{\zeta(\alpha, y)}{\zeta(\beta, y)} = \exp \left(\int_{u/2}^u t \xi'(t) dt + O(1) \right) \quad ((x, y) \in H_\varepsilon).$$

Or, d'après [\(2.14\)](#),

$$\int_{u/2}^u t \xi'(t) dt = \int_{u/2}^u \left(1 + O\left(\frac{1}{\log(2t)}\right) \right) dt = \frac{u}{2} + O\left(\frac{u}{\log u}\right).$$

Cela achève la démonstration. \square

Nous sommes à présent en mesure d'estimer les quantités Z_K et Z'_K .

Proposition 6.16. On a, pour $(x, y) \in H_\varepsilon$,

$$(6.32) \quad Z_K \ll \frac{\Psi(x, y)(\log x)2^{u+O(u/\log u)}e^{C'\sqrt{K\log K}}}{x^\beta}.$$

Démonstration. Comme $Z_k \leq 2L_{k,q}$ pour $k, q \geq 2$, on a, d'après [\(6.29\)](#),

$$\frac{x^\beta e^{\xi(u/2)}}{\Psi(x, y) \log x} Z_K \leq \frac{x^\beta e^{\xi(u/2)}}{\Psi(x, y) \log x} e^{C'\sqrt{K\log K}} L_{k_0, q_0}^*.$$

On a ensuite

$$L_{k_0, q_0} \leq \sum_{P(n) \leq y} \frac{2^{k_0}}{n^\beta} = 2^{k_0} \zeta(\beta, y).$$

Donc

$$L_{k_0, q_0}^* = L_{k_0, q_0} + 2^{k_0/q_0} D_{q_0} \leq 2^{k_0} \zeta(\beta, y) + 2^{k_0/q_0} D_{q_0}.$$

On a donc, d'après le Lemme [6.15](#),

$$\begin{aligned} L_{k_0, q_0}^* &\ll \zeta(\alpha, y) e^{-\frac{u}{2} + O(u/\log u)} + \zeta(\alpha, y) e^{O(u/\log u) + \xi(u/2) + (c_2 u)/\log y + (q_0 - 1)\xi(u/2)} \\ &\ll \zeta(\alpha, y) e^{O(u/\log u)} \left(e^{-u/2} + e^{q_0 \xi(u/2)} \right) = \zeta(\alpha, y) e^{O(u/\log u)}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{x^\beta e^{\xi(u/2)}}{\Psi(x, y) \log x} Z_K \ll \frac{x^\beta e^{\xi(u/2)} \zeta(\alpha, y) e^{C'\sqrt{K\log K} + O(u/\log u)}}{\Psi(x, y) \log x}.$$

L'estimation [Ten23](#), (4.1) fournit

$$(\beta - \alpha) \log x = u \{ \xi(u) - \xi(u/2) \} + O\left(1 + \frac{u}{\sqrt{\log y}}\right) \quad ((x, y) \in H_\varepsilon).$$

On en déduit

$$x^\beta e^{\xi(u/2)} \zeta(\alpha, y) = x^\alpha e^{\xi(u/2)} \zeta(\alpha, y) e^{(\xi(u) - \xi(u/2))u} e^{O(1)} \asymp x^\alpha \zeta(\alpha, y) 2^{u+O(u/\log u)}.$$

Donc, d'après [\(2.10\)](#),

$$\frac{x^\beta e^{\xi(u/2)} \zeta(\alpha, y)}{\Psi(x, y) \log x} \asymp \frac{x^\alpha \zeta(\alpha, y) 2^{u+O(u/\log u)}}{\Psi(x, y) \log x} \asymp \frac{\alpha \sqrt{2\pi |\varphi'_y(\alpha)|} 2^{u+O(u/\log u)}}{\log x}.$$

