



HAL
open science

Couplage partitionné fluide-structure à l'échelle locale avec grille mobile pour des transitoires non-linéaires

Antonin LEPREVOST

► **To cite this version:**

Antonin LEPREVOST. Couplage partitionné fluide-structure à l'échelle locale avec grille mobile pour des transitoires non-linéaires. Analyse numérique [cs.NA]. Université Paris-Saclay, 2024. Français. NNT : 2024UPAST053 . tel-04887175

HAL Id: tel-04887175

<https://theses.hal.science/tel-04887175v1>

Submitted on 14 Jan 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Couplage partitionné fluide-structure à
l'échelle locale avec grille mobile pour des
transitoires non-linéaires
Partitioned fluide-structure coupling at local scale with
moving grid for non-linear transients

Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n° 579, Sciences Mécaniques et Énergétiques,
Matériaux et Géosciences (SMEMaG)

Spécialité de doctorat : Mécanique des fluides
Graduate School : Sciences de l'ingénierie et des systèmes
Réfèrent : Ecole Normale Supérieure de Paris-Saclay

Thèse préparée dans l'unité de recherche de Service de Thermo-hydraulique et
de Mécanique des Fluides (Université Paris-Saclay, CEA), sous la direction de
Vincent FAUCHER, Directeur de recherche et l'encadrement de Maria Adelas
PUSCAS, Ingénieure de recherche

Thèse soutenue à Paris-Saclay, le 23 Avril 2024, par

Antonin LEPREVOST

Composition du jury

Membres du jury avec voix délibérative

Benoit PRABEL Directeur de recherche, CEA	Président
Laurent MONASSE Chargé de recherche, HDR, INRIA	Rapporteur
Bertrand LANGRAND Directeur de recherche, ONERA	Rapporteur
Julien FAVIER Professeur des universités, Aix-Marseille Univer- sité	Examineur

Titre : Couplage partitionné fluide structure avec grille mobile pour des transitoires non linéaires

Mots clés : Interaction Fluide-Structure ; Arbitrary Lagrange-Euler ; couplage partitionné.

Résumé : L'interaction fluide-structure est un domaine visant à comprendre les mécanismes d'interaction entre un fluide en mouvement ou au repos et les déplacements d'une structure flexible ou rigide. De tels phénomènes sont observés dans de nombreux domaines tels que la biomécanique avec l'écoulement sanguin ou dans le nucléaire lors de l'étude de la réponse vibratoire d'un assemblage de combustible soumis à une sollicitation accidentelle, par exemple lors d'un séisme.

Dans ce dernier exemple, on s'intéresse à l'interaction entre l'écoulement d'un fluide incompressible et la dynamique non-linéaire d'une structure élastique. Pour caractériser finement les couplages, compléter les expériences existantes et valider les modèles construits à l'échelle d'un assemblage et cœur de réacteur, des simulations à l'échelle locale sont nécessaires.

La thèse propose ainsi de mettre en œuvre un couplage partitionné à l'échelle locale entre deux solveurs spécifiques. Le premier solveur pour l'écoulement incompressible instationnaire, est le code *TrioCFD* du CEA. Le second solveur pour la dynamique non-linéaire des structures, est le code *Europlexus*, développé dans le cadre d'un consortium impliquant le CEA.

Dans la première partie de la thèse, nous avons proposé un nouvel algorithme pour améliorer l'efficacité de la résolution du problème de grille mobile dans le solveur fluide. La seconde partie s'est concentrée sur la mise en œuvre d'algorithmes de couplage entre les deux solveurs, dans le but de renforcer la robustesse et la performance de la résolution. Enfin, la validation numérique a été abordée en comparant les résultats obtenus par le couplage entre *TrioCFD* et *Europlexus* avec des références.

Title : Partitioned coupling for local scale fluid-structure interaction with moving grid for non-linear transients

Keywords : Fluid-Structure Interaction ; Arbitrary Lagrange-Euler ; partitioned coupling.

Abstract : Fluid-structure interaction is a field whose aim is to understand the interaction mechanism between a fluid either stationary or in movement and the movements of a flexible or rigid structure. Such phenomena are observed in various fields : in biomechanics with blood flow, or in nuclear science when examining the vibrational response of a fuel assembly subjected to accidental loading, for example, during an earthquake.

In the last example, the focus is on the interaction between the flow of an incompressible fluid and the nonlinear dynamics of an elongated structure. To finely characterize the couplings, supplement existing experiments, and validate the models developed for an assembly and reactor core simulations at the local scale are essential.

This thesis proposes to implement a partitioned coupling between two specific solvers at the lo-

cal scale. The first solver, used for non-stationary incompressible flow, is the Trio-CFD solver from the CEA. The second solver, used for the nonlinear dynamics of structures, is the EUROPLEXUS code, developed within the framework of a consortium involving the CEA.

The first part of the thesis proposes a new algorithm to enhance the efficiency of solving the moving grid problem within the fluid solver. The second part is focused on the implementation of various coupling algorithms between the two solvers with the aim of strengthening the robustness and performance of the resolution. The stability of these algorithms was specifically investigated. Finally, numerical validation was addressed through the comparison of results obtained in the coupling of TrioCFD and Europlexus with literature.

Remerciements

Avant d’entrer dans le vif du sujet, je souhaite exprimer ma gratitude envers toutes les personnes qui ont rendu cette thèse possible. Leur soutien et leurs encouragements ont été déterminants tout au long de ce parcours.

Je tiens d’abord à remercier sincèrement mon directeur de thèse, Vincent Faucher, pour toute son aide et son investissement durant ces années. Son encadrement m’a permis de me former à la recherche scientifique et de découvrir le monde académique, ce pour quoi je lui suis profondément reconnaissant. Ses conseils m’ont aussi beaucoup aidé à développer mes méthodes de travail, qui me serviront tout au long de ma vie professionnelle.

Je souhaite également remercier chaleureusement mon encadrante, Maria-Adela Puscas, pour son accompagnement quotidien. Sa patience et son soutien constant ont été une source de motivation et m’ont permis de mener à bien cette thèse.

Je remercie ensuite le jury de ma thèse : mes rapporteurs Bertrand Langrand et Laurent Monasse pour leur lecture avisée et leurs retours détaillés sur mon manuscrit, ainsi que mes examinateurs Benoit Prabel et Julien Favier. J’ai particulièrement apprécié la richesse des échanges avec les membres du jury et leur bienveillance.

Un grand merci aux membres du laboratoire de modélisation et simulation de mécanique des fluides du CEA de Saclay. En particulier, merci à ma cheffe de laboratoire, Julie Daron, pour son soutien et sa clairvoyance. J’ai adoré réaliser mes travaux de thèse dans cet environnement riche et avec des personnes bienveillantes. Parmi eux, je remercie tous les doctorants du laboratoire avec qui j’ai partagé cette expérience unique durant ces années de thèse. En particulier, mes collègues Clément, Andrew, Mathis et Gabriel pour avoir partagé nos bureaux et de longues pauses café.

Comme une thèse est plus qu’une aventure professionnelle, je tiens à remercier les personnes qui m’ont accompagné au cours de ces années. En premier lieu, mes parents, pour leur soutien. Mon père pour ses corrections sur mon manuscrit ainsi que ma mère pour toutes les longues discussions parfois trop philosophiques à mon goût.

Je remercie aussi mes amis du club d’aviron. La pratique de ce sport et les valeurs qu’il m’a inculquées ont été une partie intégrante de ma formation. Je suis fier d’avoir pu continuer la pratique en compétition de ce sport durant ma thèse et d’avoir obtenu des podiums aux championnats de France. C’est dans ce milieu que j’ai rencontré des amis aujourd’hui indispensables dans ma vie comme Théo,

Hugo et Jean, qui m'ont soutenu tout au long de cette aventure. Dans ce milieu, je remercie aussi Marie pour son soutien durant mes premières années.

Je souhaite également remercier mes amis de l'université, en particulier Félix, Lucas (les deux maintenant docteurs) et Briec, avec qui nous partageons beaucoup de passions et d'intérêts communs, et qui sont devenus des personnes indispensables dans ma vie. Sans oublier Thomas, Jacques et Antoine, avec qui nous partageons toujours les réunions hebdomadaires au bobun des Arts et Métiers depuis plus de huit ans.

Je tiens également à exprimer ma gratitude envers l'aventure Patatrack construite durant cette thèse avec des amis de l'université ainsi que d'autres que j'ai appris à connaître. Cette aventure m'a apporté beaucoup d'épanouissement et représente un très bel exemple de travail de groupe. J'espère pouvoir continuer à développer ce projet avec tous ses membres.

Enfin, je tiens à remercier les personnes plus éloignées de mes travaux de thèse, mais qui ont été présentes dans mon quotidien durant ces années : Lucrèce, Mathis, Mathias, Pauline, Alexandre, Nicolas, Saad.

Pour finir ces remerciements, je tiens à remercier Agathe pour son soutien apporté durant mes dernières années de thèse. Je suis épanoui d'être à tes côtés et je tiens à te remercier pour ton aide apportée dans cette thèse, mais aussi dans tous mes projets personnels. J'espère pouvoir faire de même pour toi et t'accompagner jusqu'à la fin de ta thèse.

Table des matières

Introduction et mise en contexte	9
1 Rappels de méthodes numériques pour fluides et structures en dynamique	23
1.1 Quelques éléments d'analyse fonctionnelle	23
1.2 Éléments finis mixtes pour le problème de Stokes	25
1.2.1 Formulation du problème de Stokes	25
1.2.2 Existence de solution pour le problème de Stokes	27
1.2.3 Restriction à des espaces de dimension finie	29
1.3 Méthode des volumes-éléments finis pour le problème de Stokes	31
1.3.1 Description des volumes de contrôle	31
1.3.2 Formulation conservative discrète	33
1.3.3 Correspondance avec les éléments finis mixtes	37
1.4 Extension aux équations de Navier-Stokes	38
1.4.1 Discrétisation de la masse et de l'opérateur de convection	39
1.4.2 Méthode de projection pour le schéma temporel	40
1.5 Éléments finis pour la dynamique des structures	40
1.5.1 Cinématique du solide et loi de comportement	41
1.5.2 Approximation par éléments finis	43
1.5.3 Discrétisation en temps	45
1.6 Conclusion	47
2 Développement et validation d'une méthode de mouvement de grille optimisée pour des simulations ALE	49
2.1 Méthodes des volumes-éléments finis pour les équations de Navier-Stokes sur grille mobile	49
2.1.1 Application ALE	49
2.1.2 Équation de Navier-Stokes en coordonnées ALE	50
2.1.3 Équation du mouvement de grille	51
2.2 Équation hyperbolique pour la résolution du mouvement de grille	52
2.2.1 Formulation du problème hyperbolique	52
2.2.2 Éléments finis pour l'équation hyperbolique	53
2.2.3 Discrétisation temporelle de l'équation hyperbolique	54

2.3	Caractérisation de l'influence des paramètres fictifs du mouvement de grille	56
2.3.1	Présentation d'un cas test pseudo 1D	56
2.3.2	Analyse de l'influence du coefficient d'amortissement	57
2.3.3	Analyse de l'influence de la densité et de rigidité	57
2.4	Cas test de Turek avec mouvement imposé	60
2.4.1	Présentation du cas test de Turek	60
2.4.2	Comparaison entre le mouvement de grille de l'équation elliptique et hyperbolique	61
2.5	Analyse des performance de la méthode sur un cas 3D	64
2.5.1	Présentation du cas test 3D	64
2.5.2	Analyse de performance de la résolution du problème de mouvement de grille	66
2.6	Conclusion	71
3	Développement et analyse des algorithmes de couplage entre <i>TrioCFD</i> et <i>Europlexus</i>	75
3.1	Stabilité des couplages fluide-structure	75
3.1.1	Domaines et condition de couplage	75
3.1.2	Énergie du système	78
3.1.3	Preuve de stabilité des couplages implicites	79
3.2	Formulation complète du couplage fluide-structure	88
3.2.1	Système fluide-structure et condition limite	88
3.2.2	Environnement logiciel de couplage	89
3.2.3	Algorithmes de couplage partitionnés	92
3.3	Mise en oeuvre des schémas de couplage explicite et implicite	93
3.3.1	Mise en oeuvre de l'algorithme explicite <i>ISS</i>	93
3.3.2	Évaluation du couplage explicite <i>ISS</i>	95
3.3.3	Mise en oeuvre de l'algorithme implicite de type Gauss-Seidel .	103
3.4	Analyse du couplage implicite	106
3.4.1	Comparaison et validation du couplage implicite	106
3.4.2	Limites du couplage implicite	108
3.4.3	Influence du coefficient de relaxation	110
3.5	Développement et analyse d'un schéma de sous-cyclage en temps . . .	112
3.5.1	Différentes échelles temporelles dans le couplage	112
3.5.2	Développement du schéma de sous-cyclage et analyse des performances	115
3.5.3	Analyse du sous-cyclage avec le couplage implicite	120
3.6	Conclusion	126
4	Benchmark et validation en IFS	129
4.1	Écoulement dans une cavité avec paroi défilante et membrane élastique	129
4.1.1	Présentation du cas test	129

TABLE DES MATIÈRES

4.1.2	Analyse des résultats	130
4.2	Cas test de Mok	137
4.2.1	Présentation du cas test et utilisation de <i>Kratos</i>	137
4.2.2	Comparaison avec <i>Kratos</i>	138
4.3	Lâché d'une poutre dans une géométrie d'assemblage simplifiée	142
4.3.1	Géométrie des domaines et mouvement de lâché	142
4.3.2	Écoulement autour du lâché	144
	Conclusion et perspectives	153
	Bibliographie	165

Introduction et mise en contexte

Introduction du sujet

L'interaction fluide-structure est une discipline scientifique intervenant dans de nombreux domaines. Parmi eux et sans exhaustivité, on peut mentionner la biomécanique, par exemple, lors de la contraction des vaisseaux sanguins. L'aéronautique peut aussi être citée, lorsque les ailes d'un avion se mettent à vibrer sous l'action des forces aérodynamiques. Le secteur de l'énergie est également concerné, que ce soit avec les éoliennes ou les centrales nucléaires. Dans une centrale nucléaire, les phénomènes d'interaction fluide-structure se manifestent à différentes échelles et en divers endroits. Un exemple est le générateur de vapeur, où l'écoulement d'eau et de vapeur engendre des vibrations sur les tubes, susceptibles d'entraîner de l'usure et de la fatigue. De même, dans les cœurs de réacteur, une situation d'intérêt majeur réside dans l'étude de la réponse vibratoire d'un assemblage de combustible soumis à une sollicitation accidentelle, par exemple lors d'un séisme. Ces vibrations peuvent entraîner des collisions entre les assemblages, pouvant potentiellement conduire à leur endommagement. L'écoulement du fluide joue alors un rôle crucial, avec un effort au premier ordre sur les forces d'impacts effectives entre les structures immergées.

Dans ce dernier exemple, on s'intéresse à l'interaction entre deux systèmes distincts. Le premier système décrit l'écoulement d'un fluide incompressible, et le second la dynamique non-linéaire d'une structure élancée. Ces deux systèmes évoluent conjointement et s'influencent mutuellement à travers une interface, on parle alors de couplage. Des études expérimentales ainsi que des modèles à l'échelle d'un assemblage et cœur de réacteur (longueur caractéristique de quelques centimètres) ont été mise en œuvre afin d'étudier l'interaction entre les vibrations d'un assemblage et l'écoulement d'un fluide. Cependant, pour caractériser finement tous les mécanismes, ces études doivent être complétées par des simulations à l'échelle locale (longueur caractéristique inférieure au millimètre) rendues accessibles par l'augmentation de la puissance des calculateurs.

La simulation numérique d'un couplage fluide-structure peut être abordée de deux manières différentes. D'une part, dans les couplages dits monolithiques, les équations sont traitées dans un cadre mathématique unique et résolues par un solveur unique. D'autre part, dans les couplages dits partitionnés, les équations sont considérées comme des sous-systèmes et sont résolues par des solveurs spécifiques

qui s'échangent de l'information à travers une interface de couplage. L'approche partitionnée, connue pour apporter une plus grande flexibilité et une meilleure performance, est choisie dans cette thèse. Le couplage met en œuvre une approche ALE (pour Arbitrary Lagrange Euler) avec une grille mobile pour le fluide afin de prendre en compte le mouvement des bords qui suivent le déplacement de la structure.

En termes d'outils numériques pour ce travail, les solveurs *TrioCFD* et *Europlexus* sont deux codes dédiés à la modélisation respective des problèmes fluide et structure. *TrioCFD* est un code open source, développé par le CEA orienté objet et massivement parallèle. Il est conçu pour simuler des écoulements incompressibles sur des géométries complexes, principalement dans le domaine des applications nucléaires. De son côté *Europlexus*, développé dans le cadre d'un consortium impliquant le CEA, est un logiciel de simulation spécialisé dans l'analyse des phénomènes à transitoires rapides, impliquant des structures et des fluides compressibles. Il est utilisé pour étudier des phénomènes fortement non-linéaires tels que les chocs ou les explosions. Les champs d'application de ces deux codes en font des candidats pertinents pour l'étude des phénomènes d'interaction fluide-structure dans le contexte proposé. Finalement, cette thèse vise à mettre en œuvre et analyser un couplage entre *TrioCFD* et le solveur structure non-linéaire d'*Europlexus*. Ce couplage, permettra l'étude des transitoires non-linéaires impliquant un fluide incompressible avec une structure en mouvement.

Après cette introduction, une revue de la littérature fluide-structure sera élaborée. Le contexte des assemblages de combustible sera présenté comme point de départ, mettant en avant certaines expériences visant à comprendre les interactions entre les vibrations d'un assemblage et l'écoulement d'un fluide. Une comparaison entre les méthodes de couplage monolithique et partitionné sera détaillée, dans le but d'expliquer le choix du couplage partitionné pour cette thèse. Nous expliquerons ensuite les avantages et les inconvénients des algorithmes explicites et implicites de couplage, ainsi que leurs effets sur la stabilité du couplage. Enfin, nous explorerons les problèmes de performance auxquels un couplage partitionné peut être confronté en raison des différentes échelles temporelles, et nous présenterons les cas tests les plus connus en interaction fluide-structure.

Après un premier chapitre visant à expliquer et à détailler les méthodes numériques des deux solveurs, l'objectif du deuxième chapitre sera de développer et de valider une méthode de mouvement de grille. Cette méthode permettra de réduire le temps de calcul de la mise à jour du maillage dans *TrioCFD*. Pour cela, l'idée sera de transformer l'équation elliptique utilisée au démarrage de la thèse, nécessitant la résolution d'un système linéaire spécifique pour déterminer la vitesse de grille, en une équation hyperbolique. Cette transformation permettra d'utiliser un schéma temporel explicite sans résolution de système et plus efficace pour les problèmes de grandes tailles. Un second objectif sera alors de comprendre l'influence des différents paramètres du nouveau schéma. Enfin, une étude comparative du coût de calcul sera réalisée entre l'équation elliptique d'origine et l'équation hyperbolique.

Après avoir obtenu un mouvement de grille optimisé, l'objectif du troisième chapitre sera de développer et d'analyser les algorithmes de couplage temporel entre *TrioCFD* et *Europlexus*. Dans la première partie de ce chapitre, une preuve de stabilité sur des équations simplifiées couplées implicitement sera établie en utilisant la discrétisation temporelle des deux solveurs. Dans les parties deux à quatre, l'objectif sera de présenter et d'analyser les différents algorithmes temporels de couplage mis en place entre *TrioCFD* et *Europlexus*. Pour cela, la stabilité et les performances des couplages explicites et implicites seront étudiées et comparées à travers un cas test connu et exigeant de la littérature. Enfin, dans la dernière partie de ce chapitre, nous traiterons les problèmes de performance liés à la présence, dans le système fluide-structure, de deux échelles temporelles. Afin d'y remédier, un algorithme de sous-cyclage temporel sera mis en oeuvre et étudié pour améliorer les performances de coûts de calcul.

Dans le dernier chapitre, nous aborderons la question de la validation du couplage. Nous présenterons une première validation numérique du couplage *TrioCFD* et *Europlexus* avec les différentes méthodes de couplage établies dans le chapitre précédent. À travers deux cas tests, nous comparerons nos résultats de simulations avec ceux de la littérature. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous mettrons en place un cas test démonstratif dans une géométrie simplifiée d'assemblage de combustible. Ce cas test sera simulé en parallèle avec plusieurs millions d'éléments, ouvrant ainsi la voie à des études physiques sur des applications nucléaires.

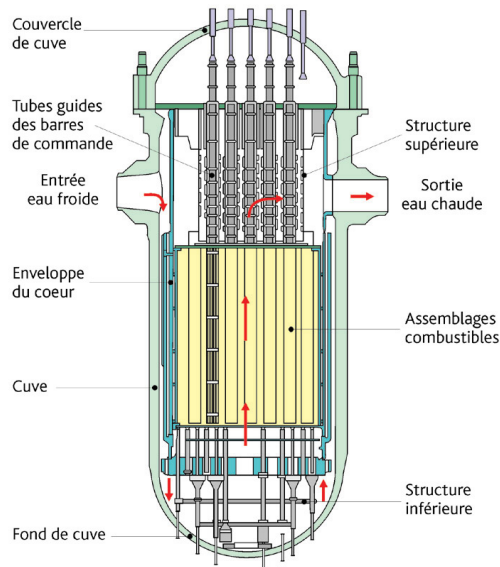


FIGURE 1 – Écoulement schématique de l'eau du circuit primaire dans une cuve REP.

État de l'art

Intéraction fluide-structure, le contexte des réacteurs nucléaire

Les réacteurs à eau pressurisée (REP) sont les réacteurs nucléaires les plus couramment utilisés dans le monde. La cuve des REP contient des assemblages de combustible où réside la matière fissile. En France, les REP sont équipés d'environ 200 assemblages de combustible. Dans la figure 1, nous pouvons observer le trajet en rouge de l'écoulement de l'eau à l'intérieur du circuit primaire. Cette eau descend jusqu'au fond de la cuve, puis remonte de manière axiale le long des assemblages, récupérant ainsi l'énergie thermique générée.

Un assemblage de combustible est constitué de 264 crayons renfermant des pastilles d'uranium. Ces crayons sont disposés selon un réseau carré, maintenus en place par plusieurs grilles situées à différents niveaux de l'assemblage. La figure 2 offre une vue éclatée détaillée d'un assemblage de combustible.

Dans l'article ([Borsoi, 2000](#)), l'auteur a cherché à présenter de manière accessible divers problèmes d'interaction fluide-structure qui peuvent survenir dans un réacteur nucléaire lors d'incidents ou d'accidents. Parmi les exemples abordés, l'une des situations particulièrement pertinente pour cette thèse concerne les vibrations des assemblages de combustible induites par un séisme. Ces vibrations peuvent entraîner des chocs entre les assemblages pouvant potentiellement conduire à leurs endommagements.

Pour prévenir de tels scénarios, il est impératif d'identifier les forces exercées

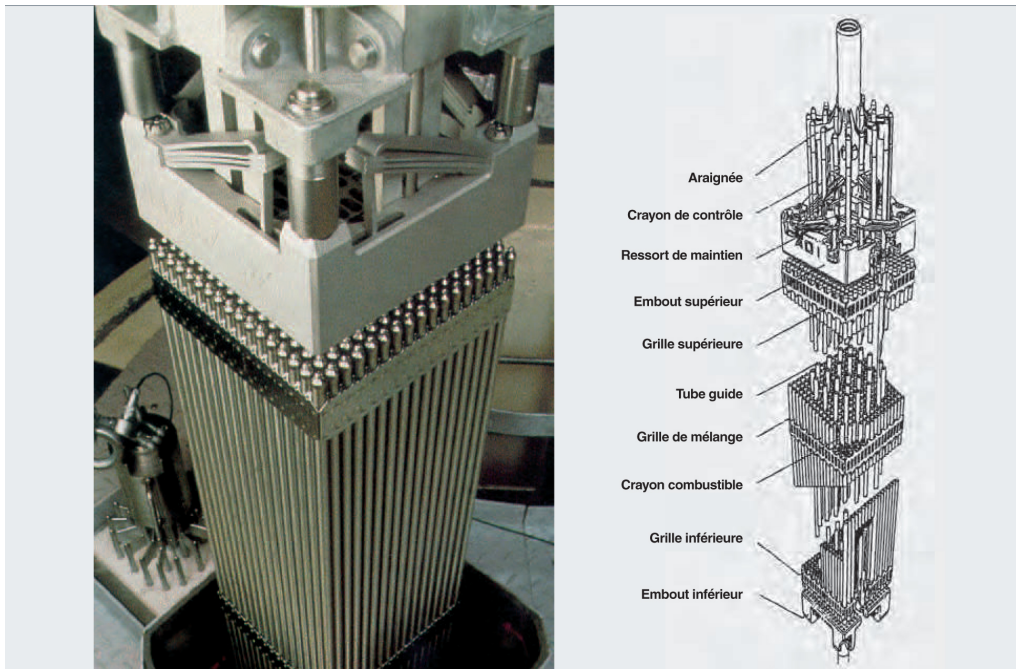


FIGURE 2 – Vue éclatée d’un assemblage combustible.

par le fluide sur un assemblage et d’examiner les effets de l’écoulement d’un fluide dense autour des assemblages en vibration. Sans entrer dans les détails spécifiques, plusieurs études expérimentales ont été menées pour mieux comprendre ces phénomènes. Dans l’étude de (Queval *et al.*, 2001), le CEA, EDF et FRAMATOME ont réalisé des essais sur une rangée de six assemblages soumis à des vibrations. Les simulations ont été effectuées dans un environnement confiné comprenant de l’eau et de l’air. Par la suite, ces résultats ont été comparés par les mêmes auteurs à un modèle numérique dans l’article (Viallet *et al.*, 2003).

Dans l’article (Ricciardi *et al.*, 2010), des essais ont été entrepris pour identifier les forces fluides agissant sur un carré de 3 par 3 d’assemblages de combustible en vibration soumis à un écoulement axial. La géométrie de l’assemblage est visible dans la figure 3. Dans l’étude (Ricciardi, 2016), le même auteur, a utilisé une autre expérience, le dispositif *HERMES T*, pour valider un modèle de milieu poreux prenant en compte l’écoulement du fluide dans l’assemblage de combustible.

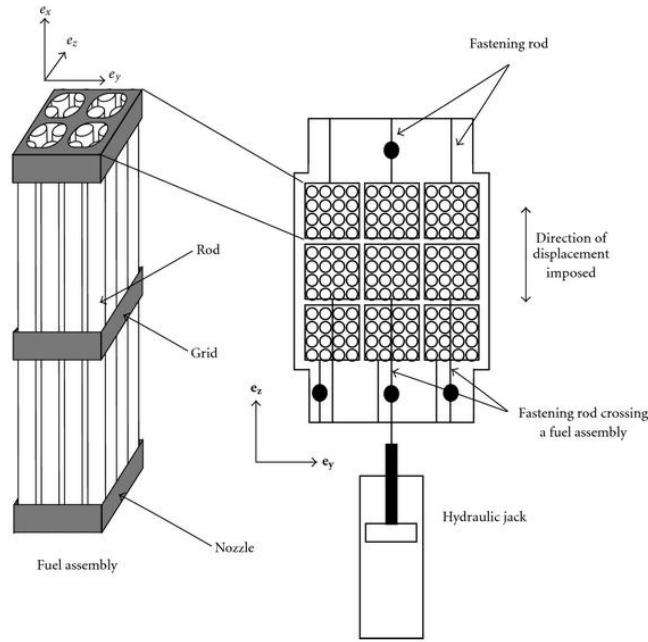


FIGURE 3 – Disposition des assemblages dans (Ricciardi *et al.*, 2010).

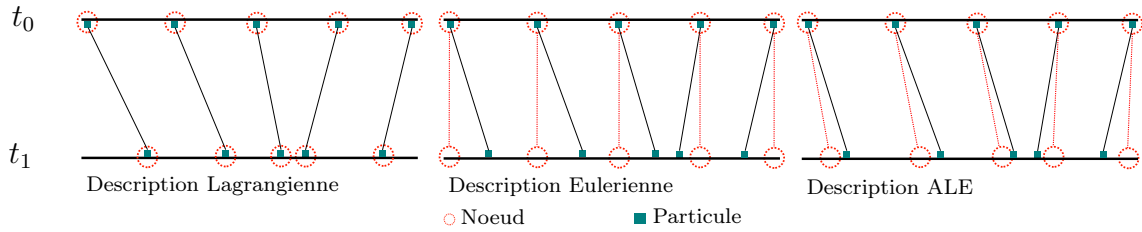


FIGURE 4 – Schéma des descriptions lagrangienne, eulerienne et ALE

Modélisation des problèmes d'interaction fluide-structure

Pour une compréhension exhaustive des problèmes fluide-structure, il est nécessaire de compléter les recherches expérimentales par des modélisations et des simulations numériques des phénomènes impliqués.

Pour modéliser les problèmes d'interaction fluide-structure dans notre situation d'intérêt, nous devons disposer d'un cadre théorique spécifique pour chaque domaine physique. Du côté du fluide, cela implique la modélisation d'un écoulement incompressible, tandis que du côté de la structure, il s'agit d'une dynamique à transitoire rapide. Les deux physiques sont fortement non-linéaires. Elles sont couplées à travers l'interface en utilisant des conditions limites d'équilibre. Dans l'article (Grandmont *et Maday*, 1998), les auteurs se sont penchés sur la démonstration de l'existence locale en fonction du temps d'une solution pour un problème couplé impliquant un fluide incompressible et une structure rigide en mouvement.

La modélisation de l'écoulement d'un fluide sans interaction avec un solide est généralement réalisée avec une approche eulérienne. Ce principe implique d'observer, depuis une position fixe, la vitesse de déplacement du fluide, ce qui entraîne la modélisation des équations sur une grille fixe. En revanche, pour les problèmes structures, l'approche lagrangienne est couramment utilisée. Elle implique d'observer le déplacement de chaque particule en déplaçant la position d'observation avec la particule elle-même, entraînant ainsi une déformation du maillage au cours de la simulation. Des détails de ces deux méthodes dans le cadre de l'interaction fluide-structure sont donnés par exemple dans (Donea *et al.*, 2004) et (Murea, 2017). Enfin on représente schématiquement dans les deux premières figures de la figure 4 les descriptions eulérienne et lagrangienne.

Afin de modéliser un problème d'interaction fluide-structure, il est nécessaire que la grille fluide, habituellement fixe, prenne en compte le déplacement de la frontière fluide-structure résultant du mouvement de la structure. Plusieurs modélisations existent pour prendre en compte le mouvement d'une frontière, parmi lesquelles l'approche Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE). Cette approche consiste à utiliser de manière arbitraire une description lagrangienne à proximité du solide en mouvement et une description eulérienne loin de l'interface. Nous adopterons cette approche dans le cadre de cette thèse. Les trois descriptions sont représentées dans la figure 4.

Une explication détaillée de la méthode ALE est disponible dans les travaux de (Donea *et al.*, 1982) et (Donea *et al.*, 2004). L'efficacité de la méthode ALE a été examinée, par exemple, dans (Duarte *et al.*, 2004) à travers trois cas de test, démontrant une bonne concordance entre les résultats de la méthode ALE et ceux obtenus par des essais expérimentaux. Nous pouvons également citer les travaux de (Siemann et Langrand, 2017) pour une comparaison de la méthode ALE dans le cadre de l'aéronautique, plus spécifiquement lors d'amerrissage.

Il est également envisageable pour la grille fluide de prendre en compte les frontières en mouvement tout en conservant la description eulérienne. Une catégorie de ces méthodes, connue sous le nom de "frontière immergée", a été développée par Peskin (Peskin, 1972). Des détails approfondis sur cette méthode sont disponibles dans les travaux de (Peskin, 2002) et (Pinelli *et al.*, 2010). Plusieurs études ont modélisé des problèmes d'interaction fluide-structure en utilisant des frontières immergées pour le fluide, comme illustrées dans les travaux de (Puscas *et al.*, 2015a) et (Puscas et Monasse, 2015).

Méthode de couplage pour la simulation en IFS

Dans notre situation d'intérêt, la simulation numérique des phénomènes d'interaction fluide-structure nécessite la mise en place d'un couplage entre l'écoulement d'un fluide incompressible et la dynamique d'une structure. Deux approches principales sont utilisées pour coupler ces problèmes : l'approche monolithique et

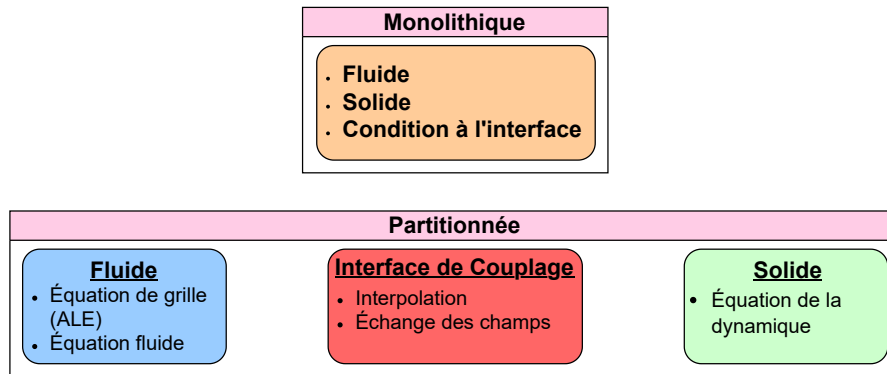


FIGURE 5 – Représentation schématique d'un couplage monolithique et d'un couplage partitionné.

l'approche partitionnée.

1. **Approche monolithique** : Dans cette approche, les équations sont traitées dans un cadre mathématique unique, ce qui conduit à un système d'équation global regroupant les matrices du problème fluide et du problème de structure. Nous pouvons citer par exemple deux études utilisant un couplage monolithique pour la mise en place d'un couplage fluide-structure (Hübner *et al.*, 2004) et (Ryzhakov *et al.*, 2010).

Cette approche est connue pour offrir une meilleure précision et une stabilité inconditionnelle. Par exemple, dans l'étude (Michler *et al.*, 2004), l'auteur compare le couplage monolithique et le couplage partitionné en utilisant un cas test 1D non linéaire. Les comparaisons portant sur les quantités physiques ainsi qu'une étude du maillage mettent en évidence la robustesse du couplage monolithique par rapport à son homologue partitionné dans ce cas spécifique. De plus, la comparaison entre la méthode partitionnée et la méthode monolithique peut être complétée par l'étude de (Ha *et al.*, 2017), où l'auteur démontre que, pour le cas test considéré, l'approche monolithique présente une meilleure convergence et une consommation de temps CPU moindre.

Cependant, il est important de noter que l'approche monolithique, bien que robuste, s'avère souvent difficile à mettre en œuvre en pratique, car les équations du fluide et de la structure doivent être résolues au sein d'un même solveur. Cette complexité découle du fait que les formalismes utilisés pour modéliser le fluide et la structure sont généralement différents, entraînant des discrétisations spécifiques pour le fluide et la structure. De plus, les disparités entre les échelles temporelles et spatiales, ainsi que les fortes non-linéarités, peuvent conduire à la création de matrices mal conditionnées.

Ces considérations mettent en lumière le fait que, dans notre cas, l'approche monolithique n'est pas adaptée aux simulations des problèmes fluide-structure à des fins industrielles. Cela nous oriente ainsi vers la deuxième approche, qui

sera adoptée dans le cadre de cette thèse.

2. **Approche partitionnée** : Dans cette approche, les équations sont traitées comme des sous-systèmes résolus à chaque pas de temps, et les conditions aux limites à l'interface de chaque système sont échangées tout au long de la simulation. Une analyse approfondie des méthodes partitionnées a été présentée dans l'état de l'art exhaustif de (Degroote, 2013). De plus, plusieurs études complémentaires ont utilisé des couplages partitionnés pour modéliser des phénomènes physiques complexes.

Par exemple, dans le contexte de la simulation du système cardio-vasculaire, on peut citer les articles suivants : (van Zuijlen *et al.*, 2007), (Vierendeels *et al.*, 2008), (Guidoboni *et al.*, 2009), ainsi que les thèses : (Fernández, 2001), (Valdés Vázquez, 2007), (Astorino, 2010). Des exemples de couplages partitionnés ont également été utilisés pour simuler des problèmes d'aéroélasticité (Piperno et Farhat, 2001), (Farhat *et al.*, 2006), (Monasse *et al.*, 2012), (Liu *et al.*, 2022). Ces articles peuvent également être complétés par des thèses telles que (Piperno, 1995) et (Nobile, 2001).

L'approche partitionnée permet d'utiliser des méthodes numériques spécifiques à chaque domaine physique permettant d'offrir une plus grande flexibilité pour traiter la physique du fluide ou de la structure. De plus, certaines méthodes de couplage partitionné avancées permettent d'approcher les performances du couplage monolithique. Par exemple, dans (Degroote *et al.*, 2009), l'auteur compare les performances d'un couplage partitionné amélioré à un couplage monolithique à travers cinq cas tests. Les conclusions de l'auteur sont nuancées et ne déterminent pas clairement quelle approche offre les meilleures performances.

Cependant, cette approche peut introduire des erreurs sur les champs à l'interface, principalement en raison du fait que les sous-systèmes ne sont jamais résolus simultanément. De plus, les maillages ainsi que la position des inconnues peuvent différer à l'interface entre le fluide et le solide. Cela implique l'utilisation de méthodes d'interpolation robustes pour que les inconnus des champs échangés coïncident. Une difficulté supplémentaire survient lorsque les maillages ne sont pas concordants. Dans (de Boer *et al.*, 2007), l'auteur présente différentes méthodes pour coupler des solveurs fluide-structure dans le cas où les maillages ne sont pas concordants. Enfin, les pas de temps entre le fluide et la structure peuvent différer, ce qui peut avoir un impact significatif sur les performances de la simulation. Malgré ces inconvénients, l'approche partitionnée, en raison de sa flexibilité et du fait qu'elle considère le fluide et le solide comme des boîtes noires, est plus adaptée à la résolution de problèmes industriels. De plus, les problèmes générés par cette méthode peuvent être limités en améliorant la robustesse du couplage.

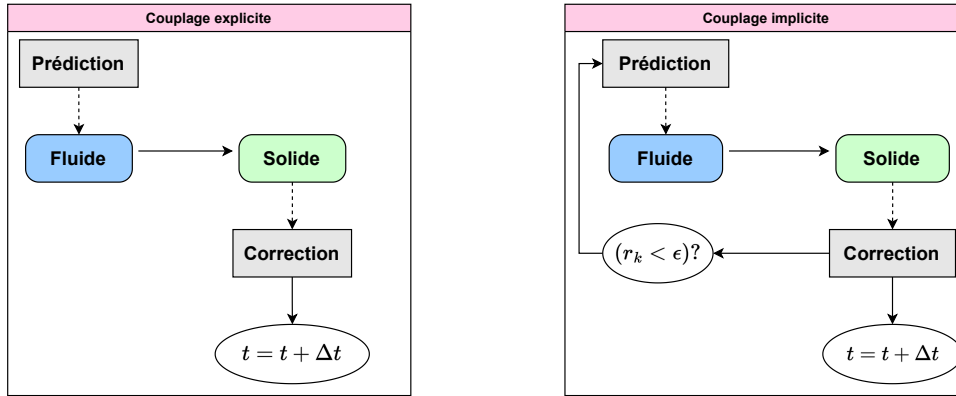


FIGURE 6 – Représentation schématique d’un couplage explicite et implicite. L’étape de prédiction et de correction en grises sont optionnelles.

Algorithme des couplages partitionnés

Couplage explicite et implicite

Les problèmes majeurs des couplages partitionnés résident dans les erreurs à l’interface, dues au fait que les systèmes ne sont pas résolus simultanément. Cette situation peut entraîner une perturbation significative de la stabilité du couplage, principalement en raison de l’effet de masse ajoutée. La masse ajoutée est une conséquence de la poussée exercée par le fluide sur la surface de la structure en mouvement. Cette poussée crée une résistance supplémentaire, donnant ainsi l’impression que la structure a une masse apparente plus élevée que sa masse réelle lorsqu’elle se déplace à travers le fluide. Les études (Badia *et al.*, 2008) et (Idelsohn *et al.*, 2009) se sont penchées sur l’effet de la masse ajoutée sur des couplages partitionnés dans le cas d’écoulements incompressibles.

Dans l’article (Causin *et al.*, 2005), l’auteur propose une explication mathématique de l’effet de masse ajoutée, mettant en évidence les instabilités numériques qui surviennent lors de simulations en interaction fluide-structure. Cette étude établit une condition de stabilité liée notamment aux densités du fluide et de la structure, montrant que le couplage explicite de l’étude est inconditionnellement instable lorsque la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{\rho_s \epsilon}{\rho_f \lambda} < 1. \quad (1)$$

Où λ et ϵ sont des quantités purement géométriques. Cette condition montre que pour une géométrie donnée, la stabilité du couplage est perturbée lorsque l’effet de la masse ajoutée est importante, ce qui peut se traduire par des densités proches entre le fluide et la structure.

Afin de réduire les instabilités, il est possible d’améliorer l’algorithme de couplage entre le fluide et le solide. Dans les couplages partitionnés, on distingue deux types de

couplage : les couplages explicites ou faiblement couplés, et les couplages implicites ou fortement couplés. Dans l'article (Fernández, 2011), l'auteur présente un état de l'art des algorithmes de couplage. On représente schématiquement un couplage explicite et implicite dans la figure 6. Les spécificités des couplages explicites et implicites sont résumées dans les points suivants :

1. **Couplage explicite** : Dans ce type de couplage, un décalage en temps est présent entre les deux solveurs. Le niveau le plus faible de couplage est obtenu avec un décalage d'un pas de temps entier, ce couplage est appelé *Conventional Serial Staggered scheme* (CSS). Cependant, on peut améliorer ce décalage en temps en utilisant des méthodes de prédiction-corrrection qui permettent de faire avancer les solveurs avec un champ prédit commun. Ce couplage est appelé *Improved Serial Staggered scheme* (ISS). Il a été initialement proposé dans (Lesoinne et Farhat, 1998) puis analysé et comparé en détail dans (Piperno et Farhat, 2001). D'autres études, portant sur la simulation du système cardiovasculaire par exemple, utilisent également une méthode de prédiction-corrrection par exemple dans (Guidoboni et al., 2009) et (Fernández et Mullaert, 2011). Enfin, un schéma de couplage avec une intégration temporelle d'ordre plus élevée a été étudié dans les travaux de (van Zuijlen et Bijl, 2005) et (van Zuijlen et al., 2007). Dans ces études, les équations fluides et structures sont intégrées avec un schéma de Runge-Kutta implicite.

Une autre façon d'améliorer la robustesse des couplages explicites est de modifier la forme variationnelle des équations du fluide en introduisant un terme de pénalisation. Cette classe de méthode est basée sur la méthode Nitsche (Hansbo et al., 2004). Le principe de Nitsche permet d'imposer faiblement la condition limite de Dirichlet sur l'interface fluide-structure. Cela permet de stabiliser le schéma en introduisant un terme de pénalité dans la formulation du problème fluide. Dans les travaux de (Burman et Fernández, 2007) et (Burman et Fernández, 2009), les auteurs développent cette méthode et comparent les performances aux schémas de couplage classiques.

2. **Couplage implicite** : Dans les couplages implicites, l'algorithme impose l'équilibre des champs à l'interface fluide-structure à chaque pas de temps. Cet équilibre peut être atteint en utilisant des sous-itérations entre le solveur fluide et le solveur structure avec des méthodes de type Jacobi ou Gauss-Seidel, comme décrit dans les travaux de (Küttler et Wall, 2008) et (Kassiotis et al., 2011). Il est également possible d'employer des itérations de Newton-Raphson, comme dans les études suivantes : (Gerbeau et Vidrascu, 2003), (Van Brummelen et De Borst, 2005), (Bogaers et al., 2014). Les techniques de Newton-Raphson ont généralement une convergence plus rapide, mais elles posent souvent des défis pour obtenir le jacobien du système fluide-structure nécessaire aux itérations, en particulier lorsque le solveur fluide et celui de la structure sont considérés comme des boîtes noires.

Les couplages implicites de type Gauss-Seidel sont donc plus adaptés à cette

thèse. Ils sont plus robustes que les couplages explicites, sont très adaptés lorsque les solveurs sont considérés comme des boîtes noires et permettent de ne plus être sous la contrainte (1), même en présence d'un fort effet de masse ajoutée. Cependant, cette méthode peut souffrir d'un nombre d'itérations implicites élevées pour converger, ce qui peut affecter les performances du couplage. Pour accélérer la convergence, la méthode de relaxation d'Aitken, décrite dans (Irons et Tuck, 1969), peut être utilisée.

Dans les couplages implicites, une partie de l'algorithme peut être mis sous forme explicite, le couplage est alors semi-implicite. Par exemple, dans (Fernández *et al.*, 2007), l'auteur développe un nouvel algorithme de couplage qui rend explicite la phase de prédiction ainsi que la mise à jour du domaine, tout en maintenant la partie correction de l'algorithme implicite. Une approche similaire est utilisée dans les travaux de (Naseri *et al.*, 2018) et (Puscas *et al.*, 2015b).

Méthode de sous-cyclage

Une autre problématique liée aux performances des couplages partitionnés réside dans la limitation de l'utilisation d'un pas de temps commun pour les deux solveurs. En effet, dans certaines situations, les pas de temps des deux domaines peuvent différer considérablement, ce qui contraint le solveur ayant le pas de temps le plus grand. De plus, la discrétisation temporelle peut être explicite pour l'un des solveurs et implicite pour l'autre. Par exemple, dans notre cas d'intérêt, lors de l'étude d'une structure à dynamique rapide couplée à un écoulement incompressible laminaire, il est courant d'utiliser un solveur solide explicite, ce qui limite généralement le solveur fluide qui est généralement implicite. L'étude d'une structure à dynamique rapide couplée à un fluide intervient aussi dans d'autres phénomènes tel que l'impact d'un avion sur le fluide lors d'un amerrissage (Goron *et al.*, 2023).

Afin de limiter la perte de performance due à la disparité des deux échelles temporelles, une approche consiste à utiliser deux pas de temps différents pour le fluide et la structure. Le but étant de réaliser des sous-itérations temporelles avec le solveur ayant le pas de temps le plus petit. Cette technique de sous-cyclage temporel trouve ses origines dans les problèmes de décomposition de domaine en mécanique des structures, comme illustré dans les travaux de référence tels que (Belytschko *et al.*, 1979), (Liu et Belytschko, 1982), (Smolinski *et al.*, 1988). Dans ces approches, différents schémas temporels sont utilisés au sein d'un même domaine, et un déplacement constant est imposé dans le sous-cyclage temporel du domaine avec le pas de temps le plus restreint. Dans (Daniel, 1997), l'auteur utilise une accélération constante dans les sous-itérations temporelles. Il montre aussi que cette nouvelle méthode est plus précise.

En interaction fluide-structure, deux types de méthodes sont couramment utilisées pour mettre en œuvre un sous-cyclage (Piperno, 1997) (Braun et Awruch, 2009), (De Moerloose *et al.*, 2019). On peut utiliser un champ constant dans le sous-cyclage

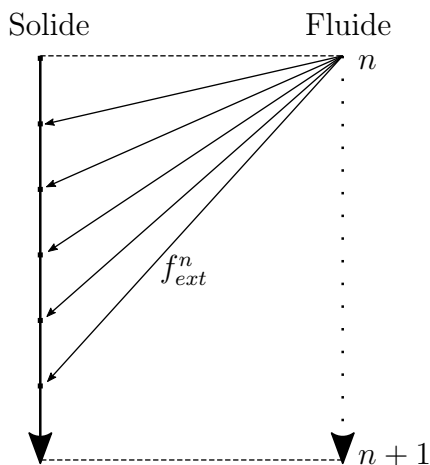


FIGURE 7 – Exemple d’un sous-cyclage lorsque le pas de temps du solveur solide est plus petit que celui du fluide. La méthode schématisée consiste à envoyer des forces fluides constantes pendant les sous-cycles.

du solveur concerné venant du dernier pas de temps commun, cette méthode est la plus courante. Il est aussi possible de prédire un champ qui sera ensuite utilisé dans les sous-itérations. Dans le cadre de cette thèse, le champ constant a été choisi en raison de sa simplicité d’implémentation, ainsi que de la précision et de la stabilité qu’il offre lorsque le nombre de sous-cycles reste raisonnable.

Cas de validation en IFS

L’un des premiers cas test en interaction fluide-structure est référencé avant les années 2000 (Ghaffas et Li, 1995). Il s’agit d’une simulation numérique représentant un écoulement autour d’un cylindre élastique. La déformation du cylindre est étudiée avec des paramètres de rigidités différents pour le cylindre. Peu de données comparatives sont disponibles, et peu d’études l’utilisent aujourd’hui comme référence. Dans la même géométrie, certaines études se sont intéressées à l’étude des vortex provoqués par l’oscillation d’un cylindre (flexible ou rigide) dans un écoulement par exemple dans les travaux de (Lu et Dalton, 1996) et (Evangelinos et Karniadakis, 1999).

Au début des années 2000, deux cas tests numériques, aujourd’hui très connus et référencés, sont présentés à l’origine dans les articles (Wall et al., 2000) et (Mok et al., 2001). Ces cas tests numériques sont encore largement utilisés aujourd’hui pour la validation. Ils seront étudiés dans cette thèse. Le premier est dérivé d’un cas référence en mécanique des fluides (Bozeman et Dalton, 1973). Il s’agit d’un écoulement induit par une paroi défilante dans une cavité. Une des frontières du domaine est transformée en membrane très flexible, et l’écoulement du fluide provoque des oscillations de cette membrane. Dans le second cas, il s’agit d’un écoulement transverse dans un canal à travers une poutre flexible. Ce cas test est largement

utilisé pour tester la robustesse des algorithmes de couplage en raison de son effet de masse ajoutée important. Pour ces deux cas tests, des résultats de simulations sont disponibles et serviront de référence (Vázquez, 2007).

Le cas le plus largement utilisé et référencé en interaction fluide-structure est celui de Turek (Turek et Hron, 2006). Il s'agit d'un écoulement dans un canal le long d'une languette très élastique attachée à un cylindre. L'écoulement du fluide provoque alors des oscillations de la languette. Les oscillations de la languette ainsi que les forces fluides sur la poutre sont utilisées comme références. Des résultats numériques ont été comparés à des résultats expérimentaux dans (Gomes *et al.*, 2011). Ce cas test a également été étudié en régime turbulent dans (De Nayer *et al.*, 2014).

D'autres études regroupent également plusieurs benchmarks d'interaction fluide-structure. Dans (Bathe et Ledezma, 2007), l'auteur propose plusieurs cas tests visant chacun à valider un aspect spécifique d'un couplage fluide-structure, tels que l'interpolation, le mouvement de la grille et la masse ajoutée. Dans (Zorrilla *et al.*, 2020), les principaux benchmarks en interaction fluide-structure sont regroupés. Des cas tests étudiant l'interaction entre des écoulements turbulents et une structure ont également été introduits dans les travaux suivants : (Kalmbach *et al.*, 2013), (Hessenthaler *et al.*, 2017), (Vivaldi et Ricciardi, 2022). Enfin, dans le domaine de l'écoulement sanguin, différents cas tests ont été proposés afin d'étudier la pulsation du sang dans une artère, par exemple dans les travaux de (Gerbeau *et al.*, 2005) et (Formaggia *et al.*, 2001).

Chapitre 1

Rappels de méthodes numériques pour fluides et structures en dynamique

Dans ce premier chapitre, nous présentons les équations régissant l'écoulement d'un fluide, ainsi que la dynamique d'un solide. Ces équations sont abordées à travers deux descriptions différentes : la description eulerienne pour le fluide et la description lagrangienne pour la structure. Par la suite, nous procédons à la discrétisation de ces équations à l'aide des méthodes du solveur *TrioCFD* pour le fluide et de *Europlexus* pour la structure. La partie solide est discrétisée en utilisant la méthode classique des éléments finis, tandis que la partie fluide requiert une approche plus spécifique basée sur une discrétisation en volumes-éléments finis. Nous référençons quelques sources qui ont inspiré la construction de ce chapitre, telles que (Murea, 2017), (Chabannes, 2013), (Temam et Miranville, 2002), (Brezzi et Fortin, 1991), (Brézis, 2005) et (Oñate, 2009).

1.1 Quelques éléments d'analyse fonctionnelle

Dans cette première partie, nous rappelons quelques théorèmes qui seront utilisés par la suite. On suppose connues les définitions et les principales propriétés des espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ et de Sobolev $H^p(\Omega)$ pour $p \in \mathbb{N}$. On note les produits

scalaires et normes de $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ par :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in (L^2(\Omega))^n, (\mathbf{p}, \mathbf{q})_{L^2} &= \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \, d\mathbf{x}, \\ \|\mathbf{p}\|_{L^2} &= \sqrt{(\mathbf{p}, \mathbf{p})_{L^2}}, \\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^n, (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^1} &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ \|\mathbf{u}\|_{H^1} &= \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{H^1}}. \end{aligned}$$

Où l'opérateur ∇ est l'opérateur différentiel connu au sens des distributions.

Théorème 1 (Inégalité de Holder) Soit Ω un ouvert, non vide et f_k, f_l des fonctions telles que $f_k \in L^k(\Omega)$ et $f_l \in L^l(\Omega)$ avec $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = \frac{1}{p}$. Alors le produit $f = f_k f_l \in L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_k\|_{L^k} \|f_l\|_{L^l}.$$

En particulier pour $k, l = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_{\Omega} f_k f_l \, d\mathbf{x} \leq \|f_k\|_{L^2} \|f_l\|_{L^2}.$$

Théorème 2 (Inégalité de Korn) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On suppose Ω ouvert, non vide, borné, connexe à bord lipschitzien, alors

$$\exists C_K(\Omega) > 0, \forall \mathbf{w} \in (H_0^1(\Omega))^n, \|\mathbf{w}\|_{H^1} \leq C_K(\Omega) \|\epsilon(\mathbf{w})\|_{L^2}.$$

$$\text{Avec } \epsilon(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{w})^t).$$

Théorème 3 (Théorème de représentation de Riez-Fréchet) Soit W un espace de Hilbert et $f \in W'$. Alors, il existe un unique $w_f \in W$ tel que

$$\langle f, w \rangle_{W', W} = (w_f, w)_W, \quad \forall w \in W. \quad (1.1)$$

De plus $\|f\|_{W'} = \|w_f\|_W$.

Théorème 4 (Formule de Stokes) Soit Ω un ouvert, non vide, borné, connexe à bord lipschitzien et $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^n$ un champ de vecteur. La formule de Stokes est donné par :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\zeta(\mathbf{x}).$$

On utilise aussi la formule de Stokes pour des tenseurs, on a alors une égalité vectorielle et on pratique un abus de notation en écrivant le produit scalaire entre un tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ et le vecteur normal \mathbf{n} qu'on précise :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, d\zeta(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \int_{\partial\Omega} (\sigma_{1,1}, \sigma_{1,2}, \sigma_{1,3})^T \cdot \mathbf{n} \, d\zeta(\mathbf{x}) \\ \int_{\partial\Omega} (\sigma_{2,1}, \sigma_{2,2}, \sigma_{2,3})^T \cdot \mathbf{n} \, d\zeta(\mathbf{x}) \\ \int_{\partial\Omega} (\sigma_{3,1}, \sigma_{3,2}, \sigma_{3,3})^T \cdot \mathbf{n} \, d\zeta(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

1.2 Éléments finis mixtes pour le problème de Stokes

Théorème 5 (Formule de Green) Soit Ω un ouvert, non vide, borné, connexe à bord lipschitzien et $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^n$ deux champs de vecteurs. La formule de Green est donné par :

$$\int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\zeta(\mathbf{x}).$$

On utilisera principalement deux formules déduites grâce à la formule de Green, l'une pour un champ de vecteur :

$$\forall p \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) p \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) p \, d\zeta(\mathbf{x}) - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla p \, d\mathbf{x}.$$

Et une autre pour un tenseur σ :

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma) \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (\sigma \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} \, d\zeta(\mathbf{x}) - \int_{\Omega} \sigma : \nabla \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (\sigma \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} \, d\zeta(\mathbf{x}) - \int_{\Omega} \sigma : \epsilon(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x}.$$

1.2 Éléments finis mixtes pour le problème de Stokes

En mécanique des fluides, l'écoulement incompressible d'un fluide newtonien est généralement modélisé par les équations de Navier-Stokes. Dans cette première partie, nous nous intéressons à une version simplifiée de ces équations, le problème de Stokes. Nous choisissons de commencer notre étude par ce problème car il bénéficie de résultats d'existence et d'unicité bien établis.

Cette approche nous permet également d'introduire progressivement les espaces de fonctions appropriées pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes sur un domaine en mouvement. L'organisation de cette partie et les différentes preuves sont inspirées de l'ouvrage (Murea, 2017).

1.2.1 Formulation du problème de Stokes

Soit Ω_f un ouvert, borné et suffisamment régulier de \mathbb{R}^n . On note sa frontière $\partial\Omega_f$ et \mathbf{x} un point générique du domaine. Pour caractériser l'écoulement d'un fluide Newtonien et incompressible on utilise l'équation de Stokes avec comme inconnu le champ de vitesse $\mathbf{u} : \Omega_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ et la pression $p : \Omega_f \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie pour tout point du domaine $\mathbf{x} \in \Omega_f$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ -2\mu_f \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f}, \\ \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_f, \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Où μ_f est la viscosité dynamique du fluide, $\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ est le tenseur de taux de déformation linéarisée et \mathbf{f} sont les forces externes. Afin d'avoir les bonnes

CHAPITRE 1 : *Rappels de méthodes numériques pour fluides et structures en dynamique*

régularités de fonction, on doit chercher $\mathbf{u} \in (\mathcal{C}^2(\Omega_f))^n$ et $p \in (\mathcal{C}^1(\Omega_f))^n$. Le couple (\mathbf{u}, p) vérifiant (1.2) est alors une solution classique ou une solution forte.

