



**HAL**  
open science

# Méthodologie d'identification de champs et de paramètres mécaniques à partir de mesures de déplacement en surface. Application à une matrice minérale.

Hao Hong

► **To cite this version:**

Hao Hong. Méthodologie d'identification de champs et de paramètres mécaniques à partir de mesures de déplacement en surface. Application à une matrice minérale.. Mécanique [physics.med-ph]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2024. Français. NNT : 2024LYO10179 . tel-04887591

**HAL Id: tel-04887591**

**<https://theses.hal.science/tel-04887591v1>**

Submitted on 15 Jan 2025

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE de DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON 1**

**École Doctorale MEGA ED162  
Mécanique, Énergétique, Génie-Civil, Acoustique**

**Discipline : Génie Mécanique**

Soutenue publiquement le 17/10/2024, par :  
**HONG HAO**

---

**Méthodologie d'identification de champs et de  
paramètres mécaniques à partir de mesures de  
déplacement en surface. Application à une matrice  
minérale.**

---

Devant le jury composé de :

AZAIEZ Majdi, Professeur, Institut Polytechnique de Bordeaux  
HARIGA Nejla, Professeure, Institut National Agronomique de Tunisie  
ANDRIEUX Stéphane, Professeur, École des Ponts ParisTech  
RONEL Sylvie, Professeure, Université Lyon 1

Rapporteur  
Rapporteuse  
Examineur  
Présidente

BARANGER Thouraya, Professeure, Université Lyon 1

Directrice de thèse



# Remerciements

Cette thèse a été financée par le China Scholarship Council (CSC). Je remercie sincèrement cet organisme ainsi que l'Université Claude Bernard Lyon pour m'avoir offert cette précieuse opportunité. De plus, je tiens à exprimer ma gratitude au Laboratoire des Matériaux Composites pour la Construction (LMC2) pour le soutien précieux accordé à ce travail.

J'exprime toute ma gratitude à ma directrice de thèse, Madame Thouraya Baranger, pour ses enseignements et sa confiance. Sa riche expérience et ses conseils patients m'ont permis de surmonter les difficultés rencontrées, et ses suggestions précieuses ont contribué au progrès continu de mes travaux de recherche.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance à Monsieur Bel Sylvain, dont les enseignements et le soutien m'ont permis de maîtriser la technique de la corrélation d'images, tout en m'apportant une aide précieuse pour la conduite des expériences dans la thèse.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour leur participation à ma soutenance. Je remercie tout particulièrement Monsieur Majdi Azaiez et Madame Nejla Hariga, rapporteurs de cette soutenance, ainsi que Madame Sylvie Ronel et Monsieur Stéphane Andrieux, respectivement président et examinateur. Je leur suis profondément reconnaissant pour leur examen attentif de mon travail, leurs discussions approfondies, ainsi que leurs commentaires et suggestions précieux.

Je remercie chaleureusement l'ensemble des membres du LMC2 ainsi que le département de mécanique de Lyon 1 pour leur bienveillance et les moments conviviaux. Les pause-café de midi m'ont permis de me détendre et rester serein, des moments heureux que je n'oublierai jamais.

Je tiens également à remercier mes amis pour leur aide, leur soutien et leurs encouragements tout au long de ma vie et de mes études : Qiao Hu, Liang Haosheng, Xin Qilin, He Xin, You Cong, Wang Xiaorui, Chen Yejian, Ge Chenglong, Chen Cuirong, Hou Liutong, Wang Yufei.

Enfin, je voudrais remercier ma famille, en particulier mes parents, pour leur soutien indéfectible et leur amour au fil des ans, qui m'ont encouragé à mener à bien mes études.



# Résumé

L'objectif de cette étude est de développer des méthodes d'identification de paramètres mécaniques et de conditions aux limites, en exploitant des mesures de champs de déplacement surfacique, pour des solides fabriqués avec des matériaux isotropes fragiles. Dans un premier temps, en considérant le comportement fragile dissymétrique en traction/compression, l'essai de fendage a été exploité pour identifier les paramètres mécaniques bi-modules en plus de la contrainte limite à la rupture. Une méthode semi-analytique d'identification, sur mesure pour cet essai, a été mise en place en se basant sur l'expression analytique du champ de contraintes et prenant en compte le comportement dissymétrique pour le calcul des champs de déformation et de déplacement. L'algorithme mis en place permet d'exploiter les mesures d'imagerie en surface, et de simuler les techniques couramment utilisées dans la littérature pour l'identification des paramètres mécaniques. L'efficacité et la robustesse de cette méthode ont été démontrées en utilisant des données synthétiques bruitées et des mesures expérimentales.

Dans un second temps, les mesures en surface ont été exploitées pour identifier les conditions aux limites sur une frontière inaccessible du solide. Ces mesures étant faites sur une surface libre de tout chargement, elles sont considérées comme des conditions aux limites surabondantes sur cette surface (conditions de Neumann et Dirichlet). A partir de la définition du problème de Cauchy pour des données surabondantes, une méthodologie d'identification prenant en compte le comportement dissymétrique du matériau et l'évolution de l'endommagement, a été mise en place. Dans cette méthodologie, deux phases de comportement linéaire et non linéaire sont considérées. Dans la première phase, le comportement est dissymétrique sans évolution de l'endommagement. Dans la seconde phase, l'évolution de l'endommagement est prise en compte. Les mesures de la première phase sont exploitées pour résoudre le problème de Cauchy et identifier les conditions aux limites manquantes, via la minimisation d'une erreur en relation de comportement. Les champs de déplacement et de traction de surface, identifiés dans la première phase, ainsi que les mesures, sont exploités dans la seconde phase pour résoudre le problème non linéaire directe avec évolution de l'endommagement. L'efficacité de cette méthodologie a été démontrée en utilisant des données synthétiques bruitées et des données expérimentales.

Pour compléter cette étude, compte tenu du développement rapide de l'apprentissage profond, une exploitation du PINN (Physic-Informed Neural Networks) a également été réalisée pour résoudre les problèmes directs, identifier les paramètres mécaniques et les conditions aux limites dans la phase du comportement linéaire. La comparaison des résultats a permis de mettre en évidence le potentiel du PINN pour résoudre les problèmes directs et inverses, et d'émettre des perspectives à venir.

Les données expérimentales utilisées dans cette thèse ont été obtenues avec une matrice minérale à base de liant ettringitique et de TiO<sub>2</sub>. Cette matrice a été développée dans le cadre du projet région RICO2C.

**Mots clés :** identification, problèmes inverse, erreur en relation de comportement, paramètres mécaniques, conditions aux limites, endommagement, apprentissage profond, matériau isotrope fragile.

# Abstract

The aim of this study is to develop methods for identifying mechanical parameters and boundary conditions, exploiting surface displacement field measurements, for solids made from isotropic brittle materials. Initially, considering asymmetric brittle behavior in tension/compression, the splitting tensile test was exploited to identify bi-modulus mechanical parameters in addition to the ultimate tensile stress. A semi-analytical identification method, tailor-made for this test, was implemented, based on the analytical expression of the stress field and taking into account the dissymmetrical behavior for the calculation of the strain and displacement fields. The algorithm used exploits surface imaging measurements, and simulates the techniques commonly used in the literature to identify mechanical parameters. The efficiency and robustness of this method have been shown using noisy synthetic data and experimental measurements.

Secondly, surface measurements were used to identify boundary conditions on an inaccessible solid boundary. As these measurements are made on a surface free of any loading, they are considered as overspecified boundary conditions on this surface (Neumann and Dirichlet conditions). Based on the definition of the Cauchy problem for overspecified data, an identification methodology was developed that takes into account the material's asymmetrical behavior and the evolution of damage. In this methodology, two phases of linear and non-linear behavior are considered. In the first phase, the behavior is dissymmetrical with no damage evolution. In the second phase, damage evolution is taken into account. Measurements from the first phase are used to solve the Cauchy problem and identify missing boundary conditions, by minimizing a constitutive relation error. The surface displacement and tensile fields identified in the first phase, together with the measurements, are exploited in the second phase to solve the direct nonlinear problem with damage evolution. The effectiveness of this methodology has been shown using noisy synthetic data and experimental data.

To complement this study, and in view of the rapid development of deep learning, PINN (Physic-Informed Neural Networks) was also exploited to solve direct problems and identify mechanical parameters in the linear behavior phase. Comparison of the results highlighted the potential of PINN for solving both direct and inverse problems, and suggested future prospects.

The experimental data used in this thesis were obtained with a mineral matrix based on ettringite binder and TiO<sub>2</sub>. This matrix was developed as part of the RICO2C regional project.

**Keywords :** identification, inverse problems, constitutive relation error, mechanical parameters, boundary conditions, damage, deep learning, brittle isotropic material.

# Table des matières

Remerciments	i
Résumé	iii
Abstract	iv
Table des matières	v
Table des figures	ix
Liste des tableaux	xvi
Introduction générale	1
<b>1 Contexte et État de l'art de l'étude</b>	<b>5</b>
1.1 Contexte de l'étude . . . . .	5
1.2 Loi de comportement de la matrice . . . . .	7
1.2.1 Revue de quelques modèles de comportement . . . . .	9
1.2.2 Modèle de Badel . . . . .	10
1.3 Dispositif expérimental et mesure du champ de déplacements . . . . .	11
1.3.1 Dispositif Expérimental . . . . .	11
1.3.2 Méthode de mesure CIN . . . . .	12
1.3.3 Mesure de champs surfaciques avec CIN . . . . .	14
1.4 Conclusion . . . . .	18
<b>2 Identification des paramètres mécanique bi-modules : Méthode de recalage avec la solution semi-analytique</b>	<b>19</b>
2.1 Loi de comportement bi-module . . . . .	20
2.2 Expérimentation . . . . .	22
2.2.1 Essai de compression . . . . .	22
2.2.2 Essai de traction . . . . .	23
2.2.3 Échantillon . . . . .	26
2.2.4 Mesure avec CIN . . . . .	27
2.3 Quelques méthodes d'identifications . . . . .	29

2.3.1	Méthode de recalage par éléments finis . . . . .	29
2.3.2	Méthode des champs virtuels . . . . .	34
2.4	Solution semi-analytique du fendage . . . . .	34
2.4.1	Champ de contrainte . . . . .	35
2.4.2	Loi de Hooke généralisée . . . . .	36
2.4.3	Champ de déplacement . . . . .	38
2.4.4	Validation . . . . .	41
2.5	Recalage avec la solution semi-analytique . . . . .	44
2.5.1	Principe de l'identification . . . . .	44
2.5.2	Analyse de trois cas de recalage . . . . .	44
2.5.3	Procédure de la méthode de recalage . . . . .	47
2.5.4	Validation avec des données synthétiques . . . . .	49
2.6	Application avec les données expérimentales . . . . .	60
2.6.1	Expérimentation avec la matrice ettringitique . . . . .	61
2.6.2	Paramètres mécaniques identifiées . . . . .	67
2.7	Conclusion et Perspective . . . . .	69
<b>3</b>	<b>Identification des conditions aux limites et de l'endommagement dans le cadre d'un matériau fragile à partir de mesures surabondantes</b>	<b>71</b>
3.1	Loi de comportement avec prise en compte de l'endommagement local asymétrique	72
3.1.1	Formulation incrémentale et pilotage de la loi de Badel . . . . .	72
3.1.2	Application : endommagement d'une plaque trouée sous l'action d'un chargement de compression . . . . .	75
3.1.3	Conclusion . . . . .	84
3.2	Problème inverse d'identification des conditions aux limites et de l'endommagement . . . . .	84
3.2.1	Problèmes de Cauchy et de Complétion des Données . . . . .	84
3.3	Méthode de l'identification . . . . .	86
3.3.1	Fonctionnelle erreur en relation de comportement . . . . .	86
3.4	Minimisation de la fonctionnelle . . . . .	88
3.4.1	Algorithme de Kozlov . . . . .	88
3.4.2	Méthode de gradient conjugué . . . . .	89
3.4.3	Formulation discrète et calcul du gradient avec la méthode de l'état adjoint	90
3.4.4	Adaptation au comportement non linéaire des matériaux isotropes fragiles	92
3.4.5	Critère d'arrêt . . . . .	93
3.5	Application numérique . . . . .	95
3.5.1	Identification avec les données synthétiques sans bruit dans la phase linéaire	96
3.5.2	Identification avec les données synthétiques bruitées dans la phase linéaire	99
3.5.3	Identification de l'endommagement dans la phase non linéaire . . . . .	104
3.5.4	Conclusion . . . . .	110

3.6	Application expérimentale . . . . .	111
3.6.1	Configuration expérimentale et mesure . . . . .	111
3.6.2	Identification dans la phase linéaire . . . . .	114
3.6.3	Identification de l'endommagement dans la phase non linéaire . . . . .	119
3.6.4	Conclusion . . . . .	125
3.7	Conclusion et Perspectives . . . . .	126
<b>4</b>	<b>Apprentissage profond : réseaux de neurones informés par la physique</b>	<b>129</b>
4.1	Apprentissage profond et apprentissage automatique conventionnel . . . . .	130
4.2	Réseaux de neurones informés par la physique . . . . .	131
4.2.1	Principes des PINNs . . . . .	131
4.2.2	Architectures et démarche de PINN traditionnel . . . . .	132
4.3	Améliorations et Méthodologies pour les PINNs . . . . .	139
4.3.1	Améliorations basiques . . . . .	139
4.3.2	Techniques avancés . . . . .	141
4.4	Applications des PINNs aux problèmes directs en mécanique des solides . . . . .	146
4.4.1	Configuration numériques des modèles des PINNs . . . . .	147
4.4.2	Comparaison des résultats des PINNs . . . . .	152
4.4.3	Conclusion . . . . .	161
4.5	Applications des PINNs à l'identification des paramètres mécaniques . . . . .	163
4.5.1	Configurations numériques des PINNs dans l'identification des paramètres	163
4.5.2	Comparaison des paramètres identifiés avec les valeurs de référence . . .	166
4.5.3	Conclusion . . . . .	171
4.6	Applications des PINNs à l'identification des conditions aux limites en mécanique des solides . . . . .	172
4.6.1	Configurations numériques des PINNs dans l'identification des conditions aux limites . . . . .	173
4.6.2	Comparaison des conditions identifiées avec le champ de déplacement surfaccique . . . . .	179
4.6.3	Comparaison des conditions identifiées avec le champ de déplacement aux frontières . . . . .	185
4.6.4	Conclusion . . . . .	191
4.7	Conclusion et perspective . . . . .	192
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>195</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>199</b>
	<b>Appendices</b>	<b>217</b>
	<b>A Procédure de MACR_RECAL</b>	<b>219</b>

---

<b>B</b>	<b>Identification des conditions aux limites et de l'endommagement : Comparaison des données identifiées avec les données synthétiques sans bruit et avec 5% de bruit blanc dans la phase non linéaire</b>	<b>221</b>
<b>C</b>	<b>Algorithme de minimisation</b>	<b>227</b>
C.1	Calcul de l'erreur et optimisation par la méthode de Gradient Conjugué . . . . .	227
C.2	L'algorithme de région de confiance et son application . . . . .	228
<b>D</b>	<b>Application des PINNs dans les problèmes directs et les problèmes inverses</b>	<b>231</b>
D.1	Application de la fonction de distance approximative . . . . .	231
D.2	Comparaison des erreurs relatives normalisées des différents données entre les PINNs et la MEF . . . . .	231
D.3	Comparaison des erreurs relatives normalisées de la condition de chargement identifiée avec les champs de déplacement surfacique . . . . .	235
D.4	Comparaison des erreurs relatives normalisées de la condition de chargement identifiée avec les champs de déplacement aux frontières . . . . .	238
<b>E</b>	<b>Bruit gaussien</b>	<b>241</b>

# Table des figures

1.1	Applications des TRC et TRM. . . . .	7
1.2	Loi de comportement du TRC ou du TRM en traction : la contrainte en fonction de la déformation [1]. . . . .	8
1.3	L'équipements expérimentaux : (a) Machine de presse MTS; (b) Équipement de CIN. . . . .	12
1.4	Mauvaise qualité des images. . . . .	14
1.5	Processus de la mesure avec CIN. . . . .	15
1.6	Réalisation des mouchetis sur l'échantillon avec la peinture noire . . . . .	15
1.7	Images prises par deux caméras CCD sous différents angles. . . . .	16
1.8	Calibrage de la CIN avec la mire. . . . .	17
2.1	Loi de comportement du matériau bi-modules : la contrainte en fonction de la déformation sous le chargement uniaxial. . . . .	20
2.2	Comportement dissymétrique en traction et en compression avec le modèle de Badel. . . . .	21
2.3	Relation entre la variable d'endommagement $d$ et le comportement dissymétrique en traction et en compression. . . . .	22
2.4	Essai de compression. . . . .	22
2.5	Apparition de la fissure dans l'essai de fendage. . . . .	24
2.6	Préparation des échantillons. . . . .	26
2.7	La mire utilisée dans l'essai de fendage avec la mesure de CIN. . . . .	28
2.8	Forme et taille de l'élément sur le maillage de CIN. . . . .	28
2.9	Comparaison entre le champ de déplacement avec/sans MCR. . . . .	29
2.10	Projection du champ de déplacement entre des maillages différents. . . . .	30
2.11	Définition des groupes des noeuds dans le maillage de CIN pour extraire le champ de déplacement mesuré. . . . .	32
2.12	Schéma de l'essai de fendage pour la compression partiellement distribuée avec deux plateaux plans. . . . .	34
2.13	Schéma des directions principales $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ et la distribution de la valeur $\psi$ sur tout le domaine dans le cas $\alpha$ tend vers zéro. . . . .	39
2.14	Comparaison des déplacements $u$ et $v$ obtenus par la solution de MEF et la solution semi-analytique avec $\alpha = 1$ . . . . .	42

2.15	Comparaison des déplacements $u$ et $v$ obtenus par la solution de MEF et la solution semi-analytique avec $\alpha = 10$ . . . . .	43
2.16	Comparaison des déplacements axiaux obtenu par les deux modèles : point bleu : solution semi-analytique ; étoile verte : modèle de Patel. . . . .	44
2.17	Définition des groupes des champs de déplacement utilisées dans la méthode de recalage. . . . .	46
2.18	Définition de la zone de comportement linéaire, sans évolution de l'endommagement, pour identifier les paramètres bi-module. . . . .	46
2.19	Procédure d'identification avec la méthode de Recalage. . . . .	47
2.20	Définition des champs utilisés dans la méthode de recalage. . . . .	49
2.21	Champs de déplacement synthétiques générés par un chargement de 3000 N avec la solution semi-analytique. . . . .	51
2.22	Trois groupes de champ de déformation synthétique au centre de l'échantillon utilisé dans la méthode de recalage avec la solution semi-analytique lorsque que le chargement varie entre 1000 et 3000 N. . . . .	52
2.23	Cas A : Paramètres identifiés avec le champ de déplacement synthétique axial bruité, par la méthode de recalage avec la solution semi-analytique. . . . .	54
2.24	Cas C : Paramètres identifiés avec le champ de déplacement synthétique surfacique bruité, par la méthode de recalage avec la solution semi-analytique. . . . .	56
2.25	Analyse de sensibilité du champ de déplacement par rapport aux modules de Young en traction et en compression. . . . .	58
2.26	Analyse de sensibilité du champ de déplacement par rapport aux coefficients de Poisson en traction et en compression. . . . .	59
2.27	Données mesurées sur l'échantillon de la matrice ettringitique. . . . .	61
2.28	Paramètres identifiés avec le champ de déplacement axial mesuré sur la matrice ettringitique à 42 jours par la méthode de recalage avec la solution semi-analytique (cas A). . . . .	62
2.29	Paramètres identifiés avec le champ de déplacement surfacique mesuré sur la matrice ettringitique à 42 jours par la méthode de recalage avec la solution semi-analytique (cas C). . . . .	64
2.30	Comparaison entre les données expérimentales et celles calculées avec les paramètres identifiées pour les cas A, B, et C. . . . .	66
2.31	Paramètres mécaniques obtenus avec 12 échantillons de la matrice ettringitique à 42 jours dans l'essai de fendage et de compression. . . . .	67
2.32	Paramètres mécaniques non endommagés obtenus avec 12 échantillons de la matrice ettringitique à 42 jours dans l'essai de fendage et compression. . . . .	69
3.1	Réponse non-monotone (Snap-back). . . . .	74
3.2	Géométrie et maillage d'une plaque épaisse à deux trous. . . . .	75
3.3	Chargement de pression appliquée $p$ en fonction du temps défini. . . . .	77
3.4	Distribution de la variable $d$ , du champ de déplacement et du champ de contrainte sous une pression appliquée de 1.3 MPa à l'instant $T_1$ . . . . .	78

3.5	Variation de $d$ aux quatre instants différents : $T_1 = 0,82$ s, $T_2 = 8$ s, $T_3 = 15$ s et $T_4 = 30$ s, correspondant aux chargements de 1.30 MPa, 1.73 MPa, 1.27 MPa et 1.72 MPa. . . . .	79
3.6	Distribution de la variable $d$ , du champ de déplacement et du champ de contrainte sous une pression appliquée de 1.73 MPa à l'instant $T_2$ . . . . .	81
3.7	Distribution de la variable $d$ , du champ de déplacement et du champ de contrainte sous une pression appliquée de 1.27 MPa à l'instant $T_3$ . . . . .	82
3.8	Distribution de la variable $d$ , du champ de déplacement et du champ de contrainte sous une pression appliquée de 1.72 MPa à l'instant $T_4$ . . . . .	83
3.9	Définitions du domaine et ses frontières. . . . .	85
3.10	Démarche de la méthode de la fonctionnelle erreur en relation de comportement pour l'identification des conditions aux limites dans la phase linéaire. . . . .	93
3.11	Démarche de l'identification des conditions aux limite et l'endommagement avec le modèle de Badel. . . . .	94
3.12	Évolution de la fonctionnelle $E$ et de l'erreur $L^2$ entre le champ calculé et le champ exact au cours des itérations, dans le cas où les données sont bruitées. . .	94
3.13	Schéma de la plaque épaisse à deux trous et désignation des différentes frontières	95
3.14	Comparaison du champ de déplacement $\mathbf{d}^*$ identifié sur $\Gamma_u$ avec l'algorithme de Kozlov et la méthode de GC en utilisant les données synthétiques sans bruit. . .	97
3.15	Comparaison de la traction surfacique $\mathbf{p}^*$ identifiée sur $\Gamma_u$ avec l'algorithme de Kozlov et la méthode de GC en utilisant les données synthétiques sans bruit. . .	98
3.16	Comparaison des champs de déplacement sans bruit et avec 5% de bruit blanc sur les frontières $\Gamma_{m1}$ et $\Gamma_{m2}$ . . . . .	99
3.17	Comparaison des valeurs de $E$ et $dE$ obtenues par les deux algorithmes de minimisation avec les données synthétiques bruitées (5%). . . . .	100
3.18	Comparaison du champ de déplacement $\mathbf{d}^*$ identifié sur $\Gamma_u$ avec l'algorithme de Kozlov et la méthode GC en utilisant les données synthétiques bruitées (5%). . .	100
3.19	Comparaison de la traction surfacique $\mathbf{p}^*$ identifiée sur $\Gamma_u$ avec l'algorithme de Kozlov et la méthode GC en utilisant les données synthétiques bruitées (5%). . .	101
3.20	Comparaison du champ de déplacement $\mathbf{u}^*$ identifié sur $\Gamma_f$ avec l'algorithme de Kozlov en utilisant les données synthétiques bruitées (5%). . . . .	102
3.21	Comparaison du champ de contrainte $\sigma^*$ identifié sur $\Gamma_f$ avec l'algorithme de Kozlov en utilisant les données synthétiques bruitées (5%). . . . .	103
3.22	Détermination $\mathbf{d}^{**}$ identifié avec les données synthétiques sans bruit par l'erreur $\  \mathbf{U}^m - \mathbf{U}_{pilo}^m \ $ en fonction du temps. . . . .	105
3.23	Variation de $F$ et $\eta$ en fonction du temps. . . . .	106
3.24	Comparaison des champs de déplacement $\mathbf{d}^{**}$ identifié sur $\Gamma_u$ avec la méthode de pilotage dans la phase non linéaire en utilisant les données synthétiques sans bruit et avec bruit (5%). . . . .	107
3.25	Comparaison de la traction surfacique $\mathbf{p}^{**}$ identifiée sur $\Gamma_u$ avec la méthode de pilotage dans la phase non linéaire en utilisant les données synthétiques sans bruit et avec bruit (5%). . . . .	108

3.26	Comparaison des distributions des variables d'endommagement identifiées $d$ sur tout le domaine $\Omega$ avec la méthode de pilotage dans la phase non linéaire en utilisant les données synthétiques sans bruit et avec bruit (5%). . . . .	109
3.27	Échantillon de plaque épaisse à deux trous expérimentale. . . . .	112
3.28	Mire utilisée dans l'essai de compression pour la plaque à deux trous avec la mesure de CIN. . . . .	112
3.29	Géométrie et maillage de plaque épaisse à deux trous expérimentale. . . . .	113
3.30	Courbe force-déplacement obtenu par la machine de presse. . . . .	114
3.31	Champ de déplacement mesurées après avoir enlevé le MCR sur la plaque épaisse à deux trous au chargement de 2021 N. . . . .	115
3.32	Erreur de corrélation d'images en pourcentage au chargement de 2021 N. . . . .	116
3.33	Comparaison des valeurs de $E$ et $dE$ obtenues par l'algorithme de Kozlov en utilisant le critère d'arrêt, avec le champ de déplacement mesuré au chargement de 2021 N dans la phase linéaire. . . . .	116
3.34	Comparaison des champs de déplacement mesuré et identifié sur $\Gamma_u$ par l'algorithme de Kozlov au chargement de 2021 N dans la phase linéaire. . . . .	117
3.35	Comparaison des champs de déplacement $\mathbf{u}$ mesuré et identifié sur le domaine $\Omega$ au chargement de 2021 N dans la phase linéaire. . . . .	118
3.36	Variation de $F$ et $\eta$ en fonction du temps. . . . .	119
3.37	Détermination $\mathbf{d}^{**}$ identifié avec les données mesurées par l'erreur $\  \mathbf{U}^m - \mathbf{U}_{\text{pilo}}^m \ $ en fonction du temps. . . . .	120
3.38	Champ de déplacement mesurées après avoir enlevé le MCR sur la plaque épaisse à deux trous au chargement de 7200 N. . . . .	120
3.39	Courbe force-déplacement obtenu par la machine de presse. . . . .	121
3.40	Comparaison des champs de déplacement $\mathbf{d}$ mesuré et identifié sur la frontière $\Gamma_u$ au chargement de 7200 N dans la phase non linéaire. . . . .	121
3.41	Comparaison des champs de déplacement $\mathbf{u}$ mesuré et identifié sur le domaine $\Omega$ au chargement de 7200 N dans la phase non linéaire. . . . .	123
3.42	Analyse des déplacements $\mathbf{u}$ mesurés et de la distribution de $d$ identifiée sur tout le domaine $\Omega$ au chargement de 7200 N. . . . .	124
3.43	Analyse de l'endommagement de la plaque à partir de la comparaison des déplacements $u$ mesuré et identifiés, ainsi que la distribution de $d$ au chargement de 7200 N dans la phase non linéaire. . . . .	124
4.1	Architecture et démarche d'un PINN traditionnel. . . . .	133
4.2	Schéma du réseau de neurones. . . . .	133
4.3	Schéma de la fonction de perte. . . . .	135
4.4	Schéma du réseaux de neurones parallèle. . . . .	143
4.5	Géométrie, maillage et points de la plaque à un trou utilisés dans la MEF et les PINNs. . . . .	147
4.6	Les valeurs de la fonction $F(\hat{\mathbf{x}})$ obtenus par les fonctions de distance approximative pour les variables de sortie adimensionné dans la modélisation numérique. . . . .	151

4.7	Les valeurs de la la fonction $G(\hat{\mathbf{x}})$ obtenus par un petit volume de réseau de neurones pour les valeurs des conditions aux limites connues dans la modélisation numérique. . . . .	152
4.8	Comparaison des pertes obtenus par les différents modèle de PINNs dans la modélisation numérique. . . . .	153
4.9	Comparaison des erreurs relatives normalisées des champs de déplacement entre la MEF et le PINNT. . . . .	155
4.10	Comparaison des erreurs relatives normalisées des champs de contrainte entre la MEF et le PINNT. . . . .	156
4.11	Comparaison des tractions surfaciques sur les frontière $\Gamma_1, \Gamma_2$ et $\Gamma_4$ . . . . .	157
4.12	Comparaison des tractions surfaciques sur les frontière $\Gamma_5$ . . . . .	158
4.13	Distribution des erreurs de l'équation de l'équilibre sur le PINNT et l'IECL dans la modélisation numérique. . . . .	160
4.14	Définition des groupes des champs de déplacement utilisées avec du bruit et sans bruit dans l'identification des paramètres mécaniques avec les PINNs. . . . .	164
4.15	Comparaison des pertes scalaires obtenues par les différents modèles de PINNs dans l'identification des paramètres mécaniques. . . . .	167
4.16	Distribution des erreurs de l'équation de l'équilibre pour le PINNT et l'IECL dans l'identification des paramètres mécaniques avec les données sans bruit. . . . .	168
4.17	Paramètres identifiés avec les données sans bruit et les données bruitées pour tous les modèles de PINNs. . . . .	169
4.18	Géométrie de la plaque à un trou et définition des points de mesure pour le champ de déplacement surfacique et le champ de déplacement aux frontières. . . . .	173
4.19	Définition des ensembles des champs de déplacement surfacique et de déplacement aux frontières utilisées avec du bruit et sans bruit dans l'identification des conditions aux limites. . . . .	174
4.20	Les valeurs de la fonction $F(\hat{\mathbf{x}})$ obtenues par les fonctions de distance approximative pour les variables de sortie adimensionnées. . . . .	177
4.21	Les valeurs de la fonction $G(\hat{\mathbf{x}})$ obtenues par un petit volume de réseau de neurones pour les valeurs des conditions aux limites connues. . . . .	178
4.22	Comparaison des pertes scalaires obtenues par les différents modèles de PINNs dans l'identification des conditions aux limites avec le champ de déplacement surfacique. . . . .	180
4.23	Comparaison des pertes scalaires $l_p$ obtenues par les différents modèles de PINNs dans l'identification des conditions aux limites avec le champ de déplacement surfacique. . . . .	181
4.24	Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par le PINNT sur $\Gamma_1$ avec les champ de déplacement surfacique et celle de référence sur lorsque $l_p$ est minimal. . . . .	183
4.25	Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par l'IECL sur $\Gamma_1$ avec les champ de déplacement surfacique et celle de référence lorsque $l_p$ est minimal. . . . .	184

4.26	Comparaison des pertes scalaires obtenues par les différents modèles de PINNs dans l'identification des conditions aux limites avec le champ de déplacement aux frontières. . . . .	186
4.27	Comparaison des pertes scalaires $l_p$ obtenues par les différents modèles de PINNs dans l'identification des conditions aux limites avec le champ de déplacement aux frontières. . . . .	187
4.28	Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par le PINNT sur $\Gamma_1$ avec les champ de déplacement aux frontières et celle de référence lorsque $l_p$ est minimal. . . . .	188
4.29	Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par l'IECL sur $\Gamma_1$ avec les champ de déplacement aux frontières et celle de référence lorsque $l_p$ est minimal. . . . .	190
A.1	La procédure d'identification avec la méthode de FEMU . . . . .	219
B.1	Comparaison des déplacements $u^{**}$ identifiées avec la méthode de pilotage dans la phase non linéaire en utilisant les données synthétiques sans bruit et avec bruit (5%). . . . .	222
B.2	Comparaison des déplacements $v^{**}$ identifiées avec la méthode de pilotage dans la phase non linéaire en utilisant les données synthétiques sans bruit et avec bruit (5%). . . . .	223
B.3	Comparaison des contraintes $\sigma_{xx}^{**}$ identifiées avec la méthode de pilotage dans la phase non linéaire en utilisant les données synthétiques sans bruit et avec bruit (5%). . . . .	224
B.4	Comparaison des contraintes $\sigma_{yy}^{**}$ identifiées avec la méthode de pilotage dans la phase non linéaire en utilisant les données synthétiques sans bruit et avec bruit (5%). . . . .	225
B.5	Comparaison des contraintes $\sigma_{xy}^{**}$ identifiées avec la méthode de pilotage dans la phase non linéaire en utilisant les données synthétiques sans bruit et avec bruit (5%). . . . .	226
D.1	Comparaison des erreurs relatives normalisées de déplacement $u$ entre la MEF et les PINNs. . . . .	232
D.2	Comparaison des erreurs relatives normalisées de déplacement $v$ entre la MEF et les PINNs. . . . .	232
D.3	Comparaison des erreurs relatives normalisées de contrainte $\sigma_{xx}$ entre la MEF et les PINNs. . . . .	233
D.4	Comparaison des erreurs relatives normalisées de contrainte $\sigma_{yy}$ entre la MEF et les PINNs. . . . .	233
D.5	Comparaison des erreurs relatives normalisées de contrainte $\sigma_{xy}$ entre la MEF et les PINNs. . . . .	234
D.6	Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par le PINNT sur $\Gamma_1$ avec les champ de déplacement surfacique et celle de référence lorsque $l_p$ est minimal. . . . .	235

D.7	Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par le RNP sur $\Gamma_1$ avec les champ de déplacement surfacique et celle de référence lorsque $l_p$ est minimal. . . . .	236
D.8	Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par la MAA sur $\Gamma_1$ avec les champ de déplacement surfacique et celle de référence lorsque $l_p$ est minimal. . . . .	236
D.9	Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par l'IECL sur $\Gamma_1$ avec les champ de déplacement surfacique et celle de référence lorsque $l_p$ est minimal. . . . .	237
D.10	Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par la MAAP sur $\Gamma_1$ avec les champ de déplacement surfacique et celle de référence lorsque $l_p$ est minimal. . . . .	237
D.11	Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par le PINNT sur $\Gamma_1$ avec les champ de déplacement aux frontières et celle de référence lorsque $l_p$ est minimal. . . . .	238
D.12	Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par le RNP sur $\Gamma_1$ avec les champ de déplacement aux frontières et celle de référence lorsque $l_p$ est minimal. . . . .	239
D.13	Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par la MAA sur $\Gamma_1$ avec les champ de déplacement aux frontières et celle de référence lorsque $l_p$ est minimal. . . . .	239
D.14	Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par l'IECL sur $\Gamma_1$ avec les champ de déplacement aux frontières et celle de référence lorsque $l_p$ est minimal. . . . .	240
D.15	Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par la MAAP sur $\Gamma_1$ avec les champ de déplacement aux frontières et celle de référence lorsque $l_p$ est minimal. . . . .	240

# Liste des tableaux

2.1	Résultats de FEMU avec les données synthétiques en ajoutant les bruits blancs additifs. . . . .	33
2.2	Paramètres identifiés avec le champ de déformation synthétique bruité au centre par la méthode de recalage avec la solution semi-analytique. . . . .	55
2.3	Paramètres identifiés par la méthode de recalage avec la solution semi-analytique avec les différents données synthétiques bruitées : (cas A) le champ de déplacement axial ; (cas B) le champ de déformation au centre surfacique ; (cas C) le champ de déplacement surfacique. . . . .	57
2.4	Paramètres identifiés sur la matrice ettringitique à 42 jours par la méthode de recalage avec la solution semi-analytique avec les différents données expérimentales : (cas A) le champ de déplacement axial ; (cas B) le champ de déformation au centre de la surface ; (cas C) le champ de déplacement surfacique. . . . .	65
2.5	Paramètres mécaniques avec la théorie de bi-module sur la matrice ettringitique à 42 jours. . . . .	68
2.6	Paramètres mécanique pour le modèle de Badel sur la matrice ettringitique à 42 jours. . . . .	68
3.1	Coût du calcul avec différents algorithmes de minimisation sur les données synthétiques sans bruit. . . . .	96
3.2	Erreurs relatives normalisées entre les données de référence et celles identifiées sur $\Gamma_u$ avec les différents algorithmes de minimisation en utilisant les données synthétiques sans bruits. . . . .	98
3.3	Coût de calcul des différents algorithmes de minimisation en utilisant les données synthétiques bruitées (5%). . . . .	99
3.4	Erreurs relatives normalisées entre les données de référence et celles identifiées sur $\Gamma_u$ avec les différents algorithmes de minimisation en utilisant les données synthétiques bruitées (5%). . . . .	101
3.5	Erreurs relatives normalisées entre les données de référence et celles identifiées sur $\Gamma_f$ avec l'algorithme de Kozlov en utilisant les données synthétiques en 5% de bruit blanc. . . . .	104
3.6	Comparaison des résultantes $F$ calculées à partir des $\mathbf{d}$ identifiées dans les phases linéaire et non linéaire avec les données synthétiques sans bruit et avec bruit (5%).	106
3.7	Erreurs relatives normalisées entre les données de référence et celles identifiées sur $\Gamma_u$ avec la méthode de pilotage en utilisant les données synthétiques sans bruits et avec bruit (5%) dans la phase non linéaire. . . . .	108

3.8	Erreurs absolues des variables d'endommagement identifiées $d$ avec la méthode de pilotage en utilisant les données synthétiques sans bruits et avec bruit (5%) dans la phase non linéaire. . . . .	110
3.9	Coût de calcul de l'algorithme de Kozlov en utilisant le critère d'arrêt avec le champ de déplacement mesuré au chargement de 2021 N dans la phase linéaire. .	115
3.10	Erreurs relatives normalisées du champ de déplacement $\mathbf{d}^*$ mesuré et identifié sur $\Gamma_u$ par l'algorithme de Kozlov en utilisant le critère d'arrêt au chargement de 2021 N dans la phase linéaire. . . . .	117
3.11	Comparaison des résultantes $F$ calculées à partir des $\mathbf{d}$ identifiées dans les phases linéaire et non linéaire avec les données mesurées. . . . .	120
3.12	Erreurs relatives normalisées du champ de déplacement $\mathbf{d}$ mesuré et identifié sur $\Gamma_u$ au chargement de 7200 N dans la phase non linéaire. . . . .	122
4.1	Erreurs relatives normalisées des champs de déplacement et de contrainte entre les résultats de MEF et des PINNS . . . . .	159
4.2	Paramètres identifiés avec les erreurs relatives à 100000 itérations pour tous les modèles de PINN (Valeur de référence : $E = 8.83$ GPa, $\nu = 0.216$ ). . . . .	170
4.3	Erreurs relatives normalisées des conditions de chargement identifiées sur $\Gamma_1$ avec les champ de déplacement surfacique lorsque $l_p$ sont minimales, voir la figure 4.23.	184
4.4	Erreurs relatives normalisées des conditions de chargement identifiées sur $\Gamma_1$ avec les champs de déplacement aux frontières lorsque $l_p$ sont minimales, voir la figure 4.27 . . . . .	189

# Abréviations

<b>Abréviation</b>	<b>Description</b>
TRC	Textile Reinforced Concrete
TRM	Textile Reinforced Mortar
CIN	Corrélation d'Images Numériques
MEF	Méthode des Éléments Finis
PINN	Physics-Informed Neural Network
PGNN	Physics-Guided Neural Network
PENN	Physics-Encoded Neural Network
SAD	Système d'Acquisition de Données
CCD	Charge Coupled Device
ZNSSD	Zero-mean Normalized Sum of Squared Differences
MCR	Mouvement de Corps Rigide
FEMU	Finite Element Model Updating
MCV	Méthode des Champs Virtuels
GC	Gradient Conjugué
EDP	Équation aux Dérivées Partielles
CL	Conditions aux Limites
DCS	Données de Contrainte Supplémentaires
RN	Réseau de Neurones
ReLU	Rectified Linear Unit
EQM	Erreur Quadratique Moyenne
EAM	Erreur Absolue Moyenne
PEC	Perte d'Entropie Croisée
DGS	Descente de Gradient Stochastique
RMSprop	Root Mean Square Propagation
Adam	Adaptive Moment Estimation
PINNT	PINN traditionnel avec les améliorations basiques
RNP	Réseau de Neurones Parallèle
MAA	Méthode d'Activation Adaptative
IECL	Imposition Exacte des Conditions aux Limites
MAAP	Méthode d'Ajustement Adaptatif des Pertes

# Introduction générale

Les matériaux composites occupent une place croissante dans les secteurs industriels grâce à leurs propriétés mécaniques exceptionnelles, telles que la légèreté, la résistance et la durabilité. Parmi ces composites, les matériaux renforcés par textiles, comme le béton renforcé de textiles (TRC : Textile Reinforced Concrete) et le mortier renforcé de textiles (TRM : Textile Reinforced Mortar), ont suscité un intérêt accru ces dernières années. Ils sont largement utilisés tant dans la construction de nouvelles structures que dans la réparation et le renforcement des structures existantes.

Les matrices minérales, élément essentiel du TRC et du TRM, influencent directement les performances mécaniques globales de ces matériaux composites. Comme tous les matériaux fragiles ou quasi-fragiles, leur résistance à la traction est bien inférieure à leur résistance à la compression. Ainsi, des micro-fissures peuvent facilement se former à l'intérieur des matériaux pendant la fabrication, entraînant une loi de comportement dissymétrique et des endommagements asymétriques locaux.

Cette fragilité inhérente pose des défis significatifs pour leur utilisation dans la construction. Par conséquent, il est crucial de développer des méthodologies permettant d'identifier les paramètres mécaniques, ainsi que les réponses et l'endommagement des matériaux fragiles sous diverses charges. Cela permettra une meilleure compréhension et modélisation de ces matériaux, garantissant ainsi la sécurité et la durabilité des structures, ainsi qu'une évaluation précise de leurs performances mécaniques.

La Corrélation d'Images Numériques (CIN) est une technologie de mesure optique avancée et non-intrusive. Grâce à son coût abordable, sa facilité d'utilisation et la précision de ses mesures, la technologie de CIN a considérablement contribué au développement des problèmes inverses. En fournissant des champs de mesure surfaciques riches en détails, cette technologie permet d'améliorer significativement les résultats d'identification.

Par conséquent, l'objectif principal de cette thèse est de développer des méthodologies pour identifier les paramètres mécaniques, les conditions aux limites et l'endommagement en utilisant des mesures de champs de déplacement surfacique, appliquées à des solides constitués de matériaux isotropes fragiles.

En tenant compte du comportement dissymétrique en traction et en compression, le concept de paramètres bi-module a été utilisé pour décrire les matériaux isotropes fragiles. Ainsi, parmi les expérimentations réalisées, l'essai de compression a été utilisé pour déterminer la résistance à la compression, tandis que l'essai de fendage a été employé pour identifier les paramètres mécaniques bi-module et la résistance à la traction. En considérant l'insuffisance du développement du modèle bi-module correspondant dans la Méthode des Éléments Finis (MEF), ainsi que l'exploitation incomplète des champs surfaciques, la méthode d'identification avec la solution semi-analytique pour l'essai de fendage a été étudiée et mise en œuvre. Grâce à la solution de

champ de déplacement semi-analytique obtenue à partir des équations de champ de contrainte sur l'essai de fendage et de la loi de Hooke généralisée, cette méthode minimise les écarts entre les champs de mesure surfaciques et les données analytiques pour identifier les paramètres mécaniques bi-module des matériaux isotropes fragiles. De plus, en combinant les études existantes, les mesures obtenues par d'autres techniques couramment utilisées peuvent également être adoptées dans cette méthode. En utilisant des données synthétiques et des mesures de CIN, son efficacité et sa robustesse sont bien démontrées.

Bien que la technique CIN permette de fournir des champs de déplacement surfaciques précis, ses limites ne sont pas négligeables. Les erreurs de corrélation d'images aux frontières de la surface restent significatives, et en particulier, les mesures sur des frontières de chargement ou inaccessible sont souvent difficiles voir impossibles. Ces limites affectent de manière significative les évaluations du comportement et de la sécurité des structures dans les domaines industriels et en ingénierie. Pour surmonter ces limites, et en se basant sur la connaissance des conditions aux limites surabondantes sur une frontière facilement accessible, une méthode de résolution du problème de Cauchy associé [2, 3, 4] est adoptée pour l'identification des conditions aux limites sur la frontière inaccessible. Par conséquent, tenant compte du cadre non linéaire de la loi de comportement des matériaux fragiles, une méthodologie d'identification des conditions aux limites sur la frontière inaccessible et de l'endommagement dans le solide, en utilisant des données surabondantes a été développée. Cette méthodologie se compose de deux étapes. Dans la première étape, l'identification des conditions aux limites dans la phase de comportement linéaire est réalisée par la résolution du problème de Cauchy linéaire en minimisant une fonctionnelle erreur en relation de comportement. Dans la deuxième étape, l'identification des conditions aux limites et de l'endommagement dans la phase non linéaire est effectuée par la résolution du problème direct non linéaire en utilisant les conditions aux limites identifiées dans la phase linéaire. L'efficacité et la robustesse de cette méthodologie ont été démontrées à travers des applications utilisant des données synthétiques et expérimentales.

En raison de l'augmentation des recherches sur l'apprentissage profond dans les problèmes directs et inverses, nous avons exploré l'utilisation des modèles de réseaux de neurones informés par la physique (PINNs : Physics-Informed Neural Networks) pour développer de nouvelles approches et perspectives pour l'identification des paramètres et des conditions aux limites. Ainsi, les applications des modèles de PINNs ont été mises en œuvre pour la modélisation numérique du problème direct, l'identification des paramètres mécaniques et la détermination des conditions aux limites dans la phase de comportement linéaire. Les comparaisons des résultats ont clairement démontré le potentiel de ces modèles d'apprentissage profond pour résoudre les problèmes directs et inverses en mécanique des solides, offrant ainsi une nouvelle voie pour aborder des problèmes similaires à l'avenir.

Pour structurer les différents aspects abordés lors de ces travaux de recherche, ce manuscrit est divisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre présente principalement le contexte général de l'étude, un modèle de comportement dissymétrique pour décrire les matériaux isotropes fragiles, l'analyse et l'introduction de la technique CIN, et les dispositifs expérimentaux nécessaires dans ces travaux de recherche.

Le deuxième chapitre se concentre sur l'étude de la méthodologie d'identification des paramètres mécaniques bi-module. Il inclut la présentation de la loi de comportement dissymétrique, les expérimentations réalisées, les études et la comparaison des méthodes d'identification existantes.

tantes, le développement de la solution analytique de champ de déformation ainsi que la solution semi-analytique de champ de déplacement associée, la méthode d'identification des paramètres mécaniques bi-module et les applications avec les données synthétiques et expérimentales correspondantes.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la méthodologie d'identification des conditions aux limites et de l'endommagement. Il présente le modèle de comportement dissymétrique avec évolution de l'endommagement, la description des problèmes de Cauchy et de Complétion des Données, la résolution de la minimisation de la fonctionnelle erreur en relation de comportement, les algorithmes de minimisation correspondants, le pilotage des conditions aux limites et de l'endommagement développée, ainsi que les applications avec les données synthétiques et expérimentales.

Le quatrième chapitre est dédié à l'étude des PINNs dans les problèmes directs et inverses pour la mécanique des solides dans la phase de comportement linéaire. Il contient une introduction à l'apprentissage automatique et à l'apprentissage profond, une explication détaillée des principes, de l'architecture et de la démarche des PINNs, les améliorations de base et les techniques avancées correspondantes basées sur les études existantes, les applications des divers modèles de PINNs dans la modélisation numérique du problème direct, l'identification des paramètres mécaniques et des conditions aux limites, ainsi que les comparaisons des résultats obtenus.

Enfin, une conclusion générale résume tous les travaux de recherche réalisés et présente des perspectives pour les recherches futures.



# Chapitre 1

## Contexte et État de l’art de l’étude

*Ce chapitre a pour principal objectif de présenter le contexte de l’étude, le matériau étudié ainsi que la loi de comportement correspondante, et les dispositifs nécessaires à l’expérimentation. Nous débutons par une présentation du cadre de recherche au sein de notre laboratoire LMC<sup>2</sup>.*

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Contexte de l’étude</b>	<b>5</b>
<b>1.2</b>	<b>Loi de comportement de la matrice</b>	<b>7</b>
1.2.1	Revue de quelques modèles de comportement	9
1.2.2	Modèle de Badel	10
<b>1.3</b>	<b>Dispositif expérimental et mesure du champ de déplacements</b>	<b>11</b>
1.3.1	Dispositif Expérimental	11
1.3.2	Méthode de mesure CIN	12
1.3.3	Mesure de champs surfaciques avec CIN	14
<b>1.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>18</b>

---

### 1.1 Contexte de l’étude

L’activité scientifique du Laboratoire des Matériaux Composites pour la Construction (LMC<sup>2</sup> EA 7427 - Université Lyon 1), porte sur l’étude des matériaux et des structures composites et plus particulièrement sur l’analyse expérimentale et la modélisation du comportement d’ouvrage ou de parties d’ouvrages de génie civil (béton armé, béton précontraint, bois, métal) renforcés par des matériaux composites. La démarche générale adoptée s’inscrit dans le domaine des sciences de l’ingénierie et vise à développer l’ingénierie performancielle des multi-matériaux intégrant les contraintes du développement durable en génie civil. Elle consiste à considérer l’interaction entre matériaux et structures en intégrant de façon prioritaire les procédés.

Le LMC<sup>2</sup> s’intéresse au développement d’une recherche interactive entre la formulation robuste de nouveaux matériaux conférant une plus grande fiabilité et durabilité des infrastructures et l’amélioration des conditions de sécurité des usagers pour des conditions d’exploitation ou d’environnement évolutives.

Dans ce contexte, ce développement relève d’une démarche classique de type « multi-échelles » visant à prévoir les réponses des matériaux et des structures lors de leur transformation et

en service sous des sollicitations couplées pour des échelles de temps importantes. Ainsi, la prédiction de propriétés s'appuiera sur l'identification et la modélisation des interactions entre nano, micro, méso et macro-échelles et devra déboucher sur la formulation de matériaux « robustes » qu'il sera possible de caractériser et de modéliser sous sollicitations de service ou en cours de transformation pour juger de leur fiabilité et optimiser leur cycle de vie au sein des structures.

Parmi ces travaux, les composites à renfort textile, TRC (Textile Reinforced Concrete) et TRM (Textile Reinforced Mortar) ont constitué l'un des principaux axes de recherche, notamment l'analyse du comportement du TRC au jeune âge [5], l'évaluation du comportement à la traction du TRC [6], et la réalisation d'essais sur des systèmes renforcés par TRM [7].

Le TRC et le TRM sont des matériaux innovants qui combinent des filaments avec une matrice minérale contenant des granulats très fins, qui suscitent de plus en plus d'intérêt au cours des dernières années [8, 9]. Grâce à leurs propriétés uniques, ces matériaux composites offrent un potentiel significatif dans le domaine industriel.

Les matrices minérales, tel que le béton ou le mortier, sont des matériaux fragiles, très largement utilisés dans la construction d'infrastructures, notamment pour les ponts, les routes, et les bâtiments, grâce à leurs propriétés remarquables telles que leur grande solidité et leur longue durabilité. Toutefois, en raison de leur nature fragile ou quasi-fragile et des défauts inhérents à leur composition, la résistance à la traction de ces matériaux est nettement inférieure à la résistance à la compression. En conséquence, ces matériaux sont particulièrement susceptibles de s'endommager dès l'apparition de la première fissure [10].

Le béton armé, constitué d'armatures en acier intégrées au béton, représente l'un des matériaux composites les plus populaires et largement utilisés à ce jour. En tant que matériau composite, le béton armé combine les avantages de l'acier, ce qui améliore significativement sa résistance à la traction et au cisaillement [11, 12]. En outre, la présence d'armatures permet également un meilleur contrôle de la propagation des fissures [13]. Néanmoins, après une longue période d'utilisation, la corrosion de l'acier à l'intérieur du béton, en particulier dans les zones fissurées, représente une grande préoccupation, car elle peut réduire la solidité de la structure et poser des problèmes de sécurité [14, 15]. De plus, les coûts de production élevés, la manipulation difficile en raison du poids et les contraintes de forme sont également des inconvénients à considérer dans son utilisation.

En comparaison avec ces matériaux de construction traditionnels, en fonction du type de textile, de la composition de la matrice minérale, et de pré-traitements tels que la technologie de pré-imprégnation [16], les propriétés mécaniques, telles que la résistance à la traction du TRC ou du TRM, ont été significativement améliorées à différents niveaux [17] et permettent un meilleur contrôle de la propagation des fissures lors de l'endommagement [18]. Ils maintiennent non seulement une performance mécanique remarquable même à haute température [19], mais, grâce à l'utilisation de textiles pour le renforcement, ils ne souffrent pas du problème de corrosion, ce qui les rend plus durables et écologiquement viables [20]. Par ailleurs, la réduction de la quantité de matrice nécessaire pour envelopper le textile signifie que les applications du TRC et du TRM sont plus souples, plus légères et mieux adaptées à l'architecture moderne [21], aussi bien qu'aux travaux de réparation et de renforcement de structures [22], comme illustré dans la figure 1.1.

Outre les caractéristiques physiques des textiles, les propriétés mécaniques de la matrice constituent également un facteur majeur dans les performances mécaniques du TRC et du



(a) Pont de 17 mètres avec les coques de TRC de 30 mm d'épaisseur [23]



(b) Coque en TRC filigrane : Pavillon Kahla[24]



(c) Coque en TRM pour le renforcement [25]

FIGURE 1.1 – Applications des TRC et TRM.

TRM.

Dans le cadre du projet de collaboration RICO2C [26], des études portant sur le TRM avec une faible épaisseur ont été conduites pour remplacer la traditionnelle matrice à base de ciment Portland par une matrice minérale à base de liant ettringitique [27] en y ajoutant du  $\text{TiO}_2$  pour inclure une fonction d'auto-nettoyage. Ces travaux de recherche visaient à évaluer et analyser la sensibilité des propriétés physiques de différentes formulations de la matrice à l'ajout de  $\text{TiO}_2$ .

Dans le cadre des travaux de cette thèse, nous avons utilisé les données expérimentales obtenues avec cette matrice pour valider les méthodes d'identification de paramètres mécaniques et des conditions aux limites. Ainsi, il convient de noter que toutes les données expérimentales utilisées pour valider nos simulations numériques dans ce manuscrit concernent exclusivement la matrice ettringitique avec  $\text{TiO}_2$  et proviennent du projet RICO2C.

## 1.2 Loi de comportement de la matrice

La loi de comportement du TRC ou du TRM en traction peut être résumé comme suit dans la figure 1.2 :

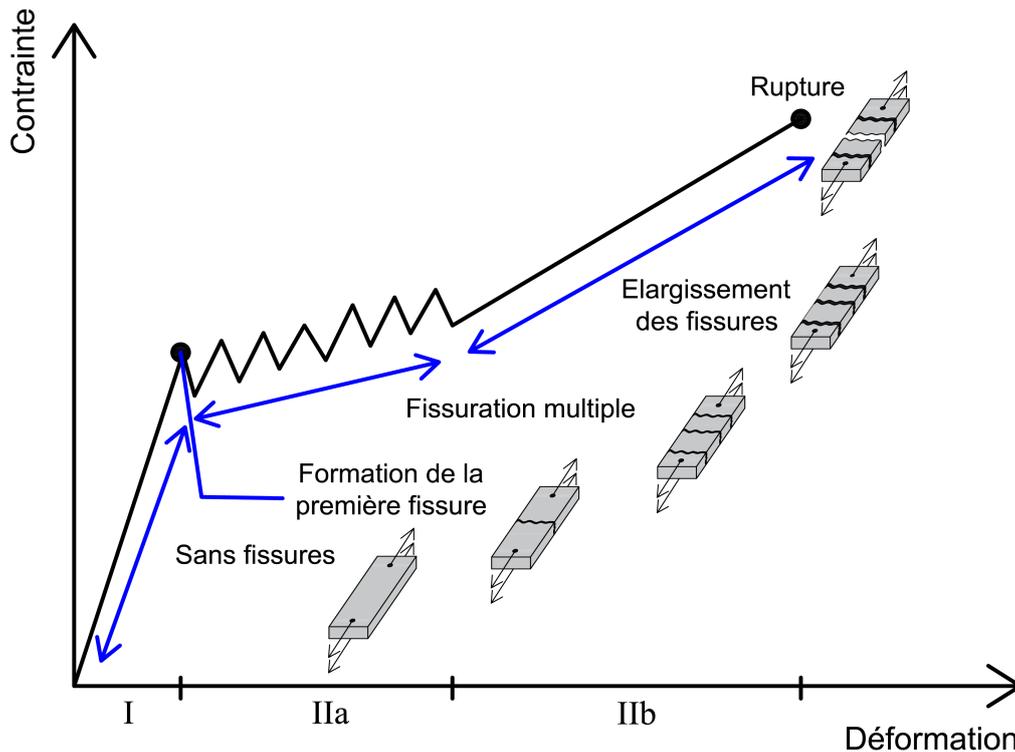


FIGURE 1.2 – Loi de comportement du TRC ou du TRM en traction : la contrainte en fonction de la déformation [1].

Globalement, la courbe de contrainte-déformation en traction peut être décrite en 3 phases :

- Phase linéaire (I) : avant l'apparition des fissures, le comportement est linéaire jusqu'à la limite de résistance à la traction. Et selon la loi de mélange, la rigidité du matériau dépend fortement des teneurs en volume des matériaux constitutifs (matrice minérale et textile). Lorsque la contrainte atteint la résistance à la traction, la première fissure se forme, et le comportement entre dans une phase non-linéaire subdivisée en deux zones : zone de fissuration multiple (IIa) et zone d'élargissement (IIb) pour décrire les phénomènes observés.
- Phase non-linéaire (IIa) : au début de cette phase, la rigidité diminue rapidement en raison des premières fissures. Ensuite, la contrainte augmente à nouveau jusqu'à l'apparition de nouvelles fissures. Cette instabilité de rigidité se répète plusieurs fois jusqu'à ce qu'aucune nouvelle fissure ne se forme.
- Phase non-linéaire (IIb) : Une fois la formation de fissures dans la matrice minérale terminée, sa rigidité se stabilise. À cette phase, toutes les contraintes sont essentiellement reprises par le textile renforcé. Cependant, certains filaments sont rompus en même temps que la fissuration de la matrice dans la phase IIa. Par conséquent, par rapport à la rigidité qu'offre le textile seul, la rigidité globale du composite est légèrement diminuée dans la phase IIb.

Il ressort clairement de cette analyse que les propriétés mécaniques des matériaux composites, tels que le TRC et le TRM durant les phases I et IIa, sont principalement influencées par les caractéristiques de leur matrice. En conséquence, le choix de la loi de comportement de la matrice est crucial pour prédire la réponse des matériaux composites sous diverses charges et conditions environnementales.

### 1.2.1 Revue de quelques modèles de comportement

Du point de vue énergétique, l'accumulation, la dissipation et le taux de libération énergétique constituent des éléments clés pour analyser l'évolution de la déformation et de l'endommagement des matériaux fragiles, tels que le mortier, le béton et les roches. Basé sur le concept de dissipation énergétique, un modèle d'endommagement simple a été développé pour décrire les comportements sous chargements cycliques uniaxiaux [28]. Dans cette étude, en raison des défauts primaires tels que les microfissures dans la matrice minérale semblable à de la roche, les microfissures se referment progressivement sous l'effet d'une compression croissante au début de l'expérience. Cela modifie les propriétés mécaniques du matériau au début de la phase linéaire, appelée compaction. Ainsi, la courbe contrainte-déformation se divise en quatre phases distinctes : compactage, linéarité, rendement et rupture. De plus, en comparant l'énergie libre  $\Phi$  et l'énergie dissipative  $\Phi^{dissipative}$ , le paramètre  $D$  est définie pour évaluer l'endommagement du matériau [29]. Pour mieux décrire le comportement dans la phase de compactage, un coefficient spécial a été introduit en s'appuyant sur l'étude de Lemaitre [30] pour déterminer l'expression de la contrainte. De manière similaire, dans l'étude de Tan [31], la courbe de contrainte-déformation pour la compression uniaxiale a été divisée en plusieurs parties distinctes. Cependant, pour mieux décrire l'endommagement initial et l'énergie utilisée dans la phase de compactage, deux paramètres supplémentaires relatifs aux matériaux et à l'énergie avec l'endommagement initial  $\Phi_0^{dissipative}$  ont été définis pour déterminer la variable d'endommagement  $D$ . Bien que les données issues de ce modèle soient plus cohérentes avec les données expérimentales, son application reste complexe. En outre, ces modèles ne peuvent être appliqués que dans les essais de chargement uniaxiaux, et la variable d'endommagement  $D$  reflète l'endommagement global plutôt que local. Dans l'étude de Xie et al. [32],  $D$  a été utilisé pour définir la dégradation du module de Young  $E$  en raison de l'effet d'endommagement. Selon l'analyse du champ de contrainte principal, la contrainte pour la rupture structurelle est déterminée dans les différentes situations de chargement. Toutefois, la propagation des fissures et la variation de paramètre  $D$  ne sont pas suffisamment développées.

L'étude de Mazars [33] intègre la mécanique de la rupture et la mécanique de l'endommagement pour modéliser le comportement jusqu'à la rupture, à une température fixe, en se basant sur les principes de la thermodynamique. Afin de mieux décrire les propagations des fissures et la dégradation de la rigidité, le taux de libération énergétique est utilisé pour évaluer et déterminer les variations du paramètre d'endommagement  $D$ . Ce modèle permet de calculer et d'identifier l'énergie d'endommagement localisée sur de grands échantillons. De manière similaire, l'étude de Wu [34] applique un modèle plastique d'endommagement pour analyser le comportement du béton, où les calculs sont réalisés en utilisant l'énergie libre, et les propagations des fissures sont déterminées à partir du taux de libération énergétique. Contrairement aux précédents, pour mieux identifier les différents types d'endommagements mécaniques, deux variables scalaires d'endommagement,  $d^{traction}$  et  $d^{cisaillement}$ , sont définies pour caractériser le comportement en traction et en cisaillement, et ont été utilisées pour construire le paramètre d'endommagement  $D$  sous forme de tenseur. Dans une approche similaire, l'étude de Comi [35] définit deux variables scalaires pour caractériser l'endommagement dû à la traction et à la compression.

Généralement, en raison des propriétés de la matrice minérale, l'endommagement mécanique dû à la traction se développe plus rapidement que celui causé par le cisaillement. De plus, la

résistance à la compression est généralement dix fois supérieure à celle de la traction. Donc, l'utilisation d'une simple variable scalaire suffit pour décrire l'endommagement de la matrice ettringitique comme dans l'étude de Mazars [33]. Toutefois, les comportements asymétriques en traction et en compression ainsi que l'effet de refermeture des fissures doivent être pris en compte. Pour ces raisons, le modèle de Badel [36, 37] a été retenu pour modéliser le comportement de la matrice ettringitique, en prenant compte non seulement les dissymétries en traction et en compression pendant la phase non-linéaire, mais aussi la reprise de rigidité en compression (effet de refermeture des fissures).

## 1.2.2 Modèle de Badel

L'analyse du modèle de Badel commence par l'étude de l'énergie libre. En général, l'énergie libre élastique est décrite en fonction du champ de déformation dans le repère principal :

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr } \varepsilon)^2 + \mu \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i^2 \quad \text{avec } \text{tr } \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (1.1)$$

Où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé, caractérisant le comportement élastique du matériau non endommagé. Les signes de  $\text{tr } \varepsilon$  et de  $\varepsilon_i$  indiquent respectivement l'état de traction ou de compression globale du matériau dans chaque direction principale.

Dans la phase non-linéaire, les matériaux isotropes fragiles, tels que la matrice minérale, susceptibles de présenter des fissures sous traction, nécessitent l'intégration d'un facteur d'endommagement dans l'énergie libre pour décrire leur comportement. Cependant, pour les états de compression, la formulation de l'énergie libre peut rester inchangée. En tenant compte de la dissymétrie entre la traction et la compression, l'énergie libre associée à l'endommagement, fonction du champ de déformation, s'exprime de la manière suivante :

$$\Phi(\varepsilon, d) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr } \varepsilon)^2 \left( H(-\text{tr } \varepsilon) + \frac{1-d}{1+\gamma d} H(\text{tr } \varepsilon) \right) + \mu \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i^2 \left( H(-\varepsilon_i) + \frac{1-d}{1+\gamma d} H(\varepsilon_i) \right) \quad (1.2)$$

La variable scalaire  $d$  quantifie l'endommagement du matériau, avec une valeur variant de 0 (indiquant un matériau sain) à 1 (pour un matériau totalement endommagé).  $H$  est la fonction de Heaviside. Le coefficient  $\gamma$  représente le rapport entre le module de Young  $E$  et la pente de la courbe après le pic de traction. Dans la formulation de l'endommagement, le numérateur  $1-d$  est traditionnellement utilisé pour décrire l'endommagement, tandis que le dénominateur  $1+\gamma d$  définit le comportement adoucissant observé lors de la traction simple. Cette équation est continue et dérivable, ce qui permet de maintenir une distinction claire entre les états de traction et de compression. Compte tenu des propriétés de l'énergie libre, la contrainte est déterminée par la dérivation de l'équation (1.2), est exprimée comme suit :

$$\sigma_i = \frac{\partial \Phi(\varepsilon, d)}{\partial \varepsilon_i} = \lambda(\text{tr } \varepsilon) \left( H(-\text{tr } \varepsilon) + \frac{1-d}{1+\gamma d} H(\text{tr } \varepsilon) \right) + 2\mu\varepsilon_i \left( H(-\varepsilon_i) + \frac{1-d}{1+\gamma d} H(\varepsilon_i) \right) \quad (1.3)$$

Dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus, l'énergie libre est intrinsèquement liée aux forces thermodynamiques et aux variables d'endommagement, comme le souligne l'étude de Nedjar [38]. Ainsi, la relation entre l'énergie libre, les forces thermodynamiques, et les critères d'endommagement est définie ci-après :

$$F^d(\varepsilon, d) = -\frac{\partial \Phi(\varepsilon, d)}{\partial d} = \frac{1+\gamma}{(1+\gamma d)^2} \left( \frac{\lambda}{2}(\text{tr } \varepsilon)^2 H(\text{tr } \varepsilon) + \mu \sum_i \varepsilon_i^2 H(\varepsilon_i) \right) \quad (1.4)$$

$$f(F^d) = F^d(\varepsilon, d) - k \leq 0 \quad (1.5)$$

$k$  est le seuil d'endommagement. Pour simplifier, la variable  $\dot{d}$  représente la vitesse d'endommagement, qui est toujours positive ou nulle. L'évaluation de l'endommagement, exprimée en tant que variable scalaire, est déterminée par les conditions de Kuhn-Tucker :

$$\begin{cases} \dot{d} = 0 & \text{pour } f < 0 \\ \dot{d} \geq 0 & \text{pour } f = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Par conséquent, la variable scalaire  $d$  peut être utilisée pour représenter l'évolution de l'endommagement en fonction des différentes valeurs de  $\varepsilon$ . En combinant les équations (1.5) et (1.6), l'expression de  $d$  s'exprime comme suit :

$$F^d(\varepsilon, d) = 0 \implies \frac{1 + \gamma}{(1 + \gamma d)^2} \left( \frac{\lambda}{2} (tr \varepsilon)^2 H(tr \varepsilon) + \mu \sum_i \varepsilon_i^2 H(\varepsilon_i) \right) = k \quad (1.7)$$

$$d = \frac{1}{\gamma} \left( \sqrt{\frac{1 + \gamma}{k} \left[ \frac{\lambda}{2} (tr \varepsilon)^2 H(tr \varepsilon) + \mu \sum_i \varepsilon_i^2 H(\varepsilon_i) \right]} - 1 \right) \quad (1.8)$$

Durant l'évolution de l'endommagement, la valeur exacte de  $d$  ne peut pas être déterminée directement par l'équation (1.8). Considérons que  $d^-$  représente l'endommagement à l'issue de l'étape de calcul précédente et que  $d^+$  désigne l'endommagement à l'étape courante de l'itération. La valeur de  $d^+$  (c'est-à-dire  $d$ ) est déterminée à partir de la valeur  $d^{test}$  obtenue suivant l'équation (1.8) dans les trois cas possible :

- Si  $d^{test} < d^-$  : le seuil d'endommagement n'a pas été atteint, donc  $d^+ = d^-$ .
- Si  $d^- < d^{test} < 1$  : le seuil d'endommagement est atteint, ainsi  $d^+ = d^{test}$ .
- Si  $d^{test} > 1$  : cela indique un endommagement complet du matériau, par conséquent,  $d^+ = 1$ .

## 1.3 Dispositif expérimental et mesure du champ de déplacements

### 1.3.1 Dispositif Expérimental

Pour étudier et caractériser la matrice, des essais de compression et de fendage ont été mis en place afin de déterminer les paramètres mécaniques et d'identifier les réponses sous différents types de chargement. Afin d'obtenir des données expérimentales plus précises et riches, des techniques de mesure optique telle que la Corrélation d'Images Numériques (CIN) ont été mise en place pour réaliser les études des méthodes d'identification.

La figure 1.3(a) illustre le dispositif du système de compression, constitué d'une machine de presse et d'un Système d'Acquisition de Données (SAD). La station d'essai utilise une machine de presse universelle électromécanique, MTS Criterion Series 40 modèle 45, équipée de deux plateaux métalliques. Pour effectuer l'essai de compression, l'un des plateaux est fixé par le mors inférieur, tandis que l'autre plateau est relié au mors supérieur pour appliquer le chargement. Pendant l'essai, le déplacement de la traverse et la force appliquée sont collectés par

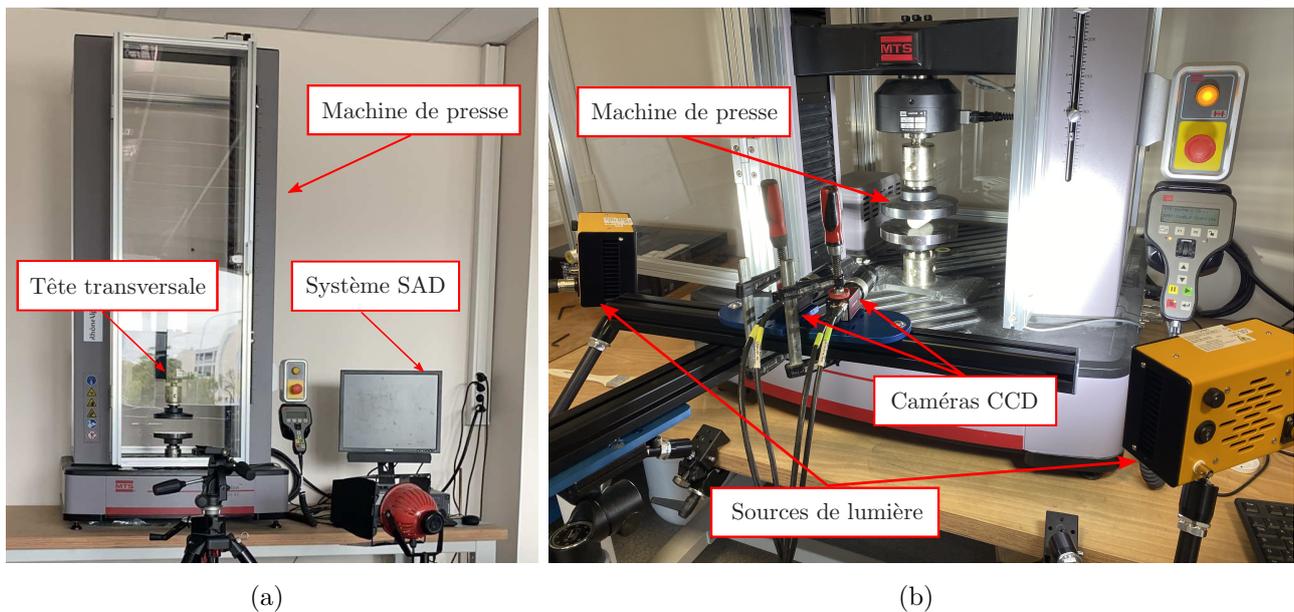


FIGURE 1.3 – L'équipements expérimentaux : (a) Machine de presse MTS ; (b) Équipement de CIN.

les capteurs de la machine et enregistrés dans le SAD. Pour pouvoir facilement à observer aux réponses mécaniques tel que la propagation des fissures, la vitesse de chargement est maintenue à 2 mm/min par le logiciel MTS TestSuite TW Elite avec la fréquence de mesure de 10 Hz.

La figure 1.3(b) illustre le dispositif du système de mesure par la CIN utilisé dans l'expérimentation. Ce système de mesure de CIN complet est composé d'une paire de caméras avec un dispositif à couplage de charge (CCD : Charge Coupled Device), d'un trépied, de sources lumineuses mobiles, et d'un SAD supplémentaire pour enregistrer les données mesurées. Dans ce système, deux caméras Mako G-507 équipées de capteurs Sony IMX264 et offrant une résolution de  $2464 \times 2056$  pixels sont utilisées pour mesurer le champ de déplacement surfacique. Un trépied a été installé devant l'échantillon pour stabiliser les caméras, et deux sources lumineuses LED blanches sont essentielles pour éclairer adéquatement la surface de l'échantillon, ce qui permet de minimiser l'impact du bruit sur les images et d'améliorer la précision des mesures. Pour le SAD dédié à la CIN, le logiciel Stéréo a été utilisé pour enregistrer les images capturées et les synchroniser avec les chargements appliqués à la même fréquence de mesure de 10 Hz.

### 1.3.2 Méthode de mesure CIN

La CIN est une méthode de mesure optique non-intrusive et avancée. Avec les caméras CCD, la CIN permet d'obtenir les champs de déplacements ou de déformations en surface en analysant les images digitales d'objets sous différents états de chargement. Selon le nombre de caméras utilisées, une pour des mesures en 2D et deux pour le 3D, la CIN peut fournir un champ de mesure surfacique adapté aux objectifs expérimentaux.

Cette technologie a été initialement proposée en 1982 pour mesurer les champs de déplacement en surface lors d'expériences mécaniques [39]. Cependant, en raison du développement de la technologie et du problème de l'équipement (capacité de caméra), la CIN n'a pas été largement adoptée. Depuis 2000, avec l'amélioration des capacités de calcul des ordinateurs, la performance accrue des caméras et la réduction des coûts des applications, le CIN a gagné en

popularité [40]. Des logiciels libres et commerciaux tels que Ufreckles [41] et Gom [42] ont été développés.

### 1.3.2.1 Avantages de la CIN

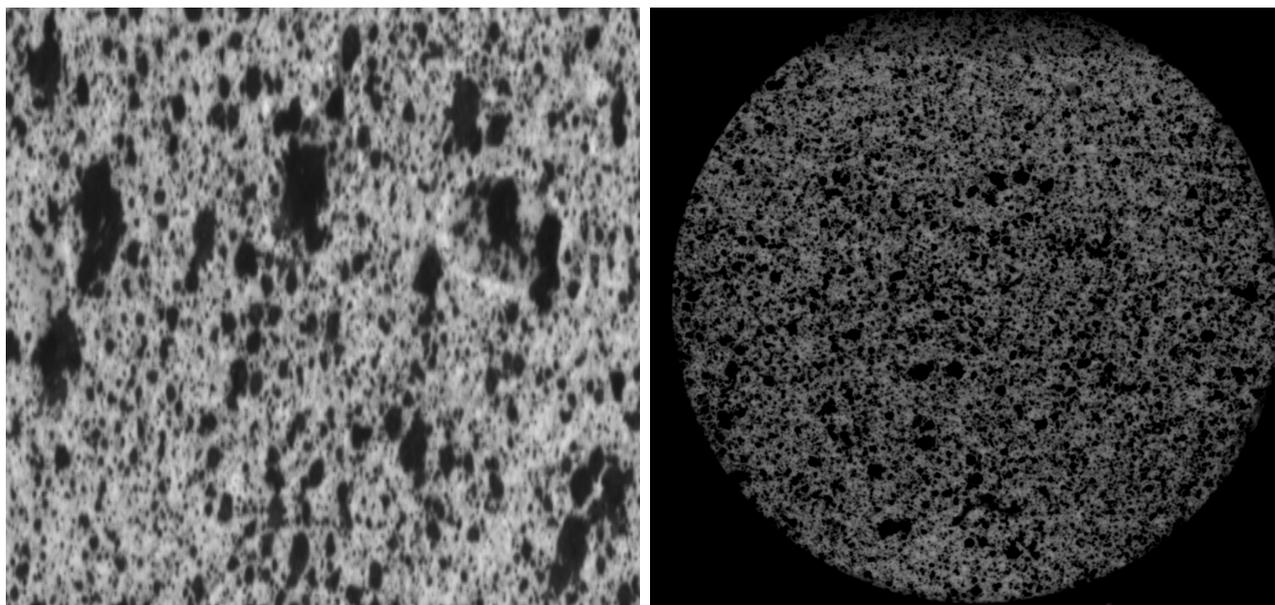
Par rapport aux méthodes de mesure traditionnelles, les caractéristiques et les propriétés de la CIN offrent des avantages incomparables :

- **Champs surfaciques** : Avec l'avancée des techniques de modélisation, telles que la Méthode des Éléments Finis (MEF), il est devenu crucial d'illustrer les phénomènes avec une grande précision. Les modèles complexes requièrent un grand nombre de points de mesure et de degrés de liberté pour valider leur fidélité et leur applicabilité, alors que les méthodes de mesure traditionnelles, comme le jauges des déformation, qui ne fournissent pas suffisamment de points de mesure. La technologie de CIN permet d'acquérir facilement des champs de déplacement ou de déformation en 2D ou 3D, jouant ainsi un rôle essentiel dans la validation des modèles et les problèmes inverses [43].
- **Méthode optique sans contact** : En tant que méthode de mesure optique sans contact, la CIN minimise les erreurs de mesure en évitant toute manipulation de l'échantillon. Cette caractéristique la rend particulièrement utile dans des contextes spécifiques, tels que la mesure de déformations sur des matériaux explosifs [44], offrant une alternative viable aux méthodes conventionnelles.
- **Précision** : Bien que la CIN n'aient pas été largement adoptée en raison de la précision des mesures dans les premières phases, mais les progrès technologiques ont considérablement amélioré la qualité des composants tels que les caméras. Et les logiciels ont été optimisés par le développement d'algorithmes avancés, tels que la méthode de Newton-Raphson, l'interpolation subpixel, et le ZNSSD (Zero-mean Normalized Sum of Squared Differences) [45, 46]. Ces améliorations ont significativement accru la précision des mesures obtenues par la CIN.

Ces avantages rendent la CIN particulièrement pertinente pour une large gamme d'applications et de recherches en ingénierie, telles que l'identification des paramètres élastiques et visco-élastiques, la détermination des conditions aux limites, et l'analyse de la propagation des fissures sur les matériaux fragiles et composites [47, 48, 49, 50, 51, 52].

### 1.3.2.2 Inconvénient de la CIN

Bien que les avantages de la CIN soient indéniables, ses inconvénients ne sont pas négligeables. La précision des données obtenues par la CIN dépend fortement de l'analyse des subpixels et du contraste de niveaux de gris entre les images de référence et les images déformées. Ainsi, la qualité des mouchetis sur la surface de mesure et la qualité de l'éclairage jouent un rôle crucial dans l'exactitude des mesures [53, 54]. Comme illustré dans la figure 1.4, les mauvaises qualités des mouchetis et d'éclairage peuvent entraîner des erreurs significatives sur le champ de déplacement surfacique. Pour garantir la précision des mesures, une préparation minutieuse des mouchetis sur la surface de mesure est nécessaire, ainsi qu'une vérification des niveaux de gris via le logiciel de mesure avant de commencer l'expérience. Par ailleurs, il est essentiel de disposer d'un environnement stable pour éviter l'influence de l'éclairage par des sources externes.



(a) Mauvaise qualité des mouchetis

(b) Mauvaise qualité d'éclairage

FIGURE 1.4 – Mauvaise qualité des images.

En plus des limites liées à l'environnement expérimental et à la préparation de l'échantillon, un autre inconvénient notable de la CIN est l'importance des erreurs de mesure observées aux frontières des objets. Ainsi, lors de l'application des mesures de la CIN, les champs de données mesurées aux frontières sont souvent négligés. Par exemple, les champs de déplacement surfacique aux frontières ne sont généralement pas pris en compte lors de l'identification pour garantir la robustesse des résultats obtenus.

Face à ces inconvénients, diverses recherches ont contribué à l'amélioration de la technique de CIN. Des ajustements tels que la modification du temps d'exposition et l'optimisation des niveaux de gris ont été proposés pour accroître la précision des mesures [55]. En outre, avec le développement intense de l'apprentissage automatique et de l'apprentissage profond ces dernières années, un certain nombre d'études ont permis de développer de nouvelles techniques de CIN en créant des modèles basés sur les données [56, 57, 58]. Ces innovations permettent de bien surmonter efficacement les effets des mauvaise qualité des mouchetis et d'éclairage sur les résultats obtenus, améliorer la précision des données sur les frontières.

Dans le contexte de cette étude sur les problèmes d'identification des paramètres mécaniques et les conditions aux limites, le champ de déplacement surfacique complet permet de fournir une richesse de détails afin d'améliorer les résultats identifiés. Par ailleurs, une préparation des échantillons, un environnement de laboratoire contrôlé et un bon traitement des données mesurées peuvent significativement atténuer les limites inhérentes à la méthode de CIN. Ainsi, dans cette thèse, toutes les données mesurées proviennent de l'utilisation de la CIN.

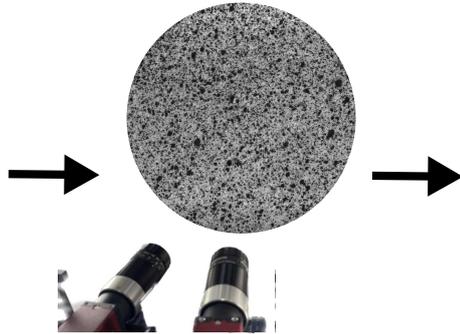
### 1.3.3 Mesure de champs surfaciques avec CIN

Le déroulement de la mesure avec CIN est détaillé dans la figure 1.5. Les différentes étapes sont : la préparation des échantillons, la mesure avec CIN et le traitement des images pour obtenir le champ de déplacements surfacique.

Préparation des échantillons



Mesure avec CIN



Traitement des images

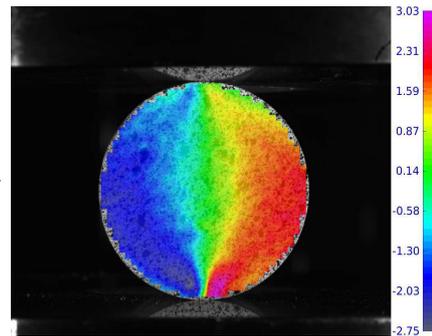


FIGURE 1.5 – Processus de la mesure avec CIN.

### 1.3.3.1 Préparation des échantillons

Pour réaliser l'expérimentation, deux étapes sont essentielles afin d'améliorer la précision des résultats de la mesure avant l'essai.

- **Application des mouchetis :** Pour une mesure précise du champ de déplacement surfacique avec la CIN, il est nécessaire de déposer des mouchetis aléatoires sur la surface de l'échantillon. Étant donné que la matrice ettringitique est de couleur blanche, les mouchetis sont créés avec de la peinture noire, comme illustré dans la figure 1.6. Pour assurer une surface de mesure propre, les échantillons doivent sécher au moins 12 heures avant l'essai.



FIGURE 1.6 – Réalisation des mouchetis sur l'échantillon avec la peinture noire

- **Positionnement de l'échantillon :** Pour garantir une application verticale et uniforme du chargement sur l'échantillon lors de l'essai, il est essentiel de le positionner au centre du plateau métallique du support. Le chargement non uniforme peut facilement induire le mouvement de corps rigide, au point d'affecter significativement les résultats de mesure. Cela est particulièrement vrai pour certains essais spéciaux, tel que l'essai de fendage, où le mouvement de corps rigide est difficile à éviter. Ainsi, pour assurer un positionnement

précis, des lignes supplémentaires ont été tracées au crayon sur l'échantillon en tenant compte de sa forme et de sa géométrie.

### 1.3.3.2 Mesure avec CIN

Pendant l'expérimentation, pour capturer le champ de déplacement surfacique, deux caméras CCD prennent des images sous différents angles, comme le montre la figure 1.7. L'objectif principal de ces deux caméras n'est pas de mesurer le champ de déplacement en 3D, mais plutôt d'obtenir des mesures surfaciques plus précises. Afin de capturer le maximum de pixels possible dans l'image pour couvrir une grande Région d'Intérêt, la distance entre la lentille et l'échantillon est donc un paramètre significatif à ajuster en tenant compte de la taille de l'échantillon. Néanmoins, une proximité excessive entre la lentille et la surface mesurée peut entraîner des distorsions aux frontières de la surface de mesure, en particulier lorsqu'une seule caméra CCD est utilisée. L'utilisation d'une seconde caméra CCD permet donc de minimiser cet effet de distorsion optique grâce à une meilleure calibration des mesures.

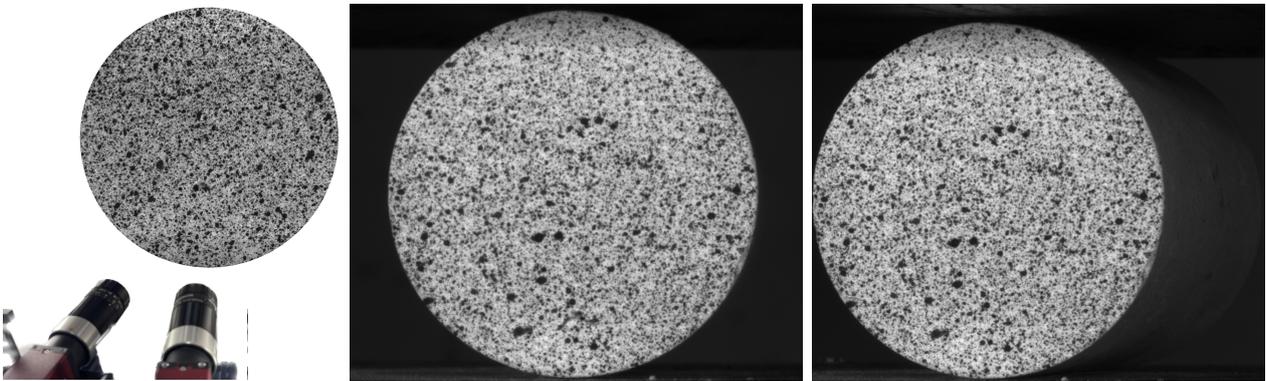


FIGURE 1.7 – Images prises par deux caméras CCD sous différents angles.

Avant de réaliser l'essai et la mesure avec CIN et afin de minimiser les erreurs de mesure, les caméras doivent être ajustées pour cibler le même point sur le spécimen. Cela se fait en ajustant légèrement le trépied et la position des caméras. Pour la même raison, les niveaux de gris sur les images obtenus par les deux caméras doivent être ajustés par le logiciel de CIN.

Le calibrage est essentiel pour déterminer précisément la taille et le champ de déplacement relatif de l'objet étudié, permettant d'identifier les positions relatives des caméras par rapport à l'échantillon. Comme le montre la figure 1.8, ce calibrage utilise une mire avec des points noirs régulièrement espacés sur un fond blanc, positionnée devant l'échantillon. Typiquement, un calibrage complet nécessite la capture de 12 à 16 images de cette mire, pris par les deux caméras depuis divers emplacements et angles.

Après ce calibrage, la paire de caméras CCD est utilisée pour capturer des images de l'échantillon soumis à diverses sollicitations, pendant que le système SAD synchronise ces images avec les chargements appliqués. Pour garantir une synchronisation adéquate, l'essai doit être commencé légèrement avant la mesure de CIN. Par ailleurs, une phase de précharge est définie lors de l'étape de chargement pour prévenir toute perte de données mesurées par la CIN. En fonction de la vitesse de chargement, un essai complet dure de 2 à 4 minutes. Afin de réduire le coût de calcul et de minimiser les influences extérieures, les données et images collectées durant la phase de précharge ne sont pas prises en compte dans le traitement final des images.

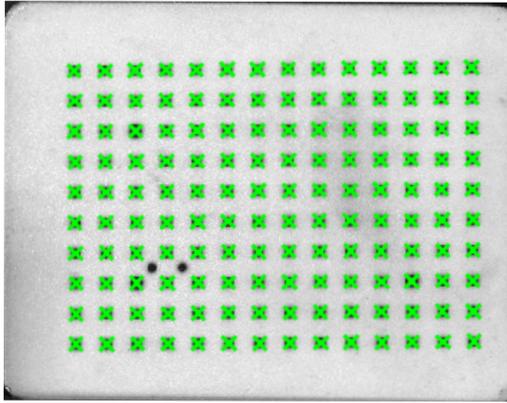


FIGURE 1.8 – Calibrage de la CIN avec la mire.

### 1.3.3.3 Traitement des images et analyse du champ mesuré

Après la mesure, les champs de déplacement sont obtenus par le logiciel Ufreckles avec les images capturées. Généralement, ils sont déterminés en résolvant l'équation du flot optique, formulée comme suit :

$$f(x) = g(x + U(x)) \quad (1.9)$$

Où  $f$  représente l'image de référence,  $g$  est l'image déformée,  $x$  désigne les coordonnées cartésiennes en pixels, et  $U$  est le champ à déterminer. Ufreckles résout cette équation en minimisant les erreurs de corrélation d'image à l'aide de la méthode des moindres carrés non linéaires pour déterminer  $U$ . L'erreur de corrélation est exprimée par l'équation suivante :

$$Er_{\text{corrélation}} = \sum_{i=1}^m |f(x_i) - g(x_i + U(x_i))|^2 \quad (1.10)$$

Dans ce logiciel, la MEF est implémentée pour analyser le champ mesuré  $U$ . Ainsi, la construction d'un maillage adéquat est indispensable pour analyser la mesure. Ufreckles permet de construire automatiquement le maillage en fonction de la distribution des niveaux de gris ou manuellement via des opérations booléennes utilisant des formes simples, telles que des rectangles ou des cercles. Pour des géométries et des tailles de Région d'Intérêt spécifiques, Ufreckles peut également importer des fichiers de maillage d'autres logiciels de MEF comme Abaqus. Selon la forme de l'échantillon, le maillage peut être constitué d'éléments triangulaires ou rectangulaires. En théorie, des mailles plus fines peuvent améliorer la précision des mesures, mais des mailles trop petites risquent de ne pas capturer suffisamment de subpixels et de mouchetis. Généralement, l'erreur de corrélation d'images ne doit pas excéder 10%. Par conséquent, la taille des éléments du maillage pour chaque échantillon n'est pas fixée ; elle doit être ajustée en fonction de la densité et de la taille des mouchetis sur la surface, ainsi que des erreurs de corrélation d'images calculées par le logiciel.

La minimisation de l'erreur, représentée par l'équation (1.10), permet de déterminer le champ de déplacement  $\mathbf{u}$ . Le champ de déformation  $\varepsilon$  sur la surface est alors calculé à partir de ce champ  $\mathbf{u}$ . Il est possible aussi d'extraire les déformations associées à des jauges virtuelles définies par l'utilisateur. Il est à noter que le champ de déformation élémentaire, déterminé à partir du champ de déplacement mesuré (subpixel), peut être affiné par l'ajout d'opérations de lissage pour augmenter la fiabilité des données. De plus, Ufreckles offre également des options supplémentaires telles que le dédoublement des nœuds pour incorporer des fissures dans le

maillage, l'élimination du mouvement de corps rigide, pour optimiser et améliorer les données mesurées.

## 1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit le contexte de l'étude, la loi de comportement utilisée pour décrire la matrice ettringitique, et l'utilisation de la méthode de Corrélation d'Images Numériques (CIN).

Le modèle de Badel a été retenu pour la suite des travaux de cette thèse, du fait de sa simplicité, un seul paramètre  $d$  permet de décrire l'endommagement et le comportement dissymétrique des matrices minérales étudiés.

Grâce à sa capacité à fournir des champs de déplacement surfaciques suffisamment précis, la technologie CIN enrichit les méthodes d'identification. Nous avons donc présenté le processus de mesure et les dispositifs expérimentaux de manière générale. Les détails plus spécifiques seront discutés dans les chapitres suivants, en combinant les divers essais réalisés.

# Chapitre 2

## Identification des paramètres mécanique bi-modules : Méthode de recalage avec la solution semi-analytique

*Ce chapitre a pour objectif de présenter la méthode d'identification des paramètres mécaniques dans la phase élastique d'un matériau fragile bi-module, telle que la matrice ettringitique. D'abord, la théorie de la loi de comportement bi-module est introduite, suivie d'une description des différents essais mis en œuvre pour déterminer les propriétés mécaniques du matériau : l'essai de compression et l'essai de fendage. Les spécimens ainsi que les détails des mesures effectuées à l'aide de la CIN sont également présentés. Par la suite, diverses méthodes d'identification sont examinées afin de déterminer les modules d'Young et les coefficients de Poisson en traction et en compression. À travers l'analyse et le développement des états de contrainte et le concept de bi-module, une solution semi-analytique du champ de déplacement surfacique est proposée. Cette solution a été utilisée dans la méthode de recalage pour identifier les paramètres bi-module, ce qui est validée à l'aide de données synthétiques. Enfin, les propriétés mécaniques de la matrice ettringitique à 42 jours sont évaluées en utilisant les données issues de l'essai de compression et de l'essai de fendage. Les résultats obtenus permettent de dresser une conclusion et d'ouvrir des perspectives futures.*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Loi de comportement bi-module</b>	<b>20</b>
<b>2.2</b>	<b>Expérimentation</b>	<b>22</b>
2.2.1	Essai de compression	22
2.2.2	Essai de traction	23
2.2.3	Échantillon	26
2.2.4	Mesure avec CIN	27
<b>2.3</b>	<b>Quelques méthodes d'identifications</b>	<b>29</b>
2.3.1	Méthode de recalage par éléments finis	29
2.3.2	Méthode des champs virtuels	34
<b>2.4</b>	<b>Solution semi-analytique du fendage</b>	<b>34</b>
2.4.1	Champ de contrainte	35
2.4.2	Loi de Hooke généralisée	36
2.4.3	Champ de déplacement	38

2.4.4	Validation . . . . .	41
<b>2.5</b>	<b>Recalage avec la solution semi-analytique . . . . .</b>	<b>44</b>
2.5.1	Principe de l'identification . . . . .	44
2.5.2	Analyse de trois cas de recalage . . . . .	44
2.5.3	Procédure de la méthode de recalage . . . . .	47
2.5.4	Validation avec des données synthétiques . . . . .	49
<b>2.6</b>	<b>Application avec les données expérimentales . . . . .</b>	<b>60</b>
2.6.1	Expérimentation avec la matrice ettringitique . . . . .	61
2.6.2	Paramètres mécaniques identifiées . . . . .	67
<b>2.7</b>	<b>Conclusion et Perspective . . . . .</b>	<b>69</b>

## 2.1 Loi de comportement bi-module

La matrice minéral est généralement considérée comme un matériau isotrope. Toutefois, dans le cas de matériaux fragiles tels que le mortier ou ceux similaires aux roches, la présence de nombreux défauts primaires est possible, en raison de la composition interne du matériau et de facteurs externes tels que l'humidité et le temps de séchage [31]. De ce fait, ces matériaux peuvent manifester une réponse dissymétrique en traction et en compression, illustrée par le comportement bi-module comme le montre la figure 2.1. Ce comportement est caractérisé par différents paramètres mécaniques : le module de Young en traction  $E_t$ , le module de Young en compression  $E_c$ , le coefficient de Poisson en traction  $\nu_t$ , le coefficient de Poisson en compression  $\nu_c$ , la résistance à la traction  $\sigma_t$  et la résistance à la compression  $\sigma_c$ . La réponse constitutive macroscopique des matériaux bi-module est souvent décrite en distinguant les valeurs de traction/compression des modules élastiques en fonction de certaines mesures de contrainte ou de déformation pertinentes.

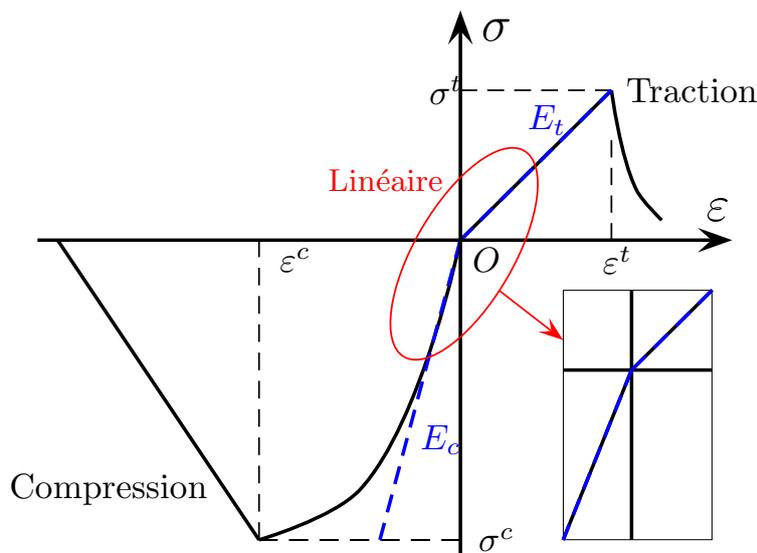


FIGURE 2.1 – Loi de comportement du matériau bi-modules : la contrainte en fonction de la déformation sous le chargement uniaxial.

La théorie du bi-module a été initialement proposée par Ambartsumyan dans [59, 60] pour décrire le comportement différentiel selon les directions principales dans l'analyse mécanique

des matériaux. Contrairement aux matériaux anisotropes ou orthotropes, un matériau isotrope bi-module est caractérisé par des propriétés uniformes dans toutes les directions, mais présente des réponses mécaniques différentes en traction et en compression. La principale cause de ces propriétés de bi-module est liée à la composition interne du matériau. Dans les domaines de l'ingénierie et de l'industrie, des matériaux tels que le béton, le mortier, la céramique, la roche, etc., peuvent exhiber des propriétés de bi-modules.

Dans le cadre du modèle à la matrice minérale, le comportement bi-module peut être illustré en fixant les variables d'endommagement, tel que dans le modèle de Badel discuté dans la section 1.2.2. Comme le montre l'application dans l'étude de Andrieux et Baranger [61], avec une valeur constante de la variable scalaire d'endommagement  $d$  dans l'équation des contraintes (1.3) au cours de la phase linéaire, le matériau manifeste un comportement dissymétrique en traction et en compression.

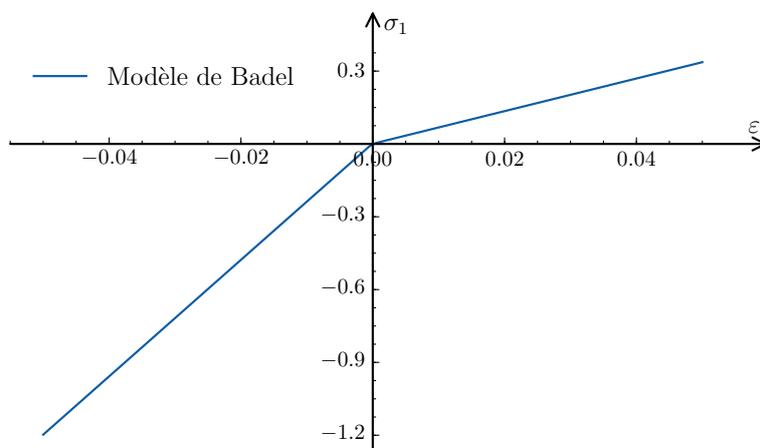


FIGURE 2.2 – Comportement dissymétrique en traction et en compression avec le modèle de Badel.

Afin de mieux illustrer ce phénomène dans le modèle de Badel, un exemple simple a été utilisé. En considérant un matériau isotrope fragile, avec un Module de Young  $E = 12$  GPa, un coefficient de Poisson  $\nu = 0.25$ , et un paramètre  $\gamma$  décrivant la relation entre  $E$  et la pente du post-pic en traction est fixé à 5. La figure 2.2 représente la contrainte principale  $\sigma_1$  en fonction de la déformation principale  $\epsilon_1$  dans la phase linéaire lorsque la variable d'endommagement  $d = 0.3$ . Selon cette figure, les valeurs de  $E$  en traction et en compression sont totalement différentes, ce qui est similaire à la description de la loi de comportement bi-module dans la figure 2.1. La figure 2.3 illustre le comportement dans le cas d'un essai bidimensionnel pour 3 cas d'endommagement.

Ainsi, la présence d'une valeur non nulle pour  $d$  indique que le matériau contient des microfissures, ce qui entraîne une perte de rigidité aussi bien en traction qu'en compression. Par conséquent, ce modèle permet d'illustrer le comportement bi-module en définissant une valeur constante de  $d$  dans la phase linéaire.

En considérant la difficulté associée au comportement non linéaire induit par l'évolution de l'endommagement, sa modélisation numérique et la convergence des calculs, plusieurs auteurs ont proposé des modèles simplifiés en se basant sur l'hypothèse d'un endommagement constant, permettant ainsi de définir une loi linéaire s'appliquant à certains essais mécaniques tel que le fendage, voir [62, 63, 64, 65]. Dans ce cadre, une loi de comportement linéaire est explicitement définie en se basant sur les modules de Young et les coefficients de Poisson différenciés en traction

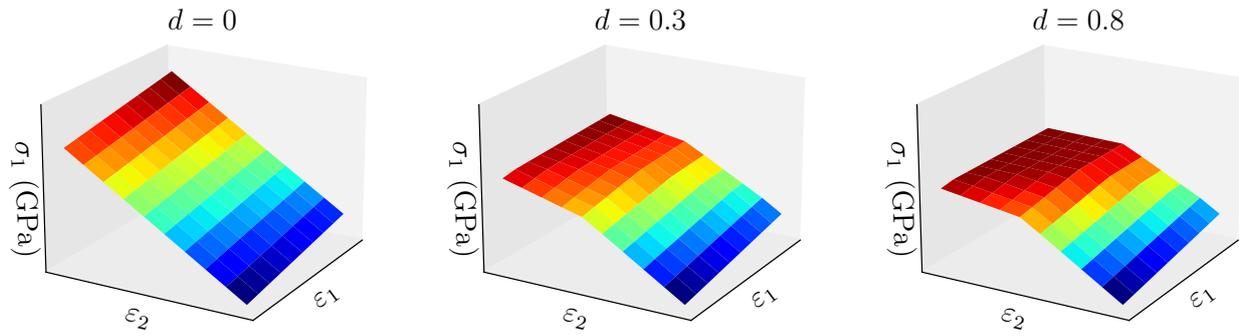


FIGURE 2.3 – Relation entre la variable d’endommagement  $d$  et le comportement dissymétrique en traction et en compression.

et en compression. Cette démarche peut s’appliquer sur des cas où la réponse mécanique peut être définie analytiquement comme pour le fendage, par exemple le modèle de Hondros [66].

## 2.2 Expérimentation

Afin de déterminer les propriétés mécaniques des matériaux étudiés, il est essentiel de réaliser divers essais permettant d’identifier les paramètres correspondants. Généralement, selon la nature spécifique des paramètres à mesurer, au moins deux types d’essais se révèlent indispensables.

### 2.2.1 Essai de compression



FIGURE 2.4 – Essai de compression.

Comme illustré par la figure 2.4, l’essai de compression est sans doute l’expérience la plus conventionnelle et la plus couramment utilisée pour mesurer la résistance à la compression  $\sigma_c$ , et le module de Young en compression  $E_c$ . Les échantillons utilisés pour ces tests sont généralement de forme cylindrique ou cubique. La résistance à la compression, en fonction de la surface de la section transversale, peut s’exprimer par la formule suivante :

$$\sigma_c = \frac{F_{rupture}}{\pi R^2} \quad (2.1)$$

où  $F_{rupture}$  représente la force appliquée au moment de la rupture de l'échantillon,  $R$  est le rayon de l'éprouvette cylindrique. De même, le module de Young en compression est déterminé à partir de la pente de la courbe contrainte-déformation ou de la courbe force-déplacement, obtenue grâce à un extensomètre ou à la traverse de la machine de presse.

### 2.2.2 Essai de traction

Pour mesurer la résistance à la traction  $\sigma_t$ , deux méthodes traditionnelles sont couramment employées : l'essai de traction directe et les essais indirects, comprenant l'essai de fendage et l'essai de flexion. Les résultats obtenus avec ces méthodes sur différents matériaux fragiles ont incité certains chercheurs à examiner les différences entre ces trois types d'essais. Cette analyse s'est faite tant sur le plan expérimental que par modélisation numérique, comme en témoignent les travaux suivants [67, 68, 69].

#### Essai de traction direct

L'essai de traction direct est l'approche la plus traditionnelle pour mesurer la résistance à la traction, offrant des mesures précises dans des conditions idéales. Toutefois, cet essai est particulièrement délicat à mettre en œuvre. Les échantillons de cet essai sont généralement de forme cylindrique ou prismatique. Dans cet essai, les deux extrémités de l'échantillon sont collées à des mors avec une colle dont la résistance à la traction est supérieure à celle du matériau testé. À mesure que la charge augmente, la traction se transmet des mors vers le centre de l'éprouvette jusqu'à sa rupture.

Bien que cet essai puisse déterminer la résistance à la traction de manière intuitive et précise dans le cas idéal, il tend à être remplacé progressivement par d'autres méthodes expérimentales en raison de la grande dispersion des résultats obtenus. Les ruptures surviennent souvent au niveau des zones de collage, dues à une concentration de contraintes, ou en raison d'une mauvaise installation des mors. En outre, les ruptures peuvent également se produire sur les bords latéraux de l'éprouvette, affectées par des flexions non prévues.

#### Essai de flexion

L'essai de flexion fait généralement référence à la flexion sur trois ou quatre points. Lors de la flexion, en considérant la ligne neutre, une partie du matériau subit un effet de compression tandis que l'autre partie subit un effet de traction. Le matériau se rompt lorsque la limite de la résistance à la traction est atteinte.

L'efficacité de l'essai de flexion fait l'objet de controverses. Certaines études soutiennent que les valeurs de résistance à la traction obtenues sont dispersées et systématiquement supérieures à celles obtenues par traction directe [70, 71]. En revanche, d'autres recherches ont constaté que, après ajustement pour l'effet de taille, l'essai de flexion peut fournir des valeurs de résistance comparables à celles de la traction directe. Ces études avancent que l'essai de flexion à quatre points est particulièrement approprié pour des matériaux fragiles tels que le marbre [72].

#### Essai de fendage

L'essai de fendage, une forme d'essai de traction indirect, est parmi les méthodes de base les plus répandues. Introduit en 1943 pour évaluer la résistance à la traction du béton [73], cet essai

a ensuite été largement appliqué à divers matériaux fragiles [74, 75, 76]. Grâce à sa simplicité et facilité de mise en œuvre, l'essai de fendage sert également à étudier les propriétés et le comportement des roches, générant un riche corpus d'études analytiques et de modélisations numériques [77, 78, 79, 80].

Typiquement, l'échantillon est de forme discale ou cylindrique. Durant l'essai, des pressions sont appliquées par deux plateaux sur les faces latérales de l'échantillon, concentrant l'effort de compression au centre. Parallèlement, le centre subit une traction maximale due à l'effet du coefficient de Poisson. Connaissant la solution analytique de la répartition de contraintes de l'essai de fendage, il est alors possible de déduire la contrainte à la rupture à partir de la force appliquée et des dimensions de l'échantillon. Ainsi, la formule de la résistance à la traction s'écrit :

$$\sigma_t = \frac{F_{rupture}}{\pi h R} \quad (2.2)$$

Étant donné la nature fragile du matériau, sa résistance à la traction est souvent très inférieure à celle à la compression, ce qui conduit théoriquement à l'apparition de la première fissure au centre sous l'effet de la traction comme le montre la figure 2.5

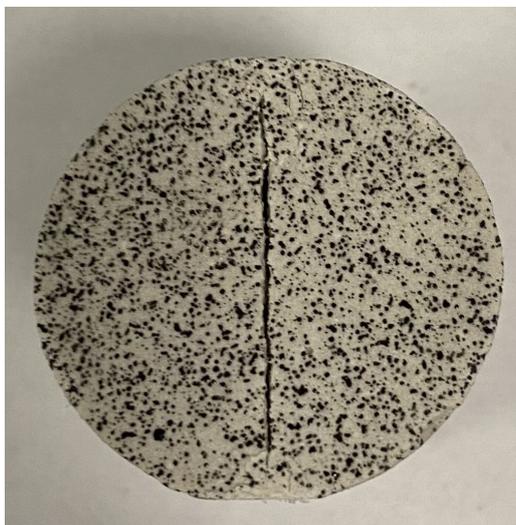


FIGURE 2.5 – Apparition de la fissure dans l'essai de fendage.

Bien que l'essai de fendage présente de nombreux avantages, tels que la facilité de manipulation, le faible coût, la bonne répétabilité des résultats, et la possibilité d'utiliser de petits échantillons, mais ses inconvénients ne sont pas à négliger. Certaines études ont révélé que la résistance à la traction mesurée par l'essai de fendage est généralement légèrement inférieure à celle obtenue par l'essai de traction directe. Cette différence s'explique par le fait que la première fissure apparaît généralement autour des zones de chargement, et non au centre de l'échantillon, entraînant une réduction de la résistance à la traction [81]. De plus, certains auteurs ont observé que le rapport de résistance à la traction entre ces deux essais varie selon les matériaux étudiés [77, 82], une variabilité attribuée aux caractéristiques internes des matériaux fragiles, comme les défauts et la non-homogénéité [68]. Afin d'améliorer la précision des résultats de l'essai de fendage, des modifications des géométries des plateaux de chargement ou des angles de chargement ont été proposées [83, 84, 85].

La matrice ettringitique, en tant que matrice minérale, se caractérise par une composition simple et des propriétés isotropes. Théoriquement, dans un essai de fendage, la première fissure devrait apparaître au centre de l'échantillon, suggérant ainsi que le rapport de résistance à la

traction entre l'essai direct et l'essai de fendage devrait être proche de 1, même en présence de défauts potentiels. De plus, la géométrie des éprouvettes est identique dans ces deux types d'essais, ce qui non seulement économise des ressources mais contribue également à réduire les erreurs de mesure dues à l'état de séchage ou à la composition matérielle de l'échantillon.

Étant donné les exigences élevées en termes de précision des résultats pour l'essai de traction direct, ainsi que les complications et difficultés associées à la préparation et à la manipulation des échantillons pour l'essai de flexion, l'essai de fendage est préconisé dans cette étude. Il permet de déterminer de manière efficace la résistance à la traction, le module de Young, et le coefficient de Poisson tant en traction qu'en compression.

Actuellement, diverses études se sont penchées sur l'utilisation de méthodes d'identification des paramètres lors de l'essai de fendage, en exploitant différentes technologies de mesure. Jianhong et al. [86] illustre l'approche traditionnelle : deux jauges de déformation ont été collées dans la direction horizontale au centre du disque, de chaque côté, pour recueillir les données de déformation en traction. Pour garantir l'application d'une charge ponctuelle sur l'échantillon, deux bar métallique sont employés. De manière similaire, Wei et al. [87] ont combiné l'usage de jauges de déformation et d'un compteur de déplacement laser pour mesurer les champs de déformation et de déplacement horizontal, dans le but d'identifier les paramètres mécaniques anisotropes. Les auteurs de cette recherche suggèrent que le modèle dissymétrique traction-compression offre une meilleure explication du comportement expérimental des roches. Par ailleurs, Han et al. [88] ont entrepris une analyse numérique pour évaluer l'impact du rapport entre la taille de la jauge de déformation et celle de l'échantillon sur la précision des mesures de déformation. Il ressort de cette étude que plus la jauge de déformation est grande par rapport à l'échantillon, plus les mesures de déformation sont moins précises. Cette méthode de mesure impose des exigences strictes pour l'essai de fendage, ajoutant ainsi des défis supplémentaires. En outre, la présence de petits mouvements de corps rigide peut rendre les données recueillies par les jauges de déformation moins fiables.

L'adoption croissante de la CIN en tant que méthode de mesure privilégiée a révolutionné l'identification des paramètres mécaniques des matériaux. Liu [89] ont employé la CIN pour capturer le champ de déplacement surfacique lors d'essais de fendage. En s'appuyant sur le modèle de Hondros [66], ils ont formulé des expressions pour le champ de déplacement le long des deux axes principaux, permettant d'identifier le module de cisaillement  $\mu$  et le module d'élasticité isostatique  $k_{ei}$  pour un matériau mono-module : la résine époxy. De manière similaire, en utilisant l'expression de l'état de contrainte dérivée dans l'étude de Jianhong et al. [86], Ye et al. [90] a suggéré l'exploitation des champs de déplacement axial pour identifier les paramètres mécaniques des matériaux bi-modaux lors d'essais de fendage sous charge ponctuelle. Les chercheurs ont évalué leur méthode d'identification en utilisant trois types de données : les déplacements axiaux suivant l'axe  $x$ , suivant l'axe  $y$ , et les déplacements combinés suivant les axes  $x$  et  $y$ . Pour confirmer leur approche, ils ont recouru aux données fournies par l'étude de Liu [89] ainsi qu'à celles d'autres expériences, concluant que l'identification basée sur les déplacements le long des deux axes simultanément conduit à des résultats plus précis et fiables. Cependant, ces études ont supposé que le matériau bi-module possédait des modules de Young distincts ( $E_c \neq E_t$ ) mais partageait le même coefficient de Poisson ( $\nu_c = \nu_t$ ). Prolongeant l'analyse de Ye et al. [90], Patel et Martin [91] ont avancé que le coefficient de Poisson pourrait également manifester un caractère dissymétrique. S'appuyant sur la relation symétrique de la loi de Hooke,  $\nu_c E_t = \nu_t E_c$ , ils ont utilisé les champs de déplacement le long des deux axes pour

identifier les paramètres mécaniques du granit du Lac-du-Bonnet.

Pour s'adapter aux différents types de chargement (et aux diverses géométries de plateau de chargement) et pour estimer précisément les déplacements autour de la zone de chargement, Hong et al. [92] ont élaboré des solutions analytiques le long des deux axes principaux, s'appuyant sur le modèles théorique de Ma [93, 94]. En intégrant les conclusions d'études antérieures, les auteurs ont procédé à une comparaison des résultats d'identification obtenus à partir de différents types de données : le champ de déplacement suivant les deux axes diamétraux, le champ de déformation suivant les deux axes diamétraux, et le champ de déformation au centre de l'échantillon. L'analyse des données synthétiques, comprenant 5% de bruit blanc, a révélé que l'utilisation du champ de déplacement suivant les deux axes diamétraux offre les résultats d'identification les plus précis. Ce résultat souligne l'efficacité de cette approche pour une évaluation fidèle des paramètres mécaniques, même en présence de niveaux significatifs de bruit dans les données.

Bien que l'analyse des champs de déplacement suivant les deux axes diamétraux offre des avantages significatifs pour une identification efficace et fiable, la CIN possède la capacité unique de fournir un champ de déplacement surfacique plus complet. Cela permet d'accroître la précision des résultats et de renforcer leur résistance à l'interférence. En conséquence, les paramètres mécaniques de la matrice minérale ont été déterminés par la méthode d'identification avec le champ surfacique obtenu par la mesure de CIN.