On déduit de [Ten22](#), III.(5.96)] que l'on a

$$\alpha \sqrt{2\pi |\varphi'_y(\alpha)|} \sim \log\left(1 + \frac{y}{\log x}\right) \sqrt{2\pi u \left(1 + \frac{\log x}{y}\right)} \quad (y \rightarrow \infty, u \rightarrow \infty),$$

l'estimation

$$\alpha \sqrt{2\pi |\varphi'_y(\alpha)|} \asymp \sqrt{(\log x)(\log y)} \quad ((x, y) \in H_\varepsilon).$$

Donc

$$(6.33) \quad \frac{x^\beta e^{\xi(u/2)} \zeta(\alpha, y)}{\Psi(x, y) \log x} \asymp 2^{u+O(u/\log u)}.$$

On obtient finalement

$$\frac{x^\beta e^{\xi(u/2)}}{\Psi(x, y) \log x} Z_K \ll 2^{u+O(u/\log u)} e^{C' \sqrt{K \log K}}. \quad \square$$

Rappelons la définition de K en [\(6.20\)](#).

Proposition 6.17. *On a, pour $(x, y) \in H_\varepsilon$,*

$$(6.34) \quad Z'_K \ll \frac{\Psi(x, y) (\log x) 2^{u+O(u/\log u)}}{x^\beta (\log y)^{C''+1-2e^2}}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} Z'_K &\leq \sum_{\substack{P(n) \leq y \\ \omega(n) > K}}^* \frac{\tau(n)}{n} = \sum_{\substack{P(n) \leq y \\ \omega(n) > K}}^* \frac{2^{\omega(n)}}{n} \leq e^{-K} \sum_{P(n) \leq y}^* \frac{(2e)^{\omega(n)}}{n} = e^{-K} \prod_{p \leq y} \left(1 + \frac{2e^2}{p}\right) \\ &\ll e^{-K} \prod_{p \leq y} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{2e^2} \ll e^{-K} (\log y)^{2e^2}. \end{aligned}$$

Rappelons que pour x suffisamment grand, $\alpha < 1$. Grâce à [\(6.33\)](#), on a donc

$$\begin{aligned} \frac{x^\beta}{\Psi(x, y) \log x} Z'_K &\leq \frac{2^{u+O(u/\log u)} (\log y)^{2e^2}}{\zeta(\alpha, y) e^K} \leq \frac{2^{u+O(u/\log u)} (\log y)^{2e^2}}{\zeta(1, y) e^K} \\ &\leq \frac{2^{u+O(u/\log u)} (\log y)^{2e^2-1}}{e^K}. \end{aligned}$$

Donc on a, puisque $K = \lfloor C''(\log_2 y + u) \rfloor$,

$$\frac{x^\beta}{\Psi(x, y) \log x} Z'_K \ll \frac{2^{u+O(u/\log u)}}{(\log y)^{C''+1-2e^2}}. \quad \square$$

Fin de la démonstration de la Proposition [6.1](#)

Dès lors que $C'' > 2e^2 - 1$, les estimations [\(6.32\)](#) et [\(6.34\)](#) appliquées à [\(6.31\)](#) fournissent, pour une constante C convenable,

$$\Psi_\Delta(x, y) \ll \Psi(x, y) 2^{u+O(u/\log u)} e^{C \sqrt{(\log_2 y)(\log_3 y)}}.$$

Cela achève la démonstration de la Proposition [6.1](#).