On définit les espaces $\mathbf{W}_f = (H_0^1(\Omega_f))^n$ et $Q_f = \{q \in L^2(\Omega_f) \mid \int_{\Omega_f} q \, d\mathbf{x} = 0\}$. Pour obtenir la formulation faible du problème de Stokes par la méthode de Galerkin, on multiplie classiquement les équations (1.2) par un couple de fonction test $(\mathbf{v}, q) \in (\mathbf{W}_f, Q_f)$ vérifiant $\mathbf{v}|_{\partial\Omega_f} = 0$ et on utilise les formules de Green (Théorème 5) et d'intégration par partie. La forme faible est alors donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathbf{W}_f \text{ et } p \in Q_f \text{ tel que :} \\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_f, 2\mu_f \int_{\Omega_f} \epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_f} (\nabla \cdot \mathbf{v})p \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ \forall q \in Q_f, - \int_{\Omega_f} (\nabla \cdot \mathbf{u})q \, d\mathbf{x} = 0. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Cette formulation est appelée formulation faible mixte. On peut la réécrire en introduisant les applications $a : \mathbf{W}_f \times \mathbf{W}_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : \mathbf{W}_f \times Q_f \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= 2\mu_f \int_{\Omega_f} \epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}, \\ b(\mathbf{v}, q) &= \int_{\Omega_f} (\nabla \cdot \mathbf{v})q \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

La formulation (1.3) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathbf{W}_f \text{ et } p \in Q_f \text{ tel que :} \\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_f, a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, \\ \forall q \in Q_f, b(\mathbf{u}, q) = 0. \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Avec l'hypothèse que a et b sont deux applications bilinéaires continues quelconques, nous obtenons une famille de problèmes appelés problèmes mixtes abstraits. Les hypothèses de résolutions de ces problèmes introduisent une condition essentielle connue sous le nom de condition d'inf-sup, qui joue un rôle fondamental dans la recherche de solutions du problème de Stokes. Le théorème suivant énonce l'existence et l'unicité de la solution.

Théorème 6 (Existence et unicité du problème mixte) *Soit $a : \mathbf{W}_f \times \mathbf{W}_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : \mathbf{W}_f \times Q_f \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications bilinéaires continues. Si a et b vérifient les hypothèses suivantes :*

$$\exists \alpha > 0, \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}_f, \alpha \|\mathbf{w}\| \geq a(\mathbf{w}, \mathbf{w}), \quad (1.6)$$

$$\exists \beta > 0, \inf_{q \in Q_f, q \neq 0} \sup_{\mathbf{w} \in \mathbf{W}_f, \mathbf{w} \neq 0} \frac{b(\mathbf{w}, q)}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}_f} \|q\|_{Q_f}} \geq \beta. \quad (1.7)$$

Alors le problème (1.5) a une unique solution.

1.2 Éléments finis mixtes pour le problème de Stokes

La preuve de ce théorème n'est pas détaillée ici car elle s'éloigne du formalisme des méthodes numériques que nous voulons introduire dans ce chapitre. La preuve originale et très détaillée peut être trouvée dans (Brezzi, F., 1974).

La condition (1.6) s'appelle la W-coercivité ou la W-ellipticité et la condition (1.7) est la condition d'inf-sup.

1.2.2 Existence de solution pour le problème de Stokes

Dans cette partie, nous présentons la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution pour la formulation faible du problème de Stokes. Pour ce faire, nous appliquons le théorème 6 dans le cas particulier de Stokes. Notre objectif est de montrer que la formulation faible satisfait les hypothèses requises par ce théorème.

Théorème 7 Soit $\mathbf{f} \in \mathbf{W}_f$, alors la formulation faible mixte du problème de Stokes (1.3) a une solution unique.

La preuve suivante est une adaptation de (Murea, 2017, Th. 1.3).

Preuve 1 En reprenant les expressions de a et de b définies en (1.4), on doit montrer que le problème de Stokes vérifie les hypothèses du Théorème 6. C'est à dire montrer trois points importants : i) la coercivité, continuité et la bilinéarité de a , ii) la continuité et bilinéarité de b et iii) la condition inf – sup de b .

i) Soit $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (\mathbf{W}_f)^2$, pour obtenir la continuité de a on doit montrer qu'il existe $C_a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C_a \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}_f} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_f}.$$

On reprend l'expression de a qu'on majore à l'aide de plusieurs inégalités

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \left| 2\mu_f \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_f} \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \right| \stackrel{\textcircled{1}}{\leq} 2\mu_f \sum_{i,j=1}^n \|\epsilon_{ij}(\mathbf{u}) \epsilon_{ij}(\mathbf{v})\|_{L^1} \\ &\stackrel{\textcircled{2}}{\leq} 2\mu_f \sum_{i,j=1}^n \|\epsilon_{ij}(\mathbf{u})\|_{L^2} \|\epsilon_{ij}(\mathbf{v})\|_{L^2} \\ &\stackrel{\textcircled{3}}{\leq} 2\mu_f \left(\sum_{i,j=1}^n \|\epsilon_{ij}(\mathbf{u})\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j=1}^n \|\epsilon_{ij}(\mathbf{v})\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On a obtenu $\textcircled{1}$ avec l'inégalité triangulaire, $\textcircled{2}$ avec l'inégalité de Holder (Théorème 1) dans $L^1(\Omega_f)$ et $\textcircled{3}$ avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^2 . La quantité $\|\epsilon_{ij}(\mathbf{v})\|_{L^2}^2$ peut se majorer de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_f, \|\epsilon_{ij}(\mathbf{v})\|_{L^2}^2 &= \left(\frac{1}{2} \left\| \frac{\partial v_i}{x_j} + \frac{\partial v_j}{x_i} \right\|_{L^2} \right)^2 \stackrel{\textcircled{1}}{\leq} \left(\frac{1}{2} \left\| \frac{\partial v_i}{x_j} \right\|_{L^2} + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial v_j}{x_i} \right\|_{L^2} \right)^2 \\ &\stackrel{\textcircled{2}}{\leq} \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{\partial v_i}{x_j} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial v_j}{x_i} \right\|_{L^2}^2 \right). \end{aligned}$$

CHAPITRE 1 : Rappels de méthodes numériques pour fluides et structures en dynamique

On a obtenu ① avec l'inégalité triangulaire et ② avec l'inégalité $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ d'où :

$$\sum_{i,j=1}^n \|\epsilon_{ij}(\mathbf{u})\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2}^2 + \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right) = \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2}.$$

On reprend la majoration de a qu'on a obtenu en début de preuve qu'on complète avec la majoration du tenseur de déformation.

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq 2\mu_f \left(\sum_{i,j=1}^n \|\epsilon_{ij}(\mathbf{u})\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j=1}^n \|\epsilon_{ij}(\mathbf{v})\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\mu_f \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2} \\ &\leq 2\mu_f \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}_f} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_f}. \end{aligned}$$

On a bien obtenu la continuité de a avec comme constante $C_a = 2\mu_f$.

La coercivité de a est un résultat direct de l'inégalité de Korn (Théorème 2), il existe $C_k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 2\mu_f \|\epsilon(\mathbf{v})\|_{L^2}^2 \geq \frac{2\mu_f}{C_k} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_f}^2.$$

La bilinéarité de a vient de la linéarité de l'opérateur $\mathbf{v} \rightarrow \epsilon(\mathbf{v})$.

ii) Soit $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{W}_f \times Q_f$, pour obtenir la continuité de b on doit montrer qu'il existe $C_b \in \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$|b(\mathbf{v}, q)| \leq C_b \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_f} \|q\|_{Q_f}.$$

Pour majorer b , on utilise les mêmes outils que pour la majoration de a dans i)

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{v}, q)| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_f} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} q \, d\mathbf{x} \right| \leq \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_i} q \right\|_{L^1} \leq \|q\|_{L^2} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right\|_{L^2} \\ &\leq \sqrt{2} \|q\|_{L^2} \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right\|_{L^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2} \|q\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2} \\ &\leq \sqrt{2} \|q\|_{Q_f} \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_f}. \end{aligned}$$

Finalement, on trouve comme constante de continuité pour $C_b = \sqrt{2}$ et on a bien montré la continuité de b . La bilinéarité de b vient de la linéarité de l'opérateur $\mathbf{v} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v}$.

iii) Dans un premier temps, il faut montrer que l'opérateur $B : \mathbf{W}_f \rightarrow Q'_f$ définit par :

$$\forall q \in Q_f, \mathbf{w} \mapsto \langle B\mathbf{w}, q \rangle_{Q'_f, Q_f} = (\nabla \cdot \mathbf{w}, q)_{Q_f}.$$

1.2 Éléments finis mixtes pour le problème de Stokes

est surjectif.

Par le théorème de représentation de Riez-Fréchet Théorème 3, on sait qu'il existe un unique $q_g \in Q_f$ tel que :

$$\langle g, q \rangle_{Q'_f, Q_f} = (q_g, q)_{Q_f} \quad \forall q \in Q_f.$$

L'injection canonique $q_g \mapsto g$ est donc bijective. De plus, par construction, elle est aussi continue et linéaire. L'application B peut s'écrire comme la composé de deux fonctions :

$$B : \begin{array}{ccc} \mathbf{W} & \longrightarrow & Q_f & \longrightarrow & Q'_f \\ \mathbf{w} & \xrightarrow{\textcircled{1}} & \nabla \cdot \mathbf{w} & \xrightarrow{\textcircled{2}} & (\nabla \cdot \mathbf{w}, \cdot). \end{array}$$

L'application $\textcircled{2}$ est bijective, linéaire et continue en utilisant le résultat sur l'injection canonique. L'application $\textcircled{1}$ est surjective (admis, voir (Girault et al., 1986, Chap. 1, Corrolaire. 2.4)). L'application B est donc surjective.

On montre ensuite la condition inf – sup. On définit l'opérateur adjoint de B par $B^* : Q_f \rightarrow \mathbf{W}_f$ par :

$$\langle B\mathbf{w}, q \rangle = \langle \mathbf{w}, B^*q \rangle.$$

L'opérateur B étant surjectif, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que l'opérateur adjoint vérifie l'inégalité suivante (Brézis, 2005, Chap. 2, Th. 19)

$$\|B^*q\|_{\mathbf{W}_f} \geq \beta \|q\|_{Q_f}.$$

On utilise ensuite la définition de la norme sur l'espace dual \mathbf{W}_f^*

$$\forall q \in Q_f, \|B^*q\|_{\mathbf{W}_f} = \sup_{\mathbf{w} \in \mathbf{W}_f, \mathbf{w} \neq 0} \frac{\langle \mathbf{w}, B^*q \rangle}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}_f}} = \sup_{\mathbf{w} \in \mathbf{W}_f, \mathbf{w} \neq 0} \frac{b(\mathbf{w}, q)}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}_f}} \geq \beta \|q\|_{Q_f}.$$

Cette inégalité étant vrai pour tout $q \in Q_f$, on peut donc prendre la borne inférieure et on obtient bien la condition inf – sup

$$\inf_{q \in Q_f, q \neq 0} \sup_{\mathbf{w} \in \mathbf{W}_f, \mathbf{w} \neq 0} \frac{b(\mathbf{w}, q)}{\|q\|_{Q_f} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}_f}}.$$

On a montré i), ii), iii), on utilise le Théorème 6 pour conclure.

1.2.3 Restriction à des espaces de dimension finie

On étudie maintenant si le théorème est toujours valable pour des espaces de dimension finie. Soit $\mathbf{W}_f^h \subset \mathbf{W}_f$ et $Q_f^h \subset Q_f$ deux sous-espaces vectoriels de dimension finie. Le produit scalaire de \mathbf{W}_f et de Q_f induit une structure d'espace de Hilbert sur \mathbf{W}_f^h et Q_f^h . Nous voulons montrer que la restriction du problème de Stokes (1.3)

CHAPITRE 1 : *Rappels de méthodes numériques pour fluides et structures en dynamique*

aux sous-espaces \mathbf{W}_f^h et Q_f^h a toujours une solution unique. Cela signifie que on veut appliquer le théorème d'existence et d'unicité sur la formulation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}_h \in \mathbf{W}_f^h \text{ et } p_h \in Q_f^h \text{ tel que :} \\ \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{W}_f^h, 2\mu_f \int_{\Omega_f} \epsilon(\mathbf{u}_h) : \epsilon(\mathbf{v}_h) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_f} (\nabla \cdot \mathbf{v}_h) p_h d\mathbf{x} = \int_{\Omega_f} \mathbf{f}_h \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x}, \\ \forall q_h \in Q_f^h, - \int_{\Omega_f} (\nabla \cdot \mathbf{u}_h) q_h d\mathbf{x} = 0. \end{array} \right. \quad (1.8)$$

La continuité des formes a et b s'obtient naturellement par la restriction d'une application continue à un sous espace vectoriel normé. La coercivité de a sur \mathbf{W}_f^h s'obtient avec la coercivité sur \mathbf{W}_f et la majoration suivante :

$$\alpha \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{W}_f^h} \|\mathbf{w}_h\|_{\mathbf{W}_f^h}^2 = \alpha \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{W}_f^h} \|\mathbf{w}_h\|_{\mathbf{W}_f}^2 \leq \alpha \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{W}_f} \|\mathbf{w}_h\|_{\mathbf{W}_f}^2 \leq a(\mathbf{w}_h, \mathbf{w}_h).$$

Cependant, pour la condition d'inf-sup, étant donné que $\sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{W}_f^h} \frac{b(\mathbf{w}_h, q)}{\|\mathbf{w}_h\|_{\mathbf{W}_f^h}}$ est inférieur à $\sup_{\mathbf{w} \in \mathbf{W}_f} \frac{b(\mathbf{w}, q)}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}_f}}$, il n'est pas possible de vérifier simplement si b satisfait la condition d'inf-sup sur \mathbf{W}_f^h . Les preuves permettant d'obtenir la condition d'inf-sup vont dépendre des espaces d'approximation \mathbf{W}_f^h et Q_f^h . La méthode la plus générale consiste à construire un opérateur d'interpolation Π_h qui satisfait plusieurs hypothèses

Théorème 8 *On suppose que b vérifie la condition inf – sup sur \mathbf{W}_f^h et Q_f et qu'il existe un opérateur linéaire, continue $\Pi_h : \mathbf{W}_f \rightarrow \mathbf{W}_f^h$ tel que :*

$$\forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}_f^h, \forall q_h \in Q_f^h, b(\mathbf{w} - \Pi_h(\mathbf{w}), q_h) = 0, \quad (1.9)$$

$$\exists C > 0, \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}_f^h, \|\Pi_h(\mathbf{w})\|_{\mathbf{W}_f} \leq C \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}_f}. \quad (1.10)$$

Alors b vérifie la condition inf – sup sur \mathbf{W}_f^h et Q_f^h .

Preuve 2 *Soit $q_h \in Q_f^h$, comme $Q_f^h \subset Q_f$, la condition inf – sup est valable sur \mathbf{W}_f^h et Q_f^h , par hypothèse il existe donc $\beta > 0$ tel que :*

$$\sup_{\mathbf{w} \in \mathbf{W}_f^h, \mathbf{w} \neq 0} \frac{b(\mathbf{w}, q_h)}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}_f}} \geq \beta \|q_h\|_{Q_f}.$$

En utilisant la linéarité de b dans l'hypothèse (1.9) et la majoration de l'hypothèse (1.10), on a :

$$\sup_{\mathbf{w} \in \mathbf{W}_f^h, \mathbf{w} \neq 0} \frac{b(\mathbf{w}, q_h)}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}_f}} = \sup_{\mathbf{w} \in \mathbf{W}_f, \mathbf{w} \neq 0} \frac{b(\Pi_h(\mathbf{w}), q_h)}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}_f}} \leq C \sup_{\mathbf{w} \in \mathbf{W}_f, \mathbf{w} \neq 0} \frac{b(\Pi_h(\mathbf{w}), q_h)}{\|\Pi_h(\mathbf{w})\|_{\mathbf{W}_f}}.$$

1.3 Méthode des volumes-éléments finis pour le problème de Stokes

L'image de l'opérateur Π_h étant incluse dans W_f^h , on peut majorer le dernier terme par :

$$\sup_{\mathbf{w} \in \mathbf{W}_f^h, \mathbf{w} \neq 0} \frac{b(\Pi_h(\mathbf{w}), q_h)}{\|\Pi_h(\mathbf{w})\|_{\mathbf{W}_f}} \leq \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{W}_f^h, \mathbf{w}_h \neq 0} \frac{b(\mathbf{w}_h, q_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_{\mathbf{W}_f}}.$$

Pour conclure, on reprend la première majoration de la preuve

$$\beta \|q_h\|_{Q_f} \leq \sup_{\mathbf{w} \in \mathbf{W}_f^h, \mathbf{w} \neq 0} \frac{b(\mathbf{w}, q_h)}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}_f}} \leq C \sup_{\mathbf{w} \in \mathbf{W}_f, \mathbf{w} \neq 0} \frac{b(\Pi_h(\mathbf{w}), q_h)}{\|\Pi_h(\mathbf{w})\|_{\mathbf{W}_f}} \leq C \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{W}_f^h, \mathbf{w}_h \neq 0} \frac{b(\mathbf{w}_h, q_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_{\mathbf{W}_f}},$$

et on obtient :

$$\sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{W}_f^h, \mathbf{w}_h \neq 0} \frac{b(\mathbf{w}_h, q_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_{\mathbf{W}_f} \|q_h\|_{Q_h}} \geq \frac{\beta}{C}.$$

En prenant comme constante $\beta^* = \frac{\beta}{C}$, on a obtenu la condition inf – sup pour les espaces d'approximations \mathbf{W}_f^h et Q_f^h .

La recherche d'une solution unique pour le problème de Stokes dans des espaces d'approximations repose sur la construction d'un opérateur Π_h qui satisfait les hypothèses (1.9) et (1.10). La construction de cet opérateur dépend des hypothèses sur le maillage de Ω_f , ainsi que du choix des espaces \mathbf{W}_f^h et Q_f^h . Différentes constructions et démonstrations pour des espaces de type éléments finis sont disponibles dans (Brezzi et Fortin, 1991, Chap. 6).

Il est important de souligner que la construction de l'opérateur Π_h est un élément clé pour garantir l'existence et l'unicité de la solution de la formulation discrète du problème de Stokes. Pour cela, il est nécessaire de vérifier que l'opérateur Π_h est bien défini et qu'il satisfait les hypothèses, les propriétés et les conditions requises sur les espaces d'approximations.

1.3 Méthode des volumes-éléments finis pour le problème de Stokes

Dans la partie précédente, nous avons utilisé une approche de Galerkin pour discrétiser le problème de Stokes. Dans cette partie, nous utilisons l'approche des volumes-éléments finis. Celle-ci est utilisée par le solveur fluide *TrioCFD*. La conclusion de cette partie permet de faire le lien avec l'approche de Galerkin.

1.3.1 Description des volumes de contrôle

On se donne une triangulation régulière \mathcal{T}_f^h , en 2D, de Ω_f et on note les différents éléments de la triangulation de la façon suivante :

- $K_j \in \mathcal{T}_f^h$ pour $j \in \{1, \dots, N_J\}$ les triangles du domaine.

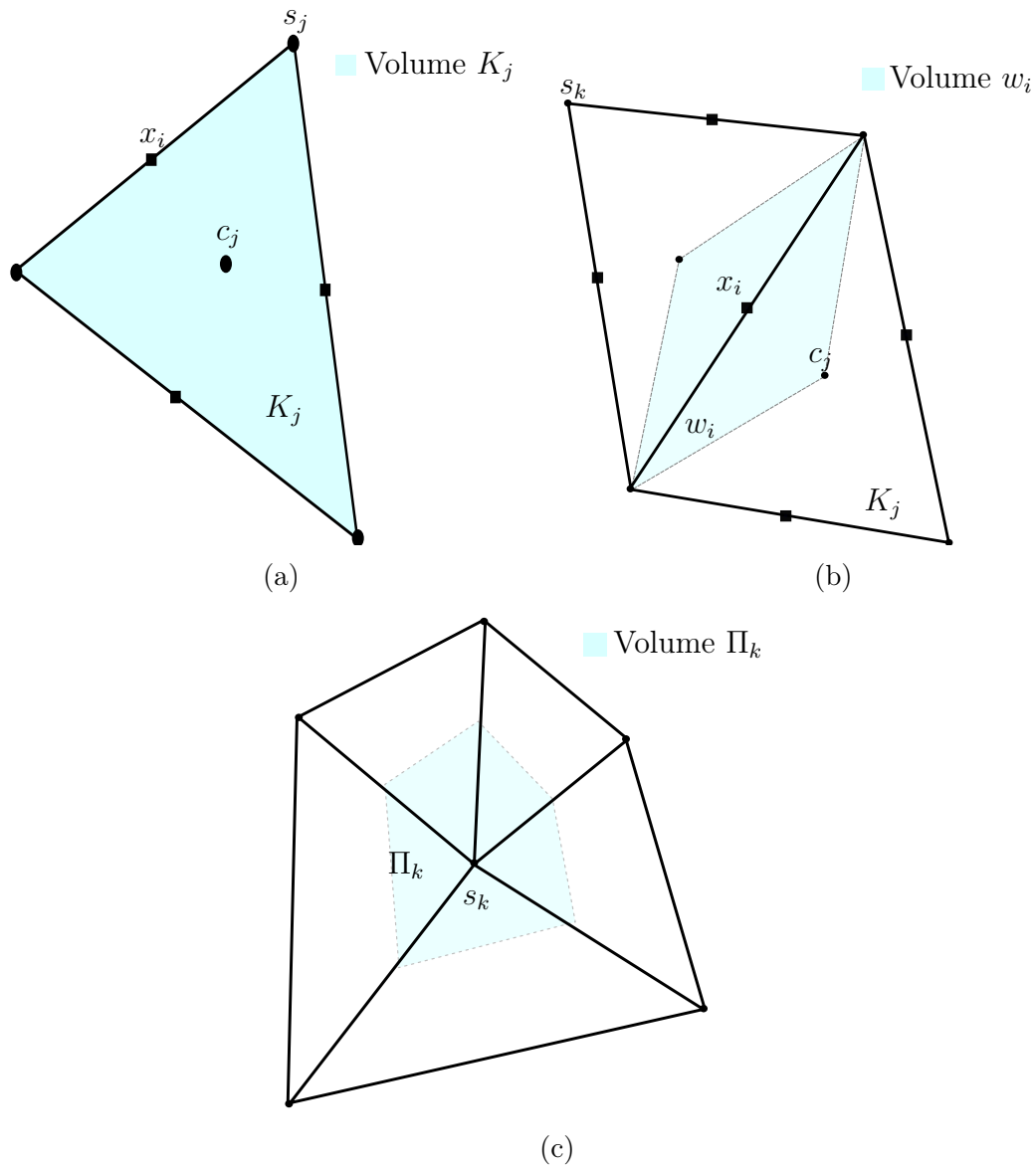


FIGURE 1.1 – Présentation des différents éléments de la triangulation \mathcal{T}_h ainsi que les trois types de volumes de contrôles, K_j associé aux éléments (a), w_i associé aux milieux des segments (b) et Π_k associé aux sommets (c).

1.3 Méthode des volumes-éléments finis pour le problème de Stokes

- $s_k \in \mathbb{R}^2$ pour $k \in \{1, \dots, N_K\}$ les sommets des triangles.
- $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^2$ pour $i \in \{1, \dots, N_I\}$ les milieux des segments des triangles.
- $c_j \in \mathbb{R}^2$ pour $j \in \{1, \dots, N_J\}$ les barycentres des triangles K_j .

Dans la triangulation \mathcal{T}_h , différents types de volume de contrôle sont définis pour évaluer les champs et les variables associées. Ces volumes de contrôle sont des surfaces ou des volumes fermés dans lesquels les calculs sont effectués.

On définit trois types de volume de contrôle associé à notre triangulation :

- Les volumes de contrôle K_j associés aux éléments : ils correspondent simplement aux surfaces de chaque triangle dans le plan 2D (ou aux volumes des tétraèdres dans l'espace 3D, voir figure 1.1a).
- Les volumes de contrôle w_i associés aux points x_i : ils sont construits en reliant les centres de gravité des éléments adjacents ayant une arête commune (ou une face commune dans l'espace 3D) avec les sommets de cette arête, voir figure 1.1b).
- Les volumes de contrôle Π_k associés aux sommets s_k : ils sont construits en reliant le barycentre des arêtes contenant le sommet s_k , voir figure 1.1c).

1.3.2 Formulation conservative discrète

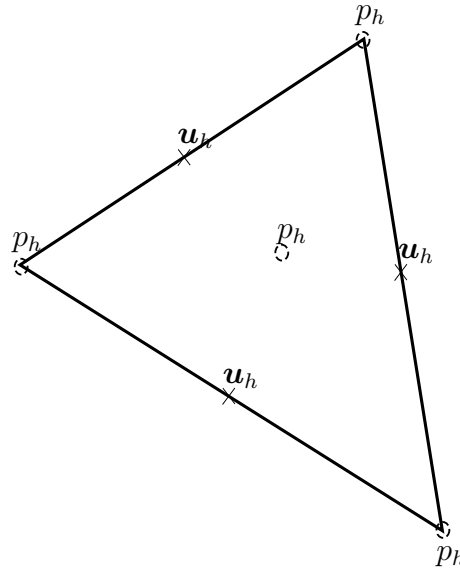


FIGURE 1.2 – Localisation des inconnues pour le schéma volumes-éléments finis pour des éléments $P_1NC/P_1 + P_0$.

La méthode de discrétisation utilisée dans le solveur *TrioCFD* est celle des volumes-éléments finis, qui combine la méthode des volumes finis et celle des éléments finis. Cette méthode a été initialement présentée pour le solveur *TrioCFD*

dans (Emonot, 1992), en utilisant l'élément de Crouzeix-Raviart (Crouzeix et Raviart, 1973).

Dans (Emonot, 1992), la vitesse discrète \mathbf{u}_h est définie dans l'espace $P_1(K_j)$, qui est l'espace des fonctions affines sur le triangle K_j et nulles à l'extérieur. Les degrés de liberté de la vitesse sont situés au milieu des segments \mathbf{x}_i des triangles. Quant à la pression discrète p_h , elle est définie dans l'espace $P_0(K_j)$, qui est l'espace des fonctions constantes sur le triangle K_j et nulles à l'extérieur. Les degrés de liberté de la pression sont situés au centre de chaque élément c_j .

Cette discrétisation particulière utilisant l'élément de Crouzeix-Raviart est notée P_1NC/P_0 . Elle est non conforme car l'espace solution de la vitesse qui en découle n'est pas inclus dans $H^1(\Omega_f)$.

La discrétisation P_1NC/P_0 peut présenter des problèmes d'instabilité numérique, tels que des modes parasites sur la pression, voir les travaux de (Heib, 2003, Chap. 2) et (Fortin, 2006, Chap. 4). Ces modes parasites sont des oscillations indésirables qui apparaissent dans la solution numérique et qui ne correspondent pas au comportement physique réel. Pour remédier à ce problème, une modification de la discrétisation en ajoutant des degrés de libertés supplémentaires pour la pression p_h a été proposée. Cette nouvelle discrétisation est notée $P_1NC/P_1 + P_0$.

Dans cette nouvelle discrétisation, la vitesse discrète \mathbf{u}_h est toujours définie dans l'espace $P_1(K_j)$, mais la pression discrète p_h est définie dans un espace mixte $P_1(K_j) + P_0(K_j)$. La localisation des inconnues est visible dans la figure 1.2.

Les espaces éléments finis finalement associés à la triangulation \mathcal{T}_f^h sont définis par :

$$\begin{aligned} Q_f^h &= \{q_h \in L_2(\Omega_f) \mid \forall K_j \in \mathcal{T}_f^h, q_h \in P_0(K_j) \oplus P_1(K_j)\}, \\ W_f^h &= \{\omega_h \text{ continues aux } \mathbf{x}_i \mid \forall K_j \in \mathcal{T}_f^h, \omega_h \in P_1(K_j)\}, \\ \mathbf{W}_f^h &= (W_f^h)^2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Les fonctions de bases de l'espace \mathbf{W}_f^h sont les fonctions ϕ_i vérifiant $\phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$. L'espace Q_f^h est décomposable en une somme directe d'espace P_0 et P_1 , il y a donc deux types de fonctions de bases. Les fonctions affines λ_k associé aux sommets vérifiant $\lambda_k(s_l) = \delta_{kl}$ et les fonctions indicatrices χ_j étant nulles à l'extérieur et aux sommets du triangle K_j et aux sommets du triangle K_j . La pression p_h se décompose alors avec la somme p_h^1 et p_h^0 qu'on définit par :

$$\left\{ \begin{aligned} p_h^1(\mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^{N_K} p_h(s_k) \lambda_k(\mathbf{x}), \\ p_h^0(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^{N_J} \left(p_h(c_j) - \frac{1}{3} \sum_{s_k \in K_j} p_h(s_k) \right) \chi_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_J} p_h^{K_j} \chi_j(\mathbf{x}). \end{aligned} \right. \quad (1.12)$$

On décompose alors les solutions (u_h, p_h) avec les fonctions de bases de \mathbf{W}_f^h et

1.3 Méthode des volumes-éléments finis pour le problème de Stokes

Q_f^h :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_I} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_i) \phi_i(\mathbf{x}), \\ p_h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_K} p_h(s_k) \lambda_k(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{N_J} p_h^{K_j} \chi_j(\mathbf{x}). \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Nous allons maintenant définir la discrétisation volumes-éléments finis en utilisant les définitions proposées par (Heib, 2003). Les applications bilinéaires a_h^v , b_h^v et c_h^v ainsi que le second membre L_h^v sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} a_h^v(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) &= -2\mu_f \sum_{i=1}^{N_I} \mathbf{w}_h(\mathbf{x}_i) \cdot \int_{\partial w_i} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}_f \, d\sigma_i(\mathbf{x}), \\ b_h^v(\mathbf{w}_h, q_h) &= \sum_{i=1}^{N_I} \mathbf{w}_h(\mathbf{x}_i) \cdot \int_{\partial w_i} p_h \mathbf{n}_f \, d\sigma_i(\mathbf{x}), \\ c_h^v(\mathbf{u}_h, q_h) &= \sum_{k=1}^{N_K} q_h(s_k) \left[\int_{\partial \Pi_k} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_f \, d\sigma_k(\mathbf{x}) + \alpha_1 \sum_{K_j \in \mathcal{M}(s_k)} \int_{\partial K_j} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_f \, d\sigma_j(\mathbf{x}) \right] + \\ &\quad \alpha_2 \sum_{j=1}^{N_J} q_h(c_j) \left(\int_{\partial K_j} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_f \, d\sigma_j(\mathbf{x}) \right), \\ L_h^v(\mathbf{w}_h) &= \sum_{i=1}^{N_I} \mathbf{w}_h(\mathbf{x}_i) \cdot \int_{w_i} \mathbf{f}_h \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Avec $\mathcal{M}(s_k)$ désignant la macro maille du sommet s_k . Les coefficients α_1 et α_2 dépendent de la dimension du domaine, dans notre cas $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ et $\alpha_2 = \frac{3}{4}$. Ils sont utilisés pour rendre proportionnels les formes c_h^v avec b_h^v , des renseignements supplémentaires sur ces coefficients sont donnés dans (Heib, 2003, Chap. 4, part. 2).

La formulation variationnelle volumes-éléments finis est donnée par la formulation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}_h \in \mathbf{W}_f^h \text{ et } p_h \in Q_f^h \text{ tel que :} \\ \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{W}_f^h, \quad a_h^v(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) + b_h^v(\mathbf{w}_h, p_h) = L_h^v(\mathbf{w}_h), \\ \forall q_h \in Q_f^h, \quad c_h^v(\mathbf{u}_h, q_h) = 0. \end{array} \right. \quad (1.15)$$

En injectant dans cette formulation la décomposition en fonction de base (1.13) et en prenant comme fonction test $\mathbf{w}_h = \phi_l \mathbf{1}$ et $q_h = q_h^0 + q_h^1 = \chi_n + \lambda_m$, avec $\mathbf{1}$ le

vecteur unitaire, on obtient le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{N_I} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_i) a_h^v(\phi_i \mathbf{1}, \phi_l \mathbf{1}) + \sum_{j=1}^{N_J} p_h^{K_j} b_h^v(\phi_l \mathbf{1}, \chi_j) + \sum_{k=1}^{N_K} p_h(s_k) b_h^v(\phi_l \mathbf{1}, \lambda_k) = L_h^v(\phi_l \mathbf{1}), \\ \sum_{i=1}^{N_I} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_i) c_h^v(\phi_i \mathbf{1}, \lambda_m) + \sum_{i=1}^{N_I} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_i) c_h^v(\phi_i \mathbf{1}, \chi_n) = 0. \end{array} \right. \quad (1.16)$$

À partir de la formulation obtenu, on définit les matrices et vecteurs qu'on utilisera pour écrire le système linéaire à résoudre. On notera pour un vecteur quelconque \mathbf{v} ses deux composantes par v_x et v_y et les vecteurs inconnues s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_h &= \begin{bmatrix} [u_{x,h}(\mathbf{x}_i)_{i=1,\dots,N_I}]^T \\ [u_{y,h}(\mathbf{x}_i)_{i=1,\dots,N_I}]^T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_h^0 &= [(p_h^{K_j})_{j=1,\dots,N_J}]^T, \\ \mathbf{P}_h^1 &= [p_h(s_k)_{k=1,\dots,N_K}]^T. \end{aligned} \quad (1.17)$$

- La matrice de diffusion $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec A définit par :

$$(A)_{li} = a_h^v(\phi_l, \phi_i) = -2\mu_f \int_{\partial w_l} \epsilon(\phi_i) \cdot \mathbf{n}_f \, d\sigma_l(\mathbf{x}). \quad (1.18)$$

- La matrice de divergence associée à α_1 , $\mathcal{C}^{\alpha_1} = ((C_x^{\alpha_1})^T \ (C_y^{\alpha_1})^T)$ avec $C_{\{x,y\}}^{\alpha_1}$ définit par :

$$\begin{aligned} (C_{\{x,y\}}^{\alpha_1})_{im} &= c_h^v(\phi_i, \lambda_m) = \int_{\partial \Pi_m} \phi_i n_{x,y} \, d\sigma_m(\mathbf{x}) + \\ \alpha_1 \sum_{K_j \in \mathcal{M}(s_m)} \int_{\partial K_j} \phi_i n_{x,y} \, d\sigma_j(\mathbf{x}) &+ \alpha_2 \lambda_m (c_m) \int_{\partial K_m} \phi_i n_{x,y} \, d\sigma_m(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1.19)$$

- La matrice de divergence associée à α_2 , $\mathcal{C}^{\alpha_2} = ((C_x^{\alpha_2})^T \ (C_y^{\alpha_2})^T)$ avec $C_{\{x,y\}}^{\alpha_2}$ définit par :

$$(C_{\{x,y\}}^{\alpha_2})_{in} = c_h^v(\phi_i, \chi_n) = \alpha_2 \int_{\partial w_n} \phi_i n_{\{x,y\}} \, d\sigma_n(\mathbf{x}). \quad (1.20)$$

- La matrice de gradient P_0 , $\mathcal{B}^0 = \begin{pmatrix} B_x^0 \\ B_y^0 \end{pmatrix}$ avec $(B_{\{x,y\}}^0)_{li}$ définit par :

$$(B_{\{x,y\}}^0)_{lj} = b_h^v(\phi_l, \chi_j) = \int_{\partial w_l} \chi_j n_{\{x,y\}} \, d\sigma_l(\mathbf{x}). \quad (1.21)$$

1.3 Méthode des volumes-éléments finis pour le problème de Stokes

- La matrice de gradient P_1 , $\mathcal{B}^1 = \begin{pmatrix} B_x^1 \\ B_y^1 \end{pmatrix}$ avec $(B_{\{x,y\}}^1)_{li}$ définit par :

$$(B_{\{x,y\}}^1)_{lk} = b_h^v(\phi_l, \lambda_k) = \int_{\partial w_l} \lambda_k n_{\{x,y\}} d\sigma_l(\mathbf{x}). \quad (1.22)$$

- Le vecteur second membre $\mathcal{F}_f = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ avec $(F_{\{x,y\}})_l$ définit par :

$$(F_{\{x,y\}})_l = F_h^v(\phi_l) = \int_{\partial w_l} f_{\{x,y\}} d\mathbf{x}. \quad (1.23)$$

Avec les définitions des matrices pour chacun des opérateurs, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{C}^{\alpha_1} \mathbf{U}_h + \mathcal{C}^{\alpha_2} \mathbf{U}_h = \mathbf{0} \\ \mathcal{A} \mathbf{U}_h + \mathcal{B}^0 \mathbf{P}_h^0 + \mathcal{B}^1 \mathbf{P}_h^1 = \mathcal{F}_f \end{cases} \quad (1.24)$$

1.3.3 Correspondance avec les éléments finis mixtes

Dans la partie 1.2, il a été présenté que pour l'approche de Galerkin, la recherche de solutions dans des espaces de dimension finie se résumait à la construction d'un opérateur Π_h satisfaisant le théorème 8. Dans cette partie, nous avons présenté l'approche des volumes-éléments finis utilisée dans *TrioCFD*. Pour conclure, nous établissons un lien entre ces deux approches.

En utilisant la décomposition en fonctions de base (1.13) que nous injectons dans la formulation faible de l'approche de Galerkin (1.8), nous obtenons un système d'équations éléments finis $P_1 NC/P_0 + P_1$ pour le problème de Stokes. On note les formes bilinéaire éléments finis a_h^e et b_h^e définies respectivement sur les espaces $\mathbf{W}_f^h \times \mathbf{W}_f^h$ et $\mathbf{W}_f^h \times Q_f^h$. Il a été démontré que ces applications éléments finis sont identiques à celles du système volumes-éléments finis (1.24). Nous avons donc la proposition suivante :

Proposition 1 *Soit a_h^e, b_h^e les forme bilinéaires des éléments finis et a_h^v et b_h^v celle des volumes-éléments finis, alors les applications a_h^e et a_h^v ainsi b_h^e et b_h^v sont équivalentes entre elles.*

La preuve de cette proposition est disponible dans (Heib, 2003, Chap. 3). Il convient de noter que les deux systèmes ne sont pas strictement équivalents. En particulier, ils diffèrent de leur second membre. Cette différence entre les deux seconds membres n'est généralement pas nulle, c'est à dire :

$$\forall K_j \in \mathcal{T}_f^h, \int_{K_j \cap w_l} \mathbf{f} d\mathbf{x} - \int_{K_j} \mathbf{f} \phi_j d\mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \quad (1.25)$$

Néanmoins, (Emonot, 1992, Chap. 2) montre que le second membre de la méthode des volumes-éléments finis peut être considéré comme une intégration approchée du

second membre provenant des éléments finis. Autrement dit, la différence peut être majorée de la manière suivante :

$$\left| \int_{K_j \cap w_l} f_{\{x,y\}} d\mathbf{x} - \int_{K_j} f_{\{x,y\}} \phi_j d\mathbf{x} \right| \leq \mathcal{O}(h^2) |f_{\{x,y\}}|. \quad (1.26)$$

L'approche des éléments finis avec des éléments P_1NC/P_0 est une méthode bien établie dans la littérature scientifique, avec des résultats largement documentés. En suivant une démarche similaire à celle exposée de la partie 1.2, mais en utilisant les éléments $P_1NC/P_1 + P_0$, il est possible d'obtenir la condition inf – sup, qui garantit l'existence d'une solution unique pour le problème de Stokes. Ces résultats de stabilité, ainsi que des preuves de convergences complémentaires, sont disponibles dans des références telles que (Crouzeix et Raviart, 1973), (Girault *et al.*, 1986) et (Brezzi et Fortin, 1991).

En résumé, les travaux menés par (Heib, 2003) ont démontré la stabilité et la convergence de la formulation volumes-éléments finis $P_1NC/P_1 + P_0$. Pour ce qui est de la stabilité, les démonstrations reposent sur des démonstrations d'équivalences entre les deux formulations puis de l'utilisation des résultats de la méthode des éléments finis. L'étude de la convergence a également été spécifiquement abordée pour le solveur *TrioCFD* dans (Angeli *et al.*, 2017). Finalement, les avantages de la méthode volumes-éléments finis sont donnés par les deux points suivants :

- L'utilisation des éléments $P_1NC/P_1 + P_0$ par rapport à une discrétisation P_1NC/P_0 permet de réduire le nombre de modes parasites en pression en augmentant le nombre de degrés de liberté associé à la pression. Cette amélioration est valable non seulement pour l'approche des volumes-éléments finis, mais également pour l'approche des éléments finis.
- L'utilisation de la formulation volumes-éléments finis, par rapport à celle des éléments finis, garantit une conservation locale des quantités au niveau des volumes de contrôle.

1.4 Extension aux équations de Navier-Stokes

Après une approche progressive avec le problème de Stokes, nous allons maintenant introduire les équations de Navier-Stokes. Elles sont données par :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \rho_f \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_f (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{u}, p) = \mathbf{f}. \end{cases} \quad (1.27)$$

Où ρ_f est la densité du fluide, $\boldsymbol{\sigma}_f = -p\mathcal{I}_d + 2\mu_f\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})$ est le tenseur de Cauchy.

Dans la partie précédente 1.3, on a obtenu le système linéaire de l'approche volumes-éléments finis pour l'équation de Stokes en intégrant les équations sur les volumes de contrôles adéquats. On fonctionne de la même façon avec les équations

1.4 Extension aux équations de Navier-Stokes

de Navier-Stokes. On a donc deux termes supplémentaires à discrétiser : le terme non linéaire ou de convection $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ et le terme de masse $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$. La discrétisation des autres termes de l'équation a déjà été réalisée avec l'équation de Stokes et reste inchangée.

1.4.1 Discrétisation de la masse et de l'opérateur de convection

On s'intéresse tout d'abord à la discrétisation du terme de convection. On intègre ce terme sur les volumes de contrôle w_l et on utilise la formule de Stokes (7), on obtient :

$$\int_{w_l} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{u}_h \, d\mathbf{x} = \int_{\partial w_l} (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_f)\mathbf{u}_h \, d\sigma_l(\mathbf{x}). \quad (1.28)$$

On utilise ensuite la décomposition en fonction de base (1.13) et on projette \mathbf{u}_h sur la coordonnée x sans perdre de généralité. On obtient alors la forme suivante :

$$\int_{\partial w_l} \left(\sum_{i=1}^{N_l} \mathbf{u}(\mathbf{x}_i)\phi_i \cdot \mathbf{n}_f \right) u_{x,h} \, d\sigma_l(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_l} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_i) \cdot \int_{\partial w_l} u_{x,h}\phi_i \mathbf{n}_f \, d\sigma_l(\mathbf{x}) \quad (1.29)$$

On peut maintenant définir la matrice de masse \mathcal{M} et de convection \mathcal{L} pour l'approche volumes-éléments finis par :

- La matrice de convection $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_x(\mathbf{U}_{h,x}) & L_y(\mathbf{U}_{h,x}) \\ L_x(\mathbf{U}_{h,y}) & L_y(\mathbf{U}_{h,y}) \end{pmatrix}$ avec $L_{\{x,y\}}(\mathbf{U}_{h,x})$ et $L_{\{x,y\}}(\mathbf{U}_{h,y})$ définit par :

$$(L_{\{x,y\}}(\mathbf{U}_{h,x}))_{l,i} = \int_{\partial w_l} u_{x,h}\phi_i n_{\{x,y\}} \, d\sigma_l(\mathbf{x}) \quad (1.30)$$

$$(L_{\{x,y\}}(\mathbf{U}_{h,y}))_{l,i} = \int_{\partial w_l} u_{y,h}\phi_i n_{\{x,y\}} \, d\sigma_l(\mathbf{x}) \quad (1.31)$$

- La matrice de masse $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ définit par :

$$(M)_{l,i} = \rho_f \int_{w_l} \phi_i \, d\mathbf{x} \quad (1.32)$$

La discrétisation des autres termes est identique à celle du problème de Stokes de la partie 1.3, c'est à dire : la diffusion \mathcal{A} (1.18), la divergence \mathcal{C} ((1.19), (1.20)) et le gradient \mathcal{B} ((1.21), (1.22)).

Finalement le système d'équation discrétisée pour les équations de Navier-Stokes est donné par :

$$\begin{cases} \mathcal{C}^{\alpha_1}\mathbf{U}_h + \mathcal{C}^{\alpha_2}\mathbf{U}_h = \mathbf{0} \\ \mathcal{M}\frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t} + \mathcal{L}(\mathbf{U}_h)\mathbf{U}_h + \mathcal{A}\mathbf{U}_h + \mathcal{B}^0\mathbf{P}_h^0 + \mathcal{B}^1\mathbf{P}_h^1 = \mathcal{F}_f \end{cases} \quad (1.33)$$

1.4.2 Méthode de projection pour le schéma temporel

Considérons un intervalle de temps $[0, T]$ décomposé en sous-intervalles tels que $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T$, avec $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Notons $\mathbf{u}_h(t_n, \cdot) = \mathbf{u}_h^n$ et $p_h(t_n, \cdot) = p_h^n$. Pour la résolution temporelle des équations, un schéma d'Euler implicite est utilisé, ce qui conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{C}\mathbf{U}_h^{n+1} = \mathbf{0} \\ \mathcal{M}\frac{\mathbf{U}_h^{n+1} - \mathbf{U}_h^n}{\Delta t} + \mathcal{L}(\mathbf{U}_h^n)\mathbf{U}_h^{n+1} + \mathcal{A}\mathbf{U}_h^{n+1} + \mathcal{B}\mathbf{P}_h^{n+1} = \mathcal{F}_f^{n+1} \end{cases} \quad (1.34)$$

Afin de simplifier les notations, les matrices \mathcal{B}^0 , \mathcal{B}^1 et \mathcal{C}^{α_1} , \mathcal{C}^{α_2} ont été regroupées respectivement dans les matrices \mathcal{B} et \mathcal{C} diagonales par blocs.

La méthode employée pour résoudre le système (1.34) est la méthode de projection de Chorin-Temam présentée à l'origine dans les travaux de (Chorin, 1968) et (Temam, 1968). La décomposition entre la vitesse et la pression est effectuée en trois étapes :

1. **Étape de prédiction** : Calcul de \mathbf{U}_h^*

$$\mathcal{M}\frac{\mathbf{U}_h^* - \mathbf{U}_h^n}{\Delta t} + \mathcal{A}\mathbf{U}_h^* + \mathcal{L}(\mathbf{U}_h^n)\mathbf{U}_h^* - \mathcal{B}\mathbf{P}_h^n = \mathcal{F}_f^n. \quad (1.35)$$

2. **Calcul de la pression** : Calcul de la pression \mathbf{P}'_h solution du système suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{B}^T \mathcal{M}^{-1} \mathcal{B} \mathbf{P}'_h = \frac{1}{\Delta t} \mathcal{B} \mathbf{U}_h^*, \\ \mathbf{P}_h^{n+1} = \mathbf{P}'_h + \mathbf{P}_h^n. \end{cases} \quad (1.36)$$

3. **Étape de correction** : Calcul de \mathbf{U}_h^{n+1} solution de :

$$\mathcal{M}\mathbf{U}_h^{n+1} = \mathcal{M}\mathbf{U}_h^* - \Delta t \mathcal{B} \mathbf{P}'_h. \quad (1.37)$$

Des informations complémentaires concernant la convergence et la stabilité de cet algorithme sont disponibles dans l'article (Guermond et Quartapelle, 1998). De plus, il existe d'autres méthodes de projection basées sur la méthode de projection de Chorin-Temam, mais avec des variations dans les termes de prédiction et/ou de correction. Un aperçu des différentes méthodes est présenté dans l'article (Guermond et al., 2006).

1.5 Éléments finis pour la dynamique des structures

La description utilisée jusqu'à présent pour décrire l'écoulement du fluide était une description Eulerienne. Ce principe consiste à observer, à partir d'une position fixe, la vitesse de déplacement des particules. Il s'agit de la description standard

1.5 Éléments finis pour la dynamique des structures

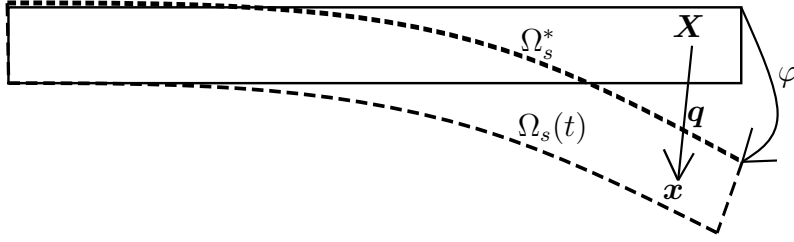


FIGURE 1.3 – Représentation du domaine d'origine Ω_s^* et du domaine déformé $\Omega_s(t)$ ainsi que du déplacement \mathbf{q} et de l'application φ_s .

utilisée en mécanique des fluides. En revanche, en mécanique des structures, il est plus courant d'observer le déplacement de chaque particule en déplaçant sa position d'observation avec la particule elle-même. Cette description est appelée description Lagrangienne.

L'objectif de cette partie est d'introduire les différentes notations utilisées en mécanique des solides, ainsi que la relation fondamentale de la dynamique du solide et les lois de comportement associées. Nous aborderons également l'utilisation des méthodes numériques du solveur *Europlexus* pour la discrétisation des équations.

1.5.1 Cinématique du solide et loi de comportement

Soit Ω_s^* un ouvert, borné et suffisamment régulier de \mathbb{R}^n et $\mathbf{X} \in \Omega_s^*$ la position d'une particule. On suppose qu'il existe une application $\varphi_s : \Omega_s^* \times [0, T] \rightarrow \Omega_s(t)$ tel que si la particule est à la position \mathbf{X} à $t = 0$, alors $\mathbf{x} = \varphi_s(\mathbf{X}, t)$ est sa nouvelle position au temps t . Le domaine de référence Ω_s^* et le domaine courant $\Omega_s(t)$ sont reliés par l'application φ_s . On la suppose inversible et vérifiant $\varphi_s(\Omega_s^* \times [0, T]) = \Omega_s(t)$.

Pour toute particule $\mathbf{X} \in \Omega_s^*$ et temps $t \in [0, T]$, on définit respectivement le déplacement, la vitesse et l'accélération de cette particule par \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ et $\ddot{\mathbf{q}}$. Les relations de ces variables avec l'application φ_s sont données par :

$$\mathbf{q}(\mathbf{X}, t) = \varphi_s(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}, \quad (1.38)$$

$$\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_s(\mathbf{X}, t)}{\partial t}, \quad (1.39)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi_s(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2}. \quad (1.40)$$

On a défini ces quantités physiques sur le domaine de référence. Cependant, l'inversibilité de l'application φ_s permet de définir ces mêmes quantités sur le domaine courant.

Avant d'introduire le système d'équation de la dynamique du solide, il est important de comprendre le cadre physique auquel *Europlexus* souhaite répondre. En particulier les déformations non linéaires induites par de grands déplacements. Pour

cela, *Europlexus* utilise une approche de dynamique explicite, ce qui signifie que la configuration courante est connue (par opposition à une approche de dynamique implicite). L'équation de la dynamique (1.41) ainsi que les opérateurs utilisés pour décrire la loi de comportement sont donc exprimés préférentiellement sur la configuration courante $\Omega_s(t)$. La description précise et complète de la dynamique de *Europlexus* peut être trouvée dans (Faucher, 2003).

On note \mathbf{f}_s les forces volumiques et \mathbf{g}_s les forces surfaciques s'appliquant sur le système solide. On cherche le déplacement $\mathbf{q} : \Omega_s(t) \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}_s : \Omega_s(t) \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui vérifie pour toute particule $\mathbf{x} \in \Omega_s(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_s \ddot{\mathbf{q}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{f}_s, \\ \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_s(t), \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}_s = \mathbf{g}_s. \end{array} \right. \quad (1.41)$$

Avec $\rho_s \in \mathbb{R}$ la densité de la structure. Afin de fermer le modèle, il est nécessaire d'ajouter une loi de comportement invariante pour tout changement de référentiel. Elle relie le tenseur des contraintes avec un opérateur $\boldsymbol{\Sigma}_s$ dépendant du matériau :

$$\boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\Sigma}_s(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)). \quad (1.42)$$

Dans ce cadre, on introduit le gradient de la transformation \mathbf{F}_s qui permet le passage entre les deux configurations par :

$$\mathbf{F}_s = \mathcal{I}_d - \nabla \mathbf{q}. \quad (1.43)$$

On introduit aussi la matrice de dilatation $\mathbf{C}_s = \mathbf{F}_s^T \mathbf{F}_s$ qui mesure les variations des quantités géométriques entre les deux domaines.

On définit maintenant le tenseur des déformations d'Almansi-Euler sur le domaine courant $\Omega_s(t)$ par :

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{C}_s) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{q} + (\nabla \mathbf{q})^T - (\nabla \mathbf{q})^T \nabla \mathbf{q}). \quad (1.44)$$

Il est non linéaire en fonction de \mathbf{q} . C'est cet opérateur qui intervient dans la relation de comportement (1.42), plus précisément l'opérateur $\boldsymbol{\Sigma}_s$ est une fonction linéaire de \mathbf{E}_s .

L'utilisation du tenseur d'Almansi-Euler est spécifique à une approche explicite. Pour une formulation implicite, ce tenseur devient une inconnue et il est commun d'utiliser le tenseur de Green-Lagrange défini sur la configuration initiale. On note par $\epsilon_s(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{q} + (\nabla \mathbf{q})^T)$ la partie linéaire du tenseur \mathbf{E}_s .

Sur la configuration courante, la relation de comportement entre $\boldsymbol{\sigma}_s$ et le tenseur d'Almansi-Euler s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \lambda_s \text{tr}(\mathbf{E}_s) \mathcal{I}_d + 2\mu_s \mathbf{E}_s. \quad (1.45)$$

Les coefficients (λ_s, μ_s) sont les coefficients de Lamé et sont reliés aux paramètres du matériau, tels que le module de Young E en $N.m^{-2}$ et le coefficient de Poisson ν sans dimension, par les relations suivantes :

1.5 Éléments finis pour la dynamique des structures

$$\lambda_s = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu_s = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.46)$$

1.5.2 Approximation par éléments finis

Dans cette partie, on va discrétiser l'équation de la dynamique par la méthode des éléments finis. On utilise l'approche explicite qu'on a défini dans la partie précédente pour écrire les équations de la dynamique (1.41) sur le domaine de référence :

$$\begin{cases} \forall \mathbf{x} \in \Omega_s(t), & \rho_s \ddot{\mathbf{q}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_s, \\ \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_s(t), & \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}_s = \mathbf{g}_s. \end{cases} \quad (1.47)$$

On introduit l'espace de fonction $\mathbf{W}_s = (H^1(\Omega_s(t)))^3$. Afin d'obtenir le problème de la dynamique du solide sous sa forme variationnelle, on multiplie classiquement par une fonction test $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{W}_s$ l'équation du système (1.47), on intègre sur tout le domaine $\Omega_s(t)$ et on utilise la formule de Green (Théorème 5).

$$\rho_s \int_{\Omega_s(t)} \ddot{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\xi} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s(t)} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}) : \epsilon_s(\boldsymbol{\xi}) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_s(t)} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}) \mathbf{n}_f \cdot \boldsymbol{\xi} \, d\sigma(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_s(t)} \mathbf{f}_s \cdot \boldsymbol{\xi} \, d\mathbf{x}. \quad (1.48)$$

L'utilisation des conditions limites nous donne la formulation faible suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{q} \in \mathbf{W}_s \text{ tel que pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{W}_s : \\ \rho_s \int_{\Omega_s(t)} \ddot{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\xi} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s(t)} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}) : \epsilon_s(\boldsymbol{\xi}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_s(t)} \mathbf{g}_s \cdot \boldsymbol{\xi} \, d\sigma(\mathbf{x}) + \int_{\Omega_s(t)} \mathbf{f}_s \cdot \boldsymbol{\xi} \, d\mathbf{x}. \end{array} \right. \quad (1.49)$$

On définit une partition du domaine \mathcal{E}_s^h de Ω_s^* et on note les éléments de cette partition avec les indices suivants :

- $K'_j \in \mathcal{E}_s^h$, pour $j \in \{1, \dots, N'_j\}$ les éléments du domaine.
- $s'_k \in \mathbb{R}^3$, pour $k \in \{1, \dots, N'_K\}$ les sommets des éléments.

Cette partition peut prendre forme, par exemple, en discrétisant le domaine solide en quadrangle ou tétraèdre en 3D.