### 2.2.3 Échantillon

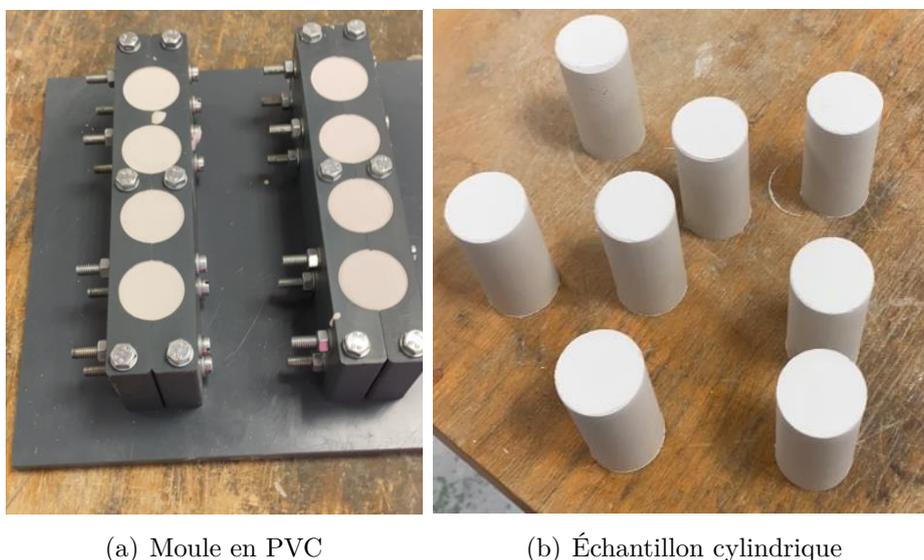


FIGURE 2.6 – Préparation des échantillons.

Pour les essais de compression et de fendage, la géométrie des échantillons est identique, et ceux-ci sont fabriqués à l'aide du même moule en PVC, comme le montre la figure 2.6(a). Afin de prévenir le phénomène de distorsion hors du plan dans l'essai de fendage, il est crucial que la hauteur de l'éprouvette soit supérieure à son diamètre. Par conséquent, compte tenu de la taille des plateaux métalliques de la presse, le rayon de l'échantillon est fixé à  $R = 15$  mm et la hauteur à  $h = 53$  mm. Les images des échantillons après démoulage sont présentées dans la figure 2.6(b).

Pour garantir la stabilité des réactions internes pendant la prise et la qualité de la production des échantillons, après le coulage de la matrice dans les moules, ceux-ci sont scellés avec du film plastique afin d'éviter l'évaporation de l'eau. De plus, tous les échantillons sont conservés dans un environnement à humidité et température relativement stables. Pour faciliter le démoulage et éviter que les échantillons ne collent pas aux moules, une fine couche d'huile est appliquée sur la surface intérieure des moules avant le coulage de la matrice.

## 2.2.4 Mesure avec CIN

Grâce au potentiel offert par la technologie de CIN, l'analyse du champ de déplacement surfacique permet une meilleure compréhension du comportement des matériaux lors des essais de compression et de fendage. Cependant, la géométrie cylindrique des échantillons introduit des erreurs de corrélation significatives dans l'analyse 2D du champ de déplacement lors de l'essai de compression, lorsque la mesure est effectuée avec deux caméras CCD. De plus, les déplacements obtenus par la traverse de la machine de presse ne sont pas d'une précision optimale, du fait que le plateau de support peut légèrement bouger sous l'effet de la charge appliquée, influençant ainsi les courbes force-déplacement obtenues. En outre, il est possible de déterminer le module de Young et le coefficient de Poisson en compression également via l'essai de fendage. Par conséquent, l'essai de compression est principalement utilisé pour évaluer la résistance à la compression.

Lors de l'essai de fendage, compte tenu de la petite taille de l'échantillon et de la spécificité de la mesure avec CIN, plusieurs précautions doivent être prises. Une mire de petite taille, comme illustré dans la figure 2.7, comportant  $14 \times 10$  points noirs sur un fond blanc et un espacement de 3 mm entre chaque point, a été sélectionnée pour la calibration. La mire, de faible épaisseur pour être placée devant l'échantillon sans encombrement, influence néanmoins légèrement le champ de déplacement en surface en raison de ses dimensions. Par conséquent, une correction du champ de déplacement surfacique est réalisée en comparant les dimensions exactes de l'échantillon avec celles mesurées, permettant ainsi d'ajuster les résultats obtenus par CIN.

En outre, la petite taille des échantillons impose une attention particulière à la distance entre les caméras et l'échantillon lors de l'essai de fendage avec mesure de CIN. En effet, une distance trop faible risque de provoquer l'adhérence de la poussière générée par la rupture de l'échantillon sur les lentilles, entraînant des erreurs de mesure, et dans le pire des cas, endommageant potentiellement les caméras. À l'inverse, une distance trop élevée ne permet pas de capter la Région d'Intérêt adéquate, ce qui compromet la précision des résultats de mesure. Après plusieurs essais, une distance optimale entre les lentilles et l'échantillon a été établie entre 20 et 30 cm, équilibrant ainsi les risques de contamination des lentilles et la nécessité d'une résolution d'image suffisante.

Lors de l'analyse du champ de déplacement surfacique, la qualité et le nombre de mouchetis sur la surface mesurée influencent directement la taille des éléments dans le maillage, qui peut varier entre 30 et 50 pixels. Cette variation se manifeste sous deux formes principales du maillage : triangulaire (T3) et rectangulaire (Q4), comme illustré sur la figure 2.8. Le maillage T3 est utilisé pour déterminer avec précision la taille de l'échantillon mesuré et le champ de déplacement surfacique complet, tandis que le maillage Q4 est préféré pour extraire de manière régulière le champ de déplacement, ce qui est particulièrement utile pour alimenter certaines

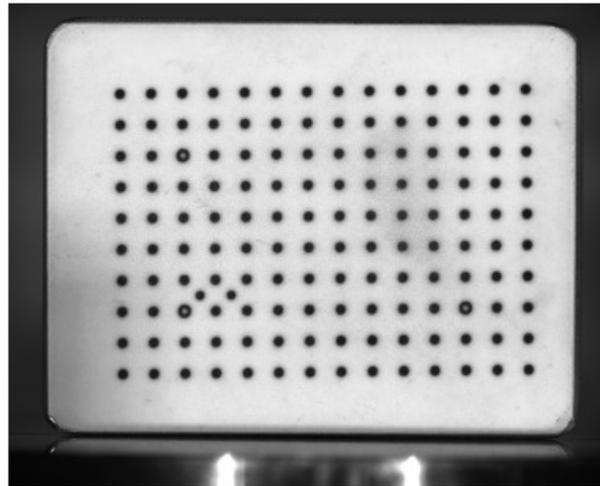
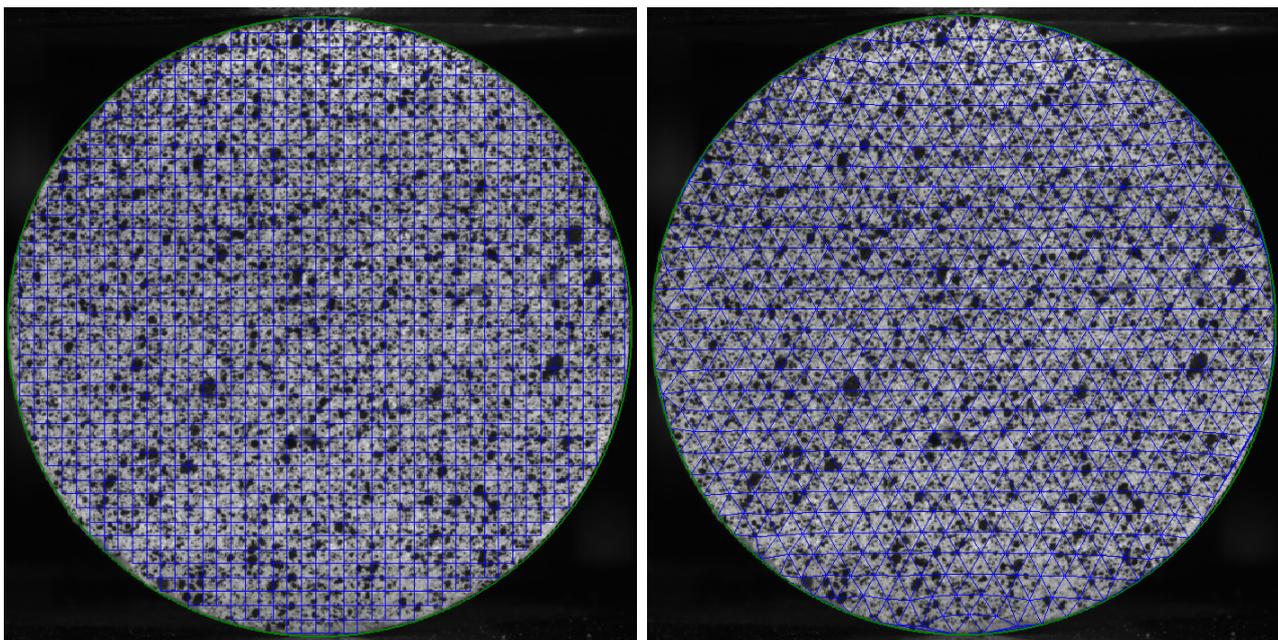


FIGURE 2.7 – La mire utilisée dans l’essai de fendage avec la mesure de CIN.

méthodes d’identification. Le choix du type de maillage dépend donc étroitement de l’objectif spécifique de l’étude.



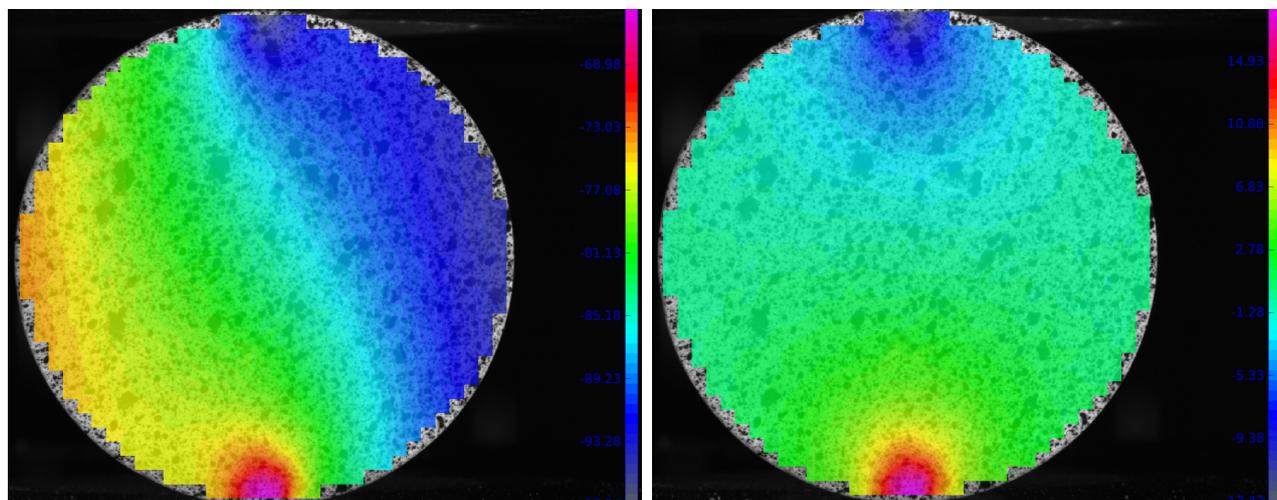
(a) Forme Q4 avec la taille de l’élément 30

(b) Forme T3 avec la taille de l’élément 50

FIGURE 2.8 – Forme et taille de l’élément sur le maillage de CIN.

Pour optimiser l’analyse du champ de déplacement dans l’essai de fendage, l’élimination du mouvement de corps rigide (MCR) est cruciale. Malgré une préparation soignée, la rotation de l’échantillon sous chargement peut se produire de manière quasi imperceptible. L’application de la fonction d’élimination du MCR permet d’éliminer efficacement ces petites rotations invisibles. Cependant, en l’absence d’une préparation adéquate, un MCR significatif pourrait survenir, et la fonction d’élimination pourrait ne pas compenser totalement les erreurs de corrélation, affectant ainsi la fiabilité du champ de déplacement mesuré. De plus, comme pour l’es-

sai de compression, des mouvements involontaires du plateau du support métallique peuvent également se produire pendant l'essai. Bien qu'elle soit supposée rester immobile, elle peut effectivement bouger légèrement sous l'effet de la charge appliquée, ce qui peut influencer la précision des mesures.



(a) Champ de déplacement avec MCR

(b) Champ de déplacement après traitement du MCR

FIGURE 2.9 – Comparaison entre le champ de déplacement avec/sans MCR.

L'utilisation de la CIN pour mesurer les champs de déplacement surfaciques lors de l'essai de fendage, fournit des informations suffisamment riches pour permettre la détermination des paramètres mécaniques de la loi de comportement dissymétrique de la matrice minérale étudiée.

## 2.3 Quelques méthodes d'identifications

La capacité de la CIN à fournir un champ de mesure surfacique complet enrichit considérablement les détails expérimentaux disponibles, jouant un rôle crucial dans l'identification des paramètres mécaniques des matériaux. Dans ce contexte, plusieurs méthodes d'identification ont été particulièrement mises en avant et sont désormais largement adoptées dans diverses expérimentations. Parmi ces méthodes, on trouve la méthode de recalage par éléments finis et la méthode de champs virtuels. Ces approches ont contribué significativement à l'avancement de la recherche dans le domaine, comme le soulignent diverses études [95, 96, 97, 98].

### 2.3.1 Méthode de recalage par éléments finis

Dans le domaine de la mécanique des solides, la Méthode des Éléments Finis (MEF) est reconnue comme l'une des méthodes les plus répandues et efficace pour la modélisation numérique du comportement des matériaux. Associée à cette approche, la méthode de recalage par éléments finis (FEMU : Finite Element Model Updating) est fréquemment utilisée pour identifier les paramètres mécaniques des matériaux [99, 100, 48]. Contrairement à d'autres méthodes d'identification, la FEMU a la capacité d'exploiter l'intégralité des champs de données surdéterminées, offrant ainsi la possibilité de modéliser et d'analyser des expérimentations complexes. Dans le logiciel CODE\_ASTER, développé principalement par l'entreprise EDF [101], l'utilisation de la FEMU est facilitée par la commande MACR\_RECAL. De ce fait, la FEMU

a initialement été choisie pour l'identification des paramètres mécaniques de la matrice élastique avec les données mesurées pendant l'essai de fendage, en supposant que le matériau ne présente pas de dissymétrie du comportement.

### 2.3.1.1 Principe de la FEMU dans CODE\_ASTER

Le principe de la méthode d'identification repose sur la définition des paramètres  $\Theta$  à identifier. Soit  $U^{MEF}$  le champ de grandeurs calculé à l'aide de la MEF avec les paramètres  $\Theta$ , et  $U^{exp}$  les grandeurs expérimentales mesurées. L'objectif de la commande MACR\_RECAL est de trouver le jeu de paramètres  $\Theta^*$  qui minimise les écarts entre les grandeurs calculées  $U^{MEF}$  et les grandeurs mesurées  $U^{exp}$  :

$$(\Theta^*) = \arg \min_{\Theta} J \equiv \frac{1}{2} \left\| 1 - \frac{U^{exp}}{U^{MEF}} \right\|^2 \quad (2.3)$$

Où  $J$  est la fonction objective mesurant les écarts entre  $U^{FEM}$  et  $U^{exp}$ . Pour minimiser cette fonction selon la méthode des moindres carrés, l'utilisation de l'algorithme de Levenberg-Marquardt [102] est suggérée par défaut dans MACR\_RECAL, assurant ainsi que les variables  $\Theta^*$  soient identifiées dans un intervalle raisonnable.

La procédure de mise en œuvre de la commande MACR\_RECAL est représentée en annexe A. Il est important de souligner qu'à cause la précision de mesure, la taille des éléments sur le maillage de CIN ne peut pas être aussi petit que le maillage de MEF. Cela entraîne une discordance entre les maillages utilisés pour la MEF et pour la CIN, rendant impossible l'utilisation directe du maillage expérimental dans la méthode de FEMU. Pour surmonter ce défi, une projection du champ de déplacement du maillage de MEF sur le maillage de CIN est nécessaire, comme illustré dans la figure 2.10. Cette étape assure que les données issues de la CIN puissent être intégrées de manière efficace dans l'analyse, permettant ainsi une identification plus précise des paramètres.

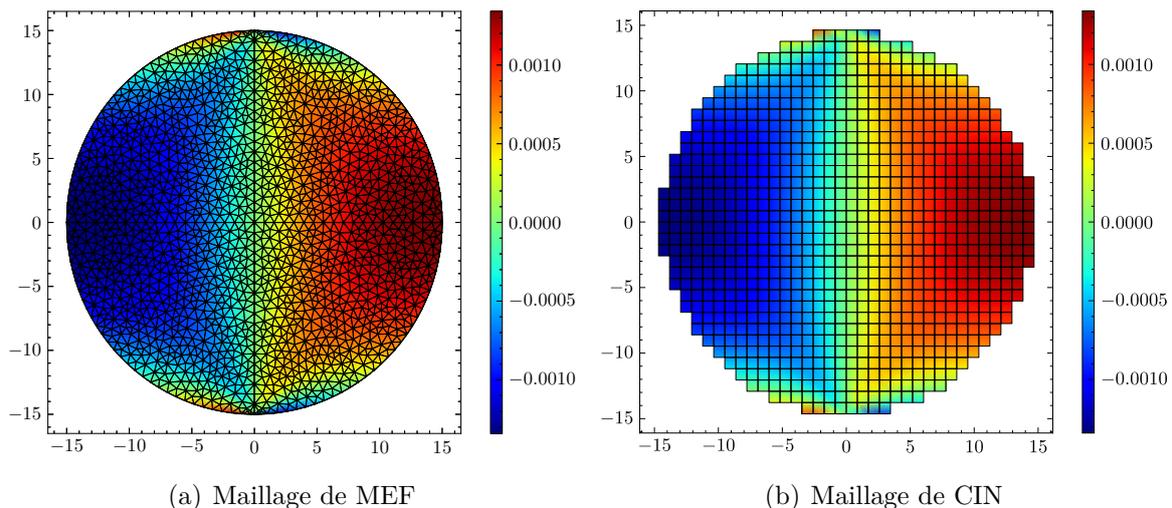


FIGURE 2.10 – Projection du champ de déplacement entre des maillages différents.

Cette projection est effectuée à l'aide de la commande PROJ\_CHAMP. Pour calculer le champ de déplacement sur chaque nœud du maillage de CIN, PROJ\_CHAMP identifie les éléments correspondants dans le maillage de MEF et détermine les valeurs des champs en utilisant l'interpolation par des fonctions de forme pour chaque élément.

### 2.3.1.2 Validation de la méthode avec des données synthétiques

Pour évaluer la robustesse et la fiabilité de la méthode FEMU, des données synthétiques comportant un bruit blanc additif (bruit gaussien, comme détaillé dans l'annexe E) ont été utilisées.

Dans la simulation de MEF, les dimensions de l'objet simulé correspondent à celles de l'échantillon expérimental :  $R = 15$  mm,  $h = 53$  mm. Comme  $h \gg R$ , l'hypothèse de déformation plane a été appliquée. Pour rendre la simulation plus réaliste et éviter les problèmes de qualité du maillage FEM, un petit angle représentant  $2^\circ$  de la valeur est défini pour simuler les frontières de contact entre le plateau de chargement et l'échantillon sous une charge ponctuelle. Ainsi, le maillage FEM, illustré dans la figure 2.10(a), comprend 1617 nœuds et 3108 éléments triangulaires.

Dans un premier temps, nous avons considéré un modèle de comportement isotrope mono-module, avec le module de Young  $E = 12$  GPa et le coefficient de Poisson  $\nu = 0.25$ , a été utilisé pour la validation via MACR\_RECAL. La pression appliquée est définie à  $p = 108.10$  MPa ( $F = 3000$  N). Pour se rapprocher davantage de la mesure réelle par CIN, un bruit blanc variant entre 1% et 5%, a été ajouté aux données de déplacement synthétiques. Ces données ont ensuite été projetées sur le maillage de CIN, comme montré dans la figure 2.10(b), qui comprend 960 nœuds et 891 éléments rectangulaires.

Selon les études menées par [89, 90, 91], l'utilisation des données du déplacement sur les axes principaux de l'échantillon, comme indiqué sur la figure 2.11(a) tend à produire des résultats optimaux pour l'identification des paramètres. En outre, grâce à la richesse des détails fournis par les mesures de CIN, il est également possible d'exploiter le champ de déplacement surfacique dans la FEMU. Ainsi, pour procéder à l'identification, deux groupes de données sont extraits du maillage de CIN, comme illustré dans la figure 2.11 :

La figure 2.11(a) illustre les déplacements axiaux utilisés pour l'identification. Conformément au principe de la méthode FEMU (voir l'équation (2.3)), le calcul de la fonction  $J$  n'est pas possible lorsque la valeur de  $U^{MEF}$  est nulle. De ce fait, en raison des conditions de symétrie axiale caractéristiques de l'essai de fendage, seuls les déplacements  $u$  selon l'axe  $x$  et les déplacements  $v$  selon l'axe  $y$  sont pris en compte dans l'approche FEMU. De plus, puisque le déplacement au centre de la surface est nul, les données correspondantes à ce nœud ne sont pas donc considérées dans le calcul. Les figures 2.11(b) et 2.11(c) montrent les déplacements surfaciques dans une zone carrée, sélectionnés pour l'identification. Pour la même raison, tous les nœuds présentant un déplacement nul sont exclus du calcul. Étant donné que les erreurs de corrélation aux nœuds situés aux frontières sont significatives, le champ de déplacement à ces nœuds n'est pas pris en compte.

Outre les définitions des différents groupes de nœuds, les critères de convergence et les valeurs initiales des paramètres jouent un rôle crucial dans le succès de l'identification. Pour prévenir une interruption prématurée du processus d'identification, des seuils pour les normes de la différence de la fonction itératif  $\Delta_J$  et celle de la variation des paramètres identifiés  $\Delta_\Theta$  sont fixés à  $10^{-9}$ . Les valeurs initiales des paramètres ont un impact direct sur le nombre d'itérations nécessaires à l'identification, ainsi que sur la vitesse de convergence. Par conséquent, les valeurs initiales du module de Young  $E^0$  et du coefficient de Poisson  $\nu^0$  sont établies à 10 GPa et 0.2, respectivement.

Avec ces définitions et ajustements nécessaires, les résultats obtenus par la méthode FEMU

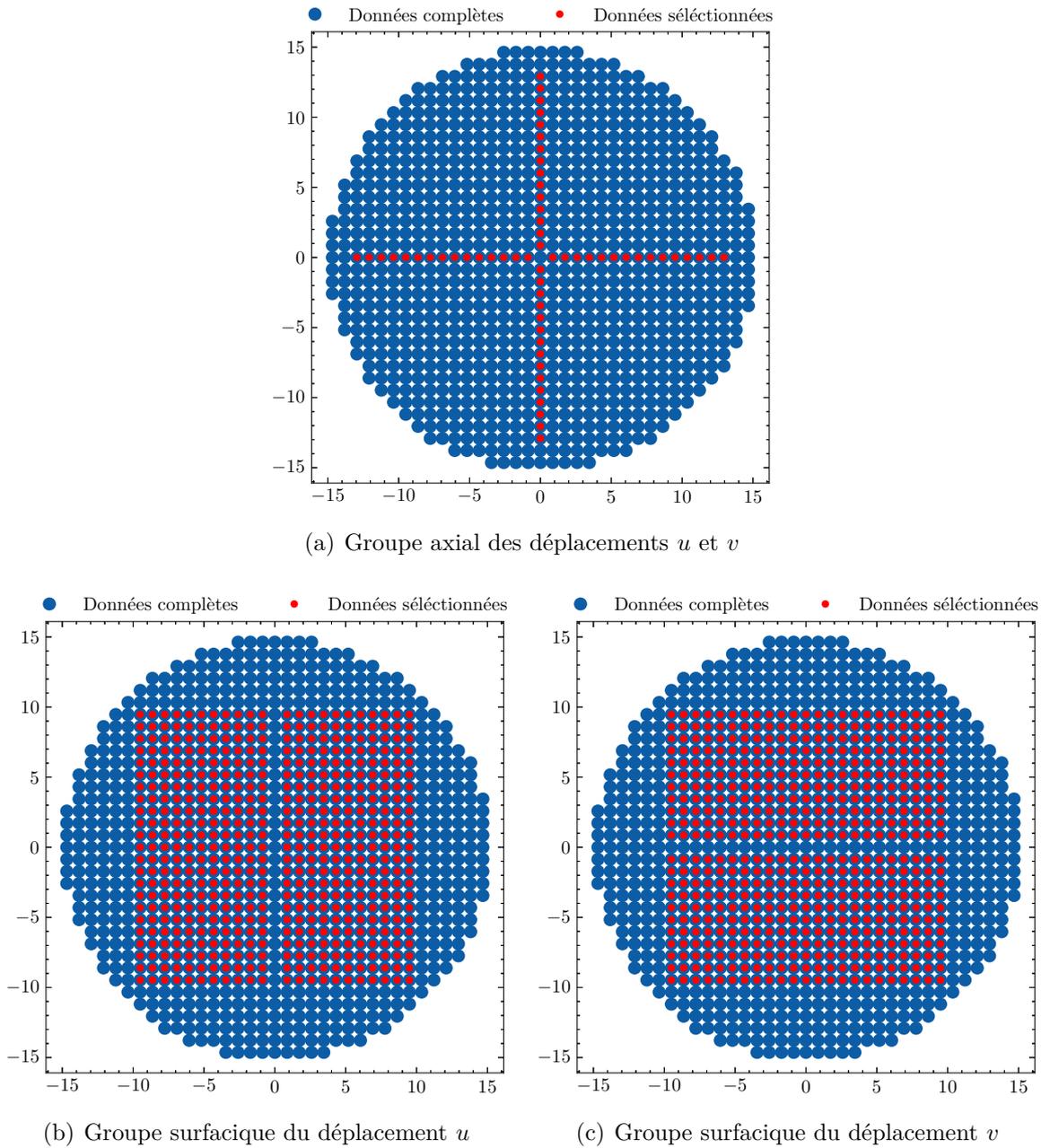


FIGURE 2.11 – Définition des groupes des noeuds dans le maillage de CIN pour extraire le champ de déplacement mesuré.

utilisant la commande MACR\_RECAL avec les données synthétiques, incluant l'ajout de bruit blanc additif, sont présentés dans le tableau 2.1 :

D'après ce tableau, les résultats obtenus sont remarquables. Les valeurs entre parenthèses indiquent les erreurs relatives en pourcentage entre les valeurs de référence et celles identifiées. Avec les données sans bruit, les deux groupes de données fournissent des résultats très proches des valeurs de référence. Globalement, pour les données comportant du bruit, les résultats basés sur les déplacements axiaux s'avèrent être plus précis que ceux basés sur les déplacements surfaciques, à différents niveaux de bruit. Par ailleurs, les valeurs identifiées pour le module de Young  $E$  sont plus précises que celles pour le coefficient de Poisson  $\nu$ . Avec des déplacements axiaux et 5% de bruit, l'erreur sur le module de Young identifié atteint au maximum environ 1%, tandis que l'erreur sur le coefficient de Poisson identifié peut aller jusqu'à environ 5%. À l'inverse, pour les déplacements surfaciques, les meilleurs résultats identifiés montrent des

TABLEAU 2.1 – Résultats de FEMU avec les données synthétiques en ajoutant les bruits blancs additifs.

Paramètres identifiées	Module de Young $E$ (GPa)		Coefficient de Poisson $\nu$	
Référence	12		0.25	
Niveau du bruit	Axial	Surfacique	Axial	Surfacique
0%	11.99(0.00%)	12.00(0.00%)	0.249(0.00%)	0.250(0.00%)
1%	12.03(0.22%)	12.04(0.35%)	0.248(0.89%)	0.250(0.08%)
2%	12.05(0.43%)	12.53(4.46%)	0.247(0.82%)	0.263(5.06%)
3%	11.95(0.39%)	13.65(13.78%)	0.243(2.49%)	0.290(16.03%)
4%	12.04(0.32%)	non-convergé	0.249(0.41%)	non-convergé
5%	12.12(1.07%)	non-convergé	0.236(5.45%)	non-convergé

erreurs de 13.78% pour  $E$  et de 16.03% pour  $\nu$  avec 3% de bruit. Comparées aux résultats obtenus avec les déplacements axiaux, ces erreurs sont très importantes.

Il est nécessaire de souligner que les résultats de l'identification basée sur les déplacements surfaciques avec 4% et 5% de bruit n'ont pas été reportés, parce qu'on ne peut pas obtenir les valeurs satisfaites à cause du problème de convergence. À ces niveaux de bruit, le processus d'identification s'interrompt prématurément lorsque les critères de convergence atteignent le seuil de tolérance fixé. Par conséquent, les résultats obtenus avec des déplacements surfaciques pour des niveaux de bruit supérieurs à 3% ne doivent pas être considérés.

Théoriquement, l'augmentation du nombre de données contribuant à l'identification devrait améliorer les résultats, parce qu'elle fournit des détails plus riches. Cependant, les résultats illustrés dans le tableau 2.1 suggèrent le contraire, ce qui pourrait être attribué à la méthode implémentée dans la commande MACR\_RECAL. Pour les nœuds proches du centre de la surface de l'échantillon, le champ de déplacement correspondant affiche des magnitudes plus faibles, particulièrement pour le déplacement  $u$  suivant l'axe  $x$ . Lorsque des bruits additifs sont introduits dans les données synthétiques, le rapport  $U^{exp}/U^{MEF}$  utilisé dans l'équation (2.3) peut devenir très important, influençant ainsi négativement la convergence de la minimisation et affectant la précision des résultats obtenus par FEMU.

### 2.3.1.3 Conclusion

La méthode de recalage par éléments finis (FEMU) a été employée pour identifier les paramètres mécaniques des matériaux en minimisant l'écart entre les grandeurs calculées par la Méthode des Éléments Finis (MEF) et les mesures expérimentales. La mise en œuvre s'est appuyée sur la commande MACR\_RECAL du logiciel CODE\_ASTER. Pour valider cette commande, deux groupes de données ont été définis afin de tester l'effet sur la précision de l'identification.

Ainsi, des données synthétiques, générées selon un modèle de comportement mono-module avec ajout de bruit blanc, ont été utilisées pour la validation. Les résultats montrent que les déplacements axiaux fournissent des estimations plus précises des paramètres. En raison de la méthode utilisé dans la commande MACR\_RECAL et le problème de convergence, les déplacements surfaciques s'avèrent inadaptés pour l'identification lorsque le niveau de bruit

dépasse 3%.

La nécessité de projeter les résultats entre différents maillages rend l'utilisation de MACR\_RECAL complexe et coûteuse. De plus, il est impossible d'introduire une loi de comportement dissymétrique, ou d'utiliser la loi de Badel avec un endommagement constant, sans effectuer des modifications conséquentes de cette commande.

### 2.3.2 Méthode des champs virtuels

La Méthode des Champs Virtuels (MCV) est basée sur l'écriture du principe des travaux virtuels avec des champs virtuels particuliers. Initialement proposé dans le cadre de l'élasticité linéaire anisotrope, elle a aussi été examinée dans le cas de chargement dynamique ou des lois de comportement non-linéaire telle que l'hyper-élasticité et la plasticité [103, 104, 105, 106]. Cette méthode a été aussi proposé pour identifier les paramètres des matériaux isotrope sur l'essai de fendage [107]. En général, elle nécessite l'exploitation des champs cinématiques entiers comme données essentielles. Cependant, le champ de déformation, dérivé du champ de déplacement mesuré, amplifie inévitablement l'impact du bruit en raison de son processus de calcul. La petite taille des échantillons étudiés peut ainsi compliquer la convergence de l'identification avec la méthode MCV, entraînant des résultats imprécis.

## 2.4 Solution semi-analytique du fendage

L'essai de fendage étant une expérimentation fondamentale, il a fait l'objet de nombreuses études et recherches [77, 108, 109]. L'utilisation de solutions analytiques adaptées aux matériaux bi-module dans l'essai de fendage peut ainsi accélérer le processus d'identification et améliorer la précision des résultats obtenus. Par conséquent, une méthode de recalage avec la solution analytique a été développée pour l'identification des paramètres bi-module. La figure 2.12 pré-

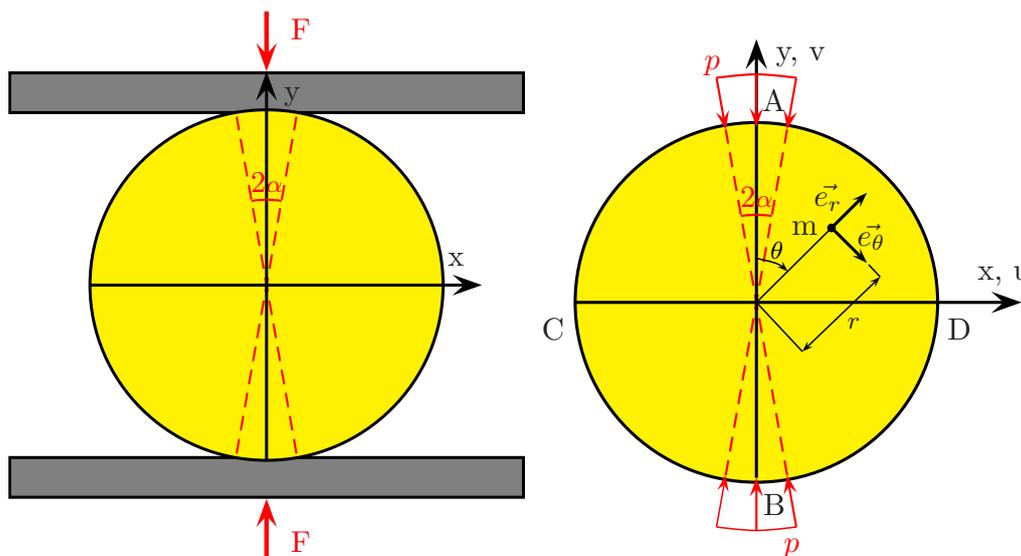


FIGURE 2.12 – Schéma de l'essai de fendage pour la compression partiellement distribuée avec deux plateaux plans.

sente les schémas de l'essai de fendage, à partir desquels la solution analytique du champs de déplacement est développée, les deux axes principaux sont définis par les segments AB pour

l'axe  $y$  et CD pour l'axe  $x$ . Dans le cadre d'une compression partiellement distribuée, l'angle  $2\alpha$  est défini pour décrire les frontières du chargement (la zone de contact). Donc, le cas de chargement ponctuel peut ainsi être pris en compte en faisant tendre  $\alpha$  vers 0.

### 2.4.1 Champ de contrainte

À ce jour, deux études principales ont largement contribué à la formulation des équations analytiques décrivant explicitement le champ de contraintes. La première est basée sur une simplification avancée de la caractérisation de l'état des contraintes surfaciques du modèle de Hondros [66] sous forme de séries par Ma et Hung [94]. La seconde étude de Jianhong et al. [110] se base sur les travaux de Muskhelishvili [111] et la fonction d'Airy pour décrire le cas d'un chargement ponctuel. Néanmoins, selon les études étendues sur l'expression du champ de déplacement en repère cartésien, réalisées par Jianhong et al. [86], ainsi que par Patel et Martin [91] en s'appuyant sur le modèle de Jianhong et al. [110], les valeurs de déplacement  $v$  aux points A et B ne peuvent pas être déterminées. En effet, l'expression de champ de déplacement est obtenue par l'intégration de l'équation du champ de contrainte, contient des fractions. Lorsque le calcul se réalise aux points A et B, le dénominateur de la formule de  $v$  devient nul, ce qui conduit à une valeur infinie.

À l'inverse, le modèle de Ma [93, 94] propose des équations de l'état de contrainte dans un repère polaire, en prenant en compte des frontières de chargement finies pour s'adapter aux diverses géométries des plateaux et aux types de chargement. Ce faisant, le modèle de Ma [94] offre des expressions détaillées de l'état de contrainte, y compris aux frontières de chargement. Par conséquent, c'est le modèle de Ma que nous avons adopté pour le développement de solutions analytiques des champs de déplacement et de déformation dans des contextes de chargement partiellement distribué pour un matériau à comportement dissymétrique.

Tenant compte du fait que les frontières de chargement sont finies, la pression appliquée  $p$  dans la figure 2.12 peut être exprimée en fonction de  $\alpha$  et  $F$  :

$$p = \frac{F}{2\alpha h R} \quad (2.4)$$

Et les expressions des contraintes d'après Ma [93, 94] sont illustrées ci-dessous :

$$\begin{cases} \sigma_r(s, \theta) = -\frac{p}{\pi} (A_1 + A_2 + B_1 + B_2 + \Phi) \\ \sigma_\theta(s, \theta) = -\frac{p}{\pi} (-A_1 - A_2 + B_1 + B_2 + \Phi) \\ \tau_{r\theta}(s, \theta) = \frac{p}{\pi} (C_1 - C_2) \end{cases} \quad (2.5)$$

Où

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(1-s^2)\sin 2(\alpha+\theta)}{s^4+1-2s^2\cos 2(\alpha+\theta)} & A_2 &= \frac{(1-s^2)\sin 2(\alpha-\theta)}{s^4+1-2s^2\cos 2(\alpha-\theta)} \\ B_1 &= \arctan \left[ \frac{1+s^2}{1-s^2} \tan(\alpha+\theta) \right] & B_2 &= \arctan \left[ \frac{1+s^2}{1-s^2} \tan(\alpha-\theta) \right] \\ C_1 &= \frac{(1-s^2)[-s^2+\cos 2(\alpha-\theta)]}{s^4+1-2s^2\cos 2(\alpha-\theta)} & C_2 &= \frac{(1-s^2)[-s^2+\cos 2(\alpha+\theta)]}{s^4+1-2s^2\cos 2(\alpha+\theta)} \\ \theta &\in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] & \text{and} & \quad \Phi = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha \\ \pi & \text{for } \frac{\pi}{2} - \alpha \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Les variables  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  et  $\tau_{r\theta}$  désignent les contraintes dans le repère polaire, et  $s$  est le rapport entre  $r$  et  $R$ .

## 2.4.2 Loi de Hooke généralisée

### 2.4.2.1 Comportement dissymétrique en traction-compression

Pour pouvoir prendre en compte le comportement dissymétrique en traction-compression, la loi de Hooke généralisé est écrite dans le repère principal des contraintes. Les contraintes principales dans le plan  $(r, \theta)$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} + \frac{1}{2}\Delta \\ \sigma_2 = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} - \frac{1}{2}\Delta \end{cases} \quad (2.7)$$

Avec

$$\Delta = \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2} \quad (2.8)$$

Selon la relation entre les contraintes principales et les déformations principales, la loi de Hooke généralisée s'écrit :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = a_{11}\sigma_1 + a_{12}\sigma_2 + a_{13}\sigma_3 \\ \varepsilon_2 = a_{12}\sigma_1 + a_{22}\sigma_2 + a_{23}\sigma_3 \\ \varepsilon_3 = a_{13}\sigma_1 + a_{23}\sigma_2 + a_{33}\sigma_3 \end{cases} \quad (2.9)$$

$\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les contraintes principaux dans le plan  $(r, \theta)$  et  $\sigma_3$  agit suivant l'axe  $z$ .  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  sont les déformations principales correspondantes.

En tenant compte du fait que  $\sigma_1$  présente la contrainte principale dans la direction de traction et  $\sigma_2$  celle dans la direction de compression, l'essai de fendage nous indique clairement que  $\sigma_1 > 0 > \sigma_2$  et  $|\sigma_1| < |\sigma_2|$ . Selon les études sur la théorie de bi-module par Tsveldub [112], Huang et al. [113], les coefficients  $a_{ij}$  sont déterminés par le signe des contraintes principales :  $\sigma_1$  est positive tandis que  $\sigma_2$  est négative. Par conséquence,  $a_{11} = \frac{1}{E_t}$  et  $a_{22} = \frac{1}{E_c}$ . En se basant sur l'hypothèse de symétrie, pour  $i \neq j$ ,  $a_{ij} = -\frac{\nu_c}{E_c} = -\frac{\nu_t}{E_t}$ .

Selon les dimensions de l'échantillon, les hypothèses de contraintes planes et déformations planes sont appliquées dans les différents situations. Sous l'hypothèse de déformation plane, où  $\varepsilon_3 = 0$ , il en découle que  $a_{33}\sigma_3 = \frac{\nu_c}{E_c}(\sigma_1 + \sigma_2)$ . En considérant que  $|\sigma_1| < |\sigma_2|$ ,  $\sigma_3$  présente une valeur négative, ce qui implique que  $a_{33}$  doit être imposé comme  $\frac{1}{E_c}$ . Par conséquence, la loi de Hooke généralisée, sous l'hypothèse de déformations planes, adaptée à la théorie de bi-module peut être exprimée de la manière suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E_t}\sigma_1 - \frac{\nu_c}{E_c}\sigma_2 - \frac{\nu_c}{E_c}\sigma_3 \\ \varepsilon_2 = -\frac{\nu_c}{E_c}\sigma_1 + \frac{1}{E_c}\sigma_2 - \frac{\nu_c}{E_c}\sigma_3 \\ \varepsilon_3 = -\frac{\nu_c}{E_c}\sigma_1 - \frac{\nu_c}{E_c}\sigma_2 + \frac{1}{E_c}\sigma_3 = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Et les formes explicites des contraintes et des déformations principales sont déterminées à partir

les équations (2.7) et (2.10) :

$$\begin{cases} \sigma_1 = -\frac{p}{\pi} \left( B_1 + B_2 + \Phi - \sqrt{(A_1 + A_2)^2 + (C_1 - C_2)^2} \right) \\ \sigma_2 = -\frac{p}{\pi} \left( B_1 + B_2 + \Phi + \sqrt{(A_1 + A_2)^2 + (C_1 - C_2)^2} \right) \\ \sigma_3 = \nu_c(\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{p}{\pi} \left[ \left( -\frac{1}{E_t} + \frac{\nu_c}{E_c} + \frac{2\nu_c^2}{E_c} \right) (B_1 + B_2 + \Phi) \right] \\ \quad + \frac{p}{\pi} \left[ \left( \frac{1}{E_t} + \frac{\nu_c}{E_c} \right) \sqrt{(A_1 + A_2)^2 + (C_1 - C_2)^2} \right] \\ \varepsilon_2 = \frac{p}{\pi} \left[ \left( -\frac{1}{E_c} + \frac{\nu_c}{E_c} + \frac{2\nu_c^2}{E_c} \right) (B_1 + B_2 + \Phi) \right] \\ \quad - \frac{p}{\pi} \left[ \left( \frac{1}{E_c} + \frac{\nu_c}{E_c} \right) \sqrt{(A_1 + A_2)^2 + (C_1 - C_2)^2} \right] \\ \varepsilon_3 = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Dans le cadre de l'hypothèse de contraintes planes où  $\sigma_3 = 0$ , la valeur de coefficient  $a_{33}$  n'intervient pas directement. Comme le calcul précédant, la loi de Hooke généralisée se présente comme ci-dessous :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E_t} \sigma_1 - \frac{\nu_c}{E_c} \sigma_2 \\ \varepsilon_2 = -\frac{\nu_c}{E_c} \sigma_1 + \frac{1}{E_c} \sigma_2 \\ \varepsilon_3 = -\frac{\nu_c}{E_c} \sigma_1 - \frac{\nu_c}{E_c} \sigma_2 \end{cases} \quad (2.13)$$

Les expressions explicites des contraintes et des déformations principales, sous l'hypothèse de contraintes planes, sont :

$$\begin{cases} \sigma_1 = -\frac{p}{\pi} \left( B_1 + B_2 + \Phi - \sqrt{(A_1 + A_2)^2 + (C_1 - C_2)^2} \right) \\ \sigma_2 = -\frac{p}{\pi} \left( B_1 + B_2 + \Phi + \sqrt{(A_1 + A_2)^2 + (C_1 - C_2)^2} \right) \\ \sigma_3 = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{p}{\pi} \left[ \left( -\frac{1}{E_t} + \frac{\nu_c}{E_c} \right) (B_1 + B_2 + \Phi) \right] \\ \quad + \frac{p}{\pi} \left[ \left( \frac{1}{E_t} + \frac{\nu_c}{E_c} \right) \sqrt{(A_1 + A_2)^2 + (C_1 - C_2)^2} \right] \\ \varepsilon_2 = \frac{p}{\pi} \left[ \left( -\frac{1}{E_c} + \frac{\nu_c}{E_c} \right) (B_1 + B_2 + \Phi) \right] \\ \quad - \frac{p}{\pi} \left[ \left( \frac{1}{E_c} + \frac{\nu_c}{E_c} \right) \sqrt{(A_1 + A_2)^2 + (C_1 - C_2)^2} \right] \\ \varepsilon_3 = \frac{p}{\pi} \left[ \left( \frac{2\nu_c}{E_c} \right) (B_1 + B_2 + \Phi) \right] \end{cases} \quad (2.15)$$

#### 2.4.2.2 Relation avec le modèle de Badel

D'après les équations (2.10) et (2.13), les relations entre les contraintes et les déformations principales dans le contexte du comportement dissymétrique sont très claires. Étant donné

que ce comportement peut également être représenté dans le modèle de Badel en fixant la variable d'endommagement  $d$  à une constante, il est possible de déterminer la relation entre les paramètres initiaux  $(E, \nu)$  et les paramètres endommagés qui s'apparentent aux paramètres dissymétriques  $(E_c, E_t, \nu_c)$ . Par exemple, puisque les échantillons des matrices minérales préparées sont sous forme cylindrique, l'hypothèse de déformations planes est adoptée. Dans cette situation, on a  $\varepsilon_3 = 0$ ,  $\varepsilon_1 > 0$  et  $\varepsilon_2 < 0$ . Sachant que  $|\varepsilon_2| > |\varepsilon_1|$ , on a  $tr\varepsilon < 0$ .

Ainsi, d'après le modèle de Badel (1.3), les déformations principales en fonctions des contraintes principales sont données par :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1 + \nu}{E(\nu + \xi)}\sigma_1 - \frac{\nu(1 + \nu)}{E(\nu + \xi)}\sigma_2 - \frac{\nu(1 + \nu)}{E(\nu + \xi)}\sigma_3 \\ \varepsilon_2 = -\frac{\nu(1 + \nu)}{E(\nu + \xi)}\sigma_1 - \frac{((\xi - 1)\nu - \xi)(1 + \nu)}{E(\nu + \xi)}\sigma_2 - \frac{\xi\nu(1 + \nu)}{E(\nu + \xi)}\sigma_3 \\ \varepsilon_3 = -\frac{\nu(1 + \nu)}{E(\nu + \xi)}\sigma_1 - \frac{\xi\nu(1 + \nu)}{E(\nu + \xi)}\sigma_2 - \frac{((\xi - 1)\nu - \xi)(1 + \nu)}{E(\nu + \xi)}\sigma_3 = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Avec

$$\xi = \frac{1 - d}{1 + \gamma d} \quad (2.17)$$

D'après les équations (2.16) et (2.10), les relations entre l'endommagement et les paramètres initiaux non-endommagés dans le cadre de l'hypothèse de déformations planes s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} E_c = -\frac{E(\nu + \xi)}{((\xi - 1)\nu - \xi)(1 + \nu)} \\ E_t = \frac{E(\nu + \xi)}{1 + \nu} \\ \nu_c = -\frac{\nu}{(\xi - 1)\nu - \xi} \end{cases} \quad (2.18)$$

### 2.4.3 Champ de déplacement

Sachant que les composantes du champ de déplacement issues de la CIN sont des données dans le repère cartésien, les composantes de la solution analytique doivent être aussi calculé dans le repère cartésien. Le champ de déformation est alors écrit dans le repère cartésien avant d'en déduire les déplacements.

Afin de simplifier les calculs ultérieurs, les coordonnées polaires  $(s, \theta)$  dans l'équation (2.6) sont converties en coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$ , selon les formules suivant :

$$\begin{aligned} s &= \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} \\ \sin(\theta) &= \frac{x}{r}, \quad \cos(\theta) = \frac{y}{r}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

En définissant  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  comme les directions principales,  $\psi$  représente l'angle entre l'axe  $x$  et la direction principale  $\vec{n}_1$ . Selon l'étude de Hung et Ma [93],  $\psi$  s'écrit de manière suivant :

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \sin(2\theta) + \tau_{r\theta} \cos(2\theta)}{-\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \cos(2\theta) + \tau_{r\theta} \sin(2\theta)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{-(A_1 + A_2) \sin(2\theta) + (C_1 - C_2) \cos(2\theta)}{(A_1 + A_2) \cos(2\theta) + (C_1 - C_2) \sin(2\theta)} \right)\end{aligned}\quad (2.20)$$

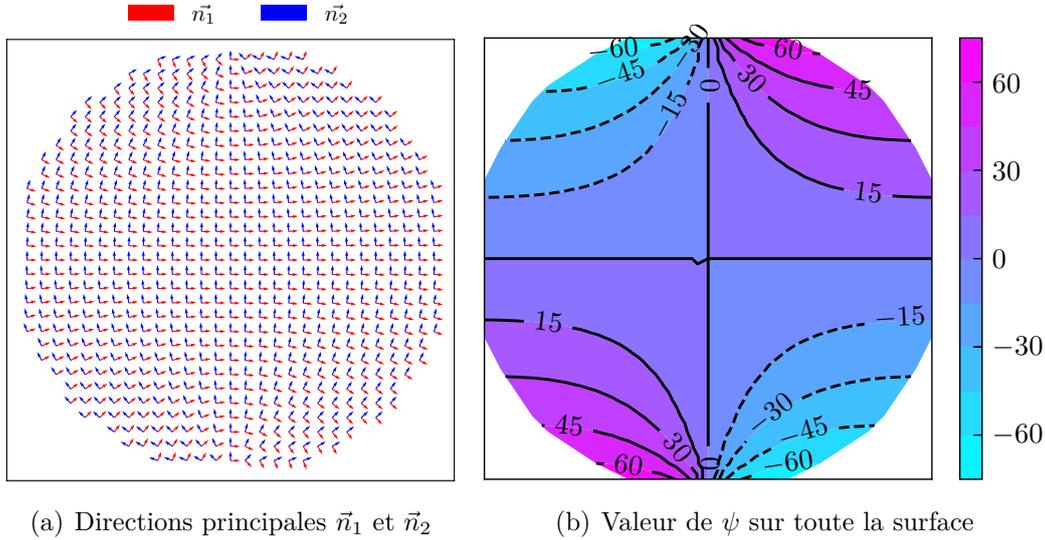


FIGURE 2.13 – Schéma des directions principales  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  et la distribution de la valeur  $\psi$  sur tout le domaine dans le cas  $\alpha$  tend vers zéro.

La figure 2.13 illustre les directions principales  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  ainsi que la distribution de l'angle de rotation  $\psi$  dans la situation où  $\alpha$  tend vers zéro. Il est évidemment que les valeurs de  $\psi$  aux points situés sur les axes  $x$  et  $y$  sont nulles, indiquant que les directions principales sont alignées avec le repère cartésien. Pour cette raison, certaines études privilégient l'analyse des champs de déplacement suivant les deux axes pour identifier les paramètres bi-module [86, 91]. À mesure que les points se rapprochent de la zone de chargement, les valeurs de  $\psi$  augmentent, indiquant un effet de cisaillement plus marqué.

En combinant les équations (2.19) et (2.20), la conversion du champ de déformation dans le système de coordonnées cartésien est facile à réaliser, comme illustré dans l'équation (2.21) :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \cos^2(\psi)\varepsilon_1 + \sin^2(\psi)\varepsilon_2 = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \sin^2(\psi)\varepsilon_1 + \cos^2(\psi)\varepsilon_2 = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = \cos(\psi) \sin(\psi)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (2.21)$$

Avec ces définitions, le champ de déplacement surfacique représenté par  $\langle u, v \rangle$  peut être déterminé en effectuant le calcul des intégrales de ces équations. Cependant, le calcul analytique de ces intégrales abouti à des formes d'intégrales indéterminées. Pour remédier à cette difficulté, Les deux premières équations sont intégrés avec un schéma numérique d'équation différentielle ordinaire en considérant la seconde variable comme une constante, et les conditions initiales sont prises sur les axes de symétrie, comme le montre suivant :

$$\begin{aligned}
 \text{Pour } y = \text{constante} : \quad u(x, y) &= \int \varepsilon_{xx}(x, y) dx, \quad \text{avec } u_{AB} = u(0, y) = 0 \\
 \text{Pour } x = \text{constante} : \quad v(x, y) &= \int \varepsilon_{yy}(x, y) dy, \quad \text{avec } v_{CD} = v(x, 0) = 0
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

La fonction *odeint* du package *Integrate* de *Scipy* en Python [114] a permis de mener à bien cette opération. Le champ de contrainte défini par les équations (2.5) et (2.6) satisfait les conditions d'équilibre et de compatibilité dites conditions générale de Beltrami dans le cadre des déformation et contraintes planes. En conséquence, le champ de déplacement obtenu à partir de l'intégration des déformations définies par les équations (2.11), (2.12) et (2.21) et vérifiant les conditions de symétries (2.22), est la solution du problème posé. Pour une discrétisation fine, le champ de déplacement obtenu numériquement permet une vérification complémentaire des conditions de compatibilité du champ de déformation obtenu à partir des déplacements calculés.

Il est important de souligner que :

- La solution semi-analytique varie selon l'hypothèse de contrainte ou de déformation appliquée. Cependant, que l'on considère une déformation plane ou une contrainte plane, la distribution des valeurs de  $\psi$  reste inchangée, parce qu'elle dépend uniquement des valeurs du champ de contraintes.
- Quelle que soit la valeur de  $\alpha$ , les valeurs des champs de contraintes et de déformations principales au centre de la surface de l'échantillon restent constantes. Ainsi, la résistance à la traction peut être déterminée à partir du chargement de rupture, comme indiqué dans l'équation (2.2). De manière similaire, les expressions des champs de déformations au centre, sous les deux hypothèses, sont présentées ci-dessous :

$$\text{Déformations Planes} \begin{cases} \varepsilon_1(0, 0) = \varepsilon_{xx}(0, 0) = \frac{F}{R\pi h} \left( \frac{2\nu_c^2}{E_c} + \frac{3\nu_c}{E_c} + \frac{1}{E_t} \right) \\ \varepsilon_2(0, 0) = \varepsilon_{yy}(0, 0) = \frac{F}{R\pi h E_c} (2\nu_c^2 - \nu_c - 3) \end{cases} \tag{2.23}$$

$$\text{Contraintes Planes} \begin{cases} \varepsilon_1(0, 0) = \varepsilon_{xx}(0, 0) = \frac{F}{R\pi h} \left( \frac{3\nu_c}{E_c} + \frac{1}{E_t} \right) \\ \varepsilon_2(0, 0) = \varepsilon_{yy}(0, 0) = -\frac{F}{R\pi h E_c} (\nu_c + 3) \end{cases} \tag{2.24}$$

Quand les modules de Young et les coefficients de Poisson sont identiques pour le comportement symétrique en traction et compression, les déformations au centre avec les paramètres mono-module s'écrivent :

$$\text{Déformations Planes} \begin{cases} \varepsilon_1(0, 0) = \varepsilon_{xx}(0, 0) = \frac{F(2\nu + 1)(\nu + 1)}{R\pi h E} \\ \varepsilon_2(0, 0) = \varepsilon_{yy}(0, 0) = \frac{F(2\nu - 3)(\nu + 1)}{R\pi h E} \end{cases} \tag{2.25}$$

$$\text{Contraintes Planes} \begin{cases} \varepsilon_1(0, 0) = \varepsilon_{xx}(0, 0) = \frac{F(3\nu + 1)}{R\pi h E} \\ \varepsilon_2(0, 0) = \varepsilon_{yy}(0, 0) = -\frac{F(\nu + 3)}{R\pi h E} \end{cases} \tag{2.26}$$

## 2.4.4 Validation

Avant d'implémenter les solutions des déplacement  $u$  et  $v$  pour identifier les paramètres du matériau, une étape de validation est indispensable. Cette validation consiste à comparer les solutions obtenues par la MEF ainsi qu'avec les résultats d'autres études pertinentes des solutions analytiques pour les matériaux ayant un comportement symétrique en traction et compression.

### 2.4.4.1 Comparaison avec les équations basiques

L'utilisation des champs de déformation au centre de l'échantillon pour déterminer le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  constitue la méthode la plus couramment utilisée dans le cadre de l'essai de fendage. En fonction des hypothèses implémentées, les expressions pour  $E$  et  $\nu$  varient. Ces expressions sont dérivées à partir des déformations  $\varepsilon_{xx}(0, 0)$ ,  $\varepsilon_{yy}(0, 0)$  et s'écrivent ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Contraintes Planes : } E = -\frac{8F}{\pi Rh(\varepsilon_{xx}(0, 0) + 3\varepsilon_{yy}(0, 0))}, \nu = -\frac{3\varepsilon_{xx}(0, 0) + \varepsilon_{yy}(0, 0)}{\varepsilon_{xx}(0, 0) + 3\varepsilon_{yy}(0, 0)} \\ \text{Déformations Planes : } E = \frac{2F(5\varepsilon_{xx}(0, 0) - \varepsilon_{yy}(0, 0))}{\pi Rh(\varepsilon_{xx}(0, 0) - \varepsilon_{yy}(0, 0))^2}, \nu = \frac{3\varepsilon_{xx}(0, 0) + \varepsilon_{yy}(0, 0)}{2\varepsilon_{xx}(0, 0) - 2\varepsilon_{yy}(0, 0)} \end{array} \right. \quad (2.27)$$

Il est évident que la seule donnée des déformations au centre ne permet pas d'identifier les paramètres du matériau, mais ces formules nous permettent de valider nos calculs avec les équations de bases couramment utilisées pour les matériaux mono-module. En assumant des valeurs identiques pour  $E_c$  et  $E_t$ , les relations (2.27) ont été déterminées à partir de les équations (2.25) et (2.26).

### 2.4.4.2 Comparaison avec la solution de MEF

Les résultats obtenus par MEF sont souvent considérés comme référence. Par conséquent, une comparaison avec la solution de MEF est réalisée pour valider la solution semi-analytique du champ de déplacement surfacique. Toutefois, en raison de l'absence de prise en compte de la théorie de bi-module dans la MEF, les résultats de cette dernière sont obtenus en se basant sur une loi de comportement de mono-module.

Pour garantir la cohérence avec la validation de FEMU décrite dans la section 2.3.1.2, le domaine a été modélisé en utilisant les mêmes propriétés matérielles et les mêmes maillages que précédemment : l'angle  $\alpha = 1^\circ$ , le rayon  $R = 15$  mm, la hauteur  $h = 53$  mm, le chargement  $F = 3000$  N, le module de Young  $E = 12$  GPa et le coefficient de Poisson  $\nu = 0.25$ . Les comparaisons des déplacements  $u$  et  $v$  sont illustrées ci-dessus.

Les distributions présentées dans la figure 2.14 montrent les composantes de déplacement du MEF et du modèle semi-analytique avec un angle  $\alpha$  de  $1^\circ$ . Pour mieux démontrer les différences entre ces deux solutions, les erreurs relatives par rapport aux valeurs maximales ont également été présentées. D'après ces erreurs, les différences entre les deux solutions sont presque nulles, à l'exception de la zone de chargement. Ces erreurs dans la zone de chargement peuvent être dues à la qualité du maillage. Étant donné que l'angle  $\alpha$  est seulement de  $1^\circ$ , il est difficile de raffiner davantage cette zone en fonction de la taille de l'objet. Numériquement, les valeurs

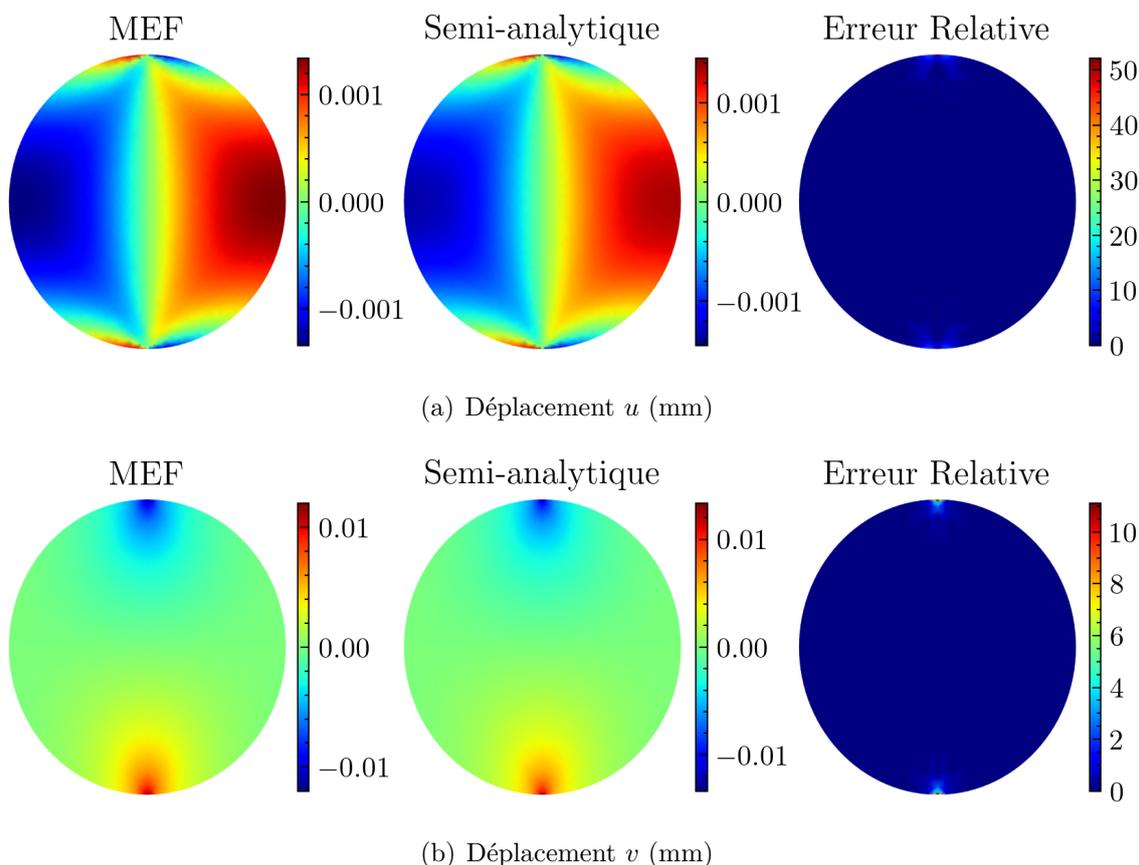


FIGURE 2.14 – Comparaison des déplacements  $u$  et  $v$  obtenus par la solution de MEF et la solution semi-analytique avec  $\alpha = 1$ .

moyenne, maximale et minimale des erreurs relatives par rapport au déplacement maximal de  $u$  sont 0.33%, 52.14%, respectivement. Pour les déplacements  $v$ , les valeurs moyenne et maximale des erreurs relatives par rapport au déplacement maximal de  $v$  sont 0.07% et 11.11%, respectivement.

Afin de vérifier progressivement que les erreurs des déplacements sont causées par le maillage de MEF, une nouvelle comparaison avec un nouveau maillage a été effectuée. Tous les paramètres sont restés identiques à ceux d'avant, à l'exception de  $\alpha$  fixé à  $10^\circ$ . Par conséquent, le nouveau maillage contient un total de 1625 nœuds et 3124 éléments triangulaires.

Les distributions présentées dans la figure 2.15 montrent les composantes de déplacement du MEF et du modèle semi-analytique avec un angle  $\alpha$  de  $10^\circ$ . Avec une valeur de  $\alpha$  plus grande, la zone de chargement devient plus large, permettant d'avoir une meilleure distribution des mailles dans la zone de chargement, sans augmenter considérablement le nombre de mailles. Cela conduit à une réduction significative des erreurs des déplacements entre la solution du MEF et celle semi-analytique. Numériquement, les valeurs moyenne, maximale et minimale des erreurs relatives par rapport au déplacement maximal de  $u$  sont 0.20%, 10.60%, respectivement. Pour les déplacements  $v$ , les valeurs moyenne et maximale des erreurs relatives par rapport au déplacement maximal de  $v$  sont 0.06% et 0.85%, respectivement. Bien que l'erreur maximale à certains points soit d'environ 10% sur le déplacement  $u$ , un raffinement du maillage plus conséquent conduira donc à faire tendre la solution MEF vers la solution semi-analytique.

Par conséquent, selon les comparaisons des déplacements obtenus par la solution de MEF et celle semi-analytique, nous pouvons conclure que la solution semi-analytique est en bonne

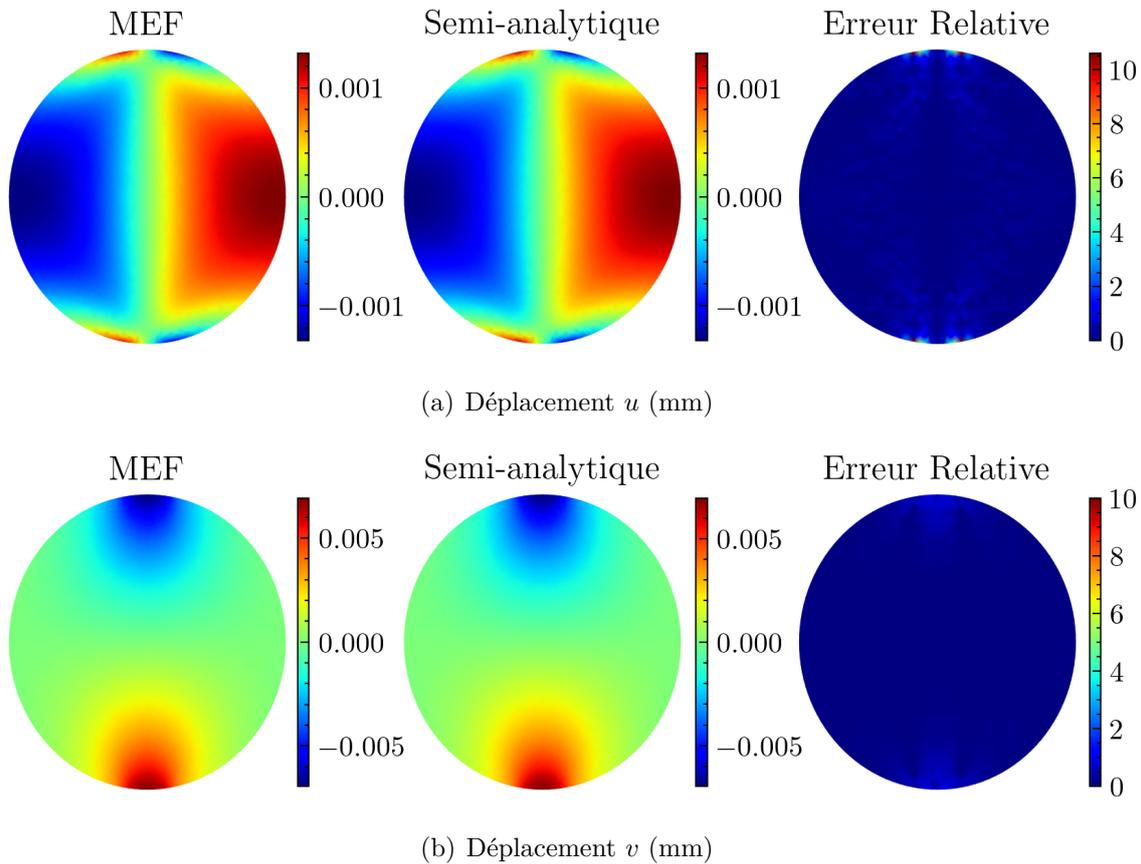


FIGURE 2.15 – Comparaison des déplacements  $u$  et  $v$  obtenus par la solution de MEF et la solution semi-analytique avec  $\alpha = 10$ .

cohérence avec les résultats de la MEF, en considérant une loi de comportement mono-module.

### 2.4.4.3 Comparaison avec les solutions analytiques existantes

L'étude de Patel et Martin [91], utilisant le modèle proposé par Jianhong et al. [86], a fourni une solution analytique pour le déplacement dans les matériaux bi-module suivant les deux axes AB et CD, dans un contexte de chargement ponctuel. Dans ce modèle amélioré, les valeurs des déplacements au point de chargement restent inconnues. En adoptant les mêmes paramètres que dans l'exemple précédent, à l'exception du module de Young en compression  $E_c = 12$  GPa, du module de Young en traction  $E_t = 8$  GPa et du coefficient de Poisson en compression  $\nu_c = 0.25$ , une comparaison des déplacements axiaux obtenus à partir de la solution semi-analytique et du modèle de Patel est illustrée dans la figure 2.16.

Comme dans la comparaison précédente, à l'exception des points de chargement, les champs de déplacement obtenus sont presque identiques. Les valeurs maximale et moyenne des erreurs relatives par rapport au maximal de  $u_x$  suivant CD, sont de 0.014% et 0.003%, respectivement. Pour  $v_y$  suivant l'axe AB, ces erreurs sont de 1.157% et  $5.6 \cdot 10^{-6}\%$ , respectivement. Par conséquent, selon les analyses des erreurs relatives par rapport aux déplacements maximaux, on peut conclure que la solution semi-analytique du champ de déplacement surfacique, en suivant les axes principaux, permet de décrire avec précision le comportement des matériaux bi-module.

Au vu des comparaisons avec d'autres études existantes, il est possible de conclure que la solution semi-analytique offre une représentation précise du champ de déplacement surfacique tant pour les matériaux mono-module que bi-module lors de l'essai de fendage.

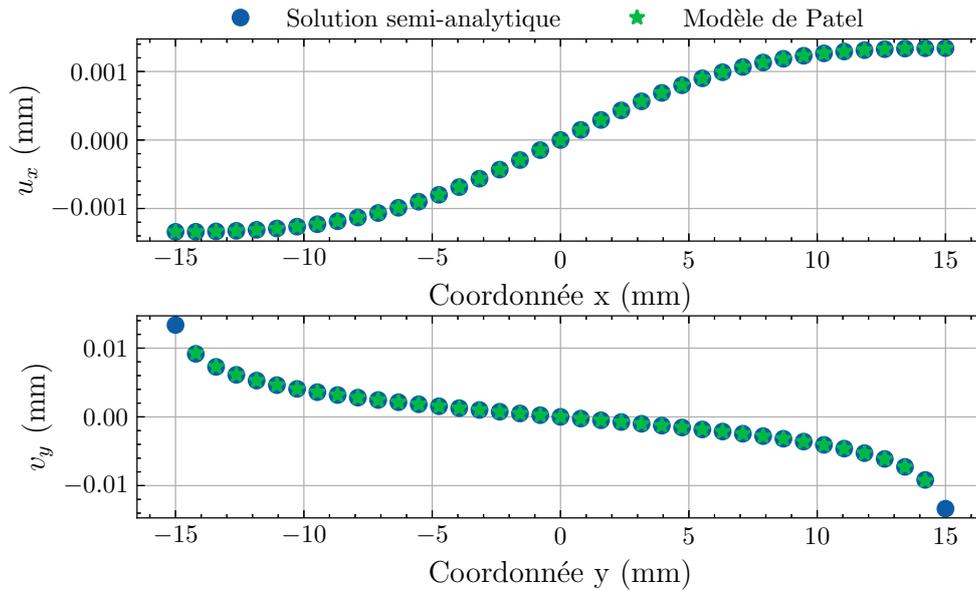


FIGURE 2.16 – Comparaison des déplacements axiaux obtenu par les deux modèles : point bleu : solution semi-analytique ; étoile verte : modèle de Patel.

## 2.5 Recalage avec la solution semi-analytique

Le développement de la solution semi-analytique offre une opportunité non seulement d'implémenter le champ de déplacement dans la méthode de recalage, mais aussi de tirer parti d'autres champs pour cette méthode.

### 2.5.1 Principe de l'identification

De manière similaire à l'approche FEMU, le principe fondamental du recalage à l'aide de la solution semi-analytique adopte la même forme que celle utilisée dans la méthode FEMU, comme illustré par l'équation suivante :

$$(\Theta^*) = \arg \min_{\Theta} J \equiv \frac{1}{2} \|U^{num} - U^{exp}\|^2 \quad (2.28)$$

Ici,  $U^{num}$  est la grandeur obtenue à partir de la solution semi-analytique (2.22). Ce problème de minimisation est contraint avec  $\Theta_{min} \leq \Theta \leq \Theta_{max}$ . Contrairement à l'approche utilisée avec la commande MACR\_RECAL, les champs de calcul ne sont pas adimensionnés. Bien que ce changement puisse entraîner un arrêt prématuré du calcul en raison de petites valeurs de  $J$  lorsque la magnitude du chargement est faible, il permet d'éviter les valeurs excessivement élevées de  $J$  et les erreurs de calcul provoquées par le ratio  $U^{exp}/U^{num}$ .

### 2.5.2 Analyse de trois cas de recalage

En se basant sur les méthodes de mesure et sur les données utilisées dans l'équation (2.28), en remplaçant  $\Theta$  par  $E_c$ ,  $E_t$ , et  $\nu_c$ , tout en spécifiant que la grandeur  $U$  peut contenir le champ de déplacement et/ou de déformation, trois cas ont été analysés dans cette étude :

- Cas A : recalage avec le champ de déplacement axial mesuré  $u_{CD}^m(x, 0)$  et  $v_{AB}^m(0, y)$  à

chaque valeur du chargement appliqué  $F(t)$  :

$$\{E_c^*, E_t^*, \nu_c^*\} = \arg \min_{E_c, E_t, \nu_c} J(E_c, E_t, \nu_c) \equiv \frac{1}{2} \|u_{CD} - u_{CD}^m\|^2 + \frac{1}{2} \|v_{AB} - v_{AB}^m\|^2 \quad (2.29)$$

- Cas B : recalage avec le champ de déformation au centre de la surface mesuré  $\varepsilon_{xx}^m(0, 0)$  et  $\varepsilon_{yy}^m(0, 0)$  pour plusieurs chargements  $F(t)$  :

$$\{E_c^*, E_t^*, \nu_c^*\} = \arg \min_{E_c, E_t, \nu_c} J(E_c, E_t, \nu_c) \equiv \frac{1}{2} \|\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^m\|^2 + \frac{1}{2} \|\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^m\|^2 \quad (2.30)$$

- Cas C : recalage avec le champ de déplacement surfacique mesuré  $u^m(x, y)$  et  $v^m(x, y)$  sur un sous domaine  $\Omega_m$  à chaque valeur du chargement appliqué  $F(t)$  :

$$\{E_c^*, E_t^*, \nu_c^*\} = \arg \min_{E_c, E_t, \nu_c} J(E_c, E_t, \nu_c) \equiv \frac{1}{2} \|u - u^m\|^2 + \frac{1}{2} \|v - v^m\|^2 \quad (2.31)$$

Selon la relation de symétrie, la valeur de  $\nu_t$  est déterminé à partir des autres paramètres :

$$\nu_t = E_t \frac{\nu_c}{E_c} \quad (2.32)$$

Pour garantir que les paramètres identifiés restent dans une gamme raisonnable, des limites sont imposées aux variations des paramètres pour les trois cas d'identification :

$$0.01 \text{ GPa} \leq E_c \leq 22 \text{ GPa}; \quad 0.01 \text{ GPa} \leq E_t \leq E_c; \quad 0 < \nu_c < 0.5 \quad (2.33)$$

Dans les cas A et C, l'utilisation du champ de déplacement à chaque instant de l'essai est suffisant pour identifier les paramètres mécaniques, permettant ainsi une identification image par image. En revanche, pour le cas B, il est nécessaire de prendre en compte toutes les images de la mesure. Ceci s'explique par le fait que le champ de déformation au centre, à chaque instant, ne fournit pas à lui seul des résultats fiables. Ainsi, l'exploitation de l'ensemble des images expérimentales dans le cas B est cruciale pour obtenir une valeur unique et précise pour chaque paramètre identifié, garantissant la fiabilité de l'identification.

De manière similaire aux définitions des groupes de nœuds dans la méthode FEMU, les erreurs de mesure inhérentes à la CIN, en particulier autour des frontières de l'objet mesuré, ne peuvent pas être négligées. Ainsi, pour améliorer la fiabilité des résultats d'identification, les champs de déplacement utilisés dans les cas A et C sont pris dans les sous domaines comme le montre la figure 2.17. Pour le cas B, qui se concentre exclusivement sur le champ de déformation au centre, les effets des frontières ne sont pas considérés.

Il est essentiel de prendre en compte non seulement l'emplacement des mesures mais aussi l'effet du bruit sur ces dernières à différents stades de l'expérience. Au début du chargement, en raison de la subtilité du mouvement de l'échantillon, l'impact du bruit peut rendre les données mesurées inadaptées pour l'identification. De même, vers la fin du chargement, l'émergence de micro-fissures autour de la zone de chargement peut induire un comportement non linéaire du matériau, compromettant ainsi la fiabilité de l'identification à cette étape. Par conséquent, les données collectées lors de ces deux phases ne doivent pas être incluses dans le processus d'identification. La figure 2.18 illustre la délimitation de la zone cohérente, qui couvre généralement l'intervalle allant de 25% à 75% de la charge maximale. Cependant, l'intervalle précis de cette zone cohérente doit être défini en fonction des mesures de CIN et pour chaque échantillon.

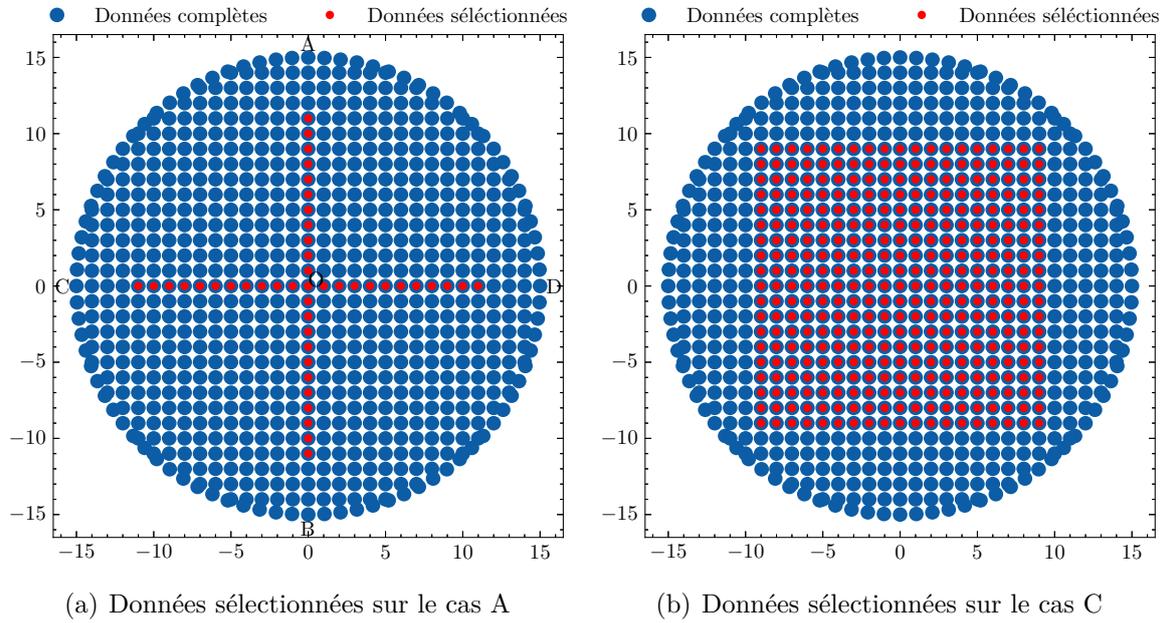


FIGURE 2.17 – Définition des groupes des champs de déplacement utilisées dans la méthode de recalage.

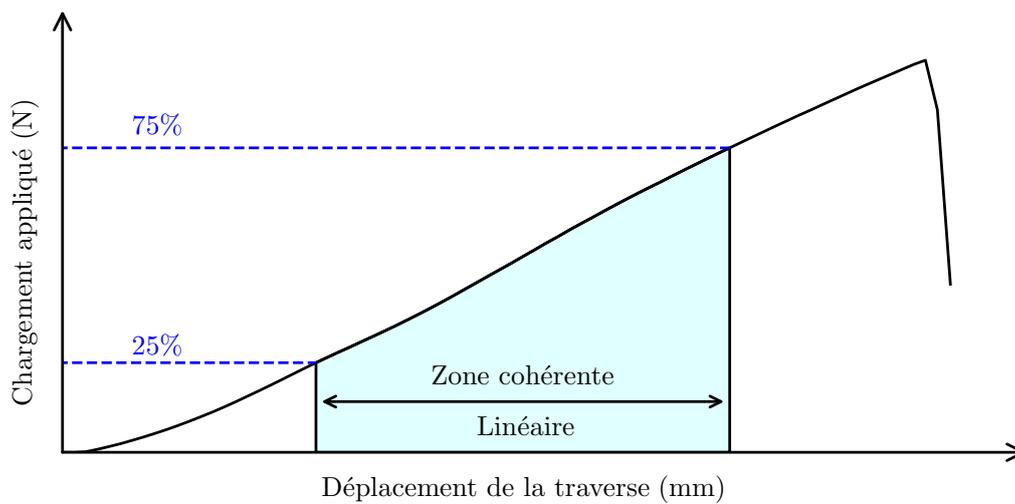


FIGURE 2.18 – Définition de la zone de comportement linéaire, sans évolution de l'endommagement, pour identifier les paramètres bi-module.

### 2.5.3 Procédure de la méthode de recalage

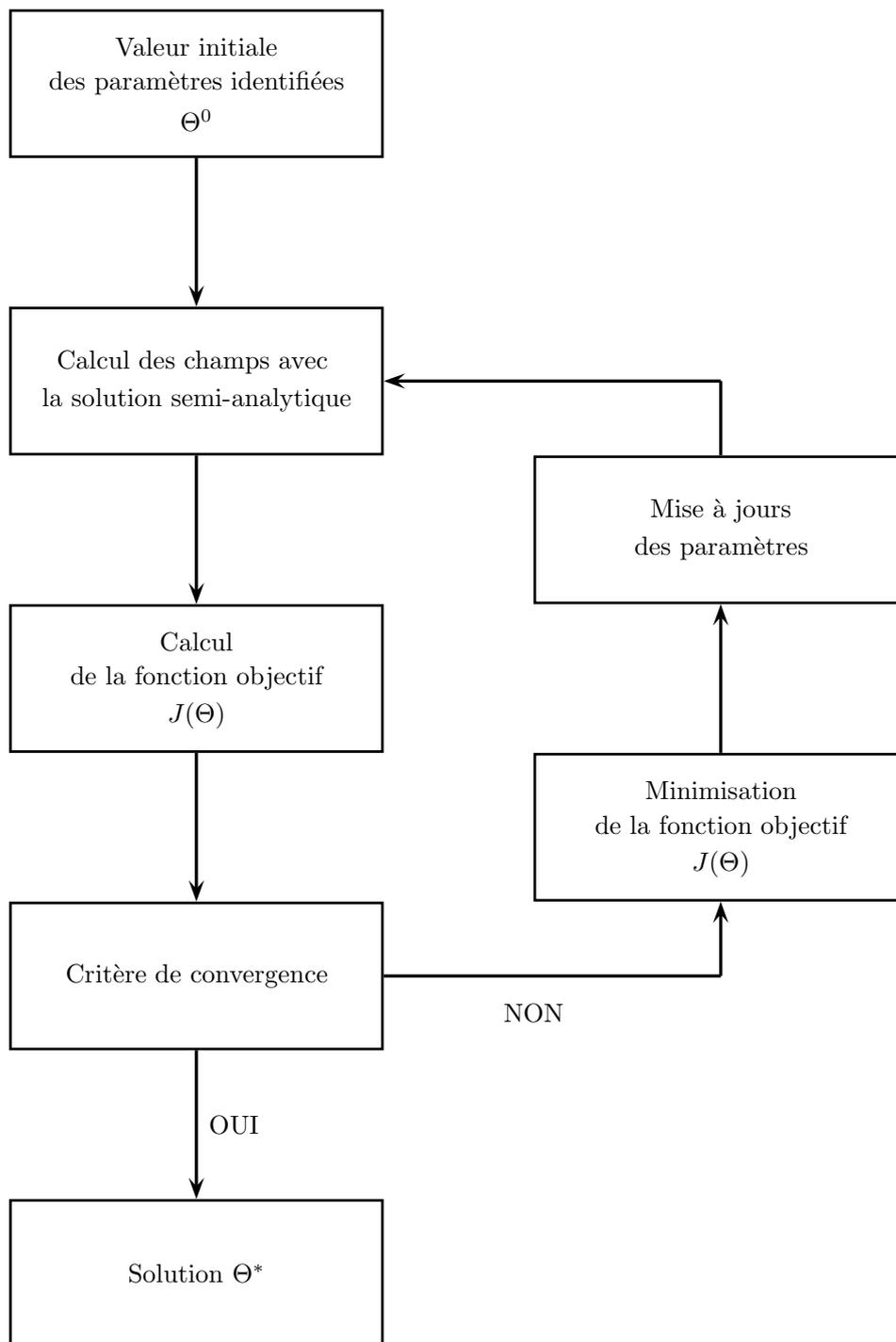


FIGURE 2.19 – Procédure d’identification avec la méthode de Recalage.

Le diagramme de la figure 2.19 illustre la procédure d’identification utilisant le recalage avec la solution semi-analytique. Cette approche présente des avantages notables par rapport à la méthode FEMU. En effet, étant donné que la projection du champ de déplacement entre différents maillages n’est pas requise, et que le champ numérique est directement obtenu par la solution semi-analytique, l’ensemble du processus d’identification est à la fois simplifié et accéléré. Les étapes principales de cette procédure sont résumées comme suit :

1. Tout d'abord, afin de minimiser l'impact de l'ordre de grandeur sur les calculs, les paramètres  $\Theta$  sont adimensionnés. Avec le module de Young variant entre 6 et 20 GPa pour différents types de matériaux fragiles, et le coefficient de Poisson compris entre 0 et 0.5, un scalaire  $E_0$  est défini à  $10^3$  pour améliorer la précision des résultats d'identification. La relation entre  $\Theta$  et  $E_0$  sont présentée suivant :

$$\hat{\Theta} = (\hat{E}_c, \hat{E}_t, \hat{\nu}_c) \quad \hat{E}_c = E_c \cdot E_0, \quad \hat{E}_t = E_t \cdot E_0, \quad \hat{\nu}_c = \nu_c \quad (2.34)$$

Les valeurs initiales des paramètres identifiés  $\Theta^0$  ont une influence directe sur la vitesse de convergence et la qualité des résultats d'identification. Ainsi, pour accélérer l'identification tout en prenant en compte les propriétés mécaniques générales du mortier, les modules de Young en traction et en compression adimensionnés sont fixés à  $\hat{E}_t^0 = \hat{E}_c^0 = 10$  GPa, et le coefficient de Poisson en compression est établi à 0.2.

2. À partir de  $\hat{\Theta}^0$ , le champ de déplacement  $\mathbf{u} = \langle u, v \rangle$  et la fonction objective  $J$  sont déterminés à l'aide de la solution semi-analytique. Lorsque la valeur de  $J$  satisfait les critères d'arrêt, cela signifie que les paramètres  $\hat{\Theta}^0$  produisent un champ de déplacement et de déformation correspondant aux données mesurées. Sinon, les paramètres sont mis à jour itérativement par l'algorithme de minimisation et réintroduits dans les calculs.

Pour assurer que les paramètres identifiés restent dans une gamme raisonnable et éviter que la minimisation ne se retrouve dans une convergence locale, des limites ou des contraintes telles que l'équation (2.33) sont définies et imposées dans l'identification. Ainsi, l'algorithme de minimisation « région de confiance » (Trust Region) a été proposé pour être implémenté dans la méthode de recalage.

3. La méthode de la région de confiance est un algorithme traditionnel de minimisation itérative, adapté à divers problèmes d'optimisation non-linéaire. Contrairement aux méthodes de recherche linéaire telles que la méthode de gradient conjugué, l'algorithme de la région de confiance construit une nouvelle fonction quadratique approximant la fonction objectif à chaque itération, transformant le problème en une minimisation séquentielle de forme quadratique sous contrainte. À chaque étape, on cherche la direction de descente optimale dans un domaine réduit appelé « région de confiance », approchant ainsi la solution optimale de la fonction objectif. Plus de détails sur cette méthode et son application dans la méthode de recalage sont décrits dans l'annexe C.2. Par conséquent, l'algorithme de « *constrained trust region* » dans le package *Scipy.optimize* de Python a été utilisé dans la méthode de recalage avec la solution semi-analytique pour minimiser la fonction objectif, tout en respectant les contraintes définies pour les paramètres.
4. La solution du problème de minimisation dépend aussi de la précision du calcul du gradient. Dans notre cas, la fonction  $J(\Theta)$  dépend du champ déplacement  $\mathbf{u}(\Theta)$ , lui-même dépend des paramètres  $\Theta$ . Pour la méthode de région de confiance, il est impératif de lui fournir le gradient le plus précis possible. Le calcul du gradient de la fonction  $\nabla_{\Theta} J$  dépendra directement du calcul du gradient du champ de déplacement  $\nabla_{\Theta} \mathbf{u}$  de la manière suivante, en posant  $\mathbf{u}(\Theta) = \langle u(\Theta), v(\Theta) \rangle$ ,  $\Theta = (E_c, E_t, \nu_c)$ , on a :

$$\nabla_{\Theta} J = (\mathbf{u}(\Theta) - \mathbf{u}^m) \nabla_{\Theta} \mathbf{u} \quad \text{avec} \quad \nabla_{\Theta} \mathbf{u} = \begin{cases} \frac{\partial u(\Theta)}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial v(\Theta)}{\partial \Theta} \end{cases} \quad (2.35)$$

Où

$$\frac{\partial u(\Theta)}{\partial \Theta} = \begin{cases} \frac{\partial u(\Theta)}{\partial E_c} \\ \frac{\partial u(\Theta)}{\partial E_t} \\ \frac{\partial u(\Theta)}{\partial \nu_c} \end{cases} \quad \frac{\partial v(\Theta)}{\partial \Theta} = \begin{cases} \frac{\partial v(\Theta)}{\partial E_c} \\ \frac{\partial v(\Theta)}{\partial E_t} \\ \frac{\partial v(\Theta)}{\partial \nu_c} \end{cases} \quad (2.36)$$

D'après les formules (2.22),  $\frac{\partial u(\Theta)}{\partial \Theta}$  et  $\frac{\partial v(\Theta)}{\partial \Theta}$  dépendent explicitement de paramètre  $(E_c, E_t, \nu_c)$ , il est alors possible de calculer directement ces dérivées par l'intégration numérique sachant que :

$$\frac{\partial u(\Theta)}{\partial \Theta} = \int \frac{\partial \varepsilon_{xx}(\Theta)}{\partial \Theta} dx \quad \frac{\partial v(\Theta)}{\partial \Theta} = \int \frac{\partial \varepsilon_{yy}(\Theta)}{\partial \Theta} dy \quad (2.37)$$

Les dérivées  $\frac{\partial \varepsilon_{xx}(\Theta)}{\partial \Theta}$  et  $\frac{\partial \varepsilon_{yy}(\Theta)}{\partial \Theta}$  sont calculées directement à partir des expression analytique de  $\varepsilon_{xx}(\Theta)$ ,  $\varepsilon_{yy}(\Theta)$ ,  $\varepsilon_1(\Theta)$  et  $\varepsilon_2(\Theta)$ , voir les équations (2.21) et (2.12) ou (2.15). Le Hessien  $H_{\Theta}J = \nabla_{\Theta} \nabla_{\Theta} J$  nécessaire à la méthode de région de confiance, implémentée dans *Scipy*, est calculé numériquement en utilisant la méthode « Symmetric Rank 1 » (SR1) basée sur la méthode quasi-Newton pour mettre à jour la dérivée seconde (Hessian) en fonction des dérivées (gradients) calculées en deux points. C'est une généralisation à la méthode sécante pour un problème multidimensionnel, pour plus de détail voir la référence [115].

## 2.5.4 Validation avec des données synthétiques

Afin de valider la méthode de recalage dans les trois cas distingués, des données synthétiques, générées à partir de la solution semi-analytique, ont été employées pour l'identification des paramètres bi-module. Cette démarche vise à démontrer la fiabilité et la robustesse de la méthode en question.

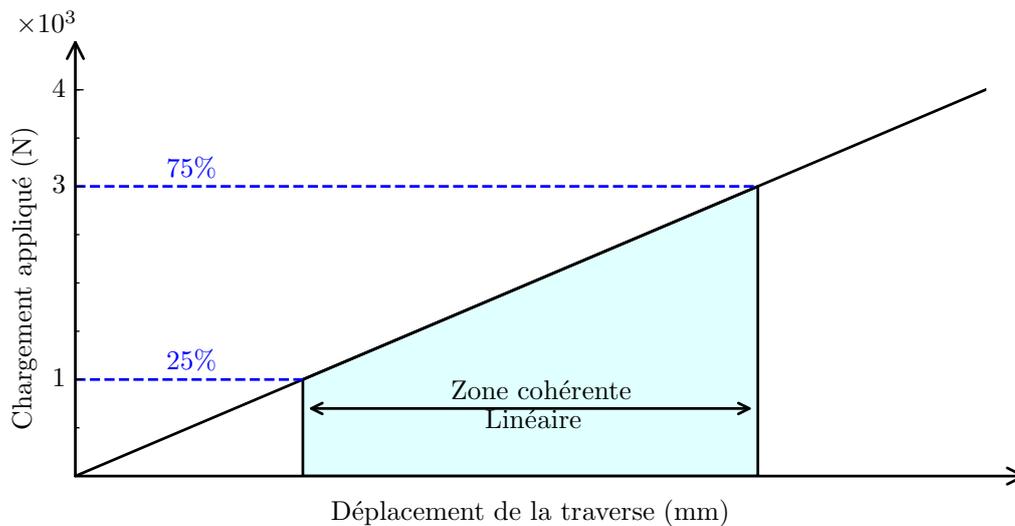


FIGURE 2.20 – Définition des champs utilisés dans la méthode de recalage.

Similairement à la validation de la méthode FEMU, les dimensions de l'échantillon pour les données synthétiques sont identiques à celles de nos échantillons expérimentaux :  $R = 15$

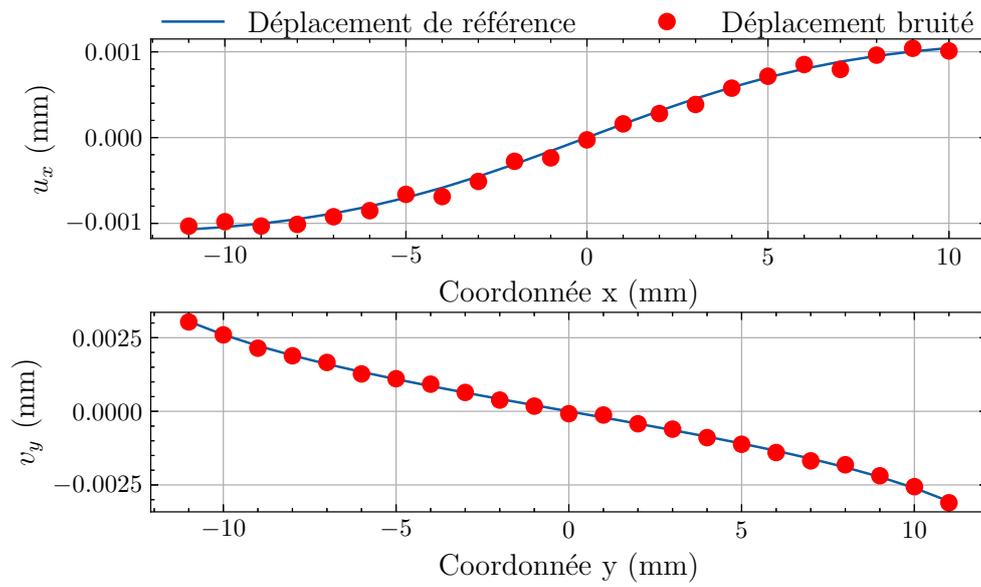
mm,  $h = 53$  mm. Afin de mieux refléter la réalité expérimentale, les données sous le chargement variant entre 0 N et 4000 N sont introduites avec de 5% de bruit blanc additif (bruit gaussien avec une moyenne de 0 et un écart-type de 5% des données utilisées). Les charges appliquées inférieures à 3000 N et supérieures à 1000 N ont été sélectionnées pour délimiter la zone cohérente où le comportement est considéré linéaire, comme illustré par la figure 2.20. De plus, l'absence de nécessité de construire un maillage spécifique permet de représenter les coordonnées  $x$  et  $y$  sous forme de grille, avec un espacement de 1 mm entre deux points. Pour le matériau bi-module, les paramètres de référence sont définies par :  $E_c = 12$  GPa,  $E_t = 8$  GPa,  $\nu_c = 0.25$ .

Pour simuler l'essai de fendage avec un chargement concentré appliqué par deux plateaux plats, l'angle  $\alpha$  est défini à  $10^{-5}$ °. Les données utilisées pour l'identification dans les cas A et C sont issues du champ de déplacement surfacique, calculé par l'équation (2.22) et illustré dans les figures 2.21(a) et 2.21(b).

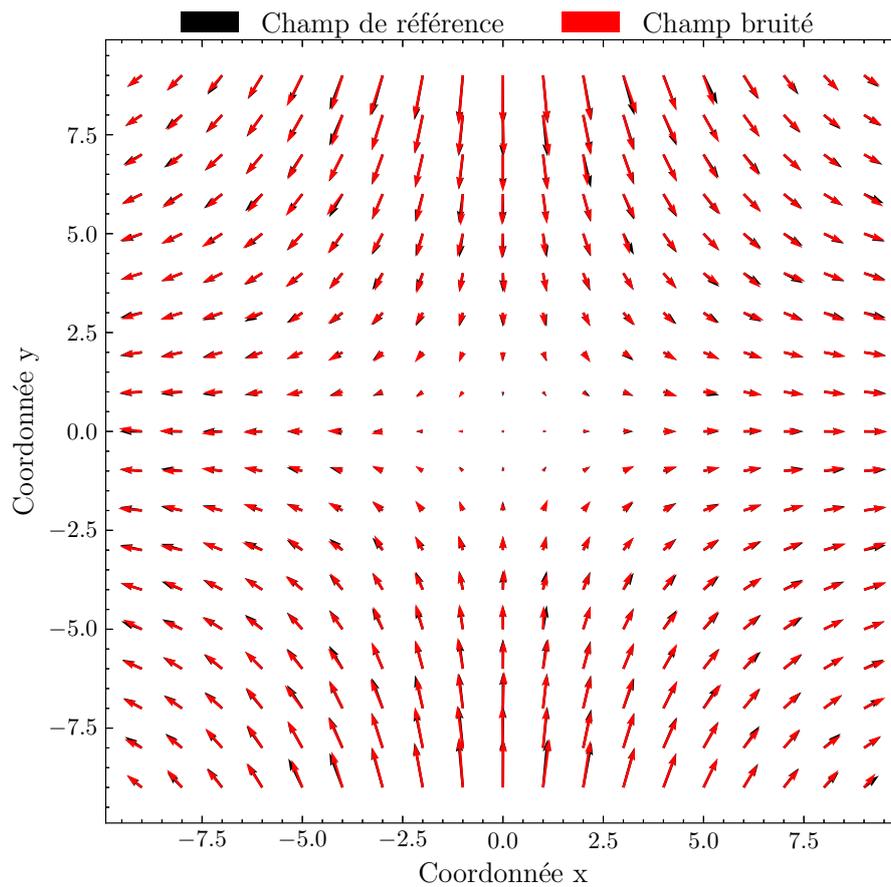
Compte tenu des erreurs significatives présentes aux frontières de la surface mesurée par la CIN, le cas A de recalage avec la solution semi-analytique utilise uniquement les déplacements axiaux  $u_{CD}$  et  $v_{AB}$ , où les coordonnées varient entre  $-11$  mm et  $11$  mm. Pour le cas C, seuls les déplacements surfaciques compris dans les intervalles de coordonnées  $[-10$  mm,  $10$  mm] sont considérés. Il est important de noter que la surface du champ de déplacements n'est pas obligatoirement de forme rectangulaire, d'autres formes géométriques sont également possibles. Dans la pratique de la CIN, un maillage en Q4 offre un plus grand nombre de points suivant les deux axes qu'un maillage en T3 de même taille d'élément, rendant l'intégration numérique plus simple dans la solution semi-analytique. Par conséquent, pour les données synthétiques et expérimentales, une forme rectangulaire a été choisie pour la surface où les déplacements sont extraits, afin d'adopter le maillage utilisé par la CIN et accélérer le processus d'identification.

Compte tenu des particularités du cas B, où une série de données (une image) fournit un unique jeu de mesures (déformations au centre), il est crucial d'assurer la cohérence des résultats obtenus et la fiabilité de la méthode d'identification employée. Pour cela et comme illustré dans la figure 2.22, trois groupes de champs de déformation au centre, chacun avec le même niveau de bruit, ont été utilisés dans le cas B.

Pour faciliter une comparaison efficace entre les résultats d'identification obtenus à partir des champs de déplacement axiaux et surfaciques, les analyses des résultats pour les cas A et C sont d'abord présentées. Les résultats du cas B seront examinés ensuite, permettant de mettre en évidence les différences entre les valeurs identifiées à partir des champs de déplacement et de déformation.



(a) Cas A : Déplacements axiaux



(b) Cas C : Déplacements surfaciques

FIGURE 2.21 – Champs de déplacement synthétiques générés par un chargement de 3000 N avec la solution semi-analytique.

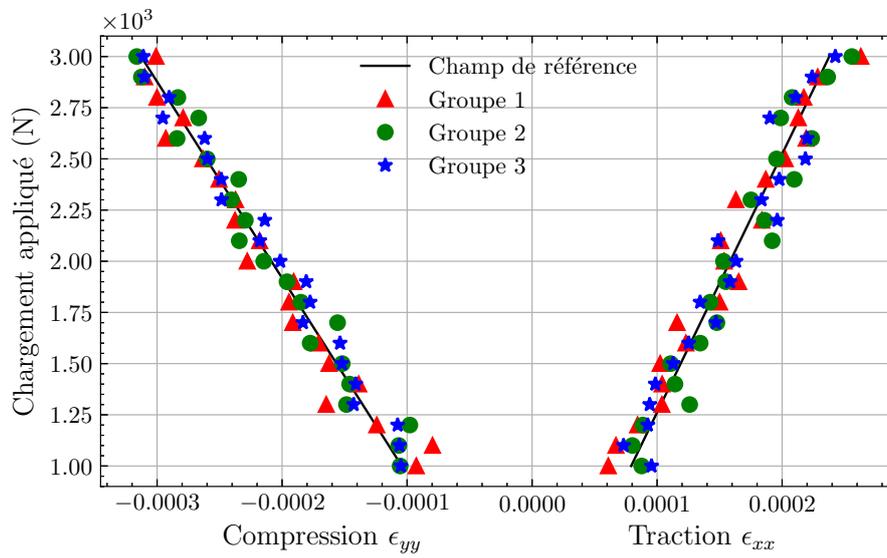


FIGURE 2.22 – Trois groupes de champ de déformation synthétique au centre de l'échantillon utilisé dans la méthode de recalage avec la solution semi-analytique lorsque que le chargement varie entre 1000 et 3000 N.

### 2.5.4.1 Exploitation des mesures et identification

#### Cas A :

La figure 2.23 présente le résultat de l'identification avec le champ de déplacement synthétique axial bruitées. Compte tenu de la valeur relativement basse de référence pour  $\nu_c$ , les valeurs identifiées pour ce paramètre sont exprimées avec trois chiffres significatifs après la virgule. Pour les deux autres paramètres, les valeurs identifiées sont arrondies à deux chiffres significatifs pour en faciliter la lecture.

Selon la figure 2.23(a), parmi ces trois paramètres, les valeurs identifiées de  $E_c$  sont relativement les plus stables, avec une moyenne de  $12 \pm 0.11$  GPa et une erreur relative de 0.05%. Au contraire, les valeurs de  $E_t$  et  $\nu_c$  présentent de légères fluctuations. La valeur moyenne de  $E_t$  est de  $7.79 \pm 0.58$  GPa avec une erreur relative de 2.57%, tandis que celle de  $\nu_c$  est de  $0.238 \pm 0.026$  GPa, et son erreur relative est de 4.67%.

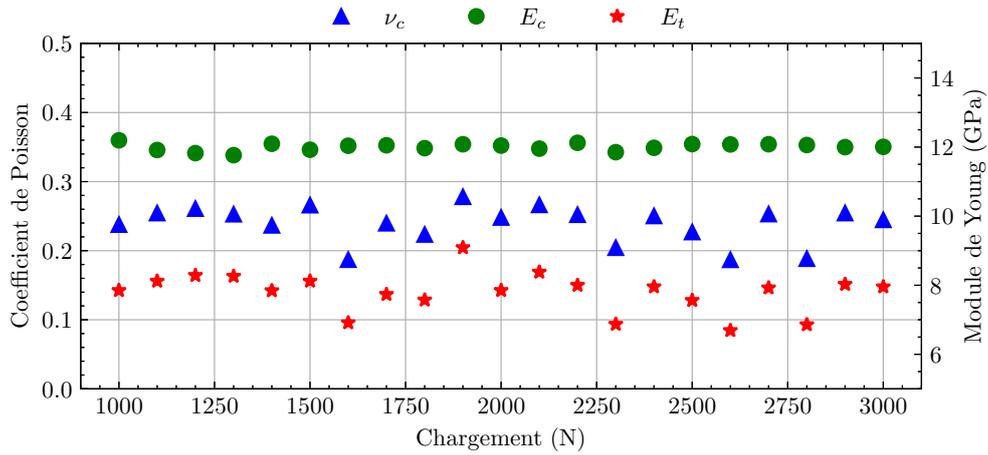
Les figures 2.23(b), 2.23(c), et 2.23(d) présentent les histogrammes et les fonctions de densité de probabilité pour chaque paramètre identifié. Ces représentations montrent que la distribution de probabilité de chacun de ces paramètres forme un pic unique, coïncidant étroitement avec sa valeur moyenne. De plus, les histogrammes révèlent que l'étendue des variations des paramètres n'est pas excessivement large. Pour  $E_c$ , la majorité des valeurs identifiées se concentre autour de 12 GPa, avec l'intervalle de variation entre 11.76 et 12.19 GPa. Les valeurs de  $E_t$  et  $\nu_c$  affichent une tendance similaire en termes de variabilité. Bien que la plupart des valeurs soient également proches des moyennes, les intervalles de variation sont légèrement plus étendus que pour  $E_c$ . Les valeurs de  $E_t$  varient entre 6.68 et 9.08 GPa, tandis que celles de  $\nu_c$  se situent entre 0.186 et 0.277.

#### Cas C :

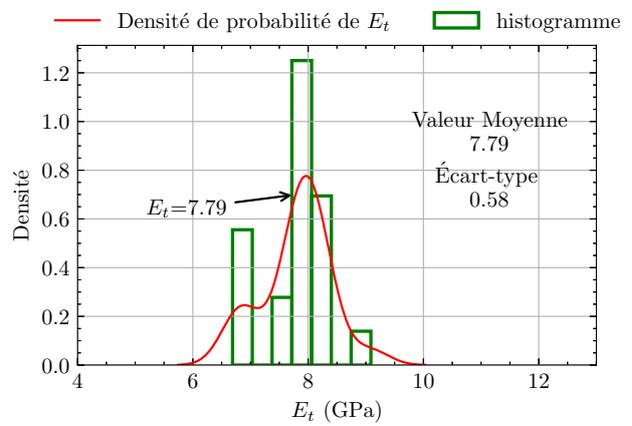
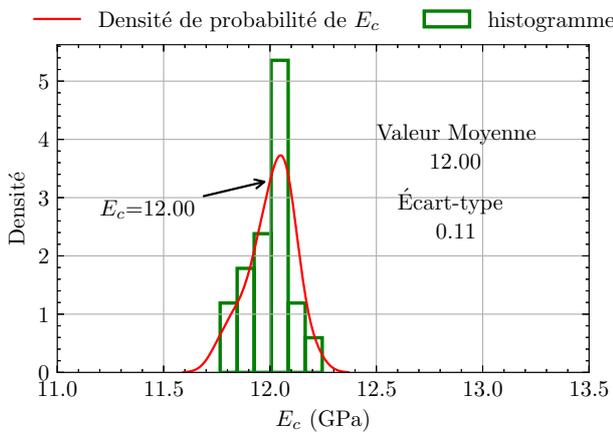
La figure 2.24 illustre les résultats d'identification obtenus avec le champ de déplacement surfacique synthétique bruité. Par rapport au cas A, les résultats dévoilés dans la figure 2.24(a) suggèrent une plus grande stabilité des valeurs identifiées grâce à l'utilisation des champs de déplacement surfacique. Cette observation est conforme à la théorie selon laquelle un plus grand nombre de points dans le processus d'identification contribue à une précision accrue. De plus, le champ de déplacement surfacique offre des détails plus riches, favorisant ainsi l'amélioration de l'identification.

D'un point de vue numérique, la valeur moyenne de  $E_c$  est  $11.99 \pm 0.04$  GPa avec une erreur relative 0.04%, celle de  $E_t$  est  $7.91 \pm 0.22$  GPa avec une erreur relative 1.15%, et celle de  $\nu_c$  est  $0.246 \pm 0.009$  avec 1.51% d'erreur relative. Comme l'erreur relative sur  $E_c$  dans le cas A est faible, ici l'amélioration de la précision n'est pas particulièrement marquée. Cependant, en comparaison avec les erreurs relatives de 2.57% et 4.67% pour  $E_t$  et  $\nu_c$ , respectivement dans le cas A, la différence des précisions sont nettement plus importantes. Il est à noter qu'au chargement de 2600 N, les valeurs des paramètres identifiés diffèrent légèrement de celles des autres chargements, probablement à cause d'une erreur liée à l'intégration numérique lors du calcul. Néanmoins, ces variations n'ont pas d'impact significatif sur les résultats globaux, comme le montrent les valeurs moyennes identifiées.

Cette analyse des résultats pour le cas C révèle l'avantage de l'utilisation des champs de déplacement surfacique dans l'amélioration de la précision et la stabilité de l'identification des paramètres mécaniques.

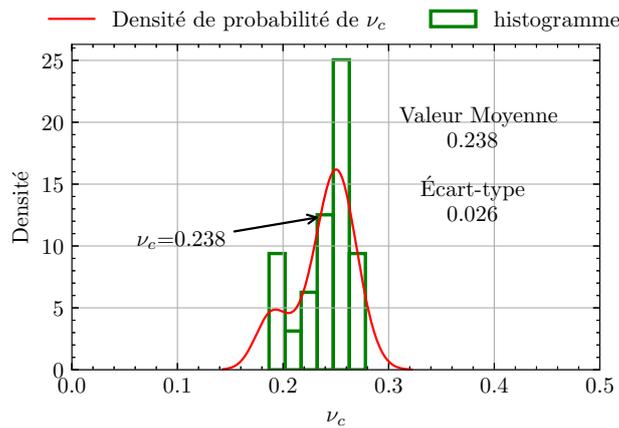


(a) Paramètres identifiés aux différents chargements



(b) Histogramme et fonction de densité de probabilité pour le paramètre  $E_c$

(c) Histogramme et fonction de densité de probabilité pour le paramètre  $E_t$



(d) Histogramme et fonction de densité de probabilité pour le paramètre  $\nu_c$

FIGURE 2.23 – Cas A : Paramètres identifiés avec le champ de déplacement synthétique axial bruité, par la méthode de recalage avec la solution semi-analytique.

Les figures 2.24(b), 2.24(c), et 2.24(d) présentent les histogrammes et les fonctions de densité de probabilité pour chaque paramètre identifié dans le cas C. Comparativement au cas A, ces fonctions de densité de probabilité affichent également des pics uniques alignés précisément sur les valeurs moyennes. De plus, la concentration des valeurs identifiées autour des valeurs de

référence est plus évident, avec des intervalles de variation réduits, surtout pour  $E_t$  et  $\nu_c$ .

Pour  $E_c$ , l'intervalle de la variation est compris entre 11.93 et 12.05 GPa, ce qui indique une grande précision dans l'identification de ce paramètre. Les intervalles de variation pour  $E_t$  et  $\nu_c$  sont respectivement de [7.09 GPa, 8.15 GPa] et [0.216, 0.256], soulignant une concentration plus forte des valeurs identifiées près des valeurs moyennes pour ces paramètres.

Cette analyse détaillée met en lumière la précision accrue obtenue dans le cas C, grâce à l'utilisation des champs de déplacement surfacique dans l'identification, se traduisant par des distributions de probabilité plus concentrées et des intervalles de variation plus restreints pour les paramètres identifiés.

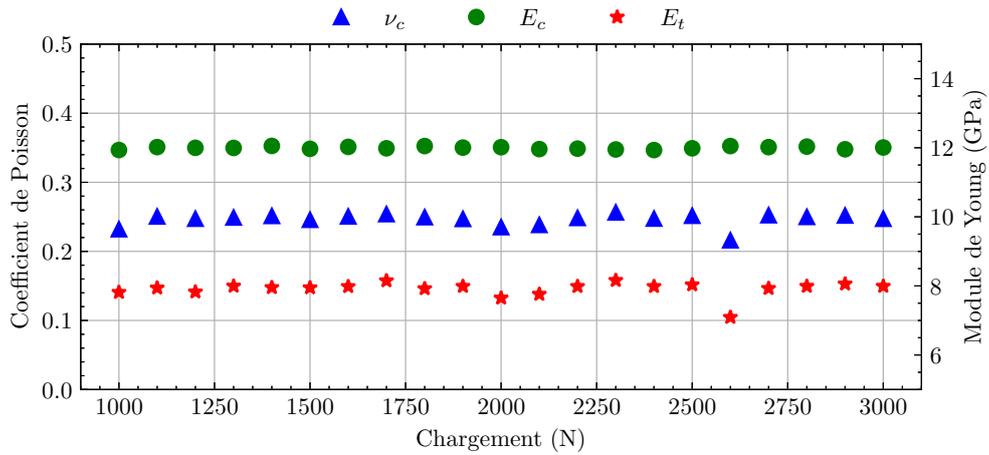
### Cas B :

Pour évaluer l'efficacité de l'identification à partir des champs de déformation au centre de la surface mesurée, le cas B a été examiné en utilisant trois groupes de données comportant différents bruit blanc à 5%. Le tableau 2.2 résume les valeurs des paramètres identifiés à partir de ces champs de déformation au centre (cas B). Conformément aux observations faites dans les cas A et C, les valeurs identifiées pour  $E_c$  affichent la plus grande constance par rapport aux autres paramètres, avec une erreur relative minimale et maximale respectivement de 1.59% (11.80 GPa) et 2.70% (11.67 GPa). Parallèlement, les résultats les plus favorables pour  $E_t$  et  $\nu_c$  sont 7.83 GPa (5.46%) et 0.245 (1.62%), tandis que les moins favorables sont de 8.33 GPa (2.58%) et 0.229 (8.08%). Après analyse de ces ensembles de résultats, la valeur moyenne obtenue pour  $E_c$  est  $11.89 \pm 0.22$  GPa avec l'erreur relative de 0.94%. Pour  $E_t$ , la valeur moyenne est  $8.12 \pm 0.21$  GPa avec l'erreur relative de 1.49%. Quant à  $\nu_c$ , sa valeur moyenne est  $0.239 \pm 0.007$  avec l'erreur relative de 4.26%.