Bibliographie

- [All82] K. ALLADI, *The Turán-Kubilius inequality for integers without large prime factors*, J. Reine Angew. Math. 335 (1982), p. 180-196, ISSN : 0075-4102,1435-5345.
- [BT05a] R. de la BRETÈCHE et G. TENENBAUM, *Entiers friables : inégalité de Turán-Kubilius et applications*, Invent. Math. 159.3 (2005), p. 531-588, ISSN : 0020-9910.
- [BT05b] R. de la BRETÈCHE et G. TENENBAUM, *Propriétés statistiques des entiers friables*, Ramanujan J. 9.1-2 (2005), p. 139-202, ISSN : 1382-4090.
- [BT17] R. de la BRETÈCHE et G. TENENBAUM, *Une nouvelle approche dans la théorie des entiers friables*, Compos. Math. 153.3 (2017), p. 453-473, ISSN : 0010-437X.
- [BT23a] R. de la BRETÈCHE et G. TENENBAUM, « Friable averages of oscillating arithmetic functions », *Number theory in memory of Eduard Wirsing*, Springer, Cham, 2023, p. 43-71.
- [BT23b] R. de la BRETÈCHE et G. TENENBAUM, *Two upper bounds for the Erdős-Hooley Delta-function*, Sci. China. Math. 66 (2023), p. 2683-2692.
- [BT24a] R. de la BRETÈCHE et G. TENENBAUM, *Friable averages of complex arithmetic functions*, Funct. Approx. Comment. Math., à paraître (2024).
- [BT24b] R. de la BRETÈCHE et G. TENENBAUM, *Mean values of arithmetic functions and application to sums of powers*, prépublication (2024).
- [BT24c] R. de la BRETÈCHE et G. TENENBAUM, *Note on the mean value of the Erdős-Hooley Delta-function*, prépublication (2024).
- [Bru51a] N. G. de BRUIJN, *On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$* , Nederl. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A. (1951), p. 50-60.
- [Bru51b] N. G. de BRUIJN, *The asymptotic behaviour of a function occurring in the theory of primes*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) 15 (1951), p. 25-32, ISSN : 0019-5839,2455-6475.
- [Dar18] C. DARTYGE, *Entiers friables : un tour d'horizon*, Gaz. Math. 156 (2018), p. 29-39, ISSN : 0224-8999,2275-0622.
- [Dic30] K. DICKMAN, *On the frequency of numbers containing prime factors of a certain relative magnitude*, Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik 22A.10 (jan. 1930), A.10.
- [Dra16] S. DRAPPEAU, *Remarques sur les moyennes des fonctions de Piltz sur les entiers friables*, Q. J. Math. 67.4 (2016), p. 507-517, ISSN : 0033-5606.

- [DT18] S. DRAPPEAU et G. TENENBAUM, *Lois de répartition des diviseurs des entiers friables*, Math. Z. 288.3-4 (2018), p. 1299-1326, ISSN : 0025-5874.
- [Erd74] P. ERDŐS, *Problem 218, Solution by the proposer*, Can.Math.Bull 17 (1974), p. 621-622.
- [EN76] P. ERDŐS et J-L. NICOLAS, *Méthodes probabilistes et combinatoires en théorie des nombres*, Bull. Sci. Math. (2) 100.4 (1976), p. 301-320.
- [FGK23] K. FORD, B. GREEN et D. KOUKOULOPOULOS, *Equal sums in random sets and the concentration of divisors*, Invent. Math. 232.3 (2023), p. 1027-1160, ISSN : 0020-9910,1432-1297.
- [FKT23] K. FORD, D. KOUKOULOPOULOS et T. TAO, *A lower bound on the mean value of the Erdős-Hooley Delta function*, prépublication (2023).
- [FT96] E. FOUVRY et G. TENENBAUM, *Répartition statistique des entiers sans grand facteur premier dans les progressions arithmétiques*, Proc. London Math. Soc. (3) 72.3 (1996), p. 481-514, ISSN : 0024-6115.
- [HT82] R. R. HALL et G. TENENBAUM, *On the average and normal orders of Hooley's Δ -function*, J. London Math. Soc. (2) 25.3 (1982), p. 392-406, ISSN : 0024-6107.
- [HT88] R. R. HALL et G. TENENBAUM, *Divisors*, t. 90, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1988, p. xvi+167, ISBN : 0-521-34056-X.
- [HTW08] G. HANROT, G. TENENBAUM et J. WU, *Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables. II*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 96.1 (2008), p. 107-135.
- [Hen86] D. HENSLEY, *The convolution powers of the Dickman function*, J. London Math. Soc. (2) 33.3 (1986), p. 395-406, ISSN : 0024-6107.
- [Hil84] A. HILDEBRAND, *Integers free of large prime factors and the Riemann hypothesis*, Mathematika 31.2 (1984), 258-271 (1985), ISSN : 0025-5793.
- [Hil86] A. HILDEBRAND, *On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$* , J. Number Theory 22.3 (1986), p. 289-307, ISSN : 0022-314X.
- [HT86] A. HILDEBRAND et G. TENENBAUM, *On integers free of large prime factors*, Trans. Amer. Math. Soc. 296.1 (1986), p. 265-290, ISSN : 0002-9947.
- [HT93] A. HILDEBRAND et G. TENENBAUM, *On a class of differential-difference equations arising in number theory*, J. Anal. Math. 61 (1993), p. 145-179, ISSN : 0021-7670.
- [Hoo79] C. HOOLEY, *On a new technique and its applications to the theory of numbers*, Proc. London Math. Soc. (3) 38.1 (1979), p. 115-151, ISSN : 0024-6115.
- [KT23] D. KOUKOULOPOULOS et T. TAO, *An upper bound on the mean value of the Erdős-Hooley delta function*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 127.6 (2023), p. 1865-1885.
- [MTW24] B. MARTIN, G. TENENBAUM et J. WETZER, *On the friable mean-value of the Erdős-Hooley Delta function*, Indag. Math. (N.S.) 35.2 (2024), p. 376-389.