De la même façon que dans le problème de Stokes, on note classiquement l'espace $P_1(K'_j)$ l'espace des fonctions affines sur K'_j et nulles ailleurs. On associe à la partition \mathcal{E}_s^h les espaces éléments finis définis par :

$$W_s^h = \{\omega_h \text{ continues aux } s'_k \mid \forall K'_j \in \mathcal{T}_s^h, \omega_h \in P_1(K'_j)\}, \quad (1.50)$$

$$\mathbf{W}_s^h = (W_s^h)^3. \quad (1.51)$$

Les fonctions de bases de W_s^h sont les fonctions η_k vérifiant $\eta_i(s_j) = \delta_{ij}$. On décompose le déplacement \mathbf{q}_h par une somme finie de fonction de base.

$$\mathbf{q}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{N'_K} \mathbf{q}_h(s_k, t) \eta_k(\mathbf{x}). \quad (1.52)$$

CHAPITRE 1 : *Rappels de méthodes numériques pour fluides et structures en dynamique*

On injecte ensuite la décomposition en fonction de base de \mathbf{q}_h dans la formulation (1.49) et on prend comme fonction test $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{1}\eta_l$ avec $l \in \{1, \dots, N'_k\}$ fixé. On obtient la formulation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{q}_h \in \mathbf{W}_s^h \text{ tel que :} \\ \rho_s \sum_{k=0}^{N'_K} \frac{\partial^2 \mathbf{q}_h(s_k, t)}{\partial t^2} \cdot \mathbf{1} \int_{\Omega_s(t)} \eta_k \eta_l \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s(t)} \boldsymbol{\sigma}_s \left(\sum_{k=0}^{N'_K} \mathbf{q}_h(s_k, t) \eta_k \right) : \epsilon(\mathbf{1}\eta_l) \, d\mathbf{x} = \\ \mathbf{1} \cdot \int_{\partial\Omega_s(t)} \mathbf{g}_s \eta_l \, d\sigma(\mathbf{x}) + \mathbf{1} \cdot \int_{\Omega_s(t)} \mathbf{f}_s \eta_l \, d\mathbf{x}. \end{array} \right. \quad (1.53)$$

De la même façon, on obtient le tenseur d'Almansi-Euler discrétisé :

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{q}_h(\cdot, t)) = \sum_{k=1}^{N'_K} \mathbf{q}_h(s_k, t) \epsilon(\mathbf{1}\eta_k) - \nabla \left(\sum_{k=1}^{N'_K} \mathbf{q}_h(s_k, t) \eta_k \right)^T \nabla \left(\sum_{k=1}^{N'_K} \mathbf{q}_h(s_k, t) \eta_k \right). \quad (1.54)$$

À partir de la formulation obtenu, on définit les matrices et vecteurs qu'on utilisera pour écrire le système linéaire à résoudre. On notera pour un vecteur quelconque \mathbf{q} ses trois composantes par q_x, q_y, q_z et le vecteur inconnue s'écrit :

$$\mathbf{Q}_h(t) = \begin{bmatrix} (q_{h,x}(s_k, t))_{k=1, \dots, N'_K}^T \\ (q_{h,y}(s_k, t))_{k=1, \dots, N'_K}^T \\ (q_{h,z}(s_k, t))_{k=1, \dots, N'_K}^T \end{bmatrix}. \quad (1.55)$$

- La matrice de masse $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix}$ avec M définit par :

$$(M)_{kl} = \rho_s \int_{\Omega_s(t)} \eta_k \eta_l \, d\mathbf{x}. \quad (1.56)$$

- Le vecteur des forces internes $\mathcal{F}_h^{int}(\mathbf{Q}_h(t)) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{int}(q_{h,x}(t)) \\ \mathbf{F}^{int}(q_{h,y}(t)) \\ \mathbf{F}^{int}(q_{h,z}(t)) \end{pmatrix}$ avec $(\mathbf{F}^{int}(q_{h,\{x,y,z\}}(t)))$ qui dépend non linéairement du déplacement, définit par :

$$(\mathbf{F}^{int}(q_{h,\{x,y,z\}}(\cdot, t)))_l = \int_{\Omega_s(t)} \boldsymbol{\sigma}_s \left(\sum_{k=0}^{N'_k} q_{h,\{x,y,z\}}(s_k, t) \eta_k \right) : \epsilon(\mathbf{1}\eta_l) \, d\mathbf{x}. \quad (1.57)$$

- Le vecteur second membre $\mathbf{F}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \\ \mathbf{F}_z \end{pmatrix}$ avec $(\mathbf{F}_{\{x,y,z\}})$ définit par :

$$(\mathbf{F}_{\{x,y,z\}})_l = \int_{\Omega_s(t)} (f_{s,\{x,y,z\}}) \eta_l \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_s(t)} (g_{s,\{x,y,z\}}) \eta_l \, d\sigma(\mathbf{x}). \quad (1.58)$$

1.5 Éléments finis pour la dynamique des structures

On obtient alors le système suivant à résoudre :

$$\mathcal{M} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{Q}_h(t) + \mathcal{F}_h^{int}(\mathbf{Q}_h(t)) = \mathbf{F}_s(t). \quad (1.59)$$

1.5.3 Discrétisation en temps

L'intervalle en temps $[0, T]$ est subdivisé par une suite de sous intervalles tel que $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T$ avec $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. On utilise les notations suivantes : $\mathbf{Q}_h^n = \mathbf{Q}_h(t_n)$, $\dot{\mathbf{Q}}_h^n = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q}_h^n$ and $\ddot{\mathbf{Q}}_h^n = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{Q}_h^n$. Le système (1.59) peut maintenant s'écrire pour le temps t_{n+1} de la façon suivante :

$$\mathcal{M} \ddot{\mathbf{Q}}_h^{n+1} + \mathcal{F}_h^{int}(\mathbf{Q}_h^{n+1}) = \mathbf{F}_s^{n+1}. \quad (1.60)$$

Les dérivées temporelles sont approchées avec la famille des schémas de Newmark (Newmark, 1959) dépendant de deux coefficients γ et β et qui sont définis par :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_h^{n+1} &= \mathbf{Q}_h^{n+\frac{1}{2}} + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{Q}}_h^{n+1}, \\ \dot{\mathbf{Q}}_h^{n+1} &= \dot{\mathbf{Q}}_h^{n+\frac{1}{2}} + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{Q}}_h^{n+1}. \end{cases} \quad (1.61)$$

Où $\mathbf{Q}_h^{n+\frac{1}{2}}$ et $\dot{\mathbf{Q}}_h^{n+\frac{1}{2}}$ sont les termes de prédiction entièrement déterminés par les termes du temps n et sont définis par :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_h^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{Q}_h^n + \Delta t \dot{\mathbf{Q}}_h^n + \Delta t^2 (\frac{1}{2} - \beta) \ddot{\mathbf{Q}}_h^n, \\ \dot{\mathbf{Q}}_h^{n+\frac{1}{2}} &= \dot{\mathbf{Q}}_h^n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{Q}}_h^n. \end{cases} \quad (1.62)$$

On injecte ensuite cette décomposition dans (1.59) et on obtient le système suivant :

$$\mathcal{M} \ddot{\mathbf{Q}}_h^{n+1} + \mathcal{F}_h^{int}(\mathbf{Q}_h^{n+\frac{1}{2}} + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{Q}}_h^{n+1}) = \mathbf{F}_s^{n+1}. \quad (1.63)$$

Lorsque $\beta \neq 0$, le système (1.63) devient alors implicite. Le problème étant non-linéaire, l'obtention du vecteur inconnu $\ddot{\mathbf{Q}}_h^{n+1}$ nécessite l'utilisation d'un algorithme itératif tel que Newton-Raphson pour résoudre le système.

La stabilité numérique des schémas de Newmark en fonction des coefficients γ et β a été largement démontrée, du moins dans le cas linéaire, par exemple dans les travaux de (Bonnet et Frangi, 2005) et (Bonnet et al., 2014). Ces références montrent que pour $\frac{1}{2} \geq \gamma \geq 2\beta$, le schéma est inconditionnellement stable pour un problème linéaire. En présence de fortes non-linéarités, l'obtention de l'équilibre dynamique du système (1.63) avec une résolution implicite peut être difficile à atteindre. Cela se traduit par des difficultés de convergences de l'algorithme itératif utilisé. De plus, ces schémas implicites peuvent introduire une dissipation numérique lorsque $\gamma \neq \frac{1}{2}$ (Faucher, 2003, Chap. 1).

Pour remédier à ces problématiques numériques, le schéma temporel d'*Europlexus* utilise un schéma de Newmark avec les coefficients $\beta = 0$ et $\gamma = \frac{1}{2}$, ce qui correspond

au schéma explicite des différences centrées. Cependant, par rapport aux schémas implicites, les schémas explicites ne sont pas inconditionnellement stable, et leur stabilité nécessite une contrainte importante sur le pas de temps. Dans le cas des différences centrées, cette contrainte dépend de la plus haute pulsation de la structure ω_{max} . Le pas de temps critique est donné par l'équation suivante :

$$\Delta t_{max} = \frac{2}{\omega_{max}}. \quad (1.64)$$

Obtenir ce pas de temps critique nécessite la résolution d'un problème aux valeurs propres, ce qui peut être numériquement coûteux. En pratique, on utilise une estimation supérieure de cette borne, ce qui conduit à la condition suivante sur le pas de temps :

$$\Delta t < \frac{h}{c_s}. \quad (1.65)$$

Avec c_s la célérité du son dans le matériau. Cette condition correspond à la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) et garantit la stabilité du schéma des différences centrées.

L'approche explicite de *Europlexus* prend ainsi forme grâce au schéma des différences centrées, où le déplacement est calculé uniquement à partir des termes temporels du temps précédent. Les approximations sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_h^{n+1} &= \mathbf{Q}_h^n + \Delta t \dot{\mathbf{Q}}_h^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{Q}}_h^n, \\ \dot{\mathbf{Q}}_h^{n+1} &= \dot{\mathbf{Q}}_h^n + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{\mathbf{Q}}_h^{n+1} + \ddot{\mathbf{Q}}_h^n]. \end{cases} \quad (1.66)$$

Afin de résoudre le problème en temps avec le schéma des différences centrées, la résolution temporelle est décomposée en trois étapes :

1. **Étape de prédiction** : Calcul explicite du déplacement et prédiction de la vitesse

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}_h^{n+\frac{1}{2}} &= \dot{\mathbf{Q}}_h^n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{Q}}_h^n, \\ \mathbf{Q}_h^{n+1} &= \mathbf{Q}_h^n + \Delta t \dot{\mathbf{Q}}_h^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

2. **Solution d'équilibre** : Calcul de l'accélération en résolvant le système de la dynamique

$$\mathcal{M}_h \ddot{\mathbf{Q}}_h^{n+1} + \mathcal{F}_h^{int}(\mathbf{Q}_h^{n+1}) = \mathbf{F}_s^{n+1}. \quad (1.68)$$

3. **Mise à jour vitesse** : Mise à jour de la vitesse avec la nouvelle accélération et la vitesse de prédiction

$$\dot{\mathbf{Q}}_h^{n+1} = \dot{\mathbf{Q}}_h^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t \ddot{\mathbf{Q}}_h^{n+1}. \quad (1.69)$$

Grâce au schéma des différences centrées, l'étape deux se résout simplement en inversant la matrice de masse \mathcal{M} .

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé les équations de l'écoulement d'un fluide et du déplacement d'une structure, ainsi que les méthodes numériques utilisées par les solveurs *TrioCFD* et *Europlexus*.

Une approche explicite en temps a été présentée pour la résolution des équations de la mécanique des solides. Cette approche est utilisée pour résoudre des problèmes physiques impliquant des non-linéarités importantes, tels que les grands déplacements et les chocs. Le schéma des différences centrées est donc utilisé pour la résolution temporelle du système de la dynamique.

En ce qui concerne la résolution des équations du fluide, nous avons introduit la méthode des volumes-éléments finis utilisée par le solveur *TrioCFD*. Cette méthode est moins connue que la méthode des éléments finis, mais elle présente des avantages spécifiques pour la résolution des écoulements fluides. Nous avons souligné le lien entre la méthode des volumes-éléments finis et celle des éléments finis, en montrant que les deux méthodes conduisent à des systèmes de résolutions similaires.

Il est en effet important de comprendre ce lien entre les deux méthodes, car cela nous permet d'utiliser les résultats bien établis de stabilité et de convergence de la méthode des éléments finis pour valider l'approche volumes-éléments finis utilisée dans le solveur *TrioCFD*. Cela nous donne une base solide pour la résolution des problèmes d'interaction fluide-structure.

En résumé, nous avons présenté les méthodes numériques utilisées par les solveurs *TrioCFD* et *Europlexus* pour résoudre les problèmes fluide et structure. La méthode des éléments finis est utilisée pour la partie solide, tandis que la méthode des volumes-éléments finis est utilisée pour la partie fluide. Pour cette dernière, la présentation du lien avec la méthode des éléments finis nous permet de bénéficier des résultats bien établis de stabilité et de convergence.

Chapitre 2

Développement et validation d'une méthode de mouvement de grille optimisée pour des simulations ALE

2.1 Méthodes des volumes-éléments finis pour les équations de Navier-Stokes sur grille mobile

Afin de prendre en compte le mouvement d'une frontière dans la modélisation d'un écoulement, on utilise une description qui permet d'être Lagrangienne proche des bords en mouvement et Eulérienne loin de ces bords. Cette méthode est appelée Arbitrary Lagrangien-Eulérien (ALE). L'approche ALE est utilisée dans de nombreuses études d'interaction fluide structure comme par exemple : (Löhner et Yang, 1996), (Fernández, 2011), (Lagrange *et al.*, 2022), (Panunzio *et al.*, 2022).

2.1.1 Application ALE

On note $\Omega_f(t)$ le domaine fluide en mouvement et $\hat{\Omega}_f$ le domaine de référence. On définit l'application ALE \mathfrak{A} que nous supposons différentiable par :

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} : \hat{\Omega}_f \times [0, T] &\rightarrow \Omega_f(t) \\ (\hat{\boldsymbol{x}}, t) &\mapsto (\boldsymbol{x}, t) = \mathfrak{A}_t(\hat{\boldsymbol{x}}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Le choix du domaine de référence est généralement le domaine au temps initial soit $\Omega_f(t_0)$. Ce n'est pas toujours le cas, par exemple, lors de remaillage, le domaine de référence sera le dernier domaine remaillé. Dans Fig. 2.1, on représente l'application ALE avec le domaine de référence et le domaine en mouvement pour un mouvement de déformation d'objet immergé.

L'application \mathfrak{A} est un difféomorphisme et nous permet donc de définir de façon équivalente les champs dans le domaine de référence ou bien dans le domaine en

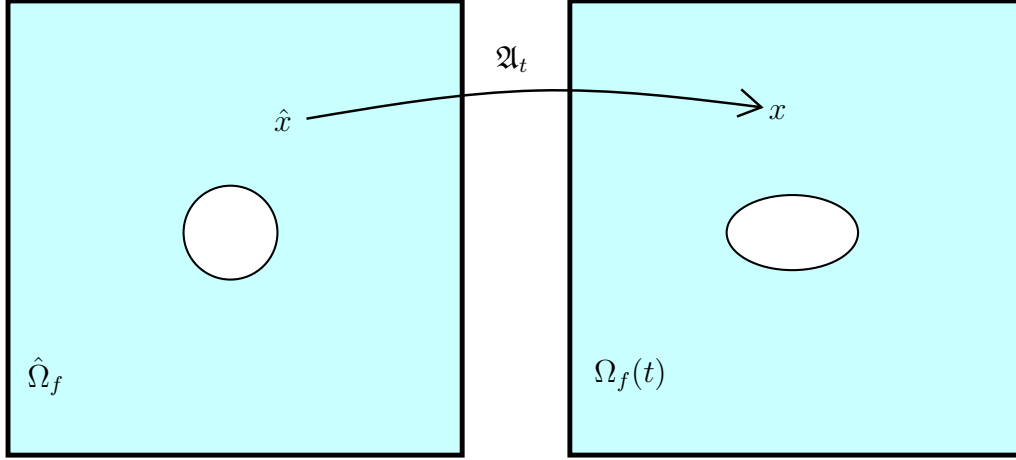


FIGURE 2.1 – Représentation de l'application \mathfrak{A} avec le domaine de référence et le domaine en mouvement.

mouvement. La vitesse de maillage est notée par $\mathbf{w} = \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{A}_t$, son gradient de transformation par $\mathbf{F} = \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\mathfrak{A}_t$ et le déterminant de ce gradient par $J = \det(\mathbf{F})$. On note \mathbf{u} un champ dans le domaine en mouvement $\Omega_f(t)$ et $\hat{\mathbf{u}}$ dans le domaine de référence $\hat{\Omega}_f$, l'application \mathfrak{A} nous permet de relier et définir les deux champs par la relation suivante :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_f(t), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}} \circ \mathfrak{A}_t^{-1}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{u}}(\mathfrak{A}_t^{-1}(\mathbf{x})), \quad (2.2)$$

$$\forall \hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}_f, \quad \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{u} \circ \mathfrak{A}_t(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{u}(\mathfrak{A}_t(\hat{\mathbf{x}})). \quad (2.3)$$

On introduit la dérivée temporelle qu'on note $\frac{\partial}{\partial t}|_{\mathfrak{A}}$ par :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathfrak{A}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t}(\mathfrak{A}_t^{-1}(\mathbf{x}), t) = \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t}(\hat{\mathbf{x}}, t). \quad (2.4)$$

Enfin la relation entre la dérivée en temps en description Eulerienne et en description ALE est donnée par :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathfrak{A}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + [\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla] \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (2.5)$$

2.1.2 Équation de Navier-Stokes en coordonnées ALE

La formulation ALE des équations de Navier-Stokes est basée sur la relation entre les dérivées temporelles des formulations ALE et Eulerienne. En utilisant la relation (2.5) dans les équations de Navier-Stokes (1.27) on obtient pour tout $\mathbf{x} \in \Omega_f(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{w} = \mathbf{EXT}(\mathbf{w}|_{\Gamma_i}), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \rho_f \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathfrak{A}} + \rho_f (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{u}, p) = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

2.1 Méthodes des volumes-éléments finis pour les équations de Navier-Stokes sur grille mobile

Dans un premier temps, on définit **EXT** comme n'importe quel opérateur d'extension de la vitesse de la frontière en mouvement Γ_i . La partie suivante est réservée à l'étude de cet opérateur.

La formulation précédente est appelée formulation non-conservative. *TrioCFD* utilise une formulation conservative et c'est donc la formulation suivante que nous utilisons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{w} = \mathbf{EXT}(\mathbf{w}_{\Gamma_i}), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \rho_f \frac{\partial J\mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathfrak{X}} + J[\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes (\mathbf{u} - \mathbf{w})\rho_f) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{u}, p)] = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

La dérivation des équations de Navier-Stokes afin d'obtenir la formulation conservative est disponible dans (Formaggia *et al.*, 2010, Chap. 3). En développant l'expression et en utilisant la définition de $\boldsymbol{\sigma}_f$, on obtient l'expression finale qu'on utilisera par la suite pour la discrétisation spatiale et temporelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{w} = \mathbf{EXT}(\mathbf{w}_{\Gamma_i}), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \rho_f \frac{\partial J\mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathfrak{X}} + J[\rho_f[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{u}] - 2\mu_f \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}) + \nabla p] = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Le travail de discrétisation de ces équations avec la méthode des volumes-éléments finis a déjà été réalisée dans la section 1.3. Le système à résoudre est finalement donné en remplaçant le terme de dérivée temporelle dans le système discret de Navier-Stokes (1.34), c'est à dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}_h^{n+1} = \mathbf{EXT}(\mathbf{w}_{\Gamma_i}^{n+1}), \\ \mathcal{C}\mathbf{U}_h^{n+1} = \mathbf{0}, \\ \mathcal{M} \frac{J^{n+1}\mathbf{U}_h^{n+1} - J^n\mathbf{U}_h^n}{\Delta t} + J^{n+1}(\mathcal{L}(\mathbf{U}_h^n)\mathbf{U}_h^{n+1} - \mathcal{L}(\mathbf{U}_h^n)\mathbf{W}_h^{n+1} + \mathcal{A}\mathbf{U}_h^{n+1} + \mathcal{B}\mathbf{P}_h^{n+1}) = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

2.1.3 Équation du mouvement de grille

Parmi les nombreuses techniques que l'on trouve dans la littérature pour étendre le mouvement imposé de la frontière lagrangienne à une grille fluide, on trouve fréquemment à mettre en œuvre l'équation harmonique. La vitesse de la grille est calculée en résolvant le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \mathbf{w} = 0 \text{ in } \Omega_f(t), \\ \mathbf{w} = \mathbf{w}_{\Gamma_i} \text{ on } \Gamma_i(t). \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Cette équation présente actuellement deux principaux inconvénients :

- Le premier est qu'elle ne prend pas en charge les grands déplacements, ce qui pourrait conduire à des cellules de maillage excessivement déformées. Cela peut être évité en passant à une équation biharmonique (Helenbrook, 2003) ou à un modèle élastique fictif affecté au maillage (Stein *et al.*, 2003), (Dwight, 2009), (Faucher *et al.*, 2017). Ces solutions sont nettement plus difficiles à mettre en œuvre que l'équation harmonique, et une comparaison entre ces modèles est disponible dans (Wick, 2011).
- Le second problème, commun à toutes les approches du premier point, est l'objet spécifique de ce chapitre. Il provient de l'ajout d'un solveur implicite pour résoudre le mouvement de grille. Cela induit un coût de calcul supplémentaire du même ordre de grandeur que le coût lié au solveur physique dans certains cas. Le but de ce chapitre est donc de réduire ce coût avec la contrainte évidente de préserver l'exactitude de la solution physique.

La suite de ce chapitre provient de l'article publié durant cette thèse (Leprevost *et al.*, 2023).

2.2 Équation hyperbolique pour la résolution du mouvement de grille

2.2.1 Formulation du problème hyperbolique

En partant de l'équation harmonique elliptique, une équation hyperbolique est obtenue par dérivation en ajoutant une dépendance temporelle du second ordre. Le problème de mouvement de grille est ainsi transformé en un problème de propagation d'ondes avec une déformation imposée à la frontière. La nouvelle équation s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} - c_g^2 \Delta \mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

Avec c_g la vitesse de l'onde.

Cette approche s'inspire de la dynamique des structures et introduit de nouveaux paramètres pseudo-physiques pour ajuster et contrôler la réponse dynamique de la grille, à savoir la densité fictive ρ_g et la raideur fictive k_g de la grille. Ces paramètres sont reliés à la vitesse de l'onde par la relation $c_g = \sqrt{\frac{k_g}{\rho_g}}$, ce qui donne :

$$\rho_g \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} - k_g \Delta \mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

Un coefficient d'amortissement d_g est ajouté au modèle pour aider à mieux contrôler sa dynamique, l'ajout de l'amortissement sera justifié par l'étude paramétrique dans la partie suivante. L'équation hyperbolique complète pour résoudre

2.2 Équation hyperbolique pour la résolution du mouvement de grille

le problème du mouvement de grille est donc donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{x} \in \Omega_f(t), \rho_g \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} + d_g \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - k_g \Delta \mathbf{w} = \mathbf{0}, \\ \forall \mathbf{x} \in \Gamma_i(t), \mathbf{w} = \mathbf{w}_{\Gamma_i}, \\ \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_f(t) \setminus \Gamma_i(t), \mathbf{w} = \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Avec \mathbf{w}_{Γ_i} une vitesse connu sur la frontière en mouvement.

En introduisant $V_g = H^1(\Omega_f(t))$ et $\mathbf{V}_g = (V_g)^3$, la formulation faible du problème hyperbolique s'obtient de manière classique en multipliant (2.13) par une fonction test $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_f = (H_1^0(\Omega_f(t)))^3$ et en intégrant sur le domaine, ce qui donne :

$$\rho_g \int_{\Omega_f} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + d_g \int_{\Omega_f} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + k_g \int_{\Omega_f} \Delta \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (2.14)$$

En utilisant la formule de Green (5) et en utilisant le fait que $\mathbf{v}|_{\partial\Omega_f} = \mathbf{0}$, on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{w} \in \mathbf{V}_g \text{ avec } \mathbf{w} = \mathbf{w}_{\Gamma_i} \text{ sur } \Gamma_i, \text{ tel que :} \\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_f, \rho_g \int_{\Omega_f} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + d_g \int_{\Omega_f} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \\ k_g \int_{\Omega_f} \nabla \mathbf{w} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (2.15)$$

2.2.2 Éléments finis pour l'équation hyperbolique

On reprend la triangulation \mathcal{T}_f^h du domaine $\Omega_f(t)$ défini dans la section 1.3. Les sommets sont les s_k pour $k \in \{1, \dots, N_K\}$ et les triangles sont les K_j pour $j \in \{1, \dots, N_J\}$.

On utilise une approximation par éléments finis de type \mathbb{P}_1 afin de discrétiser en espace l'équation hyperbolique. On note les fonctions de formes correspondantes $\varphi_{i\{i=1, \dots, N_h\}}$ et l'espace solution est défini par :

$$V_g^h = \{v_h \text{ continues aux } s_k \mid \forall K_j \in \mathcal{T}_f^h, v_h \in P_1(K_j)\}, \quad (2.16)$$

La vitesse de la grille discrétisée \mathbf{w}_h se décompose donc par une somme fini de fonction de base et de ces inconnus aux noeuds $(\boldsymbol{\alpha}_{h,1}(t), \dots, \boldsymbol{\alpha}_{h,N_h}(t))$.

$$\mathbf{w}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_K} \boldsymbol{\alpha}_{h,i}(t) \varphi_i(\mathbf{x}). \quad (2.17)$$

Chaque inconnu est un vecteur correspondant aux trois directions de l'espace, $\boldsymbol{\alpha}_{h,i} = (\alpha_{h,i}^x, \alpha_{h,i}^y, \alpha_{h,i}^z)^T$. En injectant la décomposition (2.17) de \mathbf{w}_h dans la formu-

lation faible (2.15), on obtient :

$$\begin{aligned} \rho_g \int_{\Omega_f} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\sum_{i=1}^{N_K} \boldsymbol{\alpha}_{h,i} \varphi_i \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + d_g \int_{\Omega_f} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^{N_K} \boldsymbol{\alpha}_{h,i} \varphi_i \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ + k_g \int_{\Omega_f} \nabla \left(\sum_{i=1}^{N_K} \boldsymbol{\alpha}_{h,i} \varphi_i \right) : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

En utilisant la linéarité de l'opérateur ∇ et en prenant la fonction test $\mathbf{v} = \mathbf{1}\varphi_j$ avec j fixe dans $\{0, \dots, N_K\}$ et on obtient la formulation finale de la discrétisation en espace :

$$\begin{aligned} \rho_g \sum_{i=1}^{N_K} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{\alpha}_{h,i} \cdot \mathbf{1} \int_{\Omega_f} \phi_i \phi_j \, d\mathbf{x} + d_g \sum_{i=1}^{N_K} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\alpha}_{h,i} \cdot \mathbf{1} \int_{\Omega_f} \varphi_i \varphi_j \, d\mathbf{x} \\ + k_g \sum_{i=1}^{N_K} \boldsymbol{\alpha}_{h,i} \cdot \mathbf{1} \int_{\Omega_f} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Afin d'écrire la formulation sous forme de système linéaire, on introduit les matrices de masses, de rigidité et d'amortissement :

$$\begin{aligned} (M_h)_{ij} &= (D_h)_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \, d\mathbf{x}, \\ (K_h)_{ij} &= \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Avec ces matrices, on peut écrire la formulation (2.19) sous forme de système linéaire de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \rho_g \begin{pmatrix} M_h & 0 & 0 \\ 0 & M_h & 0 \\ 0 & 0 & M_h \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{W}_h + d_g \begin{pmatrix} D_h & 0 & 0 \\ 0 & D_h & 0 \\ 0 & 0 & D_h \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{W}_h \\ + k_g \begin{pmatrix} K_h & 0 & 0 \\ 0 & K_h & 0 \\ 0 & 0 & K_h \end{pmatrix} \mathbf{W}_h = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Avec le vecteur solution \mathbf{W}_h :

$$\mathbf{W}_h = \begin{bmatrix} (\alpha_{h,i}^x)_{i=1, \dots, N_h}^T \\ (\alpha_{h,i}^y)_{i=1, \dots, N_h}^T \\ (\alpha_{h,i}^z)_{i=1, \dots, N_h}^T \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

2.2.3 Discrétisation temporelle de l'équation hyperbolique

La discrétisation temporelle de l'équation hyperbolique dans *Europlexus* est identique à celle de l'équation de la dynamique présentée dans la section 1.5.3. Cela signifie que les dérivées temporelles sont approchés à l'aide du schéma des différences

2.2 Équation hyperbolique pour la résolution du mouvement de grille

centrées :

$$\begin{cases} \mathbf{W}_h^{n+1} \approx \mathbf{W}_h^n + \Delta t \dot{\mathbf{W}}_h^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{W}}_h^n, \\ \dot{\mathbf{W}}_h^{n+1} \approx \dot{\mathbf{W}}_h^n + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{\mathbf{W}}_h^{n+1} + \ddot{\mathbf{W}}_h^n]. \end{cases} \quad (2.23)$$

Les étapes de résolution sont aussi identique :

(1) Étape de prédiction : Calcul du déplacement explicite et prédiction de la vitesse au demi pas de temps :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{W}}_h^{n+\frac{1}{2}} &= \dot{\mathbf{W}}_h^n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{W}}_h^n, \\ \mathbf{W}_h^{n+1} &= \mathbf{W}_h^n + \Delta t \dot{\mathbf{W}}_h^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

(2) Solution d'équilibre : Calcul de l'accélération à partir du système suivant :

$$\rho_g \left(M_h + \frac{\Delta t}{2} D_h \right) \ddot{\mathbf{W}}_h^{n+1} = - \left(d_g D_h \dot{\mathbf{W}}_h^{n+\frac{1}{2}} + k_g K_h \mathbf{W}_h^{n+1} \right). \quad (2.25)$$

La solution est explicite lorsque les matrices M_h et D_h , qui ont ici la même expression (2.21), sont diagonalisées grâce au processus de "mass lumping".

(3) Mise à jour final de la vitesse :

$$\dot{\mathbf{W}}_h^{n+1} = \dot{\mathbf{W}}_h^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t \ddot{\mathbf{W}}_h^{n+1}. \quad (2.26)$$

La résolution temporelle étant explicite, le pas de temps est soumis à une contrainte identique à celle de la résolution explicite de l'équation de la dynamique (1.65). Adapté au problème de grille, la condition de CFL est donc suivante :

$$\Delta t < \alpha \frac{h}{c_g}. \quad (2.27)$$

Avec $\alpha \in]0, 1[$ un coefficient de sécurité. L'approche explicite de la discrétisation introduit deux problèmes à prendre en compte attentivement pour les performances numériques :

- Premièrement, dans le cas général, lors des simulations, le pas de temps de stabilité de la grille sera plus petit que le pas de temps prescrit pour le problème physique du fluide. Afin d'éviter de pénaliser la solution physique avec la nouvelle formulation du problème de la grille, un algorithme de sous-cyclage est mis en œuvre.
- Deuxièmement, même si seul un produit matrice-vecteur est maintenant requis à chaque pas de temps pour le problème de mouvement de la grille, ce qui est le point précis de transition vers l'équation hyperbolique. La solution du problème de la grille est susceptible de rester coûteuse en terme de calcul si trop de sous itérations sont effectués en raison d'un faible pas de temps de stabilité. Ce problème est résolu grâce au choix optimal des coefficients fictifs de masse, de raideur et d'amortissement à partir de l'équation (2.13). L'objectif est alors de maximiser le pas de temps de stabilité par rapport au pas de temps physique du fluide tout en contrôlant la réponse dynamique de la grille et en préservant la qualité du maillage.

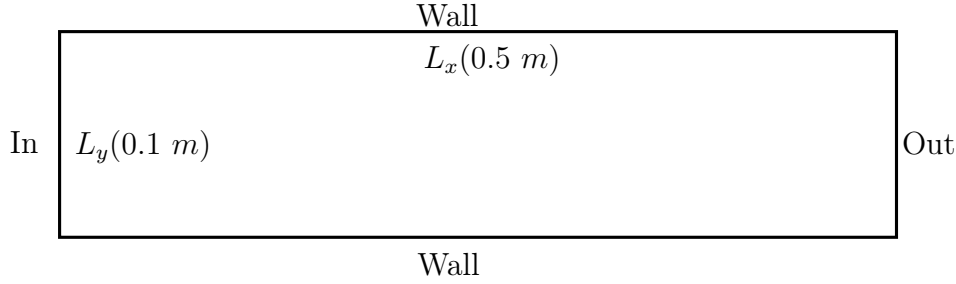


FIGURE 2.2 – Géométrie du domaine rectangulaire.

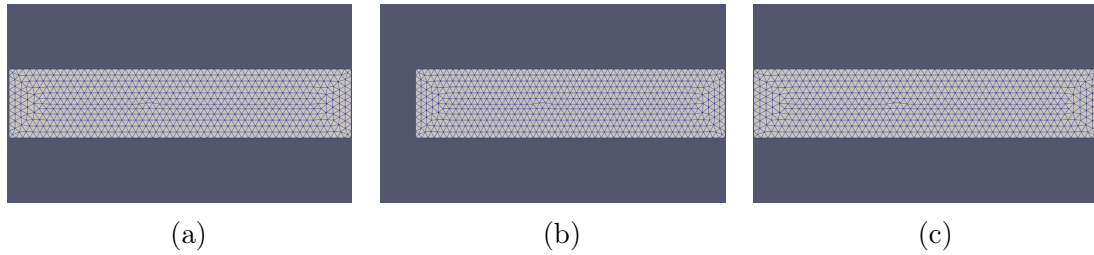


FIGURE 2.3 – Mouvement du maillage du premier cas test pendant une seule période de 0,1 s. (a) Condition initiale à $t = 0$ s. (b) Compression maximale du domaine à $t = 0,05$ s. (c) Retour du domaine à sa position initiale à $t = 0,1$ s.

2.3 Caractérisation de l'influence des paramètres fictifs du mouvement de grille

2.3.1 Présentation d'un cas test pseudo 1D

Ce premier cas test correspond à la compression pseudo-1D d'un domaine fluide rectangulaire de longueur $L_x = 0,5$ m et de hauteur $L_y = 0,1$ m. Les conditions aux limites pour le problème du fluide sont des conditions de Dirichlet homogènes à gauche (In) et des conditions de Neumann homogènes à droite (Out). La configuration et les conditions aux limites sont illustrées dans la figure 2.2. La compression de la grille correspond à imposer une condition de Dirichlet non homogène sur la bordure gauche et une condition de Neumann homogène sur les parois (bord supérieur et inférieur). Le domaine est d'abord comprimé en imposant le mouvement de la bordure gauche avec un déplacement maximal de 0,05 m, puis il est étiré de nouveau vers sa configuration initiale à la même vitesse. La période du mouvement de la bordure est de 0,1 s. La figure 2.3 montre la compression du domaine pendant une seule période.

2.3 Caractérisation de l'influence des paramètres fictifs du mouvement de grille

2.3.2 Analyse de l'influence du coefficient d'amortissement

Pour un système dynamique comme celui construit pour le nouveau problème de mouvement de la grille, l'amortissement est censé affecter la propagation des ondes dans le domaine et peut être ajusté pour les faire disparaître plus ou moins rapidement. Pour cette première analyse, les coefficients de masse et de raideur sont choisis de telle sorte que $\rho_g = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et $k_g = 10^6 \text{ Pa}$, ce qui induit que la vitesse de l'onde est fixée à $c_g = 32 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Cette valeur relativement faible par rapport à la dynamique structurelle standard permet une visualisation claire des ondes du mouvement de grille dans le domaine de calcul, comme illustrée dans la figure 2.4. L'effet du coefficient d'amortissement est alors relativement simple, car une valeur proche de zéro ($d_g = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}$) à gauche entraîne la propagation d'ondes de compression/traction significatives dans la grille, tandis qu'une valeur importante ($d_g = 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}$) annule efficacement les ondes et restaure un mouvement quasi-statique de la grille en réponse au déplacement de la frontière mobile. Dans notre étude, lorsque l'on vise un mouvement quasi-statique de la grille, un coefficient d'amortissement proche du coefficient de raideur est le meilleur choix.

2.3.3 Analyse de l'influence de la densité et de rigidité

Le coefficient de raideur fictif k_g contrôle les forces exercées sur les nœuds du maillage en réponse à la déformation des cellules du maillage. Une raideur trop faible concentrera la déformation proche des parois mobiles, tandis qu'une raideur trop élevée renforcera la réponse dynamique de la grille et réduira le pas de temps de stabilité donné par la condition CFL. Comme introduit dans le paragraphe précédent, des valeurs de raideur significatives sont associées à des valeurs d'amortissement importantes pour éviter les oscillations de la grille loin du bord en mouvement.

La figure 2.5 affiche l'angle maximal pour chaque triangle du maillage au moment de la compression maximale du domaine (à l'instant $t = 0.05 \text{ s}$) pour trois valeurs de raideur $k_g \in 10^4, 10^6, 10^8 \text{ Pa}$ et un même coefficient de densité ($\rho_g = 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$). Une valeur maximale d'angle élevée pour un triangle correspond à un élément avec un mauvais rapport d'aspect. Cela peut avoir un impact sur la qualité de la solution physique, voire conduire à l'arrêt de la simulation. On observe facilement que la raideur la plus basse localise excessivement la déformation près de la paroi mobile. Le mouvement global du maillage devient acceptable avec la valeur de raideur intermédiaire, et l'amélioration apportée par la valeur la plus élevée ne compense donc pas la pénalisation supplémentaire induite sur le pas de temps de stabilité, qui est dix fois plus petit selon l'équation (2.27).

La figure 2.6 montre les résultats pour les mêmes configurations que précédemment, mais à l'instant final là où la paroi mobile est revenue à sa position initiale. Les observations sont les mêmes qu'auparavant ; seules les cellules du maillage sont étirées au lieu d'être comprimées. À ce moment-là, seul le coefficient de raideur le plus élevé permet à la grille de retrouver sa forme initiale. Un léger décalage rési-

CHAPITRE 2 : Développement et validation d'une méthode de mouvement de grille optimisée pour des simulations ALE

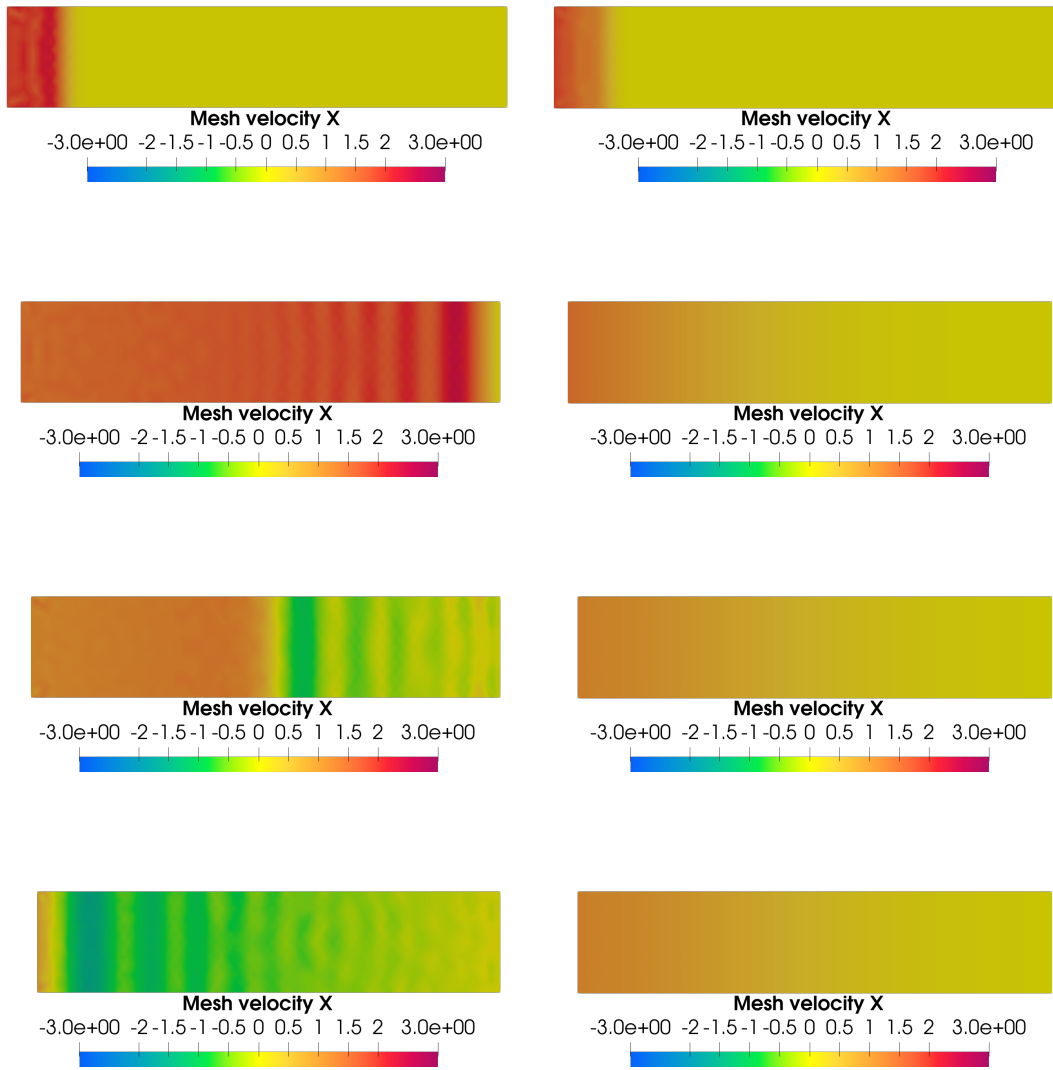


FIGURE 2.4 – Évolution de la vitesse du maillage (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) en fonction du coefficient d'amortissement d_g . (**Gauche**) : $d_g = 1 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. (**Droite**) : $d_g = 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Temps $t = 0.002, 0.015, 0.023, 0.03$ s de haut en bas.

2.3 Caractérisation de l'influence des paramètres fictifs du mouvement de grille

duel est observé avec une grille plus *souple* ($k_g = 10^6$ Pa), suggérant une oscillation de basse fréquence de la grille si la simulation se poursuit. Cependant, l'amplitude de cette oscillation est modérée et n'affecte pas la qualité de la solution physique, mettant en évidence le choix laissé aux utilisateurs pour le compromis optimal entre les performances numériques (c'est-à-dire le pas de temps de stabilité le plus élevé possible) et le contrôle du mouvement de la grille.

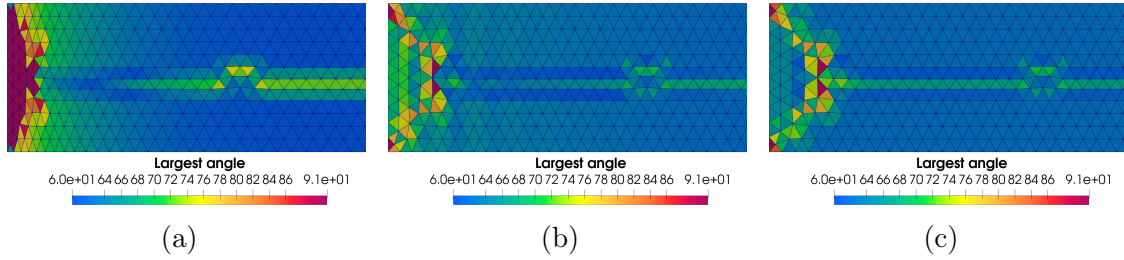


FIGURE 2.5 – Angle maximum par élément (en degrés) lors de la compression maximale entre plusieurs grilles avec différentes raideurs. Le coefficient de raideur augmente de gauche à droite. **(a)** Compression maximale; raideur $k_g = 10^4$ Pa. **(b)** Compression maximale; raideur $k_g = 10^6$ Pa. **(c)** Compression maximale; raideur $k_g = 10^8$ Pa.

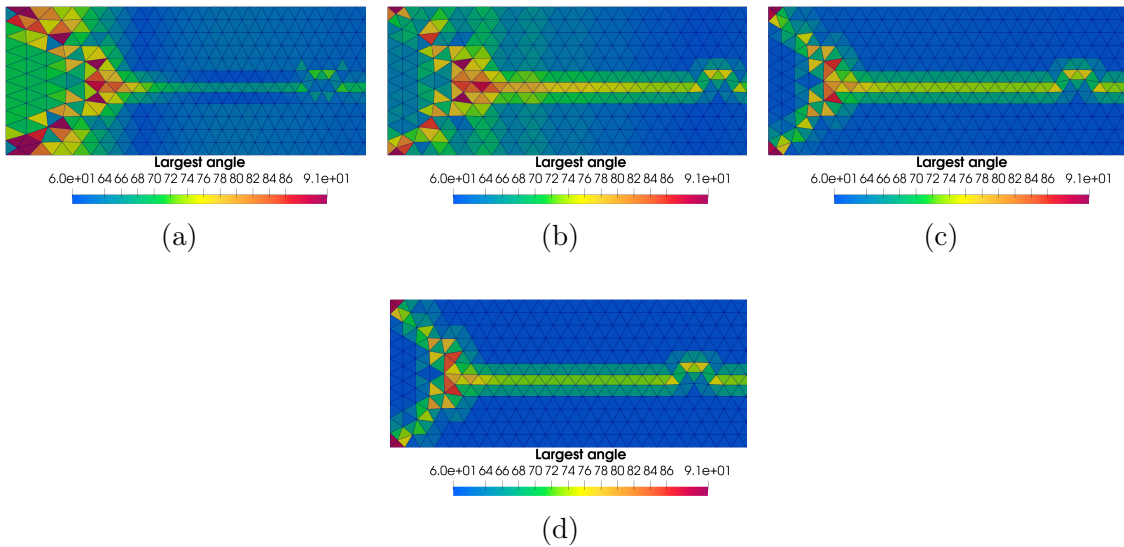


FIGURE 2.6 – Angle maximum par élément (en degrés) lors de son retour à la position initiale ($t = 0.1$ s) entre plusieurs grilles avec différentes raideurs. Le coefficient de raideur augmente de gauche à droite. **(a)** Retour à la position initiale; raideur $k_g = 10^4$ Pa. **(b)** Retour à la position initiale; raideur $k_g = 10^6$ Pa. **(c)** Retour à la position initiale; raideur $k_g = 10^8$ Pa. **(d)** Maillage de grille initial.

Enfin, la figure 2.7 montre l'influence de la densité fictive de la grille, avec

$\rho_g \in 10^3, 10^4, 10^5 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ utilisées avec un coefficient de raideur $k_g = 10^6 \text{ Pa}$. Dans ce cas, la densité choisie a un effet minimal sur les formes des cellules du maillage lors de la compression maximale de la grille, ce qui peut être attribué au mouvement relativement lent de la paroi. Cependant, il convient de rappeler qu'une augmentation de la densité de la grille améliore également le pas de temps de stabilité.

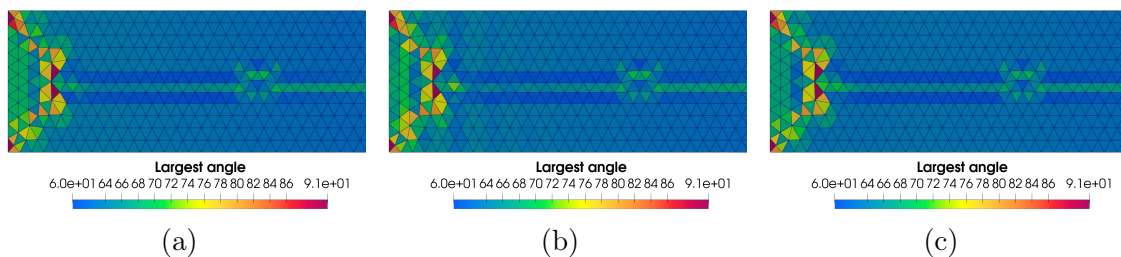


FIGURE 2.7 – Angle maximum par élément (en degrés) lors de la compression maximale entre plusieurs grilles avec différentes densités. La densité augmente de la grille de gauche à celle de droite. (a) Compression maximale pour la grille $\rho_g = 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. (b) Compression maximale pour la grille $\rho_g = 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. (c) Compression maximale pour la grille $\rho_g = 10^5 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

2.4 Cas test de Turek avec mouvement imposé

La section précédente a analysé l'influence des différents paramètres de l'équation (2.13), en mettant l'accent sur l'importance du coefficient d'amortissement et de rigidité. Il est essentiel de choisir la rigidité avec soin pour obtenir à la fois un mouvement de grille qualitatif et la condition CFL la moins restrictive. Ainsi, cette section compare deux grilles, l'une *souple* et l'autre *rigide*, avec les résultats obtenus à partir de l'équation harmonique (2.10).

2.4.1 Présentation du cas test de Turek

Le cas test de Turek est un cas de test de validation classique pour les problèmes d'interaction fluide-structure (Turek *et al.*, 2010) (Razzaq *et al.*, 2010). Dans ce cas de test, le fluide s'écoule autour d'un obstacle élastique fixé à un cylindre *rigide* immobile (voir Figure 2.8).

La longueur du domaine fluide est de $L = 2,5 \text{ m}$, et sa hauteur est de $H = 0,41 \text{ m}$. Les coordonnées du centre du cylindre sont $(0,2, 0,2) \text{ m}$, et son rayon est de $0,05 \text{ m}$. La structure élastique, désignée par Γ_i , a une longueur de $l = 0,35 \text{ m}$ et une hauteur de $h = 0,02 \text{ m}$.

Le fluide est initialement au repos, Γ_i est flexible, et les points de sa frontière latérale subissent un déplacement harmonique simple de la forme $w_{\Gamma_i} = (0, \phi(x))$,

2.4 Cas test de Turek avec mouvement imposé

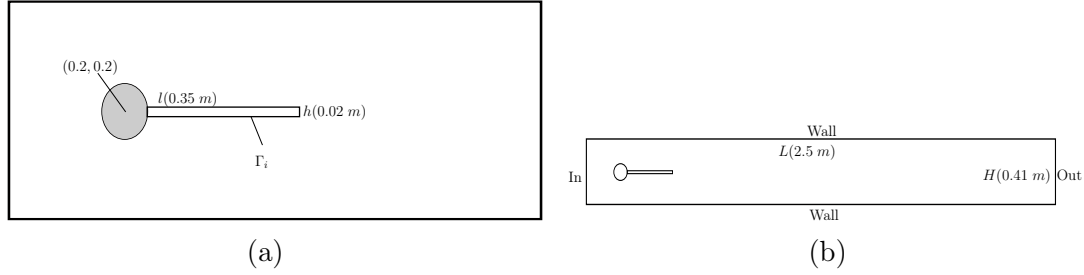


FIGURE 2.8 – Géométrie du cas test de Turek. (a) Zoom sur la poutre du cas test. (b) Géométrie entière du cas test.

TABLE 2.1 – Paramètres des grilles pour le cas test de Turek.

	ρ_g	k_g	d_g	Δt
<i>Grille rigide</i>	10^3	10^8	10^7	$\sim [1 \times 10^{-6}, 2 \times 10^{-6}]$
<i>Grille souple</i>	10^3	10^6	10^6	$\sim [1 \times 10^{-5}, 2 \times 10^{-5}]$

avec :

$$\phi(x) = \gamma \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{N_i} V_i(x) \cos(\omega_i t). \quad (2.28)$$

Avec γ l'amplitude du déplacement, x la coordonnée longitudinale, $V_i(x)$ est le i -ième mode de vibration de flexion d'une poutre d'Euler-Bernoulli avec des conditions aux limites encastées-libres. $N_i = \sup(|V_i(x)|, x \in [0, l])$ sa norme infinie, ω_i la fréquence angulaire, t le temps et $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$.

Deux types de grille sont présent en compte pour le mouvement du maillage hyperbolique : l'une appelée *souple* et l'autre appelée *rigide*. Les coefficients d'amortissement sont définis en fonction de l'analyse précédente, et tous les paramètres sont résumés dans le Tableau 2.1. Un maillage localement raffiné avec 10^4 triangles est utilisé. Deux tailles locales différentes sont définies dans le processus de maillage : une petite taille locale de 25×10^{-4} m pour les éléments proches de la poutre et une grande taille globale de 25×10^{-3} m ailleurs. Le pas de temps pour le fluide, Δt_f , est fixé à 2×10^{-4} . Le pas de temps pour le maillage varie entre 1×10^{-5} s et 2×10^{-5} s pour le maillage *souple* et entre 1×10^{-6} s et 2×10^{-6} s pour le maillage *rigide* (dix fois plus faible en accord avec la même densité et une raideur multipliée par 100 pour le maillage *souple*).

2.4.2 Comparaison entre le mouvement de grille de l'équation elliptique et hyperbolique

Dans cette section, la dynamique des deux grilles (*rigide* et *souple*) est analysée en comparant leur mouvement avec celui de la grille harmonique décrit par l'équation (2.10). Dans un premier temps, seul le premier mode de vibration de flexion de la

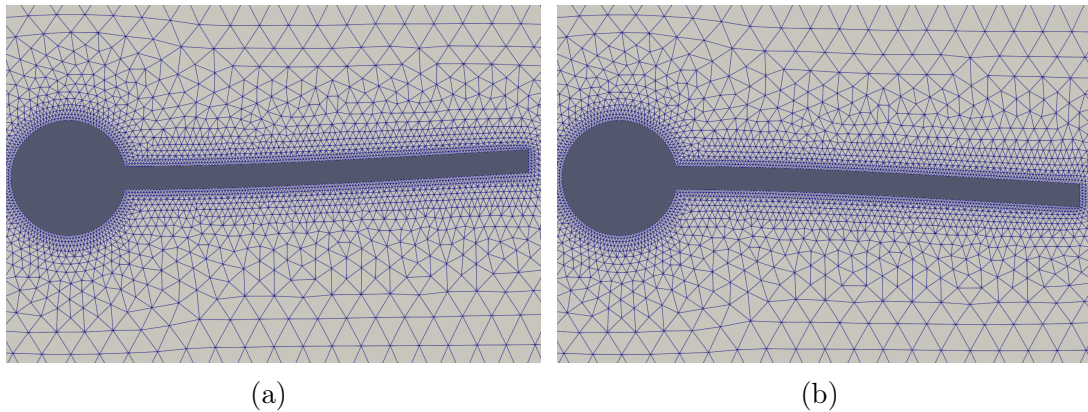


FIGURE 2.9 – Cas test de Turek avec déplacement imposé. Mouvement de la grille *rigide*. (a) déplacement de la poutre à $t = 0.025$ s. (b) déplacement de la poutre à $t = 0.075$ s.

poutre (c'est-à-dire $k = 1$ dans l'équation (2.28)) est pris en compte. L'amplitude de déplacement est fixée à $\gamma = 0.15$ m, et la fréquence imposée est $\omega/(2\pi) = 10$ Hz. La figure 2.9 illustre la dynamique de la poutre à différents pas de temps.

La figure 2.10 représente l'évolution du minimum du déterminant Jacobien, J . L'évolution de J représente un critère de qualité du maillage. Ainsi, la diminution de J indique une dégradation de la qualité des maillages. Pour la grille *rigide*, la courbe s'ajuste parfaitement avec le minimum du déterminant du Jacobien obtenu avec l'équation harmonique. Pour la grille *souple*, un décalage est observé. Les valeurs minimales de la courbe sont inférieures à celles de l'équation harmonique, cela indique une dégradation de la qualité du maillage légèrement supérieure. Cependant, le minimum du déterminant Jacobien reste périodique et revient près de 1 après chaque période, de sorte que le mouvement du maillage reste cohérent avec l'équation harmonique.

La figure 2.11 représente l'évolution normalisée de la plus petite aire des cellules du maillage. Comme précédemment, la grille *rigide* s'ajuste parfaitement au mouvement du maillage harmonique, tandis que la grille *souple* présente un décalage. Les cellules de la grille *souple* ont une aire minimale plus petite que celles de la grille harmonique. En conséquence, la grille *souple* est moins précise lorsque la poutre atteint son amplitude maximale. Malgré cela, les cellules ne se dégènèrent pas et reviennent à leur forme d'origine à la fin de chaque période, de sorte que la grille *souple* reste cohérente pour les calculs. De même, les deux quantités suggèrent que le mouvement d'un maillage fixe est proche du comportement du mouvement de grille harmonique.

Les figures 2.12 et 2.13 montrent comment le comportement de la grille évolue lorsque le mouvement de la poutre est modifié. Le déplacement imposé à la poutre est calculé en considérant les deux premiers modes de vibration de la poutre encastree-libre, c'est-à-dire $k = 2$ dans l'équation (2.28). L'amplitude du déplacement est de

2.4 Cas test de Turek avec mouvement imposé

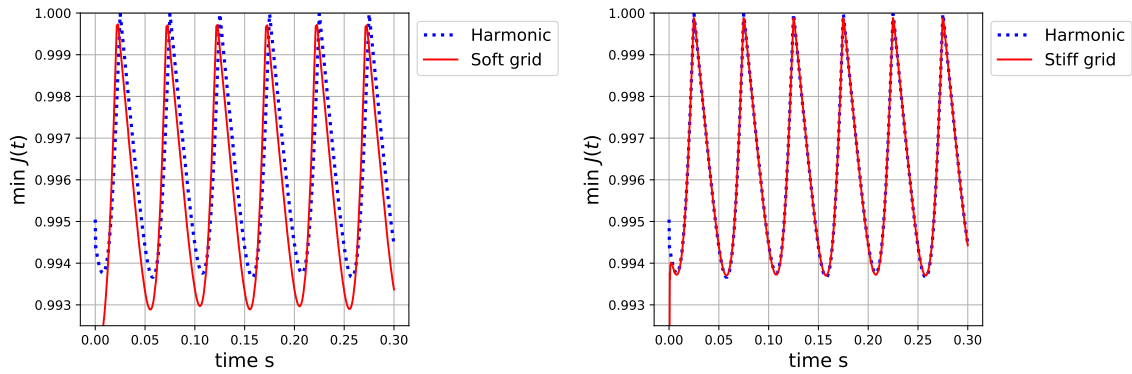


FIGURE 2.10 – Évolution du minimum du déterminant Jacobien, J , pour la grilles *souple* (**gauche**) et *rigide* (**droite**) sur trois périodes d'oscillation du premier mode de vibration de la poutre encastée-libre. Les lignes en pointillés correspondent à l'évolution de J pour la grille harmonique.

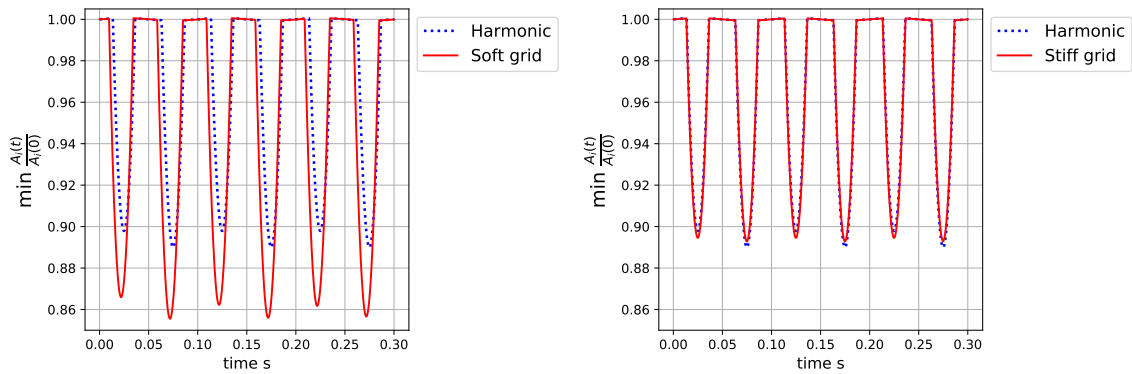


FIGURE 2.11 – Évolution de l'air minimale normalisée des cellules de la grille pour la grille *souple* (**gauche**) et *rigide* (**droite**) sur trois périodes d'oscillation du premier mode de flexion de vibration de la poutre encastée-libre. Les lignes en pointillés correspondent à l'évolution de J pour la grille harmonique.