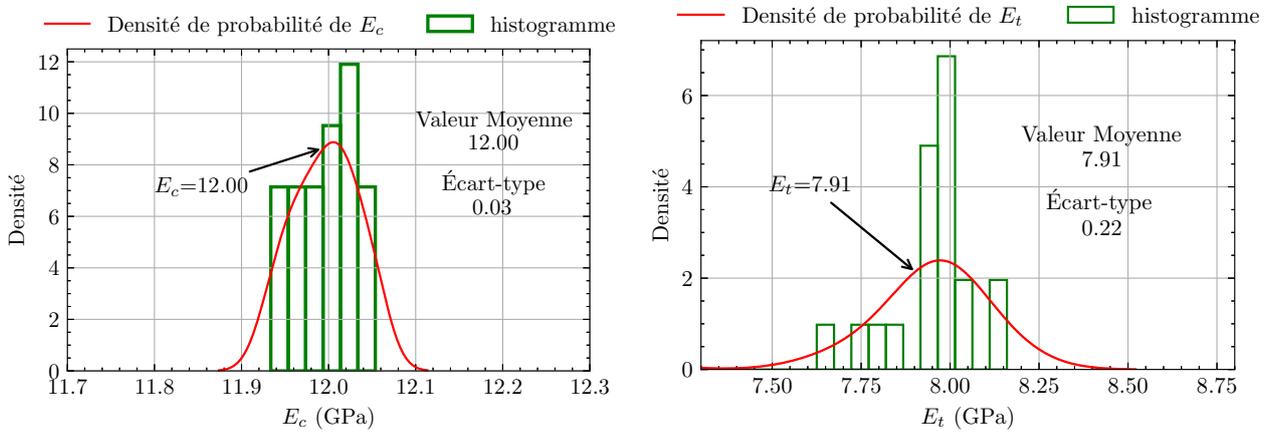
Cette analyse démontre que, bien que l'utilisation des champs de déformation au centre dans le cas B puisse produire des résultats avec une certaine variabilité, particulièrement pour  $\nu_c$ , elle reste une méthode viable pour l'identification des paramètres bi-module, offrant une précision raisonnable dans l'estimation des propriétés mécaniques des matériaux étudiés.

TABLEAU 2.2 – Paramètres identifiés avec le champ de déformation synthétique bruité au centre par la méthode de recalage avec la solution semi-analytique.

Paramètres identifiés	Référence	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
$E_c$ (GPa)	12.00	11.80(1.59%)	11.67(2.70%)	12.19(1.60%)
$E_t$ (GPa)	8	8.20(2.58%)	8.33(4.23%)	7.83(2.03%)
$\nu_c$	0.25	0.245(1.62%)	0.244(2.06%)	0.229(8.08%)

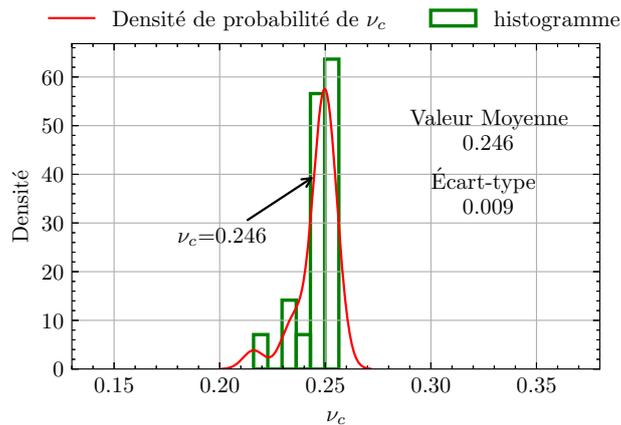


(a) Paramètres identifiés aux différents chargements



(b) Histogramme et fonction de densité de probabilité pour le paramètre  $E_c$

(c) Histogramme et fonction de densité de probabilité pour le paramètre  $E_t$



(d) Histogramme et fonction de densité de probabilité pour le paramètre  $\nu_c$

FIGURE 2.24 – Cas C : Paramètres identifiés avec le champ de déplacement synthétique surfacique bruité, par la méthode de recalage avec la solution semi-analytique.

### 2.5.4.2 Analyse de sensibilité et conclusion

TABLEAU 2.3 – Paramètres identifiés par la méthode de recalage avec la solution semi-analytique avec les différents données synthétiques bruitées : (cas A) le champ de déplacement axial ; (cas B) le champ de déformation au centre surfacique ; (cas C) le champ de déplacement surfacique.

Paramètres identifiés	Référence	cas A	cas B	cas C
$E_c$ (GPa)	12	$12.00 \pm 0.11(0.05\%)$	$11.89 \pm 0.22(0.94\%)$	$11.99 \pm 0.04(0.04\%)$
$E_t$ (GPa)	8	$7.79 \pm 0.58(2.57\%)$	$8.12 \pm 0.21(1.49\%)$	$7.91 \pm 0.22(1.15\%)$
$\nu_c$	0.25	$0.238 \pm 0.026(4.67\%)$	$0.239 \pm 0.007(4.26\%)$	$0.246 \pm 0.009(1.51\%)$

Le tableau 2.3 montre les valeurs des paramètres identifiés obtenues dans les trois cas étudiés. D’après ce tableau, il est manifeste que les valeurs moyennes identifiées dans le cas C se rapprochent davantage des valeurs de référence. En ce qui concerne les erreurs relatives observées dans les cas A et B, même si la valeur moyenne identifiée pour  $E_c$  dans le cas A est légèrement supérieure à celle du cas B, les erreurs relatives pour  $E_t$  et  $\nu_c$  suggèrent que ces deux cas présentent une précision similaire.

Dans le cas A, les champs de déplacement axiaux suivant les axes CD (l’axe  $x$ ) et AB (l’axe  $y$ ) ne fournissent pas suffisamment de détails pour une identification précise. Les déplacements  $u_{CD}(x, 0)$  et  $v_{AB}(0, y)$ , calculés avec les paramètres identifiés, peuvent s’aligner sur les données mesurées mais ne représentent pas de manière précise le champ de déplacement surfacique dans son intégralité. Pour des raisons similaires, dans le cas B, le champ de déformation au centre utilisé,  $\varepsilon_{xx}(0, 0)$  et  $\varepsilon_{yy}(0, 0)$ , manque d’informations sur le comportement bi-module, ce qui le rend insuffisant pour identifier le comportement global de l’échantillon.

De plus, selon l’étude de Han et al. [88], la taille de la jauge de déformation a un impact direct sur le champ de déformation mesuré et influence les résultats d’identification. Cela rend les exigences expérimentales pour le cas B particulièrement strictes, surtout pour les petits échantillons. Le mouvement de corps rigide, inévitable dans l’essai de fendage, est difficile à corriger avec les méthodes de mesure traditionnelles, ce qui peut accroître les erreurs de mesure. Par conséquent, le recalage utilisant le champ de déplacement surfacique apparaît comme une méthode plus fiable.

En analysant les résultats obtenu pour  $E_c$  dans chaque cas, on observe que ce paramètre montre la plus grande stabilité, avec des erreurs relatives inférieures de 1%, quel que soit le champ de mesure utilisé. Cependant, pour les paramètres  $E_t$  et  $\nu_c$ , des écarts subsistent entre les valeurs de référence et les valeurs identifiées, y compris dans le cas C. Pour explorer ce phénomène, une analyse de sensibilité du champ de déplacement par rapport à chaque paramètre pourrait être réalisée pour quantifier l’impact des variations des paramètres sur les déplacements calculés.

D’un point de vue quantitatif, l’analyse des dérivées partielles du champ de déplacement par rapport aux modules d’Young est illustrée dans la figure 2.25. Étant donné leur natures similaires, il est possible de réaliser une comparaison significative de leurs amplitudes. De même, la figure 2.26 montre les dérivées partielles du champ de déplacement par rapport aux coefficients de Poisson. Ces dérivées appartenant à la même catégorie, leur évaluation peut se faire de manière comparative.

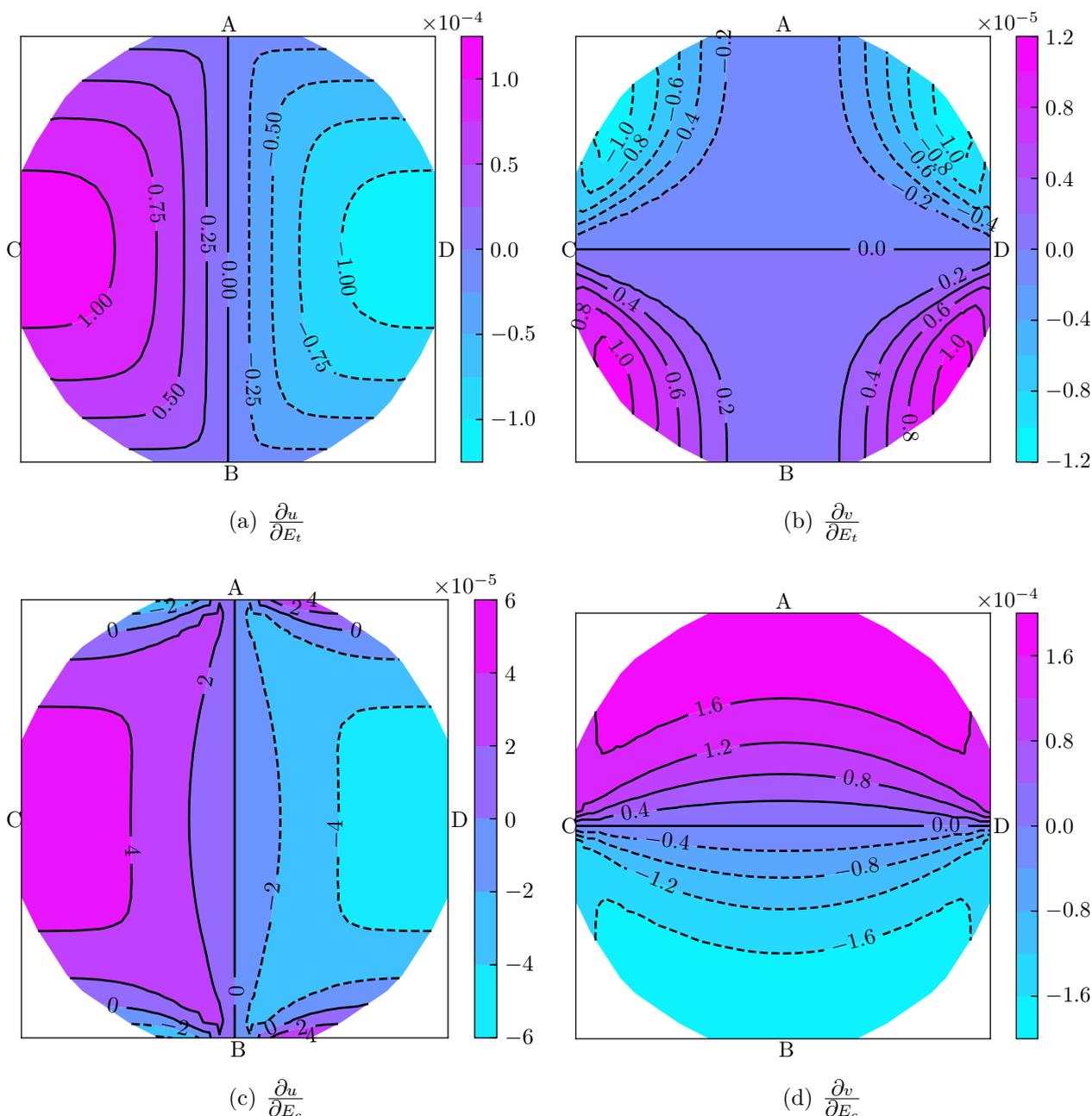


FIGURE 2.25 – Analyse de sensibilité du champ de déplacement par rapport aux modules de Young en traction et en compression.

En détail, la figure 2.25 montre que les valeurs de  $\frac{\partial u}{\partial E_t}$  surpassent celles de  $\frac{\partial v}{\partial E_t}$ , indiquant ainsi que les variations de  $E_t$  influencent davantage le déplacement  $u$  que  $v$ . Inversement, pour  $E_c$ , le déplacement  $v$  est plus affecté par les variations de  $E_c$  que le déplacement  $u$ , parce que les magnitudes de  $\frac{\partial v}{\partial E_c}$  sont plus importantes que  $\frac{\partial u}{\partial E_c}$ . De plus, les valeurs maximales de  $\frac{\partial u}{\partial E_t}$  et  $\frac{\partial v}{\partial E_c}$  se localisent au voisinage des points C et D, ainsi que des points A et B respectivement. Donc, la valeur d'identifié de  $E_t$  est principalement dépendante du déplacement  $u$ , tandis que celles de  $E_c$  est essentiellement déterminée par le déplacement  $v$ .

Dans la méthode de recalage avec la solution semi-analytique, seulement trois paramètres indépendants ont été identifiés. Cependant, les valeurs de  $\nu_t$  peuvent être déterminées à partir

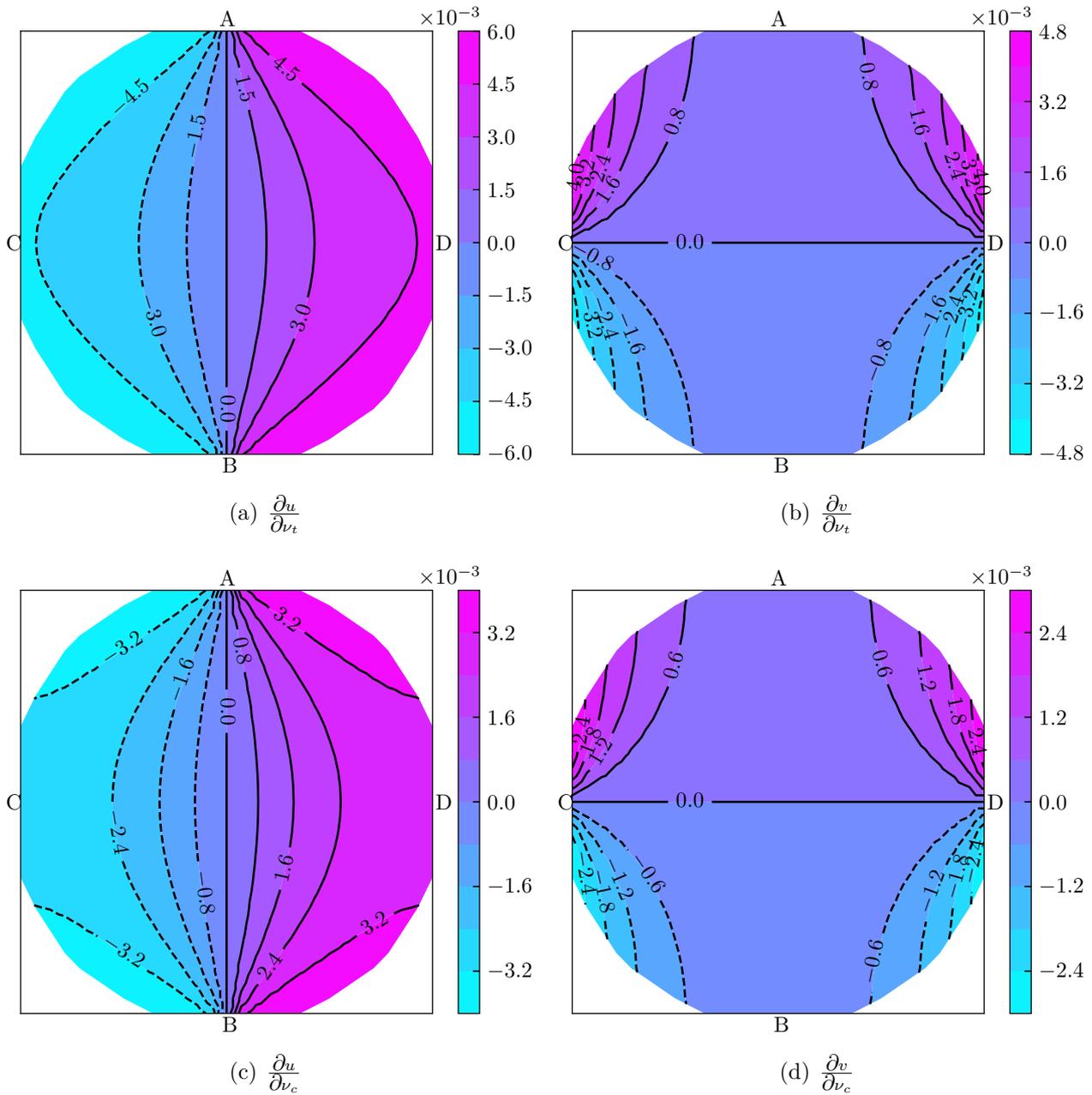


FIGURE 2.26 – Analyse de sensibilité du champ de déplacement par rapport aux coefficients de Poisson en traction et en compression.

de la symétrie de la loi de Hooke. Avec la même théorie, la dérivée du champ de déplacement par rapport  $\nu_t$  peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(E_c, E_t, \nu_c)}{\partial \nu_t} &= \frac{\partial u(E_c, E_t, \nu_c)}{\partial \nu_c} \cdot \frac{\partial \nu_c}{\partial \nu_t} = \frac{\partial u(E_c, E_t, \nu_c)}{\partial \nu_c} \cdot \frac{E_c}{E_t} \\ \frac{\partial v(E_c, E_t, \nu_c)}{\partial \nu_t} &= \frac{\partial v(E_c, E_t, \nu_c)}{\partial \nu_c} \cdot \frac{\partial \nu_c}{\partial \nu_t} = \frac{\partial v(E_c, E_t, \nu_c)}{\partial \nu_c} \cdot \frac{E_c}{E_t} \end{aligned} \quad (2.38)$$

D'après les observations de la figure 2.26, il est facile de constater que la distribution des valeurs des dérivées par rapport  $\nu_t$  est similaire à celle des valeurs des dérivées par rapport  $\nu_c$ , et ces dernières étant  $E_c/E_t$  fois plus importante que la première. Donc, des conclusions analogues à celles de  $\nu_c$  peuvent être extrapolées pour  $\nu_t$ .

Pour le paramètre  $\nu_c$ , bien que les maximales de  $\frac{\partial u}{\partial \nu_c}$  et de  $\frac{\partial v}{\partial \nu_c}$  soient du même ordre

de grandeur ( $10^{-3}$ ), mais les distributions des valeurs de  $\frac{\partial v}{\partial \nu_c}$  ne sont pas pareilles. Comme illustré dans les figures 2.26(c) et 2.26(d), à l'exception des zones avoisinant les points C et D, les autres valeurs de  $\frac{\partial v}{\partial \nu_c}$  sont relativement négligeables. En revanche, pour  $\frac{\partial u}{\partial \nu_c}$ , même si les valeurs maximales sont localisées au voisinage des points A et B, les autres emplacements affichent des valeurs plus importantes. Par conséquence, la valeur identifiée de  $\nu_c$  est fortement relié au déplacement  $u$ .

Par conséquence, les valeurs identifiées de  $E_t$  et  $\nu_c$  sont principalement déterminées par les mesures du déplacement  $u$ , tandis que les valeurs identifiées de  $E_c$  sont essentiellement affectées par les mesures du déplacement  $v$ . À cause du fait que  $|u| \ll |v|$ , avec le même niveau du bruit, le déplacement mesuré  $u^m$  est plus influencé que  $v^m$ , ce qui contribue à la grande précision de  $E_c$  par rapport  $E_t$  et  $\nu_c$ . De plus, le déplacement  $u$  près de des points A et B est très inférieur à celui observé près des points C et D, entraînant une influence plus marquée du bruit et un impact plus significatif sur l'identification de  $\nu_c$ . Par conséquent, le déplacement  $u$  révèle une sensibilité plus élevée aux variations de  $\nu_c$ , conduisant à une identification légèrement plus précise de  $E_t$  par rapport à  $\nu_c$ .

En résumé, d'après les résultats présentés dans le tableau 2.3 et les analyses de sensibilité, les valeurs des paramètres identifiés à partir des différentes données synthétiques avec 5% de bruit additif sont significatives. Néanmoins, compte tenu du manque d'informations et de détails dans le champ de déplacement axial et de déformation mesurée au centre de la surface, ainsi que des exigences strictes imposées par les méthodes de mesure traditionnelles, la méthode de recalage utilisant la solution semi-analytique est recommandée pour l'identification des paramètres bi-modules en utilisant la mesure de CIN. Cette approche permet d'exploiter pleinement les avantages de la CIN pour capturer les détails complexes du comportement des matériaux, offrant ainsi une précision et une fiabilité accrue dans l'identification des propriétés mécaniques.

## 2.6 Application avec les données expérimentales

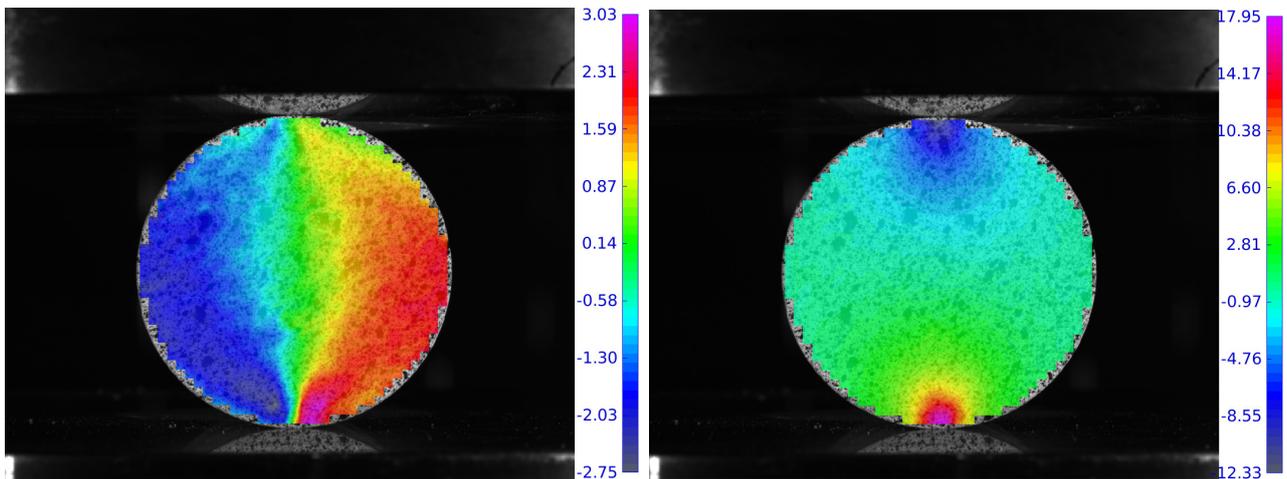
Pour évaluer les paramètres mécanique de la matrice minérale, 6 échantillons ont été testés pour déterminer la résistance à la compression  $\sigma_c$ , et 6 autres échantillons ont été implémentés dans l'essai de fendage pour déterminer et identifier la résistance à la traction  $\sigma_t$ , les modules de Young en traction et en compression  $E_t$  et  $E_c$ , le coefficient de Poisson en compression  $\nu_c$ . Afin de minimiser l'impact du séchage et de garantir la stabilité des caractéristiques mécaniques du matériau, les matrices ettringitiques âgé de 42 jours ont été utilisées dans ces deux essais.

Pour démontrer l'efficacité de la méthode de recalage avec la solution semi-analytique, les champs mesurés obtenus par la CIN sur les échantillons de la matrice ettringitique de 42 jours ont été employées dans l'identification pour déterminer les paramètres bi-module. Afin de permettre des comparaisons significatives entre les résultats obtenus à partir de différentes données mesurées lors de l'essai de fendage, il est essentiel que toutes les mesures proviennent de la même méthode de mesure. Pour les cas A et C, les champs de déplacement expérimentaux sont faciles à obtenir grâce à la CIN. En revanche, le champ de déformation au centre est habituellement mesuré à l'aide de deux jauges de déformation fixées au centre des surfaces opposées, dans différentes directions. Néanmoins, en raison de la couverture partielle de la surface mesurée, cette

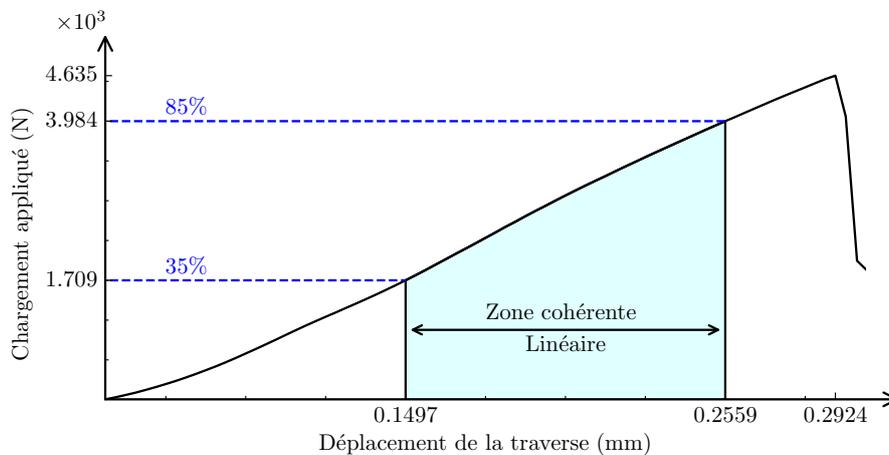
méthode traditionnelle peut significativement affecter les mesures réalisées par CIN. Par conséquent, pour contourner cette limitation, deux jauges virtuelles générées à partir des données de CIN ont été utilisées pour mesurer le champ de déformation au centre de la surface.

### 2.6.1 Expérimentation avec la matrice ettringitique

Pour les essais avec la matrice ettringitique, le champ de déplacement mesuré  $\langle u, v \rangle$  a été enregistré alors que le chargement varie entre 0 et 4634 N. Les figures 2.27(a) et 2.27(b) présentent la distribution des déplacements surfaciques sous le chargement de 3984 N. L'analyse des données mesurées et des résultats obtenus a permis de déterminer une zone cohérente, montrant un comportement linéaire pour un intervalle de chargement de [1709 N, 3984 N], correspondant à un intervalle de 35% à 85% de la force appliquée maximale. Dans la situation de la charge concentrée opposée mise en œuvre à l'aide de plateaux plates, l'angle  $\alpha$  a été jugé proche de zéro et fixé à  $10^{-5}^\circ$ . Selon les différentes données expérimentales utilisées, les résultats de trois cas de recalage avec la solution semi-analytique sont illustrés ci-après.



(a) Image de déplacement mesuré  $u$  au chargement de 3984 N (b) Image de déplacement mesuré  $v$  au chargement de 3984 N

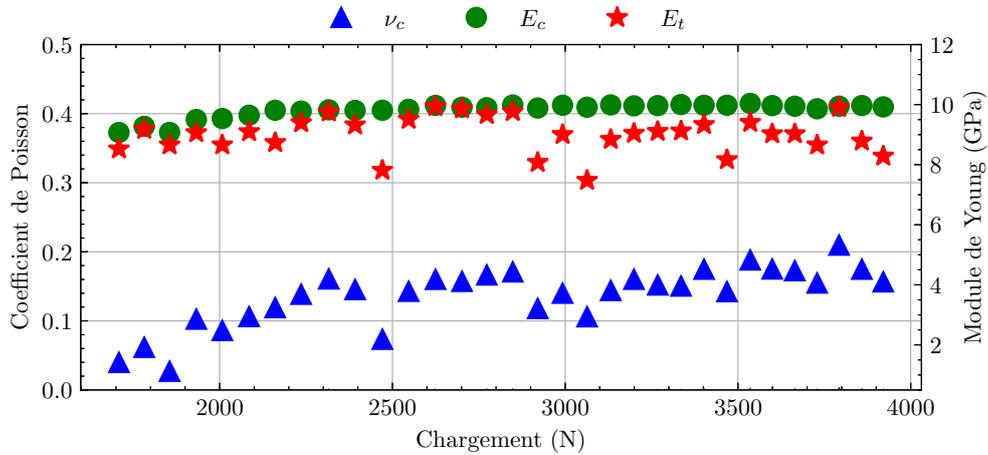


(c) Définition de la zone où le comportement est linéaire

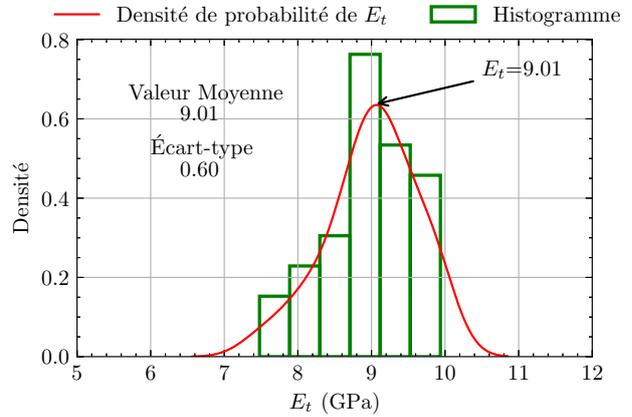
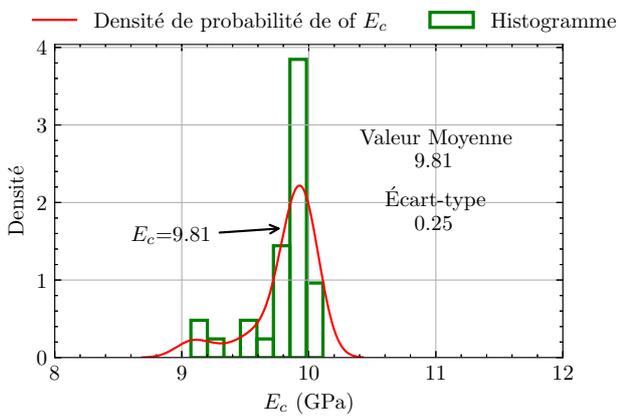
FIGURE 2.27 – Données mesurées sur l'échantillon de la matrice ettringitique.

### 2.6.1.1 Exploitation des mesures et identification

Cas A :

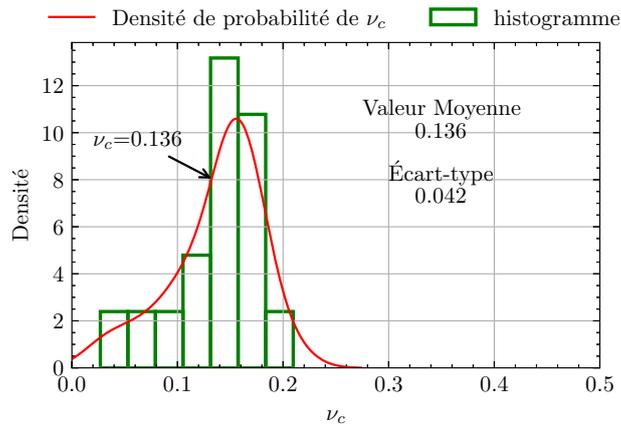


(a) Paramètres identifiés aux différents chargements



(b) Histogramme et fonction de densité de probabilité pour le paramètre  $E_c$

(c) Histogramme et fonction de densité de probabilité pour le paramètre  $E_t$



(d) Histogramme et fonction de densité de probabilité pour le paramètre  $\nu_c$

FIGURE 2.28 – Paramètres identifiés avec le champ de déplacement axial mesuré sur la matrice ettringitique à 42 jours par la méthode de recalage avec la solution semi-analytique (cas A).

La figure 2.28 présente les résultats d'identification obtenus à partir du champ de déplace-

ment axial mesuré sur une matrice ettringitique âgée de 42 jours. Dans ce cadre, les déplacements axiaux suivant AB et CD, particulièrement dans l'intervalle de  $-12$  mm et  $12$  mm, ont été exploités.

La figure 2.28(a) révèle que les valeurs identifiées de  $\nu_c$  montrent une légère augmentation au début de l'identification avec l'accroissement du chargement appliquée. Cette tendance est associée à l'influence significative du bruit sur les mesures de déplacement  $u$ , relativement faibles. L'analyse de sensibilité réalisée avec les données synthétiques avait indiqué que  $\nu_c$  identifié était particulièrement sensible au déplacement  $u$  par rapport aux modules de Young identifiés. Cela explique pourquoi les valeurs identifiées de  $\nu_c$  et  $E_t$  affichent plus de fluctuations. Au-delà de  $2500$  N, à mesure que l'amplitude du champ de déplacement augmente et que l'impact du bruit diminue, les valeurs de tous les paramètres tendent vers une stabilisation. Numériquement, la valeur moyenne de  $E_c$  est identifiée à  $9.81 \pm 0.25$  GPa. Les paramètres  $E_t$  et  $\nu_c$  montrent une légère variabilité, avec des valeurs moyennes de  $9.01 \pm 0.60$  GPa et  $0.136 \pm 0.042$ , respectivement.

Les figures 2.28(b), 2.28(c) et 2.28(d) affichent les histogrammes et les densités de probabilité des trois paramètres identifiés dans le cas A. De manière similaire que les résultats obtenus avec les données synthétiques, ces figures démontrent l'existence d'un pic unique, proche de la valeur moyenne sur les courbes de densité de probabilité. Les variations des paramètres identifiés restent dans des intervalles raisonnables, confirmant la fiabilité de l'identification. Notamment, les tendances de variation de  $E_t$  et  $\nu_c$  présentent des similitudes. En comparaison, les valeurs identifiées de  $E_c$  affichent une excellente constance.

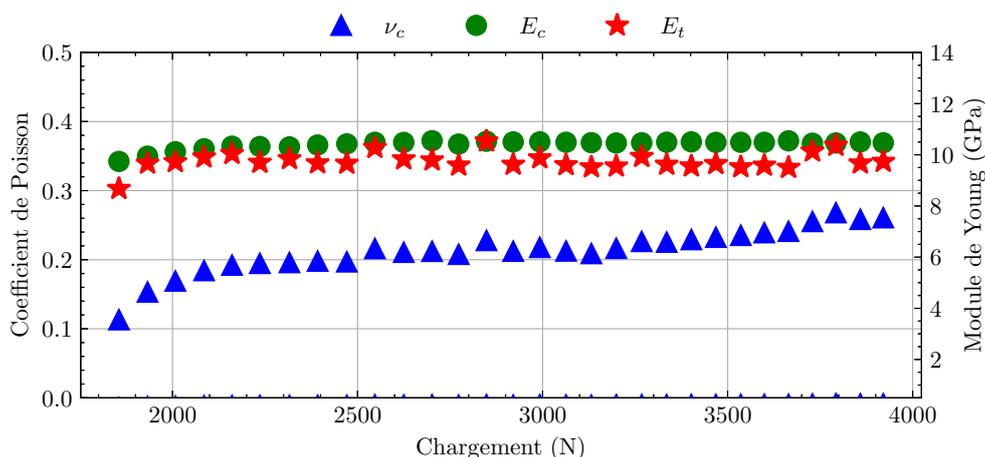
### Cas C :

La figure 2.29 expose les résultats de l'identification obtenus à partir du champ de déplacement surfacique mesuré (cas C) sur une matrice ettringitique âgée de 42 jours. Dans ce cas, un carré de  $10$  mm de côté a été choisi pour sélectionner le champ de déplacement destiné à l'identification. Comme pour les résultats du cas A, une tendance à la hausse légère des paramètres identifiés est observée au début de l'identification. Cependant, il est important de souligner que la cohérence des valeurs identifiées pour les trois paramètres est nettement améliorée par rapport au cas A, particulièrement pour  $\nu_c$ , qui affiche une magnitude plus élevée et un lissage plus marqué. L'analyse numérique des résultats révèle que la valeur moyenne de  $E_c$  est  $10.40 \pm 0.17$  GPa, celle de  $E_t$  est  $9.74 \pm 0.32$  GPa, et celle de  $\nu_c$  est  $0.213 \pm 0.031$ . En somme, les valeurs identifiées dans le cas C sont supérieures à celles du cas A.

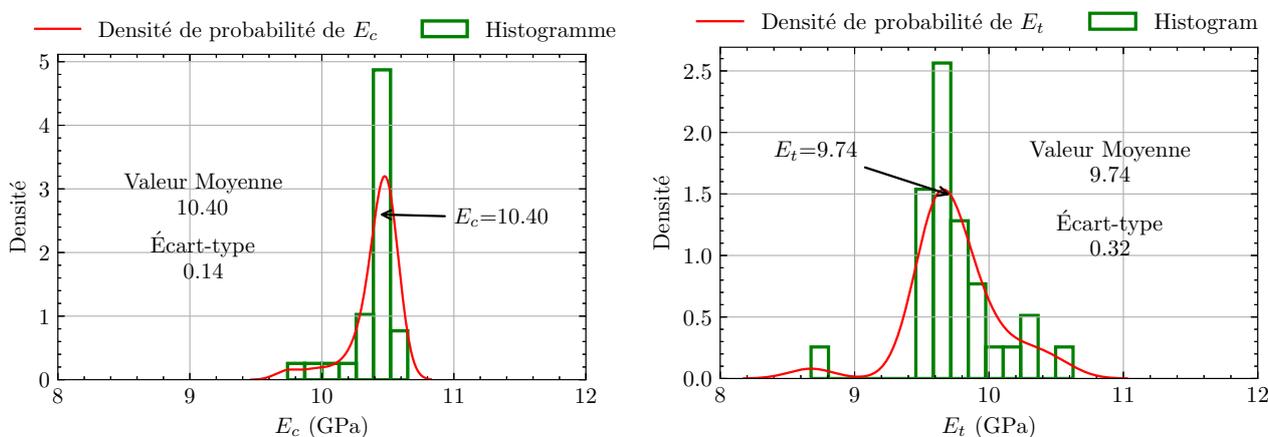
Les figures 2.29(b), 2.29(c) et 2.29(d) présentent les histogrammes et les fonctions de densité de probabilité des trois paramètres identifiés dans le cas C. Conformément à ces illustrations, les distributions de densité de probabilité de chaque paramètre montrent un seul pic prononcé, bien aligné sur la valeur moyenne correspondante. De plus, en comparaison avec le cas A, l'intervalle de variation de chaque paramètre est significativement réduit, soulignant la stabilité et la cohérence des valeurs identifiées.

### Cas B :

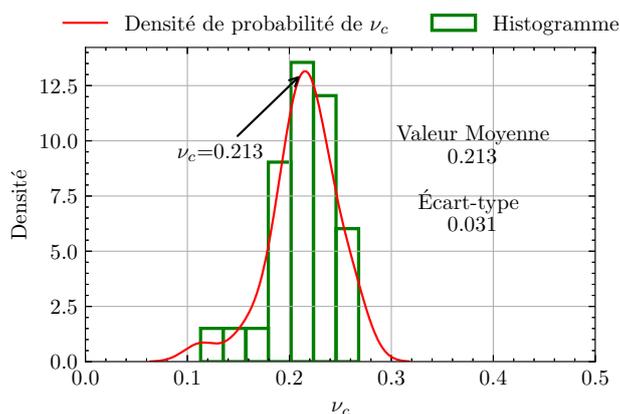
Dans le cadre du cas B, l'identification s'est appuyée sur le champ de déformation mesuré au centre de la surface pour une intervalle du chargement variant de  $1709$  N à  $3984$  N. Cette approche spécifique au cas B signifie que la méthode de recalage ne permet d'identifier qu'une seule valeur pour chaque paramètre, basée sur une série de mesures de déformation. Pour la



(a) Paramètres identifiés aux différents chargements



(b) Histogramme et fonction de densité de probabilité pour le paramètre  $E_c$  (c) Histogramme et fonction de densité de probabilité pour le paramètre  $E_t$



(d) Histogramme et fonction de densité de probabilité pour le paramètre  $\nu_c$

FIGURE 2.29 – Paramètres identifiés avec le champ de déplacement surfacique mesuré sur la matrice ettringitique à 42 jours par la méthode de recalage avec la solution semi-analytique (cas C).

matrice ettringitique, les valeurs identifiées sont les suivantes : pour  $E_c$ , 10.41 GPa; pour  $E_t$ , 9.54 GPa; et pour  $\nu_c$ , 0.165.

### 2.6.1.2 Comparaison et conclusion

Pour évaluer et analyser de manière efficace les paramètres identifiés à travers ces trois cas, l'ensemble des résultats expérimentaux a été rassemblé dans le tableau 2.4.

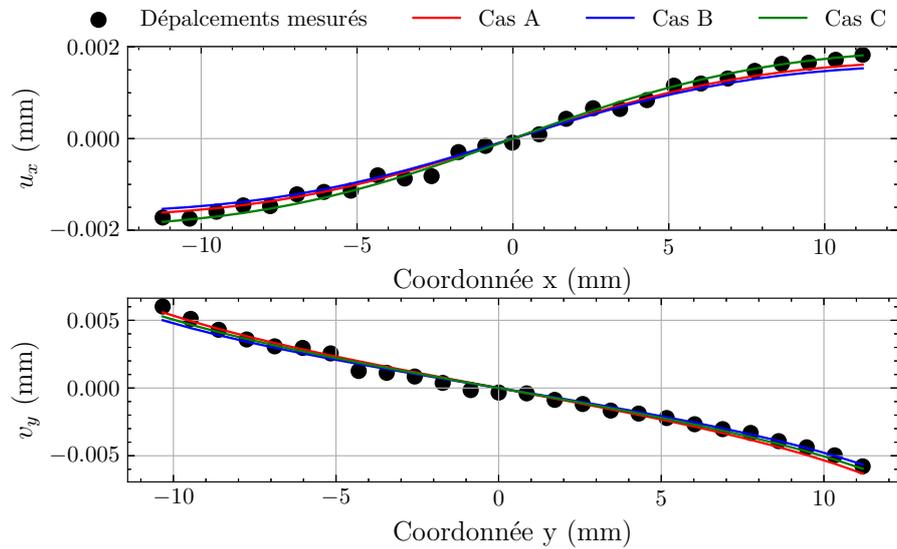
TABLEAU 2.4 – Paramètres identifiés sur la matrice ettringitique à 42 jours par la méthode de recalage avec la solution semi-analytique avec les différents données expérimentales : (cas A) le champ de déplacement axial ; (cas B) le champ de déformation au centre de la surface ; (cas C) le champ de déplacement surfacique.

Paramètres identifiés	cas A	cas B	cas C
$\nu_c$	$0.136 \pm 0.042$	0.165	$0.213 \pm 0.031$
$E_c$ (GPa)	$9.81 \pm 0.25$	10.41	$10.40 \pm 0.14$
$E_t$ (GPa)	$9.01 \pm 0.60$	9.54	$9.74 \pm 0.32$

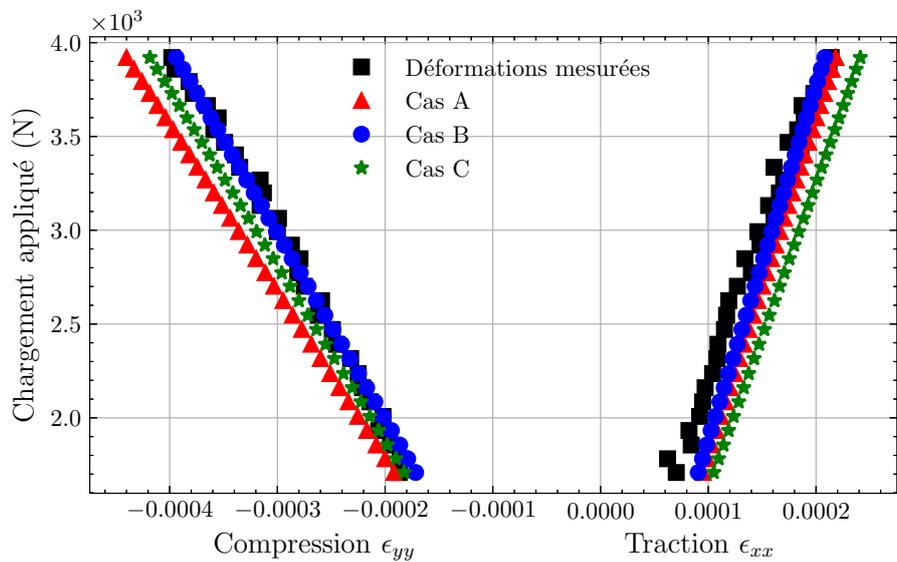
Selon l'analyse des paramètres identifiés dans ce tableau, les modules d'Young identifiés sont comparables à travers les trois cas, avec les valeurs moyennes de  $E_c$  et  $E_t$  dans le cas C s'approchant étroitement de celles observées dans le cas B. Cependant, les valeurs de  $\nu_c$  issues de ces trois cas présentent de légères divergences. Comparativement aux autres paramètres,  $\nu_c$  affiche une sensibilité marquée envers le déplacement  $u$  et la déformation  $\varepsilon_{xx}$ . Cette sensibilité rend  $\nu_c$  plus vulnérable au bruit de mesure, impactant ainsi la précision de son identification. Toutefois, l'utilisation du champ de déplacement surfacique dans le cas C, riche en détails, renforce la robustesse et la fiabilité de l'identification. Cette affirmation est corroborée par la précision des résultats obtenus avec les données synthétiques et la régularité des résultats avec les données expérimentales du cas C. De plus, l'écart des paramètres identifiés dans le cas C est le plus faible, ce qui indique également la stabilité et la consistance des résultats d'identification. Cela démontre que l'exploitation du champ de déplacement surfacique facilite une identification plus précise des caractéristiques matérielles.

La figure 2.30(a) montre une comparaison entre les déplacements axiaux identifiés et ceux mesurés au chargement de 3984 N. La figure 2.30(b) affiche la comparaison des déformations au centre calculées avec les paramètres identifiés et celles mesurées pour des chargements entre 1576N et 3984 N. Puisque les valeurs de  $\nu_c$  et  $E_t$  influencent principalement le comportement du déplacement  $u$  et de la déformation  $\varepsilon_{xx}$ , tandis que le comportement du déplacement  $v$  et de la déformation  $\varepsilon_{yy}$  dépendent essentiellement de la valeur de  $E_c$ , il est logique de constater que la valeur moyenne de  $\nu_c$  dans le cas A est relativement proche de celle du cas B. Inversement, les valeurs moyennes des modules d'Young issues des cas B et C sont plus similaires. Cette corrélation est visuellement confirmée dans les figures 2.30(a) et 2.30(b), où les déplacements  $u$  et la déformation  $\varepsilon_{xx}$  identifiés pour les cas A et B s'alignent étroitement, et où les déplacements  $v$  et les déformations  $\varepsilon_{yy}$  identifiés pour les cas B et C sont quasiment indiscernables.

Malgré de légères divergences dans les données d'identification de ces trois cas, la cohérence significative avec les mesures réelles souligne la fiabilité et la précision du processus de recalage utilisant la solution semi-analytique.



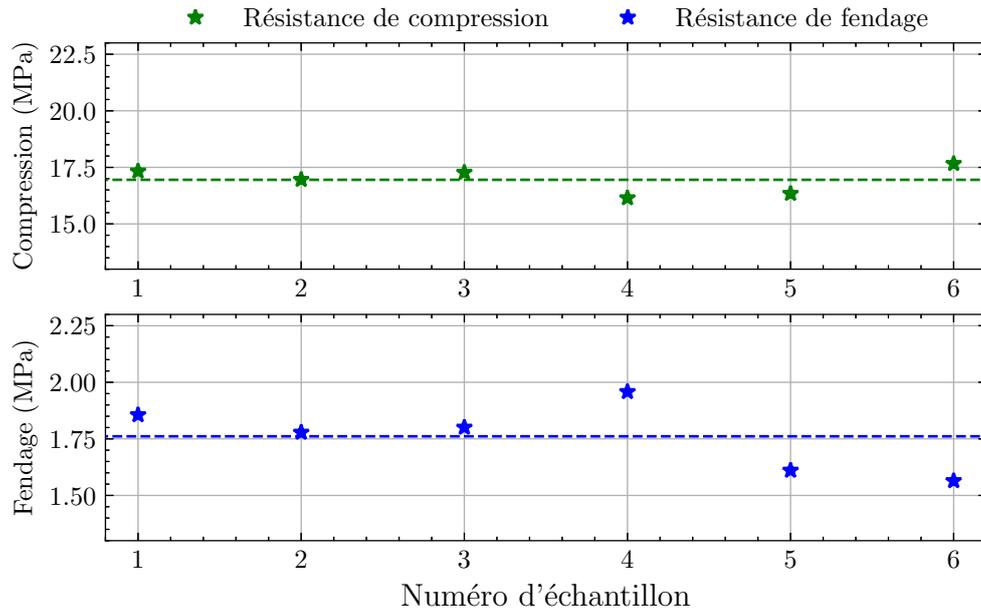
(a) Comparaison des déplacements axiaux sous le chargement à 3984 N



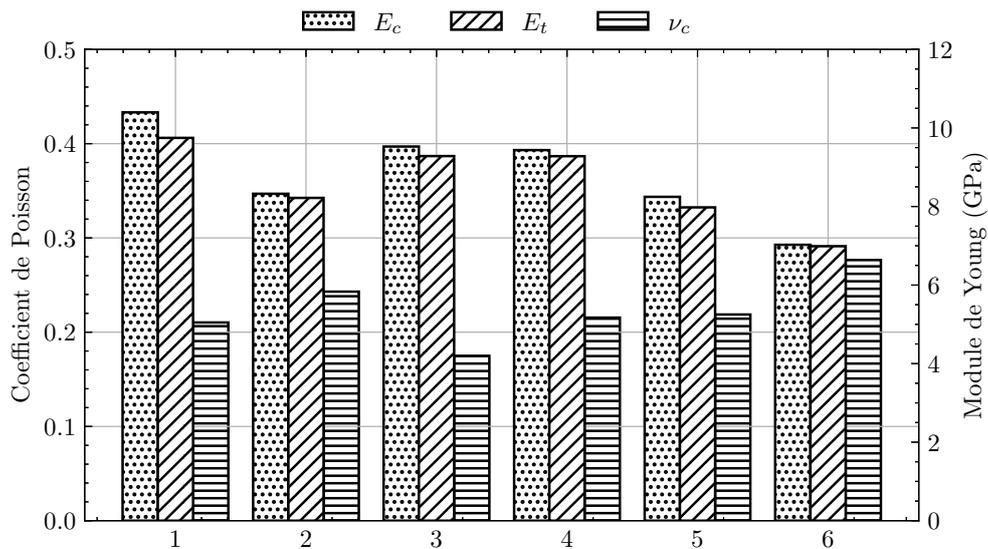
(b) Comparaison des déformations au centre de la surface

FIGURE 2.30 – Comparaison entre les données expérimentales et celles calculées avec les paramètres identifiées pour les cas A, B, et C.

## 2.6.2 Paramètres mécaniques identifiées



(a) Résistance à la traction et compression



(b) Modules de Young et coefficient de Poisson

FIGURE 2.31 – Paramètres mécaniques obtenus avec 12 échantillons de la matrice ettringitique à 42 jours dans l'essai de fendage et de compression.

À partir des équations (2.1) et (2.2), les résistances à la traction et à la compression de chaque échantillon de matrice ettringitique à 42 jours ont été calculées en utilisant la force de rupture  $F_{rupture}$  et les dimensions correspondantes, comme le montre la figure 2.31(a). En raison de la précision et de la régularité des résultats obtenus avec les champs de déplacement surfacique, tant synthétiques qu'expérimentaux, les modules d'Young et le coefficient de Poisson ont été déterminés par la méthode de recalage utilisant le champ de déplacement surfacique, présentée dans la figure 2.31(b). Les valeurs moyennes et les écarts correspondantes aux paramètres mécaniques sur cette matrice sont compilé dans le tableau 2.5.

Conformément à la figure 2.31(a) et au tableau 2.5, les 6 échantillons soumis à l'essai de

TABLEAU 2.5 – Paramètres mécaniques avec la théorie de bi-module sur la matrice ettringitique à 42 jours.

Propriété	Résistance (MPa)	Module de Young (GPa)	Coefficient de Poisson
Traction	$1.76 \pm 0.13$	$8.57 \pm 0.95$	$0.216 \pm 0.032$
Compression	$16.95 \pm 0.54$	$8.82 \pm 1.09$	$0.222 \pm 0.030$

compression ont révélé une résistance à la compression  $\sigma_c$  variant de 16.14 et 17.65 MPa, avec la valeur moyenne de  $16.95 \pm 0.54$  MPa. De manière similaire, les 6 échantillons testés dans l’essai de fendage ont montré une résistance à la traction fluctuant entre 1.56 et 1.95 MPa, avec la valeur moyenne de  $1.76 \pm 0.13$  MPa. Ces moyennes mettent en évidence que  $\sigma_c$  est presque 10 fois plus grande que  $\sigma_t$ , une caractéristique conforme aux propriétés générales des matrices minérales.

En exploitant les champs de déplacement surfacique obtenus sur ces mêmes échantillons lors de l’essai de fendage, d’autres paramètres mécaniques ont été identifiés grâce à la méthode de recalage avec la solution semi-analytique. D’après la figure 2.31(b) et le tableau 2.5, les modules de Young en compression  $E_c$  varient de 7.02 à 10.39 GPa avec la moyenne de  $8.82 \pm 1.09$  GPa, les modules de Young en traction  $E_t$  s’étendent de 6.98 à 9.74 GPa, avec la moyenne de  $8.57 \pm 0.95$  GPa. L’intervalle des coefficients de Poisson en compression  $\nu_c$  est de  $[0.174, 0.276]$  avec une moyenne de  $0.222 \pm 0.030$ . En se basant sur la symétrie de la loi de Hooke, la valeur du coefficient de Poisson en traction  $\nu_t$  pour chaque échantillon a été déterminée à partir de  $E_c$ ,  $E_t$ , et  $\nu_c$  correspondants. Les calculs révèlent que la valeur maximale de  $\nu_t$  atteint 0.275, et la valeur minimale étant 0.170, pour la valeur moyenne de  $0.216 \pm 0.032$ . Par ailleurs, les valeurs moyennes des modules de Young en traction et en compression montrent que la différence entre ces deux paramètres n’est pas significative dans ces deux directions principales. Ainsi, il est intéressant de déterminer les paramètres initiaux non-endommagés par l’équation (2.18).

Selon les études sur les matériaux fragiles [116, 117, 118, 119, 120], la plupart des bétons montrent que la pente du post-pic en traction est 5 fois plus petite que la valeur du module de Young  $E$ . En l’absence d’essai de traction direct, la valeur de  $\gamma$  est donc considérée comme étant égale à 5 pour la matrice ettringitique. En intégrant les valeurs moyennes de  $E_c$ ,  $E_t$  et  $\nu_c$  dans le modèle de Badel, les valeurs de  $E$ ,  $\nu$  et  $d$  pour chaque échantillon sont obtenues et illustrées dans la figure 2.32. Ces valeurs moyennes sont résumées dans le tableau 2.6.

TABLEAU 2.6 – Paramètres mécanique pour le modèle de Badel sur la matrice ettringitique à 42 jours.

Propriété	Module de Young $E$ (GPa)	Coefficient de Poisson $\nu$	variable scalaire $d$
Valeurs	$8.83 \pm 1.10$	$0.216 \pm 0.032$	$0.005 \pm 0.004$

Selon les tableaux 2.5 et 2.6, les valeurs de  $E$  varient entre 7.02 et 10.42 GPa, affichant la moyenne de  $8.83 \pm 1.10$  GPa. les valeurs de  $\nu$  s’étendent de 0.170 à 0.275, avec la moyenne de  $0.216 \pm 0.032$ . Ces valeurs sont proche des valeurs identifiées de  $E_c$  et  $\nu_t$ , illustrant ainsi une cohérence avec les propriétés mécaniques générales des matrices minérales. Pour le scalaire  $d$ , sa valeur minimale est de 0.001, et la valeur maximale atteint 0.013, avec la moyenne de

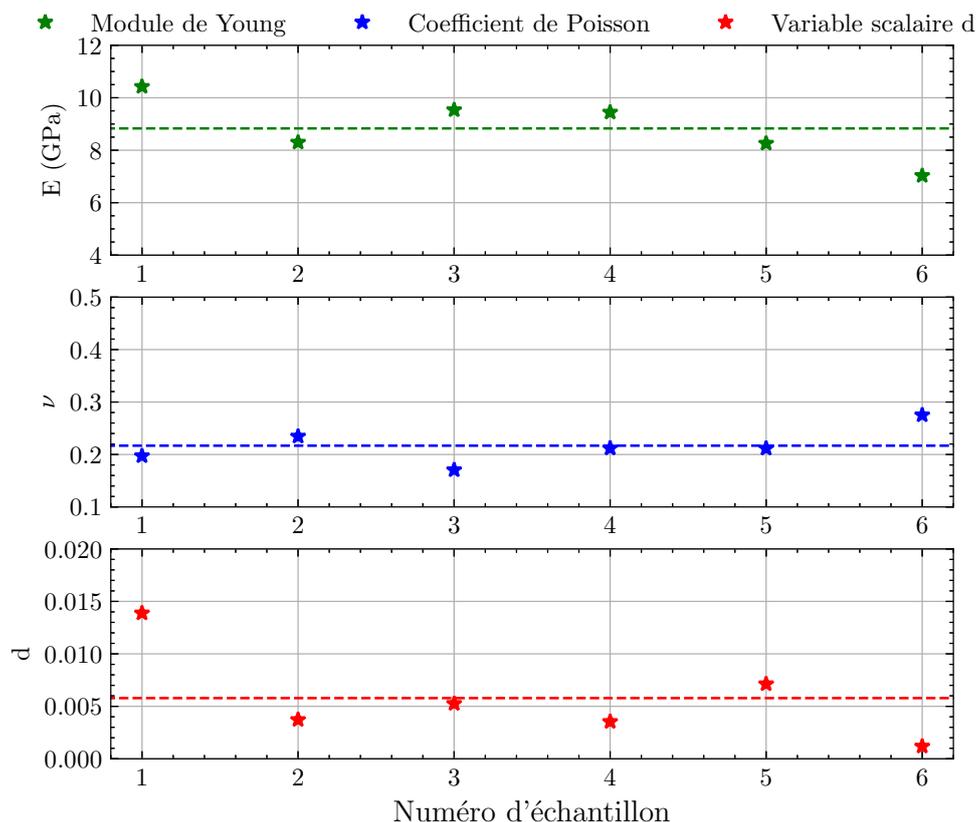


FIGURE 2.32 – Paramètres mécaniques non endommagés obtenus avec 12 échantillons de la matrice ettringitique à 42 jours dans l’essai de fendage et compression.

$0.005 \pm 0.004$ .

Étant donné que les valeurs de  $d$  restent dans une plage de valeurs très faibles, on peut conclure que les matériaux fragiles tels que la matrice ettringitique peuvent manifester des défauts primaires ou des micro-fissures dues à la structure interne et aux conditions externes, entraînant ainsi une légère réduction de la rigidité en traction et en compression.

## 2.7 Conclusion et Perspective

Ce chapitre a mis en lumière le processus d’identification des paramètres mécaniques pour la matrice ettringitique, en tirant parti de ses propriétés mécaniques spécifiques, du concept de bi-module, et de l’analyse des champs de déplacement obtenus par la Corrélation d’Images Digitales (CIN). Une méthode d’identification adaptée à l’essai de fendage a été proposée pour évaluer les paramètres mécaniques de matériaux isotropes fragiles.

La présentation a commencé par une introduction au concept de bi-module et aux expériences fondamentales pour la détermination des paramètres mécaniques. La sélection de l’essai de compression et de l’essai de fendage pour leur application sur la matrice ettringitique a été justifiée par une analyse comparative. Des détails sur les mesures par la CIN ont également été fournies.

La suite a exploré différentes méthodes d’identification en s’appuyant sur des études antérieures. Avec les caractéristiques de la CIN et les avantages de la Méthode des Éléments Finis (MEF), la méthode de recalage par éléments finis (FEMU) a été initialement envisagée avec

la commande `MACR_RECAL` dans le logiciel `CODE_ASTER`. Toutefois, les limites de cette commande, notamment la difficulté d'obtenir des résultats précis avec les champs de déplacement surfacique et l'absence d'un modèle de bi-module, ont conduit à proposer une méthode de recalage avec une solution semi-analytique adaptée à l'essai de fendage.

Cette solution semi-analytique a été développée à partir des équations d'état du champ de contraintes et de la loi de Hooke généralisée. Différents cas de mesures ont été distingués : recalage avec le champ de déplacement axial (cas A), recalage avec le champ de déformation au centre de la surface (cas B), et recalage avec le champ de déplacement surfacique (cas C). À cause de certains inconvénients de CIN et des propriétés des mesures utilisées, une méthodologie de sélection des données à utiliser dans le processus d'identification a été proposée.

La validation de cette méthode avec des données synthétiques, comportant 5% de bruit blanc additif, a démontré une précision accrue avec le champ de déplacement surfacique (cas C). Ce résultat s'explique par la richesse des détails fournis par ce champ.

L'analyse de 12 échantillons de matrice ettringitique âgée de 42 jours a été effectuée à travers des essais de compression et de fendage, six pour chaque type. Les paramètres identifiés, en lien avec le modèle de Badel et la théorie de bi-module, soulignent une cohérence avec les propriétés mécaniques généralement attribuées aux matrices minérales.

Par ailleurs, bien que la méthode de recalage avec le champ de déplacement surfacique démontre une précision et une fiabilité significatives, elle présente des pistes d'amélioration. L'usage de l'intégration numérique pour calculer le champ de déplacement, nécessaire en raison des intégrales indéfinies, est effectué via le package `odeint` de Python. Cette approche entraîne inévitablement des erreurs affectant la convergence de l'identification et réduisant la vitesse de calcul.

Les recherches futures se concentreront sur une exploration théorique plus poussée des matériaux bi-module, notamment sur le perfectionnement des formulations mathématiques. Le développement des modèles de bi-modules sera étendu à la phase non-linéaire pour intégrer des paramètres d'endommagement dans l'analyse. De plus, compte tenu de la dépendance de cette méthode de recalage vis-à-vis des expressions analytiques, son applicabilité pourrait être élargie, notamment aux matériaux anisotropes, ce qui serait pertinent pour divers types de roches.

# Chapitre 3

## Identification des conditions aux limites et de l'endommagement dans le cadre d'un matériau fragile à partir de mesures surabondantes

*Ce chapitre présente une méthodologie d'identification des conditions aux limites et de l'endommagement pour des matériaux isotropes fragiles, basée sur le modèle de Badel [36, 37], en utilisant des mesures surabondantes. Tout d'abord, la formulation théorique et l'intégration numérique de la loi de comportement de Badel, utilisée pour modéliser le comportement mécanique d'un matériau fragile avec l'endommagement local asymétrique, sont présentées. Ensuite, nous décrivons le problème d'identification des conditions aux limites à partir de mesures surabondantes. Pour résoudre ce problème, nous avons adopté la méthode de minimisation de la fonctionnelle erreur en relation de comportement en utilisant l'algorithme de minimisation de Kozlov, combiné avec la méthode incrémentale de pilotage pour construire une nouvelle approche de l'identification des conditions aux limites et de l'endommagement. Et puis, pour valider cette méthodologie d'identification, des données synthétiques sans bruit et avec 5% de bruit blanc additif ont été utilisées pour évaluer sa performance. Parallèlement, la méthode de minimisation par Gradient Conjugué (GC) a été appliquée aux mêmes données pour comparer et illustrer la robustesse et l'efficacité de l'algorithme de Kozlov. Enfin, cette méthodologie a été évaluée avec des mesures de CIN sur un essai expérimental. Les comparaisons entre les résultats identifiés et ceux de référence ou mesurés montrent l'efficacité et la robustesse de la méthodologie mise en œuvre, tout en soulignant les aspects à améliorer dans les travaux de recherche futures.*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Loi de comportement avec prise en compte de l'endommagement local asymétrique</b>	<b>72</b>
3.1.1	Formulation incrémentale et pilotage de la loi de Badel	72
3.1.2	Application : endommagement d'une plaque trouée sous l'action d'un chargement de compression	75
3.1.3	Conclusion	84
<b>3.2</b>	<b>Problème inverse d'identification des conditions aux limites et de l'endommagement</b>	<b>84</b>

3.2.1	Problèmes de Cauchy et de Complétion des Données . . . . .	84
<b>3.3</b>	<b>Méthode de l'identification . . . . .</b>	<b>86</b>
3.3.1	Fonctionnelle erreur en relation de comportement . . . . .	86
<b>3.4</b>	<b>Minimisation de la fonctionnelle . . . . .</b>	<b>88</b>
3.4.1	Algorithme de Kozlov . . . . .	88
3.4.2	Méthode de gradient conjugué . . . . .	89
3.4.3	Formulation discrète et calcul du gradient avec la méthode de l'état adjoint . . . . .	90
3.4.4	Adaptation au comportement non linéaire des matériaux isotropes fragiles . . . . .	92
3.4.5	Critère d'arrêt . . . . .	93
<b>3.5</b>	<b>Application numérique . . . . .</b>	<b>95</b>
3.5.1	Identification avec les données synthétiques sans bruit dans la phase linéaire . . . . .	96
3.5.2	Identification avec les données synthétiques bruitées dans la phase linéaire . . . . .	99
3.5.3	Identification de l'endommagement dans la phase non linéaire . . . . .	104
3.5.4	Conclusion . . . . .	110
<b>3.6</b>	<b>Application expérimentale . . . . .</b>	<b>111</b>
3.6.1	Configuration expérimentale et mesure . . . . .	111
3.6.2	Identification dans la phase linéaire . . . . .	114
3.6.3	Identification de l'endommagement dans la phase non linéaire . . . . .	119
3.6.4	Conclusion . . . . .	125
<b>3.7</b>	<b>Conclusion et Perspectives . . . . .</b>	<b>126</b>

---

## 3.1 Loi de comportement avec prise en compte de l'endommagement local asymétrique

Avec la théorie basique et la méthode de recalage avec la solution semi-analytique, les paramètres mécaniques de la matrice ettringitique sont obtenus par l'essai de fendage avec la mesure de Corrélation d'Images Numériques (CIN) et l'essai de compression. Pour ce type de matériau fragile, les aspects les plus intéressants concernent l'apparition et la propagation des fissures. Dans le chapitre 1, selon l'analyse des modèles pour les matériaux fragiles, le modèle de Badel [36, 37] a été adopté pour cette étude. Afin d'analyser plus en profondeur les comportements mécaniques et d'étudier les méthodes d'identification des conditions aux limites et de l'endommagement, il est important de bien comprendre et maîtriser l'intégration numérique de la loi de comportement associée au matériau.

### 3.1.1 Formulation incrémentale et pilotage de la loi de Badel

Dans le premier chapitre, nous avons déjà introduit les éléments de base de la formulation de la loi de comportement de Badel qui décrit un mécanisme d'endommagement local asymétrique avec l'effet de restauration de rigidité. Cette section présente l'intégration numérique de cette loi

et la technique de pilotage indispensable pour contrôler les instabilités induites par le caractère adoucissant du comportement (snap-backs).

Dans la loi de Badel, l'énergie libre liée à l'endommagement ainsi que l'expression de la contrainte en fonction de la déformation sont décrites par l'équation (3.1).

$$\begin{cases} \Phi(\varepsilon, d) = \frac{\lambda}{2}(tr \varepsilon)^2 \left( H(-tr \varepsilon) + \frac{1-d}{1+\gamma d} H(tr \varepsilon) \right) + \mu \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i^2 \left( H(-\varepsilon_i) + \frac{1-d}{1+\gamma d} H(\varepsilon_i) \right) \\ \sigma_i = \lambda(tr \varepsilon) \left( H(-tr \varepsilon) + \frac{1-d}{1+\gamma d} H(tr \varepsilon) \right) + 2\mu\varepsilon_i \left( H(-\varepsilon_i) + \frac{1-d}{1+\gamma d} H(\varepsilon_i) \right) \end{cases} \quad (3.1)$$

Ici,  $d$  est une variable scalaire quantifiant l'endommagement du matériau. Lorsque  $d = 0$ , le matériau est sain, tandis que  $d = 1$  indique qu'il est complètement endommagé. La loi de Badel est contrôlée par les paramètres suivants :

- Le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ , permettant de calculer les paramètres de Lamé :  $\lambda$  et  $\mu$ .
- La limite de la contrainte en traction simple  $\sigma_t$ .
- La pente post-pic en traction  $\frac{E}{\gamma}$ , ce qui permet de fixer la valeur de  $\gamma$  pour décrire la dégradation du matériau.
- La limite de la contrainte en compression  $\sigma_c$ . Ce paramètre représente la limite avant l'apparition de la non linéarité en compression.

L'évolution de l'endommagement suit le schéma classique des modèles standards généralisés, il s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} f(\varepsilon, d) &= F^d(\varepsilon, d) - k \\ &= \frac{1+\gamma}{(1+\gamma d)^2} \left( \frac{\lambda}{2}(tr \varepsilon)^2 H(tr \varepsilon) + \mu \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i^2 H(\varepsilon_i) \right) - k \end{aligned} \quad (3.2)$$

Où  $F^d(\varepsilon, d)$  est la force thermodynamique,  $k$  définit le seuil le seuil d'endommagement. Ce seuil dépend de l'état de déformation et prend en compte l'état de confinement et s'écrit sous la forme :

$$k = k_0 - k_1(tr \varepsilon)H(-tr \varepsilon) \quad (3.3)$$

Où  $k_0$  et  $k_1$  sont obtenus par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} k_0 &= (\sigma_t)^2 \left( \frac{1+\gamma}{2E} \right) \left( \frac{1+\nu-2\nu^2}{1+\nu} \right) \\ k_1 &= \sigma_c \left( \frac{(1+\gamma)\nu^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) - k_0 \left( \frac{E}{\sigma_c(1-2\nu)} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dans le cas où il n'y a pas de dépendance par rapport au confinement ( $k_1 = 0$ ), la contrainte  $\sigma_c$  est calculée automatiquement en fonction de  $\sigma_t$  et  $\nu$  pour avoir  $k_1 = 0$  et prend sa valeur minimale, soit :

$$\sigma_c = \sigma_t \sqrt{\frac{1+\nu-2\nu^2}{2\nu^2}} \quad (3.5)$$

L'intégration numérique de ce modèle dans Code-Aster comporte deux point importants : le premier est l'évaluation de l'endommagement ; le second est le calcul de la matrice tangente.

Nous n'allons pas détailler ces éléments de calcul, l'auteur pourra se référer à la documentation de CODE\_ASTER [121] et les travaux de thèse de Badel [36]. Cependant, nous allons donner un aperçu sur la méthode de pilotage tel qu'elle est utilisée pour ce modèle dans CODE\_ASTER.

Lors des calculs non linéaires, comme illustré par la courbe de la figure 3.1, le phénomène de « snap-back » causé par l'endommagement (énergie dissipative) constitue un problème incontournable. Dans ce contexte, il peut y avoir plusieurs niveaux de déplacement pour un même niveau de chargement imposé, ou plusieurs valeurs de chargement appliqué pour une même valeur de déplacement imposé. Généralement, la méthode de Newton est souvent utilisée dans les logiciels de la Méthode Éléments Finis (MEF) pour calculer la réponse non linéaire avant que le chargement appliqué n'atteigne le seuil élastique. Cependant, cette méthode s'avère insuffisante pour résoudre efficacement le problème de snap-back. Par conséquent, l'utilisation de la méthode de pilotage incrémental devient essentielle pour continuer à contrôler et déterminer les conditions de chargement et les conditions aux limites adéquates dans CODE\_ASTER, en particulier pour modéliser l'endommagement des matériaux fragiles.

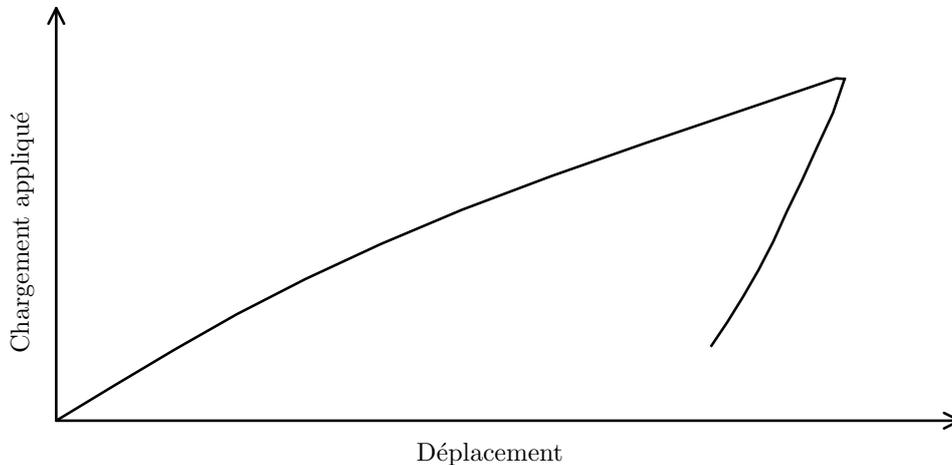


FIGURE 3.1 – Réponse non-monotone (Snap-back).

Le pilotage du chargement, en connaissant préalablement les directions et les points de chargement, permet d'ajuster l'intensité du chargement dans le cadre de calculs non linéaires pour obtenir des réponses satisfaisantes. Dans la loi de Badel, la méthode de pilotage par la prédiction élastique est mise en place [121, 122]. Pour appliquer cette méthode, le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  se décompose de la manière suivante :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{imposé} + \eta \mathbf{u}_{pilo} \quad (3.6)$$

Où  $\eta$  est l'intensité du chargement pilotée.  $\mathbf{u}_{imposé}$  représente le champ de déplacement dû aux conditions aux limites imposées indépendamment du pilotage sur les frontières.  $\mathbf{u}_{pilo}$  est le champ de déplacement appliqué dans le cadre du pilotage. En raison de la linéarité en petites déformations, les déformations sont déterminées à partir des déplacements. Ainsi, le champ de déformation se décompose de manière similaire :

$$\varepsilon = \varepsilon_{imposé} + \eta \varepsilon_{pilo} \quad (3.7)$$

Pour déterminer l'intensité de chargement pilotée  $\eta$ , l'équation (3.2) est résolue pour chaque point de Gauss comme suit :

$$\tilde{f}^{el}(\eta, d + \Delta\tau) = 0 \quad (3.8)$$

$\Delta\tau$  correspond à l'incrément d'endommagement, lequel est calculé à partir des deux variables suivantes :

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\alpha_{\text{pilotage}}} \quad (3.9)$$

Ici,  $\Delta t$  représente l'incrément de temps, correspondant à l'augmentation du pas de temps défini dans la liste de chargement avec la méthode de pilotage.  $\alpha_{\text{pilotage}}$  est le coefficient spécifié dans le pilotage, qui contrôle la variable  $\eta$ , avec une valeur par défaut de 1.

### 3.1.2 Application : endommagement d'une plaque trouée sous l'action d'un chargement de compression

Pour illustrer le comportement non linéaire et l'endommagement, un exemple de plaque épaisse avec deux trous, subissant l'action d'une compression a été mis en œuvre avec le CODE\_ASTER. La loi de comportement de Badel est introduite via la commande ENDO\_ISOT\_BETON. L'hypothèse de déformations planes est adoptée.

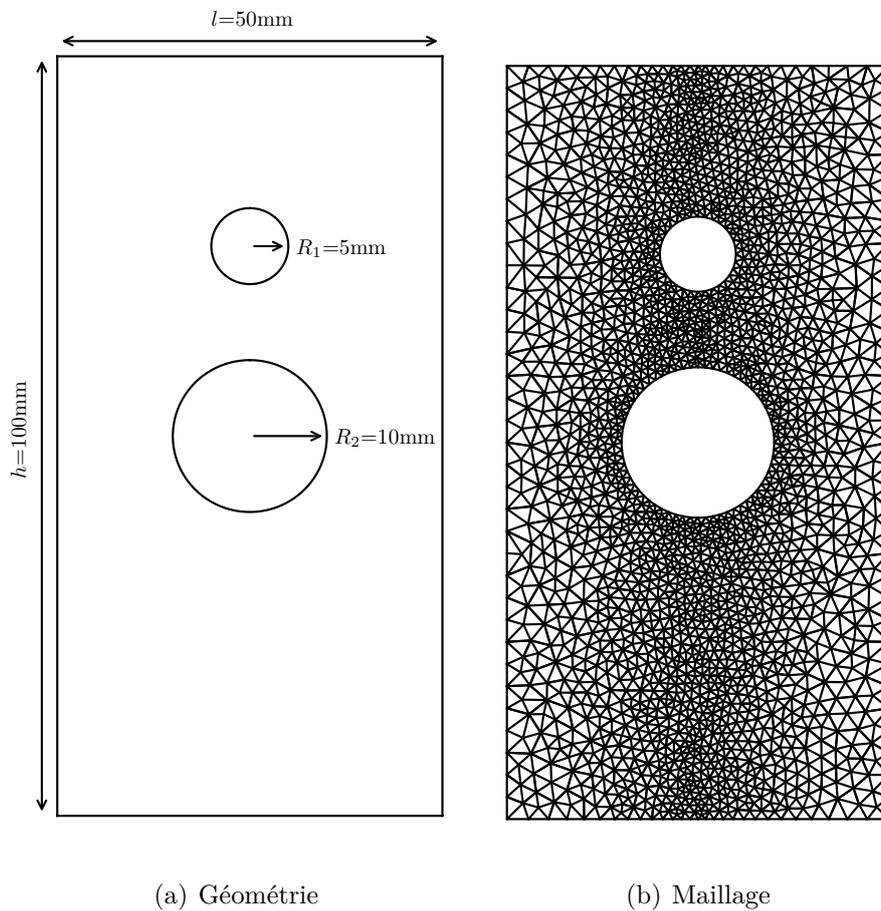


FIGURE 3.2 – Géométrie et maillage d'une plaque épaisse à deux trous.

La plaque à deux trous est constituée d'un rectangle de largeur  $l = 50$  mm, de hauteur  $h = 100$  mm et d'épaisseur  $e = 30$  mm, ainsi que de deux trous de rayons  $R_1 = 5$  mm et  $R_2 = 10$  mm. Le grand trou se trouve au centre de la plaque, et le petit trou est placé 25 mm au-dessus du centre de la plaque, comme indiqué sur la figure 3.2(a). Le maillage de la plaque est constitué de 2350 nœuds et de 4478 éléments de type T3. De plus, les éléments autour de ces deux trous et les zones centrales sont bien raffinés, avec une longueur de triangle variant de 1 mm à 3 mm.

Dans le cadre de la modélisation de la matrice ettringitique, en raison de la faible valeur de la variable scalaire  $d$  obtenue, cette matrice est considérée comme initialement non-endommagée. Le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  sont fixés respectivement à 8.83 GPa et 0.216. La résistance à la traction  $\sigma_t$  et à la compression  $\sigma_c$  sont de 1.76 MPa et 16.95 MPa, respectivement. Le paramètre  $\gamma$  n'ayant pas pu être obtenu expérimentalement, nous nous sommes référés aux valeurs données dans la littérature [119, 120]. Ainsi, en prenant  $\gamma = 5$ , la valeur de  $-\frac{E}{\gamma}$  est de  $-1.766$  GPa.

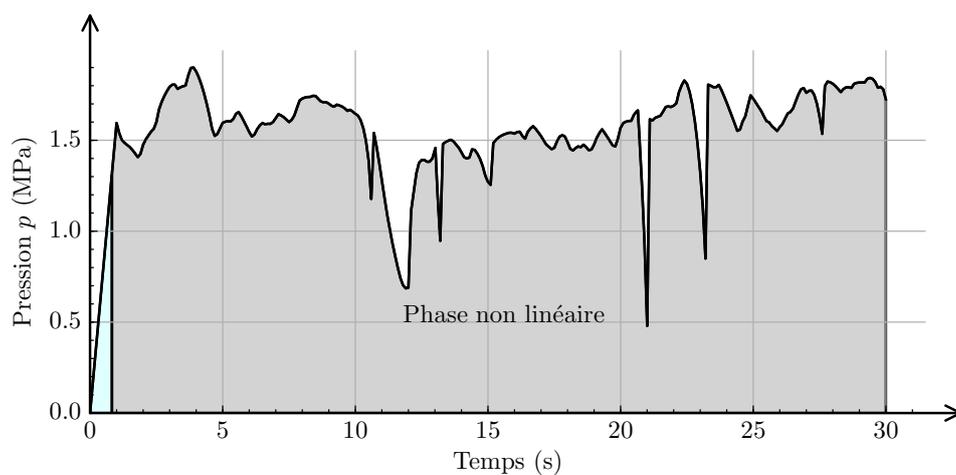
Le chargement appliqué est une compression sur la face supérieure avec un encastrement de la face inférieure. En considérant l'épaisseur de la plaque, l'hypothèse des déformations planes est appliquée.

Nous avons considéré un comportement quasi-statique, où le chargement suit une fonction du pseudo-temps  $t$ . Le chargement se déroule en deux phases distinctes. Dans la première phase, la pression est appliquée linéairement de 0 à 1.60 MPa pendant 1 s, avec un pas de temps  $\Delta t$  de 0.1 s. Cette phase présente un comportement linéaire et non linéaire sans phénomène de snap-back. Dans la deuxième phase, le chargement est contrôlé par la méthode de pilotage pour traiter l'évolution de l'endommagement et le phénomène de snap-back, s'étendant jusqu'à 30 s. Il est important de noter que la loi de comportement a été implémentée dans le calcul non linéaire, et que le temps incrémental pour l'application du chargement est uniquement utilisé pour la méthode de pilotage, sans signifier que le calcul se réalise dans le cadre dynamique.

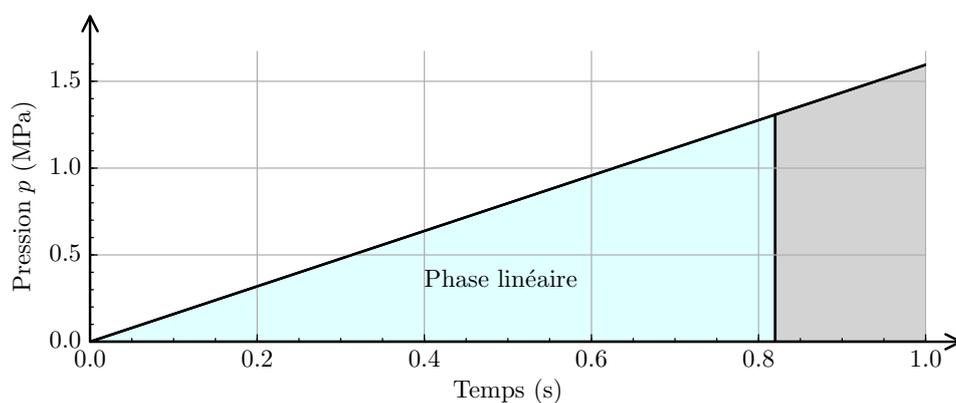
La figure 3.3(a) montre la pression appliquée  $p$  entre 0 et 30 s sur la plaque épaisse à deux trous. D'après la figure 3.3(b), la pression appliquée augmente linéairement entre 0 et 1 s. En observant la distribution de la valeur de  $d$  sur tout le domaine, on constate qu'avant 0.82 s, lorsque la pression est inférieure à 1.30 MPa, les valeurs de  $d$  sont nulles partout et la plaque présente un comportement mécanique élastique. De 0.82 à 1 s, la réponse mécanique de la plaque entre dans la phase non linéaire sans présenter de problème de snap-back. Afin de résoudre ce problème dans la phase d'endommagement, la méthode de pilotage a été utilisée. L'intensité de chargement pilotée  $\eta$ , qui représente le facteur d'amplification du chargement appliqué sur la plaque en fonction du temps, est illustrée dans la figure 3.3(c). Pour mieux illustrer l'endommagement de la plaque à deux trous sous l'action des différents phases du chargement appliqué, quatre instants  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) ont été définis.

Pour analyser l'apparition et la propagation de l'endommagement, les états d'endommagement, de déplacement et de contrainte pour un chargement de 1.30 MPa à l'instant  $T_1$  sont présentés dans la figure 3.4. Selon la figure 3.4(a), les valeurs de  $d$  sont nulles partout, indiquant l'absence d'endommagement. Pour le champ de déplacement, les valeurs maximales de  $u$  sont concentrées sur les deux côtés du grand trou, tandis que les valeurs de  $v$  sont plus élevées sur  $\Gamma_u$ . Selon la figure 3.4(b), les valeurs significatives du champ de contrainte se concentrent autour des deux trous. La contrainte  $\sigma_{xx}$  est principalement concentrée en haut et en bas du grand trou, atteignant la limite de traction. Ainsi, l'endommagement va apparaître d'abord autour de ces zones en raison de l'effet de traction. En revanche, les contraintes  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  se concentrent principalement aux deux extrémités du grand trou, restant loin de la limite élastique. Par conséquent, lorsque le chargement dépasse 1.30 MPa, l'endommagement apparaît en dessous et au-dessus du grand trou en raison de l'effet de traction.

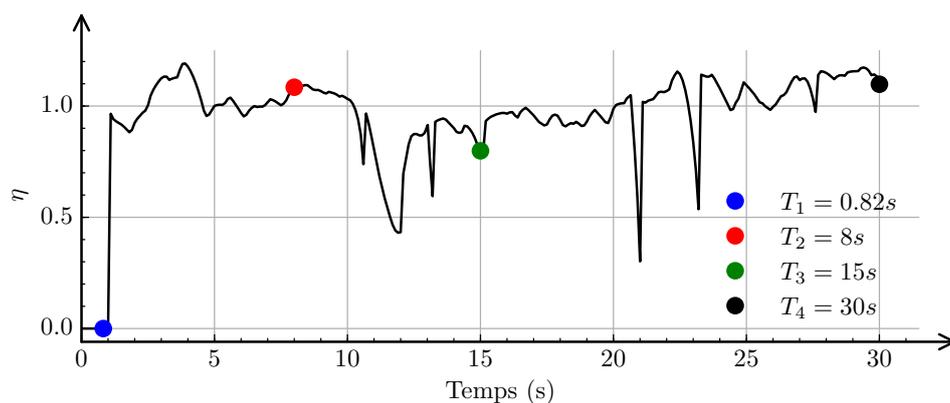
Ensuite, au-delà de la pression appliquée de 1.30 MPa, les valeurs de  $d$  à différents instants de la phase non linéaire sont représentées dans la figure 3.5. Avec l'augmentation de la pression appliquée, après l'apparition de l'endommagement, celui-ci se propage vers le haut et vers le



(a) Pression appliqué sur l'essai de compression complète

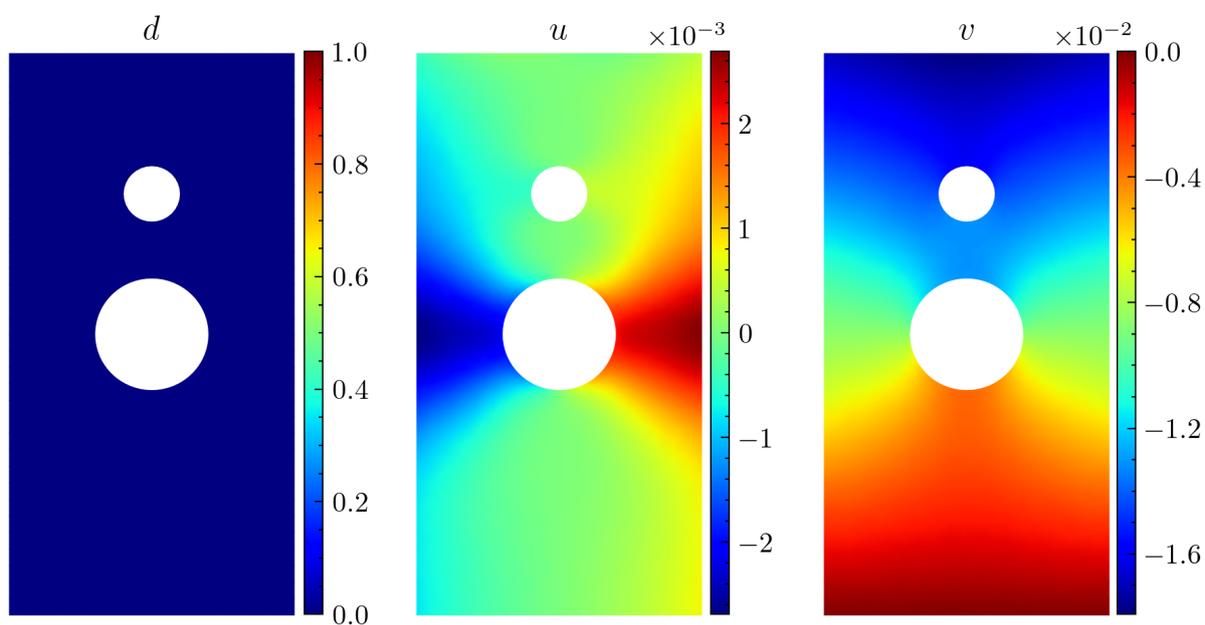


(b) Pression appliqué dans la phase linéaire

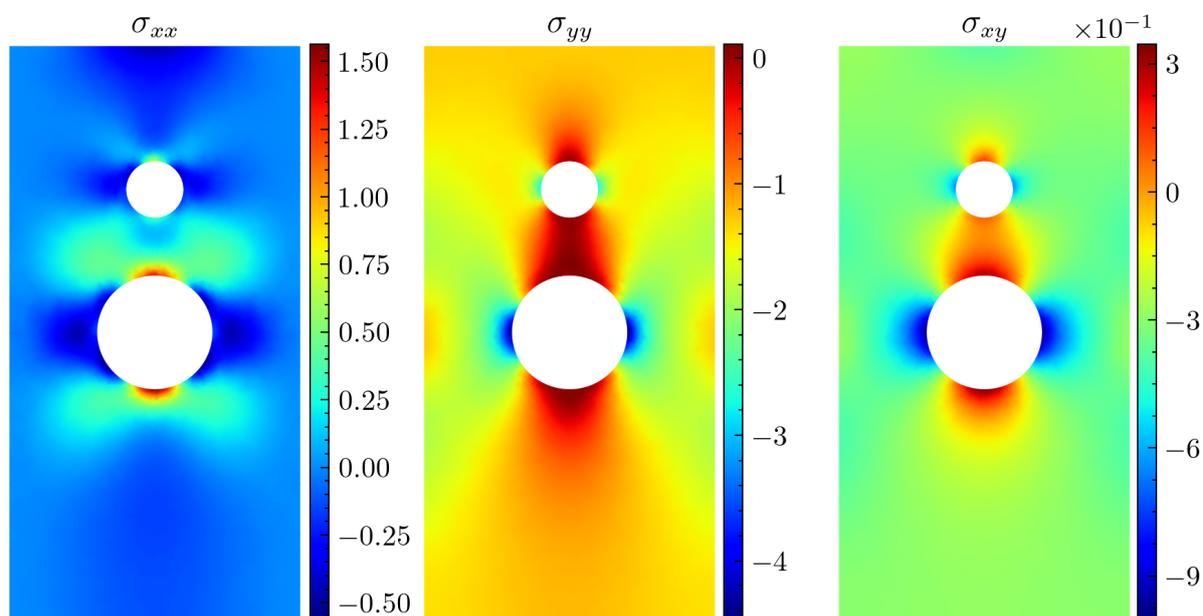


(c) Intensité de chargement pilotée  $\eta$  obtenue par la méthode de pilotage

FIGURE 3.3 – Chargement de pression appliquée  $p$  en fonction du temps défini.



(a) Variable  $d$  et champ de déplacement



(b) Champ de contrainte

FIGURE 3.4 – Distribution de la variable  $d$ , du champ de déplacement et du champ de contrainte sous une pression appliquée de 1.3 MPa à l'instant  $T_1$ .

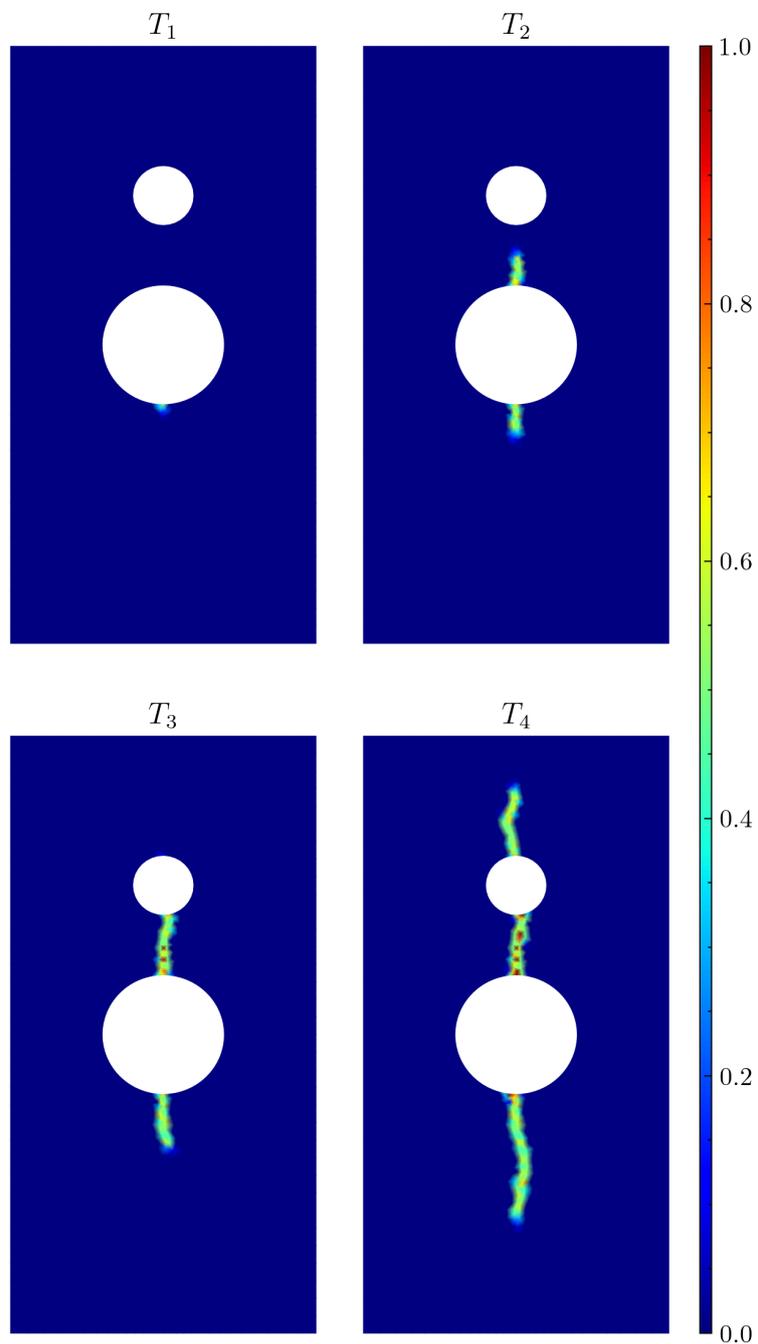
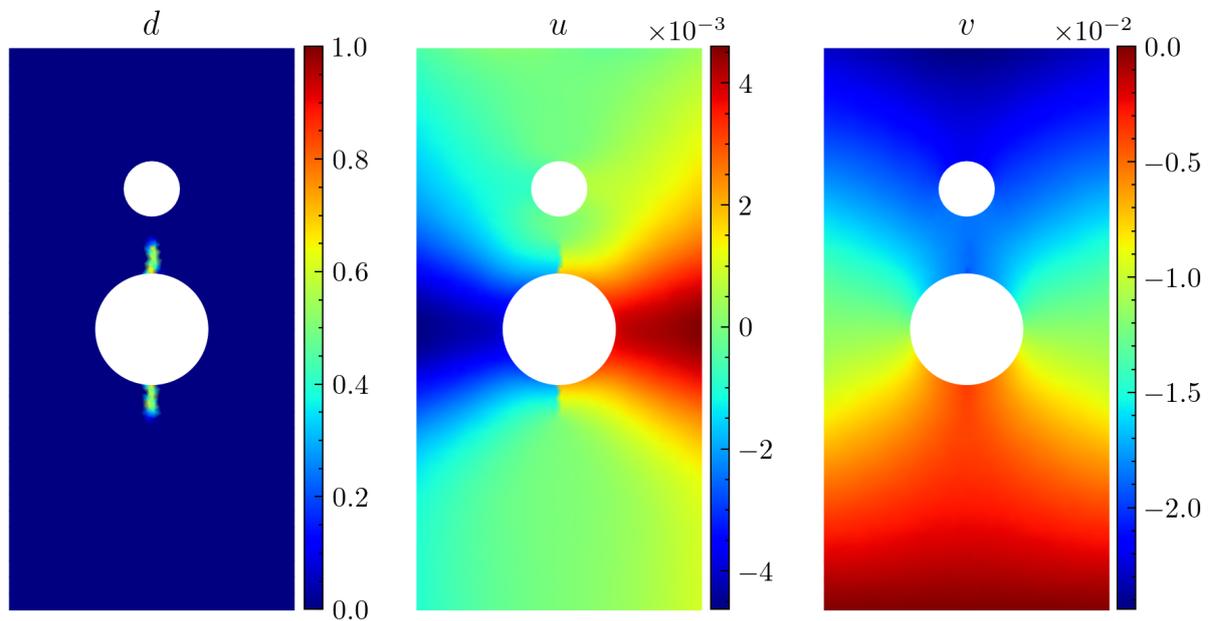


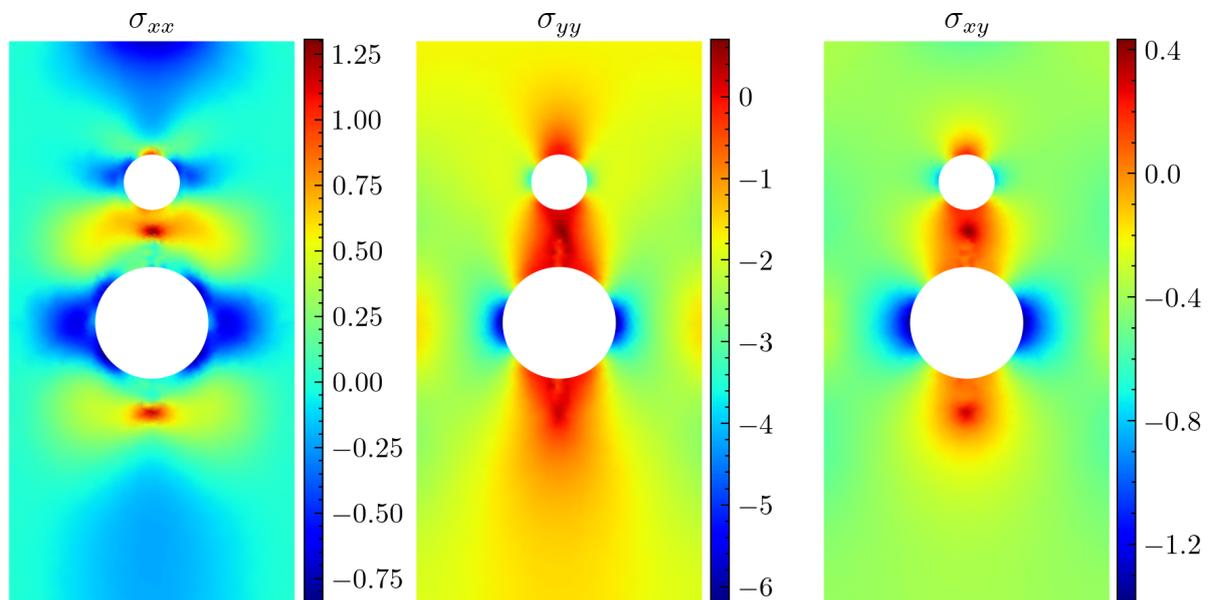
FIGURE 3.5 – Variation de  $d$  aux quatre instants différents :  $T_1 = 0,82$  s,  $T_2 = 8$  s,  $T_3 = 15$  s et  $T_4 = 30$  s, correspondant aux chargements de 1.30 MPa, 1.73 MPa, 1.27 MPa et 1.72 MPa.

bas, comme visualisé à l'instant  $T_2$ . À ce moment-là, le chargement appliqué est de 1.73 MPa, et les valeurs de  $d$  varient principalement entre 0.5 et 0.6. À l'instant  $T_3$ , en raison de la perte de rigidité, le chargement appliqué est réduit à 1.27 MPa. De plus, l'endommagement relie les deux trous et les valeurs de  $d$  sur certains nœuds atteignent la valeur de 1, indiquant que ces zones sont totalement endommagées. Finalement, de plus en plus de zones sont en ruine et l'endommagement continue de se propager verticalement, voir à l'instant  $T_4$  (chargement de 1.72 MPa).

En plus des valeurs de  $d$ , la distribution des champs de déplacement et de contrainte permet également d'illustrer l'endommagement de la plaque via la discontinuité. Comme l'illustrent les figures 3.6, 3.7 et 3.8, les distributions des champs de déplacement et de contrainte aux instants  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$  montrent clairement l'évolution de l'endommagement en fonction des différentes pressions appliquées.

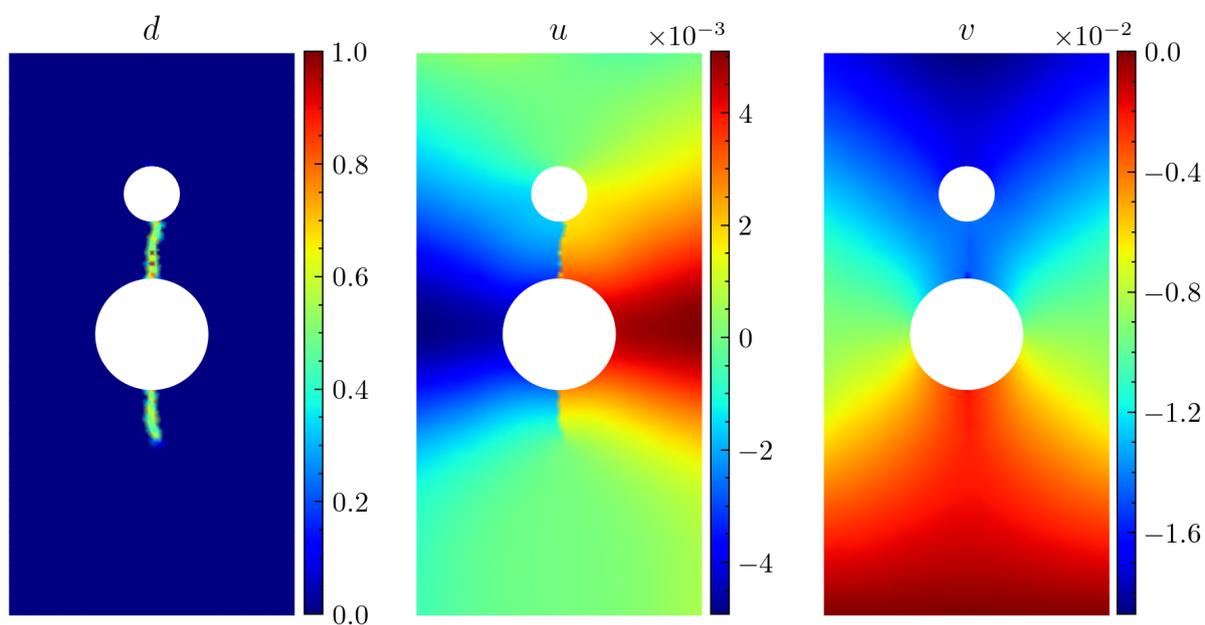


(a) Variable  $d$  et champ de déplacement

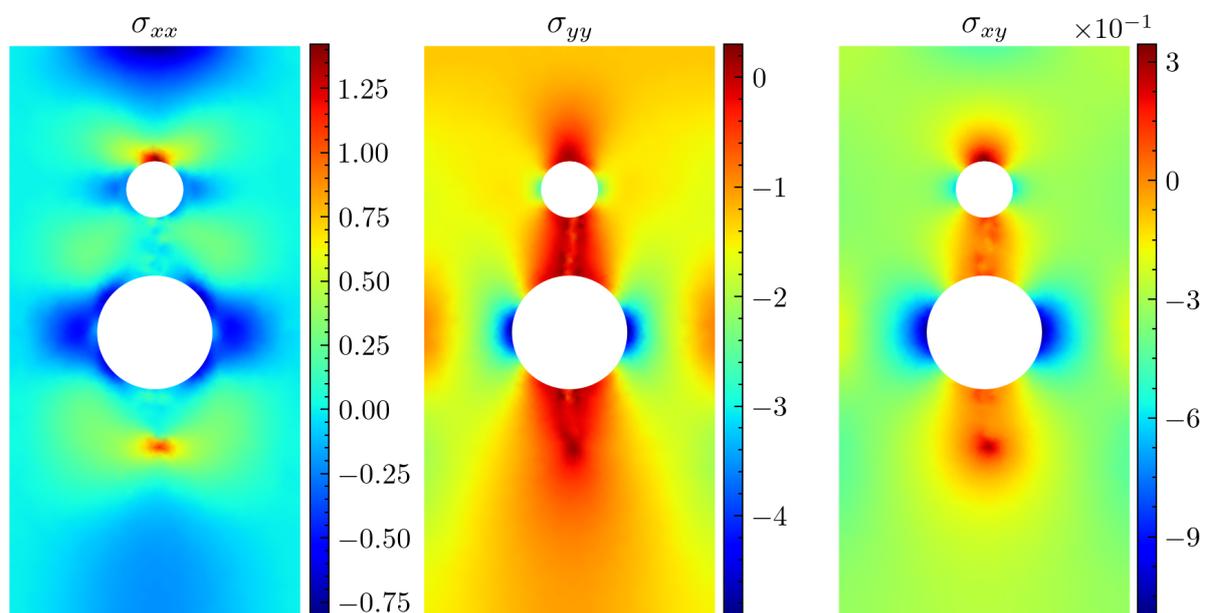


(b) Champ de contrainte

FIGURE 3.6 – Distribution de la variable  $d$ , du champ de déplacement et du champ de contrainte sous une pression appliquée de 1.73 MPa à l'instant  $T_2$ .

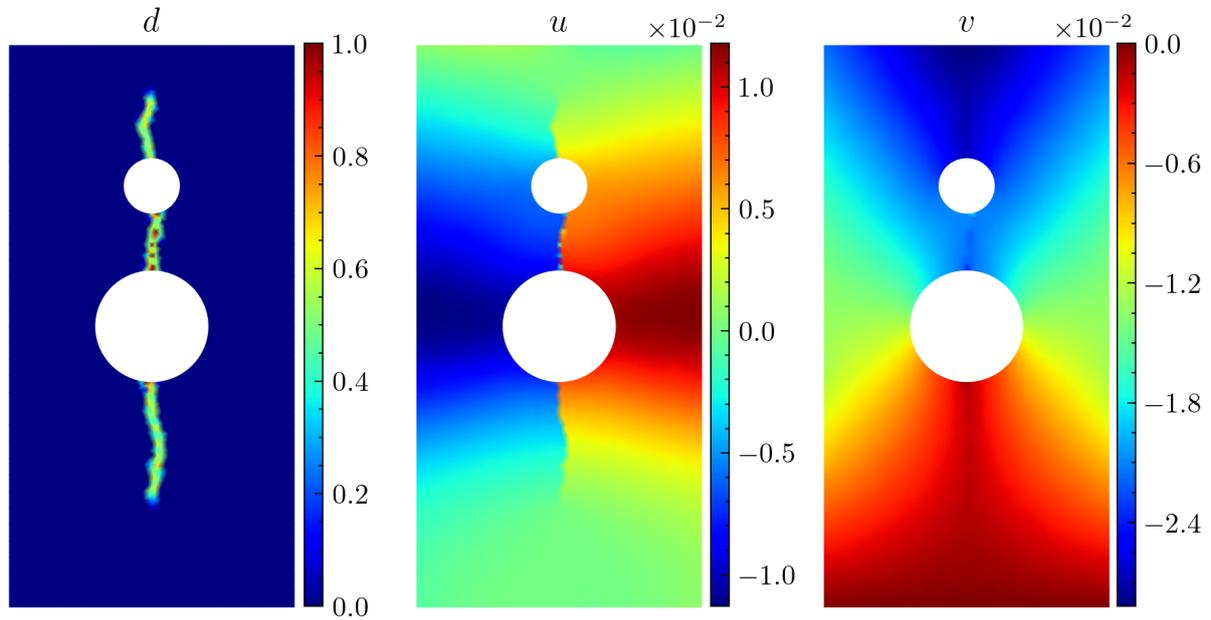


(a) Variable  $d$  et champ de déplacement

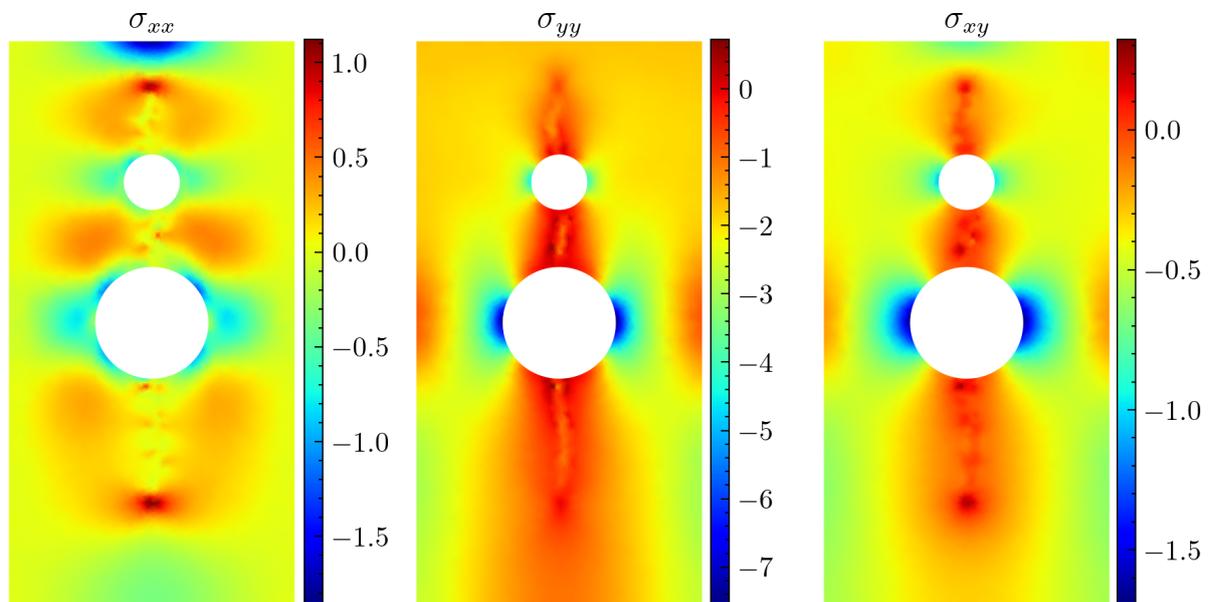


(b) Champ de contrainte

FIGURE 3.7 – Distribution de la variable  $d$ , du champ de déplacement et du champ de contrainte sous une pression appliquée de 1.27 MPa à l'instant  $T_3$ .



(a) Variable  $d$  et champ de déplacement



(b) Champ de contrainte

FIGURE 3.8 – Distribution de la variable  $d$ , du champ de déplacement et du champ de contrainte sous une pression appliquée de 1.72 MPa à l'instant  $T_4$ .

### 3.1.3 Conclusion

Pour analyser le comportement non linéaire et l'endommagement des matériaux fragiles isotropes, la loi de Badel, implémenté dans Code-Aster via ENDO\_ISOT\_BETON a été utilisée avec les paramètres identifiés sur la matrice ettringitique. Afin de mieux observer la propagation des fissures via le paramètre d'endommagement  $d$ , la plaque à deux trous a été modélisée avec l'hypothèse de déformation plane. Pour traiter le phénomène de snap-back, la méthode de pilotage incrémental est appliquée pour contrôler et déterminer le chargement appliqué dans la phase non linéaire.

Selon l'analyse de l'état de contrainte à la limite élastique, les contraintes sont concentrées autour du grand trou. Notamment sur  $\sigma_{xx}$ , celles-ci atteignent la résistance à la traction sur le haut et le bas du grand trou. Par conséquent, suivant le chargement appliqué, les fissures apparaissent d'abord sur ces frontières et se propagent verticalement. L'analyse des figures sur les valeurs de la variable scalaire  $d$  sur tout le domaine à quatre instants définis  $T_{i,i=1,4}$  confirme aussi cette conclusion.

## 3.2 Problème inverse d'identification des conditions aux limites et de l'endommagement

La technique de CIN permet de fournir précisément le champ de déplacement surfacique. En plus de contribuer à l'identification des paramètres mécaniques pour différents types de matériaux, cette technique présente des avantages considérables pour les études d'identification des conditions aux limites dans le cadre de problèmes linéaire et non linéaire [123, 124, 125], conduisant après un post-traitement adéquat à l'identification de l'endommagement et des fissures [126, 127, 128], ainsi que l'identification des zones de contact [129]. En raison des caractéristiques de la CIN, des mesures de déplacement peuvent être pris sur une surface facilement accessible et libre de tout chargement. Ces mesures de déplacement permettent de définir des conditions de Dirichlet sur cette surface. Puisque cette surface ne subit aucun chargement appliqué, elle est considérée comme une frontière libre ou une surface libre, avec des conditions de Neumann nulles. De plus, si une autre surface n'est pas accessible et où les conditions aux limites (Neumann et Dirichlet) sont inconnues, cela conduit à la formulation du problème de Cauchy ou du problème de complétion des données.

Le problème de Cauchy ou le problème de complétion des données est un problème mal-posé. Généralement, lorsque les données sont surabondantes sur une frontière du solide mais manquantes sur une autre frontière, ce problème peut être considéré comme un problème de Cauchy ou un problème de complétion des données. En raison des données manquantes sur certaines frontières, ce type de problème est difficile à résoudre directement. Pour mieux décrire ces problèmes, leurs définitions sont présentées ci-dessous.

### 3.2.1 Problèmes de Cauchy et de Complétion des Données

En considérant un domaine solide  $\Omega$ , les frontières sont distinguées en trois parties non superposées selon leurs caractéristiques :  $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_m \cup \Gamma_u \cup \Gamma_b$ , avec  $\Gamma_m \cap \Gamma_u \cap \Gamma_b = \emptyset$ . Le schéma des définitions du domaine et des frontières est illustré dans la figure 3.9.

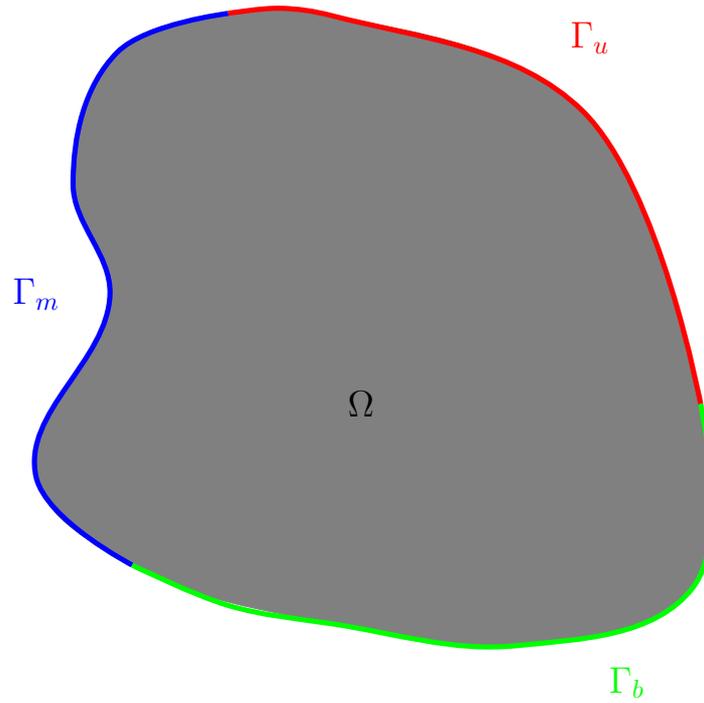


FIGURE 3.9 – Définitions du domaine et ses frontières.

- La frontière  $\Gamma_m$  est une partie accessible du solide. Les données surabondantes sont la traction surfacique  $\mathbf{T}^m$  et le champ de déplacement  $\mathbf{U}^m$ , ils sont connus sur cette frontière et pouvant être directement obtenus par la mesure de CIN.
- La frontière  $\Gamma_u$  est une partie inaccessible du solide. Par conséquent, sur cette frontière, toutes les données telles que la traction surfacique  $\mathbf{T}^u$  et le champ de déplacement  $\mathbf{U}^u$  sont inconnues et doivent être identifiées.
- La frontière  $\Gamma_b$  est une frontière du solide où une seule condition au limite est connue : Neumann ou Dirichlet. Cette condition peut s'écrire sous la forme suivante :

$$B\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (3.10)$$

Où  $\mathbf{u}$  est le champ de déplacement,  $\mathbf{b}$  est la condition aux limites générale sur  $\Gamma_b$ , et  $B$  est le tenseur déterminant  $\mathbf{b}$ .