- [Smi91] H. SMIDA, *Sur les puissances de convolution de la fonction de Dickman*, Acta Arith. 59.2 (1991), p. 123-143, ISSN : 0065-1036.
- [Smi93] H. SMIDA, *Valeur moyenne des fonctions de Piltz sur les entiers sans grand facteur premier*, Acta Arith. 63.1 (1993), p. 21-50, ISSN : 0065-1036.
- [Spe28] E. SPERNER, *Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge*, Math. Z. 27.1 (1928), p. 544-548, ISSN : 0025-5874,1432-1823.
- [Ten85] G. TENENBAUM, *Sur la concentration moyenne des diviseurs*, Comment. Math. Helv. 60.3 (1985), p. 411-428, ISSN : 0010-2571.
- [Ten87] G. TENENBAUM, *Sur un problème extrémal en arithmétique*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 37.2 (1987), p. 1-18, ISSN : 0373-0956.
- [Ten22] G. TENENBAUM, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 5ème, Sciences Sup, Dunod, 2022, p. 576, ISBN : 978-2-10-082983-5.
- [Ten23] G. TENENBAUM, *Sur le biais d'une loi de probabilité relative aux entiers friables*, J. Théor. Nombres Bordeaux 35.2 (2023), p. 481-493, ISSN : 1246-7405,2118-8572.
- [TW03] G. TENENBAUM et J. WU, *Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables*, J. Reine Angew. Math. 564 (2003), p. 119-166, ISSN : 0075-4102.
- [TW08a] G. TENENBAUM et J. WU, *Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables. III*, Compos. Math. 144.2 (2008), p. 339-376.
- [TW08b] G. TENENBAUM et J. WU, « Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables. IV », *Anatomy of integers*, t. 46, CRM Proc. Lecture Notes, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, p. 129-141, ISBN : 978-0-8218-4406-9.
- [Xua90] T. XUAN, *The average order of $d_k(n)$ over integers free of large prime factors*, Acta Arith. 55.3 (1990), p. 249-260.