CHAPITRE 2 : Développement et validation d'une méthode de mouvement de grille optimisée pour des simulations ALE

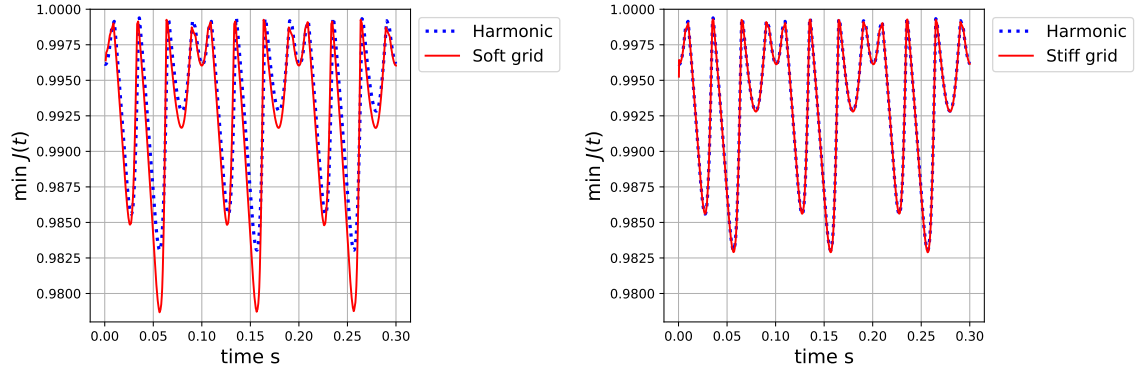


FIGURE 2.12 – Évolution du minimum du déterminant jacobien, J , pour la grille *souple* (**gauche**) et *rigide* (**droite**) sur trois périodes d'oscillation des deux premiers modes de vibration de la poutre encastée-libre. Les lignes en pointillées correspondent à l'évolution de J pour la grille harmonique.

$\gamma = 0.15$ m, les fréquences imposées sont $\omega_1/(2\pi) = 10$ Hz et $\omega_2/(2\pi) = 20$ Hz, et les coefficients de poids sont $\alpha_1 = 0.7$ et $\alpha_2 = 0.3$. Les observations restent les mêmes. La comparaison avec la grille harmonique reste inchangée même lorsque des modes de vibrations supplémentaires sont pris en compte, c'est-à-dire $k > 2$ dans l'équation (2.28).

2.5 Analyse des performance de la méthode sur un cas 3D

La section précédente a abordé l'effet des coefficients des matériaux fictifs de l'équation (2.13) sur le mouvement de la grille résultant du problème hyperbolique. L'objectif de cette section est de discuter des avantages en termes de performance de calcul de l'approche proposée sur des maillages significatifs. Une configuration en 3D et différentes tailles de maillages (jusqu'à 2 millions de cellules) sont choisies pour présenter simultanément des mesures fiables et des tendances pour les temps de calcul.

2.5.1 Présentation du cas test 3D

Le problème est en trois dimensions et consiste en deux cylindres coaxiaux séparés par une couche de fluide initialement au repos. Le cylindre externe est *rigide* et fixe. Le cylindre interne est flexible, et comme dans la section précédente, on impose dans la direction e_y , un déplacement harmonique simple de la forme suivante :

$$\phi(x) = \gamma \sin(\pi x/L) \cos(\omega t). \quad (2.29)$$

2.5 Analyse des performance de la méthode sur un cas 3D

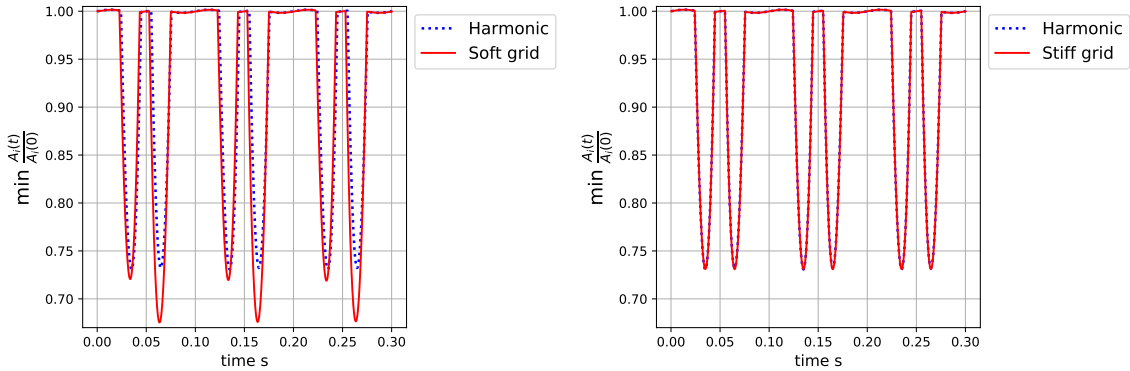


FIGURE 2.13 – Évolution de l’air minimale normalisée des cellules de la grille pour les grilles *souple* (gauche) et *rigide* (droite) sur trois périodes d’oscillation des deux premiers modes de vibration de la poutre. Les lignes en pointillés correspondent à l’évolution de J de la grille harmonique.

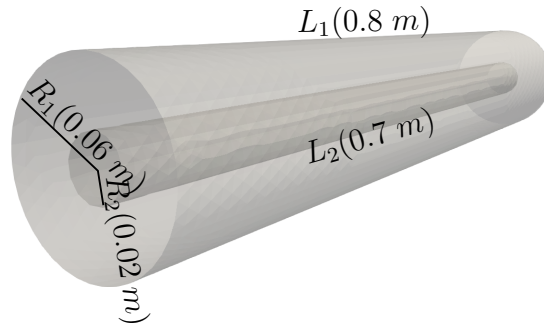


FIGURE 2.14 – Géométrie du domaine 3D.

Cette équation correspond au premier mode de vibration de flexion d’une poutre d’Euler-Bernoulli avec des conditions aux limites encastées-encastées. Les rayons sont $R_1 = 0.06$ m et $R_2 = 0.02$ m, et les longueurs sont $L_1 = 0.8$ m et $L_2 = 0.7$ m. La configuration est illustrée à la figure 2.14. Les simulations sont réalisées avec un déplacement imposé d’amplitude $\gamma = 0.15$ m et une fréquence de forçage $\omega/(2\pi) = 10$ Hz. La Figure 2.15 montre le déplacement du cylindre encasté-encasté.

Le cas est résolu avec *TrioCFD* en utilisant une combinaison classique et efficace de solveurs pour ce problème, dont les résultats seront discutés dans la prochaine section. Le schéma d’intégration temporel est implicite pour la vitesse. La vitesse est résolu à l’aide de l’algorithme *GMRES* implémenté dans *TrioCFD*, tandis que la solution du problème de pression est obtenue grâce à l’algorithme du gradient conjugué préconditionné (*PCG*) de la bibliothèque *PETSc* (voir <https://petsc.org>). Ce dernier est utilisé pour le calcul du mouvement de la grille effectué avec l’équation harmonique. Toutes les simulations sont réalisées en utilisant un traitement parallèle

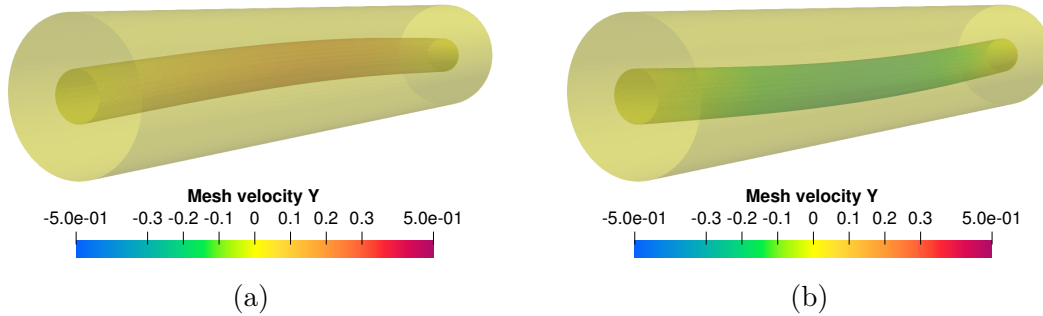


FIGURE 2.15 – Mouvement du cylindre interne. (a) Cylindre à sa compression maximale vers le haut à $t = 0.025$ s (vitesse du maillage en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$). (b) Cylindre à sa compression maximale vers le bas à $t = 0.075$ s (vitesse du maillage en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$).

avec 8 coeurs de calcul.

2.5.2 Analyse de performance de la résolution du problème de mouvement de grille

En préambule de cette section, il est essentiel de souligner que la part du temps de simulation consacré au problème de mouvement de la grille dépend de nombreux paramètres liés à la solution des équations de Navier-Stokes. Cela est notamment influencé par le choix entre une intégration temporelle implicite ou explicite pour le problème en vitesse. De plus, l'approche proposée dans cette étude pourrait également être appliquée à d'autres ensembles d'équations ALE, tels que les équations d'Euler pour les fluides compressibles, avec à nouveau, un autre rapport entre le temps nécessaire pour mettre à jour la grille et le temps de calcul total. Par conséquent, l'accent est davantage orienté vers les performances du solveur de mouvement de la grille lui-même, même si des indications concernant l'influence des paramètres fictifs de la grille sur les performances de la solution du problème global du fluide sont également fournies.

Quatre maillages contenant respectivement 0.5, 1, 1.5 et 2 millions de tétraèdres sont considérés pour le domaine du fluide. Pour simplifier, deux ensembles de paramètres fictifs de grille déjà définis sont sélectionnés pour les cas où le mouvement de la grille est résolu par la nouvelle équation hyperbolique. Ils sont étiquetés *souple* et *rigide* conformément au tableau 2.1. Les rapports indicatifs des pas de temps entre le solveur fluide choisi et le problème de grille hyperbolique sont donnés dans le tableau 2.2. Les vitesses fictives du son pour les deux grilles, nécessaires dans la section suivante, sont respectivement de $32 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $316 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

2.5 Analyse des performance de la méthode sur un cas 3D

	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage 4
Nb éléments	0.5×10^6	10^6	1.5×10^6	2×10^6
Δt_f	5.39×10^{-4}	3.14×10^{-4}	3.00×10^{-4}	2.88×10^{-4}
Δt grille <i>souple</i>	1.11×10^{-5}	7.94×10^{-6}	6.95×10^{-6}	6.46×10^{-6}
Δt grille <i>rigide</i>	1.11×10^{-6}	7.94×10^{-7}	6.95×10^{-7}	6.46×10^{-7}
Ratio grille <i>souple</i>	49	40	43	45
Ratio grille <i>rigide</i>	486	395	431	446

TABLE 2.2 – Ratios de pas de temps indicatifs entre le problème fluide et les problèmes hyperboliques pour les deux grilles sélectionnées.

Étude du ratio des pas de temps critiques préservant les performances du mouvement de grille hyperbolique.

Le premier aspect à comprendre concernant la pertinence du solveur hyperbolique est le ratio critique entre le pas de temps du problème fluide et celui du problème de grille, au-dessus duquel le problème hyperbolique est plus coûteux en temps que le problème original.

Ceci est indépendant du problème fluide considéré. Les pas de temps du problème fluide définissent les pas de temps du problème elliptique. Pour le problème hyperbolique, on choisit des pas de temps de sorte que les ratios avec le pas de temps du fluide (donc le nombre de sous-cyclage) soient des valeurs de 1, 10, 100 et 1000. Les résultats sont donnés dans la figure 2.16 pour le maillage le plus grossier et le plus raffiné. Le temps est mesuré en temps moyen pour la résolution du mouvement de grille par rapport au pas de temps physique, étiqueté *Temps CPU moyen par Δt_f* sur les graphiques.

Le rapport du pas de temps critique pour l’approche hyperbolique augmente avec la taille du problème, passant d’environ 150 pour le maillage le plus grossier à près de 200 pour le maillage le plus raffiné. Cette augmentation est liée à l’évolution différente du coût des solveurs de mouvement de grille en fonction de la taille du maillage (voir la section suivante) et est susceptible de se poursuivre pour des maillages plus grands, à l’avantage du mouvement hyperbolique du maillage.

En se référant aux valeurs de ratio dans le tableau 2.2, le problème fluide choisi semble préjudiciable à l’approche proposée. Seul le maillage *souple* semble compétitif avec l’équation harmonique pour les maillages considérés. Cependant, cela résulte uniquement du cas test actuel favorable à l’équation harmonique. Ce dernier n’implémente notamment aucun écoulement initial ni de modélisation de turbulence. Par exemple, avec un écoulement imposé supplémentaire à la vitesse moyenne de $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, le rapport de pas de temps résultant de la condition CFL serait donné par le rapport entre la vitesse du son dans le problème de grille et la vitesse moyenne dans le problème fluide physique. Dans la géométrie proposée, cela produirait un rapport de 16 pour la grille *souple* et de 158 pour la grille *rigide*, améliorant la compétiti-

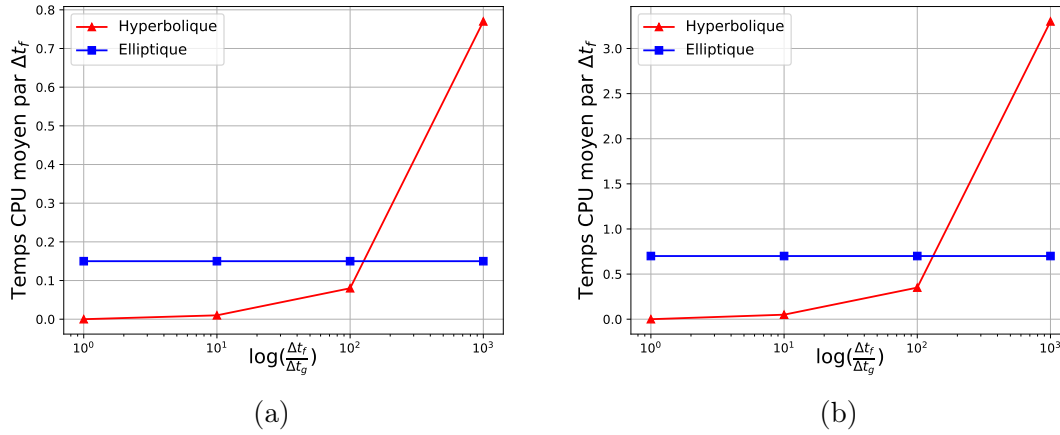


FIGURE 2.16 – Évolution du temps moyen (en s) par pas de temps fluide nécessaire pour résoudre le mouvement du maillage par rapport au rapport entre le pas de temps du problème physique et celui du problème hyperbolique. Le temps de référence associé à l'équation harmonique elliptique est évidemment indépendant du rapport. (a) Résultats pour le maillage le plus grossier 1. (b) Résultats pour le maillage le plus raffiné 4.

vité de l'approche hyperbolique. En augmentant la vitesse d'écoulement à $5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, entrant ainsi dans le régime turbulent de la géométrie proposée, et en ajoutant un modèle de turbulence transitoire tel que la *simulation des grandes échelles* (voir (Sagaut, 2005) parmi de nombreuses références), cela renforcerait davantage l'intérêt pour l'équation hyperbolique pour résoudre le problème de grille, avec des rapports de pas de temps descendant à environ 6 et 63 pour les grilles *souple* et *rigide*, respectivement. Enfin, le rapport de pas de temps est susceptible de descendre à 1 ou en dessous si l'approche proposée devait être appliquée à des écoulements compressibles, pour lesquels l'équation harmonique elliptique apparaît alors très pénalisante pour le mouvement de grille ALE. Les déclarations ci-dessus sont résumées dans le tableau 2.3.

La figure 2.17 fournit une comparaison simple de l'évolution avec la taille du maillage du temps de calcul nécessaire pour mettre à jour la grille. Le temps est mesuré de la même manière que dans la section précédente. Bien que situé dans le domaine critique en terme de compétitivité en ce qui concerne les caractéristiques de la CFD (voir tableau 2.3), ce graphique montre un avantage significatif de l'équation hyperbolique avec les paramètres de grille *souple* par rapport à l'équation de référence harmonique. La pente est déjà quatre fois plus faibles avec l'équation hyperbolique, et l'évolution est susceptible de rester linéaire pour des maillages plus grands en raison uniquement d'opérations simples de multiplication de matrices par vecteurs à effectuer. En revanche, l'évolution de l'équation harmonique impliquant la résolution d'un système linéaire peut être supérieure à la linéarité, augmentant

2.5 Analyse des performance de la méthode sur un cas 3D

TABLE 2.3 – Tableau de compétitivité du mouvement de grille hyperbolique par rapport au mouvement harmonique du maillage en fonction des principales caractéristiques de différents problèmes ALE dans la géométrie proposée.

Caractéristique du problème	Problème laminaire simple, fluide au repos	Vitesse initiale faible (environ 1 ou 2 m.s^{-1}), régime laminaire	Grande vitesse initiale ($> 5 \text{ m.s}^{-1}$), régime turbulent	Extension vers un écoulement compressible
Intervalle du ratio des pas de temps	40 à 500 et plus	15 à 300	5 à 60	1 et plus petit
Compétitivité du mouvement de grille de l'équation hyperbolique	Peu compétitif (peut-être pertinent pour une grille <i>souple</i> et des maillages très fins)	Compétitif (pour un ensemble de paramètres de grille)	Fortement compétitif	Indispensable

potentiellement l'écart en faveur de l'équation hyperbolique.

Étude du temps de calcul total

Le temps de calcul total est analysé à partir d'une exécution avec le maillage le plus raffiné et 200 pas de temps pour un temps final de 0.0576 s. Cela correspond à environ la moitié d'une période d'oscillation du cylindre et est suffisant pour obtenir des coûts moyens stables et fiables par tâche de calcul impliquée dans la résolution.

La figure 2.18 présente l'évolution pour chaque pas de temps des coûts des trois principales tâches, à savoir l'évaluation des déplacements de tous les points du maillage, nommée *Mouvement de grille*, la résolution du problème de pression assurant l'incompressibilité du fluide, nommée *Pression*, et la résolution implicite du problème de la vitesse, nommée *Vitesse*. Le graphique pour la séquence de 200 pas de temps donne trois observations principales :

1. Les coûts des tâches *Mouvement de grille* et *Vitesse* sont très stables.
2. Le coût le plus important est lié à la tâche *Pression*, et il présente des oscillations pendant les premières étapes ; cela peut être attribué à la discontinuité de vitesse à l'étape initiale du calcul.
3. Un régime stabilisé est atteint après un certain nombre d'étapes (environ 30).

La Figure 2.18a présente un pic singulier court vers 75 pas de temps, mais il est difficile à caractériser, car il implique la tâche *Pression* avec le mouvement de grille elliptique uniquement et dans une moindre mesure, la tâche *Mouvement de grille* pour la grille *rigide* uniquement. Ce comportement particulier nécessiterait

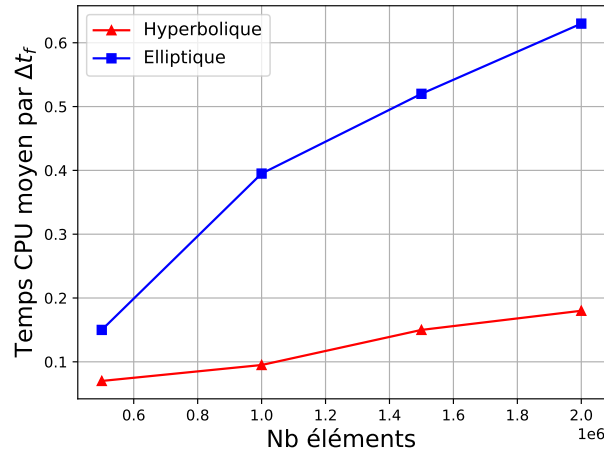


FIGURE 2.17 – Évolution du temps moyen pour la résolution du mouvement de grille en fonction du nombre d'éléments dans le maillage.

une analyse approfondie et ne modifie pas les principales conclusions tirées par la suite, de sorte qu'il est décidé de se concentrer sur les autres aspects principaux du graphique, présentés dans les figures 2.18b et 2.18c.

En ce qui concerne la phase initiale dans la Figure 2.18b, le coût plus élevé pour la tâche *Pression* au début de la simulation provient d'un nombre accru d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence de l'algorithme PCG, principalement du au saut de la vitesse initiale devant être accommodée par le solveur en pression garantissant l'incompressibilité du fluide. L'équation hyperbolique pour le problème de grille amplifie ce phénomène, ajoutant à la discontinuité physique une phase transitoire dans le mouvement de grille. Pendant cette phase, la qualité des cellules près de la frontière peut être dégradée, et avec elles, la condition de la matrice du système de pression, ce qui entraîne à nouveau une augmentation du nombre d'itérations nécessaires pour la convergence de l'algorithme PCG. La durée de la phase transitoire initiale en termes de coûts de calcul est d'autant plus critique que le maillage est *souple*.

Le tableau 2.4 rassemble les temps moyens par pas de temps pour les trois tâches de calcul mentionnées ci-dessus et le temps total. Les résultats diffèrent légèrement, que la phase transitoire initiale soit prise en compte ou non. Étant donné la stabilité des coûts de calcul après les premiers 50 pas de temps (à l'exception de l'artefact singulier observé autour de 75 pas de temps qui affecte différemment les différentes approches), il semble légitime de se concentrer de préférence sur le régime stabilisé pour discuter de la performance de l'approche hyperbolique par rapport à la référence.

Compte tenu des rapports entre les pas de temps du problème fluide et du problème de mouvement de grille hyperbolique pour les grilles *souple* et *rigide*, seul le

2.6 Conclusion

TABLE 2.4 – Temps de calcul par pas de temps en secondes et pourcentage du temps total pour les différentes résolutions de problèmes

	Harmonique		Grille <i>souple</i>		Grille <i>rigide</i>	
	<i>Avec transitoire initiale</i>	<i>Régime stabilisé uniquement</i>	<i>Avec transitoire initiale</i>	<i>Régime stabilisé uniquement</i>	<i>Avec transitoire initiale</i>	<i>Régime stabilisé uniquement</i>
Mouvement de grille	0.69 (19%)	<u>0.69 (23%)</u>	0.17 (5%)	<u>0.14 (6%)</u>	1.50 (32%)	1.23 (35%)
Pression	1.96 (54%)	<u>1.30 (44%)</u>	2.39 (68%)	<u>1.20 (52%)</u>	2.21 (47%)	1.29 (27%)
Vitesse	0.98 (27%)	<u>0.97 (33%)</u>	0.98 (28%)	<u>0.97 (42%)</u>	0.98 (21%)	0.96 (28%)
Total	3.63	<u>2.96</u>	3.53	<u>2.30</u>	4.68	3.48

premier est compétitif pour le cas test proposé. Il annule ainsi efficacement le coût du mouvement de grille tout en préservant les coûts des autres tâches de calcul. La variation du coût de la tâche *Pression* dans ce cas par rapport au cas avec le mouvement de grille harmonique est insignifiante et résulte uniquement des oscillations résiduelles dans la convergence de l’algorithme PCG pour la tâche *Pression*, comme le montre la Figure 2.18c.

Cependant, l’effet de la stratégie mise en œuvre pour le mouvement de la grille sur le coût de la tâche de calcul *Pression*, observé dans la phase transitoire initiale de la Figure 2.18b, n’était pas attendu à ce niveau. Cela a des conséquences limitées dans la situation présente, et cet effet disparaîtra pour des simulations plus longues lorsque le régime stabilisé sera maintenu. Il convient de garder à l’esprit et de surveiller les problèmes qui pourraient présenter d’autres discontinuités de vitesse. Ce sujet disparaît si l’on considère des écoulements compressibles au lieu d’un écoulement incompressible nécessitant un solveur implicite pour la *Pressure*.

2.6 Conclusion

Ce travail présente une nouvelle méthode pour calculer le mouvement de grille du domaine fluide à partir de conditions limites en mouvements. Les dérivées temporelles du second ordre sont utilisées pour transformer l’équation elliptique initiale en une équation hyperbolique. L’équation du mouvement de grille est résolue en utilisant un schéma explicite en temps, sans nécessiter la résolution d’un système linéaire de grande taille supplémentaire. L’influence respective des paramètres fictifs de l’équation hyperbolique, ainsi que la robustesse globale de l’approche proposée, sont analysées en détail à l’aide de deux cas de test de petite taille spécifiques. Les performances de la nouvelle méthode par rapport à l’approche de référence elliptique pour le mouvement du maillage sont enfin étudiées de manière approfondie grâce à un dernier cas de test 3D de taille significative. Avec le bon choix de paramètres, la stratégie proposée est capable, de réduire efficacement, et quasiment d’annuler le coût de calcul de la mise à jour du maillage fluide ALE. Les avantages sont visibles

CHAPITRE 2 : Développement et validation d'une méthode de mouvement de grille optimisée pour des simulations ALE

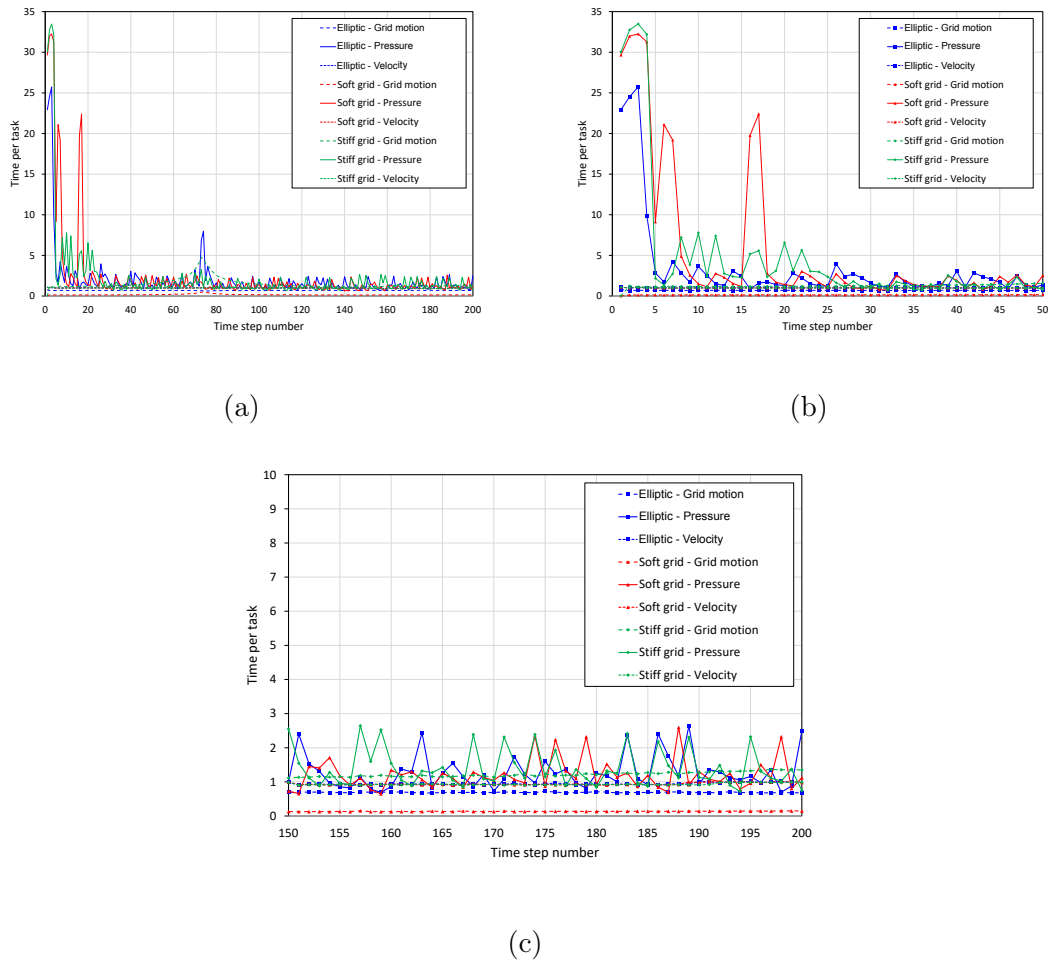


FIGURE 2.18 – Évolution des temps de calculs moyens (en secondes) par résolution de problème et par pas de temps au cours de la simulation. (a) Résultats pour la séquence complète des 200 pas de temps; (b) Résultats pour les 50 premiers pas de temps (c'est-à-dire, la phase transitoire initiale). (c) Résultats pour les 50 derniers pas de temps (c'est-à-dire, le régime stabilisé).

2.6 Conclusion

même pour un cas de test dont la simplicité choisie se situe dans le domaine critique pour la compétitivité du problème de grille.

Chapitre 3

Développement et analyse des algorithmes de couplage entre *TrioCFD* et *Europlexus*

3.1 Stabilité des couplages fluide-structure

3.1.1 Domaines et condition de couplage

Dans cette première section, nous allons établir une preuve de stabilité d'un couplage implicite simplifié avec une discrétisation des différences centrées pour le solide et d'Euler pour le fluide.

Le domaine fluide est représenté par Ω_f , celui de la structure par Ω_s et l'interface entre les deux domaines par Γ_i . En particulier, le cadre de cette thèse se concentre sur l'étude de structures immergées dans un fluide en mouvement. La figure 3.1 illustre un exemple de géométrie qui nous permet de définir les noms des frontières propres aux domaines du fluide et de la structure. En prenant comme exemple la géométrie de la figure 3.1 on a les remarques suivantes sur les équations fluide et structure :

- Les équations régissant le fluide sur le domaine en bleu sont complétées par une condition d'entrée de type Dirichlet sur Γ_f^D , une condition de sortie de type Neumann sur Γ_f^N , ainsi que une condition de vitesse nulle sur les parois Γ_f^W .
- Les équations régissant le solide sur le domaine en gris représentant une poutre, sont complétées par une condition d'encastrement à la base de la poutre Γ_s^D .

Pour les conditions limites sur l'interface Γ_i , elles sont définies par deux équations d'équilibre imposant la continuité des vitesses et la continuité des forces. Ces conditions sont résumées par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{u}, & \text{(Continuité des vitesses)} \\ \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q})\mathbf{n}_s = -\boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{u}, p)\mathbf{n}_f. & \text{(Continuité des contraintes)} \end{cases} \quad (3.1)$$

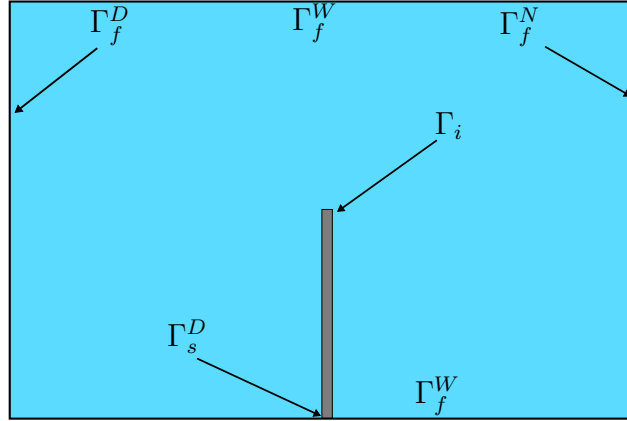


FIGURE 3.1 – Exemple de géométrie étudiée en IFS. Le domaine fluide est en bleu et le domaine solide en gris.

En utilisant ces conditions d'équilibre 3.1 comme support pour définir les algorithmes de couplage, un couplage explicite est défini comme un couplage avec une condition d'équilibre qui dépend des champs du pas de temps précédent, par exemple :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} = \dot{\mathbf{q}}^n, \\ \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q})^{n+1} \mathbf{n}_s = -\boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{u}, p)^{n+1} \mathbf{n}_f. \end{cases} \quad (3.2)$$

Il existe donc un ordre d'avancement entre le solveur fluide et la structure qui se met naturellement en place lorsque le couplage est explicite. Pour les couplages implicites, il s'agit de conditions d'équilibre sans présence de champs du pas de temps précédent :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} = \dot{\mathbf{q}}^{n+1}, \\ \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q})^{n+1} \mathbf{n}_s = -\boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{u}, p)^{n+1} \mathbf{n}_f. \end{cases} \quad (3.3)$$

En pratique, l'équilibre au temps $n+1$ est obtenu avec un algorithme de résolution de Newton lorsque cela est possible, ou bien par des sous-itérations entre le solveur fluide et solide jusqu'à atteindre un certain seuil de convergence. Des références sur ces méthodes sont citées dans la partie de l'état de l'art.

Plusieurs études se sont penchées sur les preuves de stabilité numérique des couplages explicites et implicites (Nobile, 2001, Chap. 4.7) (Fernández *et al.*, 2007) (Formaggia *et al.*, 2010). Dans ces travaux, la stabilité numérique des schémas de couplage est analysée au sens de la norme de l'énergie, dans le but de démontrer une majoration de l'énergie du système fluide-structure discrétisé.

Les résultats généraux prouvés dans ces articles démontrent que les couplages implicites proposés sont inconditionnellement stables, tandis que les couples explicites sont instables lorsque l'effet de masse ajoutée est important. Dans (Causin *et al.*, 2005) une condition de stabilité liée aux densités du fluide et de la structure

3.1 Stabilité des couplages fluide-structure

est établi, montrant que le couplage explicite de l'étude est inconditionnellement instable lorsque la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{\rho_s h_s}{\rho_f \mu_{max}} < 1. \quad (3.4)$$

Où h_s représente l'épaisseur de la structure et μ_{max} est une variable géométrique représentant la plus grande valeur propre de la matrice de masse ajoutée. Cette équation est une variante de l'équation (1) avec $\epsilon = h_s$ et $\lambda = \mu_{max}$.

En ce qui concerne les couplages implicites, il convient de noter que les discrétisations temporelles utilisées pour la structure dans les preuves de stabilité diffèrent de celle présentée dans cette thèse, qui est celle des différences centrées.

Pour obtenir les preuves de stabilité des couplages implicites, deux simplifications importantes sont faites classiquement. Elles sont les suivantes :

- Premièrement, l'équation fluide est simplifiée par le problème de Stokes dynamique. Il s'agit en fait d'une simplification classique dans l'étude des équations de Navier-Stokes, permettant d'enlever la difficulté liée au terme non-linéaire.
- Deuxièmement, les équations fluide-structure sont écrites sur un domaine de référence. Il s'agit d'une simplification majeure dans notre étude, correspondant à faire une hypothèse de petits déplacements. On néglige en particulier l'évolution temporelle de l'interface Γ_i .

Cette section se consacre à l'élaboration d'une preuve de stabilité d'un couplage implicite entre des équations fluides avec une discrétisation temporelle d'Euler implicite et celle de la structure avec une discrétisation temporelle des différences centrées.

Les équations fluide-structure simplifiées sur domaines fixes sont données par la formulation suivante. On cherche $(\mathbf{u}, p, \mathbf{q})$ tel que :

$$\begin{cases} \forall \mathbf{x} \in \Omega_f, \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, & (3.5a) \\ \forall \mathbf{x} \in \Omega_f, \rho_f \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - 2 \mu_f \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{0}, & (3.5b) \\ \forall \mathbf{x} \in \Gamma_i, \mathbf{u} = \dot{\mathbf{q}}, & (3.5c) \\ \forall \mathbf{x} \in \Gamma_f^D, \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, & (3.5d) \\ \forall \mathbf{x} \in \Gamma_f^N, \boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{u}, p) \mathbf{n}_f = \mathbf{0}. & (3.5e) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall \mathbf{x} \in \Omega_s, \rho_s \ddot{\mathbf{q}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, & (3.6a) \\ \forall \mathbf{x} \in \Gamma_i, \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}) \mathbf{n}_s = -\boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{u}, p) \mathbf{n}_f, & (3.6b) \\ \forall \mathbf{x} \in \partial \Gamma_s^D, \mathbf{q} = \mathbf{0}. & (3.6c) \end{cases} \quad (3.6d)$$

3.1.2 Énergie du système

Comme énoncé dans la section précédente, les preuves permettant de montrer la stabilité du schéma de couplage consistent à utiliser la variation d'énergie du système fluide-structure définie par l'équation suivante :

$$dE = \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega_f} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} |\dot{\mathbf{q}}|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \sigma_s(\mathbf{q}) : \epsilon(\mathbf{q}) d\mathbf{x} \right] + \int_{\Omega_f} 2\mu_f |\epsilon(\mathbf{u})|^2 d\mathbf{x}. \quad (3.7)$$

Dans un premier temps, on vérifie que le système "isolé", vérifie une variation d'énergie nulle. Cette démonstration est classique et permet de montrer qu'il n'y a pas d'accumulation d'énergie due à l'interaction entre le fluide et la structure.

Proposition 1 (Égalité de l'énergie) *On suppose que le système fluide-structure est isolé, c'est à dire $\mathbf{u} = 0$ sur $\partial\Omega_f \setminus \Gamma_i$ et $\mathbf{q} = 0$ sur $\partial\Omega_s \setminus \Gamma_i$, alors on a :*

$$dE = \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega_f} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} |\dot{\mathbf{q}}|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \sigma_s(\mathbf{q}) : \epsilon(\mathbf{q}) d\mathbf{x} \right] + \int_{\Omega_f} 2\mu_f |\epsilon(\mathbf{u})|^2 d\mathbf{x} = 0. \quad (3.8)$$

Preuve 3 *Soit le triplé $(\mathbf{u}, p, \mathbf{q})$ vérifiant les équations fluide-structure simplifiées, c'est à dire respectivement (3.5) et (3.6). On sépare en deux parties la preuve.*

Partie fluide :

On multiplie l'équation du fluide (3.5b) par \mathbf{u} et on intègre sur le domaine Ω_f . On obtient :

$$\underbrace{\rho_f \int_{\Omega_f} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x}}_A - 2\mu_f \underbrace{\int_{\Omega_f} (\nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x}}_B + \underbrace{\int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x}}_C = 0.$$

Pour le terme A, on utilise la formule de dérivée de composée de fonction, c'est à dire pour f une fonction dérivable, $\partial_t f \times f = \frac{1}{2} \partial_t (f^2)$. Ce qui donne :

$$A = \rho_f \int_{\Omega_f} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} = \frac{\rho_f}{2} \int_{\Omega_f} \frac{d}{dt} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \frac{\rho_f}{2} \int_{\Omega_f} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}.$$

Pour le terme B, on utilise la formule d'intégration par partie et le fait que le système soit isolé ($\mathbf{u} = 0$ sur $\partial\Omega_f \setminus \Gamma_i$) :

$$B = \int_{\Omega_f} (\nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_i} \epsilon(\mathbf{u}) \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} - \int_{\Omega_f} \epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{u}) d\mathbf{x}.$$

Pour le terme C, on utilise aussi la formule d'intégration par partie ainsi que l'équation d'incompressibilité du fluide (3.5a) :

$$C = \int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_i} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_f) p d\mathbf{x} - \int_{\Omega_f} (\nabla \cdot \mathbf{u}) p d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_i} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_f) p d\mathbf{x}.$$

3.1 Stabilité des couplages fluide-structure

En rassemblant tous les termes, on obtient pour le fluide :

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_f}{2} \int_{\Omega_f} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} - 2\mu_f \int_{\Gamma_i} \epsilon(\mathbf{u}) \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_i} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_f) p d\mathbf{x} + 2\mu_f \int_{\Omega_f} \epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{u}) d\mathbf{x} = 0.$$

Qu'on peut écrire en utilisant la définition de $\boldsymbol{\sigma}_f$ par

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_f}{2} \int_{\Omega_f} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + 2\mu_f \int_{\Omega_f} \epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{u}) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_i} (\boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{u}, p) \mathbf{n}_f) \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x}. \quad (3.9)$$

Partie solide :

Pour la partie solide, on multiplie l'équation de la structure (3.6a) par la vitesse de déplacement $\dot{\mathbf{q}}$, on obtient :

$$\underbrace{\rho_s \int_{\Omega_s} \ddot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{x}}_A - \underbrace{\int_{\Omega_s} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q})) \cdot \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{x}}_B = 0.$$

On utilise les mêmes outils et arguments que pour les termes A et B de la partie fluide et on obtient :

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_s}{2} \int_{\Omega_s} |\mathbf{q}|^2 d\mathbf{x} + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}) : \epsilon(\mathbf{q}) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_i} (\boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}) \mathbf{n}_s) \cdot \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{x} = 0. \quad (3.10)$$

Sur l'interface fluide-structure Γ_i on utilise les conditions d'équilibre (3.1) pour remplacer $\dot{\mathbf{q}}$ par \mathbf{u} et $\boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}) \mathbf{n}_s$ par $-\boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{u}, p) \mathbf{n}_f$, ce qui a pour conséquence d'annuler les termes sur Γ_i en sommant les deux termes fluide et structure, respectivement (3.9) et (3.10). Il reste donc :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\rho_f}{2} \int_{\Omega_f} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \frac{\rho_s}{2} \int_{\Omega_s} |\dot{\mathbf{q}}|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}) : \epsilon(\mathbf{q}) d\mathbf{x} \right] + 2\mu_f \int_{\Omega_f} |\epsilon(\mathbf{u})|^2 d\mathbf{x} = 0.$$

Remarque 1 En d'autres termes, la proposition 1 montre que la variation de l'énergie mécanique du système est égale aux forces dissipatives de la viscosité du fluide.

3.1.3 Preuve de stabilité des couplages implicites

On veut définir la forme variationnelle du problème fluide-structure simplifié des équations (3.5) et (3.6). Tout d'abord, on définit l'espace H_X^1 par :

$$H_X^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) \mid f|_X = 0\}. \quad (3.11)$$

Soient $\mathbf{v} \in H_{\Gamma_f}^1(\Omega_f)$, $g \in L^2(\Omega_f)$ et $\boldsymbol{\xi} \in H_{\Gamma_s}^1(\Omega_s)$ des fonctions test avec $\mathbf{v} = \boldsymbol{\xi}$ sur l'interface Γ_i . Pour obtenir la forme variationnelle, on procède de manière classique en multipliant l'équation fluide d'incompressibilité (3.5a) par g , l'équation des

moments (3.5b) par \mathbf{v} et celle de la structure (3.6c) par $\boldsymbol{\xi}$. On intègre ensuite sur les domaines respectifs Ω_f et Ω_s et en utilisant les formules d'intégrations par parties ainsi que les conditions limites, on déduit la forme variationnelle suivante :

On cherche $(\mathbf{u}, p, \mathbf{q}) \in [H^1(\Omega_f)]^2 \times L^2(\Omega_f) \times [H^1_{\Gamma_s^D}(\Omega_s)]^2$ vérifiant $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{q}}$ sur Γ_i et $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur Γ_f^D , tel que :

$$\begin{aligned} \rho_f \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_f} \boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{u}, p) : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_f} g(\nabla \cdot \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} + \\ \rho_s \int_{\Omega_s} \ddot{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\xi} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}) : \nabla \boldsymbol{\xi} \, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Avec $g \in L^2(\Omega_f)$. Le couple de fonctions tests $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi})$ vérifient $\mathbf{v} = \boldsymbol{\xi}$ sur l'interface Γ_i et les fonctions appartiennent respectivement aux espaces tests $H^1_{\Gamma_f}(\Omega_f) = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega_f) \mid \mathbf{v}|_{\Gamma_f^D} = 0\}$ et $H^1_{\Gamma_s}(\Omega_s) = \{\boldsymbol{\xi} \in H^1(\Omega_s) \mid \boldsymbol{\xi}|_{\Gamma_s^D} = 0\}$. On a utilisé une condition de Dirichlet homogène pour \mathbf{u} afin de simplifier l'écriture. L'espace des fonctions tests est donc défini par :

$$V^{\text{test}} = \{H^1_{\Gamma_f^D}(\Omega_f) \times H^1_{\Gamma_s^D}(\Omega_s) \mid \forall \mathbf{x} \in \Gamma_i, \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})\}. \quad (3.13)$$

Pour écrire la forme variationnelle discrétisée en temps, quelques relations de Newmark sont mises en évidence afin d'avoir une formulation uniquement en fonction du déplacement. On rappelle l'expression de la vitesse et du déplacement pour le schéma de Newmark avec $(\beta = 0, \gamma = \frac{1}{2})$:

$$\begin{cases} \mathbf{q}^{n+1} &= \mathbf{q}^n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{q}}^n, \\ \dot{\mathbf{q}}^{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}^n + \Delta t \frac{\ddot{\mathbf{q}}^{n+1} + \ddot{\mathbf{q}}^n}{2}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Pour obtenir la valeur de l'accélération $\ddot{\mathbf{q}}^{n+1}$ en fonction de la vitesse et du déplacement, on réalise l'opération $\mathbf{q}^{n+1} - \Delta t \dot{\mathbf{q}}^{n+1}$. En remplaçant par les expressions du système (3.14) ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{n+1} - \Delta t \dot{\mathbf{q}}^{n+1} &= \mathbf{q}^n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{q}}^n - \Delta t \left(\dot{\mathbf{q}}^n + \Delta t \frac{\ddot{\mathbf{q}}^{n+1} + \ddot{\mathbf{q}}^n}{2} \right) \\ &= \mathbf{q}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{q}}^n - \Delta t^2 \frac{\ddot{\mathbf{q}}^{n+1} + \ddot{\mathbf{q}}^n}{2} \\ &= \mathbf{q}^n - \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{q}}^{n+1}. \end{aligned}$$

On peut alors exprimer l'accélération de la façon suivante :

$$\ddot{\mathbf{q}}^{n+1} = \frac{2}{\Delta t} \dot{\mathbf{q}}^{n+1} - \frac{2}{\Delta t^2} (\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n). \quad (3.15)$$

3.1 Stabilité des couplages fluide-structure

En injectant la valeur de l'accélération (3.15) au temps n dans la formule du déplacement (3.14), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}^{n+1} &= \mathbf{q}^n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{q}}^n \\
&= \mathbf{q}^n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{2}{\Delta t} \dot{\mathbf{q}}^n - \frac{2}{\Delta t^2} (\mathbf{q}^n - \mathbf{q}^{n-1}) \right) \\
&= \mathbf{q}^n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}^n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}^n - \mathbf{q}^n + \mathbf{q}^{n-1} \\
&= \mathbf{q}^{n-1} + 2\Delta t \dot{\mathbf{q}}^n.
\end{aligned}$$

On obtient alors la formule des différences centrées reliant vitesse et déplacement :

$$\dot{\mathbf{q}}^n = \frac{\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (3.16)$$

L'expression de la vitesse au temps $n + 1$ fait donc apparaître un déplacement au temps $n + 2$.

Nous reprenons la formule de l'accélération de l'équation (3.15) et on injecte la formule de la vitesse $\dot{\mathbf{q}}^{n+1}$ que nous venons d'obtenir (3.16). On obtient alors l'expression de l'accélération en fonction du déplacement :

$$\ddot{\mathbf{q}}^{n+1} = \frac{\mathbf{q}^{n+2} - 2\mathbf{q}^{n+1} + \mathbf{q}^n}{\Delta t^2}. \quad (3.17)$$

On obtient aussi une expression pour la vitesse au demi pas de temps (eq. (1.67)) en utilisant la valeur de l'accélération (3.17) et de la vitesse (3.16) :

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}^{n+\frac{1}{2}} &= \dot{\mathbf{q}}^n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{q}}^n \\
&= \frac{\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\mathbf{q}^{n+1} - 2\mathbf{q}^n + \mathbf{q}^{n-1}}{2\Delta t} \\
&= \frac{\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n}{\Delta t}
\end{aligned} \quad (3.18)$$

Finalement, on a obtenu la discrétisations de la vitesse et de l'accélération en fonction du déplacement.

On définit maintenant la variation d'énergie discrète dE^{n+1} de l'équation (3.7) par :

$$\begin{aligned}
dE^{n+1} &= \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Omega_f} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega_f} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}^n|^2 d\mathbf{x} \right] + \\
&\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} \left| \frac{\mathbf{q}^{n+2} - \mathbf{q}^{n+1}}{\Delta t} \right|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} \left| \frac{\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n}{\Delta t} \right|^2 d\mathbf{x} \right] + \\
&\frac{1}{2\Delta t} \left[\int_{\Omega_s} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}^{n+2}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{q}^{n+2}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}^n) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{q}^n) d\mathbf{x} \right] + \\
&\int_{\Omega_f} 2\mu_f |\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^{n+1})|^2 d\mathbf{x}.
\end{aligned} \quad (3.19)$$

Proposition 2 *La variation d'énergie discrète dE^{n+1} est une approximation d'ordre un de dE , la variation d'énergie continue est défini par le relation (3.7).*

Preuve 4 *Nous voulons montrer que dE^{n+1} (3.19) correspond bien à l'approximation de dE (3.7). On commence par réécrire dE^{n+1} avec les vitesses au demi pas de temps en utilisant la relation (3.18) :*

$$\begin{aligned}
 dE^{n+1} = & \underbrace{\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Omega_f} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega_f} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}^n|^2 d\mathbf{x} \right]}_{d\tilde{E}_f^{n+1}} + \\
 & \underbrace{\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} |\dot{\mathbf{q}}^{n+3/2}|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} |\dot{\mathbf{q}}^{n+1/2}|^2 d\mathbf{x} \right]}_{d\tilde{E}_s^{n+1}} + \\
 & \underbrace{\frac{1}{2\Delta t} \left[\int_{\Omega_s} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}^{n+2}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{q}^{n+2}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}^n) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{q}^n) d\mathbf{x} \right]}_{d\tilde{E}_\sigma^{n+1}} + \\
 & \int_{\Omega_f} 2\mu_f |\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^{n+1})|^2 d\mathbf{x}.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Par cette écriture, nous avons défini les termes $d\tilde{E}_f^{n+1}$, $d\tilde{E}_s^{n+1}$ et $d\tilde{E}_\sigma^{n+1}$.

On procède ensuite à la discrétisation de dE qu'on peut écrire de la façon suivante :

$$dE = \frac{d}{dt} E_f + \frac{d}{dt} E_s + \frac{d}{dt} E_\sigma + \int_{\Omega_f} 2\mu_f |\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})|^2 d\mathbf{x}. \tag{3.21}$$

Avec les variable E_f , E_s , E_σ définies par :

$$\begin{aligned}
 E_f &= \int_{\Omega_f} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}, \\
 E_s &= \int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} |\dot{\mathbf{q}}|^2 d\mathbf{x}, \\
 E_\sigma &= \int_{\Omega_s} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{q}) d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Pour discrétiser dE , il faut discrétiser l'opérateur $\frac{d}{dt}$ qui a la particularité dans notre étude d'avoir une discrétisation différente selon qu'il s'agisse du fluide ou bien de la structure. Pour la partie fluide, E_f , on utilise le schéma d'Euler du fluide :

$$\frac{d}{dt} E_f \approx \frac{1}{\Delta t} (E_f^{n+1} - E_f^n) = \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Omega_f} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega_f} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}^n|^2 d\mathbf{x} \right]. \tag{3.22}$$

Cette partie est donc identique au terme d'énergie mécanique discret du fluide $d\tilde{E}_f^{n+1}$ de (3.20), c'est à dire, $\frac{d}{dt} E_f = d\tilde{E}_f^{n+1} + o(\Delta t)$.

3.1 Stabilité des couplages fluide-structure

Pour la discrétisation de $\frac{d}{dt}$ de la structure, on utilise le schéma des différences centrées de la structure (3.16), et on obtient pour E_σ :

$$\frac{d}{dt}E_\sigma \approx \frac{1}{2\Delta t}(E_\sigma^{n+2} - E_\sigma^n) = \frac{1}{2\Delta t} \left[\int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} \sigma_s(\mathbf{q}^{n+2}) : \epsilon(\mathbf{q}^{n+2}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} \sigma_s(\mathbf{q}^n) : \epsilon(\mathbf{q}^n) \, d\mathbf{x} \right]. \quad (3.23)$$

Cette partie est aussi identique au terme $d\tilde{E}_\sigma^{n+1}$ de (3.20), c'est à dire, $\frac{d}{dt}E_\sigma = d\tilde{E}_\sigma^{n+1} + o(\Delta t)$. Enfin pour la dernière partie, on utilise la formule des différences centrées mais avec la vitesse au demi pas de temps (3.18) :

$$\frac{d}{dt}E_s \approx \frac{1}{\Delta t}(E_s^{n+3/2} - E_s^{n+1/2}) = \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} |\dot{\mathbf{q}}^{n+3/2}|^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} |\dot{\mathbf{q}}^{n+1/2}|^2 \, d\mathbf{x} \right]. \quad (3.24)$$

On obtient aussi la correspondance avec le terme de variation d'énergie mécanique du solide $d\tilde{E}_s^{n+1}$ (3.20) du théorème, c'est à dire $\frac{d}{dt}E_s = d\tilde{E}_s^{n+1} + o(\Delta t)$. Nous utilisons les vitesses au demi pas de temps pour cette discrétisation car l'utilisation de la formule (3.16) pour discrétiser l'opérateur $\frac{d}{dt}$ aurait fait apparaître un déplacement \mathbf{q}^{n+3} difficile à prendre en compte dans la preuve de stabilité. En rassemblant les termes dans (3.21), on a donc bien :

$$dE = dE^{n+1} + o(\Delta t). \quad (3.25)$$

L'objectif de la preuve principal de stabilité de cette section est alors de montrer que, pour un système isolé, on a $dE^{n+1} \leq 0$.

Le point de départ est d'utiliser la forme variationnelle discrétisée (3.26) qu'on obtient en injectant les discrétisations temporelles des solutions dans (3.12) :

On cherche $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}, \mathbf{q}^{n+2}) \in [H^1(\Omega_f)]^2 \times L^2(\Omega_f) \times [H_{\Gamma_s^D}^1(\Omega_s)]^2$ vérifiant $\mathbf{u}^{n+1} = \frac{\mathbf{q}^{n+2} - \mathbf{q}^n}{2\Delta t}$ sur Γ_i et $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{0}$ sur Γ_f^D , tel que :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_f} \rho_f (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_f} \sigma_f(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_f} g(\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}) \, d\mathbf{x} + \\ & \int_{\Omega_s} \rho_s \frac{\mathbf{q}^{n+2} - 2\mathbf{q}^{n+1} + \mathbf{q}^n}{\Delta t^2} \cdot \boldsymbol{\xi} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s} \sigma_s(\mathbf{q}^{n+2}) : \nabla \boldsymbol{\xi} \, d\mathbf{x} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Avec $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) \in V^{\text{test}}$ et $g \in L^2(\Omega_f)$.

Afin d'obtenir la variation d'énergie du système, on utilise les fonctions tests : $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{n+1}$, $g = p^{n+1}$ et $\boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{q}^{n+2} - \mathbf{q}^n}{2\Delta t} = \dot{\mathbf{q}}^{n+1}$. Dans le cas d'un couplage implicite, ces fonctions tests \mathbf{v} et $\boldsymbol{\xi}$ sont bien acceptables car elles appartiennent à l'espace test V^{test} .

Dans le cas d'un couplage explicite, les fonctions solutions \mathbf{u}^{n+1} et $\dot{\mathbf{q}}^{n+1}$ ne peuvent pas être utilisées car elles ne sont pas égales sur l'interface Γ_i et donc

elles n'appartiennent pas à l'espace test V^{test} . On doit donc introduire un terme de correction sur l'interface fluide-structure de manière à avoir sur Γ_i :

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}^{n+1} - \mathcal{L}_f \left(\mathbf{u}^{n+1} - \left(\frac{\mathbf{q}^{n+2} - \mathbf{q}^n}{2\Delta t} \right) \right). \quad (3.27)$$

Avec \mathcal{L}_f un opérateur continu d'extension de Γ_i à Ω_f et f une fonction dépendant du schéma temporel utilisé. C'est pour cette raison qu'il n'est pas possible de démontrer la stabilité des schémas explicites ou semi-implicites dans le cas général. Une telle preuve exigerait des hypothèses importantes sur \mathcal{L}_f . Nous énonçons maintenant le théorème principal de cette section :

Théorème 9 *On suppose que le système discret est isolé, c'est à dire $\mathbf{u}^{n+1} = 0$ sur $\partial\Omega_f \setminus \Gamma_i$ et $\mathbf{q}^{n+1} = 0$ sur $\partial\Omega_s \setminus \Gamma_i$, alors dE^{n+1} vérifie :*

$$\begin{aligned} dE^{n+1} &= \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Omega_f} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega_f} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}^n|^2 d\mathbf{x} \right] + \\ &\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} \left| \frac{\mathbf{q}^{n+2} - \mathbf{q}^{n+1}}{\Delta t} \right|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} \left| \frac{\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n}{\Delta t} \right|^2 d\mathbf{x} \right] + \\ &\frac{1}{2\Delta t} \left[\int_{\Omega_s} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}^{n+2}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{q}^{n+2}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}^n) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{q}^n) d\mathbf{x} \right] + \\ &\int_{\Omega_f} 2\mu_f |\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^{n+1})|^2 d\mathbf{x} \leq 0. \end{aligned}$$

Preuve 5 *On note les différents termes de la forme variationnelle discrète (3.26) avec les notations suivantes :*

$$\begin{aligned} A_f &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_f} \rho_f (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \\ A_s &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_s} \rho_s \frac{\mathbf{q}^{n+2} - 2\mathbf{q}^{n+1} + \mathbf{q}^n}{\Delta t} \cdot \boldsymbol{\xi} d\mathbf{x}, \\ B_f &= \int_{\Omega_f} \boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) : \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_f} g(\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}) d\mathbf{x}, \\ B_s &= \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}^{n+2}) : \nabla \boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} = 0. \end{aligned}$$

La forme variationnelle discrète (3.26) peut alors se simplifier par :

$$A_f + B_f + A_s + B_s = 0. \quad (3.28)$$

On pose les fonctions tests $g = p^{n+1}$ et $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{u}^{n+1}, \frac{\mathbf{q}^{n+2} - \mathbf{q}^n}{2\Delta t})$.