Étant donné que la traction surfacique  $\mathbf{T}^m$  et le champ de déplacement  $\mathbf{U}^m$  sur la frontière  $\Gamma_m$ , ainsi que la condition aux limites générale  $\mathbf{b}$  sur la frontière  $\Gamma_b$ , sont déjà connus, et en assurant l'existence et l'unicité de la solution, le problème de Cauchy ou le problème de complétion des données s'exprime de la manière suivante :

Le problème de Cauchy  $\mathcal{P}_C$  consiste à déterminer le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  dans le domaine  $\Omega$ , satisfaisant le système (3.11).

$$\mathcal{P}_C : \begin{cases} \nabla(\sigma(\mathbf{u})) = 0, \sigma(\mathbf{u}) = \frac{\partial\Phi(\mathbf{u})}{\partial\varepsilon(\mathbf{u})} & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^m, \mathbf{u} = \mathbf{U}^m & \text{sur } \Gamma_m \\ B\mathbf{u} = \mathbf{b} & \text{sur } \Gamma_b \end{cases} \quad (3.11)$$

Où  $\sigma(\mathbf{u})$  représente le tenseur de contrainte,  $\varepsilon(\mathbf{u})$  désigne le tenseur de déformation, et  $\mathbf{n}$  est la normale sortante.

Le problème de Complétion des Données  $\mathcal{P}_{CD}$  vise à déterminer les valeurs inconnues  $\mathbf{T}^u$  et  $\mathbf{U}^u$  sur  $\Gamma_u$ , afin que le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  dans le domaine  $\Omega$  satisfasse le système (3.12).

$$\mathcal{P}_{CD} : \begin{cases} \nabla(\sigma(\mathbf{u})) = 0, \sigma(\mathbf{u}) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{u})}{\partial \varepsilon(\mathbf{u})} & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^m, \mathbf{u} = \mathbf{U}^m & \text{sur } \Gamma_m \\ B\mathbf{u} = \mathbf{b} & \text{sur } \Gamma_b \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^u, \mathbf{u} = \mathbf{U}^u & \text{sur } \Gamma_u \end{cases} \quad (3.12)$$

Pour éviter toute confusion entre les définitions du problème de Cauchy et du problème de complétion des données, il est important de noter que ces deux problèmes sont étroitement liés. Dans le cadre du problème de Cauchy, la solution  $\mathbf{u}$  est obtenue en résolvant l'équation (3.11). En revanche, les inconnues  $\mathbf{T}^u$  et  $\mathbf{U}^u$  sur  $\Gamma_u$  sont déterminées par la résolution du problème de complétion des données.

### 3.3 Méthode de l'identification

Le problème de Cauchy est un problème classique, largement analysé et étudié [130, 131]. De nombreuses recherches et approches ont été proposées pour résoudre le problème de Cauchy linéaire et non linéaire en 2D ou en 3D. Parmi ces méthodes, on peut citer l'algorithme de point fixe [132, 133, 134], la méthode variationnelle de Steklov-Poincaré [135, 136], la méthode de quasi-réversibilité [137, 138, 139], et la méthode de minimisation d'une fonctionnelle erreur en relation de comportement.

La fonctionnelle erreur en relation de comportement est une méthode éprouvée pour résoudre les problèmes de Cauchy. Elle a été développée et appliquée à divers types de problèmes [2, 140, 3, 141, 4, 129]. Dans le cas de nos travaux, nous avons adopté cette méthode pour identifier les conditions aux limites et l'endommagement, en se basant sur la démarche décrite pour les problèmes non linéaires dans Andrieux et Baranger [61].

#### 3.3.1 Fonctionnelle erreur en relation de comportement

La méthode de minimisation de la fonctionnelle erreur en relation de comportement repose sur l'utilisation indépendante des données surabondantes.

Tout d'abord, en définissant  $(\mathbf{d}, \mathbf{p})$  comme le champ de déplacement et la traction surfacique sur  $\Gamma_u$ , deux problèmes auxiliaires bien posés,  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ , sont obtenus en couplant une donnée inconnue sur  $\Gamma_u$  avec une donnée connue sur  $\Gamma_m$ , les autres éléments restant identiques pour les deux problèmes. Le premier problème,  $\mathcal{P}_1$ , utilise uniquement les données de la condition de Neumann  $\mathbf{T}^m$  sur la frontière accessible  $\Gamma_m$  et la condition de Dirichlet  $\mathbf{d}$  sur la frontière inaccessible  $\Gamma_u$ . Le second problème utilise la condition de Dirichlet  $\mathbf{U}^m$  sur  $\Gamma_m$  et la condition de Neumann  $\mathbf{p}$  sur  $\Gamma_u$ . Parallèlement, les champs de déplacement  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  sont définis comme les solutions de ces deux problèmes bien posés et indépendants. Les problèmes  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  peuvent

être formulés de la manière suivante :

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} \nabla(\sigma(\mathbf{u}_1)) = 0, \sigma(\mathbf{u}_1) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{u}_1)}{\partial \varepsilon(\mathbf{u}_1)} & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon(\mathbf{u}_1) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_1 + {}^t \nabla \mathbf{u}_1) & \text{dans } \Omega \\ \sigma(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^m & \text{sur } \Gamma_m \\ B\mathbf{u}_1 = \mathbf{b} & \text{sur } \Gamma_b \\ \mathbf{u}_1 = \mathbf{d} & \text{sur } \Gamma_u \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\mathcal{P}_2 : \begin{cases} \nabla(\sigma(\mathbf{u}_2)) = 0, \sigma(\mathbf{u}_2) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{u}_2)}{\partial \varepsilon(\mathbf{u}_2)} & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon(\mathbf{u}_2) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_2 + {}^t \nabla \mathbf{u}_2) & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{U}^m & \text{sur } \Gamma_m \\ B\mathbf{u}_2 = \mathbf{b} & \text{sur } \Gamma_b \\ \sigma(\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p} & \text{sur } \Gamma_u \end{cases} \quad (3.14)$$

En observant que si ces deux champs  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  coïncident à un mouvement de corps rigide  $\mathbf{u}_{\text{MCR}}$  près, alors  $(\mathbf{d}, \mathbf{p})$  sont les solutions du problème de Complétion des Données. Nous proposons de construire une fonctionnelle erreur mesurant l'écart entre les champs  $(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)$ . Ainsi, la fonctionnelle erreur en relation de comportement est établie pour déterminer l'erreur en énergie entre  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{d}, \mathbf{p}) \equiv E(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma(\mathbf{u}_1) - \sigma(\mathbf{u}_2)) : (\varepsilon(\mathbf{u}_1) - \varepsilon(\mathbf{u}_2)) d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_m} (\mathbf{T}^m - \sigma(\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n}) : (\mathbf{u}_1 - \mathbf{U}^m) d\Gamma \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_u} (\sigma(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{p}) : (\mathbf{d} - \mathbf{u}_2) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.15)$$

Il est intéressant de noter que la fonctionnelle erreur est toujours positive et quadratique lorsque le calcul se réalise dans la phase linéaire. Si le champ  $(\mathbf{d}, \mathbf{p})$  satisfait  $E = 0$ , alors  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_{\text{MCR}}$ , et cette solution  $\mathbf{u}_2$  permet de résoudre le problème de Cauchy.

Avec  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1(\mathbf{d}, \mathbf{T}^m)$  comme solution de  $\mathcal{P}_1$ , et  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2(\mathbf{U}^m, \mathbf{p})$  comme solution de  $\mathcal{P}_2$ , afin de déterminer les données inconnues  $(\mathbf{d}, \mathbf{p})$  sur la frontière  $\Gamma_u$ , la minimisation de l'équation (3.15) sous contraintes est réalisée de manière suivant :

$$(\mathbf{d}^*, \mathbf{p}^*) = \arg \min_{(\mathbf{d}, \mathbf{p})} J(\mathbf{d}, \mathbf{p})$$

$$\text{Avec } \mathbf{u}_1(\mathbf{d}, \mathbf{T}^m) \text{ est la solution de l'équation (3.13)} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{U}^m, \mathbf{p}) \text{ est la solution de l'équation (3.14)}$$

Selon l'étude de Andrieux et Baranger [142], pour optimiser la résolution du problème de Cauchy, seule l'inconnue  $\mathbf{d}$  est utilisée dans la minimisation de la fonctionnelle. Ainsi, dans le problème  $\mathcal{P}_2$ , la condition de Neumann  $\mathbf{p}$  correspondante sur  $\Gamma_u$  peut être remplacée par  $\sigma(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{p} = \sigma(\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n} = \sigma(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (3.17)$$

Par conséquent, les deux problèmes bien posés  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  dépendent explicitement de l'inconnue  $\mathbf{d}$ , et leurs nouvelles formulations sont les suivantes :

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} \nabla(\sigma(\mathbf{u}_1)) = 0, \sigma(\mathbf{u}_1) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{u}_1)}{\partial \varepsilon(\mathbf{u}_1)} & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon(\mathbf{u}_1) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_1 + {}^t \nabla \mathbf{u}_1) & \text{dans } \Omega \\ \sigma(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^m & \text{sur } \Gamma_m \\ B\mathbf{u}_1 = \mathbf{b} & \text{sur } \Gamma_b \\ \mathbf{u}_1 = \mathbf{d} & \text{sur } \Gamma_u \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\mathcal{P}_2 : \begin{cases} \nabla(\sigma(\mathbf{u}_2)) = 0, \sigma(\mathbf{u}_2) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{u}_2)}{\partial \varepsilon(\mathbf{u}_2)} & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon(\mathbf{u}_2) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_2 + {}^t \nabla \mathbf{u}_2) & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{U}^m & \text{sur } \Gamma_m \\ B\mathbf{u}_2 = \mathbf{b} & \text{sur } \Gamma_b \\ \sigma(\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n} = \sigma(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_u \end{cases} \quad (3.19)$$

De même, la nouvelle expression de la fonctionnelle erreur, qui évalue l'erreur en énergie entre les nouvelles formulations de  $\mathcal{P}_1$  (équation (3.18)) et  $\mathcal{P}_2$  (équation (3.19)), devient :

$$J(\mathbf{d}) \equiv E(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_m} (\mathbf{T}^m - \sigma(\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n}) : (\mathbf{u}_1 - \mathbf{U}^m) d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_u} (\sigma(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} - \sigma(\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n}) : (\mathbf{d} - \mathbf{u}_2) d\Gamma \quad (3.20)$$

Pour obtenir la solution  $\mathbf{d}^*$ , la minimisation de l'équation (3.20) sous contraintes s'écrit comme suit :

$$\mathbf{d}^* = \arg \min_{\mathbf{d}} J(\mathbf{d})$$

$$\text{Avec } \mathbf{u}_1(\mathbf{d}, \mathbf{T}^m) \text{ est la solution de l'équation (3.18)} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{U}^m, \mathbf{d}) \text{ est la solution de l'équation (3.19)}$$

## 3.4 Minimisation de la fonctionnelle

Pour minimiser la fonctionnelle, on s'intéresse à deux méthodes largement utilisés dans la littérature. La première technique est l'algorithme itératif de minimisation de Kozlov [132], qui a été proposé pour résoudre le problème de Cauchy. Le second algorithme est le Gradient Conjugué (GC) adapté à la minimisation des fonctions quadratiques [115]. Ces deux algorithmes ont été mis en œuvre et comparés.

### 3.4.1 Algorithme de Kozlov

L'algorithme proposé par Kozlov et al. [132] se base sur un choix initial adéquat d'une estimation de la condition aux limites en déplacement  $\mathbf{d}_0$  sur la surface  $\Gamma_u$ . Ensuite, cet algorithme va alterner la résolution du problème  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ , en transmettant au problème  $\mathcal{P}_2$  la condition aux limites sur  $\Gamma_u$  extraite de  $\mathcal{P}_1$ . Il s'arrête lorsque les deux suites formées par le déplacement

ou la traction surfacique sur  $\Gamma_u$  deviennent stationnaire. Un autre critère d'arrêt pourrait être l'erreur en relation de comportement entre les deux champs  $\mathbf{u}_1$  de  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  de  $\mathcal{P}_2$ . Une autre alternative, symétrique à cette démarche, consiste à commencer par résoudre le problème  $\mathcal{P}_2$  en imposant un champ de pression initial  $\mathbf{p}_0$ , puis résoudre le problème  $\mathcal{P}_1$  en récupérant la condition de Dirichlet sur  $\Gamma_u$  à partir du champ  $\mathbf{u}_2$ .

Dans notre cas, l'initialisation de l'algorithme à  $j = 0$  se fait par une condition de Dirichlet  $\mathbf{d}_0$  imposée sur  $\Gamma_u$ . Après la résolution du problème  $\mathcal{P}_1$ , la condition de Neumann qui s'appliquera au problème  $\mathcal{P}_2$  sur  $\Gamma_u$  est extraite du problème  $\mathcal{P}_1$  :  $\sigma(\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n} = \sigma(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n}$  sur  $\Gamma_u$ .

Pour les itérations suivantes de Kozlov, à l'itération  $j$ , la condition de Dirichlet appliquée sur  $\Gamma_u$  du problème  $\mathcal{P}_1$  est extraite du champ du problème  $\mathcal{P}_2$  de l'itération  $j - 1$  de Kozlov :  $u^{2j+1} = u^{2j}$  sur  $\Gamma_u$ . Ensuite, la condition de Neumann à appliquer au problème  $\mathcal{P}_2$  sur  $\Gamma_u$  est extraite du problème  $\mathcal{P}_1$  :  $\sigma(\mathbf{u}^{2j+2}) \cdot \mathbf{n} = \sigma(\mathbf{u}^{2j+1}) \cdot \mathbf{n}$  sur  $\Gamma_u$ . Ce processus est répété jusqu'à la convergence.

$$\mathcal{P}_1^{2j+1} : \begin{cases} \nabla(\sigma(\mathbf{u}^{2j+1})) = 0, & \text{dans } \Omega \\ \sigma(\mathbf{u}^{2j+1}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^m & \text{sur } \Gamma_m \\ B\mathbf{u}^{2j+1} = \mathbf{b} & \text{sur } \Gamma_b \\ \mathbf{u}^{2j+1} = \mathbf{u}^{2j} & \text{sur } \Gamma_u \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\mathcal{P}_2^{2j+2} : \begin{cases} \nabla(\sigma(\mathbf{u}^{2j+2})) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}^{2j+2} = \mathbf{U}^m & \text{sur } \Gamma_m \\ B\mathbf{u}^{2j+2} = \mathbf{b} & \text{sur } \Gamma_b \\ \sigma(\mathbf{u}^{2j+2}) \cdot \mathbf{n} = \sigma(\mathbf{u}^{2j+1}) \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_u \end{cases} \quad (3.23)$$

L'algorithme de Kozlov peut être interprété comme une méthode de minimisation à direction alternée pour la fonctionnelle  $E(\mathbf{d}, \mathbf{p})$ . Plus précisément, à l'itération  $j$  de Kozlov :

$$\mathcal{P}_1^{2j+1} : \bar{\mathbf{p}} = \arg \min_{\mathbf{p}} J(\mathbf{d}^j, \mathbf{p}) \Leftrightarrow \mathbf{u}^{2j+1} = \mathbf{u}_1(\bar{\mathbf{p}}) \quad (3.24)$$

$$\text{Avec } \mathbf{d}^j = \mathbf{u}^{2j} |_{\Gamma_u}$$

$$\mathcal{P}_2^{2j+2} : \bar{\mathbf{d}} = \arg \min_{\mathbf{d}} J(\mathbf{d}, \mathbf{p}^j) \Leftrightarrow \mathbf{u}^{2j+2} = \mathbf{u}_2(\bar{\mathbf{d}}) \quad (3.25)$$

$$\text{Avec } \mathbf{p}^j = \sigma(\mathbf{u}^{2j+1}) \cdot \mathbf{n} |_{\Gamma_u}$$

La preuve de ces résultats suit exactement les mêmes lignes que pour le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace, abordé dans Andrieux et al. [2] et n'est pas donné ici. Ce résultat montre que l'algorithme de Kozlov est une méthode de direction de descente alternée pour minimiser la fonctionnelle définie dans l'équation (3.20).

### 3.4.2 Méthode de gradient conjugué

La méthode de gradient conjugué (GC) est un algorithme itératif pour résoudre les grands systèmes linéaires et les problèmes d'optimisation quadratique [115]. Cette méthode est simple, efficace. Comme elle ne nécessite pas de stocker toutes les matrices de calcul pendant le processus d'optimisation, elle ne sollicite pas de manière significative la mémoire. Cela la rend particulièrement adaptée aux problèmes de grande taille ou aux calculs complexes. Dans le modèle

de Badel, étant donné que la variable scalaire  $d$  est égale à 0 dans la phase linéaire, la fonctionnelle erreur en relation de comportement est semi-positive, quadratique et convexe. Grâce à ces caractéristiques, la méthode de GC est bien adaptée pour minimiser cette fonctionnelle. Le processus et la théorie d'optimisation sont détaillés dans l'annexe C.1, et les comparaisons des résultats obtenus par la méthode de GC et par l'algorithme de Kozlov sont illustrées dans la section 3.5. Cependant, contrairement à l'algorithme de Kozlov, l'algorithme du gradient conjugué nécessite le calcul du gradient de la fonctionnelle. Cette étape est détaillée dans la section suivante.

### 3.4.3 Formulation discrète et calcul du gradient avec la méthode de l'état adjoint

En raison des différentes méthodes et algorithmes de minimisation réalisés avec le logiciel de MEF, afin d'obtenir le gradient exact de la fonctionnelle erreur pour accélérer l'optimisation de la méthode de GC, la méthode de l'état adjoint est privilégiée pour le problème discrétisé de MEF. Dans ce qui suit nous considérons que sur la frontière  $\Gamma_b$ , nous disposons d'une condition de Neumann.

#### 3.4.3.1 Formulation discrète

En considérant que le maillage du domaine  $\Omega$  est constitué de  $n$  nœuds, où  $n_m$  représente le nombre de nœuds sur la frontière  $\Gamma_m$ , et  $n_u$  représente le nombre de nœuds sur la frontière  $\Gamma_u$ , la formulation discrète du problème de Cauchy est formée avec un multiplicateur de Lagrange pour la condition de Dirichlet sur  $\Gamma_m$ , se présente de la manière suivante :

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \mathbb{K}\mathbf{U} + \mathbb{L}_m^t \mathbf{P}_m = \mathbf{R} + \mathbb{L}_m^t \mathbf{F}_m \\ \mathbb{L}_m \mathbf{U} = \mathbf{U}_m \end{cases} \quad (3.26)$$

Selon les définitions des deux problèmes bien posés  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ , avec une seule inconnue  $\mathbf{d}$  comme le montrent les équations (3.18) et (3.19), chaque problème utilise seulement une condition aux limites sur les frontières  $\Gamma_m$  et  $\Gamma_u$ . Ainsi, leurs formes discrétisées s'écrivent comme suit :

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} \mathbb{K}\mathbf{U}_1 + \mathbb{L}_u^t \mathbf{P}_u = \mathbf{R} + \mathbb{L}_m^t \mathbf{F}_m \\ \mathbb{L}_u \mathbf{U}_1 = \mathbf{X} \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\mathcal{P}_2 : \begin{cases} \mathbb{K}\mathbf{U}_2 + \mathbb{L}_m^t \mathbf{P}_m = \mathbf{R} + \mathbb{L}_u^t \mathbb{L}_u \mathbb{K}\mathbf{U}_1 \\ \mathbb{L}_m \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_m \end{cases} \quad (3.28)$$

Où  $\mathbb{K}$  est la matrice de raideur de dimension  $n \times n$ .  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{U}_2$  sont les vecteurs des déplacements aux nœuds de dimension  $n$  des problèmes (3.26), (3.27) et (3.28), respectivement.  $\mathbb{L}_m$  et  $\mathbb{L}_u$  sont des matrices rectangulaires de dimensions  $n \times n_m$  et  $n \times n_u$ , contenant des 0 et des 1 pour extraire les vecteurs de dimensions  $n_m$  et  $n_u$  pour les termes sur les frontières  $\Gamma_m$  et  $\Gamma_u$ .  $\mathbf{P}_m$  et  $\mathbf{P}_u$  sont les vecteurs des multiplicateurs de Lagrange (dimensions  $n_m$  et  $n_u$ ) associés aux conditions de Dirichlet sur  $\Gamma_m$  et  $\Gamma_u$ .  $\mathbf{R}$  est le vecteur de dimension  $n$  contenant les termes de volumes discrétisés ainsi que les conditions de Neumann connues sur la frontière  $\Gamma_b$ .  $\mathbf{F}_m$  et  $\mathbf{U}_m$  sont les vecteurs de dimension  $n_m$  contenant les termes discrétisés des conditions de Dirichlet et de Neumann connues sur  $\Gamma_m$ .  $\mathbf{X}$  est le vecteurs de dimension  $n_u$  correspondant aux

déplacements inconnus aux nœuds sur  $\Gamma_u$ . Nous observons ici que  $\mathbf{U}_1$  dépend explicitement de  $\mathbf{X}$  alors que  $\mathbf{U}_2$  dépend implicitement de  $\mathbf{X}$  via  $\mathbf{U}_1$  :  $\mathbf{U}_2(\mathbf{U}_1(\mathbf{X}))$

Étant donné que la matrice de raideur  $\mathbb{K}$  est constante dans la phase linéaire, la forme discrétisée de la fonctionnelle erreur est représentée selon les formes ci-dessus :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{U}_1(\mathbf{X}), \mathbf{U}_2(\mathbf{U}_1(\mathbf{X}))) &= \frac{1}{2}(\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2)^t \mathbb{K}(\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2)^t (\mathbb{L}_m^t \mathbf{F}_m - \mathbb{L}_u^t \mathbf{P}_u - \mathbb{L}_u^t \mathbb{L}_u \mathbb{K} \mathbf{U}_1 + \mathbb{L}_m^t \mathbf{P}_m) \end{aligned} \quad (3.29)$$

La solution du problème de Cauchy avec une seule inconnue s'obtient en résolvant le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^* &= \arg \min_{\mathbf{X}} E(\mathbf{U}_1(\mathbf{X}), \mathbf{U}_2(\mathbf{U}_1(\mathbf{X}))) \\ &\text{Avec } \mathbf{U}_1(\mathbf{X}) \text{ est la solution de } \mathcal{P}_1 \text{ (3.27)} \\ &\mathbf{U}_2(\mathbf{U}_1(\mathbf{X})) \text{ est la solution de } \mathcal{P}_2 \text{ (3.28)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

### 3.4.3.2 Méthode de l'état adjoint

Pour minimiser l'erreur  $E$ , le calcul de son gradient est indispensable pour la méthode du gradient. Cependant, en raison de la dépendance implicite des solutions  $\mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{U}_2$  par rapport à la variable  $\mathbf{X}$  et du coût relativement élevé de calcul direct du gradient [143, 144], la méthode de l'état adjoint a été proposée et utilisée pour calculer le gradient exact de la fonctionnelle erreur en relation de comportement. La définition du lagrangien est décrite ci-dessous :

$$\begin{aligned} L(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{X}, \Lambda_1, \Lambda_2, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) &= E(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) \\ &\quad + \Lambda_1^t (\mathbb{K} \mathbf{U}_1 + \mathbb{L}_u^t \mathbf{P}_u - \mathbf{R} - \mathbb{L}_m^t \mathbf{F}_m) \\ &\quad + \mathbf{Q}_1^t (\mathbb{L}_u \mathbf{U}_1 - \mathbf{X}) \\ &\quad + \Lambda_2^t (\mathbb{K} \mathbf{U}_2 + \mathbb{L}_m^t \mathbf{P}_m - \mathbf{R} - \mathbb{L}_u^t \mathbb{L}_u \mathbb{K} \mathbf{U}_1) \\ &\quad + \mathbf{Q}_2^t (\mathbb{L}_m \mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_m) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\nabla_{\mathbf{X}} L \cdot d\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{X}} E \cdot d\mathbf{X} \quad (3.32)$$

Où  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont les vecteurs des états adjoints associés à  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ .  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$  sont les vecteurs adjoints associés aux conditions de Dirichlet des problèmes adjoints  $\mathcal{P}_{a_1}$  et  $\mathcal{P}_{a_2}$ . Selon l'équation 3.31, la dérivé du lagrangien par rapport à  $\mathbf{X}$  est :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}} L &= \frac{\partial \mathbf{U}_1^t}{\partial \mathbf{X}} \left[ \mathbb{K}(\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2) + \mathbb{K} \Lambda_1 + \mathbb{L}_u^t \mathbf{Q}_1 - \mathbb{L}_u^t \mathbb{L}_u \mathbb{K} \Lambda_2 \right] \\ &\quad + \frac{\partial \mathbf{P}_u^t}{\partial \mathbf{X}} [\mathbb{L}_u \Lambda_1] - \mathbf{Q}_1^t \mathbb{I}_{\mathbf{X}} \\ &\quad + \frac{\partial \mathbf{U}_2^t}{\partial \mathbf{X}} \left[ -\mathbb{K}(\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2) + \mathbb{K} \Lambda_2 + \mathbb{L}_m^t \mathbf{Q}_2 \right] \\ &\quad + \frac{\partial \mathbf{P}_m^t}{\partial \mathbf{X}} [\mathbb{L}_m \Lambda_2] \end{aligned} \quad (3.33)$$

Où  $\mathbb{I}_{\mathbf{X}}$  est la matrice d'identité de dimension  $n_u \times n_u$ . D'après ces équations, en annulant les termes entre crochets sur les dérivations par rapport à  $\mathbf{X}$ , les problèmes adjoints associés

peuvent être obtenus ci-dessous :

$$\mathcal{P}_{a1} : \begin{cases} \mathbb{K}\Lambda_1 + \mathbb{L}_u^t \mathbf{Q}_1 = -\mathbb{K}(\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2) + \mathbb{L}_u^t \mathbb{L}_u \mathbb{K}\Lambda_2 \\ \mathbb{L}_u \Lambda_1 = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\mathcal{P}_{a2} : \begin{cases} \mathbb{K}\Lambda_2 + \mathbb{L}_m^t \mathbf{Q}_2 = \mathbb{K}(\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2) \\ \mathbb{L}_m \Lambda_2 = 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

À partir des deux problèmes (3.27) et (3.28), on démontre facilement que le second problème adjoint a une solution  $\Lambda_2 = 0$  partout, donc nous avons un seul problème adjoint à résoudre pour calculer le gradient. En reliant les problèmes adjoints discrets et l'équation (3.32), le gradient de la fonctionnelle erreur est donné par :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} E &= -\mathbf{Q}_1 \\ &= \mathbb{L}_u \mathbb{K}\Lambda_1 \end{aligned} \quad (3.36)$$

### 3.4.4 Adaptation au comportement non linéaire des matériaux isotropes fragiles

Les études existantes ont déjà démontré que la méthode de minimisation de la fonctionnelle erreur en relation de comportement est adaptée pour résoudre les problèmes de Cauchy non linéaire [61, 4]. Pour l'appliquer aux matériaux isotropes fragiles tels que la matrice ettringitique, certains détails doivent encore être développés et adaptés.

Pour résoudre le problème de Cauchy non linéaire et identifier les conditions aux limites ainsi que l'endommagement, il faut résoudre deux problèmes non linéaires,  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  afin d'obtenir le champ de déplacement dans tout le domaine. Cependant, en raison des problèmes de convergence et de snap-back, la résolution des problèmes de Cauchy non linéaires avec le modèle de Badel ne peut pas être effectuée automatiquement dans l'algorithme de minimisation. En effet, il est impossible de contrôler le chargement et l'évolution de l'endommagement de manière efficace sans développement invasif de la méthode de minimisation. En considérant que le développement invasif des méthodes de calcul des problèmes directs est trop long, et n'entre pas dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi de garder une approche non invasive en utilisant les algorithmes de calcul non linéaire de CODE\_ASTER tels qu'ils sont mis en œuvre. Ainsi, avec le modèle de Badel, l'identification des conditions aux limites et de l'endommagement se compose de deux étapes.

La première étape consiste à réaliser l'identification dans la phase linéaire. Dans cette étape, les variables d'endommagement  $d$  sont nulles partout. Ainsi, la minimisation de la fonctionnelle erreur en relation de comportement a été utilisée pour résoudre le problème de Cauchy afin de déterminer le champ de déplacement  $\mathbf{u}^*$  dans tout le domaine  $\Omega$  et d'identifier le champ de déplacement inconnu  $\mathbf{d}^*$  sur la frontière  $\Gamma_u$ . Par ailleurs, bien que la minimisation de la fonctionnelle erreur ait été réalisée avec une seule inconnue  $\mathbf{d}$ , étant donné que  $\mathbf{u}^*$  et  $\mathbf{d}^*$  sont connus, la traction surfacique  $\mathbf{p}^*$  peut également être déterminée et utilisée dans la prochaine étape.

La deuxième étape est la réalisation de l'identification dans la phase non linéaire. Dans cette étape, afin d'éviter les problèmes de convergence et de snap-back, la modélisation numérique a été effectuée avec la méthode de pilotage en utilisant les données identifiées dans la phase linéaire

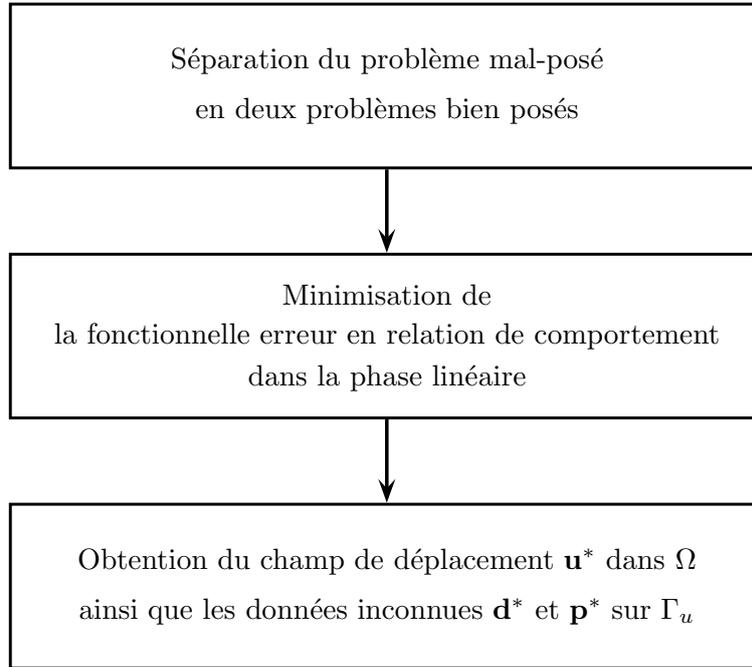


FIGURE 3.10 – Démarche de la méthode de la fonctionnelle erreur en relation de comportement pour l'identification des conditions aux limites dans la phase linéaire.

comme le chargement appliqué pour déterminer les conditions aux limites et l'endommagement dans la phase non linéaire. Plus précisément, en se basant sur le problème  $\mathcal{P}_1$  (3.18), la méthode de pilotage utilise les données identifiées  $\mathbf{d}^*$  ou  $\mathbf{p}^*$  dans la phase linéaire, en ajustant l'intensité de chargement pilotée  $\eta$  pour obtenir le champ de déplacement  $\mathbf{u}^{**}$ , le champ de contrainte  $\sigma^{**}$ , et les variables d'endommagement  $d$  dans le domaine  $\Omega$  dans la phase non linéaire. En conséquence, l'identification des conditions aux limites et l'endommagement avec le modèle de Badel est illustrée dans les figures 3.10 et 3.11, d'abord la phase linéaire qui donne  $\mathbf{d}^*$  et  $\mathbf{p}^*$ , puis la phase non linéaire qui consiste à piloter  $\mathbf{d}^*$  ou  $\mathbf{p}^*$  jusqu'à la fin du chargement.

Cette démarche s'appuie sur le fait que la direction du chargement  $\mathbf{p}^*$  ou du déplacement  $\mathbf{d}^*$  est identifiée à la fin de la phase linéaire et ne change plus au cours de la phase de pilotage, car seul l'intensité  $\eta$  est pilotable.

### 3.4.5 Critère d'arrêt

Dans la phase linéaire, la solution du problème de minimisation est obtenue lorsque la fonctionnelle erreur entre les deux problèmes bien posés  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  est minimale. Cependant, lorsque les données utilisées dans la minimisation sont bruitées, l'identification peut ne pas s'arrêter automatiquement au seuil de convergence pour obtenir des résultats satisfaisants en raison de l'instabilité du calcul. Comme le montre la figure 3.12, pendant la minimisation, l'erreur  $L^2$  entre les déplacements exacts et les déplacements identifiés atteint un minimum, puis augmente très rapidement, tandis que la fonctionnelle  $E$  atteint son minimum et se stabilise. Si l'algorithme de minimisation est arrêté trop tôt avant le minimum de l'erreur  $L^2$ , la fonctionnelle n'atteint pas son minimum. Si l'algorithme est arrêté après le minimum de l'erreur  $L^2$ , la fonctionnelle erreur  $E$  atteint son minimum. Cependant, l'erreur  $L^2$  devient très grande, les

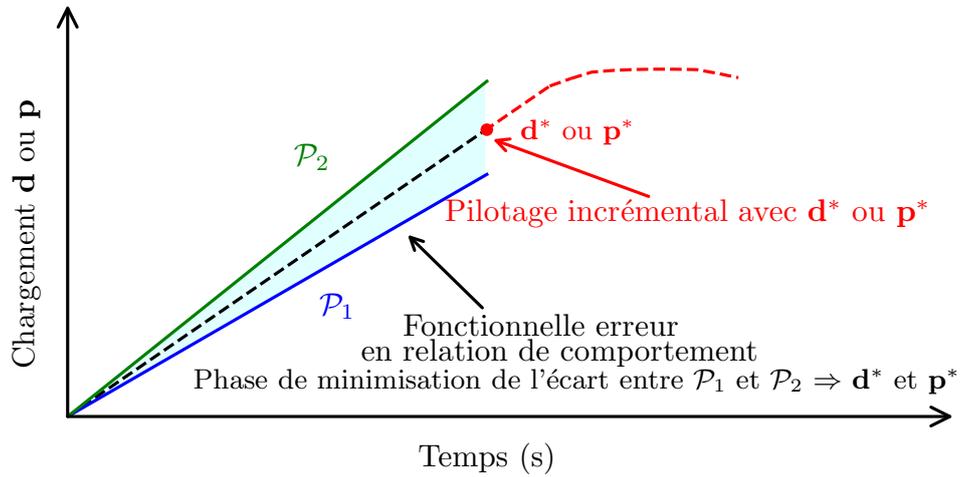


FIGURE 3.11 – Démarche de l'identification des conditions aux limites et l'endommagement avec le modèle de Badel.

données identifiées sont très bruitées et on assiste à une explosion numérique.

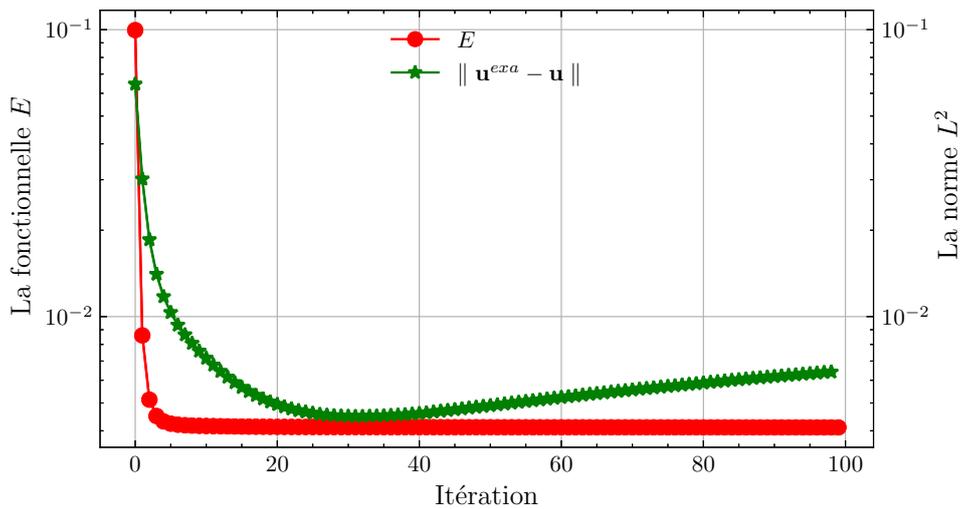


FIGURE 3.12 – Évolution de la fonctionnelle  $E$  et de l'erreur  $L^2$  entre le champ calculé et le champ exact au cours des itérations, dans le cas où les données sont bruitées.

Afin de résoudre ce problème et d'obtenir des résultats d'identification plus satisfaisants, un critère d'arrêt a été proposé pour dans le cadre de cette méthode par Rischette et al. [145]. Ce critère dépend particulièrement du taux de bruit  $\alpha_{bruit}$  et des données surabondantes utilisées dans l'identification, et s'exprime sous la forme suivante :

$$dE = |E_i - E_{i-1}| \leq \left( \frac{\alpha_{bruit}}{1 - \alpha_{bruit}} \right)^2 (\| \mathbf{T}^m \|^2 + \| \mathbf{U}^m \|^2) \quad (3.37)$$

Où  $E_i$  et  $E_{i-1}$  sont les valeurs de l'erreur en énergie aux itérations  $i$  et  $i - 1$ . Selon l'étude de Rischette et al. [145], ce critère d'arrêt permet d'éviter l'instabilité de calcul et l'explosion numérique des erreurs des résultats identifiés lorsque le bruit est inférieur à 10% sur les données utilisées dans l'identification.

### 3.5 Application numérique

Afin de démontrer l'efficacité et la robustesse de la méthode de la fonctionnelle erreur en relation de comportement ainsi que les différentes performances et précisions entre l'algorithme de Kozlov et la méthode de GC, l'identification des conditions aux limites a été réalisé avec les données synthétiques sans bruit et avec 5% de bruit blanc additif dans l'essai de compression sur la plaque à deux trous.

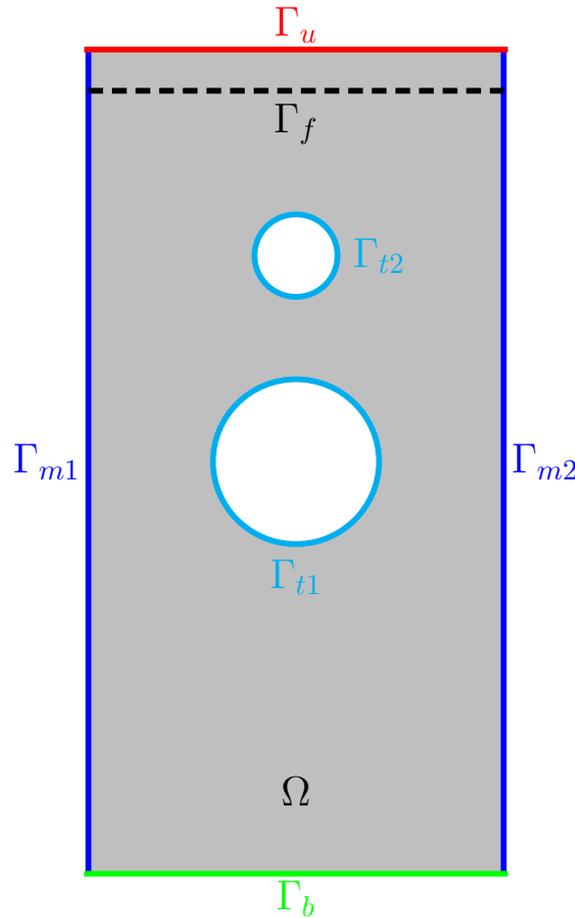


FIGURE 3.13 – Schéma de la plaque épaisse à deux trous et désignation des différentes frontières

Le modèle de la plaque est identique à celui utilisé dans la modélisation du problème direct : une plaque de dimensions  $l = 50$  mm et  $h = 100$  mm avec un petit trou de rayon  $R_1 = 5$  mm dont le centre est à  $(0, 25)$  et un grand trou de rayon  $R_2 = 10$  mm positionné au centre de la plaque à  $(0, 0)$ . La figure 3.13 présente le schéma synthétique. Le domaine de la plaque à deux trous est désigné par  $\Omega$ , avec quatre frontières non superposées constituant la frontière entière  $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_{m1} \cup \Gamma_{m2} \cup \Gamma_b \cup \Gamma_{t1} \cup \Gamma_{t2}$ . Pour s'approcher au mieux de la réalité, les frontières  $\Gamma_{m1}$  et  $\Gamma_{m2}$  ne contiennent pas de nœuds des frontières  $\Gamma_u$  et  $\Gamma_b$ . De plus, pour observer les données identifiées dans le domaine, une frontière fictive  $\Gamma_f$  est définie à 10 mm en dessous de  $\Gamma_u$ . Sur cette frontière fictive  $\Gamma_f$ , nous pourrions observer les données loin du bruit généré sur la frontière  $\Gamma_u$  lors de l'identification, confère travaux de Andrieux et Baranger [129], Hariga et al. [146].

Le maillage de la plaque comprend 2350 nœuds dans le domaine  $\Omega$  ( $n = 2350$ ). Sur la frontière  $\Gamma_u$ , le nombre de nœuds est  $n_u = 29$ , et sur les frontières  $\Gamma_{m1}$  et  $\Gamma_{m2}$ , il y a 33 nœuds de chaque côté, soit  $n_m = 66$ . Par conséquent, on a  $66 \times 4 = 264$  variables pour le problème

d'optimisation afin d'obtenir  $\mathbf{X}$  sur  $\Gamma_u$  ( $29 \times 2 = 58$ ).

On affecte à la plaque les propriétés de la matrice ettringitique âgée de 42 jours : le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  ont les valeurs de 8.83 GPa et 0.216, respectivement. La résistance en traction et en compression sont de 1.76 MPa et 16.95 MPa, avec une pente post-pic en traction de  $-\frac{E}{\gamma} = -1.766$  GPa pour  $\gamma = 5$ .

Dans l'essai de compression, la frontière  $\Gamma_u$  subit la compression, les frontières  $\Gamma_{m1}$  et  $\Gamma_{m2}$  sont libres, et le déplacement  $v$  sur la frontière  $\Gamma_b$  est imposé à 0. Afin d'éviter le problème de matrice singulière dans le calcul, le nœud au milieu de  $\Gamma_b$  est complètement bloqué :  $u = v = 0$ . D'après les résultats du problème direct, le seuil élastique est de 1.3 MPa (avant l'apparition de l'endommagement). L'identification a été réalisée avec les déplacements mesurés dans la phase linéaire, les champs de déplacement  $\mathbf{U}^m$  sur les frontières  $\Gamma_{m1}$  et  $\Gamma_{m2}$  à une pression de 0.6 MPa, obtenus par la MEF, ont été utilisés.

Tout d'abord, les résultats de l'algorithme de Kozlov et de la méthode de GC avec les données synthétiques sans bruit sont illustrés et comparés.

### 3.5.1 Identification avec les données synthétiques sans bruit dans la phase linéaire

En prenant en compte que la minimisation s'arrête lorsque la valeur de  $E$  est inférieure à  $10^{-10}$ , le tableau 3.1 présente le nombre d'itérations utilisées, le temps de calcul nécessaire et la valeur de la fonctionnelle  $E$  obtenue après la minimisation. En se basant sur ce tableau, avec le même seuil de convergence, la méthode de GC nécessite un plus grand nombre d'itérations et un temps de calcul plus long. Pour la fonctionnelle  $E$  obtenue après la minimisation, les deux algorithmes arrivent presque à la même valeur grâce au seuil de convergence. Généralement, ces données indiquent que les résultats obtenus par la méthode de GC sont meilleurs que ceux de l'algorithme de Kozlov. Pour vérifier ce point, les comparaisons des données identifiées sur  $\Gamma_u$  sont illustrées ci-dessous.

TABLEAU 3.1 – Coût du calcul avec différents algorithmes de minimisation sur les données synthétiques sans bruit.

Algorithme de minimisation	Kozlov	GC
Nombre d'itération	5122	5516
Temps de calcul	1h21mins	2h38mins
Valeur de $E$ final	$9.99 \cdot 10^{-10}$	$9.42 \cdot 10^{-10}$

Pour illustrer la précision des résultats identifiés, non seulement la condition de Dirichlet  $\mathbf{d} = \langle u, v \rangle$  sur  $\Gamma_u$  a été représentée, mais aussi la condition de Neumann  $\mathbf{p} = \langle p_x, p_y \rangle$ , déterminée à partir de la solution du problème de Cauchy  $\mathbf{u}$ , a également été analysée. En considérant les données obtenues par la MEF comme données de référence, l'erreur relative normalisée, définie comme l'erreur absolue par rapport à la valeur absolue maximale des champs de données de référence, a été utilisée pour mieux évaluer et analyser les données identifiées. Cette approche permet d'éviter le calcul de l'erreur relative lorsque la valeur de référence est nulle ou proche de zéro. Pour le champ de déplacement  $\mathbf{d}$ , l'erreur relative normalisée est définie par rapport au

champ de déplacement maximal de  $8.30 \cdot 10^{-3}$  mm sur  $\Gamma_u$ . Tandis que pour la traction surfacique  $\mathbf{p}$ , l'erreur relative normalisée est définie par rapport à la pression appliquée de 0.6 MPa.

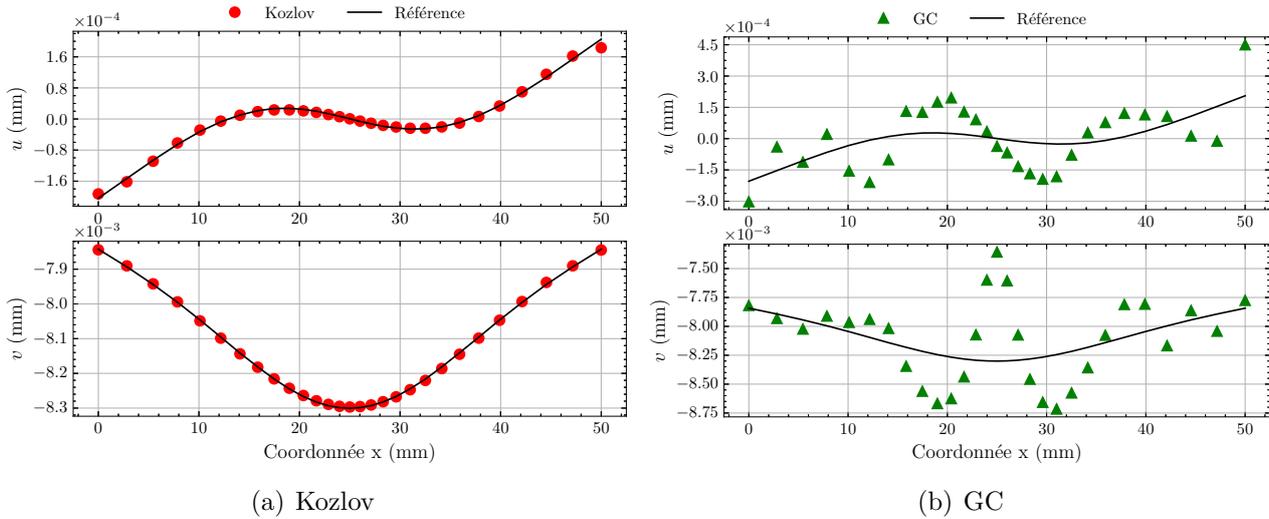


FIGURE 3.14 – Comparaison du champ de déplacement  $\mathbf{d}^*$  identifié sur  $\Gamma_u$  avec l'algorithme de Kozlov et la méthode de GC en utilisant les données synthétiques sans bruit.

La figure 3.14 illustre la comparaison entre le champ de déplacement identifié  $\mathbf{d}^*$  avec les différents algorithmes de minimisation sur la frontière  $\Gamma_u$ . Selon cette figure, il est évident que les déplacements identifiés par l'algorithme de Kozlov sont plus précis que ceux obtenus par la méthode de GC. D'un point de vue global, que ce soit pour le déplacement  $u$  ou  $v$ , les données identifiées par l'algorithme de Kozlov s'ajustent bien aux données de référence.

Numériquement, pour le déplacement  $u^*$  identifié, la valeur maximale des erreurs relatives normalisées obtenue avec l'algorithme de Kozlov est de 0.26%, tandis que celle obtenue avec la méthode de GC est de 2.94%. De plus, la valeur moyenne de ces erreurs obtenue avec l'algorithme de Kozlov est seulement de 0.04%, tandis que celle obtenue par la méthode de GC est de 1.28%. Pour le déplacement  $v^*$  identifié, les erreurs relatives normalisées maximales obtenues avec l'algorithme de Kozlov et la méthode de GC sont de 0.07% et 11.36%, respectivement. Dans l'identification avec les données synthétiques sans bruit, l'erreur maximale de  $v^*$  obtenue par la méthode de GC est inacceptable. Leurs erreurs relatives normalisées moyennes sont de 0.03% et 3.08%, respectivement. Les valeurs minimales des erreurs relatives normalisées de  $u^*$  et  $v^*$  obtenues avec ces deux algorithmes sont faibles, surtout pour celles obtenues avec l'algorithme de Kozlov, qui sont inférieures à 0.01%.

La figure 3.15 illustre la comparaison de traction surfacique identifié  $\mathbf{p}^*$  sur  $\Gamma_u$  avec les différents algorithmes de minimisation. Comme la comparaison des champs de déplacement identifié, les valeurs identifiées de  $\mathbf{p}^*$  obtenu par la méthode de GC sont visiblement moins précises que celles de l'algorithme de Kozlov, ce qui est normal, vu les oscillations que nous avons observé dur le déplacement identifié avec le GC.

Numériquement, avec l'algorithme de Kozlov, les valeurs maximales des erreurs relatives normalisées sur  $p_x^*$  et  $p_y^*$  sont de 2.25% et 1.37%, respectivement. Les valeurs moyennes de ces erreurs sont de 0.41% et 0.58%, respectivement. De plus, leurs erreurs relatives normalisées minimales sont toutes très faibles, inférieures à 0.24%.

Au contraire, pour la méthode de GC, les erreurs relatives normalisées sur  $\mathbf{p}^*$  sont amplifiées. Pour  $p_x^*$  et  $p_y^*$ , les valeurs maximales de ces erreurs atteignent respectivement 173.93% et

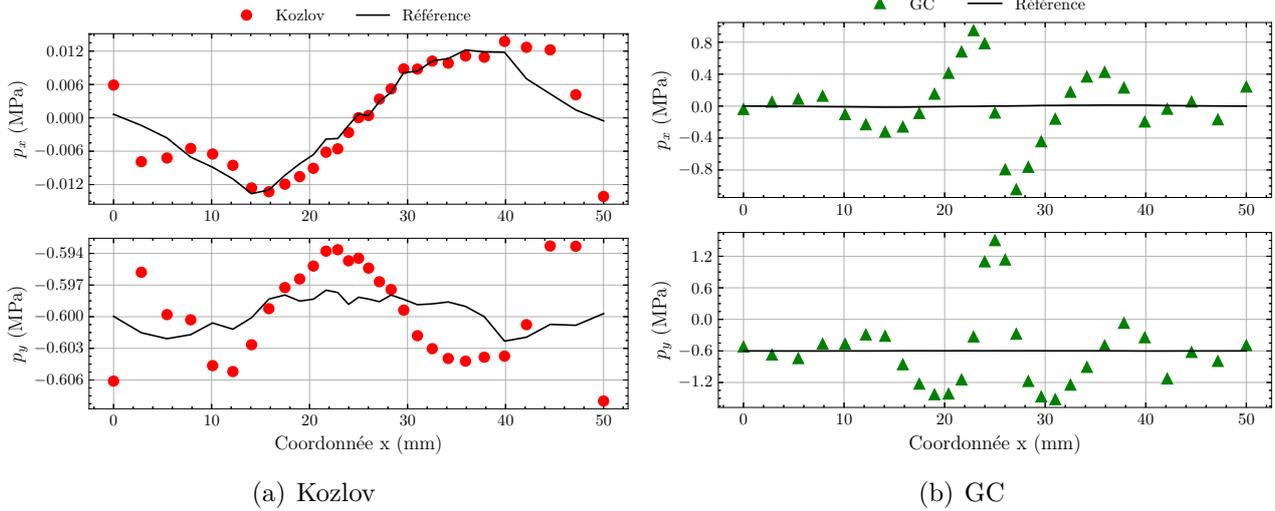


FIGURE 3.15 – Comparaison de la traction surfacique  $\mathbf{p}^*$  identifiée sur  $\Gamma_u$  avec l'algorithme de Kozlov et la méthode de GC en utilisant les données synthétiques sans bruit.

348.47%. Leurs valeurs moyennes des erreurs relatives normalisées sont de 54.10% et 88.27%. Même les erreurs relatives normalisées minimales ne sont pas négligeables, avec des valeurs de 6.82% et 4.07%, respectivement.

TABLEAU 3.2 – Erreurs relatives normalisées entre les données de référence et celles identifiées sur  $\Gamma_u$  avec les différents algorithmes de minimisation en utilisant les données synthétiques sans bruits.

Erreur relative normalisée	Maximale		Moyenne		minimale	
	Kozlov	GC	Kozlov	GC	Kozlov	GC
$u^*$	0.26%	2.94%	0.04%	1.28%	0.00%	0.07%
$v^*$	0.07%	11.36%	0.03%	3.08%	0.00%	0.27%
$p_x^*$	2.25%	173.93%	0.41%	54.10%	0.00%	6.82%
$p_y^*$	1.37%	348.47%	0.58%	88.27%	0.08%	4.07%

Toutes les erreurs relatives normalisées de  $\mathbf{d}^*$  et de  $\mathbf{p}^*$  identifiées avec les données synthétiques sans bruit sont enregistrées dans le tableau 3.2. En résumé, par rapport à la méthode de GC, en prenant le même seuil de convergence, avec moins d'itérations et un temps de calcul réduit, l'algorithme de Kozlov permet d'identifier plus précisément le champ de déplacement et de la traction surfacique sur la frontière  $\Gamma_u$  dans la phase linéaire avec les données synthétiques sans bruit. Cela pourrait s'expliquer par les différentes directions de descente utilisées par l'algorithme de Kozlov et la méthode de GC. D'après les figures des comparaisons des données, bien que les résultats identifiés par GC présentent également des courbes similaires à celles obtenues par MEF, les fluctuations globales sont particulièrement importantes. Ainsi, la méthode de GC a besoin d'un plus grand nombre d'itérations pour obtenir une précision des résultats comparable à celle de l'algorithme de Kozlov. Étant donné que le bruit existe toujours dans les mesures, les comparaisons des résultats identifiés avec les données synthétiques bruitées sont illustrées dans la section suivante pour valider davantage l'identification des conditions aux limites dans la phase linéaire.

### 3.5.2 Identification avec les données synthétiques bruitées dans la phase linéaire

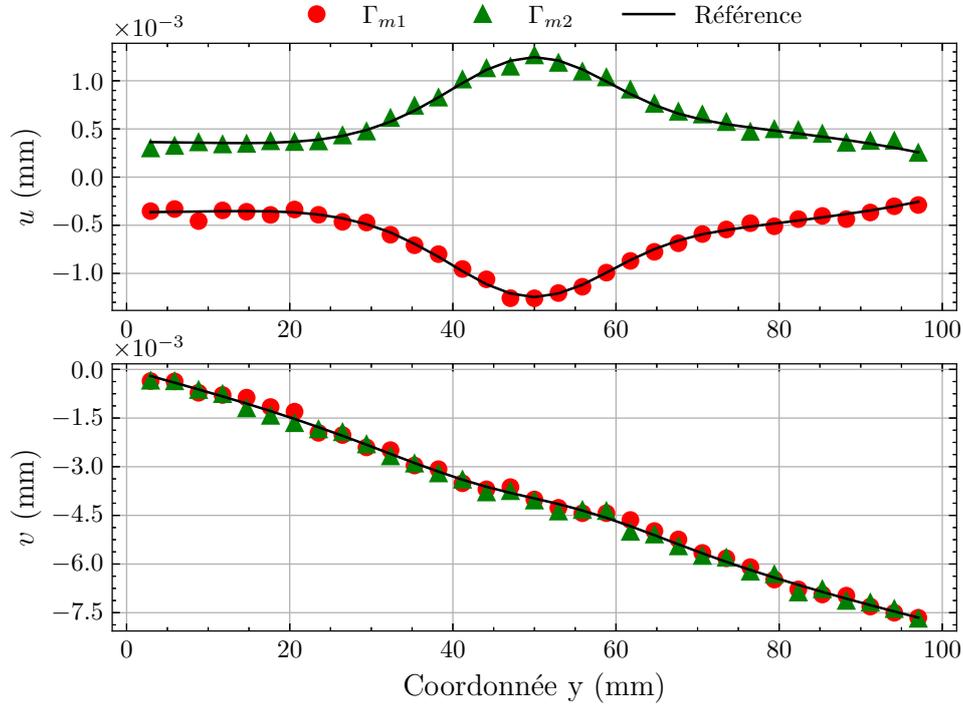


FIGURE 3.16 – Comparaison des champs de déplacement sans bruit et avec 5% de bruit blanc sur les frontières  $\Gamma_{m1}$  et  $\Gamma_{m2}$ .

Pour simuler la mesure avec CIN, un bruit blanc additif avec un niveau de 5% (bruit gaussien avec une moyenne de 0 et un écart-type de 5% des données utilisées) a été ajouté aux champs de déplacement  $\mathbf{U}^m$  sur  $\Gamma_{m1}$  et  $\Gamma_{m2}$ , comme le montre la figure 3.16. Ainsi, le critère d'arrêt a été implémenté et utilisé avec un taux de bruit  $\alpha_{bruit} = 5\%$ . Avec  $\|\mathbf{U}^m\|^2$  égal à 0.0042 et  $\|\mathbf{T}^m\|^2$  égal à 0 en raison des surfaces libres, le calcul s'arrête lorsque la valeur de  $dE$  dépasse  $1.17 \cdot 10^{-5}$ . Comme dans l'application avec les données synthétiques sans bruit, l'algorithme de Kozlov et la méthode de GC ont été évalués avec les données synthétiques bruitées dans la phase linéaire.

TABLEAU 3.3 – Coût de calcul des différents algorithmes de minimisation en utilisant les données synthétiques bruitées (5%).

Algorithme de minimisation	Kozlov	GC
Nombre d'itération	8	9
Temps de calcul	8s	16s
Valeur de $E$ final	$4.17 \cdot 10^{-3}$	$4.15 \cdot 10^{-3}$

La figure 3.17 illustre les variations de  $E$  et  $dE$  pour les deux algorithmes. Selon cette figure, ces deux algorithmes n'ont pas besoin d'un grand nombre d'itérations pour obtenir des valeurs constantes de  $E$ . La variation de  $dE$  pour l'algorithme de Kozlov est plus stable et régulière que celle de la méthode de GC. Le tableau 3.3 donne les coûts de calcul nécessaires avec le critère

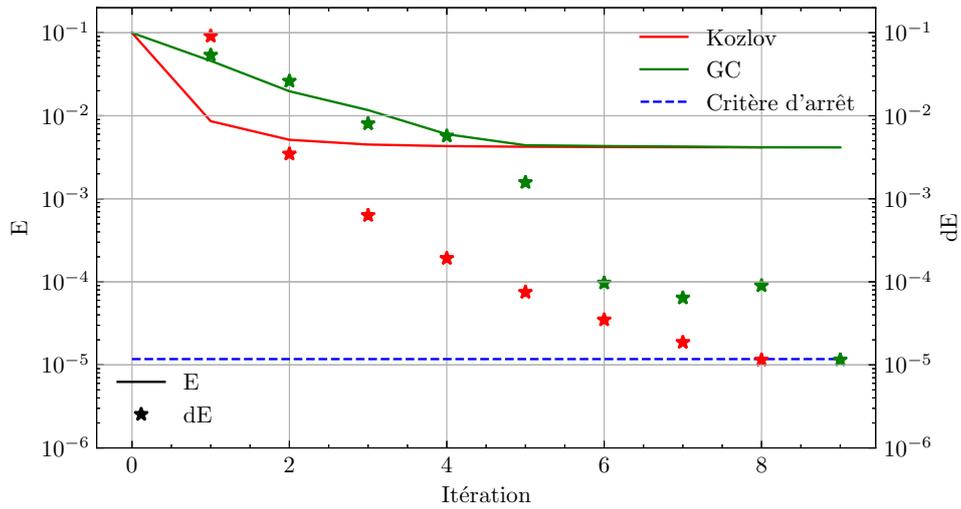


FIGURE 3.17 – Comparaison des valeurs de  $E$  et  $dE$  obtenues par les deux algorithmes de minimisation avec les données synthétiques bruitées (5%).

d'arrêt. Similaire aux résultats obtenus avec les données sans bruit, l'algorithme de Kozlov nécessite moins d'itérations et moins de temps de calcul.

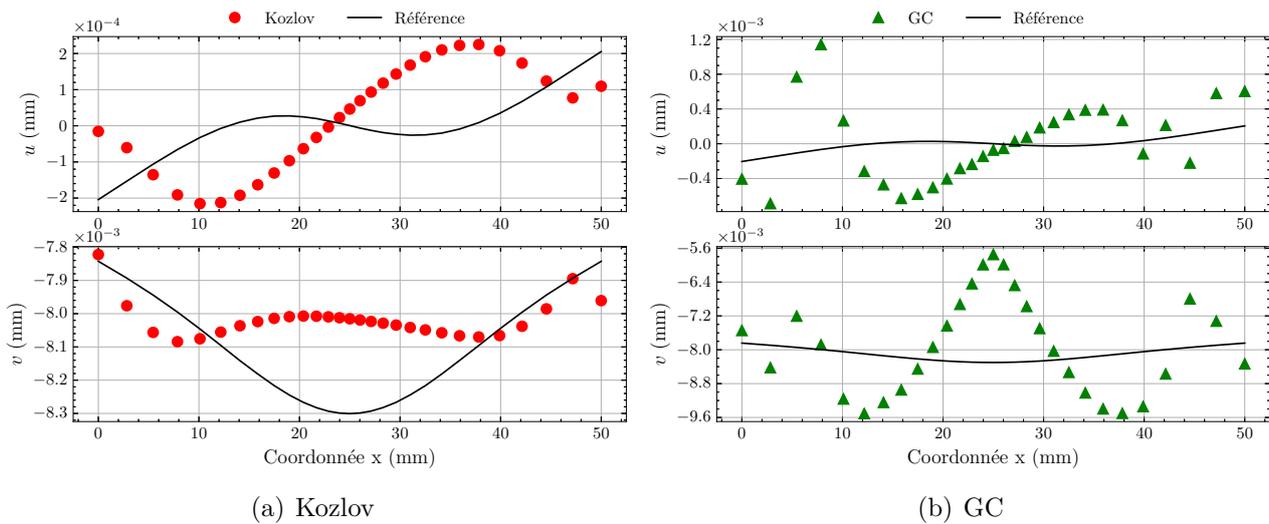


FIGURE 3.18 – Comparaison du champ de déplacement  $\mathbf{d}^*$  identifié sur  $\Gamma_u$  avec l'algorithme de Kozlov et la méthode GC en utilisant les données synthétiques bruitées (5%).

La figure 3.18 illustre la comparaison entre le champ de déplacement  $\mathbf{d}^*$  identifié par les différents algorithmes de minimisation sur la frontière  $\Gamma_u$ . Selon cette figure, les valeurs identifiées de  $\mathbf{d}^*$  obtenus par la méthode de GC restent imprécis. Pour l'algorithme de Kozlov, bien que les résultats identifiés soient légèrement perturbés, ils restent globalement proches des références.

Numériquement, pour l'algorithme de Kozlov, les valeurs maximale, moyenne et minimale des erreurs relatives normalisées sur le déplacement  $u^*$  sont respectivement de 2.78%, 1.55% et 0.18%. Pour le déplacement  $v^*$ , ces valeurs sont respectivement de 3.45%, 1.79% et 0.01%. En revanche, ces erreurs pour la méthode de GC sont plus significatives. Les valeurs maximale, moyenne et minimale des erreurs relatives normalisées obtenues sur le déplacement  $u^*$  avec la méthode de GC sont respectivement de 14.53%, 4.35% et 0.48%. Pour le déplacement  $v^*$ , ces valeurs sont respectivement de 30.72%, 12.39% et 1.35%. D'après ces résultats, le champ de déplacement identifié  $\mathbf{d}^*$  avec la méthode de GC n'est pas utilisable dans la deuxième étape de

l'identification à cause des erreurs relatives normalisées significatives.

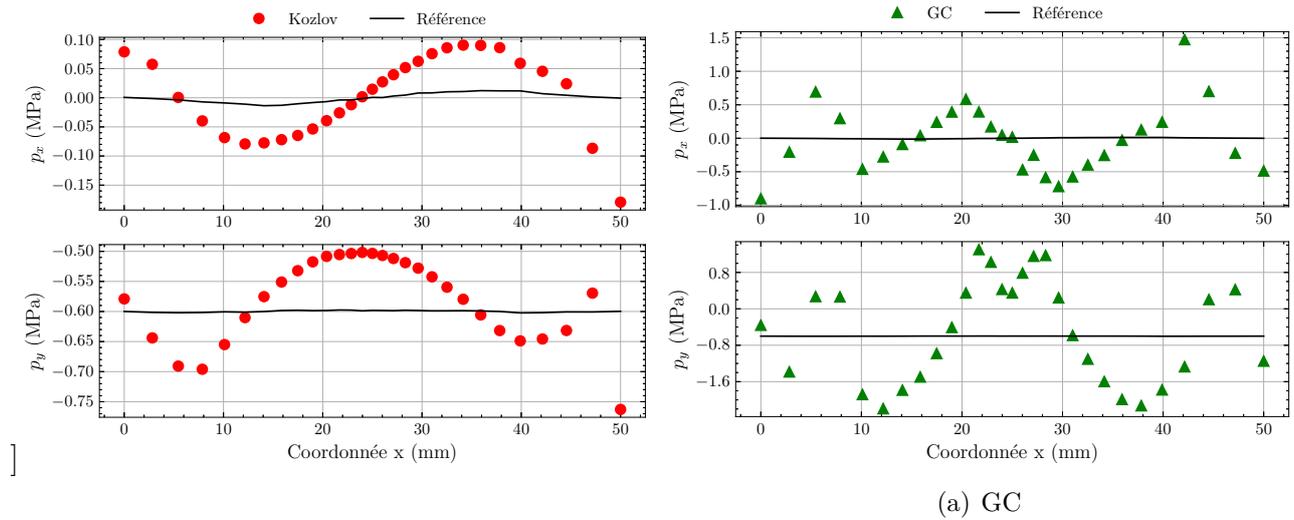


FIGURE 3.19 – Comparaison de la traction surfacique  $\mathbf{p}^*$  identifiée sur  $\Gamma_u$  avec l'algorithme de Kozlov et la méthode GC en utilisant les données synthétiques bruitées (5%).

La figure 3.19 illustre la comparaison de la traction surfacique  $\mathbf{p}^*$  identifiée sur  $\Gamma_u$  par les différents algorithmes de minimisation. D'après cette figure, la traction surfacique identifiée avec la méthode de GC est visiblement très fluctuante. Pour l'algorithme de Kozlov, la valeur identifiée de  $\mathbf{p}^*$  coïncide relativement bien avec celle de référence.

Numériquement, pour l'algorithme de Kozlov, les erreurs relatives normalisées maximale, moyenne et minimale de  $p_{x^*}$  sont respectivement de 27.08%, 10.26% et 1.12%. Celles de  $p_{y^*}$  sont de 29.66%, 8.67% et 0.50%, respectivement. Par rapport aux déplacements identifiés, ces erreurs de  $\mathbf{p}^*$  sont relativement significatives. Pour la méthode de GC, les valeurs maximale, moyenne et minimale des erreurs relatives normalisées de  $p_{x^*}$  sont respectivement de 315.28%, 166.86% et 1.12%. Tandis que celles de  $p_{y^*}$  sont de 243.42%, 65.24% et 2.59%, respectivement. Les erreurs relatives normalisées de la méthode de GC indiquent que la traction surfacique  $\mathbf{p}^*$  identifiée avec cette méthode est extrêmement imprécise avec les données bruitées.

TABLEAU 3.4 – Erreurs relatives normalisées entre les données de référence et celles identifiées sur  $\Gamma_u$  avec les différents algorithmes de minimisation en utilisant les données synthétiques bruitées (5%).

Algorithme	Erreur relative normalisée		Maximale		Moyenne		Minimale	
	Kozlov	GC	Kozlov	GC	Kozlov	GC	Kozlov	GC
$u^*$	2.78%	14.53%	1.55%	4.35%	0.18%	0.48%		
$v^*$	3.45%	30.72%	1.79%	12.39%	0.01%	1.35%		
$p_x^*$	29.66%	243.42%	8.67%	65.24%	0.50%	2.59%		
$p_y^*$	27.08%	315.28%	10.26%	166.86%	1.12%	2.31%		

Toutes les erreurs relatives normalisées des résultats identifiés avec les données contenant 5% de bruit blanc sont enregistrées dans le tableau 3.4. D'après ces résultats, les erreurs relatives normalisées obtenues par la méthode de GC sont très importantes et non négligeables. En raison des données bruitées, l'identification doit s'arrêter plus tôt pour éviter le surajustement

entre les conditions aux limites identifiées et les données bruitées. Comme la méthode de GC nécessite plus d'itérations pour obtenir des résultats d'identification précis, elle n'est pas très adaptée pour identifier les conditions aux limites dans la phase linéaire.

Pour l'algorithme de Kozlov, bien que les erreurs relatives normalisées du champ de déplacement  $\mathbf{d}^*$  identifié soient relativement faibles, celles de la traction surfacique  $\mathbf{p}^*$  identifiée sont plus élevées. Cela pourrait s'expliquer par les erreurs sur le champ identifié  $\mathbf{d}^*$ , qui entraînent de plus grandes variations du champ de contrainte sur  $\Gamma_u$ . De plus, dans l'essai de compression, le chargement appliqué est uniformément distribué avec  $T_x = 0$  MPa et  $T_y = 0,6$  MPa. Ainsi, les déplacements  $u$  (maximum de  $2.05 \cdot 10^{-4}$  mm) sur les deux frontières  $\Gamma_{m1}$  et  $\Gamma_{m2}$  utilisés pour l'identification sont plus faibles que ceux de  $v$  (maximum absolu de  $8.30 \cdot 10^{-3}$  mm). Cela rend l'identification précise des déplacements  $u$  plus difficile dans l'essai de compression, ce qui conduit à une plus grande fluctuation des résultats d'identification. Par conséquent, pour obtenir des données identifiées plus précises, la méthode de régularisation de variation totale [147] peut être envisagée sur  $\mathbf{d}^*$  ou  $\mathbf{p}^*$  identifié dans la phase linéaire.

Bien que les erreurs normalisées sur la traction surfacique identifiée sur  $\Gamma_u$  soient relativement significatives, les champs de données identifiés à l'intérieur du domaine sont plus précis. Cela peut s'expliquer par le fait que les erreurs et les fluctuations liées aux conditions aux limites sont atténuées lorsqu'on s'éloigne de la frontière et que les solutions numériques tendent à se stabiliser vers l'intérieur du domaine. En définissant une frontière fictive située à 10 mm en dessous de la frontière  $\Gamma_u$ , la comparaison des champs de données entre les valeurs identifiées et celles de référence est présentée dans la figure 3.20 :

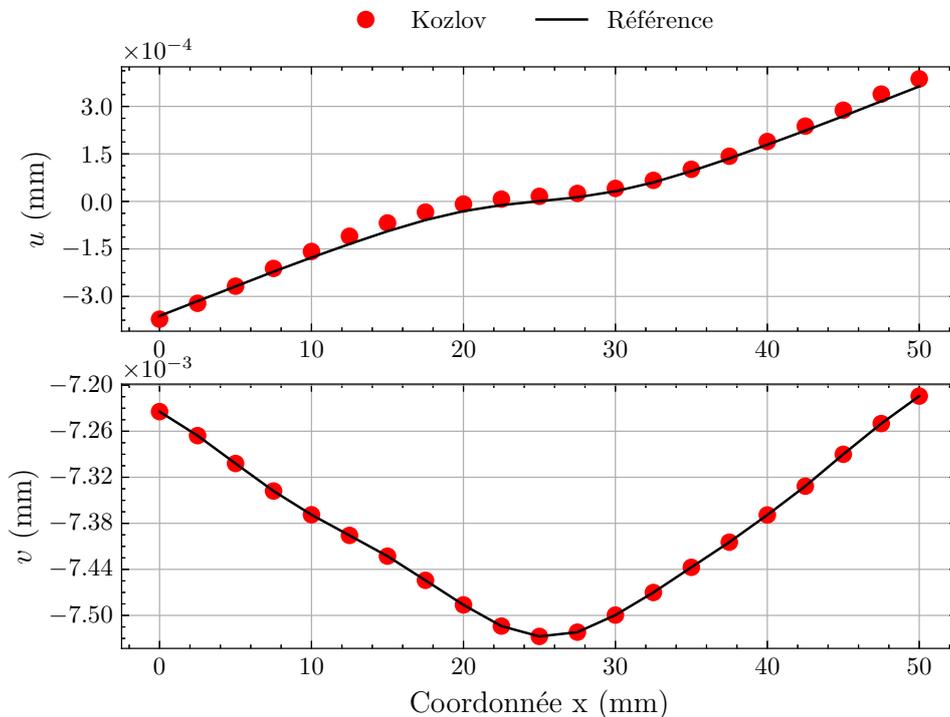


FIGURE 3.20 – Comparaison du champ de déplacement  $\mathbf{u}^*$  identifié sur  $\Gamma_f$  avec l'algorithme de Kozlov en utilisant les données synthétiques bruitées (5%).

Comme précédemment, l'erreur relative normalisée, définie par l'erreur absolue par rapport à la valeur maximale absolue du champ de déplacement de  $7.73 \cdot 10^{-3}$  mm et par rapport à la valeur maximale absolue du champ de contrainte de 0.64 GPa, a été utilisée pour évaluer la précision

des résultats identifiés. La figure 3.20 montre la comparaison entre le champ de déplacement de référence et celui identifié sur la frontière  $\Gamma_f$  avec l'algorithme de Kozlov. D'après cette figure, les champs de déplacement identifiés sont presque superposés à ceux de référence. En analysant les erreurs relatives normalisées, pour le déplacement  $u^*$ , les valeurs maximale, moyenne et minimale sont respectivement de 0.33%, 0.19% et 0.00%. Pour le déplacement  $v^*$ , ces valeurs sont respectivement de 2.67%, 1.10% et 0.05%.

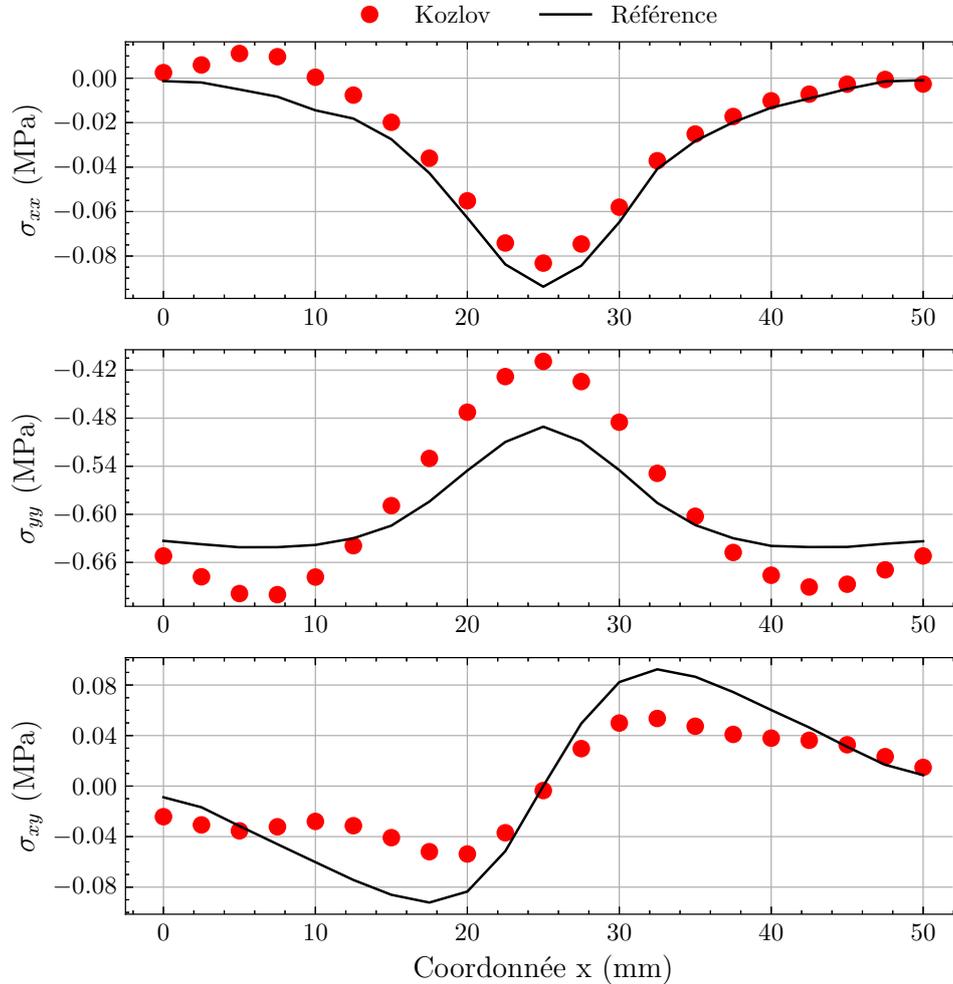


FIGURE 3.21 – Comparaison du champ de contrainte  $\sigma^*$  identifié sur  $\Gamma_f$  avec l'algorithme de Kozlov en utilisant les données synthétiques bruitées (5%).

La figure 3.21 montre la comparaison entre le champ de contrainte de référence et celui identifié par l'algorithme de Kozlov sur la frontière  $\Gamma_f$ . D'après cette figure, le champ de contrainte identifié est plus proche de celui de référence, indiquant que les erreurs relatives normalisées sur chaque variable identifiée sont faibles. Pour la contrainte  $\sigma_{xx}^*$ , les erreurs relatives normalisées maximale, moyenne et minimale sont respectivement de 2.80%, 1.10% et 0.13%. Pour la contrainte  $\sigma_{yy}^*$ , elles sont respectivement de 12.72%, 6.86% et 1.46%. Tandis que les valeurs maximale, moyenne et minimale des erreurs relatives normalisées de  $\sigma_{xy}^*$  sont de 7.05%, 3.46% et 0.12%, respectivement.

Toutes les erreurs normalisées des résultats identifiés avec les données synthétiques bruitées sur  $\Gamma_f$  sont enregistrées dans le tableau 3.5. À partir de ces figures, le champ de déplacement et de contrainte identifiés sur  $\Gamma_f$  coïncident mieux avec ceux de référence. En analysant les erreurs relatives normalisées, ces erreurs sur le champ de déplacement identifié sont plus petites. Étant

TABLEAU 3.5 – Erreurs relatives normalisées entre les données de référence et celles identifiées sur  $\Gamma_f$  avec l'algorithme de Kozlov en utilisant les données synthétiques en 5% de bruit blanc.

Erreur relative normalisée	Maximale	Moyenne	Minimale
$u^*$	0.33%	0.19%	0.00%
$v^*$	2.67%	1.10%	0.05%
$\sigma_{xx}^*$	2.80%	1.10%	0.13%
$\sigma_{yy}^*$	12.72%	6.86%	1.46%
$\sigma_{xy}^*$	7.05%	3.46%	0.12%

donné que la normale sortant de  $\Gamma_u$  est  $\langle 0, 1 \rangle$ , la traction surfacique  $T_x$  est déterminé à partir de la contrainte  $\sigma_{xy}$ , et  $T_y$  est calculée à partir de  $\sigma_{yy}$  sur  $\Gamma_u$ . Ainsi, selon ce tableau, toutes les erreurs relatives normalisées sur le champ de contrainte identifié sont également bien réduites. Cela montre que, bien que les erreurs des contraintes soient relativement élevées sur  $\Gamma_u$ , ces fluctuations n'affectent pas significativement les données identifiées dans tout le domaine  $\Omega$ . Par conséquent, le champ de déplacement identifié  $\mathbf{d}^*$  ou la traction surfacique identifiée  $\mathbf{p}^*$  peuvent être utilisés dans l'identification des conditions aux limites et de l'endommagement dans la phase non linéaire.

### 3.5.3 Identification de l'endommagement dans la phase non linéaire

Suite à la comparaison des résultats identifiés par les deux algorithmes, il apparaît que la méthode de GC n'est pas adaptée pour l'identification des conditions aux limites dans la phase linéaire avec des données bruitées. Par conséquent, nous avons utilisé la condition de Dirichlet identifiée  $\mathbf{d}^*$ , obtenue par l'algorithme de Kozlov dans la phase linéaire, comme le chargement appliqué sur  $\Gamma_u$  pour effectuer la modélisation numérique avec le pilotage incrémental, en vue d'identifier les conditions aux limites et l'endommagement dans la phase non linéaire. Selon la décomposition du chargement piloté illustrée par l'équation (3.6), le déplacement appliqué par la méthode de pilotage est défini comme suit :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{imposé} + \eta \mathbf{u}_{pilo} \quad (3.38)$$

Ici,  $\mathbf{u}_{imposé}$  représente le déplacement imposé dans l'algorithme de calcul non linéaire, et cette variable est une constante.  $\mathbf{u}_{pilo}$  est également une constante, correspondant à l'unité de déplacement appliqué dans le pilotage.  $\eta$  est l'intensité de chargement piloté, qui contrôle la valeur finale du déplacement appliqué. Pour garantir que le chargement soit totalement contrôlé par le pilotage, nous avons imposé  $\mathbf{u}_{imposé} = 0$ , tandis que  $\mathbf{u}_{pilo}$  représente le champ de déplacement identifié  $\mathbf{d}^*$  dans la phase linéaire.

Étant donné que l'intensité de chargement  $\eta$  détermine le déplacement appliqué dans la modélisation numérique et qu'elle est calculée à partir de la liste de temps définie, il n'est pas possible de définir directement sa valeur. Ainsi, pour déterminer les données identifiées dans la phase non linéaire, à chaque instant du pilotage, le déplacement  $\mathbf{U}_{pilo}^m$  sur  $\Gamma_{m1} \cup \Gamma_{m2}$  est extrait. L'erreur entre le déplacement mesuré et le déplacement obtenu par pilotage,  $\| \mathbf{U}^m - \mathbf{U}_{pilo}^m \|$ , est calculée. Par conséquent, le minimum de cette erreur nous indique l'instant où le déplacement

$\mathbf{d}^{**}$  est identifié, comme le montre la figure 3.22.

$$\begin{aligned}
 (t^{**}) &= \arg \min_t \|\mathbf{U}^m - \mathbf{U}_{\text{pilo}}^m\| \\
 \eta^{**} &= \eta(t^{**}) \\
 \mathbf{d}^{**} &= \mathbf{d}(t^{**}) \\
 \mathbf{p}^{**} &= \mathbf{p}(t^{**})
 \end{aligned}
 \tag{3.39}$$

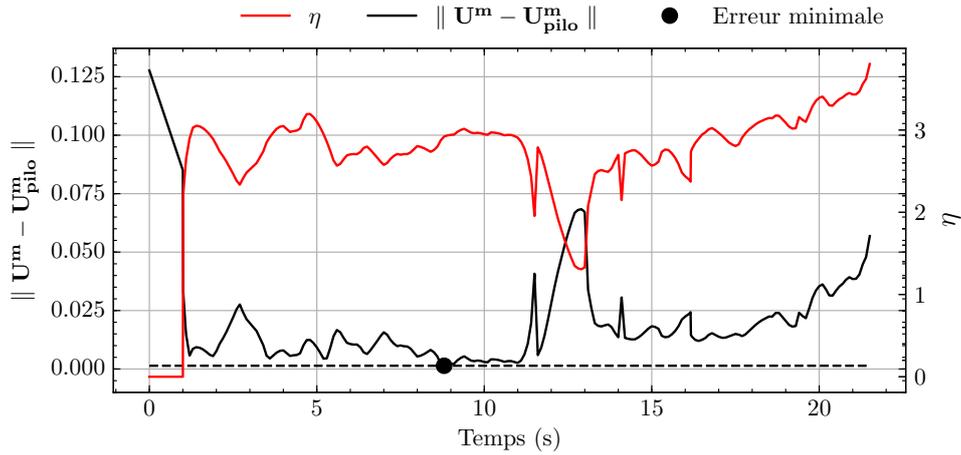
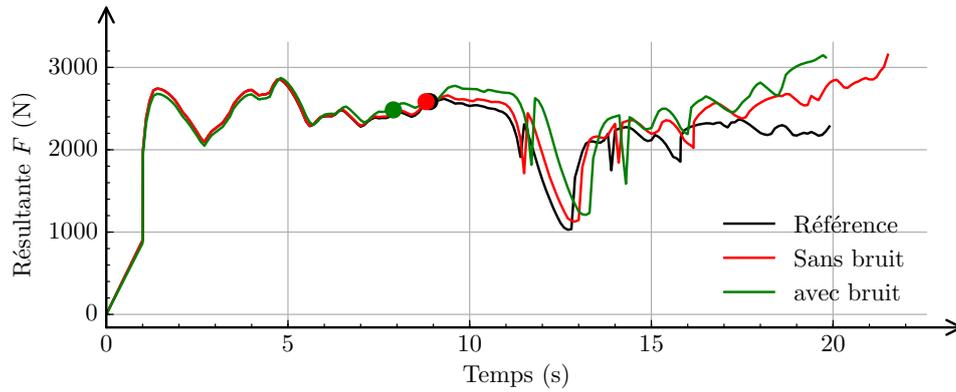


FIGURE 3.22 – Détermination  $\mathbf{d}^{**}$  identifié avec les données synthétiques sans bruit par l'erreur  $\|\mathbf{U}^m - \mathbf{U}_{\text{pilo}}^m\|$  en fonction du temps.

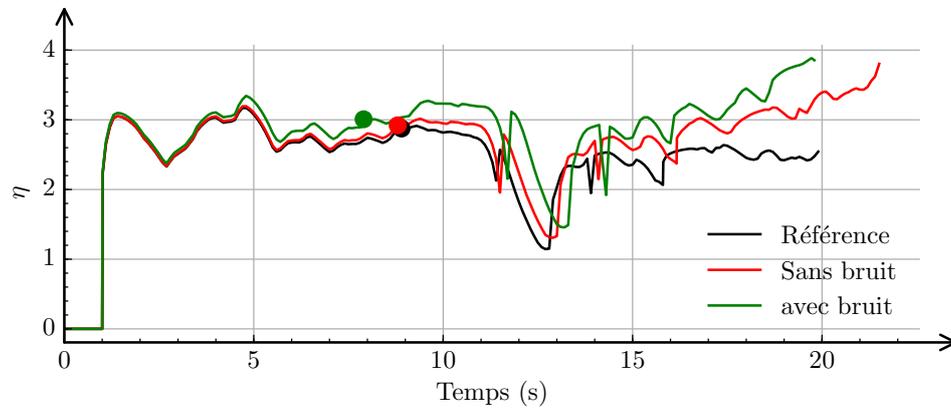
Pour comparer les conditions aux limites et l'endommagement identifiés avec les données synthétiques sans bruit et avec bruit, les champs de déplacement identifiés  $\mathbf{d}^*$  avec les données sans bruit et avec bruit lorsque la pression appliquée est de 0.6 MPa dans la phase linéaire ont également été utilisés comme  $\mathbf{u}_{\text{pilo}}$ .

Étant donné que la variation du champ de déplacement appliqué est difficile à illustrer directement, nous avons calculé la résultante appliquée  $F$  correspondante à partir de  $\mathbf{d}$  dans la phase linéaire et non linéaire. Ainsi, la figure 3.23 montre la résultante appliquée  $F$  et la valeur de  $\eta$  en fonction du temps défini. Selon la valeur de  $\mathbf{d}^*$  identifiée dans la phase linéaire, la valeur de référence correspond de  $F$  est de 899.18 N, tandis que  $\mathbf{d}^*$  identifiée avec les données synthétiques sans bruit et avec bruit permet de déterminer les valeurs de  $F^*$  à 899.39 N et 865.05 N, avec des erreurs relatives de 0.21% et 3.79% respectivement.

D'après la figure 3.23, de 0 à 1s, le chargement a été appliqué linéairement jusqu'à ce que le champ de déplacement  $\mathbf{d}$  atteigne les valeurs identifiées dans la phase linéaire  $\mathbf{d}^*$ . Étant donné que le pilotage n'est pas encore appliqué pendant cette période,  $\eta$  est égal à 0. Ensuite, le chargement est contrôlé par le pilotage dans la phase non linéaire. Pour identifier les conditions aux limites et l'endommagement, sachant que  $\mathbf{U}^m$  à la pression appliquée de 1.72 MPa est connu, les valeurs de  $\mathbf{d}^{**}$  identifiées avec les données synthétiques sans bruit et avec bruit dans la phase non linéaire sont obtenues en déterminant les valeurs minimales de la norme  $L^2$  entre  $\mathbf{U}^m$  et  $\mathbf{U}_{\text{pilo}}^m$ , comme les points de différentes couleurs présentés dans cette figure. Avec les valeurs de  $\mathbf{d}^{**}$  identifiées dans la phase non linéaire, les résultantes  $F^{**}$  calculées à partir de ces valeurs sont respectivement de 2584.27 N et 2484.39 N. En les comparant avec  $F$  de référence de 2584.49 N, les erreurs relatives sont de 0.008% et 3.86%, respectivement. Ces erreurs indiquent que l'identification dans la phase non linéaire peut efficacement déterminer le



(a) Résultant appliqué  $F$



(b) Idensité de chargement piloté  $\eta$

FIGURE 3.23 – Variation de  $F$  et  $\eta$  en fonction du temps.

TABLEAU 3.6 – Comparaison des résultantes  $F$  calculées à partir des  $\mathbf{d}$  identifiées dans les phases linéaire et non linéaire avec les données synthétiques sans bruit et avec bruit (5%).

$F$	Valeur de référence		Valeur identifiée	
			0%	5%
Niveau de bruit				
Phase linéaire	899.18 N	899.39 N (0.21%)	865.05 N (3.79%)	
Phase non linéaire	2584.27 N	2584.49 N (0.00%)	2484.39 N (3.86%)	

chargement appliqué avec les données synthétiques sans bruit et avec bruit. Toutes les valeurs de la résultante  $F$  sont enregistrées dans le tableau 3.6.

Similairement à la comparaison des résultats de l'identification dans la phase linéaire, les valeurs de  $\mathbf{p}^{**}$ , déterminées à partir de  $\mathbf{d}^{**}$ , dans la phase non linéaire ont également été comparées avec leurs valeurs de référence.

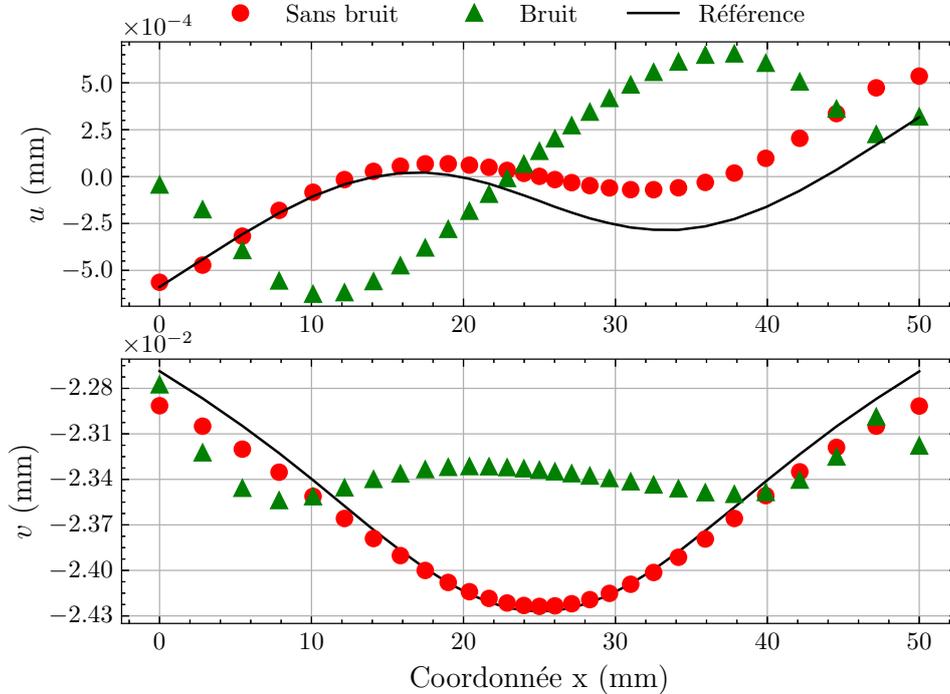


FIGURE 3.24 – Comparaison des champs de déplacement  $\mathbf{d}^{**}$  identifié sur  $\Gamma_u$  avec la méthode de pilotage dans la phase non linéaire en utilisant les données synthétiques sans bruit et avec bruit (5%).

La figure 3.24 présente une comparaison des champs de déplacement  $\mathbf{d}^{**}$  sur la frontière  $\Gamma_u$  dans la phase non linéaire. En analysant ces figures, on observe que les courbes de  $u^{**}$  et  $v^{**}$  en fonction de la coordonnée  $x$  dans la phase non linéaire sont similaires à celles de la phase linéaire. Cela s'explique par le fait que la méthode de pilotage utilise l'intensité de chargement  $\eta$  pour contrôler directement le déplacement appliqué  $\mathbf{d}^*$ , identifié dans la phase linéaire. Par conséquent, sur  $\Gamma_u$ , les champs de déplacement de chaque points dans la phase non linéaire sont toujours  $\eta$  fois plus grands que ceux de la phase linéaire, tant qu'il n'y a pas d'endommagement autour de cette frontière. Les directions du chargement et du déplacement ne sont pas modifiée au cours du pilotage

Numériquement, avec les données synthétiques sans bruit, les valeurs maximale, moyenne et minimale des erreurs relatives normalisées de  $u^{**}$  identifié sont respectivement de 1.25%, 0.56% et 0.04%. Celles de  $v^{**}$  identifié sont de 0.94%, 0.30% et 0.01%, respectivement. Avec les données synthétiques bruitées, les erreurs relatives normalisées maximale, moyenne et minimale de  $u^{**}$  identifié sont respectivement de 3.76%, 1.83% et 0.00%. Celles de  $v^{**}$  sont de 3.84%, 2.07% et 0.30%, respectivement.

La figure 3.25 illustre la comparaison de la traction surfacique  $\mathbf{p}^{**}$  dans la phase non linéaire. Pour la même raison liée à la méthode de pilotage, la traction surfacique  $\mathbf{p}^{**}$  dans la phase non linéaire sur chaque point de  $\Gamma_u$  est approximativement  $\eta$  fois plus grande que celle dans la phase linéaire. Ainsi, les erreurs relatives normalisées de  $\mathbf{p}^{**}$  identifiées dans la phase non linéaire

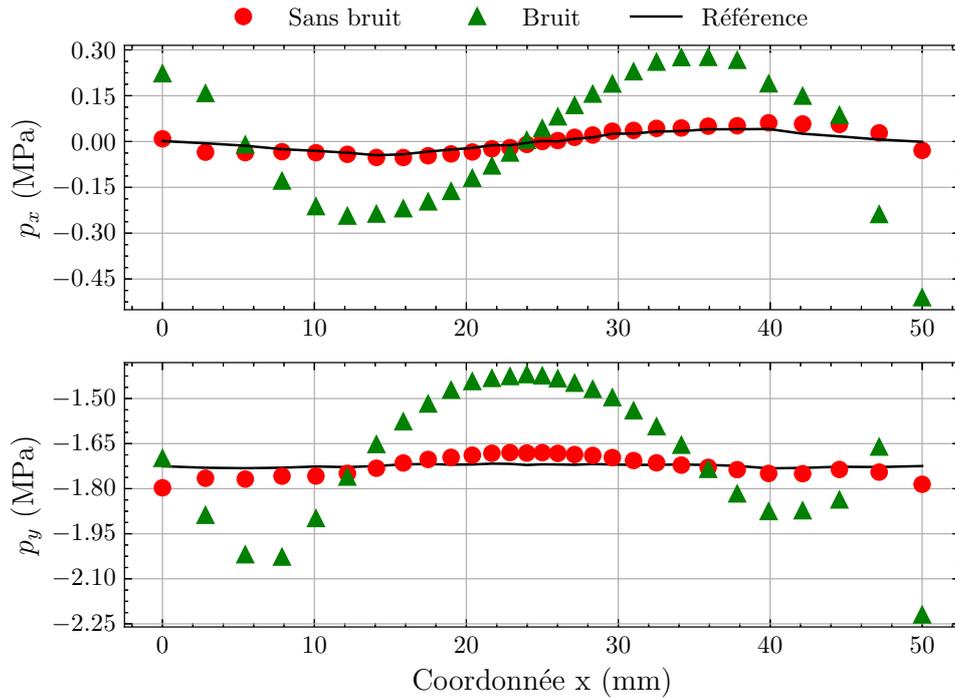


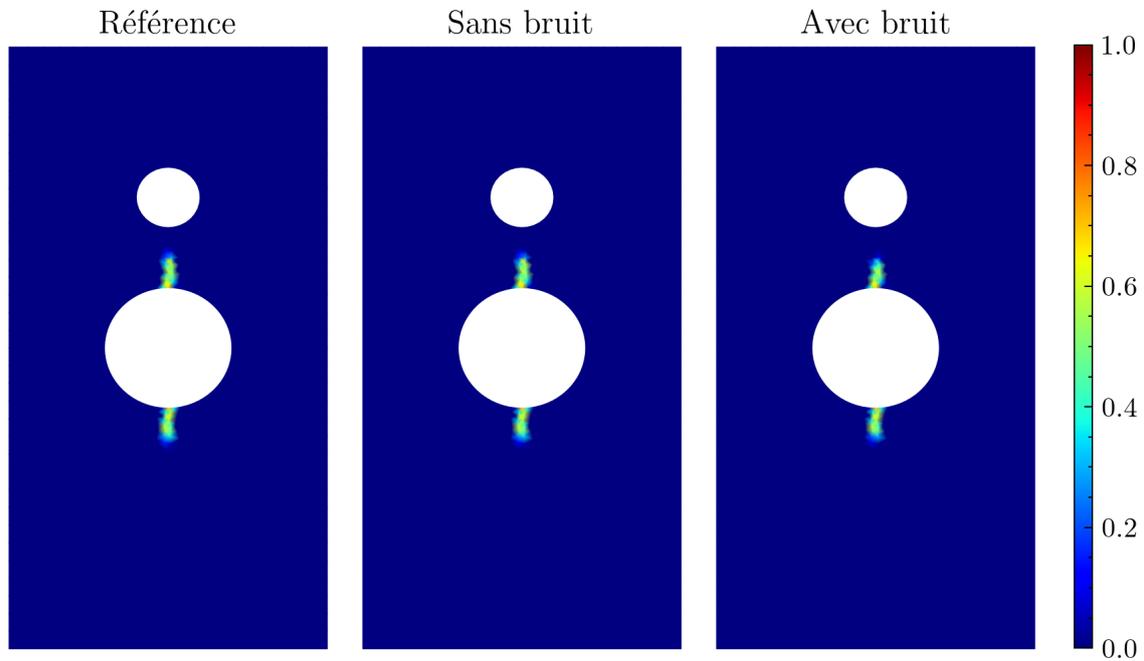
FIGURE 3.25 – Comparaison de la traction surfacique  $\mathbf{p}^{**}$  identifiée sur  $\Gamma_u$  avec la méthode de pilotage dans la phase non linéaire en utilisant les données synthétiques sans bruit et avec bruit (5%).

sont similaires à celles de la phase linéaire. Numériquement, avec les données synthétiques sans bruit, les valeurs maximale, moyenne et minimale des erreurs relatives normalisées de  $p_x^{**}$  sont respectivement de 2.24%, 0.75% et 0.10%. Celles de  $p_y^{**}$  sont de 4.14%, 1.48% et 11.04%, respectivement. Avec les données synthétiques bruitées, les erreurs relatives normalisées maximale, moyenne et minimale de  $p_x^{**}$  sont respectivement de 29.45%, 8.98% et 0.16%. Celles de  $p_y^{**}$  sont de 28.60%, 11.04% et 0.84%, respectivement.

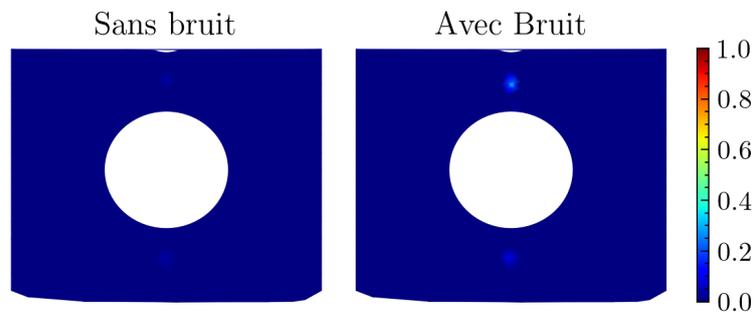
TABLEAU 3.7 – Erreurs relatives normalisées entre les données de référence et celles identifiées sur  $\Gamma_u$  avec la méthode de pilotage en utilisant les données synthétiques sans bruits et avec bruit (5%) dans la phase non linéaire.

Erreur relative normalisée	Maximale		Moyenne		minimale	
	0%	5%	0%	5%	0%	5%
Niveau du bruit						
$u^{**}$	1.25%	3.76%	0.56%	1.83%	0.04%	0.00%
$v^{**}$	0.94%	3.84%	0.30%	2.07%	0.01%	0.30%
$p_x^{**}$	2.24%	29.45%	0.75%	8.98%	0.10%	0.16%
$p_y^{**}$	4.14%	28.60%	1.48%	11.04%	0.11%	0.84%

Cependant, nous avons remarqué qu'à la fin de la phase linéaire, les erreurs et les fluctuations des données identifiées ont été bien réduites à l'intérieur du domaine  $\Omega$ . Par conséquent, bien que la condition de Neumann identifiée soit moins précise que la condition de Dirichlet identifiée sur  $\Gamma_u$ , les erreurs entre le champ de déplacement identifié  $\mathbf{u}^{**}$  et le champ de contrainte identifié  $\sigma^{**}$  sont plus faibles à l'intérieur du solide. Les figures des comparaisons des champs de déplacement et de contrainte sur tout le domaine  $\Omega$  sont illustrées dans l'annexe B.



(a) Variable d'endommagement  $d$  : valeur de référence, valeur identifiée avec les données synthétiques sans bruit et valeur identifiée avec les données synthétiques bruitées



(b) Erreur absolue des variables d'endommagement  $d$  entre les valeurs de référence et identifiées

FIGURE 3.26 – Comparaison des distributions des variables d'endommagement identifiées  $d$  sur tout le domaine  $\Omega$  avec la méthode de pilotage dans la phase non linéaire en utilisant les données synthétiques sans bruit et avec bruit (5%).

Ensuite, en utilisant la variable d'endommagement  $d$ , qui varie entre 0 et 1, pour représenter l'endommagement, la figure 3.26(a) affiche les distributions des variables  $d$  de référence ainsi que celles identifiées avec les données synthétiques sans bruit et avec bruit dans le domaine  $\Omega$ . Selon cette figure, les endommagements sont bien identifiées aux mêmes positions avec les données synthétiques sans bruit et bruitées. La figure 3.26(b) illustre les erreurs absolues des variables  $d$  entre les valeurs de référence et identifiées. En analysant la distribution des erreurs absolues et en éliminant les valeurs nulles dans tout le domaine  $\Omega$ , l'identification avec les données synthétiques sans bruit permet d'obtenir presque les mêmes valeurs de  $d$  partout. Numériquement, les erreurs absolues maximale, moyenne et minimale des  $d$  identifiées avec les données synthétiques sans bruit sont respectivement de 0.031, 0.005 et  $8.19 \cdot 10^{-5}$ . En comparant les variables  $d$  identifiées avec les données synthétiques bruitées, la plupart des erreurs absolues de  $d$  sont presque nulles. Numériquement, les erreurs absolues maximale, moyenne et minimale sont respectivement de 0.323, 0.034 et  $4.43 \cdot 10^{-4}$ . Toutes les erreurs absolues de  $d$  identifiées sont présentées dans le tableau 3.8.

TABLEAU 3.8 – Erreurs absolues des variables d'endommagement identifiées  $d$  avec la méthode de pilotage en utilisant les données synthétiques sans bruits et avec bruit (5%) dans la phase non linéaire.

Erreur absolue	Valeur maximale		Valeur moyenne		Valeur minimale		
	Données	Sans Bruit	Avec bruit	Sans bruit	Avec bruit	Sans bruit	Avec bruit
$d$		0.031	0.323	0.005	0.034	$8.19 \cdot 10^{-5}$	$4.43 \cdot 10^{-4}$

Il est important de noter que l'erreur absolue maximale de  $d$  identifiée avec les données synthétiques bruitées est très élevée. D'après la figure 3.24 et la résultante  $F^{**}$  correspondante, le chargement appliqué sur  $\Gamma_u$  avec les données synthétiques bruitées est légèrement inférieur à celui de référence et à celui identifié avec les données synthétiques sans bruit. Cela signifie que certaines zones ne montrent pas encore d'endommagement, et les valeurs de  $d$  identifiées avec les données bruitées sont plus faibles. Dans l'ensemble, l'endommagement identifié reste bien précis.

### 3.5.4 Conclusion

Pour valider la méthode d'identification des conditions aux limites et de l'endommagement, des données synthétiques sans bruit et avec 5% de bruit blanc additif (bruit gaussien avec une moyenne de 0 et un écart-type de 5% des données utilisées) ont été utilisées.

Dans un premier temps, pour comparer et valider les deux algorithmes de minimisation, les identifications ont été réalisées dans la phase linéaire. Selon les comparaisons des erreurs relatives normalisées des conditions aux limites  $\mathbf{d}^*$  et  $\mathbf{p}^*$  identifiées avec les données synthétiques sans bruit et avec bruit, l'algorithme de Kozlov permet d'obtenir des champs identifiés plus précis, tandis que les résultats obtenus par la méthode de GC sont toujours plus perturbés. De plus, l'algorithme de Kozlov nécessite moins d'itérations et de temps de calcul pour atteindre la convergence. En revanche, probablement à cause de la direction de descente, le coût de calcul de la méthode de GC est relativement plus élevé. Par conséquent, l'algorithme de Kozlov est mieux adapté à l'identification des conditions aux limites dans la phase linéaire.

Par la suite, l'identification dans la phase non linéaire a été réalisée avec la méthode de pilotage en utilisant les déplacements  $\mathbf{d}^*$  identifiés par l'algorithme de Kozlov dans la phase linéaire. En comparant les résultats identifiés avec les données synthétiques sans bruit et avec bruit, les valeurs de  $\mathbf{d}^{**}$  et  $\mathbf{p}^{**}$  sont presque identiques à celles de référence. Avec les données bruitées, il y a de légères dispersions et fluctuations dans les champs identifiés sur la frontière  $\Gamma_u$ . Cependant, les champs de déplacement et de contrainte identifiés à l'intérieur du solide sont beaucoup plus précis. Ainsi, l'endommagement a été correctement identifié. Dans l'ensemble, les conditions aux limites et l'endommagement sont bien déterminés dans la phase non linéaire en utilisant  $\mathbf{d}^*$  obtenues dans la phase linéaire avec la méthode de pilotage dans la modélisation numérique.

De plus, avec les valeurs de  $\mathbf{d}$  identifiées, les résultantes  $F$  correspondantes dans les phases linéaire et non linéaire sont bien cohérentes avec celles de référence. Cela démontre également l'efficacité et la robustesse de la méthodologie mise en œuvre. Pour améliorer davantage la précision de l'identification, notamment pour la condition de Neumann  $\mathbf{p}$ , des études sur la méthode de régularisation telle que la variation totale peuvent être envisagées à l'avenir.

## 3.6 Application expérimentale

Pour valider la méthodologie d'identification des conditions aux limites et de l'endommagement mise en œuvre, un essai sur une plaque épaisse à deux trous de la matrice ettringitique âgée de 42 jours a été réalisé en utilisant la mesure de CIN.

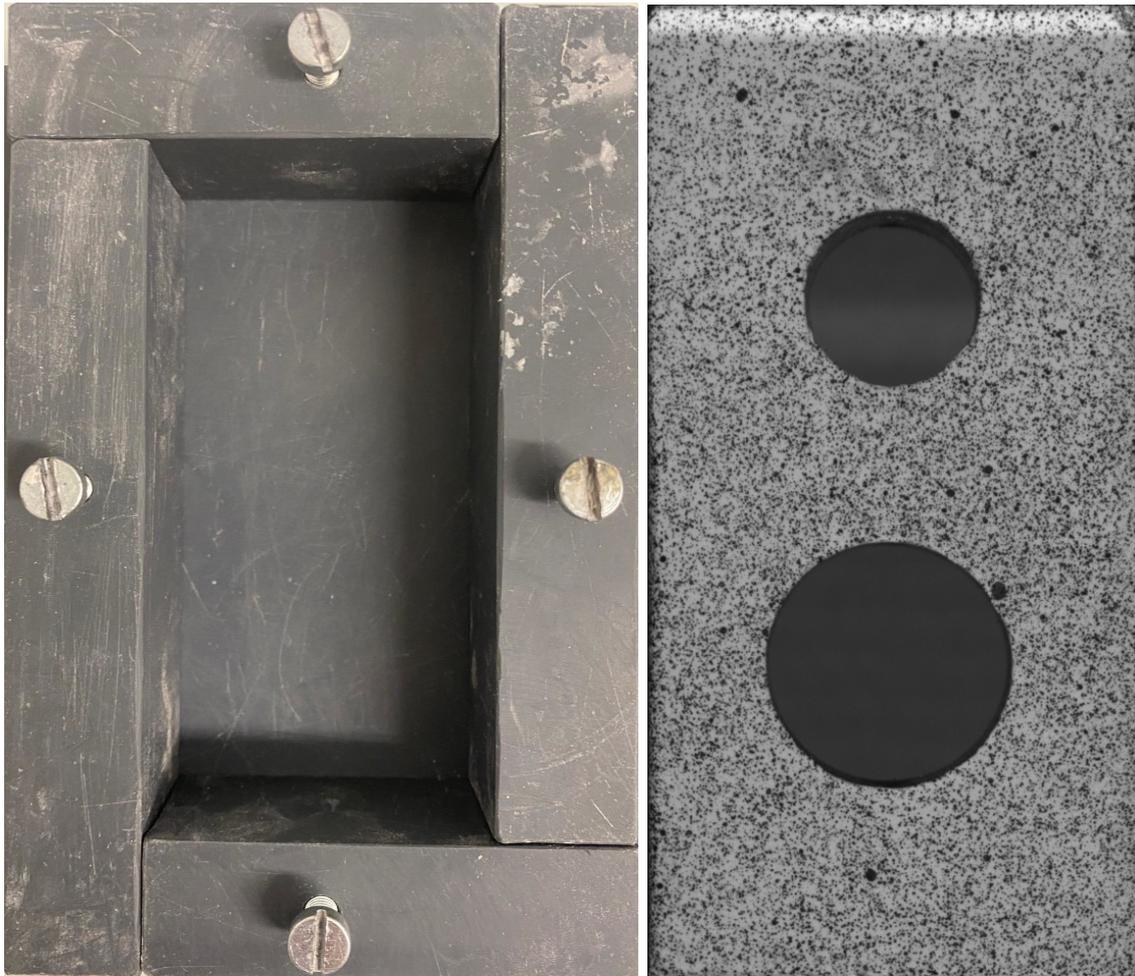
### 3.6.1 Configuration expérimentale et mesure

D'après les propriétés mécaniques de la matrice ettringitique âgée de 42 jours, les paramètres du matériau sont définis comme suit : le module de Young  $E$  est de 8.83 GPa, le coefficient de Poisson  $\nu$  est de 0.216, la résistance en traction et en compression sont respectivement de 1.76 MPa et 16.95 MPa, avec une pente post-pic en traction de  $-\frac{E}{\gamma} = -1.766$  GPa ( $\gamma = 5$ ).

Pour la préparation de la plaque épaisse à deux trous, l'échantillon est fabriqué à l'aide d'un moule en PVC, comme le montre la figure 3.27(a). Pour les autres opérations telles que le démoulage, le séchage et la réalisation des mouchetis, les préparations sont identiques à celles de l'essai de fendage. L'échantillon de la plaque à deux trous est illustré dans la figure 3.27(b).

Les dimensions de la plaque expérimentale sont : la hauteur  $h = 99.8$  mm, la largeur  $l = 50$  mm et l'épaisseur  $e = 30$  mm. Pour obtenir les deux trous au milieu de la plaque, deux tubes plastiques avec des rayons  $R_1 = 8.85$  mm et  $R_2 = 12.5$  mm ont été collés sur la plaque de PVC pendant le coulage de la matrice. Comme la position des tubes a été déterminée à l'œil nu, ils ne se trouvent pas exactement au centre de la plaque. Après le démoulage, la position précise des deux trous a été mesurée à l'aide d'un pied à coulisse et du système de CIN, comme indiqué sur la figure 3.29(a).

Contrairement à la mesure lors de l'essai de fendage, en raison de la taille de la plaque, qui est plus grande que l'échantillon cylindrique, certains détails de la mesure de CIN doivent être modifiés. La figure 3.28 montre la mire utilisée pour le calibrage de CIN dans cet essai de compression. Semblable à la mire utilisée dans l'essai de fendage, il y a  $14 \times 10$  points noirs sur un fond blanc. Mais l'espace entre chaque point est de 5 mm. Pour obtenir la meilleure Région



(a) Moule en PVC

(b) Échantillon

FIGURE 3.27 – Échantillon de plaque épaisse à deux trous expérimentale.

d'Intérêt, la distance entre les lentilles et la plaque a été établie entre 40 et 50 cm.

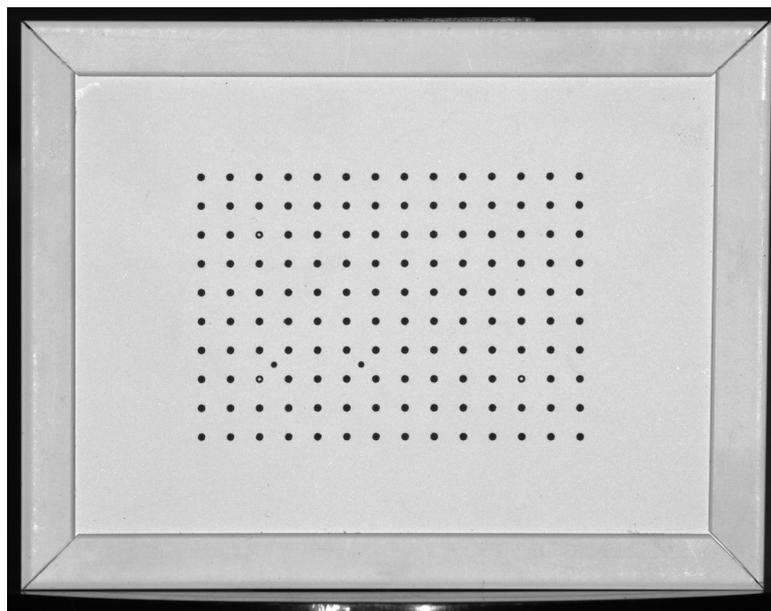


FIGURE 3.28 – Mire utilisée dans l'essai de compression pour la plaque à deux trous avec la mesure de CIN.

Pour réaliser l'identification avec les données surabondantes aux frontières et illustrer l'efficacité et la robustesse de la méthodologie mise en œuvre, nous avons utilisé un maillage T3 de taille de 20 pixels dans la CIN, ce qui permet de bien représenter la géométrie principale des deux trous. Cette taille est adaptée aux mouchetis des échantillons et à la précision nécessaire pour la mesure. Afin de ne pas introduire d'erreurs supplémentaires dans l'identification, le maillage de la CIN a été importé et utilisé directement dans le logiciel CODE\_ASTER pour la simulation.