Table des matières

Résumé	ii
Remerciements	iii
Sommaire	v
1 Introduction	1
1.1 Fonction Δ d'Erdős-Hooley et structure des diviseurs	1
1.2 Entiers friables	4
1.3 La fonction d'Erdős-Hooley sur les entiers friables	6
1.4 Plan de la thèse	8
2 Résultats auxiliaires	11
2.1 Estimation de $\Psi(x, y)$	11
2.1.1 La formule de Hildebrand	12
2.1.2 Méthode du col et formule de Hildebrand-Tenenbaum	13
2.2 Les fonctions τ_κ et ϱ_κ	15
2.3 Quelques inégalités sur la fonction Δ	17
3 Estimation de $\mathfrak{S}(x, y)$ dans le domaine $2 \leq y \leq \exp\{(\log_2 x)^2\}$	19
3.1 Résultats	19
3.2 Une estimation de Tenenbaum	20
3.3 Estimation de $D(x, y)$ et $\zeta(\alpha, y)$ lorsque y est borné	21
3.4 Une formule asymptotique pour $\zeta(\alpha, y)$	23
3.5 Fin de la démonstration de la Proposition 3.1	28
4 Raffinement d'un théorème de Tenenbaum et Wu	30
4.1 Introduction des notations et énoncé du résultat	30
4.2 Démonstration du Théorème 4.3	33
4.2.1 Résultats auxiliaires	34
4.2.2 Cas des fonctions exponentiellement multiplicatives	36
4.2.3 Preuve du Théorème 4.3	44
5 Minoration de $\mathfrak{S}(x, y)$ dans H_ε	48
5.1 Minoration de $\mathfrak{S}(x, y)$ dans le domaine \mathcal{D}_1	48
5.2 Minoration de $\mathfrak{S}(x, y)$ dans le domaine \mathcal{D}_2	52

6	Majoration de $\mathfrak{S}(x, y)$ dans H_ε	67
6.1	Résultat	67
6.2	Une première majoration de $\Psi_\Lambda(x, y)$	68
6.3	Démonstration de la Proposition 6.1	71
	Bibliographie	85
	Table des matières	88

Fonction d'Erdős-Hooley d'argument friable

Résumé

Introduite par Erdős en 1974, puis étudiée par Hooley en 1979, la fonction Δ est une fonction arithmétique qui mesure la concentration logarithmique de l'ensemble des diviseurs d'un entier. Elle est définie par la formule

$$\Delta(n) := \sup_{v \in \mathbb{R}} \sum_{\substack{d|n \\ v \leq \log d < v+1}} 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

L'encadrement de son ordre moyen et de son ordre normal ont fait l'objet d'une attention particulière dans la bibliographie, et certains articles très récents ont revisité le sujet. Dans ce travail, nous obtenons un encadrement de la valeur moyenne de Δ sur les entiers friables, autrement dit de la quantité

$$\frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in S(x, y)} \Delta(n),$$

où $S(x, y)$ désigne le nombre d'entiers n'excédant pas x et dont le plus grand facteur premier n'excède pas y , et $\Psi(x, y) = |S(x, y)|$.

Mots clés : entiers friables, fonction d'Erdős-Hooley, anatomie des nombres entiers

Abstract

Introduced by Erdős in 1974, and studied by Hooley in 1979, the Δ function is an arithmetic function measuring the logarithmic concentration of the set of divisors of an integer. It is defined by the formula

$$\Delta(n) := \sup_{v \in \mathbb{R}} \sum_{\substack{d|n \\ v \leq \log d < v+1}} 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Upper and lower estimates for both the normal and the average orders attracted definite attention in the bibliography, and some very recent article revisited the topic.

In this work, we obtain upper and lower bounds for the mean value of $\Delta(n)$ over friable integers, in other words we bound from above and below the quantity

$$\frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in S(x, y)} \Delta(n),$$

where $S(x, y)$ denotes the number of integers not exceeding x whose largest prime factor does not exceed y , and $\Psi(x, y) = |S(x, y)|$.

Keywords: friable integers, Erdős-Hooley's function, anatomy of integers