Partie fluide :

Le terme de masse A_f est développé avec la fonction test \mathbf{u}^{n+1} :

3.1 Stabilité des couplages fluide-structure

$$A_f = \int_{\Omega_f} \rho_f \frac{(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)}{\Delta t} \cdot \mathbf{u}^{n+1} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_f} \rho_f |\mathbf{u}^{n+1}|^2 - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_f} \rho_f (\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^{n+1}) \, d\mathbf{x}.$$

L'inégalité de Young ($ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$) est ensuite utilisée pour majorer le produit $\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} A_f &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_f} \rho_f |\mathbf{u}^{n+1}|^2 - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_f} \rho_f (\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^{n+1}) \, d\mathbf{x} \\ &\geq \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_f} \rho_f |\mathbf{u}^{n+1}|^2 \, d\mathbf{x} - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_f} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 \, d\mathbf{x} - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_f} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}^n|^2 \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Omega_f} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_f} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}^n|^2 \, d\mathbf{x} \right]. \end{aligned}$$

On obtient finalement pour le terme de masse :

$$A_f \geq \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Omega_f} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_f} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}^n|^2 \, d\mathbf{x} \right]. \quad (3.29)$$

La définition de $\boldsymbol{\sigma}_f$ est utilisée pour simplifier la partie restante :

$$B_f = \int_{\Omega_f} \boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) : \nabla \mathbf{u}^{n+1} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_f} p^{n+1} (\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_f} 2\mu |\epsilon(\mathbf{u}^{n+1})|^2 \, d\mathbf{x}. \quad (3.30)$$

En sommant les deux parties (3.29) et (3.30), nous obtenons l'inégalité suivante pour la partie fluide :

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Omega_f} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_f} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}^n|^2 \, d\mathbf{x} \right] + \int_{\Omega_f} 2\mu |\epsilon(\mathbf{u}^{n+1})|^2 \, d\mathbf{x} \leq A_f + B_f \quad (3.31)$$

Partie solide :

Le terme de masse A_s est développé avec la fonction test $\frac{\mathbf{q}^{n+2} - \mathbf{q}^n}{2\Delta t}$:

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_s} \rho_s \frac{\mathbf{q}^{n+2} - 2\mathbf{q}^{n+1} + \mathbf{q}^n}{\Delta t} \cdot \frac{\mathbf{q}^{n+2} - \mathbf{q}^n}{2\Delta t} \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} \frac{\mathbf{q}^{n+2} - 2\mathbf{q}^{n+1} + \mathbf{q}^n}{\Delta t} \cdot \frac{\mathbf{q}^{n+2} - \mathbf{q}^{n+1} + \mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n}{\Delta t} \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} \left(\frac{\mathbf{q}^{n+2} - \mathbf{q}^{n+1}}{\Delta t} - \frac{\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n}{\Delta t} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{q}^{n+2} - \mathbf{q}^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n}{\Delta t} \right) \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} \left| \frac{\mathbf{q}^{n+2} - \mathbf{q}^{n+1}}{\Delta t} \right|^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} \left| \frac{\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n}{\Delta t} \right|^2 \, d\mathbf{x} \right]. \end{aligned}$$

On a donc l'expression suivante pour A_s :

$$A_s = \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} \left| \frac{\mathbf{q}^{n+2} - \mathbf{q}^{n+1}}{\Delta t} \right|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} \left| \frac{\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n}{\Delta t} \right|^2 d\mathbf{x} \right] \quad (3.32)$$

Pour le terme B_s , on définit la forme bilinéaire b_s par :

$$\forall (\gamma, \varphi) \in H^1(\Omega_s) \times H^1(\Omega_s), b_s(\gamma, \varphi) = \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\sigma}_s(\gamma) : \boldsymbol{\epsilon}(\varphi) d\mathbf{x}.$$

L'application b_s est coercive, on note $\alpha_s > 0$ sa constante de coercivité.

On pourra aussi vérifier qu'en tant que forme bilinéaire, on a :

$$\forall (\gamma, \varphi) \in H^1(\Omega_s) \times H^1(\Omega_s), b_s(\gamma, \gamma - \varphi) = \frac{1}{2} b_s(\gamma, \gamma) - \frac{1}{2} b_s(\varphi, \varphi) + \frac{1}{2} b_s(\gamma - \varphi, \gamma - \varphi). \quad (3.33)$$

En utilisant la formule précédente (3.33) ainsi que la coercivité, on obtient :

$$\begin{aligned} b_s(\mathbf{q}^{n+2}, \frac{\mathbf{q}^{n+2} - \mathbf{q}^n}{2\Delta t}) &= \frac{1}{2\Delta t} \left[\frac{1}{2} b_s(\mathbf{q}^{n+2}, \mathbf{q}^{n+2}) - \frac{1}{2} b_s(\mathbf{q}^n, \mathbf{q}^n) \right] + \frac{1}{2\Delta t} b_s(\mathbf{q}^{n+2} - \mathbf{q}^n, \mathbf{q}^{n+2} - \mathbf{q}^n) \\ &\geq \frac{1}{2\Delta t} \left[\frac{1}{2} b_s(\mathbf{q}^{n+2}, \mathbf{q}^{n+2}) - \frac{1}{2} b_s(\mathbf{q}^n, \mathbf{q}^n) \right] + \frac{1}{2\Delta t} \alpha_s \|\mathbf{q}^{n+2} - \mathbf{q}^n\|_{H^1(\Omega_s)}^2 \\ &\geq \frac{1}{2\Delta t} \left[\frac{1}{2} b_s(\mathbf{q}^{n+2}, \mathbf{q}^{n+2}) - \frac{1}{2} b_s(\mathbf{q}^n, \mathbf{q}^n) \right]. \end{aligned}$$

Ce qui donne l'inégalité suivante pour le terme B_s :

$$B_s \geq \frac{1}{2\Delta t} \left[\int_{\Omega_s} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}^{n+2}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{q}^{n+2}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}^n) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{q}^n) d\mathbf{x} \right] \quad (3.34)$$

On somme maintenant les deux parties de l'équation structure, c'est à dire (3.32) et (3.34). On obtient alors :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} \left| \frac{\mathbf{q}^{n+2} - \mathbf{q}^{n+1}}{\Delta t} \right|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} \left| \frac{\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n}{\Delta t} \right|^2 d\mathbf{x} \right] + \\ &\frac{1}{2\Delta t} \left[\int_{\Omega_s} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}^{n+2}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{q}^{n+2}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}^n) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{q}^n) d\mathbf{x} \right] \\ &\leq A_s + B_s. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Pour conclure la preuve, on somme la partie fluide et solide de la forme variationnelle que nous avons minorées, c'est à dire les équations (3.31) et (3.35). On obtient bien la majoration de l'énergie :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Omega_f(t)} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega_f} \frac{\rho_f}{2} |\mathbf{u}^n|^2 d\mathbf{x} \right] + \\ &\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} \left| \frac{\mathbf{q}^{n+2} - \mathbf{q}^{n+1}}{\Delta t} \right|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s} \frac{\rho_s}{2} \left| \frac{\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n}{\Delta t} \right|^2 d\mathbf{x} \right] + \\ &\frac{1}{2\Delta t} \left[\int_{\Omega_s} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}^{n+2}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{q}^{n+2}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}^n) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{q}^n) d\mathbf{x} \right] + \\ &\int_{\Omega_f} 2\mu_f |\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^{n+1})|^2 d\mathbf{x} \leq A_f + B_f + A_s + B_s = 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

3.1 Stabilité des couplages fluide-structure

Cela termine la preuve de stabilité sur le couplage implicite entre les équations fluides, utilisant une discrétisation temporelle d'Euler implicite, et les équations de la structure, avec une discrétisation des différences centrées. Cette preuve est établie avec l'hypothèse de petite perturbation classique pour ce type d'analyse. Enfin, elle constitue un travail préliminaire en vue de l'élaboration potentielle d'une condition de CFL pour le couplage entre *TrioCFD* et *Europlexus*.

3.2 Formulation complète du couplage fluide-structure

3.2.1 Système fluide-structure et condition limite

Dans la section précédente, nous avons travaillé avec des équations simplifiées pour démontrer la stabilité du couplage implicite. Dans cette section, nous traitons les équations complètes du problème fluide-structure. Pour les conditions limites, nous nous référons à la figure 3.1. Les équations fluide-structure sont donc données par :

$$\begin{aligned}
 \text{(Fluide)} = \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{x} \in \Omega_f(t), \mathbf{w} = \mathbf{EXT}(\mathbf{w}_{\Gamma_i}), \\ \forall \mathbf{x} \in \Omega_f(t), \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, \\ \forall \mathbf{x} \in \Omega_f(t), \rho_f \frac{\partial J\mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathfrak{A}} + \\ J \left[\rho_f [(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{u}] - \boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{u}, p) \right] = \mathbf{0}, \\ \forall \mathbf{x} \in \Gamma_i(t), \mathbf{u} = \dot{\mathbf{q}}, \\ \forall \mathbf{x} \in \Gamma_f^D(t), \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}_t, \\ \forall \mathbf{x} \in \Gamma_f^W(t), \mathbf{u} = \mathbf{0}, \\ \forall \mathbf{x} \in \Gamma_f^N(t), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p)\mathbf{n}_f = \mathbf{0}. \end{array} \right. \begin{array}{l} (3.37a) \\ (3.37b) \\ (3.37c) \\ (3.37d) \\ (3.37e) \\ (3.37f) \\ (3.37g) \\ (3.37h) \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(Solide)} = \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{x} \in \Omega_s(t), \rho_s \ddot{\mathbf{q}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_s, \\ \forall \mathbf{x} \in \Gamma_i(t), \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q})\mathbf{n}_s = -\boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{u}, p)\mathbf{n}_f, \\ \forall \mathbf{x} \in \Gamma_s^D(t), \mathbf{q} = \mathbf{0}. \end{array} \right. \begin{array}{l} (3.38a) \\ (3.38b) \\ (3.38c) \\ (3.38d) \end{array}
 \end{aligned}$$

Pour les deux domaines, les équations ont été formulées dans la configuration courante (2.8), (1.47). Plus précisément, pour le solide, l'utilisation de l'opérateur non-linéaire d'Almansi-Euler dans la relation de comportement du solide permet d'écrire les conditions à l'interface sur le domaine courant $\Gamma_i(t)$. En rappelant la relation :

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \lambda_s \text{tr}(\mathbf{E}_s)\mathcal{I}_d + 2\mu_s \mathbf{E}_s. \quad (3.39)$$

Avec \mathbf{E}_s le tenseur non linéaire d'Almansi-Euler. Des informations supplémentaires sur la formulation du problème solide sont disponibles dans la section 1.5.

Les équations fluides sont discrétisées à l'aide de la méthode des volumes éléments finis, tandis que celles du solide sont discrétisées avec la méthode des éléments finis. Les détails de ces discrétisations sont disponibles dans le chapitre 1. Avec ces discrétisations, les inconnues de vitesse sont décomposées par des fonctions P_1 pour le fluide et pour le solide, ce qui permet d'obtenir une évaluation des vitesses aux

3.2 Formulation complète du couplage fluide-structure

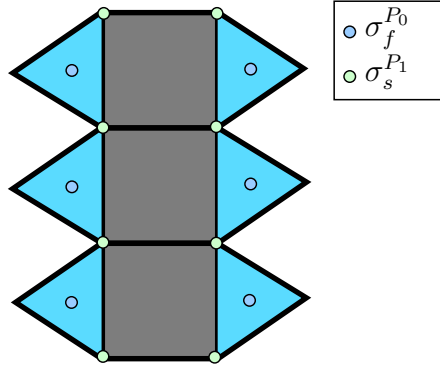


FIGURE 3.2 – Localisation des inconnus de σ_f et σ_s pour un maillage fluide et structure concordant.

noeuds des éléments de chaque système. Le champ de force est décrit par des éléments P_1 pour le solide et $P_0 + P_1$ pour le fluide. Par conséquent, une méthode d'interpolation est nécessaire pour transférer les forces fluides au solide. Le système d'équilibre peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_{h_s}^{P_1} = \mathbf{u}_{h_f}^{P_1}, \\ \boldsymbol{\sigma}_s(\mathbf{q}_{h_s}^{P_1})\mathbf{n}_s = -\boldsymbol{\Pi}_{h_s}^{P_1}(\boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{u}_{h_f}^{P_1}, p_{h_f}^{P_0+P_1})\mathbf{n}_f). \end{cases} \quad (3.40)$$

Avec h_f et h_s les tailles caractéristique des partitions fluides et solide et $\boldsymbol{\Pi}_{h_s}^{P_1} : \mathbf{W}_s^{h_f}(\Gamma_i) \rightarrow \mathbf{W}_f^{h_s}(\Gamma_i)$ un opérateur d'interpolation. Le choix de cet opérateur peut varier et avoir un impact sur la stabilité du couplage. Les études de (Farhat *et al.*, 1998) et (de Boer *et al.*, 2007) abordent le choix optimal de l'opérateur d'interpolation en fonction des problématiques fluide-structure. À titre d'exemple, nous donnons la formule de l'interpolation linéaire sur une surface 2D pour un champ P_0 désigné par $\mathbf{F}_f^{P_0}$:

$$\boldsymbol{\Pi}_{h_s}^{P_1}(\mathbf{F}_f^{P_0}) = \sum_{k=1}^{N_K} \sum_{K_j \in \mathcal{M}(s_k)} \frac{1}{|\mathcal{M}(s_k)|} |K_j| \mathbf{F}_f^{P_0}(K_j) \quad (3.41)$$

Avec $\mathcal{M}(s_k)$ désigne les éléments connectés au sommet s_k , c'est-à-dire l'ensemble des triangles connectés au sommet s_k .

3.2.2 Environnement logiciel de couplage

Pour permettre la communication et l'avancement de *TrioCFD* et *Europlexus*, l'application *Interface Code Coupling*¹ (*ICoCo*) est utilisée. *ICoCo* est une API développée en *C++* sous la forme d'une classe abstraite. Il s'agit d'une norme qu'un code peut choisir d'implémenter pour faciliter son couplage avec un autre code, aussi

1. *ICoCo GitHub* : <https://github.com/cea-trust-platform/icoco-coupling>

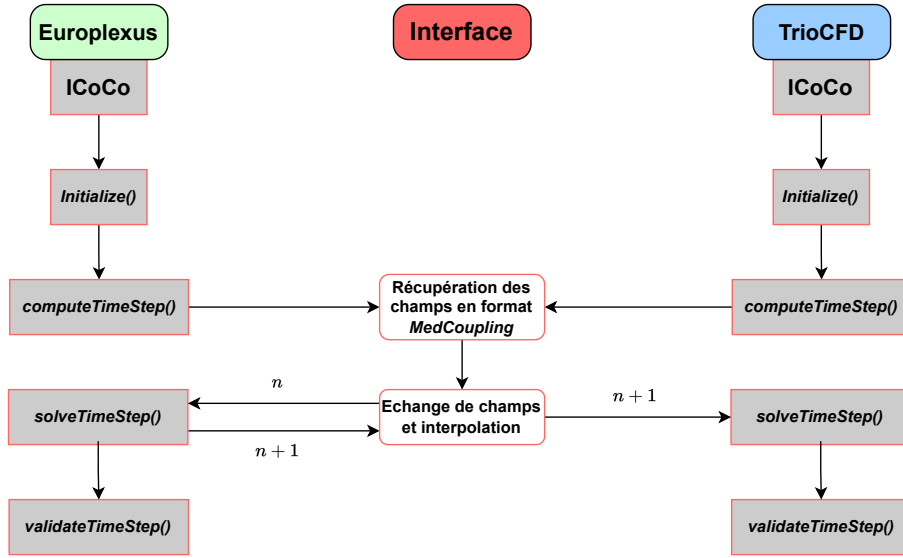


FIGURE 3.3 – Schéma explicatif de l'interface *ICoCo*.

conforme à *ICoCo*. Cette application exige que chaque code dispose de fonctions de surcharges, normées, et regroupant diverses opérations d'une étape de résolution des solveurs. L'objectif étant d'harmoniser les étapes de résolution entre les deux codes. Par exemple, les trois étapes de résolution d'un solveur, à savoir l'initialisation, la résolution et la validation, sont notées dans *ICoCo* par les fonctions suivantes : *initialize()*, *solveTimeStep()*, *validateTimeStep()*. Dans la figure 3.3, les différentes étapes de résolutions à surcharger pour chaque code, ainsi que leur ordre d'avancement sont représentées en gris.

L'exécution des fonctions *ICoCo* visant à faire progresser les solveurs s'effectue au travers d'une interface de couplage. Dans cette interface, les champs fluide-structure sont récupérés, manipulés (parfois), interpolés, puis échangés entre les codes. La structure de données imposée par *ICoCo* pour le stockage et la manipulation de ces champs est le format *MEDCoupling*. Ce format homogène est utilisé afin de simplifier la manipulation et l'échange de champs entre les deux codes. Dans la figure 3.3, les opérations dans l'interface de couplage sont données au centre du schéma. Des informations supplémentaires sont disponibles dans la documentation de *MEDCoupling*².

L'utilisation du format *MEDCoupling* permet également d'accéder à des méthodes d'interpolation robustes, adaptées à des discrétisations différentes entre les codes. Cette interpolation est gérée par la classe *InterpKernelDec*³ de *MEDCoupling*. Dans notre cas, l'interpolation sera toujours réalisée sur des maillages avec un

2. *Documentation MEDCoupling* : <https://docs.salome-platform.org/latest/dev/MEDCoupling/developer/index.html>

3. *Documentation de la plateforme Salome* : https://docs.salome-platform.org/latest/dev/MEDCoupling/developer/classMEDCoupling_1_1InterpKernelDEC.html

3.2 Formulation complète du couplage fluide-structure

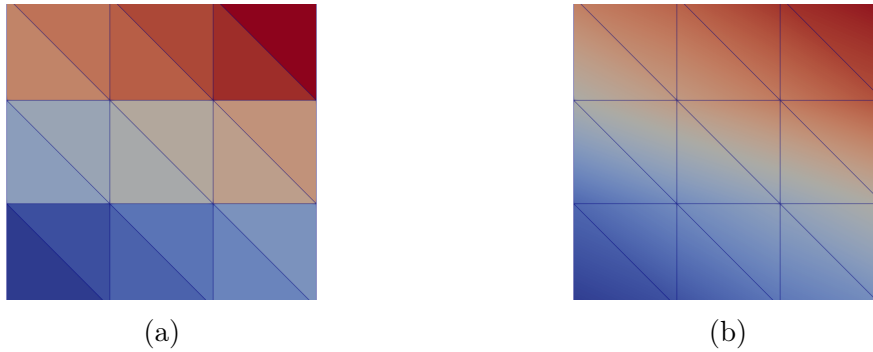


FIGURE 3.4 – Interpolation d’un champ avec *MEDCoupling* sur un maillage identique. (a) Champ P_0 . (b) Champ P_1 . La valeur de l’intégrale du champs est conservée.

<i>IntersectionType</i>	<i>MedianPlane</i>	<i>NatureOfField</i>
Triangulation	0	IntensiveMaximum
Algorithme d’interpolation. Décompose les cellules en triangle et calcule les intersections.	Position du plan médian où les deux cellules seront projetées.	Physique du champ interpolé. Conservation de l’intégrale du champ sur l’interface.

TABLE 3.1 – Tableau des différentes options utilisées pour l’interpolation de *MEDCoupling* pour un maillage fluide et structure concordant.

nombre de nœuds et une position identiques entre les deux codes. Diverses options doivent être spécifiées pour l'interpolation, et dans notre contexte, ces options sont récapitulées dans le tableau 3.1. Dans la figure 3.4, un exemple d'interpolation avec *MEDCoupling* entre un champ P_0 et un champ P_1 est réalisé sur une surface carrée avec un maillage identique.

3.2.3 Algorithmes de couplage partitionnés

L'approche partitionnée du couplage ne permet pas de résoudre simultanément les problèmes fluide et structure. Pour faire avancer le couplage, un algorithme temporel est nécessaire. Dans la suite, on notera \mathcal{S} le solveur solide, \mathcal{F} le solveur fluide. On désigne les variables avec les indices h_f et h_s lorsqu'elles sont évaluées sur les maillages fluide ou solide respectivement. Par exemple $\mathbf{F}_{h_f}^n$ sont les forces fluides évaluées sur le maillage fluide et $\mathbf{F}_{h_s}^n$ les forces fluides évaluées sur le maillage solide.

L'algorithme de couplage partitionné le plus simple et élémentaire est appelé *Conventional Serial Staggered (CSS)*. Il consiste à résoudre d'abord le problème fluide, puis à transmettre les forces fluides et enfin résoudre le problème structure (l'ordre fluide-structure peut être inversé). Cet algorithme présente un décalage d'un pas de temps entier. Il est présenté dans l'algorithme 1.

Algorithme 1 Algorithme CSS

- 1: Résolution du problème fluide : $(\mathbf{u}_{h_f}^n, p_{h_f}^n) \leftarrow \mathcal{F}(\dot{\mathbf{q}}_{h_f}^n)$.
 - 2: Résolution du problème solide : $\ddot{\mathbf{q}}_{h_s}^{n+1} \leftarrow \mathcal{S}(\mathbf{F}_{h_s}^{n+1})$.
 - 3: Passage au pas de temps suivant : $t^n = t^n + \Delta t$.
-

Le décalage d'un pas de temps entier de l'algorithme *CSS* peut être amélioré avec l'algorithme *Improved Serial Staggered (ISS)*. Dans cet algorithme, la résolution du solveur fluide se fait avec une vitesse de prédiction du solveur solide $\dot{\mathbf{q}}_{h_s}^{n+1/2}$ permettant ainsi d'obtenir un décalage d'un demi pas de temps entre les deux solveurs. L'algorithme *ISS* est présenté dans l'algorithme 2.

Algorithme 2 Algorithme ISS

- 1: Prédiction de la vitesse de déplacement à l'interface : $\dot{\mathbf{q}}_{h_s}^{n+1/2}$
 - 2: Résolution du problème fluide : $(\mathbf{u}_{h_f}^{n+1/2}, p_{h_f}^{n+1/2}) \leftarrow \mathcal{F}(\dot{\mathbf{q}}_{h_f}^{n+1/2})$.
 - 3: Résolution du problème solide : $\ddot{\mathbf{q}}_{h_s}^{n+1} \leftarrow \mathcal{S}(\mathbf{F}_{h_s}^{n+1})$.
 - 4: Passage au pas de temps suivant : $t^n = t^n + \Delta t$.
-

Enfin, les algorithmes de couplage implicites permettent de sous-itérer la résolution des problèmes fluide et structure jusqu'à un certain seuil ϵ défini par l'utilisateur. Ce type d'algorithme est développé afin d'avoir les variables fluides et structures calculées (presque) simultanément. On présente l'algorithme implicite de Gauss-Seidel, qui peut être envisagé comme un problème de point fixe dans l'algorithme 3.

3.3 Mise en oeuvre des schémas de couplage explicite et implicite

Algorithme 3 Algorithme implicite de type Gauss-Seidel

- 1: Initialisation : $\dot{\mathbf{q}}_{h_s}^{n,0}, \mathbf{r}^0$.
 - 2: **Tant que** $\|\mathbf{r}^k\|_2 > \epsilon$, **faire** :
 - 3: $(\mathbf{u}_{h_f}^{n,k+1}, p_{h_f}^{n,k+1}) \leftarrow \mathcal{F}(\dot{\mathbf{q}}_{h_f}^{n,k})$.
 - 4: $\ddot{\mathbf{q}}_{h_s}^{n,k+1} \leftarrow \mathcal{S}(\mathbf{F}_{h_s}^{n,k+1})$.
 - 5: $\mathbf{r}^{k+1} = \ddot{\mathbf{q}}_{h_s}^{n,k+1} - \dot{\mathbf{q}}_{h_s}^{n,k}$.
 - 6: $k = k + 1$.
 - 7: **Fin tant que**
 - 8: $t^n = t^n + \Delta t$.
-

Les algorithmes ont été présentés dans un formalisme très général, n'impliquant pas les schémas temporels de *TrioCFD* et *Europlexus*. Dans la section suivante, nous détaillerons la mise en oeuvre de ces algorithmes avec les deux solveurs concernés.

3.3 Mise en oeuvre des schémas de couplage explicite et implicite

L'algorithme *CSS* est un exemple d'algorithme de couplage élémentaire en interaction fluide-structure. Cependant, dans des simulations impliquant un effet de masse ajoutée significatif, cet algorithme de base peut conduire à des instabilités importantes (voir (Causin *et al.*, 2005) et (Fernández, 2011)). L'algorithme *ISS* permet d'améliorer l'équilibre à l'interface et donc d'améliorer la stabilité. Cependant, l'amélioration des couplages explicites ne suffit parfois pas à simuler des problèmes avec un effet de masse ajoutée trop important. Il est donc nécessaire de développer des couplages implicites entre le fluide et le solide.

Cette section se consacre à la mise en oeuvre des algorithmes de couplage *ISS* et implicite de type Gauss-Seidel entre *TrioCFD* et *Europlexus*. Ces algorithmes ont pour objectif de renforcer l'équilibre à l'interface et ainsi de permettre la simulation de problèmes d'IFS avec un effet de masse ajoutée prononcé.

3.3.1 Mise en oeuvre de l'algorithme explicite *ISS*

Pour comprendre le développement du schéma de couplage *ISS*, la discrétisation temporelle de *Europlexus* déjà établie dans la section 1.5.3 est rappelée. Cette discrétisation servira de base pour le développement de l'algorithme de couplage. L'équation discrétisée de la dynamique est formulée comme suit :

$$\mathcal{M}\ddot{\mathbf{Q}}_h^{n+1} + \mathcal{F}_{h_s}^{int}(\mathbf{Q}_{h_s}^{n+1}) = \mathbf{F}_{h_s}^{n+1}. \quad (3.42)$$

Le schéma temporel de *Europlexus* est celui des différence centrée, le déplacement est alors explicite et l'inconnue principale est l'accélération. Afin de résoudre un pas

de temps, la résolution est décomposée en trois étapes :

1. **Étape de prédiction** : Calcul explicite du déplacement et prédiction de la vitesse

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+\frac{1}{2}} &= \dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{Q}}_{h_s}^n, \\ \mathbf{Q}_{h_s}^{n+1} &= \mathbf{Q}_{h_s}^n + \Delta t \dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+\frac{1}{2}}.\end{aligned}\quad (3.43)$$

2. **Solution d'équilibre** : Calcul de l'accélération en résolvant le système de la dynamique

$$\mathcal{M} \ddot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+1} + \mathcal{F}_{h_s}^{int}(\mathbf{Q}_{h_s}^{n+1}) = \mathbf{F}_{h_s}^{n+1}. \quad (3.44)$$

3. **Mise à jour vitesse** : Mise à jour de la vitesse avec la nouvelle accélération et la vitesse de prédiction

$$\dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+1} = \dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+1}. \quad (3.45)$$

Pour développer l'algorithme de couplage, l'étape de prédiction de *Europlexus* est extrapolée dans l'interface de couplage. Lors de cette première étape, la vitesse de prédiction est utilisée comme vitesse commune pour mettre à jour la grille des deux solveurs. Afin de mieux comprendre l'algorithme de couplage, nous proposons dans la figure 3.5 un schéma avec toutes les étapes qui sont énumérées et décrites dans les points ci-dessous. Dans le schéma, les champs de vitesse $\dot{\mathbf{Q}}_h^n$ et de force fluide \mathbf{F}_h^n sont considérés à l'interface et on omet d'écrire $\dot{\mathbf{Q}}_{h|\Gamma_i}^n$ pour alléger les notations.

1. Une vitesses de prédiction $\dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+1/2}$ est calculée en utilisant la vitesse et l'accélération du temps précédent :

$$\dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+1/2} = \dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{Q}}_{h_s}^n. \quad (3.46)$$

2. La vitesse de prédiction $\dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+1/2}$ est transférée à *TrioCFD* via l'interface de couplage. La vitesse est P_1 pour les deux solveurs, donc aucune interpolation n'est nécessaire à cette étape.

3. On calcule la vitesse de grille $\mathbf{W}_{ALE}^{n+1/2}$ avec une équation d'extension de $\dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+1/2}$. La grille est mise à jour avec la formule suivante :

$$\forall \mathbf{x}^n \in \Omega_f(t^n), \quad \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta t \mathbf{W}_{ALE}^{n+1/2}. \quad (3.47)$$

À l'interface on a le déplacement suivant d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{x}^n \in \Gamma_i(t^n), \quad \mathbf{x}^{n+1} &= \mathbf{x}^n + \Delta t \dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{Q}}_{h_s}^n, \\ &= \mathbf{x}^n + \Delta t \dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

On retrouve bien la même formule que le déplacement explicite de *Europlexus* (3.43) à l'interface.

3.3 Mise en oeuvre des schémas de couplage explicite et implicite

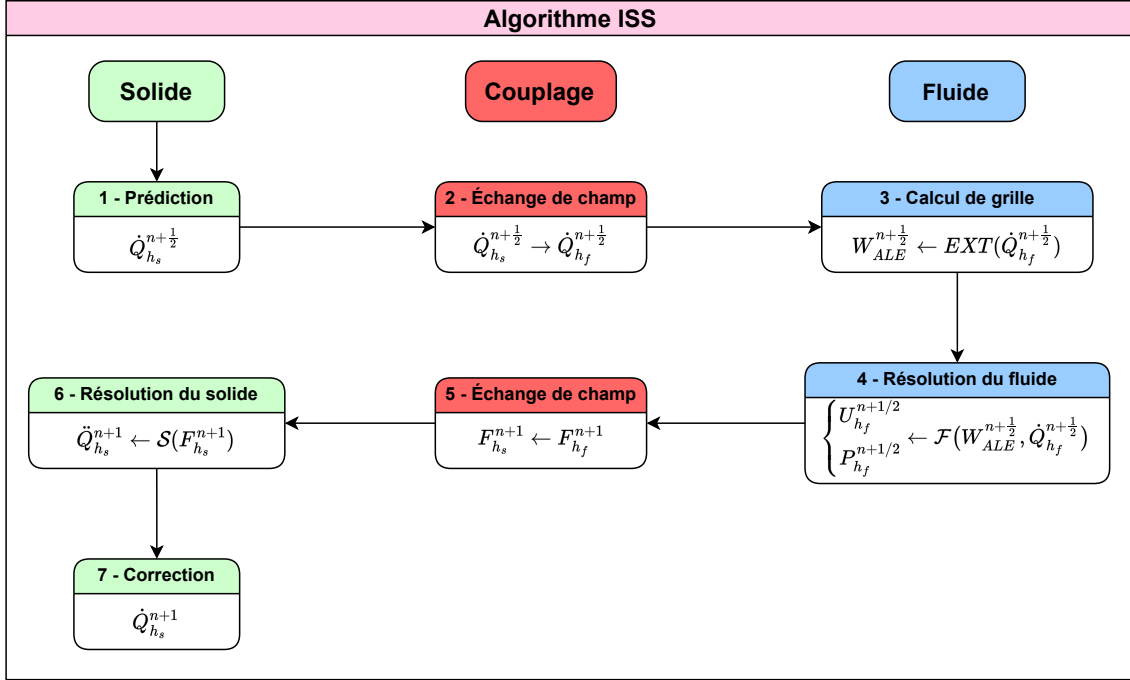


FIGURE 3.5 – Schéma de couplage explicite de type *ISS* entre *TrioCFD* et *Europlexus*

4. Les inconnues fluides sont calculées avec *TrioCFD*, on obtient la vitesse $U_{h_f}^{n+1/2}$ et la pression $P_{h_f}^{n+1/2}$ calculée en fonction de la vitesse de prédiction $\dot{Q}_{h_s}^{n+1/2}$ comme condition limite de l'équation du fluide. Les inconnues sont évaluées sur une grille d'instant $n + 1$.
5. Les forces fluides $F_{h_f}^{n+1}$ initialement P_0 sont transformées en forces P_1 dans l'interface de couplage à l'aide d'un opérateur $\Pi_{h_s}^{P_1}$.
6. La nouvelle accélération $\ddot{Q}_{h_s}^{n+1}$ est obtenue par la résolution du système de la dynamique *Europlexus* (3.44).
7. La vitesse finale est mise à jour avec la formule suivante :

$$\dot{Q}_{h_s}^{n+1} = \dot{Q}_{h_s}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{Q}_{h_s}^{n+1}. \quad (3.48)$$

La boucle en temps est alors incrémentée jusqu'au temps finale de simulation.

3.3.2 Évaluation du couplage explicite *ISS*

Préliminaire

Dans cette section, nous examinons l'impact de la masse ajoutée sur la stabilité du couplage. Cette analyse est réalisée à travers un cas test bien connu dans la littérature, réputé pour son effet significatif de masse ajoutée.

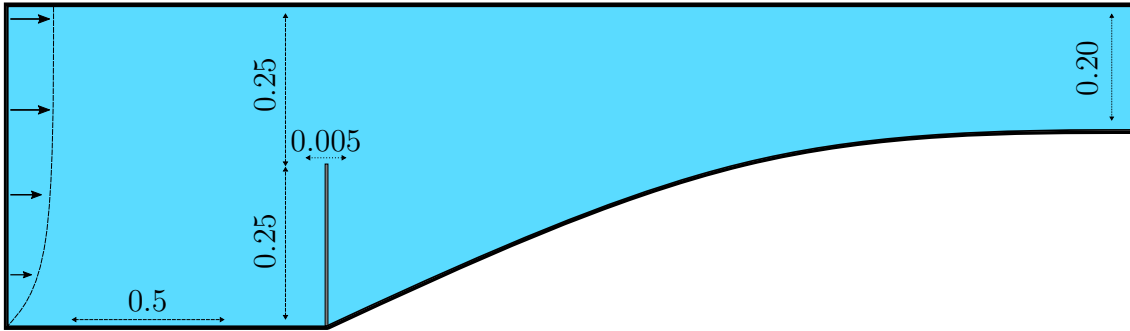


FIGURE 3.6 – Géométrie du cas test de l'écoulement transverse autour d'une poutre flexible de Mok. La longueur du domaine est $L_x = 1.75$ m et la hauteur $L_y = 0.5$ m.

Nous nous concentrons particulièrement sur les limites du couplage explicite, tel qu'exposé dans la section précédente 3.5, lorsqu'il est appliqué à un cas complexe. La condition de stabilité (3.4) établi par (Causin *et al.*, 2005) met en évidence que, pour une géométrie donnée, la stabilité du couplage explicite est perturbée lorsque les densités du fluide et de la structure se rapprochent.

Ainsi, l'objectif de cette section est d'analyser l'influence de la variation des densités du fluide et du solide afin de déterminer des domaines de stabilité pour le couplage explicite entre *TrioCFD* et *Europlexus*.

À ce stade, il est crucial d'aborder la validation du couplage établi entre *TrioCFD* et *Europlexus*. Ce chapitre se concentre exclusivement sur les questions de stabilité du couplage en fonction du schéma utilisé, sans aborder la validation numérique ou physique des résultats. La question de la validation sera traitée dans le dernier chapitre.

Il est aussi important de souligner que le cas sélectionné pour étudier la stabilité du couplage est particulièrement exigeant. L'expérience a révélé qu'il s'agit du cas traité le plus exigeant.

Description du cas test de Mok

Un écoulement transverse autour d'une poutre fine et flexible est choisi pour mettre en évidence les problèmes liés à la masse ajoutée. Ce cas test a été initialement choisi par Mok dans (Mok *et al.*, 2001). Des résultats comparatifs sont disponibles aussi dans (Valdés Vázquez, 2007, Chap. 5). La géométrie de ce cas test est illustrée dans la figure 3.6.

Pour entreprendre une première étude avec le couplage explicite, nous utilisons un maillage grossier tant pour le fluide que pour le solide. Les deux maillages sont présentés dans la figure 3.7. Le maillage fluide comprend 14700 éléments. Et le maillage solide comprend 100 éléments le long de la poutre. L'interface Γ_i est discrétisée un nombre identique de nœuds pour les deux codes.

La modélisation utilisée pour la dynamique du solide est un modèle de poutre

3.3 Mise en oeuvre des schémas de couplage explicite et implicite

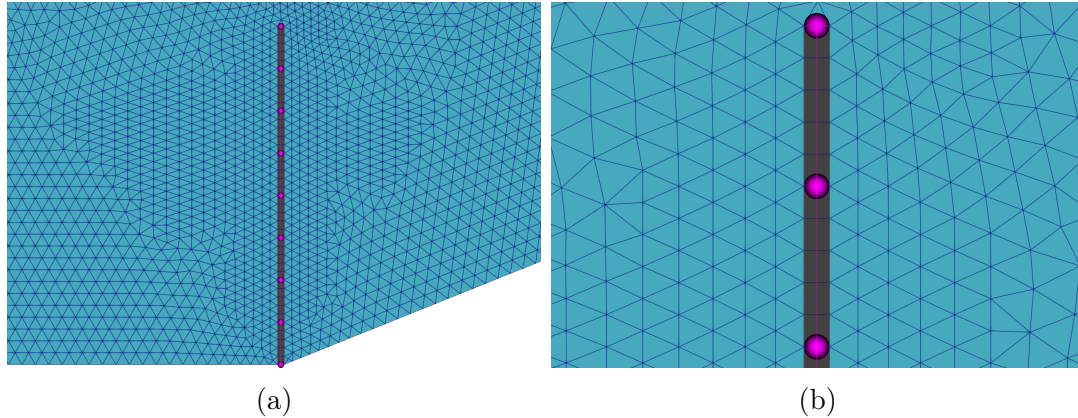


FIGURE 3.7 – Maillage fluide et solide utilisé pour le cas test. (a) Maillage fluide en bleu avec 14 700 éléments. (b) Maillage solide de la poutre 1D en rose et surfacique en gris.

1D de type Euler-Bernoulli. L'équation principale résolue par *Europlexus* est donc de type :

$$\forall x \in [0, L], E_s I \frac{\partial^4 q(x, t)}{\partial x^4} + \rho_s S \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.49)$$

Avec S la section de la poutre, I le moment quadratique et L la longueur de la poutre.

La transmission des champs entre le maillage de l'interface Γ_i et le segment 1D représentatif de la poutre est assurée par *Europlexus* par une liaison appelée *EQBM*⁴. Cette liaison permet de transmettre les forces fluides appliquées sur l'interface Γ_i au segment de poutre et inversement de transmettre la réponse vibratoire de la poutre 1D sur l'interface Γ_i .

Pour utiliser la liaison *EQBM* dans notre couplage, chaque nœud fluide doit être aligné avec un nœud de la poutre 1D. Cependant, il n'est souvent pas optimal de choisir une discrétisation solide aussi fine que celle du fluide. Cela s'explique par les deux points ci dessous.

- Premièrement, la discrétisation du solide n'a généralement pas besoin d'être aussi fine que celle du fluide pour obtenir des résultats précis.
- Deuxièmement, une modélisation fine du solide impose une contrainte plus forte sur le pas de temps (voir équation (1.65)).

Pour remédier à ce problème, une autre liaison a été mise en œuvre : *MSBM*. Celle-ci permet de passer d'une discrétisation de poutre 1D fine induite par le fluide à une discrétisation plus grossière. La figure 3.8 montre à gauche la discrétisation utilisée pour la liaison *EQBM*, et à droite (b), celle pour la liaison *MSBM*. Pour la cas test

4. *Europlexus manuel user* : https://europlexus.jrc.ec.europa.eu/public/manual_pdf/manual.pdf

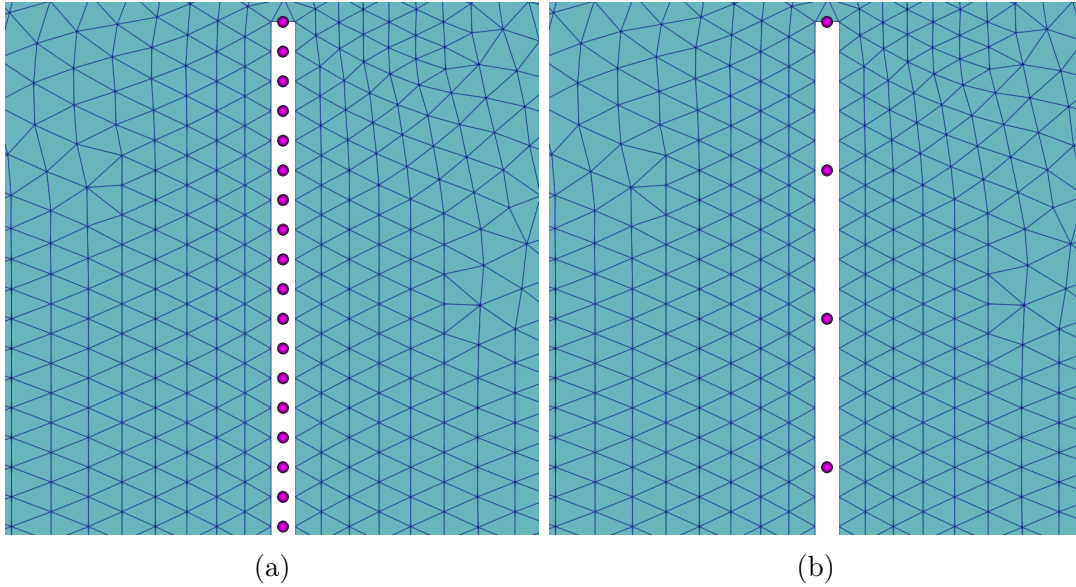


FIGURE 3.8 – Maillage de la poutre 1D (en rose) pour les liaisons *EQBM* (à gauche) et *MSBM* (à droite).

	Densité ρ (Kg·m ³)	Viscosité μ_f (N·s·m ⁻²)	Module Young E_s (N·m ²)	Poisson ν_s	Épaisseur poutre (m)
Fluide	956	0.145	-	-	-
Solide	1500	-	2.3×10^6	0.45	0.005

TABLE 3.2 – Paramètres de référence du cas test de Mok.

de Mok on discrétise la poutre en 9 nœuds visibles en rose dans la figure 3.7 (b) et nous utilisons la liaisons *MSBM*.

Les paramètres de référence utilisés pour le fluide et la structure sont résumés dans le tableau 3.2. Le rapport de référence entre le fluide et la structure est alors d'environ 1.5, et l'épaisseur de la poutre est de 0.005 m. En se référant à la condition de Causin (3.4), l'effet de la masse ajoutée est important et est susceptible de perturber l'équilibre du couplage explicite.

La vitesse d'entrée du fluide est parabolique, comme décrit dans la figure 3.6, et elle augmente progressivement de 1 à 10 s avant de rester constante à une valeur de 0.06067 m·s⁻¹. La fonction utilisée pour intensifier la valeur de la vitesse est la suivante :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_f^D(t), \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \left(\frac{0.06067}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi t}{10}\right) \right), 0 \right). \quad (3.50)$$

3.3 Mise en oeuvre des schémas de couplage explicite et implicite

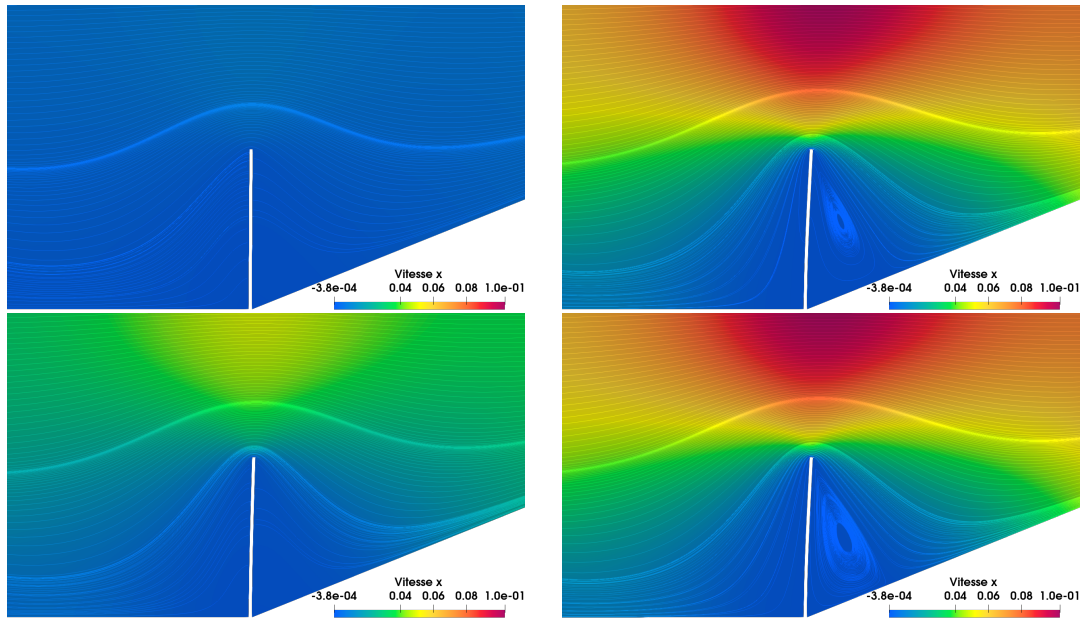


FIGURE 3.9 – Évolution de la vitesse du fluide (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) et des lignes de courant avec $\rho_f = 10 \text{ Kg}\cdot\text{m}^3$ autour de la poutre. Temps $t = 2, 5, 10, 20$ s de haut en bas.

Première simulation avec $\rho_f = 10$

Pour initier l'étude, une première simulation est réalisée avec $\rho_f = 10 \text{ Kg}\cdot\text{m}^3$. Les autres paramètres restent inchangés, conformément au tableau 3.2. La réduction de la densité du fluide vise à proposer une simulation initiale longue et stable, aboutissant à une solution finale stationnaire, sans impliquer des problèmes significatifs liés à la masse ajoutée.

Dans la figure 3.9, la vitesse du fluide autour de la poutre est observable à quatre moments de la simulation ($t = 2, 5, 10, 20$) s. Au cours des dix premières secondes de la simulation, la vitesse s'intensifie, et la poutre se fléchit en suivant principalement son premier mode, atteignant son déplacement maximal de 0.11 m à environ 9 s de simulation. Ensuite, la vitesse devient constante, et un léger retour élastique replace la poutre à sa position finale avec un déplacement final d'environ 0.10 m. La solution reste inchangée jusqu'à la fin de la simulation. Dans la figure 3.10, on trace le déplacement du point en haut de poutre aux coordonnées (0.5, 0.25) et l'évolution des forces fluides appliquées sur la poutre. Ces graphiques viennent confirmer les observations faites sur la figure précédente.

Instabilité du couplage explicite avec $\rho_f = 40$

Après un premier calcul préliminaire, la densité du fluide est augmentée, renforçant ainsi l'effet de masse ajoutée. Pour $\rho_f = 40 \text{ Kg}\cdot\text{m}^3$, on présente les résultats pour étudier l'instabilité du couplage explicite. Les autres paramètres restent inchan-

CHAPITRE 3 : Développement et analyse des algorithmes de couplage entre *TrioCFD* et *Europlexus*

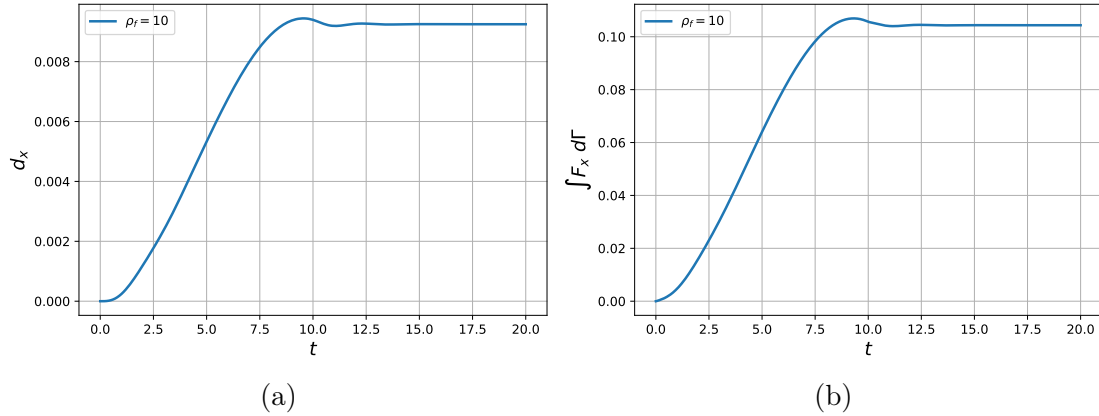


FIGURE 3.10 – Évolution du déplacement en un point et des forces fluides appliquées sur la poutre au cours de la simulation pour $\rho_f = 10 \text{ Kg}\cdot\text{m}^3$. (a) Déplacement du point en haut de poutre (0.5, 0.25) en mètre (m). (b) Forces fluides intégrées sur la poutre en Newton (N).

gés et sont toujours référencés dans le tableau 3.2. Dans la figure 3.11, le domaine en fin de simulation à $t = 0.036 \text{ s}$ est présenté à gauche, et l'évolution des forces fluides sur la poutre est présentée à droite. Les forces de pression explosent très rapidement en début de simulation, ce qui provoque un déplacement erroné de la poutre. La simulation est alors forcée de s'arrêter.

Dans la figure 3.12, le champ de vitesse est présenté à trois instants de la simulation. Une valeur anormalement élevée de la vitesse est observée en haut de la poutre. Cette zone marque le point de départ de l'instabilité. À $t = 0.017 \text{ s}$, le champ de vitesse devient très instable autour du sommet de la poutre et s'inverse brusquement à $t = 0.018 \text{ s}$. Cette instabilité se répercute dans le solveur en pression, qui résout l'équation d'incompressibilité de la vitesse. Les forces de pression divergent quelques pas de temps plus tard. Il s'agit clairement d'une instabilité numérique, car à ce stade de la simulation, la vitesse de l'écoulement est très faible.

Domaine de stabilité pour le couplage explicite

Afin de mettre en évidence cette instabilité causée par l'effet de masse ajoutée, nous allons faire varier les autres paramètres intervenant dans la relation de stabilité établie par Causin (3.4). Dans un premier temps, le tableau 3.3 témoigne de la stabilité de la simulation en fonction de la variation de la densité du fluide et du solide. Les autres paramètres physiques et l'épaisseur de la poutre restent inchangés et sont toujours référencés par le tableau 3.2. On remarque que la variation de la densité du solide ou du fluide a exactement le même impact. Le rapport minimal obtenu entre les deux densités est de 50 pour le couplage explicite. Les observations et remarques sur le comportement du champ de vitesse sont identiques au paragraphe précédent, qu'il s'agisse de la variation de la densité du fluide ou du solide.

3.3 Mise en oeuvre des schémas de couplage explicite et implicite

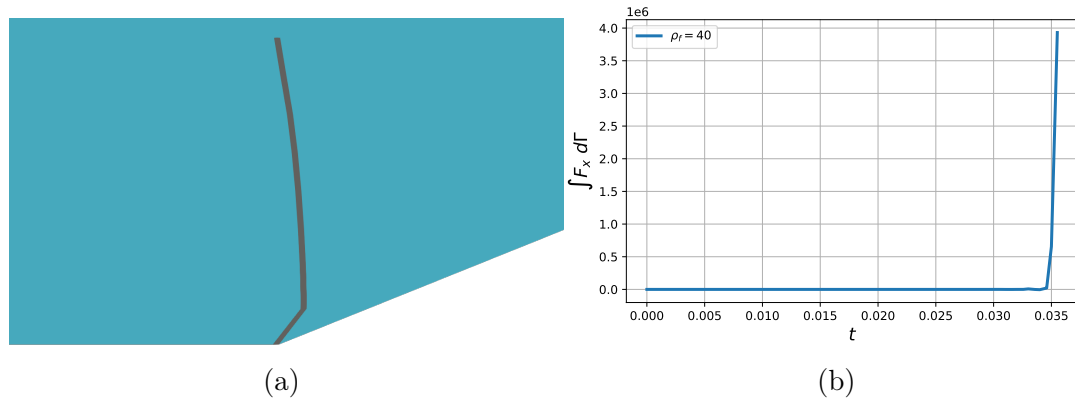


FIGURE 3.11 – Instabilité du cas test avec le couplage explicite pour $\rho_f = 40 \text{ Kg}\cdot\text{m}^3$. (a) Domaine fluide et solide à $t = 0.036 \text{ s}$. (b) Évolution des forces fluides sur la poutre.

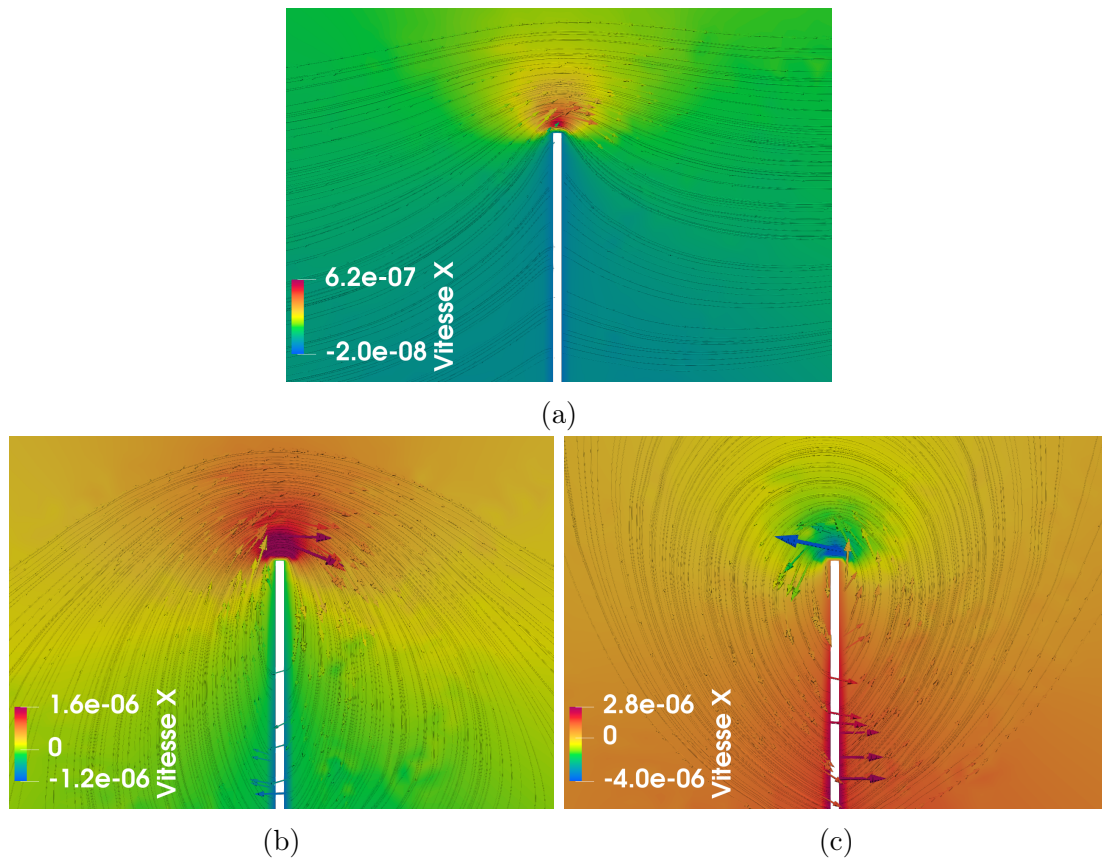


FIGURE 3.12 – Champ de vitesse autour de l'instabilité en haut de poutre à trois instants. (a) $t = 0.014 \text{ s}$. (b) $t = 0.017 \text{ s}$. (c) $t = 0.018 \text{ s}$.

CHAPITRE 3 : Développement et analyse des algorithmes de couplage entre
TrioCFD et *Europlexus*

Densité solide ρ_s	Densité fluide ρ_f	Rapport $\frac{\rho_s}{\rho_f}$	$\frac{\rho_s h_s}{\rho_f}$	Stabilité explicite
1500	30	50	0.25	Stable
1500	40	37.5	0.1875	Instable
7500	150	50	0.25	Stable
7500	200	37.5	0.1875	Instable
15000	300	50	0.25	Stable
15000	400	37.5	0.1875	Instable

TABLE 3.3 – Tableau résumant un domaine de stabilité pour l'épaisseur de référence $h_s = 0.005$ m avec le couplage explicite .

Densité solide ρ_s	Densité fluide ρ_f	Rapport $\frac{\rho_s}{\rho_f}$	$\frac{\rho_s h_s}{\rho_f}$	Stabilité explicite
1500	60	25	0.25	Stable
1500	70	21.4	0.214	Instable
7500	150	25	0.25	Stable
7500	400	21.4	0.214	Instable
15000	600	25	0.25	Stable
15000	700	21.4	0.214	Instable

TABLE 3.4 – Tableau résumant un domaine de stabilité pour l'épaisseur $h_s = 0.01$ m avec le couplage explicite .

Pour approfondir l'étude, nous faisons varier le dernier paramètre intervenant dans la relation de stabilité : l'épaisseur de la structure, h_s . Le tableau 3.4 résume la stabilité du couplage explicite en faisant varier les densités du fluide et du solide, mais en utilisant une épaisseur deux fois plus grande que la référence, soit $h_s = 0.01$ m. L'augmentation de l'épaisseur par un facteur de 2 permet d'obtenir un rapport limite pour la stabilité deux fois plus petit que dans le cas précédent, c'est-à-dire qu'on obtient un rapport minimal de 25 entre la densité du fluide et de la structure. La variation de la densité du fluide ou du solide a également un impact identique sur la stabilité du couplage.

Les tableaux établis pour définir le domaine de stabilité dans le cas test de Mok doivent être interprétés comme des limites potentielles dans la situation la plus contraignante pour le couplage explicite. Ces tableaux démontrent clairement que le rapport des densités et l'épaisseur de la structure influent sur la stabilité du couplage. De plus, une légère diminution du rapport de densité entraîne une forte instabilité dès les premiers pas de temps, renforçant ainsi la condition d'équivalence de Causin. Pour remédier à ce problème, un couplage plus robuste doit être mis en œuvre. Ce couplage implicite est mise en œuvre dans la partie suivante.

3.3 Mise en oeuvre des schémas de couplage explicite et implicite

3.3.3 Mise en oeuvre de l'algorithme implicite de type Gauss-Seidel

Dans cette section, nous développons l'algorithme de couplage implicite entre *TrioCFD* et *Europlexus*. Les itérations implicites seront notées par l'indice k . La particularité du couplage implicite réside dans le fait que le déplacement de la grille ne peut pas être implicite en raison du schéma explicite de *Europlexus*. Seules les étapes de résolution du fluide et de calcul de la vitesse du solide sont implicites.