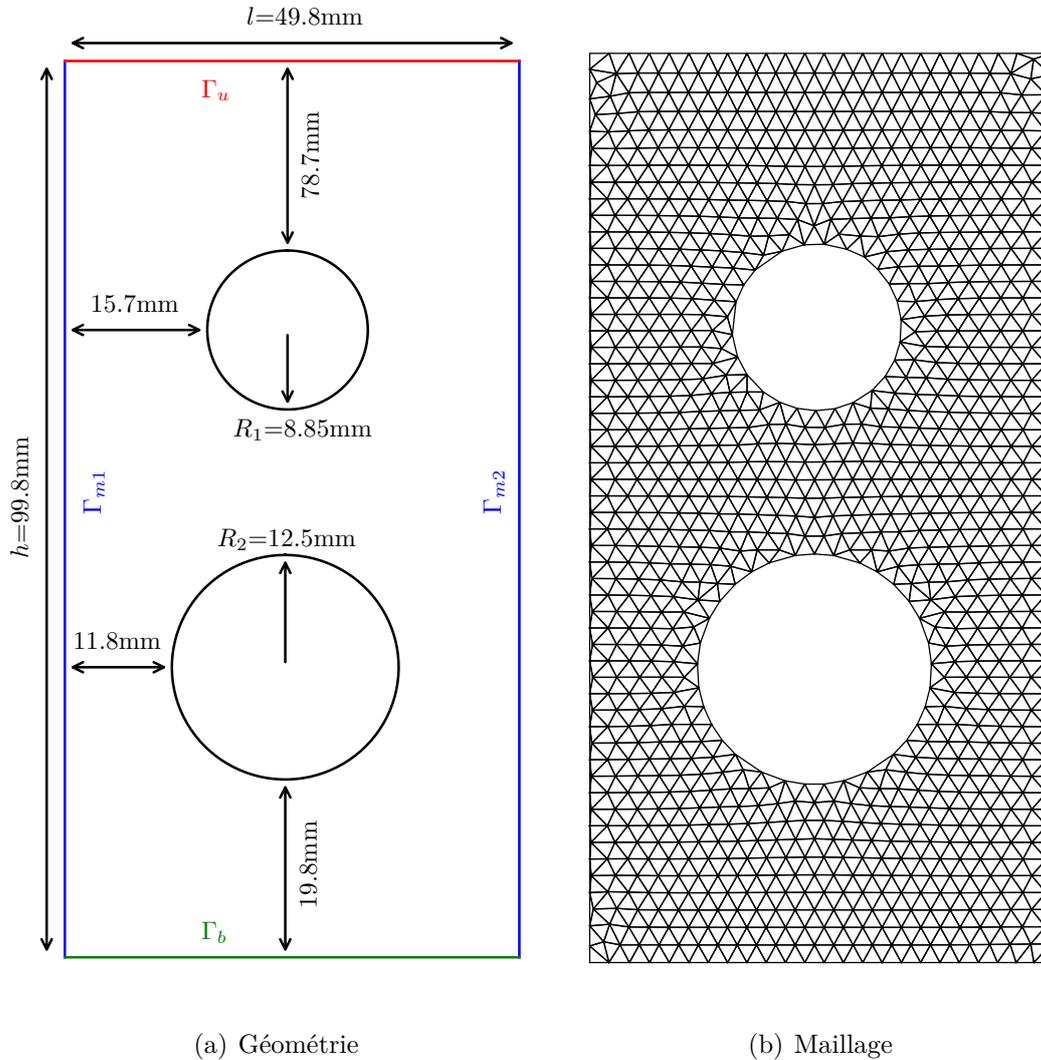


FIGURE 3.29 – Géométrie et maillage de plaque épaisse à deux trous expérimentale.

Dans le cas idéal, la compression devrait être appliquée uniformément sur  $\Gamma_u$ . Néanmoins, en vérifiant le champ de mesure, les déplacements montrent une concentration de chargement sur un côté de  $\Gamma_u$ , ce qui conduit à un phénomène de flexion, dû à la non symétrie de l'échantillon. De plus, le plateau de support métallique s'est déplacé pendant l'essai, rendant le mouvement de corps rigide (MCR) inévitable.

Les définitions des groupes de frontières et le maillage utilisé avec la MEF sont représentés dans la figure 3.29. Pendant l'identification, la méthode utilise seulement des mesures sur les frontières  $\Gamma_{m1}$  et  $\Gamma_{m2}$  comme indiqué sur la figure 3.29(a). Le maillage contient 1118 nœuds sur le domaine  $\Omega$ . La frontière  $\Gamma_u$  présente 24 nœuds et la frontière  $\Gamma_b$  en compte 25. Pour les frontières  $\Gamma_{m1}$  et  $\Gamma_{m2}$ , celles-ci ont respectivement 28 et 27 nœuds. Par conséquent, la méthode

de la fonctionnelle erreur utilise  $(28 + 27) \times 2 = 110$  mesures sur  $\Gamma_m$  pour identifier  $24 \times 2 = 48$  variables de  $\mathbf{X}$  sur  $\Gamma_u$ .

### 3.6.2 Identification dans la phase linéaire

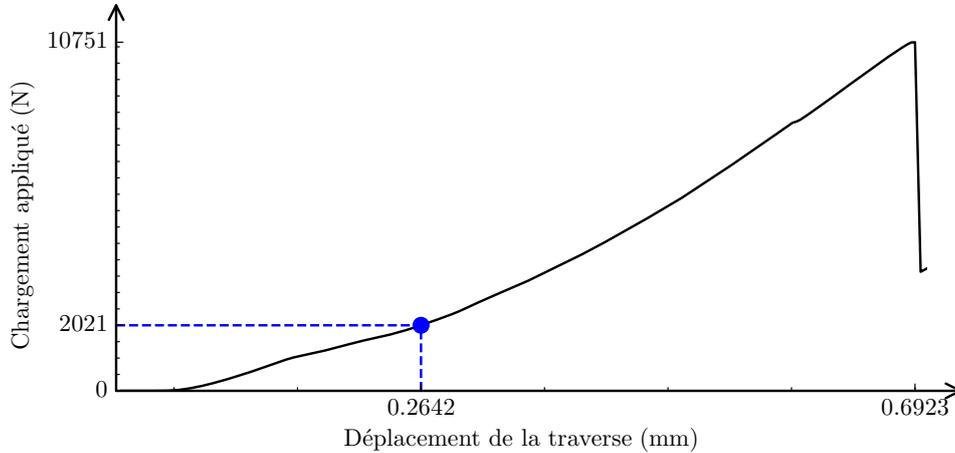


FIGURE 3.30 – Courbe force-déplacement obtenue par la machine de presse.

La courbe force-déplacement obtenue par la machine de presse est illustrée dans la figure 3.30. Lorsque le chargement atteint 10751 N, il est évident que la plaque entre en mode de ruine. Par ailleurs, en raison de la difficulté d'observer l'apparition de l'endommagement, la transition entre la phase linéaire et la phase d'endommagement n'est pas évidente à déterminer. D'après les résultats de l'identification avec les données synthétiques, comme le montre la figure 3.23(a), la limite élastique du chargement est d'environ 2200 N dans l'essai de compression. Par conséquent, le champ de déplacement mesuré  $\mathbf{U}^m$  sur la frontière  $\Gamma_m$  au chargement appliqué de 2021 N a été utilisé pour l'identification des conditions aux limites dans la phase linéaire, afin d'éviter les problèmes de convergence et de garantir un effet de bruit minimal. La mesure du champ de déplacement après avoir enlevé le MCR est illustrée dans la figure 3.31.

Dans le logiciel Ufreckles, on peut constater directement les erreurs de corrélation d'images sur les mesures, comme le montre la figure 3.32. Cependant, ces erreurs sont tracées en fonction des pixels de l'image, ce qui rend le post-traitement difficile dans le domaine  $\Omega$ . Ainsi, deux lignes droites ont été définies autour des frontières  $\Gamma_{m1}$  et  $\Gamma_{m2}$  pour mieux analyser les erreurs de corrélation d'image. Dans les figures 3.32(a) et 3.32(b), la plupart des erreurs varient entre environ 3% et 5% sur les frontières. Par conséquent, le taux de bruit  $\alpha_{bruit}$  a été fixé à 5% pour appliquer le critère d'arrêt.

La figure 3.33 montre les valeurs de la fonctionnelle  $E$  et de sa variation  $dE$  en fonction des itérations. Selon l'équation (3.37), avec  $\|\mathbf{U}^m\|^2$  égal à 0.18 et  $\|\mathbf{T}^m\|^2$  égal à 0, le calcul s'arrête lorsque la valeur de  $dE$  dépasse  $2.30 \cdot 10^{-3}$  après 12 itérations. Toutes les informations sont répertoriées dans le tableau 3.9.

Pour analyser le champ de déplacement identifié  $\mathbf{d}^*$ , l'erreur relative normalisée, définie par l'erreur absolue par rapport aux valeurs absolues maximales des déplacements  $u$  (0,067 mm) et  $v$  (0,064 mm), a été utilisée. La figure 3.34 illustre la comparaison des champs de déplacement mesurés et identifiés  $\mathbf{d}^*$  sur  $\Gamma_u$  par l'algorithme de Kozlov dans la phase linéaire. Étant donné que les plateaux métalliques de la machine de presse ont un effet significatif sur la mesure optique, et en considérant les inconvénients de la technique de CIN, l'erreur de corrélation d'images est

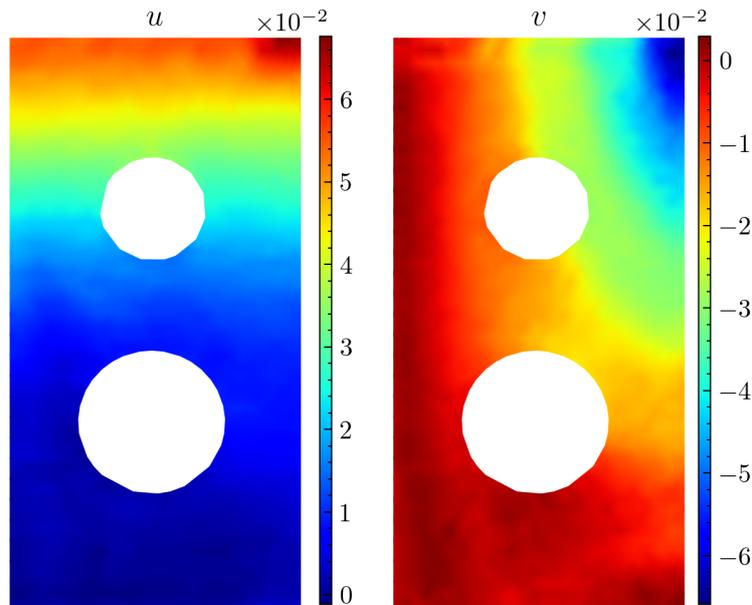


FIGURE 3.31 – Champ de déplacement mesurées après avoir enlevé le MCR sur la plaque épaisse à deux trous au chargement de 2021 N.

TABLEAU 3.9 – Coût de calcul de l'algorithme de Kozlov en utilisant le critère d'arrêt avec le champ de déplacement mesuré au chargement de 2021 N dans la phase linéaire.

Algorithme de minimisation	Kozlov
Nombre d'itération	12
Temps de calcul	2.5s
Valeur de $E$ final	0.325
Valeur de $dE$	$2.04 \cdot 10^{-3}$

plus importante autour de  $\Gamma_u$ , comme le montre la figure 3.32(c). Ainsi, le champ de mesure sur  $\Gamma_u$  est moins précis. Cependant, il peut quand même être comparé avec les données identifiées. Selon cette figure, bien qu'il y ait de petites fluctuations,  $\mathbf{d}^*$  identifié coïncide avec celui mesuré, surtout pour le déplacement  $v^*$ .

Numériquement, les erreurs relatives normalisées du déplacement  $u^*$  présentent une valeur maximale de 10.60%, une valeur moyenne de 3.69% et une valeur minimale de 0.49%. Pour le déplacement  $v^*$ , les valeurs maximale, moyenne et minimale des erreurs relatives normalisées sont respectivement de 10.27%, 4.32% et 0.79%. Bien que ces erreurs soient relativement plus élevées que celles obtenues par l'identification avec des données synthétiques bruitées, il faut considérer les erreurs de corrélation d'images significatives autour de la frontière  $\Gamma_u$ . Par conséquent,  $\mathbf{d}^*$  peut être plus proche des valeurs exactes mais pas des mesures. De plus, les erreurs relatives normalisées du champ de déplacement  $\mathbf{u}^*$  identifié sont plus faibles à l'intérieur du solide, comme le montre la figure 3.35. Toutes les erreurs relatives normalisées de  $\mathbf{d}^*$  identifié sur  $\Gamma_u$  sont enregistrées dans le tableau 3.10.

À partir du champ de déplacement identifié  $\mathbf{d}^*$ , la résultante correspondante  $F^*$  sur  $\Gamma_u$  peut également être déterminée. La valeur du champ de déplacement identifié correspond à une résultante appliquée  $F^*$  de 2345.38 N. Par rapport au chargement appliqué de 2021.10 N

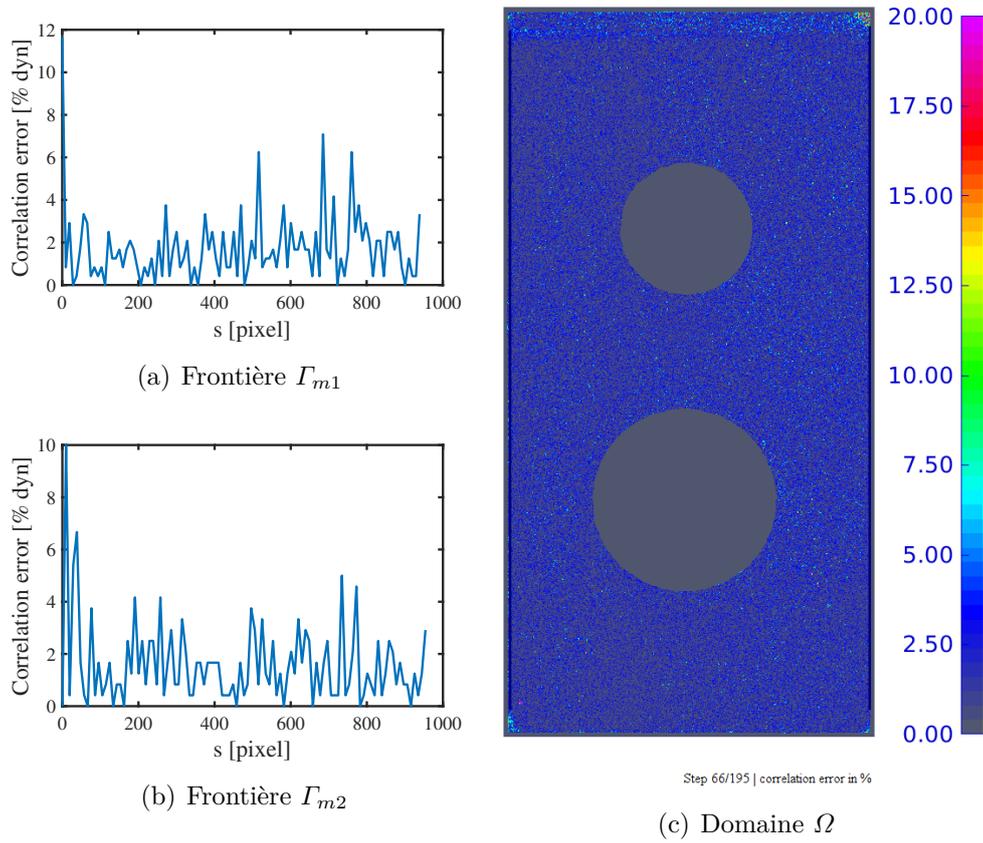


FIGURE 3.32 – Erreur de corrélation d’images en pourcentage au chargement de 2021 N.

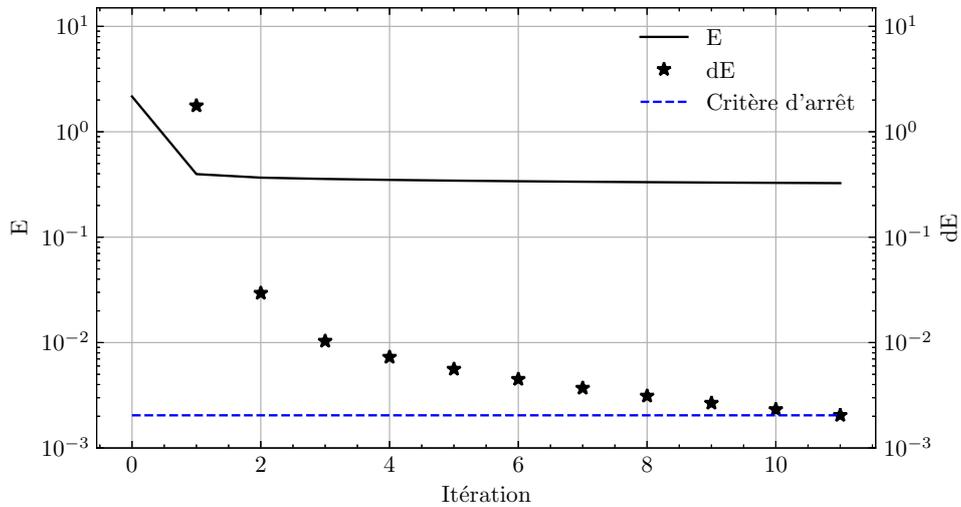


FIGURE 3.33 – Comparaison des valeurs de  $E$  et  $dE$  obtenues par l’algorithme de Kozlov en utilisant le critère d’arrêt, avec le champ de déplacement mesuré au chargement de 2021 N dans la phase linéaire.

obtenu par la machine de presse, cette valeur présente une erreur relative de 16.67%, ce qui est raisonnable. Étant donné que les valeurs des paramètres élastiques sont définies par les valeurs moyennes de  $E$  et  $\nu$  obtenues sur des matrices ettringitiques âgées de 42 jours, il est possible que ces valeurs imposées dans le modèle ne représentent pas exactement celles de la plaque à deux trous. De plus, d’après les résultats de l’identification avec les données synthétiques bruitées, l’utilisation des données bruitées peut produire des erreurs relativement significatives sur le champ de contrainte et les forces nodales identifiées. Cela entraîne une plus grande erreur relative dans la résultante  $F^*$  identifiée.

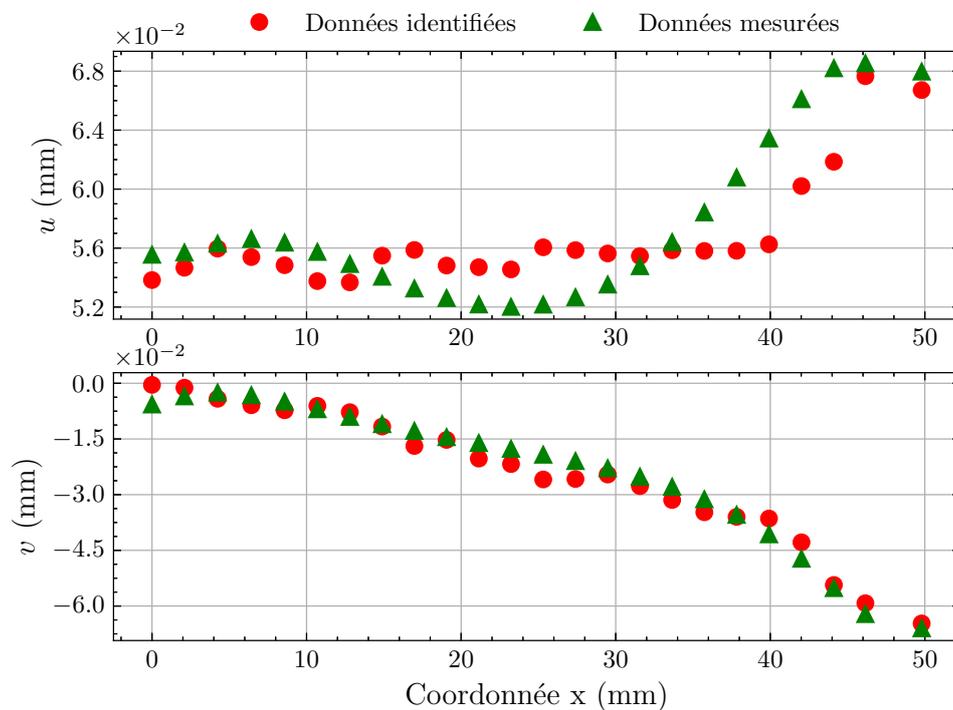
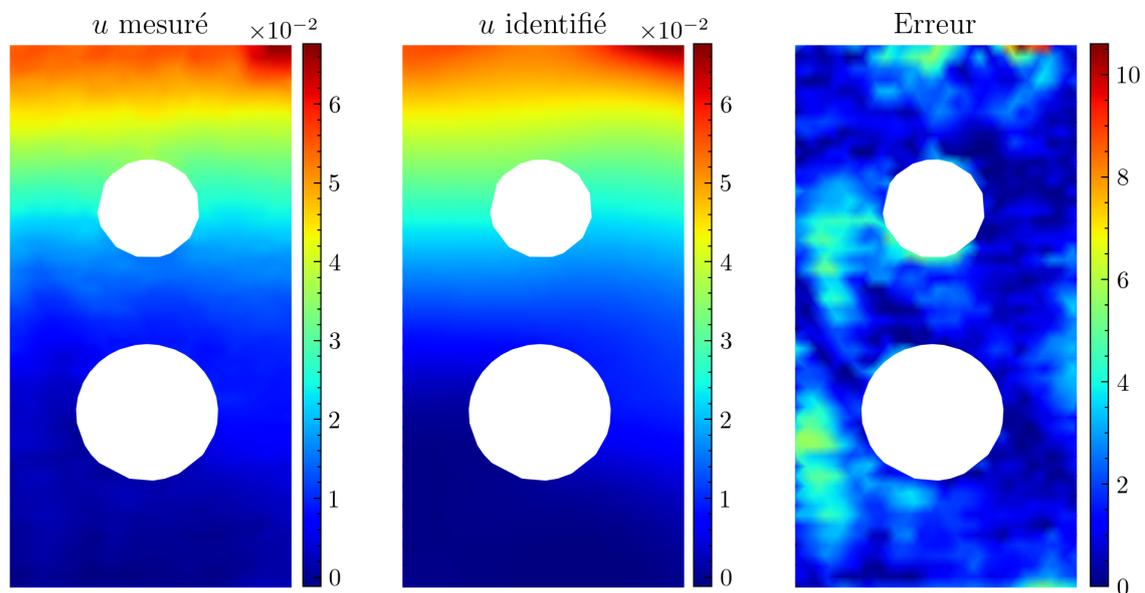


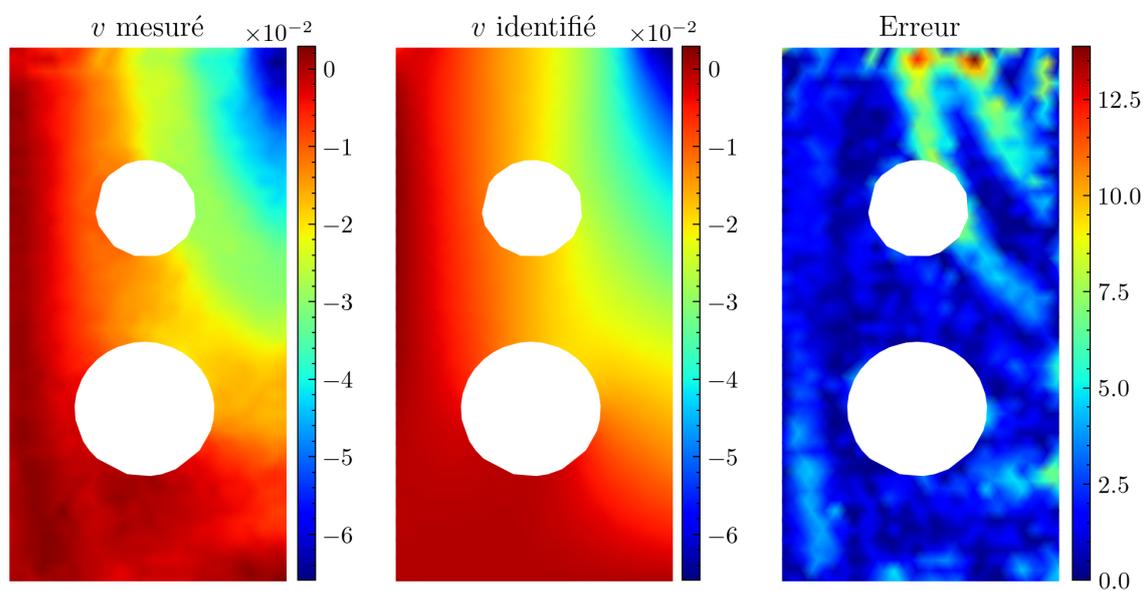
FIGURE 3.34 – Comparaison des champs de déplacement mesuré et identifié sur  $\Gamma_u$  par l'algorithme de Kozlov au chargement de 2021 N dans la phase linéaire.

TABLEAU 3.10 – Erreurs relatives normalisées du champ de déplacement  $\mathbf{d}^*$  mesuré et identifié sur  $\Gamma_u$  par l'algorithme de Kozlov en utilisant le critère d'arrêt au chargement de 2021 N dans la phase linéaire.

Erreur	Valeur maximale	Valeur moyenne	Valeur minimale
$u^*$	10.60%	3.69%	0.49%
$v^*$	10.27%	4.32%	0.79%



(a) Déplacement  $u$

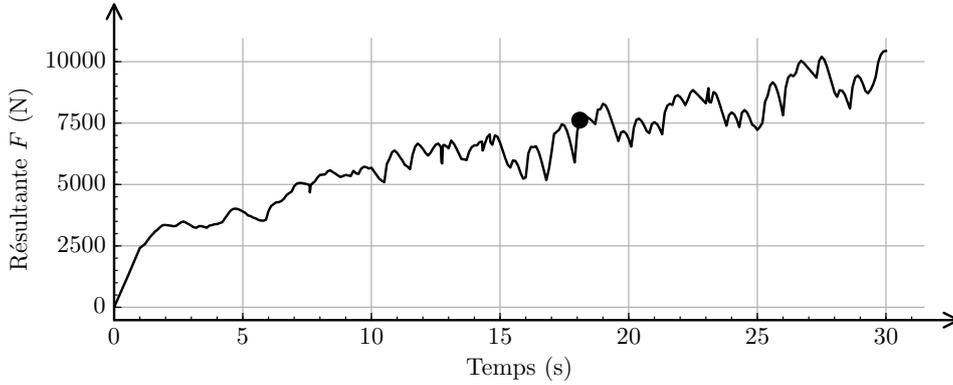


(b) Déplacement  $v$

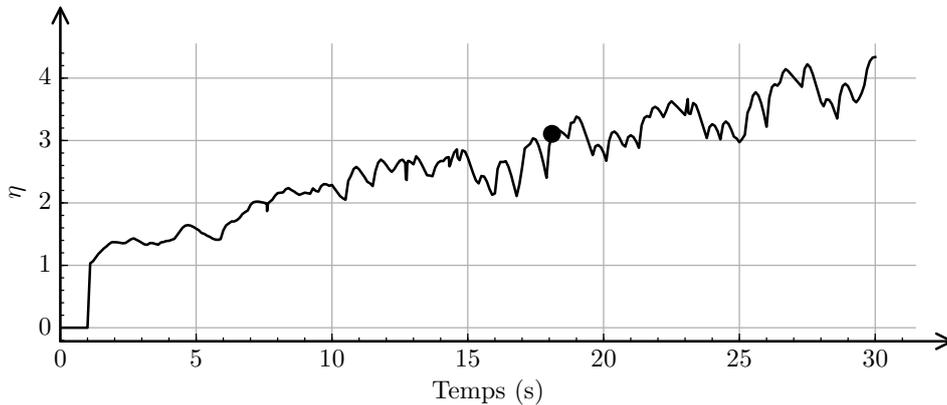
FIGURE 3.35 – Comparaison des champs de déplacement  $\mathbf{u}$  mesuré et identifié sur le domaine  $\Omega$  au chargement de 2021 N dans la phase linéaire.

### 3.6.3 Identification de l'endommagement dans la phase non linéaire

Pour identifier les conditions aux limites et l'endommagement dans la phase non linéaire,  $\mathbf{d}^*$  identifié au chargement de 2021 N a été directement utilisée avec la méthode incrémentale de pilotage pour une liste de temps définie à 30 s dans la modélisation numérique. Pour une meilleure illustration, la résultante  $F$  calculée à partir de  $\mathbf{d}$  identifié et la valeur de  $\eta$  en fonction du temps défini ont été représentées dans la figure 3.36.



(a) Résultant appliqué  $F$



(b) Idensité de chargement piloté  $\eta$

FIGURE 3.36 – Variation de  $F$  et  $\eta$  en fonction du temps.

En prenant le champ de mesure au chargement de 7200.75 N après avoir enlevé le MCR, comme le montre la figure 3.38, la condition de Dirichlet  $\mathbf{d}^{**}$  sur  $\Gamma_u$  a été déterminée à partir du minimum de l'erreur  $\| \mathbf{U}^m - \mathbf{U}_{\text{pilo}}^m \|$  comme le montre la figure 3.37. La résultante  $F^{**}$  est déterminée à partir de  $\mathbf{d}^{**}$ , nous trouvons une valeur correspondante de 7620.08 N. Comparée à la valeur de référence de 7200.75 N, cette valeur identifiée présente une erreur relative de 5.83%, ce qui est acceptable compte tenu des incertitudes inhérentes aux mesures. Toutes les valeurs de la résultante  $F$  identifiées avec les données mesurées sont enregistrées dans le tableau 3.11.

De plus, à partir des variables d'endommagement  $d$  identifiées, la limite élastique du chargement a été déterminée à 2507.06 N. En tenant compte des erreurs relatives entre le chargement appliqué mesuré par la machine de presse et la résultante calculée à partir de  $\mathbf{d}$  identifiée, la phase linéaire est définie dans l'intervalle de 0 à 2315 N. En revanche, la phase non linéaire commence à partir de 2836 N. L'intervalle compris entre 2315 N et 2836 N (soit environ 20% de 2507.06 N) est défini comme une zone indéterminée, dans laquelle il n'est pas possible de déterminer avec précision la transition entre la phase linéaire et la phase non linéaire.

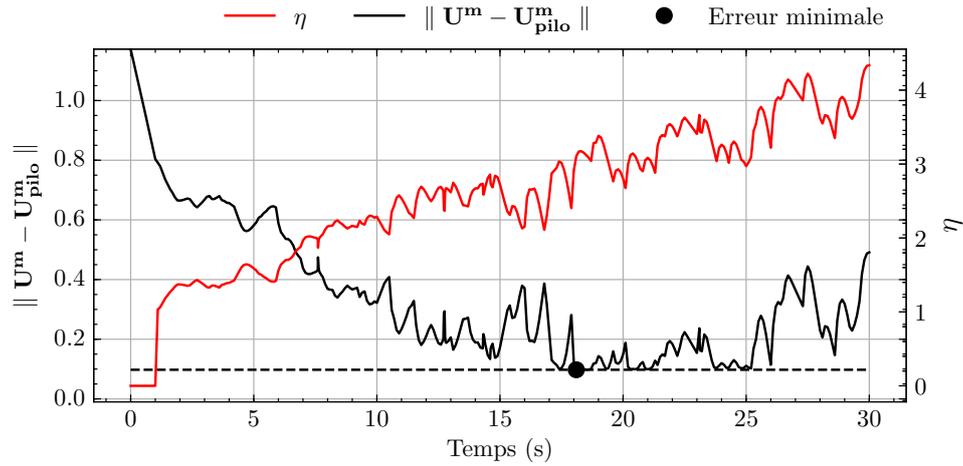


FIGURE 3.37 – Détermination  $\mathbf{d}^{**}$  identifié avec les données mesurées par l'erreur  $\| \mathbf{U}^m - \mathbf{U}_{\text{pilo}}^m \|$  en fonction du temps.

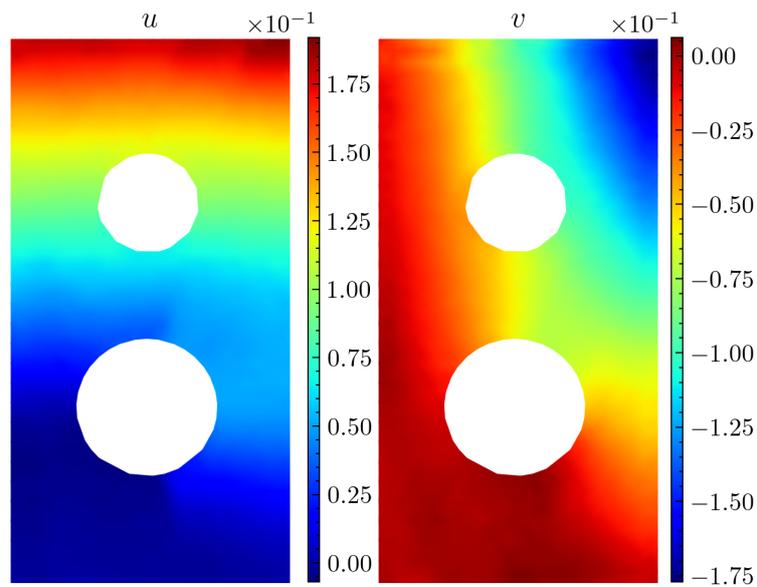


FIGURE 3.38 – Champ de déplacement mesurées après avoir enlevé le MCR sur la plaque épaisse à deux trous au chargement de 7200 N.

TABLEAU 3.11 – Comparaison des résultantes  $F$  calculées à partir des  $\mathbf{d}$  identifiées dans les phases linéaire et non linéaire avec les données mesurées.

$F$	Valeur de référence	Valeur identifiée
Phase linéaire	2021.10 N	2345.38 N (16.67%)
Phase non linéaire	7200.75 N	7620.08 N (5.83%)

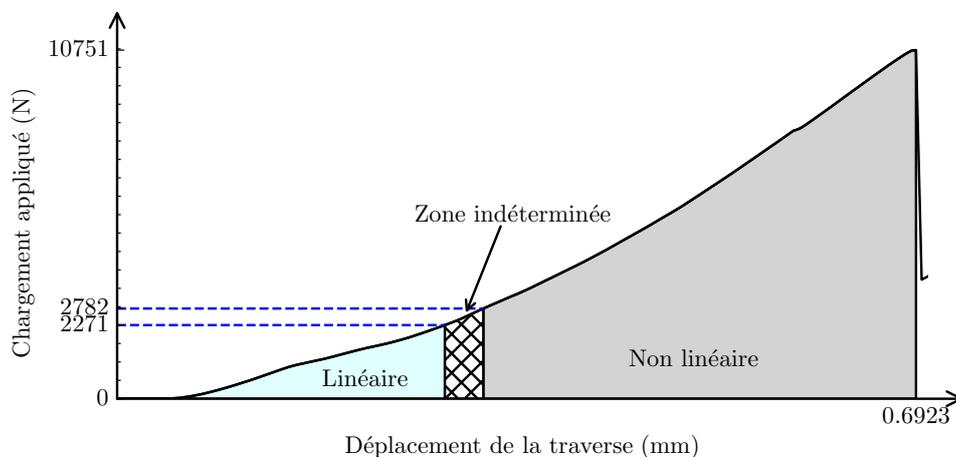


FIGURE 3.39 – Courbe force-déplacement obtenu par la machine de presse.

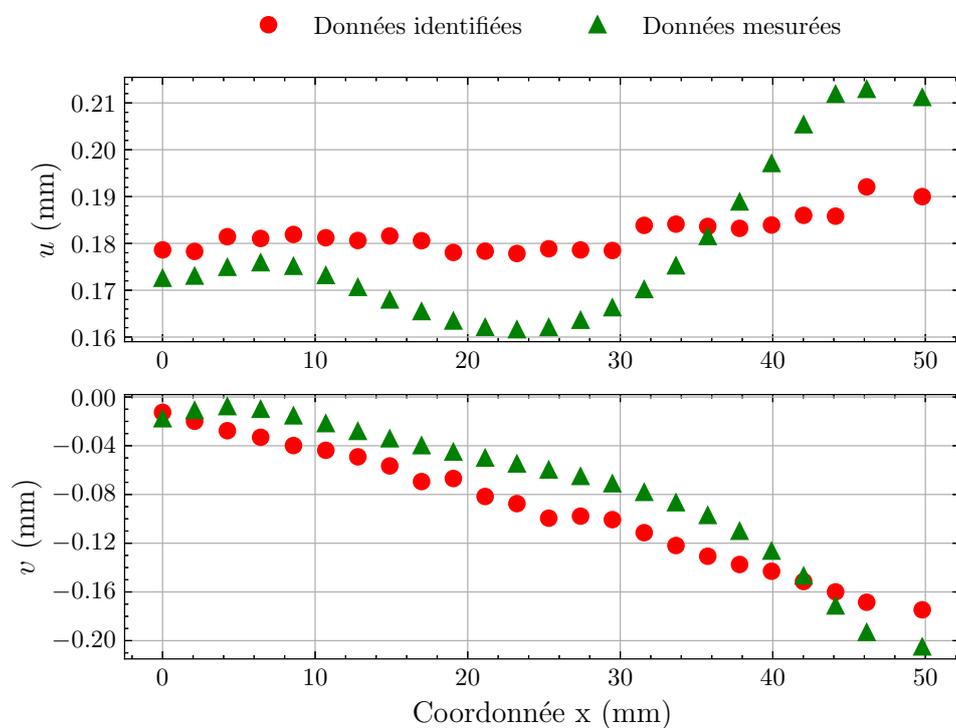


FIGURE 3.40 – Comparaison des champs de déplacement  $\mathbf{d}$  mesuré et identifié sur la frontière  $\Gamma_u$  au chargement de 7200 N dans la phase non linéaire.

Comme précédemment, l'erreur relative normalisée (l'erreur absolue par rapport à la valeur maximale absolue de déplacement  $u$  de 0.19 mm et  $v$  de 0.17 mm) a été utilisée pour évaluer la précision de  $\mathbf{d}^{**}$  identifiée. La figure 3.40 illustre la comparaison des champs de déplacement mesurés et identifiés sur  $\Gamma_u$  dans la phase d'endommagement. Selon cette figure, les erreurs entre les déplacements mesurés et identifiés dans la phase non linéaire sont plus significatives par rapport à celles dans la phase linéaire. En tenant compte des erreurs de  $\mathbf{d}^*$  identifiée dans la phase linéaire, la méthode de pilotage peut amplifier ces erreurs, ce qui entraîne un endommagement plus prématuré de la frontière  $\Gamma_u$ . Par ailleurs, le chargement appliqué par la machine de presse après 2021 N peut ne pas être uniforme (combinaison de compression et flexion) en raison de la dissymétrie de l'échantillon. Cela pose des difficultés majeures pour identifier  $\mathbf{d}^{**}$  dans la phase non linéaire avec la méthode de pilotage. Ainsi, les déplacements  $v^{**}$  identifiés entre  $\Gamma_u$  et le petit trou présentent des erreurs relatives normalisées élevées, comme le montre la figure 3.41.

Numériquement, sur la frontière  $\Gamma_u$ , les valeurs maximale, moyenne et minimale des erreurs relatives normalisées pour le déplacement  $u^{**}$  sont respectivement de 13.56%, 6.48% et 1.16%. Pour le déplacement  $v^{**}$ , les erreurs relatives normalisées maximale, moyenne et minimale sont de 22.66%, 13.84% et 2.59%, respectivement. Toutes ces valeurs sont enregistrées dans le tableau 3.12.

TABLEAU 3.12 – Erreurs relatives normalisées du champ de déplacement  $\mathbf{d}$  mesuré et identifié sur  $\Gamma_u$  au chargement de 7200 N dans la phase non linéaire.

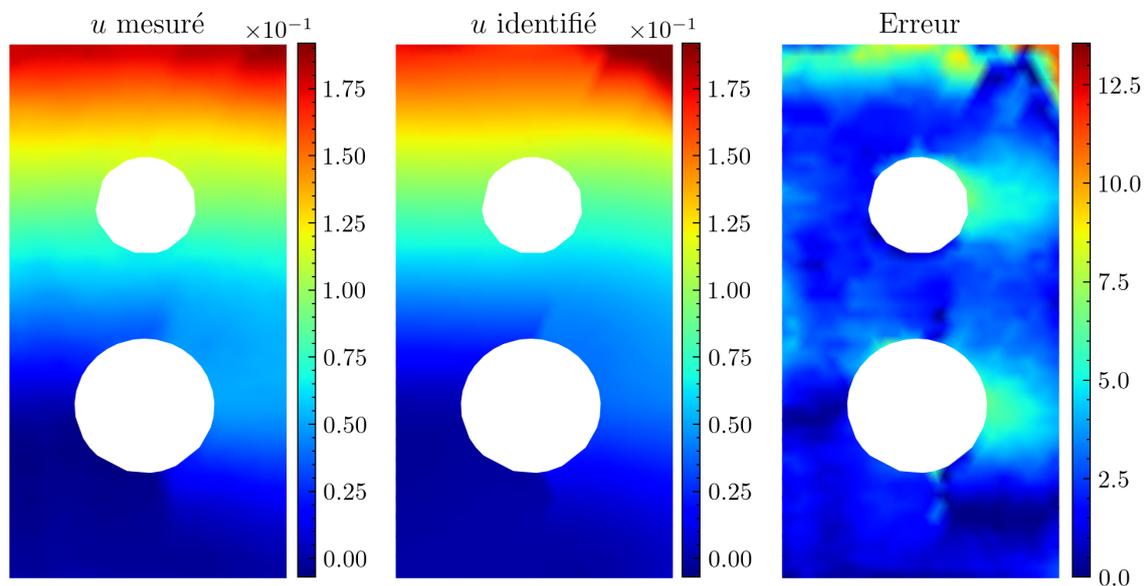
Erreur	Valeur maximale	Valeur moyenne	Valeur minimale
$u^{**}$	13.56%	6.48%	1.16%
$v^{**}$	22.66%	13.84%	2.59%

Pour quantifier les fissures et l'endommagement, l'analyse de la distribution des variables d'endommagement  $d$  est une approche efficace. Cependant, cette variable ne peut pas être estimée directement avec la mesure de CIN. En revanche, les discontinuités du champ de déplacement  $\mathbf{u}$  permettent de détecter facilement l'endommagement. Par conséquent, nous avons comparé le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  mesuré et la distribution des variables  $d$  pour évaluer la précision de l'identification de l'endommagement, comme le montre la figure 3.42.

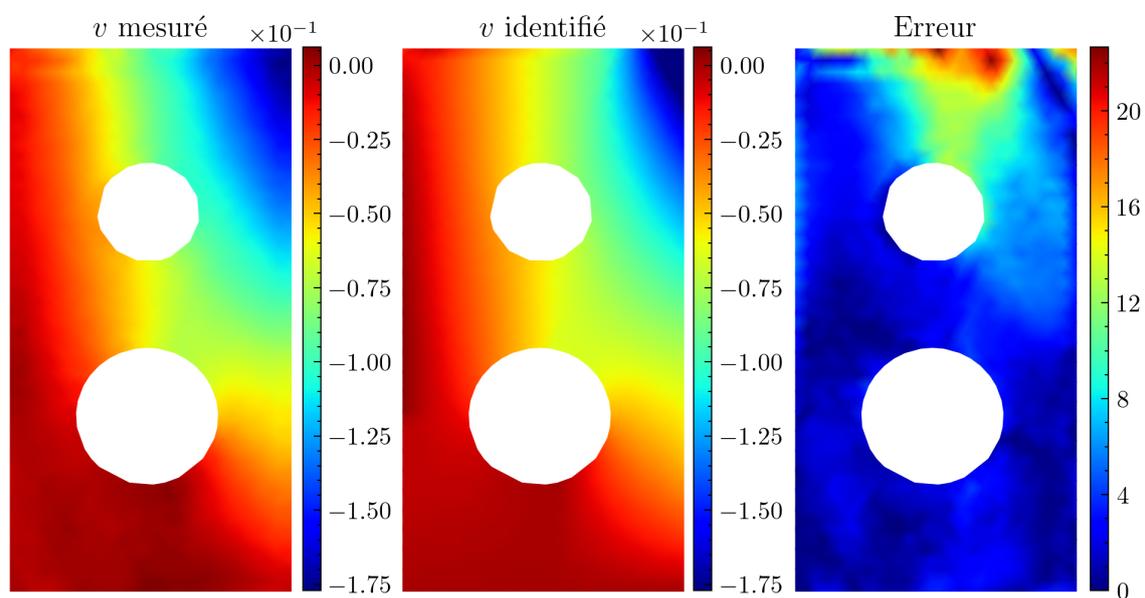
Selon cette figure, en négligeant les fluctuations des déplacements identifiés provoquées par les erreurs de corrélation d'images significatives autour de la frontière  $\Gamma_u$ , les déplacements  $v$  mesurés ne permettent pas d'observer directement l'endommagement de la plaque. Pour analyser davantage l'endommagement, nous avons comparé le champ de déplacement  $u$  mesuré et identifié avec la distribution de  $d$  sur deux parties de la plaque où les variables  $d$  ne sont pas nulles.

La figure 3.43 illustre l'analyse de l'endommagement de la plaque à partir de la comparaison des déplacements  $u$  mesurés et identifiés, ainsi que de la distribution de  $d$  au chargement de 7200 N dans la phase non linéaire. Pour faciliter l'observation des discontinuités du déplacement  $u$ , nous avons marqué les positions avec des ellipses rouges et les avons numérotées de  $e_1$  à  $e_4$ .

En analysant la figure 3.43(a), en raison des erreurs de corrélation d'images significatives près de  $\Gamma_u$  et des erreurs relatives normalisées de  $u$ , il est impossible de juger directement de l'endommagement sur  $\Gamma_u$  en combinant les valeurs mesurées de  $u$  avec celles de  $d$ . Cependant, à



(a) Déplacement  $u$



(b) Déplacement  $v$

FIGURE 3.41 – Comparaison des champs de déplacement  $\mathbf{u}$  mesuré et identifié sur le domaine  $\Omega$  au chargement de 7200 N dans la phase non linéaire.

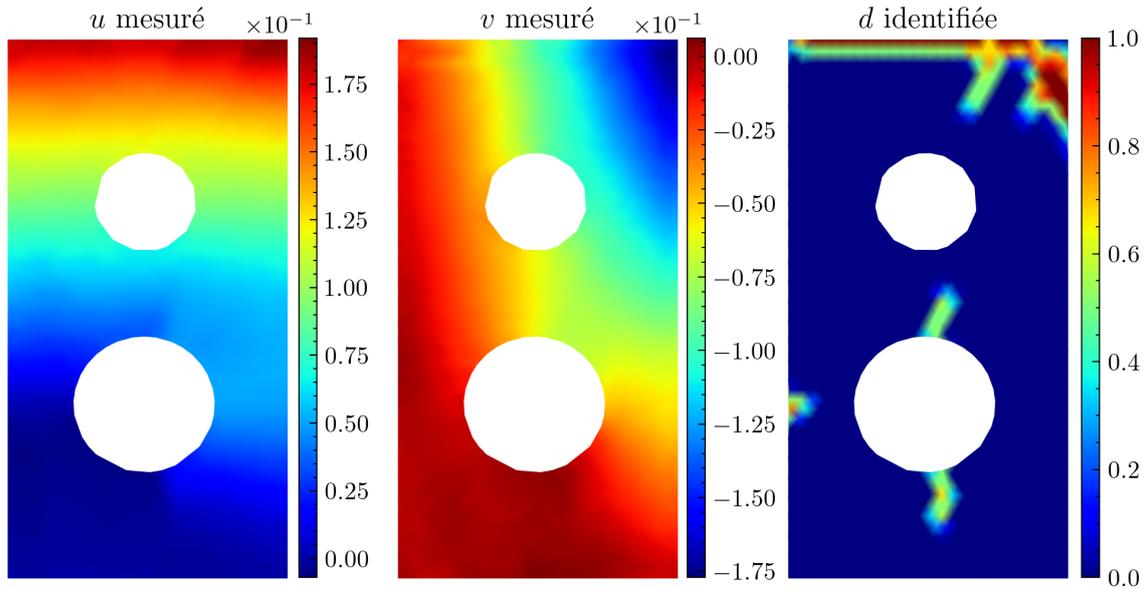
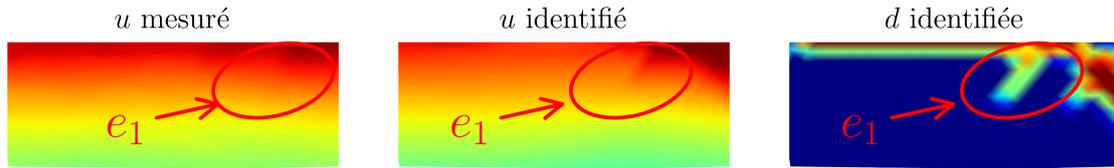
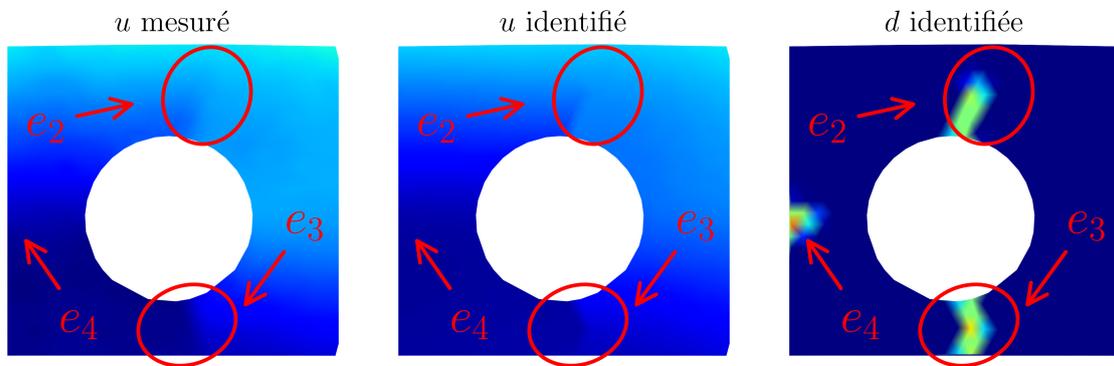


FIGURE 3.42 – Analyse des déplacements  $\mathbf{u}$  mesurés et de la distribution de  $d$  identifiée sur tout le domaine  $\Omega$  au chargement de 7200 N.



(a) Autour de  $\Gamma_u$



(b) Autour du grand trou

FIGURE 3.43 – Analyse de l'endommagement de la plaque à partir de la comparaison des déplacements  $u$  mesuré et identifiés, ainsi que la distribution de  $d$  au chargement de 7200 N dans la phase non linéaire.

la position  $e_1$ , l'apparition d'une discontinuité dans  $u$  est relativement cohérente avec la valeur de  $d$  identifiée. Par conséquent, l'endommagement à la position  $e_1$  peut être considéré comme correctement identifié.

Dans la figure 3.43(b), les discontinuités de déplacement  $u$  aux positions  $e_2$  et  $e_3$  sont clairement visibles et correspondent aux valeurs de  $d$  identifiées, indiquant que l'endommagement à ces deux endroits est bien détecté. Cependant, à la position  $e_4$ , la discontinuité correspondante n'est pas aussi prononcée en raison des faibles valeurs du champ de déplacement  $\mathbf{u}$ . Étant donné que la distribution de  $u$  mesurée et identifiée à cet endroit est relativement cohérente et

présente des erreurs relatives normalisées faibles, l'endommagement à  $e_4$  peut également être considéré comme correctement identifié.

Il est important de noter que les positions de  $e_1$  à  $e_4$  représentent des intervalles approximatifs. La position de la discontinuité de  $u$  mesurée peut légèrement s'éloigner de celle de  $u$  identifiée et de la distribution de  $d$  identifiée en raison des erreurs relativement élevées de  $\mathbf{d}^{**}$  identifiées sur  $\Gamma_u$ . Dans l'ensemble, l'endommagement à l'intérieur de la plaque est correctement identifié, à l'exception de la frontière  $\Gamma_u$ .

### 3.6.4 Conclusion

Pour valider la méthodologie mise en œuvre pour identifier les conditions aux limites et l'endommagement à partir des données expérimentales, nous avons utilisé des mesures sur une plaque épaisse à deux trous âgée de 42 jours. La technologie de CIN a été utilisée pour détecter et identifier l'endommagement et les fissures sur la surface de la plaque. L'analyse du champ de déplacement mesuré montre une concentration de contraintes à la frontière de contact, correspondant à un chargement combiné de compression et de flexion, induit par la non-symétrie de l'échantillon. Cela a rendu cette phase de validation plus intéressante et riche en informations.

Pendant la phase linéaire, l'algorithme de Kozlov a été utilisé pour minimiser la fonctionnelle erreur en énergie entre les données mesurées et celles calculées par le logiciel de MEF. Concernant la précision de la condition de Dirichlet  $\mathbf{d}^*$  identifiée sur  $\Gamma_u$ , les erreurs relatives normalisées maximales sont relativement élevées en raison des erreurs de corrélation d'images significatives. Cependant, les valeurs moyennes de ces erreurs sont acceptables. Le champ de déplacement identifié donne une résultante  $F^*$  de 2348.38 N. Comparée à la force appliquée de 2021.10 N mesurée par la machine de presse, cette différence est raisonnable en tenant compte des erreurs de mesure. En considérant que les paramètres mécaniques utilisés dans le modèle sont les valeurs moyennes de la matrice élastique à 42 jours, identifiées par la méthode de recalage avec la solution semi-analytique, il est possible que ces paramètres ne représentent pas exactement ceux de la plaque à deux trous, ce qui entraîne une propagation des incertitudes sur les champs identifiés. Par conséquent, la méthode de la fonctionnelle erreur permet d'identifier efficacement et de manière robuste les conditions aux limites dans la phase linéaire.

Pendant la phase non linéaire, l'identification des conditions aux limites et de l'endommagement est réalisée en utilisant le champ de déplacement identifié  $\mathbf{d}^*$  dans la phase linéaire et la méthode de pilotage incrémental. Concernant le champ de déplacement identifié sur  $\Gamma_u$ , les erreurs relatives normalisées sont plus significatives que celui dans la phase linéaire. Cela est dû non seulement au fait que le pilotage amplifie les erreurs de  $\mathbf{d}^*$  identifiées dans la phase linéaire, mais aussi à l'asymétrie de l'échantillon, qui entraîne des chargements non uniformes appliqués par la machine de presse. Ces problèmes sont inévitables lorsqu'on utilise la méthode de pilotage pour amplifier  $\mathbf{d}^*$  identifiés dans la phase linéaire et effectuer l'identification dans la phase non linéaire. Avec la valeur de  $\mathbf{d}^{**}$  identifiée dans la phase non linéaire, la résultante correspondante  $F^{**}$  est de 7620.08 N. Comparée au chargement de référence de 7200.75 N, l'erreur relative est acceptable. De plus, cette erreur montre que même si les erreurs de  $\mathbf{d}^{**}$  sont relativement importantes, l'intensité de chargement appliquée globale tel que la résultante  $F^{**}$  peut encore être bien identifiée, soulignant l'importance de la méthode de régularisation pour améliorer les résultats de l'identification. Pour l'identification de l'endommagement, bien que la

CIN ne permette pas de le quantifier directement, l'analyse des discontinuités de déplacement et de la distribution de la variable d'endommagement  $d$  identifiée a permis de localiser les zones endommagées.

En résumé, la méthodologie mise en œuvre, qui consiste à identifier les conditions aux limites dans la phase linéaire par la minimisation de la fonctionnelle erreur en énergie, puis à poursuivre l'identification par pilotage incrémental du déplacement dans la phase non linéaire, a permis de résoudre le problème de Cauchy non linéaire dans sa globalité. Bien que les résultats soient acceptables et montrent une bonne capacité à identifier les conditions aux limites et l'endommagement, des améliorations sont possibles, notamment par l'intégration de méthodes de régularisation supplémentaires pour accroître la précision des identifications.

### 3.7 Conclusion et Perspectives

L'objectif de ce chapitre est de présenter une méthodologie pour l'identification des conditions aux limites et de l'endommagement dans les matériaux isotropes fragiles, en utilisant des mesures surabondantes basées sur le modèle de Badel.

Tout d'abord, le modèle de Badel, une loi de comportement tenant compte de l'endommagement local dissymétrique, a été présenté. Pour intégrer cette loi avec la méthode d'identification, le paramétrage et le principe de la méthode de pilotage incrémental, qui résout le problème de snap-back dans la phase non linéaire, ont été détaillés. Pour illustrer l'application numérique de ce modèle dans le logiciel de la Méthode des Éléments Finis (MEF), une modélisation numérique de la plaque épaisse à deux trous sous l'action d'un chargement de compression a été réalisée afin de démontrer l'endommagement correspondant dans la phase non linéaire.

Bien que le développement de la technologie de Corrélation d'Images Numérique (CIN) contribue significativement aux études des problèmes inverses, les erreurs de mesure importantes aux frontières du solide constituent également des inconvénients majeurs à résoudre. Ainsi, pour surmonter ces problèmes, l'étude de l'identification en utilisant des données surabondantes a été envisagée dans notre recherche. En conséquence, les définitions des problèmes de Cauchy et de complétion des données ont été introduites par la suite. Étant donné que ces problèmes sont classiques et largement étudiés, de nombreuses recherches et approches ont déjà été proposées pour leurs résolutions. Parmi celles-ci, la méthode de minimisation de la fonctionnelle erreur en relation de comportement a été adoptée dans notre étude en raison de son efficacité démontrée.

Pour minimiser la fonctionnelle erreur, l'algorithme itératif de minimisation de Kozlov a été sélectionné, parce qu'il est largement utilisé pour résoudre les problèmes de Cauchy. Afin de démontrer l'efficacité et la robustesse de cet algorithme, la méthode du Gradient Conjugué (GC) a également été prise en compte pour évaluer la précision de l'identification. Étant donné que la méthode de GC nécessite le gradient de la fonctionnelle erreur pour déterminer la direction d'optimisation, la méthode de l'état adjoint avec la formulation discrète a été implémentée pour calculer le gradient exact correspondant.

Néanmoins, en raison des problèmes de convergence et de snap-back, la résolution des problèmes de Cauchy non linéaires avec le modèle de Badel ne peut pas être réalisée automatiquement dans l'algorithme de minimisation. Tenant compte de la complexité du développement invasif des méthodes de calcul pour le modèle de Badel, la méthode d'identification comporte deux étapes : la première est l'identification des conditions aux limites dans la phase linéaire

par la minimisation de la fonctionnelle erreur en relation de comportement ; la deuxième est l'identification des conditions aux limites dans la phase non linéaire en utilisant la méthode de pilotage incrémentale avec les conditions aux limites identifiées dans la phase linéaire.

Pour valider la méthodologie mise en œuvre, des données synthétiques surabondantes, sans bruit et avec 5% de bruit blanc additif, ont été utilisées dans un essai de compression sur une plaque épaisse à deux trous pour un matériau isotrope fragile. Dans la phase linéaire, la précision des résultats d'identification et le coût de calcul obtenus avec l'algorithme de Kozlov démontrent une meilleure performance par rapport à la méthode de GC. Ainsi, dans la phase non linéaire, le pilotage utilise uniquement la condition de Dirichlet identifiée avec l'algorithme de Kozlov dans la phase linéaire pour identifier les conditions aux limites et l'endommagement. Selon les résultats obtenus dans les phases linéaire et non linéaire, les erreurs des conditions de Dirichlet identifiées restent faibles. Les erreurs relatives des résultantes calculées à partir des déplacements identifiés sont également faibles. Toutefois, les conditions de Neumann calculées à partir des conditions identifiées dans ces deux phases présentent des erreurs relativement élevées. Cela peut s'expliquer par les fluctuations des déplacements identifiés, qui provoquent des variations plus significatives des contraintes correspondantes. Cependant, ces erreurs diminuent à l'intérieur du solide, permettant d'identifier précisément l'endommagement dans la phase non linéaire.

En pratique, les données expérimentales de la plaque à deux trous, constituée de matrice ettringitique âgée de 42 jours et obtenues par mesure CIN, ont été utilisées pour valider ultérieurement la méthodologie mise en œuvre. En raison de l'asymétrie de l'échantillon, la plaque a subi un chargement combiné de compression et de flexion. Selon l'analyse des résultats identifiés, les courbes des déplacements identifiés en fonction de la coordonnée  $x$  dans la phase linéaire sont globalement alignées avec celles des déplacements mesurés. Bien que les erreurs relatives normalisées de la condition de Dirichlet identifiée soient relativement élevées, cela peut s'expliquer par des imprécisions dans les mesures expérimentales sur la frontière de chargement. De plus, ces erreurs relatives normalisées sont bien réduites à l'intérieur de la plaque, ce qui démontre une identification précise. En revanche, dans la phase non linéaire, ces erreurs sur les conditions aux limites identifiées deviennent plus importantes. Cela s'explique non seulement par l'amplification des fluctuations des déplacements identifiés dans la phase linéaire due à la méthode de pilotage, mais aussi par la possible non-uniformité du chargement appliqué sur la plaque pendant l'expérimentation, ce qui rend difficile de l'identification précise des conditions aux limites dans la phase non linéaire en utilisant la méthode de pilotage tel quelle est mise en œuvre. Bien que ces erreurs soient relativement importantes sur la frontière, les zones endommagées ont tout de même été bien localisées et identifiées. En utilisant les conditions de Dirichlet identifiées pour calculer les résultantes appliquées sur la frontière de chargement dans les phases linéaire et non linéaire, les erreurs relatives correspondantes sont raisonnables, tenant compte des bruits de mesure. Dans l'ensemble, la méthodologie mise en œuvre permet d'obtenir des résultats d'identification satisfaisants.

En résumé, la méthode d'identification des conditions aux limites et de l'endommagement en utilisant des données surabondantes pour les matériaux isotropes fragiles consiste en deux étapes. Les conditions aux limites dans la phase linéaire ont été identifiées par la minimisation de la fonctionnelle erreur en relation de comportement avec l'algorithme de Kozlov dans un premier temps. Ensuite, ces conditions identifiées ont été utilisées avec la méthode de pilotage incrémental pour poursuivre l'identification dans la phase non linéaire. D'après les résultats

de l'identification avec les données synthétiques et expérimentales, les précisions des conditions aux limites et de l'endommagement identifiées sont globalement satisfaisantes. Néanmoins, cette méthode présente encore des aspects qui peuvent être améliorés. Bien que la condition de Dirichlet identifiée par la minimisation de la fonctionnelle dans la phase linéaire soit précise, les fluctuations correspondantes peuvent facilement affecter la précision de la condition de Neumann identifiée sur la frontière de chargement. Ainsi, des études sur la méthode de régularisation telle que la variation totale doivent être envisagées dans une perspective future. Grâce à la méthode de pilotage, la régularisation des conditions aux limites identifiées dans la phase linéaire permettra d'améliorer globalement les précisions d'identification des conditions aux limites et de l'endommagement. Par ailleurs, cette méthodologie présente des difficultés d'identification précise lorsque le chargement appliqué est non-uniforme (avec changement de direction) pendant toute la durée de l'expérimentation. Ainsi, le développement invasif des méthodes de calcul direct sur le modèle de Badel dans la MEF peut-être envisagé pour surmonter ces difficultés d'identification à l'avenir.

# Chapitre 4

## Apprentissage profond : réseaux de neurones informés par la physique

*Ce chapitre explore les applications des réseaux de neurones informés par la physique (PINNs : Physics-Informed Neural Networks) dans les problèmes directs et inverses en mécanique des solides, afin de démontrer leurs avantages, leurs inconvénients ainsi que leur potentiel de développement futur. Tout d'abord, les principes, l'architecture et la démarche des PINNs sont brièvement introduits. Ensuite, les améliorations basiques apportées aux PINNs ainsi que certaines techniques avancées sont présentées. Pour comparer et évaluer l'effet de ces techniques avancées sur les PINNs, déjà perfectionnés par les améliorations basiques, quatre techniques avancées ainsi que le PINN traditionnel sont appliqués à la modélisation numérique, à l'identification des paramètres mécaniques et à l'identification des conditions aux limites dans la phase du comportement linéaire. Enfin, les résultats de chaque application sont analysés pour évaluer les avantages et les inconvénients de chaque modèle de PINNs et leur efficacité dans différentes problématiques. Ces résultats, associés aux recherches existantes, montrent que les PINNs sont potentiellement capables de résoudre les problèmes directs et inverses en mécanique des solides, offrant ainsi de nombreuses perspectives de développement et de croissance.*

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Apprentissage profond et apprentissage automatique conventionnel</b>	<b>130</b>
<b>4.2</b>	<b>Réseaux de neurones informés par la physique . . . . .</b>	<b>131</b>
4.2.1	Principes des PINNs . . . . .	131
4.2.2	Architectures et démarche de PINN traditionnel . . . . .	132
<b>4.3</b>	<b>Améliorations et Méthodologies pour les PINNs . . . . .</b>	<b>139</b>
4.3.1	Améliorations basiques . . . . .	139
4.3.2	Techniques avancés . . . . .	141
<b>4.4</b>	<b>Applications des PINNs aux problèmes directs en mécanique des solides . . . . .</b>	<b>146</b>
4.4.1	Configuration numériques des modèles des PINNs . . . . .	147
4.4.2	Comparaison des résultats des PINNs . . . . .	152
4.4.3	Conclusion . . . . .	161
<b>4.5</b>	<b>Applications des PINNs à l'identification des paramètres mécaniques . . . . .</b>	<b>163</b>

4.5.1	Configurations numériques des PINNs dans l'identification des paramètres . . . . .	163
4.5.2	Comparaison des paramètres identifiés avec les valeurs de référence . .	166
4.5.3	Conclusion . . . . .	171
<b>4.6</b>	<b>Applications des PINNs à l'identification des conditions aux limites en mécanique des solides . . . . .</b>	<b>172</b>
4.6.1	Configurations numériques des PINNs dans l'identification des conditions aux limites . . . . .	173
4.6.2	Comparaison des conditions identifiées avec le champ de déplacement surfacique . . . . .	179
4.6.3	Comparaison des conditions identifiées avec le champ de déplacement aux frontières . . . . .	185
4.6.4	Conclusion . . . . .	191
<b>4.7</b>	<b>Conclusion et perspective . . . . .</b>	<b>192</b>

---

## 4.1 Apprentissage profond et apprentissage automatique conventionnel

Avec l'avancement du matériel informatique et l'augmentation de la puissance de calcul, la recherche sur l'apprentissage profond et l'apprentissage automatique a attiré de plus en plus d'attention et a fait l'objet d'études plus approfondies. En tant que technologies de recherche à la croissance la plus rapide à l'heure actuelle, elles ont été largement appliquées et intégrées dans divers domaines et disciplines.

L'apprentissage automatique est un sous-domaine de l'intelligence artificielle. Son objectif est d'apprendre automatiquement des caractéristiques significatifs à partir d'un grand nombre de données et de leurs étiquettes correspondantes, en utilisant divers algorithmes d'optimisation et modèles statistiques. Cela permet de prédire les résultats correspondants à partir de nouvelles données d'entrée inconnues, avec un coût peu élevé. En fonction du problème à traiter et des objectifs de la tâche, différents modèles d'apprentissage automatique, tels que l'apprentissage supervisé et l'apprentissage non-supervisé, ont été proposés [148, 149, 150, 151].

L'apprentissage profond, un sous-domaine de l'apprentissage automatique, est une méthode d'analyse de données basée sur les réseaux de neurones artificiels. Cette méthode comporte généralement plusieurs couches cachées, chacune composée de nombreux neurones. L'augmentation du nombre de couches et de neurones permet au modèle d'apprendre et de représenter des caractéristiques de données plus complexes. De plus, chaque couche cachée applique généralement une fonction d'activation pour réaliser des transformations non-linéaires entre les données d'entrée et de sortie, renforçant ainsi l'expressivité du modèle. Le cœur de l'apprentissage profond réside dans l'extraction et l'apprentissage des caractéristiques des données à travers des réseaux de neurones multicouches, permettant un apprentissage automatisé [152, 153].

Par rapport à l'apprentissage automatique traditionnel, l'apprentissage profond peut extraire automatiquement des caractéristiques, ce qui le rend particulièrement efficace pour traiter des données et des problèmes complexes. Ainsi, il a connu un grand succès dans des domaines tels que le traitement et la classification d'images, la reconnaissance vocale et la traduction

automatique [154, 155, 156, 157]. Cependant, en raison de ces caractéristiques, l'apprentissage profond nécessite généralement un grand volume de réseaux de neurones (nombre de couches cachées et neurones) et des coûts de calcul élevés. Hornik et al. [158] affirme qu'un réseau neuronal artificiel suffisamment grand, avec une fonction d'activation non linéaire appropriée, peut approcher toute fonction continue, modélisant ainsi tout modèle mathématique. Par conséquent, les méthodes basées sur l'apprentissage profond sont devenues de nouvelles approches pour relever les défis posés par les problèmes physiques que les méthodes numériques traditionnelles peinent à résoudre [159].

Dans l'apprentissage profond, le modèle basé sur les données (data-driven) est le plus connu et utilisé. Son principe consiste à entraîner les réseaux de neurones en minimisant la norme L2 entre les valeurs prédites obtenues à partir des entrées et les valeurs réelles (étiquettes) correspondantes. Cela permet d'obtenir des résultats de prédiction satisfaisants. Ainsi, les modèles basés sur les données sont largement utilisés dans différents domaines scientifiques tels que la thermodynamique [160], les matériaux [161], la chimie [162], la biologie [163] et la mécanique des fluides [164].

Dans le domaine de la mécanique des solides, le modèle basé sur les données est principalement utilisé pour la modélisation numérique des différents matériaux. Cette approche s'efforce de devenir une alternative fiable aux modèles de comportement traditionnels, offrant de nouvelles perspectives et améliorations en termes de précision et d'efficacité [165, 166, 167]. En outre, étant donné que les modèles basés sur les données peuvent approfondir les études sur les propriétés et les relations de comportement des différents matériaux, ils apportent également des contributions significatives aux problèmes inverses, tels que l'identification des paramètres mécaniques et des conditions aux limites [168, 169, 170, 171].

Bien que le modèle basé sur les données présente de nombreux avantages, il présente également un inconvénient majeur : la nécessité de grands ensembles de données pour entraîner les réseaux de neurones. Ainsi, pour les modèles physiques ou mathématiques rares ou spéciaux, l'insuffisance des ensembles de données devient la principale limitation de leur application. Afin de surmonter ces limitations, les réseaux de neurones informés par la physique (PINNs : Physics-Informed Neural Networks) ont été développés et proposés.

## 4.2 Réseaux de neurones informés par la physique

Pour mieux représenter les PINNs, leurs principes, leur architecture et leur démarche dans le domaine de la mécanique des solides sont détaillés ci-après.

### 4.2.1 Principes des PINNs

Les PINNs ont été initialement proposés en 2017 [172, 173, 174]. En tant que modèles d'apprentissage profond, le principe des PINNs est de former les réseaux de neurones en utilisant des équations physiques connues, telles que les équations aux dérivées partielles (EDP) et des conditions physiques, telles que les conditions aux limites et les conditions initiales, afin d'obtenir des solutions approximatives aux problèmes. En intégrant les équations et les conditions physiques, les réseaux peuvent satisfaire non seulement les phénomènes observés dans les données, mais aussi les lois physiques fondamentales et les contraintes physiques. Cela améliore de

manière significative la précision des prédictions des modèles sur les ensembles de données ainsi que l'efficacité de l'analyse dans les problèmes physiques ou mathématiques. Bien que l'utilisation des réseaux de neurones artificiels pour résoudre les équations physiques (EDP) ne soit pas un sujet nouveau, des avancées significatives ont été réalisées ces dernières années grâce à l'augmentation de la puissance de calcul (unités centrales de calcul et processeurs graphiques) [175], à l'émergence de la technologie de différentiation automatique [176] et aux améliorations des architectures de réseaux.

Étant donné que l'objectif de l'entraînement des réseaux de neurones dans les PINNs est de minimiser le résidu par la fonction de perte plutôt que de s'entraîner directement sur les données, le processus d'entraînement minimise le coût de calcul afin d'assurer que les prédictions respectent les équations physiques et les contraintes. Par conséquent, Haghghat et al. [177] considère les PINNs comme une forme d'apprentissage par renforcement [178]. En revanche, puisque cette méthode utilise une petite quantité de points de données connus (tels que les conditions initiales et aux limites) ainsi qu'un grand nombre de points de données non étiquetés pour satisfaire les équations physiques définies et entraîner le réseau de neurones, nous considérons que les PINNs peuvent être considérés comme une forme d'apprentissage semi-supervisé [179].

Depuis l'apparition des PINNs, ils ont été largement appliqués dans divers domaines, notamment les problèmes mathématiques traditionnels [180], la résolution de EDP stochastiques à haute dimension [181], l'optique [182], la biologie [183, 184], la science des matériaux [185], la mécanique des fluides [186, 187, 188] et la mécanique des solides [177, 189, 190]. Les cadres d'apprentissage profond traditionnels incluent TensorFlow [191], PyTorch [192] et Keras [193]. Pour mieux utiliser les PINNs, plusieurs nouveaux cadres tels que DeepXDE [194], SciANN [195] et Nvidia Modulus [196] ont également été développés.

En plus des approches basées sur les données et le modèle des PINNs, il existe d'autres modèles basés sur la physique, tels que le réseau de neurones guidé par la physique (PGNN : Physics-Guided Neural Network) [197] et le réseau de neurones encodé par la physique (PENN : Physics-Encoded Neural Networks) [198] dans le domaine de l'apprentissage profond [199]. Cependant, compte tenu des principes des PINNs, de leur développement rapide, de leur capacité à intégrer les lois physiques fondamentales, de leur efficacité avec des données limitées et de leur facilité d'implémentation, nous avons choisi d'utiliser les PINNs pour modéliser la matrice minérale et mener des études sur les problèmes directs et inverses pour les matériaux fragiles isotropes dans la phase linéaire.

## 4.2.2 Architectures et démarche de PINN traditionnel

Pour mieux illustrer le fonctionnement du PINN, son architecture et sa démarche sont présentées dans la figure 4.1. Selon ses composants, il peut se constituer de trois parties.

### 4.2.2.1 Réseaux de neurones

La première partie est le réseau de neurones, comme le montre la figure 4.2. Dans ce réseau, les données d'entrée passent par plusieurs couches cachées avant d'atteindre la couche de sortie. Les neurones de chaque couche sont entièrement connectés à ceux de la couche suivante. À chaque couche, les données d'entrée sont transformées par des pondérations et des fonctions

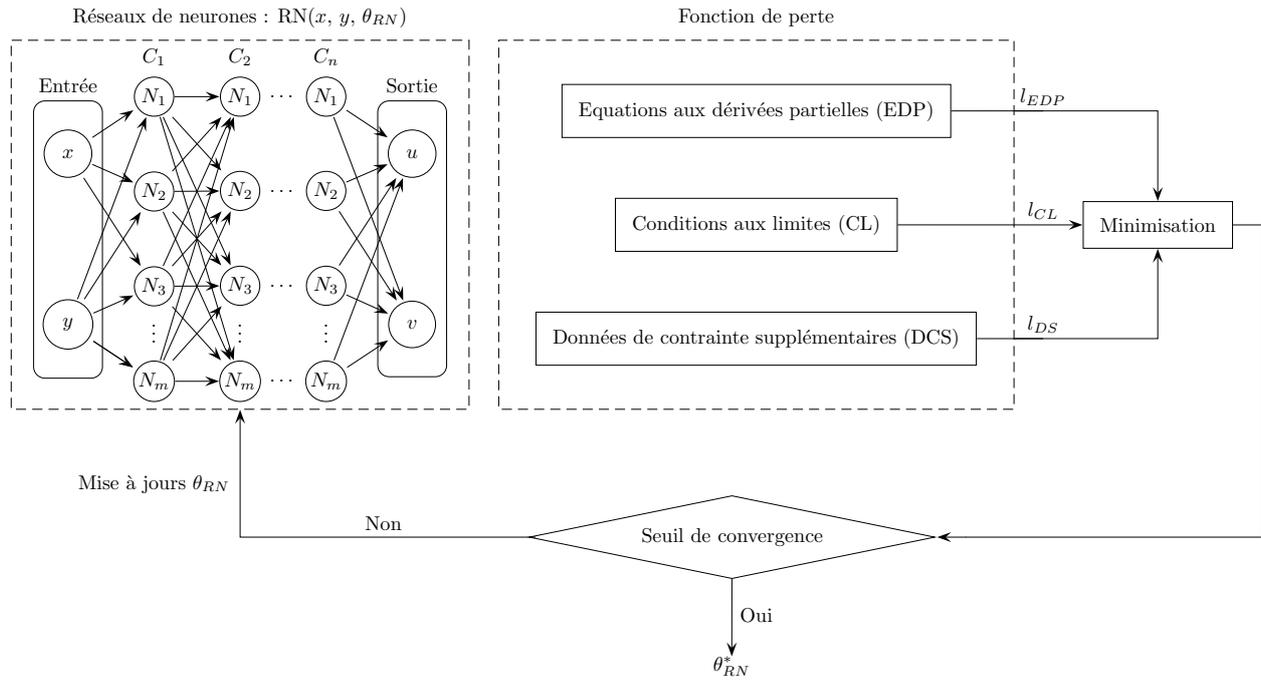


FIGURE 4.1 – Architecture et démarche d’un PINN traditionnel.

d’activation pour extraire des caractéristiques. Ce processus de transformation, appelé propagation avant, a pour objectif principal de convertir les données d’entrée en résultats utiles.

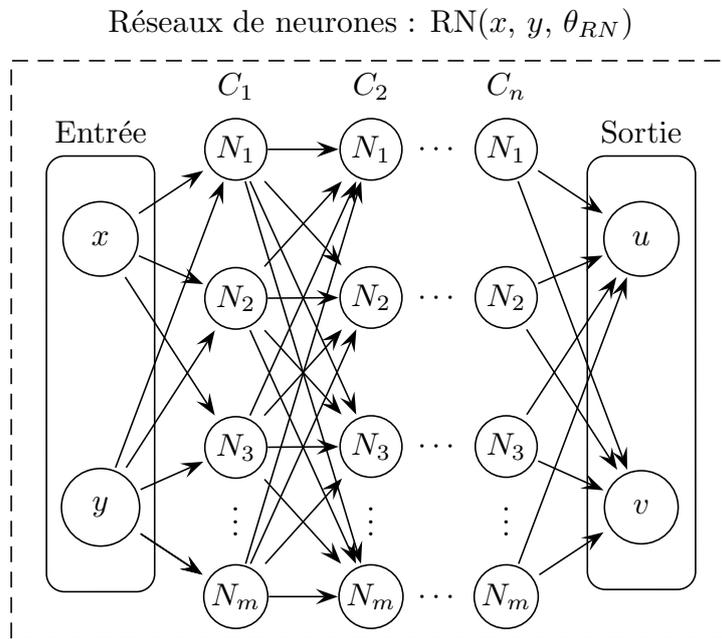


FIGURE 4.2 – Schéma du réseau de neurones.

Dans le domaine de la mécanique des solides, pour les problèmes statiques, les variables d’entrée sont généralement les positions des particules du solide (coordonnées  $x$  et  $y$ ). Pour les problèmes dynamiques ou les cas particuliers, la variable temporelle  $t$  peut également être

incluse dans le jeu de variables d'entrée. Après la transformation par le réseau de neurones, les déplacements correspondants ( $u$  et  $v$ ) sont obtenus. Ces déplacements sont considérés comme des variables de sortie pour les calculs ultérieurs.

Dans le réseau de neurones,  $\theta_{RN}$  représente les paramètres du réseau de neurones, constitués des poids  $w$  et des biais  $b$  de chaque couche. Contrairement aux coordonnées  $x$  et  $y$  des variables d'entrée, la valeur de  $\theta_{RN}$  est fixée lors de la construction du réseau de neurones, ce qui est étroitement liée au nombre de couches et de neurones. Généralement, le volume du réseau  $V_{RN}$  est décrit en termes de nombre de couches et de neurones. Par exemple, dans la figure 4.2, le réseau de neurones entier se compose de  $C_n$  couches cachées et de  $N_m$  neurones. Donc le volume du réseau  $V_{RN}$  est de  $C_n \times N_m$ . Étant donné que la valeur de  $\theta_{RN}$  affecte directement les résultats de la couche de sortie, l'objectif de l'entraînement du réseau de neurones est de mettre à jour les valeurs de  $\theta_{RN}$  afin d'obtenir des résultats satisfaisants.

Il est à noter qu'à mesure que le volume  $V_{RN}$  augmente, les résultats obtenus deviennent généralement plus proches des valeurs exactes après un certain nombre d'itérations d'entraînement. Cependant, le coût de l'entraînement augmente également de manière exponentielle. De plus, si  $V_{RN}$  est trop grande, les résultats de l'entraînement peuvent présenter le surajustement.

Outre le volume  $V_{RN}$  et la valeur de  $\theta_{RN}$ , la fonction d'activation joue également un rôle crucial dans le réseau de neurones. Pendant l'entraînement, elle introduit de la non-linéarité, permettant au réseau de capturer des relations complexes. Par exemple, dans le cas d'un champ de déplacement, la relation entre les coordonnées de position et les déplacements est souvent non-linéaire. Sans non-linéarité, chaque couche effectuerait une transformation linéaire, rendant impossible de capturer cette relation complexe et d'obtenir des déplacements précis. Différentes fonctions d'activation peuvent aussi comprimer les valeurs d'entrée dans un intervalle spécifique. La plupart des PINNs utilisent  $\tanh$  pour comprimer les données d'entrée entre  $-1$  et  $1$ . Selon les problèmes,  $ReLU$  (Rectified Linear Unit),  $\tanh$  et  $\text{sigmoid}$  sont couramment utilisés comme fonctions d'activation dans l'apprentissage profond [200].

Les fonctions d'activation peuvent également atténuer le problème de l'explosion du gradient pendant l'entraînement. En choisissant des fonctions d'activation appropriées, il est possible de s'assurer que les valeurs de gradient restent dans une plage raisonnable pendant l'entraînement, évitant ainsi que les gradients ne deviennent excessivement grands par la multiplication couche par couche, ce qui conduirait à des mises à jour de poids trop importantes et à une instabilité du modèle. Par conséquent, le choix de la fonction d'activation est crucial pour la stabilité et l'efficacité du processus d'entraînement.

Pour mieux comprendre la transmission entre les données d'entrée et les données de sortie à travers le réseau, un exemple simple est considéré. Supposons qu'un réseau de neurones contient une couche cachée ( $C_n = 1$ ) avec trois neurones ( $N_m = 3$ ), le volume de ce réseau peut s'écrire comme  $V_{RN} = 1 \times 3$ . Les détails de calcul entre la couche d'entrée et la couche cachée  $C_1$  sont représentés comme suit :

$$a^{(1)} = \tanh(W_1 X + b_1), \quad \text{Avec } W_1 = \begin{bmatrix} w_{11}^{(1)} & w_{12}^{(1)} \\ w_{21}^{(1)} & w_{22}^{(1)} \\ w_{31}^{(1)} & w_{32}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad b_1 = [b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, b_3^{(1)}] \quad (4.1)$$

Où  $X$  est le vecteur des variables d'entrée  $X = \langle x, y \rangle$ ,  $W_1$  et  $b_1$  sont la matrice des poids et le vecteur des biais de la couche cachée  $C_1$ , respectivement.  $a^{(1)}$  est le vecteur des variables de

sortie de  $C_1$ . Ensuite, les détails de calcul entre la couche cachée  $C_1$  et la couche de sortie sont représentés comme suit :

$$Y^{RN} = W_2 a^{(1)} + b_2, \quad \text{Avec } W_2 = \begin{bmatrix} w_{11}^{(2)} & w_{12}^{(2)} & w_{13}^{(2)} \\ w_{21}^{(2)} & w_{22}^{(2)} & w_{23}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad b_2 = [b_1^{(2)}, b_2^{(2)}] \quad (4.2)$$

Où  $Y^{RN} = \langle u, v \rangle$  est le vecteur des variables de sortie.  $W_2$  et  $b_2$  sont la matrice des poids et le vecteur des biais de la couche de sortie, respectivement. À partir de cet exemple, il n'est pas difficile de déterminer la taille de la matrice  $W_{C_n}$ , du vecteur  $b_{C_n}$  de la couche cachée  $C_n$ , ainsi que la taille de la matrice  $W_{C_{n+1}}$  et du vecteur  $b_{C_{n+1}}$  de la couche de sortie. Notez que la couche de sortie n'applique généralement pas de fonction d'activation afin d'éviter de limiter les valeurs des variables de sorties.

Dans les PINNs, à mesure que les problèmes à résoudre deviennent plus complexes et que le nombre de contraintes augmente, la taille des paramètres  $\theta_{RN}$  à optimiser pendant l'entraînement augmente également. Étant donné que le processus de mise à jour et d'optimisation de ces paramètres est très complexe, il est difficile de comprendre et d'interpréter intuitivement les détails de calcul. Par conséquent, dans l'apprentissage profond, la transmission des données dans le réseau de neurones est souvent considérée comme une boîte noire.

#### 4.2.2.2 Fonction de perte

La deuxième partie est la fonction de perte, comme le montre la figure 4.3. Cette fonction est principalement utilisée pour calculer la valeur de perte en substituant les données de sortie obtenues du réseau de neurones dans les équations physiques, les contraintes physiques et les données de contrainte supplémentaires.

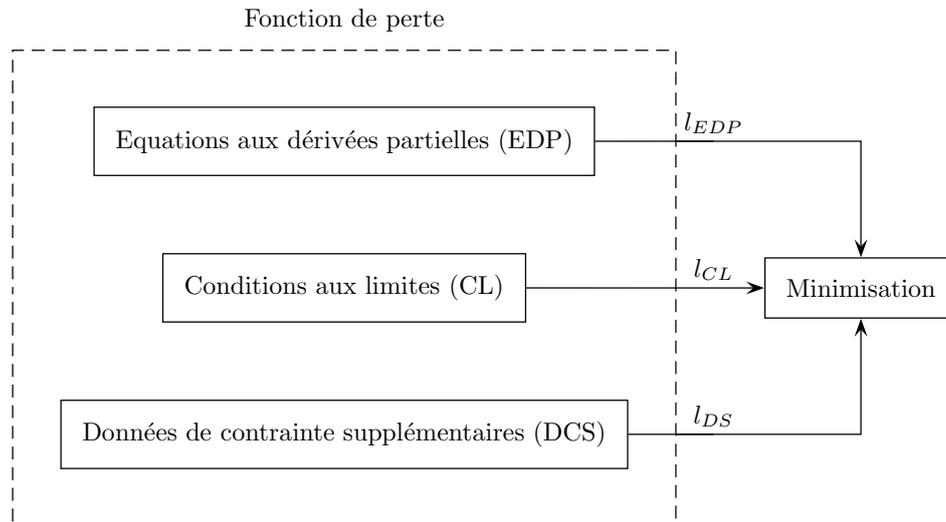


FIGURE 4.3 – Schéma de la fonction de perte.

La perte, notée  $l_{perte}$ , est une valeur scalaire obtenue en utilisant la fonction de perte  $L_{perte}$  et le poids de perte associé. Pour déterminer cette valeur, différentes fonctions de perte peuvent être utilisées. Dans l'apprentissage profond, les plus courantes sont l'erreur quadratique moyenne (EQM), l'erreur absolue moyenne (EAM) et la perte d'entropie croisée (PEC).

La PEC est souvent utilisée dans les problèmes de classification avec des valeurs de sortie de probabilité (variant entre 0 et 1), donc elle n'est pas considérée pour implémentation dans les PINNs. D'autre part, l'EQM évalue les erreurs au carré. Ainsi, elle est plus sensible aux erreurs significatives par rapport à l'EAM, ce qui est crucial pour contrôler et corriger les données de sortie du réseau de neurones [201, 202]. De plus, l'EQM est similaire à la norme  $L^2$ , ce qui la rend plus bénéfique pour les algorithmes d'optimisation basés sur les gradients. En conséquence, l'EQM est la plus couramment utilisée dans les PINNs, et son expression est :

$$EQM = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n (Y_i - Y_i^{RN})^2 \quad (4.3)$$

Où  $n$  est le nombre de données utilisées,  $Y$  est la valeur de référence.  $Y - Y^{RN}$  peut être considéré comme la perte à adapter aux différentes contraintes physiques dans les PINNs.

Dans ce qui suit, nous nous basons sur le problème de déformations planes en mécanique des solides dans la phase de comportement linéaire, défini par le système (4.4), pour mieux illustrer les architectures des PINNs ainsi que leurs applications correspondantes :

$$\begin{cases} \nabla \sigma + \mathbf{f} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon(\mathbf{u}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\varepsilon(\mathbf{u})) I \right) & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p} & \text{sur } \partial\Omega_N \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{sur } \partial\Omega_D \end{cases} \quad (4.4)$$

Ici,  $\sigma$  et  $\varepsilon$  désignent respectivement le tenseur de contrainte et le tenseur de déformation.  $\mathbf{f}$  représente la force volumique.  $\mathbf{u}$  est le champ de déplacement.  $I$  est la matrice d'identité.  $\bar{\mathbf{u}}$  et  $\mathbf{p}$  représentent respectivement le déplacement et la pression (traction surfacique) connus sur les frontières  $\partial\Omega_D$  et  $\partial\Omega_N$ .

### Équations aux dérivées partielles (EDP) :

Pour la mécanique des solides, les EDP (équations aux dérivées partielles) sont représentées par les équations d'équilibre dans les PINNs traditionnels. Cette équation est au centre du PINN pour contrôler le champ de déplacement du domaine  $\Omega$  et la direction d'optimisation de  $\theta_{RN}$ . Elle peut s'écrire comme suit en statique ou quasi-statique :

$$\nabla \sigma + \mathbf{f} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4.5)$$

En considérant que les variables de sortie sont le champ du déplacement  $\mathbf{u}^{RN}$ , l'équation (4.5) est prise en compte par la différentiation automatique. Une méthode permettant de calculer les dérivées des fonctions avec précision en décomposant les opérations en calculs élémentaires, est utilisée pour obtenir le champ de déformation et de contrainte avec la loi de Hooke :

$$\begin{cases} \varepsilon(\mathbf{u}^{RN}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^{RN} + {}^t \nabla \mathbf{u}^{RN}) \\ \sigma(\mathbf{u}^{RN}) = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon(\mathbf{u}^{RN}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\varepsilon(\mathbf{u}^{RN})) I \right) \end{cases} \quad (4.6)$$

Dans cette équation,  $\varepsilon(\mathbf{u}^{RN})$  et  $\sigma(\mathbf{u}^{RN})$  sont respectivement le tenseur de déformation et le tenseur de contrainte calculés à partir du champ de déplacement obtenu par le réseau de neurones  $\mathbf{u}^{RN}$ . D'après l'équation (4.5), la perte des EDP s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} l_{EDP} &= W_{EDP} L_{EDP} \\ &= W_{EDP} \text{EQM}(\nabla \sigma(\mathbf{u}^{RN}) + \mathbf{f}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Où  $W_{EDP}$  est le vecteur des poids,  $L_{EDP}$  est la fonction de perte et  $l_{EDP}$  est la valeur scalaire de la perte sur les EDP (équations d'équilibre).

### Conditions aux limite (CL) :

En plus des équations d'équilibre, les conditions aux limites sont essentielles pour l'entraînement des PINNs. Elles garantissent l'exactitude et la cohérence des équations physiques aux frontières, augmentant ainsi la précision et la fiabilité du modèle. Selon les définitions, les conditions aux limites peuvent être distinguées en condition de Dirichlet et condition de Neumann, et leurs pertes sont représentées comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_N = \text{EQM}(\sigma(\mathbf{u}^{RN}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{p}) \\ L_D = \text{EQM}(\mathbf{u}^{RN} - \bar{\mathbf{u}}) \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Où  $L_N$  et  $L_D$  sont les fonctions de perte sur les conditions de Neumann et de Dirichlet. Il est important de noter que, contrairement à la modélisation par la méthode éléments finis (MEF), les conditions de Neumann sur les frontières libres doivent également être définies dans le PINN. En conséquence, avec les vecteurs de poids définis pour les différentes conditions, tels que  $W_N$  et  $W_D$ , la perte scalaire totale des conditions aux limites,  $l_{CL}$ , s'écrit :

$$l_{CL} = W_N L_N + W_D L_D \quad (4.9)$$

### Données de contrainte supplémentaires (DCS) :

Dans la modélisation, l'ajout de données de contrainte supplémentaires peut accélérer la convergence du calcul et aider à contraindre le mouvement de corps rigide (MCR). Par exemple, les conditions de symétrie et les déplacements nuls au point central dans un essai de fendage. De plus, pour traiter des problèmes inverses, les données mesurées sur les surfaces doivent également être intégrées dans la fonction de perte. Ainsi, en prenant  $\mathbf{u}^{DCS}$  comme les données de contrainte supplémentaires, le vecteur de perte  $W_{DCS}$ , la fonction de perte  $L_{DCS}$  et la perte scalaire  $l_{DCS}$  se représentent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} l_{DCS} &= W_{DCS} L_{DCS} \\ &= W_{DCS} \text{EQM}(\mathbf{u}^{RN} - \mathbf{u}^{DCS}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

En résumé, la perte totale  $l_{TOT}$  combinant les différentes pertes scalaires des diverses fonctions de perte est décrite par :

$$l_{TOT} = l_{EDP} + l_{CL} + l_{DCS} \quad (4.11)$$

### 4.2.2.3 Minimisation

La troisième partie est la minimisation des pertes. Son objectif est de minimiser les valeurs de perte issues des équations d'équilibre et des différentes contraintes par l'optimiseur

Dans l'apprentissage automatique et l'apprentissage profond, les optimiseurs mettent à jour les paramètres  $\theta_{RN}$  en calculant le gradient de la fonction de perte pour améliorer la performance globale et la précision du modèle. Les optimiseurs courants incluent la descente de gradient stochastique (DGS), l'optimiseur de quantité de mouvement (DGS avec quantité de mouvement), et les optimiseurs à taux d'apprentissage adaptatif (propagation du carré moyen (RMSprop : Root Mean Square Propagation)) [203, 204]. Parmi ceux-ci, l'optimiseur le plus couramment utilisé est l'optimiseur à taux d'apprentissage adaptatif, l'Estimation de Moment Adaptatif (Adam : Adaptive Moment Estimation [205]).

Adam combine les avantages de l'optimiseur de quantité de mouvement et de RMSprop. Il utilise des estimations des moyennes de premier et de second ordre des gradients pour ajuster dynamiquement le taux d'apprentissage. Cela signifie qu'Adam peut ajuster la vitesse à laquelle il apprend en fonction de l'information disponible, ce qui permet une convergence plus rapide et plus stable. De plus, Adam gère bien les données bruitées et nécessite peu de réglages de paramètres, montrant de bonnes performances dans divers problèmes. Par conséquent, Adam est l'un des optimiseurs les plus utilisés actuellement et convient à de nombreux types de problèmes.

Pendant la minimisation avec l'optimiseur, les poids et les biais de chaque couche ( $\theta_{RN}$ ) sont mis à jour de la couche de sortie à la couche d'entrée, en fonction des valeurs de perte et des gradients correspondants. Ce processus est appelé la rétropropagation.

Le taux d'apprentissage est un paramètre significatif dans l'optimiseur, contrôlant la mise à jour des paramètres  $\theta_{RN}$  pendant l'entraînement du modèle. Ainsi, ce paramètre peut être considéré comme le pas de descente. Bien qu'un taux d'apprentissage élevé puisse accélérer l'entraînement du réseau de neurones, il peut également empêcher de minimiser les pertes à des valeurs très faibles, entraînant une non-convergence des calculs. En revanche, un taux d'apprentissage trop faible entraînera un processus d'entraînement trop lent. Bien qu'il puisse optimiser les pertes à un niveau très bas, il peut également se retrouver dans un minimum local. Par conséquent, l'ajustement du taux d'apprentissage en fonction des valeurs de perte dans le calcul est indispensable.

Dans le cadre des PINN, les valeurs de perte et leurs variations sont des indicateurs significatifs pour évaluer la convergence de l'entraînement. En général, lorsque les valeurs de perte atteignent le seuil de convergence défini et ne varient plus de manière significative avec l'augmentation du nombre d'itérations, on considère que l'entraînement a convergé. En revanche, lorsque les valeurs de perte n'ont pas atteint le seuil souhaité, le taux d'apprentissage peut être réduit pour optimiser davantage le modèle. De plus, si le nombre maximal d'itérations est atteint mais que les variations de la perte restent importantes, le nombre d'itérations peut être augmenté afin de stabiliser les valeurs de perte.

En résumé, le PINN est principalement composé de trois parties : la première partie est le réseau de neurones, qui transforme les données d'entrée en données de sortie par la propagation avant, couche par couche. La deuxième partie est la fonction de perte, qui calcule l'erreur correspondante en substituant les valeurs de sortie dans les équations physiques et les contraintes physiques. La troisième partie est la minimisation, qui utilise l'optimiseur et la rétropropaga-

tion pour propager les gradients de la fonction de perte pour chaque paramètre, de la couche de sortie à la couche d'entrée, afin de mettre à jour les paramètres  $\theta_{RN}$ . En conséquence, comme le montre l'équation 4.12, l'objectif des PINNs consiste à utiliser un optimiseur pour entraîner le modèle et trouver les paramètres appropriés qui minimisent la fonction de perte totale, afin de représenter fidèlement le comportement physique du modèle étudié.

$$\theta_{RN}^* = \arg \min_{\theta_{RN}} l_{TOT}(\theta_{RN}) \quad (4.12)$$

## 4.3 Améliorations et Méthodologies pour les PINNs

Jusqu'à présent, en utilisant les résultats de la MEF et les résultats théoriques comme valeurs de référence, plusieurs méthodes ont été proposées pour améliorer la crédibilité et la robustesse des PINNs. Selon les modifications, ces méthodes ont été classées en améliorations basiques et en méthodologies avancées.

### 4.3.1 Améliorations basiques

Les améliorations basiques désignent les ajustements et modifications simples apportés aux variables ou paramètres au sein des PINNs sans modifier la structure. Pour améliorer le PINN, quelques stratégies ont été proposées.

#### Adimensionnement des variables mécaniques :

La première amélioration est l'adimensionnement des paramètres et variables, ce qui peut améliorer l'adaptabilité du réseau de neurones aux quantités physiques de différentes échelles. Étant donné que la perte totale scalaire  $l_{TOT}$  est composée de différentes pertes sous diverses contraintes, et que toutes les valeurs de poids sont définies à 1 par défaut, la valeur de  $l_{TOT}$  influence fortement la mise à jour des paramètres. Lorsqu'une valeur de perte représente une proportion trop importante de  $l_{TOT}$ , l'optimiseur modifie également la direction d'optimisation afin de minimiser principalement cette valeur de perte, ce qui affecte la précision des résultats globaux obtenus par des PINNs. Parce que les variables et les paramètres ont des unités différentes, leurs valeurs peuvent varier considérablement en ordre de grandeur, affectant ainsi l'efficacité de l'entraînement des PINNs. Par conséquent, l'adimensionnement de ces variables et paramètres est un traitement indispensable.

Pour réaliser l'adimensionnement, trois paramètres caractéristiques sont définis [196]. En normalisant les variables d'entrée, c'est-à-dire les coordonnées  $x$  et  $y$ , pour qu'elles varient entre  $-1$  et  $1$ , plusieurs avantages sont obtenus. Premièrement, la fonction d'activation  $\tanh$  fonctionne plus efficacement dans cette plage, permettant une transformation non-linéaire plus précise des données entre les couches du réseau. Deuxièmement, cela stabilise la propagation des gradients pendant la rétropropagation, rendant l'entraînement des PINNs plus stable et efficace. Par conséquent, la longueur caractéristique  $l_c$ , qui représente la longueur maximale, est définie comme le montre l'équation (4.13) pour garantir que les coordonnées sont comprises entre  $-1$  et  $1$ .

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{l_c} \quad (4.13)$$

Où  $\hat{\mathbf{x}} = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$  est le vecteur des variables d'entrée adimensionnées. Pour éviter l'effet de l'ordre de grandeur sur les paramètres mécaniques dans la fonction de perte des équations d'équilibre (EDP) et des conditions aux limites, le module caractéristique  $\mu_c$  est défini pour garantir que le module de cisaillement adimensionné  $\hat{\mu}$  soit égal à 1. Ainsi, les coefficients de Lamé adimensionnés ( $\hat{\mu}, \hat{\lambda}$ ) ainsi que le module de Young et le coefficient de Poisson adimensionnés ( $\hat{E}, \hat{\nu}$ ) sont définis comme suit :

$$\mu_c = \frac{\mu}{\hat{\mu}}, \quad \hat{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu_c}, \quad \hat{E} = \frac{E}{\mu_c}, \quad \hat{\nu} = \nu \quad (4.14)$$

Étant donné que le chargement est connu dans le problème direct, la contrainte caractéristique  $\sigma_c$  est définie pour que la valeur maximale de la pression adimensionnée  $\hat{\mathbf{p}}$  soit 1, permettant de normaliser la pression appliquée. Le déplacement caractéristique  $u_c$  est déterminé à partir de ces trois paramètres caractéristiques pour transformer le vecteur des déplacements adimensionnés  $\hat{\mathbf{u}} = \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle$  en vecteur de déplacements normaux  $\mathbf{u} = \langle u, v \rangle$ . Les détails de calcul sont illustrés ci-dessous :

$$\sigma_c = \frac{1}{\max(\mathbf{p})}, \quad \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}\sigma_c, \quad u_c = \frac{l_c}{\sigma_c\mu_c}, \quad \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}u_c \quad (4.15)$$

En revanche, lorsque les déplacements mesurés sont déjà connus dans le problème de l'identification, le déplacement caractéristique  $u_c$  est défini pour transformer que la valeur maximale de  $\hat{\mathbf{u}}$  ne dépasse pas 1. Selon l'objectif de l'identification,  $l_c$  et  $u_c$  sont déjà connus, la contrainte caractéristique  $\sigma_c$  ou le module caractéristique  $\mu_c$  sont calculés selon les trois autres paramètres caractéristiques.

$$\begin{aligned} \text{Identification des paramètres : } u_c &= \max(\mathbf{u}), & \mu_c &= \frac{l_c}{u_c\sigma_c} \\ \text{Identification des conditions aux limites : } u_c &= \max(\mathbf{u}), & \sigma_c &= \frac{l_c}{u_c\mu_c} \end{aligned} \quad (4.16)$$

### Formulation à variables mixtes :

La seconde amélioration est l'utilisation de la formulation à variables mixtes [189] comme variables de sortie. Par rapport au PINN traditionnel, avec cette amélioration, les variables de sortie des PINNs sont sous forme de variables mixtes (champ de déplacement et de contrainte).

Lorsque uniquement le champ de déplacement est utilisé comme variable de sortie, le calcul de la fonction de perte liée aux équations d'équilibre nécessite de prendre la seconde dérivée du champ de déplacement pour obtenir le gradient du champ de contrainte. Ce processus est facilement susceptible de provoquer des erreurs de calcul supplémentaires. En revanche, en prenant directement les contraintes comme variables de sortie, ces erreurs sont réduites en simplifiant le calcul, rendant l'optimiseur plus capable de contrôler  $\theta_{RN}$ , améliorant ainsi la précision globale du modèle.

De plus, l'utilisation de la formulation à variables mixtes permet de minimiser les pertes causées par les conditions de Neumann dans la fonction de perte, ce qui améliore l'efficacité de l'entraînement. Par conséquent, en gardant le calcul sur la loi de Hooke généralisée (l'équation (4.6)), la perte scalaire entre les contraintes obtenues par le réseau de neurones et les contraintes calculées à partir des déplacements doit également être incluse dans la perte totale. L'expression

de la perte scalaire correspondante  $l_{mixte}$  est décrite comme suit :

$$l_{mixte} = W_{mixte} \text{EQM}(\sigma^{RN} - \sigma(\mathbf{u}^{RN})) \quad (4.17)$$

Parallèlement, les perte des équations d'équilibre (4.7) et des conditions aux limites (4.9) deviennent :

$$l_{EDP} = W_{EDP} \text{EQM}(\nabla \sigma^{RN} + \mathbf{f}) \quad (4.18)$$

$$l_{CL} = W_N \text{EQM}(\sigma^{RN} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{p}) + W_D \text{EQM}(\mathbf{u}^{RN} - \bar{\mathbf{u}}) \quad (4.19)$$

### Transformation des variables :

Étant donné que le développement des PINNs vise principalement à fournir une nouvelle approche et méthodologie pour résoudre les problèmes mathématiques, il est donc difficile de garantir que les résultats aient une signification physique suffisante, surtout dans l'identification des variables inconnues. Par exemple, dans le problème de mécanique des solides, pour identifier les paramètres élastiques, le coefficient de Poisson  $\nu$  pour les matériaux fragiles doit varier entre 0 et 0.5.

Néanmoins, afin d'obtenir une valeur de perte plus petite, le PINN pourrait donner une valeur négative de  $\nu$  en raison de l'absence de contraintes définies. Pour résoudre ce problème, avant de procéder à l'adimensionnement des paramètres, tous les paramètres ayant une signification physique spécifique devraient être traités par une transformation des variables comme le montre l'équation (4.20).

$$\theta^p = \alpha^p (\tanh(\tilde{\theta}^p) + 1) + \beta^p \quad (4.20)$$

Où  $\theta^p$  est le paramètre ayant une signification physique, et  $\tilde{\theta}^p$  est le paramètre de transformation. Pour transformer  $\tilde{\theta}^p$  en  $\theta^p$ , la fonction  $\tanh$  est recommandée [206]. Comme la sortie de cette fonction se trouve dans l'intervalle de  $-1$  à  $1$ , la valeur de  $\tilde{\theta}^p$  varie entre  $[\beta^p, 2\alpha^p + \beta^p]$ , où  $\alpha^p$  et  $\beta^p$  sont des scalaires définissant les bornes de la variation.

### 4.3.2 Techniques avancés

Les techniques avancées désignent les méthodes qui améliorent la robustesse et la précision des PINNs en modifiant la structure du réseau de neurones, les équations physiques ou les variables physiques. En fonction de leurs caractéristiques, ces techniques peuvent être classées ainsi :

#### Échantillonnage des données d'entrée :

L'échantillonnage des données d'entrée est une méthode très efficace pour améliorer la précision des PINNs. Le réseau de neurones traditionnel utilise l'échantillonnage aléatoire des points comme données d'entrée, mais cette approche peut ne pas fournir un nombre suffisant de points dans les régions significatives et représentatives. Cela peut entraîner une mauvaise approximation des solutions dans ces régions, réduisant ainsi l'efficacité et la précision du modèle.

Ainsi, des stratégies proposent d'ajouter les points d'entrée selon les valeurs de perte pendant l'entraînement [206, 207]. Par exemple, en surveillant les valeurs de perte pendant l'entraînement, on peut identifier les régions où les erreurs sont les plus élevées et y ajouter davantage de points d'entrée pour améliorer la précision.

Par ailleurs, ces méthodes se combinent bien avec les autres techniques avancées. Par exemple, pour mieux appliquer l'approximation de Monte Carlo afin de déterminer la perte d'intégration lorsque les équations d'équilibre sont remplacées par les erreurs des énergies libres, la méthode de l'échantillonnage par importance [208] et la méthode de l'échantillonnage quasi-aléatoire [209] ont été proposées pour minimiser les erreurs obtenues dans l'approximation.

### Structure du réseau de neurones :

Dans les PINNs, la modification de la structure du réseau de neurones peut également améliorer l'efficacité du modèle. Traditionnellement, un seul réseau de neurones est utilisé pour traiter tous les variables d'entrée. Cependant, lorsqu'il s'agit de plusieurs variables d'entrée complexes, un seul réseau peut ne pas être en mesure de déterminer de manière adéquate les relations complexes entre ces variables, ce qui entraîne une dégradation des performances du modèle.

Haghighat et al. [177] a découvert que la mise en place de réseaux indépendants pour chaque type de sortie peut mieux optimiser l'entraînement des PINNs, conduisant à des sorties plus spécifiques, comme illustré dans la figure 4.4. Cette approche est appelée réseau de neurones parallèle (RNP). En supposant que les variables d'entrée soient les coordonnées  $x$  et  $y$ , et que les variables de sortie soient les déplacements  $u$  et  $v$ , la construction de deux réseaux neuronaux indépendants permet de capturer avec plus de précision les détails des déplacements dans les différentes directions, produisant ainsi des résultats plus exacts.

### Fonction d'activation :

Outre la modification de la structure du réseau de neurones, l'ajustement de la fonction d'activation permet aussi d'améliorer les PINNs [210, 211]. Les réseaux de neurones traditionnels utilisent des fonctions d'activation fixes, qui peuvent ne pas toujours fournir les meilleures performances en raison des difficultés à transformer efficacement les données de sortie entre chaque couche dans des problèmes complexes ou hautement non linéaires.

Jagtap et al. [210] a proposé une méthode d'activation adaptative (MAA) pour améliorer la convergence et la précision du modèle PINN. Cette méthode consiste à ajouter une nouvelle variable scalaire,  $\beta_{adapt}$ , initialement fixée à la valeur de 1 à l'intérieur de la fonction d'activation. Cette variable est mise à jour pendant l'entraînement du réseau pour ajuster la pente de l'activation afin d'accélérer la convergence du calcul. Selon les équations (4.1) et (4.2), l'application de la méthode d'activation adaptative globale entre les différentes couches s'exprime sous la forme suivante :

$$a^{(k)} = \tanh \left( \beta_{adapt} (W_k a^{(k-1)} + b_k) \right) \quad (4.21)$$

Où  $a^{(k)}$  et  $a^{(k-1)}$  sont les données de sortie des couches cachées  $C_k$  et  $C_{k-1}$ , et  $W_k$  et  $b_k$  sont les poids et les biais correspondants.

### Équations physiques :

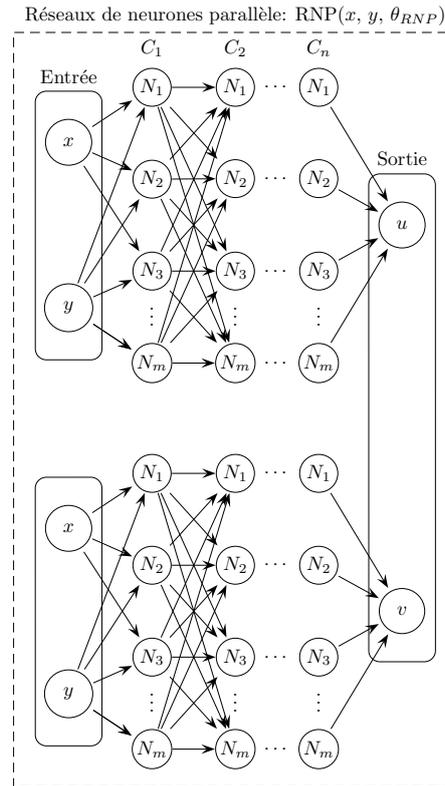


FIGURE 4.4 – Schéma du réseaux de neurones parallèle.

Les PINNs traditionnels utilisent les EDPs comme équations physiques pour guider l'entraînement du réseau de neurones. Dans le domaine de la mécanique des solides, les équations d'équilibre ont été implémentées dans les PINNs pour modéliser le comportement linéaire et non linéaire [174, 177, 195]. Cependant, certaines études montrent que la formulation variationnelle peut offrir de meilleurs résultats que les EDPs traditionnelles dans les problèmes mathématiques [212, 213, 214].

Ainsi, la méthode énergétique [215, 216] ou la méthode variationnelle [217, 218] ont été proposées pour résoudre les problèmes directs et inverses, en phase linéaire comme en phase non linéaire, en minimisant l'erreur des travaux internes et externes [219, 220, 221]. Pour appliquer ces méthodes, l'équation (4.5) doit être remplacée par l'équation variationnelle, dont la forme pour le problème élastique est illustrée comme suit :

$$\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon dV_{\Omega} - \int_{\Omega} \mathbf{f} u dV_{\Omega} - \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} u dS = 0 \quad (4.22)$$

Où  $\Omega$  est le domaine du solide,  $V_{\Omega}$  est le volume du solide,  $\mathbf{T} = \sigma \cdot \mathbf{n}$  est le vecteur de traction surfacique, et  $\partial\Omega$  est la surface des frontières du solide. Il est important de noter que pour appliquer cette équation, les stratégies d'échantillonnage sont indispensables. En effet, pour calculer les pertes associées, des méthodes d'approximation telles que Monte Carlo sont nécessaires pour estimer le volume unitaire et la surface unitaire en chaque point d'entrée.

En conservant les équations physiques telles que les équations d'équilibre, un autre modèle a également été proposé pour améliorer les PINNs, Yu et al. [222] a présenté un modèle amélioré de PINN, appelé GPINN (PINNs amélioré par le gradient). Ce modèle vise à améliorer la précision et l'efficacité des réseaux de neurones dans la résolution des problèmes d'EDPs en

introduisant les gradients des EDPs dans la fonction de perte.

Étant donné que l'objectif de la fonction de perte est de minimiser les pertes des EDPs et de leurs contraintes par l'optimiseur, l'incorporation du gradient des EDPs peut accélérer la réduction des pertes et la convergence du calcul.

$$l_{GPINN} = W_{GPINN} \text{EQM}(\nabla(\nabla\sigma + \mathbf{f})) \quad (4.23)$$

Où  $W_{GPINN}$  est le vecteur des poids de perte sur le gradient des EDPs. Cependant, bien que l'incorporation du gradient dans la fonction de perte des EDPs permette d'obtenir théoriquement des résultats prédits plus précis, le calcul du gradient peut rendre le coût de l'entraînement exponentiellement élevé dans les problèmes de haute dimension. De plus, inclure des termes supplémentaires dans la fonction de perte peut rendre la convergence de l'entraînement plus difficile en raison de l'augmentation de la complexité de la sélection des hyperparamètres et de l'ajustement des poids de l'entraînement. Ainsi, lorsque les problèmes sont traités dans la phase non linéaire avec des conditions aux limites complexes, l'introduction du gradient des EDPs peut entraîner une instabilité accrue des résultats d'entraînement du modèle.

D'autre part, les contraintes des EDPs sont définies de manière souple, et l'ajout de la perte des gradients des EDPs avec les mêmes poids que les autres au début dans l'optimiseur conduira facilement à un minimum local. Par conséquent, il est préférable d'utiliser le GPINN en conjonction avec des techniques d'ajustement des poids.

### Conditions aux limites :

Pour garantir que les résultats obtenus par les PINNs entraînés respectent les contraintes des conditions aux limites définies, les réseaux de neurones minimisent généralement les pertes des conditions aux limites à l'aide de l'optimiseur. Cependant, cette approche de contrainte souple peut entraîner des résultats ne satisfaisant pas entièrement les conditions aux limites prescrites, car la valeur de perte est très difficilement exactement nulle. Pour résoudre ce problème, plusieurs méthodes pour imposer exactement les conditions aux limites ont été proposées [189, 223, 224].