Avant d'introduire le schéma implicite, il est important de rappeler que le problème fluide (3.37) est défini avec deux vitesses sur le bord Γ_i . La première (3.37a) est utilisée comme condition limite pour le problème de grille : \mathbf{w}_{Γ_i} . La seconde (3.37d) comme condition limite d'équilibre pour l'équation de Navier-Stokes : $\dot{\mathbf{q}}_{\Gamma_i}$. Nous les rappelons dans le système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{w} = EXT(\mathbf{w}_{\Gamma_i}), & (3.51a) \\ \mathbf{u}|_{\Gamma_i} = \dot{\mathbf{q}}_{\Gamma_i}. & (3.51b) \end{cases}$$

Ces deux vitesses, égales dans le couplage *ISS*, seront différentes dans le couplage implicite. Ce dernier est schématisé dans la figure 3.13, et chaque étape est décrite avec les points ci-dessous :

1. Une vitesse de prédiction $\dot{\mathbf{Q}}_{hs}^{n+1/2}$ est calculée en utilisant la vitesse et l'accélération du temps précédent :

$$\dot{\mathbf{Q}}_{hs}^{n+1/2} = \dot{\mathbf{Q}}_{hs}^n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{Q}}_{hs}^n. \quad (3.52)$$

2. La vitesse de prédiction $\dot{\mathbf{Q}}_{hs}^{n+1/2}$ est transférée à *TrioCFD* via l'interface de couplage. La vitesse est P_1 pour les deux solveurs, donc aucune interpolation n'est nécessaire à cette étape.
3. On calcule la vitesse de grille $\mathbf{W}_{ALE}^{n+1/2}$ avec une équation d'extension de $\dot{\mathbf{Q}}_{hs}^{n+1/2}$. La grille fluide est mise à jour avec la formule suivante :

$$\forall \mathbf{x}^n \in \Omega_f(t^n), \quad \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta t \mathbf{W}_{ALE}^{n+1/2}. \quad (3.53)$$

À l'interface on a le déplacement suivant d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x}^n \in \Gamma_i(t^n), \quad \mathbf{x}^{n+1} &= \mathbf{x}^n + \Delta t \dot{\mathbf{Q}}_{hs}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{Q}}_{hs}^n \\ &= \mathbf{x}^n + \Delta t \dot{\mathbf{Q}}_{hs}^{n+1/2} \end{aligned}$$

On retrouve bien la même formule que le déplacement explicite de *Europlexus* (3.43) à l'interface. Durant les itérations implicite, la vitesse de grille $\mathbf{W}_{ALE}^{n+1/2}$ n'est plus mis à jour et donc la grille reste fixe.

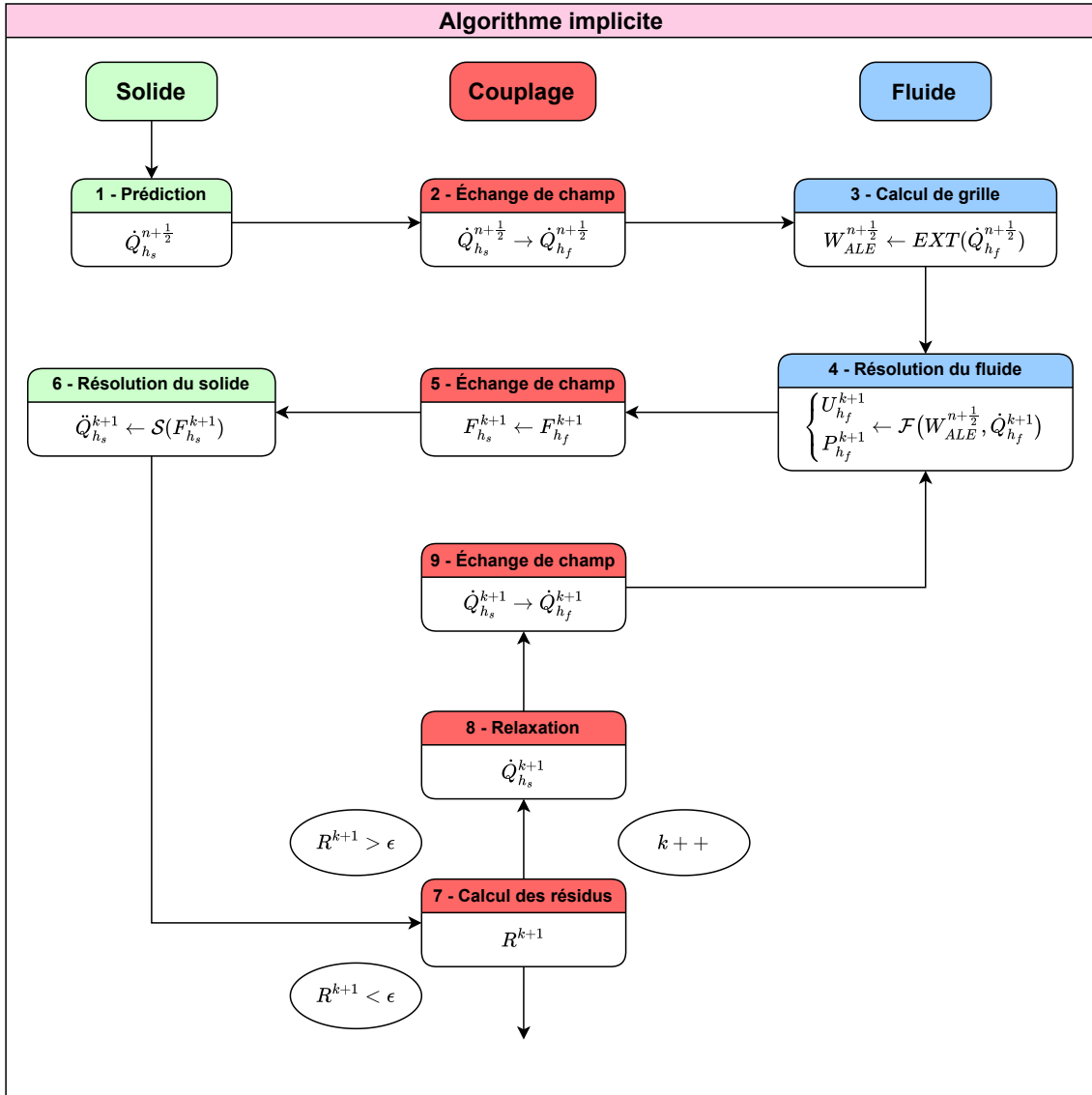


FIGURE 3.13 – Schéma de couplage implicite de type *Gauss-Seidel* pour le couplage entre *TrioCFD* et *Europlexus*.

3.3 Mise en oeuvre des schémas de couplage explicite et implicite

4. Les inconnues fluides sont calculées avec *TrioCFD*. À la première itération $k = 0$, on obtient $\mathbf{U}_{h_f}^{n+1/2}$ et $\mathbf{P}_{h_f}^{n+1/2}$. Sinon lors de l'itération $k > 0$, on obtient les solutions implicites $\mathbf{U}_{h_f}^{k+1}$ et $\mathbf{P}_{h_f}^{k+1}$, évaluées sur une grille fixe durant les itérations.
5. Les forces fluides \mathbf{F}_f^{k+1} initialement P_0 sont transformées en forces P_1 dans l'interface de couplage à l'aide d'un opérateur $\mathbf{\Pi}_{h_s}^{P_1}$.
6. La nouvelle accélération $\ddot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{k+1}$ est obtenue avec *Europlexus* par la résolution de l'équation de la dynamique (3.44).
7. Des résidus sont calculés avec la formule suivante :

$$\mathbf{R}^{k+1} = \ddot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{k+1} - \ddot{\mathbf{Q}}_{h_s}^k. \quad (3.54)$$

Il y a alors deux possibilités après le calcul des résidus qui dépendent du seuil fixé $\epsilon > 0$.

- Si $\|\mathbf{R}^{k+1}\|_2 < \epsilon$ le pas de temps est incrémenté. Et la vitesse convergée est :

$$\dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{k+1} = \dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{k+1}. \quad (3.55)$$

- Sinon, on itère la boucle implicite ($k = k + 1$) et on va à l'étape 8.

8. La vitesse implicite est mise à jour avec un coefficient de relaxation $\omega \in [0, 1]$ avec la formule suivante :

$$\begin{aligned} \forall k > 1, \quad \dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{k+1} &= \dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} (\omega \ddot{\mathbf{Q}}_{h_s}^k + (1 - \omega) \ddot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{k-1}), \\ \dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{k+1} &= \dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} (\omega (\ddot{\mathbf{Q}}_{h_s}^k - \ddot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{k-1}) + \ddot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{k-1}), \\ \dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{k+1} &= \dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{k-1} + \omega \mathbf{R}^k). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Le paramètre de relaxation ω est utilisé pour améliorer la convergence. Il s'agit d'une première approche standard et simple à mettre en oeuvre.

9. La vitesse implicite $\dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{k+1}$ (3.56) est transférée à *TrioCFD* via l'interface de couplage. Cette vitesse est ensuite utilisée pour le solveur fluide. Dans les itérations implicites, le problème fluide (3.37) est bien résolu avec deux vitesses distinctes sur le bord Γ_i : $\dot{\mathbf{Q}}_{h_f}^{n+1/2}$ (3.51a) pour la grille et $\dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{k+1}$ (3.51b) pour la condition limite de l'équation fluide. Le processus est réitéré entre l'étape 4 et l'étape 9 jusqu'à convergence des résidus.

Remarque 2 Les inconnus fluides et solides sont mises à jour avec une dépendance de la vitesse au demi pas de temps qui est fixe durant les itérations implicites. En toute rigueur, on devrait noter par exemple pour la vitesse du solide $\dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+\frac{1}{2}k+1}$. On omet cet indice pour alléger les notations.

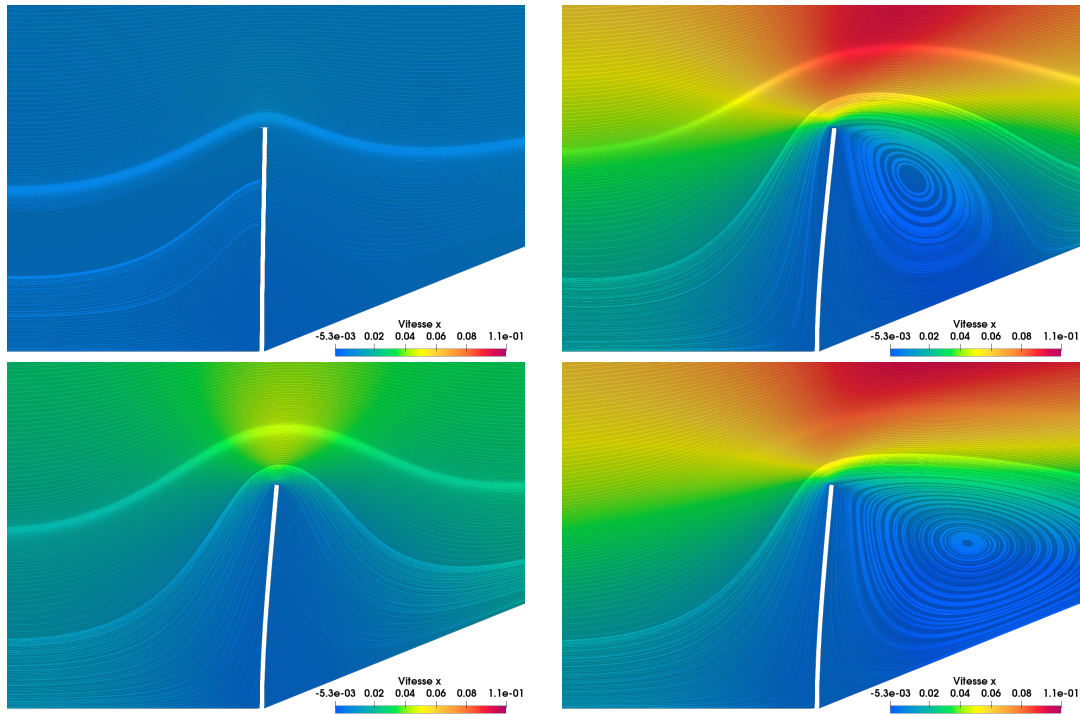


FIGURE 3.14 – Évolution de la vitesse du fluide (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) et des lignes de courant avec $\rho_f = 150 \text{ Kg}\cdot\text{m}^3$. Temps $t = 2, 5, 10, 20$ s de haut en bas.

3.4 Analyse du couplage implicite

L’analyse du couplage implicite s’effectue à partir du même cas test que pour le couplage explicite, le cas test de Mok. Comme mentionné précédemment, pour la géométrie de référence, le couplage explicite était instable pour des rapports de densités inférieurs à 50. Dans cette partie, nous allons voir que le couplage implicite réussit à simuler des effets de masse ajoutée plus importants.

3.4.1 Comparaison et validation du couplage implicite

Dans la figure 3.14, le champ de vitesse du fluide à proximité de la poutre est observable à quatre moments de la simulation ($t = 2, 5, 10, 20$) s. Les densités utilisées sont $\rho_f = 150 \text{ kg}\cdot\text{m}^3$ et $\rho_s = 1500 \text{ kg}\cdot\text{m}^3$, soit un rapport de 10 entre les deux densités. En comparaison avec le champ de vitesse pour $\rho_f = 10 \text{ kg}\cdot\text{m}^3$ dans la figure 3.9, l’état de stationnarité est atteint plus tardivement. Cela s’explique par un déplacement et un retour élastique plus important dus à une densité fluide plus grande et donc un effet de masse ajoutée plus important.

Pour approfondir ces observations, la figure 3.15 compare le déplacement du point situé en haut de la poutre (0.5, 0.25) et les forces fluides appliquées sur la poutre pour différentes densités. On constate que l’augmentation de la densité du

3.4 Analyse du couplage implicite

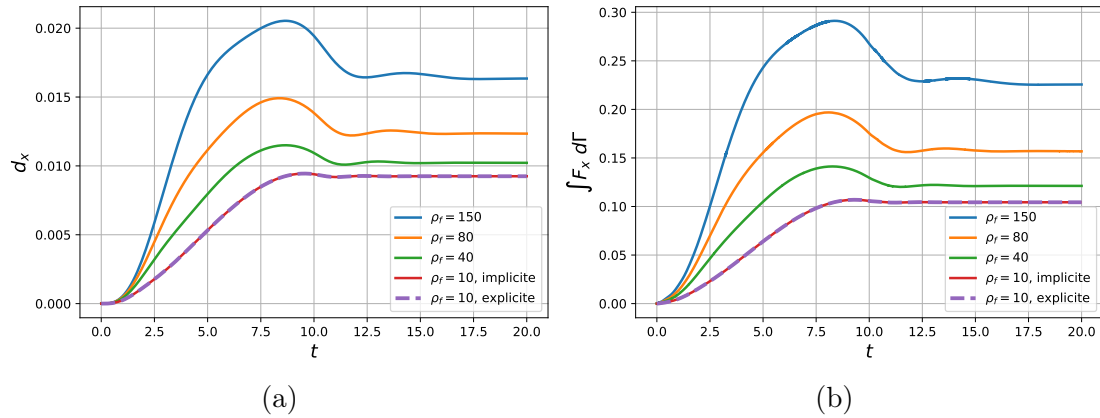


FIGURE 3.15 – Évolution du déplacement en un point et des forces fluides appliquées sur la poutre au cours de la simulation. **(a)** Déplacement du point en haut de poutre $(0.5, 0.25)$ en mètre (m). **(b)** Forces fluides intégrées sur toute la poutre en Newton (N).

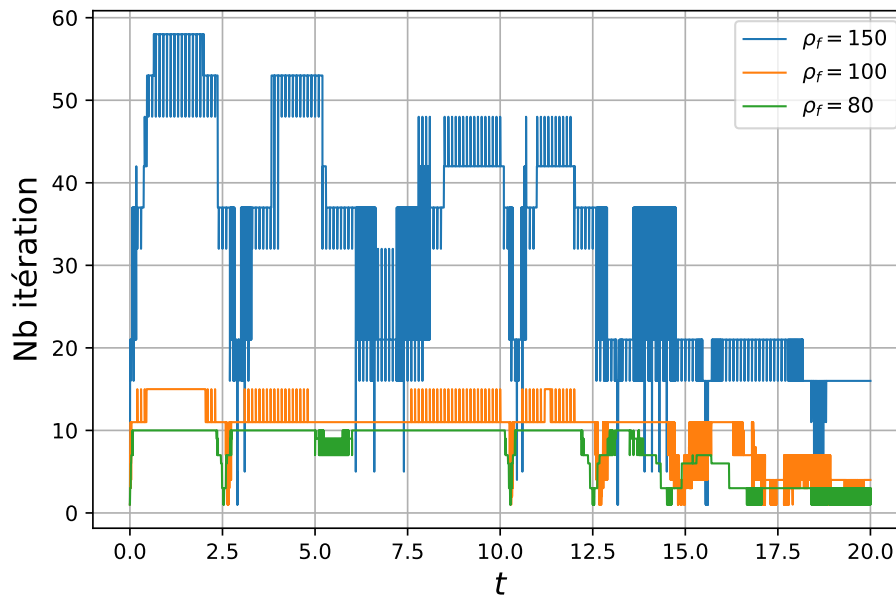


FIGURE 3.16 – Comparaison du nombre d'itération par pas de temps pour atteindre le seuil fixé à 1×10^{-5} avec $\omega = 0.65$.

fluide entraîne une augmentation du déplacement maximal de la poutre. Le retour élastique de la poutre est également plus prononcé, ce qui retarde l'atteinte du régime stationnaire avec l'augmentation de la densité du fluide. Une comparaison est également effectuée entre le couplage explicite et le couplage implicite pour une densité donnée $\rho_f = 10 \text{ kg}\cdot\text{m}^3$. Dans ce cas, le couplage implicite nécessite une seule itération pour converger, et on observe une excellente concordance entre les résultats des deux approches.

Dans la figure 3.16, le nombre d'itérations implicites nécessaires pour que les résidus (défini dans l'équation (3.54)) convergent est affiché pour chaque pas de temps, avec un seuil de convergence fixé à 10^{-5} et un coefficient de relaxation $\omega = 0.65$ (défini dans l'équation (3.56)). Le nombre d'itération pour $\rho_f = 80 \text{ kg}\cdot\text{m}^3$ est représentée en vert, pour $\rho_f = 100 \text{ kg}\cdot\text{m}^3$ en orange et enfin pour $\rho_f = 150 \text{ kg}\cdot\text{m}^3$ en bleu. Les observations de cette figure sont énoncées dans les points suivants :

- Tout d'abord, l'augmentation de la densité du fluide, et donc de l'effet de masse ajoutée, a pour incidence d'augmenter le nombre d'itérations à chaque pas de temps. Durant les 12 premières secondes, pour $\rho_f = 80 \text{ kg}\cdot\text{m}^3$, le nombre d'itérations nécessaires pour converger se stabilisent autour de 10 itérations, tandis que pour $\rho_f = 100 \text{ kg}\cdot\text{m}^3$ on observe une oscillation entre 11 et 15. Pour $\rho_f = 150 \text{ kg}\cdot\text{m}^3$ on observe de grandes variations dans le nombre d'itérations, la valeur maximale est de 58 et on observe souvent des oscillations entre 48 itérations et cette valeur maximale. Nous avons à deux reprises une phase de plusieurs secondes où le nombre d'itérations passe en dessous de 48.
- Ensuite, l'évolution en fonction du temps du nombre d'itérations témoigne de l'état de stationnarité de la simulation. On distingue clairement une première phase entre 0 et 12.5 secondes où il y a une forte interaction entre le fluide et la structure, et donc un nombre important d'itérations pour converger. Cette phase correspond au régime transitoire. Ensuite, une deuxième phase entre 12.5 et 20 secondes où le nombre d'itérations diminue pour les trois densités. Cette phase correspond au régime stationnaire atteint par la simulation.

Une attention particulière doit être apportée au coefficient de relaxation ω . En effet, ce coefficient influence la convergence des résidus. La variation de ω peut provoquer des divergences ou bien une convergence très lente des résidus. L'effet de ω sur la convergence sera étudié dans la section suivante.

3.4.2 Limites du couplage implicite

Dans le but de simuler le cas test de Mok avec les coefficients de référence, la densité du fluide est encore augmentée. Pour $\rho_f = 200 \text{ kg}\cdot\text{m}^3$, soit un rapport de 7.5, le couplage implicite devient instable. Dans la figure 3.17, l'évolution des résidus pour le premier et le deuxième pas de temps de la simulation est tracée pour $\rho_f = 200 \text{ kg}\cdot\text{m}^3$. Le nombre d'itérations implicites est limité à 100. Dès le premier pas de temps, les résidus ne convergent pas, faisant des oscillations de plus en plus grandes.

3.4 Analyse du couplage implicite

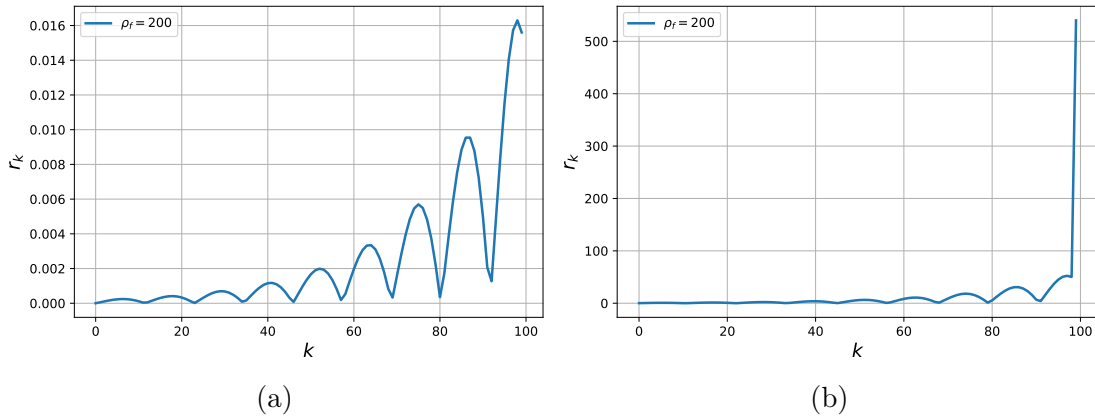


FIGURE 3.17 – Évolution des résidus durant le premier et le deuxième pas de temps pour $\rho_f = 200 \text{ kg}\cdot\text{m}^3$. (a) Premier pas de temps. (b) Deuxième pas de temps.

Densité solide ρ_s	Densité fluide ρ_f	Rapport $\frac{\rho_s}{\rho_f}$	Rapport $\frac{\rho_s h_s}{\rho_f}$	Stabilité implicite	Nb itération moyen régime transitoire	Nb itération moyen régime stationnaire
1500	40	37.5	0.1875	Stable	2	1
1500	80	18.75	0.09375	Stable	9	4
1500	100	15	0.075	Stable	11	6
1500	150	10	0.05	Stable	40	20
1500	160	9.375	0.0469	Stable	65	-
1500	200	7.5	0.0375	Instable	-	-

TABLE 3.5 – Tableau résumant un domaine de stabilité du couplage implicite pour le cas test de Mok. Le nombre d’itération est obtenu avec $\omega = 0.65$.

Au deuxième pas de temps, les résidus explosent provoquant ainsi une divergence du couplage et l’arrêt de la simulation.

Dans le tableau 3.5, nous établissons un domaine de stabilité pour le couplage implicite. Nous faisons varier uniquement la densité du fluide, et nous donnons distinctement le nombre moyen d’itérations implicites pour parvenir à la convergence pour la phase transitoire (0 à 12.5 s) et pour la phase stationnaire (12.5 à 20 s). Le nombre d’itérations est fourni pour $\omega = 0.65$. Le couplage implicite reste stable jusqu’à un rapport de 9.375. Si le rapport est encore diminué, dans un premier temps, le nombre d’itérations implicites devient trop important, puis les résidus ne convergent plus ce qui provoque un arrêt de la simulation. On peut faire les observations suivantes sur le nombre moyen d’itération pour converger :

- Durant le régime transitoire, la première diminution d’un facteur deux du rapport des densités (passage de 37.5 à 18.75) multiplie en moyenne le nombre

ω	Nb itération moyen entre 0.5 et 1.5 s pour $\frac{\rho_s}{\rho_f} = 15$	Nb itération moyen entre 0.5 et 1.5 s pour $\frac{\rho_s}{\rho_f} = 10$
0.750	14	Instable
0.725	11	Instable
0.700	14	35
0.675	16	40
0.650	15	58
0.625	21	77
0.600	13	> 100

TABLE 3.6 – Tableau résumant un domaine de stabilité et le nombre d’itérations du couplage implicite pour le cas test de Mok en fonction du coefficient de relaxation.

d’itérations pour converger par un facteur de 4.5. La seconde diminution d’un facteur de 2 du rapport des densités (passage de 18.75 à 9.375) multiplie en moyenne le nombre d’itérations pour converger par un facteur de 7.2.

- Durant le régime stationnaire, la première diminution d’un facteur deux du rapport des densités (passage de 37.5 à 18.75) multiplie en moyenne le nombre d’itérations pour converger par un facteur de 4. Pour la seconde diminution, le calcul n’a pas pu être achevé en raison d’un trop grand nombre d’itérations demandées. Cependant, grâce au calcul avec le rapport $\frac{\rho_s}{\rho_f} = 10$, nous pouvons supposer que cette deuxième diminution entraînera une augmentation moyenne du nombre d’itérations par un facteur supérieur à 5.

Ce tableau met en évidence que la réduction du rapport des densités n’entraîne pas une augmentation linéaire du nombre d’itérations. Lorsque le rapport de densités approche du cas limite, le nombre d’itérations augmentent de manière significatif.

3.4.3 Influence du coefficient de relaxation

Dans cette section, nous examinons l’impact de la variation du coefficient de relaxation ω (défini dans l’équation (3.56) sur la stabilité et le nombre d’itérations du couplage implicite. Pour évaluer les performances du couplage implicite en fonction de ω , nous comparons le nombre moyen d’itérations pendant 0.5 et 1.5 s. Cet intervalle constitue un indicateur pertinent car il est situé durant le régime transitoire.

Le tableau 3.6 présente le nombre moyen d’itérations entre 0.5 et 1.5 s en fonction du coefficient de relaxation ω pour deux rapports de densité, soit 15 et 10. Pour le rapport de 15, le tableau indique que la variation du coefficient entraîne une fluctuation du nombre d’itérations entre 11 et 21, montrant qu’il est difficile d’identifier une tendance particulière. Cela suggère que lorsque le rapport des densités n’est pas proche du cas limite, le choix du coefficient de relaxation a peu d’impact sur la

3.4 Analyse du couplage implicite

vitesse de convergence et la stabilité du couplage.

En revanche, pour le rapport de 10, la tendance est plus claire. Tout d’abord, pour certaines valeurs de ω ($= 0.725, 0.75$), le couplage devient instable dès les premières itérations, les résidus ne convergent pas et explosent. Pour $\omega = 0.6$, le couplage reste stable, mais le nombre d’itérations pour atteindre la convergence dépasse 100, rendant le calcul infaisable. Les valeurs de ω qui permettent la convergence du couplage implicite se regroupent donc dans un intervalle de $[0.625, 0.7]$. On observe une décroissance du nombre d’itérations entre 0.625 et 0.7, atteignant une valeur optimale à $\omega = 0.7$ de 35 itérations en moyenne, indiquée en bleu dans le tableau.

L’étude sur ω permet de déterminer un coefficient de relaxation fixe permettant d’optimiser la vitesse de convergence. Cependant, si l’on souhaite accélérer la convergence autant que possible, d’autres méthodes doivent être envisagées. C’est le cas, par exemple, de la méthode de relaxation d’Aitken (Irons et Tuck, 1969). Avec cette méthode, le coefficient de relaxation devient variable à chaque itération et est calculé afin de minimiser le nombre d’itérations implicites.

Lorsque l’effet de la masse ajoutée est trop important, la version actuelle de l’algorithme implicite développé entre *TrioCFD* et *Europlexus* ne garantit pas une convergence des résidus dans tous les cas. Plusieurs développements peuvent être envisagés pour assurer la convergence. La relaxation d’Aitken est une piste à considérer. Une autre approche pourrait consister à impliciter l’ensemble du processus de couplage (y compris le déplacement de la grille) en utilisant un schéma temporel implicite pour la résolution de *Europlexus*.

En conclusion de cette étude numérique sur le cas test de Mok, il est important de souligner que l’analyse des performances du couplage implicite par rapport à l’explicite, ainsi que l’exploration des domaines de stabilité des deux couplages, sont des questions pouvant être abordées indépendamment de la validation du couplage fluide-structure. De plus, les domaines de stabilité et les rapports limites ont été observés pour un cas test exigeant. Dans la suite, nous aborderons par exemple des situations où le couplage implicite est suffisant pour traiter des cas avec des rapports de densité de un ou proches.

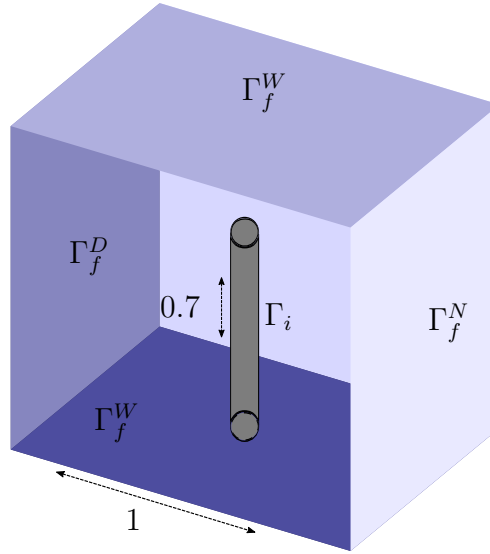


FIGURE 3.18 – Géométrie de l'écoulement transverse 3D.

3.5 Développement et analyse d'un schéma de sous-cyclage en temps

Le couplage développé entre *Europlexus* et *TrioCFD* fournit deux échelles temporelles. D'un côté, la condition de CFL (voir équation (1.65)) de la discrétisation explicite du solide fournit un pas de temps très petit et restreint. D'un autre côté, la discrétisation implicite du fluide et les problèmes traités dans cette thèse (incompressible et laminaire) fournissent un pas de temps plus grand et plus flexible pour le fluide. On considère donc que le pas de temps du solide est le plus petit des deux pas de temps. Afin de préserver la stabilité, le pas de temps du solide est alors choisi comme le pas de temps principal dans le couplage et donc le solveur fluide avance avec un petit pas de temps. La problématique est que le temps de résolution du fluide est beaucoup plus important que le solide. Pour les problèmes traités dans cette thèse, le coût moyen par pas de temps pour la résolution des systèmes par la fonction *SolveTimeStep* de *ICoCo* est de plus de 30% pour le fluide et moins de 1% pour le solide.

3.5.1 Différentes échelles temporelles dans le couplage

Pour illustrer ces propos, nous présentons un cas test en 3D. Il s'agit d'une extension du cas test en 2D de la partie précédente. La géométrie de ce cas test consiste en une boîte de côté 1 m avec une poutre circulaire encastree de hauteur 0.7 m et de diamètre 0.04 m. Le diamètre important de la poutre vise à limiter les effets de masse ajoutée, permettant ainsi de se concentrer exclusivement sur les performances de calcul de ce cas test.

3.5 Développement et analyse d'un schéma de sous-cyclage en temps

	Densité ρ (Kg·m ³)	Viscosité μ_f (N·s·m ⁻²)	Module Young E_s (N·m ²)	Poisson ν_s	Diamètre poutre (m)	Amortissement de Rayleigh
Fluide	1000	0.01	-	-	-	-
Solide	7500	-	6×10^7	0.3	0.04	$\begin{cases} \alpha = 0.005 \\ \beta = 6.69 \times 10^{-5} \end{cases}$

TABLE 3.7 – Paramètres de l'écoulement et de la poutre 3D.

La figure 3.18 illustre la géométrie du cas test ainsi que les conditions aux limites. Une vitesse moyenne de $0.1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ avec un profil parabolique est imposée sur Γ_f^D , tandis qu'une condition de Neumann homogène est appliquée sur Γ_f^N . Les autres frontières du fluide sont considérées comme des parois fixes. Pour la partie solide, une condition de blocage est appliquée à la base de la poutre. Les paramètres physiques de ce cas test sont répertoriés dans le tableau 3.7. Malgré un rapport de densité de 7.5, peu de problèmes de stabilité avec le couplage explicite ont été constatés en raison de l'épaisseur importante de la poutre. Un amortissement de Rayleigh est ajouté pour l'étude du sous-cyclage. Le coefficient α est utilisé pour amortir les vibrations dans la structure à basse fréquence, tandis que β concerne les vibrations à haute fréquence. Le rôle et le choix de ces coefficients dans le contexte du sous-cyclage seront examinés à la fin de cette partie.

Les maillages utilisés sont volontairement grossiers afin de permettre l'exécution et la comparaison de simulations dans des délais raisonnables. Le maillage fluide est composé de 43176 tétraèdres, avec une discrétisation plutôt fine près de la poutre et grossière à distance de celle-ci. Concernant le solide, un modèle de poutre 1D de type Euler-Bernoulli (voir équation (3.49)) est utilisé avec la liaison *EQBM* (présenté avec la figure 3.8). Ainsi, la poutre 1D discrétisée en 100 nœuds, et la poutre surfacique avec 4066 éléments.

Dans cette configuration, nous n'utilisons pas la liaison *MSBM*, afin de contraindre au maximum le pas de temps solide. Chaque nœud de la poutre surfacique est donc aligné avec un point de discrétisation de la poutre 1D. Le maillage du domaine fluide, de la poutre surfacique et de la poutre 1D est illustré dans la figure 3.19. Une coupe dans le maillage fluide est présentée à gauche (**a**). La discrétisation de la poutre surfacique est représentée en gris à droite (**b**), tandis que la poutre 1D est indiquée en rose.

Avant d'examiner les performances et les coûts de calcul du couplage, une analyse rapide du comportement de l'écoulement et de la dynamique de la poutre est entreprise. La figure 3.20 présente le déplacement en haut de la poutre $H = (0.5, 0.7, 0.5)$ et en milieu de poutre $M = (0.5, 0.35, 0.5)$. On observe un fléchissement de la poutre jusqu'à environ 1 s. La poutre subit ensuite un retour élastique significatif jusqu'à 2 s. Ce comportement se répète au cours des secondes suivantes.

Les calculs et observations n'ont pas été poussés plus loin, car notre intention

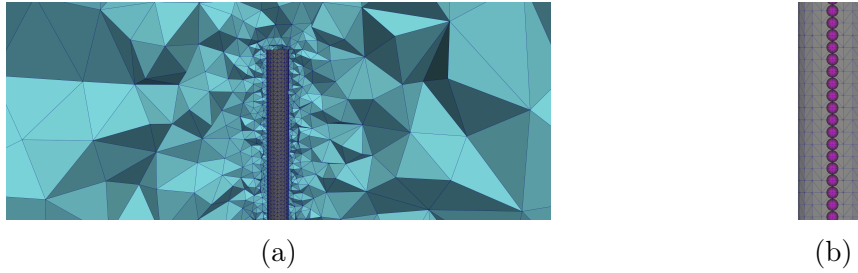


FIGURE 3.19 – Maillage du domaine fluide, de la poutre surfacique et de la poutre 1D. (a) Coupe du maillage fluide en bleue. (b) Discrétisation de la poutre surfacique et de la poutre 1D en rose.

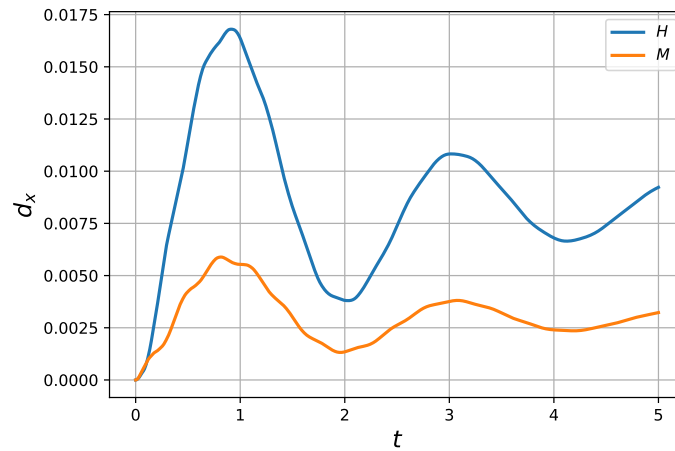


FIGURE 3.20 – Déplacement de la poutre 1D de 1 à 5 s. En bleu le point en haut de poutre et en orange le point en milieu de poutre.

est de se concentrer sur les performances numériques.

Dans le tableau 3.8, les temps de calcul pour différentes opérations de couplage sont donnés pour les premières 0.1 secondes de simulation. Les observations sont résumées dans les points suivants :

- La première et la troisième ligne du tableau montrent une grande différence de temps de calcul entre la résolution du problème fluide et celle du solide. La fonction évaluée en temps de calcul est la fonction *SolveTimeStep* des deux solveurs, il s'agit de la fonction principale de résolution des deux solveurs. Par pas de temps, en moyenne, le solveur fluide a besoin de 1.786 secondes pour exécuter la fonction *SolveTimeStep*, tandis que la résolution du solveur solide est instantanée. En regardant les temps cumulés, l'exécution de *SolveTimeStep* pour *TrioCFD* est environ 1500 fois plus coûteuse que celle de *Europlexus*.
- Le pas de temps prescrit entre le fluide et le solide est également significativement différent. La condition CFL du schéma explicite d'*Europlexus* fournit un pas de temps de 5.04×10^{-6} . En revanche, le schéma temporel implicite de

3.5 Développement et analyse d'un schéma de sous-cyclage en temps

	Fluide	Solide
Temps moyen par pas de temps pour la fonction <i>SolveTimeStep</i> (s)	1.786	0.001
Pas de temps moyen caractéristique (s)	8.06×10^{-4}	5.04×10^{-6}
Temps cumulé de <i>SolveTimeStep</i> (s)	35750	20
Temps total simulation (s)	113200	

TABLE 3.8 – Temps et pas de temps caractéristique de résolution du fluide et de la structure pour le cas test 3D sur 0.1 s de simulation.

TrioCFD renvoie un pas de temps de 8.06×10^{-4} . Ainsi, le pas de temps pour le solide est environ 160 fois plus petit que celui du fluide.

- Le temps total de la simulation révèle que les résolutions du fluide et de la structure occupent environ 31 % du temps de calcul total. Ainsi, une part significative du temps est dédiée à d'autres opérations dans le processus de couplage. Une étude plus approfondie a révélé qu'un temps anormalement long était dû au premier échange de champs dans l'interface de couplage. Pour ce cas test, nous avons observé que le premier échange de champs (interpolation et échange de la vitesse) prend en moyenne 3.4 secondes, contre 0.4 seconde pour le deuxième échange (interpolation et échange des forces fluide) par pas de temps. L'envoi de la vitesse est donc en moyenne 8.5 fois plus coûteux que l'envoi des forces. Ces écarts, encore incompris à ce stade, sont ignorés car ils ne remettent pas en cause les différences des temps de résolution des solveurs et donc du bénéfice d'un algorithme de sous-cyclage.

Les observations sur les temps de résolutions du couplage indiquent qu'il est crucial d'implémenter un algorithme de sous-cyclage temporel entre *TrioCFD* et *Europlexus*. L'objectif principal de cet algorithme est de sous-cycler la résolution temporelle du solveur solide, visant ainsi à alléger la contrainte imposée par le pas de temps du solide.

3.5.2 Développement du schéma de sous-cyclage et analyse des performances

Dans cette section, nous élaborons l'algorithme de sous-cyclage temporel du couplage pour surmonter les difficultés liées aux deux échelles temporelles distinctes. Par défaut, nous supposons que le pas de temps du solide est toujours inférieur au pas

3.5 Développement et analyse d'un schéma de sous-cyclage en temps

L'algorithme de sous-cyclage est présenté dans la figure 3.21. Il est conçu spécifiquement pour respecter les propriétés de l'algorithme *ISS* pour offrir des caractéristiques de stabilité du même niveau que celles sans sous-cyclage.

On note les variables calculées durant les sous-cycles du temps n avec un indice $n+[i]$ pour $i = 1, \dots, N_{sf}$ vérifiant $n + [N_{sf}] = n + 1$. Les différentes étapes de l'algorithme sont détaillées dans les points suivants :

1. En utilisant les dernières forces fluides du pas de temps précédents, *Europlexus* calcule une nouvelle accélération $(N_{sf} - 1)$ fois :

$$\forall i \in [1, \dots, N_{sf} - 1], \ddot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+[i]} = \mathcal{S}(\mathbf{F}_{h_s}^n) \quad (3.58)$$

Lorsque qu'on arrive à la dernière itérations, $i = N_{sf}$, on sort de la boucle et on rentre dans l'algorithme *ISS*.

2. Deux vitesses de prédictions sont ensuite calculées $\dot{\mathbf{Q}}_{h_s,ALE}^n$, $\dot{\mathbf{Q}}_{h_s,NS}^n$ elles sont définies par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}}_{h_s,ALE}^{n+1/2} &= \dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+[N_{sf}-1]} + \frac{\Delta t_s}{2} \ddot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+[N_{sf}-1]}, \\ \dot{\mathbf{Q}}_{h_s,NS}^{n+1/2} &= \frac{1}{\Delta t_f} (\mathbf{Q}_{h_s}^{n+[N_{sf}-1]} + \mathbf{Q}_{h_s}^n). \end{cases} \quad (3.59)$$

La première $\dot{\mathbf{Q}}_{h_s,ALE}^n$, utilisée ensuite comme condition limite pour le problème de grille (3.37a), est calculée pour faire correspondre le déplacement de la grille solide durant les sous-cycles avec la grille fluide. La seconde $\dot{\mathbf{Q}}_{h_s,NS}^{n+1/2}$, utilisée ensuite comme condition limite du problème fluide (3.37d), est calculée pour faire correspondre la vitesse de la dernière itération du sous-cyclage avec la vitesse du fluide à l'interface.

3. Les deux vitesses de prédiction sont transférées à *TrioCFD* via l'interface de couplage. Les deux vitesses sont P_1 pour les deux solveurs, aucune interpolation n'est donc nécessaire à cette étape.
4. On calcule la vitesse de grille $\mathbf{W}_{ALE}^{n+1/2}$ avec une équation d'extension de $\dot{\mathbf{Q}}_{h_s,ALE}^{n+1/2}$. La grille est mise à jour avec la formule suivante :

$$\forall \mathbf{x}^n \in \Omega_f(t^n), \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta t_f \mathbf{W}_{ALE}^{n+1/2}. \quad (3.60)$$

À l'interface on a le déplacement suivant d'ordre 2 en injectant $\dot{\mathbf{Q}}_{h_s,ALE}^n$:

$$\forall \mathbf{x}^n \in \Gamma_i(t^n), \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + (\mathbf{Q}_{h_s}^{n+[N_{sf}-1]} + \mathbf{Q}_{h_s}^n) \quad (3.61)$$

Ce déplacement correspond exactement au déplacement réalisé durant les sous-cycles.

5. Les inconnues fluides sont calculées avec *TrioCFD* avec la vitesse $\dot{\mathbf{Q}}_{h_s,NS}^{n+1/2}$. On obtient la vitesse $\mathbf{U}_{h_f}^{n+1/2}$ et la pression $\mathbf{P}_{h_f}^{n+1/2}$.

Les étapes 6, 7 et 8 sont identiques aux trois dernières étapes (5, 6, 7) de l'algorithme *ISS* présenté dans la figure 3.5.

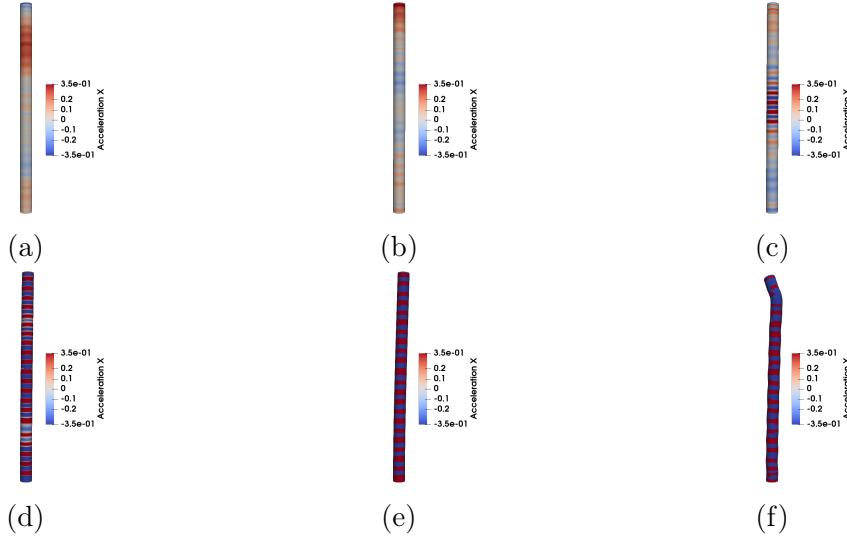


FIGURE 3.22 – Évolution du champ d'accélération de la poutre avec 20 sous-cycles et sans amortissement. Temps $t = 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.7, 0.8$ s de gauche à droite.

Stabilité du sous-cyclage et amortissement dans le problème de structure

L'utilisation de l'algorithme de sous-cyclage semble activer une instabilité à haute fréquence dans le problème de structure, qui se développe ensuite lentement jusqu'à perturber la solution du problème couplé. Dans la figure 3.22, on observe à différents instants ($t = 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.7, 0.8$ s) une instabilité se propager dans le champ d'accélération sur toute la longueur de la poutre. La simulation prend fin vers environ 0.8 s après une propagation trop importante de l'instabilité, conduisant à une divergence.

Cette instabilité sur des temps longs est traitée de manière robuste par l'introduction d'un niveau classique d'amortissement dans la structure (voir l'amortissement dans le tableau 3.7), modélisé par l'approche de Rayleigh. Il s'agit d'ajouter un amortissement dans le problème solide modélisé à partir des matrices de masse \mathcal{M} et de rigidité \mathcal{K} par combinaison linéaire avec des coefficients α et β . Le système à résoudre est donc le suivant :

$$\mathcal{M}\ddot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+1} + \mathcal{C}\dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+1} + \mathcal{F}_{h_s}^{int}(\mathbf{Q}_{h_s}^{n+1}) = \mathbf{F}_{h_s}^{n+1}. \quad (3.62)$$

Avec $\mathcal{C} = \alpha\mathcal{M} + \beta\mathcal{K}$, la matrice d'amortissement, le coefficient α amortit les vibrations de basses fréquences de la structure, tandis que β amortit les vibrations à hautes fréquences. La figure 3.23 compare les forces fluides appliquées sur la poutre avec et sans amortissement pour 20 sous-cycles. Cette comparaison met clairement en évidence l'effet de l'ajout de l'amortissement qui permet d'atténuer totalement les oscillations conduisant à une divergence.

Il convient de noter que l'instabilité observée est nettement différente et doit être

3.5 Développement et analyse d'un schéma de sous-cyclage en temps

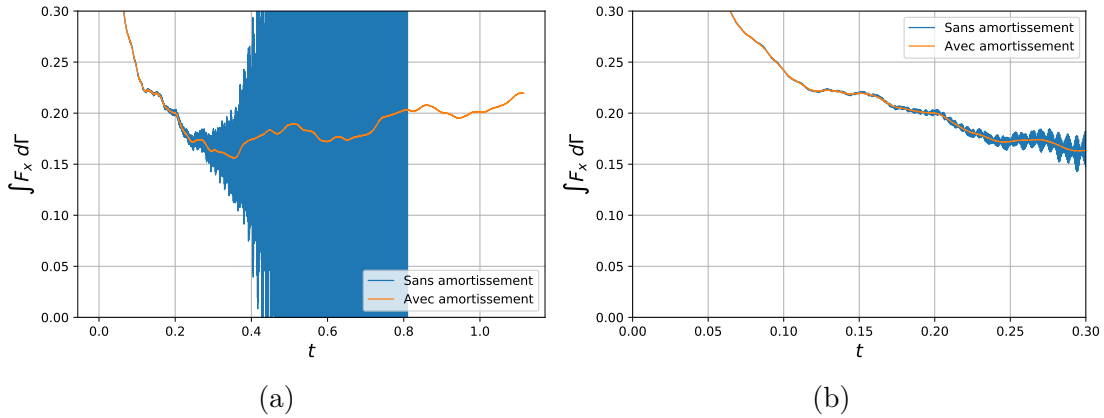


FIGURE 3.23 – Comparaison des forces fluides appliquées sur la poutre pour 20 sous-cycles avec et sans amortissement. (a) Intervalle complet. (b) Zoom sur l'intervalle $x \in [0, 0.3]$.

distinguée de celle liée à la masse ajoutée. Pour celle associée à la masse ajoutée, nous observons une divergence très rapide dès les premiers pas de temps. En revanche, pour celle liée à l'amortissement, il s'agit d'une instabilité très lente et progressive.

Analyse des performance du sous-cyclage

	Sans sous-cycle		10 sous-cycles		20 sous-cycles		40 sous-cycles		80 sous-cycles	
	Total (s)	Gain	Total (s)	Gain	Total (s)	Gain	Total (s)	Gain	Total (s)	Gain
Temps fluide <i>Solve TimeStep</i>	<u>35750</u>	-	<u>3565</u>	10.02	<u>1822</u>	19.62	<u>928</u>	38.52	<u>495</u>	72.22
Temps solide <i>Solve TimeStep</i>	20	-	20	-	20	-	20	-	20	-
Total	<u>113200</u>	-	<u>11320</u>	10	<u>5721</u>	19.78	<u>2906</u>	38.95	<u>1515</u>	74.72

TABLE 3.9 – Temps de calcul pour simuler 0.1 s de simulation sur le cas test 3D. La variable *Gain* est le temps d'une étape avec sous-cyclage divisé par le temps de cette étape sans sous-cyclage : $\frac{t_{N_{sf}}}{t_{N_{sf}=0}}$.

Pour évaluer les performances de l'algorithme de sous-cyclage, nous utilisons le cas test 3D sur une durée de simulation finale de 0.1 s. L'algorithme est testé avec 10, 20, 40 et 80 sous-cycles.

Dans le tableau 3.9, les résultats des temps de calculs cumulés sur 0.1 s de simulation pour les différentes étapes sont présentées. La diminution du temps de calcul par rapport à la simulation sans sous-cyclage est donnée par la colonne *Gain*, il est calculé en divisant le temps de l'étape avec sous-cyclage $t_{N_{sf}}$ par celui sans

sous-cyclage $t_{N_{sf}=0}$, c'est à dire :

$$Gain = \frac{t_{N_{sf}}}{t_{N_{sf}=0}}$$

Les résultats du tableau sont résumés dans les points suivants :

- En examinant la première ligne du tableau, celle du temps cumulé de l'exécution de la fonction *SolveTimeStep* du fluide, on observe clairement la réduction du temps de calcul visée. L'utilisation de N_{sf} sous-cycles permet effectivement de réduire le nombre de résolutions fluides de N_{sf} , entraînant ainsi une diminution du temps cumulé des résolutions fluides de N_{sf} .
- Pour la deuxième ligne du tableau, soit le temps cumulé de l'exécution de la fonction *SolveTimeStep* du solide, on observe un temps constant entre les sous-cycles de 20 s. En effet, étant donné que le sous-cyclage consiste à boucler spécifiquement sur la fonction *SolveTimeStep*, le nombre d'itérations du solide restent identique.
- Dans la dernière ligne du tableau, soit le temps total de simulation, on observe aussi la réduction du temps de calcul visée. L'utilisation de N_{sf} sous-cycles permet de réduire le temps total de simulation par N_{sf} . Ceci s'explique par la diminution du nombre de résolution fluide, mais aussi du nombre d'interpolation absente dans la boucle de sous-cyclage.

Nous avons montré que l'algorithme de sous-cyclage mis en place a bien l'effet escompté. Cependant, il est légitime de se demander si le nombre de sous-cycles pourrait dégrader la solution. Dans la figure 3.24, le déplacement du point en haut de la poutre ainsi que les forces fluides appliquées sur la poutre sont tracées pour différents nombres de sous-cycle ($N_{sf} = 0, 10, 20, 40, 80$). Dans cet exemple, aucune différence notable n'est observée entre les simulations avec un nombre différent de sous-cycles. Toutefois, cela n'implique pas qu'un grand nombre de sous-cycles conviennent dans tous les cas. En effet, le nombre maximal de sous-cycles doit être judicieusement choisis par l'utilisateur en prenant en compte le pas de temps caractéristique de la physique du problème concerné. Dans notre cas test on peut se référer au pas de temps caractéristique du fluide dans le tableau 3.8. Le choix peut être plus complexe dans le cas d'écoulements turbulents ou lors de l'étude de dynamique à transitoire rapide, comme en présence d'impacts entre structures (Faucher et Ricciardi, 2023).

3.5.3 Analyse du sous-cyclage avec le couplage implicite

Dans cette section, nous examinons l'application de l'algorithme de sous-cyclage en utilisant l'algorithme implicite. Dans un premier nous évaluons si l'algorithme implicite associé avec le sous-cyclage fonctionne de manière efficace dans des cas présentant un effet de masse ajoutée peu significatif. Dans un second temps, nous

3.5 Développement et analyse d'un schéma de sous-cyclage en temps

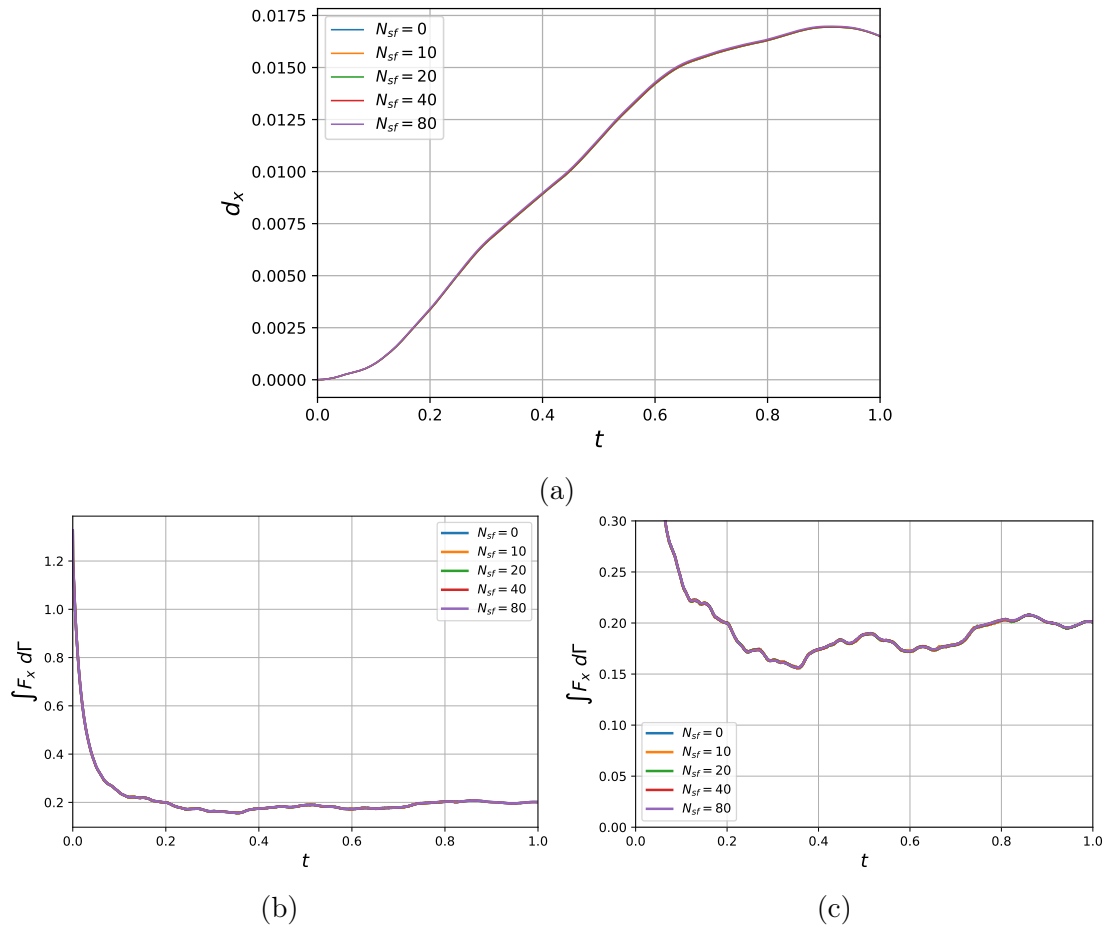


FIGURE 3.24 – Comparaison du déplacement du point en haut de poutre et des forces fluides appliquées sur la poutre. (a) Déplacement en m du point en haut de poutre. (b, c) Forces fluides appliquées sur la poutre et zoom sur la courbe pour $y \in [0, 0.3]$.

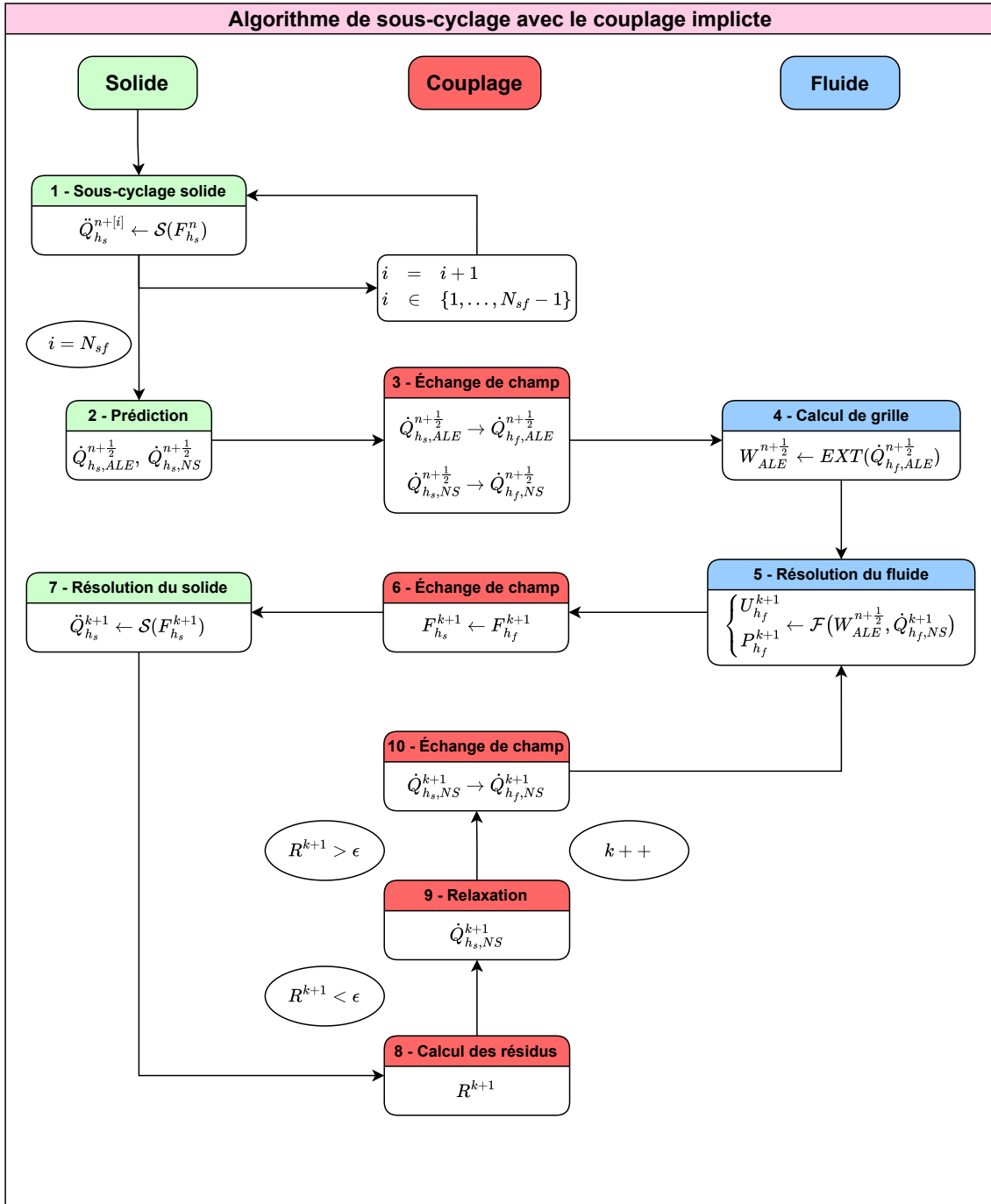


FIGURE 3.25 – Schéma de couplage implicite avec l’algorithme de sous-cyclage.

3.5 Développement et analyse d'un schéma de sous-cyclage en temps

étudierons l'impact du sous-cyclage dans des situations où l'effet de masse ajoutée est plus prononcé.

L'algorithme de sous-cyclage associé au schéma de couplage implicite est présenté dans la figure 3.25. Il reprend les principales étapes de l'algorithme de sous-cyclage (voir figure 3.21) et celui de l'implicite (voir figure 3.13). On détaille l'algorithme dans les points suivants :

1. En utilisant les dernières forces fluides du pas de temps précédent, *Europlexus* calcule une nouvelle accélération $N_{sf} - 1$ fois :

$$\forall i \in [1, \dots, N_{sf} - 1], \ddot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+[i]} = \mathcal{S}(\mathbf{F}_{h_s}^n) \quad (3.63)$$

Lorsque qu'on arrive à la dernière itération, $i = N_{sf}$, on sort de la boucle et on rentre dans l'algorithme implicite.

2. Deux vitesses de prédictions sont ensuite calculées $\dot{\mathbf{Q}}_{h_s,ALE}^n$, $\dot{\mathbf{Q}}_{h_s,NS}^n$ elles sont définies par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}}_{h_s,ALE}^{n+1/2} &= \dot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+[N_{sf}-1]} + \frac{\Delta t_s}{2} \ddot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{n+[N_{sf}-1]}, \\ \dot{\mathbf{Q}}_{h_s,NS}^{n+1/2} &= \frac{1}{\Delta t_f} (\mathbf{Q}_{h_s}^{n+[N_{sf}-1]} + \mathbf{Q}_{h_s}^n). \end{cases} \quad (3.64)$$

La première $\dot{\mathbf{Q}}_{h_s,ALE}^n$, utilisée ensuite comme condition limite pour le problème de grille (3.37a), est calculée pour faire correspondre le déplacement de la grille solide durant les sous-cycles avec la grille fluide. La seconde $\dot{\mathbf{Q}}_{h_s,NS}^{n+1/2}$, utilisée ensuite comme condition limite du problème fluide (3.37d), est calculée pour faire correspondre la vitesse de la dernière itération du sous-cyclage avec la vitesse du fluide à l'interface.

3. Les deux vitesses de prédiction sont transférées à *TrioCFD* via l'interface de couplage. Les deux vitesses sont P_1 pour les deux solveurs, aucune interpolation n'est donc nécessaire à cette étape.
4. On calcule la vitesse de grille $\mathbf{W}_{ALE}^{n+1/2}$ avec une équation d'extension de $\dot{\mathbf{Q}}_{h_s,ALE}^{n+\frac{1}{2}}$. La grille est mise à jour avec la formule suivante :

$$\forall \mathbf{x}^n \in \Omega_f(t^n), \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta t_f \mathbf{W}_{ALE}^{n+1/2}. \quad (3.65)$$

À l'interface on a le déplacement suivant d'ordre 2 en injectant $\dot{\mathbf{Q}}_{h_s,ALE}^n$:

$$\forall \mathbf{x}^n \in \Gamma_i(t^n), \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + (\mathbf{Q}_{h_s}^{n+[N_{sf}-1]} + \mathbf{Q}_{h_s}^n) \quad (3.66)$$

Ce déplacement correspond exactement au déplacement réalisé durant les sous-cycles.

5. Les inconnues fluides sont calculées avec *TrioCFD*. À la première itération $k = 0$, on obtient $\mathbf{U}_{h_f}^{n+1/2}$ et $\mathbf{P}_{h_f}^{n+1/2}$. Sinon lors de l'itération $k > 0$, on obtient les solutions implicites $\mathbf{U}_{h_f}^{k+1}$ et $\mathbf{P}_{h_f}^{k+1}$. Ces solutions sont évaluées sur une grille fixe durant les itérations implicites d'instant $n + 1$.

CHAPITRE 3 : Développement et analyse des algorithmes de couplage entre
TrioCFD et *Europlexus*

	Densité ρ (Kg·m ³)	Viscosité μ_f (N·s·m ⁻²)	Module Young E_s (N·m ²)	Poisson ν_s	Diamètre poutre	Amortissement de Rayleigh
Fluide	10	0.0145	-	-	-	-
Solide	1500	-	2.3×10^6	0.45	0.005	$\begin{cases} \alpha = 0.005 \\ \beta = 6.69 \times 10^{-5} \end{cases}$

TABLE 3.10 – Paramètres utilisés pour l'étude du sous-cyclage avec le cas test de Mok.

Nombre de sous-cycle	Nb itération moyen régime transitoire	Nb itération moyen régime stationnaire
10	1	1
20	1.5	1
40	2.5	1
80	3.5	1

TABLE 3.11 – Tableau résumant le nombre d'itérations moyen pour atteindre un seuil fixé à 1×10^{-5} . Le nombre d'itération est obtenu avec $\omega = 0.7$ et une densité fluide $\rho_f = 10 \text{ Kg}\cdot\text{m}^3$.

6. Les forces fluides $\mathbf{F}_{h_f}^{k+1}$ initialement P_0 sont transformées en forces P_1 dans l'interface de couplage à l'aide d'un opérateur $\mathbf{\Pi}_{h_s}^{P_1}$.

7. La nouvelle accélération $\ddot{\mathbf{Q}}_{h_s}^{k+1}$ est obtenue avec *Europlexus* (3.44).

Le calcul des résidus et la boucle implicite (étapes 8, 9, 10 et 5) sont identiques aux étapes 7, 8, 9 et 4 de l'algorithme implicite déjà présenté dans la figure 3.13.

Pour mener à bien l'étude du sous-cyclage avec l'algorithme implicite, nous reprenons l'analyse du cas test de Mok, initialement présenté dans la section 3.3.2. Ce cas test est choisi car les domaines de stabilité des couplages explicites et implicites ont déjà été examinés et sont répertoriés dans les tableaux 3.3 et 3.5. Un amortissement de Rayleigh est également ajouté pour atténuer les vibrations à hautes fréquences. Nous débutons l'étude avec une densité fluide $\rho_f = 10 \text{ Kg}\cdot\text{m}^3$, soit un rapport de densité $\frac{\rho_s}{\rho_f} = 150$ qui n'entraîne pas un effet de masse ajoutée significatif en se référant aux tableaux 3.3 et 3.5. Les paramètres du test sont répertoriés dans le tableau 3.10.

Le cas test de Mok a été exécuté sur une période de 20 secondes avec différents nombres de sous-cycles, à savoir $N_{sf} = 10, 20, 40$ et 80. Le couplage utilisé est le couplage implicite, avec un seuil fixé à $\epsilon = 1 \times 10^{-5}$ et un coefficient de relaxation $\omega = 0.7$. Dans la figure 3.26, une comparaison des résultats pour différents nombres de sous-cycles est présentée. L'analyse des déplacements du point en haut de la

3.5 Développement et analyse d'un schéma de sous-cyclage en temps

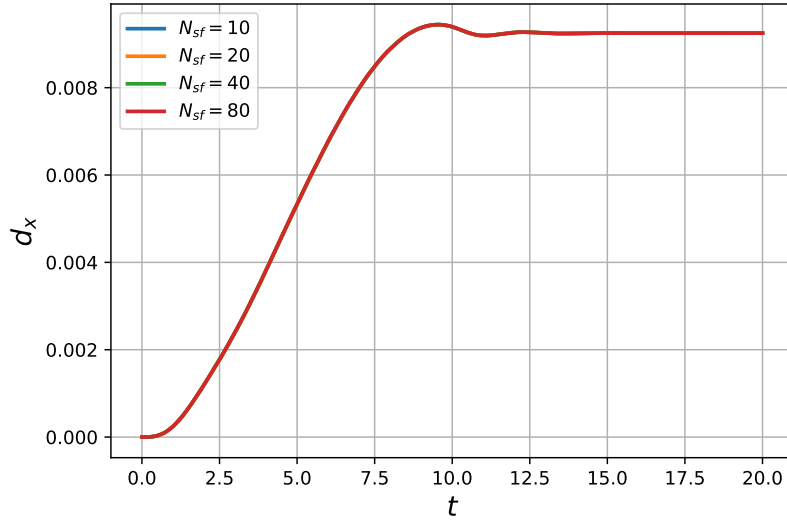


FIGURE 3.26 – Évolution du déplacement avec le couplage implicite pour atteindre un seuil $\epsilon = 1 \times 10^{-5}$ pour différents nombres de sous-cycle et une densité fluide $\rho_f = 10 \text{ Kg}\cdot\text{m}^3$.

poutre révèle des déplacements identiques entre les simulations, indépendamment du nombre de sous-cycles. Cela confirme que l'algorithme de sous-cyclage peut fonctionner efficacement avec le couplage implicite. Cependant, le choix du nombre de sous-cycles doit toujours être adapté au cas test et à l'échelle temporelle du phénomène considéré.

Le nombre moyen d'itération pour différents nombres de sous-cycles dans le tableau 3.11 montrent également qu'à mesure que le nombre de sous-cycles augmentent, l'équilibre à l'interface est perturbé, nécessitant plusieurs itérations implicites pour revenir à l'équilibre. Dans la phase transitoire (entre 0 et 10 secondes), la simulation avec 80 sous-cycles nécessite entre 3 et 4 itérations pour converger, comparé à 2 pour 40 sous-cycles et 2.5 en moyenne pour 20 sous-cycles.

En résumé, à l'aide du cas test de Mok et dans des conditions où le couplage explicite est suffisant pour simuler l'effet de masse ajoutée, nous avons montré la faisabilité de l'utilisation du couplage implicite avec l'algorithme de sous-cyclage. De plus, lorsque le nombre de sous-cycles est élevé, le couplage implicite intervient pour stabiliser l'équilibre à l'interface fluide-structure.

Dans l'étude suivante, afin d'accentuer l'effet de la masse ajoutée, nous augmentons la densité du fluide en fixant $\rho_f = 40 \text{ Kg}\cdot\text{m}^{-3}$, ce qui donne un rapport de densité de 37.5. En se référant au tableau fournissant le domaine de stabilité du couplage implicite (3.5), le cas concerné nécessite peu d'itérations pour converger. Cependant, pour ce cas, l'ajout de l'algorithme de sous-cyclage conduit rapidement à une divergence. Dans la figure 3.27, les forces fluides sont affichées pour 10 et 5 sous-cycles. Pour les deux cas, des oscillations importantes des forces fluides apparaissent

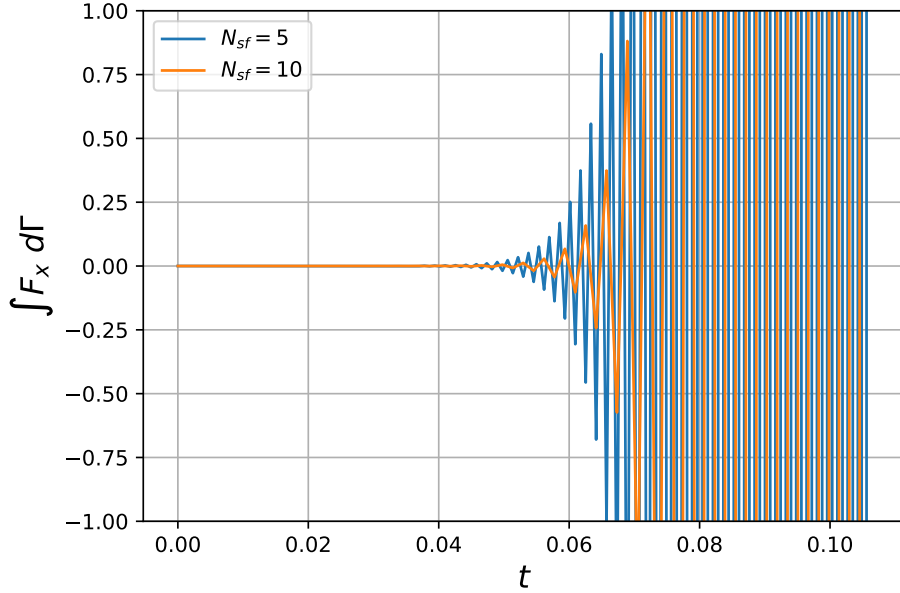


FIGURE 3.27 – Forces fluide appliqués sur la poutre pour $\rho_f = 40 \text{ Kg}\cdot\text{m}^{-3}$ avec 5 et 10 sous-cycles.

très rapidement en début de simulation. Ces oscillations conduisent rapidement à une divergence et à l’arrêt du calcul à environ $t = 0.10 \text{ s}$.

Lorsque l’effet de la masse ajoutée est significatif, c’est-à-dire lorsque le couplage explicite ne suffit plus pour traiter le cas, l’ajout du sous-cyclage au couplage implicite induit une instabilité rapide de la simulation. Cette situation peut s’expliquer par le fait que, durant les sous-cycles, le solveur solide est mis à jour avec les forces du pas de temps précédent $F_{P_0}^n$, ce qui signifie que ces forces ne sont plus à l’équilibre pour le temps présent dans les sous-cycles. L’algorithme de sous-cyclage en présence d’un effet de masse ajoutée important est encore à concevoir. Cette algorithme pourra s’envisager à partir d’une version plus robuste de l’algorithme implicite.

3.6 Conclusion

Une preuve de stabilité, avec des hypothèses de simplification, a été établie dans la première partie de ce chapitre. Cette démonstration, établie avec l’hypothèse de petites perturbations et sur des équations simplifiées, montre la stabilité du couplage implicite avec les discrétisation temporelle de *TrioCFD* et *Europlexus*. Ce travail préliminaire vise éventuellement l’élaboration d’une condition de CFL pour le couplage entre *TrioCFD* et *Europlexus*.

Dans les parties 2 à 4, nous avons présenté les deux algorithmes de couplage mis en place entre *TrioCFD* et *Europlexus* : l’algorithme explicite *ISS* et l’algorithme im-

3.6 Conclusion

plicite. Nous avons observé que l'effet de masse ajoutée peut jouer un rôle important dans la stabilité du couplage, ce qui est en accord avec la littérature. En utilisant un cas test réputé pour avoir un effet de masse ajoutée significatif, nous avons établi des domaines de stabilité pour les deux algorithmes. Ces analyses ont montré que le couplage implicite développé remplit bien son rôle en permettant d'obtenir des simulations stables avec des densités fluide et solide plus proches que le couplage explicite, pour une même épaisseur. Cependant, il est important de noter que le couplage implicite développé ne permet pas de simuler les cas les plus exigeants.

Enfin, en cinquième partie, une analyse des différentes échelles temporelles entre *TrioCFD* et *Europlexus* a montré qu'il était crucial de développer un algorithme de sous-cyclage pour que le couplage soit exploitable en terme de temps de calcul. L'algorithme développé permet de réaliser des sous-cycles du solveur solide, ce qui permet au solveur fluide d'avancer avec un pas de temps plus grand que sans sous-cycle. Cet algorithme est très performant pour des cas qui peuvent être simulés avec le couplage explicite, c'est-à-dire avec un effet de masse ajoutée peu significatif. Dans ce genre de cas, le couplage implicite peut également être utilisé avec le sous-cyclage pour améliorer la stabilité. Pour des cas plus complexes, avec un effet de masse ajoutée important et simulable uniquement par le couplage implicite, le sous-cyclage ne permet pas de préserver l'équilibre établi par le couplage implicite, et un algorithme plus robuste doit être élaboré.

Chapitre 4

Benchmark et validation en IFS

Dans ce dernier chapitre, nous abordons la question de la validation du couplage. Ce chapitre constitue une première étape de validation pour le couplage *TrioCFD-Europlexus*. Les validations sont réalisées uniquement avec des cas tests numériques. La validation devra être complétée à l'avenir par une validation physique et plus complète. Les deux premières études sont réalisées avec des cas test de la littérature, et dans la dernière partie, nous examinons un cas sans référence avec plusieurs millions d'éléments, présentant un intérêt pour les simulations d'écoulement autour d'une géométrie d'assemblage en interaction fluide-structure.

4.1 Écoulement dans une cavité avec paroi défilante et membrane élastique

4.1.1 Présentation du cas test

Le cas test de l'écoulement dans une cavité avec une paroi défilante est un cas bien connu et largement documenté en mécanique des fluides ([Bozeman et Dalton, 1973](#)), ([Erturk et al., 2005](#)). Il est fréquemment utilisé comme cas de référence pour évaluer les performances et valider des codes de simulation. La géométrie de ce cas test est illustrée dans la figure 4.1. Le domaine est un carré 2D de côté 1 m. Il y a

	Densité ρ (Kg·m ³)	Viscosité μ_f (N·s·m ⁻²)	Module Young E_s (N·m ²)	Poisson ν_s	Diamètre poutre (m)
Fluide	1	0.01	-	-	-
Solide	500	-	250	0	0.002

TABLE 4.1 – Paramètres du fluide et de la structure pour le cas test de l'écoulement dans une cavité à paroi défilante.

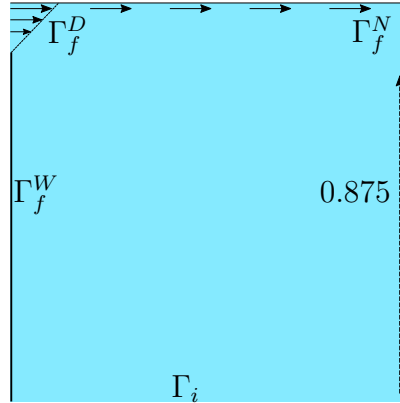


FIGURE 4.1 – Géométrie du cas test de l’écoulement avec paroi défilante. Le domaine est de coté 1.

une entrée Γ_f^D à gauche et une sortie du fluide Γ_f^N à droite, à travers deux petites cavités de tailles 0.125 m en haut du domaine. La paroi supérieure du domaine est une paroi défilante oscillante entre 0 et 2 m·s⁻¹ sur une période de 5 secondes. La vitesse du fluide sur cette paroi est donnée par :

$$\mathbf{u}(x, 0) = \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{5}\right), 0\right). \quad (4.1)$$

La condition d’entrée du fluide impose une décroissance linéaire de cette vitesse le long de Γ_f^D .

L’extension de ce cas test en cas de référence pour l’interaction fluide-structure est réalisée en utilisant la frontière inférieure du domaine comme une membrane très fine ($h_s = 0.002$) et extrêmement souple. Les coefficients de références du fluide et de la structure sont présentés dans le tableau 4.1. Le module de Young de la structure est extrêmement faible, induisant ainsi une structure extrêmement souple.

Les maillages fluide et structure utilisés sont illustrés dans la figure 4.2. Pour le maillage fluide, on observe une augmentation linéaire de la taille des mailles entre les cavités et l’interface fluide-structure. Ce choix est motivé par les importants déplacements prévus de la membrane pendant la simulation. L’équation de mouvement de grille ne tolère pas les grands déplacements, donc l’utilisation de grandes mailles sur l’interface fluide-structure permet d’éviter un écrasement des mailles trop important. Ainsi, bien que la discrétisation du maillage fluide ne soit pas idéale pour une validation, dans la littérature, les maillages de références sont des grilles carrées de taille 32 × 32, ce qui ne conduit pas à une discrétisation beaucoup plus fine que celle que nous utilisons.

4.1.2 Analyse des résultats

Ce test en interaction fluide-structure peut être extrait et comparé avec les articles suivants : (Wall *et al.*, 2000), (Kassiotis *et al.*, 2011), (Vázquez, 2007). Dans

4.1 Écoulement dans une cavité avec paroi défilante et membrane élastique

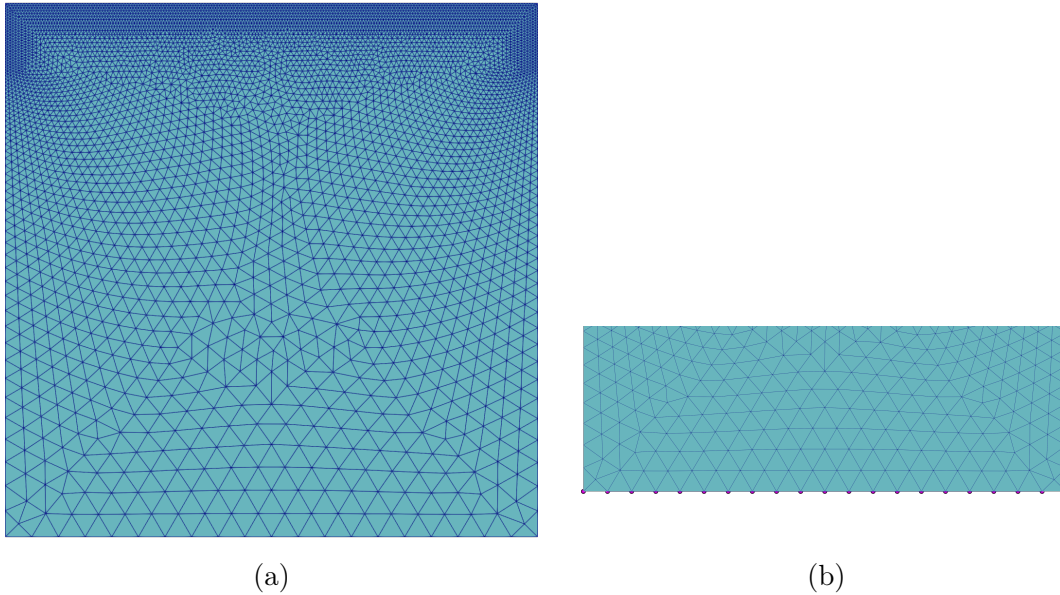


FIGURE 4.2 – Maillage des domaines fluide et solide. **(a)** Maillage du domaine fluide en bleu. **(b)** Maillage du domaine solide en violet avec 21 points de discrétisations.

ces articles, la taille des cavités peut varier légèrement. La géométrie exacte que nous utilisons est celle de (Vázquez, 2007). Pour ce cas test, les données se concentrent principalement autour du déplacement du point au milieu de la membrane.

Le couplage entre *TrioCFD* et *Europlexus* est initié avec un couplage implicite, utilisant un seuil $\epsilon = 1 \times 10^{-5}$ et un coefficient de relaxation $\omega = 0.7$. Dans ce cas test, nous n'avons pas recours au sous-cyclage, car les coefficients de la membrane imposent une condition CFL du solide peu contraignante par rapport au pas de temps du fluide. Ainsi, les pas de temps fournis par le solveur fluide et solide sont du mêmes ordres de grandeurs.

Dans la figure 4.3, les résultats de la simulation sont présentés à cinq instants différents ($t = 2.5, 5, 7.5, 10$ et 12.5 s) de gauche à droite. On observe des oscillations de la vitesse de la paroi supérieure entre les deux premières images à 2.5 s et à 5 s. La vitesse de la paroi supérieure atteint son maximum à 2.5 s, puis redevient nulle à 5 s de simulation. Le mouvement de la paroi et l'écoulement du fluide provoquent une recirculation du fluide dans le domaine, agissant sur la membrane de la structure et induisant une première déformation de la membrane, principalement selon l'axe y . Entre 7.5 et 10 s, la vitesse de la paroi supérieure oscille de nouveau et provoque un deuxième déplacement de la membrane, principalement selon y . Dans la suite de la simulation, le mouvement de la membrane se répète de manière identique à celui observé aux temps 10 et 12.5 s.

Pendant les oscillations, lorsque les amplitudes maximales de la membrane sont atteintes, la compression des mailles est proche du maximum supporté par le mouvement de la grille. Une oscillation légèrement plus importante que les autres provoque

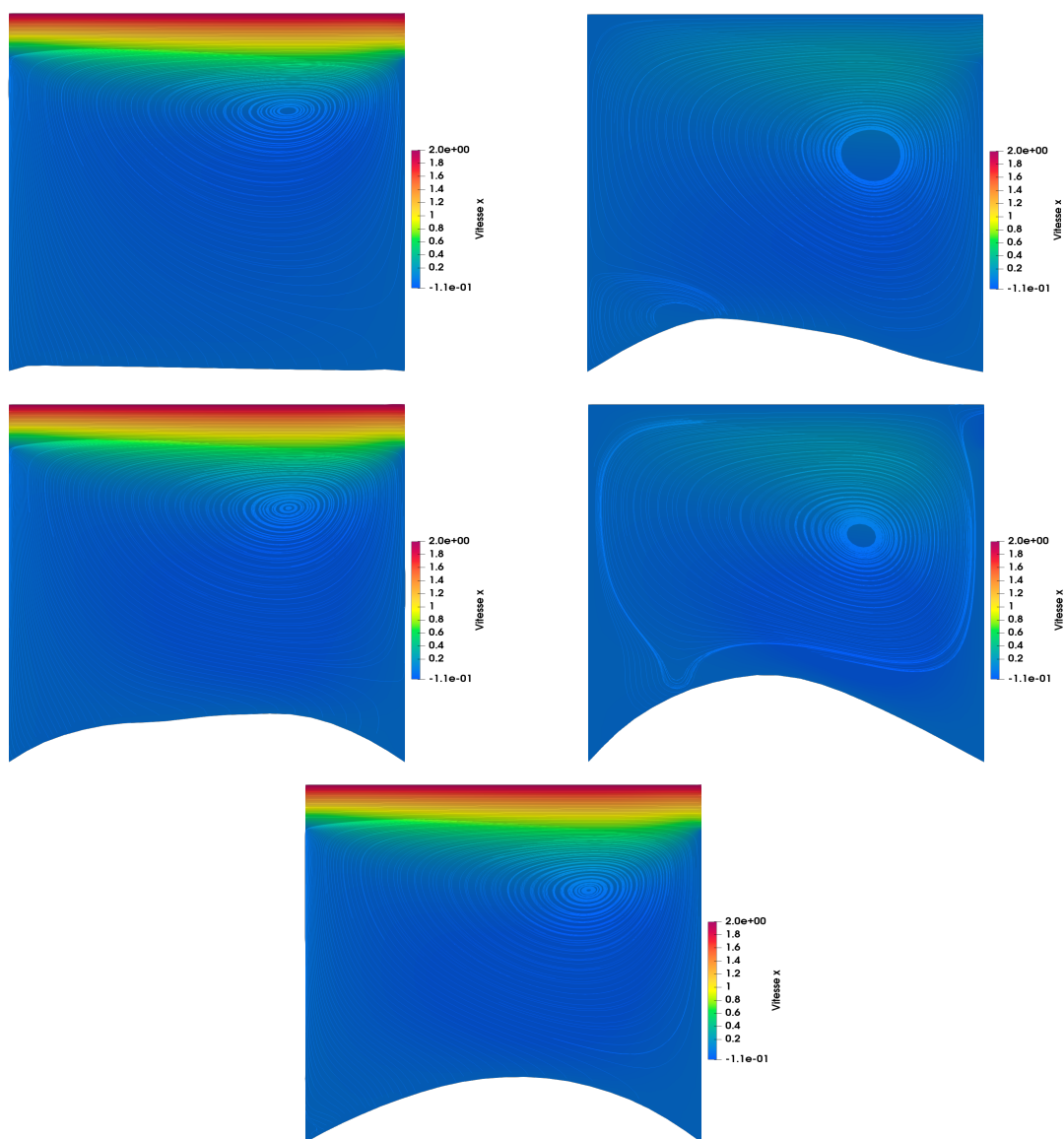


FIGURE 4.3 – Évolution de la vitesse du fluide en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et des lignes de courant. Temps $t = 2.5, 5, 7.5, 10, 12.5$ s de gauche à droite.

4.1 Écoulement dans une cavité avec paroi défilante et membrane élastique

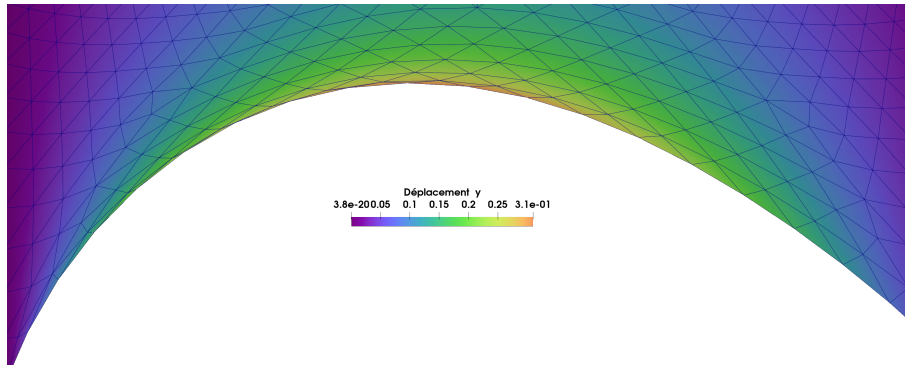


FIGURE 4.4 – Déplacement maximal de la paroi à $t = 18.9$ s de simulation.

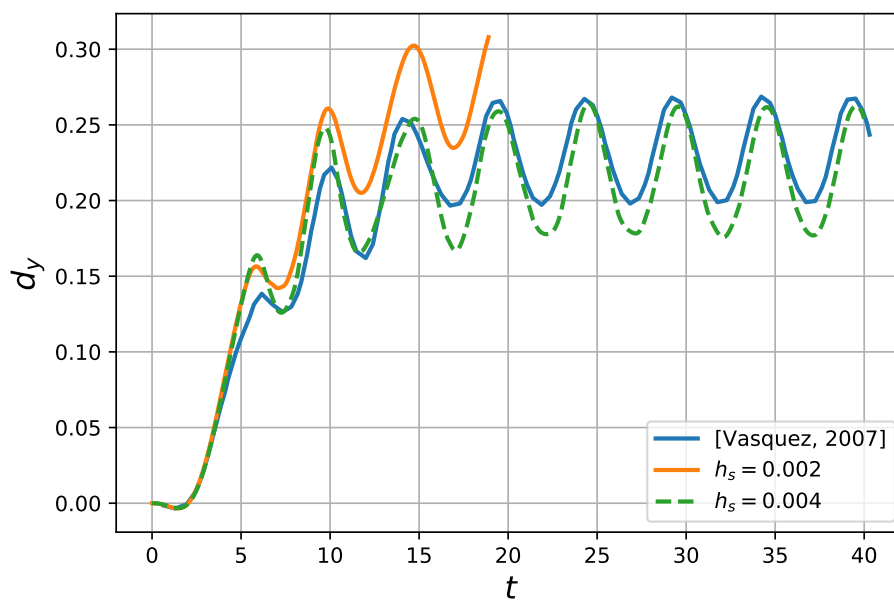


FIGURE 4.5 – Comparaison du déplacement du point au milieu de la membrane pour l'épaisseur de référence $h_s = 0.002$ m en orange, une épaisseur deux fois plus grande $h_s = 0.004$ m en vert et la référence (Vázquez, 2007) en bleu.

l'arrêt de la simulation à $t = 18.9$ s. La compression maximale de cette oscillation, et donc le temps final du calcul, est observable dans la figure 4.4.

La comparaison avec la référence (Vázquez, 2007) est disponible dans la figure 4.5. La courbe verte correspond à la simulation avec l'épaisseur de référence. Comme énoncé dans le paragraphe précédent, cette simulation s'arrête à 18.9 s en raison d'une déformation trop importante des mailles autour de la membrane. Afin d'obtenir une simulation complète, une simulation avec une épaisseur deux fois plus importante est analysée, passant de $h_s = 0.002$ à 0.004 m. Le déplacement pour l'épaisseur $h_s = 0.004$ m est représenté en vert, et celui pour l'épaisseur $h_s = 0.002$ m en orange. Les observations sont énumérées dans les points suivants :

- Dans les premières secondes de la simulation, de 0 à 3 secondes, un début très similaire est observé entre la référence de Vázquez et les simulations avec les deux épaisseurs. L'amplitude maximale de la première itération est atteinte pour les trois courbes légèrement après 5 secondes. À cet instant, on note un déplacement maximal plus important pour nos deux simulations (supérieur à 0.15 m) par rapport à celui de Vázquez (inférieur à 0.15 m). La diminution de la vitesse de la paroi supérieure provoque un retour élastique de la membrane visible par les trois courbes. La courbe pour l'épaisseur avec $h_s = 0.004$ m revient à une position identique à celle de Vázquez. Pour l'épaisseur de référence $h_s = 0.002$ m, le retour élastique est moins prononcé et donne une position plus élevée que les deux autres.
- Lors de la deuxième oscillation, un déplacement nettement plus important est obtenu pour les simulations. Pour *TrioCFD-Europlexus* : environ 0.25 m pour les deux simulations contre 0.22 m pour la référence de Vázquez. Comme lors de la première oscillation, la position finale de la courbe à la suite du retour élastique fournit une bonne concordance entre la courbe de l'épaisseur $h_s = 0.004$ m et celle de Vázquez, mais pour l'épaisseur de référence, la position est plus haute.
- La stabilisation des amplitudes maximales des trois courbes est atteinte à partir de la troisième oscillation, vers environ 12.5 s. L'interruption de la simulation à $t = 18.9$ s avec une épaisseur de $h_s = 0.002$ m limite la possibilité d'établir des comparaisons précises entre les trois courbes sur une période prolongée. Néanmoins, cette troisième oscillation et le comportement à long terme de la courbe avec l'épaisseur $h_s = 0.004$ m nous conduit à conclure que le déplacement du couplage *TrioCFD-Europlexus* est plus important en comparant les simulations avec la même épaisseur. De plus, qu'il y a une bonne concordance entre la courbe de référence et celle de l'épaisseur $h_s = 0.004$ m. Les amplitudes des oscillations ainsi que les périodes sont similaires pour les trois courbes.

Les constatations précédentes nous amènent à la conclusion suivante : globalement, dans le cas de la simulation avec l'épaisseur de référence $h_s = 0.002$, nous

4.1 Écoulement dans une cavité avec paroi défilante et membrane élastique

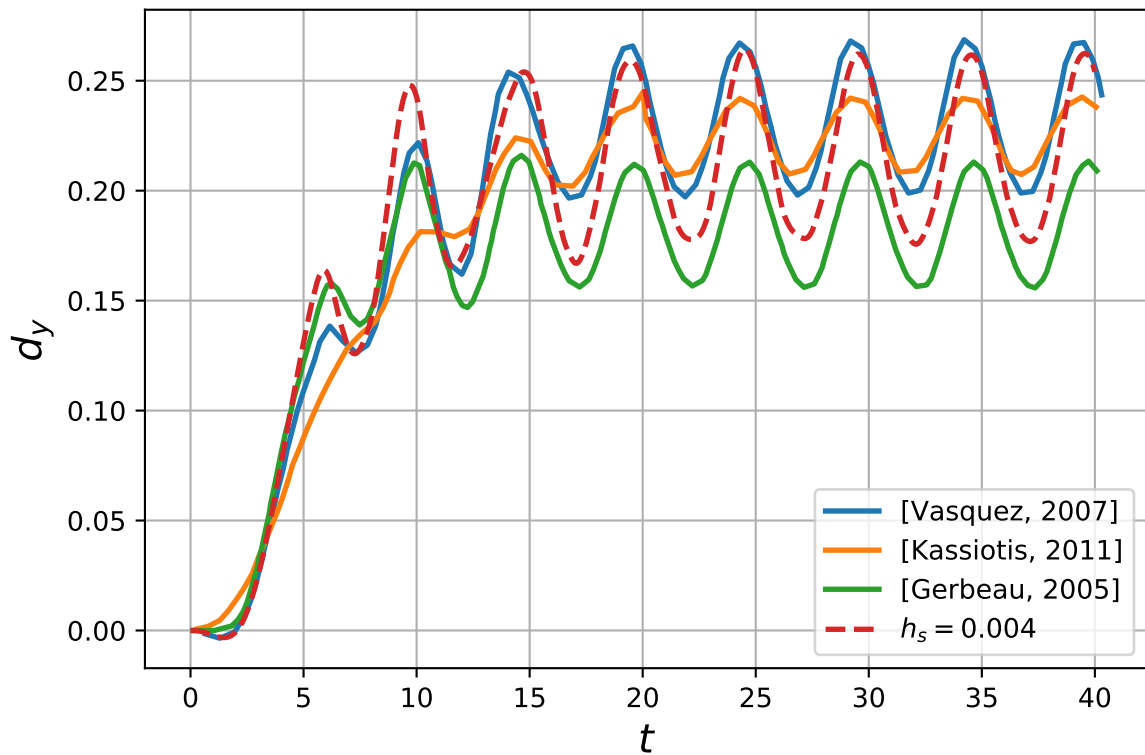


FIGURE 4.6 – Comparaison du déplacement du point au milieu de la membrane pour plusieurs références (Gerbeau et Vidrascu, 2003), (Vázquez, 2007), (Kassiotis et al., 2011) et le couplage *TrioCFD Europlexus* pour l'épaisseur $h_s = 0.004$ m.

observons un déplacement plus important que dans les références étudiées. Cependant, plusieurs comportements similaires sont à noter. Tout d’abord, le début de la simulation est quasi identique. Ensuite, la stabilisation des oscillations est obtenue à partir de la troisième oscillation, et les amplitudes de déplacements sont proches. Enfin, on observe une bonne concordance entre les périodes d’oscillations.

Diverses pistes doivent être envisagées pour expliquer ces différences. Tout d’abord, le maillage à proximité de l’interface fluide-structure est grossier et devrait être affiné pour obtenir une meilleure précision. Ce raffinement sera possible en améliorant le mouvement de la grille du domaine fluide. De plus, les paramètres physiques du solide sont très singuliers. Pour le solveur solide *Europlexus*, il s’agit d’un cas d’étude qui n’a jamais été testé auparavant. Enfin, les différences observées dans la littérature sont également conséquentes, comme le montre la figure 4.6 où nous traçons le déplacement obtenu pour trois différentes références bibliographiques ainsi que celui pour l’épaisseur $h_s = 0.004$ m du couplage *TrioCFD-Europlexus*.

En résumé, nous avons introduit un premier cas test de validation initialement présenté dans (Wall *et al.*, 2000). Les résultats montrent un comportement similaire entre le couplage *TrioCFD-Europlexus* et la littérature pour ce cas test, en particulier pour la référence (Vázquez, 2007). Il faut noter que le déplacement du couplage *TrioCFD-Europlexus* est globalement plus important. Mais cette différence est aussi présente entre les différentes références de la littérature.

4.2 Cas test de Mok

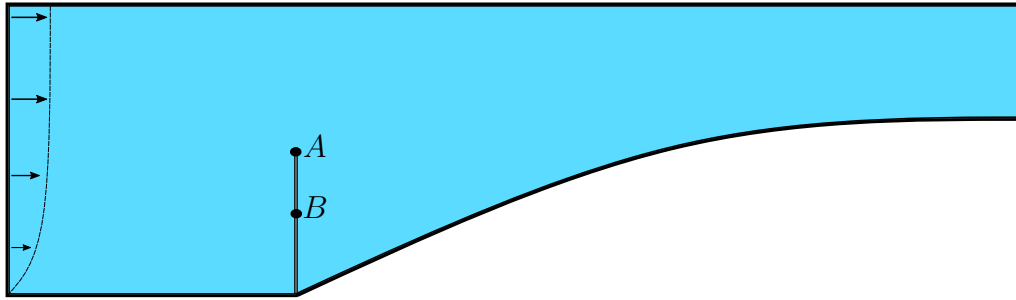


FIGURE 4.7 – Domaine du cas test de Mok et position des points A et B pour la comparaison.

4.2 Cas test de Mok

4.2.1 Présentation du cas test et utilisation de *Kratos*

Nous allons examiner un deuxième cas de validation bien établi dans la littérature fluide-structure, à savoir le cas test de Mok (Mok *et al.*, 2001), qui a déjà été présenté dans la partie 3.3.2. Ce cas test a été choisi comme base pour tester les algorithmes de couplages en raison de son effet de masse ajoutée significatif. Cependant, le couplage implicite mis en place n'a pas été suffisant pour simuler ce cas test avec les coefficients utilisés dans la littérature, comme indiqué dans le tableau 3.2. Pour rappel, le rapport entre les deux densités dans notre cas limite est de 9.375, tandis qu'il est de 1.5 pour les références de la littérature.

Afin de pouvoir comparer nos simulations, qui sont stables et exploitables malgré l'utilisation de coefficients différents de ceux de la littérature, nous avons recours à un autre outil : *Kratos*¹. *Kratos* est un logiciel open-source, multiphysique, développé en C++. Il utilise une discrétisation éléments finis pour résoudre les problèmes fluides, solides et d'interactions fluides-structures. Le module d'interaction fluide-structure est validé et bien établi². Le cas test de Mok fait partie des validations effectuées avec *Kratos* et est disponible dans les tests fournis avec le logiciel. *Kratos* dispose d'un couplage partitionné implicite avec relaxation, ainsi que d'un algorithme de couplage de Quasi-Newton.

Les informations géométriques et dimensionnelles du cas test peuvent être retrouvées dans le chapitre précédent, illustrées dans la figure 3.6. Dans la littérature, la comparaison de ce cas test se réalise avec deux points, A et B , situés sur la poutre. Le point A est positionné en haut de la poutre et le point B au milieu de celle-ci. La position de ces points est indiquée dans la figure 4.7. Les grandeurs physiques observées pour la comparaison sont le déplacement de ces points et la pression appliquée sur ces points.

La comparaison des résultats de *Kratos* avec la littérature pour le déplacement,

1. *Kratos Multiphysics*
2. *Kratos Multiphysics Examples*

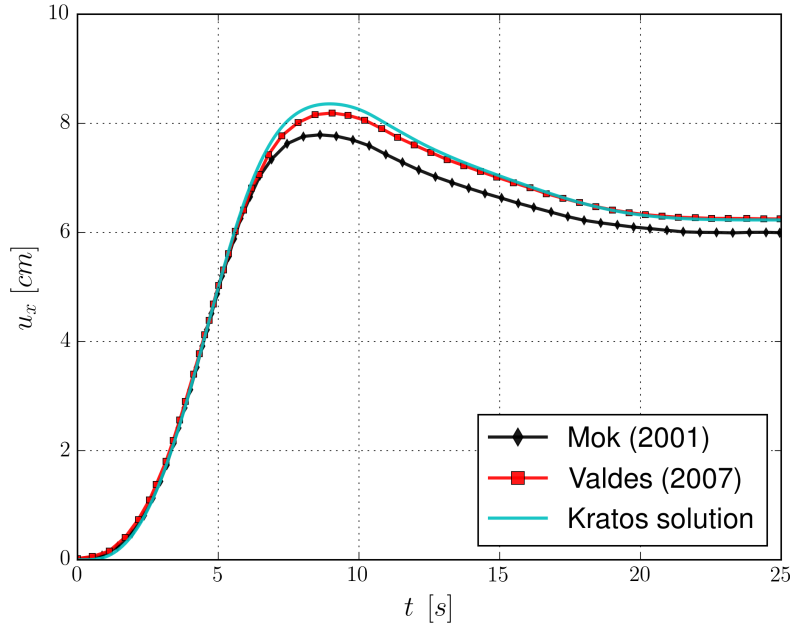


FIGURE 4.8 – Comparaison des solutions de références avec Kratos.

	Densité ρ (Kg·m ³)	Viscosité μ_f (N·s·m ⁻²)	Module Young E_s (N·m ²)	Poisson ν_s	Épaisseur poutre (m)
Fluide	150	0.145	-	-	-
Solide	1500	-	2.3×10^6	0.45	0.005

 TABLE 4.2 – Paramètres du cas test de Mok pour la comparaison entre le couplage de *Kratos* et *Europlexus-TrioCFD*.

en utilisant les coefficients de références, est présentée pour le point *A* dans la figure 4.8. Elle est comparée avec deux références, dont l'une a déjà été citée pour le cas test précédent (Vázquez, 2007). Cette comparaison montre une très bonne concordance entre *Kratos* et les références. Il est à noter que *Kratos* simule un déplacement maximal légèrement plus important.

4.2.2 Comparaison avec *Kratos*

L'outil *Kratos* a été présenté dans cette section dans le but d'ajuster les coefficients du cas test de Mok pour obtenir une simulation de référence, permettant ainsi de comparer avec le couplage *Europlexus-TrioCFD* avec *Kratos*. Par rapport aux paramètres de référence, seule la densité du fluide a été modifiée pour atteindre la valeur de $\rho_f = 150$, comme indiqué dans le tableau 4.2. Ce cas a déjà été simulé dans la partie 3.4.1. Pour rappel, nous utilisons le couplage implicite avec relaxation

4.2 Cas test de Mok

pour le couplage entre *Europlexus* et *TrioCFD*, avec un seuil de convergence fixé à 1×10^{-5} .

Dans la figure 4.9, on compare la vitesse du fluide et les lignes de courant dans le domaine pour les deux couplages. Pour $t = 10$ s et $t = 20$ s, on remarque une zone de recirculation du fluide derrière la poutre pour les deux couplages. Cette recirculation est de taille et de forme semblable entre les deux couplages. De plus nous avons une bonne concordance entre les valeurs élevées de la vitesse en haut de poutre. Globalement, cette comparaison montre une bonne similitude entre les deux couplages.

Dans les figures 4.10 et 4.11, les déplacements des points A et B , ainsi que les pressions appliquées sur ces points, sont comparés. En ce qui concerne le déplacement, on observe un déplacement plus important pour *Kratos*, mais une très bonne similitude entre l'évolution des courbes. Le départ (entre 0 et 2.5 s) est identique entre les deux simulations. Ensuite, la différence se développe jusqu'à atteindre la flexion maximale de la poutre vers 8 s. Pour le point A , le déplacement maximal est de 0.024 m pour *Kratos* contre 0.021 m pour le couplage *Europlexus-Trio*, soit un écart d'environ 3 millimètres. Le retour élastique est ensuite de même amplitude pour les deux simulations, et l'écart reste constant jusqu'à la fin de la simulation.

L'évolution de la pression dans la figure 4.11 est en accord avec le déplacement observé. En effet, pour la pression appliquée aux points A et B , le début de l'augmentation de la pression est identique jusqu'à 2.5 s, puis une différence s'accroît pour les deux points entre les deux simulations, jusqu'à obtenir une différence d'environ $1 P_a$ pour la valeur maximale atteinte entre 5 et 6 s de simulation. La phase de diminution de pression (entre 6 et 10 s) est d'amplitude semblable entre les deux simulations et pour les deux points. La pression est ensuite constante, avec une différence d'environ $1 P_a$ entre les deux simulations.

Globalement, pour le cas test de Mok, la comparaison avec *Kratos* est satisfaisante. Des différences sont notables, notamment sur les valeurs minimales et maximales des champs observés, mais les variations et l'évolution des grandeurs physiques sont semblables. Il convient de rappeler que les maillages sont différents entre les deux solveurs, que la discrétisation fluide de *Kratos* est en éléments finis et que *Kratos* n'utilise pas de modèle de poutre pour la modélisation de la structure.

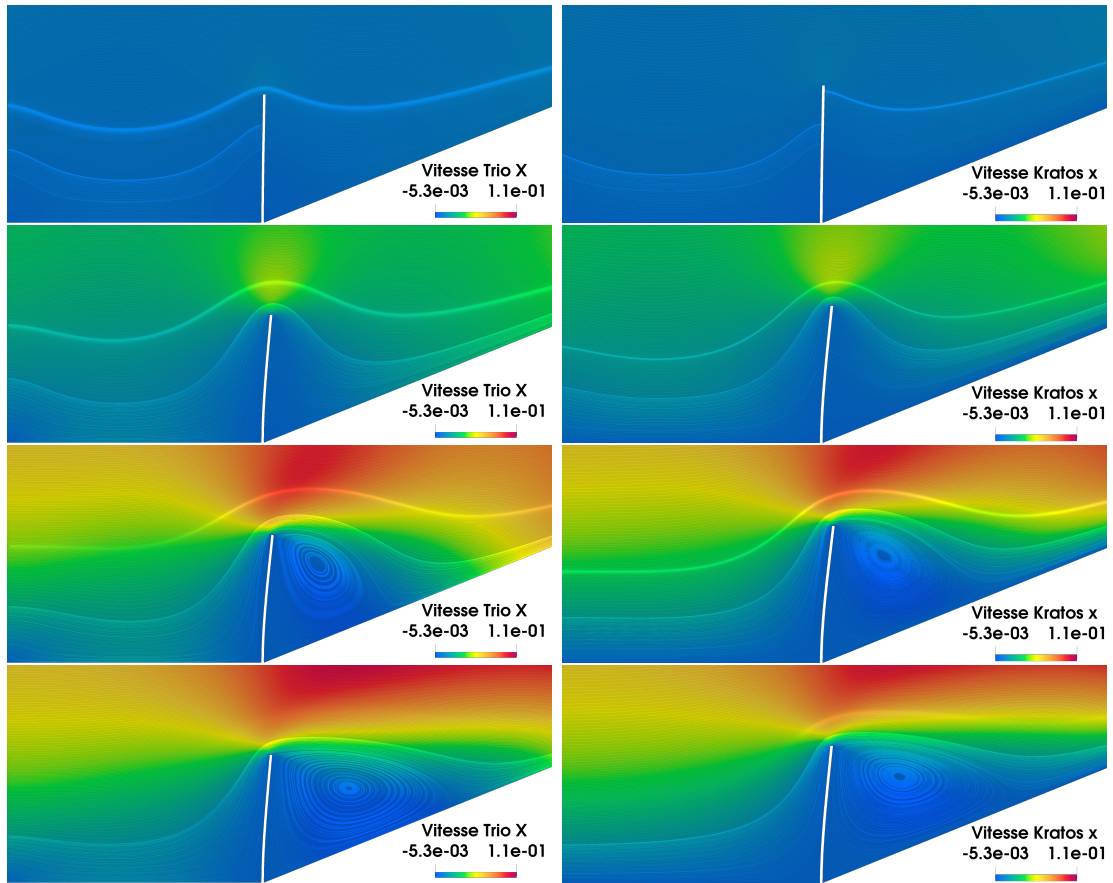


FIGURE 4.9 – Vitesse du fluide autour de la poutre pour le couplage *Europlexus-TrioCFD* à gauche et *Kratos* à droite. Les temps utilisés sont $t = 2, 5, 10, 20$ s de haut en bas.

4.2 Cas test de Mok

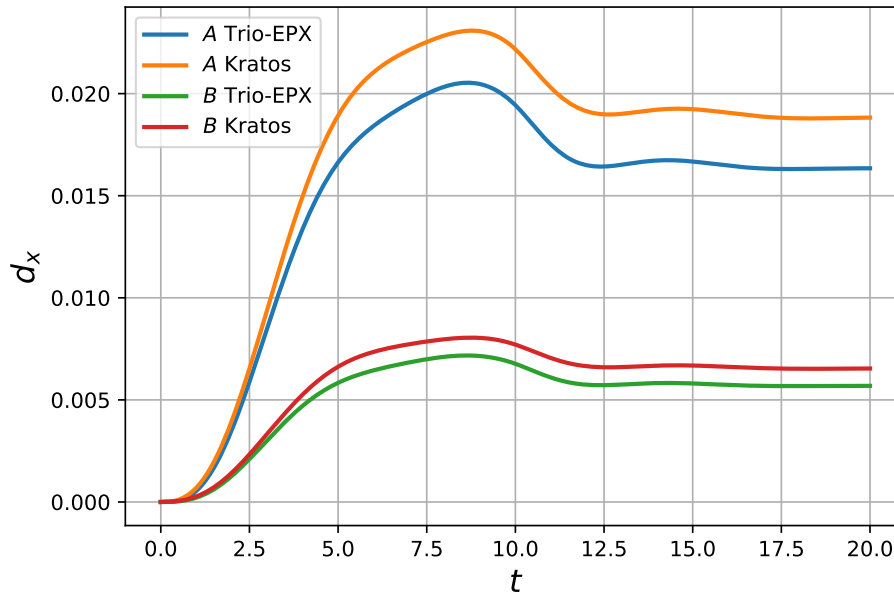


FIGURE 4.10 – Comparaison des déplacements en x des points A et B de la poutre entre le couplage *Europlexus-TrioCFD* et *Kratos*.

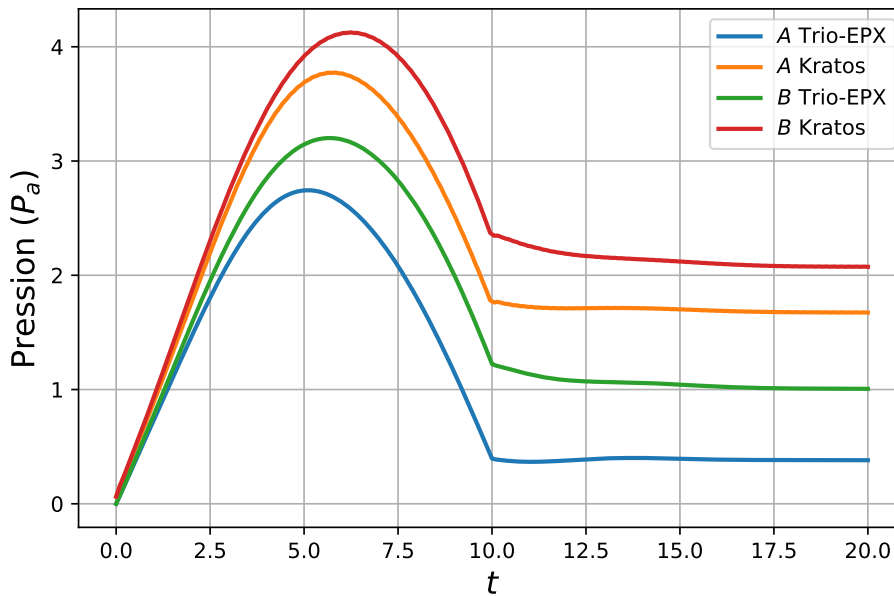


FIGURE 4.11 – Comparaison de la pression appliquée aux points A et B entre le couplage *Europlexus-TrioCFD* et *Kratos*.

4.3 Lâché d'une poutre dans une géométrie d'assemblage simplifiée

4.3.1 Géométrie des domaines et mouvement de lâché

	Densité ρ (Kg·m ³)	Viscosité μ_f (N·s·m ⁻²)	Module Young E_s (N·m ²)	Poisson ν_s	Diamètre poutre	Amortissement de Rayleigh
Fluide	1000	0.001	-	-	-	-
Solide	1000	-	1×10^7	0.3	0.1	$\begin{cases} \alpha = 0.005 \\ \beta = 6.69 \times 10^{-5} \end{cases}$

TABLE 4.3 – Paramètres utilisés pour l'étude du lâché de poutre dans une configuration assemblage.

Pour ce dernier cas test, nous construisons un cas qui se rapproche d'une géométrie très simplifiée d'un écoulement autour d'un crayon d'assemblage. L'objectif de ce cas test est de démontrer que le couplage développé entre *TrioCFD* et *Europlexus* est capable de simuler un test raffiné sur un nombre important de processeurs. Pour cette simulation, nous utilisons jusqu'à 3 millions d'éléments pour le maillage fluide, calculé avec 120 processeurs.

La géométrie du fluide est celle d'un canal carré de longueur de $h = 2$ m et de largeur de $l = 0.21$ m, orienté selon l'axe z . Le fluide s'écoule de bas en haut autour d'une poutre centrée au milieu du canal de même longueur et de diamètre $d = 0.1$ m. La poutre est encastree au niveau des bords supérieur et inférieur du maillage fluide. La poutre surfacique est modélisée avec une poutre 1D comportant 10 points de discrétisation. Les géométries du fluide et du solide sont représentées respectivement dans les figures 4.12 et 4.13. Pour le solide, nous utilisons un modèle de poutre (déjà présenté avec l'équation (3.49)) et la liaison *MSBM* permettant de faire le lien entre la poutre surfacique avec un discrétisation fine induite par le fluide et la poutre 1D avec 10 noeuds de discrétisation.