L'objectif principal de ces méthodes est de garantir que les données de sortie générées par le réseau de neurones respectent complètement les conditions aux limites définies. Cela permet de supprimer ces termes de perte dans l'optimiseur, améliorant ainsi la précision des résultats obtenus. Généralement, pour s'assurer que les données de sortie respectent certaines conditions aux limites spécifiques, de nouvelles données sont utilisées pour remplacer les données de sortie originales dans le calcul de la fonction de perte. Par exemple, dans les problèmes de mécanique des solides, en supposant que les variables d'entrée du réseau sont  $\mathbf{x}$  et les variables de sortie sont  $\mathbf{u}^{RN}$ , la relation entre  $\mathbf{u}^{RN}$  et les nouvelles variables de sortie  $\mathbf{u}_{IECL}^{RN}$  peut être représentée de la manière suivante :

$$\mathbf{u}_{IECL}^{RN}(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})\mathbf{u}^{RN}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}) \quad (4.24)$$

où  $F(\mathbf{x})$  est une fonction spéciale ayant la valeur de 0 aux frontières où les conditions aux limites sont connues.  $G(\mathbf{x})$  est une fonction représentant les valeurs exactes des conditions aux limites connues. Dans l'étude de Sukumar et Srivastava [224], la fonction de distance approximative  $\phi(\mathbf{x})$  peut être considérée comme  $F(\mathbf{x})$  pour imposer exactement les conditions aux limites. Cette fonction respecte totalement les caractéristique de  $F(\mathbf{x})$ . En effet,  $\phi(\mathbf{x})$  est

capable de donner une valeur de zéro à tous les points sur la frontière où les conditions aux limites sont connues, tout en étant suffisamment lisse pour réduire la difficulté de l'entraînement des PINNs. Les étapes de calcul de  $\phi(\mathbf{x})$  sont présentées en annexe D.1.

Pour  $G(\mathbf{x})$ , les conditions aux limites étant connues, un réseau de neurones de petite taille a été proposé pour construire cette fonction [189, 225]. Un réseau de neurones de plus petite taille permet un entraînement rapide et fournit des résultats précis en utilisant les conditions aux limites connues. L'utilité principale de  $G(\mathbf{x})$  est de fournir des valeurs pour les points où les conditions aux limites sont déjà connues. Comme pour la fonction de distance approximative, afin d'éviter les erreurs de calcul supplémentaires dues à la discontinuité des résultats de la fonction, les valeurs des conditions aux limites inconnues ne sont pas simplement fixées à zéro. Au lieu de cela, un petit réseau de neurones est recommandé. En s'appuyant uniquement sur les conditions aux limites connues pour entraîner le réseau,  $G(\mathbf{x})$  peut converger rapidement et fournir des valeurs lisses pour tous les points du domaine.

Ces valeurs ne représentent pas nécessairement les conditions aux limites exactes, mais elles peuvent être utilisées en combinaison avec  $\phi(\mathbf{x})$  et les données de sortie du réseau de neurones pour former de nouvelles données, utilisées dans la fonction de perte pour entraîner le modèle.

Il est important de noter que les méthodes permettant d'imposer précisément les conditions aux limites, telles que l'imposition exacte des conditions aux limites (IECL), peuvent intégrer efficacement les conditions de Dirichlet dans les PINNs. Cependant, l'imposition des conditions de Neumann reste un défi. La traction ou la pression surfacique est obtenue par le produit du tenseur de contrainte et du vecteur normal sortant. Lorsque la frontière du solide a une forme complexe, même si la pression de surface est connue, imposer la pression appliquée devient plus difficile.

En résumé, l'imposition exacte des conditions aux limites améliore considérablement la précision des résultats obtenus par les PINNs sur des solides de forme régulière. Cependant, pour les solides de forme irrégulière ou complexe, cette méthode nécessite encore des améliorations. En particulier, des recherches supplémentaires sont nécessaires pour mieux gérer les conditions de Neumann sur des géométries complexes.

### Poids des perte :

L'entraînement global des PINNs est réalisé à l'aide d'un optimiseur, où la direction de l'entraînement et la convergence sont principalement contrôlées par les poids des pertes. Ces poids déterminent l'importance relative de chaque composante de la perte totale. Lorsque ces paramètres ne sont pas définis de manière adéquate, le calcul peut rencontrer des problèmes de convergence. Par conséquent, de nombreuses méthodes ont été proposées pour ajuster et mettre à jour automatiquement les poids des pertes pendant l'entraînement [226, 227, 228].

Parmi ces études, la méthode d'ajustement adaptatif des pertes (MAAP), proposée par Heydari et al. [227], est un algorithme simple d'équilibrage des pertes qui peut ajuster dynamiquement les poids des pertes pendant l'entraînement. L'essence de cette méthode consiste à mesurer le rapport entre la valeur de la perte de l'itération en cours et celle de l'itération précédente à l'aide de la fonction *Softmax*. *Softmax* est une fonction utilisée pour normaliser un vecteur en une distribution de probabilité, dont les valeurs de sortie sont comprises entre 0 et 1. Après un certain nombre d'itérations, cette méthode met à jour les poids des différentes pertes en fonction de ces rapports, ce qui permet d'équilibrer l'importance de chaque composante de

la perte totale. L'expression de MAAP est illustrée ci-dessous :

$$w_j(i) = \frac{\exp\left(\frac{l_j(i)}{l_j(i-1) + \epsilon}\right)}{\sum_{k=1}^{n_{perte}} \exp\left(\frac{l_k(i)}{l_k(i-1) + \epsilon}\right)} \quad (4.25)$$

Où  $w_j(i)$  est le poids scalaire de la perte  $j$  à la  $i^{\text{ème}}$  itération.  $l_j(i)$  et  $l_j(i-1)$  sont les valeurs de la perte  $j$  à la  $i^{\text{ème}}$  et  $(i-1)^{\text{ème}}$  itérations respectivement.  $n_{perte}$  est le nombre de pertes utilisé dans l'optimiseur.  $\epsilon$  est une petite valeur permettant d'éviter les problèmes de calcul lorsque les valeurs de  $l_j(i)$  et  $l_j(i-1)$  sont très proches.

## 4.4 Applications des PINNs aux problèmes directs en mécanique des solides

Les PINNs visent à résoudre des problèmes régis par des EDPs en intégrant directement ces équations dans l'entraînement du modèle. En mécanique des solides, les PINNs transforment les coordonnées du solide  $\mathbf{x}$  en données de sortie, telles que les champs de déplacement  $\mathbf{u}$  et de contrainte  $\sigma$ , par l'intermédiaire du réseau neuronal. Ces données sont ensuite incorporées dans des fonctions de perte pour les équations d'équilibre  $L_{EDP}$ , les conditions aux limites  $L_{CL}$  et les données de contrainte supplémentaires  $L_{DCS}$ . En minimisant la perte totale  $l_{TOT}$  à l'aide de l'optimiseur, des valeurs appropriées pour les paramètres du réseau  $\theta_{RN}$  sont déterminées, optimisant ainsi les résultats de sortie. Le principe des PINNs pour les problèmes directs ou la modélisation numérique peut être représenté par l'équation suivante :

$$\theta_{RN}^* = \arg \min_{\theta_{RN}} l_{TOT}(\mathbf{x}, \theta_{RN}) \quad (4.26)$$

Pour mieux démontrer la précision et la robustesse des PINNs, ainsi que les améliorations apportées par les techniques avancées individuelles, le modèle PINN traditionnel avec des améliorations basiques, ainsi que le modèle PINN traditionnel avec des améliorations basiques et différentes techniques avancées ont été utilisés pour modéliser numériquement les matériaux isotropes fragiles dans la phase linéaire. Les techniques avancées ont été choisies en fonction de leurs caractéristiques spécifiques qui améliorent différentes parties du PINN, telles que le RNP (Réseau de neurones parallèle), la MAA (Méthode d'activation adaptative), l'IECL (Imposition exacte des conditions aux limites) et la MAAP (Méthode d'ajustement adaptatif des pertes).

En outre, les résultats obtenus par la MEF sont considérés comme les valeurs de référence, et les comparaisons des résultats entre les PINNs et la MEF sont réalisées afin d'évaluer les performances des modèles d'apprentissage profond. Ainsi, les points de maillage de la MEF sont utilisés dans les PINNs, et les méthodologies d'échantillonnage ne sont pas considérées dans les applications et les comparaisons.

Il est important de noter que, dans cette application, les méthodes variationnelles ou basées sur l'énergie n'ont pas été utilisées. En effet, ces méthodes nécessitent une combinaison avec des techniques d'échantillonnage et l'IECL pour être efficaces, et elles ont donc été temporairement écartées. Par conséquent, l'approche adoptée ici se concentre uniquement sur l'évaluation directe des différentes techniques avancées appliquées aux PINNs, sans prendre en compte les

combinaisons nécessitant des méthodes supplémentaires. Pour la même raison, le GPINN, qui nécessite une combinaison avec des techniques d'ajustement des poids pour démontrer son efficacité, n'a pas été inclus dans cette application.

#### 4.4.1 Configuration numériques des modèles des PINNs

Pour garantir que la géométrie de la modélisation soit générale, ni trop complexe ni trop simple, l'essai de compression sur la plaque à un trou a été sélectionné comme objectif de simulation, similaire aux exemples illustrés dans les études [189, 213, 219]. Pour illustrer l'application numérique sur les matériaux fragiles, les paramètres sont définis avec ceux de la matrice ettringitique avec une loi de comportement symétrique :  $E = 8.83$  GPa,  $\nu = 0.216$ . Toutes les modélisations sont réalisées sous l'hypothèse de déformation plane avec une compression  $\mathbf{p}$  de 1 MPa. Afin de garantir la cohérence des comparaisons des résultats, tous les modèles de PINNs ont été codés en utilisant *Pytorch* et entraînés avec 32 Go de RAM, un processeur « Intel Core i9-10885H » et une carte graphique « Quadro T2000 ».

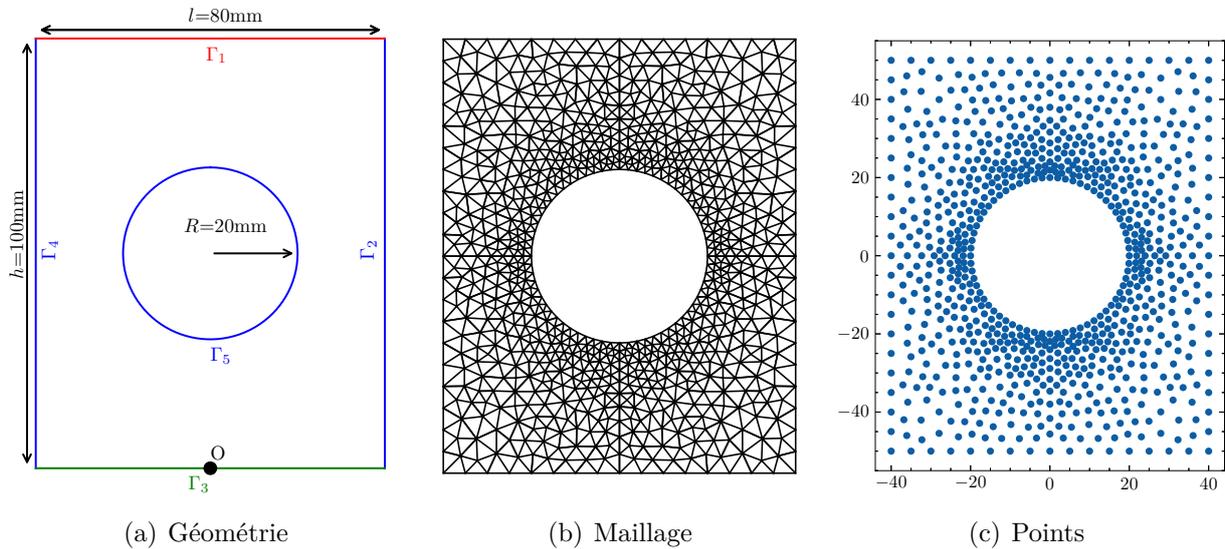


FIGURE 4.5 – Géométrie, maillage et points de la plaque à un trou utilisés dans la MEF et les PINNs.

La figure 4.5(a) illustre les définitions du domaine et des frontières avec  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5$ . La plaque représente une géométrie rectangulaire de dimensions  $l = 80$  mm et  $h = 100$  mm. Le grand trou est situé au centre de la plaque avec un rayon  $R = 20$  mm. Dans l'essai de compression, la frontière  $\Gamma_1$  subit une compression  $\mathbf{p}$  de 1 MPa. Les frontières  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_4$  et  $\Gamma_5$  sont des frontières libres, aucun chargement n'est appliqué. Sur la frontière  $\Gamma_3$ , le déplacement  $v$  est fixé à 0 mm. Pour éviter le MCR, le point  $O$  est défini au milieu de la frontière  $\Gamma_3$  avec un déplacement  $u = 0$  mm. Les forces de volumes sont prises égales à zéro.

Les figures 4.5(b) et 4.5(c) représentent le maillage de MEF et les points de la plaque à un trou utilisés dans les PINNs. Le maillage de plaque à un trou est constitué de 854 nœuds et de 1755 éléments de type T3. Afin d'obtenir les résultats plus précis, les éléments autour de grand trou sont raffinés, pour une longueur de triangle variant entre 2 mm à 5 mm. Pour les PINNs, 854 points en total sont utilisées dans les modèles :  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  contiennent de 17 points,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$  ont 21 points sur chacun, et  $\Gamma_5$  existe de 64 points.

Selon les différentes techniques appliquées, les configurations des modèles de PINNs présentent également de légères différences. Les détails de configuration sont illustrés ci-dessous.

#### 4.4.1.1 Configuration du PINN traditionnel avec les améliorations basiques

Pour des raisons de concision, l'expression « PINN traditionnel avec les améliorations basiques » sera désormais abrégée en « PINNT » dans ce manuscrit.

Étant donné que le problème est élastique en 2D, les variables d'entrée des PINNs sont les coordonnées  $x$  et  $y$ . Pour accélérer la convergence de l'entraînement, les variables de sortie sont définies sous forme mixte : les déplacements  $u$  et  $v$ , ainsi que les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{yy}$ .

Afin d'éviter l'effet de l'ordre de grandeur, l'adimensionnement des variables est appliqué avec les paramètres caractéristiques définis. Pour assurer que les coordonnées adimensionnées ne dépassent pas 1, la longueur caractéristique  $l_c$  est définie comme  $\frac{h}{2} = 50$  mm. Avec les paramètres imposés  $E = 8.83$  GPa et  $\nu = 0.216$ , pour fixer le module de cisaillement adimensionné  $\hat{\mu} = 1$ , le module caractéristique est défini par  $\mu_c = 3.63$  GPa. Ainsi, le module de Young adimensionné  $\hat{E}$  est de 2.43, et le coefficient de Poisson adimensionné  $\hat{\nu}$  est de 0.216. Pour s'assurer que la valeur maximale de la pression appliquée adimensionnée  $\hat{\mathbf{p}}$  ne dépasse pas 1, la contrainte caractéristique  $\sigma_c$  est fixée à 1 MPa. À partir de ces trois paramètres caractéristiques, la valeur du déplacement caractéristique  $u_c$  est déterminée selon l'équation (4.15) avec une valeur de 0.013 mm. Ce paramètre est utilisé pour transformer le champ de déplacements exact  $\mathbf{u}$  en champ de déplacements adimensionné  $\hat{\mathbf{u}}$ .

Pour les hyperparamètres, en se basant sur les études précédentes [177, 219, 189], le volume de réseau  $V_{RN} = 6 \times 80$  a été choisi pour garantir que le modèle ait la capacité d'obtenir des données de sortie suffisamment précises. Ainsi, le réseau de neurones du PINNT contient 6 couches cachées avec 80 neurones par couche. En utilisant  $\tanh$  comme fonction d'activation et Adam comme optimiseur, les taux d'apprentissage sont fixés à  $10^{-3}$ ,  $5 \cdot 10^{-4}$ ,  $3 \cdot 10^{-4}$  et  $10^{-4}$ , avec 20000 itérations pour chaque taux afin de s'assurer que toutes les pertes sont bien minimisées et stabilisées.

Pour la fonction de perte, les équations d'équilibre ont été directement implémentées  $\nabla \sigma^{RN} = 0$ . Ainsi, tous les points du domaine doivent être pris en compte dans le calcul de la fonction de perte. Avec la formulation des variables mixtes et l'adimensionnement, cette fonction est illustrée ci-dessous :

$$l_{EDP} = W_{EDPEQM} \left( \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{\sigma}^{RN} \right) + W_{mixte} EQM \left( \hat{\sigma}^{RN} - \hat{\sigma}(\hat{\mathbf{u}}^{RN}) \right) \quad (4.27)$$

Où  $\hat{\sigma}^{RN}$  et  $\hat{\sigma}(\hat{\mathbf{u}}^{RN})$  sont le tenseur de contrainte adimensionné obtenu respectivement par le réseau de neurones et par le champ de déplacement adimensionné.

$$\begin{cases} \hat{\sigma}^{RN} \cdot \mathbf{n} = \hat{\mathbf{p}} & \text{sur } \Gamma_1 \\ \hat{\sigma}^{RN} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ \hat{\sigma}^{RN} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_4 \\ \hat{\sigma}^{RN} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_5 \\ \hat{\nu}^{RN} = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (4.28)$$

Étant donné que les contraintes des conditions aux limites sont définies comme le montre

l'équation (4.28), les conditions de Neumann sont imposées sur  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4$  et  $\Gamma_5$ , et les conditions de Dirichlet sont imposées sur  $\Gamma_3$ . Ainsi, les pertes scalaires  $l_{CL}$  et les fonctions de perte  $L_{CL}$  avec les données adimensionnées sont représentées comme suit :

$$\begin{aligned}
 l_{CL} &= W_{CL} L_{CL} \\
 &= W_{CL_1} EQM \left( \hat{\sigma}_1^{RN} \cdot \mathbf{n} - \hat{\mathbf{p}} \right) \\
 &\quad + W_{CL_2} EQM \left( \hat{\sigma}_2^{RN} \cdot \mathbf{n} \right) \\
 &\quad + W_{CL_4} EQM \left( \hat{\sigma}_4^{RN} \cdot \mathbf{n} \right) \\
 &\quad + W_{CL_5} EQM \left( \hat{\sigma}_5^{RN} \cdot \mathbf{n} \right) \\
 &\quad + w_{CL_3} EQM \left( \hat{v}_3^{RN} \right)
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Dans cette équation,  $W_{CL}$  est le vecteur des poids de perte des conditions aux limites,  $W_{CL_i}$  et  $\hat{\sigma}_i$  avec  $i = 1, 2, 4, 5$  représentent respectivement le vecteur des poids de perte des conditions aux limites et le tenseur de contrainte adimensionné sur la frontière  $\Gamma_i$ . En raison de l'application d'une seule condition de Dirichlet sur  $\Gamma_3$ , la fonction de perte rend une valeur scalaire, où  $w_3$  est le poids scalaire de perte sur cette frontière.

Pour éviter le MCR, le déplacement adimensionné  $\hat{u}^{RN}$  est contraint à 0 au point  $O$ . Ainsi, l'application de données de contrainte supplémentaires et la perte  $l_{DCS}$  associée s'écrivent comme suit :

$$\hat{u} = 0 \quad \text{en } O, \quad l_{DCS} = w_{DCS} EQM \left( \hat{u}_O^{RN} \right) \tag{4.30}$$

Dans le PINNT, tous les poids de perte sont par défaut réglés à 1. Après avoir entraîné le modèle 80000 fois avec l'optimiseur Adam, le champ de déplacement et le champ de contrainte obtenus par le PINNT seront comparés à ceux obtenus par la MEF. Il est important de noter que, pour améliorer la précision des PINNs, l'adimensionnement des paramètres est mis en place. Par conséquent, avant de procéder à la comparaison, les résultats adimensionnés doivent être reconvertis comme le montre l'équation 4.31.

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} u_c, \quad \sigma = \frac{\hat{\sigma}}{\sigma_c} \tag{4.31}$$

#### 4.4.1.2 Configuration des PINNs avec les technologies avancées

Pour la configuration des modèles de PINNs avec les techniques avancées, les modifications nécessaires en fonction des caractéristiques des techniques avancées sont appliquées. À part ces modifications spécifiques, tout le reste est identique au PINNT.

Pour garantir que les pertes soient bien minimisées, les modèles ont été entraînés par l'optimiseur Adam avec les taux d'apprentissage suivants :  $10^{-3}$ ,  $5 \cdot 10^{-4}$ ,  $3 \cdot 10^{-4}$  et  $10^{-4}$ , avec 20000 itérations pour chaque taux.

Concernant les hyperparamètres, tous les modèles utilisent un réseau de neurones avec un volume  $V_{RN} = 6 \times 80$ , à l'exception de RNP. En outre, tous les modèles, à l'exception de la MAA, utilisent  $\tanh$  comme fonction d'activation.

Les fonctions de perte sur les équations d'équilibre (4.27) et la donnée de contrainte supplémentaire (4.30) sont les mêmes pour toutes les PINNs. Cependant, les conditions aux limites

des autres modèles sont contraintes de manière souple (4.29) à l'exception de l'IECL. Les poids des pertes des autres modèles sont réglés à 1 par défaut, à l'exception de la MAAP, qui ajuste dynamiquement les poids pendant l'entraînement.

Les modifications spécifiques apportées à chaque technique avancée sont détaillées ci-dessous :

- RNP : le modèle RNP utilise des réseaux indépendants pour chaque variable de sortie afin de réduire les interactions entre les variables et améliorer la précision des résultats. Avec l'application de la formulation à variables mixtes, son volume  $V_{RNP}$  est cinq fois celui du  $V_{RN}$ , soit  $V_{RNP} = 5 \times V_{RN}$ . Chaque variable utilise le même volume de réseau, donc le volume total de RNP est  $V_{RN} \times 5$ .
- MAA : le modèle MAA est mise en œuvre en ajoutant une nouvelle variable scalaire à l'intérieur de la fonction d'activation pour ajuster la pente de l'activation pendant l'optimisation. En utilisant  $\tanh$  comme fonction d'activation, la variable  $\beta_{adapt}$  est initialement définie avec la valeur de 1. L'application de MAA est présentée dans l'équation (4.32).

$$a^{(k)} = \tanh \left( \beta_{adapt} (W_k a^{(k-1)} + b_k) \right) \quad (4.32)$$

Où  $a^{(k)}$  et  $a^{(k-1)}$  sont les données de sortie des couches cachées  $C_k$  et  $C_{k-1}$ , et  $W_k$  et  $b_k$  sont les poids et les biais correspondants, avec  $k$  de 1 à 6.

- IECL : le modèle IECL garantit que les données de sortie respectent complètement les conditions aux limites définies, supprimant ainsi ces termes de perte dans l'optimiseur. Pour appliquer ce modèle, les fonctions  $F(\hat{\mathbf{x}})$  et  $G(\hat{\mathbf{x}})$  doivent être construites pour générer de nouvelles données de sortie  $\hat{\mathbf{u}}_{IECL}^{RN}$  et  $\hat{\sigma}_{IECL}^{RN}$ , comme le montre l'équation (4.33).

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_{IECL}^{RN}(\mathbf{x}) &= F(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{u}}^{RN}(\hat{\mathbf{x}}) + G(\hat{\mathbf{x}}) \\ \hat{\sigma}_{IECL}^{RN}(\hat{\mathbf{x}}) &= F(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\sigma}^{RN}(\hat{\mathbf{x}}) + G(\hat{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Dans la configuration de l'IECL, la fonction de distance approximative ne se contente pas seulement de définir les valeurs nulles aux points de la frontière où les conditions aux limites sont connues, mais elle est également suffisamment lisse pour éviter les erreurs supplémentaires dues aux discontinuités lors de la construction des nouvelles données adimensionnées. Ainsi, 5 fonctions de distance approximative indépendantes,  $F_i$  avec  $i = \hat{u}, \hat{v}, \hat{\sigma}_{xx}$  et  $\hat{\sigma}_{yy}, \hat{\sigma}_{xy}$ , sont utilisées comme fonction  $F(\hat{\mathbf{x}})$  pour les différentes variables de sortie adimensionnées. Pour la fonction  $G(\hat{\mathbf{x}})$ , un réseau de neurones de petit volume avec les mêmes variables d'entrée et de sortie que le PINNT a été proposé. En utilisant les conditions aux limites connues pour entraîner ce petit réseau de neurones,  $G(\hat{\mathbf{x}})$  peut converger rapidement et fournir des valeurs lisses pour tous les points du domaine. Un réseau de neurones de volume  $V_G = 6 \times 60$  avec un taux d'apprentissage de  $10^{-5}$  pour 10000 itérations a été établi pour obtenir les valeurs exactes des conditions aux limites connues. Pour illustrer simplement les données de sortie de  $G(\hat{\mathbf{x}})$ ,  $G_i$  avec  $i = \hat{u}, \hat{v}, \hat{\sigma}_{xx}, \hat{\sigma}_{xy}$  et  $\hat{\sigma}_{xy}$  ont été utilisées.

Selon les définitions des conditions aux limites (4.28), la frontière  $\Gamma_1$  est la frontière de chargement avec la normale sortante  $\mathbf{n}_1 = \langle 0, 1 \rangle$  et la pression adimensionnée connue  $\hat{\mathbf{p}} = \langle 0, 1 \rangle$ . Ainsi, les valeurs de  $F_{\hat{\sigma}_{xy}}$  et  $F_{\hat{\sigma}_{yy}}$  sont nulles sur cette frontière, et les valeurs de  $G_{\hat{\sigma}_{xy}}$  et  $G_{\hat{\sigma}_{yy}}$  sont respectivement 0 et 1. Pour les frontières  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$ , qui sont les frontières libres avec les normales sortantes  $\mathbf{n}_2 = \langle 1, 0 \rangle$  et  $\mathbf{n}_4 = \langle -1, 0 \rangle$ , les valeurs de  $F_{\hat{\sigma}_{xx}}, F_{\hat{\sigma}_{xy}}, G_{\hat{\sigma}_{xx}}$  et  $G_{\hat{\sigma}_{xy}}$  sont toutes réglées à 0. Pour la frontière  $\Gamma_3$ , où les déplacements adimensionnés

$\hat{v}$  sont fixés à 0, les valeurs de  $F_{\hat{v}}$  et  $G_{\hat{v}}$  sont également définies à 0. Pour la frontière du trou, en raison de sa géométrie circulaire, les valeurs des contraintes adimensionnées ne peuvent pas être déterminées. Par conséquent, les fonctions de distance approximative ne peuvent pas être appliquées, et les conditions aux limites correspondantes sont imposées par la fonction de perte dans le PINN. En raison de l'absence de données complètes sur le déplacement  $\hat{u}$  sur ces frontières, les valeurs de  $F_{\hat{u}}$  et  $G_{\hat{u}}$  sont fixées à 1 et 0 respectivement pour ne pas affecter les données obtenues de l'IECL. Avec ces définitions, les valeurs de  $F(\hat{\mathbf{x}})$  et  $G(\hat{\mathbf{x}})$  sur la plaque à un trou sont représentées dans les figures 4.6 et 4.7. Pour mieux visualiser leurs résultats, les figures des  $F_{\hat{\sigma}_{yy}}, F_{\hat{\sigma}_{xy}}$  et  $G_{\hat{v}}, G_{\hat{\sigma}_{yy}}, G_{\hat{\sigma}_{xy}}$  sont présentées sous des angles différents par rapport aux autres.

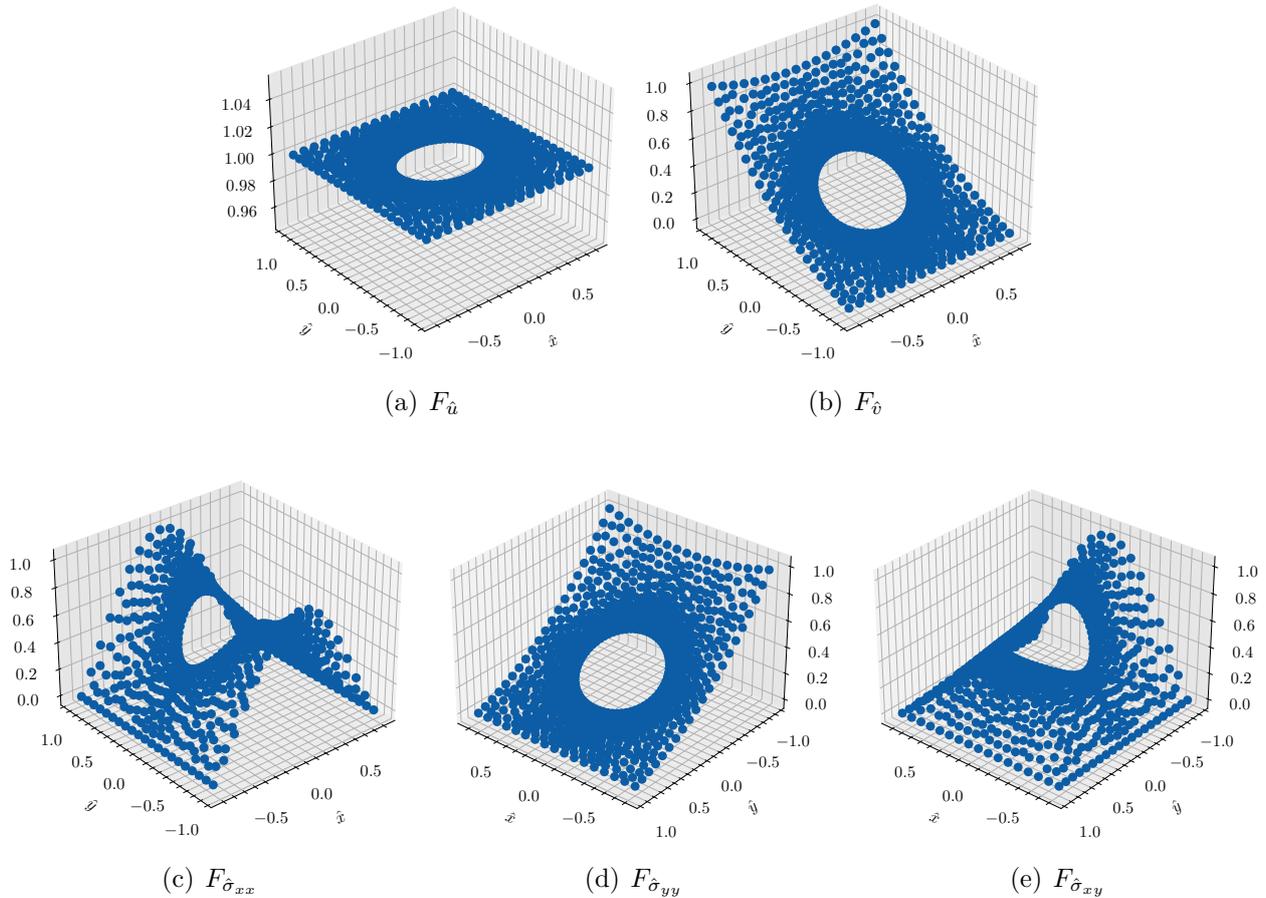


FIGURE 4.6 – Les valeurs de la fonction  $F(\hat{\mathbf{x}})$  obtenus par les fonctions de distance approximative pour les variables de sortie adimensionné dans la modélisation numérique.

- MAAP : dans le PINN,  $\theta_{RN}$  est optimisé en fonction des pertes scalaires par la rétropropagation. Le modèle de MAAP utilise la fonction *Softmax* pour ajuster dynamiquement les poids des pertes comme le montre l'équation 4.34, équilibrant ainsi l'importance de chaque composante de la perte totale. Initialement, avec  $\epsilon = 10^{-7}$ , tous les poids de perte sont réglés à 1, et ces poids des pertes sont mis à jour toutes les 100 itérations, ce qui permet de maintenir l'équilibre entre les différentes composantes de la perte sans augmenter de manière significative le coût de calcul pendant l'entraînement. Cette approche assure une convergence plus stable et rapide en adaptant continuellement les poids en fonction des performances du modèle.

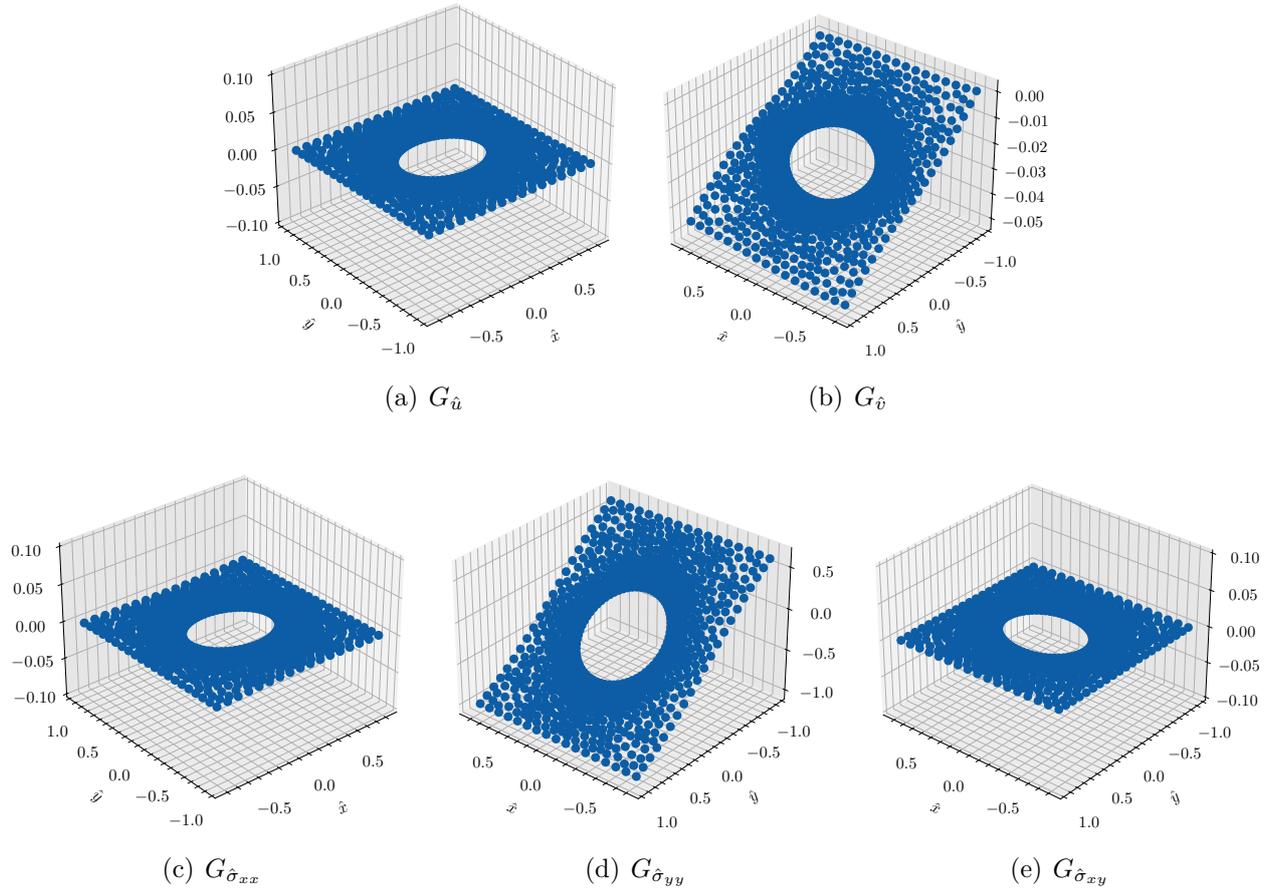


FIGURE 4.7 – Les valeurs de la la fonction  $G(\hat{\mathbf{x}})$  obtenus par un petit volume de réseau de neurones pour les valeurs des conditions aux limites connues dans la modélisation numérique.

$$w_j(i) = \frac{\exp\left(\frac{l_j(i)}{l_j(i-1) + \epsilon}\right)}{\sum_{k=1}^{n_{perte}} \exp\left(\frac{l_k(i)}{l_k(i-1) + \epsilon}\right)} \quad (4.34)$$

D'après les configurations des PINNs avec les différentes techniques avancées, les entraînements sont réalisés avec 80000 itérations. Les résultats obtenus par ces modèles seront comparés à ceux de la MEF dans la sous-section suivante.

## 4.4.2 Comparaison des résultats des PINNs

Étant donné que les pertes scalaires permettent d'évaluer la conformité des variables de sortie aux EDPs et aux conditions aux limites définies, les comparaisons des valeurs des pertes sont présentées en premier.

### 4.4.2.1 Comparaison des pertes des PINNs dans la modélisation numériques

Selon l'équation (4.11), la perte totale est composée de trois parties :  $l_{EDP}$ ,  $l_{CL}$  et  $l_{DCS}$ , déterminées par les fonctions de perte et les poids de perte correspondants. Pour la MAAP, les poids de perte varient toujours pendant l'entraînement. Afin de garantir la cohérence des

comparaisons, toutes les composantes des vecteurs de poids de perte sont fixées à 1 pour comparer avec les autres modèles. Par ailleurs, l'IECL permet d'intégrer directement les conditions aux limites connues sur les frontières de la plaque dans le réseau de neurones. En raison de la difficulté d'imposer exactement les conditions de Neumann sur la frontière du trou  $\Gamma_5$ ,  $l_{CL}$  ne contient que les pertes sur cette frontière. Ainsi, la valeur de  $l_{CL}$  de l'IECL n'est pas incluse dans la comparaison des pertes des conditions aux limites avec les autres modèles.

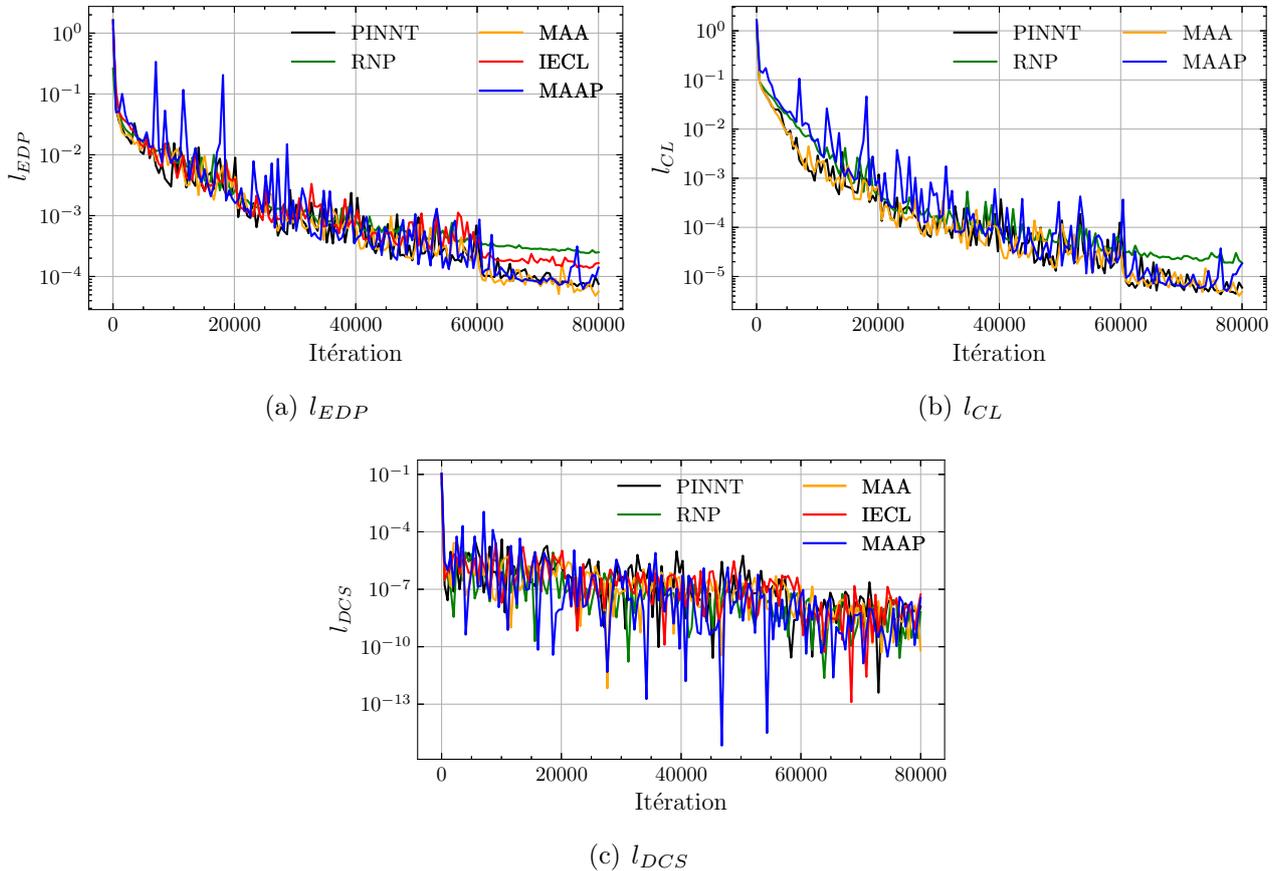


FIGURE 4.8 – Comparaison des pertes obtenues par les différents modèle de PINNs dans la modélisation numérique.

La figure 4.8 montre les comparaisons des pertes obtenues par les différents modèles de PINNs. Il est à noter que les pertes de la MAAP sont plus perturbées par rapport aux autres modèles, car cette technique ajuste les poids des pertes en fonction des variations des valeurs de pertes pendant l'entraînement. Néanmoins, ces pertes ne sont pas indépendantes dans l'optimisation. Ainsi, lorsque l'optimiseur minimise principalement un terme des pertes, les autres peuvent augmenter à nouveau. Lorsque ces poids sont remis à 1, les pertes sur les différentes parties deviennent plus instables.

De plus, du fait que les contraintes sont imposées de manière souple, les valeurs de toutes les pertes présentent de petites fluctuations. Pour faciliter l'analyse de ces valeurs, toutes les figures des comparaisons des pertes enregistrent les valeurs des pertes toutes les 500 itérations jusqu'à 80000 itérations.

Selon les figures 4.8(a) et 4.8(b), à 80000 itérations, la MAA, la MAAP et le PINNT permettent d'obtenir les plus petites pertes par rapport aux autres, indiquant que les résultats obtenus par ces trois modèles sont plus conformes aux équations d'équilibre ainsi qu'aux conditions aux limites définies. En revanche, le RNP et l'IECL ont des pertes légèrement plus élevées.

Cependant, globalement, tous les modèles présentent des valeurs faibles pour ces deux pertes, avec  $10^{-4}$  à  $10^{-5}$  pour  $l_{EDP}$  et  $10^{-5}$  à  $10^{-6}$  pour  $l_{CL}$  à la fin de l'entraînement.

La perte  $l_{DCS}$  est déterminée en limitant le déplacement adimensionné  $\hat{u}$  à 0 au point O. Étant donné que cette contrainte est réalisée seulement sur un point avec une condition de Dirichlet, la perte correspondante est plus facile à minimiser à une valeur faible. De plus, en raison des contraintes souples,  $l_{DCS}$  est facilement influencée par l'optimisation d'autres pertes pendant l'entraînement, ce qui entraîne des fluctuations dans une plage de valeurs faibles. Cependant, étant donné que la valeur de  $l_{DCS}$  est déjà particulièrement faible, ces fluctuations peuvent être considérées comme négligeables. Dans la figure 4.8(c), les valeurs de  $l_{DCS}$  pour les différents modèles varient entre  $10^{-8}$  et  $10^{-9}$  à la fin de l'entraînement.

Grâce à l'utilisation de l'adimensionnement des variables, l'effet de l'ordre de grandeur a été bien contrôlé, équilibrant ainsi la direction de la minimisation des pertes dans le modèle. Cela évite le problème de l'optimisation locale et améliore la précision des résultats obtenus par les modèles de PINNs. Par ailleurs, 80000 itérations au total avec les différents taux d'apprentissage permettent de bien minimiser toutes les pertes. Cela assure également la précision des résultats obtenus par les modèles de PINNs.

Étant donné que l'adimensionnement des variables peut équilibrer les différentes pertes avant l'entraînement, l'efficacité de l'utilisation de la MAAP n'est pas très évidente dans la modélisation de l'essai de compression avec la plaque à un trou, ce qui rend la différence entre les valeurs de leurs pertes peu significative, surtout à la fin de l'entraînement. Pour la MAA, elle ajoute une variable dans la fonction d'activation pour ajuster la pente de l'activation. Néanmoins, le PINNT permet déjà d'obtenir des valeurs faibles des pertes. Ainsi, l'efficacité de ce modèle n'est pas très évidente non plus, leurs valeurs des pertes sont proches de celles du PINNT.

Le RNP construit des réseaux de neurones indépendants en fonction des variables de sortie du modèle. Et l'IECL intègre directement les conditions aux limites de la plaque sur les données de sortie. Par les modifications des structures des PINNs, ils peuvent être en mesure de traiter des tâches plus complexes ou de résoudre des problèmes plus complexes. Toutefois, ils ont également besoin d'hyperparamètres différents pour obtenir des résultats plus précis. Pour assurer la cohérence des comparaisons d'erreurs, tous les modèles de PINNs utilisent le même volume de réseau, ce qui peut affecter leurs performances. Néanmoins, parce que toutes les pertes présentent des valeurs faibles, la différence entre leurs pertes  $l_{EDP}$  et  $l_{CL}$  par rapport aux autres modèles est acceptable.

#### 4.4.2.2 Comparaison des champs de données entre les PINNs et la MEF

Afin de représenter plus efficacement l'erreur entre les résultats des PINNs et ceux de la MEF, et d'éviter le calcul de l'erreur relative lorsque la valeur exacte est nulle, nous avons utilisé l'erreur relative normalisée, définie par l'erreur absolue par rapport à la valeur absolue maximale des données, pour évaluer les différences des champs de déplacement et de contrainte. La formulation de cette erreur est donnée par l'expression suivante :

$$\text{Erreur} = \frac{|Y^{RN} - Y^{MEF}|}{\max(|Y^{MEF}|)} \times 100\% \quad (4.35)$$

Où  $Y^{RN}$  sont les résultats obtenus par les PINNs, et  $Y^{MEF}$  sont les résultats obtenus par la MEF.

Étant donné que les distributions des erreurs relatives normalisées des champs de déplacement et de contrainte pour tous les modèles sont globalement similaires, mais que les valeurs spécifiques diffèrent, les comparaisons des erreurs relatives normalisées des résultats entre la MEF et le PINNT, comme le montrent les figures 4.9 et 4.10, ont été utilisées pour analyser et évaluer les PINNs. Les autres figures de comparaison pour tous les modèles de PINNs sont présentées dans l'annexe D.2. De plus, étant donné que les erreurs relatives normalisées des déplacements et des contraintes sont toutes inférieures à 0.05%, elles ne sont pas incluses dans les analyses des erreurs.

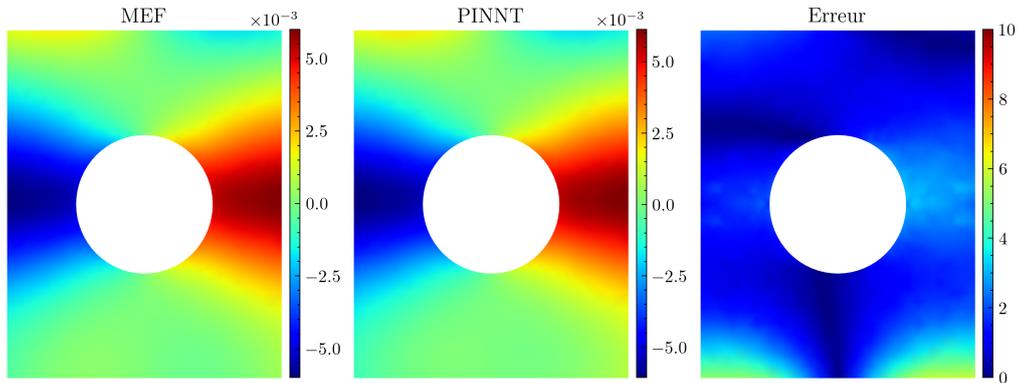
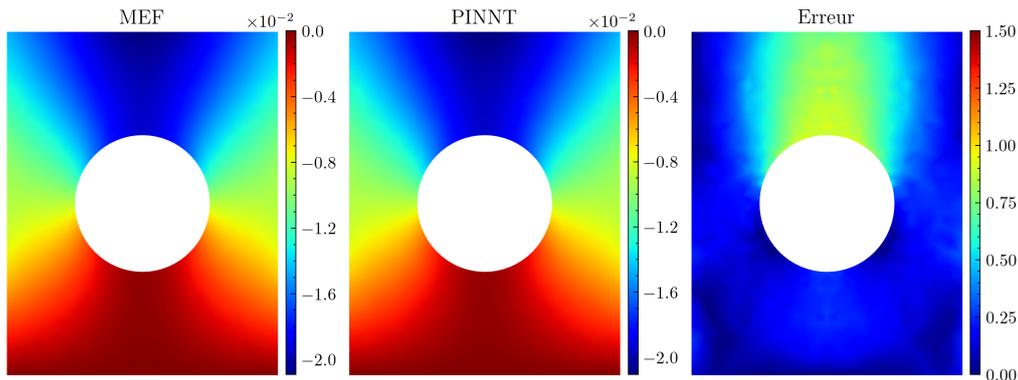

 (a) Déplacement  $u$ 

 (b) Déplacement  $v$ 

FIGURE 4.9 – Comparaison des erreurs relatives normalisées des champs de déplacement entre la MEF et le PINNT.

D'après la figure 4.9, le champ de déplacement par la MEF et par le PINNT montre des similitudes notables. L'erreur relative normalisée de déplacement  $u$  est principalement concentrée aux extrémités de la frontière  $\Gamma_3$ , avec une valeur maximale de 5.9%. Cela peut être attribué à l'insuffisance des conditions aux limites imposées sur  $\Gamma_3$ , à l'exception de la condition de  $u = 0$  au point O pour éviter le MCR, où seule une condition de Dirichlet ( $v = 0$ ) est définie, ce qui rend l'optimisation plus difficile. Pour le déplacement  $v$ , la valeur maximale de l'erreur relative normalisée est de 0.93%, se produisant là où la valeur absolue de  $v$  est la plus grande. Globalement, la valeur moyenne de l'erreur relative normalisée de  $u$  et de  $v$  sont de 1.41% et 0.24%, démontrant l'exactitude des déplacements obtenus par le PINNT.

La figure 4.10 montre les erreurs relatives normalisées des contraintes entre la MEF et le PINNT. Bien que les champs de contrainte obtenus par la MEF et par le PINNT présentent également des similitudes notables, ces erreurs sont plus importantes et se concentrent sur

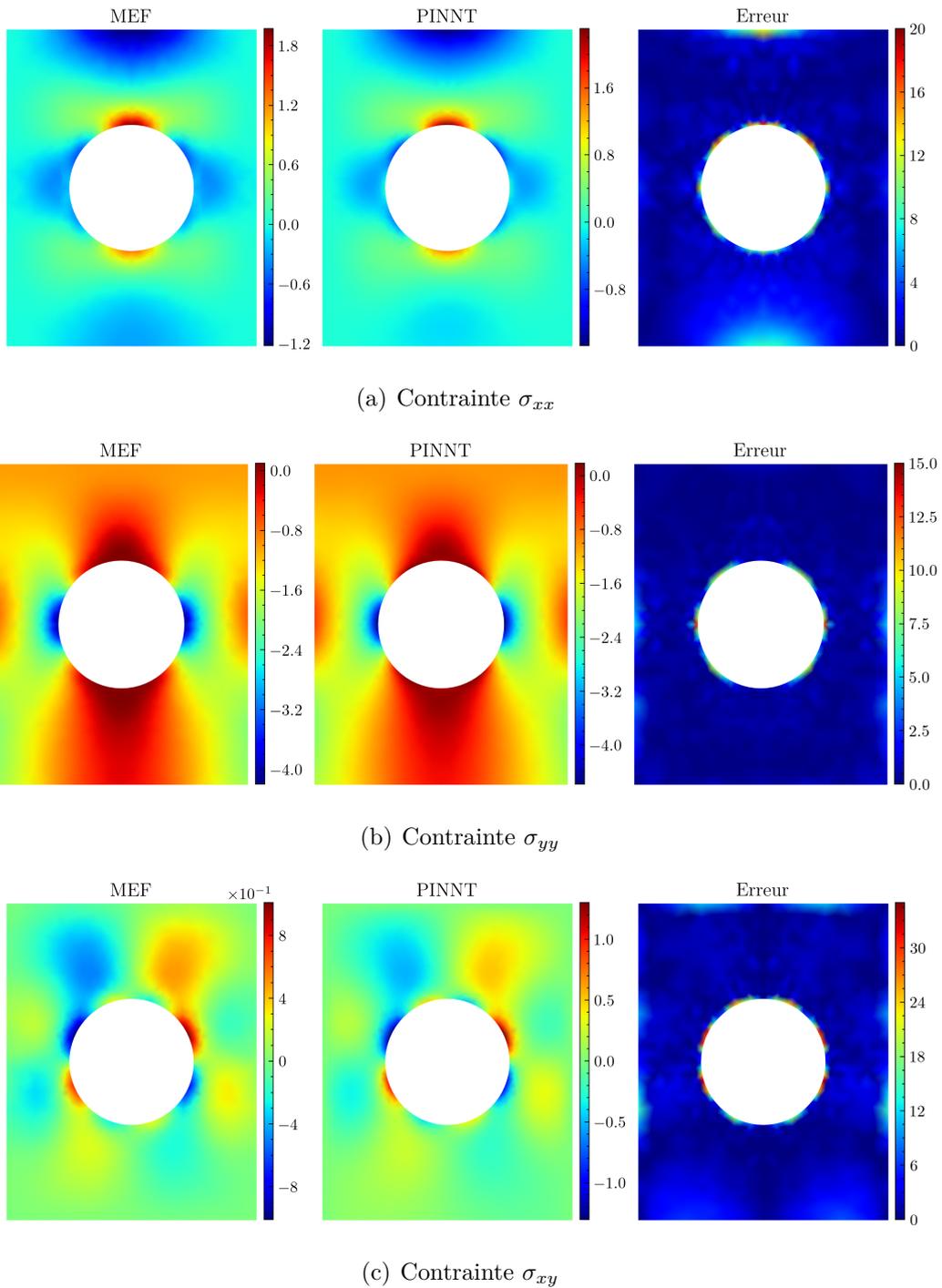


FIGURE 4.10 – Comparaison des erreurs relatives normalisées des champs de contrainte entre la MEF et le PINNT.

toutes les frontières de la plaque. Cela ne signifie toutefois pas que les contraintes obtenues par le PINNT sont incorrectes. Dans le modèle, les conditions de Neumann ont été définies sur les quatre frontières comme indiqué dans l'équation (4.28). Pour mieux analyser ces erreurs des contraintes sur chaque frontière, les comparaisons des tractions surfaciques sur chaque frontière sont représentées dans les figures 4.11 et 4.12.

$$\begin{cases} T_x = \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y \\ T_y = \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y \end{cases}, \quad \text{Avec } \mathbf{n} = \langle n_x, n_y \rangle \quad (4.36)$$

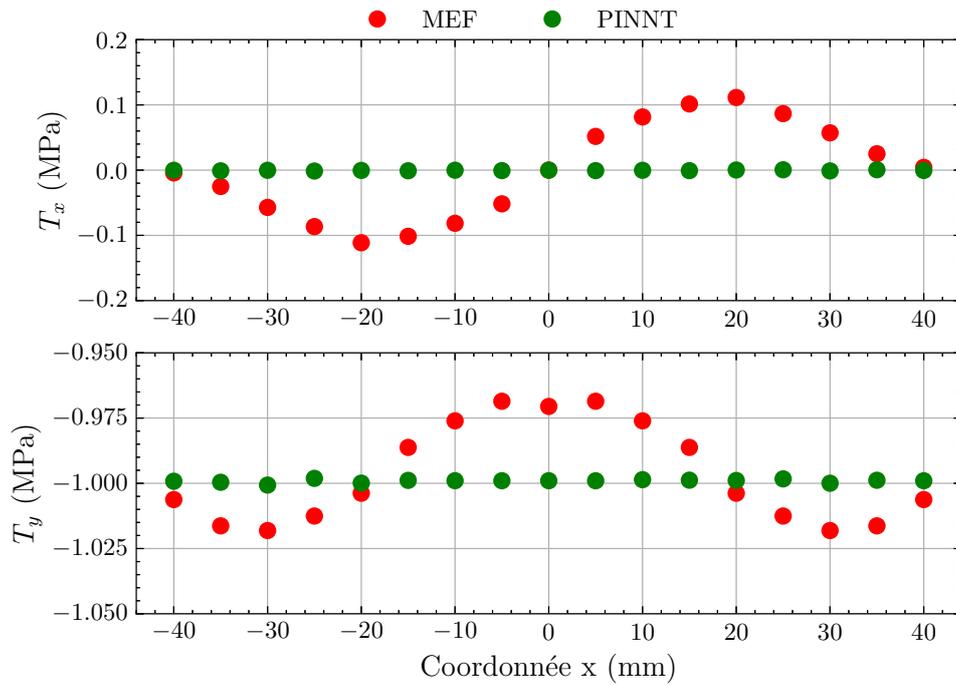
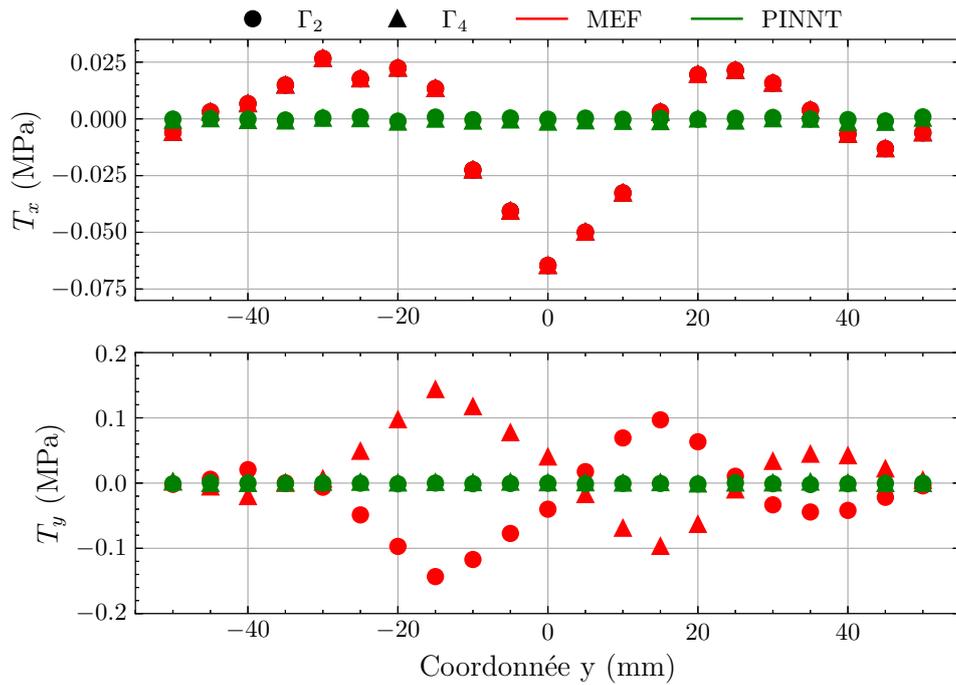

 (a)  $T_x$  et  $T_y$  en fonction des coordonnées  $x$  sur  $\Gamma_1$ 

 (b)  $T_x$  et  $T_y$  en fonction des coordonnées  $y$  sur  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$ 

 FIGURE 4.11 – Comparaison des tractions surfaciques sur les frontières  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$ .

$\Gamma_1$  est la frontière de chargement, sa normale sortante  $\mathbf{n}_1$  est  $\langle 0, 1 \rangle$  dans le repère cartésien. Théoriquement, avec la condition de chargement appliquée, la traction surfacique  $T_x = \sigma_{xy}$  doit être de 0, et  $T_y = \sigma_{yy}$  doit être de  $-1$  MPa, ce qui correspond à la compression appliquée de 1 MPa. Dans la figure 4.11, bien que les valeurs de  $T_x$  et  $T_y$  obtenues par le PINN et la MEF soient cohérentes avec la condition de chargement appliquée, celles de la MEF sont plus perturbées.

$\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$  sont les frontières libres, leurs normales sortantes sont  $\langle 1, 0 \rangle$  et  $\langle -1, 0 \rangle$  dans le

repère cartésien, respectivement. Ainsi, les tractions surfaciques  $T_x = \sigma_{xx}$  et  $T_y = \sigma_{xy}$  doivent être nulles sur ces deux frontières. Similaire à la comparaison sur  $\Gamma_1$ , dans la figure 4.11, les valeurs de  $T_x$  et  $T_y$  obtenues par le PINNT sont strictement nulles par rapport à celles de la MEF.

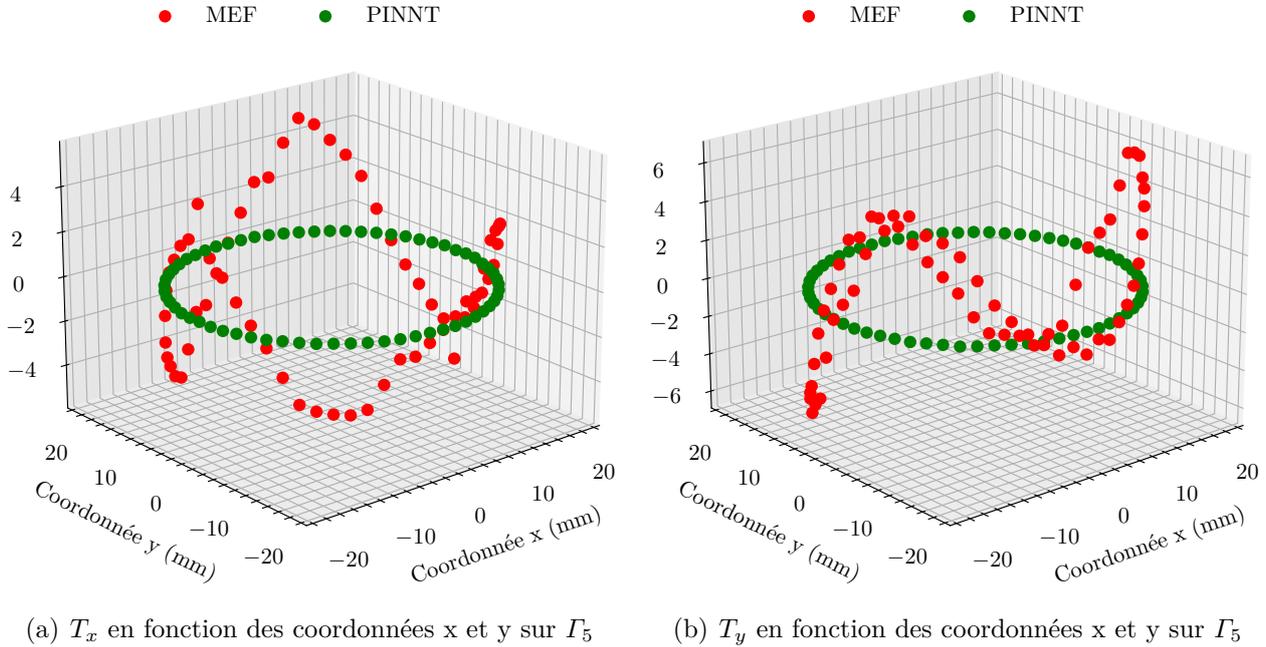


FIGURE 4.12 – Comparaison des tractions surfaciques sur les frontière  $\Gamma_5$ .

$\Gamma_5$  est également une frontière libre, et sa normale sortante varie en fonction des coordonnées  $x$  et  $y$ . Donc, les tractions surfaciques en fonction des coordonnées  $x$  et  $y$  sur  $\Gamma_5$  ont été tracées pour comparer les résultats obtenus par le PINNT et par la MEF. Théoriquement, les tractions surfaciques devraient également être nulles. Cependant, il est clair que les perturbations des tractions surfaciques calculées à partir du champ de contrainte obtenu par la MEF sont plus importantes sur cette frontière, ce qui explique principalement les erreurs relatives normalisées de contrainte significatives sur  $\Gamma_5$ . Numériquement, les valeurs maximales de ces erreurs de  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  sont respectivement de 17.88%, 12.71% et 32.27%.

De plus, les erreurs relatives normalisées de  $\sigma_{xx}$  sur la frontière  $\Gamma_3$  n'est pas négligeable. ces erreurs sont liées aux valeurs maximales des erreur sur  $u$ , ce qui peut être attribué à une définition insuffisante des conditions aux limites sur  $\Gamma_3$ . Pour obtenir des résultats plus précis, il serait nécessaire de définir des conditions aux limites supplémentaires sur  $\Gamma_3$ , ou de modéliser seulement un quart de la plaque en utilisant des conditions de symétrie [189, 219].

Selon l'analyse des tractions surfaciques sur les frontières, les contraintes obtenues par le modèle de PINNT sont plus cohérentes avec les conditions aux limites imposées. En général, les valeurs moyennes des erreurs relatives normalisées de  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  sont respectivement de 1.66%, 0.73% et 2.63%. Combinées à l'analyse des erreurs de déplacement, ces résultats indiquent que le PINNT peut obtenir des résultats remarquables pour la modélisation des matériaux fragiles dans la phase linéaire.

En analysant les erreurs relatives normalisées des variables de sortie à partir des différents modèles après 80000 itérations, le tableau 4.1 regroupe les valeurs maximales et moyennes de ces erreurs pour tous les modèles de PINNs. Étant donné que les valeurs minimales sont toutes inférieures à 0.005%, elles ne sont pas présentées dans le tableau.

TABLEAU 4.1 – Erreurs relatives normalisées des champs de déplacement et de contrainte entre les résultats de MEF et des PINNS

Modèle	Erreur	$u$	$v$	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{xy}$
PINNT	Maximale	5.90%	0.93%	17.88%	12.71%	32.71%
	Moyenne	1.41%	0.33%	1.66%	0.73%	2.63%
RNP	Maximale	7.19%	0.65%	15.80%	12.03%	31.80%
	Moyenne	1.28%	0.24%	1.81%	0.75%	2.69%
MAA	Maximale	6.05%	0.95%	17.83%	13.05%	32.56%
	Moyenne	1.31%	0.33%	1.65%	0.74%	2.62%
IECL	Maximale	4.15%	0.92%	19.03%	12.38%	33.07%
	Moyenne	1.19%	0.29%	1.48%	0.74%	2.52%
MAAP	Maximale	6.90%	0.85%	17.60%	12.38%	32.53%
	Moyenne	1.24%	0.31%	1.75%	0.73%	2.69%

Pour analyser les valeurs maximales de ces erreurs, il convient de noter que le champ de contrainte obtenu par la MEF est plus perturbé que celui obtenu par les PINNs. Par conséquent, les erreurs relatives normalisées des contraintes n'ont pas été analysées en détail.

Selon ce tableau, la valeur maximale des erreurs relatives normalisées du déplacement  $u$  est plus importante que celle du déplacement  $v$ . Cela est dû au fait que les PINNs nécessitent plus de données sur  $u$  et  $\sigma_{xx}$  supplémentaires sur  $\Gamma_3$  pour améliorer la précision. Pour le déplacement  $v$ , les erreurs maximales sont très proches et toutes inférieures à 1%. Parmi les modèles, le RNP fournit les résultats de  $v$  les plus précis.

Pour le déplacement  $u$ , le PINNT et la MAA présentent presque les mêmes valeurs maximale des erreurs relatives normalisées, tandis que l'IECL permet d'obtenir la valeur de ces erreurs la plus faible. En revanche, la valeur maximale des erreurs relatives normalisées de  $u$  sur le RNP est plus importante.

D'après l'analyse des pertes, les variations de  $l_{EDP}$  et  $l_{CL}$  en fonction du nombre d'itérations pour le PINNT, la MAA et la MAAP sont similaires. Ainsi, les erreurs relatives normalisées de  $u$  et  $v$  sur ces deux modèles ne montrent pas de grandes différences. Cependant, en raison de l'ajustement dynamique des poids, les pertes obtenues par la MAAP sont toujours perturbées. Par conséquent, à 80000 itérations, la différence des erreurs relatives normalisées de  $u$  entre la MAAP et le PINNT est d'environ 1%, ce qui est attribuable à l'ajustement des poids dans la MAAP.

Pour le RNP, bien que la valeur maximale de l'erreur de  $u$  soit plus importante par rapport aux autres modèles, la valeur maximale de l'erreur de  $v$  est la plus faible. Le RNP peut éviter les interactions entre les variables en construisant des réseaux de neurones indépendants pour chaque variable de sortie. Grâce à cette structure, ce modèle permet de fournir des résultats plus précis pour certaines variables par rapport au PINNT.

Cependant, l'absence d'interaction entre les variables signifie que lorsque la frontière  $\Gamma_3$  nécessite plus d'informations supplémentaires sur  $u$  et  $\sigma_{xx}$ , ce modèle a également plus de difficultés à minimiser certaines pertes par rapport aux autres modèles. Cela explique pourquoi la valeur maximale des erreurs relatives normalisées de  $u$  et les pertes  $l_{EDP}$  et  $l_{CL}$  sont plus élevées par rapport aux autres modèles. Globalement, par rapport au PINNT, la différence de

la valeur maximale des erreurs relatives normalisées de  $u$  entre le PINNT et le RNP est de 1.29%, et pour  $v$ , elle est de 0.28%. Ces différences sont relativement faibles.

Pour l'IECL, ce modèle permet d'obtenir la plus petite erreur relative normalisée de  $u$ . En intégrant directement les conditions aux limites de la plaque dans les données de sortie, il évite d'avoir à minimiser ces pertes dans l'optimiseur, ce qui conduit à des résultats plus précis. Néanmoins, selon l'analyse des pertes,  $l_{EDP}$  de ce modèle est légèrement plus élevée que celle du PINNT. Pour mieux analyser ce problème, les distributions des erreurs de l'équation d'équilibre ( $\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\sigma}^{RN}$ ) obtenue par l'IECL et par le PINNT ont été comparées, comme le montre la figure ci-dessous :

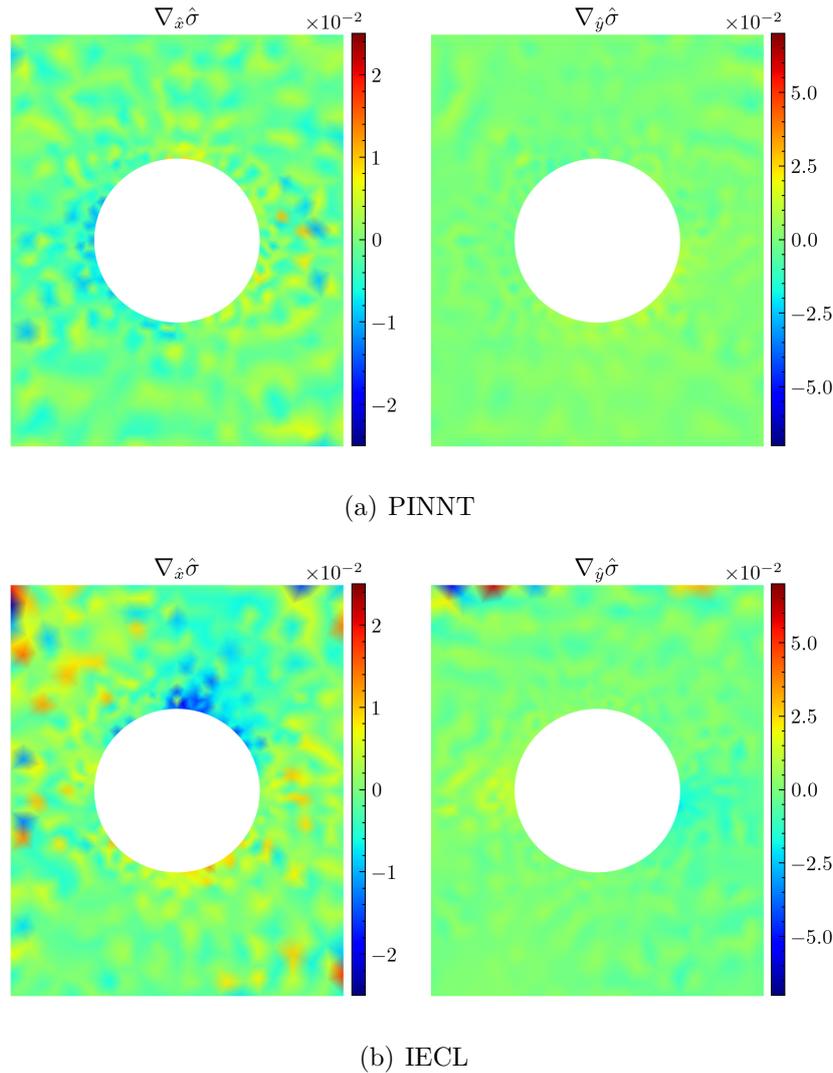


FIGURE 4.13 – Distribution des erreurs de l'équation de l'équilibre sur le PINNT et l'IECL dans la modélisation numérique.

Selon la figure 4.13, par rapport au PINNT, les erreurs de  $\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\sigma}^{RN}$  avec l'IECL sont plus importants sur les frontières de la plaque. Lors de l'utilisation de l'IECL, les données de sortie du réseau de neurones respectent entièrement les conditions aux limites définies. Cependant, comme ces valeurs sont fixées, elles ne peuvent pas s'ajuster pour réduire les écarts dans le calcul des EDPs. Cela conduit à une augmentation des erreurs des EDPs sur les frontières, augmentant ainsi la valeur de la perte  $l_{EDP}$ . En résumé, l'IECL permet aux données de sortie de respecter strictement les conditions aux limites définies, ce qui améliore l'exactitude des

résultats de sortie, mais elle introduit également des erreurs des EDPs plus significatives sur les frontières de la plaque, ce qui augmente la valeur totale de la perte  $l_{EDP}$ . Par conséquent, il est inapproprié de juger la précision des résultats uniquement sur la valeur de la perte  $l_{EDP}$  pour ce modèle.

Comparé aux valeurs maximales et les valeurs moyennes des erreurs relatives normalisées des différentes variables restent faibles pour tous les modèles. Pour le champ de déplacement, les valeurs moyennes des erreurs relatives normalisées de  $u$  pour tous les modèles varie entre 1.41% et 1.19%, tandis que celle de  $v$  varie entre 0.33% et 0.24%. Concernant les contraintes, bien que les valeurs maximales de ces erreurs soient significatives aux frontières, les valeurs moyennes des erreurs relatives normalisées sur l'ensemble du domaine restent faibles, avec des valeurs comprises entre 1.66% et 1.48% pour  $\sigma_{xx}$ , entre 0.75% et 0.73% pour  $\sigma_{yy}$ , et entre 2.69% et 2.52% pour  $\sigma_{xy}$ .

Ces valeurs moyennes montrent que tous les modèles de PINNs étudiés sont capables de fournir des champs de déplacement et de contrainte acceptables. Si des données supplémentaires pouvaient être fournies sur  $\Gamma_3$ , il est probable que toutes les erreurs pourraient encore diminuer, améliorant ainsi la précision globale des modèles.

### 4.4.3 Conclusion

Pour démontrer l'application des PINNs aux problèmes directs, le modèle PINN traditionnel (PINNT) et ceux intégrant diverses techniques avancées ont été utilisés pour modéliser numériquement des matériaux isotropes fragiles dans la phase linéaire. Selon les caractéristiques et les modifications de l'architecture des PINNs, les techniques avancées sélectionnées incluent le RNP, la MAA, l'IECL et la MAAP. Pour comparer la précision des résultats obtenus, ceux-ci ont été confrontés aux résultats de la MEF.

D'après la comparaison des pertes entre les différents modèles, après 80000 itérations d'entraînement avec différents taux d'apprentissage, les pertes de tous les modèles ont des valeurs faibles et montrent des tendances à la stabilité. Le PINNT, la MAA et la MAAP présentent des valeurs de perte similaires, tandis que celles de l'IECL et du RNP sont légèrement plus élevées. Globalement, leurs différences ne sont pas très marquées en raison des faibles valeurs des pertes.

D'après l'analyse des erreurs relatives normalisées sur les champs de déplacement et de contrainte obtenus par la MEF et par les modèles de PINNs, les valeurs maximales des erreurs relatives normalisées de  $u$  sont plus importantes par rapport à celles du déplacement  $v$  pour tous les modèles. Pour les contraintes, ces erreurs sont significatives sur les frontières de la plaque. Cela ne signifie toutefois pas que les contraintes obtenues par le PINNT sont incorrectes. En revanche, les contraintes obtenues par les PINNs sont plus cohérentes avec les conditions aux limites définies par rapport à la MEF. D'après les valeurs moyennes des erreurs relatives normalisées des résultats, tous les modèles présentent des valeurs faibles.

Selon les distributions des erreurs relatives normalisées des champs de déplacement et de contrainte, les erreurs de  $u$  et de  $\sigma_{xx}$  sur  $\Gamma_3$  ne sont pas négligeables. Ainsi, pour améliorer ultérieurement la précision des résultats obtenus pour l'essai de compression sur la plaque à un trou, il est nécessaire de fournir plus d'informations sur  $\Gamma_3$  ou de modéliser seulement un quart de la plaque en utilisant des conditions de symétrie supplémentaires.

D'après la comparaison des pertes et des résultats obtenus par les différents modèles, les améliorations basiques apportées aux PINNs produisent déjà des résultats relativement précis, notamment grâce à l'adimensionnement des variables, qui permet de réduire l'effet de l'ordre de grandeur et d'équilibrer la minimisation des pertes dans le modèle. Ainsi, l'amélioration apportée par la MAA, qui ajuste la pente de l'activation, et la MAAP, qui ajuste dynamiquement les poids des pertes pendant l'entraînement, n'est pas significative. Les pertes et les résultats obtenus par ces deux techniques sont similaires à ceux du PINNT.

Le RNP permet de réduire l'influence des interactions entre les variables de sortie en construisant des réseaux de neurones indépendants pour chaque variable de sortie. Cependant, bien que le champ de déplacement  $v$  obtenu par ce modèle soit légèrement plus précis, les pertes et l'erreur de  $u$  sont les plus élevées par rapport aux autres modèles.

L'IECL peut intégrer directement les conditions aux limites de la plaque dans les données de sortie du réseau de neurones. Cependant, cette technique présente des difficultés pour appliquer les conditions de Neumann sur des géométries complexes. Bien que la perte  $l_{EDP}$  obtenue soit légèrement plus élevée par rapport à celle du PINNT, le champ de déplacement  $u$  obtenu par cette technique est le plus proche de celui de la MEF.

En résumé, bien que les valeurs moyennes des erreurs relatives normalisées des données de sortie indiquent que tous les modèles de PINNs étudiés sont capables de fournir des prédictions acceptables pour les champs de déplacement et de contrainte, les valeurs maximales de ces erreurs suggèrent que les PINNs peuvent encore être améliorés.

En fait, combiner plusieurs techniques avancées [206, 208] ou utiliser des approches énergétiques [213, 218] pour les EDPs a prouvé pouvoir améliorer encore la précision des résultats des PINNs. Cependant, étant donné que l'objectif de cette application numérique n'est pas seulement de démontrer la précision des résultats des PINNs, mais aussi de montrer les améliorations apportées par l'utilisation individuelle de différentes techniques avancées selon leurs caractéristiques, l'intégration des approches énergétiques et la combinaison de multiples techniques avancées seront explorées dans nos prochaines études. Néanmoins, les résultats actuels indiquent déjà que l'application des PINNs aux problèmes directs est potentiellement intéressante.

## 4.5 Applications des PINNs à l'identification des paramètres mécaniques

Dans les PINNs, l'optimiseur minimise simultanément les pertes liées aux données de contraintes supplémentaires et aux contraintes physiques. Cela garantit que le modèle se concentre non seulement sur la minimisation des erreurs des données, mais aussi sur le respect des équations physiques et des conditions aux limites définies pendant l'entraînement. Par conséquent, même si les données intégrées dans le modèle sont bruitées, les contraintes physiques peuvent atténuer cet effet. Cette caractéristique confère aux PINNs un avantage significatif dans l'application aux problèmes inverses.

Pour l'application aux problèmes inverses, les principales modifications consistent à définir les paramètres à identifier comme des variables et à intégrer les données de mesure dans les données de contraintes supplémentaires. Ces ajustements permettent au modèle de s'adapter aux exigences spécifiques des problèmes inverses sans changer fondamentalement la structure du modèle de base. Pour illustrer cet avantage, tout d'abord, une application à l'identification des paramètres a été réalisée, montrant les valeurs des paramètres identifiés en utilisant à la fois des données sans bruit et des données bruitées.

### 4.5.1 Configurations numériques des PINNs dans l'identification des paramètres

L'identification des paramètres mécaniques a été réalisée dans une phase linéaire, en utilisant le champ de déplacement surfacique obtenu par la MEF à partir de l'essai de compression sur une plaque à un trou soumis à une pression appliquée de  $\mathbf{p} = \langle 0, 1 \rangle$  MPa. Les points de mesure du champ de déplacement correspondant sont représentés dans la figure 4.14. Les paramètres des matrices élastiques ont été pris comme valeurs de référence : le module de Young  $E = 8.83$  GPa et le coefficient de Poisson  $\nu = 0.216$ . Le champ de déplacement a été obtenu par la MEF.

Similairement à la modélisation numérique avec l'application des PINNs et en utilisant la formulation des variables mixtes, les variables d'entrée des réseaux de neurones sont les coordonnées  $x$  et  $y$ , et les variables de sortie sont les déplacements  $u$ ,  $v$  et les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$ . Pour simuler les données obtenues par la mesure de CIN, les déplacements autour des frontières n'ont pas été pris en compte dans l'identification. En utilisant les données de la MEF, les données d'entrée des PINNs contiennent 854 points. Parmi ces points, ceux situés dans l'intervalle de coordonnées  $x$  entre  $-36$  mm et  $36$  mm, de la coordonnée  $y$  entre  $-45$  mm et  $45$  mm, et avec l'origine comme centre et un rayon  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  supérieur à  $23$  mm ont été utilisés comme points de mesure, totalisant ainsi 584 points. Les détails sont illustrés dans la figure 4.14(a).

Pour illustrer la caractéristique d'insensibilité au bruit, ainsi que la robustesse et l'exactitude des PINNs, des données sans bruit et des données avec 5% de bruit blanc additif (bruit gaussien avec une moyenne de 0 et un écart-type de 5% des données) ont été utilisées dans l'identification. Ces données sont présentées dans la figure 4.14(b).

Dans le cadre de l'identification des paramètres mécaniques, les paramètres  $E$  et  $\nu$  doivent être définis comme des variables. Après avoir imposé des valeurs initiales  $E_0 = 1$  GPa et

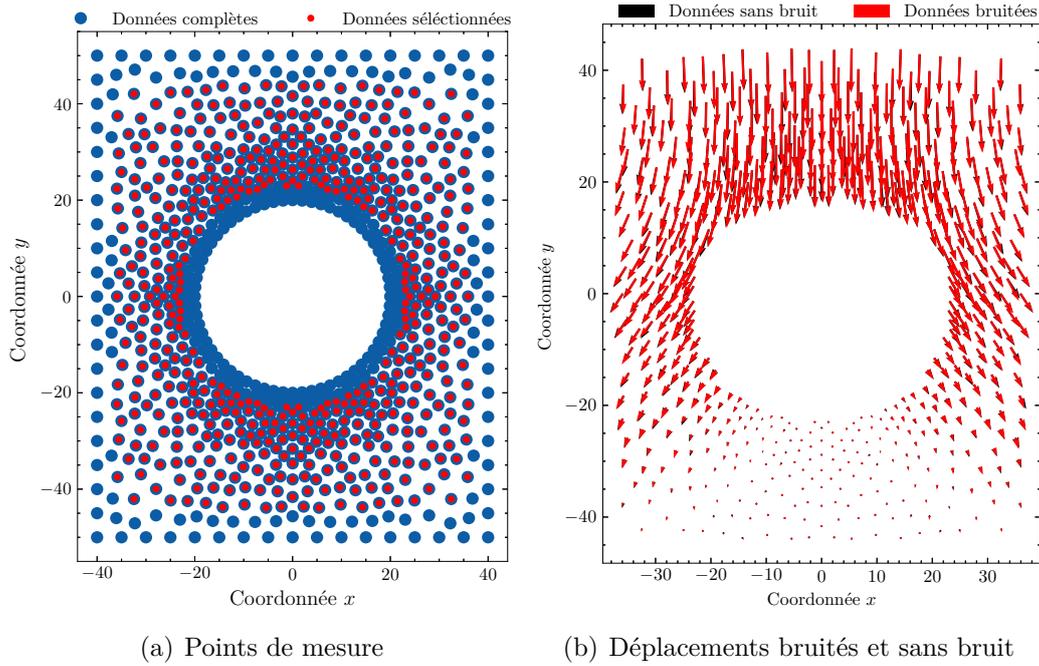


FIGURE 4.14 – Définition des groupes des champs de déplacement utilisés avec du bruit et sans bruit dans l'identification des paramètres mécaniques avec les PINNs.

$\nu_0 = 0.1$ , ces deux nouvelles variables sont mises à jour en fonction du nombre d'itérations. Ainsi, l'objectif des PINNs dans l'identification des paramètres devient :

$$\{\theta_{RN}^*, E^*, \nu^*\} = \arg \min_{\theta_{RN}, E, \nu} l_{TOT}(\mathbf{x}, \theta_{RN}, E, \nu) \quad (4.37)$$

Il est important de noter que, bien que les données de sortie des PINNs soient contraintes par des équations physiques et des conditions aux limites définies, les PINNs ne peuvent pas directement restreindre les intervalles des paramètres à identifier. Par conséquent, la transformation des variables est cruciale pour identifier avec précision les valeurs des paramètres. Pour garantir que la valeur minimale de  $E$  soit supérieure à 0 et sa valeur maximale inférieure à 22 GPa, et que  $\nu$  soit toujours positif mais inférieur à 0.5, la relation entre les valeurs initiales  $E_0$ ,  $\nu_0$  et les valeurs transformées  $\tilde{E}_0$ ,  $\tilde{\nu}_0$  est obtenue à travers l'équation (4.38) :

$$E_0 = 11 \left( \tanh(\tilde{E}_0) + 1 \right), \quad \nu_0 = 0.25 \left( \tanh(\tilde{\nu}_0) + 1 \right) \quad (4.38)$$

Par conséquent, pour contraindre les paramètres identifiés dans des intervalles souhaités, les paramètres  $E$  et  $\nu$  doivent être remplacés par  $11 \left( \tanh(\tilde{E}) + 1 \right)$  et  $0.25 \left( \tanh(\tilde{\nu}) + 1 \right)$  dans les PINNs.

D'après l'analyse des pertes et des résultats obtenus par les différents modèles de PINNs dans l'application des problèmes directs, l'adimensionnement des variables permet d'améliorer significativement l'exactitude des résultats obtenus. Cependant, les valeurs des paramètres élastiques étant inconnues, l'application de l'adimensionnement des variables nécessite l'utilisation de l'équation (4.16) pour déterminer le module caractéristique  $\mu_c$ . Les détails du calcul sont illustrés ci-dessous :

$$\frac{\mathbf{x}}{l_c}, \quad \sigma_c = \max(\mathbf{p}), \quad u_c = \max(\mathbf{u}^m), \quad \mu_c = \frac{l_c}{u_c \sigma_c} \quad (4.39)$$

Les paramètres à identifier, comme indiqué dans l'équation (4.38), doivent être convertis en variables adimensionnées pour assurer la précision des résultats identifiés. Cette conversion est réalisée comme suit dans l'équation (4.40) :

$$\begin{cases} \hat{E}_0 = \frac{E_0}{\mu_c} = \frac{11 (\tanh(\tilde{E}_0) + 1)}{\mu_c} \\ \hat{\nu}_0 = \nu_0 = 0.25 (\tanh(\tilde{\nu}_0) + 1) \end{cases} \quad (4.40)$$

La configuration des hyperparamètres est identique à celle du problème direct. Le volume du réseau  $V_{RN}$  est de  $6 \times 80$ , avec 6 couches cachées comportant 80 neurones chacune. La fonction d'activation utilisée est  $\tanh$ , et l'optimiseur est Adam. Pour garantir que les valeurs des paramètres identifiés soient stables à la fin du calcul, l'entraînement global comprend 20000, 20000, 20000 et 40000 itérations, avec des taux d'apprentissage de  $10^{-3}$ ,  $5 \cdot 10^{-4}$ ,  $3 \cdot 10^{-4}$  et  $10^{-4}$ , respectivement, soit un total de 100000 itérations.

De même, dans la configuration du PINNT, les définitions des pertes scalaires et les fonctions de perte sur les équations d'équilibre et les conditions aux limites restent inchangées, comme le montre les équations suivantes :

$$l_{EDP} = W_{EDP}EQM(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\sigma}^{RN}) + W_{mixte}EQM(\hat{\sigma}^{RN} - \hat{\sigma}(\hat{\mathbf{u}}^{RN})) \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} l_{CL} &= W_{CL}L_{CL} \\ &= W_{CL_1}EQM(\hat{\sigma}_1^{RN} \cdot \mathbf{n} - \hat{\mathbf{p}}) \\ &\quad + W_{CL_2}EQM(\hat{\sigma}_2^{RN} \cdot \mathbf{n}) \\ &\quad + W_{CL_4}EQM(\hat{\sigma}_4^{RN} \cdot \mathbf{n}) \\ &\quad + W_{CL_5}EQM(\hat{\sigma}_5^{RN} \cdot \mathbf{n}) \\ &\quad + w_{CL_3}EQM(\hat{\nu}_3^{RN}) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Cependant, pour minimiser les différences entre les déplacements obtenus par les PINNs et le champ de déplacement utilisées dans l'identification  $\mathbf{u}^m$ , une nouvelle fonction de perte  $L_m$  pour les données de contraintes supplémentaires doit être mise en place. Son expression est donnée par :

$$\begin{aligned} L_m &= EQM(\mathbf{u}^{RN} - \mathbf{u}^m) \\ l_m &= W_m L_m \end{aligned} \quad (4.43)$$

Où  $W_m$  est le vecteur de poids de perte pour les mesures, et  $\mathbf{u}^m$  est le champ de déplacement surfacique mesuré. Ainsi, en prenant la donnée de contrainte supplémentaire sur le point O, la perte  $l_{DCS}$  et la perte totale  $l_{TOT}$  s'écrivent comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} l_{DCS} &= w_{DCS}EQM(\hat{u}_O^{RN}) + l_m \\ l_{TOT} &= l_{EDP} + l_{CL} + l_{DCS} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Les configurations des PINNs utilisant des techniques avancées sont identique à celles utilisées dans la modélisation (section 4.4.1.2). Par rapport aux problèmes directs, la seule modification concerne la MAAP : l'intégration d'une fonction de perte de mesure supplémentaire

dans l'optimiseur entraîne une augmentation du nombre de poids de perte à ajuster. Toutes les autres configurations restent identiques à celles de la modélisation.

Selon ces configurations des différents modèles de PINNs, les entraînements sont effectués avec 100000 itérations. Les valeurs des paramètres identifiés obtenues par ces modèles seront comparées aux valeurs de référence dans la sous-section suivante.

## 4.5.2 Comparaison des paramètres identifiés avec les valeurs de référence

Similaire à l'application des PINNs dans les problèmes directs, avant d'analyser les paramètres identifiés, les pertes scalaires en fonction du nombre d'itérations sont d'abord illustrées.

### 4.5.2.1 Comparaison des pertes des PINNs dans l'identification des paramètres mécaniques

La figure 4.15 représente les pertes scalaires  $l_{EDP}$ ,  $l_{CL}$ ,  $l_{DCS}$  et  $l_m$  obtenues dans l'identification des paramètres mécaniques avec les données sans bruit et les données bruitées. Pour mieux observer les pertes scalaires obtenues à partir des données mesurées, leurs valeurs ne sont pas tracées dans les pertes des données de contrainte supplémentaires.

Étant donné que dans l'identification des paramètres, le seul changement est que les paramètres  $E$  et  $\nu$  sont transformés en variables. Bien que le champ de déplacement surfacique sur les points de mesure ait été ajouté dans les PINNs, il ne contient pas de déplacements sur  $\Gamma_3$ . Ainsi, d'après cette figure, pour les données sans bruit ou les données bruitées, la plupart des variations de  $l_{EDP}$ ,  $l_{CL}$ ,  $l_{DCS}$  dans l'identification des paramètres sont similaires à celles dans la modélisation numérique.

Pour l'IECL, l'analyse de la distribution des erreurs de  $\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\sigma}^{RN}$  dans l'application des problèmes directs montre que les pertes élevées de  $l_{EDP}$  de ce modèle sont principalement causées par les erreurs importants de  $\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\sigma}^{RN}$  aux frontières. Cependant, dans l'identification des paramètres, la valeur de  $l_{EDP}$  devient aussi faible que celle du PINNT. Ainsi, considérant que les valeurs de  $l_{EDP}$  de l'IECL sont assez similaires dans l'identification avec les données sans bruit et les données bruitées, une comparaison des erreurs de  $\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\sigma}^{RN}$  entre le PINNT et l'IECL dans l'identification avec les données sans bruit a été réalisée, comme le montre la figure 4.16. D'après la figure 4.16, l'ajout des déplacements surfaciques permet de réduire significativement ces erreurs aux frontières. Par conséquent,  $l_{EDP}$  de l'IECL est bien réduit dans l'identification avec les données de mesure. Globalement, les pertes obtenues par le PINNT, la MAA, l'IECL et la MAAP sont plus faibles que celles du RNP.

De plus, les valeurs des pertes avec les données bruitées deviennent relativement stables plus tôt que les valeurs des pertes avec les données sans bruit. Cependant, les différences sur leurs valeurs finales ne sont pas significatives. Après 100000 itérations, les valeurs de  $l_{EDP}$  se situent entre  $10^{-4}$  et  $10^{-5}$ , et  $l_{CL}$  varie de  $10^{-5}$  à  $10^{-6}$  pour tous les modèles.

Pour  $l_{DCS}$ , en raison de la simplicité de la contrainte, leurs valeurs obtenues sont très faibles et présentant une large plage de variation. Après 100000 itérations,  $l_{DCS}$  varie de  $10^{-8}$  à  $10^{-9}$ .

Pour les pertes scalaires  $l_m$  illustrées dans les figures 4.15(g) et 4.15(h), lorsque les données sans bruit sont utilisées dans les PINNs, tous les modèles parviennent à minimiser ces pertes

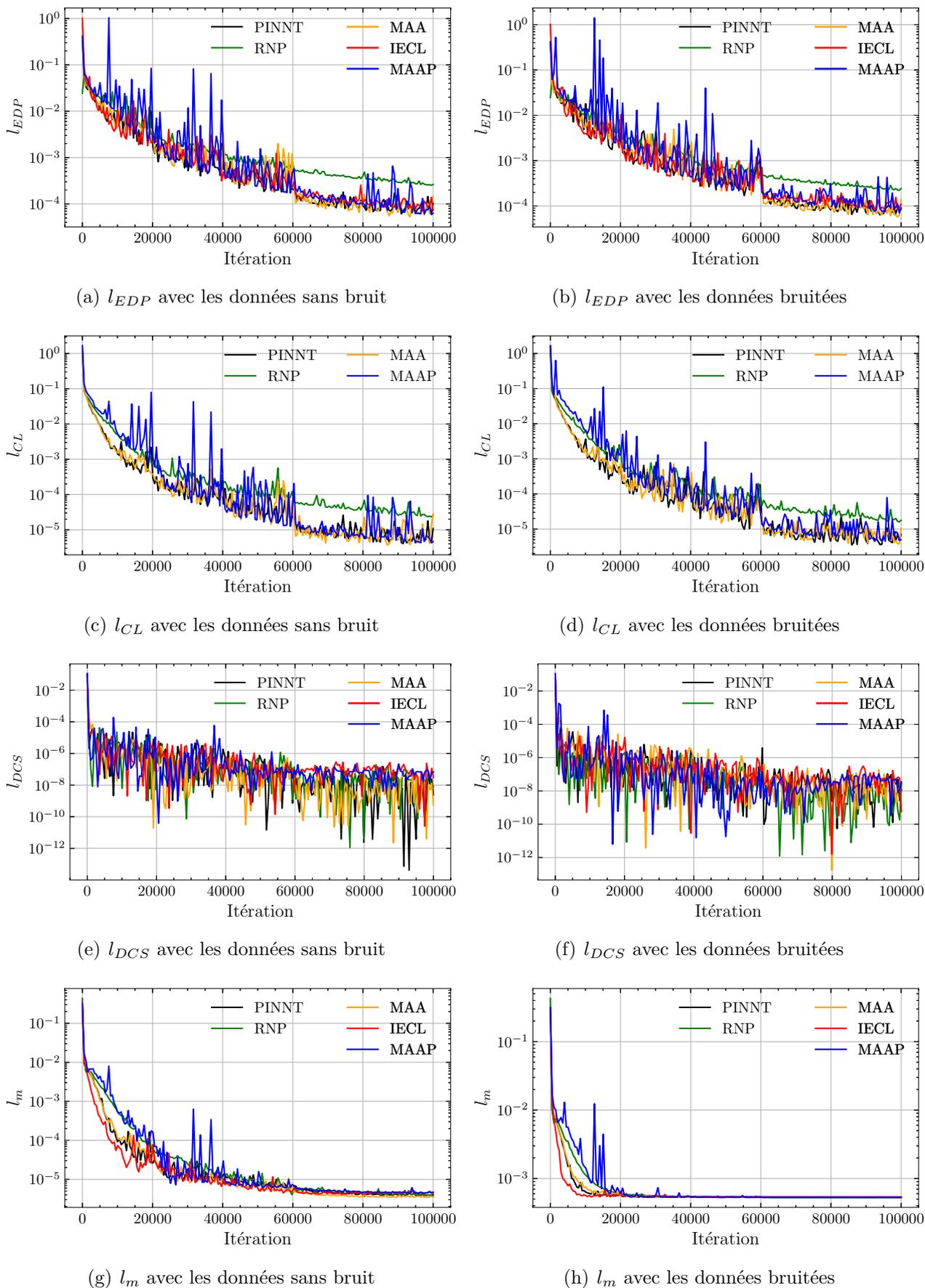
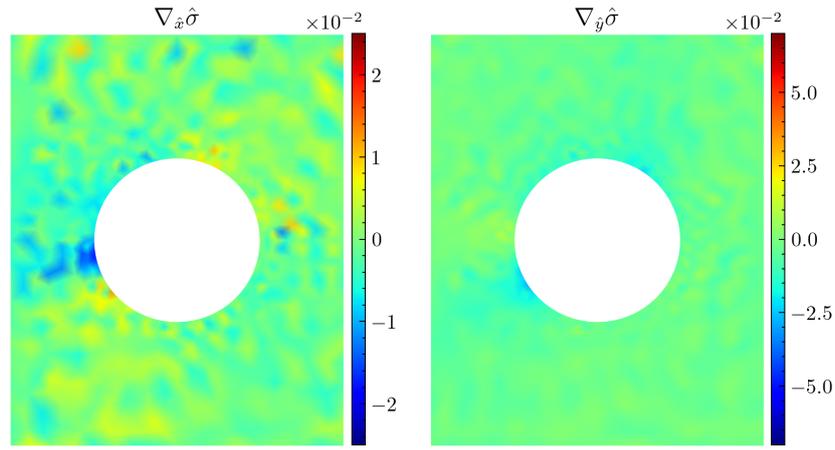
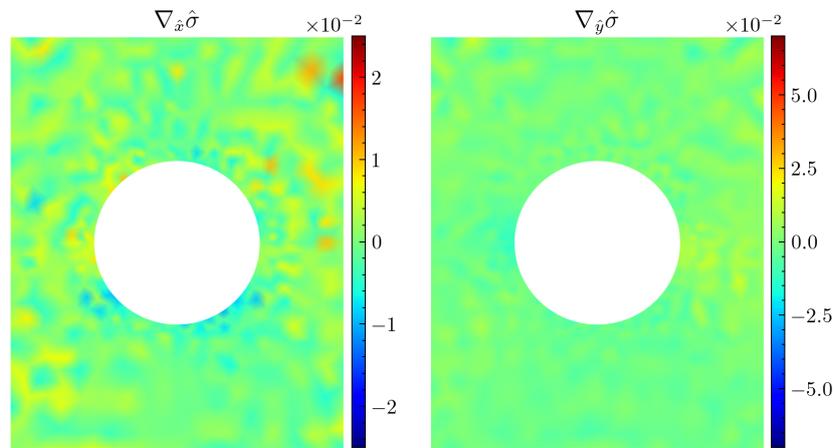


FIGURE 4.15 – Comparaison des pertes scalaires obtenues par les différents modèles de PINNs dans l'identification des paramètres mécaniques.



(a) PINNT



(b) IECL

FIGURE 4.16 – Distribution des erreurs de l'équation de l'équilibre pour le PINNT et l'IECL dans l'identification des paramètres mécaniques avec les données sans bruit.

autour d'une valeur d'environ  $4 \cdot 10^{-6}$ . En revanche, lorsque les PINNs utilisent les données bruitées pour réaliser l'identification, les valeurs de  $l_m$  se stabilisent plus tôt, avec une valeur finale d'environ  $5.3 \cdot 10^{-4}$ .

Étant donné que les PINNs contraignent les données de sortie par les équations d'équilibre et les conditions aux limites définies par l'optimiseur, même si les données utilisées dans les modèles sont bruitées, ces contraintes empêchent les modèles de surajuster les données bruitées. Par conséquent, même en présence de données bruitées, les PINNs peuvent maintenir la stabilité des valeurs de perte, améliorant ainsi la robustesse et la fiabilité du modèle.

#### 4.5.2.2 Comparaison des paramètres identifiés obtenus par les PINNs

Ensuite, pour mieux analyser les valeurs des paramètres identifiés pendant l'entraînement, les valeurs de  $E$  et  $\nu$  identifiées pour tous les modèles de PINN en fonction du nombre d'itérations sont illustrées dans la figure 4.17.

Selon la figure 4.17, les valeurs identifiées de  $E$  commencent à se stabiliser entre 40000 et 60000 itérations, tandis que les valeurs identifiées de  $\nu$  commencent à se stabiliser à partir de 80000 itérations. Parmi tous les modèles utilisés pour l'identification avec des données sans

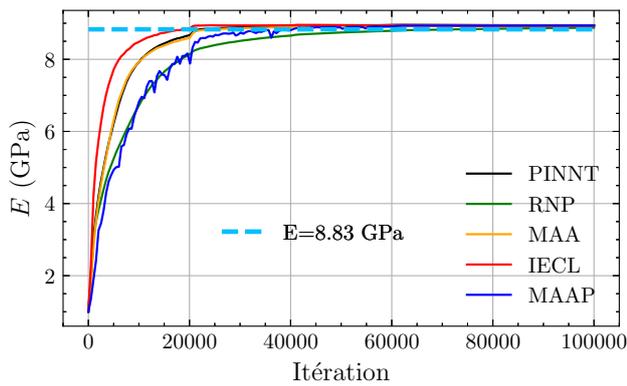
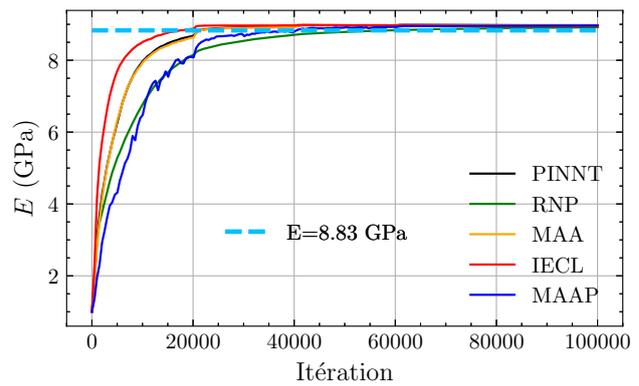
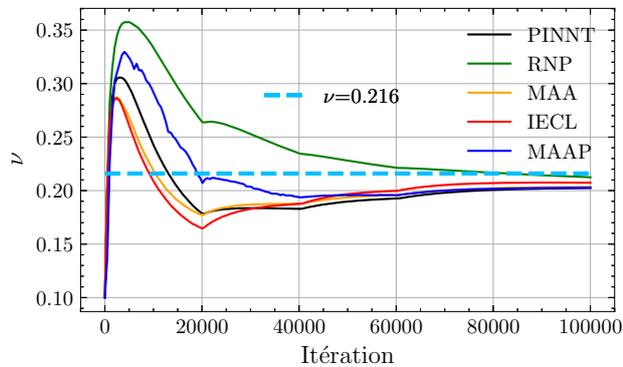
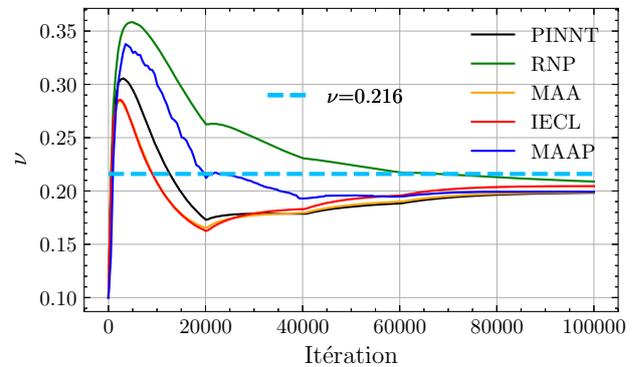

 (a)  $E$  identifié avec les données sans bruit

 (b)  $E$  identifié avec les données bruitées

 (c)  $\nu$  identifié avec les données sans bruit

 (d)  $\nu$  identifié avec les données bruitées

FIGURE 4.17 – Paramètres identifiés avec les données sans bruit et les données bruitées pour tous les modèles de PINNs.

bruit ou avec bruit, les courbes de variation de  $E$  et  $\nu$  sont similaires. Cela confirme que les PINNs ne sont pas très sensibles au bruit lors de l'identification des paramètres.

Il est intéressant de noter que, par rapport aux autres modèles, le RNP obtient de meilleurs résultats d'identification des paramètres au cours de ces 100000 itérations. Cette performance ne peut pas être déterminée uniquement en se basant sur les valeurs des pertes obtenues.

Selon les valeurs de  $l_m$  illustrées dans les figures 4.15(g) et 4.15(h), que les données soient sans bruit ou bruitées, tous les modèles présentent des valeurs faibles de  $l_m$ , ce qui indique que les champs de déplacement obtenus par ces modèles sont très proches des données utilisées pour l'identification. Cependant, en raison des caractéristiques du RNP, les réseaux de neurones indépendants permettent d'éviter l'influence de l'interaction entre les données de sortie causée par le réseau de neurones, afin de capturer avec plus de précision les détails sur la relation physique entre chaque variable. Ainsi, en se basant sur la contrainte des déplacements surfaciques (données sans bruit et données bruitées), le RNP peut obtenir un champ de contrainte plus précis, fournissant des paramètres identifiés plus précis comparés aux autres modèles.

Néanmoins, en raison de l'absence de données de  $\Gamma_3$  dans les mesures, les erreurs sur  $u$  et  $\sigma_{xx}$  empêchent l'optimiseur de réduire davantage les pertes  $l_{EDP}$  et  $l_{CL}$ . Surtout pour le RNP, en raison de l'absence d'interactions entre les données de sortie obtenues par le réseau de neurones, les résultats obtenus sur cette frontière produisent des pertes plus élevées. C'est la raison principale pour laquelle la valeur de perte du modèle RNP est plus élevée que celle des autres modèles, mais les données obtenues sont plus précises.

Pour l'IECL, les paramètres identifiés obtenus par ce modèle sont meilleurs que ceux du PINNT, de la MAA et de la MAAP. D'après la comparaison des résultats obtenus par les différents modèles pour la modélisation numérique, les champs de déplacement et de contraintes obtenus par l'IECL sont plus proches de ceux de la MEF. Ainsi, les valeurs des paramètres identifiés par ce modèle sont également plus précises que celles des trois autres modèles.

Étant donné que les paramètres identifiés sont déjà relativement stables à 100000 itérations, les valeurs identifiées de  $E$  et  $\nu$  ainsi que leurs erreurs relatives à 100000 itérations, comme le montre le tableau 4.2, ont été utilisées pour analyser davantage la performance des différents modèles de PINN dans l'identification des paramètres.

TABLEAU 4.2 – Paramètres identifiés avec les erreurs relatives à 100000 itérations pour tous les modèles de PINN (Valeur de référence :  $E = 8.83$  GPa,  $\nu = 0.216$ ).

Paramètres	Bruit	PINNT	RNP	MAA	IECL	MAAP
$E$ (GPa)	0%	8.94(1.29%)	8.87(0.54%)	8.94(1.26%)	8.92(1.11%)	8.93(1.22%)
	5%	8.97(1.64%)	8.91(1.00%)	8.97(1.59%)	8.95(1.42%)	8.96(1.53%)
$\nu$	0%	0.202(6.23%)	0.212(1.66%)	0.203(5.77%)	0.207(4.00%)	0.202(6.14%)
	5%	0.198(8.15%)	0.208(3.34%)	0.198(7.93%)	0.204(5.31%)	0.199(7.76%)

À partir de ce tableau, les paramètres identifiés par le RNP sont les meilleurs comparés aux autres modèles, comme indiqué dans la figure 4.17. Pour le module de Young  $E$ , avec les données sans bruit, les valeurs obtenues par le PINNT, la MAA, l'IECL et la MAAP varient entre 8.92 GPa (1.11%) et 8.94 GPa (1.29%). Avec les données bruitées, leurs valeurs obtenues varient de 8.95 GPa (1.42%) à 8.97 GPa (1.64%). Pour le RNP, les valeurs de  $E$  identifiées avec les données sans bruit et les données bruitées sont de 8.87 GPa (0.54%) et 8.91 GPa (0.91%), respectivement.

Pour le coefficient de Poisson  $\nu$ , avec les données sans bruit, les valeurs obtenues par le PINNT, la MAA, l'IECL et la MAAP varient entre 0.202 (6.23%) et 0.207 (4.00%). Avec les données bruitées, leurs valeurs obtenues varient de 0.198 (8.15%) à 0.204 (5.31%). Pour le RNP, les valeurs de  $\nu$  identifiées avec les données sans bruit et les données bruitées sont 0.212 (1.66%) et 0.208 (3.34%), respectivement.

Parmi ces résultats, grâce à l'adimensionnement des variables, les efficacités de la MAA et de la MAAP ne se manifestent pas de manière significative dans l'identification des paramètres mécaniques, similaire à l'application des problèmes directs. Ainsi, les valeurs des paramètres identifiés sont presque identiques à celles du PINNT.

De plus, la différence de  $E$  identifié entre les données sans bruit et les données bruitées n'est pas significative, passant de 0.03 GPa (0.33%) à 0.04 GPa (0.45%). En revanche, la différence de  $\nu$  identifié entre les données sans bruit et les données bruitées est légèrement plus importante. Cette différence varie entre 0.003 (1.38%) et 0.005 (2.31%) pour tous les modèles. Ces différences démontrent également que les modèles PINNs, en intégrant les équations d'équilibre et les conditions aux limites définies, peuvent efficacement prévenir le surajustement dû à l'utilisation de données bruitées. Cela réduit ainsi l'écart entre les résultats de l'identification des paramètres obtenus avec des données bruitées et ceux obtenus avec des données sans bruit.

Pour la MAA et la MAAP, grâce à l'adimensionnement des variables, leurs efficacités ne se manifestent pas de manière significative dans l'identification des paramètres mécaniques, similaire à la modélisation numérique. Ainsi, les valeurs des paramètres identifiés sont presque identiques à celles du PINNT.

### 4.5.3 Conclusion

Pour illustrer l'application des PINNs dans l'identification des paramètres mécaniques, les mêmes modèles que ceux utilisés pour les problèmes directs ont été employés : le PINNT, le RNP, la MAA, l'IECL et la MAAP. Dans cette application, les données utilisées dans l'identification proviennent du champ de déplacement surfacique obtenu par la MEF, en utilisant les paramètres des matrices ettringitiques, soit  $E = 8.83$  GPa et  $\nu = 0.216$ , lors d'un essai de compression sur une plaque à un trou. Afin de démontrer l'insensibilité au bruit, ainsi que la robustesse et l'exactitude des PINNs, des champs de déplacement sans bruit et avec 5% de bruit blanc additif (bruit gaussien avec une moyenne de 0 et un écart-type de 5% des déplacements mesurés) ont été utilisés pour l'identification et la comparaison des valeurs des paramètres identifiés.

Par rapport à l'application des problèmes directs, les principaux changements dans l'identification des paramètres incluent la transformation des paramètres à identifier en variables de réseau de neurones et l'intégration des données mesurées dans les données de contrainte supplémentaires. Cela permet de résoudre divers problèmes sans nécessiter de modifications majeures, ce qui constitue l'un des avantages significatifs des PINNs.

Selon la comparaison des pertes entre les différents modèles, après 100000 itérations d'entraînement avec différents taux d'apprentissage, les pertes de tous les modèles sont faibles et montrent une tendance à la stabilité. Le PINNT, la MAA, l'IECL et la MAAP présentent des valeurs de perte similaires, tandis que celles du RNP sont légèrement plus élevées.

L'ajout des déplacements surfaciques permet de réduire significativement les erreurs causés

par le calcul des équations d'équilibre sur les frontières de la plaque, rendant les valeurs de  $l_{EDP}$  de l'IECL aussi faibles que celles du PINNT.

D'après l'analyse des valeurs des paramètres identifiés pour les différents modèles, les différences entre les résultats obtenus avec les données sans bruit et les données bruitées ne sont pas significatives. Pour le module de Young  $E$ , tous les modèles permettent d'obtenir des valeurs comprises entre 8.87 GPa (0.54%) et 8.94 GPa (1.29%) avec les données sans bruit. Avec les données bruitées, les valeurs identifiées varient entre 8.91 GPa (1.00%) et 8.97 GPa (1.64%). Pour le coefficient de Poisson  $\nu$ , les valeurs identifiées se situent entre 0.202 (6.23%) et 0.212 (1.66%) avec les données sans bruit. Avec les données bruitées, tous les modèles permettent d'obtenir des valeurs comprises entre 0.198 (8.15%) et 0.208 (3.34%).

Parmi ces résultats, le RNP peut obtenir les meilleurs résultats. En effet, sa structure de réseaux de neurones indépendants permet de détecter plus précisément les détails sur la relation physique entre chaque variable de sortie (le champ de déplacement et le champ de contrainte).

Pour l'IECL, ce modèle peut également obtenir de meilleurs résultats que le PINNT, la MAA et la MAAP. Selon l'analyse des résultats obtenus des différents modèles dans la modélisation numérique, les champs de déplacement et de contrainte obtenus par l'IECL sont plus précis que ceux des autres modèles. Ainsi, les valeurs de  $E$  et  $\nu$  identifiées sont également plus proches des valeurs de référence.

Pour les modèles MAA et MAAP, l'adimensionnement des variables a déjà considérablement amélioré les performances du PINNT. Ainsi, dans l'application de l'identification des paramètres, ces deux modèles n'ont pas montré d'amélioration significative par rapport au PINNT, ce qui fait que les valeurs des paramètres identifiés sont presque identiques à celles obtenues avec le PINNT.

Bien que les valeurs des paramètres identifiés obtenues en utilisant ces modèles individuels soient acceptables, elles présentent encore une certaine distance par rapport aux techniques établies telles que la méthode de recalage par éléments finis et la méthode des champs virtuels. Cependant, l'application combinée de divers modèles pourrait produire des résultats plus précis. Par exemple, l'étude de Wu et al. [206] ont combiné la méthode d'échantillonnage, le RNP et une autre méthode de l'IECL pour identifier les paramètres élastiques  $E$  et  $\nu$  dans un essai de poutre en porte-à-faux. Selon leurs résultats, les meilleures valeurs identifiées pour  $E$  et  $\nu$  ont des erreurs relatives de 0.047% et 0.539%, respectivement. Par conséquent, les modèles PINNs peuvent apporter une contribution significative au domaine de l'identification des paramètres à l'avenir.

## 4.6 Applications des PINNs à l'identification des conditions aux limites en mécanique des solides

L'identification des conditions aux limites est cruciale dans de nombreux problèmes inverses en mécanique des solides, où les conditions exactes aux frontières ne sont pas toujours directement mesurables. Les PINNs relèvent ce défi en traitant les conditions aux limites comme des variables à identifier, en combinant des données de mesure et des contraintes physiques dans un cadre unifié.

Pour illustrer l'application des PINNs dans l'identification des conditions aux limites, l'es-

sai de compression sur une plaque à un trou a été utilisé avec deux ensembles de données : un ensemble de champs de déplacement surfaciques, comme dans l'identification des paramètres mécaniques, et un ensemble de champs de déplacement aux frontières. De plus, afin de déterminer l'effet du bruit dans l'identification des conditions aux limites avec les PINNs, des données sans bruit et des données bruitées ont également été employées.

### 4.6.1 Configurations numériques des PINNs dans l'identification des conditions aux limites

L'identification des conditions aux limites a été réalisée dans une phase linéaire avec une loi de comportement symétrique. Le champ de déplacement utilisé pour l'identification,  $\mathbf{u}^m$ , comprend à la fois le champ de déplacement surfacique et le champ de déplacement aux frontières obtenus à partir de l'essai de compression avec la pression appliquée  $\mathbf{p}^c = \langle 0, 1 \rangle$  MPa sur une plaque à un trou. La géométrie de la plaque et les points de mesure sont illustrés dans la figure 4.18. Par conséquent, dans l'identification des conditions aux limites avec les PINNs, il y a 854

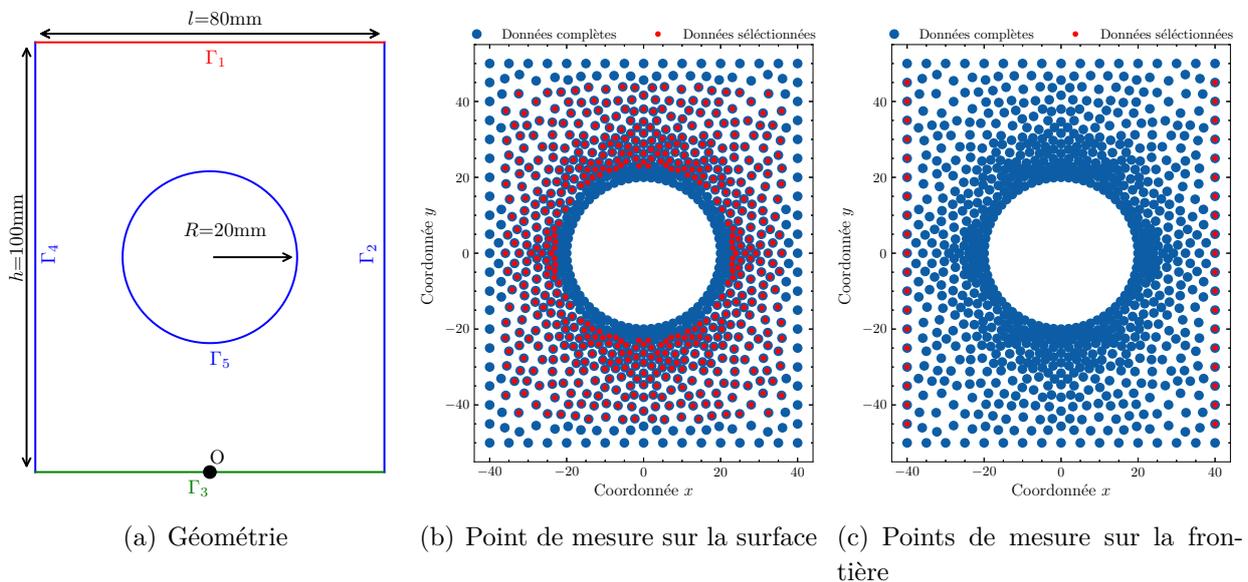
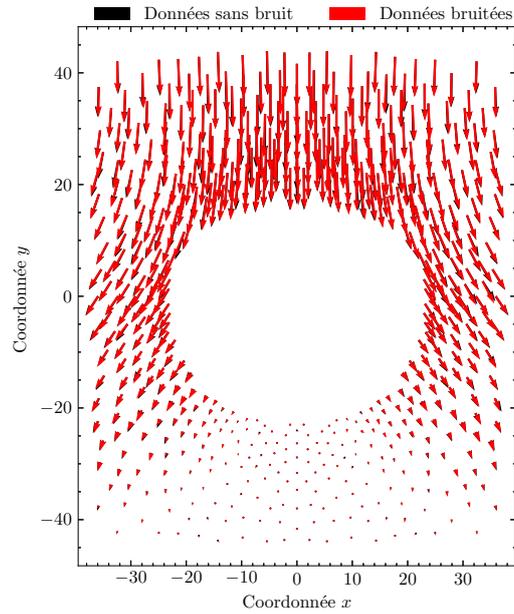


FIGURE 4.18 – Géométrie de la plaque à un trou et définition des points de mesure pour le champ de déplacement surfacique et le champ de déplacement aux frontières.

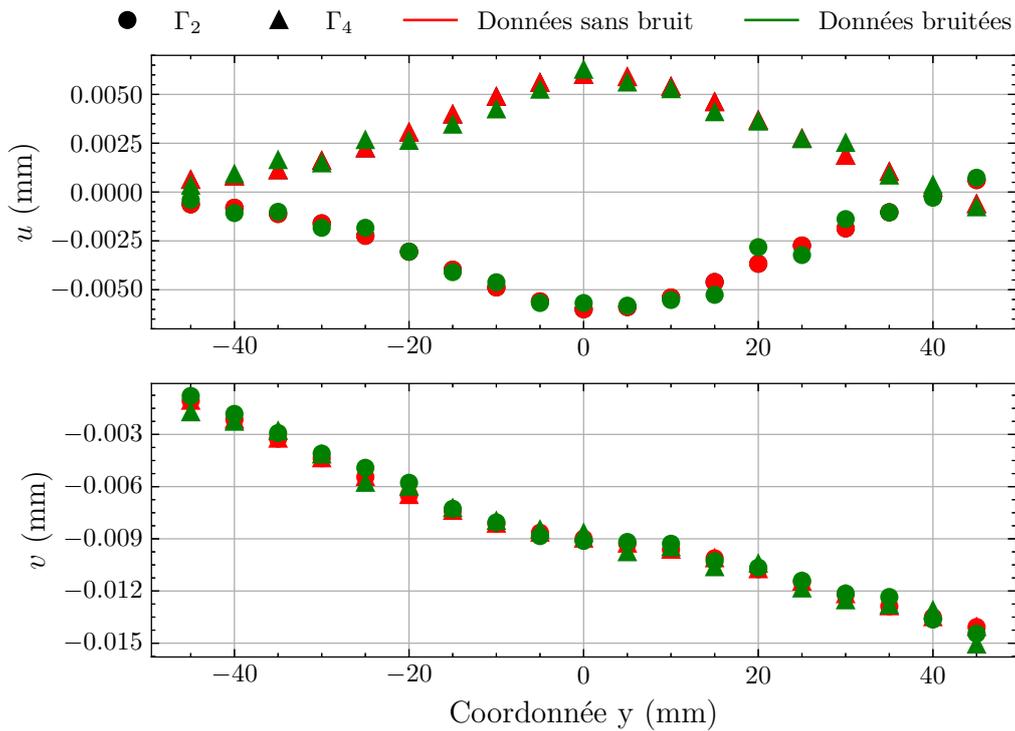
points intégrés dans tous les modèles. Le groupe du champ de déplacement surfacique contient 584 points de mesure, et le groupe de déplacement aux frontières contient 38 points de mesure situés sur les frontières  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$ .

Pour illustrer l'insensibilité au bruit, ainsi que la robustesse et l'efficacité des PINNs dans l'identification des conditions aux limites, des données sans bruit et avec 5% de bruit blanc additif (bruit gaussien avec une moyenne de 0 et un écart-type de 5% des déplacements utilisés) ont été utilisées. Avec les paramètres élastiques des matrices ettringitiques définis ( $E = 8.83$  GPa et  $\nu = 0.216$ ) dans la MEF, les champs de déplacement surfacique et aux frontières, avec et sans bruit, sont illustrés dans la figure 4.19.

Dans le cadre de l'identification des conditions aux limites, en considérant que la condition de chargement est inconnue, deux nouvelles variables  $p_x$  et  $p_y$  sont définies, avec  $\mathbf{p} = \langle p_x, p_y \rangle$ . Avec des valeurs initiales de  $p_{x0} = 0.1$  MPa et  $p_{y0} = 0.1$  MPa, mises à jour au cours des itérations, l'objectif des PINNs pour l'identification des conditions aux limites devient :



(a) Déplacements surfaciques



(b) Déplacements sur les frontières

FIGURE 4.19 – Définition des ensembles des champs de déplacement surfacique et de déplacement aux frontières utilisées avec du bruit et sans bruit dans l'identification des conditions aux limites.

$$\{\theta_{RN}^*, p_x^*, p_y^*\} = \arg \min_{\theta_{RN}, p_x, p_y} l_{TOT}(\mathbf{x}, \theta_{RN}, p_x, p_y) \quad (4.45)$$

Pour tous les modèles des PINNs, les hyperparamètres sont configurés de la même manière que pour l'identification des paramètres. Le volume du réseau neuronal  $V_{RN}$  est de  $6 \times 80$ , avec 6 couches cachées de 80 neurones chacune. La fonction d'activation utilisée est  $\tanh$ , et l'optimiseur employé est Adam. L'entraînement global se déroule en quatre étapes de 20000, 20000, 20000 et 40000 itérations, avec des taux d'apprentissage respectifs de  $10^{-3}$ ,  $5 \cdot 10^{-4}$ ,  $3 \cdot 10^{-4}$  et  $10^{-4}$ , pour un total de 100000 itérations.

Pour la configuration du PINNT, avec la formulation des variables mixtes, les variables d'entrée des PINNs sont les coordonnées  $x$  et  $y$ , tandis que les variables de sortie sont le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  et le champ de contrainte  $\sigma$ .

Contrairement à l'identification des paramètres mécaniques, les valeurs de  $p_x$  et  $p_y$  n'ont pas besoin d'être contraintes. Ainsi, la transformation des variables n'est pas nécessaire. Pour l'adimensionnement des variables, en raison de l'absence de condition de chargement, l'utilisation de l'équation (4.16) est indispensable pour déterminer la contrainte caractéristique  $\sigma_c$ . Les détails du calcul sont illustrés ci-dessous :

$$\frac{\mathbf{x}}{l_c}, \quad \mu_c = \frac{\mu}{\hat{\mu}}, \quad u_c = \max(\mathbf{u}^m), \quad \sigma_c = \frac{l_c}{u_c \mu_c} \quad (4.46)$$

Où  $\mu$  est le module de cisaillement, déterminé par le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ , et  $\hat{\mu}$  est le module de cisaillement adimensionné avec une valeur de 1. Ainsi, pour assurer la précision des conditions aux limites identifiées, les variables adimensionnées  $\hat{p}_x$  et  $\hat{p}_y$  sont utilisées dans les calculs des fonctions de perte. Ces deux variables adimensionnées sont déterminées par l'équation suivante :

$$\hat{p}_x = p_x \sigma_c, \quad \hat{p}_y = p_y \sigma_c, \quad \hat{\mathbf{p}} = \langle \hat{p}_x, \hat{p}_y \rangle \quad (4.47)$$

Où  $\hat{\mathbf{p}}$  représente la pression adimensionnée à identifier. Pour les définitions des fonctions de perte et des pertes scalaires,  $L_{EDP}$  et  $l_{EDP}$  restent invariants, comme le montre l'équation suivante :

$$l_{EDP} = W_{EDP} EQM \left( \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{\sigma}^{RN} \right) + W_{mixte} EQM \left( \hat{\sigma}^{RN} - \hat{\sigma}(\hat{\mathbf{u}}^{RN}) \right) \quad (4.48)$$

Bien que les conditions aux limites sur  $\Gamma_1$  soient inconnues, afin de relier le champ de contraintes obtenu par le réseau de neurones  $\hat{\sigma}^{RN}$  à la pression  $\hat{\mathbf{p}}$ ,  $L_{CL}$  et  $l_{CL}$  restent également inchangées, comme le montre l'équation suivante :

$$\begin{aligned} l_{CL} &= W_{CL} L_{CL} \\ &= W_{CL_1} EQM \left( \hat{\sigma}_1^{RN} \cdot \mathbf{n} - \hat{\mathbf{p}} \right) \\ &\quad + W_{CL_2} EQM \left( \hat{\sigma}_2^{RN} \cdot \mathbf{n} \right) \\ &\quad + W_{CL_4} EQM \left( \hat{\sigma}_4^{RN} \cdot \mathbf{n} \right) \\ &\quad + W_{CL_5} EQM \left( \hat{\sigma}_5^{RN} \cdot \mathbf{n} \right) \\ &\quad + w_{CL_3} EQM \left( \hat{v}_3^{RN} \right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

De manière similaire à l'identification des paramètres mécaniques, afin de minimiser les différences entre le champ de déplacement adimensionné  $\hat{\mathbf{u}}^{RN}$  et le champ de déplacement

utilisé dans l'identification  $\hat{\mathbf{u}}^m$ , la fonction de perte  $L_m$  et la perte scalaire  $l_m$  sont ajoutées à  $L_{DCS}$  et  $l_{DCS}$ . Par conséquent, la perte  $l_{DCS}$  et la perte totale  $l_{TOT}$  sont décrites comme suit :

$$\begin{aligned} l_{DCS} &= w_{DCS}EQM(\hat{u}_O^{RN}) + W_mEQM(\mathbf{u}^{RN} - \mathbf{u}^m) \\ l_{TOT} &= l_{EDP} + l_{CL} + l_{DCS} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Par ailleurs, pour évaluer plus facilement les erreurs des conditions aux limites identifiées pendant l'entraînement, une perte scalaire  $l_p$  est définie comme indiqué dans l'équation ci-dessous :

$$l_p = EQM(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{p}}^c) \quad (4.51)$$

Il est important de noter que  $l_p$  ne participe pas au calcul. Cette valeur est uniquement destinée à une meilleure analyse des conditions aux limites identifiées.

Dans l'identification des conditions aux limites, la plupart des configurations des PINNs utilisant des techniques avancées sont similaires à celles utilisées dans la modélisation et l'identification des paramètres. Les configurations de RNP et MAA restent invariantes. Pour la MAAP, en raison de l'ajout d'une fonction de perte de mesure supplémentaire dans l'optimiseur, le nombre de poids de perte à ajuster augmente également.

La modification la plus importante parmi ces modèles concerne l'IECL. Avec l'adimensionnement des variables, les données de sortie adimensionnées de ce modèle sont construites avec  $F(\hat{\mathbf{x}})$ , une fonction spéciale ayant la valeur de 0 aux frontières où les conditions aux limites sont connues, et  $G(\hat{\mathbf{x}})$ , qui représente les valeurs exactes des conditions aux limites connues, ainsi que les données de sortie adimensionnées  $\hat{\mathbf{u}}^{RN}$  et  $\hat{\sigma}^{RN}$ . La fonction  $F(\hat{\mathbf{x}})$  est composée de 5 fonctions de distance approximative pour les 5 variables de sortie,  $F_i$ , avec  $i = \hat{u}, \hat{v}, \hat{\sigma}_{xx}, \hat{\sigma}_{xy}, \hat{\sigma}_{yy}$ . La fonction  $G(\hat{\mathbf{x}})$  est constituée d'un petit réseau de neurones, ses données de sortie étant  $G_i$ , avec  $i = \hat{u}, \hat{v}, \hat{\sigma}_{xx}, \hat{\sigma}_{xy}, \hat{\sigma}_{yy}$ .

Étant donné que les conditions de chargement sont inconnues, les fonctions  $F(\hat{\mathbf{x}})$  et  $G(\hat{\mathbf{x}})$  doivent être également modifiées. Avec la normale sortante  $\mathbf{n}_1 = \langle 0, 1 \rangle$ , les valeurs de  $\hat{\sigma}_{xy}$  et  $\hat{\sigma}_{yy}$  sont inconnues sur  $\Gamma_1$ . Ainsi, les composants  $F_{\hat{u}}, F_{\hat{v}}, F_{\hat{\sigma}_{xx}}$  et  $G_{\hat{u}}, G_{\hat{v}}, G_{\hat{\sigma}_{xx}}$  restent inchangés.

Pour  $F_{\hat{\sigma}_{xy}}$ , elle ne prend en compte que les valeurs nulles sur les frontières  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$ . Étant donné que les valeurs de  $\hat{\sigma}_{yy}$  sont inconnues sur tout le domaine, la valeur de  $F_{\hat{\sigma}_{yy}}$  est définie également à 1 sur tout le domaine. Afin de ne pas affecter les valeurs des conditions aux limites identifiées, la valeur de  $G_{\hat{\sigma}_{xy}}$  est réglée à 0 sur  $\Gamma_1$ , et celle de  $G_{\hat{\sigma}_{yy}}$  est réglée à 0 sur tout le domaine. Après les modifications, les valeurs de  $F_i$  et  $G_i$  dans l'identification des conditions aux limites sont visualisées sur les figures 4.20 et 4.21.

Peu importe l'ensemble de déplacements utilisé, les configurations des PINNs pour l'identification des conditions aux limites restent identiques. Suivant ces configurations, l'entraînement a été effectué sur 100000 itérations. Les identifications des conditions aux limites par ces modèles ont été réalisées en utilisant deux ensembles de champs de déplacement. Les analyses des résultats sont présentées dans la sous-section suivante.

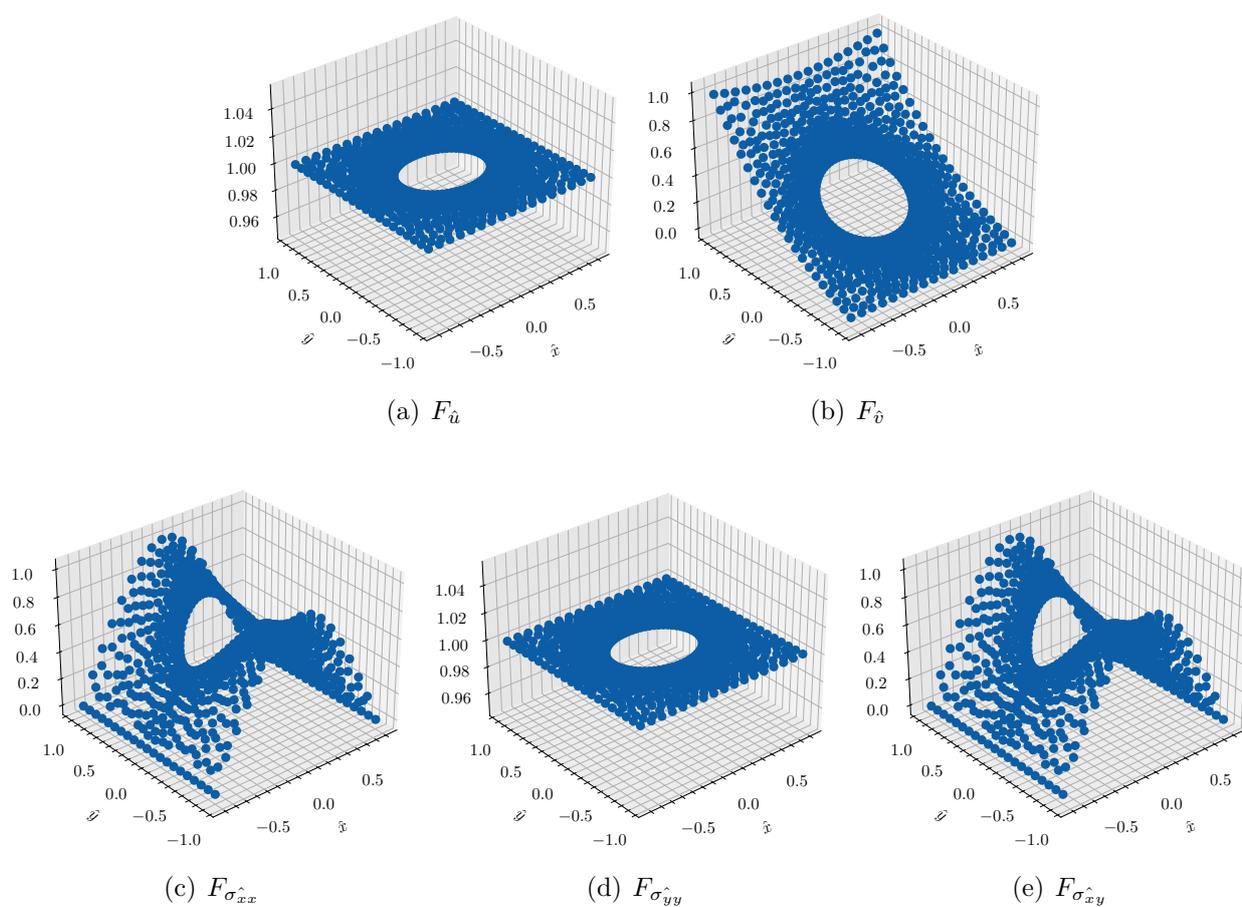


FIGURE 4.20 – Les valeurs de la fonction  $F(\hat{\mathbf{x}})$  obtenues par les fonctions de distance approximative pour les variables de sortie adimensionnées.

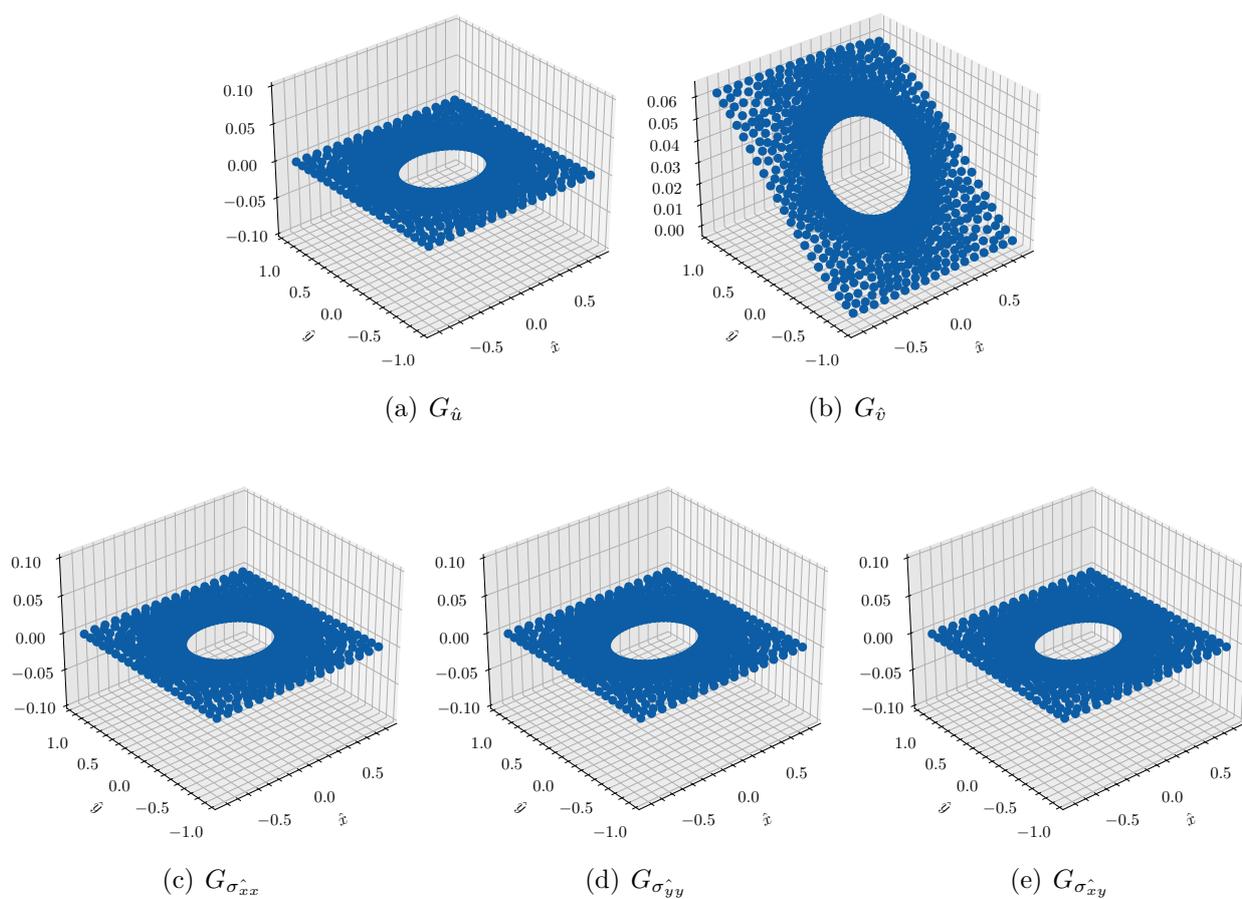


FIGURE 4.21 – Les valeurs de la fonction  $G(\hat{\mathbf{x}})$  obtenues par un petit volume de réseau de neurones pour les valeurs des conditions aux limites connues.

## 4.6.2 Comparaison des conditions identifiées avec le champ de déplacement surfacique

Tout d’abord, l’analyse des conditions identifiées avec le champ de déplacement surfacique est présentée ci-dessous.

### 4.6.2.1 Comparaison des pertes des PINNs dans l’identification des conditions aux limites

La figure 4.22 montre les pertes scalaires  $l_{EDP}$ ,  $l_{CL}$ ,  $l_{DCS}$  et  $l_m$  obtenues dans l’identification des conditions aux limites en utilisant les déplacements surfaciques. Pour mieux observer les pertes scalaires  $l_m$  obtenues à partir des données mesurées, leurs valeurs ne sont pas incluses dans les pertes des données de contrainte supplémentaires. Ainsi,  $l_{DCS}$  ne prend en compte que la perte de déplacement  $u$  nul au point O.

D’après cette figure, le RNP présente des valeurs plus élevées de  $l_{EDP}$ ,  $l_{CL}$  et  $l_{DCS}$ . Selon l’analyse des erreurs relatives normalisées dans la modélisation numérique, tous les modèles montrent des erreurs significatives pour  $u$  et  $\sigma_{xx}$  sur  $\Gamma_3$ . Pour réduire ces erreurs, il est essentiel de fournir des informations supplémentaires sur cette frontière. Bien que des champs de déplacement surfaciques supplémentaires aient été ajoutés dans les PINNs,  $\Gamma_3$  ne contient pas de points de mesure. De plus, en raison de la construction du RNP, l’interaction entre les variables de sortie est minimisée. Cette caractéristique permet d’identifier les paramètres mécaniques avec plus de précision, mais elle rend le modèle moins flexible pour ajuster les interactions complexes entre les variables. Cela peut entraîner des pertes plus élevées dans les champs de déplacement et de contrainte obtenus. Ainsi, en l’absence de données supplémentaires sur  $\Gamma_3$ , les valeurs de  $l_{EDP}$  et  $l_{CL}$  pour le RNP sont plus élevées par rapport aux autres modèles, comme observé dans la modélisation numérique et l’identification des paramètres mécaniques.

Pour le PINNT, la MAA, l’IECL et la MAAP, les valeurs des  $l_{EDP}$ ,  $l_{CL}$  et  $l_{DCS}$  restent au même niveau. Ces valeurs sont assez faibles, indiquant que les champs de déplacement et de contrainte obtenus sont précis.

Pour la MAA, étant donné que les améliorations basiques ont déjà significativement amélioré les performances de tous les modèles de PINNs, elle n’apporte aucune amélioration évidente, et ses valeurs de pertes sont similaires à celles du PINNT.

L’IECL permet aux données de sortie de respecter strictement les conditions aux limites définies. Ainsi, les champs de déplacement et de contrainte sont plus précis. Cependant, en raison de cette caractéristique, son  $l_{EDP}$  est plus facilement élevé par rapport aux autres modèles en raison des erreurs dans l’équation d’équilibre, particulièrement aux frontières. Cependant, similaire à la comparaison des pertes obtenues dans l’identification des paramètres, grâce au champ de déplacement supplémentaire utilisé, ces erreurs sont bien réduites, permettant au  $l_{EDP}$  de l’IECL d’être similaire à celui du PINNT.

Pour la MAAP, les pertes sont légèrement supérieures à celles du PINNT, de la MAA et de l’IECL. La MAAP ajuste dynamiquement les poids de perte en fonction du ratio entre la perte actuelle et les pertes précédentes. Pour identifier la condition de chargement inconnue, la variable  $\mathbf{p}$  est connectée au champ de contraintes sur  $\Gamma_1$  via la fonction de perte dans les PINNs. Cependant, cette connexion rend la perte  $l_{CL}$  correspondante sur  $\Gamma_1$  particulièrement faible et difficile à minimiser davantage. En conséquence, la MAAP augmente le poids associé,

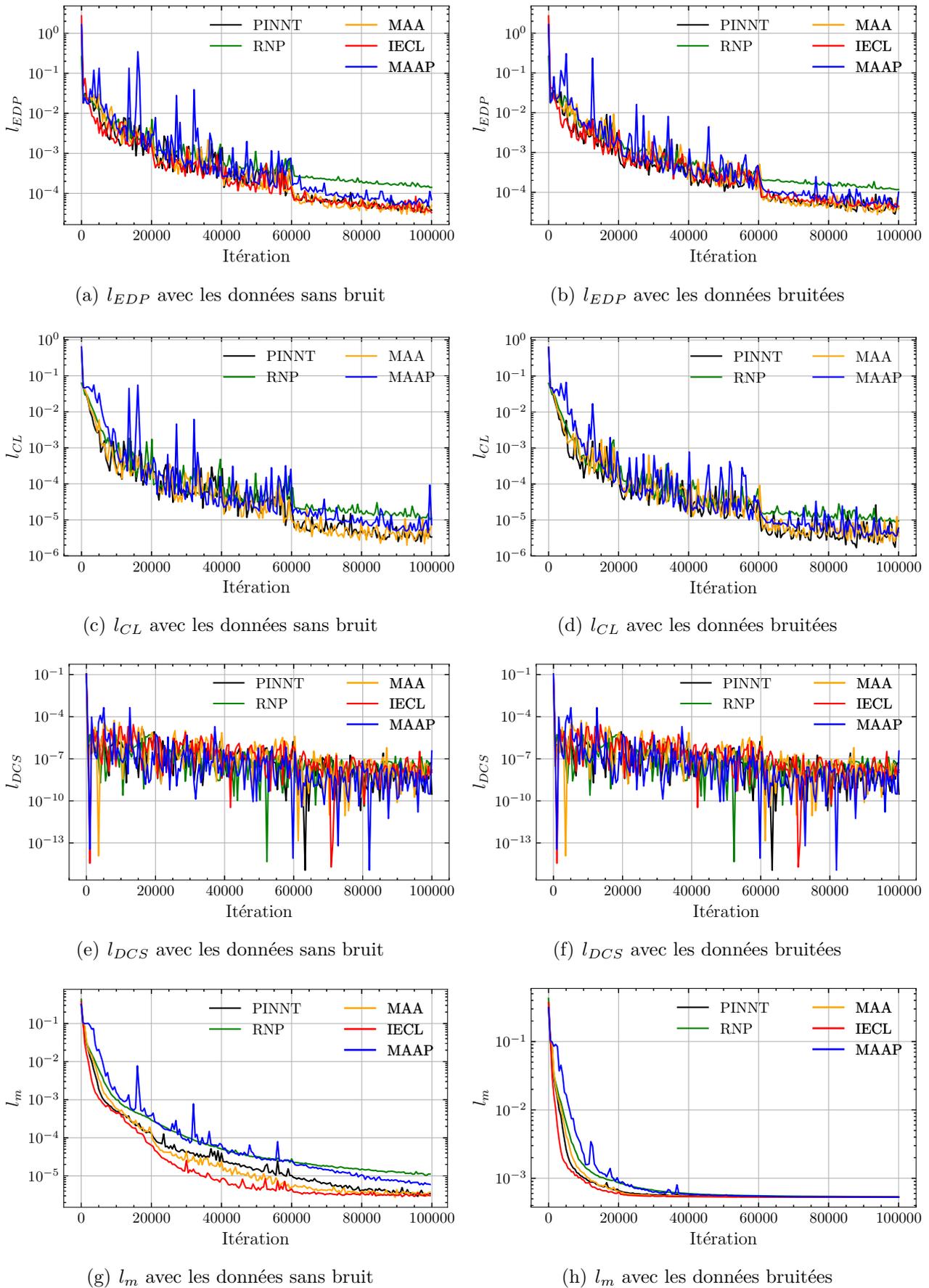


FIGURE 4.22 – Comparaison des pertes scalaires obtenues par les différents modèles de PINNs dans l'identification des conditions aux limites avec le champ de déplacement surfacique.

réduisant ainsi l'optimisation de  $l_{EDP}$  et des autres composantes de  $l_{CL}$ .

Globalement, les valeurs des  $l_{EDP}$ ,  $l_{CL}$  et  $l_{DCS}$  avec les données sans bruit sont similaires à celles obtenues avec les données bruitées après 10000 itérations pour tous les modèles, les différences entre elles ne sont pas significatives, indiquant l'insensibilité au bruit des PINNs. Après 100000 itérations, les valeurs de  $l_{EDP}$  se trouvent entre  $10^{-4}$  et  $10^{-5}$ , et  $l_{CL}$  varie de  $10^{-5}$  à  $10^{-6}$ .

En raison de la contrainte simple imposée au déplacement adimensionné  $\hat{u}_O^{RN}$  à 0, les valeurs de  $l_{DCS}$  obtenues sont extrêmement faibles et montrent une grande variabilité. Après 100000 itérations,  $l_{DCS}$  se situent entre  $10^{-8}$  et  $10^{-9}$ .

La perte  $l_m$  est plus difficile à minimiser avec les données sans bruit par rapport à celle de l'identification des paramètres. En revanche, grâce aux contraintes des équations d'équilibre et des conditions aux limites sur les autres frontières définies,  $l_m$  se stabilise plus rapidement à une valeur relativement grande avec les données bruitées. Après 100000 itérations, les valeurs de  $l_m$  avec les données sans bruit se situent entre  $10^{-5}$  et  $3 \cdot 10^{-6}$ . Avec les données bruitées, tous les modèles présentent des valeurs autour de  $5.3 \cdot 10^{-4}$ .

#### 4.6.2.2 Comparaison des conditions aux limites identifiées par les PINNs

Pour évaluer la précision des valeurs des conditions de chargement identifiées pendant l'entraînement, les pertes  $l_p$  de tous les modèles en fonction du nombre d'itérations sont illustrées dans la figure 4.23.

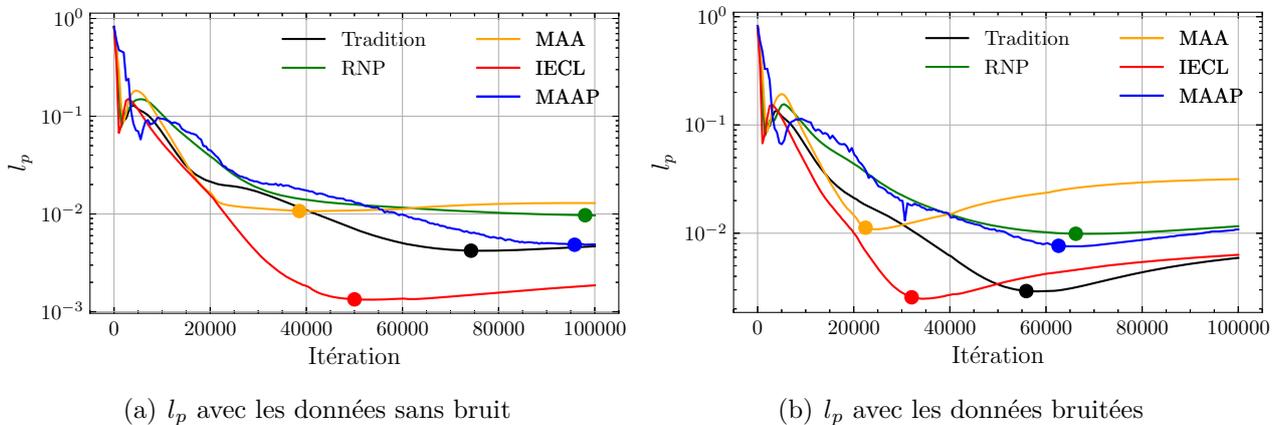


FIGURE 4.23 – Comparaison des pertes scalaires  $l_p$  obtenues par les différents modèles de PINNs dans l'identification des conditions aux limites avec le champ de déplacement surfacique.

Selon la figure 4.23, les valeurs de  $l_p$  diminuent avant de ré-augmenter, ce qui traduit une instabilité principalement causée par les contraintes souples des EDPs et des conditions aux limites définies. D'après la figure 4.22, les pertes restent relativement stables à 100000 itérations avec de faibles magnitudes, indiquant que tous les modèles ont convergé. Cependant, pour réduire ces pertes, les valeurs des conditions à identifier continuent d'être ajustées pendant l'entraînement. De plus, l'instabilité de calcul est plus évidente lors de l'identification avec des données bruitées, car le bruit influence significativement l'augmentation de  $l_p$ . Ce comportement rappelle celui observé avec la méthode de minimisation de la fonctionnelle erreur. Par conséquent, il est nécessaire de développer un critère d'arrêt spécifique pour les PINNs dans l'identification des conditions aux limites afin d'éviter le surajustement des variables à identifier.

D'après cette figure, l'IECL permet d'identifier la condition de chargement avec plus de précision. En intégrant directement les conditions aux limites dans les données de sortie, ce modèle montre une meilleure performance dans la modélisation numérique et l'identification des conditions aux limites.

Par ailleurs, la MAA et la MAAP n'améliorent pas les résultats de l'identification, et leurs  $l_p$  sont toujours plus élevés que celui du PINNT.

La MAA ajuste la pente de la fonction d'activation en introduisant une nouvelle variable,  $\beta_{adapt}$ , afin de minimiser la perte totale pendant l'entraînement. Cependant, ce modèle peut entraîner une baisse de précision dans l'identification des conditions aux limites. Lorsque la valeur de  $\mathbf{p}$  identifiée est imprécise, l'ajustement de  $\beta_{adapt}$  permet de réduire la perte totale, ce qui peut conduire à une plus grande divergence entre la valeur identifiée et la valeur de référence. Par conséquent, la MAA n'est pas adaptée à utiliser dans l'identification des conditions aux limites.

La MAAP ajuste dynamiquement les poids des pertes pendant l'entraînement, ce qui peut nuire à la précision de l'identification des conditions aux limites. En ajustant les poids, la MAAP peut accorder trop d'importance aux pertes liées à  $\mathbf{p}$  et aux contraintes obtenues par le réseau de neurones sur  $\Gamma_1$ , modifiant ainsi la direction de l'optimisation et dégradant la précision des résultats d'identification. De plus, lorsque les données bruitées sont utilisées, la MAAP peut augmenter le poids de  $l_m$  en raison de valeurs invariantes, ce qui conduit à des résultats d'identification moins précis par rapport au PINNT. Par conséquent, la MAAP n'est pas appropriée pour l'identification des conditions aux limites.

D'après la comparaison des pertes, la structure du RNP produit des champs de déplacement et de contrainte moins précis que le PINNT. Ainsi, la valeur de  $\mathbf{p}$  obtenue est plus éloignée de la valeur de référence. Par conséquent, ce modèle ne présente pas d'avantage dans l'identification des conditions aux limites.

Dans la figure 4.23, les points de différentes couleurs sont utilisés pour marquer les valeurs les plus faibles de  $l_p$  pour chaque modèle. Toutes les figures suivantes comparant les valeurs de  $\mathbf{p}$  identifiées et celles de référence sont réalisées uniquement avec la valeur minimale de  $l_p$ .

Afin de représenter plus efficacement l'erreur entre la condition de chargement identifiée et celle de référence  $\mathbf{p}^c$ , similaire à la comparaison des résultats dans la modélisation numérique, l'erreur relative normalisée, définie par l'erreur absolue par rapport à la pression maximale (1 MPa), a été utilisée.

Pour une analyse détaillée, on se concentre sur la figure 4.24, qui illustre la comparaison de la condition de chargement identifiée par le PINNT et la condition de chargement de référence. Les autres figures présentant des comparaisons similaires pour les différents modèles de PINNs sont fournies en annexe D.3.

Selon la figure 4.24, la condition de chargement identifiée avec les données bruitées ne présente pas de grands écarts par rapport à celle avec les données sans bruit, ce qui confirme également l'insensibilité des PINNs. Dans l'ensemble, toutes les valeurs identifiées oscillent autour des valeurs de référence. Il est à noter que pour  $p_x$ , certaines valeurs identifiées avec les données bruitées sont meilleures que celles avec les données sans bruit, ce qui rend les erreurs relatives normalisées avec les données bruitées plus faibles que celles avec les données sans bruit. Ce phénomène est également causé par les contraintes souples, entraînant le calcul instable.

Numériquement, avec les données sans bruit, les valeurs maximale, moyenne et minimale

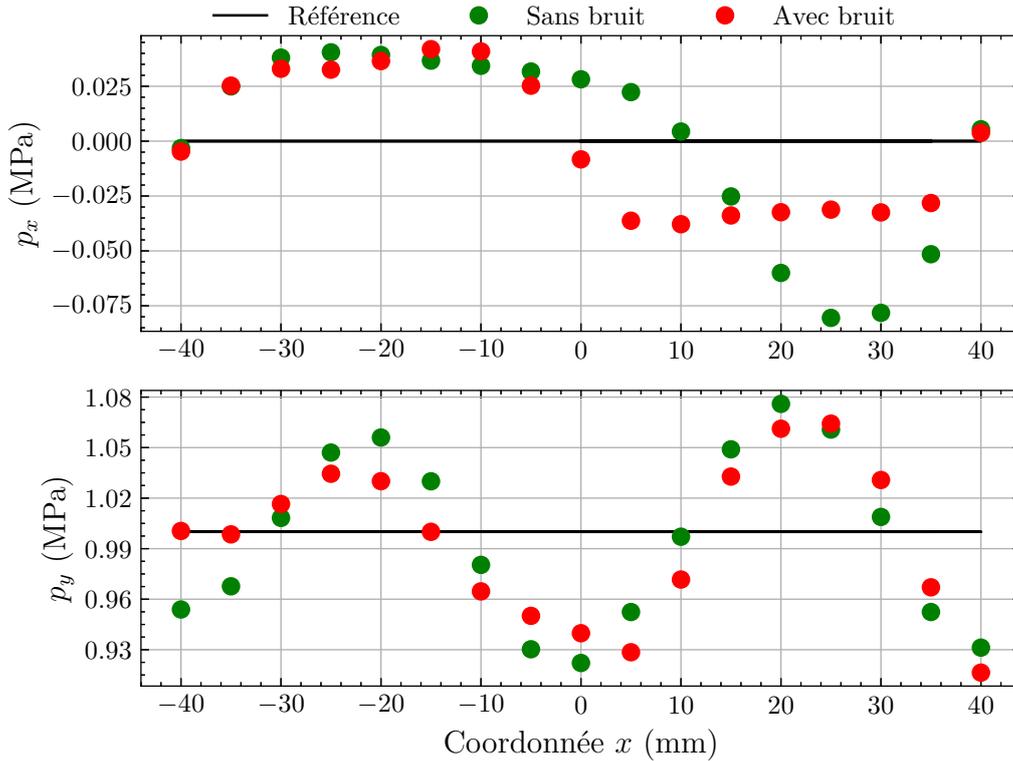


FIGURE 4.24 – Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par le PINNT sur  $\Gamma_1$  avec les champ de déplacement surfacique et celle de référence sur lorsque  $l_p$  est minimal.

des erreurs relatives normalisées sur  $p_x$  sont 8.05%, 3.35% et 0.31%, respectivement. Pour  $p_y$ , ces valeurs sont 7.78%, 4.40% et 0.29%, respectivement. Avec les données bruitées, les valeurs maximale, moyenne et minimale des erreurs relatives normalisées sur  $p_x$  sont 4.19%, 2.84% et 0.38%. Pour  $p_y$ , ces valeurs sont 8.35%, 3.72% et 0.00%, respectivement. Ces erreurs montrent que le PINNT n'est pas le modèle idéal pour l'identification des conditions aux limites.

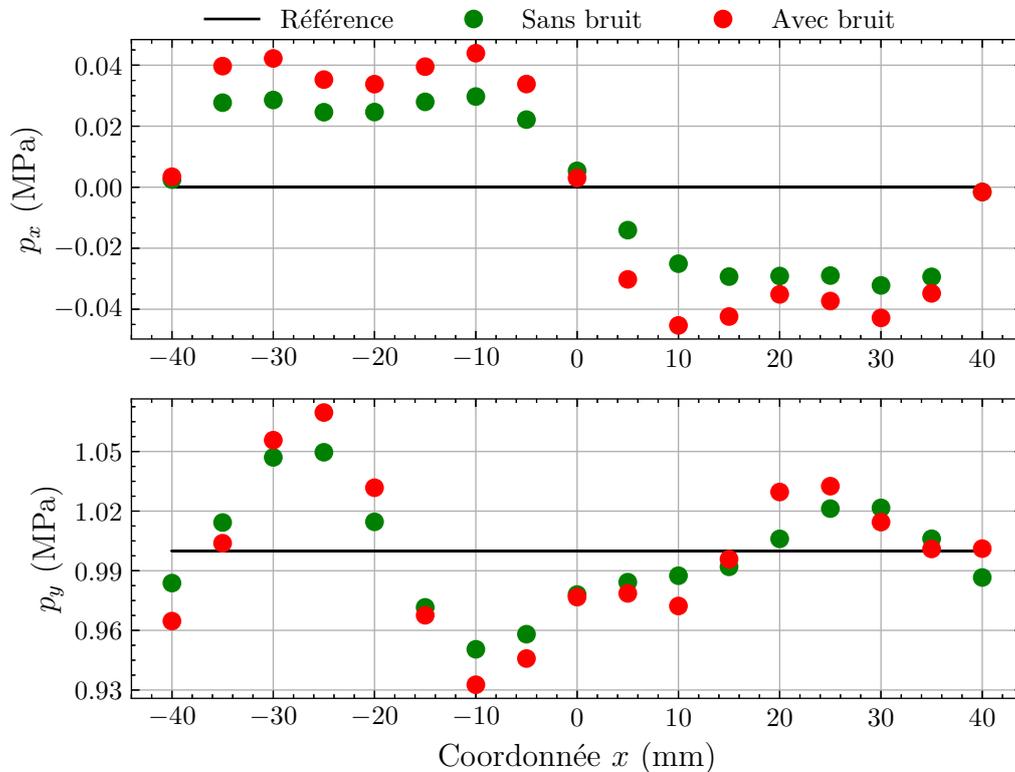
Le tableau 4.3 présente toutes les valeurs des erreurs relatives normalisées des conditions de chargement identifiées pour chaque modèle lorsque leurs  $l_p$  sont minimales. D'après ce tableau, l'IECL permet d'identifier les conditions de chargement de manière plus précise. Comparé aux autres modèles, avec les données sans bruit, les valeurs maximale, moyenne et minimale des erreurs relatives normalisées de  $p_x$  pour l'IECL sont respectivement de 3.21%, 2.25% et 0.15%. Pour  $p_y$ , ces valeurs sont respectivement de 4.96%, 2.28% et 0.60%.

Avec les données bruitées, les erreurs n'augmentent pas significativement. Pour  $p_x$ , les valeurs maximale, moyenne et minimale des erreurs relatives normalisées avec les données bruitées sont respectivement de 4.53%, 3.20% et 0.15%. Pour  $p_y$ , ces valeurs sont respectivement de 6.95%, 2.97% et 0.09%. La différence entre les erreurs relatives normalisées maximales et moyennes pour les données sans bruit et bruitées est inférieure à 2% pour  $p_x$  et à 1% pour  $p_y$ . Selon ces données, la condition de chargement identifiée par l'IECL est acceptable, la comparaison des conditions identifiées sur ce modèle est illustrée dans la figure 4.25

En revanche, pour les autres modèles, lorsque les  $l_p$  sont minimales, les valeurs maximales des erreurs relatives normalisées de  $p_x$  varient entre 7.51% et 12.99% avec les données sans bruit. Avec les données bruitées, la variation est de 10.82% à 12.98%, à l'exception du PINNT. Pour  $p_y$ , les valeurs maximales des erreurs relatives normalisées se situent entre 7.78% et 20.32% avec les données sans bruit, et entre 8.35% et 16.23% avec les données bruitées. Ces erreurs

TABLEAU 4.3 – Erreurs relatives normalisées des conditions de chargement identifiées sur  $\Gamma_1$  avec les champ de déplacement surfacique lorsque  $l_p$  sont minimales, voir la figure 4.23.

Pression identifiée		$p_x$		$p_y$	
Niveau du bruit		0%	5%	0%	5%
PINNT	Erreur max	8.05%	4.19%	7.78%	8.35%
	Erreur moy	3.55%	2.84%	4.40%	3.72%
	Erreur min	0.31%	0.38%	0.29%	0.00%
RNP	Erreur max	10.49%	10.82%	20.32%	16.23%
	Erreur moy	5.26%	5.76%	6.26%	6.60%
	Erreur min	0.57%	0.88%	0.63%	0.56%
MAA	Erreur max	12.99%	12.98%	10.90%	11.87%
	Erreur moy	6.26%	7.29%	6.71%	5.59%
	Erreur min	0.72%	1.07%	0.32%	0.79%
IECL	Erreur max	3.21%	4.53%	4.96%	6.95%
	Erreur moy	2.25%	3.20%	2.28%	2.97%
	Erreur min	0.15%	0.15%	0.60%	0.09%
MAAP	Erreur max	7.51%	11.57%	12.89%	10.28%
	Erreur moy	3.47%	5.94%	4.77%	4.83%
	Erreur min	0.46%	0.61%	0.33%	1.01%


 FIGURE 4.25 – Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par l'IECL sur  $\Gamma_1$  avec les champ de déplacement surfacique et celle de référence lorsque  $l_p$  est minimal.

sont trop importantes pour être négligées.

Concernant les erreurs relatives normalisées moyennes, le PINNT, le RNP, la MAA et la MAAP présentent des valeurs comprises entre 3.55% et 6.26% pour  $p_x$  avec les données sans bruit, et entre 2.84% et 7.29% avec les données bruitées. Pour  $p_y$ , ces valeurs varient entre 4.40% et 6.71% avec les données sans bruit, et entre 3.72% et 6.60% avec les données bruitées. En résumé, les valeurs moyennes des erreurs relatives normalisées pour ces modèles restent relativement élevées.

Les résultats montrent que, malgré l'ensemble de déplacement surfacique suffisamment large, les modèles individuels de PINNs, à l'exception de l'IECL, ne parviennent pas à identifier avec précision les conditions de chargement. Ces observations soulignent l'importance de techniques avancées comme l'IECL dans l'identification des conditions aux limites et suggèrent que des approches combinées pourraient offrir des améliorations significatives pour des applications futures. Par ailleurs, pour obtenir les meilleurs résultats d'identification, le développement de méthodes sur le critère d'arrêt spécifique pour les PINNs est indispensable.

### 4.6.3 Comparaison des conditions identifiées avec le champ de déplacement aux frontières

Ensuite, pour approfondir l'analyse de l'identification des conditions aux limites avec différents ensembles de données dans les PINNs, les résultats utilisant le champ de déplacement aux frontières sont présentés ci-après.

#### 4.6.3.1 Comparaison des pertes des PINNs dans l'identification des conditions aux limites

La figure 4.26 montre les pertes scalaires  $l_{EDP}$ ,  $l_{CL}$ ,  $l_{DCS}$  et  $l_m$  obtenues lors de l'identification des conditions aux limites avec les déplacements aux frontières. Il est important de noter que  $l_{DCS}$  ne contient que la perte sur le point O. Pour mieux analyser les pertes scalaires obtenues à partir des données mesurées, les valeurs de  $l_m$  en fonction du nombre d'itérations sont tracées séparément.

Selon cette figure, comme seul l'ensemble du champ de déplacement est modifié dans cette identification, la plupart des variations de  $l_{EDP}$ ,  $l_{CL}$ ,  $l_{DCS}$  et  $l_m$  sur les différents modèles sont similaires à celles observées avec les déplacements surfaciques. Cependant,  $l_{EDP}$  de la MAAP est au même niveau que celui du RNP. La réduction du nombre de données utilisées entraîne une augmentation du poids de la perte associée à la connexion entre la condition à identifier  $\hat{\mathbf{p}}$  et le champ de contrainte  $\hat{\sigma}^{RN}$  sur  $\Gamma_1$ , ce qui modifie la direction de l'optimisation et augmente les valeurs de  $l_{EDP}$  et  $l_{CL}$ .

De plus, selon la figure 4.26(d), toutes les valeurs de  $l_{CL}$  sont plus élevées que celles obtenues lors de l'identification avec les champs de déplacement surfacique. Lorsque la condition de chargement est inconnue et que le nombre de données utilisée pour l'identification est réduite, la perte  $l_{CL}$  devient plus difficile à minimiser. Par conséquent, toutes les valeurs de  $l_{CL}$  sont plus élevées.

Numériquement, les valeurs de  $l_{EDP}$  et  $l_{DCS}$  avec les données sans bruit sont comparables à celles obtenues avec les données bruitées après 100000 itérations pour tous les modèles. Les différences entre elles ne sont pas significatives. Les valeurs de  $l_{EDP}$  varient entre  $10^{-4}$  et  $10^{-5}$ .  $l_{CL}$  oscillent entre  $10^{-5}$  et  $10^{-6}$  avec les données sans bruit, tandis qu'avec les données bruitées,

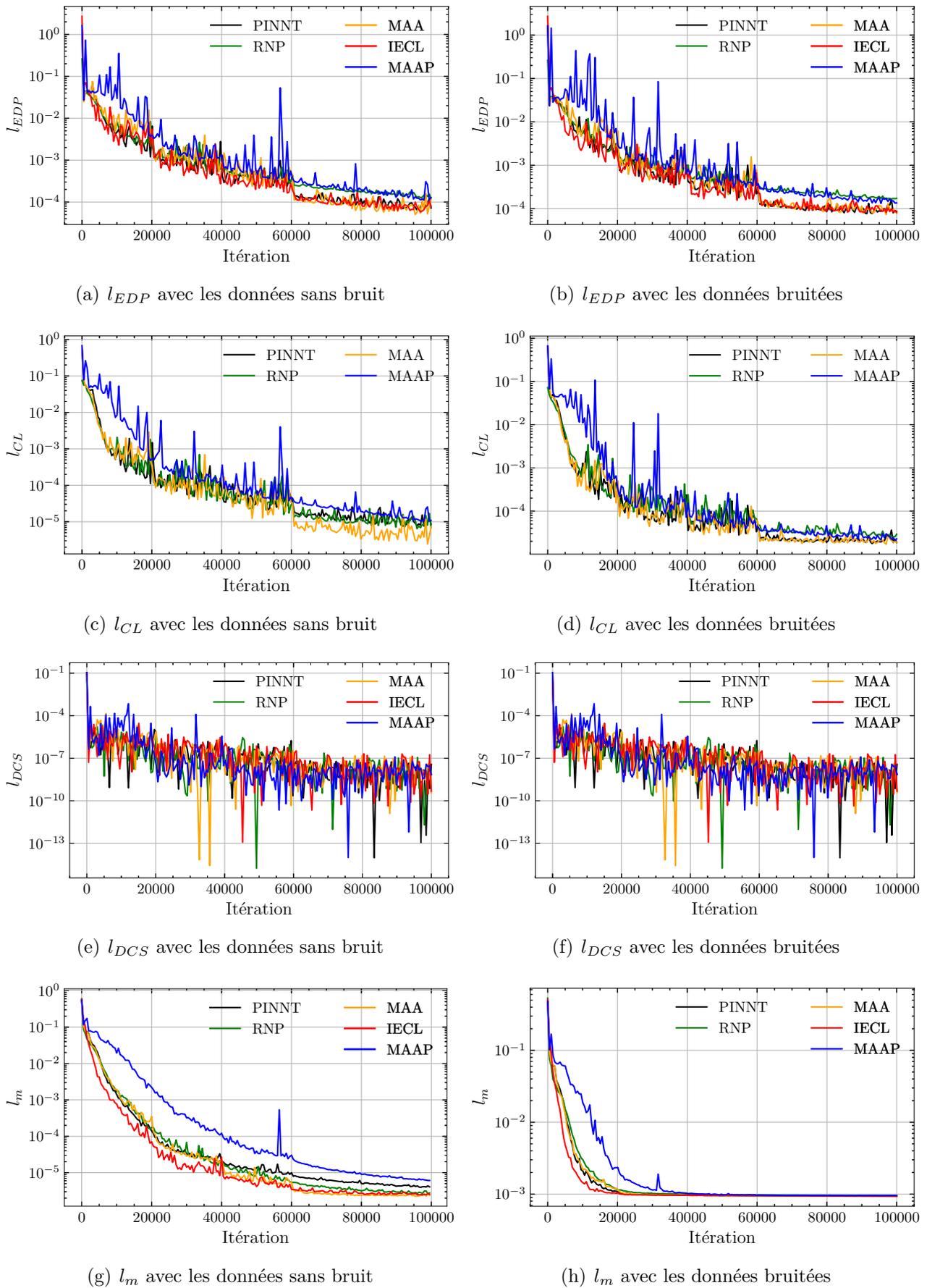


FIGURE 4.26 – Comparaison des pertes scalaires obtenues par les différents modèles de PINNs dans l'identification des conditions aux limites avec le champ de déplacement aux frontières.

$l_{CL}$  se situent autour de  $2 \cdot 10^{-5}$ . Pour  $l_{DCS}$ , les valeurs sont très instables, variant entre  $10^{-7}$  et  $10^{-10}$  après l'entraînement. Pour  $l_m$ , après 100000 itérations, les valeurs avec les données sans bruit se situent entre  $3 \cdot 10^{-6}$  et  $6 \cdot 10^{-6}$ . Avec les données bruitées, tous les modèles ont des valeurs autour de  $9.5 \cdot 10^{-4}$ .

#### 4.6.3.2 Comparaison des conditions aux limites identifiées par les PINNs

Avant de se concentrer sur l'analyse des erreurs relatives normalisées des conditions de chargement identifiées, les pertes  $l_p$  de tous les modèles de PINNs en fonction du nombre d'itérations sont illustrées dans la figure 4.27 pour mieux évaluer la précision des valeurs identifiées pendant l'entraînement.

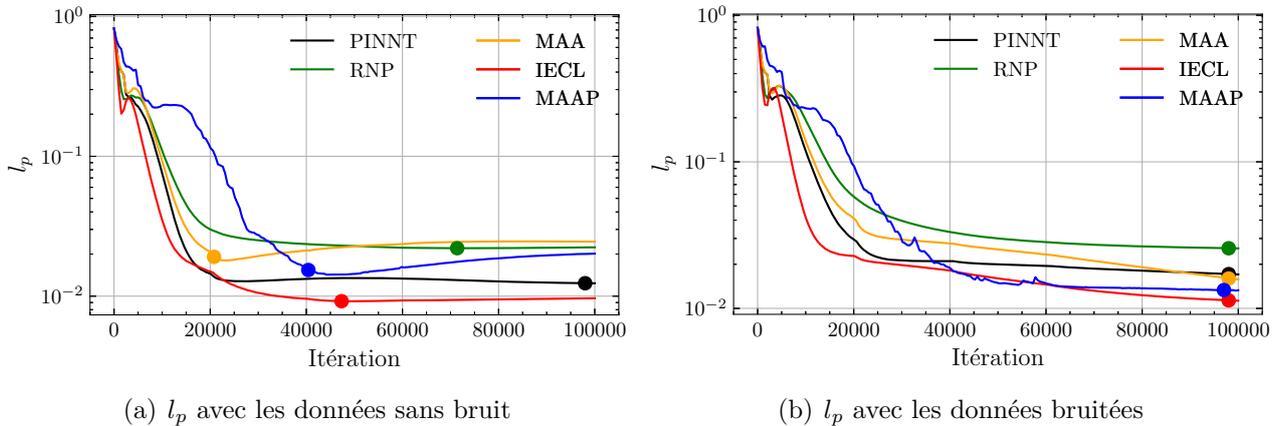


FIGURE 4.27 – Comparaison des pertes scalaires  $l_p$  obtenues par les différents modèles de PINNs dans l'identification des conditions aux limites avec le champ de déplacement aux frontières.

D'après la figure 4.27, le surajustement des variables à identifier  $\mathbf{p}$  est encore présenté dans l'identification avec les données sans bruit, particulièrement pour la MAA et la MAAP. Étant donné que ces deux modèles se concentrent principalement sur la minimisation des pertes  $l_{TOT}$ , les valeurs de conditions de chargement identifiées sont moins stables. Pour les trois autres modèles, le surajustement des variables à identifier n'est pas significatif, indiquant que les valeurs de conditions de chargement identifiées sont relativement stables. En raison de la stabilité des pertes après 100000 itérations, tous les modèles peuvent être considérés comme ayant déjà convergé.

En revanche, avec les données bruitées, en raison de l'utilisation d'un plus petit nombre de données, les pertes  $l_p$  se stabilisent plus tôt à des valeurs plus élevées, sans surajustement des variables identifiées. Cela indique que l'utilisation d'un grand nombre de données permet d'améliorer la précision des résultats obtenus, mais le surajustement des variables à identifier est difficile à éviter dans l'identification des conditions aux limites avec les PINNs.

De plus, avec les données sans bruit, bien que les valeurs et les variations des  $l_p$  pour chaque modèle soient différentes de celles obtenues avec les déplacements surfaciques, l'ordre des valeurs minimales de  $l_p$  est similaire, indiquant que le nombre de données sans bruit utilisé dans l'identification des conditions aux limites n'affecte pas la performance des modèles. En revanche, avec les données bruitées, l'ordre des valeurs minimales de  $l_p$  pour le PINNT, la MAA et la MAAP est différent. La valeur de  $l_p$  pour le PINNT est la plus élevée parmi les trois, montrant une tendance à la stabilité.

Selon la figure 4.27, en se basant sur les valeurs minimales de  $l_p$ , la condition de chargement identifiée par l'IECL est la plus précise, tandis que celle identifiée par le RNP est la plus éloignée de la valeur de référence.

Pour analyser la précision des conditions de chargement identifiées par les différents modèles, les comparaisons entre les conditions de chargement identifiées et celles de référence sont effectuées. Pour une représentation efficace et simplifiée, la comparaison de la condition de chargement identifiée obtenue par le PINNT est illustrée. Les figures des comparaisons similaires pour les autres modèles de PINNs sont présentées en annexe D.4.

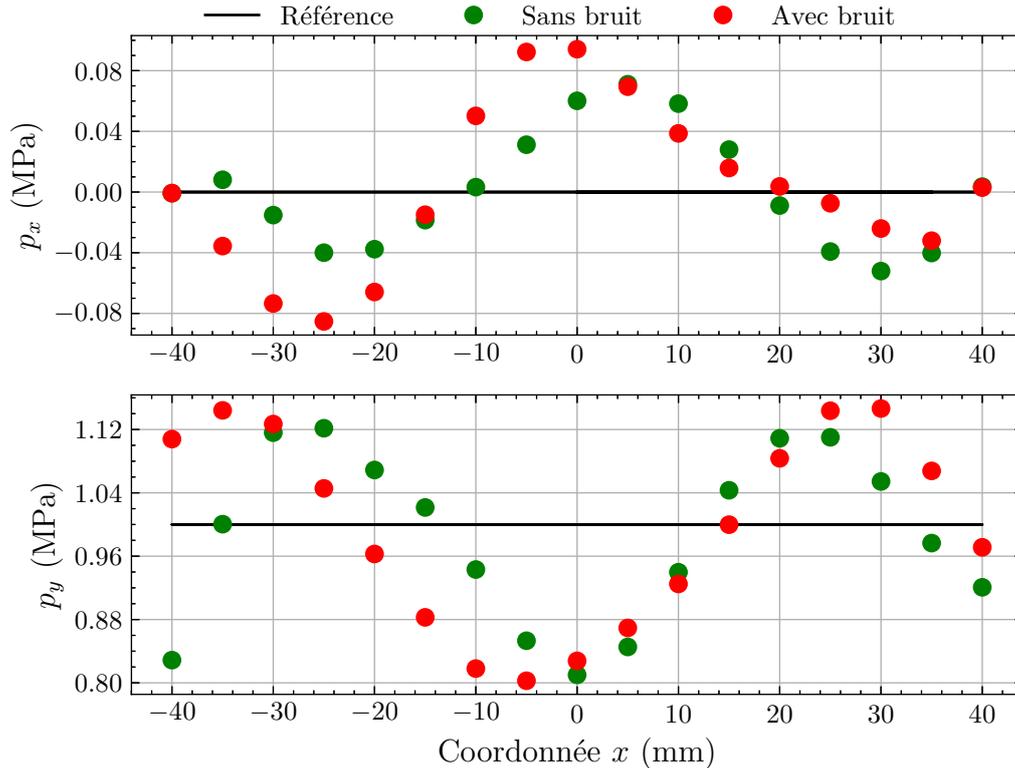


FIGURE 4.28 – Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par le PINNT sur  $\Gamma_1$  avec les champ de déplacement aux frontières et celle de référence lorsque  $l_p$  est minimal.

Selon la figure 4.28, la différence entre la condition de chargement identifiée avec les données sans bruit et celle avec les données bruitées n'est pas significative. Cela démontre que l'effet du bruit influence peu la précision des résultats dans l'identification des conditions aux limites avec les PINNs.

De plus, similaire aux résultats obtenus en utilisant les champs de déplacement surfaciques, la pression identifiée sur la frontière  $\Gamma_1$  oscille autour de la pression appliquée exacte. Cela indique que l'utilisation des déplacements aux frontières produit de plus grandes fluctuations des valeurs identifiées dans l'essai de compression, augmentant les erreurs dans l'identification.

Numériquement, avec les données sans bruit, la valeur maximale, moyenne et minimale des erreurs relatives normalisées sur  $p_x$  sont de 7.10%, 3.03% et 0.07%, respectivement. Ces valeurs pour  $p_y$  sont de 18.99%, 8.98% et 0.04%, respectivement. Avec les données bruitées, les valeurs maximale, moyenne et minimale des erreurs relatives normalisées sur  $p_x$  sont de 9.14%, 4.15% et 0.06%. Et pour  $p_y$ , les valeurs maximale, moyenne et minimale des erreurs relatives normalisées sont de 19.73%, 10.62% et 0.02%, respectivement. Pour  $p_x$ , l'augmentation des erreurs n'est pas significative. Cependant, les erreurs relatives normalisées de  $p_y$  sont inacceptables. Ces données

suggèrent que l'utilisation uniquement des déplacements aux frontières avec le PINNT pour identifier les conditions aux limites n'est pas suffisante pour obtenir des résultats précis.

TABLEAU 4.4 – Erreurs relatives normalisées des conditions de chargement identifiées sur  $\Gamma_1$  avec les champs de déplacement aux frontières lorsque  $l_p$  sont minimales, voir la figure 4.27

Pression identifiée		$p_x$		$p_y$	
Niveau du bruit		0%	5%	0%	5%
PINNT	Erreur max	7.10%	9.14%	18.99%	19.73%
	Erreur moy	3.03%	4.15%	8.98%	10.62%
	Erreur min	0.07%	0.06%	0.04%	0.02%
RNP	Erreur max	6.83%	7.01%	25.89%	31.37%
	Erreur moy	3.14%	3.04%	12.63%	12.92%
	Erreur min	0.21%	0.35%	0.77%	0.10%
MAA	Erreur max	6.39%	5.69%	29.23%	20.87%
	Erreur moy	2.90%	2.08%	10.26%	11.28%
	Erreur min	1.15%	0.09%	0.08%	3.17%
IECL	Erreur max	2.51%	5.46%	18.32%	17.25%
	Erreur moy	1.18%	2.55%	7.98%	8.98%
	Erreur min	0.12%	0.11%	0.05%	0.70%
MAAP	Erreur max	5.85%	2.98%	23.15%	19.39%
	Erreur moy	3.13%	1.04%	10.18%	10.17%
	Erreur min	0.54%	0.02%	1.79%	0.11%

Pour comparer davantage la précision des résultats d'identification entre chaque modèle, leurs erreurs relatives normalisées lorsque les valeurs de  $l_p$  sont minimales sont présentées dans le tableau 4.3.

D'après ce tableau, bien que les erreurs relatives normalisées de l'IECL soient les plus faibles parmi les cinq modèles, leurs valeurs ne sont pas acceptables quand même, surtout pour  $p_y$ . La comparaison des conditions de chargement identifiées sur ce modèle est illustrée dans la figure 4.29

Numériquement, les valeurs maximale, moyenne et minimale des erreurs relatives normalisées sur  $p_x$  pour l'IECL avec les données sans bruit sont respectivement de 2.51%, 1.18% et 0.12%. Pour  $p_y$ , ces valeurs sont de 18.32%, 7.98% et 0.05%, respectivement. Avec les données bruitées, les valeurs maximale, moyenne et minimale des erreurs relatives normalisées sur  $p_x$  sont respectivement de 5.46%, 2.55% et 0.11%. Pour  $p_y$ , les valeurs sont de 17.25%, 8.98% et 0.70%, respectivement.

Dans l'ensemble, pour tous les modèles, lorsque les  $l_p$  sont minimales, les valeurs maximales des erreurs relatives normalisées de  $p_x$  varient entre 2.51% et 7.10%, et les valeurs moyennes se situent entre 1.18% et 3.14% avec les données sans bruit. Pour les données bruitées, les erreurs relatives normalisées maximales varient de 2.98% à 9.14%, tandis que les valeurs moyennes sont comprises entre 1.04% et 4.15%.

Pour  $p_y$ , en utilisant les données sans bruit, les erreurs relatives normalisées maximales se situent entre 18.32% et 29.23%, tandis que les erreurs relatives normalisées moyennes varient

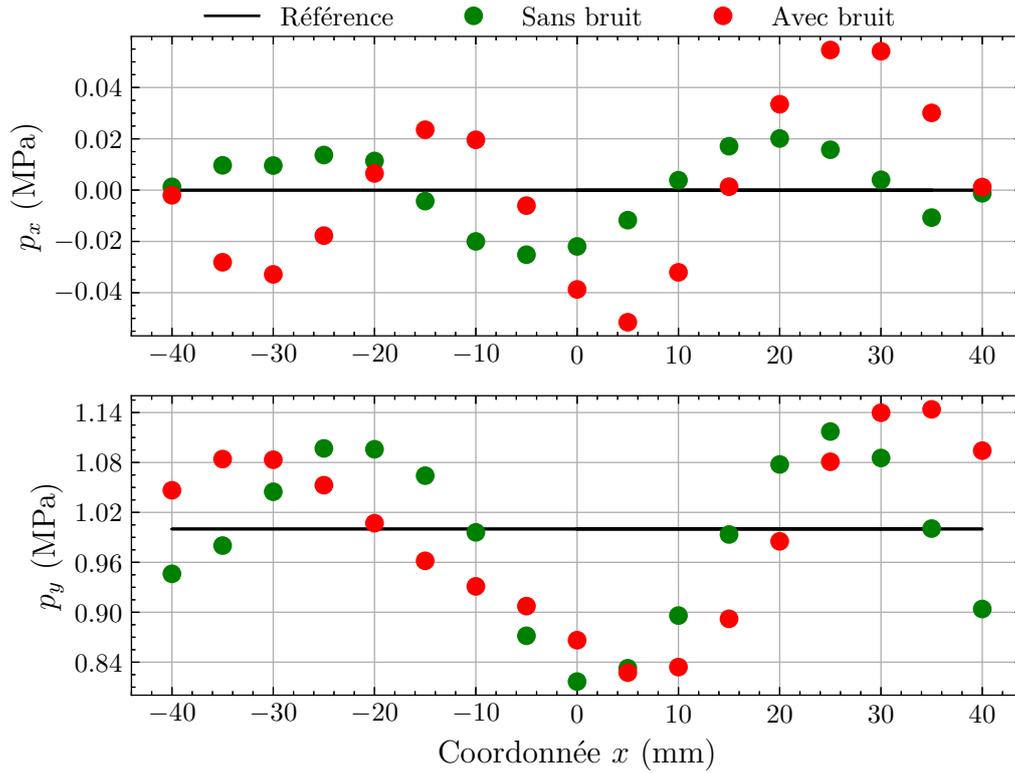


FIGURE 4.29 – Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par l’IECL sur  $T_1$  avec les champ de déplacement aux frontières et celle de référence lorsque  $l_p$  est minimal.

entre 7.98% et 12.63%. En utilisant les données bruitées, les valeurs maximales des erreurs relatives normalisées varient entre 17.25% et 31.37%, et les valeurs moyennes sont comprises entre 8.98% et 12.92%.

D’après les résultats de l’identification de  $p_x$  et  $p_y$ , ces cinq modèles ne peuvent pas obtenir de manière précise la condition de Neumann identifiée avec le champ de déplacement aux frontières. Les déplacements aux frontières sont non seulement insuffisants en nombre, mais ils ne contiennent également pas suffisamment d’informations pour permettre aux PINNs d’obtenir des résultats d’identification précis, ce qui rend les erreurs relatives normalisées sur  $p_x$  et  $p_y$  considérablement élevées.

Par ailleurs, la caractéristique d’insensibilité au bruit n’est pas bien représentée dans cette identification. Bien que certains modèles, comme le PINNT, permettent de maintenir la différence des erreurs normalisées entre les résultats obtenus avec des données bruitées et des données sans bruit dans une plage de 1% à 2%, d’autres modèles tels que la MAA et la MAAP montrent une précision supérieure des valeurs identifiées avec les données bruitées par rapport aux données sans bruit. Cela est dû au fait que ces deux modèles se concentrent davantage sur l’optimisation des pertes totales en ajustant des variables supplémentaires  $\beta_{adapt}$  ou des poids de perte. En conséquence, ils tendent à négliger l’ajustement précis des variables à identifier  $\mathbf{p}$ , ce qui conduit à une instabilité globale des calculs.

En résumé, pour les PINNs, l’utilisation des déplacements aux frontières pour identifier les conditions de Neumann sur les frontières de chargement nécessite encore des améliorations. À l’avenir, en plus de la combinaison des techniques avancées dans l’identification, l’utilisation des approches énergétiques doit également être envisagée. De plus, pour évaluer plus complètement l’application des PINNs dans l’identification des conditions aux limites, l’identification des

conditions de Dirichlet doit également être prise en compte.

#### 4.6.4 Conclusion

Pour évaluer l'application des PINNs dans l'identification des conditions aux limites, le PINNT, le RNP, la MAA, l'IECL et la MAAP ont été utilisés avec deux ensembles de données : le champ de déplacement surfacique et le champ de déplacement aux frontières. Ces déplacements ont été obtenus par la MEF en utilisant les paramètres mécaniques  $E = 8.83$  GPa et  $\nu = 0.216$  dans l'essai de compression sur une plaque à un trou. Pour évaluer l'insensibilité au bruit des PINNs, des champs de déplacement avec l'ajout de 5% de bruit blanc additif (bruit gaussien avec une moyenne de 0 et un écart-type de 5% des déplacements utilisés) ont été employés dans l'identification afin de comparer les conditions de chargement identifiées. Pour réaliser les identifications des conditions aux limites avec les PINNs, la condition de chargement appliqué est défini comme des variable  $p_x$  et  $p_y$  qui se mettent à jour automatiquement pendant l'entraînement.

D'après les pertes obtenues après 100000 itérations avec les deux ensembles de données, bien que leurs valeurs soient relativement faibles, la difficulté de minimisation de  $l_{CL}$  en utilisant le champ de déplacement aux frontières avec bruit a également été mise en évidence, montrant l'importance de la quantité de données utilisées dans l'identification des conditions aux limites.

Pour évaluer la précision de la condition de chargement identifiée, la perte  $l_p$  a été définie pour calculer les erreurs d'identification, sans participer à l'optimisation des PINNs. Selon les valeurs obtenues, les identifications avec les champs de déplacement surfaciques permettent d'obtenir des résultats plus précis que celles avec les champs de déplacement aux frontières. Cependant, le surajustement des variables à identifier a également été observé. Cela montre la nécessité de développer des critères d'arrêt spécifiques pour les PINNs.

Pour étudier davantage la précision des résultats de l'identification, l'erreur relative normalisée (l'erreur relative par rapport à la pression appliquée maximale de 1 MPa) a été introduite et utilisée. En se basant sur la comparaison des conditions de chargement identifiées par les différents modèles de PINNs lorsque les valeurs de  $l_p$  sont minimales, à l'exception de l'IECL, les erreurs relatives normalisées de  $p_y$  sont très importantes dans l'identification avec les champs de déplacement surfaciques. Pour l'identification avec les champs de déplacement aux frontières, en raison de la réduction du nombre de données utilisées, les erreurs relatives normalisées sont significatives. Ainsi, les cinq modèles ne sont pas adaptés pour l'identification de la condition de Neumann sur la frontière de chargement.

Bien que les résultats de l'identification ne soient pas satisfaisants, certaines conclusions peuvent être tirées.

Parmi les cinq modèles, le RNP a identifié les conditions de chargement les moins précises. Bien que les réseaux de neurones indépendants puissent réduire l'influence de l'interaction entre les variables de sortie, les exigences relatives aux conditions aux limites définies sont également plus strictes. Cependant, selon les résultats obtenus à partir de la modélisation numérique de l'essai de compression, les données supplémentaires sur la frontière  $\Gamma_3$  sont plus importantes pour ce modèle par rapport aux autres. Cela permettrait d'obtenir des champs de déplacement et de contraintes plus précis.

L'IECL permet aux données de sortie de respecter strictement les conditions aux limites

définies, ce qui améliore la précision des champs de déplacement et de contrainte obtenus. Cet avantage peut significativement améliorer la précision de la condition de chargement identifiée. Ainsi, parmi ces cinq modèles, l'IECL offre les résultats d'identification les plus précis.

MAA et MAAP ajustent dynamiquement la variable  $\beta_{adapt}$  et les poids des pertes afin d'optimiser la perte totale  $l_{TOT}$ . Cependant, ces modèles sont moins sensibles aux valeurs des variables à identifier et se concentrent davantage sur l'optimisation de  $l_{TOT}$ . En conséquence, la condition de Neumann identifiée par ces deux modèles sont moins précises et plus instables. Il est donc déconseillé d'appliquer ces types de techniques avancées dans l'identification des conditions aux limites.

De plus, ces cinq modèles utilisent des équations d'équilibre pour contraindre les champs de déplacement et de contrainte de sortie. Selon les études [216, 218], l'utilisation d'équations énergétiques, comme les équations physiques, permet d'obtenir des données de sortie plus précises. Par conséquent, dans les perspectives, en plus de l'application des combinaisons de techniques avancées, ces approches doivent également être mises en œuvre dans l'identification des conditions aux limites. Par ailleurs, l'identification des conditions de Dirichlet doit être prise en compte pour évaluer davantage les performances des PINNs dans l'identification des conditions aux limites.

## 4.7 Conclusion et perspective

Ce chapitre présente principalement des applications numériques d'un modèle d'apprentissage profond, le réseau de neurones informés par la physique (PINNs : Physics-Informed Neural Networks) dans divers problèmes d'identification en mécanique des solides. Selon les résultats obtenus, les avantages et les inconvénients des PINNs, ainsi que leur potentiel de développement global, sont mis en évidence.

Tout d'abord, une brève introduction aux développements récents de l'apprentissage automatique et de l'apprentissage profond est présentée. Ensuite, le modèle d'apprentissage profond appelé réseau de neurones informés par la physique (PINN) est introduit, avec une explication de ses principes, de son architecture et de sa démarche.

Ensuite, les améliorations basiques et les techniques avancées visant à accroître la robustesse et la précision des PINNs ont été présentées. Pour mieux illustrer les améliorations apportées par chaque technique avancée, et en fonction de leurs caractéristiques spécifiques, le réseau de neurones parallèle (RNP), la méthode d'activation adaptative (MAA), l'imposition exacte des conditions aux limites (IECL) et la méthode d'ajustement adaptatif des pertes (MAAP) ont été sélectionnés pour être appliqués avec le PINN traditionnel (PINNT), déjà perfectionné par les améliorations basiques, dans toutes les applications numériques.

Pour illustrer les performances des PINNs dans la résolution des problèmes directs et des problèmes inverses en mécanique des solides, la modélisation numérique, l'identification des paramètres mécaniques et l'identification des conditions aux limites ont été mises en place sur l'essai de compression d'une plaque à un trou pour les matrices orthotropes (module de Young  $E = 8.83$  GPa, coefficient de Poisson  $\nu = 0.216$ ) dans la phase linéaire.

Dans la modélisation numérique, les résultats obtenus par tous les modèles de PINNs montrent une bonne concordance avec ceux obtenus par la Méthode Éléments Finis (MEF). Bien que les erreurs relatives normalisées maximales du déplacement  $u$  et de la contrainte  $\sigma_{xx}$

soient légèrement élevées sur certaines frontières, les valeurs moyennes des erreurs relatives normalisées de chaque variable restent dans des niveaux acceptables.

Dans l'identification des paramètres mécaniques, les champs de déplacement surfacique sans bruit et avec 5% de bruit blanc, issus de la MEF, ont été utilisés. En comparaison avec les valeurs de référence, les valeurs de  $E$  identifiées obtenues par chaque modèle de PINNs sont acceptables. Néanmoins, les erreurs relatives de  $\nu$  identifiées pour certains modèles restent relativement élevées.

Dans l'identification des conditions aux limites, deux ensembles de champs de données ont été utilisés : le champ de déplacement surfacique et le champ de déplacement aux frontières, tous deux obtenus à partir de la MEF. Similairement à l'identification des paramètres mécaniques, chaque ensemble de données a été divisé en données sans bruit et en données avec 5% de bruit blanc. En comparant avec la condition de chargement appliquée exacte, les résultats montrent que lorsque l'identification est réalisée avec les champs de déplacement surfacique, la plupart des modèles présentent des erreurs relatives normalisées significatives sur la condition de chargement identifiée. Pour l'identification avec les champs de déplacement aux frontières, ces erreurs relatives normalisées sont encore plus élevées, ce qui indique qu'aucun modèle ne peut être utilisé efficacement pour cette application. De plus, le surajustement des variables à identifier a également été observé. Cela souligne que dans l'identification des conditions aux limites, les PINNs nécessitent encore de nombreux développements et améliorations.

Pour analyser plus efficacement les résultats obtenus par différents modèles dans chaque application, les caractéristiques et les performances de chaque modèle ont été présentées de manière détaillée.

Dans la modélisation numérique et l'identification des conditions aux limites, l'IECL permet d'obtenir les meilleurs résultats. Ce modèle intègre les conditions aux limites de la plaque directement dans les données de sortie, ce qui permet d'obtenir un champ de déplacement et de contrainte plus précis. En réduisant les pertes associées aux conditions aux limites, l'optimiseur peut se concentrer davantage sur l'optimisation des équations d'équilibre. De plus, en utilisant directement les valeurs exactes des conditions aux limites, ce modèle améliore significativement la précision des résultats obtenus.

Dans l'identification des paramètres mécaniques, le RNP présente les erreurs relatives les plus faibles pour les paramètres identifiés. Grâce à des réseaux de neurones indépendants pour chaque variable de sortie, le modèle réduit efficacement les interactions entre ces variables et capture plus précisément les détails de leurs relations physiques. Cela conduit à une précision d'identification optimale. Toutefois, ce modèle impose des exigences plus strictes sur les conditions aux limites définies. En raison de l'indépendance des réseaux de neurones, le RNP a du mal à ajuster les interactions complexes entre les variables, ce qui peut entraîner des pertes plus élevées et des erreurs accrues dans les champs de déplacement et de contrainte lorsque les conditions aux limites sont insuffisantes. Par conséquent, les performances du RNP dans la modélisation numérique et l'identification des conditions aux limites sont moins optimales.

MAA et MAAP ajustent dynamiquement la variable  $\beta_{adapt}$  et les poids des pertes pour optimiser la perte totale  $l_{TOT}$ . Cela devrait théoriquement améliorer la précision des champs de déplacement et de contrainte obtenus par ces deux modèles. Cependant, en raison des améliorations basiques déjà mises en place, notamment l'adimensionnement des variables, la performance du PINNT a été grandement améliorée. Ainsi, dans la modélisation numérique, les bénéfices apportés par la MAA et la MAAP ne sont pas aussi évidents.

En revanche, dans les problèmes inverses, où les PINNs doivent identifier des variables telles que les conditions de chargement ou les paramètres mécaniques, la MAA et la MAAP sont moins efficaces. Ces modèles, en se focalisant sur l'optimisation de  $l_{TOT}$ , montrent une moindre sensibilité aux valeurs des variables à identifier. Par conséquent, leurs résultats d'identification sont moins précis. En particulier, dans l'identification des conditions aux limites, ces deux modèles introduisent plus d'instabilité dans les calculs.

Bien que les résultats des PINNs pour chaque application ne soient pas encore comparables à ceux des méthodes traditionnelles telles que la MEF dans la modélisation numérique, la méthode de recalage par éléments finis (FEMU) et la méthode de minimisation d'une erreur en relation de comportement dans l'identification des paramètres, plusieurs avantages significatifs ont été mis en évidence.

Dans la modélisation numérique, les champs de contraintes obtenus par les PINNs sont plus cohérents avec les conditions aux limites définies sur les frontières. Grâce aux contraintes souples des équations d'équilibre et des conditions aux limites définies, les PINNs se montrent insensibles aux effets du bruit, permettant ainsi d'éviter le surajustement des données bruitées utilisées dans l'identification des paramètres.

Un autre avantage majeur des PINNs est leur simplicité d'opération. Pour les problèmes directs et inverses, la configuration des PINNs ne nécessite pas de modifications complexes. Cette flexibilité et simplicité permettent une application plus large des PINNs sans nécessiter de réajustements importants pour chaque nouveau problème.

De plus, l'ajustement des hyperparamètres est une méthode très efficace pour améliorer la performance des PINNs. Chaque modèle possède ses propres hyperparamètres pour différentes applications. Cependant, afin de garantir la cohérence de la comparaison entre ces différents modèles, les mêmes hyperparamètres ont été utilisés.

En outre, il existe d'autres méthodes qui peuvent améliorer de manière significative les performances des PINNs, telles que les méthodes énergétiques [214, 218] et les méthodes d'échantillonnage [207], ou encore la combinaison de plusieurs techniques avancées [219, 206]. Ainsi, ces méthodes et modèles constituent des directions de recherche dans le perspective.

Bien que le développement des PINN soit encore relativement limité dans l'identification des conditions aux limites, cela indique également qu'il existe un potentiel de développement considérable pour ce problème. En combinant les avantages des PINN et les études existantes, il est démontré que les PINN ont le potentiel d'apporter des contributions significatives aux problèmes directs et inverses dans les recherches futures.

## Conclusions et perspectives

L'objectif principal de cette thèse est d'élaborer des méthodologies spécifiques pour identifier les paramètres mécaniques, les conditions aux limites et l'endommagement des solides en matériaux isotropes fragiles, en s'appuyant sur les mesures de champs de déplacement surfaciques. Pour atteindre cet objectif, la méthode de recalage avec la solution semi-analytique a été développée pour identifier les paramètres bi-module des matériaux fragiles, et une méthodologie combinant la minimisation de la fonctionnelle d'erreur en relation avec le comportement et la méthode de pilotage a été étudiée pour l'identification des conditions aux limites et de l'endommagement dans la phase non linéaire correspondante. Pour compléter cette étude, les applications numériques des réseaux de neurones informés par la physique (PINNs : Physics-Informed Neural Networks) aux problèmes directs et inverses ont également été développées.

La première partie de cette étude introduit tout d'abord le contexte général de la recherche. Ensuite, d'après une revue des modèles de comportement des matériaux isotropes fragiles, le modèle de Badel a été retenu pour sa simplicité et la description du comportement dissymétrique local de ces matériaux. Enfin, en considérant l'application de la technologie de Corrélation d'Images Numériques (CIN) pour résoudre des problèmes inverses, les dispositifs expérimentaux et la mise en œuvre de la mesure de CIN ont été également présentés.

La deuxième partie est consacrée à l'étude de l'identification des paramètres mécaniques bi-module. Tout d'abord, nous avons introduit la loi de comportement dissymétrique en traction et en compression par le concept de bi-module, ainsi que les expérimentations mises en place pour déterminer les paramètres mécaniques des matériaux. En fonction des caractéristiques des essais, l'essai de fendage a été sélectionné pour déterminer les paramètres bi-module et la résistance à la traction, tandis que l'essai de compression a été choisi pour déterminer la résistance à la compression. Ensuite, en s'appuyant sur les études existantes sur les méthodologies d'identification, la méthode de recalage par éléments finis (FEMU) a été initialement envisagée via le logiciel CODE\_ASTER pour mettre en œuvre l'identification. Cependant, en utilisant les données synthétiques pour la validation, les résultats obtenus par cette méthode n'ont pas atteint le niveau de précision attendu. De plus, en tenant compte du développement insuffisant pour le modèle de bi-module dans CODE\_ASTER, une solution semi-analytique a été prioritairement mise en œuvre dans le méthodologie d'identification.

En partant des développements de l'équation du champ de contrainte de l'essai de fendage obtenus dans les études précédentes, l'expression du champ de déformation est déterminée en combinant la loi de Hooke généralisée et le concept de bi-module. Cependant, en raison des intégrales indéfinies, une intégration numérique a été nécessaire pour obtenir le champ de déplacement à partir du champ de déformation. Ainsi, la méthode de recalage avec la solution semi-analytique a été proposée dans cette étude en remplacement de la FEMU. Selon les mesures utilisées, cette méthode permet d'exploiter le champ de déplacement axial, le champ de déformation au centre et le champ de déplacement surfacique pour identifier les paramètres mécaniques bi-module.

Enfin, d'après les résultats obtenus lors des validations de la méthodologie d'identification développée, les paramètres identifiés avec les données synthétiques présentent de faibles erreurs relatives par rapport aux valeurs de référence, et les paramètres identifiés avec les mesures

expérimentales montrent également une cohérence avec les propriétés mécaniques généralement connues, démontrant ainsi l'efficacité et la robustesse de cette méthode.

La troisième partie de l'étude se concentre sur l'identification des conditions aux limites sur une frontière inaccessible et de l'endommagement dans le solide en utilisant des données surabondantes sur une frontière accessible. Tout d'abord, le paramétrage et l'application de la méthode incrémentale de pilotage avec le modèle de Badel pour évaluer l'endommagement des matériaux fragiles dans la phase non linéaire ont été présentés.

Par la suite, la description des problèmes de Cauchy et de Complétion des Données a été discutée. Pour résoudre ces problèmes, la minimisation de la fonctionnelle erreur en relation avec l'algorithme de Kozlov a été adoptée pour développer la méthodologie d'identification. Cependant, la résolution directe des problèmes non linéaires avec la loi de Badel dans l'algorithme de Kozlov provoque des problèmes de convergence à cause du phénomène de snap-back. Par conséquent, la méthode d'identification des conditions aux limites et de l'endommagement a été décomposée en deux étapes. Dans la première étape, les conditions aux limites sur la frontière inaccessible dans la phase linéaire sont obtenues par la minimisation de la fonctionnelle erreur en relation de comportement avec l'algorithme de Kozlov. Ensuite, les conditions aux limites et l'endommagement dans la phase non linéaire sont identifiés par la méthode de pilotage incrémentale en partant des conditions aux limites identifiées dans la phase linéaire.

Enfin, pour valider la méthodologie développée, des données synthétiques ont été utilisées pour l'identification des conditions aux limites et de l'endommagement. Afin d'illustrer l'efficacité et la robustesse de l'algorithme de Kozlov, la méthode du gradient conjugué (GC) avec le gradient de la fonctionnelle erreur déterminé par la méthode de l'état adjoint sous forme discrète a également été mise en œuvre dans la phase linéaire avec les mêmes données pour comparer les résultats obtenus. D'après la précision des données identifiées et le coût de calcul, la performance de l'algorithme de Kozlov est supérieure à celle de la méthode GC. En outre, les mesures de champ de déplacement par la CIN sur une plaque épaisse à deux trous soumise à un essai de compression et de flexion combinés ont également été utilisées pour valider davantage la méthodologie d'identification dans les phases linéaire et non linéaire. Globalement, à partir des analyses des conditions de Dirichlet et de l'endommagement identifiés avec les données synthétiques et expérimentales, la méthodologie mise en œuvre fournit des résultats d'identification satisfaisants, démontrant sa fiabilité.

Compte tenu du développement rapide de l'apprentissage profond et de ses contributions à la mécanique des solides, la dernière partie de cette étude présente les applications des PINNs aux problèmes directs et inverses. Tout d'abord, une introduction à l'apprentissage automatique et à l'apprentissage profond est fournie, suivie d'une explication détaillée des principes, de l'architecture et de la démarche des PINNs.

Ensuite, en se basant sur les études existantes, les améliorations basiques et les techniques avancées visant à améliorer la performance des PINNs ont été présentées. Pour démontrer les avantages de chaque technique avancée, certaines techniques combinant le PINN traditionnel avec les améliorations basiques ont été appliquées aux problèmes directs et inverses.

Enfin, pour évaluer les performances des PINNs dans la modélisation directe, l'identification des paramètres mécaniques et des conditions aux limites, divers modèles ont été testés sur des matériaux isotropes fragiles en phase linéaire. Les résultats obtenus et les comparaisons avec les références permettent de tirer les conclusions suivantes :

- Dans la modélisation numérique des problèmes directs, les résultats obtenus par tous les modèles de PINNs montrent une bonne concordance avec ceux obtenus par la MEF. Bien que les erreurs relatives normalisées maximales du déplacement  $u$  et de la contrainte  $\sigma_{xx}$  soient légèrement élevées sur certaines frontières, les valeurs moyennes des erreurs relatives normalisées de toutes les données restent dans des niveaux précis.
- Dans l'identification des paramètres mécaniques, en utilisant les données synthétiques issues de la MEF, le module de Young  $E$  identifié par tous les modèles de PINNs montre une bonne précision par rapport à la valeur de référence. Toutefois, bien que les erreurs relatives du coefficient de Poisson  $\nu$  identifiées avec certains modèles restent relativement élevées, les valeurs identifiées correspondantes sont acceptables.
- Dans l'identification des conditions aux limites avec le champ de déplacement surfacique et le champ de déplacement aux frontières de la MEF, tous les modèles définissent la traction surfacique comme variable à identifier. Selon les résultats obtenus pendant l'entraînement des PINNs, le surajustement des variables à identifier a été observé, montrant la nécessité de développer des critères d'arrêt spécifiques pour les PINNs. De plus, pour certains modèles, la précision des données identifiées avec les données synthétiques bruitées est meilleure que celle avec les données synthétiques sans bruit, démontrant une instabilité dans le calcul de l'identification. En analysant seulement les meilleures valeurs de la traction surfacique identifiée, les erreurs relatives normalisées correspondantes ne sont pas négligeables. Par conséquent, pour étudier davantage l'application des PINNs dans l'identification des conditions aux limites, il faudrait examiner la définition des autres conditions aux limites comme variables à identifier, telles que la condition de Dirichlet, et les combiner avec la condition de Neumann identifiée pour une analyse plus complète et détaillée.

Globalement, bien que les résultats obtenus par les PINNs pour chaque application ne soient pas encore comparables à ceux des méthodes traditionnelles telles que la MEF dans la modélisation numérique du problème direct, la méthode de recalage dans l'identification des paramètres, plusieurs avantages significatifs ont été mis en évidence. Parmi ceux-ci, on note la simplicité des opérations et des configurations numériques dans diverses applications, ainsi que l'insensibilité au bruit des données utilisées dans les problèmes inverses. En combinant les performances des PINNs, cela suffit à démontrer leur potentiel pour résoudre les problèmes directs et inverses en mécanique des solides, ouvrant ainsi de vastes perspectives de développement.

Bien que la méthode de recalage avec la solution semi-analytique et la méthodologie d'identification des conditions aux limites et de l'endommagement étudiées permettent d'obtenir des résultats favorables, elles présentent également des limites, ouvrant de multiples perspectives pour les travaux de recherche futurs.

Pour la méthodologie d'identification des paramètres mécaniques, en raison des intégrales indéfinies, l'intégration numérique est indispensable pour déterminer la solution semi-analytique du champ de déplacement dans l'essai de fendage. Toutefois, cette approche introduit inévitablement des erreurs supplémentaires qui impactent la convergence de l'identification et ralentissent le processus de calcul. Par conséquent, il est intéressant de mener une recherche théorique plus approfondie sur les matériaux bi-module, en particulier pour améliorer les formulations mathématiques. De plus, dans le cadre de la méthode de recalage avec la solution semi-analytique, il serait pertinent d'étendre son applicabilité à d'autres matériaux fragiles, tels que les matériaux anisotropes et orthotropes.

Pour la méthodologie d'identification des conditions aux limites et de l'endommagement, bien que la condition de Dirichlet identifiée par la minimisation de la fonctionnelle dans la phase linéaire soit précise, les fluctuations correspondantes peuvent facilement affecter la précision de la condition de Neumann identifiée sur la frontière de chargement. Ainsi, des études sur des méthodes de régularisation, telles que la variation totale, doivent être envisagées à l'avenir pour améliorer globalement la précision des données identifiées. De plus, pour résoudre les problèmes de convergence et de snap-back lors de l'identification en phase non linéaire, la méthode de pilotage incrémentale a été implémentée avec les conditions identifiées dans la phase linéaire pour continuer à identifier les conditions aux limites et l'endommagement en phase non linéaire. Néanmoins, cette approche présente des difficultés pour obtenir des résultats plus précis lorsque la valeur et la direction du chargement appliqué varient pendant l'expérimentation. Ainsi, une exploration approfondie des méthodes de calcul direct basées sur la loi de Badel avec la MEF pourrait être envisagée dans les travaux de recherche futurs.

Pour l'application des PINNs à divers problèmes, étant donné le développement rapide de l'apprentissage profond récemment, de nombreuses techniques avancées ont été proposées, telles que l'approche énergétique, démontrant des améliorations significatives des performances des PINNs. Nous continuerons donc à évaluer ces techniques émergentes, ainsi qu'à appliquer la combinaison de plusieurs techniques avancées aux problèmes directs et inverses. De plus, dans le cadre des PINNs, le développement de solutions analytiques pour le champ de déplacement dans l'essai de fendage avec diverses propriétés de matériaux, les calculs directs basés sur le modèle de Badel, ainsi que la résolution des problèmes de Cauchy linéaires et non linéaires, vise à fournir une approche novatrice pour résoudre les problèmes étudiés dans cette thèse.

## Bibliographie

- [1] Omayma Homoro. *Influence de la pré-imprégnation sur le comportement mécanique des composites verre-matrice ettringitique : étude expérimentale et numérique*. PhD thesis, 2019. Thèse de doctorat dirigée par Baranger, Thouraya N. et Michel, Marie Génie civil Lyon 2019.
- [2] Stéphane Andrieux, TN Baranger, and A Ben Abda. Solving cauchy problems by minimizing an energy-like functional. *Inverse problems*, 22(1) :115, 2006.
- [3] TN Baranger and Stéphane Andrieux. Constitutive law gap functionals for solving the cauchy problem for linear elliptic pde. *Applied Mathematics and Computation*, 218(5) : 1970–1989, 2011.
- [4] Thouraya Nouri Baranger, Stéphane Andrieux, and Thi Bach Tuyet Dang. The incremental cauchy problem in elastoplasticity : general solution method and semi-analytic formulae for the pressurised hollow sphere. *Comptes Rendus. Mécanique*, 343(5-6) :331–343, 2015.
- [5] Mohamed Saidi, Marie Michel, and Aron Gabor. Analysis of early-age behaviour of textile-reinforced cementitious matrix composites (trc) using different measurements techniques. *Measurement*, 187 :110365, 2022.
- [6] N Reboul, M Saidi, and A Gabor. Using acoustic emission to assess the tensile behaviour of textile reinforced cementitious (trc) matrix composites. *Construction and Building Materials*, 310 :125216, 2021.
- [7] Pietro Meriggi, Carmelo Caggegi, Aron Gabor, and Gianmarco de Felice. Shear-compression tests on stone masonry walls strengthened with basalt textile reinforced mortar (trm). *Construction and Building Materials*, 316 :125804, 2022.
- [8] Alva Peled, Arnon Bentur, and Barzin Mobasher. *Textile reinforced concrete*, volume 19. CRC Press, 2017.
- [9] T. Triantafillou. Textile-reinforced mortars (trm). pages 113–127, 2011. doi : 10.1007/978-0-85729-166-0\_5.
- [10] Jacek Tejchman and Jerzy Bobiński. *Concrete and Reinforced Concrete Behaviour*, pages 5–47. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013. ISBN 978-3-642-28463-2. doi : 10.1007/978-3-642-28463-2\_2.
- [11] W. H. Mosley and J. H. Bungey. *Properties of Reinforced Concrete*, pages 1–14. Macmillan Education UK, London, 1982. ISBN 978-1-349-16888-0. doi : 10.1007/978-1-349-16888-0\_1.
- [12] Wasim Abbass, M Iqbal Khan, and Shehab Mourad. Evaluation of mechanical properties of steel fiber reinforced concrete with different strengths of concrete. *Construction and building materials*, 168 :556–569, 2018.

- 
- [13] Giuseppe Tiberti, Fausto Minelli, and Giovanni Plizzari. Cracking behavior in reinforced concrete members with steel fibers : A comprehensive experimental study. *Cement and concrete research*, 68 :24–34, 2015.
- [14] Emilio Bastidas-Arteaga and Mark G Stewart. Damage risks and economic assessment of climate adaptation strategies for design of new concrete structures subject to chloride-induced corrosion. *Structural Safety*, 52 :40–53, 2015.
- [15] OF Hussien, THK Elafandy, AA Abdelrahman, SA Abdel Baky, and EA Nasr. Behavior of bonded and unbonded prestressed normal and high strength concrete beams. *HBRC journal*, 8(3) :239–251, 2012.
- [16] Omayma Homoro, Marie Michel, and Thouraya Nouri Baranger. Pull-out response of glass yarn from ettringite matrix : Effect of pre-impregnation and embedded length. *Composites science and technology*, 170 :174–182, 2019.
- [17] Ali Shams, Michael Horstmann, and Josef Hegger. Experimental investigations on textile-reinforced concrete (trc) sandwich sections. *Composite Structures*, 118 :643–653, 2014.
- [18] Mobasher. B, Peled. A, and Pahilajani. J. Distributed cracking and stiffness degradation in fabric-cement composites. *Mater Struct*, 39 :317–331, 2006. doi : 10.1007/s11527-005-9005-8.
- [19] Thanh Hai Nguyen, Xuan Hong Vu, Amir Si Larbi, and Emmanuel Ferrier. Experimental study of the effect of simultaneous mechanical and high-temperature loadings on the behaviour of textile-reinforced concrete (trc). *Construction and Building Materials*, 125 : 253–270, 2016.
- [20] Xu. Shilang and Yi. Shiping. Analytical theory of flexural behavior of concrete beam reinforced with textile-combined steel. *Science China Technological Sciences*, 53 :1700–1710, 06 2010. doi : 10.1007/s11431-010-3063-z.
- [21] Youjiang Wang, HC Wu, and Victor C Li. Concrete reinforcement with recycled fibers. *Journal of materials in civil engineering*, 12(4) :314–319, 2000.
- [22] Leonidas Alexandros S Kouris and Thanasis C Triantafillou. State-of-the-art on strengthening of masonry structures with textile reinforced mortar (trm). *Construction and Building Materials*, 188 :1221–1233, 2018.
- [23] Sergej Rempel, Norbert Will, Josef Hegger, and Patrick Beul. Filigrane bauwerke aus textilbeton. *Beton- und Stahlbetonbau*, 110, 01 2015. doi : 10.1002/best.201400111.
- [24] Daniel Ehlig, Frank Schladitz, Michael Frenzel, and Manfred Curbach. Textilbeton – ausgeführte projekte im überblick. *Beton- und Stahlbetonbau*, 107, 2012.
- [25] Dionysios A Bournas, Thanasis C Triantafillou, K Zygouris, and F Stavropoulos. Textile-reinforced mortar versus frp jacketing in seismic retrofitting of rc columns with continuous or lap-spliced deformed bars. *Journal of Composites for Construction*, 13(5) :360–371, 2009.

- [26] Manh LE Duc. *Développement d'un nouveau composite cimentaire multi-fonctionnel à performances mécaniques contrôlées*. PhD thesis, 2024. Thèse de doctorat dirigée par Baranger, Thouraya N. et Michel, Marie et Prud'homme, Elodie Génie civil Lyon 2019.
- [27] J Ambroise and M Michel. Matrice minérale destinée à la fabrication de composites minces par imprégnation de renforts tissés ou non tissés, N° de dépôt : WO 2015 158896 A1, 2015.
- [28] XS Liu, JG Ning, YL Tan, and QH Gu. Damage constitutive model based on energy dissipation for intact rock subjected to cyclic loading. *International journal of rock mechanics and mining sciences*, 85 :27–32, 2016.
- [29] F. Jin, M. Jiang, and X. Gao. Defining damage variable based on energy dissipation. 23 : 1976–1980, 06 2004.
- [30] Jean Lemaitre. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. 1985.
- [31] Yunliang et al Tan. Uniaxial compression behavior of cement mortar and its damage-constitutive model based on energy theory. *Materials*, 12, 2019. doi : 10.3390/ma12081309.
- [32] Heping Xie, Liyun Li, Ruidong Peng, and Yang Ju. Energy analysis and criteria for structural failure of rocks. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 1 (1) :11–20, 2009. ISSN 1674-7755. doi : <https://doi.org/10.3724/SP.J.1235.2009.00011>.
- [33] Pijaudier-Cabot Gilles Mazars, Jacky. From damage to fracture mechanics and conversely : a combined approach. *International journal of solids and structures*, 33(20-22) : 3327–3342, 1996.
- [34] Jian Ying Wu, Jie Li, and Rui Faria. An energy release rate-based plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 43(3) :583–612, 2006. ISSN 0020-7683. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.05.038>.
- [35] Claudia Comi and Umberto Perego. Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete. *International journal of solids and structures*, 38(36-37) :6427–6454, 2001.
- [36] Pierre-Bernard Badel. *Contributions a la simulation numerique de structures en beton arme*. PhD thesis, 2001. Thèse de doctorat dirigée par Leblond, Jean-Baptiste Sciences et techniques Paris 6 2001.
- [37] Pierre Badel, Vincent Godard, and Jean-Baptiste Leblond. Application of some anisotropic damage model to the prediction of the failure of some complex industrial concrete structure. *International Journal of Solids and Structures*, 44(18) :5848–5874, 2007. ISSN 0020-7683. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.02.001>.
- [38] Boumediene Nedjar. *Mécanique de l'endommagement. Théorie du premier gradient et application au béton*. PhD thesis, 1995. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- [39] WH Peters and WF Ranson. Digital imaging techniques in experimental stress analysis. *Optical engineering*, 21(3) :427–431, 1982.

- [40] Bing Pan. Digital image correlation for surface deformation measurement : historical developments, recent advances and future goals. *Measurement Science and Technology*, 29(8) :082001, jun 2018. doi : 10.1088/1361-6501/aac55b.
- [41] Réthoré Julien. Ufreckles, October 2018. URL <https://doi.org/10.5281/zenodo.1433776>.
- [42] Gom correlate pro : Strains and displacements from motion pictures., 2021.
- [43] Mark N. Helfrick, Christopher Niezrecki, Peter Avitabile, and Timothy Schmidt. 3d digital image correlation methods for full-field vibration measurement. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(3) :917–927, 2011. ISSN 0888-3270. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2010.08.013>.
- [44] Bruce J. Cunningham, Franco J. Gagliardi, and Lou Ferranti. Low strain rate measurements on explosives using dic. In Tom Proulx, editor, *Application of Imaging Techniques to Mechanics of Materials and Structures, Volume 4*, pages 25–31, New York, NY, 2013. Springer New York. ISBN 978-1-4419-9796-8.
- [45] Bing Pan and Kai Li. A fast digital image correlation method for deformation measurement. *Optics and Lasers in Engineering*, 49(7) :841–847, 2011. ISSN 0143-8166. doi : <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2011.02.023>.
- [46] W. Tong. An evaluation of digital image correlation criteria for strain mapping applications. *Strain*, 41(4) :167–175, 2005. doi : <https://doi.org/10.1111/j.1475-1305.2005.00227.x>.
- [47] G. Nsengiyumva and Yong-Rak Kim. Field displacement-based inverse method for elastic and viscoelastic constitutive properties. *Experimental Mechanics*, 62 :1553–1568, 2022. doi : 10.1007/s11340-022-00876-0.
- [48] S. Fayad, E. Jones, D. Seidl, P. Reu, and J. Lambros. On the importance of direct-levelling for constitutive material model calibration using digital image correlation and finite element model updating. *Experimental mechanics*, 63 :467–484, 2022. doi : 10.1007/s11340-022-00926-7.
- [49] S. Padmanabhan, James P. Hubner, A. V. Kumar, and Peter Ifju. Load and boundary condition calibration using full-field strain measurement. *Experimental Mechanics*, 46 : 569–578, 2006. doi : 10.1007/s11340-006-8708-2.
- [50] R. Vargas, A. Tsitova, F. Bernachy-Barbe, B. Bary, R. B. Canto, and F. Hild. On the identification of cohesive zone model for curved crack in mortar. *Strain*, 56(6) :e12364, 2020. doi : <https://doi.org/10.1111/str.12364>. e12364 10.1111/str.12364.
- [51] Bora Gencturk, Kazi Hossain, Aadit Kapadia, Emad Labib, and Yi-Lung Mo. Use of digital image correlation technique in full-scale testing of prestressed concrete structures. *Measurement*, 47 :505–515, 2014. ISSN 0263-2241. doi : <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2013.09.018>.

- [52] Wei Shang, Xiaobo Ning, Jinghong Liu, and Jinzhao Liu. Failure analysis and evaluation for cracked concrete beam reinforced with cfrp. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 129 :104222, 2024. ISSN 0167-8442. doi : <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2023.104222>.
- [53] Martin Reis, Marcel Adorna, Ondřej Jiroušek, and Anne Jung. Improving dic accuracy in experimental setups. *Advanced Engineering Materials*, 21(7) :1900092, 2019. doi : <https://doi.org/10.1002/adem.201900092>.
- [54] Szabolcs Szalai, Viktória Fehér, Dmytro Kurhan, Attila Németh, Mykola Sysyn, and Szabolcs Fischer. Optimization of surface cleaning and painting methods for dic measurements on automotive and railway aluminum materials. *Infrastructures*, 8(2), 2023. ISSN 2412-3811. doi : [10.3390/infrastructures8020027](https://doi.org/10.3390/infrastructures8020027).
- [55] TQ Thai, RS Hansen, AJ Smith, J Lambros, and RB Berke. Importance of exposure time on dic measurement uncertainty at extreme temperatures. *Experimental Techniques*, 43 : 261–271, 2019.
- [56] Yin Wang and Jiaqing Zhao. Dic-net : Upgrade the performance of traditional dic with hermite dataset and convolution neural network. 160 :107278, 2023. ISSN 0143-8166. doi : <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2022.107278>.
- [57] Ru Yang, Yang Li, Danielle Zeng, and Ping Guo. Deep dic : Deep learning-based digital image correlation for end-to-end displacement and strain measurement. 302 :117474, 2021. ISSN 0924-0136. doi : <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2021.117474>.
- [58] S. Boukhtache, Kamel Abdelouahab, K. Abdelouahab, F. Berry, François Berry, Evelyne Toussaint, Benoît Blaysat, Michel Grédiac, and Frédéric Sur. When deep learning meets digital image correlation. *Optics and Lasers in Engineering*, 136 :106308, 2021. ISSN 0143-8166. doi : [10.1016/j.optlaseng.2020.106308](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2020.106308).
- [59] SA Ambartsumyan and AA Khachatryan. Basic equations of the theory of elasticity for materials with different tensile and compressive stiffness. *Inzhenernyi Zhurnal, Mekanika Tverdogo Tela.,* 2 :44–53, 1966.
- [60] SA Ambartsumyan and AA Khachatryan. A multimodulus elasticity theory(multimodulus elasticity theory applied to bodies resisting extension and compression). 1967.
- [61] S Andrieux and TN Baranger. Solution of nonlinear cauchy problem for hyperelastic solids. *Inverse Problems*, 31(11) :115003, 2015.
- [62] J Mazars, Y Berthaud, and S Ramtani. The unilateral behaviour of damaged concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 35(4-5) :629–635, 1990.
- [63] Zongliang Du, Gang Zhang, Tianfu Guo, Shan Tang, and Xu Guo. Tension-compression asymmetry at finite strains : A theoretical model and exact solutions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 143 :104084, 2020. ISSN 0022-5096. doi : <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.104084>.

- [64] Yu Qiu, Wei Shen, Renjun Yan, Xiaobin Li, Zhenzhou Ye, Mengzhen Li, Kang Liu, and Kai Qin. An improved numerical method for calculating mechanical properties of bi-modulus sandwich composite structures. *Ocean Engineering*, 250 :110998, 2022. ISSN 0029-8018. doi : <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.110998>.
- [65] Tianmin Wang and Jianhong Ye. Numerical analysis of bending property of bi-modulus materials and a new method for measurement of tensile elastic modulus. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 15(10) :2539–2555, 2023. ISSN 1674-7755. doi : <https://doi.org/10.1016/j.jrmge.2023.03.003>.
- [66] G Hondros. The evaluation of poisson's ratio and the modulus of materials of a low tensile resistance by the brazilian (indirect tensile) test with particular reference to concrete. *Aust. J. Appl. Sci.*, 10 :243–264, 1959.
- [67] Zhengjun Huang, Ying Zhang, Yuan Li, Dong Zhang, Tong Yang, and Zhili Sui. Determining tensile strength of rock by the direct tensile, brazilian splitting, and three-point bending methods : A comparative study. *Advances in Civil Engineering*, 2021, 2021. doi : 10.1155/2021/5519230.
- [68] Z.Y. Liao, J.B. Zhu, and C.A. Tang. Numerical investigation of rock tensile strength determined by direct tension, brazilian and three-point bending tests. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 115 :21–32, 2019. ISSN 1365-1609. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2019.01.007>.
- [69] Anthony Coviello, Rocco Lagioia, and Roberto Nova. On the measurement of the tensile strength of soft rocks. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 38 :251–273, 2005. doi : 10.1007/s00603-005-0054-7.
- [70] Phong Luong. un nouvel essai pour la mesure de la résistance à la traction a new test for tensile strength measurements. *Revue Francaise de Geotechnique*, 34 :17–28, 01 1986.
- [71] Chen Jinmin. Bending test for tensile strength of rock samples. *Journal of Engineering Geology*, 16(S1) :317–319, 2008.
- [72] Tamer Efe, Nazmi Sengun, Servet Demirdag, Kenan Tufekci, and Rasit Altindag. Effect of sample dimension on three and four points bending tests of fine crystalline marble and its relationship with direct tensile strength. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 221(1) :012093, jan 2019. doi : 10.1088/1755-1315/221/1/012093.
- [73] T Akazawa. New test method for evaluating internal stress due to compression of concrete (the splitting tension test)(part 1). *J Jpn Soc Civ Eng*, 29 :777–787, 1943.
- [74] D. H. Lee, C. Juang, and I. Lei. High-temperature brazilian test for tensile strength of metamorphic limestone. *Geotechnical Testing Journal*, 19 :223–226, 1996. doi : 10.1520/GTJ10344J.
- [75] J. Proveti and G. Michot. The brazilian test : a tool for measuring the toughness of a material and its brittle to ductile transition. *International Journal of Fracture*, 139 : 455–460, 2006. doi : 10.1007/S10704-006-0067-6.