Les paramètres du fluide et du solide sont référencés dans le tableau 4.3. L'écoulement du fluide de bas en haut du domaine est constant en espace et augmente de 0 à 1 seconde. La vitesse est nulle en début de simulation, augmente jusqu'à 1 seconde, puis est maintenue constante à une valeur de $0.05 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. On utilise la fonction suivante pour moduler la vitesse en début de simulation :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_f^D(t), \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \left(0, \frac{0.05}{2}(1 - \cos(\pi t)), 0\right). \quad (4.2)$$

Avec les paramètres du fluide et sa vitesse, on peut calculer le nombre de Reynolds

4.3 Lâché d'une poutre dans une géométrie d'assemblage simplifiée

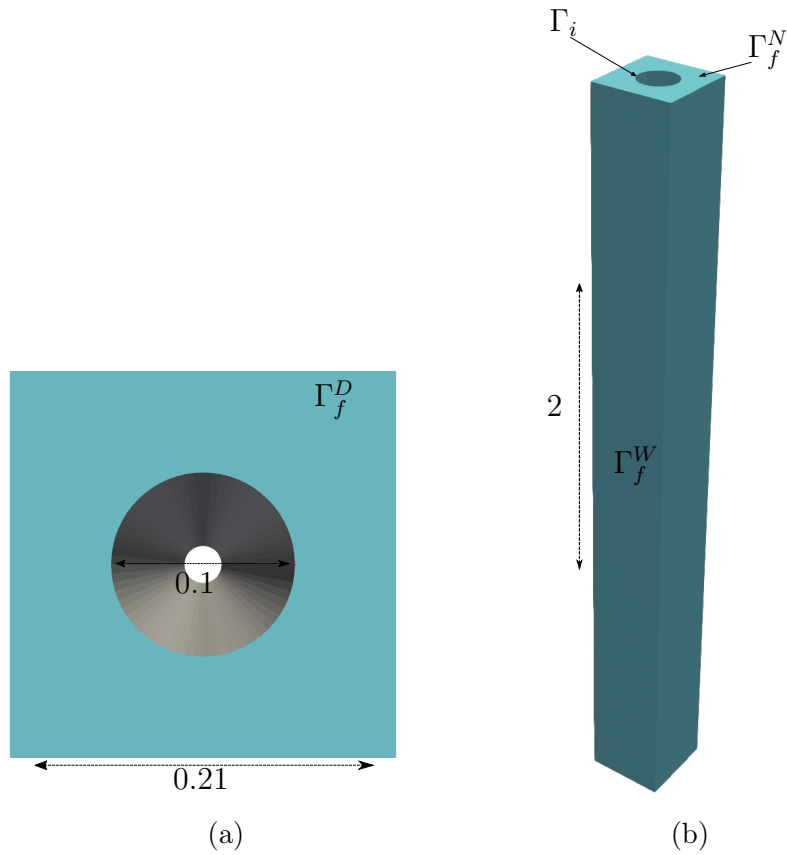


FIGURE 4.12 – Géométrie et taille du domaine fluide. (a) Vue de face de l'entrée du fluide sur Γ_f^D . (b) Vue le long des parois du domaine fluide Γ_f^W .

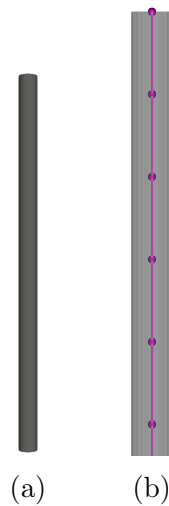


FIGURE 4.13 – Géométrie des domaines 1D et 2D du solide. (a) Poutre surfacique en gris. (b) Zoom sur la poutre surfacique transparente et poutre 1D avec les points de discrétisations en violet.

de l'écoulement avec la formule suivante :

$$Re = \frac{\rho_f D_h V_f}{\mu_f} \quad (4.3)$$

Avec D_h le diamètre hydraulique de l'écoulement et V_f la vitesse caractéristique du fluide. Dans cette configuration le diamètre hydraulique vaut :

$$D_h = \frac{l^2 \frac{\pi d^2}{2}}{\pi d + 4l} \approx 0.246. \quad (4.4)$$

Ce qui donne donc un nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho_f D_h V_f}{\mu_f} \approx 1230. \quad (4.5)$$

La vitesse du fluide a été fixé de manière à ce que l'écoulement soit laminaire.

Pendant l'écoulement du fluide autour du solide, un lâché est réalisé au milieu de la poutre. La poutre est soumise à un déplacement imposé de 0.2 m au cours de la première seconde. Après cette période, la contrainte de déplacement est retirée de la poutre, entraînant ainsi des oscillations selon l'axe x . Ce lâché, simulé exclusivement par Europlexus, est illustré dans la figure 4.14. De plus, le déplacement du point situé au milieu de la poutre pendant les 10 premières secondes du lâché est tracé dans la figure 4.15. L'analyse de ce déplacement confirme que l'amortissement de Rayleigh prescrit dans le solide est faible, car l'amplitude du déplacement ne diminue pas au fil du temps.

4.3.2 Écoulement autour du lâché

Nous avons présenté dans la partie précédente les différentes caractéristiques du cas test ainsi que le mouvement du lâché de la poutre. Dans cette section, nous allons ajouter un écoulement autour de ce lâché et donc ajouter le couplage avec *TrioCFD*.

Le couplage implicite est utilisé avec ce cas test avec 10 sous-cycles. Nous utilisons un coefficient de relaxation $\omega = 0.7$ et un seuil pour les résidus de 1×10^{-6} . Différents maillages sont utilisés afin d'améliorer la précision. Les caractéristiques des maillages sont disponibles dans le tableau 4.4. La taille des mailles est homogène dans tout le domaine.

Dans la figure 4.16, nous présentons le déplacement et la discrétisation du maillage avec 3.7 millions d'éléments (maillage 3). Sur les figures 4.16 (a)-(b), une coupe du maillage fluide le long de la poutre est réalisée, et nous avons zoomé au milieu de la poutre. Les figures 4.16(c)-(d) représentent une coupe à travers le milieu de la poutre. Les coupes sont réalisées à deux instants différents : à gauche lors du déplacement maximal de la poutre avant le lâché à $t = 1$ s, et à droite lors du retour

4.3 Lâché d'une poutre dans une géométrie d'assemblage simplifiée

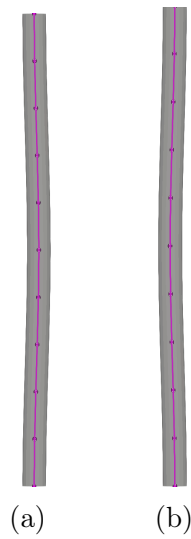


FIGURE 4.14 – Lâché de la poutre 1D et surfacique simulé uniquement par *Europlexus*; (a) Poutre à $t = 1$ s, le déplacement est maximal. (b) Poutre à $t = 1.3$ s durant sa première oscillation.

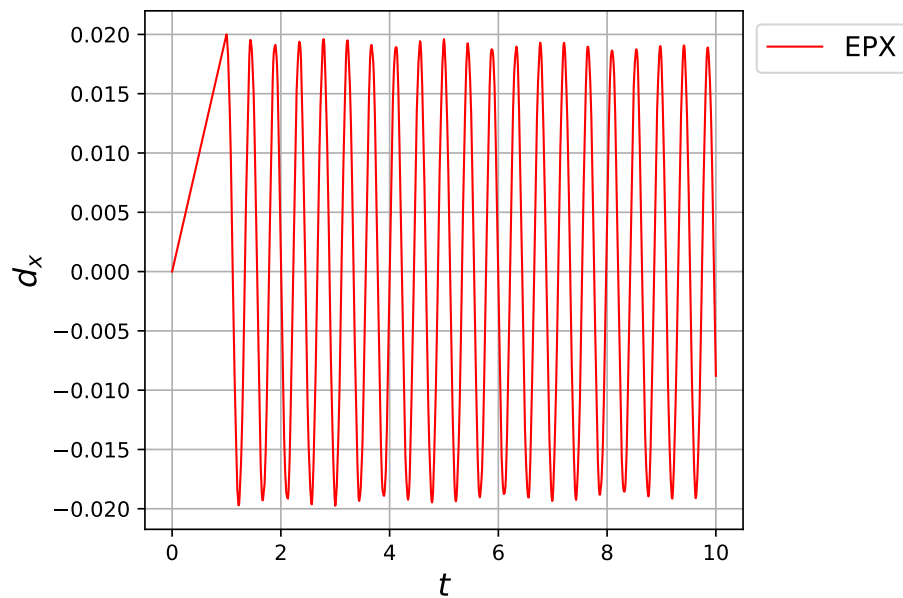


FIGURE 4.15 – Déplacement du point en milieu de poutre pendant le lâché simulé par *Europlexus*.

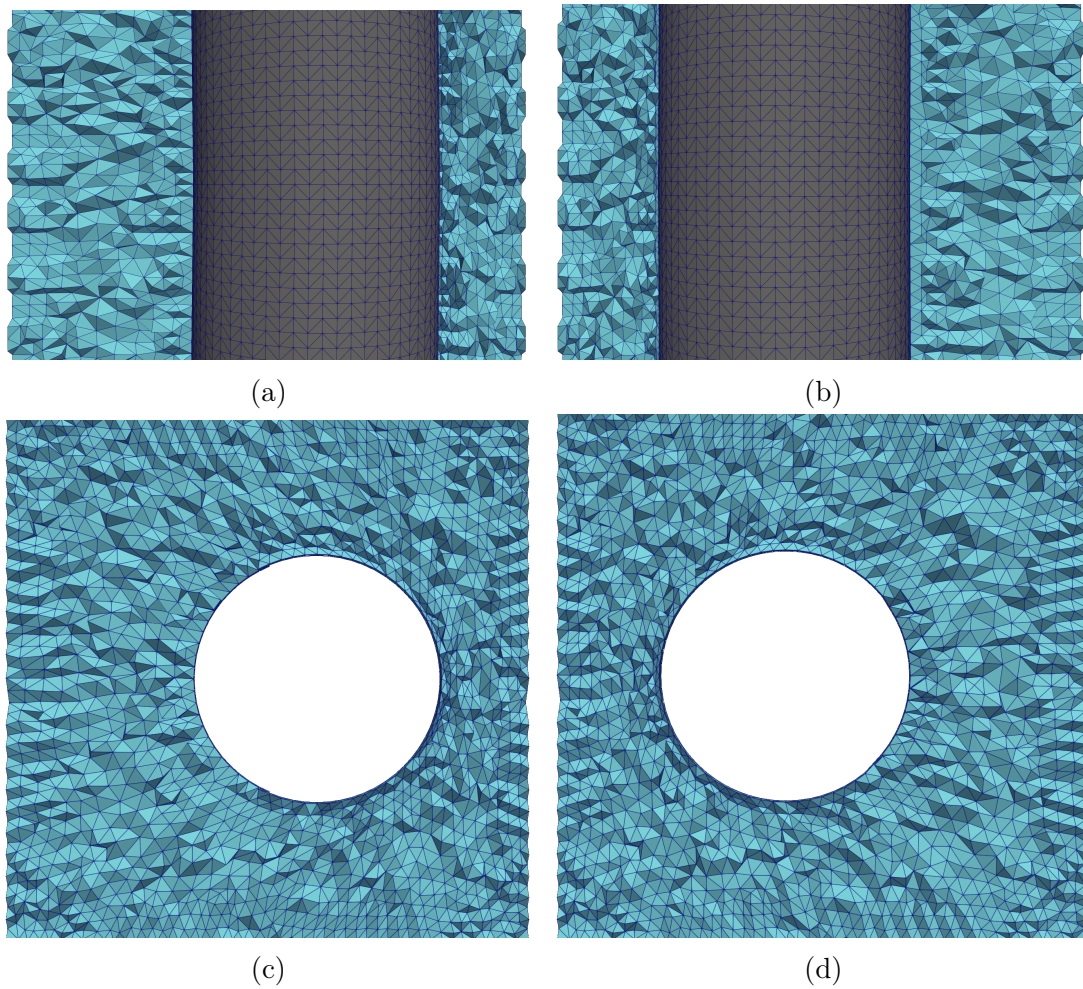


FIGURE 4.16 – Déplacement de la poutre et du maillage fluide avec 3.7 millions d'éléments. (a), (b) Coupe le long de la poutre et zoom sur le milieu de poutre. (c), (d) Coupe à travers le milieu de la poutre. Temps de simulation $t = 1$ s (a)-(c) et $t = 1.3$ s (b)-(d).

4.3 Lâché d'une poutre dans une géométrie d'assemblage simplifiée

	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3
Nb éléments fluide (3D)	86260	963937	3700925
Nb sommets fluide	15150	165957	628607
Nb éléments à l'interface (2D)	3232	12800	51200
Nb sommets à l'interface	1616	6432	25728
Nb processeurs pour le fluide	4	33	120

TABLE 4.4 – Nombre d'éléments et de sommets pour les trois maillages utilisés.

élastique de la poutre à $t = 1.3$ s, la plaçant dans la position maximale de sa première oscillation.

Le déplacement de la poutre ainsi que la vitesse du fluide dans les directions x (perpendiculaire à la poutre) et z (le long de la poutre) sont présentés dans les figures 4.17 et 4.18 à quatre instants de la simulation. Des coupes du domaine fluide selon z avec le maillage 2 ont été affichées. Pour l'écoulement selon x dans la figure 4.17, les coupes sont réalisées à $t = 1, 1.2, 1.4$ et 1.7 s, c'est-à-dire légèrement avant l'amplitude maximale atteinte par la poutre à chaque oscillation. On observe que la vitesse suit le déplacement de la poutre. Elle est moins importante pendant la deuxième oscillation. En ce qui concerne l'écoulement selon z dans la figure 4.18, les coupes sont réalisées aux amplitudes maximales de la poutre. Les oscillations de la poutre confinent le domaine fluide, entraînant une diminution de la vitesse du fluide là où le confinement est plus important, et une augmentation de la vitesse du côté opposé, c'est-à-dire là où le fluide est moins confiné. On peut également observer que la couche limite le long de la poutre se forme dès les premiers centimètres de l'écoulement.

Le lâché de la poutre a été simulé dans un écoulement hydraulique. Afin de compléter l'étude, nous effectuons le même lâché, mais dans un écoulement aérodynamique avec des coefficients $\rho_f = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et $\mu_f = 15.6 \times 10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$. Les résultats des différents déplacements selon la nature de l'écoulement sont tracés dans la figure 4.19. Nous comparons également ces déplacements avec le lâché de la simulation sans couplage avec *Europlexus* uniquement. Les simulations ont été

réalisées avec le maillage 1, c'est-à-dire avec 0.1 million d'éléments. Nous observons une très bonne similitude entre le déplacement de la poutre dans l'air et sans couplage. Pour le déplacement avec un écoulement hydraulique, nous constatons un fort amortissement dès la première oscillation. L'amplitude des oscillations diminue ensuite rapidement pour s'annuler vers 8 secondes de simulation. La comparaison entre le couplage du lâché avec l'écoulement en air est un résultat satisfaisant. En effet, l'écoulement de l'air, produit des forces fluide très faible sur la poutre et donc les oscillations provoqués par le lâché doivent être similaires à un lâché dans le vide.

Enfin, dans la figure 4.20, le déplacement du point au milieu de la poutre est tracé pour les 3 maillages présentés dans le tableau 4.4. Les deux premières oscillations (entre 1 et 2 s) de la simulation montrent que le raffinement des maillages provoque un déplacement plus important. On observe également un déphasage dès la deuxième oscillation, induisant une fréquence plus grande pour les maillages avec le plus d'éléments. Le déphasage s'intensifie tout au long de la simulation. À environ 3.6 secondes de simulation, on constate que la poutre avec 0.1 million d'éléments a effectué 5 oscillations complètes contre 4.5 pour le maillage avec 5 millions d'éléments. Il ne semble pas y avoir de tendance claire concernant l'amortissement en fin de simulation. Le maillage avec 0.1 million d'éléments semble le moins amorti à 5 s de simulation, celui avec 1 million d'éléments le plus amorti, et le maillage à 6 millions d'éléments se situe entre les deux.

La simulation de ce cas test nous a permis de montrer que le couplage peut fonctionner sur des cas conséquents avec plusieurs millions de mailles et avec une centaine de processeurs. Ce cas test a également été simulé avec les algorithmes principaux mis en place dans cette thèse : l'algorithme implicite et le sous-cyclage. La validation physique de ce cas test ne pourra pas être entreprit dans le cadre de cette thèse, mais constitue une piste intéressante pour comprendre certains phénomènes physiques dans les configurations d'assemblage, tels que l'effet de l'amortissement sur le fluide.

4.3 Lâché d'une poutre dans une géométrie d'assemblage simplifiée

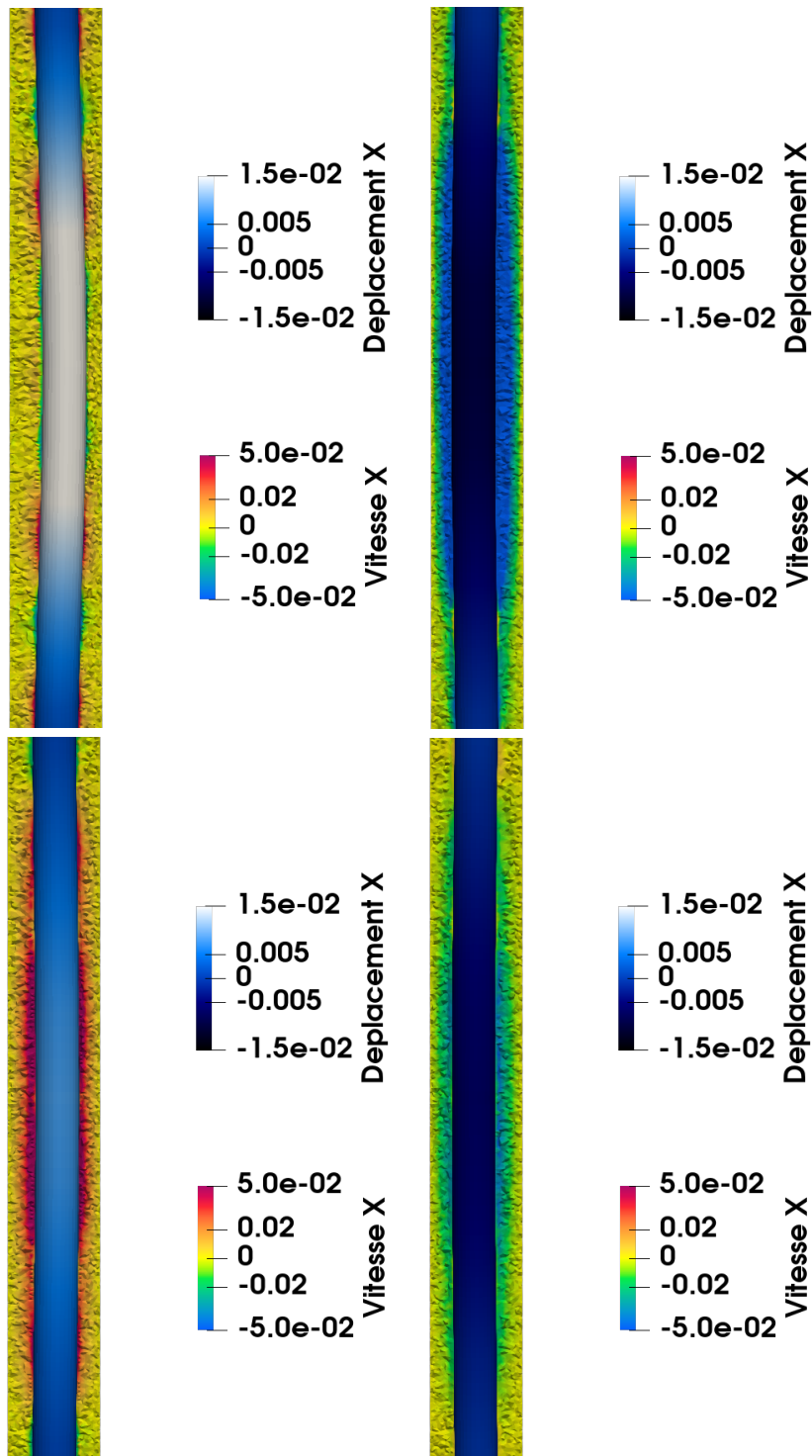


FIGURE 4.17 – Évolution du déplacement et de la vitesse du fluide selon x à 4 instants $t = 1, 1.2, 1.4, 1.7$ de gauche à droite. Les coupes du domaine fluide sont réalisés selon l'axe z .

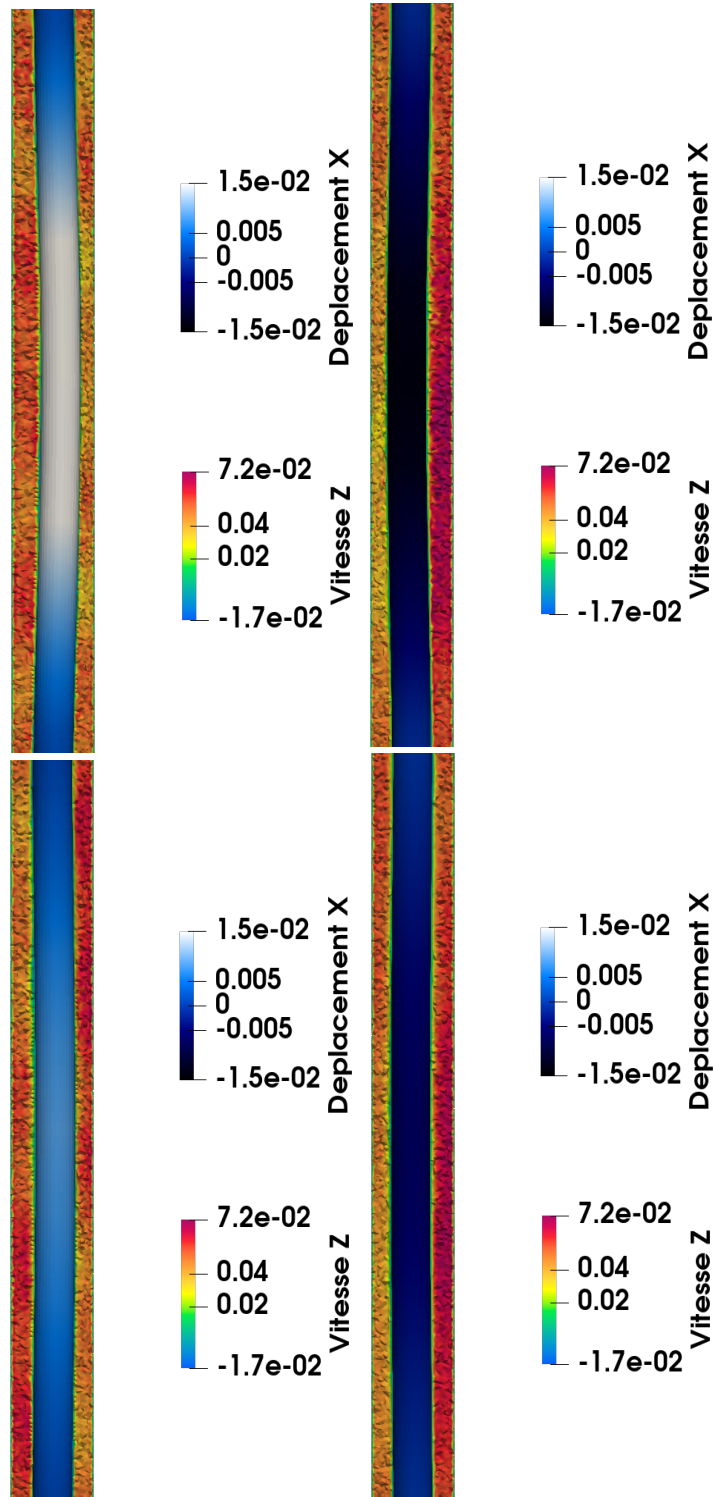


FIGURE 4.18 – Évolution du déplacement et de la vitesse du fluide selon x à 4 instants $t = 1, 1.3, 1.5, 1.8$ de gauche à droite. Les coupes du domaine fluide sont réalisés selon l'axe z .

4.3 Lâché d'une poutre dans une géométrie d'assemblage simplifiée

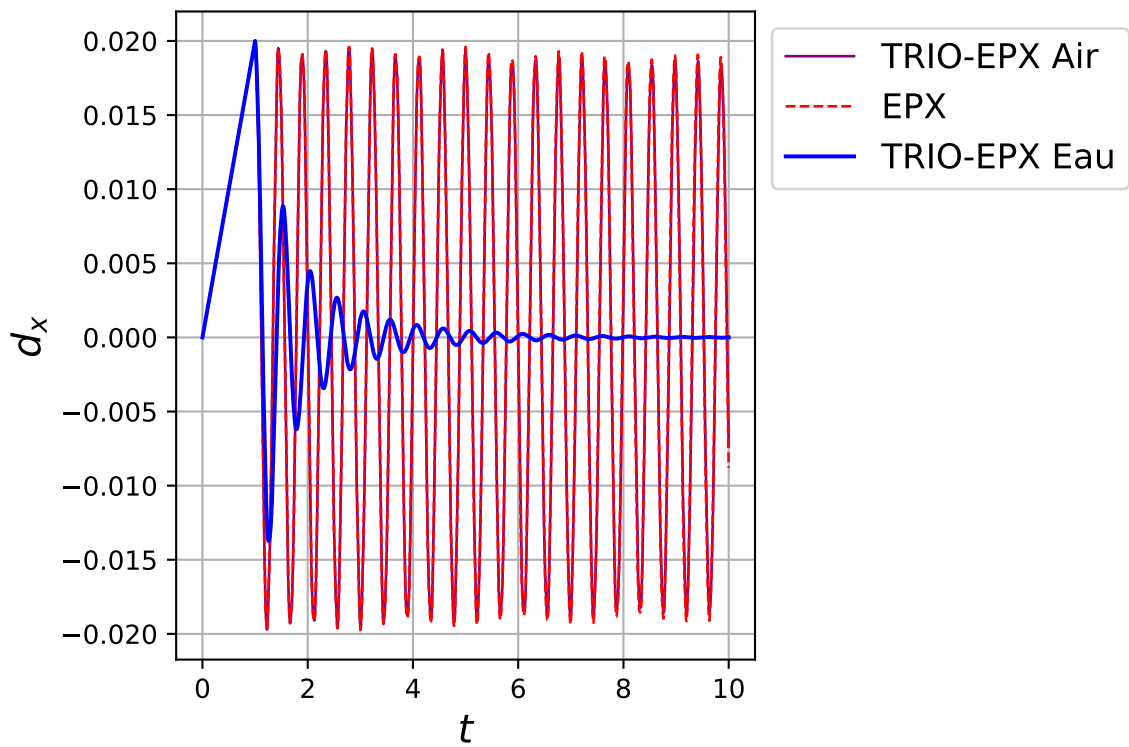


FIGURE 4.19 – Évolution du déplacement en x du point en milieu de poutre pour le lâché couplé avec un écoulement d'eau (en bleu), un écoulement d'air (en violet) et sans couplage (en rouge). Le maillage utilisé est le 1.

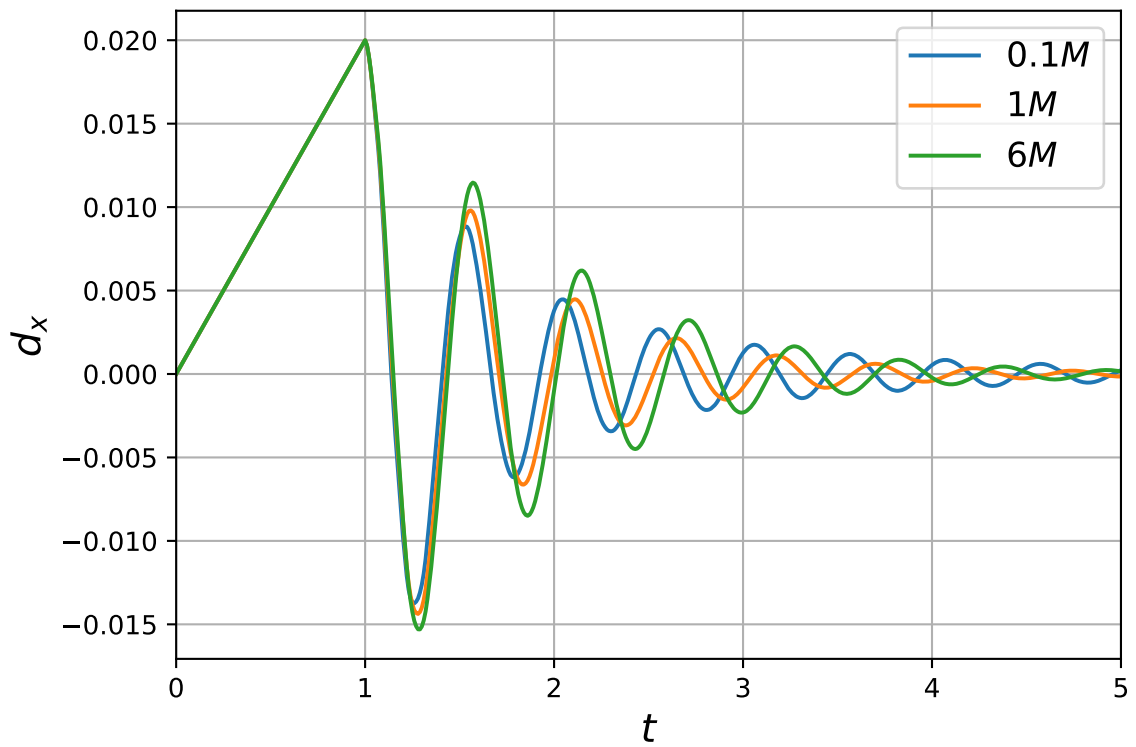


FIGURE 4.20 – Évolution du déplacement en x du point en milieu de poutre avec un écoulement hydraulique pour les différents maillages.

Conclusion et perspectives

Cette thèse s'intéresse à l'interaction entre l'écoulement d'un fluide incompressible et la dynamique non-linéaire d'une structure en mouvement. L'accent est principalement mis sur l'étude et la mise en œuvre du couplage entre *TrioCFD* et *Europlexus*. Ce couplage vise à simuler à l'échelle locale des situations d'intérêts pour le CEA dans le contexte de la performance et de la sûreté du parc nucléaire, telles que l'étude des assemblages de combustible soumis à des vibrations. Le développement et l'analyse du couplage sont détaillés progressivement à travers quatre chapitres distincts.

Dans le premier chapitre, les schémas numériques discrétisant spatialement et temporellement le fluide et la structure sont présentés. Les équations fluides sont discrétisées spatialement avec une approche volumes-éléments finis, choisi pour ses avantages en termes notamment de conservation locale des quantités et de maîtrise des modes parasites en pression. Une discrétisation d'Euler implicite est utilisée pour le schéma temporel du fluide. Concernant les équations solides, elles sont discrétisées spatialement par une approche éléments finis. Afin de simuler les fortes non-linéarités de la structure, parfois sources de difficultés de convergence pour les algorithmes itératifs, *Europlexus* utilise le schéma temporel explicite des différences centrées. Le schéma explicite implique une contrainte sur le pas de temps, importante à prendre en compte pour le couplage.

Dans le deuxième chapitre, l'approche ALE pour le fluide est présentée, elle vise à prendre en compte le mouvement des bords du domaine fluide imposée par la structure. L'équation régissant le mouvement de grille a été particulièrement étudiée et a donné lieu à une publication ([Leprevost et al., 2023](#)). Dans cette étude, nous présentons une nouvelle méthode pour calculer ce mouvement de grille. Cette méthode a été développée en transformant l'équation elliptique, initialement proposée dans *TrioCFD*, en équation hyperbolique, discrétisée par un schéma temporel explicite. L'objectif est de réduire le coût de calcul de l'équation elliptique grâce à une résolution explicite, tout en préservant la solution physique. La performance de la méthode a été étudiée à travers un cas test 3D significatif démontrant que cette approche permet une réduction efficace des coûts avec le bon choix de paramètres. Le mouvement de la grille fluide pourrait être encore amélioré en augmentant la taille maximale des déplacements tolérés aujourd'hui dans *TrioCFD*. Parmi les approches possibles, le passage à une équation biharmonique pourrait par exemple aider à prendre en

compte des mouvements de frontières complexes. Le coût de calcul d'une telle approche est initialement important et pourrait être minimisé en appliquant la même démarche de transformation d'une équation elliptique en équation hyperbolique.

Dans le troisième chapitre, nous étudions le couplage fluide-structure mis en œuvre entre les deux solveurs. Dans une première partie, nous présentons une preuve analytique de stabilité d'un couplage implicite entre des équations fluide et structure discrétisées avec les schémas temporels de *TrioCFD* et *Europlexus*. Les équations sont simplifiées et la preuve est établie avec une hypothèse de petites perturbations, classique dans ce type d'analyse. Les algorithmes de couplages explicite (*ISS*) et implicite, développés entre *TrioCFD* et *Europlexus*, sont ensuite détaillés. La stabilité de chaque algorithme est étudiée à travers un cas test exigeant, où l'effet de masse ajoutée relatif au rapport de densité entre fluide et structure est augmenté progressivement, provoquant une perturbation de l'équilibre des champs sur l'interface fluide-structure. Les résultats montrent qu'un algorithme de couplage implicite est indispensable afin de simuler des cas tests avec un effet de masse ajoutée important. Enfin, nous nous intéressons aux performances du couplage en termes de coût de calcul. Dans les cas traités, la condition de stabilité de *Europlexus* impose un pas de temps 100 à 200 fois plus petit que celui du fluide, alors que le temps de résolution du problème de structure est environ 1500 fois plus petit que celui du problème fluide. Il est donc impératif que le solveur fluide avance avec un pas de temps plus important. Afin de répondre à cette contrainte, un algorithme de sous-cyclage temporel est proposé. Les résultats montrent une performance très satisfaisante de cet algorithme, permettant de réduire jusqu'à 80 fois le temps de calcul d'une simulation sans sous-cyclage pour le cas traité

Suite à ce troisième chapitre, de nombreuses perspectives d'amélioration et de développement s'ouvrent. Tout d'abord, l'algorithme implicite développé ne suffit pas à simuler les cas impliquant les effets de masse ajoutée les plus forts. Il serait nécessaire d'explorer des méthodes améliorant la convergence ou de concevoir un algorithme implicite plus robuste afin de traiter les cas les plus exigeants décrits dans la littérature. Par ailleurs, l'étude sur l'algorithme de sous-cyclage a révélé que ce dernier ne pouvait pas simuler des cas présentant un effet de masse ajoutée trop important, même en utilisant une combinaison avec le couplage implicite actuel. Par conséquent, une refonte de l'algorithme de sous-cyclage est nécessaire pour préserver la stabilité instaurée par un couplage implicite.

Enfin dans le dernier chapitre de cette thèse, une validation du couplage est entreprise. Nous comparons les résultats du couplage *TrioCFD-Europlexus* avec ceux de la littérature à travers deux cas tests 2D. Pour les deux cas tests, une bonne similitude est observée en terme de comportement physique, malgré des différences modérées attribuables principalement à des incertitudes de modélisation. Il est important de souligner que cette validation, essentiellement numérique, n'est pas complète et qu'elle devra être complétée par une validation physique utilisant des valeurs expérimentales. Néanmoins, elle constitue une solide base. Pour conclure ce dernier

chapitre, un calcul démonstratif est présenté dans une configuration d’assemblage très simplifiée. L’objectif de ce cas test est de démontrer que le couplage permet de simuler une configuration d’intérêt pour le CEA en utilisant tous les algorithmes mis en œuvre dans cette thèse. Ce cas test est discrétisé avec plusieurs millions d’éléments et est calculé en parallèle sur une centaine de processeurs.

Au final, cette thèse a abouti à la mise en œuvre d’un couplage aujourd’hui fonctionnel et efficace. En outre, elle a aussi permis d’identifier les points faibles et les points forts de ce couplage. Bien que certains algorithmes puissent encore être améliorés, le couplage constitue actuellement une base solide pour l’étude et la compréhension des mécanismes d’interaction fluide-structure à l’échelle locale. Ce couplage pourrait, par exemple, contribuer à étudier deux phénomènes physiques encore mal connus : d’une part, les mécanismes pilotant l’amortissement induit par le fluide en écoulement autour d’une structure sur ses caractéristiques vibratoires, et d’autre part, l’effet de la présence d’un fluide dense (stagnant ou sous écoulement) sur les forces d’impact entre deux structures immergées.

Bibliographie

- ANGELI, P.-E., PUSCAS, M.-A., FAUCHET, G. et CARTALADE, A. (2017). FVCA8 Benchmark for the Stokes and Navier–Stokes Equations with the TrioCFD Code—Benchmark Session. In CANCÈS, C. et OMNES, P., éditeurs : *Finite Volumes for Complex Applications VIII - Methods and Theoretical Aspects*, pages 181–202, Cham. Springer International Publishing.
- ASTORINO, M. (2010). *Fluid-structure interaction in the cardiovascular system. Numerical analysis and simulation*. Thèse de doctorat, INRIA.
- BADIA, S., QUAINI, A. et QUARTERONI, A. (2008). Modular vs. non-modular preconditioners for fluid–structure systems with large added-mass effect. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(49-50):4216–4232.
- BATHE, K.-J. et LEDEZMA, G. A. (2007). Benchmark problems for incompressible fluid flows with structural interactions. *Computers & structures*, 85(11-14):628–644.
- BELYTSCHKO, T., YEN, H. J. et MULLEN, R. (1979). Mixed methods for time integration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17-18:259–275.
- BOGAERS, A. E., KOK, S., REDDY, B. D. et FRANZ, T. (2014). Quasi-newton methods for implicit black-box fsi coupling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 279:113–132.
- BONNET, M. et FRANGI, A. (2005). Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis. *Notes de cours, Ecole Polytechnique*.
- BONNET, M., FRANGI, A. et REY, C. (2014). *The finite element method in solid mechanics*. McGraw-Hill Education New York.
- BORSOI, L. (2000). Some examples of fluid-structure interactions in nuclear reactors. *La Houille Blanche*, 86(6):27–34.
- BOZEMAN, J. D. et DALTON, C. (1973). Numerical study of viscous flow in a cavity. *Journal of Computational Physics*, 12(3):348–363.
- BRAUN, A. L. et AWRUCH, A. M. (2009). A partitioned model for fluid–structure interaction problems using hexahedral finite elements with one-point quadrature. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(5):505–549.

- BRÉZIS, H. (2005). Analyse fonctionnelle : théorie et applications.
- BREZZI, F. et FORTIN, M., éditeurs (1991). *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer New York.
- BREZZI, F. (1974). On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *R.A.I.R.O. Analyse Numérique*, 8(R2):129–151.
- BURMAN, E. et FERNÁNDEZ, M. A. (2009). Stabilization of explicit coupling in fluid–structure interaction involving fluid incompressibility. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(5-8):766–784.
- BURMAN, E. et FERNÁNDEZ, M. A. (2007). Stabilized explicit coupling for fluid–structure interaction using Nitsche’s method. *Comptes Rendus Mathématique*, 345(8):467–472.
- CAUSIN, P., GERBEAU, J.-F. et NOBILE, F. (2005). Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid–structure problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194(42-44):4506–4527.
- CHABANNES, V. (2013). *Vers la simulation numérique des écoulements sanguins*. Theses, Université de Grenoble.
- CHORIN, A. J. (1968). Numerical solution of the navier-stokes equations. *Mathematics of computation*, 22(104):745–762.
- CROUZEIX, M. et RAVIART, P.-A. (1973). Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. *Revue française d’automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique*, 7(R3):33–75.
- DANIEL, W. J. T. (1997). Analysis and implementation of a new constant acceleration subcycling algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(15):2841–2855.
- de BOER, A., van ZUIJLEN, A. H. et BIJL, H. (2007). Review of coupling methods for non-matching meshes. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196(8):1515–1525.
- DE MOERLOOSE, L., TAELEMAN, L., SEGERS, P., VIERENDEELS, J. et DEGROOTE, J. (2019). Analysis of several subcycling schemes in partitioned simulations of a strongly coupled fluid-structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 89(6):181–195.
- DE NAYER, G., KALMBACH, A., BREUER, M., SICKLINGER, S. et WÜCHNER, R. (2014). Flow past a cylinder with a flexible splitter plate : A complementary experimental–numerical investigation and a new fsi test case (fsi-pfs-1a). *Computers & Fluids*, 99:18–43.
- DEGROOTE, J. (2013). Partitioned simulation of fluid-structure interaction : Coupling black-box solvers with quasi-newton techniques. *Archives of computational methods in engineering*, 20(3):185–238.

BIBLIOGRAPHIE

- DEGROOTE, J., BATHE, K.-J. et VIERENDEELS, J. (2009). Performance of a new partitioned procedure versus a monolithic procedure in fluid–structure interaction. *Computers & Structures*, 87(11):793–801. Fifth MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics.
- DONEA, J., GIULIANI, S. et HALLEUX, J.-P. (1982). An Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 33(1-3):689–723.
- DONEA, J., HUERTA, A., PONTHOT, J.-P. et RODRÍGUEZ-FERRAN, A. (2004). Arbitrary Lagrangian-Eulerian methods. *Encyclopedia of computational mechanics*.
- DUARTE, F., GORMAZ, R. et NATESAN, S. (2004). Arbitrary Lagrangian-Eulerian method for Navier-Stokes equations with moving boundaries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(45-47):4819–4836.
- DWIGHT, R. P. (2009). Robust mesh deformation using the linear elasticity equations. In *Computational fluid dynamics 2006*, pages 401–406. Springer.
- EMONOT, P. (1992). *Méthodes de volumes éléments finis : applications aux équations de Navier Stokes et résultats de convergence*. Thèse de doctorat, Lyon 1.
- ERTURK, E., CORKE, T. C. et GÖKÇÖL, C. (2005). Numerical solutions of 2-d steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers. *International journal for Numerical Methods in fluids*, 48(7):747–774.
- EVANGELINOS, C. et KARNIADAKIS, G. E. (1999). Dynamics and flow structures in the turbulent wake of rigid and flexible cylinders subject to vortex-induced vibrations. *Journal of Fluid Mechanics*, 400:91–124.
- FARHAT, C., LESOINNE, M. et LE TALLEC, P. (1998). Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces : Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 157(1-2):95–114.
- FARHAT, C., Van der ZEE, K. G. et GEUZAINÉ, P. (2006). Provably second-order time-accurate loosely-coupled solution algorithms for transient nonlinear computational aeroelasticity. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(17-18):1973–2001.
- FAUCHER, V. (2003). *Méthodes de réduction en dynamique explicite multi-échelles pour l'analyse des structures complexes sous impact*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan.
- FAUCHER, V., BULIK, M. et GALON, P. (2017). Updated VOFIRE algorithm for fast fluid–structure transient dynamics with multi-component stiffened gas flows implementing anti-dissipation on unstructured grids. *Journal of Fluids and Structures*, 74:64–89.

BIBLIOGRAPHIE

- FAUCHER, V. et RICCIARDI, G. (2023). Adaptive time multiscale algorithms for fluid–structure interaction with impacts-application to a row of pwr fuel assemblies under seismic loading. *Annals of Nuclear Energy*, 193:110041.
- FERNÁNDEZ, M. A. (2001). *Modèles simplifiés d'interaction fluide-structure*. Thèse de doctorat, Université Paris Dauphine-Paris IX.
- FERNÁNDEZ, M. A. (2011). Coupling schemes for incompressible fluid-structure interaction : implicit, semi-implicit and explicit. *SeMA Journal*, 55(1):59–108.
- FERNÁNDEZ, M. A., GERBEAU, J.-F. et GRANDMONT, C. (2007). A projection semi-implicit scheme for the coupling of an elastic structure with an incompressible fluid. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(4):794–821.
- FERNÁNDEZ, M. A. et MULLAERT, J. (2011). Displacement-velocity correction schemes for incompressible fluid–structure interaction. *Comptes Rendus Mathématique*, 349(17-18):1011–1015.
- FORMAGGIA, L., GERBEAU, J.-F., NOBILE, F. et QUARTERONI, A. (2001). On the coupling of 3d and 1d navier–stokes equations for flow problems in compliant vessels. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 191(6-7):561–582.
- FORMAGGIA, L., QUARTERONI, A. et VENEZIANI, A. (2010). *Cardiovascular Mathematics : Modeling and simulation of the circulatory system*, volume 1. Springer Science & Business Media.
- FORTIN, T. (2006). *Une méthode d'éléments finis à décomposition L^2 d'ordre élevé motivée par la simulation des écoulements diphasiques bas Mach*. Thèse de doctorat, Paris 6.
- GERBEAU, J.-F. et VIDRASCU, M. (2003). A quasi-newton algorithm based on a reduced model for fluid-structure interaction problems in blood flows. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37(4):631–647.
- GERBEAU, J.-F., VIDRASCU, M. et FREY, P. (2005). Fluid–structure interaction in blood flows on geometries based on medical imaging. *Computers & Structures*, 83(2-3):155–165.
- GHATTAS, O. et LI, X. (1995). A variational finite element method for stationary nonlinear fluid–solid interaction. *Journal of Computational Physics*, 121(2):347–356.
- GIRAULT, V. *et al.* (1986). *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer Berlin Heidelberg.
- GOMES, J. P., YIGIT, S., LIENHART, H. et SCHÄFER, M. (2011). Experimental and numerical study on a laminar fluid–structure interaction reference test case. *Journal of Fluids and Structures*, 27(1):43–61.

BIBLIOGRAPHIE

- GORON, M., LANGRAND, B., JACQUES, N., FOUREST, T., TASSIN, A., ROBERT, A. et CHAUVEHEID, D. (2023). Simulation of water entry–exit problems highlighting suction phenomena by coupled eulerian–lagrangian approach. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 100:37–51.
- GRANDMONT, C. et MADAY, Y. (1998). Existence de solutions d’un problème de couplage fluide-structure bidimensionnel instationnaire. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 326(4):525–530.
- GUERMOND, J.-L., MINEV, P. et SHEN, J. (2006). An overview of projection methods for incompressible flows. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(44-47):6011–6045.
- GUERMOND, J.-L. et QUARTAPELLE, L. (1998). On stability and convergence of projection methods based on pressure poisson equation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 26(9):1039–1053.
- GUIDOBONI, G., GLOWINSKI, R., CAVALLINI, N., CANIC, S. et LAPIN, S. (2009). A kinematically coupled time-splitting scheme for fluid–structure interaction in blood flow. *Applied mathematics letters*, 22(5):684–688.
- HA, S. T., NGO, L. C., SAEED, M., JEON, B. J. et CHOI, H. (2017). A comparative study between partitioned and monolithic methods for the problems with 3d fluid-structure interaction of blood vessels. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 31:281–287.
- HANSBO, P., HERMANSSON, J. et SVEDBERG, T. (2004). Nitsche’s method combined with space–time finite elements for ale fluid–structure interaction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(39-41):4195–4206.
- HEIB, S. (2003). *Nouvelles discrétisations non structurées pour des écoulements de fluides à incompressibilité renforcée*. Thèse de doctorat, Paris 6.
- HELENBROOK, B. T. (2003). Mesh deformation using the biharmonic operator. *International journal for numerical methods in engineering*, 56(7):1007–1021.
- HESSENTHALER, A., GADDUM, N., HOLUB, O., SINKUS, R., RÖHRLE, O. et NORDSLETTEN, D. (2017). Experiment for validation of fluid-structure interaction models and algorithms. *International journal for numerical methods in biomedical engineering*, 33(9):e2848.
- HÜBNER, B., WALHORN, E. et DINKLER, D. (2004). A monolithic approach to fluid–structure interaction using space–time finite elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193(23-26):2087–2104.
- IDELSOHN, S. R., DEL PIN, F., ROSSI, R. et OÑATE, E. (2009). Fluid–structure interaction problems with strong added-mass effect. *International journal for numerical methods in engineering*, 80(10):1261–1294.
- IRONS, B. M. et TUCK, R. C. (1969). A version of the Aitken accelerator for computer iteration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1(3):275–277.

- KALMBACH, A., DE NAYER, G. et BREUER, M. (2013). A new turbulent three-dimensional fsi benchmark fsi-pfs-3a : definition and measurements. *In MARINE V : proceedings of the V International Conference on Computational Methods in Marine Engineering*, pages 241–254. CIMNE.
- KASSIOTIS, C., IBRAHIMBEGOVIC, A., NIEKAMP, R. et MATTHIES, H. G. (2011). Nonlinear fluid–structure interaction problem. part i : implicit partitioned algorithm, nonlinear stability proof and validation examples. *Computational Mechanics*, 47:305–323.
- KÜTTLER, U. et WALL, W. A. (2008). Fixed-point fluid–structure interaction solvers with dynamic relaxation. *Computational mechanics*, 43(1):61–72.
- LAGRANGE, R., PUSCAS, M. A., PITEAU, P., DELAUNE, X. et ANTUNES, J. (2022). New Theoretical and Numerical Results on the Modal Added-Mass Matrix of a Finite Length Flexible Cylinder Immersed in a Narrow Annular Fluid, Considering Various Boundary Conditions. *SSRN*.
- LEPREVOST, A., FAUCHER, V. et PUSCAS, M. A. (2023). A computationally efficient dynamic grid motion approach for arbitrary lagrange–euler simulations. *Fluids*, 8(5):156.
- LESOINNE, M. et FARHAT, C. (1998). Higher-order subiteration-free staggered algorithm for nonlinear transient aeroelastic problems. *AIAA journal*, 36(9):1754–1757.
- LIU, K., YU, M. et ZHU, W. (2022). A high-order partitioned fluid-structure interaction framework for vortex-induced vibration simulation. *Applied Mathematical Modelling*, 105:321–339.
- LIU, W. K. et BELYTSCHKO, T. (1982). Mixed-time implicit-explicit finite elements for transient analysis. *Computers & Structures*, 15(4):445–450.
- LÖHNER, R. et YANG, C. (1996). Improved ale mesh velocities for moving bodies. *Communications in numerical methods in engineering*, 12(10):599–608.
- LU, X.-Y. et DALTON, C. (1996). Calculation of the timing of vortex formation from an oscillating cylinder. *Journal of Fluids and Structures*, 10(5):527–541.
- MICHLER, C., HULSHOFF, S., VAN BRUMMELEN, E. et DE BORST, R. (2004). A monolithic approach to fluid–structure interaction. *Computers & fluids*, 33(5-6):839–848.
- MOK, D., WALL, W. et RAMM, E. (2001). Accelerated iterative substructuring schemes for instationary fluid-structure interaction. *Computational fluid and solid mechanics*, 2:1325–1328.
- MONASSE, L., DARU, V., MARIOTTI, C., PIPERNO, S. et TENAUD, C. (2012). A conservative coupling algorithm between a compressible flow and a rigid body using an embedded boundary method. *Journal of Computational Physics*, 231(7):2977–2994.

BIBLIOGRAPHIE

- MUREA, C. M. (2017). *Schémas numériques stables pour fluides, structures et leurs interactions*. ISTE Group.
- NASERI, A., LEHMKUHL, O., GONZALEZ, I., BARTRONS, E., PÉREZ-SEGARRA, C. D. et OLIVA, A. (2018). A semi-implicit coupling technique for fluid–structure interaction problems with strong added-mass effect. *Journal of Fluids and Structures*, 80:94–112.
- NEWMARK, N. M. (1959). A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics division*, 85(3):67–94.
- NOBILE, F. (2001). Numerical approximation of fluid-structure interaction problems with application to haemodynamics. Rapport technique, EPFL.
- OÑATE, E. (2009). Introduction to the finite element method for structural analysis. *Structural analysis with the finite element method : linear statics*, pages 1–42.
- PANUNZIO, D., PUSCAS, M.-A. et LAGRANGE, R. (2022). FSI-Vibrations of immersed cylinders. simulations with the engineering open-source code TrioCFD. Test cases and experimental comparisons. *Comptes Rendus. Mécanique*, 350(G3): 451–476.
- PESKIN, C. S. (1972). Flow patterns around heart valves : a numerical method. *Journal of computational physics*, 10(2):252–271.
- PESKIN, C. S. (2002). The immersed boundary method. *Acta numerica*, 11:479–517.
- PINELLI, A., NAQAVI, I., PIOMELLI, U. et FAVIER, J. (2010). Immersed-boundary methods for general finite-difference and finite-volume navier–stokes solvers. *Journal of Computational Physics*, 229(24):9073–9091.
- PIPERNO, S. (1995). *Simulation numérique de phénomènes d’interaction fluide-structure*. Thèse de doctorat, École nationale des ponts et chaussées.
- PIPERNO, S. (1997). Explicit/implicit fluid/structure staggered procedures with a structural predictor and fluid subcycling for 2D inviscid aeroelastic simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 25(10):1207–1226.
- PIPERNO, S. et FARHAT, C. (2001). Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems—part ii : energy transfer analysis and three-dimensional applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(24-25):3147–3170.
- PUSCAS, M. A. et MONASSE, L. (2015). A three-dimensional conservative coupling method between an inviscid compressible flow and a moving rigid solid. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 37(6):B884–B909.
- PUSCAS, M. A., MONASSE, L., ERN, A., TENAUD, C. et MARIOTTI, C. (2015a). A conservative embedded boundary method for an inviscid compressible flow coupled with a fragmenting structure. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 103(13):970–995.

BIBLIOGRAPHIE

- PUSCAS, M. A., MONASSE, L., ERN, A., TENAUD, C., MARIOTTI, C. et DARU, V. (2015b). A time semi-implicit scheme for the energy-balanced coupling of a shocked fluid flow with a deformable structure. *Journal of Computational Physics*, 296:241–262.
- QUEVAL, J., BROU, D., RIGAUDEAU, J. et VIALLET, E. (2001). Seismic tests of interacting full scale fuel assemblies on shaking table. *SMiRT 16*, 1691.
- RAZZAQ, M., TUREK, S., HRON, J., ACKER, J., WEICHERT, F., GRUNWALD, I., ROTH, C., WAGNER, M. et ROMEIKE, B. (2010). Numerical simulation and benchmarking of fluid-structure interaction with application to hemodynamics. In *Fundamental Trends in Fluid-Structure Interaction*, pages 171–199. World Scientific.
- RICCIARDI, G. (2016). Fluid–structure interaction modelling of a pwr fuel assembly subjected to axial flow. *Journal of Fluids and Structures*, 62:156–171.
- RICCIARDI, G., BELLIZZI, S., COLLARD, B., COCHELIN, B. *et al.* (2010). Fluid-structure interaction in a 3-by-3 reduced-scale fuel assembly network. *Science and Technology of Nuclear installations*, 2010.
- RYZHAKOV, P., ROSSI, R., IDELSOHN, S. et ONATE, E. (2010). A monolithic lagrangian approach for fluid–structure interaction problems. *Computational mechanics*, 46:883–899.
- SAGAUT, P. (2005). *Large eddy simulation for incompressible flows : an introduction*. Springer Science & Business Media.
- SIEMANN, M. et LANGRAND, B. (2017). Coupled fluid-structure computational methods for aircraft ditching simulations : Comparison of ale-fe and sph-fe approaches. *Computers & Structures*, 188:95–108.
- SMOLINSKI, P., BELYTSCHKO, T. et NEAL, M. (1988). Multi-time-step integration using nodal partitioning. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(2):349–359. *_eprint* : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.1620260205>.
- STEIN, K., TEZDUYAR, T. et BENNEY, R. (2003). Mesh Moving Techniques for Fluid-Structure Interactions With Large Displacements. *Journal of Applied Mechanics*, 70(1):58–63.
- TEMAM, R. (1968). Une méthode d’approximation de la solution des équations de navier-stokes. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 96:115–152.
- TEMAM, R. et MIRANVILLE, A. (2002). *Modélisation mathématique et mécanique des milieux continus*, volume 18. Springer Science & Business Media.
- TUREK, S. et HRON, J. (2006). Proposal for Numerical Benchmarking of Fluid-Structure Interaction between an Elastic Object and Laminar Incompressible Flow. *Springer Berlin Heidelberg*, pages 371–385.

BIBLIOGRAPHIE

- TUREK, S., HRON, J., RAZZAQ, M., WÖBKER, H. et SCHÄFER, M. (2010). *Numerical benchmarking of fluid-structure interaction : A comparison of different discretization and solution approaches*. Springer.
- VALDÉS VÁZQUEZ, J. G. (2007). *Nonlinear Analysis of Orthotropic Membrane and Shell Structures Including Fluid-Structure Interaction*. Thèse de doctorat, Universitat Politècnica de Catalunya.
- VAN BRUMMELEN, E. et DE BORST, R. (2005). An interface newton–krylov solver for fluid–structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 47(10-11):1189–1195.
- van ZUIJLEN, A., BOSSCHER, S. et BIJL, H. (2007). Two level algorithms for partitioned fluid–structure interaction computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(8):1458–1470.
- van ZUIJLEN, A. H. et BIJL, H. (2005). Implicit and explicit higher order time integration schemes for structural dynamics and fluid-structure interaction computations. *Computers & structures*, 83(2-3):93–105.
- VIALLET, E., BOLSEE, G., LADOUCEUR, B., GOUBIN, T. et RIGAUDEAU, J. (2003). Validation of pwr core seismic models with shaking table tests on interacting scale 1 fuel assemblies.
- VIERENDEELS, J., DUMONT, K. et VERDONCK, P. (2008). A partitioned strongly coupled fluid-structure interaction method to model heart valve dynamics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 215(2):602–609.
- VIVALDI, D. et RICCIARDI, G. (2022). Assessment of an Euler-Bernoulli Beam Model Coupled to CFD in Order to Perform Fluid-Structure Simulations. In *Volume 3 : Fluid-Structure Interaction ; High Pressure Technology*, page V003T04A002, Las Vegas, Nevada, USA. American Society of Mechanical Engineers.
- VÁZQUEZ, V. (2007). *Nonlinear Analysis of Orthotropic Membrane and Shell Structures Including Fluid-Structure Interaction*. Doctoral thesis, Universitat Politècnica de Catalunya.
- WALL, W. A., MOK, D. P., SCHMIDT, J. et RAMM, E. (2000). Partitioned Analysis of Transient Nonlinear Fluid Structure Interaction Problems Including Free Surface Effects. In SÄNDIG, A.-M., SCHIEHLEN, W. et WENDLAND, W. L., éditeurs : *Multifield Problems : State of the Art*, pages 159–166. Springer, Berlin, Heidelberg.
- WICK, T. (2011). Fluid-structure interactions using different mesh motion techniques. *Computers & Structures*, 89(13-14):1456–1467.
- ZORRILLA, R., ROSSI, R., WÜCHNER, R. et OÑATE, E. (2020). An embedded finite element framework for the resolution of strongly coupled fluid–structure interaction problems. application to volumetric and membrane-like structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 368:113179.