- [76] I. Iglesias, B. Acosta, R. Yu, G. Ruiz, M. Aineto, and A. Acosta. Study of mechanical characterization of ceramic specimens from a brazilian test adaptation. *Materiales De Construccion*, 61 :417–429, 2011. doi : 10.3989/MC.2011.55809.
- [77] G.E. Andreev. A review of the brazilian test for rock tensile strength determination. part i : calculation formula. *Mining Science and Technology*, 13(3) :445–456, 1991. ISSN 0167-9031. doi : [https://doi.org/10.1016/0167-9031\(91\)91006-4](https://doi.org/10.1016/0167-9031(91)91006-4).
- [78] Diyuan Li and L. Wong. The brazilian disc test for rock mechanics applications : Review and new insights. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 46 :269–287, 2013. doi : 10.1007/s00603-012-0257-7.
- [79] J. C. Jaeger and E. R. Hoskins. Rock failure under the confined brazilian test. *Journal of Geophysical Research*, 71 :2651–2659, 1966. doi : 10.1029/JZ071I010P02651.
- [80] YG Huang, LG Wang, YL Lu, JR Chen, and JH Zhang. Semi-analytical and numerical studies on the flattened brazilian splitting test used for measuring the indirect tensile strength of rocks. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 48 :1849–1866, 2015.
- [81] J.A. Hudson, E.T. Brown, and F. Rummel. The controlled failure of rock discs and rings loaded in diametral compression. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 9(2) :241–248, 1972. ISSN 0148-9062. doi : [https://doi.org/10.1016/0148-9062\(72\)90025-3](https://doi.org/10.1016/0148-9062(72)90025-3).
- [82] Matthew A Perras and Mark S Diederichs. A review of the tensile strength of rock : concepts and testing. *Geotechnical and geological engineering*, 32 :525–546, 2014.
- [83] Víctor J García, Carmen O Márquez, Alonso R Zúñiga-Suárez, Berenice C Zuñiga-Torres, and Luis J Villalta-Granda. Brazilian test of concrete specimens subjected to different loading geometries : Review and new insights. *International Journal of Concrete Structures and Materials*, 11 :343–363, 2017.
- [84] S.K. Kourkoulis, Ch.F. Markides, and P.E. Chatzistergos. The brazilian disc under parabolically varying load : Theoretical and experimental study of the displacement field. *International Journal of Solids and Structures*, 49(7) :959–972, 2012. ISSN 0020-7683. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ijsostr.2011.12.013>.
- [85] Ross A. Stirling, David J. Simpson, and Colin T. Davie. The application of digital image correlation to brazilian testing of sandstone. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 60 :1–11, 2013. ISSN 1365-1609. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2012.12.026>.
- [86] Ye Jianhong, FQ Wu, and JZ Sun. Estimation of the tensile elastic modulus using brazilian disc by applying diametrically opposed concentrated loads. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 46(3) :568–576, 2009.
- [87] Jiong Wei, Leilei Niu, Jae-Joon Song, and Linmao Xie. Estimation of rock tensile and compressive moduli with brazilian disc test. 2019.

- [88] Yanhui Han, Bitao Lai, Hui-Hai Liu, and Hui Li. Measurement of elastic properties in brazilian disc test : solution derivation and numerical verification. *Geomechanics and Geophysics for Geo-Energy and Geo-Resources*, 4 :63–77, 2018.
- [89] C Liu. Elastic constants determination and deformation observation using brazilian disk geometry. *Experimental mechanics*, 50 :1025–1039, 2010.
- [90] JH Ye, FQ Wu, Y Zhang, and HG Ji. Estimation of the bi-modulus of materials through deformation measurement in a brazilian disk test. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 52 :122–131, 2012.
- [91] Shantanu Patel and C Derek Martin. Evaluation of tensile young’s modulus and poisson’s ratio of a bi-modular rock from the displacement measurements in a brazilian test. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 51(2) :361–373, 2018.
- [92] Hao Hong, Thouraya Nouri Baranger, Sylvain Bel, et al. Identification d’une loi de comportement dissymétrique avec l’essai de fendage. *Academic Journal of Civil Engineering*, 40(1) :231–235, 2022.
- [93] K M Hung and C C Ma. Theoretical analysis and digital photoelastic measurement of circular disks subjected to partially distributed compressions. *Experimental mechanics*, 43 :216–224, 2003.
- [94] Chien-Ching Ma and Kuang-Ming Hung. Exact full-field analysis of strain and displacement for circular disks subjected to partially distributed compressions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 50(2) :275–292, 2008.
- [95] François Hild and Stéphane Roux. Digital image correlation : from displacement measurement to identification of elastic properties—a review. *Strain*, 42(2) :69–80, 2006.
- [96] Stéphane Avril, Marc Bonnet, Anne-Sophie Bretelle, Michel Grédiac, François Hild, Patrick Ienny, Félix Latourte, Didier Lemosse, Stéphane Pagano, Emmanuel Pagnacco, et al. Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements. *Experimental Mechanics*, 48 :381–402, 2008.
- [97] Stéphane Roux and François Hild. Optimal procedure for the identification of constitutive parameters from experimentally measured displacement fields. *International Journal of Solids and Structures*, 184 :14–23, 2020.
- [98] Klemen Zaletelj, Janko Slavič, and Miha Boltežar. Full-field dic-based model updating for localized parameter identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 164 : 108287, 2022. ISSN 0888-3270. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.108287>.
- [99] Babak Moaveni, Joel P Conte, and François M Hemez. Uncertainty and sensitivity analysis of damage identification results obtained using finite element model updating. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 24(5) :320–334, 2009.
- [100] Florent Mathieu, Hugo Leclerc, François Hild, and Stéphane Roux. Estimation of elastoplastic parameters via weighted femu and integrated-dic. *Experimental Mechanics*, 55 : 105–119, 2015.

- [101] Électricité de France. Finite element *code\_aster*, Analysis of Structures and Thermo-mechanics for Studies and Research. Open source at [www.code-aster.org](http://www.code-aster.org), 1989–2023.
- [102] Jorge J Moré. The levenberg-marquardt algorithm : implementation and theory. In *Numerical analysis : proceedings of the biennial Conference held at Dundee, June 28–July 1, 1977*, pages 105–116. Springer, 2006.
- [103] Delphine Notta. *Méthode des Champs Virtuels pour la caractérisation de comportements viscoplastiques et d'endommagement, a partir de mesures de champs mécaniques hétérogènes*. PhD thesis, Ph. D. thesis, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2011.
- [104] Lebin Jiang, Baoqiao Guo, and Huimin Xie. Identification of the elastic stiffness of composites using the virtual fields method and digital image correlation. *Acta Mechanica Sinica*, 31 :173–180, 2015.
- [105] Yue Mei, Jianwei Deng, Xu Guo, Sevan Goenezen, and Stephane Avril. Introducing regularization into the virtual fields method (vfm) to identify nonhomogeneous elastic property distributions. *Computational Mechanics*, 67 :1581–1599, 2021.
- [106] Y Li and H Xie. Numerical and experimental studies on the heterogeneous mechanical characteristics of the laser repaired components. *Experimental Mechanics*, 63(3) :401–413, 2023.
- [107] TT Nguyen, JM Huntley, Ian A Ashcroft, PD Ruiz, and Fabrice Pierron. A fourier-series-based virtual fields method for the identification of 2-d stiffness and traction distributions. *Strain*, 50(5) :454–468, 2014.
- [108] M. Mellor and I. Hawkes. Measurement of tensile strength by diametral compression of discs and annuli. *Engineering Geology*, 5 :173–225, 1971. doi : 10.1016/0013-7952(71)90001-9.
- [109] Hang Lin, W. Xiong, and Q. Yan. Modified formula for the tensile strength as obtained by the flattened brazilian disk test. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 49 :1579–1586, 2016. doi : 10.1007/s00603-015-0785-z.
- [110] YE Jianhong, YANG Yang, CHANG Zhonghua, and WANG Yafeng. Airy stress function method for analytic solution of stress field during brazilian disc test. *Eng Geol*, 17(4) : 528–532, 2009.
- [111] N. I. Muskhelishvili. *Some basic problems in mathematic elastic mechanics*. Beijing : Science Press, 1953.
- [112] I Yu Tselodub. Multimodulus elasticity theory. *Journal of applied mechanics and technical physics*, 49 :129–135, 2008.
- [113] T. Huang, Q.X. Pan, J. Jin, J.L. Zheng, and P.H. Wen. Continuous constitutive model for bimodulus materials with meshless approach. *Applied Mathematical Modelling*, 66 : 41–58, 2019. ISSN 0307-904X. doi : <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.09.004>.

- [114] Guido Van Rossum and Fred L. Drake. *Python 3 Reference Manual*. CreateSpace, Scotts Valley, CA, 2009. ISBN 1441412697.
- [115] Stephen J Wright. Numerical optimization, 2006.
- [116] Hamon François. Ssnv149 - test de endo\_isot\_beton, 2011. URL [https://code-aster.org/doc/default/fr/man\\_v/v6/v6.04.149.pdf](https://code-aster.org/doc/default/fr/man_v/v6/v6.04.149.pdf).
- [117] Hamon François. Wtnv121 - mouillage du béton avec une loi d'endommagement, 2012. URL [https://code-aster.org/doc/default/fr/man\\_v/v7/v7.31.121.pdf](https://code-aster.org/doc/default/fr/man_v/v7/v7.31.121.pdf).
- [118] Fayolle Sébastien. Ssns108 - simulation de l'essai safe par la poussée progressive, 2017. URL [https://code-aster.org/doc/default/fr/man\\_v/v6/v6.05.108.pdf](https://code-aster.org/doc/default/fr/man_v/v6/v6.05.108.pdf).
- [119] Bottoni Marina. Ssnv169 - couplage fluage – endommagement, 2018. URL [https://code-aster.org/doc/default/fr/man\\_v/v6/v6.04.169.pdf](https://code-aster.org/doc/default/fr/man_v/v6/v6.04.169.pdf).
- [120] Code\_Aster. Ssns106 - dégradation d'une plaque en béton armé sous sollicitations variées avec les lois globales glrc\_dm et dhrc, 2024. URL [https://code-aster.org/doc/default/fr/man\\_v/v6/v6.05.106.pdf](https://code-aster.org/doc/default/fr/man_v/v6/v6.05.106.pdf).
- [121] Hamon François. R7.01.04 - loi de comportement endo\_isot\_beton, 2018. URL [https://code-aster.org/doc/default/fr/man\\_r/r7/r7.01.04.pdf](https://code-aster.org/doc/default/fr/man_r/r7/r7.01.04.pdf).
- [122] Kazymyrenko Cyril. R5.03.80 - méthodes de pilotage du chargement, 2018. URL [https://code-aster.org/doc/default/fr/man\\_r/r7/r7.01.04.pdf](https://code-aster.org/doc/default/fr/man_r/r7/r7.01.04.pdf).
- [123] Stéphane Andrieux and Thouraya N Baranger. An energy error-based method for the resolution of the cauchy problem in 3d linear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(9-12) :902–920, 2008.
- [124] Roberto Fedele and Roberta Santoro. Extended identification of mechanical parameters and boundary conditions by digital image correlation. *Procedia IUTAM*, 4 :40–47, 2012.
- [125] C Roux-Langlois, A Gravouil, M-C Baietto, Julien Réthoré, F Mathieu, François Hild, and Stéphane Roux. Dic identification and x-fem simulation of fatigue crack growth based on the williams' series. *International Journal of Solids and Structures*, 53 :38–47, 2015.
- [126] Florent Mathieu, François Hild, and Stéphane Roux. Identification of a crack propagation law by digital image correlation. *International Journal of Fatigue*, 36(1) :146–154, 2012.
- [127] H Hong, S Bel, and TN Baranger. A hybrid algorithm to solve a nonlinear inverse problem of boundary conditions and damage identification. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 2444, page 012012. IOP Publishing, 2023.
- [128] Shuting Miao, Peng-Zhi Pan, Shankun Zhao, Jun Han, and Petr Konicek. A new dic-based method to identify the crack mechanism and applications in fracture analysis of red sandstone containing a single flaw. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 54 :3847–3871, 2021.

- 
- [129] Stéphane Andrieux and TN Baranger. Nonlinear cauchy problem and identification in contact mechanics : a solving method based on bregman-gap. *Inverse Problems*, 36(11) : 115012, 2020.
- [130] Jacques Hadamard. *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. Courier Corporation, 2003.
- [131] Renaud Ferrier. *Stratégies de résolution numérique pour des problèmes d'identification de fissures et de conditions aux limites*. PhD thesis, Université Paris Saclay (COMUE), 2019.
- [132] Vladimir Arkad'evich Kozlov, Vladimir Gilelevich Maz'ya, and Aleksey Vasilyvich Fomin. An iterative method for solving the cauchy problem for elliptic equations. *Comput. Math. Phys*, 31(1) :45–52, 1991.
- [133] Johann Baumeister and Antonio Leitão. On iterative methods for solving ill-posed problems modeled by partial differential equations. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 9(1) :13–29, 2001.
- [134] Liviu Marin and Daniel Lesnic. The method of fundamental solutions for the cauchy problem in two-dimensional linear elasticity. *International journal of solids and structures*, 41(13) :3425–3438, 2004.
- [135] Faker Ben Belgacem and Henda El Fekih. On cauchy's problem : I. a variational steklov–poincaré theory. *Inverse problems*, 21(6) :1915, 2005.
- [136] F Ben Belgacem, Vivette Girault, and Faten Jelassi. Analysis of lavrentiev-finite element methods for data completion problems. *Numerische Mathematik*, 139 :1–25, 2018.
- [137] Laurent Bourgeois. A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the cauchy problem for laplace's equation. *Inverse problems*, 21(3) :1087, 2005.
- [138] Laurent Bourgeois. Convergence rates for the quasi-reversibility method to solve the cauchy problem for laplace's equation. *Inverse problems*, 22(2) :413, 2006.
- [139] Hui Cao, Michael V Klibanov, and Sergei V Pereverzev. A carleman estimate and the balancing principle in the quasi-reversibility method for solving the cauchy problem for the laplace equation. *Inverse problems*, 25(3) :035005, 2009.
- [140] Xavier Escriva, Thouraya N Baranger, and Nejla Hariga Tlatli. Leak identification in porous media by solving the cauchy problem. *Comptes Rendus Mécanique*, 335(7) :401–406, 2007.
- [141] Stéphane Andrieux and Thouraya Nouri Baranger. Three-dimensional recovery of stress intensity factors and energy release rates from surface full-field displacements. *International Journal of Solids and Structures*, 50(10) :1523–1537, 2013.
- [142] Stéphane Andrieux and Thouraya N Baranger. On the determination of missing boundary data for solids with nonlinear material behaviors, using displacement fields measured on a part of their boundaries. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 97 :140–155, 2016.

- [143] Guy Chavent. On the theory and practice of non-linear least-squares. *Advances in Water Resources*, 14(2) :55–63, 1991.
- [144] Andreas Griewank. Some bounds on the complexity of gradients, jacobians, and hessians. In *Complexity in numerical optimization*, pages 128–162. World Scientific, 1993.
- [145] Romain Rischette, TN Baranger, and Naima Debit. Numerical analysis of an energy-like minimization method to solve the cauchy problem with noisy data. *Journal of computational and applied mathematics*, 235(11) :3257–3269, 2011.
- [146] Nejla Tlatli Hariga, Thouraya Nouri Baranger, and Rachida Bouhlila. Land–sea interface identification and submarine groundwater exchange (sge) estimation. *Computers & Fluids*, 88 :569–578, 2013.
- [147] Vivek Agarwal. Total variation regularization and l-curve method for the selection of regularization parameter. *ECE599*, 21 :1–31, 2003.
- [148] Tom M Mitchell. Machine learning and data mining. *Communications of the ACM*, 42(11) :30–36, 1999.
- [149] Issam El Naqa and Martin J Murphy. *What is machine learning?* Springer, 2015.
- [150] Machine learning : Trends, perspectives, and prospects. *Science*, 349(6245) :255–260, 2015.
- [151] Absalom E Ezugwu, Japie Greeff, and Yuh-Shan Ho. A comprehensive study of groundbreaking machine learning research : Analyzing highly cited and impactful publications across six decades. *Journal of Engineering Research*, 2023.
- [152] Yann LeCun, Yoshua Bengio, and Geoffrey Hinton. Deep learning. *nature*, 521(7553) : 436–444, 2015.
- [153] Ian Goodfellow, Yoshua Bengio, and Aaron Courville. *Deep learning*. MIT press, 2016.
- [154] Alex Krizhevsky, Ilya Sutskever, and Geoffrey E Hinton. Imagenet classification with deep convolutional neural networks. *Advances in neural information processing systems*, 25, 2012.
- [155] Kaiming He, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, and Jian Sun. Deep residual learning for image recognition. In *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, pages 770–778, 2016.
- [156] Geoffrey Hinton, Li Deng, Dong Yu, George E Dahl, Abdel-rahman Mohamed, Navdeep Jaitly, Andrew Senior, Vincent Vanhoucke, Patrick Nguyen, Tara N Sainath, et al. Deep neural networks for acoustic modeling in speech recognition : The shared views of four research groups. *IEEE Signal processing magazine*, 29(6) :82–97, 2012.
- [157] Ashish Vaswani, Noam Shazeer, Niki Parmar, Jakob Uszkoreit, Llion Jones, Aidan N Gomez, Łukasz Kaiser, and Illia Polosukhin. Attention is all you need. *Advances in neural information processing systems*, 30, 2017.

- [158] Kurt Hornik, Maxwell Stinchcombe, and Halbert White. Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural networks*, 2(5) :359–366, 1989.
- [159] George Em Karniadakis, Ioannis G Kevrekidis, Lu Lu, Paris Perdikaris, Sifan Wang, and Liu Yang. Physics-informed machine learning. *Nature Reviews Physics*, 3(6) :422–440, 2021.
- [160] Shengze Cai, Zhicheng Wang, Sifan Wang, Paris Perdikaris, and George Em Karniadakis. Physics-informed neural networks for heat transfer problems. *Journal of Heat Transfer*, 143(6) :060801, 2021.
- [161] Kai Guo, Zhenze Yang, Chi-Hua Yu, and Markus J Buehler. Artificial intelligence and machine learning in design of mechanical materials. *Materials Horizons*, 8(4) :1153–1172, 2021.
- [162] Justin Gilmer, Samuel S Schoenholz, Patrick F Riley, Oriol Vinyals, and George E Dahl. Neural message passing for quantum chemistry. In *International conference on machine learning*, pages 1263–1272. PMLR, 2017.
- [163] Jian Zhou and Olga G Troyanskaya. Predicting effects of noncoding variants with deep learning–based sequence model. *Nature methods*, 12(10) :931–934, 2015.
- [164] L’ubor Ladický, SoHyeon Jeong, Barbara Solenthaler, Marc Pollefeys, and Markus Gross. Data-driven fluid simulations using regression forests. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 34(6) :1–9, 2015.
- [165] Jamshid Ghaboussi and Djoni Eka Sidarta. New nested adaptive neural networks (nann) for constitutive modeling. *Computers and Geotechnics*, 22(1) :29–52, 1998.
- [166] Surya R Kalidindi, Stephen R Niezgod, and Ayman A Salem. Microstructure informatics using higher-order statistics and efficient data-mining protocols. *Jom*, 63 :34–41, 2011.
- [167] Mojtaba Mozaffar, Ramin Bostanabad, W Chen, K Ehmann, Jian Cao, and MA Bessa. Deep learning predicts path-dependent plasticity. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 116(52) :26414–26420, 2019.
- [168] Guorong Chen, Tiange Li, Qijun Chen, Shaofei Ren, Chao Wang, and Shaofan Li. Application of deep learning neural network to identify collision load conditions based on permanent plastic deformation of shell structures. *Computational Mechanics*, 64 :435–449, 2019.
- [169] Kevin Linka, Markus Hillgärtner, Kian P Abdolazizi, Roland C Aydin, Mikhail Itskov, and Christian J Cyron. Constitutive artificial neural networks : A fast and general approach to predictive data-driven constitutive modeling by deep learning. *Journal of Computational Physics*, 429 :110010, 2021.
- [170] Lu Lu, Ming Dao, Punit Kumar, Upadrasta Ramamurthy, George Em Karniadakis, and Subra Suresh. Extraction of mechanical properties of materials through deep learning from instrumented indentation. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 117 (13) :7052–7062, 2020.

- [171] Ling Wu, Nanda Gopala Kilingar, Ludovic Noels, et al. A recurrent neural network-accelerated multi-scale model for elasto-plastic heterogeneous materials subjected to random cyclic and non-proportional loading paths. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 369 :113234, 2020.
- [172] Maziar Raissi, Paris Perdikaris, and George Em Karniadakis. Physics informed deep learning (part i) : Data-driven solutions of nonlinear partial differential equations. *arXiv preprint arXiv :1711.10561*, 2017.
- [173] Maziar Raissi. Deep hidden physics models : Deep learning of nonlinear partial differential equations. *Journal of Machine Learning Research*, 19(25) :1–24, 2018.
- [174] Maziar Raissi, Paris Perdikaris, and George E Karniadakis. Physics-informed neural networks : A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational physics*, 378 :686–707, 2019.
- [175] James Bergstra, Olivier Breuleux, Frédéric Bastien, Pascal Lamblin, Razvan Pascanu, Guillaume Desjardins, Joseph Turian, David Warde-Farley, and Yoshua Bengio. Theano : a cpu and gpu math expression compiler. In *Proceedings of the Python for scientific computing conference (SciPy)*, volume 4, pages 1–7. Austin, TX, 2010.
- [176] Atilim Gunes Baydin, Barak A Pearlmutter, Alexey Andreyevich Radul, and Jeffrey Mark Siskind. Automatic differentiation in machine learning : a survey. *Journal of machine learning research*, 18(153) :1–43, 2018.
- [177] Ehsan Haghighat, Maziar Raissi, Adrian Moure, Hector Gomez, and Ruben Juanes. A physics-informed deep learning framework for inversion and surrogate modeling in solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 379 :113741, 2021.
- [178] Sascha Lange, Thomas Gabel, and Martin Riedmiller. Batch reinforcement learning. In *Reinforcement learning : State-of-the-art*, pages 45–73. Springer, 2012.
- [179] Jia Guo, Haifeng Wang, and Chenping Hou. A novel adaptive causal sampling method for physics-informed neural networks, 2022.
- [180] Samuel Rudy, Alessandro Alla, Steven L Brunton, and J Nathan Kutz. Data-driven identification of parametric partial differential equations. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 18(2) :643–660, 2019.
- [181] Jiequn Han, Arnulf Jentzen, and Weinan E. Solving high-dimensional partial differential equations using deep learning. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 115(34) : 8505–8510, 2018.
- [182] Yuyao Chen, Lu Lu, George Em Karniadakis, and Luca Dal Negro. Physics-informed neural networks for inverse problems in nano-optics and metamaterials. *Optics express*, 28(8) :11618–11633, 2020.
- [183] Mitchell Daneker, Zhen Zhang, George Em Karniadakis, and Lu Lu. Systems biology : Identifiability analysis and parameter identification via systems-biology-informed neural

- networks. In *Computational Modeling of Signaling Networks*, pages 87–105. Springer, 2023.
- [184] Alireza Yazdani, Lu Lu, Maziar Raissi, and George Em Karniadakis. Systems biology informed deep learning for inferring parameters and hidden dynamics. *PLoS computational biology*, 16(11) :e1007575, 2020.
- [185] Sina Amini Niaki, Ehsan Haghighat, Trevor Campbell, Anoush Poursartip, and Reza Vaziri. Physics-informed neural network for modelling the thermochemical curing process of composite-tool systems during manufacture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 384 :113959, 2021. ISSN 0045-7825. doi : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.113959>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782521002966>.
- [186] Zhiping Mao, Ameya D Jagtap, and George Em Karniadakis. Physics-informed neural networks for high-speed flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 360 :112789, 2020.
- [187] Muhammad M Almajid and Moataz O Abu-Al-Saud. Prediction of porous media fluid flow using physics informed neural networks. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 208 :109205, 2022.
- [188] Xiaowei Jin, Shengze Cai, Hui Li, and George Em Karniadakis. Nsfnets (navier-stokes flow nets) : Physics-informed neural networks for the incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 426 :109951, 2021.
- [189] Chengping Rao, Hao Sun, and Yang Liu. Physics-informed deep learning for computational elastodynamics without labeled data. *Journal of Engineering Mechanics*, 147(8) : 04021043, 2021.
- [190] Enrui Zhang, Ming Dao, George Em Karniadakis, and Subra Suresh. Analyses of internal structures and defects in materials using physics-informed neural networks. *Science advances*, 8(7) :eabk0644, 2022.
- [191] Martín Abadi, Ashish Agarwal, Paul Barham, Eugene Brevdo, Zhifeng Chen, Craig Citro, Greg S. Corrado, Andy Davis, Jeffrey Dean, Matthieu Devin, Sanjay Ghemawat, Ian Goodfellow, Andrew Harp, Geoffrey Irving, Michael Isard, Yangqing Jia, Rafal Jozefowicz, Lukasz Kaiser, Manjunath Kudlur, Josh Levenberg, Dandelion Mané, Rajat Monga, Sherry Moore, Derek Murray, Chris Olah, Mike Schuster, Jonathon Shlens, Benoit Steiner, Ilya Sutskever, Kunal Talwar, Paul Tucker, Vincent Vanhoucke, Vijay Vasudevan, Fernanda Viégas, Oriol Vinyals, Pete Warden, Martin Wattenberg, Martin Wicke, Yuan Yu, and Xiaoqiang Zheng. TensorFlow : Large-scale machine learning on heterogeneous systems, 2015. URL <https://www.tensorflow.org/>. Software available from tensorflow.org.
- [192] Adam Paszke, Sam Gross, Francisco Massa, Adam Lerer, James Bradbury, Gregory Chanan, Trevor Killeen, Zeming Lin, Natalia Gimelshein, Luca Antiga, Alban Desmaison, Andreas Kopf, Edward Yang, Zachary DeVito, Martin Raison, Alykhan Tejani, Sasank Chilamkurthy, Benoit Steiner, Lu Fang, Junjie Bai, and

- Soumith Chintala. Pytorch : An imperative style, high-performance deep learning library. In *Advances in Neural Information Processing Systems 32*, pages 8024–8035. Curran Associates, Inc., 2019. URL <http://papers.neurips.cc/paper/9015-pytorch-an-imperative-style-high-performance-deep-learning-library.pdf>.
- [193] Francois Chollet et al. Keras, 2015. URL <https://github.com/fchollet/keras>.
- [194] Lu Lu, Xuhui Meng, Zhiping Mao, and George Em Karniadakis. Deepxde : A deep learning library for solving differential equations. *SIAM review*, 63(1) :208–228, 2021.
- [195] Ehsan Haghighat and Ruben Juanes. Sciann : A keras/tensorflow wrapper for scientific computations and physics-informed deep learning using artificial neural networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 373 :113552, 2021.
- [196] Oliver Hennigh, Susheela Narasimhan, Mohammad Amin Nabian, Akshay Subramaniam, Kaustubh Tangsali, Max Rietmann, Jose del Aguila Ferrandis, Wonmin Byeon, Zhiwei Fang, and Sanjay Choudhry. Nvidia simnet<sup>TM</sup> : an ai-accelerated multi-physics simulation framework, 2020.
- [197] Kristinn Andersen, George E Cook, Gabor Karsai, and Kumar Ramaswamy. Artificial neural networks applied to arc welding process modeling and control. *IEEE Transactions on industry applications*, 26(5) :824–830, 1990.
- [198] Chengping Rao, Hao Sun, and Yang Liu. Hard encoding of physics for learning spatio-temporal dynamics. *arXiv preprint arXiv :2105.00557*, 2021.
- [199] Salah A Faroughi, Nikhil Pawar, Celio Fernandes, Maziar Raissi, Subasish Das, Nima K Kalantari, and Seyed Kouros Mahjour. Physics-guided, physics-informed, and physics-encoded neural networks in scientific computing. *arXiv preprint arXiv :2211.07377*, 2022.
- [200] Chigozie Nwankpa, Winifred Ijomah, Anthony Gachagan, and Stephen Marshall. Activation functions : Comparison of trends in practice and research for deep learning. *arXiv preprint arXiv :1811.03378*, 2018.
- [201] Timothy O Hodson. Root mean square error (rmse) or mean absolute error (mae) : When to use them or not. *Geoscientific Model Development Discussions*, 2022 :1–10, 2022.
- [202] Scott M Robeson and Cort J Willmott. Decomposition of the mean absolute error (mae) into systematic and unsystematic components. *PloS one*, 18(2) :e0279774, 2023.
- [203] Ruoyu Sun. Optimization for deep learning : theory and algorithms. *arXiv preprint arXiv :1912.08957*, 2019.
- [204] Rohan Kashyap. A survey of deep learning optimizers—first and second order methods. *arXiv preprint arXiv :2211.15596*, 2022.
- [205] Diederik P Kingma and Jimmy Ba. Adam : A method for stochastic optimization. *arXiv preprint arXiv :1412.6980*, 2014.

- 
- [206] Wensi Wu, Mitchell Daneker, Matthew A Jolley, Kevin T Turner, and Lu Lu. Effective data sampling strategies and boundary condition constraints of physics-informed neural networks for identifying material properties in solid mechanics. *Applied mathematics and mechanics*, 44(7) :1039–1068, 2023.
- [207] Chenxi Wu, Min Zhu, Qinyang Tan, Yadhu Kartha, and Lu Lu. A comprehensive study of non-adaptive and residual-based adaptive sampling for physics-informed neural networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 403 :115671, 2023.
- [208] Mohammad Amin Nabian, Rini Jasmine Gladstone, and Hadi Meidani. Efficient training of physics-informed neural networks via importance sampling. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 36(8) :962–977, 2021.
- [209] John H Halton. On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. *Numerische Mathematik*, 2 :84–90, 1960.
- [210] Ameya D Jagtap, Kenji Kawaguchi, and George Em Karniadakis. Adaptive activation functions accelerate convergence in deep and physics-informed neural networks. *Journal of Computational Physics*, 404 :109136, 2020.
- [211] Raghav Gnanasambandam, Bo Shen, Jihoon Chung, Xubo Yue, et al. Self-scalable tanh (stan) : Faster convergence and better generalization in physics-informed neural networks. *arXiv preprint arXiv :2204.12589*, 2022.
- [212] Bing Yu et al. The deep ritz method : a deep learning-based numerical algorithm for solving variational problems. *Communications in Mathematics and Statistics*, 6(1) :1–12, 2018.
- [213] Min Liu, Zhiqiang Cai, and Karthik Ramani. Deep ritz method with adaptive quadrature for linear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 415 : 116229, 2023.
- [214] Yulei Liao and Pingbing Ming. Deep nitsche method : Deep ritz method with essential boundary conditions. *arXiv preprint arXiv :1912.01309*, 2019.
- [215] Esteban Samaniego, Cosmin Anitescu, Somdatta Goswami, Vien Minh Nguyen-Thanh, Hongwei Guo, Khader Hamdia, Xiaoying Zhuang, and Timon Rabczuk. An energy approach to the solution of partial differential equations in computational mechanics via machine learning : Concepts, implementation and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 362 :112790, 2020.
- [216] Vien Minh Nguyen-Thanh, Cosmin Anitescu, Naif Alajlan, Timon Rabczuk, and Xiaoying Zhuang. Parametric deep energy approach for elasticity accounting for strain gradient effects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 386 :114096, 2021.
- [217] Ehsan Kharazmi, Zhongqiang Zhang, and George Em Karniadakis. Variational physics-informed neural networks for solving partial differential equations. *arXiv preprint arXiv :1912.00873*, 2019.

- [218] Ehsan Kharazmi, Zhongqiang Zhang, and George Em Karniadakis. hp-vpinns : Variational physics-informed neural networks with domain decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 374 :113547, 2021.
- [219] Wei Li, Martin Z Bazant, and Juner Zhu. A physics-guided neural network framework for elastic plates : Comparison of governing equations-based and energy-based approaches. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 383 :113933, 2021.
- [220] Vien Minh Nguyen-Thanh, Xiaoying Zhuang, and Timon Rabczuk. A deep energy method for finite deformation hyperelasticity. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 80 : 103874, 2020.
- [221] Jan N Fuhg and Nikolaos Bouklas. The mixed deep energy method for resolving concentration features in finite strain hyperelasticity. *Journal of Computational Physics*, 451 : 110839, 2022.
- [222] Jeremy Yu, Lu Lu, Xuhui Meng, and George Em Karniadakis. Gradient-enhanced physics-informed neural networks for forward and inverse pde problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 393 :114823, 2022.
- [223] Lu Lu, Raphael Pestourie, Wenjie Yao, Zhicheng Wang, Francesc Verdugo, and Steven G Johnson. Physics-informed neural networks with hard constraints for inverse design. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 43(6) :B1105–B1132, 2021.
- [224] Natarajan Sukumar and Ankit Srivastava. Exact imposition of boundary conditions with distance functions in physics-informed deep neural networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 389 :114333, 2022.
- [225] Hailong Sheng and Chao Yang. Pfnm : A penalty-free neural network method for solving a class of second-order boundary-value problems on complex geometries. *Journal of Computational Physics*, 428 :110085, 2021.
- [226] Alex Kendall, Yarin Gal, and Roberto Cipolla. Multi-task learning using uncertainty to weigh losses for scene geometry and semantics. In *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, pages 7482–7491, 2018.
- [227] A Ali Heydari, Craig A Thompson, and Asif Mehmood. Softadapt : Techniques for adaptive loss weighting of neural networks with multi-part loss functions. *arXiv preprint arXiv :1912.12355*, 2019.
- [228] Sifan Wang, Yujun Teng, and Paris Perdikaris. Understanding and mitigating gradient flow pathologies in physics-informed neural networks. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 43(5) :A3055–A3081, 2021.
- [229] De Soza Thomas François. U4.73.02 - macro-commande macr\_recal, 2018. URL [https://code-aster.org/doc/default/fr/man\\_u/u4/u4.73.02.pdf](https://code-aster.org/doc/default/fr/man_u/u4/u4.73.02.pdf).

# Appendices



## A Procédure de MACR\_RECAL

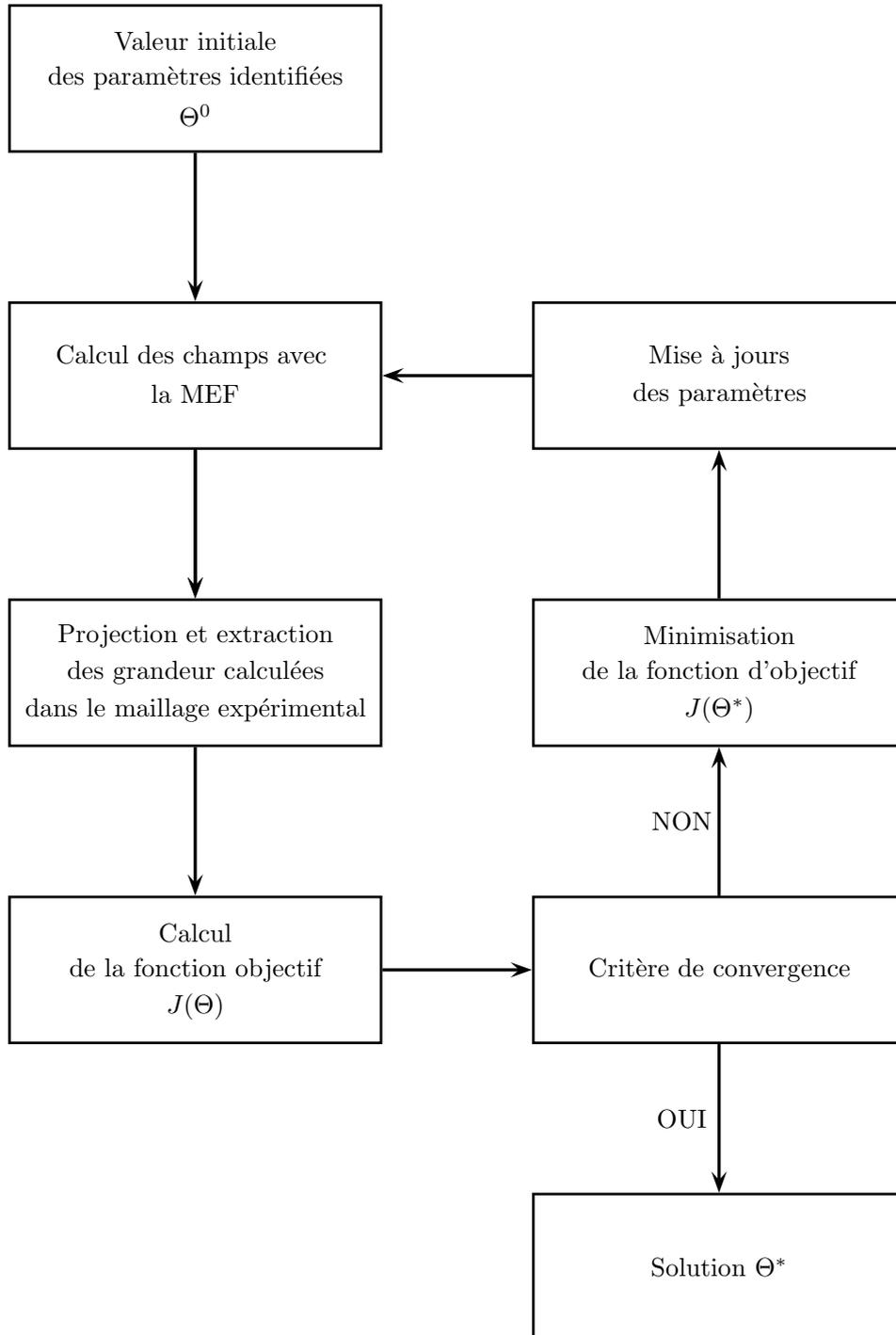


FIGURE A.1 – La procédure d’identification avec la méthode de FEMU

Le diagramme de la figure A.1 illustre la procédure d’identification avec la méthode FEMU. Étant donné la simplicité et la nature classique de cette procédure, elle peut être divisée en plusieurs étapes :

— **Calcul initial** : Avec les valeurs initiales des paramètres  $\Theta^0$  imposées, le champ de dé-

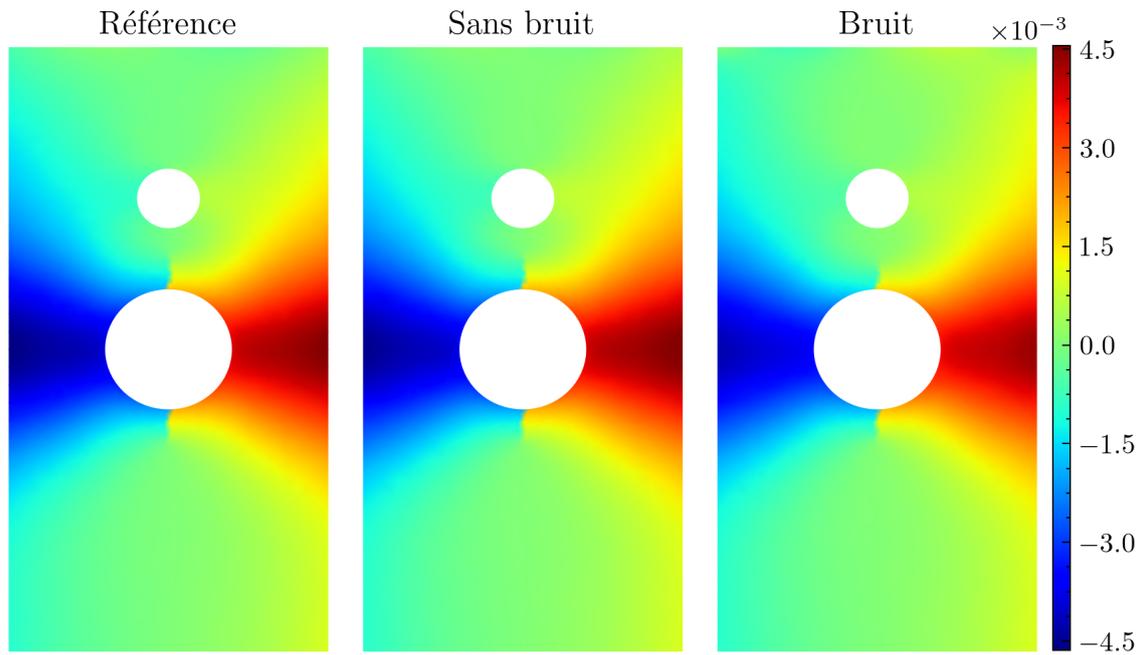
placement  $\mathbf{u}$  est calculé dans le maillage de la MEF.

- **Projection des champs de déplacement** : En raison de la discordance entre les maillages de la MEF et ceux de la CIN, une projection des champs de déplacement entre ces deux maillages est indispensable. Cette étape permet de mettre en place le calcul de la fonction  $J$  en comparant les déplacements de la MEF et ceux expérimentaux.
- **Évaluation de la fonction  $J$**  : Après la projection, la valeur de  $J$  est obtenue. Si cette valeur satisfait les critères d'arrêt, alors les paramètres  $\Theta^0$  sont considérés comme produisant un champ de déplacement correspondant aux données mesurées. Sinon, les paramètres sont mis à jour itérativement par l'algorithme de minimisation et réintroduits dans les calculs.

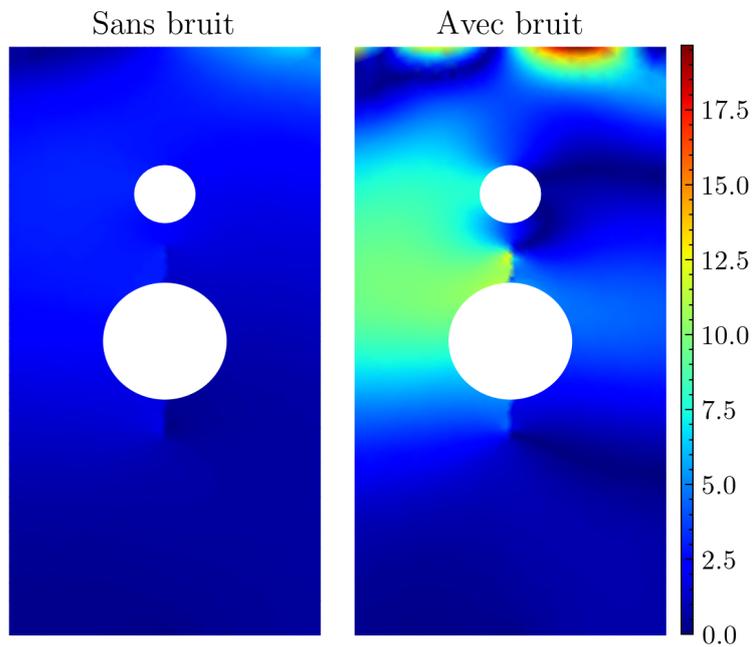
Cette procédure est très simple et classique, elle n'est pas détaillée ici. Pour plus d'informations sur cette commande, voir la référence [229].

## **B Identification des conditions aux limites et de l'endommagement : Comparaison des données identifiées avec les données synthétiques sans bruit et avec 5% de bruit blanc dans la phase non linéaire**

Pour illustrer plus efficacement l'erreur entre les résultats de l'identification et ceux de référence, ainsi que pour éviter le calcul de l'erreur relative lorsque la valeur de référence est nulle ou proche de zéro, l'erreur relative normalisée, définie comme l'erreur absolue par rapport à la valeur absolue maximale des données de référence, a été utilisée pour évaluer les champs de déplacement et de contrainte identifiés.

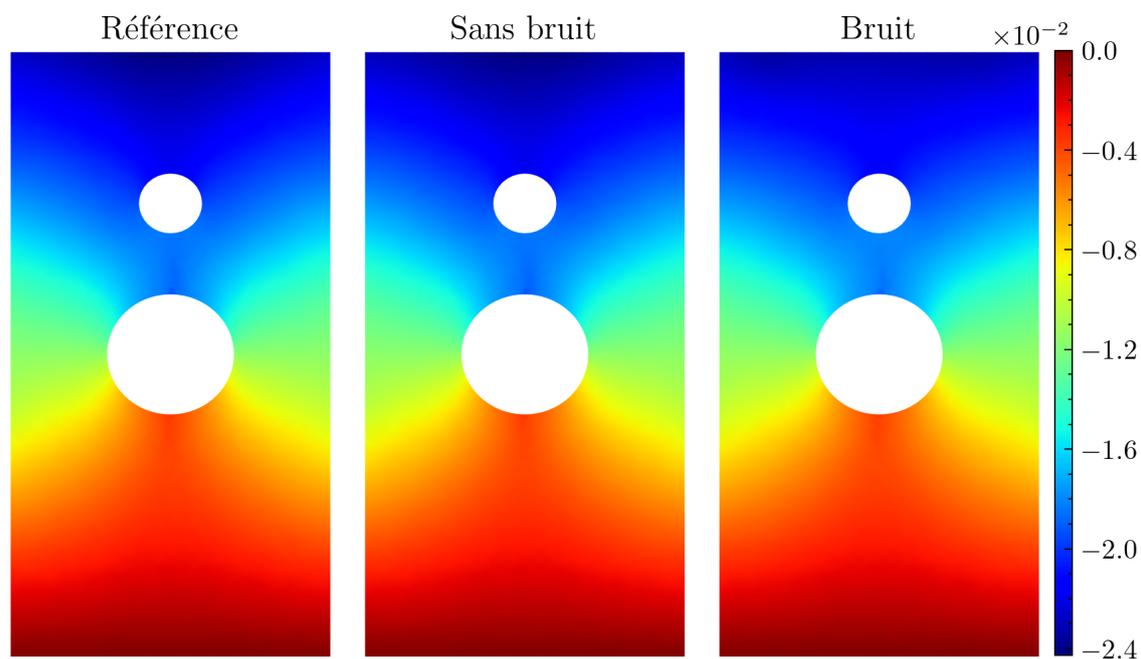


(a) Déplacement  $u$  : valeur de référence, valeur identifiée avec les données synthétiques sans bruit et valeur identifiée avec les données synthétiques bruitées

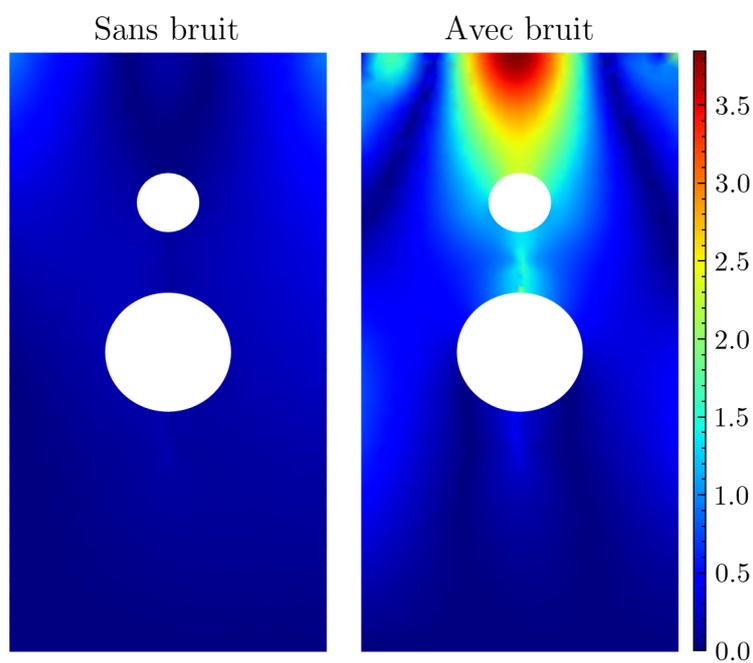


(b) Erreurs relatives normalisées des déplacements  $u$  entre les valeurs de référence et identifiées

FIGURE B.1 – Comparaison des déplacements  $u^{**}$  identifiées avec la méthode de pilotage dans la phase non linéaire en utilisant les données synthétiques sans bruit et avec bruit (5%).

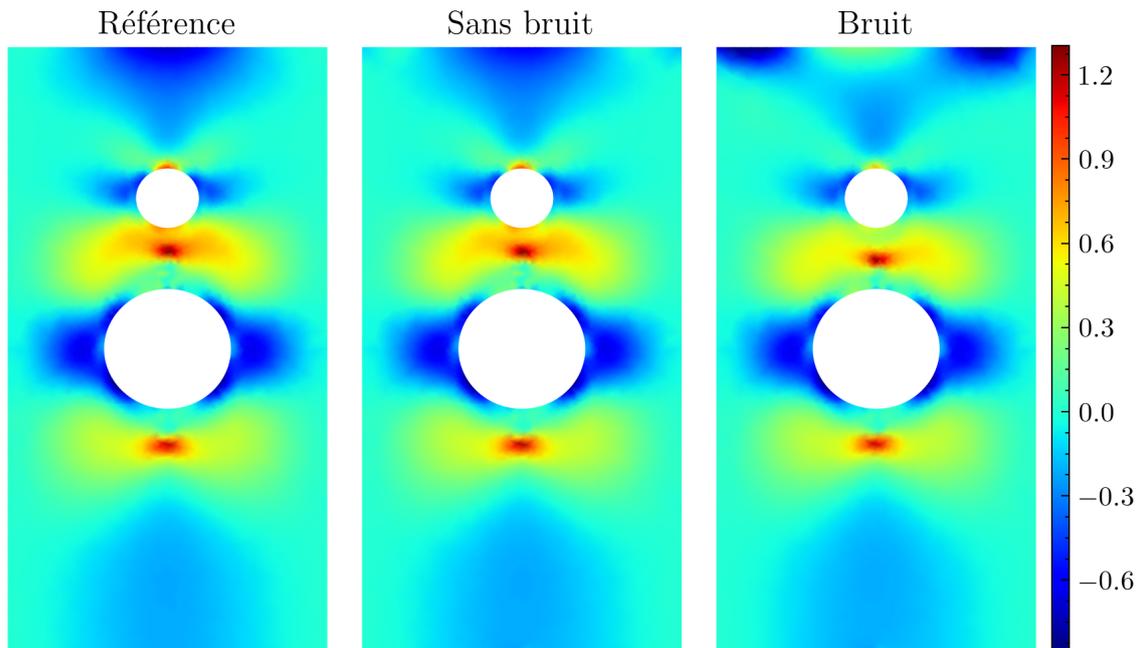


(a) Déplacement  $v$  : valeur de référence, valeur identifiée avec les données synthétiques sans bruit et valeur identifiée avec les données synthétiques bruitées

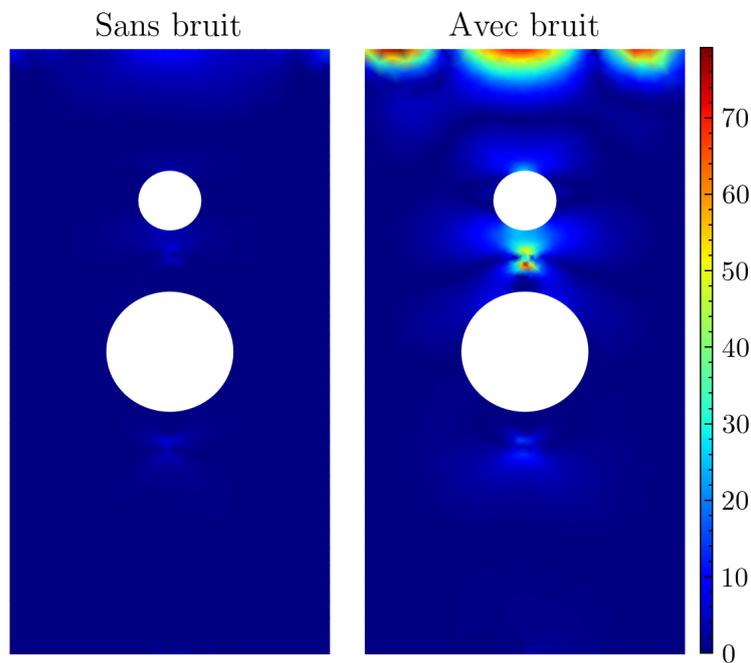


(b) Erreurs relatives normalisées des déplacements  $v$  entre les valeurs de référence et identifiées

FIGURE B.2 – Comparaison des déplacements  $v^{**}$  identifiées avec la méthode de pilotage dans la phase non linéaire en utilisant les données synthétiques sans bruit et avec bruit (5%).

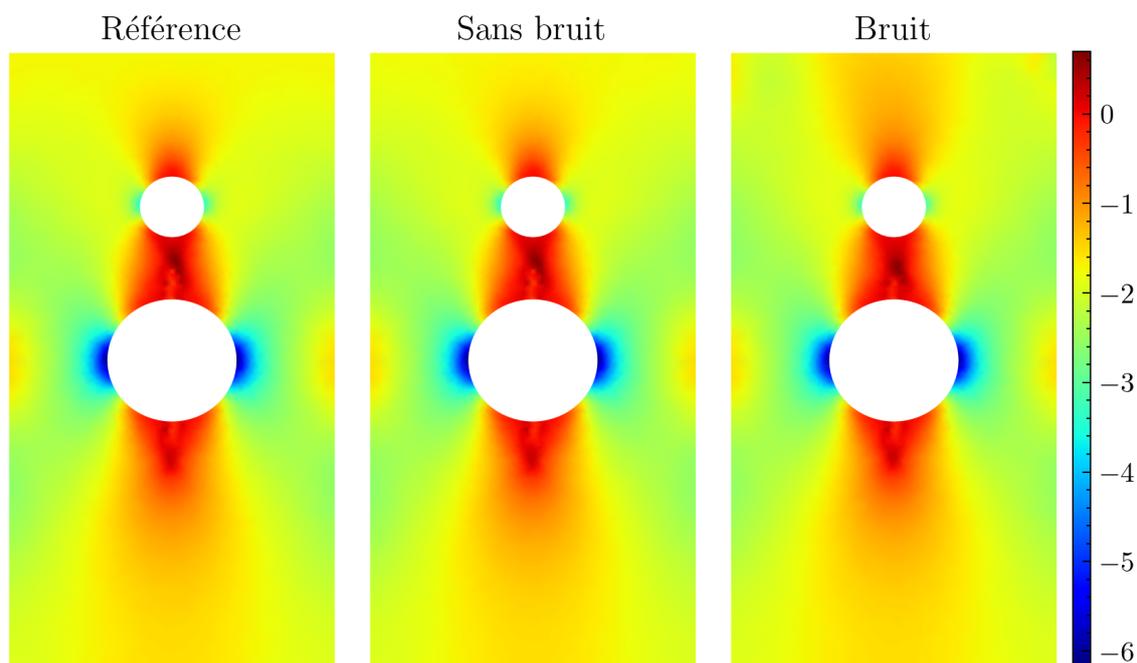


(a) Contrainte  $\sigma_{xx}$  : valeur de référence, valeur identifiée avec les données synthétiques sans bruit et valeur identifiée avec les données synthétiques bruitées

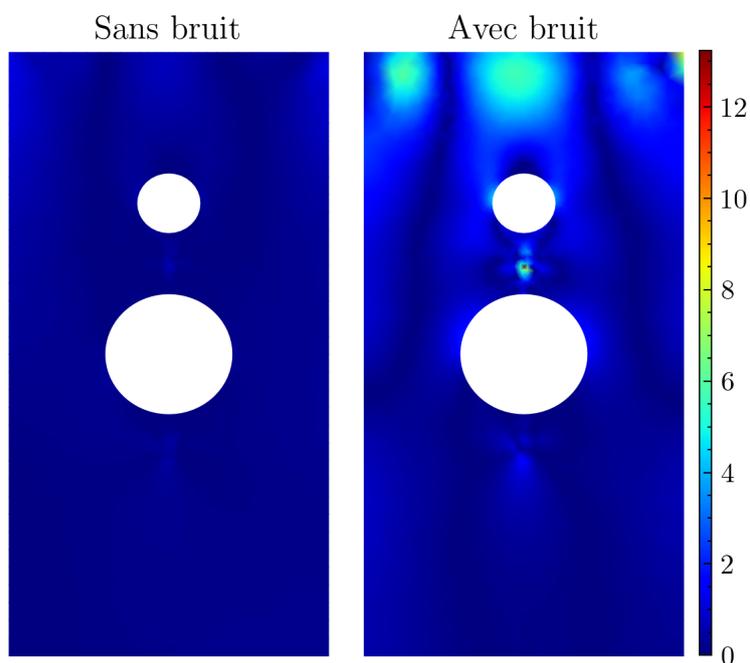


(b) Erreurs relatives normalisées des contraintes  $\sigma_{xx}$  entre les valeurs de référence et identifiées

FIGURE B.3 – Comparaison des contraintes  $\sigma_{xx}^{**}$  identifiées avec la méthode de pilotage dans la phase non linéaire en utilisant les données synthétiques sans bruit et avec bruit (5%).

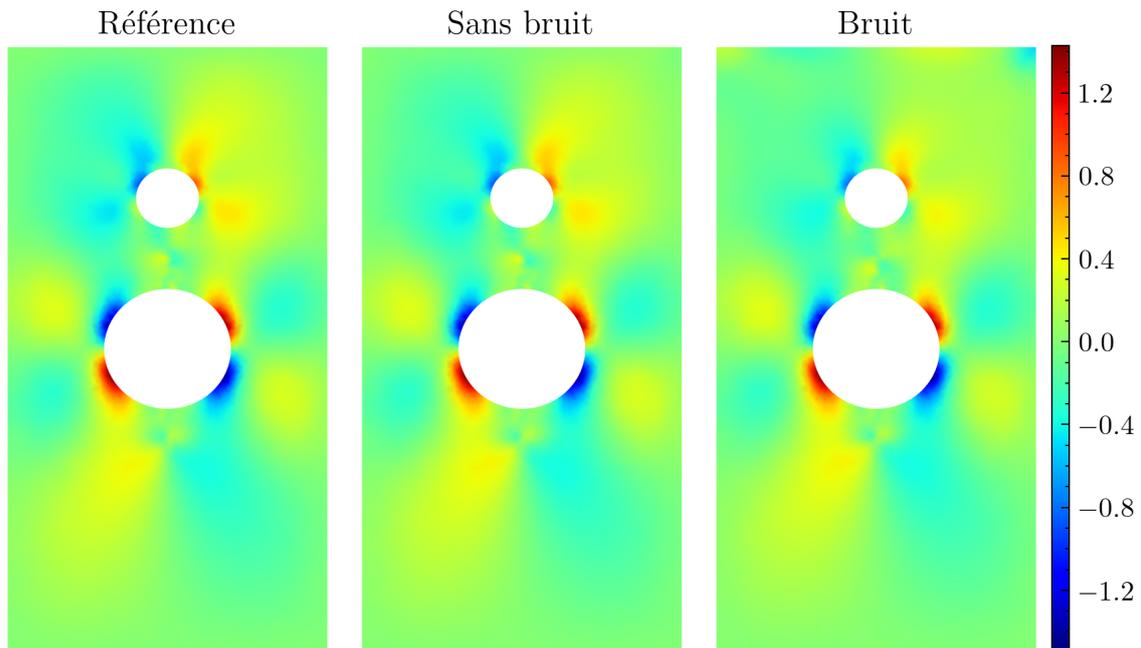


(a) Contrainte  $\sigma_{yy}$  : valeur de référence, valeur identifiée avec les données synthétiques sans bruit et valeur identifiée avec les données synthétiques bruitées

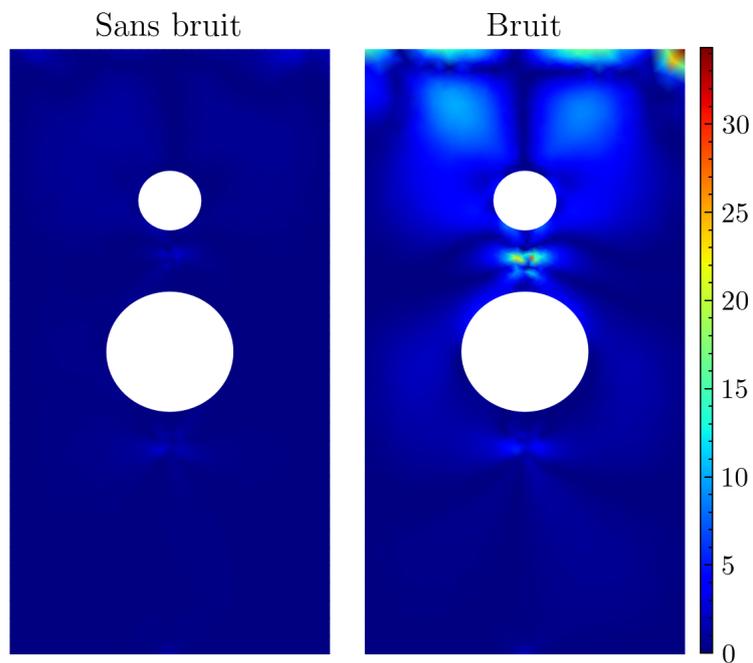


(b) Erreurs relatives normalisées des contraintes  $\sigma_{yy}$  entre les valeurs de référence et identifiées

FIGURE B.4 – Comparaison des contraintes  $\sigma_{yy}^{**}$  identifiées avec la méthode de pilotage dans la phase non linéaire en utilisant les données synthétiques sans bruit et avec bruit (5%).



(a) Contrainte  $\sigma_{xy}$  : valeur de référence, valeur identifiée avec les données synthétiques sans bruit et valeur identifiée avec les données synthétiques bruitées



(b) Erreurs relatives normalisées des contraintes  $\sigma_{xy}$  entre les valeurs de référence et identifiées

FIGURE B.5 – Comparaison des contraintes  $\sigma_{xy}^{**}$  identifiées avec la méthode de pilotage dans la phase non linéaire en utilisant les données synthétiques sans bruit et avec bruit (5%).

## C Algorithme de minimisation

### C.1 Calcul de l'erreur et optimisation par la méthode de Gradient Conjugué

Étant donné que la fonctionnelle erreur en relation de comportement est convexe, quadratique et toujours positive lorsque le calcul se réalise dans la phase linéaire, sous la forme discrétisée, telle que présentée dans l'équation (3.29), cette erreur  $E$  peut s'exprimer comme montré dans l'étude de Andrieux et Baranger [123] :

$$E(\mathbf{X}) \equiv f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \mathbf{X}^t H \mathbf{X} + \mathbf{X}^t \mathbf{B} + \mathbf{C} \quad (\text{C.1})$$

Où  $H$  est la matrice de Hessien, dépendant uniquement des paramètres mécaniques et de la géométrie du matériau.  $B$  et  $C$  sont le vecteur et la constante qui dépendent non seulement des propriétés et de la géométrie du matériau, mais aussi des données connues sur  $\Gamma_m$  ( $\mathbf{U}^m, \mathbf{T}^m$ ). En considérant que  $\nabla f(\mathbf{X})$  est le gradient de la fonction  $f(\mathbf{X})$  sous forme de vecteur, il peut être décrit comme suit :

$$\nabla f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t H - \mathbf{B} \quad (\text{C.2})$$

La méthode de Gradient Conjugué est un algorithme itératif utilisé pour optimiser des problèmes linéaires et non-linéaires. Son principe repose sur la détermination progressive de la valeur minimale de la fonction objective. Le nombre maximal d'itérations est noté  $n^{\text{Itération}}$ , et les critères d'arrêt sont définis par  $E^{\text{seuil}}$ ,  $dE^{\text{seuil}}$  et  $\nabla E^{\text{seuil}}$ .  $\alpha_k$  est la longueur du pas de descente à chaque itération,  $p_k$  est la direction de descente à chaque itération, et  $\beta_k$  est une variable scalaire qui garantit que les directions  $p_k$  et  $p_{k+1}$  sont conjuguées par rapport à  $H$ . À partir d'une valeur initiale  $X_0$ , l'algorithme de Gradient Conjugué pour minimiser  $E$  est décrit comme suit :

**Entrées :**  $X_0$   
**Sorties :**  $X^*$   
 Initialisation  $k \rightarrow 0$  ;  
 $X_k \rightarrow X_0, f(X_0) \rightarrow f_0, \nabla f(X_0) \rightarrow \nabla f_0, -\nabla f_0 \rightarrow p_0$ ;  
**tant que**  $\nabla f_k < \nabla E^{seuil}$  **faire**  
      $\alpha_k \leftarrow \frac{\nabla f_k^t}{p_k^t H p_k}$  ;  
      $X_{k+1} \leftarrow X_k + \alpha_k p_k$  ;  
      $E_{k+1} \leftarrow f_{k+1}$  ;  
      $dE_{k+1} \leftarrow |f_{k+1} - f_k|$  ;  
      $\beta_{k+1} \leftarrow \frac{\nabla f_{k+1}^t \nabla f_{k+1}}{\nabla f_k^t \nabla f_k}$  ;  
      $p_{k+1} \leftarrow -\nabla f_{k+1} + \beta_{k+1} p_k$  ;  
      $k \rightarrow k + 1$  ;  
     **si**  $k + 1 > n^{Itération}$  **ou**  $E_{k+1} < E^{seuil}$  **ou**  $dE_{k+1} < dE^{seuil}$  **alors**  
         | Le calcul s'arrête ;  
     **fin**  
**fin**

**Algorithme 1 :** l'algorithme de Gradient Conjugué

## C.2 L'algorithme de région de confiance et son application

Dans la méthode de recalage avec la solution semi-analytique, l'algorithme de région de confiance consiste à approcher  $J(\Theta_{k+1})$  par une forme quadratique  $Q(\Theta_k + p_k^{rc})$ , où  $p_k^{rc}$  est la direction de descente dans l'algorithme de région de confiance à chaque itération. Parce que la fonction  $Q(\Theta_k + p_k^{rc})$  peut ne pas être une approximation précise de  $J(\Theta_{k+1})$  lorsque  $\Theta_k + p_k^{rc}$  est éloigné de  $\Theta_k$ , la minimisation de  $Q(\Theta_k + p_k^{rc})$  est réalisée sous contrainte pour garantir que la solution est autour de  $\Theta_k$ . En utilisant l'hypothèse de série de Taylor, la minimisation de  $Q(\Theta_k + p_k^{rc})$  s'écrit sous la forme suivante :

$$(p_k^{rc*}) = \arg \min_{p_k^{rc}} Q(\Theta_k + p_k^{rc}) \equiv J_k + g_k^T p_k^{rc} + \frac{1}{2} p_k^{rcT} H_k p_k^{rc}, \quad \text{avec } \|p_k^{rc}\| \leq \Delta r_k^{rc} \quad (\text{C.3})$$

Où  $J_k$  est  $J(\Theta_k)$ ,  $g_k$  est le gradient de  $J(\Theta_k)$ ,  $H_k$  est la matrice Hessienne de  $J(\Theta_k)$ .  $\Delta r_k^{rc}$  est le rayon de région de confiance défini. Parce que l'équation (C.3) représente un problème quadratique sous contrainte et non-convexe, l'algorithme de gradient conjugué est la méthode la plus simple et la plus efficace pour obtenir la solution. En outre, le point le plus important de la méthode de région de confiance est la détermination de la valeur satisfaisante de  $\Delta r_k^{rc}$  à chaque itération. Selon l'accord entre la fonction approximative  $Q$  et la fonction objective  $J$ , le rapport est défini par  $p_k^{rc*}$  comme suit :

$$\rho_k = \frac{J(\Theta_k) - J(\Theta_k + p_k^{rc*})}{Q(\Theta_k) - Q(\Theta_k + p_k^{rc*})} \quad (\text{C.4})$$

Le numérateur de l'équation (C.4) représente la « réduction actuelle », et le dénominateur de l'équation (C.4) est la « réduction prédite ». Il convient de souligner que la valeur de la réduction prédite est toujours non-négative. Par conséquent, lorsque  $\rho_k$  est négatif, la valeur de  $J(\Theta_k + p_k^{rc*})$  est supérieure à celle de  $J(\Theta_k)$ , cela signifie que la minimisation a échoué. En

revanche, si  $\rho_k$  est proche de 1,  $J(\Theta_{k+1})$  et  $Q(\Theta_k + p_k^{rc*})$  sont cohérents, et la région de confiance peut être élargie pour la prochaine itération. Si  $\rho_k$  est compris entre 0 et 1, le rayon de la région de confiance  $\Delta r_k^{rc}$  reste inchangé.

Avec le nombre maximal d'itérations est noté  $n^{\text{Itération}}$ , les critères d'arrêt sont définis par  $\Delta J^{\text{seuil}}$  et  $\nabla J^{\text{seuil}}$ , l'algorithme de région de confiance utilisé dans le recalage avec la solution semi-analytique est illustré ci-après :

**Entrées :**  $\Theta_0, \Delta r_0^{rc}$

**Sorties :**  $\Theta^*$

Initialisation  $k = 0$  ;

$\Theta_k = \Theta_0, J_k = J(\Theta_0), g_k = \nabla J(\Theta_0), H_k = \nabla^2 J(\Theta_0), \Delta r_k^{rc} = \Delta r_0^{rc}$ ;

**tant que**  $k < n^{\text{itération}}$  **faire**

    Obtenir  $p_k^{rc}$  par la résolution de l'équation (C.3) (Gradient Conjugé);

    Obtenir  $\rho_k$  par la résolution de l'équation (C.4);

**si**  $\rho_k < \frac{1}{4}$  **alors**

        |  $\Delta r_{k+1}^{rc} \leftarrow \frac{1}{4} \Delta r_k^{rc}$ ;

**fin**

**else**

**si**  $\rho_k > \frac{3}{4}$  **alors**

            |  $\Delta r_{k+1}^{rc} \leftarrow 2 \Delta r_k^{rc}$ ;

**fin**

**else**

            |  $\Delta r_{k+1}^{rc} \leftarrow \Delta r_k^{rc}$ ;

**end**

**end**

**si**  $\rho_k > \frac{1}{4}$  **alors**

        |  $\Theta_{k+1} \leftarrow \Theta_k + p_k^{rc}$

**fin**

**else**

        |  $\Theta_{k+1} \leftarrow \Theta_k$

**end**

**si**  $\| J_{k+1} - J_k \| < \Delta J^{\text{seuil}}$  **ou**  $\| \nabla J_{k+1} \| < \nabla J^{\text{seuil}}$  **alors**

        | Le calcul s'arrête ;

**fin**

$k \rightarrow k + 1$ ;

**fin**

**Algorithme 2 :** l'algorithme de région de confiance

**Entrées :**  $p_j^{rc}$   
**Sorties :**  $p_j^{rc*}$   
 Initialisation  $j = 0$  ;  
 $p_j^{rc} = 0$ ,  $g_j = \nabla J(\Theta_k)$ ,  $p_j = -g_j$ ,  $H = \nabla^2 J(\Theta_k)$ ;  
**début**  
   **si**  $p_j^t H p_j \leq 0$  **alors**  
     // Hessien non défini ou courbure négative  
     Obtenir  $\tau_j$  par la résolution de  $\| \Theta_k + \tau_j p_j \| = \Delta r_k^{rc}$ ;  
     // On se déplace sur la frontière du domaine  
      $p_{j+1}^{rc} \leftarrow p_j^{rc} + \tau_j p_j$  ;  
     Le calcul s'arrête;  
   **fin**  
   **si**  $\| p_j^{rc} + \alpha_j p_j \| \geq \Delta r_k^{rc}$  **alors**  
     // Frontière du domaine traversée  
     Obtenir  $\tau_j$  par la résolution de  $\| \Theta_k + \tau_j p_j \| = \Delta r_k^{rc}$ ;  
     // On se déplace sur la frontière du domaine  
      $p_{j+1}^{rc} \leftarrow p_j^{rc} + \tau_j p_j$  ;  
     Le calcul s'arrête;  
   **fin**  
    $p_{j+1}^{rc} \leftarrow p_j^{rc} + \alpha_j p_j$ ;  
    $g_{j+1} \leftarrow g_j + \alpha_j H p_j$ ;  
    $\beta_j \leftarrow \frac{g_{j+1}^t g_{j+1}}{g_j^t g_j}$ ;  
    $p_{j+1} \leftarrow -g_j + \beta_j p_j$ ;  
    $j \rightarrow j + 1$ ;  
   Tester GC;  
**fin**

**Algorithme 3 :** l'algorithme de Gradient conjugué pour résoudre l'équation (C.3) à  $k^{\text{ème}}$  itérations

## D Application des PINNs dans les problèmes directs et les problèmes inverses

### D.1 Application de la fonction de distance approximative

D'après l'étude de Sukumar et Srivastava [224], les détails de l'application de la fonction de distance approximative dans un problème 2D sont illustrés comme suit

Pour une ligne droite infinie passant par deux points  $X_1 = [x_1, y_1]$ ,  $X_2 = [x_2, y_2]$  avec une distance  $L_{distance} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ , la fonction de distance approximative  $\phi_l(X, X_1, X_2)$  au point  $X = [x, y]$  est représenté suivant :

$$\phi_l(X, X_1, X_2) = \frac{(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1)}{L_{distance}} \quad (D.1)$$

Pour un cercle de rayon  $R = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{2}$  et dont le centre est au point  $X_c = [\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}]$ , la fonction de distance approximative  $\phi_c(X, X_1, X_2)$  au point  $X = [x, y]$  peut s'exprimer :

$$\phi_c(X, X_1, X_2) = \frac{R^2 - (x - x_c)^2 - (y - y_c)^2}{2R} \quad (D.2)$$

En combinant les expression de  $\phi_l(X, X_1, X_2)$  et  $\phi_c(X, X_1, X_2)$ , la fonction de distance approximative  $\phi(X, X_1, X_2)$  sur un segment dont les extrémités sont  $X_1$  et  $X_2$  est obtenue comme suite :

$$\phi(X, X_1, X_2) = \sqrt{\phi_l^2 + \left(\frac{(\Phi - \phi_c)}{2}\right)^2} \quad \text{Avec } \Phi = \sqrt{\phi_c^2 + \phi_l^4}, \quad (D.3)$$

Dans un solide, les frontières peuvent être représentées par des segments. Étant donné que différentes frontières peuvent avoir la même condition aux limites (conditions de Dirichlet et de Neumann), pour imposer précisément ces conditions sur différents segments, les  $\phi_{i...n}$  avec le nombre des frontière  $n$  doivent être combinées de la manière suivante :

$$\phi(X) \equiv \phi(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\phi_1^2} + \frac{1}{\phi_2^2} + \dots + \frac{1}{\phi_n^2}}} \quad (D.4)$$

### D.2 Comparaison des erreurs relatives normalisées des différents données entre les PINNs et la MEF

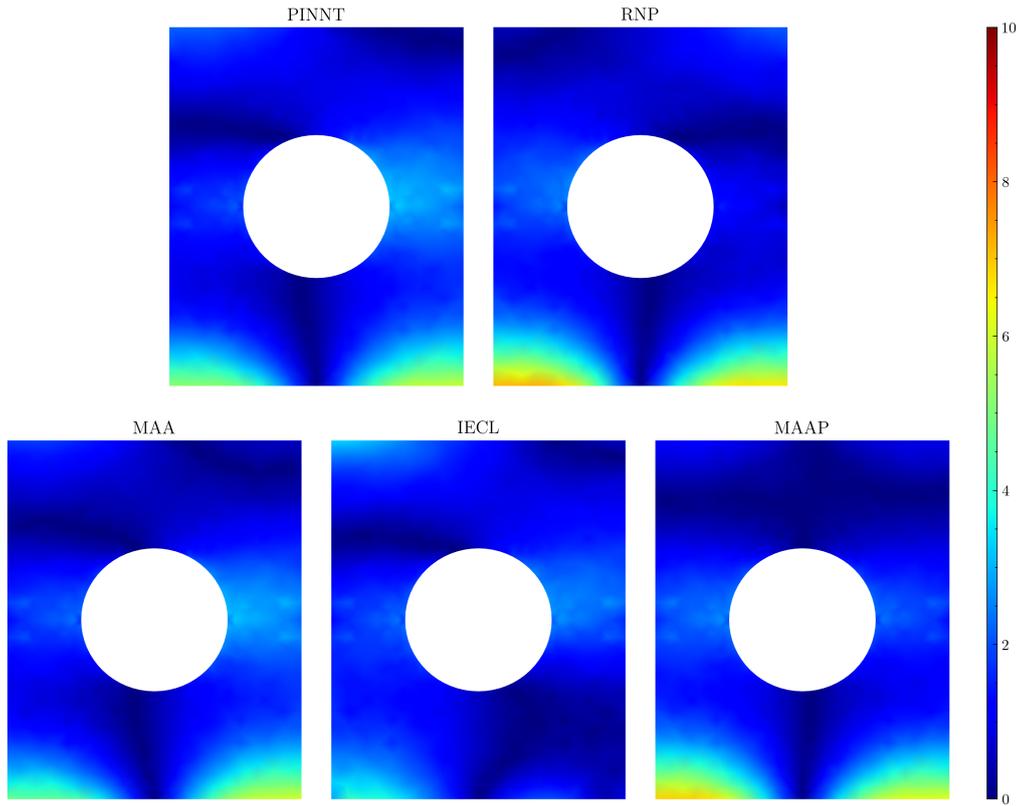


FIGURE D.1 – Comparaison des erreurs relatives normalisées de déplacement  $u$  entre la MEF et les PINNs.

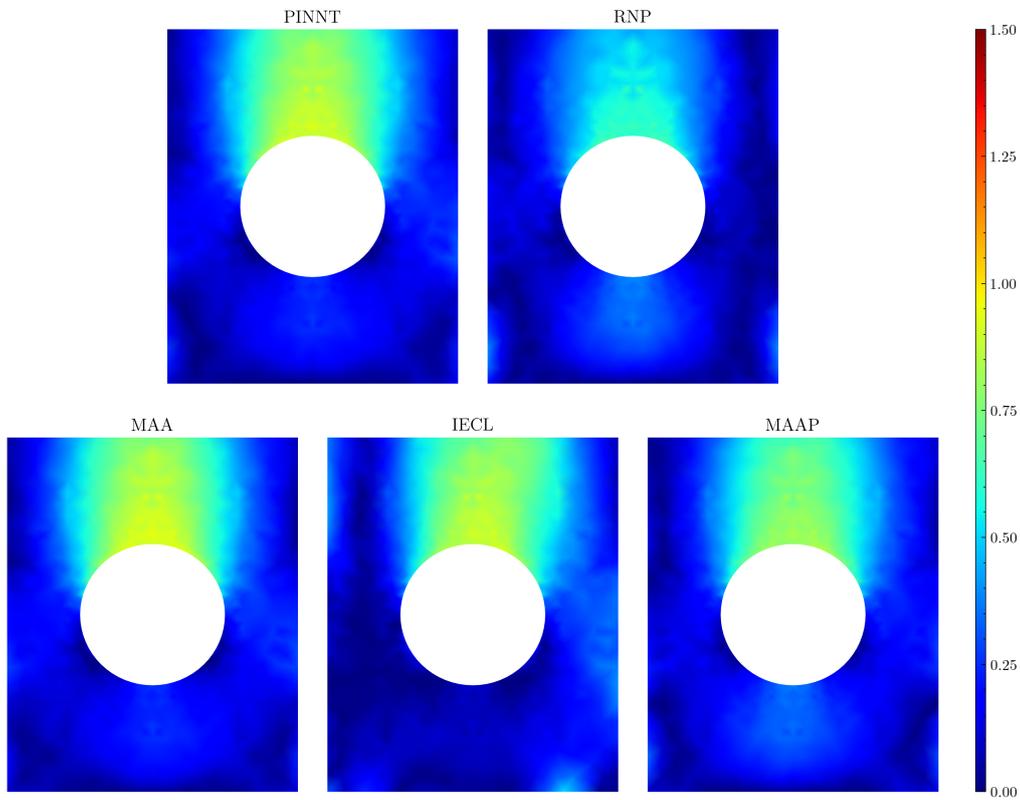


FIGURE D.2 – Comparaison des erreurs relatives normalisées de déplacement  $v$  entre la MEF et les PINNs.

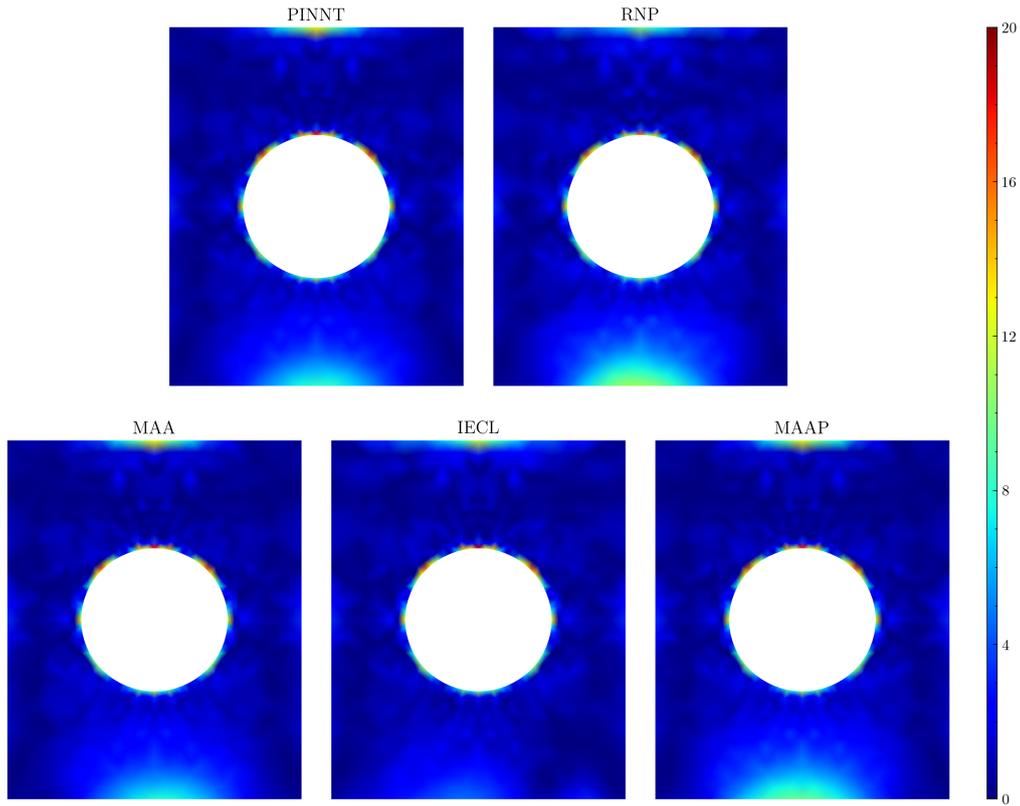


FIGURE D.3 – Comparaison des erreurs relatives normalisées de contrainte  $\sigma_{xx}$  entre la MEF et les PINNs.

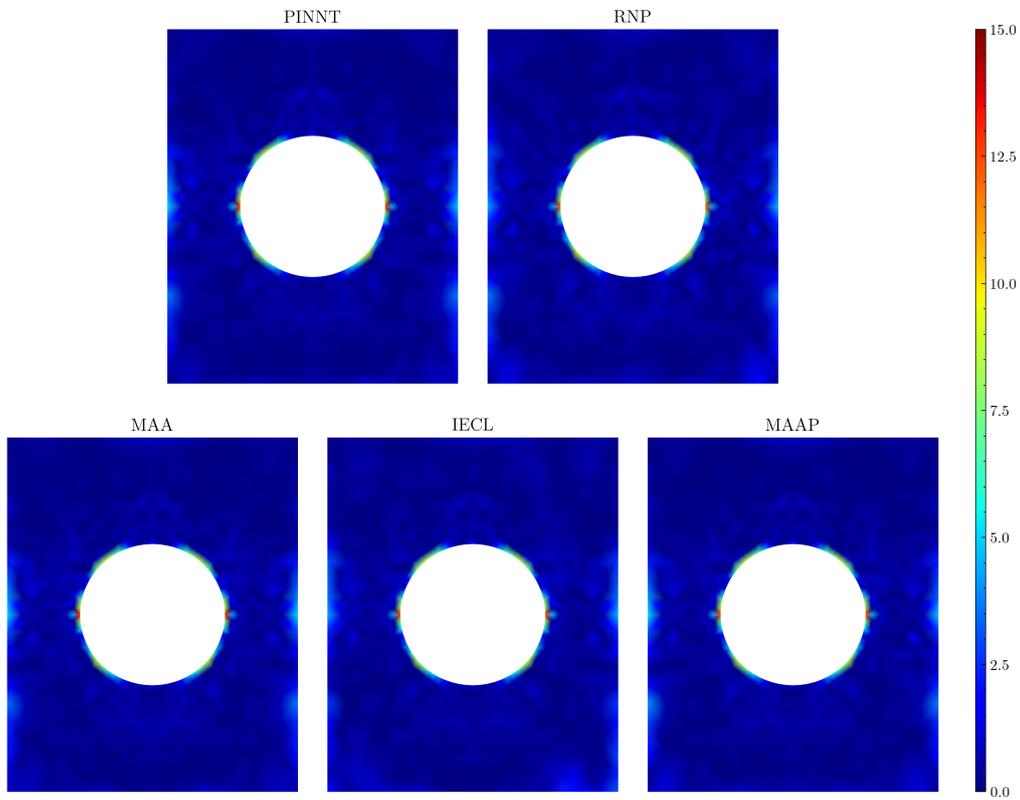


FIGURE D.4 – Comparaison des erreurs relatives normalisées de contrainte  $\sigma_{yy}$  entre la MEF et les PINNs.

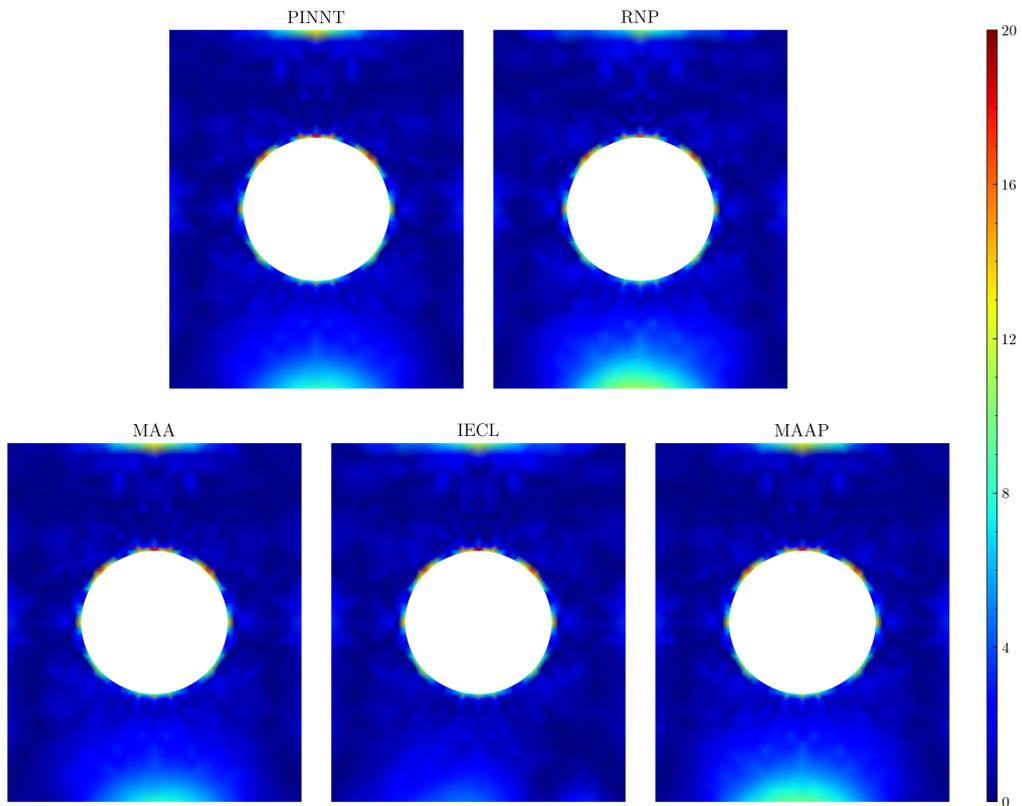


FIGURE D.5 – Comparaison des erreurs relatives normalisées de contrainte  $\sigma_{xy}$  entre la MEF et les PINNs.

### D.3 Comparaison des erreurs relatives normalisées de la condition de chargement identifiée avec les champs de déplacement surfacique

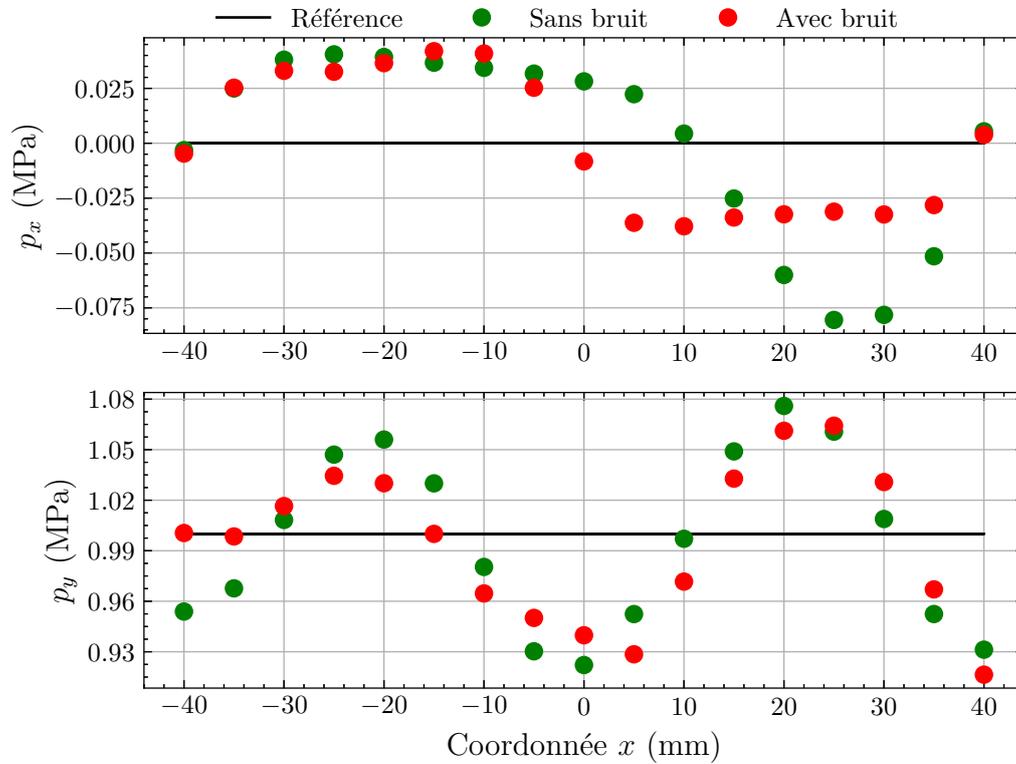


FIGURE D.6 – Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par le PINNT sur  $\Gamma_1$  avec les champ de déplacement surfacique et celle de référence lorsque  $l_p$  est minimal.

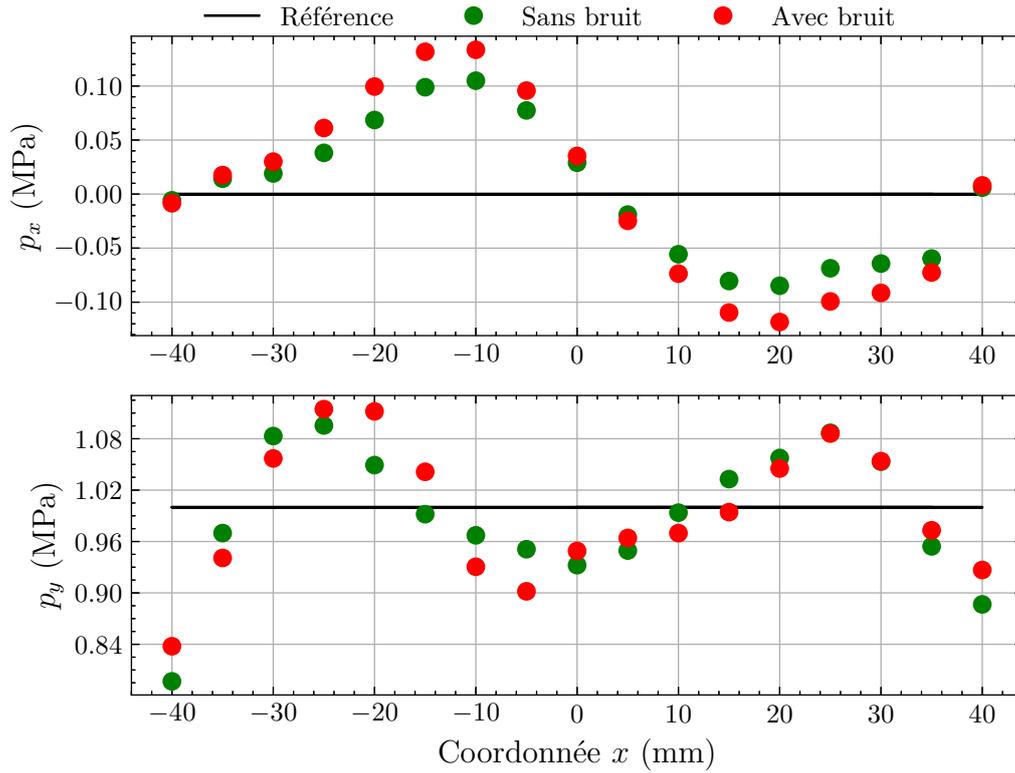


FIGURE D.7 – Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par le RNP sur  $\Gamma_1$  avec les champ de déplacement surfacique et celle de référence lorsque  $l_p$  est minimal.

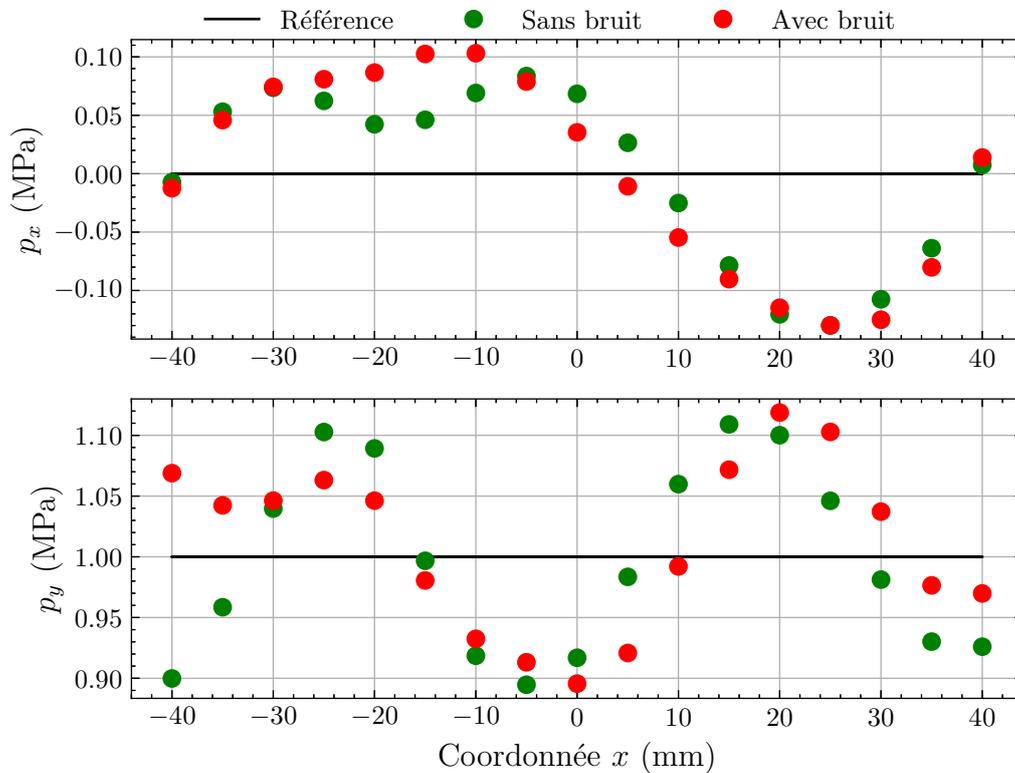


FIGURE D.8 – Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par la MAA sur  $\Gamma_1$  avec les champ de déplacement surfacique et celle de référence lorsque  $l_p$  est minimal.

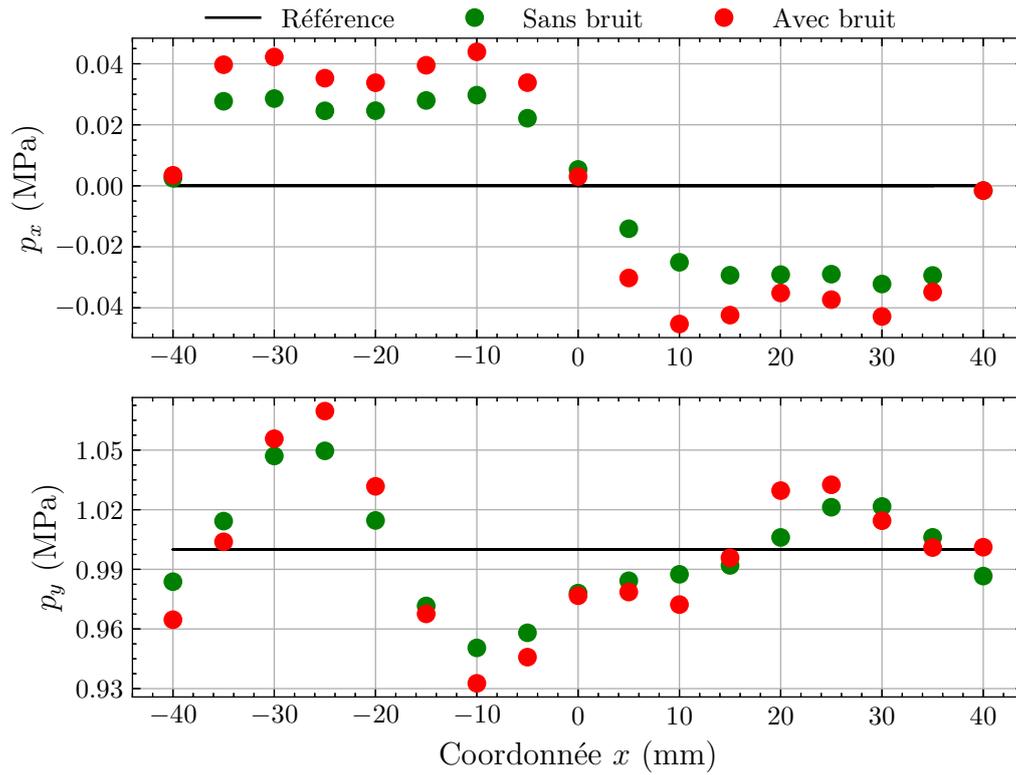


FIGURE D.9 – Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par l'IECL sur  $\Gamma_1$  avec les champ de déplacement surfacique et celle de référence lorsque  $l_p$  est minimal.

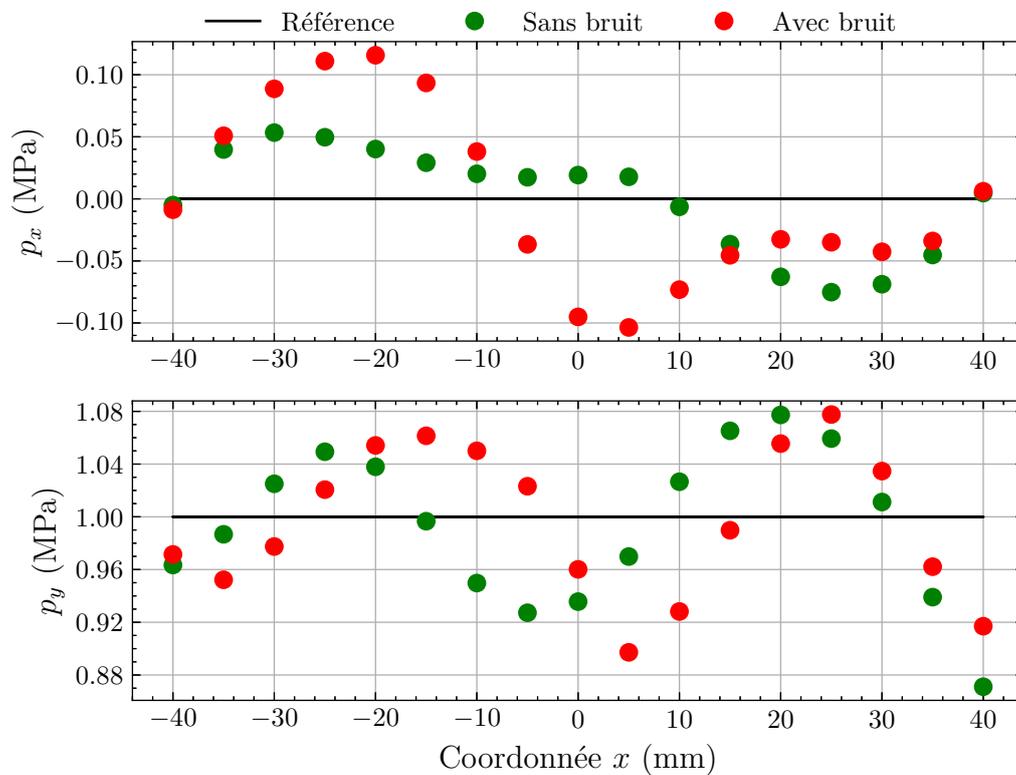


FIGURE D.10 – Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par la MAAP sur  $\Gamma_1$  avec les champ de déplacement surfacique et celle de référence lorsque  $l_p$  est minimal.

#### D.4 Comparaison des erreurs relatives normalisées de la condition de chargement identifiée avec les champs de déplacement aux frontières

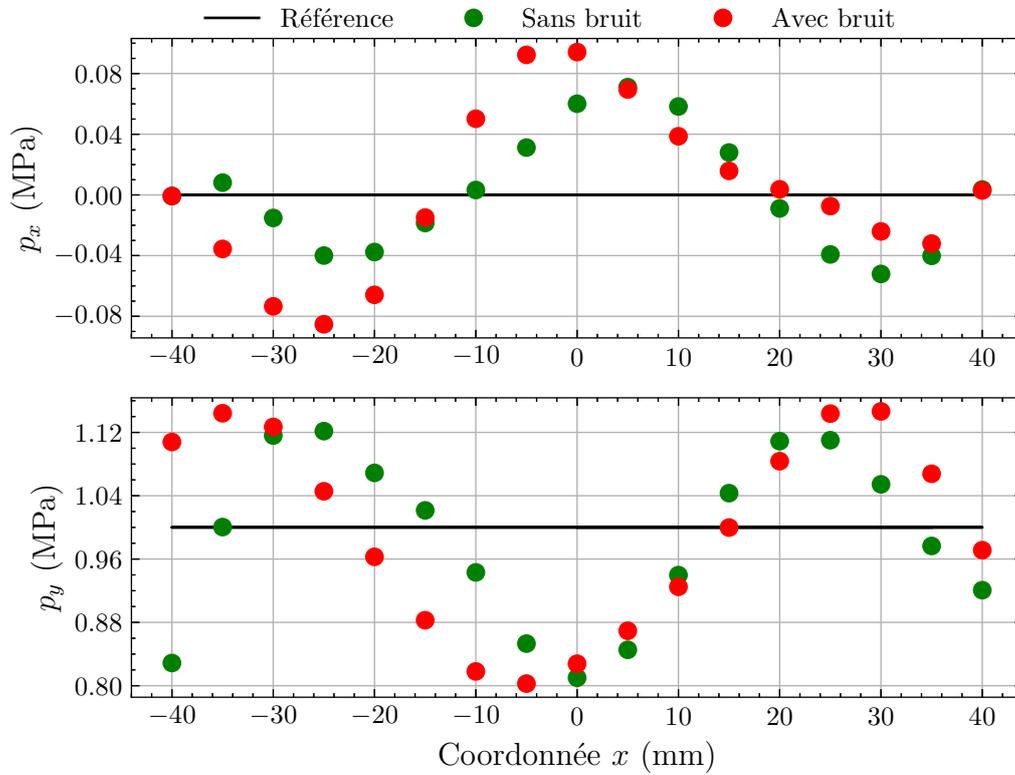


FIGURE D.11 – Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par le PINNT sur  $\Gamma_1$  avec les champ de déplacement aux frontières et celle de référence lorsque  $l_p$  est minimal.

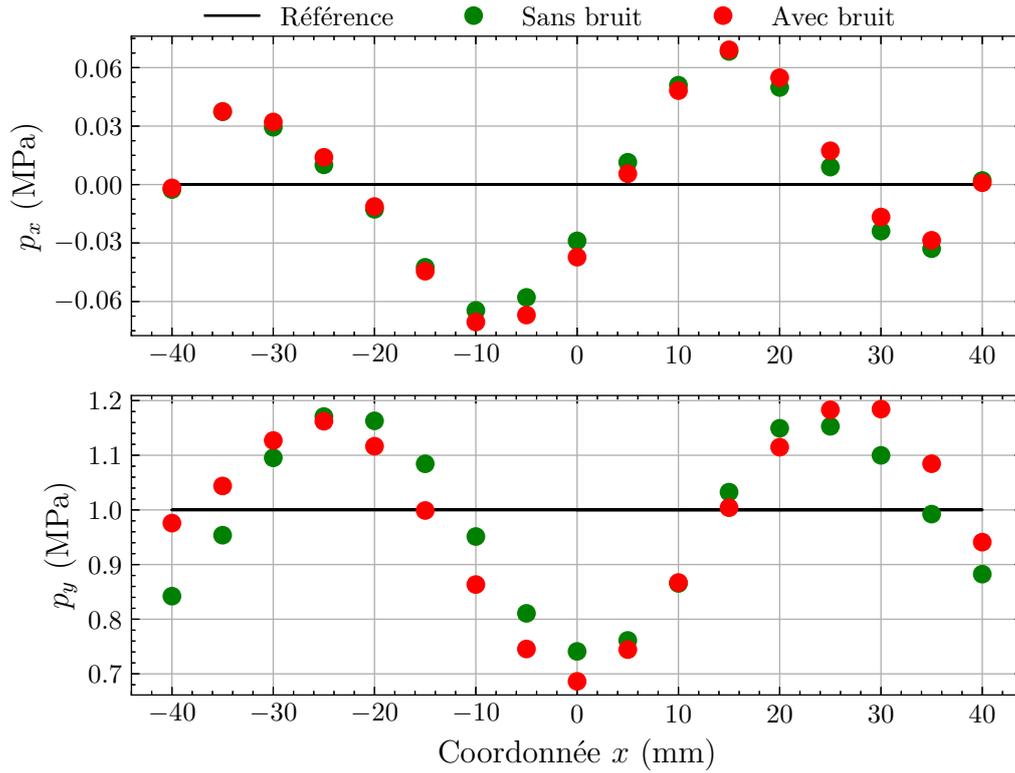


FIGURE D.12 – Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par le RNP sur  $\Gamma_1$  avec les champ de déplacement aux frontières et celle de référence lorsque  $l_p$  est minimal.

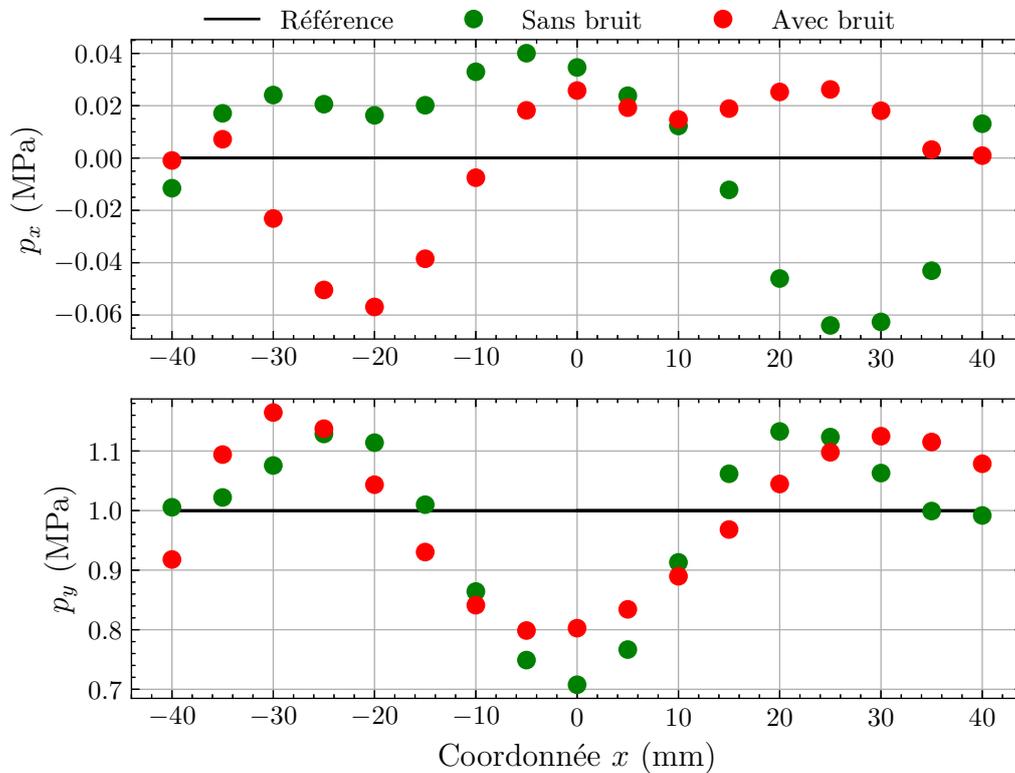


FIGURE D.13 – Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par la MAA sur  $\Gamma_1$  avec les champ de déplacement aux frontières et celle de référence lorsque  $l_p$  est minimal.

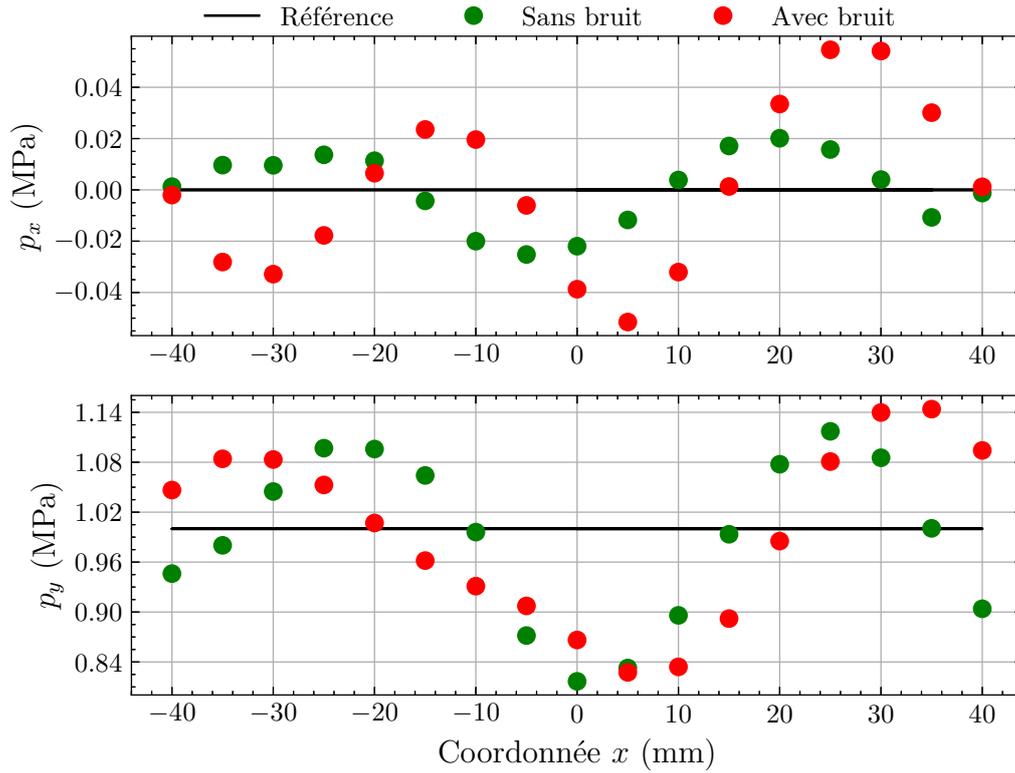


FIGURE D.14 – Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par l'IECL sur  $\Gamma_1$  avec les champ de déplacement aux frontières et celle de référence lorsque  $l_p$  est minimal.

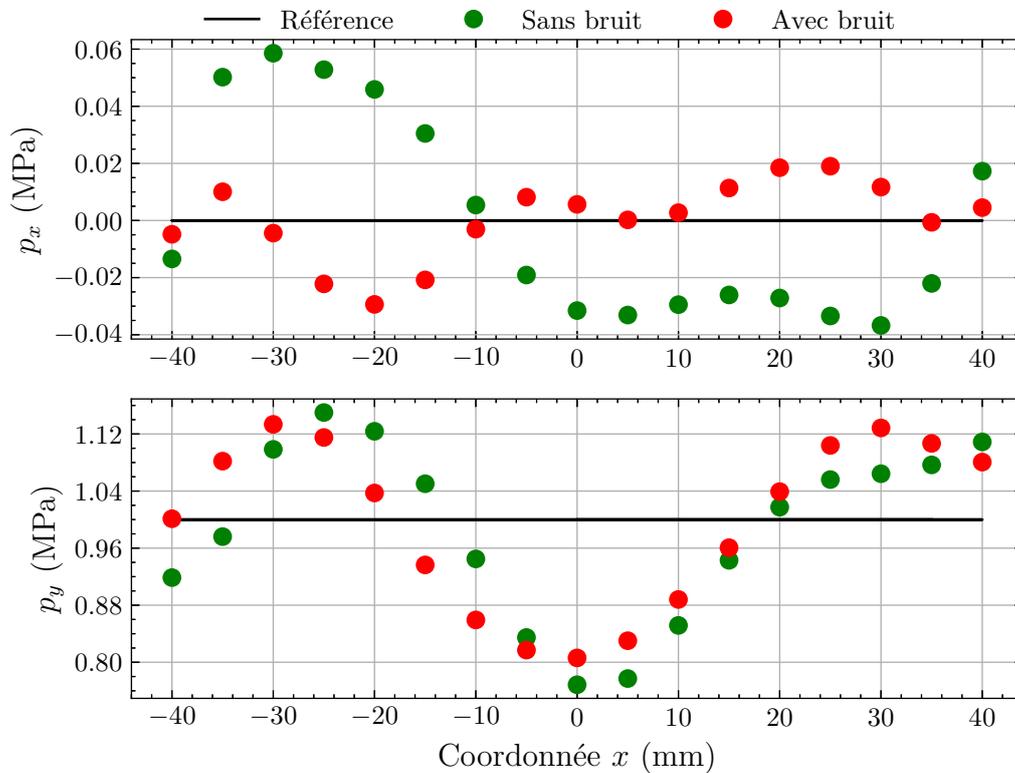


FIGURE D.15 – Comparaison entre la condition de chargement identifiée obtenue par la MAAP sur  $\Gamma_1$  avec les champ de déplacement aux frontières et celle de référence lorsque  $l_p$  est minimal.

## E Bruit gaussien

Le bruit gaussien est un type de bruit dont la densité de probabilité suit une distribution normale (distribution gaussienne). En raison des imperfections inévitables dans les instruments de mesure et les environnements expérimentaux, les données recueillies sont souvent contaminées par du bruit. Le bruit gaussien, en particulier, peut bien approximer ces erreurs ou bruits présents dans de nombreuses mesures expérimentales. Par conséquent, il est largement utilisé pour générer des données synthétiques avec du bruit blanc additif afin de simuler des conditions expérimentales réelles et de tester la robustesse des méthodologies d'identification.

Pour générer le champ de déplacement bruité  $\mathbf{u}_{\text{bruit}} = \langle u_{\text{bruit}}, v_{\text{bruit}} \rangle$  à partir du champ de déplacement synthétique connu  $\mathbf{u} = \langle u_m, v_m \rangle$ , trois paramètres doivent être définis : la valeur moyenne du bruit  $\mu_{\text{bruit}}$ , qui est toujours considérée comme étant 0, l'écart type du champ de déplacement synthétique connu  $\sigma_{\text{bruit}}$  et le taux de bruit  $\alpha_{\text{bruit}}$ . Ces paramètres permettent de contrôler l'intensité et la distribution du bruit ajouté au champ de déplacement synthétique. L'expression de  $\mathbf{u}_{\text{bruit}}$  est décrite comme suit :

$$\mathbf{u}_{\text{bruit}} \begin{cases} u_{\text{bruit}} = u_m + \alpha_{\text{bruit}} \mathcal{N}(0, \sigma_{\text{bruit}}) \\ v_{\text{bruit}} = v_m + \alpha_{\text{bruit}} \mathcal{N}(0, \sigma_{\text{bruit}}) \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

Où  $\mathcal{N}(0, \sigma_{\text{bruit}})$  est une distribution normale de moyenne nulle et d'écart type  $\sigma_{\text{bruit}}$ , qui peut être générée avec la fonction *random.normal* du package *numpy* en Python.

Annexes.texAnnexes.tex